Chapitre 2

Études de fonctions

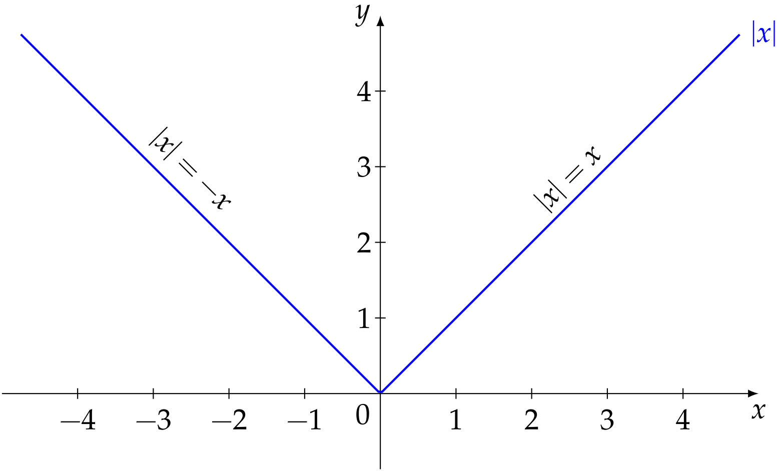
Définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Propriété

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction valeur absolue est strictement positive et $|0| = 0$.
Son minimum (la plus petite des images) est donc égal à 0.


y
$|x|$
4
3
2
1
$|x| = -x$
$|x| = x$
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
x

Propriété

Sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$, *la fonction valeur absolue est strictement décroissante.*
Sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, *la fonction valeur absolue est strictement croissante.*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de $\lvert x\rvert$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Propriété

La représentation graphique de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

I - Fonction $x \mapsto |x|$

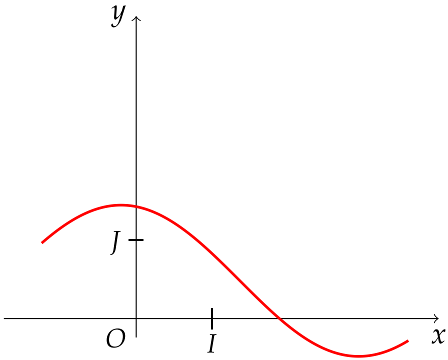
II - Somme et fonctions composées

A) Fonction $t \mapsto u(t) + k$

B) Fonction $t \mapsto u(t + \lambda)$

C) Fonction $t \mapsto |u(t)|$

On se place dans un repère orthonormé nommé (O, I, J). On considère une fonction u définie sur $\mathscr{D}_u$ dont voici la représentation graphique $\mathscr{C}_u$ sur un intervalle A.



I - Fonction $x \mapsto |x|$

II - Somme et fonctions composées

A) Fonction $t \mapsto u(t) + k$

B) Fonction $t \mapsto u(t + \lambda)$

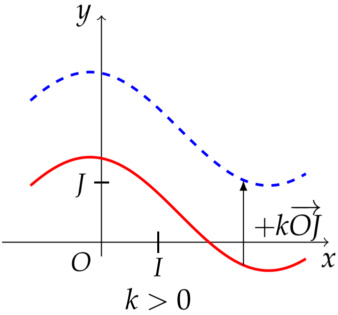
C) Fonction $t \mapsto |u(t)|$

Propriété (admise)

La représentation graphique de la fonction $t \mapsto u(t) + k$ est l'image de $\mathscr{C}_u$ par la translation de vecteur $k \times \overrightarrow{OJ}$.

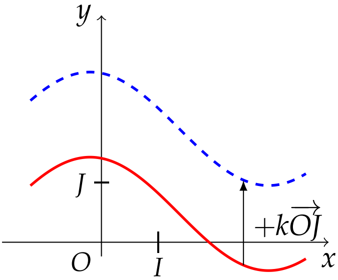
Propriété (admise)

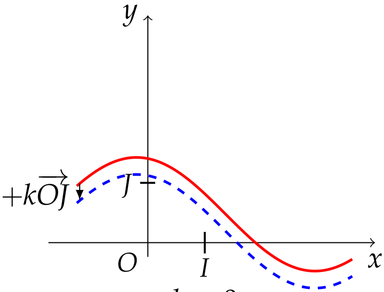
La représentation graphique de la fonction $t \mapsto u(t) + k$ est l'image de $\mathscr{C}_u$ par la translation de vecteur $k \times \overrightarrow{OJ}$.



Propriété (admise)

La représentation graphique de la fonction $t \mapsto u(t) + k$ est l'image de $\mathscr{C}_u$ par la translation de vecteur $k \times \overrightarrow{OJ}$.





Propriété (admise)

Les fonctions $t \mapsto u(t)$ et $t \mapsto u(t) + k$ ont le même ensemble de définition.

I - Fonction $x \mapsto |x|$

II - Somme et fonctions composées

A) Fonction $t \mapsto u(t) + k$

B) Fonction $t \mapsto u(t+\lambda)$

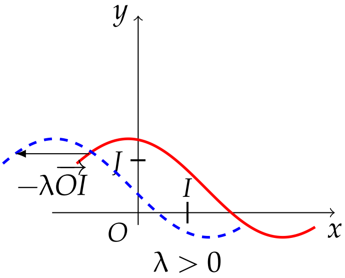
C) Fonction $t \mapsto |u(t)|$

Propriété (admise)

La représentation graphique de la fonction $t \mapsto u(t+\lambda)$ *est l'image de* $\mathscr{C}_u$ *par la translation de vecteur* $-\lambda \times \overrightarrow{OI}$.

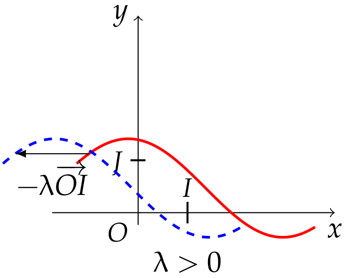
Propriété (admise)

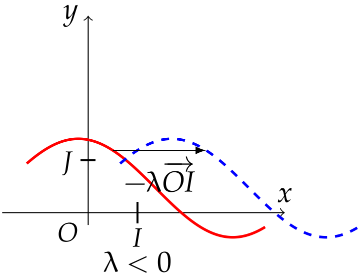
La représentation graphique de la fonction $t \mapsto u(t+\lambda)$ est l'image de $\mathscr{C}_u$ par la translation de vecteur $-\lambda \times \overrightarrow{OI}$.



Propriété (admise)

La représentation graphique de la fonction $t \mapsto u(t+\lambda)$ est l'image de $\mathscr{C}_u$ par la translation de vecteur $-\lambda \times \overrightarrow{OI}$.





Remarque

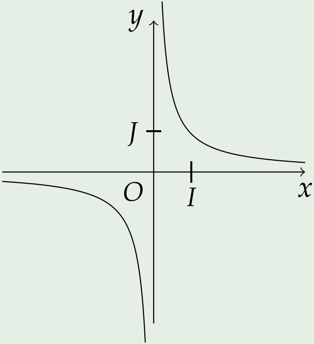
L'intervalle de définition de la fonction u subit également une translation. Il faut donc faire attention à cela.

Exemple

$f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est défini sur ...
Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose : $g(x) = f(x+a) = \dots$
$\mathscr{D}_g = \dots$

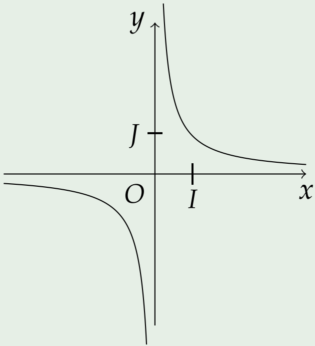
Exemple

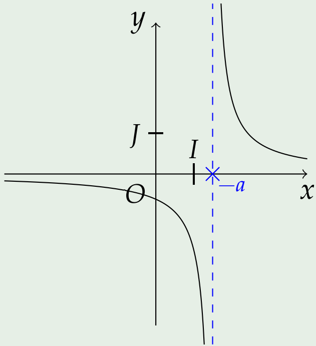
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est défini sur ...
Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose : $g(x) = f(x+a) = \ldots$
$\mathscr{D}_g = \ldots$



Exemple

$f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est défini sur ...
Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose : $g(x) = f(x+a) = \ldots$
$\mathscr{D}_g = \ldots$





Propriété (admise)

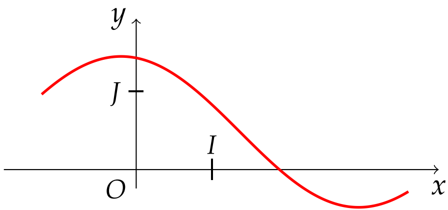
Deux cas se présentent :

1. *Sur la réunion de tous les intervalles où la fonction u est positive, alors $\mathscr{C}_u$ est confondue avec la courbe de $|u|$.*
2. *Sinon, la courbe représentative de la fonction $|u|$ est l'image de $\mathscr{C}_u$ par la symétrie d'axe (OI).*

Propriété (admise)

Deux cas se présentent :

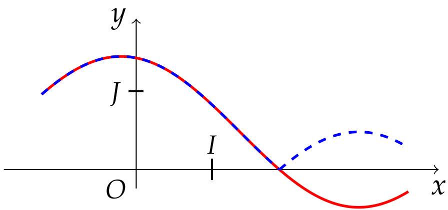
1. *Sur la réunion de tous les intervalles où la fonction u est positive, alors $\mathscr{C}_u$ est confondue avec la courbe de $|u|$.*
2. *Sinon, la courbe représentative de la fonction $|u|$ est l'image de $\mathscr{C}_u$ par la symétrie d'axe (OI).*



Propriété (admise)

Deux cas se présentent :

1. *Sur la réunion de tous les intervalles où la fonction u est positive, alors $\mathscr{C}_u$ est confondue avec la courbe de $|u|$.*
2. *Sinon, la courbe représentative de la fonction $|u|$ est l'image de $\mathscr{C}_u$ par la symétrie d'axe (OI).*



Propriété (admise)

Les fonctions $t \mapsto u(t)$ et $t \mapsto |u(t)|$ ont le même domaine de définition.