Durée : 4 heures

Baccalauréat STI 2D/STL
Antilles-Guyane 19 juin 2013

EXERCICE 1 **4 points**

1. L'algorithme ci-dessous permet de calculer les termes successifs d'une suite que l'on appellera (u_n).

Entrée :	Saisir la valeur de l'entier naturel n
Traitement :	Affecter 2 à la variable u
	Pour i variant de 1 à n
	Affecter $1,5u$ à u
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

Quelles valeurs affiche cet algorithme lorsque l'on saisit $n = 1$, puis $n = 2$ et enfin $n = 3$?

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,5u_n$.
   a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser ses éléments caractéristiques.
   b. Pour tout entier naturel n, donner l'expression du terme u_n en fonction de n.
3. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

   a. Calculer les valeurs des termes S_0, S_1 et S_2.
   b. Quelles modifications doit-on faire à l'algorithme précédent pour qu'il affiche la valeur du terme S_n pour un n donné ?
   Écrire ce nouvel algorithme sur sa copie.
   c. Calculer le terme S_n en fonction de l'entier naturel n.
   d. En déduire la limite de la suite (S_n).

EXERCICE 2 **5 points**

Une entreprise spécialisée produit des boules de forme sphérique pour la compétition. Le responsable de la qualité cherche à analyser la production.
Il mesure pour cela la masse des boules d'un échantillon (E) de 50 pièces de la production concernée, et obtient les résultats suivants pour la série statistique des masses :

Masse en g	1 195	1 196	1 197	1 198	1 199	1 200	1 201	1 202	1 203	1 204
Nombre de boules	1	3	4	6	8	11	6	5	3	3

Une boule est dite « de bonne qualité » si sa masse en grammes m vérifie :

$$1\,197 \leqslant m \leqslant 1\,203.$$

1. **a.** Calculer, pour l'échantillon (E), le pourcentage de boules de bonne qualité.

b. Déterminer la moyenne et l'écart type de la série des masses de cet échantillon. (On donnera des valeurs approchées au gramme près.)

Dans la suite de l'exercice, on admet que la probabilité qu'une boule soit de bonne qualité est : $p = 0,86$.

Les résultats des différentes probabilités seront donnés au millième près.

2. L'entreprise livre des lots de boules à un client. On assimile le choix de chaque pièce d'un lot à un tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à un lot donné de 50 boules, associe le nombre de boules de bonne qualité.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres n et p.

b. Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins 48 boules de bonne qualité dans le lot.

3. On décide d'approcher la loi binomiale suivie par la variable aléatoire X par une loi normale d'espérance m et d'écart type σ.

a. Justifier que $m = 43$ et $\sigma \approx 2,45$.

b. Déterminer, à l'aide de cette loi normale, une approximation de la probabilité qu'il y ait au moins 48 boules de bonne qualité dans le lot.

4. Le client reçoit un lot de 50 boules.

a. Préciser l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des boules de bonne qualité pour un lot de 50 pièces.

b. Dans son lot, le client a 42 boules qui sont de bonne qualité.

Il affirme au fabricant que la proportion de boules de bonne qualité est trop faible au regard de la production habituelle de l'entreprise.

Peut-on donner raison au client au seuil de confiance de 95 % ? Justifier.

EXERCICE 3 — 5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. On considère l'équation (E) d'inconnue z :

$$(2-\text{i})z = 2-6\text{i}.$$

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On notera z_1 la solution de (E) que l'on écrira sous forme algébrique.

b. Déterminer la forme exponentielle de z_1.

c. Soit z_2 le nombre complexe défini par : $z_2 = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}} \times z_1$.

Déterminer les formes exponentielle et algébrique de z_2.

2. Soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives : $z_\text{A} = 2-2\text{i}$, $z_\text{B} = -2-2\text{i}$ et $z_\text{C} = -4\text{i}$.

a. Placer les points A, B et C dans le plan complexe.

b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{CA}} \cdot \overrightarrow{\text{CB}}$.

c. Déterminer la nature du triangle ABC.

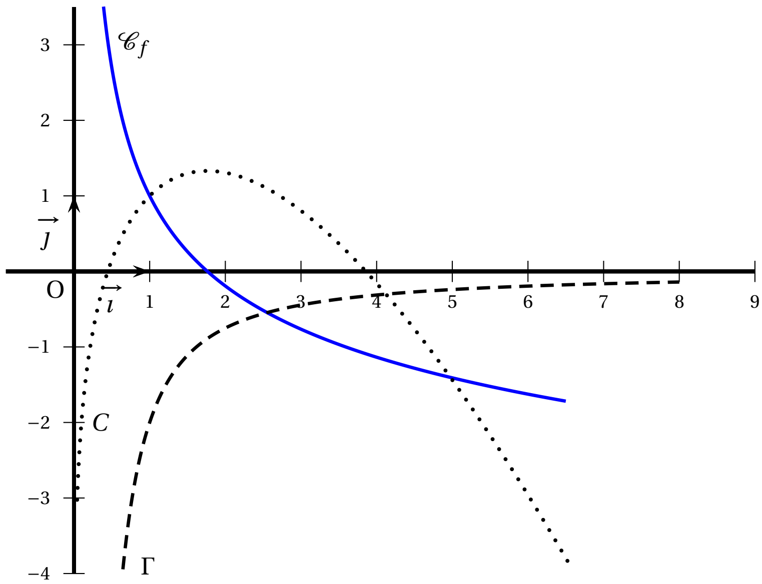
EXERCICE 4 **6 points**

Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln x.$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Sur le graphique ci-dessous, on donne $\mathscr{C}_f$ et les courbes C et Γ. L'une de ces deux courbes représente graphiquement la dérivée f' de f, et l'autre une des primitives F de f.
   - **a.** Indiquer laquelle des deux courbes C et Γ représente graphiquement f'. Justifier.
   - **b.** Par lecture graphique, donner $F(1)$.



2. Dans cette question, on pourra vérifier la cohérence des résultats obtenus avec les courbes représentatives données sur le dessin.
   - **a.** Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0. Interpréter graphiquement cette limite.
   - **b.** Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
   - **c.** Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire : $f'(x) = \dfrac{-x-1}{x^2}$.
   - **d.** Étudier le signe de $f'(x)$ puis donner le tableau de variations de f.
3. Soit H la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$H(x) = x - (x-1)\ln x.$$

   - **a.** Montrer que H est une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$.
   - **b.** En déduire l'expression de la fonction F de la question 1.
   - **c.** Calculer $\displaystyle\int_1^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x$.