

Chapitre 20

Dislocations de Volterra

Le cours polycopié contenait un détail qui m'avait échappé à la première lecture, à savoir que le zinc, si tendre et délicat, si accommodant en présence des acides, qui n'en font qu'une seule bouchée, se comporte en revanche bien différemment lorsqu'il est très pur : alors, il résiste obstinément à l'attaque. De cela on pouvait tirer deux conséquences philosophiques opposées : l'éloge de la pureté, qui protège du mal comme une cuirasse ; l'éloge de l'impureté, qui ouvre la voie aux métamorphoses, c'est-à-dire à la vie. J'écartai la première, d'un moralisme répugnant, et m'attardai à considérer la seconde, qui m'était plus congéniale. Pour que la roue tourne, pour que la vie vive, les impuretés sont nécessaires, et les impuretés des impuretés ; même dans la terre, comme on sait, si on veut qu'elle soit fertile. Il faut le désaccord, le différent, le grain de sel et de séné ; le fascisme n'en veut pas, il les interdit, c'est pour cela que tu n'es pas fasciste : il nous veut tous pareils, et tu n'es pas pareil. La vertu immaculée n'existe pas non plus, ou si elle existe, elle est détestable.

Primo Levi, *Le système périodique*^a, 1975.

a. Edition Le Livre de Poche, traduit de l'italien par André Maugé.

Des contraintes internes peuvent exister dans un corps homogène élastique sans chargement extérieur imposé. Il s'agit d'un champ d'*auto-contraintes*, dont la divergence est nulle en l'absence de forces volumiques, et qui est tel que le vecteur contrainte est nul sur les surfaces du corps. Les champs d'auto-contraintes étudiés dans ce chapitre sont dus à la présence d'une *dislocation*, défaut linéique dont on va préciser la formation.

Un cylindre creux de rayon intérieur r_i , de rayon extérieur r_e , d'axe \underline{e}_z , et de longueur L , subit les opérations suivantes de formation d'une dislocation, qui sont des cas particuliers de la procédure générale établie par Volterra¹ :

1. Le cylindre est coupé le long du plan $\theta = 0$, comme sur la figure 20.1(a).
2. Une lèvre de la coupure est déplacée d'un mouvement de translation de vecteur \underline{b} , constant et pris parallèle au plan de la coupure, par rapport à l'autre face de la coupure.
3. Les surfaces de coupure sont ensuite définitivement soudées, point par point, par un moyen ou par un autre.
4. Les efforts qui ont été nécessaires au déplacement relatif des lèvres sont finalement relâchés. Ils sont en fait repris, au moins partiellement, par des contraintes internes. Le corps est alors dans un état d'auto-contraintes et de déformations à déterminer.

1. L'article original de V. Volterra date de 1907 (Volterra, 1907).

L'axe du cylindre défectueux est appelé *ligne de dislocation*.

L'étude est menée dans le contexte des petites perturbations pour un milieu isotrope, dans son état initial naturel, au comportement élastique linéarisé. On utilise en général un système de coordonnées cylindriques comme sur la figure 20.1(a). La coordonnée X_3 est aussi notée z dans la suite. Les fonctions de la variable angulaire θ considérées dans ce chapitre, seront définies, sauf mention contraire, sur le domaine suivant :

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

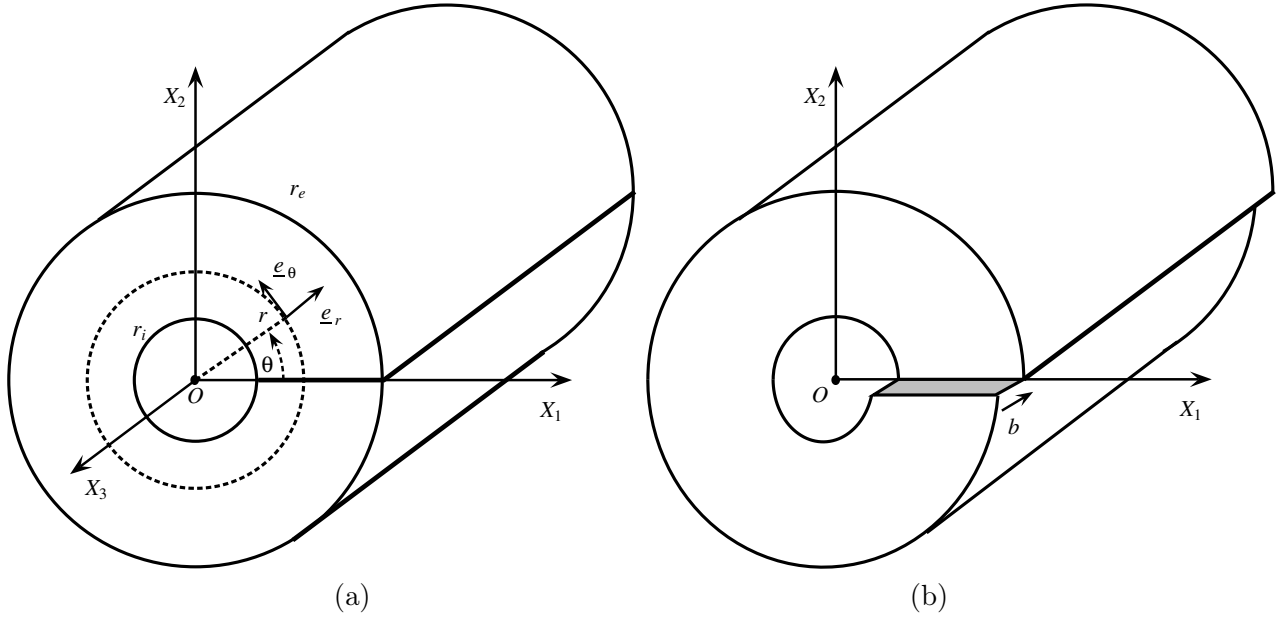


FIGURE 20.1 – Procédure de fabrication d'une dislocation dans un cylindre creux : (a) coupe dans le cylindre initial, repérages utilisés dans le chapitre, (b) dislocation-vis.

20.1 Dislocation-vis

Le défaut introduit est appelé dislocation-vis lorsque le vecteur de translation \underline{b} est parallèle à l'axe du cylindre :

$$\underline{b} = b \underline{e}_z \quad (20.1)$$

On recherche les composantes de déplacements u_r, u_θ et u_z associés à ce défaut, par rapport à la configuration initiale du cylindre intact, sans coupure. Manifestement, la composante u_z présente une discontinuité en $\theta = 0$. Les composantes u_r et u_θ , par contre, sont continues à la traversée de la coupure.

Dans un premier temps, jusqu'à la question 20.1.8, on ne se préoccupe pas de la dépendance en z de ces fonctions, ni des conditions aux extrémités du cylindre $z = 0, z = L$. On recherche alors une solution en déplacements de la forme :

$$u_r = 0, \quad u_\theta = 0, \quad u_z(r, \theta) \quad (20.2)$$

La discontinuité du déplacement axial est due au déplacement relatif égal à \underline{b} imposé aux lèvres avant de les coller :

$$u_z(r, \theta = 0^+) - u_z(r, \theta = 2\pi^-) = b, \quad r_i \leq r \leq r_e \quad (20.3)$$

où les notations introduites désignent les limites suivantes :

$$u_z(r, 0^+) = \lim_{\theta \rightarrow 0, \theta > 0} u_z(r, \theta), \quad u_z(r, 2\pi^-) = \lim_{\theta \rightarrow 2\pi, \theta < 2\pi} u_z(r, \theta) \quad (20.4)$$

On se propose enfin de rechercher une solution $u_z(\theta)$ qui ne dépendrait pas de r .

20.1.1 Champ de déplacements

Montrer que, dans ce cas, la dépendance de u_z par rapport à θ est nécessairement affine et que l'expression suivante du déplacement peut être adoptée :

$$u_z(\theta) = -\frac{b\theta}{2\pi} \quad (20.5)$$

Noter que la fonction $u_z(\theta)$ est à valeurs multiples puisqu'elle prend deux valeurs distinctes sur le plan de coupure. On obtient une fonction à valeurs simples en éliminant le plan de coupure du domaine de définition, désormais restreint à :

$$0 < \theta < 2\pi \quad (20.6)$$

Ce sera le domaine de définition des fonctions de θ considérées dans la suite de ce chapitre, sauf mention contraire.

En coordonnées cylindriques, les seules composantes de déformation et de contraintes non nulles associées au déplacement proposé sont

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \quad \sigma_{\theta z} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \quad (20.7)$$

La troisième équation d'équilibre des contraintes fournit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} = 0 \implies \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} = 0 \quad (20.8)$$

La fonction $u_z(\theta)$ est donc affine : $u_z(\theta) = A\theta + B$. La constante A est déterminée grâce à la condition de discontinuité (20.3) :

$$u_z(\theta = 0^+) - u_z(\theta = 2\pi^-) = -2\pi A = b, \quad r_i \leq r \leq r_e$$

En prenant la translation $B = 0$, on aboutit à la proposition (20.5).

20.1.2 Vecteur de Burgers

On considère un cercle Γ_0 d'équation $r = r_0$ tracé sur la configuration initiale du cylindre (voir la partie gauche de la figure 20.2). On appelle *vecteur de Burgers* de la dislocation l'intégrale le long de Γ_0 de l'élément de fibre matériel déformé $d\mathbf{x}$:

$$\oint_{\Gamma_0} d\mathbf{x}(\mathbf{X}) \quad (20.9)$$

Calculer le vecteur de Burgers pour la dislocation-vis et montrer qu'il est indépendant du contour fermé choisi pour le calculer.

On rappelle que $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$. Le contour Γ_0 est fermé de sorte que

$$\int_{\Gamma_0} d\mathbf{X} = 0 \quad (20.10)$$

Le vecteur de Burgers vaut donc

$$\int_{\Gamma_0} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_0} d\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}_z(2\pi^+) - \mathbf{u}_z(0^-) = -\mathbf{b} \quad (20.11)$$

Il ne dépend que de la discontinuité du champ de déplacements et peut se calculer avec n'importe quel contour fermé ne s'intersectant pas lui-même et irréductible à un point, tracé sur le cylindre initial. On entend par là tout contour ne pouvant être réduit à un point par déformation du circuit tout en restant contenue dans le cylindre creux, autrement dit tout contour entourant, une seule fois, le creux du cylindre étudié.

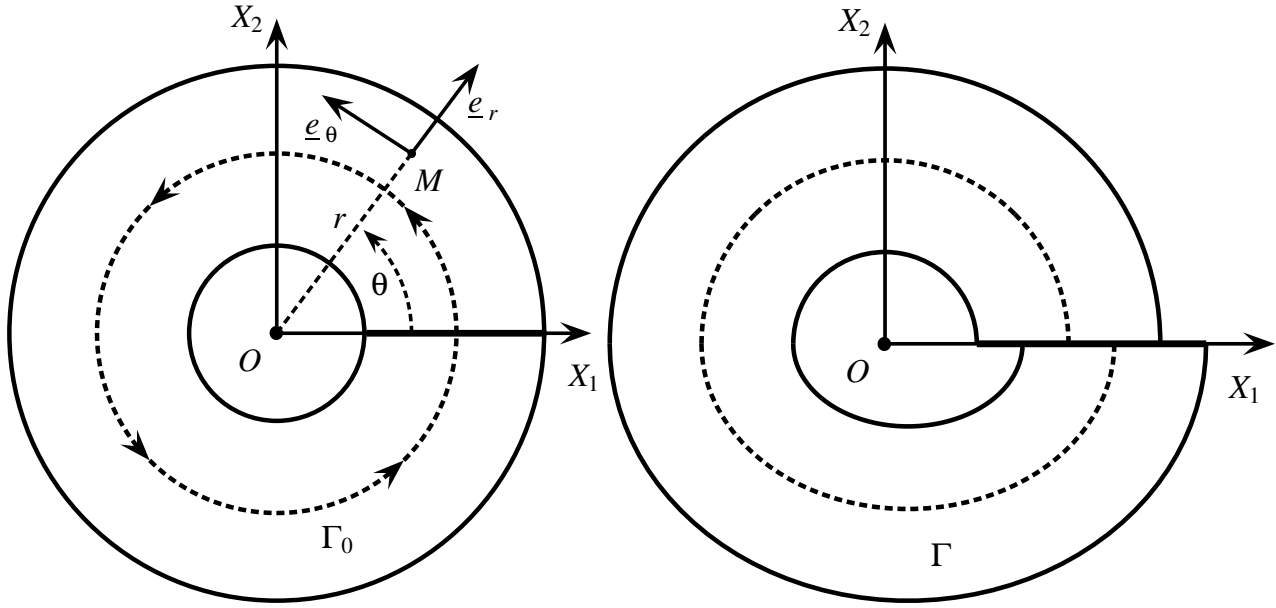


FIGURE 20.2 – Section initiale et actuelle du cylindre déformé par une dislocation-coin.

20.1.3 Champs de contraintes et de déformations

Calculer les déformations et les contraintes associées au champ de déplacements précédents. Remarquer qu'elles sont continues pour toutes les valeurs de θ .

Préciser les conditions imposées par le contexte infinitésimal.

Les composantes non nulles de déformations et de contraintes pour la dislocation-vis sont :

$$\varepsilon_{\theta z} = -\frac{b}{4\pi r}, \quad \sigma_{\theta z} = -\frac{\mu b}{2\pi r} \quad (20.12)$$

Elles sont indépendantes de θ et continues sur tout le cylindre.

Le contexte infinitésimal est respecté tant que

$$\frac{|b|}{r_i} \ll 1 \quad (20.13)$$

20.1.4 Equilibre et conditions aux limites en contraintes

Confirmer que les équations d'équilibre local sont vérifiées par les contraintes précédentes. Les conditions aux limites sur les bords intérieur $r = r_i$ et extérieur $r = r_e$ du cylindre le sont-elles également ?

20.1.5 Energie élastique d'une dislocation-vis

Calculer l'énergie élastique stockée dans le cylindre, par unité de longueur de ligne de dislocation.

La densité d'énergie libre de déformation vaut :

$$\begin{aligned} \rho\psi(\underline{\varepsilon}) &= \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \underline{\Lambda} : \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_{\theta z} \varepsilon_{\theta z} + \sigma_{z\theta} \varepsilon_{z\theta}) = \sigma_{\theta z} \varepsilon_{\theta z} \\ &= \frac{\mu b^2}{8\pi^2 r^2} \end{aligned} \quad (20.14)$$

L'énergie par unité de longueur du cylindre s'obtient en intégrant sur une section du cylindre :

$$W = \int_{r=r_i}^{r=r_e} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \rho \psi r dr d\theta = \frac{\mu b^2}{4\pi} \log \frac{r_e}{r_i} \quad (20.15)$$

20.1.6 Cas où $r_i \rightarrow 0$

Que deviennent les contraintes et l'énergie stockée lorsque $r_i \rightarrow 0$? Comment interprétez-vous ce résultat?

Nommer une situation physique pour laquelle un phénomène similaire se produit pour les contraintes, mais où le résultat pour l'énergie est fondamentalement différent?

Pour $r_i = 0$, la contrainte $\sigma_{\theta z}$ présente une singularité en $1/r$ en $r = 0$. L'énergie stockée quant à elle devient infinie, ce qui n'est pas acceptable du point de vue physique. Cela vient du fait qu'il n'est pas possible d'effectuer le mouvement relatif de b constant en $r = 0$. Pour créer une dislocation dans un cylindre massif, il faut accepter de faire varier rapidement la translation relative de b à 0 lorsqu'on s'approche du centre, comme sur la figure 20.3.

Une singularité de contrainte se rencontre également à la pointe d'une fissure, comme on la vu au paragraphe 15.8.1, mais elle est en $1/\sqrt{r}$ de sorte que l'énergie contenue dans un volume incluant la fissure reste finie.

20.1.7 Influence du choix du plan de coupure

Montrer que les champs de déformations et de contraintes dues à la dislocation-vis ne dépendent pas du choix du plan de coupure $\theta = \theta_0$. Justifier cette remarque.

Il est remarquable de trouver un état d'énergie de déformation non nulle dans un corps homogène en l'absence de tout chargement extérieur. Si la coupure et les opérations 2 à 4 de la procédure de Volterra sont réalisées sur tout le plan $X_2 = 0$, i.e. $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, quels champs de déplacements, de déformations et de contraintes obtient-on?

Comment se distinguent fondamentalement ces deux situations?

Si la coupure est réalisée en $\theta = \theta_0 \neq 0$, la solution (20.5) est encore acceptable à condition d'être définie sur le domaine $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$. Les déformations et contraintes sont alors inchangées. La nouvelle situation s'obtient en fait à partir du cas précédent en tournant le cylindre de θ_0 par rapport à l'axe z . Les champs de déformations et de contraintes nulles sont également solutions du problème d'efforts imposés nuls sur les bords intérieur et extérieur du cylindre. C'est la solution que l'on obtient lorsque la coupure est réalisée sur les deux faces $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ et que la partie supérieure du cylindre est déplacée d'un mouvement d'ensemble de \underline{b} par rapport à la partie inférieure. Les deux situations considérées se distinguent par le fait que la coupure le long de $\theta = 0$ change la connexité du cylindre. Le cylindre creux n'est pas simplement connexe. Il le devient si la coupure est opérée. Effectuer deux coupures laisse la connexité du cylindre creux inchangée.

20.1.8 Torseur résultant

En considérant cette fois-ci le torseur des efforts résultant sur l'une des extrémités du cylindre ($z = 0$ ou $z = L$), montrer que la solution proposée précédemment n'est finalement pas acceptable, même au sens de Saint-Venant.

Le vecteur contrainte en chaque point de l'extrémité de normale \underline{e}_z vaut

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_z = -\frac{\mu b}{2\pi r} \underline{e}_\theta \quad (20.16)$$

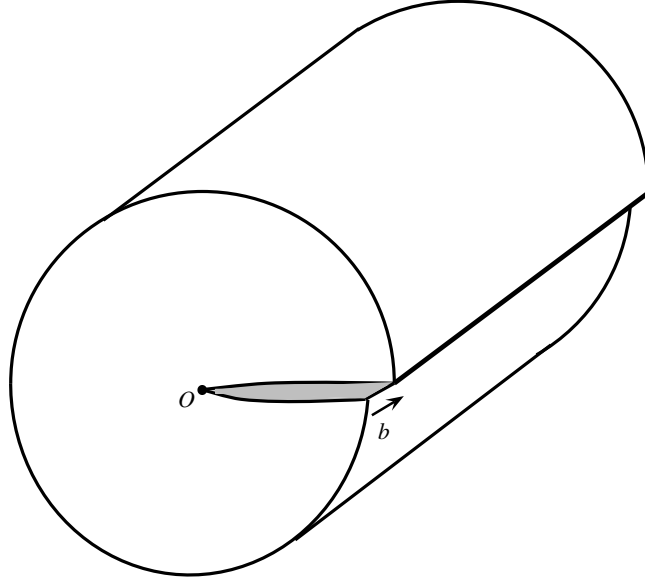


FIGURE 20.3 – Dislocation–vis créée dans un cylindre massif.

Il s'agit d'un effort tangentiel qu'il faut appliquer en chaque point de l'extrémité pour la maintenir en équilibre. Toutefois, cette densité surfacique d'efforts ne produit pas de résultante :

$$\underline{\mathbf{R}} = - \int_{Z=L} \frac{\mu b}{2\pi r} \underline{\mathbf{e}}_{\theta} dS = 0$$

Le moment résultant, quant à lui, vaut :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}} &= \int_{Z=L} \underline{\mathbf{OM}} \wedge \underline{\mathbf{t}} dS = - \int_{Z=L} r \underline{\mathbf{e}}_r \wedge \frac{\mu b}{2\pi r} \underline{\mathbf{e}}_{\theta} r dr d\theta \\ &= -\mu b \frac{r_e^2 - r_i^2}{2} \underline{\mathbf{e}}_z \end{aligned} \quad (20.17)$$

L'existence d'un moment résultant non nul sur l'extrémité considérée n'est pas compatible avec la condition de surface libre recherchée pour cette extrémité. Le champ de contraintes trouvé n'est donc pas acceptable, même au sens de Saint–Venant. L'objet du paragraphe suivant est de remédier à cette insuffisance.

20.1.9 Solution exacte au sens de Saint–Venant

Remédier à la difficulté rencontrée précédemment et obtenir une solution exacte, au sens de Saint–Venant, du problème de la dislocation–vis dans le cylindre de longueur L . Donner les champs de contraintes, de déformations et de déplacements correspondants.

Commenter alors l'image de la figure 20.4, tirée de l'ouvrage (Friedel, 1964).

Il suffit de superposer à la solution partielle trouvée pour le cylindre le champ de contrainte induit par l'application du moment d'axe $\underline{\mathbf{e}}_z$ opposé au moment résultant $\underline{\mathbf{M}}$ calculé précédemment :

$$-\underline{\mathbf{M}} = \mu b \frac{r_e^2 - r_i^2}{2} \underline{\mathbf{e}}_z \quad (20.18)$$

Un tel moment induit le champ de contraintes suivant dans le cylindre fini :

$$\sigma_{\theta z} = \frac{\mu b}{\pi(r_e^2 + r_i^2)} r \quad (20.19)$$

d'après la théorie de la torsion des barres à section circulaire (cf. paragraphe 16.2.5). Cette contribution vient s'ajouter à la contrainte (20.12) déjà trouvée. On est en droit d'appliquer ici le théorème de superposition, établi au paragraphe 8.1.4, puisque le problème auxiliaire de torsion considéré s'applique sur la même géométrie et avec des conditions en effort sur les bases du cylindre. Les contraintes dues à la torsion s'appliquant aux extrémités ne suffisent pas à annuler point par point le vecteur contrainte (20.16) issu de la contribution initiale, de sorte que la solution complète résultant de la superposition n'est satisfaisante qu'au sens de Saint-Venant.

La figure 20.4 montre le cisaillement du plan de coupure induit par cette torsion supplémentaire.

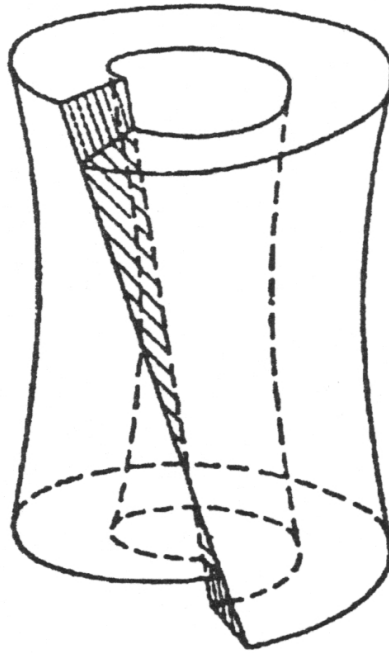


FIGURE 20.4 – Dislocation-vis dans un cylindre de longueur finie, d'après (Friedel, 1964).

20.2 Dislocation-coin

Le défaut introduit dans le cylindre selon la procédure de Volterra est appelé *dislocation-coin* lorsque le vecteur de translation est orthogonal à la ligne de dislocation :

$$\underline{b} = b \underline{e}_1 \quad (20.20)$$

selon le repérage de la figure 20.1(a). La dislocation-coin est représentée sur la figure 20.5. Une section du cylindre défectueux correspondant est également donnée sur la figure 20.2.

Le champ de contraintes internes induit par une dislocation-coin est techniquement plus délicat à obtenir que celui de la dislocation-vis. La méthode des fonctions de contraintes permet d'aboutir et le lecteur peut se reporter aux références (Timoshenko and Goodier, 1970; Hirth and Lothe, 1982; Teodosiu, 1982). On se contente ici de donner le résultat sans expliciter les étapes qui président à sa

construction :

$$\sigma_{rr} = \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{r_i^2 + r_e^2} - \frac{r_i^2 r_e^2}{r_i^2 + r_e^2} \frac{1}{r^3} \right) \sin \theta \quad (20.21)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{3r}{r_i^2 + r_e^2} + \frac{r_i^2 r_e^2}{r_i^2 + r_e^2} \frac{1}{r^3} \right) \sin \theta \quad (20.22)$$

$$\sigma_{r\theta} = \alpha \left(-\frac{1}{r} + \frac{r}{r_i^2 + r_e^2} + \frac{r_i^2 r_e^2}{r_i^2 + r_e^2} \frac{1}{r^3} \right) \cos \theta \quad (20.23)$$

$$(20.24)$$

où α est une constante à déterminer dans la suite.

Faire un commentaire sur ce champ de contraintes.

Le champ de contrainte présente une singularité lorsque $r_i \rightarrow 0$. Cette singularité est en $1/r$ comme dans le cas de la dislocation-vis.

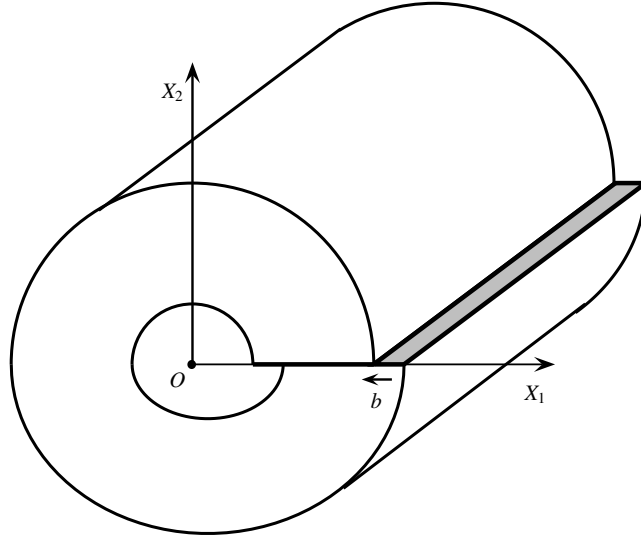


FIGURE 20.5 – Dislocation-coin.

20.2.1 Equilibre local et conditions aux limites

On admet que le champ de contraintes précédent satisfait les équations d'équilibre local. Vérifier, par contre, que les conditions aux limites sont effectivement remplies.

Les termes en $\sin \theta / r$, $r \sin \theta$ et $\sin \theta / r^3$ permettent de vérifier séparément que $\operatorname{div} \underline{\sigma} = 0$ en coordonnées cylindriques. On vérifie en outre que $\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r = 0$ en $r = r_i$ et $r = r_e$.

20.2.2 Contraintes réduites

Donner une expression réduite des contraintes précédentes lorsque, simultanément, $r_e \rightarrow +\infty$ et $r \gg r_i$.

Dans ces conditions, les contraintes (20.21) à (20.23) se réduisent à

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \frac{\alpha \sin \theta}{r}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\alpha \cos \theta}{r} \quad (20.25)$$

20.2.3 Contexte des déformations planes

Calculer la composante de contrainte σ_{zz} associée au champ réduit précédent, dans le contexte des déformations planes selon l'axe \underline{e}_z . Ce contexte suppose que

$$\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{zz} = 0$$

Dans ces conditions, la déformation axiale vaut

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{zz} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) = 0 \quad (20.26)$$

d'où le résultat connu en déformations planes :

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$$

i.e.

$$\sigma_{zz} = 2\nu\sigma_{rr}$$

dans le cas présent.

20.2.4 Moment résultant

On considère un contour carré, de côté $2X_0$, autour de la ligne de dislocation, comme sur la figure 20.6, avec $X_0 \gg r_i$ et $r_e \rightarrow +\infty$. Montrer que les contraintes internes dues à la dislocation engendrent un moment résultant, par unité d'épaisseur de cylindre, sur la face d'équation $X_1 = X_0, |X_2| \leq X_0$.

La normale à la face considérée a pour composantes :

$$\underline{n} = \cos\theta \underline{e}_r - \sin\theta \underline{e}_\theta$$

Le vecteur contrainte en chaque point de cette face vaut

$$\underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \frac{\alpha \sin 2\theta}{r} \underline{e}_r - \frac{\alpha}{r} \underline{e}_\theta \quad (20.27)$$

Le moment résultant sur la face d'équation $X_1 = X_0, |X_2| \leq X_0$ vaut :

$$\underline{M} = \int_{X_0} \underline{OM} \wedge \underline{t} dX_2 = \left(\int_{X_0} r t_\theta dX_2 \right) \underline{e}_z = - \left(\int_{X_0} \alpha dX_2 \right) \underline{e}_z = -2\alpha X_0 \underline{e}_z \quad (20.28)$$

20.2.5 Déformations et déplacements

Calculer les déformations associées au champ de contraintes dans sa forme réduite trouvée en 20.2.2.

Intégrer pas à pas ce champ pour en déduire un champ de déplacement correspondant.

Identifier au passage la constante α en fonction de la donnée du problème, à savoir b .

Déterminer alors les zones de dilatation et de contraction de la matière autour de la dislocation.

Quelques commentaires sur le champ de déplacements obtenu s'imposent. Indiquer une différence fondamentale entre les déplacements associés à la dislocation-coïn et ceux trouvés pour la dislocation-vis.

Remarquer enfin que la soudure ne reste pas plane.

L'élasticité isotrope linéarisée fournit :

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \frac{\alpha \sin \theta}{r} \quad (20.29)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = -\frac{1+\nu}{E} \frac{\alpha \cos \theta}{r} \quad (20.30)$$

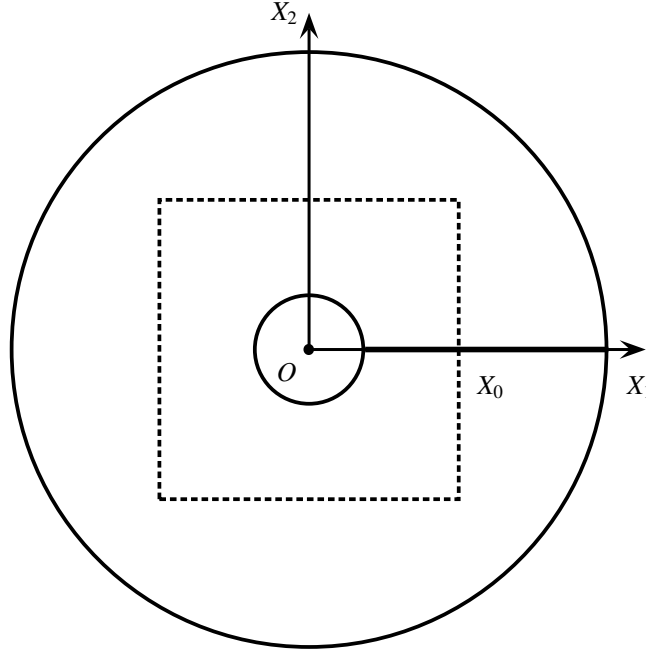


FIGURE 20.6 – Contour carré autour de l'axe du cylindre.

La composante $\varepsilon_{rr} = \partial u_r / \partial r$ peut être intégrée pour donner

$$u_r = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \alpha \sin \theta \log r + f(\theta) \quad (20.31)$$

où $f(\theta)$ est une fonction d'intégration à déterminer. La relation de compatibilité

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = r \varepsilon_{\theta\theta} - u_r = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} (1 - \log r) \alpha \sin \theta - f(\theta) \quad (20.32)$$

permet d'obtenir la composante de déplacement tangentiel :

$$u_\theta = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} (1 - \log r) \alpha \cos \theta - \int f(\theta) d\theta + g(r) \quad (20.33)$$

où apparaît une nouvelle fonction d'intégration $g(r)$. Noter que la nullité des composantes de déformations ε_{rz} et $\varepsilon_{\theta z}$ permet d'exclure une dépendance éventuelle de u_r et u_θ par rapport à z . La composante de cisaillement se calcule alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \\ &= 2 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \frac{\alpha \cos \theta}{r} + \frac{f_{,\theta}(\theta)}{r} + g_{,r}(r) + \frac{1}{r} \left(\int f(\theta) d\theta - g(r) \right) \end{aligned} \quad (20.34)$$

Les notations $f_{,\theta}$ et $g_{,r}$ désignent les dérivées premières des fonctions f et g . Cette dernière expression doit être identifiée avec le résultat (20.30) ce qui fournit l'équation

$$-\frac{4(1-\nu^2)}{E} \frac{\alpha \cos \theta}{r} = \frac{f_{,\theta}(\theta) + \int f(\theta) d\theta}{r} + g_{,r}(r) - \frac{g(r)}{r} \quad (20.35)$$

La dérivation de l'équation précédente par rapport à r , d'une part, et par rapport à θ d'autre part conduit aux deux équations différentielles indépendantes :

$$g_{,rr}(r) = 0 \quad (20.36)$$

$$f_{,\theta\theta} + f = \frac{4(1-\nu^2)}{E} \alpha \sin \theta \quad (20.37)$$

L'équation (20.36) fournit :

$$g(r) = Ar + D_1 \quad (20.38)$$

où A et D_1 sont des constantes d'intégration.

L'équation (20.37), quant à elle, possède une solution particulière de la forme $\theta \cos \theta$. Elle s'intègre finalement en

$$f(\theta) = -\frac{2(1-\nu^2)}{E} \alpha \theta \cos \theta + B \cos \theta + C \sin \theta \quad (20.39)$$

où B et C sont des constantes d'intégration. Il est utile de calculer aussi une primitive de f , car elle intervient dans l'expression du déplacement tangentiel :

$$\int f(\theta) d\theta = -\frac{2(1-\nu^2)}{E} \alpha (\theta \sin \theta + \cos \theta) + B \sin \theta - C \cos \theta + D_2 \quad (20.40)$$

L'équation (20.34) est vérifiée à condition que $D_1 = D_2 = 0$.

Remarquer que les termes en $B \cos \theta$ et $C \sin \theta$ dans l'expression du déplacement radial à travers la fonction f sont des mouvements de translation exprimés en coordonnées cylindriques, comme on s'en convaincra aisément. La fonction $g(r) = Ar$, quant à elle, correspond à une rotation d'ensemble d'axe \underline{e}_z et d'angle A .

C'est la condition de discontinuité sur le plan $\theta = 0$, visible sur la figure 20.5, qui donne finalement accès à la constante α recherchée :

$$u_r(0^+) - u_r(2\pi^-) = b = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \alpha 2\pi \quad (20.41)$$

d'où

$$\alpha = \frac{Eb}{4\pi(1+\nu)(1-\nu)} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \quad (20.42)$$

La dilatation ou la contraction de la matière sont données par le signe de la trace de la déformation qui, en vertu des lois de l'élasticité isotrope linéarisée est proportionnelle à, et du même signe que, la trace du tenseur des contraintes. La trace du tenseur des contraintes est égale à $2(1+\nu)\sigma_{rr}$. Lorsque $b > 0$, la matière se dilate donc au-dessus du plan de coupure ($\theta > 0$) et se contracte en-dessous ($\pi \leq \theta \leq 2\pi$).

En bref, on obtient les déplacements suivants

$$u_r = \frac{b}{4\pi(1-\nu)} ((1-2\nu) \sin \theta \log r - 2(1-\nu) \theta \cos \theta) \quad (20.43)$$

$$u_\theta = \frac{b}{4\pi(1-\nu)} (-(1-2\nu)(1-\log r) \cos \theta + 2(1-\nu)(\theta \sin \theta + \cos \theta)) \quad (20.44)$$

auxquels s'ajoute un éventuel mouvement de corps rigide.

Le champ de déplacement présente une divergence en $\log r$ lorsque $r_i \rightarrow 0$, ce qui n'était pas le cas pour la dislocation-vis.

Le plan de coupure $\theta = 0$ subit un déplacement u_θ non constant et non linéaire en r . Par conséquent, il ne reste pas plan.

Parce que ces expressions sont parfois invoquées dans la pratique, on donne aussi les composantes cartésiennes des déplacements qui se déduisent des résultats obtenus en coordonnées cylindriques :

$$u_1 = -\frac{b}{2\pi} \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{4(1-\nu)} \right) = \frac{b}{2\pi} \left(\text{atan} \frac{X_2}{X_1} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{X_1 X_2}{X_1^2 + X_2^2} \right) \quad (20.45)$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{b}{8\pi(1-\nu)} (2(1-2\nu) \log r + \cos 2\theta) \\ &= -\frac{b}{8\pi(1-\nu)} \left((1-2\nu) \log(X_1^2 + X_2^2) + \frac{X_1^2 - X_2^2}{X_1^2 + X_2^2} \right) \end{aligned} \quad (20.46)$$

Pour information, les contraintes cartésiennes associées sont :

$$\sigma_{11} = -\frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{X_2(3X_1^2 + X_2^2)}{(X_1^2 + X_2^2)^2} \quad (20.47)$$

$$\sigma_{22} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{X_2(X_1^2 - X_2^2)}{(X_1^2 + X_2^2)^2} \quad (20.48)$$

$$\sigma_{12} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{X_1(X_1^2 - X_2^2)}{(X_1^2 + X_2^2)^2} \quad (20.49)$$

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{\mu b}{\pi(1-\nu)} \frac{X_2}{X_1^2 + X_2^2} \quad (20.50)$$

20.2.6 Énergie d'une dislocation–coin

Calculer l'énergie élastique stockée dans le cylindre, par unité de longueur de ligne de dislocation.

La densité d'énergie élastique stockée, calculée avec les contraintes et déformations réduites, vaut

$$\rho\psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\alpha^2(1+\nu)}{Er^2} (1 - 2\nu \sin^2 \theta) \quad (20.51)$$

L'énergie élastique totale par unité d'épaisseur du cylindre, calculée sur la portion du cylindre $r_i \ll r_0 < R \ll r_e$ est donc :

$$W = \int_{r=r_0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \rho\psi r dr d\theta = \frac{\mu b^2}{4\pi(1-\nu)} \log \frac{R}{r_0} \quad (20.52)$$

L'énergie croît de manière illimitée lorsque R augmente et lorsque r_0 diminue. Cette expression est la même que pour la dislocation–vis au facteur $(1-\nu)$ près.

20.2.7 Dislocation–coin équivalente

On soumet le cylindre parfait initial au champ de déplacements suivant :

$$u_r = \frac{b}{4\pi(1-\nu)} ((1-2\nu) \sin \theta \log r - 2(1-\nu) \theta \cos \theta) \quad (20.53)$$

$$u_\theta = \frac{b}{4\pi(1-\nu)} (-(1-2\nu)(1 - \log r) \cos \theta + 2(1-\nu)(\theta \sin \theta + \cos \theta)) \quad (20.54)$$

définis sur l'intervalle :

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad (20.55)$$

Montrer que ce champ est à valeurs multiples si on le prolonge par continuité en $\theta = -\pi/2$ et $\theta = 3\pi/2$. Montrer que le champ de déformations associé à ces déplacements est strictement le même que celui trouvé pour la dislocation–coin au paragraphe 20.2.5. En déduire que le champ de contraintes correspondant est auto-équilibré.

Proposer une procédure pour que s'établisse précisément le champ de déplacements décrit par les fonctions (20.53) à (20.55), dans le cylindre, au prix d'une coupure bien choisie. Faire le dessin correspondant.

Justifier alors que ce champ mérite tout autant le nom de dislocation–coin que celui étudié au paragraphe 20.2.5.

Calculer le vecteur de Burgers correspondant (voir figure 20.2).

On a donc mis en évidence deux champs de déplacements, à savoir celui trouvé en 20.2.5 et celui donné par les équations (20.53) à (20.55), conduisant aux mêmes champs de déformations. Montrer

que la différence entre ces deux champs ne se limite pas à un mouvement de corps rigide. Ce résultat vous étonne-t-il ?

A quelle caractéristique topologique fondamentale du cylindre creux pourrait-on l'attribuer ?

On calcule les limites suivantes :

$$u_r(-\frac{\pi^-}{2}) - u_r(\frac{3\pi^+}{2}) = 0, \quad u_\theta(-\frac{\pi^-}{2}) - u_\theta(\frac{3\pi^+}{2}) = b \quad (20.56)$$

La fonction u_θ est discontinue au travers du plan $\theta = -\pi/2$. Elle se prolonge donc en une fonction à valeurs multiples de part et d'autre du domaine de définition (20.55). La seule différence entre le champ proposé et celui trouvé pour la dislocation-coin, à savoir les équations (20.43) et (20.44), réside dans le domaine de définition des fonctions par rapport à l'angle θ . On vérifie que ces déplacements conduisent aux mêmes déformations qui sont, quant à elles, continues, on l'a vu.

Pour obtenir un tel champ de déplacement, il suffit d'effectuer la coupure le long du plan $\theta = -\pi/2$ et de translater l'une des faces de la coupure du vecteur $\underline{b} = b\underline{e}_\theta$, orthogonal au plan de coupure, comme indiqué sur la figure 20.2. Ce déplacement relatif crée un vide que l'on comble en rajoutant la plaque de matière d'épaisseur b , que l'on colle aux faces de la coupure afin de restaurer la cohésion du cylindre. Si $b < 0$, il faut enlever de la matière, puis coller, afin de réaliser la dislocation. La procédure est illustrée sur la figure 20.7.

Remarquer que le vecteur de translation est le même que (20.20), ce qui incite à décrire qu'il s'agit là de la même dislocation-coin. La dislocation-coin est caractérisée par son vecteur de Burgers \underline{b} , perpendiculaire à la ligne de dislocation, elle est indépendante du plan de coupure.

Notons $\underline{u}^{(1)}$ et $\underline{u}^{(2)}$ les deux champs de déplacements fournissant le champ de déformations de la dislocation-coin. Ils coïncident pour $0 < \theta < 3\pi/2$. Ils diffèrent pour $3\pi/2 < \theta < 2\pi$, domaine sur lequel :

$$\begin{aligned} u_r^{(2)} &= \frac{b}{4\pi(1-\nu)} ((1-2\nu) \sin \theta \log r - 2(1-\nu)(\theta - 2\pi) \cos \theta) \\ u_\theta^{(2)} &= \frac{b}{4\pi(1-\nu)} (-(1-2\nu)(1 - \log r) \cos \theta + 2(1-\nu)((\theta - 2\pi) \sin \theta + \cos \theta)) \end{aligned}$$

de sorte que

$$u_r^{(2)} - u_r^{(1)} = b \cos \theta, \quad u_\theta^{(2)} - u_\theta^{(1)} = -b \sin \theta$$

sur ce quartier du cylindre.

Le même champ de déformation sur le cylindre peut donc s'intégrer en deux champs de déplacements qui diffèrent par plus qu'un simple mouvement de corps rigide infinitésimal. Autrement dit, le champ de déplacement $\underline{u}^{(2)} - \underline{u}^{(1)}$ engendre un champ de déformation nulle et n'est pas un mouvement de corps rigide infinitésimal.

Ce résultat peut surprendre puisqu'on a établi, lors de l'étude du problème de la compatibilité des déformations (voir le théorème 4 de la page 50), que la déformation s'annule seulement pour les mouvements de corps rigide infinitésimaux. La démonstration de ce résultat fait toutefois appel à plusieurs reprises au théorème 23 de Poincaré, qui n'est valable que sur un corps simplement connexe. Un ensemble de points est dit simplement connexe si toute courbe fermée continue dans l'ensemble peut être déformée en un point tout en restant dans l'ensemble. Ce n'est pas le cas des cercles concentriques d'un cylindre creux entourant le trou central. Le cylindre creux n'est donc pas simplement connexe. Un ensemble non simplement connexe peut être rendu simplement connexe en effectuant autant de coupures que nécessaire. Une seule suffit pour le cylindre creux. Le théorème de Poincaré peut être appliqué dans le cylindre coupé mais les champs ainsi déterminés peuvent présenter des discontinuités au passage de la coupure. C'est pourquoi on a pu trouver un champ de déplacement à valeur simple pour chaque coupure considérée dans ce problème.

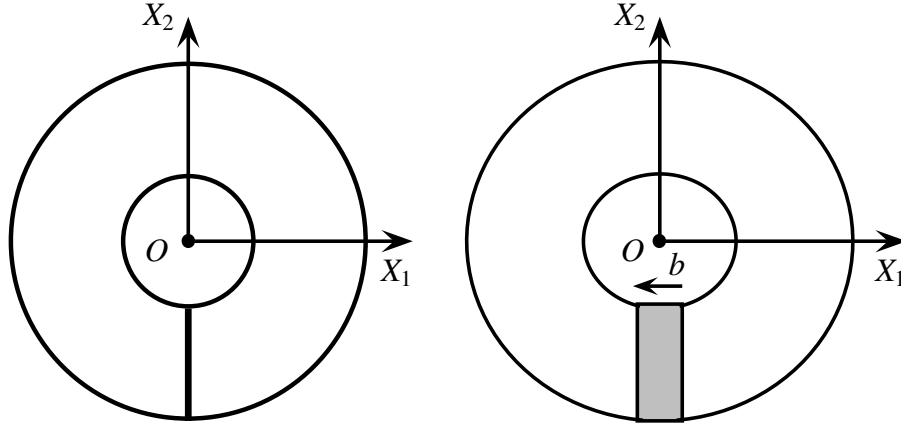


FIGURE 20.7 – Construction alternative d’une dislocation–coin dans un cylindre creux. La partie grisée correspond à de la matière rajoutée (ou enlevée) pour combler l’espace libéré par le déplacement relatif des lèvres de la coupure.

20.3 Dislocations mixtes

Une dislocation dans un cylindre est de caractère mixte lorsque son vecteur de Burgers possède une composante vis, parallèle à la ligne de dislocation, et une composante coin, perpendiculaire à la ligne :

$$\underline{b} = b_{\perp} \underline{e}_1 + b_{\odot} \underline{e}_z \quad (20.57)$$

Donner, en le justifiant, le champ de contraintes et l’énergie d’une telle dislocation.

20.4 Compatibilité générale

Le travail précédent incite à reformuler de manière générale le problème de la compatibilité d’un champ de déformation dans les corps multiplement connexes. On distinguera en particulier la recherche de solutions continues ou non en déplacement. La question de la compatibilité d’un champ de déformations dans le contexte infinitésimal a été explorée au paragraphe 2.3.5. Le théorème 5 établit l’existence d’un champ de déplacement de classe C^3 dès lors que $\underline{\varepsilon}$ est de classe C^2 . Il n’est toutefois valable que dans le cas d’un domaine simplement connexe en raison de l’application du théorème de Poincaré. L’objectif de cette section est d’étendre ce théorème au cas non simplement connexe.

20.4.1 Retour sur la compatibilité

On commence d’abord par reprendre la démarche mise en œuvre au paragraphe 2.3.5 dans un esprit un peu différent. Alors que cette première analyse avait simplement prouvé l’existence du champ de déplacement, on se propose ici de construire explicitement un tel champ à partir de la donnée du champ des déformations infinitésimales $\underline{\varepsilon}(\underline{X})$ sur un domaine $\mathcal{D} \subset \Omega_0$.

Si le champ $\underline{\varepsilon}(\underline{X})$ est compatible alors il existe $\underline{\omega}(\underline{X})$ et $\underline{u}(\underline{X})$ tels que

$$\text{grad } \underline{u} = \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} \quad (20.58)$$

Le rotationnel de l’expression précédente est nécessairement nul ($\text{rot grad} = 0$) de sorte que :

$$\text{rot } \underline{\omega} = -\text{rot } \underline{\varepsilon} \quad (20.59)$$

Il se trouve d’autre part que le rotationnel du tenseur des rotations infinitésimales n’est autre que le

transposé du gradient du vecteur rotation infinitésimale² :

$$\text{rot } \underline{\omega} = (\text{grad } \underline{\omega}^\times)^T \quad (20.60)$$

Les définitions de ces grandeurs sont données par (2.128) et (2.129) (pour l'algèbre des tenseurs antisymétriques, voir l'annexe A.1.3). L'application du rotationnel au gradient de $\underline{\omega}^\times$ conduit aux identités suivantes :

$$\text{rot } (\text{rot } \underline{\omega})^T = 0 \quad (20.61)$$

$$\text{rot } (\text{rot } \underline{\varepsilon})^T = 0 \quad (20.62)$$

Il reste à vérifier que les 6 équations (20.62) ne sont autres que les relations de compatibilité (2.142). On a donc trouvé une formulation très concise des conditions de compatibilité grâce à l'opérateur rotationnel que l'on va continuer à utiliser pour construire le champ de déplacement issu d'un champ de déformations compatible.

Construction explicite du champ de déplacement

Soit un champ de déformations $\underline{\varepsilon}(\underline{X})$ donné vérifiant les équations de compatibilité (20.62). Il existe un champ $\underline{\omega}^\times$ tel que

$$\text{grad } \underline{\omega}^\times = -(\text{rot } \underline{\varepsilon})^T \quad (20.63)$$

Supposons connue la valeur $\underline{\omega}^\times(M_0)$ du vecteur rotation infinitésimale au point M_0 et cherchons $\underline{\omega}^\times(M)$ en un autre point M . Soit L une ligne joignant M_0 à M et intégrons (20.63) le long de L :

$$\underline{\omega}^\times(M) - \underline{\omega}^\times(M_0) = - \int_{M_0, L}^M (\text{rot } \underline{\varepsilon})^T \cdot \underline{dl} \quad (20.64)$$

ce qui fournit la valeur cherchée à condition que l'intégrale soit indépendante du trajet L . Considérons alors une autre ligne L' liant M à M_0 . Le contour $L \cup L'$ est donc fermé. Sur tout domaine simplement connexe $\mathcal{D} \subset \Omega_0$ contenant $L \cup L'$, il existe une surface S contenue dans \mathcal{D} et s'appuyant sur $L \cup L'$. Le théorème de Stokes (A.138) s'applique pour une telle surface :

$$\oint_{L \cup L'} (\text{rot } \underline{\varepsilon})^T \cdot \underline{dl} = \int_S \text{rot } (\text{rot } \underline{\varepsilon})^T \cdot \underline{n} \, ds = 0 \quad (20.65)$$

d'où

$$\int_L (\text{rot } \underline{\varepsilon})^T \cdot \underline{dl} + \int_{L'} (\text{rot } \underline{\varepsilon})^T \cdot \underline{dl} = 0$$

ce qui établit l'invariance de l'intégrale par rapport au trajet dans (20.64) et par conséquent assure l'unicité de $\underline{\omega}^\times(M)$ pour $\underline{\omega}^\times(M_0)$ donné. On revient alors à (20.58) que l'on intègre sur le trajet L :

$$\underline{u}(M) - \underline{u}(M_0) = \int_{M_0, L}^M \underline{\varepsilon} \cdot \underline{dl} + \int_{M_0, L}^M \underline{\omega}^\times \wedge \underline{dl} \quad (20.66)$$

2. Pour le voir, le calcul fait appel successivement aux relations (A.77) et (A.74) :

$$\begin{aligned} (\text{rot } \underline{\omega})_{im} &= \epsilon_{mjk} \omega_{ij,k} = -\epsilon_{mjk} \epsilon_{ijp} \omega_{p,k}^\times \\ &= \epsilon_{jmk} \epsilon_{jpi} \omega_{p,k}^\times = (\delta_{mp} \delta_{ki} - \delta_{mi} \delta_{kp}) \omega_{p,k}^\times \\ &= \omega_{m,i}^\times - \omega_{k,k}^\times \delta_{im} \end{aligned}$$

Or, on se rappelle aussi que $\underline{\omega}^\times = -\frac{1}{2} \text{rot } \underline{u}$ de sorte que sa divergence est nulle ($\text{div rot} = 0$). Le dernier terme s'annule et le résultat annoncé (20.60) est obtenu.

On effectue une intégration par parties du dernier terme sous la forme (avec $\underline{y} \in L$) :

$$\begin{aligned} \int_{M_0, L}^M \underline{\omega}^\times \wedge d\underline{l} &= \int_{M_0, L}^M \underline{\omega}^\times \wedge d(\underline{y} - \underline{x}) = \int_{M_0, L}^M d(\underline{\omega}^\times \wedge (\underline{y} - \underline{x})) - \int_{M_0, L}^M d\underline{\omega}^\times \wedge (\underline{y} - \underline{x}) \\ &= \underline{\omega}^\times(M_0) \wedge (\underline{x} - \underline{x}_0) + \int_{M_0, L}^M (\underline{x} - \underline{y}) \wedge (\text{rot } \underline{\xi})^T \cdot d\underline{l} \end{aligned} \quad (20.67)$$

On obtient finalement le déplacement

$$\underline{u}(M) = \underline{u}(M_0) + \underline{\omega}^\times(M_0) \wedge (\underline{x} - \underline{x}_0) + \int_{M_0}^M (\underline{x} - \underline{y}) \wedge (\text{rot } \underline{\xi})^T \cdot d\underline{l} \quad (20.68)$$

La dépendance vis-à-vis du trajet L a été enlevée car, pour un domaine L simplement connexe, on peut montrer, d'une manière similaire au cas du vecteur rotation, l'invariance de l'intégrale par rapport au trajet L dans le dernier terme. Il reste à vérifier que le gradient symétrisé du champ (20.68) donne bien le champ $\underline{\xi}$ de départ. On retrouve aussi le fait que le champ de déplacement obtenu est unique à un mouvement de corps rigide infinitésimal près caractérisé par la translation $\underline{u}(M_0)$ et la rotation infinitésimale $\underline{\omega}^\times(M_0)$. La formule (20.68) est parfois attribuée à Castigliano.

20.4.2 Domaines non simplement connexes

Pour fixer les idées, on prend le cas du cylindre Ω_0 des figures 20.1(a) et 20.8(a) qui est doublement connexe. Une coupure quelconque S ($\theta = 0$, sur les figures) permet de restaurer la connexité du domaine $\Omega_0 \setminus S$. Soit $\underline{\xi}(\underline{X})$ un champ de tenseurs symétriques de classe C^2 (même si cette hypothèse peut sans doute être un peu relâchée) défini sur Ω_0 et vérifiant les équations de compatibilité (20.62). La construction précédente ayant conduit au champ de déplacement (20.68) est valable sur $\Omega_0 \setminus S$ mais le champ obtenu peut présenter une discontinuité au passage de S . En effet d'après (20.64), le saut du vecteur rotation au travers de S s'obtient par passage à la limite sur une ligne M^+M^- , comme sur la figure 20.8(a) :

$$[\underline{\omega}^\times] = \underline{\omega}^\times(M^+) - \underline{\omega}^\times(M^-) = - \oint_{M^-M^+} (\text{rot } \underline{\xi})^T \cdot d\underline{l} =: \underline{d} \quad (20.69)$$

Le saut de déplacement s'écrit :

$$[\underline{u}] = \underline{u}(M^+) - \underline{u}(M^-) = \underline{b} + \underline{d} \wedge \underline{x} \quad (20.70)$$

où le vecteur de Burgers vaut

$$\underline{b} = \oint_{M^-M^+} (\underline{\xi} - (\underline{y} \wedge (\text{rot } \underline{\xi})^T)) \cdot d\underline{l} \quad (20.71)$$

L'utilisation du circuit fermé $M^-M^+P^+P^-M^-$ de la figure 20.8(b), réductible à un point dans $\Omega_0 \setminus S$, permet par passage à la limite de montrer l'indépendance des intégrales précédentes vis-à-vis du circuit Γ_0 traversant S . Par conséquent, les vecteurs \underline{b} et \underline{d} introduits précédemment sont constants le long de S . La discontinuité du déplacement correspond à un mouvement de corps rigide d'une lèvre de la coupure par rapport à l'autre. Comme le choix de la coupure est arbitraire, il existe une infinité de solutions en déplacement du problème de compatibilité, présentant une discontinuité et conduisant aux mêmes contraintes et déformations (continues!) dans le cylindre. On est en mesure d'énoncer le

Théorème 30 (dit de Weingarten) *Soit \mathcal{D} un domaine doublement connexe de Ω_0 et un champ de tenseurs symétriques $\underline{\xi}(\underline{x})$ à valeurs simples, continu (idéalement de classe C^2), vérifiant les conditions de compatibilité (20.62), alors il existe un champ de déplacement (idéalement de classe C^3 sur $\Omega_0 \setminus S$) dont $\underline{\xi}$ est le champ de gradient symétrisé associé et présentant une discontinuité au travers d'une surface S telle que $\Omega_0 \setminus S$ soit simplement connexe. En outre la discontinuité est de la forme (20.70) où le vecteur de Burgers \underline{b} et de disclinaison \underline{d} sont donnés par (20.71) et (20.69).*

Ce théorème se substitue à la réciproque du théorème 5 valable pour les ensembles simplement connexes. Il se généralise aux domaines multiplement connexes en considérant autant de surfaces de coupure (sans intersection) que nécessaire pour partager le corps en composantes connexes (Teodosiu, 1982).

Les deux situations physiques suivantes peuvent être distinguées :

- Les **dislocations** correspondent au cas $\underline{b} \neq 0, \underline{d} = 0$. Les dislocations droites dans un cylindre ont été étudiées en détail dans ce chapitre et correspondent à une translation relative des lèvres de la coupure. Selon que la translation est parallèle ou perpendiculaire à la ligne de dislocation, les dislocations vis et coin ont été distinguées.
- Les **disclinaisons** correspondent au cas $\underline{b} = 0, \underline{d} \neq 0$. Il s'agit d'une rotation relative par rapport à un axe passant par l'origine. Dans le cas du cylindre avec une coupure en $\theta = 0$ et une rotation d'un angle θ_0 de la lèvre supérieure, on peut imaginer introduire un coin (comme dans une buche que l'on fend) et calculer les contraintes internes introduites par le coin.

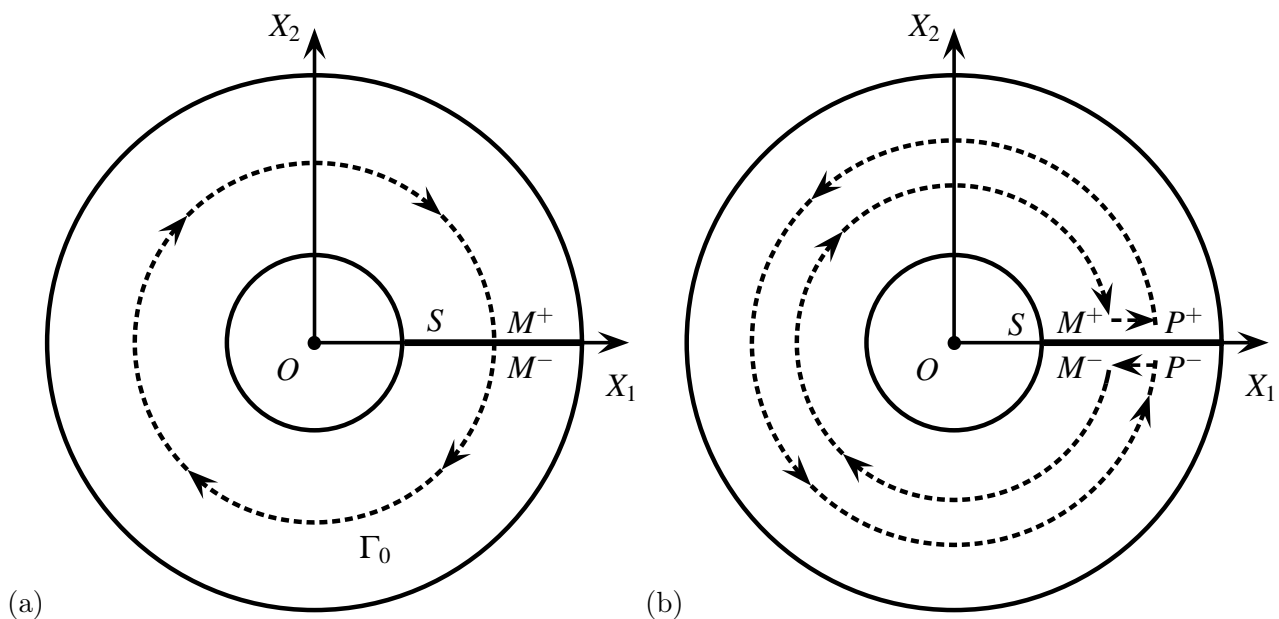


FIGURE 20.8 – Coupure dans un cylindre creux et contour franchissant la coupure (a), contour $M^-M^+P^+P^-M^-$ servant à établir l'indépendance du vecteur de Burgers par rapport au choix du contour Γ_0 (b).

20.4.3 Dislocations dans les cristaux

La découverte des dislocations dans les matériaux cristallins représente un des plus beaux épisodes de l'histoire des sciences pour lequel la théorie a précédé l'observation expérimentale de près de cinquante ans. Elles s'est déroulée en trois étapes principales (Jaoul, 2008) :

- **1907** : Volterra invente les dislocations (*distorsioni* à l'origine, le nom *dislocation* lui est substitué par Love (Love, 1944)). Les 100 ans de cette avancée théorique majeure ont été célébrés par un problème d'examen de mécanique des dislocations à l'Ecole des Mines de Paris...
- **1934** : Orowan, Taylor et Polanyi, simultanément et sans se concerter, imaginent la notion de dislocation-coin dans un réseau cristallin d'atomes (figure 20.9(a)). Ils conjecturent que les dislocations sont des défauts cristallins responsables de la déformation plastique (irréversible) et du durcissement des métaux. L'avancée théorique est majeure car les autres mécanismes proposés conduisaient à une limite d'élasticité nettement trop forte par rapport aux observations expérimentales. Le vecteur de Burgers coorespondant varie entre l'angström et le nanomètre (cf. figure 20.9(c) pour le circuit et le vecteur de Burgers d'une dislocation-coin). Taylor a estimé les contraintes internes à l'aide des résultats de Volterra. Le modèle continu de Volterra fournit

une excellente représentation des contraintes et déformations autour des défauts mais cesse d'être valide en-dessous d'une distance de un à deux vecteurs de Burgers. En 1939, Burgers imagine la dislocation-vis dans un réseau cristallin (figure 20.9(b)).

- **1956** : Hirsch observe au microscope électronique à transmission des lignes de dislocation dans l'aluminium. Le désordre atomique près du cœur de la dislocation est responsable du contraste obtenu sur l'image et révèle la présence de la dislocation (figure 20.9(e)). En 1947, Bragg et Nye avaient identifié des dislocations-coins dans un réseau bidimensionnel de bulles de savon à la surface de l'eau (figure 20.9(d), cf. (Nye, 1985)), mais on en trouve aussi dans l'arrangement des grains de maïs...

Le défaut dislocation-coin de la figure 20.9(a) peut se concevoir comme l'ajout ou la suppression d'un plan atomique et s'apparente donc tout à fait à la dislocation de Volterra de la figure 20.7. La dislocation-vis, quant à elle, est conforme à l'image de la figure 20.3.

L'étude des dislocations et de la déformation plastique dans les solides représente une combinaison exemplaire et extrêmement féconde de la mécanique et de la physique du solide. Elle reste d'une grande actualité dans la recherche scientifique. Le monument dédié aux dislocations est l'ouvrage (Hirth and Lothe, 1982).

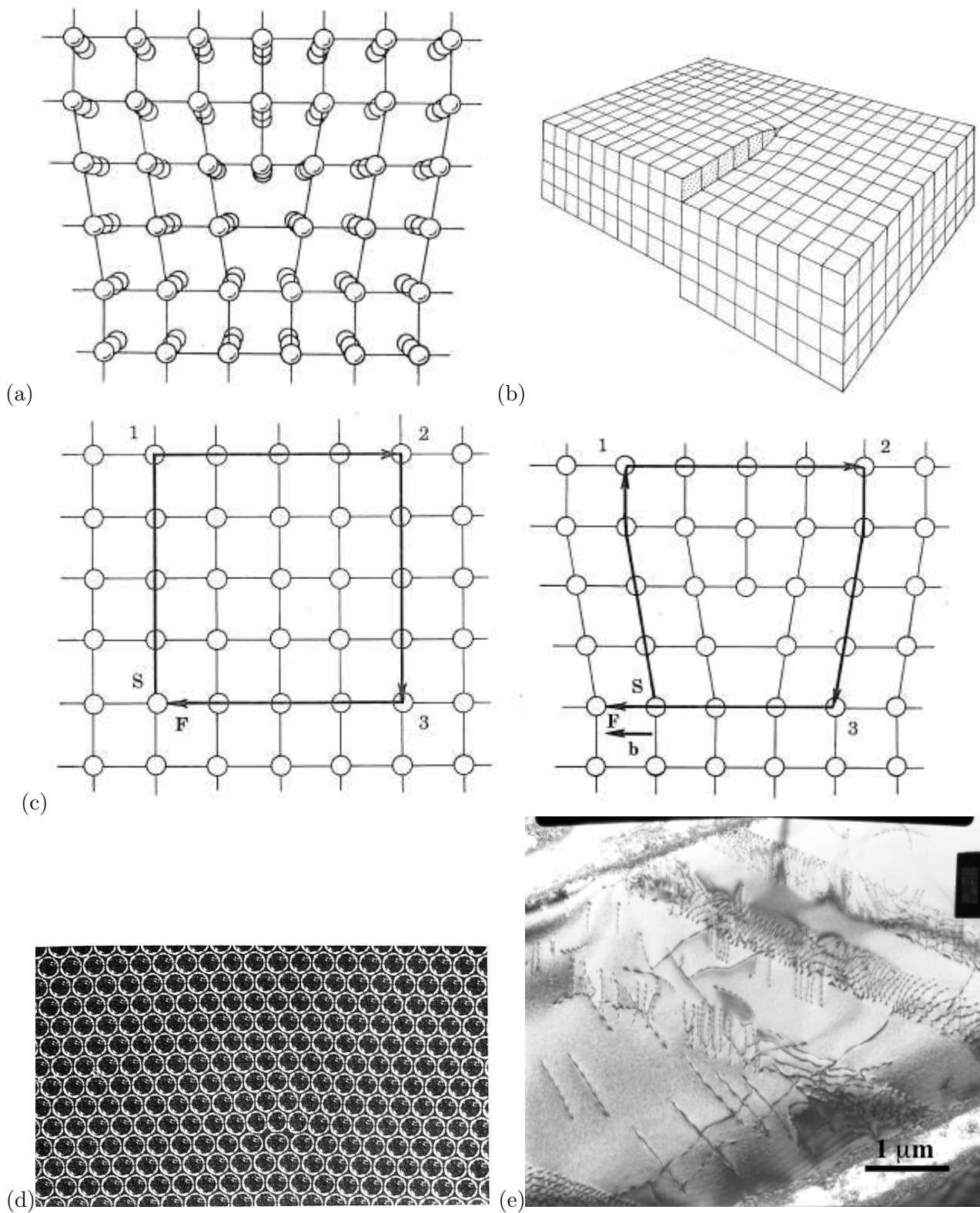


FIGURE 20.9 – Dislocations dans les cristaux : dislocation–coin (a), dislocation–vis (b), circuit de Burgers pour une dislocation–coin (c), dislocations dans un film de bulles de savon (d), d’après (Hirth and Lothe, 1982), dislocations dans un alliage de titane par microscopie électronique à transmission ; les lignes de dislocation débouchant sur une portion de lame de quelques fractions de micromètre d’épaisseur apparaissent comme des lignes noires (photo Loïc Nazé).

