Interrogación 1 - IMT2220

Nombre: ....

Tiempo: **2 horas 30 minutos**

- Responda claramente las preguntas, procurando prolijidad y coherencia. Si quiere que algo **no sea evaluado**, márquelo claramente (algunas opciones son: tachar texto, encerrar y decir "no considerar", etc.). El uso de corrector líquido no está permitido.
- El uso de dispositivo electrónicos (tales cómo, y no restringidos a: computadores, celulares, calculadoras) está **prohibido** durante la evaluación.
- El uso de apuntes, libros, internet u otros materiales también está **prohibido** durante la evaluación.
- No se otorgará puntaje por respuestas correctas **obtenidas mediante argumentos incorrectos**.

Pregunta	Puntos	Obtenido
1	9	
2	6	
3	15	
4	15	
5	15	
Totales:	60	

1. Considere V un espacio vectorial real con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$. Naturalmente, este induce la norma $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

   (a) (5 puntos) Sean $u, v \in V$. Muestre que:

$$\langle u + v, u - v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$$

   (b) (4 puntos) Use lo anterior para mostrar que las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí. Comience estableciendo el espacio V y el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ donde uno genera los rombos. Como recuerdo, un rombo es un paralelogramo con todos sus lados del mismo tamaño.

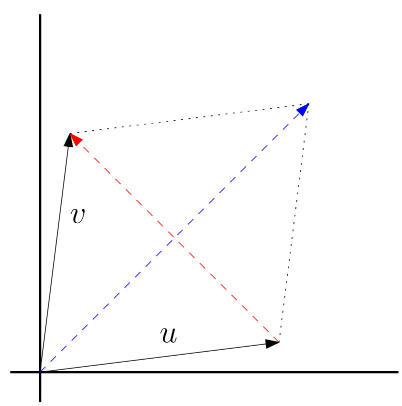
Solution:

(a) Sean $u, v \in V$. Expandiendo el producto interno obtenemos que:

$$\begin{aligned} \langle u + v, u - v \rangle &= \langle u, u \rangle + \langle v, u \rangle - \langle u, v \rangle - \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + \langle u, v \rangle - \langle u, v \rangle - \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 - \|v\|^2 \end{aligned}$$

(5 pts) todo o nada

(b) Para $V = \mathbb{R}^2$ y producto interno definido como el producto punto $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$ se tiene que un rombo se ve gráficamente como:



Las diagonal azul se describe como el vector $v + u$, mientras que el rojo se describe como el vector $v - u$. De esta forma, usando lo aprendido en la parte anterior, vemos que:

$$\langle v + u, v - u \rangle = \|v\|^2 - \|u\|^2 = 0$$

ya que en un rombo $\|u\| = \|v\|$.

(1 pts) por nombrar V y $\langle \cdot, \cdot \rangle$, (2 pts) por describir las diagonales de un rombo (dibujo o fórmulas para diagonales), (1 pts) por concluir con lo anterior.

2. (6 puntos) Determine si el siguiente conjunto es un conjunto ortonormal de $\mathbb{R}^3$:

$$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ -\operatorname{sen}(\varphi) \end{pmatrix} \right\}$$

Solution: Verificamos esto caso a caso. Primero, que los vectores son ortogonales:

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle &= -\sin(\theta)\cdot\cos(\theta)\sin(\varphi) + \cos(\theta)\cdot\sin(\theta)\sin(\varphi) + 0\cdot\cos(\varphi) \\
&= 0 \\
\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_3 \rangle &= \cos(\theta)\sin(\varphi)\cdot\cos(\theta)\cos(\varphi) + \sin(\theta)\sin(\varphi)\cdot\sin(\theta)\cos(\varphi) - \cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi) \\
&= \cos(\theta)^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) + \sin^2(\theta)\sin(\varphi)\cos(\varphi) - \cos(\varphi)\sin(\varphi) \\
&= \sin(\varphi)\cos(\varphi) - \cos(\varphi)\sin(\varphi) \\
&= 0 \\
\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle &= -\sin(\theta)\cdot\cos(\theta)\cos(\varphi) + \cos(\theta)\cdot\sin(\theta)\cos(\varphi) + 0\cdot -\sin(\varphi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Lo que nos dice que son ortogonales entre sí. Para ver que son unitarios:

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1 \rangle &= \cos(\theta)^2\sin(\varphi)^2 + \sin(\theta)^2\sin(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2 \\
&= \sin(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2 \\
&= 1 \\
\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2 \rangle &= \sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 \\
&= 1 \\
\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_3 \rangle &= \cos(\theta)^2\cos(\varphi)^2 + \sin(\theta)^2\cos(\theta)^2 + \sin(\varphi)^2 \\
&= \cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Es decir, los vectores son unitarios, y por lo tanto el conjunto es ortonormal. (1 pts) por cada condición.

3. Para esta pregunta considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y + xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) (3 puntos) Determine si f es continua en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

(b) (7 puntos) Determine si f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

(c) (5 puntos) Compute la aproximación del plano tangente de esta función en el punto $(x_0, y_0) = (1, 2)$

Solution:

(a) La f es continua si no estamos en el origen. Para ver si es continua en el origen examinamos el límite usando coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y + xy^2}{x^2+y^2} &= \lim_{r\to 0} \frac{r^3(\cos(\theta)^2 \sin(\theta)) + r^3 \cos(\theta)\sin(\theta)^2}{r^2} \\ &= \lim_{r\to 0} r\cos(\theta)^2\sin(\theta) + \lim_{r\to 0} r\cos(\theta)\sin(\theta)^2 \\ &= 0 \\ &= f(0,0) \end{aligned}$$

Por lo que f si es continua en $\mathbb{R}^2$. (3 pts) todo o nada por determinar continuidad de f.

(b) Calculamos las derivadas parciales de f:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{(2xy + y^2)\cdot(x^2+y^2) - (x^2y + xy^2)\cdot(2x)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{2x^3y + 2xy^3 + x^2y^2 + y^4 - 2x^3y - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{2xy^3 - x^2y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

Por simetría de f:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^4 + 2x^3y - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

(3 pts) por calcular ambas derivadas parciales (argumento de simetría sirve para solo calcular una y no la otra).

Ambas derivadas parciales son continuas en todos lados salvo el origen, y por lo tanto diferenciables en todo $\mathbb{R}^2$, menos el origen. Para ver si es diferenciable en el origen, revisamos para esto si las derivadas parciales existen ahí:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{[(x^2\cdot 0 + x\cdot 0^2)/(x^2+0^2)]-0}{x} \\
&= 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{[(0^2\cdot y + 0\cdot y^2)/(0^2+y^2)]-0}{y} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Entonces existen y las derivadas parciales quedan definidas por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^3 - x^2y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + 2x^3y - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(2 pts) por determinar que las derivadas parciales existen en el origen y valen 0.

Revisamos entonces la definición de diferenciabilidad. Como estas son continuas en todos lados salvo el origen, solo revisamos que pasa en este punto:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left|\frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \lim_{r\to 0}\frac{r^3|\cos(\theta)^2\sin(\theta)+\cos(\theta)\sin(\theta)^2|}{r^3} \\
&= |\cos(\theta)^2\sin(\theta)+\cos(\theta)\sin(\theta)^2|
\end{aligned}$$

Por lo tanto no es diferenciable pues depende de θ. (2 pts) por determinar que f no es diferenciable.

(c) El plano tangente de f en $(1,2)$ está dado por:

$$\begin{aligned}
\Pi_f(x,y) &= f(1,2) + \nabla f(1,2)\cdot(x-1,y-2) \\
&= \frac{6}{5} + \left(\frac{28}{25},\frac{1}{25}\right)\cdot(x-1,y-2) \\
&= \frac{6}{5} + \frac{28}{25}(x-1) + \frac{1}{25}(y-2)
\end{aligned}$$

(2 pts) por saber como se escribe el plano tangente $\Pi_f(x,y)$ en $(1,2)$, (3 pts) por calcularlo correctamente.

4. Considere las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definidas como:

$$f(x,y) = (x-y+1)^2, \quad g(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz \\ y \end{pmatrix}, \quad h(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$

Definimos la función $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como:

$$\phi(x,y) = f(g(h(x,y)))^2$$

(a) (4 puntos) Escriba ϕ de forma explícita y calcule $\nabla\phi$

(b) (8 puntos) Calcule $\nabla\phi$ usando regla de la cadena. Debiese llegar al mismo resultado que en la parte anterior.

(c) (3 puntos) Calcule la derivada direccional de ϕ en el punto $(0,0)$ en la dirección $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)^\top$.

Solution:

(a) Reemplazamos y encontramos la expresión para ϕ:

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= f\left(g(1, x+y, x-y)\right)^2 \\ &= f(x-y, x+y)^2 \\ &= ((x-y)-(x+y)+1)^4 \\ &= (1-2y)^4 \end{aligned}$$

Entonces $\nabla\phi(x,y) = (0, -8(1-2y)^3)$.

(1 pts) por calcular correctamente $g(h(x,y))$, (1 pts) por calcular correctamente $f(g(h(x,y)))$, (1 pts) por calcular $\phi(x,y)$ y (1 pts) por calcular $\nabla\phi$.

(b) En este segmento considerar error de arrastre: desde primer error **por arrastre** considerar 0.25 veces el puntaje que se hubiese obtenido.

La regla de la cadena nos dice:

$$\nabla\phi(x,y) = 2f(g(h(x,y)))\nabla f(g(h(x,y)))^\top Dg(h(x,y))Dh(x,y)$$

(2 pts) por correctamente escribir la regla de la cadena. Puede no poner de inmediato el traspuesto en ∇f.

Calculemos las distintas derivadas:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x-y+1) \\ -2(x-y+1) \end{pmatrix}, \quad Dg(x,y,z) = \begin{bmatrix} z & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Dh(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(2 pts) por calcular correctamente las derivadas de f, g, h.

Reemplazamos cada uno donde corresponda:

$$\begin{aligned}
\nabla f(g(h(x,y)) &= \nabla f\left(g\left(1, x+y, x-y\right)\right) \\
&= \nabla f\left(x-y, x+y\right) \\
&= \begin{pmatrix} 2(-2y+1) \\ -2(-2y+1) \end{pmatrix} \\
Dg(h(x,y)) &= Dg(1, x+y, x-y) \\
&= \begin{bmatrix} x-y & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(2 pts) por evaluar correctamente lo anterior.

Entonces, el gradiente de ϕ corresponde a:

$$\begin{aligned}
\nabla\phi(x,y) &= 2(1-2y)^2 \begin{pmatrix} 2(-2y+1) \\ -2(-2y+1) \end{pmatrix}^\top \begin{bmatrix} x-y & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= 4(1-2y)^2 \begin{pmatrix} 1-2y \\ 2y-1 \end{pmatrix}^\top \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= 4(1-2y)^3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}^\top \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= 4(1-2y)^3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -8(1-2y)^3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(2 pts) por calcular correctamente $\nabla\phi$.

(c)

$$\begin{aligned}
\nabla\phi(0,0)\cdot \boldsymbol{u} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{16}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

(3 pts) Todo o nada por el cálculo de la derivada direccional.

5. (15 puntos) Determine las derivadas parciales de z cuando este es el gráfico de una única función que depende de las variables x, y (es decir $z = g(x, y)$ localmente) y se cumple la ecuación:

$$ze^{xy} + \sin(zy) + xz^2 = 0$$

Verifique que $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 0, 1)$ es un punto en el que se satisfacen las hipótesis del teorema de la función implícita y evalúe las derivadas parciales en dicho punto.

Solution: Calculamos las derivadas parciales de la siguiente forma. Primero, derivamos parcialmente respecto a x:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial z}{\partial x}e^{xy} + zye^{xy} + y\cos(zy)\frac{\partial z}{\partial x} + z^2 + 2xz\frac{\partial z}{\partial x} \\ &= \frac{\partial z}{\partial x}\left(e^{xy} + y\cos(zy) + 2xz\right) + zye^{xy} + z^2 \end{aligned}$$

Despejando, tenemos que:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{zye^{xy} + z^2}{e^{xy} + y\cos(zy) + 2xz}$$

De la misma forma, calculamos la derivada parcial en y:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial z}{\partial y}e^{xy} + zxe^{xy} + y\cos(zy)\frac{\partial z}{\partial y} + z\cos(zy) + 2xz\frac{\partial z}{\partial y} \\ &= \frac{\partial z}{\partial y}(e^{xy} + y\cos(zy) + 2xz) + zxe^{xy} + z\cos(zy) \end{aligned}$$

Obtenemos que:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{zxe^{xy} + z\cos(zy)}{e^{xy} + y\cos(zy) + 2xz}$$

(8 pts) Por el cálculo de las derivadas parciales, de esta forma o directamente con la fórmula del teorema:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$$

Verificamos que el punto dicho satisface las hipótesis del teorema de la función implícita. Primero:

$$F(x_0, y_0, z_0) = (ze^{xy} + \sin(zy) + xz^2)\Big|_{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)} = 1 + 0 - 1 = 0$$

Luego, calculamos la derivada con respecto a z de $F(x, y, z)$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = e^{xy} + y\cos(zy) + 2xz$$

Evaluando esta en el punto a estudiar vemos que:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 1 + 0 - 2 = -1 \neq 0$$

por lo tanto cumple las hipótesis. (4 pts) Por verificar las hipótesis corresponden para este punto. Finalmente, evaluando las derivadas parciales en dicho punto tenemos que:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

(3 pts) Por dar el valor de las derivadas parciales en dicho punto.