Curso: Análisis Númerico, Tarea # 4

Instructor: Imelda Trejo Lorenzo

Para entregar el 19 de Febrero 2025, antes de clase.

Libros de clase: Burden, R. L. & Faires, J.D. Numerical Analysis (7th edition). David Kincaid and Ward Cheney, Numerical Analysis of Scientific Computing, 1991.

1. (Método del punto fijo) (5 puntos)¿Cuál es el valor de la siguiente expresión?

$$x = \sqrt{p + \sqrt{p + \sqrt{p + \dots}}}$$

2. Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= q \\ x_2 + x_3 + 2x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_2 + 5x_3 + px_4 &= 3 \end{aligned}$$

   (a) (10 puntos) ¿Para qué valores de p, q el sistema tiene: ninguna solución, infinitas soluciones y una única solución?

   (b) (10 puntos) Suponiendo que existe una única solución, determina la solución.

3. Consider the linear system

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4. \end{aligned}$$

   (a) (10 puntos) Solve the system using Gaussian elimination with partial pivoting avoiding small or zero pivots.

   (b) (10 puntos) Let A be the matrix of the system, and let P be the permutation matrix that does row pivoting. The matrix PA can be factored as $PA = LU$, where L is a lower triangular matrix with 1's on the diagonal and U is upper triangular. Find L and U. Also write P explicitly.

4. (10 puntos) Encontrar la inversa de la matriz de coeficientes del sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

usando el método de Gauss-Jordan con pivotaje parcial y resolver el sistema.

5. Conteo de operaciones en los métodos: eliminación Gaussiana y eliminación de Gauss-Jordan (ver la definición del libro, edición 7 en la página 357).

   (a) (5 puntos) En el método de eliminación Gaussiana, junto con un método de sustitución regresiva para resolver sistemas lineales. Estima para un sistema de n-ecuaciones cuántas operaciones requiere.

   (b) (5 puntos) Muestra que el método de Gauss-Jordan requiere

   $$\frac{n^3}{2} + n^2 - \frac{n}{2} \quad \text{multiplicaciones/divisiones}$$

   y

   $$\frac{n^3}{2} - \frac{n}{2} \quad \text{sumas/restas.}$$

   ¿Cuál de los dos métodos es más costoso?

6. Sea el sistema $Ax = b$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

   (a) (5 puntos) Obten A^{-1} y resuelve el sistema.

   (b) (5 puntos) Estudia el número de condición de la matriz (5 puntos)A, y justifica si es un problema bien condicionado.

   (c) (5 puntos) Da las matrices asociadas a la factorización de Cholesky para la matriz A. ¿Cuál es el valor del $\det(A)$?

7. El sistema lineal dado por

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 1.0001x_1 + 2x_2 &= 3.0001 \end{aligned}$$

tiene como solución el vector $(1,1)^t$. La matriz A es obtenida mediante datos experimentales y la nueva medición cambia A ligeramente, siendo el nuevo sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 0.9999x_1 + 2x_2 &= 3.0001 \end{aligned}$$

(a) (10 puntos) Calcular la nueva solución usando aritmética de 5 dígitos y comparar el error obtenido con el estimado por:

$$\frac{||\hat{x} - x||}{||x||} \le \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)(||\delta A||/||A||)} \left(\frac{||\delta A||}{||A||} + \frac{||\delta b||}{||b||} \right)$$

donde A y b son tales que el sistema se escribe de la forma $Ax = b$; δA, δb son las perturbaciones asociadas a A y b;

$$\kappa(A) = ||A||\ ||A^{-1}||.$$

(b) (10 puntos) ¿Es la matriz A mal condicionada? Si es así realiza un tratamiento para obtener un sistema equivalente bien condicionado.