PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
CÁLCULO PARA CIENCIA DE DATOS: IMT2220
PROFESOR: JOAQUÍN VALENZUELA
AYUDANTES: DIEGO RODRÍGUEZ (DRODRGUEZ@UC.CL) Y
FRANCISCA MUÑOZ (FMUR@UC.CL)

Ayudantía 11
REPASO

Problema 1

Evalúe la siguiente integral doble:

$$\iint_R (x - 3y^2) dA$$

Con $R = \{(x, y)|0 \le x \le 1, 1 \le y \le 2\}$ Luego compare el resultado obtenido con una aproximación realizada utilizando la regla del punto medio, con $m = n = 2$.

Problema 2

Evalúe la integral

$$\iint_R y \cdot sen(xy) dA$$

con $R = [1, 2] \times [0, \pi]$

Problema 3

Use el cambio de variable $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ para evaluar la intregral $\iint_R ydA$, donde R es la región acotada por el eje x y las parábolas $y^2 = 4 - 4x$,y $y^2 = 4 + 4x$, con $y \ge 0$.

Problema 4

Evalúe la integral

$$\iint_R e^{\frac{x+y}{x-y}} dA$$

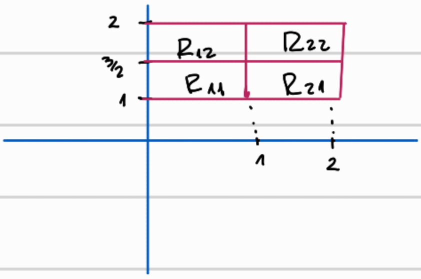
donde R es la región trapezoidal de vértices $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$, $(0, -1)$.

utilizando Fobini

$$\int_0^2\int_1^2 (x-3y^2)\,dy\,dx = \int_0^2 \left[xy-y^3\right]_{y=1}^{y=2} dx$$
$$= \int_0^2 (x-7)\,dx = \frac{x^2}{2} - 7x \Big|_0^2 = -12 \quad \Big]\ 1$$

$$\int_1^2\int_0^2 (x-3y^2)\,dx\,dy = \int_1^2 \frac{x^2}{2} - 3xy^2 \Big|_0^2 \, dy$$
$$= \int_1^2 (2-6y^2)\,dx = 2y - 2y^3 \Big|_1^2 = -12 \quad \Big\}\ 2$$

Parte 2



evaluamos $f(x,y) = x - 3y^2$ en los centros

$\bar{x}_1 = 1/2$, $\bar{x}_2 = \frac{3}{2}$, $\bar{y}_1 = \frac{5}{4}$, $\bar{y}_2 = \frac{7}{4}$ $\quad \Delta A = \frac{1}{2}$

$$\iint_R (x-3y^2)\,dA = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\,\Delta A$$
$$= f(1/2, 5/4)\cdot\frac{1}{2} + f(1/2, 7/4)\cdot\frac{1}{2} + f(3/2, 5/4)\cdot\frac{1}{2} + f(3/2, 7/4)\cdot\frac{1}{2}$$
$$= -\frac{67}{16}\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{-139}{16}\right)\cdot\frac{1}{2} + \left(-\frac{51}{16}\cdot\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{-123}{16}\right)\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \frac{-95}{8} = \underline{-11{,}875} \quad \rightarrow -12$$

Problema 2

Evalúe la integral

$$\iint_R y \cdot sen(xy)\, dA$$

con $R = [1,2] \times [0,\pi]$

Sol 1: integrar primero con respecto a x

$$\int_0^{\pi}\int_1^2 y\,sen(xy)\,dx\,dy = \int_0^{\pi}\left[-\cos(xy)\right]_{x=1}^{x=2} dy$$

$$= \int_0^{\pi} (-\cos(2y) + \cos(y))\,dy$$

$$= -\frac{1}{2} sen\,2y + sen\,y \Big|_0^{\pi}$$

$$= 0$$

Sol 2: integrar primero con respecto a y

$$\int_1^2\int_0^{\pi} y \cdot sen(xy)\,dy\,dx$$

por partes $u = y$ $dv = sen(xy)dy$

$du = dy$ $v = -\frac{\cos(xy)}{x}$

$$\int_0^{\pi} y\,sen(xy)\,dy = \frac{-y\cos(xy)}{x}\Big|_{y=0}^{y=\pi} + \frac{1}{x}\int_0^{\pi}\cos(xy)\,dy$$

$$= -\frac{\pi\cos\pi x}{x} + \frac{1}{x^2}(sen\,xy)_{y=0}^{y=\pi}$$

$$= -\frac{\pi\cos\pi x}{x} + \frac{sen\,\pi x}{x^2}$$

se integra el primer término por partes $u = -1/x$ $dv = \pi\cdot\cos(\pi x)\,dx$ $du = \frac{dx}{x^2}$ $v = sen\,\pi x$

$$\int\left(-\frac{\pi\cos(\pi x)}{x}\right)dx = -\frac{sen(\pi x)}{x} - \int\frac{sen(\pi y)}{x^2}dx$$

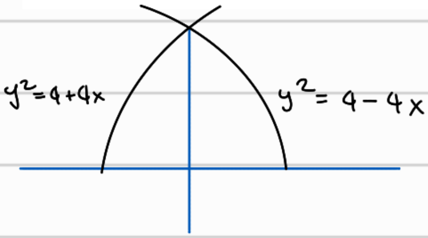
$$\int\left(-\frac{\pi\cos\pi x}{x} + \frac{sen\,\pi x}{x^2}\right)dx = -\frac{sen\,\pi x}{x}$$

$$\int_1^2\int_0^{\pi} y\,sen(xy)\,dy\,dx = -\frac{sen\,\pi x}{x}\Big|_1^2$$

$$= -\frac{sen\,2\pi}{2} + sen\,\pi = 0$$

Problema 3

Use el cambio de variable $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ para evaluar la intregral $\iint_R y dA$, donde R es la región acotada por el eje x y las parábolas $y^2 = 4 - 4x$,y $y^2 = 4 + 4x$, con $y \geq 0$.



utilizamos el cambio de variable

$x = u^2 - v^2, \qquad y = 2uv$

$x = 1 - \frac{y^2}{4} \longrightarrow u^2 - v^2 = 1 - u^2v^2 \quad (1)$

$x = \frac{y^2}{4} - 1 = u^2 - v^2 \longrightarrow u^2 - v^2 = u^2v^2 - 1 \quad (2)$

$y = 0 \longrightarrow 2uv = 0 \quad (3)$

$y \geq 0 \qquad uv \geq 0$

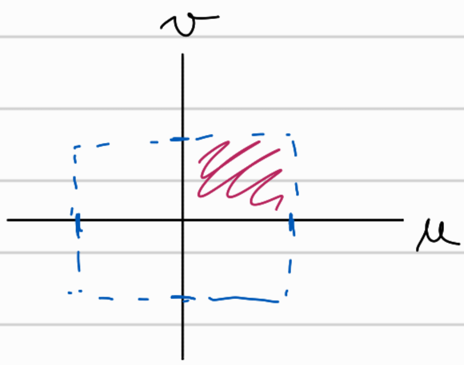
(1) $u^2 - v^2 + u^2v^2 - 1 = 0$

$u = \pm 1 \qquad v = \pm 1$

(2) $u^2 - v^2 - u^2v^2 + 1 = 0$

$u = \pm 1 \qquad v = \pm 1$

(3) $uv \geq 0$



Vemos el jacobiano

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2 > 0$$

$$\iint_R y\, dA = \iint 2uv\, 4(u^2+v^2)\, du\, dv$$

$$= 8 \int_0^1 \int_0^1 u^3 v + u v^3 \, du\, dv = 8 \int_0^1 \left[\frac{1}{4} u^4 v + \frac{1}{2} u^2 v^3\right]_{u=0}^{u=1} dv$$

$$= \int_0^1 (2v + 4v^3)\, dv = \left(v^2 + v^4\right]_0^1 = 2.$$

Problema 4

Evalúe la integral

$$\iint_R e^{\frac{x+y}{x-y}}\, dA$$

donde R es la región trapezoidal de vértices $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$, $(0,-1)$.

Integrar $e^{\frac{x+y}{x-y}}$ es muy difícil

Realizamos el cambio de variable

$$u = x+y \quad , \quad v = x-y$$

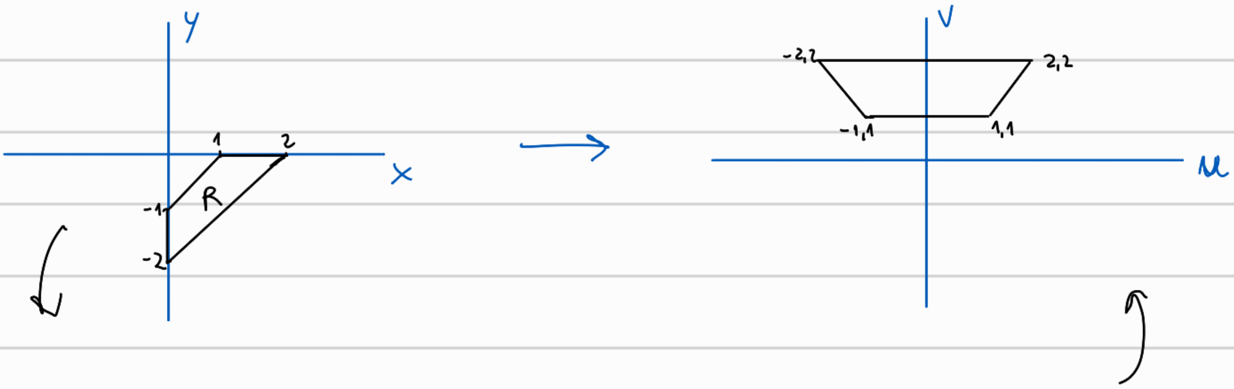
Despejamos x, y:

$$x = \frac{1}{2}(u+v) \quad , \quad y = \frac{1}{2}(u-v)$$

Calculamos el Jacobiano:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Queremos hallar la región S en el plano uv correspondiente a R.



Ec de las rectas:

$$y=0 \longrightarrow u=v$$

$$x-y=2 \longrightarrow v=2$$

$$x=0 \longrightarrow u=-v$$

$$x-y=1 \longleftrightarrow v=1$$

Con estos 4 aristas de S tenemos los siguientes vértices:
$(1,1), (2,2), (-2,2), (-1,1)$ $\rightarrow$ $S\{(u,v) \mid 1 \leq v \leq 2,\ -v \leq u \leq v\}$

Resolvemos:

$$\iint_R e^{\frac{x+y}{x-y}}\, dA = \iint_S e^{u/v} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\, dv$$

$$= \int_1^2 \int_{-v}^{v} e^{u/v} \left(\tfrac{1}{2}\right) du\, dv = \tfrac{1}{2} \int_1^2 \left[v e^{u/v} \right]_{u=-v}^{u=v} dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 (e - e^{-1})\, v\, dv = \frac{3}{4}(e - e^{-1})$$