11 Dérivation

Analyse

I. Fonction dérivée

A. Introduction

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a un réel de I.
f est **dérivable** en a s'il existe un nombre L tel que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L.$$

Le nombre L est appelé **nombre dérivé** en a de f.

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
f est dite **dérivable** sur I lorsque, pour tout $a \in I$, f admet un nombre dérivé en a.
La fonction définie sur I qui, à tout réel a de I, associe le nombre dérivé de f en a est appelée **fonction dérivée** de f.
Cette fonction se note f'.

Exemple • Fonction polynomiale de degré 2.

B. Dérivée de fonctions de référence

Propriété 1

Soient u et v deux fonctions définies sur un même intervalle I. Alors :

$$(u+v)' = u' + v'.$$

Dans le tableau ci-dessous, k désigne un nombre réel et u une fonction :

Fonction	$\mathscr{D}_f$	Dérivée	$\mathscr{D}_{f'}$
Fonction constante : $u\colon x \mapsto k$	$\mathbb{R}$	$u' = 0$	$\mathbb{R}$
ku	$\mathscr{D}_u$	$(ku)' = k \times u'$	$\mathscr{D}_{u'}$
$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax+b$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto n \times x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$	$[-1\,;1]$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$[-1\,;1]$
$x \mapsto \cos(\omega x+\varphi)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\omega \times \sin(\omega x+\varphi)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(\omega x+\varphi)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \omega \times \cos(\omega x+\varphi)$	$\mathbb{R}$

Propriété 2 (admise)

Soient u et v deux fonctions définies sur un même intervalle I. Alors :

$$(u \times v)' = u'v + uv'.$$

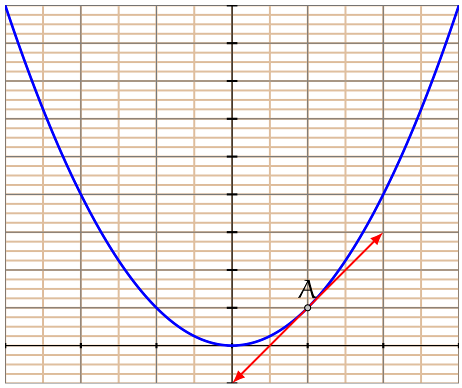
De plus, si pour tout $x \in I, v(x) \neq 0$ alors :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

II. Tangente

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Soit a un réel de I tel que f est dérivable en a, de nombre dérivé $f'(a)$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.
La **tangente** à $\mathscr{C}_f$ au point $A(a\,;\,f(a))$ est la droite passant par A de cœfficient directeur $f'(a)$.



Théorème 1

Soit f une fonction dérivable en un réel a de nombre dérivé $f'(a)$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.
L'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

III. Variations d'une fonction

Théorème 2 (admis)

Soit f une fonction polynôme du second degré dont on note f' la dérivée. I est un intervalle.

- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.