Equations et inéquations
Utilisation de la fonction carré

Module n° 15

I. Implications et équivalences

1. Présentation

On considère les propositions ci-dessous, où a et b désignent deux réels :

$\boxed{P_1}$ $(a+b)^2=0$ et $\boxed{P_2}$ $a=0$ et $b=0$

1. Soit a et b deux nombres réels.
   Justifier que, si la proposition P_2 est vraie, alors la proposition P_1 est vraie.
   On dit que, pour tous réels a et b, P_2 implique P_1 et on note $\boxed{P_2} \Rightarrow \boxed{P_1}$.
2. Est-il vrai que, pour tous réels a et b, la proposition P_1 implique la proposition P_2 ?

2. Formuler une implication

On considère les propositions suivantes où a et b désignent des nombres réels.

$\boxed{P_1}$ $a^2=b^2$

$\boxed{P_2}$ $a=b$

$\boxed{P_3}$ $a=-b$

$\boxed{P_4}$ $(a+b)(a-b)=0$

$\boxed{P_5}$ $a=b$ ou $a=-b$

$\boxed{P_6}$ $a=0$ ou $b=0$

Pour les questions ci-dessous, on pourra utiliser la courbe représentative de la fonction carré.

1. Quelles sont les implications du type $\boxed{P_1} \Rightarrow \boxed{}$, vraies pour tous réels a et b ?
2. Quelles sont les implications du type $\boxed{} \Rightarrow \boxed{P_1}$, vraies pour tous réels a et b ?
3. En déduire les propositions équivalentes à P_1, pour tous réels a et b.
4. Application
   Résoudre l'équation $(2x-3)^2=(2x+9)^2$.

II. Quantificateurs

1. Utiliser des quantificateurs

Dans chaque cas, recopier et compléter par :

Pour tout réel x ou Pour tout réel x positif ou Il existe un réel x tel que

1. ______ , si $x \geqslant 3$ alors $x^2 \geqslant 9$.
2. ______ , $(x-1)^2 = 9$.
3. ______ , si $x \in [-1\,;2]$ alors $x^2 \geqslant 1$.
4. ______ , si $x < 4$ alors $x^2 < 16$.

2. Expliciter à l'aide de quantificateurs

Dans chacun des énoncés ci-dessous l'égalité $f(x) = 2x^2 - 5$ apparaît. Pourtant elle n'a pas le même statut dans chaque cas.
Reformuler les énoncés suivants à l'aide de quantificateurs.

1. Enoncé : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 5$.
2. Enoncé : L'équation $f(x) = 2x^2 - 5$ admet-elle des solutions positives ?
3. Enoncé : Résoudre l'équation $f(x) = 2x^2 - 5$.

II. Fausses démonstrations

1. Le paradoxe de Augustus de Morgan (1806-1871)

Il démontre en utilisant des règles d'algèbre élémentaire que, si $x = 1$ alors $x = 0$...
Voici ses calculs.

Si $x = 1$
alors $x^2 = x$ en multipliant chaque membre par x,
alors $x^2 - 1 = x - 1$ en ...
alors $(x+1)(x-1) = x - 1$ en ...
alors $\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \dfrac{x-1}{x-1}$ en ...
alors $x + 1 = 1$ en ...
alors $x = 0$ en ...

Il ne peut qu'y avoir une erreur, mais où ?

2. Défi

1. En suivant les étapes décrites ci-dessous, écrire une suite d'égalités.
   - ✎ Considérons a et b deux réels égaux et non nuls.
   - ✎ Multiplions chaque membre par a.
   - ✎ Soustrayons b^2 à chaque membre.
   - ✎ Factorisons.
   - ✎ Simplifions chaque membre par $a - b$.
   - ✎ Puisque $a = b$, remplaçons a par b.
   - ✎ Divisons chaque membre par b.
2. L'égalité obtenue est-elle surprenante ? et celles qui la précèdent.. ?
   Chercher l'erreur.