1re S.T.I.2D.	Lundi 7 avril 2 014	**Bilan annuel**
	CORRECTION	

Exercice 1 : **(10 points – Métropole - La Réunion - 11 septembre 2012)**

1°) Il y a 32 femmes sur un total de 48 personnes donc : $p(\text{F}) = \dfrac{32}{48} = \dfrac{2}{3}$.

2°) Pour calculer $p(\text{E})$, il faut déterminer le nombre de personnes inscrites dans chaque niveau de difficulté :

- Débutants : 5 femmes et 2 hommes donc 7 randonneurs.
- Moyens : 25% de 48 donne $\dfrac{25}{100} \times 48 = 12$ randonneurs (6 femmes et 6 hommes).
- Experts : $48 - 7 - 12 = 29$ randonneurs.

Finalement : $p(\text{E}) = \dfrac{29}{48}$.

3°) $\text{H} \cap \text{E}$ est l'événement « La randonneur choisi est un homme **et** il a choisi le niveau élevé ».
On sait que 2 hommes ont choisi le niveau débutant et 6 hommes ont choisi le niveau moyen donc 8 hommes ont choisi le niveau élevé donc : $p(\text{H} \cap \text{E}) = \dfrac{8}{48} = \dfrac{1}{6}$.

4°) « Le randonneur est une femme **ou** choisit l'itinéraire débutant » se note $\text{F} \cup \text{D}$.
On utilise la formule qui est rappelée : $p(\text{F}) + p(\text{D}) = p(\text{F}\cup\text{D}) + p(\text{F}\cap\text{D})$. On sait que $p(\text{F}) = \dfrac{32}{48}$ car il y a 32 femmes, $p(\text{D}) = \dfrac{7}{48}$ car 7 randonneurs ont choisi le niveau débutant et puisque 5 femmes ont choisi le niveau débutant $p(\text{F} \cap \text{D}) = \dfrac{5}{48}$. Au final :

$$p(\text{F} \cup \text{D}) = p(\text{F}) + p(\text{D}) - p(\text{F} \cap \text{D}) = \frac{32+7-5}{48} = \frac{34}{48} = \frac{17}{24}.$$

5°) Dans cette question, on choisit au hasard un randonneur parmi les hommes. L'effectif total est donc ici de 16 hommes. Puisque 2 hommes ont choisi le niveau débutant et que 6 hommes ont choisi le niveau moyen, alors 8 hommes ont choisi le niveau élevé. Donc, la probabilité que le randonneur ait choisi le niveau élevé **sachant que c'est un homme** est égal à $\dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2}$.

6°) 21 femmes ont choisi le niveau élevé, soit environ 65,6% des femmes ($21 \div 32 = 0{,}656\,25$).
D'après la question précédente, 50% des hommes ont choisi le niveau élevé.
On en déduit que le niveau des femmes de ce groupe est plus élevé.

*

Exercice 2 : **(8 + 7 = 15 points – Métropole - La Réunion - 11 septembre 2012 + Antilles - Guyane - 20 juin 2012)**

Partie A

1°) $x^2 = f(x)$ donc $(x-1)^2 = f(x-1)$. Ainsi, $g(x) = f(x-1) - 4$. D'après le cours, $\mathscr{C}_g$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$.

2°) Le sommet de $\mathscr{C}_f$ est le point de coordonnées $(0\,;0)$. Par translation, le sommet de $\mathscr{C}_g$ a donc pour coordonnées $(1\,;-4)$.

3°) Tableau de variations de g :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variations de g		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

4°) Pour déterminer le signe du trinôme g, on peut trouver les racines de g.

$$g(x) = (x-1)^2 - 4 = x^2 - 2x + 1 - 4 = x^2 - 2x - 3.$$

Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = 1$, $b = -2$ et $c = -3$. On a alors :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16.$$

Puisque $\Delta > 0$ alors g a deux racines :

$$\begin{array}{rrcl@{\quad}c@{\quad}rcl}
 & x_1 & = & \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} & \text{et} & x_2 & = & \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\
\Leftrightarrow & x_1 & = & \dfrac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times 1} & \text{et} & x_2 & = & \dfrac{-(-2)+\sqrt{(}16)}{2\times 1} \\
\Leftrightarrow & x_1 & = & \dfrac{2-4}{2} & \text{et} & x_2 & = & \dfrac{2+4}{2} \\
\Leftrightarrow & x_1 & = & -1 & \text{et} & x_2 & = & 3
\end{array}$$

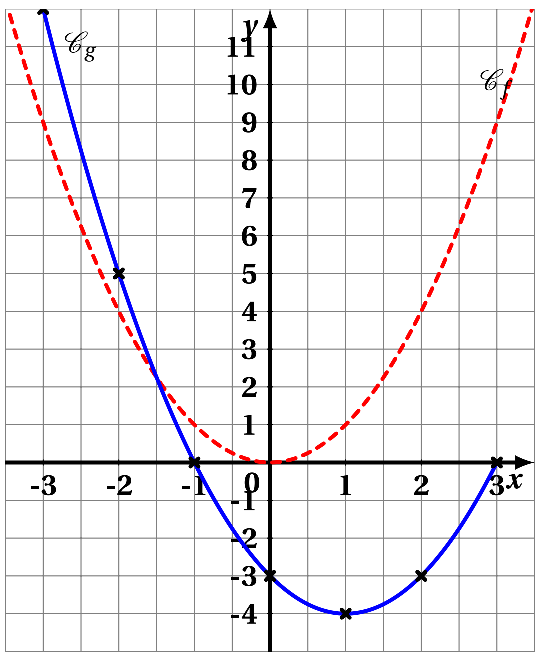
On en déduit alors le tableau de signes de g :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Signe de g		$+$	0	$-$	0	$+$	

5°) La calculatrice nous permet de compléter le tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	12	5	0	-3	-4	-3	0

6°) On place les points du tableau de valeurs sur le repère et on les relie par une courbe.



Partie B

1°) $t(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$ donc le cœfficient c est l'image de 0. Graphiquement, on lit $c = 3$.

2°) D'après l'énoncé, le point $\mathrm{S}\left(\frac{1}{2}\,;4\right)$ est le sommet de la parabole $\mathscr{P}$.

L'abscisse du sommet d'une parabole est égale à $\dfrac{-b}{2a}$ donc :

$$\frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -b = \frac{1}{2} \times 2a \quad \Leftrightarrow \quad -b = a \quad \Leftrightarrow \quad a + b = 0.$$

3°) $t(\frac{1}{2}) = 4$ donc $a \times (\frac{1}{2})^2 + b \times \frac{1}{2} + 3 = 4$.

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{2} = 4 - 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+2b}{4} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a + 2b = 4.$$

4°)

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 0 \\ a+2b & = & 4 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -b \\ -b+2b & = & 4 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -4 \\ b & = & 4 \end{array}\right.$$

Ainsi, $t(x) = -4x^2 + 4x + 3$.

5°) Le discriminant de t est $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = -4$, $b = 4$ et $c = 3$. On a alors :

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-4) \times 3 = 16 + 48 = 64.$$

Puisque $\Delta > 0$ alors t a deux racines :

$$\begin{array}{rrcl@{\quad}c@{\quad}rcl} & x_1 & = & \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} & \text{et} & x_2 & = & \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Leftrightarrow & x_1 & = & \dfrac{-4-\sqrt{64}}{2\times(-4)} & \text{et} & x_2 & = & \dfrac{-4+\sqrt{(64)}}{2\times(-4)} \\ \Leftrightarrow & x_1 & = & \dfrac{-4-8}{-8} & \text{et} & x_2 & = & \dfrac{-4+8}{-8} \\ \Leftrightarrow & x_1 & = & \dfrac{-12}{-8} = \dfrac{3}{2} & \text{et} & x_2 & = & \dfrac{4}{-8} = \dfrac{-1}{2} \end{array}$$

*

Exercice 3 : **(7 + 8 = 15 points – Antilles - Guyane - 19 juin 2013)**

Partie A

1°) La solution de l'équation $(2-\mathrm{i})z = 2 - 6\,\mathrm{i}$ est le nombre z_1 tel que :

$$z_1 = \frac{2-6\,\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \frac{(2-6\,\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})} = \frac{10-10\,\mathrm{i}}{5} = 2 - 2\,\mathrm{i}.$$

2°) On calcule tout d'abord le module de z_1 :

$$|z_1| = |2-2\,\mathrm{i}| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Puis on factorise par $|z_1|$ pour obtenir :

$$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{2\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)$$

En notant $\theta = \arg(z_1)$, on en déduit que :

$$\left.\begin{array}{rcl} \cos(\theta) & = & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) & = & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$$

Ainsi, $z_1 = \left[2\sqrt{2}\,; -\dfrac{\pi}{4}\right]$.

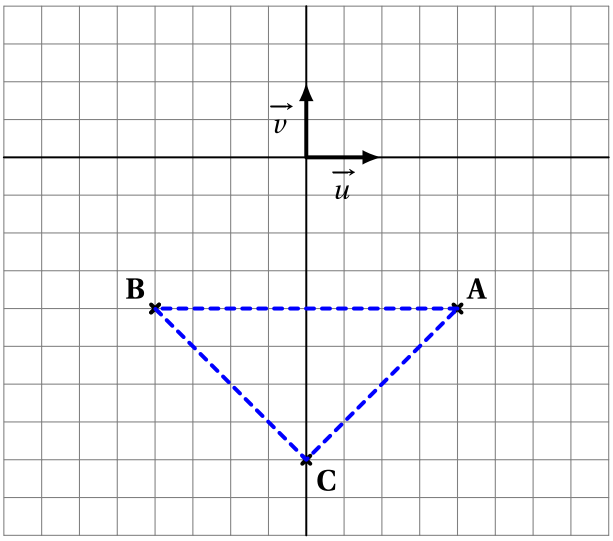
3°) $z_2 = -\mathrm{i} \times z_1 = -\mathrm{i}(2-2\,\mathrm{i}) = -2\,\mathrm{i} + 2\,\mathrm{i}^2 = -2-2\,\mathrm{i}$.
Pour la forme trigonométrique, on réalise les mêmes calculs que pour z_1 en faisant attention aux signes et on trouve $|z_2| = 2\sqrt{2}$ et :

$$\left.\begin{array}{rcl} \cos(\theta) & = & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) & = & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \theta = -\frac{3\pi}{4}$$

Ainsi, $z_2 = \left[2\sqrt{2}\,; -\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

Partie B

1°) On doit faire attention à l'unité définie par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



2°) $z_3 = z_{\overrightarrow{CA}} = z_A - z_C = 2-2\,\mathrm{i} - (-4\,\mathrm{i}) = 2+2\,\mathrm{i}$.
$z_4 = z_{\overrightarrow{CB}} = z_B - z_C = -2-2\,\mathrm{i} - (-4\,\mathrm{i}) = -2+2\,\mathrm{i}$.

3°) Les affixes des vecteurs nous permettent de connaître leurs coordonnées donc :

$$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}.$$

Donc : $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = xx' + yy' = 2\times(-2) + 2\times 2 = -4+4 = 0$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux donc $(CA) \perp (CB)$.

4°) $\left\|\overrightarrow{CA}\right\| = |z_3| = 2\sqrt{2}$ et $\left\|\overrightarrow{CB}\right\| = |z_4| = 2\sqrt{2}$. On en déduit que les longueurs AC et CB sont égales.

5°) D'après les deux questions précédentes, on en déduit que le triangle ABC est **rectangle et isocèle en** C.