Forme algébrique

Définition 1 : Forme algébrique

L'écriture $x + iy$ est appellée forme algébrique du complexe z.
*x s'appelle la **partie réelle** et est noté $Re(z)$.*
*y s'appelle la **partie imaginaire** et est notée $Im(z)$. C'est un nombre réel.*
*$\overline{z} = a - bi$ est le **conjugué** de z. Il sert entre autre à mettre sous forme algébrique des fractions.*

Calculs sur les formes algébriques :
Les règles de calculs (addition, dévellopement, factorisation) valables pour les nombres réels sont aussi valables pour les nombres complexes.

Exercice résolu 1 :

On donne $z_1 = -2 + 3\mathrm{i}$ et $z_2 = 4 - \mathrm{i}$.
Écrire sous forme algébrique :

1. $z_1 + z_2$;
2. $2z_1$;
3. $z_1 \times z_2$.

Solution :

1. $z_1 + z_2 = (-2 + 3\mathrm{i}) + (4 - \mathrm{i}) = -2 + 4 + \mathrm{i}(3 - 1) = 2 + 2\mathrm{i}$;
2. $2z_1 = 2(-2 + 3\mathrm{i}) = -4 + 6\mathrm{i}$;
3. $z_1 \times z_2 = (-2 + 3\mathrm{i})(4 - \mathrm{i}) = -8 + 2\mathrm{i} + 12\mathrm{i} - \mathrm{i}^2 = -8 + 14\mathrm{i} - (-1) = -7 + 14\mathrm{i}$.

Mise sous forme algébrique de fractions :
On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exercice résolu 2 :

Mettre sous forme algébrique les nombres $z_3 = \dfrac{2}{3 + \mathrm{i}}$ et $z_4 = \dfrac{1 + 2\mathrm{i}}{5 - 6\mathrm{i}}$.

Solution :

$z_3 = \dfrac{2}{3 + \mathrm{i}} = \dfrac{2(3 - \mathrm{i})}{(3 + \mathrm{i})(3 - \mathrm{i})} = \dfrac{6 - 2\mathrm{i}}{9 - \mathrm{i}^2} = \dfrac{6 - 2\mathrm{i}}{10} = \dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{5}\mathrm{i}$.

$z_4 = \dfrac{1 + 2\mathrm{i}}{5 - 6\mathrm{i}} = \dfrac{(1 + 2\mathrm{i})(5 + 6\mathrm{i})}{(5 - 6\mathrm{i})(5 + 6\mathrm{i})} = \dfrac{5 + 6\mathrm{i} + 10\mathrm{i} + 12\mathrm{i}^2}{5^2 - (6\mathrm{i})^2} = \dfrac{5 + 16\mathrm{i} - 12}{25 - 36(-1)} = \dfrac{-7 + 16\mathrm{i}}{61}$.

Forme trigonométrique – Forme exponentielle

Définition 2 : forme trigonométrique – exponentielle

*On appelle **module** de z le nombre réel $\sqrt{x^2+y^2}$. On le note $|\boldsymbol{z}|$ ou $\boldsymbol{r}$.*
Il s'agit de la longueur du segment OM.
*On appelle **argument** de z une mesure de l'angle entre $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{OM}$.*
On le note souvent $\boldsymbol{\theta}$.
L'écriture $[r\ ;\ \theta] = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appellée forme trigonométrique.
L'écriture $re^{i\theta}$ est appellée forme exponentielle.

Calculs sur les formes trigonométriques – exponentielles :
Lorsque l'on multiplie deux nombres complexes, on multiplie les modules et additionne les arguments.
Le conjugué de z à même module mais un argument opposé à z.
Autrement dit : $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = r \times r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$ et $\overline{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

Exercice résolu 3 :

Soit $z = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ et $z' = 7\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-2\pi}{3}}$.
Donner les formes exponentielles de zz' ; $\frac{z}{z'}$; $\frac{1}{z}$; $\overline{z}$; z^8

Solution :

$$zz' = 3 \times 7e^{i\left(\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{-2\pi}{3}\right)} = 21\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}.$$

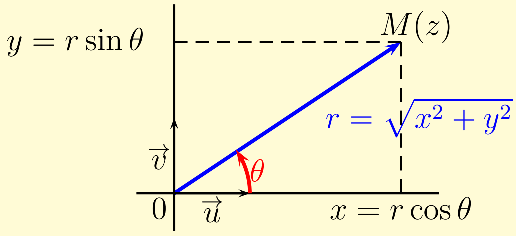
$$\frac{z}{z'} = \frac{3}{7}e^{i\left(\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{-2\pi}{3}\right)} = \frac{3}{7}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{17\pi}{12}}.$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-3\pi}{4}}.$$

$$\overline{z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-3\pi}{4}}.$$

$$z^8 = \left(3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^8 = 3^8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\times8\pi}{4}} = 3^8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,6\pi} = 3^8$$

Passage forme algébrique – forme exponentielle



Mise sous forme algébrique de $z = [r;\theta] = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

Exercice résolu 4 :

Donner la forme algébrique du nombre complexe z_5 de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$.

Solution :

Méthode 1 :

$z_5 = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = 2\left(\cos(\frac{\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{3})\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$

Méthode 2 :

$x = r\cos\theta = 2\cos(\frac{\pi}{3}) = 1$ et $y = r\sin\theta = 2\sin(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ donc $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Mise sous forme exponentielle (trigonométrique) de $z = a + ib$

Exercice résolu 5 :

Mettre sous forme exponentielle le nombre complexe $z_3 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

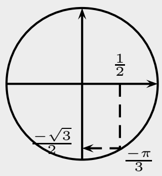
Solution :

Calcul du module :

$$|z_3| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

Calcul d'un argument :

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\}$$

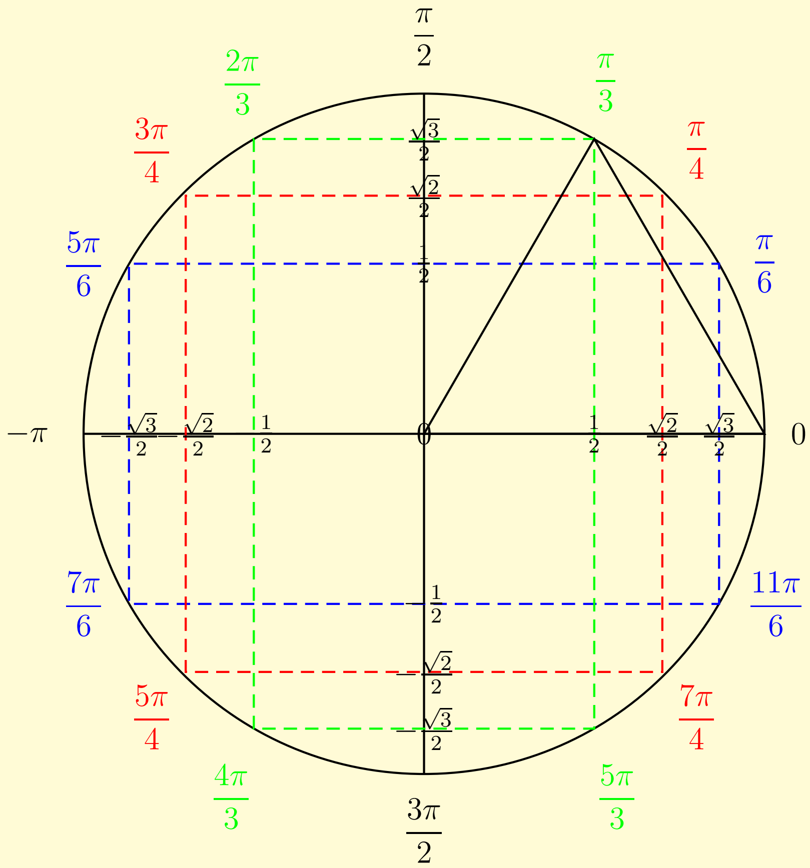


donc $\theta = \dfrac{-\pi}{3}$

Conclusion :

$$z_3 = [2; -\frac{\pi}{3}] = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{3}}$$

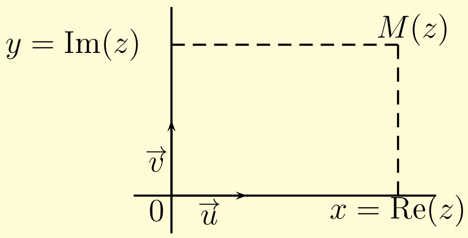
Les lignes trigonométriques remarquables :



Complexes et géométrie

Forme algébrique

Au nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, on fait correspondre le point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$.

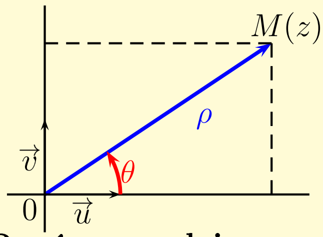


Repérage cartésien

M est l'**image** de z.
z est l'**affixe** de M.

Forme trigonométrique

Au nombre complexe, $z = [r\ ;\ \theta] = r(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, on fait correspondre le point M de rayon r et d'angle polaire θ.



Repérage polaire

Pour calculer des longueurs : $AB = |z_B - z_A|$
Pour déterminer l'affixe d'un vecteur : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

Pour trouver le milieu d'un segment : I milieu de $[AB]$ d'où $Z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$. **Pour prouver des symétries :** z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à (Ox)

Pour prouver que des point sont alignés ou que des droites son parallèles : on utilise les affixes des vecteurs pour prouver qu'ils sont colinéaires.
Pour prouver que des points sont sur un cercle : On utilise les modules des affixes des points.

Complexes et transformations :
La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b a pour écriture complexe $z' = z + b$.
La rotation de centre O et d'angle θ a pour écriture complexe $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times z$.

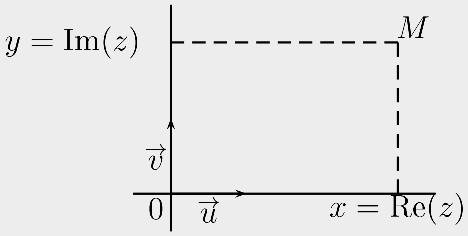
Exercice résolu 6 :

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = -1 + 3\mathrm{i}$ et $z_B = 2 - \mathrm{i}$.

1. Placer les points dans un repère orthonormé.
2. Calculer la longeur AB.
3. Calculer l'affixe du point I milieu de $[AB]$.
4. Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Solution :

1.



Repérage cartésien

2. $AB = |z_B - z_A| = |(-1 + 3\mathrm{i}) - (2 - \mathrm{i})| = | - 3 + 4\mathrm{i}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$
3. I milieu de $[AB]$ donc $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{(-1 + 3\mathrm{i}) + (2 - \mathrm{i})}{2} = \dfrac{1 + 2\mathrm{i}}{2}.$
4. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (-1 + 3\mathrm{i}) - (2 - \mathrm{i}) = -3 + 4\mathrm{i}.$

Complexes et équations

Théorème 1 : Équations du second degré

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont trois nombres réels.
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- *si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;*
- *si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution double $-\dfrac{b}{2a}$;*
- *si $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbf{R}$ mais admet deux solutions conjuguées dans $\mathbf{C}$: $\dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.*

Identification :

Exercice résolu 7 :

Soit $P(z) = z^3 - 4z^2 + 8z - 8$ où z est une variable complexe.

1. Calculer P(2). Que peut-on en déduire pour $P(z)$?
2. Trouver les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z,
$$P(z) = (z-2)\left(az^2 + bz + c\right).$$
3. En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes.

Solution :

1. $P(2) = 0$ donc P est factorisable par $z - 2$.
2. $$\begin{aligned} P(z) &= (z-2)\left(az^2 + bz + c\right) \\ &= z^3 + bz^2 + cz - 2az^2 - 2bz - 2c \\ &= x^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2c \end{aligned}$$
Par identification, on obtient : $\left\{\begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ b-2a & = & -4 \\ c-2b & = & 8 \\ -2c & = & -8 \end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ b & = & -2 \\ c & = & 4 \end{array}\right.$
$$P(z) = (z-2)(z^2 - 2z + 4)$$
3. $P(z) = (z-2)(z^2 - 2z + 4) = 0$.
Un produit de facteur est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$z - 2 = 0$	$z^2 - 2z + 4 = 0$
$z = 2$	$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12$
	Δ est négatif, l'équation a deux solutions complexes conjugués :
	$z_1 = \dfrac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{2 - \mathrm{i}\sqrt{12}}{2} = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

l'équation a trois solutions : $z = 2$ ou $z = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ ou $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Remarque : Afin d'obtenir la factorisation, une autre méthode consiste à effectuer la division des polynomes. Cette méthode est hors programme mais si vous la connaissez, elle est très efficace et peut s'utiliser dans d'autres situations.