5 Probabilités I
Schéma de Bernoulli

I. Vocabulaire des probabilités

Définition 1

Une expérience est dite **aléatoire** lorsqu'on ne peut pas en prévoir avec certitude le résultat.
On appelle **issue** d'une expérience aléatoire tout résultat possible de cette expérience.
L'ensemble des issues s'appelle l'**univers**. On le note généralement Ω.

Exemple • Le lancer d'un dé à 6 faces est une expérience aléatoire. Les issues sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.
L'univers est donc l'ensemble $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$.

Définition 2

Une partie de Ω, c'est-à-dire un ensemble d'issues parmi celles possibles, est appelé **événement**.
Un événement **élémentaire** est un événement qui ne contient qu'une seule issue.
L'événement **certain** contient toutes les issues.
L'événement **impossible** ne contient aucune issue.

Exemple • Lors du lancer d'un dé, $\{1\}$ est un événement élémentaire.
L'événement "obtenir un entier positif" est l'événement certain et "obtenir un entier supérieur à 7" est l'événement impossible.

Définition 3

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.
On suppose Ω fini ; on note n le nombre d'éléments de Ω, $n \in \mathbb{N}^*$, et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les éléments de Ω.
Définir une **loi de probabilité** sur Ω, c'est associer à chaque événement élémentaire $\{x_i\}$ un nombre réel p_i positif ou nul de façon que :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Le nombre p_i est appelé **probabilité** de l'événement élémentaire $\{x_i\}$.
La probabilité d'un événement (autre que l'événement impossible) est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.
La probabilité de l'événement impossible est égale à 0.

Exemple • On considère un dé pipé et on associe un nombre à chaque issue :

$$p(\{1\}) = 0{,}1 \quad ; \quad p(\{2\}) = 0{,}2 \quad ; \quad p(\{3\}) = 0{,}1 \quad ; \quad p(\{4\}) = 0{,}2 \quad ; \quad p(\{5\}) = 0{,}1 \quad ; \quad p(\{6\}) = 0{,}3.$$

Chacun de ces nombres est positif et leur somme est égale à 1 : on a bien défini une probabilité.
Ainsi : $p(\text{"obtenir un nombre pair"}) = p(\{2\,;4\,;6\}) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = 0{,}7$.

II. Schéma de Bernoulli

Définition 4

Soit p un nombre réel appartenant à $[0\,;1]$.
On appelle **épreuve de Bernoulli** de paramètre p toute expérience aléatoire n'admettant que deux issues S et $\overline{S}$ de probabilités respectives p et $1-p$.
L'événement S est appelé « succès ». L'événement $\overline{S}$ est appelé « échec » et on le note parfois E.

Exemple • Dans une urne opaque, il y a 10 boules indiscernables au toucher. 3 sont rouges et les autres sont bleues.
Si on considère que l'événement "Tirer une boule bleue" comme le succès alors $p(S) = \dfrac{7}{10}$ et $p(\overline{S}) = \dfrac{3}{10}$.
Si on considère que l'événement "Tirer une boule rouge" comme le succès alors $p(S) = \dfrac{3}{10}$ et $p(\overline{S}) = \dfrac{7}{10}$.

Définition 5

Soit p un nombre réel appartenant à $[0\,;1]$.
On appelle **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p une épreuve de Bernoulli répétée n fois de façon **identique** et **indépendante**.
L'événement S est appelé « succès ». L'événement $\overline{S}$ est appelé « échec » et on le note parfois E.

Propriété 1 (admise)

Dans un schéma de Bernoulli, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

Exemple • On considère l'urne de l'exemple précédent. On tire une boule puis la remet dans l'urne et on recommence une seconde fois.
On s'intéresse à l'événement A : "obtenir 2 boules rouges".

- On tire une boule au hasard une fois dans l'urne. On appelle succès l'événement R : "tirer une boule rouge" et on a $p(R) = \dfrac{3}{10}$.
- On a donc une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}3$.
- Les deux tirages sont identiques : même nombre de boules.
- Les deux tirages sont indépendants : la couleur de la boule du premier tirage n'influence pas le second tirage.
- On a donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 2$ et $p = 0{,}3$. Ainsi,

$$p(A) = p(R) \times p(R) = 0{,}3^2 = 0{,}09.$$