4 Nombres complexes Forme algébrique

Géométrie

I. Ensemble $\mathbb{C}$

Définition 1

Le nombre i est le nombre tel que $i^2 = -1$.

Remarque

Le nombre i *n'est pas un nombre réel puisque son carré est négatif.*

Définition 2

On appelle **nombre complexe** tout nombre z pouvant s'écrire sous la forme $z = x + yi$, où x et y sont deux nombres réels quelconques.
Cette écriture est la **forme algébrique** du nombre z.
x est appelé la **partie réelle** de z et se note $x = \mathfrak{Re}(z)$.
y est appelé la **partie imaginaire** de z et se note $y = \mathfrak{Im}(z)$.

Exemples •

$a = 4 + 2i$ est un nombre complexe : $\mathfrak{Re}(a) = 4$ et $\mathfrak{Im}(a) = 2$.

$b = -1 + 3i$ est un nombre complexe : $\mathfrak{Re}(b) = -1$ et $\mathfrak{Im}(b) = 3$.

$c = \dfrac{6-3i}{2}$ est un nombre complexe : $\mathfrak{Re}(c) = \dfrac{6}{2} = 3$ et $\mathfrak{Im}(c) = \dfrac{-3}{2}$.

$d = \sqrt{2} + \sqrt{5}\,i$ est un nombre complexe : $\mathfrak{Re}(d) = \sqrt{2}$ et $\mathfrak{Im}(d) = \sqrt{5}$.

$e = i$ est un nombre complexe : $\mathfrak{Re}(e) = 0$ et $\mathfrak{Im}(e) = 1$.

Définition 3

On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Propriété 1

Tout nombre réel est un nombre complexe.
Par conséquent, l'ensemble des nombres réels est inclus dans l'ensemble des nombres complexes.
On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Démonstration

Soit $a \in \mathbb{R}$. On peut écrire a sous la forme $a = a + 0 \times i$ donc $a \in \mathbb{C}$ et $\mathfrak{Re}(a) = a$ et $\mathfrak{Im}(a) = 0$. □

Définition 4

Soit $z = x + yi$ un nombre complexe.

1°) Si $\mathfrak{Im}(z) = 0$ alors z est un nombre réel.

2°) Si $\mathfrak{Re}(z) = 0$ alors z est un **imaginaire pur**.

Exemples •

– Les nombres i, $2i$, $\dfrac{-5i}{7}$ sont imaginaires purs.

– Les nombres 3, $-\sqrt{6}$, π, 0 sont des réels.

II. Opérations sur les nombres complexes

A. Prolongements des opérations de $\mathbb{R}$

On admet le théorème suivant :

Théorème 1

Les propriétés de calculs valables dans $\mathbb{R}$ restent valables dans $\mathbb{C}$: associativité, commutativité, distributivité, identités remarquables. En particulier, en notant $z = x + yi$ et $z' = x' + y'i$, on a :

$$\begin{array}{rcl} z + z' & = & (x + x') + (y + y')i \\ z \times z' & = & (xx' - yy') + (xy' + x'y)i \\ 1 \times z & = & z \\ 0 + z & = & z \\ -z & = & -x - yi \end{array}$$

Exemples • Soient $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 1 - 3i$ et $z_3 = -4i$.
Calculer : $z_1 + z_2$; $z_2 \times z_3$, $-z_2$, $(z_1 + z_3) \times z_2$.

On admet également le théorème suivant :

Théorème 2

Soient z et z' deux nombres complexes.

$$z = z' \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \mathfrak{Re}(z) & = & \mathfrak{Re}(z') \\ & \textbf{et} & \\ \mathfrak{Im}(z) & = & \mathfrak{Im}(z') \end{array} \right.$$

Remarque

En particulier, en posant $z = x + yi$, on a : $z = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ et $y = 0)$.

Définition 5

Deux nombres complexes non nuls z et z' sont des **nombres inverses** lorsque $z \times z' = 1$.
On écrit alors $z' = \dfrac{1}{z}$ ou encore $z = \dfrac{1}{z'}$.

Théorème 3

Tout nombre complexe $z = x + yi$ non nul admet un inverse z' tel que :

$$z' = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i.$$

Démonstration

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{z} & = & \dfrac{1}{x + yi} \\ & = & \dfrac{x - yi}{(x + yi)(x - yi)} \\ & = & \dfrac{x - yi}{x^2 + y^2} \\ & = & \boxed{\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i} \end{array}$$

Le théorème est bien démontré. □

B. Conjugué d'un nombre complexe

Définition 6

Soit $z = x + yi \in \mathbb{C}$. On appelle **nombre conjugué** de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par :

$$\overline{z} = x - yi.$$

Remarque

Deux nombres sont conjugués lorsqu'ils ont la même partie réelle et que leur partie imaginaire sont opposés.

Exemples • Déterminer les nombres conjugués des nombres suivants :
$z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 1 - 3i$, $z_3 = -4i$ et $z_4 = 5$.

Propriété 2

Soit $z \in \mathbb{C}$. $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

Démonstration

Notons $z = x + yi$.
$\Leftarrow : z \in \mathbb{R} \Rightarrow z = x + 0 \times i \Rightarrow \overline{z} = x - 0 \times i = x = z$.

$\Rightarrow : z = \overline{z} \Rightarrow x + yi = x - yi \Rightarrow 2yi = 0 \Rightarrow yi = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$. □

Propriété 3

Soit $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Alors : $z \times \overline{z} = x^2 + y^2$.

Démonstration

$z \times \overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - xyi + xyi - y^2 i^2 = x^2 + y^2$. □

Propriété 4

Pour tous nombres complexes z et z' :

1°) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

2°) $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

3°) Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Démonstration

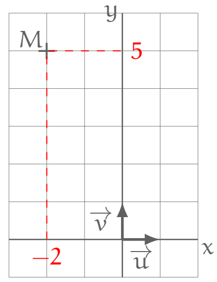
Démontrons par exemple le deuxième point.
On note $z = x + yi$ et $z = x' + y'i$. On effectue les calculs séparément.
$z \times z' = (x + yi)(x' + y'i) = xx' - yy' + (xy' + x'y)i$ donc :
$\overline{z \times z'} = \boxed{xx' - yy' - (xy' + x'y)i}$.

$\overline{z} \times \overline{z'} = (x - yi)(x' - y'i) = xx' - xy'i - x'yi + yy'i^2 = \boxed{xx' - yy' - (xy' + x'y)i}$. □

III. Représentation géométrique

On muni le plan $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé $(O\,;\ \vec{u},\ \vec{v})$.
On admet alors que le nombre complexe $z = x + yi$ est entièrement déterminé par sa partie réelle x et sa partie imaginaire y. On peut donc associer ce nombre z au couple $(x\,;\,y)$ qui, dans un repère, correspond à l'unique point de coordonnées $(x\,;\,y)$.
Réciproquement, si le point M a pour coordonnées $(a\,;\,b)$ alors, on peut lui associer un unique nombre complexe : $a + bi$.

Exemple • On peut faire correspondre le nombre complexe $-2+5i$ au point du plan de coordonnées $(-2\,;5)$.



Définition 7

1°) Le point $M(x\,;y)$ est l'**image** du nombre complexe $z=x+yi$.

2°) Le nombre complexe $z=x+yi$ est l'**affixe** du point $M(x\,;y)$ et on note $z=\mathrm{aff}(M)$ ou directement $M(z)$.

Remarque

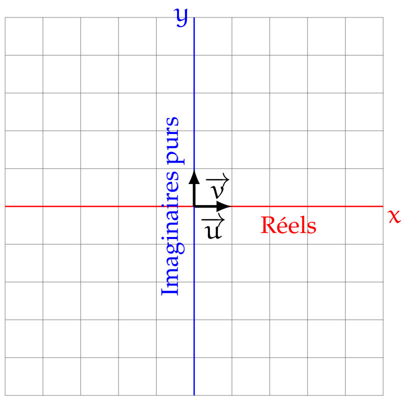
*Le mot affixe est féminin : **une** affixe.*

Si $z=x+0i$ alors $z\in\mathbb{R}$ et on lui associe le point de coordonnées $(x\,;0)$.
Si $z=0+yi$ alors z est un imaginaire pur et on lui associe le point de coordonnées $(0\,;y)$.
On en déduit la propriété suivante :

Propriété 5

1°) Un nombre réel a pour image un point situé sur l'axe des abscisses.

2°) Un imaginaire pur a pour image un point situé sur l'axe des ordonnées.



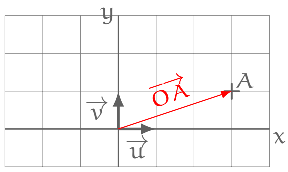
En seconde, il a été vu que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avait les mêmes coordonnées que le point M. En particulier, si M a pour coordonnées $(x\,;y)$ alors $\overrightarrow{OM}=x\vec{u}+y\vec{v}$. On a alors la définition suivante :

Définition 8

1°) Le vecteur $\overrightarrow{OM}(x\,;y)$ est le **vecteur image** du nombre complexe $z=x+yi$.

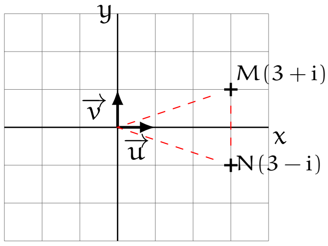
2°) Le nombre complexe $z=x+yi$ est l'**affixe** du vecteur $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et on note $z=\mathrm{aff}\left(\overrightarrow{OM}\right)$ ou directement $\overrightarrow{OM}(z)$.

Exemple • Le point A et le vecteur $\overrightarrow{AM}$ ont la même affixe : $z=3+i$.



Propriété 6

On considère un point M d'affixe z. Alors le point N a pour affixe $\overline{z}$ si et seulement si M et N sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



Propriété 7

On considère deux points A et B d'affixe respective z_1 et z_2.
On place les points C et D tels que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OD} = k.\overrightarrow{OA}$ ($k \in \mathbb{R}$).
Alors l'affixe de C est z_3 telle que :

$$z_3 = z_1 + z_2$$

et l'affixe de D est z_4 telle que :

$$z_4 = k.z_1.$$