Chapitre 10 : Calcul Matriciel. Résolution de systèmes

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les scalaires.

1 Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

1.1 Définition d'une matrice

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$. Une matrice à n lignes et p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$, est une famille de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$ $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$.

Notations :

- théorique : $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$
- sous forme de tableau :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

  i est l'indice de ligne de la matrice, j est l'indice de colonnes. $n \times p$ est la taille de la matrice. Les $a_{i,j}$ sont les coefficients de la matrice A.
- Ensembles de matrices :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = &\text{ ensemble des matrices à } n \text{ lignes et } p \text{ colonnes} \\ \mathcal{M}_{n}(\mathbb{K}) = &\text{ ensemble des matrices à } n \text{ lignes et } n \text{ colonnes} \end{aligned}$$

Lorsque $p = 1$, une matrice de taille $n \times 1$ est dite matrice colonne. Lorsque $n = 1$, une matrice de taille $1 \times p$ est dite matrice ligne.

Egalité de deux matrices : Soient $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ et $B = \left(b_{i,j}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ deux matrices **de même taille**.

$$A = B \Longleftrightarrow \forall (i,j) \in \{1,...n\} \times \{1,...,p\},\ a_{i,j} = b_{i,j}.$$

Matrices remarquables :

- Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$. La matrice nulle de taille $n \times p$, $\boxed{0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}}$ est la matrice où tous les coefficients sont nuls.
- Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$. Soit $(i_0, j_0) \in \{1,...,n\} \times \{1,...p\}$. La matrice élémentaire $\boxed{E^{i_0,j_0}} = \left(e_{i,j}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ est définie par :

$$e_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } (i,j) = (i_0, j_0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

- Soit $n \ge 1$. Soient $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. La matrice diagonale $\boxed{diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)} = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ est définie par

$$a_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

  Cas particulier : $diag(1, ..., 1) = \boxed{I_n}$ est appelée **matrice identité de taille n**.
- Soit $n \ge 1$. $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ est dite triangulaire supérieure lorsque : $\forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2$,

$$i > j \Longrightarrow a_{i,j} = 0.$$

  $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ est dite triangulaire inférieure lorsque : $\forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2$,

$$i < j \Longrightarrow a_{i,j} = 0.$$

1.2 Somme de matrices

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$. Soient $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ et $B = \left(b_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ deux matrices **de même taille**. La somme de A et B est la matrice notée $\boxed{A+B}$ définie par

$$A+B = \left(a_{i,j}+b_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}.$$

On somme les coefficients « position par position ».

Proposition 1.2.1 (Propriétés de + dans $\boldsymbol{\mathcal{M}_{n,p}}(\mathbb{K})$) *Soit* $(n,p) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$.

1. **[Associativité]** *Soit* $(A,B,C) \in \left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right)^3$. *Alors*
$$A+(B+C) = (A+B)+C.$$
2. **[Neutre pour +]** *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Alors*
$$A + 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} + A = A.$$
3. **[Existence d'un opposé]** *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *On note* $-A$ *la matrice* $-A = \left(-a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$. *Alors*
$$A+(-A) = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} = -A+A.$$
4. **[Commutativité]** *Soit* $(A,B) \in \left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right)^2$. *Alors*
$$A+B = B+A.$$

1.3 Multiplication scalaire externe

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$. Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. La matrice multiplication scalaire de A par λ, notée $\boxed{\lambda A}$, est définie par :

$$\lambda A = \left(\lambda a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}.$$

Proposition 1.3.1 (Décomposition d'une matrice par les matrices élémentaires) *Soit* $(n,p) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$. *Soit* $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Alors*

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}E^{i,j}.$$

1.4 Produit matriciel

1.4.1 Produit ligne colonne

Soit $p \geq 1$. On considère la matrice ligne $1\times p$, $L = (a_1 \ldots\ldots a_p)$ et la matrice colonne $p\times 1$, $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$. Le produit de la ligne L et de la colonne C, noté $\boxed{L\times C}$ est le scalaire défini par :

$$L\times C = (a_1 \ldots\ldots a_p) \times \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = \boxed{\sum_{k=1}^{p} a_k b_k} \in \mathbb{K}.$$

1.4.2 Produit de deux matrices

Soit $(n,p,m) \in (\mathbb{N}^\star)^3$. Soient $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,\mathbf{p}}(\mathbb{K})$ et $B = \left(b_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq m}} \mathcal{M}_{\mathbf{p},m}(\mathbb{K})$. Le produit de A et B a un sens sous réserve que la condition suivante soit vérifiée :

$$\boxed{\text{Nombre colonnes de } A \ = \text{Nombre lignes de } B}$$

On note $L_1, ..., L_n$ les lignes de A et $C_1, ..., C_m$ les colonnes de B. La matrice produit de A et B, notée $\boxed{A \times B}$ est la matrice $A \times B = \left(c_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{\boxed{\mathbf{n,m}}}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in \{1, ...n\} \times \{1, ..., m\},\, c_{i,j} = \boxed{L_i \times C_j = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}}.$$

Remarque 1 *Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tous les produits de matrices ont un sens*

Exemple 1.4.1 [Produit de matrice élémentaire] *Soit $n \geq 1$. Soient $(i_0, j_0, k_0, l_0) \in \{1, ..., n\}^4$. Soient E^{i_0,j_0} et E^{k_0,l_0} deux matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer $E^{i_0,j_0} \times E^{k_0,l_0}$.*

Exemple 1.4.2 [Produit de matrices diagonales] *Soit $n \geq 1$. Calculer le produit de deux matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

Exemple 1.4.3 [Produit de matrices triangulaires] *Soit $n \geq 1$. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Proposition 1.4.1 (Propriétés de $\times$) *Soit $(n,p,m,q) \in (\mathbb{N}^\star)^4$.*

1. **[Associativité]** *Soit $(A,B,C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K})$. Alors les produits ci-dessous ont un sens et :*
$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C.$$
2. **[Neutre pour $\times$]** *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors*
$$A \times I_p = A \text{ et } I_n \times A = A$$
3. **[0 est absorbant]** *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors*
$$A \times 0_{\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})} = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})} \text{ et } 0_{\mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})} \times A = 0_{\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})}.$$
4. **[Produit et multiplication scalaire externe]** *Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors les produits ci-dessous ont un sens et*
$$A \times (\lambda B) = (\lambda A) \times B = \lambda A \times B.$$
5. **[Distributivité à gauche de $\times$ sur $+$]** *Soit $(A,B,C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$. Alors les produits ci-dessous ont un sens et*
$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C.$$
6. **[Distributivité à droite de $\times$ sur $+$]** *Soit $(A,B,C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$. Alors les produits ci-dessous ont un sens et*
$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C.$$

Remarque 2 *Soit $n \geq 2$. Le produit matriciel n'est pas commutatif, c'est-à-dire :*

$$\exists (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 :\ A \times B \neq B \times A.$$

Il en existe même beaucoup. Mais il existe aussi beaucoup de matrices qui commuttent, c'est-à-dire qui vérifient $A \times B = B \times A$.

Remarque 3 *Soit $n \geq 2$. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la propriété*

$$A \times B = 0 \Longrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

est FAUSSE

1.4.3 Puissances de matrices

On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour $n \geq 1$.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}$. La matrice puissance k-ième de A, notée A^k est définie par :

$$A^k = \begin{cases} I_n & \text{si } k = 0 \\ A \times A^{k-1} & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

Exemple 1.4.4 [Calcul de puissance à la main] *Calculer les puissances de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 1.4.5 [Puissances d'une matrice diagonale] *Calculer les puissances d'une matrice diagonale.*

Proposition 1.4.2 (Sommes et puissances) *Soit $p \geq 1$. Soit $n \geq 1$. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ telles que*

$$A \times B = B \times A \quad (\text{ c-a-d } A \text{ et } B \text{ commuttent})$$

Alors

1. **[Formule du binome]**

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k A^{p-k}.$$

2. **[Formule de factorisation]**

$$A^p - B^p = (A - B) \times \sum_{k=0}^{p-1} A^{p-1-k} B^k = (A - B) \times \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}.$$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente lorsque :

$$\boxed{\exists k \in \mathbb{N} : \ A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}.}$$

L'ordre (ou indice) de nilpotence de A est le plus petit entier p tel que $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. On a alors :

$$\forall k \geq p, \ A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}.$$

Exemple 1.4.6 [Calcul de puissance par décomposition $D + N$] *Calculer les puissances de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

en décomposant A comme une somme d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente

1.4.4 Matrices inversibles

On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour $n \geq 1$.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible lorsque :

$$\boxed{\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \ A \times B = B \times A = I_n.}$$

On dit alors que B est une inverse pour A.

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\boxed{GL_n(\mathbb{K})}$.

Remarque 4 *$I_n \in GL_n(\mathbb{K})$ car $I_n \times I_n = I_n$.*

Proposition 1.4.3 (Unicité de l'inverse) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Alors A admet une unique matrice inverse, appelée la matrice inverse de A et notée $\boxed{A^{-1}}$. On a alors A^{-1} inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.*

Proposition 1.4.4 (Inverse et produit) *Soit $n \geq 1$.*

1. *Soient $(A, B) \in GL_n(\mathbb{K})^2$. Alors $A \times B$ est inversible et*

$$\boxed{(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}.}$$

2. *Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}$. Alors A^k est inversible et*

$$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k.$$

Exemple 1.4.7 [Inversibilité d'une matrice diagonale] *Déterminer une CNS d'inversibilité pour une matrice diagonale.*

1.5 Transposition

Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ et $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle matrice transposée de A et on note $\boxed{{}^tA}$ ou A^T la matrice ${}^tA = \left(b_{k,l}\right)_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq l \leq n}} \in \mathcal{M}_{\boxed{p,n}}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (k, l) \in \{1, ..., p\} \times \{1, ..., n\}, \, b_{k,l} = a_{l,k}.$$

Les lignes de A sont les colonnes de ${}^tA$ et les colonnes de A sont les lignes de ${}^tA$.

Proposition 1.5.1 (Transposition et opérations) *Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$.*

1. **[Involution]** *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors*

$${}^t({}^tA) = A.$$

2. **[Combinaison linéaire]** *Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors*

$${}^t(A + \lambda B) = {}^tA + \lambda {}^tB.$$

3. **[Produit]** *Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$. Alors*

$${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA.$$

4. **[Inverse]** *Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors ${}^tA$ est inversible et*

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$$

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite symétrique lorsque ${}^tA = A$, antisymétrique lorsque ${}^tA = -A$.

Exemple 1.5.1 [Inversibilité d'une matrice diagonale] *Démontrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose en une somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.*

2 Résolution des systèmes linéaires

2.1 Forme générale

Un système linéaire de n équations à p inconnues, à coefficients dans $\mathbb{K}$ s'écrit

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + \cdots + a_{1,p}x_p & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + \cdots + a_{2,p}x_p & = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + \cdots + a_{n,p}x_p & = b_n \end{cases}$$

où

- $x_1,...,x_p$ sont les inconnues du système,
- $b_1,...,b_p$ forment le second membre du système,
- $(a_{i,j})$ sont les coefficients du système,
- $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + \cdots + a_{i,p}x_p$ est la ligne i du système.

Forme matricielle du système

$$(x_1, ..., x_p) \text{ est solution de } (S) \iff AX = B \quad (\text{forme matricielle de } (S)),$$

où $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ matrice du système, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ colonne des inconnues, et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ colonne second membre.

Lorsque le second membre est nul, on dit que le système est homogène.

2.2 Résolution d'un système linéaire par pivot de Gauss

L'algorithme du pivot de Gauss est basé sur la proposition suivante, que l'on démontrera plus tard.

Proposition 2.2.1 (Opérations élémentaires sur un système) *L'ensemble des solutions du système linéaire (S) ne change pas lorsqu'on effectue les opérations suivantes :*

1. *Echanger deux lignes du systèmes : opération codée par $L_i \leftrightarrow L_j$.*
2. *Multiplier une ligne par un scalaire $\boxed{\text{non nul}}$ λ : opération codée par $L_i \leftarrow \lambda L_i$*
3. *Ajouter à une ligne donnée une combinaison linéaire des autres lignes : opération codée par $L_i \leftarrow L_i + \sum_{j\neq i} \lambda_j L_j$.*

Algorithme du pivot de Gauss :

— Etape 1 : dans la 1ère colonne de coefficients, repérer le coefficient le plus simple (± 1, ou 2, ou...) et remonter la ligne correspondante en ligne 1. C'est le premier « pivot ». Eliminer alors les autres coefficients par des opérations de la forme $L_i \to L_i + \lambda L_1$. On ne touche plus à la ligne 1.
— Etape 2 : Recommencer la même opération sur la deuxième colonne en démarrant de la ligne 2.
— Stopper l'algorithme quand le système est échelonné, c-a-d chaque ligne commence par **au moins un zéro de plus** que la précédente.
— Deux possibilités à la dernière ligne. Ou bien on a une inconnue= valeur, ou bien une inconnue s'exprime en fonction des autres.
— Remonter ensuite les lignes.

Exemple 2.2.1 [Résolution par pivot] *Résoudre à l'aide d'un pivot de Gauss les systèmes suivants :*

$$(S_1) : \begin{cases} x + 2y - z & = 1 \\ 2x + 3y + z & = 2 \\ x - 4y - 6z & = 2 \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} 2x + y - 2z + 3w & = 1 \\ 3x + 2y - z + 2w & = 4 \\ 3x + 3y + 3z - 3w & = 5 \end{cases} \quad (S_3) : \begin{cases} x - 3y + 4z - 2w & = 5 \\ x - y + 9z - w & = 7 \\ x - 2y + 7z - 2w & = 9 \end{cases}$$