

MATEMATINĖ STATISTIKA

Paskaitų temos

dėst. T. Rekašius,
2019 m. balandžio 14 d.

Matematinės statistikos objektas

1. **Populiacija ir imtis.** Populiacijos ir imties apibrėžimas. Tikimybinė populiacijos ir imties interpretacija. Imtis ir imties realizacija. Pagrindiniai tikimybinių ir netikimybinių imčių sudarymo būdai. Kintamojo sąvoka matematinėje statistikoje. Kintamųjų matavimo skalės. Kintamojo skalės keitimas. Kiekybiniai ir kokybiniai (kategoriniai) kintamieji.
2. **Statistiniai modeliai.** Pagrindiniai matematinės statistikos uždaviniai. Statistinio modelio apibrėžimas. Parametrinių ir neparametrinių modelių apibrėžimas. Tolydieji ir diskretieji statistiniai modeliai. Reguliarūs statistiniai modeliai, reguliarumo sąlygos. Įvairių statistinių modelių pavyzdžiai.

Empirinės charakteristikos

1. **Empirinė pasiskirstymo funkcija.** Empirinio dažnio $D_n(x) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(-\infty, x]}(X_i)$ pasiskirstymo dėsnis. Empirinės pasiskirstymo funkcijos $\hat{F}_n(x)$ apibrėžimas. Empirinė pasiskirstymo funkcija ir jos realizacija $F_n(x)$. $F_n(x)$ sudarymas iš duomenų ir jos grafikas. Teorema apie $\hat{F}_n(x)$ vidurkį, dispersiją, kovariaciją ir konvergavimą į tikrąją tikimybių pasiskirstymo funkciją $F(x)$. Glivenkos–Kantelio teorema.
2. **Pozicinės statistikos.** Variacinė eilutė. Pozicinės statistikos apibrėžimas. Pozicinės statistikos ir jų tikimybių pasiskirstymo funkcija. Pozicinės statistikos tankio funkcija. Imties iš tolygaus intervale $(0, 1)$ pasiskirstymo pozicinių statistikų tankis. Empirinio kvantilio apibrėžimas ir jo skaičiavimas turint imtį ir iš $\hat{F}_n(x)$. Teorema apie empirinio kvantilio $\hat{x}(p)$ konvergavimą į teorinį kvantilį $x(p)$.
3. **Empiriniai momentai.** Pradinių ir centrinių momentų ir jų empirinių analogų apibrėžimai. Empirinio vidurkio, empirinės dispersijos ir kitų empirinių momentų skaičiavimo formulės. Empirinis asimetrijos ir empirinis eksceso koeficientas. Empirinio vidurkio $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i$ ir aukštesnės eilės pradinių momentų savybės: vidurkis $\mathbf{E}\bar{X}$, dispersija $\mathbf{D}\bar{X}$, konvergavimas į tikrąjį vidurkį $\mathbf{E}X$. Empirinės dispersijos $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ savybės: vidurkis, dispersija ir kt. Empirinių momentų ir

funkcijų nuo jų konvergavimas. Empirinių momentų skirstiniai, kai kurių atsitiktinių dydžių vidurkių ar sumos skirstiniai.

4. **Empiriniai tikimybinio tankio analogai.** Diskretaus atsitiktinio dydžio tikimybių $p_i = \mathbf{P}(X = X_i)$ vertinimas iš imties. Empirinių tikimybių \hat{p}_i savybės. Tolydaus atsitiktinio dydžio tankio funkcijos $p(x)$ aproksimavimas empirine tankio funkcija $\hat{p}_n(x)$. Histogramos apibrėžimas ir jos sudarymas iš imties. Teorema apie $\hat{p}_n(x)$ konvergavimą į tikrąją tankio funkciją $p(x)$. Branduolinis tankio funkcijos įvertis.
5. **Robastinės charakteristikos.** Išsiskiriančių stebinių įtakai atsparios skaitinės charakteristikos. Diskretaus ir tolydaus atsitiktinio dydžio modos vertinimas iš imties. Atsitiktinio dydžio medianos vertinimas iš imties. Nukirstas ir vinzorizuotas vidurkis.
6. **Matematinėje statistikoje svarbūs pasiskirstymo dėsniai.** χ^2 , Stjudento ir Fišerio pasiskirstymai ir jų savybės. Statistikų $\frac{X_i - \mu}{\sigma}$, $\sum_{i=1}^n (\frac{X_i - \mu}{\sigma})^2$, \bar{X} ir $\frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma}$ pasiskirstymas. Fišerio teorema apie paprastosios atsitiktinės imties $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ empirinio vidurkio \bar{X} ir dispersijos S^2 ir iš jų sudarytų statistikų skirstinius. Imties statistikų $\frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n-1}}{S^2}$, $\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}} \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{nS_X^2 + mS_Y^2}}$ ir $\frac{S_X^2}{S_Y^2}$ pasiskirstymai.

Taškiniai parametru įverčiai

1. **Taškiniai įverčiai.** Statistinio modelio P_θ nežinomo parametro θ taškinio įverčio $\hat{\theta}$ apibrėžimas. Statistikos (funkcijos) apibrėžimas. Rizikos funkcijos apibrėžimas ir pavyzdžiai. Kvadratinė rizikos funkcija. Įverčio su tolygiai minimalia rizika apibrėžimas. Minimalios kvadratinės rizikos įverčio apibrėžimas. Nepaslinktieji įverčiai ir jų ryšys su minimalios dispersijos įverčiais. Asimptotiškai nepaslinktas įvertis. Nepaslinktojo minimalios dispersijos (optimalaus) įverčio apibrėžimas. Pagrįstosios įverčių sekos apibrėžimas. Teorema apie vienmačio parametro įverčių sekos konvergavimą.
2. **Efektyvieji įverčiai.** Vienmačio atsitiktinio dydžio $X \sim F_\theta$ tikėtinumo funkcijos $L(\theta|X = x)$ apibrėžimas. Paprastosios atsitiktinės imties $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ tikėtinumo funkcijos apibrėžimas. Fišerio informacijos \mathbf{I}_n apibrėžimas, skaičiavimo formulės ir šios charakteristikos prasmė. Rao–Kramerio nelygybė. Sąlyga, kada Rao–Kramerio nelygybė pavirsta į lygybę. Efektyvus įverčio apibrėžimas. Funkcijos nuo nežinomo parametro efektyvusis įvertinys. Apie efektyviųjų įvertinių išreiškimą per logtikėtinumo funkcijos išvestinės tiesinę kombinaciją.
3. **Įverčių radimo būdai.** Momentų metodas. Apibendrintas momentų metodas. Momentų metodu gautų įverčių savybės. Didžiausio tikėtinumo metodas. Didžiausio tikėtinumo įverčių savybės. Didžiausio tikėtinumo įverčių radimo būdas iteraciniu būdu.
4. **Pakankamos statistikos.** Pakankamos statistikos apibrėžimas. Neimano–Fišerio teorema apie pakankamos statistikos faktorizaciją. Rao–Blekvelo–Kolmogorovo teorema.

Pasikliautiniai intervalai

1. **Pagrindinės sąvokos.** Statistinio modelio P_θ parametro θ pasiklovimo srities ar pasiklovimo intervalo apibrėžimas. Viršutinio ir apatinio pasiklovimo intervalo rėžių apibrėžimas. Pasiklovimo lygmuo ir jo ryšys su pasikliautinio intervalo pločiu.

Nežinomo parametro θ centrinės statistikos $G(\mathbf{X}, \theta)$ apibrėžimas. Pasikliautinojo intervalo rėžių nustatymas naudojant centrinę statistiką. Pasikliautinojo intervalo nevienareikšmiškumas, simetrinio intervalo sudarymas. Bolševo metodas pasiklovimo rėžiams konstruoti.

2. **Įvairių skirstinių parametru pasikliautinieji intervalai.** Normaliojo skirstinio vidurkio μ pasikliautinis intervalas (kai dispersija σ^2 žinoma ir nežinoma), dispersijos parametro σ^2 pasikliautinis intervalas (kai vidurkis μ žinomas ir kai nežinomas). Puasono skirstinio parametro λ pasikliautinis intervalas. Eksponentinio skirstinio parametro λ pasikliautinis intervalas.

Statistinių hipotezių tikrinimas

1. **Statistinio kriterijaus sudarymas.** Parametrinės hipotezės apibrėžimas. Nulinė hipotezė ir alternatyva. Paprastosios ir sudėtinės hipotezės apibrėžimas. Vienpusė ir dvipusė alternatyvos. Statistinio kriterijaus ir kritinės srities sąvokos. Pirmos ir antros rūšies klaidos. Kriterijaus galios funkcija. Kriterijaus galios ir klaidos tikimybės ryšys. Galingiausio kriterijaus apibrėžimas. Neimano–Pirsono lema. Statistinės hipotezės tikrinimo schema: reikšmingumo lygmuo, statistikos parinkimas, kritinės reikšmės ir kritinės srities sudarymas, nulinės hipotezės atmetimo taisyklė. Kritinės srities ir reikšmingumo lygmens ryšys. Reikšmingumo lygmuo ir p -reikšmė.
2. **Kai kurios parametrinės hipotezės.** Hipotezė apie normaliojo skirstinio vidurkio μ lygybę skaičiui (kai σ^2 žinoma ir kai nežinoma). Hipotezė apie normaliojo skirstinio dispersijos σ^2 lygybę skaičiui (kai vidurkis μ žinomas ir kai nežinomas). Hipotezė apie binominio dėsnio parametru p (normalioji ir puasoninė aproksimacija). Hipotezė apie dviejų vidurkių lygybę (Stjudento t -testas) ir atskiri jos atvejai.
3. **Neparametrinės hipotezės.** Suderinamumo hipotezės formulavimas. Teorema apie empirinės ir teorinės pasiskirstymo funkcijų skirtumo nepriklausomybę nuo skirstinio. Kolmogorovo teorema. Kolmogorovo kriterijus suderinamumo hipotezei tikrinti. Homogeniškumo hipotezės formulavimas. Smirnov teorema. Kolmogorovo-Smirnov kriterijus homogeniškumo hipotezei tikrinti. χ^2 kriterijus, jo prielaidos ir trūkumai. Suderinamumo hipotezės tikrinimas naudojant χ^2 kriterijų (ir atskiras atvejais, kai iš duomenų vertinami nežinomi parametrai). Požymių nepriklausomumo hipotezės tikrinimas naudojant χ^2 kriterijų. Tikslusis Fišerio kriterijus požymių nepriklausomumo hipotezei tikrinti, kai turima 2×2 dydžio dažnių lentelė.