TRIGONOMETRIE PLANE

Table des matières

Dans tout ce chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Les points I et J sont définis par : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$. L'unité de longueur correspond donc à la norme des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

I Repérage sur le cercle trigonométrique

I.1 Le cercle trigonométrique

Définition 1
Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O, de rayon 1 et orienté dans le sens direct, c'est-à-dire, le sens inverse des aiguilles d'une montre.

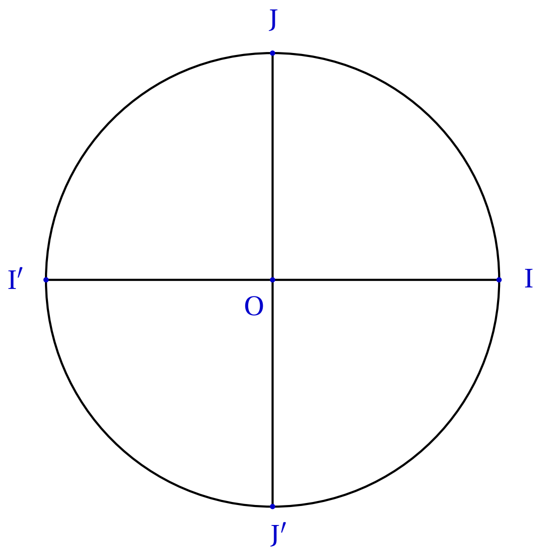
Propriété 1
Le périmètre du cercle trigonométrique est égal à 2π.

Exemple
Sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$, on considère les deux diamètres perpendiculaires $[II']$ et $[JJ']$.

1. Compléter le tableau suivant où M désigne un point du cercle $\mathscr{C}$.

Point M	A	B	C	D	E	F
Mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ en degrés	180	90	60	45		0
Longueur de l'arc $\widehat{AB}$					$\frac{\pi}{6}$	

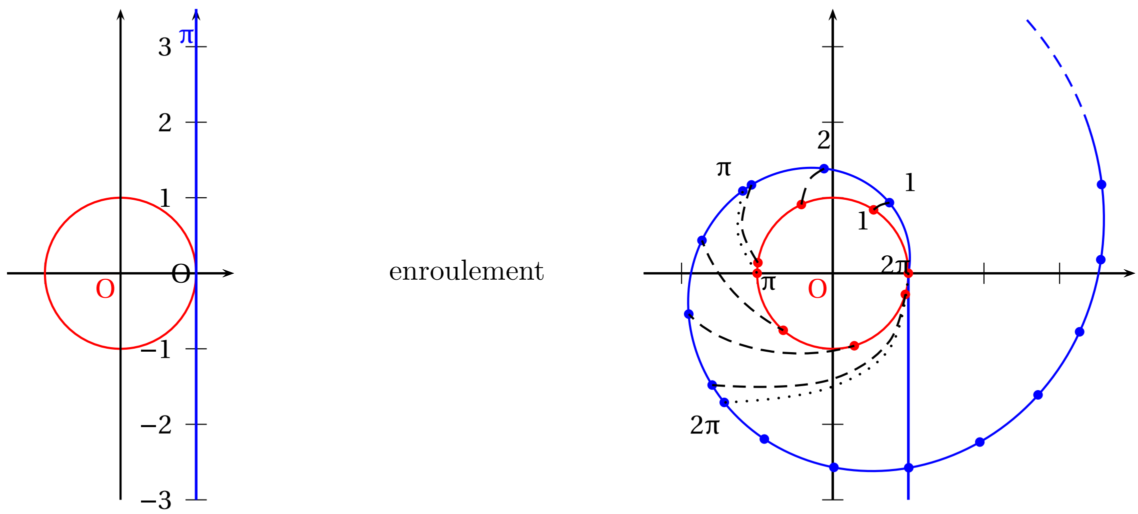
2. Placer les points correspondants sur le cercle trigonométrique.



I.2 Enroulement de la droite numérique

La droite d, tangente au point I au cercle trigonométrique est munie du repère $\left(\mathrm{I};\ \overrightarrow{i}\right)$. Elle représente l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
En enroulant la droite des réels d autour du cercle trigonométrique, on fait correspondre à tout réel x un unique point M du cercle $\mathscr{C}$.

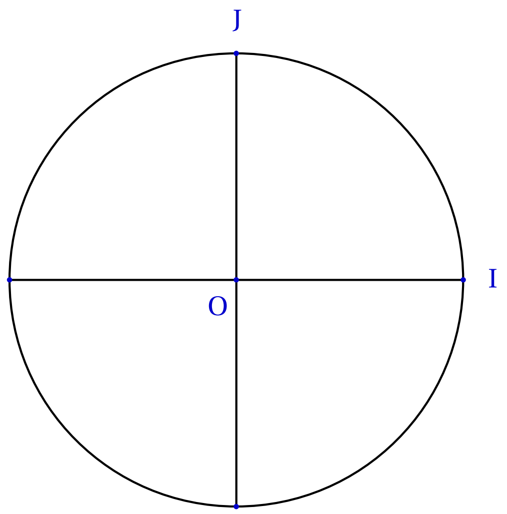
Définition 2
– *On dit que* M *est le point image du réel x.*
– *On dit que x repère le point* M *sur le cercle $\mathscr{C}$.*



Exemple

Placer sur le cercle trigonométrique le point image de chacun des réels :

$$\frac{\pi}{4};\ -\frac{\pi}{2};\ 3\pi;\ \frac{5\pi}{4} \text{ et} \frac{-7\pi}{4}.$$



Propriété 2

Tout point du cercle trigonométrique est l'image d'une infinité de réels.
Si x est l'un d'entre eux, les autres sont les réels de la forme $x + k \times 2\pi$, où k est un entier relatif ($k \in \mathbb{Z}$), soit :

$$\dots\ x-6\pi;\ x-4\pi;\ x-2\pi;\ x;\ x+2\pi;\ x+4\pi;\ x+6\pi;\ \dots$$

Exemple

Les nombres réels $\frac{9\pi}{4}$ et $-\frac{7\pi}{4}$ ont le même point image sur le cercle trigonométrique, en effet :

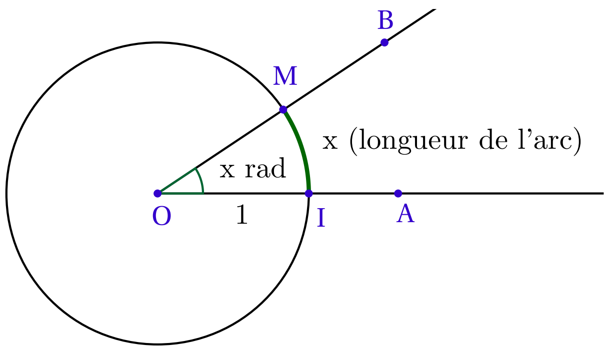
$$\frac{9\pi}{4} - \left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{16\pi}{4} = 4\pi = 2 \times 2\pi$$

la différence obtenue est un multiple de 2π.

I.3 Le radian

Définition 3

Le radian est l'unité de mesure des angles telle que la mesure en radian d'un angle est égale à la longueur de l'arc que cet angle intercepte sur un cercle de rayon 1.



Exemple
Un angle plat mesure π radians ; un angle droit mesure $\dfrac{\pi}{2}$ radians.

Propriété 3
Les mesures en degrés et en radians des angles sont proportionnelles.

On obtient ainsi un tableau de conversion des mesures des angles :

Mesure en degrés	360	180	90	60	45	30
Mesure en radians	2π	π	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{6}$

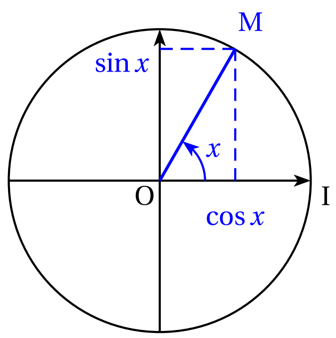
II Cosinus et sinus d'un réel

II.1 Définition et propriétés

Définition 4
Soit x un réel quelconque. Il lui correspond un unique point M du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure en radians de $\widehat{\mathrm{IOM}}$.
– *Le cosinus de x, noté $\cos x$, est l'abscisse de M dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.*
– *Le sinus de x, noté $\sin x$, est l'ordonnée de M dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.*

On a donc, dans le repère $\left(\mathrm{O};\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$

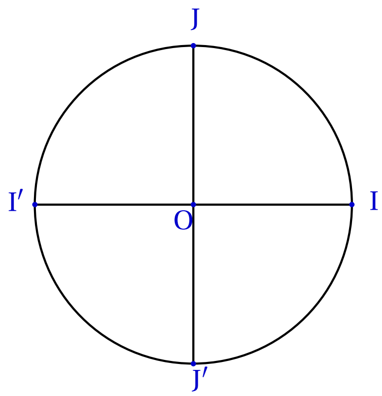
$$\mathrm{M}\,(\cos x;\ \sin x).$$



Exemple

Compléter le tableau suivant :

Réel x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$
$\cos(x)$						
$\sin(x)$						



Propriété 4

Pour tout réel x, on a :

$$\cos(x+2k\pi) = \cos x$$
$$\sin(x+2k\pi) = \sin x, \qquad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Propriété 5

Pour tout réel x, on a :

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$
$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1.$$

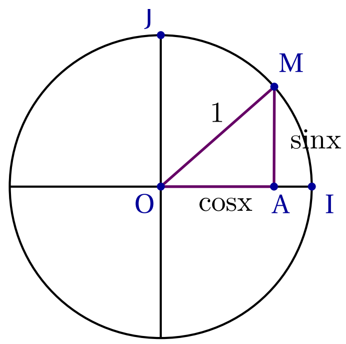
Propriété 6

Pour tout réel x, on a :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Preuve :

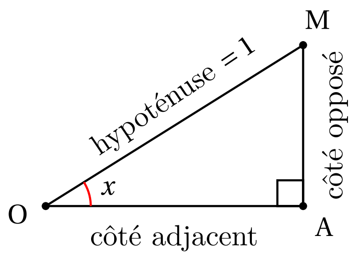
On applique le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle dont les côtés mesurent respectivement $\cos x$, $\sin x$ et 1.



Remarque (Lien avec le cosinus et le sinus d'un angle aigu)
Si x est un réel compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et M son point image sur le cercle trigonométrique, alors : $\cos x = \cos\left(\widehat{\text{IOM}}\right)$ et $\sin x = \sin\left(\widehat{\text{IOM}}\right)$ ce qui fait le lien avec la trigonométrie dans le triangle rectangle.

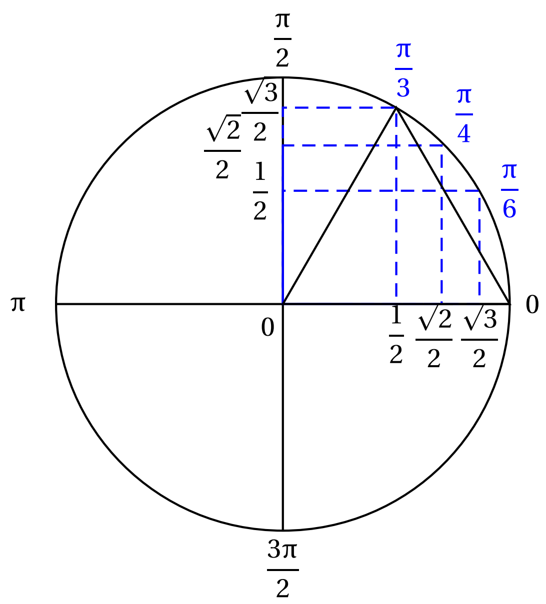
$$\sin x = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{\text{AM}}{\text{OM}} = \text{AM}$$

$$\cos x = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{\text{OA}}{\text{AM}} = \text{OA}$$



II.2 Valeurs remarquables

A l'aide de configurations géométriques simples, on établit les résultats suivants *à connaître* !



On peut donc établir le tableau suivant :

valeur de x en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

REMARQUE

On peut retenir ces valeurs en observant que la première ligne s'écrit aussi :

$\sin x$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

II.3 Angles associés

En observant certaines symétries sur le cercle trigonométrique, on peut établir les formules suivantes :

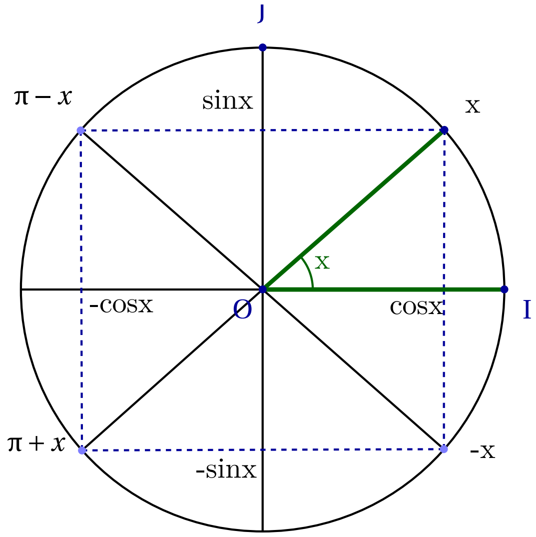
Propriété 7

Pour tout réel x, on a :

$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$



Propriété 8

Pour tout réel x, on a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

Remarque

Connaissant les valeurs du sinus et du cosinus des angles du premier quadrant, on peut en déduire celles correspondant aux trois autres quadrants sur le cercle trigonométrique.

Exemple

Ainsi on calcule :

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

III Résolution des triangles

III.1 Objectif

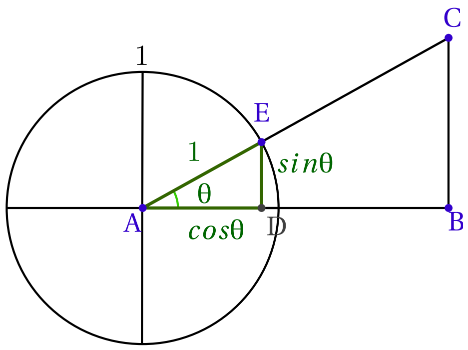
Un triangle est défini par six éléments : trois angles et trois côtés.
Dans le cas général , il suffit de connaître trois de ces éléments pour déterminer les trois autres, sauf dans les cas de la connaissance des trois angles (on a alors seulement le rapport des longueurs des côtés).

III.2 Résolution des triangles rectangles

Principe.
Dans le cas particulier du triangle rectangle un des angles est déjà connu par définition. Pour déterminer tous les autres éléments, il suffit donc de connaître :
– soit un angle (non droit) et la longueur d'un côté,
– soit la longueur d'un côté de l'angle droit et celle de l'hypoténuse,
– soit la longueur des deux côtés de l'angle droit.

Cette résolution des triangles rectangles est utilisée dans de nombreux cas pratiques tels que des problèmes de cartographie ou de navigation.

Relation fondamentale.
On considère un triangle ABC rectangle en B.
On place un cercle trigonométrique de centre A qui définit un petit triangle ADE rectangle en D.
On reconnaît alors une configuration de Thalès.



On peut donc écrire l'égalité des rapports de longueurs :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} \quad \text{soit} \quad \frac{AB}{\cos\theta} = \frac{AC}{1} = \frac{BC}{\sin\theta}$$

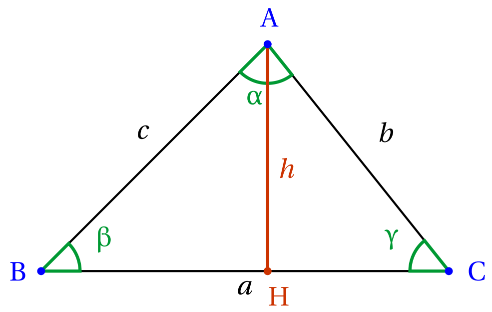
Les différentes égalités nous permettent d'obtenir :

$$AB = AC \cdot \cos\theta$$
$$BC = AC \cdot \sin\theta$$
$$BC = AB \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = AB \cdot \tan\theta$$

Propriété 9
Un côté = hypothénuse · **cosinus** de l'angle **adjacent**
Un côté = hypothénuse · **sinus** de l'angle **opposé**
Un côté = autre côté · **tangente** de l'angle **opposé**

III.3 Résolution des triangles quelconques

Principe.
Un triangle quelconque peut toujours être divisé en deux triangles rectangles ; il suffit pour cela de tracer une de ses hauteurs.



En partant des relations établies dans le triangle rectangle, on définit deux séries de formules pour les triangles quelconques :
– les formules aux sinus
– les formules aux cosinus
Si on note
– A, B et C les sommets du triangle quelconque
– α, β et γ les angles en ces sommets
– a, b et c les longueurs des côtés opposés à ces angles,
alors on a :

Propriété 10
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Propriété 11
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

Remarque
Ces formules sont des extensions du théorème de Pythagore. Elles expriment que, si l'angle est inférieur à un angle droit, alors le segment opposé est inférieur à la somme des carrés des côtés.