[Note2] 拟阵常见公理体系等价性证明

TR_CHEN

2025 年 5 月 31 日

所谓拟阵的公理体系，粗略地说是指对于一个有限集 E，在其上作一个限制 $\mathcal{R}$ 而定义出一个结构 $(E, \mathcal{R})$，这个限制既可以是满足某种性质的一类子集族也可以是满足某种性质的映射。而所谓的公理体系等价性的等价性证明则是说我们声明两种限制之间不仅存在互逆的关系且由其分别定义出的结构是完全一致的。

1 常见公理体系

限制是关于用一组性质定义出的子集族的公理体系有:

C.极小圈公理	**(C1)** $\varnothing \notin \mathcal{C}$; **(C2)** $(C_1, C_2 \in \mathcal{C}) \wedge (C_1 \subseteq C_2) \implies C_1 = C_2$; **(C3)** $(C_1, C_2 \in \mathcal{C}) \wedge (C_1 \neq C_2) \wedge (e \in C_1 \cap C_2) \implies (\exists C_3 \in \mathcal{C} : C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 - e)$.
D.相关集公理	**(D1)** $\varnothing \notin \mathcal{D}$; **(D2)** $(D_1 \in \mathcal{D}) \wedge (D_1 \subseteq D_2) \implies (D_2 \in \mathcal{D})$; **(D3)** $(D_1, D_2 \in \mathcal{D}) \wedge (D_1 \cap D_2 \notin \mathcal{D}) \implies (\forall e \in E : (D_1 \cup D_2) - e \in \mathcal{D})$.
I.独立集公理	**(I1)** $\varnothing \in \mathcal{I}$; **(I2)** $(I_1 \in \mathcal{I}) \wedge (I_2 \subseteq I_1) \implies I_2 \in \mathcal{I}$; **(I3)** $(I_1, I_2 \in \mathcal{I}) \wedge (\lvert I_1 \rvert < \lvert I_2 \rvert) \implies (\exists e \in I_2 - I_1 : I_1 \cup e \in \mathcal{I})$.
B.基公理	**(B1)** $\mathcal{B} \neq \varnothing$; **(B2)** $(B_1, B_2 \in \mathcal{B}) \wedge (x \in B_1 - B_2) \implies (\exists y \in B_2 - B_1 : (B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B})$.
S.支撑集公理	**(S1)** $\mathcal{S} \neq \varnothing$; **(S2)** $(S_1 \in \mathcal{S}) \wedge (S_1 \subseteq S_2) \implies (S_2 \in \mathcal{S})$; **(S3)** $(S_1, S_2 \in \mathcal{S}) \wedge (\lvert S_1 \rvert < \lvert S_2 \rvert) \implies (\exists e \in S_2 - S_1 : S_2 - e \in \mathcal{S})$.
N.非支撑集公理	**(N1)** $E \notin \mathcal{N}$; **(N2)** $(N_1 \in \mathcal{N}) \wedge (N_2 \subseteq N_1) \implies (N_2 \in \mathcal{N})$; **(N3)** $(N_1, N_2 \in \mathcal{N}) \wedge (N_1 \cup N_2 \notin \mathcal{N}) \implies (\forall e \in E : (N_1 \cap N_2) \cup e \in \mathcal{N})$.
H.超平面公理	**(H1)** $E \notin \mathcal{H}$; **(H2)** $(H_1, H_2 \in \mathcal{H}) \wedge (H_1 \subseteq H_2) \implies H_1 = H_2$; **(H3)** $(H_1, H_2 \in \mathcal{H}) \wedge (H_1 \neq H_2) \wedge (e \in E - H_1 \cup H_2) \implies (\exists H_3 \in \mathcal{H} : (H_1 \cap H_2) \cup e \subseteq H_3)$.

F.闭集公理	**(F1)** $E \in \mathcal{F}$; **(F2)** $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \implies F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$; **(F3)** $(F \in \mathcal{F}) \wedge (\{F_i\}_1^k \subseteq \mathcal{F}$穷尽包含 F 为真子集的所有极小成员) $\implies E - F = \sqcup_i (F_i - F)$.
O.开集公理	**(O1)** $\varnothing \in \mathcal{O}$; **(O2)** $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \implies O_1 \cup O_2 \in \mathcal{O}$; **(O3)** $(O \in \mathcal{O}) \wedge (\{O_i\}_1^k \subseteq \mathcal{O}$穷尽包含在 O 中的真子集的所有极大成员) $\implies \cap_i O_i = \varnothing$.

限制是关于限定了性质的映射的公理体系有:

$\mathfrak{R}$.秩函数公理 $r : 2^E \to \mathbb{N}$	**(R1)** $X \subseteq E \implies 0 \leq r(X) \leq \|X\|$; **(R2)** $X \subseteq Y \subseteq E \implies r(X) \leq r(Y)$; **(R3)** $X, Y \subseteq E \implies r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$.
$\mathfrak{Cl}$.闭包公理 $cl : 2^E \to 2^E$	**(CL1)** $X \subseteq E \implies X \subseteq cl(X)$; **(CL2)** $X \subseteq Y \subseteq E \implies cl(X) \subseteq cl(Y)$; **(CL3)** $X \subseteq E \implies cl(cl(X)) = cl(X)$; **(CL4)** $(X \subseteq E) \wedge (x \in E) \wedge (y \in cl(X \cup x) - cl(X)) \implies x \in cl(X \cup y)$.
$\mathfrak{V}$.零化度公理 $v : 2^E \to \mathbb{N}$	**(V1)** $X \subseteq E \implies 0 \leq v(X) \leq \|X\|$; **(V2)** $X \subseteq Y \subseteq E \implies \|Y\| - \|X\| \geq v(Y) - v(X)$; **(V3)** $X, Y \in E \implies v(X \cup Y) + v(X \cap Y) \geq v(X) + v(Y)$.
$\mathfrak{G}$.围长公理 $g : 2^E \to \mathbb{N}^+ \cup \infty$	**(G1)** $(X \subseteq E) \wedge (g(X) < \infty) \implies (\exists Y \subseteq X : g(X) = g(Y) = \|Y\|)$; **(G2)** $X \subseteq Y \subseteq E \implies g(X) \geq g(Y)$; **(G3)** $(X, Y \subseteq E) \wedge (X \neq Y) \wedge (g(X) = \|X\|) \wedge (g(Y) = \|Y\|)$ $\implies (\forall e \in X \cap Y : g(X \cup Y - e) < \infty)$.

2 集族的操作

有了这些公理体系，我们来明确所谓拟阵的公理体系等价，先从第一个表中的这类入手：首先对于这类公理体系**A.**，只要一个子集族 $\mathcal{A}$ 满足这个公理，$(E, \mathcal{A})$ 便会构成一个结构，我们暂且记之为 $M_{\mathbf{A}}$，而这个满足公理的子集族简记为结构 $M_{\mathbf{A}}$ 的 A-族。再取两种不同的公理体系**A$_1$.**和**A$_2$.**，要说明二者等价自然地就是说其对应的结构 $M_{\mathbf{A}_1}$ 和 $M_{\mathbf{A}_2}$ 完全相同，而因其分别是由其族结合公理完全决定的，就是说我们只要说明两个结构各自的 A_1-族和 A_2-族分别吻合，不过这一切的大前提还是如何在不同公理的不同族之间搭建一个恰好的能一对一的关系，如若不然将会有一种结构可能对应不止一种 A_i-族。所以我们要做的便是在不同的公理体系**A$_i$.**的每个 A_i-族上构造一个集族的操作 O_i 使得，当我们有 A_1-族为 $\mathcal{A}_1$ 的结构 $M_{\mathbf{A}_1}$ 时，集族 $O_1(\mathcal{A}_1)$ 满足公理**A$_2$.**，然后再应用公理**A$_2$.**得到有 A_2-族为 $O_1(\mathcal{A}_1)$ 的结构 $M_{\mathbf{A}_2}$，最后我们不仅希望 $O_2(O_1(\mathcal{A}_1))$ 满足公理**A$_1$.**，还希望其恰好就是 $\mathcal{A}_1$，反方向也是一样，这样我们便说

明了所谓等价。我们将这种等价称为公理**A**$_1$.和**A**$_2$.在集族操作 O_1 和 O_2 下等价，记为 **A**$_1$. $\underset{O_2}{\overset{O_1}{\rightleftarrows}}$ **A**$_2$. ，不引混淆时可直接记为 $\mathcal{A}_1 \underset{O_2}{\overset{O_1}{\rightleftarrows}} \mathcal{A}_2$ 。再进一步总结证明两个公理等价只需：

找到一组集族上的操作 O_1 和 O_2 使得若 $\mathcal{A}_i$ 满足公理**A**$_i$.$(i=1,2)$ 时必有：

Step1 $O_i(\mathcal{A}_i)$ 满足另一个公理；

Step2 $O_2(O_1(\mathcal{A}_1)) = \mathcal{A}_1, O_1(O_2(\mathcal{A}_2)) = \mathcal{A}_2$

同时存在；而对于第二个表中关于 2^E 上的映射的公理体系，我们只需稍作转化，我们只去证明一个集族类公理和一个函数类公理间的等价，这是因为对于两个不同的函数之间，感觉上很难做到，而从集族和函数之间就很容易有思路，首先对于一个带有函数的结构，我们可以通过函数来限定一个集族来让集族去满足另一个公理，对于一个带有集族的结构，则是希望围绕这个集族来定义出一个函数，其恰好就是另一个公理体系中的函数，所以其证明步骤大致是上面类似的。

接下来我们集中研究一下集族上的操作有什么性质，先介绍一些 E 的一般集族 $\mathcal{A}$ 上的操作:

- $Max(\mathcal{A}) = \{X \in \mathcal{A} | \forall Y \in \mathcal{A}, X \subseteq Y \implies Y = X\}$
- $Min(\mathcal{A}) = \{X \in \mathcal{A} | \forall Y \in \mathcal{A}, Y \subseteq X \implies Y = X\}$
- $Upp(\mathcal{A}) = \{X \subseteq E | \exists Y \in \mathcal{A} : Y \subseteq X\}$
- $Low(\mathcal{A}) = \{X \subseteq E | \exists Y \in \mathcal{A} : X \subseteq Y\}$
- $Com(\mathcal{A}) = \{X \subseteq E | E - X \in \mathcal{A}\}$
- $Opp(\mathcal{A}) = 2^E - \mathcal{A}$

首先可以注意到一些直接的结果：

性质 1. $Com(Com(\mathcal{A})) = \mathcal{A}, Opp(Opp(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$

而对于前四个操作，我们需要对集族加以限制才能得到一些复合关系：

定义 1. 当一个集族中任意一个集合都不是其余集合的真子集，我们称之为松散的。

性质 2. 当集族 $\mathcal{A}$ 松散时，$Min(Upp(\mathcal{A})) = \mathcal{A}, Max(Low(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$。

证明. 取 $X \in \mathcal{A}$，则 $X \in Upp(\mathcal{A})$，若 $X \notin Min(Upp(\mathcal{A}))$，则存在 $Y \in Upp(\mathcal{A})$ 使得 $Y \subsetneq X$，而由 $Y \in Upp(\mathcal{A})$ 知存在 $\mathcal{A}$ 中一元素可作为其子集，进而成为 X 的子集，与 $\mathcal{A}$ 的松散性矛盾，故 $\mathcal{A} \subseteq Min(Upp(\mathcal{A}))$；取 $X \in Min(Upp(\mathcal{A}))$，则 $X \in Upp(\mathcal{A})$，于是若 $X \notin \mathcal{A}$ 则必存在 $Y \in \mathcal{A}$ 使得 $Y \subseteq X$，然而由 Min 定义便知 $Y = X$，矛盾，故 $Min(Upp(\mathcal{A})) \subseteq \mathcal{A}$。所以二者相等，另式亦同。 □

定义 2. 若 E 上的集族 $\mathcal{A}$ 满足当 $A, B \in \mathcal{A}$ 且 $A \subseteq B$ 时,B 的所有包含 A 的子集也都属于 $\mathcal{A}$，则称集族是紧致的。当 $\varnothing \in \mathcal{A}$ 时，则称之为下紧致；当 $E \in \mathcal{A}$ 时，则称之为上紧致。

性质 3. 当 E 上集族 $\mathcal{A}$ 上紧致时, $Upp(Min(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$；当 E 上集族 $\mathcal{A}$ 下紧致时, $Low(Max(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$。

证明. 取 $X\in\mathcal{A}$，若 $X\notin Upp(Min(\mathcal{A}))$，即对任意 $Y\in Min(\mathcal{A})$ 都有 $Y\nsubseteq X$，那么 X 一定不能在 $Min(\mathcal{A})$ 内，则必有 $Z\in Min(\mathcal{A})$ 作为 X 的真子集，这与 Y 任意性矛盾，故 $\mathcal{A}\subseteq Upp(Min(\mathcal{A}))$；取 $X\in Upp(Min(\mathcal{A}))$，则存在 $Y\in Min(\mathcal{A})$ 使得 $Y\subseteq X$，由 $\mathcal{A}$ 上紧致可知 $X\in\mathcal{A}$，故 $Upp(Min(\mathcal{A}))\subseteq\mathcal{A}$。所以二者相等，另式亦同。 □

性质 4. 若集族 $\mathcal{A}$ 下紧致，则 $Upp(Com(Max(\mathcal{A})))=Com(\mathcal{A})$ 且上紧致；若集族 $\mathcal{A}$ 上紧致，则 $Low(Com(Min(\mathcal{A})))=Com(\mathcal{A})$ 且下紧致。

证明. 当集族 $\mathcal{A}$ 下紧致时，$X\in Upp(Com(Max(\mathcal{A})))\iff\exists Y\in Com(Max(\mathcal{A})):Y\subseteq X\iff\exists E-Y\in Max(\mathcal{A}):E-X\subseteq E-Y\iff E-X\in\mathcal{A}\iff X\in Com(\mathcal{A})$，所以 $Upp(Com(Max(\mathcal{A})))\subseteq Com(\mathcal{A})$，另式类似。 □

这样讨论便很容易得到：

性质 5. 对于集族 $\mathcal{A}$ 都有 $Opp(Com(Opp(\mathcal{A})))=Com(\mathcal{A})$。

性质 6. 若集族 $\mathcal{A}$ 松散，则 $Max(Com(Upp(\mathcal{A})))=Com(\mathcal{A}),Min(Com(Low(\mathcal{A})))=Com(\mathcal{A})$ 且二者皆松散。

3 公理体系等价证明

3.1 C.D.I.B.S.N.H.

定理 1. $\mathcal{C}\underset{Min}{\overset{Upp}{\rightleftarrows}}\mathcal{D}$

证明. 逐步验证即可：

Step1 两个方向皆显然成立；

Step2 **(D2)** 保证了 $\mathcal{D}$ 上紧致，**(C2)** 保证了 $\mathcal{C}$ 松散，由性质 3即得。

□

定理 2. $\mathcal{D}\xleftrightarrow{Opp}\mathcal{I}$

证明. 逐步验证即可：

Step1 $Opp(\mathcal{D})$ 满足 **(I1)** 和 **(I2)** 显然，至于 **(I3)**，我们先假设其不满足，也就是存在 $I_1,I_2\in Opp(\mathcal{D})(|I_1|<|I_2|)$ 使得对于任意 $e\in I_2-I_1$ 都有 $I_1\cup e\notin Opp(\mathcal{D})$，此时显然 $|I_2-I_1|\geq 2$ 且 I_1-I_2 非空，我们取 $e,f\in I_2-I_1$ 应用之便得 $I_1\cup e,I_1\cup f\in\mathcal{D}$，任取 $g\in I_1$ 利用 **(D3)** 可知 $(I_1-g)\cup\{e,f\}\in\mathcal{D}$，此时还未现矛盾，我们加强一下假设：取满足之前假设的 (I_1,I_2) 子集对中 $|I_1-I_2|$ 最小的一对，于是 $(I_1-g)\cup e\in Opp(\mathcal{D})$ 就不可能成立，而 $I_1\cup e\in\mathcal{D}$，对二者再利用 **(D3)** 可知 $I_1-g=((I_1-g)\cup e)\cup(I_1\cup e)-e\in\mathcal{D}$，由 **(D2)** 可知矛盾；

$Opp(\mathcal{I})$ 满足 **(D1)** 和 **(D2)** 显然，至于 **(D3)**，我们先假设其不满足，也就是存在 $D_1,D_2\in Opp(\mathcal{I})$ 且其交为独立集使得存在 $e\in E$ 满足 $(D_1\cup D_2)-e\notin Opp(\mathcal{I})$，显然 D_1,D_2 不为包含关系，其交不为空且 $e\in D_1\cap D_2$，此时加强假设条件：取满足假设条件的子集对 (D_1,D_2) 中 $|D_1\cap D_2|$ 最

大的一对，利用 **(I3)** 可知存在 $f \in (D_1 \cup D_2 - e) - D_1 \cap D_2$ 使得 $(D_1 \cup D_2) \cup f \in \mathcal{I}$，于是便产生了一对满足假设条件的子集对 $(D_1 \cup f, D_2 \cup f)$，然其交却比 $|D_1 \cap D_2|$ 还大，矛盾；

Step2 由性质 1即得。

□

定理 3. $\mathcal{I} \underset{Low}{\overset{Max}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$

证明. 逐步验证即可：

Step1 $Max(\mathcal{I})$ 满足 **(B1)** 显然，至于 **(B2)**，任取 $B_1, B_2 \in Max(\mathcal{I})$，先假设 $|B_1| < |B_2|$，于是存在 $e \in B_2 - B_1$ 使得 $B_1 \cup e \in \mathcal{I}$，这与 $B_1 \in Max(\mathcal{I})$ 矛盾，所以 $|B_1| = |B_2|$，再取 $x \in B_1 - B_2$，于是 $B_1 - x \in \mathcal{I}$，结合 $B_2 \in \mathcal{I}$ 与 **(I3)** 即可得 **(B2)**；

$Low(\mathcal{B})$ 满足 **(I1),(I2)** 显然，先证在基公理体系下基族每个元素大小相同，不然则存在一组 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ 满足 $|B_1| < |B_2|$，取使得 $|B_2 - B_1|$ 最小的一组，利用 **(B2)** 即可得矛盾。下证满足 **(I3)**，任取 $I_1, I_2 \in Low(\mathcal{B})$ 且 $|I_1| < |I_2|$，于是存在子集 $B_i \in \mathcal{B}$ 使得 $B_i = I_i \sqcup P_i$，自然有 $|P_1| > |P_2| \implies |P_1 - P_2| > |P_2 - P_1|$，考虑 $I_2 \cap P_1$ 的情况，若其交不空，取其中元素 y 可知其也是 $I_2 - I_1$ 的元素，且有 $I_1 \cup y \subseteq B_1$，满足 **(I3)**，如若为空，则有 $P_1 - P_2 \subseteq B_1 - B_2$ 任取其中元素 x 使用 **(B2)** 可得存在 $y \in B_2 - B_1$ 使得 $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$，注意到 $B_2 - B_1 = (I_2 - I_1) \sqcup (P_2 - P_1 - I_1)$，而在此过程中取得的 y 只能从 $I_2 - I_1$ 和 $P_2 - P_1 - I_1$ 之中取，而 $|P_1 - P_2| > |P_2 - P_1| \geq |P_2 - P_1 - I_1|$ 也即是说经过有限次代入 **(B2)** 消去 $P_1 - P_2$ 中部分元素后，必可找到 $y \in I_2 - I_1$ 添加至一个新基中，而这个基仍包含 I_1，也就是说存在 $B \in \mathcal{B}, y \in I_2 - I_1$ 使得 $I_1 \cup y \subseteq B \implies I_1 \cup y \in Low(\mathcal{B})$，满足 **(I3)**；

Step2 **(I2)** 保证了 $\mathcal{I}$ 下紧致，**(B2)** 保证了 $\mathcal{B}$ 松散，由性质 3即得。

□

定理 4. $\mathcal{B} \underset{Min}{\overset{Upp}{\rightleftarrows}} \mathcal{S}$

证明. 逐步验证即可：

Step1 $Upp(\mathcal{B})$ 满足 **(S1),(S2)** 显然，对于 **(S3)**，任取 $S_1, S_2 \in Upp(\mathcal{B})(|S_1| < |S_2|)$，若二者同时包含同一个基，自然满足 **(S3)**。于是取两个不同的基使得 $B_i \subseteq S_i$，考虑 $S_2 - S_1 - B_2$ 的情况，若其非空便取其间任一元素 e，其自然也在 $S_2 - S_1$ 之中，有 $B_2 \subseteq S_2 - e$ 满足 **(S3)**，若 $S_2 - S_1 - B_2 = \varnothing$，首先注意到 $|S_1| < |S_2| \implies |S_1 - S_2| < |S_2 - S_1|$，而 $B_1 - S_2 \subseteq S_1 - S_2, S_2 - S_1 = B_2 - S_1$，可知 $|B_1 - S_2| < |B_2 - S_1|$，对任意 $x \in B_2 - S_1 \subseteq B_2 - B_1$ 应用 **(B2)** 即可得存在 $y \in B_1 - B_2 = (B_1 - S_2) \sqcup P$，显然 P 非空，同上个定理证法即可知存在 $y \in P \subseteq S_2$ 使得 $(B_2 - x) \cup y \in \mathcal{B}$，即 $S_2 - x \in Upp(\mathcal{B})$ 满足 **(S3)**；

$Min(\mathcal{S})$ 满足 **(B1)** 显然，至于 **(B2)**，任取 $B_1, B_2 \in Min(\mathcal{S})$，先假设 $|B_1| < |B_2|$，于是存在 $e \in B_2 - B_1$ 使得 $B_2 - e \in \mathcal{S}$，这与 $B_2 \in Min(\mathcal{S})$ 矛盾，所以 $|B_1| = |B_2|$，再取 $x \in B_1 - B_2$，于是有 $B_2 \cup x \in \mathcal{S}$，结合 $B_1 \in \mathcal{S}$ 与 **(S3)** 可知存在 $y \in B_2 \cup x - B_1 = B_2 - B_1$ 使得 $(B_2 - y) \cup x \in \mathcal{S}$ 结

合我们已经知道 $Min(\mathcal{S})$ 中元素大小都一样，所以 $(B_2-y)\cup x \in Min(\mathcal{S})$，至此我们发现 $Min(\mathcal{S})$ 不仅满足 **(B1)**，且还满足

(B2)' $(B_1, B_2 \in Min(\mathcal{S})) \wedge (x \in B_1 - B_2) \implies (\exists y \in B_2 - B_1 : (B_1 - y) \cup x \in Min(\mathcal{S}))$

为证 **(B2)** 我们需要稍作迂回，由之前定理我们知道如果证明了 $Low(Min(\mathcal{S}))$ 满足独立集公理，就可以得到 $Max(Low(Min(\mathcal{S})))$ 满足基公理，而 $Min(\mathcal{S})$ 是松散的这是已知的，于是便能得到 $Min(\mathcal{S})$ 满足基公理。所以下证 $Low(Min(\mathcal{S}))$ 满足独立集公理，前两条公理显然，假设存在 $I_1, I_2 \in Low(Min(\mathcal{S}))$ 使得 **(I3)** 不成立，取其中 $|I_1 \cap I_2|$ 最大的一对，取 $I_i \subseteq B_i$ 其中 $B_i \in Min(\mathcal{S})$，显然 $I_1 \subsetneq B_2$，任取 $x \in I_1 - B_2 \subseteq B_1 - B_2$ 应用 **(B2)'** 便可知存在 $y \in B_2 - B_1$ 使得 $(B_2 - y) \cup x \in Min(\mathcal{S})$，进而 $(I_2 - y) \cup x \in Low(Min(\mathcal{S}))$，验证 $(I_1, (I_2 - y) \cup x)$ 满足假设而其交变大便导出了矛盾；

Step2 **(B2)** 保证了 $\mathcal{B}$ 松散，**(S2)** 保证了 $\mathcal{S}$ 上紧致，由性质 3即得。

□

定理 5. $\mathcal{S} \xleftrightarrow{Opp} \mathcal{N}$

证明. 逐步验证即可：

Step1 $Opp(\mathcal{S})$ 满足 **(N1),(N2)** 显然，对于 **(N3)**，假设存在 $N_1, N_2 \in Opp(\mathcal{S})$ 且满足 $N_1 \cup N_2 \notin Opp(\mathcal{S})$ 使得存在 $e \in E$ 满足 $(N_1 \cap N_2) \cup e \notin Opp(\mathcal{S})$，易见 N_1, N_2 不是包含关系且 $e \notin N_1 \cup N_2$，于是 $|N_1 \cup N_2| > |(N_1 \cap N_2) \cup e|$，应用 **(S3)** 可知存在 $y \in N_1 \cup N_2 - ((N_1 \cap N_2) \cup e)$ 使得 $N_1 \cup N_2 \in \mathcal{S}$，进而 $N_1 \cup N_2 \in \mathcal{S}$，矛盾；

$Opp(\mathcal{N})$ 满足 **(S1),(S2)** 显然，对于 **(S3)** 假设存在 $S_1, S_2 \in Opp(\mathcal{N})(|S_1| < |S_2|)$ 使得对于任意 $e \in S_2 - S_1$ 都有 $S_2 - e \notin Opp(\mathcal{N})$，显然 S_1, S_2 不是包含关系，于是有 $|S_2 - S_1| > |S_1 - S_2| \geq 1$，任取 $S_2 - S_1$ 中两个不同的元素 f, g，对 $S_2 - f, S_2 - g \in \mathcal{N}$ 应用 **(N3)** 可得对于任意 $h \in E$ 都有 $(S_2 - \{f, g\}) \cup h \in \mathcal{N}$，取 $h \in S_1 - S_2$，显然 $(S_2 - f) \cup h \in Opp(\mathcal{N})$，此时加强假设我们取使得 $|S_1 \cap S_2|$ 最大的子集对，再观察子集对 $(S_1, (S_2 - f) \cup h)$，而我们已知对于任意 $g \in (S_2 - f) \cup h - S_1$ 都有 $(S_2 - f) \cup h - g = (S_2 - \{f, g\}) \cup h \in \mathcal{N}$，满足假设条件，而 $|S_1 \cap ((S_2 - f) \cup h)| > |S_1 \cap S_2|$ 与假设矛盾，于是满足 **(N3)**；

Step2 由性质 1即得。

□

定理 6. $\mathcal{N} \underset{Low}{\overset{Max}{\rightleftarrows}} \mathcal{H}$

证明. 逐步验证即可：

Step1 两个方向皆显然成立；

Step2 **(N2)** 保证了 $\mathcal{N}$ 下紧致，**(H2)** 保证了 $\mathcal{H}$ 松散，由性质 3即得。

□

3.2 $\mathfrak{R}.\mathfrak{Cl}.\mathfrak{V}.\mathfrak{G}.$

我们将上面已经证明出互相等价的结构称为拟阵，记作 M，当被定义之后其上的各种集族可类似 $\mathcal{I}(M)$ 来书写，此例便代表拟阵 M 的独立集族。

定理 7. $\mathcal{I} \underset{\mathcal{I}(r)}{\overset{r_M}{\rightleftarrows}} r$

证明. 当拟阵确定后定义 $r_M(X) = max\{|I||I \subseteq X, I \in \mathcal{I}(M)\}$，当一个结构带有函数 r 满足秩函数公理时，定义 $\mathcal{I}(r) = \{I \subseteq E|r(I) = |I|\}$，再逐步验证即可：

Step1 r_M 满足 **(R1)**,**(R2)** 显然，至于 **(R3)**，取 $X \cap Y$ 中的极大独立集记为 I_s，再取包含 I_s 且包含在的 $X \cup Y$ 的极大独立集之一记为 I_t，由 **(I3)** 可知其满足 $|I_t| = r_M(X \cup Y)$(此性质后面再遇便直接给出)，于是便有 $r_M(X \cup Y) + r_M(X \cap Y) = |I_t| + |I_s| = |I_t \cap (X \cup Y)| + |I_s \cap (X \cap Y)| = |I_t \cap X| + |I_t \cap Y| - |I_t \cap (X \cap Y)| + |I_s \cap (X \cap Y)| = |I_t \cap X| + |I_t \cap Y| \leq r_M(X) + r_M(Y)$，满足 **(R3)**；

$\mathcal{I}(r)$ 显然满足 **(I1)**，对于 **(I3)** 我们利用 **(R3)** 可得 $|I_1| = r(I_1) + r(\varnothing) = r((I_1 - I_2) \cup I_2) + r((I_1 - I_2) \cap I_2) \leq r(I_1 - I_2) + r(I_2) \leq |I_1 - I_2| + |I_2| = |I_1|$，注意取等条件便可知 $r(I_2) = |I_2|$，至于 **(I3)** 假设 $\mathcal{I}(r)$ 中存在子集对使其不成立，记 $I_2 - I_1 = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$，利用 **(R3)** 归纳假设即可得 $|I_1| = r(I_1 \cup \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}) = r(I_1 \cup I_2) \geq r(I_2) = |I_2| > |I_1|$，矛盾，此性质后面再遇便直接给出；

Step2 当拟阵确定后，对于任意 $I \in \mathcal{I}$ 由 r_M 定义可知 $r_M(I) = |I|$，所以 $I \in \mathcal{I}(r_M)$，反之对于任意 $I \in \mathcal{I}(r_M)$ 都有 $r_M(I) = |I| \implies I \in \mathcal{I}$，所以 $\mathcal{I}_{r_M} = \mathcal{I}(M)$；

当函数 r 确定后，由 $\mathcal{I}(r)$ 定义出拟阵 M，然后再定义出 r_M，下证 $r_M = r$。任取 $X \subseteq E$，由 $r_M(X) = max\{|I||I \subseteq X, I \in \mathcal{I}(r)\}$ 可知可取一子集 $I \in \mathcal{I}(r)$ 使得 $r_M(X) = r_M(I) = |I| = r(I)$，只需证 $r(I) = r(X)$，对于 $X - I$ 的任意一个元素我们添加到 I 里其 r 函数值都是不变的，这是由 I 的取法决定的，于是可得 $r(I) = r(I \cup X) = r(X)$，最终 $r_M = r$。

□

定理 8. $\mathcal{I} \underset{\mathcal{I}(cl)}{\overset{cl_M}{\rightleftarrows}} cl$

证明. 当拟阵确定后定义 $cl_M(X) = \{e \in E|r(X) = r(X \cup e)\}$，当一个结构带有函数 r 满足秩函数公理时，定义 $\mathcal{I}(cl) = \{I \subseteq E|\forall x \in I : x \notin cl(I - x)\}$，再逐步验证即可：

Step1 cl_M 满足 **(CL1)** 显然。**(CL2)** 取 $e \in cl_M(X)$，若 $e \in X$ 则显然 $x \in Y \subseteq cl(Y)$，若 $e \notin X$ 取 X 中的极大独立集记为 B_X，于是 $|B_X| = r_M(X) = r_M(X \cup e) = r_M(B_X)$，可见 B_X 也是 $X \cup e$ 中的极大独立集，再取 $Y \cup e$ 中的极大独立集 B_Y 使其包含 B_X，若 $e \in B_Y$ 则 $B_X \cup e \subseteq B_Y \in \mathcal{I} \implies r_M(B_X \cup e) = |B_X| + 1$ 与 B_X 在 $X \cup e$ 中极大独立矛盾，所以 $e \notin B_Y$，这说明 B_Y 包含在 Y 中，其也必然是 Y 的极大独立集，所以 $|B_Y| = r_M(Y) = r_M(B_Y) = r_M(Y \cup e) \implies e \in cl_M(Y)$。**(CL3)** 只需证 $cl(cl(X)) \subseteq cl_M(X)$，任取 $e \in cl_M(cl_M(X)) \subseteq cl_M(X)$，则 $r_M(cl_M(X)) = r_M(cl_M(X) \cup e) \geq r_M(X \cup e) \geq r_M(X)$，而利用 cl_M 定义易见 $r_M(cl_M(X)) = r_M(X)$，所以 $r_M(X) = r_M(X \cup e) \implies e \in cl_M(X)$。**(CL4)** 要证 $x \in cl_M(X \cup y)$，即是要证 $r_M(X \cup y) = r_M(X \cup x \cup y)$，首先由 $y \notin cl_M(X)$

知 $r_M(X)+1=r_M(X\cup y)$，另一方面由 $y\in cl_M(X\cup x)$ 知 $r_M(X\cup x\cup y)=r_M(X\cup x)$，而显然 $x\notin cl_M(X)$ 不然 y 便不存在，于是就有 $r_M(X)+1=r_M(X\cup x)$，即得要证的等式；

Step2 当拟阵确定时，自然定义出 r_M, cl_M，下证 $\mathcal{I}(M)=\mathcal{I}(cl_M)$：

$$\begin{aligned} I\in\mathcal{I}(M) &\iff r_M(I)=|I| \\ &\iff \forall x\in I: r_M(I-x)+1=r_M(I) \\ &\iff \forall x\in I: x\notin cl_M(I-x) \\ &\iff I\in\mathcal{I}(cl_M) \end{aligned}$$

当函数 cl 确定后，由 $\mathcal{I}(cl)$ 定义出拟阵 M，接着在定义出 cl_M，下证 $cl_M=cl$。对于任意 $X\subseteq E$，取 X 的极大独立集 $B\in\mathcal{I}(cl)$ 则有 $cl_M(B)=cl_M(X)$，若 $cl_M(B)=B$ 则 $cl_M(X)=cl_M(B)=B\subseteq X\subseteq cl(X)$，若不然则取 $x\in cl_M(B)-B=cl_M(X)-B$，由 $B\cup x\notin\mathcal{I}(cl)$ 知 $x\in cl(X)$，于是 $cl_M(X)\subseteq B\cup cl(X)=cl(X)\subseteq cl(cl(X))=cl(X)$; 同上只是缩小些范围取 $x\in X-B$，由 $B\cup x\notin\mathcal{I}(cl)$ 知 $x\in cl(B)$ 知 $X\subseteq cl(B)$，再看对任意 $y\in cl(B)-B$ 都有 $B\cup y\notin\mathcal{I}(cl)$，推知 $r_M(B\cup y)=r_M(B)\implies y\in cl_M(B)$，所以 $cl(B)\subseteq cl_M(B)$，最终 $cl(X)\subseteq cl(cl(B))=cl(B)\subseteq cl_M(B)\subseteq cl_M(X)$。

□

定理 9. $\mathcal{I}\ \underset{\mathcal{I}(v)}{\overset{v_M}{\rightleftarrows}}\ v$

证明. 当拟阵确定后定义 $v_M(X)=|X|-r_M(X)$，当一个结构带有函数 v 满足秩函数公理时，定义 $\mathcal{I}(v)=\{I\subseteq E|v(I)=0\}$，再逐步验证即可：

Step1 由基公理易见 v_M 显然满足零化度公理，而另一个方向也只需注意 $|X|-v(X)$ 满足秩函数公理，而显然 $\mathcal{I}(r=\mathbf{1}_{2^E}-v)=\mathcal{I}(v)$；

Step2 同上注意秩函数和零化度函数关系即可。

□

介绍最后一个函数前我们需要先定义限制拟阵的概念，当我们确定了一个拟阵 $(E,\mathcal{I})$ 的时候，我们取子集 X，并将 $\mathcal{I}$ 中所有能包含在 X 中的子集放在一起，记作 $\mathcal{I}'$，显然其在 X 上也满足独立集公理，于是将这种限制得到的拟阵记作 $M|X$。

定理 10. $\mathcal{C}\ \underset{\mathcal{C}(g)}{\overset{g_M}{\rightleftarrows}}\ g$

证明. 当拟阵确定后定义 $g_M(X)$ 为限制拟阵 $M|X$ 中拥有最小围长的极小圈的围长，如若不存在极小圈那就直接取为 ∞，当一个结构带有函数 g 满足围长公理时，定义 $\mathcal{C}(r)=\{C\subseteq E|g(C)=|C|\}$，再逐步验证即可：

Step1 g_M 显然满足 **(G1)**，而由定义可知 X 中的极小圈也一定为 Y 的极小圈，所以 $g(X)\leq g(Y)$ 满足 **(G2)**，**(G3)** 可直接由 **(C3)** 推知；

$\mathcal{C}(g)$ 满足极小圈公理显然；

Step2 当拟阵确定时，自然定义出 g_M，再返回来导出极小圈，便有 $C \in \mathcal{C}(M) \iff g_M(C) = |C| \iff C \in \mathcal{C}(g_M) \implies \mathcal{C}(M) = \mathcal{C}(g_M)$；

当函数 g 确定后，由 $\mathcal{C}(g)$ 在极小圈公理体系下定义出拟阵 M，再在其上定义 g_M，下证 $g_M = g$。任取 $X \subseteq E$，若 $g_M(X) = \infty$，即是对于任意 $Y \subseteq X$ 都有 $Y \notin \mathcal{C}(g) \iff g(Y) \neq |Y|$，由 **(G1)** 可知 $g(X) = \infty$，若 $g_M(X) < \infty$，取 X 中子集 $C \in \mathcal{C}(g)$ 使得 $g_M(X) = g_M(C) = |C| = g(C)$，由 **(G2)** 知 $g(C) \geq g(X)$，假设 $g(X) < g(C)$，则由 **(G1)** 可知存在 $C' \subseteq X$ 使得 $g(C') = |C'|$，此时 $C' \in \mathcal{C}(g)$，这与 C 的取法矛盾，于是 $g_M(X) = g(X)$。

□

3.3 C.F.O.

定理 11. $\mathcal{F} \underset{\mathcal{F}(cl_M)}{\overset{cl}{\rightleftarrows}} cl_M$

证明. 注意这时我们还不知满足闭集公理的结构会是拟阵，在此定义的函数 $cl(X)$ 为 $\mathcal{F}$ 中包含 X 的极小成员，这个定义的合法性由 **(F2)** 保证，反过来已知一个拟阵后其上有闭包算子 cl，定义 $\mathcal{F}(cl_M) = \{cl_M(X)|X \subseteq E\}$，再逐步验证即可：

Step1 cl 满足 **(CL1),(CL2),(CL3)** 显然，至于 **(CL4)** 若 $x \in cl(X)$ 则 $cl(X \cup x) \subseteq cl(X \cup cl(X)) \subseteq cl(cl(X)) = cl(X)$，$y$ 便无从取值，于是设 $x \notin cl(X)$，假设存在 $F_i \in \mathcal{F}$ 满足 $cl(X) \subseteq F_i \subseteq cl(X \cup x)$，若 $x \in F_i$ 则 $X \cup x \subseteq F_i \implies cl(X \cup x) \subseteq cl(F) = F \implies F_i = cl(X \cup x)$，若 $x \notin F_i$，我们不妨取 F_i 为包含 $cl(X)$ 的极小闭集，取尽这类闭集由 **(F3)** 知 $E - cl(X) = \sqcup_i (F_i - cl(X))$，于是便应当存在 F_j 包含 x，进而 $cl(X \cup x) \subseteq F_j$，这样便与 $(F_i - cl(X)) \cap (F_j - cl(X)) = \varnothing$ 矛盾，于是得到 $cl(X \cup x)$ 是真包含 $cl(X)$ 的一个极小闭集，取 $y \in cl(X \cup x - cl(X)$，同样有 $cl(X \cup y)$ 是真包含 $cl(X)$ 的一个极小闭集，而 $(cl(X \cup x) - cl(X)) \cap (cl(X \cup y) - cl(X))$ 非空，那二者必相等，也就有 $x \in cl(X \cup y)$；

Step2 当 $\mathcal{F}$ 满足闭集公理时，便有 $F \in \mathcal{F} \iff F = cl(F) \iff F \in \mathcal{F}(cl) \implies \mathcal{F} = \mathcal{F}(cl)$；

当拟阵确定后，由 $\mathcal{F}(cl_M)$ 得到满足闭集公理的结构，接着在其上定义出函数 cl，下证 $cl_M = cl$。对于任意 $X \subseteq E$，假设 $cl(X) \neq cl_M(X)$，而 $cl_M(X) \in \mathcal{F}(cl_M)$，也就是说 $cl_M(X)$ 不是 $\mathcal{F}(cl_M)$ 中包含 X 的极小成员，即存在 $Y \subseteq E$ 使得 $X \subseteq cl_M(Y) \subsetneqq cl_M(X)$，但由 cl_M 满足 **(CL2),(CL3)** 知 $cl_M(X) \subseteq cl_M(cl_M(Y)) = cl_M(Y)$ 矛盾，所以 $cl_M = cl$。

□

定理 12. $\mathcal{F} \xleftrightarrow{Com} \mathcal{O}$

证明. 逐步验证即可：

Step1 两个方向皆显然成立；

Step2 由性质 1即得。

□

4 对偶

前面都是在不同的公理体系下进行集族操作得到等价，还可以在同一个公理体系下进行集族操作，操作之后使其仍满足公理体系，我们称之为对偶。

定理 13. $\mathcal{B} \xleftrightarrow{Com} \mathcal{B}^*$

证明. 逐步验证即可：

Step1 $Com(\mathcal{B})$ 满足 **(B1)** 显然，至于 **(B2)**，取 $B_1, B_2 \in Com(\mathcal{B})$，任意 $x \in B_1 - B_2 = B_2^c - B_1^c$，应用 **(B2)** 知存在 $y \in B_1^c - B_2^c = B_2 - B_1$ 使得 $(B_2^c - x) \cup y \in \mathcal{B} \implies ((B_2^c - x) \cup y)^c \in Com(\mathcal{B}) \implies (B_2 - y) \cup x \in Com(\mathcal{B})$，即 $Com(\mathcal{B})$ 满足 **(B2)**'，由定理 4的证明即可知其也满足 **(B2)**。反方向亦然；

Step2 由性质 1即得。

□

至于其余的对偶，我们可利用集族和之前的结果直接得到，例如对于 $Com(\mathcal{I})$，因为 $\mathcal{I}$ 下紧致利用性质 4对 Com 分解便得到 $Com(\mathcal{I}) = Upp(Com(Max(\mathcal{I})))$，而我们已经证明了 $Max(\mathcal{I})$ 满足基公理 $\implies Com(Max(\mathcal{I}))$ 满足基公理 $\implies Upp(Com(Max(\mathcal{I})))$ 满足支撑集公理，也就是说 $Com(\mathcal{I})$ 满足支撑集公理，反过来也是一样，这样就完成了**Step1**的证明，而**Step2**则直接由性质 1便可得到，其余的证明都是完全相同。

5 总结

至此我们便证明完了所有公理体系的等价，合并简记为以下图表，其中有星号上标的皆代表对偶拟阵对应的集族, 绿色双箭头任一方向代表操作 Com：

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, shift left, "Upp"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathcal{D} \arrow[l, shift left, "Min"] \arrow[r, leftrightarrow, "Opp"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathcal{I} \arrow[r, shift left, "Max"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathcal{B} \arrow[l, shift left, "Low"] \arrow[r, shift left, "Upp"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathcal{S} \arrow[l, shift left, "Min"] \arrow[r, leftrightarrow, "Opp"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathcal{N} \arrow[r, shift left, "Max"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathcal{H} \arrow[l, shift left, "Low"] \arrow[d, leftrightarrow] \\
\mathcal{H}^* \arrow[r, shift left, "Low"] & \mathcal{N}^* \arrow[l, shift left, "Max"] \arrow[r, leftrightarrow, "Opp"] & \mathcal{S}^* \arrow[r, shift left, "Min"] & \mathcal{B}^* \arrow[l, shift left, "Upp"] \arrow[r, shift left, "Low"] & \mathcal{I}^* \arrow[l, shift left, "Max"] \arrow[r, leftrightarrow, "Opp"] & \mathcal{D}^* \arrow[r, shift left, "Min"] & \mathcal{C}^* \arrow[l, shift left, "Upp"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & r \arrow[d, shift left, "\mathcal{I}(r)"] & \\
\mathcal{C} \arrow[r, shift left, "Upp"] \arrow[d, shift left, "g_M"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift left, "Min"] \arrow[r, leftrightarrow, "Opp"] & \mathcal{I} \arrow[u, shift left, "r_M"] \arrow[r, shift left, "v_M"] \arrow[d, shift left, "cl_M"] & v \arrow[l, shift left, "\mathcal{I}(v)"] & \\
g \arrow[u, shift left, "\mathcal{C}(g)"] & & cl \arrow[u, shift left, "\mathcal{I}(cl)"] \arrow[r, shift left, "\mathcal{F}(cl_M)"] & \mathcal{F} \arrow[l, shift left, "cl"] \arrow[r, leftrightarrow] & \mathcal{O}
\end{tikzcd}
$$

以上的公理等价证明中已经给出了不同集族和函数的等价关系的证明，仅罗列一些重要的关系：

性质 7. 当且仅当集合 X 在对偶拟阵中是极小圈、独立集、支撑集或超平面集，才分别称之为拟阵的余极小圈、余独立集、余支撑集或余超平面集。则有关系

$$\begin{array}{r|l} X \text{ 是极小圈当且仅当 } E-X \text{ 是余超平面} & X \in \mathcal{C} \iff E-X \in \mathcal{H}^* \\ X \text{ 是独立集当且仅当 } E-X \text{ 是余支撑集} & X \in \mathcal{I} \iff E-X \in \mathcal{S}^* \\ X \text{ 是支撑集当且仅当 } E-X \text{ 是余独立集} & X \in \mathcal{S} \iff E-X \in \mathcal{I}^* \\ X \text{ 是超平面当且仅当 } E-X \text{ 是余极小圈} & X \in \mathcal{H} \iff E-X \in \mathcal{C}^* \end{array}$$

性质 8. 集族和几个拟阵算子存在关系：

	r	cl	v	g
$\mathcal{C}$	$\forall x \in C : r(C) = \lvert C\rvert - 1 = r(C-x)$	$\forall x, y \in C : x \in cl(C-x), y \notin cl(C-x-y)$	$\forall x \in C : v(C) = 1 = v(C-x)+1$	$g(C) = \lvert C\rvert$
$\mathcal{D}$	$r(D) < \lvert D\rvert$	$\exists x \in D : x \in cl(D-x)$	$v(D) > 0$	$g(D) < \infty$
$\mathcal{I}$	$r(I) = \lvert I\rvert$	$\forall x \in I : x \notin cl(I-x)$	$v(I) = 0$	$g(I) = \infty$
$\mathcal{B}$	$r(B) = \lvert B\rvert = r_M$	$cl(B) = E, \lvert B\rvert = r_M$	$v(B) = 0, \lvert B\rvert = r_M$	$g(B) = \infty, \lvert B\rvert = r_M$
$\mathcal{S}$	$r(S) = r_M$	$cl(S) = E$	$v(S) = \lvert S\rvert - r_M$	$*$
$\mathcal{N}$	$r(N) < r_M$	$cl(N) \neq E$	$v(N) > \lvert N\rvert - r_M$	$*$
$\mathcal{H}$	$\forall x \in E-H : r(H) = r_M - 1 = r(H \cup x) - 1$	$\forall x \in E-H : cl(H) \subsetneq E = cl(H \cup x)$	$\forall x \in E-H : v(H) = \lvert H\rvert - r_M + 1 = v(H \cup x)$	$*$

将对偶拟阵上的秩函数记为 r_*，则与原拟阵秩函数 r 有关系:

性质 9. $r_*(X) = |X| - r(M) + r(E-X)$

证明.

$$\begin{aligned} & r_*(X) \\ =& \max_{B^c \in \mathcal{B}^*} |B^c \cap X| \\ =& \max_{B \in \mathcal{B}} |(E-B) \cap X| \\ =& \max_{B \in \mathcal{B}} (|X| - |B \cap X|) \\ =& |X| - \min_{B \in \mathcal{B}} |B \cap X| \\ =& |X| - \min_{B \in \mathcal{B}} (|B| - |B \cap (E-X)|) \\ =& |X| - r(M) + \max_{B \in \mathcal{B}} |B \cap (E-X)| \\ =& |X| - r(M) + r(E-X) \end{aligned}$$

□