

Curso: Análisis Numérico, Tarea # 11

Instructor: Imelda Trejo Lorenzo

Para entregar el 14 de Mayo 2025, antes de clase.

Libros de clase: Burden, R. L. & Faires, J.D. Numerical Analysis (7th edition). David Kincaid and Ward Cheney, Numerical Analysis of Scientific Computing, 1991.

Resolver los siguientes ejercicios de los capítulos 4.

1. (20 puntos) Aproximación de la derivada con tres puntos (diferencia centrada). Usa los puntos $x_{-1} = x_0 - h$, x_0 y $x_1 = x_0 + h$ con interpolación, o teorema de Taylor para deducir la siguiente fórmula

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi),$$

para algún ξ en (x_{-1}, x_1) .

Esta es la **fórmula de diferencia centrada**, que típicamente ofrece mejor precisión que las fórmulas hacia adelante o hacia atrás pero requiere conocer valores de f en ambos lados de x_0 .

2. (a) (20 puntos) Determinar el exponente k_i en la fórmula en diferencias

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i h^{k_i} \quad (1)$$

asumiendo que $f(x)$ tiene un desarrollo en serie de Taylor convergente en un intervalo suficientemente grande alrededor de x_0 .

- (b) (20 puntos) Calcular $f''(0.6)$ usando la fórmula (1) con $h = 0.1, 0.2$ y 0.4 considerando la siguiente tabla. Realizar extrapolación de Richardson repetida para obtener aproximaciones de mayor orden de exactitud.

x	0.2	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	1.0
$f(x)$	1.42	1.88	2.12	2.38	2.65	2.94	3.55

3. (20 puntos) Estimar

$$\int_0^1 f(x) dx$$

usando los valores dados en la siguiente tabla, utilizando la regla del trapecio compuesta.

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$f(x)$	1.5000	1.2412	1.0713	0.9663	0.9073

4. (20 puntos) La función $f(x)$ se conoce en los puntos x_k dados en la siguiente tabla:

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
$f(x)$	1.000	1.015	1.006	0.882	0.670

Usa las fórmulas de Newton-Cotes: regla de Simpson, simple y compuesta, para aproximar la siguiente integral:

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

Da estimaciones del error.