3 Cercle trigonométrique

Analyse

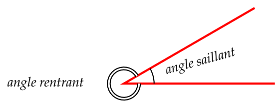
I. Angles dans un cercle

Définition 1

Un **angle** est une surface délimitée par deux demies-droites (les **côtés** de l'angle) de même origine appelée **sommet** de l'angle.
Le **degré** est une unité de mesure permettant de mesurer l'écart entre les deux demi-droites, appelé **mesure** de l'angle.

Remarque

On s'intéressera dans ce cours à l'angle saillant.



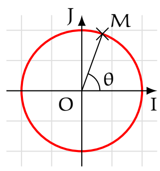
A. Cercle trigonométrique

Définition 2

On considère un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$ du plan.
On appelle **cercle trigonométrique** le cercle $\mathscr{U}$ de centre O et de rayon 1.

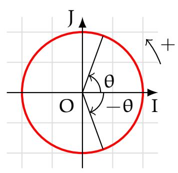
Remarque

On s'intéressera dans ce cours à un point M *situé sur* $\mathscr{U}$ *et à l'angle* $\widehat{\mathrm{IOM}}$ *formé par les demies-droites* $[\mathrm{OI})$ *et* $[\mathrm{OM})$ *ainsi qu'à sa mesure* θ.



Définition 3

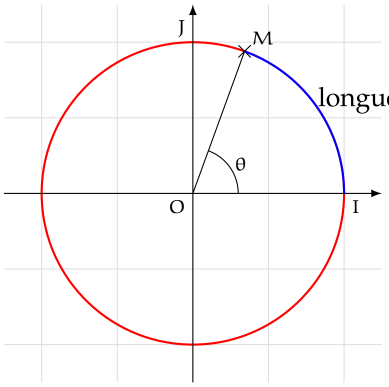
Dans le cercle trigonométrique, on appelle **sens trigonométrique**, ou sens direct, le sens qui parcourt le cercle dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
Dans le sens trigonométrique, la mesure d'un angle sera positive ; dans le sens indirect, la mesure sera négative.



B. Mesurer un angle en radian

Définition 4

On considère le cercle trigonométrique $\mathscr{U}$ ainsi qu'un point M sur ce cercle.
La mesure de l'angle $\widehat{IOM}$, exprimée en **radian**, est égale à la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ dans le sens trigonométrique et est égale à l'opposé de la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ dans le sens indirect.



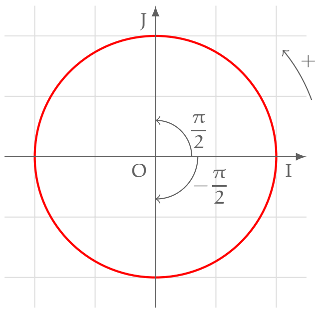
Exemples •

1°) Lorsque le point M est confondu au point I, la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ est égal à 0 donc on obtient $\widehat{IOM} = 0$ rad.

2°) Si on suppose maintenant que le point M a effectué un tour complet autour du cercle dans le sens trigonométrique, on trouve que la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ est égal au périmètre $\mathscr{P}$ du cercle. Or, $\mathscr{P} = 2\pi r$ et $r = 1$ donc on obtient $\widehat{IOM} = 2\pi$ rad.

3°) Si on effectue à présent un quart de tour dans le sens direct, on aura $\widehat{IOM} = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ rad.

4°) Si on effectue à présent un quart de tour dans le sens indirect, on aura $\widehat{IOM} = -\dfrac{2\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{2}$ rad.



L'exemple précédent nous montre qu'une même position pour le point M peut entraîner différentes mesures d'un angle, en fonction du nombre de tours effectués par M. Les différentes mesures diffèrent donc d'un multiple de 2π qui correspond au périmètre du cercle trigonométrique. On a donc :

Propriété 1

On considère un point M sur le cercle $\mathscr{U}$.

1°) L'angle $\widehat{IOM}$ possède une infinité de mesure.

2°) Pour deux mesures x et y, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x + 2k\pi$.

3°) Il n'existe qu'une seule mesure dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

Afin de garantir l'unicité de certains résultats, on est amené à définir la notion de mesure principale d'un angle :

Définition 5

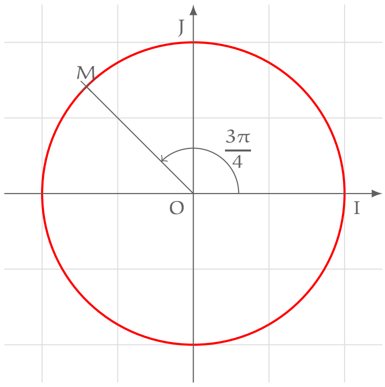
On considère un point M sur le cercle $\mathscr{U}$. Parmi toutes les mesures de l'angle $\widehat{IOM}$, on appelle **mesure principale** celle qui appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

Exemple • On considère un angle de mesure $\alpha = \frac{43\pi}{4}$. Déterminer la mesure principale de cet angle et placer M sur $\mathscr{U}$ tel que $\widehat{IOM} = \alpha$.

Il suffit de trouver $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{43\pi}{4} = x + 2k\pi$ et x sera alors la mesure principale cherchée.

On réduit tout d'abord au même dénominateur : $2\pi = \frac{8\pi}{4}$ puis on effectue la division euclidienne de 43 par 8 : $43 = 5 \times 8 + 3$.

Ainsi : $\frac{43\pi}{4} = \frac{5 \times 8\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 5 \times 2\pi + \frac{3\pi}{4}$ donc la mesure principale de l'angle est $\frac{3\pi}{4}$.



C. Quelques conversions à connaître

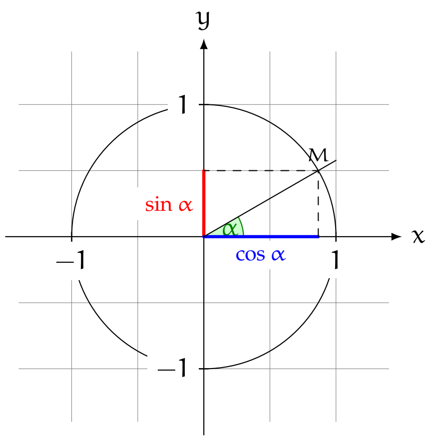
Angles en degré	0	360	180	30	45	60	90	270	α
Angles en radian	0	2π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\alpha \times \frac{2\pi}{360}$

II. Cosinus et Sinus d'un nombre réel

A. Lien avec le cercle trigonométrique

Propriété 2

On considère un point M sur le cercle $\mathscr{U}$ et α un nombre réel tel que $\widehat{IOM} = \alpha$. On ne demande pas à α d'être la mesure principale de l'angle $\widehat{IOM}$.
Le nombre $\cos(\alpha)$ est alors égal à l'abscisse du point M et le nombre $\sin(\alpha)$ est égal à l'ordonnée du point M.

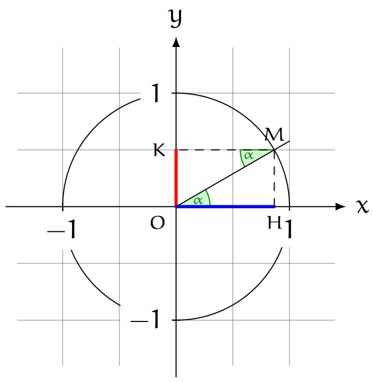


Démonstration

L'unité de longueur étant fixée, on utilise les définitions données du cosinus et du sinus d'un angle aigu α dans le triangle rectangle :

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

On considère dans la figure ci-dessous les triangles OMH et OMK rectangles respectivement en H et en K.
Les angles $\widehat{\text{HOM}}$ et $\widehat{\text{KMO}}$ sont alternes-internes. Et comme les droites (OH) et (MK) sont parallèles alors les angles $\widehat{\text{HOM}}$ et $\widehat{\text{KMO}}$ sont égaux donc $\widehat{\text{KMO}} = \alpha$.



Les triangles OKM et OHM ont la même hypoténuse [OM] qui est un rayon du cercle. Donc OM = 1. On utilise les définitions et on a :

$$\cos(\alpha) = \frac{OH}{OM} = OH \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) = \frac{OK}{OM} = OH.$$

□

B. Relations à connaître

Propriété 3

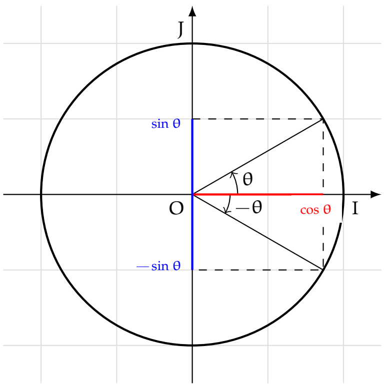
On considère un angle de mesure θ. On a les relations suivantes :

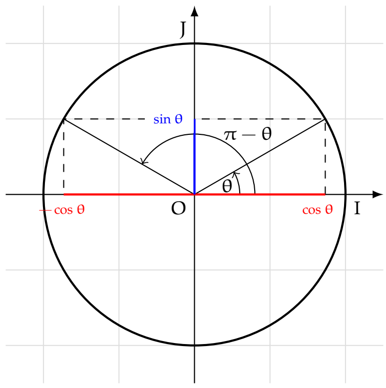
1°) $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ et $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$.

2°) $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ et $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$.

Démonstration

Le plus simple est d'utiliser une figure géométrique :





□

C. Quelques équations trigonométriques

La propriété précédente nous permet alors de résoudre quelques équations où apparaissent soit le cosinus, soit le sinus.

Propriété 4

Soit a un nombre fixé.
L'équation $\cos(t) = \cos(a)$ admet une **infinité** de solutions pouvant s'écrire sous l'une des deux formes suivantes :

$$t = a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \qquad \text{ou} \qquad t = -a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Exemple • Donner toutes les solutions de l'équation suivantes puis la mesure principale des angles qui vérifient l'équation :

$$\cos(t) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Les solutions sont de la forme $t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ou $t = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
Par exemple, voici quelques solutions :

$k=0$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$
$k=1$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$
$k=-1$	$-\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{7\pi}{3}$
$k=2$	$\frac{13\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{3}$
$k=-2$	$-\frac{11\pi}{3}$	$-\frac{13\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$ sont les mesures principales des angles solutions.

Propriété 5

Soit a un nombre fixé.
L'équation $\sin(t) = \sin(a)$ admet une **infinité** de solutions pouvant s'écrire sous l'une des deux formes suivantes :

$$t = a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \qquad \text{ou} \qquad t = \pi - a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Exemple • Donner toutes les solutions de l'équation suivantes puis la mesure principale des angles qui vérifient l'équation :

$$\sin(t) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

Les solutions sont de la forme $t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ou $t = \underbrace{\pi - \frac{\pi}{6}}_{=\frac{5\pi}{6}} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Par exemple, voici quelques solutions :

$k=0$	$k=1$	$k=-1$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{6}$	$-\frac{11\pi}{6}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{17\pi}{6}$	$-\frac{7\pi}{6}$

$\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$ sont les mesures principales des angles solutions.