Pontificia Universidad Católica de Chile
Cálculo para ciencia de datos: IMT2220
Profesor: Joaquín Valenzuela
Ayudantes: Diego Rodríguez (drodrguez@uc.cl) y
Francisca Muñoz (fmur@uc.cl)

Ayudantía 8

Integrales en dominios no regulares y repaso I2

Problema 1

Evalúe

$$\int \int_D (x + 2y) dA$$

donde D es la región acotada por las parábolas $y = 2x^2$ y $y = 1 + x^2$.

Problema 2

Encuentre el valor del sólido que se encuentra bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y arriba de la región D en el plano xy acotada por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.

Problema 3

Determine el máximo y mínimo absoluto de la siguiente función

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$$

En el rectángulo $D = \{(x, y)|0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$.

Problema 4

Determine los máximos y minimos locales y puntos silla de la siguiente función:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

Problema 5

Encuentre los polinomios de Taylor de primer y segundo grado de las siguientes funciones:

- $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$
- $f(x, y) = xe^y$

Problema 1

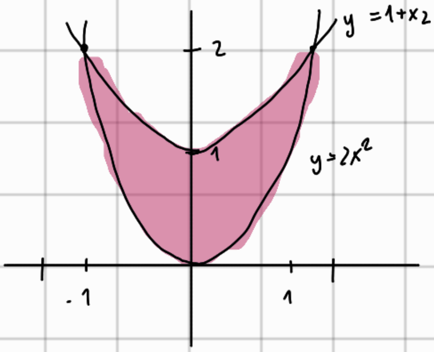
Evalúe

$$\int\int_D (x+2y)\,dA$$

donde D es la región acotada por las parábolas $y = 2x^2$ y $y = 1 + x^2$.

1. Buscamos la intersección de las parábolas

$$2x^2 = 1 + x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$



$$D = \{ (x,y) \mid -1 \leq x \leq 1,\ 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2 \}$$

$$\iint_D (2y+x)\,dA = \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x+2y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[xy + y^2 \right]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[x(1+x^2) + (1+x^2)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2 \right] dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1 \right) dx$$

$$= \left[-3\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{32}{15}$$

Problema 2

Encuentre el valor del sólido que se encuentra bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y arriba de la región D en el plano xy acotada por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 2, \quad x^2 \leq y \leq 2x\}$$

$$V = \iint_D (x^2+y^2)\, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2+y^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx$$

$$= \int_0^2 \left[x^2(2x) + \frac{(2x)^3}{3} - x^2 x^2 - \frac{(x^2)^3}{3} \right] dx$$

$$= \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3} \right) dx$$

$$= \left[\frac{-x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{6} \right]_0^2$$

$$= \frac{216}{35}$$

Problema 3

Determine el máximo y mínimo absoluto de la siguiente función

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$$

En el rectángulo $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$.

Como es polinomial, es continua sobre el rectangulo cerrado
↳ existe max y min abs.

$f_x = 2x - 2y$ $\qquad$ $f_y = -2x + 2$

Puntos críticos

$f_x = 0 \quad \wedge \quad f_y = 0$

$2x - 2y = -2x + 2$

$4x = 2 + 2y$

R: $x = y = 1$ $\quad \rightarrow f(1,1) = 1$ (único)

Fronteras

- L_1 $(y=0)$

  $f(x,0) = x^2 \qquad 0 \leq x \leq 3. \quad \rightarrow$ min: $f(0,0) = 0$, max: $f(3,0) = 9$

- L_2 $(x=3)$

  $f(3,y) = 9 - 4y \qquad 0 \leq y \leq 2 \quad \rightarrow$ min: $f(3,2) = 1$, max: $f(3,0) = 9$

- L_3 $(y=2)$

  $f(x,2) = x^2 - 4x + 4 \qquad 0 \leq x \leq 3 \quad \rightarrow$ min: $f(2,2) = 0$, max: $f(0,2) = 4$

  $= (x-2)^2$

- L_4 $(x=0)$

  $f(0,y) = 2y \qquad 0 \leq y \leq 2 \quad \rightarrow$ max: $f(0,2) = 4$, min: $f(0,0) = 0$

Min: $f = 0 < \begin{matrix}(2,2) \\ (0,0)\end{matrix}$

Max: $f = 9 - (3,0)$

Problema 4

Determine los máximos y minimos locales y puntos silla de la siguiente función:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

1. Puntos críticos

$f_x = 4x^3 - 4y$ $\qquad$ $f_y = 4y^3 - 4x$

$f_x = 0$, $f_y = 0$

$x^3 = y$, $y^3 = x$

$\rightarrow 0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$

$x = 0, 1, -1 \rightarrow \underbrace{(0,0)\,;\,(1,1)\,;\,(-1,-1)}_{\text{pts críticos}}$

test de 2da derivada:

$D(x, y)$

$f_{xx} = 12x^2$, $f_{xy} = -4$, $f_{yy} = 12y^2$

$D(x,y) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 144x^2y^2 - 16$

- $D(0,0) = -16 < 0$ $\rightarrow$ pto silla
- $D(1,1) = 128 > 0$ y $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$ $\rightarrow$ $f(1,1) = -1$ min local
- $D(-1,-1) = 128 > 0$, y $f_{xx}(-1,-1) = 12 > 0$ $\rightarrow$ min local

Problema 5

Encuentre los polinomios de Taylor de primer y segundo grado de las siguientes funciones:

- $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ en $(0,0)$
- $f(x,y) = xe^y$ en $(1,0)$

1. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$, $f_x = -2x e^{-x^2-y^2}$ $f_y = -2y e^{-x^2-y^2}$

1er grado $L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$

$L(x,y) = e^0 + 0(x-a) + 0(y-b)$

$L(x,y) = 1$.

2do grado $Q(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \frac{1}{2} f_{xx}(a,b)(x-a)^2 +$

$f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2} f_{yy}(a,b)(y-b)^2$

$f_{xx} = -2e^{-x^2-y^2} + 4x^2 e^{-x^2-y^2}$ $f_{xy} = 4xy\, e^{-x^2-y^2}$

$f_{yy} = -2e^{-x^2-y^2} + 4y^2 e^{-x^2-y^2}$

$Q(x,y) = 1 - e^0 (x)^2 - e^0 (y)^2$

$= 1 - x^2 - y^2$

2. xe^y

$f_x = e^y$ $f_y = xe^y$

$f_{xx} = 0$ $f_{yy} = xe^y$ $f_{xy} = e^y$

$L(x,y) = 1 \cdot e^0 + e^0(x-1) + e^0(y)$

$= 1 + (x-1) + y = x + y$

$Q(x,y) = 1e^0 + e^0(x-1) + e^0(y) + e^0(x-1)(y) + \frac{1}{2} e^0 (y)^2$

$= 1 + (x-1) + y + xy - y + \frac{1}{2} y^2$

$= x + yx + \frac{1}{2} y^2$