Théorèmes de l'énergie et encadrement de la solution d'un problème d'élasticité

Samuel Forest

Centre des Matériaux/UMR 7633
Mines ParisTech /CNRS
BP 87, 91003 Evry, France
Samuel.Forest@ensmp.fr

Outline

Plan

Potentiel d'élasticité

- Contexte infinitésimal
  tenseur des déformations infinitésimales : $\underset{\sim}{\varepsilon}$
- Elasticité non linéaire

$$\underset{\sim}{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{\varepsilon}}(\underset{\sim}{\varepsilon}) = W'(\underset{\sim}{\varepsilon})$$

  $W(\underset{\sim}{\varepsilon})$ potentiel d'élasticité
- Elasticité linéarisée (état naturel)

$$W(\underset{\sim}{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\approx}{\boldsymbol{C}} : \underset{\sim}{\varepsilon}$$

  $\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}$ tenseur des modules d'élasticité

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\approx}{\boldsymbol{C}} : \underset{\sim}{\varepsilon}$$

  loi de Hooke

Potentiel dual

- Elasticité non linéaire

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{\partial W^\star}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = W^{\star\prime}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})$$

  $W^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})$ potentiel dual

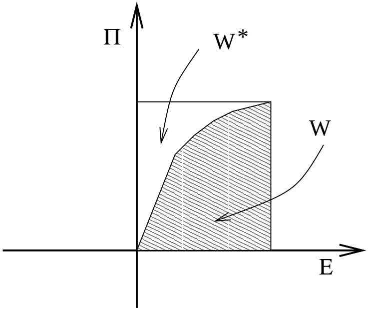
- Elasticité linéarisée (état naturel)

$$W^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{1}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\approx}{\boldsymbol{S}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$$

  $\underset{\approx}{\boldsymbol{S}}$ tenseur des souplesses

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\approx}{\boldsymbol{S}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \underset{\approx}{\boldsymbol{S}} = \underset{\approx}{\boldsymbol{C}}^{-1}$$

Potentiel d'élasticité et potentiel dual



$$
\begin{aligned}
W(\underset{\sim}{\varepsilon}) &= \int_0^{\underset{\sim}{\varepsilon}} W'(\underset{\sim}{\varepsilon}) : d\underset{\sim}{\varepsilon} \\
&= \int_0^{\underset{\sim}{\varepsilon}} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : d\underset{\sim}{\varepsilon}
\end{aligned}
$$

aire sous la courbe

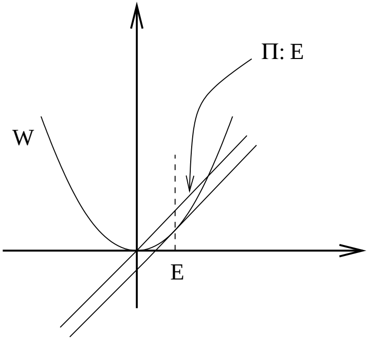
$$
\begin{aligned}
W^\star(\underset{\sim}{\varepsilon}) &= \int_0^{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} W^{\star\prime}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) : d\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \\
&= \int_0^{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} \underset{\sim}{\varepsilon} : d\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}
\end{aligned}
$$

aire complémentaire

$$
W(\underset{\sim}{\varepsilon}) + W^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\varepsilon}
$$

$$
W^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\varepsilon} - W(\underset{\sim}{\varepsilon}), \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = W'(\underset{\sim}{\varepsilon})
$$

Convexité du potentiel d'élasticité



La fonction, pour $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ donné,

$$f(\underset{\sim}{\hat{\varepsilon}}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\hat{\varepsilon}} - W(\underset{\sim}{\hat{\varepsilon}})$$

présente un maximun lorsque W est convexe.
Le maximum est obtenu pour $\underset{\sim}{\hat{\varepsilon}} = \underset{\sim}{\varepsilon}$ tel que

$$W'(\underset{\sim}{\varepsilon}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$$

Par conséquent,

$$W^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \max_{\underset{\sim}{\varepsilon}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\varepsilon} - W(\underset{\sim}{\varepsilon}))$$

Plan

Théorème des travaux virtuels

Soit $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}})$ un champ de contraintes auto–équilibré

$$\mathrm{div}\, \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underline{\boldsymbol{f}} = 0, \quad \sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0$$

On calcule le produit scalaire du vecteur précédent par un champ test $\underline{\boldsymbol{u}}^*$ (à dérivées premières bornées) :

Théorème des travaux virtuels

Soit $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}})$ un champ de contraintes auto–équilibré

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underline{\boldsymbol{f}} = 0, \quad \sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0$$

On calcule le produit scalaire du vecteur précédent par un champ test $\underline{\boldsymbol{u}}^*$ (à dérivées premières bornées) :

$$\sigma_{ij,j} u_i^* + \rho f_i u_i^* = 0, \quad \forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \Omega, \forall \underline{\boldsymbol{u}}^*$$

Théorème des travaux virtuels

Soit $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}})$ un champ de contraintes auto–équilibré

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underline{\boldsymbol{f}} = 0, \quad \sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0$$

On calcule le produit scalaire du vecteur précédent par un champ test $\underline{\boldsymbol{u}}^*$ (à dérivées premières bornées) :

$$\sigma_{ij,j} u_i^* + \rho f_i u_i^* = 0, \quad \forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \Omega, \forall \underline{\boldsymbol{u}}^*$$

$$\int_\Omega \sigma_{ij,j} u_i^* + \rho f_i u_i^* \, dV = 0, \quad \forall \underline{\boldsymbol{u}}^*$$

Théorème des travaux virtuels

Soit $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}})$ un champ de contraintes auto–équilibré

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underline{\boldsymbol{f}} = 0, \quad \sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0$$

On calcule le produit scalaire du vecteur précédent par un champ test $\underline{\boldsymbol{u}}^*$ (à dérivées premières bornées) :

$$\sigma_{ij,j} u_i^* + \rho f_i u_i^* = 0, \quad \forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \Omega, \forall \underline{\boldsymbol{u}}^*$$

$$\int_\Omega \sigma_{ij,j} u_i^* + \rho f_i u_i^* \, dV = 0, \quad \forall \underline{\boldsymbol{u}}^*$$

$$\int_\Omega (\sigma_{ij} u_i^*)_{,j} - \sigma_{ij} u_{i,j}^* + \rho f_i u_i^* \, dV = 0, \quad \forall \underline{\boldsymbol{u}}^*$$

Théorème des travaux virtuels

Soit $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}})$ un champ de contraintes auto–équilibré

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underline{\boldsymbol{f}} = 0, \quad \sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0$$

On calcule le produit scalaire du vecteur précédent par un champ test $\underline{\boldsymbol{u}}^*$ (à dérivées premières bornées) :

$$\sigma_{ij,j} u_i^* + \rho f_i u_i^* = 0, \quad \forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \Omega, \forall \underline{\boldsymbol{u}}^*$$

$$\int_\Omega \sigma_{ij,j} u_i^* + \rho f_i u_i^* \, dV = 0, \quad \forall \underline{\boldsymbol{u}}^*$$

$$\int_\Omega (\sigma_{ij} u_i^*)_{,j} - \sigma_{ij} u_{i,j}^* + \rho f_i u_i^* \, dV = 0, \quad \forall \underline{\boldsymbol{u}}^*$$

$$\int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} u_i^* n_j \, dS - \int_\Omega \sigma_{ij} u_{i,j}^* \, dV + \int_\Omega \rho f_i u_i^* \, dV = 0, \quad \forall \underline{\boldsymbol{u}}^*$$

Théorème des travaux virtuels

$$\int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \, dV = \int_\Omega \rho \underline{\boldsymbol{f}} \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^* \, dV + \int_{\partial\Omega} \underline{\boldsymbol{t}} \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^* \, dS, \quad \forall \underline{\boldsymbol{u}}^*$$

avec $\underline{\boldsymbol{t}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}$

$$W^{int} + W^{ext} + W^{contact} = 0$$

$$\mathcal{P}^{int} + \mathcal{P}^{ext} + \mathcal{P}^{contact} = 0$$

théorème des travaux/puissances virtuelles dans le cas statique

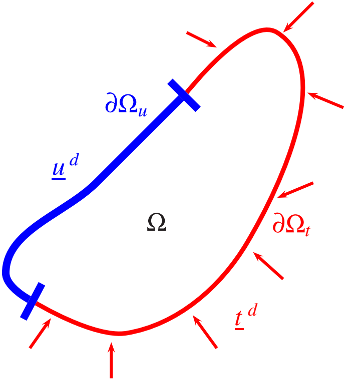
$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^*$ non nécessairement liés par la loi de comportement, et sans restriction sur les CL

En particulier, pour $\underline{\boldsymbol{u}}^* = \underline{\boldsymbol{u}}$, le champ solution, en l'absence de discontinuités :

$$\int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dV = \int_\Omega \rho \underline{\boldsymbol{f}} \cdot \underline{\boldsymbol{u}} \, dV + \int_{\partial\Omega} \underline{\boldsymbol{t}} \cdot \underline{\boldsymbol{u}} \, dS$$

Plan

Problème aux limites



- déplacements imposés $\underline{\boldsymbol{u}} = \underline{\boldsymbol{u}}^d$ sur $\partial\Omega_u$
- efforts surfaciques imposés $\underline{\boldsymbol{t}} = \underline{\boldsymbol{t}}^d$ sur $\partial\Omega_{td}$

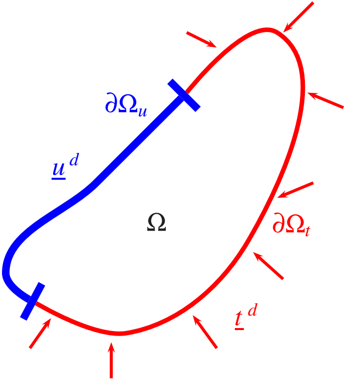
$$\partial\Omega_u \cup \partial\Omega_{td} = \partial\Omega$$

$$\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_{td} = \emptyset$$

Un champ $\underline{\boldsymbol{u}}^*(\underline{\boldsymbol{x}})$ sur Ω est **cinématiquement admissible** (C.A.) ssi $\underline{\boldsymbol{u}}^* = \underline{\boldsymbol{u}}^d, \forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \partial\Omega_u$.

Un champ $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger(\underline{\boldsymbol{x}})$ sur Ω est **statiquement admissible** (S.A.) ssi $\mathrm{div}\, \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger + \rho \underline{\boldsymbol{f}} = 0$ et $\underline{\boldsymbol{t}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger \cdot \underline{\boldsymbol{n}} = \underline{\boldsymbol{t}}^d, \forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \partial\Omega_{td}$.

Problème aux limites



- déplacements imposés $\underline{\boldsymbol{u}} = \underline{\boldsymbol{u}}^d$ sur $\partial\Omega_u$
- efforts surfaciques imposés $\underline{\boldsymbol{t}} = \underline{\boldsymbol{t}}^d$ sur $\partial\Omega_{td}$

$$\partial\Omega_u \cup \partial\Omega_{td} = \partial\Omega$$

$$\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_{td} = \emptyset$$

Un champ $\underline{\boldsymbol{u}}^*$ C.A. et un champ $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger$ S.A. remplissent les conditions du théorème des travaux virtuels

$$\int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \, dS = \int_\Omega \rho \underline{\boldsymbol{f}} \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^* \, dV + \int_{\partial\Omega} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^* \, dV$$

Energie potentielle

On définit l'énergie potentielle d'un corps élastique Ω associée au champ C.A. $\underline{\boldsymbol{u}}^*$, pour des efforts $\rho\underline{\boldsymbol{f}}$ et $\underline{\boldsymbol{t}}^d$ donnés :

$$\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}^*) = \int_\Omega W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*)\, dV - \int_\Omega \rho\underline{\boldsymbol{f}} \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^*\, dV - \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{\boldsymbol{t}}^d \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^*\, dS$$

Energie potentielle

On définit l'énergie potentielle d'un corps élastique Ω associée au champ C.A. $\underline{\boldsymbol{u}}^*$, pour des efforts $\rho\underline{\boldsymbol{f}}$ et $\underline{\boldsymbol{t}}^d$ donnés :

$$\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}^*) = \int_\Omega W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*)\,dV - \int_\Omega \rho\underline{\boldsymbol{f}} \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^*\,dV - \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{\boldsymbol{t}}^d \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^*\,dS$$

Soit $\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}})$ l'énergie potentielle du corps Ω pour le champ solution $\underline{\boldsymbol{u}}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}^*) - \mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}) &= \int_\Omega (W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*) - W(\underset{\sim}{\varepsilon}))\,dV \\ &- \int_\Omega \rho\underline{\boldsymbol{f}} \cdot (\underline{\boldsymbol{u}}^* - \underline{\boldsymbol{u}})\,dV - \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{\boldsymbol{t}}^d \cdot (\underline{\boldsymbol{u}}^* - \underline{\boldsymbol{u}})\,dS\end{aligned}$$

Energie potentielle

On définit l'énergie potentielle d'un corps élastique Ω associée au champ C.A. $\underline{\boldsymbol{u}}^*$, pour des efforts $\rho\underline{\boldsymbol{f}}$ et $\underline{\boldsymbol{t}}^d$ donnés :

$$\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}^*) = \int_\Omega W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*)\,dV - \int_\Omega \rho\underline{\boldsymbol{f}} \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^*\,dV - \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{\boldsymbol{t}}^d \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^*\,dS$$

Soit $\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}})$ l'énergie potentielle du corps Ω pour le champ solution $\underline{\boldsymbol{u}}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}^*) - \mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}) &= \int_\Omega (W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*) - W(\underset{\sim}{\varepsilon}))\,dV \\
&- \int_\Omega \rho\underline{\boldsymbol{f}} \cdot (\underline{\boldsymbol{u}}^* - \underline{\boldsymbol{u}})\,dV - \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{\boldsymbol{t}}^d \cdot (\underline{\boldsymbol{u}}^* - \underline{\boldsymbol{u}})\,dS \\
&\geq \int_\Omega W'(\underset{\sim}{\varepsilon}) : (\underset{\sim}{\varepsilon}^* - \underset{\sim}{\varepsilon})\,dV \\
&- \int_\Omega \rho\underline{\boldsymbol{f}} \cdot (\underline{\boldsymbol{u}}^* - \underline{\boldsymbol{u}})\,dV - \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{\boldsymbol{t}}^d \cdot (\underline{\boldsymbol{u}}^* - \underline{\boldsymbol{u}})\,dS
\end{aligned}$$

Energie potentielle

On définit l'énergie potentielle d'un corps élastique Ω associée au champ C.A. $\underline{\boldsymbol{u}}^*$, pour des efforts $\rho\underline{\boldsymbol{f}}$ et $\underline{\boldsymbol{t}}^d$ donnés :

$$\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}^*) = \int_\Omega W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*)\, dV - \int_\Omega \rho\underline{\boldsymbol{f}} \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^*\, dV - \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{\boldsymbol{t}}^d \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^*\, dS$$

Soit $\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}})$ l'énergie potentielle du corps Ω pour le champ solution $\underline{\boldsymbol{u}}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}^*) - \mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}) \quad &= \quad \int_\Omega (W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*) - W(\underset{\sim}{\varepsilon}))\, dV \\
&- \quad \int_\Omega \rho\underline{\boldsymbol{f}} \cdot (\underline{\boldsymbol{u}}^* - \underline{\boldsymbol{u}})\, dV - \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{\boldsymbol{t}}^d \cdot (\underline{\boldsymbol{u}}^* - \underline{\boldsymbol{u}})\, dS \\
&\geq \quad \int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : (\underset{\sim}{\varepsilon}^* - \underset{\sim}{\varepsilon})\, dV \\
&- \quad \int_\Omega \rho\underline{\boldsymbol{f}} \cdot (\underline{\boldsymbol{u}}^* - \underline{\boldsymbol{u}})\, dV - \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{\boldsymbol{t}}^d \cdot (\underline{\boldsymbol{u}}^* - \underline{\boldsymbol{u}})\, dS
\end{aligned}$$

Energie potentielle

On définit l'énergie potentielle d'un corps élastique Ω associée au champ C.A. $\underline{\boldsymbol{u}}^*$, pour des efforts $\rho\underline{\boldsymbol{f}}$ et $\underline{\boldsymbol{t}}^d$ donnés :

$$\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}^*) = \int_\Omega W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*)\, dV - \int_\Omega \rho\underline{\boldsymbol{f}} \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^*\, dV - \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{\boldsymbol{t}}^d \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^*\, dS$$

Soit $\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}})$ l'énergie potentielle du corps Ω pour le champ solution $\underline{\boldsymbol{u}}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}^*) - \mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}) &= \int_\Omega (W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*) - W(\underset{\sim}{\varepsilon}))\, dV \\
&- \int_\Omega \rho\underline{\boldsymbol{f}} \cdot (\underline{\boldsymbol{u}}^* - \underline{\boldsymbol{u}})\, dV - \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{\boldsymbol{t}}^d \cdot (\underline{\boldsymbol{u}}^* - \underline{\boldsymbol{u}})\, dS \\
&\geq \int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : (\underset{\sim}{\varepsilon}^* - \underset{\sim}{\varepsilon})\, dV \\
&- \int_\Omega \rho\underline{\boldsymbol{f}} \cdot (\underline{\boldsymbol{u}}^* - \underline{\boldsymbol{u}})\, dV - \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{\boldsymbol{t}}^d \cdot (\underline{\boldsymbol{u}}^* - \underline{\boldsymbol{u}})\, dS = 0
\end{aligned}$$

par application du TTV pour $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\underline{\boldsymbol{u}}^* - \underline{\boldsymbol{u}}$

Energie potentielle

On définit l'énergie potentielle d'un corps élastique Ω associée au champ C.A. $\underline{\boldsymbol{u}}^*$, pour des efforts $\rho\underline{\boldsymbol{f}}$ et $\underline{\boldsymbol{t}}^d$ donnés :

$$\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}^*) = \int_\Omega W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*)\, dV - \int_\Omega \rho\underline{\boldsymbol{f}} \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^*\, dV - \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{\boldsymbol{t}}^d \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^*\, dS$$

Soit $\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}})$ l'énergie potentielle du corps Ω pour le champ solution $\underline{\boldsymbol{u}}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}^*) - \mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}) &= \int_\Omega (W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*) - W(\underset{\sim}{\varepsilon}))\, dV \\ &- \int_\Omega \rho\underline{\boldsymbol{f}} \cdot (\underline{\boldsymbol{u}}^* - \underline{\boldsymbol{u}})\, dV - \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{\boldsymbol{t}}^d \cdot (\underline{\boldsymbol{u}}^* - \underline{\boldsymbol{u}})\, dS \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

La solution $\underline{\boldsymbol{u}}$ minimise l'énergie potentielle $\mathcal{E}$

Unicité du minimum de l'énergie potentielle

Soient $\underline{\boldsymbol{u}}$ le champ solution du problème et $\underline{\boldsymbol{u}}^*$ un champ C.A. tel que

$$\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}^*) - \mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}) = 0$$

Cela implique que

$$\int_\Omega (W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*) - W(\underset{\sim}{\varepsilon}))\, dV - \int_\Omega \rho \underline{\boldsymbol{f}} \cdot (\underline{\boldsymbol{u}}^* - \underline{\boldsymbol{u}})\, dV - \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{\boldsymbol{t}}^d \cdot (\underline{\boldsymbol{u}}^* - \underline{\boldsymbol{u}})\, dS = 0$$

$$\int_\Omega (W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*) - W(\underset{\sim}{\varepsilon}))\, dV = \int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : (\underset{\sim}{\varepsilon}^* - \underset{\sim}{\varepsilon})$$

d'après le TTV pour le couple $(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\boldsymbol{u}}^* - \underline{\boldsymbol{u}})$.

$$\int_\Omega (W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*) - W(\underset{\sim}{\varepsilon}) - W'(\underset{\sim}{\varepsilon}) : (\underset{\sim}{\varepsilon}^* - \underset{\sim}{\varepsilon}))\, dV = 0$$

La stricte convexité de W permet de conclure que $\underset{\sim}{\varepsilon}^* = \underset{\sim}{\varepsilon}$.
Elle assure égalemet l'existence du minimum (l'ensemble des champs C.A. est un espace affine convexe). Il s'agit de la *Formulation variationnelle du problème aux limites d'élasticité non linéaire*.

Plan

Energie complémentaire

On définit l'énergie complémentaire d'un corps élastique Ω associée au champ S.A. $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger$, pour des déplacements $\underline{\boldsymbol{u}}^d$ donnés :

$$\mathcal{E}^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger) = \int_\Omega W^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger)\, dV - \int_{\partial\Omega_u} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^d\, dS$$

Energie complémentaire

On définit l'énergie complémentaire d'un corps élastique Ω associée au champ S.A. $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}$, pour des déplacements $\underline{\boldsymbol{u}}^{d}$ donnés :

$$\mathcal{E}^{\star}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}) = \int_{\Omega} W^{\star}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger})\, dV - \int_{\partial\Omega_u} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^{d}\, dS$$

Soit $\mathcal{E}^{\star}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})$ l'énergie complémentaire du corps Ω pour le champ solution $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{\star}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}) - \mathcal{E}^{\star}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_{\Omega} (W^{\star}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}) - W^{\star}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}))\, dV \\
&- \int_{\partial\Omega_u} ((\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^{d}\, dS
\end{aligned}$$

Energie complémentaire

On définit l'énergie complémentaire d'un corps élastique Ω associée au champ S.A. $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger$, pour des déplacements $\underline{\boldsymbol{u}}^d$ donnés :

$$\mathcal{E}^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger) = \int_\Omega W^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger)\, dV - \int_{\partial\Omega_u} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^d\, dS$$

Soit $\mathcal{E}^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})$ l'énergie complémentaire du corps Ω pour le champ solution $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger) - \mathcal{E}^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_\Omega (W^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger) - W^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}))\, dV \\
&- \int_{\partial\Omega_u} ((\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^d\, dS \\
&\geq \int_\Omega W^{\star\prime}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) : (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})\, dV \\
&- \int_{\partial\Omega_u} ((\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^d\, dS
\end{aligned}$$

Energie complémentaire

On définit l'énergie complémentaire d'un corps élastique Ω associée au champ S.A. $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger$, pour des déplacements $\underline{\boldsymbol{u}}^d$ donnés :

$$\mathcal{E}^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger) = \int_\Omega W^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger)\, dV - \int_{\partial\Omega_u} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^d\, dS$$

Soit $\mathcal{E}^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})$ l'énergie complémentaire du corps Ω pour le champ solution $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger) - \mathcal{E}^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_\Omega (W^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger) - W^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}))\, dV \\
&- \int_{\partial\Omega_u} ((\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^d\, dS \\
&\geq \int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} : (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})\, dV \\
&- \int_{\partial\Omega_u} ((\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^d\, dS
\end{aligned}$$

Energie complémentaire

On définit l'énergie complémentaire d'un corps élastique Ω associée au champ S.A. $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger$, pour des déplacements $\underline{\boldsymbol{u}}^d$ donnés :

$$\mathcal{E}^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger) = \int_\Omega W^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger)\, dV - \int_{\partial\Omega_u} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^d\, dS$$

Soit $\mathcal{E}^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})$ l'énergie complémentaire du corps Ω pour le champ solution $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger) - \mathcal{E}^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_\Omega (W^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger) - W^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}))\, dV \\
&- \int_{\partial\Omega_u} ((\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^d\, dS \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

par application successive du TTV pour $(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger, \underline{\boldsymbol{u}})$ et $(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\boldsymbol{u}})$ et différence entre ces deux équations

Energie complémentaire

On définit l'énergie complémentaire d'un corps élastique Ω associée au champ S.A. $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}$, pour des déplacements $\underline{\boldsymbol{u}}^{\,d}$ donnés :

$$\mathcal{E}^{\star}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}) = \int_{\Omega} W^{\star}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger})\, dV - \int_{\partial\Omega_u} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}\,) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^{\,d}\, dS$$

Soit $\mathcal{E}^{\star}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})$ l'énergie complémentaire du corps Ω pour le champ solution $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{\star}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}) - \mathcal{E}^{\star}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_{\Omega} (W^{\star}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}) - W^{\star}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}))\, dV \\
&- \int_{\partial\Omega_u} ((\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \underline{\boldsymbol{n}}\,) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^{\,d}\, dS \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Le champ de contraintes solution $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ minimise l'énergie complémentaire $\mathcal{E}^{\star}$.

La solution en contraintes du problème d'élasticité est le minimum de l'énergie complémentaire.

Plan

Encadrement de la solution

L'addition de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire fournit

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}) + \mathcal{E}^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_\Omega W(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}) + W^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})\, dV \\ &- \int_\Omega \rho \underline{\boldsymbol{f}} \cdot \underline{\boldsymbol{u}}\, dV - \int_{\partial\Omega} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}\, dS\end{aligned}$$

Encadrement de la solution

L'addition de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire fournit

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}) + \mathcal{E}^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\, dV \\ &- \int_\Omega \rho \underline{\boldsymbol{f}} \cdot \underline{\boldsymbol{u}}\; dV - \int_{\partial\Omega} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}\; dS\end{aligned}$$

Encadrement de la solution

L'addition de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire fournit

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}) + \mathcal{E}^{\star}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_{\Omega} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dV \\
&- \int_{\Omega} \rho \underline{\boldsymbol{f}} \cdot \underline{\boldsymbol{u}} \, dV - \int_{\partial\Omega} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}} \, dS \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Encadrement de la solution

L'addition de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire fournit

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}) + \mathcal{E}^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\, dV \\
&- \int_\Omega \rho \underline{\boldsymbol{f}} \cdot \underline{\boldsymbol{u}}\, dV - \int_{\partial\Omega} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}\, dS \\
&= 0
\end{aligned}$$

On obtient un encadrement de la solution de la manière suivante :

$$\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}) \le \mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}^*), \quad \forall \underline{\boldsymbol{u}}^* \text{ C.A.}$$

Encadrement de la solution

L'addition de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire fournit

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}) + \mathcal{E}^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\, dV \\
&- \int_\Omega \rho \underline{\boldsymbol{f}} \cdot \underline{\boldsymbol{u}}\; dV - \int_{\partial\Omega} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}\; dS \\
&= 0
\end{aligned}
$$

On obtient un encadrement de la solution de la manière suivante :

$$
-\mathcal{E}^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}) \leq \mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}^*), \quad \forall \underline{\boldsymbol{u}}^* \text{ C.A.}
$$

Encadrement de la solution

L'addition de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire fournit

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}) + \mathcal{E}^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dV \\
&- \int_\Omega \rho \underline{\boldsymbol{f}} \cdot \underline{\boldsymbol{u}} \, dV - \int_{\partial\Omega} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}} \, dS \\
&= 0
\end{aligned}$$

On obtient un encadrement de la solution de la manière suivante :

$$\forall \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger \,\text{S.A.}, \quad -\mathcal{E}^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger) \leq -\mathcal{E}^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}) \leq \mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}^*), \quad \forall \underline{\boldsymbol{u}}^* \,\text{C.A.}$$

Plan

Théorèmes de l'énergie en élasticité linéarisée

Pour tout champ de déplacements $\underline{\boldsymbol{u}}^*$ C.A.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\Omega} \underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\approx}{\boldsymbol{C}} : \underset{\sim}{\varepsilon}\, dV - \int_{\Omega} \rho \underline{\boldsymbol{f}} \cdot \underline{\boldsymbol{u}}\, dV - \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{\boldsymbol{t}}^{d} \cdot \underline{\boldsymbol{u}}\, dS \\
\leq \frac{1}{2}\int_{\Omega} \underset{\sim}{\varepsilon}^{*} : \underset{\approx}{\boldsymbol{C}} : \underset{\sim}{\varepsilon}^{*}\, dV - \int_{\Omega} \rho \underline{\boldsymbol{f}} \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^{*}\, dV - \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{\boldsymbol{t}}^{d} \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^{*}\, dS
\end{aligned}
$$

Théorèmes de l'énergie en élasticité linéarisée

Pour tout champ de déplacements $\underline{\boldsymbol{u}}^*$ C.A.

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\approx}{\boldsymbol{C}} : \underset{\sim}{\varepsilon}\, dV - \int_\Omega \rho \underline{\boldsymbol{f}} \cdot \underline{\boldsymbol{u}}\, dV - \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{\boldsymbol{t}}^{\,d} \cdot \underline{\boldsymbol{u}}\, dS$$

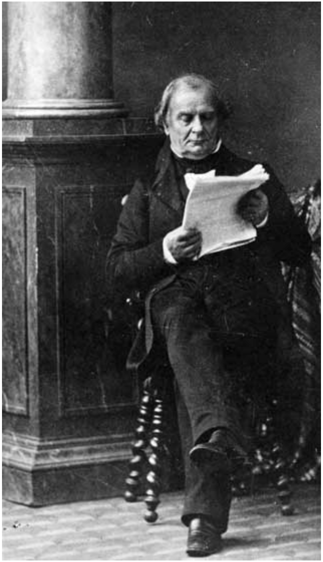
$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \underset{\sim}{\varepsilon}^* : \underset{\approx}{\boldsymbol{C}} : \underset{\sim}{\varepsilon}^*\, dV - \int_\Omega \rho \underline{\boldsymbol{f}} \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^*\, dV - \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{\boldsymbol{t}}^{\,d} \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^*\, dS$$

Pour tout champ de contraintes $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger$ S.A.

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\approx}{\boldsymbol{S}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\, dV - \int_{\partial\Omega_u} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^{\,d}\, dS$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger : \underset{\approx}{\boldsymbol{S}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger\, dV - \int_{\partial\Omega_u} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^{\,d}\, dS$$

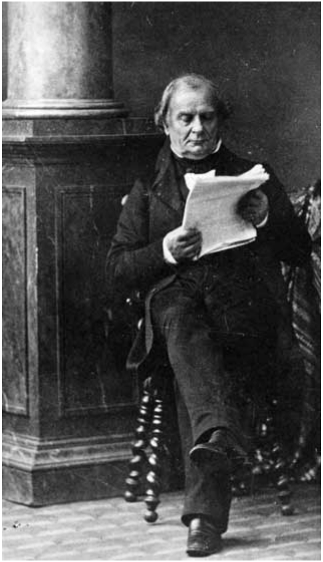
Formule de Clapeyron



Benoît Paul Emile Clapeyron (1799–1864)
études à l'Ecole des Mines (1818–1820)

$$\int_\Omega W(\underset{\sim}{\varepsilon})\, dV = \int_\Omega W^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})\, dV =$$

Formule de Clapeyron

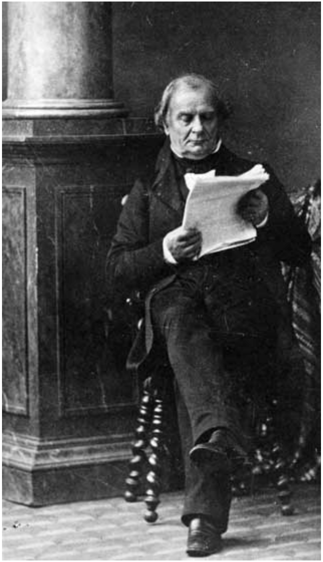


Benoît Paul Emile Clapeyron (1799–1864)
études à l'Ecole des Mines (1818–1820)

$$\int_\Omega W(\underset{\sim}{\varepsilon})\, dV = \int_\Omega W^\star(\underset{\sim}{\sigma})\, dV =$$

$$= \frac{1}{2} \int_\Omega \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{\varepsilon}\, dV$$

Formule de Clapeyron



Benoît Paul Emile Clapeyron (1799–1864)
études à l'Ecole des Mines (1818–1820)

$$\int_\Omega W(\underset{\sim}{\varepsilon})\, dV = \int_\Omega W^\star(\underset{\sim}{\sigma})\, dV =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{\varepsilon}\, dV$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_\Omega \rho \underline{\boldsymbol{f}} \cdot \underline{\boldsymbol{u}}\; dV + \int_{\partial\Omega} (\underset{\sim}{\sigma} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}\; dS\right)$$

L'énergie élastique stockée dans le corps matériel est égale à la moitié du travail de tous les efforts appliqués.