Curso: Análisis Númerico, Tarea # 12

Instructor: Imelda Trejo Lorenzo

Para entregar el 21 de Mayo 2025, antes de clase.

Libros de clase: Burden, R. L. & Faires, J.D. Numerical Analysis (7th edition). David Kincaid and Ward Cheney, Numerical Analysis of Scientific Computing, 1991.

1. (20 puntos) Usa la aproximación centrada

$$f'(x_0) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

para calcular una aproximación a $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u$. ¿De qué orden es la aproximación a la segunda parcial?

2. (20 puntos) Usa la fórmula de interpolación de Lagrange con $x_0 = a$ y $x_1 = b$ par obtener la fórmula del Trapecio. Deduce la fórmula del error de integración que resulta de esta fórmula. Ayuda: usa el error de interpolación polinomial y la fórmula del valor-medio para integrales. ¿cuál es la precisión de la fórmula del trapecio? Explique.

3. La regla básica corregida del Trapecio esta dada por:

$$\int_0^h f(x)dx = \frac{h}{2}[f(0) + f(h)] + \frac{h^2}{12}[f'(0) - f'(h)]$$

(a) (10 puntos) Deduzca esta regla.

(b) (5 puntos) Determine el grado máximo del polinomio que puede integrarse de forma exacta con esta regla.

(c) (5 puntos) De la expresión de la correspondiente regla compuesta para los casos de nodos de integración equidistantes (distribuidos uniformemente) y para el caso general de nodos no uniformes.

4. (15 puntos) a) Sea $f : [-1, 1] \to R$ una función integrable. Explique cómo obtener una regla de cuadratura gaussiana de tres nodos para la integral

$$\int_{-1}^1 f(x)dx.$$

Determine los pesos, los nodos y el grado máximo del polinomio para el cual esta regla de cuadratura es exacta.

b) (15 punto) Sea $g : [0, 1] \to R$ una función integrable. Explique cómo usar la cuadratura gaussiana del inciso anterior para aproximar la integral

$$\int_0^1 g(x)dx.$$

5. (10 puntos) ¿Para que valores de α la siguinte fórmula de cuadratura es exacta para todo polinomio cuadrático?

$$\int_0^2 f(x)dx \approx f(\alpha) + f(2 - \alpha)$$