Interrogación 1

Cada pregunta vale 2 puntos. ~~Se to las mejores 3~~ la nota se calcula como $N = 1 + P$, con P la cantidad de puntos obtenidos.

1. Sean A y B matrices de $m \times r$ y $r \times n$, respectivamente. Suponga que B es de rango r.

   a) ¿A qué espacio corresponde $Col(B)$? ¿Hay vectores de $\mathbb{R}^r$ que no estén en este espacio?
   0,6 puntos

   b) Muestre que para todo $v \in Col(A)$, existe $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $v = ABu$.
   0,7 puntos

   c) Aplique *b)* para demostrar que $rank(AB) = rank(A)$.
   0,7 puntos

   Solución:

   a) Al ser B de rango r, luego la dimensión de su espacio columna es r. Como además $Col(B) \subseteq \mathbb{R}^r$ y el único espacio vectorial de dimensión r en $\mathbb{R}^r$ es si mismo, entonces el espacio columna es todo el espacio.
   De esta forma, no hay ningun vector en $\mathbb{R}^r$ que no esté en el espacio columna de B, por lo que además podemos decir que la transformación lineal representada por B es sobreyectiva.

   b) Como $v \in Col(A)$, luego existe un vector $w \in \mathbb{R}^r$ tal que $v = Aw$. Pero como $\mathbb{R}^r = Col(B)$ (por el item anterior), entonces existe otro vector $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $w = Bu$. Juntando todo, concluimos que $v = Aw = ABu$. $\square$

   c) Del item anterior se puede concluir que $Col(A) \subseteq Col(AB)$. Además, se puede demostrar la inclusión contraria ($Col(AB) \subseteq Col(A)$), considerando que si $x \in Col(AB)$, luego existe $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $x = (AB)u = A(Bu)$, por lo que también tendremos que $x \in Col(A)$.
   Podemos concluir que $Col(AB) = Col(A)$, luego sus dimensiones también serán iguales. Así, $rank(AB) = rank(A)$. $\square$

2. Sean A, B y C matrices tales que $C = AB$. Suponga que A tiene r columnas, todas l.i., y sea n el número de columnas de B (y por lo tanto también de C).

   a) Pruebe que si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son n coeficientes, entonces

   $$\alpha_1 Col_1(C) + \cdots + \alpha_n Col_n(C) = 0 \iff \alpha_1 Col_1(B) + \cdots + \alpha_n Col_n(B) \in Null(A).$$

   1 punto

b) Deduzca que las columnas de B son l.i. si y solo si las columnas de C lo son.
1 punto

Solución:

a) Al realizar el producto matriz-vector, podemos ver que

$$C = AB = [ACol_1(B) \quad \dots \quad ACol_n(B)],$$

y en general $Col_i(C) = ACol_i(B)$. Usando esta igualdad, podemos ver que

$$\begin{aligned} & \alpha_1 Col_1(C) + \cdots + \alpha_n Col_n(C) = 0 \\ \iff \quad & \alpha_1 ACol_1(B) + \cdots + \alpha_n ACol_n(B) = 0 \\ \iff \quad & A(\alpha_1 Col_1(B) + \cdots + \alpha_n Col_n(B)) = 0 \\ \iff \quad & \alpha_1 Col_1(B) + \cdots + \alpha_n Col_n(B) \in Null(A) \end{aligned}$$

lo que demuestra lo pedido. □

b) Notemos que, como A tiene r columnas todas l.i., entonces la transformación lineal que representa es inyectiva. Esto es equivalente a que $Null(A) = \{0\}$. Luego, la equivalencia anterior se puede expresar como

$$\alpha_1 Col_1(C) + \cdots + \alpha_n Col_n(C) = 0 \iff \alpha_1 Col_1(B) + \cdots + \alpha_n Col_n(B) = 0.$$

Si B tuviera columnas l.i., entonces la expresión de la derecha puede ocurrir si y solo si $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, asi que usando transitividad concluimos que

$$\alpha_1 Col_1(C) + \cdots + \alpha_n Col_n(C) = 0 \iff \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

lo que quiere decir que las columnas de C también son l.i.. La otra implicancia se demuestra de la misma forma. □

3. Se tienen los siguientes datos $D = \{(1, 2), (0, 1), (-1, 0)\}$, y se quiere encontrar la recta de mínimos cuadrados $y = \alpha \cdot t + \beta$ asociada.

a) Defina $x = (\alpha, \beta)$ y encuentre la matriz A y el vector b que hacen que el problema sea equivalente a encontrar la mejor solución del sistema $Ax = b$.
0,6 puntos

b) Encuentre la factorización QR de A.
1 punto

c) Aplique la factorización QR de A para resolver el problema.
0,4 puntos

Solución:

a) La matriz de diseño del problema esta dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

mientras que el vector de observaciones viene dado por

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

luego, el problema de encontrar la recta de mínimos cuadrados equivale a encontrar los coeficientes α, β que entreguen la mejor solución del sistema $Ax = b$.

b) Recordemos que las columnas de Q contienen una base ortonormal de $Col(A)$. Para encontrarla, usamos el algoritmo de Gram-Schmidt, con

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando el algoritmo, obtenemos que

$$q_1 = \frac{1}{\|a_1\|} a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado,

$$\hat{q_2} = a_2 - \langle q_1, a_2 \rangle q_1 = a_2 - 0 \cdot q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y luego

$$q_2 = \frac{1}{\|\hat{q_2}\|} \hat{q_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, obtenemos que

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Para obtener R recordamos que $R = Q^T A$. Realizando el cálculo, obtenemos que

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

c) Como queremos resolver el sistema $Ax = b$, usamos la factorización QR para proyectar b en el espacio columna de A. Esta proyección está dada por $x = R^{-1}Q^Tb$, por lo que realizando los cálculos correspondientes llegamos a la conclusión de que

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

Finalmente, tenemos que la recta de mínimos cuadrados asociada a los datos es $y = t + 1$.

4. Considere la siguiente matriz:

$$A = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se sabe que el espacio unidimensional que mejor aproxima al conjunto $\{(3\sqrt{2}, \sqrt{2}), (4\sqrt{2}, 0)\}$ es $V = SPAN\{(1, 1)\}$.

a) Encuentre v_1, el primer vector singular por la derecha de A.
0,5 puntos

b) Encuentre u_1, el primer vector singular por la izquierda de A.
0,5 puntos

c) Calcule la matriz B de rango uno que mejor aproxima A.
0,5 puntos

d) Encuentre el primer valor singular de B^TB.
0,5 puntos

Solución:

a) El primer vector singular v_1 es el vector unitario que genera el espacio que mejor aproxima el espacio fila de A. Observando que $Fil(A) = V$, entonce obtenemos que $v_1 \in V$, y para obtenerlo basta con normalizar el generador de V. Así,

$$v_1 = \frac{1}{\|(1, 1)\|} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Recordemos que $u_1 = \frac{1}{\sigma_1} Av_1$, donde $\sigma_1 = \|Av_1\|$ es el primer valor singular de A. Realizando los cálculos correspondientes, llegamos a que

$$u_1 = \frac{1}{4\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y $\sigma_1 = 4\sqrt{3}$.

c) Como se mostró en clases, la matriz B de rango uno que mejor aproxima A está dada por

$$B = u_1\sigma_1v_1^T = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} 4\sqrt{3} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = 2\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Observemos que

$$B^T B = (u_1 \sigma_1 v_1^T)^T u_1 \sigma_1 v_1^T = v_1 \sigma_1 u_1^T u_1 \sigma_1 v_1^T = v_1 \sigma_1^2 v_1^T,$$

donde usamos que u_1 es unitario (luego $0 = \|u_1\|^2 = u_1^T u_1$) y que σ_1 es un escalar. Así, podemos ver que $B^T B$ es de rango uno, donde σ_1^2 es su valor singular.