Pontificia Universidad Católica de Chile
IMT2220 - Calculo para ciencias de datos

Tarea N*3

25 de octubre de 2023

2º semestre 2023 - Joaquin Valenzuela

22657517

PREGUNTA 1:

Para demostrar el operador laplaciano, primero vamos a encontrar las derivadas parciales de primer orden de la funcion u

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} - r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\theta$$

Con el siguiente diagrama obtenemos las derivadas parciales de primer orden de r y θ.

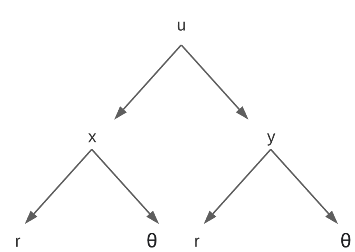

Figura 1: Representacion de la funcion u respecto a sus variables

Calcumaos la derivada de segundo orden respecto a r

$$\frac{\partial u^2}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta)$$

$$= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial u}{\partial x}) + \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial u}{\partial y}) \qquad \text{(Usando regla de la cadena)}$$

$$= \cos\theta(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial r}) + \sin\theta(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}) \qquad \text{(Factorizando)}$$

$$= \cos\theta(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\sin\theta) + \sin\theta(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin\theta)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\theta \qquad \text{(Usando Teorema de Clairaut)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\theta$$

Calculamos la derivada parcial de segundo orden respecto a θ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = \frac{\partial}{\partial\theta}(-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}) \qquad \text{(Regla del producto)}$$

$$= r(-(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial\theta})) + (-\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y} + \cos\theta(\frac{\partial u^2}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial\theta})))$$

$$= r(-\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + r\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - r\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} - \sin\theta\frac{\partial u}{\partial y} - r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + r\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$$

Usando el Teorema de Clairaut

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = -r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2r^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y} + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Tenemos que $\Delta_{r,\theta}u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}\cos^2\theta + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2})$ y remplazando por los valores obtenidos en la matraca.

$$\Delta_{r,\theta}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\theta + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta + \frac{1}{r^2}(-r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2r^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y} + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$$

$$\Delta_{r,\theta}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin^2\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\theta \qquad \text{(Factorizando)}$$

$$\Delta_{r,\theta}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \qquad \text{(Por identidad pitagorica)}$$

$$\Delta_{r,\theta}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\Delta_{r,\theta}u = \Delta u \qquad \text{(Remplazando por definicion)}$$

Finalmente obtenemos que la expresion anterior son equivalentes, es decir, el operador laplasiano en polares es equivalente en cartesianas, lo cual demuestra la expresion pedida.
Debido que podemos llegar del operador laplaciano en cartesianas a la expresion en polares.

Parte a)

Ahora determinamos el jacobiano de la funcion: $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$

Ahora calculamos cada parcial, teniendo que:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3x^2}{2} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3y^2}{2}$

$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{3x^2}{2} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{3y^2}{2}$

Remplazando los valores en la jacobiana y calculando su determinante:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{3x^2}{2} & \frac{3y^2}{2} \\ \\ \frac{3x^2}{2} & -\frac{3y^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$det|J| = \frac{3x^2}{2} \cdot -\frac{3y^2}{2} - (\frac{3x^2}{2} \cdot \frac{3y^2}{2})$$

$$det|J| = -\frac{9x^2y^2}{4} - \frac{9x^2y^2}{4}$$

$$det|J| = -\frac{18x^2y^2}{4}$$

$$det|J| = -\frac{9x^2y^2}{2}$$

Para que exista la inversa de la funcion, se debe cumplir: $det|J| = 0$ y esto sucede cuando:

$x = 0 \lor y = 0$ Entonces para que la inversa de las funciones exista: $x \neq 0 \lor y \neq 0$

Parte c)

Primero vamos a determinar el J de la funcion:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3r^2(\cos(\theta)^3 + \sin(\theta)^3)}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{r^3(3\cos(\theta)\sin(\theta)^2 - 3\cos(\theta)^2\sin(\theta))}{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{3r^2(\cos(\theta)^3 - \sin(\theta)^3)}{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{r^3(3\cos(\theta)\sin(\theta)^2 + 3\cos(\theta)^2\sin(\theta))}{2}$$

Obteniendo que la matriz jacobiana es:

$$J == \begin{bmatrix} \frac{3r^2(\cos(\theta)^3 + \sin(\theta)^3)}{2} & \frac{r^3(3\cos(\theta)\sin(\theta)^2 - 3\cos(\theta)^2\sin(\theta))}{2} \\ \frac{3r^2(\cos(\theta)^3 - \sin(\theta)^3)}{2} & -\frac{r^3(3\cos(\theta)\sin(\theta)^2 + 3\cos(\theta)^2\sin(\theta))}{2} \end{bmatrix}$$

Sea la funcion $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)\ln(1+x^2+y^2+z^2)$ vamos a calcular $\nabla f(x,y,z) = 0$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x\ln(x^2+y^2+z^2+1) + \dfrac{2x(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2+1} \\ 2y\ln(x^2+y^2+z^2+1) + \dfrac{2y(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2+1} \\ 2z\ln(x^2+y^2+z^2+1) + \dfrac{2z(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2+1} \end{bmatrix}$$

Una vez encontrado el gradiente de la funcion, vamos a buscar los valores de x, y, z tal que $\nabla f(x,y,z) = 0$, obteniendo las siguientes ecuaciones:

$$2x(\ln(x^2+y^2+z^2+1) + \frac{(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2+1}) = 0$$
$$2y(\ln(x^2+y^2+z^2+1) + \frac{(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2+1}) = 0$$
$$2z(\ln(x^2+y^2+z^2+1) + \frac{(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2+1}) = 0$$

Notemos que la solucion trivial la obtenemos cuando $x = y = z = 0$ .Sin embargo, tenemos que analizar la expresion $\ln(x^2+y^2+z^2+1) + \dfrac{(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2+1} = 0$

Lo que se reduce a analizar la expresion: $x^2+y^2+z^2 = 0$, obteniendo las expresiones que seran analizadas de forma grafica.

$$x = \pm\sqrt{-y^2-z^2}$$
$$y = \pm\sqrt{-x^2-z^2}$$
$$z = \pm\sqrt{-x^2-y^2}$$

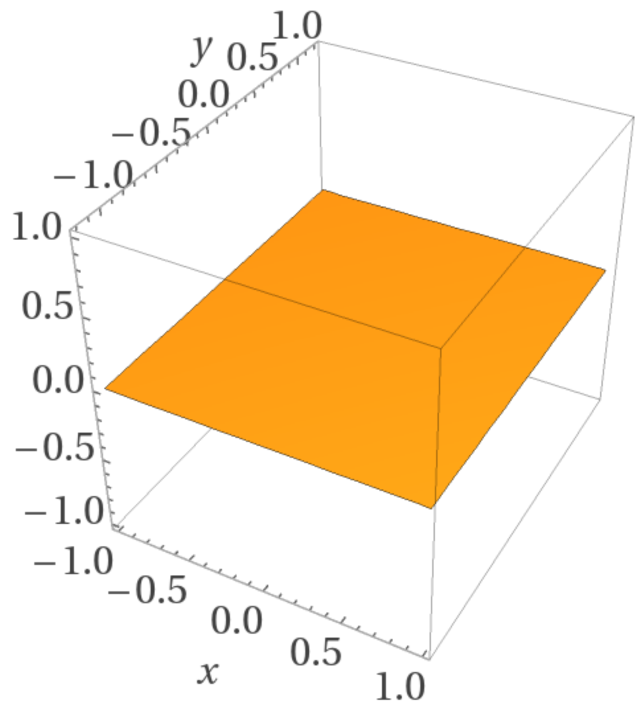

Figura 2: Grafica real de x, y e z; fuente: wolfram alpha

A la final obtenemos que las unicas soluciones reales que satisfacen al sistema son: $x = y = z = 0$ debido que las otras soluciones no pertenecen al conjunto de los $\mathbb{R}$.

Ahora determinaremos si es un maximo, minino o silla encontrando la matriz hessiana de $f(x, y, z)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1) + \frac{8x^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} + \frac{2(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} - \frac{4x^2(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1) + \frac{8y^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} + \frac{2(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} - \frac{4y^2(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2\ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1) + \frac{8z^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} + \frac{2(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} - \frac{4z^2(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2}$$

Por teorema de Clairaut tenemos que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{4xy(x^2+y^2+z^2+2)}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{4xz(x^2+y^2+z^2+2)}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{4yz(x^2+y^2+z^2+2)}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$$

Con lo anterior podemos construir la matriz hessiana de $f(x, y, z)$ y evaluarla en el punto critico.

$$Hess(0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A la final en punto $(0,0,0)$ no puede ser determinado debido que el $det|hessf(0,0,0)| = 0$ y segun el criterio de la segunda derivada parcial, no tenemos la suficiente informacion para clasificar el punto critico.

Parte a)

Para escribir la expresión L en términos de θ, X, y y, primero debemos considerar que:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \dots & \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \qquad \theta = [a, b]^T \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad m = \text{Número de observaciones}$$

Si hacemos el producto punto entre X y θ, obtenemos que:

$$X\theta = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \dots & \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = ax_1 + b + x_2 + b + \dots + ax_n + b = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b)$$

Obteniendo que la expresión hasta el momento se expresa como: $(X\theta - y)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i\theta - y_i)^2$

Finalmente, agregamos el factor de escala $\frac{1}{2}$, obteniendo la expresión:

$$L(\theta, X, y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i\theta - y_i)^2.$$

Parte b)

Para calcular los minimos, maximos o sillas, primero vamos a calcular el ∇L

$$\nabla L = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial a} \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial b} \end{bmatrix}$$

Ademas debemos considerar que la funcion L puede ser expresada como:

$L(\theta, X, y) = \frac{1}{2}((X\theta - y)^T(X\theta - y))$ (Esto genera un producto punto o algo de 1x1)

$L(\theta, X, y) = \frac{1}{2}(\theta^T X^T X\theta - 2\theta^T X^T y + y^T y)$ (Expandiendo L, hint del profesor)

Ahora debemos calcular el gradiente de la funcion L

$$\nabla L(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\theta^T X^T X\theta - 2\theta^T X^T y + y^T y)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\big([1,1]^T X^T X\theta + \theta^T X[1,1] - 2[1,1]^T X^T y + 0\big)$$

$$= \frac{1}{2}\big([1,1]^T X^T X\theta + \theta^T X[1,1] - 2[1,1]^T X^T y\big)$$

$$= \frac{1}{2}\big[X^T X\theta + \theta^T X[1,1] - 2X^T y\big)$$

$$= \frac{1}{2}\big[X^T X\theta + X^T X\theta - 2X^T y\big)$$

$$= X^T X\theta - X^T y$$

$$\nabla L(\theta) = X^T X\theta - X^T y$$

Ahora con el valor del gradiente de la funcion L(θ)

$\nabla L(\theta) = X^T X\theta - X^T y = 0$

$X^T X\theta = X^T y \quad /(X^T X)^{-1}$ (Matriz cuadrada)

$\theta = (X^T X)^{-1} X^T y$ (Valor que minimiza la funcion L(θ))

Finalmente el valor que minimiza L, o que se trata de un minimo local es $\theta = (X^T X)^{-1} X^T y$

Parte c)

Ahora con el valor de θ remplazamos los datos de la siguiente forma:

```
x = data['x'].values
y = data['y'].values

X = np.column_stack((np.ones(len(x)), x))

XtX = np.dot(X.T, X)
Xty = np.dot(X.T, y)
theta = np.linalg.solve(XtX, Xty)
```

Obteniendo que el valor optimo de θ es: 1.07351838 -3.05416899

Si graficamos los valores obtenidos tenemos que la recta que mejor separa los datos es:

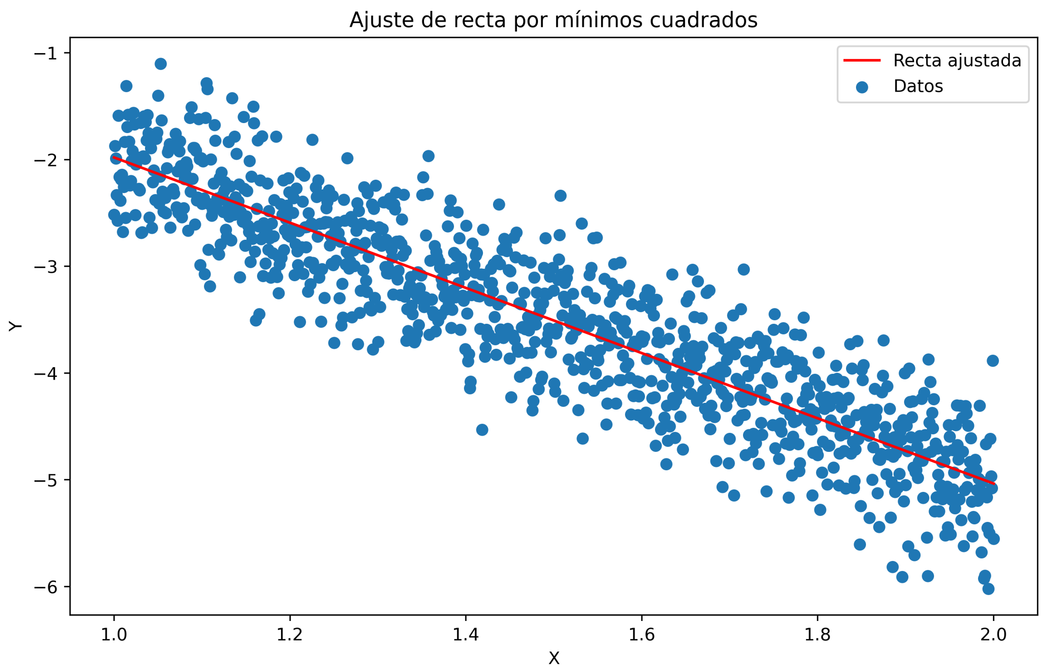

Figura 3: Grafica de la recta con los valores de θ