À rendre le Lundi 20 Février 2006

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(x+4)^2 = 9(3-2x)^2 \qquad ; \qquad \frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-1}.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$(2x-3)(2-x) < 0 \qquad ; \qquad \frac{2x-3}{2-x} \geq 0.$$

3. Soit $T(x) = (x+4)^2 - 16$.
   (a) Développer et réduire $T(x)$.
   (b) Factoriser $T(x)$.
   (c) Résoudre $T(x) = 9$.

   Dans ce qui suit, toutes les mesures sont exprimées en centimètres.
   On considère un rectangle de largeur x. On suppose que sa longueur a 8 cm de plus que sa largeur. On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire du rectangle.

   (d) Exprimer $\mathscr{A}(x)$ en fonction de x.
   (e) Démontrer que $\mathscr{A}(x) = (x+4)^2 - 16$.
   (f) Pour quelle valeur de x le rectangle a-t-il une aire de 9 cm^2 ?

Exercice 2

Soit (S) le système suivant :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 4x+6y & = & 6,40 \\ 8x+2y & = & 8,80 \end{array} \right.$$

1. Après avoir déterminer le nombre de solutions du système (S), le résoudre.

   Jean a acheté 4 balles de tennis et 6 balles de ping-pong qu'il a payé 6,40 €. Le lendemain, il achète 2 balles de ping-pong et 8 balles de tennis qu'il paye 8,80 €.

2. Quels sont les prix d'une balle de ping-pong et d'une balle de tennis ?

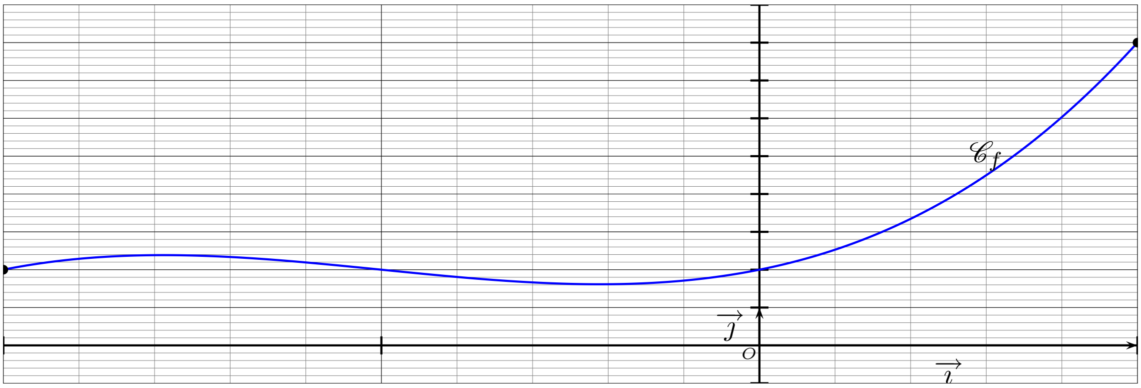
Exercice 3

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 12$ cm et $AD = 9$cm. I et J sont les pieds respectifs des hauteurs des triangles ADC et ABC issues des sommets D et B.

1. Construire une figure.
2. Montrer que cette configuration contient trois triangles rectangles semblables.
3. Calculer la longueur AC. En déduire les longueurs AJ, JB, JC et IJ.

Exercice 4

Soit $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthogonal et $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathscr{D}_f = [-2;\,1]$.



Première partie

1. Quel est le minimum de f sur $\mathscr{D}_f$? Quel est le maximum de f sur $\mathscr{D}_f$?
2. Quelle est l'image de 0 par f ? Quelles sont les antécédents de 2 par f ?
3. Résoudre graphiquement les équations
$$f(x) = 1 \quad ; \quad f(x) = 2 \quad ; \quad f(x) = 4.$$
4. Résoudre graphiquement les inéquations :
$$f(x) > 0 \quad ; \quad f(x) \leq 6.$$
5. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[-2\,;\,1]$.

Seconde partie

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentée sur le schéma est celle de la fonction f définie dans l'intervalle $[-2\,;\,1]$ par
$$f(x) = (x+1)^3 - x + 1.$$

1. Déterminer algébriquement les images de -1 et de 0 par f.
2. Vérifier que $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 2$.
3. Après avoir montré que $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$, déterminer algébriquement les solutions de l'équation $f(x) = 2$.

Exercice 5

Dans le plan rapporté d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points A, B et C de coordonnées
$$A(2;1) \quad ; \quad B(3;2) \quad ; \quad C(1;3).$$

1. Soit le point D défini par $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
   Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   Montrer que la droite (AD) est parallèle à l'axe des ordonnées.
   Calculer les coordonnées du point D.
2. Calculer les longueurs AB, AC et BC. Que peut-on en déduire pour la nature du triangle ABC ?
3. Soit E le point défini par $\overrightarrow{CE} = 2\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}\right)$.
   Quelles sont les coordonnées du point E ?
   Déterminer les coordonnées du milieu F du segment $[AE]$.
4. Déterminer une équation de la droite (DB). En déduire les coordonnées du point d'intersection de la droite (DB) avec la droite (AE). Que peut-on dire de ce point ?
5. Donner la nature du triangle ADE. Que représente la droite (AB) pour ce triangle ?