12 Fonctions polynôme de degré 2
Fonctions homographiques

Fonctions

I. Fonction polynôme de degré 2

Définition 1

On appelle **fonction polynôme de degré 2** toute fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des nombres réels tels que $a \neq 0$.

Remarque

On dira parfois simplement polynôme de degré 2 ou encore ***trinôme****.*

Exemple •

1°) $3x^2 + 4x + 8$: $a = 3$, $b = 4$, $c = 1$.
2°) $-x^2 + 2x - 3$: $a = -1$, $b = 2$, $c = -3$.
3°) $-2x^2 + 6$: $a = -2$, $b = 0$, $c = 6$.
4°) $-2x + 5 - 9x^2$: $a = -9$, $b = -2$, $c = 5$.

Définition 2

On appelle **parabole** la courbe représentative d'une fonction polynôme de degré dans un repère orthogonal. Le **sommet** de la parabole est le point le plus haut ou le plus bas de la parabole.

Propriété 1

Soit f une fonction polynôme de degré 2. Il existe 2 réels α et β tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

Propriété 2

Soit f une fonction polynôme de degré 2 écrite sous la forme $a(x - \alpha) + \beta$.
Alors $\beta = f(\alpha)$ et β est le maximum ou le minimum de la fonction f, atteint pour $x = \alpha$.
On en déduit que le sommet de la parabole représentant f a pour coordonnées $(\alpha\,;\,\beta)$.

Démonstration

$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ donc $f(\alpha) = a(\alpha - \alpha)^2 + \beta = \beta$.

$a > 0$: Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x - \alpha)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a(x - \alpha)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a(x - \alpha)^2 + \beta \geqslant \beta \Leftrightarrow f(x) \geqslant \beta$
donc β est le minimum.

$a < 0$: Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x - \alpha)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a(x - \alpha)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow a(x - \alpha)^2 + \beta \leqslant \beta \Leftrightarrow f(x) \leqslant \beta$
donc β est le maximum.

□

On en déduit alors les situations suivantes :

$a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	β	$\nearrow$