



## Ayudantía 9

1. Vamos a modelar el crecimiento de una población de conejos. Para ello, vamos a asumir las siguientes condiciones ideales:

- Cada mes, cada conejo adulto tiene un conejo bebé.
- Un conejo bebé se convierte en adulto al cabo de un mes.
- Los conejos jamás mueren.

Representamos por  $x^{(t)} = \begin{pmatrix} x_1^{(t)} \\ x_2^{(t)} \end{pmatrix}$  al vector que nos da la población de conejos adultos ( $x_1^{(t)}$ ) y bebés ( $x_2^{(t)}$ ) en el mes  $t$ .

- a) La evolución de la población de conejos se puede modelar de acuerdo a la ecuación

$$x^{(t+1)} = Ax^{(t)}.$$

Encuentre la matriz  $A$ .

- b) Un científico investigó una población de conejos por varios años, y se dio cuenta que en el último tiempo la cantidad de conejos aumentaba en un factor de alrededor de  $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$  por mes. Usando esto, encuentre un vector propio de la matriz  $A$ , y mencione que significado físico tiene este.

2. Demuestre las siguientes propiedades de los valores y vectores propios.

- a) Una matriz  $A$  cuadrada y su traspuesta  $A^T$  comparten los mismos valores propios.
- b) Si  $A$ ,  $B$  y  $S$  son matrices cuadradas tales que  $S$  es invertible y  $A = SBS^{-1}$ , entonces  $A$  y  $B$  tienen los mismos valores propios.
- c) Una matriz cuadrada  $A$  es invertible si y solo si el cero no es uno de sus valores propios.
- d) Dada la SVD de una matriz  $A = U\Sigma V^T$ , demuestre que los valores propios de  $AA^T$  están dados por los cuadrados de los valores singulares de  $A$ .

---

3. Considere la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

- a) ¿Que interpretación geométrica tiene esta matriz? Es decir, ¿que acción produce en un vector  $v \in \mathbb{R}^2$  el ser multiplicado por  $Q$ ?
- b) Los valores propios de esta matriz son  $\cos(\theta) \pm i \sin(\theta)$ . Encuentre sus vectores propios.
- c) Encuentre la inversa de  $Q$ , así como sus valores propios.