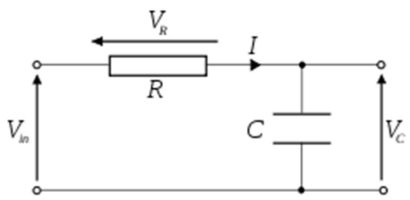
TP4 OL2

Objectifs pédagogiques : Résoudre de manière exacte ou approchée (méthode d'Euler) des équations différentielles avec les logiciels Xcas et Scilab.

1. Solution exacte d'une équation différentielle avec Xcas

La fonction `desolve` permet de résoudre une équation différentielle. Pensez à utiliser **l'aide en ligne** (la touche F1) pour avoir des exemples de syntaxe.

- **Exercice1** : **charge d'un condensateur dans un circuit RC**
  on cherche à déterminer la charge d'un condensateur à travers une résistance en fonction du temps. On considère le schéma ci-dessous :



a. En utilisant la loi des mailles, retrouver que l'équation différentielle liée au circuit est

$$(E_1)\ :\ \boxed{R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=V_{in}}$$

b. En utilisant xcas, déterminer, en fonction de R, C et V_{in}, l'expression de la charge $q(t)$, solution de (E_1), qui considère qu'à l'instant t=0 la charge est nulle.

c. Tracer le graphe de $q(t)$ et son asymptote pour les valeurs numériques suivantes : $R=1\,k\Omega$, $C=1\,mF$ et $V_{in}=10\,V$.

d. Déterminer le temps nécessaire pour que le condensateur soit chargé à 98% de sa charge maximale.

2. Solution approchée d'une équation différentielle avec Scilab : la méthode d'Euler

L'objectif est de résoudre de manière approchée une équation différentielle du **1er ordre** , de la forme
(E) : $y'(t)=f(t,y(t))$ grâce à la **méthode d'Euler**.

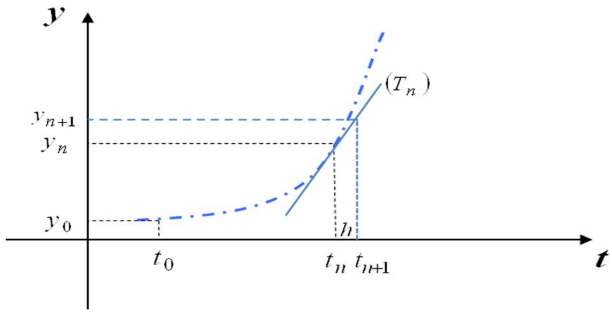
Le but est d'approcher **la** solution $y(t)$ de (E) définie sur un intervalle $[a,b]$ et qui vérifie **une condition initiale** $y(a)=y_0$.

Pour cela, on se donne une **subdivision** de l'intervalle $[a,b]$. Si N est le nombre d'intervalles de la subdivision alors $h=\frac{b-a}{N}$ est le **pas** de la subdivision et on peut noter la suite des abscisses (t_n) par :

$t_0=a,\ t_1=a+h,\ t_2=a+2h\ ,\cdots\ ,\ t_N=a+N\cdot h=b$.

En assimilant la courbe à **sa tangente**, pour un pas ***h*** suffisamment petit on peut faire l'approximation suivante de la dérivée : $y'(t_n)\cong\dfrac{y(t_n+h)-y(t_n)}{h}=\dfrac{y(t_{n+1})-y(t_n)}{t_{n+1}-t_n}$

Puis on pose $y(t_n)=y_n$ et $y(t_{n+1})=y_{n+1}$



On obtient alors une suite (y_n) telle que :

$\boxed{y_{n+1}=y_n+h\cdot y'(t_n)}$ appelée **suite d'Euler** qui approche $y(t)$,

avec $t_0=a$, $h=\frac{b-a}{N}$, $t_{n+1}=h+t_n$ $y_0=y(a)$ et $y'(t_n)=f(t_n,y(t_n))$ donnée par l'équation différentielle.

Cette approximation est d'autant plus justifiée que h **est petit** (donc que ***N*** **est grand**).

- **EXEMPLE N°1 : un cas linéaire dans le circuit RC**

On veut approcher la solution de l'équation différentielle (E_1) : $\boxed{R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=V_{in}}$

avec comme condition initiale $q(0)=0$ et sur l'intervalle de temps en seconde de $[0\,;5]$

La solution exacte est connue (voir exercice1). Il est donc inutile d'utiliser une méthode de calcul approché, mais nous allons le faire quand même pour comparer la solution exacte et la solution approchée.

- **<u>Exercice2</u> :** Le but de cet exercice est de créer un programme qui calcule de façon approchée la solution de l'équation différentielle (E_1) et de la comparer graphiquement avec la solution exacte.

a. Justifier que la suite d'Euler adaptée à l'équation différentielle (E_1) est définie par :

$$q_{n+1}=q_n+h\cdot(-\tfrac{q_n}{RC}+\tfrac{V_{in}}{R}) \quad \text{avec} \quad q_0=0 \quad \text{et } t\in[0;5]$$

b. Proposer un algorithme descriptif qui, pour une subdivision de N intervalles dans $[0\,;5]$, permet de déterminer les valeurs de la suite (q_n) d'Euler ci-dessus.

c. Programmer sous scilab cet algorithme. Le tester pour différentes valeurs de N (on pourra prendre N égale à 5, 10, 20, et 50). Pour chaque valeur de N, représenter sur un même graphe, la suite d'Euler (q_n) et la solution exacte de l'exercice1 afin de les comparer. Puis commenter les graphes obtenus.

- **EXEMPLE N°2 : cas non linaire de la chute d'un parachutiste avec frottements quadratiques.**

Dans le cas de la chute d'un corps de masse m qui subit une force de frottement $\vec{F}$, le principe fondamentale de la dynamique nous donne : $\vec{P}+\vec{F}=m\vec{a}$.

- **<u>Exercice3</u> : Frottements quadratiques**

on considère que la force de frottement est proportionnelle au carré de la vitesse alors $\vec{F}=-k_2 v\cdot\vec{v}$ et pour obtenir la vitesse il faut résoudre l'équation différentielle **non linéaire** :

$$(E_2) : \boxed{m\cdot v'(t)+k_2\cdot v^2(t)=mg}$$

a. On a pu observer que la vitesse d'un parachutiste atteint la limite de 200km/h.
Déterminer la valeur de k_2, la constante de frottement. On prendra m=80kg et g=9.81 m/s^2.

b. Définir la suite d'Euler (v_n) associée à l'équation différentielle (E_2).

c. Programmer la méthode d'Euler pour tracer la solution approchée (v_n) de (E_2) sur un intervalle de 40 secondes. On prendra $v(0)=0$, m=80kg, g=9.81 m/s^2.

d. Faire une copie d'écran des graphes obtenus pour N= 10, 30, 50 et les commenter.

e. Combien de temps faut-il pour que le corps atteigne la vitesse de 190km/h ?