

10

Probabilités II Loi binomiale

I. Compter le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p et de succès S .

A. Coefficients binomiaux



Définition 1

Soit n un entier naturel et k un entier naturel compris entre 0 et n .

On considère une expérience aléatoire constituée de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, représentée par un arbre.

Le **coefficient binomial** noté $\binom{n}{k}$ (lire « k parmi n ») est le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès pour les n répétitions de l'épreuve.

Exemples • Certains coefficient binomiaux sont faciles à calculer :

- 1*) On réalise 4 épreuves. Combien de chemins réalisent exactement 1 succès ? Il y en a 4 donc $\binom{4}{1} = 4$.
- 2*) On réalise 100 épreuves. Combien de chemins réalisent exactement 1 succès ? Il y en a 100 donc $\binom{100}{1} = 100$.
- 3*) On réalise 18 épreuves. Combien de chemins réalisent exactement 0 succès ? Il y en a 1 donc $\binom{18}{0} = 1$.
- 4*) Combien de combinaisons à 6 nombres différents existent-il avec 49 nombres différents ?



Remarque

On réalise 10 épreuves. Combien de chemins réalisent exactement 6 succès ?

On pourrait faire un arbre de probabilité et compter les chemins un par un mais ce serait trop long : l'arbre possède $2^{10} = 1\,024$ chemins différents !

On utilise donc la calculatrice pour trouver 210.

B. Variable aléatoire



Définition 2

On note X la fonction qui, à chaque issue du schéma de Bernoulli, associe le nombre de succès obtenus.

On dit que X est la **variable aléatoire** associé à ce schéma de Bernoulli.



Remarque

La variable aléatoire X peut donc prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et n .

Exemple • On lance dix fois un dé non pipé à 6 faces. On cherche à obtenir le 3.
La variable aléatoire X compte le nombre de 3 obtenus au bout des 10 lancers. On peut donc avoir $X = 0, X = 1, \dots, X = 10$.

Définition 3

On appelle **loi de probabilité** de X la donnée de toutes les probabilités de X résumées dans le tableau ci-dessous.

k	0	1	...	n
p_k	$p(X=0)$	$p(X=1)$...	$p(X=n)$

Propriété 1

Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$, la probabilité p_k que l'événement S soit réalisé exactement k fois à l'issue de n épreuves de Bernoulli indépendantes est donnée par :

$$p_k = p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}.$$

Exemple • On lance un dé à 6 faces dix fois de suite. Le succès est S : « obtenir le nombre 3 » tel que $p(S) = \frac{1}{6}$.
On a donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{6}$.
On cherche la probabilité d'obtenir exactement 6 fois le nombre 3.
Autrement dit, on cherche $p(X = 6)$:

$$p(X = 6) = \binom{10}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^6 \times \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,002\,170\,635 \approx 0,22\%.$$

II. Loi binomiale

Définition 4

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p et X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

On appelle **loi binomiale** de paramètres n et p la loi de probabilité, notée $\mathcal{B}(n; p)$, définie par :

$$p(\{X = k\}) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} \quad \text{pour tout } 0 \leq k \leq n.$$

On dit que X suit la loi binomiale.

Définition 5

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.

On suppose Ω fini ; on note n le nombre d'éléments de Ω (n entier naturel non nul).

On suppose de plus que les n issues x_1, x_2, \dots, x_n sont des nombres réels et qu'une loi de probabilité est définie sur Ω ; pour tout entier naturel i compris entre 1 et n , on note p_i la probabilité de l'événement élémentaire $\{x_i\}$.

L'**espérance** de la loi de probabilité est le nombre E défini par :

$$E = \sum_{i=1}^n p_i x_i.$$

Remarque

$\sum_{i=1}^n p_i = 1$ donc on peut écrire $E = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$ et on retrouve la formule d'une moyenne statistique.

L'espérance d'une loi de probabilité est la valeur que l'on peut espérer obtenir en moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions.

Propriété 2

Soit $\mathcal{B}(n; p)$ la loi binomiale de paramètres n et p .

L'espérance E de $\mathcal{B}(n; p)$ est $E = np$.