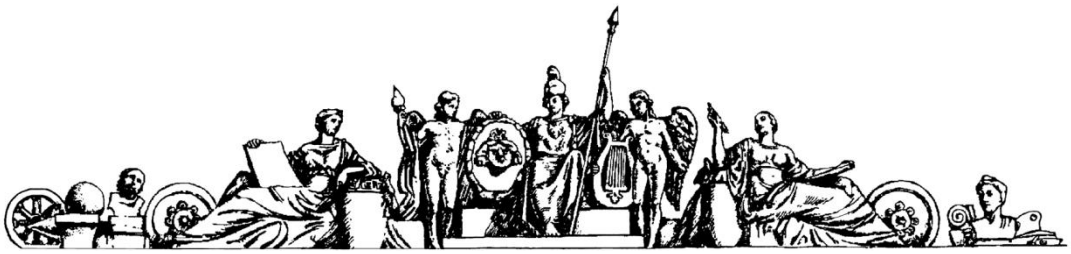


Министерство образования Российской Федерации
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н.Э. БАУМАНА

Факультет: Информатика и системы управления

Вариант №12

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ:

По дисциплине «Алгоритмы и структуры данных»

Студент: Сидоров А.А.
Группа: ИУ8-53

Москва 2016

1. Структуры данных

1.1. Хэш-таблица

Краткая справка:

Идея хэширования возникла примерно в одно и то же время в разных местах мира независимо друг от друга. В январе 1953 года Г. П. Лун написал внутренний меморандум IBM, использовавший хеширование с цепочками. Примерно в это же время Джин Амдал, Элейн МакГроу, Натаниэль Рочестер и Артур Самуэль разработали программу, использующую хэширование. Разработка открытой адресации с линейным пробированием приписывается Амдалу, но у советского академика А.П.Ершова была та же идея.

Главное преимущество хэш-таблицы, по сравнению с другими табличными структурами данных, - скорость. Это преимущество оказывается более заметным, если число записей велико. Хэш-таблицы особенно эффективны, когда максимальное количество записей можно предсказать заранее, так что память под массив можно выделить один раз с оптимальным размером и впоследствии не изменять.

Также преимуществом является то, что временная сложность в среднем на операции вставки, поиска, удаления составляет O(1).

Варианты применения:

1. Ассоциативные массивы.

2. Индексация баз данных. Хэш-таблицы могут использоваться в качестве индексов баз данных и в качестве дисковой структуры данных, несмотря на то, что B-деревья более популярны в этом направлении. В многоузловых системах баз данных хэш-таблицы обычно используются для распределения строк между узлами, тем самым снижая сетевой трафик, расходуемый на алгоритм соединения хэшированием.

3. Кэш. При реализации кэша через хэш-таблицы коллизии могут быть обработаны путем отбрасывания одного из двух элементов, претендующих на одну и ту же ячейку; обычно стирают элемент, в

данный момент находящийся в таблице, и перезаписывают его в другую ячейку, а новый элемент записывают на бывшее место перезаписанного элемента.

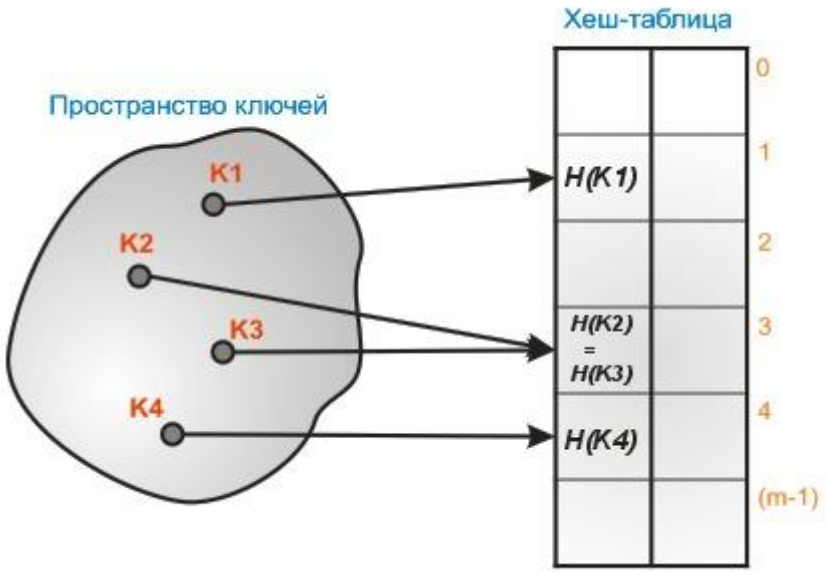
4. Представление объектов. Некоторые динамические языки программирования, такие как Perl, Python, JavaScript, используют хэш-таблицы для реализации объектов: ключи – это имена полей и методов, а значения – указатели на соответствующие поля и методы.

Описание:

Хэш-таблица — структура данных, реализующая интерфейс ассоциативного массива; является одним из наиболее эффективных способов реализации словаря.

Словарь – тип данных, позволяющий хранить пары ключ-значение (key-value).

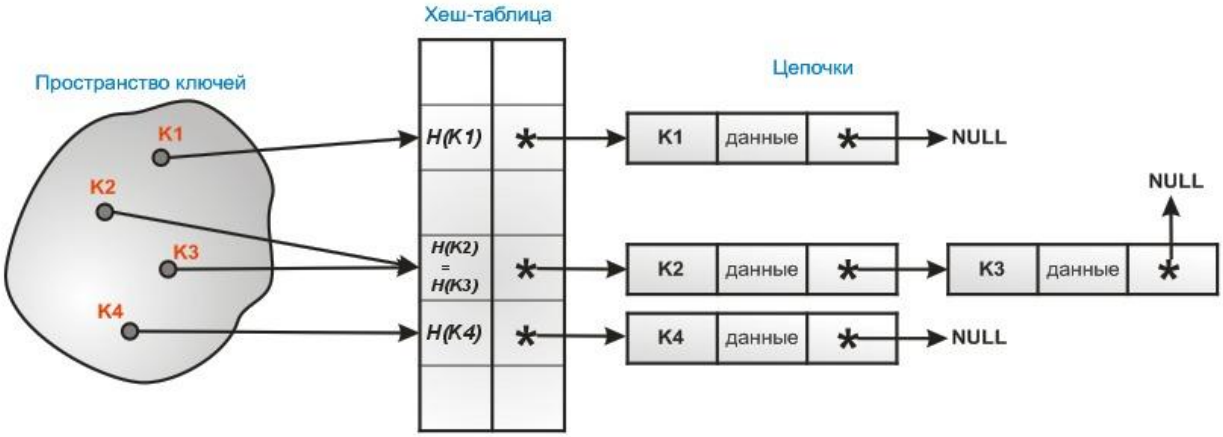
Индекс ключа в хэш-таблице определяется значением хэш-функции H от значения ключа K_i.



Как видно из рисунка размер массива хэш-таблицы равняется m. Вследствие этого может возникать ситуация, когда два значения хэш-функции от разных ключей могут определяться в одну и ту же ячейку. Такая

ситуация называется коллизией. Существует два способа разрешения коллизий: метод цепочек и открытая адресация.

В случае метода цепочек элементы, хэшированные в одну и ту же ячейку, объединяются в связный список, причем каждый новый элемент в этом списке добавляется в голову списка, т.к. операция занимает время O(1).



В случае метода открытой адресации все элементы хранятся в хэш-таблице. Недостатком служит то, что может возникнуть ситуация, когда таблица полностью заполнится, и новые элементы будет некуда добавлять. Решением данной проблемы может служить динамическое увеличение размера хэш-таблицы с одновременной ее перестройкой.

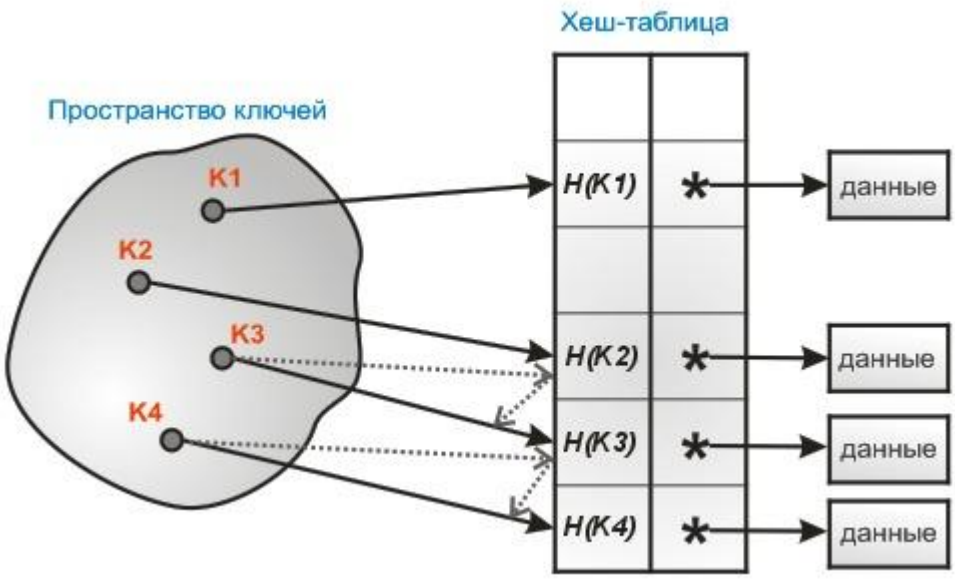
Для разрешения коллизий применяется несколько подходов: линейный, квадратичный, двойное хэширование. Индексы для элементов вычисляются следующим образом:

Линейный: $(h(x) + k*i) \bmod m$;

Квадратичный: $(h(x) + k*i^2 + n*i) \bmod m$;

Двойное хэширование: $(h_1(x) + i*h_2(x)) \bmod m$;

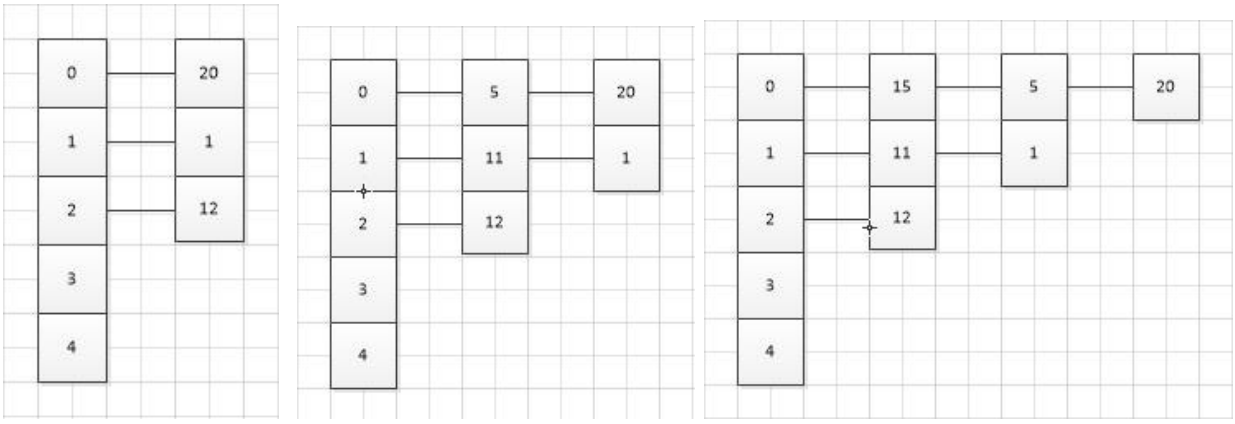
где $h(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$ – функции хэширования; i – счетчик попыток (изначально равен 0, в случае, если ячейка занята, увеличивается каждый раз на единицу); m – размер хэш-таблицы; k, n – некоторые коэффициенты.



Операции в хэш-таблице с цепочками.

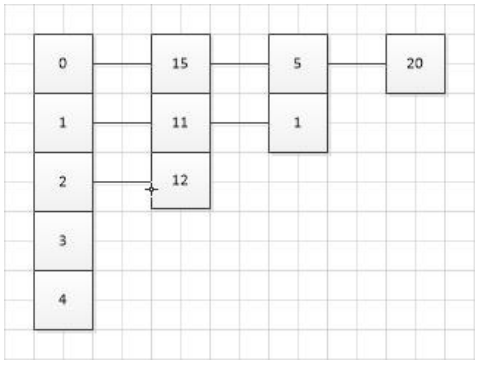
Добавление элемента: добавляем элемент k в голову списка, хранящегося в ячейке H(k). Сложность O(1).

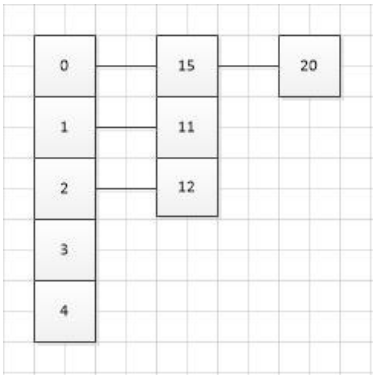
Пример: добавить в таблицу элементы с ключами 20, 1, 12, 5, 11, 15; функция хэширования имеет вид h(x) = key mod m, m = 5.



Удаление элемента: удаляем элемент k из списка, хранящегося в ячейке H(k), если он там есть. Сложность O(1+ α), где α = n/m – коэффициент заполнения таблицы, n – количество элементов в таблице.

Пример: из заполненной таблицы из первого примера удалить элементы с ключом 5, 1.

До удаления: 

После удаления: 

Поиск элемента: ищем ключ k в списке, хранящемся в ячейке H(k). Сложность O(1+ α), где α = n/m – коэффициент заполнения таблицы, n – количество элементов в таблице.

Получение минимального/максимального элемента: ищем во всех списках хэш-таблицы минимальный/максимальный элемент. Сложность O(n).

Типовые сценарии использования:

Хэш-таблица представляет собой эффективную структуру данных для реализации словарей. Хотя на поиск элемента в хэш-таблице может в наихудшем случае потребоваться столько же времени, что и в связном списке, на практике хэширование исключительно эффективно. Среднее значение сложности при операции поиска составляет O(1), такая же средняя сложность и при операциях добавления и удаления.

Скорость работы структуры данных – п.4.

1.2. Отсортированный массив

Краткая справка:

Джон фон Нейман написал первую программу сортировки массива (сортировка слиянием) в 1945 году. В то время первая вычислительная машина с хранимой в памяти программой находилась еще на стадии разработки.

Отсортированные массивы являются наиболее пространственно-эффективной структурой данных с лучшей локализацией ссылок для последовательно хранимых данных.

Элементы в отсортированном массиве можно искать алгоритмом бинарного поиска, сложность которого O(log n), таким образом, такие массивы подходят для случаев, когда необходим быстрый поиск среди элементов. Сложность поиска для отсортированного массива такая же, как у самобалансирующихся двоичных деревьев поиска.

В некоторых структурах данных может использоваться массив структур. В таких случаях те же алгоритмы сортировки могут быть использованы и для сортировки этих структур: упорядочивание происходит по некоторому ключу, характеризующего структурный элемент. К примеру, сортировка информации о студентах по ключу в виде среднего балла.

Варианты применения:

1.Компьютерная графика. Упорядоченные массивы используются для хранения графических объектов в порядке их отображения на картинную плоскость.

2. Дискретная математика. Отсортированные массивы могут быть использованы для реализации алгоритма Дейкстры или алгоритм Прима, а также для алгоритма Крускала для нахождения минимального остовного дерева.

3. Массивы могут применяться для представления *математических векторов и матриц.*

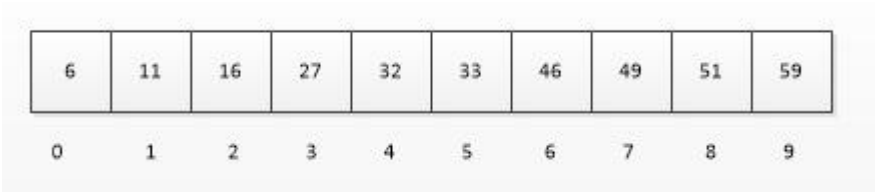
4. Массивы могут использоваться для представления других структур данных: список, куча, стек, очередь, строковый тип и др.

5. Порядок выполнения команд в программе: в этом понятии массив известен как управляющая таблица, которая работа в сочетании со специально разработанным интерпретатором.

Описание:

Массив — структура данных в виде набора компонентов (элементов массива), расположенных в памяти непосредственно друг за другом. При этом доступ к отдельным элементам массива осуществляется с помощью индексации, то есть через ссылку на массив с указанием номера (*индекса*) нужного элемента. За счёт этого, в отличие от списка, массив является структурой данных, пригодной для осуществления произвольного доступа к её ячейкам.

В отсортированном массиве элементы идут друг за другом в порядке возрастания/убывания; поиск происходит быстрее, чем в неотсортированном массиве, но увеличивается среднее время добавления и удаления элементов.



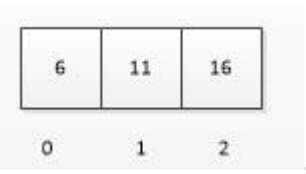
Операции в отсортированном массиве (по возрастанию):

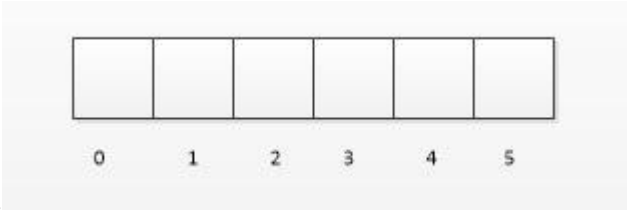
Добавление элемента: если в массиве количество элементов равно размеру массива, выделяем новую область памяти, равную размеру предыдущего массива, умноженного на коэффициент k (обычно берут k = 2), копируем старый массив в новую область памяти, освобождаем старую область; находим место для нового элемента, сдвигаем оставшиеся элементы массива вправо на одну позицию, в освободившееся место вставляем новый элемент.

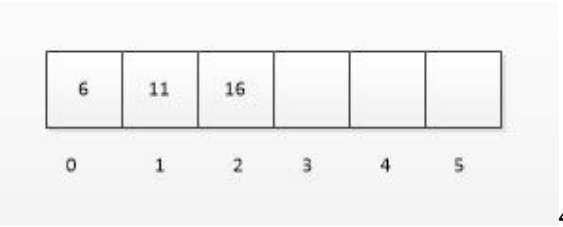
Сложность создания нового массива O(n), сложность вставки O(n).

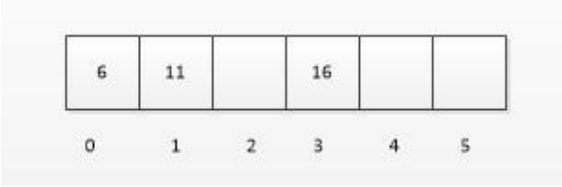
Дополнительное использование памяти O(n) в случае расширения массива.

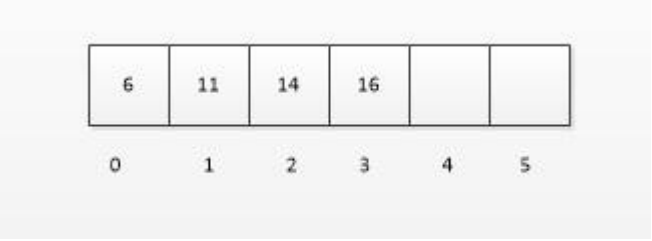
Пример: добавить в упорядоченный массив [6, 11, 16] размера 3 элемент 14.

1. 

2. 

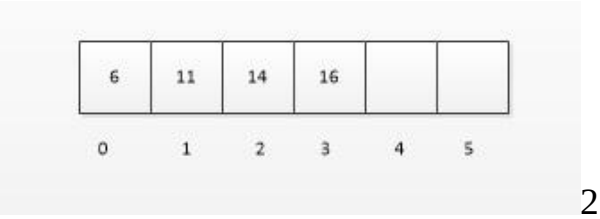
3. 

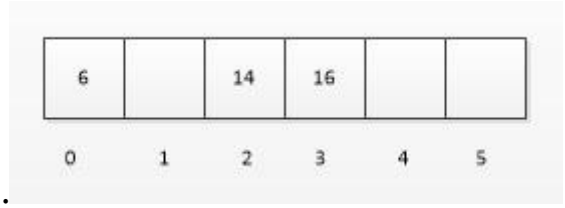
4. 

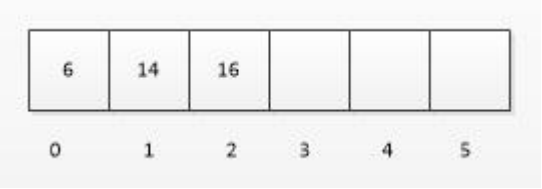
5. 

Удаление элемента: ищем элемент в массиве, если он есть, удаляем его и сдвигаем оставшуюся правую часть массива влево. Сложность O(n).

Пример: удалить из массива предыдущего примера элемент 11.

1. 

2. 

3. 

Поиск элемента: ищем элемент по ключу методом бинарного поиска. Сложность O(log n).

Получение максимального/минимального элемента: возвращаем элемент из ячейки 0/size-1. Сложность O(1).

Типовые сценарии использования:

Упорядоченные массивы стоит применять, когда операции вставки и удаления производятся достаточно редко (исключение – добавление или удаление из конца). Упорядоченность дает возможность быстро просматривать элементы массива в поиске необходимого при помощи алгоритма бинарного поиска. За константное время можно получить доступ к минимальному или максимальному элементу.

Скорость работы структуры данных – п.4.

1.3. Двоичное дерево поиска

Краткая справка:

Двоичные деревья поиска были разработаны в трудах следующих людей: Дуглас (1959), Виндли(1960), Бут(1960), Колин(1960), Хиббард(1962).

Основным преимуществом двоичного дерева поиска перед другими структурами данных является возможная высокая эффективность реализации основанных на нём алгоритмов поиска и сортировки.

Варианты применения:

1.Сортировка. Двоичное дерево поиска может использоваться для реализации алгоритма сортировки. Схоже с пирамидальной сортировкой нужно вставлять значения, которые мы хотим отсортировать, в новую упорядоченную структуру данных – в этом случае, в двоичное дерево поиска – и затем обойти его по порядку.

2. Могут применяться для *поиска данных в базах данных*.

3. Операции приоритетных очередей. Двоичные деревья поиска могут служить в качестве приоритетных очередей: структур, которые позволяют вставлять элемент с произвольным ключом, а также поиск и удаление элемента с максимальным (минимальным) значением ключа.

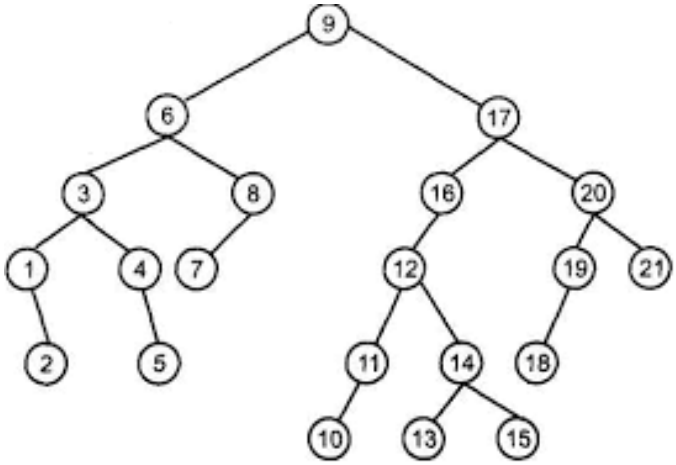
Также двоичное дерево поиска применяется для построения более абстрактных структур данных, таких как множества, мультимножества, ассоциативные массивы. Более сложные применения включают в себя ropes, различные алгоритмы вычислительной геометрии в основном в алгоритмах на основе «сканирующей прямой».

Описание:

Двоичное дерево – конечное множество вершин, которое либо пусто, либо состоит из корневой вершины, имеющей 2 ребенка – левого и правого, являющихся двоичными деревьями.

Вершина – запись, имеющая следующие поля: ключ, левый ребенок, правый ребенок, родитель, данные.

Основное свойство двоичного дерева поиска: если вершина v принадлежит левому поддереву вершины u, то v.key < u.key, если вершина w принадлежит правому поддереву вершины u, то w.key >= u.key.



Основные операции в двоичном дереве поиска:

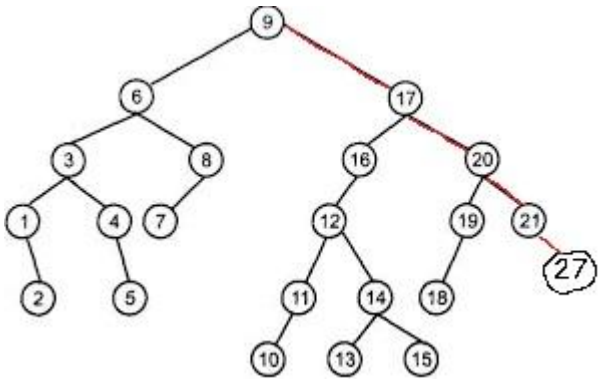
Добавление элемента: если дерево пустое, то добавляемый элемент объявляем корнем дерева, иначе выполняется цикл(пока не обнаружится у текущей вершины отсутствия ребенка) сравнения значения ключа добавляемого элемента со значением ключа текущей вершины:

а) ключ добавляемого элемента больше – правого ребенка текущей вершины объявляем новой текущей вершиной;

б) ключ добавляемого элемента меньше – левого ребенка текущей вершины объявляем новой текущей вершиной;

В случае обнаружения у текущей вершины отсутствия ребенка подвешиваем добавляемый элемент к текущей вершине в соответствии с основным свойством двоичного дерева поиска. Сложность O(h), h – высота дерева.

Пример: добавить элемент 27 к дереву, изображенному в начале главы.



Удаление элемента: проверяем у удаляемой вершины наличие дочерних вершин:

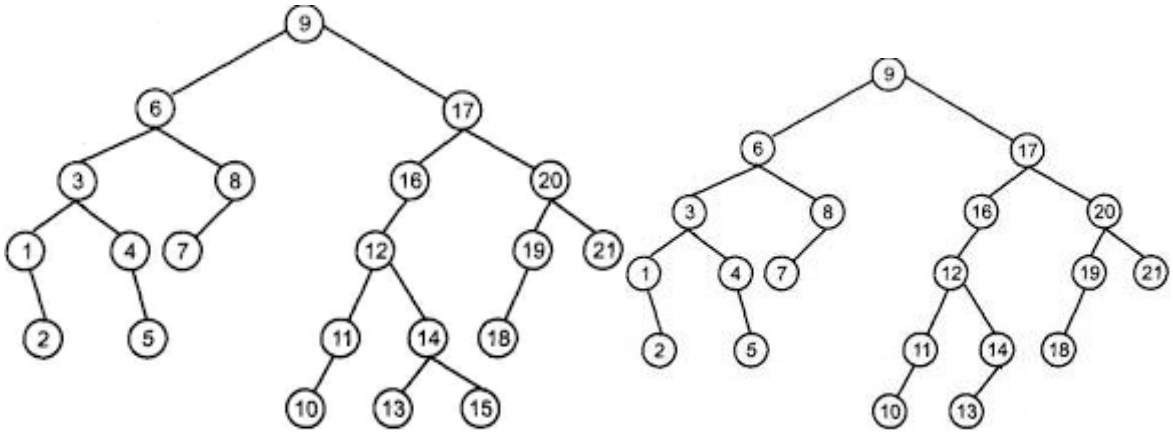
а) присутствуют оба ребенка – ищем последующий элемент за удаляемой вершиной, удаляемую вершину заменяем найденной последующей, а правого ребенка последующей вершины (если он есть) подвешиваем на старое место родителя;

б) присутствует один ребенок – в качестве родителя у ребенка удаляемого элемента указываем родителя удаляемого родителя, а у родителя удаляемого элемента в качестве ребенка с той же стороны указываем ребенка удаляемого элемента;

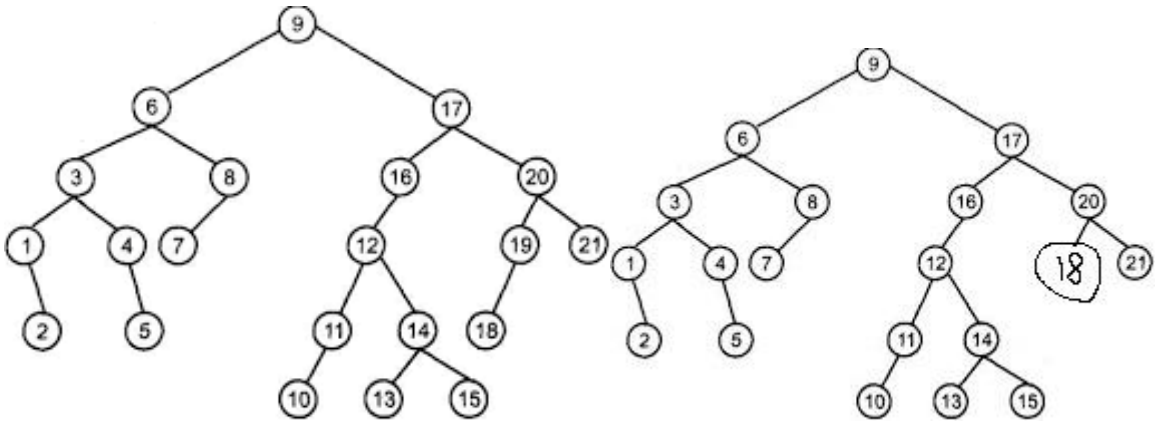
в) у вершины нет дочерних узлов – обнуляем указатель на ребенка у родителя удаляемого элемента; Сложность O(h), h – высота дерева.

Пример: удалить отдельно на каждом дереве, изображенном в начале главы, элемент 15/19/ 12.

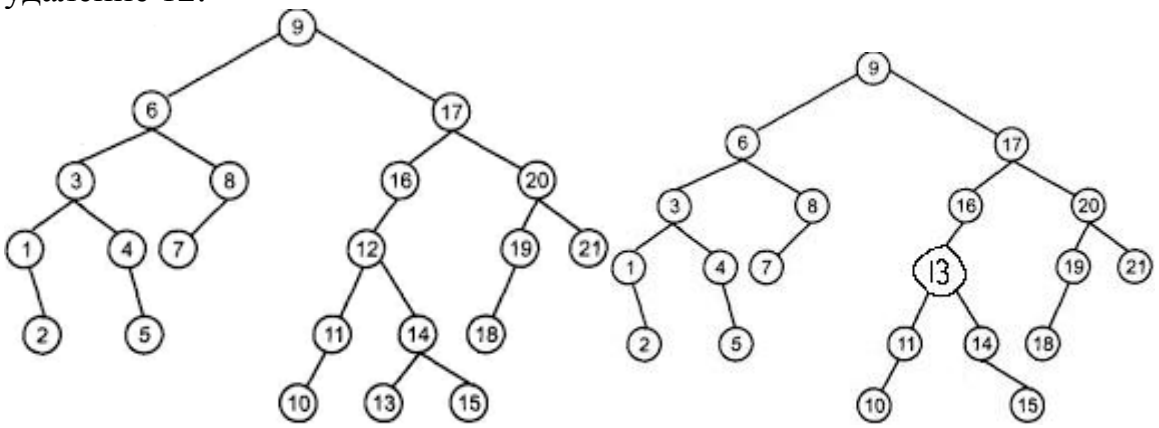
удаление 15:



удаление 19:



удаление 12:



Поиск элемента: сравниваем искомый ключ со значением ключа текущей вершины:

а) если они совпадают или вершина отсутствует, возвращаем текущую вершину(null в случае отсутствия);

б) если искомый ключ больше ключа текущей вершины, то вызываем рекурсивно функцию поиска для правого ребенка текущей вершины

в) если искомый ключ меньше ключа текущей вершины, то вызываем рекурсивно функцию поиска для левого ребенка текущей вершины.

Сложность O(h), h – высота дерева.

Поиск максимального/минимального элемента: опускаемся вниз по дереву по правым/левым дочерним вершинам, пока они есть; последняя вершина и будет максимальной/минимальной.

Сложность O(h), h – высота дерева.

Типовые сценарии использования:

Двоичное дерево поиска – частный случай обычных деревьев, созданный для ускорения поиска за счет того, что при поиске элемента нужно просмотреть не все дерево, а лишь его часть. Все операции с двоичным деревом поиска зависят от высоты дерева. Поэтому основной проблемой использования данной структуры является то, что операции добавления и удаления не способствуют оптимизации сложности выполнения всех операций из-за отсутствия балансировки. Например, при добавлении в ДДП упорядоченного набора данных, то структура превращается в линейный список и сложность операций возрастает до O(n). Однако, при заполнении ДДП случайными данными, математическое ожидание высоты составляет O(log n), поэтому при комплексных работах с произвольным набором данных можно использовать двоичное дерево поиска.

Скорость работы структуры данных – п.4.

2. Описание формата входных и выходных данных.

Входными данными является набор команд, представляющих собой набор строк вида

command [key] [value]

command – исполняемая команда:

add [key] [value] – добавление элемента с заданным ключом и значением

delete [key] – удаление по ключу

search [key] – поиск по ключу

min/max – поиск минимума/максимума

print – вывод структур данных

Выходными данными является сообщение об успешном/неудачном выполнении команды, в случае успеха выводится результат и время выполнения команды.

Команда print отражает строение структур данных: хэш-таблица выводится в форме набора строк, каждая строка представляет собой ячейку хэш-таблицы и список элементов, хранящийся в ней; отсортированный массив – строка элементов; двоичное дерево поиска – последовательность элементов, соответствующая обхода дерева в ширину, у каждого элемента указан левый и правый потомок.

Входные и выходные данные находятся в файлах, пути к которым задаются через командную строку при запуске программы.

3. Тестирование

3.1 Проверка входных/выходных данных, правильности результатов работы

3.1.1 Инструкция к тестирующему ПО.

После запуска тестирующей программы необходимо ввести пути к:

1. исполняемому файлу тестируемой программы;
2. директории с набором тестов;
3. директории, в которую будут помещены файлы с результатами работы;
4. директории с файлами с верными результатами;

В результате выполнения тестирующая программа выдаст сообщение о верном/неверном выполнении тестового набора команд.

3.1.2 Описание тестов

1. проверка работы программы при некорректных входных данных;
2. проверка работы программы при добавлении элементов;
3. проверка работы программы при удалении элементов;
4. проверка работы программы при поиске элементов;
5. проверка работы программы при поиске минимума/максимума элементов;

3.2 Юнит-тестирование

Для написания юнит-тестов использовалась библиотека Google C++ Testing Framework.

3.2.1 Описание тестов

В скобках указываются названия тестов в коде тестирующего проекта.

Отсортированный массив (файл SortedArrayTest.cpp):

1. проверка корректности работы алгоритма при добавлении элемента в пустой массив (AddInEmtyArray);
2. проверка корректности работы алгоритма при добавлении элемента в начало массива(AddInBegin);

3. проверка корректности работы алгоритма при добавлении элемента в конец массива (AddInEnd);
4. проверка корректности работы алгоритма при добавлении элемента в некрайние позиции массива (AddInMid);
5. проверка корректности работы алгоритма при удалении несуществующего элемента (NotFoundToBeDeleted);
6. проверка корректности работы алгоритма при удалении из пустого массива (DeleteFromEmpty);
7. проверка корректности работы алгоритма при удалении из начала массива (DeleteFromBegin);
8. проверка корректности работы алгоритма при удалении из конца массива (DeleteFromEnd);
9. проверка корректности работы алгоритма при удалении из некрайних позиций массива (DeleteFromMid);
10. проверка корректности работы алгоритма при поиске несуществующего элемента (NotFound);
11. проверка корректности работы алгоритма при поиске в пустом массиве (SearchInEmpty);
12. проверка корректности работы алгоритма при поиске элемента, находящегося в начале массива (SearchBegin);
13. проверка корректности работы алгоритма при поиске элемента, находящегося в конце массива (SearchEnd);
14. проверка корректности работы алгоритма при поиске элемента, находящегося в некрайних позициях массива (SearchMid);
15. проверка корректности работы алгоритма при поиске минимума в пустом массиве (SearchMin);
16. проверка корректности работы алгоритма при поиске минимума в массиве (SearchMaxInEmpty);
17. проверка корректности работы алгоритма при поиске максимума в пустом массиве (SearchMaxInEmpty);

18. проверка корректности работы алгоритма при поиске максимума в массиве (SearchMax);

Хэш-таблица (файл HashTableTest.cpp):

1. проверка корректности работы алгоритма при добавлении элемента в ячейку хэш-таблицы с пустым списком (AddInEmptyList);
2. проверка корректности работы алгоритма при добавлении элемента в ячейку хэш-таблицы с непустым списком (AddTest);
3. проверка корректности работы алгоритма при удалении элемента из ячейки хэш-таблицы с пустым списком (DeleteFromEmptyList);
4. проверка корректности работы алгоритма при удалении несуществующего элемента (NotFoundToBeDeleted);
5. проверка корректности работы алгоритма при удалении элемента, находящегося в голове списка (DeleteListHead);
6. проверка корректности работы алгоритма при удалении элемента, находящегося в конце списка (DeleteListEnd);
7. проверка корректности работы алгоритма при удалении элемента, находящегося в некрайних позициях списка (DeleteListEnd);
8. проверка корректности работы алгоритма при поиске несуществующего элемента (NotFound);
9. проверка корректности работы алгоритма при поиске элемента в ячейке хэш-таблицы с пустым списком (SearchInEmptyList);
10. проверка корректности работы алгоритма при поиске элемента, находящегося в голове списка (SearchInBeginList);
11. проверка корректности работы алгоритма при поиске элемента, находящегося в конце списка (SearchInEndList);
12. проверка корректности работы алгоритма при поиске элемента, находящегося в некрайних позициях списка (SearchInMidList);
13. проверка корректности работы алгоритма при поиске минимума в пустой хэш-таблице (SearchMinInEmptyTable);

14. проверка корректности работы алгоритма при поиске максимума в пустой хэш-таблице (SearchMaxInEmptyTable);
15. проверка корректности работы алгоритма при поиске минимума в хэш-таблице (SearchMin);
16. проверка корректности работы алгоритма при поиске максимума в хэш-таблице (SearchMax);

Двоичное дерево поиска (файл BinarySearchTreeTest.cpp):

1. проверка корректности работы алгоритма при добавлении элемента в пустое дерево (AddInEmptyTree);
2. проверка корректности работы алгоритма при добавлении минимального элемента (AddLeftTest);
3. проверка корректности работы алгоритма при добавлении максимального элемента (AddRightTest);
4. проверка корректности работы алгоритма при добавлении элемента, не являющегося минимумом и максимум (AddMidTest);
5. проверка корректности работы алгоритма при удалении из пустого дерева (DeleteFromEmpty);
6. проверка корректности работы алгоритма при удалении несуществующего элемента (NotFoundToBeDeleted);
7. проверка корректности работы алгоритма при удалении элемента без потомков (DeleteWithNoChildren);
8. проверка корректности работы алгоритма при удалении элемента с одним потомком (DeleteWithOneChild);
9. проверка корректности работы алгоритма при удалении элемента с двумя потомками (DeleteWithTwoChildren);
10. проверка корректности работы алгоритма при поиске несуществующего элемента (NotFound);
11. проверка корректности работы алгоритма при поиске в пустом дереве (SearchInEmpty);

12. проверка корректности работы алгоритма при поиске элемента, находящегося в самом низу дерева (SearchLower);
13. проверка корректности работы алгоритма при поиске элемента, являющегося корнем дерева (SearchRoot);
14. проверка корректности работы алгоритма при поиске элемента, имеющего одного или двух потомков (SearchMid);
15. проверка корректности работы алгоритма при поиске минимума в пустом дереве (MinInEmpty);
16. проверка корректности работы алгоритма при поиске максимума в пустом дереве (MaxInEmpty);
17. проверка корректности работы алгоритма при поиске минимума (SearchMin);
18. проверка корректности работы алгоритма при поиске максимума (SearchMax);

4. Реализация сценариев

Количество элементов: 1000.

Время в наносекундах.

Добавление: общее время, затраченное на добавление всех элементов.

Удаление, поиск: среднее время, затраченное на операцию (проведено 1000 операций с произвольными элементами).

Таблица 1. Возрастающие ключи

	добавление	удаление	поиск	поиск min	поиск max
хэш-таблица	411788	2198	1970	46392	45160
отсортированный массив	411801	2163	825	387	390
двоичное дерево поиска	34760598	34978	34163	356	43518

Таблица 2. Произвольные ключи

	добавление	удаление	поиск	поиск min	поиск max
хэш-таблица	407280	2256	2033	43929	43518
отсортированный массив	2206678	8136	869	364	408
двоичное дерево поиска	1371226	1595	1012	689	701