Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica - IMECC

Relações de Recorrência e Aplicações

Denilson Amaral Nolibos

denolibos@yahoo.com.br

Dissertação de Mestrado

Orientadora: **Prof^{a}.Dr^{a}. Andréia Cristina Ribeiro**

Co-orientador: **Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos**

Março de 2010
Campinas - SP

Relações de Recorrência e Aplicações

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Denilson Amaral Nolibos** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, SP, 25 de março de 2010.

Andréia Cristina Ribeiro

Prof^{a}. Dr^{a}. Andréia Cristina Ribeiro
Orientadora

Prof. Dr. José Plínio de O. Santos
Co-orientador

Banca Examinadora:

Prof^{a}. Dr^{a}. Andréia Cristina Ribeiro (UFMS)

Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (UFRGS)

Prof. Dr. João Eloir Strapasson (UNICAMP)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, **UNICAMP**, como requisito parcial para obtenção de Título de **Mestre em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Nolibos, Denilson Amaral
N719r Relações de recorrência e aplicações/Denilson Amaral Nolibos -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientador : Andréia Cristina Ribeiro

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Análise combinatória. 2.Relações de recorrência. 3.Funções geradoras. I. Ribeiro, Andréia Cristina. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Recurrence relations and applications

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Combinatorial analysis. 2.Recurrence relations. 3. Generating functions .

Área de concentração: Matemática Discreta

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Profª. Drª. Andréia Cristina Ribeiro (UFMS)
Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (IM-UFRGS)
Prof. Dr. João Eloir Strapasson (FCA-UNICAMP)

Data da defesa: 25/03/2010

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 25 de março de 2010 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Andréia C. Ribeiro

Prof. (a). Dr (a). ANDRÉIA CRISTINA RIBEIRO

Eduardo Brietzke

Prof. (a). Dr (a). EDUARDO HENRIQUE DE MATTOS BRIETZKE

João Eloir Strapasson

Prof. (a). Dr (a). JOÃO ELOIR STRAPASSON

Dedico este trabalho a minha amada esposa
Aline *e aos meus queridos filhos* ***Vinicius***
e ***Beatriz****.*

Agradecimentos

A minha esposa pela compreensão nos momentos em que estive ausente das atividades do cotidiano e pelo apoio incondicional em todas as minhas pretensões de auto-aperfeiçoamento.

Aos meus filhos que não tiveram a minha companhia em todos os momentos que gostariam, mas que um dia sentirão orgulho do pai por mais esta conquista.

Aos meus pais pela formação que me deram, a qual me conduziu até este momento de vitória.

Aos meus familiares, pelo incentivo e apoio em todos as situações.

Aos meus professores que me forneceram os caminhos do conhecimento.

A minha orientadora, Profª.Drª. Andréia Cristina Ribeiro, profissional de admirável capacidade e sem a qual este trabalho não seria uma realidade. Obrigado pela atenção, desprendimento e paciência com que sempre me atendeu.

Ao meu professor e co-orientador, Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos, mestre que com seu entusiasmo pela Matemática Discreta, me levou a segui-lo. Obrigado por ter feito parte desta etapa de minha vida, despertando aptidões adormecidas.

A todos os Professores do IMECC, em especial à Profª.Drª. Sueli, que participaram do Mestrado Profissional, não medindo esforços para que todos lograssem êxito.

Aos meus colegas e amigos Tulio e Cipriano, pelos longos dias de estudos que vivenciamos juntos. Tenham certeza que a minha vitória passa pelo nosso bom convívio e pelo ânimo e coragem que sempre encontrei em vocês.

Ao Comando da Academia Militar das Agulhas Negras, por ter proporcionado esta valiosa oportunidade de estudarmos em uma das mais renomadas Universidades do país, através do convênio firmado entre a AMAN e a Unicamp.

Aos integrantes da Cadeira de Matemática da Academia Militar das Agulhas Negras, em especial ao Maj Cleidinei, pelo apoio incondicional aos mestrandos, que sempre tiveram a compreensão de todos para realizar seus estudos.

Ao Cel Tércio, chefe da Seção de Capacitação de Docentes da AMAN, pelo sempre prestimoso apoio oferecido.

"Quem estuda e não pratica o que aprendeu
é como o homem que lavra e não semeia."
Provérbio árabe.

Resumo

Este trabalho versa sobre Relações de Recorrência e alguns de seus métodos de resolução. Buscamos gerar um texto de fácil leitura que estimule o leitor a prosseguir e aprofundar-se no estudo do assunto.

Três métodos de resolução com seus respectivos Teoremas e demonstrações foram trabalhados: método para recorrências de primeira ordem, método das raízes características e método das funções geradoras.

Buscamos trazer exemplos resolvidos utilizando os Teoremas demonstrados. Em alguns problemas, foram introduzidas novas técnicas de resolução a fim de enriquecer o trabalho e mostrar ao leitor a existência de diferentes formas de abordagem para solucionar uma relação de recorrência.

Concluímos que a formulação de relações de recorrência é uma ferramenta poderosa e versátil na resolução de problemas combinatórios. Consequentemente, torna-se assunto obrigatório àqueles que se aventuram no estudo da Matemática Discreta.

Palavras-chave: Relações de Recorrência, métodos de resolução.

Abstract

This study is about Recurrence Relations and some of their methods of resolution. We tried to generate an easy-to-read-text which stimulates the reader to proceed and to deepen his study about this subject.

Three resolution methods with their theorems and demonstrations were studied: the method for first order recurrences, the characteristic root method and the generating function method.

We seek to bring examples solved using the theorems stated. To some problems, new resolution techniques were introduced in order to enrich the work and show the reader the existence of different approach forms to solve a recurrence relation.

We concluded that the formulation of recurrence relations is a powerful and versatile tool in the resolution of combinatorial problems. Therefore, it becomes an obligatory subject to those who adventure in the study of Discrete Mathematics.

Key words: Recurrence Relations, resolution methods.

Sumário

Introdução

Baseado na linha central de pesquisa do Mestrado Profissional, estudamos as Relações de Recorrência, importante assunto da Matemática Discreta, tendo como objetivo geral produzir um texto acessível que sirva como fonte de consulta a docentes e discentes da disciplina, ministrada principalmente nos cursos de graduação de Matemática.

Citamos como principais contribuições a divulgação do assunto e a produção de uma fonte de consulta rica em exemplos resolvidos.

A dissertação encontra-se dividida em três capítulos. No Capítulo 1 trabalhamos quatro exemplos de relações de recorrência, sem nos preocuparmos com definições e as respectivas técnicas de resolução, buscando familiarizar e instigar o leitor que está começando o estudo do assunto.

Já no Capítulo 2 desenvolvemos os métodos de resolução, seus respectivos Teoremas e demonstrações. Três métodos de resolução foram trabalhados: método para recorrências de primeira ordem, método das raízes características e método das funções geradoras. A cada método de resolução introduzido, trouxemos novos exemplos resolvidos.

Finalmente, o Capítulo 3 traz dez problemas que visam a aplicar os métodos de resolução estudados no Capítulo 2. Nos últimos quatro problemas, foram introduzidas novas técnicas de resolução a fim de enriquecer o trabalho e mostrar ao leitor a existência de diferentes formas de abordagem para solucionar uma relação de recorrência.

Capítulo 1

Exemplos clássicos

Iniciaremos este trabalho explorando alguns exemplos de recorrência que nos fornecerão condições de introduzirmos conceitos importantes. Frequentemente necessitamos contar quantidades que dependem da entrada de um parâmetro, digamos n. Desta forma, veremos como obter o cálculo do n-ésimo termo de uma sequência em função dos termos anteriores. Em seguida, discutiremos diversos métodos para encontrar fórmulas gerais para este n-ésimo termo da sequência. As ideias e métodos apresentados neste trabalho têm uma extensa variedade de aplicações, algumas das quais teremos oportunidade de desenvolver no Capítulo 3.

1.1 Algumas recorrências elementares

Exemplo 1.1 Os Grãos de Trigo

Segundo uma das lendas que narram a criação do xadrez, contada em *O Homem que Calculava*, do escritor e matemático Malba Tahan, numa província indiana chamada Taligana havia um poderoso rajá que havia perdido o filho em batalha. O rajá estava em constante depressão e passou a descuidar-se de si e do reino.

Certo dia o rajá foi visitado por Sessa, que lhe apresentou um tabuleiro com 64 casas brancas e pretas com diversas peças que representavam a infantaria, a cavalaria, os carros de combate, os condutores de elefantes, o principal ministro e o próprio rajá.

Sessa explicou que a prática do jogo daria conforto espiritual ao rajá, que finalmente encontraria a cura para a sua depressão, o que realmente ocorreu.

O rajá, agradecido, insistiu para que Sessa aceitasse uma recompensa por sua invenção e o brâmane pediu simplesmente um grão de trigo para a primeira casa do tabuleiro, dois para a segunda, quatro para a terceira, oito para a quarta e assim sucessivamente até a última casa. Espantado com a modéstia do pedido, o rajá ordenou que a quantia em grãos que fora pedida fosse paga imediatamente.

Fez o rajá um bom negócio?

Para responder a esta questão, definimos S_n como o número de grãos de trigo pagos pelos n primeiros quadrados e t_n o número de grãos no n-ésimo quadrado.

Temos

$$t_{n+1} = 2\,t_n. \tag{1.1}$$

Esta equação é um exemplo de relação de recorrência, ou seja, o valor de cada termo depende de seu antecessor. Vamos ver como podemos resolvê-la a fim de encontrar uma expressão geral para t_n. Sabemos que $t_1 = 1$. Isto nos foi dado e é chamado de condição inicial. Temos que:

$$\begin{aligned} t_2 &= 2\,t_1 = 2^1\,t_1, \\ t_3 &= 2\,t_2 = 2^2\,t_1, \\ t_4 &= 2\,t_3 = 2^3\,t_1, \end{aligned}$$

e em geral

$$t_n = 2\,t_{n-1} = 2^{n-1}\,t_1.$$

Usando a condição inicial, temos

$$t_n = 2^{n-1}, \qquad \text{para todo } n \geq 1. \tag{1.2}$$

Neste caso, resolvemos a relação de recorrência por iteração. Observamos que uma recorrência como (1.1) tem geralmente muitas soluções. O que define uma solução única é a condição inicial dada no problema. Neste exemplo, a sequência 1, 2, 4, 8, ... é a única solução, mas se não tivermos a condição inicial definida, qualquer múltiplo desta sequência, por exemplo, 5, 10, 20, 40, ... é solução.

Mas estamos realmente interessados em S_n, temos em

$$S_{n+1} = S_n + t_{n+1}, \tag{1.3}$$

uma outra forma de relação de recorrência que depende do antecessor de S e do valor de t já calculado.

Nós podemos reduzir (1.3) a uma recorrência de S_n usando (1.2). Isto nos dá

$$S_{n+1} = S_n + 2^n. \tag{1.4}$$

Vamos usar iteração novamente para encontrar o valor de S_n, para todo n, na relação de recorrência (1.4). Temos

$$\begin{aligned} S_2 &= S_1 + 2, \\ S_3 &= S_2 + 2^2, \end{aligned}$$

e em geral

$$S_n = S_{n-1} + 2^{n-1} = S_1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}.$$

Sendo $S_1 = 1$, conforme a condição inicial obtemos

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}.$$

Esta soma nada mais é que a soma dos termos de uma progressão geométrica de razão 2 e $a_1 = 1$. Sendo assim concluímos que [1]

$$S_n = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1.$$

Sabemos que existem 64 quadrados no tabuleiro de xadrez. Então o número de grãos de trigo que Sessa pediu foi $2^{64} - 1$.

[1] Chegaremos a esta mesma fórmula usando funções geradoras.

A título de curiosidade, depois que foram feitos os cálculos, os sábios do rajá ficaram atônitos com o resultado que a quantidade de grãos havia atingido, pois, segundo eles, toda a safra do reino durante 2.000 anos não seriam suficientes para cobri-la. Impressionado com a inteligência do brâmane, o rajá o convidou para ser o principal ministro do reino, sendo então perdoado por Sessa de sua grande dívida em trigo.

Exemplo 1.2 A Torre de Hanoi

A torre de Hanoi, também conhecida por torre de bramanismo ou quebra-cabeças do fim do mundo, foi difundida para o Ocidente pelo matemático francês *Edouard Lucas* em 1883. Temos uma torre de oito discos empilhados inicialmente em ordem decrescente de tamanho (de baixo para cima) em um dos eixos de um total de três.

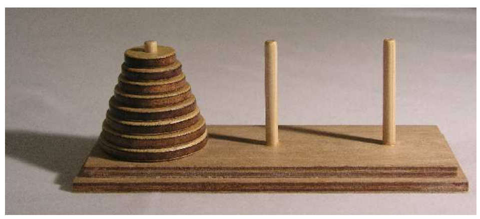


Figura 1.1: A Torre de Hanoi

O objetivo é transferir todos os discos para um outro eixo, na mesma ordem em que se encontram, movendo um único disco por vez, efetuando o menor número de movimentos e nunca colocando um disco maior sobre um menor.

Segundo *Lucas*, o jogo que era popular na China e no Japão veio do Vietnã, daí a origem de seu nome. O matemático foi inspirado por uma lenda Hindu, a qual falava de um templo em Benares, cidade Santa da Índia, onde existia uma torre sagrada do bramanismo, cuja função era melhorar a disciplina mental dos jovens monges. De acordo com a lenda, no grande templo de Benares, debaixo da cúpula que marca o centro do mundo, há uma placa de bronze sobre a qual estão fixadas três hastes de diamante. Em uma dessas hastes, o deus Brama, no momento da criação do mundo, colocou 64 discos de ouro puro, de forma que o disco maior ficasse sobre a placa de bronze e os outros decrescendo até chegar ao topo. A atribuição que os monges receberam foi de transferir a torre formada pelos discos, de uma haste para outra, usando a terceira como auxiliar de acordo com as restrições acima. Os sacerdotes, desde então, trabalham dia e noite em sua tarefa. Segundo a lenda, quando a tarefa estiver completa, a torre irá desabar e o mundo acabará.

Frente a problemas como esses, nos perguntamos se é possível calcularmos o menor número de movimentos para mover 8, 64, n discos? Sim, neste tipo de abordagem partimos do problema particular (calculamos o número de movimentos para 1, 2, 3 discos) para o problema genérico (n discos).

Para obtermos êxito, devemos:

(i) obter a solução do problema genérico a partir da solução de exemplares menores do problema (com, digamos, $n-1$ elementos);

(ii) determinar de modo trivial a solução de certos exemplares do problema (com, por exemplo, 1 elemento).

Seja T_n o menor número de movimentos para mudar uma torre de n discos do eixo à esquerda para o eixo à direita. Para que o maior disco possa ser colocado no eixo à direita, é obrigatório que a configuração dos discos que precede este movimento seja a que tem todos os discos, com exceção do maior, empilhados no eixo intermediário e o maior disco sozinho à esquerda. A tarefa de passar os $n-1$ discos menores do eixo à esquerda para o eixo intermediário é equivalente (em quantidade de movimentos) à de passar $n-1$ discos do eixo intermediário para o eixo da direita. Por definição, o menor número de movimentos para se conseguir isto é T_{n-1}. Uma vez que o disco maior seja colocado no eixo à direita, resta ainda passar para este último todos os $n-1$ discos que se encontram no eixo intermediário, tarefa que requer no mínimo T_{n-1} movimentos. Temos um total de no mínimo $2\,T_{n-1}+1$ movimentos. A relação de recorrência que obtivemos é

$$T_1 = 1,$$

$$T_n = 2\,T_{n-1} + 1, \qquad \text{para } n \geq 2. \tag{1.5}$$

Se somarmos 1 em ambos os lados da equação (1.5) obtemos

$$T_n + 1 = 2(T_{n-1} + 1). \tag{1.6}$$

Fazendo a mudança de variável $\tau_n = T_n + 1$, (1.6) se reduz a

$$\tau_n = 2\tau_{n-1}, \tag{1.7}$$

que define uma progressão geométrica de razão 2 e termo inicial $\tau_1 = 2$. Portanto, $\tau_n = 2^n$, o que implica

$$T_n = 2^n - 1, \qquad \text{para } n \geq 1. \tag{1.8}$$

Chegaremos a esta mesma solução de outro modo no próximo capítulo. Concluímos que 255 movimentos são necessários para realizarmos a tarefa com 8 discos.

Exemplo 1.3 A sequência de Fibonacci

No ano de 1202, Leonardo de Pisa, matemático italiano, mais conhecido como Fibonacci apresentou o seguinte problema em seu livro *Liber Abaci*. Desejamos estudar a proliferação de coelhos em condições especiais. Começamos com um casal de coelhos recém-nascidos. Supomos que cada casal de adultos produz por mês um casal de coelhos recém-nascidos. Os coelhos jovens tornam-se adultos com dois meses, de modo que passam a procriar também. Supomos também que os coelhos nunca morrem e não há migração. Vamos denotar por F_n a quantidade de casais de coelhos presentes no começo do n-ésimo mês.

A Tabela 1.1 lista para alguns valores de n o número de casais de coelhos adultos, o número de casais com um mês de idade, o número de casais recém-nascidos, e o total de casais de coelhos. Por exemplo, no começo do terceiro mês, há um casal recém-nascido. No começo do quarto mês, os recém-nascidos do mês anterior têm agora um mês de idade, e há novamente um casal recém-nascido. No começo do quinto mês, os casais com um mês de idade e o recém-nascido no mês anterior são coelhos adultos e com um mês de idade respectivamente. E assim por diante.

Podemos então, encontrar uma relação de recorrência para F_n. Observamos que o número de casais de coelhos no começo do n-ésimo mês é dado pelo número de casais no começo do $(n-1)$-ésimo mês mais o número de nascimentos no começo do n-ésimo mês. Mas o número de nascimentos no começo do n-ésimo mês é o mesmo número de

Mês n	Casais adultos no começo do mês n	Casais com um mês no começo do mês n	Casais recém-nascidos no começo do mês n	Total de casais de coelhos no começo do mês $n = F_n$
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	1	0	1	2
4	1	1	1	3
5	2	1	2	5
6	3	2	3	8
7	5	3	5	13

Tabela 1.1: Tamanho de uma população de coelhos

casais que tínhamos dois meses atrás, ou seja, no começo do $(n-2)$-ésimo mês. Então, temos para $n \geq 3$,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}. \tag{1.9}$$

Se definirmos F_0 sendo 0, então (1.9) é válida para $n \geq 2$. Vamos calcular alguns valores de F_n usando a recorrência (1.9). Nós já sabemos que

$$F_0 = 0 \text{ e } F_1 = 1.$$

Então,

$$\begin{aligned}
F_2 &= F_1 + F_0 = 1, \\
F_3 &= F_2 + F_1 = 2, \\
F_4 &= F_3 + F_2 = 3, \\
F_5 &= F_4 + F_3 = 5, \\
F_6 &= F_5 + F_4 = 8, \\
F_7 &= F_6 + F_5 = 13, \\
F_8 &= F_7 + F_6 = 21.
\end{aligned}$$

No próximo capítulo usaremos a relação de recorrência (1.9) para obter uma fórmula explícita para F_n. A sequência dos números F_0, F_1, F_2, $\ldots$ é chamada de *Sequência de Fibonacci* e os números F_n de *números de Fibonacci*. Estes números têm extraordinárias propriedades e surgem numa grande variedade de lugares. Para citarmos um exemplo, na espiral formada pela folha de uma bromélia, pode ser percebida a sequência de Fibonacci, através da composição de quadrados com arestas de medidas proporcionais aos elementos da sequência, por exemplo: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, $\cdots$. Este mesmo tipo de espiral também pode ser percebida na concha do Nautilus marinho. Ainda não existem estudos que expliquem satisfatoriamente estes fatos.

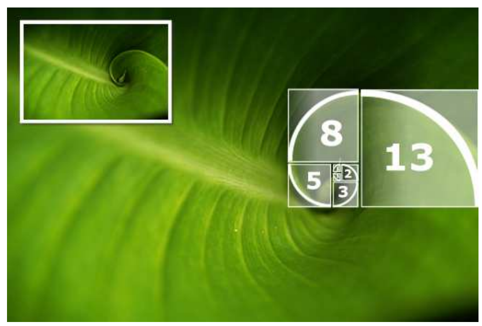


Figura 1.2: Fibonacci e a bromélia

Exemplo 1.4 Permutações Caóticas

Uma permutação de 1, 2, 3, $\ldots$, n, é chamada de caótica quando nenhum dos i's se encontra na posição original, isto é, na i-ésima posição. Desta forma a única permutação caótica que conseguimos com dois elementos é 21.

Seja D_n o número de permutações caóticas de n elementos. É imediato concluir que $D_1 = 0$ e $D_2 = 1$. Para $n = 3$, são possíveis duas permutações caóticas: 231 e 312. Já para $n = 4$, temos nove possibilidades: 2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312 e 4321. Vamos então deduzir uma relação de recorrência para D_n. Para resolver o caso geral devemos separar os casos possíveis de acordo com o elemento na n-ésima posição. Para contar o número de elementos de um conjunto, vamos particioná-lo de modo que a cardinalidade de cada subconjunto da partição seja fácil de calcular, e a cardinalidade do conjunto será a soma das cardinalidades dos subconjuntos da partição. A Tabela 1.2 ilustra o raciocínio empregado. Nesta tabela denotamos por a_i o elemento que ocupa a i-ésima posição na permutação. O conjunto de todas as permutações caóticas é inicialmente particionado de acordo com o elemento na n-ésima posição. Considere como o primeiro subconjunto aquele constituído pelas permutações que têm o 1 na n-ésima posição. Particionamos agora este subconjunto de acordo com o elemento que ocupa a primeira posição. Consideremos dois subconjuntos: o primeiro contém as permutações que têm n na primeira posição e o segundo contém as permutações que têm n em alguma posição diferente da primeira. As permutações do primeiro subconjunto têm o $a_1 = n$, $a_n = 1$, e 2, 3, ..., $n-1$, ocupando as posições 2, 3, ..., $n-1$, sendo que nenhum desses números ocupa sua posição natural. Mas então, por definição temos D_{n-2} permutações neste subconjunto. As permutações do segundo subconjunto têm $a_n = 1$, e 2, 3, ..., n ocupando as posições 1, 2, ..., $n-1$, sendo que os números 2, 3, ..., $n-1$ não ocupam sua posição natural e o número n não ocupa a primeira posição. Ou seja, cada um dos números tem uma posição que lhe é proibido ocupar. A primeira posição está fazendo o papel da n-ésima posição (aquela que o número n não ocupa), e portanto, este conjunto deve conter D_{n-1} permutações.

$a_n = 1$		$a_n = 2$		...	$a_n = n-1$	
$a_1 = n$	$a_1 \neq n$	$a_2 = n$	$a_2 \neq n$	...	$a_{n-1} = n$	$a_{n-1} \neq n$
D_{n-2}	D_{n-1}	D_{n-2}	D_{n-1}	...	D_{n-2}	D_{n-1}

Tabela 1.2: Conjunto de permutações caóticas

Somando as cardinalidades de todos os subconjuntos e lembrando os casos especiais já resolvidos, temos a relação de recorrência

$$D_1 = 0, \qquad D_2 = 1,$$

$$D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1}), \qquad \text{para } n \geq 3. \tag{1.10}$$

Reescrevendo a equação acima, temos

$$D_n - nD_{n-1} = (-1)[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}].$$

Definindo

$$d_n = D_n - nD_{n-1}, \tag{1.11}$$

a equação acima pode ser reescrita como

$$d_n = (-1)d_{n-1},$$

que define uma progressão geométrica de razão -1 e segundo termo igual a 1. Portanto, $d_n = (-1)^n$. Substituindo este valor em (1.11), temos uma outra relação de recorrência para o problema, que será mais útil para obtermos uma solução no próximo capítulo.

$$\begin{aligned} D_1 &= 0, \\ D_n &= nD_{n-1} + (-1)^n, \qquad \text{para } n \geq 2. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Capítulo 2

Resolução de relações de recorrência

Apresentamos a seguir os principais métodos para obtenção de soluções de relações de recorrência. Na seção 2.1 são introduzidas noções básicas que nos auxiliarão no desenvolvimento do capítulo.

2.1 Noções básicas

Considere a sequência de números $a_n,\ n = 0,\ 1,\ \ldots\ ,$ e a equação

$$b_0(n)a_{n+r} + b_1(n)a_{n+r-1} + \cdots + b_r(n)a_n = u(n), \qquad n = 0, 1, \ \ldots\ , \tag{2.1}$$

onde $u(n)$ e os coeficientes $b_j(n)$, $j = 0, 1, \ldots, r$, com $b_0(n) \neq 0$ e $b_r(n) \neq 0$, são funções conhecidas de n. A relação de recorrência (2.1) é chamada *relação de recorrência linear de ordem* r. Se $u(n) = 0$, $n = 0, 1, \ \ldots\ ,$ (2.1) é dita *homogênea*, caso contrário é dita *completa*. Se os coeficientes são constantes (independentes de n), $b_j(n) = b_j$, $j = 0, 1, \ldots, r$, $n = 0, 1, \ \ldots\ ,$ (2.1) é chamada *relação de recorrência linear de ordem* r *com coeficientes constantes*. No caso de uma sequência dependente de dois parâmetros $a_{n,k}$, $n = 0, 1, \ \ldots\ ,$ $k = 0, 1, \ \ldots\ ,$ a relação de recorrência

$$b_{0,0}(n,k)a_{n+r,k+s} + b_{0,1}(n,k)a_{n+r,k+s-1} + \cdots + b_{r,s}(n,k)a_{n,k} = u(n,k), \qquad (2.2)$$

$n = 0, 1, \ldots, k = 0, 1, \ldots,$ onde $u(n,k)$ e os coeficientes $b_{i,j}(n,k)$, $i = 0, 1, \ldots, r$, $j = 0, 1, \ldots, s$, com $b_{0,0}(n,k) \neq 0$ e $b_{r,s}(n,k) \neq 0$, são funções conhecidas de n e k, é chamada de *relação de recorrência linear de ordem* (r,s).

A solução geral da relação de recorrência (2.1) inclui r constantes arbitrárias. O conhecimento de r *condições iniciais* (valores) $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ nos dá uma solução única. No caso da relação de recorrência (2.2) o conhecimento de $r+s$ *condições iniciais* $a_{0,k}$, $a_{1,k}, \ldots, a_{r-1,k}$ e $a_{n,0}, a_{n,1}, \ldots, a_{n,s-1}$ nos dá também uma solução única.

Vamos agora considerar a relação de recorrência linear homogênea de ordem r correspondente a (2.1):

$$b_0(n)a_{n+r} + b_1(n)a_{n+r-1} + \cdots + b_r(n)a_n = 0, \qquad n = 0, 1, \ldots, \qquad (2.3)$$

onde os coeficientes $b_j(n)$, $j = 0, 1, \ldots, r$, com $b_0(n) \neq 0$ e $b_r(n) \neq 0$, são funções conhecidas de n. Observamos que, se $a_1(n)$ e $a_2(n)$ são soluções quaisquer de (2.3), então $c_1a_1(n) + c_2a_2(n)$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, é também uma solução de (2.3). Em geral, podemos demonstrar que o conjunto das soluções de (2.3) constitui um espaço vetorial linear de dimensão r. As r soluções $a_1(n), a_2(n), \ldots, a_r(n)$, de (2.3) serão linearmente independentes se e somente se o Wronskiano

$$W_{\mathbf{r}}(n) = \begin{vmatrix} a_1(n) & a_2(n) & \cdots & a_r(n) \\ a_1(n+1) & a_2(n+1) & \cdots & a_r(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1(n+r-1) & a_2(n+r-1) & \cdots & a_r(n+r-1) \end{vmatrix}$$

é diferente de zero para algum $n = m$[1] . Consequentemente, se as r soluções $a_1(n)$, $a_2(n), \ldots, a_r(n)$ da relação de recorrência linear homogênea de ordem r (2.3) são linearmente independentes, então elas constituem uma base para o espaço vetorial r

[1] Isto acontece se e somente se $W_{\mathbf{r}}(n) \neq 0$ para qualquer n.

dimensional de todas as possíveis soluções. Além disso, toda solução de (2.3) é da forma

$$a_n = c_1 a_1(n) + c_2 a_2(n) + \cdots + c_r a_r(n), \tag{2.4}$$

onde $c_1, c_2, \ldots, c_r$ são constantes arbitrárias. A solução (2.4) é chamada de *solução geral* de (2.3). No caso em que r valores $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+r-1}$ são dados, o sistema

$$\begin{aligned}
a_m &= c_1 a_1(m) + c_2 a_2(m) + \cdots + c_r a_r(m),\\
a_{m+1} &= c_1 a_1(m+1) + c_2 a_2(m+1) + \cdots + c_r a_r(m+1),\\
\vdots &= \ddots\\
a_{m+r-1} &= c_1 a_1(m+r-1) + c_2 a_2(m+r-1) + \cdots + c_r a_r(m+r-1),
\end{aligned}$$

desde que $W_r(m) \neq 0$, tem uma única solução envolvendo as constantes $c_1, c_2, \ldots, c_r$. Introduzindo esta solução em (2.4), uma única solução de (2.3) é deduzida. Além disso, se $w(n)$ é uma *solução particular* da relação de recorrência linear completa de ordem r (2.1), então, de acordo com a análise anterior, segue-se diretamente que

$$a_n = c_1 a_1(n) + c_2 a_2(n) + \cdots + c_r a_r(n) + w(n)$$

é a *solução geral* de (2.1).

2.2 Relações de recorrência de primeira ordem

Vamos considerar uma *relação de recorrência linear completa de primeira ordem com coeficientes variáveis*,

$$a_{n+1} - b(n) a_n = u(n), \qquad n = m, m+1, \ldots, \tag{2.5}$$

onde $b(n) \neq 0$, $n = m, m+1, \ldots$, e m é um inteiro não-negativo. A solução desta relação de recorrência é obtida usando o teorema abaixo que utiliza o método de iteração.

Teorema 2.1. *A solução da relação de recorrência linear (2.5), com a_m uma condição inicial dada, é*

$$a_n = a_m b_{n-1,m} + \sum_{r=m}^{n-2} u(r) b_{n-1,r+1} + u(n-1), \tag{2.6}$$

para $n = m+1, m+2, \ \dots \ ,$ *onde*

$$b_{n,r} = \prod_{k=r}^{n} b(k). \tag{2.7}$$

Prova: Esta demonstração encontra-se em [2]. Introduzindo a transformação

$$h_n = a_n / b_{n-1,m}, \quad n = m+1, m+2, \ \dots \ , \ h_m = a_m$$

e fazendo $w(n) = u(n)/b_{n,m}$, $n = m, m+1, \ \dots$, em (2.5) obtemos

$$h_{n+1} \cdot b_{n,m} - b(n) \cdot h_n \cdot b_{n-1,m} = w(n) \cdot b_{n,m}.$$

Dividindo ambos os membros desta equação por $b_{n,m}$, temos a relação de recorrência

$$h_{n+1} = h_n + w(n), \quad n = m, m+1, \ \dots \ ,$$

onde $h_m = a_m$ é a condição inicial dada. Iterando esta recorrência, obtemos

$$h_{m+1} = h_m + w(m),$$
$$h_{m+2} = h_{m+1} + w(m+1) = h_m + w(m) + w(m+1),$$

e

$$h_{n+1} = h_n + w(n) = h_m + w(m) + w(m+1) + \cdots + w(n-1) + w(n).$$

Consequentemente

$$h_{n+1} = h_m + \sum_{r=m}^{n} w(r), \qquad n = m, m+1, \ \cdots .$$

Retomando a sequência a_n, $n = m, m+1, \ldots$, a última expressão, e sabendo que

$$a_n = h_n b_{n-1,m}, \quad n = m, m+1, \ldots,$$

e desde que $u(n) = w(n) b_{n,m}$, $\quad n = m, m+1, \ldots$, obtemos então

$$a_{n+1} = a_m b_{n,m} + \sum_{r=m}^{n-1} u(r) b_{n,r+1} + u(n), \quad n = m, m+1, \ldots,$$

que é a expressão (2.6) com $n+1$ ao invés de n, como queríamos demonstrar. ∎

A solução da relação de recorrência linear completa de primeira ordem com coeficientes constantes,

$$a_{n+1} - b a_n = u(n), \quad n = m, m+1, \ldots, \tag{2.8}$$

onde $b \neq 0$, $n = m, m+1, \ldots$, e m é um inteiro não-negativo dado é facilmente deduzida do Teorema 2.1 considerando $b(n) = b$, $n = m, m+1, \cdots$. Além disso, quando $u(n) = u$ constante para todo $n = m, m+1, \ldots$, podemos utilizar a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica. As soluções de (2.8) são dadas pelo seguinte corolário.

Corolário 2.1. *A solução da relação de recorrência linear (2.8), com a_m uma condição inicial dada, é*

$$a_n = a_m b^{n-m} + \sum_{r=m}^{n-1} u(r) b^{n-r-1}, \quad n = m+1, m+2, \cdots. \tag{2.9}$$

Em particular, com $u(n) = u$ constante para todo $n = m, m+1, \ldots$,

$$a_n = \begin{cases} a_m b^{n-m} + u \cdot (1 - b^{n-m})/(1-b), & b \neq 1, \\ a_m + u \cdot (n-m), & b = 1, \end{cases} \tag{2.10}$$

para $n = m+1, m+2, \cdots$.

Observação 1: Se o termo a_m não é dado, (2.6) com $a_m = c$, uma constante arbitrária, constitui uma família de soluções, que é a *solução geral* da relação de recorrência (2.5). Do mesmo modo, (2.9) e (2.10) com $a_m = c$ são as respectivas soluções gerais de (2.8).

Exemplo 2.1 ***Torneio de tênis***

Supomos $2n$ jogadores em um torneio de tênis individual. Queremos determinar, usando uma relação de recorrência, o número a_n de diferentes maneiras de associar os jogadores em pares para disputar as n partidas da primeira rodada.

Para obtermos a solução, vamos fixar o jogador com o número $2n$ da lista. Este jogador pode ser colocado com qualquer um dos outros $2n-1$ jogadores a fim de disputar a primeira partida. Desta forma, restam ainda $2(n-1)$ jogadores com os quais podemos formar a_{n-1} pares para as outras $n-1$ partidas da primeira rodada. Segue então que

$$a_n = (2n-1)a_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ \dots\ , \ a_1 = 1.$$

Esta é uma relação de recorrência linear de primeira ordem homogênea com coeficientes variáveis. Assim, a partir de (2.6), com $m = 1$, $u(n) = 0$, $b(n) = 2n+1$, $n = 1, 2, \ \dots\ ,$ e $a_1 = 1$, deduzimos a expressão

$$a_n = b_{n-1,1} = \prod_{k=1}^{n-1}(2k+1) = \ 3\ .\ 5\ .\ \cdots\ .(2n-1), \quad n = 2, 3, \cdots .$$

Multiplicando o segundo membro da equação por $2\ .\ 4\ .\ \cdots\ .(2n) = \ 2^n n!$ e dividindo a expressão resultante pelo mesmo número, encontramos a seguinte expressão para a_n:

$$a_n = \frac{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ \cdots\ .(2n-1)(2n)}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}, \quad n = 1, 2, \cdots .$$

Exemplo 2.2 ***Regiões do plano***

Queremos determinar, usando uma relação de recorrência, o número a_n de regiões em que o plano é separado por n círculos, com cada par de círculos intersectando-se em exatamente dois pontos e nunca três círculos tendo um ponto de intersecção em comum. A Figura 2.1 nos dá o numero de regiões para $n = 3$ e $n = 4$.

Consideremos n círculos no plano nas condições impostas pelo problema. Então estes círculos separam o plano em a_n regiões. Agora, adicionemos outro círculo, intersectando cada um dos n círculos em exatamente dois pontos e não passando por nenhuma intersecção já definida. Deste modo, este círculo intersecta os n círculos em $2n$ pontos passando através de $2n$ regiões. Cada uma destas regiões é separada em duas regiões. Consequentemente, a adição do $(n+1)$-ésimo círculo aumenta o número de regiões em $2n$. Então

$$a_{n+1} = a_n + 2n, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad a_1 = 2.$$

Esta é uma relação de recorrência linear completa de primeira ordem com coeficientes constantes. Assim, a partir de (2.9), com $m = 1$, $b = 1$, $a_1 = 2$, e $u(r) = 2r$, deduzimos a expressão

$$a_n = 2 + 2\sum_{r=1}^{n-1} r,$$

que, após o uso da fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética, se reduz a

$$a_n = n(n-1) + 2 \quad n = 1, 2, \cdots.$$

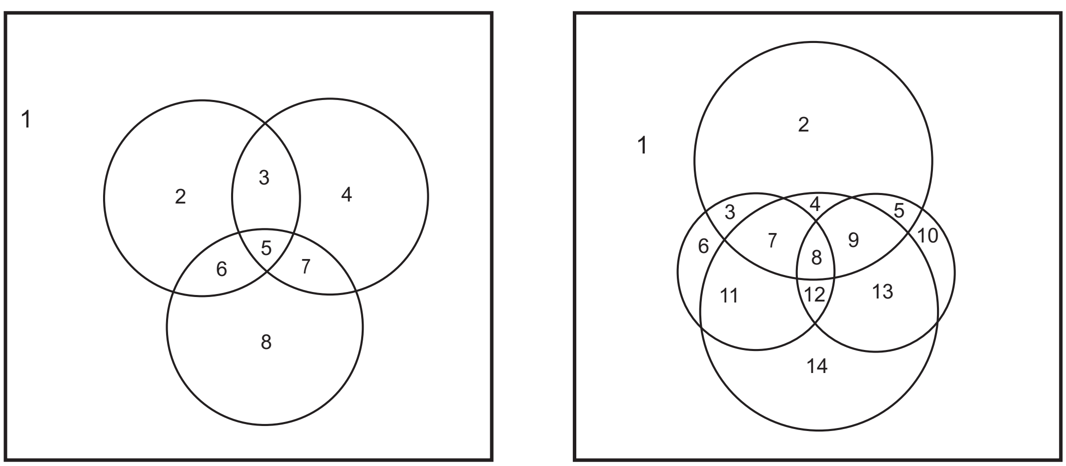


Figura 2.1: Círculos no plano

Na figura 2.1 temos um plano dividido por três e quatro círculos conforme as condições do problema. Verificamos um total de 8 e 14 regiões, respectivamente, o que está de acordo com a solução encontrada.

Exemplo 2.3 ***Permutações caóticas (continuação)***

Como havíamos mencionado no primeiro capítulo, agora já temos as ferramentas necessárias para a resolução da relação de recorrência encontrada no Exemplo 1.4. Naquele exemplo, obtivemos a relação

$$\begin{aligned} D_1 &= 0, \\ D_n &= nD_{n-1} + (-1)^n, \qquad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

que pode ser reescrita como

$$D_{n+1} - (n+1)D_n = -(-1)^n, \qquad \text{para } n \geq 1.$$

Temos agora uma relação de recorrência completa de primeira ordem com coeficientes variáveis. Então, de (2.6), com $m = 1$, $D_1 = 0$, $b(n) = n+1$ e $u(n) = -(-1)^n$, obtemos

$$\begin{aligned} D_n &= 0.b_{n-1,1} - \sum_{r=1}^{n-2} (-1)^r b_{n-1,r+1} + (-1)^n, \\ D_n &= (-1)^n - \sum_{r=1}^{n-2} (-1)^r b_{n-1,r+1}, \text{ para } \ n \geq 2. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Sabemos também que

$$b_{n-1,r+1} = \prod_{k=r+1}^{n-1} (k+1).$$

Quando desenvolvemos (2.11) para os primeiros termos, verificamos um padrão na solução, a qual pode ser escrita como:

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right), \text{ para } \ n \geq 0,$$

e que podemos demonstrar por indução.

Exemplo 2.4 ***A Torre de Hanoi (continuação)***

Vamos obter a mesma solução já encontrada no Capítulo 1, mas agora fazendo uso do Teorema 2.1. Partindo da já deduzida relação de recorrência

$$T_n = 2\,T_{n-1} + 1, \quad \text{para } n \geq 2;\ T_1 = 1,$$

verificamos que temos uma relação de recorrência completa de primeira ordem com coeficientes constantes. Então, de (2.10), com $m = 1$, $b = 2$, $T_1 = 1$, e $u = 1$, obtemos

$$T_n = 2^{n-1} - (1 - 2^{n-1}) = 2^n - 1.$$

2.3 O método das raízes características

Vamos primeiro considerar a *relação de recorrência linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes*:

$$a_{n+2} + b_1 a_{n+1} + b_2 a_n = 0, \quad n = m, m+1, \ldots, \tag{2.12}$$

onde $b_2 \neq 0$ e m é um inteiro não-negativo. Claramente, a sequência da forma $a(n) = \phi^n$, $n = m, m+1, \ldots$, é solução de (2.12) se e somente se ϕ é raiz da equação

$$t^{n+2} + b_1 t^{n+1} + b_2 t^n = 0.$$

Dividindo ambos os membros desta equação por t^n, para $t \neq 0$, obtemos a seguinte equação de segundo grau,

$$t^2 + b_1 t + b_2 = 0, \tag{2.13}$$

que é chamada de *equação característica* da relação de recorrência (2.12). Podemos então analisar o *discriminante* $b_1^2 - 4b_2$ da equação característica que determina três possibilidades. Especificamente, se $b_1^2 - 4b_2 > 0$, (2.13) tem duas raízes reais e distintas,

$$\phi_1 = \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2} \quad \text{e} \quad \phi_2 = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2},$$

enquanto, se $b_1^2 - 4b_2 = 0$, a equação tem uma raiz dupla $\phi = -b_1/2$. Mas, se $b_1^2 - 4b_2 < 0$, (2.13) tem duas raízes complexo-conjugadas

$$\phi_1 = \frac{-b_1 - i\sqrt{4b_2 - b_1^2}}{2} \quad \text{e} \quad \phi_2 = \frac{-b_1 + i\sqrt{4b_2 - b_1^2}}{2},$$

onde $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária. Estes números complexos podem ser escritos em sua forma trigonométrica, onde $\rho = \sqrt{b_2}$ e $\tan\theta = -\sqrt{4b_2 - b_1^2}/b_1$. Desta forma temos

$$\phi_1 = \rho(\cos\theta + i \,\text{sen}\,\theta), \quad \phi_2 = \rho(\cos\theta - i \,\text{sen}\,\theta).$$

A solução geral da relação de recorrência (2.12) depende do tipo de raízes da equação característica (2.13). Mais precisamente, provaremos o seguinte teorema:

Teorema 2.2. *A solução geral da relação de recorrência linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes (2.12) é dada por*

$$a_n = c_1 a_1(n) + c_2 a_2(n), \quad n = m, m+1, \ldots, \tag{2.14}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Além disso, se a equação característica (2.13) tem:

(a) duas raízes reais e distintas ϕ_1 e ϕ_2, então

$$a_1(n) = \phi_1^n, \quad a_2(n) = \phi_2^n, \tag{2.15}$$

(b) uma raiz dupla ϕ, então

$$a_1(n) = \phi^n, \quad a_2(n) = n\phi^n, \tag{2.16}$$

(c) duas raízes complexo-conjugadas ϕ_1 e $\phi_2 = \bar{\phi}_1$, com módulo ρ e argumento θ e $-\theta$ respectivamente, então

$$a_1(n) = \rho^n \cos(n\theta), \quad a_2(n) = \rho^n \text{sen}(n\theta). \tag{2.17}$$

Prova: Esta demonstração encontra-se em [2]. (a) Como ϕ_1 e ϕ_2 são raízes da equação característica (2.13), $a_1(n) = \phi_1^n$, e $a_2(n) = \phi_2^n$ são soluções de (2.12). O Wronskiano destas soluções é

$$W_{\mathbf{2}}(n) = \begin{vmatrix} \phi_1^n & \phi_2^n \\ \phi_1^{n+1} & \phi_2^{n+1} \end{vmatrix} = (\phi_1\phi_2)^n(\phi_2 - \phi_1),$$

com $\phi_1\phi_2 \neq 0$, pois $\phi_1\phi_2 = b_2 \neq 0$, e $\phi_1 \neq \phi_2$. Consequentemente, $W_2(n) \neq 0$ e as soluções de (2.15) constituem uma base do espaço vetorial das soluções da equação (2.12).

(b) Como ϕ é raiz da equação característica (2.13), $a(n) = \phi^n$ é solução de (2.12). Uma base de um espaço vetorial no $\mathbb{R}^2$ das soluções da equação (2.12) é composta de duas soluções linearmente independentes. A fim de determiná-las, estabelecemos

$$a_n = h_n\phi^n, \quad n = m, m+1, \ \dots\ , \tag{2.18}$$

onde h_n, $n = m, m+1, \ \dots\ $, é a sequência a ser determinada. Substituindo (2.18) em (2.12), obtemos

$$\phi^2 h_{n+2} + b_1\phi h_{n+1} + b_2 h_n = 0,$$

e, como $b_1 = -2\phi$, $b_2 = \phi^2$, com $\phi \neq 0$, deduzimos para h_n, $n = m, m+1, \dots$, a relação de recorrência

$$h_{n+2} - 2h_{n+1} + h_n = 0, \quad n = m, m+1, \cdots .$$

Definindo

$$h_{n+1} - h_n = g_n, \quad n = m, m+1, \ \dots\ ,$$

estabelecemos uma relação de recorrência linear homogênea de primeira ordem

$$g_{n+1} - g_n = 0, \quad n = m, m+1, \ \dots\ ,$$

cuja solução geral, é dada por

$$g_n = c_1, \quad n = m, m+1, \cdots .$$

Consequentemente,

$$h_{n+1} - h_n = c_1, \quad n = m, m+1, \cdots .$$

A solução geral desta relação de recorrência, de acordo com a Observação 1, é dada por

$$h_n = c_1 + c_2 n, \quad n = m, m+1, \cdots .$$

Introduzindo esta solução geral em (2.18), deduzimos a expressão necessária para a solução geral de (2.12). Devemos observar que o Wronskiano das soluções $a_1(n) = \phi^n$ e $a_2(n) = n\phi^n$ é dado por

$$W_{\mathbf{2}}(n) = \begin{vmatrix} \phi^n & n\phi^n \\ \phi^{n+1} & (n+1)\phi^{n+1} \end{vmatrix} = \phi^{2n+1}$$

e como $\phi \neq 0$, $W_2(n) \neq 0$.

(c) Como ϕ_1 e $\phi_2 = \bar{\phi}_1$ são raízes complexo-conjugadas da equação característica (2.13), $a_n = \phi_1^n$ e $\bar{a}_n = \bar{\phi}_1^n$ são soluções complexo-conjugadas de (2.12), as quais podem ser escritas na forma trigonométrica como

$$a_n = \rho^n \cos(n\theta) + i\rho^n \operatorname{sen}(n\theta), \quad \bar{a}_n = \rho^n \cos(n\theta) - i\rho^n \operatorname{sen}(n\theta).$$

Interessados somente nas soluções reais da relação de recorrência (2.12) faz-se necessário isolá-las. A este respeito, note que, se $a_n = a_1(n) + ia_2(n)$ é uma solução complexa da recorrência, então cada um dos $a_1(n)$ e $a_2(n)$ é também é uma solução da mesma equação pois

$$[a_1(n+2) + b_1 a_1(n+1) + b_2 a_1(n)] + i[a_2(n+2) + b_1 a_2(n+1) + b_2 a_2(n)] = 0,$$

$$n = m, m+1, \ldots ,$$

que implica

$$a_1(n+2) + b_1 a_1(n+1) + b_2 a_1(n) = 0, \quad n = m, m+1, \ldots,$$

e

$$a_2(n+2) + b_1 a_2(n+1) + b_2 a_2(n) = 0, \quad n = m, m+1, \cdots.$$

Consequentemente,

$$a_1(n) = \rho^n \cos(n\theta), \ a_2(n) = \rho^n \operatorname{sen}(n\theta)$$

são duas soluções reais de (2.12). O Wronskiano destas soluções é dado por

$$W_{\mathbf{2}}(n) = \begin{vmatrix} \rho^n \cos(n\theta) & \rho^n \operatorname{sen}(n\theta) \\ \rho^{n+1} \cos(n\theta+\theta) & \rho^{n+1} \operatorname{sen}(n\theta+\theta) \end{vmatrix}.$$

Deste modo,

$$W_2 = \rho^{2n+1}[\cos(n\theta) \operatorname{sen}(n\theta+\theta) - \operatorname{sen}(n\theta)\cos(n\theta+\theta)]$$

e desde que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(n\theta+\theta) &= \operatorname{sen}(n\theta)\cos\theta + \cos(n\theta)\operatorname{sen}\theta, \\ \cos(n\theta+\theta) &= \cos(n\theta)\cos\theta - \operatorname{sen}(n\theta)\operatorname{sen}\theta, \end{aligned}$$

o Wronskiano se reduz a

$$W_2 = \rho^{2n+1} \operatorname{sen}\theta[\cos^2(n\theta) + \operatorname{sen}^2(n\theta)] = \rho^{2n+1} \operatorname{sen}\theta$$

que, por força de $\rho \neq 0$ e $\operatorname{sen}\theta \neq 0$, implica $W_2(n) \neq 0$. Consequentemente, as soluções em (2.17) constituem uma base de um espaço vetorial das soluções da equação (2.12) e a prova do teorema está completa. ■

Exemplo 2.5 ***Um jogador azarado?***

*Um jogador **A** disputa uma série de partidas de jogos de azar contra um adversário **B**. Em qualquer partida a probabilidade do jogador **A** ganhar R\$ 1 é p e de perder R\$ 1 é $q = 1 - p$. Supomos que inicialmente o jogador **A** possua n reais e o seu adversário possua $k - n$ reais. Qual a probabilidade p_n do jogador **A** perder tudo?*

Na primeira partida, o jogador **A** pode ganhar ou perder R$ 1, com probabilidade p e q respectivamente. Se ele ganhar a primeira partida, ficará com $n+1$ reais e a probabilidade de perder tudo torna-se p_{n+1}. Se ele perder a primeira partida, ficará com $n-1$ reais e a probabilidade de perder tudo torna-se p_{n-1}. Então

$$p_n = pp_{n+1} + qp_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots, k-1,$$

ou

$$pp_{n+2} - p_{n+1} + qp_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, k-2,$$

com

$$p_0 = 1, \quad p_k = 0.$$

Esta é uma relação de recorrência linear de segunda ordem com coeficientes constantes. As raízes da equação característica,

$$pt^2 - t + q = 0,$$

são $\phi_1 = 1$ e $\phi_2 = q/p$. Se $p \neq 1/2$, de onde $q \neq 1/2$, as raízes são distintas, enquanto que se $p = 1/2$, de onde $q = 1/2$, $\phi_2 = \phi_1 = 1$. Deste modo, de acordo com o Teorema 2.2, a solução geral da relação de recorrência: (a) para $p \neq 1/2$, é

$$p_n = c_1 + c_2(q/p)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, k,$$

enquanto (b) para $p = 1/2$, é

$$p_n = c_1 + c_2\, n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, k.$$

Usando as condições iniciais obtemos: (a) para $p \neq 1/2$,

$$c_1 + c_2 = 1; \quad c_1 + c_2(q/p)^k = 0,$$

de onde

$$c_1 = \frac{-(q/p)^k}{1-(q/p)^k}, \quad c_2 = \frac{1}{1-(q/p)^k},$$

enquanto (b) para $p = 1/2$,

$$c_1 = 1, \quad c_1 + c_2 k = 0,$$

de onde

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -\frac{1}{k}.$$

Obtemos então, a solução da relação de recorrência que satisfaz as condições iniciais: (a) para $p \neq 1/2$,

$$p_n = \frac{(q/p)^n - (q/p)^k}{1 - (q/p)^k}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, k,$$

e (b) para $p = 1/2$ é

$$p_n = \frac{k - n}{k}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, k,$$

n	$k - n$	p	q	p_n
1	29	0,60	0,40	0,667
5	25	0,60	0,40	0,132
10	20	0,60	0,40	0,017
1	29	0,49	0,51	0,982
5	25	0,49	0,51	0,905
10	20	0,49	0,51	0,788

Tabela 2.1: Probabilidades de **A** perder todo seu capital.

Consideremos, por exemplo, que o jogador **A** tenha, por maior experiência, uma probabilidade $p = 0,6$ de ganhar cada partida, logo $q = 0,4$. O jogador **A** inicia a disputa com R$ 10 enquanto que o jogador **B** possui R$ 20. Então a probabilidade de **A** perder todo seu dinheiro será

$$p_{10} = \frac{(0,4/0,6)^{10} - (0,4/0,6)^{30}}{1 - (0,4/0,6)^{30}} = 0,017,$$

ou seja, a chance de **A** perder tudo é praticamente desprezível. Porém, se fizermos $p = 0,49$ e $q = 0,51$, chances praticamente iguais e os mesmos valores R$ 10 e R$ 20, obtemos $p_{10} = 0,788$, uma probabilidade muito maior. Se considerarmos as probabilidades de cada jogador iguais, ou seja $p = q = 1/2$, com os mesmos valores iniciais, teremos

$$p_{10} = \frac{30 - 10}{30} = 0,667.$$

A Tabela 2.1 mostra mais alguns valores p_n com algumas variações dos valores n e $(n-k)$ e das probabilidades p e q.

Exemplo 2.6 ***Uma sequência de médias aritméticas***

Queremos determinar a sequência a_n, $n = 0, 1, \ldots$, para a qual o termo geral é a média aritmética de seus dois termos anteriores e os dois primeiros termos são 0 e 1.

A sequência a_n, $n = 0, 1, \ldots$, de acordo com sua definição, satisfaz a relação de recorrência linear

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}),\ n = 2, 3, \ldots,$$

ou

$$2a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0,\ n = 0, 1, \ldots,$$

com condições iniciais $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$. As raízes da equação característica,

$$2t^2 - t - 1 = 0,$$

são $\phi_1 = 1$ e $\phi_2 = -1/2$. Deste modo, de acordo com o Teorema 2.2, a solução geral da relação de recorrência é

$$a_n = c_1 + c_2\frac{(-1)^n}{2^n},\ n = 0, 1, \cdots.$$

As condições iniciais requerem que

$$c_1 + c_2 = 0; \quad c_1 - \frac{1}{2}c_2 = 1.$$

Daí

$$c_1 = \frac{2}{3},\ c_2 = -\frac{2}{3}$$

e

$$a_n = \frac{2}{3}\left[1 - \frac{(-1)^n}{2^n}\right],\ n = 0, 1, \cdots .$$

Exemplo 2.7 ***Calculando o n-ésimo número de Fibonacci (continuação)***

Vamos ilustrar o uso do Teorema 2.2 para resolver a recorrência que define a sequência de Fibonacci, como havíamos adiantado no Capítulo 1. A relação de recorrência que encontramos através do estudo do crescimento populacional de coelhos, sob certas condições, é

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}. \tag{2.19}$$

Neste caso, a equação característica é dada por

$$t^2 - t - 1 = 0.$$

As raízes características encontradas são duas raízes reais e distintas:

$$\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Logo, a solução geral da relação de recorrência é

$$F_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

As condições iniciais $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$ nos dão duas equações

$$c_1 + c_2 = 0;$$

$$c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1.$$

Resolvendo este sistema encontramos

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Consequentemente, com as condições iniciais dadas, a solução de (2.19), que é, o n-ésimo número de Fibonacci é dada por

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Vamos agora considerar a *relação de recorrência linear completa de segunda ordem com coeficientes constantes*:

$$a_{n+2} + b_1 a_{n+1} + b_2 a_n = u(n), \quad n = m, m+1, \ \ldots\ , \tag{2.20}$$

onde $b_2 \neq 0$ e m é um inteiro não-negativo. De acordo com o que vimos na Seção 2.1, se $c_1 a_1(n) + c_2 a_2(n)$, $n = m, m+1, \ldots,$ é a solução geral da correspondente relação de recorrência linear homogênea (2.12) e $w(n)$, $n = m, m+1, \ldots,$ é uma solução particular de (2.20), então a solução geral de (2.20) é dada por

$$a_n = c_1 a_1(n) + c_2 a_2(n) + w(n), \quad n = m, m+1, \cdots . \tag{2.21}$$

Consequentemente, necessitamos ainda encontrar a dedução de uma solução particular de (2.20). Consideremos o caso

$$u(n) = b^n \sum_{j=0}^{s} u_j \binom{n}{j}, \quad n = m, m+1, \ \ldots\ , \tag{2.22}$$

onde b e u_j, $j = 0, 1, \ \ldots\ , s$, são constantes. O método de constantes arbitrárias para a dedução de uma solução particular de (2.20) é determinado pelo seguinte teorema.

Teorema 2.3. *Uma solução particular da relação de recorrência linear completa de segunda ordem com coeficientes constantes (2.20) no caso em que a função $u(n)$ é dada por (2.22), com b uma raiz do polinômio característico $\phi(t) = t^2 + b_1 t + b_2$ de multiplicidade $k \geq 0$ é dada por*

$$w(n) = b^{n-k} \sum_{j=k}^{k+s} w_j \binom{n}{j}, \quad n = m, m+1, \ \ldots\ , \ k = 0, 1, 2, \tag{2.23}$$

onde os coeficientes w_j, $j = k, k+1, \ldots, k+s$, *são determinados pelo sistema de* $s+1$ *equações:*

(a) para $k = 0$,

$$\begin{aligned} \phi(b)w_s &= u_s, \\ \phi(b)w_{s-1} + b\phi'(b)w_s &= u_{s-1}, \\ \phi(b)w_j + b\phi'(b)w_{j+1} + b^2 w_{j+2} &= u_j, \quad j = 0, 1, \ldots, s-2, \end{aligned} \tag{2.24}$$

(b) para $k = 1$,

$$\begin{aligned} \phi'(b)w_{s+1} &= u_s, \\ \phi'(b)w_{j+1} + bw_{j+2} &= u_j, \quad j = 0, 1, \ldots, s-1, \end{aligned} \tag{2.25}$$

(c) para $k = 2$,

$$w_{j+2} = u_j, \quad j = 0, 1, \ldots, s, \tag{2.26}$$

com $\phi'(b)$ *a derivada do polinômio característico* $\phi(t)$ *no ponto* $t = b$.

Prova: Esta demonstração encontra-se em [2]. Introduzindo (2.22) em (2.20) e exigindo que (2.23) satisfaça a relação de recorrência resultante, obtemos

$$b^2 \sum_{j=k}^{k+s} w_j \binom{n+2}{j} + b_1 b \sum_{j=k}^{k+s} w_j \binom{n+1}{j} + b_2 \sum_{j=k}^{k+s} w_j \binom{n}{j} = b^k \sum_{j=0}^{s} u_j \binom{n}{j}.$$

Usando as relações de recorrência

$$\binom{n+1}{j} = \binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}$$

e

$$\binom{n+2}{j} = \binom{n}{j} + 2\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j-2},$$

deduzimos a relação

$$b^2\sum_{j=k}^{k+s} w_j\binom{n}{j} + 2b^2\sum_{j=k}^{k+s} w_j\binom{n}{j-1} + b^2\sum_{j=k}^{k+s} w_j\binom{n}{j-2}$$
$$+b_1 b\sum_{j=k}^{k+s} w_j\binom{n}{j} + b_1 b\sum_{j=k}^{k+s} w_j\binom{n}{j-1} + b_2\sum_{j=k}^{k+s} w_j\binom{n}{j} = b^k\sum_{j=0}^{s} u_j\binom{n}{j}.$$

Introduzindo o polinômio característico $\phi(b) = b^2+b_1b+b_2$ e sua derivada $\phi'(b) = 2b+b_1$, temos

$$\sum_{j=k}^{k+s} \phi(b)w_j\binom{n}{j} + \sum_{j=k}^{k+s} b\phi'(b)w_j\binom{n}{j-1} + \sum_{j=k}^{k+s} b^2 w_j\binom{n}{j-2} = b^k\sum_{j=0}^{s} u_j\binom{n}{j}.$$

Igualando os coeficientes dos binomiais $\binom{n}{j}$ em ambos os lados desta expressão e como (a) para $k=0$, $\phi(b)\neq 0$, (b) para $k=1$, $\phi(b)=0$, $\phi'(b)\neq 0$ e (c) para $k=2$, $\phi(b)=0$, $\phi'(b)=0$, concluímos (2.24), (2.25) e (2.26), respectivamente. ■

Exemplo 2.8 ***Quando o jogador irá à ruína?***

Consideremos o problema do Exemplo 2.5 e definimos d_n como sendo o valor esperado do número de jogos até o jogador **A** perder tudo considerando $p \leq q$.[2]. Vamos encontrar uma relação de recorrência para d_n e determinar a sua solução.

Na primeira partida, o jogador pode ganhar ou perder R$ 1, com probabilidade p e q, respectivamente. Se ele ganhar a primeira partida, terá $n+1$ reais e, depois desta partida, precisará de d_{n+1} jogos para perder todo seu capital. Se ele perder a primeira partida, terá $n-1$ reais e, depois desta partida, precisará de d_{n-1} jogos para perder tudo. Considerando ambos os casos, deduzimos a seguinte relação de recorrência

$$d_n = p(d_{n+1}+1) + q(d_{n-1}+1), \quad n = 1, 2, \ldots, k-1,$$

ou

$$d_{n+2} - (1/p)d_{n+1} + (q/p)d_n = -1/p, \quad n = 0, 1, \ldots, k-2,$$

[2] Se $p > q$ quem perde tudo, a longo prazo, é o jogador **B**

com condições iniciais

$$d_0 = 0, \quad d_k = 0.$$

Esta é uma relação de recorrência linear completa com coeficientes constantes. A solução geral da correspondente relação de recorrência homogênea,

$$d_{n+2} - (1/p)d_{n+1} + (q/p)d_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, k-2,$$

de acordo com o Exemplo 2.5: (a) para $p \neq 1/2$, é

$$d_n = c_1 + c_2(q/p)^n, \quad n = 0, 1, \ldots, k,$$

enquanto (b) para $p = 1/2$ é

$$d_n = c_1 + c_2 n, \quad n = 0, 1, \ldots, k.$$

A função $u(n)$ da relação de recorrência linear completa é da forma (2.22), com $b = 1$, $s = 0$ e $u_0 = -1/p$. Observamos que (a) se $p \neq 1/2$, $b = 1$ é uma raiz simples ($k = 1$), enquanto (b) se $p = 1/2$, $b = 1$ é uma raiz dupla ($k = 2$) do polinômio característico $\phi(t) = t^2 - (1/p)t + (q/p)$. Deste modo, de acordo com o Teorema 2.3, uma solução particular da relação de recorrência linear completa com coeficientes constantes: (a) para $p \neq 1/2$ é dada por $w(n) = w_1 n$, onde, por (2.25) e desde que $\phi'(1) = (2p-1)/p$, obtemos $w_1 = 1/(1-2p)$ e então

$$w(n) = \frac{n}{1-2p}.$$

Além disso, uma solução particular (b) para $p = 1/2$ é dada por $w(n) = w_2 n(n-1)/2$, onde, por (2.26), $w_2 = -2$ e então

$$w(n) = -n(n-1).$$

Consequentemente, a solução geral da relação de recorrência linear completa com coeficientes constantes: (a) para $p \neq 1/2$ é dada por

$$d_n = c_1 + c_2 \left(\frac{q}{p}\right)^n + \frac{n}{1-2p}, \; n = 0, 1, \ldots, k,$$

enquanto (b) para $p = 1/2$ é dada por

$$d_n = c_1 + c_2 n - n(n-1), \; n = 0, 1, \ldots, k.$$

Usando as condições iniciais, obtemos (a) para $p \neq 1/2$,

$$c_1 + c_2 = 0; \quad c_1 + c_2 \left(\frac{q}{p}\right)^k + \frac{k}{1-2p} = 0,$$

de onde

$$c_1 = -c_2, \quad -c_2 + c_2 \left(\frac{q}{p}\right)^k + \frac{k}{1-2p} = 0,$$

o que nos dá

$$c_1 = -\frac{k}{1-2p} . \frac{1}{1-(q/p)^k}, \quad c_2 = \frac{k}{1-2p} . \frac{1}{1-(q/p)^k},$$

enquanto (b) para $p = 1/2$,

$$c_1 = 0; \quad c_2 k - k(k-1) = 0,$$

de onde

$$c_1 = 0, \;\; c_2 = (k-1).$$

Então, a única solução da relação da recorrência linear completa: (a) para $p \neq 1/2$, é dada por

$$d_n = \frac{n}{1-2p} - \frac{k}{1-2p} . \frac{1-(q/p)^n}{1-(q/p)^k}, \; n = 0, 1, \ldots, k$$

e (b) para $p = 1/2$ é

$$d_n = n(k-n), \; n = 0, 1, \ldots, k.$$

Consideremos, por exemplo, $p = 0,4$, $q = 0,6$ e os jogadores **A** e **B** iniciando a disputa ambos com R$ 10. O número esperado de jogos até o jogador **A** perder tudo será

$$d_{10} = \frac{10}{1 - 2.(0,4)} - \frac{20}{1 - 2.(0,4)} . \frac{1 - (0,6/0,4)^{10}}{1 - (0,6/0,4)^{20}} = 48,295,$$

ou seja, a estimativa é de que o jogador **A** vá à ruína em 48 a 49 partidas. Já se tivermos $p = q = 1/2$, teremos $d_{10} = 100$, uma estimativa bem mais alta e que representa a quantidade de jogos para que um dos jogadores perca tudo.

Vamos finalmente considerar o caso geral da relação de recorrência linear de ordem r com coeficientes constantes:

$$a_{n+r} + b_1 a_{n+r-1} + \cdots + b_r a_n = u(n), \quad n = m, m+1, \ \ldots \ , \tag{2.27}$$

onde $b_r \neq 0$ e m é um inteiro não-negativo. Consideremos que

$$u(n) = b^n \sum_{j=0}^{s} u_j \binom{n}{j}, \quad n = m, m+1, \cdots \ . \tag{2.28}$$

A correspondente relação de recorrência linear homogênea de ordem r com coeficientes constantes é dada por

$$a_{n+r} + b_1 a_{n+r-1} + \cdots + b_r a_n = 0, \quad n = m, m+1, \ \ldots \ , \tag{2.29}$$

onde $b_r \neq 0$ e m é um inteiro não-negativo. o polinômio característico desta relação de recorrência é,

$$\phi(t) = t^r + b_1 t^{r-1} + \cdots + b_r. \tag{2.30}$$

A solução geral de (2.29) e a solução particular de (2.27) no caso em que $u(n)$ é dada por (2.28) são dadas pelos dois teoremas a seguir. As provas, similares às dos Teoremas 2.2 e 2.3, respectivamente, serão omitidas.

Teorema 2.4. *A solução geral de uma relação de recorrência linear homogênea de ordem r com coeficientes constantes, (2.29) é dada por*

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{j=1}^{\nu_1}(c_{j,1}+c_{j,2}\,n+\cdots+c_{j,k_j}n^{k_j-1})\rho_j^n \\ &\quad+\sum_{j=\nu+1}^{\nu_2}(c_{j,1}+c_{j,2}\,n+\cdots+c_{j,k_j}\,n^{k_j-1})\rho_j^n\cos(n\theta_j) \\ &\quad+\sum_{j=\nu+1}^{\nu_2}(d_{j,1}+d_{j,2}\,n+\cdots+d_{j,k_j}\,n^{k_j-1})\rho_j^n\,\mathrm{sen}(n\theta_j), \end{aligned}$$

onde ρ_j é uma raiz real do polinômio característico (2.30) de multiplicidade $k_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, \nu_1$, com $k_1 + k_2 + \cdots + k_{\nu_1} = \nu$ e $\rho_j(\cos\theta_j + i\,\mathrm{sen}\,\theta_j)$ é uma raiz complexa de multiplicidade $k_j \geq 0$, $j = \nu+1, \nu+2, \ldots, \nu_2$, com $2(k_{\nu+1}+k_{\nu+2}+\cdots+k_{\nu_2}) = r-\nu$.

Teorema 2.5. *A solução particular de uma relação de recorrência linear completa de ordem r com coeficientes constantes, (2.27) no caso em que $u(n)$ é dada por (2.28), com b uma raiz do polinômio característico (2.30) de multiplicidade $k_j \geq 0$, é dada por*

$$w_n = b^{n-k}\sum_{j=k}^{k+s} w_j\binom{n}{j}, \quad n = m, m+1, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, r,$$

onde os coeficientes w_j, $j = k, k+1, \ldots, k+s$ são determinados pelo sistema de $s+1$ equações

$$\sum_{\nu=j}^{s}\frac{b^{\nu-j}}{(\nu+k-j)!}\phi^{(\nu+k-j)}(b)w_\nu = u_j, \quad j = 0, 1, \ldots, s,$$

com $\phi^{(\nu+k-j)}(b)$ denotando a derivada de ordem $\nu+k-j$ do polinômio característico $\phi(t)$ no ponto $t = b$.

Exemplo 2.9 *Queremos determinar a solução geral da relação de recorrência*

$$a_{n+4} + 4a_{n+2} + 4a_n = 3(a_{n+3} + 2a_{n+1}) + (22n + 113)3^n, \quad n = 0, 1, \cdots.$$

Podemos reescrever a relação como

$$a_{n+4} - 3a_{n+3} + 4a_{n+2} - 6a_{n+1} + 4a_n = (22n + 113)3^n, \quad n = 0, 1, \ \dots \ ,$$

que é uma relação de recorrência linear completa de quarta ordem com coeficientes constantes. A correspondente relação de recorrência homogênea é

$$a_{n+4} - 3a_{n+3} + 4a_{n+2} - 6a_{n+1} + 4a_n = 0, \quad n = 0, 1, \cdots .$$

Seu polinômio característico é dado por

$$\phi(t) = t^4 - 3t^3 + 4t^2 - 6t + 4.$$

Devemos notar que $\phi(1) = 0$. Deste modo $\rho_1 = 1$ é uma raiz real do polinômio característico. Dividindo-o por $(t-1)$, obtemos

$$\phi(t) = (t-1)(t^3 - 2t^2 + 2t - 4).$$

Fatorando $(t^3 - 2t^2 + 2t - 4)$ obtemos $(t-2)(t^2+2)$ o que nos dá as outras três raízes, $\rho_2 = 2$, $\rho_3 = \sqrt{2}i$ e $\rho_4 = -\sqrt{2}i$, com $i = \sqrt{-1}$. A raiz complexa $\rho_3 = \sqrt{2}i$ tem módulo $\sqrt{2}$ e argumento $\theta = \pi/2$. A solução geral da relação de recorrência homogênea, de acordo com o Teorema 2.4, é dada por

$$a_n = c_1 + c_2.2^n + c_3(\sqrt{2})^n \cos(n\pi/2) + c_4(\sqrt{2})^n \operatorname{sen}(n\pi/2), \quad n = 0, 1, \cdots .$$

Além disso, a função $u(n) = (22n + 113)3^n$ da relação de recorrência completa é da forma (2.28), com $b = 3$, $s = 1$, $u_0 = 113$ e $u_1 = 22$. Deste modo, pelo Teorema 2.5 e já que $b = 3$ não é raiz do polinômio característico, daí $k = 0$, concluímos que

$$w(n) = (w_0 + w_1 n)3^n, \quad n = 0, 1, \dots ,$$

é uma solução da relação de recorrência completa. Determinamos os coeficientes w_0 e w_1 através das equações

$$\phi(3)w_1 = u_1, \quad \phi(3)w_0 + 3\phi'(3)w_1 = u_0.$$

Como $u_0 = 113$, $u_1 = 22$, $\phi(3) = 22$ e $\phi'(3) = 45$, estas equações transformam-se em

$$22w_1 = 22, \quad 22w_0 + 135w_1 = 113$$

e, então, $w_1 = 1$ e $w_0 = -1$. Portanto, $w_n = (n-1)3^n$ e a solução geral da relação de recorrência completa é dada por

$$a_n = c_1 + c_2.2^n + c_3(\sqrt{2})^n \cos(n\pi/2) + c_4(\sqrt{2})^n \operatorname{sen}(n\pi/2) + (n-1)3^n, \quad \text{para } n = 0, 1, \cdots.$$

Se tivermos acesso a quatro condições iniciais podemos calcular as constantes c_1, c_2, c_3 e c_4. Por exemplo, se $a_0 = 1$, $a_1 = 4 + \sqrt{2}$, $a_2 = 17$ e $a_3 = 64 - 2\sqrt{2}$, resolvemos um sistema de quatro equações e encontramos $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $c_3 = -1$, e $c_4 = 1$. Então, com estas condições iniciais, a solução geral da recorrência é dada por

$$a_n = 2 + 2^n - (\sqrt{2})^n \cos(n\pi/2) + (\sqrt{2})^n \operatorname{sen}(n\pi/2) + (n-1)3^n, \quad \text{para } n = 0, 1, \cdots.$$

2.4 O método das funções geradoras

Agora vamos focar nossa atenção em um dos mais importantes usos das funções geradoras: a solução de relações de recorrência. Neste método, a relação de recorrência é utilizada para a obtenção de uma equação para a função geradora ordinária[3] de uma sequência. Vamos trabalhar sempre com funções geradoras ordinárias e, portanto, torna-se desnecessário o uso do adjetivo, que suprimimos até o final do capítulo.

Dada uma sequência g_n que satisfaz uma dada recorrência, buscamos uma forma fechada para g_n em termos de n. A solução deste problema via funções geradoras consiste em quatro etapas que listaremos a seguir:

[3] Ver Apêndice A

1 Escrever uma única equação que expresse g_n em termos de outros elementos da sequência. Esta equação deve ser válida para todo inteiro n, assumindo que $g_{-1} = g_{-2} = \cdots = 0$.

2 Multiplicar por x^n cada membro da equação de recorrência que exprime o n-ésimo termo da sequência em função dos anteriores e somar a equação obtida para todo n. Isso dá, à esquerda o somatório $\sum_n g_n x^n$ que é a função geradora $G(x)$. O lado direito deve ser manipulado de forma que se torne uma outra expressão envolvendo $G(x)$.

3 Resolver a equação resultante, encontrando uma forma fechada para $G(x)$.

4 Expandir $G(x)$ em uma série de potências e identificar o coeficiente de x^n, isto é, uma forma fechada para g_n.

Algumas vezes temos mais de uma solução, e a escolha da solução que realmente corresponde à sequência em questão é feita utilizando-se as condições iniciais.

Exemplo 2.10 ***O n-ésimo número de Fibonacci por funções geradoras***

Vamos seguir as quatro etapas para resolver a relação de recorrência (1.9) do Exemplo 1.3. Temos que

$$F(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 1; \\ 1, & \text{se } n = 1; \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Mas, pela Etapa 1 precisamos de uma fórmula para $F(n)$ que seja válida para todo n. A equação

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

vale para todo $n \geq 2$, e funciona também para $n \leq 0$ (porque temos $F_1 = 1$ e $F_{n \leq 0} = 0$). Mas quando $n = 1$, o lado esquerdo da equação é igual a 1 e o direito é igual a 0. Para atendermos à Etapa 1 vamos fazer uso da seguinte definição:

$$[m = n] \quad \text{terá valor 1 se } m = n, \text{ caso contrário valerá 0.}$$ [4]

Com isto, podemos reescrever a relação de recorrência adicionando $[n = 1]$ no lado direito da equação, o que adiciona 1 quando $n = 1$, e não faz nenhuma mudança quando $n \neq 1$. Então temos

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + [n = 1],$$

que é a equação necessária para finalizar a Etapa 1.

Na Etapa 2 vamos multiplicar cada membro da relação de recorrência por x^n e somar para todo n a fim de obter a função geradora $G(x)$.

$$\begin{aligned} G(x) \quad = \sum_n g_n x^n \quad &= \sum_n g_{n-1} x^n + \sum_n g_{n-2} x^n + \sum_n [n = 1] x^n \\ &= \sum_n g_n x^{n+1} + \sum_n g_n x^{n+2} + x \\ &= xG(x) + x^2 G(x) + x. \end{aligned}$$

A Etapa 3 é simples neste caso; temos

$$G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

A Etapa 4 é a parte mais trabalhosa e que realmente responderá o nosso problema. Nossa tarefa é encontrar o coeficiente de x^n no desenvolvimento da função geradora em uma série de potências. Para isto, vamos utilizar um tipo de função racional cujos coeficientes são particularmente apropriados, ou seja

$$\frac{a}{(1 - \rho x)^{m+1}} = \sum_{n \geq 0} \binom{m + n}{m} a \rho^n x^n. \tag{2.31}$$

[4] Em geral, se S é uma sentença que pode ser verdadeira ou falsa, a notação $[S]$ vale 1 se S é verdadeira, 0 se falsa.

Uma soma finita de uma função como (2.31),

$$S(x) = \frac{a_1}{(1-\rho_1 x)^{m_1+1}} + \frac{a_2}{(1-\rho_2 x)^{m_2+1}} + \cdots + \frac{a_l}{(1-\rho_l x)^{m_l+1}}, \tag{2.32}$$

também nos fornece coeficientes interessantes,

$$[x^n]S(x) = a_1\binom{m_1+n}{m_1}\rho_1^n + a_2\binom{m_2+n}{m_2}\rho_2^n + \cdots + a_l\binom{m_l+n}{m_l}\rho_l^n. \tag{2.33}$$

onde a notação $[x^n]S(x)$ denota o coeficiente de x^n na função $S(x)$.

Podemos mostrar que toda função racional $R(x) = P(x)/Q(x)$ tal que $R(0) \neq \infty$ pode ser escrita como

$$R(x) = S(x) + T(x), \tag{2.34}$$

onde $S(x)$ tem a forma (2.32) e $T(x)$ é um polinômio. Nestas condições, existe uma forma fechada para os coeficientes $[x^n]S(x)$. Encontrar $S(x)$ e $T(x)$ é equivalente a encontrar a *expansão em frações parciais* de $R(x)$.

Notemos que $S(x) = \infty$ quando x é igual a $1/\rho_1, \ldots, 1/\rho_l$. Então os números ρ_k que precisamos encontrar, para conseguirmos exprimir $R(x)$ na forma desejada $S(x)+T(x)$, devem ser recíprocos dos números α_k onde $Q(\alpha_k) = 0$. (Lembremos que $R(x) = P(x)/Q(x)$, onde P e Q são polinômios; temos $R(x) = \infty$ somente se $Q(x) = 0$.)

Suponha que $Q(x)$ tenha a forma

$$Q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_m x^m, \qquad \text{onde } q_0 \neq 0 \quad \text{e} \quad q_m \neq 0.$$

O polinômio "refletido"

$$Q^R(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \cdots + q_m$$

tem uma importante relação com $Q(x)$:

$$Q^R(x) = q_0(x-\rho_1)\cdots(x-\rho_m) \Longleftrightarrow Q(x) = q_0(1-\rho_1 x)\cdots(1-\rho_m x).$$

Deste modo, as raízes de Q^R são recíprocas das raízes de Q, e vice-versa. Podemos então encontrar os números ρ_k para fatorarmos o polinômio "refletido" Q^R.

Por exemplo, na sequência de Fibonacci temos

$$Q(x) = 1 - x - x^2; \qquad Q^R(x) = x^2 - x - 1.$$

Calculando as raízes de Q^R, obtemos

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Portanto $Q^R(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ e $Q(x) = (1 - x_1 x)(1 - x_2 x)$.

Uma vez que descobrimos os ρ's, podemos então encontrar a expansão em frações parciais. A tarefa torna-se mais simples se todos as raízes são distintas, então vamos considerar este caso especial em primeiro lugar.

Teorema 2.6. ***Teorema da Expansão Racional para Raízes Distintas***
Se $R(x) = P(x)/Q(x)$, onde $Q(x) = q_0(1 - \rho_1 x)\cdots(1 - \rho_l x)$ e os números $(\rho_1, \cdots, \rho_l)$ são distintos, e se $P(x)$ é um polinômio de grau menor que l, então

$$[x^n]R(x) = a_1\rho_1^n + \cdots + a_l\rho_l^n, \ \textit{onde } a_k = \frac{-\rho_k P(1/\rho_k)}{Q'(1/\rho_k)}. \tag{2.35}$$

Prova: Esta demonstração encontra-se em [3]. Sejam $a_1, \ldots, a_l$ as constantes declaradas. A Fórmula (2.35) é válida se $R(x) = P(x)/Q(x)$ é igual a

$$S(x) = \frac{a_1}{1 - \rho_1 x} + \cdots + \frac{a_l}{1 - \rho_l x}.$$

E podemos provar que $R(x) = S(x)$ mostrando que a função $T(x) = R(x) - S(x)$ não tende ao infinito quando $x \to 1/\rho_k$. Para isto, mostraremos que a função racional $T(x)$ nunca é infinita; por essa razão $T(x)$ deve ser um polinômio. Também podemos mostrar que $T(x) \to 0$ quando $x \to \infty$; por isso $T(x)$ deve ser 0. Admita $\alpha_k = 1/\rho_k$. Para provar que $\lim_{x\to\alpha_k} T(x) \neq \infty$, é suficiente mostrar que $\lim_{x\to\alpha_k}(x - \alpha_k)S(x) = 0$, porque $T(x)$ é uma função racional de x. Portanto, queremos mostrar que

$$\lim_{x\to\alpha_k}(x - \alpha_k)R(x) = \lim_{x\to\alpha_k}(x - \alpha_k)S(x).$$

O limite da direita iguala-se a $\lim_{x\to\alpha_k} a_k(x-\alpha_k)/(1-\rho_k x) = -a_k/\rho_k$, porque $(1-\rho_k x) = -\rho_k(x-\alpha_k)$ e $(x-\alpha_k)/(1-\rho_j x) \to 0$ para $j \neq k$. O limite da esquerda é

$$\lim_{x\to\alpha_k} (x-\alpha_k)\frac{P(x)}{Q(x)} = P(\alpha_k) \lim_{x\to\alpha_k} \frac{x-\alpha_k}{Q(x)} = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)},$$

pela Regra de L'Hospital. Logo, o teorema está provado. ■

Retornando ao exemplo dos Números de Fibonacci, temos $P(x) = x$ e $Q(x) = 1 - x - x^2 = (1-x_1x)(1-x_2x)$; consequentemente $Q'(x) = -1-2x$, e

$$\frac{-\rho P(1/\rho)}{Q'(1/\rho)} = \frac{-1}{-1-2/\rho} = \frac{\rho}{\rho+2}.$$

De acordo com (2.35), o coeficiente de $(x_1)^n$, denotado por $[x^n]R(x)$ é portanto $x_1/(x_1+2) = 1/\sqrt{5}$; o coeficiente de $(x_2)^n$ é $x_2/(x_2+2) = -1/\sqrt{5}$. Então o Teorema nos dá que

$$F_n = \frac{(x_1)^n - (x_2)^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Exemplo 2.11 ***Os Grãos de Trigo - Continuação***

No Exemplo 1.1 trabalhamos uma relação de recorrência proveniente da lenda sobre a criação do jogo de xadrez. Pela simplicidade da solução foi possível encontrá-la usando o método da iteração. Vamos agora, ilustrar o método das funções geradoras e chegar a mesma solução do Capítulo 1.

Temos que

$$t_{n+1} = 2\,t_n.$$

A condição inicial foi $t_1 = 1$. Neste caso t_0 não é definido. No entanto, pela Etapa 1 precisamos de uma equação válida para todo inteiro n. Podemos definir t_0 usando a própria relação de recorrência com $n = 0$, obtendo

$$t_0 = \frac{1}{2}t_1 = \frac{1}{2}.$$

Temos então que

$$t(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{se } n = 0; \\ 2\,t_{n-1}, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Com isto, reescrevemos a relação de recorrência adicionando $\frac{1}{2}[n = 0]$ no lado direito da equação, o que adiciona $1/2$ quando $n = 0$, e não faz nenhuma mudança quando $n \neq 0$. Então temos

$$t_n = 2\,t_{n-1} + \frac{1}{2}[n = 0],$$

finalizando a Etapa 1.

Na Etapa 2, multiplicamos cada membro da relação de recorrência por x^n e somamos para todo n a fim de obter a função geradora $G(x)$.

$$\begin{aligned} G(x) = \sum_n t_n x^n &= 2\sum_n t_{n-1}x^n + \frac{1}{2}\sum_n [n = 0]x^n \\ &= 2\sum_n t_n x^{n+1} + \frac{1}{2} \\ &= 2x\,G(x) + \frac{1}{2}\ , \end{aligned}$$

o que nos dá

$$G(x) = \frac{1/2}{1 - 2x} = \frac{1}{2}(1 - 2x)^{-1}.$$

Podemos, neste caso, usar a identidade

$$1 + y + y^2 + \cdots + y^n + \cdots = \frac{1}{1 - y}, \tag{2.36}$$

$|y| < 1$. Temos então que

$$G(x) = \frac{1}{2}[1 + (2x) + (2x)^2 + \cdots + (2x)^n + \cdots]$$

ou

$$G(x) = \frac{1}{2} + x + 2x^2 + \cdots + 2^{n-1}x^n + \cdots\ .$$

Em outras palavras,

$$t_n = 2^{n-1},$$

o resultado que esperávamos.

Teorema 2.7. ***Teorema Geral da Expansão para Funções Geradoras Racionais***

Se $R(x) = P(x)/Q(x)$, *onde* $Q(x) = q_0(1-\rho_1 x)^{d_1}\cdots(1-\rho_l x)^{d_l}$ *e os números* $(\rho_1, \ldots, \rho_l)$ *são distintos, e se* $P(x)$ *é um polinômio de grau menor que* $d_1 + \cdots + d_l$, *então*

$$[x^n]R(x) = f_1(n)\rho_1^n + \cdots + f_l(n)\rho_l^n, \quad \textit{para todo} \;\; n \geq 0, \tag{2.37}$$

onde cada $f_k(n)$ *é um polinômio de grau* $d_k - 1$ *com coeficientes dados por*

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{(-\rho_k)^{d_k} P(1/\rho_k) d_k}{Q^{(d_k)}(1/\rho_k)} \\ &= \frac{P(1/\rho_k)}{(d_k-1)!q_0 \prod_{j\neq k}(1-\rho_j/\rho_k)^{d_j}}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Isto pode ser provado por indução a partir do $\max(d_1, \ldots, d_l)$, usando o fato de que

$$R(x) - \frac{a_1(d_1-1)!}{(1-\rho_1 x)^{d_1}} - \cdots - \frac{a_l(d_l-1)!}{(1-\rho_l x)^{d_l}}$$

é uma função racional cujo denominador polinomial não é divisível por $(1-\rho_k x)^{d_k}$ para qualquer k.

Exemplo 2.12 ***Uma recorrência interessante***

Agora que temos um método geral, estamos prontos para resolver novos problemas. Vamos tentar encontrar uma forma fechada para a recorrência

$$\begin{aligned} g_0 &= 1; \quad g_1 = 0; \\ g_n &= 2g_{n-1} - g_{n-2} + (-1)^n, \text{ para } n \geq 2. \end{aligned} \tag{2.39}$$

É sempre uma boa ideia fazer uma pequena tabela com os primeiros inteiros n. Temos então:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$(-1)^n$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
g_n	1	0	0	-1	-1	-2	-2	-3	-3

Parece que a recorrência segue um padrão evidente, mas devemos confirmar este padrão, então precisamos percorrer as quatro etapas listadas a fim de obter a solução por funções geradoras.

A Etapa 1 não nos impõe dificuldade, desde que precisamos apenas reescrever a recorrência tornando-a válida para todo n. A equação

$$g_n = 2g_{n-1} - g_{n-2} + (-1)^n[n \geq 0] - [n = 1]$$

é válida para todo inteiro n. Agora podemos executar a Etapa 2:

$$\begin{aligned} G(x) = \sum_n g_n x^n &= 2\sum_n g_{n-1}x^n - \sum_n g_{n-2}x^n + \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n - \sum_{n=1} x^n \\ &= 2xG(x) - x^2G(x) + \frac{1}{1+x} - x. \end{aligned}$$

Então, pela Etapa 3, temos:

$$G(x) = \frac{1 - x(1+x)}{(1+x)(1-2x+x^2)} = \frac{1 - x - x^2}{(1+x)(1-x)^2}.$$

Nosso trabalho está pela Etapa 4. O fator quadrado no denominador é um pouco problemático, já que sabemos que raízes repetidas nos trazem mais dificuldades que raízes distintas. Temos duas raízes, $\rho_1 = -1$ e $\rho_2 = 1$; o Teorema 2.7 nos diz que

$$g_n = a_1(-1)^n + (a_2 n + c)(1)^n$$

para alguma constante c, onde por (2.38) obtemos

$$a_1 = \frac{1}{4}; \qquad a_2 = -\frac{1}{2}.$$

(A segunda fórmula para a_k em (2.38) é mais fácil de ser utilizada que a primeira quando o denominador é facilmente fatorado. Nós simplesmente substituímos $x = 1/\rho_k$ em todo lugar de $R(x)$, exceto no fator que se anula, e dividimos por $(d_k - 1)!$; isto dá o coeficiente de $n^{d_k-1}\rho_k^n$.) Fazendo $n = 0$ temos que o valor da constante c é $3/4$; daí nossa resposta é

$$g_n = \frac{1}{4}\,(-1)^n + (-\frac{1}{2}n + \frac{3}{4}) = \frac{1}{4}[3 - 2n + (-1)^n].$$

Neste momento, não custa verificar os casos $n = 0$ e $n = 1$, para ter certeza que nossa solução não contém falhas. Devemos inclusive ir além e testar mais valores já que a fórmula nos parece simples demais. Verificamos e, funciona!

Chegaríamos a esta solução conjecturando? Neste caso, com alguma inspiração, até poderíamos chegar, mas não é o que acontece na solução de grande maioria das recorrências; assim, fica evidente a força deste método para a resolução de relações mais complexas.

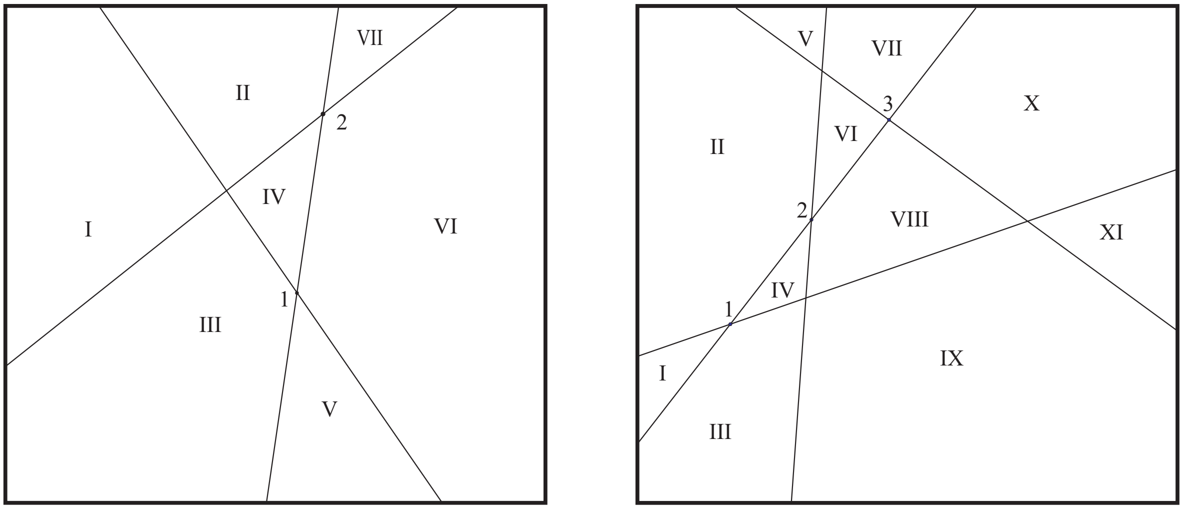
Capítulo 3

Algumas aplicações de relações de recorrência

Neste capítulo iremos resolver alguns problemas que envolvem diversos tipos de relações de recorrência procurando relacionar a solução escolhida com o conteúdo desenvolvido no Capítulo 2. Nem sempre isto será possível, já que não tivemos a pretensão de esgotar o assunto neste trabalho. Quando não for possível aplicar um dos teoremas que demonstramos, faremos uso de outras técnicas de resolução, enriquecendo assim, substancialmente o nosso trabalho.

Problema 1. *Um problema clássico em combinatória é a contagem das regiões criadas no plano por um conjunto de retas. Suponha que desejamos desenhar n linhas retas em um pedaço de papel de acordo com a figura, de modo que cada par de linhas se cruzam (mas três linhas não se interceptam em um ponto comum). Em quantas regiões essas n linhas dividem o plano?*

Começamos a examinar o problema considerando os primeiros valores de n. Chamemos de a_n o número de regiões quando desenhamos n retas. Quando $n = 0$, temos obviamente apenas uma região. Ao desenharmos uma reta ($n = 1$) dividimos o plano em duas regiões. A segunda reta deve cruzar com a primeira e deve atravessar as duas regiões definidas pela primeira, claramente obtemos $a_2 = 4$. Agora, vamos examinar o efeito do desenho de uma terceira linha. Ela deve atravessar cada uma das outras duas



(a) três retas e sete regiões

(b) quatro retas e onze regiões

Figura 3.1: Divisão de uma região por retas.

linhas (em pontos diferentes). Antes, entre, e depois destes dois pontos de interseção, a terceira linha corta três das regiões formadas pelas duas primeiras linhas (esta ação da terceira linha não depende de como ela é desenhada, somente que intercepte as outras duas linhas). Logo, cada uma dessas regiões será por sua vez subdividida, e o novo número de regiões é $a_3 = a_2 + 3 = 4 + 3 = 7$.

Passemos agora ao caso geral. O plano está dividido em a_{n-1} regiões por $n-1$ linhas retas, e queremos calcular quantas regiões teremos ao desenharmos a n-ésima linha. Por imposição do problema, esta última linha intercepta todas as $n-1$ anteriores, e, assumindo uma orientação qualquer para a n-ésima linha, podemos enumerar os pontos de interseção de acordo com esta orientação. Então, o trecho da n-ésima linha antes do ponto 1 (na orientação escolhida) subdivide a região que o contém em duas. O trecho entre os pontos i e $i+1$, para $i = 1, 2, \ldots, n-2$, subdivide a região que o contém em duas. Finalmente, o trecho após o $(n-1)$-ésimo ponto de interseção também subdivide a região que o contém em duas. Serão, portanto, n regiões adicionais. Estabelecemos assim a relação de recorrência

$$\begin{aligned} a_0 &= 1; \\ a_n &= a_{n-1} + n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Esta é uma relação de recorrência linear completa de primeira ordem com coeficientes constantes e não-homogênea. Devemos então aplicar o Corolário 2.1 da página 16 para obtermos a solução.

Reescrevendo a relação de recorrência para o formato desejado ficamos com

$$a_{n+1} - a_n = n + 1,$$

sendo, então, $m = 0$, $a_0 = 1$, $b = 1$ e $u(n) = n + 1$.

$$\begin{aligned} a_n = a_0 b^n + \sum_{r=0}^{n-1} u(r) b^{n-r-1} &= 1 + \sum_{r=0}^{n-1} (r+1) = 1 + (1 + 2 + \cdots + n) \\ &= 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}, \quad \text{para} \;\; n \geq 0. \end{aligned}$$

Assim, obtemos rapidamente o número de regiões em que fica dividido o plano quando desenhamos n linhas retas nas condições impostas pelo problema. Por exemplo, $a_{10} = 56$.

Problema 2. *Senhas válidas: senhas compostas com os algarismos provenientes do conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ são consideradas válidas se e somente se contêm um número par de zeros. Quantas senhas válidas com n algarismos podemos formar desta maneira?*

Denotemos por a_n a quantidade de senhas válidas com n algarismos e um número par de zeros. Vamos então encontrar a relação de recorrência para o problema. Notemos que a quantidade de senhas inválidas (senhas com o número de zeros ímpar) com n dígitos é igual a $4^n - a_n$. Consideremos agora uma senha válida de $(n+1)$ dígitos. Ou seu primeiro dígito é 1, 2, ou 3, ou seu primeiro dígito é 0. No primeiro caso, os últimos n dígitos formam uma senha válida com n dígitos, já no segundo caso, os mesmos n dígitos formam uma senha inválida. Podemos obter então a relação de recorrência

$$a_{n+1} = 3a_n + 1(4^n - a_n),$$

que nos dá

$$a_{n+1} - 2a_n = 4^n. \tag{3.2}$$

Novamente, temos uma relação de recorrência linear completa de primeira ordem com coeficientes constantes e não-homogênea. Aplicando o Corolário 2.1, com $m = 1$, $a_1 = 3$ (senhas com um dígito e número par de zeros: 1, 2 e 3), $b = 2$ e $u(n) = 2^{2n}$, obtemos

$$a_n = a_1 b^{n-1} + \sum_{r=1}^{n-1} u(r) b^{n-r-1} = 3 \cdot 2^{n-1} + \sum_{r=1}^{n-1} 2^{2r} \cdot 2^{n-r-1} = 3 \cdot 2^{n-1} + \sum_{r=1}^{n-1} 2^{n+r-1} =$$

$$3 \cdot 2^{n-1} + (2^n + 2^{n+1} + \cdots + 2^{2n-2}) = 2 \cdot 2^{n-1} + (2^{n-1} + 2^n + 2^{n+1} + \cdots + 2^{2n-2}).$$

Para resolver o parênteses basta aplicarmos a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica.

$$a_n = 2^n + (2^{2n-1} - 2^{n-1}) = 2^{n-1}(2^n + 1), \quad \text{para} \;\; n \geq 2.$$

Por exemplo, a quantidade de senhas válidas de 5 dígitos será $a_5 = 2^{5-1}(2^5 + 1) = (16) \cdot (33) = 528$

Problema 3. *Demonstre, utilizando relações de recorrência, a igualdade abaixo:*

$$\sqrt{2 \div \sqrt{2 \div \sqrt{2 \div \sqrt{2 \div \ldots}}}} = \sqrt[3]{2}.$$

Temos uma sequência infinita de operações no primeiro membro da igualdade e devemos mostrar que se escrevermos este primeiro membro como uma potência de 2, o expoente deve convergir para $1/3$. Para isto, vamos supor que a base 2 aparece um número finito n de vezes e associar seu expoente a_n à quantidade n de bases 2. Por exemplo:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \quad &\Longrightarrow \quad a_1 = 1/2; \\ \sqrt{2 \div \sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{4}} \quad &\Longrightarrow \quad a_2 = 1/4; \\ \sqrt{2 \div \sqrt{2 \div \sqrt{2}}} = 2^{\frac{3}{8}} \quad &\Longrightarrow \quad a_3 = 3/8. \end{aligned}$$

Considerando que os acréscimos das bases estão sendo feitos à esquerda e aplicando as propriedades operatórias de potências de mesma base, conseguimos obter um padrão no cálculo de a_n:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}, \\ a_2 &= \frac{1}{2}(1-a_1) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \\ a_3 &= \frac{1}{2}(1-a_2) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}, \end{aligned}$$

que nos dá

$$a_n = \frac{1}{2}(1-a_{n-1}) \Longrightarrow a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n = \frac{1}{2}.$$

Para resolver a relação de recorrência e obter o n-ésimo expoente da base 2 aplicamos a fórmula (2.10) do Corolário 2.1, com $m=1$, $a_1 = 1/2$, $b=-1/2$ e $u = 1/2$, obtendo

$$a_n = a_1 b^{n-1} + u \cdot \frac{(1-b^{n-1})}{(1-b)} = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{[1-(-1/2)^{n-1}]}{1-(-1/2)} =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

ou seja,

$$a_n = \frac{1-(-1/2)^n}{3}.$$

Para demonstrarmos a igualdade basta fazermos n tender ao infinito, pois a_n é uma sequência infinita. Teremos então

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-(-1/2)^n}{3} = \frac{1}{3},$$

e assim fica demonstrada a igualdade.

Problema 4 *Resolva a relação de recorrência* $a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 42 \cdot 4^n$. Vamos utilizar o método das raízes características. Devemos reescrever a equação como $a_{n+2} + 5a_{n+1} + 6a_n = 42 \cdot 4^{n+2}$. Primeiramente devemos obter a solução geral da correspondente relação de recorrência linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes aplicando o Teorema 2.2.

A *equação característica* da relação de recorrência é $t^2 + 5t + 6 = 0$ e suas raízes são $\rho_1 = -2$ e $\rho_2 = -3$. Portanto, por (2.15), obtemos

$$a_n = c_1(-2)^n + c_2(-3)^n.$$

Para obtermos uma solução particular aplicamos o Teorema 2.3:

$$u(n) = 4^n \cdot 672 = b^n \sum_{j=0}^{s} u_j \binom{n}{j} = 4^n \sum_{j=0}^{0} u_j \binom{n}{j} = b^n u_0,$$

logo temos $b = 4$, $s = 0$ e $u_0 = 672$. A multiplicidade de $b = 4$ no polinômio característico $\phi(t) = t^2 + 5t + 6$ é $k = 0$. Logo,

$$w(n) = b^{n-k} \sum_{j=k}^{k+s} w_j \binom{n}{j} = 4^n \sum_{j=0}^{0} w_j \binom{n}{j} = 4^n w_0,$$

onde o coeficiente w_0 é determinado pela equação:

$$\begin{aligned} \phi(4) w_0 &= u_0 \\ 42 w_0 &= 672 \\ w_0 &= 16. \end{aligned}$$

Temos então nossa solução particular $w(n) = 4^n w_0 = 16 \cdot 4^n$. Conforme (2.21), a solução procurada é dada por

$$a_n = c_1 a_1(n) + c_2 a_2(n) + w(n) = c_1(-2)^n + c_2(-3)^n + 16 \cdot 4^n.$$

Para encontrarmos as constantes c_1 e c_2 necessitamos de duas condições iniciais. Seja $a_0 = 17$ e $a_1 = 60$. Resolvendo as equações

$$\begin{aligned} 17 &= c_1 + c_2 + 16 \\ 60 &= -2c_1 - 3c_2 + 64, \end{aligned}$$

obtemos $c_1 = -1$ e $c_2 = 2$. Nestas condições,

$$a_n = -1 \cdot (-2)^n + 2 \cdot (-3)^n + 16 \cdot 4^n.$$

Problema 5 *Queremos determinar a solução geral da relação de recorrência*

$$a_{n+4} + 2a_{n+2} + a_n = 2(a_{n+3} + a_{n+1}) + (5n-2)2^n, \quad n = 0, 1, \cdots .$$

Podemos reescrever a relação como

$$a_{n+4} - 2a_{n+3} + 2a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = (5n-2)2^n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

que é uma relação de recorrência linear completa de quarta ordem com coeficientes constantes. A correspondente relação de recorrência homogênea é

$$a_{n+4} - 2a_{n+3} + 2a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0, \quad n = 0, 1, \cdots .$$

Seu polinômio característico é dado por

$$\phi(t) = t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + 1.$$

Devemos notar que $\phi(1) = 0$ e $\phi'(t) = 2(2t^3 - 3t^2 + 2t - 1)$, de onde $\phi'(1) = 0$. Deste modo, $\rho = 1$ é uma raiz real dupla do polinômio característico. Dividindo-o por $(t-1)^2$, obtemos

$$\phi(t) = (t-1)^2(t^2+1),$$

que implica que o polinômio característico também tem duas raízes complexo-conjugadas $\rho_1 = i$ e $\rho_2 = -i$, com $i = \sqrt{-1}$. A raiz complexa $\rho_1 = i$ tem módulo 1 e argumento $\theta = \pi/2$. A solução geral da relação de recorrência homogênea, de acordo com o Teorema 2.4, é dada por

$$a_n = c_1 + c_2 n + c_3 \cos(n\pi/2) + c_4 \operatorname{sen}(n\pi/2), \quad n = 0, 1, \cdots .$$

Além disso, a função $u(n) = (5n - 2)2^n$ da relação de recorrência completa é da forma (2.28), com $b = 2$, $s = 1$, $u_0 = -2$ e $u_1 = 5$. Deste modo, pelo Teorema 2.5 e já que $b = 2$ não é raiz do polinômio característico, daí $k = 0$, concluímos que

$$w(n) = (w_0 + w_1 n)2^n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

é uma solução da relação de recorrência completa. Determinamos os coeficientes w_0 e w_1 através das equações

$$\phi(2)w_1 = u_1, \quad \phi(2)w_0 + 2\phi'(2)w_1 = u_0.$$

Como $u_0 = -2$, $u_1 = 5$, $\phi(2) = 5$ e $\phi'(2) = 14$, estas equações transformam-se em

$$5w_1 = 5, \quad 5w_0 + 28w_1 = -2$$

e, então, $w_1 = 1$ e $w_0 = -6$. Portanto, $w_n = (n - 6)2^n$ e a solução geral da relação de recorrência completa é dada por

$$a_n = c_1 + c_2 n + c_3 \cos(n\pi/2) + c_4 \operatorname{sen}(n\pi/2) + (n - 6)2^n, \text{ para } n = 0, 1, \cdots .$$

Problema 6 *Consideremos uma certa reação nuclear no interior de um reator contendo núcleos e partículas livres de alta e baixa energia. Há dois tipos de eventos: (1) a partícula de alta energia colide com um núcleo e é absorvida, fazendo com que ele emita três partículas de alta energia e uma partícula de baixa energia; (2) a partícula de baixa energia colide com um núcleo e é absorvida, fazendo com que ele emita duas* *partículas de alta energia e uma partícula de baixa energia. Consideremos ainda que toda partícula livre causa um evento 1 μs depois de ser emitida. Suponha que uma única partícula de alta energia é injetada no tempo 0 em um sistema contendo somente núcleos. Determine o número de partículas livres de alta e baixa energia no sistema em um tempo de n μs.*

Denotemos por a_n e b_n o número de partículas livres de alta e baixa energia no tempo n, respectivamente. Temos então

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2b_{n-1}; \\ b_n &= a_{n-1} + b_{n-1}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

As equações deste sistema de relações de recorrência são válidas para $n \geq 1$, com condições iniciais $a_0 = 1$ e $b_0 = 0$. Vamos utilizar o método das funções geradoras para resolver (3.3) percorrendo as quatro etapas do método. Para atendermos à Etapa 1, temos que

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2b_{n-1} + [n = 0]; \\ b_n &= a_{n-1} + b_{n-1}. \end{aligned}$$

Na Etapa 2 vamos multiplicar cada membro da relação de recorrência por x^n e somar para todo n a fim de obter as funções geradoras $A(x)$ e $B(x)$.

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_n a_n x^n = \sum_n 3a_{n-1}x^n + \sum_n 2b_{n-1}x^n + \sum_n [n = 0]x^n, \\ B(x) &= \sum_n b_n x^n = \sum_n a_{n-1}x^n + \sum_n b_{n-1}x^n, \end{aligned}$$

o que nos dá

$$\begin{aligned} A(x) &= 3xA(x) + 2xB(x) + 1, \\ B(x) &= xA(x) + xB(x), \end{aligned}$$

de onde se obtém

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1-x}{1-4x+x^2} = \frac{(3+\sqrt{3})/6}{1-(2+\sqrt{3})x} + \frac{(3-\sqrt{3})/6}{1-(2-\sqrt{3})x}, \\ B(x) &= \frac{x}{1-4x+x^2} = \frac{\sqrt{3}/6}{1-(2+\sqrt{3})x} - \frac{\sqrt{3}/6}{1-(2-\sqrt{3})x}. \end{aligned}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3+\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^n, \\ b_n &= \frac{\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^n - \frac{\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^n. \end{aligned}$$

Verificamos o crescimento exponencial das partículas quando, por exemplo, calculamos através de um recurso computacional $a_{10} = 413.403$ e $b_{10} = 151.316$, enquanto que $a_{15} = 299.303.200$ e $b_{15} = 109.552.574$. Observamos que com o aumento de n, a razão entre as quantidades a_n e b_n tende a se estabilizar, se aproximando da razão

$$\frac{(3+\sqrt{3})/6}{\sqrt{3}/6} = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3} \simeq 2,732050841635177.$$

Para fins de praticidade dos cálculos, o sistema

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3+\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^n, \\ b_n &= \frac{\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^n \end{aligned}$$

nos oferece uma excelente aproximação.

Problema 7. *O mordomo chefe e os cavaleiros do Rei Arthur: doze cavaleiros do Rei Arthur foram convocados para uma reunião. Estes doze cavaleiros podem ser divididos em seis pares de cavaleiros que são mutuamente hostis. O mordomo chefe do Rei Arthur teve a tarefa de assentar os doze cavaleiros em torno da Távola Redonda de modo que nenhum par de cavaleiros mutuamente hostis sente em lugares adjacentes.*

De quantas maneiras o mordomo chefe pode fazer isto?

Qualquer alocação aceitável dos cavaleiros dá origem a mais 11 alocações aceitáveis, obtidas com o deslocamento de cada cavaleiro um número fixo de lugares no sentido horário. Não consideraremos duas alocações diferentes se diferem apenas por um rearranjo cíclico.

Usaremos a seguir a técnica de particionar o conjunto de alocações distintas e contar a cardinalidade de cada subconjunto da partição. Vamos denotar por $2n$ o número de cavaleiros sentados e por A_n o número de alocações com vizinhos não hostis. Seja B_n o número de alocações com somente um par de vizinhos hostis. Finalmente, considere C_n o número de alocações com somente dois pares de vizinhos hostis.

Podemos deduzir uma fórmula que exprime A_{n+1} em função de A_n, B_n e C_n . Consideremos uma alocação de $n+1$ pares de cavaleiros mutuamente hostis sem que nenhum par seja colocado em lugares adjacentes. Supomos que os pares de cavaleiros hostis sejam numerados. Pedimos então que o par de número $(n+1)$ deixe a mesa. Agora existem três possibilidades: ou não há vizinhos hostis entre os $2n$ cavaleiros remanescentes, ou há exatamente um par vizinhos hostis, ou há exatamente dois pares de vizinhos hostis (cada um dos dois cavaleiros retirados estaria sentado entre dois inimigos). Vamos então explicar de quantos modos podemos reintroduzir o $(n+1)$-ésimo par de cavaleiros à mesa de modo que não tenhamos vizinhos hostis. O caso em que existem dois pares de vizinhos hostis entre os $2n$ cavaleiros remanescentes é mais fácil de lidar. Cada um dos dois cavaleiros que estão voltando deve separar um par de vizinhos hostis. Isto pode ser feito de duas maneiras. Sabendo que o número de alocações de $2n$ cavaleiros com exatamente dois pares de vizinhos hostis é C_n, o número de alocações neste caso será $2C_n$.

Agora consideremos o caso em que temos exatamente um par de vizinhos hostis entre os $2n$ cavaleiros remanescentes. Então, um dos cavaleiros que retornam deve sentar-se entre os dois vizinhos hostis. Existem agora $2n+1$ cavaleiros à mesa e $2n+1$ assentos entre eles. Já que o segundo cavaleiro que está retornando não deve sentar-se ao lado de seu inimigo, ele terá à sua disposição $2n-1$ lugares. Devemos lembrar também que qualquer um dos dois cavaleiros pode sentar primeiro, de onde concluímos que existem

$2(2n-1)$ modos dos cavaleiros retornarem à mesa. Levando em conta que o número de alocações de $2n$ cavaleiros com exatamente um par de vizinhos hostis é B_n, o número de alocações neste caso será $2(2n-1)B_n$.

Finalmente, consideramos o caso em que não há vizinhos hostis entre os $2n$ cavaleiros remanescentes. Então, o primeiro dos cavaleiros que retornam pode ocupar qualquer um dos $2n$ lugares disponíveis e o segundo cavaleiro que está retornando pode ocupar $(2n-1)$ (ele não deve sentar-se ao lado de seu inimigo). Vemos então que temos $2n(2n-1)$ modos do par de cavaleiros hostis retornarem neste caso, concluindo então que o número de alocações será $2n(2n-1)A_n$.

Como podemos observar, as três possibilidades investigadas esgotam todas as possibilidades. Isto significa que A_{n+1} satisfaz a relação de recorrência

$$A_{n+1} = 2n(2n-1)A_n + 2(2n-1)B_n + 2C_n. \tag{3.4}$$

Esta relação sozinha não determina A_n para todos os valores de n. Analogamente a (3.4) precisamos encontrar relações de recorrência para B_{n+1} e C_{n+1}. É o que faremos a partir de agora.

Consideremos as alocações de $2n+2$ cavaleiros, $n > 1$, com exatamente um par de vizinhos hostis. O número de alocações é B_{n+1}. Para evitar uma discussão à mesa, pedimos aos dois vizinhos hostis para deixá-la. Agora existem duas possibilidades: ou não existem vizinhos hostis entre os $2n$ cavaleiros remanescentes ou existe exatamente um par de vizinhos hostis (eles estavam separados pelos dois cavaleiros mutuamente hostis que se retiraram da mesa). Neste último caso, os dois inimigos ao retornarem devem novamente ocupar os dois lugares vagos que deixaram (caso contrário teríamos dois pares de vizinhos hostis à mesa), e isto pode ser feito de duas maneiras. Desde que existem B_n alocações de $2n$ cavaleiros com exatamente um par de vizinhos hostis, chegamos a $2B_n$ alocações possíveis. No primeiro caso, o par de inimigos que retorna pode sentar em qualquer dos $2n$ lugares existentes. Tendo em vista a possibilidade dos dois inimigos trocarem de lugar entre si, eles podem sentar de $4n$ maneiras diferentes ao retornarem. Combinando isto com A_n alocações de $2n$ cavaleiros sem vizinhos hostis, obtemos $4nA_n$ alocações. Também, o número de pares distintos de inimigos pode ser escolhido de $n+1$ modos. Segue-se que B_{n+1} satisfaz a relação de recorrência

$$B_{n+1} = 4n(n+1)A_n + 2(n+1)B_n. \tag{3.5}$$

Finalmente, consideramos o caso em que existem dois pares de vizinhos hostis entre os $2n+2$ cavaleiros à mesa. O número de dois pares hostis pode ser escolhido de C^2_{n+1} formas. Isto nos dá $n(n+1)/2$ modos. Se substituirmos cada par hostil de cavaleiros por um novo cavaleiro, e sendo os dois novos cavaleiros de um par hostil, então vamos acabar com $2n$ cavaleiros e ou vizinhos não hostis (neste caso os dois cavaleiros que voltam não sentam lado a lado) ou exatamente um par de vizinhos hostis.

Existem A_n alocações de $2n$ cavaleiros com vizinhos não hostis. Podemos ir de uma dessas alocações para o padrão original de assentos de quatro maneiras, devido à possibilidade de intercâmbio de cavaleiros em cada um dos dois pares hostis. Isto significa que A_n alocações originam $4C^2_{n+1}A_n$ alocações que estão de acordo com o padrão original.

Há $(1/n)B_n$ alocações com exatamente o par *designado* de cavaleiros hostis, pois temos n pares e somente nos interessa as alocações de B_n com o par que está voltando. Raciocinando como antes, vemos que $(1/n)B_n$ alocações originam $4C^2_{n+1}(1/n)B_n = 2(n+1)B_n$ alocações que estão de acordo com o padrão original. Com ambos os casos considerados, temos que para $n \geq 1$

$$C_{n+1} = 2n(n+1)A_n + 2(n+1)B_n. \tag{3.6}$$

Podemos agora montar uma relação de recorrência completa para o problema, reunindo (3.4), (3.5) e (3.6), recaindo em um sistema de relações de recorrência válido para $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= 2(2n-1)(nA_n + B_n) + 2C_n, \\ B_{n+1} &= 4n(n+1)A_n + 2(n+1)B_n, \\ C_{n+1} &= 2n(n+1)A_n + 2(n+1)B_n. \end{aligned}$$

Um cálculo simples nos mostra que $A_2 = 2$, $B_2 = 0$ e $C_2 = 4$.

Com o sistema de relações de recorrência podemos montar uma tabela de valores e encontrar a solução do problema [1]:

n	A_n	B_n	C_n
2	2	0	4
3	32	48	24
4	1.488	1.920	1.152
5	112.512	138.240	78.720
6	12.771.840	15.160.320	8.409.600

Verificamos que o mordomo chefe do Rei Arthur teria 12.771.840 alocações possíveis, ou seja, a tarefa de encontrar uma não seria tão complicada!

Problema 8. *Somas e relações de recorrência estão intimamente relacionadas. Queremos calcular a soma alternada dos n primeiros quadrados perfeitos, ou seja, procuraremos a forma fechada para*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2,$$

que escrita como relação de recorrência é

$$\begin{aligned} S_0 &= 0; \\ S_n &= S_{n-1} + (-1)^n n^2, \quad n > 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Utilizaremos neste problema o *método de compilação* cujo primeiro passo consiste em generalizar a relação de recorrência que queremos resolver. De uma forma genérica, teríamos:

$$\begin{aligned} T_0 &= \alpha; \\ T_n &= T_{n-1} + (-1)^n(\beta + \gamma n + \delta n^2), \quad n > 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

[1] Os resultados podem ser obtidos em uma planilha de cálculo.

Notemos que (3.7) é um caso particular de (3.8). O método consiste em escolher valores particulares para α, β, γ e δ e combiná-los, cumprindo mais três etapas:

2. Achar valores de parâmetros gerais para os quais conhecemos a solução;
3. Compilar uma lista de casos particulares que podemos resolver;
4. Obter o caso geral combinando os casos particulares.

A solução de (3.8) terá a forma de

$$T_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma + D(n)\delta. \tag{3.9}$$

Vamos partir para a compilação, deixando claro que escolheremos funções T_n de forma que ao descobrir os valores dos parâmetros α, β, γ e δ e substitui-los em (3.9) encontremos equações simples e fáceis de solucionar.

Começaremos com $T_n = 1$. Ao substituir essa função em (3.8) temos

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha; \\ 1 &= 1 + (-1)^n(\beta + \gamma n + \delta n^2), \quad n > 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

que nos dá $\alpha = 1$ e $\beta = \gamma = \delta = 0$. Substituindo esses valores em (3.9) temos que $A(n) = 1$.

Tomando $T_n = (-1)^n$ em (3.8) teremos

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha; \\ (-1)^n &= (-1)^{n-1} + (-1)^n(\beta + \gamma n + \delta n^2), \quad n > 0, \end{aligned}$$

que nos dá $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, $\gamma = \delta = 0$. Substituindo estes valores em (3.9) temos que $A(n) + 2B(n) = (-1)^n$, donde $B(n) = \frac{(-1)^n - 1}{2}$.

Fazendo $T_n = (-1)^n n$ em (3.8) teremos

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha; \\ (-1)^n n &= (-1)^{n-1}(n-1) + (-1)^n(\beta + \gamma n + \delta n^2), \quad n > 0, \end{aligned}$$

que nos dá $\alpha = 0$ e $\beta = -1$, $\gamma = 2$ e $\delta = 0$. Substituindo estes valores em (3.9), temos que $-B(n) + 2C(n) = (-1)^n n$, donde $C(n) = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$.

Por fim, fazemos $T_n = (-1)^n n^2$ em (3.8) e obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha; \\ (-1)^n n^2 &= (-1)^{n-1}(n-1)^2 + (-1)^n(\beta + \gamma n + \delta n^2), \quad n > 0, \end{aligned}$$

que nos dá $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, $\gamma = -2$ e $\delta = 2$. Substituindo estes valores em (3.9) temos que $B(n) - 2C(n) + D(n) = (-1)^n n^2$, donde $D(n) = \frac{(-1)^n(n^2+n)}{2}$.

Queremos encontrar a soma $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2$, representada sob a forma da relação de recorrência (3.7), que como já vimos, é um caso particular de (3.8) com $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, $\gamma = 0$ e $\delta = 1$. Então, $S_n = D(n)$ e a solução procurada para a nossa relação de recorrência será:

$$S_n = \frac{(-1)^n(n^2+n)}{2}.$$

Podemos testar a fórmula fechada para pequenos valores de n obtendo então $S_0 = 0$, $S_1 = -1$, $S_2 = 3$, $S_3 = -6$, e assim por diante, resultados que verificamos estarem de acordo com o esperado.

Problema 9. *Supondo que temos à disposição cédulas de R\$ 1, R\$ 2, R\$ 5, R\$ 10 e R\$ 20, quantas maneiras existem de pagarmos 50 reais?*

Vamos assumir a seguinte notação para o problema: cédulas de um real `(1)`, cédulas de dois reais `(2)`, de cinco reais `(5)`, de dez reais `(10)` e de vinte reais `(20)`. Segundo Graham [3], George Pólya popularizou este tipo de problema ao mostrar de uma forma instrutiva que podemos resolvê-lo por funções geradoras.

Vamos estabelecer somas infinitas que representarão todas as maneiras possíveis de fazermos as escolhas para o total de R\$ 50,00. O símbolo | significará que nenhuma cédula de determinado valor será escolhida. O mais simples é começar com um número pequeno de tipos de cédulas, então supomos primeiramente que temos somente cédulas de um real $\texttt{(1)}$. A soma de todos os modos de pagar uma quantidade com cédulas de $\texttt{(1)}$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} A &= \,|\, + \texttt{(1)} + \texttt{(1)}\texttt{(1)} + \texttt{(1)}\texttt{(1)}\texttt{(1)} + \texttt{(1)}\texttt{(1)}\texttt{(1)}\texttt{(1)} + \cdots \\ &= \,|\, + \texttt{(1)} + \texttt{(1)}^2 + \texttt{(1)}^3 + \texttt{(1)}^4 + \cdots . \end{aligned}$$

O primeiro termo significa que não pagamos nenhum real, o segundo termo representa que pagamos R\$ 1, o terceiro, R\$ 2, e assim por diante.

Agora, acrescentamos a possibilidade de usar cédulas de dois reais $\texttt{(2)}$ em conjunto com as de $\texttt{(1)}$. Então, a soma de todas as composições possíveis será

$$\begin{aligned} B &= A + \texttt{(2)}A + \texttt{(2)}\texttt{(2)}A + \texttt{(2)}\texttt{(2)}\texttt{(2)}A + \texttt{(2)}\texttt{(2)}\texttt{(2)}\texttt{(2)}A + \cdots \\ &= (\,|\, + \texttt{(2)} + \texttt{(2)}^2 + \texttt{(2)}^3 + \texttt{(2)}^4 + \cdots)A, \end{aligned}$$

uma vez que cada pagamento pode ter um certo número de cédulas de $\texttt{(2)}$ escolhidas do primeiro fator e um certo número de cédulas de $\texttt{(1)}$ escolhidas de A. Similarmente, se cédulas de cinco reais são permitidas para compormos um determinado valor, teremos

$$C = (\,|\, + \texttt{(5)} + \texttt{(5)}^2 + \texttt{(5)}^3 + \texttt{(5)}^4 + \cdots)B,$$

que inclui termos como $\texttt{(5)}^6\texttt{(2)}^8\texttt{(1)}^4$, que representa seis cédulas de R\$ 5, oito cédulas de R\$ 2 e quatro cédulas de R\$ 1, quando o expandimos. Cada um dos termos obtidos é um modo de compor uma quantia desejada. Por fim, adicionando a possibilidade de pagarmos com cédulas de R\$ 10 e R\$ 20, obtemos

$$\begin{aligned} D &= (\,|\, + \texttt{(10)} + \texttt{(10)}^2 + \texttt{(10)}^3 + \texttt{(10)}^4 + \cdots)C; \\ E &= (\,|\, + \texttt{(20)} + \texttt{(20)}^2 + \texttt{(20)}^3 + \texttt{(20)}^4 + \cdots)D. \end{aligned}$$

Nosso problema é encontrar o número de termos em E que tem como soma R\$ 50. Um truque simples resolve facilmente nosso problema. Trocamos $\texttt{(1)}$ por z, $\texttt{(2)}$ por z^2, $\texttt{(5)}$ por z^5, $\texttt{(10)}$ por z^{10} e $\texttt{(20)}$ por z^{20}. Então, cada termo é trocado por z^n, onde n é o valor monetário do termo original. Por exemplo, $\texttt{(20)}\texttt{(10)}\texttt{(5)}\texttt{(5)}\texttt{(2)}$ torna-se

$z^{20+10+5+5+2} = z^{42}$. Os quatro modos de pagarmos R$ 5, `(1)`^{5},`(1)`^{3}`(2)`, `(1)(2)`^{2} e `(5)`, nos levam a concluir que o coeficiente de z^5 na expansão de E será 4 depois de substituição proposta.

Consideremos que A_n, B_n, C_n, D_n e E_n sejam o número de maneiras de pagar n reais quando estamos autorizados a utilizar as cédulas de no máximo R$ 1, R$ 2, R$ 5, R$ 10 e R$ 20, respectivamente. Nossa análise nos leva a concluir que os coeficientes de z^n nas respectivas séries de potências abaixo nos darão o número de maneiras de pagarmos n reais:

$$\begin{aligned} A &= 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots, \\ B &= (1 + z^2 + z^4 + z^6 + z^8 + \ldots)A, \\ C &= (1 + z^5 + z^{10} + z^{15} + z^{20} + \ldots)B, \\ D &= (1 + z^{10} + z^{20} + z^{30} + z^{40} + \ldots)C, \\ E &= (1 + z^{20} + z^{40} + z^{60} + z^{80} + \ldots)D. \end{aligned}$$

Obviamente, $A_n = 1$ para todo $n \geq 0$. Podemos ver também que $B_n = \lfloor n/2 \rfloor + 1$: para pagarmos n reais com cédulas de R$ 1 e R$ 2, podemos escolher ou 0 ou 1 ou 2 ... ou $\lfloor n/2 \rfloor$ cédulas de R$ 2, feita esta escolha temos somente uma possibilidade de compor o total com cédulas de R$ 1. Desta forma vemos que A_n e B_n são simples, mas C_n, D_n e E_n exigirão um pouco mais de nossa atenção.

Vamos fazer uso da identidade (2.36), introduzida no Capítulo 2:

$$1 + z^m + z^{2m} + \cdots = \frac{1}{1 - z^m},$$

$|z| < 1$. Temos então que

$$\begin{aligned}
A &= 1/(1-z), \\
B &= A/(1-z^2), \\
C &= B/(1-z^5), \\
D &= C/(1-z^{10}), \\
E &= D/(1-z^{20}).
\end{aligned}$$

Multiplicando pelos denominadores, teremos

$$\begin{aligned}
(1-z)A &= 1, \\
(1-z^2)B &= A, \\
(1-z^5)C &= B, \\
(1-z^{10})D &= C, \\
(1-z^{20})E &= D.
\end{aligned}$$

Agora podemos igualar os coeficientes de z^n nestas equações, obtendo relações de recorrência nas quais os coeficientes desejados são calculados rapidamente:

$$\begin{aligned}
A_n &= A_{n-1} + [n=0], \\
B_n &= B_{n-2} + A_n, \\
C_n &= C_{n-5} + B_n, \\
D_n &= D_{n-10} + C_n, \\
E_n &= E_{n-20} + D_n.
\end{aligned}$$

Vamos usar a recorrência para encontrarmos E_{50}. Primeiro, $E_{50} = E_{30} + D_{50} = E_{10} + D_{20} + D_{30}$ (observamos que $E_{10} = D_{10}$ pois as cédulas de R\$ 20 não auxiliam no pagamento de R\$ 10). Agora queremos calcular D_{10}, D_{20} e D_{30}. Temos

$$\begin{aligned} D_{10} &= D_0 + C_{10}, \\ D_{20} &= D_{10} + C_{20} = D_0 + C_{10} + C_{20}, \\ D_{30} &= D_{20} + C_{30} = D_0 + C_{10} + C_{20} + C_{30}. \end{aligned}$$

Precisamos obter C_{10}, C_{20} e C_{30}. Então

$$\begin{aligned} C_5 &= C_0 + B_5, \\ C_{10} &= C_5 + B_{10} = C_0 + B_5 + B_{10}, \quad \text{e por iteração} \\ C_{20} &= C_0 + B_5 + B_{10} + B_{15} + B_{20}, \\ C_{30} &= C_0 + B_5 + B_{10} + B_{15} + B_{20} + B_{25} + B_{30}. \end{aligned}$$

A confecção de uma tabela, portanto, basta para determinarmos todos os coeficientes necessários: O valor final da tabela nos dá a resposta do problema, E_{50}, ou seja, existem

n	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
A_n	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B_n	1	3	6	8	11	13	16	18	21	23	26
C_n	1	4	10	18	29	42	58	76	97	120	146
D_n	1		11		40		98		195		341
E_n	1		11				109				450

exatamente 450 maneiras de pagarmos R\$ 50 nas condições impostas pelo problema.

Mas ainda não somos capazes de responder qual a forma fechada para E_n. Multiplicando as equações, obtemos a expressão compacta

$$E = \frac{1}{(1-z)} \frac{1}{(1-z^2)} \frac{1}{(1-z^5)} \frac{1}{(1-z^{10})} \frac{1}{(1-z^{20})},$$

mas não é imediato como chegamos ao coeficiente de z^n. Para os leitores interessados, na pág. 344 da referência [3] há um cálculo da forma fechada para E_n de um exemplo bastante similar a este.

Problema 10. *O Problema de Josephus: nosso último problema é uma variante de um antigo problema resolvido por Flavius Josephus, um famoso historiador do século I. Diz a lenda que Josephus não teria vivido e tornado-se famoso sem seus talentos matemáticos. Durante a guerra judaico-romana, estava entre um grupo de 41 rebeldes judeus presos em uma caverna pelos romanos. Preferindo a morte à captura, os rebeldes decidiram formar um círculo e, a partir de um rebelde escolhido como base, matar cada terceira pessoa, recomeçando a contagem sempre que um rebelde fosse morto, até que restasse um único. Mas Josephus, juntamente com um outro conspirador, não queria morrer, por isso, rapidamente teria calculado onde ele e seu amigo deviam estar no círculo para permanecerem vivos.*

Em nossa variante, começaremos com n pessoas numeradas de 1 a n formando um círculo, e eliminaremos toda ***segunda*** *pessoa remanescente até que somente uma sobreviva. Este círculo é percorrido no sentido horário tantas vezes quanto necessário, começando com a pessoa da posição 1. Qual a posição que o sobrevivente ocupa?*

Esta resolução encontra-se em Santos [7] e em Graham, Knuth e Patashnik [3]. A reproduzimos aqui por considerar este problema um clássico das relações de recorrência.

Para facilitar, associamos a cada pessoa o número da posição que ocupa no círculo. Denotemos ainda por $J(n)$ o número da pessoa sobrevivente em um círculo composto por n pessoas. Está claro que $J(1) = J(2) = 1$. Podemos visualizar na Figura 3.2 um círculo de 8 pessoas, por exemplo, onde seriam eliminadas as pessoas das posições 2, 4, 6, 8, na primeira volta, as pessoas 3 e 7 na segunda, e por fim 5 na terceira passagem, sobrevivendo a pessoa da posição 1. Obtemos facilmente os valores de $J(n)$ para valores pequenos de n, o que não nos anima a fazer qualquer conjectura. Listamos estes valores:

n	1	2	3	4	5	6
$J(n)$	1	1	3	1	3	5

Na primeira rodada as pessoas pares sempre serão eliminadas. Faremos a análise das duas situações possíveis: ou n é par ou n é ímpar. Supondo inicialmente n par,

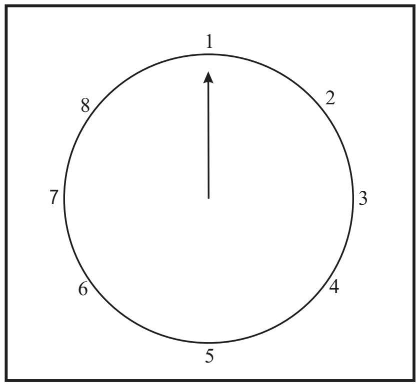


Figura 3.2: $J(8) = 1$.

digamos $n = 2k$, k natural, a segunda rodada começa como a primeira (a pessoa 1 é poupada), com a diferença que os números associados às pessoas não correspondem mais às suas posições respectivas. Assim, a pessoa na posição i tem o número $2i - 1$, veja Figura 3.3 a seguir. O problema agora tem $k = \frac{n}{2}$ pessoas ao invés de $2k$, e no qual os números das pessoas não correspondem exatamente às posições que elas ocupam. Por definição, a pessoa sobrevivente num problema com k pessoas é $J(k)$; portanto, levando em conta a diferença dos números e posições, temos que a pessoa sobrevivente $J(2k)$ é $2J(k) - 1$. Ou seja, a relação entre os termos pares da sequência será

$$J(2k) = 2J(k) - 1, \quad \text{para} \;\; k \geq 1. \tag{3.11}$$

Considerando agora n ímpar, digamos $n = 2k + 1$, a pessoa 1 é eliminada ao fim da primeira rodada, onde são eliminadas $k+1$ pessoas, restando então k pessoas, de modo que o número da pessoa na i-ésima posição é $2i + 1$. Assim, temos

$$J(2k+1) = 2J(k) + 1, \quad \text{para} \;\; k \geq 1. \tag{3.12}$$

Portanto, a relação de recorrência para a sequência $J(i)$, válida para $k \geq 1$ é

$$\begin{cases} J(1) = 1 \\ J(2k) = 2J(k) - 1 \\ J(2k+1) = 2J(k) + 1. \end{cases} \tag{3.13}$$

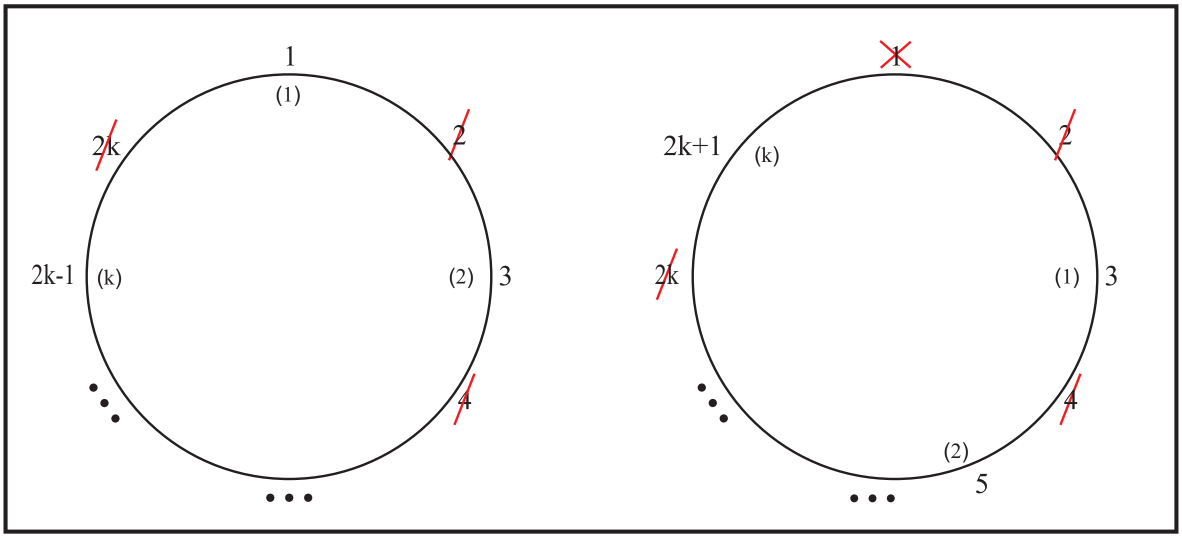


Figura 3.3: Eliminados após a primeira rodada para $n = 2k$ e para $n = 2k + 1$.

Desta relação de recorrência podemos deduzir com facilidade a solução de alguns casos especiais que nos ajudarão na solução geral. Por exemplo, os elementos da sequência cujos índices são potências de 2. Substituindo em (3.13), temos

$$\begin{aligned} J(1) &= 1; \\ J(2^n) &= 2J(2^{n-1}) - 1, \quad \text{para} \ \ n \geq 1. \end{aligned}$$

Então $J(2) = 2J(1) - 1 = 2 - 1 = 1$, $J(4) = 2J(2) - 1 = 1$, $J(8) = 2J(4) - 1 = 1$, o que nos leva a crer (prova-se facilmente por indução) que $J(2^n) = 1$ para todo n.

Consideremos agora um valor de n que se situe estritamente entre duas potências de 2, por exemplo $n = 2^k + l$, onde $1 \leq l \leq 2^k - 1$. Se interrompemos o procedimento após l eliminações (nas posições 2, 4, ..., $2l$), temos um problema similar ao original, tendo 2^k pessoas no círculo, e no qual o número da pessoa na "primeira" posição é $2l + 1$, como mostra a Figura 3.4 para $n = 10 = 2^3 + 2$. Prosseguindo a partir deste ponto, temos que a pessoa sobrevivente será a que ocupa a "primeira" posição após as l eliminações (sabemos que $J(2^k) = 1$), portanto $J(n) = J(2^k + l) = 2l + 1$ para $1 \leq l \leq 2^k - 1$. Provaremos esta fórmula por indução.

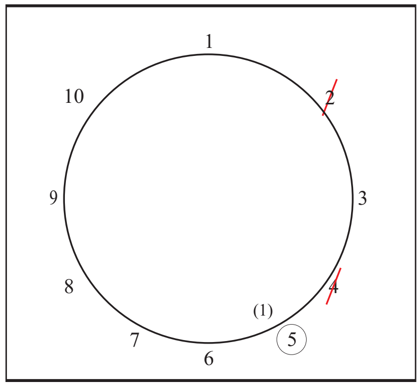


Figura 3.4: Situação após duas eliminações: $l = 2$.

Vamos expressar os parâmetros k e l em função de n. Temos que $l = n - 2^k$ e $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$, segue que $l = n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$. Portanto,

$$J(n) = 2(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}) + 1, \quad \text{para} \;\; n \geq 1. \tag{3.14}$$

Substituindo $n = 1$ em (3.14), obtemos $J(1) = 1$; ou seja, a condição inicial está satisfeita. Primeiramente, trabalharemos com n par. Então,

$$\begin{aligned} J(n) &= 2\; J(n/2) - 1 \\ &= 2\left[2\left(\frac{n}{2} - 2^{\lfloor \log_2 \frac{n}{2} \rfloor}\right) + 1\right] - 1 \\ &= 2\left[2\left(\frac{n}{2} - 2^{\lfloor \log_2 n - \log_2 2 \rfloor}\right) + 1\right] - 1 \\ &= 2\left[2\left(\frac{n}{2} - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor - 1}\right) + 1\right] - 1 \\ &= 2\left[n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} + 1\right] - 1 \\ &= 2\left(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}\right) + 2 - 1 \\ &= 2\left(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}\right) + 1, \end{aligned}$$

onde a primeira equação é obtida de (3.13) e a segunda decorre de supor verdadeira a fórmula (3.14), usando o Princípio de Indução Matemática. Analisaremos de forma análoga quando n é ímpar:

$$
\begin{aligned}
J(n) &= 2\,J\left(\frac{n-1}{2}\right)+1 \\
&= 2\left[2\left(\frac{n-1}{2}-2^{\lfloor \log_2 \frac{n-1}{2}\rfloor}\right)+1\right]+1 \\
&= 2\left[2\left(\frac{n-1}{2}-2^{\lfloor \log_2 (n-1)\rfloor-1}\right)+1\right]+1 \\
&= 2\left[n-1-2^{\lfloor \log_2 (n-1)\rfloor}+1\right]+1 \\
&= 2\left(n-2^{\lfloor \log_2 n\rfloor}\right)+1,
\end{aligned}
$$

onde usamos o fato de que $2^{\lfloor \log_2 (n-1)\rfloor} = 2^{\lfloor \log_2 n\rfloor}$, para n ímpar. Portanto a fórmula (3.14) foi provada por indução. Com esta solução obtemos rapidamente a posição do sobrevivente $J(n)$. Por exemplo, $J(100) = 73$ pois $100 = 2^6 + 36$ o que implica $l = 36$ e $J(100) = 2.36 + 1$. Poderíamos ainda usar diretamente (3.14), o que nos daria

$$J(n) = 2(100 - 2^{\lfloor \log_2 100\rfloor}) + 1 = 2(100 - 2^6) + 1 = 2.36 + 1 = 73.$$

Considerações finais

O presente trabalho trouxe um estudo inicial do assunto Relações de Recorrência e de algumas de suas técnicas de resolução. Tivemos por objetivo produzir um texto acessível àqueles que necessitarem estudar este importante tópico da Matemática Discreta.

Esse estudo nos permitiu aprofundar nosso conhecimento da disciplina, bem como fundamentá-la de maneira rigorosa. Observamos a necessidade de saber como lidar com recorrências, uma vez que são muito comuns não só na Matemática como também em Computação, na construção de algoritmos. Vimos ainda que as Relações de Recorrência encontram-se intimamente ligadas a diversos assuntos da Matemática Discreta tais como Coeficientes Binomiais, Funções Geradoras, Convoluções, Teoria dos Números, entre outros, tornando-se muitas vezes indispensáveis ao estudo destes.

Concluímos que a formulação de Relações de Recorrência é uma ferramenta poderosa e versátil na resolução de problemas combinatórios. Consequentemente, torna-se assunto obrigatório àqueles que se aventuram no estudo da Matemática Discreta.

Como anseio pessoal fica o prosseguimento deste estudo com enfoque nas recorrências que dependem de mais de um parâmetro e no uso de recursos computacionais na resolução de recorrências.

Referências Bibliográficas

[1] Anderson, J. A. *Discrete Mathematics with Combinatorics*. Prentice Hall, 2001.

[2] Charalambides, C. A. *Enumerative Combinatorics*. Chapman & Hall/CRC, 2002.

[3] Graham, R. L., Knuth, D. E., and Patashnik, O. *Concrete Mathematics - A Foundation for Computer Science*. Addison - Wesley Publishing Company, 1995.

[4] Jesus, E. A., and Silva, E. F. S. Relações de recorrência. http://www.impa.br/opencms/pt/eventos/downloads/jornadas2006. Acesso em 20 Set 2009.

[5] Liu, C. L. *Elements of Discrete Mathematics*. McGraw - Hill, 1985.

[6] Roberts, F. S. *Applied Combinatorics*. Prentice-Hall, 1984.

[7] Santos, J. P. O., Mello, M. P., and Murari, I. T. C. *Introdução à Análise Combinatória*. Ciência Moderna, 2007.

[8] Tucker, A. *Applied Combinatorics*. 1943.

[9] Vilenkin, N. Y. *Combinatorics*. 1971.

Apêndice A

Funções Geradoras Ordinárias

Este apêndice tem por finalidade introduzir conceitos referentes às funções geradoras, com ênfase nas funções geradoras ordinárias, as quais citamos no Capítulo 2.

Segundo Santos [7], as funções geradoras são uma das principais ferramentas para a solução de problemas de contagem, especialmente problemas que envolvam a seleção de objetos nos quais a repetição é permitida.

Definição A.1. *Uma série de potências é uma série infinita da forma* $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$, *onde os* a_i, *para* $i=0,1,2,3,\ldots$ *são números reais e* x *é uma variável. Por esta definição, qualquer polinômio em* x *é uma série de potências. Por exemplo, o polinômio* $1+2x+x^2$ *pode ser escrito como* $1+2x+1x^2+0x^3+0x^4+0x^5+\cdots$.

Definição A.2. *Se* $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ *e* $b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots$ *são duas séries de potências, então a soma destas duas séries é a série de potências na qual o coeficiente de* x^r *é* a_r+b_r *e o produto destas duas séries é a série de potências na qual o coeficiente de* x^r *é* $a_0b_r+a_1b_{r-1}+a_2b_{r-2}+\ldots+a_rb_0$.

Definição A.3. *Se* a_r, *para* $r=0,1,2,\ldots$, *é o número de soluções de um problema de combinatória, a função geradora ordinária para este problema é a série de potências*

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots, \tag{A.1}$$

ou, de maneira geral, dada a sequência (a_r), *a função geradora ordinária para esta sequência é definida como a série de potências (A.1).*

As funções geradoras ordinárias serão utilizadas naqueles problemas em que a ordem dos objetos dentro de cada subconjunto não seja relevante. Se encaixa neste caso o exemplo abaixo, em que as soluções para cada variável são equivalentes a retirarmos bolas indistinguíveis de caixas diferentes, portanto sem a preocupação com a ordem da retirada.

Exemplo A.1. *Achar a função geradora ordinária* $f(x)$ *na qual o coeficiente* a_r *de* x^r *é o número de soluções inteiras não-negativas da equação* $x + 3y + 4z = r$.

Escrevendo $x_1 = 1x$, $y_1 = 3y$ *e* $z_1 = 4z$, *teremos:*

$$x_1 + y_1 + z_1 = r,$$

com $x_1 \in \mathbb{N}$, y_1 *múltiplo de 3 e* z_1 *múltiplo de 4. Desta forma, a série de potências cujos expoentes são os possíveis valores de* x_1 *é*

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots .$$

Para y_1 *e* z_1, *temos, respectivamente,*

$$1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \cdots \text{ e}$$

$$1 + x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + \cdots .$$

Desta forma, a função geradora ordinária $f(x)$ *é dada por:*

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \cdot (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots) \cdot (1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots).$$

Neste produto, após alguns cálculos inciais, verificamos, por exemplo, que o coeficiente de x^7 *é igual a 5. Este coeficiente corresponde às cinco soluções possíveis para* $x_1 + y_1 + z_1 = 7$, *com as restrições impostas, as quais listamos a seguir:*

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 3, \quad z_1 = 4;$$

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 6, \quad z_1 = 0;$$
$$x_1 = 3, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 4;$$
$$x_1 = 4, \quad y_1 = 3, \quad z_1 = 0;$$
$$x_1 = 7, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 0.$$

Com estas trincas obtemos as soluções para x, y e z. É lógico que para valores maiores não poderíamos fazer este trabalho sem a ajuda de um recurso computacional. É importante salientar que existem diversos teoremas que nos dão condições de obtermos estes coeficientes e que não os veremos por fugirem ao propósito deste trabalho.

O leitor que tiver interesse em aprofundar-se no assunto poderá consultar a referência [7].