Correction des exercices

2 Analyse de Fourier

Exercice 2.4.1 (Séries de Fourier*). *Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi,\pi[$ par $f(t)=t^2$. Calculer sa série de Fourier et étudier sa convergence. En déduire les valeurs de* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ *et* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.

Solution: La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. D'après le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier converge donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on a

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi[} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi[} t^2\cos(nt)\mathrm{d}t$$

par un argument de parité. En effectuant une double intégration par parties, on trouve que

$$c_0(f)=\frac{\pi^2}{3},\quad \forall n\neq 0, c_n(f)=2\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

D'après le théorème de Dirichlet, on a donc

$$\begin{aligned}\forall t\in[-\pi,\pi[, t^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} 2\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)+\frac{\pi^2}{3}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)+\frac{\pi^2}{3}.\end{aligned}$$

En particulier, lorsque $t=\pi$, on trouve :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},$$

et lorsque $t=0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}.$$

Enfin, d'après la formule de Plancherel, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4 \mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2,$$

de sorte que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

□

Exercice 2.4.2 (Série de Fourier d'une fonction lipschitzienne**)**.** *Soit f une fonction 2π- périodique et L-lipschitzienne. L'objectif de cet exercice est de montrer que la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*

1. *Pour $h \in \mathbb{R}$, on note $\tau_h(f)$ la fonction $t \to f(t-h)$. En évaluant la quantité $\|\tau_h(f) - f\|_2^2$, montrer que*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\frac{e^{inh}-1}{h}\right|^2 |c_n(f)|^2 \leq L^2.$$

2. *Déduire de l'inégalité précédente que*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2 \leq L^2.$$

3. *Déduire enfin de cette dernière inégalité que la série*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$$

converge, et que la série de Fourier de f converge donc uniformément vers f.

Solution: 1. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a, d'une part

$$\|\tau_h(f) - f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t-h) - f(t)|^2 \mathrm{d}t \leq L^2 h^2,$$

et d'autre part, en appliquant le théorème de Plancherel :

$$\|\tau_h(f) - f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\tau_h(f) - f)|^2.$$

Or, on a

$$c_n(\tau_h(f)) := \int_0^{2\pi} f(t-h)e^{-int}\mathrm{d}t = e^{inh}c_n(f).$$

On en conclut :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\frac{e^{inh}-1}{h}\right|^2 |c_n(f)|^2 \leq L^2.$$

2. On obtient l'inégalité demandée en appliquant le lemme de Fatou et en notant que

$$\left|\frac{e^{inh}-1}{h}\right|^2 \to n^2$$

lorsque $h \to 0$.

3. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n(f)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} < \infty.$$

La série de Fourier de f converge donc uniformément vers une limite $\tilde{f}$. Par ailleurs, on sait (d'après la théorie des séries de Fourier dans L^2), que la série de Fourier de f converge en norme quadratique vers f. On a donc nécessairement $\tilde{f} = f$. □

Exercice 2.4.3 (Théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$ *)**.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction*

$$f_n(t) := \mathbb{1}_{[-n,n]}(t)$$

1. *Calculer la transformée de Fourier de f_n pour tout $n \geq 1$. Etudier les convergences simples et dans $L^2(\mathbb{R})$ des suites de fonction $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(\widehat{f}_n)_{n\geq 1}$.*
2. *En utilisant le théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$, montrer que la fonction*

$$t \to \frac{\sin t}{t}$$

n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

Solution: 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Sa transformée de Fourier est donc donnée pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ par

$$\widehat{f}_n(\omega) := \int_{-n}^{n} e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = 2\frac{\sin(n\omega)}{\omega}.$$

— $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction 1 sur $\mathbb{R}$.
— $\forall n \geq 1$, $||f||_2 = \sqrt{2n} \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
— $(\widehat{f_n})_{n\geq 1}$ ne possède pas de limite simple.
— Enfin, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\|\widehat{f_n}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{4\sin^2(\omega n)}{\omega^2} \mathrm{d}\omega = n \int_{\mathbb{R}} \frac{4\sin^2 u}{u^2} \mathrm{d}u.$$

On en conclut que $\|\widehat{f_n}\|_2 \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

2. Par l'absurde, supposons que la fonction

$$t \to \frac{\sin t}{t}$$

soit dans $L^1(\mathbb{R})$. D'après le théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de cette fonction est nécessairement

$$t \to \mathbb{1}_{[-1,1]}(t).$$

On note que cette fonction n'est pas continue en -1 et 1. Or, on sait que la transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ est nécessairement continue. On aboutit donc à une contradiction. □

Exercice 2.4.4 (Transformée de Fourier et dérivation *)**.** *Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On suppose que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, on a*

$$\widehat{f'}(\omega) = i\omega \widehat{f}(\omega).$$

Indice : *On pourra considérer la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n \geq 1$ par*

$$f_n(t) = f(t)\rho\left(\frac{t}{n}\right),$$

où ρ est une fonction de classe C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}$ telle que $\rho(0) = 1$. On montrera dans un premier temps que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$, puis que la suite des transformées de Fourier $(\widehat{f_n})_{n\geq 1}$ converge uniformément vers $\widehat{f}$. On en déduira le résultat demandé.

Solution: Soit f vérifiant les hypothèses de l'énoncé. La transformée de Fourier de f' est bien définie puisque $f' \in L^1(\mathbb{R})$ et est donnée pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ par :

$$\widehat{f'}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$$

Pour arriver à l'expression de l'énoncé, une idée évidente est de faire une intégration par parties. On trouve alors :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{f'}(\omega) := \Big[f(t)e^{-i\omega t}\Big]_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$$

La présence du 1er terme du membre de droite est cependant problématique pour arriver à la formule demandée. On remarque toutefois que lorsque f est à support compact, ce terme s'annule, et qu'on a alors $\widehat{f'}(\omega) = i\omega\widehat{f}(\omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$.

La question qui se pose est donc de savoir comment généraliser ce résultat à une fonction f à support non compact vérifiant les hypothèses de l'énoncé. Pour ce faire, l'idée est de construire une suite de fonctions $(f_n)_{n\leq 1}$ à support compact et vérifiant les hypothèses de l'énoncé (une suite "régularisante") telle que $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(f'_n)_{n\geq 1}$ convergent uniformément vers f et f'. Montrons que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ proposée dans l'énoncé fait l'affaire ici.

1. Par définition de la transformée de Fourier, on a, pour tout $n \geq 1$,

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, |\widehat{f_n}(\omega) - \widehat{f}(\omega)| = \left| \int_{\mathbb{R}} (f_n(t) - f(t))e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \right| \leq \|f_n - f\|_{L^1}.$$

   Cette majoration étant uniforme par rapport à la variable ω, on vérifie :

$$\|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f_n - f\|_{L^1}.$$

2. On vérifie aisément que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction f. Enfin, en notant $M = \sup_{t\in\mathbb{R}} \rho(t) - 1$, on vérifie que

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f_n(t) - f(t)| \leq M|f(t)|.$$

   Comme f est intégrable, le théorème de convergence dominée permet d'affirmer que $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. La suite des transformées de Fourier $(\widehat{f_n})_{n\geq 1}$ converge donc uniformément vers $\widehat{f}$.

3. Par un raisonnement similaire, on peut montrer que $\|\widehat{f'_n} - \widehat{f'}\|_{L^\infty} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Pour tout $n \geq 1$, on vérifie enfin à l'aide d'une simple intégration par parties que

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{f_n}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = i\omega\widehat{f_n}(\omega).$$

En passant à la limite à gauche et à droite (ce qui est licite du fait des convergences uniformes), on vérifie bien que

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{f'}(\omega) = i\omega\widehat{f}(\omega).$$

□

Exercice 2.4.5 (Transformée de Fourier d'une fonction Gaussienne *)**.** *Soit $a > 0$. On considère la fonction Gaussienne*

$$f_a : t \to e^{-at^2}$$

1. *Montrer que la transformée de Fourier $\widehat{f_a}$ de la fonction f_a est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. En déduire que $\widehat{f_a}$ est solution de l'équation différentielle*
$$\widehat{f_a}(\omega)' + \frac{\omega}{2a}\widehat{f_a}(\omega) = 0.$$
2. *En notant que*
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi},$$
en déduire l'expression de $\widehat{f_a}$.

Solution: 1. $\forall a > 0$, la fonction $t \to e^{-at^2}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$. Sa transformée de Fourier est donc bien définie et vaut :

$$\widehat{f_a}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, on vérifie que

1. $\forall \omega \in \mathbb{R}$, $t \to e^{-at^2}e^{-i\omega t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$,
2. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\omega \to e^{-at^2}e^{-i\omega t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée la fonction $\omega \to -ite^{-at^2}e^{-i\omega t}$
3. $\forall \omega \in \mathbb{R}$, $|-ite^{-at^2}e^{-i\omega t}| \leq |te^{-at^2}|$, $t \to |te^{-at^2}|$ étant une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrable, $\widehat{f_a}(\omega)$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$\widehat{f'_a}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} -ite^{-at^2}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$$

En effectuant une intégration par parties, on trouve :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{f'_a}(\omega) = -\frac{\omega}{2a}\widehat{f_a}(\omega).$$

2. On peut intégrer l'équation différentielle précédente pour trouver :

$$\widehat{f_a}(\omega) = \widehat{f_a}(0)\exp\left(\frac{-\omega^2}{4a}\right).$$

On trouve le résultat demandé en notant que

$$\widehat{f_a}(0) := \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

$\square$

Exercice 2.4.6 (Transformée de Fourier d'une fonction à support compact **). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction à support compact.*

1. *Montrer que la transformée de Fourier de f est analytique sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $\omega_0 \in \mathbb{R}$,*

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{f}(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\widehat{f}^{(n)}(\omega_0)}{n!}(\omega - \omega_0)^n.$$

2. *En déduire que si $\widehat{f}$ s'annule sur un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $\widehat{f}$ est identiquement nulle.*

Solution: 1. Comme f est à support compact, il existe $A > 0$ tel que si $|t| > A$, alors $f(t) = 0$. Comme $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a, pour tout $\omega_0 \in \mathbb{R}$

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i(\omega-\omega_0)t}e^{-i\omega_0 t}\mathrm{d}t.$$

En utilisant le développement en séries entières de la fonction exponentielle, on obtient

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega_0 t}\frac{(-i)^n t^n(\omega-\omega_0)^n}{n!}\mathrm{d}t.$$

De manière évidente, on souhaite inverser l'ordre des sommations. Pour ce faire, on peut s'appuyer sur le théorème de convergence dominée. Considérons ainsi la suite des fonctions $(h_N)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $N \geq 0$ par

$$h_N(t) = \sum_{n=0}^{N} f(t)e^{-i\omega_0 t}\frac{(-i)^n t^n(\omega-\omega_0)^n}{n!}.$$

De manière évidente, la suite de fonctions $(h_N)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega_0 t}\frac{(-i)^n t^n(\omega-\omega_0)^n}{n!}.$$

Par ailleurs, comme f est à support compact, on a la majoration (uniforme par rapport à N) :

$$|h_N(t)| \leq \sum_{n=0}^{N} |f(t)| \frac{A^n(\omega-\omega_0)^n}{n!}| \leq |f(t)| \exp(A|\omega-\omega_0|) \in L^1(\mathbb{R}).$$

D'après le théorème de convergence dominée, on a donc

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{f}(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega_0 t} \frac{(-i)^n t^n}{n!} \mathrm{d}t \right] (\omega-\omega_0)^n,$$

ce qui prouve bien que $\widehat{f}$ est analytique. Par ailleurs, en appliquant le théorème de dérivation sous le signe intégral, on peut aisément montrer que, pour tout $\omega_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{f}^{(n)}(\omega_0) = \int_{\mathbb{R}} (-it)^n f(t) e^{-i\omega_0 t} \mathrm{d}t,$$

de sorte que, pour tout $\omega_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{f}(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\widehat{f}^{(n)}(\omega_0)}{n!} (\omega-\omega_0)^n.$$

2. Supposons que $\widehat{f}$ s'annule sur un intervalle $]a, b[$, avec $a < b$. Soit alors $\omega_0 = \frac{a+b}{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\widehat{f}^{(n)}(\omega_0) = 0$, de sorte que $\forall \omega \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}(\omega) = 0$. $\widehat{f}$ est donc identiquement nulle sur $\mathbb{R}$. □

Exercice 2.4.7 (Repliement spectral *)**.** *On considère le signal suivant*

$$x(t) = 2\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 5\sin(380\pi t) - 4\sin\left(30\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \qquad (1)$$

1. *Montrer que le signal continu est périodique et calculer sa période fondamentale T.*
2. *A quelle fréquence minimale $f_{\min}$ (en Hz) faut-il l'échantillonner pour éviter le repliement spectral ?*
3. *On construit un signal discret x_1 par échantillonnage de x a la fréquence $f_s = 2f_{\min}$. On suppose qu'on dispose de N échantillons, avec $N = f_s T$, où T est la période calculée a la question 1. Calculer et représenter la TFD à N points du signal résultant.*
4. *On construit maintenant un nouveau signal x_2 en échantillonnant x à une fréquence $f_s = 135$ Hz. On suppose toujours que $N = f_s T$. Calculer et représenter la TFD à N points du signal résultant.*

Solution:

1. Le signal contient des termes de fréquences respectives ± 50, ± 190 et ± 15 Hz. Le PGCD de ces fréquences est 5. On en déduit que la période fondamentale du signal est $T = 0.2$s.
2. Les fréquences présentes dans le signal sont respectivement 15Hz, 50Hz et 190Hz. D'après le théorème d'échantillonnage de Shannon, il est donc nécessaire d'échantillonner le signal à une fréquence strictement supérieure à $f_{\min} = 380$Hz.
3. Calculer la TFD à N points revient a trouver les coefficients de sa décomposition dans la base des $\{e_k\}_{k=0,...,N-1}$ qui sont les signaux définis pour $k = 0, ..., N-1$ par

$$e_k(n) = \exp\left(\frac{2ink\pi}{N}\right).$$

On a en effet :

$$x_d[n] := x(n\Delta t) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{x}[k] \exp\left(\frac{2ink\pi}{N}\right).$$

Avec la fréquence d'échantillonnage considérée, $N = 152$. Le premier terme du signal discret s'écrit comme suit, lorsqu'on cherche à faire apparaître ces termes

$$\begin{aligned} 2\cos\left(100\pi n\Delta t + \frac{\pi}{4}\right) &= \exp(i2\pi 50\Delta t n)e^{i\pi/4} + \exp(-i2\pi 50\Delta t n)e^{-i\pi/4} \\ &= \exp\left(i2\pi\frac{50N\Delta t}{N}n\right)e^{i\pi/4} + \exp\left(-i2\pi\frac{50N\Delta t}{N}n\right)e^{-i\pi/4} \\ &= \exp\left(i2\pi\frac{50N\Delta t}{N}n\right)e^{i\pi/4} + \exp\left(i2\pi\frac{(N-50N\Delta t)}{N}n\right)e^{-i\pi/4} \end{aligned}$$

On a bien $50N\Delta t = 10 \in \{0, ..., N-1\}$ et $N - 50N\Delta t = 142 \in \{0, ..., N-1\}$. On aboutit donc bien à une décomposition du premier terme sur la base des $\{e_k\}_{k=0,...,N-1}$, qui fait apparaître des pics de TFD d'amplitude N pour $k = 10$ et $k = 142$. De même, les autres termes du signal font apparaître des pics d'amplitude $2N$ en $k = 3$ et $N-3$, et d'amplitude $5N/2$ en $k = 38$ et $N - 38$.

Remarque 1. *Ces pics correspondent bien aux fréquences présentes dans le signal d'origine. Les formules du cours indiquent en effet que le k–ième terme de la TFD correspond a l'énergie contenue à la fréquence*

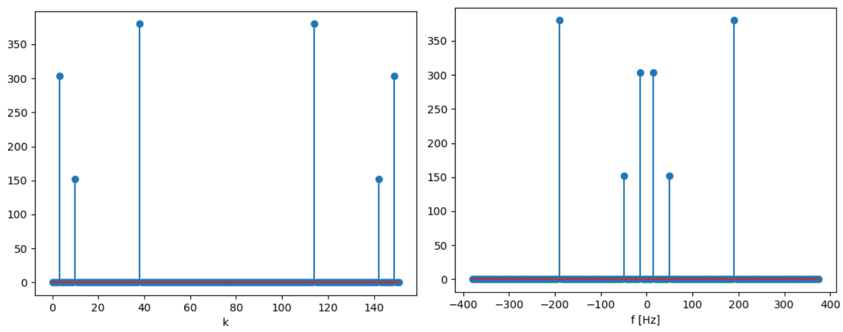

FIGURE 1 – TFD du signal affiché en fonction de k (gauche) et en fonction des fréquences continues centrées en 0 (droite).

$\frac{k}{N\Delta t}$, ce qui permet de retrouver les fréquences $\pm 15 Hz$, $\pm 50 Hz$ et ± 190 Hz. Le spectre resultant est représenté sur la Figure 1.
Pour que le calcul "tombe juste", c'est-a-dire que les fréquences présentes dans le signal correspondent exactement aux fréquences calculées par la TFD, on a utilisé le fait que le signal discret était périodique et on a choisi une taille de signal correspondant exactement a une période. On a donc exploité le fait que $f_s T \in \mathbb{N}$.

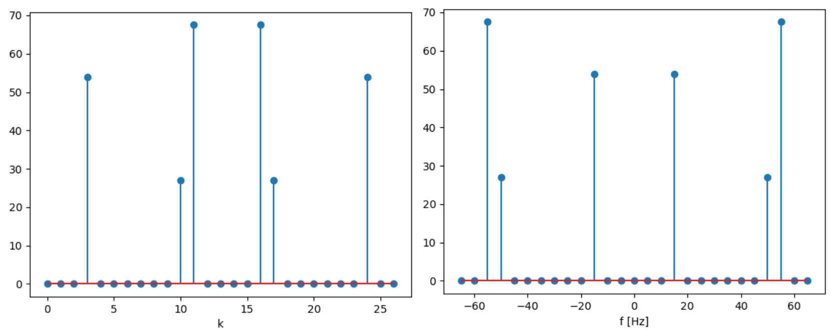

FIGURE 2 – TFD du signal affiché en fonction de k (gauche) et en fonction des fréquences continues centrées en 0 (droite) en présence de repliement spectral.

4. Avec cette nouvelle fréquence d'échantillonnage, le critère de Shannon n'est pas respecté en raison de la fréquence à 190 Hz présente dans le signal continu. Les calculs au-dessus restent valables mais on a désormais $38 \notin \{0, ..., N-1\}$ puisque $N = 27$. Pour trouver où seront les pics de la TFD, il faut exploiter la periodicité du spectre d'un signal discret pour faire apparaitre des valeurs de k entre 0 et 26. On peut effectivement

écrire, pour le terme de fréquence 190 Hz :

$$\begin{aligned}
\sin(380\pi n\Delta t) &= \frac{1}{2i}\left[\exp\left(i\frac{2\pi 190 N\Delta t n)}{N}\right) - \exp\left(i\frac{2\pi(N-190N\Delta t)n}{N}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[\exp\left(i\frac{2\pi 38n}{N}\right) - \exp\left(-i\frac{2\pi 11n}{N}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[\exp\left(i\frac{2\pi(27+11)n}{N}\right) - \exp\left(-i\frac{2\pi(27-16)n}{N}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[\exp\left(i\frac{2\pi 11n}{N}\right) - \exp\left(i\frac{2\pi 16n}{N}\right)\right]
\end{aligned}$$

Ce terme fait alors apparaitre des pics en $k = 11$ et $k = 16$. Ils donnent l'illusion que le signal d'origine contenait de l'énergie a la fréquence $\frac{11}{N\Delta t} = 55$ Hz, ce qu'on a représenté sur la Figure 2.

□

Exercice 2.4.8 (Correspondance signaux-spectres). *Voir polycopié*

Solution:

— (1) correspond à l'échantillonnage temporel d'une fonction Gaussienne. Le spectre associé est (A), qui correspond à la TFDT du signal sur l'intervalle de pulsations $[-3\pi, 3\pi]$.

— (2) et (3) correspondent à des créneaux continus. On sait que la transformée de Fourier d'un créneau est un sinus cardinal. Par ailleurs, d'après la prop. 2.1.9 du cours, une dilatation d'un signal par un facteur λ se traduit par une dilation d'un facteur $1/\lambda$ de sa transformée de Fourier. On en déduit que les spectres associés à (2) et (3) sont (B) et (C), respectivement.

— (4) correspond à l'échantillonnage de la fonction $t \to \sin(2t)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi[$ avec un pas $\Delta t = \pi/16$. Le signal échantillonné est donc

$$\left\{ s[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{16}n - 2\pi\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{16}n\right), n = 0, \ldots, 31 \right\}.$$

Le spectre de s présente donc pics aux pulsations $-\frac{\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{8}$.

□