Théorème 1 : (Capacités attendues)

L'espace est muni d'un repère orthonormé.
• Un plan de vecteur normal $\vec{n}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ admet une équation , dite cartésienne, de la forme $ax+by+cz+d=0$ où d est un réel.
• Réciproquement, si a,b,c,d sont quatre réels avec a,b,c non tous nuls, l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;\,y\,;\,z)$ de l'espace tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\,(a\,;\,b\,;\,c)$.

Démonstration

Théorème du cours : Un point M appartient à un plan P de vecteur normal $\vec{n}$ et contenant un point A si, et seulement si, $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\vec{n}=0$.

On appelle $\mathscr{E}$ l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;\,y\,;\,z)$ tel que $ax+by+cz+d=0$ où a, b et c sont des réels non tous nuls et d est un réel et soit P le plan de vecteur normal $\vec{n}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ $(\neq \vec{0})$.

• Supposons que $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;\,y_\mathrm{A}\,;\,z_\mathrm{A})\in\mathrm{P}$.
Alors pour tout $\mathrm{M}(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathrm{P}$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\vec{n}=0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-x_\mathrm{A})a+(y-y_\mathrm{A})b+(z-z_\mathrm{A})c=0\\ &\Leftrightarrow \quad ax+by+cz-ax_\mathrm{A}-by_\mathrm{A}-cz_\mathrm{A}=0\\ &\Leftrightarrow \quad ax+by+cz+d=0 \quad \text{où} \quad d=-ax_\mathrm{A}-by_\mathrm{A}-cz_\mathrm{A}\end{aligned}$$

• Supposons que $\mathrm{M}(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{E}$. Puisque l'un des trois paramètres a, b ou c est différent de 0, supposons $a\neq0$ (démonstration analogue avec $b\neq0$ ou $c\neq0$).
En posant $x_\mathrm{A}=\dfrac{-d}{a}$, $y_\mathrm{A}=0$ et $z_\mathrm{A}=0$, le point $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;\,y_\mathrm{A}\,;\,z_\mathrm{A})\in\mathscr{E}$ et donc $ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{A}+d=0$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\in\mathscr{E} \quad &\Rightarrow \quad ax+by+cz+d=0\\ &\Rightarrow \quad ax+by+cz+d=ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{A}+d\\ &\Rightarrow \quad a(x-x_\mathrm{A})+b(y-y_\mathrm{A})+c(z-z_\mathrm{A})=0\\ &\Rightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\vec{n}=0\\ &\Rightarrow \quad \mathrm{M}\in\mathrm{P}\end{aligned}$$

Théorème 2 : (Capacités attendues)

Si la variable aléatoire X_n suit la loi $\mathscr{B}(n\,;\,p)$, alors, pour tout α dans $]0\,;1[$, on a,

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}_n}{n}\in\mathrm{I}_n\right)=1-\alpha$$

où I_n désigne l'intervalle $\left[p-u_\alpha\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+u_\alpha\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

Démonstration

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n}\in I_n\right) &= \lim_{n\to+\infty} P\left(p-u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{X_n}{n}\leqslant p+u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} P\left(np-u_\alpha\times\sqrt{p(1-p)}\times\sqrt{n}\leqslant X_n\leqslant np+u_\alpha\times\sqrt{p(1-p)}\times\sqrt{n}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} P\left(-u_\alpha\times\sqrt{np(1-p)}\leqslant X_n-np\leqslant u_\alpha\times\sqrt{np(1-p)}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} P\left(-u_\alpha\leqslant\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant u_\alpha\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} P\left(-u_\alpha\leqslant Z_n\leqslant u_\alpha\right)\\
&= P\left(-u_\alpha\leqslant Z\leqslant u_\alpha\right)\\
&= 1-\alpha
\end{aligned}$$

Théorème 3 : (Commentaires)

Pour une valeur de p fixée, l'intervalle $\left[F_n-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;F_n+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient, pour n assez grand, la proportion p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Démonstration

On déduit du théorème précédent $P\left(p-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{X_n}{n}\leqslant p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\geqslant 0{,}95$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
p-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{X_n}{n}\leqslant p+\frac{1}{\sqrt{n}} &\Leftrightarrow p-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant F_n\leqslant p+\frac{1}{\sqrt{n}}\\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant F_n-p\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}}-F_n\leqslant -p\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}-F_n\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}+F_n\geqslant p\geqslant -\frac{1}{\sqrt{n}}+F_n\\
&\Leftrightarrow F_n-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant p\leqslant F_n+\frac{1}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

On en déduit alors $P\left(F_n-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant p\leqslant F_n+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\geqslant 0{,}95$.