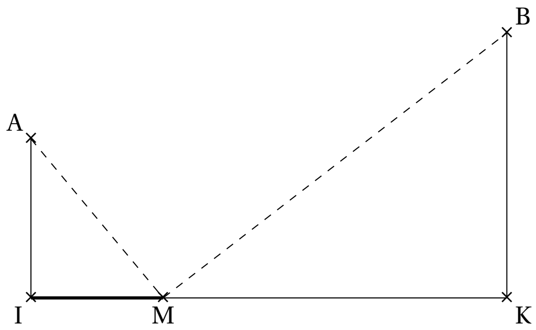
Activité V.1
Problème d'optimisation
Installation d'une canalisation

On veut alimenter en eau deux maisons en utilisant une canalisation d'eau provenant d'une rivière. Le schéma ci-dessous simplifie la carte de la région (échelle non respectée).
La rivière est symbolisée par la droite (IK). Les deux maisons sont en A et B et les canalisations [AM] et [BM] sont connectées à la rivière au niveau du point M tel que les triangle AIM et BKM soient respectivement rectangles en I et en K.



Après différentes mesures réalisées, le typographe renseigne les données suivantes :

$$\mathrm{AI} = 5\ km \quad ; \quad \mathrm{BK} = 7\ km \quad \text{et} \quad \mathrm{IK} = 18\ km.$$

On note IM = a.

1°) Donner l'expression de MK en fonction de a.

On cherche à présent à placer le point M de façon à obtenir une longueur totale de canalisation minimale, c'est-à-dire de façon à rendre la somme MA + MB la plus petite possible.

Utilisation d'un logiciel de géométrie

Le typographe souhaite réaliser la figure sur un logiciel.

2°) Écrire toutes les étapes de construction de la figure.

3°) Quelles semblent être les variations de la longueur de la canalisation en fonction de a.

Utilisation d'une fonction

4°) Utiliser le triangle AIM pour écrire AM en fonction de a.

5°) Utiliser le triangle BKM pour déterminer la longueur BM en fonction de a.

6°) Exprimer la longueur MA + MB en fonction de a. On note cette valeur L(a) (car la longueur totale de la canalisation dépend de a).

7°) Sur quel intervalle doit-on étudier la fonction L ? On le note $\mathscr{D}_\mathrm{L}$.

8°) À l'aide de la calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \mathrm{L}(x)$ sur l'intervalle $\mathscr{D}_\mathrm{L}$.

9°) À l'aide de la calculatrice, visualiser le tableau de valeur de la fonction L pour déterminer la valeur du minimum de L sur $\mathscr{D}_\mathrm{L}$. Ce minimum est atteint pour quelle valeur arrondie au dixième ?

Démonstration

Le typographe semble maintenant sûr de la position du point M pour minimiser la longueur de la canalisation. Pour éviter une erreur qui coûterait cher, il fait appel à un mathématicien pour déterminer par le calcul la valeur exacte de la position de M.

10°) On appelle A′ le symétrique de A par rapport à (IK).

- **(a)** Pourquoi MA + MB = MA′ + MB ?
- **(b)** Pourquoi les points A, M et B sont-ils alignés ?
- **(c)** En utilisant un théorème de géométrie appris au collège, déterminer la position exacte du point M pour résoudre le problème.