Mathématiques

Mathématiques

> Pour écrire des mathématiques avec LaTeX, il faut accéder au *mode mathématique* à l'aide du caractère $. Ce même caractère est utilisé pour sortir du *mode mathématique*.

I. Apprentissage par la pratique

> La plupart des codes présentés dans cette section sont des extraits d'un fichier complet. Pour cela, la numérotation des lignes de code ne commencera pas nécessairement à 1. Le *fichier source complet* est donné à la fin de cette fiche.

Voilà le préambule que nous utiliserons dans cette section :

Préambule

```
\documentclass[10pt,french]{article}
\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage[a4paper,margin=1.5cm]{geometry}
\usepackage{kpfonts}
\usepackage[dvipsnames]{xcolor}
\usepackage{mathtools,amssymb}
\usepackage[autolanguage,np]{numprint}
\usepackage{xlop}
\usepackage{cancel}
\renewcommand\CancelColor{\color{red}}
\usepackage{dsfont}
\usepackage{babel}
\DecimalMathComma
```

Code III.1

Nous avons déjà signalé que les *packages* amssymb et amstools servaient de « *boîte à outils* » pour les mathématiques. Parmi des nombreuses commandes, ces *packages* permettent notamment d'écrire les opérations arithmétiques basiques.

$1 + 2 = 3$ et $3 \neq 4$
$(-5) - (-8) = 3$
$9 \times 7 = 63$
$25 \div 6 \approx 4{,}17$

```
$1 + 2 = 3$ et $3 \neq 4$\par
$(-5) - (-8) = 3$ \par
$9 \times 7 = 63$\par
$25 \div 6 \approx 4,17$
```

> Dans le préambule, la commande `\DecimalMathComma` permet de définir la virgule comme séparateur entre la partie entière et la partie décimale d'un nombre. Cela permet d'éviter la création d'espaces non souhaitée dans l'écriture des nombres en français.

D'autre part, certains *packages* viennent compléter les possibilités déjà nombreuses.

> Les *codes sources* suivants peuvent s'écrire à la suite du préambule présenté ci-dessus mais il ne faut alors pas oublier de les encadrer avec `\begin{document}` et `\end{document}`.

A. `\usepackage[autolanguage,np]{numprint}`

En français, les grands nombres doivent être écrits en séparant les chiffres par tranche de 3 en utilisant des espaces fines. Le *package* numprint rend cela possible à l'aide de la commande `\np`. Celle-ci est un raccourci créé grâce à l'option `np` du *package*. La vraie commande se nomme `\numprint`. De plus, cette commande peut prendre en option une unité de mesure, gérant ainsi automatiquement les espaces.

$10\,\text{m} = 10\,000\,\text{mm} = 0{,}01\,\text{km}$
$10\,\text{km/h} = 10\,\text{km.h}^{-1} \approx 2{,}78\,\text{m/s}$

```
$\np[m]{10} = \np[mm]{10000} = \np[km]{0,01}$\par
$\np[km/h]{10} = \np[km.h^{-1}]{10}
\approx \np[m/s]{2,78}$
```

> L'option `autolanguage` permet simplement à numprint de s'accorder avec les règles de la langue en cours (notamment pour le séparateur de milliers : espace, point ou virgule).

Ce *package* permet aussi d'écrire `$\np{1,54e-3}$` qui donne alors $1{,}54 \cdot 10^{-3}$. La documentation du *package* renseigne sur les différentes options possibles et les modifications envisagées.

B. \usepackage{xlop}

Le *package* xlop permet d'écrire les commandes du code ci-dessous et dispose de nombreuses options. Il ne faut pas hésiter à consulter sa documentation. Compiler le code suivant et admirer le résultat.

Les opérations posées

```
\opset{decimalsepsymbol={,},voperator=bottom,voperation=top}

\opadd{45,05}{78,4}\quad ou encore \opadd[style=text]{45.05}{78.4}\medskip

\opsub[carrysub,lastcarry,columnwidth=2.5ex,offsetcarry=-0.4,decimalsepoffset=-3pt,deletezero=false]
{12.34}{5.67} \quad ou encore \opsub[style=text]{12.34}{5.67}\medskip

\opmul[shiftintermediarysymbol={$0$},displayshiftintermediary=all]{35684}{7.9}\quad
ou encore \opmul[style=text]{35684}{7.9}\medskip

\opidiv{25}{7} \quad ou encore \opidiv[style=text]{25}{7} \medskip

\opdiv[maxdivstep=3]{25}{7} \quad ou encore \opdiv[style=text,maxdivstep=3]{25}{7}\medskip
```

Code III.2

C. \usepackage{cancel}

L'exemple suivant montre comment utiliser simplement le *package* cancel qui définit la commande `\cancel`. Dans le préambule, la ligne `\renewcommand\CancelColor{\color{red}}` permet de définir la couleur du trait utilisé par `\cancel` :

$\frac{a\times\cancel{c}}{\cancel{c}\times b} = \frac{a}{b}$

$\cancel{2x^2} - 2x + 4 - \cancel{2x^2} + 3x = x + 4$

```
$\frac{a \times \cancel{c}}{\cancel{c}\times b}
= \frac a b$\par\medskip
$\cancel{2x^2} - 2x + 4 - \cancel{2x^2} + 3x = x + 4$
```

D. \usepackage{dsfont}

Le dernier *package* utilisé dans notre préambule est dsfont et permet simplement d'écrire les ensembles mathématiques à l'aide de la commande `\mathds`. Profitons en pour donner quelques symboles liés aux ensembles (inclusion, appartenance. . .). Compilez le code ci-dessous et essayez de repérer les commandes associées aux symboles.

Les ensembles de nombres

```
$\left\lVert \overrightarrow{AB} \right\rVert = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$\par\medskip
$\left\lVert \lambda \overrightarrow{AB}\right\rVert =
\left\lvert \lambda \right\rvert \times \left\lVert \overrightarrow{AB}\right\rVert$\par\medskip
Cela est évidemment valable dans un repère
$\left(O ; \overrightarrow\imath, \overrightarrow\jmath\right)$.\medskip

$\varnothing = \emptyset \subset \mathds N \subset \mathds Z \subset
\mathds D \subset \mathds Q\subset \mathds R \subset \mathds C$ \medskip
```

Code III.3

E. Fontes mathématiques

Le *package* amstools propose la commandes `\mathbb` pour noter les ensembles à l'aide de caractères ajourés et la commande `\mathbf` pour écrire des caractères gras en mode mathématiques (la commande `\textbf` ne fonctionne pas dans ce mode). Certains préféreront l'une ou l'autre méthode pour écrire des ensembles à la place du *package* dsfont.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

```
$\mathbb N \subset \mathbb Z \subset \mathbb D
\subset \mathbb Q\subset \mathbb R \subset \mathbb C$

$\mathbf N \subset \mathbf Z \subset \mathbf D
\subset \mathbf Q\subset \mathbf R \subset \mathbf C$

$\mathds N \subset \mathds Z \subset \mathds D
\subset \mathds Q\subset \mathds R \subset \mathds C$
```

De plus, la commande `\mathcal` permet d'obtenir des lettres caligraphiées : la courbe $\mathcal{C}$.
Le package mathrsfs fournit la commande `\mathscr` : la courbe $\mathscr{C}$.

II. Les modes mathématiques

A. En ligne ou hors du texte ?

En réalité, LaTeX possède deux modes mathématiques : le mode *en ligne* est délimité par le caractère \$ et est utilisé lorsque des mathématiques sont écrites au sein même d'un texte.

Soit f la fonction définie pour tout nombre $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$. Cette fonction est une fonction affine croissante.

```
Soit $f$ la fonction d\'efinie pour tout nombre
$x \in \mathds R$ par $f(x) = \frac 12 x + 2$.
Cette fonction est une fonction affine croissante.
```

On constate que dans ce mode là, les mathématiques sont composées de telles sortes que les espaces interlignes restent inchangées, ce qui est typographiquement meilleur.

S'il existe un mode *en ligne* pour écrire à l'intérieur des lignes d'un texte, alors il existe un mode *hors texte*. Celui-ci est délimité par les commandes \\[et \\].

Soit f la fonction définie pour tout nombre $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2.$$

Cette fonction est une fonction affine croissante.

```
Soit $f$ la fonction d\'efinie pour tout nombre
$x \in \mathds R$ par \[f(x) = \frac 12 x + 2.\]
Cette fonction est une fonction affine croissante.
```

Dans ce cas, les mathématiques sont composées dans une nouvelle ligne centrée et la taille des symboles mathématiques est adaptée.
Cependant, il se peut que l'on ait besoin d'écrire des mathématiques dans le texte mais avec des symboles ayant leur taille hors-texte. Pour cela, on pourra utiliser la commande `\displaystyle`. L'effet inverse est obtenu avec la commande `\textstyle`.

Soit f la fonction définie pour tout nombre $x \in \mathbb{R}$ par $\displaystyle{f(x) = \frac{1}{2}x + 2}$. Cela est typographiquement incorrect. On peut noter :

$$\textstyle{f(x) = \frac{1}{2}x + 2}$$

mais cela est bizarre.

```
Soit $f$ la fonction d\'efinie pour tout nombre
$x \in \mathds R$ par
$\displaystyle{f(x) = \frac 12 x + 2}$.
Cela est typographiquement incorrect. On peut noter :
\[\textstyle{f(x) = \frac 12 x + 2}\]
mais cela est bizarre.
```

> Les changements de paragraphe (à l'aide d'une ligne vide ou de la commande \par ou toute autre méthode) sont rigoureusement interdits à l'intérieur des modes mathématiques.

B. Du texte dans les maths

Il est courant de devoir écrire des morceaux de phrases à l'intérieur d'une ligne mathématique. Le problème est que dans n'importe quel mode mathématique, les lettres sont considérées comme des variables et sont donc formatées selon les règles typographiques en mathématique, c'est-à-dire en italique.

Pour bien comprendre cela, comparer les deux lignes suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2 donc f(2) = 3$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2 \text{ donc } f(2) = 3$$

La commande `\text` est celle qui nous sauve ! Évidemment, cette commande n'a pas spécialement d'utilité en mode *en ligne* comme nous le pouvons le constater dans l'exemple ci-dessous :

$f(x) = \frac12 x + 2$ donc $f(2) = 3$.

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2 \text{ donc } f(2) = 3$$

```
$f(x) = \frac 12 x + 2$ donc $f(2) = 3$.
\[f(x) = \frac 12 x + 2 \text{ donc } f(2) = 3\]
```

> Les espaces étant gérées de façon particulière dans les modes mathématiques, on constate que `\text{donc}` ne donne pas de résultat satisfaisant. Il faut donc ajouter les espaces autour du mot pour obtenir ce que l'on souhaite : `\text{ donc }`.

C. Les espaces

Dans les modes mathématiques, les espaces saisis au clavier sont tout simplement ignorés et LaTeX gère tout seul les calculs pour espacer les symboles mathématiques. En général, ces espaces conviennent parfaitement mais il peut s'avérer nécessaire de gérer soit même les espaces en utilisant des commandes particulières.

␣ = barre d'espace simple

Commande	Nom	Résultat
`\!`	Espace fine négative	$\square\!\square$
␣	Espace par défaut	$\square\square$
`\,`	Espace fine	$\square\,\square$
`\:`	Espace moyenne	$\square\:\square$
`\;`	Espace épaisse	$\square\;\square$
`\␣`	Espace inter-mot	$\square\ \square$
`\quad`	1 cadratin	$\square\quad\square$
`\qquad`	2 cadratins	$\square\qquad\square$

> Un cadratin est égal à `1em` donc la commande `\quad` est en fait un raccourci de `\hspace{1em}`.

Reprenons l'exemple des intervalles du code 3 de la page 2.

$\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$]-\infty;4]\cap]-2;+\infty[=]-2;4]$.

```
$\mathds R^*=]-\infty ; 0[ \cup ]0 ; +\infty[ =
\mathds R \setminus \{0\}$.\par\medskip
$]-\infty ; 4] \cap ]-2 ; +\infty[ = ]-2 ; 4]$.
```

Les espaces ne sont ici guère satisfaisantes autour des crochets et autour des points-virgules. Nous pouvons alors proposer la solution suivante :

$\mathbb{R}^*=\;]-\infty\, ;\, 0[\, \cup\,]0\, ;\, +\infty[\; = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$]-\infty\, ;\, 4]\, \cap\,]-2\, ;\, +\infty[\; =\;]-2\, ;\, 4]$.

```
$\mathds R^*=\; ]-\infty\, ; 0[\, \cup\,
                 ]0\, ;\, +\infty[\;
=\mathds R \setminus \{0\}$.\par\medskip
$]-\infty\, ; 4]\, \cap\, ]-2\, ; +\infty[ \;
=\; ]-2\, ; 4]$.
```

> Cela peut paraître bien lourd à gérer mais nous verrons dans une prochaine fiche comment automatiser cela à l'aide des *commandes personnelles*.

III. Écrire des maths de la sixième à la terminale

A. Au collège

En sixième, les élèves apprennent à maîtriser les notations géométriques. Les crochets et les parenthèses s'obtiennent classiquement en appuyant sur la touche correspondante. Cependant, les symboles de droites parallèles et droites perpendiculaires s'obtiennent à l'aide d'une commande spéciale.

Géométrie en sixième

```
Les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont la même longueur.
De plus, les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles, on note $(AB) \varparallel (CD)$.\par
Et on notera $(d) \bot (d')$ si les droites $(d)$ et $(d')$ sont perpendiculaires.\medskip

$C \in (AB)$ mais $C \notin [AB]$.
```

Code III.4

En cinquième, on travaille notamment sur les fractions. L'exemple ci-dessous nous permet de montrer que la commande `\dfrac{}{}` est un raccourci de `\displaystyle{\frac{}{}}`.

Les fractions

```
Si $c \neq 0$, $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ et, si de plus
$b \neq 0$, $\dfrac{a}{c} \times \dfrac{c}{b} = \dfrac{a \times c}{c \times b}
=\dfrac{a \times \cancel{c}}{\cancel{c}\times b} = \dfrac a b.$\medskip

On peut alors calculer : $3 \times \left(\dfrac 3 2 + 2\right) - 1$.\medskip
```

Code III.5

D'après l'exemple suivant, quelle semble être l'utilité des commandes `\left` et `\right` ?

$3 \times (\dfrac{3}{2} + 2) - 1$

$3 \times \left(\dfrac{3}{2} + 2\right) - 1$

```
$3 \times (\dfrac 3 2 + 2) - 1$ \par\medskip
$3 \times \left(\dfrac 3 2 + 2\right) - 1$
```

Une commande `\left` se termine nécessairement par son homologue `\right`. Essayez alors les combinaisons `\left{` et `\right}`, `\left[` et `\right]` puis `\left|` et `\right|`.

Les angles sont également bien présents dans le programme de géométrie et les commandes `\widehat` et `\degres` sont alors très utiles.

Notations des angles

```
Dans un triangle, la somme des angles est égale à $180\degres$ :
$\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB}= 180\degres$.\par
Ou encore : $\widehat A + \widehat B + \widehat C = 180\degres$.
```

Code III.6

La commande `\widehat` permet d'obtenir un des nombreux symboles étirables horizontalement. Nous en croiserons d'autres dans les exemples à venir. Saurez-vous les repérer ?

En classe de quatrième, les divisions de fractions sont apprises mais également les puissances. La mise en puissance en mode mathématique est réalisée à l'aide de la syntaxe ⟨*maths*⟩`^{`⟨*exposant*⟩`}`. Par exemple `$3^2$` donne 3^2. Et que donne `$3^21$` ?

On pourra écrire des puissances de puissances en faisant bien attention aux groupes entre accolades.

Essayez donc l'exemple suivant :

Fractions et puissances

```
$\left(\dfrac a b\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ \quad et \quad
$\dfrac{\dfrac a b}{\dfrac c d} = \dfrac a b \times \dfrac d c$
\quad et \quad $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$.\medskip

$\dfrac{\frac 32 + 1}{\frac 5 2} = \left(\dfrac 32 + 1\right) \times \dfrac 25$.\medskip
```

Code III.7

Profitons de parler des exposants pour indiquer la syntaxe et un exemple pour les indices : ⟨*maths*⟩`_{`⟨*indice*⟩`}`.

Ainsi, `$d_1 \bot d_2$` donnera $d_1 \bot d_2$.

L'exemple suivant donne une autre utilisation des exposants et des indices ainsi qu'un nouveau symbole étirable horizontalement : l'accolade. On notera également l'utilisation des commandes `\np` et `\text`.

Accolades horizontales

```
$10^n = \overbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}^{n\ \text{fois}}
    = 1\underbrace{00\dots0}_{n \text{ zéros}}.$\par\medskip
Exemple : $10^{12} = \np{1000000000000}$.\medskip
```

Code III.8

> Notons que la commande `\dots` permet d'obtenir trois points de suspension mais que ceux-là sont alignés verticalement automatiquement selon le contexte dans lequel la commande est utilisée.

La résolution des équations est également un moment important dans la vie d'un collégien et bien que le symbole d'équivalence (⇔) ne soit pas exigible, profitons tout de même de l'occasion pour en parler tout en mettant en avant une utilisation de l'espace cadratin.

Équivalences

```
$3x + 2 = 5x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 5x = -1 -2
\quad \Leftrightarrow \quad -2x = -3
\quad \Leftrightarrow \quad  x = \dfrac 32$ \quad
$\mathcal S = \left\{\dfrac 32\right\}.$\medskip
```

Code III.9

Et enfin, les élèves de quatrième découvrent la joie de la trigonométrie. La commande `\cos` permet simplement d'obtenir cos. Ses copines `\sin` et `\tan` viendront la rejoindre en troisième.

$$\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{AB}{BC}$$

```
$\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{AB}{BC}$
```

Pour finir, voilà un exemple à compiler pour voir différentes notations vues en classe de troisième. Essayer de repérer celles qui n'ont pas encore été étudiées.

En troisième

```
$\sqrt{\dfrac a b} = \dfrac{\sqrt a}{\sqrt b}$\medskip

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\dots$\medskip

Si $f(x) = 3x -2$ alors $f(-4) = 3 \times (-4) - 2 = -14$.\medskip

$3x + 2 \leqslant 5x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 5x \leqslant -1 -2
\quad \Leftrightarrow \quad -2x \leqslant -3
\quad \Leftrightarrow \quad  x \geqslant \dfrac 32$\medskip

$\mathcal V = \frac4 3 \pi R^3$.\medskip

Si l'angle au centre $\widehat{BOA}$ intercepte le même arc $\wideparen{AB}$
que l'angle inscrit $\widehat{BCA}$ alors $\widehat{BOA} = 2\widehat{BCA}$.
```

Code III.10

B. Au lycée

Nous avons déjà vu comment noter les ensembles de nombres. Cependant en classe de seconde, une grande importance est accordée aux fonctions. L'exemple suivant montre que l'utilisation de la commande `\colon` est largement préférée aux deux-points classiques : pour une gestion correcte des espaces par LaTeX. La commande `\mapsto` est également à retenir.

$f\colon x \mapsto f(x)$ est définie sur $\mathcal D_f$.
On note $\mathcal C$ sa courbe représentative.

```
$f\colon x \mapsto f(x)$ est d\'efinie sur
                                    $\mathcal D_f$.

On note $\mathcal C$ sa courbe repr\'esentative.
```

Les vecteurs font leur apparition au début du lycée. Cela nous permet alors de découvrir un nouveau symbole étirable horizontalement — la flèche — ainsi qu'un symbole étirable horizontalement — la norme d'un vecteur.

Les vecteurs

```
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$\medskip

$\overrightarrow{AB}\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}$ \quad donc \quad
$\overrightarrow{AB}\dbinom{x_B - x_A}{y_B - y_A}$\par\medskip
$\left\lVert \overrightarrow{AB} \right\rVert = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$\par\medskip
$\left\lVert \lambda \overrightarrow{AB}\right\rVert =
\left\lvert \lambda \right\rvert \times \left\lVert \overrightarrow{AB}\right\rVert$\par\medskip
Cela est évidemment valable dans un repère
$\left(O ; \overrightarrow\imath, \overrightarrow\jmath\right)$.\medskip
```

Code III.11

On notera l'utilisation un peu faussée de la commande `\binom` qui sert en réalité pour l'écriture des cœfficients binomiaux. Cela dit, elle est très pratique pour écrire les coordonnées d'un vecteur. Tout comme `\dfrac`, la commande `dbinom{}{}` est un raccourci pour `\displaystyle{\binom{}{}}`.

> Les commandes `\imath` et `\jmath` sont bien pratiques pour obtenir un i et un j sans point : les lettres $\imath$ et $\jmath$ peuvent donc recevoir une flèche.

En transition avec la classe de seconde et celle de première, parlons un peu de statistiques

Moyenne : $\overline{x}$
Écart-type : σ

```
Moyenne : $\overline{x}$\par
\'Ecart-type : $\sigma$
```

Pour la classe de première, changeons un peu de méthode : essayez de trouver le code permettant d'obtenir le texte ci-dessous à l'aide des indications suivantes :

* `$\Delta$` permet d'obtenir Δ ;
* `$\pm$` permet d'obtenir $\pm$;
* `$\cdot$` permet d'obtenir le point du produit scalaire ;
* `$\hookrightarrow$` permet d'obtenir $\hookrightarrow$.

Équation de la tangente en x_0 : $y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$ avec $f' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

$\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta > 0$ alors $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = xx' + yy'$.

$u_{n+1} = q \times u_n = u_0 \times q^{n+1}$.

$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}2$: $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10; 0{,}2)$.

L'exemple suivant montre en quoi le mode mathématique *en ligne* peut encore être différent du mode *hors texte* toujours dans un soucis de respect des espaces inter-lignes.

$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \sum_{i=0}^n q^i$

$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \displaystyle\sum_{i=0}^n q^i$

```
$1 + q + q^2 + \dots + q^n =
\sum_{i = 0}^n q^i$\medskip

$1 + q + q^2 + \dots + q^n =
\displaystyle{\sum_{i = 0}^n q^i}$
```

Finissons avec la classe de terminale. Compilez le prochain exemple et répondez aux question suivantes :

1°) Essayez de comprendre la fonction de la commande `\mathrm` (il s'agit d'une autre fonte mathématique pas encore rencontrée).

2°) Quelle est la fonction de `\substack` ?

3°) Écrire l'intégrale et les limites en mode *hors texte* afin de comparer les présentations.

$\int_0^1 x^2 \mathrm{dx} = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac 13$.

$\lim_{x \to +\infty} e^x= +\infty$.
On parle de la fonction $x \mapsto \exp(x)$.

$\lim_{x \to 0^+}\ln(x) = -\infty$ ou encore
$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$.

$a \equiv b\; [n] \quad\Leftrightarrow\quad \exists\, k \in \mathbb Z,\; a - b = kn$.

$\left\lvert e^{i\theta}\right\rvert = 1$.

```
$\int_0^1 x^2 \mathrm{dx} =
    \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 =
    \frac 13$.\medskip

$\lim_{x \to +\infty} e^x= +\infty$.\par
On parle de la fonction $x \mapsto \exp(x)$.\medskip

$\lim_{x \to 0^+}\ln(x) = -\infty$ ou encore\par
$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}
        \ln(x) = -\infty$.\medskip

$a \equiv b\; [n] \quad\Leftrightarrow\quad
    \exists\, k \in \mathds Z,\; a - b = kn$.\medskip

$\left\lvert e^{i\theta}\right\rvert = 1$.
```

Finissons par une dernière définition à recopier et à compiler :

Fonction continue

```
\textbf{Définition.} Soient $f$ une fonction définie sur une partie $A$ de $\mathds{R}$
et un élément $a$ de $A$.\par
On dit que $f$ est \textbf{continue} au point $a$ lorsque :
\[\forall \varepsilon > 0,\quad
\exists \eta > 0,\quad
\forall x \in A,\qquad
\left\vert x- a \right\vert < \eta \quad \Rightarrow \quad
\left\vert f(x) - f(a) \right\vert < \varepsilon\]
```

Code III.12

IV. Aligner des égalités

Lorsque l'on veut écrire les étapes d'un long calcul, la plupart du temps, les différentes étapes sont écrites en colonne et alignées. L'environnement `align` permet de faire cela.

$$\begin{aligned} (2x + 4)^2 &= (2x)^2 + 2\times 2x\times 4 + 4^2 && (3.1)\\ &= 4x^2 + 16x + 16 && (3.2)\end{aligned}$$

```
\begin{align}
    (2x + 4)^2 &= (2x)^2 + 2\times 2x\times 4 + 4^2 \\
               &= 4x^2 + 16x + 16
\end{align}
```

On note ici l'utilisation de deux caractères spéciaux : `&` et `\\`. Le premier permet d'identifier l'endroit où se fera l'alignement. Le deuxième permet d'indiquer un changement de ligne. On retrouvera ces deux caractères dans la composition de tableau.

On peut être gêné par l'utilisation automatique de la numérotation de toutes les lignes. La commande `\nonumber` règle le problème. La commande `\tag{`⟨*texte*⟩`}` permet quand à elle de passer outre la numérotation automatique.

$$(2x + 4)^2 = (2x)^2 + 2\times 2x\times 4 + 4^2$$

(id. remarquable)

$$\begin{aligned} &= 4x^2 + 16x + 16 && (A)\\ &= 4x^2 + 16x + 16 && (354)\end{aligned}$$

```
\begin{align}
    (2x + 4)^2 &= (2x)^2 + 2\times 2x\times 4
                           + 4^2 \nonumber\\
    \shortintertext{\textit{(id. remarquable)}}
               &= 4x^2 + 16x + 16 \tag{A} \\
               &= 4x^2 + 16x + 16 \tag{354}
\end{align}
```

La commande `\shortintertext{`⟨*texte*⟩`}` est ici très pratique pour insérer du texte au milieu d'une suite de calcul.

Finalement, si on ne souhaite numéroter aucune ligne, on écrira `\begin{align*}` et `\end{align*}`.

$$\begin{align*} (2x+4)^2 &= (2x)^2 + 2\times 2x\times 4 + 4^2 \\ &= 4x^2 + 16x + 16 \end{align*}$$

```
\begin{align*}
    (2x + 4)^2 &= (2x)^2 + 2\times 2x\times 4 + 4^2 \\
               &= 4x^2 + 16x + 16
\end{align*}
```

V. Exercice

Établir le *code source permettant* d'obtenir le document ci-dessous :

Exercice 1. Recopier et compléter les égalités suivantes en écrivant le nombre qui convient à la place de ? :

$$\frac{2}{3} = \frac{2\times ?}{3\times ?} = \frac{14}{?} \quad ; \quad \frac{15}{35} = \frac{3\times ?}{?\times ?} = \frac{?}{7}$$

Exercice 2. Écrire les fractions suivantes sous forme irréductible :

$$A = \frac{21}{35} \quad ; \quad B = \frac{90}{54}$$

Exercice 3. Effectuer la division décimale suivante : $C = 13{,}608 \div 4{,}2$.

Exercice 4. Résoudre les équations suivantes :

$$6x+3=12 \quad ; \quad 3x+2=5-6x \quad ; \quad 2(x-3)=8x$$

Exercice 5. La fonction f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 1.$$

1°) Le point E de coordonnées $(-1{,}25\,;\,0{,}5)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$? Justifier la réponse.

2°) Développer $(x-1)^2$.

3°) Démontrer que $f(x) = (2x+3)(x-1)^2 - 2$.

4°) En déduire les antécédents de -2 par la fonction f.

5°) En détaillant précisément les étapes, calculer l'image de $\frac{-1}{2}$ par la fonction f.

VI. L'exemple de la sixième à la terminale au complet

Code complet de la sixième à la terminale - 1/2

```
\documentclass[10pt,french]{article}
\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage[a4paper,margin=1.5cm]{geometry}
\usepackage{kpfonts}
\usepackage[dvipsnames]{xcolor}
\usepackage{mathtools,amssymb}
\usepackage[autolanguage,np]{numprint}
\usepackage{xlop}
\usepackage{cancel}
\renewcommand\CancelColor{\color{red}}
\usepackage{dsfont}
\usepackage{babel}
\DecimalMathComma

\begin{document}
\section{En sixième}
\opset{decimalsepsymbol={,},voperator=bottom,voperation=top}

\opadd{45,05}{78,4}\quad ou encore \opadd[style=text]{45.05}{78.4}\medskip

\opsub[carrysub,lastcarry,columnwidth=2.5ex,offsetcarry=-0.4,decimalsepoffset=-3pt,deletezero=false]
```

```
{12.34}{5.67} \quad ou encore \opsub[style=text]{12.34}{5.67}\medskip

\opmul[shiftintermediarysymbol={$0$},displayshiftintermediary=all]{35684}{7.9}\quad
ou encore \opmul[style=text]{35684}{7.9}\medskip

\opidiv{25}{7} \quad ou encore \opidiv[style=text]{25}{7} \medskip

\opdiv[maxdivstep=3]{25}{7} \quad ou encore \opdiv[style=text,maxdivstep=3]{25}{7}\medskip

$\np{35684} \times 7,9 = \np{281903,6}$.\medskip

$25 \div 7 \approx 3,57 \neq 4$.\medskip

Les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont la même longueur.
De plus, les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles, on note $(AB) \varparallel (CD)$.\par
Et on notera $(d) \bot (d’)$ si les droites $(d)$ et $(d’)$ sont perpendiculaires.\medskip

$C \in (AB)$ mais $C \notin [AB]$.

\section{En cinquième}

Si $c \neq 0$, $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ et, si de plus
$b \neq 0$, $\dfrac{a}{c} \times \dfrac{c}{b} = \dfrac{a \times c}{c \times b}
=\dfrac{a \times \cancel{c}}{\cancel{c}\times b} = \dfrac a b.$\medskip

On peut alors calculer : $3 \times \left(\dfrac 3 2 + 2\right) - 1$.\medskip

Dans un triangle, la somme des angles est égale à $180\degres$ :
$\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB}= 180\degres$.\par
Ou encore : $\widehat A + \widehat B + \widehat C = 180\degres$.

\section{En quatrième}

$\left(\dfrac a b\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ \quad et \quad
$\dfrac{\dfrac a b}{\dfrac c d} = \dfrac a b \times \dfrac d c$
\quad et \quad $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$.\medskip

$\dfrac{\frac 32 + 1}{\frac 5 2} = \left(\dfrac 32 + 1\right) \times \dfrac 25$.\medskip

$10^n = \overbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}^{n\ \text{fois}}
    = 1\underbrace{00\dots0}_{n \text{ zéros}}.$\par\medskip
Exemple : $10^{12} = \np{1000000000000}$.\medskip

$3x + 2 = 5x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 5x = -1 -2
\quad \Leftrightarrow \quad -2x = -3
\quad \Leftrightarrow \quad  x = \dfrac 32$ \quad
$\mathcal S = \left\{\dfrac 32\right\}.$\medskip

$\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{AB}{BC}$.

\section{En troisième}

$\sqrt{\dfrac a b} = \dfrac{\sqrt a}{\sqrt b}$\medskip

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\dots$\medskip

Si $f(x) = 3x -2$ alors $f(-4) = 3 \times (-4) - 2 = -14$.\medskip

$3x + 2 \leqslant 5x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 5x \leqslant -1 -2
\quad \Leftrightarrow \quad -2x \leqslant -3
\quad \Leftrightarrow \quad  x \geqslant \dfrac 32$\medskip

$\mathcal V = \frac4 3 \pi R^3$.\medskip

Si l’angle au centre $\widehat{BOA}$ intercepte le même arc $\wideparen{AB}$
que l’angle inscrit $\widehat{BCA}$ alors $\widehat{BOA} = 2\widehat{BCA}$.

\section{En seconde}

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$\medskip

$\overrightarrow{AB}\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}$ \quad donc \quad
$\overrightarrow{AB}\dbinom{x_B - x_A}{y_B - y_A}$\par\medskip
$\left\lVert \overrightarrow{AB} \right\rVert = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$\par\medskip
```

Code III.13

Code complet de la sixième à la terminale - 2/2

```
$\left\lVert \lambda \overrightarrow{AB}\right\rVert =
\left\lvert \lambda \right\rvert \times \left\lVert \overrightarrow{AB}\right\rVert$\par\medskip
Cela est évidemment valable dans un repère
$\left(O ; \overrightarrow\imath, \overrightarrow\jmath\right)$.\medskip

$\varnothing = \emptyset \subset \mathds N \subset \mathds Z \subset
\mathds D \subset \mathds Q\subset \mathds R \subset \mathds C$ \medskip

$\mathds R^*=]-\infty ; 0[ \cup ]0 ; +\infty[ = \mathds R \setminus \{0\}$.\medskip

$]-\infty ; 4] \cap ]-2 ; +\infty[ = ]-2 ; 4]$.\medskip

$\frac 1 2 \in \mathds Q$ mais $\frac 1 2 \notin \mathds Z$\medskip

$f\colon x \mapsto f(x)$ est définie sur $\mathcal D_f$.
On note $\mathcal C$ sa courbe représentative.

\section{En première}

\'Equation de la tangente en $x_0$ :
$y = f'(x_0) \left(x - x_0\right) + f(x_0)$ avec
$f' = \left(\dfrac u v\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.\medskip

$\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta > 0$ alors
$x = \dfrac{-b \pm \sqrt \Delta}{2a}$.\medskip

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = xx' + yy'$.\medskip

$u_{n + 1} = q\times u_n = u_0 \times q^{n+1}$.\medskip

$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \sum_{i = 0}^n q^i$\medskip

$\mathds P(X = k) = \binom n k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$.\medskip

$X$ suit la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0,2$ :
$X \hookrightarrow \mathcal B(10 ; 0,2)$.

\section{En terminale}

$\int_0^1 x^2 \mathrm{dx} = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac 13$.\medskip

$\lim_{x \to +\infty} e^x= +\infty$. On parle de la fonction $x \mapsto \exp(x)$.\medskip

$\lim_{x \to 0^+}\ln(x) = -\infty$ ou encore $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}\ln(x) = -\infty$.\medskip

$a \equiv b [n] \Leftrightarrow \exists k \in \mathds Z, a - b = kn$.

\section{En licence}
\textbf{Définition.} Soient $f$ une fonction définie sur une partie $A$ de $\mathds{R}$
et un élément $a$ de $A$.\par
On dit que $f$ est \textbf{continue} au point $a$ lorsque :
\[\forall \varepsilon > 0,\quad
\exists \eta > 0,\quad
\forall x \in A,\qquad
\left\vert x- a \right\vert < \eta \quad \Rightarrow \quad
\left\vert f(x) - f(a) \right\vert < \varepsilon\]
\end{document}
```

Code III.14