# Examen - IMT2220

**Nombre:** ........................................................................
**Tiempo:** **2 horas 30 minutos**

---

- Responda claramente las preguntas, procurando prolijidad y coherencia. Si no quiere que algo sea evaluado, márquelo claramente (algunas opciones son: tachar texto, encerrar y decir “no considerar”, etc.). El uso de corrector líquido no está permitido.
- El uso de dispositivo electrónicos (tales cómo, y no restringidos a: computadores, celulares, calculadoras, smartwatches) está **prohibido** durante la evaluación.
- El uso de apuntes, libros, internet u otros materiales también está **prohibido** durante la evaluación.
- No se otorgará puntaje por respuestas correctas **obtenidas mediante argumentos incorrectos**.

| Pregunta | Puntos | Obtenido |
|---|---|---|
| 1 | 15 | |
| 2 | 15 | |
| 3 | 15 | |
| 4 | 15 | |
| Totales: | 60 | |

1. (15 puntos) Verifique que si $u = u(x,t)$ es una función al menos 2 veces continuamente diferenciable que satisface:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
entonces, si consideramos el cambio de variable:
$$\xi = x + t, \quad \eta = x - t$$
se cumple que:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

**Solution:** Para verificar esto calcularemos las derivadas parciales con respecto a $t, x$ en términos de las variables $\xi, \eta$. Vemos que las primeras derivadas son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

(6 pts)Por el cálculo de las primeras derivadas. Con esto, el cálculo de las segundas derivadas sigue como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial t} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

(6 pts) Por el cálculo de las segundas derivadas. Igualando términos, vemos que se cancelan los términos $\partial^2 u/\partial \xi^2$ y $\partial^2 u/\partial \eta^2$. Así, tenemos que, como la función es suficientemente regular:

$$-2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}$$

entonces:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0$$

(3 pts) Por concluir igualanddo términos.

2. (15 puntos) Determine los máximos y mínimos absolutos de la función

$$f(x,y) = y^{3/2} - 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

en la región $H$ definida como:

$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ 0 \leq y \leq (x-1)^2\}$$

**Solution:** Considere la función $f$. Entonces su gradiente es:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -8x+4 \\ \frac{3}{2}\sqrt{y} \end{pmatrix}, \quad \text{(2 pts)}$$

De donde obtenemos el primer punto crítico: $\boldsymbol{x}_0 = (1/2, 0)$ (1 pts). Al conjunto de puntos a evaluar tenemos que agregarles los del borde. Siempre hay que agregar los vértices, pero tenemos que ver si existen otros puntos en el borde que también pueden ser mínimos/máximos. Para esto restringimos la función a dichos lados. Primero inspeccionamos el borde inferior, que son los puntos de la forma $(t, 0)$ para $t \in [0,1]$:

$$\ell_1(t) = -4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \implies \ell_1'(t) = -8t + 4$$

Luego, tenemos un punto crítico en $\boldsymbol{x}_1 = (1/2, 0)$, que se repite con el encontrado al calcular el gradiennte de $f$ (3 pts) Por restringirse a esta arista y encontrar el punto crítico. Luego, el borde izquierdo son los puntos de la forma $(0, t)$, para $t \in [0,1]$:

$$\ell_2(t) = t^{3/2} \implies \ell_2'(t) = \frac{3}{2}\sqrt{t}$$

así que el punto crítico obtenido calza con uno de los vértices del dominio (el punto $(0,0)$), así que no lo contamos otra vez (3 pts) Por restringirse a esta arista y encontrar el punto crítico. Para el borde restante, tenemos los puntos de la forma $(t, (t-1)^2)$ para $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
\ell_3(t) &= ((t-1)^2)^{3/2} - 4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \left(\sqrt{(t-1)^2}\right)^3 - 4t^2 + 4t - 1 \\
&= (1-t)^3 - 4t^2 + 4t - 1 \\
&= 1 - 3t + 3t^2 - t^3 - 4t^2 + 4t - 1 \\
&= -t^3 - t^2 + t \\
\implies \ell_3'(t) &= -3t^2 - 2t + 1
\end{aligned}$$

por lo que tenemos un dos puntos críticos posibles, uno en $t = -1$ y otro en $t = 1/3$. El primero no es parte de nuestro dominio de $t$, así que no ganamos ningún punto aquí, mientras que el segundo si lo es, y corresponde al punto $(1/3, 4/9)$ (3 pts) Por restringirse a esta arista y verificar ambos casos. De esta forma, tenemos que evaluar $f$ en los puntos:

$$\{(0,0),(1,0),(0,1),(1/2,0),(1/3,4/9)\}$$

(1 pts) por mencionar todos los puntos a evaluar.

$$\begin{aligned} f(0,0) &= -1 \\ f(1,0) &= -1 \\ f(0,1) &= 0 \\ f(1/2,0) &= 0 \\ f(1/3,4/9) &= \frac{8}{27} - \frac{4}{36} = \frac{5}{27} \end{aligned}$$

por lo que tenemos dos mínimos globales en $(1,0)$ y $(0,0)$, mientras que tenemos un solo máximo global en $(1/3,4/9)$. (2 pts) Por correctamente determinar el máximo y mínimo global.

3. (15 puntos) Calcule el volumen del sólido encerrado entre el cilíndro $x^2 + y^2 = 1$, la superficie $z = 2 + x^2 + y^2$ y el plano $z = 0$.

**Solution:** Para este ejercicio utilizaremos coordenadas cilíndricas. Esto pues nuestra región es todo aquello contenido en el cilíndro $x^2 + y^2 = 1$, para $z \in [0, 2 + x^2 + y^2]$. Así:

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\cos(\theta), \quad z = z$$

donde $r \in [0, 1]$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ pues estamos en el cilíndro de radio 1, mientras que ahora $z \in [0, 2 + r^2]$ (4 pts) Por definir el cambio de variable y (4 pts) por definir los intervalos de integración correctamente. Haciendo este cambio de variables obtenemos:

$$\begin{aligned} V &= \int\int\int 1 \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2+r^2} r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 r \int_0^{2+r^2} 1 \, dz \, dr \\ &= 2\pi \int_0^1 (2r + r^3) \, dr \\ &= 2\pi \left( r^2 + \frac{1}{4} r^4 \right) \Bigg|_{r=0}^{1} \\ &= \frac{5}{2}\pi \end{aligned}$$

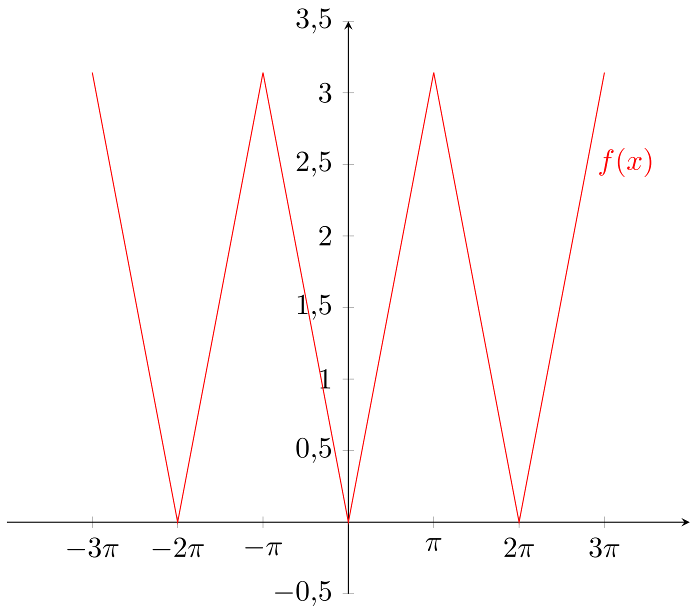
(3 pts) Por reescribir la integral en el cambio de variables correspondiente y (4 pts) por el cálculo correcto de la integral. En caso que calcule la integral de forma correcta, pero no es la integral pedida, solo 1 punto.

4. (15 puntos) Considere la función definida en $[-\pi, \pi]$ y extendida de forma periódica:

$$f(x) = |x|, \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

Dibuje 3 periodos de esta función y calcule su serie de Fourier.

**Solution:** Vemos el gráfico de la función en 3 periodos:




(3 pts) Por el gráfico de la función en 3 periodos. Luego, los coeficientes de fourier se calculan como sigue:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\, dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\, dx \\
&= \pi && \text{(2 pts)} \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin(nx)\, dx \\
&= 0 && \text{(4 pts)}
\end{aligned}$$

donde el último se debe a la imparidad de la función $|x|\sin(nx)$. Finalmente:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin(nx)}{n}\bigg|_{x=0}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi n^2}\cos(nx)\bigg|_{x=0}^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) \\
&= \begin{cases} \frac{-4}{\pi n^2} & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases} && \text{(4 pts)}
\end{aligned}$$

entonces la serie de Fourier de $f$ corresponde a:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos((2n-1)x) \quad \text{(2 pts)}$$