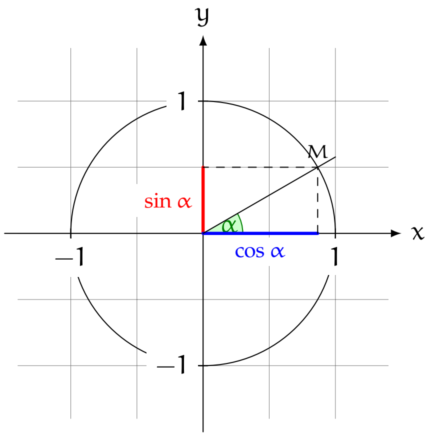
9 Fonctions circulaires

Géométrie

I. Définitions

On se place dans un repère $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$. Sur le cercle trigonométrique $\mathscr{U}$, on rappelle qu'un point M est repéré à l'aide de l'angle $\left(\vec{\imath}\,;\,\overrightarrow{OM}\right) = \alpha$.
L'abscisse du point M est alors $\cos(\alpha)$ et son ordonnée est $\sin(\alpha)$.



Définition 1
On définit alors les **fonctions circulaires** :

Cosinus : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [-1\,;1] \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}\right.$ et **Sinus :** $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [-1\,;1] \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}\right.$

Exemple • En physique, on utilise les fonctions suivantes :

$$\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad \sin(\omega t + \varphi)$$

où $\omega \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. Le nombre ω est appelé la pulsation et φ la phase.

II. Étude des fonctions circulaires

A. Parité

Définition 2
Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$.

- f est dite **paire** lorsque, pour tout $x \in \mathscr{D}_f, f(-x) = f(x)$.
- f est dite **impaire** lorsque, pour tout $x \in \mathscr{D}_f, f(-x) = -f(x)$.

Exemples •

1°) $f\colon x \mapsto x^2$. Alors $f(-x) = (-x)^2 = (-x)\times(-x) = x^2 = f(x)$ donc f est paire.
2°) $g\colon x \mapsto x^3$. Alors $g(-x) = (-x)^3 = (-x)\times(-x)\times(-x) = -x^3 = -g(x)$ donc g est impaire.

Propriété 1

La fonction cosinus est paire : $\cos(-x) = \cos(x)$.
La fonction sinus est paire : $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Propriété 2

La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

B. Périodicité

Définition 3

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$.
f est dite **périodique** sur $\mathscr{D}_f$ lorsqu'il existe un réel T le plus petit possible tel que :

$$\text{pour tout } x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x+T) = f(x).$$

On dit que la fonction f est $T-$périodique et le nombre T s'appelle la **période**.

Propriété 3

Les fonctions sinus et cosinus sont $2\pi-$périodiques. En effet,

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x+2\pi) = \sin(x).$$

Exemples •

1°) Montrer que $x \mapsto \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est $\pi-$périodique.

2°) Montrer que la période de la fonction $f\colon x \mapsto \cos(\omega x + \varphi)$ est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

C. Signe

Les fonctions cosinus et sinus étant $2\pi-$ périodiques, il suffit de les étudier sur un intervalle de longueur 2π. Par exemple, l'intervalle $[0\,;2\pi]$.

D. Variation

On utilise cette fois les symétries des courbes représentatives des fonctions circulaires. On les étudie sur $[-\pi\,;\pi]$.