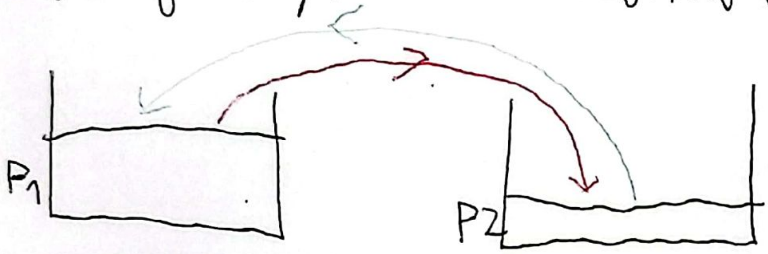
Ecuaciones diferenciales

Supongamos que tenemos dos piscinas conectadas por mangueras, que se vacían una en la otra con una velocidad que depende de cuánta agua tienen:



El volumen del agua de ~~las~~ cada piscina, V_1 y V_2, satisface la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} \dfrac{dV_1}{dt}(t) = -2V_1(t) + V_2(t) \\ \dfrac{dV_2}{dt}(t) = V_1(t) - 2V_2(t) \end{cases}$$

$$V_1(0) = 5 \quad , \quad V_2(0) = 3$$

que podemos ~~es~~ escribir como

$$\frac{d}{dt}V(t) = AV(t) \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad V(t) = \begin{pmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{pmatrix}$$

$$V(0) = V_0 \qquad , \qquad V_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sistema de ecuaciones diferenciales lineales ¿Como las resolvemos?
(de primer orden)

Mas simple: una sola función: $\frac{du(t)}{dt} = a\,u(t)$, $u(0) = u_0$

Por inspección, la solución puede ser $u(t) = e^{au(t)}$. Es más, la solución también puede ser $u(t) = C e^{aut}$. ¿como elijo C?

$$u(0) = C = u_0 \implies u(t) = u_0 e^{aut}$$

Comentario: que paso si: $a<0$ decrece
$a=0$! estable
$a>0$ explota
¿a complejo? ignoramos

Ahora, basados en que la solución con una ecuación a

$$\frac{d}{dt}u(t) = a\,u(t) \qquad u(0) = u_0$$

es $u(t) = u_0 e^{at}$.

La solución a un ~~sist~~ sistema

$$\frac{d\vec{v}}{dt}(t) = A\vec{v}(t) \qquad \vec{v}(0) = v_0$$

es $\vec{v}(t) = e^{At} v_0$

¿Que es e^{At}?

"Recordemos" las serie de Taylor: $e^{\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$

Poniendo λ "=" A, $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$

si A es diagonalizable, $A = S\Lambda S^{-1}$

$$e^{At} = \dots = \sum_{n=0}^{\infty} S\Lambda^n S^{-1} \frac{t^n}{n!} = S \begin{pmatrix} \sum \frac{\lambda_1^n t^n}{n!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum \frac{\lambda_k^n t^n}{n!} \end{pmatrix} S^{-1} = S e^{\Lambda t} S^{-1}$$

Se verifica que: $e^{As} e^{At} = e^{A(s+t)}$, $e^{At} e^{-At} = I$, $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$

$e^{A0} = I$

Ej: La solución del sistema

$$\frac{d}{dt} u(t) = -2u(t) + v(t) \qquad u(t) = u_0 = 5$$

$$\frac{d}{dt} v(t) = u(t) \cancel{+} 2v(t) \qquad , \ v(t) = v_0 = 3$$

$$\frac{d}{dt} w(t) = A w(t)$$

$$w(0) = w_0$$

La diagonalización de A es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$

luego, $e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ +1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t} & e^{t} \\ e^{-3t} & -e^{-3t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{t} + e^{-3t} & e^{t} - e^{-3t} \\ e^{t} - e^{-3t} & e^{t} + e^{-3t} \end{pmatrix}$$

y $w(t) = e^{At} w_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5e^{t} + 5e^{-3t} + 3e^{t} - 3e^{-3t} \\ 5e^{t} - 5e^{-3t} + 3e^{t} + 3e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{t} + e^{-t} \\ 4e^{t} - e^{-t} \end{pmatrix}$