Pontificia Universidad Católica de Chile
Instituto de Ingeniería Matemática y Computacional
Álgebra Lineal Avanzada y Modelamiento- IMT2230
Segundo Semestre 2023

Guía de Ejercicios – 1

Profesor: Cristóbal Rojas

Ayudante: Pablo Rademacher

P 1. Operaciones con Matrices

a) Las combinaciones lineales de dos vectores en $\mathbb{R}^3$ forman un plano. ¿Como puede pasar esto?

b) El conjunto generado por las combinaciones lineales de los vectores $u = (0, 1, 0)$ y $v = (1, 1, 1)$ generan un plano en $\mathbb{R}^3$. Encuentre un vector z tal que $u \cdot z = v \cdot z = 0$. Corrobore que $w \cdot z = 0$ para cualquier vector w en el plano mencionado previamente.

c) Suponga que existen dos combinaciones de columnas de una matriz A que son iguales. A partir de estas, encuentre dos soluciones distintas al problema $Az = 0$.

d) Cuatro matrices A, B, C y D cumplen que $D = ABC$. Si D es de 3 por 5 y B es de 7 por 2, indique de que tamaño debes ser A y B.

e) Sean u y v vectores de n y m componentes, respectivamente. ¿Cuando puedo multiplicar uv^T? ¿Y $u^T v$? ¿Si las puedo multiplicar, de que tamaño será la matriz resultante?

f) Determine el producto matricial entre las matrices A y B usando ambas formas vistas en clases, y compruebe que son equivalentes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

g) Sean A, B y C matrices tales que $AB = C$. Demuestre que si A y C tienen columnas li, entonces B también las tiene.

P 2. Espacios asociados a Matrices

a) Describa el espacio columna y espacio nulo de $A = [v \quad w \quad v + 2w]$, donde v y w son dos vectores LI.

b) Encuentre las matrices C_1 y C_2 que contienen las columnas linealmente independientes de

$$A_1 = \begin{pmatrix} 11 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -6 \\ 2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

c) Sean A y B dos matrices con el mismo espacio columna.

c.1) Muestre que sus espacios fila pueden ser diferentes.

c.2) Muestre que sus matrices C de columnas básicas pueden ser distintas.

c.3) ¿Que número será igual en ambas?

d) Si $A = CB$, ¿cual es la factorización CB de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$?

e) Vamos a estudiar la factorización $A = \mathbf{CMR}$, relacionada a la factorización $A = CB$. En esta factorización, $\mathbf{C} = C$ contiene columnas LI de A, $\mathbf{R}$ contiene las filas LI de A, y $B = \mathbf{MR}$.

e.1) ¿Como podemos encontrar la matriz M? ¿De que tamaño será?

e.2) Cree una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ de rango 1 y calcule su factorización $A = CMR$.

e.3) Cree una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ de rango 2 y calcule su factorización $A = CMR$.

f) Las columnas de AB son combinaciones de las columnas de A, luego el espacio columna de AB está contenido en el espacio columna de A. Dé un ejemplo de matrices A y B para las cuales el espacio columna de AB es más pequeño que el de A.

g) Muestre que $\text{Nul}(B) \subseteq \text{Nul}(AB)$. ¿Porqué no son necesariamente iguales?

h) Sea $C = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. ¿Como se relacionan los espacios nulos de A y B con el de C?

i) Sea A una matriz tal que $\text{Fil}(A) = \text{Col}(A)$ y $\text{Nul}(A) = \text{Nul}(A^T)$. ¿Es A necesariamente simétrica?

j) Sea r el rango de una matriz de $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. De ejemplos de una matriz tal que:

j.1) $r = m = n$, y $Ax = b$ posee una solución para cada b.

j.2) $r = m < n$, y $Ax = b$ posee una o infinitas soluciones.

j.3) $r = n < m$, y $Ax = b$ posee una o ninguna solución.

j.4) $r < m$, $r < n$, y $Ax = b$ posee ninguna o infinitas soluciones.

k) Demuestre que $A^T A$ y A poseen el mismo espacio nulo.

l) Sea A una matriz cuadrada. ¿Poseen A^2 y A necesariamente el mismo espacio nulo?

m) Sea A una matriz tal que su espacio nulo es el singleton $\{0\}$. ¿Que forma tienen los vectores del espacio nulo de $B = [A \quad A \quad A]$?

n) Sean S y T subespacios de $\mathbb{R}^{10}$, de dimensión 2 y 7, respectivamente. ¿Cuales son las posibles dimensiones de $S \cap T$, $S + T$ y $S^{\perp}$?

P 3. Proyección y complemento Ortogonal

Recordemos que si V es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, el espacio (o complemento) ortogonal a V, se define como:

$$V^{\perp} = \{u \in \mathbb{R}^n : u \cdot v = 0 \text{ for all } v \in V\}$$

a) Sea $G = \{v_1, \ldots, v_l\}$ un conjunto generador de V. Pruebe que si $u \cdot v_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, l$ entonces $u \in V^{\perp}$.

b) Sea $b \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que existen vectores $v \in V$ y $w \in V^{\perp}$ tales que $b = u + w$. Deduzca que $\dim(V) + \dim(V^{\perp}) = n$.

c) Pruebe que $V \cap V^{\perp} = \{0\}$. Deduzca que los vectores u y w del item anterior son únicos.
(Hint: suponga que $b = u' + w'$ y muestre que $w - w'$ y $u - u'$ están en $V \cap V^{\perp}$).

d) Suponga que V es un plano en $\mathbb{R}^3$, y que w es un vector ortogonal a V. Muestre que $V^{\perp} = SPAN\{w\}$.

P 4. Factorización QR, Mínimos cuadrados

a) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

a.1) Factorice A en QR.

a.2) Aprovechando la factorización hecha en (a), resuelva el sistema $Ax = b$ en que $b = (0, 0, 6, 8)$.

b) Suponga que $A = QR$, donde R es una matriz invertible. Demuestre que A y Q tienen el mismo espacio columna.

c) Suponga que $A = QR$ es una factorización QR de una matriz A de $m \times n$ (con columnas linealmente independientes). Particione A como $[A_1 \ A_2]$, donde A_1 tiene p columnas. Muestre cómo obtener una factorización QR de A_1, y explique por qué su factorización tiene las características adecuadas.

d) Encuentre el vector $\hat{x}$ que minimice $\|A\hat{x} - b\|$. Use el algoritmo basado en la factorización QR:

d.1) $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 6 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$.

d.2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix}$

e) Encuentre la ecuación $y = \beta_0 + \beta_1 x$ de la recta de mínimos cuadrados que mejor se ajuste a los puntos $(0,1),(1,1),(2,2),(3,2)$.

f) Un cierto experimento genera los datos $(1,1.8),(2,2.7),(3,3.4),(4,3.8),(5,3.9)$. Describa el modelo que produce un ajuste de mínimos cuadrados de esos puntos mediante una función de la forma $y = \beta_1 x + \beta_2 x^2$.

f.1) Determine la matriz de diseño, el vector de observaciones y el vector de parámetros desconocidos.

f.2) Encuentre la curva de mínimos cuadrados asociada con los datos.