13 Vecteurs

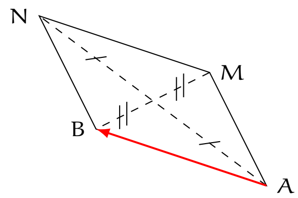
Géométrie

I. Vecteur et représentants

A. Translation

Définition 1

Soit A et B deux points donnés.
La **translation** qui transforme le point A en B est la transformation géométrique qui, à tout point M, associe l'unique point N tel que les segments [AN] et [BM] ont le même milieu ; autrement dit, tel que le quadrilatère ABNM est un parallélogramme **(attention à l'ordre des lettres !)**.



Remarque

Lorsque les points A, B et M sont alignés, le quadrilatère ABNM obtenu est un parallélogramme plat. Les segments [AN] et [BM] ont toujours le même milieu.

Définition 2

La transformation qui transforme A en B est appelée translation de **vecteur** $\overrightarrow{AB}$.
On la note souvent $t_{\overrightarrow{AB}}$.

B. Représentant d'un vecteur

Définition 3

D'après la définition 1, $t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{MN}}$ donc on dira que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont égaux.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ possède trois caractéristiques :

sa direction : correspond à la direction de la droite (AB) ; autrement dit, la direction représente l'*inclinaison* du vecteur ;

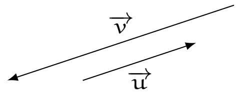
son sens : correspond au sens de *déplacement* de A vers B donné par la translation qui transforme A en B. Sur un dessin, on l'indique par une flèche.

sa norme : correspond à la longueur du segment [AB], notée AB ou bien $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

Exemple • Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont la même direction et la même norme. En revanche, ils sont de sens contraire. Ils ne sont donc pas égaux. On dit qu'ils sont **opposés**.

Définition 4

Deux vecteurs qui ont la même direction sont appelés des vecteurs **colinéaires**.



C. Égalité de vecteurs

Propriété 1 (admise)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$ $\Leftrightarrow$ N est l'image de M par la translation qui transforme A en B
$\Leftrightarrow$ [AN] et [BM] ont le même milieu
$\Leftrightarrow$ ABNM est un parallélogramme
$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ ont le même sens, la même direction et la même norme.

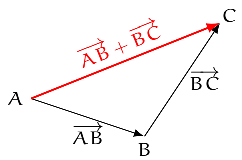
Définition 5

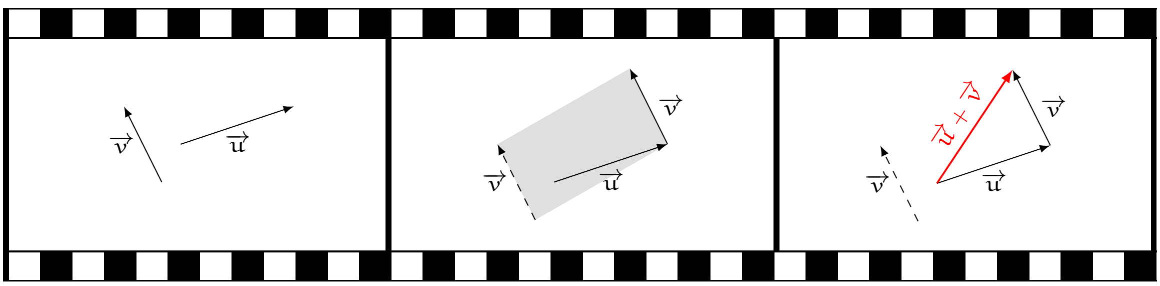
Les vecteurs qui ont les mêmes caractéristiques que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont appelés des **représentants** du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Il en existe une infinité.

II. Somme de vecteurs

Définition 6

Soient A, B et C trois points.
La **somme** de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ est le vecteur associé à la translation obtenue en appliquant successivement $t_{\overrightarrow{AB}}$ et $t_{\overrightarrow{BC}}$.
On écrit alors la **relation de Chasles** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.





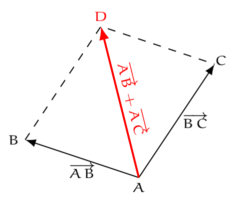
Étape 1 : On veut représenter $\vec{u} + \vec{v}$.

Étape 2 : On dessine un représentant de $\vec{v}$ à l'extrémité de $\vec{u}$.

Étape 3 : On utilise la relation de Chasles.

Propriété 2 (en utilisant la relation de Chasles)

On souhaite ajouter deux vecteurs de même origine.
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ tel que ABDC est un parallélogramme.



III. Coordonnées dans un repère

Définition 7

Les **coordonnées d'un vecteur** $\vec{u}$ dans un repère $(O\,;\,I,\,J)$sont les coordonnées de l'unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

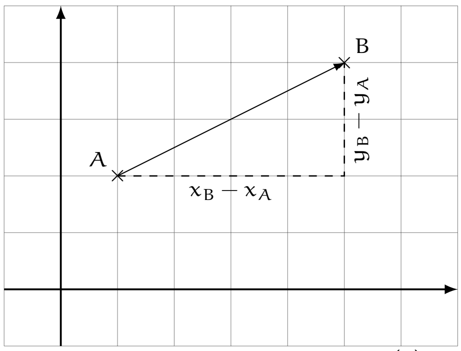
Propriété 3

Dans un repère, on considère deux points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$. Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $x_{\overrightarrow{AB}}$ et $y_{\overrightarrow{AB}}$ tels que :

$$x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A \quad \text{et} \quad y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A.$$

Remarque

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ correspond aux déplacements horizontal et vertical pour se rendre de A vers B.



Ici, $A(1\,;\,2)$ et $B(5\,;\,4)$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

Propriété 4

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x_{\vec{u}}\\y_{\vec{u}}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x_{\vec{v}}\\y_{\vec{v}}\end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère. Alors :

$$\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix}x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}}\\y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad k\vec{u}\begin{pmatrix}kx_{\vec{u}}\\ky_{\vec{u}}\end{pmatrix}.$$

Propriété 5

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$
$\Leftrightarrow$ $x_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} - y_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}} = 0$.

Exemple • $A(1\,;\,1)$ $B(4\,;\,2)$ $C(4\,;\,1)$ $D(10\,;\,3)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$.

$3 \times 2 - 1 \times 6 = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

On remarque que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$.