# SESSION 2012

# BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE BLANC

# SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

**Génie Électronique**

# MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures | Coefficient 4

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

L'usage des calculatrices est autorisé pour cette épreuve.
Le formulaire personnel de mathématiques est autorisé.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.**
**Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura developpée.**

**Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.**

**Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet, que toutes les pages sont imprimées.**
**Le sujet comporte quatre pages.**

## EXERCICE 1 **5 points**

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes et i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

**1.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 4z + 16 = 0.$$

**2.** On considère les nombres complexes :

$$z_1 = 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_2 = 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

**a.** Déterminer le module et un argument de $z_1$.

**b.** Écrire $z_1$, puis $z_2$ sous forme exponentielle.

**3.** Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité 1 cm.

On considère la rotation $r$ de centre O et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$.

**a.** Placer les points $\mathrm{M}_1$, et $\mathrm{M}_2$ d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$ dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

**b.** Montrer que le point $\mathrm{M}_2$ est l'image du point $\mathrm{M}_1$ par la rotation $r$.

**c.** On appelle $\mathrm{M}_3$ le point image du point $\mathrm{M}_2$ par la rotation $r$.

Calculer l'affixe $z_3$ du point $\mathrm{M}_3$. Placer le point $\mathrm{M}_3$ dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

**d.** Démontrer que le triangle $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$ est équilatéral.

**4.** Vérifier que les nombres complexes $(z_1)^6$ et $\dfrac{(z_1)^4}{(z_2)^2}$ sont des entiers naturels.

On utilisera la forme de $z_1$ et $z_2$ la plus adaptée.

## EXERCICE 2 — 4 points

Un joueur lance successivement et dans cet ordre trois pièces de monnaie : une de 2 euros et deux de 1 euro.

1. Déterminer les différents résultats possibles, sachant qu'un résultat peut être considéré comme un triplet du type (P, F, P) par exemple, P désignant pile et F désignant face.

   Chaque pièce est parfaitement équilibrée. On est dans une situation d'équiprobabilité.

2. Si les trois pièces présentent leur côté face, le joueur perd 5 euros : sinon il gagne la somme des euros figurant sur les pièces présentant leur côté pile.

   Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer des trois pièces, associe la somme d'argent gagnée en euros. Lorsque le joueur perd, la variable X prend alors une valeur négative.

   **a.** Quelles valeurs peut prendre X ?

   **b.** Donner la loi de probabilité de X.

   **c.** Calculer la probabilité de l'évènement « $X \leqslant 2$ ».

3. On dit qu'un jeu est équitable lorsque l'espérance mathématique du gain est égale à 0.

   **a.** Ce jeu est-il équitable ?

   **b.** Quelle somme le joueur devrait-il perdre lorsque les trois pièces présentent leur côté face pour que ce jeu soit équitable ?

## PROBLÈME — 11 points

Dans tout le problème, $I$ désigne l'intervalle $]0;+\infty[$.

**Partie A :**

Soit $g$ la fonction définie sur l'intervalle $I$ par :

$$g(x) = x^2 + 3 - 2\ln(x)$$

1. **a.** On note $g'$ la dérivée de la fonction $g$. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe pour $x$ appartenant à l'intervalle $I$.

   **b.** Dresser le tableau de variations de la fonction $g$. (Les limites de la fonction $g$ en 0 et $+\infty$ ne sont pas demandées).

2. Calculer $g(1)$, en déduire le signe de $g(x)$ pour $x$ appartenant à l'intervalle $I$.

**Partie B :**

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $I$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x} + \frac{\ln(x)}{x}$$

On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $I$ et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 cm.

1. **a.** Étudier la limite de $f$ en 0 et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

   **b.** Étudier la limite de $f$ en $+\infty$.

2. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $I$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$.

   **b.** Déduire de la partie A le signe de $f'(x)$ puis le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $I$.

   **c.** Établir le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $I$.

3. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

   **a.** Montrer que la droite $\mathscr{D}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

   **b.** Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection $E$ de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

   **c.** Sur l'intervalle $I$, déterminer la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à l'asymptote $\mathscr{D}$.

4. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x = 1$.

5. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution $\alpha$ appartenant à l'intervalle $[3;4]$. Donner un encadrement de cette solution à $10^{-2}$ près.

6. En utilisant les résultats précédents, tracer avec soin dans le même repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ l'asymptote $\mathscr{D}$, la tangente $\mathscr{T}$ et la courbe $\mathscr{C}$.