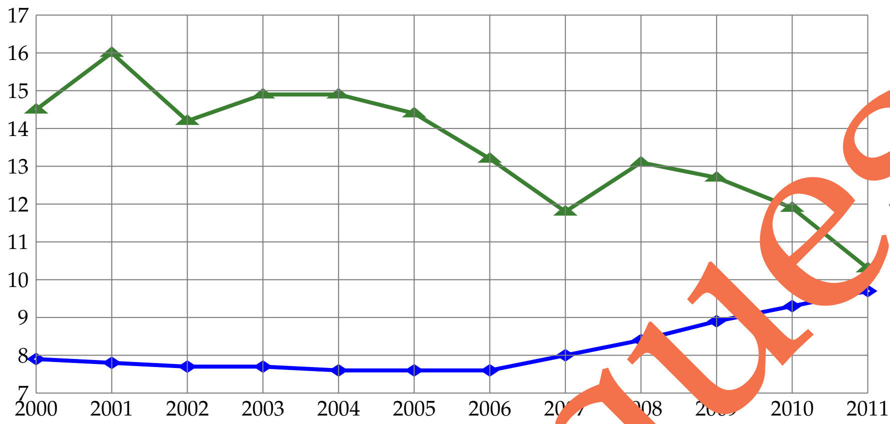
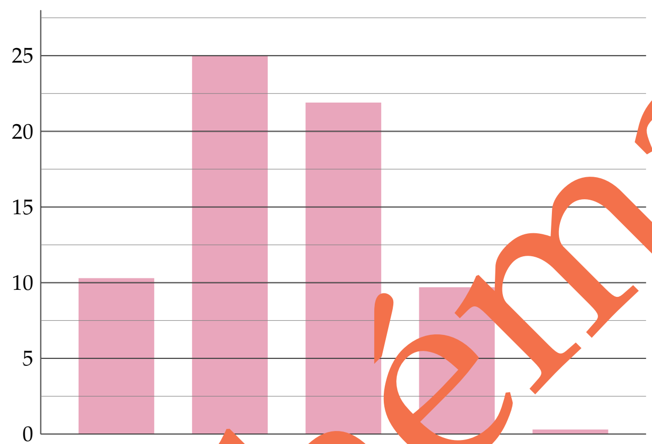
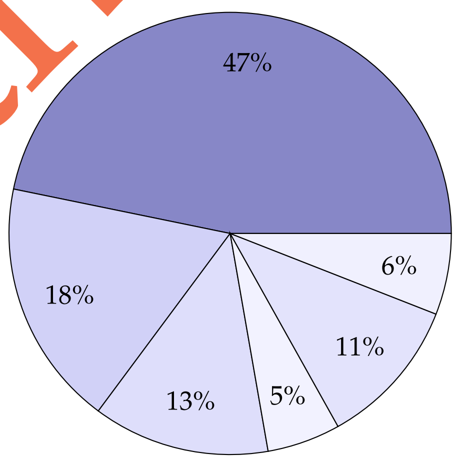
Philippe De Sousa



Mathématiques



1ère STMG



D'après le programme 2 012

Sommaire

1 Évolutions

I. Variations

On considère une quantité ayant une valeur y_1, exprimée dans une unité de mesure. Cette quantité est modifiée et on lui affecte une nouvelle valeur y_2, exprimée dans la même unité de mesure.
Il y a donc une variation entre y_1 et y_2.

A. Variation absolue

Définition 1

La **variation absolue** est définie par $y_2 - y_1$.
Si ce nombre est positif, on parlera d'une **hausse** ou d'une **augmentation**. Sinon, on parlera d'une **baisse** ou d'une **diminution**.

Remarque

La variation absolue est exprimée dans la même unité de mesure que la quantité.

Exemples

- **En Essonne :** En 1 990, l'Essonne comptait 1 084 824 habitants. En 2 010, ont été comptabilisés 1 215 340 habitants.
  La variation absolue est donc égale à : $1\ 215\ 340 - 1\ 084\ 824 = 130\ 516$. Cette variation est positive donc la population en Essonne a augmenté de 130 516 habitants en 20 ans.
- **En France :** En 1 990, la France comptait 58 040 660 habitants. En 2 010, ont été comptabilisés 64 612 940 habitants.
  La variation absolue est donc égale à : $64\ 612\ 940 - 58\ 040\ 660 = 6\ 572\ 280$. Cette variation est positive donc la population en France a augmenté de 6 572 280 habitants en 20 ans.

Remarque

Évidemment, la variation absolue du nombre d'habitants en France est plus importante que celle du nombre d'habitants en Essonne.
Comment peut-on alors comparer ces deux évolutions ? En Essonne, l'évolution du nombre d'habitant correspond-elle à l'évolution du nombre d'habitants en France ?

B. Variation relative

Bien comprendre le symbole % : Le symbole % correspond simplement à une écriture simplifiée d'une fraction ayant pour dénominateur 100.

Exemples

- $7,5\% = \dfrac{7,5}{100} = 0,075$.
- $\dfrac{4}{10} = \dfrac{40}{100} = 40\%$.
- $0,0125 = \dfrac{1,25}{100} = 1,25\%$.

Remarques

- *La variation relative est souvent exprimé à l'aide de pourcentage afin de faciliter les comparaisons.*
- *Il est important de comprendre la signification de la variation relative afin d'éviter parfois certains calculs.*

Exemples •

- Durant les soldes, un article coûte 10 €. À la fin des soldes, l'article coûte 20 €. Le prix a doublé : $t = 100\%$.
- Dans une station service, le Sans Plomb 95 coûte $1,52$ €. Le lendemain, le prix affiché est de $1,52$ €. Le prix n'a pas changé donc : $t = 0\%$.
- Ce matin, il y avait 60 croissants à la boulangerie. À midi, il en restait 30. Le nombre de croissants a diminué de moitié donc $t = -50\%$.

Remarque

Sauf indication contraire, on supposera jusqu'à la fin du cours que $y_1 \neq 0$.

Définition 2

La **variation relative** ou **taux d'évolution** t est calculée à partir de la formule suivante :

$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}.$$

Une fois encore, un nombre positif indique une augmentation et un nombre négatif indique une diminution.

Exemples • **En Essonne :** $t = \dfrac{1\ 215\ 340 - 1\ 084\ 824}{1\ 084\ 824} = \dfrac{130\ 516}{1\ 084\ 824} \approx 0{,}120\ 3.$

Le taux d'évolution est donc environ égal à $0{,}120\ 3$: la population a augmenté d'environ $12,03\%$.

En France : $t = \dfrac{64\ 612\ 940 - 58\ 040\ 660}{58\ 040\ 660} = \dfrac{6\ 572\ 280}{58\ 040\ 660} \approx 0{,}113\ 2.$

Le taux d'évolution est donc environ égal à $0{,}113\ 2$: la population a augmenté d'environ $11,32\%$.

Conclusion : En Essonne, l'augmentation de population entre 1 990 et 2 010 a été légèrement plus importante qu'en France.

C. Lorsque l'on connaît le taux de variation

Exemple • Un commerçant de meubles a vendu 125 chaises ce mois-ci. Son contrat stipule qu'il doit augmenter ses ventes d'au moins 3% chaque mois.
Combien doit-il vendre de chaises le mois prochain ?

On commence par calculer l'augmentation souhaitée en nombre de chaises :

$$3\% \text{ de } 125 = 3\% \times 125 = \frac{3}{100} \times 125 = \frac{3 \times 125}{100} = 3,75.$$

Le commerçant doit vendre $3,75$ chaises au minimum c'est-à-dire 4 chaises.

On calcule le nombre total : $125 + 4 = 129$. Le commerçant doit vendre au moins 129 chaises le mois prochain.

Remarque

Bilan de l'exemple :
y_1 correspond au nombre de chaises ce mois-ci. Donc $y_1 = 125$.
On cherche la valeur y_2 sachant que le taux de variation est égal à $t = 3\% = 0,03$.

Pour trouver y_2, on calcule 3% de y_1 en faisant $0,03 \times y_1$ puis on ajoute y_1. On obtient alors :

$$y_2 = y_1 + 0,03y_1 = y_1(1 + 0,03) = (1 + 0,03)y_1.$$

On applique le raisonnement précédent à un taux de variation quelconque égal à t :

Propriété 1

Lorsque l'on passe de la valeur y_1 à la valeur y_2 avec une variation relative égale à t, on a :

$$y_2 = (1+t) \times y_1.$$

Démonstration

On peut démontrer la propriété précédente en utilisant la démarche de l'exemple.
Utilisons plutôt la définition du taux de variation :

$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_1} \quad \Leftrightarrow \quad t \times y_1 = y_2 - y_1 \quad \Leftrightarrow \quad t \times y_1 + y_1 = y_2 \quad \Leftrightarrow \quad (t+1) \times y_1 = y_2.$$

□

Définition 3

Le nombre $1+t$ est appelé **cœfficient multiplicateur** de y_1 à y_2.
Un cœfficient supérieur à 1 traduit une augmentation, inférieur à 1 une diminution. S'il est égal à 1, il n'y a pas de variation.

Exemple • Dans une usine, le coût de production c_1 d'un objet est égal à 2 530 €.
Afin d'augmenter les bénéfices, le gérant décide de diminuer le coût de production de 2%. Quel est alors le nouveau de coût de production c_2 ?

Puisqu'il s'agit d'une diminution, $t = -2\% = -0,02$ donc :

$$c_2 = (1+t)c_1 = (1+(-0,02)) \times 2\,530 = 0,98 \times 2\,530 = 2\,479{,}40 \text{ €}.$$

II. Taux d'évolution successifs

Exemple • Dans une commune, le maire décide d'augmenter les impôts locaux de 5%.
Ses conseillers lui suggèrent *d'y aller en douceur* en augmentant les impôts seulement de 2% la première année puis de 3% la seconde année.
Le maire doit-il suivre l'avis de ses conseillers ?

Dans l'exemple précédent, la quantité (impôts) augmente de y_1 à y_2 puis de y_2 à y_3. On souhaite connaître le taux de variation t de y_1 à y_3. Par définition, $t = \dfrac{y_3 - y_1}{y_1}$. Ici, on ne peut pas utiliser cette définition puisque les valeurs y_1 et y_3 sont inconnues. On a alors la propriété suivante :

Propriété 2

On considère une quantité qui évolue de y_1 à y_2 puis de y_2 à y_3 avec $y_2 \neq 0$.
On appelle t_1 le taux d'évolution de y_1 à y_2, t_2 le taux d'évolution de y_2 à y_3.
Le taux d'évolution global t permettant de passer de y_1 à y_3 est tel que :

$$1+t = (1+t_1)(1+t_2).$$

Remarque

Les valeurs t_1, t_2 et t peuvent évidemment être négatives.

Démonstration

On sait que $y_3 = (1+t_2) \times y_2$ et $y_2 = (1+t_1) \times y_1$. De plus, $y_3 = (1+t)y_1$. Donc :

$$y_3 = (1+t_2) \times y_2 = \underbrace{(1+t_2) \times (1+t_1)}_{=1+t} \times y_1.$$

□

Exemple • Calculons la véritable augmentation des impôts prévus par les conseillers :

$$1+t=(1+0,02)\times(1+0,03)=1{,}050\ 6.$$

L'augmentation sera alors de $5,06\%$ au lieu de 5%.

III. Taux d'évolution réciproque

Exemple • Afin de faire des économies, un patron décide de baisser les salaires de 4%.
Le mois suivant, les ouvriers entrent en grève pour retrouver leur ancien salaire. Le patron accepte et décide alors d'augmenter les salaires de 4% pour qu'ils retrouvent leur valeur d'origine.
La grève doit-elle continuer ?

Propriété 3

On considère une quantité de valeur $y_1 \neq 0$ qui passe à la valeur $y_2 \neq 0$ avec un taux égal à t.
Afin de passer de y_2 à y_1, il faut utiliser le coefficient t' tel que :

$$1+t'=\frac{1}{1+t}.$$

Remarque

On rappelle que t et t' peuvent être négatifs. De plus, on a bien $t \neq -100\%$ puisque $y_2 \neq 0$.

Démonstration

On a les égalités suivantes : $y_2=(1+t)y_1$ et $y_1=(1+t')y_2$ d'où :

$$\begin{aligned} y_2=(1+t)y_1=(1+t)(1+t')y_2 &\iff 1=(1+t)(1+t') \quad (\text{puisque } y_2\neq 0)\\ &\iff 1+t'=\frac{1}{1+t} \quad (\text{puisque } t\neq -1). \end{aligned}$$

□

Exemple • Le taux appliqué par le patron est égal à $(1-0,04)(1+0,04)=0{,}998\ 4$ soit $99,84\%$ ce qui signifie qu'au final, les salaires ont baissé de $0,16\%$.
Il faut donc trouver le taux de variation réciproque t' sachant que $t=-0,04$ et que donc $1+t=0,96$:

$$1+t'=\frac{1}{1+t} \quad \iff \quad 1+t'=\frac{1}{0,96} \quad \iff \quad t'=\frac{1}{0,96}-1\approx 1{,}041\ 7 \quad \text{donc} \quad \boxed{t'\approx 4,17\%}.$$

2 Suites

I. Définir une suite

Définition 1

Une **suite numérique** u est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note alors :

$$u\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

Remarque

Le premier terme de la suite sera alors le terme de rang (d'indice) 0 : $u(0)$. Le suivant est le terme de rang (d'indice) 1 : $u(1)$. Puis $u(2)$... Dans le cas des suites, on notera plutôt u_0, u_1, u_2...
Pour parler d'une suite, on dira la suite u, ou encore la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour alléger l'écriture, on pour écrire la suite (u_n) mais il ne faut pas confondre avec le terme de rang n qui se note u_n ou $u(n)$.

A. Suite définie explicitement

Définition 2

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie **explicitement** lorsque l'on connaît l'expression de u_n en fonction de n. On peut donc calculer directement la valeur de u_n.

Exemples •

1°) On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 3$.
Le terme initial est $u_0 = 2 \times 0^2 - 3 = -3$. Le terme suivant est $u_1 = 2 \times 1^2 - 3 = -1$.
$u_{10} = 2 \times 10^2 - 3 = 2 \times 100 - 3 = 197$. Le quinzième terme est $u_{14} = 2 \times 14^2 - 3 = 389$.

2°) On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \dfrac{1}{n}$.
Le terme initial est $v_1 = \dfrac{1}{1} = 1$. Le 15ᵉ terme est $v_{15} = \dfrac{1}{15}$.

B. Suite définie par récurrence

Définition 3

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par **récurrence** lorsque l'on connaît l'expression de u_n en fonction de u_{n-1}. Pour calculer un terme d'une suite, il faut donc connaître le précédent. Pour cela, le terme initial est généralement donné avec la définition de la suite.

Exemple • On considère la suite u_n définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

On a alors $u_0 = \dfrac{1}{3}$, $u_1 = \dfrac{3}{4} \times u_0 - 1 = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} - 1 = \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{3}{4}$.
Puis $u_2 = \dfrac{3}{4} \times u_1 - 1 = \dfrac{3}{4} \times \left(-\dfrac{3}{4}\right) - 1 = -\dfrac{9}{16} - 1 = -\dfrac{25}{16}$

Remarque

Dans tous les cas, l'utilisation d'un tableur ou d'une calculatrice peut s'avérer très utile pour calculer rapidement les premiers termes d'une suite ainsi que pour les représenter graphiquement.

II. Suites particulières

A. Suite arithmétique

Définition 4

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un nombre réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel r est appelé la **raison** de la suite (u_n)

Exemple • Des parents ouvrent un compte en banque pour leur enfant. Lors de l'ouverture, ils versent 50 € puis, au début de chaque mois, ils rajoutent 100 €.
On définit alors une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où le terme n de la suite correspond au montant présent sur le compte n mois après son ouverture.
On a donc $c_0 = 50$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_{n+1} = c_n + 100$.
La suite (c_n) est donc une suite arithmétique.

$$\underset{c_0}{\boxed{50\,€}} \xrightarrow{+100\,€} \underset{c_1}{\boxed{150\,€}} \xrightarrow{+100\,€} \underset{c_2}{\boxed{250\,€}} \xrightarrow{+100\,€} \underset{c_3}{\boxed{350\,€}} \xrightarrow{+100\,€} \cdots$$

Remarque

Considérons une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de raison r et essayons de déterminer une définition explicite de cette suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = u_{n-1} + r = u_{n-2} + r + r = u_{n-3} + r + r + r = \ldots = u_0 + r + \cdots + r = u_0 + n \times r$$

On rappelle que u_0 et r sont fixés et que le nombre n est la variable. Donc, en employant les notations des fonctions, on obtient :

$$u(n) = r \times n + u_0.$$

Non seulement on a défini (u_n) explicitement mais de plus, on constate qu'une suite arithmétique est une fonction affine (définie sur $\mathbb{N}$ uniquement) dont le cœfficient directeur est la raison r et l'ordonnée à l'origine est u_0. On en déduit les résultats suivants :

Propriété 1

Une suite arithmétique est représentée graphiquement par des points alignés.

Théorème 1

Une suite arithmétique de raison r est :

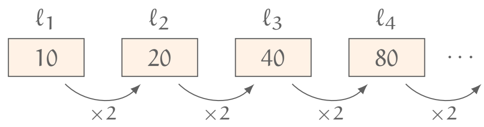
- croissante si $r > 0$;
- décroissante si $r < 0$;
- constante si $r = 0$.

B. Suite géométrique

Définition 5

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **géométrique** lorsqu'il existe un nombre réel q **non nul** tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times q$.
Le réel q est appelé la **raison** de la suite (u_n)

Exemple • Un professeur décide de faire copier des lignes à chaque élève qui parlera sans autorisation. Le premier copiera 10 lignes, le suivant 2 fois plus, et ainsi de suite en multipliant le nombre de lignes par 2 à chaque fois.
On définit alors une suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où le terme n de la suite correspond au nombre de ligne copiée par le n^e élève.
On a donc $\ell_1 = 10$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ell_{n+1} = \ell_n \times 2$.
La suite (ℓ_n) est donc une suite géométrique.



Remarque

Considérons une suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de raison q et essayons de déterminer une définition explicite de cette suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = v_{n-1} \times q = v_{n-2} \times q \times q = v_{n-3} \times q \times q \times q = \ldots = v_0 \times q \times \cdots \times q = v_0 \times q^n$$

Théorème 2

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. On suppose que (u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$. Alors, (u_n) est :

- croissante si $q > 1$;
- décroissante si $q < 1$;
- constante si $q = 1$.

Démonstration

- Lorsque $q = 1$ alors $u_0 = u_1 = u_2 = \ldots$ et la suite u est constante.
- Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = qu_n$. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, on peut alors écrire $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$. Cette fraction est strictement positive puisque c'est le quotient de deux nombres strictement positif.
  Depuis le collège, on sait que si $q < 1$, cela signifie que le numérateur est inférieur au dénominateur. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$ et la suite est donc décroissante.
  Si $q > 1$, cela signifie que le numérateur est supérieur au dénominateur. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ et la suite est donc croissante.

□

3 Statistiques descriptives

I. Vocabulaire

Une **étude statistique** a pour but d'obtenir une information, appelée **caractère**, sur une population à partir de **données** recueillies sur un **échantillon** de cette population.

Définition 1

Le **caractère** étudié peut être :

quantitatif : les valeurs du caractère s'expriment avec des nombres (ex : températures, pointures, salaires...) ;

qualitatif : les valeurs ne s'expriment pas par des nombres (ex : couleurs, type d'essence...) ;

discret : les valeurs du caractère sont isolés (ex : notes...) ;

continu : les valeurs sont regroupées par classes (ou intervalles de nombre) (par ex : durée, distance parcourue,

Remarque

Dans la suite du cours, on considère que le caractère est quantitatif.

Définition 2

Lorsque les valeurs d'une série statistique sont regroupés par classe de type $[a\,;b[$, on appelle **centre de classe** le nombre défini par $\dfrac{a+b}{2}$.

II. Indicateurs de position

A. Moyenne

Définition 3

On considère une série qui possède des valeurs différentes $x_1, x_2, \dots, x_p$ chacune affectée de leur effectif. L'effectif total est égal à N.
On appelle **moyenne** d'une série le nombre $\overline{m}$ tel que :

$$\overline{m} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + \cdots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_ix_i}{N}.$$

Exemple • Un élève souhaite calculer la moyennes de ses notes sur 20 : 8 ; 10 ; 14 ; 13 ; 10 ; 14 ; 10.

$\overline{m} = \dfrac{8+10+14+13+10+14+10}{7} = \dfrac{79}{7} \approx 11,29.$

Parfois, les valeurs sont regroupées dans un tableau :

Notes	8	10	13	14
Effectifs	1	3	1	2

On peut alors utiliser la formule : $\overline{m} = \dfrac{1\times 8 + 3\times 10 + 1\times 13 + 2\times 14}{1+3+1+2} = \dfrac{79}{7} \approx 11,29.$

Remarques

1°) *En règle générale, la moyenne n'est pas une valeur de la série. On peut la considérer comme le* point d'équilibre *des valeurs. Par conséquent, la moyenne est sensible aux valeurs extrêmes.*
Pour reprendre l'exemple, si la prochaine note du contrôle est très élevée alors la moyenne va augmenter.

2°) *Lorsque les valeurs sont regroupés par classe, au lieu d'utiliser les x_i, on utilise les centres de classe.*

Exemple • Le tableau ci-dessous regroupe le temps de parcours des habitants d'un village entre leur domicile et leur lieu de travail. Le maire cherche à calculer le temps moyen.

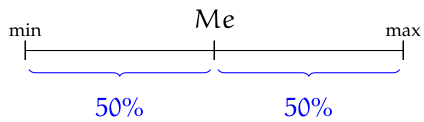
Durée en min	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 50[	[50 ; 70[	Total
Effectif	18	35	25	112	80	270
Centre de classe	5	15	25	40	60	

On a donc : $\overline{m} = \dfrac{18 \times 5 + 35 \times 15 + 25 \times 25 + 112 \times 40 + 80 \times 60}{270} = \dfrac{10\ 520}{270} \approx 39\ \text{min}.$

B. Médiane

Définition 4

On considère une série statistique dont l'effectif total est égal à N. Les valeurs sont rangées dans l'ordre croissant.
Une médiane Me est un nombre réel qui permet de partager la série statistique en deux séries de même valeur.
Autrement dit, la moitié (50%) des valeurs de la série est inférieure ou égale à Me et l'autre moitié est supérieure ou égale à Me.



Méthode de calcul : Par définition, la médiane dépend de l'effectif de la série :

- Si N est impair, alors on calcule $\dfrac{N+1}{2}$ et le résultat correspond à la position de la médiane choisie dans la série.
- Si N est pair, alors la médiane choisie est égale à la moyenne de la valeur situé à la position $\dfrac{N}{2}$ et la valeur suivante.

Exemple • On considère le relevé des températures en janvier et en février dans une ville :

Janvier									
Valeurs	$-3°$	$-2°$	$-1°$	$0°$	$1°$	$2°$	$3°$	$4°$	Total
Effectifs	3	5	8	5	4	3	2	1	31
Février									
Valeurs	$-3°$	$-2°$	$-1°$	$0°$	$1°$	$2°$	$3°$	$4°$	Total
Effectifs	1	2	3	3	5	9	3	2	28

En janvier : $N = 31$ donc $\dfrac{N+1}{2} = 16$: une médiane possible est la 16^e valeur donc $Me = -1°$. En janvier, il a fait moins de $-1°$ la moitié du mois.

En févier : $N = 28$ donc $\dfrac{N}{2} = 14$: la 14^e est $1°$ et la suivante est égale à $2°$. Donc la moyenne des deux est $\dfrac{1+2}{2} = 1,5$. Une médiane possible est égale à $1,5°$ donc durant la moitié du mois, la température a été supérieure à $1,5°$.

Remarque

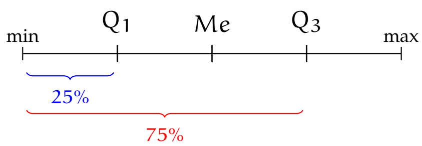
Contrairement à la moyenne, la médiane n'est pas sensible aux valeurs extrêmes. En effet, dans notre exemple, si la dernière température était égale à 20° au lieu de 4°, la moyenne augmenterait alors que la médiane resterait identique car l'effectif total n'a pas changé.

C. Quartiles

Définition 5

On considère une série statistique S dont l'effectif total est égal à N. Les valeurs sont rangées dans l'ordre croissant.

- Le **premier quartile** Q_1 de S est le plus petit élément a de S tel qu'au moins 25% des données soient inférieures ou égales à a.
- Le **troisième quartile** Q_3 de S est le plus petit élément b de S tel qu'au moins 75% des données soient inférieures ou égales à b.



Méthode de calcul : Par définition, les quartiles dépendent de l'effectif de la série :

Premier quartile : On arrondit le nombre $\dfrac{N}{4}$ à l'unité par excès et cela donne la position de Q_1 dans la série S.

Troisième quartile : On arrondit le nombre $3 \times \dfrac{N}{4}$ à l'unité par excès et cela donne la position de Q_3 dans la série S.

Exemple • On reprend les températures du moins de janvier de l'exemple précédent.

Premier quartile : $N = 31$ donc $\dfrac{N}{4} = 7,75 \approx 8$ donc la 8^e valeur est $Q_1 = -2°$.

Troisième quartile : $N = 31$ donc $3 \times \dfrac{N}{4} = 23,25 \approx 24$ donc la 24^e valeur donne $Q_3 = 1°$.

Ainsi, 25% des valeurs sont inférieures ou égales à $-2°$ et 75% des valeurs sont inférieures ou égales à 1°. On peut dire aussi que 25% des valeurs sont supérieures ou égales à 1°.

III. Indicateurs de dispersion

Dans les classes antérieures, l'**étendue** était un indicateur de dispersion utilisé dont voici rappelée la définition :

Définition 6

Dans une série statistique, l'**étendue** est la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale.

Remarque

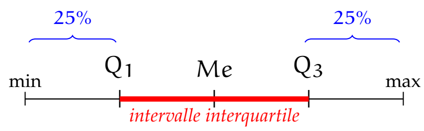
Une valeur élevée de l'étendue signifie qu'au moins une des valeurs extrêmes de la série est éloignée de la médiane et le risque de dispersion des valeurs est donc plus important.
Dans l'exemple précédent, l'étendue de la série janvier *était identique à celle de la série* février *ce qui montre les besoins d'avoir d'autres indicateurs.*
Les quartiles nous permettent d'obtenir d'autres indicateurs de dispersion lié à la médiane.

A. Intervalle et écart interquartile

Définition 7

On appelle l'**intervalle interquartile** l'intervalle $[Q_1\,;Q_3]$.
On appelle l'**écart interquartile** le nombre $Q_3 - Q_1$.

Remarque



La figure ci-dessus nous permet de comprendre pourquoi l'intervalle interquartile contient 50% de valeurs de la série, c'est-à-dire la moitié. Ainsi, un écart interquartile faible impose que les valeurs soient regroupées proches de la médiane et donc peu dispersée pour la moitié d'entre elles.

Voici maintenant un indicateur de dispersion lié à la moyenne.

B. Écart-type

Exemple • Voici les notes obtenues par Paul dans quelques matières lors des deux premiers trimestres de l'année.

Trimestre 1 : 7 ; 8 ; 11 ; 12 ; 13 ; 13 ; 13.

Trimestre 2 : 4 ; 7 ; 9 ; 12 ; 13 ; 13 ; 19.

Bien qu'au deuxième trimestre Paul ait obtenu une très bonne note, on remarque qu'il a aussi obtenu une mauvaise note. Ses parents lui explique qu'il a été moins régulier ce trimestre et par conséquent, moins sérieux.
Paul se défend en calculant la moyenne et la médiane. Dans chaque cas, il trouve une moyenne égale à 11 et une médiane égale à 12 donc à chaque trimestre, la moitié de ses notes est supérieure à 12. Ses parents lui font tout de même constater que l'étendue du premier trimestre est égale à 6 $(13-7)$ alors qu'elle vaut 15 $(19-4)$ au deuxième trimestre.
Il réplique en indiquant que les écarts interquartiles des deux trimestres sont peu différents.
Pour faire entendre raison à leur fils, les parents doivent trouver un autre indicateur. Ils s'intéressent à l'écart de chaque note par rapport à la moyenne et constatent que cet écart est plus important au deuxième trimestre, ce qui montre des notes plus dispersées, moins régulières. Ces écarts avec la moyenne leur permettent de calculer tout d'abord ce que l'on appelle la **variance** puis enfin l'**écart-type**.

Définition 8

L'**écart-type** est un nombre réel positif qui caractérise la dispersion des valeurs d'une série statistiques par rapport à la moyenne.
Plus l'écart-type est petit et plus les valeurs sont proches de la moyenne (dispersion faible). Au contraire, si l'écart-type est grand alors les valeurs sont éloignés de la moyenne (dispersion élevée).

Remarque

En 1ère STMG, *on utilisera la calculatrice ou le tableur pour calculer directement l'écart-type.*

Exemple • Dans un tableur, dans la colonne `A`, on inscrit les notes obtenues par Paul lors du premier trimestre. À la suite de ses notes, on inscrit la formule `=ECARTYPEP(A1:A7)` pour obtenir la valeur arrondie au dixième $2,3$. Cet écart-type, seul, nous permet de dire que les valeurs sont peu dispersés autour de la moyenne. Mais l'écart-type a surtout un intérêt comparatif entre deux séries dont les valeurs sont exprimées dans une même unité de mesure.
Dans la colonne `B`, on inscrit maintenant les notes du deuxième trimestre puis, en dessous, on inscrit `=ECARTYPEP(B1:B7)`. Le tableur renvoie la valeur arrondie $4,5$.
Cette fois, on peut affirmer que les notes du deuxième trimestre sont plus dispersées que celles du premier trimestre par rapport à la moyenne.

Remarque

*Sur les nouvelles versions d'*EXCEL*, il est préférable d'utiliser la fonction* `ECARTYPE.PEARSON`.

Index des notions définies

* * *

Écrit par Philippe De Sousa.

Dernière modification le 19 juillet 2013.