3 Généralités sur les fonctions

I. Notions

Définition 1

Soit $\mathscr{D}_f$ un ensemble de nombres réels (généralement un intervalle ou une réunion d'intervalles).
Définir une **fonction** f sur $\mathscr{D}_f$, c'est associer à tout nombre x de $\mathscr{D}_f$ un réel unique, noté $f(x)$ et appelé **image** de x par f.
x est appelée la **variable** et $f(x)$ est la valeur prise par la fonction f pour la valeur x.
L'ensemble $\mathscr{D}_f$ est appelé **ensemble de définition** de f (ou domaine de définition).

Notation : La phrase : « *La fonction f qui, au nombre x, associe le nombre $f(x)$* »
peut se noter de la façon suivante : $f : x \mapsto f(x)$.

Exemples •

1°) Soit g la fonction qui, à x, associe le nombre $2x^2 - 1$.
Elle est définie par $g(x) = 2x^2 - 1$ et on note : $g : x \mapsto 2x^2 - 1$.

2°) Si on considère la taille associée à un individu, on définit une fonction : *individu* $\mapsto$ *taille*.

3°) Si on considère le prix de vente d'un litre d'essence dans une ville, on ne définit pas une fonction car pour un même type d'essence, il peut exister plusieurs prix en fonction des stations service.

Pour avoir une idée visuelle de la fonction, il est souvent utile de la représenter graphiquement dans un repère orthonormé. On a alors la définition suivante :

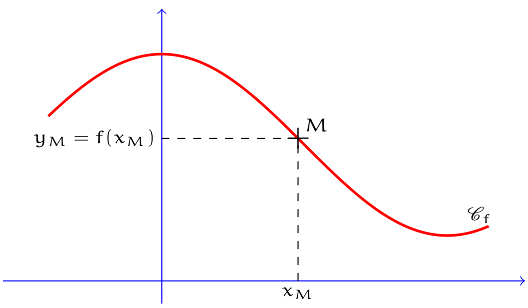
Définition 2

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$.
Dans un repère du plan, la **courbe représentative** $\mathscr{C}_f$ de f est l'ensemble des points M de coordonnées $(x_M\,;\,y_M)$ telles que :

- x_M décrit l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$;
- y_M est l'image de x_M par f : $y_M = f(x_M)$.

Remarque

On dit que $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$ dans le repère choisi.



Définition 3

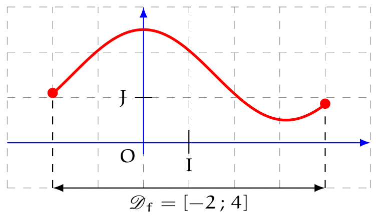
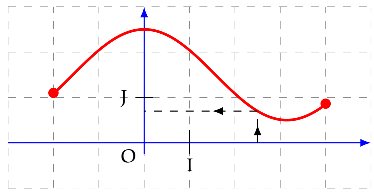
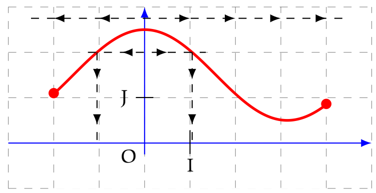
On considère une fonction $f : x \mapsto f(x)$.
Soit y un nombre réel pour lequel il existe $x \in \mathscr{D}_f$ tel que $y = f(x)$.
On dit alors que x est un **antécédent** de y par f.

Remarque

*D'après les définitions précédentes, on en déduit que l'image d'un nombre de $\mathscr{D}_f$ existe toujours et est **unique** alors qu'un nombre peut avoir plusieurs antécédents (voire aucun).*

II. Définir une fonction

A. À partir d'une courbe représentative

Ensemble de définition	**Lecture d'image**	**Lecture d'antécédents**
		
Lecture de l'ensemble de définition sur l'axe des abscisses.	Image d'un nombre sur l'axe des ordonnées. Ici, l'image de $2,5$ est environ $0,8$.	Lecture d'antécédents sur l'axe des abscisses. Ici, 2 a pour antécédent environ -1 et 1. $2,75$ n'a pas d'antécédent.

B. À partir d'un tableau

On considère la fonction f définie de la façon suivante :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	3	8	10	3

Ensemble de définition. La fonction n'est définie que pour les valeurs de x écrites sur la première ligne du tableau. En dehors de ces nombres, on ne sait pas ce qu'il se passe.

Lecture d'image. On sait que l'image de x est $f(x)$: on lit l'image d'un nombre de la première ligne dans la deuxième ligne. Par exemple, $f(1) = 10$.

Lecture d'antécédents. Les antécédents se lisent sur la première ligne. Le nombre 3 en a deux : -1 et 2. Le nombre -2 n'a pas d'antécédent.

C. À partir d'une formule

Remarque

Connaître une fonction f à partir d'une formule explicite permet d'avoir de nombreux renseignements. En particulier :

- *on peut calculer l'image de n'importe quel nombre de l'ensemble de définition ;*
- *une formule permet de traduire le lien existant entre deux quantités.*
- *trouver un antécédent a d'un nombre connu b revient à résoudre l'équation $f(a) = b$.*

Exemple • Le poids idéal en fonction de la taille en cm d'un homme et d'une femme adulte est calculé respectivement à l'aide des fonctions h et f ci-dessous :

$$h(t) = t - 100 - \frac{t - 150}{4} \qquad f(t) = t - 100 - \frac{t - 150}{2,5}$$

1°) Quelles sont les deux quantités liées par chaque formule ? Quelle est celle qui dépend de l'autre ?

2°) Calculer le poids idéal d'un homme mesurant $1,75\ \mathrm{m}$.

3°) Calculer le poids idéal d'une femme mesurant $1,70\ \mathrm{m}$.

4°) Le nombre 59 est-il l'image ou l'antécédent de 165 par la fonction f ?

5°) Calculer l'antécédent de 50 par la fonction f et interpréter le résultat.