Pontificia Universidad Católica de Chile
Instituto de Ingeniería Matemática y Computacional
IMT2230 - Algebra lineal avanzada y modelamiento

Tarea N*1

23 de agosto de 2023

2º semestre 2023 - Profesor Cristobal Rojas - Ayudante Pablo Rademacher

Nicolas Alejandro Ortiz Munoz - 22657517

Respuestas

1.a: Muestre que $rank(A \cdot A^T) = rank(A^T \cdot A) = rank(A)$

Se va a demostrar que $rank(A) = rank(A^T \cdot A)$ y que $rank(A) = rank(A \cdot A^T)$

Se va partir demostrando que $rank(A) = rank(A^T \cdot A)$, para ello se utilizara el teorema de rango-nulidad.

Tenemos que:

$$rank(A) + null(A) = n$$

$$rank(A^T \cdot A) + null(A^T \cdot A) = n$$

1) Primero vamos a verificar que el $null(A) \subseteq null(A^T \cdot A)$

Sea $x \in null(A) \implies Ax = 0$ (Por definicion, son todos los elementos de A que van al elemento 0)

$$\iff Ax = 0 / \cdot A^T$$

$$\iff A^T \cdot Ax = 0$$

$$\iff (A^T A)x = 0$$

$$\therefore x \in null(A^T \cdot A)$$

2) Ahora comprobamos para $null(A^T \cdot A) \subseteq null(A)$

$$\text{Sea } x \in null(A^T \cdot A) \implies (A^T \cdot A)x = 0$$

$$(A^T \cdot A)x = 0 \ / \cdot x^T \text{ (Paso visto en la ayudantia)}$$

$$x^T \cdot A^T \cdot A \cdot x = 0 \text{ (Agrupamos los terminos)}$$

$$(Ax)^T \cdot (Ax) = 0 \text{ (Por definicion : } (Ax)^T \cdot (Ax) =< A, A >)$$

$$< A, A >= 0$$

$$|Ax|^2 = 0 \iff Ax = 0 \text{ (Por propiedades de la norma)}$$

$$\therefore x \in null(A)$$

$$\implies null(A) = null(A^T \cdot A)$$

Por teorema de rango-nulidad, obtenemos que $rank(A) = rank(A^T \cdot A) = n$

Ahora demostramos para el caso $rank(A) = rank(A \cdot A^T)$, para ello tomaremos $A = A^T$

$$rank(A^T) = rank((A^T)^T \cdot A^T)$$

$rank(A^T) = rank(A \cdot A^T)$ (Por consecuencia del teorema fundamental del rango, $rank(A) = rank(A^T)$)

Quedando lo siguiente: $rank(A) = rank(A \cdot A^T)$

Finalmente nos queda que $rank(A \cdot A^T) = rank(A^T \cdot A) = rank(A)$, mostrando lo solicitado.

1.b: Suponga que A y B son ambas nxm. Muestre que $rank(A+B) \leq rank(A) + rank(B)$

Tenemos que $A = col(A) = span(A)$ y $B = col(B) = span(B)$ con $A = (a_1, \ldots, a_m)$ y $B = (b_1, \ldots, b_m)$ las columnas de A y B.

Definimos $A + B$ como la suma de cada componente, quedandonos que $A + B = (a_1 + b_1, \ldots, a_m + b_m) = span(a_1 + b_1, \ldots, a_m + b_m)$

Finalmente lo dejamos de la siguiente forma: $A + B = span(a_1 + b_1, \ldots, a_m + b_m)$

Vamos a usar una cota superior: $\leq span(a_1, \ldots, a_n)) + span(b_n, \ldots, b_n)$ (Es una cota arbitraria, pero deberiamos verificar si es el mayor valor, es decir, que $span(a_1 + b_1, \ldots, a_m + b_m) \subset span(a_1, \ldots, a_m) + span(b_1, \ldots, b_m)$)

1) Sea $x \in span(a_1 + b_1, \ldots, a_m + b_m) \implies x = \gamma_1(a_1 + b_1) + \ldots + \gamma_m(a_m + b_m), \forall \gamma \in \mathbb{R}$

$\iff \gamma_1 a_1 + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_m a_m + \gamma_m b_m$ (Agrupamos los terminos a y b)

$\iff (\gamma_1 a_1 + \ldots + \gamma_m a_m) + (\gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_m b_m)$ (Volvemos a escribir los terminos como una combinacion lineal)

$\iff span(a_1, \ldots, a_m) + span(b_1, \ldots, b_m) \in (span(a_1, \ldots, a_m) + span(b_1, \ldots, b_m))$

Con lo anterior sabemos que $span(a_1, \ldots, a_m) + span(b_1, \ldots, b_m)$ es la mayor cota al subconjunto $span(a_1 + b_1, \ldots, a_m + b_m)$

Finalmente acotamos la expresion, quedando que: $span(a_1 + b_1, \ldots, a_m + b_m) \leq span(a_1, \ldots, a_n)) + span(b_n, \ldots, b_n)$ (Aplicamos la funcion dim())

$\iff dim(span(a_1 + b_1, \ldots, a_m + b_m)) \leq dim(span(a_1, \ldots, a_n)) + dim(span(b_n, \ldots, b_n))$

$\implies rank(A + B) \leq rank(A) + rank(B)$ (Usando definicion de rank obtenemos la expresion)

Con lo anterior la proposicion queda demostrada.

Suponga que A es de $m \times r$ y que B es de $r \times n$.

1.c.I: Muestre que $Rank(A \cdot B) \leq \text{mín}(rank(a), rank(b))$

Para partir la demostracion partimos de la expresion $rank(A \cdot B) \leq rank(A)$, en especifico ver si $rank(A \cdot B) \subseteq rank(A)$.

$$1)\text{ Sea } x \in col(A \cdot B) \implies x = (AB)x$$

$\iff x = A(Bx)$ (Notamos que hay valores generados por las columnas de A al multiplicarse por (Bx))

$$\therefore x \in col(A)$$

(Al $x \in col(A)$, eso significa que $col(AB) \subseteq col(A)$)

Las columnas de $col(AB) = span(AB_1, \ldots, AB_n)$ y $col(A) = span(A_1, \ldots, A_n)$

Las remplazamos en lo obtenido en la parte 1), obteniendo que:

$span(AB) \leq span(A)\ /\ \cdot dim()$ (Acotamos por el mayor subespacio)

$$\iff dim(span(AB)) \leq dim(span(A))$$

$$\implies rank(AB) \leq rank(A)$$

Ahora tratemos de obtener que $rank(AB) \leq rank(B)$

Para ello vamos usar $rank(AB)^T \leq rank(B)^T$

$$\iff rank(B^T \cdot A^T) \leq rank(B^T)$$

$\iff rank(B^T \cdot A^T) \leq rank(B^T) = rank(B)$ (Consecuencia del teorema del rango)

$\iff rank(B^T \cdot A^T) = rank(AB) \leq rank(B)$ (Consecuencia del teorema del rango)

$$\implies rank(A \cdot B) \leq rank(B)$$

Finalmente obtenemos que la cota superior debe ser el menor valor, es decir, $min(rank(A), rank(B))$. Esto tambien viene de que el menor valor termina acotando las col() o fil() generadas por el otro exponente de mayor valor.

1.c.II: Muestre que si rank$(A) =$ **rank**$(B) = r$**, entonces rank**$(A \cdot B) = r$

Por enunciado sabemos que el $rank(A) = r$ y $rank(B) = r$, ademas tambien existe la siguiente definicion $(\text{Rank}(A \cdot B) \leq \text{mín}(\text{Rank}(A), \text{Rank}(B)))$.

Remplazando en la definicion, obtenemos que:

$$rank(A \cdot B) = min(rank(A), rank(B)) \text{ (Remplazando)}$$

$$rank(A \cdot B) = min(r, r)$$

$$rank(A \cdot B) = r$$

Esto ocurre debido que el $rank(A) = rank(B) = r$, va hacer que la multiplicacion entre $A \cdot B$ genere un espacion con dimension r.