III.7 Les espaces L^p

Nous introduisons dans cette section les espaces L^p qui jouent un rôle central dans un très grand nombre d'applications. Ce sont des espaces naturels pour décrire des champs de quantités physiques intensives sur des domaines, typiquement l'espace physique $\mathbb{R}^d$ ou un ouvert Ω de cet espace. La construction pouvant se faire en toute généralité, nous la proposons sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ quelconque, mais on pourra instancier cette construction abstraite en remplaçant $(X, \mathcal{A}, \mu)$ par $(\Omega, \mathcal{B}, \lambda)$, où Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ (on parle de *domaine*), $\mathcal{B}$ la tribu des boréliens, et λ la mesure de Lebesgue.

Remarques préliminaires : espaces fonctionnels et modélisation

La construction décrite dans les sections précédentes permet d'intégrer des variables intensives contre la mesure sous-jacente, pour obtenir une variable extensive afférente au domaine sur lequel on a intégré. Prenons le cas de la mesure de Lebesgue qui, conformément à la terminologie employée au début de ce chapitre, correspond à une mesure de type "volume". Si l'on intègre sur un domaine une fonction correspondant à la densité locale d'une certaine substance, on obtient la masse contenue dans le domaine considéré. La mesure volume peut ainsi être vue comme une capacité à accueillir de la masse. Pour un système fermé, la conservation de la masse se traduira par la conservation d'une certain norme, qui correspond au cas $p = 1$, de sorte que l'espace L^1 introduit constituera un cadre naturel à cette description. Dans un contexte thermique, on peut considérer cette mesure uniforme comme prenant une certaine valeur fixe de type capacité calorifique. Lorsque l'on intègre sur un domaine un champ de température contre cette mesure, on obtient la quantité de chaleur contenue dans le domaine. La mesure de départ peut ainsi être vue comme une capacité locale à emmagasiner de l'énergie thermique. Noter que si le milieu est hétérogène, cette capacité peut varier d'un endroit à l'autre. Dans ce contexte, si l'on considère un problème d'évolution pour un système fermé (adiabatique), le cas $p = 1$ sera également adapté pour décrire ces phénomènes.

Considérons maintenant une mesure de type "masse", toujours selon la terminologie employée au début du chapitre. Si l'on considère que la mesure correspond à la distribution dans l'espace d'une matière pesante en mouvement, on peut intégrer la quantité vectorielle *Vitesse* contre cette mesure, pour obtenir la quantité de mouvement. Là encore le cas $p = 1$ constituera un cadre naturel, la conservation de la quantité de mouvement assurant la préservation d'une quantité définie ci-après comme la norme L^1 associée à la distribution de masse en mouvement. Si l'on intègre une autre variable intensive, scalaire celle-là, égale à la moitié du module de la vitesse au carré, le résultat de l'intégration sur un domaine correspond à l'énergie cinétique emmagasinée dans le domaine en question. Dans ce contexte, c'est l'espace L^2 qui s'impose comme cadre naturel. On notera que les considérations précédentes permettent de concevoir la mesure sous-jacente (distribution de masse dans l'espace) comme une capacité à accueillir de la quantité de mouvement, ou une capacité à accueillir de l'énergie cinétique.

III.7.1 L'espace L^∞

Définition III.7.1. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On note[11] $\tilde{L}^\infty(X)$ l'ensemble des fonctions *essentiellement bornées*, c'est à dire des fonctions f qui sont $\mathcal{A}$-mesurables, et telles qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$|f(x)| \leq C \quad \text{pour presque tout } x.$$

Pour une telle fonction, on définit

$$\|f\|_\infty = \inf \{C\,,\ |f| \leq C \text{ p.p.}\}\,, \tag{III.7.1}$$

appelé supremum *essentiel* de la fonction f sur l'espace mesuré X. On définit l'espace $L^\infty(X)$ à partir de $\tilde{L}^\infty(X)$ en identifiant les fonctions égales presque partout, c'est-à-dire que $L^\infty(X)$ est l'espace des classes d'équivalence de $\tilde{L}^\infty(X)$ pour la relation d'équivalence

$$f \,\mathcal{R}\, g \Longleftrightarrow f = g \ \text{ p.p.}$$

On vérifie immédiatement que la quantité $\|f\|_\infty$ (que l'on appellera *norme* de f) est bien définie pour une classe, puisque la valeur est la même pour deux fonctions de $\tilde{L}^\infty(X)$ égales presques partout.

Remarque III.7.2. On prendra garde au fait que, dans la pratique courante, il subsiste une certaine ambigüité entre $\tilde{L}^\infty(X)$ et $L^\infty(X)$. En particulier, lorsque l'on écrit $f \in L^\infty(X)$, on considère parfois f comme une fonction au sens usuel, ce qui peut amener à écrire pour deux fonctions f et g de cet espace que f et g sont égales presque partout, ce qui n'a a priori pas de sens s'il s'agit de *classes* de fonctions (on devrait écrire simplement $f = g$ si l'on considérait les classes). En revanche lorsque l'on établit des propriétés de cet espace, il s'agit bien de l'espace des classes. Nous verrons en particulier que $\|\cdot\|_\infty$ définit une *norme* sur $L^\infty(X)$, ce qui n'est vrai que si l'on considère l'espace des classes d'équivalence. Cette quantité n'est en effet pas une norme sur $\tilde{L}^\infty(X)$: dès que $\mathcal{A}$ admet des ensembles de mesure nulle, il existe des fonctions qui annulent $\|\cdot\|_\infty$ (toutes les fonctions nulles presque partout).

Lemme III.7.3. Pour tout $f \in L^\infty(X)$, on a

$$|f(x)| \ \leq \|f\|_\infty \quad \text{p.p.}$$

Démonstration. Il existe une suite (C_n) convergeant vers $\|f\|_\infty$ telle que

$$|f(x)| \leq C_n \quad \forall x \in X \setminus E_n,$$

avec $E_n \in \mathcal{A}$ négligeable On note E l'union des E_n, qui est aussi négligeable, et l'on a, pour tout n,

$$|f(x)| \leq C_n \quad \forall x \in X \setminus E,$$

d'où $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ pour tout x dans $X \setminus E$. □

Proposition III.7.4. L'ensemble $L^\infty(X)$ est un espace vectoriel, et $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur cet espace.

Démonstration. La structure vectorielle de $L^\infty(X)$ est immédiate d'après la définition. On a $\|f\|_\infty = 0$ si et seulement si f est nulle presque partout, et la $1-$homogénéité est immédiate. Pour tous f et g dans L^∞ (plus précisément des représentants de leurs classes respectives dans L^∞), on a

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

presque partout. □

11. Nous omettrons dans la définition la référence explicite à la tribu $\mathcal{A}$ et la mesure μ, pour alléger l'écriture.

Proposition III.7.5. L'espace $(L^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace *de Banach*, c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^∞. Pour tout $k \geq 1$, il existe N_k tel que,

$$\|f_m - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k} \quad \forall m\,,\; n \geq N_k,$$

ce qui signifie que, pour tous m, n plus grands que N_k, il existe $E_{m,n,k}$ négligeable tel que $|f_m(x) - f_n(x)| \leq 1/k$ sur $X \setminus E_{m,n,k}$. L'ensemble $E = \cup E_{m,n,k}$ est négligeable comme union dénombrable d'ensembles négligeables et, sur $X \setminus E$, la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy, donc converge dans $\mathbb{R}$. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient $|f_n(x) - f(x)| \leq 1/k$, d'où la convergence presque partout de f_n vers f, qui appartient à L^∞, et qui est telle que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. □

III.7.2 Les espaces L^p, pour $p \in [1, +\infty[$

Définition III.7.6. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, +\infty[$. On note $L^p(X)$ l'ensemble des fonctions f qui sont $\mathcal{A}$-mesurables et telles que $|f|^p$ est intégrable. On note

$$\|f\|_p = \int_X |f|^p \, d\mu.$$

Comme pour L^∞, on définit en fait cet ensemble comme l'espace des classes d'équivalences obtenu en identifiant les fonctions égales presque partout. Comme précédemment, on prendra garde au fait que dans la pratique, lorsque l'on écrit $f \in L^p(X)$, on considère en fait f comme une fonction (un représentant de sa propre classe), voir remarque III.7.2.

Proposition III.7.7. (Inégalité de Hölder)
Soit $p \in]1, +\infty[$, $f \in L^p$, et $g \in L^{p'}$, où p' est l'exposant conjugué de p, tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On a alors $fg \in L^1$, avec

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Démonstration. Soient $f \in L^q$ et $g \in L^{p'}$. D'après l'inégalité de Young (proposition IV.1.30, page IV.1.30) on a, pour tout $x \in X$,

$$|f(x)|\,|g(x)| \leq \frac{1}{p}\,|f(x)|^p + \frac{1}{p'}\,|f(x)|^{p'},$$

d'où $fg \in L^1$, et

$$\|fg\|_{L^1} \leq \frac{1}{p}\,\|f\|_{L^p} + \frac{1}{p'}\,\|f\|_{L^{p'}}.$$

On obtient, en remplaçant f par λf (avec $\lambda > 0$) dans l'inégalité ci-dessus,

$$\|fg\|_{L^1} \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}\,\|f\|_{L^p} + \frac{1}{\lambda p'}\,\|g\|_{L^{p'}}.$$

La fonction ci-dessus est convexe en λ, et tend vers $+\infty$ quand λ tend vers 0 et vers $+\infty$, elle est minimale pour $\lambda = \|f\|_{L^p}^{-1}\,\|f\|_{L^{p'}}^{p'/p}$, ce qui conclut la preuve. □

Proposition III.7.8. L'ensemble $L^p(X)$ est un espace vectoriel, et $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $L^p(X)$.

Démonstration. Pour tous f et g dans $L^p(X)$, tout $x \in X$, on a

$$|f(x)+g(x)|^p \leq (|f(x)|+|g(x)|)^p \leq (2\max(|f(x)|, |g(x)|))^p \leq 2^p\left(|f(x)|^p+|g(x)|^p\right),$$

d'où $f+g \in L^p(X)$. On a par ailleurs, d'après la proposition III.5.14, $\lambda f \in L^p(X)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

L'inégalité triangulaire est une conséquence de l'inégalité de Hölder. En effet, pour tous f et g dans $L^p(X)$, on a

$$\int |f+g|^p = \int |f+g|^{p-1}|f+g| \leq \int |f+g|^{p-1}|f| + \int |f+g|^{p-1}|g|.$$

Or, si p' est l'exposant conjugué de p, on a $p'(p-1)=p$, d'où l'on déduit que la fonction $|f+g|^{p-1}$ est dans $L^{p'}(X)$. D'après l'inégalité de Hölder (proposition III.7.7), appliquée successivement aux deux intégrales du membre de droite ci-dessus, on a

$$\int |f+g|^p \leq \left(\int |f+g|^p\right)^{1/p'}\left(\int |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int |f+g|^p\right)^{1/p'}\left(\int |g|^p\right)^{1/p}$$

d'où l'on déduit, en utilisant $1/p' = 1-1/p$, l'inégalité triangulaire (l'inégalité est trivialement vérifiée si $\int |f+g|^p = 0$). □

Proposition III.7.9. L'espace vectoriel normé $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ est complet.

Démonstration. Soit f_n une suite de Cauchy dans $L^p(X)$. Il suffit de montrer qu'il existe une sous-suite extraite convergente dans L^p, la caractère de Cauchy assurera la convergence de l'ensemble de la suite vers la même limite. La première étape consiste à extraire une sous-suite f_{n_k} telle que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k}.$$

On procède de la façon suivante : il existe n_1 tel que $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leq 1/2$ pour tous m et n plus grands que n_1. Il existe ensuite un $n_2 \geq n_1$ tel que la même quantité est majorée par $1/4$, etc ... On construit ainsi une sous-suite qui vérifie l'inégalité ci-dessus. Pour simplifier l'écriture, nous écrivons (f_k) cette sous-suite, qui vérifie donc $\|f_{k+1} - f_k\|_{L^p} \leq 1/2^k$.

On introduit maintenant la fonction g_n définie par

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|.$$

On a par construction $\|g_n\|_{L^p} \leq 1$. La suite $g_n(x)$ est croissante pour tout x, donc converge vers une limite

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \in [0, +\infty].$$

La suite $g_n(x)^p$ est elle même croissante, et converge simplement vers $g(x)^p$. L'intégrale de g^p est donc finie d'après le théorème de convergence monotone III.5.23, page 85. La fonction

g est donc dans $L^p(X)$, et $g(x)$ est fini pour presque tout x (voir proposition III.5.21). On a par ailleurs, pour tous $m \geq n \geq 2$,

$$\begin{aligned}|f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \cdots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \\ &\leq \sum_{k=n}^{+\infty} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| = g(x) - g_{n-1}(x).\end{aligned}$$

Cette dernière quantité étant finie presque partout, et du fait que $g_n(x)$ converge vers $g(x)$, la suite $f_n(x)$ est de Cauchy pour presque tout x, donc converge vers une limite, que l'on note $f(x)$. On a, pour presque tout x et $n \geq 2$,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) \Longrightarrow |f(x)| \leq |f_n(x)| + g(x),$$

d'où $f \in L^p(X)$. Enfin, $|f_n(x) - f(x)|^p$ tend vers 0 presque partout, et $|f_n(x) - f(x)|^p \leq g(x)^p$, qui est intégrable. Le théorème de convergence dominée assure donc la convergence de f_n vers f en norme L^p. □

Notation III.7.10. On note $L^p(X)^n$ l'espace des fonctions vectorielles, c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, donc chaque composante est dans $L^p(X)$. Cet espace est complet pour la norme [12]

$$\|f\|_{L^p(X)^n} = \left(\int_X \|f(x)\|_2^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}.$$

III.8 Exemples d'espaces fonctionnels

Espaces de suites

On considère dans un premier temps le cas $X = \mathbb{N}$, muni de la tribu discrète (ensemble des parties) et de la mesure de comptage canonique :

$$A \subset \mathbb{N} \longmapsto \mu(A) = \mathrm{Card}(A).$$

Une "fonction" sur $X = \mathbb{N}$, c'est-à-dire une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, peut s'écrire comme une suite (u_n) de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Noter que, si les fonctions telles qu'on les a définies sont a priori autorisées à prendre la valeur $+\infty$, imposer l'appartenance à l'un des espaces L^p impose que toutes les valeurs soient finies. L'espace $L^p(X)$, pour $p \in [1, +\infty[$, s'identifie dans ce cas à l'espace des suites noté en général ℓ^p, défini par

$$\ell^p = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sum |u_n|^p < +\infty\right\}.$$

Nous avons montré précédemment qu'il s'agit d'un espace vectoriel normé complet pour la norme p, définie par

$$u = (u_n) \longmapsto \|u\|_{\ell^p} = \left(\sum |u_n|^p\right)^{1/p}.$$

12. On notera l'utilisation de la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ (indice 2 dans $\|f\|_2$). Ce choix est le plus couramment effectué, mais on pourrait munir $\mathbb{R}^n$ d'une autre norme.

L'espace ℓ^∞ des suites bornées est de la même manière un espace vectoriel normé pour

$$\|u\|_{\ell^\infty} = \sup_n |u_n| .$$

On notera qu'il s'agit ici d'un sup "traditionnel", du fait que l'espace $\mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage ne contient aucun ensemble non vide qui soit négligeable.

Il peut être pertinent de construire de tels espaces de suites à partir d'une mesure non uniforme sur $\mathbb{N}$, pour représenter par exemple une collection de masses ponctuelles non identiques. On considère dans cet esprit une collection infinie de masses strictement positives $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$, et la mesure associée

$$A \subset \mathbb{N} \longmapsto m(A) = \sum_{i\in A} m_i \in [0, +\infty].$$

Si l'on se donne une fonction vectorielle sur X, à valeur dans $\mathbb{R}^3$, qui correspond aux vitesses des masses, notée $v = (v_i)_{i\in\mathbb{N}}$, sa norme en tant qu'élément de l'espace $L^2(X, m)$ est définie par

$$\|v\|_{L^2}^2 = \sum_{i\in A} m_i |v_i|^2 ,$$

qui est (au facteur 1/2 près), l'énergie cinétique du système de masses. On notera que, le fait que cette énergie soit bornée n'empêche pas qu'il y ait des vitesses arbitrairement grandes. Dans ce qui précède nous avons considéré des particules labellisées, mais non situées dans l'espace. On peut construire un cadre fonctionnel permettant de suivre leurs positions dans l'espace en considérant la mesure discrète

$$\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} m_i \delta_{x_i},$$

où les x_i sont des points de l'espace $\mathbb{R}^3$ (position des masses). La mesure μ, définie sur la tribu discrète (ensemble des parties de $\mathbb{R}^3$) est définie par

$$A \subset \mathbb{R}^3 \longmapsto \mu(A) = \sum_{i, x_i \in A} m_i.$$

Noter que si l'on cherche à modéliser de cette façon (dite eulérienne) un nuage de particules en mouvement, l'objet naturel est une mesure μ_t dépendant du temps, définie comme ci-dessus à partir des positions courantes des particules. L'espace naturel pour représenter la vitesse dépendra alors lui-même du temps (contrairement au cadre précédent, purement lagrangien), puisque la mesure de référence, définie comme mesure sur $\mathbb{R}^3$, dépend du temps.

Espaces de fonctions

La construction de la mesure le Lebesgue n'était pas nécessaire pour construire les espaces de suites ci-dessus, elle l'est en revanche pour les espaces fonctionnels correspondant au cas $X = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}^d$, ou $X = \Omega$, avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$. Si l'on considère ainsi un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ muni canoniquement de la mesure de Lebesgue [13], la construction précédente permet en

13. On utilisera ici la notation dx (à la place de $d\lambda$) pour représenter le volume élémentaire d'intégration associé à la mesure de Lebesgue, conformément à l'usage.

particulier d'identifier, pour $p \in [1, +\infty[$, l'espace

$$L^p(\Omega) = \left\{ f \text{ mesurable sur } \Omega\,, \ \int_\Omega |f(x)|^p \ dx < +\infty \right\}$$

à un espace vectoriel normé complet pour la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \ dx \right)^{1/p}.$$

De la même manière l'espace L^∞ est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|\,,$$

étant entendu qu'il s'agit ici du supremum *essentiel*, tel que défini par (III.7.1).

Exercice III.8.1. Construire une isométrie entre ℓ^p et un sous-espace vectoriel de $L^p(\mathbb{R})$, pour $p \in [1, +\infty]$.

Proposition III.8.1. L'espace $C_c(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$, pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Démonstration. Nous démontrons tout d'abord cette propriété dans le cas $p = 1$. Toute fonction de $L^1(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme somme d'une fonction positive et d'une fonction négative. Il suffit donc de montrer que l'on peut approcher une fonction positive par une fonction de C_c. D'après le lemme III.5.22 et le théorème de convergence monotone III.5.23, toute fonction positive peut être approchée avec une précision arbitraire en norme L^1 par une fonction étagée. Toute fonction étagée s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions de type $\mathbb{1}_A$, où A est un borélien. On se ramène donc à la question de savoir si l'on peut approcher toute fonction de type $\mathbb{1}_A$ par une suite de fonctions continues à support compact. On utilise maintenant la régularité de la mesure de Lebesgue (théorème III.4.13, page 75), qui est en fait une conséquence directe de sa définition à partir de la mesure extérieure de Lebesgue. Il existe un ouvert U contenant A tel que $\lambda(U \setminus A) = \|\mathbb{1}_U - \mathbb{1}_A\|_{L^1}$ est arbitrairement petit, ce qui nous ramène à l'approximation d'une fonction de type $\mathbb{1}_U$, avec U ouvert. La suite de fonctions $\mathbb{1}_{]-n,n[}\mathbb{1}_U$ converge en norme L^1 ver $\mathbb{1}_U$ d'après le théorème de convergence monotone, on se ramène ainsi à l'approximation d'une fonction de type $\mathbb{1}_U$, avec U ouvert borné. On considère la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = \min(nd(x, U^c), 1),$$

où $d(x, U^c)$ est la distance de x au complémentaire de U. Il s'agit d'une suite qui converge simplement vers $\mathbb{1}_U$, dominée par $\mathbb{1}_U$, on a donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\|\mathbb{1}_U - f_n\|_{L^1} = \int (\mathbb{1}_U - f_n) = \int \mathbb{1}_U - \int f_n \longrightarrow 0.$$

Les fonctions f_n étant continues et à support compact, nous avons ainsi montré que l'on peut approcher toute fonction de L^1 par une suite de telles fonctions.

Pour la convergence en norme L^p, on utilise le fait que toute fonction de L^p est approchable par une suite de fonctions bornées et à support compact (voir exercice III.8.5). On peut donc supposer la fonction f de L^p bornée par un certain M et à support compact. Elle est donc dans L^1, et peut être approchée par une suite (f_n) de fonctions continues à support compact en norme L^1. On a

$$|f(x) - f_n(x)|^p \leq M^{p-1} |f(x) - f_n(x)| .$$

L'intégrale de la fonction ci-dessus converge vers 0, d'où la convergence en norme L^p de f_n vers f. $\square$

Exercice III.8.2. Quelle est l'adhérence de $C_c(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$?

III.8.1 Exercices

Exercice III.8.3. Montrer que la boule unité fermée de $L^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas compacte. Cette non compacité résulte-t-elle de la non compacité de $\mathbb{R}$?

Exercice III.8.4. On se place sur l'intervalle borné $I =]a, b[$ muni de la mesure de Lebesgue.

a) Montrer que $L^p(I) \subset L^1(I)$ pour tout $p \in]1, +\infty]$.

b) Le sous-espace L^p est-il fermé dans L^1 ?

c) Montrer que les inclusions du (a) sont invalidées si l'intervalle n'est pas borné (on pourra considérer le cas $I =]1, +\infty[$

Exercice III.8.5. (Opérateur de troncature)
Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, avec $p \in [1, +\infty[$.

a) On définit

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto T_n(t) = \left| \begin{array}{ll} t & \text{si } |t| \leq n \\ n\frac{t}{|t|} & \text{si } |t| > n \end{array} \right.$$

Montrer que $T_n \circ f$ tend vers f dans $L^p(\mathbb{R})$.

b) On note χ_n la fonction indicatrice de $]-n, n[$. Montrer que $\chi_n f$ tend vers f dans $L^p(\mathbb{R})$.

c) Montrer que $\chi_n T_n \circ f$ tend vers f dans L^p.

d) Que peut-on dire de $T_n \circ f$, $\chi_n f$, et $\chi_n T_n \circ f$, dans le cas $p = +\infty$?