

# THÈSE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

ÉCOLE DOCTORALE N° 601  
*Mathématiques et Sciences et Technologies  
de l'Information et de la Communication*  
Spécialité : *Mathématiques et Interactions*

Par

**Léopold TRÉMANT**

## **Méthodes d'analyse asymptotique et d'approximation numérique de modèles dissipatifs multi-échelles**

EDOs à variété centrale et modèles cinétiques

Thèse présentée et soutenue à « Lieu », le « date »

Unité de recherche : « voir liste sur le site de votre école doctorale »

Thèse N° : « si pertinent »

### **Rapporteurs avant soutenance :**

Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice
Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice
Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice

### **Composition du Jury :**

*Attention, en cas d'absence d'un des membres du Jury le jour de la soutenance, la composition du jury doit être revue pour s'assurer qu'elle est conforme et devra être répercutée sur la couverture de thèse*

Président :	Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice (à préciser après la soutenance)
Examineurs :	Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice
	Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice
	Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice
	Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice
	Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice
Dir. de thèse :	Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice
Co-dir. de thèse :	Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice (si pertinent)

### **Invité(s) :**

Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice
------------	--------------------------------------



# ACKNOWLEDGEMENT

---

Je tiens à remercier

I would like to thank. my parents..

J'adresse également toute ma reconnaissance à ....

....



# TABLE OF CONTENTS

---

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
Application de méthodes numériques générales . . . . .	7
Application directe de schémas standards . . . . .	8
Méthodes implicites . . . . .	11
Méthodes générales pour systèmes raides . . . . .	14
Exposition de l'état de l'art . . . . .	14
Méthodes avec traitement spécifique de la partie raide . . . . .	14
Notions de convergence . . . . .	14
Contribution personnelle . . . . .	14
<b>1 La moyennisation en bref</b>	<b>17</b>
1.1 Présentation d'une méthode . . . . .	17
1.1.1 L'équation homologique . . . . .	17
1.1.2 Définition d'une décomposition approchée . . . . .	17
1.2 Contexte d'un problème autonome . . . . .	17
1.2.1 Un résultat géométrique . . . . .	17
1.2.2 Cas d'un opérateur linéaire . . . . .	18
1.3 Aspect numérique . . . . .	18
1.3.1 Définition d'un nouveau problème . . . . .	18
1.3.2 Convergence uniforme . . . . .	18
<b>2 Convergence uniforme pour un problème dissipatif</b>	<b>19</b>
2.1 Construction et résultat de précision uniforme . . . . .	19
2.1.1 Hypothèses et définitions . . . . .	19
2.1.2 Construction d'un développement asymptotique . . . . .	19
2.1.3 Problème micro-macro et précision uniforme . . . . .	20
2.2 Preuves des théorèmes . . . . .	20
2.2.1 Bonne définition des morphismes, et leurs bornes . . . . .	20
2.2.2 Caractère bien posé du problème micro-macro . . . . .	20

## TABLE OF CONTENTS

---

2.2.3	Précision uniforme avec les schémas exponentiels . . . . .	20
2.3	Extension partielle à des EDP discrétisées . . . . .	20
2.3.1	Équation de télégraphe . . . . .	21
2.3.2	Relaxation hyperbolique . . . . .	21
2.4	Résultats numériques . . . . .	21
2.4.1	Applications directes . . . . .	21
2.4.2	EDP discrétisées . . . . .	22
2.4.3	Commentaires sur extensions directes . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Discussion d'extension des résultats</b>	<b>23</b>
3.1	Coût de calcul, erreurs d'arrondis, derivative-free, pullback . . . . .	23
3.2	Autour de l'équation de télégraphe . . . . .	23
<b>A</b>	<b>Un développement double-échelle</b>	<b>25</b>
<b>B</b>	<b>Présentation de schémas numériques</b>	<b>27</b>
<b>C</b>	<b>Autour de notions géométriques</b>	<b>29</b>
C.1	Algèbre de Lie . . . . .	29
C.2	Géométrie de la moyennisation stroboscopique . . . . .	29
	<b>Bibliography</b>	<b>31</b>

# INTRODUCTION

---

## Contextualisation

Modèles cinétiques, dynamique des populations

## Annnonce de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t x^\varepsilon = a(x^\varepsilon, z^\varepsilon), & x^\varepsilon(0) = x_0, \\ \partial_t z^\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} \Lambda z^\varepsilon + b(x^\varepsilon, z^\varepsilon), & z^\varepsilon(0) = z_0. \end{cases} \quad (1a)$$

(1b)

Passage en notation  $u^\varepsilon$ ,

$$\partial_t u^\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} A u^\varepsilon + f(u^\varepsilon). \quad (2)$$

Présentation de ce qu'on entend par régime raide ou non-raide

## Comportement de la solution

En un temps assez court (de l'ordre de  $\varepsilon$ ), on rejoint un système de la forme

$$\begin{cases} \partial_t x^\varepsilon = a(x^\varepsilon, \varepsilon h^\varepsilon(x^\varepsilon)) \\ z^\varepsilon = \varepsilon h^\varepsilon(x^\varepsilon) \end{cases} \quad (3a)$$

(3b)

Théorème de variété centrale

Figure de simulation de modèle jouet

## Application de méthodes numériques générales

Cette section observe le comportement de méthodes numériques usuelles lorsqu'on les applique au système.

## Application directe de schémas standards

On cherche à résoudre le problème (2) numériquement. En termes simples, cela veut dire trouver une méthode générale pour obtenir la solution du problème. On va montrer que les méthodes « standards » sont inefficaces pour résoudre même le problème simplifié

$$\partial_t z = -\frac{1}{\varepsilon} z \quad (4)$$

avec une donnée initiale  $z(0) \in \mathbb{R}$  quelconque. Par « méthodes standards », on entend des méthodes qui peuvent être trouvées dans le livre de référence **REF**. Il s'agit de méthodes de résolution pour des équations différentielles ordinaires quelconques, qui ne prennent pas en compte la structure spécifique du problème qui nous intéresse.

Il est difficile de traiter le continu d'un point de vue numérique, donc on commence d'abord par *discrétiser* l'intervalle de temps en un nombre arbitraire  $N \in \mathbb{N}^*$  d'intervalles.

Dessin avec la définition des  $t_n$  (voir commentaire)

Pour le moment, on choisit de se restreindre à une discrétisation uniforme, c'est-à-dire que l'intervalle de temps  $[0, T]$  est divisé en  $N$  intervalles de taille égale. De manière équivalente, on définit les points de séparation  $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$  avec

$$t_n = \frac{n}{N} T,$$

ou encore

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t \quad \text{avec} \quad t_0 = 0 \quad \text{et} \quad \Delta t = \frac{T}{N}.$$

L'idée est maintenant d'obtenir une approximation de  $u_n \approx u^\varepsilon(t_n)$  en chaque point. La méthode la plus directe est la méthode d'Euler : On a accès à la valeur initiale  $u_0$ , et on peut ensuite calculer le prochain point par projection

**Graphique :** Tracer la droite qui part de  $z_n$  avec la pente  $-z_n/\varepsilon$  pour placer le point  $z_{n+1}$ .

On obtient ainsi la *suite d'Euler* du problème (4) :

$$z_{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\varepsilon}\right) z_n, \quad z_0 = z(0). \quad (5)$$

D'autres méthodes de projection existent, notamment les méthodes de Runge-Kutta qui impliquent des points intermédiaires, ou les méthodes multi-points qui utilisent les



valeurs en  $n, n+1, \dots, n+s$  pour calculer le point en  $n+s+1$ . Le raisonnement qui suit s'applique (à une constante près) à toutes ces méthodes de calcul tant qu'elles sont *explicites*. Le schéma numérique est dit *stable* si la norme de la solution calculée ne croît pas,<sup>1</sup> i.e. si

$$\left| 1 - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \right| \leq 1.$$

Cette condition est généralement interprétée comme une restriction sur le pas de temps  $\Delta t$ . Néanmoins, nous sommes aussi intéressés par le comportement du schéma par rapport à la variable de raideur  $\varepsilon$ . En considérant  $\Delta t$  fixé, il est clair qu'il faut prendre  $\Delta t$  plus petit que  $\varepsilon$  pour avoir une solution décroissante. Le coût de calcul dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  évolue ainsi au moins en  $\mathcal{O}(1/\varepsilon)$ .

Vérifions que cette condition se remarque aussi sur l'erreur. On pose  $\tau_n$  l'erreur dite de troncature du schéma entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ ,

$$\tau_n = z(t_{n+1}) - z(t_n) - \Delta t \partial_t z(t_n).$$

On applique la formule de Taylor avec reste intégral entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ , d'où

$$\tau_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t) \partial_t^2 z(t) dt,$$

et on peut borner cette erreur à l'aide d'une inégalité de Hölder,

$$|\tau_n| \leq \Delta t \int_{t_n}^{t_{n+1}} |\partial_t^2 z(t)| dt.$$

On remarque ensuite

$$z_{n+1} - z(t_{n+1}) = \left( 1 - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \right) (z_n - z(t_n)) - \tau_n$$

d'où, de proche en proche, et comme  $z_0 = z(0)$ ,

$$z_{n+1} - z(t_{n+1}) = - \sum_{k=0}^n \left( 1 - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \right)^k \tau_{n-k}.$$

---

1. Cette définition atteint vite sa limite lorsqu'on considère des problèmes à solution croissante, par exemple  $\partial_t x = x$ . Heureusement, ce n'est pas le cas ici.

Encore par inégalité de Hölder (discrète, cette fois-ci), on obtient

$$|z_{n+1} - z(t_{n+1})| \leq \sum_{k=0}^n |\tau_k| \leq \Delta t \|\partial_t^2 z\|_{L^1}$$

avec la norme  $L^1$  définie de manière canonique, c'est-à-dire  $\|u\|_{L^1} \leq \int_0^T |u(t)| dt$ .

En fait, cette dernière inégalité est vraie quel que soit le problème résolu (i.e. même si on modifie l'équation sur  $z$ ), tant que la condition de stabilité (à adapter au problème) est vérifiée. En particulier, cela veut dire qu'on obtient la même borne d'erreur si on utilise la méthode d'Euler sur le problème plus complexe (2).

Dans le cas simplifié  $\partial_t z = -z/\varepsilon$ , on connaît la solution exacte du problème, et on peut calculer  $\|\partial_t^2 z\|_{L^1} = \frac{1}{\varepsilon}(1 - e^{-T/\varepsilon})|z_0|$ . Ainsi, la borne d'erreur devient pour tout indice  $n$  entre 0 et  $N$ ,

$$|z_n - z(t_n)| \leq \frac{\Delta t}{\varepsilon} |z_0|.$$

Il apparaît très clairement que le paramètre à ajuster pour modifier l'erreur est  $\Delta t/\varepsilon$ , pas juste  $\Delta t$ . On aurait pu espérer qu'en fixant ce rapport avec  $\Delta t = \varepsilon$ , l'erreur tende vers zéro dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , mais ce n'est même pas le cas ici.

On aurait ainsi l'impression que pour obtenir une erreur de taille  $\varepsilon$ , il faudrait choisir  $\Delta t = \varepsilon\delta$ . Heureusement on peut exploiter la borne

$$|z_n - z(t_n)| \leq \sum_{k \geq 0} |\tau_k|$$

pour essayer de répartir presque uniformément l'erreur entre les  $\tau_n$  en modulant le pas de temps à chaque itération. Ainsi, on remplacerait le schéma (5) par

$$z_{n+1} = z_n - \frac{\Delta t_n}{\varepsilon} z_n$$

avec  $\Delta t_n$  qui varie en fonction de l'itération. La formule (6) reste valide en remplaçant  $\Delta t$  par  $\Delta t_n$ , et c'est ça qu'on souhaite exploiter. Notamment, on peut séparer l'intervalle de temps en deux parties : pendant la phase transitoire (pas de temps  $\Delta t_0$ ) et après la phase transitoire (pas de temps  $\Delta t_1$ ). Ici, on détermine la fin de la phase transitoire au temps  $t_f$  tel que  $\partial_t^2 z(t_f) = \mathcal{O}(1)$ , soit  $t_f = -\varepsilon \log(\varepsilon)$  en supposant  $\varepsilon < 1$ .

En posant  $z_0 = 1$  pour simplifier, supposons qu'on souhaite avoir une erreur de  $\delta/2$

à la fin de la période transitoire. Cela se traduit en

$$\Delta t_0 \int_0^{t_f} |\partial_t^2 z(t)| dt \leq \Delta t_0 \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \leq \frac{\delta}{2}.$$

Ainsi on choisit  $\Delta t_0 = \frac{\varepsilon \delta}{2(1-\varepsilon)}$ . L'erreur après la phase transitoire est

$$\Delta t_1 \int_{t_f}^T |\partial_t^2 z(t)| dt \leq \Delta t_1,$$

donc si on souhaite avoir une erreur  $\delta/2$  lors de cette seconde phase, on peut poser  $\Delta t_1 = \min(\varepsilon, \delta/2)$  de sorte à être certain de respecter la condition de stabilité. Le coût associé à la phase transitoire est

$$\frac{t_f}{\Delta t_0} = \frac{2(1-\varepsilon) \log(1/\varepsilon)}{\delta},$$

et celui associé à la période qui suit est  $\frac{T - \varepsilon \log(1/\varepsilon)}{\min(\varepsilon, \delta/2)}$ . Ce coût est largement préférable au coût en  $1/(\varepsilon \delta)$  qu'on aurait trouvé avec un pas de temps uniforme, mais il reste en  $\mathcal{O}(1/\varepsilon)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  à  $\delta$  fixé à cause de la condition de stabilité.

## Méthodes implicites

Un moyen généralement invoqué pour stabiliser les problèmes raides comme celui-ci est l'utilisation de schémas *implicites*. Au lieu de faire une projection directe, on cherche le point qui, en temps rétrograde, aurait donné le point précédent.

Schéma avec différentes lignes de niveau et les tangentes qui partent de différents  $u_{n+1}$  possibles

Cette méthode de projection rétrograde « directe » est appelée méthode d'Euler implicite, et le schéma associé dans le cas du problème (4) est

$$z_{n+1} = z_n - \frac{\Delta t}{\varepsilon} z_{n+1},$$

ou encore

$$z_{n+1} = \frac{\varepsilon}{\Delta t + \varepsilon} z_n.$$

En comparant les figures **REF**, il est clair que cette méthode est en général bien plus

Labels

coûteuse que les méthodes explicites de projection directe. Néanmoins, elle présente quelques propriétés sympathiques que nous devons présenter. Ce schéma est clairement stable pour tout  $\Delta t$  et tout  $\varepsilon$ , puisque le facteur multiplicatif est toujours inférieur à 1. Cependant, cela n'indique rien sur l'erreur associée au schéma. Calculons-la rapidement.

On pose  $\tau_n$  l'erreur dite de troncature du schéma entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ ,

$$\tau_n = z(t_{n+1}) - z(t_n) - \Delta t \partial_t z(t_{n+1}).$$

En général on borne cette erreur par une application successive d'intégration par parties, inégalité triangulaire et enfin inégalité de Hölder, pour trouver

$$|\tau_n| \leq \int_0^{\Delta t} s \left| \partial_t^2 z(t_n + s) \right| ds \leq \Delta t \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left| \partial_t^2 z(t) \right| dt. \quad (6)$$

En revanche cette approche n'exploite pas le caractère décroissant de  $t \mapsto z(t)$ , et d'ailleurs cette dernière borne serait aussi valide pour le schéma d'Euler explicite. Cette caractéristique peut être exploitée en s'intéressant directement à la définition de  $\tau_n$ . En effet dans notre cas particulier, on a  $z(t) = e^{-t/\varepsilon} z_0$  donc

$$\tau_n = \left( e^{-\Delta t/\varepsilon} - 1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon} e^{-\Delta t/\varepsilon} \right) e^{-n\Delta t/\varepsilon} z_0,$$

ce qui peut se borner très grossièrement,

$$|\tau_n| \leq e^{-n\Delta t/\varepsilon} |z_0| \quad (7)$$

On remarque maintenant que l'erreur globale vérifie

$$\left( 1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \right) (z_{n+1} - z(t_{n+1})) = z_n - z(t_n) - \tau_n$$

d'où de proche en proche,

$$|z_{n+1} - z(t_{n+1})| \leq \sum_{k=0}^n \left( 1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \right)^{-k-1} |\tau_{n-k}|.$$

On applique brutalement une inégalité de Hölder sur la somme pour obtenir finalement

$$|z_{n+1} - z(t_{n+1})| \leq \left(1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon}\right)^{-1} \sum_{k=0}^n |\tau_k|.$$

En exploitant (6) et (7), on obtient enfin

$$|z_{n+1} - z(t_{n+1})| \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \Delta t} \min \left( \Delta t \|\partial_t^2 z\|_{L^1}, \frac{|z_0|}{1 - e^{-\Delta t/\varepsilon}} \right).$$

Ici la norme  $L^1$  est définie de manière canonique, c'est-à-dire  $\|u\|_{L^1} \leq \int_0^T |u(t)| dt$ . En l'occurrence, on connaît exactement  $z(t) = e^{-t/\varepsilon} z_0$ , donc on peut calculer  $\|\partial_t^2 z\|_{L^1} = \frac{1}{\varepsilon}(1 - e^{-T/\varepsilon})z_0$ , ce qui donne finalement pour tout  $n$  entre 0 et  $N$ ,

$$|z_n - z(t_n)| \leq \frac{\Delta t}{\varepsilon + \Delta t} |z_0| \min \left( 1, \frac{\varepsilon/\Delta t}{1 - e^{-\Delta t/\varepsilon}} \right).$$

Grâce au premier argument du min, on est assuré que l'erreur est de la forme  $C\Delta t$  pour tout  $\Delta t < \Delta t_0$  avec  $C$  et  $\Delta t_0$  des constantes indépendantes de  $\varepsilon$ . On remarque là une différence par rapport au comportement du schéma explicite, qui demandait  $\Delta t \ll \varepsilon$ . Le deuxième argument du min nous assure que l'erreur tend vers zéro quand  $\varepsilon$  tend vers zéro. En particulier, on dit le schéma préserve le comportement asymptotique,<sup>2</sup> ce qui se traduit en *asymptotic preserving* (AP) en anglais. Cette notion reviendra dans la prochaine section.

**Rq :** On peut obtenir une approximation en tout point  $t \in [0, T]$  par interpolation. Le sujet de cette thèse n'est pas l'étude de schémas numériques ou celle de méthodes d'interpolation, donc nous éviterons de fournir des détails superflus sur ces sujets. On évaluera la qualité d'une approximation en fonction de la valeur aux points.

Illustration rapide sur méthode d'Euler

Démonstration d'erreur en  $\Delta t/\varepsilon$

Distinction entre convergence et stabilité

---

2. Ce schéma est en fait  $L$ -stable, ce qui est une notion un peu plus forte qui ne nous intéresse pas dans le cadre de ce manuscrit.

## Méthodes générales pour systèmes raides

Bouquin de Hairer, Lubich, Wanner

Présentation rapide de méthodes stiff (implicites)

Discussion du coût du pas de temps adaptatif

Splitting + simulations

Foreshadowing : ordre des opérations pour AP et splitting exact pour formes normales

## Exposition de l'état de l'art

Cette section observe le comportement de méthodes numériques usuelles lorsqu'on les applique au système.

## Méthodes avec traitement spécifique de la partie raide

IMEX-BDF, convergence théorique

expRK, convergence théorique

Rq : Lawson et IMEX-RK, pas particulièrement étudiées

Test des méthodes proches et loin de l'équilibre

## Notions de convergence

Def : AP (faire un diagramme)

Def : UA restreint

Def : UA tout court (trouver un diagramme)

Introduction de la norme des schémas exponentiels (notion de norme relative)

## Contribution personnelle

Résultat de convergence uniforme avec IMEX-BDF ou expRK

Explication de la méthode à détailler (sans prendre le crédit) :

- Lien avec moyennisation
- Formes normales, splitting quasi-exact
- Conservation exacte du défaut

Ouverture au cinétique

Annonce plan





# LA MOYENNISATION EN BREF

---

Lors de ma troisième année de thèse, j'ai eu l'occasion d'un peu plus me pencher sur les méthodes de moyennisation, et notamment de rédiger un mini-article compilant certains résultats du sujet. Une partie est ici, l'autre sera présentée en Annexe \_\_\_\_\_

quelle annexe ?

## 1.1 Présentation d'une méthode

### 1.1.1 L'équation homologique

Dérivation de l'équation homologique

Distinction entre averaging standard et stroboscopique

### 1.1.2 Définition d'une décomposition approchée

Relation de récurrence et résultat sur les bornes

Discussion autour de la méthode pour les résultats (boules imbriquées, estimations de Cauchy...)

## 1.2 Contexte d'un problème autonome

$$\partial_t y = \frac{1}{\varepsilon} G(y) + K(y) \quad (1.1)$$

On décompose

$$y^\varepsilon(t) = \Omega_{t/\varepsilon}^\varepsilon \circ \Psi_t^\varepsilon \circ (\Omega_0^\varepsilon)^{-1} \quad (1.2)$$

### 1.2.1 Un résultat géométrique

$\Omega$  est un flot, et commute avec  $\Psi$ .

### 1.2.2 Cas d'un opérateur linéaire

Averaging standard : crochets de Lie

Formes normales

## 1.3 Aspect numérique

Si on ne connaît pas le défaut, il est clair qu'on peut calculer numériquement

$$\partial_t v^{[n]} = F^{[n]}(v^{[n]}) \quad (1.3)$$

et alors

$$u^\varepsilon(t) = \Phi_{t/\varepsilon}^{[n]}(v^{[n]}(t)) + \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}) \quad (1.4)$$

Mais en fait si on montre ça, on peut montrer mieux (en supposant un peu de régularité). Section basée principalement sur l'article avec Gilles.

### 1.3.1 Définition d'un nouveau problème

Micro-macro ou pullback

Raideur "retardée"

### 1.3.2 Convergence uniforme

Résultat de convergence uniforme

Présentation de schémas intégraux et composition de schémas

# CONVERGENCE UNIFORME POUR UN PROBLÈME DISSIPATIF

---

Ce chapitre reprend un article à paraître dans *Mathematics of Computation*, intitulé

*A uniformly accurate numerical method for a class of dissipative systems*

Dans cet article, on ...

## 2.1 Construction et résultat de précision uniforme

### 2.1.1 Hypothèses et définitions

Hyp :  $A$  diagonale avec des vap entières

Hyp :  $f$  analytique autour de  $(x,0)$

Justification de l'hypothèse avec le théorème de variété centrale

Introduction des ensembles  $\mathcal{K}_\rho$

Def :  $R$  + borne sur  $f$  et ses dérivées

Def : normes

### 2.1.2 Construction d'un développement asymptotique

Équation homologique

Définition de  $F$  et du projecteur

Relation de récurrence avec condition de fermeture

Def : défaut  $\eta$

Thm : Bonne définition des morphismes et bornes

### 2.1.3 Problème micro-macro et précision uniforme

Obtention du problème micro-macro

Thm : problème micro-macro bien posé avec dérivées bornées

Rq : calcul de la donnée initiale

Présentation des schémas exponentiels

Def : norme associée aux schémas

Thm : précision uniforme :D

Rq : adaptation du résultat aux schémas IMEX-BDF

## 2.2 Preuves des théorèmes

### 2.2.1 Bonne définition des morphismes, et leurs bornes

Définition des morphismes périodiques

Filtrage des morphismes périodiques

Prop : hypothèses de UA périodique vérifiées

Thm de bonnes propriétés sur les morphismes périodiques

Principe du maximum pour conclure la preuve

### 2.2.2 Caractère bien posé du problème micro-macro

Caractère bien posé sur  $v$  :  $v(0)$  est gentil et  $v(t)$  aussi par Gronwall.  $\Omega(v)$  est okay

Borner le terme linéaire  $L$ , puis Gronwall avec la source pour  $w$  bien posé

### 2.2.3 Précision uniforme avec les schémas exponentiels

Séparation entre  $v$  et  $w$

Partie  $v$  bornée classique, passage à norme modifiée grâce à  $\Omega$

Partie  $w$  application directe des bornes de Hochbruck et Ostermann

## 2.3 Extension partielle à des EDP discrétisées

Présentation rapide du système

Disclaimer comme quoi on les regarde post-discrétisation

### 2.3.1 Équation de télégraphe

Transformation en Fourier

Tentative directe d'obtenir la variable en  $-1/\varepsilon \rightarrow$  échec

Relaxation pour obtenir la variable  $z$ , montrer que ça va mieux

Développement à l'ordre zéro, montrer que ça se passe okay grâce à  $\exp -tA/\varepsilon$

Passage à l'ordre 1, observation comme quoi  $-A/\varepsilon + F^{[1]}$  est mal posé

Relaxation dans le changement de variable, montrer que tout se passe mieux

Eq :  $\eta^{[1]}$

Prop : si les fréquences sont bornées, on peut faire du num tranquille et l'erreur est indépendante de  $\varepsilon$

Rq : les fréquences bornées c'est plus une CFL qu'un souci avec  $\varepsilon$

### 2.3.2 Relaxation hyperbolique

Présentation du système + condition de stabilité

Rq : relaxation indépendante de l'espace

Volumes finis avec Upwind, avec la variable  $z$  naturelle

Développements ordre 1 parachutés avec relaxation (justif de télégraphe)

Rq : passage au continu

Commentaire sur le coût de résolution (indépendant de  $\varepsilon$  malgré la relaxation)

Eq : défauts  $\eta^{[0]}$  et  $\eta^{[1]}$

## 2.4 Résultats numériques

### 2.4.1 Applications directes

Problème jouet lentement oscillant :

Exposition, dev à l'ordre 1 puis ordre 2

Rq : on peut retrouver la variété centrale

Rappel pb micro-macro, et commentaire sur le besoin de calcul explicite de  $L$  pour l'arrondi

Problème inspiré de l'hyperbolique :

Exposition, passage aux variables  $x, z$

Eq : dev à l'ordre 1, ordre 2 trop lourd

Choix de la fonction  $g$  et de la donnée initiale

Résultats :

Figures : err. sup. sur  $\varepsilon$  à gauche pour syst. original (ERK2), miMa 1 (ERK2) et miMa 2 (ERK3), et err. en fonction de  $\varepsilon$  à droite (miMa 2 ERK3), pour différents  $\Delta t$

=> Mise en avant et description du phénomène de réduction d'ordre

=> Observation de l'ordre de convergence grâce au problème micro-macro, ordres 1 et 2

Ajouter simus avec IMEX-BDF

### 2.4.2 EDP discrétisées

Télégraphe : rappel de l'équation + donnée initiale

Résultats : réduction d'ordre, discussion sur le côté "erreur uniforme"

Relaxation hyperbolique : rappel de l'équation + donnée initiale

Résultats avec disclaimer qu'on regarde pas l'erreur en espace

Figures : même format que pour les EDOs mais on s'arrête à miMa 1 (forcément)

### 2.4.3 Commentaires sur extensions directes

Dans la discussion

# DISCUSSION D'EXTENSION DES RÉSULTATS

---

## 3.1 Coût de calcul, erreurs d'arrondis, derivative-free, pullback

Coût de calcul avec les non-linéarités

Difficulté du calcul de la relaxation pour certains schémas

Gain d'ordre avec  $z(0) = 0$  (figure avec err sup sur  $\varepsilon$ )

Donner une clé pour le gain d'ordre :  $v_z(0) = \mathcal{O}(\varepsilon)$

## 3.2 Autour de l'équation de télégraphe





# **UN DÉVELOPPEMENT DOUBLE-ÉCHELLE**

---

Résultats du stage et du début de thèse



# PRÉSENTATION DE SCHÉMAS NUMÉRIQUES

---

Méthodes composées  
Tableaux de Butcher



# AUTOUR DE NOTIONS GÉOMÉTRIQUES

---

C.1 Algèbre de Lie

C.2 Géométrie de la moyennisation stroboscopique



---

## Sources primaires

ASTAIR, Mickey, *La pendule et le fou*, Paris : Firgoult, 1895.

BICON, Pierre, *De la memoire*, Paris : Serigraph, 1901.

DENYS, Frédéric et Hector GELLEE, « Voyages en Anatolie », in : *Revue des colonies* 13 (1905), p. 45-85.

DOULE, Eloise et Marie BADY, « Les castes dans les Indes Britanniques », in : *Revue des pays lointains* 15.7 (1887), p. 223-258.

HISTRION, Pierre et Jean-Marie GASTON, « Les phrases du début à la fin », in : *Revue internationale de linguistique* 50 (1925), p. 52-98.

KOHLER, Hans, *L'alsace, un paradis financier*, Paris : Hopla, 1903.

LAURENT, Jean, *Constructions et ouvrages d'art*, Paris : Les arts et métiers, 1925.

SBIRRE, François et Jacques HELOI, « Etudes épidémiologiques sur la paresse ambiante », in : *Revue du bon vieux temps* 23.4 (1906), p. 53-102.

SIMON, Zoé, *As-tu pensé à fermer le gaz ?*, Paris : Editions de l'oubli, 1903.

WALTHER, Gusty, *Controverses sur le soleil*, Paris : Editeur local, 1897.

— *Dialogues sur la pluie et le beau temps*, Paris : Editeur local, 1896.

---

## Sources secondaires

AIMARRE, Jean, *Crise de foie*, Paris : Editions du Pénitent, 1999.

ASPHANE, Pierre et Jean-Marie VIGOUT, « De novembre à décembre », in : *Revue alsacienne du temps qu'il fait* 45 (2001), p. 23-89.

DESFOIS, Marie, *Les glaçons*, Paris : Grazmick, 1998.

DROCHER, Gérard, *Partir et revenir*, Paris : Novrebond, 2006.

FALCON, Alphonse et Gabriel SERVAIS, « Les avatars de la biologie », in : *Biomolle* 22 (1985), p. 65-97.

GEORGES, Christine et Estelle DUPUYS, « La blondeur décolorée. Histoire de la stupidité », in : *Revue des brunes* 12 (1974), p. 125-184.

HENRY, Michel et Philippe KHRON, « Le destin et l'avenir », in : *Histoire et partage* 2 (1956), p. 21-35.

HOCHET, Eric, *Histoire d'un lac*, Paris : Van Dame, 2003.

KANTROP, Julie, *Le loup et ses proies*, Paris : Nuit Bleue, 2005.





---

**Titre :** titre (en français).....

**Mot clés :** de 3 à 6 mots clefs

**Résumé :** Eius populus ab incunabulis primis ad usque pueritiae tempus extremum, quod annis circumcluditur fere trecentis, circummurana pertulit bella, deinde aetatem ingressus adultam post multiplices bellorum aerumnas Alpes transcendit et fretum, in iuvenem erectus et virum ex omni plaga quam orbis ambit inensus, reportavit laureas et triumphos, iamque vergens in senium et nomine solo aliquotiens vincens ad tranquilliora vitae discessit. Hoc immaturo interitu ipse quoque sui pertaesus excessit e vita aetatis nono anno atque vicensimo cum quadriennio imperasset. natus apud Tuscos in Massa Vaternensi, patre Constantio Constantini fratre imperatoris, matreque Galla. Thalassius vero

ea tempestate praefectus praetorio praesens ipse quoque adrogantis ingenii, considerans incitationem eius ad multorum augeri discrimina, non maturitate vel consiliis mitigabat, ut aliquotiens celsae potestates iras principum molliverunt, sed adversando iurgandoque cum parum congrueret, eum ad rabiem potius evibrabat, Augustum actus eius exaggerando creberrime docens, idque, incertum qua mente, ne lateret adfectans. quibus mox Caesar acrius efferatus, velut contumaciae quoddam vexillum altius erigens, sine respectu salutis alienae vel suae ad vertenda opposita instar rapidi fluminis irrevocabili impetu ferebatur. Hae duae provinciae bello quondam piratico catervis mixtae praedonum.

---

**Title:** titre (en anglais).....

**Keywords:** de 3 à 6 mots clefs

**Abstract:** Eius populus ab incunabulis primis ad usque pueritiae tempus extremum, quod annis circumcluditur fere trecentis, circummurana pertulit bella, deinde aetatem ingressus adultam post multiplices bellorum aerumnas Alpes transcendit et fretum, in iuvenem erectus et virum ex omni plaga quam orbis ambit inensus, reportavit laureas et triumphos, iamque vergens in senium et nomine solo aliquotiens vincens ad tranquilliora vitae discessit. Hoc immaturo interitu ipse quoque sui pertaesus excessit e vita aetatis nono anno atque vicensimo cum quadriennio imperasset. natus apud Tuscos in Massa Vaternensi, patre Constantio Constantini fratre imperatoris, matreque Galla. Thalassius vero

ea tempestate praefectus praetorio praesens ipse quoque adrogantis ingenii, considerans incitationem eius ad multorum augeri discrimina, non maturitate vel consiliis mitigabat, ut aliquotiens celsae potestates iras principum molliverunt, sed adversando iurgandoque cum parum congrueret, eum ad rabiem potius evibrabat, Augustum actus eius exaggerando creberrime docens, idque, incertum qua mente, ne lateret adfectans. quibus mox Caesar acrius efferatus, velut contumaciae quoddam vexillum altius erigens, sine respectu salutis alienae vel suae ad vertenda opposita instar rapidi fluminis irrevocabili impetu ferebatur. Hae duae provinciae bello quondam piratico catervis mixtae praedonum.