1 Évolutions

I. Variations

On considère une quantité ayant une valeur y_1, exprimée dans une unité de mesure. Cette quantité est modifiée et on lui affecte une nouvelle valeur y_2, exprimée dans la même unité de mesure.
Il y a donc une variation entre y_1 et y_2.

A. Variation absolue

Définition 1

La **variation absolue** est définie par $y_2 - y_1$.
Si ce nombre est positif, on parlera d'une **hausse** ou d'une **augmentation**. Sinon, on parlera d'une **baisse** ou d'une **diminution**.

Remarque

La variation absolue est exprimée dans la même unité de mesure que la quantité.

Exemples

- **En Essonne :** En 1 990, l'Essonne comptait 1 084 824 habitants. En 2 010, ont été comptabilisés 1 215 340 habitants.
  La variation absolue est donc égale à : $1\ 215\ 340 - 1\ 084\ 824 = 130\ 516$. Cette variation est positive donc la population en Essonne a augmenté de 130 516 habitants en 20 ans.
- **En France :** En 1 990, la France comptait 58 040 660 habitants. En 2 010, ont été comptabilisés 64 612 940 habitants.
  La variation absolue est donc égale à : $64\ 612\ 940 - 58\ 040\ 660 = 6\ 572\ 280$. Cette variation est positive donc la population en France a augmenté de 6 572 280 habitants en 20 ans.

Remarque

Évidemment, la variation absolue du nombre d'habitants en France est plus importante que celle du nombre d'habitants en Essonne.
Comment peut-on alors comparer ces deux évolutions ? En Essonne, l'évolution du nombre d'habitant correspond-elle à l'évolution du nombre d'habitants en France ?

B. Variation relative

Bien comprendre le symbole % : Le symbole % correspond simplement à une écriture simplifiée d'une fraction ayant pour dénominateur 100.

Exemples

- $7,5\% = \dfrac{7,5}{100} = 0,075$.
- $\dfrac{4}{10} = \dfrac{40}{100} = 40\%$.
- $0,0125 = \dfrac{1,25}{100} = 1,25\%$.

Remarques

- *La variation relative est souvent exprimé à l'aide de pourcentage afin de faciliter les comparaisons.*
- *Il est important de comprendre la signification de la variation relative afin d'éviter parfois certains calculs.*

Exemples •

- Durant les soldes, un article coûte 10 €. À la fin des soldes, l'article coûte 20 €. Le prix a doublé : $t = 100\%$.
- Dans une station service, le Sans Plomb 95 coûte $1,52$ €. Le lendemain, le prix affiché est de $1,52$ €. Le prix n'a pas changé donc : $t = 0\%$.
- Ce matin, il y avait 60 croissants à la boulangerie. À midi, il en restait 30. Le nombre de croissants a diminué de moitié donc $t = -50\%$.

Remarque

Sauf indication contraire, on supposera jusqu'à la fin du cours que $y_1 \neq 0$.

Définition 2

La **variation relative** ou **taux d'évolution** t est calculée à partir de la formule suivante :

$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}.$$

Une fois encore, un nombre positif indique une augmentation et un nombre négatif indique une diminution.

Exemples • **En Essonne :** $t = \dfrac{1\ 215\ 340 - 1\ 084\ 824}{1\ 084\ 824} = \dfrac{130\ 516}{1\ 084\ 824} \approx 0{,}120\ 3.$

Le taux d'évolution est donc environ égal à $0{,}120\ 3$: la population a augmenté d'environ $12,03\%$.

En France : $t = \dfrac{64\ 612\ 940 - 58\ 040\ 660}{58\ 040\ 660} = \dfrac{6\ 572\ 280}{58\ 040\ 660} \approx 0{,}113\ 2.$

Le taux d'évolution est donc environ égal à $0{,}113\ 2$: la population a augmenté d'environ $11,32\%$.

Conclusion : En Essonne, l'augmentation de population entre 1 990 et 2 010 a été légèrement plus importante qu'en France.

C. Lorsque l'on connaît le taux de variation

Exemple • Un commerçant de meubles a vendu 125 chaises ce mois-ci. Son contrat stipule qu'il doit augmenter ses ventes d'au moins 3% chaque mois.
Combien doit-il vendre de chaises le mois prochain ?

On commence par calculer l'augmentation souhaitée en nombre de chaises :

$$3\% \text{ de } 125 = 3\% \times 125 = \frac{3}{100} \times 125 = \frac{3 \times 125}{100} = 3,75.$$

Le commerçant doit vendre $3,75$ chaises au minimum c'est-à-dire 4 chaises.

On calcule le nombre total : $125 + 4 = 129$. Le commerçant doit vendre au moins 129 chaises le mois prochain.

Remarque

Bilan de l'exemple :
y_1 *correspond au nombre de chaises ce mois-ci. Donc* $y_1 = 125$.
On cherche la valeur y_2 *sachant que le taux de variation est égal à* $t = 3\% = 0,03$.

Pour trouver y_2*, on calcule 3% de* y_1 *en faisant* $0,03 \times y_1$ *puis on ajoute* y_1*. On obtient alors :*

$$y_2 = y_1 + 0,03y_1 = y_1(1 + 0,03) = (1 + 0,03)y_1.$$

On applique le raisonnement précédent à un taux de variation quelconque égal à t :

Propriété 1

Lorsque l'on passe de la valeur y_1 à la valeur y_2 avec une variation relative égale à t, on a :

$$y_2 = (1+t) \times y_1.$$

Démonstration

On peut démontrer la propriété précédente en utilisant la démarche de l'exemple.
Utilisons plutôt la définition du taux de variation :

$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_1} \quad \Leftrightarrow \quad t \times y_1 = y_2 - y_1 \quad \Leftrightarrow \quad t \times y_1 + y_1 = y_2 \quad \Leftrightarrow \quad (t+1) \times y_1 = y_2.$$

□

Définition 3

Le nombre $1+t$ est appelé **cœfficient multiplicateur** de y_1 à y_2.
Un cœfficient supérieur à 1 traduit une augmentation, inférieur à 1 une diminution. S'il est égal à 1, il n'y a pas de variation.

Exemple • Dans une usine, le coût de production c_1 d'un objet est égal à 2 530 €.
Afin d'augmenter les bénéfices, le gérant décide de diminuer le coût de production de 2%. Quel est alors le nouveau de coût de production c_2 ?

Puisqu'il s'agit d'une diminution, $t = -2\% = -0,02$ donc :

$$c_2 = (1+t)c_1 = (1 + (-0,02)) \times 2\,530 = 0,98 \times 2\,530 = 2\,479{,}40 \text{ €}.$$

II. Taux d'évolution successifs

Exemple • Dans une commune, le maire décide d'augmenter les impôts locaux de 5%.
Ses conseillers lui suggèrent *d'y aller en douceur* en augmentant les impôts seulement de 2% la première année puis de 3% la seconde année.
Le maire doit-il suivre l'avis de ses conseillers ?

Dans l'exemple précédent, la quantité (impôts) augmente de y_1 à y_2 puis de y_2 à y_3. On souhaite connaître le taux de variation t de y_1 à y_3. Par définition, $t = \dfrac{y_3 - y_1}{y_1}$. Ici, on ne peut pas utiliser cette définition puisque les valeurs y_1 et y_3 sont inconnues. On a alors la propriété suivante :

Propriété 2

On considère une quantité qui évolue de y_1 à y_2 puis de y_2 à y_3 avec $y_2 \neq 0$.
On appelle t_1 le taux d'évolution de y_1 à y_2, t_2 le taux d'évolution de y_2 à y_3.
Le taux d'évolution global t permettant de passer de y_1 à y_3 est tel que :

$$1 + t = (1+t_1)(1+t_2).$$

Remarque

Les valeurs t_1, t_2 et t peuvent évidemment être négatives.

Démonstration

On sait que $y_3 = (1+t_2) \times y_2$ et $y_2 = (1+t_1) \times y_1$. De plus, $y_3 = (1+t)y_1$. Donc :

$$y_3 = (1+t_2) \times y_2 = \underbrace{(1+t_2) \times (1+t_1)}_{=1+t} \times y_1.$$

□

Exemple • Calculons la véritable augmentation des impôts prévus par les conseillers :

$$1+t=(1+0,02)\times(1+0,03)=1{,}050\ 6.$$

L'augmentation sera alors de $5,06\%$ au lieu de 5%.

III. Taux d'évolution réciproque

Exemple • Afin de faire des économies, un patron décide de baisser les salaires de 4%.
Le mois suivant, les ouvriers entrent en grève pour retrouver leur ancien salaire. Le patron accepte et décide alors d'augmenter les salaires de 4% pour qu'ils retrouvent leur valeur d'origine.
La grève doit-elle continuer ?

Propriété 3

On considère une quantité de valeur $y_1 \neq 0$ qui passe à la valeur $y_2 \neq 0$ avec un taux égal à t.
Afin de passer de y_2 à y_1, il faut utiliser le coefficient t' tel que :

$$1+t'=\frac{1}{1+t}.$$

Remarque

On rappelle que t et t' peuvent être négatifs. De plus, on a bien $t \neq -100\%$ puisque $y_2 \neq 0$.

Démonstration

On a les égalités suivantes : $y_2=(1+t)y_1$ et $y_1=(1+t')y_2$ d'où :

$$\begin{aligned} y_2=(1+t)y_1=(1+t)(1+t')y_2 \quad &\Leftrightarrow \quad 1=(1+t)(1+t') \quad (\text{puisque } y_2\neq 0)\\ &\Leftrightarrow \quad 1+t'=\frac{1}{1+t} \quad (\text{puisque } t\neq -1). \end{aligned}$$

□

Exemple • Le taux appliqué par le patron est égal à $(1-0,04)(1+0,04)=0{,}998\ 4$ soit $99,84\%$ ce qui signifie qu'au final, les salaires ont baissé de $0,16\%$.
Il faut donc trouver le taux de variation réciproque t' sachant que $t=-0,04$ et que donc $1+t=0,96$:

$$1+t'=\frac{1}{1+t} \quad \Leftrightarrow \quad 1+t'=\frac{1}{0,96} \quad \Leftrightarrow \quad t'=\frac{1}{0,96}-1\approx 1{,}041\ 7 \quad \text{donc} \quad \boxed{t'\approx 4,17\%}.$$