PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
CÁLCULO PARA CIENCIA DE DATOS: IMT2220
PROFESOR: JOAQUÍN VALENZUELA
AYUDANTES: DIEGO RODRÍGUEZ (DRODRGUEZ@UC.CL) Y
FRANCISCA MUÑOZ (FMUR@UC.CL)

Ayudantía 4

Funciones en varias variables

Problema 1

La función $T(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ determina la temprератura en cada punto del plano (excepto en el origen). Si hay una hormiga en el punto $(1, 2)$. ¿En qué dirección se debe mover para obtener la mayor variación de temperatura?

Problema 2

Considere la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy^6}{x^6+y^6} & si \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ \\ 0 & si \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de $f(x, y)$ en el origen.

b) Calcule $\nabla f(0, 0)$.

c) En caso de que existan, calcule las derivadas parciales mixtas $f_{xy}(0, 0)$ y $f_{yx}(0, 0)$.

Problema 3

a) Sea f una función de dos variables con derivadas parciales continuas. Considere los puntos $A = (1, 3)$, $B = (3, 3)$, $C = (1, 7)$, $D = (6, 15)$. La derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AB}$ es 3 y la derivada direccional de en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AC}$ es 26. Calcule la derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AD}$.

b) Sea f una función diferenciable tal que sus derivadas direccionales en el punto $(1, 2)$ en las direcciones de los vectores $(1, 1)$ y $(1, -3)$ son $\sqrt{2}$ y $\sqrt{10}$, respectivamente.
Halle el valor de las derivadas parciales $f_x(1, 2)$ y $f_y(1, 2)$.

Probelema 4

a) Encuentre la derivada de la función $f(x) = \arctan xe^{x^2}$

b) Considerando la siguiente función: $g(x) = (x^2 + 1)^{f(2x)}$. Donde $f(x)$ es una función tal que:

x	1	-1	2	-2	5	-5
f(x)	2	-3	3	4	-2	1
f'(x)	1	-2	-3	2	4	-5

Determine $g'(-1)$.

Propuesto

La parte superior de una escalera se desliza por una pared a una rapidez vertical de 0.15 m/s. En el momento en que la parte inferior de la escalera está a 3 metros se desliza, alejándose a una rapidez de 0.2 m/s. ¿Cuál es la longitud de la escalera?

Problema 1.

sabemos que el módulo de la derivada direccional es en la dirección del vector gradiente en el punto, por lo que la dirección está dada por: $\nabla T(1,2)$.

Esto se calcula usando las derivadas parciales : $\dfrac{\partial T}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$; $\dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$

$\therefore$ La dirección es $\nabla T(1,2) = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$

Problema 2

a) notemos que $0 \leq \left| \dfrac{xy^6}{x^6+y^6} \right| < |x|$

Por teo del sandwich, el límite pedido es cero $\therefore$ la función es continua.

b) Por definición

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{h\,0^6}{h(h^6+0^6)} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{0\,h^6}{h(0^6+h^6)} = 0$$

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$\therefore \nabla f(0,0) = (0,0)$

c) Si $(x,y) \neq 0$ entonces se tiene que:

$$f_x(x,y) = \frac{y^{12} - 5x^6y^6}{(x^6+y^6)^2} \quad / \quad f_y(x,y) = \frac{6x^7y^5}{(x^6+y^6)^2}$$

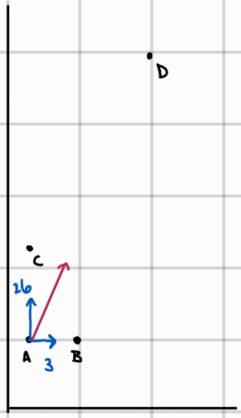
Luego

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{12}}{h^{13}} \to \infty \quad \text{No existe}$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h^7 \cdot 0^5}{h(h^6+0^6)^2} = 0$$

Problema 3

a)



$$3 = D_v \cdot f(1,3) = \nabla \cdot f(1,3) \cdot \vec{v}$$
$$\vec{v} \cdot \nabla f(1,3)$$

Vector unitario en $\vec{AB}$ es $u=(1,0)$ y en $\vec{AC}$ es $v=(0,1)$

$$3 = D_u f(1,3) = f_x(1,3) \cdot 1 + f_y(1,3) \cdot 0 = f_x(1,3)$$
$$26 = D_v f(1,3) = f_x(1,3) \cdot 0 + f_y(1,3) \cdot 1 = f_y(1,3)$$

Luego $\nabla f(1,3) = (3,26)$. Note que $\vec{AD} = (6-1, 15-3) = (5,12)$
un vector unitario en la dirección $\vec{AD}$ es $w = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$ por lo que:

$$D_w f(1,3) = \nabla f(1,3) \cdot w = 3 \cdot \frac{5}{13} + 26 \cdot \frac{12}{13} = \frac{327}{13}.$$

b) Sean $u\ (1,1)$ y $v = (1,-3)$

$$\hat{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad y \quad \hat{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$$

Tenemos que

$$\begin{array}{lcl} D_u f(1,2) = \sqrt{2} & \Leftrightarrow & \nabla f(1,2) \cdot \hat{u} = \sqrt{2} \\ D_v f(1,2) = \sqrt{10} & & \nabla f(1,2) \cdot \hat{v} = \sqrt{10} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} f_x(1,2) + f_y(1,2) = 2 \\ f_x(1,2) - 3 f_y(1,2) = 10 \end{array}$$

Resolviendo se obtiene $f_x(1,2) = 4$, $f_y(1,2) = -2$.

Problema 4

a) $f(x) = \arctan(xe^{x^2})$

$$f'(x) = \frac{1}{1+(xe^{x^2})^2} \cdot (xe^{x^2})'$$

$$= \frac{1}{1+(xe^{x^2})^2} (e^{x^2} + 2x^2e^{x^2})$$

$$= \frac{1}{1+(xe^{x^2})^2} (e^{x^2}(1+2x^2))$$

b) Observar que: $\ln(g(x)) = f(2x)\ln(x^2+1)$

al derivar esto tenemos:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = 2f'(2x)\ln(x^2+1) + f(2x)\frac{2x}{x^2+1}$$

$$g'(x) = g(x)\left(2f'(2x)\ln(x^2+1) + f(2x)\frac{2x}{x^2+1}\right)$$

en $x=1$:

$$g'(-1) = g(-1)\cdot\left(2f'(-2)\ln(2) + f(-2)\frac{-2}{2}\right) = 2^4(4\cdot\ln(2) - 4)$$

Propuesto

Sea l la longitud de la escalera.

Se tiene que $\frac{dy}{dt} = -0{,}15\, m/s$, $\frac{dx}{dt} = 0{,}2\, m/s$.

Ocupando regla de la cadena: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$

reemplazando obtenemos $\frac{dy}{dx} = -3/4$.

Además $x^2+y^2=l^2$ $\rightarrow$ derivando implícitamente

$2x + 2y\frac{dy}{dt} = 0$ $\rightarrow x=3$, $\frac{dy}{dx} = -3/4$

$\hookrightarrow y=0$ $\rightarrow l = \sqrt{3^2+4^2} = 5$.