Pontificia Universidad Católica de Chile
Cálculo para ciencia de datos: IMT2220
Profesor: Joaquín Valenzuela
Ayudantes: Diego Rodríguez (drodrguez@uc.cl) y
Francisca Muñoz (fmur@uc.cl)

Ayudantía 6

Multiplicadores de Lagrange

Problema 1 (Ayudantía 8 2022.2)

Mediante multiplicadores de Lagrange, demuestre que el triángulo con área máxima que tiene un perímetro dado p es un triángulo equilátero. Para esto, use la fórmula de Herón para el área:

$$A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

donde $s = p/2$ y x, y, z las longitudes de cada lado.

Problema 2

Determine los valores extremos de la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2$

a) Sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

b) Sobre el disco $x^2 + y^2 \leq 1$

Problema 3

Determine los puntos de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que están más cercanos al punto $(3, 1, -1)$.

Problema 4

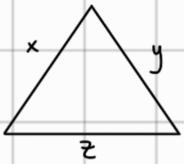
Determine el valor máximo de la función $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sobre la curva de intersección del plano $x - y + z = 1$ y del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

Problema 1 (Ayudantía 8 2022.2)

Mediante multiplicadores de Lagrange, demuestre que el triángulo con área máxima que tiene un perímetro dado p es un triángulo equilátero. Para esto, use la fórmula de Herón para el área:

$$A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

donde $s = p/2$ y x, y, z las longitudes de cada lado.



$x + y + z = p$

$$(P) \quad \max \ A(x,y,z) = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

$$\text{s.a.} \quad x+y+z = 2s$$

Problema equivalente:

$$\max \ s(s-x)(s-y)(s-z)$$

$$\text{s.a.} \quad x+y+z-2s = 0$$

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = s(s-x)(s-y)(s-z) - \lambda(x+y+z-2s)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= -s(s-y)(s-z) - \lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= -s(s-x)(s-z) - \lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} &= -s(s-x)(s-y) - \lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= -(x+y+z-2s) = 0
\end{aligned}\right\}$$

$$s(s-y)(s-z) = s(s-x)(s-z) = s(s-x)(s-y)$$

$$\begin{aligned} s-y &= s-x \\ s-z &= s-y \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} y &= x \\ y &= z \end{aligned} \rightarrow y = x = z.$$

$$2s = x+y+z, \qquad x = y = z = \frac{2s}{3}$$

$\therefore$ El área se maximiza con el triángulo equilátero

Problema 2

Determine los valores extremos de la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2$

a) Sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

b) Sobre el disco $x^2 + y^2 \leq 1$

a) 1. $\max f(x,y) = x^2 + 2y^2$

s.a. $x^2 + y^2 = 1$.

$$\mathcal{L}(x,y) = x^2 + 2y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\left.\begin{array}{ll} 1 & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x - 2x\lambda = 0 \\ 2 & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 4y - 2y\lambda = 0 \\ 3 & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{array}\right\}$$

Caso 1: $x \neq 0$

$\to \lambda = 1$ (1)

$\to y = 0$ (2)

$\to x = \pm 1$. (3)

Caso 2: $x = 0$

$\to y = \pm 1$ (3)

$\to \lambda = 2$ (2)

$\to x = 0$

$f(1,0) = 1$

$f(-1,0) = 1$

$\downarrow$ min

$f(0,1) = 2$

$f(0,-1) = 2$

$\downarrow$ max

b) Debemos comparar los puntos críticos con los puntos de frontera

$f_x = 2x$

$f_y = 4y$

$\to$ único punto crítico: $(0,0)$

$f(0,0) = 0 \longrightarrow$ mín

$f(\pm 1, 0) = 1$

$f(0, \pm 1) = 2 \longrightarrow$ máx

Problema 3

Determine los puntos de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que están más cercanos al punto $(3, 1, -1)$.

Definimos la función de distancia

$$d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$$

equivalente a minimizar

$$f(x,y,z) = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$$

s.a. $\quad x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 - \lambda(x^2+y^2+z^2-1) = 0$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= 2(x-3) - 2x\lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= 2(y-1) - 2y\lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} &= 2(z+1) - 2z\lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= -(x^2+y^2+z^2-4) = 0
\end{aligned}\right\}$$

$\rightarrow x - 3 = x\lambda \rightarrow x = \frac{3}{1-\lambda}$ $\quad$ * $\lambda \neq 1$.

$\rightarrow y - 1 = y\lambda \rightarrow y = \frac{1}{1-\lambda}$

$\rightarrow z + 1 = z\lambda \rightarrow z = \frac{-1}{1-\lambda}$

$$\rightarrow \left(\frac{3}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-1}{1-\lambda}\right)^2 = 4$$

$$\frac{9+2}{(1-\lambda)^2} = 4$$

$$\frac{11}{4} = (1-\lambda)^2$$

$$\frac{\pm\sqrt{11}}{2} = (1-\lambda)$$

$$\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

Para $\lambda = 1 + \frac{\sqrt{11}}{2} = \frac{2+\sqrt{11}}{2}$

$$P_1 = \left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}\right)$$

para $\lambda = 1 - \frac{\sqrt{11}}{2}$

$$P_2 = \left(\frac{-6}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$$

vemos que $f(P_1) < f(P_2)$

Punto más cercano: P_1

Problema 4

Determine el valor máximo de la función $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sobre la curva de intersección del plano $x - y + z = 1$ y del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

$$\max \quad f(x,y,z) = x + 2y + 3z$$
$$\text{sa.} \quad x - y + z - 1 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda,\mu) = x + 2y + 3z - \lambda(x - y + z - 1) - \mu(x^2 + y^2 - 1)$$

1 $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 1 - \lambda - 2\mu x = 0$

2 $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2 + \lambda - 2\mu y = 0$

3 $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 3 - \lambda = 0$

4 $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(x - y + z - 1) = 0$

5 $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = -(x^2 + y^2 - 1) = 0$

(3) $\lambda = 3$

(1) $-1 = \mu x$, $x = -1/\mu$

(2) $5 = 2\mu y$, $y = \dfrac{5}{2\mu}$

(5) $\dfrac{1}{\mu^2} + \dfrac{25}{4\mu^2} = 1$

$\dfrac{29}{4\mu^2} = 1 \rightarrow \mu = \dfrac{\pm\sqrt{29}}{2}$

$\rightarrow x = \pm \dfrac{2}{\sqrt{29}}$, $y = \dfrac{\mp 5}{\sqrt{29}}$

$z = 1 - x + y$

$z = 1 \mp \dfrac{7}{\sqrt{29}}$

$$P_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-5}{\sqrt{29}}, 1 - \frac{7}{\sqrt{29}}\right) \qquad P_2 = \left(\frac{-2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, 1 + \frac{7}{\sqrt{29}}\right)$$

$$f(P_1) = \frac{2 - 10 + 3\sqrt{29} - 21}{\sqrt{29}} = \frac{-29 + 3\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = -\sqrt{29} + 3$$

$$f(P_2) = \frac{-2 + 10 + 3\sqrt{29} + 21}{\sqrt{29}} = \frac{29 + 3\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = 3 + \sqrt{29}$$

Propuesto

S $\rightarrow$ debajo de $z = 16 - x^2 - 2y^2$

$\rightarrow$ sobre $R = [0,2] \times [0,2]$

$$V = \iint_R (16 - x^2 - 2y^2)\, dA = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^2 \left[16x - \frac{1}{3}x^3 - 2y^2x\right]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{88}{3} - 4y^2\right) dy = \left[\frac{88}{3}y - \frac{4}{3}y^3\right]_0^2 = 48$$

$$\hookrightarrow \iint_R f(x,y)\, dA = \int_c^d \int_a^b g(x)\, h(y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_a^b g(x)\, h(y)\, dx \right) dy$$