Pontificia Universidad Católica de Chile
Instituto de Ingeniería Matemática y Computacional
**IMT2230-1 2023-2**
**Profesor:** Cristobal Rojas
**Ayudante:** Pablo Rademacher

# Ayudantía 7

1. Explique porqué si una matriz cuadrada es invertible, entonces ninguno de sus valores singulares puede ser cero.

2. ¿Cual es la SVD de la matriz $A = xy^T$, con $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$?

3. Encuentre la mejor aproximación $B$ de rango 2 de las siguientes matrices. Exprese esta aproximación como el producto $B = GH^T$, donde $G$ y $H$ son matrices de dos columnas.

   - $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, cuya SVD esta dada por las matrices:

   $$U = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{0{,}5} & 0 \\ \sqrt{0{,}8} & 0 & \sqrt{0{,}2} \\ 0 & -\sqrt{0{,}5} & 0 \\ \sqrt{0{,}2} & 0 & -\sqrt{0{,}8} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{0{,}5} & 0 & -\sqrt{0{,}5} \\ \sqrt{0{,}5} & 0 & -\sqrt{0{,}5} \end{bmatrix}$$

   - $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, cuya SVD esta dada por las matrices:

   $$U = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Sean $S$ y $T$ matrices del mismo tamaño, tales que su primer valor singular es $s$ y $t$, respectivamente. Si $r$ es el primer valor singular de $S + T$, demuestre que $r \leq s + t$.

5. Implemente una función $solve\_svd(U, S, V, b)$, que recibe la SVD de una matriz $A = USV^T$ y retorna, si es que existe, un vector $x$ tal que $Ax = b$. Si $A$ no fuera invertible, entonces retorna la solución de mínimos cuadrados.