Curso: Análisis Númerico, Tarea # 7

Instructor: Imelda Trejo Lorenzo

Para entregar el 19 de Marzo 2025, antes de clase.

Libros de clase: Burden, R. L. & Faires, J.D. Numerical Analysis (7th edition). David Kincaid and Ward Cheney, Numerical Analysis of Scientific Computing, 1991.

1. (15 puntos) Aproximar la función de variable real $f(x) = e^x \cos(x) + 1$, $x \in [0, \pi]$, con el polinomio de segundo grado $p(x)$, que incluye (interpola) los puntos $f(0)$, $f(\pi/2)$, $f(\pi)$. Encontrar la magnitud del mayor error $E(x) = f(x) - p(x)$, que se producirá al usar esta aproximación. Resolver la ecuación lineal resultante con la formula de Newton con un error máximo de 0.0001.

2. (15 puntos) Aproximación de Mínimos Cuadrados para el caso discreto (Regresión Lineal)

   Dado un conjunto de datos discretos (x_i, y_i) para $i = 1, 2, ..., n$, queremos encontrar una recta de la forma $y = ax+b$ que minimice el error cuadrático medio. Esto es,
   $$E(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2. \tag{1}$$
   Encuentra la soluciòn

3. (15 puntos) Demuestra que la familia $\{1, \sin(n\pi x), \cos(n\pi x)\}$ es ortonormal en el intervalo $[-1, 1]$ con la métrica de producto interno, n entero:
   $$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx. \tag{2}$$

4. (15 puntos) Demuestra que los Polinomios de Chebyshev de primer tipo $T_n(x)$ definidos por:
   $$T_n(x) = \cos(n \arccos x). \tag{3}$$
   son ortogonales, para cada n entero positivo, esta expression es equivalente a la que se presento en clase, ver sesi'on 8.3 del libro.

5. (15 puntos) resolver el ejercicio 12 de la seccion 8.5, pag 536.