

23.2 Contraintes mécaniques dans les bobines de production de champs magnétiques intenses

La génération de champs magnétiques pulsés très intenses par des bobines conductrices est limitée par les forces de Lorentz qui s'exercent sur les matériaux transportant le courant et engendrent des contraintes mécaniques pouvant conduire à la déformation plastique voire à la rupture des bobines.

Le champ pulsé produit au Laboratoire National des Champs Magnétiques Intenses de Toulouse⁴ a la particularité de présenter une longue durée (de quelques μs à 100 ms avec une durée minimale de 20 minutes à 2 heures entre deux impulsions) et des vibrations négligeables permettant des mesures de grande précision. Dans ce but, le laboratoire a fait le choix original de bobines compactes en fil de cuivre renforcées par une frette métallique externe.

Des champs magnétiques au-delà de 100 Tesla ne peuvent être créés⁵ que par une réduction drastique de la durée d'impulsion. Inévitablement, ils entraînent aussi la destruction de la bobine.

Ces champs magnétiques sont utilisés pour la réalisation d'expériences de physique, chimie, biologie et médecine. La bobine doit donc réserver un volume expérimental suffisant permettant d'accueillir les échantillons, des cryostats et autres équipements qui doivent rester intacts après l'expérience afin de permettre leur réutilisation. Les expériences réalisées sous champ magnétique concernent les mesures de magnétisation des matériaux, conductivité thermique, thermo-électricité (effets Seebeck et Nernst), spectroscopie ultrasonore, spectroscopie Raman, supraconductivité et résonance magnétique nucléaire, par exemple.

Le générateur Megagauss du LNCMI est constitué d'un banc de condensateurs modulaire de 200 kJ qui peut être chargé jusqu'à 60 kV. Son champ record est de 331 T, obtenu dans une bobine mono-spire de 3 mm de diamètre. L'accès aux basses températures dépend du diamètre de la bobine : des expériences à température de l'hélium liquide demandent des bobines d'au moins 12 mm, capables de produire des champs de près de 190 T.

L'objectif du problème est d'étudier, dans l'hypothèse des petites perturbations, l'équilibre d'un élément de bobine de cuivre utilisé pour la production de champs magnétiques intenses. La bobine de cuivre dont la portion étudiée est représentée sur la figure 23.9 est considérée comme un anneau parcouru par un courant électrique de densité j de la forme :

$$\underline{j} = j \underline{e}_\theta, \quad j = 1 \times 10^9 \text{ A m}^{-2} \quad (23.25)$$

dans la base de coordonnées cylindriques indiquée sur la figure 23.9 (problème axisymétrique). Remarquer la densité de courant colossale égale à 1000 A mm^{-2} . Ce courant dans la bobine induit un champ magnétique

$$\underline{B} = B \underline{e}_z, \quad B = 100 \text{ T} \quad (23.26)$$

Le champ B est supposé uniforme et constant dans le domaine $r \leq r_e$. En réalité, il varie linéairement dans la largeur et cette caractéristique pourrait aisément être prise en compte dans une seconde analyse, comme dans les travaux de (Witters and Herlach, 1983). Seul le couplage électro-magnéto-mécanique direct sera étudié. Les modifications en retour du courant électrique et du champ magnétique en raison du changement de forme de la bobine seront ignorées.

La première partie du problème est consacrée au comportement de la bobine de cuivre seule. Une frette en acier est ajoutée dans la deuxième partie pour renforcer la structure.

Le problème est traité dans le contexte des contraintes planes excluant les contraintes selon z et toute dépendance des contraintes et déformations vis-à-vis de la variable z . La résolution se fait dans le contexte des petites perturbations. Les corps matériels sont initialement dans leur état naturel et

4. LNCMI, voir le site lncmi.cnrs.fr, et plus particulièrement la page www.toulouse.lncmi.cnrs.fr/spip.php?rubrique10&lang=fr consacrée au type de bobines étudiées dans ce problème.

5. On parle de champ Megagauss : 1 Megagauss = 100 T.

présentent un comportement élastique linéarisé. Les efforts de gravité et la pression atmosphérique sont négligés. L'élévation de température due à l'effet Joule dans la bobine n'est pas prise en compte. Les contraintes d'origine thermique ne seront donc pas considérées.

Le cuivre est traité comme un matériau homogène et isotrope présentant un comportement élastique linéarisé. Les caractéristiques élastiques du cuivre sont : $E^{\text{Cu}} = 120 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$.

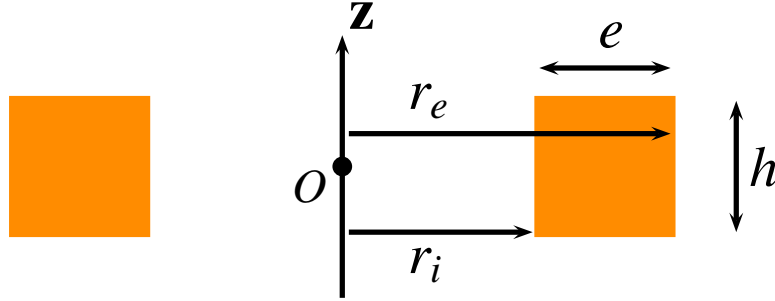


FIGURE 23.9 – Section d'un élément de bobine pour l'induction d'un champ magnétique.

Les lecteurs avides de connaître plus amplement les couplages entre mécanique des milieux continus et électromagnétisme sont invités à consulter les ouvrages (Maugin, 1988; Eringen and Maugin, 1990) et plus récemment (Dorfmann and Ogden, 2014).

23.2.1 Forces de volume d'origine électromagnétique

En régime stationnaire, à l'équilibre, la bobine est le siège de contraintes engendrées par la force volumique de Lorentz, $\rho \underline{f}$, selon l'équation :

$$\text{div } \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = 0 \quad (23.27)$$

En physique des milieux continus, la force volumique de Lorentz prend la forme suivante :

$$\rho \underline{f} = \underline{j} \wedge \underline{B} \quad (23.28)$$

Dans cette première partie du problème, on étudie la réponse mécanique de l'élément de bobine de cuivre seul soumis aux forces de Lorentz. Les surfaces externes de la bobine de cuivre sont libres de tout effort mécanique.

Expression de la densité volumique de force de Lorentz

Vérifier que le produit $\underline{j} \wedge \underline{B}$ a bien la dimension physique d'une force par unité de volume, à savoir Nm^{-3} .

Substituer les expressions (23.25) et (23.26) dans la définition (23.28) de la force de Lorentz. Indiquer l'orientation et l'intensité de la force de Lorentz obtenues. Commenter.

Donner la valeur numérique de l'intensité de la force de Lorentz avec les valeurs données précédemment pour j et B .

La force de Lorentz qui s'applique à une charge q mesurée en Coulomb (C) a pour expression et unité physique :

$$q \underline{v} \wedge \underline{B} \equiv \text{N} \equiv \text{Cs}^{-1} \text{mT} \equiv \text{ATm}$$

où l'unité A (Ampère) n'est autre que Cs^{-1} . Il s'ensuit que

$$jB \equiv \text{Am}^{-2} \text{T} \equiv \text{Nm}^{-3}$$

On calcule enfin

$$\rho \underline{f} = \underline{j} \wedge \underline{B} = jB \underline{e}_\theta \wedge \underline{e}_z = jB \underline{e}_r$$

Le champ de force de Lorentz est donc radial et tend à élargir l'anneau (car $jB > 0$), voire à le faire éclater. On voit l'effet d'un tel champ sur le gonflement de la bobine sur la figure 23.10.

L'intensité de la force de Lorentz est de $1 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-3}$.

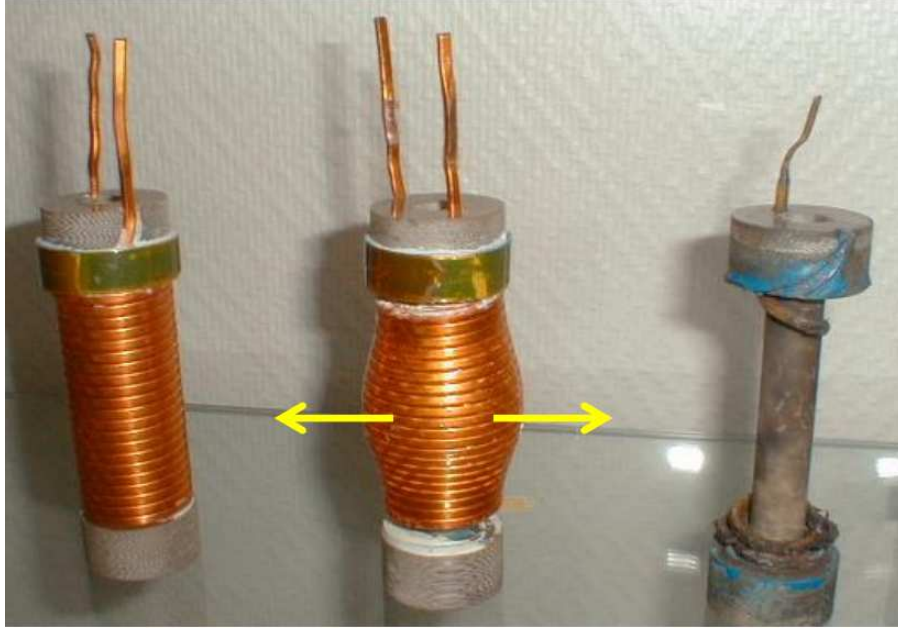


FIGURE 23.10 – Eclatement d’une bobine pour la production de champs magnétiques intenses : état initial (à gauche), déformation de la bobine (au milieu), reliquat du montage après éclatement (à droite), (source LCNMI).

Forme et équilibre des contraintes

Le tenseur des contraintes est supposé revêtir la forme suivante :

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23.29)$$

Les composantes σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ sont recherchées comme des fonctions de la seule variable r .

Exprimer alors les équations d’équilibre en fonction des composantes σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ et des grandeurs imposées j et B ?

L’expression de la divergence d’un champ de tenseurs d’ordre 2 en coordonnées cylindriques conduit à l’équation suivante portant sur les composantes de contraintes :

$$\sigma'_{rr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + jB = 0 \quad (23.30)$$

où σ'_{rr} désigne la dérivée par rapport à r de σ_{rr} .

Une relation supplémentaire liant les contraintes

Dans le cadre de l’élasticité isotrope linéarisée pour un problème axisymétrique, établir la relation suivante :

$$(1 + \nu)(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = r(\sigma'_{\theta\theta} - \nu\sigma'_{rr}) \quad (23.31)$$

où σ'_{rr} (resp. $\sigma'_{\theta\theta}$) désigne la dérivée par rapport à r de σ_{rr} (resp. $\sigma_{\theta\theta}$).

En coordonnées cylindriques, une équation de compatibilité est

$$\varepsilon_{rr} = u'_r = (r\varepsilon_{\theta\theta})' = \varepsilon_{\theta\theta} + r\varepsilon'_{\theta\theta} \quad (23.32)$$

où u_r est la composante radiale de déplacement. Les déformations sont liées aux contraintes par la loi d’élasticité isotrope :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E} - \frac{\nu\sigma_{\theta\theta}}{E}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} - \frac{\nu\sigma_{rr}}{E}$$

Ces relations peuvent alors être substituées dans (23.32) ce qui conduit à (23.31). En combinant les relations (23.30) et (23.31), on obtient l'équation

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} + r\sigma'_{\theta\theta} + \nu jBr$$

mentionnée dans l'article de (Witters and Herlach, 1983), établie dans le cas plus général de l'élasticité anisotrope.

Détermination des contraintes radiales

Déduire des deux équations précédentes une équation différentielle portant sur la contrainte radiale, σ_{rr} .

Résoudre cette équation et montrer que

$$\sigma_{rr}(r) = -\alpha r + C - \frac{A}{r^2} \quad (23.33)$$

On exprimera α en fonction de j, B et des caractéristiques élastiques du matériau. A et C , quant à eux, sont des constantes d'intégration déterminées dans la suite.

L'équation d'équilibre (23.30) est utilisée pour exprimer la contrainte orthoradiale et sa dérivée :

$$\sigma_{\theta\theta} = r\sigma'_{rr} + \sigma_{rr} + rjB, \quad \sigma'_{\theta\theta} = 2\sigma'_{rr} + r\sigma''_{rr} + jB \quad (23.34)$$

afin de les substituer dans la relation (23.31) et obtenir l'équation différentielle recherchée pour la contrainte radiale :

$$r\sigma''_{rr} + 3\sigma'_{rr} + (2 + \nu)jB = 0 \quad (23.35)$$

Cette équation admet la solution particulière $-(2 + \nu)jBr/3$ tandis que la solution homogène est de la forme $-A/r^2 + C$. On obtient ainsi la solution complète (23.33) qui inclut deux constantes d'intégration A et C , et la constante

$$\alpha = \frac{2 + \nu}{3}jB \quad (23.36)$$

Détermination des contraintes orthoradiales

Montrer que les contraintes orthoradiales sont de la forme

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = -\beta r + C + \frac{A}{r^2} \quad (23.37)$$

On exprimera β en fonction de j, B et des caractéristiques élastiques du matériau.

La composante orthoradiale des contraintes s'obtient à partir de la solution précédente et de l'équation (23.34). On trouve

$$\beta = \frac{1 + 2\nu}{3}jB \quad (23.38)$$

Détermination complète des contraintes

Obtenir finalement les constantes d'intégration A et C .

Donner aussi le signe de la contrainte σ_{rr} lorsque $jB > 0$.

Pour cela, il faut faire appel aux conditions aux limites du problème, à savoir le fait que le vecteur-contrainte s'annule sur les faces $r = r_i$ et $r = r_e$, ce qui implique que

$$-\alpha r_i - A/r_i^2 + C = 0, \quad -\alpha r_e - A/r_e^2 + C = 0 \quad (23.39)$$

d'où les relations :

$$A = \alpha \frac{r_i^2 r_e^2}{r_i + r_e}, \quad C = \alpha \frac{r_i^2 + r_e^2 + r_i r_e}{r_i + r_e} \quad (23.40)$$

Il faut remarquer que le polynôme $r^2 \sigma_{rr}$ s'annule en r_i et en r_e . Ce polynôme de degré 3 se met donc sous la forme

$$r^2 \sigma_{rr} = -\alpha (r - r_i)(r - r_e) \left(r - \frac{A}{\alpha r_i r_e} \right) = -\alpha (r - r_i)(r - r_e) \left(r - \frac{r_i r_e}{r_i + r_e} \right)$$

Comme $r_i \geq r_i r_e / (r_i + r_e)$, il s'ensuit que $\sigma_{rr} \geq 0$ pour $r_i \leq r \leq r_e$.

Tracé des contraintes

Tracer les profils des contraintes σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ en utilisant les valeurs numériques données précédemment pour j et B . Les dimensions du solénoïde sont :

$$r_i = 4 \text{ mm}, \quad r_e = 6 \text{ mm}$$

On prendra soin en particulier de déterminer les valeurs numériques de $\sigma_{\theta\theta}(r = r_i)$ et $\sigma_{\theta\theta}(r = r_e)$. Le tracé des contraintes est effectué sur la figure 23.11. La contrainte orthoradiale issue de l'approximation de l'anneau mince, étudiée au paragraphe 23.2.1, est également tracée. On trouve :

$$\sigma_{\theta\theta}(r = r_i) \simeq 645 \text{ MPa}, \quad \sigma_{\theta\theta}(r = r_e) \simeq 385 \text{ MPa}$$

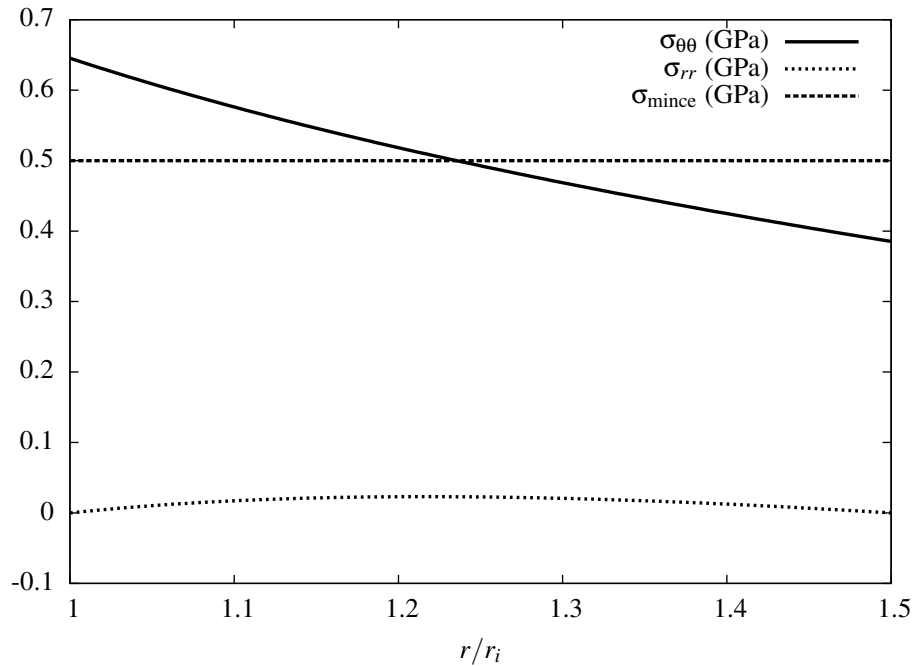


FIGURE 23.11 – Profils des contraintes radiale et orthoradiale dans la subsection de la bobine de cuivre. La contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ est comparée à la valeur approchée jBR , formule valable pour la paroi mince, prise ici avec $R = (r_i + r_e)/2$.

Calcul des déformations ; contexte infinitésimal

Calculer les déformations en fonction des constantes A, C et des caractéristiques élastiques du matériau.

En déduire une condition sur jB garantissant que les déformations restent infinitésimales. Cette condition est-elle satisfaite pour le champ magnétique et le courant visés dans le cas du solénoïde en cuivre considéré dans cette partie ?

Grâce à la loi de Hooke, on calcule les composantes non nulles du tenseur des déformations :

$$\begin{aligned} E\varepsilon_{rr} &= (1+\nu)\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \\ &= -\frac{2jB}{3}(1-\nu^2)r - (1+\nu)\frac{A}{r^2} + (1-\nu)C \end{aligned} \quad (23.41)$$

$$\begin{aligned} E\varepsilon_{\theta\theta} &= (1+\nu)\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \\ &= -\frac{jB}{3}(1-\nu^2)r + (1+\nu)\frac{A}{r^2} + (1-\nu)C \end{aligned} \quad (23.42)$$

$$E\varepsilon_{zz} = -\nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \nu((1+\nu)jBr - 2C) \quad (23.43)$$

Les composantes précédentes sont de l'ordre de jBR/E où R est typiquement mis pour r_e . Le contexte infinitésimal est donc garanti si

$$\frac{jBR}{E} \ll 1 \quad (23.44)$$

Avec les grandeurs considérées, cet indicateur a pour valeur 5.0×10^{-3} , ce qui valide le contexte infinitésimal.

Intégration des déplacements ; limites de l'approche proposée

Construire les déplacements u_r et u_θ associés aux déformations précédentes. Montrer finalement qu'il n'est pas possible de déterminer un champ u_z satisfaisant. Ce constat signe l'échec de la démarche proposée. Quelle simplification doit être remise en question ? Cette difficulté est rencontrée assez fréquemment dans le contexte des contraintes planes. Il s'avère toutefois que les expressions trouvées précédemment pour les contraintes, déformations et déplacements, représentent une approximation satisfaisante à bien des égards⁶ de la solution recherchée lorsque l'épaisseur h de la spire est suffisamment petite devant son rayon.

On continue donc à utiliser ces expressions dans la suite du problème.

Calculer la valeur numérique du rayon de la spire sous chargement magnétique.

Le déplacement u_r s'obtient aisément à partir de la déformation orthoradiale sachant que les fonctions sont indépendantes de θ :

$$Eu_r = r\varepsilon_{\theta\theta} = -\frac{jB}{3}(1-\nu^2)r^2 + (1+\nu)\frac{A}{r} + (1-\nu)Cr$$

On vérifie que $du_r/dr = \varepsilon_{rr}$ trouvé précédemment. Pour trouver le déplacement u_θ , on remarque que

$$2\varepsilon_{r\theta} = -\frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = 0, \quad 2\varepsilon_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = 0$$

de sorte que $u_\theta = ar$ qui représente une rotation d'angle a par rapport à l'axe z . Fixons ce mouvement infinitésimal de corps rigide à $a = 0$ dans la suite.

L'intégration par rapport à z de ε_{zz} trouvé précédemment conduit à l'expression de u_z suivante :

$$Eu_z = \nu((1+\nu)r - 2C)z + f(r)$$

où une fonction f de la coordonnée r doit être introduite. Pour la déterminer, il faut calculer la déformation de cisaillement

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial r} = \nu(1+\nu)jBz + f'(r)$$

6. Par comparaison avec une solution numérique, comme cela est illustré au paragraphe 18.3.5 du chapitre 18.

Dans la démarche développée précédemment, un tel cisaillement est nul. Or, il est impossible de déterminer une fonction f dépendant de r seulement et annulant le cisaillement précédent. Ce résultat remet en cause la démarche de résolution proposée, l'hypothèse majeure à la base de notre procédure, étant l'absence de dépendance des contraintes et déformations par rapport à z . Lorsque la dépendance en z est acceptée, il faut en outre considérer la composante $\sigma_{zz}(r, z)$.

Sous chargement magnétique on trouve que le nouveau rayon intérieur de la spire est $r_i + u_r(r_i) = 4.022$ mm et le rayon extérieur est de $r_e + u_r(r_e) = 6.019$ mm. L'épaisseur de la spire a donc diminué de 0.11%.

Limite d'élasticité de la bobine

En utilisant le critère de plasticité de Tresca pour un corps isotrope de limite d'élasticité σ_0 en traction, indiquer à quel endroit de l'anneau la plasticité va commencer. Donner la valeur critique correspondante de jB en fonction des caractéristiques géométriques de l'anneau et des propriétés mécaniques du matériau.

Qu'en est-il avec la valeur visée de jB lorsque $\sigma_0 = 500$ MPa correspondant à du cuivre fortement écroui⁷ ?

Il est apparu précédemment que $0 \leq \sigma_{rr} \leq \sigma_{\theta\theta}$, de sorte que la limite d'élasticité est obtenue pour $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_0$. Cela se produit d'abord en $r = r_i$ où $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale. La limite d'élasticité de la structure est donc donnée par

$$\sigma_{\theta\theta}(r_i) = (\alpha - \beta)r_i + 2\frac{A}{r_i^2}$$

où le fait que $C = \alpha r_i + A/r_i^2$, cf. Eq. (23.39) a été utilisé. Finalement,

$$\sigma_{\theta\theta}(r_i) = \frac{jB}{3}((1 - \nu)r_i + 2(2 + \nu)\frac{r_e^2}{r_i + r_e}) \quad (23.45)$$

de sorte que la limite d'élasticité est atteinte pour

$$jB = 3\sigma_0 \left((1 - \nu)r_i + 2(2 + \nu)\frac{r_e^2}{r_i + r_e} \right)^{-1} \quad (23.46)$$

Avec $jB = 1 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-3}$, on trouve $\sigma_{\theta\theta}(r_i) = 645$ MPa qui est bien supérieure à la limite d'élasticité $\sigma_0 = 500$ MPa. Cela signifie que, si de tels champs et courants sont appliqués, le solénoïde va se déformer de façon irréversible.

Cas d'une spire de faible largeur relative

Dans le cas où la largeur de l'anneau est très faible devant son rayon R :

$$\frac{e}{R} \ll 1$$

Le rayon R est pris comme $(r_i + r_e)/2$, par exemple. Montrer que, dans ce cas, l'état de contraintes au sein de l'anneau s'identifie à un état de traction simple orthoradiale dont on donnera l'expression en fonction de jB et R . Donner alors l'expression simplifiée de la valeur critique de jB pour laquelle la limite d'élasticité est atteinte. Vérifier que cette expression est conforme au développement au premier ordre de la formule trouvée au paragraphe 23.2.1.

En supposant que le seuil de plasticité n'est pas franchi, calculer la valeur numérique de la déformation orthoradiale dans le cas du tube mince avec $R = 5$ mm.

Au premier ordre, $r_i \simeq r_e \simeq R$, de sorte que

$$\sigma_{rr} \simeq 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = jBR \quad (23.47)$$

7. C'est-à-dire durci.

qui conduit à la limite d'élasticité pour

$$jB = \frac{\sigma_0}{R} \quad (23.48)$$

La spire est approximativement en traction simple selon \underline{e}_θ . La contrainte de traction vaut $jBR = 500 \text{ MPa}$. La déformation élastique correspondante vaut $jBR/E^{\text{Cu}} = 0.42 \%$.

En guise de prolongement, on trouvera le calcul des profils de contraintes dans le domaine plastique dans la référence (Herlach, F. et al., 1984).

23.2.2 Solénoïde renforcé par une frette en acier

Afin de limiter l'élargissement des spires du solénoïde et les contraintes engendrées par le champ magnétique, un anneau d'acier est introduit autour des spires comme sur la figure 23.12. Ce cerclage constitue un frettage de la bobine bridant l'augmentation du rayon de la spire sous charge. Il possède un rayon extérieur r_f et on suppose qu'il n'y a pas de jeu entre l'anneau de cuivre et l'anneau d'acier de sorte que la largeur de l'anneau d'acier vaut $r_f - r_e$. L'objectif de cette partie est de calculer la réduction de contrainte dans la bobine de cuivre en fonction du rayon r_f , du chargement jB appliqué et des caractéristiques géométriques et matérielles des constituants de la structure.

Comme aucun courant électrique ne circule dans le cerclage d'acier, on suppose que le champ magnétique appliqué n'a aucun effet mécanique sur celui-ci. Les anneaux de cuivre et d'acier en contact sont supposés jointifs garantissant la continuité du déplacement u_r et la transmission du vecteur-contrainte lorsque la contrainte radiale est de compression⁸. Par contre, ils peuvent glisser l'un par rapport à l'autre, autorisant ainsi une discontinuité du déplacement u_z .

La gaine est constituée d'un acier inoxydable avec une limite d'élasticité de 1 GPa. L'acier est traité comme un matériau homogène et isotrope présentant un comportement élastique linéarisé. Les caractéristiques élastiques de l'acier sont :

$$E^{\text{acier}} = 210 \text{ GPa}, \quad \nu^{\text{acier}} = \nu^{\text{Cu}} = \nu = 0.3$$

Le cuivre et l'acier sont supposés avoir le même coefficient de Poisson pour simplifier les calculs.

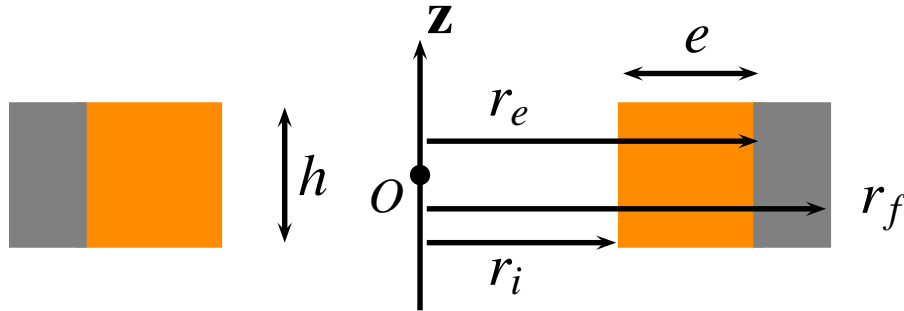


FIGURE 23.12 – Section d'un élément de bobine de cuivre renforcé par une frette en acier.

Contraintes radiales dans l'assemblage fretté

Justifier brièvement que les contraintes radiales dans le cuivre et l'acier prennent la forme suivante :

$$\sigma_{rr}^{\text{Cu}}(r) = -\alpha r + C - \frac{A}{r^2}, \quad \sigma_{rr}^{\text{acier}}(r) = C_f - \frac{A_f}{r^2} \quad (23.49)$$

où A, C, A_f et C_f sont des constantes à déterminer dans la suite.

Etablir trois relations liant ces quatre constantes.

8. Sinon les deux anneaux se séparent car ils ne sont pas collés. En réalité, ils sont nécessairement séparés par un mince revêtement isolant, non considéré ici, cf. (Witters and Herlach, 1983).

La forme des contraintes radiales dans le cuivre est la même que dans la première partie du problème, avec en particulier la même valeur de α donnée par (23.36). En effet, cette forme résulte de l'intégration des équations d'équilibre dans le volume qui sont inchangées ici puisque le chargement électromagnétique reste identique. Par contre, les valeurs des constantes A et C diffèrent de la partie précédente car elles résultent des conditions aux limites qui sont, quant à elles, modifiées par la présence de la frette.

Les contraintes dans l'acier résultent de la pression appliquée à l'anneau d'acier par l'élargissement de la spire de cuivre lorsque celle-ci est parcourue par le courant j . Il s'agit donc d'un problème de réservoir sous pression interne pour lequel la forme des contraintes est connue comme étant conforme à (23.49), voir la table 15.1 du chapitre 15. D'un autre point de vue, c'est le même problème que celui traité précédemment pour le cuivre mais avec $j = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ et des conditions aux limites différentes. Trois conditions aux limites peuvent d'ores et déjà être considérées. Il s'agit de la nullité du vecteur-contrainte en r_i et r_f , et donc des composantes radiales correspondantes :

$$\sigma_{rr}^{\text{Cu}}(r = r_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\alpha r_i - A/r_i^2 + C = 0 \quad (23.50)$$

$$\sigma_{rr}^{\text{acier}}(r = r_f) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_f - \frac{A_f}{r_f^2} = 0 \quad (23.51)$$

Enfin, la continuité du vecteur-contrainte exige la continuité des contraintes radiales du cuivre et de l'acier en $r = r_e$:

$$\sigma_{rr}^{\text{Cu}}(r = r_e) = \sigma_{rr}^{\text{acier}}(r = r_e) \quad \Rightarrow \quad -\alpha r_e - A/r_e^2 + C = C_f - \frac{A_f}{r_e^2} \quad (23.52)$$

Contraintes orthoradiales dans l'assemblage fretté

Donner la forme des contraintes orthoradiales dans le cuivre et l'acier en fonction des constantes A, C, A_f, C_f introduites précédemment.

$$\sigma_{\theta\theta}^{\text{Cu}}(r) = -\beta r + C + \frac{A}{r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta}^{\text{acier}}(r) = C_f + \frac{A_f}{r^2} \quad (23.53)$$

Les composantes de contrainte axiale et de cisaillement sont par ailleurs nulles, en raison du glissement possible selon z entre les spires et la frette.

Détermination de la quatrième relation cherchée

Calculer la déformation $\varepsilon_{\theta\theta}$ dans le cuivre et dans l'acier en fonction des constantes A, C, A_f, C_f , puis le champ de déplacement radial u_r .

En déduire la relation manquante pour déterminer les quatre constantes recherchées.

On ne demande pas de résoudre ce système même si cela ne pose aucune difficulté.

La loi de Hooke est utilisée pour calculer successivement :

$$\begin{aligned} E^{\text{Cu}} \varepsilon_{\theta\theta}^{\text{Cu}}(r) &= (1 + \nu) \sigma_{\theta\theta} - \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \\ &= -\frac{jB}{3} (1 - \nu^2) r + (1 + \nu) \frac{A}{r^2} + (1 - \nu) C \end{aligned} \quad (23.54)$$

$$E^{\text{acier}} \varepsilon_{\theta\theta}^{\text{acier}}(r) = (1 - \nu) C_f + (1 + \nu) \frac{A_f}{r^2} \quad (23.55)$$

Le déplacement radial se déduit de $u_r/r = \varepsilon_{\theta\theta}$ car le déplacement tangentiel est nul :

$$E^{\text{Cu}} u_r^{\text{Cu}}(r) = -\frac{jB}{3} (1 - \nu^2) r^2 + (1 + \nu) \frac{A}{r} + (1 - \nu) Cr \quad (23.56)$$

$$E^{\text{acier}} u_r^{\text{acier}}(r) = (1 - \nu) C_f r + (1 + \nu) \frac{A_f}{r} \quad (23.57)$$

Le contact entre les anneaux de cuivre et d'acier exigent la continuité du déplacement radial en $r = r_e$, ce qui fournit la quatrième relation recherchée :

$$E^{\text{Cu}} \left((1 - \nu) C_f r_e + (1 + \nu) \frac{A_f}{r_e} \right) = E^{\text{acier}} \left((1 - \nu) C r_e + (1 + \nu) \frac{A}{r_e} - \frac{jB}{3} (1 - \nu^2) r_e^2 \right) \quad (23.58)$$

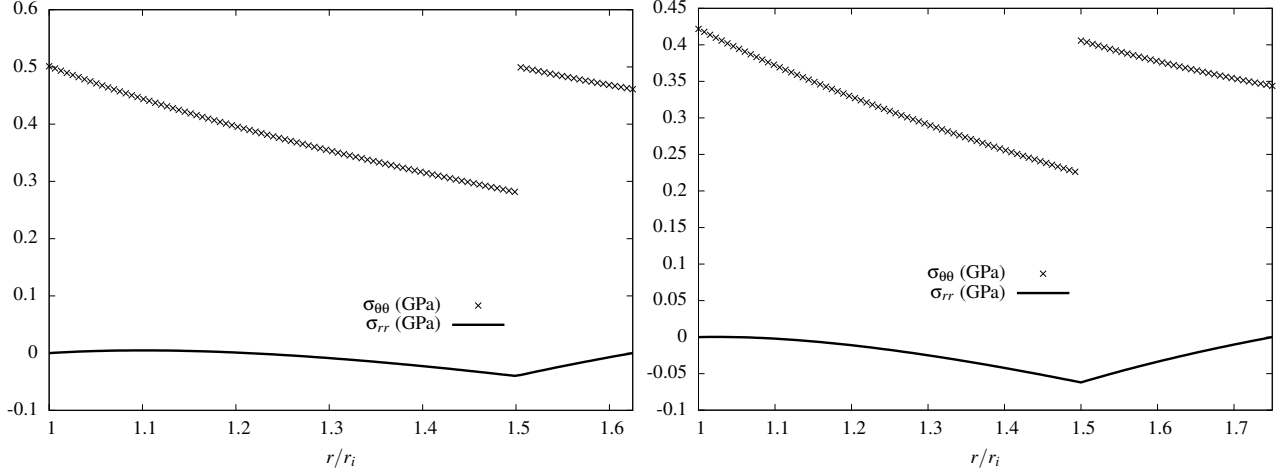


FIGURE 23.13 – Profils des contraintes radiale et orthoradiale dans la subsection de la bobine de cuivre et la frette d'acier pour deux largeurs différentes de frette : $r_f = 0.5$ mm (à gauche), $r_f = 1$ mm (à droite).

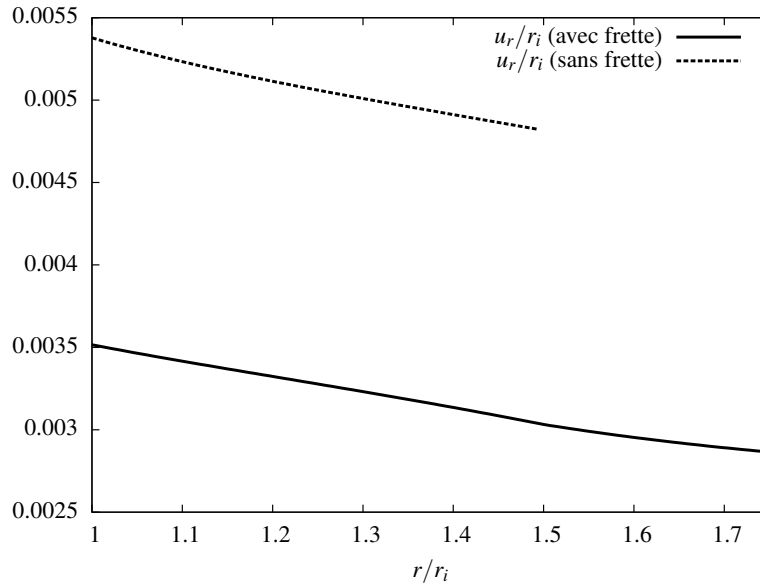


FIGURE 23.14 – Déplacement radial normé dans la subsection de la bobine de cuivre et la frette d'acier. Ce profil est comparé au déplacement en absence de frette pour le même champ jB appliqué ($r_f = 1$ mm).

Limite d'élasticité de l'assemblage fretté

Après résolution du système précédent (non demandée ici), les courbes donnant les contraintes et le déplacement radial sont données sur la figure 23.13 pour deux valeurs du rayon extérieur de frette, r_f . Commenter les résultats. La frette remplit-elle son rôle ?

Commenter également le déplacement radial donné sur la figure 23.14 avec et sans frette. Les 4 équations (23.50) à (23.52) sont utilisées pour obtenir les constantes en fonction de C_f :

$$F = r_f^2 C_f \quad (23.59)$$

$$\left(\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_e^2}\right)A + \alpha(r_e - r_i) = \left(\frac{r_f^2}{r_i^2} - 1\right)C_f \quad (23.60)$$

$$(r_e^2 - r_i^2)C + \alpha(r_i^3 - r_e^3) = C_f(r_e^2 - r_f^2)C_f \quad (23.61)$$

Ces relations peuvent alors être substituées dans (23.58) pour déterminer C_f :

$$C_f \left(\frac{E_{\text{Cu}}}{E_{\text{acier}}} ((1 - \nu)r_e^2 + (1 + \nu)r_f^2) + (1 - \nu)(r_f^2 - r_e^2) + 2\Delta\left(\frac{r_f^2}{r_i^2} - 1\right) \right) = \\ = 2\Delta\alpha(r_e - r_i) + \frac{iB}{3}(1 - \nu)r_e^3$$

avec $\Delta^{-1} = 1/r_i^2 - 1/r_e^2$.

Les courbes de la figure 23.13 montrent que les contraintes radiales sont continues en $r = r_e$ alors que les contraintes orthoradiales présentent une discontinuité. Les contraintes radiales sont de compression en $r = r_e$ et maintiennent donc l'assemblage fretté. Les contraintes orthoradiales dans le cuivre sont plus faibles qu'en l'absence de frette, cf. figure 23.11. On peut lire également que la contrainte $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}$ est proche de 500 MPa en r_i pour $r_f = 0.5$ mm de sorte que le critère de Tresca risque d'être violé, le cuivre entrant alors dans le domaine plastique. Au contraire, 1 mm de frette garantit un fonctionnement élastique de la structure avec des contraintes ne dépassant pas 450 MPa dans le cuivre.

La figure 23.14 indique que le déplacement radial est continu en $r = r_e$ de sorte que la bobine et la frette restent en contact. Le déplacement radial est plus petit en présence d'une frette. Voilà bien l'objectif : limiter l'expansion de la bobine sous champ.

Autre méthode de renforcement de la bobine conductrice

Proposer d'autres méthodes que le frettage pour renforcer la bobine conductrice et éviter que le cuivre ne plastifie.

L'utilisation d'un frettage permet de limiter l'expansion du solénoïde et de réduire les contraintes dans les spires. De surcroît, il est possible de renforcer le conducteur de cuivre lui-même afin d'augmenter sa limite d'élasticité. Par co-tréfilages successifs de fils de cuivre et de niobium, il est possible de fabriquer les composites architecturés de la figure 23.15. Leur limite d'élasticité est accrue par deux effets conjoints : la réduction de la taille des grains du cuivre (jusqu'à des dimensions nanométriques) et l'emploi du niobium dont la limite d'élasticité est plus grande que celle du cuivre pour une taille de grain et un écrouissage donnés. L'architecture en nids d'abeille quasi-périodique et multiéchelle permet de garantir la continuité du cuivre pour la conduction d'électricité et de créer des couloirs étroits de cuivre qui renforcent le composite. Les fils nanorenforcés obtenus ont des limites d'élasticité dépassant 2 GPa. Les composites conçus par le LNCMI sont à base de cuivre/niobium, ou de cuivre/tantale, voire cuivre/nanotubes de carbone.

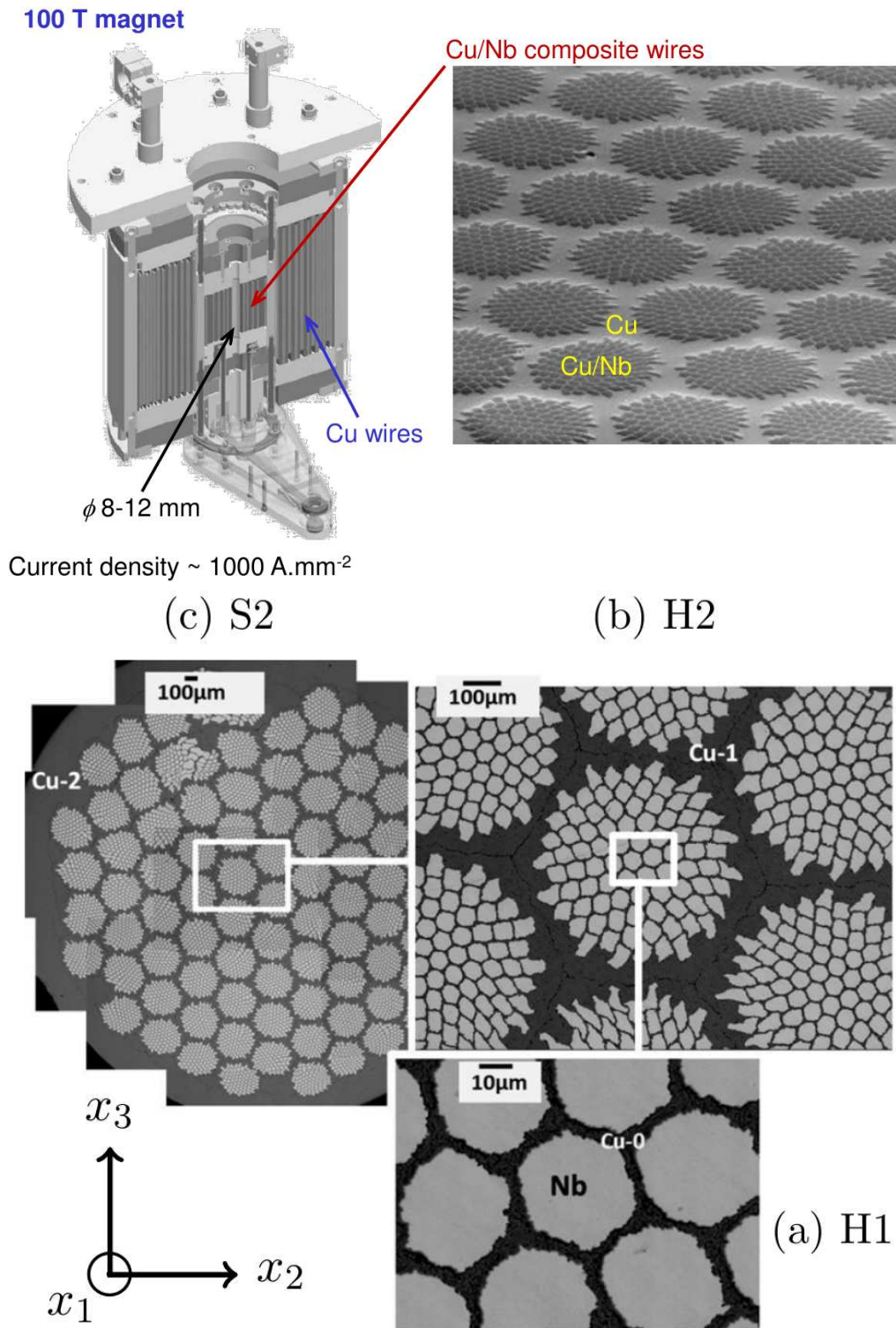


FIGURE 23.15 – Coupe d'un générateur de champs magnétiques intenses avec une partie central incorporant un solinoïde renforcé au centre (en haut). Composite cuivre–niobium présentant une architecture multi-échelles en nid d'abeilles (en haut à droite et en bas) : la subsection S2 du fil composite est constitué de 85 quasi-hexagones (H2) eux-mêmes constitués de quasi-hexagone (H1), d'après (Gu et al., 2017).