4 Équations de droites

Géométrie

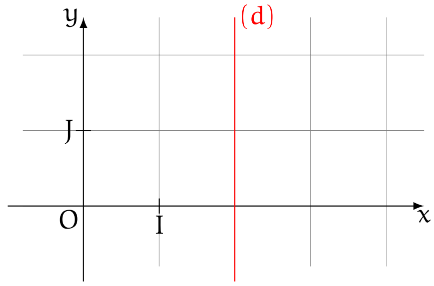
On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\,I,\;J)$.
Une droite peut alors être parallèle à l'axe des ordonnées (cas n°1) ou bien sécante à l'axe des ordonnées (cas n°2).

I. Caractérisation analytique d'une droite

Cas n°1 : Une droite est parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si tous les points situés sur cette droite ont la même abscisse.

Propriété 1

Toute droite (d) parallèle à l'axe des ordonnées a une équation **réduite** de la forme $x = k$ ($k \in \mathbb{R}$).

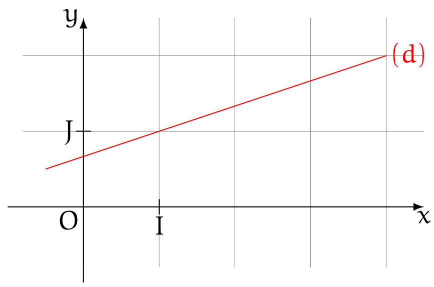


Droite d'équation $x = 2$

Cas n°2 : Une droite qui coupe l'axe des ordonnées est la représentation d'une fonction affine. Réciproquement, une fonction affine a pour représentation graphique une droite sécante à l'axe des ordonnées.

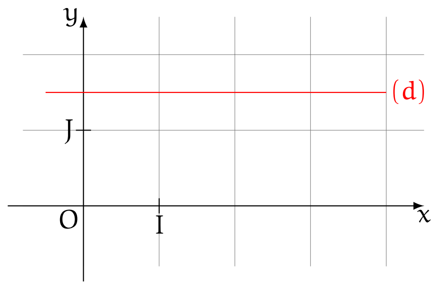
Propriété 2

Toute droite (d) sécante à l'axe des ordonnées a une équation **réduite** de la forme $y = mx + p$ ($m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$).



Droite d'équation $y = mx + p$

Cas particulier : Lorsque $m = 0$, on trouve une équation de la forme $y = p$ ($p \in \mathbb{R}$). Dans ce cas, la droite (d) est parallèle à l'axe des abscisses. Tous les points de cette droite ont la même ordonnée. Mais elle est toujours sécante à l'axe des ordonnées : c'est un cas particulier du cas n°2.



Droite d'équation $y = 1,5$

Définition 1

Considérons une droite (d) dont l'équation réduite est de la forme : $y = mx + p$.
Le nombre m est appelé **cœfficient directeur** de la droite (d). Ce cœfficient nous donne une indication sur l'inclinaison de la droite.
Le nombre p est appelé **ordonnée à l'origine**. En effet, lorsque $x = 0$ (origine de l'axe des abscisse), l'ordonnée y est égale à p.

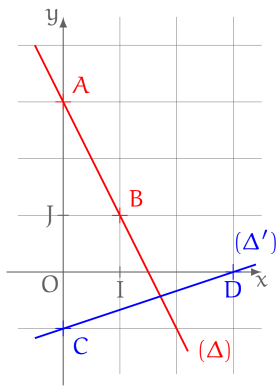
II. Tracer une droite dans un repère

Une droite d'équation $x = k$ passe par le point de coordonnées $(k\,;\,0)$ et est parallèle à l'axe des ordonnées.
Une droite d'équation $y = p$ passe par le point de coordonnées $(0\,;\,p)$ et est parallèle à l'axe des abscisses.
Pour représenter une droite d'équation $y = mx + p$, il faut et il suffit de connaître deux points appartenant à cette droite.

Exemples •

1°) Tracer la droite (Δ) d'équation $y = -2x + 3$.
Puisqu'il faut deux points, choisissons arbitrairement deux valeurs de x et calculons les valeurs de y correspondantes.
$x = 0 : y = -2 \times 0 + 3 = 3$ donc $A(0\,;\,3) \in (\Delta)$.
$x = 1 : y = -2 \times 1 + 3 = 1$ donc $B(1\,;\,1) \in (\Delta)$.

2°) Tracer la droite (Δ') d'équation $y = \frac{1}{3}x - 1$.
Puisqu'il faut deux points, choisissons arbitrairement deux valeurs de x et calculons les valeurs de y correspondantes.
$x = 0 : y = \frac{1}{3} \times 0 - 1 = -1$ donc $C(0\,;\,-1) \in (\Delta')$.
$x = 3 : y = \frac{1}{3} \times 3 - 1 = 0$ donc $D(3\,;\,0) \in (\Delta)$.



III. Déterminer l'équation d'une droite

A. Cas n°1

Une droite parallèle à l'axe des ordonnées a pour équation $x = k$.
Si on connaît la représentation graphique de la droite, il suffit ensuite de lire graphiquement la valeur de k. Sinon, en connaissant deux points, il suffit de lire leur abscisse commune.

Exemple • Déterminer l'équation de la droite passant par les points $K(-2\,;\,3)$ et $L(-2\,;\,6)$.
Ces deux points ont la même abscisse donc la droite (KL) est parallèle à l'axe des ordonnées et a pour équation $x = -2$.

B. Cas n°2

Une droite sécante à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $y = mx + p$. Deux points situés sur cette droite n'ont pas la même abscisse.
Lorsque l'on connaît les coordonnées de deux points de la droite, on détermine d'abord le cœfficient directeur puis on résoud une équation pour déterminer l'ordonnée à l'origine.

Propriété 3

Soient $K(x_K\,;\,y_K)$ et $L(x_L\,;\,y_L)$ deux points dans un repère tel que $x_K \neq x_L$.
Le cœfficient directeur de la droite (KL) est :

$$m = \frac{y_K - y_L}{x_K - x_L}.$$

Démonstration

$K \in (KL)$ donc $y_K = mx_K + p$. De même, puisque $L \in (KL)$ alors $y_L = mx_L + p$.

Ainsi,
$$\begin{aligned} y_K - y_L &= mx_K + p - (mx_L + p) \\ &= mx_K + p - mx_L - p \\ &= mx_K - mx_L \\ &= m(x_K - x_L) \end{aligned}$$

Puisque $x_K \neq x_L$, alors $x_K - x_L \neq 0$ et en divisant par $x_K - x_L$, on obtient :

$$m = \frac{y_K - y_L}{x_K - x_L}.$$

$\square$

Remarque

Lorsque l'on passe d'un point d'une droite à une autre en augmentant l'abscisse de 1, alors la variation des ordonnées est donnée par m.

Exemple • Déterminer l'équation de la droite (d) passant par les points $A(3\,;\,4)$ et $(5\,;\,-2)$.

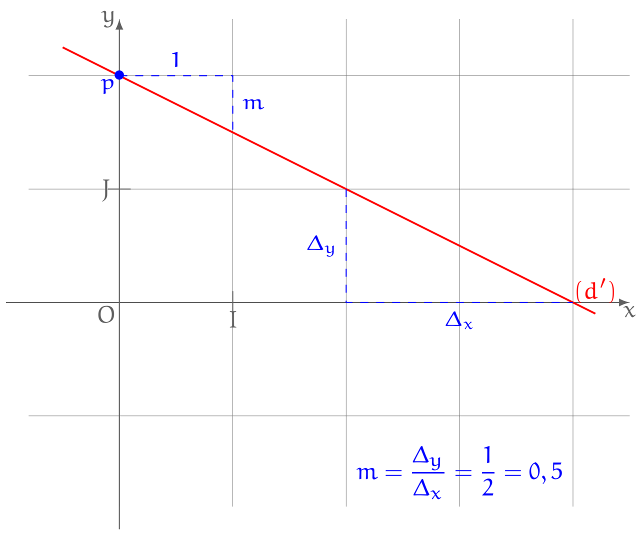
Les deux points n'ont pas la même abscisse donc l'équation réduite de la droite (d) est de la forme $y = mx + p$.

Calcul de m :
$$\begin{aligned} m &= \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \\ &= \frac{4-(-2)}{3-5} \\ &= \frac{6}{-2} \\ m &= -3 \end{aligned}$$

Calcul de p : Puisque $A \in (d)$ alors les coordonnées de A vérifient l'équation de (d) :
$$\begin{aligned} & y_A = mx_A + p \\ \Leftrightarrow\ & 4 = -3 \times 3 + p \\ \Leftrightarrow\ & 4 = -9 + p \\ \Leftrightarrow\ & p = 4 + 9 \\ \Leftrightarrow\ & p = 13 \end{aligned}$$

La droite (d) a donc pour équation : $y = -3x + 13$.

Exemple • Déterminer l'équation de la droite (d') dont voici la représentation graphique.



La droite (d') a pour équation : $y = \frac{1}{2}x + 2$.

IV. Applications

A. Droites parallèles

Remarques

1°) *Les droites qui ont une équation de la forme $x = k$ sont toutes parallèles à l'axe des ordonnées et elles sont donc parallèles entre elle.*

2°) *Une droite d'équation $x = k$ et une droite d'équation $y = mx + p$ sont sécantes car la première est parallèle à l'axe des ordonnées et pas la suivante.*

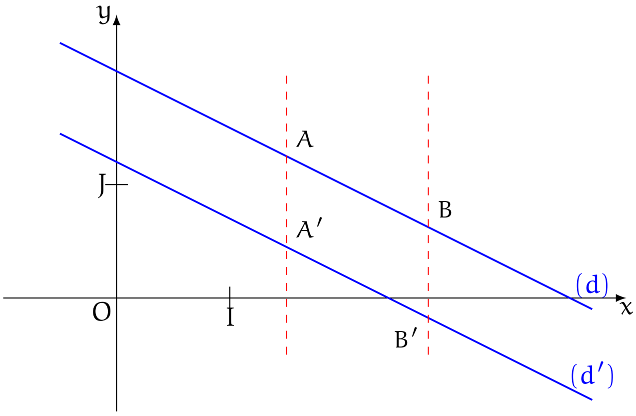
Propriété 4

Une droite (d) d'équation $y = mx + p$ et une droite (d') d'équation $y = m'x + p'$ sont parallèles si, et seulement si, elles ont le même cœfficient directeur :

$$(d)//(d') \quad \Leftrightarrow \quad m = m'$$

Démonstration

On se place dans la situation suivante : les points A et B appartient à la droite (d) et les points A' et B' appartiennent à la droite (d') tels que $(AA')//(BB')$.



$$\begin{aligned}
& (d) \text{ et } (d') \text{ sont parallèles} \\
\Leftrightarrow \quad & ABB'A' \text{ est un parallélogramme} \\
\Leftrightarrow \quad & [AB'] \text{ et } [A'B] \text{ ont le même milieu} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \dfrac{x_A + x_{B'}}{2} = \dfrac{x_{A'} + x_B}{2} \\ \dfrac{y_A + y_{B'}}{2} = \dfrac{y_{A'} + y_B}{2} \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x_A + x_{B'} = x_{A'} + x_B \\ y_A + y_{B'} = y_{A'} + y_B \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x_A - x_B = x_{A'} - x_{B'} \\ y_A - y_B = y_{A'} - y_{B'} \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_{B'} - y_{A'}}{x_{B'} - x_{A'}} \qquad (\text{équivalence car } x_A = x_{A'} \text{ et } x_B = x'_B) \\
\Leftrightarrow \quad & m = m'
\end{aligned}$$

On a bien démontré que $(d)//(d') \quad \Leftrightarrow \quad m = m'$. □

Exemple • Donner les équations réduites des droites suivantes et déterminer celles qui sont parallèles :

$$(d_1) : y - 2x + 1 = 0 \quad ; \quad (d_2) : y + 3x - 2 = 0 \quad ; \quad (d_3) : 4y + 12x - 20 = 0 \quad ; \quad (d_4) : y + 1 = 2x.$$

B. Droites sécantes

Soient (d) d'équation $y = mx + p$ et (d') d'équation $y = m'x + p'$. D'après la propriété précédente, deux droites sont sécantes lorsque $m \neq m'$. Dans ce cas, il existe un point d'intersection A et les coordonnées de A vérifient les équations des deux droites en même temps. On a donc le système suivant dont le couple $(x\,;\,y)$ est l'inconnue qui correspond aux coordonnées du point A :

$$\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$$

Exemple • Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites suivantes :

$$(\Delta_1) : y = -2x + 3 \quad ; \quad (\Delta_2) : y = \frac{1}{3}x - 1$$

C. Alignement de points

Propriété 5

On considère trois points A, B et C.

1°) Si les trois points ont la même abscisse k, alors ils sont alignés.

2°) Sinon, les points sont alignés si et seulement si (AB) et (AC) ont le même cœfficient directeur.

Démonstration

Dans le premier cas, les points appartiennent à la même droite d'équation $x = k$ donc ils sont alignés.
Dans le second cas, dire que (AB) et (AC) ont le même cœfficient directeur est équivalent à dire que ces droites sont parallèles ce qui est équivalent à dire qu'elles sont confondues (puisqu'elles ont un point commun) ce qui équivaut à dire qu'il s'agit de la même droite et donc A, B et C sont alignés. $\square$

Exemple • Dans chacun des cas, les points A, B et C sont-ils alignés ?

$$A(6\,;\,0) \quad ; \quad B(0\,;\,4) \quad ; \quad C(3\,;\,2)$$

$$A(1\,;\,3) \quad ; \quad B(2\,;\,9) \quad ; \quad C(4\,;\,10)$$