

LA DICHOTOMIE

MODULE N° 13

## I. Situation

L'objectif est de produire un algorithme permettant la recherche d'un nombre vérifiant certaines conditions : nombre à deviner, solution d'une équation ...

## II. Le jeu du nombre à deviner

On demande à un utilisateur de deviner un nombre choisi au hasard entre 10 et 100. Il n'a droit qu'à un certain nombre d'essais et, à chacune de ses propositions, on lui indique si le nombre cherché est plus grand, ou s'il est plus petit.

1.
  - a. Faire plusieurs essais par groupe de deux, noter à chaque fois les nombres proposés et le nombre d'essais effectués pour parvenir à la solution.
  - b. Etablir une stratégie de recherche du nombre à deviner.
2. Quel est le nombre minimum d'essais pour déterminer, à coup sûr, la solution ?
3. On souhaite écrire un algorithme permettant de mettre en oeuvre ce jeu, et ne laissant à l'utilisateur qu'un nombre limité d'essais.
  - a. Réfléchir aux variables  
L'algorithme nécessite :
    - une variable qui contiendra le nombre à deviner
    - une variable qui contiendra les différents essais de l'utilisateurPar ailleurs, il faut définir :
    - un compteur qui augmente de 1 à chaque essai.
  - b. Réfléchir à la structure de l'algorithme  
L'algorithme nécessite :
    - une *instruction conditionnelle* du type SI ... ALORS ...
    - une *instruction alternative* du type SI ... ALORS ... SINON ...
    - une *instruction itérative* du type TANT QUE ...

4. L'algorithme est traduit ci-dessous dans le langage du logiciel ALGOBOX.
- Cet algorithme se compose de plusieurs blocs, l'un présentant une instruction itérative, deux autres présentant des instructions conditionnelles. Les repérer et les délimiter à l'aide de couleurs.
  - Que représente la variable  $S$  ? Expliquer l'instruction de la ligne 6 de l'algorithme.
  - Que représente la variable  $n$  ? Quelle est sa valeur initiale ?
  - Repérer la condition qui provoque l'arrêt du processus itératif. Quelle est la ligne qui indique cet arrêt ?
  - Quelles sont les différentes sorties possibles pour cet algorithme ?

AVEC LE LOGICIEL ALGOBOX

Le jeu du nombre à deviner

```

1: VARIABLES
2: S EST_DU_TYPE NOMBRE
3: n EST_DU_TYPE NOMBRE
4: essai EST_DU_TYPE NOMBRE
5: DEBUT_ALGORITHME
6:   S PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(10,100)
7:   n PREND_LA_VALEUR 1
8:   AFFICHER "Choisir un nombre entier entre 10 et 100"
9:   TANT_QUE (n<=6) FAIRE
10:    DEBUT_TANT_QUE
11:    LIRE essai
12:    SI (essai==S) ALORS
13:      DEBUT_SI
14:        AFFICHER "Gagné!"
15:        AFFICHER "Vous avez trouvé le nombre en "
16:        AFFICHER n
17:        AFFICHER " essais"
18:        PAUSE
19:      FIN_SI
20:    SI (essai<S) ALORS
21:      DEBUT_SI
22:        AFFICHER "C'est plus!"
23:      FIN_SI
24:    SINON
25:      DEBUT_SINON
26:        AFFICHER "c'est moins!"
27:      FIN_SINON
28:    n PREND_LA_VALEUR n+1
29:  FIN_TANT_QUE
30:  AFFICHER "Vous avez perdu..."
31:  AFFICHER "Le nombre à deviner était "
32:  AFFICHER S
33: FIN_ALGORITHME

```

### III. Recherche d'un zéro par dichotomie

La dichotomie est utilisée lors de la recherche de solutions approchées d'une équation.

Exemple

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x^2 + 10x - 23$ .

On souhaite obtenir un encadrement d'amplitude  $10^{-1}$  des solutions de l'équation  $f(x) = 0$ .

1. Expliquer pourquoi l'intervalle  $[3; 4]$  contient une solution de l'équation  $f(x) = 0$ .
2. On coupe cet intervalle en deux. Comment déterminer si cette solution est contenue dans l'intervalle  $[3; 3,5]$  ou dans l'intervalle  $[3,5; 4]$  ?
3. Combien de fois faut-il répéter ce processus pour obtenir un intervalle d'amplitude  $10^{-2}$  ?
4. Déterminer un autre intervalle d'amplitude 1 contenant une solution de l'équation  $f(x) = 0$ , puis obtenir, comme précédemment, un intervalle d'amplitude  $10^{-1}$ .

PRINCIPE

On dispose d'un intervalle  $[a; b]$  contenant une solution de l'équation  $f(x) = 0$ . On partage cet intervalle en deux intervalles d'amplitude moitié  $[a; m]$  et  $[m; b]$  et on repère celui des deux qui contient la solution. On réitère ce processus jusqu'à obtenir la précision  $10^{-p}$  souhaitée.

L'algorithme est donné ci-dessous. Le compléter à chaque question.

1. Comment se calcule le nombre  $m$  qui sépare l'intervalle  $[a; b]$  en deux intervalles de même amplitude ?  
Compléter la ligne 13.
2. Expliquer les instructions des lignes 14, 16 et 20.
3. Quand arrête-t-on le processus itératif ?  
Compléter la ligne 11.

AVEC LE LOGICIEL ALGOBOX

Dichotomie

```

1: VARIABLES
2: a EST_DU_TYPE NOMBRE
3: b EST_DU_TYPE NOMBRE
4: p EST_DU_TYPE NOMBRE
5: m EST_DU_TYPE NOMBRE
6: DEBUT_ALGORITHME
7:   AFFICHER "Entrer la précision souhaitée"
8:   LIRE p
9:   a PREND_LA_VALEUR 3
10:  b PREND_LA_VALEUR 4
11:  TANT_QUE ... FAIRE
12:    DEBUT_TANT_QUE
13:      m PREND_LA_VALEUR ...
14:      SI (F1(a)*F1(m)<0) ALORS
15:        DEBUT_SI
16:          b PREND_LA_VALEUR m
17:        FIN_SI
18:      SINON
19:        DEBUT_SINON
20:          a PREND_LA_VALEUR m
21:        FIN_SINON
22:      FIN_TANT_QUE
23:    AFFICHER "La solution est comprise entre "
24:    AFFICHER a
25:    AFFICHER " et "
26:    AFFICHER b
27:  FIN_ALGORITHME

```

Fonction numérique utilisée :  $F1(x) = -\text{pow}(x,2) + 10*x - 23$