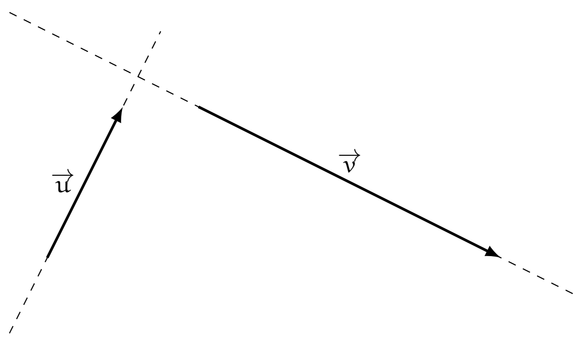
8 Produit scalaire dans le plan

Géométrie

I. Vecteurs orthogonaux

Définition 1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** lorsqu'au moins l'un des deux est nul ou lorsque leurs directions sont perpendiculaires.
Dans ce cas, on note $\vec{u} \perp \vec{v}$.



Propriété 1

On considère un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tel que $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad xx' + yy' = 0.$$

Démonstration

On construit le triangle OAB tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
On a donc $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. En particulier, puisque O est l'origine du repère alors les coordonnées de A sont $(x\,;\,y)$ et celles de B sont $(x'\,;\,y')$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \perp \vec{v} &\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \\
&\Leftrightarrow \text{OAB est rectangle en O} \\
&\Leftrightarrow OA^2 + OB^2 = AB^2 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(x^2+y^2)^2} + \sqrt{(x'^2+y'^2)^2} = \sqrt{((x-x')^2+(y-y')^2)^2} \\
&\Leftrightarrow x^2+y^2+x'^2+y'^2 = x^2+x'^2+y^2+y'^2-2xx'-2yy' \\
&\Leftrightarrow 0 = -2(xx'+yy')
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad xx'+yy'=0}$$

□

II. Définition et propriétés du produit scalaire

Définition 2

On considère un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ tel que $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.
Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un **nombre réel**, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$$

Remarque

La propriété précédente revient donc à dire $\vec{u}\perp\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Exemple • Dans un repère $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, on considère les points suivants :

$$A(-3\,;-1) \quad ; \quad B(1\,;2) \quad ; \quad C(-2\,;-1) \quad \text{et} \quad D(4\,;3).$$

Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ?

Propriété 2

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs. On a les égalités suivantes :
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$;
- $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$;
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$.

Démonstration

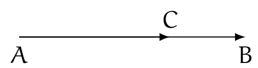
Laissée en exercice. Il suffit d'utiliser les coordonnées de chaque vecteur et d'utiliser le fait que l'addition est associative et commutative et que la multiplication est distributive par rapport à l'addition. On utilise aussi les fait que les coordonnées d'une somme de vecteurs est la somme des coordonnées de chaque vecteur. □

III. Vecteurs colinéaires

Définition 3

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** lorsqu'au moins l'un des deux est nul ou lorsqu'il existe un réel k tel que :

$$\vec{v} = k\vec{u}.$$



$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Dans un repère $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, on note $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ les coordonnées de $\vec{u}$. Puisque $\vec{v} = k\vec{u}$ alors $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$ sont les coordonnées de $\vec{v}$. Peu importe le sens des vecteurs, on a : $\vec{u}\cdot\vec{v} = kx^2 + ky^2 = k(x^2+y^2)$.

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| &= \sqrt{(x^2+y^2)}\times\sqrt{(kx)^2+(ky)^2} \\
&= \sqrt{(x^2+y^2)\times(k^2)(x^2+y^2)} \\
&= \sqrt{k^2\times(x^2+y^2)^2} \\
&= \sqrt{k^2}\times\sqrt{(x^2+y^2)^2} \\
&= \sqrt{k^2}\times(x^2+y^2)
\end{aligned}$$

Or, si $k \geqslant 0$ alors $\sqrt{k^2} = k$ et si $k \leqslant 0$, $\sqrt{k^2} = -k$. On obtient donc la propriété suivante :

Propriété 3

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens : alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

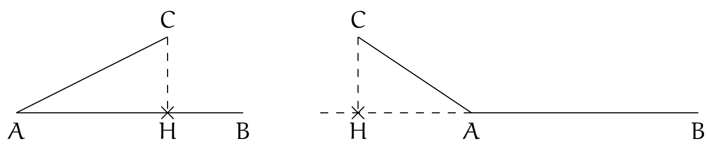
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire : alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

IV. Projeté orthogonal

Définition 4

On considère trois points A, B et C.
Le **projeté orthogonal** de C sur la droite (AB) est le point H tel que :

$$H \in (AB) \quad \text{et} \quad (AB) \perp (CH).$$



Remarques

- *Les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AH}$ *sont colinéaires.*
- *Si* $C \in (AB)$ *alors* H *et* C *sont confondus :* $H = C$.
- *Si* $(AC) \perp (AB)$ *alors* $A = H$ *et si* $(BC) \perp (AB)$ *alors* $H = B$.

Propriété 4

On considère trois points A, B et C et on appelle H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
Alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \pm \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AH}\right\|$$

le signe dépendant du sens de $\overrightarrow{AH}$ par rapport à $\overrightarrow{AB}$.

Démonstration

Il suffit d'utiliser la relation de Chasles et la propriété 2 de la page 2 :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC} \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + 0 \quad \text{puisque} \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{HC}
\end{aligned}$$

□

Dans les configurations précédentes, on note $\alpha = \left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$.

• **$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens :** les formules de trigonométrie dans le triangle ACH rectangle en H permettent d'affirmer que :

$$AH = AC \times \cos\alpha.$$

Ainsi, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = AB \times AC\cos\alpha$.

• **$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire :** alors $\left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AH}\right) = \pi - \alpha$. Dans le triangle ACH rectangle en H, les formules de trigonométrie permettent d'affirmer que :

$$AH = AC \times \cos(\pi - \alpha) = -AC \times \cos(\alpha).$$

Ainsi, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH = -AB \times (-AC\cos\alpha) = AB \times AC\cos\alpha$.

Propriété 5

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|u\| \times \|v\| \times \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right).$$

Remarque

Puisque $\cos\alpha = -\cos\alpha$*, on retrouve* $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

Exemple • On considère les points $A(1\,;\,1)$, $B(4\,;\,2)$ et $C(2\,;\,3)$.
En arrondissant à l'unité, déterminer la mesure des angles du triangle ABC.