PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
ÁLGEBRA LINEAL AVANZADA Y MODELAMIENTO- IMT2230
SEGUNDO SEMESTRE 2023

Guía de Ejercicios – 2

Profesor: Cristóbal Rojas

Ayudante: Pablo Rademacher

P 1. Aproximaciones de rango 1.

a) Considere la siguiente matriz:

$$A = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se sabe que el espacio unidimensional que mejor aproxima al conjunto $\{(3\sqrt{2}, \sqrt{2}), (4\sqrt{2}, 0)\}$ es $V = SPAN\{(1,1)\}$.

i) Encuentre v_1, el primer vector singular por la derecha de A.

ii) Encuentre u_1, el primer vector singular por la izquierda de A.

iii) Calcule la matriz B de rango uno que mejor aproxima A.

iv) Encuentre el primer valor singular de $B^T B$.

b) Sea A un matriz en $\mathbb{R}^{n\times m}$.

i) Muestre que si $v \in \mathbb{R}^m$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ son tales que

$$A^T Ax = \lambda x,$$

entonces $\|Ax\| = \sqrt{\lambda}$.

ii) Muestre que si σ_1 es el primer valor singular de A, entonces un vector de v de norma 1 es el primer vector singular de A por la decha si y solo si:

$$v \in \text{Null}(A^T A - \sigma_1^2 I_m),$$

donde I_m es la matriz indentidad en $\mathbb{R}^{m\times m}$.

iii) Si se sabe que el primer valor singular de A es $\sigma_1 = 2$ donde

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

use la parte ii) para encontrar v_1.

iv) Para la matriz A de la parte anterior, encuentre la matriz de rango 1 que mejor la aproxima.

v) Para la matriz A de la parte anterior, encuentre la matriz de rango 1 que mejor aproxima a $B = A^T A$.

P 2. Descomposición SVD.

a) Sea Q un matriz cuyas columnas son ortogonales. ¿Es cierto que $\|AQ\|_F = \|A\|_F$?

b) Usando su intuición y entendimiento, encuentre la SVD de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Sea A cuyas columnas son ortogonales entre si. ¿Cual es su SVD? ¿Y si sus columnas fueran ortonormales?

d) Si se sabe que el primer valor singular de A es $\sigma_1 = 2$ donde

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

use la pregunta **P 1** parte b)-ii) para encontrar la descomposición SVD de A.

d) Suponga que conoce la SVD de una matriz $A = U\Sigma V^T$. Encuentre la SVD de las matrices A^T, A^TA y AA^T. Comente.

e) Use el item anterior para encontrar la mejor aproximación de rango k de las matrices A^T, A^TA y AA^T.

f) Explique porqué si una matriz cuadrada es invertible, entonces ninguno de sus valores singulares puede ser cero.

g) ¿Cual es la SVD de la matriz $A = xy^T$, con $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$?

h) Encuentre la mejor aproximación B de rango 2 de las siguientes matrices. Exprese esta aproximación como el producto $B = GH^T$, donde G y H son matrices de dos columnas.

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, cuya SVD esta dada por las matrices:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{0{,}5} & 0 \\ \sqrt{0{,}8} & 0 & \sqrt{0{,}2} \\ 0 & -\sqrt{0{,}5} & 0 \\ \sqrt{0{,}2} & 0 & -\sqrt{0{,}8} \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, V^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{0{,}5} & 0 & -\sqrt{0{,}5} \\ \sqrt{0{,}5} & 0 & -\sqrt{0{,}5} \end{bmatrix}$$

- $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, cuya SVD esta dada por las matrices:

$$U = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i) Sean S y T matrices del mismo tamaño, tales que su primer valor singular es s y t, respectivamente. Si r es el primer valor singular de $S+T$, demuestre que $r \leq s+t$.