



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Introdução ao Estudo de Funções Geradoras

Júlio César Prado Souza Rodrigues

Goiânia

2018

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: ☒ Dissertação [] Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: *Júlio César Prado Souza Rodrigues*

Título do trabalho: *Introdução aos Estudos de Funções Geradoras*

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento ☒ SIM [] NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Júlio César Prado Souza Rodrigues
Assinatura do(a) autor(a)²

Ciente e de acordo:


Assinatura do(a) orientador(a)²

Data: 29 / 03 / 2018

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

² A assinatura deve ser escaneada.

Júlio César Prado Souza Rodrigues

Introdução ao Estudo de Funções Geradoras

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues

Goiânia

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Prado Souza Rodrigues, Júlio César
Introdução ao Estudo de Funções Geradoras [manuscrito] / Júlio
César Prado Souza Rodrigues. - 2018.
lix, 59 f.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto
de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós
graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira
de Matemática (RG), Goiânia, 2018.

Bibliografia.

Inclui tabelas, lista de figuras.

1. Funções Geradoras. Combinatória. Ensino da Matemática.. I. de
Azevedo Rodrigues, Paulo Henrique, orient. II. Título.

CDU 51

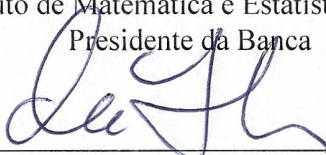
Júlio César Prado Souza Rodrigues

“Introdução ao Estudo das Funções Geradoras”


Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 06 de março de 2018, pela Banca Examinadora constituída pelos seguintes professores:



Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues
Instituto de Matemática e Estatística - UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística - UFG

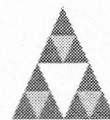


Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Membro Externo – IFG/GOIÂNIA



Universidade Federal de Goiás - UFG
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT/UFG

Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br



PROFMAT

Ata da reunião da banca examinadora da defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Júlio César Prado Souza Rodrigues – Aos seis dias do mês de março do ano de dois mil e dezoito, às 16:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues – Orientador, Prof. Dr. Ole Peter Smith e Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza, para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no LEMAT do IME, procederem a avaliação da defesa intitulada **“Introdução ao Estudo das Funções Geradoras”**, em nível de mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de Júlio César Prado Souza Rodrigues, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo presidente da banca, Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor do TCC que, em 30 minutos, procedeu à apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se à avaliação da defesa. Tendo em vista o que consta na Resolução nº. 1075/2012 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG, e procedidas as correções recomendadas, o Trabalho foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega, na secretaria do IME, da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 17:00 horas, a presidência da mesa encerrou a sessão e, para constar, eu, Rafael Aguiar e Silva, secretário do PROFMAT/UFG, lavrei a presente ata que, após lida e aprovada, segue assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues
Presidente – IME/UFG

Prof. Dr. Ole Peter Smith
Membro – IME/UFG

Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Membro – IFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Júlio César Prado Souza Rodrigues graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Goiás, atua como docente na Educação Básica, da rede pública de ensino e, na Educação Básica e Superior da rede particular.

Dedico este trabalho a minha esposa, Sara, que de forma especial e carinhosa me deu força e coragem, me apoiando nos momentos de dificuldades, quero agradecer também ao meu filho, Vicente, que embora não tivesse conhecimento disto, mas iluminou de maneira especial os meus pensamentos me levando a buscar mais conhecimentos. E não deixando de agradecer de forma grata e grandiosa meus pais, Júlio Rodrigues e Maria Eunice, a quem eu rogo todas as noites a minha existência.

Agradecimentos

Agradeço a minha família pelo apoio e carinho.

Agradeço a minha esposa pela paciência, carinho e compreensão.

Agradeço ao Prof Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues pela dedicação, competência e paciência na orientação deste trabalho.

Agradeço ao CAPES pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não poderia ser realizado.

Agradeço a todos os professores, funcionários e colegas do IME.

Resumo

Neste trabalho, temos como objetivo apresentar alguns problemas combinatórios que podem ser solucionados utilizando as Funções Geradoras e, também, mostrar que este estudo pode contribuir tanto para futuras pesquisas quanto para novas possibilidades metodológicas para o ensino da Matemática.

Palavras-chave

Funções Geradoras. Combinatória. Ensino da Matemática.

Abstract

In this work, our goal is to present some combinatorial problems that can be solved using the Generating Functions and also to show that this study can contribute to future research as well as to new methodological possibilities for the teaching of Mathematics.

Keywords

Generating Functions. Combinatorial, Teaching of Mathematics.

Lista de Figuras

1	Permutações Cíclicas de 4 Objetos.	25
---	--	----

Sumário

1	Introdução	13
2	Contextualização	13
3	Análise Combinatória	14
3.1	Princípio Multiplicativo	14
3.1.1	Extensão do Princípio Multiplicativo	15
3.2	Fatorial	16
3.3	Permutação Simples	16
3.4	Arranjos Simples	17
3.5	Combinações Simples	19
3.6	Combinações com Repetição	21
3.7	Permutações com Repetição	23
3.8	Arranjos com Repetição	24
3.9	Permutações Cíclicas	25
3.10	Partições de um Inteiro	26
4	Binômio de Newton	28
4.1	Coeficiente Binomial	28
4.1.1	Propriedades:	28
4.2	Desenvolvimento do Binômio de Newton	29
4.3	Termo Geral do Binômio de Newton	32
4.4	Triângulo de Pascal	33
5	Função Phi de Euler	34
6	Funções Geradoras	37
6.1	Cálculo de Coeficientes das Funções Geradoras	40
6.2	Teorema Binomial	42
6.3	Funções Geradoras Exponenciais	46
6.4	Partições de um Inteiro	49
6.4.1	Gráfico de uma Partição	50
7	Considerações Finais	59

1 Introdução

Neste trabalho, apresentamos uma introdução à Teoria de Funções Geradoras, e, para isso, utilizamos obras de teóricos como José Plínio de Oliveira Santos, Carl Boyer e George Andrews.

O principal objetivo centra-se na tentativa de demonstrar as aplicações das Funções Geradoras, tanto na Educação Básica quanto no ensino superior como uma ferramenta de pesquisa.

Percorremos o seguinte caminho: primeiramente, contextualizamos o tema e a teoria; depois, construímos um capítulo sobre Análise Combinatória e nele estão contidos conceitos elementares e suas aplicações; logo em seguida, tratamos sobre Binômio de Newton e suas propriedades; também, um capítulo próprio, referente à função ϕ de Euler; e por fim, realizamos um estudo sobre as funções geradoras, o qual consideramos como principal parte deste trabalho.

Entendemos que esse estudo é relevante, uma vez que pretende mostrar métodos e ferramentas que auxiliam na resolução de problemas de contagem.

2 Contextualização

Euler foi o primeiro matemático a utilizar as ideias da Análise a problemas de Teoria dos Números. Um deste problema refere-se a soluções inteiras de equações. No caso, para determinar as soluções inteiras de uma equação linear, Euler construiu um método que se tornou bastante conhecido como Método das Funções Geradoras (Generating Functions), que a propósito é o nosso objeto de estudo. Esse procedimento se mostrou tão eficiente que levou à criação de outros métodos, como o Método do Círculo de Hardy-Littlewood-Ramanujan (Circle Method), cujo desenvolvimento conduziu a um dos métodos básicos da Teoria Analítica dos Números Contemporânea; e o método das somas trigonométricas de Vinogradov (Method of Trigonometric Sums) que influenciou na criação do ramo da Teoria Analítica dos Números conhecida como Teoria Aditiva dos Números.

No que se refere à aplicação dessa teoria na Educação Básica, entende-se que é possível trabalhá-la apenas de maneira elementar, pois é um conteúdo da Educação Superior, mas que, no entanto, pode subsidiar suficientemente os estudantes do Ensino Médio no desenvolvimento de habilidades e competências a respeito de situações-problema de contagem.

3 Análise Combinatória

Antes de entrarmos no objeto desta pesquisa, é necessário apresentar um conjunto de conceitos que compõem os resultados esperados. Neste caso, uma série de técnicas e métodos que permitem resolver problemas de contagem. O Princípio Multiplicativo, Permutações, Arranjos e Combinações são introduzidos de forma intuitiva e natural, a fim de que se perceba o quanto essas ferramentas são importantes para simplificação e resolução de vários problema.

3.1 Princípio Multiplicativo

Definição 1. *Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e, se, para cada uma dessas m maneiras possíveis de ocorrer A , um outro evento B pode ocorrer de n maneiras distintas, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido de B é $m \cdot n$.*

Exemplo 1. *Um restaurante oferece almoço incluindo prato principal e sobremesa. De quantas formas distintas um cliente pode fazer seu pedido, se existem quatro opções de prato principal e três de sobremesa?*

Enumeremos os casos possíveis, sendo P = prato principal e S = sobremesa.

$(P1S1, P1S2, P1S3, P2S1, P2S2, P2S3, P3S1, P3S2, P3S3, P4S1, P4S2, P4S3)$.

Portanto, o cliente pode fazer o pedido de 12 maneiras diferentes.

3.1.1 Extensão do Princípio Multiplicativo

Se um evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras diferentes, para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, então esses n eventos podem ocorrer em sucessão de $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$ maneiras diferentes.

Exemplo 2. *Em um laboratório, um professor de Química tem disponíveis seis ácidos diferentes e quatro bases diferentes. Se, em uma aula, o professor prepara três reações de neutralização (ácido + base \rightarrow sal + água), determine o número de aulas necessárias para que ele demonstre todas as possíveis reações.*

Têm-se 6 possibilidades para escolha do tipo de ácido e 4 possibilidades para escolha do tipo de base. Portanto, o conjunto de todas as reações de neutralização pode ser obtido por $6 \cdot 4 = 24$ reações. Mas, como são realizadas 3 reações por aula, então serão necessárias $\frac{24}{3} = 8$ aulas para que o professor demonstre todas as reações de neutralização possíveis.

Exemplo 3. *Uma pequena locadora de filmes tem um acervo de 33 filmes de suspense, 41 de ficção científica, 25 de aventura e 70 de romance. Um cliente pretende locar dois filmes de gêneros diferentes. De quantas maneiras ele pode escolhê-los?*

O cliente pode fazer as seguintes escolhas:

- suspense e ficção científica: $33 \cdot 41 = 1353$ maneiras;
- suspense e aventura: $33 \cdot 25 = 825$ maneiras;
- suspense e romance: $33 \cdot 70 = 2310$ maneiras;
- ficção científica e aventura: $41 \cdot 25 = 1025$ maneiras;
- ficção científica e romance: $41 \cdot 70 = 2870$ maneiras;
- aventura e romance: $25 \cdot 70 = 1750$ maneiras.

Como as escolhas feitas pelo cliente só podem ocorrer dentre uma das possibilidades calculadas acima, então $1353 + 825 + 2310 + 1025 + 2870 + 1750 = 10.133$ é o número de maneiras de fazer essas escolhas.

3.2 Fatorial

Definição 2. *Seja n um número natural, definimos o fatorial de n ou n fatorial o número $(n!)$, tal que:*

- para $n = 0 : 0! = 1$;
- para $n = 1 : 1! = 1$;
- para $n \geq 2 : n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Exemplo 4. *Simplifique as expressões:*

a) $\frac{15!}{13!}$;

b) $\frac{n!}{(n+1)!}$.

Podemos desenvolver o fatorial até um ponto conveniente, suficiente para que a expressão seja simplificada:

a) $\frac{15!}{13!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{13!} = 210$.

b) $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1) \cdot (n+1-1)!} = \frac{n!}{(n+1) \cdot n!} = \frac{1}{n+1}$.

3.3 Permutação Simples

Embora muitos problemas de contagem possam ser resolvidos pelo Princípio Multiplicativo, também conhecido como Princípio Fundamental da Contagem (*PFC*), é possível utilizar outros resultados como, por exemplo, os cálculos de permutações, arranjos e combinações. Neste caso, desenvolvemos o problema das permutações simples.

De quantos modos podemos ordenar em fila n objetos distintos?

Note que, a escolha do objeto que ocupa a primeira posição pode ser feita de n maneiras; já a segunda posição, pode ser ocupada de $n - 1$ modos; a escolha do objeto que ocupa a terceira posição pode ser feita de $n - 2$ maneiras, e assim sucessivamente, até que a escolha do objeto que ocupa a última posição pode ser feita de 1 modo. Assim, podemos concluir que o resultado do problema proposto é:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1 = n!.$$

Definição 3. Se temos n elementos distintos, então o número de agrupamentos ordenados (Permutação Simples), indicado por P_n , que podemos obter com todos esses n elementos é dado por:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1 = n!,$$

com $P_0 = 0! = 1$.

Exemplo 5. Quantos são os anagramas da palavra *SORTE*? Quantas começam com vogal?

Cada anagrama corresponde a uma ordem de colocação dessas 5 letras. Portanto, o número de anagramas é:

$$P_5 = 5! = 120.$$

Agora, para formar um anagrama começado por vogal, devemos inicialmente escolher a vogal (2 modos) e, depois, arrumar as quatro letras restantes em seguida à vogal ($P_4 = 4! = 24$ modos). Sendo assim, há $2 \cdot 4! = 48$ anagramas começados por vogal.

3.4 Arranjos Simples

Dado um conjunto com n elementos distintos, com $n \geq 1$, chama-se arranjo dos elementos, tomados p a p , com p natural e $p \leq n$, todos os grupos de p elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza, escolhidos entre os n existentes. Notação A_n^p .

Vamos apresentar uma expressão matemática que caracterize A_n^p , partindo do Princípio Fundamental da Contagem.

Para $n = p$, temos $A_n^n = P_n = n!$, já estudado. Para $n > p$, temos n elementos distintos e vamos arranjá-los em grupos ordenados de p elementos distintos.

- O primeiro elemento pode ser escolhido de n maneiras.
- O segundo elemento pode ser escolhido de $(n - 1)$ formas distintas, pois já foi feita a escolha anterior e não há elementos repetidos.

- Para o terceiro elemento, temos $(n - 2)$ possibilidades de escolha, pois não há repetição.
- Assim, para escolher o p -ésimo elemento, a partir das $(p - 1)$ escolhas, teremos $n - (p - 1) = n - p + 1$ opções. Usando o *PFC*:

$$A_n^p = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - p + 1).$$

Multiplicando esse número por $\frac{(n - p)!}{(n - p)!}$, obtemos:

$$\begin{aligned} A_n^p &= n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - p + 1) \cdot \frac{(n - p)!}{(n - p)!} \\ &= \frac{n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - p + 1)(n - p)!}{(n - p)!} \\ &= \frac{n!}{(n - p)!}. \end{aligned}$$

Portanto, $A_n^p = \frac{n!}{(n - p)!}$

Exemplo 6. *Considerando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números de três algarismos distintos podem ser formados?*

$$A_6^3 = \frac{6!}{(6 - 3)!} = \frac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

Exemplo 7. *A senha de acesso a uma rede de computadores é formada por uma sequência de duas letras distintas seguida de três algarismos distintos. Quantas senhas apresentam simultaneamente apenas vogais e algarismos maiores que 5? Considere as 26 letras do alfabeto.*

Para sequência de letras, temos duas posições a serem preenchidas apenas com vogais distintas, então:

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5 - 2)!} = \frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20.$$

Agora, para sequência de números, temos 3 posições a serem preenchidas apenas com algarismos maiores que 5, logo:

$$A_4^3 = \frac{4!}{(4 - 3)!} = \frac{4!}{1!} = 24.$$

Como a senha é formada simultaneamente apenas por vogais e algarismos maiores que 5, então:

$$A_5^2 \cdot A_4^3 = 20 \cdot 24 = 480 \text{ senhas.}$$

Exemplo 8. *Encontre o número de inteiros positivos que podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3 e 4, sendo que não há repetição de dígitos num mesmo número.*

Números de 1 algarismo: Há uma posição a ser preenchida. Como temos 4 dígitos, então são 4 maneiras.

Números de 2 algarismos: Há duas posições para serem preenchidas. Então, temos 4 dígitos para preencher duas posições, isto é, $A_4^2 = 12$ maneiras.

Números de 3 algarismos: Há três posições para serem preenchidas. Dessa forma, temos 4 dígitos para preencher 3 posições, isto é, $A_4^3 = 24$ maneiras.

Números de 4 algarismos: Há quatro posições para serem preenchidas. Logo, temos 4 dígitos para preencher 4 posições, isto é, $A_4^4 = 24$ maneiras.

Portanto, há $4 + 12 + 24 + 24 = 64$ números, segundo as condições do problema.

3.5 Combinações Simples

Combinações simples de n elementos tomados p a p , em que $n \geq 1$ e p natural tal que $(p \leq n)$, são os subconjuntos com exatamente p elementos que se podem formar com os n elementos dados. Indica-se por $C_n^p = \binom{n}{p}$.

Note que, como se trata de subconjuntos de um conjunto, a ordem dos elementos é irrelevante, isto é, só consideramos agrupamentos distintos (que diferem entre si) apenas pela natureza dos elementos.

Segundo Iezzi (2004, p.278), podemos calcular combinações simples de n elementos tomados p a p , fazendo uma escolha de determinados objetos, considerando para cada uma a permutação desses objetos, ou seja, obtemos uma fórmula para combinação simples por meio da divisão do arranjo simples pela permutação.

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!} \cdot \frac{1}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Exemplo 9. *De quantas maneiras um técnico pode escolher seu time de futebol de salão, composto por 5 jogadores, tendo 12 atletas à sua disposição?*

São 5 jogadores a serem escolhidos dentre os 12. Como a ordem não importa, então:

$$C_{12}^5 = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12!}{5!7!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{5!7!} = 792 \text{ times.}$$

Exemplo 10. *Dados 10 pontos num mesmo plano, 6 deles pertencem à reta r , 4 pertencem à reta s , sabendo que a reta r é paralela à reta s , determine o número de triângulos que podemos formar com vértices nesses pontos.*

Um triângulo fica determinado quando temos:

- (a) Um ponto em r e dois pontos em s ;
- (b) Um ponto em s e dois pontos em r .

Calculemos essas duas possibilidades e somemos:

- (a) Temos 4 pontos em s e precisamos de 2, logo:

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

Como em r há 6 pontos e podemos considerar qualquer um deles, temos:

$$6 \cdot C_4^2 = 6 \cdot 6 = 36 \text{ possibilidades.}$$

- (b) De maneira análoga, temos 6 pontos em r e precisamos de 2, então:

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = 15.$$

Como em s há 4 pontos e podemos considerar qualquer um deles, temos:

$$4 \cdot C_6^2 = 4 \cdot 15 = 60 \text{ possibilidades.}$$

Juntando as possibilidades, temos:

$$6 \cdot C_4^2 + 4 \cdot C_6^2 = 36 + 60 = 96.$$

Logo, são determinados 96 triângulos com esses 10 pontos.

3.6 Combinações com Repetição

Quantas são as soluções inteiras não-negativas da equação $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$?

A solução para este problema é representada por CR_n^p , que é o número de combinações com repetição dos n objetos tomados p a p .

Para determinar o valor de CR_n^p , vamos representar cada solução da equação por uma fila de sinais $-$ e $|$. Por exemplo, para a equação $x + y + z = 7$, as soluções $(1, 1, 5)$ e $(0, 0, 7)$ podem ser representadas por $-| - | - - - - -$ e $|| - - - - - - -$, respectivamente. Observe que as barras são utilizadas para separar as incógnitas e a quantidade de sinais $-$ indica o valor de cada incógnita.

Portanto, para a equação $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$, cada solução é representada por $n - 1$ barras e p sinais $-$. Sendo assim, basta escolher dentre os $p + n - 1$ lugares da fila os p lugares onde são colocados os sinais $-$, o que pode ser feito de $C_{p+n-1}^p = CR_n^p$ modos.

Exemplo 11. *De quantos modos podemos distribuir 10 balas idênticas para três crianças?*

Este número é o número de soluções em inteiros não-negativos da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, em que x_i denota o número de balas para cada criança i , para $i = 1, 2, 3$. Logo,

$$CR_3^{10} = C_{10+3-1}^{10} = C_{12}^{10} = 66 \text{ modos.}$$

Exemplo 12. *Quantas são as soluções em inteiros positivos de $x + y + w + z \leq 6$?*

Para resolvermos a inequação $x + y + w + z \leq 6$, devemos contar o número de soluções em inteiros positivos para as seguintes equações:

$$x + y + w + z = 1;$$

$$x + y + w + z = 2;$$

$$x + y + w + z = 3;$$

$$x + y + w + z = 4;$$

$$x + y + w + z = 5.$$

Como $C_0^3 = C_1^2 = C_2^3 = 0$, o número de soluções em inteiros positivos para cada uma das três primeiras equações é zero. Agora, para as duas últimas, temos, respectivamente, $C_3^3 = 1$ e $C_4^3 = 4$ e $C_5^3 = 10$. Portanto, o número procurado é a soma dos resultados encontrados acima $0 + 1 + 4 + 10 = 15$.

Exemplo 13. *De quantos modos podemos distribuir 8 livros iguais em três caixas diferentes, sabendo que cada uma recebe pelo menos 1 livro?*

Resolver este problema é equivalente a encontrar o número de soluções inteiras não-negativas de $x + y + z = 8$. Porém como cada caixa recebe pelo menos 1 livro, façamos a seguinte mudança de variável:

$$x = a + 1, y = b + 1, z = c + 1.$$

Assim, obtemos a seguinte equação:

$$a + 1 + b + 1 + c + 1 = 8 \Leftrightarrow a + b + c = 5.$$

Esta mudança nos diz que, cada solução em inteiros não-negativos da equação $x + y + z = 8$, corresponde à única solução em inteiros positivos para a equação $a + b + c = 5$. Portanto, essa mudança de variáveis garante que $x \geq 1, y \geq 1$ e $z \geq 1$ (como queríamos). Então,

$$CR_3^5 = C_{5+3-1}^5 = C_7^5 = 21 \text{ modos.}$$

3.7 Permutações com Repetição

No item anterior, vimos uma proposta de resolução para o problema: *Quantas são as soluções inteiras não-negativas da equação $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$?*

Agora, apresentaremos uma outra resolução, porém do ponto de vista da Permutação com repetição. Sendo assim, voltemos na representação de filas de sinais $-$ e $|$. Note que, o número de soluções inteiras não-negativas para equação acima pode ser exibida por $(n - 1)$ barras e p sinais $-$.

$$\underbrace{- \dots -}_{p \text{ vezes}} \underbrace{|| \dots |}_{(n-1) \text{ vezes}}$$

Logo, temos uma permutação de $(p + n - 1)$ elementos, com p elementos iguais a $-$ e $(n - 1)$ elementos iguais a $|$. Assim, basta calcularmos a permutação de todos os $(p + n - 1)$ sinais, mas como as permutações entre as $(n - 1)$ barras e p sinais $-$ não produzirão novos anagramas, precisamos dividir pela permutação das $(n - 1)$ barras e p sinais $-$, o que pode ser feito de

$$\frac{(p + n - 1)!}{p!(n - 1)!} = C_{p+n-1}^p \cdot C_{p+n-1-p}^{n-1} = PR(p + n - 1; p, n - 1) \text{ modos.}$$

Consideremos, agora, o caso em que dentre os n elementos de uma permutação simples, existem n_1 iguais a a_1 , n_2 iguais a a_2 , \dots , n_r iguais a a_r .

$$\underbrace{a_1 a_1 \dots a_1}_{n_1 \text{ vezes}} \underbrace{a_2 a_2 \dots a_2}_{n_2 \text{ vezes}} \dots \underbrace{a_r a_r \dots a_r}_{n_r \text{ vezes}}$$

Estendendo a ideia do caso anterior, precisamos escolher n_1 lugares para colocação dos a_1 's. Dos $n - n_1$ lugares restantes, escolher n_2 para colocação dos a_2 's e assim por diante, obtendo

$$\begin{aligned} C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \dots C_{n-n_1-n_2-\dots-n_{r-1}}^{n_r} &= \frac{n!}{n_1!(n - n_1)!} \cdot \frac{(n - n_1)!}{n_2!(n - n_1 - n_2)!} \cdot \\ &\frac{(n - n_1 - n_2)!}{n_3!(n - n_1 - n_2 - n_3)!} \dots \frac{(n - n_1 - \dots - n_{r-1})!}{n_r!(n - n_1 - \dots - n_r)!} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3! \dots n_r!}. \end{aligned}$$

Denotamos este número por $PR(n; n_1, n_2, n_3, \dots, n_r)$. Note que,

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r = n.$$

Exemplo 14. *Quantas são as soluções inteiras não-negativas da equação*

$$x + y + w + z = 7?$$

Podemos usar a representação de filas de sinais $-$ e $|$. No caso,

$$-| - | - -| - - -$$

representa a solução $(1, 1, 2, 3)$.

Portanto, trata-se de uma permutação de 10 elementos com repetição de 7 sinais $-$ e 3 barras idênticas.

$$PR(10; 3, 7) = \frac{10!}{3!7!} = 120 \text{ soluções.}$$

Exemplo 15. *Quantos são os anagramas da palavra BATATA?*

O número de anagramas da palavra BATATA é dada por:

$$PR(6; 2, 3) = \frac{6!}{2!3!} = 60 \text{ anagramas.}$$

3.8 Arranjos com Repetição

Já vimos que no Arranjo Simples de n elementos tomados p a p , com $n \geq 1$, pode ser obtido por

$$A_n^p = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - p + 1).$$

Este número fornece todas as possíveis maneiras de se escolher, de um grupo de n elementos distintos, todos os grupos de p elementos distintos, que diferem entre si pela ordem.

Se forem concedidas repetições, o Princípio Multiplicativo nos dá o número total de maneiras de se escolher, levando-se em consideração a ordem, p de n elementos, distintos ou não, é igual a

$$AR_n^p = n \cdot n \cdot n \cdots n = n^p.$$

Uma vez que o primeiro elemento deve ser retirado de m maneiras, o segundo também de m maneiras, e assim sucessivamente, até que o p -ésimo seja escolhido.

Exemplo 16. *Uma prova de 10 questões do tipo "Verdadeiro ou Falso". De quantas maneiras um aluno pode responder essa prova aleatoriamente?*

Observe que para cada questão, há duas possibilidades de resposta. Verdadeiro ou Falso, logo:

$$AR_{10}^2 = 2^{10} = 1024 \text{ maneiras.}$$

3.9 Permutações Cíclicas

O número de maneiras de se ordenar n objetos distintos em torno de um círculo é denominado Permutações Cíclicas, ou Permutações Circulares, denotado por $(PC)_n$. Consideremos 4 objetos A, B, C, D , inseridos em torno de um círculo.

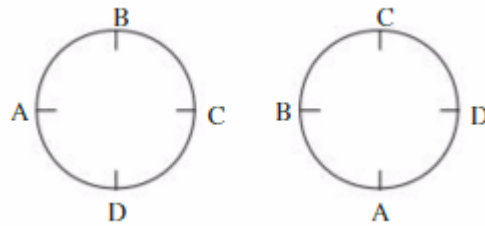


Figura 1: Permutações Cíclicas de 4 Objetos.

À primeira vista, parece que para formar um círculo com 4 pontos basta escolher uma ordem para elas, o que poderia ser feito de $4! = 24$ modos, mas observe que os círculos $BADC$ e $CBAD$ são idênticos, pois o que importa é a posição relativa dos pontos entre si. Assim, como cada círculo pode ser "virado" de quatro maneiras, a contagem de 24 círculos contou cada círculo 4 vezes, e a resposta é $\frac{24}{4} = 6$.

Generalizando, o número de Permutações Cíclicas de n objetos é dada por

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!.$$

Exemplo 17. *De quantas maneiras podemos formar uma mesa de canastra com 6 jogadores?*

Basta considerarmos as Permutações Cíclicas de 6, isto é,

$$(PC)_6 = (6 - 1)! = 5! = 120.$$

Exemplo 18. *De quantas maneiras podemos formar uma roda de ciranda com 5 meninos e 5 meninas de modo que pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas?*

Como se trata de um problemas de Permutações Cíclicas, note que existem $(PC)_5$.

3.10 Partições de um Inteiro

Nesta seção, trabalharemos apenas com a noção intuitiva de partições de um inteiro, com intuito de mostrar que alguns problemas de Análise Combinatória, especialmente problemas que envolvem a distribuição de objetos idênticos em compartimentos idênticos, podem ser tratados de maneira elementar. Esse assunto será abordado de forma mais aprofundada no **Capítulo 5**.

Vejamos o seguinte problema:

De quantos modos distintos podemos colocar cinco bolas idênticas em três caixas idênticas, de modo que nenhuma fique vazia?

Até agora, realizamos o estudo de problemas de distribuição de objetos idênticos em caixas distintas, tanto que fizemos a relação desse tipo de problema com a solução inteira de equações lineares com coeficientes unitários do tipo $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = m$, porém aqui temos algumas restrições nas variáveis x_i 's.

Portanto, a fim de facilitar a resolução apresentaremos um método, a princípio mais simples, na resolução do problema acima. No caso, faremos uma partição em inteiros

do número 5, isto é, vamos escrevê-lo como

$$\begin{array}{c}
 5 \\
 4 + 1 \\
 3 + 2 \\
 3 + 1 + 1 \\
 2 + 2 + 1 \\
 2 + 1 + 1 + 1 \\
 1 + 1 + 1 + 1 + 1
 \end{array}$$

Como queremos a distribuição em três caixas, então temos apenas duas soluções: $\{3, 1, 1\}$ e $\{2, 2, 1\}$.

A tabela abaixo ilustra as partições de 3, 4 e 6.

						6
						5 + 1
						4 + 2
				4		4 + 1 + 1
	3		3 + 1			3 + 3
	2 + 1		2 + 2			3 + 2 + 1
	1 + 1 + 1		2 + 1 + 1			3 + 1 + 1 + 1
			1 + 1 + 1 + 1			2 + 2 + 2
						2 + 2 + 1 + 1
						2 + 1 + 1 + 1 + 1
						1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

Talvez pareça bem simples, mas com números maiores, percebemos que o número de partições aumenta consideravelmente, por exemplo, o número de partições de 20 é 627 e de 200 temos 3.972.999.029.388 partições. Existe uma fórmula exata para o

cálculo do número de partições, desenvolvida pelos matemáticos S. Ramanujan, G. H. Hardy e H. Rademacher. Posteriormente, faremos uma análise minuciosa a respeito das partições de um inteiro.

4 Binômio de Newton

4.1 Coeficiente Binomial

Definição 4. *Dados dois números naturais, n e p , com $0 \leq p \leq n$, definimos o coeficiente binomial de numerador n e classe p , todo número dado pela expressão:*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p.$$

4.1.1 Propriedades:

- Binomiais Complementares

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Demonstração.

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)![n-(n-p)]!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

□

- Relação de Stifel

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)![(n-1)-(p-1)]!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p) \cdot (n-p-1)!} + \frac{(n-1)!}{p \cdot (p-1)!(n-1-p)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p-1)!} \cdot \left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p} \right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p-1)!} \cdot \frac{n}{(n-p) \cdot p} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 19. Se $\binom{10}{7} = \binom{10}{x}$, determine o valor de x .

Sabemos que a igualdade acontece nestas situações:

- $x = 7$
- $7 + x = 10 \Leftrightarrow x = 3$

Exemplo 20. Calcule o valor da expressão:

$$\binom{9}{5} + \binom{9}{6}.$$

Pela Relação de Stifel, temos:

$$\binom{9}{5} + \binom{9}{6} = \binom{10}{6} = 210.$$

4.2 Desenvolvimento do Binômio de Newton

A soma de dois termos distintos é denominada Binômio, isto é, a expressão $(a+b)$ é uma representação algébrica do Binômio. Portanto, faremos o estudo dos coeficientes das expansões de potências de $(a+b)$, ou seja, $(a+b)^n$.

Assim, sendo n um número natural, temos:

- $n = 0 \Rightarrow (a + b)^0 = 1$
- $n = 1 \Rightarrow (a + b)^1 = a + b$
- $n = 2 \Rightarrow (a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
- $n = 3 \Rightarrow (a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Para valores de n maiores que 3, continuaremos o desenvolvimento acima e aplicando as propriedades de potência, a fim de desenvolver o Binômio de Newton. De modo geral,

$$(a + b)^n = (a + b)(a + b)^{n-1}$$

Essa técnica nos conduz a cálculos bastante trabalhosos, sendo assim, para obter a fórmula que dá o desenvolvimento de $(a + b)^n$, basta multiplicar

$$(a + b).(a + b) \cdots (a + b)$$

Note que, o termo genérico do produto é obtido pela potência p da segunda parcela, com $p = 0, 1, 2, 3, \dots, n$, juntamente com a potência $n - p$ da primeira parcela. Logo, o termo genérico do produto é $C_n^p a^{n-p} b^p$ e

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n a^0 b^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p.$$

Observe também que o desenvolvimento binomial permanece válido para expansão $(a - b)^n$.

$$(a - b)^n = [a + (-b)]^n = C_n^0 a^n (-b)^0 + C_n^1 a^{n-1} (-b)^1 + C_n^2 a^{n-2} (-b)^2 + \cdots + C_n^n a^0 (-b)^n.$$

Cada um dos termos acima contém potências do tipo:

$$(-b)^k = \begin{cases} b^k, & \text{se } k \text{ for par} \\ -b^k, & \text{se } k \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Dessa forma, os sinais dos termos do desenvolvimento $(a + b)^n$ se alternam, a partir do 1º termo, que é positivo.

$$(a - b)^n = [a + (-b)]^n = C_n^0 a^n (b)^0 - C_n^1 a^{n-1} (b)^1 + C_n^2 a^{n-2} (b)^2 - \cdots + C_n^n a^0 (-b)^n.$$

Agora, será apresentada uma demonstração, por Indução Finita, do desenvolvimento do Binômio de Newton, com o intuito de validar as conjecturas feitas acima.

Portanto, para $n = 1$, temos:

$$(a + b)^1 = C_1^0 \cdot a^{1-0} \cdot b^0 + C_1^1 \cdot a^{1-1} \cdot b^1 = a + b. \text{ Verificado.}$$

É necessário que demonstremos $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$

Por hipótese ($P(k)$), temos:

$$(a + b)^k = \sum_{p=0}^k C_k^p a^{k-p} b^p.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $(a + b)$, obtemos:

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot (a + b)^k &= (a + b) \cdot \sum_{p=0}^k C_k^p a^{k-p} b^p \\ (a + b)^{k+1} &= \sum_{p=0}^k C_k^p a^{k+1-p} b^p + \sum_{p=0}^k C_k^p a^{k-p} b^{p+1} \\ (a + b)^{k+1} &= a^{k+1} + \sum_{p=1}^k C_k^p a^{k+1-p} b^p + b^{k+1} + \sum_{p=1}^k C_k^{p-1} a^{k-(p-1)} b^p. \end{aligned}$$

Agora, colocando o termo $a^{k-p+1} b^p$ em evidência:

$$(a + b)^{k+1} = a^{k+1} + b^{k+1} + \sum_{p=1}^k [C_k^p + C_k^{p-1}] \cdot a^{k-p+1} b^p$$

Aplicando a Relação de Stifel:

$$(a + b)^{k+1} = a^{k+1} + b^{k+1} + \sum_{p=1}^k C_{k+1}^p \cdot a^{k-p+1} b^p,$$

logo:

$$(a + b)^{k+1} = \sum_{p=0}^{k+1} C_{k+1}^p \cdot a^{k-p+1} b^p.$$

CQD.

Assim, fica demonstrado que $(a + b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p$. De maneira análoga, é feita a demonstração para $(a - b)^n$.

Exemplo 21. *Efetue a expansão do binômio $(x + 1)^6$.*

$$\begin{aligned}(x + 1)^6 &= C_6^0 x^6 1^0 + C_6^1 x^5 1^1 + C_6^2 x^4 1^2 + \cdots + C_6^6 x^0 1^6 \\(x + 1)^6 &= x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1.\end{aligned}$$

4.3 Termo Geral do Binômio de Newton

Na expansão do Binômio de Newton, vimos que:

$$(a + b)^n = \underbrace{C_n^0 a^n b^0}_{T_1} + \underbrace{C_n^1 a^{n-1} b^1}_{T_2} + \underbrace{C_n^2 a^{n-2} b^2}_{T_3} + \cdots + \underbrace{C_n^p a^{n-p} b^p}_{T_{p+1}} + \cdots + \underbrace{C_n^n a^0 b^n}_{T_{n+1}}.$$

Sendo assim, o termo geral do binômio é dado por: $T_{p+1} = C_n^p a^{n-p} b^p$. Note que, o desenvolvimento tem $(n + 1)$ termos (DANTE, 2000, p. 362).

Exemplo 22. *Encontre o quarto termo no desenvolvimento do binômio $(a - 2)^7$.*

Usando a fórmula acima, obtemos:

$$T_{3+1} = -C_7^3 a^{7-3} 2^3 = -35 \cdot a^4 \cdot 8 = -280a^4.$$

Exemplo 23. *Calcule o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$.*

$$T_{p+1} = C_8^p x^{8-p} \left(\frac{1}{x}\right)^p$$

O termo independente de x é o de x^0 , isto é, quando $8 - p = p \Leftrightarrow p = 4$.

Logo, o termo independente de x é:

$$\begin{aligned}T_{4+1} &= C_8^4 \\T_5 &= \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70.\end{aligned}$$

4.4 Triângulo de Pascal

No início deste tópico, fizemos o listamento da expansão do binômio $(a + b)^n$ para alguns valores de n . Assim,

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

Os coeficientes das expansões acima serão reorganizados formando um triângulo, ou seja, o Triângulo de Pascal.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & & & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & \\ & & & & & & \\ & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ & & & & & & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ & & & & & & \\ & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ & & & & & & \\ & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ & & & & & & \\ & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \end{array}$$

Observe que a soma dos elementos da n -ésima linha do Triângulo de Pascal é dada pelo seguinte somatório:

$$\sum_{p=0}^n C_n^p = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n.$$

5 Função Phi de Euler

Até o momento, fizemos apenas uma fundamentação teórica a respeito de problemas combinatórios, partindo de conceitos aplicados à Educação Básica, porém apresentaremos um conteúdo que também nos fornece resultados quanto a problemas de contagens, mas aplicado à educação superior, neste caso, trata-se da função totiente de Euler, também conhecida como função ϕ de Euler, que se refere à distribuição de números primos.

Definição 5. A função $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, que relaciona cada número natural m com a quantidade de números primos com m , entre 0 e $m - 1$, é chamada de função ϕ de Euler.

Exemplo 24. Determine o valor de $\phi(12)$ e de $\phi(7)$.

De acordo com a definição acima, devemos encontrar a quantidade de números relativamente primos com 12, no intervalo $[0, 11]$. Neste caso, tais números são:

$$\{1, 5, 7, 11\}$$

portanto, o valor de $\phi(12) = 4$.

Agora, para $\phi(7)$, temos que no intervalo $[0, 6]$, existem 6 números primos com 7, logo:

$$\phi(7) = 6.$$

Na verdade, é fácil ver que se p é primo, então:

$$\phi(p) = p - 1.$$

Note que, trata-se de um problema de contagem e, neste exemplo, ficou fácil encontrar o valor numérico da função ϕ , porém quando m assumir um valor muito grande, tal cálculo não é tão trivial. Assim, apresentaremos dois lemas e um teorema a fim de nos auxiliar na demonstração do cálculo de $\phi(m)$.

Lema 1. *Se p é primo e k natural, então $\phi(p^k) = p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.*

Demonstração. Observe que de 1 até p^k , temos p^k números naturais. No caso, temos que descartar, desses, os números que não são primos com p^k , isto é, todos os múltiplos de p , que são $p, 2p, 3p, \dots, p^{k-1}p^k$, dessa forma, devemos excluir p^{k-1} números. Logo, $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1} \Leftrightarrow \phi(p^k) = p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right)$. \square

Lema 2. *Sejam $m, l \in \mathbb{N}$ tais que $(m, l) = 1$ e $r \in \mathbb{I}$. Então $\{r, r+l, r+2l, \dots, r(m-1)l\}$ é um sistema de restos completo módulo m .*

Demonstração. Neste caso, temos que mostrar que todos os restos na divisão por m pertencem ao conjunto $\{r, r+l, r+2l, \dots, r+(m-1)l\}$ e como nesse conjunto há exatamente m elementos, então temos que provar que não existem termos distintos, pertencentes a tal conjunto, com o mesmo resto módulo m . Sendo assim, faremos a demonstração é feita por absurdo.

Suponha que existam $i, j \leq m-1, i \neq j$ tais que

$$r + il \equiv (r + jl) \pmod{m} \Rightarrow l(i - j) \equiv 0 \pmod{m},$$

como $(m, l) = 1$, então

$$(i - j) \equiv 0 \pmod{m}.$$

Absurdo! Pois, como $i, j \leq m-1$ e $i \neq j$, então a diferença $(i - j) \in [1, m-1]$, logo não pode ser divisível por m . \square

Teorema 1. *Sejam $m, l \in \mathbb{N}$ tais que $(m, l) = 1$, então $\phi(ml) = \phi(m)\phi(l)$.*

Demonstração. Perceba que para $m = 1$ ou $l = 1$ o resultado é trivial. Assim, vamos supor que $m > 1$ e $l > 1$. Considere também, a seguinte tabela formada pelos números naturais de 1 a $m \cdot l$:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & \cdots & r & \cdots & l \\
l+1 & l+2 & \cdots & l+r & \cdots & 2l \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
(m-1)l+1 & (m-1)l+2 & \cdots & (m-1)l+r & \cdots & m \cdot l
\end{array}$$

Cada coluna dessa tabela é um sistema de restos completo módulo m , pelo Lema 2, e também possui o mesmo resto módulo l . Portanto, para calcular $\phi(m \cdot l)$ devemos encontrar os inteiros na tabela acima que são simultaneamente primos com m e l .

Note que, se o primeiro elemento de uma coluna não for primo com l , então todos os elementos dessa coluna não são primos com l . Assim, os elementos primos com l estão impreterivelmente nas colunas restantes que são exatamente $\phi(l)$ números, cujos elementos são primos com l . Agora, vamos determinar quais são os elementos primos com m em cada uma dessas colunas.

Como, por hipótese, m e l são primos entre si, a sequência

$$r, l+r, \dots, (m-1)l+r.$$

Portanto, o número de elementos primos com m e l , simultaneamente, é dado por

$$\phi(ml) = \phi(m) \cdot \phi(l).$$

(HEFEZ, 2014, p. 231). □

Agora, temos condições de encontrar a fórmula que nos permite calcular o valor numérico da função ϕ de Euler para qualquer caso.

Teorema 2. *Se $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, então o valor de $\phi(m)$ é dado por:*

$$\phi(m) = m \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

em que p_1, p_2, \dots, p_r , são os divisores primos de m .

Demonstração. Pelo Teorema 1, podemos escrever:

$$\phi(m) = \phi(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}) = \phi(p_1^{\alpha_1}) \cdot \phi(p_2^{\alpha_2}) \cdots \phi(p_r^{\alpha_r})$$

e pelo Lema 1, temos:

$$\begin{aligned}
\phi(m) &= \phi(p_1^{\alpha_1}) \cdot \phi(p_2^{\alpha_2}) \cdots \phi(p_r^{\alpha_r}) \\
&= p_1^{\alpha_1} \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots p_r^{\alpha_r} \cdot \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \\
&= p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)
\end{aligned}$$

como $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, então:

$$\phi(m) = m \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

□

Exemplo 25. *Quantos são os números menores que 3500 primos com ele?*

Primeiro, vamos decompor 3500 em fatores primos.

$$3500 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7.$$

Agora, aplicando o cálculo de $\phi(m)$, para $m = 3500 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7$, temos:

$$\phi(3500) = 3500 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 1200.$$

Logo, existem 1200 números inteiros menores que 3500 primos com ele.

6 Funções Geradoras

Quanto mais um problema de contagem impõe restrições, mais complexa se torna a sua resolução. Uma das ferramentas da Análise Combinatória que facilita a resolução desses problemas é a Função Geradora. Este método é bastante eficiente na resolução de problemas que envolvem equações lineares do tipo $x_1 + x_2 + \dots + x_i = r$, em números inteiros não-negativos.

Vimos anteriormente técnicas que nos permitem encontrar as soluções inteiras não-negativas da equação acima, porém não havia nenhuma restrição nas variáveis x_i 's.

Levemos em consideração o seguinte problema:

Quantas são as soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, sabendo que as variáveis x_1 e x_2 pertencem ao conjunto $\{2, 3, 4\}$, e a variável x_3 pertence ao conjunto $\{2, 3, 5\}$?

Solução: Note que, nesse problema há restrições nas variáveis x_i 's, portanto não podemos empregar as técnicas estudadas nos tópicos 6 e 7. Assim, para resolvermos tal situação, vamos associar cada variável x_i a um polinômio p_i , cujos expoentes representam as possibilidades de valores que cada variável pode assumir.

$$p_1(x) = x^2 + x^3 + x^4,$$

$$p_2(x) = x^2 + x^3 + x^4,$$

$$p_3(x) = x^2 + x^3 + x^5.$$

Como estamos procurando números cuja soma seja 10 e que estejam, cada um, num conjunto cujos elementos são os expoentes dos polinômios acima, então consideremos o produto destes 3 polinômios:

$$\begin{aligned} f(x) &= p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot p_3(x) \\ &= (x^2 + x^3 + x^4)^2 \cdot (x^2 + x^3 + x^5) \\ &= x^6 + 3x^7 + 5x^8 + 6x^9 + 5x^{10} + 4x^{11} + 2x^{12} + x^{13}. \end{aligned}$$

A solução, neste caso, será o coeficiente de x^{10} na expansão do produto dos polinômios, logo a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ possui 5 soluções inteiras com as restrições dadas. Por exemplo, um termo como $x^2x^3x^5$ nos fornece a solução $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 5$, isto é, o que verificamos aqui é que cada solução deste problema corresponde a exatamente uma maneira de se obter x^{10} na expansão dos produto dos polinômios em questão.

Observe também que, o polinômio encontrado $f(x)$ gera o número de soluções para todas as equações $x_1 + x_2 + x_3 = r$, para $r \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$, com as restrições dadas às variáveis x_i 's.

Dizemos que o polinômio $f(x)$ é a função geradora que nos fornece as soluções desse problema de contagem através de seus coeficientes, 1, 3, 5, 6, 5, 4, 2, 1.

Antes de apresentarmos a definição de funções geradoras, precisamos enunciar o conceito de séries de potências.

Definição 6. *Uma série de potências é uma série que depende de um parâmetro x , da seguinte forma:*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Definição 7. *Se a_r , para $r = 0, 1, 2, \dots$, é o número de soluções de um problema de combinatória, a função geradora ordinária para esse problema é a série de potências*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

para $x_0 = 0$.

Como o número de maneiras de escolhermos r objetos de um conjunto de n objetos distintos, $r \leq n$, é $\binom{n}{r}$, a função geradora ordinária para este problema é:

$$f(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{r}x^r + \dots + \binom{n}{n}x^n,$$

que pode ser reescrita como:

$$f(x) = (1 + x)^n$$

(SANTOS, 2007, p. 152).

Exemplo 26. *De quantas maneiras podemos escolher 5 pessoas de um grupo de 8 pessoas?*

Trata-se de um problema simples de combinatória, pois podemos utilizar uma combinação simples

$$\binom{8}{5} = C_8^5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = 56.$$

Porém, pode-se resolver esse problema usando como ferramenta a função geradora, vejamos.

Tomemos $(1 + x)$ como o polinômio que representa a presença de uma pessoa e com o desenvolvimento e $(1 + x)^8$ temos:

$$f(x) = (1 + x)^8 = 1 + 8x + 28x^2 + 56x^3 + 70x^4 + 56x^5 + 28x^6 + 8x^7 + x^8.$$

Portanto, pela definição de função geradora, o coeficiente de x^5 é a solução desse problema, que no caso é 56.

Exemplo 27. *Determine a função geradora ordinária tal que o coeficiente a_r de x^r é o número de soluções inteiras positivas de:*

$$x_1 + x_2 + x_3 = r, \text{ em que } r \in \{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$$

$$3 \leq x_i \leq 5, \text{ para } i = 1, 2$$

$$6 \leq x_3 \leq 8.$$

A solução de a_r neste caso é o coeficiente de x^r na expansão do produto, conforme vimos na introdução desse tópico:

$$(x^3 + x^4 + x^5)^2(x^6 + x^7 + x^8) = x^{12} + 3x^{13} + 6x^{14} + 6x^{15} + 5x^{16} + 2x^{17} + x^{18}.$$

Logo, essa série de potências é a função geradora ordinária para a questão apresentada e a sequência formada pelos seus coeficientes, 1, 3, 6, 6, 5, 2, 1, nos fornece o número de soluções para esse problema de combinatória.

Os exemplos acima nos permitem utilizar as funções geradoras como ferramenta para problemas de contagem na Educação Básica, mas agora vamos além, pois essas funções também nos auxiliam enquanto instrumento de pesquisa, portanto faremos a introdução de conceitos considerando que já se tenha o conhecimento de algumas expansões em série de algumas funções.

6.1 Cálculo de Coeficientes das Funções Geradoras

Partindo da definição de função geradora ordinária, apresentada anteriormente, para a sequência $a_r = 1$ e $r = 0, 1, 2, 3, \dots$, temos

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad (1)$$

como sua função geradora, porém estamos interessados apenas no cálculo dos coeficientes destas funções e não nos valores numéricos da variável x , sendo assim, sempre que $|x| < 1$, sabemos que

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

No contexto das Funções Geradoras quando consideramos a expressão (1), estamos interessados apenas nos seus coeficientes, isto é, não há pretensão de atribuir valores numéricos à variável x , assim, vamos operar tais séries sem nenhuma preocupação com a convergência.

Exemplo 28. *Encontre a função geradora para sequência $(a_r) = (1, 1, 2, 1, 1, \dots)$.*

Solução: Pela definição, a série de potências procurada é dada por:

$$f(x) = 1 + x + 2x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

as quando se pede a função geradora, estamos interessados em um expressão mais simples, então façamos a seguinte manipulação:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + x^2 + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \\ &= x^2 + (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) \\ &= x^2 + \left(\frac{1}{1-x} \right). \end{aligned}$$

Chamamos esse formato para função geradora ordinária de *forma fechada*.

Exemplo 29. *Encontre a sequência gerada pela função geradora ordinária*

$$f(x) = \frac{x^2}{1-3x}.$$

Solução: Sabemos que

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Substituindo x por $3x$ nesta última expressão, temos:

$$\frac{1}{1-3x} = 1 + (3x) + (3x)^2 + (3x)^3 + \dots$$

Agora, basta multiplicar a expressão acima por x^2

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{1-3x} &= x^2 \cdot 1 + x^2 \cdot (3x) + x^2 \cdot (3x)^2 + x^2 \cdot (3x)^3 + \dots \\ f(x) &= \frac{x^2}{1-3x} = x^2 + 3x^3 + 9x^4 + 27x^5 + \dots \end{aligned}$$

Logo, $f(x)$ é a função geradora da sequência $(a_r) = (0, 0, 1, 3, 9, 27, \dots)$.

6.2 Teorema Binomial

No Tópico 6, vimos que o número de soluções inteiras não negativas para a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = p$$

é dado por C_{n+p-1}^p . Como x_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, pode assumir qualquer valor inteiro não negativo, a função geradora que determina a presença de x_i é

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Sendo assim, a função geradora para esse problema é

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n = \frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n}.$$

Agora, para mostrarmos, nessa função, mantenha o coeficiente de x^p é, de fato, C_{n+p-1}^p , precisamos de um teorema que generalize o desenvolvimento do Binômio de Newton.

Tomando o desenvolvimento em Série de Taylor, em torno de zero, da função

$$f(x) = (1+x)^u,$$

em que u é um número real qualquer, conseguimos provar o seguinte Teorema, para $|x| < 1$

Teorema 3 (Teorema binomial).

$$(1+x)^u = \binom{u}{0} + \binom{u}{1}x + \binom{u}{2}x^2 + \cdots + \binom{u}{p}x^p + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{u}{p}x^p,$$

em que

$$\binom{u}{p} = \begin{cases} \frac{u(u-1)\cdots(u-p+1)}{p!}, & \text{se } p > 0 \\ 1, & \text{se } p = 0. \end{cases}$$

teremos

$$(1+x)^u = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{u}{r}x^r$$

.

O número $\binom{u}{p}$, indicado acima, é chamado de *coeficiente binomial generalizado*. Na condição de que u seja igual ao número natural n , $\binom{u}{p}$ será o coeficiente binomial usual e o desenvolvimento acima se reduzirá à expansão do Binômio de Newton. Portanto, a partir desse resultado podemos provar o seguinte teorema.

Teorema 4. *O coeficiente de x^p na expansão*

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^p$$

é igual a $\binom{n+p-1}{p}$.

Demonstração. De fato, temos que:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^n = \frac{1}{(1 - x)^n} = (1 - x)^{-n}.$$

Aplicando o teorema anterior, obtemos:

$$(1 - x)^{-n} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{-n}{p} (-x)^p = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{-n}{p} (-1)^p x^p.$$

Usando a definição de coeficiente binomial generalizado, temos que o coeficiente de x^p é igual a:

$$\begin{aligned} \binom{-n}{p} (-1)^p &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2) \cdots (-n-p+1)(-1)^p}{p!} \\ &= \frac{(-1)^p (n)(n+1)(n+2) \cdots (n+p-1)(-1)^p}{p!} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2) \cdots (n+p-1)}{p!} \\ &= \frac{(n+p-1)(n+p-2) \cdots (n+1)n(n-1)!}{p!(n-1)!} \\ &= \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} \\ &= \binom{n+p-1}{p}. \end{aligned}$$

□

Observação 1. *Mesmo que, para n inteiro positivo e p inteiro não negativo, $\binom{-n}{p}$ não tenha uma leitura combinatória, uma simples manipulação algébrica nos permite escrever:*

$$\binom{-n}{p} = (-1)^p \binom{n+p-1}{p}$$

Exemplo 30. Encontre o coeficiente de x^3 no desenvolvimento binomial de $(1+x)^{\frac{1}{2}}$.

Pelo Teorema Binomial, temos:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{p} x^p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - p + 1\right)}{p!} x^p.$$

Logo, o coeficiente de x^3 é dado por:

$$\frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{2} - 3 + 1\right)}{3!} = \frac{1}{16}.$$

Exemplo 31. De quantas maneiras diferentes podemos escolher 10 camisetas se existem 4 marcas diferentes?

Como não há restrições quanto ao número de camisetas de uma determinada marca, a função geradora ordinária que determina o número de camisetas de uma dada marca é

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{10}$$

Mas como são 4 marcas, a solução será o coeficiente de x^{10} no desenvolvimento de

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{10})^4.$$

Usando o fato de que

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{10} = \frac{1 - x^{11}}{1 - x},$$

temos:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{10})^4 = \left(\frac{1 - x^{11}}{1 - x} \right)^4 = (1 - x^{11})^4 (1 - x)^{-4}.$$

Uma vez que

$$(1 - x^{11})^4 = 1 - 4x^{11} + 6x^{22} - 4x^{33} + x^{44},$$

vemos que o coeficiente de x^{10} em $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{10})^4$ é o coeficiente x^{10} em $(1 - x)^{-4}$. Como

$$(1 - x)^{-4} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{-4}{p} (-x)^p,$$

o coeficiente x^{10} é

$$\binom{-4}{10} (-1)^{10} = \binom{4 + 10 - 1}{10} = 286.$$

Portanto, existem 286 maneiras diferentes de se escolher 10 camisetas se existem 4 marcas diferentes.

Exemplo 32. *Quantos dos inteiros compreendidos entre 1 e 100000 têm soma dos algarismos iguais a 13?*

Vamos pensar nos números de 0 a 99999, já que 100000 não é, claramente, um dos inteiros que têm soma dos algarismos iguais a 13.

Todo número na base 10 compreendido entre 0 e 99999 pode ser escrito da forma

$$x_1x_2x_3x_4x_5$$

tal que $0 \leq x_i \leq 9$, para $i = 1, 2, \dots, 5$. De fato,

$$0 = 00000$$

$$1 = 00001$$

...

e, assim por diante, de modo que desta forma representamos todos os inteiros de 0 a 99999.

Assim, como vimos no início deste capítulo, o nosso problema consiste em encontrar o número de soluções da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13$$

com a restrição $0 \leq x_i \leq 9$. Para isso, temos que encontrar o coeficiente de x^{13} na expansão da seguinte função geradora ordinária

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^9)^5 = \left(\frac{1 - x^{10}}{1 - x} \right)^5 = (1 - x^{10})^5 (1 - x)^{-5}.$$

Como

$$(1 - x^{10})^5 = 1 - 5x^{10} + 10x^{20} - 10x^{30} + 5x^{40} - x^{50}$$

precisamos dos coeficientes de x^3 e x^{13} na expansão de $(1 - x)^{-5}$, que são, respectivamente:

$$\binom{-5}{3}(-1)^3 = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = 35 \quad \binom{-5}{13}(-1)^{13} = \binom{5+13-1}{13} = \binom{17}{13} = 2380.$$

Logo, o coeficiente de x^{13} em

$$(1 - x^{10})^5 (1 - x)^{-5}$$

é $-5 \cdot 35 + 1 \cdot 2380 = 2205$, que é a solução para o nosso problema.

Até agora, vimos alguns exemplos em que utilizamos a função geradora ordinária para resolver problemas cuja ordem dos objetos é irrelevante. A seguir, vamos discorrer sobre as funções geradoras exponenciais, que usaremos para solucionar problemas em que a ordem dos objetos retirados é importante.

6.3 Funções Geradoras Exponenciais

Definição 8. *A série de potências*

$$a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots + a_r \frac{x^r}{r!} + \cdots$$

é a função geradora exponencial da sequência (a_r) . (SANTOS, 2007).

Exemplo 33. *Encontre a função geradora exponencial para a sequência $(1, 1, 1, \dots)$.*

Sabemos que a expansão de e^x é dada por

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots$$

e nesse desenvolvimento o coeficiente de $\frac{x^r}{r!}$ é igual a 1, para todo r .

Logo, esta é a função geradora exponencial da sequência $a_r = 1$, para $r = 0, 1, 2, 3, \dots$, isto é

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots = e^x.$$

Exemplo 34. *Encontre a função geradora exponencial que determina o número de sequências de k letras ($k \leq 3$) formadas pelas letras a e b , em que a letra a ocorre no máximo uma vez e a letra b no máximo duas vezes.*

Temos que considerar o produto dos dois polinômios abaixo, em que cada um determina a presença das letras a e b , respectivamente.

$$f(x) = (1 + x) \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} \right) = 1 + 2x + \frac{5x^2}{4} + \frac{x^3}{4}.$$

Como queremos a sequência dos coeficientes de $\frac{x^r}{r!}$, vamos escrever esse polinômio na forma:

$$f(x) = 1 + 2\frac{x}{1!} + \frac{5}{2}\frac{x^2}{2!} + 3\frac{x^3}{3!}.$$

Portanto, essa expressão, em que a ordem dos objetos é relevante, é a função geradora exponencial para esse problema.

Exemplo 35. *Uma companhia telefônica contrata 8 pessoas para trabalharem em três diferentes escritórios. De quantas maneiras ela pode distribuir esses 8 contratados para três escritórios diferentes de modo que cada um receba pelo menos um novo funcionário?*

De acordo com o enunciado, nenhum escritório poderá receber mais que 6 novos contratados, pois nenhum deles poderá ficar vazio. Como o número de funcionários em cada escritório é relevante, usaremos, para resolver este problema, a seguinte função geradora exponencial:

$$f(x) = \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^6}{6!} \right)^3$$

e, a resposta é o coeficiente de $\frac{x^8}{8!}$ nessa função. Note que, este coeficiente é o mesmo se tomarmos

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^6}{6!} + \cdots \right)^3 \\ &= \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^6}{6!} + \cdots - 1 \right)^3 \\ &= (e^x - 1)^3 \\ &= e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1, \end{aligned}$$

já que as potências extras não contribuem para o coeficiente de $\frac{x^8}{8!}$. No entanto, sabemos que:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

logo:

$$e^{3x} = 1 + \frac{3x}{1!} + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + \cdots + \frac{(3x)^8}{8!} + \cdots$$

Assim, o coeficiente de $\frac{x^8}{8!}$ é 3^8 . De maneira análoga, encontramos o coeficiente de $\frac{x^8}{8!}$ em e^{2x} , que é 2^8 . Logo, o coeficiente de $\frac{x^8}{8!}$ em

$$f(x) = (e^x - 1)^3 = e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1$$

será $3^8 - 3 \cdot 2^8 + 3 = 5796$.

Apresentaremos, agora, um teorema que generaliza esse resultado.

Teorema 5. *O número de maneiras de distribuirmos n objetos distintos em k compartimentos distintos, sem que nenhum compartimento fique vazio, que indicamos por $T(n, k)$, é:*

$$T(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

Demonstração. Como cada um dos k compartimentos deve ter pelo menos um objeto, e a ordem dos n objetos distribuídos é relevante, a função geradora exponencial para este problema é

$$f(x) = \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right)^k = (e^x - 1)^k$$

e, a solução para esse problema é o coeficiente de $\frac{x^n}{n!}$. Sabemos que

$$(e^x - 1)^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} e^{(k-i)x}$$

e como

$$e^{(k-i)x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (k-i)^n x^n,$$

temos

$$(e^x - 1)^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (k-i)^n x^n = \sum_{i=0}^k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \frac{x^n}{n!}$$

Então, o coeficiente de $\frac{x^n}{n!}$ é

$$T(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

□

Com esse teorema, conseguimos resolver o **Exemplo 35** de uma maneira bastante simples, tomemos $n = 8$ e $k = 3$.

$$T(8, 3) = \sum_{i=0}^3 (-1)^i \binom{3}{i} (3-i)^8 = 3^8 - \binom{3}{1} 2^8 + \binom{3}{2} = 3^8 - 3 \cdot 2^8 + 3 = 5796.$$

Agora, apresentaremos um teorema no caso da distribuição de n objetos distintos em compartimentos iguais.

Teorema 6. *O número de maneiras $S(n, k)$ de distribuirmos n objetos distintos em k compartimentos idênticos sem que nenhum compartimento fique vazio é*

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} T(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

Demonstração. Para que possamos obter uma distribuição de n objetos distintos em k compartimentos distintos, sem que nenhum compartimento fique vazio, basta encontrarmos uma distribuição de n objetos distintos em k compartimentos idênticos e ordenar esses objetos. O que nos garante que $T(n, k) = k! S(n, k)$, logo:

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} T(n, k).$$

□

Exemplo 36. *De quantas maneiras podemos distribuir 5 bolas distintas em duas caixas idênticas, de modo que nenhuma caixa fique vazia?*

Esse problema é uma aplicação direta do Teorema 6, para $n = 5$ e $k = 2$,

$$S(5, 2) = \frac{1}{2!} \sum_{i=0}^2 (-1)^i \binom{2}{i} (2-i)^5 = \frac{1}{2} (2^5 - 2) = 15.$$

6.4 Partições de um Inteiro

Definição 9. *Uma partição de um inteiro positivo n é uma coleção de inteiros positivos cuja soma é n . Denotamos por $p(n)$ o número de partições de n .*

Como vimos na **Seção 3.10**, o número de partições do número 5 é 7, isto é, $p(5) = 7$.

Se representarmos por $p_k(n)$ o número de partições de n tendo k como a maior parte, temos que $p_2(6) = 3$, pois na partição de 6, temos três que podem ser escritas como uma soma de dois elementos, como podemos ilustrar.

$$\begin{array}{c}
 6 \\
 \mathbf{5+1} \\
 \mathbf{4+2} \\
 4 + 1 + 1 \\
 \mathbf{3+3} \\
 3 + 2 + 1 \\
 3 + 1 + 1 + 1 \\
 2 + 2 + 2 \\
 2 + 2 + 1 + 1 \\
 2 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
 \end{array}$$

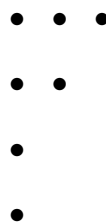
De modo geral,

$$\sum_{k=0}^n p_k(n) = p(n).$$

6.4.1 Gráfico de uma Partição

Pode-se representar graficamente uma partição do inteiro n através de um conjunto de n pontos no plano, inserindo-se em cada linha, e em ordem decrescente, um número de pontos igual a cada uma de suas partes.

Um gráfico da partição $3+2+1+1$ de 7 é:

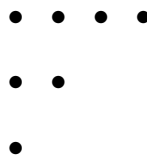


Caso troquemos as linhas por colunas na representação gráfica de uma partição n , obtemos uma nova partição de n chamada de *conjugada* da partição analisada.

Vejamos a seguir o gráfico de uma partição com sua respectiva partição conjugada.

Partição

$$4+2+1$$



Partição Conjugada

$$3+2+1+1$$



Teorema 7. *O número $p_k(n)$ de partições de n tendo k como a maior parte é igual ao número de $q_k(n)$ de partições de n com exatamente k partes, isto é, $p_k(n) = q_k(n)$.*

Demonstração. Por meio da partição conjugada definida no conjunto das partições de n , vemos que toda partição tendo k como a maior parte transformada em uma partição que possui exatamente k partes, e que cada que possui k partes é levada em uma que possui k como maior parte, portanto fica demonstrado. \square

Corolário 1. *Seja $P_k(n)$ o número de partições de n com partes menores ou iguais a k , e $Q_k(n)$ o número de partições de n com, no máximo, k partes. Então, $P_k(n) = Q_k(n)$.*

Demonstração. Aplicando a operação conjugação, notamos que ela transforma cada elemento $P_k(n)$ em um único elemento contado por $Q_k(n)$, isto pela mesma razão demonstrada no teorema anterior. \square

Teorema 8. Denotando por $F(n)$ o número de partições de n em que cada parte aparece pelo menos duas vezes, e por $G(n)$ o número de partições de n em partes maiores que 2 e tais que inteiros consecutivos não aparecem como partes, então $F(n) = G(n)$.

Demonstração. Tomando o conjugado de uma partição enumerada por $F(n)$, temos exatamente um dos elementos enumerados por $G(n)$, conforme o exemplo abaixo.

Partição	Partição Conjugada
• • • •	
• • • •	• • • • • •
• •	• • • •
• •	• •
• •	• •
•	
•	

Como cada parte aparece pelo menos duas vezes, então, na partição conjugada, a menor parte é pelo menos 2, e inteiros consecutivos não podem ocorrer como partes. \square

Essa é uma prova analítica, que também pode ser feita através de identidades combinatórias aplicando funções geradoras, que vamos deixar por conta do leitor, tal demonstração é apresentada no Teorema de Elder.

Uma partição é chamada de **autoconjugada** se ela for igual à sua conjugada, isto é, se trocarmos as linhas pelas colunas obtermos a mesma partição.

Partição

$3+2+1$

• • •
• •
•

Partição Conjugada

$$3+2+1$$

$$\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \\ \bullet \end{array}$$

Antes de apresentarmos o conceito de função geradora para partições, vamos relembrar uma importante interpretação combinatorial para $q_k(n)$, o número de partições de n com exatamente k partes. Como vimos, na **Seção 3.10**, as partições de 5 são $\{5\}$, $\{4, 1\}$, $\{3, 2\}$, $\{3, 1, 1\}$, $\{2, 2, 1\}$, $\{2, 1, 1, 1\}$, $\{1, 1, 1, 1, 1\}$. Se desejarmos distribuir 5 objetos idênticos em 3 caixas idênticas, sem que nenhuma fique vazia, teremos apenas as possibilidades $\{3, 1, 1\}$, $\{2, 2, 1\}$, que são as partições de 5 em exatamente 3 partes. Portanto, podemos concluir que o número de maneiras de distribuir n objetos idênticos em k caixas idênticas, sem que nenhuma fique vazia, é igual a $q_k(n)$.

Vamos, obter, agora, a função geradora para partições de n em partes ímpares distintas. Se tomarmos o produto

$$(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\cdots(1+x^{2k+1})\cdots,$$

observe que o coeficiente de x^5 é igual a 1, ou seja, é o total de maneiras de se escrever 5 como soma de ímpares distintos. Da maneira análoga, podemos concluir que o coeficiente de x^{14} é 3, pois somente se obtém x^{14} quando se multiplica $x \cdot x^{13}$, $x^3 \cdot x^{11}$ e $x^5 \cdot x^9$. Portanto, vemos que

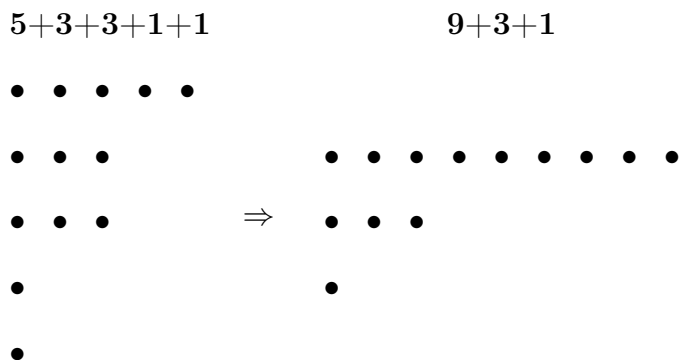
$$\prod_{k=0}^{\infty} (1+x^{2k+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} d_i(n)x^n,$$

em que $d_i(n)$ é o número de partições de n em partes ímpares distintas, isto é, que

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1+x^{2k+1})$$

é a função geradora para $d_i(n)$.

Uma motivação para a avaliação do resultado acima é a seguinte observação de que o número de partições de n que são autoconjugadas é igual ao número de partições de n em partes ímpares distintas. Para ilustrarmos esta transformação, vamos considerar a seguinte partição autoconjugada de 13.



Observe que pegamos a primeira linha junto com a primeira coluna e criamos uma nova partição com a primeira linha formada por estes pontos. Procedendo da mesma forma com o que sobrou da segunda linha e da segunda coluna obteremos a segunda linha da nova partição. Fazendo isso com as demais linhas e suas respectivas colunas obteremos uma partição de 13. Como as partições auto conjugadas são simétricas em relação à diagonal principal então as linhas criadas na nova partição terão duas vezes o tamanho da linha original menos um, pois a linha e a coluna da partição original tem a mesma quantidade de pontos e um ponto em comum. Assim, as linhas da nova partição terão um número ímpar de pontos e são distintas.

Agora, caso nos interessemos somente nas partições de n em partes distintas, tomemos o seguinte produto:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n)\cdots.$$

Assim, no que segue, a função geradora para partições de n em partes distintas é

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^k).$$

Exemplo 37. Mostre que a função geradora para $p(n)$, o número de partições de n é dada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k},$$

em que $p(0) = 1$.

Vamos apresentar uma demonstração não muito rigorosa, por estarmos mais interessados na interpretação combinatória de $p(n)$ como coeficiente de x^n nesta expansão, assim:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots; \\ \frac{1}{1-x^2} &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots; \\ &\vdots \\ \frac{1}{1-x^m} &= 1 + x^m + x^{2m} + x^{3m} + \dots; \end{aligned}$$

temos:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = (1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x^2+x^4+x^6+\dots)(1+x^3+x^6+x^9+\dots)\dots,$$

em que percebemos que os coeficientes de x^n vêm de um termo x^{a_1} da primeira série, de x^{2a_2} da segunda, de x^{3a_3} , ..., e de x^{ma_m} da m -ésima série, com $a_i \geq 0$, para todo i . Sendo o produto destes termos igual a x^n , temos que

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + ma_m = n.$$

Cada a_i deve ser visto como o número de i 's que aparecem na partição de n , ou seja, podemos escrever n como

$$n = (1 + 1 + 1 + \dots + 1) + (2 + 2 + \dots + 2) + \dots + (m + m + \dots + m),$$

no qual temos a_1 1's no primeiro parênteses, a_2 2's no segundo e a_m m 's no m -ésimo. Desta forma, cada partição de n contribui com uma unidade para o coeficiente de x^n . Portanto, podemos escrever

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = (1+x+x^{1+1}+x^{1+1+1}+\dots)(1+x^2+x^{2+2}+x^{2+2+2}+\dots)(1+x^3+x^{3+3}+x^{3+3+3}+\dots)\dots.$$

Então, a função geradora para as partições de n em que nenhuma parte supera m é dada por:

$$\prod_{k=1}^m \frac{1}{1-x^k}.$$

Agora, vamos listar algumas funções geradoras.

Função Geradora	Para a sequência das partições de n em partes que são:
$\prod_{k=0}^{\infty} (1+x^{2k+1})$	ímpares distintas
$\prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{2k+1})}$	ímpares
$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{2k})}$	pares
$\prod_{k=1}^{\infty} (1+x^{2k})$	pares distintos
$\prod_{k=1}^{\infty} (1+x^{k^3})$	cubos distintos
$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{k^3})}$	cubos
$\prod_p \frac{1}{(1-x^p)}$	primos

Tabela 1: Funções Geradoras

Teorema 9. *O número de partições de n em partes distintas é igual ao número de partições de n em partes ímpares.*

Demonstração. Vimos que a função geradora para partições em partes distintas é dada por:

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k)$$

e que a função geradora para partições em partes ímpares (**Tabela 1**) é igual a:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{2k+1})}.$$

Logo, basta provarmos que essas duas expressões são equivalentes. Dessa forma

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^k) &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + x^k)(1 - x^k)}{(1 - x^k)} \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - x^{2k})}{(1 - x^k)} \\
&= \frac{(1 - x^2)(1 - x^4)(1 - x^6) \cdots}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4)(1 - x^5) \cdots} \\
&= \frac{1}{(1 - x)(1 - x^3)(1 - x^5) \cdots} \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - x^{2k+1})}.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 38. Dê uma interpretação, em termos de partições, para

(a) o coeficiente de x^{12} na expansão de

$$(1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{12})(1+x^4+x^8+x^{12})(1+x^6+x^{12})(1+x^8)(1+x^{10})(1+x^{12})$$

e calcule o coeficiente de x^{12} .

(b) o coeficiente de x^{15} na expansão de

$$(1+x^3+x^6+x^9+x^{12}+x^{15})(1+x^6+x^{12})(1+x^9)$$

e calcule o coeficiente de x^{15} .

(a) Observe que a expansão da expressão

$$(1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{12})(1+x^4+x^8+x^{12})(1+x^6+x^{12})(1+x^8)(1+x^{10})(1+x^{12})$$

se trata de uma função geradora para as partições de n em partes pares e, como queremos o coeficiente de x^{12} , então, basta encontrarmos o número de partições de 12 em partes pares. Assim, podemos reescrever a expressão acima como

$$(1+x^2+x^{2+2}+x^{2+2+2}+x^{2+2+2+2}+x^{2+2+2+2+2}+x^{2+2+2+2+2+2}).(1+x^4+x^{4+4}+x^{4+4+4}).$$

$(1+x^6+x^{6+6}).(1+x^8).(1+x^{10}).(1+x^{12})$, dessa maneira, conseguimos diferenciar

os produtos que geram os fatores de expoente 12 e coeficiente 1, então:

$$x^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x^{10} \cdot 1 = x^{12}$$

$$x^2 \cdot x^{2+2} \cdot x^{2+2+2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = x^{12}$$

$$x^{2+2} \cdot x^{4+4} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = x^{12}$$

$$x^{2+2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot x^8 \cdot 1 \cdot 1 = x^{12}$$

$$x^{2+2+2} \cdot 1 \cdot x^{3+3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = x^{12}$$

$$x^{2+2+2+2} \cdot x^4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = x^{12}$$

$$x^{2+2+2+2+2+2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = x^{12}$$

$$1 \cdot x^4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x^8 \cdot 1 = x^{12}$$

$$1 \cdot x^{4+4+4} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = x^{12}$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x^{6+6} \cdot 1 \cdot 1 = x^{12}$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x^{12} = x^{12}.$$

Assim, obtemos todos os termos acompanhados de x^{12} , agora, somando, temos $11x^{12}$, logo o coeficiente de x^{12} é 11.

(b) Note que, neste item, a expansão da expressão

$$(1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + x^{15})(1 + x^6 + x^{12})(1 + x^9)$$

se trata de uma função geradora para as partições de n em partes múltiplas de 3 e, como queremos o coeficiente de x^{15} , então, basta encontrarmos o número de partições de 15 em partes múltiplas de 3. Reescrevendo a expressão acima

$$(1 + x^3 + x^{3+3} + x^{3+3+3} + x^{3+3+3+3} + x^{3+3+3+3+3}) \cdot (1 + x^6 + x^{6+6})(1 + x^9).$$

Logo, de maneira análoga ao item anterior, obtemos o coeficiente de x^{15}

$$x^3 \cdot x^{6+6} \cdot 1 = x^{15}$$

$$x^{3+3} \cdot 1 \cdot x^9 = x^{15}$$

$$x^{3+3+3} \cdot x^6 \cdot 1 = x^{15}$$

$$x^{3+3+3+3+3} \cdot 1 \cdot 1 = x^{15}$$

$$1 \cdot x^6 \cdot x^9 = x^{15}.$$

Somando, temos $5x^{15}$, isto é, o coeficiente de x^{15} é 5.

7 Considerações Finais

Neste trabalho, foram estudados alguns resultados sobre a resolução de diferentes equações de números inteiros positivos. Após analisarmos diversas possibilidades, vimos que as funções geradoras são uma ferramenta eficiente para encontrar as soluções dessas equações.

Em relação às partições de um inteiro, consideramos que elas vão além das aplicações recorrentes na Educação Básica, pois elas fornecem condições de desenvolver novos resultados e demonstrações combinatórias de identidades que possuem provas analíticas.

Espera-se que este estudo possa contribuir na produção de futuras pesquisas e possa abrir novas possibilidades metodológicas para o ensino da Matemática na Educação Básica.

Referências

- [1] ANDREWS, G.E.; ERIKSON, K. *Integer Partition*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [2] DANTE, L.R. *Matemática: Contexto e Aplicações*. Volume Único. São Paulo: Ática, 2000.
- [3] HEFEZ, A. *Aritmética*. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- [4] IEZZI, G.; HAZZAN, S.; DEGENSZAJN, D. *Fundamentos da Matemática Elementar*. Vol. 5. São Paulo: Atual Editora, 2004.
- [5] MORGADO, A.C.O.; CARVALHO, J.B.P.; CARVALHO, P.C.P.; FERNANDEZ, P. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [6] SANTOS, J.P.O.; MELLO, J.P.; MURARI, I.T.C. *Introdução à Análise Combinatória*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007.