IMT2220, Cálculo para ciencia de datos, 2023-2
Tarea 5

Fecha entrega: 24 de Noviembre de 2023

Instrucciones

Pueden discutir los problemas con sus compañeros. Sin embargo, sus entregas, tanto la parte escrita como los códigos, deben ser individuales. **No está permitido** copiar las respuestas de alguien más ni dejar que otros copien sus respuestas. El hacerlo se reflejará con la nota mínima en la evaluación (1.0).
Su entrega debe estar compuesta por un único archivo .pdf **escrito en LaTeX** que incluya todas las respuestas y todos los gráficos que se están pidiendo, junto con un archivo .zip que incluya todos los códigos que produjeron y utilizaron durante esta tarea. Estos dos archivos deben ser subidos en Canvas. Si hay más de una línea en un gráfico, utilice distintos estilos de línea o distintos colores para diferenciarlas e incluya leyendas. No se olvide de nombrar todos sus ejes y líneas en las leyendas. **Cada gráfico debe ser comentado** (un gráfico sin un análisis del mismo no es una respuesta apropiada).

Problemas

1. (a) (20 puntos) Calcule la serie de Fourier de la función escalón de Heaviside H definida en $[-\pi, \pi]$ y extendida de manera periódica:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}, \quad H(x) = H(x + 2\pi)$$

Use esto para calcular el valor de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Solution: Calculamos los coeficientes de Fourier de H:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \, dx = 1$$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,dx \\
&= 1 \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nx)\,dx \\
&= 0 \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx \\
&= -\frac{1}{\pi n}\cos(nx)\Big|_{x=0}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right) \\
&= \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{2}{\pi n} & n \text{ impar} \end{cases}
\end{aligned}
$$

con esto, podemos escribir la expresión completa como:

$$
\begin{aligned}
H(x) &\sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi}\sin((2n-1)x)
\end{aligned}
$$

evaluando en $x = \pi/2$, observamos que:

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi}(-1)^{n+1} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}
\end{aligned}
$$

y despejando obtenemos que:

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} = \frac{\pi}{4}
$$

(b) (20 puntos) Encuentre la serie de Fourier de la integral de $H(x)$, también definida en $[-\pi, \pi]$.

Solution: Para esto, ocupamos la serie anterior y la integramos:

$$
\int_{-\pi}^{x} H(t)dt \sim A_0 + \frac{x}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2\pi}\cos((2n-1)x)
$$

Para encontrar la constante A_0 evaluamos en $x = \pi/2$, obteniendo:

$$\frac{\pi}{2} = A_0 + \frac{\pi}{4} \implies A_0 = \pi/4$$

Obteniendo entonces que:

$$\int_{-\pi}^{x} H(t)dt \sim \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2\pi} \cos((2n-1)x)$$

el ejercicio termina reemplazando la serie de Fourier de x en la expresión y juntando términos:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{x} H(t)dt &\sim \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2\pi}\cos((2n-1)x) \\ &= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx) - \frac{2}{(2n-1)^2\pi}\cos((2n-1)x)\right)\end{aligned}$$

2. (20 puntos) Calcule y simplifique lo más posible la transformada de Fourier de la función $\text{rect} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1/2 \\ 1/2 & |x| = 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases}$$

Solution: Hacemos el cálculo:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(x)e^{-i\xi x}\,dx \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i\xi x}\,dx \\ &= -\frac{1}{i\xi}e^{-i\xi x}\Big|_{x=-1/2}^{1/2} \\ &= \frac{1}{i\xi}\left(e^{i\xi/2} - e^{-i\xi/2}\right) \\ &= \frac{2i\sin(\xi/2)}{i\xi} \\ &= \frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}\end{aligned}$$