

## 10

Échantillonnage  
Prise de décision

On considère une population dont une proportion  $p$  d'individus possèdent une certaine particularité  $\mathcal{P}$ . On note  $f$  la fréquence des individus d'un échantillon de taille  $n$ , prélevé au hasard et avec remise, qui possèdent la particularité  $\mathcal{P}$ .

**Exemple •** Dans la population active d'un pays, il y a 21% de chômeurs. Ici,  $p = 0,21$ .  
On prélève un échantillon de 10 personnes et on s'intéresse à celles qui sont au chômage. Il y en a 2.  
Donc  $n = 10$  et  $f = \frac{2}{10}$ .

## I. Intervalle de fluctuation d'une fréquence

On suppose que la proportion a pour valeur  $p$  et on note  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre d'individus de l'échantillon qui possèdent la particularité  $\mathcal{P}$ .

Alors  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

**Définition 1**

Soit  $p$  la valeur de la proportion. On note  $a$  le plus petit nombre entier tel que  $p(X \leq a) > 0,025$  et  $b$  le plus petit nombre entier tel que  $p(X \leq b) \geq 0,975$ .  
On appelle **intervalle de fluctuation** à 95% de la fréquence  $f$  pour un échantillon de taille  $n$ , l'intervalle  $\left[ \frac{a}{n} ; \frac{b}{n} \right]$ .

Autrement dit, la fréquence  $f$  appartient à l'intervalle de fluctuation dans au moins 95% des cas.

## II. Prise de décision

Dans certaines situations, il y a un doute sur la valeur  $p$  donnée de la proportion et s'il s'agit de décider si l'hypothèse « la proportion a pour valeur  $p$  » est acceptable ou non. Pour cela, on prélève au hasard et avec remise un échantillon de  $n$  individus de la population.

**Propriété 1**

On note  $f$  la fréquence des individus de l'échantillon qui possède la particularité  $\mathcal{P}$ .  
Lorsque  $f$  appartient à l'intervalle de fluctuation, on accepte l'hypothèse « la proportion a pour valeur  $p$  », avec un risque de 5%.  
Sinon, on rejette l'hypothèse.

**Exemple •** Une publicité affirme que 80% des personnes utilisant un certain produit ont des cheveux qui repoussent au cours du premier mois d'utilisation.  
On sélectionne au hasard 50 personnes qui ont testé le produit. Parmi elles, 35 déclarent que des cheveux ont repoussé au cours du premier mois d'utilisation.  
À partir de cet échantillon, peut-on accepter, au risque de 5%, l'affirmation de la publicité ?