Curso: Análisis Númerico, Tarea # 5

Instructor: Imelda Trejo Lorenzo

Para entregar el 5 de Marzo 2025, antes de clase.

Libros de clase: Burden, R. L. & Faires, J.D. Numerical Analysis (7th edition). David Kincaid and Ward Cheney, Numerical Analysis of Scientific Computing, 1991.

1. (15 puntos) Determinar cuáles de las siguientes matrices son (i) semétricas, (ii) singulares, estrictamente diagonal dominante, (iv) definidas positivas.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 11 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (10 puntos) Probar que la siguiente matriz es no singular y que no se puede descomponer como el producto de dos matrices triangulares una superior y otra inferior.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. (10 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

   Probar que:

   (a) $\rho(A) \geq 2$, donde $\rho(\cdot)$ es el radio espectral de una matriz.

   (b) Si A es definida positiva entonces $\rho(A) > 4$.

4. (10 puntos) Demuestra que si A es simétrica, entonces $||A||_2 = \rho(A)$.

5. (10 puntos) Encuentra la inversa de la matriz A y los números de condición $cond_p(A) = \kappa(A)$ con las normas asociadas para $p = 1, 2, \infty$, con

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 7 & 11 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. (15 puntos) Probar que si una matriz cuadrada B es estrictamente diagonal dominante, entonces el método iterativo de Jacobi para resolver un sistema de la forma $Bx = b$ siempre converge.

7. (20 puntos) Obtenga las dos primeras iteraciones de Jacobi y de Gauss-Seidel para el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 &= 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7 \\ -2x_2 + 10x_3 &= 6. \end{aligned}$$

8. (10 puntos) Suppose A is symmetric 3 by 3 and positive definite, and consider
$$\phi(x) = \frac{1}{2}x^t Ax - b^t x.$$
   (a) Find the gradient of $\phi(x)$.
   (b) What is $\min_x\{\phi(x)\}$? Justify your answer.
   (c) When is the $\min_x\{\phi(x)\}$ attained?

9. (15 puntos extras) Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4 \end{aligned}$$

   (a) Implementar el método SOR a partir de la expresión del método de Gauss-Seidel o Jacobi, considera $\omega = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2(T)}}$ donde $T = D^{-1}(L+U)$ y da valores para ω tales que se tenga subrelajación o sobrerelajación. ¿Qué parámetro de relajación escogerías para una convergencia más rápida? Explica por qué.
   (b) Tomando como valores iniciales $x^0 = (0,0,0)^t$, comparar con las tres primeras iteraciones del método de sobrerelajación y el que has escogido como base (Jacobi o Gauss-Seidel).