5 Variations de fonctions

I. Étude graphique

On considère une fonction f définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ ainsi qu'un intervalle I inclus dans $\mathcal{D}_f$.

Dire que la fonction f est croissante sur I signifie que lorsque la valeur de la variable augmente sur I alors l'image augmente également. Graphiquement, la courbe représentative de f « monte ».

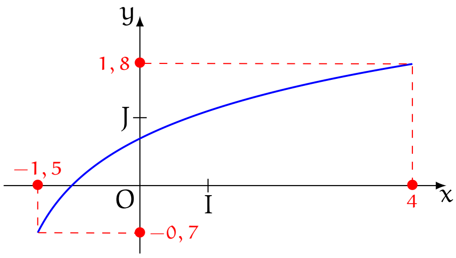
Définition 1

Une fonction f est dite **croissante** sur un intervalle I lorsque, **pour tous** les réels x_1 et x_2 :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

Autrement dit, deux nombres et leur image sont classés dans le **même** ordre.

Exemple • Fonction croissante sur l'intervalle $[-1,5\,;4]$.



x	$-1{,}5$		4
Variation de $f(x)$	$-0{,}7$	↗	$1{,}8$

Tableau de variations

x	$-1{,}5$		-1		4
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

Tableau de signes

Remarque

*Lorsque $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, on dit que la fonction est **strictement** croissante.*

Dire que la fonction f est décroissante sur I signifie que lorsque la valeur de la variable augmente sur I alors l'image diminue. Graphiquement, la courbe représentative de f « descend ».

Définition 2

Une fonction f est dite **décroissante** sur un intervalle I lorsque, **pour tous** les réels x_1 et x_2 :

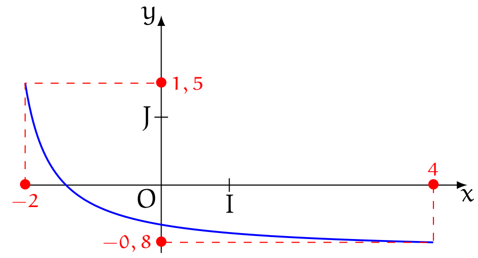
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

Autrement dit, deux nombres et leur image sont classés dans un ordre **contraire**.

Remarque

*Lorsque $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, on dit que la fonction est **strictement** décroissante.*

Exemple • Fonction décroissante sur l'intervalle $[-2\,;4]$.



x	-2		4
Variation de $f(x)$	1,5	↘	−0,8

Tableau de variations

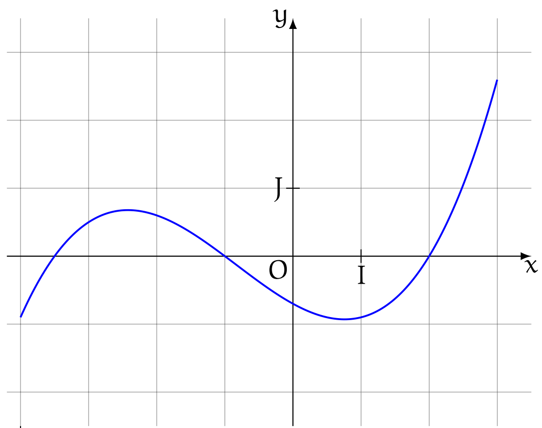
x	-2		$-1{,}4$		4
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

Tableau de signes

Remarque

Sur tout son ensemble de définition, les variations d'une fonction f peuvent changer.

Exemple • Fonction définie sur l'intervalle $[-4\,;3]$.



x	4				3
Variation de $f(x)$		↗	↘	↗	

Tableau de variations

x	4		$-3,5$		-1		2		3
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Tableau de signes

Exemple • On donne les variations et le signe d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;4]$. Dessiner une représentation graphique qui pourrait correspondre à ce tableau :

x	-3		$-2,5$		-1		$-0,25$		1		4
Variations de $f(x)$	2	↘			-2	↗			3	↘	1
Signes de $f(x)$		$+$	0		$-$		0		$+$		

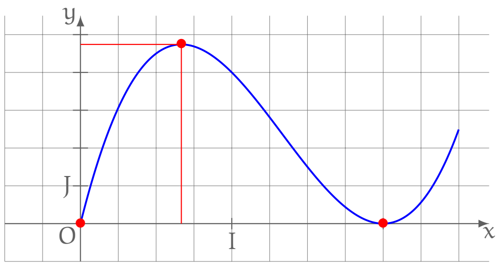
II. Extremum

Graphiquement, les extrema sont les points les plus hauts d'une courbe ou les plus bas. Ce sont ceux dont l'**ordonnée** est donc la plus grande ou la plus petite. On s'intéresse dans ce cas aux images par la fonction représentée.

Définition 3

On dit que f admet un **maximum** en a sur $\mathscr{D}_f$ lorsque, pour tout réel $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) \leqslant f(a)$.
On dit que f admet un **minimum** en b sur $\mathscr{D}_f$ lorsque, pour tout réel $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) \geqslant f(a)$.

Exemple • Sur la figure ci-dessous, on a $\min_{\mathscr{D}_f} f = 0$ et $\max_{\mathscr{D}_f} f \approx 4,8$.
Autrement dit, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) \geqslant 0$ et $f(x) \leqslant 4,8$.



On remarque que le minimum est atteint deux fois : pour $x = 0$ et pour $x = 2$.

III. Résolution graphique d'une inéquation

On appelle $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g.

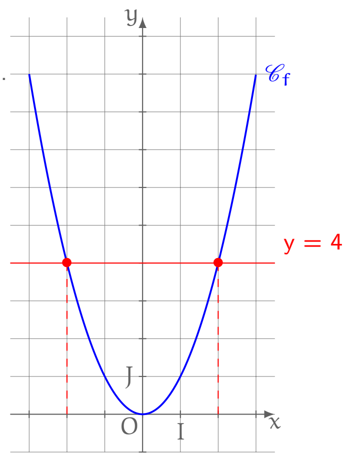
A. Inéquation du type $f(x) < k$

Propriété 1

Soit $k \in \mathbb{R}$. Les solutions de l'inéquation $f(x) < k$ sont les **abscisses** des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés au-dessous de la droite d'équation $y = k$.

Exemple • Soit $\mathscr{D}_f = [-3\,;3]$. Donner l'ensemble des solutions des équations $f(x) < 4$ puis $f(x) \geqslant 4$.

$f(x) < 4 \Leftrightarrow x \in]-2\,;2[$.
$f(x) \geqslant 4 \Leftrightarrow x \in [-3\,;-2] \cup [2\,;3]$.

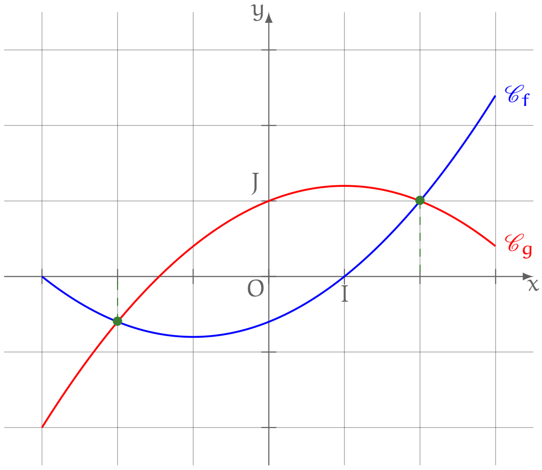


B. Inéquation du type $f(x) < g(x)$

Propriété 2

Les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ sont les **abscisses** des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés au-dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$.

Exemple • On considère deux fonctions f et g définies sur $[-3\,;3]$ dont voici les représentations graphiques :



Ici, $f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow x \in [-2\,;2]$ et $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in [-3\,;-2[\cup]2\,;3]$.