Géométrie

2 Coordonnées d'un point dans le plan

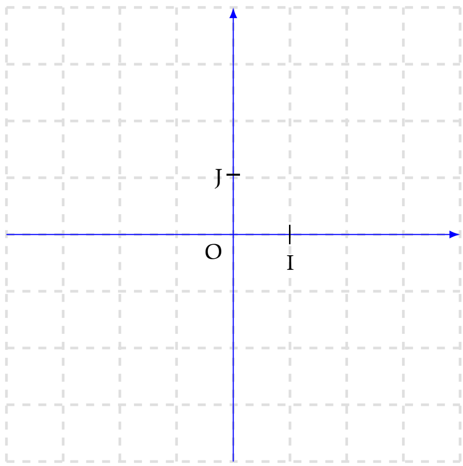
I. Repère orthonormé

Définition 1

Un **repère orthonormé** du plan (O, I, J) est défini de façon unique par la donnée de trois points non alignés O, I et J tels que :

- $(OI) \perp (OJ)$;
- $OI = OJ$.

Le point O est appelé **origine du repère**.
La droite graduée (OI), orientée de O vers I, est appelé **axe des abscisses** et la droite graduée (OJ), orientée de O vers J, est appelée **axe des ordonnées**.
La longueur OI définit l'unité de longueur sur l'axe des abscisses et la longueur OJ définit l'unité de longueur sur l'axe des ordonnées.
Par définition, les deux axes sont perpendiculaires et les unités de longueur sont identiques.



Repère orthonormé

II. Coordonnées d'un point

On considère un point M du plan dans un repère (O, I, J) orthonormé.
On trace la parallèle à (OJ) passant par M. Elle coupe l'axe des abscisses en H.
On trace la parallèle à (OI) passant par M. Elle coupe l'axe des ordonnées en K.

Définition 2

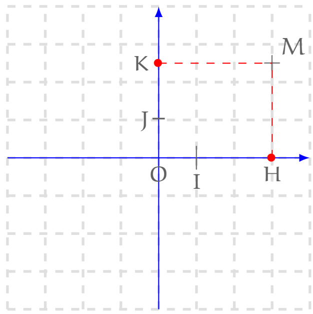
1°) Sur l'axe (OI), le nombre réel associé à H est appelé **abscisse** du point M, que l'on note x_M.

2°) Sur l'axe (OJ), le nombre réel associé à K est appelé **ordonnée** du point M, que l'on note y_M.

3°) Le couple $(x_M ; y_M)$ est alors appelé **coordonnées** du point M et l'on note $M(x_M ; y_M)$.

Exemple •

Sur la figure ci-contre, l'abscisse de M est égale à 3 et son ordonnée est égale à $2,5$. On dira que les coordonnées de M sont $(3\,;2,5)$ et on note $M(3\,;2,5)$.



Remarque

Dans un repère (O, I, J), $A \in (OI) \Leftrightarrow y_A = 0$ et $B \in (OJ) \Leftrightarrow x_B = 0$.
En particulier, les coordonnées de l'origine du repère sont $(0\,;0)$, celle de I sont $(1\,;0)$ et celle de J sont $(0\,;1)$.

III. Distances dans un repère orthonormé

On se place dans un repère **orthonormé** du plan (O, I, J) et on considère deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$.

Propriété 1 (partiellement démontrée en exercice)

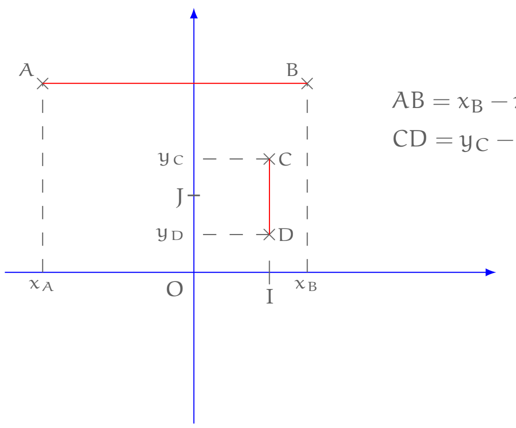
1°) Lorsque $x_A = x_B$, on pose $AB = y_B - y_A$ lorsque $y_B > y_A$ ou bien $AB = y_A - y_B$ lorsque $y_A > y_B$.

2°) Lorsque $y_A = y_B$, on pose $AB = x_B - x_A$ lorsque $x_B > x_A$ ou bien $AB = x_A - x_B$ lorsque $x_A > x_B$.

Remarque

Dans le premier cas, (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées et dans le second cas, (AB) est parallèle à l'axe des abscisses.

Exemple •



$AB = x_B - x_A$
$CD = y_C - y_D$

A. Calcul de distance

Propriété 2

La distance entre les points A et B, autrement dit la longueur du segment $[AB]$, est égale à :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

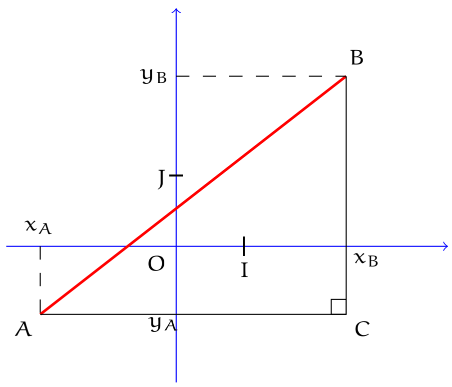
Démonstration

On considère la figure ci-contre. Le point C a pour coordonnées $(x_B\,;\,y_A)$ et, par conséquent, le triangle ABC est rectangle en C.
D'après le théorème de Pythagore, on a

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Par construction, A et C ont la même ordonnée donc $AC^2 = (x_B - x_A)^2$. De même, puisque B et C ont la même abscisse, $BC^2 = (y_B - y_A)^2$.
Ainsi, $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ (qui est un nombre positif) donc finalement :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



□

B. Milieu d'un segment

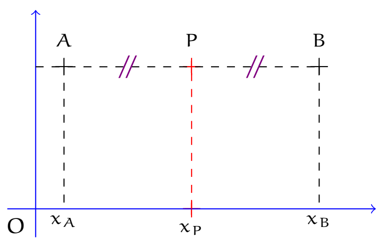
Propriété 3

On a appelle P le milieu du segment $[AB]$. On a alors :

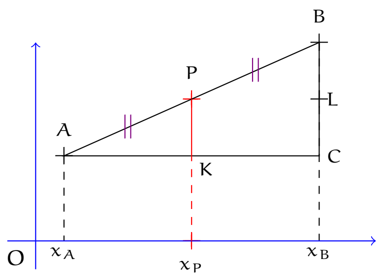
$$x_P = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_P = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Démonstration

1er cas : $x_A = x_B$ ou $y_A = y_B$.
On suppose que $y_A = y_B$ et $x_B > x_A$. P est le milieu de $[AB]$ si, et seulement si, $P \in [AB]$ et $PA = PB$.
$P \in [AB] \Leftrightarrow y_P = y_A = y_B$ et on a bien $y_P = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.
$PA = PB \Leftrightarrow x_P - x_A = x_B - x_P \Leftrightarrow 2x_p = x_B + x_A$ et on a bien $x_P = \dfrac{x_A + x_B}{2}$.



2e cas : $x_A \neq x_B$ et $y_A \neq y_B$.
On note C le point de coordonnées $(x_B\,;\,y_A)$ de façon à ce que le triangle ABC soit rectangle en C. On appelle K le milieu de $[AC]$ et L celui de $[BC]$.
On constate pour commencer que (BC) est parallèle à l'axe des ordonnées car $x_B = x_C$ et que (AC) est parallèle à l'axe des abscisses puisque $y_A = y_C$. Dans le triangle ABC, P est le milieu de $[AB]$ et K est celui de $[AC]$. D'après le théorème de la droite des milieux, on en déduit que (PK) est parallèle à (BC) et donc (PK) est parallèle à (OJ) donc $x_P = x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2}$ donc $x_P = \dfrac{x_A + x_B}{2}$.
En utilisant le point L, on obtiendrait de même $y_P = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.



□

IV. Applications

Exemples • On se place dans un repère orthonormé (O, I, J) :

1°) Que peut-on dire du triangle ABC tel que $A(-4\,;3)$, $B(-4\,;-5)$ et $C(3\,;-1)$?

2°) On considère le point D de coordonnées $(x_D\,;y_D)$. On appelle E, son symétrique par rapport à (OI) et F son symétrique par rapport à (OJ). Calculer les coordonnées de E et F en fonction de celles de D.

3°) On considère le point G de coordonnées $(x_G\,;y_G)$ et on construit H, son symétrique par rapport à O. Calculer les coordonnées de H en fonction de celles de G.

4°) On considère les quatre points suivants :

$$K(-4\,;-1) \quad ; \quad I(1\,;0) \quad ; \quad L(2\,;2) \quad \text{et} \quad M(-3\,;1).$$

Démontrer de deux façons différentes que le quadrilatère $KILM$ est un parallélogramme.