

分段二次抛物样条插值法

张永利

(同济大学建筑工程系, 上海 200092)

Email: zhylcg@126.com

摘 要: 希尔伯特-黄变换(HHT)是一种新型的信号处理方法, 由经验模态分解和希尔伯特变换两部分所组成, 其中在经验模态分解中使用了三次样条插值法, 需要多次迭代, 计算效率较低。基于此, 本文结合抛物参数样条曲线拟合的原理提出了一种新的二次样条插值法—分段二次抛物样条插值法, 并将其应用于希尔伯特-黄变换中, 与三次样条插值法的计算结果进行了对比。算例表明, 该方法具有很好的柔性、光滑性和单值性, 计算效率高, 具有一定的实用价值。

关键词: 信号分析; 抛物参数样条曲线; 经验模态分解; 固有模态函数; 希尔伯特变换

中图分类号: 00241.3

文献标识码: A

文章编号:

1、引言

1998年, 美国国家宇航局的黄锬博士提出了一种新的信号分析方法—希尔伯特-黄变换(Hilbert-Huang Transform, 简称HHT)。该方法主要由两部分组成: 首先是用基于经验的模态分解方法EMD(Empirical Mode Decomposition)将一个时间序列信号分解成有限个不同时间尺度的固有模态函数IMF(Intrinsic Mode Function); 然后将每个IMF进行Hilbert变换构造解析信号, 得出信号的瞬时频率和振幅, 进而得到能量分布谱图(Hilbert Spectrum)^[1, 2]。HHT具有重要的理论价值和广阔的应用前景, 已在一些实际工程领域中获得有效应用^[3, 4]。但由于这一理论出现的时间还很短暂, 还存在诸多需要解决和完善的问题, 如: 包络线拟合问题、边界处理问题、噪声干扰问题等^[5]。针对HHT中的包络线拟合问题, 本文提出了一种新的二次样条插值方法—分段二次抛物样条插值法, 并将其应用于希尔伯特-黄变换中, 算例表明, 该方法能很好的柔性、光滑性和单值性, 具有一定的实用价值。

2、抛物参数样条曲线拟合原理

2.1 过三点定义一段抛物线

设有不在同一直线上的三点: p_1 、 p_2 、 p_3 , 通过这三点定义一条抛物线。如图1所示。若采用矢量表达式来表示参数化的二次曲线, 则抛物线表达式可写成:

$$p(t) = A_1 + A_2 t + A_3 t^2 \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (1)$$

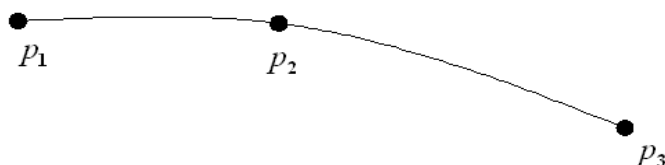


图1 过三点的抛物线

Fig.1 Parabola defined by three points

规定 t 在 $0 \sim 1$ 之间取值。这样, 只要确定了式(1)中的三个系数, 就确定了抛物线的表达式。为求出 A_1 、 A_2 、 A_3 , 设定如下三个独立的条件:

该抛物线经过 p_1 、 p_2 、 p_3 三个点, 并且:

¹ 本课题得到“十一五”国家科技支撑计划(2006BAA01A23)的资助

- ① 抛物线段以 p_1 点为起点。即当参变量 $t = 0$ 时, 曲线过 p_1 点;
- ② 抛物线段以 p_3 点为终点。即当参变量 $t = 1$ 时, 曲线过 p_3 点;
- ③ 当参变量 $t = 0.5$ 时, 曲线过 p_2 点, 且切矢量等于 $p_3 - p_1$ 。

根据以上设定的条件, 可以列出三个方程:

$$\begin{cases} P(0) = A_1 = p_1 \\ P(1) = A_1 + A_2 + A_3 = p_3 \\ P(0.5) = A_1 + 0.5A_2 + 0.25A_3 = p_2 \end{cases}$$

通过解联立方程, 得到三个系数分别为:

$$A_1 = p_1$$

$$A_2 = 4p_2 - p_3 - 3p_1$$

$$A_3 = 2p_1 + 2p_3 - 4p_2$$

将求出的 A_1 、 A_2 、 A_3 代入抛物线的表达式 (1) 中, 整理后可得:

$$p(t) = (2t^2 - 3t + 1)p_1 + (4t - 4t^2)p_2 + (2t^2 - t)p_3 \quad (2)$$

2.2 抛物线加权合成

设有一离散型值点列 $p_i (i=1, 2, \dots, n)$, 按式 (2) 每经过相邻三点作一段抛物线, 由于有 n 个型值点, 所以象这样的抛物线段一共可以作出 $n-2$ 条。在这 $n-2$ 条抛物线段中, 第 i 条抛物线段的表达式为:

$$S_i(t_i) = (2t_i^2 - 3t_i + 1)p_i + (4t_i - 4t_i^2)p_{i+1} + (2t_i^2 - t_i)p_{i+2} \quad (0 \leq t_i \leq 1)$$

第 $i+1$ 条抛物线段的表达式为:

$$S_{i+1}(t_{i+1}) = (2t_{i+1}^2 - 3t_{i+1} + 1)p_{i+1} + (4t_{i+1} - 4t_{i+1}^2)p_{i+2} + (2t_{i+1}^2 - t_{i+1})p_{i+3} \quad (0 \leq t_{i+1} \leq 1)$$

经过四点所画出的两条抛物线段 $S_i(t_i)$ 、 $S_{i+1}(t_{i+1})$ 的图形如图 2 所示:

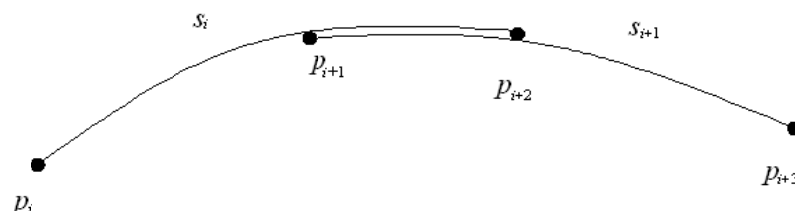


图 2 两条抛物线段 S_i 和 S_{i+1}

Fig. 2 Two parabolas of S_i and S_{i+1}

一般地, 每两段曲线之间的搭接区间, 两条抛物线是不可能重合的。但对于拟合曲线来说, 整个型值点列必须只能用一条光滑的曲线连接起来。为了做到这一点, 在 S_i 和 S_{i+1} 的搭接区间内, 必须有一个办法让它们按照一个一定的法则结合成一条曲线, 这个结合的办法就是“加权合成”。在加权合成的过程中, 首先要选择两个合适的权函数 $f(T)$ 和 $g(T)$, 加权合成后的曲线为 $p_{i+1}(t)$, 则:

$$p_{i+1}(t) = f(T) * S_i(t_i) + g(T) * S_{i+1}(t_{i+1}) \quad (3)$$

在抛物样条曲线中, 假定权函数 $f(T)$ 和 $g(T)$ 是简单的一次函数, 且它们之间存在有互补性。它们分别为:

$$\begin{cases} f(T) = 1 - T \\ g(T) = T \end{cases}$$

这样式 (3) 可以改写为:

$$p_{i+1}(t) = (1-T) * S_i(t_i) + T * S_{i+1}(t_{i+1}) \quad (4)$$

在表达式 (4) 中, 包含了三个参变量, 即 T 、 t_i 和 t_{i+1} 。接下来要统一式 (4) 中参变量, 否则, 后面的工作将无法进行。由图 2 可知, 在从点 p_{i+1} 到点 p_{i+2} 之间的区间内, 参变量 t_i 、 t_{i+1} 的取值范围分别为: $0.5 \leq t_i \leq 1$ 、 $0 \leq t_{i+1} \leq 0.5$ 。在权函数 $f(T)$ 和 $g(T)$ 中, 变量 T 的取值范围为: $0 \leq T \leq 1$ 。选择 t 作为统一后的参变量, 把原有的三个参变量 T 、 t_i 和 t_{i+1} 均变化成唯一含有 t 的形式, 并要确定 t 的合适的取值范围。假如 $0 \leq t \leq 0.5$, 则:

$$\begin{cases} T = 2t \\ t_i = 0.5 + t \\ t_{i+1} = t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 0.5)$$

于是, 表达式 (4) 可以根据新的参变量 t 改写成如下这样的形式:

$$p_{i+1}(t) = (1-2t) * S_i(t+0.5) + 2t * S_{i+1}(t) \quad (0 \leq t \leq 0.5) \quad (5)$$

式中:

$$\begin{aligned} S_i(t+0.5) &= (2t^2 - t)p_i + (1 - 4t^2)p_{i+1} + (2t^2 + t)p_{i+2} \\ S_{i+1}(t) &= (2t^2 - 3t + 1)p_{i+1} + (4t - 4t^2)p_{i+2} + (2t^2 - t)p_{i+3} \end{aligned}$$

把以上两式代入 (5), 展开并整理后可得:

$$\begin{aligned} p_{i+1}(t) &= (-4t^3 + 4t^2 - t)p_i + (12t^3 - 10t^2 + 1)p_{i+1} + (-12t^3 + 8t^2 + t)p_{i+2} + (4t^3 - 2t^2)p_{i+3} \\ (i &= 1, 2, \dots, n-3) \quad (0 \leq t \leq 0.5) \end{aligned} \quad (6)$$

式 (6) 中 $p_{i+1}(t)$ 是一个点向量, 在二维平面中它包含了两个坐标值 $[x(t), y(t)]$, 式 (6) 的直观形式可以写成:

$$\begin{cases} x(t) = (-4t^3 + 4t^2 - t)x_i + (12t^3 - 10t^2 + 1)x_{i+1} + (-12t^3 + 8t^2 + t)x_{i+2} + (4t^3 - 2t^2)x_{i+3} \\ y(t) = (-4t^3 + 4t^2 - t)y_i + (12t^3 - 10t^2 + 1)y_{i+1} + (-12t^3 + 8t^2 + t)y_{i+2} + (4t^3 - 2t^2)y_{i+3} \end{cases} \quad (7)$$

式 (7) 的实质是: 表达了每相邻的四个点可以决定中间的一段抛物样条曲线。

3. 一种新的二次样条插值法

抛物参数样条曲线具有一阶连续性, 实践证明, 用抛物线样条法拟合出的曲线既具有很好的柔性, 又具有很好的光滑性。同三次样条插值法相比, 抛物参数样条插值法不需要烦琐的迭代, 因此其计算速度快, 占用的内存空间少。但抛物参数样条曲线不能保证是单值的, 而且抛物参数样条插值是一种不均匀点插值法^[6], 无论是在工程实践还是在科学研究中, 应用更多的还是均匀点插值法。希尔伯特-黄变换需要用到的就是均匀点插值法, 因此, 抛物参数样条插值法不能直接应用到希尔伯特-黄变换中, 需要作些改进。

如图 2 所示, 式 (7) 表达了从点 p_{i+1} 到点 p_{i+2} 之间的任一点 $p(x, y)$ 的坐标值与参变量 t 的关系, 为实现均匀点插值, 需建立 y 与 x 之间的显式表达式, 考虑到抛物参数样条曲线具有一阶连续性, 假定 y 与 x 满足如下关系:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (8)$$

为确定三个系数 a 、 b 、 c , 需要三个独立的条件, 现已有两个条件, 点 p_{i+1} 与点 p_{i+2} 的坐标满足表达式 (8)。在现有条件的基础上, 不能唯一地确定系数 a 、 b 、 c , 需要在由式 (7) 确定的抛物线段上找一辅助点, 辅助点的选取宜选择靠近 p_{i+1} 或 p_{i+2} 的点。为计算方便, 在这里取 $t = 0.1$ 时所对应的点为辅助点。这样, 将 $t = 0$ 、 $t = 0.1$ 、 $t = 0.5$ 分别代入式 (7) 可得:

$$\begin{cases} x(0) = x_{i+1} \\ y(0) = y_{i+1} \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} x(0.1) = -0.064x_i + 0.912x_{i+1} + 0.168x_{i+2} - 0.016x_{i+3} \\ y(0.1) = -0.064y_i + 0.912y_{i+1} + 0.168y_{i+2} - 0.016y_{i+3} \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} x(0.5) = x_{i+2} \\ y(0.5) = y_{i+2} \end{cases} \quad (11)$$

将(9)、(10)、(11)式代入(8)就可以得到一个方程组,解此方程组即可得到系数 a 、 b 、 c , 表达式(8)也就随之确定下来。由表达式(8)可知,一个 x 值仅对应一个 y 值,这种改进的二次样条插值方法,暂且称之为“分段二次抛物样条插值法”,既能保证是单值的,又能够很方便地实现均匀点插值。同二次多项式插值法相比,此方法的光滑性和柔性更好。与三次样条插值法相比,该方法更简单,容易实现计算机编程,计算效率高^[7]。

4. 在希尔伯特-黄变换中的应用

对由下式给出的模拟信号依次进行经验模态分解和希尔伯特变换^[7], 分别得到 IMF 图。

$$x(t) = \sin(2\pi 80t) + \cos(2\pi 20t) \quad (12)$$

信号由一频率为 80HZ 的正弦信号和一频率为 20HZ 的余弦信号叠加而成,该信号最理想的分解效果应是两个 IMF 和一个趋势项, IMF1 就是正弦信号 $\sin(160\pi t)$, IMF2 是余弦信号 $\cos(40\pi t)$ 。对式(12)的模拟信号以 2560HZ 的采样频率进行采集,共采 8 个周期进行分析。原始信号波形如图 3 所示。

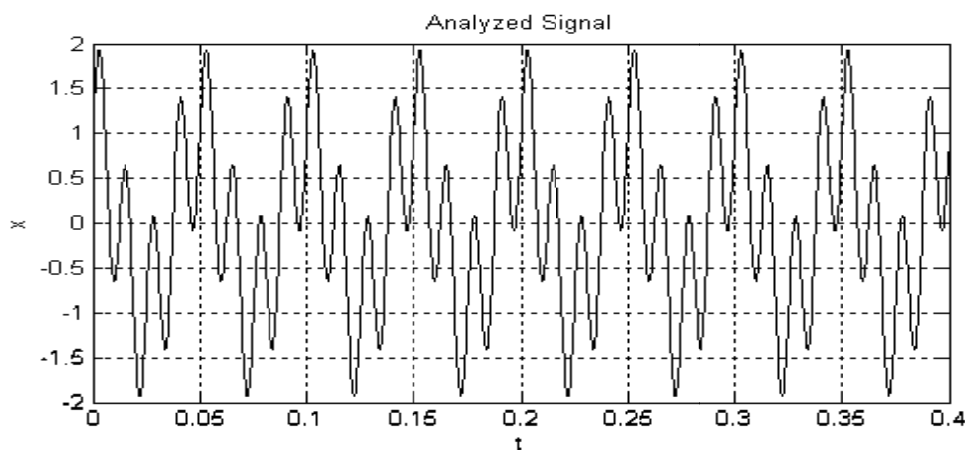


图 3 原始信号

Fig.3 Original signal

首先,采用分段二次抛物样条插值法,经 EMD 后,得到 5 个 IMF 和 1 个趋势项,如图 4(a)所示;而后采用三次样条插值法,经 EMD 后,得到 4 个 IMF 和 1 个趋势项,如图 4(b)所示。图形显示,采用三次样条插值法的分解效果稍好,因为三次样条函数具有二阶连续性,其光滑性要优于分段二次抛物样条函数。但分段二次抛物样条插值法计算所用时间为 0.52 秒,而三次样条差值法则需要 1.36 秒,分段二次抛物样条差值法的计算效率明显高于三次样条差值法。由图 4(a)和图 4(b)可以看出,其前两阶 IMF 几乎完全一致,都能与解析表达式(12)很好地对应,在希尔伯特-黄变换中采用分段二次抛物样条插值法,进行经验模态分解,效果还是比较理想的。另外,作者还采用了分段二次多项式插值法进行了试验比较,结果得到

92 个 IMF 和 1 个趋势项, 其分解效果远不如分段二次抛物样条插值法。

5. 结论

本文提出了一种新的二次样条插值方法—分段二次抛物样条插值法, 该方法是建立在抛物线参数样条曲线拟合原理的基础上, 因而具有很好的柔性和光滑性。同时, 通过构造一个二次多项式, 保证了插值函数的单值性, 并能很方便地进行均匀点插值。算例表明, 该方法应用到希尔伯特-黄变换中, 结果较为理想, 具有一定的参考和实用价值。这种新的二次样条插值法还有些问题需要进一步研究, 如怎样恰当选择辅助点、端点条件怎样确定以及在什么样的情况下适合采用此方法等。

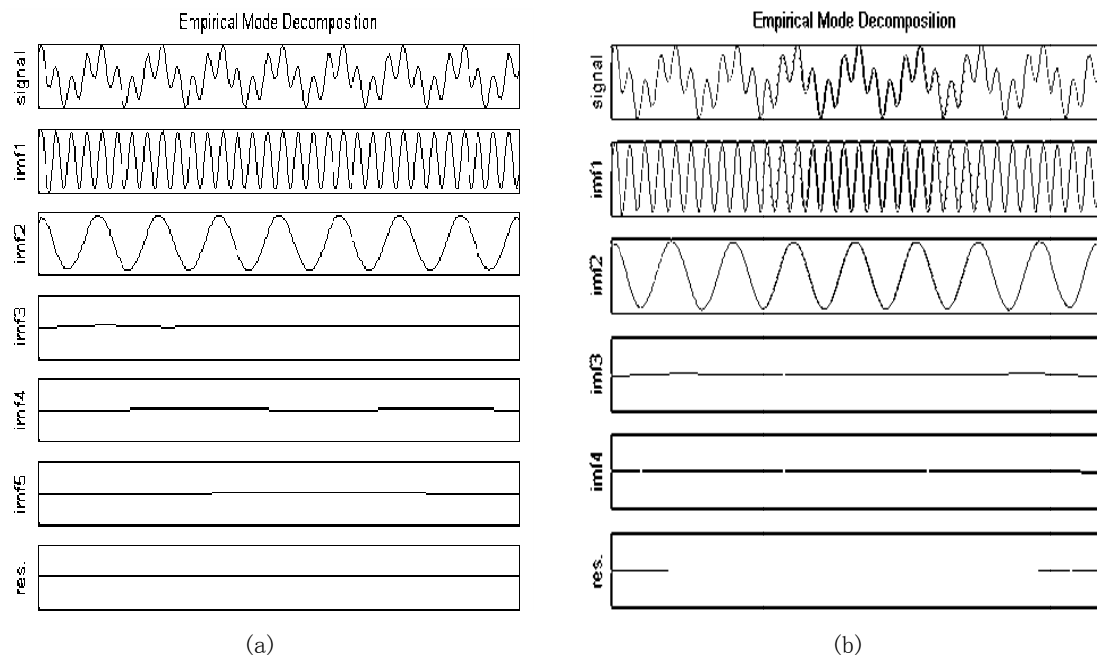


图 4 分解结果比较 (a) 分段二次抛物样条差值法 (b) 三次样条差值法

Fig.4 Comparison of EMD results (a) piecewise second parabola spline interpolation, (b) cubic spline interpolation

参考文献

- [1] N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, M. L. Wu, H. H. Shih, Q. Zheng, N. C. Yen, C. C. Tung and H. H. Liu. The empirical mode decomposition and Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis[C]. Proc. Roy. Soc. London A, Vol. 454, pp. 903-995, 1998.
- [2] P. Flandrin, G. Rilling and P. Goncalves, Empirical Mode Decomposition as a filter bank[J], IEEE Sig. Proc. Lett., 2003(in press)1-4.
- [3] James G H, Game T G, Lauffer J P, et al. The nature excitation technique (NExT) for modal parameter extraction from operating structures[J]. Modal Analysis, 1995, 10 (4) 260-277.
- [4] 陈隽, 徐幼麟. HHT 方法在结构模态参数识别中的应用[J]. 振动工程学报, 2003, 16 (3) 383-387
- [5] 罗奇峰, 石春香. Hilbert-Huang 变换理论及计算中的问题[J]. 同济大学学报, 2003, 31 (6) 640.
- [6] 钟佑明, 金涛, 秦树人. 希尔伯特-黄变换中的一种新包络线算法[J]. 数据采集与处理, 2005, 20 (1) 13-17.
- [7] 张永利, 李鸿晶. HHT 方法的有效性 & 误差分析[A]. 第 14 届全国结构工程学术会议论文集 (第一册) [C], 2005

Piecewise Second Parabola Spline Interpolation Method

Zhang Yongli

Department of Building Engineering , Tongji University , Shanghai 200092, China

Abstract

Hilbert-Huang Transform(HHT) composed of Empirical Mode Decomposition and Hilbert transform is one new signal processing method, the cubic spline interpolation is used in EMD, which is poor efficient, requiring many iterations. Therefore, based on the parabola parameter spline curve fitting, this article puts forward one new second spline interpolation method, namely piecewise second parabola spline interpolation method, and applies it to HHT, its result is compared with that by the cubic spline interpolation method. The example shows that this new interpolation method is with high efficiency, possessing good flexibility, smoothness and nonambiguity, and it is valuable.

Keywords: *signal analysis; parabola parameter spline curve; Empirical Mode Decomposition; Intrinsic Mode Function; Hilbert transform*

作者简介: 张永利, 男, 1982 年生, 博士研究生, 主要研究方向是地震损伤识别、近海风机支撑结构的设计与监测