

THÈSE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

ÉCOLE DOCTORALE N° 601
*Mathématiques et Sciences et Technologies
de l'Information et de la Communication*
Spécialité : *Mathématiques et Interactions*

Par

Léopold TRÉMANT

Méthodes d'analyse asymptotique et d'approximation numérique de modèles dissipatifs multi-échelles

EDOs à variété centrale et modèles cinétiques

Thèse présentée et soutenue à « Lieu », le « date »

Unité de recherche : « voir liste sur le site de votre école doctorale »

Thèse N° : « si pertinent »

Rapporteurs avant soutenance :

Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice
Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice
Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice

Composition du Jury :

Attention, en cas d'absence d'un des membres du Jury le jour de la soutenance, la composition du jury doit être revue pour s'assurer qu'elle est conforme et devra être répercutée sur la couverture de thèse

Président :	Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice (à préciser après la soutenance)
Examineurs :	Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice
	Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice
	Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice
	Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice
	Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice
Dir. de thèse :	Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice
Co-dir. de thèse :	Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice (si pertinent)

Invité(s) :

Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice
------------	--------------------------------------

ACKNOWLEDGEMENT

Je tiens à remercier

I would like to thank. my parents..

J'adresse également toute ma reconnaissance à

....

TABLE OF CONTENTS

Introduction	7
Application de méthodes numériques générales	7
Application directe de schémas standards	8
Méthodes générales pour systèmes raides	11
Exposition de l'état de l'art	12
Méthodes avec traitement spécifique de la partie raide	12
Notions de convergence	12
Contribution personnelle	12
 1 La moyennisation en bref	 13
1.1 Présentation d'une méthode	13
1.1.1 L'équation homologique	13
1.1.2 Définition d'une décomposition approchée	13
1.2 Contexte d'un problème autonome	13
1.2.1 Un résultat géométrique	13
1.2.2 Cas d'un opérateur linéaire	14
1.3 Aspect numérique	14
1.3.1 Définition d'un nouveau problème	14
1.3.2 Convergence uniforme	14
 2 Convergence uniforme pour un problème dissipatif	 15
2.1 Construction et résultat de précision uniforme	15
2.1.1 Hypothèses et définitions	15
2.1.2 Construction d'un développement asymptotique	15
2.1.3 Problème micro-macro et précision uniforme	16
2.2 Preuves des théorèmes	16
2.2.1 Bonne définition des morphismes, et leurs bornes	16
2.2.2 Caractère bien posé du problème micro-macro	16
2.2.3 Précision uniforme avec les schémas exponentiels	16

TABLE OF CONTENTS

2.3	Extension partielle à des EDP discrétisées	16
2.3.1	Équation de télégraphe	17
2.3.2	Relaxation hyperbolique	17
2.4	Résultats numériques	17
2.4.1	Applications directes	17
2.4.2	EDP discrétisées	18
2.4.3	Commentaires sur extensions directes	18
3	Discussion d'extension des résultats	19
3.1	Coût de calcul, erreurs d'arrondis, derivative-free, pullback	19
3.2	Autour de l'équation de télégraphe	19
A	Un développement double-échelle	21
B	Présentation de schémas numériques	23
C	Autour de notions géométriques	25
C.1	Algèbre de Lie	25
C.2	Géométrie de la moyennisation stroboscopique	25
	Bibliography	27

INTRODUCTION

Contextualisation

Modèles cinétiques, dynamique des populations

Annonce de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t x^\varepsilon = a(x^\varepsilon, z^\varepsilon), & x^\varepsilon(0) = x_0, \\ \partial_t z^\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} \Lambda z^\varepsilon + b(x^\varepsilon, z^\varepsilon), & z^\varepsilon(0) = z_0. \end{cases} \quad (1a)$$

(1b)

Passage en notation u^ε ,

$$\partial_t u^\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} A u^\varepsilon + f(u^\varepsilon). \quad (2)$$

Présentation de ce qu'on entend par régime raide ou non-raide

Comportement de la solution

En un temps assez court (de l'ordre de ε), on rejoint un système de la forme

$$\begin{cases} \partial_t x^\varepsilon = a(x^\varepsilon, \varepsilon h^\varepsilon(x^\varepsilon)) \\ z^\varepsilon = \varepsilon h^\varepsilon(x^\varepsilon) \end{cases} \quad (3a)$$

(3b)

Théorème de variété centrale

Figure de simulation de modèle jouet

Application de méthodes numériques générales

Cette section observe le comportement de méthodes numériques usuelles lorsqu'on les applique au système.

Application directe de schémas standards

On cherche à résoudre le problème (2) numériquement. En termes simples, cela veut dire trouver une méthode générale pour obtenir la solution du problème. On va montrer que les méthodes « standards » sont inefficaces pour résoudre même le problème simplifié

$$\partial_t z = -\frac{1}{\varepsilon} z \quad (4)$$

avec une donnée initiale $z(0) \in \mathbb{R}$ quelconque. Par « méthodes standards », on entend des méthodes qui peuvent être trouvées dans le livre de référence **REF**. Il s'agit de méthodes de résolution pour des équations différentielles ordinaires quelconques, qui ne prennent pas en compte la structure spécifique du problème qui nous intéresse.

Il est difficile de traiter le continu d'un point de vue numérique, donc on commence d'abord par *discrétiser* l'intervalle de temps en un nombre arbitraire $N \in \mathbb{N}^*$ d'intervalles.

Dessin avec la définition des t_n (voir commentaire)

Pour le moment, on choisit de se restreindre à une discrétisation uniforme, c'est-à-dire que l'intervalle de temps $[0, T]$ est divisé en N intervalles de taille égale. De manière équivalente, on définit les points de séparation $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$ avec

$$t_n = \frac{n}{N} T,$$

ou encore

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t \quad \text{avec} \quad t_0 = 0 \quad \text{et} \quad \Delta t = \frac{T}{N}.$$

L'idée est maintenant d'obtenir une approximation de $u_n \approx u^\varepsilon(t_n)$ en chaque point. La méthode la plus directe est la méthode d'Euler : On a accès à la valeur initiale u_0 , et on peut ensuite calculer le prochain point par projection

Graphique : Tracer la droite qui part de z_n avec la pente $-z_n/\varepsilon$ pour placer le point z_{n+1} .

On obtient ainsi la *suite d'Euler* du problème (4) :

$$z_{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\varepsilon}\right) z_n, \quad z_0 = z(0).$$

D'autres méthodes de projection existent, notamment les méthodes de Runge-Kutta qui impliquent des points intermédiaires, ou les méthodes multi-points qui utilisent les

valeurs en $n, n+1, \dots, n+s$ pour calculer le point en $n+s+1$. Le raisonnement qui suit s'applique (à une constante près) à toutes ces méthodes de calcul tant qu'elles sont *explicites*. Le schéma numérique est dit *stable* si la norme de la solution calculée ne croît pas,¹ i.e. si

$$\left| 1 - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \right| \leq 1.$$

Cette condition est généralement interprétée comme une restriction sur le pas de temps Δt . Néanmoins, nous sommes aussi intéressés par le comportement du schéma par rapport à la variable de raideur ε . En considérant Δt fixé, il est clair qu'il faut prendre Δt plus petit que ε pour avoir une solution décroissante. Le coût de calcul dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ évolue ainsi au moins en $\mathcal{O}(1/\varepsilon)$.

Un moyen généralement invoqué pour stabiliser les problèmes raides comme celui-ci est l'utilisation de schémas *implicites*. Au lieu de faire une projection directe, on cherche le point qui, en temps rétrograde, aurait donné le point précédent.

Schéma avec différentes lignes de niveau et les tangentes qui partent de différents u_{n+1} possibles

Cette méthode de projection rétrograde « directe » est appelée méthode d'Euler implicite, et le schéma associé dans le cas du problème (4) est

$$z_{n+1} = z_n - \frac{\Delta t}{\varepsilon} z_{n+1},$$

ou encore

$$z_{n+1} = \frac{\varepsilon}{\Delta t + \varepsilon} z_n.$$

En comparant les figures **REF**, il est clair que cette méthode est en général bien plus coûteuse que les méthodes explicites de projection directe. Néanmoins, elle présente quelques propriétés sympathiques que nous devons présenter. Ce schéma est clairement stable pour tout Δt et tout ε , puisque le facteur multiplicatif est toujours inférieur à 1. Cependant, cela n'indique rien sur l'erreur associée au schéma. Calculons-la rapidement.

Labels

On pose τ_n l'erreur dite de troncature du schéma entre t_n et t_{n+1} ,

$$\tau_n = z(t_{n+1}) - z(t_n) - \Delta t \partial_t z(t_{n+1}).$$

1. Cette définition atteint vite sa limite lorsqu'on considère des problèmes à solution croissante, par exemple $\partial_t x = x$. Heureusement, ce n'est pas le cas ici.

En général on borne cette erreur par une application successive d'intégration par parties, inégalité triangulaire et enfin inégalité de Hölder, pour trouver

$$|\tau_n| \leq \int_0^{\Delta t} s \left| \partial_t^2 z(t_n + s) \right| ds \leq \Delta t \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left| \partial_t^2 z(t) \right| dt. \quad (5)$$

En revanche cette approche n'exploite pas le caractère décroissant de $t \mapsto z(t)$, et d'ailleurs cette dernière borne serait aussi valide pour le schéma d'Euler explicite. Cette caractéristique peut être exploitée en s'intéressant directement à la définition de τ_n . En effet dans notre cas particulier, on a $z(t) = e^{-t/\varepsilon} z_0$ donc

$$\tau_n = \left(e^{-\Delta t/\varepsilon} - 1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon} e^{-\Delta t/\varepsilon} \right) e^{-n\Delta t/\varepsilon} z_0,$$

ce qui peut se borner très grossièrement,

$$|\tau_n| \leq e^{-n\Delta t/\varepsilon} |z_0| \quad (6)$$

On remarque maintenant que l'erreur globale vérifie

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \right) (z_{n+1} - z(t_{n+1})) = z_n - z(t_n) - \tau_n$$

d'où de proche en proche,

$$|z_{n+1} - z(t_{n+1})| \leq \sum_{k=0}^n \left(1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \right)^{-k-1} |\tau_{n-k}|.$$

On applique brutalement une inégalité de Hölder sur la somme pour obtenir finalement

$$|z_{n+1} - z(t_{n+1})| \leq \left(1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \right)^{-1} \sum_{k=0}^n |\tau_k|.$$

En exploitant (5) et (6), on obtient enfin

$$|z_{n+1} - z(t_{n+1})| \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \Delta t} \min \left(\Delta t \|\partial_t^2 z\|_{L^1}, \frac{|z_0|}{1 - e^{-\Delta t/\varepsilon}} \right).$$

Ici la norme L^1 est définie de manière canonique, c'est-à-dire $\|u\|_{L^1} \leq \int_0^T |u(t)| dt$. En l'occurrence, on connaît exactement $z(t) = e^{-t/\varepsilon} z_0$, donc on peut calculer $\|\partial_t^2 z\|_{L^1} =$

$\frac{1}{\varepsilon}(1 - e^{-T/\varepsilon})z_0$, ce qui donne finalement pour tout n entre 0 et N ,

$$|z_n - z(t_n)| \leq \frac{\Delta t}{\varepsilon + \Delta t} |z_0| \min \left(1, \frac{\varepsilon/\Delta t}{1 - e^{-\Delta t/\varepsilon}} \right).$$

Grâce au premier argument du min, on est assuré que l'erreur est de la forme $C\Delta t$ pour tout $\Delta t < \Delta t_0$ avec C et Δt_0 des constantes indépendantes de ε . On remarque là une différence par rapport au comportement du schéma explicite, qui demandait $\Delta t \ll \varepsilon$. Le deuxième argument du min nous assure que l'erreur tend vers zéro quand ε tend vers zéro. En particulier, on dit le schéma préserve le comportement asymptotique,² ce qui se traduit en *asymptotic preserving* (AP) en anglais. Cette notion reviendra dans la prochaine section.

Rq : On peut obtenir une approximation en tout point $t \in [0, T]$ par interpolation. Le sujet de cette thèse n'est pas l'étude de schémas numériques ou celle de méthodes d'interpolation, donc nous éviterons de fournir des détails superflus sur ces sujets. On évaluera la qualité d'une approximation en fonction de la valeur aux points.

Illustration rapide sur méthode d'Euler

Démonstration d'erreur en $\Delta t/\varepsilon$

Distinction entre convergence et stabilité

Méthodes générales pour systèmes raides

Bouquin de Hairer, Lubich, Wanner

Présentation rapide de méthodes stiff (implicites)

Discussion du coût du pas de temps adaptatif

Splitting + simulations

Foreshadowing : ordre des opérations pour AP et splitting exact pour formes normales

2. Ce schéma est en fait L -stable, ce qui est une notion un peu plus forte qui ne nous intéresse pas dans le cadre de ce manuscrit.

Exposition de l'état de l'art

Cette section observe le comportement de méthodes numériques usuelles lorsqu'on les applique au système.

Méthodes avec traitement spécifique de la partie raide

IMEX-BDF, convergence théorique

expRK, convergence théorique

Rq : Lawson et IMEX-RK, pas particulièrement étudiées

Test des méthodes proches et loin de l'équilibre

Notions de convergence

Def : AP (faire un diagramme)

Def : UA restreint

Def : UA tout court (trouver un diagramme)

Introduction de la norme des schémas exponentiels (notion de norme relative)

Contribution personnelle

Résultat de convergence uniforme avec IMEX-BDF ou expRK

Explication de la méthode à détailler (sans prendre le crédit) :

— Lien avec moyennisation

— Formes normales, splitting quasi-exact

— Conservation exacte du défaut

Ouverture au cinétique

Annonce plan

LA MOYENNISATION EN BREF

Lors de ma troisième année de thèse, j'ai eu l'occasion d'un peu plus me pencher sur les méthodes de moyennisation, et notamment de rédiger un mini-article compilant certains résultats du sujet. Une partie est ici, l'autre sera présentée en Annexe _____

quelle annexe ?

1.1 Présentation d'une méthode

1.1.1 L'équation homologique

Dérivation de l'équation homologique

Distinction entre averaging standard et stroboscopique

1.1.2 Définition d'une décomposition approchée

Relation de récurrence et résultat sur les bornes

Discussion autour de la méthode pour les résultats (boules imbriquées, estimations de Cauchy...)

1.2 Contexte d'un problème autonome

$$\partial_t y = \frac{1}{\varepsilon} G(y) + K(y) \quad (1.1)$$

On décompose

$$y^\varepsilon(t) = \Omega_{t/\varepsilon}^\varepsilon \circ \Psi_t^\varepsilon \circ (\Omega_0^\varepsilon)^{-1} \quad (1.2)$$

1.2.1 Un résultat géométrique

Ω est un flot, et commute avec Ψ .

1.2.2 Cas d’un opérateur linéaire

Averaging standard : crochets de Lie

Formes normales

1.3 Aspect numérique

Si on ne connaît pas le défaut, il est clair qu’on peut calculer numériquement

$$\partial_t v^{[n]} = F^{[n]}(v^{[n]}) \quad (1.3)$$

et alors

$$u^\varepsilon(t) = \Phi_{t/\varepsilon}^{[n]}(v^{[n]}(t)) + \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}) \quad (1.4)$$

Mais en fait si on montre ça, on peut montrer mieux (en supposant un peu de régularité). Section basée principalement sur l’article avec Gilles.

1.3.1 Définition d’un nouveau problème

Micro-macro ou pullback

Raideur “retardée”

1.3.2 Convergence uniforme

Résultat de convergence uniforme

Présentation de schémas intégraux et composition de schémas

CONVERGENCE UNIFORME POUR UN PROBLÈME DISSIPATIF

Ce chapitre reprend un article à paraître dans *Mathematics of Computation*, intitulé

A uniformly accurate numerical method for a class of dissipative systems

Dans cet article, on ...

2.1 Construction et résultat de précision uniforme

2.1.1 Hypothèses et définitions

Hyp : A diagonale avec des vap entières

Hyp : f analytique autour de $(x,0)$

Justification de l'hypothèse avec le théorème de variété centrale

Introduction des ensembles \mathcal{K}_ρ

Def : R + borne sur f et ses dérivées

Def : normes

2.1.2 Construction d'un développement asymptotique

Équation homologique

Définition de F et du projecteur

Relation de récurrence avec condition de fermeture

Def : défaut η

Thm : Bonne définition des morphismes et bornes

2.1.3 Problème micro-macro et précision uniforme

Obtention du problème micro-macro

Thm : problème micro-macro bien posé avec dérivées bornées

Rq : calcul de la donnée initiale

Présentation des schémas exponentiels

Def : norme associée aux schémas

Thm : précision uniforme :D

Rq : adaptation du résultat aux schémas IMEX-BDF

2.2 Preuves des théorèmes

2.2.1 Bonne définition des morphismes, et leurs bornes

Définition des morphismes périodiques

Filtrage des morphismes périodiques

Prop : hypothèses de UA périodique vérifiées

Thm de bonnes propriétés sur les morphismes périodiques

Principe du maximum pour conclure la preuve

2.2.2 Caractère bien posé du problème micro-macro

Caractère bien posé sur v : $v(0)$ est gentil et $v(t)$ aussi par Gronwall. $\Omega(v)$ est okay

Borner le terme linéaire L , puis Gronwall avec la source pour w bien posé

2.2.3 Précision uniforme avec les schémas exponentiels

Séparation entre v et w

Partie v bornée classique, passage à norme modifiée grâce à Ω

Partie w application directe des bornes de Hochbruck et Ostermann

2.3 Extension partielle à des EDP discrétisées

Présentation rapide du système

Disclaimer comme quoi on les regarde post-discrétisation

2.3.1 Équation de télégraphe

Transformation en Fourier

Tentative directe d'obtenir la variable en $-1/\varepsilon \rightarrow$ échec

Relaxation pour obtenir la variable z , montrer que ça va mieux

Développement à l'ordre zéro, montrer que ça se passe okay grâce à $\exp -tA/\varepsilon$

Passage à l'ordre 1, observation comme quoi $-A/\varepsilon + F^{[1]}$ est mal posé

Relaxation dans le changement de variable, montrer que tout se passe mieux

Eq : $\eta^{[1]}$

Prop : si les fréquences sont bornées, on peut faire du num tranquille et l'erreur est indépendante de ε

Rq : les fréquences bornées c'est plus une CFL qu'un souci avec ε

2.3.2 Relaxation hyperbolique

Présentation du système + condition de stabilité

Rq : relaxation indépendante de l'espace

Volumes finis avec Upwind, avec la variable z naturelle

Développements ordre 1 parachutés avec relaxation (justif de télégraphe)

Rq : passage au continu

Commentaire sur le coût de résolution (indépendant de ε malgré la relaxation)

Eq : défauts $\eta^{[0]}$ et $\eta^{[1]}$

2.4 Résultats numériques

2.4.1 Applications directes

Problème jouet lentement oscillant :

Exposition, dev à l'ordre 1 puis ordre 2

Rq : on peut retrouver la variété centrale

Rappel pb micro-macro, et commentaire sur le besoin de calcul explicite de L pour l'arrondi

Problème inspiré de l'hyperbolique :

Exposition, passage aux variables x, z

Eq : dev à l'ordre 1, ordre 2 trop lourd

Choix de la fonction g et de la donnée initiale

Résultats :

Figures : err. sup. sur ε à gauche pour syst. original (ERK2), miMa 1 (ERK2) et miMa 2 (ERK3), et err. en fonction de ε à droite (miMa 2 ERK3), pour différents Δt

=> Mise en avant et description du phénomène de réduction d'ordre

=> Observation de l'ordre de convergence grâce au problème micro-macro, ordres 1 et 2

Ajouter simus avec IMEX-BDF

2.4.2 EDP discrétisées

Télégraphe : rappel de l'équation + donnée initiale

Résultats : réduction d'ordre, discussion sur le côté "erreur uniforme"

Relaxation hyperbolique : rappel de l'équation + donnée initiale

Résultats avec disclaimer qu'on regarde pas l'erreur en espace

Figures : même format que pour les EDOs mais on s'arrête à miMa 1 (forcément)

2.4.3 Commentaires sur extensions directes

Dans la discussion

DISCUSSION D'EXTENSION DES RÉSULTATS

3.1 Coût de calcul, erreurs d'arrondis, derivative-free, pullback

Coût de calcul avec les non-linéarités

Difficulté du calcul de la relaxation pour certains schémas

Gain d'ordre avec $z(0) = 0$ (figure avec err sup sur ε)

Donner une clé pour le gain d'ordre : $v_z(0) = \mathcal{O}(\varepsilon)$

3.2 Autour de l'équation de télégraphe

UN DÉVELOPPEMENT DOUBLE-ÉCHELLE

Résultats du stage et du début de thèse

PRÉSENTATION DE SCHÉMAS NUMÉRIQUES

Méthodes composées
Tableaux de Butcher

AUTOUR DE NOTIONS GÉOMÉTRIQUES

C.1 Algèbre de Lie

C.2 Géométrie de la moyennisation stroboscopique

Sources primaires

ASTAIR, Mickey, *La pendule et le fou*, Paris : Firgoult, 1895.

BICON, Pierre, *De la memoire*, Paris : Serigraph, 1901.

DENYS, Frédéric et Hector GELLEE, « Voyages en Anatolie », in : *Revue des colonies* 13 (1905), p. 45-85.

DOULE, Eloise et Marie BADY, « Les castes dans les Indes Britanniques », in : *Revue des pays lointains* 15.7 (1887), p. 223-258.

HISTRION, Pierre et Jean-Marie GASTON, « Les phrases du début à la fin », in : *Revue internationale de linguistique* 50 (1925), p. 52-98.

KOHLER, Hans, *L'alsace, un paradis financier*, Paris : Hopla, 1903.

LAURENT, Jean, *Constructions et ouvrages d'art*, Paris : Les arts et métiers, 1925.

SBIRRE, François et Jacques HELOI, « Etudes épidémiologiques sur la paresse ambiante », in : *Revue du bon vieux temps* 23.4 (1906), p. 53-102.

SIMON, Zoé, *As-tu pensé à fermer le gaz ?*, Paris : Editions de l'oubli, 1903.

WALTHER, Gusty, *Controverses sur le soleil*, Paris : Editeur local, 1897.

— *Dialogues sur la pluie et le beau temps*, Paris : Editeur local, 1896.

Sources secondaires

AIMARRE, Jean, *Crise de foie*, Paris : Editions du Pénitent, 1999.

ASPHANE, Pierre et Jean-Marie VIGOUT, « De novembre à décembre », in : *Revue alsacienne du temps qu'il fait* 45 (2001), p. 23-89.

DESFOIS, Marie, *Les glaçons*, Paris : Grazmick, 1998.

DROCHER, Gérard, *Partir et revenir*, Paris : Novrebond, 2006.

FALCON, Alphonse et Gabriel SERVAIS, « Les avatars de la biologie », in : *Biomolle* 22 (1985), p. 65-97.

GEORGES, Christine et Estelle DUPUYS, « La blondeur décolorée. Histoire de la stupidité », in : *Revue des brunes* 12 (1974), p. 125-184.

HENRY, Michel et Philippe KHRON, « Le destin et l'avenir », in : *Histoire et partage* 2 (1956), p. 21-35.

HOCHET, Eric, *Histoire d'un lac*, Paris : Van Dame, 2003.

KANTROP, Julie, *Le loup et ses proies*, Paris : Nuit Bleue, 2005.

Titre : titre (en français).....

Mot clés : de 3 à 6 mots clefs

Résumé : Eius populus ab incunabulis primis ad usque pueritiae tempus extremum, quod annis circumcluditur fere trecentis, circummurana pertulit bella, deinde aetatem ingressus adultam post multiplices bellorum aerumnas Alpes transcendit et fretum, in iuvenem erectus et virum ex omni plaga quam orbis ambit inensus, reportavit laureas et triumphos, iamque vergens in senium et nomine solo aliquotiens vincens ad tranquilliora vitae discessit. Hoc immaturo interitu ipse quoque sui pertaesus excessit e vita aetatis nono anno atque vicensimo cum quadriennio imperasset. natus apud Tuscos in Massa Vaternensi, patre Constantio Constantini fratre imperatoris, matreque Galla. Thalassius vero

ea tempestate praefectus praetorio praesens ipse quoque adrogantis ingenii, considerans incitationem eius ad multorum augeri discrimina, non maturitate vel consiliis mitigabat, ut aliquotiens celsae potestates iras principum molliverunt, sed adversando iurgandoque cum parum congrueret, eum ad rabiem potius evibrabat, Augustum actus eius exaggerando creberrime docens, idque, incertum qua mente, ne lateret adfectans. quibus mox Caesar acrius efferatus, velut contumaciae quoddam vexillum altius erigens, sine respectu salutis alienae vel suae ad vertenda opposita instar rapidi fluminis irrevocabili impetu ferebatur. Hae duae provinciae bello quondam piratico catervis mixtae praedonum.

Title: titre (en anglais).....

Keywords: de 3 à 6 mots clefs

Abstract: Eius populus ab incunabulis primis ad usque pueritiae tempus extremum, quod annis circumcluditur fere trecentis, circummurana pertulit bella, deinde aetatem ingressus adultam post multiplices bellorum aerumnas Alpes transcendit et fretum, in iuvenem erectus et virum ex omni plaga quam orbis ambit inensus, reportavit laureas et triumphos, iamque vergens in senium et nomine solo aliquotiens vincens ad tranquilliora vitae discessit. Hoc immaturo interitu ipse quoque sui pertaesus excessit e vita aetatis nono anno atque vicensimo cum quadriennio imperasset. natus apud Tuscos in Massa Vaternensi, patre Constantio Constantini fratre imperatoris, matreque Galla. Thalassius vero

ea tempestate praefectus praetorio praesens ipse quoque adrogantis ingenii, considerans incitationem eius ad multorum augeri discrimina, non maturitate vel consiliis mitigabat, ut aliquotiens celsae potestates iras principum molliverunt, sed adversando iurgandoque cum parum congrueret, eum ad rabiem potius evibrabat, Augustum actus eius exaggerando creberrime docens, idque, incertum qua mente, ne lateret adfectans. quibus mox Caesar acrius efferatus, velut contumaciae quoddam vexillum altius erigens, sine respectu salutis alienae vel suae ad vertenda opposita instar rapidi fluminis irrevocabili impetu ferebatur. Hae duae provinciae bello quondam piratico catervis mixtae praedonum.