



# Génie énergétique

Cycle ingénieur civil 1<sup>ère</sup> année

**Pascal STABAT**

*Février 2023*

Ce cours est un condensé des ouvrages suivants :

Aide-mémoire de Thermodynamique – Daniel Fargue - Presses des Mines

Introduction aux transferts thermiques – Dominique Marchio et Paul Reboux – Presses des Mines

## TABLE DES MATIERES

<b>CHAPITRE 1 : INTRODUCTION.....</b>	<b>6</b>
<b>PARTIE I : INTRODUCTION A LA THERMODYNAMIQUE.....</b>	<b>11</b>
<b>CHAPITRE 2 : BASES DE LA THERMODYNAMIQUE POUR LES MACHINES .....</b>	<b>12</b>
2.1 Principales définitions .....	13
2.2 Échanges d'énergie .....	14
2.2.1 Travail exercé par les forces externes .....	14
2.2.2 Quantité de chaleur transférée .....	15
2.3 Premier principe. Conservation de l'énergie.....	16
2.3.1 Systèmes fermés .....	16
2.3.2 Systèmes ouverts par convection .....	17
2.4 Propriétés des corps .....	19
2.4.1 Changement de phase d'un corps pur .....	19
2.4.2 Liquides et solides .....	20
2.4.3 Équilibre liquide - vapeur d'un corps pur .....	21
2.4.4 Gaz parfaits .....	22
2.4.5 Fluides réels.....	22
2.5 Processus stationnaires, appareils courants .....	23
2.5.1 Formule générale .....	23
2.5.2 Principaux appareils .....	24
2.6 Deuxième principe, entropie .....	26
2.6.1 Expression générale pour un système fermé .....	26
2.6.2 Systèmes ouverts par convection .....	27
2.6.3 Cycles dithermes .....	28
2.6.4 Principales transformations : détentes et compressions .....	28
2.6.5 Pertes d'énergie : énergies utilisables, exergie .....	32
2.7 Principe de Nernst ou Troisième principe.....	34
<b>PARTIE II : INTRODUCTION AUX TRANSFERTS THERMIQUES.....</b>	<b>35</b>
<b>CHAPITRE 3 : TRANSFERTS CONDUCTIFS .....</b>	<b>39</b>
3.1 Conduction en régime permanent .....	40
3.1.1 Loi de Fourier.....	40
3.1.2 Equation de la chaleur .....	41
3.1.3 Conditions aux limites.....	43
3.1.4 Conduction monodimensionnelle en régime permanent et sans production interne de chaleur.....	46
3.2 Conduction en régime variable .....	51

3.2.1	Problème général .....	51
3.2.2	Méthodes de résolution du problème .....	52
3.2.3	Exemples de résolution analytique de l'équation de la chaleur en régime variable .....	57
<b>CHAPITRE 4 : TRANSFERTS CONVECTIFS .....</b>		<b>63</b>
<b>4.1</b>	<b>Etude physique et définitions .....</b>	<b>64</b>
4.1.1	Coefficient local de convection .....	64
4.1.2	Géométrie fermée ou ouverte .....	64
4.1.3	Régimes d'écoulement laminaire ou turbulent .....	65
4.1.4	Convection naturelle et convection forcée .....	65
<b>4.2</b>	<b>Choix des corrélations .....</b>	<b>69</b>
4.2.1	Nombres adimensionnels utiles en convection .....	70
4.2.2	Corrélations pour des plaques et des conduites .....	71
4.2.3	Convection naturelle en espace confiné .....	75
<b>CHAPITRE 5 : ECHANGEURS DE CHALEUR .....</b>		<b>77</b>
<b>5.1</b>	<b>Introduction .....</b>	<b>78</b>
<b>5.2</b>	<b>Relations fondamentales - échangeurs à co et contre courant .....</b>	<b>79</b>
5.2.1	Bilan global .....	79
5.2.2	Méthode KS - $\Delta T_{LM}$ .....	79
5.2.3	Méthode NUT-Efficacité .....	82
5.2.4	Allure des températures .....	84
<b>5.3</b>	<b>Echangeurs quelconques .....</b>	<b>85</b>
<b>5.4</b>	<b>Coefficient d'échange global .....</b>	<b>89</b>
5.4.1	Conductance globale d'un échangeur .....	89
5.4.2	Amélioration de la conductance côté air – Ajout d'ailettes .....	90
<b>CHAPITRE 6 : TRANSFERTS RADIATIFS .....</b>		<b>93</b>
<b>6.1</b>	<b>Lois fondamentales du rayonnement thermique .....</b>	<b>94</b>
6.1.1	Rayonnement thermique .....	94
6.1.2	Grandeurs associées aux sources de rayonnement .....	95
6.1.3	Grandeurs caractéristiques des récepteurs de rayonnement .....	99
6.1.4	Lois de rayonnement du corps noir .....	100
<b>6.2</b>	<b>Propriétés radiatives .....</b>	<b>103</b>
6.2.1	Introduction .....	103
6.2.2	Types de corps .....	103
6.2.3	Réception d'énergie par rayonnement .....	103
6.2.4	Absorptivité, réflectivité et transmittivité .....	104
6.2.5	Emissivité d'un corps non noir .....	106
6.2.6	Loi de kirchhoff .....	106
6.2.7	Exemples de corps .....	107
<b>6.3</b>	<b>Calcul du rayonnement mutuel entre surfaces .....</b>	<b>110</b>

6.3.1	Facteur de forme .....	110
6.3.2	Propriétés des facteurs de forme .....	111
6.3.3	Puissance nette échangée entre deux surfaces .....	114
6.3.4	Analogie électrique, linéarisation .....	116
<b>REFERENCES .....</b>		<b>119</b>
<b>ANNEXES .....</b>		<b>121</b>

## **Chapitre 1 : Introduction**

---

Le génie énergétique s'intéresse à la manière dont l'énergie est utilisée pour accomplir des fonctions indispensables dans l'industrie, le transport et le bâtiment.

Dans l'industrie, les systèmes énergétiques se trouvent dans la production d'électricité, les usines de fabrication de matériaux (céramiques, ciments, verre...), les usines de transformation (agro-alimentaire, chimie...). Dans les transports, les besoins sont satisfaits par divers types de moteurs, de convertisseurs de puissance et d'équipements de refroidissement ou de chauffage. Dans le bâtiment, les appareils tels que les fours, les réfrigérateurs et les systèmes de chauffage et refroidissement représentent des systèmes thermiques.

Les systèmes énergétiques impliquent le stockage, le transfert et la conversion de l'énergie. L'énergie peut être stockée dans un système sous différentes formes, comme l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. L'énergie peut également être stockée dans la matière qui compose le système. L'énergie peut être transférée entre un système et son environnement par le travail, le transfert de chaleur et le flux de matière chaud ou froid.

L'énergie peut également être convertie d'une forme à une autre. Par exemple, l'énergie stockée dans les liaisons chimiques des combustibles peut être convertie en énergie électrique ou mécanique dans les piles à combustible et les moteurs à combustion interne.

L'objectif de ce cours est d'apporter des notions essentielles pour la conception, l'analyse et l'optimisation des performances des principaux systèmes énergétiques. Ce cours vise à donner les méthodes pour analyser un problème en énergétique. Il s'agit d'appliquer les principes de la thermodynamique, les lois de transferts thermiques et les principes de conservation pour les fluides.

La conception technique de systèmes énergétiques est un processus de prise de décision dans lequel les principes tirés de l'ingénierie et d'autres domaines tels que l'économie et le commerce sont pris en compte. Dans le cas de ce cours, on s'intéresse uniquement à l'analyse technique. Elle vise souvent à développer un modèle technique afin d'obtenir une représentation mathématique simplifiée du comportement du système qui soit suffisamment fidèle à la réalité, même si certains aspects de ce comportement ne sont pas représentés.

L'analyse des systèmes énergétiques utilise, directement ou indirectement, une ou plusieurs des quatre lois de base suivantes :

- La conservation de la matière
- La conservation de l'énergie
- La conservation de la quantité de mouvement
- Le second principe de la thermodynamique

La première étape de l'analyse consiste à identifier le système et la façon dont il interagit avec son environnement. L'attention se porte ensuite sur les lois physiques et les relations pertinentes qui permettent de décrire le comportement du système.

La thermodynamique fournit les bases de l'analyse des systèmes énergétiques à partir des principes de conservation de la masse et de l'énergie, de la deuxième loi de la thermodynamique et des propriétés des fluides.

La mécanique des fluides et les transferts thermiques fournissent des concepts supplémentaires, notamment les lois empiriques nécessaires pour spécifier, par exemple, les choix de matériaux, le dimensionnement des composants et les caractéristiques du milieu fluide. Par exemple, l'analyse thermodynamique peut permettre de déterminer la température finale d'une pièce chaude trempée dans une huile, mais la vitesse à laquelle elle va se refroidir est prédite à l'aide d'une analyse du transfert thermique.

Les acquis visés à la fin de cours sont :

- Connaître les principaux cycles thermodynamiques mis en œuvre dans les installations industrielles

- Connaître les principaux équipements rencontrés dans les systèmes énergétiques et modéliser macroscopiquement leur fonctionnement ;
- Etudier des cycles thermodynamiques pour des fluides réels
- Établir un bilan énergétique et un rendement d'une installation
- Comprendre le rendement exergetique et d'analyser les principales sources de dissipation
- Connaître les principaux modes de transferts thermiques et les lois qui les régissent
- Établir un bilan thermique en régime stationnaire ou variable faisant intervenir conduction, convection et rayonnement
- Appliquer les théorèmes de Bernoulli et d'Euler, calculer les pertes de charge des installations
- Dimensionner des échangeurs et des pompes
- Disposer des ordres de grandeur des systèmes énergétiques
- Savoir appliquer les principales méthodes de résolution d'un problème en énergétique

Les principales relations qu'il faut connaître sont présentées dans ce cours sur un fond bleu.

à retenir

## Unités SI et unités pratiques

Avant l'obligation d'utiliser les unités SI, les thermiciens avaient généralisé l'emploi d'unités dans lesquelles la chaleur s'exprimait en kilocalories (kcal) ou en thermies (1 th = 1000 kcal), et les intervalles de temps en heures. De plus, on est souvent confronté aux *unités anglo-saxonnes*. Il est donc utile de mentionner les formules de conversion :

Energie <sup>1</sup>	1 kcal = 4,18 kJ 1 thermie = 1000 kcal = 4180 kJ 1 BTU = 1,055 kJ 1 kWh = 3600 kJ
Puissance (Heat transfer rate)	1 kcal/h = 1,16 W 1 BTU/h = 0,2929 W 1 cheval vapeur (horse power) = 0,746 kW 1 BTU.ft <sup>-2</sup> .h <sup>-1</sup> = 3,1525 W.m <sup>-2</sup>
Chaleur spécifique (Specific heat)	1 BTU.lb <sup>-1</sup> .°F <sup>-1</sup> = 4,184 kJ.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> 1 cal.g <sup>-1</sup> .°C <sup>-1</sup> = 4,184 kJ.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>
Conductivité	1 BTU.ft <sup>-1</sup> .h <sup>-1</sup> .°F <sup>-1</sup> = 1,73 W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>
Conductance	1 BTU.ft <sup>-2</sup> .h <sup>-1</sup> .°F <sup>-1</sup> = 5,6745 W.m <sup>-2</sup> .K <sup>-1</sup>
Température	le Kelvin K est l'échelle thermodynamique de référence Fahrenheit <sup>2</sup> : x °F correspond à (x - 32)/1,8 °C Celsius : x °C = (x - 273,15) K Rankine : x °R = (x/1,8) K (même graduation que °F) C'est une échelle absolue 0 K = 0 °R
Viscosité dynamique	1 Poiseuille = 1 Pa.s = 1 kg.m <sup>-1</sup> .s <sup>-1</sup> 1 centipoise = 0,001 Pa.s soit encore 10 centipoise = 0,01 Pa.s = un centième de Poiseuille
Viscosité cinématique	1 centistokes = 1.10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup>

<sup>1</sup> Rappelons qu'en 1847 James Joule établit l'équivalence entre le travail et la chaleur en enfermant un moteur dans une enceinte calorifugée emplie d'eau et en mesurant l'élévation de température.

<sup>2</sup> 100 °F correspondent à la température intérieure du corps humain : 37,7°C.



## Nomenclature

A	Surface	[m <sup>2</sup> ]
a	Diffusivité thermique	[m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]
b	Effusivité thermique	[J.m <sup>-2</sup> K <sup>-1</sup> s <sup>-1/2</sup> ]
c	Capacité thermique	[J.kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
c <sub>p</sub>	Capacité thermique à pression constante	[J.kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
c <sub>v</sub>	Capacité thermique à volume constant	[J.kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
$\dot{C}$	Débit de capacité thermique massique	[W.K <sup>-1</sup> ]
D	Diamètre	[m]
e	Exergie massique	[J.kg <sup>-1</sup> ]
	Épaisseur	[m]
e*	Exergie massique totale	[J.kg <sup>-1</sup> ]
E <sub>λΔ</sub>	Eclairement monochromatique directionnel	[W.μm <sup>-1</sup> m <sup>-2</sup> sr <sup>-1</sup> ]
F	Facteur correctif pour les échangeurs quelconques	[-]
F <sub>ij</sub>	Facteur de forme	[-]
H	Hauteur	[m]
	Enthalpie	[J]
h	Coefficient de transfert superficiel	[W.m <sup>-2</sup> K <sup>-1</sup> ]
	Constante de Planck	[J.s]
	Enthalpie massique	[J.kg <sup>-1</sup> ]
h*	Enthalpie massique totale	[J.kg <sup>-1</sup> ]
K	Énergie cinétique	[J]
	Coefficient d'échange global d'un échangeur	[W.K <sup>-1</sup> m <sup>-2</sup> ]
KS	Conductance globale d'un échangeur	[W.K <sup>-1</sup> ]
ℓ	Longueur caractéristique	[m]
L <sub>λΔ</sub>	Luminance monochromatique directionnelle	[W.μm <sup>-1</sup> m <sup>-2</sup> sr <sup>-1</sup> ]
M <sub>λ</sub>	Emittance monochromatique	[W.μm <sup>-1</sup> m <sup>-2</sup> ]
M	masse molaire	[kg.mole <sup>-1</sup> ]
m	Masse	[kg]
$\dot{m}$	Débit masse	[kg.s <sup>-1</sup> ]
$\vec{n}$	Vecteur normal à une surface	
NUT	Nombre d'Unités de Transfert	[-]
P	Périmètre	[m]
P	Pression	[Pa]
Q	Quantité de chaleur	[J]
$\dot{Q}$	Puissance thermique	[W]
r	Rayon	[m]
R	Résistance thermique	[K.W <sup>-1</sup> ]
s	Entropie massique	[J.K <sup>-1</sup> .kg <sup>-1</sup> ]
S	Entropie	[J.K <sup>-1</sup> ]
	Surface d'échange	[m <sup>2</sup> ]
t	Temps	[s]
T	Température	[K]
u	Énergie interne massique	[J.kg <sup>-1</sup> ]
U	Énergie interne	[J]

V	Volume	[m <sup>3</sup> ]
w	vitesse	m/s
W	Travail	[J]
$\dot{W}$	Puissance mécanique	[W]

#### Symboles grecs

$\alpha$	Absorptivité	[-]
$\beta$	Coefficient dilatation volumique	[K <sup>-1</sup> ]
$\varepsilon$	Émissivité	[-]
	Efficacité d'un échangeur	[-]
$\phi$	flux thermique	[W]
$\eta$	Rendement isentropique	[-]
	Efficacité d'ailette	[-]
$\varphi$	Densité de flux	[W.m <sup>-2</sup> ]
$\lambda$	Conductivité thermique	[W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]
	Longueur d'onde	[μm]
$\mu$	Viscosité dynamique	[kg.m <sup>-1</sup> .s <sup>-1</sup> ]
	Coefficient de Joule Thomson	[K/Pa]
$\nu$	Viscosité cinématique	[m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> ]
	Fréquence	[Hz]
$\pi$	puissance volumique	[W.m <sup>-3</sup> ]
$\theta$	Temperature	[°C]
	Angle	[rad]
$\theta^*$	Temperature réduite	[-]
$\rho$	Masse volumique	[kg.m <sup>-3</sup> ]
$\sigma$	Constante de Stefan	[W.m <sup>-2</sup> .K <sup>-4</sup> ]
$\dot{\sigma}$	Génération d'entropie par unité de temps	[W.K <sup>-1</sup> ]
$\tau$	Transmittivité	[-]
	Constante de temps	[s]
$\Pi$	Travail non compensé lié aux irréversibilités internes (chaleur)	[J]
$\Omega$	Angle solide	[sr]
$\psi$	Angle	[rad]
$\Delta T_{LM}$	Ecart moyen logarithmique de température dans un échangeur	[K]

# PARTIE I : Introduction à la thermodynamique

---

## **Chapitre 2 : Bases de la thermodynamique pour les machines**

---

Nous rappelons simplement ici les grandes lignes de la thermodynamique. Des exposés plus détaillés peuvent être trouvés dans les manuels cités en bibliographie.

## 2.1 Principales définitions

**Systèmes fermés, systèmes ouverts.** Un système physique, qui occupe une certaine portion de l'espace, est dit fermé s'il n'y a aucun échange de matière à travers chacune des portions de sa frontière. Il est dit ouvert dans le cas contraire. Un système fermé apparaît donc comme défini par les masses des corps qui le composent, alors qu'un système ouvert est défini par un *volume de contrôle* dans lequel entrent et sortent un certain nombre de produits.

**Phase.** Une phase est un milieu continu homogène, c'est-à-dire dont toutes les propriétés physiques sont identiques d'un point à l'autre. En particulier sa température est uniforme et il n'y a aucun mouvement relatif entre ses différents points. La seule action que peut alors exercer le milieu extérieur est celle d'une pression, qui est identique à celle qui existe en chaque point de la phase. Cette notion présente un double intérêt : d'une part c'est une bonne approximation d'un grand nombre de systèmes physiques, d'autre part – et c'est le plus important – tout élément de volume peut être considéré comme une phase d'extension infiniment petite (sauf cas exceptionnels, certains plasmas par exemple).

**Ensemble de variables d'état.** Cette notion est la clé de la thermodynamique. Un ensemble de variables d'état décrivant un système physique est un ensemble de grandeurs physiques indépendantes qui déterminent complètement les propriétés physiques **instantanées** du système. Ceci veut dire que leurs valeurs  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  à tout instant  $t$  suffisent pour connaître toutes les autres quantités physiques relatives au système à ce même instant. En d'autres termes, si l'ensemble des variables d'état du système est connu, il est possible de construire réellement un tel système (qui n'est d'ailleurs pas nécessairement en équilibre, auquel cas il se mettra à évoluer par la suite).

Il doit toujours y avoir au moins une variable extensive parmi les variables d'état, pour que la taille du système global soit bien déterminée.

**L'état** du système est alors parfaitement fixé par la donnée des valeurs de ses variables d'état  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

### Exemples

1. Une phase à un seul constituant peut être décrite indifféremment par les ensembles de variables d'état suivants :  
 $n, V, T$  : nombre de moles, volume total, température ;

$m, \rho, T$  : masse métrique (en kg), masse volumique, température ;

$n, P, T$  : nombre de moles, pression, température ;

$m, p, s$  : masse métrique (en kg), pression, entropie massique.

2. Pour une phase à  $n$  constituants, l'ensemble de variables d'état de base est :  $n_1, n_2, \dots, n_c, P, T$

$n_i$  : nombre de moles du constituant  $i$ ,  $P$  pression,  $T$  température.

3. Une masse donnée d'un fluide simple, disons de l'eau, constitue un système fermé. Comme la masse est constante, nous pouvons l'omettre de la liste des variables d'état. Considérons les états d'équilibre de ce système sous une ou plusieurs phases. Dans les conditions standard, l'eau est liquide, et son état est bien décrit par 2 variables d'état,  $p$  et  $T$  par exemple. Si on chauffe suffisamment, l'eau va se vaporiser et on obtiendra un système diphasé, une partie de l'eau sous forme liquide, l'autre sous forme vapeur. Il n'est alors plus possible de garder  $p$  et  $T$  comme variables d'état, puisqu'elles ne sont plus indépendantes.

On a en effet  $P = P_s(T)$  où  $P_s(T)$  est la pression de vapeur saturante à la température  $T$ . Le système est cependant toujours bien décrit par 2 variables d'état, par exemple  $T$  et le titre en vapeur,  $v$ , égal au rapport de la masse de vapeur sur la masse totale.

Cet exemple appelle deux remarques.

Il montre bien que c'est la compréhension physique que l'on a du système qui permet de fixer les variables d'état, il n'y a pas de règle générale, ou alors elle serait tellement compliquée, pour embrasser l'ensemble des situations possibles, qu'elle en deviendrait inapplicable.

Il illustre aussi une règle générale : le nombre des degrés de liberté à l'équilibre (ce qu'on appelle les facteurs de l'équilibre) pour un système fermé est toujours égal à 2. Cette circonstance explique en particulier pourquoi il est possible d'établir des diagrammes thermodynamiques plans, même pour des systèmes aussi complexes qu'un gaz naturel, l'eau de mer, etc.

**Fonction d'état** : toute quantité physique qui est une fonction univoque des seules variables d'état. Elle dépend donc uniquement de l'état du système à l'instant  $t$ , et non de la transformation qui l'a amené dans cet état (son histoire en quelque sorte). Toute fonction d'état peut servir à son tour de variable d'état.

**Équilibre vrai.** C'est avant tout un état d'équilibre pour lequel toutes les variables d'état restent constantes au cours du temps. Mais en outre tous les flux, y compris celui d'énergie doivent être nuls : cela implique en particulier l'uniformité de la température sur le système. Enfin le système ne doit pas être bloqué par les frottements (faux équilibre), sa tendance à l'évolution doit être compensée uniquement par la valeur bien déterminée des actions qu'il subit de l'extérieur. L'équilibre vrai doit être bien distingué des états (ou processus) stationnaires, qui impliquent des flux, bien que les valeurs des variables d'état y restent aussi constantes au cours du temps.

**Transformation.** Une transformation (ou processus) thermodynamique est, à cause de la définition même des variables d'état, complètement déterminée par la donnée des états successifs du système au cours du temps. Les vitesses seront considérées à part et ne font pas partie de cette définition. Une même transformation peut ainsi être décrite à des vitesses différentes, si elle comporte la même suite de variables d'état. Une transformation réelle est définie par les valeurs prises par les variables d'état en fonction du temps, au cours de l'évolution réelle du système dans un environnement donné. Par exemple  $P(t); T(t); n(t)$  pour une phase simple.

**Transformation réversible :** une transformation réversible menant de l'état  $\xi_1$  à l'état  $\xi_2$  est une transformation idéale, qui est une suite continue d'états d'équilibre vrai ; elle doit en outre être la limite commune de deux (familles de) transformations réelles permettant de passer de  $\xi_1$  à  $\xi_2$  et de  $\xi_2$  à  $\xi_1$ .

**Transformation irréversible :** toute transformation réelle accompagnée de phénomènes irréversibles, c'est-à-dire de l'un des facteurs d'irréversibilité suivants : hétérogénéité de température, diffusion (hétérogénéité de composition), réactions chimiques spontanées, frottement ou hystérésis, viscosité (incluant l'effet Joule). Toute transformation irréversible entraîne une génération (ou production) d'entropie strictement positive.

## 2.2 Échanges d'énergie

### 2.2.1 Travail exercé par les forces externes

En thermodynamique, le travail exercé par les forces externes à un système est donné par la formule habituelle en mécanique ; c'est la somme des produits scalaires des forces (exercées par les corps *extérieurs* au système) par le déplacement de leurs points d'application (qui sont toujours des éléments de matière) :

$$(1) \quad \delta W = \sum \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

Il faut bien noter que seules les forces exercées par les corps extérieurs au système considéré sont à prendre en compte ; par exemple le travail des forces de pression ne fait intervenir que celles qui agissent sur la frontière du système. Les actions internes jouent évidemment aussi un rôle, mais elles seront prises en charge par les fonctions d'état, l'énergie interne en particulier. Chaque force  $\mathbf{F}$  doit être multipliée par le déplacement de son propre point d'application ; la formule (1) a alors automatiquement la bonne valeur algébrique, positive si de l'énergie mécanique est transférée au système, négative dans le cas contraire.

Comme, par définition, les variables d'état décrivent complètement le système, le travail dans une transformation élémentaire,  $\delta W$ , peut être exprimé en fonction de leurs différentielles :

$$(2) \quad \delta W = \sum_i A_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \dot{\alpha}_1, \dots, \dot{\alpha}_n) d\alpha_i$$

Les  $A_i$  sont appelés *actions extérieures* ou *forces généralisées*, et dépendent en général non seulement des variables d'état, mais aussi de leurs dérivées temporelles  $\dot{\alpha}_i$  (dans le cas où il y a de la viscosité par exemple). Ceci veut également dire que  $\delta W$  n'est pas en général une différentielle totale exacte : elle peut avoir des valeurs différentes pour deux transformations conduisant du même état initial au même état final.

#### Cas particuliers

Quand les forces externes se réduisent à une pression uniforme, par exemple dans le cas d'une phase, le travail élémentaire vaut

$$(3) \quad \delta W = -PdV$$

où  $P$  est la pression à la frontière du système, mais *du côté de ce dernier*. Cette formule reste valable dans des cas plus généraux quand la viscosité est négligeable<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> Il faut enfin noter que si l'inertie d'un piston est suffisamment faible, la pression du côté interne  $p$  est égale à la pression du côté externe.

La puissance des forces électromagnétiques externes s'exerçant sur un système siège de phénomènes électriques lentement variables, comme un accumulateur, mais sans polarisations diélectriques ni magnétiques, vaut dans les cas usuels

$$(4) \quad \dot{W} = \int_{\partial V} \phi \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} \cdot dA$$

où  $\partial V$  est la frontière du système,  $\phi$  le potentiel électrique,  $\mathbf{I}$  la densité de courant total, et  $\mathbf{n}$  la normale intérieure à  $V$ . Dans le cas d'un régime permanent où un courant  $I$  pénètre en 1 dans le système et en sort en 2, cette puissance est exprimée par  $I[\phi(1) - \phi(2)]$ .

## 2.2.2 Quantité de chaleur transférée

C'est le concept le plus délicat à définir. Disons seulement que c'est une quantité d'énergie transférée d'un système à un autre, et qui peut être mesurée, pour un système fermé, par l'intermédiaire d'un calorimètre traditionnel : elle est basée sur le postulat que, dans le cas d'un système isolé thermiquement et composé de deux corps qui ne glissent pas l'un sur l'autre (pour éviter tout frottement), la chaleur absorbée par l'un est l'opposé de la chaleur absorbée par l'autre. Il ne faut pas confondre la quantité de chaleur avec ce qu'on appelle parfois la "chaleur interne" d'un corps qui n'est autre que son enthalpie.

Comme le travail, la quantité de chaleur absorbée par le système dans une transformation élémentaire est une différentielle des variables d'état :

$$(5) \quad \delta Q = \sum_i \chi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \dot{\alpha}_1, \dots, \dot{\alpha}_n) d\alpha_i$$

Ce n'est pas non plus une différentielle totale exacte : par exemple, ses coefficients,  $\chi_i$ , dits "calorimétriques", peuvent dépendre des dérivées temporelles des variables d'état (s'il y a viscosité par exemple) et donc du déroulement de la transformation elle-même et non plus seulement des variations des variables d'état.

**Coefficients calorimétriques d'équilibre.** Ce sont les expressions particulières que prennent les  $\chi_i$  dans les *transformations réversibles*. Pratiquement, ils peuvent être très souvent utilisés dans d'autres transformations, pourvu que les irréversibilités ne soient pas trop importantes.

Dans le cas d'une phase à un constituant, la différentielle de chaleur  $\delta Q$  s'écrit, pour l'unité de masse :

$$(6) \quad \delta Q = C_p \cdot dT + k \cdot dP$$

( $C_p$  chaleur massique à pression constante,  $k$  chaleur massique de compression), ou encore

$$(7) \quad \delta Q = C_v \cdot dT + l \cdot dP$$

( $C_v$  chaleur massique à volume constant,  $l$  chaleur massique de dilatation,  $v$  volume massique).

Une conséquence des deux principes est que ces coefficients d'équilibre ne sont pas indépendants et satisfont les relations (dites de Mayer et de Clapeyron) :

$$(8) \quad C_p - C_v = l \frac{\partial v(P,T)}{\partial T} = -k \frac{\partial P(v,T)}{\partial T}$$

$$(9) \quad l = T \frac{\partial P(v,T)}{\partial T}, \quad k = -T \frac{\partial v(P,T)}{\partial T}$$

où l'on s'est servi de l'équation d'état  $P = P(v; T)$  ou  $v = v(P; T)$ .

### Exemple

Par définition, la calorie est (à quelques détails métrologiques près) la quantité de chaleur nécessaire pour élever la température de 1 g d'eau de 14,5 à 15,5 °C, à la pression atmosphérique standard. Sur un si faible intervalle de température, on suppose souvent  $C_p$  constant, et la formule (6) donne la valeur de cette quantité de chaleur :

$$Q = C_p \Delta T + k \times 0 \text{ (puisque } p \text{ est constant)}$$

Or la mesure donne  $C_p = 4,1855 \text{ J g}^{-1} \text{K}^{-1}$ , on en déduit donc  $1 \text{ cal} = 4,1855 \text{ J}$

Dans quelle mesure peut-on se servir de cette valeur du  $C_p$  de l'eau à des pressions s'éloignant de la pression atmosphérique ? Pour le savoir il faut évaluer le terme en  $k\Delta P$ . La deuxième formule (9) donne sa valeur à partir de la mesure de la dilatation du fluide. Or le coefficient de dilatation de l'eau vaut :

$$\alpha = \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial T} = 0,18 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \quad \text{d'où} \quad k = -T\alpha v \approx -5,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1}$$

Pour qu'une variation de pression  $\Delta p$  joue un rôle dans la quantité de chaleur absorbée par une masse d'eau, il faut que le terme  $k\Delta p$  soit du même ordre que celui en  $C_p \Delta T$ . Dans le cas d'une élévation de température de 1 K, il faudrait, pour la compenser, et arriver à une quantité de chaleur absorbée nulle, une augmentation de pression de

$$\Delta P = \frac{4,1855 \cdot 10^3}{5,2 \cdot 10^{-5}} \approx 0,8 \cdot 10^8 \text{ Pa}$$

soit de l'ordre de 1000 atmosphères.

## 2.3 Premier principe. Conservation de l'énergie

### 2.3.1 Systèmes fermés

Le point le plus important est le postulat **d'existence d'une fonction d'état** particulière  $U(V, T, n, \dots)$ , appelée **énergie interne**, ayant la dimension d'une énergie, et qui représente la partie "stockée" à l'échelle moléculaire par le système. Le premier principe pose ensuite que la variation d'énergie totale (interne plus cinétique), dans toute transformation réelle élémentaire d'un système fermé est uniquement due aux **échanges** d'énergie du système avec l'extérieur :

$$(10) \quad dU + dK = \delta Q + \delta W$$

où  $dK$  est la variation d'énergie cinétique du système.

**Extensivité.** Dans les systèmes courants, sans propriétés électromagnétiques,  $U$  est *extensive*, c'est-à-dire que l'énergie interne d'un ensemble de deux corps disjoints dans l'espace est simplement la somme de leurs énergies internes respectives. En particulier l'énergie interne d'une phase est une fonction homogène et de degré 1 des variables d'état extensives (plus brièvement, elle est "proportionnelle à sa masse"). Par exemple, l'énergie interne d'un gaz simple de masse  $m$ , volume  $V$  et température  $T$  s'écrit :

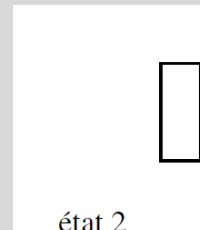
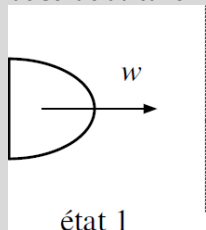
$$(11) \quad U_{\text{global}}(m, V, T) = m \cdot u(v, T)$$

où  $u$  est l'énergie interne massique du gaz (en  $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$ ), et  $v$  son volume massique (en  $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ ). Il faut noter d'ailleurs que l'énergie interne massique, définie localement, ne peut dépendre que de variables intensives. Le premier principe nous permet donc, par des mesures de travail et de chaleur, de déterminer la valeur de  $U$ , pour un système fermé donné, dans tout état, à une constante arbitraire près. Comme il est possible de mesurer les quantités de chaleur et de travail dans les réactions chimiques, on voit qu'il y a au plus autant de constantes arbitraires que d'éléments.

**Extension.** Dans les systèmes considérés en électrochimie ou en électrocinétique, l'énergie interne est égale à la somme de l'énergie interne "neutre" (c'est-à-dire celle qu'aurait le système en l'absence de charges), de l'énergie électro matérielle de polarisation (éventuellement) et de l'énergie électromagnétique de Maxwell des champs créés par les charges incluses dans le système.

#### Exemple

Considérons une balle de plomb qui s'écrase sur une cible rigide. On se pose la question de trouver son état (au sens de la thermodynamique), indicé 2, immédiatement après le choc en fonction des caractéristiques du tir, l'instant initial, indicé 1, étant celui de sortie du canon.



Si la masse de la balle est  $m$ , son énergie interne  $U$  et sa vitesse  $w$ , le premier principe appliqué au système fermé constitué par la balle s'écrit

$$U(\text{état 2}) - U(\text{état 1}) + \frac{1}{2}mw_2^2 - \frac{1}{2}mw_1^2 = W + Q$$

Evaluons les différents termes.

L'énergie interne d'un solide comme le plomb est fonction de deux types de variables, la température  $T$ , et l'ensemble des variables qui décrivent la déformation (tenseur de déformation pour un solide élastique). Mais le plomb est un corps malléable, ce qui veut dire qu'il suffit de peu d'efforts pour le déformer, c'est-à-dire que son énergie interne varie peu avec la déformation. Nous pouvons donc supposer que  $U$  ne dépend que de la température,  $U = U(T)$ .

Comme l'état final est constitué de la balle arrêtée,  $w_2 = 0$ , le seul terme d'énergie cinétique qui subsiste est celui de départ. D'autre part, le travail des forces externes dans la transformation se réduit à la réaction de la cible sur la balle, mais comme la cible est rigide le point d'application de cette force ne se déplace pas, et le travail est donc nul. Enfin, la transformation est brève et la quantité de chaleur absorbée par la balle est nulle, puisque tout transfert de chaleur est un phénomène lent, qui nécessite du temps pour atteindre des valeurs notables.

Il reste donc simplement

$$U(T_2) - U(T_1) - \frac{1}{2}mw_1^2 = 0$$

Si nous supposons la chaleur massique à volume constant  $c$  du plomb constante,  $U(T_2) - U(T_1) = mc(T_2 - T_1)$  et l'équation précédente donne l'élévation de température



$$T_2 - T_1 = \frac{w_1^2}{2c}$$

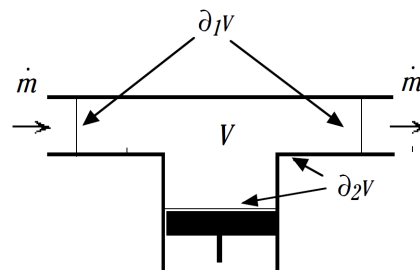
Pour le plomb on a  $c \approx 131 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$  ; si on suppose une vitesse de sortie de  $300 \text{ ms}^{-1}$ , on trouve une élévation de température de  $344 \text{ K}$ , correspondant à la "transformation de l'énergie cinétique en chaleur", expression incorrecte mais suggestive, dans laquelle le mot "chaleur" désigne en fait l'accroissement d'énergie interne (ou dans d'autres circonstances d'enthalpie), dite "chaleur sensible" lorsqu'elle se traduit par une élévation de température et "chaleur latente" dans les autres cas.

### 2.3.2 Systèmes ouverts par convection

Nous ne traiterons ici que des systèmes ouverts "par convection", dans lesquels la matière entre et sort du système, mais sans qu'il y ait de diffusion à la frontière (c'est-à-dire de mouvement *relatif* des différents constituants les uns par rapport aux autres), ce qui est pratiquement toujours le cas dans les appareils thermomécaniques industriels<sup>4</sup>.

Le système, dont le volume de contrôle est noté  $V$ , est défini par l'ensemble des dispositifs inclus dans  $V$ . Ceux-ci peuvent être le siège de flux de matière (fluides, matières premières en entrée, produits finis en sortie . . .). Cette matière est échangée avec l'extérieur à travers les parties perméables de la frontière de  $V$  (canalisations d'entrée-sortie par exemple).

En pratique on choisit toujours la frontière  $\partial V$  de  $V$  (et donc  $V$  lui-même) de sorte qu'on puisse la diviser en 2 types :



- Les **parties perméables** de la frontière, servant aux échanges de matière avec l'extérieur, mais fixes dans le référentiel choisi ; elles seront notées  $\partial_1 V$ .

Sur ces frontières le mouvement de matière se fait par convection, c'est-à-dire que tous les constituants s'y déplacent à la même vitesse.

Les entrées-sorties de matière (passage de fluides dans les différentes conduites par exemple) se font dans des conditions telles que les grandeurs physiques ont des valeurs uniformes sur chaque section droite, c'est l'hypothèse "des tranches". En particulier, on peut y négliger la puissance des forces de viscosité, qui s'y exercent, devant les autres phénomènes se produisant dans  $V$ .

Si l'indice  $i$  décrit l'ensemble des sections d'entrée-sortie des canalisations, la valeur de l'enthalpie massique totale  $h^*$  (définie ci-dessous) est donc aussi uniforme dans chaque section  $i$  et sera notée  $h_i^*$ .

- Les **parties imperméables** de la frontière (pas de flux de matière), notées  $\partial_2 V$ . Elles peuvent être fixes (parois de canalisations par ex.) ou mobiles (pistons, aubes de turbines . . .), et sont alors responsables des échanges de travail avec l'extérieur.

Compte tenu des hypothèses ci-dessus, le premier principe et la conservation de la masse permettent d'écrire la conservation de l'énergie dans le système sous la forme :

$$(12) \quad \frac{dU^*}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho u^* d^3x = \sum_{i \in \text{entrées sorties}} \dot{m}_i h_i^* + W_u + \dot{Q}$$

où l'on a :

<sup>4</sup> Le traitement du cas général, où la diffusion intervient, est possible et fait l'objet de la branche de la thermodynamique appelée "thermodynamique des systèmes ouverts" ou encore "thermodynamique des processus irréversibles".

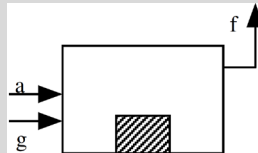
$\dot{m}_i$  débits masse (en kg/s) algébriques dans les conduites d'entrée-sortie, indexées par i (positifs en entrée, négatifs en sortie) ;  
 $u, h$  énergie interne et enthalpie massiques ;  
 $u^*$  énergie interne massique totale :  $u^* = u + w^2/2 - g.x$   
 $h^*$  enthalpie massique totale :  $h^* = u + p/\rho + w^2/2 - g.x$   
 $g$  accélération de la pesanteur ;  
 $p, \rho$  pression et masse volumique ;  
 $\dot{W}_u$  "puissance effective" (ou travail utile, en anglais "shaft work", par unité de temps), puissance développée sur les parois mobiles qui agissent sur le système ;  
 $\dot{Q}$  chaleur absorbée par le système par unité de temps (puissance calorifique)

### Exemples

- La variation de l'énergie interne d'un réservoir rigide R en remplissage fait ainsi apparaître, outre la quantité de chaleur absorbée, le flux d'enthalpie entraînée par la matière :

$$\frac{dU}{dt} = \dot{m}h + \dot{Q}$$

- Un four destiné à chauffer une charge peut être schématisé par une enceinte rigide dotée d'une arrivée de comburant (air repéré par l'indice a par exemple), d'une autre de carburant (gaz repéré par l'indice g) et d'une évacuation de fumées (indice f).



Si on suppose, pour simplifier, que les seules variables d'état significatives sont les températures, et que celle du four ne change pas, la variation d'énergie interne du système provient entièrement de l'échauffement de la charge, à la vitesse  $\dot{T}$  (en K/s). Si sa capacité thermique à volume constant est C, et si on suppose que l'air et le gaz entrent à la température de référence  $T_a$ , l'équation (12) donne

$$C\dot{T} = \dot{m}_a h_a(T_a) + \dot{m}_g h_g(T_a) - \dot{m}_f h_f(T_f) + \dot{Q}$$

où  $\dot{Q}$  désigne les fuites thermiques (en W). Si l'on suppose la combustion stœchiométrique, et si on note  $I$  le pouvoir calorifique du gaz, et  $c_f$  la chaleur massique à pression constante des fumées, on a

$$I = \frac{\dot{m}_a}{\dot{m}_g} h_a(T_a) + h_g(T_a) - \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_g} h_f(T_a)$$

d'où

$$C\dot{T} = \dot{m}_g I(T_a) - \dot{m}_f c_f (T_f - T_a) + \dot{Q}$$

Cette équation s'interprète intuitivement en disant simplement que l'énergie apportée par la combustion sert non seulement à échauffer la charge, mais aussi à élever la température des fumées et à alimenter les fuites de chaleur. L'apport de la thermodynamique consiste à bien préciser ces notions, par exemple en montrant que si l'énergie de la charge est représentée par son énergie interne, celle des fumées intervient par son enthalpie.

### Cas particulier des installations industrielles

Dans les installations industrielles, il est en général possible de faire les approximations supplémentaires suivantes. Les entrées-sorties de matière (passage de fluides dans les différentes conduites par exemple) se font dans des conditions telles que les grandeurs physiques sont uniformes sur chaque surface perméable (section de conduite par exemple, c'est l'hypothèse "des tranches"). Si on indice par i les différentes sections d'entrée-sortie des canalisations, la valeur de  $h^*$  est uniforme dans chaque section i et sera notée  $h_i^*$  ; le flux net d'enthalpie totale se réduit donc à une somme discrète

$$\sum_{e-s} \dot{m}_i h_i^* = \sum_i \dot{m}_i h_i^* \quad \text{avec} \quad \dot{m}_i = \int_{\text{section } i} \rho \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \cdot dA$$

en notant  $\dot{m}_i$  le débit algébrique (positif s'il y a entrée de matière, négatif dans le cas contraire) à travers la section i.

### Régimes stationnaires

Que l'on prenne la moyenne sur un cycle entier d'une machine cyclique (moteur à piston par exemple), ou que l'on considère un appareil fonctionnant en régime permanent (tuyère, ou turbine par exemple), le résultat prend la forme pratique

(13)

$$\sum_{i \in \text{sorties}} |\dot{m}_i| h_i^* - \sum_{j \in \text{entrées}} |\dot{m}_j| h_j^* = \dot{W}_u + \dot{Q}$$

Un cas particulier important est celui d'un écoulement permanent et adiabatique dans une conduite à parois fixes. Dans le cas où l'hypothèse des tranches est valable, l'équation (12) appliquée entre deux sections infiniment voisines donne la formule :

$$(14) \quad dh + d\left(\frac{w^2}{2}\right) + g \cdot dx = 0$$

qui est fondamentale dans l'étude de ces écoulements.

## 2.4 Propriétés des corps

### 2.4.1 Changement de phase d'un corps pur

Un corps pur peut se présenter sous l'une ou plusieurs des trois phases : solide, liquide ou gazeuse. Ces trois phases se distinguent, au plan microscopique, par l'intensité des forces intermoléculaires. A l'état solide, ces dernières ne permettent aux atomes que d'osciller autour de positions fixes de distribution aléatoire ou ordonnée (cristaux). Leur intensité diminue dans les liquides, qui n'ont pas de forme propre, mais restent faiblement compressibles. On parle alors d'ordre à faible distance et de désordre à longue distance. Dans un gaz, les forces intermoléculaires sont très faibles, et les molécules animées de mouvements désordonnés. Lorsqu'on chauffe un solide à pression constante bien choisie, il se transforme en liquide, et on parle de fusion. Si l'on continue à apporter de la chaleur, le liquide se transforme en vapeur, et on parle de vaporisation. Il est aussi possible qu'un solide se transforme directement en vapeur, ce qui s'appelle une sublimation. La *température* à laquelle ces transformations se réalisent dépend de la pression exercée sur le corps considéré. Par exemple à la pression atmosphérique, le CO<sub>2</sub> se sublime, c'est-à-dire passe directement de l'état solide à l'état gazeux, tandis que l'eau bout à 100 °C.

Lorsqu'une masse donnée d'un corps pur se présente sous une seule *phase*, son état est défini par deux variables, par exemple sa pression et sa *température*. Dans le plan (P,T) (figure ci-dessous), les trois phases correspondent à trois domaines, séparés par trois courbes de saturation (sublimation, vaporisation et fusion) se rejoignant au point triple T.

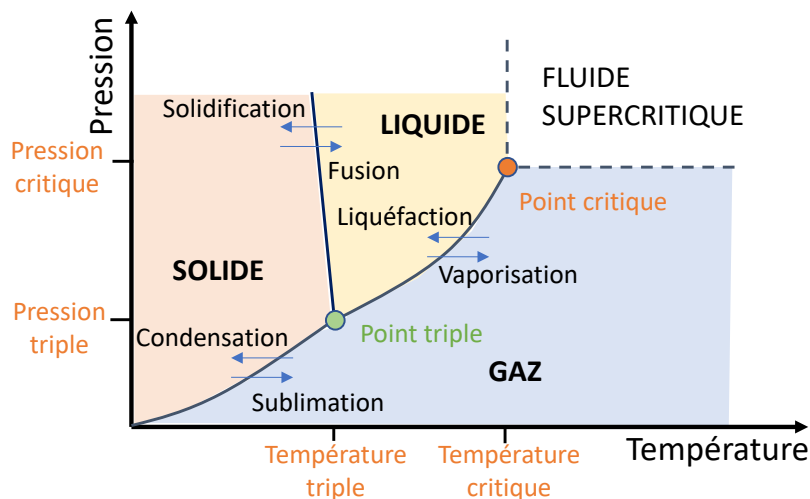


Diagramme des phases

Chacune des courbes correspond à un équilibre diphasique. Par exemple, la courbe la plus à droite est l'ensemble des points figuratifs de l'équilibre d'un liquide avec sa vapeur. L'équilibre diphasique suppose donc que la pression et la température vérifient une relation caractéristique de la nature du fluide.

Pour que chacun de ces changements de phase puisse se réaliser, il est nécessaire de fournir ou de retirer de l'énergie, appelée **chaleur latente de changement d'état**. Au cours du changement d'état, on observe des variations importantes du volume spécifique, sauf pour la fusion-solidification. C'est notamment le cas

lors de la vaporisation, la vapeur étant de l'ordre de 600 à 1000 fois moins dense que le liquide. Cette modification de volume spécifique se fait à pression et température constantes.

Donnons quelques exemples illustrant soit l'utilisation pratique des changements de phase, soit les contraintes induites par la présence d'un équilibre liquide-vapeur :

- Lorsqu'on ajoute des glaçons à une boisson tiède, elle leur fournit de la chaleur qui les fait fondre, ce qui la rafraîchit. Comme la chaleur latente de fusion de la glace est bien supérieure à la capacité thermique massique de la boisson, on obtient l'effet de refroidissement recherché sans apporter trop d'eau de dilution.
- Pour transporter le méthane sur de longues distances par voie maritime, on le liquéfie à une température de - 160 °C environ, réduisant 600 fois son volume massique par rapport au gaz. Il est ainsi possible de le maintenir à la pression atmosphérique dans les cuves du méthanier. Bien que ces cuves soient très bien isolées, on ne peut éviter quelques échanges de chaleur avec le milieu environnant, qui ont pour effet de vaporiser une petite quantité de gaz, laquelle est utilisée pour la propulsion du navire.
- A contrario, le gaz butane ou propane distribué pour les usages culinaires est confiné à l'état liquide à température ambiante dans des bouteilles métalliques épaisses, ceci afin de résister à la pression de quelques dizaines de bars qui s'établit à l'intérieur.
- Toutes les cuissons réalisées à l'eau bouillante prennent place à 100 °C si la pression est égale à 1 atmosphère, et ceci quelle que soit la puissance thermique fournie à la cuisson. C'est ainsi que l'on peut définir avec précision le temps de cuisson pour une recette culinaire, par exemple d'un œuf à la coque.
- Le principe de la cocotte-minute est de s'affranchir de cette limite de 100 °C en effectuant la cuisson dans une enceinte à une pression supérieure à 1 atm. On peut atteindre ainsi 110 °C ou 120 °C, ce qui permet de cuire plus rapidement les aliments.
- Un exemple de condensation est celle qui se dépose sur des surfaces froides au contact avec de l'air humide, comme la buée sur une vitre, ou la rosée du matin sur des feuilles.

Le **point triple** correspond à l'état où il est possible de maintenir en équilibre les trois phases simultanément. Le **point critique** représente l'état où la phase de pure vapeur a les mêmes propriétés que la phase de liquide pur. A des températures et pressions plus élevées (supercritiques), il n'est pas possible d'observer une séparation entre les phases liquide et gazeuse : le ménisque de surface qui sépare les phases liquide et vapeur disparaît au point critique.

En pratique, dans les machines thermiques, les fluides se présentent le plus souvent à l'état gazeux ou liquide, ou bien sous forme d'un mélange de phase gazeuse et de phase liquide. Pour en calculer les propriétés, on est amené à distinguer deux grandes catégories de fluides : les gaz idéaux, qui peuvent être purs ou composés, et qui incluent les gaz parfaits, et les fluides réels condensables, qui peuvent eux aussi être purs ou composés.

## 2.4.2 Liquides et solides

Les liquides et les solides sont qualifiés d'idéaux lorsque leur compressibilité est négligeable ( $v = Cste$ ). Pour un liquide ou un solide "idéal", une seule variable bien choisie suffit à en représenter l'état thermodynamique. On peut en effet considérer que l'énergie interne massique d'un liquide ou d'un solide idéal ne dépend que de sa température :

$$du = c_v dT$$

où  $c_v$  est la chaleur massique à volume constant.

En revanche l'enthalpie massique du liquide idéal (celle du solide n'a pas de sens physique) fait encore intervenir la pression :

$$dh = c_p dT + v dP$$

où  $c_p$  est la chaleur massique à pression constante.

Pour les corps liquides ou solides, en général, on a  $c_v = c_p$ . La différence entre la capacité thermique massique à pression constante et à volume constant est généralement négligeable pour les phases condensées lesquelles sont peu compressibles ou dilatables.

On peut également utiliser les relations suivantes :

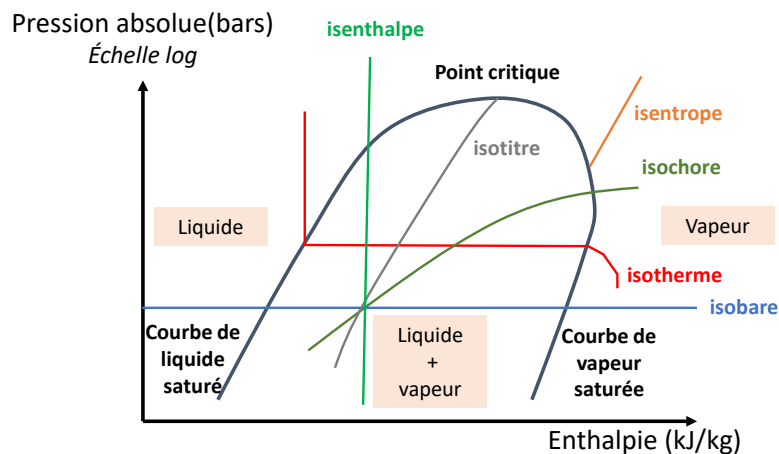
$$du = \left( T \frac{\partial p}{\partial T} - p \right) dv + c_v dT = -p dv + T ds$$

$$dh = \left( -T \frac{\partial v}{\partial T} + v \right) dp + c_p dT = -v dp + T ds$$

### 2.4.3 Équilibre liquide - vapeur d'un corps pur

Dans les machines à fluide compressible, il est fréquemment nécessaire d'étudier des transformations amenant le fluide à l'état liquide. Le gaz parfait jusqu'au zéro absolu n'existant pas, tous les fluides sont condensables, et il est nécessaire de connaître leurs propriétés jusqu'à l'état liquide.

Sur les différents diagrammes thermodynamiques des corps purs, la zone de vaporisation ou d'équilibre liquide-vapeur apparaît clairement pour des températures et pressions inférieures à celles du point critique. Cette zone est limitée à gauche par la courbe de liquide saturé, et à droite par la courbe de vapeur saturée sèche (voir figure ci-dessous). Ces deux courbes constituent la courbe de saturation. Entre ces deux courbes, la pression et la température ne sont plus indépendantes.



#### Titre en vapeur

Dans la partie médiane de la zone d'équilibre liquide-vapeur, le fluide se présente à la fois sous les deux phases, liquide et vapeur. Dans cette zone centrale, les isobares et les isothermes sont confondues, le changement d'état liquide - vapeur se faisant à température et pression constantes. La composition du mélange est définie par son titre  $x$ , rapport de la masse de vapeur  $m_g$  à la masse totale ( $m_g$  plus la masse de liquide  $m_l$ ).

$$x = \frac{m_g}{m_g + m_l}$$

#### Enthalpie de vaporisation

La longueur du palier de vaporisation, à un facteur près dans les représentations entropique ( $s, T$ ) et de Mollier ( $s, h$ ), et directement dans le diagramme des frigoristes (figure ci-dessus), donne l'enthalpie de vaporisation  $L$  du fluide aux conditions  $P$  et  $T$  considérées :

$$\begin{aligned} h_g - h_l &= L \\ s_g - s_l &= \frac{L}{T} \end{aligned}$$

#### Calcul des propriétés d'un corps pur à l'état diphasique (théorème de moments)

Par application de la loi du mélange des phases, on a :

$$\begin{aligned} v &= (1 - x)v_l + xv_g \\ h &= (1 - x)h_l + xh_g = h_l + xL \\ s &= (1 - x)s_l + xs_g = s_l + x \frac{L}{T} \end{aligned}$$

## 2.4.4 Gaz parfaits

Un gaz parfait<sup>5</sup> est un gaz dont l'équation d'état est :

$$pV = nRT$$

Avec R la constante des gaz parfaits,  $R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1}\text{K}^{-1}$

Les gaz parfaits sont souvent une très bonne approximation des gaz réels sauf au voisinage du point critique. Ils représentent le cas limite des gaz réels quand  $p \rightarrow 0$  ou  $v \rightarrow \infty$ .

Les Propriétés thermodynamiques des gaz parfaits sont :

### Première loi de Joule

L'énergie interne massique d'un gaz parfait ne dépend que de sa température :  $du = c_v dT$ , où  $c_v$  est la chaleur massique à volume constant. Cette loi a été vérifiée par l'expérience de Joule - Gay Lussac.

### Deuxième loi de Joule

L'enthalpie massique d'un gaz parfait ne dépend que de sa température :  $dh = c_p dT$ , où  $c_p$  est la chaleur massique à pression constante. Cette loi a été vérifiée par l'expérience de Joule - Kelvin.

### Relation de Mayer

On introduit le rapport  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$

La Relation de Mayer  $C_p - C_v = nR$  avec  $C_p$  et  $C_v$  les capacités calorifiques ( $\text{J.K}^{-1}$ ) respectivement à pression constante et volume constant

### Entropie massique

$$s(p, T) = -r \cdot \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + c_p \cdot \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + s_0$$

avec  $r$  la constante massique des gaz parfait  $r=R/M$  en  $\text{J.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$

### Lois de Laplace

Au cours d'une transformation adiabatique réversible, pour un gaz parfait, on montre que :

$$pv^\gamma = \text{cste} \quad T v^{\gamma-1} = \text{cste} \quad T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{cste}$$

### Mélanges de gaz parfaits

Un mélange de gaz parfaits est lui-même un gaz parfait :

$$pV = nRT$$

Avec

$$n = \sum n_i$$

La **loi de Dalton** énonce que la pression au sein d'un mélange de gaz parfaits est égale à la somme des pressions partielles de ses constituants.

$$p = \sum p_i$$

Avec  $p_i$  la pression partielle de  $i$  dans le mélange

$$p_i V = n_i R T$$

Et

$$p_i = y_i p$$

$$y_i = \frac{n_i}{n}$$

La loi de Dalton suppose que chacune des molécules qui constituent un mélange gazeux n'interagit avec les autres molécules du gaz que par des chocs élastiques.

## 2.4.5 Fluides réels

Lorsqu'un fluide ne satisfait plus à l'équation des gaz idéaux, son énergie interne et son enthalpie ne sont plus fonction uniquement de la température.

---

<sup>5</sup> Appelé en anglais « ideal gas ». En Français, on distingue l'expression « gaz idéal » d'un « gaz parfait » en ce que les capacités thermiques du gaz idéal ne sont pas constantes. Le gaz parfait est donc un cas particulier des gaz idéaux.

Pour déterminer l'état d'un fluide réel, on utilise le plus souvent un **diagramme thermodynamique**, un tableau de valeurs des propriétés thermodynamiques, ou encore un jeu d'**équations d'état** couvrant les diverses zones nécessaires.

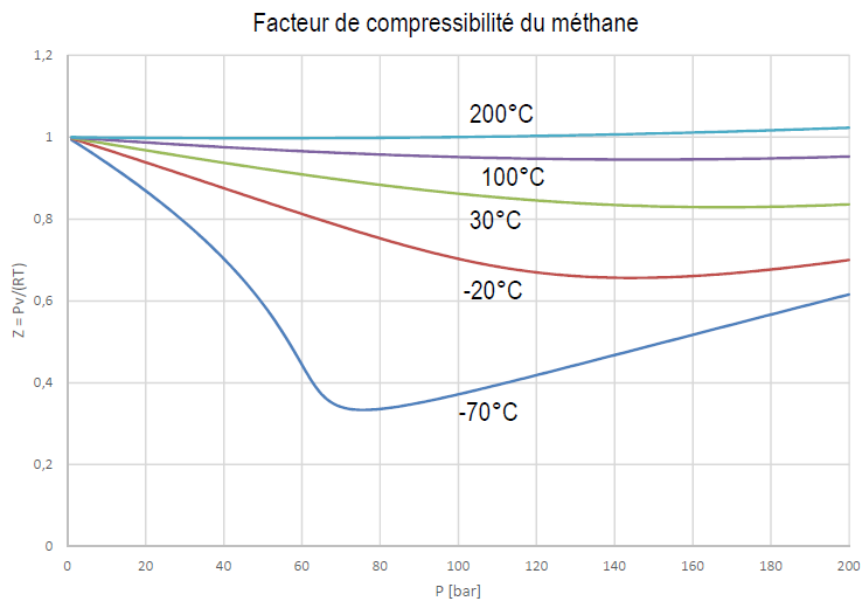
Même si l'on dispose de calculateurs des propriétés des fluides, comme **COOPROP** (<http://www.coolprop.org/>) ou **REFPROP** (NIST), les diagrammes conservent un grand intérêt sur le plan didactique, car ils permettent de visualiser très simplement les propriétés des gaz réels, et notamment la zone d'équilibre liquide-vapeur.

On peut citer quelques équations d'état couramment utilisées : l'équation du Viriel (gaz), et de Van der Waals (gaz et liquides).

Pour les gaz réels, il est courant d'utiliser un facteur de compressibilité qui caractérise l'écart à la loi des gaz parfaits. On pose :

$$pV = ZRT$$

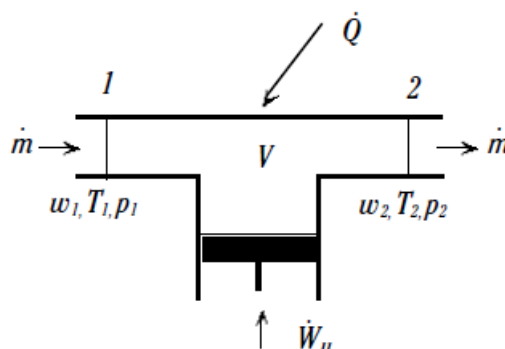
Z étant un facteur de compressibilité. Z est une fonction d'état dont on essaie souvent de donner une représentation à l'aide d'un petit nombre de paramètres, variables d'un gaz à l'autre. La figure ci-dessous illustre la variation du facteur Z du méthane en fonction de la pression et de la température.



## 2.5 Processus stationnaires, appareils courants

### 2.5.1 Formule générale

Les divers appareils thermomécaniques courants ne comportent souvent qu'une seule entrée et une seule sortie entre lesquelles la variation de l'énergie potentielle de gravitation peut être négligée ; ils peuvent être schématisés de la manière ci-dessous.



Quand le dispositif est en régime stationnaire (c'est-à-dire permanent, ou périodique pris en moyenne), le fluide entrant par la conduite 1 et sortant par la conduite 2, l'expression précédente du premier principe se réduit à

$$(15) \quad \left[ h(P_2, T_2, \dots) + \frac{1}{2} w_2^2 \right] - \left[ h(P_1, T_1, \dots) + \frac{1}{2} w_1^2 \right] = \frac{\dot{W}_u}{\dot{m}} + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}}$$

ou en notation abrégée

$$(16) \quad \left[ h + \frac{1}{2} w^2 \right]_1 = \frac{\dot{W}_u}{\dot{m}} + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}}$$

$h = u + Pv$  est l'enthalpie massique du fluide (en J.kg<sup>-1</sup>),

$P_1, P_2$  sont les pressions dans les conduites 1 et 2,

$w_1$  et  $w_2$  sont les vitesses moyennes dans les conduites 1 et 2 (en m/s),

$\frac{\dot{W}_u}{\dot{m}}$  est appelé "travail utile (ou effectif)" par unité de masse de fluide circulant (donc exprimé en J/kg),

$\frac{\dot{Q}}{\dot{m}}$  est la quantité de chaleur absorbée par unité de masse de fluide circulant (elle aussi en J/kg),

$\dot{m}$  est le débit masse (en kg/s).

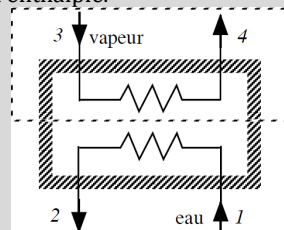
## 2.5.2 Principaux appareils

Dans la majorité des appareils, l'énergie cinétique dans les conduites d'admission et d'entrée est négligeable devant les autres termes de (15), excepté bien sûr dans les cas où le but recherché est précisément d'obtenir un débit à grande vitesse (turboréacteurs par exemple). Nous la négligerons donc désormais, ainsi que l'énergie potentielle de pesanteur, qui ne joue un rôle que dans certains dispositifs spécifiques. En outre, il est en général impossible (ou trop coûteux) de fabriquer un appareil mettant en jeu à la fois une grande puissance mécanique et un important flux de chaleur. On est ainsi conduit à séparer les fonctions, et on rencontre dans la pratique trois grandes classes d'appareils, pour lesquelles on peut récrire la formule (15).

**Echangeurs de chaleur.** Leur but est de permettre le transfert de chaleur d'un fluide à un autre, ce qui nécessite de grandes surfaces d'échange. Pour des raisons économiques on adopte un dispositif purement statique, constitué par exemple de faisceaux de tuyaux parcourus intérieurement par l'un des fluides, alors que l'autre s'écoule à l'extérieur. Aucune paroi ne se déplaçant,  $\dot{W}_u$  disparaît dans (15).

### Exemple

Le premier réchauffeur d'un cycle de centrale nucléaire élève la température de l'eau qui vient du condenseur de  $T_1 = 39,2^\circ\text{C}$  à une valeur  $T_2$  à déterminer, le débit étant  $\dot{m}_e = 1330 \text{ kg/s}$ . La pression chute un peu, de 17,5 bar à 16,5 bar, ce qui est trop faible pour affecter la valeur de l'enthalpie.



Sachant que le fluide qui fournit la chaleur est de la vapeur humide issue d'un étage de la turbine basse pression, dont les caractéristiques sont : pression 0,20 bar, taux d'humidité 9,1%, on détermine à l'aide d'un diagramme ou de tables son enthalpie massique,  $h_3 = 2392 \text{ kJ/kg}$  et sa température  $T_3 = 59,1^\circ\text{C}$ .

Cette vapeur se condense entièrement dans le réchauffeur, et sort à une pression très voisine, 0,19 bar, en équilibre avec la vapeur ; son état est donc bien déterminé. Toutes ses autres caractéristiques sont alors connues : enthalpie  $h_4 = 247 \text{ kJ/kg}$ , température  $T_4 = 59^\circ\text{C}$ . Si le prélèvement est fait avec un débit  $\dot{m}_v = 45 \text{ kg/s}$ , la conservation de l'énergie (15) écrite sur le seul circuit vapeur (volume de contrôle en pointillé) donne la puissance calorifique de l'échangeur

$$\dot{m}_v(h_4 - h_3) = \dot{Q}$$

$$\text{d'où } \dot{Q} = -96,7 \text{ MW}$$

Puisque cette même loi écrite pour l'ensemble de l'échangeur (qui est globalement adiabatique) donne (eq. (11) en régime permanent)

$$\dot{m}_v(h_3 - h_4) + \dot{m}_e(h_1 - h_2) = 0$$

On a donc aussi (avec le même  $\dot{Q}$ )

$$\dot{m}_e(h_1 - h_2) = -\dot{Q} = 96,7 \text{ MW}$$

c'est-à-dire que toute la puissance calorifique cédée par un fluide est absorbée par l'autre. Pour l'eau liquide, à pression quasi-constante, la variation d'enthalpie ne peut venir que d'un changement de température et on a (avec  $h_0$  enthalpie de l'eau liquide et  $c_p = 4,185 \text{ kJ kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ )

$$h_2 - h_1 = h(T_2) - h(T_1) = c_p(T_2 - T_1)$$



D'où

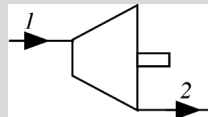
$$T_2 - T_1 = \frac{\dot{Q}}{c_p \dot{m}_e} = \frac{96700}{4,185 \times 1330} = 17,4K$$

La température de sortie de l'eau est donc  $T_2 = 39,2 + 17,4 = 56,6^\circ C$ .

**Machines adiabatiques.** Ces appareils dans lesquels le fluide change de pression en échangeant du travail avec l'extérieur sont très compacts, pour des raisons de poids, d'encombrement et de coût de fabrication. Pour la même raison ils ont une puissance spécifique aussi élevée que possible (plusieurs milliers de cycles par minute). Une particule fluide n'y reste donc qu'un temps très bref, et n'a pas le temps d'y échanger notablement de chaleur avec les parois. Leur fonctionnement est donc pratiquement adiabatique,  $\dot{Q} = 0$ .

#### Exemple

Si on connaît les états d'entrée et de sortie du fluide qui passe dans une turbine, l'équation (15) fournit immédiatement la puissance correspondante. Par exemple, la vapeur se détend de 10 bar (état 1) à 3 bar (état 2) dans l'étage moyenne pression d'une centrale.



Le fonctionnement étant quasiment adiabatique, (15) devient

$$h_2 - h_1 = \frac{\dot{W}_u}{\dot{m}}$$

Si son enthalpie passe de  $h_1 = 2983,3$  kJ/kg à  $h_2 = 2761,7$  kJ/kg, le travail fourni par unité de masse du fluide circulant vaut

$$-\frac{\dot{W}_u}{\dot{m}} = h_1 - h_2 = 2983,3 - 2761,7 = 221,6 \frac{kJ}{kg}$$

Avec un débit de vapeur de 1482 kg/s, la puissance fournie par l'étage vaut

$$-\dot{W}_u = 1482 \times 221,6 = 328 \cdot 10^3 \text{ MW}$$

**Laminage.** Cette opération consiste à réduire la pression, ou à commander le débit et régler le fonctionnement, à l'aide d'un dispositif purement statique, comme une vanne, un filtre, un détendeur. L'appareil est petit, sans pièces mobiles et donc  $\dot{W}_u = \dot{Q} = 0$ .

#### Exemple

Le flux d'entrée de la turbine HP d'un cycle de centrale est commandé par une vanne qui, en régime nominal, fait chuter la pression de  $P_1 = 71$  bar à  $P_2 = 67$  bar. L'équation (15) s'écrit ici, puisque l'énergie cinétique est négligeable et le travail utile nul, ainsi que la chaleur échangée,  $h_2 - h_1 = 0$ ; l'enthalpie reste donc constante,  $h_2 = h_1 = 2766,2$  kJ/kg.



Or on constate sur les tables enthalpiques de la vapeur d'eau saturée que, pour les pressions concernées, son enthalpie  $h''$  est une fonction décroissante de  $P$ .

Pour que  $h$  reste constante quand  $P$  diminue, il faut donc compenser l'augmentation d'enthalpie de la vapeur par l'apparition d'une certaine quantité de liquide, d'enthalpie inférieure. Il y a donc condensation. Si  $x$  est le taux de liquide après laminage, l'équation précédente permet de le calculer à partir des valeurs connues de l'enthalpie de l'eau  $h'$ , et de la vapeur saturante  $h''$ , à la pression  $P_2 = 67$  bar, qu'on trouve dans les tables :  $h'_2 = 1251,8$  kJ/kg,  $h''_2 = 2777,2$  kJ/kg. En effet l'enthalpie du fluide diphasé est la somme pondérée des enthalpies de chacune des phases (par extensivité de la fonction d'état), soit

$$h_2 = xh'_2 + (1 - x)h''_2$$

$$\text{d'où } x = \frac{h''_2 - h_2}{h''_2 - h'_2} = \frac{2777,2 - 2766,2}{2777,2 - 1251,8} = 7,2 \cdot 10^{-3} = 0,72\%$$

En résumé on obtient les cas suivants :

Echangeurs de chaleur	$h_2 - h_1 = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}}$
Machines adiabatiques	$h_2 - h_1 = \frac{\dot{W}_u}{\dot{m}}$
Laminage	$h_2 - h_1 = 0$

## 2.6 Deuxième principe, entropie

### 2.6.1 Expression générale pour un système fermé

Là aussi on postule l'existence d'une fonction d'état  $S(V; T; \dots)$ , appelée entropie (dont la dimension est celle d'une énergie divisée par une température, c'est-à-dire exprimée par exemple en  $\text{J.K}^{-1}$ ), dont la variation, dans toute transformation élémentaire d'un système fermé, se compose de deux parties :

$$(17) \quad dS = d_e S + d_i S$$

- $d_e S$  représente le **flux d'entropie lié aux échanges avec l'extérieur**, en général donné par une intégrale de surface étendue à la frontière du système :

$$(18) \quad d_e S = \iint_{\text{frontière}} \frac{\delta Q}{T}$$

- $d_i S$  est appelé **génération d'entropie** (ou production, ou encore création d'entropie) ; elle est strictement positive dès que l'intérieur du système est le siège de processus irréversibles. Elle est généralement donnée par une intégrale de volume étendue au domaine occupé par le système. Son expression générale est très compliquée, sans grand intérêt ici, mais on en verra des exemples plus loin.

Si le système a une température uniforme  $T$  le deuxième principe peut se mettre sous la forme souvent plus commode

$$(19) \quad T dS = \delta Q + \delta \Pi$$

où  $\delta \Pi = T d_i S > 0$  est appelé travail (ou chaleur) non compensé.

**Transformations réversibles** : Dans ce cas (qui implique que la température reste uniforme sur le système), il ne reste que  $d_e S$ , et le deuxième principe se réduit à la forme bien connue

$$(20) \quad dS = d_e S = \frac{\delta Q}{T} \quad (\text{réversible})$$

Cette égalité définit la température absolue  $T$  dans les transformations réversibles. Elle permet aussi la détermination de la valeur de l'entropie  $S$  – là encore à une constante près – à partir de mesures de quantités de chaleur absorbées dans des transformations réversibles. On peut donc déterminer les valeurs de  $S$  pour tous les états qu'on peut atteindre par au moins une voie réversible. Comme  $S$  est une fonction d'état, ces valeurs sont aussi valables quand ce même état est atteint au cours de transformations irréversibles.

Dans les transformations réversibles, l'entropie joue ainsi un rôle analogue à celui d'un "potentiel" pour les échanges de chaleur, au même titre que l'énergie interne pour le travail dans le cas adiabatique. Mais ceci ne doit pas masquer la différence essentielle qui apparaît dans les transformations réelles (presque toujours irréversibles) : la variation d'entropie comporte dans ce cas un terme supplémentaire, de génération d'entropie  $d_i S$ , qui représente un accroissement spontané, lié aux seuls phénomènes irréversibles internes au système.

**Extensivité** : pour achever l'expression du deuxième principe, on postule que l'entropie est une grandeur extensive, c'est-à-dire que l'entropie d'un ensemble de corps disjoints dans l'espace est la somme de leurs entropies respectives. En particulier l'entropie d'une phase est une fonction homogène de degré 1 des variables extensives dont elle dépend. Par exemple, l'entropie d'un gaz simple de masse  $m$ , volume  $V$  et température  $T$  s'écrit

$$(21) \quad S_{\text{global}}(m, V, T) = m s(V, T)$$

où  $s$  est l'entropie massique du gaz (en  $\text{J.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ), et  $v$  son volume massique (en  $\text{m}^3\text{kg}^{-1}$ ). Comme toute fonction d'état intensive, l'entropie massique dépend seulement de variables intensives.

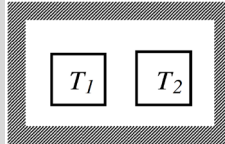
Ce postulat d'extensivité est essentiel dans la mesure où il est souvent le seul moyen de définir l'entropie d'un système hors d'équilibre, dont l'état ne peut être atteint par voie réversible.

#### Exemples de génération d'entropie

- Considérons un système constitué de deux corps  $B_1$  et  $B_2$  portés à des températures différentes  $T_1$  et  $T_2$  ; d'après le postulat ci-dessus, son entropie totale vaut

$$(22) \quad S = S_1(T_1) + S_2(T_2)$$

où  $S_1$  et  $S_2$  sont les entropies respectives des corps 1 et 2.



Si le système global est isolé (et fermé), c'est-à-dire n'échange ni chaleur ni travail avec l'extérieur, le seul phénomène qui peut se produire est l'échange de chaleur entre B1 et B2. Soit  $\delta Q$  la chaleur absorbée par B1. Au même instant B2 absorbe  $-\delta Q$ . A l'intérieur de chacun des corps 1 et 2, aucun phénomène irréversible n'a lieu, la seule irréversibilité étant liée à l'échange de chaleur entre les deux corps. Le deuxième principe permet alors de calculer la génération d'entropie. Pas d'irréversibilité dans B1 ni B2 signifie que nous avons

$$(23) \quad dS_1 = \frac{\delta Q}{T_1} \quad , \quad dS_2 = -\frac{\delta Q}{T_2}$$

Pour le système entier, il n'y a pas de variation d'entropie due à l'extérieur, et il ne reste que le terme irréversible :  $dS = diS$ . Mais l'équation (22) donne pour sa part  $dS = dS_1 + dS_2$  d'où  $diS (= dS) = dS_1 + dS_2$ . En utilisant (23) pour relier ceci à  $\delta Q$ , on trouve

$$(24) \quad diS = \delta Q \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = \delta Q \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2}$$

C'est l'expression de la génération d'entropie dans un cas particulier d'hétérogénéité de température. Comme elle est positive, on retrouve bien la loi qui veut que, sans intermédiaire, la chaleur passe des corps chauds aux corps froids. Mais (24) donne une valeur quantitative sur laquelle on voit que la production d'entropie (et l'irréversibilité) croît avec la différence de température. On sait bien qu'un échangeur est d'autant plus efficace (mais aussi d'autant plus cher) que la différence de température entre les deux fluides est plus faible.

2. Cette formule a une extension quasi-immédiate au cas d'un milieu continu. Soit  $\psi$  le flux de chaleur (en  $W.m^{-2}$ ) à travers la frontière d'un système donné occupant le volume  $V$ . Sa "cause" est l'hétérogénéité de température caractérisée par  $\nabla T$ . La génération d'entropie par unité de temps vaut

$$(25) \quad \frac{diS}{dt} = \iiint_V -\psi \frac{\nabla T}{T^2}$$

très semblable à (24).

## 2.6.2 Systèmes ouverts par convection

Dans le cas des systèmes ouverts qui ont déjà été considérés à l'occasion du premier principe, la variation d'entropie du système, défini par son volume de contrôle  $V$ , prend une forme de bilan très analogue à l'équation (12) :

$$(26) \quad \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho s d^3x = \sum_{i \in \text{entrées sorties}} \dot{m}_i s_i + \sum_{\alpha} \frac{\dot{Q}_{\alpha}}{T_{\alpha}} + \dot{\sigma}$$

Ici,  $s$  désigne l'entropie massique du fluide et  $\dot{\sigma}$  la génération d'entropie (positive) par unité de temps (en  $W/K$ ) due aux phénomènes irréversibles.

La somme sur les quantités de chaleur  $\dot{Q}_{\alpha}$  porte sur l'ensemble des sources de chaleur, indicées par  $\alpha$ , de températures  $T_{\alpha}$ .

Cette équation, bien que d'une validité très générale, est rarement utilisée telle quelle dans la pratique parce qu'on ne connaît pas en général l'expression a priori de  $\dot{\sigma}$ , sauf dans le cas très particulier, mais néanmoins utile, où les irréversibilités sont négligeables, donc  $\dot{\sigma} = 0$ .

Si on cherche à exploiter l'équation (26) dans l'autre sens, c'est-à-dire à en tirer, à partir des valeurs d'entrée et de sortie des variables d'état, une évaluation des irréversibilités, on se heurte au caractère peu intuitif de la génération d'entropie dont l'unité, le  $J/K$ , ne se compare à rien d'autre.

On a ainsi été amené à la combiner avec le premier principe, pour faire apparaître des "dissipations" liées aux irréversibilités, qui puissent se compter en équivalent de travail perdu par exemple. C'est le rôle des énergies utilisables, bien adaptées à certaines applications particulières, mais qui ont l'inconvénient d'être moins universelles que l'entropie.

### Régimes stationnaires, installations industrielles

En repérant les entrées-sorties par l'indice  $i$ , et les sources de chaleur par l'indice  $\alpha$ , le deuxième principe pour les régimes stationnaires s'écrit

(27)

$$\sum_{i \in \text{sorties}} |\dot{m}_i| s_i - \sum_{j \in \text{entrées}} |\dot{m}_j| s_j = \sum_{\alpha} \frac{\dot{Q}_{\alpha}}{T_{\alpha}} + \dot{\sigma}$$

où  $\dot{Q}_{\alpha}$  désigne les puissances calorifiques absorbées aux températures  $T_{\alpha}$  en provenance des sources de chaleur  $\alpha$ .

Si tous les états sont connus, cette formule permet de calculer la génération d'entropie d'une installation ou d'un appareil, elle-même liée aux dissipations.

### 2.6.3 Cycles dithermes

#### Définition

Un système fermé de température constamment uniforme<sup>6</sup> décrit un cycle ditherme si la transformation cyclique qu'il subit ne comporte, outre des transformations *adiabatiques*, que des transformations *isothermes* à l'une des deux températures  $T_1$  ou  $T_2 (> T_1)$ .  $Q_1$  est la chaleur absorbée à la température  $T_1$ , et  $Q_2$  à  $T_2$ .

Un **cycle de Carnot** est un cycle ditherme décrit tout entier de manière réversible.

#### Théorème de Carnot

Dans un cycle de Carnot, on a

$$\frac{\dot{Q}_1}{T_1} + \frac{\dot{Q}_2}{T_2} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\dot{Q}_1}{\dot{Q}_2} = -\frac{T_1}{T_2}$$

Ce qui est remarquable est que le rapport des quantités de chaleur ne dépend que des températures des sources<sup>7</sup>, ce qui permet d'ailleurs de définir la température absolue  $T$ .

Le rendement d'une machine motrice à cycle de Carnot est

$$\frac{-\dot{W}}{\dot{Q}_2} = 1 + \frac{\dot{Q}_1}{\dot{Q}_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

#### Cycles dithermes réels (irréversibles)

Dans ce cas le second principe donne

$$\oint \frac{\delta \dot{Q}}{T} = \frac{\dot{Q}_1}{T_1} + \frac{\dot{Q}_2}{T_2} = -\oint d_i S < 0$$

Combiné à  $\dot{W} + \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 = 0$ , ceci donne les résultats suivants :

- **Carnot.** Pour qu'une machine thermique cyclique fournisse du travail ( $\dot{W} < 0$ ) il faut que le cycle cède de la chaleur à la source froide ( $\dot{Q}_1 < 0$ ).
- **Kelvin.** Il est impossible d'obtenir du travail au moyen d'un système cyclique qui n'est en relation qu'avec une seule source de chaleur.
- **Clausius-Duhem.** Pour qu'une machine cyclique fonctionne en réfrigérateur ( $\dot{Q}_1 > 0$ ), il faut lui fournir du travail ( $\dot{W} > 0$ ).
- **Clausius.** Il est impossible de transférer de la chaleur d'un corps froid à un corps chaud par l'intermédiaire d'un cycle dont le travail est nul.
- Aucun de ces énoncés ne résume l'intégralité du second principe pour les cycles dithermes.

### 2.6.4 Principales transformations : détente et compressions

#### Détentes

Définition, notations

Transformation subie par un fluide passant à travers un dispositif qui l'amène d'une pression d'entrée  $P_e$  à une pression de sortie  $P_s < P_e$ .

On notera respectivement avec les indices e et s les grandeurs relatives à l'entrée et à la sortie de l'appareil.

Hypothèses

On considère des systèmes ouverts par convection en régime d'écoulement permanent. Le fluide est un fluide simple (pas de changement de composition).

<sup>6</sup> Mais non constante au cours du cycle, bien entendu

<sup>7</sup> Avant Carnot, on croyait que le rendement était directement lié à la pression

## Laminage

Autres noms : détente de Joule-Thomson, ou détente isenthalpique.

Les vannes de détente sont utilisées pour régler les débits ou abaisser une pression, les détendeurs servent à réguler les débits ou les pressions.

Le laminage d'un liquide ou d'un mélange liquide-vapeur est aussi utilisé (dans les procédés de liquéfaction par exemple) pour refroidir un fluide, l'augmentation d'enthalpie due à la vaporisation, étant compensée par l'abaissement de température du mélange.

Le passage à travers l'appareil, constitué essentiellement d'un rétrécissement de la conduite, entraîne la conservation de l'enthalpie (pas d'échange de chaleur, pas de travail utile)

$$h_s = h_e$$

La variation de température est a priori quelconque. Dans un domaine limité de chute de pression on définit un "coefficient de Joule-Thomson"

$$\mu = \frac{\frac{\partial h(P, T)}{\partial p}}{\frac{\partial h(P, T)}{\partial T}} = \frac{T \frac{\partial v}{\partial T} - v}{c_p} \quad \text{avec} \quad \frac{T_s - T_e}{P_s - P_e} \approx -\mu$$

Il est nul pour un gaz parfait. S'il est positif (fréquent) il y a refroidissement.

## Détentes adiabatiques (avec travail)

Dans les turbines ou autres moteurs le fluide se détend sans échanger de chaleur (en première approximation) et fournit du travail utile à l'extérieur  $\dot{W}_u < 0$ . Il est donné par le bilan d'enthalpie

$$-\dot{W}_u = \dot{m}(h_e - h_s) > 0$$

## Détente réversible (isentropique)

Si les irréversibilités peuvent être négligées, le bilan d'entropie donne

$$s_s = s_e$$

ce qui détermine l'état de sortie par le couple  $p_s, s_e$ ; tables ou diagrammes permettent ensuite de déterminer toutes les grandeurs de sortie.

## Détente réelle (irréversible)

Les irréversibilités inévitables se traduisent par une génération d'entropie  $\dot{\sigma} > 0$  si bien que le deuxième principe donne

$$s_s = s_e + \frac{\dot{\sigma}}{\dot{m}}$$

En pratique on caractérise cette irréversibilité par le rendement isentropique de la machine, défini dans une détente par

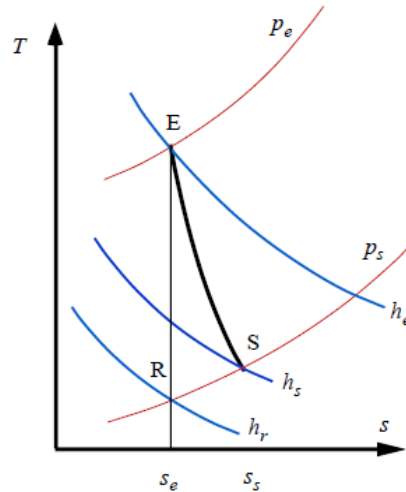
$$\eta = \frac{|W_u(\text{réel})|}{|W_u(\text{réversible})|} < 1$$

Ce rendement étant fourni par le constructeur, la détermination de l'état de sortie (point S) se fait comme suit :

- 1) Partant de l'état d'entrée, E, l'état de sortie sans irréversibilité, R, est connu par  $(P_s, s_r = s_e)$ ,
- 2) la connaissance de R détermine le travail spécifique réversible  $h_r - h_e$ ,
- 3) comme le travail réel vaut  $\eta$  fois le travail réversible, l'enthalpie en sortie réelle, S, vaut

$$h_s = h_e + \eta(h_r - h_e)$$

L'état en sortie est alors connu par les 2 variables d'état  $(P_s, h_s)$ .



### Détente isotherme

C'est un **cas idéal**, dont on s'approcherait en réalisant une détente multi-étagée, entrecoupée de réchauffements à la température d'entrée.

Dans le cas réversible, elle fournit nécessairement plus de travail qu'une détente isentropique entre les deux mêmes pressions.

$$-\dot{W}_u = \dot{m}[(h_e - T_e s_e) - (h_s - T_e s_s)]$$

### Gaz parfaits à $c_p, c_v$ constants

La connaissance des fonctions d'état permet de donner des expressions explicites des grandeurs de sortie, dans les différents cas précédents. C'est utile pour les ordres de grandeur, et souvent assez proche de la réalité pour l'air ou la vapeur d'eau par exemple.

#### Laminage

Comme l'enthalpie ne dépend que de  $T$ , la détente isenthalpique est aussi isotherme :

$$T_s = T_e$$

#### Détentes isentropiques

La constance de l'entropie entraîne, avec  $\gamma = c_p/c_v$

$$\frac{T_s}{T_e} = \left(\frac{P_s}{P_e}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} < 1 \quad \text{et} \quad -\dot{W}_u = \dot{m} \cdot c_p \cdot T_e \left[ 1 - \left(\frac{P_s}{P_e}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] > 0$$

#### Détentes réelles

Le rendement isentropique  $\eta < 1$  modifie la température de sortie et le travail fourni

$$-\dot{W}_u = \eta \cdot \dot{m} \cdot c_p \cdot T_e \left[ 1 - \left(\frac{P_s}{P_e}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$

$$T_e - T_s = \eta \cdot T_e \left[ 1 - \left(\frac{P_s}{P_e}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$

## Compressions

### Définition, notations

Transformation subie par un fluide passant à travers un dispositif qui l'amène d'une pression d'entrée  $P_e$  à une pression de sortie  $P_s > P_e$ . On notera respectivement avec les indices  $e$  et  $s$  les grandeurs relatives à l'entrée et à la sortie de l'appareil.

### Hypothèses

On considère des systèmes ouverts par convection en régime d'écoulement permanent. Le fluide est un fluide simple (pas de changement de composition). Contrairement aux détente, qui peuvent porter dans la pratique sur des fluides diphasés, les compresseurs et les pompes ne fonctionnent convenablement que sur des fluides monophasés, respectivement gazeux ou liquides.

## Compressions adiabatiques

Dans les compresseurs ou les pompes, le fluide est comprimé sans échanger de chaleur avec l'extérieur (en première approximation). Il absorbe un travail utile  $\dot{W}_u > 0$  donné par le bilan d'enthalpie

$$\dot{W}_u = \dot{m}(h_s - h_e) > 0$$

### Compression réversible (isentropique)

Si les irréversibilités peuvent être négligées, le bilan d'entropie donne

$$s_s = s_e$$

ce qui détermine l'état de sortie par le couple  $P_s, s_e$ ; tables ou diagrammes permettent ensuite de déterminer toutes les grandeurs de sortie.

### Compression réelle (irréversible)

Les irréversibilités inévitables se traduisent par une génération d'entropie  $\dot{\sigma} > 0$  si bien que le deuxième principe donne

$$s_s = s_e + \frac{\dot{\sigma}}{\dot{m}}$$

En pratique on caractérise cette irréversibilité par le rendement isentropique de la machine, défini dans une compression par

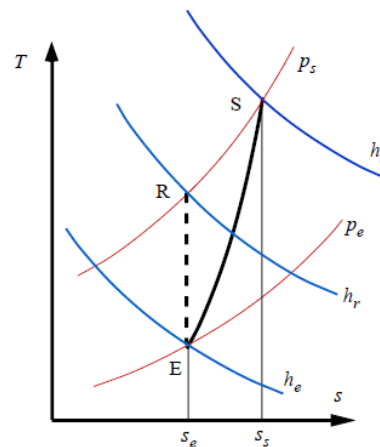
$$\eta = \frac{|\dot{W}_u(\text{réversible})|}{|\dot{W}_u(\text{réel})|} < 1$$

Ce rendement étant fourni par le constructeur, la détermination de l'état de sortie (point S) se fait comme suit.

- 1) Partant de l'état d'entrée, E, l'état de sortie sans irréversibilité, R, est connu par  $(P_s, s_r = s_e)$ ,
- 2) la connaissance de R détermine le travail spécifique réversible  $h_r - h_e$ ,
- 3) comme le travail réel vaut  $1/\eta$  fois le travail réversible, l'enthalpie en sortie réelle, S, vaut

$$h_s = h_e + \frac{(h_r - h_e)}{\eta}$$

L'état en sortie est alors connu par les 2 variables d'état  $(P_s, h_s)$ .



## Compression isotherme

C'est un **cas idéal**, dont on s'approche en réalisant une compression multi-étagée, entrecoupée de refroidissements à la température d'entrée. Dans le cas réversible, elle absorbe toujours moins de travail qu'une compression isentropique entre les deux mêmes pressions.

$$\dot{W}_u = \dot{m}[(h_s - T_e s_s) - (h_e - T_e s_e)]$$

## Gaz parfaits à $c_p, c_v$ constants

La connaissance des fonctions d'état permet de donner des expressions explicites des grandeurs de sortie, dans les différents cas précédents. C'est utile pour les ordres de grandeur, et souvent assez proche de la réalité pour les gaz usuels.

### Compressions isentropiques

La constance de l'entropie entraîne, avec  $\gamma = c_p/c_v$

$$\frac{T_s}{T_e} = \left(\frac{P_s}{P_e}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} > 1 \quad \text{et} \quad \dot{W}_u = \dot{m} \cdot c_p \cdot T_e \left[ \left(\frac{P_s}{P_e}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] > 0$$

### Compressions réelles

Le rendement isentropique  $\eta < 1$  modifie la température de sortie et le travail fourni

$$\dot{W}_u = \frac{1}{\eta} \cdot \dot{m} \cdot c_p \cdot T_e \left[ \left(\frac{P_s}{P_e}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

$$T_s - T_e = \frac{1}{\eta} \cdot T_e \left[ \left( \frac{P_s}{P_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

## Liquides

Dans ce cas on parle de pompes.

Les liquides quasi-incompressibles sont souvent une bonne approximation des liquides réels. Le volume massique  $v$  étant pratiquement constant, on a, dans une transformation adiabatique

$$\begin{aligned} \dot{W}_u &= \dot{V} \cdot (P_s - P_e) & (\text{réversible}) \\ \dot{W}_u &= \frac{1}{\eta} \cdot \dot{V} \cdot (P_s - P_e) & (\text{irréversible}) \end{aligned}$$

## 2.6.5 Pertes d'énergie : énergies utilisables, exergie

Diverses énergies utilisables<sup>8</sup> ont été introduites pour caractériser la perte de rendement due aux irréversibilités, car elles changent suivant le type de processus envisagé. Deux exemples vont illustrer ce point.

**Energie libre.** Considérons un système fermé évoluant à la température constante  $T$ . Dans une transformation réelle, irréversible, on a

$$(28) \quad d(U - TS) + dK + \delta\Pi = \delta W, \quad \delta\Pi = T d_i S > 0$$

**Démonstration.** Les deux principes s'écrivent en effet (cf (10) et (18))

$$(29) \quad \begin{cases} dU + dK = \delta W + \delta Q \\ T dS = \delta Q + \delta\Pi \end{cases}$$

En remplaçant  $\delta Q$  dans la première égalité par sa valeur tirée de la deuxième, on arrive à (28).

Dans une machine motrice, la quantité utile est  $-\delta W + dK$ , somme du travail fourni par le système et de son énergie cinétique, qui peuvent tous deux être utilisés sous une forme mécanique. L'égalité (28) montre que sa valeur maximale est  $-d(U - TS)$ , la valeur réellement utilisée lui étant toujours inférieure de la valeur du travail non compensé  $\delta\Pi$ . La fonction d'état  $U - TS$  (notée  $F$  et appelée énergie libre) joue le rôle d'un "potentiel" d'énergie pour les processus isothermes considérés ici.

Supposons maintenant que la fonction de la machine soit d'emmagasiner de l'énergie (compression d'air par exemple). Si l'énergie disponible est  $\delta W$ , la même équation (28) montre que l'énergie maximale que l'on pourra stocker est  $d(U - TS) + dK = \delta W$  dans une transformation parfaite, et seulement  $d(U - TS) + dK = \delta W - \delta\Pi$  dans une transformation réelle, irréversible.

L'énergie libre joue donc le rôle d'une énergie utilisable pour les transformations isothermes d'un système fermé.

**Exergie.** D'une manière plus générale, pour les installations industrielles ouvertes (ou fermées) du type considéré précédemment (§2.3.2 et §2.6.2) on introduit souvent une énergie utilisable appelée exergie, définie par

$$(30) \quad e = h - T_a s \quad \text{et} \quad e^* = h^* - T_a s$$

où  $T_a$  est une température (absolue, donc positive) arbitraire, qu'on choisira au mieux pour tenir compte des conditions technico-économiques imposées ; très souvent ce sera la température ambiante moyenne (autour de 280 K).

Dans les systèmes ouverts par convection la combinaison du premier (12) et du second (26) principes donne

$$(31) \quad \frac{d}{dt}(U^* - T_a S) = \sum_{i \in \text{entrées sorties}} \dot{m}_i e_i^* + \dot{W}_u + \sum_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha} \left( 1 - \frac{T_a}{T_{\alpha}} \right) - T_a \dot{\sigma}$$

**Démonstration.** Il suffit de multiplier (26) par  $T_a$ , et de la soustraire à (12), en remarquant que la puissance calorifique totale  $\dot{Q}$  qui apparaît dans (12) est simplement la somme des quantités échangées avec les différentes sources :

$\dot{Q} = \sum_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha}$  pour trouver (31).

<sup>8</sup> Energies "libres" de Helmholtz et de Gibbs, énergie "utilisable" de Gouy, "exergie" de Rant.



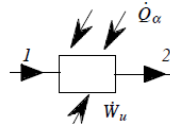
En pratique, cette équation est surtout utilisée dans le cas de régimes stationnaires ; le premier membre est donc nul, et on trouve, dans le cas d'un appareil à une seule entrée et une seule sortie, une expression qui rappelle la forme "enthalpique" (15) ou (16) du premier principe

$$(32) \quad \left[ e(P_2, T_2) + \frac{1}{2} w_2^2 \right] - \left[ e(P_1, T_1) + \frac{1}{2} w_1^2 \right] = \frac{\dot{W}_u}{\dot{m}} + \sum_{\alpha} \frac{\dot{Q}_{\alpha}}{\dot{m}} \left( 1 - \frac{T_a}{T_{\alpha}} \right) - T_a \frac{\dot{\sigma}}{\dot{m}}$$

ou en notation abrégée

$$(33) \quad \left[ e + \frac{1}{2} w^2 \right]_1^2 = \frac{\dot{W}_u}{\dot{m}} + \sum_{\alpha} \frac{\dot{Q}_{\alpha}}{\dot{m}} \left( 1 - \frac{T_a}{T_{\alpha}} \right) - T_a \frac{\dot{\sigma}}{\dot{m}}$$

Dans ces expressions,  $\dot{\sigma} > 0$  est la génération d'entropie par unité de temps à l'intérieur du système compris entre les sections 1 et 2.



Là encore, dans le cas d'une machine motrice adiabatique, la part utilisable est, si on néglige les énergies cinétiques,  $-\frac{\dot{W}_u}{\dot{m}}$  par unité de masse de fluide. Sa valeur maximale, pour une transformation parfaite, est la chute d'exergie  $e_1 - e_2$ . On peut ensuite répéter les raisonnements faits à propos de l'énergie libre.

Le bilan d'exergie précédent présente cependant un intérêt supplémentaire, lié aux termes d'échanges de chaleur. Le choix de la température arbitraire  $T_a$  permet en effet de faire disparaître du bilan la quantité de chaleur échangée avec la source à température  $T_a$ . Cela est justifié si cette source est, par exemple, l'atmosphère considérée comme un thermostat infini et gratuit. En revanche la quantité de chaleur échangée avec une autre source,  $\alpha$ , est multipliée par  $1 - T_a/T_{\alpha}$  (dit "facteur de Carnot") constituant ainsi ce qu'on peut appeler un apport thermique effectif (ou quantité de chaleur efficace). Grâce à ce facteur, elle est donc comptabilisée à hauteur du travail que pourrait fournir une machine de Carnot qui l'utiliserait, conjointement avec l'atmosphère, comme source (froide ou chaude d'ailleurs !). On peut aussi dire que ceci permet de pondérer les sources de chaleur en fonction de leur "potentiel" au point de vue fourniture d'énergie mécanique, qui est d'autant plus élevé que leur température est différente de l'atmosphère.

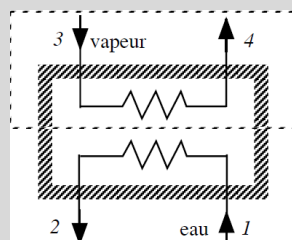
Le terme de "pertes", plus correctement appelé "dissipation exergétique",  $\frac{\dot{D}_a}{\dot{m}} = \frac{T_a \dot{\sigma}}{\dot{m}}$ , a une allure qui est assez générale : quelle que soit l'énergie utilisable invoquée, le terme qui traduit la perte a toujours la forme d'une température caractéristique de la transformation multipliée par la génération d'entropie.

Enfin, il est important de signaler que l'irréversibilité n'est pas une malédiction qui pèse sur le monde physique ; par l'intermédiaire des frottements, elle apparaît aussi comme la seule source de stabilisation dans l'univers.

### Exemple

Bilan exergétique d'un réchauffeur de centrale nucléaire.

Reprenons le premier réchauffeur déjà examiné plus haut. On peut commencer par appliquer séparément à chacun des circuits, de prélèvement vapeur, et d'eau, la formule (31) et en tirer, puisque les états d'entrée et de sortie sont connus la dissipation.



Considérons le circuit de vapeur ; comme le travail effectif est nul, on a

$$T_a \dot{\sigma} = \dot{m}(e_3 - e_4) + \dot{Q} \left( 1 - \frac{T_a}{T_3} \right)$$

Par rapport aux données vues précédemment, les informations supplémentaires indispensables sont les entropies, qui valent, à l'entrée  $s_3 = 7,275 \text{ kJ.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$  et à la sortie  $s_4 = 0,8195 \text{ kJ.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ , et la température qui est celle de la vapeur saturante à 0 ; 191 bar c'est-à-dire  $T_3 = T_4 = 332\text{K}$ . On en tire les exergies

$$e_3 = h_3 - T_a \times s_3 = 2392 - 290 \times 7,275 = 282,25 \text{ kJ kg}^{-1}$$

$$e_4 = h_4 - T_a \times s_4 = 247 - 290 \times 0,8195 = 9,62 \text{ kJ kg}^{-1}$$

On a déjà calculé la valeur de la puissance thermique,  $\dot{Q} = -96,7 \text{ MW}$  et la puissance thermique effective vaut donc

$$\dot{Q} \left(1 - \frac{T_a}{T_3}\right) = -96,7 \times \left(1 - \frac{290}{332}\right) = -12,23 \text{ MW}$$

Comme le débit est de 45 kg/s, la dissipation vaut

$$T_a \dot{\sigma} = 45 \times (282,25 - 9,62) \times 10^{-3} - 12,23 = 0,059 \text{ MW}$$

Comparée aux puissances mises en jeu, elle est quasi-nulle, traduisant le peu d'importance des irréversibilités qui existent dans le circuit de vapeur.

On calcule de même la dissipation dans le circuit d'eau. On a successivement les exergies d'entrée et de sortie :

$$e_1 = h_1 - T_{as1} = 165,59 - 290 \times 0,5605 = 3,045 \text{ kJ kg}^{-1}$$

$$e_2 = h_2 - T_{as2} = 238,29 - 290 \times 0,7874 = 9,944 \text{ kJ kg}^{-1}$$

puis la puissance thermique effective

$$-\dot{Q} \left(1 - \frac{T_a}{T_e}\right) = -96,7 \times \left(1 - \frac{290}{320,5}\right) = 9,1987 \text{ MW}$$

en ayant pris  $T_e = 320,5 \text{ K}$  comme température moyenne de l'eau dans l'échangeur. Compte tenu du débit de 1329,6 kg/s, la dissipation vaut

$$T_a \dot{\sigma} = 1329,6 \times (3,045 - 9,944) \times 10^{-3} + 9,1987 = 0,0258 \text{ MW}$$

qui appelle les mêmes commentaires que précédemment.

Il est indispensable de se poser aussi la question de la dissipation pour l'ensemble de l'appareil. Il faut dans ce cas faire appel au bilan global (29) dans le cas d'un régime permanent. On trouve ici

$$T_a \dot{\sigma} = \dot{m}_e(e_1 - e_2) + \dot{m}_v(e_3 - e_4)$$

puisque l'ensemble de l'appareil est calorifugé, et qu'il n'y a donc pas de puissance thermique effective. En reprenant les valeurs précédentes de l'exergie, on trouve

$$T_a \dot{\sigma} = 1329,6 \times (3,045 - 9,944) \times 10^{-3} + 45 \times (282,25 - 9,62) \times 10^{-3}$$

$$T_a \dot{\sigma} = 3,095 \text{ MW}$$

Cette fois la dissipation est importante, 3% de la puissance échangée. Cela est dû au fait que l'irréversibilité liée au transfert de chaleur prend son origine à l'interface entre les deux fluides, là où le gradient de température est important, comme on l'a vu dans un exemple donné plus haut. C'est naturellement ce bilan total de l'échangeur qui est significatif de la performance de l'appareil.

## 2.7 Principe de Nernst ou Troisième principe

### Enoncé

Lorsque la température absolue d'un système physique quelconque tend vers 0 K, son entropie tend vers une valeur finie et indépendante de toutes les variables d'état.

### Conséquences

- On en profite souvent, en suivant M. Planck, pour fixer la valeur de la constante arbitraire de l'entropie d'une substance à 0 pour  $T = 0 \text{ K}$ , conformément à la signification donnée à l'entropie par la formule de Boltzmann en thermodynamique statistique.
- Tous les coefficients calorimétriques d'équilibre d'un système physique sont nuls à  $T = 0 \text{ K}$ .
- Pour une phase chimiquement inerte, on a

$$\frac{\partial P(V, T)}{\partial T} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial V(P, T)}{\partial T} = 0 \quad \text{pour } T = 0 \text{ K}$$

- Il est impossible, par un processus adiabatique quelconque d'atteindre  $T = 0 \text{ K}$  (on peut s'en approcher autant qu'on veut cependant).

## PARTIE II : Introduction aux Transferts Thermiques

---

Les transferts thermiques sont présents dans tous les domaines industriels. Ce cours d'introduction a pour objectifs des notions de base pour l'ingénieur :

- Connaître les principaux modes de transferts thermiques et les lois qui les régissent ;
- Estimer des ordres de grandeur ;
- Établir un bilan thermique en régime stationnaire ou variable faisant intervenir conduction, convection et rayonnement.

Pour approfondir, on se référera à la bibliographie.

## Température et chaleur

Les deux notions fondamentales en transferts thermiques sont la **température et la chaleur**. Le langage courant introduit souvent une confusion entre elles. Nos réactions physiologiques en sont en partie responsables : *toucher du bout des doigts une porte en bois ou sa poignée métallique* ne procure pas la même sensation ; la seconde paraît plus froide alors que toutes deux sont à la même température. Ceci parce que nos organes du toucher ressentent le flux thermique qu'ils reçoivent ou cèdent. La poignée semble plus froide parce que son métal est plus émissif que le bois.

De même, on entend opposer : **température à l'ombre et température au soleil**. En réalité, la mesure d'une température d'air ne peut se faire qu'en protégeant la sonde de mesure des effets du rayonnement donc « à l'ombre ». S'intéresser à la température au soleil sous-entend qu'on souhaite intégrer en une seule mesure les effets de la température et la chaleur reçue du soleil par rayonnement.

De même, on parle au Canada de **température « avec facteur vent »** (– 20°C annoncés comme – 30°C avec facteur vent). Là encore, on effectue, sans le dire explicitement, un bilan thermique tenant compte d'échanges convectifs accrus du fait de la vitesse du vent.

### La température :

La température caractérise **l'état d'un corps**. Elle est une variable d'état qui caractérise le degré d'agitation des atomes des molécules. Elle résulte donc de la détermination d'une moyenne et de ce fait il est impossible en toute rigueur de définir la température en un point géométrique.

La température est une variable intensive. Si dans un système, on prend deux corps de même masse à même température, la masse du système est la somme des masses des deux corps mais la température de l'ensemble reste la même.

L'unité de température du système international est le **Kelvin (K)**. On utilise usuellement le degré Celsius (°C) pour la différence entre deux températures.

### La chaleur :

La chaleur exprime une **énergie échangée**. C'est un transfert d'énergie au même titre que le travail. On ne peut donc pas parler de la « chaleur d'un corps » car la chaleur implique une situation évolutive, il s'agit forcément d'un échange d'énergie entre plusieurs corps au cours d'un laps de temps déterminé.

L'unité du système international est le **Joule (J)**.

Si entre deux instants  $t$  et  $t'$ , l'interaction étudiée s'accompagne d'un échange de chaleur  $\delta Q$ , on appelle flux thermique moyen la quantité  $\delta Q/(t-t')$ . Ce flux thermique (c'est une puissance) instantané est donc exprimé en watt (W). Ramené à l'unité de surface, on parle de densité de flux thermique ( $W/m^2$ ).

## Modes de transferts thermiques

On distingue trois mécanismes de transfert thermique entre milieux matériels :

### CONDUCTION

C'est une transmission d'énergie thermique dans la masse d'un milieu matériel macroscopiquement immobile où règne un gradient de température. Elle s'applique aux solides, aux liquides et également aux gaz tant que ceux-ci peuvent être considérés comme immobiles (air emprisonné dans un double vitrage ou dans un matériau poreux).

La transmission de l'énergie thermique se fait par un mécanisme de chocs. Dans le cas d'un fluide, les porteurs élémentaires (molécules, atomes, ions etc) sont caractérisés essentiellement par des énergies de translation et éventuellement de vibration-rotation...

Dans le cas des solides, les atomes sont liés dans un réseau cristallin plus ou moins parfait. Les vecteurs élémentaires de l'énergie sont les phonons (quanta de vibration du réseau) et éventuellement les électrons libres.

La conduction est très forte dans les métaux, faible dans les verres et les liquides et très faible dans les gaz.

### **CONVECTION**

C'est un transfert d'énergie consécutif à un transport macroscopique de masse. Ce phénomène est observé entre un fluide en mouvement et une paroi.

Des parcelles de matière entrent en contact avec la paroi (chaude par exemple) et vont s'échauffer par conduction. Le mouvement du fluide transporte ces parcelles dans la masse où elles cèdent par mélange une partie de l'énergie reçue ; d'autres parcelles les remplacent à la paroi et ainsi de suite.

On parle de **convection forcée** quand le mouvement du fluide est imposé par une cause extérieure au système.

On parle de **convection naturelle** quand le mouvement du fluide résulte des différences de masse volumique générées par des différences de températures.

### **RAYONNEMENT**

C'est une **transmission d'énergie à distance** entre deux corps séparés ou non par un milieu matériel.

Tout corps, quelle que soit sa température, émet un rayonnement électromagnétique. Tous les corps perdent de l'énergie par rayonnement et en gagnent par absorption de tout ou partie du rayonnement ambiant.

Ce mode de transfert est par nature très différent des deux précédents car il se produit sans support matériel (exemple du soleil).

#### Résumé :

Conduction : transfert dans la masse

Convection : transfert par transport

Rayonnement : transfert à distance

### **Exemple du corps humain**

L'homme est un "homéotherme" ; son système de régulation thermique cherche à maintenir la température interne à 37,7°C. Les ressources d'énergie proviennent de la nourriture absorbée ; cette énergie étant utilisée pour différentes tâches :

- Travail chimique d'élaboration de molécules
- Travail osmotique pour l'oxygénation du sang
- Travail mécanique

Le métabolisme total  $\dot{M}$  [W] est dissipé en puissance mécanique  $\dot{W}$  et en chaleur  $\dot{Q}$ .

$$\dot{M} = \dot{Q} + \dot{W}$$

L'ordre de grandeur de  $\dot{Q}$  est **150 W** (pour un individu de 80 kg), mais cette puissance dissipée augmente naturellement avec l'activité physique. Comment cette chaleur est-elle évacuée ? Par les trois modes de transfert : conduction (  $C_d$  ), convection (  $C_v$  ) et rayonnement (  $R$  ) et par des changements d'état : évaporation d'eau (  $E$  ).

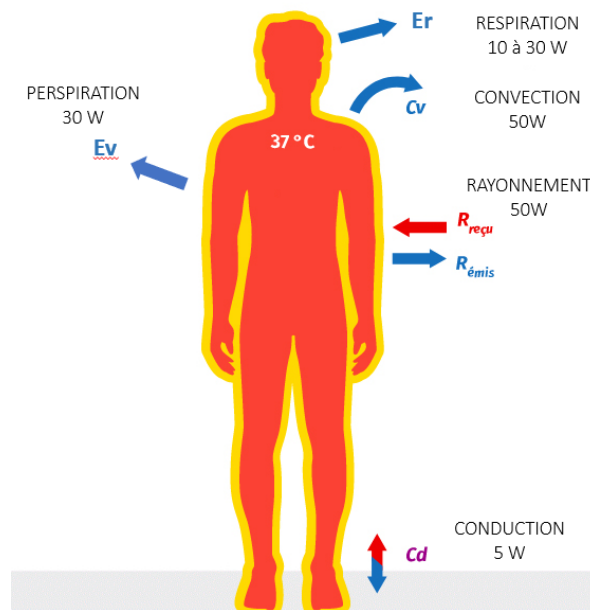
La **conduction**  $C_d$  intervient là où le corps est en contact avec un autre solide, au niveau des pieds par exemple. C'est donc un terme faible (vue la surface en contact), en général de l'ordre de 5 W (évidemment plus important chez un sujet couché).

La **convection naturelle**  $C_v$  provoque une élévation de température de l'air qui s'élève à proximité d'un individu. Elle intervient pour 50 W environ.

Le **rayonnement**  $R$  est du même ordre de grandeur : 50 W. Le rayonnement net (chaleur émise - chaleur absorbée) est donc important bien que la température du corps soit basse, du fait que la surface d'échange est d'environ  $1,85 \text{ m}^2$ .

Un individu est donc autant sensible à la température de l'air (convection) qu'aux échanges par rayonnement. On ressent donc fortement la proximité de surfaces froides (fenêtres en hiver) ou chaudes (paroi d'un four). En première approximation, on considère que le corps est sensible à la moyenne arithmétique de la température d'air et de la température moyenne des surfaces environnantes.

Pour se protéger du froid ou du chaud, on limite les échanges convectifs (grâce à des vêtements isolants) ou les échanges radiatifs (couverture de survie métallisée, combinaison de vulcanologue).



L'évaporation d'eau est un moyen d'évacuer la chaleur supplémentaire. Un individu évacue environ 2,5 kg d'eau par jour. Ces échanges se font par :

- la respiration ( $E_r$ ) transfère par transport avec variation de l'enthalpie de l'air humide entre inspiration et expiration ; elle combine de la convection forcée et de l'évaporation, environ 10 à 30 W ;
- l'évaporation par la peau ou perspiration ( $E_v$ ), environ 30 W ;
- la sudation ( $E_s$ ) qui intervient en ultime recours, c'est-à-dire quand les autres mécanismes ne suffisent plus pour maintenir la température de 37,7 °C. Elle peut permettre de dissiper une chaleur de 1100 W. La mouillure traduit l'insuffisance de la surface d'échange à assurer une évaporation complète.

Le bilan thermique du corps s'écrit donc :

$$\dot{Q} = \dot{M} - \dot{W} = C_d + C_v + R + E_r + E_v + E_s$$

En cas de grand froid, le corps peut même générer de la chaleur par influx électriques : mécanisme du frisson.

## **Chapitre 3 : Transferts conductifs**

---

## 3.1 Conduction en régime permanent

### 3.1.1 Loi de Fourier

Considérons un solide dans lequel un transfert conductif peut avoir lieu. En régime permanent, selon l'hypothèse de Fourier, **le vecteur densité de flux** est proportionnel au gradient de température :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T$$

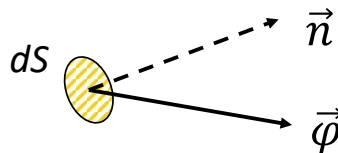
$\lambda$  est la **conductivité thermique** du milieu en  $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ . Elle dépend de la température. Cependant, dans de nombreux cas,  $\lambda$  peut être considéré comme constant (pour un milieu donné) dans un large intervalle de température. Par ailleurs, la formule ci-dessus est valable pour des matériaux isotropes. Si le matériau est non isotrope ses composantes sont variables (exemple dans du bois, la conductivité n'est pas la même dans le sens des fibres et transversalement où l'on traverse de minuscules couches d'air<sup>9</sup> ; il en va de même d'autres fibres comme fibres de carbone ou de Bore ; dans les cristaux la structure influence la conductivité dans certaines directions<sup>10</sup>). Les valeurs varient au sein du milieu, en particulier, elles sont très sensibles à la température. Dans ce cas, dans l'équation ci-dessus, on remplacera le coefficient  $\lambda$  par une matrice  $K$  de conductivité.

$$K = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix}$$

Notons que le signe (-) indique que le transfert se fait du point le plus chaud vers le plus froid

Le **flux d'énergie thermique**, traversant  $dS$  dans le sens de  $\vec{n}$ , normale à la surface  $dS$ , et par unité de temps, s'écrit :

$$\delta\phi = \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \cdot dS$$



$$\Phi = \iint_S \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

**Les métaux** sont les matériaux ayant la **plus forte conductivité** thermique. La conductivité thermique et la conductivité électrique sont très liées. La conductivité thermique  $\lambda$  résulte de 2 mécanismes : le mouvement des électrons et les interactions dans le réseau cristallin

Pour les **non métaux**, les matériaux les plus conducteurs sont donc ceux qui sont les plus cristallisés (ainsi une vitro-céramique est un verre pourvu d'une structure cristalline ; sa conductivité est plus élevée que celle du verre amorphe). On notera à ce propos la conductivité du diamant :  $2300 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$  à 300 K. La porosité fait diminuer la conductivité (milieu poreux équivalent). Pour les composés organiques, la présence d'halogène fait baisser  $\lambda$ .

Pour les **liquides**, la conductivité est nettement plus faible que pour les solides (à l'exception du Mercure qui est métallique). Ainsi, à la température de solidification le rapport des conductivités solides sur liquide est de l'ordre de 1,3. **L'eau a une conductivité voisine de  $1 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$ .**

<sup>9</sup> Dans ce cas la conductivité dépend aussi de l'humidité de l'air.

<sup>10</sup> Voir Carslaw et Jaeger donné en bibliographie



Pour les **gaz**, la conductivité est très faible (à même température et basse pression, 10 à 100 fois plus faible que celle du liquide). Ce sont donc de très bons isolants (le vide étant l'isolant absolu). C'est pourquoi beaucoup d'isolants sont constitués de gaz enfermé dans des alvéoles. C'est le cas des mousses isolantes (polyuréthane, polystyrène expansé). Il faut que les alvéoles ou compartiments soient de faible dimension, sinon il se crée des mouvements de convection qui "conduisent" la chaleur.

La conductivité des gaz croît avec la température (agitation moléculaire plus importante). Elle ne dépend quasiment pas de la pression.

#### Ordre de grandeur de la conductivité à température ambiante

Métaux solides : de 10 à 400 W.m<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup>

Solides non métalliques : de 1 à 10 W.m<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup>

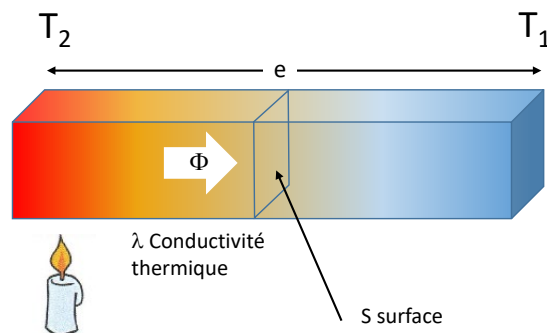
Liquides : de 0,1 à 1 W.m<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup>

Gaz : de 0,01 à 0,03 W.m<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup>

Isolants : de 0,01 à 0,05 W.m<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup>

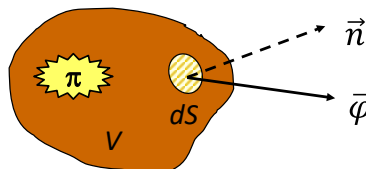
Dans le cas d'un transfert conductif dans un solide de conductivité isotrope selon une dimension x, le flux conductif à travers une surface S isotherme,  $\Phi$  en W, s'écrit :

$$\Phi = -\lambda \cdot S \cdot \frac{dT}{dx}$$



### 3.1.2 Equation de la chaleur

Le principe de la conservation de l'énergie (Premier principe en thermodynamique) exprime que l'énergie totale ne peut être ni créée ni détruite. Elle ne peut être que transformée d'une forme à une autre ou transférée d'un endroit à un autre.



En ce qui concerne les transferts thermiques, on sait qu'un volume peut recevoir ou perdre des flux à travers sa frontière extérieure, et qu'il peut être le siège d'une production volumique de puissance. On peut alors écrire :

Variation de l'énergie totale contenue dans le volume = Puissance générée par les sources internes + Puissance échangée à la frontière extérieure du volume avec l'environnement

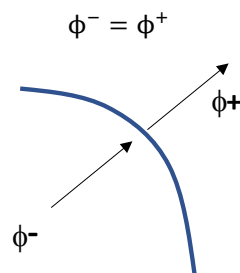
$$\iiint_V \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dV = \iiint_V \pi dV - \iint_S \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

$\pi$  est la production de chaleur dans la masse en  $\text{W}\cdot\text{m}^{-3}$ . Par exemple, il peut s'agir par exemple d'une réaction chimique, d'une réaction nucléaire, de l'effet Joule.

Quelle que soit la taille du volume de contrôle, quelle que soit la complexité des phénomènes qui s'y produisent :

- on doit compter les flux gagnés et perdus uniquement sur la frontière extérieure du volume, autrement dit les flux échangés à l'intérieur du volume ne comptent pas ;
- la somme des puissances générées dans le volume doit tenir compte de toutes les dissipations internes.

Par ailleurs, si l'on considère une surface immatérielle séparant deux domaines de l'espace, la conservation de l'énergie indique qu'à tout instant, l'énergie arrivant d'un côté de la surface va se retrouver de l'autre côté, sans gain ni perte. Au niveau des transferts de chaleur, ceci signifie que le flux de chaleur traversant une surface est exactement le même des deux côtés, amont et aval (par rapport à la normale) :



### Conservation de l'énergie sur une interface

En appliquant le théorème de la divergence,

$$\iiint_V \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dV = \iiint_V \pi dV - \iiint_V \text{div}(\vec{\varphi}) \cdot dV$$

En utilisant la loi de Fourier, on obtient une relation locale (**équation de la chaleur**)

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \pi + \text{div}(\lambda \cdot \text{grad}(T))$$

L'équation de la chaleur avec une **conductivité thermique constante** devient :

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \pi + \lambda \cdot \Delta T$$

L'équation de la chaleur avec une **conductivité thermique constante et sans production interne** se réduit à :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \Delta T$$

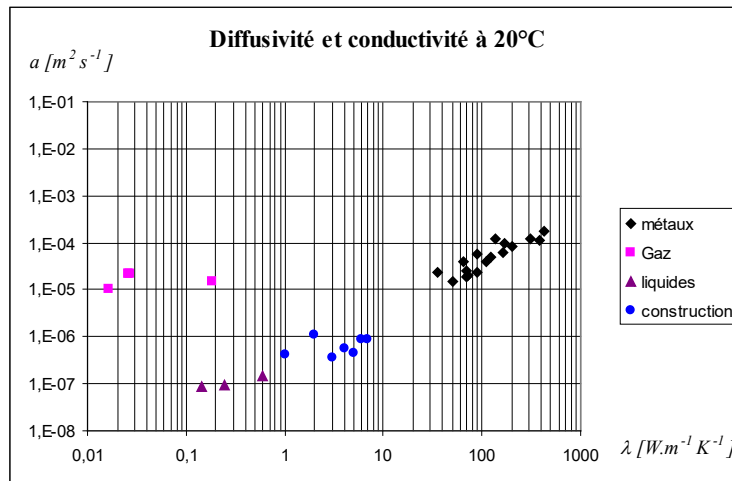
avec  **$a$  la diffusivité thermique** en  $\text{m}^2/\text{s}$

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}$$

**$a$**  mesure la vitesse de diffusion de la chaleur. Plus  **$a$**  est grand, plus les variations de températures seront rapides.

### Ordre de grandeur de la diffusivité $a$

$10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  pour les gaz,  
 $10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  pour les liquides,  
 $10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  pour les solides.



Contrairement à la conductivité, les valeurs sont relativement proches ; en particulier quand on compare les gaz et les métaux. Ceci est dû au fait que **de fortes valeurs de  $\lambda$  s'accompagnent de fortes valeurs de  $\rho$  et inversement.**

#### Rappel : expressions du Laplacien

Coordonnées cartésiennes :  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

Coordonnées cylindriques :  $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$  (en annulant le terme de variation en  $\theta$ )

Coordonnées sphériques :  $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r}$  (en annulant les termes de variation en  $\theta$  et en  $\varphi$ )

### 3.1.3 Conditions aux limites

L'équation de la chaleur écrite ci-dessus est valable en tout point à l'intérieur du domaine. Mais le comportement du système thermique dépend également de son environnement externe.

Résoudre un problème de conduction consiste à trouver, parmi les solutions de l'équation de la chaleur celle qui satisfait à une distribution initiale  $T_0(x,y,z,0)$  et à certaines conditions à la frontière  $\Sigma$ . Sur cette frontière, le milieu échange de la chaleur par conduction, convection, rayonnement et changement d'état, et il est nécessaire d'explicitier les conditions aux limites : soit la température à la frontière est connue (i. e. imposée par l'environnement du système), soit elle ne l'est pas, auquel cas on écrit une équation qui traduit la conservation de l'énergie sur la frontière (continuité du flux).

#### Condition de température (ou condition de Dirichlet)

on connaît  $T$  en chaque point de  $\Sigma$  et à tout instant :  $T(\Sigma, t) = T_s(t)$

*Cas particulier* :  $T(\Sigma, t) = cste$  (ne dépend pas de  $M$ , la température est la même sur toute la surface) ; c'est le cas s'il y a contact parfait entre le milieu et l'extérieur. La frontière  $\Sigma$  est alors une surface isotherme. C'est pratiquement ce qui se passe quand un solide est immergé dans un liquide très agité à température constante ou en changement de phase.

#### Condition de flux (ou condition de Neumann)

On connaît la densité de flux en chaque point de  $\Sigma$  :  $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \varphi_s$

*Cas particulier* :  $\varphi_s = 0$  ; on dit que la frontière est **parfaitement calorifugée**.

Dans le cas où la frontière  $\Sigma$  échange de la chaleur par convection avec un environnement à la température  $T_e$ , on parle de condition de **Newton**. Celle-ci doit traduire l'égalité des flux conductif et convectif. Elle s'écrit :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h(T_e - T_\Sigma)$$

$h$  est le coefficient d'échange convectif, il s'exprime en  $[W.m^{-2}.K^{-1}]$ .

La condition de Newton est à peu près réalisée lorsque le corps étudié est baigné par un fluide dont la température moyenne est égale à  $T_e$ . L'étude de la convection a pour objet de déterminer  $h$  en fonction des caractéristiques du fluide et de son mouvement. A noter que  $h$  peut lui-même dépendre de la température.

A la frontière, on peut avoir aussi une condition de flux radiatif avec les surfaces environnantes. Dans ce cas, on ajoutera à la condition ci-dessus (de Newton), un terme de transfert radiatif.

### Mise en contact de deux solides

*Contact parfait* : il y a égalité des températures et égalité des flux

$$\begin{aligned} -\lambda_1 \cdot \vec{\nabla} T_1 &= -\lambda_2 \cdot \vec{\nabla} T_2 \\ T_1 &= T_2 \end{aligned}$$

*Contact imparfait*

Les deux surfaces ne sont pas strictement en contact, il existe une "résistance" de contact<sup>11</sup> due à l'air présent entre les deux milieux<sup>12</sup>. On caractérise cette résistance thermique de contact par la valeur  $R_c$  [ $m^2.K.W^{-1}$ ]. Les températures ne sont plus égales.

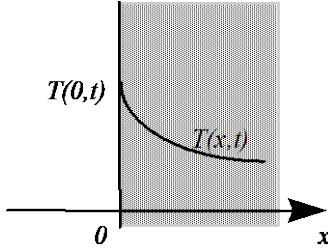
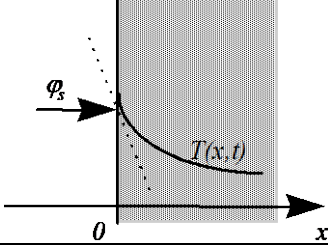
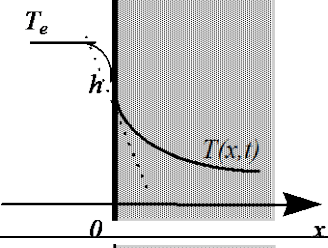
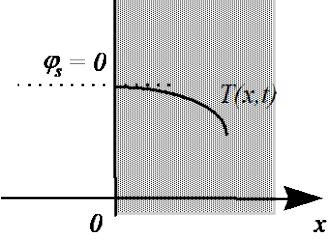
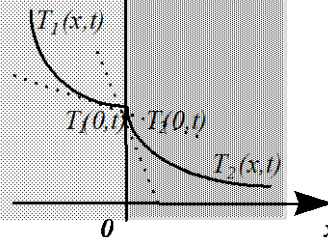
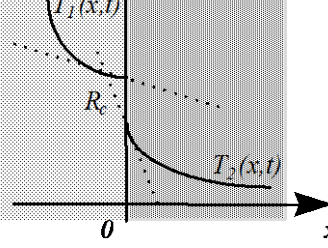
$$\begin{aligned} -\lambda_1 \cdot \vec{\nabla} T_1 &= -\lambda_2 \cdot \vec{\nabla} T_2 \\ \varphi &= \frac{1}{R_c} \cdot (T_1 - T_2) \\ \varphi &= -\lambda_1 \cdot \vec{\nabla} T_1 \cdot \vec{n}_1 \end{aligned}$$

Une résistance de contact dépend des deux matériaux en contact (les points de contact sont en nombre limité et induisent une constriction des lignes de flux) mais aussi de la pression exercée pour assurer un meilleur contact. Cette résistance peut être dominante surtout dans le cas de grande conductivité comme des métaux. Pour donner un **ordre de grandeur**, on peut retenir  $R_c = 10^{-4} m^2.K.W^{-1}$ , pour deux plaques d'aluminium. La surface de référence est celle apparente des deux solides en contact. L'état de contact peut être amélioré en insérant une pâte conductrice ou un métal plus tendre à l'interface.

---

<sup>11</sup> On introduira par la suite l'analogie électrique qui justifiera l'expression "résistance"

<sup>12</sup> Un état de surface est défini par sa rugosité, hauteur moyenne des aspérités.

RECAPITULATIF DES CONDITIONS LIMITES DANS LE CAS UNIDIRECTIONNEL		
<b>Condition de température</b>	$T(0, t) = T_s(t)$	
<b>Condition de flux</b>	$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=0} = \varphi_s$	
<b>Condition de Newton</b> $T_e$ température de mélange du fluide (voir chapitre 4)	$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=0} = h \cdot (T_e - T(0, t))$	
<b>Flux nul</b> Cette condition est utilisée si la paroi est calorifugée ou quand il y a des symétries qui imposent un flux nul. Dans ce cas, la continuité des températures est une condition redondante.	$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=0} = 0$	
<b>Contact parfait</b>	$\lambda_1 \cdot \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big _{x=0} = \lambda_2 \cdot \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big _{x=0}$ $T_1 = T_2$	
<b>Contact imparfait</b>	$\lambda_1 \cdot \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big _{x=0} = \lambda_2 \cdot \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big _{x=0}$ $-\lambda_1 \cdot \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big _{x=0} = \frac{1}{R_c} \cdot (T_1 - T_2)$	

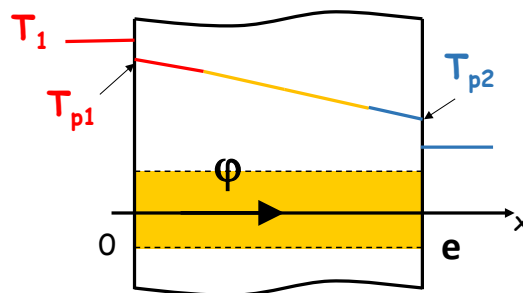
### 3.1.4 Conduction monodimensionnelle en régime permanent et sans production interne de chaleur

On dit que le régime est permanent si, en tout point, la température est indépendante du temps. C'est la limite vers laquelle tend toute distribution de température lorsque les conditions extérieures sont-elles mêmes indépendantes du temps. En théorie, l'établissement du régime permanent exige un délai infini. Dans la pratique, compte tenu de l'imperfection des moyens de mesure, les écarts avec le régime permanent cessent d'être observables après un certain délai, très variable suivant les cas.

En faisant l'hypothèse que  $\lambda$  est indépendant de la température, et en l'absence de production interne, l'équation de la chaleur se réduit à :

$$\Delta T = 0$$

#### Cas d'un Mur plan



Dans le cas d'un mur plan (**monodirectionnel**), l'équation de la chaleur devient :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

La résolution de l'équation différentielle ci-dessus donne :

$$T(x) = a \cdot x + b$$

Examinons maintenant deux types de conditions aux limites :

- **CONDITION DE TEMPERATURE** : les températures extrêmes, c-a-d sur les parois intérieure,  $T_{p1}$ , et extérieure,  $T_{p2}$ , sont connues. En prenant l'origine des abscisses sur la paroi intérieur P1, il vient :

$$T(x) = \frac{T_{p2} - T_{p1}}{e} x + T_{p1}$$

La densité de flux  $\phi(x)$  à travers une surface  $S$  parallèle aux frontières est **indépendante de x**. **Le profil de température est linéaire.**

$$\phi = - \iint_S \lambda \cdot \vec{\nabla} T \cdot d\vec{S}$$

$$\phi = \lambda \cdot S \cdot \frac{T_{p1} - T_{p2}}{e}$$

- **CONDITION DE NEWTON** : les températures des milieux ambiants de chaque côté du mur sont connues,  $T_1$  et  $T_2$ , ainsi que les coefficients d'échange convectif,  $h_1$  et  $h_2$ , on peut écrire par principe de conservation de l'énergie sur une interface :

$$\phi = h_1 \cdot S \cdot (T_1 - T_{p1}) = \lambda \cdot S \cdot \frac{T_{p1} - T_{p2}}{e} = h_2 \cdot S \cdot (T_{p2} - T_2)$$

Dans l'égalité ci-dessus, on vérifie que chaque membre est de signe positif.

On peut ensuite écrire  $T_1 - T_2$  comme suit,

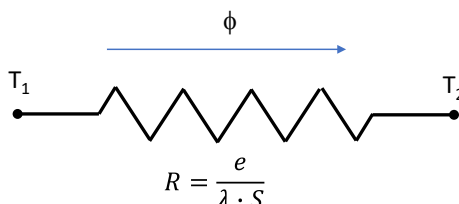
$$T_1 - T_2 = (T_1 - T_{p1}) + (T_{p1} - T_{p2}) + (T_{p2} - T_2)$$

D'où

$$T_1 - T_2 = \phi \left[ \frac{1}{h_1 \cdot S} + \frac{e}{\lambda \cdot S} + \frac{1}{h_2 \cdot S} \right]$$

On peut calculer ensuite les températures de paroi grâce aux expressions du flux d'énergie échangé par convection sur chaque paroi.

## Analogie électrique



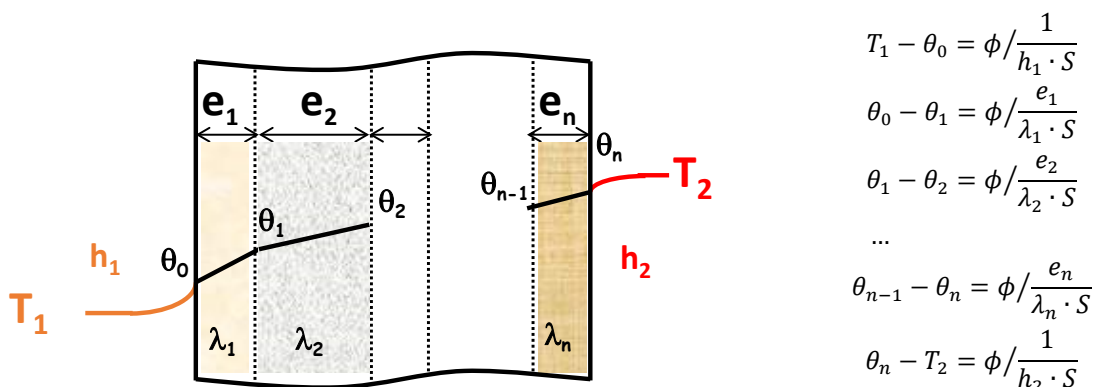
L'équation du flux au travers d'une paroi peut également se mettre sous la forme  $T_1 - T_2 = \phi / \frac{e}{\lambda \cdot S}$ , cette relation est analogue à la loi d'Ohm en électricité laquelle exprime qu'une différence de potentiel électrique est égale à l'intensité du courant multipliée par résistance électrique ; En thermique, la température est analogue à la tension électrique, le flux thermique à l'intensité et la résistance thermique à la résistance électrique :

$$R_{th} = \frac{T_{p1} - T_{p2}}{\phi} = \frac{e}{\lambda \cdot S}$$

Avec  $R_{th}$  la résistance thermique en [K/W]. La conductivité thermique,  $\lambda$ , est analogue à la conductivité électrique.

## Mur multi-couches – Résistances en série

Un mur soumis aux conditions de Newton se comporte comme un ensemble de résistances en série. Prenons comme exemple un mur plan constitué de  $n$  couches de matériaux différents, d'épaisseur  $e_n$  et de conductivité thermique  $\lambda_n$  comme montré ci-dessous.



La somme de toutes les équations précédentes donne le résultat suivant :

$$T_1 - T_2 = \phi \left[ \frac{1}{h_1 \cdot S} + \frac{e_1}{\lambda_1 \cdot S} + \dots + \frac{e_n}{\lambda_n \cdot S} + \frac{1}{h_2 \cdot S} \right]$$

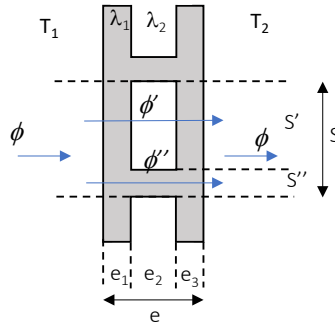
On peut définir une résistance globale,  $R_{tot}$ , qui est la somme des **résistances en série**.

$$R_{tot} = \frac{1}{h_1 S} + \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{\lambda_i S} + \frac{1}{h_2 S}$$

$$T_1 - T_2 = \phi \cdot R_{th}$$

## Mur creux – Résistance en parallèle

C'est le cas où les parois ne sont pas homogènes. Considérons un mur de largeur  $e$  constitué d'agglomérés creux (voir figure ci-dessous).



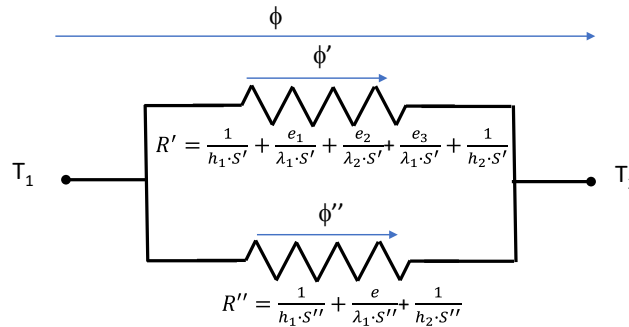
Le flux  $\phi$  arrivant sur la première couche d'aggloméré de surface  $S$ , arrive à la frontière de la deuxième couche où il se partage en deux parties,  $\phi'$  et  $\phi''$ . Par conservation, on a :

$$\phi = \phi' + \phi''$$

Arrivant à la frontière de la troisième couche, les flux vont se rejoindre de nouveau.

$$\phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{tot}} = \frac{T_1 - T_2}{R'} + \frac{T_1 - T_2}{R''}$$

Avec  $R'$  la résistance thermique dans la section  $S'$  et  $R''$  la résistance thermique dans la section  $S''$ . On peut traduire la section globale  $S$  du mur composite par un schéma électrique suivant :



Dans le cas de murs creux, on peut écrire la résistance globale du mur comme des résistances en parallèle :

$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}$$

## Prise en compte des transferts radiatifs

Dans les échanges thermiques à l'interface entre une paroi et milieu environnant, seule la convection a été considérée dans les exemples précédents (mur multicouches et mur creux). Cependant, dans la plupart des cas applications, on ne peut négliger le transfert radiatif qui s'ajoute au transfert convectif. Dans le cas où l'environnement est un gaz qui échange par convection naturelle avec la paroi solide, le transfert convectif est assez faible et est du même ordre de grandeur que le transfert radiatif.

Le flux net échangé entre la paroi à la température  $T_{paroi}$  et l'environnement à la température  $T_{env}$ , peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi_{rad} = \varepsilon_{paroi} \cdot \sigma \cdot S \cdot (T_{paroi}^4 - T_{env}^4)$$

Que l'on peut linéariser sous la forme

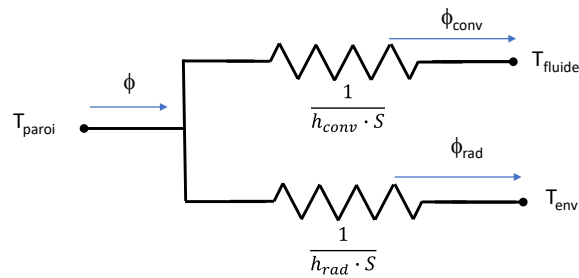
$$\Phi_{rad} = h_{rad} \cdot S \cdot (T_{paroi} - T_{env})$$

avec

$$h_{rad} = \varepsilon_{paroi} \cdot \sigma \cdot (T_{paroi}^2 + T_{env}^2)(T_{paroi} + T_{env})$$



Le principe de la conservation d'énergie à l'interface permet d'aboutir au schéma électrique suivant :

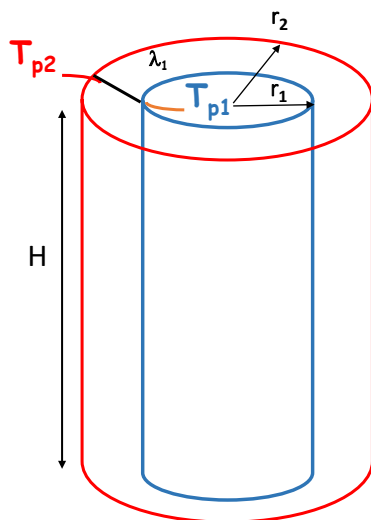


Le flux conductif dans le solide à la paroi se répartit à l'interface avec le milieu environnant entre un flux radiatif et un flux convectif.

Prenons par exemple une paroi d'émissivité  $\varepsilon = 0,9$  et une température de paroi à  $40^\circ\text{C}$  qui rayonne dans un environnement à  $20^\circ\text{C}$ . Le coefficient d'échange radiatif,  $h_{rad} = 5,7 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}$  à comparer avec les coefficients d'échange en convection naturelle pur les gaz qui sont de l'ordre de 2 à  $25 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}$ .

### Cas d'une géométrie cylindrique

Soit un tube cylindrique de rayons interne et externe  $r_1$  et  $r_2$ , et de hauteur  $H$  suffisante pour que l'on puisse négliger les effets d'extrémité (ou calorifugé à ses deux extrémités). On exprime le flux thermique dans le tube en coordonnées cylindriques :



$$\phi = - \iint_S \lambda \cdot \frac{dT}{dr} \cdot r d\theta \cdot dz$$

L'intégration sur toutes les directions  $\theta$   $[0-2\pi]$  et sur la hauteur  $H$  donne

$$\phi(r) = -\lambda \cdot \frac{dT}{dr} \cdot 2\pi \cdot H \cdot r$$

Par principe de conservation d'énergie,

$$\phi(r) = \phi = cste \quad \forall r[r_1, r_2]$$

L'intégration sur  $[r_1, r_2]$  donne

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -\frac{\lambda \cdot 2\pi \cdot H}{\phi} \int_{T_{p1}}^{T_{p2}} dT$$

L'intégrale entre 1 et 2 donne

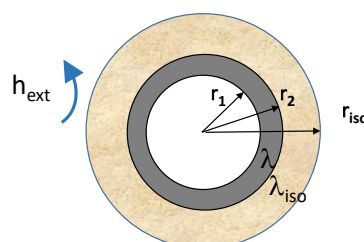
$$\Phi = 2\pi \cdot \lambda \cdot H \cdot \frac{T_{p1} - T_{p2}}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

La résistance thermique d'un tube cylindrique s'écrit :

$$R_{th} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi \cdot \lambda \cdot H}$$

### Rayon critique

Est-il intéressant d'isoler un tube ?



La résistance thermique globale s'écrit

$$R_{th} = \frac{1}{h_{int} \cdot 2\pi \cdot H \cdot r_1} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi \cdot \lambda \cdot H} + \frac{\ln\left(\frac{r_{iso}}{r_2}\right)}{2\pi \cdot \lambda_{iso} \cdot H} + \frac{1}{h_{ext} \cdot 2\pi \cdot H \cdot r_{iso}}$$

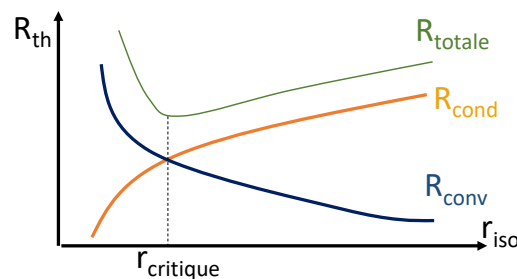
Si on dérive la résistance globale par rapport au rayon de l'isolant, il vient

$$2\pi \cdot H \cdot \frac{\partial R_{th}}{\partial r_{iso}} = \frac{1}{\lambda_{iso} \cdot r_{iso}} - \frac{1}{h_{ext} \cdot r_{iso}^2}$$

La dérivée s'annule si

$$r_{iso} = \frac{\lambda_{iso}}{h_{ext}} = r_{critique}$$

Il existe donc une valeur de  $r_{iso}$  qui minimise la résistance globale  $R_{th}$ . C'est le rayon critique. Comme on peut le voir sur la figure ci-dessous, augmenter l'épaisseur d'isolant permet bien d'augmenter la résistance de conduction. En revanche, augmenter l'épaisseur d'isolant induit une augmentation de la surface d'échange convectif entre le milieu extérieur au tube et la paroi externe du tube et en conséquence la résistance de convection tend à diminuer.



Evolution de la résistance thermique d'un tube isolé en fonction de l'épaisseur d'isolant

#### Ordre de grandeur

Les isolants courants ont des conductivités de l'ordre de  $0,03$  à  $0,3 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$ . Si le tube est en relation avec l'atmosphère par la seule convection naturelle,  $h'$  est de l'ordre de  $10 \text{ W.m}^{-2}\text{K}^{-1}$ . **Les rayons critiques s'échelonnent donc entre 10 et 30 mm.** Deux cas peuvent se produire :

- si le rayon extérieur  $r_2$  de la conduite est supérieur au rayon critique  $r_c$ , la courbe de la résistance en fonction de  $r_{iso}$  est constamment croissante. En effet seule la partie à droite du rayon critique est à prendre en considération puisque  $r_{iso}$  est forcément supérieur à  $r_2$ . L'isolation est donc intéressante, et le flux est d'autant plus réduit que l'épaisseur est plus grande.
- si le rayon extérieur a une valeur  $r_2$  inférieure au rayon critique  $r_c$ , l'isolant diminue d'abord la résistance. Ce n'est qu'à partir d'un rayon  $r'$  que la résistance redevient égale à ce qu'elle était sans isolant. Il est nuisible de calorifuger davantage des tubes de petit diamètre.

Le problème se pose de même lorsqu'on veut accroître la puissance échangée. Ainsi, dans le cas des conducteurs électriques qui sont gainés de plastique pour des raisons de sécurité, la gaine accroît aussi le refroidissement.

## 3.2 Conduction en régime variable

### 3.2.1 Problème général

Sans changement de phase, l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \pi + \text{div}(\lambda \cdot \text{grad}(T))$$

Pour déterminer l'évolution au cours du temps, il faut associer à cette équation des conditions aux limites du volume étudié et une condition initiale de température  $T_0$  en tout point du volume étudié.

Dans le cas où **conductivité thermique est constante** dans la gamme de température considérée, l'équation de la chaleur se simplifie sous la forme :

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\pi}{\lambda} + \Delta T$$

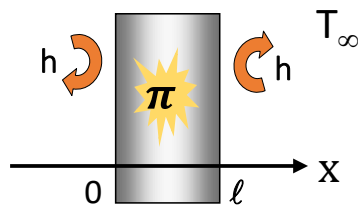
avec  $a$  la **diffusivité thermique** en  $\text{m}^2/\text{s}$

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}$$

Soit une plaque d'épaisseur  $\ell$  et de grande surface si bien que le problème peut être considéré comme **unidirectionnel**. Dans ce cas la variation de  $T$  n'est sensible que dans le sens de l'épaisseur (axe  $x$ ). L'équation de chaleur devient :

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\pi}{\lambda} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Envisageons le cas où les conditions aux limites et initiale sont :



Deux conditions de Newton à chaque extrémité de la plaque

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} &= h \cdot (T(x=0) - T_\infty) \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\ell} &= h \cdot (T(x=\ell) - T_\infty) \end{aligned}$$

Et  $T(x, t=0) = T_0$  pour tout  $x$

On pose

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \quad \text{et} \quad x^* = \frac{x}{\ell} \quad \text{et} \quad \pi^* = \frac{\pi}{\frac{\lambda}{\ell^2} (T_0 - T_\infty)}$$

Et respectivement les nombres adimensionnels de Fourier (Fo) et de Biot (Bi) :

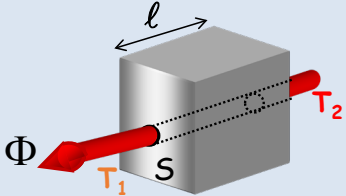
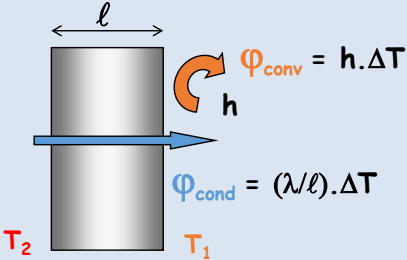
$$Fo = \frac{a \cdot t}{\ell^2}, \quad Bi = \frac{h \cdot \ell}{\lambda}$$

Avec ces variables<sup>13</sup>, l'équation de la chaleur, ses 2 conditions limites et sa condition initiale s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta^*}{\partial Fo} &= \pi^* + \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=0} &= Bi \cdot \theta^*(0, t) \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=1} &= -Bi \cdot \theta^*(1, t) \\ \theta^*(x^*, t=0) &= 1 \end{aligned}$$

<sup>13</sup> On peut aussi choisir  $\theta^* = \frac{T-T_0}{T_\infty-T_0}$ , faire attention si l'on compare différentes références bibliographiques

## Nombres adimensionnels utiles en conduction

Nombre de Fourier	
	$Fo = \frac{\text{quantité de chaleur traversant pendant } t}{\text{quantité de chaleur accumulée}}$ $Fo = \frac{\left(\frac{\lambda}{\ell}\right) \cdot S \cdot \Delta T \cdot t}{(\rho \cdot c) \cdot \ell \cdot S \cdot \Delta T}$ $Fo = \frac{a \cdot t}{\ell^2}$ <p>Le nombre de Fourier est une mesure adimensionnée du temps.</p>
Nombre de Biot	
	$Bi = \frac{\varphi_{conv}}{\varphi_{cond}} = \frac{h \cdot \Delta T}{\left(\frac{\lambda}{\ell}\right) \cdot \Delta T}$ $Bi = \frac{h \cdot \ell}{\lambda}$ <p>Le nombre de Biot est une mesure de l'épaisseur thermique du domaine. Il représente le rapport entre la résistance interne et la résistance externe au volume étudié.</p> <p>Si le nombre de <b>Biot est inférieur à 0,1</b>, la résistance de convection est le facteur limitant le transfert thermique dans le volume étudié. Dans ce cas, on peut réduire la dimension du problème et considérer que la température à le temps de s'uniformiser dans le volume étudié suivant la dimension <math>\ell</math>. On dit que le milieu est thermiquement mince suivant la dimension <math>\ell</math>.</p> <p>Pour évaluer si le milieu est thermiquement mince, la longueur <math>\ell</math> considérée sera <b>la dimension caractéristique du volume étudié</b>. Par exemple, on prendra le rayon R pour une sphère ou un cylindre, <math>e/2</math> dans le cas d'un mur de grande surface et d'épaisseur <math>e</math> sous des conditions aux limites identiques sur les deux faces du mur (condition de symétrie)</p>

### 3.2.2 Méthodes de résolution du problème

Parmi l'ensemble des solutions de l'équation de la chaleur, il s'agit de trouver celle qui satisfait aux conditions imposées aux frontières, à savoir :

- pour  $t = 0$ ,  $T(x, y, z, 0)$  doit être identique à  $T_0(x, y, z)$  qui représente la distribution initiale des températures ;
- pour  $t > 0$ , et en tout point  $(x_\Sigma, y_\Sigma, z_\Sigma)$  de la frontière  $\Sigma$ , on doit avoir :

$$T_\Sigma = T_\Sigma(x_\Sigma, y_\Sigma, z_\Sigma, t) \quad \text{si la température superficielle est imposée}$$

$$-\lambda \frac{dT}{dn} \Big|_\Sigma = h \cdot (T_\infty - T(x_\Sigma, y_\Sigma, z_\Sigma, t)) \quad \text{si on impose une condition de Newton}$$

Dans le dernier cas,  $T_\infty$ , température du milieu ambiant, est en général une constante. Par ailleurs, si c'est la température superficielle qui est imposée, la fonction  $T_\Sigma$  se réduit dans la plupart des cas à une fonction  $T_\Sigma(t)$ , sinon à une constante  $T_\Sigma$ .

La conjonction de ces conditions rend le problème général insoluble analytiquement. Toutefois, des cas particuliers fort importants présentent des symétries telles que la solution peut être trouvée : ce sont ceux qui se ramènent à une seule variable d'espace, et quelques autres tels que le parallélépipède rectangle. Envisageons différentes méthodes de résolution analytiques et numériques.

## Méthode de superposition

Supposons que l'on ait trouvé une fonction  $T_1$  vérifiant :

$$\begin{aligned} T_1(x, y, z, 0) &= T_0(x, y, z) \\ T_1(x_\Sigma, y_\Sigma, z_\Sigma, t) &= 0 \end{aligned} \quad \text{pour } t > 0$$

et une fonction  $T_2$  vérifiant de son côté

$$\begin{aligned} T_2(x, y, z, 0) &= 0 \\ T_2(x_\Sigma, y_\Sigma, z_\Sigma, t) &= T_p(x_\Sigma, y_\Sigma, z_\Sigma, t) \end{aligned} \quad \text{pour } t > 0$$

La somme  $T_1 + T_2$  est solution du problème général où la température initiale  $T_0(x, y, z)$  est donnée, et la température superficielle  $T_\Sigma$  imposée.

Pour trouver  $T_2$  dans le cas quasi-général où  $T_\Sigma$  se réduit à une fonction  $T_\Sigma(t)$ , on peut résoudre un problème plus simple : trouver la solution particulière  $T_a(x, y, z, t)$  qui donne une température initiale nulle, et une température superficielle constante (que l'on peut prendre égale à 1 en changeant l'échelle des températures) :

$$\begin{aligned} T_a(x, y, z, 0) &= 0 \\ T_a(x_\Sigma, y_\Sigma, z_\Sigma, t) &= 1 \end{aligned} \quad \text{pour } t > 0$$

Le théorème de Duhamel permet de déterminer la solution à partir de la température superficielle  $T_\Sigma(t)$  :

$$T_2 = \int_0^t T_\Sigma(\theta) \frac{\partial}{\partial t} T_a(x, y, z, t - \theta) d\theta$$

Si les conditions superficielles sont celles de Newton, un raisonnement calqué sur le précédent amène à des conclusions analogues.

Pour trouver les fonctions  $T_1$  et  $T_2$ , la méthode diffère suivant que le problème est unidirectionnel, à symétrie axiale, ou sphérique. On cherche souvent  $T$  sous la forme d'une superposition de fonctions élémentaires  $T_n$  dont chacune vérifie les conditions aux frontières, assorties de coefficients  $\zeta_n$  pour reconstituer la condition initiale. Pratiquement,  $T$  s'obtient par des séries infinies de fonctions (trigonométriques, de Bessel, etc...), on en verra des exemples par la suite.

## Transformation de Laplace

La transformation de Laplace, appliquée sur la variable  $t$ , permet de transformer l'équation aux dérivées partielles en  $(x, y, z, t)$  en une équation à 3 variables seulement  $(x, y, z)$ , dans laquelle intervient comme paramètre la variable  $p$  de Laplace<sup>14</sup>. Si le problème ne dépend que d'une variable d'espace, on obtient une équation différentielle et il est en général facile d'en déduire la fonction  $L(T)$  transformée de  $T$ . Mais il est moins simple de remonter à la fonction génératrice  $T$ , sauf si celle-ci figure dans le catalogue des transformées de Laplace.

---

<sup>14</sup>  $\bar{T}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot T(t) \cdot dt$  donc  $\frac{\partial T}{\partial t}$  se transforme en  $p \cdot \bar{T}(p) - T(0)$  et  $\frac{\partial^n T}{\partial x^n}$  en  $\frac{d^n \bar{T}}{dx^n}$

En appliquant la transformation de Laplace à l'équation de la chaleur unidirectionnelle sans production interne avec une condition initiale  $T(0)$  nulle, on obtient :

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} = \frac{p}{a} \bar{T}$$

$\bar{T}$  représentant la transformée de Laplace de  $T$ ;  $p$  étant la variable de Laplace. Sa solution est :

$$\bar{T} = A \cdot e^{-\alpha x} + B \cdot e^{\alpha x}$$

Avec  $\alpha^2 = \frac{p}{a}$

Dans le cas où les conditions limites sont :

$$T(x = 0, t) = 1 \quad \text{soit} \quad \bar{T}(x = 0) = \frac{1}{p}$$

$$T(x = \infty, t) = 0 \quad \text{soit} \quad \bar{T}(x = \infty) = 0$$

On obtient  $\bar{T} = \frac{e^{-\alpha x}}{p}$ . On revient à la solution en température  $T(x, t)$  à partir des transformées de Laplace inverse. Ainsi dans ce cas,  $T = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot t}}\right)$

Tableau : Transformées de Laplace usuelles	
$\bar{T}(p)$	$T(T)$
$\frac{1}{p}$	1
$e^{-\alpha x}$ avec $\alpha^2 = \frac{p}{a}$	$\frac{x}{2\sqrt{a \cdot \pi \cdot t^3}} e^{-x^2/4 \cdot a \cdot t}$
$\frac{e^{-\alpha x}}{p}$ avec $\alpha^2 = \frac{p}{a}$	$\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot t}}\right)$
$\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha \cdot p}$ avec $\alpha^2 = \frac{p}{a}$	$2 \sqrt{\frac{a \cdot t}{\pi}} e^{-x^2/4 \cdot a \cdot t} - x \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot t}}\right)$
Des logiciels de calcul formel comme Maple® ou Mathematica® donnent directement les transformées des fonctions usuelles.	

## Méthodes numériques

Dès que la géométrie du système étudié est relativement complexe, on résout le problème thermique par des méthodes numériques. Celles-ci permettent d'accéder avec plus ou moins de précision au champ de température ou aux flux échangés à travers différentes surfaces. Ces méthodes consistent en une discrétisation de l'espace et du temps en régime variable (uniquement de l'espace en régime permanent).

Les méthodes de discrétisation de l'espace sont les suivantes :

- **Différences finies** : Cette méthode peut être mise en œuvre "à la main" ou avec utilisation d'un tableur et fournit donc une bonne première approche pour des problèmes qui n'ont pas de solution analytique. Cette approximation peut éviter le recours à un maillage dont l'apprentissage est relativement long.
- **Volumes finis** : on considère des volumes élémentaires à température uniforme sur lesquels on peut écrire des bilans thermiques simples. Les volumes peuvent être de formes très diverses et on approche les gradients de température à partir des différences de température entre mailles.
- **Éléments finis** ; la température  $T$  dans un élément délimité par des nœuds s'écrit comme somme pondérée des températures aux nœuds  $T_i$  :

$$T = \sum_{i=1}^n N_i \cdot T_i$$

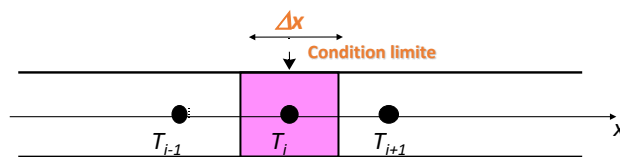
$N$  est appelée fonction d'interpolation. Elle est déterminée de manière à annuler le résidu du bilan thermique sur les nœuds. Cette méthode est mise en œuvre à l'aide de progiciels spécialisés comme ABAQUS, ANSYS, COMSOL ou SYRTHES (<https://www.syrthes-software.org/>).

Dans le cadre de ce cours, nous ne présenterons que la méthode des différences finies.

## Résolution par différences finies - problème unidirectionnel

Reprenons de l'équation de la chaleur sans production interne et pour un problème unidirectionnel :

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



On exprime le Laplacien en termes de différences finies. Pour cela, on utilise deux développements en série de Taylor :

$$T_{i+1} = T_i + \Delta x \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right]_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]_i + \frac{\Delta x^3}{6} \left[ \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right]_i + \theta(\Delta x^3)$$

$$T_{i-1} = T_i - \Delta x \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right]_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]_i - \frac{\Delta x^3}{6} \left[ \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right]_i + \theta(\Delta x^3)$$

La somme des deux équations donne :

$$T_{i+1} + T_{i-1} = 2 \cdot T_i + \Delta x^2 \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]_i + \theta(\Delta x^3)$$

Le Laplacien s'écrit donc :

$$\left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]_i \cong \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

La variation avec le temps de la température au nœud  $i$  s'écrit, en appelant  $\Delta t$  le pas de temps de discrétisation :

$$\left[ \frac{\partial T}{\partial t} \right]_i \cong \frac{T_i^{t+\Delta t} - T_i^t}{\Delta t}$$

L'équation de la chaleur sans production interne et en unidirectionnel s'écrit alors :

### Schéma explicite

$$\frac{T_i^{t+\Delta t} - T_i^t}{\Delta t} = a \cdot \frac{T_{i+1}^t - 2T_i^t + T_{i-1}^t}{(\Delta x)^2}$$

Dans un schéma explicite, les températures sont prises à l'instant  $t$  dans l'expression du Laplacien. Ainsi, quand on cherche  $T_i^{t+\Delta t}$ , elles sont **explicitement** connues. C'est le schéma le plus simple puisqu'il ne nécessite pas d'inversion de matrice pour sa résolution. Il pose en revanche des problèmes de stabilité. Si l'on réécrit l'équation précédente sous la forme :

$$T_i^{t+\Delta t} = \left( 1 - \frac{2a \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} \right) T_i^t + \frac{a \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} (T_{i+1}^t + T_{i-1}^t)$$

On peut montrer que le terme  $\left(1 - \frac{2a\Delta t}{(\Delta x)^2}\right)$  doit rester positif pour que le schéma ne diverge pas, c'est une condition suffisante liant  $\Delta t$  et  $\Delta x$ <sup>15</sup>.

### Schéma implicite

On peut aussi discrétiser en utilisant les températures du pas de temps suivant, on parle dans ce cas de **schéma implicite** (ces températures étant inconnues). L'équation devient alors :

$$\frac{T_i^{t+\Delta t} - T_i^t}{\Delta t} = a \cdot \frac{T_{i+1}^{t+\Delta t} - 2T_i^{t+\Delta t} + T_{i-1}^{t+\Delta t}}{(\Delta x)^2}$$

Le schéma implicite est inconditionnellement stable. Il est aussi possible de choisir des intermédiaires où une température  $T_i$  s'exprime comme :

$$T_i = \alpha \cdot T_i^t + (1 - \alpha) \cdot T_i^{t+\Delta t}$$

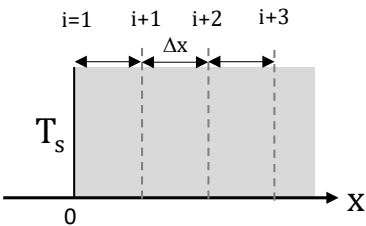
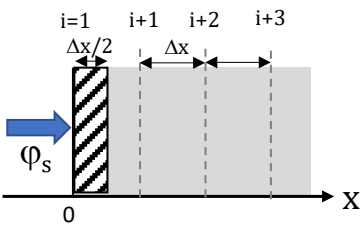
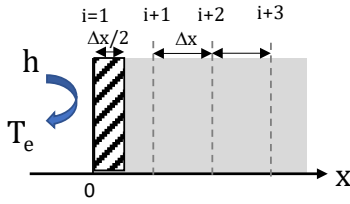
On parle dans ce cas de **schéma  $\alpha$  implicite**. Un cas particulier correspond à  $\alpha = 0,5$ . Cette méthode est appelée méthode de **Crank Nicholson** (également inconditionnellement stable).

$$T_i = \frac{T_i^t + T_i^{t+\Delta t}}{2}$$

Rappelons que pour résoudre le problème, il faut aussi :

une condition initiale  $T_0$  en tout point du volume

une condition aux limites du volume considéré

Discrétisation des conditions limites en mono directionnel		
Condition de température en $x = 0$	$T_1 = T_s$	
Condition de flux en $x = 0$	On écrit un bilan thermique sur la demi-maille. En régime permanent et sans production interne, il s'écrit $-\lambda \frac{T_2^t - T_1^t}{\Delta x} = \varphi_s$	
Condition de Newton en $x = 0$	On écrit un bilan thermique sur la demi-maille. En régime permanent et sans production interne, il s'écrit $-\lambda \frac{T_2^t - T_1^t}{\Delta x} = h(T_e - T_1^t)$	

<sup>15</sup> De manière plus générale, on trouvera dans l'ouvrage de *Incropera et DeWitt, Fundamentals of heat and mass transfer, Wiley, New York* des valeurs du critère de stabilité dans différentes configurations bi dimensionnelles.

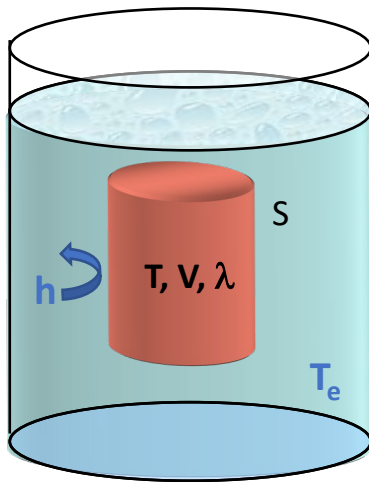


### 3.2.3 Exemples de résolution analytique de l'équation de la chaleur en régime variable

#### Milieu à température uniforme

Il existe des configurations pour lesquelles on peut faire l'hypothèse que la température est uniforme. Comme cela a déjà été évoqué, c'est le nombre de Biot qui est un bon indicateur. En effet, si la résistance principale est en surface (coefficient  $h$  très faible) la conduction va assurer un gradient de température faible au cœur du milieu étudié et important près de la surface. On fixe une limite pour un nombre de **Biot inférieur à 0,1**. Pour une pièce de volume  $V$  et de surface externe  $S$ , on peut définir une longueur caractéristique  $\ell$  comme  $\ell = V/S$  ce qui permet de calculer les nombres de Biot et de Fourier.

Prenons l'exemple de la trempe d'un morceau de métal initialement à température  $T_0$  et plongé dans un bain à température constante  $T_e$ .



Le bilan d'énergie sur ce solide si l'on suppose la température uniforme s'écrit (variation d'énergie = somme des flux entrants) :

$$\rho \cdot c \cdot V \cdot \frac{dT}{dt} = h \cdot S \cdot (T_e - T)$$

En posant  $\theta = T - T_e$  et  $\theta_0 = T_0 - T_e$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \exp\left(-\frac{h \cdot S}{\rho \cdot c \cdot V} \cdot t\right)$$

Cette expression peut être réécrite sous deux formes particulières :

en introduisant la constante de temps  $\tau = \frac{\rho \cdot c \cdot V}{h \cdot S}$  (homogène à un temps). L'équation précédente devient :

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

La température subit simplement une décroissance exponentielle. Ceci s'apparente à la décharge d'un condensateur ce qui permet de poursuivre l'analogie électrique :  $\tau = R \cdot C$

Grandeur électrique	Grandeur thermique
Résistance [ $\Omega$ ]	Résistance superficielle $\frac{1}{h \cdot S}$ [ $K \cdot W^{-1}$ ]
Capacité [F]	Capacité thermique $\rho \cdot c \cdot V$ [ $J \cdot K^{-1}$ ]

#### Exemple d'une trempe

Prenons l'exemple d'une pièce cylindrique en acier initialement à  $T_0 = 700^\circ C$  au cours d'une trempe dans de l'eau ou de l'huile à  $50^\circ C$ . On adopte pour l'acier à 1% de C la valeur de conductivité  $\lambda = 45 W \cdot m^{-1} K^{-1}$ , valeur à  $300^\circ C$  - température moyenne entre le début et la fin de la trempe). Les coefficients d'échange sont pour l'huile  $h_{huile} = 2000 W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$  et pour l'eau  $h_{eau} = 100 W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$ .

Pour déterminer si l'on peut faire l'hypothèse d'un corps à température uniforme, on calcule le nombre de Biot  $Bi = \frac{h \cdot R}{\lambda}$ . Le diamètre est de 0,1 m.

Pour l'**huile** :  $Bi = 2,2$

Pour l'**eau** :  $Bi = 0,11$

L'hypothèse de corps à température uniforme peut donc être faite pour la trempe à l'eau (la chaleur s'échappe facilement vers les bords puis est bloquée par le faible coefficient d'échange superficiel). Cela veut dire que le profil de température entre le cœur de la pièce et sa surface est très plat. Le système peut être suivi au cours du temps par l'équation simple  $\frac{\theta}{\theta_0} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$  avec  $\tau = \frac{\rho \cdot c \cdot V}{h \cdot S}$ .

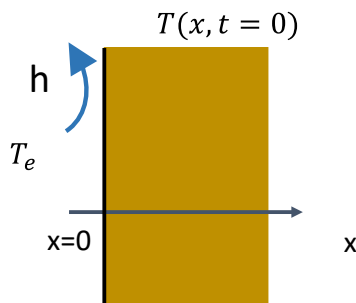
Dans le cas de l'huile, il faudra avoir recours à un modèle plus compliqué.

## Milieu semi infini

Un milieu semi-infini est une paroi d'épaisseur suffisamment grande pour que la perturbation appliquée sur une face ne soit pas ressentie par l'autre face. Un tel système peut représenter l'évolution d'un mur d'épaisseur finie pendant un temps suffisamment court pour que la perturbation créée sur une face n'ait pas atteint l'autre face.

### Cas avec une condition de Newton

On désigne ainsi le demi-espace de conductivité  $\lambda$  limité par un plan P. On se place dans le cas où la température initiale  $T(x, t = 0)$  est uniforme et égale à  $T_0$ . La face P se trouve dans un milieu à température constante  $T_e$  pour  $t > 0$ , le coefficient de convection est  $h$ , en d'autres termes il s'agit d'une **condition limite de Newton**. On considère le problème **unidirectionnel** dans l'axe des  $x$ .



Avec ces variables, l'équation de la chaleur, et 2 conditions limites et sa condition initiale s'écrivent :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

On adimensionne les équations

$$\theta^* = \frac{T - T_e}{T_0 - T_e}$$

L'équation de la chaleur devient

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^2}$$

Avec comme conditions limites :

Une condition de Newton à la paroi en  $x=0$  :

$$-\lambda \frac{\partial \theta^*}{\partial x} \Big|_{x=0} = -h \cdot \theta^*(0, t)$$

Une condition en  $x=\infty$  où la température est inchangée :

$$\theta^*(x = \infty, t) = 1$$

Et une condition initiale

$$\theta^*(x, t = 0) = 1$$

La solution de l'équation est de la forme<sup>16</sup>

$$\theta^* = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot t}}\right) + \exp\left(\frac{h \cdot x}{\lambda} + \frac{h^2 \cdot a \cdot t}{\lambda^2}\right) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot t}} + \frac{h \cdot \sqrt{a \cdot t}}{\lambda}\right)$$

Applicable à un milieu semi-infini avec condition de Newton.

Dans cette équation,

**erf** est la fonction dénommée « erreur » définie par

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du$$

Et **erfc** est la fonction dite « erreur complémentaire »

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

Les valeurs prises par ces fonctions sont fournies dans une table en annexe 3.

<sup>16</sup> Dans d'autres ouvrages, on choisit pour température réduite :  $\theta^* = \frac{T - T_0}{T_e - T_0}$  et la solution s'écrit avec cette

variable :  $\theta^* = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot t}}\right) - \exp\left(\frac{h \cdot x}{\lambda} + \frac{h^2 \cdot a \cdot t}{\lambda^2}\right) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot t}} + \frac{h \cdot \sqrt{a \cdot t}}{\lambda}\right)$

### Cas avec une condition de température

Dans le cas particulier où le contact entre le milieu et l'environnement extérieur serait parfait (coefficient h infini ou condition de température à la surface), la solution se simplifie

$$\theta^* = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot t}}\right)$$

Cette expression est applicable dans le cas du **milieu semi-infini avec condition de température de surface**.

Ce modèle est intéressant pour des **milieux réellement profonds** (étude du gel des canalisations enterrées par exemple) et aussi pour **des milieux moins profonds dont on veut étudier le régime transitoire durant les premiers instants**. En effet, si l'on admet que la température à une profondeur  $\ell$  ne doit pas être affectée de plus de 1 %. Soit  $\theta^* = 0,99$ , le modèle peut être utilisé jusqu'au temps  $t$  donné par :

$$\theta^* = 0,99 = \operatorname{erf}\left(\frac{\ell}{2\sqrt{a \cdot t}}\right)$$

Soit  $\frac{\ell}{2\sqrt{a \cdot t}} = 1,82$  ou :  $Fo = \frac{a \cdot t}{\ell^2} = 0,075$ .

Si l'on choisit d'étudier la température à **10 cm** de profondeur, l'approximation du milieu semi infini est valable jusqu'au temps  $t$  suivant :

matériau	$a [m^2s^{-1}]$	$t$
acier	$1,5 \cdot 10^{-5}$	50 secondes
béton	$4,2 \cdot 10^{-7}$	30 minutes

### Application au cas du sol

Le modèle du massif semi infini est souvent utilisé pour connaître la température du sol en profondeur en particulier pour évaluer les risques de gel de canalisation enterrée. On retient pour diffusivité du sol la valeur  $a = 1,38 \cdot 10^{-7} m^2/s$ . Le sol est initialement à 10°C et on cherche à connaître l'effet d'un brusque refroidissement de la température extérieure à -15°C. En revenant aux variables dimensionnelles, on peut tracer le profil des températures à différents moments (initial, 5 jours et 10 jours). Le résultat est porté sur la figure ci-dessous :

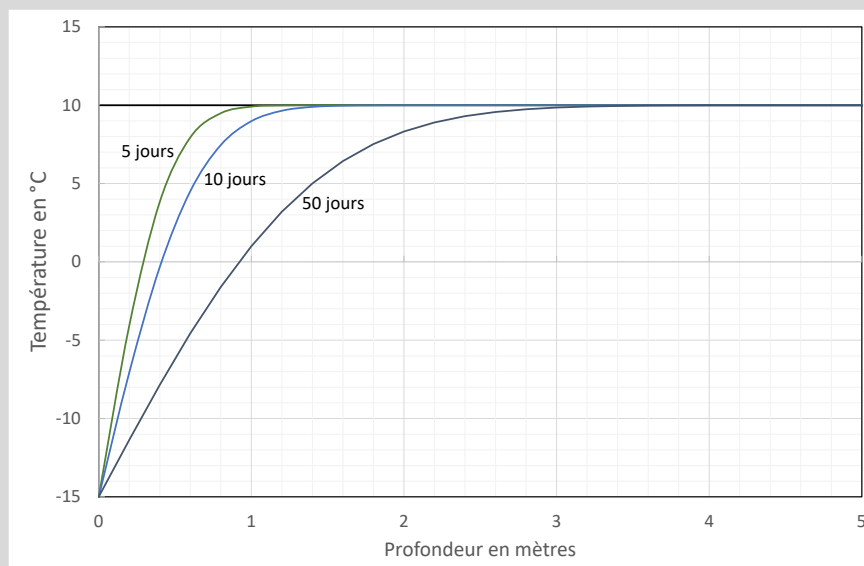


Figure : Evolution d'un milieu semi infini

application au cas du gel d'un sol – sol à 10°C soumis à une température de -15°C

A un mètre de profondeur, au bout de 5 jours, l'effet de la température extérieure égale à - 15°C est insensible sur la température du sol.

### Expression de la densité de flux à l'interface (effusivité)

Reprenons de l'équation précédente pour un milieu semi-infini :

$$\theta^* = \frac{T - T_e}{T_0 - T_e} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot t}}\right)$$

La densité de flux à l'interface s'écrit :

$$\varphi_{x=0} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\lambda(T_0 - T_e) \frac{\partial}{\partial x} \left( \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot t}}\right) \right) \Big|_{x=0}$$

Sachant que la dérivée de la fonction **erf** est

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{erf}(x) = \frac{2 \cdot \exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}}$$

Il vient

$$\varphi_{x=0} = -\lambda(T_0 - T_e) \frac{1}{2\sqrt{a \cdot t}} \frac{2 \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4 \cdot a \cdot t}\right)}{\sqrt{\pi}} \Big|_{x=0}$$

En explicitant le terme de diffusivité,  $a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}$ ,

$$\varphi_{x=0} = -(T_0 - T_e) \frac{\lambda}{\sqrt{\pi \cdot a \cdot t}} = -(T_0 - T_e) \frac{\sqrt{\lambda \cdot \rho \cdot c_p}}{\sqrt{\pi \cdot t}}$$

On appelle,  $b$ , l'effusivité

$$b = \sqrt{\lambda \cdot \rho \cdot c_p}$$

La densité de flux à l'interface s'écrit :

$$\varphi_{x=0} = (T_e - T_0) \frac{\sqrt{\lambda \cdot \rho \cdot c_p}}{\sqrt{\pi \cdot t}}$$

### Température de contact entre 2 milieux

On s'intéresse au cas où **l'on met en contact 2 milieux** 1 et 2 à température  $T_1$  et  $T_2$ . Comme nous l'avons vu ci-dessus, à l'instant initial, ils se comportent comme des milieux semi infinis. Lors de la mise en contact, la température de contact  $T_c$  entre les deux milieux s'obtient par principe de conservation de l'énergie à l'interface, soit en égalisant les densités de flux pénétrant dans chacun des milieux :

$$(T_c - T_1) \frac{b_1}{\sqrt{\pi \cdot t}} = (T_c - T_2) \frac{b_2}{\sqrt{\pi \cdot t}}$$

D'où

$$T_c = \frac{b_1 \cdot T_1 + b_2 \cdot T_2}{b_1 + b_2}$$

La température de contact est donc la moyenne pondérée par les effusivités. C'est **le corps le plus effusif qui "impose" sa température** ; d'où les impressions différentes ressenties selon que l'on marche pieds nus sur un sol en acier ou en bois pourtant à même température. Tant que le modèle de milieu semi infini reste valable, la température de contact reste constante.

### Exemple – Contact entre la peau et un matériau

Si l'on adopte pour l'épiderme<sup>17</sup> :  $\lambda = 0,21 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$ ,  $\rho = 1050 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $c = 3184 \text{ J.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ .

L'effusivité du pied est donc :  $b_{\text{pied}} = 838 \text{ J.m}^{-2}\text{K}^{-1}\text{s}^{-1/2}$

Bois :  $\lambda = 0,23 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$ ,  $\rho = 410 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $c = 1250 \text{ J.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$

D'où l'effusivité  $b_{\text{bois}} = 343 \text{ J.m}^{-2}\text{K}^{-1}\text{s}^{-1/2}$

Acier :  $\lambda = 61 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$ ,  $\rho = 7865 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $c = 460 \text{ J.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$

D'où l'effusivité  $b_{\text{acier}} = 14\,856 \text{ J.m}^{-2}\text{K}^{-1}\text{s}^{-1/2}$

Avec  $T_{\text{pied}} = 37^\circ\text{C}$  et  $T_{\text{sol}} = 55^\circ\text{C}$ , on trouve :  $T_{\text{contact-pied-bois}} = 42,2^\circ\text{C}$

$T_{\text{contact-pied-acier}} = 52^\circ\text{C}$

On trouvera dans la littérature des solutions analytiques pour différentes configurations (Carslaw and Jaeger, 1959) : milieu semi infini sous à des sollicitations de température périodiques, mur plan infini, cylindre plein infini, sphère pleine...

---

<sup>17</sup> On trouve dans Kreith, *Handbook of thermal engineering*, CRC Press, Springer 2000 de nombreuses données concernant les tissus vivants



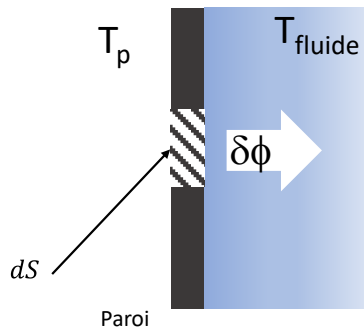
## **Chapitre 4 : Transferts convectifs**

---

## 4.1 Etude physique et définitions

### 4.1.1 Coefficient local de convection

Lorsqu'un fluide de température  $T$  se trouve en contact avec une paroi solide de température  $T_p$  différente (plus élevée pour fixer les idées), il reçoit de chaque élément  $dS$  de l'aire de contact un flux  $d\phi$ . Le mécanisme est le suivant : les parcelles fluides au contact de la paroi s'échauffent jusqu'à  $T_p$  ; elles cèdent ensuite aux parcelles voisines une fraction de la chaleur reçue par conduction, ou par mélange, ou par les deux phénomènes à la fois.



Le coefficient local de convection se définit par :

$$\delta\phi = h \cdot (T_p - T_{fluide}) \cdot dS$$

Cette expression est purement phénoménologique. Contrairement aux apparences, elle ne suppose pas la linéarité entre densité de flux et écart de température. La détermination de la puissance thermique transférée par convection passe par la caractérisation du coefficient  $h$ . Notons que le coefficient  $h$  va dépendre de l'écart de température entre la paroi et le fluide. La température du fluide n'est certainement pas uniforme, sinon les parcelles pariétales ne pourraient transmettre aucune chaleur aux autres. La première question à se poser est **que choisir pour  $T_{fluide}$  ?**

Dans un problème de convection, généralement, on ne cherche pas le champ de température mais plus simplement le flux de chaleur transmis. Les écoulements turbulents sont par nature instationnaires localement. En régime turbulent, on fera donc l'hypothèse de stationnarité en utilisant des valeurs moyennes.

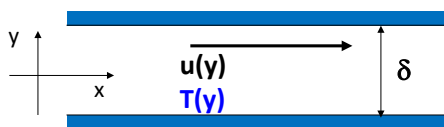
### 4.1.2 Géométrie fermée ou ouverte

Le choix de la température dépend de la géométrie du problème. Comme on cherche à qualifier globalement l'échange, on introduit la notion de **température de mélange  $T_m$** . On distingue deux configurations :

- **géométrie fermée** – à l'intérieur d'une conduite quelle que soit sa section (circulaire, rectangulaire, ...)
- **géométrie ouverte** – le long d'un obstacle qui peut être une paroi plane (écoulement d'air le long d'un mur par exemple) ou plus complexe écoulement perpendiculairement à l'axe d'un tube<sup>18</sup> typiquement).

#### Géométrie fermée

Le fluide est "confiné", par exemple dans un tube cylindrique, et l'on définit une température équivalente  $T_{eq}$  dans une section droite par :



La vitesse moyenne :

$$\bar{u} = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} u(y) dy$$

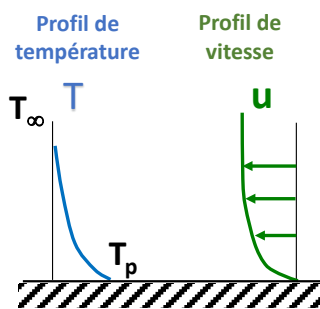
La température équivalente :

$$T_{eq} = \frac{1}{\delta \cdot \bar{u}} \int_0^{\delta} u(y) T(y) dy$$

<sup>18</sup> S'il s'agit de l'écoulement autour d'un faisceau de tubes, on est dans une situation intermédiaire entre géométrie fermée et ouverte.



## Géométrie ouverte



Profils de vitesse et de température au-dessus d'une paroi en convection forcée

La température utilisée est  $T_\infty$

$$\phi = h \cdot S(T_p - T_\infty)$$

Dans le sens perpendiculaire à la paroi, le fluide s'étend jusqu'à l'infini (traduisons : très loin), et on adopte comme température du fluide celle  $T_\infty$  à **grande distance de la paroi**. A proximité de la paroi, le fluide évolue entre la température de paroi et  $T_\infty$ . Cette température peut aussi s'interpréter comme une température de mélange si l'on néglige la couche limite (petite devant l'épaisseur complète de fluide) où la température varie.

### 4.1.3 Régimes d'écoulement laminaire ou turbulent

La mécanique des fluides met en évidence deux modes d'écoulement bien distincts qualifiés de "laminaire" et de "turbulent", le passage de l'un à l'autre dépend du nombre de Reynolds.

En **laminaire**, les filets fluides sont individualisés et la chaleur ne peut transférer d'un filet à son voisin que par conduction. Les fluides étant de médiocres conducteurs, les échanges sont en général faibles. En écoulement laminaire, et pour des configurations simples, on peut quelquefois calculer le profil des températures grâce aux équations de Navier-Stokes et à la loi de Fourier. La valeur de  $h$  s'en déduit.

En régime **turbulent**, l'échange constant de matière entre filets contigus permet une homogénéisation par **mélange**, et ce d'autant plus que la turbulence est plus forte. On conçoit donc que, toutes choses égales par ailleurs, les transferts thermiques soient plus intenses. Notons que, même en régime turbulent, il subsiste au voisinage de la paroi un film laminaire à travers lequel le transfert ne peut s'effectuer que par conduction. En régime turbulent, les résultats sont exclusivement expérimentaux.

### 4.1.4 Convection naturelle et convection forcée

Du fait du transfert de chaleur entre la paroi et les parcelles fluides, la température de celles-ci ne peut être uniforme. Il en résulte des variations de masse volumique, qui créent des mouvements au sein du fluide.

La convection est qualifiée de **naturelle** lorsque le mouvement du fluide est dû à cette seule cause. Elle est dite **forcée** si l'écoulement du fluide est provoqué par des dispositifs extérieurs (pompes, ventilateurs, etc.). La plupart des échangeurs industriels, tels que foyers et tubes de chaudière fonctionnent en convection forcée : on devine en effet qu'un écoulement rapide, en contribuant au mélange des parcelles fluides, on favorise les échanges thermiques, qui sont donc plus intenses qu'en convection naturelle.

Celle-ci se manifeste néanmoins dans presque toutes les installations, par exemple sous forme de pertes thermiques entre les parois externes et l'atmosphère ambiante. En toute rigueur, la convection naturelle intervient toujours puisque, du fait des différences de température, l'écoulement réel du fluide diffère de celui qui s'établirait sous le seul effet de la pompe ou du ventilateur de circulation. Mais cet écoulement parasite est en général suffisamment faible pour que l'on puisse en négliger les effets. On parle de **convection mixte** lorsque les effets provoqués par des moyens mécaniques sont du même ordre de grandeur que ceux dus aux différences de masse volumique.

### Convection forcée

Soit un fluide en écoulement au-dessus d'une paroi de forme plane. En amont de la plaque, le fluide s'écoule librement avec un champ de vitesse parallèle et uniforme  $U$  et à une température uniforme  $T_\infty$ . En arrivant sur la plaque, de température  $T_p$ , le fluide va être influencé à proximité de celle-ci, tant du point de vue de mécanique que thermique. Ceci se traduit par l'apparition de « couches limites » convectives.

Une particule du fluide entrant en contact direct avec la paroi va poursuivre son parcours en se frottant à cette dernière, induisant une diminution de sa vitesse au fur et à mesure qu'elle avance. Les particules s'écoulant dans une couche supérieure en contact avec la première vont elles aussi subir un ralentissement à cause des forces de frottement visqueux dues à la différence de vitesse. Ainsi, chaque couche du fluide va ralentir la couche suivante du fait de son propre ralentissement. La vitesse sera nulle sur la paroi et augmentera progressivement lorsqu'on s'éloigne de cette dernière dans le sens de la normale à celle-ci, jusqu'à une certaine distance  $\delta$  où l'on retrouve pratiquement la vitesse d'origine du fluide  $U$  à 99% (figure ci-dessous).  $\delta$  est l'épaisseur de la **couche limite dynamique**. Lorsque cette épaisseur est faible, c'est-à-dire au début de la plaque, les forces de viscosité sont relativement importantes et permettent de maintenir un écoulement laminaire, c'est à dire en couches parallèles.

En avançant sur la plaque, l'épaisseur de la couche limite dynamique du fluide augmente, mais le gradient de vitesse va s'affaiblir, entraînant une atténuation des forces de viscosité. Au bout d'une certaine distance, les perturbations aléatoires de l'écoulement ne seront plus équilibrées par les forces de viscosité. Un mouvement chaotique des particules allant dans tous les sens va apparaître, entraînant ainsi une homogénéisation de la vitesse moyenne du fluide. Ceci entraîne une augmentation de l'épaisseur de la couche limite dans laquelle le fluide subit l'influence de la plaque. L'écoulement devient alors turbulent. Il subsiste cependant, au voisinage immédiat de la plaque, une faible épaisseur où l'écoulement reste laminaire grâce au fort gradient de vitesse qui implique d'importantes forces de viscosité.

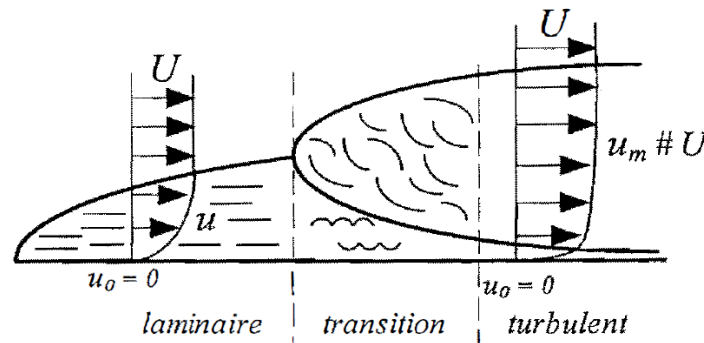


Figure : Couche limite dynamique sur une plaque plane (K. El Khoury, 2004)

De même, il va se développer une **couche limite thermique** au-dessus de la plaque. Supposons que la température de la paroi soit supérieure à celle du fluide ( $T_p > T_\infty$ ). Une particule en contact direct avec la paroi va s'échauffer par conduction et chauffer les particules qui entrent en contact avec elle, également par conduction, tout en continuant son parcours. Ainsi, dans le sens normal à la paroi, chaque couche de fluide va chauffer la couche suivante tout en avançant. La couche limite thermique dans laquelle la température de la paroi influence celle du fluide va voir son épaisseur augmenter dans le sens de l'écoulement (figure ci-dessous).

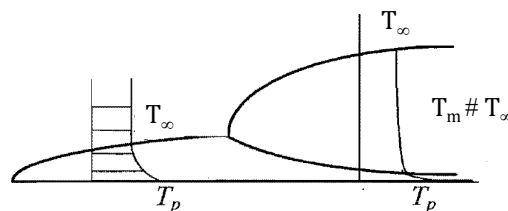


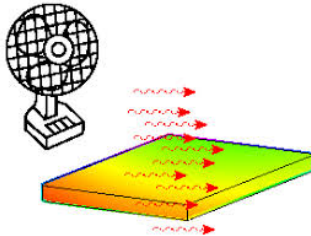
Figure : Couche limite thermique sur une plaque plane (K. El Khoury, 2004)

Avec l'apparition de la turbulence, la couche limite thermique va avoir tendance à homogénéiser la température du fluide du fait du mélange des particules. De plus, son épaisseur va augmenter du fait du transport d'enthalpie qui s'étend avec la couche limite dynamique.

Pour une configuration géométrique donnée, et selon l'analyse physique ci-dessus, les échanges de chaleur entre la paroi et le fluide dépendent des paramètres suivants :

- La vitesse de référence,  $U$  ;
- les caractéristiques du fluide :  $\rho$  (masse volumique),  $C_p$  (chaleur massique à pression constante),  $\lambda$  (conductivité thermique) et  $\mu$  (viscosité dynamique) ;
- une dimension caractéristique de la géométrie,  $L$ .

La solution du problème de convection forcée peut s'écrire sous la forme :



$$Nu = f(Re, Pr)$$

où les nombres de Nusselt ( $Nu$ ), Reynolds ( $Re$ ) et Prandtl ( $Pr$ ) sont définis par:

$$Nu = \frac{h \cdot L}{\lambda}$$

$$Re = \frac{\rho \cdot V \cdot L}{\mu}$$

$$Pr = \frac{\mu \cdot c_p}{\lambda}$$

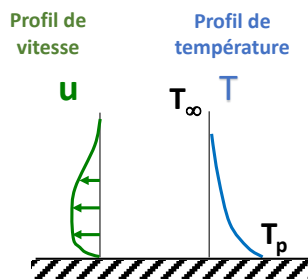
Le nombre de Reynolds,  $Re$ , caractérise la turbulence de l'écoulement. L'écoulement a tendance à devenir turbulent lorsque le fluide s'avance sur la paroi et que son énergie cinétique est grande. L'énergie cinétique s'oppose aux forces de frottement liées à la viscosité du fluide qui jouent un rôle de stabilisation de l'écoulement. Le nombre de Reynolds exprime un rapport entre les forces favorables à la turbulence au numérateur et les forces de viscosité au dénominateur. S'il est « petit », ceci voudra dire que les forces de frottement visqueux sont assez importantes pour pouvoir maintenir un écoulement laminaire (ordonné). Si, en revanche, le nombre de Reynolds est « grand », les forces de viscosité seront faibles par rapport aux forces d'inertie lesquelles pourront amplifier les moindres perturbations pour arriver à un écoulement chaotique turbulent. Dans la pratique, les valeurs critiques de ce nombre, qui caractérisent le passage d'un écoulement laminaire à la turbulence, sont données pour chaque configuration géométrique. Etant donné que les transferts thermiques sont fortement affectés par la turbulence, on cherche généralement des corrélations différentes selon la nature de l'écoulement.

Le nombre de  $Pr$  ne fait intervenir que les caractéristiques du fluide. Pour les gaz, sa valeur est peu variable (de l'ordre de 0,7). Pour les liquides, en revanche, il peut varier notablement.

Pour une configuration géométrique donnée, des corrélations entre  $Nu$ ,  $Re$  et  $Pr$  sont établies généralement à partir de mesures expérimentales. On parle usuellement de « corrélations de transfert thermique » pour ces lois empiriques permettant d'évaluer le coefficient d'échange dans une configuration donnée.

**En convection forcée**, on notera que Le coefficient de convection est donc **indépendant de  $\Delta T$** , le flux de chaleur est une fonction **linéaire** de  $\Delta T$ .

## Convection Naturelle

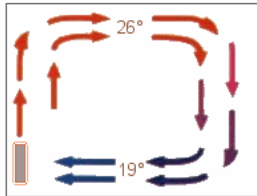


En convection naturelle, la paroi se trouve a priori en contact avec un fluide calme ( $U \cong 0$ ) de température connue  $T_\infty$ . Si la température de la paroi  $T_p$  est différente de  $T_\infty$ , une diffusion de la chaleur s'effectuera entre le fluide et la paroi, entraînant un gradient thermique dans le fluide qui se traduit par un gradient de la masse volumique et, par conséquent, un gradient des forces de pesanteur qui va entraîner un mouvement du fluide. Le fluide chauffé à la paroi va monter et le fluide loin de la paroi, donc plus froid, va descendre. L'influence de la paroi sur le fluide sera limitée géométriquement à une couche limite en dehors de laquelle on retrouve un fluide calme de température connue  $T_\infty$  (figure ci-contre).

Pour une configuration géométrique donnée, les paramètres principaux qui influencent les échanges de chaleur entre la paroi et le fluide sont :

- l'écart de température entre la paroi et le fluide ;
- les caractéristiques du fluide :  $\rho$  (masse volumique),  $C_p$  (chaleur massique à pression constante),  $\lambda$  (conductivité thermique) et  $\mu$  (viscosité dynamique) et  $\beta$  (coefficient de dilatation volumique) ;
- une dimension caractéristique de la géométrie,  $L$  ;
- l'accélération de la pesanteur,  $g$ .

La solution s'écrit alors :



Exemple d'un radiateur dans une pièce

$$Nu = f(Gr, Pr)$$

ou bien

$$Nu = f(Ra, Pr)$$

où les nombres de Grashof ( $Gr$ ) et de Rayleigh ( $Ra$ ) sont

$$Nu = \frac{h \cdot L}{\lambda}$$

$$Gr = \frac{g \cdot L^3 \cdot \rho^2 \cdot \beta \cdot \Delta T}{\mu^2}$$

$$Ra = Gr \cdot Pr$$

Il n'y a **plus linéarité** entre le flux de chaleur et l'écart de température **du fait de l'intervention de  $\beta \cdot \Delta T$  dans le nombre de Grashof**.

Et comme en convection forcée, l'écoulement du fluide peut être laminaire ou turbulent. Ceci est caractérisé par le nombre de Rayleigh dans lequel on voit apparaître les paramètres caractéristiques des différents phénomènes. On trouve notamment l'écart de température « moteur » de l'écoulement au numérateur et la viscosité dynamique « frein » ou « stabilisateur » au dénominateur.

## Convection mixte

Lorsque de la convection forcée se superpose à de la convection naturelle, la question se pose de savoir si on peut négliger un des deux mécanismes ou si on doit prendre les deux en considération.

On calcule le nombre de Richardson (voir tableau récapitulatif des nombres sans dimension)

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2}$$

Si  $Ri \gg 1$ , alors la convection naturelle domine alors que si  $Ri \ll 1$ , c'est la convection forcée qui domine. La convection sera mixte si le nombre de Richardson est de l'ordre de grandeur de l'unité. En première approximation, on utilise souvent pour la convection mixte, une « combinaison de corrélations » de la forme :

$$Nu^n = Nu_F^n \pm Nu_N^n$$

Dans laquelle  $Nu_F$  représente la convection forcée et  $Nu_N$  à la convection naturelle. Le signe plus s'applique lorsque l'écoulement induit par la convection naturelle tend à renforcer l'écoulement imposé. Le signe moins s'applique lorsque les deux écoulements ont tendance à s'opposer. La combinaison des corrélations donne les meilleurs résultats avec un exposant  $n = 3$ .

En pratique, il est incorrect de raisonner uniquement sur le nombre de Richardson, il faut aussi considérer l'effet du nombre de Prandtl. On peut seulement conclure que la convection naturelle est toujours négligeable si  $Ri \ll 1$  lorsque  $u_\infty$  est dans le même sens que les vitesses de convection naturelle.

Il existe des corrélations spécifiques adaptées pour des configurations diverses avec des écoulements internes ou externes, ainsi que des critères plus précis permettant de juger de l'importance de la convection naturelle.

Par exemple, pour un écoulement d'air forcé sur une plaque plane horizontale, l'effet de la convection naturelle est inférieur à environ 10% si :

$$\frac{Gr_x}{Re_x^{2,5}} \leq 0,08$$

Le tableau suivant donne, en fonction du nombre de Prandtl, les seuils de  $\frac{Gr_x}{Re_x^2}$  au-delà desquels l'importance de la convection naturelle dépasse 5%, dans le cas d'une paroi plane verticale avec un écoulement forcé ascendant, avec  $T_p > T_\infty$

Pr	100	10	0,72	0,03-0,003
$\frac{Gr_x}{Re_x^2}$	0,24	0,13	0,08	0,056-0,05

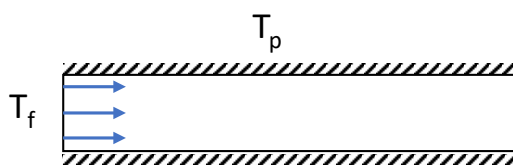
Tableau : Seuils à partir desquels la convection naturelle contribue à plus de 5%

Les écoulements de convection mixte sont très courants dans la nature. Par exemple, le long d'une façade d'un bâtiment chauffée par le rayonnement solaire, les couches limites de convection naturelle interagissent avec l'écoulement atmosphérique (localement assimilé à un écoulement forcé piloté par un gradient de pression), les systèmes de ventilation et de climatisation des pièces d'habitation rendent mixte la convection qui nous entoure... Ce large domaine d'application a cependant été relativement moins bien étudié d'un point de vue fondamental. Des corrélations en convection mixte sont disponibles dans les Techniques de l'ingénieur – A-1542.

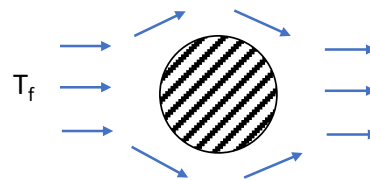
## 4.2 Choix des corrélations

Les corrélations servent à déterminer les coefficients d'échange par convection dans des systèmes thermiques étudiés. La première chose à faire est donc de choisir une corrélation en adéquation avec le problème étudié. Les différentes vérifications sont les suivantes :

- **Configuration géométrique du problème** : On distinguera notamment s'il s'agit d'une géométrie ouverte ou fermée. Par exemple, il y a distinction entre une conduite cylindrique dans lequel circule le fluide et une conduite autour duquel le fluide circule perpendiculairement à son axe :



Écoulement à l'intérieur d'une conduite

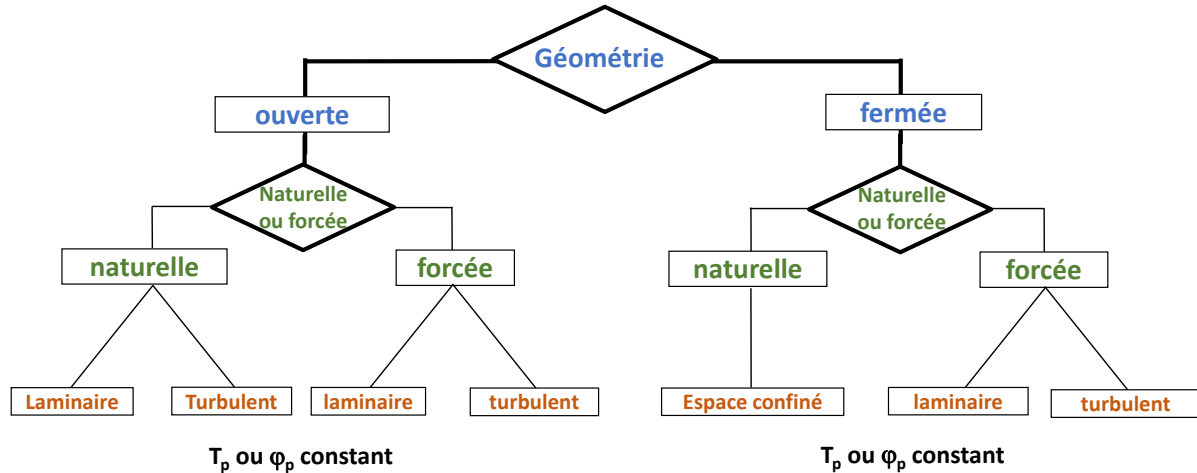


Écoulement autour d'une conduite

- **Type de convection** : elle est forcée lorsqu'on connaît une vitesse de fluide imposée par un dispositif mécanique quelconque ; elle est naturelle lorsque le mouvement du fluide est dû uniquement aux différences de température.
- **Nature de l'écoulement** : laminaire ou turbulent, que l'on peut définir à l'aide du nombre de Reynolds en convection forcée ou de celui de Rayleigh en convection naturelle.
- **Nature du fluide** : selon le fluide et son nombre de Prandtl, la corrélation peut être valable ou non.
- **Condition limite à la paroi** : les corrélations sont généralement élaborées avec deux types de conditions imposées à la paroi : température uniforme ou flux uniforme ; il faut donc apprécier de quel cas on est le plus proche afin de choisir la bonne corrélation.
  - **$T_p$  constant** : une température de paroi constante s'obtient expérimentalement avec un corps qui change d'état (ébullition par exemple). Dans ce cas, le coefficient d'échange du côté du corps qui change d'état est élevé et la température de paroi très proche de celle du changement d'état.

- $\phi_p$  **constant** qui intervient typiquement dans un réacteur nucléaire, ce qui exige un refroidissement permanent, faute de quoi, le flux se traduira par une élévation de température au-delà des limites de tenue des matériaux

Ainsi, pour s'orienter convenablement dans le choix des corrélations, il convient d'abord d'identifier les caractéristiques de la configuration à l'étude. Le logigramme ci-dessous résume les questions à se poser.



Notons également que, pour le calcul des nombres adimensionnels présents dans les corrélations, il faut considérer les propriétés du fluide à une température de référence bien déterminée. Celle-ci est généralement la température moyenne  $T_m = 0,5(T_p + T_\infty)$  ou la température  $T_\infty$  en dehors de la couche limite.

Enfin, il est difficile de donner des ordres de grandeurs représentatifs de tous les cas. On peut dire qu'en convection forcée, les coefficients d'échanges avec les gaz sont généralement limités à quelques dizaines de  $W/m^2/K$  alors qu'avec les liquides ils peuvent s'évaluer en centaines et même en milliers. En convection naturelle, les coefficients d'échange sont beaucoup plus faibles.

#### 4.2.1 Nombres adimensionnels utiles en convection

On introduit les nombres sans dimension utilisés dans les corrélations :

Convection		
Nusselt	$Nu = \frac{h \cdot \ell}{\lambda}$	Il fait intervenir des grandeurs physiques de même nature que le nombre de Biot, mais il en diffère notablement. Nusselt caractérise les phénomènes localisés en première approximation dans la couche limite thermique. Il fait donc intervenir la <b>conductivité du fluide</b> , et une dimension géométrique caractéristique de son écoulement (largeur ou diamètre d'une veine fluide, d'un obstacle...). C'est une expression adimensionnelle du coefficient d'échange.
Prandtl	$Pr = \frac{\mu \cdot c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a}$	Rapport de la diffusivité dynamique $\nu$ - ou viscosité cinématique- qui caractérise la diffusion de quantité de mouvement et de la diffusivité thermique $a$ qui caractérise la diffusion de chaleur.
Convection forcée		
Reynolds	$Re = \frac{\rho \cdot V \cdot L}{\mu}$	Rapport des forces d'inertie aux forces de frottements $\frac{\rho \cdot \frac{V^2}{L}}{\mu \cdot \frac{V}{L^2}}$

		Relatif à une dimension caractéristique L.
Peclet	$Pe = Re \cdot Pr$	Caractérise parfois à lui seul les problèmes de convection forcée. Ceci n'est valable que pour des Prandtl de l'ordre de 1 donc pour les gaz
Stanton	$St = \frac{Nu}{Re \cdot Pr}$	Autre expression adimensionnelle du coefficient d'échange
Facteur de Colburn	$j = St \cdot Pr^{\frac{2}{3}}$	Utilisé dans le cadre des échangeurs ailetés
<b>Convection Naturelle</b>		
Grashof	$Gr = \frac{g \cdot L^3 \cdot \rho^2 \cdot \beta \cdot \Delta T}{\mu^2}$	Rapport du produit des forces d'Archimède par les forces d'inertie aux forces de frottement au carré. Il remplace le nombre de Reynolds en convection naturelle.
Rayleigh	$Ra = Gr \cdot Pr$	Caractérise parfois à lui seul les problèmes de convection naturelle. Ceci n'est valable que pour des Prandtl de l'ordre de 1 donc pour les gaz
<b>Convection Mixte</b>		
Richardson	$Ri = \frac{Gr}{Re^2} = \frac{g \cdot L \cdot \beta \cdot \Delta T}{V^2}$	Il traduit l'importance de la convection naturelle par rapport à la convection forcée La convection est mixte si $Ri \# 1$

Tableau : Nombres sans dimension utiles en convection

#### 4.2.2 Corrélations pour des plaques et des conduites

Les corrélations sont nombreuses dans la littérature. On se limitera ici à quelques exemples courants. Notons qu'il existe des corrélations spécifiques dans le cas de fluide avec un changement d'état comme dans les évaporateurs et condenseur de pompes à chaleur.

<b>Convection forcée</b>			
Ecoulement sur une plaque plane	Laminaire	$T_p$ constante	Pour $Re < 5 \cdot 10^5$ et $0,5 \leq Pr \leq 10$ Les propriétés thermo-physiques du fluide sont exprimées à la température du film $T_m = \frac{T_p + T_\infty}{2}$ $Nu_x$ : Nu à la distance x du bord du plan $Nu_x = 0,33 \cdot Re_x^{0,5} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$ $\overline{Nu}_L$ : Nu moyen sur la longueur L du plan $\overline{Nu}_L = 0,67 \cdot Re_L^{0,5} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$
		Flux constant	Pour $Re < 5 \cdot 10^5$ $Nu_x = 0,453 \cdot Re_x^{0,5} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$
	Turbulent	$T_p$ constante	Pour $Re > 5 \cdot 10^5$ et $Pr < 25$ Les propriétés thermo-physiques du fluide sont exprimées à la température du film $T_m = \frac{T_p + T_\infty}{2}$ $Nu_x$ : Nu à la distance x du bord du plan $Nu_x = 0,03 \cdot Re_x^{0,8} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$ $\overline{Nu}_L$ : Nu moyen sur la longueur L du plan $\overline{Nu}_L = 0,037 \cdot (Re_L^{0,8} - 23500) \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$
	Laminaire	$T_p$ constante	Valable pour $Re \cdot Pr \cdot \frac{D}{L} \geq 10$ , $\overline{Nu}_D$ Nu moyen sur la longueur L de la conduite

Ecoulement dans une conduite			<p>Pour <math>L &lt; 0,1</math></p> $\overline{Nu}_D = 1,86 \cdot (Re \cdot Pr)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{D}{L}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{\mu}{\mu_p}\right)^{0,14}$ <p><math>\mu_p</math> étant évaluée à la température de la paroi à <math>T_p</math></p> <p>Les autres grandeurs physiques intervenant dans Re et Pr sont exprimées à la température équivalente moyenne entre l'entrée et la sortie</p> <p>Pour <math>L &gt; 0,1</math></p> $\overline{Nu}_D = 3,66$																																				
		Flux constant	$\overline{Nu}_D = 4,364$																																				
	Turbulent	$T_p$ constante ou flux constant	<p><b>Corrélation de Dittus Boelter</b> établie dans le domaine <math>0,6 &lt; Pr &lt; 120</math>, <math>10^4 &lt; Re &lt; 1,2 \cdot 10^5</math> et <math>L/D &gt; 10</math></p> <p>Les propriétés thermo-physiques du fluide sont exprimées à la température équivalente moyenne entre l'entrée et la sortie</p> $\overline{Nu}_D = 0,023 \cdot Re_{DH}^{0,8} \cdot Pr^n$ <p>Re calculé pour <math>D_H = 4S/P</math> où : S est la section de passage du fluide et P le périmètre de contact fluide/paroi</p> <p><math>n = 0,3</math> si <math>T_{\text{fluide}} &gt; T_{\text{paroi}}</math> (refroidissement du fluide)</p> <p><math>n = 0,4</math> si <math>T_{\text{fluide}} &lt; T_{\text{paroi}}</math> (chauffage du fluide)</p>																																				
Ecoulement perpendiculaire à un cylindre circulaire	Laminaire ou turbulent		<p>Les propriétés thermo-physiques du fluide sont exprimées à la température du film <math>T_m = \frac{T_p + T_\infty}{2}</math></p> <p>Pour les liquides :</p> $\overline{Nu}_D = C \cdot Re_D^n \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$ <table><tr><th>Re</th><th>C</th><th>n</th></tr><tr><td>0,4-4</td><td>0,989</td><td>0,330</td></tr><tr><td>4-40</td><td>0,911</td><td>0,385</td></tr><tr><td>40-4 000</td><td>0,683</td><td>0,466</td></tr><tr><td>4 000-40 000</td><td>0,193</td><td>0,618</td></tr><tr><td>40 000-250 000</td><td>0,0266</td><td>0,805</td></tr></table> <p>Pour les gaz</p> $\overline{Nu}_D = C \cdot Re_D^n$ <table><tr><th>Re</th><th>C</th><th>n</th></tr><tr><td>0,4-4</td><td>0,891</td><td>0,33</td></tr><tr><td>4-40</td><td>0,821</td><td>0,385</td></tr><tr><td>40-4 000</td><td>0,615</td><td>0,466</td></tr><tr><td>4 000-40 000</td><td>0,174</td><td>0,618</td></tr><tr><td>40 000-250 000</td><td>0,024</td><td>0,805</td></tr></table>	Re	C	n	0,4-4	0,989	0,330	4-40	0,911	0,385	40-4 000	0,683	0,466	4 000-40 000	0,193	0,618	40 000-250 000	0,0266	0,805	Re	C	n	0,4-4	0,891	0,33	4-40	0,821	0,385	40-4 000	0,615	0,466	4 000-40 000	0,174	0,618	40 000-250 000	0,024	0,805
Re	C	n																																					
0,4-4	0,989	0,330																																					
4-40	0,911	0,385																																					
40-4 000	0,683	0,466																																					
4 000-40 000	0,193	0,618																																					
40 000-250 000	0,0266	0,805																																					
Re	C	n																																					
0,4-4	0,891	0,33																																					
4-40	0,821	0,385																																					
40-4 000	0,615	0,466																																					
4 000-40 000	0,174	0,618																																					
40 000-250 000	0,024	0,805																																					



<b>Convection Naturelle</b>			
Plaque verticale	De faible hauteur (laminaire)	$T_p$ constante	<p>Les propriétés thermo-physiques du fluide sont exprimées à la température du film <math>T_m = \frac{T_p + T_\infty}{2}</math></p> <p>Pour <math>Ra &lt; 10^9</math></p> <p>Pour <math>Pr &lt; 0,03</math></p> $\overline{Nu}_L = 0,75 \cdot (Gr_L \cdot Pr^2)^{0,25}$ <p>Pour <math>Pr &gt; 0,71</math></p> $\overline{Nu}_L = 0,55 \cdot (Gr_L \cdot Pr^2)^{0,25}$
	De grande hauteur (turbulent)	$T_p$ constante	<p>Corrélation de Mc Adams</p> <p>Pour <math>Ra &gt; 10^9</math></p> $\overline{Nu}_L = 0,13 \cdot (Gr_L \cdot Pr)^{0,33}$
		Flux constant	<p>Dans le cas de conditions limites à flux constant <math>\phi_p</math>, on utilise toujours <math>Ra^*</math>. Pour <math>Ra &gt; 10^{13}</math></p> $Nu_x = 0,568 \cdot (Ra_x^*)^{0,22}$ $\overline{Nu}_L = 0,645 \cdot (Ra_L^*)^{0,22}$ <p>Avec un nombre de Rayleigh modifié <math>Ra^* = \frac{g \cdot L^4 \cdot \rho^2 \cdot \beta \cdot \phi_s}{\lambda \cdot \mu^2}</math></p>
Plaque horizontale		$T_p$ constante	<p>Les propriétés thermo-physiques du fluide sont exprimées à la température du film <math>T_m = \frac{T_p + T_\infty}{2}</math></p> <p>Dimension <math>L</math> = surface/périmètre</p> <p><b>Cas favorable</b> : Surface chauffée tournée vers le haut ou surface froide tournée vers le bas :</p> <p>Ecoulement laminaire : <math>10^4 &lt; Ra &lt; 2 \cdot 10^7</math></p> $\overline{Nu}_L = 0,54 \cdot (Ra)^{\frac{1}{4}}$ <p>Ecoulement turbulent : <math>2 \cdot 10^7 &lt; Ra &lt; 10^{11}</math></p> $\overline{Nu}_L = 0,15 \cdot (Ra)^{\frac{1}{3}}$ <p><b>Cas défavorable</b> : Surface chauffée tournée vers le bas ou surface froide tournée vers le haut :</p> <p>Pour <math>10^5 &lt; Ra &lt; 3 \cdot 10^{10}</math></p> $\overline{Nu}_L = 0,27 \cdot (Ra)^{\frac{1}{4}}$
		Flux constant	<p>Les propriétés thermo-physiques du fluide sont exprimées à la température du film <math>T_m = \frac{T_p + T_\infty}{2}</math></p> <p>Dimension <math>L</math> = surface/périmètre</p> <p><b>Cas favorable</b> : Surface chauffée tournée vers le haut :</p> <p>Ecoulement laminaire : <math>Ra &lt; 2 \cdot 10^8</math></p> $\overline{Nu}_L = 0,13 \cdot (Ra)^{\frac{1}{3}}$ <p>Ecoulement turbulent : <math>2 \cdot 10^8 &lt; Ra &lt; 10^{11}</math></p> $\overline{Nu}_L = 0,16 \cdot (Ra)^{\frac{1}{3}}$ <p><b>Cas défavorable</b> : Surface chauffée tournée vers le bas :</p> <p>Pour <math>10^6 &lt; Ra &lt; 10^{11}</math></p> $\overline{Nu}_L = 0,58 \cdot (Ra)^{\frac{1}{5}}$

Cylindre horizontal		Les propriétés thermo-physiques du fluide sont exprimées à la température du film $T_m = \frac{T_p + T_\infty}{2}$		
		$\overline{Nu}_D = C \cdot Ra^n$		
		Re	C	n
		$10^{-10} - 10^{-2}$	0,675	0,058
		$10^{-2} - 10^2$	1,02	0,148
		$10^2 - 10^4$	0,85	0,188
		$10^4 - 10^7$	0,48	0,25
		$10^7 - 10^{12}$	0,125	0,333

### Exemple – calcul d'un radiateur de chauffage

On assimile un radiateur de chauffage de hauteur  $H = 0,7 \text{ m}$  à une plaque plane. Sa température de paroi  $T_p$  varie entre 30 et 50°C puis entre 60°C et 80°C. On va chercher la puissance émise par convection pour 1 m<sup>2</sup> pour 6 valeurs de  $T_p$  : 30°C, 40°C, 50°C, 60°C, 70°C et 80°C (il y a aussi une part radiative que nous ne calculons pas ici ; elle est du même ordre de grandeur). On note  $\Delta T$  l'écart entre  $T_p$  et la température d'air  $T_a = 20^\circ\text{C}$ . Les propriétés thermo-physiques sont calculées à la température moyenne du film  $T_m = \frac{T_p + T_a}{2}$ . Celle-ci varie peu et nous adopterons les valeurs à 300 K. Le coefficient de dilatation  $\beta$  est pris égal à  $1/300$ . On peut alors calculer le nombre de Rayleigh qui est bien inférieur à  $10^9$  dans les 3 premiers cas ( $T_p < 60^\circ\text{C}$ ). On utilisera donc la corrélation suivante extraite du tableau ci-avant :

$$(1) \quad \overline{Nu}_L = 0,55 \cdot (Gr_L \cdot Pr)^{0,25}$$

Dans les 3 cas suivants ( $T_p \geq 60^\circ\text{C}$ ), le nombre de Rayleigh est supérieur à  $10^9$ , on utilisera la corrélation suivante :

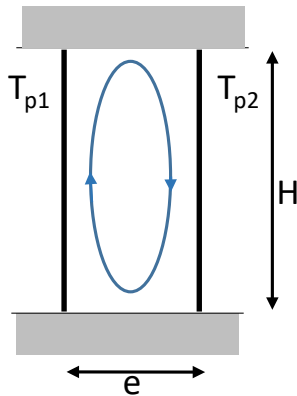
$$(2) \quad \overline{Nu}_L = 0,13 \cdot (Gr_L \cdot Pr)^{0,33}$$

La longueur caractéristique dans le nombre de Nusselt,  $L$ , est ici  $H$  la hauteur du radiateur.

$T_p$ (°C)	$\Delta T$	$T_m$ (°C)	Éq.	Ra	Gr	Pr	Nu	h (W/m <sup>2</sup> /K)	$\phi = h \cdot S \cdot \Delta T$ (W)
30	10	25	(1)	$3,2 \cdot 10^8$	$4,5 \cdot 10^8$	0,71	67,7	2,5	25,2
40	20	30	(1)	$6,4 \cdot 10^8$	$9,0 \cdot 10^8$	0,71	80,5	3,0	59,9
50	30	35	(1)	$9,6 \cdot 10^8$	$1,3 \cdot 10^9$	0,71	89,1	3,3	99,5
60	40	40	(2)	$1,3 \cdot 10^9$	$1,8 \cdot 10^9$	0,71	131,7	4,9	196,2
70	50	45	(2)	$1,6 \cdot 10^9$	$2,2 \cdot 10^9$	0,71	141,8	5,3	264,0
80	60	50	(2)	$1,9 \cdot 10^9$	$2,7 \cdot 10^9$	0,71	150,6	5,6	336,4

On pourra noter que la puissance émise pour 1 m<sup>2</sup> de radiateur n'est pas linéaire avec  $\Delta T$  mais évolue avec  $\Delta T^{1,33}$ .

### 4.2.3 Convection naturelle en espace confiné



Considérons, à titre d'exemple, deux plaques parallèles  $S_1$  et  $S_2$ , distantes de  $e$ , dont les dimensions transversales sont grandes vis à vis de  $e$ , et portées respectivement à des températures uniformes  $T_{p1}$  et  $T_{p2}$ . Ces plaques sont réunies par deux surfaces verticales que l'on considérera comme parfaitement isolées.

Si  $T_{p1} > T_{p2}$ , un courant de convection s'établit comme indiqué sur la figure ci-contre. Si  $h_1$  et  $h_2$  désignent les deux coefficients de convection, le flux est donné par :

$$\varphi = U(T_{p1} - T_{p2}) \text{ avec } \frac{1}{U} = \frac{1}{h_1} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_2}$$

Les coefficients  $h_1$  et  $h_2$  dans l'espace confiné sont inaccessibles à l'expérimentation. Seul  $U$ , coefficient d'échange global est mesurable. On définit une conductivité équivalente  $\lambda_{eq}$  telle que :

$$\varphi = \frac{\lambda_{eq}}{e} (T_{p1} - T_{p2})$$

$\lambda_e$  est la conductivité équivalente. C'est la conductivité d'un fluide fictif qui assurerait le même transfert calorifique, en l'absence de mouvement de convection.

$\lambda_e$  peut être des dizaines de fois supérieure à la conductivité du fluide immobile.  $U$  ayant les mêmes dimensions que  $h_1$  on peut adopter pour Nusselt la quantité  $\frac{U \cdot e}{\lambda}$ , soit :

$$\overline{Nu} = \frac{\lambda_e}{\lambda}$$

Quant à  $Gr$ , on le calcule en prenant  $e$  (épaisseur de la lame) comme longueur caractéristique :

$$Gr_e = \frac{g \cdot e^3 \cdot \rho^2 \cdot \beta \cdot (T_{p1} - T_{p2})}{\mu^2}$$

et

$$Ra_e = Gr_e \cdot Pr$$

#### Résultats concernant les plaques parallèles verticales

De nombreux essais ont été effectués sur des lames d'air comprises entre deux plans parallèles verticaux, à des températures modérées. Les phénomènes dépendent du nombre de Rayleigh et de la géométrie par le rapport  $H/e$ . Les expériences amènent à distinguer trois cas :

##### Espace confiné – plaques verticales – Cas des gaz ( $0,5 < Pr < 2$ )

Nombres adimensionnels évalués à  $(T_{p1} + T_{p2})/2$

$$\overline{Nu} = \frac{U \cdot e}{\lambda} = \frac{\lambda_{eq}}{\lambda} \text{ pour } 3 < H/e < 42$$

- Pour  $Ra < 6000$   $\overline{Nu} = 1$  ce qui signifie que la lame de gaz est suffisamment mince pour que les mouvements de convection soient négligeables. Le transfert est alors régi par les lois de la **conduction**.
- Pour  $6000 < Ra < 2.10^5$   $\overline{Nu} = 0,197 \cdot Ra^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{H}{e}\right)^{-\frac{1}{9}}$
- Pour  $2.10^5 < Ra < 1,1.10^7$   $\overline{Nu} = 0,073 \cdot Ra^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{H}{e}\right)^{-\frac{1}{9}}$



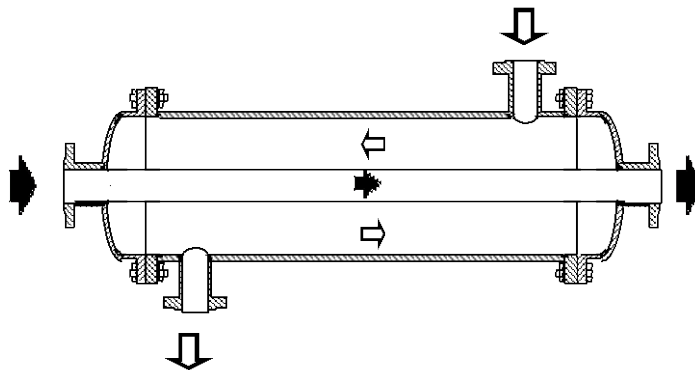
## **Chapitre 5 : Echangeurs de chaleur**

---

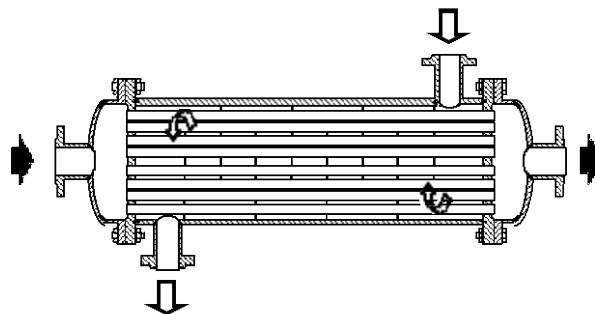
## 5.1 Introduction

Un échangeur de chaleur sert à transférer une puissance thermique d'un corps chaud vers un corps froid. Les deux corps sont le plus souvent des fluides en écoulement continu. Dans le cadre de ce cours, on se limitera au cas simple de deux fluides séparés par une paroi solide. Il existe cependant des échangeurs sans paroi entre les fluides comme par exemple, les tours de refroidissement humides utilisées dans les centrales nucléaires et thermiques à flamme pour la production d'électricité et en climatisation.

L'échangeur à la géométrie la plus simple est l'**échangeur à tube unique** comme représenté ci-dessous dans lequel un fluide circule dans le tube et l'autre dans une calandre qui l'entoure :

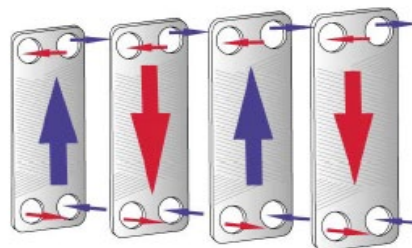
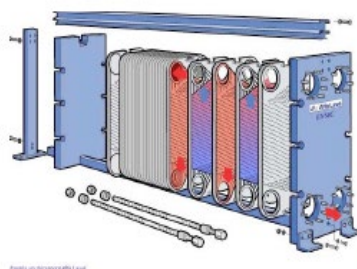


Les **échangeurs à faisceaux tubulaires** sont constitués d'une grande quantité de tubes en parallèle fixés sur des plaques tubulaires débouchant dans des boîtes de distribution. Autour du faisceau, une calandre permet la circulation du second fluide éventuellement en étant dirigé par des chicanes pour augmenter le temps de résidence du fluide dans l'échangeur.



De nombreuses variantes de ce type d'échangeur existent selon le nombre de passes des fluides extérieur et intérieur.

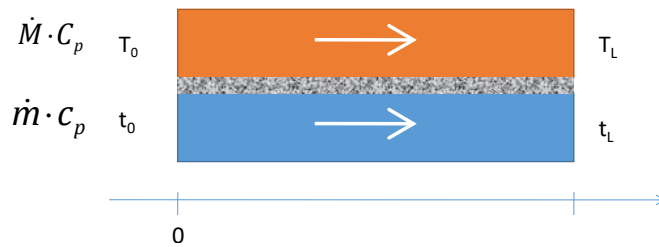
Les **échangeurs à plaques** ont connu un très grand développement ces dernières années du fait de leur compacité. Ils sont réalisés soit par alternance de plaques planes et de plaques gaufrées, soit en empilant des plaques nervurées (corruguées) assemblées par des tirants. Chacune des plaques est percée de 4 trous permettant le raccordement à des collecteurs. Deux des trous sont munis de joints étanches et le raccordement se fait alternativement comme indiqué sur la figure ci-dessous.



## 5.2 Relations fondamentales - échangeurs à co et contre courant

### 5.2.1 Bilan global

Une modélisation simple peut être réalisée dans le cas simple d'un échangeur unidimensionnel. Deux fluides échangent leur énergie entre eux au travers d'une paroi, dans un canal de longueur  $L$ . Dans ce qui suit on note avec des majuscules les variables relatives au fluide chaud ( $T, \dot{M}, C_p$ ) et avec des minuscules celles relatives au fluide froid ( $t, \dot{m}, c_p$ ).



Modèle global d'échangeur - Cas à co-courant

On suppose que :

- le régime permanent
- l'échangeur est isolé thermiquement par rapport à l'extérieur
- les températures sont uniformes perpendiculairement à la vitesse d'écoulement
- les fluides sont incompressibles ou des gaz parfaits
- Il n'y a pas de changement de phase dans l'échangeur
- les chaleurs massiques sont indépendantes de la température
- les transferts conductifs dans le sens d'écoulement du fluide sont négligeables
- les coefficients de convection  $H$  et  $h$  sont constants le long de l'échangeur

Du fait que l'on suppose que l'échangeur n'a pas de pertes, la conservation de l'énergie permet d'égaliser la puissance échangée  $\phi$  sur chacun des fluides globalement :

(1)

$$\phi = \dot{M} \cdot C_p \cdot (T_0 - T_L) = -\alpha \cdot \dot{m} \cdot c_p \cdot (t_0 - t_L)$$

Le paramètre  $\alpha$  permet de considérer en un seul cas les deux configurations de base d'un échangeur :

- $\alpha = -1$  : échangeur **contre-courant** (les 2 fluides "se croisent")
- $\alpha = 1$  : échangeur **co-courant** (les 2 fluides "vont dans le même sens")

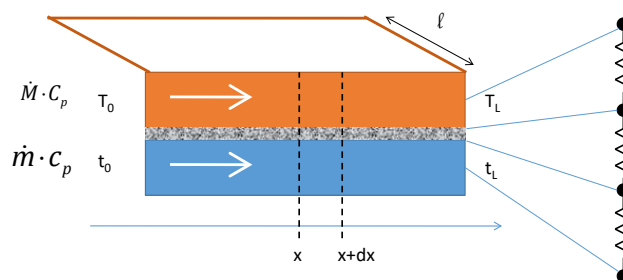
### 5.2.2 Méthode KS - $\Delta TLM$

Cette méthode est utilisée pour le dimensionnement de l'échangeur (surface d'échange nécessaire) lorsque les températures d'entrée et de sortie sont connues.

Pour cela, on effectue un bilan local sur une tranche de l'échangeur entre  $x$  et  $x+dx$  :

(2)

$$d\phi = -\dot{M} \cdot C_p \cdot dT = \alpha \cdot \dot{m} \cdot c_p \cdot dt$$



Modèle local d'échangeur - Cas à co-courant

Les coefficients d'échange convectifs locaux  $H$  et  $h$  étant supposés constants, on peut calculer une fois pour toutes le coefficient d'échange total comprenant :

- convection côté fluide froid;
- convection côté fluide chaud;
- résistance thermique de la paroi solide de séparation.

Les résistances sont en série et s'additionnent donc si l'on note  $K$  le coefficient d'échange total :

(3)

$$\frac{1}{KS} = \frac{1}{HS} + \frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{hS}$$

On considère a priori que les surfaces d'échange côté froid ( $s$ ) et côté chaud ( $S$ ) ne sont pas égales - une des surfaces peut être pourvue d'ailettes par exemple. De ce fait on peut rapporter le coefficient total  $K$  à n'importe laquelle de ces **surfaces**. C'est une pure **convention**, sans grande importance d'ailleurs puisqu'en pratique c'est le produit  $KS$  [ $W/K$ ] qui compte. Les coefficients  $H$  et  $h$  s'obtiennent à partir des corrélations de convection forcée en géométrie fermée. **Les grandeurs thermophysiques nécessaires à l'évaluation des nombres de Reynolds, Prandtl et Nusselt sont évaluées à la température moyenne :  $\frac{t_0+t_L}{2}$  et  $\frac{T_0+T_L}{2}$ .**

Les coefficients d'échange seront d'autant meilleurs que le régime est turbulent avec toutefois des pertes de charge plus importantes. La conception d'un échangeur est donc toujours le résultat d'un **compromis entre coefficient d'échange et pertes de charge**.

Par ailleurs, pour un échangeur isolé et en régime permanent, le flux de chaleur  $d\phi$  transmis du fluide chaud au fluide froid à travers une tranche  $dx$  de la paroi s'écrit comme :

(4)

$$d\phi = K \cdot \ell \cdot dx \cdot (T - t)$$

En combinant les équations (2) et (4), il vient deux équations :

$$dT = -\left(\frac{K}{\dot{M}C}\right) \cdot (T - t) \cdot \ell \cdot dx$$

$$dt = \left(\frac{K}{(\alpha \cdot \dot{m}c)}\right) \cdot (T - t) \cdot \ell \cdot dx$$

En faisant la différence entre les deux, il vient :

$$d(T - t) = -\left(\frac{K}{\dot{M}C} + \frac{K}{(\alpha \cdot \dot{m}c)}\right) \cdot (T - t) \cdot \ell \cdot dx$$

La résolution de l'équation différentielle donne :

$$T(x) - t(x) = A \cdot \exp\left[-K \cdot \ell \cdot x \left(\frac{1}{\dot{M}C} + \frac{1}{\alpha \cdot \dot{m}c}\right)\right]$$

Sur toute la longueur de l'échangeur,  $L$ , et avec  $S$  la surface d'échange totale,  $S = \ell \cdot L$ , il vient :

(5)

$$\frac{\Delta T_L}{\Delta T_0} = \frac{T(x=L) - t(x=L)}{T(x=0) - t(x=0)} = \exp\left[-KS \left(\frac{1}{\dot{M}C_p} + \frac{1}{\alpha \cdot \dot{m}c_p}\right)\right]$$

### Ecart moyen logarithmique

L'équation (9.5) peut s'écrire sous la forme :

$$\ln\left(\frac{\Delta T_0}{\Delta T_L}\right) = KS \left(\frac{1}{\dot{M}C_p} + \frac{1}{\alpha \cdot \dot{m}c_p}\right)$$

A partir du bilan global (équation 9.1), on obtient :

$$\frac{1}{\dot{M}C_p} = \frac{(T_0 - T_L)}{\phi} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\alpha \cdot \dot{m}c_p} = -\frac{(t_0 - t_L)}{\phi}$$

Il vient en introduisant les deux équations précédentes dans celle qui leur précède.



$$\ln\left(\frac{\Delta T_0}{\Delta T_L}\right) = KS \left( \frac{(T_0 - T_L)}{\phi} - \frac{(t_0 - t_L)}{\phi} \right)$$

On en déduit  $\phi$

$$\phi = KS \cdot \frac{\Delta T_0 - \Delta T_L}{\ln \frac{\Delta T_0}{\Delta T_L}}$$

L'expression en facteur de  $KS$  s'appelle **écart moyen logarithmique** noté  $\Delta T_{LM}$

$$\Delta T_{LM} = \frac{\Delta T_0 - \Delta T_L}{\ln \frac{\Delta T_0}{\Delta T_L}}$$

L'expression est facile à retenir puisqu'elle ne fait intervenir que les écarts à chacun des bouts de l'échangeur. On peut retenir :

$$\Delta T_{LM} = \frac{\text{écart à un bout} - \text{écart à l'autre bout}}{\text{logarithme de leur rapport}}$$

Et la puissance échangée dans l'échangeur parfaitement isolé et en régime permanent s'écrit :

$$\phi = KS \cdot \Delta T_{LM}$$

On remarquera que l'expression ne dépend pas de  $\alpha$  ; elle est donc la même **pour des échangeurs co-courant ou contre-courant**. Physiquement, l'équation ci-dessus signifie que la puissance est la même que si l'échange s'effectuait sous l'influence d'un écart de température constant égal à  $\Delta T_{LM}$ . Comme le montre la figure ci-dessous :

à co - courant	à contre courant
$\Delta T_{LM} = \frac{[Te - te] - [Ts - ts]}{\ln \left( \frac{Te - te}{Ts - ts} \right)}$	$\Delta T_{LM} = \frac{[Te - ts] - [Ts - te]}{\ln \left( \frac{Te - ts}{Ts - te} \right)}$

### Exemple de dimensionnement d'un échangeur

Lors du dimensionnement d'un échangeur, les 4 températures sont connues. Prenons l'exemple d'un échangeur fonctionnant avec les températures suivantes :

$$300\text{ }^{\circ}\text{C} \longrightarrow 180\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$160\text{ }^{\circ}\text{C} \longleftarrow 100\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\Delta T_{LM} = \frac{\Delta T_0 - \Delta T_L}{\ln \frac{\Delta T_0}{\Delta T_L}} = \frac{(300 - 160) - (180 - 100)}{\ln \left( \frac{300 - 160}{180 - 100} \right)} = 107^{\circ}\text{C}$$

On peut comparer cette valeur avec celle de l'écart moyen arithmétique :

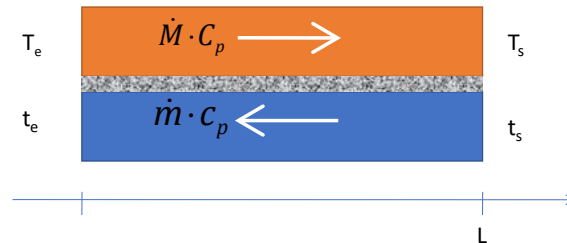
$$\Delta T_{ari} = \frac{300 + 180}{2} - \frac{160 + 100}{2} = 110^\circ\text{C}$$

La différence sera d'autant plus grande que les écarts de température sont importants. La connaissance de  $\Delta T_{LM}$  permet alors de calculer le coefficient d'échange  $KS$ . Si la puissance à échanger est de 107 kW (ceci fixe les débits), on calcule :  **$KS = 1000 \text{ W.K}^{-1}$** .

### 5.2.3 Méthode NUT-Efficacité

La méthode précédente ( $KS$  et  $\Delta T_{LM}$ ) est adaptée au dimensionnement mais se prête mal au calcul des performances de l'échangeur quand les conditions de l'échange varient. C'est particulièrement le cas lorsque les débits massiques varient. Dans ce cas, il vaut mieux utiliser une deuxième méthode dite (*NUT*, efficacité).

L'efficacité  $\varepsilon$  est le rapport de la **puissance échangée sur la puissance maximale** qui pourrait être échangée. Celle-ci serait obtenue avec un échangeur de **surface infinie**. Prenons le cas d'un échangeur contre-courant. On notera désormais les températures en entrée de l'échangeur  $t_e$  et  $T_e$  et en sortie  $t_s$  et  $T_s$ .

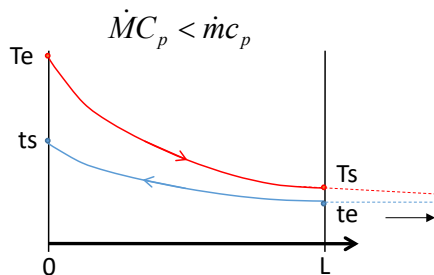


Introduisons le « **débit de capacité thermique massique** » comme suit

$$\dot{C} = \dot{m} \cdot c_p \quad [\text{W.K}^{-1}]$$

Le débit de capacité thermique massique minimum est donc :

$\dot{C}_{min} = \min(\dot{m} \cdot c_p; \dot{M} \cdot C_p)$  [W.K<sup>-1</sup>] l'échangeur était infini, il permettrait au fluide ayant le débit de capacité thermique massique minimum d'atteindre en sortie la température d'entrée de l'autre.



Supposons que le fluide chaud est celui ayant le débit de capacité thermique massique minimum. Comme l'illustre la figure de gauche, son écart de température entre l'entrée et la sortie va être plus grand que celui du fluide froid ayant le débit de capacité thermique massique maximum, du fait de la conservation d'énergie :

$$\phi = \dot{M} \cdot C_p \cdot (T_e - T_s) = \dot{m} \cdot c_p \cdot (t_s - t_e)$$

Si la longueur de l'échangeur tend vers l'infini, la température en sortie du fluide chaud  $T_s$  tend vers la température d'entrée du fluide froid  $t_e$ .

La puissance maximum qui pourrait être échangée dans le cas d'un échangeur de surface infinie peut donc s'écrire comme :

$$\phi_{max} = \dot{C}_{min}(T_e - t_e)$$

Elle correspond au produit du plus grand écart de température apparaissant dans l'échangeur- « écart de température extrême » par le plus petit débit de capacité thermique massique  $\dot{C}_{min}$ .

La puissance réellement échangée peut s'écrire indifféremment :

$$\phi = \dot{M} \cdot C_p \cdot (T_e - T_s) = \dot{m} \cdot c_p \cdot (t_s - t_e)$$

D'où l'expression de l'**efficacité de l'échangeur** :

$$\varepsilon = \frac{\phi}{\phi_{max}} = \frac{\dot{M} \cdot C_p \cdot (T_e - T_s)}{\dot{C}_{min}(T_e - t_e)} = \frac{\dot{m} \cdot c_p \cdot (t_s - t_e)}{\dot{C}_{min}(T_e - t_e)}$$

$$\varepsilon = \frac{\phi}{\phi_{\max}} = \frac{\text{écart de température entrée sortie du fluide ayant le } \dot{C}_{\min}}{\text{écart extrême de température dans l'échangeur}}$$

L'équation (5) dans le cas d'un échangeur à contre-courant ( $\alpha = -1$ ) et avec  $\dot{C}_{\min} = \dot{M} \cdot C_p$  s'écrit :

$$\frac{\Delta T_L}{\Delta T_0} = \exp \left[ -KS \left( \frac{1}{\dot{C}_{\min}} - \frac{1}{\dot{C}_{\max}} \right) \right]$$

On définit le rapport des débits débit de capacité thermique massique tel que :

$$R = \frac{\dot{C}_{\min}}{\dot{C}_{\max}} \leq 1 \quad [-]$$

Et le nombre d'unités de transfert NUT :

$$NUT = \frac{KS}{\dot{C}_{\min}} \quad [-]$$

L'équation précédente peut s'écrire alors comme :

$$\frac{\Delta T_L}{\Delta T_0} = \exp[-NUT(1 - R)]$$

Le nombre d'unités de transfert peut être réécrit comme :

$$NUT = \frac{1}{1 - R} \ln \left( \frac{\Delta T_0}{\Delta T_L} \right)$$

Le nombre d'unités de transfert est pratique dans le cas où plusieurs échangeurs sont mis en série (les  $NUT$  s'ajoutent) ou en parallèle. C'est aussi l'outil **pour calculer les températures hors du régime nominal**<sup>19</sup>.

L'efficacité et le principe de conservation d'énergie entre la puissance perdue par le fluide chaude et celle gagnée par le fluide froid permettent d'écrire les deux relations suivantes respectivement :

$$T_e - T_s = \varepsilon \cdot (T_e - t_e) \quad \text{et} \quad t_s - t_e = R(T_e - T_s) = R \cdot \varepsilon \cdot (T_e - t_e)$$

D'où

$$\Delta T_0 = T_e - t_s = T_e - t_e + t_e - t_s = (1 - R \cdot \varepsilon) \cdot (T_e - t_e)$$

$$\Delta T_L = T_s - t_e = T_s - T_e + T_e - t_e = (1 - \varepsilon) \cdot (T_e - t_e)$$

Il vient :

$$NUT = \frac{1}{1 - R} \ln \left( \frac{1 - R \cdot \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)$$

On en déduit l'expression de l'efficacité dans le cas d'un **échangeur à contre-courant avec  $R < 1$**

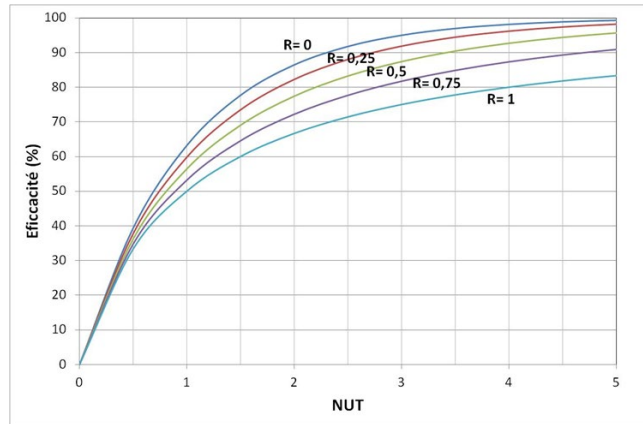
$$\varepsilon = \frac{1 - \exp[-NUT \cdot (1 - R)]}{1 - R \cdot \exp[-NUT \cdot (1 - R)]}$$

Dans le **cas où  $R = 1$** , l'efficacité s'exprime :

$$\varepsilon = \frac{NUT}{1 + NUT}$$

La figure ci-dessous montre l'évolution de l'efficacité d'un **échangeur contre-courant** en fonction du NUT et pour différentes valeurs de R.

<sup>19</sup> Au régime nominal, ce sont les températures qui sont données et la méthode du  $\Delta T_{LM}$  permet de déterminer le coefficient d'échange.



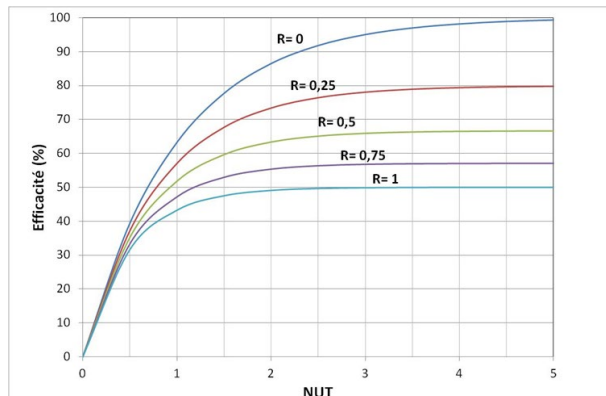
Ces relations que l'on trouve pour nombre de géométries d'échangeur sont connues sous le nom de relations (NUT -  $\varepsilon$ ). Dans le cas d'un échangeur à co-courant, l'efficacité devient pour tout R :

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp[-NUT \cdot (1 + R)]}{1 + R}$$

et

$$NUT = \frac{1}{1 + R} \ln \left( \frac{1}{1 - \varepsilon(1 + R)} \right)$$

La figure ci-dessous montre l'évolution de l'efficacité d'un **échangeur contre-courant** en fonction du NUT et pour différentes valeurs de R.



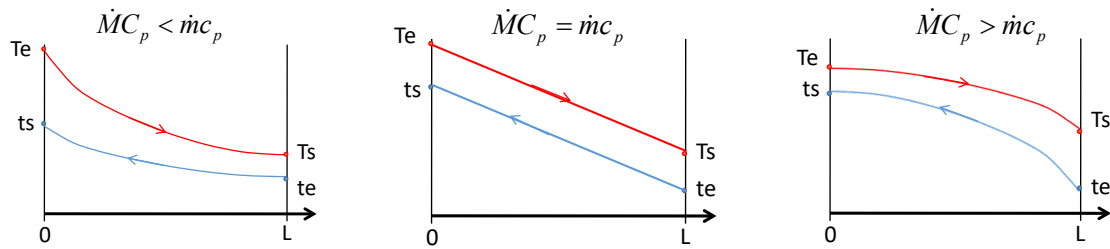
**L'efficacité d'un échangeur à contre-courant est toujours meilleure que celle d'un échangeur co-courant.** Pour quelle raison peut-on être amené à choisir un échangeur co-courant ? Dans le cas où la température du fluide chaud est très élevée et risque de conduire à une température de paroi élevée, dommageable pour le matériau, il faut mettre l'entrée chaude de l'échangeur en contact avec la température la plus basse possible. La **température de paroi** s'obtient par un simple bilan sur la paroi. On obtient :

$$T_{paroi} = \frac{H \cdot T + h \cdot t}{H + h}$$

## 5.2.4 Allure des températures

### Echangeur à contre-courant

Les courbes ci-dessous représentent l'évolution des températures le long de l'échangeur à contre-courant dans le cas où le fluide chaud correspond à  $\dot{C}_{min}$ , le cas où les 2 Fluides ont le même débit de capacité thermique massique et celui où le fluide chaud correspond à  $\dot{C}_{max}$ .



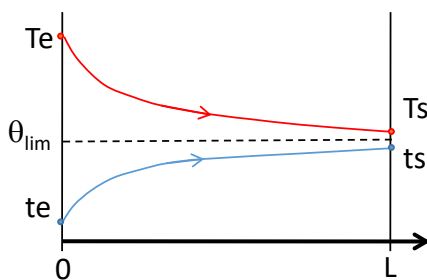
Evolution des températures dans un échangeur à contre-courant

On définit le **pincement** comme l'**écart minimal** entre les 2 températures de fluide. Dans le cas de la figure ci-dessus, il vaut  $T_s - t_e$  quand  $\dot{M} \cdot C_p < \dot{m} \cdot c_p$  et  $T_e - t_s$  quand  $\dot{M} \cdot C_p > \dot{m} \cdot c_p$ . Dans le cas où les 2 débits de capacité thermique massique sont égaux, les profils ne sont plus exponentiels mais **linéaires** et l'écart de température est constant tout au long de l'échangeur.

Notons, qu'il est facile de reconnaître graphiquement le fluide qui a le  $\dot{C}_{\min}$ , c'est celui qui présente la plus grande chute de température.

### Echangeur à co-courant

On représente ci-dessous l'évolution dans le cas d'un échangeur co-courant.



Dans ce cas, les profils de température admettent une asymptote commune noté  $\theta_{lim}$ . Pour la calculer on peut écrire la puissance échangée dans le cas où  $x$  tend vers l'infini, c'est-à-dire, les deux fluides tendent vers  $\theta_{lim}$  en sortie de l'échangeur.

$$\phi = \dot{M} \cdot C_p \cdot (T_e - \theta_{lim}) = \dot{m} \cdot c_p \cdot (\theta_{lim} - t_e)$$

Il en découle :

$$\theta_{lim} = \frac{\dot{M} \cdot C_p \cdot T_e + \dot{m} \cdot c_p \cdot t_e}{\dot{M} \cdot C_p + \dot{m} \cdot c_p}$$

## 5.3 Echangeurs quelconques

En général, les échangeurs du commerce diffèrent dans leur conception de l'échangeur contre-courant. Pour la méthode  $(KS, \Delta T_{LM})$ , le principe est de garder l'échangeur à contre-courant comme référence et de faire intervenir un facteur multiplicatif correctif  $F$ . Les valeurs de  $F$  sont données dans des abaques<sup>20</sup> en fonction du rapport des températures.

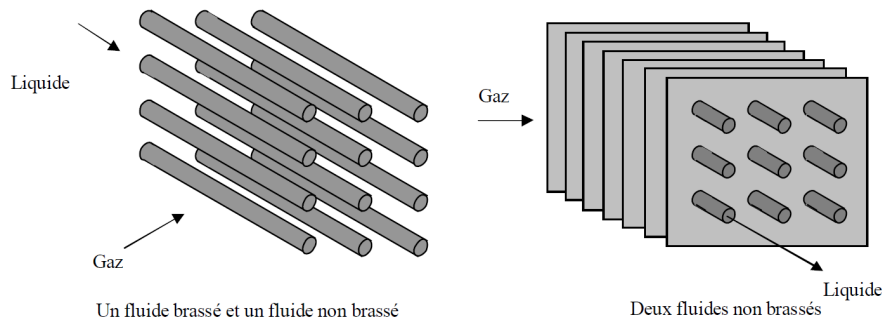
$$\phi = F \cdot KS \cdot \Delta T_{LM}$$

Avec  $\Delta T_{LM}$  est calculé dans le cas d'un échangeur à contre-courant

Pour la méthode  $(NUT, \varepsilon)$ , il existe des formules relatives à différentes géométries d'échangeurs.

### Echangeurs à courants croisés

<sup>20</sup> voir W.Rohsenow, J. Harnett et Y. Cho. Handbook of heat Transfer, 3<sup>rd</sup> ed., Mc Graw Hill, 1998



Dans les échangeurs à courants croisés, les deux fluides s'écoulent perpendiculairement l'un à l'autre. Ce type d'échangeur est très courant pour les transferts thermiques entre un gaz et un liquide, le liquide circulant dans les tubes comme sur les figures ci-dessus. On distingue le cas où le fluide est brassé (mixed) ou non brassé (unmixed). Un fluide est dit non brassé s'il s'écoule dans une veine divisée en plusieurs canaux parallèles distincts et de faible section, il est dit brassé dans le cas contraire. Le brassage a pour effet d'homogénéiser les températures dans la section droite de la veine.

Les relations ( $NUT$ ,  $\varepsilon$ ) sont pour les échangeurs à courants croisés :

- Deux fluides non brassés

$$\varepsilon = 1 - \exp \left[ \frac{\exp(-R \cdot NUT^{0.78}) - 1}{R \cdot NUT^{-0.22}} \right]$$

- Un fluide non brassé

- Fluide de débit capacitif minimal non brassé

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp[-R \cdot (1 - \exp(-NUT))]}{R}$$

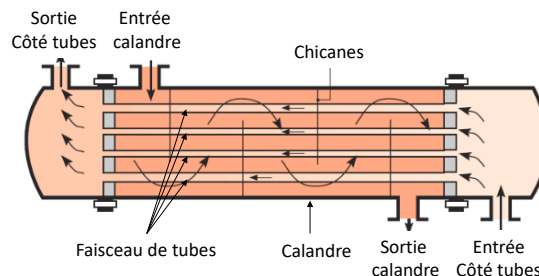
- Fluide de débit capacitif maximal non brassé

$$\varepsilon = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{1 - \exp(-R \cdot NUT)}{R} \right) \right]$$

### Echangeurs tubes calandres

Les échangeurs de type tube-calandre sont les plus répandus dans l'industrie étant donné leur large gamme d'application (températures de  $-200^{\circ}\text{C}$  à  $1000^{\circ}\text{C}$  côté tube, jusqu'à  $300^{\circ}\text{C}$  côté calandre ; pression jusqu'à 200 bars côté tubes et 40 bars côté calandre ; pertes de charges modérées ; bonne compacité ; puissances importantes).

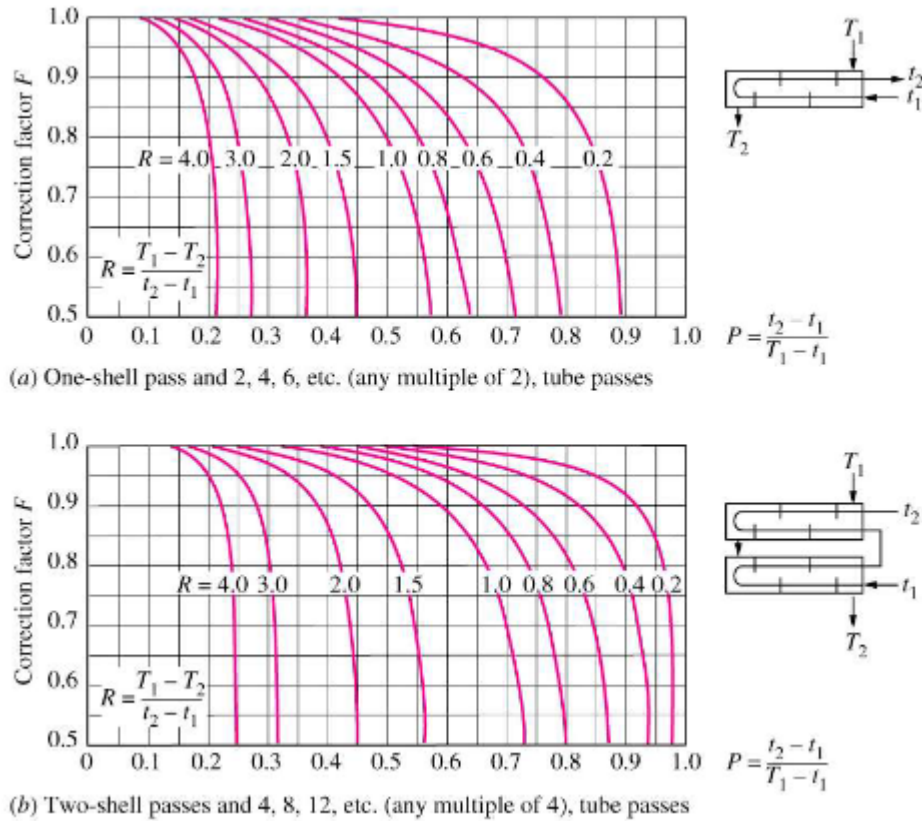
L'un des deux fluides circule dans un faisceau de tubes en parallèle tandis que l'autre fluide circule autour des tubes dans une calandre comme présenté sur la figure ci-dessous.



Pour le dimensionnement, on utilise la méthode ( $KS$ ,  $\Delta T_{LM}$ ) avec le facteur correctif  $F$  donné par des expressions analytiques ou des abaques comme montré sur la figure ci-dessous. Sur la figure ci-dessous, le facteur  $F$  est sélectionné à partir de deux grandeurs  $R$  et  $P$  :

$$R = \frac{(\dot{m} \cdot c_p)_{\text{côté tubes}}}{(\dot{m} \cdot c_p)_{\text{côté calandre}}} = \frac{T_1 - T_2}{t_2 - t_1} \text{ et } P = \frac{t_2 - t_1}{T_1 - t_1}$$

Dans lesquelles 1 et 2 font référence à l'entrée et à la sortie respectivement, T et t font références aux températures côté calandre et côté tubes respectivement.

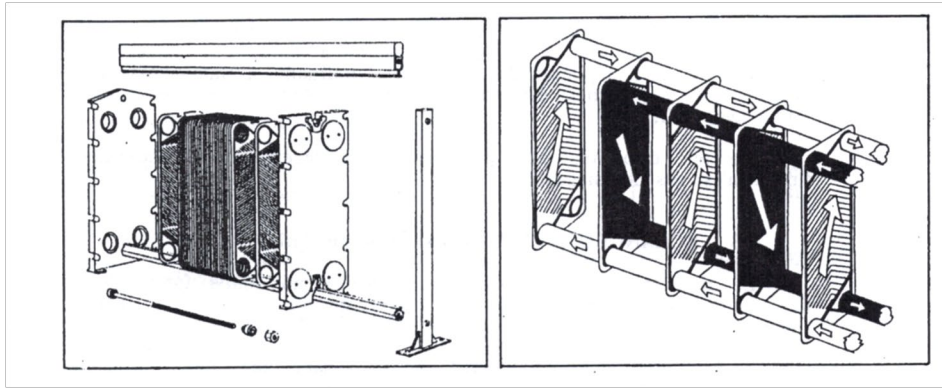


Abaques du facteur correctif F pour des échangeurs tubes-calandre à une et deux calandres (F.P. Incropera et D. De Witt, *fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 4th ed. Wiley, 1996)

### Echangeurs à plaques

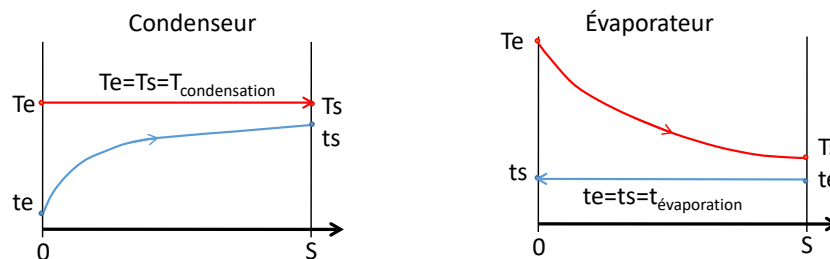
Les échangeurs à plaques, courants dans l'industrie agro-alimentaires, sont de plus en plus utilisés dans diverses branches industrielles du fait de leur compacité remarquable. On peut distinguer deux types d'échangeurs à plaques :

- Les échangeurs à **plaques et joints**, dont les applications sont limitées par la pression maximale de service et par la pression différentielle entre les deux fluides. On peut réaliser industriellement aujourd'hui des échangeurs fonctionnant à des pressions allant jusqu'à 2,5 MPa ; la température maximale de service est limitée par la nature des joints. On admet, comme limite supérieure d'utilisation des joints standards, une valeur de l'ordre de 150°C et de 230 °C pour les joints spéciaux. La caractéristique principale des échangeurs à plaques et joints, outre leur compacité, est leur capacité à être démontés facile pour leur entretien et leur adaptabilité en ajoutant ou enlevant des plaques ;
- Les échangeurs avec **plaques soudées ou brasées** permettent d'utiliser ces surfaces d'échanges primaires à des niveaux de température et de pression plus élevés que les échangeurs à plaques et joints.



## Echangeurs frigorifiques

Dans les installations frigorifiques et les pompes à chaleur, il y a au moins deux échangeurs à changement de phase, un condenseur et un évaporateur. Du côté du fluide frigorigène, le changement de phase du fluide se fait à température constante pour les fluides azéotropes. Sans désurchauffer ni sous-refroidissement du fluide frigorigène, il n'y a plus de différence entre les températures de sortie et d'entrée de l'un des deux fluides, la distinction co-courant contre-courant disparaît. Les profils de température sont montrés sur la figure ci-dessous pour un condenseur et un évaporateur.



Sans désurchauffer ni sous-refroidissement du fluide frigorigène, et si le coefficient d'échange global peut être considéré comme constant le long de l'échangeur, la méthode  $(KS, \Delta T_{LM})$  est applicable. Du côté du fluide frigorigène, la température étant constante, on a donc le débit de capacité thermique massique qui tend vers l'infini. Le rapport des débits de capacité thermique massique tend vers zéro. Les relations d'efficacité des échangeurs à co- ou contre-courant deviennent :

$$\varepsilon = 1 - \exp(-NUT)$$

Cependant, dans la plupart des cas, on a une légère surchauffe dans l'évaporateur et une désurchauffe dans le condenseur. Par ailleurs, pour les titres vapeur supérieurs à 75%, le coefficient d'échange convectif côté fluide frigorigène chute brutalement ce qui ne permet plus de considérer le coefficient d'échange global comme constant. Pour le dimensionnement, il faut alors scinder en plusieurs parties pour caractériser les différentes zones de l'échangeur et assurer que le coefficient d'échange global de transfert soit constant ou varie linéairement sur chacune d'entre elles.

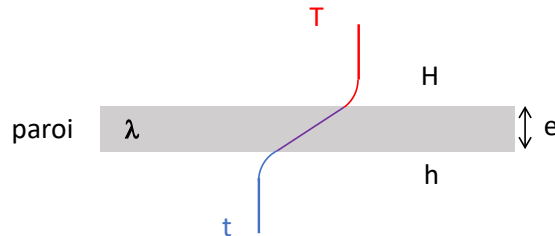


## 5.4 Coefficient d'échange global

### 5.4.1 Conductance globale d'un échangeur

Le transfert thermique au sein d'un échangeur fait intervenir plusieurs phénomènes :

- La conduction au travers de la paroi séparant les deux fluides
- La convection sur chaque face de la paroi avec les deux fluides



Représentation schématique du transfert thermique du fluide chaud vers le fluide froid

On peut écrire la résistance thermique globale (inverse de la conductance globale) comme la somme des résistances de convection et de conduction en série :

$$\frac{1}{KS} = \frac{1}{H \cdot S} + \frac{e}{\lambda \cdot S} + \frac{1}{h \cdot S}$$

Avec K le coefficient d'échange global en W/m<sup>2</sup>/K, H et h les coefficients d'échange convectif en W/m<sup>2</sup>/K côté fluide chaud et fluide froid respectivement, et λ la conductivité thermique de la paroi en W/m/K.

A ces résistances, on peut ajouter des résistances d'encrassement de chaque côté de la paroi. L'encrassement des échangeurs peut provenir de dépôt de tartre, de micro-organismes d'origine biologique... En introduisant des résistances thermiques  $r_e^c$  et  $r_e^f$  en m<sup>2</sup>.K/W, la conductance thermique globale devient :

$$\frac{1}{KS} = \frac{1}{H \cdot S} + \frac{r_e^c}{S} + \frac{e}{\lambda \cdot S} + \frac{r_e^f}{S} + \frac{1}{h \cdot S}$$

Les valeurs usuelles de résistances d'encrassement sont de 1×10<sup>-4</sup> à 1×10<sup>-5</sup> m<sup>2</sup>.K/W pour des fluides propres. Les ordres de grandeur des coefficients d'échange convectif sont donnés dans le tableau suivant :

Fluides	Coefficient d'échange convectif W/m <sup>2</sup> /K
Gaz en convection naturelle	10 < h < 30
Gaz en convection forcée	30 < h < 300
Eau en convection naturelle	100 < h < 900
Eau en convection forcée	300 < h < 10 000
Ebullition	3 000 < h < 50 000
Condensation	50 000 < h < 110 000

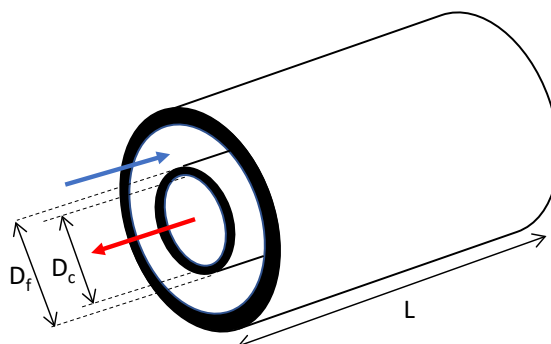
Ordres de grandeur des coefficients d'échange convectif

En ce qui concerne la résistance de conduction à la paroi, elle est généralement très faible et peu en première approximation est négligée en comparaison de celles convectives comme le montre le tableau suivant :

Matériaux	Conductivité thermique $\lambda$ en W/m/K	Conductance $\lambda/e$ W/m <sup>2</sup> /K		
		Epaisseur e		
		0,5 mm	1 mm	2 mm
Acier inox	15-20	40 000	20 000	10 000
Acier	40-50	80 000	40 000	20 000
Aluminium	200	400 000	200 000	100 000
Cuivre	380	760 000	380 000	190 000

Ordres de grandeur des conductances de paroi pour les principaux matériaux utilisés dans les échangeurs

Dans le cas d'un échangeur à plaques par exemple, les surfaces d'échange côté fluide froid et fluide chaud sont les mêmes. L'expression de la conduction globale fait ainsi référence à une unique surface d'échange  $S$ . En revanche, dans le cas d'échangeur tubulaire représentée par la figure ci-dessous, la surface n'est plus la même entre côté chaud et le côté froid, et on doit utiliser l'expression de la résistance de conduction dans le cas d'un cylindre.



Il vient donc l'expression de la conductance globale :

$$\frac{1}{KS} = \frac{1}{H \cdot S_c} + \frac{1}{2 \cdot \lambda \cdot \pi \cdot L} \ln\left(\frac{D_f}{D_c}\right) + \frac{1}{h \cdot S_f}$$

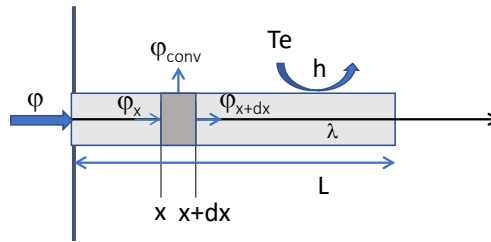
Si on souhaite extraire de la conductance globale, le coefficient d'échange global, il faudra alors le spécifier pour une des deux surfaces  $S_c$  ou  $S_f$ .

Dans le cas des échangeurs air/eau, on peut constater que les ordres de grandeur des coefficients d'échange convectifs côté air et côté eau du tableau ci-dessus sont très différents. Par exemple, prenons comme coefficient d'échange côté air  $80 \text{ W/m}^2/\text{K}$  et côté eau  $2000 \text{ W/m}^2/\text{K}$ . En conséquence, la résistance thermique sera 25 fois plus importante côté air. Afin d'améliorer le transfert thermique, il faudra donc réduire la résistance côté air. Pour cela, on utilise généralement des ailettes côté air qui permettent d'augmenter artificiellement la surface d'échange et en conséquence de réduire la résistance côté air.

### 5.4.2 Amélioration de la conductance côté air – Ajout d'ailettes

Une ailette est une plaque fine destinée à augmenter la surface d'échange d'un corps (on en observe sur tous les radiateurs d'automobile, dans le refroidissement de montages électroniques, sur les carters de moteur...) soit pour le refroidir soit pour le réchauffer.

L'étude d'une ailette constituée d'une simple barre, de type cylindre ou plaque rectangulaire, est un bon exemple illustrant l'écriture **d'un bilan thermique**. Le dispositif est représenté sur la figure ci-dessous. La tige de périmètre  $P$  et de longueur  $L$  est suffisamment conductrice pour que le problème soit considéré unidirectionnel.  $h$  est le coefficient de convection à la surface de l'ailette, le milieu extérieur étant à température constante égale à  $T_e$ . On impose un flux constant à une des extrémités de l'ailette.



On impose un flux  $\phi$  constant à l'une des extrémités de l'ailette. Le bilan sur le petit élément  $dx$  en régime permanent s'écrit comme la somme des flux entrants ou sortants est nulle :

$$-\lambda \cdot S \frac{dT}{dx} \Big|_x + \lambda \cdot S \frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx} + h \cdot P \cdot dx [T_e - T(x)] = 0$$

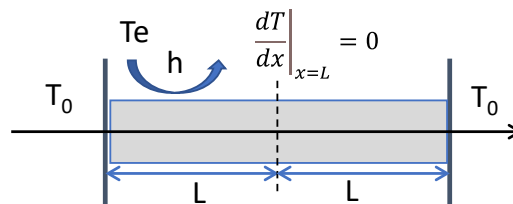
$$\lambda \cdot S \frac{d^2 T}{dx^2} - h \cdot P [T(x) - T_e] = 0$$

On pose  $\alpha^2 = \frac{h \cdot P}{\lambda \cdot S}$  soit :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \alpha^2 [T(x) - T_e] = 0$$

### Conditions aux limites

Comme c'est souvent le cas, on considère que les ailettes vont d'un tube à un autre. Il en découle une condition limite de symétrie à égale distance entre les tubes imposant un flux nul au centre de l'ailette.



Les conditions aux limites sont les suivantes :

- On suppose ici  $T(x=0)$  maintenue à une température constante égale à  $T_0$  (cas d'un échangeur alimenté en fluide à température constante)
- On suppose ici en  $x=L$  que le flux est nul

$$-\lambda \cdot S \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = 0$$

Dans ce cas, la solution s'écrit :

$$\frac{T(x) - T_e}{T_0 - T_e} = \frac{\cosh(\alpha(L - x))}{\cosh(\alpha \cdot L)}$$

La puissance totale dissipée par l'ailette peut s'écrire à l'abscisse  $x=0$  :

$$\Phi = -\lambda \cdot S \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = \sqrt{\lambda \cdot S \cdot h \cdot P} (T_0 - T_e) \tanh(\alpha \cdot L)$$

**Efficacité d'ailette :**

On définit l'efficacité d'ailette par rapport à une ailette idéale de conductivité infinie dont la température serait uniforme et égale à  $T_0$ . Elle échangerait sur toute la longueur  $L$  de l'ailette :

$$\phi = h \cdot P \cdot L(T_0 - T_e)$$

L'efficacité d'une ailette de type tige entre deux tubes<sup>21</sup> s'exprime comme :

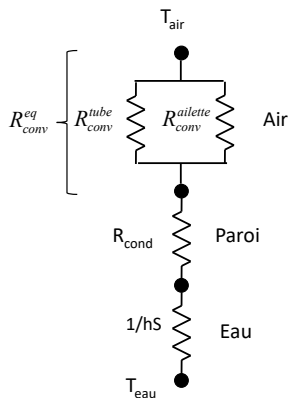
$$\eta_{ail} = \frac{\tanh(\alpha \cdot L)}{\alpha \cdot L}$$

$\alpha \cdot L$  fait intervenir la longueur et les propriétés de l'ailette. A propriétés égales, **plus l'ailette est longue, moins elle est efficace** (ceci est évidemment compensé par une surface supérieure). A longueur égale, **plus elle est conductrice, plus elle est efficace**. Dans la pratique, la mise en œuvre coûtant plus cher que la matière, on choisit des ailettes avec de très bonnes efficacités de l'ordre de 0,8 à 0,9.

Le **flux évacué** par une surface comprenant des ailettes peut s'écrire simplement comme la somme de deux résistances en parallèle : Celle représentant la surface de base (par exemple, la surface externe des tubes à laquelle on aura retranché la surface de contact entre les tubes et les ailettes) et celle correspondant à la surface des ailettes. Le flux échangé s'écrit :

$$\Phi = hS_{tube}(T_{tube} - T_e) + h \cdot \eta_{ail} \cdot S_{ail}(T_{tube} - T_e)$$

La surface des ailettes est  $S_{ail}$  et  $S_{tube}$  est la surface nette du tube une fois décomptée la surface correspondant à la base des ailettes en contact avec le tube. L'efficacité  $\eta_{ail}$  permet de considérer le même écart de température ( $T_{tube} - T_e$ ) dans l'écriture de la puissance échangée. Si l'on suppose un même coefficient d'échange superficiel  $h$ .



Analogie électrique

On peut utiliser l'analogie électrique pour représenter la résistance thermique globale dans l'échangeur.

Le tube et les ailettes peuvent être représentés comme 2 résistances en parallèle  $R_{tube}$  et  $R_{ailette}$ .

La résistance externe équivalente s'obtient en sommant l'inverse des résistances :

$$1/R_{conv}^{eq} = 1/R_{conv}^{tube} + 1/R_{conv}^{ailette}$$

soit

$$1/R_{conv}^{eq} = h \cdot S_{tube} + h \cdot \eta_{ail} \cdot S_{ail}$$

<sup>21</sup> On trouvera dans *Kreith, Handbook of thermal engineering, CRC press, Springer 2000* les expressions d'efficacité d'ailettes de différentes géométries.

## **Chapitre 6 : Transferts radiatifs**

---

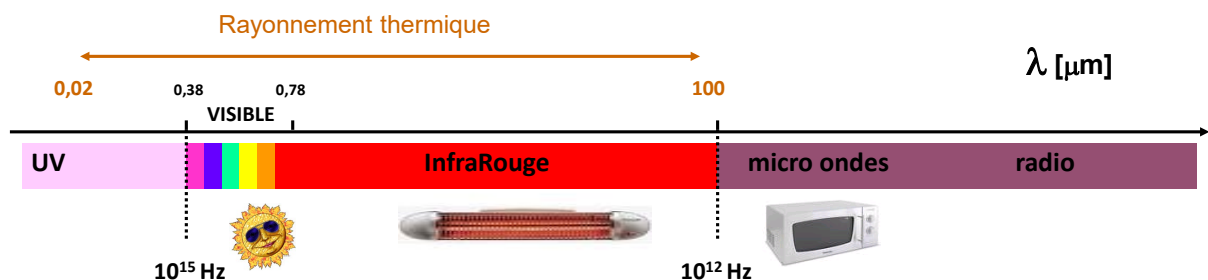
## 6.1 Lois fondamentales du rayonnement thermique

### 6.1.1 Rayonnement thermique

Tous les corps matériels rayonnent, c'est à dire libèrent en permanence de l'énergie sous une forme non matérielle qu'on appelle « rayonnement électromagnétique ». Ce phénomène peut être considéré d'un point de vue « ondulatoire » (onde électromagnétique) ou d'un point de vue corpusculaire (particules sans masse ni charge électrique appelées « photons »).

Le rayonnement est constitué de photons caractérisés par leur direction de propagation et leur fréquence. Les photons se propagent en ligne droite (si l'indice du milieu est constant) à la vitesse de la lumière dans le vide. Chaque photon transporte une énergie qui dépend de sa fréquence  $\nu$  ( $E=h.\nu$ ,  $h$  étant la constante de Planck dont la valeur est de  $6,626 \cdot 10^{-34}$  J.s).

Le rayonnement thermique se situe dans une gamme de longueur d'onde variable avec la source émettrice et qui peut s'étendre de  $0,02 \mu\text{m}$  à  $100 \mu\text{m}$ .



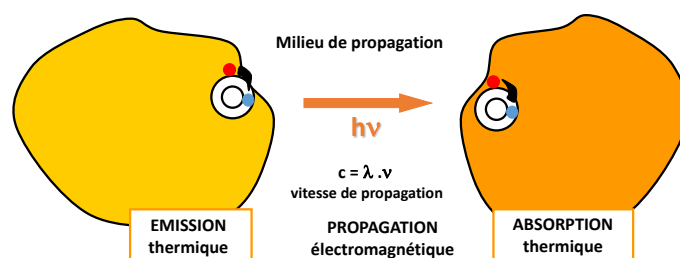
On parle de rayonnement thermique infra-rouge au-delà de  $1\mu\text{m}$  et ultra-violet en dessous de  $0,4 \mu\text{m}$ .

**Remarque 1 :** Expérience de Herschel. En 1800, Sir William Herschel a découvert l'existence de l'infrarouge en réalisant l'expérience suivante. En faisant passer la lumière du soleil au travers d'un prisme, lequel a pour effet de décomposer la lumière en un arc-en-ciel appelé spectre, Herschel a cherché à mesurer la chaleur liée à chaque couleur. A l'aide d'un thermomètre, il a constaté que la température augmentait sur tout le spectre visible du rouge au violet. Il le plaça ensuite au-delà du rouge, et observa aussi une élévation de température. Il conclut qu'il devrait y avoir un autre genre de lumière dans cette région non visible. Il découvrit le rayonnement infra-rouge.

**Remarque 2 :** D'autres rayonnements dans des gammes de fréquences différentes peuvent avoir aussi un effet thermique tel que le rayonnement micro-ondes. Mais le rayonnement micro ondes est un mécanisme volumique et non surfacique Cette agitation résulte de l'oscillation de la molécule d'eau dont le dipôle ou vecteur de polarisation électrique s'oriente passivement dans le champ électrique alternant du rayonnement micro-onde.

**Remarque 3 :** On verra que le rayonnement thermique se situe dans le domaine infrarouge à basse température et qu'il se déplace vers les courtes longueurs d'ondes au fur et à mesure que la température augmente.

**Remarque 4 :** En thermique du bâtiment, on parle de rayonnement « grandes longueurs d'onde » au lieu de infra rouge.



L'échange thermique entre une surface et son environnement s'effectue selon deux processus :

- **L'émission** de rayonnement qui est une conversion d'énergie matérielle (translation, rotation, vibration ou excitation électronique de la matière) en énergie radiative (production de photons) ;
- **L'absorption**, qui est le processus inverse, au cours duquel les photons issus de l'environnement disparaissent en cédant l'intégralité de leur énergie au milieu matériel.

La réflexion et la diffusion du rayonnement sont des phénomènes sans échange énergétique.

## 6.1.2 Grandeurs associées aux sources de rayonnement

Les flux radiatifs sont classés selon deux critères :

- **Directivité des photons** : si l'on considère un faisceau d'ouverture  $d\Omega$  centré sur une direction donnée,  $\vec{\Omega}$ , le flux associé est dit directionnel. Si on s'intéresse à toutes les directions, le flux correspondant est dit hémisphérique ;
- **Monochromaticité des photons** : si l'on considère les photons de longueur d'onde comprises entre  $\lambda$  et  $\lambda+d\lambda$ , le flux associé est dit spectrique. Si on s'intéresse à l'ensemble du spectre, le flux est dit total.

### Définition de la luminance

Le flux d'énergie radiative transportée à travers la surface élémentaire  $dS$  dans le cône d'angle solide  $d\Omega$  centré dans la direction  $\Delta$  par les photons dont la longueur d'onde est comprise entre  $\lambda$  et  $\lambda+d\lambda$  s'écrit :

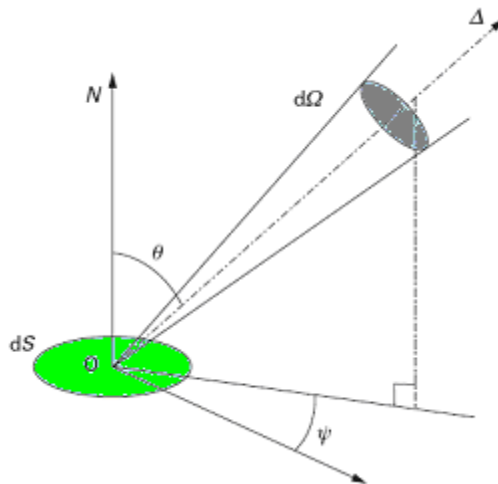
$$d^5\phi = L_{\lambda\Delta} \cdot dS \cdot \cos \theta \cdot d\Omega \cdot d\lambda = L(T, \lambda, \theta, \psi) \cdot dS \cdot \cos \theta \cdot d\Omega \cdot d\lambda$$

La grandeur  $L_{\lambda\Delta}$  est appelée la luminance spectrique de la surface  $S$  au point  $O$  dans la direction  $\Delta$ .

L'angle  $\theta$  est l'angle compris entre la normale  $N$  à la surface  $dS$  et la direction  $\Delta$ .

Le produit  $dS \cdot \cos \theta$  représente la surface émettrice apparente dans la direction considérée.

L'exposant 5 indique qu'il faudra intégrer 5 fois pour obtenir le flux total (intégration sur  $\lambda$ ) hémisphérique (intégration sur  $\Omega$ ) émis par la surface  $S$ .



La luminance spectrique est généralement exprimée en  $\text{W.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}.\mu\text{m}^{-1}$ .

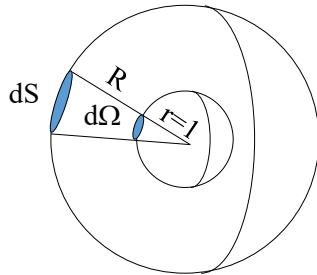
**Remarque 1** : En raison de leur excellente directivité et de leur très faible largeur spectrale d'émission, les sources laser sont caractérisées par des luminances spectriques extrêmement élevées. Par exemple, la luminance d'un laser hélium-néon de faible puissance 1 mW, est de l'ordre de  $8 \cdot 10^{13} \text{ W.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}.\mu\text{m}^{-1}$  alors

que la luminance spectrale maximale du soleil est de  $2,64 \cdot 10^7 \text{ W.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}.\mu\text{m}^{-1}$  laquelle se situe à une longueur d'onde de  $0,5 \mu\text{m}$ ).

## Définition de l'angle solide

L'angle solide est défini comme l'aire  $d\Omega$  de la surface interceptée sur une sphère de rayon unité par un cône issu du centre de la sphère.

Considérons à présent un tel angle solide  $d\Omega$ , et calculons la surface  $dS$  qu'il intercepte s'il est placé à une distance  $R$  de la source émettrice  $O$ . Ceci est représenté ci-dessous :



La sphère de rayon  $R$  a une surface  $4\pi R^2$  et la sphère de rayon unité une surface  $4\pi$ . On déduit donc simplement  $d\Omega$  par :

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2}$$

Les angles solides sont exprimés en stéradian (sr).

L'angle solide élémentaire en coordonnées sphériques s'écrit :

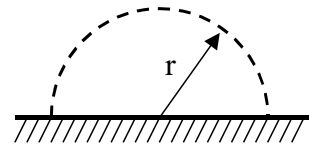
$$d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\psi$$

Si on regarde une surface plane  $ds$  à une grande distance  $R$ , l'angle solide pourra être calculé en faisant l'approximation que la surface plane et la surface de la sphère sont très proches :

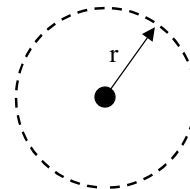
$$d\Omega \approx \frac{ds}{R^2}$$



L'angle solide d'une source plane est égal à  $2\pi \text{ sr}$ .



L'angle solide d'une source sphérique est égal à  $4\pi \text{ sr}$ .



## Luminance totale d'une source

La **luminance totale** est définie comme le flux d'énergie radiative transportée à travers la surface élémentaire  $dS$  dans le cône d'angle solide  $d\Omega$  centré dans la direction  $\Delta$  par les photons **de toutes les longueurs d'onde** s'écrit :

$$d^4\phi = L_{\Delta} \cdot dS \cdot \cos \theta \cdot d\Omega = \int_0^{\infty} L_{\lambda\Delta} \cdot dS \cdot \cos \theta \cdot d\Omega \cdot d\lambda$$

**Remarque 2 :** la luminance totale du soleil est de l'ordre de  $5 \cdot 10^6 \text{ W.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}$  alors que celle du laser hélium-néon est de l'ordre de  $300 \text{ W.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}$

## Définition de l'émittance

**L'émittance** est définie comme Le flux d'énergie radiative transportée à travers la surface élémentaire  $dS$  **dans toutes les directions** par les photons dont la longueur d'onde  $\lambda$  et  $\lambda+d\lambda$  s'écrit :



$$d^3\phi = M_\lambda \cdot dS \cdot d\lambda = \iint_{\Omega} L_{\lambda\Delta} \cdot dS \cdot \cos\theta \cdot d\Omega \cdot d\lambda$$

d'où

$$M_\lambda = \iint_{\Omega} L_{\lambda\Delta} \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\psi$$

$M_\lambda$  est appelé l'émittance (ou exitance) spectrique de la surface S au point O. Elle est généralement exprimée en  $\text{W.m}^{-2}.\mu\text{m}^{-1}$

### Corps à émission isotrope

Une source est isotrope (ou « diffuse ») lorsque sa luminance monochromatique est indépendante de la direction considérée. On dit dans ce cas qu'elle obéit à la loi de Lambert. Dans ce cas, la relation entre l'émittance et la luminance est très simple :

$$M_\lambda = L_\lambda \cdot \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\psi=0}^{2\pi} \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\psi = \pi \cdot L_\lambda$$

**Remarque 1 :** la loi de Lambert :

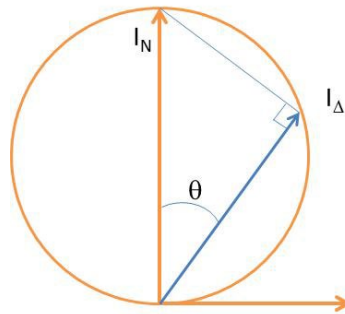
La luminance monochromatique est égale à la luminance dans la direction normale à la surface :  $L_{\lambda\Delta} = L_{\lambda N}$

Dans ces conditions, on peut établir la loi de Lambert (loi du cosinus) sous la forme :

$$I_{\lambda\Delta} = L_{\lambda\Delta} \cdot dS \cdot \cos\theta = L_{\lambda N} \cdot dS \cdot \cos\theta = I_{\lambda N} \cdot \cos\theta$$

Avec  $I_{\lambda\Delta}$  l'intensité monochromatique directionnelle en  $\text{W. sr}^{-1}.\mu\text{m}^{-1}$  (intégration sur dS)

$$I_{\lambda\Delta} = I_{\lambda N} \cdot \cos\theta$$



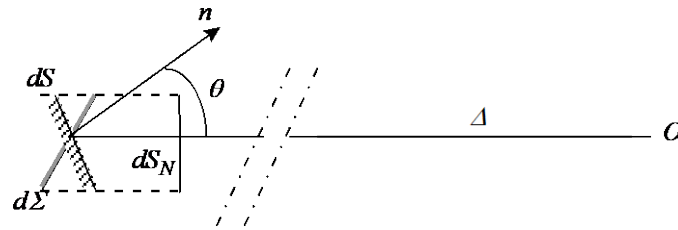
**Remarque 2 :** Interprétation physique de la loi de Lambert

Reprenons la surface émettrice dS et un observateur placé à une distance suffisamment éloignée pour que l'on puisse considérer les rayons qui l'atteignent comme parallèles. Le flux reçu par l'observateur s'écrit :

$$d^5\phi = L_{\lambda\Delta} \cdot dS \cdot \cos\theta \cdot d\Omega \cdot d\lambda = L_{\lambda N} \cdot dS \cdot \cos\theta \cdot d\Omega \cdot d\lambda$$

Or,  $dS \cos\theta$  n'est autre que l'aire du contour apparent de dS en projection parallèle au rayon. L'observateur reçoit donc le même flux que si dS était remplacé par la surface  $dS_N$  émettant normalement.

Considérons par ailleurs dΣ, d'orientation quelconque ayant même contour apparent que dS. Un raisonnement analogue montre que l'observateur reçoit toujours le même flux.



Soit maintenant une surface  $S$  finie, et  $ST$  une surface tangente, par exemple un plan. En répétant le raisonnement précédent sur chaque élément  $dS$ , on montre facilement que  $O$  ne peut distinguer si le rayonnement qu'il reçoit provient de  $S$  ou de  $S_N$ . D'où la conclusion abrégée :

Le relief d'un corps à émission diffuse isotrope (Lambertien) est inaccessible à un observateur éloigné. Ceci ne serait plus vrai pour un observateur rapproché.

#### Source uniforme :

Une source de rayonnement est uniforme si sa luminance est indépendante du point considéré.

#### Émittance totale d'une source

Le flux d'énergie radiative issu d'une surface élémentaire  $dS$  dans toutes les directions par les photons de toutes les longueurs d'onde s'écrit :

$$d^2\phi = M \cdot dS = \int_0^\infty M_\lambda \cdot d\lambda \cdot dS$$

**Remarque :** Si on considère le soleil comme une source isotrope et uniforme, son émittance totale se déduit facilement :  $M_s = \pi L_s = 6,3 \cdot 10^7 \text{ W.m}^{-2}$ . La puissance radiative sachant que son rayon est de  $695,5 \cdot 10^3 \text{ km}$  qu'il libère est d'environ  $3,85 \cdot 10^{26} \text{ W}$ .

## 6.1.3 Grandeurs caractéristiques des récepteurs de rayonnement

### Définition de l'éclairement

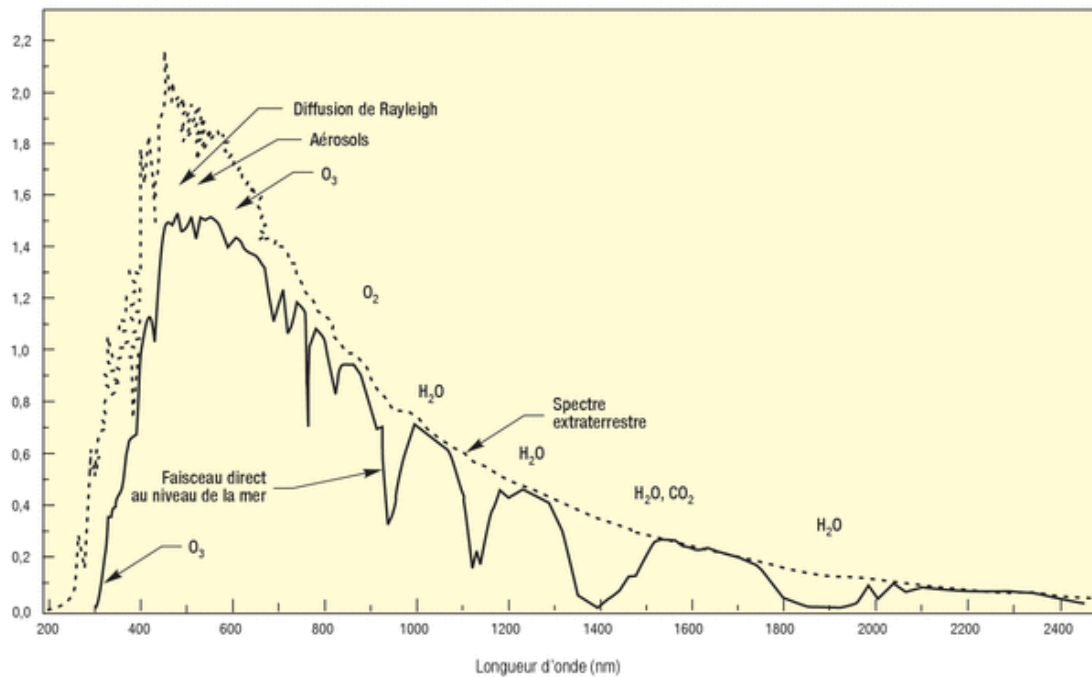
Le flux d'énergie radiative transportée par les photons dont la longueur d'onde  $\lambda$  et  $\lambda+d\lambda$  tombant selon toutes les directions sur la surface  $dS$  s'écrit :

$$d^2\phi = E_\lambda \cdot d\lambda \cdot dS$$

$E_\lambda$  est l'éclairement spectrique de la surface au point considéré.

L'éclairement spectrique est généralement exprimé en  $\text{W.m}^{-2}.\mu\text{m}^{-1}$

$E_\lambda$



Eclairement solaire lors atmosphère et observé au niveau de la mer par temps clair

### Eclairement total d'un récepteur

Le flux d'énergie radiative transportée par les photons de toutes les longueurs tombant selon toutes les directions sur la surface  $dS$  s'écrit :

$$d^2\phi = E \cdot dS = \int_0^\infty E_\lambda \cdot d\lambda \cdot dS$$

$E$  est l'éclairement total de la surface au point considéré. Il s'exprime en  $\text{W.m}^{-2}$ .

**Remarque :** L'éclairement  $E$  d'une surface placée en limite d'atmosphère terrestre et orientée perpendiculairement aux faisceaux du soleil est de  $1367 \text{ W/m}^2$ .

## 6.1.4 Lois de rayonnement du corps noir

### Le corps noir

Chaque corps rayonne selon une loi qui lui est propre. Il existe cependant une source dont la luminance spectrique, déduite des lois de la physique statistique, est une fonction universelle de la fréquence et de la température. Ce système physique, appelé « corps noir », sert donc d'étalon du rayonnement.

Le corps noir émet le maximum de rayonnement à une température donnée et pour toute longueur d'onde et il absorbe tout le rayonnement qu'il peut absorber.

**Remarque :** On réalise un corps noir en maintenant en équilibre thermodynamique une enceinte opaque au rayonnement.

La luminance spectrique d'un corps noir n'est fonction que de la température et de la fréquence. Elle est en particulier indépendante de la direction considérée.

### Loi de Planck

La démonstration de cette loi fondamentale, vérifiée expérimentalement, fut un des premiers succès de la physique statistique. On démontre à partir de la distribution statistique de Bose Einstein que la luminance spectrique du corps noir varie selon :

$$L_{\lambda}^0 = \frac{2hc_0^2\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1} = \frac{c_1\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1}$$

Avec  $c_0 = 299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $h = 6,626176 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$  (constante de Planck),  $c_2 = \frac{hc_0}{k}$  et  $k = 1,380662 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$  (constante de Boltzmann) d'où

$$\begin{array}{ll} c_2 = 1,4388 \cdot 10^4 \text{ }\mu\text{m.K} & \text{ou} \quad 1,4388 \cdot 10^{-2} \text{ m.K} \\ c_1 = 1,19088 \cdot 10^8 \text{ W.}\mu\text{m}^4\text{m}^{-2} & \text{ou} \quad 1,19088 \cdot 10^{-16} \text{ W.m}^2 \end{array}$$

Nous affectons d'un exposant 0 les grandeurs relatives au corps noir.

**Remarque 1 :** Le corps noir étant un corps **isotrope**, son émittance spectrique vaut :

$$M_{\lambda}^0 = \pi \cdot L_{\lambda}^0$$

**Remarque 2 :** Expressions approchées

#### 1/ approximation de Wien

si  $\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) \gg 1$  (faibles longueurs d'onde),

$$M_{\lambda}^0(T) \cong \pi c_1 \lambda^{-5} \exp\left(\frac{-c_2}{\lambda T}\right)$$

approximation valable à :

1% près si  $\lambda T < 3100 \text{ }\mu\text{m.K}$  ou  $\lambda < 1,07 \lambda_{\max}$

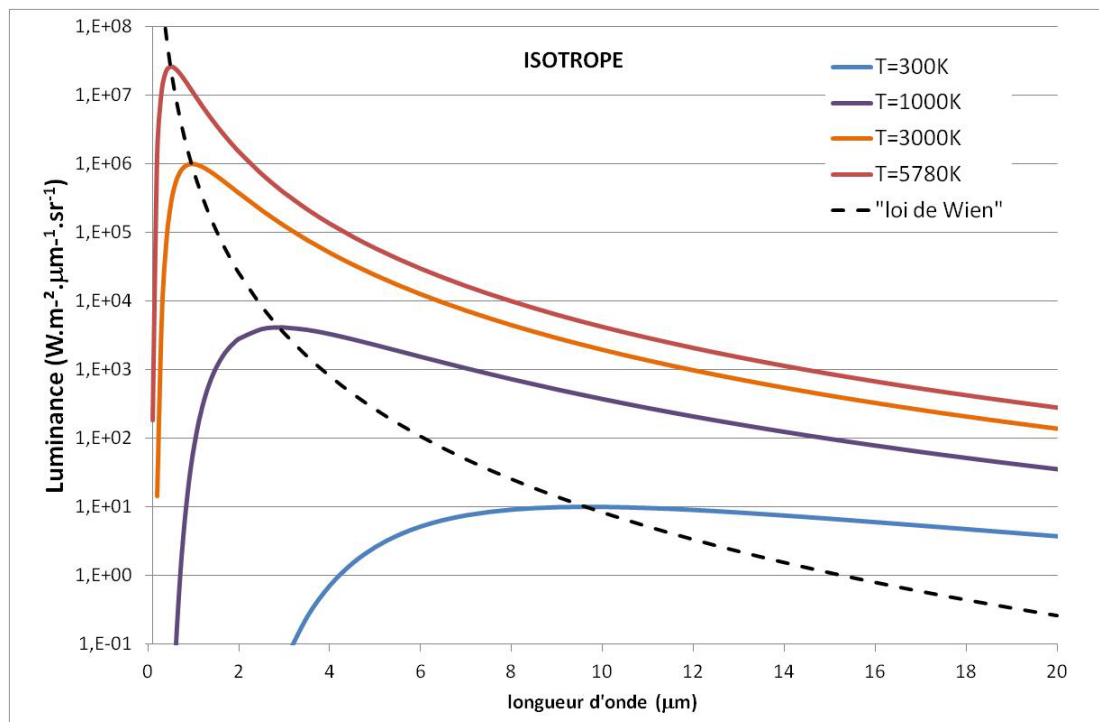
0,1% près si  $\lambda.T < 2000 \text{ }\mu\text{m.K}$  ou  $\lambda < 0,69 \lambda_{\max}$

#### 2/ approximation de Rayleigh

si  $\frac{c_2}{\lambda T} \ll 1$  (grandes longueurs d'onde),  $\exp\left(\frac{-c_2}{\lambda T}\right) = 1 + \frac{c_2}{\lambda T} + \frac{1}{2!}\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right)^3 + \dots$  en se limitant au premier terme,

$$M_{\lambda}^0(T) \cong \frac{\pi c_1}{c_2} \lambda^{-4} T$$

approximation valable à 1% près si  $\lambda > 10 \lambda_{\max}$



Loi de Planck (échelle semi logarithmique)

### Loi de déplacement de Wien

Pour une valeur donnée de la température, l'émittance monochromatique passe par un maximum pour une longueur d'onde  $\lambda_{\max}$ . Un calcul de dérivation montre que  $\lambda_{\max}$  vérifie la loi de Wien :

$$\lambda_{\max} \cdot T = 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

Une augmentation de la température produit donc un déplacement du rayonnement vers les courtes longueurs d'onde.

Exemple :	Le soleil à 5780 K	$\lambda_{\max} \sim 0.5 \mu\text{m}$
	Un bâtiment à 293 K	$\lambda_{\max} \sim 10 \mu\text{m}$

#### Remarque 1 :

En reportant cette relation dans la loi de Planck, on obtient :

$$L_{\lambda_{\max}}^0 \cong B \cdot T^5$$

où  $B = 4,1 \cdot 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \mu\text{m}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{K}^{-5}$ .

L'intensité du rayonnement augmente très vite avec la température, d'où une représentation en échelle log.

**Remarque 2 :** Un corps nous paraît d'autant plus "violet" (faible longueur d'onde) qu'il est plus chaud. C'est le cas de certaines étoiles dont la température atteint plusieurs millions de degrés. La loi de Wien sert d'ailleurs, entre autres méthodes, à la détermination de la température superficielle des étoiles. Le soleil est un astre froid ; sa température superficielle, calculée par des méthodes plus globales, s'établit autour de 5780 K. Son  $\lambda_{\max}$  est donc de 0,5  $\mu\text{m}$ , ce qui le situe dans le spectre visible entre le bleu et le vert. En fait, sa "couleur" nous arrive au sol décalée vers les grandes longueurs d'onde car l'atmosphère absorbe davantage les rayons violets et UV<sup>22</sup>. Le spectre solaire au sol présente un maximum aux environs de 0,55  $\mu\text{m}$ .

<sup>22</sup> Les molécules d'azote et de di-oxygène diffusent le rayonnement de faible longueur d'onde (bleu et violet) dans toutes les directions ce qui explique la couleur bleue du ciel. Le rayonnement direct que nous voyons est de ce fait décalé vers les plus grandes longueurs d'onde du spectre visible : jaune, orange, rouge.

**Remarque 3 :** Le rayonnement solaire est assimilable à un corps noir de température 5780 K. Cela ne signifie toutefois pas que le soleil est un corps noir, c'est un plasma inhomogène en déséquilibre thermodynamique où les températures varient.

### Loi de Stefan Boltzmann

Par intégration sur tout le spectre, on obtient une émittance totale :

$$M^0 = \sigma \cdot T^4$$

Où  $\sigma$  représente la constante de Stefan Boltzmann ( $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$ )

### Fraction d'émittance du corps noir

Il est souvent intéressant de savoir quelle est la proportion de rayonnement de corps noir émis entre deux longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Dans ce but, on introduit la fonction  $F_{0-\lambda T}$  qui est la fraction d'émittance du corps noir aux longueurs d'onde inférieures à  $\lambda$  :

$$F_{0-\lambda T} = \frac{\int_0^\lambda M_\lambda^0(T) \cdot d\lambda}{\int_0^\infty M_\lambda^0(T) \cdot d\lambda} = \frac{1}{\sigma T^4} \int_0^\lambda M_\lambda^0(T) \cdot d\lambda \leq 1$$

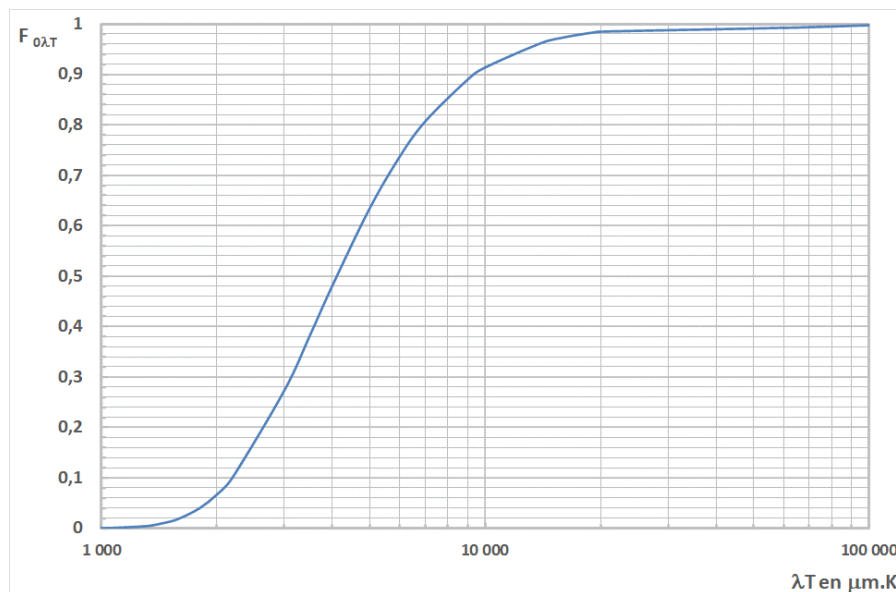
Les valeurs de la fonction  $F_{0-\lambda T}$  sont données dans des tables (voir en annexe 4).

La proportion de rayonnement de corps noir émis entre deux longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  s'écrit alors :

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_\lambda^0(T) \cdot d\lambda = \sigma T^4 (F_{0-\lambda_2 T} - F_{0-\lambda_1 T})$$

### Remarque 1:

On constate que la quasi-totalité du rayonnement d'un corps noir (95,6%) est émis entre  $0,5 \lambda_{\text{max}}$  et  $5 \lambda_{\text{max}}$ .



Variation de la fonction  $F_{0-\lambda T}$  avec  $\lambda T$

### Remarque 2 :

On vérifiera que 12% du rayonnement solaire est situé dans l'ultraviolet ( $0,1$  à  $0,4 \mu\text{m}$ ) et 46% se situe dans le visible ( $0,4$  à  $0,8 \mu\text{m}$ )

## 6.2 Propriétés radiatives

### 6.2.1 Introduction

Une surface opaque peut soit absorber, soit réfléchir un photon incident : la probabilité de chacun de ces deux événements dépend de la nature et de l'état de surface et varie selon la longueur d'onde et la direction du photon. Ainsi les couleurs que nous attribuons aux objets révèle la spécificité de leur interaction entre surface opaque et rayonnement, on utilise deux grandeurs spectrales et directionnelles : absorptivité et réflectivité. A cela s'ajoute la transmittivité pour les milieux semi-transparents.

Si ces grandeurs sont définies par des relations intégrales compliquées, le recours à des modèles de « corps gris » ou « corps gris par morceaux » simplifie les calculs.

### 6.2.2 Types de corps

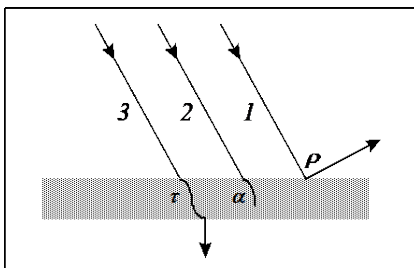
Relativement à leurs qualités émissives, les corps peuvent se ranger en trois catégories :

- les **corps opaques** sont ceux où l'émission est limitée à une zone au voisinage de la paroi d'épaisseur si faible qu'on peut l'assimiler à une surface ;
- les **corps semi-transparents**, qui émettent de l'énergie dans toute leur masse ;
- les **corps transparents**, qui n'émettent aucun rayonnement. Il s'agit d'un cas limite car, le vide mis à part, tous les milieux sont plus ou moins émissifs. Néanmoins, on admet que la plupart des gaz diatomiques (oxygène, azote, et par conséquent l'air<sup>23</sup>) sont parfaitement transparents dans la gamme habituelle des températures.

### 6.2.3 Réception d'énergie par rayonnement

Considérons un flux énergétique sur une surface. Lorsqu'un photon vient frapper un obstacle, plusieurs éventualités sont a priori possibles :

- ou bien le photon est renvoyé vers le milieu extérieur (cas 1) ; c'est la réflexion ; on note  $\rho$  la **réflectivité** du corps ;
- ou bien il est absorbé par le corps et contribue à l'accroissement de l'énergie des particules qui le constituent (cas 2) ; on note  $\alpha$  l'**absorptivité** du corps ;
- ou bien il se fraie un chemin à travers toutes les particules du milieu et ressort à l'autre frontière ; on dit alors qu'il est transmis (cas 3) ; on note  $\tau$  la **transmittivité** du corps.



Vis-à-vis de leurs propriétés réceptrices, on peut donc classer les corps en plusieurs catégories, qui constituent des cas limites, dont les cas réels se rapprochent plus ou moins. La **conservation de l'énergie** impose :

$$\alpha + \rho + \tau = 1$$

Cette relation de conservation générale (elle est aussi valable pour les facteurs monochromatiques directionnels) peut se traduire simplement sur un diagramme triangulaire en remarquant que la somme des distances d'un point aux trois côtés d'un triangle équilatéral est constante. Alors, on peut distinguer

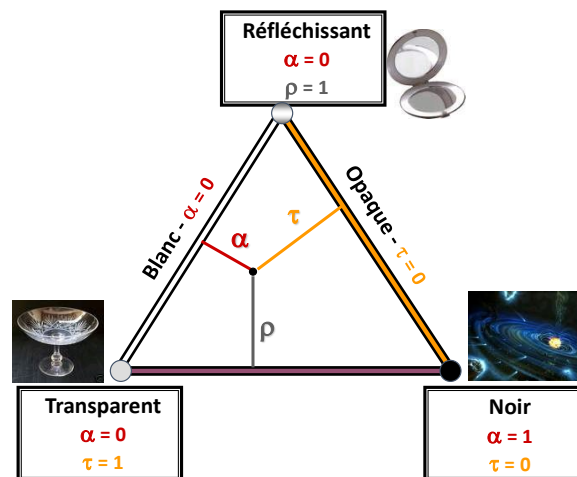
---

<sup>23</sup> La présence de la vapeur d'eau dans l'air peut bien sûr modifier ce résultat considérablement dans certaines conditions.

- les **corps opaques** pour lesquels  $\tau = 0$ . Toute l'énergie reçue est réfléchie ou absorbée. Parmi ceux-ci :
- Les **corps parfaitement réfléchissants** qui renvoient intégralement les photons reçus  $\rho = 1$ .
- Les **corps noirs** absorbent tous les photons quelles que soient leur longueur d'onde et leur direction :  $\alpha = 1$ .
- Les **corps parfaitement transparents** transmettent intégralement les photons reçus :  $\tau = 1$ .

Un **corps quelconque** est défini par ses 3 coefficients et repérable dans le triangle de la figure ci-dessous. En réalité, comme nous allons le voir, les valeurs de  $\alpha$ ,  $\rho$ ,  $\tau$  dans le cas général dépendent de la longueur d'onde et de la direction du rayonnement incident.

Remarquons aussi que les propriétés radiatives d'un corps dépendent de sa géométrie. Ainsi, une roche comme le granit qui nous paraît opaque en bloc devient transparente lorsqu'on la découpe en lames de quelques dixièmes de millimètres.



## 6.2.4 Absorptivité, réflectivité et transmittivité

Dans le cas d'un corps opaque non noir, le flux monochromatique incident qui arrive sur une surface élémentaire est en partie absorbé, en partie réfléchi.

Soient le flux d'énergie **incident**  $d^5\phi_{\lambda\Delta,i}$  correspondant à un faisceau incident,  $d^5\phi_{\lambda\Delta,a}$  le flux **absorbé** par la surface et  $d^5\phi_{\lambda\Delta,r}$  le flux **réfléchi** dans tout le demi-espace au dessus de  $dS$ . On définit l'absorptivité et la réflectivité spectrales directionnelles de la surface par les relations suivantes :

$$\alpha_{\lambda\Delta} = \frac{d^5\phi_{\lambda\Delta,a}}{d^5\phi_{\lambda\Delta,i}} \quad \text{et} \quad \rho_{\lambda\Delta} = \frac{d^5\phi_{\lambda\Delta,r}}{d^5\phi_{\lambda\Delta,i}}$$

avec  $\alpha_{\lambda} + \rho_{\lambda} = 1$  pour les surfaces opaques

### Absorptivité

L'absorptivité caractérise l'absorption par un corps de l'éclairement monochromatique reçu dans la direction  $\Delta$ .

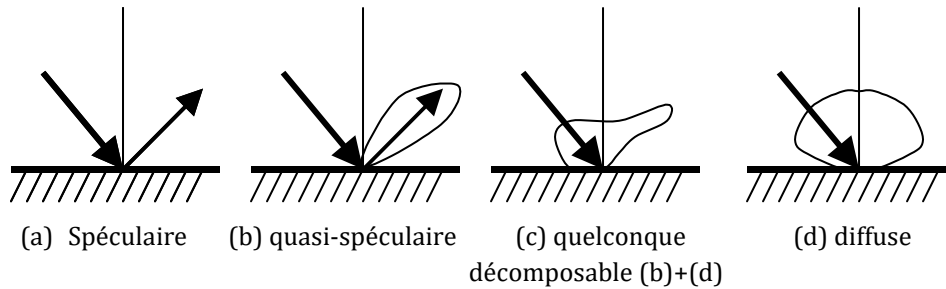
L'absorptivité totale s'écrit :

$$\alpha = \frac{\int_0^\infty \int_\Omega \alpha_{\lambda\Delta} \cdot E_{\lambda\Delta} \cdot d\Omega \cdot d\lambda}{\int_0^\infty \int_\Omega E_{\lambda\Delta} \cdot d\Omega \cdot d\lambda}$$

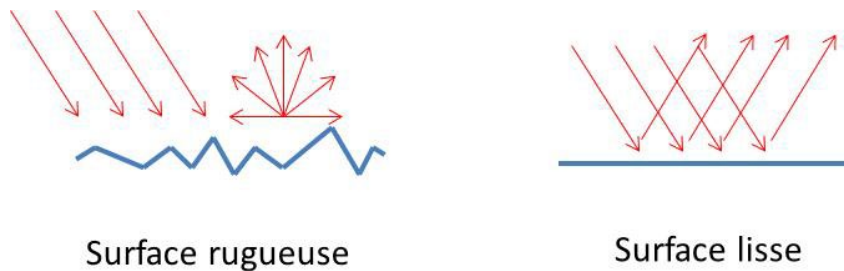
**Remarque :** l'absorptivité spectrale directionnelle ne dépend que du matériau tandis que l'absorptivité totale dépend aussi de l'éclairement incident.



## Types de réflexion

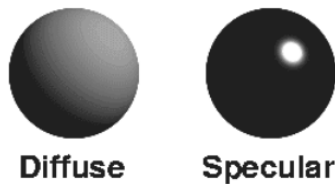


Si la direction de propagation des photons réfléchis est aléatoire, la réflexion est dite isotrope ou diffuse :



Si elle est concentrée autour de la direction définie par les lois de Snell-Descartes, elle est dite spéculaire.

**Remarque :** différence entre peinture mate et peinture brillante.



## Milieu semi transparent

Un milieu qui transmet une partie du flux radiatif est appelé semi-transparent. L'absorptivité, la réflectivité et la transmittivité ( $\tau$ ) sont liés par la conservation de l'énergie :

$$\alpha + \rho + \tau = 1$$

L'absorptivité et la transmittivité dépendent de l'épaisseur du milieu. Elles se calculent en intégrant l'équation de transfert radiatif le long du chemin optique.

Considérons un milieu semi transparent homogène, isotherme et non diffusif. On se propose de prédire la luminance d'un faisceau se propageant dans le milieu. Au cours de la traversée d'une petite couche d'épaisseur  $dx$ , on suppose que la luminance spectrique varie selon

$$dL_\lambda(x) = -k_\lambda \cdot L_\lambda(x) \cdot dx$$

où  $k_\lambda$  est le coefficient d'absorption spectral en  $m^{-1}$  qui dépend de la longueur d'onde, de la composition du milieu et de sa température. Si le milieu est sans rayonnement propre (on parle de milieu « froid »), on intègre directement et on obtient la loi de Beer-Lambert-Bouguer :

$$L_\lambda(l) = L_\lambda(0) \cdot \exp(-k_\lambda \cdot l)$$

avec  $L_\lambda(0)$  la luminance du flux entrant en  $x=0$ .

Le facteur est appelé « épaisseur optique » du milieu à la longueur d'onde considérée. On distingue les milieux optiquement épais pour lesquels  $k_\lambda \cdot l \gg 1$  et les milieux optiquement minces pour lesquels  $k_\lambda \cdot l \ll 1$ .

L'absorptivité et la transmissivité d'un milieu semi transparent d'épaisseur  $l$ , s'écrivent :

$$\alpha_\lambda = 1 - \exp(-k_\lambda \cdot l)$$

$$\tau_\lambda = \exp(-k_\lambda \cdot l)$$

**Exemple de milieux semi transparents :** le verre, les gaz constitués de molécules asymétriques ou hétéro-nucléaires comme  $H_2O$ ,  $CO$ ,  $CO_2$ ,  $NO_x$  sont caractérisés par des plages spectrales très absorbantes alors que d'autres sont transparentes.

## 6.2.5 Emissivité d'un corps non noir

Pour caractériser l'émission d'une surface réelle, on fait appel à une grandeur physique appelée émissivité. Par définition, on appelle **émissivité spectrale directionnelle** d'un corps, le rapport de la luminance monochromatique de ce corps à la luminance monochromatique du corps noir à la même température :

$$\varepsilon_{\lambda\Delta} = \frac{L_{\lambda\Delta}(T)}{L_\lambda^0(T)}$$

L'**émissivité spectrale hémisphérique** est donc  $\varepsilon_\lambda = \frac{M_\lambda(T)}{M_\lambda^0(T)}$

L'**émissivité totale hémisphérique** s'écrit  $\varepsilon = \frac{M(T)}{M^0(T)}$

Pour un corps quelconque, l'émissivité totale hémisphérique peut écrire aussi comme :

$$\varepsilon = \frac{\int_0^\infty \int_\Omega \varepsilon_{\lambda\Delta} \cdot L_\lambda^0(T_{corps}) \cdot \cos \theta \cdot d\lambda \cdot d\Omega}{\sigma \cdot T_{corps}^4}$$

Pour un corps isotrope, l'émissivité totale hémisphérique peut écrire aussi comme :

$$\varepsilon = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda \cdot M_\lambda^0(T_{corps}) \cdot d\lambda}{\sigma \cdot T_{corps}^4}$$

Par définition,  $0 \leq \varepsilon_\lambda \leq 1$

**Remarque 1 :** L'émissivité varie avec la température du corps

## 6.2.6 Loi de kirchhoff

A l'équilibre thermodynamique, l'absorptivité et l'émissivité spectrales directionnelles sont égales :

$$\varepsilon_{\lambda\Delta} = \alpha_{\lambda\Delta}$$

**Remarque 1 :** dans la pratique, on n'est pas toujours à l'équilibre, l'étude du comportement radiatif des matériaux montre que la loi de Kirchhoff reste valable.

**Remarque 2 :** la loi de Kirchhoff ne s'applique qu'aux coefficients spectraux directionnels et pas aux facteurs globaux.

## 6.2.7 Exemples de corps

### Corps noir

Par définition de l'émissivité, on a pour un corps noir (par définition isotrope) :

$$\varepsilon = \varepsilon_\lambda = 1 \text{ pour tout } \lambda$$

La loi de Kirchhoff appliquée à un corps noir conduit à :

$$\alpha = \alpha_\lambda = 1 \text{ pour tout } \lambda$$

C'est donc à la fois l'absorbeur et l'émetteur idéal.

### Corps gris de rayonnement uniforme et isotrope

On qualifie ainsi les corps dont l'émissivité est indépendante de la longueur d'onde et de la direction :

$$\varepsilon_\lambda = \varepsilon < 1 \text{ pour tout } \lambda$$

La loi de Kirchhoff s'étend à tout le spectre, on a

$$\alpha = \varepsilon < 1$$

### Corps gris par morceaux

Quand un corps est non gris, on peut parfois se ramener à un corps gris par morceaux si le spectre peut être divisé en différents domaines spectraux à l'intérieur desquels l'émissivité spectrale est constante :

$$\varepsilon_\lambda = \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{pour tout } 0 \leq \lambda \leq \lambda_1 \\ \varepsilon_1 & \text{pour tout } \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2 \\ \varepsilon_2 & \text{pour tout } \lambda_2 \leq \lambda \leq \lambda_3 \\ \dots & \dots \\ \varepsilon_n & \text{pour tout } \lambda_n \leq \lambda \leq \infty \end{cases}$$

L'émissivité totale hémisphérique peut s'exprimer à partir de la fraction d'émittance du corps noir  $F_{0-\lambda T}$  car :

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{M(T)}{M^0(T)} &= \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda \cdot M_\lambda^0(T) \cdot d\lambda}{\sigma \cdot T^4} \\ &= \varepsilon_0 F_{0-\lambda_1 T} + \varepsilon_1 (F_{0-\lambda_2 T} - F_{0-\lambda_1 T}) + \varepsilon_2 (F_{0-\lambda_3 T} - F_{0-\lambda_2 T}) + \dots \\ &\quad + \varepsilon_n (1 - F_{0-\lambda_n T}) \end{aligned}$$

### Métaux

Les métaux ont pour principales caractéristiques :

- d'être des corps colorés souvent réfléchissants ;

A un spectre « continu » se superpose des pics qualifiés de raies. Elles ont une contribution infime dans l'émission globale. Elles peuvent en revanche permettre d'identifier la présence d'un métal dans un alliage par examen sélectif du rayonnement.

- de paraître plus « violet » qu'un corps noir ;

Pour les métaux, l'émissivité spectrale diminue quand la longueur d'onde augmente.

- de ne pas suivre la loi de Lambert ;

Leur émissivité spectrale directionnelle passe par un maximum à environ  $80^\circ$  (incidence rasante) puis décroissent rapidement au-delà.

- d'être peu émetteur ;

Pour une surface soigneusement polie, l'émissivité globale est de l'ordre de 0,02 à 0,1.

- d'avoir une émissivité dépendante de l'état de surface ;

Le facteur global d'émission varie fortement avec l'état de surface. Une altération légère (pellicule d'huile, oxydation, défaut de polissage) suffit à augmenter considérablement le facteur d'émission.

#### **Autres matériaux courants**

- se comportent souvent comme des corps gris ;
- sont généralement peu réfléchissants ;
- ont une émissivité élevée ( $\sim 0.9$ ) sauf exceptions (matériaux blancs, brillants) dans le spectre lointain (à température ambiante) ;

#### **Valeurs d'émissivité totale hémisphérique de quelques matériaux courants**

Matériau (température)	$\epsilon$
Aluminium, laminé à froid (170 °C)	0,04
Coton (20 °C)	0,77
Béton (25 °C)	0,93
Glace lisse (0 °C)	0,97
Fer poncé (20 °C)	0,24
Fer avec peau de fonderie (100 °C)	0,80
Fer avec peau de laminage (20 °C)	0,77
Plâtre (20 °C)	0,90
Verre (90 °C)	0,94
Caoutchouc dur (23 °C)	0,94
Caoutchouc mou, gris (23 °C)	0,89
Bois (70 °C)	0,94
Liège (20 °C)	0,70
Radiateur noir anodisé (50 °C)	0,98
Cuivre légèrement terni (20 °C)	0,04
Cuivre oxydé (130 °C)	0,76
Plastiques : PE, PP, PVC (20 °C)	0,94
Laiton oxydé (200 °C)	0,61
Papier (20 °C)	0,97
Porcelaine (20 °C)	0,92
Peinture noire mate (80 °C)	0,97
Acier, surface trempée (200 °C)	0,52
Acier oxydé (200 °C)	0,79
Argile cuite (70 °C)	0,91
Vernis transformateur (70 °C)	0,94
Brique, mortier, enduit (20 °C)	0,93

**Valeurs d'émissivité pour quelques matériaux courants**

## Vitrages

- Transmissivité d'un vitrage en fonction de l'angle d'incidence du rayonnement

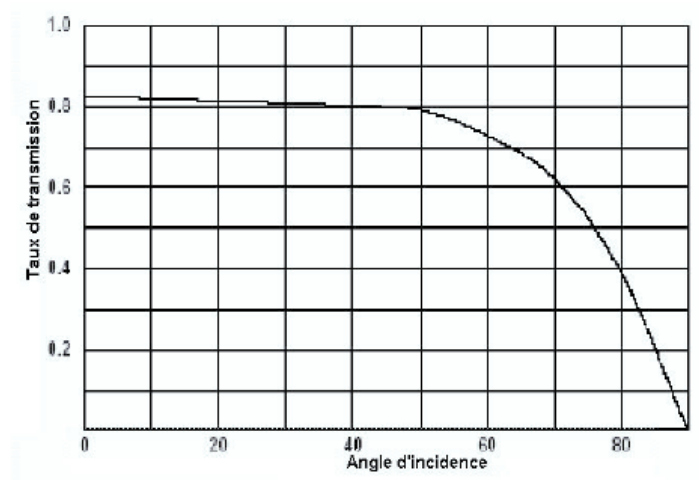


Fig. 1: Taux de transmission d'un vitrage en fonction de l'angle d'incidence du rayonnement

- Transmissivité d'un vitrage en fonction de la longueur d'onde

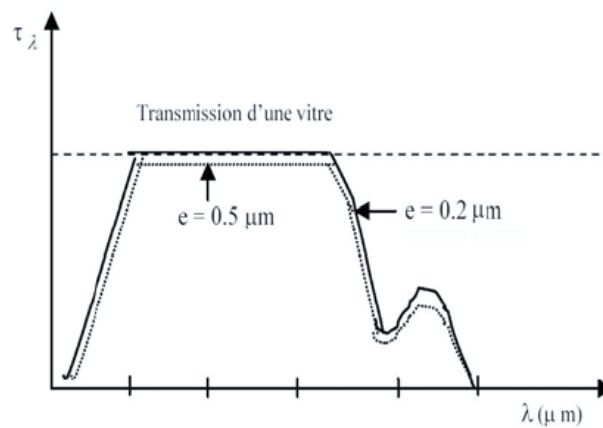
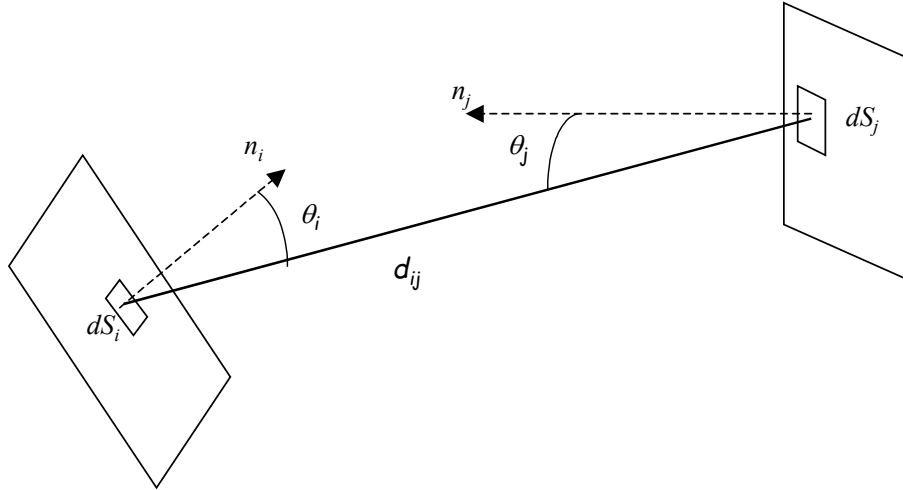


Fig. 2: Transmission d'une vitre

## 6.3 Calcul du rayonnement mutuel entre surfaces

### 6.3.1 Facteur de forme

On considère deux surfaces  $S_i$  et  $S_j$ , maintenues à températures uniformes  $T_i$  et  $T_j$ , rayonnant l'une vers l'autre, séparées par un milieu transparent. Soit  $\phi_{ij}$  le flux total émis par  $S_i$  et reçu par  $S_j$  et  $\phi_i = M_i S_i$  le flux total émis par  $S_i$ .



On appelle facteur de forme de  $S_i$  vers  $S_j$  le rapport :

$$F_{ij} = \frac{\phi_{ij}}{\phi_i}$$

ainsi  $F_{ij}$  est compris entre 0 et 1.

$F_{ij}$  représente la fraction du flux émis par  $S_i$  tombant directement sur  $S_j$ .

Le flux radiatif élémentaire émis par  $dS_i$  et tombant sur la surface élémentaire  $dS_j$  distante de  $d_{ij}$  s'écrit :

$$d^4\phi_{ij} = L_{i\Delta} \cdot dS_i \cdot \cos \theta_i \cdot d\Omega_{ij}$$

avec  $d\Omega_{ij}$  l'angle solide qui intercepte la surface réceptrice  $dS_j$ , d'où  $d\Omega_{ij} = \frac{dS_j \cdot \cos \theta_j}{d_{ij}^2}$ . On peut réécrire comme (loi de Bouguer) :

$$d^4\phi_{ij} = L_{i\Delta} \cdot \frac{dS_i \cdot dS_j \cdot \cos \theta_i \cdot \cos \theta_j}{d_{ij}^2}$$

Remarque : Le flux net échangé entre les deux surfaces s'écrit comme :

$$d^4\phi_{net} = d^4\phi_{ij} - d^4\phi_{ji} = (L_{i\Delta} - L_{j\Delta}) \cdot \frac{dS_i \cdot dS_j \cdot \cos \theta_i \cdot \cos \theta_j}{d_{ij}^2}$$

Considérons les deux surfaces  $S_i$  et  $S_j$  comme isotropes,

$$d^4\phi_{ij} = \frac{M_i}{\pi} \cdot \frac{dS_i \cdot dS_j \cdot \cos \theta_i \cdot \cos \theta_j}{d_{ij}^2}$$

En intégrant sur  $S_i$  et sur  $S_j$ , on obtient :

$$\phi_{ij} = S_i \cdot F_{ij} \cdot M_i$$

et

$$F_{ij} = \frac{1}{\pi \cdot S_i} \cdot \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{dS_i \cdot dS_j \cdot \cos \theta_i \cdot \cos \theta_j}{d_{ij}^2}$$

$F_{ij}$  est le facteur de forme de la surface  $S_j$  vue de  $S_i$ . C'est une grandeur sans dimension dépendant uniquement de la forme et de la position relative des deux surfaces.

## 6.3.2 Propriétés des facteurs de forme

### Règle de conservation

On considère une **enceinte fermée** constituée de N surfaces isothermes  $S_1, S_2 \dots S_N$ . On obtient N relations de conservation :

$$\sum_{j=1}^N F_{ij} = 1 \quad \text{pour } i=1 \text{ à } N$$

Si une surface  $S_i$  est convexe, elle ne peut rayonner vers elle-même, on aura donc  $F_{ii} = 0$ .

### Règle de réciprocité

De l'expression de  $F_{ij}$  qui est invariante par permutation d'indice i et j, on en déduit la règle de réciprocité :

$$S_i \cdot F_{ij} = S_j \cdot F_{ji}$$

### Surface convexe

Une surface plane ou convexe ne peut rayonner vers elle-même.

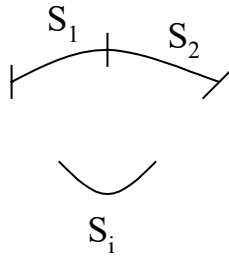
$$F_{ii} = 0 \quad \text{pour une surface plane ou convexe}$$

### Règles de décomposition

$$F_{i(1+2)} = F_{i1} + F_{i2}$$

De la réciprocité, il découle :

$$(S_1 + S_2) F_{(1+2)i} = S_1 F_{1i} + S_2 F_{2i}$$



### Quelques cas simples

- Plans parallèles infinis :

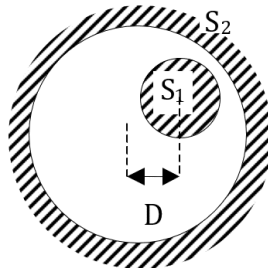
$$F_{11} = 0 \quad F_{12} = 1 \quad F_{21} = 1 \quad F_{22} = 0$$

- Cylindres parallèles emboîtés de grande longueur, quelle que soit la distance D entre leurs axes :

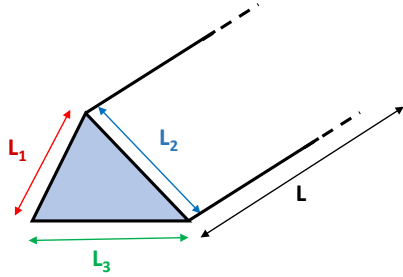
$$F_{11} = 0 \quad F_{12} = 1 \quad F_{21} = \frac{R_1}{R_2} \quad F_{22} = 1 - \frac{R_1}{R_2}$$

- Sphères emboîtées de grande longueur, quelle que soit la distance D entre leurs centres :

$$F_{11} = 0 \quad F_{12} = 1 \quad F_{21} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \quad F_{22} = 1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2$$



## Prisme à base triangulaire



Soit un prisme **de grande longueur**<sup>24</sup>,  $L$ , dont la section est un triangle, même curviligne, pourvu que les faces intérieures soient **convexes** (autrement dit  $F_{ii} = 0$  pour les 3 faces). Chaque face  $i$  a pour surface  $S_i = L_i \cdot L$ .

On peut écrire des relations de conservation pour chaque face  $i$ ,

$$\sum_{j=1}^3 F_{ij} = 1$$

Et 3 relations de réciprocité

$$S_i \cdot F_{ij} = S_j \cdot F_{ji}$$

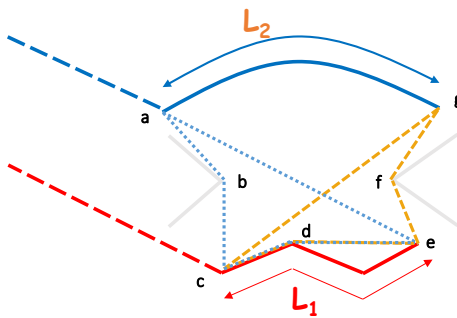
La résolution de ce système à 6 équations permet de déterminer les 6 facteurs de forme suivant :

$$F_{ij} = \frac{S_i + S_j - S_k}{2 \cdot S_i} \text{ avec } (i,j,k) \text{ différents}$$

Qui peut s'écrire aussi comme :

$$F_{ij} = \frac{L_i + L_j - L_k}{2 \cdot L_i}$$

## Méthode des cordes croisées



Proposée par Hottel, elle se déduit des facteurs de forme du prisme à base triangulaire. Elle s'applique uniquement dans le cas où **la dimension transversale est grande**. C'est pourquoi on raisonne sur les longueurs et non sur les surfaces.

Dans le cas de deux surfaces quelconques caractérisées par leur longueur respective  $L_1$  et  $L_2$ , on détermine le facteur de forme en traçant les cordes joignant les extrémités. On fait ainsi apparaître deux triangles aux contours convexes : **abcde** et **cdefg** sur lesquels on peut appliquer la propriété précédente.

Sur l'enceinte fermée fictive **abcdefg**, on peut écrire la relation de conservation :

$$F_{cde-ag} = 1 - F_{cde-abc} - F_{cde-efg} = 1 - \frac{L_{cde} + L_{abc} - L_{ae}}{2 \cdot L_{cde}} - \frac{L_{cde} + L_{efg} - L_{cg}}{2 \cdot L_{cde}}$$

$$F_{cde-ag} = \frac{L_{ae} + L_{cg} - L_{abc} - L_{efg}}{2 \cdot L_{cde}}$$

Enfin, on peut utiliser la relation de conservation de l'éclairement entre la surface de contour  $L_1$  et la ligne convexe **cde** sous-tendue :

$$F_{12} \cdot L_1 = F_{cde-ag} \cdot L_{cde}$$

Le facteur de forme  $F_{12}$  est donc égal à :

$$F_{12} = \frac{L_{ae} + L_{cg} - L_{abc} - L_{efg}}{2 \cdot L_1}$$

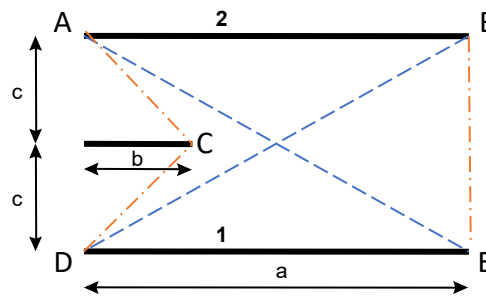
Ou formulé autrement de façon plus générale :

$$F_{12} = \frac{\sum L_{\text{cordes croisées}} - \sum L_{\text{cordes non croisées}}}{2 \cdot L_1}$$

<sup>24</sup> On considère que  $L \gg L_i$  telle qu'on pourra négliger les facteurs de forme entre les faces latérales du prisme et sa base.



Considérons un exemple :



$$F_{12} = \frac{|AE| + |DB| - |BE| - |ACD|}{2 \cdot |DE|}$$

$$F_{12} = \frac{\sqrt{a^2 + 4c^2} - c - \sqrt{b^2 + c^2}}{a}$$

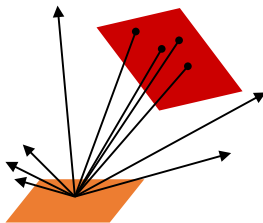
## Méthodes d'évaluation des facteurs de forme

Dans le cas de **géométries simples**, on peut déterminer les facteurs de forme à partir des règles de conservation et de réciprocité (exemple du prisme à base triangulaire ci-dessus par exemple).

Dans le cas de **surfaces en regard pour lesquelles la longueur transversale est très grande devant les autres longueurs** (le calcul peut se réduire à 2 dimensions), on pourra utiliser la méthode des cordes croisées de Hottel.

Dans le cas de **géométries plus complexes**, on pourra retrouver des formules ou des abaques issues de la littérature (Siegel et Howell, 1992), (Lienhard, 2020), les formules sont déterminées par une résolution analytique de l'expression des facteurs de forme.

Dans le cas de **géométries complexes**, on peut utiliser la méthode de Monte Carlo par tracé de rayons :



Elle consiste à effectuer un tirage aléatoire des directions à partir de points tirés aléatoirement sur la surface  $S_1$ . Lorsque le calcul géométrique montre que le rayon  $\Delta$  intercepte une surface  $S_i$  ( $i \neq 1$ ), on incrémente une variable  $X_{1i}$ . Si le nombre d'essais est important, les fractions d'interception de toutes les surfaces permettent d'approximer valablement les facteurs d'angle  $F_{1i}$ .

### 6.3.3 Puissance nette échangée entre deux surfaces

#### Cas de deux surfaces noires

Dans le cas de deux **surfaces noires**, la puissance radiative nette entre les surfaces  $S_i$  et  $S_j$  s'écrit directement comme :

$$\Phi_{net}^{ij} = \Phi_{ij} - \Phi_{ji} = S_i \cdot F_{ij} \cdot M_i^0 - S_j \cdot F_{ji} \cdot M_j^0$$

en utilisant la règle de réciprocité ;

$$\Phi_{net}^{ij} = S_i \cdot F_{ij} \cdot (M_i^0 - M_j^0)$$

Lorsqu'on ne peut plus faire cette hypothèse, on utilise la méthode des radiosités. Lorsque les surfaces sont grises, il faut tenir compte des réflexions successives entre les surfaces.

#### Méthode des Radiosités

Dans le cas d'une **surface grise**, le flux quittant cette surface est la somme du flux émis par cette surface et du flux incident qu'elle réfléchit.

On appelle **radiosité**  $J_i$  [ $W/m^2$ ] d'une surface  $S_i$  la somme de ces deux contributions ( $J$  joue le rôle d'une « émittance généralisée ».) :

$$J_i = \varepsilon_i \cdot M_i^0 + \rho_i \cdot E_i = \varepsilon_i \cdot M_i^0 + (1 - \varepsilon_i) \cdot E_i$$

D'autre part, la densité de flux net  $\varphi_{net}^i$  de chaque surface  $S_i$  [ $W.m^{-2}$ ] - différence entre ce qui est émis ( $\varepsilon_i \cdot M_i^0$ ) et ce qui est absorbé ( $\alpha_i \cdot E_i$ ) - s'exprime en utilisant ( $\varepsilon_i = \alpha_i$ ) :

$$\varphi_{net}^i = \varepsilon_i \cdot M_i^0 - \alpha_i \cdot E_i = \varepsilon_i \cdot (M_i^0 - E_i) = J_i - E_i$$

#### Forme générale du calcul des flux dans une enceinte par les radiosités

Soit une enceinte fermée constituée de  $N$  surfaces grises à diffusion isotrope. Les facteurs de forme sont notés  $F_{ij}$ . La méthode va consister à utiliser la radiosité  $J_i$  pour les surfaces à température connue et la densité de flux net  $\varphi_{net}^i$  pour les surfaces à flux imposé (adiabatiques par exemple).

En utilisant la propriété de réciprocité des facteurs de forme, le flux reçu par la surface  $S_i$  s'écrit :

$$S_i \cdot E_i = \sum_{j=1}^N S_j \cdot F_{ji} \cdot J_j = \sum_{j=1}^N S_i \cdot F_{ij} \cdot J_j = S_i \cdot \sum_{j=1}^N F_{ij} \cdot J_j$$

En reprenant la formule de la radiosité,

$$J_i = \varepsilon_i \cdot M_i^0 + \rho_i \cdot E_i = \varepsilon_i \cdot M_i^0 + (1 - \varepsilon_i) \cdot \sum_{j=1}^N F_{ij} \cdot J_j$$

d'où

$$J_i - (1 - \varepsilon_i) \cdot \sum_{j=1}^N F_{ij} \cdot J_j = \varepsilon_i \cdot M_i^0 = \varepsilon_i \cdot \sigma \cdot T_i^4$$

où autrement en introduisant le symbole de kronecker,

$$\sum_{j=1}^N [\delta_{ij} - (1 - \varepsilon_i) \cdot F_{ij}] \cdot J_j = \varepsilon_i \cdot M_i^0 = \varepsilon_i \cdot \sigma \cdot T_i^4$$

L'ensemble des équations ci-dessus constitue un système linéaire dont les inconnues sont les radiosités  $J_i$ .

La densité de flux  $\varphi_{net}^i$  peut-être écrite comme

$$\varphi_{net}^i = J_i - \sum_{j=1}^N F_{ij} \cdot J_j = \sum_{j=1}^N (\delta_{ij} - F_{ij}) \cdot J_j$$

### **Résolution matricielle densité de flux net / températures**

Il est également possible d'éliminer les radiosités pour obtenir une relation directe entre les températures et les densités de flux nets. Pour cela, on repart de l'expression de l'éclairement :

$$E_i = \sum_{j=1}^N F_{ij} \cdot J_j$$

en reportant dans l'expression de la radiosité

$$J_i = \varepsilon_i \cdot M_i^0 + \rho_i \cdot E_i$$

, on obtient ainsi :

$$E_i = \sum_{j=1}^N F_{ij} \cdot [\varepsilon_j \cdot M_j^0 + (1 - \varepsilon_j) \cdot E_j]$$

D'autre part, l'expression de la densité du flux net, nous permet d'écrire :

$$E_i = M_i^0 - \frac{\varphi_{net}^i}{\varepsilon_i}$$

D'où :

$$M_i^0 - \frac{\varphi_{net}^i}{\varepsilon_i} = \sum_{j=1}^N F_{ij} \cdot \left[ \varepsilon_j \cdot M_j^0 + (1 - \varepsilon_j) \cdot \left( M_j^0 - \frac{\varphi_{net}^j}{\varepsilon_j} \right) \right]$$

soit :

$$M_i^0 - \sum_{j=1}^N F_{ij} \cdot M_j^0 = \frac{\varphi_{net}^i}{\varepsilon_i} - \sum_{j=1}^N F_{ij} \cdot (1 - \varepsilon_j) \cdot \frac{\varphi_{net}^j}{\varepsilon_j}$$

et finalement on a pour tout i :

$$\sum_{j=1}^N (\delta_{ij} - F_{ij}) \cdot \sigma \cdot T_j^4 = \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\delta_{ij} - F_{ij} \cdot (1 - \varepsilon_j)}{\varepsilon_j} \right] \cdot \varphi_{net}^j$$

Le calcul des  $\varphi_{net-j}$  se fait donc sous forme matricielle en inversant la matrice B :

$$A \cdot \sigma \cdot T^4 = B \cdot \varphi_{net}$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} 1 - F_{11} & -F_{12} & \dots & -F_{1N} \\ -F_{21} & 1 - F_{22} & \dots & -F_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -F_{N1} & \dots & \dots & 1 - F_{NN} \end{bmatrix} T^4 = \begin{bmatrix} T_1^4 \\ T_2^4 \\ \dots \\ T_N^4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1 - F_{11} \cdot (1 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1} & \frac{-F_{12} \cdot (1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_2} & \dots & \frac{-F_{1N} \cdot (1 - \varepsilon_N)}{\varepsilon_N} \\ \frac{-F_{21} \cdot (1 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1} & \frac{1 - F_{22} \cdot (1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_2} & \dots & \frac{-F_{2N} \cdot (1 - \varepsilon_N)}{\varepsilon_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{-F_{N1} \cdot (1 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1} & \dots & \dots & \frac{1 - F_{NN} \cdot (1 - \varepsilon_N)}{\varepsilon_N} \end{bmatrix} \varphi_{net} = \begin{bmatrix} \varphi_{net}^1 \\ \varphi_{net}^2 \\ \dots \\ \varphi_{net}^N \end{bmatrix}$$

### 6.3.4 Analogie électrique, linéarisation

#### Analogie électrique

De la méthode des radiosités pour les corps gris isotropes, on peut écrire la puissance radiative nette :  
d'une surface i :

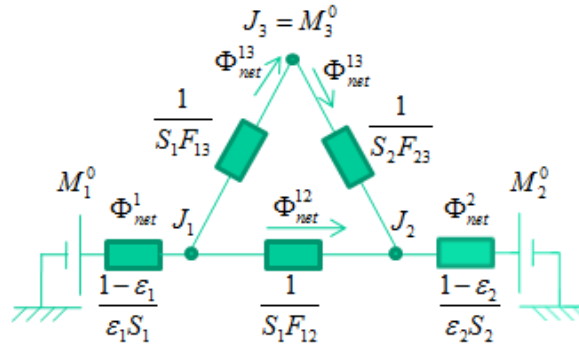
$$\Phi_{net}^i = \frac{\varepsilon_i \cdot S_i}{1 - \varepsilon_i} \cdot [M_i^0 - J_i]$$

d'une surface i vis-à-vis d'une surface j :

$$\Phi_{net}^{i-j} = S_i \cdot F_{ij} \cdot [J_i - J_j]$$

Par analogie avec l'électricité, le potentiel de référence est l'émittance du corps noir. Le flux radiatif net (équivalent au courant) est transporté à travers la résistance  $\frac{1-\varepsilon_i}{\varepsilon_i \cdot S_i}$  jusqu'au potentiel de radiosité. Il est ensuite partagé en flux nets fractionnés qui traversent les résistances  $\frac{1}{S_i \cdot F_{ij}}$ .

Ci-dessous, un exemple avec deux surfaces grises et une surface noire.



Le flux net échangé peut s'écrire dans le cas de deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  :

$$\Phi_{net}^{12} = (M_1^0 - M_2^0) \cdot \left[ \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \cdot S_1} + \frac{1}{S_1 \cdot F_{12}} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 \cdot S_2} \right]^{-1}$$

Par analogie avec l'échange entre deux surfaces noires, on introduit un « facteur de forme gris »  $f_{12}$ , comme suit :

$$\Phi_{net}^{12} = S_1 \cdot f_{12} \cdot (M_1^0 - M_2^0)$$

Dans les cas les plus simples :

Plans parallèles proches (effets de bord négligeables)	Cylindres emboîtés de grande longueur	Sphères emboîtées	Petit système dans un grand système
$f_{12} = \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right]^{-1}$	$f_{12} = \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \frac{R_1}{R_2} \right]^{-1}$	$f_{12} = \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right]^{-1}$	$f_{12} \cong \varepsilon_1$

## Linéarisation

Prenons par exemple le cas d'une surface extérieure grise de grande dimension  $S_2$  qui entoure une petite surface grise  $S_1$ . Le flux net s'écrit :

$$\Phi_{net}^{12} = \varepsilon_1 \cdot \sigma \cdot S_1 \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

On peut réécrire l'équation sous la forme :

$$\Phi_{net}^{12} = \varepsilon_1 \cdot \sigma \cdot S_1 \cdot (T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)(T_1 - T_2)$$

On peut ainsi introduire un coefficient d'échange radiatif  $h_r$  similaire au coefficient d'échange convectif :

$$h_r = \varepsilon_1 \cdot \sigma \cdot (T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)$$

D'où

$$\Phi_{net}^{12} = h_r \cdot S_1 \cdot (T_1 - T_2)$$

Si  $T_1$  et  $T_2$  ne sont pas très éloignés, on peut aussi réécrire l'équation de  $\Phi_{net}^{12}$  comme<sup>25</sup> :

$$\Phi_{net}^{12} \cong \varepsilon_1 \cdot \sigma \cdot S_1 \cdot 4 \cdot \left( \frac{T_1 + T_2}{2} \right)^3 (T_1 - T_2)$$

On introduit comme précédemment un coefficient d'échange radiatif  $h_r$  :

$$h_r = 4 \cdot \varepsilon_1 \cdot \sigma \cdot \left( \frac{T_1 + T_2}{2} \right)^3$$

D'où

$$\Phi_{net}^{12} \cong h_r \cdot S_1 \cdot (T_1 - T_2)$$

Dans les cas les plus courants, on ne connaît qu'une seule des deux températures et on cherche à calculer la seconde. Pour faciliter la résolution du problème, on écrira soit  $h_r = 4 \cdot \varepsilon_1 \cdot \sigma \cdot (T_i)^3$  avec  $T_i$  la température connue ou une température moyenne estimée. Pour obtenir un résultat plus précis, il est possible de faire un calcul itératif. On fait une estimation initiale de la température inconnue pour calculer  $h_r$ , puis on résout le bilan thermique pour trouver une nouvelle valeur de la température inconnue. Ensuite, on réinjecte cette nouvelle valeur dans  $h_r$ , puis on résout à nouveau le bilan thermique pour trouver une nouvelle valeur de la température. On procède ainsi de suite jusqu'à la convergence de la température initialement inconnue. Notez qu'un solveur permet de résoudre l'équation non linéaire sans passer par une linéarisation de terme de flux radiatif.

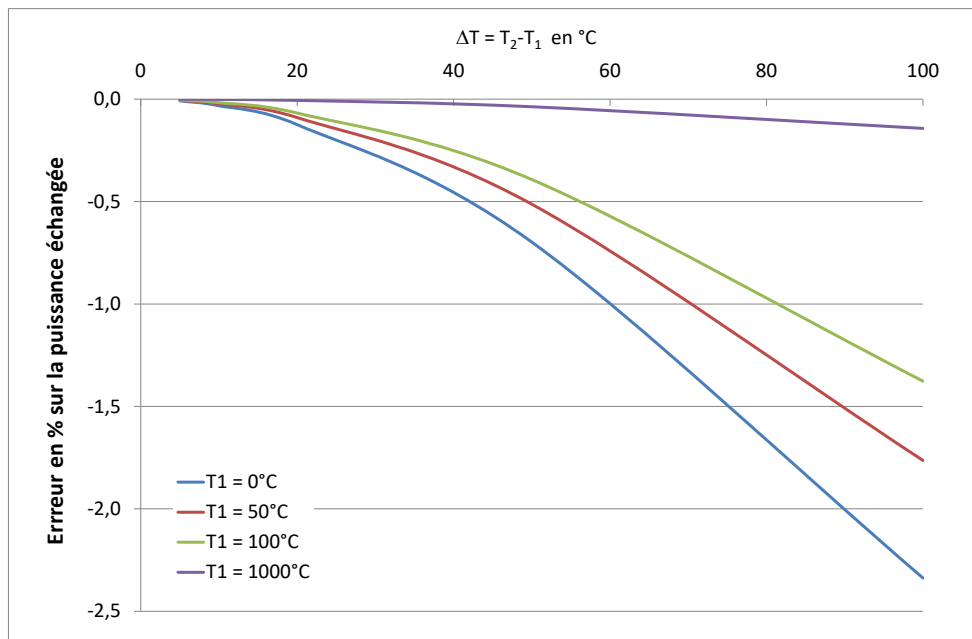
Comme présenté sur la figure suivante, les erreurs liées à la linéarisation sont relativement faibles quand on prend la température moyenne. En revanche, les erreurs sont beaucoup plus importantes quand on ne prend qu'une des deux températures, dans le cas où une seule est connue. Dans ce cas, il est recommandé de faire un calcul itératif jusqu'à convergence de la température inconnue.

---

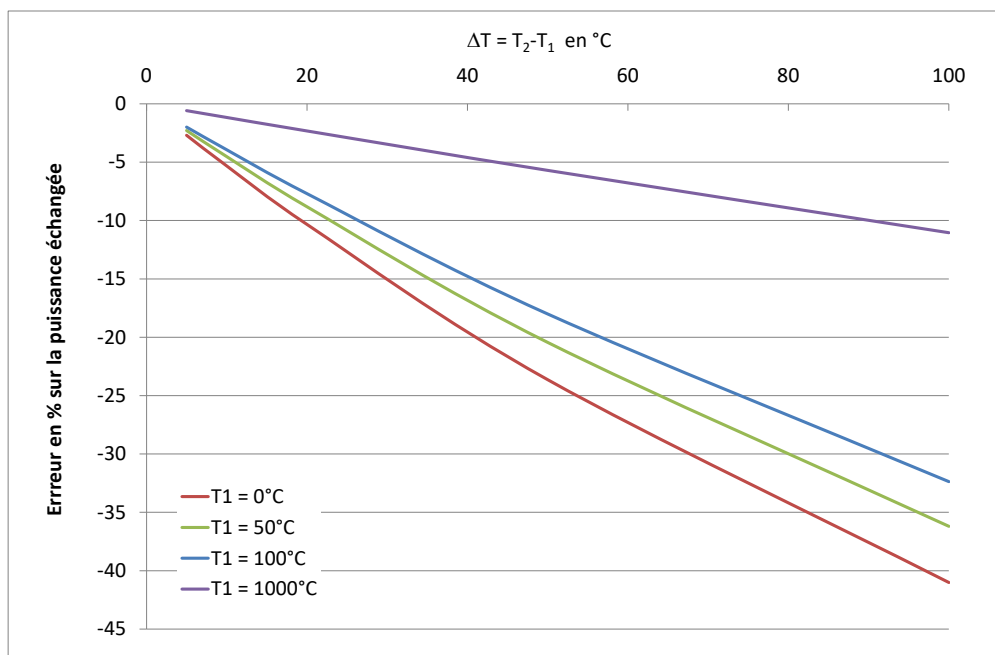
<sup>25</sup> En posant  $a = \frac{T_1+T_2}{2}$  et  $b = \frac{T_1-T_2}{2}$ , on peut écrire  $T_1^4 - T_2^4 = (a+b)^4 - (a-b)^4$

En décomposant, il vient  $(a+b)^4 - (a-b)^4 = 8ba^3 + 8b^3a$

Comme  $b \ll a$ , il vient  $(a+b)^4 - (a-b)^4 \cong 8ba^3 \cong 4(T_1 - T_2) \left( \frac{T_1+T_2}{2} \right)^3$



Courbes représentant l'erreur liée à la linéarisation en prenant la température moyenne entre  $T_1$  et  $T_2$



Courbes représentant l'erreur liée à la linéarisation en prenant la température  $T_1$

# REFERENCES

---

## OUVRAGES GENERAUX

Y.A ÇENGEL, R. H. TURNER *Fundamentals of Thermal Fluid Sciences*, McGraw-Hill 2<sup>nd</sup> edition 2005

F. KREITH - *Handbook of thermal engineering*. 2000, CRC Press - Springer

M. MORAN, H. SHAPIRO, B. MUNSON, D. DEWITT - *Introduction to thermal systems engineering - Thermodynamics, Fluid Mechanics and heat transfer*, John Wiley & Sons, 2003

## THERMODYNAMIQUE

Y.A ÇENGEL, M. A. BOLES. *Thermodynamics*, McGraw-Hill Education 4<sup>th</sup> edition 2002

L BOREL, D FAVRAT. *Thermodynamique et Energétique*. Presses Polytechniques et universitaires romandes. 2005

D. FARGUE. *Abrégé de Thermodynamique : Principes et applications*. Presses des Mines 2004

## MECANIQUE DES FLUIDES

Y. A. CENGEL and J. M. CIMBALA *Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications* (4th Edition)

F CAUNEAU. *Mécanique des fluides*. Presses des Mines 2008

## TRANSFERTS THERMIQUES

Y.A ÇENGEL. *Heat transfer, a practical approach*. 1998, Mc Graw Hill, New York

J. H. LIENHARD. *A heat transfer textbook*, 5<sup>th</sup> edition 2020, <https://ahtt.mit.edu/>

D MARCHIO et P REBOUX. *Introduction aux transferts thermiques*. Presses des Mines. 2011

F.P INCROPERA et D DE WITT - *Fundamentals of heat and mass transfer*, fourth edition, 1996, Wiley, New York

W. ROHSENOW, J. HARTNETT et Y CHO - *Handbook of Heat Transfer*, third edition. New York 1998, Mc Graw Hill,

J.F. SACADURA - *Initiation aux transferts thermiques* 1980, Technique et Documentation, Paris

J. TAINE et J.P PETIT - *Transferts thermiques. Mécanique des fluides anisothermes*, 1989, Dunod Université, Bordas, Paris

## CONDUCTION

CARSLAW ET JAEGER - *Conduction of heat in solids*, 2e édition Oxford 1959, Clarendon Press

INGERSOLL ET ZOBEL - *Heat conduction with engineering and geological applications*, London 1948, Mc Graw Hill

A DE GIOVANNI - *Conduction*. Techniques de l'ingénieur Mécanique et Chaleur, A 1530.

## RAYONNEMENT

H.C HOTTEL et A.F SAROFIM - *Radiative Transfer*, 1972, Mc Graw Hill, New York

MATTEI - *Rayonnement thermique des matériaux opaques*, techniques de l'ingénieur, BE 8210

R. SIEGEL et J.R HOWELL - *Thermal Radiation Heat Transfer*, Mc Graw Hill, New York, 3<sup>rd</sup> edition, 1992

Y.S TOULOUKIAN - *Thermal radiative properties. Metallic elements and alloys, coatings, non mettalic solids*. Books on demand.

## CONVECTION

J. HUETZ, JP PETIT - *Notions de transfert thermique par convection*. Techniques de l'ingénieur Mécanique et Chaleur, A 1540.

.

## **ECHANGEURS DE CHALEUR**

W.M.KAYS, A.L.LONDON - *Compact heat exchangers*. New York 3<sup>rd</sup> edition 1984, Mc Graw Hill.

J.TABOREK, G.F.HEWITT, N.AFGAN - *Heat exchangers, theory and practice*. New York 1983, Mc Graw Hill.

A BONTEMPS, A GARRIGUE, C GARBIER, J HUETZ, C MARVILLET - *Echangeurs de chaleur, Généralités*.  
Techniques de l'ingénieur Génie Energétique, B 2340.



# ANNEXES

## ANNEXE 1 : MISE EN EQUATION D'UN PROBLEME DE TRANSFERT DE CHALEUR

### 1.1. Bilan d'énergie

Pour traiter un problème de thermique, il faut tout d'abord définir le système (S) par ses limites dans l'espace et il faut ensuite faire l'inventaire des différents flux de chaleur qui influent sur l'état du système et qui peuvent être :

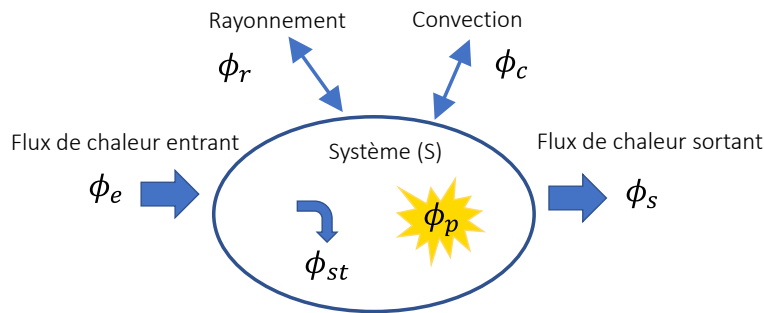


Figure 1 : Système et bilan énergétique

On applique alors le 1<sup>er</sup> principe de la thermodynamique pour établir le bilan d'énergie du système (S) :

Taux d'accroissement d'énergie totale dans le volume du système	=	Somme des puissances produites dans le volume	+	Somme algébrique des flux entrants à la frontière du système
---	---	---	---	--

$$\phi_{st} = \phi_p + \phi_e - \phi_s - \phi_r - \phi_c$$

Il faut ensuite établir les **expressions des différents flux d'énergie**. En reportant ces expressions dans le bilan d'énergie, on obtient l'équation différentielle dont la résolution permet de connaître l'évolution de la température en chaque point du système.

On doit compter uniquement les flux gagnés et perdus à la frontière extérieure du système, autrement dit, les flux échangés à l'intérieur du système ne comptent pas.

Sauf si le système peut être considéré comme un corps à température uniforme, il faudra déterminer les profils de températures dans le système. Il faudra aussi introduire une équation de conduction dans le système.

### 1.2. Convection

C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide. Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de Newton :

$$\phi_c = h \cdot S(T_p - T_\infty)$$

Avec :	$\phi_c$	Flux de chaleur transmis par convection (W)
	$h$	Coefficient de transfert de chaleur par convection ( $\text{W m}^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ )
	$T_p$	Température de surface du solide ( $^\circ\text{C}$ )
	$T_\infty$	Température du fluide loin de la surface du solide ( $^\circ\text{C}$ )
	$S$	Aire de la surface de contact solide/fluide ( $\text{m}^2$ )

Remarque : La valeur du coefficient de transfert de chaleur par convection  $h$  est déterminée à partir de corrélations issues de la littérature. Elle dépend de la nature du fluide, de sa température, de sa vitesse et des caractéristiques géométriques de la surface de contact solide/fluide.

### 1.3 Rayonnement

C'est un transfert d'énergie électromagnétique entre deux surfaces (même dans le vide). Sans source rayonnant sur le système comme le soleil, le transfert radiatif se limite au rayonnement entre le système et son milieu environnant qui s'exprime ainsi :

$$\Phi_r = \varepsilon_p \cdot \sigma \cdot S \cdot (T_p^4 - T_\infty^4)$$

Avec :	$\Phi_r$	Flux de chaleur transmis par rayonnement (W)
	$\sigma$	Constante de Stefan ( $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ )
	$\varepsilon_p$	Facteur d'émission de la surface
	$T_p$	Température de la surface (K)
	$T_\infty$	Température du milieu environnant la surface (K)
	$S$	Aire de la surface ( $\text{m}^2$ )

### 1.4 Flux de chaleur lié à un débit masse

Lorsqu'un débit masse  $\dot{m}$  de matière entre dans le système à l'enthalpie  $h_e$  et en ressort à l'enthalpie  $h_s$ , on écrit le flux de chaleur comme :

$$\phi_e - \phi_s = \dot{m} \cdot (h_e - h_s)$$

Lorsque le fluide traversant le système est un gaz parfait ou un fluide incompressible, et sans changement de phase, on peut exprimer le flux de chaleur à partir des températures  $T_e$  et  $T_s$  :

$$\phi_e - \phi_s = \dot{m} \cdot c_p \cdot (T_e - T_s)$$

Avec :	$\phi_e, \phi_s$	Flux de chaleur entrant et sortant du système (W)
	$\dot{m}$	Débit masse ( $\text{kg.s}^{-1}$ )
	$c_p$	Chaleur spécifique ( $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ )
	$h_e, h_s$	enthalpie en entrée et en sortie ( $\text{J.kg}^{-1}$ )
	$T_e, T_s$	Températures d'entrée et de sortie (K)

### 1.5 Stockage d'énergie

Le stockage d'énergie dans le système correspond à une augmentation de son énergie interne au cours du temps d'où :

$$\phi_{st} = \rho \cdot V \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

Pour un gaz parfait ou un fluide incompressible, et si le système est sans d'état, l'équation précédente devient :

$$\phi_{st} = \rho \cdot V \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

Avec :	$\phi_{st}$	Flux de chaleur stocké (W)
	$\rho$	Masse volumique ( $\text{kg m}^{-3}$ )
	$V$	Volume ( $\text{m}^3$ )
	$c_p$	Chaleur spécifique ( $\text{J kg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ )
	$h$	enthalpie ( $\text{J kg}^{-1}$ )
	$T$	Température ( $^\circ\text{C}$ )
	$t$	Temps (s)

Le produit  $\rho \cdot V \cdot c$  est appelé la capacitance thermique du corps.

Dans le cas d'un changement de phase dans le système,

$$\phi_{st} = \rho \cdot L \cdot \frac{\partial V_L}{\partial t}$$

Avec :  $L$  enthalpie de changement d'état ou chaleur latente de changement de phase ( $\text{J/kg}^{-1}$ )  
 $V_L$  volume du système ayant changé d'état ( $\text{m}^3$ )

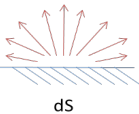
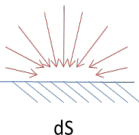
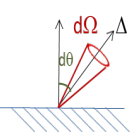
## 1.6 Génération d'énergie

Elle intervient lorsqu'une autre forme d'énergie (chimique, électrique, mécanique, nucléaire) est convertie en énergie thermique au sein du système (S). On peut l'écrire sous la forme :

$$\phi_p = \pi \cdot V$$

Avec :  $\phi_p$  Flux d'énergie thermique générée ( $\text{W}$ )  
 $\pi$  Densité volumique d'énergie générée ( $\text{W m}^{-3}$ )  
 $V$  Volume ( $\text{m}^3$ )

## ANNEXE 2 : RECAPITULATIF DES GRANDEURS UTILES DU RAYONNEMENT

Classification selon les <b>composantes spatiales</b>			Classification selon la <b>composante spectrale</b>	
			Grandeurs <b>totales</b> (ensemble du spectre)	Grandeurs <b>monochromatiques</b> (une longueur d'onde $\lambda$ )
Grandeurs <b>hémisphériques</b>		Pour une source ou un récepteur de surface S	Flux total $\phi = \int_0^\infty \phi_\lambda \cdot d\lambda$  Symbole: $\phi$ Unité: W	Flux monochromatique $\phi_\lambda = \frac{d\phi}{d\lambda} \Big _\lambda$  Symbole: $\Phi_\lambda$ Unité: W/ $\mu\text{m}$
		Par unité de surface de la source	Emittance totale $M = \frac{d\phi}{dS}$ $M = \int_0^\infty M_\lambda \cdot d\lambda$  Symbole: M Unité: W/m <sup>2</sup>	Emittance monochromatique $M_\lambda = \frac{dM}{d\lambda} = \frac{d^2\phi}{dS \cdot d\lambda} \Big _\lambda$  Symbole: $M_\lambda$ Unité: W/( $\mu\text{m} \cdot \text{m}^2$ )
		Par unité de surface du récepteur	Eclairement total $E = \frac{d\phi}{dS}$ $E = \int_0^\infty E_\lambda \cdot d\lambda$  Symbole: E Unité: W/m <sup>2</sup>	Eclairement monochromatique $E_\lambda = \frac{dE}{d\lambda} = \frac{d^2\phi}{dS \cdot d\lambda} \Big _\lambda$  Symbole: $E_\lambda$ Unité: W/( $\mu\text{m} \cdot \text{m}^2$ )
Grandeurs <b>directionnelles</b>		Pour une source de surface S	Intensité totale dans la direction $\Delta$ $I_\Delta = \frac{d\phi_\Delta}{d\Omega}$ $I_\Delta = \int_0^\infty I_{\lambda\Delta} \cdot d\lambda$  Symbole: $I_\Delta$ Unité: W/sr	Intensité monochromatique dans la direction $\Delta$ $I_{\lambda\Delta} = \frac{d^2\phi_\Delta}{d\Omega \cdot d\lambda} \Big _\lambda$  Symbole: $I_{\lambda\Delta}$ Unité: W/( $\mu\text{m} \cdot \text{sr}$ )
		Par unité de surface de la source projetée perpendiculairement à la direction d'émission	Luminance totale $L_\Delta = \frac{dI_\Delta}{dS \cdot \cos \theta} = \frac{d^2\phi_\Delta}{d\Omega \cdot dS \cdot \cos \theta}$ $L_\Delta = \int_0^\infty L_{\lambda\Delta} \cdot d\lambda$  Symbole: $L_\Delta$ Unité: W/(m <sup>2</sup> ·sr)	Luminance monochromatique $L_{\lambda\Delta} = \frac{d^3\phi_\Delta}{d\Omega \cdot dS \cdot \cos \theta \cdot d\lambda} \Big _\lambda$  Symbole: $L_{\lambda\Delta}$ Unité: W/( $\mu\text{m} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{sr}$ )
$d^2\phi_\Delta$ = flux total émis par la source dS dans un angle solide dΩ entourant la direction Δ				

### ANNEXE 3 : TABLE DES VALEURS DE LA FONCTION ERF, ERFC

x	erf	erfc
0	0	1
0,05	0,056372	0,943628
0,1	0,112463	0,887537
0,15	0,167996	0,832004
0,2	0,222703	0,777297
0,25	0,276326	0,723674
0,3	0,328627	0,671373
0,35	0,379382	0,620618
0,4	0,428392	0,571608
0,45	0,475482	0,524518
0,5	0,5205	0,4795
0,55	0,563323	0,436677
0,6	0,603856	0,396144
0,65	0,642029	0,357971
0,7	0,677801	0,322199
0,75	0,711156	0,288844
0,8	0,742101	0,257899
0,85	0,770668	0,229332
0,9	0,796908	0,203092
0,95	0,820891	0,179109
1	0,842701	0,157299

x	erf	erfc
1,1	0,880205	0,1198
1,2	0,910314	0,08969
1,3	0,934008	0,06599
1,4	0,952285	0,04772
1,5	0,966105	0,0339
1,6	0,976378	0,02362
1,7	0,98379	0,01621
1,8	0,989091	0,01091
1,9	0,99279	0,00721
2	0,995322	0,00468
2,1	0,997021	0,00298
2,2	0,998137	0,00186
2,3	0,998857	0,00114
2,4	0,999311	0,00069
2,5	0,999593	0,00041
2,6	0,999764	0,00024
2,7	0,999866	0,00013
2,8	0,999925	0,00008
2,9	0,999959	0,00004
3	0,999978	0,00002

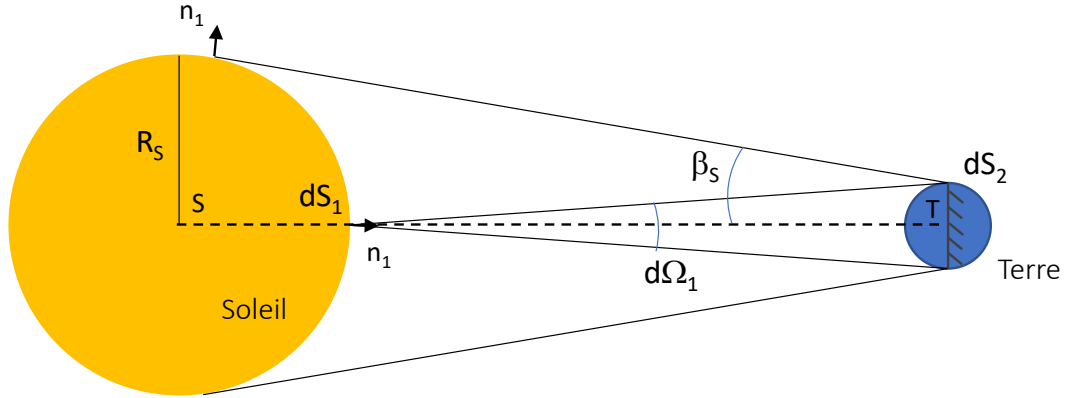
ANNEXE 4 : TABLE DES VALEURS DE LA FONCTION  $F_{0-\lambda T}$

Tableau 3 – Valeurs de la fonction $F_{0-\lambda T}$ pour différentes valeurs de $\lambda T$											
$\lambda T$ ( $\mu\text{m} \cdot \text{K}$ )	0	20	40	60	80	$\lambda T$ ( $\mu\text{m} \cdot \text{K}$ )	0	20 ou 2 000 (1) ou 2 000 (2)	40 ou 4 000 (1) ou 4 000 (2)	60 ou 6 000 (1) ou 6 000 (2)	80 ou 8 000 (1) ou 8 000 (2)
500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	6 200	0,7541	0,7556	0,7572	0,7587	0,7603
600	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	6 300	0,7618	0,7633	0,7648	0,7662	0,7677
700	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	6 400	0,7692	0,7706	0,7721	0,7735	0,7749
800	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	6 500	0,7763	0,7777	0,7791	0,7804	0,7818
900	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	6 600	0,7831	0,7845	0,7858	0,7871	0,7884
1 000	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0007	6 700	0,7897	0,7910	0,7923	0,7936	0,7948
1 100	0,0009	0,0010	0,0013	0,0015	0,0018	6 800	0,7961	0,7973	0,7985	0,7998	0,8010
1 200	0,0021	0,0024	0,0028	0,0033	0,0037	6 900	0,8022	0,8034	0,8045	0,8057	0,8069
1 300	0,0043	0,0049	0,0055	0,0062	0,0069	7 000	0,8080	0,8092	0,8103	0,8115	0,8126
1 400	0,0078	0,0086	0,0096	0,0106	0,0117	7 100	0,8137	0,8148	0,8159	0,8170	0,8181
1 500	0,0128	0,0140	0,0153	0,0167	0,0182	7 200	0,8191	0,8202	0,8213	0,8223	0,8234
1 600	0,0197	0,0213	0,0230	0,0247	0,0266	7 300	0,8244	0,8254	0,8264	0,8275	0,8285
1 700	0,0285	0,0305	0,0326	0,0347	0,0370	7 400	0,8295	0,8304	0,8314	0,8324	0,8334
1 800	0,0393	0,0417	0,0442	0,0467	0,0494	7 500	0,8343	0,8353	0,8362	0,8372	0,8381
1 900	0,0521	0,0549	0,0577	0,0606	0,0636	7 600	0,8390	0,8399	0,8409	0,8418	0,8427
2 000	0,0667	0,0698	0,0730	0,0763	0,0796	7 700	0,8436	0,8444	0,8453	0,8462	0,8471
2 100	0,0830	0,0865	0,0900	0,0936	0,0972	7 800	0,8479	0,8488	0,8496	0,8505	0,8513
2 200	0,1009	0,1045	0,1084	0,1122	0,1161	7 900	0,8521	0,8530	0,8538	0,8546	0,8554
2 300	0,1200	0,1240	0,1280	0,1320	0,1361	8 000	0,8562	0,8570	0,8578	0,8586	0,8594
2 400	0,1402	0,1444	0,1486	0,1528	0,1571	8 100	0,8601	0,8609	0,8617	0,8624	0,8632
2 500	0,1613	0,1656	0,1700	0,1743	0,1787	8 200	0,8639	0,8647	0,8654	0,8661	0,8669
2 600	0,1831	0,1875	0,1920	0,1964	0,2009	8 300	0,8676	0,8683	0,8690	0,8697	0,8704
2 700	0,2053	0,2098	0,2143	0,2188	0,2234	8 400	0,8711	0,8718	0,8725	0,8732	0,8738
2 800	0,2279	0,2324	0,2369	0,2415	0,2460	8 500	0,8745	0,8752	0,8759	0,8765	0,8772
2 900	0,2506	0,2551	0,2596	0,2642	0,2687	8 600	0,8778	0,8785	0,8791	0,8797	0,8804
3 000	0,2732	0,2778	0,2823	0,2868	0,2913	8 700	0,8810	0,8816	0,8822	0,8829	0,8835
3 100	0,2958	0,3003	0,3047	0,3092	0,3137	8 800	0,8841	0,8847	0,8853	0,8859	0,8865
3 200	0,3181	0,3225	0,3269	0,3313	0,3357	8 900	0,8871	0,8877	0,8882	0,8888	0,8894
3 300	0,3401	0,3445	0,3488	0,3531	0,3574	9 000	0,8899	0,8905	0,8911	0,8916	0,8922
3 400	0,3617	0,3660	0,3703	0,3745	0,3787	9 100	0,8927	0,8933	0,8938	0,8943	0,8949
3 500	0,3829	0,3871	0,3912	0,3954	0,3995	9 200	0,8954	0,8959	0,8965	0,8970	0,8975
3 600	0,4036	0,4077	0,4117	0,4158	0,4198	9 300	0,8980	0,8985	0,8990	0,8995	0,9000
3 700	0,4238	0,4277	0,4317	0,4356	0,4395	9 400	0,9005	0,9010	0,9015	0,9020	0,9025
3 800	0,4434	0,4472	0,4511	0,4549	0,4585	9 500	0,9030	0,9035	0,9039	0,9044	0,9049
3 900	0,4624	0,4661	0,4699	0,4736	0,4772	9 600	0,9054	0,9058	0,9063	0,9067	0,9072
4 000	0,4809	0,4845	0,4881	0,4917	0,4952	9 700	0,9076	0,9081	0,9085	0,9090	0,9094
4 100	0,4987	0,5022	0,5057	0,5092	0,5126	9 800	0,9099	0,9103	0,9107	0,9112	0,9116
4 200	0,5160	0,5194	0,5227	0,5261	0,5294	9 900	0,9120	0,9124	0,9129	0,9133	0,9137
4 300	0,5327	0,5359	0,5392	0,5424	0,5456	10 000	0,9141	0,9141	0,9141	0,9141	0,9141
4 400	0,5488	0,5519	0,5551	0,5582	0,5612	11 000	0,9318	0,9318	0,9318	0,9318	0,9318
4 500	0,5643	0,5673	0,5703	0,5733	0,5763	12 000	0,9450	0,9450	0,9450	0,9450	0,9450
4 600	0,5793	0,5822	0,5851	0,5880	0,5908	13 000	0,9550	0,9550	0,9550	0,9550	0,9550
4 700	0,5937	0,5965	0,5993	0,6020	0,6048	14 000	0,9628	0,9628	0,9628	0,9628	0,9628
4 800	0,6075	0,6102	0,6129	0,6156	0,6182	15 000	0,9689	0,9689	0,9689	0,9689	0,9689
4 900	0,6209	0,6235	0,6261	0,6286	0,6312	16 000	0,9737	0,9737	0,9737	0,9737	0,9737
5 000	0,6337	0,6362	0,6387	0,6412	0,6436	17 000	0,9776	0,9776	0,9776	0,9776	0,9776
5 100	0,6461	0,6485	0,6509	0,6532	0,6556	18 000	0,9807	0,9807	0,9807	0,9807	0,9807
5 200	0,6579	0,6603	0,6625	0,6648	0,6671	19 000	0,9833	0,9833	0,9833	0,9833	0,9833
5 300	0,6693	0,6716	0,6738	0,6760	0,6782	20 000	0,9855	0,9855	0,9855	0,9855	0,9855
5 400	0,6803	0,6825	0,6845	0,6867	0,6888	30 000	0,9952	0,9952	0,9952	0,9952	0,9952
5 500	0,6909	0,6929	0,6950	0,6970	0,6990	40 000	0,9978	0,9978	0,9978	0,9978	0,9978
5 600	0,7010	0,7030	0,7049	0,7069	0,7088	50 000	0,9988	0,9988	0,9988	0,9988	0,9988
5 700	0,7107	0,7126	0,7145	0,7164	0,7183	60 000	0,9993	0,9993	0,9993	0,9993	0,9993
5 800	0,7201	0,7219	0,7238	0,7256	0,7273	70 000	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995
5 900	0,7291	0,7309	0,7326	0,7343	0,7361	80 000	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996
6 000	0,7378	0,7395	0,7411	0,7428	0,7444	90 000	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997
6 100	0,7461	0,7477	0,7493	0,7509	0,7525	100 000	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

(1) Pour les valeurs comprises entre 10 000 et 20 000  $\mu\text{m} \cdot \text{K}$ .  
(2) Pour les valeurs supérieures à 20 000  $\mu\text{K}$ .

Réf : Techniques de l'ingénieur BE 8210

ANNEXE 5 : CALCUL DE L'ECLAIREMENT SOLAIRE REÇU PAR LA TERRE (HORS ATMOSPHERE)  
PAR UNE SURFACE PERPENDICULAIRE AUX RAYONS



$$d^2\phi_{12} = \frac{\sigma T_1^4 \cos\theta_1 \cos\theta_2}{\pi ST^2} dS_1 dS_2$$

Vu la distance, on suppose la distance terre-soleil  $ST$  constante, quelle que soit  $dS_1$  et égale à  $150.10^6$  km et que  $\theta_2 = 0^\circ$  donc  $\cos\theta_2 = 1$ . L'éclairement élémentaire (ramené à  $dS_2$ ) reçu de  $dS_1$  est donc :

$$dE_{12} = \frac{\sigma T_1^4 \cos\theta_1}{\pi ST^2} dS_1$$

et l'éclairement total s'obtient par une intégration sur  $S_1$  ; c'est-à-dire entre les deux directions tangentes, soit entre  $-\beta_{ST}$  et  $\beta_{ST}$  :

$$E_{12} = \frac{\sigma T_1^4}{\pi} \int_{S_1} \frac{\cos\theta_1}{ST^2} dS_1 \cong \frac{\sigma T_1^4}{\pi ST^2} \int_{S_1} \cos\theta_1 dS_1$$

L'intégrale  $\int_{-\beta}^{\beta} \cos\theta_1 dS_1$  représente la surface projetée du soleil, c'est-à-dire la surface  $S_s$  du disque solaire :

$$E_{12} = \frac{\sigma T_1^4}{\pi ST^2} S_s = \frac{\sigma T_1^4}{\pi ST^2} \pi R_s^2 = \sigma T_1^4 \frac{R_s^2}{ST^2}$$

$R_s$  désignant le rayon du soleil  $R_s = 0,712 \cdot 10^9$  m. On obtient donc :  **$E_{12} = 1410 \text{ W/m}^2$**

On remarquera que l'angle  $\beta_{ST}$  est approché par sa tangente  $\tan \beta_{ST} = R_s/ST = 4,75 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$  ( $0,27^\circ$ ). Il est bien légitime de considérer tous les rayons normaux à la surface orientée vers le soleil.

**Remarque** : On peut obtenir le résultat directement en écrivant la puissance totale émise par le soleil de surface  $4\pi R_s^2$  :

$$\phi_{sol} = \sigma T_1^4 \cdot 4\pi R_s^2$$

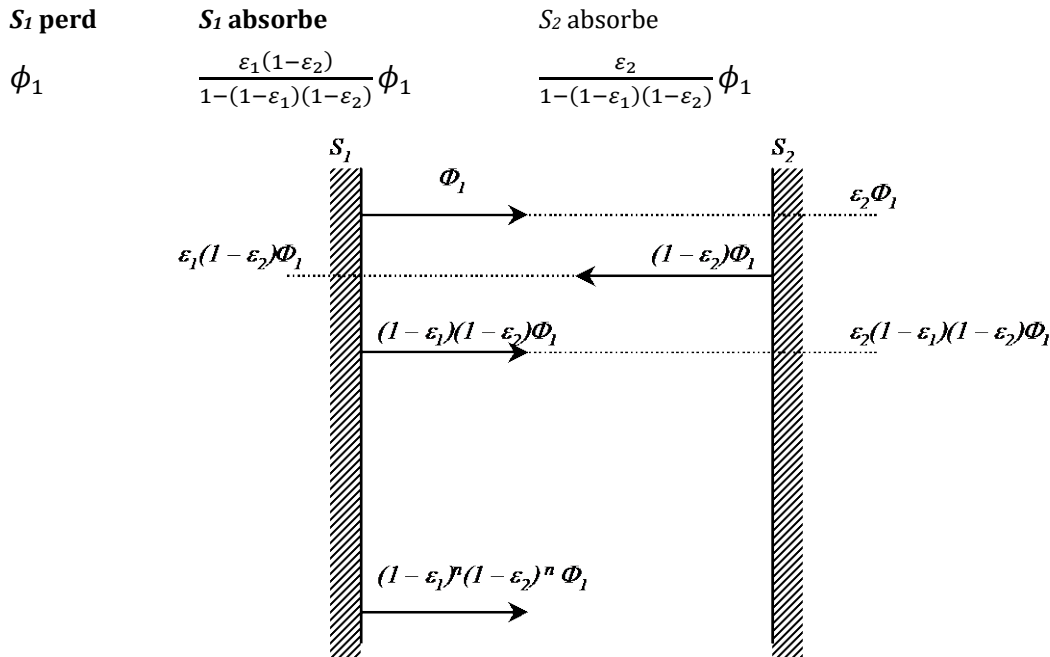
Cette puissance se conserve et, à une distance  $ST$ , elle est interceptée par une sphère de rayon  $ST$  donc de surface  $4\pi ST^2$ . D'où l'éclairement :

$$E_{12} = \frac{\phi_{sol}}{4\pi ST^2} = \sigma T_1^4 \frac{R_s^2}{ST^2}$$

### Plans parallèles infinis

Ce cas est particulièrement simple car on est certain que le flux émis par chaque plan vient frapper l'autre. On suppose que **les plans sont gris**, alors  $\phi_1$  émise par  $S_1$  frappe  $S_2$ , qui absorbe  $\varepsilon_2 \phi_1$  et réfléchit  $(1 - \varepsilon_2) \phi_1$ . Le schéma ci-après amorce les répartitions de  $\phi_1$ .

On voit que les flux absorbés successifs, tant pour  $S_1$  que pour  $S_2$ , sont en progression géométrique de raison  $(1 - \varepsilon_1) \cdot (1 - \varepsilon_2)$ . Les bilans s'établissent donc ainsi<sup>26</sup> relativement à  $\phi_1$  :



Il faut maintenant effectuer le même calcul relativement au flux  $\phi_2$  émis par  $S_2$ . Il suffit d'échanger les rôles de  $S_1$  et  $S_2$  et de changer les indices :

<b><math>S_2</math> perd</b>	<b><math>S_2</math> absorbe</b>	<b><math>S_1</math> absorbe</b>
$\phi_2$	$\frac{\varepsilon_2(1-\varepsilon_1)}{1-(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)} \phi_2$	$\frac{\varepsilon_1}{1-(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)} \phi_2$

Il est maintenant possible de faire le **bilan complet** de  $S_1$  ; tous calculs faits, on trouve que  $S_1$  perd (et donc que  $S_2$  reçoit) un flux net  $\phi$  égal à :

$$\phi_{net} = \frac{\varepsilon_2 \phi_1 - \varepsilon_1 \phi_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2}$$

Dans le cas de corps gris,  $\phi_1$  et  $\phi_2$  peuvent s'exprimer en fonction des températures par la loi de Stefan :

$\phi_1 = \varepsilon_1 \cdot \sigma \cdot S \cdot T_1^4$  et  $\phi_2 = \varepsilon_2 \cdot \sigma \cdot S \cdot T_2^4$ . Comme les aires des surfaces en regard ont même valeur  $S$  :

#### Plans gris en regard

$$\phi_{net} = r \cdot \sigma \cdot S \cdot (T_1^4 - T_2^4) \text{ [W]}$$

avec

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1$$

<sup>26</sup> La somme d'une suite infinie de raison  $q$  inférieure à 1 a pour valeur :  $\frac{1-q^\infty}{1-q} \approx \frac{1}{1-q}$



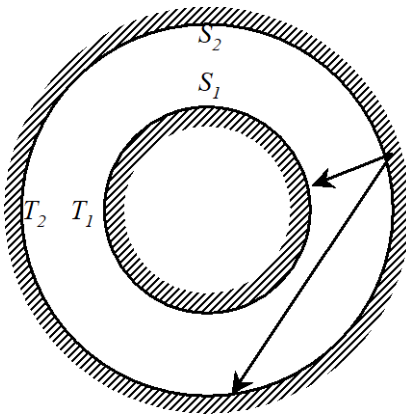
**r est le coefficient de transfert.** Dans le cas de surfaces noires, il est égal à 1. De ce fait,  $\phi = \sigma \cdot S \cdot (T_1^4 - T_2^4)$ . Pour des surfaces grises,  $r$  est inférieur à l'unité.

Si les deux surfaces, sans être noires, ont des **facteurs d'émission voisins de 1**, le produit  $(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)$  est négligeable devant l'unité, et en première approximation :

$$\phi = \sigma \cdot S \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

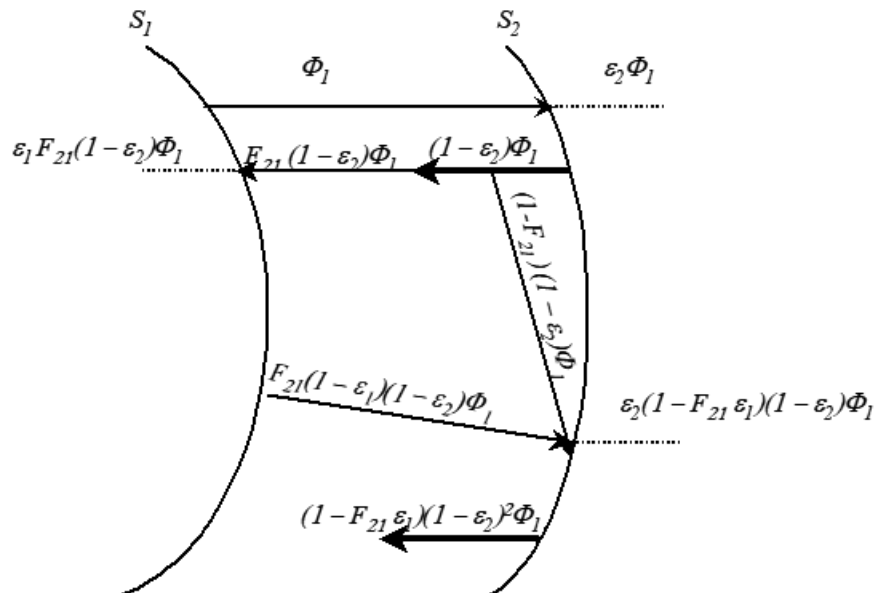
### Sphères concentriques

Soient deux sphères concentriques  $S_1$  (intérieure) et  $S_2$  (extérieure) assimilées à des corps gris maintenues à des températures respectives  $T_1$  et  $T_2$ , uniformes et constantes.



Le flux  $\phi_1$  émis par  $S_1$  est tout entier capté par  $S_2$ , qui en absorbe  $\varepsilon_2 \phi_1$  et réfléchit  $(1-\varepsilon_2) \phi_1$ . Ce flux réfléchi (de même d'ailleurs que  $\phi_2$  émis par  $S_2$ ) n'est pas entièrement dirigé sur  $S_1$ . Une fraction, que nous désignons par  $F_{21} \cdot (1-\varepsilon_1) \phi_1$  atteint effectivement  $S_1$ .

Le reste  $(1-F_{21}) \cdot (1-\varepsilon_2) \phi_1$  atteint  $S_2$ , qui rayonne ainsi partiellement sur elle-même. Le schéma ci-dessous résume les réflexions et les absorptions successives de  $\phi_1$ .



En examinant les absorptions de  $S_1$  et  $S_2$ , on voit que le formalisme est le même que pour les plans en regard à condition de remplacer  $\varepsilon_1$  par  $F_{21} \cdot \varepsilon_1$ . D'où le flux net

$$\phi_{net} = \frac{\varepsilon_2 \phi_1 - F_{21} \varepsilon_1 \phi_2}{F_{21} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - F_{21} \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2}$$

On peut expliciter  $\phi_1$  et  $\phi_2$  comme pour les plans, en prenant garde cette fois que  $S_1$  et  $S_2$  ne sont plus égales ; on trouve :

$$\phi_{net} = \sigma \varepsilon_2 \varepsilon_1 \frac{S_1 T_1^4 - F_{21} S_2 T_2^4}{F_{21} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - F_{21} \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2}$$

A l'équilibre (c'est-à-dire pour des températures égales), le flux net transmis est forcément nul, d'où il résulte que  $F_{21}$  doit être égal à  $S_1/S_2$ . Tous calculs faits :

#### Sphères grises concentriques

$$\phi_{net} = r_1 \cdot \sigma \cdot S_1 \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

Avec

$$\frac{1}{r_1} = \frac{S_1}{S_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{S_2}{S_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)$$

#### Remarque

On aurait pu calculer  $F_{21}$  directement par des considérations purement géométriques, puisque le flux des corps gris (émis ou réfléchi) suit la loi de Lambert.

#### Cas particuliers

Si la **surface extérieure est noire** ( $\varepsilon_2 = 1$ ), le flux net vaut :

$$\phi_{net} = \varepsilon_1 \cdot \sigma \cdot S_1 \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

Si la **surface extérieure**, sans être noire, est **de grandes dimensions** par rapport à  $S_1$ , on voit que  $r_1$  se réduit à  $\varepsilon_1$  et on retrouve encore la formule :

$$\phi_{net} = \varepsilon_1 \cdot \sigma \cdot S_1 \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

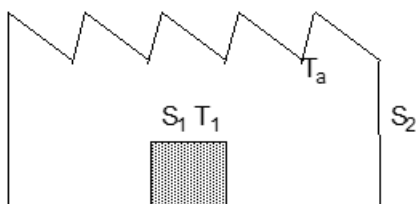
#### Extensions

Le raisonnement concernant les sphères est encore valable si  $S_1$  et  $S_2$  ne sont pas sphériques, pourvu que  $S_2$  enveloppe complètement  $S_1$  et que  $S_1$  soit **convexe**.

Si  $S_1$  est **quelconque, même non convexe**, et si  $S_2$  est **éloignée**, on peut remplacer  $S_1$  par une série de surfaces tangentes, de manière à obtenir un domaine convexe, en vertu des remarques faites sur la signification de la loi de Lambert.

#### Exemple 1

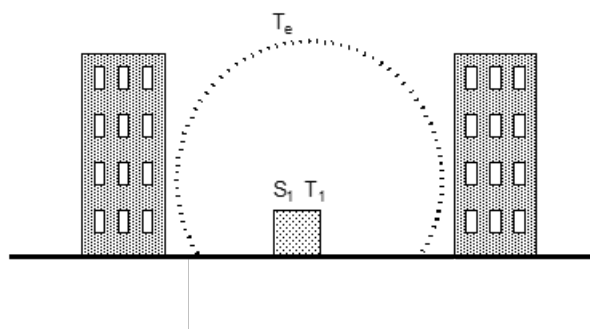
$S_1$  est la paroi externe d'un four ;  $S_2$  est constituée par les murs, vitrages et toitures de l'atelier.



La température  $T_2$  est alors pratiquement égale à la température ambiante  $T_a$  de l'atelier. Si les dimensions de l'atelier sont grandes vis-à-vis de celles du four, (ou si  $S_2$  peut être assimilée à une surface noire), le flux net perdu par la paroi externe du four est :

$$\phi_{net} = \varepsilon_1 \cdot \sigma \cdot S_1 \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

#### Exemple 2



$S_1$  est un corps isolé au voisinage du sol ; la surface  $S_2$  est alors constituée par le sol, les façades, les masques divers (arbres...) et les nuages. Si ces derniers sont bas, on peut admettre que  $T_2$  est uniformément égale à la température extérieure  $T_e$ . Le flux net rayonné par  $S_1$  est alors :

$$\phi_{net} = \varepsilon_1 \cdot \sigma \cdot S_1 \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

Par temps clair, une grande partie de l'émission de  $S_l$  se fait vers le ciel clair à une température d'émission<sup>27</sup> très inférieure à la température extérieure (d'une quarantaine de degrés). Le phénomène est d'autant plus accusé que l'humidité de l'air est faible (car l'oxygène et l'azote sont parfaitement transparents et seule la vapeur d'eau pourrait absorber les rayons émis par  $S_l$  et donc en réémettre).

Alors, un corps au voisinage du sol, ou le sol lui-même, peut échanger vers la voûte céleste un flux non négligeable. Ainsi s'explique la formation de givre ou de gelées blanches par nuits très claires, même si la température ambiante dépasse 0°C.

De même, après une nuit claire et même par des températures nettement positives, on peut observer la formation d'une couche de glace sur les vitres des voitures. On remarque aussi que cette couche est bien plus épaisse sur le pare-brise que sur les vitres latérales. Compte tenu du fait que le facteur de forme caractérisant l'échange entre la vitre et le ciel est plus faible pour les vitres latérales que pour le pare-brise, celui-ci subit donc un refroidissement plus important. En effet, les autres surfaces vues (sol, immeubles, etc ...) sont plus proches de la température de l'air.

---

<sup>27</sup> On définit une température d'émittance, ou de "corps noir" de la voûte céleste. Cette température, d'ailleurs très difficile à mesurer, dépend de l'humidité de l'air, de l'altitude des nuages et de leur constitution (gouttelettes ou cristaux), etc... Par une nuit très claire et atmosphère sèche, elle peut descendre à des valeurs de l'ordre de -20 à -40°C.

## ANNEXE 7 : DONNEES THERMOPHYSIQUES

<b>TABLEAU 1 - Propriétés des métaux à 20 °C</b>					
	<b>Masse atomique g/mole</b>	<b><math>\rho</math> kg/m<sup>3</sup></b>	<b><math>C_p</math> kJ.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup></b>	<b><math>\lambda</math> W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup></b>	<b><math>a</math> 10<sup>-4</sup>m<sup>2</sup>s<sup>-1</sup></b>
<b>Aluminium</b>	<b>26.97</b>	<b>2707</b>	<b>0.896</b>	<b>204</b>	<b>0.84</b>
Duralumin (95 % Al, 5 % Cu)		2787	0.883	164	0.67
Silumin (86.5 % Al, 5 % Cu)		2659	0.867	137	0.59
Alusil (80 % Al, 20 % Si)		2627	0.854	161	0.72
<b>Argent</b>	<b>107.88</b>	<b>10524</b>	<b>0.234</b>	<b>419</b>	<b>1.70</b>
<b>Chrome</b>	<b>52.01</b>	<b>7188</b>	<b>0.22</b>	<b>89</b>	<b>0.56</b>
<b>Cobalt</b>	<b>58.94</b>	<b>8900</b>	<b>0.419</b>	<b>69.8</b>	<b>0.19</b>
<b>Cuivre</b>	<b>63.57</b>	<b>8954</b>	<b>0.383</b>	<b>386</b>	<b>1.13</b>
Aluminium Bronze (95 % Cu, 5 % Al)		8666	0.41	83	0.23
Bronze (75 % Cu, 25 % Sn)		8666	0.343	26	0.09
Cuivre rouge (85 % Cu, 9 % Sn, 6 % Zn)		8714	0.385	61	0.18
Laiton (70 % Cu, 30 % Zn)		8522	0.385	111	0.34
Constantan (60 % Cu, 40 % Ni)		8922	0.41	22.7	0.06
<b>Etain</b>	<b>118.7</b>	<b>7300</b>	<b>0.227</b>	<b>64.7</b>	<b>0.39</b>
<b>Fer</b>	<b>55.86</b>	<b>7897</b>	<b>0.452</b>	<b>73</b>	<b>0.20</b>
Fonte		7400	0.569	56	0.13
Acier (0.5 % C)		7833	0.465	54	0.15
Acier (1 % C)		7801	0.473	43	0.12
Acier (1.5 % C)		7753	0.486	36	0.10
Invar (36 % Ni)		8137	0.46	10.7	0.03
Acier chromé (1 % Cr)		7865	0.46	61	0.17
Acier chromé (5 % Cr)		7833	0.46	40	0.11
Acier chromé (20 % Cr)		7689	0.46	22	0.06
Acier Chrome Nickel (15 % Cr, 10 % Ni)		7865	0.46	19	0.05
Acier Chrome Nickel (18 % Cr, 8 % Ni)		7817	0.46	16.3	0.05
Acier Chrome Nickel (20 % Cr, 15 % Ni)		7833	0.46	15.1	0.04
Acier Chrome Nickel (25 % Cr, 20 % Ni)		7865	0.46	12.8	0.04
Acier au Tungstène (1 % W)		7913	0.448	66	0.19
Acier au Tungstène (5 % W)		8073	0.435	54	0.15
Acier au Tungstène (10 % W)		8314	0.419	48	0.14
<b>Magnesium</b>	<b>24.32</b>	<b>1746</b>	<b>1.013</b>	<b>171</b>	<b>0.97</b>
<b>Manganèse</b>	<b>54.93</b>	<b>7200</b>	<b>0.45</b>	<b>50.2</b>	<b>0.16</b>
<b>Mercure</b>	<b>200.61</b>	<b>13600</b>	<b>0.14</b>	<b>9.3</b>	<b>0.05</b>
<b>Molybdène</b>	<b>95.95</b>	<b>10220</b>	<b>0.251</b>	<b>123</b>	<b>0.48</b>
<b>Nickel</b>	<b>58.69</b>	<b>8906</b>	<b>0.446</b>	<b>90</b>	<b>0.23</b>
Nickel Chrome (10 % Cr)		8666	0.444	17	0.04
Nickel Chrome (20 % Cr)		8314	0.444	12.6	0.03
Or	197.2	19300	0.128	310.5	1.26
Platine	195.23	21450	0.132	70.3	0.25
Plomb	207.21	11373	0.13	35	0.24
Sodium	22.997	945	1.244	138	1.17
Titane	47.9	4500	0.52		
Tungstène	183.02	19350	0.134	163	0.63
Zinc	65.38	7144	0.384	112.2	0.41

TABLEAU 2 - Propriétés des matériaux à 20 °C				
	$\rho$ kg.m <sup>-3</sup>	$c_p$ kJ.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>	$\lambda$ W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>	$a$ 10 <sup>-5</sup> m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>
Air	1.177	1.006	0.0262	2.21
Hydrogène	0.0819	14.32	0.182	1.55
Oxygène	1.301	0.9203	0.0267	2.23
Azote	1.142	1.041	0.0262	2.20
CO <sub>2</sub>	1.797	0.8709	0.0166	1.06
Eau	1001	4.182	0.597	0.014
Ethylène Glycol	1117	2.382	0.249	0.009
Huile minérale	888	1.88	0.145	0.009
Fioul Oil Domestique	840	2.01	0.134	0.008
Béton	2300	0.96	0.92	0.042
Granit	2600	0.87	2.5	0.111
Plâtre	1000	1.34	0.465	0.035
Verre	2530	0.84	1.2	0.056
Bois	410	1.25	0.23	0.045
Isolants				
Polystyrène expansé GM	29	1.38	0.036	0.090
Polystyrène extrudé	30	1.38	0.036	0.087
Laine de verre classe VA1	8	0.84	0.047	0.699
Liège	150	2.01	0.055	0.018
Polyuréthane AD	35	0.837	0.03	0.102
Perlite	112		0.0418	
Vermiculite	144		0.0677	
Aérogel de silice	80		0.0303	
Isolants sous vide <sup>28</sup>				
Mylar aluminisé (55 couches/cm)	50		0.000042	
Aluminium + séparateur (24 couches/cm)	80		0.000036	

<sup>28</sup> Il s'agit d'une conductivité équivalente, ces isolants agissant comme des écrans radiatifs

<b>TABLEAU 3 - Conductivité [W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>] de métaux en fonction de la température</b>												
<b>T (°C)</b>	<b>- 190</b>	<b>- 100</b>	<b>0</b>	<b>100</b>	<b>200</b>	<b>300</b>	<b>400</b>	<b>500</b>	<b>600</b>	<b>800</b>	<b>1000</b>	<b>1200</b>
<b>Aluminium</b>	225.9	215	202	206	215	228	249			125.6		
Duralumin (95 % Al, 5 % Cu)		126	159	182	194							
Silumin (86.5 % Al, 5 % Cu)		119	137	144	152	161						
Alusil (80 % Al, 20 % Si)		144	157	168	175	178						
<b>Argent</b>		425.7	419	417	415	412	407					
<b>Cuivre</b>		407	386	379	374	369	363		353			
Cuivre rouge (85 % Cu, 9 % Sn, 6 % Zn)			59	71								
Laiton (70 % Cu, 30 % Zn)		88		128	144	147	147					
Constantan (60 % Cu, 40 % Ni)		21	22.2	26								
<b>Etain</b>		74.4	66.1	59.3	57							
<b>Fer</b>		87	73	67	62	55	48		40	36	35	36
Acier (0.5 % C)			55	52	48	45	42		35	31	29	31
Acier (1 % C)		43	43	43	42	40	36		33	29	28	29
Acier (1.5 % C)			36	36	36	35	33		31	28	28	29
Acier chromé (1 % Cr)			62	55	52	47	42		36	33	33	
Acier chromé (5 % Cr)			40	38	36	36	33		29	29	29	
Acier chromé (20 % Cr)			22	22	22	22	24		24	26	29	
Acier Chrome Nickel (18 % Cr, 8 % Ni)				16.3	17	17	19	19		22	27	31
Inconel		14	17	20	22	25	27	29	34			
<b>Magnesium</b>		178	171	168	163	157						
<b>Mercure</b>	48.8	36	9	10.4	12.4	14						
<b>Molybdène</b>		138	125	118	114	111	109		106	102	99	92
<b>Nickel</b>		104	93	83	73	64	59					
Nickel Chrome (10 % Cr)			17.1	18.9	20.9	22.8	24.6					
Nickel Chrome (20 % Cr)			12.3	13.8	15.6	17.1	18		22.5			
<b>Or</b>	328		310.5	310.5		304.7						
<b>Platine</b>	77.9		70	71.4		75.6		79.1			89.55	
<b>Plomb</b>	40.7	36.9	35.1	33.4	31.5	29.8		16.7				
<b>Potassium</b>					44.1	42	39.4	37.2	34.9	32.5		
<b>Sodium</b>			154.7	100	84.8	79.6	75.7	71.2	66.8	62.7	59	
<b>Tungstène</b>	217.48		166	151	142	133	126	119.5	112	76	98.85	
<b>Zinc</b>		114	112	109	106	100	93					

**TABLEAU 4 - Conductivité [W.m<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup>] de gaz en fonction de la température**

T (K)	Air (p atm)	Hélium (p atm)	Hydrogène (p atm)	Oxygène (p atm)	Azote (p atm)	CO <sub>2</sub> (p atm)	Vap. Eau (1 atm)	Vap. eau (10 atm)
100		0.0736	0.0676					
200		0.118	0.128					
300	0.0261	0.115	0.182	0.0267	0.0262	0.0166		
400	0.033	0.189	0.229	0.0346	0.0333	0.0246		
500	0.0395	0.221	0.257	0.0417	0.0398	0.0328	0.0261	0.0356
600	0.0456	0.251	0.291	0.0483	0.0458	0.0403	0.0339	0.043
700	0.0514	0.28	0.325	0.0544	0.0512	0.0487	0.0422	
800	0.057	0.307	0.36	0.0603	0.0561	0.056	0.0505	0.059
900	0.0623	0.334	0.394	0.0661	0.0607	0.0621	0.0592	
1000	0.0672	0.36	0.428	0.0717	0.0648	0.068		
1100	0.0723	0.385	0.462	0.0771	0.0685	0.0733		
1200	0.0763	0.41	0.495	0.0821	0.0719	0.078		
1300	0.0837	0.434	0.528	0.0871	0.0754	0.0825		

On peut utiliser la formule de Sutherland :  $\lambda = \lambda_0 \cdot \frac{1 + C/T_0}{1 + C/T} \sqrt{\frac{T}{T_0}}$   $\lambda_0$  étant la conductivité à 273 K

C	Air	N <sub>2</sub>	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	H <sub>2</sub>	CH <sub>4</sub>	O <sub>2</sub>
	119	113	226	72	198	138

**TABLEAU 5 - Propriétés de quelques gaz à 25°C et à pression atmosphérique**

	c <sub>p</sub> [kJ.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]	μ [kg.m <sup>-1</sup> .s <sup>-1</sup> ]	λ [W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]	ρ [kg.m <sup>-3</sup> ]	Prandtl c <sub>p</sub> .μ/λ
Ammoniac NH <sub>3</sub>	2,175	1.10 <sup>-5</sup>	0,026	0,7	0,84
Dioxyde de Carbone CO <sub>2</sub>	0,876	1,4.10 <sup>-5</sup>	0,017	1,82	0,72
Méthane CH <sub>4</sub>	2,26	1,1.10 <sup>-5</sup>	0,035	0,66	0,71
Ethane C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	1,715	9,5.10 <sup>-5</sup>	0,017	1,23	9,58
Propane C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	1,63	8.10 <sup>-5</sup>	0,017	1,81	7,67
n Butane C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	1,675	0,7.10 <sup>-5</sup>	0,017	2,47	0,69
R22 CHCl <sub>2</sub> F	0,657	1,3.10 <sup>-5</sup>	0,012	3,69	0,71

**TABLEAU 6 - Propriétés de l'air à pression atmosphérique***(selon logiciel EES version 4.95)*

T en [K]	$c_p$ [kJ.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]	$\mu$ [kg.m <sup>-1</sup> .s <sup>-1</sup> ]	$\lambda$ [W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	Prandtl $c_p \mu / \lambda$
250	1,005	1,61 10 <sup>-5</sup>	0,02228	1,412	0,73
300	1,007	1,85 10 <sup>-5</sup>	0,02607	1,177	0,71
350	1,008	2,08 10 <sup>-5</sup>	0,02964	1,009	0,71
400	1,012	2,29 10 <sup>-5</sup>	0,03304	0,8825	0,70
450	1,019	2,49 10 <sup>-5</sup>	0,03631	0,7845	0,70
500	1,028	2,68 10 <sup>-5</sup>	0,03948	0,706	0,70
550	1,039	2,86 10 <sup>-5</sup>	0,04256	0,6418	0,70
600	1,051	3,03 10 <sup>-5</sup>	0,04557	0,5884	0,70
650	1,063	3,19 10 <sup>-5</sup>	0,04851	0,5431	0,70
700	1,075	3,35 10 <sup>-5</sup>	0,0514	0,5043	0,70
750	1,087	3,50 10 <sup>-5</sup>	0,05422	0,4707	0,70
800	1,099	3,64 10 <sup>-5</sup>	0,05698	0,4413	0,70
850	1,11	3,78 10 <sup>-5</sup>	0,05966	0,4153	0,70
900	1,121	3,92 10 <sup>-5</sup>	0,06227	0,3922	0,71
950	1,131	4,05 10 <sup>-5</sup>	0,06478	0,3716	0,71
1000	1,14	4,18 10 <sup>-5</sup>	0,06721	0,353	0,71

**TABLEAU 7 - Propriétés de la vapeur d'eau à pression atmosphérique***(selon logiciel EES version 4.95)*

T en [K]	$c_p$ [kJ.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]	$\mu$ [kg.m <sup>-1</sup> .s <sup>-1</sup> ]	$\lambda$ [W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	Prandtl $c_p \mu / \lambda$
350	1,88	1,12 10 <sup>-5</sup>	0,02297	0,6273	0,92
400	1,898	1,32 10 <sup>-5</sup>	0,02637	0,5489	0,95
450	1,922	1,51 10 <sup>-5</sup>	0,02999	0,4879	0,97
500	1,95	1,70 10 <sup>-5</sup>	0,03384	0,4391	0,98
550	1,982	1,89 10 <sup>-5</sup>	0,0379	0,3992	0,99
600	2,015	2,07 10 <sup>-5</sup>	0,04219	0,3659	0,99
650	2,049	2,24 10 <sup>-5</sup>	0,04671	0,3378	0,98
700	2,085	2,41 10 <sup>-5</sup>	0,05144	0,3137	0,98



**TABLEAU 8 - Propriétés de l'eau liquide à saturation***(selon logiciel EES version 4.95)*

T	$c_p$	$\mu$	$\lambda$	$\rho$	$p_{\text{sat}}$	Prandtl
°C	$\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$	$\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$	$\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$	$\text{kg/m}^3$	bar	$c_p.\mu/\lambda$
0	4,217	$1,77 \cdot 10^{-3}$	0,5672	1005	0,00612	13,16
10	4,192	$1,30 \cdot 10^{-3}$	0,583	1003	0,01228	9,35
20	4,18	$1,00 \cdot 10^{-3}$	0,5998	999,6	0,02337	6,97
30	4,175	$7,97 \cdot 10^{-4}$	0,616	996,2	0,04241	5,40
40	4,174	$6,53 \cdot 10^{-4}$	0,6308	992,4	0,07372	4,32
50	4,177	$5,47 \cdot 10^{-4}$	0,6436	988,1	0,1233	3,55
60	4,181	$4,67 \cdot 10^{-4}$	0,6544	983,3	0,1991	2,98
70	4,187	$4,04 \cdot 10^{-4}$	0,6632	977,9	0,3115	2,55
80	4,195	$3,55 \cdot 10^{-4}$	0,6702	972	0,4734	2,22
90	4,203	$3,15 \cdot 10^{-4}$	0,6755	965,5	0,7008	1,96
100	4,214	$2,82 \cdot 10^{-4}$	0,6793	958,5	1,013	1,75
110	4,226	$2,55 \cdot 10^{-4}$	0,6818	951,1	1,432	1,58
120	4,24	$2,32 \cdot 10^{-4}$	0,6832	943,1	1,985	1,44
130	4,257	$2,13 \cdot 10^{-4}$	0,6836	934,8	2,701	1,33
140	4,277	$1,97 \cdot 10^{-4}$	0,6831	926	3,613	1,23
150	4,301	$1,82 \cdot 10^{-4}$	0,6818	916,8	4,758	1,15

**TABLEAU 9 - Propriétés de la vapeur à saturation***(selon logiciel EES version 4.95)*

T	$c_p$	$\mu$	$\lambda$	$\rho$	Prandtl
°C	$\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$	$\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$	$\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$	$\text{kg/m}^3$	$c_p.\mu/\lambda$
10	1,875	$9,46 \cdot 10^{-6}$	0,0176	0,0094	1,01
20	1,884	$9,73 \cdot 10^{-6}$	0,0182	0,0173	1,01
30	1,896	$1,00 \cdot 10^{-5}$	0,0189	0,0303	1,01
40	1,91	$1,03 \cdot 10^{-5}$	0,0196	0,0511	1,01
50	1,928	$1,06 \cdot 10^{-5}$	0,0204	0,0829	1,01
60	1,949	$1,09 \cdot 10^{-5}$	0,0212	0,1301	1,01
70	1,974	$1,13 \cdot 10^{-5}$	0,0221	0,1979	1,01
80	2,003	$1,16 \cdot 10^{-5}$	0,0230	0,2930	1,01
90	2,037	$1,19 \cdot 10^{-5}$	0,0240	0,4230	1,01
100	2,077	$1,23 \cdot 10^{-5}$	0,0251	0,5971	1,02
110	2,122	$1,26 \cdot 10^{-5}$	0,0262	0,8256	1,02
120	2,173	$1,30 \cdot 10^{-5}$	0,0275	1,1210	1,03
130	2,231	$1,33 \cdot 10^{-5}$	0,0288	1,4950	1,03
140	2,297	$1,37 \cdot 10^{-5}$	0,0301	1,9650	1,04