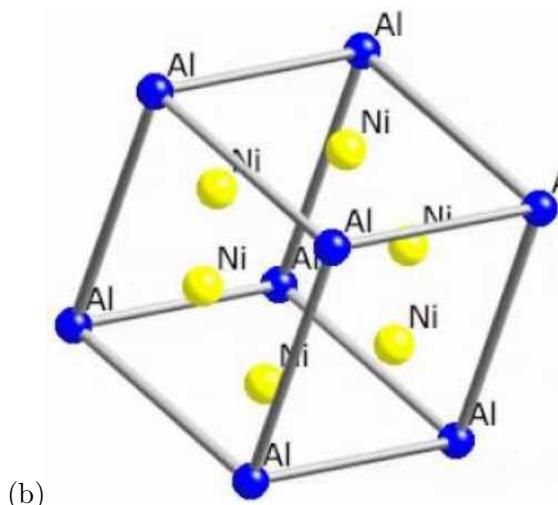


Chapitre 22

Comportement élastique anisotrope des aubes de turbine monocristallines



(a)



(b)

FIGURE 22.1 – Monocristal de superalliage à base de nickel : (a) aube de turbine de moteur d'avion en monocristal (hauteur $\simeq 10$ cm) ; (b) maille cristalline Ni₃Al cubique à faces centrées.

Les aubes de turbine des parties chaudes des turboréacteurs de moteurs d'avion, situées à l'aval de la chambre de combustion sont souvent des pièces monocristallines constituées d'un superalliage à base de nickel. L'aube représentée sur la figure 22.1 à gauche est un monocristal métallique d'une dizaine de centimètres de hauteur. Les ingénieurs tirent profit du comportement anisotrope de ce cristal à symétrie cubique en optimisant son orientation par rapport à la direction principale du chargement. L'aube de turbine, accrochée au disque, est en rotation rapide autour de l'axe du disque et subit de ce fait une force d'inertie dans la direction verticale sur la figure 22.1a. On représentera cette sollicitation de manière approchée par un effort de traction dans le problème proposé. De plus, l'aube subit le flux des gaz de combustion qui induit, en particulier, un effort de torsion sur la pale. Ce chargement sera également étudié dans ce chapitre.

Les superalliages à base de nickel comportent aussi une part significative d'aluminium. Ils ont la propriété remarquable d'avoir une limite d'élasticité qui reste très élevée et constante jusqu'à 800°C

avant de décroître progressivement lorsque la température augmente, comme c'est le cas de la plupart des alliages métalliques.

Les monocristaux métalliques présentent un comportement mécanique très anisotrope. L'objectif du problème est d'aborder l'élasticité et la plasticité anisotropes dans le cas de la classe de symétrie cubique qui est celle du matériau monocristallin étudié ici.

On se place dans le contexte infinitésimal et on considère l'état de référence comme naturel. Le comportement du matériau est élastique linéarisé, du moins jusqu'à ce que sa limite d'élasticité soit atteinte. On se place dans des conditions isothermes pour simplifier et on ne considère pas les efforts volumiques.

22.1 Préliminaire : le tenseur d'élasticité cubique

Le monocristal de symétrie cubique est entièrement caractérisé par la maille cristalline élémentaire de forme cubique de la figure 22.1 (à droite) dont les arêtes parallèles aux vecteurs unitaires ($\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$) constituent une base orthonormée. On introduit le vecteur directeur d'une des quatre grandes diagonales du cube :

$$\underline{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}) \quad (22.1)$$

Il y a trois structures cristallines cubiques : cubique primitive (CP), cubique centrée (CC) et cubique à faces centrées (CFC). La maille du superalliage à base de nickel Ni₃Al est CFC comme le montre la figure 22.1b, avec les atomes d'aluminium aux sommets et les atomes de nickel au centre des faces du cube. La réPLICATION de la maille élémentaire par les translations $a(u\underline{i} + v\underline{j} + w\underline{k}), \forall u, v, w \in \mathbb{Z}$, où a est le paramètre de maille, i.e. la longueur de l'arête du cube élémentaire, permet de pavier l'espace et de décrire le matériau cristallin périodique complet.

22.1.1 Le groupe d'invariance de configuration pour la classe de symétrie cubique

La classe de symétrie cubique contient 5 sous-groupes ponctuels. La maille cristalline de la figure 22.1 respecte les symétries appartenant au groupe \mathcal{O}_h caractérisé par les générateurs suivants :

$$\underline{R}(2\pi/3\underline{c}), \underline{R}(\pi/2\underline{i}), \underline{R}_j, -\underline{1}$$

d'après (Zheng, 1994). La notation $\underline{R}(\theta \underline{a})$ désigne la rotation d'angle θ autour de l'axe \underline{a} , tandis que \underline{R}_j désigne la réflexion par rapport au plan de normale \underline{j} , appelé plan-miroir. La symétrie centrale, ou inversion, est $-\underline{1}$. Le groupe complet est obtenu en combinant autant de fois qu'on veut les éléments générateurs. Il contient 48 éléments. Parmi eux, il y a 24 rotations : l'identité, 3 rotations d'angle π par rapport à $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$, 8 rotations d'angle $\pm 2\pi/3$ par rapport aux 4 grandes diagonales du cube, 6 rotations d'angle π par rapport aux 6 diagonales des faces du cube et les 6 rotations d'angle $\pm\pi/2$ par rapport aux arêtes du cube. La cellule élémentaire de la figure 22.1 est invariante par application de toutes ces transformations.

Le groupe d'invariance de la configuration de référence dénuée de contrainte (état naturel) considérée dans la suite est exactement le groupe \mathcal{O}_h ainsi caractérisé.

On admettra l'ensemble de ces résultats.

22.1.2 Tenseur de structure de l'élasticité cubique

Le triplet ($\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$) de la maille élémentaire dans la configuration dénuée de contrainte constitue le trièdre directeur caractérisant la matière de symétrie cubique. Dans le contexte infinitésimal, nous ne distinguerons pas les versions lagrangiennes et eulériennes de ces vecteurs. Les tenseurs de structure pour la symétrie cubique sont les tenseurs invariants par les éléments du groupe \mathcal{O}_h . On montre¹ qu'il y a un seul tenseur de structure pour ce groupe et qu'il est d'ordre 4. Il s'agit de :

$$\underline{\underline{\mathfrak{T}}} = \underline{i} \otimes \underline{i} \otimes \underline{i} \otimes \underline{i} + \underline{j} \otimes \underline{j} \otimes \underline{j} \otimes \underline{j} + \underline{k} \otimes \underline{k} \otimes \underline{k} \otimes \underline{k} \quad (22.2)$$

1. cf. (Zheng, 1994).

construit à partir des produits tensoriels des vecteurs du trièdre directeur.
On admettra ce résultat.

Dans la suite, on fera appel à la notation abrégée

$$\underline{\mathbf{u}}^4 := \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{u}} \quad (22.3)$$

où la notation $\underline{\mathbf{u}}^4$ désigne le tenseur d'ordre 4 obtenu par quatre produits tensoriels.

22.1.3 Potentiel d'élasticité cubique linéarisée

Le potentiel d'élasticité linéarisée est une fonction $\rho\psi(\xi, \tilde{\mathfrak{T}})$ de la déformation infinitésimale et du tenseur de structure. L'invariance tensorielle de cette fonction exige qu'elle soit isotrope par rapport à ses arguments. En se limitant aux termes quadratiques par rapport à ξ (état naturel), montrer que cette fonction dépend de trois invariants mettant en jeu les tenseurs ξ et $\tilde{\mathfrak{T}}$.

En déduire qu'il existe trois modules d'élasticité cubique, κ, μ et γ tels que la loi de Hooke s'écrive :

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \kappa(\text{trace } \xi) \mathbf{1} + 2\mu \xi^{\text{dev}} + 2\gamma \tilde{\mathfrak{T}} : \xi \quad (22.4)$$

où ξ^{dev} désigne la partie déviatorique ou déviateur de ξ . On rappelle la décomposition de tout tenseur d'ordre 2 :

$$\xi = \frac{1}{3}(\text{trace } \xi) \mathbf{1} + \xi^{\text{dev}}$$

Donner l'expression du potentiel d'élasticité en fonction des 3 modules κ, μ et γ .

Justifier que $\kappa > 0, \mu_1 > 0, \mu_2 > 0$.

Les invariants à recenser comprennent les invariants de ξ , à savoir $\text{trace } \xi, \text{trace } \xi^2, \text{trace } \xi^3$ et les invariants combinés de ξ et $\tilde{\mathfrak{T}}$. L'invariant joint d'ordre le plus bas est $\xi : \tilde{\mathfrak{T}} : \xi$. Finalement on a

$$\rho\psi(\xi, \tilde{\mathfrak{T}}) = \rho\psi(\text{trace } \xi, \text{trace } \xi^{\text{dev}2}, \xi : \tilde{\mathfrak{T}} : \xi) \quad (22.5)$$

où l'on a remplacé $\text{trace } \xi^2$ par $\text{trace } \xi^{\text{dev}2}$, sans perte de généralité puisque la trace de la déformation est présente par ailleurs. En ne conservant que les termes quadratiques, on obtient :

$$\rho\psi(\xi, \tilde{\mathfrak{T}}) = \frac{3\kappa}{2}(\text{trace } \xi)^2 + \mu(\xi^{\text{dev}} : \xi^{\text{dev}}) + \gamma(\xi : \tilde{\mathfrak{T}} : \xi) \quad (22.6)$$

La loi d'élasticité cubique (22.4) s'en déduit. La définition positive du potentiel garantit la stabilité du matériaux. Elle exige que les trois modules impliqués dans l'expression précédente soit strictement positifs.

L'expression du potentiel précédent est la partie quadratique du potentiel général en hyperélasticité cubique. D'après les résultats théoriques de (Zheng and Spencer, 1993a; Zheng and Spencer, 1993b), utilisés ensuite par (Kambouchev et al., 2007; Schröder et al., 2010; Kim, 2014), le groupe de symétrie \mathcal{O}_h est caractérisé par un seul tenseur de structure, à savoir $\tilde{\mathfrak{T}}$ défini par (22.2). Le potentiel lagrangien d'un matériau hyperélastique cubique est une fonction de six invariants²

$$\rho_0\psi(\mathbf{C}, \tilde{\mathfrak{T}}) = \rho_0\psi(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) \quad (22.7)$$

Il y a 3 invariants individuels et 3 invariants joints/croisés :

$$I_1 = \text{trace } \mathbf{C}, \quad I_2 = \frac{1}{2}\text{trace } \mathbf{C}^2, \quad I_3 = \frac{1}{3}\text{trace } \mathbf{C}^3$$

$$I_4 = \frac{1}{2}\mathbf{C} : \tilde{\mathfrak{T}} : \mathbf{C}, \quad I_5 = \mathbf{C} : \tilde{\mathfrak{T}} : \mathbf{C}^2, \quad I_6 = \frac{1}{2}\mathbf{C}^2 : \tilde{\mathfrak{T}} : \mathbf{C}^2$$

2. (Zheng, 1994) en mentionne 8 mais les auteurs cités par la suite ne font appel qu'à six invariants.

Si l'on ne garde que les contributions quadratiques, il reste I_1, I_2 et I_4 qui ont été utilisés plus haut. La dérivation de ce potentiel par rapport à $\underline{\underline{C}}$ fournit la loi lagrangienne :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\Pi}} &= \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{C}}} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \underline{\underline{1}} + \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \underline{\underline{C}} + \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_3} \underline{\underline{C}}^2 + \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_4} \underline{\underline{\mathfrak{T}}} : \underline{\underline{C}} \\ &+ \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_5} (\underline{\underline{\mathfrak{T}}} : \underline{\underline{C}}^2 + \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\mathfrak{T}}} \cdot \underline{\underline{C}} + (\underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\mathfrak{T}}} \cdot \underline{\underline{C}})^T) + \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_6} (\underline{\underline{C}}^2 : \underline{\underline{\mathfrak{T}}} \cdot \underline{\underline{C}} + (\underline{\underline{C}}^2 : \underline{\underline{\mathfrak{T}}} \cdot \underline{\underline{C}})^T)\end{aligned}\quad (22.8)$$

22.1.4 Le tenseur d'élasticité linéaire cubique

Vérifier que la loi d'élasticité linéaire (22.4) permet de définir le tenseur d'élasticité d'ordre 4 :

$$\underline{\underline{\Lambda}} = 3\kappa \underline{\underline{K}} + 2\mu \underline{\underline{J}} + 2\gamma \underline{\underline{\mathfrak{T}}} \quad (22.9)$$

tel que $\underline{\sigma} = \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\varepsilon}$. Les opérateurs d'ordre 4, $\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{\mathfrak{T}}}$ et $\underline{\underline{K}}$ sont définis par leur action sur les tenseurs symétriques d'ordre 2 :

$$\underline{\underline{I}} : \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}, \quad \underline{\underline{\mathfrak{T}}} : \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^{\text{dev}}, \quad \underline{\underline{K}} : \underline{\varepsilon} = \frac{1}{3}(\text{trace } \underline{\varepsilon}) \underline{\underline{1}} \quad (22.10)$$

avec la relation $\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{J}} + \underline{\underline{K}}$.

Des notations plus commodes pour manipuler les tenseurs d'élasticité d'ordre 4 dans le cas cubique ont été introduites par (Walpole, 1984) par l'intermédiaire des tenseurs d'ordre 4 suivants :

$$\underline{\underline{L}} := \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\mathfrak{T}}}, \quad \underline{\underline{M}} := \underline{\underline{\mathfrak{T}}} - \underline{\underline{K}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{I}} \quad (22.11)$$

où $\underline{\underline{\mathfrak{T}}}$ est le tenseur de structure cubique (22.2). Montrer qu'une écriture alternative de (22.9) est alors :

$$\underline{\underline{\Lambda}} = 3k \underline{\underline{K}} + 2\mu_1 \underline{\underline{L}} + 2\mu_2 \underline{\underline{M}} \quad (22.12)$$

et exprimer les nouveaux modules k, μ_1 et μ_2 en fonction des modules précédents κ, μ et γ .

Quelle relation particulière doivent satisfaire k, μ_1, μ_2 pour que l'élasticité cubique devienne isotrope ?

Vérifier, sans longs calculs, ou admettrez, que le tenseur des souplesses, défini comme l'inverse du tenseur des modules d'élasticité, se met sous la forme :

$$\underline{\underline{\Lambda}}^{-1} = \frac{1}{3k} \underline{\underline{K}} + \frac{1}{2\mu_1} \underline{\underline{L}} + \frac{1}{2\mu_2} \underline{\underline{M}} \quad (22.13)$$

tel que $\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} : \underline{\sigma}$.

Les notations introduites permettent de calculer

$$\underline{\underline{\Lambda}} = 3\kappa \underline{\underline{K}} + 2\mu(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{M}}) + 2\gamma(\underline{\underline{K}} + \underline{\underline{M}})$$

de sorte que

$$3k = 3\kappa + 2\gamma, \quad \mu_1 = \mu, \quad \mu_2 = \mu + \gamma \quad \text{ou} \quad 3\kappa = 3k + 2(\mu_1 - \mu_2), \quad \mu = \mu_1, \quad \gamma = \mu_2 - \mu_1$$

Le cas isotrope est obtenu lorsque le tenseur de structure ne joue pas de rôle, c'est-à-dire lorsque $\gamma = 0 \implies \mu_1 = \mu_2$.

Pour établir l'expression (22.13), il suffit de remarquer que, en vertu des définitions (22.10) et (22.11), les opérateurs $\underline{\underline{K}}, \underline{\underline{L}}, \underline{\underline{M}}$ sont idempotents et deux à deux orthogonaux :

$$\underline{\underline{K}}^2 = \underline{\underline{K}}, \quad \underline{\underline{L}}^2 = \underline{\underline{L}}, \quad \underline{\underline{M}}^2 = \underline{\underline{M}}$$

$$\underline{\underline{K}} : \underline{\underline{L}} = \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{L}} = \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{M}} = 0$$

On vérifie alors (c'est le mérite de la notation de Walpole) que

$$\underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} = \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} : \underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{I}}$$

22.1.5 Equivalence avec la notation matricielle usuelle

On considère la déformation d'extension simple dans la direction \underline{i} du cristal

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon \underline{i} \otimes \underline{i} \quad (22.14)$$

Calculer la contrainte associée $\underline{\sigma} = \underline{\Lambda} : \underline{\varepsilon}$ en fonction de $\varepsilon, k, \mu_1, \mu_2$, en utilisant le tenseur d'élasticité cubique (22.12).

On utilisera avec profit les règles de calcul tensoriel suivantes :

$$(\underline{a} \otimes \underline{b} \otimes \underline{c} \otimes \underline{d}) \cdot \underline{u} = (\underline{d} \cdot \underline{u}) \underline{a} \otimes \underline{b} \otimes \underline{c}, \quad (\underline{a} \otimes \underline{b} \otimes \underline{c} \otimes \underline{d}) : (\underline{u} \otimes \underline{v}) = (\underline{c} \cdot \underline{u})(\underline{d} \cdot \underline{v}) \underline{a} \otimes \underline{b}$$

où $\underline{d} \cdot \underline{u}$ est le produit scalaire des deux vecteurs \underline{d} et \underline{u} .

Pour vous entraîner à manipuler ces opérations, montrer que :

$$\underline{\mathfrak{T}} : (\underline{i} \otimes \underline{i}) = \underline{i} \otimes \underline{i}, \quad \underline{\mathfrak{T}} : (\underline{j} \otimes \underline{k}) = 0$$

Les ingénieurs travaillant sur les milieux anisotropes, tels que les composites, utilisent également la notation matricielle suivante en considérant les composantes des différents tenseurs dans la base orthonormée privilégiée liée au cristal $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$. Il est en effet possible de ranger les composantes indépendantes de Λ_{pqrs} dans une matrice $6 \times 6 C_{ij}$ de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (22.15)$$

où C_{11}, C_{12}, C_{44} sont les trois modules indépendants intervenant dans cette représentation. Ecrite par rapport à une autre base que la base privilégiée $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$, la matrice 6×6 comporterait moins de composantes nulles et le fait qu'elle ne dépende que de trois constantes indépendantes ne serait pas apparent.

Grâce au calcul des contraintes pour l'extension simple considérée ici, identifier C_{11} et C_{12} en fonction de k et μ_2 .

Comment identifier C_{44} ?

Quelle est la condition portant sur les modules C_{ij} pour que l'élasticité soit isotrope ?
On définit le coefficient ou facteur d'anisotropie A :

$$A = \frac{2C_{44}}{C_{11} - C_{12}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (22.16)$$

Que vaut A dans le cas particulier isotrope ?

Pour faire le calcul des contraintes associées à l'extension simple selon \underline{i} , on commence par évaluer successivement

$$\begin{aligned} \underline{\mathfrak{K}} : (\underline{i} \otimes \underline{i}) &= \frac{1}{3}(\underline{i} \otimes \underline{i} + \underline{j} \otimes \underline{j} + \underline{k} \otimes \underline{k}) \\ \underline{\mathfrak{L}} : (\underline{i} \otimes \underline{i}) &= 0 \\ \underline{\mathfrak{M}} : (\underline{i} \otimes \underline{i}) &= \frac{2}{3}\underline{i} \otimes \underline{i} - \frac{1}{3}(\underline{j} \otimes \underline{j} + \underline{k} \otimes \underline{k}) \end{aligned}$$

On en déduit

$$\underline{\sigma} = k\varepsilon(\underline{i} \otimes \underline{i} + \underline{j} \otimes \underline{j} + \underline{k} \otimes \underline{k}) + \frac{2\mu_2\varepsilon}{3}(2\underline{i} \otimes \underline{i} - \underline{j} \otimes \underline{j} - \underline{k} \otimes \underline{k})$$

et les composantes correspondantes dans la base $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ fournissent les relations cherchées en substituant $\varepsilon_{11} = \varepsilon$, dans la relation matricielle (22.15) :

$$\sigma_{11} = (k + \frac{4}{3}\mu_2)\varepsilon = C_{11}\varepsilon, \quad \sigma_{22} = (k - \frac{2}{3}\mu_2)\varepsilon = C_{12}\varepsilon$$

et finalement :

$$C_{11} = k + \frac{4}{3}\mu_2, \quad C_{12} = k - \frac{2}{3}\mu_2$$

On trouve $C_{44} = \mu_1$ en considérant une déformation de cisaillement $\xi = \varepsilon_{12}(\underline{i} \otimes \underline{j} + \underline{j} \otimes \underline{i})$. Inversement, $2\mu_2 = C_{11} - C_{12}$, $\mu_1 = C_{44}$, $3k = C_{11} + 2C_{12}$.

Le cas particulier isotrope est obtenu lorsque $\mu_1 = \mu_2$ et donc

$$A = \frac{C_{11} - C_{12}}{2C_{44}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = 1$$

22.2 Traction simple d'une barre monocrystalline en élasticité cubique

On considère le champ de contrainte de traction simple dans la direction du vecteur \underline{d} (unitaire) :

$$\underline{\sigma} = \sigma \underline{d} \otimes \underline{d}, \quad \|\underline{d}\| = 1 \quad (22.17)$$

où σ est la contrainte de traction imposée.

22.2.1 Calcul de la déformation de traction

Le tenseur des déformations associé aux contraintes (22.17) se calcule par l'inverse de la loi de Hooke cubique (22.13) :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\Lambda}^{-1} : \underline{\sigma} \quad (22.18)$$

Exprimer $\underline{\varepsilon}$ en fonction des produits tensoriels $\underline{d} \otimes \underline{d}, \underline{i} \otimes \underline{i}, \underline{j} \otimes \underline{j}, \underline{k} \otimes \underline{k}$, de σ et des modules k, μ_1, μ_2 .

La forme (22.13) du tenseur des souplesses est utilisée pour calculer la déformation :

$$\underline{\Lambda}^{-1} = \frac{1}{3k} \underline{\mathbf{K}} + \frac{1}{2\mu_1} \underline{\mathbf{L}} + \frac{1}{2\mu_2} \underline{\mathbf{M}} = \left(\frac{1}{3k} - \frac{1}{2\mu_2} \right) \underline{\mathbf{K}} + \frac{1}{2\mu_1} \underline{\mathbf{I}} + \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1} \right) \underline{\mathbf{T}}$$

de sorte que

$$\underline{\varepsilon} = \left(\frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} \right) \sigma \underline{1} + \frac{\sigma}{2\mu_1} \underline{d} \otimes \underline{d} + \sigma \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1} \right) \underline{\mathbf{T}} : (\underline{d} \otimes \underline{d})$$

Le dernier terme se calcule de la manière suivante :

$$\underline{\mathbf{T}} : (\underline{d} \otimes \underline{d}) = (\underline{i}^4 + \underline{j}^4 + \underline{k}^4) : (\underline{d} \otimes \underline{d}) = (\underline{d} \cdot \underline{i})^2 \underline{i} \otimes \underline{i} + (\underline{d} \cdot \underline{j})^2 \underline{j} \otimes \underline{j} + (\underline{d} \cdot \underline{k})^2 \underline{k} \otimes \underline{k}$$

22.2.2 Module de Young dans la direction \underline{d}

Contrairement au cas de l'élasticité isotrope, il n'y a pas de module de Young unique en élasticité cubique. On appelle module de Young E_d dans la direction \underline{d} le rapport entre la contrainte axiale et la déformation dans la direction de traction :

$$E_d = \frac{\sigma}{\underline{d} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{d}} \quad (22.19)$$

En utilisant les résultats de la question précédente, évaluer d'abord la déformation dans la direction de traction, c'est-à-dire $\underline{d} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{d}$, puis montrer que l'inverse du module de Young dans la direction \underline{d} s'écrit :

$$\frac{1}{E_d} = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} + \frac{1}{2\mu_1} + \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1}\right)(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4) \quad (22.20)$$

où les composantes d_l du vecteur \underline{d} sont dans la base $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$.

En effet, l'utilisation de l'expression de $\underline{\varepsilon}$ trouvée dans la question précédente, permet de calculer

$$\frac{1}{\sigma} \underline{d} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{d} = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} + \frac{1}{2\mu_1} + \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1}\right)((\underline{d} \cdot \underline{i})^4 + (\underline{d} \cdot \underline{j})^4 + (\underline{d} \cdot \underline{k})^4)$$

A noter deux expressions alternatives en fonction des souplesses élastiques données par exemple par (Cazzani and Rovati, 2003; Cazzani and Rovati, 2005) :

$$\frac{1}{E_d} = S_{12} + \frac{S_{44}}{2} + \frac{1}{2}(2S_{11} - 2S_{12} - S_{44})(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4) \quad (22.21)$$

$$= S_{11} - (2S_{11} - 2S_{12} - S_{44})(d_1^2 d_2^2 + d_2^2 d_3^2 + d_3^2 d_1^2) \quad (22.22)$$

22.2.3 Module de Young selon trois directions du cristal

Donner successivement les modules de Young lorsque $\underline{d} = \underline{i}$, puis $\underline{d} = (\underline{i} + \underline{j})/\sqrt{2}$ et enfin $\underline{d} = \underline{c} = (\underline{i} + \underline{j} + \underline{k})/\sqrt{3}$.

Commenter les résultats.

Faire l'application numérique dans le cas du monocristal de nickel en utilisant les valeurs des modules d'élasticité de la table 22.1.

Commenter également les propriétés élastiques rassemblées dans ce tableau pour plusieurs métaux purs.

Si $\underline{d} = \underline{i}$, $\varepsilon_{11} = S_{11}\sigma_{11}$ en introduisant les souplesses S_{ij} . D'après la relation (22.20), on trouve

$$\frac{1}{E_{100}} = S_{11} = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} + \frac{1}{2\mu_1} + \frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1} = \frac{1}{9k} + \frac{1}{3\mu_2}$$

En utilisant les relations entre les modules k, μ_1, μ_2 et les modules C_{ij} , on obtient une expression alternative :

$$S_{11} = \frac{1}{3(C_{11} + 2C_{12})} + \frac{2}{3(C_{11} - C_{12})} = \frac{C_{11} + C_{12}}{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}$$

De plus, on s'intéresse à la déformation latérale :

$$\frac{\varepsilon_{22}}{\sigma} = \frac{\underline{j} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{j}}{\sigma} = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} = \frac{-C_{12}}{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})} = S_{12}$$

De plus, $S_{44} = 1/C_{44}$.

Si $\underline{d} = (\underline{i} + \underline{j})/\sqrt{2}$,

$$\frac{1}{E_{110}} = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} + \frac{1}{2\mu_1} + \frac{1}{4\mu_2} - \frac{1}{4\mu_1} = \frac{1}{9k} + \frac{1}{4\mu_1} + \frac{1}{12\mu_2}$$

Si $\underline{d} = (\underline{i} + \underline{j} + \underline{k})/\sqrt{3}$,

$$\frac{1}{E_{111}} = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} + \frac{1}{2\mu_1} + \frac{1}{6\mu_2} - \frac{1}{6\mu_1} = \frac{1}{9k} + \frac{1}{3\mu_1}$$

Remarquer que

$$\frac{1}{E_{111}} - \frac{1}{E_{100}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right), \quad \frac{1}{E_{110}} - \frac{1}{E_{100}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right)$$

Elément	C_{11} (GPa)	C_{12} (GPa)	C_{44} (GPa)	k (GPa)	μ_1 (GPa)	μ_2 (GPa)	A
aluminium (CFC)	108.2	61.3	28.5	76.9	28.5	23.5	1.22
cuivre (CFC)	168.4	121.4	75.4	137.1	75.4	23.5	3.21
nickel (CFC)	246.5	147.3	124.7	180.4	124.7	49.6	2.51
fer (CC)	228	132	116.5	164	116.5	48	2.43
niobium (CC)	245.5	139	29.3	174.5	29.3	53.4	0.55

TABLE 22.1 – Modules d'élasticité de plusieurs monocristaux à structure cubique (d'après ([Shuvalov, 1988](#)) p. 86). CFC et CC désignent respectivement les structures cubique à faces centrées et cubique centrée.

Les positions relatives de ces modules dépendent du signe de la différence $\mu_1 - \mu_2$. Si cette différence est positive, i.e. $\mu_1 \geq \mu_2$ et $A \geq 1$, on a l'encadrement :

$$E_{100} \leq E_{110} \leq E_{111} \quad (22.23)$$

Noter que le module dans les directions \underline{j} et \underline{k} sont bien entendu identiques au module selon \underline{i} puisque ces trois directions sont équivalentes du point de vue du groupe de symétrie. Des remarques similaires s'appliquent aux modules selon $\underline{i} + \underline{j}$, $\underline{i} - \underline{j}$, $\underline{j} + \underline{k}$, etc. L'égalité est obtenue pour $\mu_1 = \mu_2$, comme attendu. Le sens des inégalités doit être inversé si $A \leq 1$. Dans le cas du nickel, on trouve

$$E_{001} = 136.3 \text{ GPa}, \quad E_{011} = 232.5 \text{ GPa}, \quad E_{111} = 304 \text{ GPa}$$

Ces valeurs sont bien rangées dans l'ordre prévu et il est à noter que le module selon la direction \underline{c} , notée [111] en cristallographie, est plus de deux fois supérieur au module de Young le long de l'arête du cube.

Le tableau 22.1 montre que 4 des 5 métaux présentés possèdent un coefficient d'anisotropie supérieur à 1. Seul le niobium, cubique centré, possède un facteur d'anisotropie plus petit que 1. Pour ce métal, le module de Young selon la direction [111] est donc plus petit que celui dans la direction \underline{i} , notée [100], au contraire des autres métaux considérés.

Une représentation 3D du module de Young donné par la formule (22.20) en fonction des directions de sollicitation fait l'objet de la figure 22.2 pour les 5 métaux du tableau 22.1. On y voit les minima et maxima qui sont étudiés dans la suite.

22.2.4 Modules de Young extrémaux

Déterminer les extrema du module de Young (22.20) en fonction de la direction de traction \underline{d} .

Donner les valeurs de ces extrema et les directions pour lesquelles ces extrema sont atteints.

Commenter.

On considère le lagrangien

$$\mathcal{L}(d_1, d_2, d_3) = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} + \frac{1}{2\mu_1} + \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1}\right)(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4) - \lambda(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 - 1)$$

où la contrainte $\|\underline{d}\| = 1$ a été introduite avec le multiplicateur de Lagrange λ . La dérivée du lagrangien par rapport à chaque composante d_l (l fixé) doit s'annuler :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_l} = 2\left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right)d_l^3 - 2\lambda d_l = 0$$

On obtient les trois équations suivantes

$$d_l\left(\lambda - \left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right)d_l^2\right) = 0, \quad l = 1, 2, 3$$

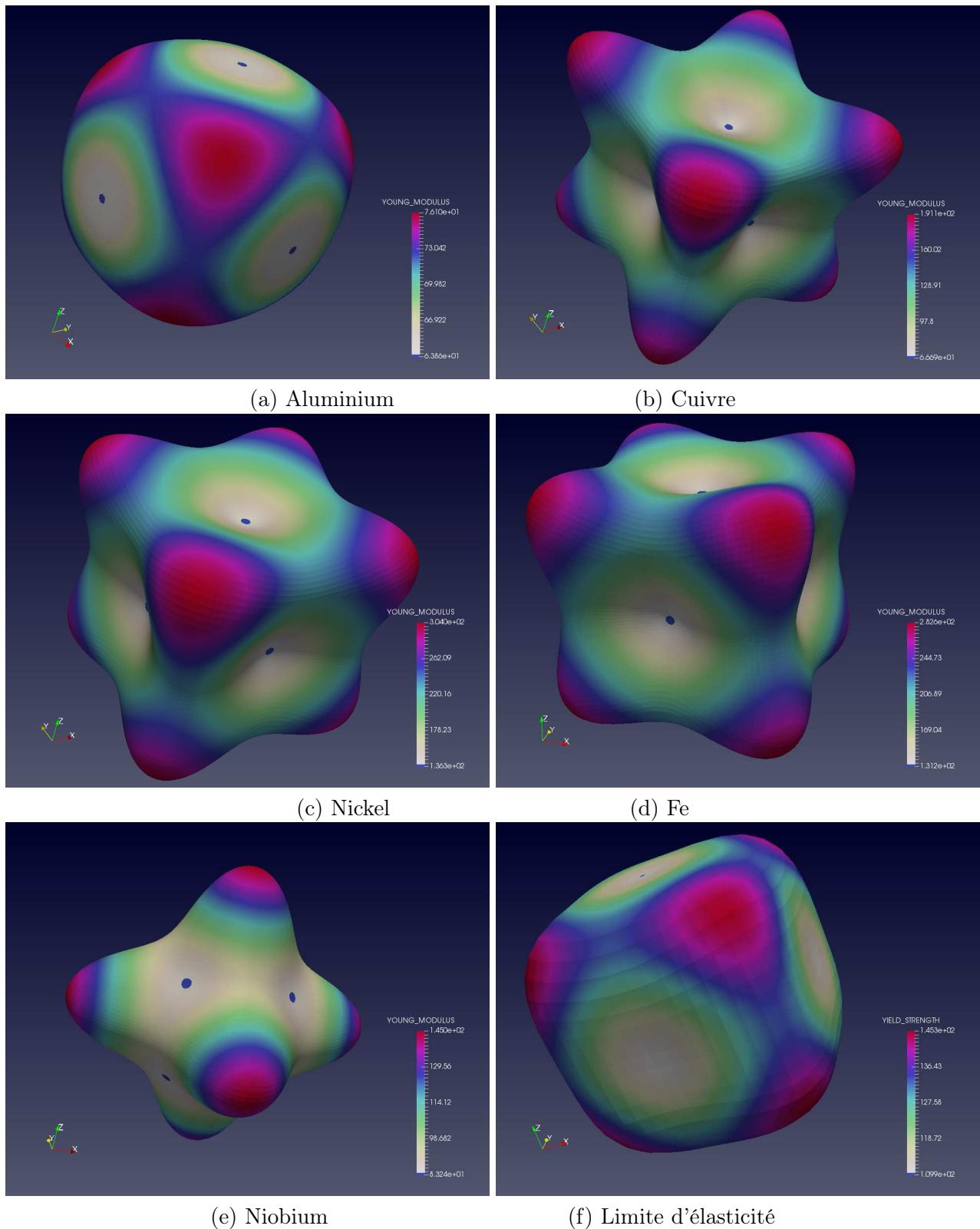


FIGURE 22.2 – Représentation tridimensionnelle du module de Young selon les directions de sollicitation dans le repère du cristal pour différents monocristaux métalliques : aluminium, cuivre, nickel, fer et niobium. La figure (f) présente la limite d'élasticité pour le critère cubique (22.34) avec les valeurs : $\sigma_0 = 130 \text{ MPa}$, $F = 0.6$, $L = 0.8$. Ces images ont été réalisées par Houssem Eddine-Chaieb et Kais Ammar.

Il faut distinguer les cas suivants :

(i) $d_1 = d_2 = 0$: on a alors $d_3 = 1$ et $E_d = E_{100} = S_{44}^{-1}$.

(ii) $d_1 = 0$ et $d_2 \neq 0$: alors on exprime λ en fonction de d_2^2 et la dernière équation donne $d_2^2 = d_3^2 = 1/2$. Finalement $d_2 = \pm 1/\sqrt{2}$ et $E_d = E_{110}$, déterminé précédemment.

(iii) Si aucune composante de \underline{d} n'est nulle, alors on doit avoir $d_1^2 = d_2^2 = d_3^2 = 1/3$. Il s'agit du module E_{111} déterminé précédemment.

On a vu que si $\mu_1 \geq \mu_2$, i.e. $A \geq 1$, alors les trois modules trouvés sont rangés dans l'ordre (22.23). Le module E_{111} correspond au maximum global tandis que le minimum global est atteint pour la direction [100]. L'orientation [110] correspond à un extremum local. C'est l'inverse dans le cas du niobium.

22.3 Torsion d'une barre monocristalline en élasticité cubique

On considère maintenant le problème de la torsion d'une barre de section circulaire constituée d'un superalliage à base de nickel monocristallin. La section du cylindre est un disque de rayon R , la longueur de la barre est ℓ et l'axe du cylindre est parallèle à la direction \underline{e}_3 de la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ représentée sur la figure 16.1 du chapitre 16. On applique le couple $\underline{M} = \mathcal{C}\underline{e}_3$ à l'extrémité $x_3 = \ell$ et le couple opposé à sa base. Les surfaces latérales de la barre sont libres de tout effort. Le comportement du matériau constitutif de la barre obéit à la loi d'élasticité cubique linéaire décrite par les équations (22.12).

L'objectif de cette section est de montrer que la réponse du cylindre dépend de l'orientation du cristal, c'est-à-dire du trièdre directeur matériel $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ par rapport au repère $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ attaché à la barre.

On propose de mettre en œuvre la méthode des déplacements déjà utilisée dans le cas isotrope en partant d'un champ de la forme :

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha X_2 X_3 \\ u_2 = \alpha X_1 X_3 \\ u_3 = \alpha \varphi(X_1, X_2) \end{cases} \quad (22.24)$$

où le déplacement u_3 , faisant intervenir la fonction inconnue φ , correspond à un gauchissement de la surface $X_3 = Cste$ après déformation. Les coordonnées du point matériel dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ sont X_1, X_2, X_3 . Le coefficient α désigne un angle par unité de longueur.

22.3.1 Torsion d'une barre parallèle à \underline{k}

On commence par le cas où le trièdre directeur est parallèle aux vecteurs de la base considérée :

$$\underline{e}_1 = \underline{i}, \quad \underline{e}_2 = \underline{j}, \quad \underline{e}_3 = \underline{k}$$

Cela signifie que l'axe de la barre est parallèle à l'une des arêtes du cube de la maille cristalline de la figure 22.1.

Le champ des déformations qui se déduit de (22.24) se met sous la forme

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_{13}(\underline{i} \otimes \underline{k} + \underline{k} \otimes \underline{i}) + \varepsilon_{23}(\underline{j} \otimes \underline{k} + \underline{k} \otimes \underline{j}) \quad (22.25)$$

1. Exprimer ε_{13} et ε_{23} en fonction de α, X_1, X_2 et de φ .
2. Calculer les contraintes en utilisant la loi d'élasticité cubique (22.12).
3. Donner alors les conditions que doit vérifier la fonction de gauchissement.
4. Conclure et donner l'expression finale des contraintes.
5. Etablir enfin la relation liant le couple et l'angle par unité de longueur pour la torsion par rapport à l'axe $\underline{e}_3 = \underline{k}$:

$$\mathcal{C} = \mu_1 \frac{\pi R^4}{2} \alpha \quad (22.26)$$

Commenter le résultat.

Tenseur de structure cubique

$$\underline{\underline{\mathfrak{T}}} = \underline{i} \otimes \underline{i} \otimes \underline{i} \otimes \underline{i} + \underline{j} \otimes \underline{j} \otimes \underline{j} \otimes \underline{j} + \underline{k} \otimes \underline{k} \otimes \underline{k} \otimes \underline{k}$$

Tenseur des modules d'élasticité cubique

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}} = 3\kappa(\text{trace } \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{1} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{dev}} + 2\gamma \underline{\underline{\mathfrak{T}}} : \underline{\varepsilon}$$

$$\underline{\underline{\Lambda}} = 3\kappa \underline{\underline{K}} + 2\mu \underline{\underline{J}} + 2\gamma \underline{\underline{\mathfrak{T}}} = \underline{\underline{\Lambda}} = 3k \underline{\underline{K}} + 2\mu_1 \underline{\underline{L}} + 2\mu_2 \underline{\underline{M}}$$

$$\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{J}} + \underline{\underline{K}}, \quad \underline{\underline{L}} = \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\mathfrak{T}}}, \quad \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{\mathfrak{T}}} - \underline{\underline{K}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{I}}$$

Tenseur des souplesses

$$\underline{\underline{\Lambda}}^{-1} = \frac{1}{3k} \underline{\underline{K}} + \frac{1}{2\mu_1} \underline{\underline{L}} + \frac{1}{2\mu_2} \underline{\underline{M}}$$

Relations entre les modules

$$C_{11} = k + \frac{4}{3}\mu_2, \quad C_{12} = k - \frac{2}{3}\mu_2, \quad C_{44} = \mu_1$$

$$2\mu_2 = C_{11} - C_{12}, \quad \mu_1 = C_{44}, \quad 3k = C_{11} + 2C_{12}$$

$$S_{11} = \frac{C_{11} + C_{12}}{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}, \quad S_{12} = \frac{-C_{12}}{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}, \quad S_{44} = 1/C_{44}$$

Coefficient d'anisotropie

$$A = \frac{2C_{44}}{C_{11} - C_{12}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Module de Young dans une direction \underline{d}

$$\frac{1}{E_d} = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} + \frac{1}{2\mu_1} + \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1} \right) (d_1^4 + d_2^4 + d_3^4)$$

$$\frac{1}{E_d} = S_{12} + \frac{S_{44}}{2} + \frac{1}{2}(2S_{11} - 2S_{12} - S_{44})(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4)$$

$$\frac{1}{E_d} = S_{11} - (2S_{11} - 2S_{12} - S_{44})(d_1^2 d_2^2 + d_2^2 d_3^2 + d_3^2 d_1^2)$$

Critère de plasticité et limite d'élasticité en traction

$$f(\underline{\sigma}, \underline{\underline{\mathfrak{T}}}) = \left(F \underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}} + L \underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\underline{\mathfrak{T}}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}} \right)^{1/2} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0$$

$$Y(\underline{d}) = \sigma_0 \left(F + \frac{3}{2} L (d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 - \frac{1}{3}) \right)^{-1/2}$$

TABLE 22.2 – Récapitulatif : Elasticité linéaire cubique.

Comme dans le chapitre 16 traitant du cas d'un matériau isotrope, les seules composantes non nulles de déformations sont

$$\varepsilon_{13} = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right), \quad \varepsilon_{23} = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right)$$

Pour calculer les contraintes, on évalue

$$\underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = 2\mu_1 \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + 2\mu_2 \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = 2\mu_1 \underline{\underline{\varepsilon}} + 2(\mu_1 - \mu_2) \underline{\underline{\mathfrak{T}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (22.27)$$

car $\underline{\underline{K}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = 0$ en raison de la nullité de la trace des déformations (22.25). Il s'avère que la forme (22.25) implique

$$(\underline{i}^4 + \underline{j}^4 + \underline{k}^4) : \underline{\underline{\varepsilon}} = 0$$

Par conséquent, la forme des contraintes obtenue est la même que dans le cas isotrope en remplaçant μ par μ_1 .

On montre alors que la fonction de gauchissement est harmonique et vérifie les mêmes conditions (16.31) que dans le cas isotrope. Cette condition devient (16.48) dans le cas de la section circulaire ce qui implique que $\varphi = 0$ comme dans le cas du matériau isotrope. Le calcul du moment de torsion résultant est alors identique au cas isotrope, au prix de remplacer μ par μ_1 . La relation (22.26) en découle.

Nous venons de montrer que l'analyse de la torsion d'une barre monocristalline cubique dont l'axe est parallèle à un des vecteurs du trièdre directeur conduit à des résultats formellement identiques au cas isotrope. Les contraintes ne font intervenir que le module μ_1

$$\sigma_{13} = -\mu_1 \alpha X_2, \quad \sigma_{23} = \mu_1 \alpha X_1 \quad (22.28)$$

et il n'y a pas de gauchissement lorsque la section est un disque.

Il en va tout autrement dans le cas de la

22.3.2 Torsion d'une barre d'axe parallèle à $\underline{i} + \underline{k}$

On considère cette fois-ci une barre de section circulaire dont les axes sont orientés de la façon suivante par rapport au trièdre directeur cristallographique :

$$\underline{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{i} - \underline{k}), \quad \underline{e}_2 = \underline{j}, \quad \underline{e}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{i} + \underline{k}) \quad (22.29)$$

Cela signifie que l'axe de la barre est parallèle à la diagonale d'une des faces du cube de la maille cristalline de la figure 22.1.

On adopte ici aussi la proposition (22.24) pour le champ de déplacements. Le tenseur des déformations reste de la forme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_{13} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) + \varepsilon_{23} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2) \quad (22.30)$$

1. Exprimer ce tenseur en fonction de produits tensoriels impliquant uniquement $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$.
2. Calculer ensuite le tenseur des contraintes en utilisant la loi (22.12).
3. Exprimer enfin ce tenseur des contraintes en fonction de produits tensoriels de $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$.
4. Donner l'équation aux dérivées partielles que doit satisfaire la fonction de gauchissement. Cette fonction est-elle harmonique ?
5. Donner les conditions de bord correspondantes.
6. Trouver la fonction de gauchissement associée. Vérifiez qualitativement que cette fonction conduit au gauchissement illustré sur la figure 22.3. Commenter.
7. Finalement, montrer que les seules composantes de contraintes non nulles s'expriment de la manière suivante :

$$\sigma_{13} = -2\alpha \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} X_2, \quad \sigma_{23} = 2\alpha \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} X_1 \quad (22.31)$$

8. Calculer alors la force et le moment de torsion résultant sur la surface supérieure S_ℓ .
9. Donner la relation entre le couple \mathcal{C} et l'angle par unité de longueur α .

D'après l'orientation (22.29), on trouve

$$\underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_3 + \underline{\mathbf{e}}_3 \otimes \underline{\mathbf{e}}_1 = \underline{\mathbf{i}} \otimes \underline{\mathbf{i}} - \underline{\mathbf{k}} \otimes \underline{\mathbf{k}}$$

$$\underline{\mathbf{e}}_2 \otimes \underline{\mathbf{e}}_3 + \underline{\mathbf{e}}_3 \otimes \underline{\mathbf{e}}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{\mathbf{i}} \otimes \underline{\mathbf{j}} + \underline{\mathbf{j}} \otimes \underline{\mathbf{i}} + \underline{\mathbf{j}} \otimes \underline{\mathbf{k}} + \underline{\mathbf{k}} \otimes \underline{\mathbf{j}})$$

Les contraintes se calculent en utilisant à nouveau (22.27). En particulier, on utilise

$$\tilde{\mathfrak{T}} : (\underline{\mathbf{i}} \otimes \underline{\mathbf{i}} - \underline{\mathbf{k}} \otimes \underline{\mathbf{k}}) = \underline{\mathbf{i}} \otimes \underline{\mathbf{i}} - \underline{\mathbf{k}} \otimes \underline{\mathbf{k}}$$

$$\underline{\sigma} = 2\mu_1 \underline{\varepsilon} + 2\varepsilon_{13}(\mu_2 - \mu_1)(\underline{\mathbf{i}} \otimes \underline{\mathbf{i}} - \underline{\mathbf{k}} \otimes \underline{\mathbf{k}}) = 2\mu_1 \underline{\varepsilon} + 2\varepsilon_{13}(\mu_2 - \mu_1)(\underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_3 + \underline{\mathbf{e}}_3 \otimes \underline{\mathbf{e}}_1)$$

et finalement

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= 2\varepsilon_{13}\mu_2(\underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_3 + \underline{\mathbf{e}}_3 \otimes \underline{\mathbf{e}}_1) + 2\varepsilon_{23}\mu_1(\underline{\mathbf{e}}_2 \otimes \underline{\mathbf{e}}_3 + \underline{\mathbf{e}}_3 \otimes \underline{\mathbf{e}}_2) \\ \sigma_{13} &= \alpha\mu_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X_1} - X_2\right), \quad \sigma_{23} = \alpha\mu_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X_2} + X_1\right) \end{aligned}$$

Les équations d'équilibre exigent que

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} = \alpha\mu_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial X_1^2} + \alpha\mu_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial X_2^2} = 0 \quad (22.32)$$

La fonction de gauchissement n'est harmonique que dans le cas très particulier $\mu_1 = \mu_2$, c'est-à-dire le cas isotrope, bien connu. La conditions de bord libre sur les surfaces latérales exigent que $\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = 0$ avec $\underline{n} = n_1\underline{\mathbf{e}}_1 + n_2\underline{\mathbf{e}}_2$. La troisième composante du vecteur-contrainte fournit

$$\mu_2\frac{\partial\varphi}{\partial X_1}n_1 + \mu_1\frac{\partial\varphi}{\partial X_2}n_2 = \mu_2X_2n_1 - \mu_1X_1n_2 \quad (22.33)$$

Dans le cas de la section circulaire, la dernière condition devient

$$\mu_2\frac{\partial\varphi}{\partial X_1}X_1 + \mu_1\frac{\partial\varphi}{\partial X_2}X_2 = (\mu_2 - \mu_1)X_1X_2$$

La fonction nulle n'est pas solution de cette équation de sorte qu'un gauchissement existe bel et bien pour la torsion d'une barre monocristalline possédant cette orientation particulière. En recherchant une fonction quadratique par rapport à X_1 et X_2 , on trouve

$$\varphi(X_1, X_2) = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2}X_1X_2$$

Elle est nulle, comme il se doit, dans le cas isotrope $\mu_1 = \mu_2$.

Cette fonction de gauchissement conduit effectivement aux contraintes (22.31).

Calculons alors la résultante des efforts sur la section circulaire :

$$\underline{\mathbf{R}} = \int_{S_\ell} \underline{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{e}}_3 dS = \int_{S_\ell} \sigma_{13} dS \underline{\mathbf{e}}_1 + \int_{S_\ell} \sigma_{23} dS \underline{\mathbf{e}}_2 = 0$$

car l'origine du repère est le centre de gravité de la section. Le moment résultant se réduit à la composante de torsion autour de $\underline{\mathbf{e}}_3$:

$$\mathcal{C} = \int_{S_\ell} (X_1\sigma_{23} - X_2\sigma_{13}) dS = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{\pi R^4}{2} \alpha$$

On retrouve le résultat du cas isotrope lorsque $\mu_1 = \mu_2$.

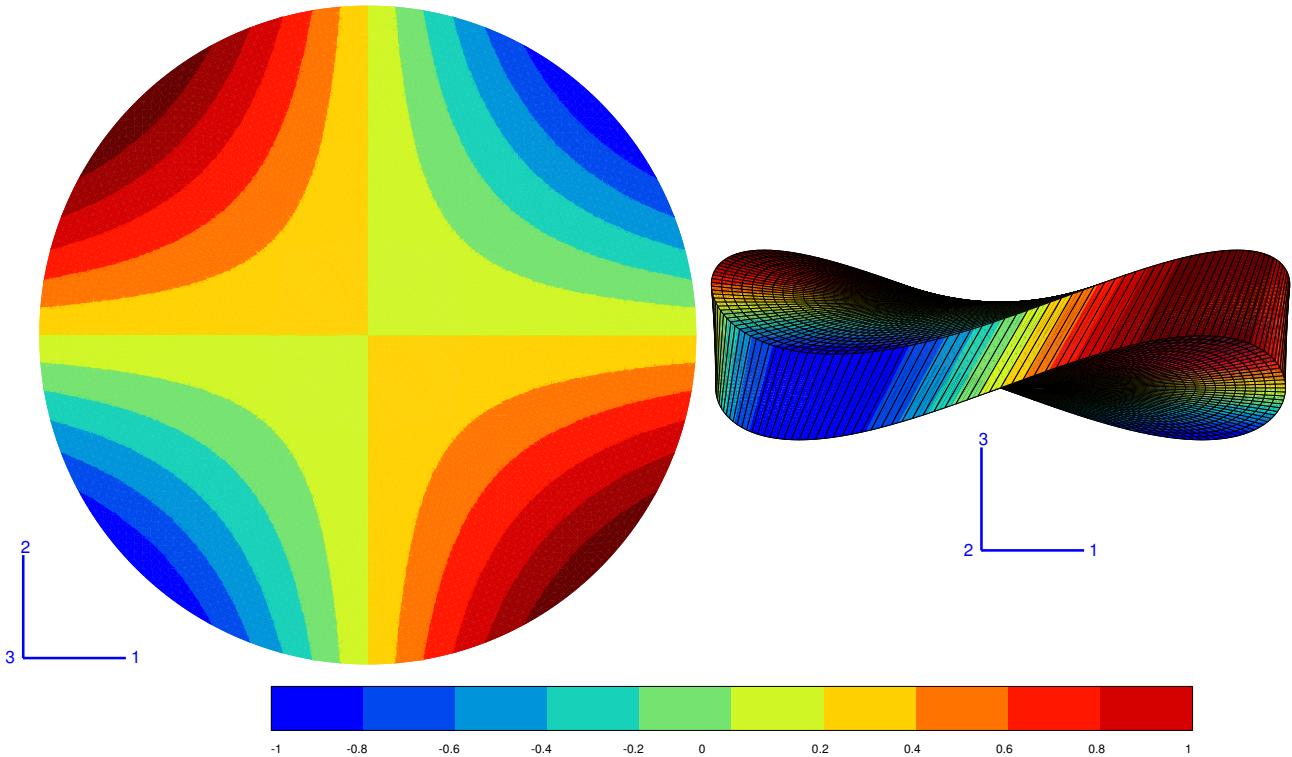


FIGURE 22.3 – Champ de déplacement u_3 sur un tronçon de la barre en torsion dont l'axe est orienté parallèlement à $\underline{i} + \underline{k}$: lignes de niveau dans la section (valeurs normalisées par la valeur maximale, à gauche), vue latérale du tronçon déformé (déplacement exagérés d'un facteur 10), à droite.

22.4 Critère de plasticité cubique

Le dimensionnement des aubes de turbine monocristallines nécessite de prendre en compte la limite d'élasticité du monocristal de superalliage à base de nickel pour tout type de chargement. Pour cela, il faut élaborer un critère de plasticité, à savoir une fonction des contraintes généralisant les critères de Tresca ou von Mises, valides pour les matériaux isotropes, au cas de la symétrie cubique. Tout comme le potentiel d'élasticité, le critère de plasticité doit être une fonction tensorielle des contraintes et du tenseur de structure, i.e. une fonction isotrope par rapport aux deux arguments. La dépendance est toutefois restreinte au déviateur des contraintes car on sait que le comportement plastique des métaux est généralement insensible à la pression hydrostatique. En se limitant à une forme quadratique³ comme pour le potentiel d'élasticité, on est alors en mesure de proposer le critère de plasticité suivant :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}) = \left(F\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} + L\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} : \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} \right)^{1/2} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 \quad (22.34)$$

où F, L et σ_0 sont les trois paramètres du modèle de plasticité. Tant que $f(\boldsymbol{\sigma}, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}})$ est négative, le comportement du matériau reste élastique. Lorsque $f(\boldsymbol{\sigma}, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}) = 0$, la limite d'élasticité est atteinte. La présence commode du facteur $\sqrt{2/3}$ est purement conventionnelle. Dans le critère apparaît la contrainte équivalente définie par

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(F\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} + L\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} : \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} \right)^{1/2} \quad (22.35)$$

3. On renvoie à (Boehler, 1978b; Boehler, 1987) pour la formulation des critères de plasticité anisotrope. Les noms des paramètres F, L sont empruntés à R. Hill, auteur d'un critère de plasticité anisotrope (Hill, 1950; Hill, 1978).

que l'on peut interpréter comme une norme anisotrope du tenseur des contraintes. Pour des raisons de stabilité de l'écoulement plastique, la convexité de la fonction f par rapport aux composantes des contraintes est exigée. Elle est garantie lorsque $F > 0, L \geq 0$.

22.4.1 Limite d'élasticité en traction simple

On considère l'état de traction simple dans la direction \underline{d} du cristal :

$$\underline{\sigma} = \sigma \underline{d} \otimes \underline{d}, \quad \text{avec} \quad \|\underline{d}\| = 1 \quad (22.36)$$

Calculer le déviateur $\underline{\sigma}^{\text{dev}}$ de ce tenseur de contraintes.

Evaluer $\underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}}$.

Evaluer $\underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\Sigma} : \underline{\sigma}^{\text{dev}}$.

Donner la valeur critique de σ pour laquelle le critère (22.34) s'annule. C'est la limite d'élasticité du monocristal en traction dans la direction \underline{i} . Elle s'exprime en fonction de F, L, σ_0 et des composantes de \underline{d} dans la base du cristal ($\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$).

Donner les trois limites d'élasticité pour la traction selon les directions $\underline{i}, \underline{i} + \underline{j}, \underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$.

Chercher les extrema de la limite d'élasticité par rapport à l'orientation de \underline{d} .

Pour quelles directions du cristal la limite d'élasticité est-elle la plus élevée ?

On calcule successivement :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}^{\text{dev}} &= \sigma \underline{d} \otimes \underline{d} - \frac{\sigma}{3} \underline{1} \\ \underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}} &= \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{3} - \frac{2}{3}\sigma^2 = \frac{2}{3}\sigma^2 \\ (\underline{i}^4 + \underline{j}^4 + \underline{k}^4) : (\underline{d} \otimes \underline{d}) &= d_1^2 \underline{i} \otimes \underline{i} + d_2^2 \underline{j} \otimes \underline{j} + d_3^2 \underline{k} \otimes \underline{k} \\ (\underline{i}^4 + \underline{j}^4 + \underline{k}^4) : \underline{1} &= \underline{i} \otimes \underline{i} + \underline{j} \otimes \underline{j} + \underline{k} \otimes \underline{k} \\ (\underline{i}^4 + \underline{j}^4 + \underline{k}^4) : \underline{\sigma}^{\text{dev}} &= \sigma(d_1^2 - \frac{1}{3})\underline{i} \otimes \underline{i} + \sigma(d_2^2 - \frac{1}{3})\underline{j} \otimes \underline{j} + \sigma(d_3^2 - \frac{1}{3})\underline{k} \otimes \underline{k} \\ \underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\Sigma} : \underline{\sigma}^{\text{dev}} &= \sigma^2(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 - \frac{1}{3}) \end{aligned}$$

Le critère de plasticité (22.34) s'annule lorsque

$$\sigma^2(F + \frac{3}{2}L(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 - \frac{1}{3})) = \sigma_0^2$$

La limite d'élasticité en traction ($\sigma > 0$) est donc

$$Y(\underline{d}) = \sigma_0 \left(F + \frac{3}{2}L(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 - \frac{1}{3}) \right)^{-1/2} \quad (22.37)$$

Une application directe de cette formule consiste à calculer les limites d'élasticité pour les trois directions de haute symétrie du cristal :

$$Y_{100} = Y(\underline{i}) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{F+L}}, \quad Y_{110} = Y(\underline{i} + \underline{k}) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{F+L/4}}, \quad Y_{111} = Y(\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{F}} \quad (22.38)$$

Comme F et L sont positifs, on a l'encadrement suivant :

$$Y_{100} \leq Y_{110} \leq Y_{111} \quad (22.39)$$

l'égalité ayant lieu dans le cas $L = 0$ pour lequel le critère (22.34) dégénère et devient identique au critère isotrope de von Mises.

Pour trouver les extrema de $Y(\underline{d})$, on introduit le lagrangien :

$$\mathcal{L}(\underline{d}) = \sigma_0 \left(F + \frac{3}{2}L(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 - \frac{1}{3}) \right)^{-1/2} - \lambda(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 - 1)$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange. La dérivée du lagrangien par rapport à d_l (l fixé) vaut :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_l} = -3\sigma_0 L d_l^3 \left(F + \frac{3}{2} L (d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 - \frac{1}{3}) \right)^{-3/2} - 2\lambda d_l = 0$$

On obtient les 3 équations suivantes (si $d_l \neq 0$, les cas de nullité étant discutés ci-dessous) :

$$3\sigma_0 L d_l^2 \left(F + \frac{3}{2} L (d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 - \frac{1}{3}) \right)^{-3/2} = -2\lambda$$

La somme des 3 équations permet d'extraire la relation :

$$\left(F + \frac{3}{2} L (d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 - \frac{1}{3}) \right)^{-3/2} = -\frac{2\lambda}{\sigma_0 L}$$

On distingue alors les 3 cas suivants :

(i) $d_1 = d_2 = 0 \implies d_3 = \pm 1$. Dans ce cas la limite d'élasticité est donnée par Y_{100} calculé précédemment.

(ii) $d_1 = 0, d_2^2 = d_3^2 = 1/2$. Dans ce cas la limite d'élasticité est donnée par Y_{110} calculé précédemment.

(iii) Si les trois composantes sont non nulles, alors $d_1^2 = d_2^2 = d_3^2 = 1/3$ et la limite d'élasticité est donnée par Y_{111} calculé précédemment.

A la lumière de l'encadrement (22.39), la limite d'élasticité maximale est atteinte dans la direction $\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$, tandis que la valeur minimale est obtenue pour $\underline{d} = \underline{i}$. Un extremum local est atteint pour \underline{d} parallèle à $\underline{i} + \underline{j}$ (et toutes les orientations équivalentes qui s'en déduisent par les 48 symétries du cube). Le rapport entre le maximum et le minimum, à savoir $1/\sqrt{1+L/F}$ permet d'identifier le rapport L/F . La connaissance de la limite d'élasticité intermédiaire permet alors d'identifier F et L . Une représentation de la limite d'élasticité en fonction de la direction de sollicitation est donnée sur la figure 22.2(f) pour un jeu de valeurs particulières pour σ_0, F, L .

22.4.2 Limite d'élasticité en torsion

On applique maintenant le critère de plasticité au cas de la torsion d'une barre monocristalline pour les deux orientations traitées au paragraphe 22.3.

Utiliser les champs de contraintes trouvés aux paragraphes 22.3.1 et 22.3.2 pour déterminer l'angle de torsion par unité de longueur critique α_0 pour lequel la plasticité commence. On traitera d'abord la torsion autour de \underline{k} puis on passera à la torsion autour de $\underline{i} + \underline{k}$.

On indiquera également à quel endroit la limite d'élasticité est atteinte pour la première fois.

Le champ de contrainte équivalente, σ_{eq} donnée par (22.35), est illustré sur la figure 22.4 pour deux valeurs du couple de paramètres F, L , dans le cas de la torsion autour de l'axe $\underline{i} + \underline{k}$. Commenter ces figures à la lumière des résultats tout juste acquis concernant la limite d'élasticité pour la barre en torsion selon l'axe $\underline{i} + \underline{k}$.

Dans le cas de la torsion selon l'axe \underline{k} , le champ de contraintes trouvé au paragraphe 22.3.1 est de la forme

$$\underline{\sigma} = \sigma_{13}(\underline{i} \otimes \underline{k} + \underline{k} \otimes \underline{i}) + \sigma_{23}(\underline{j} \otimes \underline{k} + \underline{k} \otimes \underline{j}) = \underline{\sigma}^{dev} \quad (22.40)$$

Remarquer que $\underline{\sigma} : \underline{\sigma} = 0$ de sorte que la contrainte équivalente, calculée à partir des expressions (22.28) se réduit à

$$\underline{\sigma}^{dev} : \underline{\sigma}^{dev} = 2\sigma_{13}^2 + 2\sigma_{23}^2 = 2\alpha^2 \mu_1^2 r^2$$

Le critère de plasticité s'écrit donc

$$f(\underline{\sigma}) = \sqrt{2F}\alpha\mu_1 r - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0$$

Il est maximal en $r = R$ et s'annule pour la première fois lorsque

$$\alpha_0^{100} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3F}\mu_1 R}$$

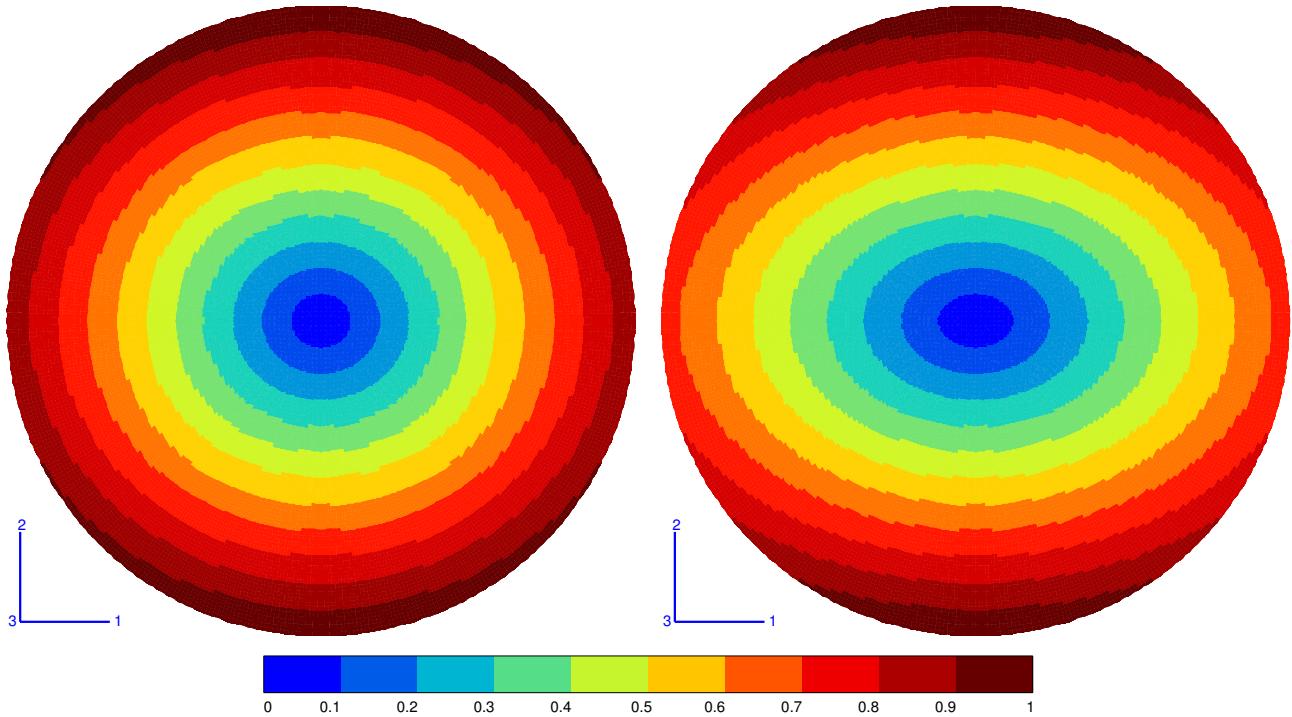


FIGURE 22.4 – Champ de contrainte équivalente σ_{eq} (normée par la valeur maximale) pour deux valeurs des paramètres F et L : $F = 1 = 4L$ à gauche, $F = L = 1$ à droite, cf. équation (22.35) pour la définition de la contrainte équivalente. La section représentée est issue d'une barre monocristalline en torsion autour de l'axe $\underline{e}_3 = (\underline{i} + \underline{k})/\sqrt{2}$, avec $\underline{e}_2 = \underline{j}$.

La plasticité commence alors simultanément tout autour de la circonférence, comme dans le cas isotrope.

Dans le cas de la torsion selon l'axe $\underline{i} + \underline{k}$, le champ de contraintes trouvé au paragraphe 22.3.2 est de la forme

$$\underline{\sigma} = \sigma_{13}(\underline{i} \otimes \underline{i} - \underline{k} \otimes \underline{k}) + \sigma_{23}(\underline{i} \otimes \underline{j} + \underline{j} \otimes \underline{i} + \underline{k} \otimes \underline{k} + \underline{k} \otimes \underline{j})/\sqrt{2} = \underline{\sigma}^{dev} \quad (22.41)$$

On calcule les deux contributions au critère :

$$\underline{\sigma}^{dev} : \underline{\sigma}^{dev} = 2\sigma_{13}^2 + 2\sigma_{23}^2 = 8\alpha^2 b^2 r^2$$

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\sigma} = \sigma_{13}(\underline{i} \otimes \underline{i} - \underline{k} \otimes \underline{k}), \quad \underline{\sigma} : \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\sigma} = 2\sigma_{13}^2 = 8\alpha^2 b^2 X_2^2$$

avec la notation $b = \mu_1 \mu_2 / (\mu_1 + \mu_2)$. Le critère de plasticité s'écrit donc

$$f(\underline{\sigma}) = 2ab\sqrt{2(Fr^2 + LX_2^2)} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0$$

Il est maximal aux deux points $X_2 = \pm R$ c'est-à-dire au bord du disque dans la direction \underline{j} . Il s'annule pour la première fois lorsque

$$\alpha_0^{110} = \frac{\sigma_0}{2\sqrt{3}bR\sqrt{F+L}} \quad (22.42)$$

Les champs de la figure 22.4 confirment que la limite d'élasticité est atteinte en deux points opposés de la section. Lorsque L est petit on se rapproche d'une distribution axisymétrique de la contrainte équivalente conduisant à une limite d'élasticité atteinte simultanément tout le long de la circonférence extérieure. Au contraire, cette distribution est très anisotope sur la figure 22.4 pour $L = 1$.

