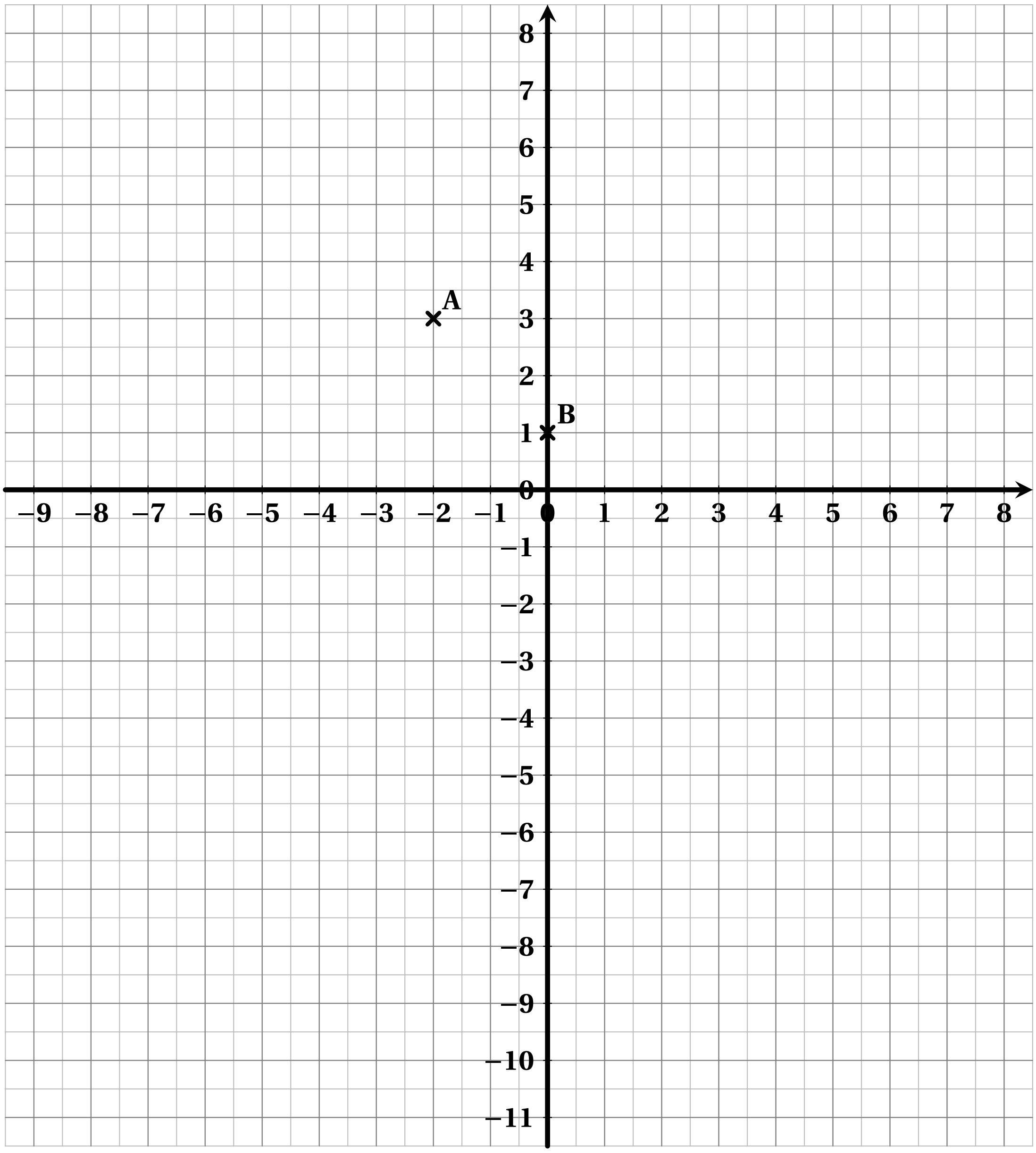
DEVOIR COMMUN DE MATHÉMATIQUES

Vendredi 28 mars

L'usage de la calculatrice est autorisé.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Le barème est indicatif.

Exercice 1 : (points)

On considère le repère orthonormé ci-dessous. On complètera la figure au fur et à mesure.



1. **a)** Dans le repère ci-dessus, lire les coordonnées des points A et B.

   b) Placer les points $C(-2\,;-9)$ et $D(-8\,;-3)$.

   c) Conjecturer la nature du quadrilatère ABCD.

   d) Déterminer, par le calcul, une équation de la droite (CD).

e) On admet que la droite (AB) a pour équation $y = -x + 1$.
Déterminer la position relative des droites (AB) et (CD).

f) Quelle est la nature du triangle ADC ? Justifier.

g) Retrouver la nature du quadrilatère ABCD.

2. Ω est le point d'intersection des droites (AD) et (BC).

a) Montrer, en utilisant une lecture graphique, que chercher les coordonnées de Ω revient à résoudre le système

$$(S) : \begin{cases} y & = & x + 5 \\ y & = & 5x + 1 \end{cases}$$

On justifiera la lecture graphique.

b) En déduire les coordonnées de Ω.

3. **a)** Déterminer une équation de la droite (AC).

b) On admet que la droite (BD) a pour équation $y = \frac{1}{2}x + 1$.
Vérifier que le point $\Omega'(-2\,;\,0)$ est bien le point d'intersection des droites (AC) et (BD).

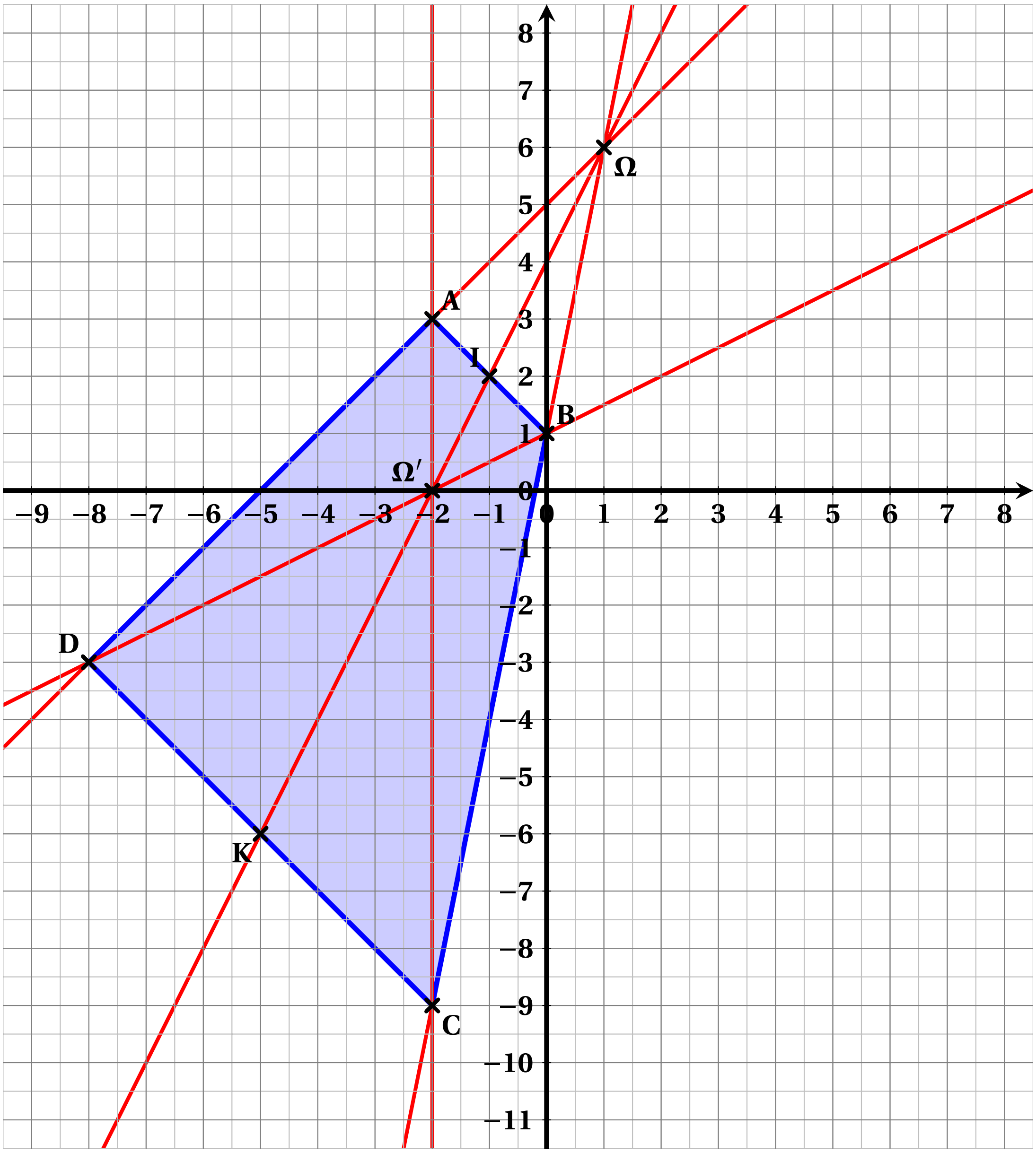
4. I est le milieu du segment [AB] et K est le milieu du segment [CD].

a) Calculer les coordonnées de I et de K.

b) Les points Ω, Ω', I et K sont-ils alignés ?

Exercice 1 : (Correction)

La figure complétée est la suivante :



1. **a)** ⋆ A a pour coordonnées $(-2\,;3)$.

   ⋆ B a pour coordonnées $(0\,;1)$.

   b) Voir la figure.

   c) Le quadrilatère ABCD semble être un trapèze rectangle.

   d) $x_C \neq x_D$, donc la droite (CD) admet une équation du type $y = mx + p$.

   $m = \dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \dfrac{-3-(-9)}{-8-(-2)} = \dfrac{6}{-6} = -1.$

   La droite (CD) admet donc une équation du type $y = -x + p$.

   $C \in (CD)$ donc $y_C = -x_C + p$.

   Or, $y_C = -x_C + p \quad \Leftrightarrow \quad -9 = -(-2) + p \quad \Leftrightarrow \quad -11 = p$.

   La droite (CD) admet donc pour équation (réduite) $y = -x - 11$.

e) Comme les droites (AB) et (CD) ont le même cœfficient directeur, elles sont parallèles.

f) Dans le repère orthonormé précédent, on a :

$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2 = [-2-(-2)]^2 + (-9-3)^2 = 144$,

$AD^2 = (x_D - x_A)^2 + \left(y_D - y_A\right)^2 = [-8-(-2)]^2 + (-3-3)^2 = 72$, et

$DC^2 = (x_C - x_D)^2 + \left(y_C - y_D\right)^2 = [-2-(-8)]^2 + [-9-(-3)]^2 = 72$.

Ainsi $AD^2 = DC^2$, donc AD = DC et le triangle ADC est isocèle en D.

De plus, $AD^2 + DC^2 = 72 + 72 = 144 = AC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ADC est rectangle en D.

Le triangle ADC est donc rectangle et isocèle en D.

g) D'après les deux questions précédentes, on obtient que le quadrilatère ABCD est un trapèze rectangle.

2. **a)** Graphiquement,

⋆ la droite (AD) a pour cœfficient directeur 1 et pour ordonnée à l'origine 5 ; elle admet donc pour équation $y = x + 5$.

⋆ la droite (BC) a pour cœfficient directeur 5 et pour ordonnée à l'origine 1 ; elle admet donc pour équations $y = 5x + 1$.

Chercher les coordonnées de Ω revient donc à résoudre le système proposé.

b) Remarquons que le système admet bien une unique solution car les deux droites ont des cœfficients directeurs différents.

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} 5x+1 & = & x+5 \\ y & = & x+5 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} 4x & = & 4 \\ y & = & x+5 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 6 \end{array}\right. .$$

Ω a pour coordonnées (1 ; 6).

3. **a)** $x_A = x_C = -2$. La droite (AC) admet donc pour équation $x = -2$.

b) Il suffit de vérifier que Ω′ appartient bien aux droites d'équation $x = -2$ et $y = \frac{1}{2}x + 1$.

⋆ $x_{\Omega'} = -2$, donc $\Omega' \in (AC)$.

⋆ $\frac{1}{2}x_{\Omega'} + 1 = \frac{1}{2} \times (-2) + 1 = -1 + 1 = 0$.

Or, $y_{\Omega'} = 0$, donc $y_{\Omega'} = \frac{1}{2}x_{\Omega'} + 1$ et $\Omega' \in (BD)$.

Conclusion : Ω′ est bien le point d'intersection des droites (AC) et (BD).

4. **a)** ⋆ Comme I est le milieu du segment [AB],

$x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-2+0}{2} = -1 \quad$ et $\quad y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{3+1}{2} = 2$.

I a pour coordonnées (−1 ; 2).

⋆ Comme K est le milieu du segment [CD],

$x_K = \dfrac{x_C + x_D}{2} = \dfrac{-2-(-8)}{2} = -5 \quad$ et $\quad y_K = \dfrac{y_C + y_D}{2} = \dfrac{-9+(-3)}{2} = -6$.

K a pour coordonnées (−5 ; −6).

b) 1ère méthode :

$\star$ $x_{\Omega'} \neq x_{\mathrm{K}}$, donc la droite $(\mathrm{K}\Omega')$ a pour cœfficient directeur
$m_1 = \dfrac{y_{\Omega'-y_{\mathrm{K}}}}{x_{\Omega'} - x_{\mathrm{K}}} = \dfrac{0-(-6)}{-2-(-5)} = 2.$

$\star$ $x_{\Omega'} \neq x_{\mathrm{I}}$, donc la droite $(\mathrm{I}\Omega')$ a pour cœfficient directeur $m_2 = \dfrac{y_{\Omega'-y_{\mathrm{I}}}}{x_{\Omega'} - x_{\mathrm{I}}} = \dfrac{0-2}{-2-(-1)} = 2.$

$m_1 = m_2$, donc les points I, K et Ω' sont alignés.

$\star$ $x_{\Omega} \neq x_{\mathrm{K}}$, donc la droite $(\mathrm{K}\Omega)$ a pour cœfficient directeur $m_3 = \dfrac{y_{\Omega-y_{\mathrm{K}}}}{x_{\Omega} - x_{\mathrm{K}}} = \dfrac{6-(-6)}{1-(-5)} = 2.$

$\star$ $x_{\Omega} \neq x_{\mathrm{I}}$, donc la droite $(\mathrm{I}\Omega)$ a pour cœfficient directeur $m_4 = \dfrac{y_{\Omega-y_{\mathrm{I}}}}{x_{\Omega} - x_{\mathrm{I}}} = \dfrac{6-2}{1-(-1)} = 2.$

$m_3 = m_4$, donc les points I, K et Ω sont alignés.

Conclusion : Les points I, K, Ω et Ω' sont alignés.

2ème méthode :

$\star$ Déterminons une équation de la droite (IK).

$x_{\mathrm{I}} \neq x_{\mathrm{K}}$, donc la droite (IK) admet une équation du type $y = ax + b$.
$a = \dfrac{y_{\mathrm{I}-\mathrm{K}}}{x_{\mathrm{I}} - x_{\mathrm{K}}} = \dfrac{2-(-6)}{-1-(-5)} = 2.$
La droite (IK) admet une équation du type $y = 2x + b$.

$\mathrm{I} \in (\mathrm{IK})$, donc $y_{\mathrm{I}} = 2x_{\mathrm{I}} + b$.

Or, $y_{\mathrm{I}} = 2x_{\mathrm{I}} + b \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 2\times(-1) + b \quad \Leftrightarrow \quad 4 = b.$

La droite (IK) admet pour équation $y = 2x + 4$.

$\star$ Vérifions si les points Ω et Ω' appartiennent ou non à la droite (IK).

- $2x_{\Omega} + 4 = 2\times 1 + 4 = 6 = y_{\Omega}$, donc $\Omega \in (\mathrm{IK})$.
- $2x_{\Omega'} + 4 = 2\times(-2) + 4 = 0 = y_{\Omega'}$, donc $\Omega' \in (\mathrm{IK})$.

Conclusion : Les points I, K, Ω et Ω' sont alignés.

Exercice 2 : (points)

Exercice 3 : **(points)**