

Curso: Análisis Numérico, Tarea # 10

Instructor: Imelda Trejo Lorenzo

Para entregar el 09 de Abril 2025, antes de clase.

Libros de clase: Burden, R. L. & Faires, J.D. Numerical Analysis (7th edition). David Kincaid and Ward Cheney, Numerical Analysis of Scientific Computing, 1991.

Resolver los siguientes ejercicios de los capítulos 8 y 9.

1. (20 puntos) Usa una técnica numérica para determinar todos los valores propios y los vectores propios asociados a la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

¿Qué técnica usaste? Da muestra de tus resultados computacionales.

2. (10 puntos) Encuentra la factorización QR de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Problema de mínimos cuadrados. Sea A una matriz $m \times n$, con $m > n$ y el rango de A es n . El problema lineal

$$Ax = b, \tag{1}$$

no siempre tiene solución. La solución en mínimos cuadrados de la ecuación (1) es el vector x tal que minimiza

$$\|Ax - b\|_2.$$

- (a) (10 puntos) Demuestra que x , la solución en mínimos cuadrados, satisface la **ecuación normal**

$$A^*Ax = A^*b. \tag{2}$$

- (b) (10 puntos) Demuestra que A^*A es hermitiana y positiva definida.

4. Sea la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

y el vector:

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) (10 puntos) Demuestra que el sistema $Ax = b$ no tiene solución.
- (b) (15 puntos) Resuelve el problema de mínimos cuadrados $Ax = b$. En la ecuación normal resultante usa factorización QR para hallar la solución.

5. Considere el sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde δ es un real.

- a) (10 puntos) Calcule la solución exacta.
- b) (15 puntos) Calcule la solución aproximada para valores de δ cercanos a 0, usando primero la solución de las ecuaciones normales y después usando factorización QR a través de Gram-Schmidt. Discuta sus resultados.