

IMT2220, Cálculo para ciencia de datos, 2023-2

Guía ejercicios Interrogación 2

Preámbulo:

Esta guía contiene ejercicios relacionados a los contenidos que entran para la interrogación. Esta revisa los contenidos de forma somera, y se recomienda estudiar los contenidos más allá de lo que está aquí.

1. Determine los puntos críticos de las siguientes funciones:

1. $f(x, y) = |x - y|$

2. $g(x, y) = \max\{|x|, |y|, 1\}$

3. $h(x, y) = \cos(\pi x) \sin(\pi y)$

4. $\varphi(x, y) = x^3 y + (x - 2)y^2$

5. $\psi(x, y) = |\cos(\pi x) \cos(\pi y)|$

6. $\zeta(x, y) = e^{(x-1)^2 + (y-1)^2}$

2. Clasifique, cuando sea posible, los puntos críticos encontrados en la pregunta anterior.
3. Considere la región $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$. Encuentre el mínimo de la función $f(x, y) = (z + 1)(x^2 + y^2 - 1/2)$ en U , es decir, resuelva:

$$\min_{\mathbf{x} \in U} f(\mathbf{x})$$

4. Encuentre el punto en $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y - z = 0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ que minimiza la distancia euclidiana al punto $\mathbf{p} = (1/2, 3/4, 2)$.
5. A un soplador de vidrio se le hace la siguiente solicitud de parte de un empresario que quiere nuevas botellas para su negocio: “Quiero una botella cilíndrica que sea capaz de almacenar 1 litro de líquido”. Suponiendo que el artista cobra por superficie de vidrio usada, cuales son las dimensiones que debiese tener esta botella para generar la mayor ganancia posible? Si el costo por unidad de superficie utilizada corresponde a \$1, ¿Cuanto ganará por botella el autor?
6. Resuelva las siguientes integrales dobles:

- (a) Para $D = [0, 1] \times [0, 1]$, resuelva:

$$\int \int_D xy \, dA$$

- (b) Para $D = [-1/2, 1/2] \times [1/2, 1]$, resuelva:

$$\int \int_D \sin(\pi x) \cos(2\pi y) \, dA$$

(c) Para $D = [1, 2] \times [1, 2]$, resuelva:

$$\int \int_D \frac{1}{xy} dA$$

(d) Para $D = [1, 2] \times [0, 1]$, resuelva:

$$\int \int_D (x^2 + x \sin(\pi y)) dA$$

7. Verifique si es posible intercambiar el orden de integración a cada una de las integrales dobles anteriores.

8. Considere el dominio D la unión de la mitad superior del disco unitario con el triángulo de vértices $(-1, 0)$, $(0, -1)$ y $(1, 0)$. Calcule la integral:

$$\int \int_D x^2 y dA$$

9. Considere el dominio $D = D_1 \cup D_2$, donde $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, |x| \leq 1, \}$ y $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 0, |x| \leq 1\}$. Calcule el área de D , es decir:

$$\int \int_D 1 dA$$

10. Considere la región $D = D_1 \setminus D_2$, donde $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$, y D_2 es el triángulo de vértices $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$. Calcule la integral:

$$\int \int_D y dA$$