7 Fonctions de référence I
Fonctions affines

I. Variation d'une fonction affine

Définition 1

On appelle **fonction affine** toute fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax + b$$

où a et b sont des nombres réels.

Propriété 1

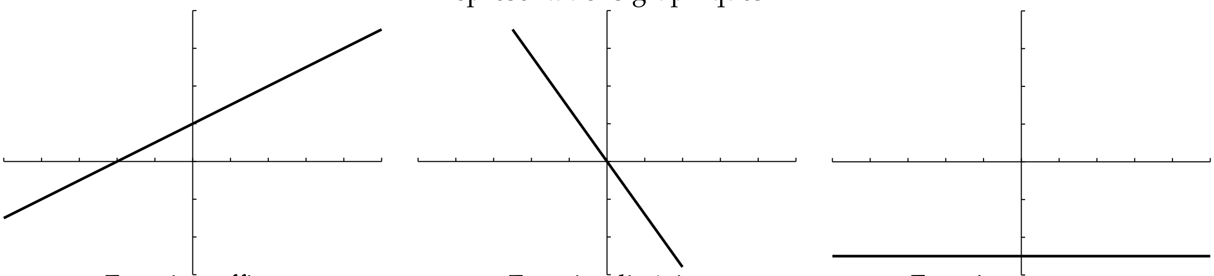
Sur un repère orthonormé, la fonction $f : x \mapsto ax + b$ est représentée par la droite d'équation $y = ax + b$.

Remarques

– *Si $b = 0$ ($f(x) = ax$), on obtient alors une* ***fonction linéaire****. Sa représentation graphique est une droite passant par l'origine. Les fonctions linéaires représentent des situations de proportionnalité.*

– *Si $a = 0$ ($f(x) = b$), on obtient une fonction* ***constante*** *dont la représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisses.*

Représentations graphiques :



Fonction affine — Fonction linéaire — Fonction constante

Exemple • Sur un site internet, on peut acheter des blu-ray à 15 € l'unité. Les frais de port sont de 5 €, quel que soit le nombre de blu-ray acheté.

1°) Combien doit-on payer pour 4 blu-ray achetés ?

2°) Quelle est l'expression de la fonction P donnant le prix total en fonction du nombre n de blu-ray acheté ?

3°) Le prix total est-il proportionnel au nombre de blu-ray acheté ?

4°) La fonction P est-elle une fonction affine ? Pourquoi ?

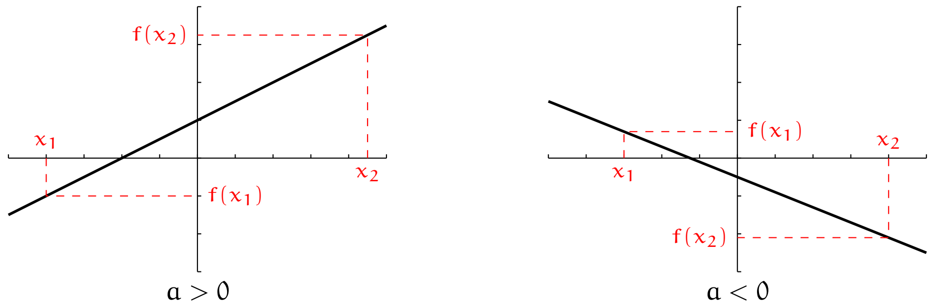
On suppose pour la suite $a \neq 0$.

Théorème 1

Soit f la fonction affine définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

– Si $a > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

– Si $a < 0$, alors la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.



Démonstration

On considère une fonction affine $f\colon x \mapsto ax+b$ et soient x_1 et x_2 deux nombres réels.

1°) Soit $a > 0$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow ax_1 < ax_2 \Rightarrow ax_1 + b < ax_2 + b \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Ainsi, lorsque $a > 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2°) Soit $a < 0$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow ax_1 > ax_2 \Rightarrow ax_1 + b > ax_2 + b \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Ainsi, lorsque $a < 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

□

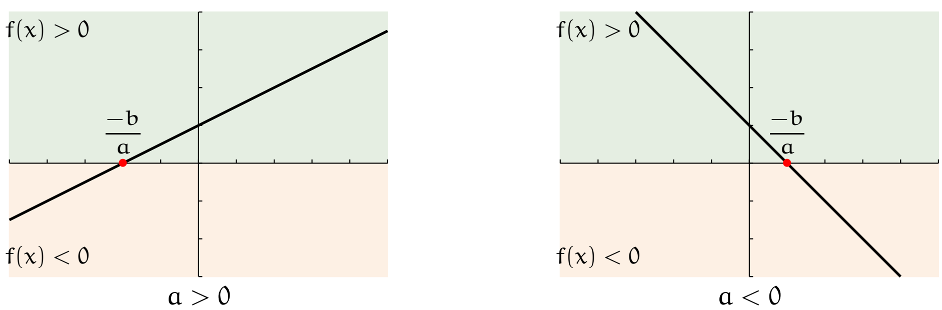
II. Signe d'une fonction affine

Théorème 2

On rappelle que $a \in \mathbb{R}^*$.
Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

De plus, sur $\left]-\infty\,; -\frac{b}{a}\right[$, f est de signe constant puis change de signe sur $\left]-\frac{b}{a}\,; +\infty\right[$.



Démonstration

En effet, $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$.
Le changement de signe est lié au fait que f est soit strictement croissante, soit strictement décroissante. □

III. Tableau de variation et tableau de signe

$f(x) = ax + b$ avec $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de f		$-$	0	$+$	
Variation de f	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

$f(x) = ax + b$ avec $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de f		$+$	0	$-$	
Variation de f	$+\infty$		$\searrow$		$-\infty$