

Chapitre 23

Efforts volumiques : gravitation et électromagnétisme

23.1 Dimensionnement d'un barrage-poids

On se propose d'étudier, dans l'hypothèse des petites perturbations, l'équilibre d'un barrage constitué d'un matériau élastique, homogène et isotrope¹. Plusieurs critères de dimensionnement seront envisagés pour aboutir finalement à une optimisation des caractéristiques du barrage.

La géométrie de cette structure est décrite sur les figures 23.1 et 23.2. Il s'agit d'un barrage poids² de forme prismatique de génératrice parallèle à la direction 3. Le repérage est cartésien orthonormé. La direction X_1 est la verticale orientée vers le bas dans le sens de la gravité. Les subsections, perpendiculaires à l'axe X_3 , sont toutes équivalentes et la figure 23.1 montre la subsection centrale à la cote $X_3 = 0$, avec le repère de la figure 23.2. Le barrage est de hauteur H et de longueur L . La forme triangulaire de la subsection est caractérisée par les angles α et β , choisis positifs. A toutes fins utiles, on notera :

$$u = \tan \alpha, \quad v = \tan \beta$$

Le chargement est associé aux deux facteurs suivants : d'une part, la pesanteur propre s'exerçant sur le matériau constitutif de masse volumique ρ ; d'autre part, l'effet de pression dû à la mise en eau (masse volumique ρ_{eau}) jusqu'à affleurement. La pression atmosphérique agissant sur le parement aval est, quant à elle, négligée. L'état initial (hors pesanteur !) est naturel et l'évolution isotherme.

On ne prendra pas en compte les effets des écoulements internes de l'eau par infiltration dans les interstices du barrage, sauf mention du contraire³.

On considère un encastrement à la base du barrage (fondation), correspondant à des déplacements donnés nuls en $X_1 = H$. On suppose également qu'en raison de la raideur importante des blocs rocheux latéraux sur lesquels s'appuie le barrage, et de la longueur L suffisamment grande par rapport à H , les faces $X_3 = \pm L/2$ ne subissent aucun déplacement latéral $u_3 = 0$. Cette condition nous place dans le contexte des déformations planes, c'est-à-dire que la condition $u_3 = 0$ s'étend à tous les points du barrage et que les champs de contraintes et de déformations ne dépendent pas de X_3 .

Pour les applications numériques demandées dans le problème, on considérera que le barrage est en béton renforcé de comportement élastique linéarisé, avec un module de Young, $E = 50 \text{ GPa}$, un coefficient de Poisson, $\nu = 0.2$ et une masse volumique $\rho = 2500 \text{ kg.m}^{-3}$. De plus $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$. Enfin, l'accélération de la pesanteur est supposée constante égale à $g = 9.8 \text{ m.s}^{-2}$.

On prendra la hauteur $H = 100 \text{ m}$.

1. Ce problème est largement inspiré de l'examen posé par M. Amestoy en 1991, cf. (Amestoy, 2004) qui met en valeur la condition de (Lévy, 1895). On trouvera également une discussion de ce calcul de barrage chez (Bellet, 1990).

2. par opposition aux barrages voûtes dont la forme n'est pas prismatique.

3. Leur modélisation représente une difficulté majeure dans le calcul des barrages poids. Cette mécanique des milieux poreux n'est pas abordée dans ce problème.

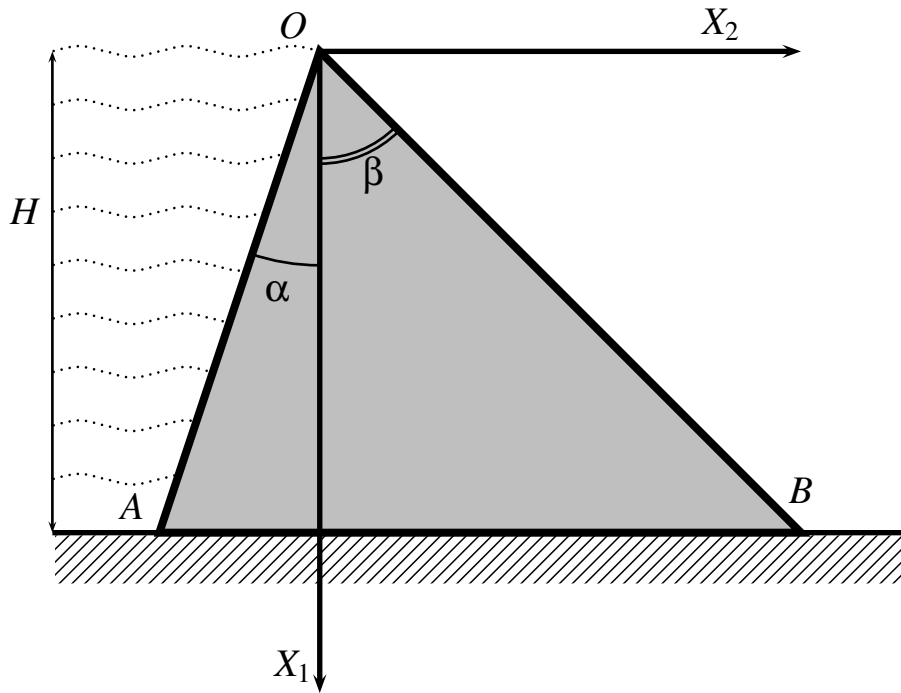


FIGURE 23.1 – Coupe bidimensionnelle du barrage poids étudié. Le parement amont (resp. aval) désigne la partie OA (resp. OB) du barrage. Les lignes pointillées ondulées représentent l'eau du barrage. La hauteur du barrage est H .

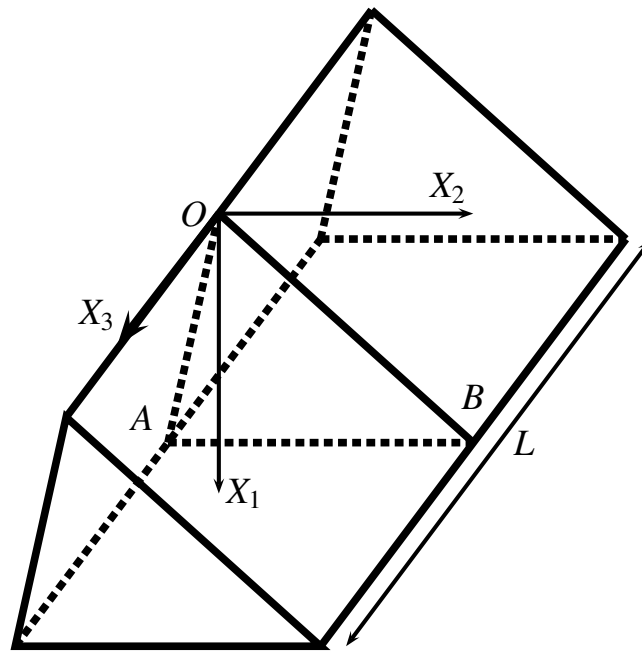


FIGURE 23.2 – Le barrage en perspective cavalière : repère (X_1, X_2, X_3) , subsection OAB en $X_3 = 0$. La longueur du barrage est L .

23.1.1 Critère de non glissement du barrage

Le barrage poids transmet la poussée de l'eau à la fondation par cisaillement de celle-ci, principalement par frottement. Le poids de l'ouvrage doit être suffisant pour assurer le non glissement du barrage sur sa fondation. Cette condition représente une vérification fondamentale à effectuer : le

glissement sur la fondation est la première cause de rupture des barrages poids.

Calculer la résultante des forces agissant sur le parement amont.

Calculer le poids du barrage.

Calculer la force tangentielle résultante s'exerçant sur la fondation.

Exprimer la condition de non glissement en faisant intervenir le coefficient de frottement de Coulomb. Il est question ici de la condition globale portant sur les résultantes des efforts. Une étude du glissement local n'est pas envisagée dans ce problème.

Les résultats seront donnés en fonction des paramètres géométriques du barrage et de l'accélération de la pesanteur.

Lorsque $\alpha = 0$, en déduire une condition sur v . Evaluer cette condition pour un coefficient de frottement égal à 0.8.

La résultante des efforts sur le parement amont est le vecteur :

$$\underline{\mathbf{R}}_{OA} = \int -p \underline{\mathbf{n}} dS = \int p(u \underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2) dX_1 dX_3$$

avec $p = \rho_{\text{eau}} g X_1$. Finalement, $\underline{\mathbf{R}}_{OA} = \rho_{\text{eau}} g L \frac{H^2}{2} (u \underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2)$.

Le poids du barrage est

$$\underline{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \rho g H^2 (u + v) L \underline{\mathbf{e}}_1$$

La force tangentielle exercée par le barrage sur la fondation est donc donnée par la composante selon la direction 2 de $\underline{\mathbf{R}}_{OA}$:

$$T = \rho_{\text{eau}} g L \frac{H^2}{2}$$

La condition de non glissement est

$$T < \mathcal{C} P \quad \implies \quad \frac{\rho_{\text{eau}}}{\rho(u + v) + \rho_{\text{eau}} u} < \mathcal{C}$$

où \mathcal{C} est le coefficient de frottement de Coulomb.

Si $u = 0$, l'angle β doit être suffisamment grand :

$$v > \frac{\rho_{\text{eau}}}{\mathcal{C} \rho}$$

L'angle minimal obtenu pour $\mathcal{C} = 0.8$ est $\beta = 27^\circ$.

23.1.2 Etude du barrage dans le cas $\alpha = 0$

Cette partie du problème est consacrée au cas d'un parement amont vertical : $\alpha = u = 0$.

Conditions aux limites exhaustives

Donner explicitement l'ensemble des conditions aux limites du problème posé sur la subsection plane OAB.

Par ailleurs, on commentera également les conditions sur les faces $X_3 = \pm L/2$.

Le problème est posé en conditions mixtes d'efforts et déplacements donnés :

- Sur OA, $\underline{\mathbf{t}} = \underline{\mathbf{t}}^d = -p \underline{\mathbf{n}} = \rho_{\text{eau}} g X_1 \underline{\mathbf{e}}_2$.
- Sur OB, $\underline{\mathbf{t}} = \underline{\mathbf{t}}^d = 0$.
- Sur AB, $u_1 = u_2 = u_3 = 0$.

Les conditions en $X_3 = \pm L/2$ ne sont pas toutes explicitées. On a $u_3 = 0$ mais rien n'est dit pour les deux autres directions. Comme la longueur du barrage est prise suffisamment grande par rapport à sa hauteur, on peut appliquer le principe de Saint-Venant et se contenter d'indiquer le torseur des efforts selon ces deux directions. On peut en particulier négliger les résultantes des forces selon 1 et 2 engendrées par l'interaction avec les blocs rocheux latéraux. Ces forces induiront un effet de bord aux extrémités du barrage.

Conditions d'équilibre local

Exprimer les conditions d'équilibre en tout point intérieur de la subsection OAB en fonction des composantes du tenseur des contraintes.

Il s'agit de la première loi de Cauchy exprimée en coordonnées cartésiennes dans le cas statique et en présence d'efforts de pesanteur :

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} + \rho g = 0, \quad \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = 0, \quad \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} = 0 \quad (23.1)$$

Forme proposée pour les contraintes

Dans le contexte des déformations planes, les composantes de contraintes recherchées sont

$$\underline{\sigma} = \sigma_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_{22} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sigma_{12} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) + \sigma_{33} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (23.2)$$

où l'on a introduit les vecteurs de la base cartésienne orthonormée utilisée.

Ces composantes de contraintes sont recherchées de la forme suivante :

$$\sigma_{11} = aX_1 + bX_2 \quad (23.3)$$

$$\sigma_{12} = cX_1 + dX_2 \quad (23.4)$$

$$\sigma_{22} = eX_1 + fX_2 \quad (23.5)$$

$$\sigma_{33} = h(X_1, X_2) \quad (23.6)$$

où les 6 constantes a, b, c, d, e, f caractérisant les profils linéaires recherchés ont été introduites, ainsi que la fonction h de deux variables.

Ecrire les conditions d'équilibre local en fonction de ces constantes.

Ecrire les conditions supplémentaires portant sur ces constantes et résultant de l'application des conditions aux limites sur OA et OB.

Résoudre enfin le système linéaire par rapport à a, b, c, d, e, f .

Constater que les contraintes σ_{11}, σ_{12} et σ_{22} trouvées ne dépendent pas des propriétés élastiques du matériau constitutif du barrage.

Les deux premières conditions d'équilibre local fournissent :

$$a + d = -\rho g, \quad c + f = 0$$

Les conditions aux limites sur OA, i.e. pour $X_2 = 0$, fournissent, quant à elles :

$$c = 0, \quad e = -\rho_{\text{eau}} g$$

Les conditions sur OB, i.e. pour $X_2 = vX_1$, donnent

$$-\sigma_{11} \sin \beta + \sigma_{12} \cos \beta = 0, \quad -\sigma_{12} \sin \beta + \sigma_{22} \cos \beta = 0 \quad (23.7)$$

Elles deviennent :

$$a + bv - d = 0, \quad -dv^2 + e = 0$$

Finalement, on obtient :

$$a = -\rho g + \rho_{\text{eau}} g v^{-2}, \quad b = \rho g v^{-1} - 2\rho_{\text{eau}} g v^{-3}, \quad c = 0$$

$$d = -\rho_{\text{eau}} g v^{-2}, \quad e = -\rho_{\text{eau}} g, \quad f = 0$$

Ces calculs montrent que l'analyse statique du problème du barrage suffit à déterminer entièrement les contraintes qui s'y établissent. Il faut toutefois terminer la résolution du problème avant de statuer sur la pertinence de la forme proposée.

Calculer finalement σ_{33}

Il faut pour cela utiliser la loi de Hooke et la condition de déformation plane :

$$\varepsilon_{33} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{33} - \frac{\nu}{E}\text{trace } \boldsymbol{\sigma} = 0$$

On en déduit

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \nu((a+e)X_1 + (b+f)X_2) \quad (23.8)$$

Calcul des déformations

Calculer les composantes des déformations au sein du barrage engendrées par le champ de contraintes précédemment déterminées.

S'agit-il d'un champ de déformations compatible ?

Les composantes de déformation sont également linéaires par rapport aux coordonnées X_1 et X_2 , en vertu de la loi de Hooke :

$$\varepsilon_{11} = AX_1 + BX_2, \quad \varepsilon_{12} = DX_2, \quad \varepsilon_{22} = FX_1 + GX_2 \quad (23.9)$$

avec

$$A = \frac{(1-\nu^2)a - \nu(1+\nu)e}{E}, \quad B = \frac{(1-\nu^2)b}{E}, \quad D = \frac{1+\nu}{E}d$$

$$F = \frac{(1-\nu^2)e - \nu(1+\nu)a}{E}, \quad G = -\frac{\nu(1+\nu)b}{E}$$

La linéarité du champ assure que les conditions de compatibilité sont toutes satisfaites.

Champ de déplacements

Déterminer les composantes du champ de déplacements.

On ne cherchera pas à ce stade à identifier les constantes d'intégration.

On construit le champ de déplacement par la méthode systématique disponible dans le contexte cartésien orthonormé. On commence par déterminer les rotations infinitésimales en intégrant la relation $\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i}$. On trouve :

$$\omega_{12} = BX_1 + (D+F)X_2, \quad \omega_{23} = \omega_{31} = 0$$

auxquelles il faut ajouter des rotations infinitésimales de corps rigide.

Le déplacement s'obtient alors en intégrant $u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$:

$$u_1 = \frac{A}{2}X_1^2 + BX_1X_2 + \frac{1}{2}(2D-F)X_2^2, \quad u_2 = -\frac{B}{2}X_1^2 + FX_1X_2 + \frac{G}{2}X_2^2 \quad (23.10)$$

auxquels s'ajoutent les translations et rotations infinitésimales de corps rigide.

Respect du contexte infinitésimal

En examinant successivement les composantes ε_{12} et ε_{11} , établir deux conditions nécessaires au respect du contexte infinitésimal en fonction des caractéristiques du barrage.

On vérifiera que ces conditions sont remplies avec les valeurs considérées dans le problème.

On doit garantir que

$$|\varepsilon_{12}| = |DX_2| \leq |DHv| = \frac{1+\nu}{E}|d|Hv = \left| \frac{1+\nu}{E}\rho_{\text{eau}}g\frac{H}{v} \right| \ll 1$$

qui fournit la condition nécessaire :

$$\rho_{\text{eau}} g \frac{H}{v} \ll \frac{2E}{3}$$

Cette relation indique que le barrage ne doit pas être trop haut à cause de la pression exercée par l'eau, et pas trop mince bien entendu. La condition $v \gg 3\rho_{\text{eau}} g H / 2E \simeq 3 \times 10^{-5}$ est largement garantie même avec des valeurs très petites de β .

On considère ensuite $|\varepsilon_{11}| = |AX_1 + BX_2| \leq (|A| + |Bv|)H$. En majorant généreusement chacun des termes, on obtient la condition :

$$\frac{(\rho g - 2\rho_{\text{eau}} g / v^2)H}{E} \ll 1$$

qui exige que le poids du barrage soit suffisant. Ce terme est de l'ordre de 10^{-5} pour un angle β de 40° .

Qualité de la solution approchée

Montrer finalement que le champ de déplacement trouvé n'est pas acceptable.

Les contraintes et déformations trouvées représentent toutefois une bonne approximation de la solution du problème. Pour le voir, des calculs par éléments finis ont été réalisés pour obtenir une solution numérique du problème aussi précise qu'on le souhaite, pour des caractéristiques particulières du barrage.

Commenter les cartes de contraintes de la figure 23.3.

Les contraintes, déformations et déplacements sont tracés le long des lignes des parements amont et aval sur la figure 23.4. Discuter la qualité de la solution approchée du problème du barrage construite précédemment.

Pour identifier complètement le champ des déplacements, il reste à vérifier les conditions d'encastrement en $X_1 = H$. C'est là que le bât blesse. En effet, s'il est possible de fixer la translation de corps rigide de telle sorte que le déplacement du point A soit nul, les rotations infinitésimales de corps rigide ne permettent pas d'annuler les termes quadratiques des expressions (23.10) tout le long de la ligne $X_1 = H$. C'est une profonde déception. Toutefois, il s'avère que la solution trouvée est de bonne qualité. Le principe de Saint-Venant ne peut pas être invoqué ici pour justifier ce fait car la zone d'encastrement ne possède pas de dimension négligeable devant les autres. Seule une analyse numérique permet dès lors de trancher, au moins pour quelques configurations particulières du barrage (c'est l'inconvénient de l'approche numérique, même si une étude numérique paramétrique est bien sûr possible).

La déformée de la figure 23.3(b) illustre bien les effets conjoints du poids du barrage lui-même et de l'action de l'eau par rapport à la configuration de référence dans un état naturel 23.3(a). Les cartes de contraintes de la figure 23.3 montrent que les composantes σ_{11} , σ_{12} et σ_{22} sont quasi-linéaires dans un voisinage relativement grand des points O et B. En particulier, au voisinage de O, la composante σ_{22} (resp. σ_{12}) est proportionnelle à la coordonnée X_1 (resp. X_2), comme attendu d'après la solution trouvée dans les paragraphes précédents : $\sigma_{12} = dX_2$, $\sigma_{22} = eX_1$.

La différence principale entre les solutions analytique et numérique réside dans la forte concentration de contrainte située au point A, qui perturbe le champ linéaire dans un large voisinage du point A. Une singularité des contraintes est présente en A, en conséquence de la condition d'encastrement de A alors même qu'une pression s'applique sur le parement aval dans son voisinage. L'existence de cette singularité peut être mise en évidence grâce au calcul par éléments finis en utilisant des maillages de plus en plus raffinés autour du point A. La figure 23.5 donne le profil de σ_{11} le long du parement amont pour deux discrétisations différentes. On voit que la contrainte σ_{22} augmente et devient positive lorsqu'on s'approche suffisamment près de A. La contrainte de traction n'a pas de limite en A. Cela signifie d'une fissure apparaît nécessairement à cet endroit. La singularité mérite une étude théorique spécifique. Elle peut être relâchée dans la pratique en évitant la présence d'un angle droit en A. Au contraire, on n'observe pas de singularité en B.

Les courbes de la figure 23.4 confirment la bonne performance de la solution analytique proposée. Celle-ci constitue une bonne approximation de la solution réelle excepté au voisinage du point A et

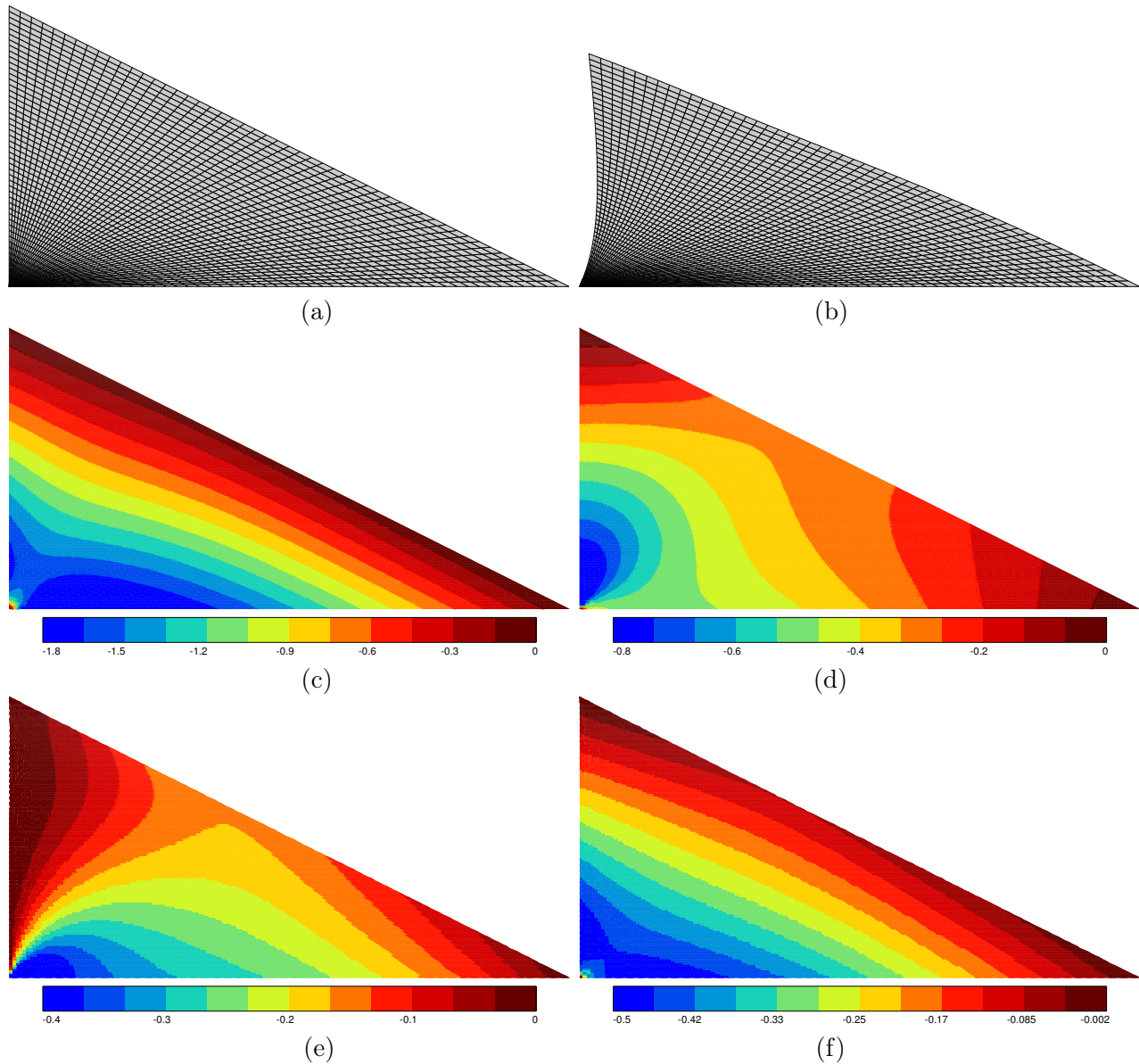


FIGURE 23.3 – Résultats de calculs par éléments finis du barrage : (a) maillage par éléments finis (état naturel sans pesanteur), (b) déformée du barrage (déplacements $\times 10000$), (c) champ de contrainte σ_{11} , (d) champ de contrainte σ_{22} , (e) champ de contrainte σ_{12} , (f) champ de contrainte σ_{33} . Les valeurs sont données en MPa. Les caractéristiques du barrage sont ici $H = 100$ m et $u = 0, v = 2$, correspondant à un angle $\beta = 63^\circ$.

du point B. Les contraintes le long du parement aval sont surestimées, en valeur absolue, dès qu'on s'éloigne du point O.

La figure 23.4(d) montre que le déplacement u_1 coïncide avec le champ trouvé pour lequel le mouvement de corps rigide a été fixé à zéro. Par contre la composante u_2 trouvée numériquement n'est pas une parabole centrée en O. Elle présente un terme linéaire en X_1 supplémentaire qui correspond à la rotation infinitésimale rX_1 qui n'a pas pu être fixée par les conditions aux limites dans la solution analytique.

Critère de Mohr–Coulomb

Le béton est un matériau fragile dont le domaine d'élasticité peut être décrit par le critère de Mohr–Coulomb :

$$f(\sigma_n, \tau) = |\tau| + \sigma_n \tan \phi - C < 0 \quad (23.11)$$

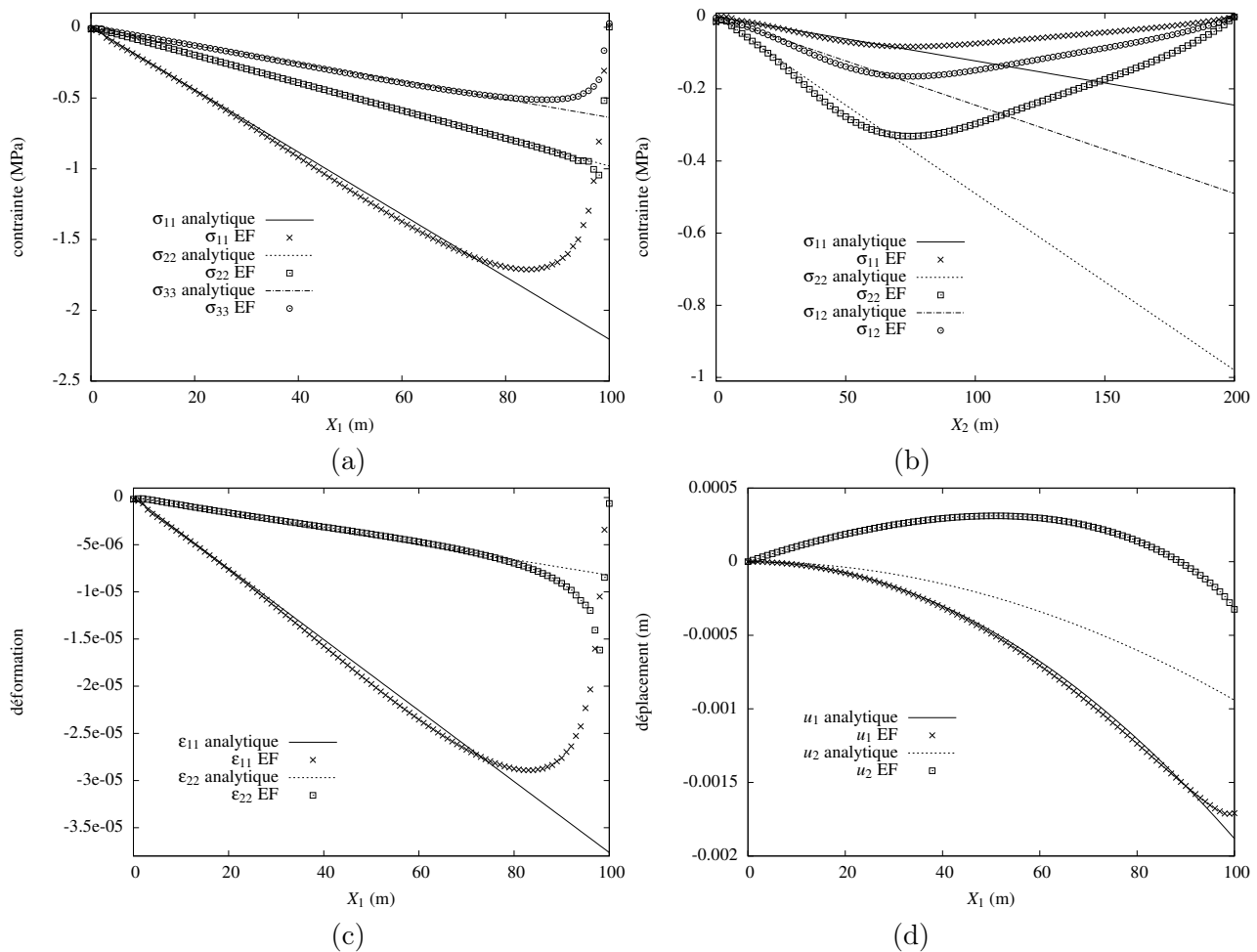


FIGURE 23.4 – Résultats de calculs par éléments finis du barrage : (a) tracé des contraintes le long du parement amont (droite d'équation $X_2 = 0$) ; (b) tracé des contraintes le long du parement aval (droite d'équation $X_2 = 2X_1$) ; (c) tracé des déformations le long du parement amont ; (d) profils des déplacements le long du parement amont (la translation de corps rigide a été fixée de telle sorte que le déplacement du point O soit nul). Les caractéristiques du barrage sont les mêmes que pour la figure 23.3.

où σ_n et τ sont respectivement la contrainte normale et la contrainte tangentielle sur une facette de normale donnée au point considéré. Ce critère d'endommagement ou de rupture fait intervenir deux paramètres : la cohésion C et l'angle de frottement interne ϕ . Ces paramètres sont déterminés expérimentalement. Tant que $f(\sigma_n, \tau) < 0$ pour toutes les facettes possibles, la réponse du matériau reste élastique linéaire. La limite d'élasticité est atteinte lorsque, dans le plan (σ_n, τ) , dit plan de Mohr, le grand cercle de Mohr vient tangenter la droite d'équation $\tau + \sigma_n \tan \phi - C = 0$ (avec $\tau > 0$).

Comparer ce critère aux critères de plasticité et/ou de rupture que vous connaissez.

Calculer la limite d'élasticité en traction selon ce critère en fonction des paramètres du modèle.

Interpréter ce critère à la lumière de ce qu'évoque pour vous le nom de Coulomb.

Exprimer le critère de Mohr–Coulomb uniquement en fonction des contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Tracer les cercles de Mohr associés au tenseur des contraintes au point $X_1 = H, X_2 = 0$ à la base du parement amont en utilisant la solution analytique trouvée précédemment. Pour cela, on calculera les valeurs numériques des composantes de contraintes à l'aide des formules établies au paragraphe 23.1.2, et des données suivantes : $u = 0$, $v = 2$, $H = 100$ m.

Dans ce même diagramme, tracer la frontière du domaine d'élasticité décrit par la fonction (23.11).

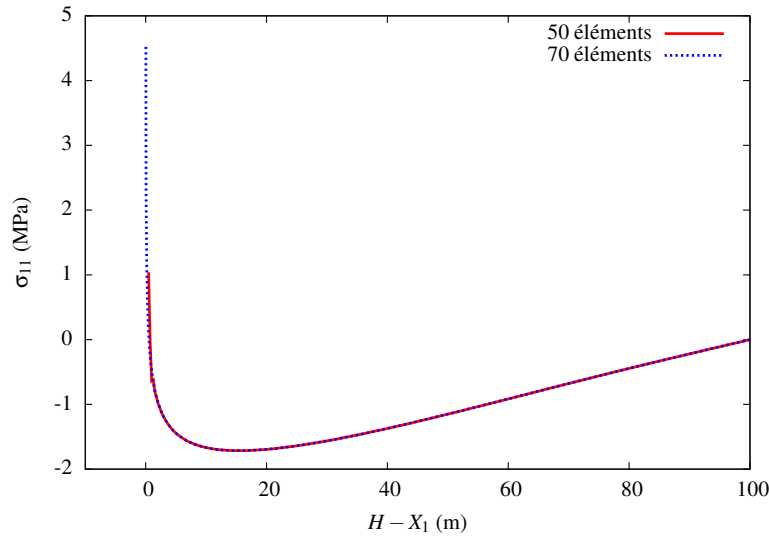


FIGURE 23.5 – Profil de la contrainte σ_{11} le long du parement amont pour deux discrétisations par éléments finis différentes. Le maillage raffiné à 70 éléments possède plus d'éléments proches de A et des valeurs plus grandes en traction sont atteintes.

On prendra les caractéristiques : $C = 0.1$ MPa et $\phi = 46^\circ$, typiques du béton.

Conclure sur l'admissibilité des contraintes locales en ce point vis-à-vis du critère de Mohr-Coulomb. Le critère proposé fait intervenir l'effet conjoint de la contrainte tangentielle et de la contrainte normale pour une facette donnée. Lorsque $\tan \phi = 0$, il s'identifie avec le critère de plasticité de Tresca. A l'inverse, si $\tan \phi$ devient très grand, le critère s'approche d'un critère de contrainte normale critique, typique de la rupture des matériaux fragiles. Il est représenté par une droite dans le plan de Mohr, dont l'inclinaison est donnée par ϕ . L'intersubsection avec l'axe des abscisses fournit la limite de rupture en traction : $\sigma_n = C / \tan \phi$. La combinaison des contraintes normale et tangentielle dans le critère (23.11) fait irrésistiblement penser au critère de frottement de Coulomb entre corps matériels. Du point de vue physique, il s'agit du frottement intérieur entre les grains d'un matériau granulaire tels qu'on les rencontre dans le domaine du génie civil. La résistance au cisaillement est d'autant plus grande que la compression est forte. Le béton est un matériau granulaire dont la limite d'élasticité est atteinte par des effets combinés de contraintes normale et de cisaillement.

Le grand cercle de Mohr a pour centre $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$ et pour rayon $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$. Il est tangent à la droite de Mohr-Coulomb lorsque

$$\tan \phi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2C / \tan \phi - (\sigma_1 + \sigma_3)}$$

ce qui fournit l'expression alternative du critère de Mohr-Coulomb :

$$g(\sigma_1, \sigma_3) = \sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_1 + \sigma_3) \tan \phi - 2C \quad (23.12)$$

Les contraintes le long du parement amont dans le cas $u = 0, v = 2$ valent :

$$\sigma_{11} = aX_1, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = eX_1, \quad \sigma_{33} = \nu(a + e)X_1$$

avec $a = (\rho_{\text{eau}}/4 - \rho)g$ et $e = -\rho_{\text{eau}}g$. Le tenseur des contraintes y est donc diagonal et les contraintes principales valent, dans l'ordre décroissant, en $X_1 = H = 100$ m :

$\sigma_1 = \sigma_{33} = -0.64$ MPa, $\sigma_2 = \sigma_{22} = -0.98$ MPa, $\sigma_3 = \sigma_{11} = -2.21$ MPa. On constate qu'elles sont toujours négatives. C'est d'ailleurs un résultat qui s'étend aux contraintes principales dans tout le barrage si l'on en croit les résultats du calcul par éléments finis illustrés par la figure 23.6, à l'exception toutefois du voisinage du point singulier A où une étude spécifique est indispensable. Etant donné la faible cohésion du béton (limite d'élasticité en traction $C / \tan \phi$ de l'ordre de 0.1 MPa), les contraintes

de traction doivent être évitées absolument, c'est une consigne de dimensionnement en génie civil.

Les cercles de Mohr correspondant aux valeurs précédentes des contraintes principales sont représentées sur la figure 23.7. La frontière du domaine d'élasticité est la droite d'équation $f(\sigma_n, \tau) = 0$. Elle coupe l'axe des abscisses en $\sigma_n = C/\tan \phi$, i.e. la limite d'élasticité en traction simple. On observe que les cercles de Mohr sont situés sous cette droite, dans le domaine $f(\sigma_n, \tau) < 0$ assurant un fonctionnement élastique du point matériel considéré.

Plus généralement, Albert Caquot (1881–1976), professeur de Matériaux à l'Ecole des Mines de Paris à partir de 1922, a proposé de considérer une courbe intrinsèque plus générale que la droite de Mohr–Coulomb, issue des observations expérimentales, pour caractériser le domaine d'élasticité du béton. La frontière du domaine d'élasticité est atteinte lorsque le grand cercle de Mohr vient tangenter la courbe intrinsèque de Caquot. C'est le critère de Mohr–Caquot.

Pour finir, il faut indiquer qu'un critère d'endommagement supplémentaire pour les fortes valeurs négatives de σ_n est nécessaire. La rupture alors a lieu sous forme de bandes de localisation de l'endommagement conduisant à de multiples fissures.

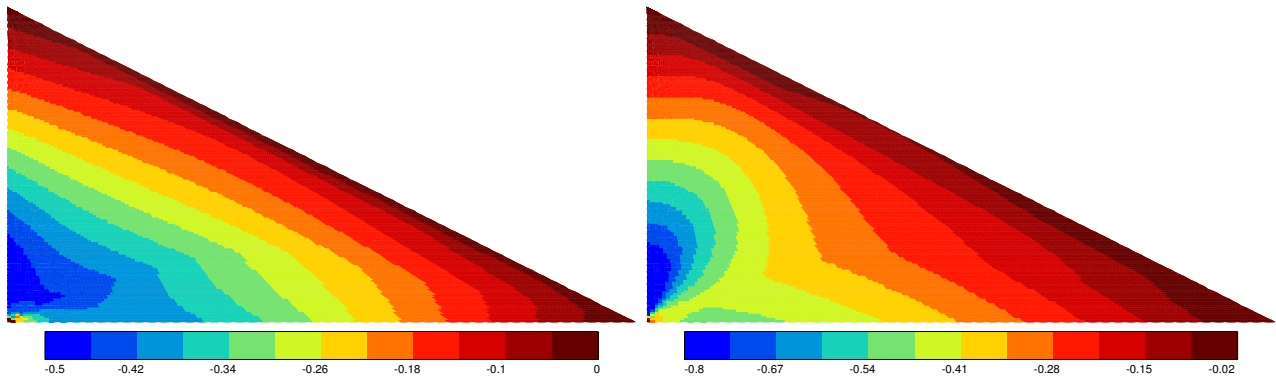


FIGURE 23.6 – Champs de deux contraintes principales : σ_1 à gauche et σ_2 à droite. Ils montrent que les contraintes principales sont partout négatives, sauf pour σ_1 au voisinage du point A, d'après la figure 23.5. Les valeurs sont données en MPa. Les caractéristiques du barrage sont $H = 100$ m et $u = 0, v = 2$, correspondant à un angle $\beta = 63^\circ$.

23.1.3 Etude du barrage dans le cas général

On revient au cas général de la figure 23.1 où, *a priori*, $u \neq 0$. L'objectif de cette partie est d'optimiser les valeurs de u et v au regard du critère de Maurice Lévy associé à la présence d'une fissure dans le parement amont.

Détermination des contraintes

Rappeler les conditions aux limites sur les parements amont et aval en tenant compte du fait que $\alpha \neq 0$.

On recherche à nouveau un champ de contraintes de la forme donnée par les équations (23.3) à (23.6).

Etablir le système d'équations permettant de déterminer de manière unique les constantes a, b, c, d, e, f . Pour gagner du temps, on ne demande pas de résoudre ce système. Les solutions en sont données ci-dessous :

$$a = -\rho g \frac{u^2 + v^2}{(u + v)^2} - \rho_{\text{eau}} g \frac{u + 2uv^2 - v}{(u + v)^3}, \quad b = -\rho g \frac{u - v}{(u + v)^2} + \rho_{\text{eau}} g \frac{u^2 + 3uv - 2}{(u + v)^3} \quad (23.13)$$

$$c = -\rho g \frac{uv(u - v)}{(u + v)^2} + \rho_{\text{eau}} g \frac{uv(uv - v^2 - 2)}{(u + v)^3}, \quad d = -\rho g \frac{2uv}{(u + v)^2} + \rho_{\text{eau}} g \frac{u + 2uv^2 - v}{(u + v)^3} \quad (23.14)$$

$$e = -\rho g \frac{2u^2v^2}{(u + v)^2} + \rho_{\text{eau}} g \frac{v^2(2u^2v - 3u - v)}{(u + v)^3}, \quad f = -c \quad (23.15)$$

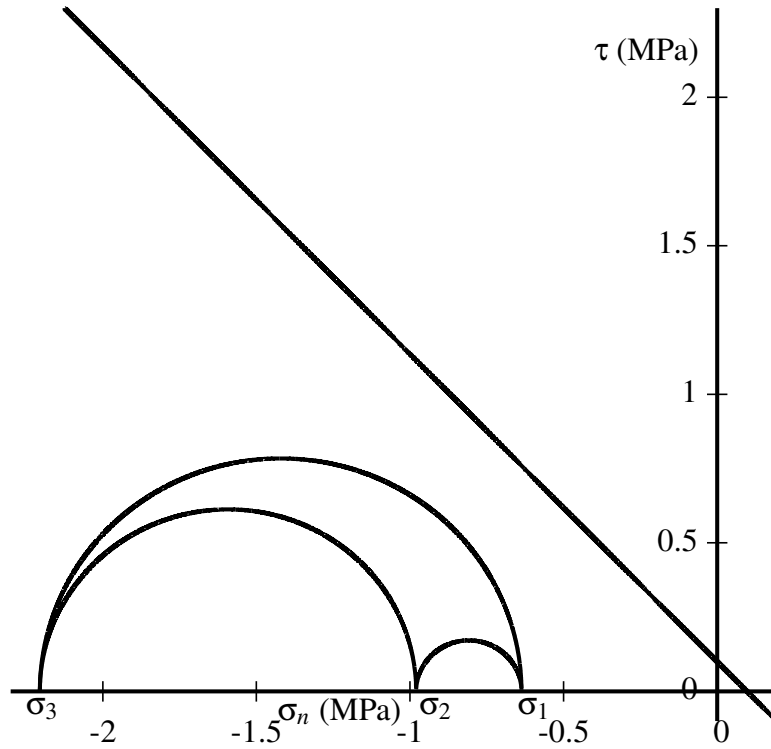


FIGURE 23.7 – Cercles de Mohr des contraintes en $X_1 = H, X_2 = 0$; comparaison avec le critère de Mohr–Coulomb.

Les conditions sur OB (surface libre où $X_2 = vX_1$) sont toujours données par les équations (23.7). Sur la surface OA d'équation $X_2 = -uX_1$, le vecteur contrainte est imposé :

$$-\sigma_{11} \sin \alpha - \sigma_{12} \cos \alpha = p \sin \alpha, \quad -\sigma_{12} \sin \alpha - \sigma_{22} \cos \alpha = p \cos \alpha$$

où $p = \rho_{\text{eau}} g X_1$. Ces conditions fournissent les 4 équations suivantes :

$$(a + bv)v - (c + dv) = 0, \quad (c + dv)v - (e + fv) = 0 \quad (23.16)$$

$$(a - bu)u + (c - du) + \rho_{\text{eau}} g u = 0, \quad (c - du)u + (e - fu) + \rho_{\text{eau}} g u = 0 \quad (23.17)$$

Les deux dernières équations résultent des conditions d'équilibre local (23.1) :

$$a + d + \rho g = 0, \quad c + f = 0 \quad (23.18)$$

On peut vérifier que la résolution du système précédent conduit aux valeurs (23.13) à (23.15).

Contraintes et directions principales sur le parement amont

Déterminer les directions principales (vecteurs propres du tenseur des contraintes) puis les contraintes principales (valeurs propres) des points matériels du parement amont OA. Cette détermination ne nécessite pas de calcul fastidieux.

La forme (23.2) montre que le vecteur \underline{e}_3 est une direction principale des contraintes. La contrainte principale correspondante est

$$\sigma_{III} = \sigma_{33}$$

Sur le parement amont, les contraintes sont de la forme :

$$\sigma_{11} = (a - bu)X_1, \quad \sigma_{12} = (c - du)X_1, \quad \sigma_{22} = (e - fu)X_1$$

La condition aux limites sur le parement amont indique que le vecteur normal $\underline{n} = -\sin \alpha \underline{e}_1 - \cos \alpha \underline{e}_2$ est un vecteur propre de $\underline{\sigma}$ pour la valeur

$$\sigma_I = -p = -\rho_{\text{eau}} g X_1$$

La troisième direction principale est donc $\underline{m} = \underline{n} \wedge \underline{e}_3 = -\cos \alpha \underline{e}_1 + \sin \alpha \underline{e}_2$. La valeur principale associée s'obtient à partir des deux autres et de la trace du tenseur des contraintes :

$$\sigma_{II} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} - \sigma_I - \sigma_{33} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \rho_{\text{eau}} g X_1 \quad (23.19)$$

Par suite,

$$\sigma_{II} = (a - bu + e - fu + \rho_{\text{eau}} g) X_1 \quad (23.20)$$

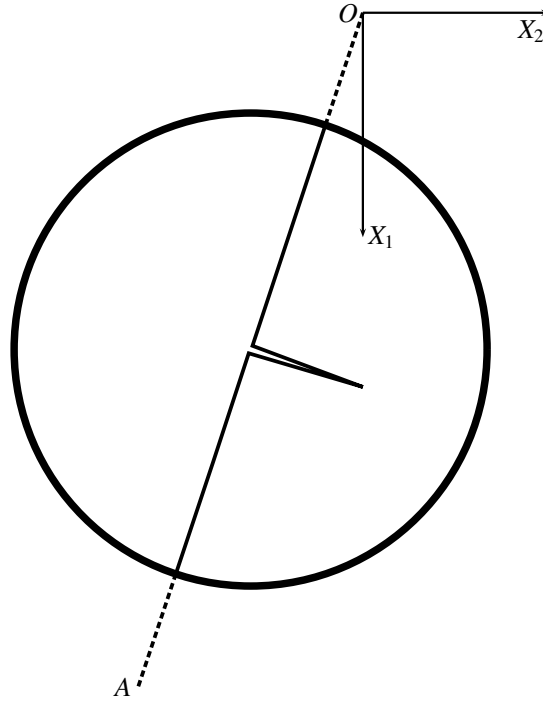


FIGURE 23.8 – Zoom sur une fissure perpendiculaire au parement amont OA à une certaine cote $X_1 = X_0$. La fissure est représentée légèrement ouverte pour l'illustration.

Présence d'une fissure perpendiculaire au parement amont

On considère que, en raison d'un défaut ou de l'endommagement du béton, une petite fissure plane apparaît perpendiculairement au parement amont, à une certaine cote $X_1 = X_0$ donnée, comme sur la figure 23.8. Il s'agit d'une amorce de fissure dont la profondeur est négligeable devant les caractéristiques du barrage. La fissure est perpendiculaire au parement aval et parallèle à la direction 3. On se doit d'étudier la nocivité d'un tel défaut.

La sécurité du barrage sera assurée si le chargement mécanique a pour effet de refermer cette amorce de fissure. Formuler cette condition en utilisant les contraintes trouvées le long du parement amont. On supposera d'abord que l'eau ne s'infiltre pas dans la fissure.

Formuler ensuite cette condition en considérant que l'eau a pénétré par la fissure et que le fluide interstitiel exerce une pression sur les lèvres de la fissure.

Les critères seront exprimés en fonction des constantes a à f déterminées précédemment et des données du problème.

Montrer que les critères obtenus ne font pas intervenir la position X_0 de l'amorce de fissure.

Le champ de contrainte le long du parement n'est pas modifié tant que la fissure reste fermée puisque les lèvres en contact transmettent l'intégralité des charges. La contrainte agissant sur le plan de la fissure est la contrainte principale σ_{II} déterminée au paragraphe 23.1.3. La fissure reste fermée tant que cette contrainte principale est négative :

$$\sigma_{II} \leq 0$$

Si l'eau s'infiltre à travers la fissure et exerce une pression $p = \rho_{\text{eau}} g X_0$ tendant à ouvrir la fissure, il faut que la contrainte principale σ_{II} puisse contrecarrer cet effet d'ouverture :

$$\sigma_{II} + p \leq 0 \quad (23.21)$$

C'est une condition plus sévère que la précédente. En utilisant le résultat (23.20), le critère de non traction sur la fissure s'écrit

$$a - bu + e - fu + 2\rho_{\text{eau}}g \leq 0 \quad (23.22)$$

On remarque que la condition est indépendante de la cote X_0 . Alors que les contraintes augmentent, en valeur absolue, avec X_1 , la condition précédente reste la même.

Condition de Maurice Lévy

Expliciter alors la dernière condition précédente à l'aide des quantités u, v, ρ et ρ_{eau} . Avec l'hypothèse (bien sûr réalisée en pratique), $\rho > \rho_{\text{eau}}$, établir finalement son écriture sous la forme :

$$v \geq \frac{-u\rho + \sqrt{u^2\rho^2 + 4\rho_{\text{eau}}(\rho - \rho_{\text{eau}})}}{2(\rho - \rho_{\text{eau}})} \quad (23.23)$$

dite condition de Maurice Lévy.

En tenant compte des équations (23.16) et (23.17), on note que

$$a - bu + \rho_{\text{eau}} = -\frac{1}{u}(c - du), \quad e - fu + \rho_{\text{eau}} = u(c - du)$$

En substituant ces relations dans la condition (23.22), on obtient

$$-(c - du)\left(u + \frac{1}{u}\right) \leq 0$$

qui devient $c - du \geq 0$ puisque $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On utilise alors les expressions de c et d données par (23.14) pour obtenir la condition

$$\rho(u + v)v - \rho_{\text{eau}}(1 + v^2) \geq 0$$

qui se met aussi sous la forme

$$v^2(\rho - \rho_{\text{eau}}) + \rho uv - \rho_{\text{eau}} \geq 0$$

Le discriminant $\Delta = \rho^2 u^2 + 4(\rho - \rho_{\text{eau}})\rho_{\text{eau}}$ est toujours positif dès que $\rho \geq \rho_{\text{eau}}$. Le binôme précédent est alors positif seulement si la condition cherchée (23.23) est également remplie (avec $v \geq 0$). Cette condition fournit un angle minimum β pour u fixé.

Optimisation du barrage par rapport à la condition de Lévy

On cherche alors à dimensionner au mieux le barrage, c'est-à-dire à respecter la condition de sécurité précédente à l'aide d'une masse minimale, la hauteur H et la longueur L étant fixées.

En utilisant la condition, $\rho > 2\rho_{\text{eau}}$, remplie en pratique, trouver la valeur optimale du paramètre u , puis celle du paramètre v .

Faire l'application numérique pour un barrage en béton renforcé, avec les propriétés correspondantes indiquées au début du problème.

La masse du barrage vaut :

$$m = \rho \frac{LH^2}{2} (u + v)$$

La condition de Lévy permet de trouver la masse minimale :

$$m \geq \rho \frac{LH^2}{2} \left(u + \frac{-u\rho + \sqrt{u^2\rho^2 + 4\rho_{\text{eau}}(\rho - \rho_{\text{eau}})}}{2(\rho - \rho_{\text{eau}})} \right) = \rho \frac{LH^2}{2} \frac{u(\rho - 2\rho_{\text{eau}}) + \sqrt{u^2\rho^2 + 4\rho_{\text{eau}}(\rho - \rho_{\text{eau}})}}{2(\rho - \rho_{\text{eau}})}$$

Lorsque $\rho \geq 2\rho_{\text{eau}}$, le dernier terme est minimal pour

$$u = 0$$

On obtient alors la masse minimale et l'angle minimal :

$$m_{\min} = \rho \frac{LH^2}{2} \sqrt{\frac{\rho_{\text{eau}}}{\rho - \rho_{\text{eau}}}}, \quad v_{\min} = \sqrt{\frac{\rho_{\text{eau}}}{\rho - \rho_{\text{eau}}}} \quad (23.24)$$

qui fournissent les caractéristiques optimales du barrage.

Dans le cas du béton renforcé, on trouve $v = 0.82$ et $\beta \simeq 40^\circ$.