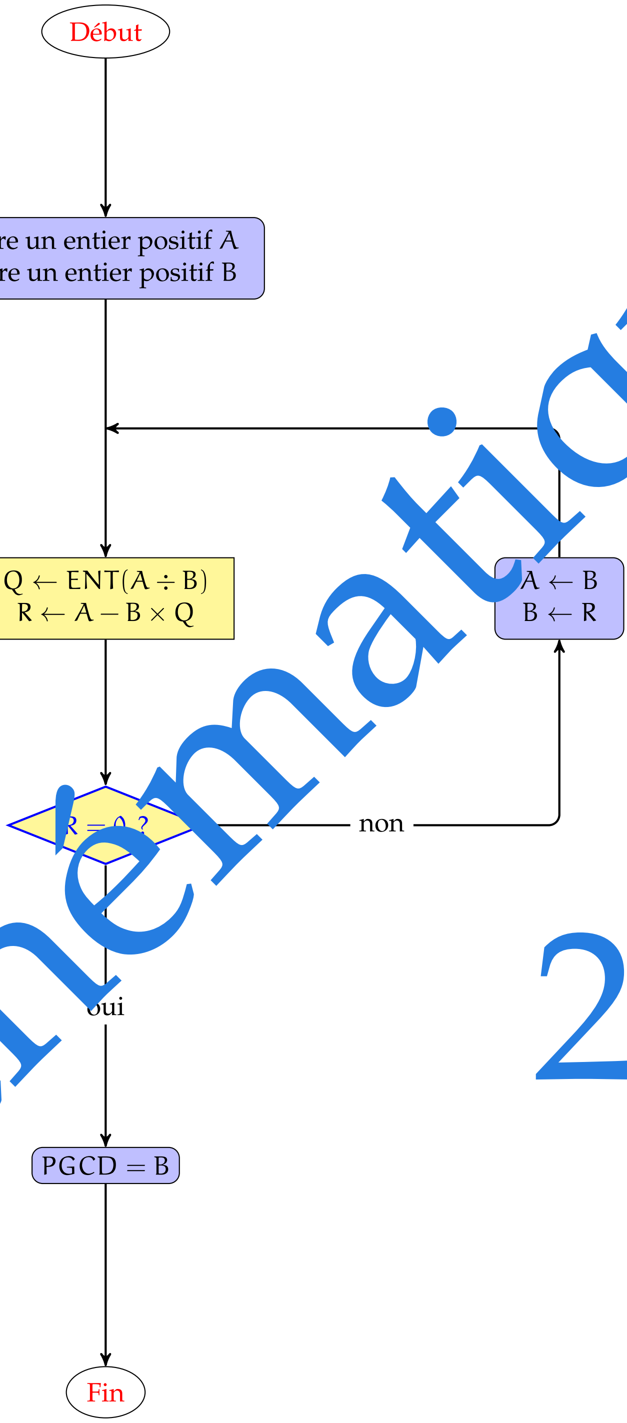
Philippe De Sousa



Mathématiques

2nde

D'après le programme 2 010

Sommaire

1 Équations et inéquations Résolution de problèmes

Fonctions

I. Résolution d'équations

A. Développement et factorisation

Définition 1

Développer un produit revient à l'écrire sous forme d'une somme.

Propriété 1 (démontrée pour les nombres positifs à l'aide de la géométrie en exercice)

Pour tous nombres k, a, b, c et d, on a :

$$k(a+b) = ka + kb \quad \text{et} \quad (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$

Exemple • Développer l'expression $A(x) = 5(x-1) - (3x-2)(-4+x)$.

$A(x) = 5(x-1) - (3x-2)(-4+x)$

$A(x) = 5x - 5 - (3x-2)(-4+x)$ ⇝ on commence par développer

$A(x) = 5x - 5 - (-12x + 3x^2 + 8 - 2x)$ ⇝ attention aux signes !

$A(x) = 5x - 5 + 12x - 3x^2 - 8 + 2x$ ⇝ suppression de la parenthèse

$A(x) = -3x^2 + 5x + 12x + 2x - 8$ ⇝ puis réduction de l'expression

$\boxed{A(x) = -3x^2 + 19x - 8}$

Définition 2

Factoriser une somme revient à l'écrire sous forme d'un produit.

Propriété 2 (démontrée pour les nombres positifs à l'aide de la géométrie en exercice)

Pour tous nombres k, a, b, c et d, on a :

$$ka + kb = k(a+b) \quad \text{et} \quad a(c+d) + b(c+d) = (a+b)(c+d).$$

Exemple • Factoriser l'expression $B(x) = 2(x+4) + 2(x-1) - (2x+3)(4x+6)$.

$B(x) = 2(x+4) + 2(x-1) - (2x+3)(4x+6)$ ⇝ on repère les facteurs communs

$B(x) = 2(x+4+x-1) - (2x+3)(4x+6)$ ⇝ pas de problème de signes avec un $+$

$B(x) = 2(2x+3) - (2x+3)(4x+6)$ ⇝ on continue tant qu'il y a un facteur commun

$B(x) = (2x+3)(2-(4x+6))$ ⇝ attention au signe $-$

$B(x) = (2x+3)(2-4x-6)$ ⇝ suppression de la parenthèse

$B(x) = (2x+3)(-4+-4x)$ ⇝ il y a encore un facteur commun

$\boxed{B(x) = -4(2x+3)(1+x)}$

Propriété 3 Les identités remarquables

Soient a et b deux nombres quelconques. On a alors les **identités remarquables** suivantes :

$$\begin{array}{rcl}
\underline{\text{Forme factorisée}} & & \underline{\text{Forme développée}} \\
(a+b)^2 & = & a^2+2ab+b^2 \\
(a-b)^2 & = & a^2-2ab+b^2 \\
(a+b)(a-b) & = & a^2-b^2
\end{array}$$

Démonstration

$$\begin{array}{rcl}
(a+b)^2 & = & (a+b)(a+b) \\
 & = & a^2+ab+ba+b^2 \\
 & = & a^2+ab+ab+b^2
\end{array}$$
$$\boxed{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2}$$

;

$$\begin{array}{rcl}
(a-b)^2 & = & (a+(-b))^2 \\
 & = & a^2+2\times a\times(-b)+(-b)^2
\end{array}$$
$$\boxed{(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2}$$

$$\begin{array}{rcl}
(a+b)(a-b) & = & a^2-ab+ba-b^2 \\
 & = & a^2-ab+ab+b^2
\end{array}$$
$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2-b^2}$$

□

Exemples •

$$\begin{array}{rcl}
C & = & 1\,001^2 \\
C & = & (1\,000+1)^2 \\
C & = & 1\,000^2+2\times1\,000\times1+1^2 \\
C & = & 1\,000\,000+2\,000+1
\end{array}$$
$$\boxed{C = 1\ 002\ 001}$$

$$\begin{array}{rcl}
D & = & 99^2 \\
D & = & (100-1)^2 \\
D & = & 10\,000-200+1
\end{array}$$
$$\boxed{D = 9\ 801}$$

$$\begin{array}{rcl}
E & = & 49\times51 \\
E & = & (50-1)(50+1) \\
E & = & 50^2-1^2 \\
E & = & 2\,500-1
\end{array}$$
$$\boxed{E = 2\ 499}$$

Exemples •

$$\begin{array}{rcl}
F(x) & = & x^2+2x+1 \\
F(x) & = & x^2+2\times x\times1+1
\end{array}$$
$$\boxed{F(x) = (x+1)^2}$$

$$\begin{array}{rcl}
G(a) & = & 9a^2-24a+16 \\
G(a) & = & 9a^2-2\times12x+16 \\
G(a) & = & (3a)^2-2\times3a\times4+4^2
\end{array}$$
$$\boxed{G = (3a-4)^2}$$

$$\begin{array}{rcl}
H(y) & = & y^2-25 \\
H(y) & = & y^2-5^2
\end{array}$$
$$\boxed{H(y) = (y-5)(y+5)}$$

Remarque

Les identités remarquables sont utiles pour gagner du temps dans un développement et, en cas d'oubli, on peut les retrouver en quelques lignes.
En revanche, elles sont très pratiques pour factoriser dans certains cas où il n'y a pas de facteurs communs.

Exemple • On désire factoriser $I(t) = 4t^2-20t+9$.
On écrit alors $I(t)$ de la manière suivante :

$$I(t) = (2t)^2-2\times2t\times5+3^2$$

mais la forme obtenue ne nous convient pas. Comment faire ?
Indication : $9 = 25-16 = 5^2-4^2$.

B. Les équations

Définition 3

Une **équation** est une égalité où figure une inconnue.
Résoudre une équation revient à trouver la (ou les) valeur(s) de l'inconnue pour laquelle (ou lesquelles) l'égalité est vérifiée.

Propriété 4

On peut ajouter un même nombre à chaque membre d'une égalité pour obtenir ainsi une égalité équivalente :

$$a = b \quad \Leftrightarrow \quad a + c = b + c$$

Démonstration

Puisque $a = b$ alors $a - b = 0$ et puisque $c - c = 0$, on a :

$$0 = a - b + c - c = a + c - b - c = a + c - (b + c) = 0 \quad \text{donc} \quad a + c = b + c.$$

□

Propriété 5

On peut multiplier par un même nombre non nul les deux membres d'une égalité pour obtenir ainsi une égalité équivalente :

$$\text{Avec } c \neq 0, \quad a = b \quad \Leftrightarrow \quad a \times c = b \times c$$

Démonstration

Puisque $a = b$ alors $a - b = 0$ et puisque $c \neq 0$, on a :

$$0 = c(a - b) = ca - cb = 0 \quad \text{donc} \quad a \times c = b \times c.$$

□

1. Équation du premier degré

Définition 4

Une **équation à une inconnue du premier degré** est une équation de la forme $ax + b = 0$ où x est l'inconnue et a et b sont des paramètres donnés tels que $a \neq 0$.

Exemple • Résolution de l'équation : $8x - 3 = -2x + 6$.

$$\begin{aligned} 8x - 3 = -2x + 6 &\Leftrightarrow 8x - 3 + 2x = -2x + 6 + 2x && \rightsquigarrow \text{ on regroupe l'inconnue d'un seul côté} \\ &\Leftrightarrow 10x - 3 + 3 = 6 + 3 && \rightsquigarrow \text{ on isole l'inconnue} \\ &\Leftrightarrow 10x \div 10 = 9 \div 10 \\ &\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{9}{10} = 0,9} \end{aligned}$$

Le nombre $0,9$ est la solution de l'équation.

Exemples • Résoudre les équations suivantes :

$$3x - 4 = 3 \quad ; \quad 2x + 2 = 5x - 4 \quad ; \quad 1 - 2(2 - x) = 2x - 3$$

2. Équation produit

Propriété 6 (admise)

Un produit de facteur est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul :

$$A(x) \times B(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = 0 \text{ ou } B(x) = 0$$

Exemple • Résolution de l'équation $(2x+3)(6x-8)=0$.

Un produit de facteur est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul donc :

$$\begin{aligned}
(2x+3)(6x-8)=0 &\Leftrightarrow 2x+3=0 \text{ ou } 6x-8=0 && \rightsquigarrow \text{ on applique la propriété}\\
&\Leftrightarrow 2x=-3 \text{ ou } 6x=8 && \rightsquigarrow \text{ équations du premier degré}\\
&\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2} \text{ ou } x=\frac{8}{6}=\frac{4}{3} && \rightsquigarrow \text{ on écrit les fractions sous forme irréductible}
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont donc $-\frac{3}{2}$ et $\frac{4}{3}$.

3. Résolution d'un problème

Exemple • Lors d'une séance de cinéma, on a accueilli 56 spectateurs. Certains ont payé le tarif réduit (5 €), les autres le tarif normal (8 €). La recette de cette séance se monte à 376 €.
Combien de spectateurs ont payé le tarif réduit ? (réponse : 24)

Voici les étapes de la résolution d'un problème en utilisant les équations :

1°) choix de l'inconnue ;

2°) mise en équation du problème ;

3°) résolution de l'équation ;

4°) réponse au problème.

II. Les ensembles de nombres en résumé

Définition 5

1°) L'ensemble des entiers **naturels** $\mathbb{N}$ est constitué des nombres entiers positifs.

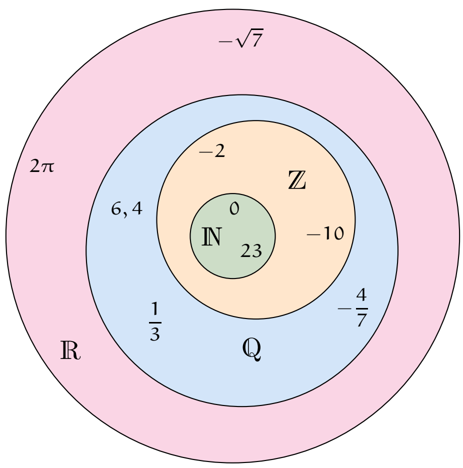
2°) L'ensemble des entiers **relatifs** $\mathbb{Z}$ est constitué des entiers naturels ainsi que de nombres entiers négatifs.

3°) L'ensemble des nombres **rationnels** $\mathbb{Q}$ est constitué de tous les nombres qui peuvent s'écrire sous forme de fractions, ce qui inclut les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ mais aussi les nombres décimaux.

4°) L'ensemble des nombres **irrationnels** est constitué des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme de fractions.

5°) L'ensemble des nombres **réels** $\mathbb{R}$ est constitué de tous les nombres rationnels et des nombres irrationnels.

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$



III. Résolution d'inéquations

A. Intervalles de nombres

1. Intervalles bornés

Définition 6

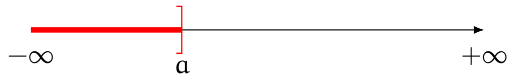
Un **intervalle borné** par deux nombres réels est constitué de tous les nombres réels compris entre ces deux nombres.
Par exemple, l'intervalle $[a\,;b]$ est l'ensemble des nombres x tels que $x \geqslant a$ et $x \leqslant b$.

Inégalité	Notation	Représentation
$a \leqslant x \leqslant b$	$x \in [a\,;b]$	
$a < x \leqslant b$	$x \in]a\,;b]$	
$a \leqslant x < b$	$x \in [a\,;b[$	
$a < x < b$	$x \in]a\,;b[$	

2. Intervalles non bornés

Définition 7

Un **intervalle non borné** est constitué de tous les nombres réels supérieurs ou inférieurs à un nombre réel.
Par exemple, l'intervalle $]a\,;+\infty[$ est l'ensemble des nombres x tels que $x > a$.

Inégalité	Notation	Représentation
$x \geqslant a$	$x \in [a\,;+\infty[$	
$x > a$	$x \in]a\,;+\infty[$	
$x \leqslant a$	$x \in]-\infty\,;a]$	
$x < a$	$x \in]-\infty\,;a[$	

3. Réunion et intersection

Définition 8

1°) La **réunion** de deux intervalles I et J, notée $I \cup J$, est l'ensemble des nombres réels appartenant à I **ou** à J.

2°) L'**intersection** de deux intervalles I et J, notée $I \cap J$, est l'ensemble des nombres réels appartenant à I **et** à J.

Exemples • $[-2\,;5] \cup]0\,;+\infty[= [-2\,;\infty[$; $[-2\,;5] \cap]0\,;+\infty[=]0\,;5]$

$[-2\,;5] \cup]8\,;15] = [-2\,;5] \cup]8\,;15]$ (on ne peut pas écrire la réunion sous forme d'un seul intervalle).

$[-2\,;5] \cap]8\,;15] = \emptyset$ (ensemble vide) : l'intersection ne contient aucun nombre.

Remarque

On a les inclusions suivantes :

$$I \subset I \cup J \quad ; \quad J \subset I \cup J \quad ; \quad I \cap J \subset I \quad \textit{et} \quad I \cap J \subset J.$$

B. Résolution d'inéquations

1. Inéquations du premier degré à une inconnue

Propriété 7

On peut ajouter un même nombre à chaque membre d'une inégalité pour obtenir ainsi une inégalité équivalente :

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad a + c < b + c$$

Exemples •

$$\begin{aligned} x + 4 &\leqslant 5 \\ x + 4 - 4 &\leqslant 5 - 4 \\ &\boxed{x \leqslant 1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - 3 &> 0 \\ x - 3 + 3 &> 0 + 3 \\ &\boxed{x > 3} \end{aligned}$$

Démonstration

a, b et c sont trois nombres tels que $a < b$. Donc :

$$a - b < 0 \Leftrightarrow a - b + \underbrace{c - c}_{=0} < 0 \Leftrightarrow a + c - (b + c) < 0 \Leftrightarrow \boxed{a + c < b + c}$$

□

Propriété 8

On multiplie ou on divise les deux membres d'une inégalité par un même nombre k non nul :

- si $k > 0$, alors : $a < b \quad \Leftrightarrow \quad ka < kb$;
- si $k < 0$, alors : $a < b \quad \Leftrightarrow \quad ka > kb$.

Exemples •

$$\begin{aligned} 3x + 4 &< 2 \\ 3x &< -2 \\ &\boxed{x < \frac{-2}{3}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{x}{-2} + 6 &\geqslant 0 \\ \frac{x}{-2} &\geqslant -6 \\ &\boxed{x \leqslant 12} \end{aligned}$$

Démonstration

On considère trois nombres a, b et k tels que $a > b$.
$a - b$ est donc un nombre positif.
On rappelle que le produit de deux nombres de même signe est positif, négatif sinon.

<u>Si $k > 0$</u>	<u>Si $k < 0$</u>
$k(a - b) > 0$	$k(a - b) < 0$
$\Leftrightarrow ka - kb > 0$	$\Leftrightarrow ka - kb < 0$
$\Leftrightarrow \boxed{ka > kb}$	$\Leftrightarrow \boxed{ka < kb}$

□

2. Résolution de problèmes

Exemple • Dans un club de gym, deux formules sont proposées :

Formule A : abonnement mensuel de 18 € et 5 € la séance.

Formule B : abonnement mensuel de 30 € et 3 € la séance.

Déterminer par le calcul le nombre de séances minimum pour lequel la formule B est plus avantageuse.

Voici les étapes de la résolution d'un problème en utilisant les inéquations :

1°) choix de l'inconnue ;

2°) trouver l'inéquation correspondant au problème ;

3°) résolution de l'inéquation ;

4°) réponse au problème.

2 Coordonnées d'un point dans le plan

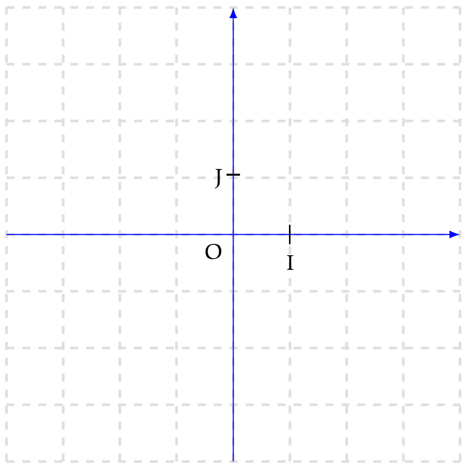
I. Repère orthonormé

Définition 1

Un **repère orthonormé** du plan (O, I, J) est défini de façon unique par la donnée de trois points non alignés O, I et J tels que :

- $(OI) \perp (OJ)$;
- $OI = OJ$.

Le point O est appelé **origine du repère**.
La droite graduée (OI), orientée de O vers I, est appelé **axe des abscisses** et la droite graduée (OJ), orientée de O vers J, est appelée **axe des ordonnées**.
La longueur OI définit l'unité de longueur sur l'axe des abscisses et la longueur OJ définit l'unité de longueur sur l'axe des ordonnées.
Par définition, les deux axes sont perpendiculaires et les unités de longueur sont identiques.



Repère orthonormé

II. Coordonnées d'un point

On considère un point M du plan dans un repère (O, I, J) orthonormé.
On trace la parallèle à (OJ) passant par M. Elle coupe l'axe des abscisses en H.
On trace la parallèle à (OI) passant par M. Elle coupe l'axe des ordonnées en K.

Définition 2

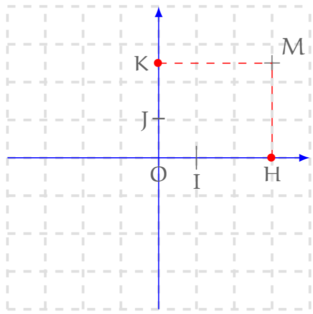
1°) Sur l'axe (OI), le nombre réel associé à H est appelé **abscisse** du point M, que l'on note x_M.

2°) Sur l'axe (OJ), le nombre réel associé à K est appelé **ordonnée** du point M, que l'on note y_M.

3°) Le couple $(x_M\ ;\ y_M)$ est alors appelé **coordonnées** du point M et l'on note $M(x_M\ ;\ y_M)$.

Exemple •

Sur la figure ci-contre, l'abscisse de M est égale à 3 et son ordonnée est égale à 2, 5. On dira que les coordonnées de M sont $(3\,;2,5)$ et on note $M(3\,;2,5)$.



Remarque

Dans un repère (O, I, J), $A \in (OI) \Leftrightarrow y_A = 0$ et $B \in (OJ) \Leftrightarrow x_B = 0$.
En particulier, les coordonnées de l'origine du repère sont $(0\,;0)$, celle de I sont $(1\,;0)$ et celle de J sont $(0\,;1)$.

III. Distances dans un repère orthonormé

On se place dans un repère **orthonormé** du plan (O, I, J) et on considère deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$.

Propriété 1 (partiellement démontrée en exercice)

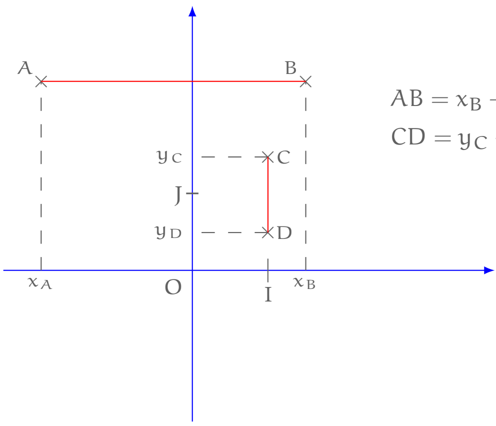
1°) Lorsque $x_A = x_B$, on pose $AB = y_B - y_A$ lorsque $y_B > y_A$ ou bien $AB = y_A - y_B$ lorsque $y_A > y_B$.

2°) Lorsque $y_A = y_B$, on pose $AB = x_B - x_A$ lorsque $x_B > x_A$ ou bien $AB = x_A - x_B$ lorsque $x_A > x_B$.

Remarque

Dans le premier cas, (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées et dans le second cas, (AB) est parallèle à l'axe des abscisses.

Exemple •



$AB = x_B - x_A$

$CD = y_C - y_D$

A. Calcul de distance

Propriété 2

La distance entre les points A et B, autrement dit la longueur du segment $[AB]$, est égale à :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

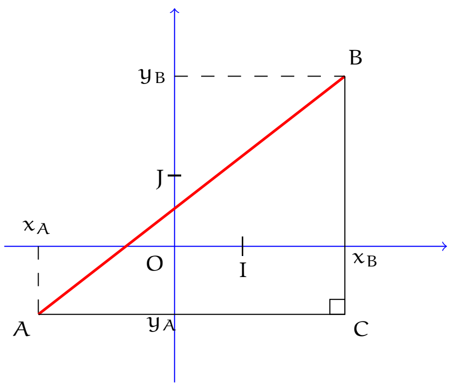
Démonstration

On considère la figure ci-contre. Le point C a pour coordonnées $(x_B\,;\,y_A)$ et, par conséquent, le triangle ABC est rectangle en C.
D'après le théorème de Pythagore, on a

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Par construction, A et C ont la même ordonnée donc $AC^2 = (x_B - x_A)^2$. De même, puisque B et C ont la même abscisse, $BC^2 = (y_B - y_A)^2$.
Ainsi, $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ (qui est un nombre positif) donc finalement :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



□

B. Milieu d'un segment

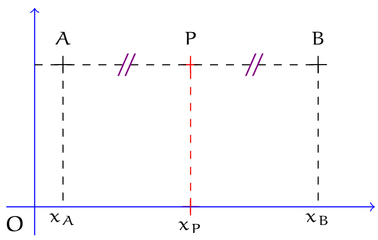
Propriété 3

On a appelle P le milieu du segment [AB]. On a alors :

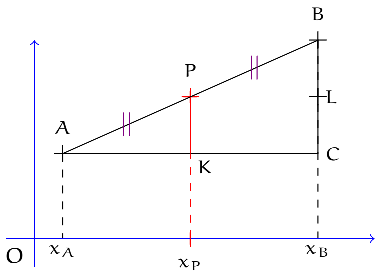
$$x_P = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_P = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Démonstration

1^er^ cas : $x_A = x_B$ ou $y_A = y_B$.
On suppose que $y_A = y_B$ et $x_B > x_A$. P est le milieu de [AB] si, et seulement si, $P \in [AB]$ et $PA = PB$.
$P \in [AB] \Leftrightarrow y_P = y_A = y_B$ et on a bien $y_P = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.
$PA = PB \Leftrightarrow x_P - x_A = x_B - x_P \Leftrightarrow 2x_p = x_B + x_A$ et on a bien $x_P = \dfrac{x_A + x_B}{2}$.



2^e^ cas : $x_A \neq x_B$ et $y_A \neq y_B$.
On note C le point de coordonnées $(x_B\,;\,y_A)$ de façon à ce que le triangle ABC soit rectangle en C. On appelle K le milieu de [AC] et L celui de [BC].
On constate pour commencer que (BC) est parallèle à l'axe des ordonnées car $x_B = x_C$ et que (AC) est parallèle à l'axe des abscisses puisque $y_A = y_C$. Dans le triangle ABC, P est le milieu de [AB] et K est celui de [AC]. D'après le théorème de la droite des milieux, on en déduit que (PK) est parallèle à (BC) et donc (PK) est parallèle à (OJ) donc $x_P = x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2}$ donc $x_P = \dfrac{x_A + x_B}{2}$.
En utilisant le point L, on obtiendrait de même $y_P = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.



□

IV. Applications

Exemples • On se place dans un repère orthonormé (O, I, J) :

1°) Que peut-on dire du triangle ABC tel que $A(-4\,;3)$, $B(-4\,;-5)$ et $C(3\,;-1)$?

2°) On considère le point D de coordonnées $(x_D\,;y_D)$. On appelle E, son symétrique par rapport à (OI) et F son symétrique par rapport à (OJ). Calculer les coordonnées de E et F en fonction de celles de D.

3°) On considère le point G de coordonnées $(x_G\,;y_G)$ et on construit H, son symétrique par rapport à O. Calculer les coordonnées de H en fonction de celles de G.

4°) On considère les quatre points suivants :

$$K(-4\,;-1) \quad ; \quad I(1\,;0) \quad ; \quad L(2\,;2) \quad \text{et} \quad M(-3\,;1).$$

Démontrer de deux façons différentes que le quadrilatère $KILM$ est un parallélogramme.

3 Généralités sur les fonctions

I. Notions

Définition 1

Soit $\mathscr{D}_f$ un ensemble de nombres réels (généralement un intervalle ou une réunion d'intervalles).
Définir une **fonction** f sur $\mathscr{D}_f$, c'est associer à tout nombre x de $\mathscr{D}_f$ un réel unique, noté $f(x)$ et appelé **image** de x par f.
x est appelée la **variable** et $f(x)$ est la valeur prise par la fonction f pour la valeur x.
L'ensemble $\mathscr{D}_f$ est appelé **ensemble de définition** de f (ou domaine de définition).

Notation : La phrase : « *La fonction* f *qui, au nombre* x*, associe le nombre* $f(x)$ »
peut se noter de la façon suivante : $f : x \mapsto f(x)$.

Exemples •

1°) Soit g la fonction qui, à x, associe le nombre $2x^2 - 1$.
Elle est définie par $g(x) = 2x^2 - 1$ et on note : $g : x \mapsto 2x^2 - 1$.

2°) Si on considère la taille associée à un individu, on définit une fonction : *individu* $\mapsto$ *taille*.

3°) Si on considère le prix de vente d'un litre d'essence dans une ville, on ne définit pas une fonction car pour un même type d'essence, il peut exister plusieurs prix en fonction des stations service.

Pour avoir une idée visuelle de la fonction, il est souvent utile de la représenter graphiquement dans un repère orthonormé. On a alors la définition suivante :

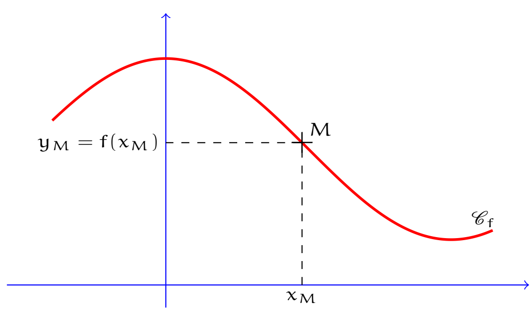
Définition 2

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$.
Dans un repère du plan, la **courbe représentative** $\mathscr{C}_f$ de f est l'ensemble des points M de coordonnées $(x_M\,;\,y_M)$ telles que :

- x_M décrit l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$;
- y_M est l'image de x_M par f : $y_M = f(x_M)$.

Remarque

On dit que $\mathscr{C}_f$ *a pour équation* $y = f(x)$ *dans le repère choisi.*



Définition 3

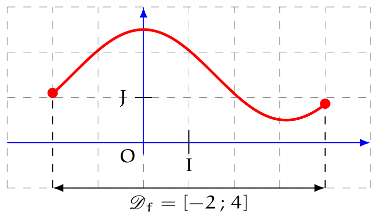
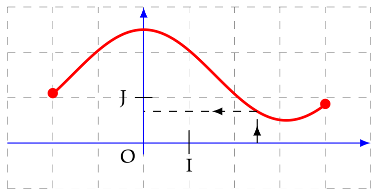
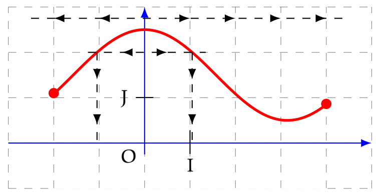
On considère une fonction $f : x \mapsto f(x)$.
Soit y un nombre réel pour lequel il existe $x \in \mathscr{D}_f$ tel que $y = f(x)$.
On dit alors que x est un **antécédent** de y par f.

Remarque

*D'après les définitions précédentes, on en déduit que l'image d'un nombre de $\mathscr{D}_f$ existe toujours et est **unique** alors qu'un nombre peut avoir plusieurs antécédents (voire aucun).*

II. Définir une fonction

A. À partir d'une courbe représentative

Ensemble de définition	**Lecture d'image**	**Lecture d'antécédents**
		
Lecture de l'ensemble de définition sur l'axe des abscisses.	Image d'un nombre sur l'axe des ordonnées. Ici, l'image de $2,5$ est environ $0,8$.	Lecture d'antécédents sur l'axe des abscisses. Ici, 2 a pour antécédent environ -1 et 1. $2,75$ n'a pas d'antécédent.

B. À partir d'un tableau

On considère la fonction f définie de la façon suivante :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	3	8	10	3

Ensemble de définition. La fonction n'est définie que pour les valeurs de x écrites sur la première ligne du tableau. En dehors de ces nombres, on ne sait pas ce qu'il se passe.

Lecture d'image. On sait que l'image de x est $f(x)$: on lit l'image d'un nombre de la première ligne dans la deuxième ligne. Par exemple, $f(1) = 10$.

Lecture d'antécédents. Les antécédents se lisent sur la première ligne. Le nombre 3 en a deux : -1 et 2. Le nombre -2 n'a pas d'antécédent.

C. À partir d'une formule

Remarque

Connaître une fonction f à partir d'une formule explicite permet d'avoir de nombreux renseignements. En particulier :

- *on peut calculer l'image de n'importe quel nombre de l'ensemble de définition ;*
- *une formule permet de traduire le lien existant entre deux quantités.*
- *trouver un antécédent a d'un nombre connu b revient à résoudre l'équation $f(a) = b$.*

Exemple • Le poids idéal en fonction de la taille en cm d'un homme et d'une femme adulte est calculé respectivement à l'aide des fonctions h et f ci-dessous :

$$h(t) = t - 100 - \frac{t - 150}{4} \qquad f(t) = t - 100 - \frac{t - 150}{2,5}$$

1°) Quelles sont les deux quantités liées par chaque formule ? Quelle est celle qui dépend de l'autre ?

2°) Calculer le poids idéal d'un homme mesurant $1,75$ m.

3°) Calculer le poids idéal d'une femme mesurant $1,70$ m.

4°) Le nombre 59 est-il l'image ou l'antécédent de 165 par la fonction f ?

5°) Calculer l'antécédent de 50 par la fonction f et interpréter le résultat.

4 Équations de droites

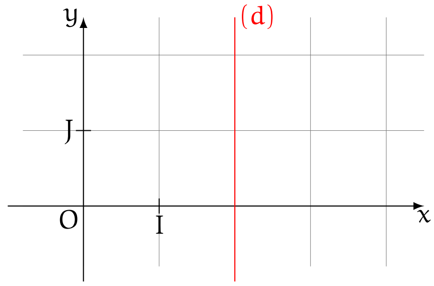
On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\,I,\ J)$.
Une droite peut alors être parallèle à l'axe des ordonnées (cas n°1) ou bien sécante à l'axe des ordonnées (cas n°2).

I. Caractérisation analytique d'une droite

Cas n°1 : Une droite est parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si tous les points situés sur cette droite ont la même abscisse.

Propriété 1

Toute droite (d) parallèle à l'axe des ordonnées a une équation **réduite** de la forme $x = k$ $(k \in \mathbb{R})$.

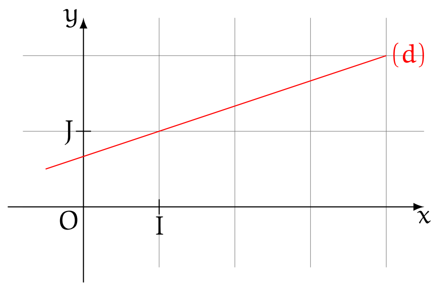


Droite d'équation $x = 2$

Cas n°2 : Une droite qui coupe l'axe des ordonnées est la représentation d'une fonction affine. Réciproquement, une fonction affine a pour représentation graphique une droite sécante à l'axe des ordonnées.

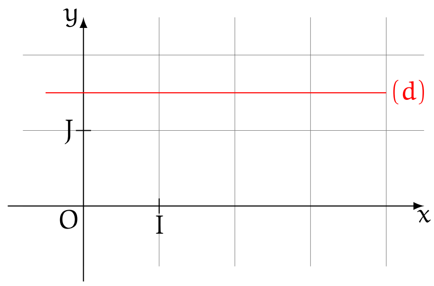
Propriété 2

Toute droite (d) sécante à l'axe des ordonnées a une équation **réduite** de la forme $y = mx + p$ $(m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R})$.



Droite d'équation $y = mx + p$

Cas particulier : Lorsque $m = 0$, on trouve une équation de la forme $y = p$ $(p \in \mathbb{R})$. Dans ce cas, la droite (d) est parallèle à l'axe des abscisses. Tous les points de cette droite ont la même ordonnée. Mais elle est toujours sécante à l'axe des ordonnées : c'est un cas particulier du cas n°2.



Droite d'équation $y = 1,5$

Définition 1

Considérons une droite (d) dont l'équation réduite est de la forme : $y = mx + p$.
Le nombre m est appelé **cœfficient directeur** de la droite (d). Ce cœfficient nous donne une indication sur l'inclinaison de la droite.
Le nombre p est appelé **ordonnée à l'origine**. En effet, lorsque $x = 0$ (origine de l'axe des abscisse), l'ordonnée y est égale à p.

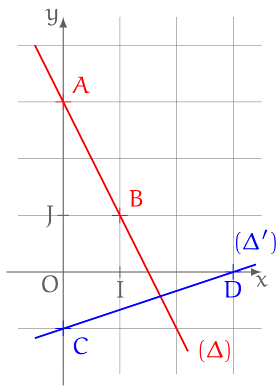
II. Tracer une droite dans un repère

Une droite d'équation $x = k$ passe par le point de coordonnées $(k\,;\,0)$ et est parallèle à l'axe des ordonnées.
Une droite d'équation $y = p$ passe par le point de coordonnées $(0\,;\,p)$ et est parallèle à l'axe des abscisses.
Pour représenter une droite d'équation $y = mx + p$, il faut et il suffit de connaître deux points appartenant à cette droite.

Exemples •

1°) Tracer la droite (Δ) d'équation $y = -2x + 3$.
Puisqu'il faut deux points, choisissons arbitrairement deux valeurs de x et calculons les valeurs de y correspondantes.
$x = 0 : y = -2 \times 0 + 3 = 3$ donc $A(0\,;\,3) \in (\Delta)$.
$x = 1 : y = -2 \times 1 + 3 = 1$ donc $B(1\,;\,1) \in (\Delta)$.

2°) Tracer la droite (Δ') d'équation $y = \frac{1}{3}x - 1$.
Puisqu'il faut deux points, choisissons arbitrairement deux valeurs de x et calculons les valeurs de y correspondantes.
$x = 0 : y = \frac{1}{3} \times 0 - 1 = -1$ donc $C(0\,;\,-1) \in (\Delta')$.
$x = 3 : y = \frac{1}{3} \times 3 - 1 = 0$ donc $D(3\,;\,0) \in (\Delta)$.



III. Déterminer l'équation d'une droite

A. Cas n°1

Une droite parallèle à l'axe des ordonnées a pour équation $x = k$.
Si on connaît la représentation graphique de la droite, il suffit ensuite de lire graphiquement la valeur de k. Sinon, en connaissant deux points, il suffit de lire leur abscisse commune.

Exemple • Déterminer l'équation de la droite passant par les points $K(-2\,;\,3)$ et $L(-2\,;\,6)$.
Ces deux points ont la même abscisse donc la droite (KL) est parallèle à l'axe des ordonnées et a pour équation $x = -2$.

B. Cas n°2

Une droite sécante à l'axe des ordonnées à une équation de la forme $y = mx + p$. Deux points situés sur cette droite n'ont pas la même abscisse.
Lorsque l'on connaît les coordonnées de deux points de la droite, on détermine d'abord le cœfficient directeur puis on résoud une équation pour déterminer l'ordonnée à l'origine.

Propriété 3

Soient $K(x_K\,;\,y_K)$ et $L(x_L\,;\,y_L)$ deux points dans un repère tel que $x_K \neq x_L$.
Le cœfficient directeur de la droite (KL) est :

$$m = \frac{y_K - y_L}{x_K - x_L}.$$

Démonstration

$K \in (KL)$ donc $y_K = mx_K + p$. De même, puisque $L \in (KL)$ alors $y_L = mx_L + p$.

Ainsi, $\begin{aligned} y_K - y_L &= mx_K + p - (mx_L + p) \\ &= mx_K + p - mx_L - p \\ &= mx_K - mx_L \\ &= m(x_K - x_L) \end{aligned}$

Puisque $x_K \neq x_L$, alors $x_K - x_L \neq 0$ et en divisant par $x_K - x_L$, on obtient :

$$m = \frac{y_K - y_L}{x_K - x_L}.$$

□

Remarque

Lorsque l'on passe d'un point d'une droite à une autre en augmentant l'abscisse de 1*, alors la variation des ordonnées est donnée par* m.

Exemple • Déterminer l'équation de la droite (d) passant par les points $A(3\,;\,4)$ et $(5\,;\,-2)$.

Les deux points n'ont pas la même abscisse donc l'équation réduite de la droite (d) est de la forme $y = mx + p$.

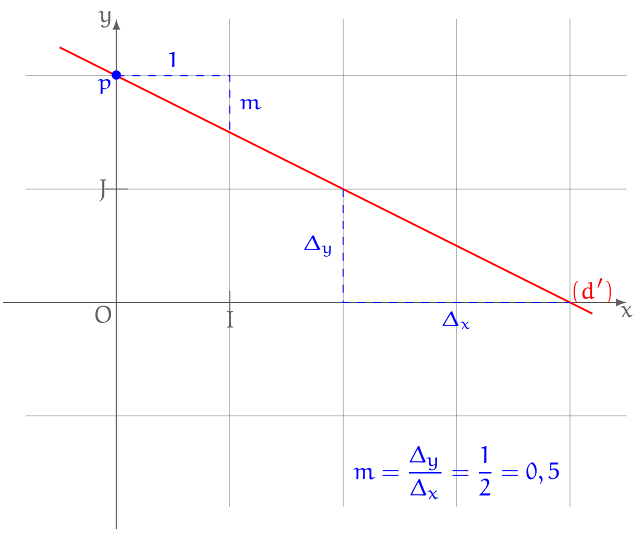
Calcul de m : $\begin{aligned} m &= \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \\ &= \frac{4-(-2)}{3-5} \\ &= \frac{6}{-2} \\ m &= -3 \end{aligned}$

Calcul de p : Puisque $A \in (d)$ alors les coordonnées de A vérifient l'équation de (d) :

$$\begin{aligned} & y_A = mx_A + p \\ \Leftrightarrow\ & 4 = -3 \times 3 + p \\ \Leftrightarrow\ & 4 = -9 + p \\ \Leftrightarrow\ & p = 4 + 9 \\ \Leftrightarrow\ & p = 13 \end{aligned}$$

La droite (d) a donc pour équation : $y = -3x + 13$.

Exemple • Déterminer l'équation de la droite (d') dont voici la représentation graphique.



La droite (d') a pour équation : $y = \frac{1}{2}x + 2$.

IV. Applications

A. Droites parallèles

Remarques

1°) *Les droites qui ont une équation de la forme $x = k$ sont toutes parallèles à l'axe des ordonnées et elles sont donc parallèles entre elle.*

2°) *Une droite d'équation $x = k$ et une droite d'équation $y = mx + p$ sont sécantes car la première est parallèle à l'axe des ordonnées et pas la suivante.*

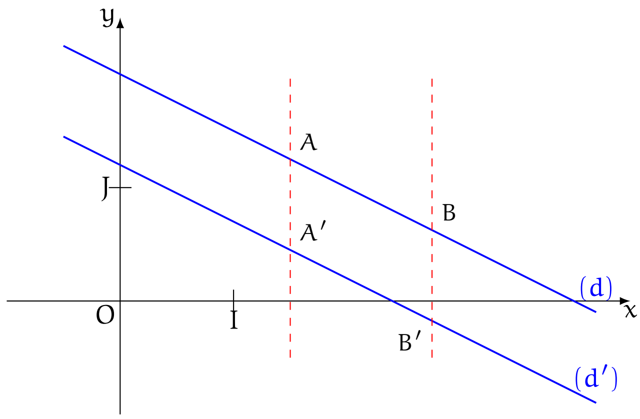
Propriété 4

Une droite (d) d'équation $y = mx + p$ et une droite (d') d'équation $y = m'x + p'$ sont parallèles si, et seulement si, elles ont le même cœfficient directeur :

$$(d)//(d') \quad \Leftrightarrow \quad m = m'$$

Démonstration

On se place dans la situation suivante : les points A et B appartient à la droite (d) et les points A' et B' appartiennent à la droite (d') tels que $(AA')//(BB')$.



$$
\begin{aligned}
& (d) \text{ et } (d') \text{ sont parallèles} \\
\Leftrightarrow\ & ABB'A' \text{ est un parallélogramme} \\
\Leftrightarrow\ & [AB'] \text{ et } [A'B] \text{ ont le même milieu} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} \dfrac{x_A + x_{B'}}{2} = \dfrac{x_{A'} + x_B}{2} \\ \dfrac{y_A + y_{B'}}{2} = \dfrac{y_{A'} + y_B}{2} \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x_A + x_{B'} = x_{A'} + x_B \\ y_A + y_{B'} = y_{A'} + y_B \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x_A - x_B = x_{A'} - x_{B'} \\ y_A - y_B = y_{A'} - y_{B'} \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_{B'} - y_{A'}}{x_{B'} - x_{A'}} \qquad (\text{équivalence car } x_A = x_{A'} \text{ et } x_B = x'_B) \\
\Leftrightarrow\ & m = m'
\end{aligned}
$$

On a bien démontré que $(d)//(d') \quad \Leftrightarrow \quad m = m'$. □

Exemple • Donner les équations réduites des droites suivantes et déterminer celles qui sont parallèles :

$(d_1) : y - 2x + 1 = 0$; $(d_2) : y + 3x - 2 = 0$; $(d_3) : 4y + 12x - 20 = 0$; $(d_4) : y + 1 = 2x$.

B. Droites sécantes

Soient (d) d'équation $y = mx + p$ et (d') d'équation $y = m'x + p'$. D'après la propriété précédente, deux droites sont sécantes lorsque $m \neq m'$. Dans ce cas, il existe un point d'intersection A et les coordonnées de A vérifient les équations des deux droites en même temps. On a donc le système suivant dont le couple $(x\,;\,y)$ est l'inconnue qui correspond aux coordonnées du point A :

$$\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$$

Exemple • Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites suivantes :

$$(\Delta_1) : y = -2x + 3 \quad ; \quad (\Delta_2) : y = \frac{1}{3}x - 1$$

C. Alignement de points

Propriété 5

On considère trois points A, B et C.

1°) Si les trois points ont la même abscisse k, alors ils sont alignés.

2°) Sinon, les points sont alignés si et seulement si (AB) et (AC) ont le même cœfficient directeur.

Démonstration

Dans le premier cas, les points appartiennent à la même droite d'équation $x = k$ donc ils sont alignés.
Dans le second cas, dire que (AB) et (AC) ont le même cœfficient directeur est équivalent à dire que ces droites sont parallèles ce qui est équivalent à dire qu'elles sont confondues (puisqu'elles ont un point commun) ce qui équivaut à dire qu'il s'agit de la même droite et donc A, B et C sont alignés. $\square$

Exemple • Dans chacun des cas, les points A, B et C sont-ils alignés ?

$$A(6\,;\,0) \quad ; \quad B(0\,;\,4) \quad ; \quad C(3\,;\,2)$$

$$A(1\,;\,3) \quad ; \quad B(2\,;\,9) \quad ; \quad C(4\,;\,10)$$

5 Variations de fonctions

I. Étude graphique

On considère une fonction f définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$ ainsi qu'un intervalle I inclus dans $\mathscr{D}_f$.

Dire que la fonction f est croissante sur I signifie que lorsque la valeur de la variable augmente sur I alors l'image augmente également. Graphiquement, la courbe représentative de f « monte ».

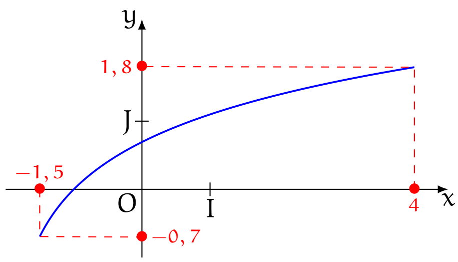
Définition 1

Une fonction f est dite **croissante** sur un intervalle I lorsque, **pour tous** les réels x_1 et x_2 :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

Autrement dit, deux nombres et leur image sont classés dans le **même** ordre.

Exemple • Fonction croissante sur l'intervalle $[-1,5\,;4]$.



x	−1,5		4
Variation de $f(x)$	−0,7	↗	1,8

Tableau de variations

x	−1,5		−1		4
Signe de $f(x)$		−	0	+	

Tableau de signes

Remarque

*Lorsque $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, on dit que la fonction est **strictement** croissante.*

Dire que la fonction f est décroissante sur I signifie que lorsque la valeur de la variable augmente sur I alors l'image diminue. Graphiquement, la courbe représentative de f « descend ».

Définition 2

Une fonction f est dite **décroissante** sur un intervalle I lorsque, **pour tous** les réels x_1 et x_2 :

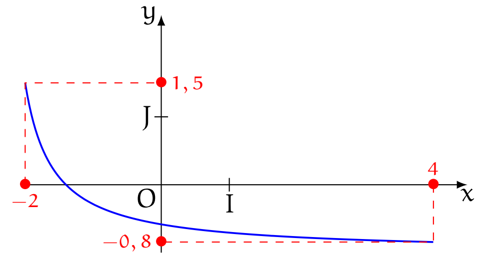
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

Autrement dit, deux nombres et leur image sont classés dans un ordre **contraire**.

Remarque

*Lorsque $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, on dit que la fonction est **strictement** décroissante.*

Exemple • Fonction décroissante sur l'intervalle $[-2\,;4]$.



x	-2		4
Variation de $f(x)$	1,5	↘	−0,8

Tableau de variations

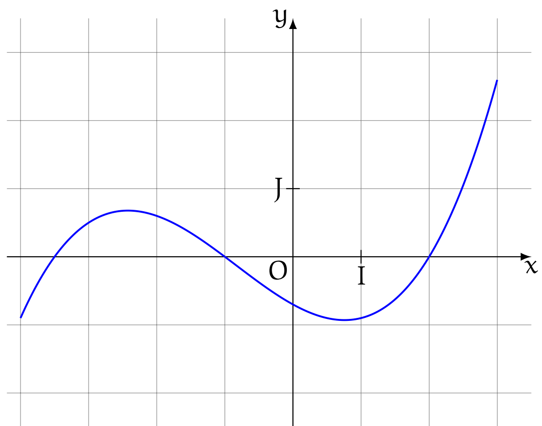
x	-2		$-1{,}4$		4
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

Tableau de signes

Remarque

Sur tout son ensemble de définition, les variations d'une fonction f *peuvent changer.*

Exemple • Fonction définie sur l'intervalle $[-4\,;3]$.



x	4				3
Variation de $f(x)$		↗	↘	↗	

Tableau de variations

x	4		$-3,5$		-1		2		3
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Tableau de signes

Exemple • On donne les variations et le signe d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;4]$. Dessiner une représentation graphique qui pourrait correspondre à ce tableau :

x	-3		$-2,5$		-1		$-0,25$		1		4
Variations de $f(x)$	2	↘		↘	−2	↗		↗	3	↘	1
Signes de $f(x)$		$+$	0		$-$		0		$+$		

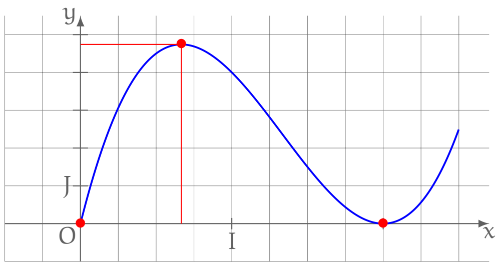
II. Extremum

Graphiquement, les extrema sont les points les plus hauts d'une courbe ou les plus bas. Ce sont ceux dont l'**ordonnée** est donc la plus grande ou la plus petite. On s'intéresse dans ce cas aux images par la fonction représentée.

Définition 3

On dit que f admet un **maximum** en a sur $\mathscr{D}_f$ lorsque, pour tout réel $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) \leqslant f(a)$.
On dit que f admet un **minimum** en b sur $\mathscr{D}_f$ lorsque, pour tout réel $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) \geqslant f(a)$.

Exemple • Sur la figure ci-dessous, on a $\min\limits_{\mathscr{D}_f} f = 0$ et $\max\limits_{\mathscr{D}_f} f \approx 4,8$.
Autrement dit, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) \geqslant 0$ et $f(x) \leqslant 4,8$.



On remarque que le minimum est atteint deux fois : pour $x = 0$ et pour $x = 2$.

III. Résolution graphique d'une inéquation

On appelle $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g.

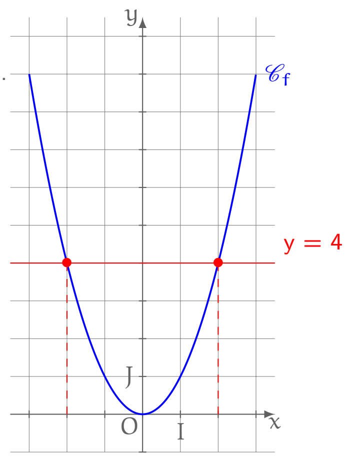
A. Inéquation du type $f(x) < k$

Propriété 1

Soit $k \in \mathbb{R}$. Les solutions de l'inéquation $f(x) < k$ sont les **abscisses** des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés au-dessous de la droite d'équation $y = k$.

Exemple • Soit $\mathscr{D}_f = [-3\,;3]$. Donner l'ensemble des solutions des équations $f(x) < 4$ puis $f(x) \geqslant 4$.

$f(x) < 4 \Leftrightarrow x \in \,]-2\,;2[$.
$f(x) \geqslant 4 \Leftrightarrow x \in [-3\,;-2] \cup [2\,;3]$.

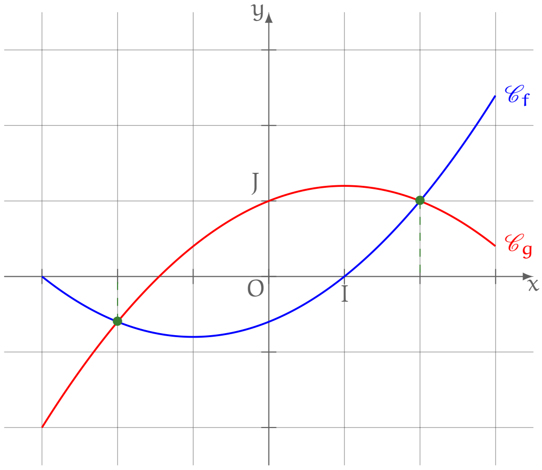


B. Inéquation du type $f(x) < g(x)$

Propriété 2

Les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ sont les **abscisses** des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés au-dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$.

Exemple • On considère deux fonctions f et g définies sur $[-3\,;3]$ dont voici les représentations graphiques :



Ici, $f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow x \in [-2\,;2]$ et $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in [-3\,;-2[\cup]2\,;3]$.

6 Fonctions de référence I
Fonctions affines

I. Variation d'une fonction affine

Définition 1

On appelle **fonction affine** toute fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax + b$$

où a et b sont des nombres réels.

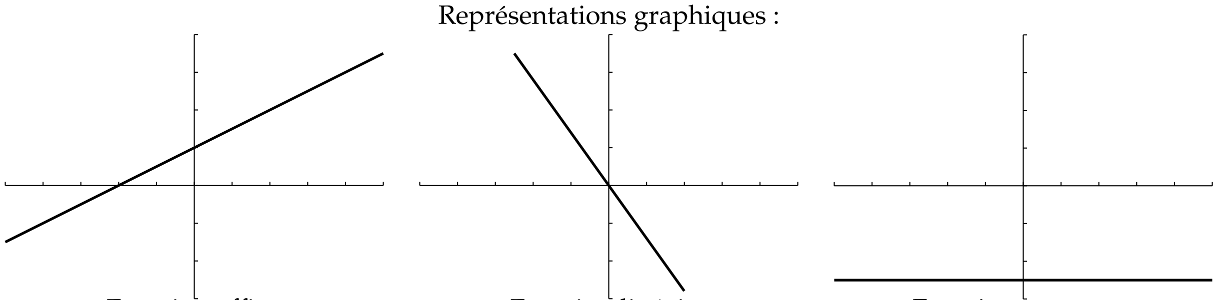
Propriété 1

Sur un repère orthonormé, la fonction $f: x \mapsto ax + b$ est représentée par la droite d'équation $y = ax + b$.

Remarques

- *Si $b = 0$ ($f(x) = ax$), on obtient alors une* ***fonction linéaire****. Sa représentation graphique est une droite passant par l'origine. Les fonctions linéaires représentent des situations de proportionnalité.*
- *Si $a = 0$ ($f(x) = b$), on obtient une fonction* ***constante*** *dont la représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisses.*

Représentations graphiques :



Fonction affine — Fonction linéaire — Fonction constante

Exemple • Sur un site internet, on peut acheter des blu-ray à 15 € l'unité. Les frais de port sont de 5 €, quel que soit le nombre de blu-ray acheté.

1°) Combien doit-on payer pour 4 blu-ray achetés ?

2°) Quelle est l'expression de la fonction P donnant le prix total en fonction du nombre n de blu-ray acheté ?

3°) Le prix total est-il proportionnel au nombre de blu-ray acheté ?

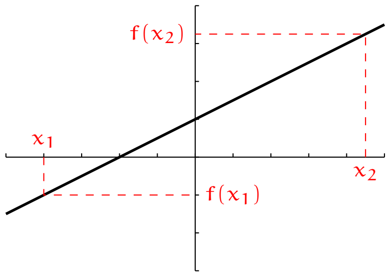
4°) La fonction P est-elle une fonction affine ? Pourquoi ?

On suppose pour la suite $a \neq 0$.

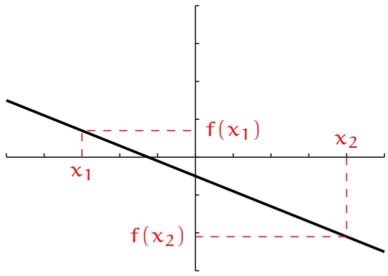
Théorème 1

Soit f la fonction affine définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

- Si $a > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, alors la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.



$a > 0$



$a < 0$

Démonstration

On considère une fonction affine $f\colon x \mapsto ax + b$ et soient x_1 et x_2 deux nombres réels.

1°) Soit $a > 0$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow ax_1 < ax_2 \Rightarrow ax_1 + b < ax_2 + b \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Ainsi, lorsque $a > 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2°) Soit $a < 0$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow ax_1 > ax_2 \Rightarrow ax_1 + b > ax_2 + b \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Ainsi, lorsque $a < 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

$\square$

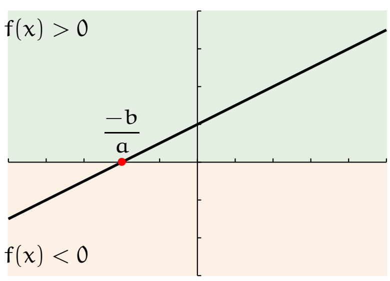
II. Signe d'une fonction affine

Théorème 2

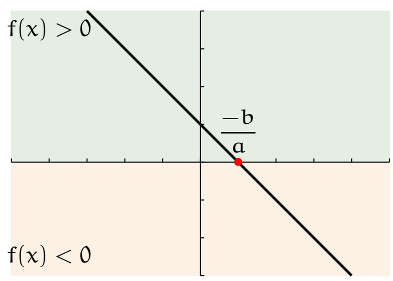
On rappelle que $a \in \mathbb{R}^*$.
Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

De plus, sur $\left]-\infty\,; -\frac{b}{a}\right[$, f est de signe constant puis change de signe sur $\left]-\frac{b}{a}\,; +\infty\right[$.



$a > 0$



$a < 0$

Démonstration

En effet, $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$.
Le changement de signe est lié au fait que f est soit strictement croissante, soit strictement décroissante.

$\square$

III. Tableau de variation et tableau de signe

$f(x) = ax + b$ avec $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de f		$-$	0	$+$	
Variation de f	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

$f(x) = ax + b$ avec $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de f		$+$	0	$-$	
Variation de f	$+\infty$		$\searrow$		$-\infty$

Index des notions définies

* * *

Écrit par Philippe De Sousa.

Dernière modification le 26 décembre 2013.