1 Équations et inéquations Résolution de problèmes

Fonctions

I. Résolution d'équations

A. Développement et factorisation

Définition 1

Développer un produit revient à l'écrire sous forme d'une somme.

Propriété 1 (démontrée pour les nombres positifs à l'aide de la géométrie en exercice)

Pour tous nombres k, a, b, c et d, on a :

$$k(a+b) = ka+kb \quad \text{et} \quad (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd.$$

Exemple • Développer l'expression $A(x) = 5(x-1)-(3x-2)(-4+x)$.

$A(x) = 5(x-1)-(3x-2)(-4+x)$

$A(x) = 5x-5-(3x-2)(-4+x)$ ⇝ on commence par développer

$A(x) = 5x-5-(-12x+3x^2+8-2x)$ ⇝ attention aux signes !

$A(x) = 5x-5+12x-3x^2-8+2x$ ⇝ suppression de la parenthèse

$A(x) = -3x^2+5x+12x+2x-8$ ⇝ puis réduction de l'expression

$\boxed{A(x) = -3x^2+19x-8}$

Définition 2

Factoriser une somme revient à l'écrire sous forme d'un produit.

Propriété 2 (démontrée pour les nombres positifs à l'aide de la géométrie en exercice)

Pour tous nombres k, a, b, c et d, on a :

$$ka+kb = k(a+b) \quad \text{et} \quad a(c+d)+b(c+d) = (a+b)(c+d).$$

Exemple • Factoriser l'expression $B(x) = 2(x+4)+2(x-1)-(2x+3)(4x+6)$.

$B(x) = 2(x+4)+2(x-1)-(2x+3)(4x+6)$ ⇝ on repère les facteurs communs

$B(x) = 2(x+4+x-1)-(2x+3)(4x+6)$ ⇝ pas de problème de signes avec un $+$

$B(x) = 2(2x+3)-(2x+3)(4x+6)$ ⇝ on continue tant qu'il y a un facteur commun

$B(x) = (2x+3)(2-(4x+6))$ ⇝ attention au signe $-$

$B(x) = (2x+3)(2-4x-6)$ ⇝ suppression de la parenthèse

$B(x) = (2x+3)(-4+-4x)$ ⇝ il y a encore un facteur commun

$\boxed{B(x) = -4(2x+3)(1+x)}$

Propriété 3 Les identités remarquables

Soient a et b deux nombres quelconques. On a alors les **identités remarquables** suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \underline{\text{Forme factorisée}} & & \underline{\text{Forme développée}} \\ (a+b)^2 & = & a^2+2ab+b^2 \\ (a-b)^2 & = & a^2-2ab+b^2 \\ (a+b)(a-b) & = & a^2-b^2 \end{array}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= a^2+ab+ba+b^2 \\ &= a^2+ab+ab+b^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2}$$

;

$$\begin{aligned} (a-b)^2 &= (a+(-b))^2 \\ &= a^2+2\times a\times(-b)+(-b)^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2}$$

$$\begin{aligned} (a+b)(a-b) &= a^2-ab+ba-b^2 \\ &= a^2-ab+ab+b^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2-b^2}$$

□

Exemples •

$$\begin{aligned} C &= 1\,001^2 \\ C &= (1\,000+1)^2 \\ C &= 1\,000^2+2\times1\,000\times1+1^2 \\ C &= 1\,000\,000+2\,000+1 \end{aligned}$$
$$\boxed{C = 1\ 002\ 001}$$

$$\begin{aligned} D &= 99^2 \\ D &= (100-1)^2 \\ D &= 10\,000-200+1 \end{aligned}$$
$$\boxed{D = 9\ 801}$$

$$\begin{aligned} E &= 49\times51 \\ E &= (50-1)(50+1) \\ E &= 50^2-1^2 \\ E &= 2\,500-1 \end{aligned}$$
$$\boxed{E = 2\ 499}$$

Exemples •

$$\begin{aligned} F(x) &= x^2+2x+1 \\ F(x) &= x^2+2\times x\times1+1 \end{aligned}$$
$$\boxed{F(x) = (x+1)^2}$$

$$\begin{aligned} G(a) &= 9a^2-24a+16 \\ G(a) &= 9a^2-2\times12x+16 \\ G(a) &= (3a)^2-2\times3a\times4+4^2 \end{aligned}$$
$$\boxed{G = (3a-4)^2}$$

$$\begin{aligned} H(y) &= y^2-25 \\ H(y) &= y^2-5^2 \end{aligned}$$
$$\boxed{H(y) = (y-5)(y+5)}$$

Remarque

Les identités remarquables sont utiles pour gagner du temps dans un développement et, en cas d'oubli, on peut les retrouver en quelques lignes.
En revanche, elles sont très pratiques pour factoriser dans certains cas où il n'y a pas de facteurs communs.

Exemple • On désire factoriser $I(t) = 4t^2-20t+9$.
On écrit alors $I(t)$ de la manière suivante :

$$I(t) = (2t)^2-2\times2t\times5+3^2$$

mais la forme obtenue ne nous convient pas. Comment faire ?
Indication : $9 = 25-16 = 5^2-4^2$.

B. Les équations

Définition 3

Une **équation** est une égalité où figure une inconnue.
Résoudre une équation revient à trouver la (ou les) valeur(s) de l'inconnue pour laquelle (ou lesquelles) l'égalité est vérifiée.

Propriété 4

On peut ajouter un même nombre à chaque membre d'une égalité pour obtenir ainsi une égalité équivalente :

$$a = b \quad \Leftrightarrow \quad a + c = b + c$$

Démonstration

Puisque $a = b$ alors $a - b = 0$ et puisque $c - c = 0$, on a :

$$0 = a - b + c - c = a + c - b - c = a + c - (b + c) = 0 \quad \text{donc} \quad a + c = b + c.$$

□

Propriété 5

On peut multiplier par un même nombre non nul les deux membres d'une égalité pour obtenir ainsi une égalité équivalente :

$$\text{Avec } c \neq 0, \quad a = b \quad \Leftrightarrow \quad a \times c = b \times c$$

Démonstration

Puisque $a = b$ alors $a - b = 0$ et puisque $c \neq 0$, on a :

$$0 = c(a - b) = ca - cb = 0 \quad \text{donc} \quad a \times c = b \times c.$$

□

1. Équation du premier degré

Définition 4

Une **équation à une inconnue du premier degré** est une équation de la forme $ax + b = 0$ où x est l'inconnue et a et b sont des paramètres donnés tels que $a \neq 0$.

Exemple • Résolution de l'équation : $8x - 3 = -2x + 6$.

$$\begin{aligned} 8x - 3 = -2x + 6 &\Leftrightarrow 8x - 3 + 2x = -2x + 6 + 2x && \rightsquigarrow \text{ on regroupe l'inconnue d'un seul côté} \\ &\Leftrightarrow 10x - 3 + 3 = 6 + 3 && \rightsquigarrow \text{ on isole l'inconnue} \\ &\Leftrightarrow 10x \div 10 = 9 \div 10 \\ &\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{9}{10} = 0,9} \end{aligned}$$

Le nombre $0,9$ est la solution de l'équation.

Exemples • Résoudre les équations suivantes :

$$3x - 4 = 3 \quad ; \quad 2x + 2 = 5x - 4 \quad ; \quad 1 - 2(2 - x) = 2x - 3$$

2. Équation produit

Propriété 6 (admise)

Un produit de facteur est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul :

$$A(x) \times B(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = 0 \text{ ou } B(x) = 0$$

Exemple • Résolution de l'équation $(2x+3)(6x-8)=0$.
Un produit de facteur est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul donc :

$$\begin{aligned}
(2x+3)(6x-8)=0 &\Leftrightarrow 2x+3=0 \text{ ou } 6x-8=0 && \rightsquigarrow \text{ on applique la propriété}\\
&\Leftrightarrow 2x=-3 \text{ ou } 6x=8 && \rightsquigarrow \text{ équations du premier degré}\\
&\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2} \text{ ou } x=\frac{8}{6}=\frac{4}{3} && \rightsquigarrow \text{ on écrit les fractions sous forme irréductible}
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont donc $-\frac{3}{2}$ et $\frac{4}{3}$.

3. Résolution d'un problème

Exemple • Lors d'une séance de cinéma, on a accueilli 56 spectateurs. Certains ont payé le tarif réduit (5 €), les autres le tarif normal (8 €). La recette de cette séance se monte à 376 €.
Combien de spectateurs ont payé le tarif réduit ? (réponse : 24)

Voici les étapes de la résolution d'un problème en utilisant les équations :

1°) choix de l'inconnue ;

2°) mise en équation du problème ;

3°) résolution de l'équation ;

4°) réponse au problème.

II. Les ensembles de nombres en résumé

Définition 5

1°) L'ensemble des entiers **naturels** $\mathbb{N}$ est constitué des nombres entiers positifs.

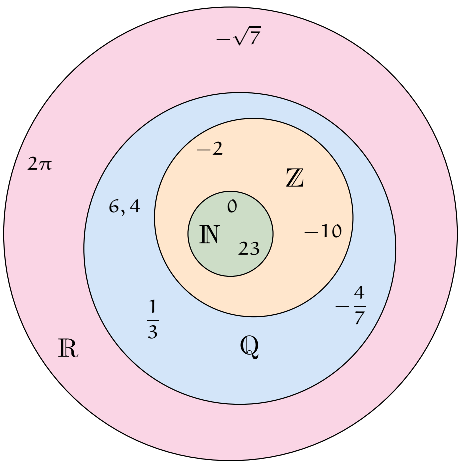
2°) L'ensemble des entiers **relatifs** $\mathbb{Z}$ est constitué des entiers naturels ainsi que de nombres entiers négatifs.

3°) L'ensemble des nombres **rationnels** $\mathbb{Q}$ est constitué de tous les nombres qui peuvent s'écrire sous forme de fractions, ce qui inclut les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ mais aussi les nombres décimaux.

4°) L'ensemble des nombres **irrationnels** est constitué des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme de fractions.

5°) L'ensemble des nombres **réels** $\mathbb{R}$ est constitué de tous les nombres rationnels et des nombres irrationnels.

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$



III. Résolution d'inéquations

A. Intervalles de nombres

1. Intervalles bornés

Définition 6

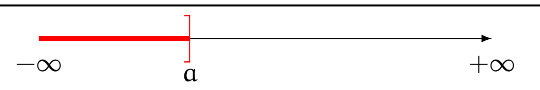
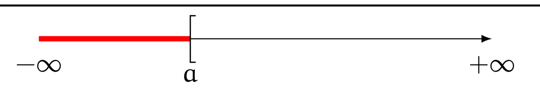
Un **intervalle borné** par deux nombres réels est constitué de tous les nombres réels compris entre ces deux nombres.
Par exemple, l'intervalle $[a\,;b]$ est l'ensemble des nombres x tels que $x \geqslant a$ et $x \leqslant b$.

Inégalité	Notation	Représentation
$a \leqslant x \leqslant b$	$x \in [a\,;b]$	
$a < x \leqslant b$	$x \in]a\,;b]$	
$a \leqslant x < b$	$x \in [a\,;b[$	
$a < x < b$	$x \in]a\,;b[$	

2. Intervalles non bornés

Définition 7

Un **intervalle non borné** est constitué de tous les nombres réels supérieurs ou inférieurs à un nombre réel.
Par exemple, l'intervalle $]a\,;+\infty[$ est l'ensemble des nombres x tels que $x > a$.

Inégalité	Notation	Représentation
$x \geqslant a$	$x \in [a\,;+\infty[$	
$x > a$	$x \in]a\,;+\infty[$	
$x \leqslant a$	$x \in]-\infty\,;a]$	
$x < a$	$x \in]-\infty\,;a[$	

3. Réunion et intersection

Définition 8

1°) La **réunion** de deux intervalles I et J, notée $I \cup J$, est l'ensemble des nombres réels appartenant à I **ou** à J.

2°) L'**intersection** de deux intervalles I et J, notée $I \cap J$, est l'ensemble des nombres réels appartenant à I **et** à J.

Exemples • $[-2\,;5] \cup]0\,;+\infty[= [-2\,;\infty[$; $[-2\,;5] \cap]0\,;+\infty[=]0\,;5]$

$[-2\,;5] \cup]8\,;15] = [-2\,;5] \cup]8\,;15]$ (on ne peut pas écrire la réunion sous forme d'un seul intervalle).

$[-2\,;5] \cap]8\,;15] = \emptyset$ (ensemble vide) : l'intersection ne contient aucun nombre.

Remarque

On a les inclusions suivantes :

$$I \subset I \cup J \quad ; \quad J \subset I \cup J \quad ; \quad I \cap J \subset I \quad \textit{et} \quad I \cap J \subset J.$$

B. Résolution d'inéquations

1. Inéquations du premier degré à une inconnue

Propriété 7

On peut ajouter un même nombre à chaque membre d'une inégalité pour obtenir ainsi une inégalité équivalente :

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad a + c < b + c$$

Exemples •

$$\begin{array}{rcl} x+4 & \leqslant & 5 \\ x+4-4 & \leqslant & 5-4 \\ & \boxed{x \leqslant 1} & \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x-3 & > & 0 \\ x-3+3 & > & 0+3 \\ & \boxed{x > 3} & \end{array}$$

Démonstration

a, b et c sont trois nombres tels que $a < b$. Donc :

$$a - b < 0 \Leftrightarrow a - b + \underbrace{c - c}_{=0} < 0 \Leftrightarrow a + c - (b + c) < 0 \Leftrightarrow \boxed{a + c < b + c}$$

□

Propriété 8

On multiplie ou on divise les deux membres d'une inégalité par un même nombre k non nul :

- si $k > 0$, alors : $a < b \quad \Leftrightarrow \quad ka < kb$;
- si $k < 0$, alors : $a < b \quad \Leftrightarrow \quad ka > kb$.

Exemples •

$$\begin{array}{rcl} 3x+4 & < & 2 \\ 3x & < & -2 \\ & \boxed{x < \dfrac{-2}{3}} & \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \dfrac{x}{-2}+6 & \geqslant & 0 \\ \dfrac{x}{-2} & \geqslant & -6 \\ & \boxed{x \leqslant 12} & \end{array}$$

Démonstration

On considère trois nombres a, b et k tels que $a > b$.
$a - b$ est donc un nombre positif.
On rappelle que le produit de deux nombres de même signe est positif, négatif sinon.

Si $k > 0$	Si $k < 0$
$k(a-b) > 0$	$k(a-b) < 0$
$\Leftrightarrow ka - kb > 0$	$\Leftrightarrow ka - kb < 0$
$\Leftrightarrow \boxed{ka > kb}$	$\Leftrightarrow \boxed{ka < kb}$

□

2. Résolution de problèmes

Exemple • Dans un club de gym, deux formules sont proposées :

Formule A : abonnement mensuel de 18 € et 5 € la séance.

Formule B : abonnement mensuel de 30 € et 3 € la séance.

Déterminer par le calcul le nombre de séances minimum pour lequel la formule B est plus avantageuse.

Voici les étapes de la résolution d'un problème en utilisant les inéquations :

1°) choix de l'inconnue ;

2°) trouver l'inéquation correspondant au problème ;

3°) résolution de l'inéquation ;

4°) réponse au problème.