結合振動子モデル

2 つの振動子 (左: L, 右: R の Motor neuron 集団の活動) の結合系を考える.

$$\frac{d\phi_L}{dt} = w_L + \Gamma_{LR}(\phi_R - \phi_L) + \xi_L(t), \tag{1}$$

$$\frac{d\phi_R}{dt} = w_R + \Gamma_{RL}(\phi_L - \phi_R) + \xi_R(t), \tag{2}$$

ただし, w_L, w_R は振動数, $\Gamma_{LR}(\Delta\phi)$, $\Gamma_{RL}(\Delta\phi)$ は結合関数, $\xi_L(t), \xi_R(t)$ は独立なガウシアンホワイトノイズである:

$$\begin{aligned} &\langle \xi_L(t) \rangle = \langle \xi_R(t) \rangle = 0, \\ &\langle \xi_L(t)\xi_L(s) \rangle = \sigma_L^2 \delta(t-s), \quad \langle \xi_R(t)\xi_R(s) \rangle = \sigma_R^2 \delta(t-s), \end{aligned} \tag{3}$$

ただし, $\delta(t)$ は Dirac のデルタ関数である. まずは, 単純な sin 結合系を仮定する:

$$\begin{aligned} \Gamma_{LR}(\Delta\phi) &= b_{LR} \sin(\Delta\phi). \\ \Gamma_{RL}(\Delta\phi) &= b_{RL} \sin(\Delta\phi). \end{aligned} \tag{4}$$

最尤推定

ここでの目的は, 2つの位相時系列 $\{\phi_L(0), \phi_L(h), \phi_L(2h), \cdots, \phi_L(Nh)\}$, $\{\phi_R(0), \phi_R(h), \phi_R(2h), \cdots, \phi_R(Nh)\}$ から6つのパラメータ $\{w_L, w_R; b_{LR}, b_{RL}; \sigma_L, \sigma_R\}$ を推定することである。ただし, h は計測サンプリング幅である。

h が十分小さければ, 式 (1), (2) を離散化できる (Euler-Maruyama 法):

$$\Delta\phi_{L,k} = \{w_L + b_{LR}\sin(\phi_{R,k} - \phi_{L,k})\}h + \sigma_L\sqrt{h}N_{L,k}, \tag{5}$$
$$\Delta\phi_{R,k} = \{w_R + b_{RL}\sin(\phi_{L,k} - \phi_{R,k})\}h + \sigma_R\sqrt{h}N_{R,k}, \tag{6}$$

ただし, $\phi_{L,k} := \phi_L(kh)$, $\phi_{R,k} := \phi_R(kh)$ は計測された位相,
$\Delta\phi_{L,k} := \phi_L((k+1)h) - \phi_L(kh)$, $\Delta\phi_{R,k} := \phi_R((k+1)h) - \phi_R(kh)$ はそれらの差分, $N_{L,k}$, $N_{R,k}$ は平均 0, 分散 1 の正規乱数[1] である。

最尤推定では, 確率モデルから計算される, 計測データが得られる確率 (尤度) が最大になるパラメータを推定値とする。確率モデル (5), (6) の場合の尤度は,

$$L := L_L \times L_R, \tag{7}$$

ただし, L_L, L_R は 式 (5), (6) から計算される尤度

$$\begin{aligned} L_L &= \prod_{k=0}^{N-1} p[\Delta\Phi_{L,k} = \Delta\phi_{L,k}] \\ &= \prod_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_L^2 h}} \exp\left[-\frac{(\Delta\phi_{L,k} - \{w_L + b_{LR}\sin(\phi_{R,k} - \phi_{L,k})\}h)^2}{2\sigma_L^2 h}\right], \end{aligned}$$

$$L_R = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_R^2 h}} \exp\left[-\frac{(\Delta\phi_{R,k} - \{w_R + b_{RL}\sin(\phi_{L,k} - \phi_{R,k})\}h)^2}{2\sigma_R^2 h}\right],$$

である。ただし, $\Delta\Phi_{L,k}$, $\Delta\Phi_{R,k}$ は確率変数である。

[1]位相は $\phi \in [0, 2\pi)$ で定義されるので, ノイズを位相用ガウス分布である von Mises-Fisher 分布 (ビショップ 2.8 節) にすると推定精度は良くなるかもしれない. ただし, 計算が面倒になるので後回し.

さらに, 尤度 (7) の対数を取る (対数尤度) と

$$\log L := l_L + l_R, \tag{8}$$

$$l_L = -\frac{N}{2}\log(\sigma_L^2) - \sum_{k=0}^{N-1}\frac{(\Delta\phi_{L,k} - \{w_L + b_{LR}\sin(\phi_{R,k}-\phi_{L,k})\}h)^2}{2\sigma_L^2 h} + \mathrm{const},$$

$$l_R = -\frac{N}{2}\log(\sigma_R^2) - \sum_{k=0}^{N-1}\frac{(\Delta\phi_{R,k} - \{w_R + b_{RL}\sin(\phi_{L,k}-\phi_{R,k})\}h)^2}{2\sigma_R^2 h} + \mathrm{const},$$

ただし, 推定パラメタは青字で示した。

式 (8) を見るとパラメタが分離しているので,
　l_L を最大化して 振動子 L のパラメタ $\{w_L, b_{LR}, \sigma_L^2\}$,
　l_R を最大化して 振動子 R のパラメタ $\{w_R, b_{RL}, \sigma_R^2\}$,
を推定すれば良いことがわかる。

偏微分がゼロになる点を求めることで, 推定値の公式を作る。振動子 L の場合,

$$\frac{\partial l_L}{\partial w_L} = 0, \frac{\partial l_L}{\partial b_{LR}} = 0$$

より, 連立方程式が得られる:

$$N\hat{w}_L + S_1\hat{b}_{LR} = h^{-1}\sum_{k=0}^{N-1}\Delta\phi_{L,k}, \tag{9}$$

$$S_1\hat{w}_L + S_2\hat{b}_{LR} = h^{-1}\sum_{k=0}^{N-1}\Delta\phi_{L,k}\sin(\phi_{R,k}-\phi_{L,k}), \tag{10}$$

ただし,

$$S_1 := \sum_{k=0}^{N-1}\sin(\phi_{R,k}-\phi_{L,k}), \quad S_2 := \sum_{k=0}^{N-1}\sin^2(\phi_{R,k}-\phi_{L,k}),$$

$\hat{w}_L$, $\hat{b}_{LR}$ は w_L, b_{LR} の最尤推定量である。連立方程式 (9), (10) を解いて $\hat{w}_L$, $\hat{b}_{LR}$ を求める。

また,

$$\frac{\partial l_L}{\partial \sigma_L^2} = 0,$$

より, σ_L^2 の最尤推定量についての公式が得られる

$$\hat{\sigma}_L^2 = \frac{1}{Nh} \sum_{k=0}^{N-1} \Big(\Delta\phi_{L,k} - \{\hat{w}_L + \hat{b}_{LR} \sin(\phi_{R,k} - \phi_{L,k})\} h \Big)^2 . \tag{11}$$

同様にして, パラメタ $\{w_R, b_{RL}, \sigma_R^2\}$ の最尤推定量の公式を作ることができる。

今後の予定

1. 適切なパラメータで 2 つの振動子モデル (1, 2) をシミュレーションし, 人工データを作成する.
2. 最尤推定を人工データに適用し, 十分データがあれば精度良く推定できることを確認.
3. 人工データを使い, A. 推定誤差の評価, B. 正確な推定には何周期必要か, を調べる.
4. sin 結合系 (4) は単純すぎるので, 高周波成分を入れたモデルに拡張. AIC などを使ってモデル選択する.
5. 再び, 人工データを使い, A. 推定誤差の評価, B. 正確な推定には何周期必要か, を調べる.
6. 実験データに適用してみる.