Fiche d'exercices n° VIII.1
Produit scalaire
Applications

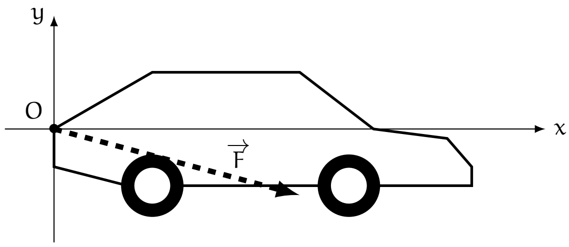
✍ Exercice 1.

1°) On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a-1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer la valeur du nombre a pour que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

2°) x est un nombre réel. On donne les points $A(x\,;\,1)$, $B(2\,;\,3)$ et $C(0\,;\,-1)$.
Déterminer le nombre x pour que le triangle ABC soit rectangle en B.

*

✍ Exercice 2.
Une personne pousse sa voiture en exerçant une force de 200 N suivant une direction qui fait un angle de 25° avec le niveau horizontal de la route.



1°) Décomposer le vecteur $\overrightarrow{F}$ en deux vecteurs $\overrightarrow{F}_x$ et $\overrightarrow{F}_y$ suivant les deux axes orthogonaux (Ox) et (Oy). Dessiner cette décomposition en deux vecteurs sur le dessin.

2°) Sans utiliser le produit scalaire, déterminer la norme de la force qui permet à la voiture d'avancer.

3°) Calculer alors le travail nécessaire pour faire avancer la voiture sur une distance de 10 mètres.

*

✍ Exercice 3.
On considère un triangle ABC quelconque.

1°) Écrire en justifiant $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}$ en fonction de $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$.

2°) En utilisant le fait que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, démontrer la formule d'Al-Kashi :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right).$$

3°) Que se passe-t-il lorsque le triangle ABC est rectangle en A ?

4°) Dessiner un triangle ABC tel que $BC = 5$ cm, $AC = 7$ cm et $AB = 4$ cm.
Utiliser la formule d'Al-Kashi pour calculer la mesure des trois angles du triangle. Arrondir au degré près.

*

✍ Exercice 4.
Un enfant est situé en haut d'une piste de ski. Il se laisse glisser en ligne droite face à la pente d'un point A à un point B. La pente forme un angle de α degrés avec l'horizontale. L'enfant est matérialisé par un point E.

1°) Réaliser un schéma modélisant la situation.

2°) Tous les frottements sont négligés : l'enfant n'est donc soumis qu'à deux actions mécaniques : le poids $\overrightarrow{P}$ et la réaction du sol $\overrightarrow{R}$.
Compléter le schéma en dessinant ces deux vecteurs.

3°) Quel est le travail de la force $\overrightarrow{R}$ dans ce déplacement ? Justifier la réponse.

4°) Expliquer pourquoi $\left(\overrightarrow{P}\,;\,\overrightarrow{AB}\right) = 90 - \alpha$. En déduire le signe de $\cos\left(\overrightarrow{P}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$.

5°) Sachant que $\left\|\overrightarrow{P}\right\| = mg$, écrire le travail $\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{AB}$ en fonction de m, g, α et AB. Quel est le signe de ce travail ? Interpréter.

6°) La variation de l'énergie cinétique du système entre A et B est égale à la somme des travaux des actions mécaniques qui agissent sur le système. On a donc :

$$\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}mv^2.$$

Le nombre v est la vitesse acquise par l'enfant lorsqu'il arrive en B ; elle est exprimée en $m \cdot s^{-1}$.
En utilisant les données ci-dessous, déterminer l'arrondie à l'unité de la vitesse acquise par l'enfant après s'être laissé glissé sur une distance de 20 m :

$$\alpha = 9° \quad ; \quad m = 25 \text{ kg} \quad \text{et} \quad g = 9{,}81 \ m \cdot s^{-1}.$$