2 Suites

Fonctions

I. Définir une suite

Définition 1

Une **suite numérique** u est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note alors :

$$u\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

Remarque

Le premier terme de la suite sera alors le terme de rang (d'indice) 0 : $u(0)$. Le suivant est le terme de rang (d'indice) 1 : $u(1)$. Puis $u(2)$... Dans le cas des suites, on notera plutôt u_0, u_1, u_2...
Pour parler d'une suite, on dira la suite u, ou encore la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour alléger l'écriture, on pour écrire la suite (u_n) mais il ne faut pas confondre avec le terme de rang n qui se note u_n ou $u(n)$.

A. Suite définie explicitement

Définition 2

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie **explicitement** lorsque l'on connaît l'expression de u_n en fonction de n. On peut donc calculer directement la valeur de u_n.

Exemples •

1°) On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 3$.
Le terme initial est $u_0 = 2 \times 0^2 - 3 = -3$. Le terme suivant est $u_1 = 2 \times 1^2 - 3 = -1$.
$u_{10} = 2 \times 10^2 - 3 = 2 \times 100 - 3 = 197$. Le quinzième terme est $u_{14} = 2 \times 14^2 - 3 = 389$.

2°) On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \dfrac{1}{n}$.
Le terme initial est $v_1 = \dfrac{1}{1} = 1$. Le 15^e terme est $v_{15} = \dfrac{1}{15}$.

B. Suite définie par récurrence

Définition 3

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par **récurrence** lorsque l'on connaît l'expression de u_n en fonction de u_{n-1}. Pour calculer un terme d'une suite, il faut donc connaître le précédent. Pour cela, le terme initial est généralement donné avec la définition de la suite.

Exemple • On considère la suite u_n définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

On a alors $u_0 = \dfrac{1}{3}$, $u_1 = \dfrac{3}{4} \times u_0 - 1 = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} - 1 = \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{3}{4}$.
Puis $u_2 = \dfrac{3}{4} \times u_1 - 1 = \dfrac{3}{4} \times \left(-\dfrac{3}{4}\right) - 1 = -\dfrac{9}{16} - 1 = -\dfrac{25}{16}$

Remarque

Dans tous les cas, l'utilisation d'un tableur ou d'une calculatrice peut s'avérer très utile pour calculer rapidement les premiers termes d'une suite ainsi que pour les représenter graphiquement.

II. Suites particulières

A. Suite arithmétique

Définition 4

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un nombre réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel r est appelé la **raison** de la suite (u_n)

Exemple • Des parents ouvrent un compte en banque pour leur enfant. Lors de l'ouverture, ils versent 50 € puis, au début de chaque mois, ils rajoutent 100 €.
On définit alors une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où le terme n de la suite correspond au montant présent sur le compte n mois après son ouverture.
On a donc $c_0 = 50$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_{n+1} = c_n + 100$.
La suite (c_n) est donc une suite arithmétique.

c_0	c_1	c_2	c_3	
50 €	150 €	250 €	350 €	···
+100 €	+100 €	+100 €	+100 €	

Remarque

Considérons une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de raison r et essayons de déterminer une définition explicite de cette suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = u_{n-1} + r = u_{n-2} + r + r = u_{n-3} + r + r + r = \ldots = u_0 + r + \cdots + r = u_0 + n \times r$$

On rappelle que u_0 et r sont fixés et que le nombre n est la variable. Donc, en employant les notations des fonctions, on obtient :

$$u(n) = r \times n + u_0.$$

Non seulement on a défini (u_n) explicitement mais de plus, on constate qu'une suite arithmétique est une fonction affine (définie sur $\mathbb{N}$ uniquement) dont le cœfficient directeur est la raison r et l'ordonnée à l'origine est u_0. On en déduit les résultats suivants :

Propriété 1

Une suite arithmétique est représentée graphiquement par des points alignés.

Théorème 1

Une suite arithmétique de raison r est :

- croissante si $r > 0$;
- décroissante si $r < 0$;
- constante si $r = 0$.

B. Suite géométrique

Définition 5

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **géométrique** lorsqu'il existe un nombre réel q **non nul** tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times q$.
Le réel q est appelé la **raison** de la suite (u_n)

Exemple • Un professeur décide de faire copier des lignes à chaque élève qui parlera sans autorisation. Le premier copiera 10 lignes, le suivant 2 fois plus, et ainsi de suite en multipliant le nombre de lignes par 2 à chaque fois.
On définit alors une suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où le terme n de la suite correspond au nombre de ligne copiée par le n^e élève.
On a donc $\ell_1 = 10$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ell_{n+1} = \ell_n \times 2$.
La suite (ℓ_n) est donc une suite géométrique.

$$\underset{10}{\ell_1} \xrightarrow{\times 2} \underset{20}{\ell_2} \xrightarrow{\times 2} \underset{40}{\ell_3} \xrightarrow{\times 2} \underset{80}{\ell_4} \xrightarrow{\times 2} \cdots$$

Remarque

Considérons une suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de raison q et essayons de déterminer une définition explicite de cette suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = v_{n-1} \times q = v_{n-2} \times q \times q = v_{n-3} \times q \times q \times q = \ldots = v_0 \times q \times \cdots \times q = v_0 \times q^n$$

Théorème 2

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. On suppose que (u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$. Alors, (u_n) est :

- croissante si $q > 1$;
- décroissante si $q < 1$;
- constante si $q = 1$.

Démonstration

- Lorsque $q = 1$ alors $u_0 = u_1 = u_2 = \ldots$ et la suite u est constante.
- Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = qu_n$. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, on peut alors écrire $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$. Cette fraction est strictement positive puisque c'est le quotient de deux nombres strictement positif.
  Depuis le collège, on sait que si $q < 1$, cela signifie que le numérateur est inférieur au dénominateur. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$ et la suite est donc décroissante.
  Si $q > 1$, cela signifie que le numérateur est supérieur au dénominateur. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ et la suite est donc croissante.

□