

A lei zero da termodinâmica

Thiago Rafael Becker

Dezembro de 2011

Resumo

Este artigo define o conceito de um sistema em equilíbrio térmico, antes definido textualmente, ou na melhor das hipóteses, em forma de equações diferenciais, com o uso de duas categorias e um equalizador de grafos completos. Também dá um sentido algébrico ao conceito de temperatura.

Introdução

Definição 0.1 (Lei zero da termodinâmica). *Se dois corpos A e C estão em equilíbrio térmico com um terceiro corpo B , eles também estão em equilíbrio térmico entre si.*

Uma consequência importante desta lei é o surgimento do conceito de temperatura: todos os objetos em equilíbrio térmico podem ser agrupados e marcados com um número que indica a temperatura deste conjunto. Este artigo estuda esta lei de acordo com a teoria de categorias.

Definição 0.2 (Sistema). *Um sistema é composto um ou mais corpos.*

Neste artigo, *sistema* e *corpo* são usados alternadamente, e as definições neste artigo aplicam-se indistintamente, exceto quando explicitamente declarado.

A relação τ_0

Pela descrição da lei zero da termodinâmica é possível perceber que existe uma relação euclideana entre os corpos em equilíbrio térmico. A relação τ_0 é definida para indicar a relação entre dois corpos em equilíbrio térmico.

Definição 0.3 (Relação euclideana). *Uma relação τ_0 em um conjunto X é euclideana se satisfaz a seguinte condição:*

$$\forall a, b, c \in X (a\tau_0 b \wedge c\tau_0 b \Rightarrow a\tau_0 c) \quad (1)$$

Este sistema permanece em equilíbrio térmico enquanto permanecer em isolamento adiabático: nenhuma fonte de energia externa é capaz de trocar energia com o sistema. Ou seja, o conceito de equilíbrio térmico vem da incapacidade de dois sistemas de trocar energia entre si. Um corpo de natureza física está em equilíbrio térmico consigo mesmo *sempre* (pois não troca energia consigo mesmo), assim estabelecendo que τ_0 é também uma relação reflexiva. Uma relação euclideana e reflexiva é igualmente simétrica e transitiva, e de tal forma τ_0 é uma relação de equivalência (reflexiva, simétrica e transitiva).

Simetria de τ_0 . Se dois corpos a, b estão em equilíbrio térmico $a\tau_0 b$, a é incapaz de trocar (ceder ou receber) energia com b . Assim, b também é incapaz de trocar (receber ou ceder) energia com a . \square

Transitividade de τ_0 . Dados a, b e c corpos, se $a\tau_0 b \wedge b\tau_0 c \Rightarrow a\tau_0 c$, pois (por simetria) $b\tau_0 c \Rightarrow c\tau_0 b$, e pela propriedade euclideana, $a\tau_0 b \wedge c\tau_0 b \Rightarrow a\tau_0 c$. \square

A categoria **Thermo** formada por esta relação é

$$\mathbf{Thermo} = \langle \mathbf{Ob}_{\mathbf{Thermo}}, \mathbf{Mor}_{\mathbf{Thermo}}, \delta_0, \delta_1, id, \circ \rangle \quad (2)$$

em que $\mathbf{Ob}_{\mathbf{Thermo}}$ é uma coleção de sistemas, $\mathbf{Mor}_{\mathbf{Thermo}}$ é um conjunto de relações $a\tau_0b$ de $a, b \in \mathbf{Ob}_{\mathbf{Thermo}}$, $\delta_0 : \mathbf{Mor}_{\mathbf{Thermo}} \rightarrow \mathbf{Ob}_{\mathbf{Thermo}}$ para a relação $a\tau_0b$ resulta em a , $\delta_1 : \mathbf{Mor}_{\mathbf{Thermo}} \rightarrow \mathbf{Ob}_{\mathbf{Thermo}}$ para a relação $a\tau_0b$ resulta em b , $id : \mathbf{Ob}_{\mathbf{Thermo}} \rightarrow \mathbf{Mor}_{\mathbf{Thermo}}$ é a propriedade reflexiva de τ_0 , e $\circ : (\mathbf{Mor}_{\mathbf{Thermo}})^2 \rightarrow \mathbf{Mor}_{\mathbf{Thermo}}$ é a propriedade transitiva de τ_0 .

Intuitivamente, os morfismos desta categoria formam um multigrafo cujos subgrafos são completamente conexos, e todo morfismo é inverso de si mesmo (pela propriedade de simetria). Estes subgrafos são subcategorias de \mathbf{Thermo} , e cada uma destas categorias é uma *classe de equivalência*. A cada uma destas subcategorias daremos o nome de \mathbf{Temp}_n , cujo *shape* é o de um grafo totalmente conexo.

Temperaturas

A categoria

$$\mathbf{Temp}_n = \langle \mathbf{Ob}_{\mathbf{Temp}_n}, \mathbf{Mor}_{\mathbf{Temp}_n}, \delta_0, \delta_1, id, \circ \rangle \quad (3)$$

é uma subcategoria de \mathbf{Thermo} , tal que $\mathbf{Ob}_{\mathbf{Temp}_n} \subset \mathbf{Ob}_{\mathbf{Thermo}}$ e $\mathbf{Mor}_{\mathbf{Temp}_n} \subset \mathbf{Mor}_{\mathbf{Thermo}}$, e todas as demais operações são iguais a \mathbf{Thermo} .

O conceito de temperatura é dado pela relação de ordem parcial entre $\mathbf{Ob}_{\mathbf{Temp}_a}$ e $\mathbf{Ob}_{\mathbf{Temp}_b}$.

Definição 0.4 (Ordenamento parcial da temperatura). *Dados dois objetos $a \in \mathbf{Ob}_{\mathbf{Temp}_a}$ e $b \in \mathbf{Ob}_{\mathbf{Temp}_b}$ e a operação binária diferença de energia \ominus*

- $a \ominus b > 0 \Rightarrow \mathbf{Temp}_a > \mathbf{Temp}_b$,
- $a \ominus b = 0 \Rightarrow \mathbf{Temp}_a = \mathbf{Temp}_b$,
- $a \ominus b < 0 \Rightarrow \mathbf{Temp}_a < \mathbf{Temp}_b$.

A operação de diferença de energia diz quais objetos recebem e quais cedem energia a fim de estabelecer equilíbrio térmico: para $a \ominus b > 0$, a deve ceder energia a b (e b receber energia de a) até que a relação $a\tau_0b$ seja satisfeita.

A temperatura numérica usada em termômetros é conseguida aplicando-se um valor em \mathbb{R} à cada uma das classes de equivalência criadas por τ_0 , tal que a relação de ordem da temperatura é preservada.

Definição 0.5 (Functor temperatura de \mathbf{Thermo} para \mathbb{R}). *O functor temperatura T é tal que para dois objetos $a, b \in \mathbf{Ob}_{\mathbf{Thermo}}$, se $a\tau_0b$, então os morfismos $a\mathbf{Thermo} \rightarrow t_T$ e $b\mathbf{Thermo} \rightarrow t_T$ são estabelecidos e $\mathbf{Mor}_{\mathbf{Thermo}}$ são esquecidos, sendo t_T um valor em \mathbb{R} , e o mapeamento respeita a ordem definida anteriormente (definição 0.4).*

A definição 0.5 pode ser obtida usando com um functor que mapeia $a \rightarrow \langle a, t_T \rangle$ composto com o functor esquecimento, composto com um functor que mapeia $\langle a, b \rangle$ para dois conjunto tal que $b \in T \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbf{Ob}_{\mathbf{Thermo}}$, e cria os morfismos $a \rightarrow b$.

Corpos e sistemas

Nesta seção, corpos e sistemas são tratados de forma distinta (a definição 0.2 ainda se aplica.)

Agora vamos definir um sistema em isolamento adiabático. Um dos problemas da definição de \mathbf{Thermo} é que dois corpos podem estar em equilíbrio térmico (com a *possibilidade* de estar em equilíbrio) porém sem um meio possível de transferir o calor entre eles (sem a *capacidade* de trocar calor).

Para definir um sistema com a possibilidade de trocar calor, devemos estabelecer entre eles uma conexão através de um meio capaz de transferir calor. Como calor é energia cinética, e energia cinética se propaga através da matéria, podemos definir que todos os corpos em contato com um fluido ou sólido são capazes de trocar calor. Algebricamente, estes objetos possuem uma relação de conexão.

Definição 0.6 (Relação de conectividade de corpos capazes de troca de calor, ω). *Se um corpo A é capaz de trocar calor com os corpos B e C , B e C são capazes de trocar calor entre si (pelo meio A).*

A possui as mesmas características de τ_0 , e desta forma forma, pode ser visto como uma categoria **Conect**.

$$\mathbf{Conect} = \langle \mathbf{Ob}_{\mathbf{Conect}}, \mathbf{Mor}_{\mathbf{Conect}}, \delta_0, z\delta_1, id, \circ \rangle \quad (4)$$

O shape desta categoria é um multigrafo cujos subgrafos são completamente conexos.

Se definirmos que $\mathbf{Ob}_{\mathbf{Thermo}} = \mathbf{Ob}_{\mathbf{Conect}}$, podemos estabelecer um equalizador entre τ_0 e ω . Este equalizador mapeia todos os corpos em equilíbrio térmico e que também são conexos por ω , e podemos denominar os elementos de cada equalizador de um *sistema em equilíbrio térmico*. Quando o equalizador é exatamente igual ao subgrafo em $\mathbf{Ob}_{\mathbf{Conect}}$, este equilíbrio é denominado *abiabático* devido a impossibilidade de trocar calor com qualquer outro meio.

Conclusão

As categorias e métodos aqui usados servem para definir algebricamente algo que antes era definido apenas textualmente em livros de física. Através da definição categorias de relações entre corpos, e posteriormente um equalizador entre estas duas relações, conseguimos definir o que é um sistema em equilíbrio térmico e em equilíbrio adiabático. O uso de técnicas semelhantes pode ser útil para definir outros construtos puramente textuais.