2 Études de fonctions

I. Fonction $x \mapsto |x|$

Définition 1

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction **valeur absolue** $x \mapsto |x|$ par :

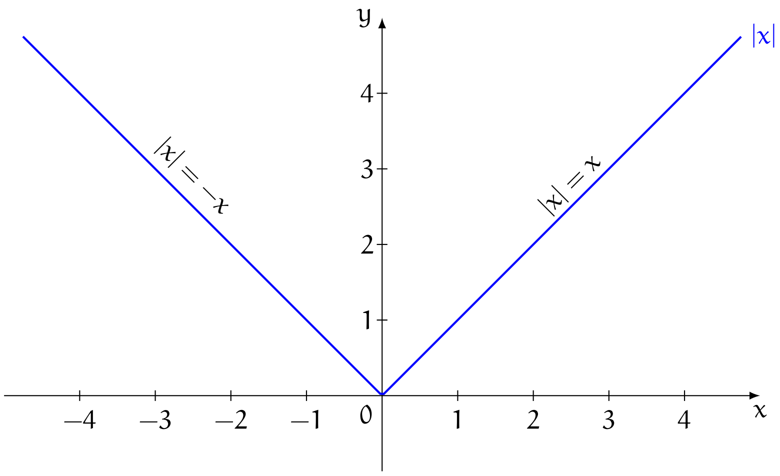
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

La définition nous permet de déduire immédiatement le résultat suivant :

Propriété 1

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction valeur absolue est strictement positive et $|0| = 0$.
Son minimum (la plus petite des images) est donc égal à 0.

D'après la définition, on constate que la fonction valeur absolue est une fonction affine par morceaux.
En effet, pour $x < 0$, elle est égale à la fonction affine $x \mapsto -x$ et elle est donc décroissante.
Pour $x \geqslant 0$, elle est égale à la fonction affine $x \mapsto x$ et elle est donc croissante.
On en déduit alors sa représentation graphique ainsi que ses variations.



Propriété 2

Sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$, la fonction valeur absolue est strictement décroissante.
Sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, la fonction valeur absolue est strictement croissante.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de $\lvert x\rvert$	↘	0	↗

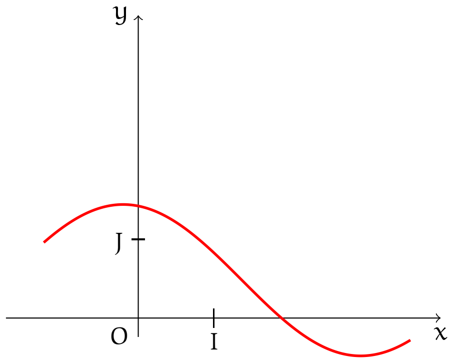
Remarque
La fonction valeur absolue étant toujours positive ou nulle, sa représentation graphique est au-dessus de l'axe des abscisses.

En enfin, toujours grâce aux fonctions affines, on a le résultat graphique suivant :

Propriété 3
La représentation graphique de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

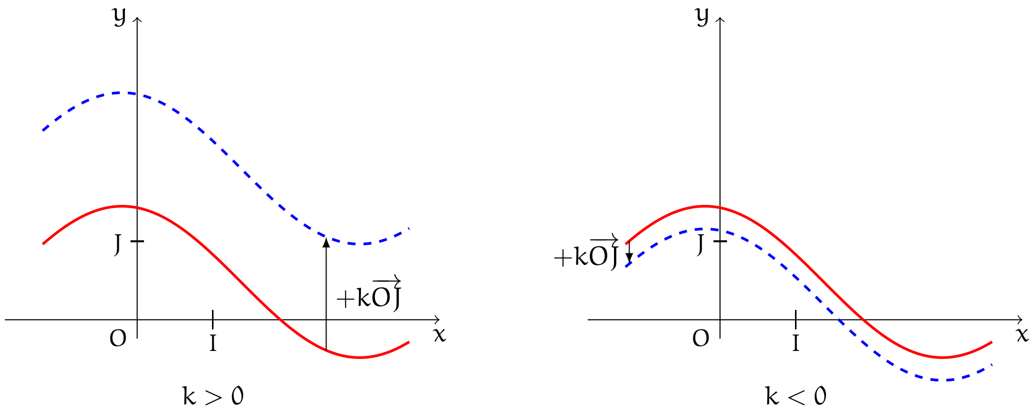
II. Somme et fonctions composées

On se place dans un repère orthonormé nommé (O, I, J). On considère une fonction u définie sur $\mathscr{D}_u$ dont voici la représentation graphique $\mathscr{C}_u$ sur un intervalle A.



A. Fonction $t \mapsto u(t) + k$

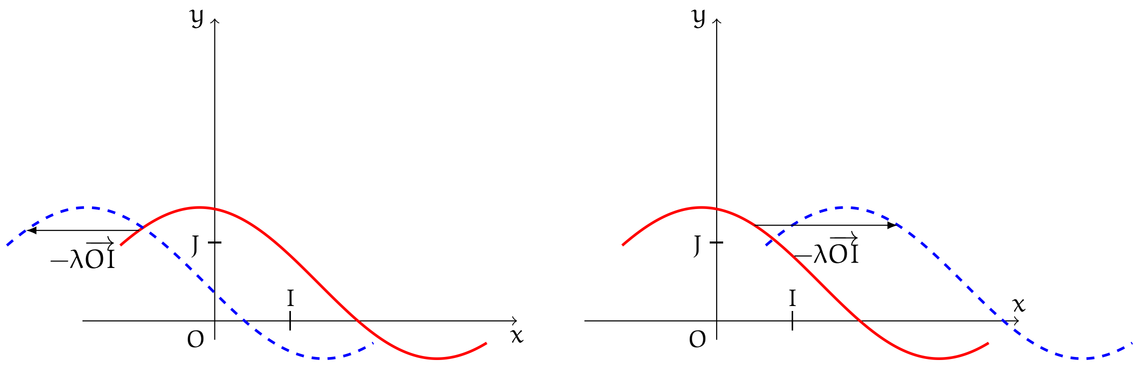
Propriété 4 (admise)
La représentation graphique de la fonction $t \mapsto u(t) + k$ est l'image de $\mathscr{C}_u$ par la translation de vecteur $k \times \overrightarrow{OJ}$.



Propriété 5 (admise)
Les fonctions $t \mapsto u(t)$ et $t \mapsto u(t) + k$ ont le même ensemble de définition.

B. Fonction $t \mapsto u(t + \lambda)$

Propriété 6 (admise)
La représentation graphique de la fonction $t \mapsto u(t + \lambda)$ est l'image de $\mathscr{C}_u$ par la translation de vecteur $-\lambda \times \overrightarrow{OI}$.



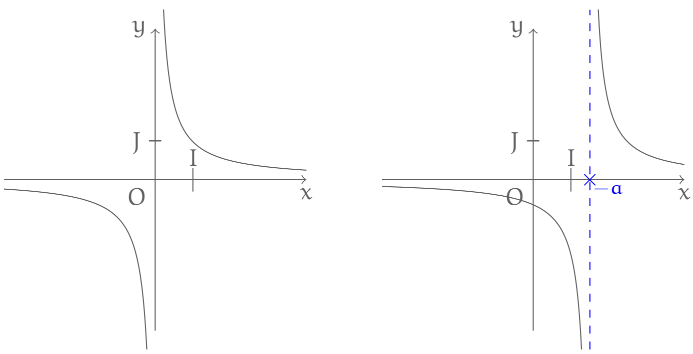
$\lambda > 0$ $\lambda < 0$

Remarque

L'intervalle de définition de la fonction u subit également une translation. Il faut donc faire attention à cela.

Exemple • La fonction inverse $f \colon x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est défini sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

On pose maintenant la fonction g définie sur $\mathscr{D}_g$ par $g(x) = f(x+a) = \dfrac{1}{x+a}$ où a est un nombre réel. La représentation graphique de g sera l'image de la représentation graphique de la fonction f par le vecteur $-a\overrightarrow{OI}$. On aura donc : $\mathscr{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-a\} =]-\infty\,;-a[\cup]-a\,;+\infty[$.



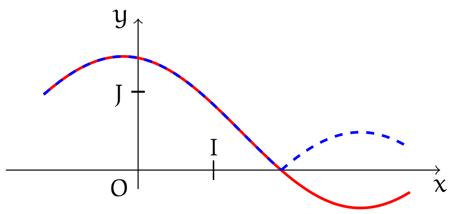
C. Fonction $t \mapsto |u(t)|$

Propriété 7 (admise)

Deux cas se présentent :

1°) Sur la réunion de tous les intervalles où la fonction u est positive, alors $\mathscr{C}_u$ est confondue avec la courbe de $|u|$.

2°) Sinon, la courbe représentative de la fonction $|u|$ est l'image de $\mathscr{C}_u$ par la symétrie d'axe (OI).



Propriété 8 (admise)

Les fonctions $t \mapsto u(t)$ et $t \mapsto |u(t)|$ ont le même domaine de définition.