Interrogación 2 - IMT2220

Nombre: ....
Tiempo: **2 horas 30 minutos**

- Responda claramente las preguntas, procurando prolijidad y coherencia. Si no quiere que algo sea evaluado, márquelo claramente (algunas opciones son: tachar texto, encerrar y decir "no considerar", etc.). El uso de corrector líquido no está permitido.
- El uso de dispositivo electrónicos (tales cómo, y no restringidos a: computadores, celulares, calculadoras, smartwatches) está **prohibido** durante la evaluación.
- El uso de apuntes, libros, internet u otros materiales también está **prohibido** durante la evaluación.
- No se otorgará puntaje por respuestas correctas **obtenidas mediante argumentos incorrectos**.

Pregunta	Puntos	Obtenido
1	15	
2	15	
3	15	
4	15	
Totales:	60	

1. (15 puntos) Determine los máximos y mínimos absolutos de la función

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + xy - \frac{1}{2}x + 1$$

en el triángulo formado por vértices $(0,0),(1,0)$ y $(0,1)$.

Solution: Considere la función f. Entonces su gradiente es:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x + y - \frac{1}{2} \\ -2y + x \end{pmatrix}, \quad \text{(2 pts)}$$

De donde obtenemos el primer punto crítico: $\boldsymbol{x}_0 = (1/5, 1/10)$ (1 pts). Al conjunto de puntos a evaluar tenemos que agregarles los del borde. Siempre hay que agregar los vértices, pero tenemos que ver si existen otros puntos en el borde que también pueden ser mínimos/máximos. Para esto restringimos la función a dichos lados. Primero inspeccionamos el borde inferior, que son los puntos de la forma $(t,0)$ para $t \in [0,1]$:

$$\ell_1(t) = t^2 - \frac{t}{2} + 1 \implies \ell_1'(t) = 2t - \frac{1}{2}$$

Luego, tenemos un punto crítico en $\boldsymbol{x}_1 = (1/4, 0)$ (3 pts) Por restringirse a esta arista y encontrar el punto crítico. Luego, el borde izquierdo son los puntos de la forma $(0,t)$, para $t \in [0,1]$:

$$\ell_2(t) = -t^2 + 1 \implies \ell_2'(t) = -2t$$

así que el punto crítico obtenido calza con uno de los vértices del dominio, así que no lo contamos otra vez (3 pts) Por restringirse a esta arista y encontrar el punto crítico. Para el borde restante, tenemos los puntos de la forma $(t, 1-t)$ para $t \in [0,1]$:

$$\ell_3(t) = t^2 - (1-t)^2 + t(1-t) - \frac{t}{2} + 1 \implies \ell_3'(t) = \frac{5}{2} - 2t$$

por lo que tenemos un punto crítico en $t = 5/4$, que no es parte de nuestro dominio de t, así que no ganamos ningún punto aquí (3 pts) Por restringirse a esta arista y verificar que el punto crítico en cuestión no se debe analizar. De esta forma, tenemos que evaluar f en los puntos:

$$\{(0,0),(1,0),(0,1),(1/5,1/10),(1/4,0)\}$$

(1 pts) por mencionar todos los puntos a evaluar.

$$f(0,0) = 1$$
$$f(1,0) = \frac{3}{2}$$
$$f(0,1) = 0$$
$$f(1/5,1/10) = \frac{95}{100}$$
$$f(1/4,0) = \frac{15}{16}$$

por lo que $(1,0)$ es máximo global y $(0,1)$ es mínimo global en la región dada por el triángulo de vértices $(0,0),(1,0)$ y $(0,1)$ (2 pts) Por correctamente determinar el máximo y mínimo global.

2. (15 puntos) Una fábrica usa lana y algodón para producir paños. La cantidad de paños producidos está dado por $Q(x, y) = xy - x - y + 1$, donde x es el número de kilos de lana y y es el número de kilos de algodón, $x > 1$ e $y > 1$. Si la lana cuesta \$1 pesos por kilo y el algodón cuesta \$2 por kilo. La fábrica puede gastar hasta \$99 en material de momento. ¿Cuánto de cada material debiese comprarse para maximizar el número de paños producidos?

Solution: El problema se reduce a:

$$\begin{aligned} &\text{máx } Q(x, y) \\ &\text{s.a. } x + 2y = 99 \end{aligned}$$

(2 pts) Por determinar correctamente la función de costos y (2 pts) por definir que estos deben imponerse como una restricción de igualdad con el gasto máximo. Luego, podemos resolverlo usando el método de multiplicadores de Lagrange. Definimos:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xy - x - y + 1 - \lambda(x + 2y - 99)$$

Entonces:

$$\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} y - 1 - \lambda \\ x - 1 - 2\lambda \end{pmatrix}$$

(2 pts) por determinar el Lagrangeano y (2 pts) por calcular su gradiente. Luego, tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} y - 1 - \lambda &= 0 \\ x - 1 - 2\lambda &= 0 \\ x + 2y &= 99 \end{aligned}$$

(2 pts) por armar el sistema de ecuaciones. De esto, logramos ver que:

$$(1 + 2\lambda) + 2(1 + \lambda) = 3 + 4\lambda = 99 \implies \lambda = 24$$

Entonces, despejando, tenemos que:

$$x = 49, \quad y = 25$$

es decir, se deben comprar 49 kilos de lana y 25 kilos de algodón. (5 pts) por despejar resolver el sistema y concluir.

3. (15 puntos) Decida si es posible intercambiar el orden de integración de la siguiente función en $R = [0,2] \times [0,1]$

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

Calcule ambas versiones para demostrar lo decidido, es decir:

$$\int\int_R f(x,y)\,dy\,dx, \quad \int\int_R f(x,y)\,dx\,dy$$

Hint: En ambos casos, inicie haciendo el cambio de variables $u = x^2 + y^2$.

Solution: Para esta función no es posible usar Fubini (3 pts) por responder esto. Probaremos esto calculando ambas integrales iteradas:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_0^1 \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}\,dy\,dx &= \int_0^2 \int_{x^2}^{x^2+1} \frac{x(2x^2-u)}{2u^3}\,du\,dx \\
&= \int_0^2 \int_{x^2}^{x^2+1} \left(\frac{x^3}{u^3} - \frac{x}{2u^2}\right) du\,dx && \text{(2 pts)} \\
&= \int_0^2 \left[-\frac{x^3}{2u^2} + \frac{x}{2u}\right]\Bigg|_{u=x^2}^{x^2+1} dx \\
&= \int_0^2 \frac{x}{2(x^2+1)^2}\,dx && \text{(2 pts)} \\
&= -\frac{1}{4(x^2+1)}\Bigg|_{x=0}^{2} \\
&= \frac{1}{5} && \text{(2 pts)}
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^2 \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}\,dx\,dy &= \int_0^1 \int_{y^2}^{y^2+4} -\frac{y(2y^2-u)}{2u^3}\,du\,dy \\
&= -\int_0^1 \int_{y^2}^{y^2+4} \left(\frac{y^3}{u^3} - \frac{y}{2u^2}\right) du\,dy && \text{(2 pts)} \\
&= -\int_0^1 \left[-\frac{y^3}{2u^2} + \frac{y}{2u}\right]\Bigg|_{u=y^2}^{y^2+4} dy \\
&= -\int_0^1 \frac{2y}{(y^2+4)^2}\,dx && \text{(2 pts)} \\
&= \frac{1}{y^2+4}\Bigg|_{y=0}^{1} \\
&= -\frac{1}{20} && \text{(2 pts)}
\end{aligned}$$

4. (15 puntos) Considere el dominio $D = D_1 \setminus D_2$, donde $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ y D_2 es el triángulo de vértices $(-1,0), (0,1)$ y $(1,0)$. Calcule la integral:

$$\int\int_D y\, dA$$

Solution: Comenzamos viendo que el dominio también lo podemos describir como:

$$D = D_3 \cup D_4$$

donde

$$D_3 = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 0, x+1 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$
$$D_4 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 1-x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

De esta forma, tenemos los límites de integración de nuestras variables. (6 pts) por descomponer D entre la unión de dos dominios disjuntos, encontrando los límites de integración en términos de funciones conocidas para cada uno. La integración prosigue como:

$$\begin{aligned}
\int\int_D y\, dA &= \int_{-1}^{0}\int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} y\, dy\, dx + \int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y\, dy\, dx \text{ (1 pts)}\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} ((1-x^2)-(x+1)^2)\, dx + \frac{1}{2}\int_0^1 ((1-x^2)-(1-x)^2)\, dx \text{ (4 pts)}\\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} (-2x^2-2x)\, dx + \int_0^1 (-2x^2+2x)\, dx\right)\\
&= \int_{-1}^{0} (-x^2-x)\, dx + \int_0^1 (-x^2+x)\, dx\\
&= -\int_{-1}^{1} x^2\, dx - \int_{-1}^{0} x\, dx + \int_0^1 x\, dx\\
&= -\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}x^2\Big|_{x=0}^{1}\\
&= -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{3} \quad \text{(4 pts)}
\end{aligned}$$