Pontificia Universidad Católica de Chile
Instituto de Ingeniería Matemática y Computacional
IMT2230-1 2023-2
Profesor: Cristobal Rojas
Ayudante: Pablo Rademacher

Ayudantía 14

Un grafo es una tupla $G = (V, E)$, con V es un conjunto finito de nodos, y $E \subseteq \{\{i, j\} : i, j \in V, i \neq j\}$ es el conjunto de aristas (en este caso no dirigidas). Decimos que es bipartito si existen conjuntos disjuntos $S, T \subseteq V$ tales que $V = S \cup T$, y si $(i, j) \in E$ y $i \in S$, entonces necesariamente $j \in T$.
Definimos además la matriz de adyacencia de G como la matriz $A \in \mathbb{R}^{|V| \times |V|}$ tal que

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i.j) \in E \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$

Decimos que un grafo es conectivo si existe eal menos un camino entre cada par de aristas.

1. Demuestre que si G es bipartito, A es su matriz de adyacencia, y λ es valor propio de A, entonces $-\lambda$ también es valor propio de A.

2. Demuestre que si la matriz de adyacencia de un grafo G cumple que, si λ es valor propio entonces $-\lambda$ también lo es, entonces G debe ser bipartito.

3. Muestre que si A es la matriz de adyacencia de un grafo G, entonces la matriz A^k en la posición (i, j) contiene la cantidad de caminos para ir del nodo i al nodo j.

4. Sean λ_1 y λ_n el valor propio mayor y menor de A, respectivamente. Muestre que si un grafo G es conectivo, G es bipartito si y solo si $\lambda_n = -\lambda_1$.