

IMT2220, Cálculo para ciencia de datos, 2023-2

Guía ejercicios Interrogación 1

Preámbulo:

Esta guía contiene ejercicios relacionados a los contenidos que entran para la interrogación. Esta revisa los contenidos de forma somera, y se recomienda estudiar los contenidos más allá de lo que está aquí.

1. Calcule una base ortonormal de \mathbb{R}^4 a través de los vectores:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Verifique que estas sean ortonormales.

2. ¿Es la siguiente función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una norma?

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$$

Justifique su respuesta.

3. Describa (como conjunto) y dibuje las curvas de nivel de las funciones:

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad h(x, y) = \cosh(x^2 + y^2)$$

4. Determine si los siguientes límites existen. Si es así, calcúlelo, si no, de un contraejemplo.

(a)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\exp(-(x-1)^2 - (y-2)^2) - 1}{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

(b)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy) + xy}{xy}$$

(c)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(\cos(x^2 + y^2))}{x^2 + y^2}$$

(d)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,2)} \frac{(x-4) + (y-2)}{(x-4) + (y-2)^2}$$

5. Determine si las siguientes funciones son continuas

(a)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^4 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(b)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^4 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(c)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^8 - y^8}{x^4 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

6. Calcule el plano tangente en el punto $(x_0, y_0) = (\pi^{1/3}, \pi^{1/3})$ de la función

$$f(x, y) = x^2 - xy + \sin(xy^2)y$$

Calcule el vector normal a dicho plano.

7. Calcule las segundas derivadas de las siguientes funciones $(\partial^2/\partial x^2, \partial^2/\partial y\partial x, \partial^2/\partial x\partial y, \partial^2/\partial y^2)$:

$$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}, \quad g(x, y) = \cos(\pi(x + y)), \quad h(x, y) = \frac{1}{xy} + xy + y$$

8. El potencial eléctrico de un punto en un campo está dado por:

$$T(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + 5y^2}$$

Calcule la derivada direccional de T en el punto $(1, 1)$ en la dirección del vector (no unitario) $\mathbf{u} = (3, 4)$. Recuerde normalizar este vector. Es esta la dirección de mayor cambio?

9. Calcule $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ para los puntos donde esté bien definida la superficie definida por la ecuación:

$$zx + \sin(zxy) + \cos(zy) - xy = 0$$

10. Determine condiciones bajo las cuales $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ si estos satisfacen:

$$\begin{aligned} u &= x^2 + y^2 \\ v &= x^2 - y^2 \end{aligned}$$

Donde sea posible, encuentre $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. ¿Tienen sentido las condiciones anteriormente dichas?