Pontificia Universidad Católica de Chile
Instituto de Ingeniería Matemática y Computacional
Álgebra Lineal Avanzada y Modelamiento- IMT2230
Segundo Semestre 2023

Guía de Ejercicios – 2

Profesor: Cristóbal Rojas

Ayudante: Pablo Rademacher

P 1. Aproximaciones de rango 1.

a) Considere la siguiente matriz:

$$A = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se sabe que el espacio unidimensional que mejor aproxima al conjunto $\{(3\sqrt{2}, \sqrt{2}), (4\sqrt{2}, 0)\}$ es $V = SPAN\{(1, 1)\}$.

i) Encuentre v_1, el primer vector singular por la derecha de A.

ii) Encuentre u_1, el primer vector singular por la izquierda de A.

iii) Calcule la matriz B de rango uno que mejor aproxima A.

iv) Encuentre el primer valor singular de B^TB.

b) Sea A un matriz en $\mathbb{R}^{n\times m}$.

i) Muestre que si $v \in \mathbb{R}^m$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ son tales que

$$A^TAx = \lambda x,$$

entonces $\|Ax\| = \sqrt{\lambda}$.

ii) Muestre que si σ_1 es el primer valor singular de A, entonces un vector de v de norma 1 es el primer vector singular de A por la decha si y solo si:

$$v \in \text{Null}(A^TA - \sigma_1^2 I_m),$$

donde I_m es la matriz indentidad en $\mathbb{R}^{m\times m}$.

iii) Si se sabe que el primer valor singular de A es $\sigma_1 = 2$ donde

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

use la parte ii) para encontrar v_1.

iv) Para la matriz A de la parte anterior, encuentre la matriz de rango 1 que mejor la aproxima.

v) Para la matriz A de la parte anterior, encuentre la matriz de rango 1 que mejor aproxima a $B = A^TA$.

P 2. Descomposición SVD.

a) Sea Q un matriz cuyas columnas son ortogonales. ¿Es cierto que $\|AQ\|_F = \|A\|_F$?

b) Usando su intuición y entendimiento, encuentre la SVD de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Sea A cuyas columnas son ortogonales entre si. ¿Cual es su SVD? ¿Y si sus columnas fueran ortonormales?

d) Si se sabe que el primer valor singular de A es $\sigma_1 = 2$ donde

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

use la pregunta **P 1** parte b)-ii) para encontrar la descomposición SVD de A.

d) Suponga que conoce la SVD de una matriz $A = U\Sigma V^T$. Encuentre la SVD de las matrices A^T, A^TA y AA^T. Comente.

e) Use el item anterior para encontrar la mejor aproximación de rango k de las matrices A^T, A^TA y AA^T.

f) Explique porqué si una matriz cuadrada es invertible, entonces ninguno de sus valores singulares puede ser cero.

g) ¿Cual es la SVD de la matriz $A = xy^T$, con $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$?

h) Encuentre la mejor aproximación B de rango 2 de las siguientes matrices. Exprese esta aproximación como el producto $B = GH^T$, donde G y H son matrices de dos columnas.

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, cuya SVD esta dada por las matrices:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{0{,}5} & 0 \\ \sqrt{0{,}8} & 0 & \sqrt{0{,}2} \\ 0 & -\sqrt{0{,}5} & 0 \\ \sqrt{0{,}2} & 0 & -\sqrt{0{,}8} \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, V^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{0{,}5} & 0 & -\sqrt{0{,}5} \\ \sqrt{0{,}5} & 0 & -\sqrt{0{,}5} \end{bmatrix}$$

- $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, cuya SVD esta dada por las matrices:

$$U = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i) Sean S y T matrices del mismo tamaño, tales que su primer valor singular es s y t, respectivamente. Si r es el primer valor singular de $S+T$, demuestre que $r \leq s+t$.

j) Encuentre la SVD de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

k) Suponga que Q es una matriz cuyas columnas son ortonormales. Calcule su SVD.

P 3. Valores y Vectores propios

a) Encuentre la matriz A de 3×3 cuyos valores propios son $-1, 3, 5$ y que contiene asociados los vectores propios $(1,1,1), (0,2,1)$ y $(1,0,0)$, respectivamente.

b) Sea $A = uv^T$ una matriz cuadrada de rango uno.

1. Demuestre que u es un vector propio de A. ¿A que valor propio está asociado?
2. ¿Que otros valores propios posee A?

c) Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = A$. Demuestre que sus valores propios son todos iguales a 0 o 1.

d) Dada A una matriz de m por N, tal que $\lambda \neq 0$ es valor propio de A^TA, encuentre un vector propio de AA^T.

e) Sea A una matriz cuadrada tal que $(A-2I)(A-3I)(A-4I) = 0$. Muestre que si λ es valor propio de A, necesariamente $\lambda = 2, 3$ o 4.

f) Sea A una matriz cuadrada. Demuestre que λ es valor propio de A^2 si y solo si A tiene a $\sqrt{\lambda}$ o $-\sqrt{\lambda}$ como valor propio.

g) Determine si las siguientes matrices son diagonalizables:

$$i)\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad ii)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad iii)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

h) Una matriz tiene como vectores propios a $(1,0)$ y $(1,1)$. Describa su forma general, usando diagonalización.

i) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Encuentre A^{10}.

j) Sea $A = S\Lambda S^1$. Diagonalice la matriz definida a bloques $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$.

k) Sean A y B tales que $AB = BA$. Muestre que si λ es un valor propio de A cuyo espacio propio asociado E_λ tiene dimension 1, entonces todo vector propio de A asociado a λ es también vector propio de B.

l) Sea A tal que $A^2 = I$.

  i) Determine cuales son los posibles valores propios de A.

  ii) Si A es de 2×2, y es diferente de I y de $-I$, encuentre su traza y su determinante.

  iii) Si la primera fila de A es $(3, -1)$, encuentre A.

m) Sea A de 3×3 cuyos valores propios son $1, 1, 2$. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas. Explique la razón en caso que sea cierto, o de un contraejemplo si es falsa.

  i) A es invertible.

  ii) A es diagonalizable.

  iii) A no es diagonalizable.

n) Suponga que todos los vectores propios de A son múltiplos de $(1, 0, 0)$. Verdadero o falso. Justifique con una razón o un contraejemplo.

  i) A no invertible.

  ii) A tiene valores propios repetidos.

  iii) A no es diagonalizable.

o) Sea S una matriz de $n \times n$ cuyas columnas son vectores propios l.i. de A (también de $n \times n$). Verdadero o Falso.

  i) A es invertible.

ii) A es diagonalizable.

iii) S es invertible.

iv) S es diagonalizable.

p) Verdadero o Falso. Si λ_A es valor propio de A y λ_B es valor propio de B, entonces

i) $\lambda_A + \lambda_B$ es valor propio de $A + B$.

ii) $\lambda_A \lambda_B$ es valor propio de AB.