Le moment conjugué de Lagrange

$$rac{\partial L}{\partial ec{r}} = rac{d}{dt} \left(rac{\partial L}{\partial ec{v}}
ight) \qquad ec{p} = rac{\partial L}{\partial ec{v}}$$

Pour une particule isolée :
$$\vec{p} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) = \boxed{m \vec{v}}$$

Pour une particule dans un potentiel :

$$ec{p} = rac{\partial}{\partial ec{v}} \left(rac{1}{2} m ec{v}^2 - U(ec{r})
ight) = \boxed{m ec{v}}$$

Pour une particule dans un champ magnétique :

$$\vec{p} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 + q \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \right) = \boxed{m \vec{v} + q \vec{A}(\vec{r})}$$



Invariance \Rightarrow conservation

Invariance par translation dans le temps du Lagrangien

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} + \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \right) + \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \right)$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \vec{v}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \vec{v}_i \cdot \vec{p}_i \right)$$
 Eq. de Lagrange



La quantité
$$\left(\sum_{i=1}^N ec{p_i} \cdot ec{v_i}\right) - L$$
 est conservée au cours du temps

Invariance dans le temps → conservation de l'énergie



Invariance \Rightarrow conservation

Invariance par translation dans l'espace

On imagine une translation de vecteur $\stackrel{
ightharpoonup}{{\cal E}}$

$$\delta L = L\left(\left\{\vec{r}_i + \vec{\varepsilon}, \vec{v}_i\right\}\right) - L\left(\left\{\vec{r}_i, \vec{v}_i\right\}\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{\varepsilon} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\right)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{\varepsilon} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \vec{r_i}} \, dt \right) = \vec{\varepsilon} \cdot \left[\sum_{i=1}^{N} \vec{p_i}(t_2) - \sum_{i=1}^{N} \vec{p_i}(t_1) \right]$$

La quantité $\left(\sum_i \vec{p}_i\right)$ est conservée au cours du temps

Invariance par translation → conservation de l'impulsion



Invariance ⇒ **conservation**

Invariance par rotation dans l'espace

On imagine une rotation infinitésimale dans le plan (x,y)

$$\delta L = L\left(\left\{\left(x_{i} - \varepsilon y_{i}, \varepsilon x_{i} + y_{i}\right), \left(\dot{x}_{i} - \varepsilon \dot{y}_{i}, \varepsilon \dot{x}_{i} + \dot{y}_{i}\right)\right\}\right) - L\left(\left\{\left(x_{i}, y_{i}\right), \left(\dot{x}_{i}, \dot{y}_{i}\right)\right\}\right)$$

$$\delta S = \int_{t_{1}}^{t_{2}} \delta L \, dt$$

$$\int_{t_{1}}^{N} \left(\left(\dot{x}\right), \left(\dot{x}\right), \left(\dot{x}\right), \left(\dot{x}\right)\right) \, dx = \sum_{t_{1}}^{N} \left(\left(\dot{x}\right), \left(\dot{x}\right), \left(\dot{x}\right)\right) \, dx$$

$$= \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{N} \left(x^{(i)} p_y^{(i)} - y^{(i)} p_x^{(i)} \right) (t_2) - \sum_{i=1}^{N} \left(x^{(i)} p_y^{(i)} - y^{(i)} p_x^{(i)} \right) (t_1) \right)$$

La quantité $\left(\sum_{i=1}^N \vec{r_i} \wedge \vec{p_i}\right)$ est conservée au cours du temps

Invariance par rotation \rightarrow conservation du moment cinétique



Marcel Filoche 25

Invariance ⇒ conservation Le théorème de Noether

« A toute invariance du Lagrangien par une classe de transformations correspond une quantité conservée. »



Emmy Noether (1882 – 1935)

- → rotation dans l'espace → moment cinétique
- → multiplication par une phase → charge électrique



Marcel Filoche

La formulation hamiltonienne

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right) \qquad \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d}{dt} \left(m\vec{v} \right)$$

Formuler la physique, et notamment l'énergie, en utilisant les moments conjugués : $H(\vec{r}, \vec{p})$



Sir William Rowan Hamilton (1805-1865)

$$dH = d\left(\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{p_i} \cdot \vec{v_i}\right) - L\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{p_i} \cdot d\vec{v_i} + d\vec{p_i} \cdot \vec{v_i}\right) - \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r_i}} \cdot d\vec{r_i} + \frac{\partial L}{\partial \vec{v_i}} \cdot d\vec{v_i}\right)$$

$$dH = \sum_{i=1}^{N} \left(-\frac{\partial L}{\partial \vec{r_i}} \cdot d\vec{r_i} + \vec{v_i} \cdot d\vec{p_i} \right) \qquad \begin{bmatrix} \frac{d\vec{r_i}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p_i}} \\ \frac{\partial H}{\partial \vec{r_i}} = -\frac{\partial L}{\partial \vec{r_i}} &, & \frac{\partial H}{\partial \vec{p_i}} = \vec{v_i} \end{bmatrix} \qquad \text{Equations de Hamilton}$$

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r_i}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p_i}} \\ \frac{d\vec{p_i}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r_i}} \end{cases}$$



Quelques hamiltoniens

Hamiltonien libre à une particule

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = m\vec{v}^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \boxed{\frac{\vec{p}^2}{2m}}$$

Hamiltonien à une particule dans un potentiel

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = m\vec{v}^2 - \left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2 - U(\vec{r})\right) = \left|\frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r})\right|$$

Hamiltonien à une particule dans un champ électromagnétique

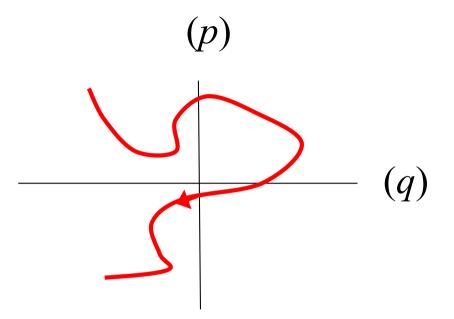
$$H\left(\vec{r},\vec{p}\right) = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = \left(m\vec{v} + q\vec{A}\right) - \left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2 + q\vec{v}\cdot\vec{A}\right) = \boxed{\frac{\vec{p}^2}{2m}}$$



Le déterminisme classique de la mécanique

Espace des degrés de liberté (q,p) du système

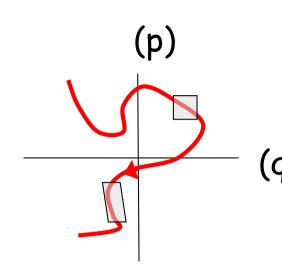
Pour un système à N particules, l'espace des phases est un espace à 6N dimensions!



Les données de (q_i,p_i) à un instant t donné déterminent l'évolution du système pour tous les instants futurs $t_1 > t$.



Le théorème de Liouville



Espace des phases à 6N dimensions L'état du système est représenté par un point

On considère un volume dV de cet espace qui se déforme au cours de l'évolution.

$$dV = dq_1 \cdots dq_N dp_1 \dots dp_N$$

Après un temps $dt: q_1 \rightarrow q_1 + \dot{q}_1 dt , ..., p_N \rightarrow p_N + \dot{p}_N dt$

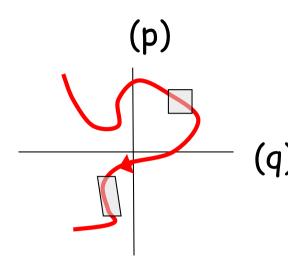
Le nouveau volume dV' est donc : $dV' = \det(J) \times dV$

$$\det(J) = \begin{vmatrix} \frac{\partial q'_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial q'_1}{\partial p_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p'_N}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial p'_N}{\partial p_N} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} dt & \dots & \frac{\partial^2 H}{\partial p_N \partial p_1} dt \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial q_N} dt & \dots & 1 - \frac{\partial^2 H}{\partial p_N \partial q_N} dt \end{vmatrix} = 1 + dt \times tr(M) + O(dt^2)$$

$$tr(M) = \sum_i \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} (dV) = 0$$

Le théorème de Liouville



Espace des phases à 6N dimensions L'état du système est représenté par un point

$$\frac{d}{dt}(dV) = 0$$

L'ensemble des trajectoires d'un système hamiltonien dans l'espace des phases s'apparente aux lignes de courant d'un **écoulement fluide incompressible**!!



Evolution temporelle

On considère une variable F évoluant au cours du temps.

$$\frac{dF[(\vec{q}_i, \vec{p}_i), t]}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i} \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{q}_i} \frac{d\vec{q}_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \vec{p}_i} \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right)$$
Donc
$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i} \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} - \frac{\partial F}{\partial \vec{p}_i} \frac{\partial H}{\partial \vec{q}_i} \right) = \boxed{\frac{\partial F}{\partial t} + \left\{ F, H \right\}}$$

Crochet de Poisson

<u>Conséquence</u>: toute fonction de (\vec{q}, \vec{p}) dont le crochet de Poisson avec le hamiltonien est nul, est une constante du mouvement!



Principes de moindre action

Principe de Maupertuis :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i} \vec{p_i} \cdot \vec{v_i} - E \right) dt$$

Pour une particule :
$$S = \int_{1}^{2} \vec{p} \cdot d\vec{\ell}$$

Principe de Fermat :
$$S = \int_{1}^{z} n(\vec{x}) d\ell$$



La réinvention de la mécanique

De manière générale, le lagrangien d'une particule libre

- \rightarrow est indépendant de t
- ightarrow est indépendant de \vec{r}
- ightarrow est indépendant de la direction de $ec{v}$

$$L\left(\vec{v}^2\right) \ \Rightarrow \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \vec{0} \qquad \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \ \text{ est constant}$$

Principe d'inertie

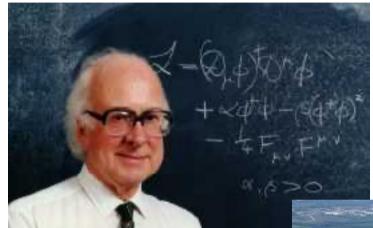
Basses vitesses
$$\Rightarrow$$
 $\left|L\left(\vec{v}^2\right) = K\vec{v}^2\right|$

Pour une particule soumise à un potentiel U, on modifie

le lagrangien :
$$L\left(ec{v}^{2}
ight) =rac{m}{2}ec{v}^{2}-U$$



Le boson de Higgs



$$L = \partial_{\mu} \phi \, \partial^{\mu} \phi + \dots$$

Peter Higgs (1929 -)





La relativité restreinte

une nouvelle géométrie de l'espace-temps



Les problèmes

- Incompatibilité entre l'électromagnétisme de Maxwell et la transformation galiléenne de changement de repère.
- Nécessité d'invoquer un « éther » comme support de la propagation des ondes électromagnétiques en l'absence de toute charge.
- Si cette hypothèse est vraie, alors on doit pouvoir déceler l'existence de cet éther en mesurant la vitesse de la lumière dans différentes directions à différentes périodes de l'année.



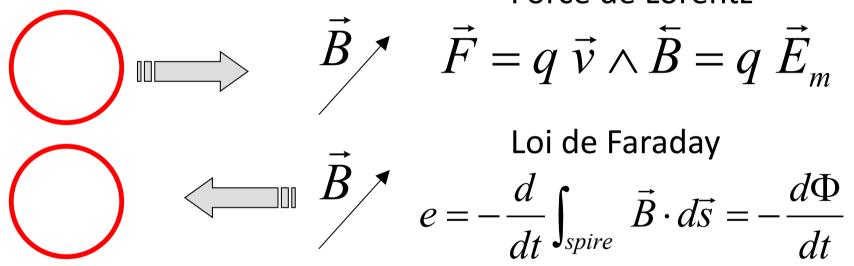
Marcel Filoche 37

Problème : le magnétisme

$$ec{F} = q \left(ec{E} + ec{v} \wedge ec{B}
ight)$$
 La force dépend du repère !

Expérience de pensée

Force de Lorentz



Une même expérience, deux explications différentes!



Licence d'usage dans un contexte public, sans modification

La licence confère à l'utilisateur un droit d'usage sur le document consulté ou téléchargé, totalement ou en partie, dans les conditions définies ci-après et à l'exclusion expresse de toute utilisation commerciale. Le droit d'usage défini par la licence autorise un usage à destination de tout public qui comprend :

- Le droit de reproduire tout ou partie du document sur support informatique ou papier,
- Le droit de diffuser tout ou partie du document au public sur support papier ou informatique, y compris par la mise à la disposition du public sur un réseau numérique.

Aucune modification du document dans son contenu, sa forme ou sa présentation n'est autorisée. Les mentions relatives à la source du document et/ou à son auteur doivent être conservées dans leur intégralité.

Le droit d'usage défini par la licence est personnel, non exclusif et non transmissible. Tout autre usage que ceux prévus par la licence est soumis à autorisation préalable et expresse de l'auteur.



