1.4 - MOSTRAR QUE DOIS GRAFOS SIMPLES SÃO ISOMORFOS SE E SOMENTE SE SEUS COMPLEMENTARES SÃO ISOMORFOS.

SEJA G UM GRAFO ISOMORFO A H, E SEJAM $\bar{G}$ E $\bar{H}$ OS COMPLEMENTOS DE G E H.

1. COMO G É ISOMORFO A H, $\exists f: V(G) \to V(H)$ TAL QUE
$uv \notin E(G)$ SSE $f(u)f(v) \notin E(H)$

2. $V(G)$ E $V(\bar{G})$ SÃO IGUAIS, f É UMA BIJEÇÃO DE $V(\bar{G})$ P/ $V(\bar{H})$
$uv \notin E(G) \to uv \in E(\bar{G})$. $f(u)f(v) \notin E(H) \to f(u)f(v) \in E(\bar{H})$

$\Rightarrow \bar{G}$ E $\bar{H}$ SÃO ISOMORFOS.

1.8

Mostre que a união de dois caminhos disjuntos (que não têm aresta em comum) entre dois vértices resulta em um ciclo.

P_1 e P_2

SÃO DISJUNTOS.

1.9 - PROVE QUE UM GRAFO É BIPARTIDO SSE TODOS OS SEUS CICLOS TIVEREM COMPRIMENTO PAR.

$\hookrightarrow p \longleftrightarrow q \begin{cases} p \longrightarrow q \\ q \longrightarrow p \end{cases}$

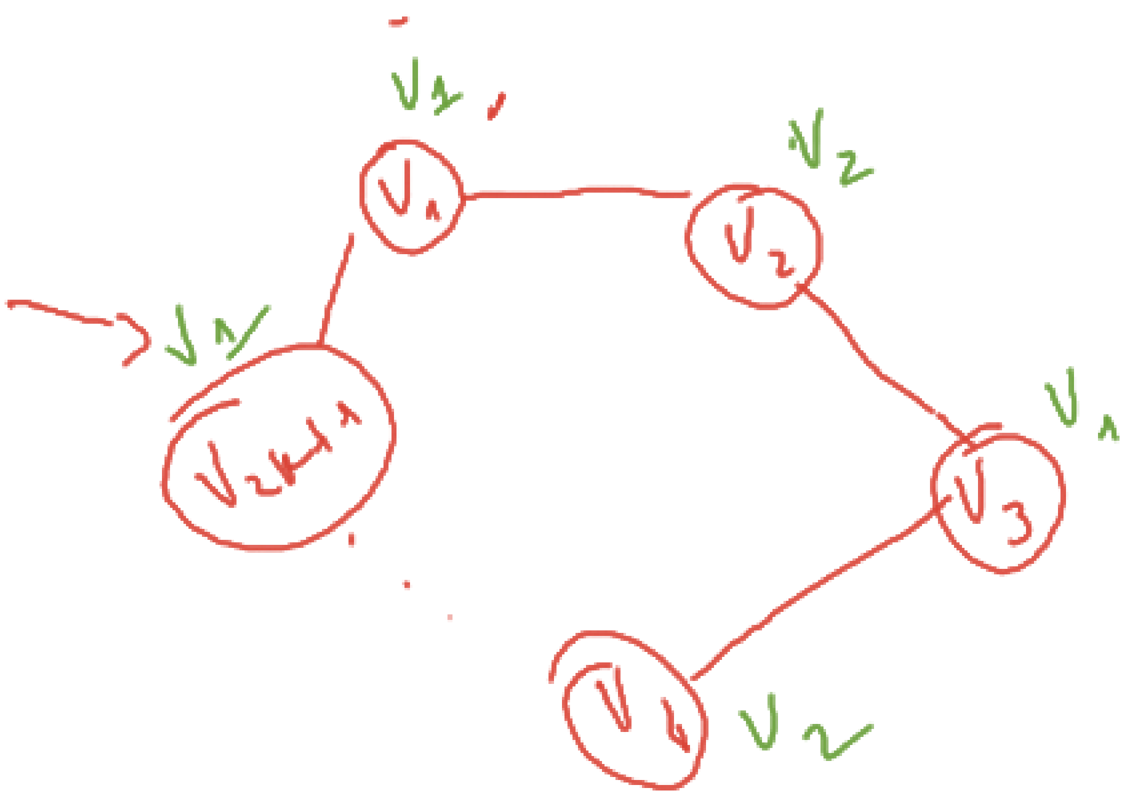
i) SE G É BIPARTIDO, ENTÃO TODOS OS CICLOS TEM COMPRIMENTO PAR.

ii) SE TODOS OS CICLOS EM UM GRAFO G TIVEREM COMPRIMENTO PAR, ENTÃO G É BIPARTIDO.

1.9 - PROVE QUE UM GRAFO É BIPARTIDO SSE TODOS OS SEUS CICLOS TIVEREM COMPRIMENTO PAR.

i) SE G É BIPARTIDO, ENTÃO TODOS OS CICLOS TEM COMPRIMENTO PAR.

SUPOR G BIPARTIDO COM CICLO C, DE COMPRIMENTO ÍMPAR. COMO C É SUBGRAFO DE G, C TAMBÉM É BIPARTIDO. NO ENTANTO, C NÃO PODE SER BIPARTIDO, POIS TEM COMPRIMENTO ÍMPAR (CONTRADIÇÃO!). PORTANTO, G NÃO TEM CICLOS DE COMPRIMENTO ÍMPAR.



1.9 - PROVE QUE UM GRAFO É BIPARTIDO SSE TODOS OS SEUS CICLOS TIVEREM COMPRIMENTO PAR.

i) SE TODOS OS CICLOS EM UM GRAFO G TIVEREM COMPRIMENTO PAR, ENTÃO G É BIPARTIDO.

1. $d(v,u)$: TAMANHO DO MENOR CAMINHO ENTRE u E v

2. A IDEIA É DIVIDIR V EM DOIS CONJUNTOS A E B.

$A = \{u\} \cup \{w \in V \mid d(u,w) \text{ é par}\}$

$B = V \setminus A$

3. A SUPOSIÇÃO É QUE A PARTIÇÃO $V = A \cup B$ MOSTRA QUE G É BIPARTIDO.

NECESSÁRIO MOSTRAR QUE 3. É VERDADE!

4. UM CAMINHO SERIA POR CONTRADIÇÃO ASSUMINDO QUE $\exists\, v, w \in A$ COM $v, w \in A$ (OU B).

1.9 - PROVE QUE UM GRAFO É BIPARTIDO SSE TODOS OS SEUS CICLOS TIVEREM COMPRIMENTO PAR.

i) SE TODOS OS CICLOS EM UM GRAFO G TIVEREM COMPRIMENTO PAR, ENTÃO G É BIPARTIDO.

5. $d(u,w)$ E $d(u,v)$ SÃO PARES (OU ÍMPARES)

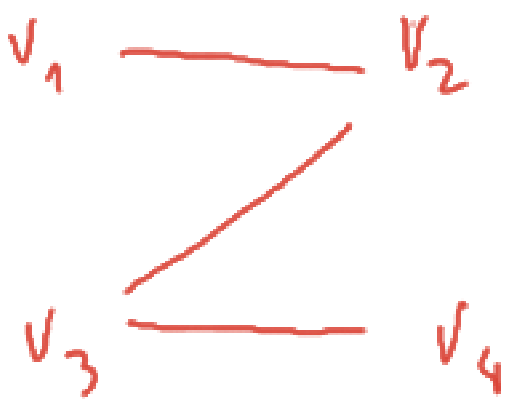
6. P_{uw} E P_{vu} : CAMINHOS MAIS CURTOS ENTRE u E w E v E u.

7. CICLO DADO POR $P_{uw}, \{w,v\}, P_{vu}$ TEM COMPRIMENTO $1 + d(u,w) + d(u,v)$ (VALOR ÍMPAR) $\rightarrow$ CONTRADIÇÃO

$\Rightarrow (w,v)$ NÃO PODE EXISTIR E G É BIPARTIDO.

1.10

Um grafo é autocomplementar se ele é isomorfo ao seu grafo complemento G. Apresente um exemplo de grafo autocomplementar, justificando sua resposta.



1.11

Prove que uma aresta "e" de um grafo conexo G é uma ponte se e somente se existem vértices u e w tais que "e" está em todo caminho u-w em G.

G É CONEXO

ARESTA e É UMA PONTE

∀ CAMINHO p ENTRE u E v, e ∈ p

u — .... e .... — v

I) SE UMA ARESTA e É UMA PONTE, ENTÃO EXISTEM u E v TAL QUE e ESTÁ EM TODOS OS CAMINHOS ENTRE u E v.

II) SE EXISTEM u E w TAL QUE e ESTÁ EM TODOS OS CAMINHOS ENTRE u E v, ENTÃO e É UMA PONTE.

1.12 - PROVE QUE UMA ARESTA DE UM GRAFO CONEXO G É UMA PONTE SSE ELA NÃO ESTÁ EM QUALQUER CICLO DE G.

i) SE É UMA PONTE, ENTÃO ELA NÃO ESTÁ EM QUALQUER CICLO DO GRAFO.

DICA: POR CONTRADIÇÃO -> ASSUMIR e PONTE E ESTÁ EM CICLO.

ii) SE UMA ARESTA NÃO PERTENCE A UM CICLO, ENTÃO É UMA PONTE.

COMO e NÃO ESTÁ EM UM CICLO, NÃO EXISTE OUTRO CAMINHO CONECTANDO DOIS VÉRTICES u E v EM UM CAMINHO, DO CONTRÁRIO e ESTARIA EM UM CICLO. LOGO, A REMOÇÃO DE e CAUSA A DESCONEXÃO DE u E v, LOGO e É UMA PONTE.

1.13

Sendo o grafo G um grafo bipartido, o que se pode concluir sobre o seu grafo complemento? Prove que o grafo complementar de um grafo bipartido completo não é conexo.

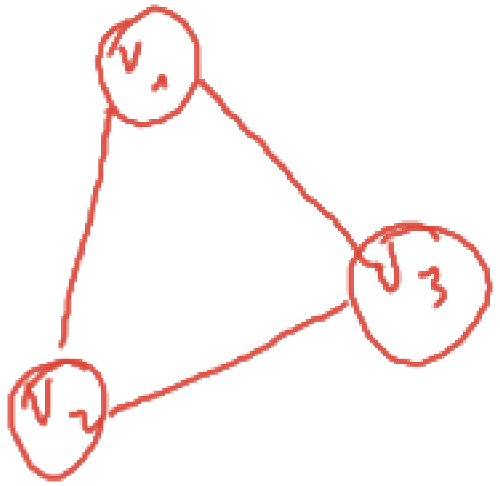
i) SE $K_{m,n}$ É COMPLETO, ENTÃO O COMPLEMENTO É DESCONEXO E FORMA K_m E K_n COMO SUBGRAFOS.

1.15. PROVE QUE UM GRAFO SIMPLES G E SEU COMPLEMENTAR NÃO PODEM SER AMBOS DESCONEXOS.

SE $\bar{G}$ (COMPLEMENTAR DE G) É DESCONEXO, ENTÃO EXISTE UM PARTICIONAMENTO DE VÉRTICES EM DOIS CONJUNTOS DISJUNTOS V_1 E V_2 TAL QUE $\forall u \in V_1$ E $w \in V_2$, $(u, w) \notin \bar{E}$. POR OUTRO LADO, ISSO INDICA QUE $\forall u \in V_1$ E $w \in V_2$, $(u, w) \in E$. LOGO G É CONEXO.

1.16 - É POSSÍVEL UM GRAFO BIPARTIDO POSSUIR K_3 COMO SUBGRAFO?

K_3



NÃO!

CICLO DE TAMANHO ÍMPAR

1.10

Demonstre que o complemento de um grafo bipartido não é necessariamente bipartido.

$K_{3,3}$

$\overline{K}_{3,3}$ NÃO É BIPARTIDO.

1.24

É verdadeira a afirmação, que dois grafos isomorfos possuem a mesma sequência de graus em seus vértices? Se dois grafos possuem a mesma sequência de graus, são obrigatoriamente isomorfos?

a) sim

b) não

1.34 - MOSTRE QUE UM SUBGRAFO DE UM GRAFO BIPARTIDO É SEMPRE BIPARTIDO.

UM SUBGRAFO H DE G É UM GRAFO TAL QUE $V(H) \subseteq V(G)$ E $A(H) \subseteq A(G)$.

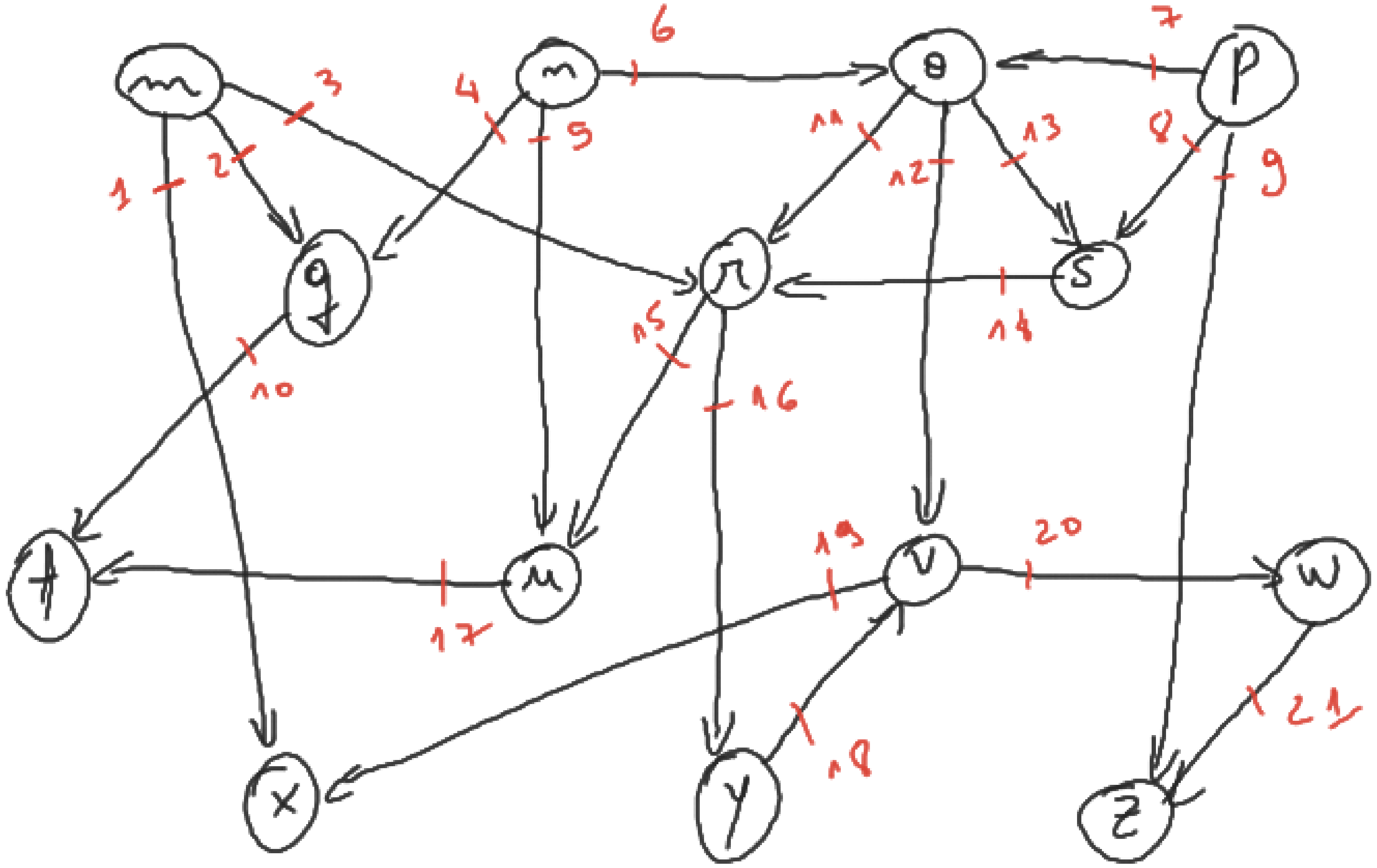
i) SE G É BIPARTIDO, SEJAM X E Y AS PARTIÇÕES DE VÉRTICES.

ii) SEJA $X' = X \cap H$ E $Y' = Y \cap H$. SUPOR QUE X' E Y' NÃO É UMA BIPARTIÇÃO VÁLIDA, i.e, $\exists$ v E u EM X' ADJACENTES. POR OUTRO LADO, PELA DEFINIÇÃO DE SUBGRAFO, v E u TAMBÉM SERIAM ADJACENTES EM G. PORTANTO, X E Y NÃO SERIA UMA BIPARTIÇÃO VÁLIDA

$\Rightarrow$ PORTANTO, H É UM GRAFO BIPARTIDO.

2.

KAHN



ORDENAÇÃO

$L = \{m, n, p, q, o, s, r, u, y, t, v, x, w, z\}$

$S = \{\cancel{m}, \cancel{n}, \cancel{p}, \cancel{q}, \cancel{o}, \cancel{s}, \cancel{r}, \cancel{u}, \cancel{y}, \cancel{t}, \cancel{v}, \cancel{x}, \cancel{w}, \cancel{z}\}$