IMT2220, Cálculo para ciencia de datos, 2023-2
Guía ejercicios Examen

Preámbulo:

Esta guía contiene ejercicios relacionados a los contenidos que entran para la interrogación. Esta revisa los contenidos de forma somera, y se recomienda estudiar los contenidos más allá de lo que está aquí.

1. Calcule la siguiente integral sobre el dominio D_ε para $\varepsilon > 0$:

$$D_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon < x^2 + y^2 < 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

$$\int\int_{D_\varepsilon} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^4}\, dA$$

2. Calcule el área encerrada por el Cardioide descrito por las curvas:

$$x(r, \theta) = r(\theta)\cos(\theta) = 2(1 - \cos(\theta))\cos(\theta)$$
$$y(r, \theta) = r(\theta)\sin(\theta) = 2(1 - \cos(\theta))\sin(\theta)$$

para $\theta \in [0, 2\pi]$.

3. Considere la región R dada por la intersección del primer octante y la desigualdad:

$$x^{1/3} + y^{1/2} + z \leq 1$$

Calcule el volumen de R.

4. Considere un disco de radio a y un punto P ubicado en su frontera. La densidad de masa por unidad de área está dada por la distancia euclidiana al punto P, es decir:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x - P_x)^2 + (y - P_y)^2}$$

Calcule su área y centro de masa.

5. Sea S el sólido descrito por:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 1],\ x^2 + y^2 - 2x(1 - z) \leq 0\}$$

Asumiendo que su densidad de masa está dado por $\rho(x, y, z) = 1 - z$, calcule la masa de S y su centro de masa.

6. Calcule el volumen del sólido encerrado por las superficies

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad az = 2a^2 + x^2 + y^2$$

y el plano $z = 0$ con $a > 0$ constante.

7. Determine el volumen del sólido encerrado por las superficies:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z = 2$$

8. Para $\alpha \notin \mathbb{Z}$, calcule la serie de Fourier en $[-\pi, \pi]$ de

$$f(x) = \cos(\alpha x)$$

9. Calcule la serie de Fourier de la función

$$\operatorname{rect}(x) := \begin{cases} 1 & |x| < 1/2 \\ \frac{1}{2} & |x| = 1/2 \\ 0 & 1/2 < |x| < 1 \end{cases}, \quad \operatorname{rect}(x) = \operatorname{rect}(x+2)$$

10. Calcule serie de Fourier de la integral de la función anterior.

11. Calcule las transformadas de fourier a las siguiente función:

$$f(x) = e^{-a|x|}$$

12. Determine la transformada de Fourier de:

$$f(x) = \begin{cases} x - |x/2| & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$