

Chapitre VII

Fonctions exponentielles

3 février 2011

Table des matières

1	Les fonctions exponentielles	2
1.1	Introduction	2
1.2	Fonctions exponentielles de base a	3
1.3	La fonction exponentielle de base e	4
2	Fonction exponentielle et nombres complexes	5
2.1	Notation exponentielle d'un nombre complexe	5
2.2	Efficacités de la notation	6
2.3	Applications	7
2.4	Complexe et transformation	8

1. LES FONCTIONS EXPONENTIELLES

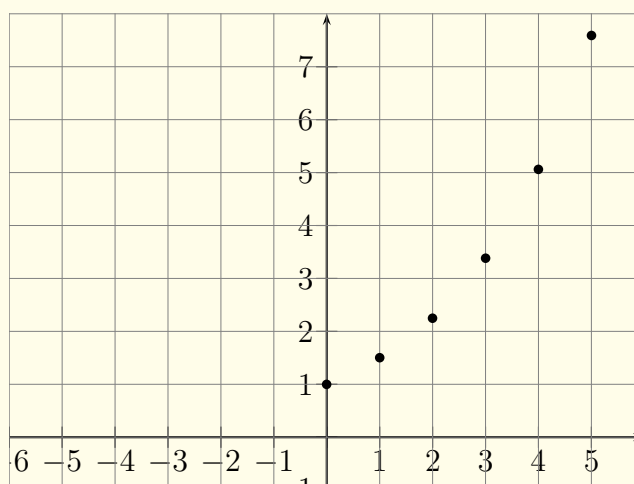
On introduit une fonction exponentielle comme « prolongement » d'une suite géométrique de raison strictement positive et de premier terme 1. Il s'agit de mettre en œuvre une démarche permettant de faire comprendre aux élèves comment on peut passer du discret (suite géométrique de raison strictement positive) au continu (fonction exponentielle de base q) en plusieurs étapes. Le problème du prolongement peut-être posé ainsi :

1.1. Introduction

Le nuage de points représentant une suite arithmétique est inclus dans la courbe représentative d'une fonction affine. Que se passe-t-il pour une suite géométrique ?

On veut donc effectuer un passage de \mathbf{N} dans \mathbf{R} afin de pouvoir définir des « suites géométriques généralisées » sur \mathbf{R} . On souhaite par ailleurs conserver la propriété des suites géométriques : $q^n \times q^m = q^{n+m}$

On considère la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de raison $q = 1.5$ et de premier terme 1 : Elle est donc définie par $u_0 = 1$ et $q = 1,5$. Son graphique est le suivant :



Etape 1 : Passage de \mathbf{N} dans \mathbf{Z}

Pour étendre ce graphique à \mathbf{Z} , il suffit de se rappeler que $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. On place donc les points des coordonnées $(-n; \frac{1}{x^n})$ pour $n = 1; 2; 3; 4; 5$.

Etape 2 : On double le nombre de points

Pour compléter de façon cohérente ce graphique, on remarque que :

1. La suite des **indices** est telle que chaque terme est la moyenne arithmétique du terme qui le précède immédiatement et du terme qui le suit immédiatement : $n = \frac{(n-1)(n+1)}{2}$.
2. Chaque **terme** de la suite est la moyenne géométrique du terme qui le précède immédiatement et du terme qui le suit immédiatement : $u_n = \sqrt{u_{n-1}u_{n+1}}$.
3. Ceci n'est pas étonnant puisque la somme de indices se traduit pour les puissances par la multiplication des termes et la division des indices par 2 correspond à la

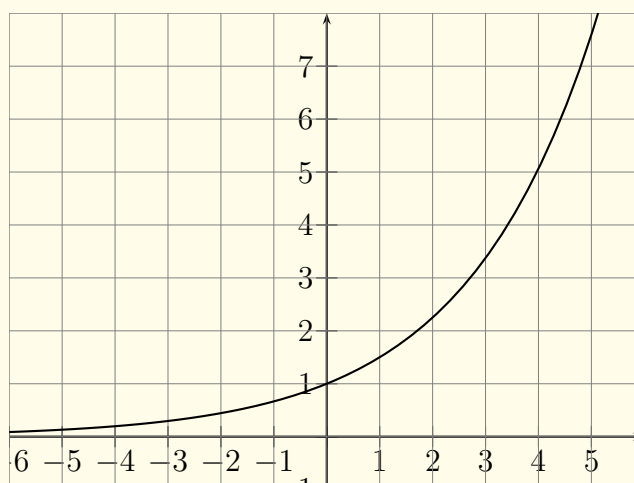
puissance $\frac{1}{2}$, c'est à dire la racine carrée. Plus clairement :

$$\begin{aligned} u_{\frac{x+y}{2}} &= q^{\frac{x+y}{2}} \\ &= (q^{x+y})^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{q^x \times q^y} \\ &= \sqrt{u_x \times u_y} \end{aligned}$$

On peut donc ajouter entre deux termes successifs de cette suite le terme d'indice $\frac{n(n+1)}{2}$ dont la valeur est $\sqrt{u_n u_{n+1}}$.

Etape 3 : On réitère le procédé.

A partir de ces nouveaux points, on réitère l'étape 2. en plaçant un nouveau point entre deux points existants ; et ainsi de suite. On obtient ainsi la représentation graphique d'une suite géométrique sur \mathbf{R} qui respecte les propriétés initiales.



1.2. Fonctions exponentielles de base a

Définition 1 : Fonctions exponentielles de base a

a étant un nombre strictement positif et différent de 1, on appelle **fonction exponentielle de base a** la fonction f définie pour tout x de \mathbf{R} par

$$f(x) = a^x.$$

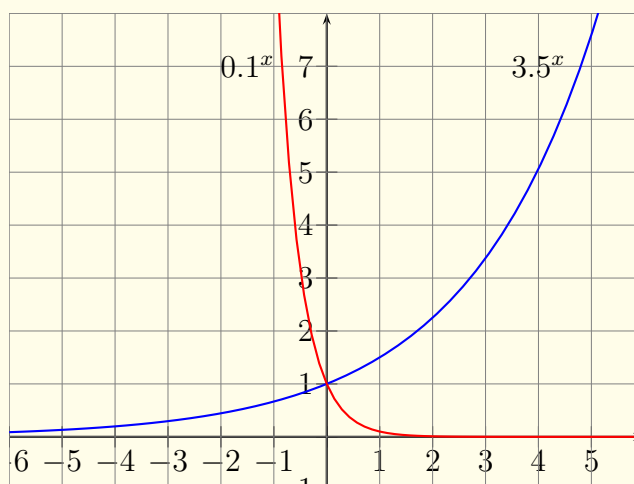
Théorème 1 : Sens de variation

La fonction exponentielle de base a est :

- croissante si $a > 1$
- décroissante si $a < 1$
- (et constante si $a = 1$, mais la valeur $a = 1$ est interdite par définition).

Théorème 2 : signe

La fonction exponentielle de base a est strictement positive pour toutes valeurs de x .



Théorème 3 : Propriétés algébriques

Les propriétés vraies pour puissances entières restent vraies pour les puissances réelles. À savoir : Pour tout réel x et y , on a :

- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$

- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $a^{x \times y} = (a^x)^y$

1.3. La fonction exponentielle de base e

Définition 2 : Fonction exponentielle de base e

Parmi toutes les fonctions exponentielles, il en existe une qui est égale à sa dérivée, c'est celle qui correspond à la base

$$e \simeq 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696$$

$$7627724076630353547594571382178525166427.$$

Ce nombre est de même nature que π , c'est à dire qu'il n'a pas d'écriture décimale exacte.

Cette valeur particulière de la base se note traditionnellement e . On note donc $f(x) = e^x$.

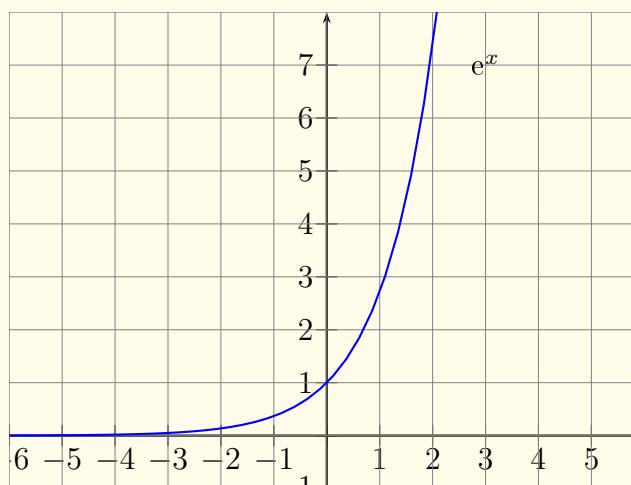
Remarques :

- Dans la suite, sauf indication contraire, si on ne précise pas la base de la fonction exponentielle, c'est qu'il s'agit de celle de base e .
- La fonction exponentielle de base e correspond à la touche e^x de la calculatrice.

De l'étude des fonctions exponentielles de base a , de la formule générale de la dérivée d'une fonctions composée, on déduit que :

Théorème 4 : Propriétés de la fonction exponentielle

- $e^x \times e^y = e^{x+y}$
- $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
- $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$
- $e^{x^y} = e^{x \times y}$
- e^x est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- e^x est strictement positive sur \mathbb{R} .
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- $(e^x)' = e^x$ et $(e^{u(x)})' = u'(x) \times e^{u(x)}$



Théorème 5 : Croissance comparée

La fonction exponentielle l'emporte en $\pm\infty$ sur toute fonction polynôme, c'est à dire : Pour tout entier α strictement positif

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

Les autres limites ne sont pas indéterminées.

Exercice sur fiche : 5-6

Exercice sur le livre :

dérivées 14-18 p 283 ; 46-50 p 287

primitives 19-22 p 283 ; 51-58 p 287

limites 9-13 p 283 ; 43 - 45 p 287

2. FONCTION EXPONENTIELLE ET NOMBRES COMPLEXES

2.1. Notation exponentielle d'un nombre complexe

Remarque : Les propriétés des fonctions exponentielles permettent d'écrire

$$ke^x \times k'e^{x'} = kk'e^{x+x'}$$

Ainsi, on multiplie les parties non exponentielle et on additionne les exposants. Cette similitude avec les propriétés des modules et arguments des nombres complexes amènent à la définition :

Définition 3 : Notation exponentielle d'un nombre complexe.

Soit z un nombre complexe.

La notation **exponentielle** de z est $z = re^{i\theta}$ où r est le module de z ,
 θ est l'argument de z ,
et e est le nombre tel que $\ln(e) = 1$.

Exemple : Le nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ est noté $2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Sa forme algébrique est $z = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3}) = 1 + i\sqrt{3}$.

Remarque : Il ne faut pas confondre la fonction exponentielle e^x qui ne se calcule que pour tout réel x et la notation exponentielle $e^{i\theta}$ qui est à valeur complexe.

Exercice sur fiche : 1-2

Exercice sur le livre : 12-17-18 p 35 ; 70-71 p 36-42

Théorème 6 :

Les propriétés sur les modules et les arguments des nombres complexes se traduisent par :

$$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = r \times r' e^{i(\theta+\theta')} \quad \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')} \quad (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

2.2. Efficacités de la notation

La notation exponentielle permet de calculer plus facilement des produits ou des quotients de nombres complexes.

Exercice résolu 1 :

Soit $z = 3e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z' = 7e^{i\frac{-2\pi}{3}}$. Calculer zz' et $\frac{z}{z'}$.

Solution :

$$zz' = 3 \times 7 e^{i(\frac{3\pi}{4} + \frac{-2\pi}{3})} = 21e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{3}{7} e^{i(\frac{3\pi}{4} - \frac{-2\pi}{3})} = \frac{3}{7} e^{i\frac{17\pi}{12}}.$$

Exercice sur fiche : 3-4

Exercice sur le livre : 60 p 41

La notation exponentielle permet de calculer plus facilement des puissances de nombres complexes.

Exercice résolu 2 :

Calculer $(1+i)^8$

Solution : $(1+i)^8 = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^8 = \sqrt{2}^8 e^{i\frac{8\pi}{4}} = 16e^{i2\pi} = 16$

Exercice sur fiche : 5-6-7

La notation exponentielle permet d'obtenir (entre autre) les formules d'addition de trigonométrie :

Théorème 7 : Formules trigonométriques

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \sin(a+b) = \cos a \sin b + \cos b \sin a$$

Preuve.

D'une part, $e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$.

D'autre part ,

$$\begin{aligned} e^{i(a+b)} &= e^{ia} \times e^{ib} \\ &= (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) \\ &= \cos a \cos b - \sin a \sin b + i(\cos a \sin b + \cos b \sin a) \end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on retrouve les formules d'addition :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \text{ et } \sin(a+b) = \cos a \sin b + \cos b \sin a \quad \square$$

Exercice sur fiche : 8

Exercice résolu 3 :

En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{-\pi}{4}$, donner les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$

Solution : $\cos(\frac{\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{-\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{3}) \cos(\frac{-\pi}{4}) - \sin(\frac{\pi}{3}) \sin(\frac{-\pi}{4}) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

On montre de la même manière que $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

2.3. Applications

Théorème 8 : Formule de Moivre

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

Preuve. ($\cos \theta$

$$i \sin \theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad \square$$

Exercice sur fiche : 10

cette formule est à la base de la méthode permettant d'exprimer $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

Exercice résolu 4 :

Exprimer $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

Solution :

D'une part , d'après la formule de Moivre, $(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta)$.

D'autre part, la formule $(a+b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$ donne :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta i \sin \theta + 3 \cos \theta (i \sin \theta)^2 + 3 (i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on déduit :

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = 4 \cos^4 \theta - 3 \cos \theta \text{ et } \sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta.$$

Théorème 9 : Formule d'Euler

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Preuve. $\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$$\frac{\cos \theta + i \sin \theta + \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)}{2} = \frac{\cos \theta + i \sin \theta + \cos \theta - i \sin \theta}{2} = \frac{2 \cos \theta}{2} = \cos \theta \quad \square$$

Exercice sur fiche : 9

Définition 4 : Linéarisation

Linéariser une expression trigonométrique, c'est trouver une expression du premier degré qui lui soit égale.

Les

formules d'Euler sont à la base de la méthode permettant de linéariser $\cos^n \theta$ (ou $\sin^n \theta$).

Exercice résolu 5 :

Linéariser $\cos^4 \theta$.

Solution : A l'aide de la relation $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ et de la formule d'Euler, on écrit

$$\begin{aligned} \cos^4 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^4 \\ &= \frac{(e^{i\theta})^4 + 4(e^{i\theta})^3 e^{-i\theta} + 6(e^{i\theta})^2 (e^{-i\theta})^2 + 4e^{i\theta} (e^{-i\theta})^3 + (e^{-i\theta})^4}{2^4} \\ &= \frac{e^{i4\theta} + 4e^{i2\theta} + 6 + 4e^{-i2\theta} + e^{-i4\theta}}{16} \\ &= \frac{(e^{i4\theta} + e^{-i4\theta}) + 4(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) + 6}{16} \\ &= \frac{2 \cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 6}{16} \\ &= \frac{\cos 4\theta}{8} + \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Exercice sur fiche : 11-12

Exercice sur le livre : 19-20 p 36 et 73-74 p 43

2.4. Complexe et transformation**Théorème 10 (admis) : Notation complexe d'une translation**

Soit \vec{u} un vecteur du plan d'affixe b . L'application qui a tout point M d'affixe z , fait correspondre le point M' , d'affixe z' telle que $z' = z + b$ est la translation de vecteur \vec{u} .

Théorème 11 (admis) : Notation complexe d'une rotation

L'application qui a tout point M d'affixe z , fait correspondre le point M' , d'affixe z' telle que $z' = e^{i\theta} \times z$ est la rotation de centre O et d'angle θ .

Exercice sur fiche : 13-14-15-16

Exercice sur le livre : 24-27-28-29 p 37