Curso: Análisis Númerico, Tarea # 6

Instructor: Imelda Trejo Lorenzo

Para entregar el 12 de Marzo 2025, antes de clase.

Libros de clase: Burden, R. L. & Faires, J.D. Numerical Analysis (7th edition). David Kincaid and Ward Cheney, Numerical Analysis of Scientific Computing, 1991.

1. (20 puntos) Interpolación de Hermite. Sea $f(x) = e^x$. Encuentre el polinomio de Hermite $p_5(x)$ que aproxima a f usando los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$. Compare esta aproximación con la obtenida usando polinomios de Lagrange.

2. (30 puntos) Sea $f \in C^{2n+2}(U)$, $U \subset R$, y un conjunto de puntos $\{x_i\}_{i=0}^n$ distintos entre si en U. Se define el polinomio de Hermite de grado $2n+1$:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)H_{n,i}(x) + \sum_{i=0}^{n} f'(x_i)\hat{H}_{n,i}(x),$$

donde

$$H_{n,i}(x) = [1 - 2(x - x_i)L'_{n,i}(x_i)]L^2_{n,i}(x)$$

y

$$\hat{H}_{n,i}(x) = (x - x_i)L^2_{n,i}(x)$$

siendo $L_{n,i}(x)$ y $L'_{n,i}(x)$ el operador de Lagrange y su derivada respectivamente.

(a) Probar la unicidad del polinomio Hermite.

(b) Demostrar que el error para el polinomio de Hermite viene dado por

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)^2}{(2n+2)!} f^{2n+2}(\xi),$$

para algún $\xi \in U$.

3. (20 puntos) Sea

$$s(x) = \begin{cases} ax + 1, & 0 \leq x < 1 \\ bx^3 + cx^2, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Determinar las constantes a, b y c, de manera que $s(x)$ sea un spline cúbico.

4. (30 puntos)

   (a) Determina el spline cúbico natural que pasa por los puntos $(-3, 2)$, $(-2, 0)$, $(1, 3)$, $(4, 1)$ y verifica las condiciones sobre la primera derivada en los extremos dados por $S'(-3) = 0 = S'(4)$.

   (b) Usa el spline para calcular el valor en las posiciones $x = 0$ y $x = 2$ (in term of machine learning you are predicting values).

   (c) Compara el resultado previo con el obtenido usando otro polinomio interpolador. Discute los resultados.

5. (20 puntos extras) Considerar el sistema no lineal

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + y^2 + 8 &= 0 \qquad (1) \\ xy^2 + x - 10y + 8 &= 0. \qquad (2) \end{aligned}$$

   (a) Aplicar el método de Newton para el sistema con $X^0 = (1, -1)$, considera una tolerancia de 10^{-6}.

   (b) Recordar que la resolución del sistema anterior también se puede trabajar como un problema de optimización como sigue

$$\min ||F(X) - 0||_2^2 \implies \nabla \left((f_i(X))^2\right)$$

   donde $F = (f_1, ..., f_n)^t$ y $X = (x_1, ..., x_n)^t$. Aplicar el método de Newton al sistema de la derecha considerando como paso inicial el mismo X^0 propuesto anteriormente. Comparar los resultados y presentar la tabla de iteraciones para cada método.