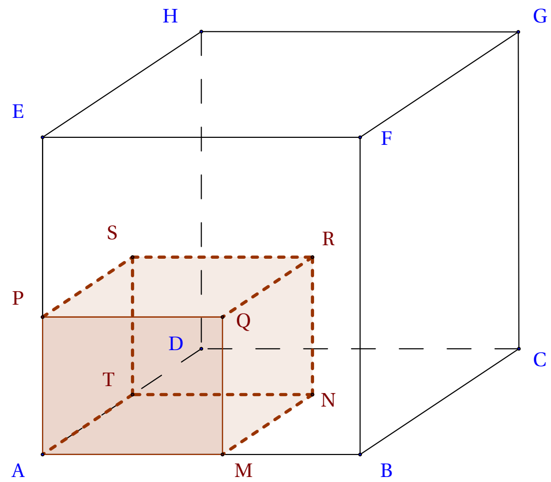
Des pavés dans un cube

Module n° 11

I. Présentation de la situation

ABCDEFGH est un cube d'arête 6 cm.
On place un point M sur le segment [AB]. On place alors le point P du segment [AE] tel que AM = EP, puis on construit le pavé droit AMNTPQRS de sorte que AMNT soit un carré.
On souhaite étudier l'évolution du volume de ce pavé lorsque le point M parcourt le segment [AB].



1. Réaliser une figure en choisissant AM = 4.
2. On pose AM = x.
   Justifier que le volume du pavé s'écrit en fonction de x sous la forme :

   $$V(x) = x^2(6 - x).$$

II. Observation à l'aide de la calculatrice

1. A l'aide du grapheur ou du tableur, conjecturer le sens de variation de cette fonction, ainsi que l'existence d'un extremum pour le volume V.
2. Rappeler la définition d'un extremum pour une fonction f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.
3. Que faudrait-il justifier ici pour obtenir algébriquement l'existence d'un extremum ?

III. Utilisation d'un logiciel de calcul formel

Le logiciel de calcul formel Maxima permet de calculer des nombres à partir d'expressions algébriques, de simplifier des expressions, mais aussi d'obtenir les différentes formes d'une expression.

1. Exprimer, en fonction de x, la différence $V(x)-V(4)$.
2. Le logiciel Maxima donne plusieurs nouvelles écritures de $V(x)-V(4)$.

```
(%i1) V(x):=x^2*(6-x);
```
(%o1) $V(x) := x^2 \cdot (6-x)$

```
(%i2) V(x)-V(4);
```
(%o2) $(6-x)\cdot x^2 - 32$

```
(%i3) expand(V(x)-V(4));
```
(%o3) $-x^3 + 6\cdot x^2 - 32$

```
(%i4) factor(V(x)-V(4));
```
(%o4) $-(x-4)^2 \cdot (x+2)$

3. Vérifier algébriquement les différentes égalités données par le logiciel.
4. Choisir celle qui parait la plus adaptée pour conclure.