

Or, pour les deux solutions A et B , le tenseur des contraintes est relié au tenseur des déformations par le même tenseur des modules d'élasticité :

$$\boldsymbol{\sigma}_A = \boldsymbol{\Lambda} : \boldsymbol{\varepsilon}_A, \quad \boldsymbol{\sigma}_B = \boldsymbol{\Lambda} : \boldsymbol{\varepsilon}_B \quad (9.24)$$

En conséquence, une condition nécessaire pour que deux solutions du problème (\mathcal{P}) puissent coexister est que

$$\int_{\Omega} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\Lambda} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = 0 \quad (9.25)$$

On en déduit que le caractère défini positif du tenseur des modules d'élasticité est une **condition suffisante d'unicité** de la solution du problème d'équilibre thermoélastique. En effet, si $\boldsymbol{\Lambda}$ est défini positif, on a

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\Lambda} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} > 0, \quad \forall \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \neq 0$$

Si ce n'est pas le cas, on montre que, dans certains cas, des solutions multiples peuvent être construites. Cela justifie que les tenseurs des modules d'élasticité des solides soient définis positifs et qu'alors, conformément à l'expérience courante, pour les conditions aux limites (9.9), il y a une relation univoque entre la réponse d'une pièce et la sollicitation.

L'existence de la solution du problème (\mathcal{P}) , pour les conditions aux limites linéaires envisagées, est admise dans ce cours. Elle résulte d'un théorème de mathématiques (dit de Lax-Milgram) sur les équations aux dérivées partielles d'ordre 2 linéaires elliptiques (Maisonneuve, 2003; Kern, 2004). Le caractère elliptique des équations aux dérivées partielles est directement lié au caractère défini positif du tenseur des modules d'élasticité.

Le problème d'équilibre thermoélastique linéarisé est donc un **problème bien posé** ou **régulier** car il possède, pour les conditions aux limites envisagées ici, une solution et une seule en termes de contraintes et de déformations. Ce résultat justifie la démarche classique de résolution de tels problèmes, qui consiste à proposer une forme de solution, et à la préciser grâce aux équations de compatibilité ou d'équilibre ainsi qu'aux conditions aux limites. Si cette forme proposée s'avère possible, on conclut que c'est nécessairement la solution cherchée, en vertu du théorème d'unicité.

9.2 Exemples : traction simple et flexion pure

Deux problèmes aux limites simples d'élasticité linéaire sont présentés ici. L'un concerne un état de déformation homogène (traction simple) l'autre un état de déformation hétérogène (la flexion pure ou circulaire). Les deux problèmes sont résolus ici par la méthode des contraintes, i.e. la forme du champ de contraintes est proposée.

9.2.1 Essai de traction/compression simple

L'essai de traction/compression est l'essai de caractérisation par excellence adapté à quasiment tous les matériaux (métaux, polymères, céramiques). L'objectif est de soumettre un échantillon à un champ de contraintes homogène et uni-axial afin de mesurer sa réponse en déformation. L'homogénéité n'est souvent acquise que dans une zone limitée de l'éprouvette appelée **zone utile**. La difficulté majeure de l'essai est de trouver le moyen d'accrocher l'éprouvette à une machine de traction et de transmettre à la zone utile une charge aussi uni-axiale que possible (pas de flexion parasite ni de concentration de contraintes). Comme l'état de contrainte souhaité est homogène, la géométrie de la zone utile est assez libre mais de section invariante par translation le long de l'axe de traction (par exemple cylindrique de révolution ou parallélépipédique comme sur la figure 9.3) La forme des têtes d'éprouvette dépend par contre du type de matériau (éprouvette en os de chien, tête filetée, etc.). En compression simple, la géométrie de l'éprouvette est en général plus simple (cylindrique de révolution) mais la difficulté consiste alors à trouver le bon lubrifiant permettant de limiter le frottement entre les faces supérieure et

inférieure et les plateaux de la machine, faute de quoi l'état de contrainte ne pourra pas être purement uni-axial en général.

Le problème de traction/compression d'un solide élastique peut être formulé à l'aide de conditions aux limites en efforts. La figure 9.3 indique qu'un effort axial est appliqué sur les faces horizontales de l'éprouvette tandis que les surfaces latérales sont libres de tout effort. Les efforts volumiques sont négligés. L'état initial est supposé naturel. L'effort surfacique axial appliqué sur la face supérieure vaut

$$\underline{t}^d = \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_3 = T \underline{e}_3 \quad (9.26)$$

Noter que le signe de la charge appliquée T est intrinsèque (il ne dépend pas du choix d'orientation de l'axe \underline{e}_3) :

- si $T > 0$, il s'agit d'un essai de **traction** ;
- si $T < 0$, il s'agit d'un essai de **compression**.

On vérifiera que les efforts indiqués sur la figure 9.3 conduisent à une force résultante et à un moment résultant nuls, sans quoi il ne pourrait s'agir d'un problème de statique.

Contraintes

Le champ de contraintes uni-axial et homogène suivant est recherché

$$\underline{\sigma} = \sigma \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3, \quad [\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} = \sigma \end{bmatrix} \quad (9.27)$$

Le tenseur σ est uniforme (indépendant de la position \underline{x}) et vérifie par conséquent identiquement les équations locales de la statique ($\text{div } \underline{\sigma} = 0$ en l'absence d'efforts volumiques). Les conditions aux limites en $x_3 = 0$ et $x_3 = L$ où L est la longueur de la zone utile de l'éprouvette considérée, impliquent que

$$\sigma = T$$

La résultante des forces sur la section supérieure est selon \underline{e}_3 et vaut $F = TS$ où S est la section de l'éprouvette. La contrainte axiale de traction/compression est donc égale à la force totale appliquée divisée par la section de l'éprouvette :

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (9.28)$$

Déformations

Les déformations engendrées par les contraintes sont uniformes et se calculent grâce à la loi d'élasticité inverse

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \underline{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{trace } \underline{\sigma}) \underline{1} \quad (9.29)$$

où le matériau est supposé isotrope. En utilisant l'expression (9.27) du tenseur des contraintes, on obtient

$$\underline{\varepsilon} = \frac{\sigma}{E} (\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 - \nu (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2)), \quad [\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} -\nu \frac{\sigma}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{\sigma}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma}{E} \end{bmatrix} \quad (9.30)$$

La déformation axiale est donc égale au rapport σ/E où E est le module de Young. Les contractions latérales sont caractérisées par le coefficient de Poisson

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{33}} \quad (9.31)$$

ce qui fournit une interprétation physique claire du coefficient de Poisson.

Suivons l'évolution d'une section normale à la direction de traction. Pour cela on peut considérer un élément de surface $\underline{ds} = \underline{dx}_1 \wedge \underline{dx}_2$ engendré par deux fibres matérielles orthogonales à l'axe de traction. Chaque vecteur matériel actuel \underline{dx} est relié à la fibre matérielle initiale \underline{dX} par

$$\underline{dx} = \underline{F} \cdot \underline{dX} = (\underline{1} + \text{grad } \underline{u}) \cdot \underline{dX}$$

Lorsque la fibre \underline{dX} est choisie orthogonale à l'axe de traction, la relation précédente devient :

$$\underline{dx} = (1 + \varepsilon_{11}) \underline{dX}$$

puisque $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$. Ainsi,

$$\underline{ds} = \underline{dx}_1 \wedge \underline{dx}_2 = (1 + \varepsilon_{11})^2 \underline{dX}_1 \wedge \underline{dX}_2 \simeq (1 + 2\varepsilon_{11}) \underline{dX}_1 \wedge \underline{dX}_2 = (1 + 2\varepsilon_{11}) \underline{dS}$$

La norme des vecteurs précédents fournit

$$ds \simeq (1 - 2\nu\varepsilon_{33})dS$$

Comme le champ de déformation est homogène sur la section, on en déduit que la section initiale S_0 de l'éprouvette se transforme en S telle que

$$\frac{S - S_0}{S_0} = -2\nu\varepsilon_{33} \quad (9.32)$$

dans le contexte infinitésimal. Pour les matériaux à $\nu > 0$, la section diminue donc en traction et augmente en compression, ce qui correspond bien à l'expérience courante. Pour établir ce résultat, on aurait pu aussi utiliser directement la formule (2.42).

On rappelle que la variation de volume de l'éprouvette est donnée par (8.55). Elle est positive en traction et négative en compression, quel que soit $-1 < \nu < 0.5$.

Déplacements

Le champ de déformation précédent est homogène. Il vérifie donc trivialement les conditions de compatibilité. Pour calculer le champ de déplacement associé au champ de déformation précédent, on conseille fortement la démarche systématique proposée au paragraphe 2.3.5 (voir page 49), même si cette intégration est particulièrement simple dans le cas de la traction. Cette démarche commence par le calcul du gradient (2.146) de la rotation $\underline{\omega}$

$$\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i} = 0 \quad (9.33)$$

qui est nul dans le cas de la traction simple puisque le champ de déformation est homogène. L'intégration de l'équation précédente a déjà été effectuée à la page 44 et donne

$$[\underline{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \quad (9.34)$$

où les petits angles p, q, r sont uniformes. Le champ de déplacement \underline{u} est tel que

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= -\nu \frac{\sigma}{E}, & u_{2,1} &= r, & u_{3,1} &= -q \\ u_{1,2} &= -r, & u_{2,2} &= -\nu \frac{\sigma}{E}, & u_{3,2} &= p \\ u_{1,3} &= q, & u_{2,3} &= -p, & u_{3,3} &= \frac{\sigma}{E} \end{aligned}$$

L'intégration de chacune des colonnes précédentes fournit, une à une, les composantes u_i :

$$\underline{u} = \frac{\sigma}{E} X_3 \underline{e}_3 - \nu \frac{\sigma}{E} (X_1 \underline{e}_1 + X_2 \underline{e}_2) + \underline{\omega}^\times \wedge \underline{x} + \underline{c}, \quad \begin{cases} u_1 = -\nu \frac{\sigma}{E} X_1 - r X_2 + q X_3 + c_1 \\ u_2 = -\nu \frac{\sigma}{E} X_2 + r X_1 - p X_3 + c_2 \\ u_3 = \frac{\sigma}{E} X_3 - q X_1 + p X_2 + c_3 \end{cases} \quad (9.35)$$

Le vecteur $\underline{\omega}^\times$ a pour composantes $[pqr]^T$ et \underline{c} est un champ uniforme de translation. Le déplacement est donc déterminé à un mouvement infinitésimal de corps rigide près.

Validation du contexte infinitésimal

La transformation ainsi déterminée est effectivement infinitésimale à condition que les composantes des déformations ε_{ij} et des rotations ω_{ij} restent modestes :

$$\left| \frac{\sigma}{E} \right| \ll 1, \quad \left| \nu \frac{\sigma}{E} \right| \ll 1, \quad |p|, |q|, |r| \ll 1 \quad (9.36)$$

La condition critique est donc $|\sigma/E| \ll 1$. Pour les métaux, la limite d'élasticité σ_0 est en général largement inférieure au module de Young. Si l'on travaille avec des structures métalliques dans le régime élastique, l'essai de traction reste clairement dans le contexte infinitésimal. Pour être complètement rassuré sur la pertinence du modèle linéarisé, il reste à vérifier que chaque état de sollicitation en cours d'essai reste quasi-naturel. On va voir plus loin que pour certaines géométries d'éprouvettes, ce n'est pas toujours le cas en compression (condition de flambage)⁶.

Autres conditions aux limites pour la traction

Le problème aux limites de traction simple a été formulé à l'aide de conditions aux limites en effort. Il est possible d'avoir recours à des conditions aux limites mixtes. On impose pour cela un déplacement $u_3 = 0$ sur la face inférieure de l'éprouvette et $u_3 = \delta$ uniforme sur la face supérieure. Le vecteur-contrainte reste nul sur les faces latérales. Il reste à préciser des conditions dans les directions 1 et 2 sur les faces supérieure et inférieure de l'éprouvette. L'application du tenseur des contraintes (9.27) à ces surfaces indique que l'on doit avoir $t_1 = t_2 = 0$. Avec ces conditions aux limites mixtes, on peut essayer la solution linéaire

$$u_3 = \frac{\delta}{L_0} X_3$$

où L_0 est la longueur initiale de l'éprouvette. Les champs de contraintes et de déformations (9.27) et (9.30) sont toujours les solutions du problème avec

$$\varepsilon_{33} = \frac{\delta}{L_0}$$

La force F appliquée à l'éprouvette est reliée à l'allongement de la zone utile de longueur L par

$$\frac{F}{S} = E \frac{\delta}{L} \quad (9.37)$$

On vérifiera que, dans le contexte infinitésimal, on peut écrire indifféremment L ou L_0 , S ou S_0 dans la formule précédente qui est à la base de la pratique des essais de traction.

Dans la pratique il n'est pas facile d'imposer $t_1 = t_2 = 0$ sur les faces supérieures et inférieures d'une éprouvette. Dans le cas de polymères ou d'élastomères, on est parfois obligé de coller ces faces

6. On insiste sur le fait qu'une analyse du problème linéarisé ne peut en aucun cas nous prémunir du risque d'instabilité de la structure.

à des plateaux rigides pour réaliser l'essai. Dans ce cas, on impose en fait $u_1 = u_2 = 0$, c'est-à-dire que l'on empêche ces faces de rétrécir en traction et de grandir en compression. Il en résulte des efforts importants qui font que la déformation n'est plus homogène dans l'éprouvette. Pour de nombreux matériaux cependant, et selon la géométrie de l'éprouvette, il existe encore une zone utile où les champs (9.27) et (9.30) règnent effectivement, de sorte que de tels essais sont exploitables. Différents effets de bord sont illustrés sur la figure 9.5.

Condition de flambage élastique

L'expérience courante nous apprend que lorsqu'on essaie de comprimer un corps élancé dans le sens de sa longueur, une instabilité risque de se produire. La poutre se fléchit tout à coup ou prend la forme d'un arc de cercle ou d'un S au-delà d'une certaine charge. Il n'est alors plus possible de déformer la poutre de manière homogène comme on le souhaite en compression. Cette instabilité qui existe aussi pour les plaques s'appelle **flambage** ou **flambement**. Prédire le flambage n'est pas possible dans le contexte infinitésimal. L'analyse se fait alors en considérant explicitement les configurations "flambées", i.e. fléchies ou en S. Dans le cadre de la théorie des poutres, on peut évaluer la charge critique à partir de laquelle une colonne élastique (non encastree à ses extrémités) risque de flamber, c'est la **charge d'Euler** :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (9.38)$$

où $I = \int_S X_1^2 dX_1 dX_2$ est le moment quadratique de la section ($I = t^4/12$ pour une section de poutre carrée de côté t). Dans le cas des métaux, la formule précédente s'avère trop optimiste car un flambage plastique peut se produire de manière plus précoce. Les conditions de flambage plastique sont délicates à déterminer (théoriquement et expérimentalement). Pour éviter ces instabilités, il faut diminuer l'élancement L/t de la poutre. Ce critère fait partie des conditions de dimensionnement des essais de compression.

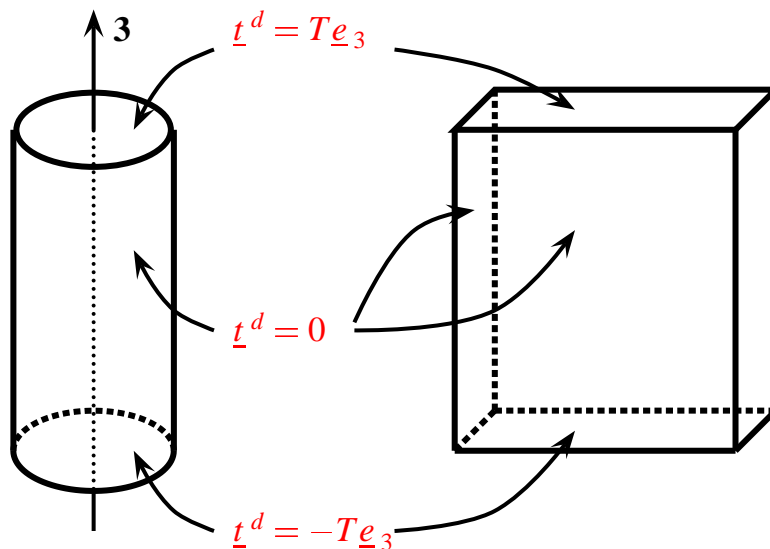


FIGURE 9.3 – Conditions aux limites de type traction/compression sur un barre cylindrique à gauche ou sur un parallélépipède à droite.

9.2.2 Flexion

On considère une barre cylindrique Ω de section S de forme quelconque, de longueur L et de génératrice parallèle à l'axe \underline{e}_1 . Les sections extrémités sont notées S_0 et S_L . L'origine O du repère

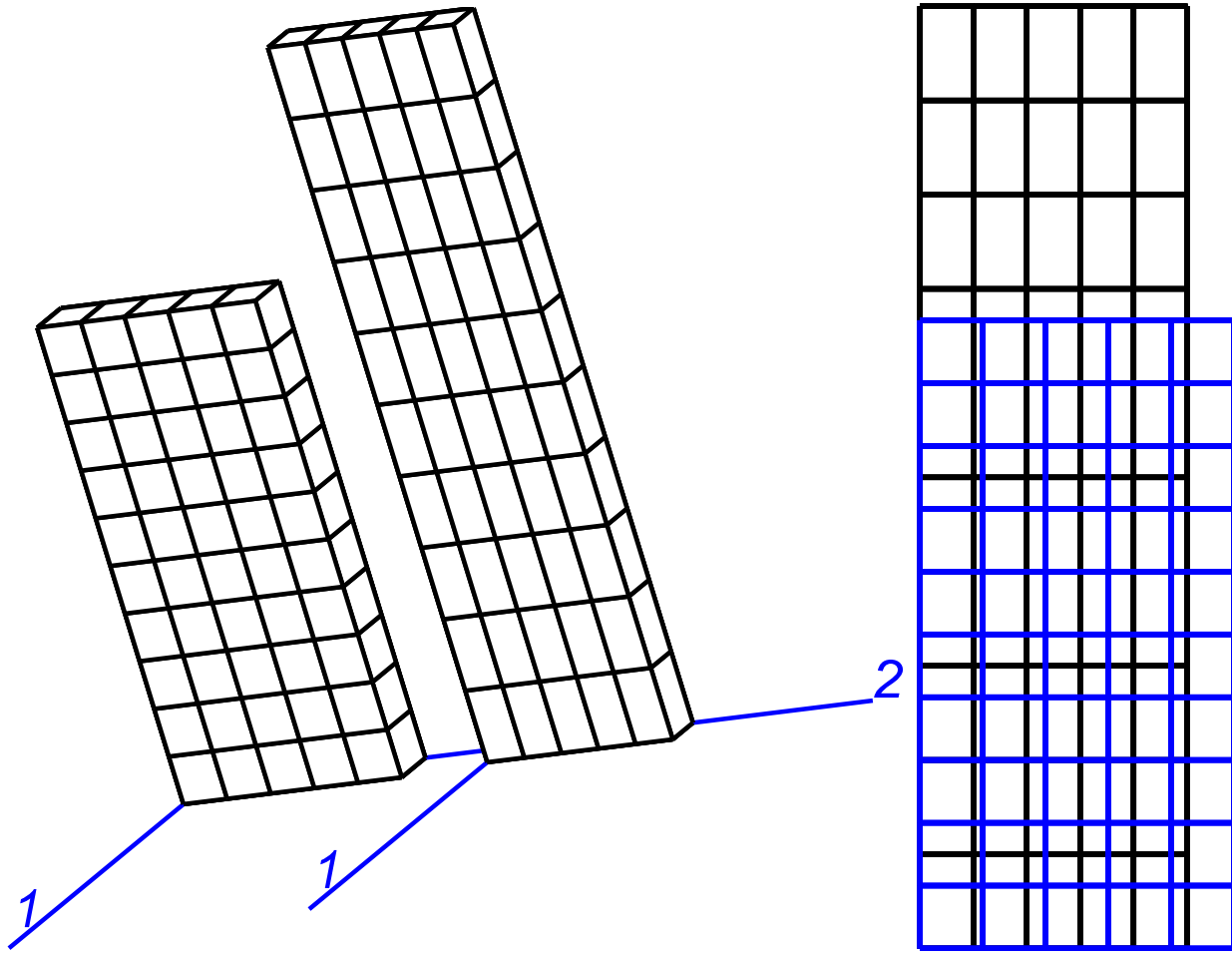


FIGURE 9.4 – Traction simple d'une plaque parallélépipédique munie d'une grille : états initial et final en perspective (à gauche) et de face (à droite, les deux états étant superposés). Le matériau étant isotrope, quel est son coefficient de Poisson d'après la figure de droite ?

cartésien orthonormé est choisie au centre d'inertie de la section S_0 . Les axes (O, \underline{e}_1) , (O, \underline{e}_2) et (O, \underline{e}_3) coïncident avec les axes principaux d'inertie du cylindre. Ce choix est tel que

$$\int_S X_2 dS = \int_S X_3 dS = \int_S X_2 X_3 dS = 0 \quad (9.39)$$

On note

$$I_2 = \int_S X_3^2 dS, \quad I_3 = \int_S X_2^2 dS \quad (9.40)$$

les moments d'inertie principaux de la section courante S .

On impose les conditions aux limites suivantes à la barre Ω :

- La surface latérale de la barre, i.e. $\partial\Omega - S_0 - S_L$, est libre : $\underline{t}^d = 0$.
- Les données sont incomplètes sur les faces S_0 et S_L . On se contente d'indiquer le torseur des efforts appliqués sur la section S_L :

$$\{O, \quad \underline{R} = 0, \quad \underline{M} = M_3 \underline{e}_3\} \quad (9.41)$$

Le couple opposé est appliqué à la section S_0 . Le couple de flexion est donc appliqué ici par rapport à un axe principal d'inertie des sections de la barre. On parle de **flexion normale**.

- Les efforts volumiques sont négligés.

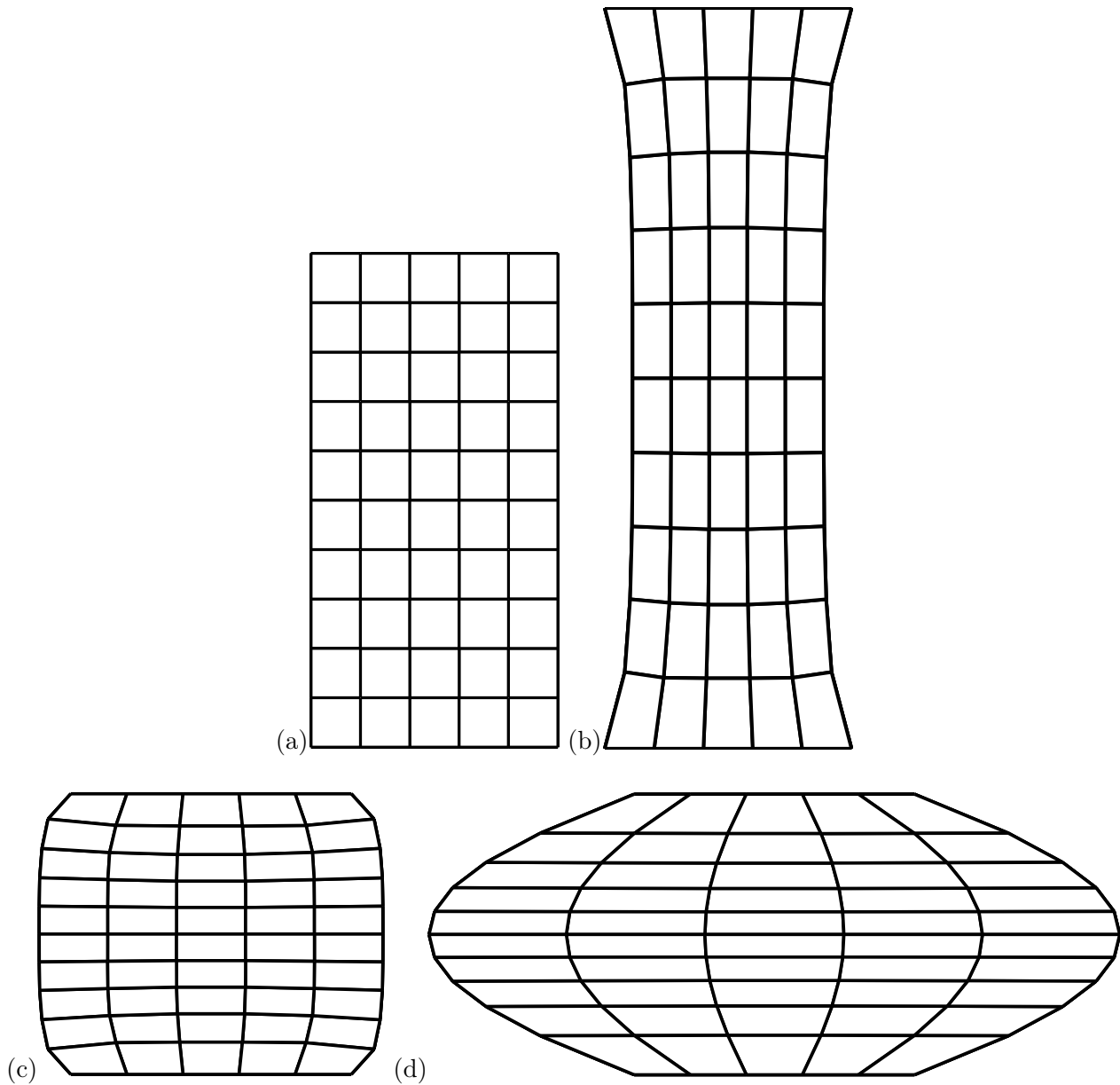


FIGURE 9.5 – Essais de traction et compression avec encastrement sur les faces supérieure et inférieure : (a) état initial, (b) déformée en traction en élasticité linéaire, (c) compression d'un métal, (d) compression d'un élastomère. Les effets de bord liés à l'encastrement sont clairement visibles. Les déformations sont volontairement amplifiées pour l'illustration. On distingue clairement l'existence d'une zone utile où la déformation est quasi-homogène dans les cas (b) et (c).

Le problème est donc mal posé puisqu'on n'a pas donné d'information point par point sur les face S_0 et S_L . Une approche en contraintes est proposée ici et on acceptera la forme obtenue du vecteur-contrainte sur S_0 et S_L à condition que le torseur des efforts appliqués corresponde bien aux données (9.41).

Contraintes

La forme de la déformée attendue pour une barre en flexion est donnée sur la figure 9.6. Les fibres matérielles parallèles à \underline{e}_1 sont étirées en haut et comprimées en bas (sur la figure $M_3 < 0$). Cela incite à penser que les contraintes σ_{11} sont de traction en haut et de compression en bas. Une forme simple

de tenseur des contraintes compatible avec cette intuition est la suivante :

$$\underline{\sigma} = kX_2 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1, \quad [\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} kX_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.42)$$

où k est une constante à déterminer⁷. On suppose donc que chaque élément de matière subit un état de traction ou compression simple dont l'intensité dépend de la position X_2 seulement. On peut vérifier que les équations d'équilibre locales sont bien vérifiées par un tel champ de contraintes⁸. Un tel champ conduit effectivement à un vecteur-contrainte nul sur la surface latérale de la barre. Il reste à calculer le torseur des efforts induits par ce champ de contraintes sur la face S_L par exemple :

$$\underline{R} = \int_{S_L} \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_1 dS = \int_{S_L} kX_2 \underline{e}_1 dS = 0 \quad (9.43)$$

$$\begin{aligned} \underline{M} &= \int_{S_L} \underline{OM} \wedge \underline{t} dS = \int_{S_L} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} kX_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dS = \int_{S_L} \begin{bmatrix} 0 \\ kX_2X_3 \\ -kX_2^2 \end{bmatrix} dX_2 dX_3 \\ &= -kI_3 \underline{e}_3 \end{aligned} \quad (9.44)$$

La barre est donc en équilibre global si

$$k = -\frac{M_3}{I_3} \quad (9.45)$$

ce qui détermine de manière unique la constante k . Le champ de contraintes σ_{11} est illustré pour une barre de section carrée sur la figure 9.7(c).

Déformations

Le champ de déformation se déduit du champ de contrainte (9.42) par la loi de comportement élastique linéaire isotrope (9.29) :

$$\underline{\varepsilon} = -\frac{M_3}{EI_3} X_2 (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \nu(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3)), \quad [\underline{\varepsilon}] = -\frac{M_3}{EI_3} X_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix} \quad (9.46)$$

Le champ de déformations ε_{33} est illustré pour une barre de section carrée sur la figure 9.7(d).

Déplacements

La méthode systématique pour construire le champ de déplacements à partir du champ de déformations précédent consiste à calculer le gradient de la rotation $\underline{\omega}$ par la formule (2.146). Cela donne

$$\begin{aligned} \omega_{12,1} &= \varepsilon_{11,2} - \varepsilon_{21,1} = -\frac{M_3}{EI_3}, & \omega_{23,1} &= 0, & \omega_{31,1} &= 0, \\ \omega_{12,2} &= 0, & \omega_{23,2} &= 0, & \omega_{31,2} &= 0, \\ \omega_{12,3} &= 0, & \omega_{23,3} &= \varepsilon_{23,3} - \varepsilon_{33,2} = -\nu \frac{M_3}{EI_3}, & \omega_{31,3} &= 0 \end{aligned}$$

L'intégration de ces équations fournit

$$\omega_{12} = -\frac{M_3}{EI_3} X_1 - r, \quad \omega_{23} = -\nu \frac{M_3}{EI_3} X_3 - p, \quad \omega_{31} = -q$$

7. Plus généralement, on peut chercher une fonction $\sigma_{11} = f(X_2)$. Ce champ de contraintes conduit à des déformations $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{11} = -\nu f(X_2)/E$. La condition de compatibilité (2.154) indique alors que $f'' = 0$, ce qui implique la forme linéaire proposée.

8. En effet, seule la dérivée partielle $\sigma_{11,2}$ est non nulle lorsque l'on part de (9.42) mais cette dérivée n'intervient pas dans la divergence de $\underline{\sigma}$.

Le gradient du déplacement s'écrit donc

$$\begin{aligned} u_{1,1} = \varepsilon_{11} &= -\frac{M_3}{EI_3} X_2, & u_{2,1} = -\omega_{12} &= \frac{M_3}{EI_3} X_1 + r, & u_{3,1} &= -q \\ u_{1,2} = \omega_{12} &= -\frac{M_3}{EI_3} X_1 - r, & u_{2,2} = \varepsilon_{22} &= \nu \frac{M_3}{EI_3} X_2, & u_{3,2} &= p + \nu \frac{M_3}{EI_3} X_3 \\ u_{1,3} &= q, & u_{2,3} = \omega_{23} &= -\nu \frac{M_3}{EI_3} X_3 - p, & u_{3,3} = \varepsilon_{33} &= \nu \frac{M_3}{EI_3} X_2 \end{aligned}$$

L'intégration des équations précédentes conduit aux expressions suivantes des composantes du déplacement

$$u_1 = -\frac{M_3}{EI_3} X_1 X_2, \quad u_2 = \frac{M_3}{EI_3} \left(\frac{X_1^2}{2} + \nu \frac{X_2^2 - X_3^2}{2} \right), \quad u_3 = \nu \frac{M_3}{EI_3} X_2 X_3 \quad (9.47)$$

auquel s'ajoute le mouvement de corps rigide $\{(p, q, r), \underline{c}\}$. La déformée d'une barre de section carrée correspondant à ce champ de déplacement est illustrée sur la figure 9.7(b).

Validation du contexte infinitésimal

On a construit au passage le gradient du champ de déplacement

$$\text{grad } \underline{u} = \begin{bmatrix} -\frac{M_3}{EI_3} X_2 & -\frac{M_3}{EI_3} X_1 & 0 \\ \frac{M_3}{EI_3} X_1 & \nu \frac{M_3}{EI_3} X_2 & -\nu \frac{M_3}{EI_3} X_3 \\ 0 & \nu \frac{M_3}{EI_3} X_3 & \nu \frac{M_3}{EI_3} X_2 \end{bmatrix} \quad (9.48)$$

ce qui permet d'énoncer les conditions de validité de la solution précédente :

$$\left| \frac{M_3}{EI_3} X_1 \right| \ll 1 \implies \left| \frac{M_3}{EI_3} L \right| \ll 1 \quad (9.49)$$

$$\left| \frac{M_3}{EI_3} X_2 \right| \ll 1 \implies \left| \frac{M_3}{EI_3} t \right| \ll 1 \quad (9.50)$$

où t est la plus grande largeur de la section de la barre.

Les sections droites restent droites

Pour étudier en détail la déformée de la barre, on rappelle la relation entre les positions initiales et actuelles des points matériels :

$$x_i = X_i + u_i$$

Suivons par exemple une section de la barre de cote $X_1 = X_0$. D'après (9.47), les déplacements des points de cette section valent

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{M_3}{EI_3} X_0 X_2 \\ u_2 = \frac{M_3}{EI_3} \left(\frac{X_0^2}{2} + \nu \frac{X_2^2 - X_3^2}{2} \right) \\ u_3 = \frac{M_3}{EI_3} X_2 X_3 \end{cases} \quad (9.51)$$

La position x_1 actuelle vaut donc

$$x_1 = X_0 + u_1 = X_0 - \frac{M_3}{EI_3} X_0 X_2 = X_0 - \frac{M_3}{EI_3} X_0 x_2 + \left(\frac{M_3}{EI_3} \right)^2 \left(\frac{X_0^2}{2} + \nu \frac{X_2^2 - X_3^2}{2} \right) X_0$$

où l'on a remplacé X_2 par $x_2 - u_2$. Le facteur de X_0 dans le dernier terme de l'expression précédente est d'un ordre inférieur à $M_3 x_2 / EI$ en vertu des conditions (9.50). Il peut donc être négligé devant

les deux premiers termes. En conséquence on a la relation suivante entre les coordonnées actuelles des points de la section :

$$x_1 = X_0 - \frac{M_3}{EI_3} X_0 x_2 \quad (9.52)$$

Il s'agit d'une relation linéaire entre x_1 et x_2 , indépendante de x_3 . On reconnaît l'équation d'un plan contenant l'axe \underline{e}_3 . Les points matériels initialement dans la section $X_1 = X_0$ restent donc dans un plan qui a en fait tourné de $\frac{M_3}{EI_3} X_0 = -\omega_{12}$ par rapport à l'axe \underline{e}_3 . Le fait que les sections courantes restent droites se voit sur la figure 9.6.

Par contre, la section ne garde pas sa forme initiale dans le plan. La figure 9.7(f) montre qu'une section initialement carrée ne le reste pas. Cela est dû au fait que les fibres matérielles en traction se contractent latéralement tandis que celles en compression se dilatent latéralement. La figure 9.7(e) montre le champ de déplacement u_3 illustrant ce phénomène. Ce fait est bien connu intuitivement, il suffit de fléchir une gomme et d'observer que la surface perpendiculaire à \underline{e}_2 , initialement plane, s'incurve au cours de la déformation.

Identification de la fibre neutre avec un arc de cercle

Dans une barre en flexion pure, le plan normal à \underline{e}_2 passant par les centres d'inertie des sections ne subit aucune contrainte, d'après (9.42). On appelle fibre neutre ou fibre moyenne, la ligne matérielle $X_2 = X_3 = 0$ et l'on étudie ici sa déformée. D'après les déplacements (9.47), les coordonnées actuelles des points de la fibre neutre vérifient

$$x_2 = \frac{x_1^2}{2R}, \quad \text{avec} \quad R = \frac{EI_3}{M_3} \quad (9.53)$$

Il s'agit d'une parabole (que l'on voit sur la figure 9.6). Au passage, la formule (9.53)₂ fait apparaître la **rigidité de flexion** EI_3 qui relie le moment imposé M_3 à la courbure $1/R$ de la parabole en son sommet. Le rapport

$$\frac{x_2}{R} = \frac{x_1^2}{2R^2} \sim \left(\frac{M_3}{EI_3} x_1 \right)^2$$

est un infiniment petit d'ordre $\mathcal{O}(h^2)$ d'après (9.48). L'équation de la déformée de la fibre moyenne est donc tout aussi bien

$$\frac{x_2}{R} = \frac{x_1^2}{2R^2} + \frac{x_2^2}{2R^2}, \quad \text{i.e.} \quad \frac{x_1^2}{R^2} + \left(\frac{x_2 - R}{R} \right)^2 = 1 \quad (9.54)$$

puisque la correction x_2^2/R^2 , ajoutée au second membre de (9.53), est d'ordre $\mathcal{O}(h^4)$. Dans le contexte infinitésimal, les termes $x_1^2/2R^2$ et $x_1^2/2R^2 + x_2^2/2R^2$ sont **indiscernables**. La relation (9.54) est l'équation d'un cercle de rayon R . Il s'agit du cercle osculateur en $x_1 = 0$ à la parabole précédemment définie. Dans le contexte infinitésimal, la parabole et son cercle osculateur sont indiscernables. Quel est l'intérêt de considérer la forme circulaire tout autant que la forme parabolique mise en évidence ? Simplement parce que l'indépendance des champs de déformations et de contraintes vis-à-vis de la variable X_1 fait que toutes les sections sont équivalentes et qu'il n'y a en fait pas de raison de privilégier la section à $x_1 = 0$ où se situe le sommet de la parabole (9.53). On parle de **flexion circulaire**.

Les sections restent normales à la fibre neutre

La déformée de la section $X_1 = X_0$ est contenue, on l'a vu, dans le plan d'équation (9.52). Le vecteur normal à ce plan à pour coordonnées

$$\left[1 \quad \frac{X_0}{R} \quad 0 \right]^T$$

La fibre moyenne quand à elle devient la parabole (9.53) dont une représentation paramétrique est $\left[x_1 \quad \frac{x_1^2}{2R} \quad 0 \right]^T$. Le vecteur tangent à la fibre moyenne est donc

$$\left[1 \quad \frac{x_1}{R} \quad 0 \right]^T$$

qui coïncide donc avec le vecteur normal à la section déformée, à des termes en $\mathcal{O}(h^2)$ près. Les sections droites restent donc normales à la fibre moyenne au cours de la déformation, c'est une propriété importante de la flexion circulaire. Elle se voit aussi sur la figure 9.6.

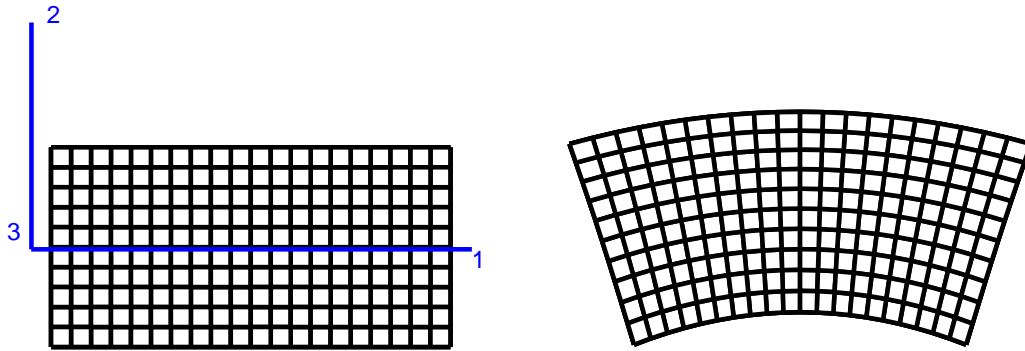


FIGURE 9.6 – Flexion d'une barre cylindrique : vue selon \underline{e}_3 de l'état initial et de l'état déformé. La face observée est munie d'une grille.

9.2.3 Principe de Saint–Venant

Il n'est pas aisé en général d'imposer les conditions aux limites les mieux adaptées au type de sollicitation recherché pour une éprouvette ou une pièce. En traction, par exemple, il est difficile de garantir l'absence d'effort t_1 ou t_2 sur les faces supérieure et inférieure des structures de la figure 9.3. Il est plus simple d'encastrement purement et simplement ces faces et d'appliquer ensuite l'effort axial. La figure 9.5 montre qu'il est malgré tout possible, dans certains cas, de garantir l'existence d'une zone utile au sein de laquelle règne le champ uniforme de traction simple souhaité. Le non respect des conditions aux limites idéales induit des **effets de bord** notables dont on souhaite qu'ils ne viendront pas trop perturber le champ dans la zone utile. De même en flexion, il est difficile d'imposer une rotation aux faces S_0 et S_L de la figure 9.7 et de garantir des efforts t_2 et t_3 nuls. Si l'on encastre à nouveau ces faces, on obtiendra des effets de bord, qui cependant s'estompent assez rapidement pour laisser la place à une zone utile où règne le champ de flexion calculé. C'est une situation que l'on rencontre fréquemment : il n'est pas essentiel de connaître les conditions aux limites précises appliquées à certaines parties (limitées) de la structure étudiée, il suffit de garantir que le torseur des efforts correspond bien à la consigne. L'expérience montre que les efforts de bord induits par la façon d'appliquer ce torseur sont en général à courte portée et ne perturbent pas la solution attendue suffisamment loin des bords. Ce constat a été en fait érigé en véritable

Principe de Saint–Venant. *Si l'on remplace une première distribution d'efforts agissant sur une partie de la frontière $\partial\Omega_{SV} \subset \partial\Omega$, par une seconde distribution agissant sur la même surface, ces deux distributions formant des torseurs égaux, les autres conditions aux limites sur la partie complémentaire de $\partial\Omega$ restant inchangées, alors, dans toute partie de Ω suffisamment éloignée de $\partial\Omega_{SV}$, les champs de contraintes et de déplacements sont pratiquement inchangés.*

Restriction importante, le principe n'est valide que si la surface $\partial\Omega_{SV}$ possède deux longueurs caractéristiques petites devant la longueur caractéristique principale de la structure considérée. Le principe de Saint–Venant est souvent invoqué en mécanique des structures pour bien poser le problème alors même que les conditions aux limites exactes sont inconnues ou difficiles à décrire. Il s'agit en fait d'un théorème dont la démonstration n'est disponible aujourd'hui que pour certains types de structures (poutres, plaques...). Cet énoncé reste une conjecture dans le cas général tridimensionnel. C'est pourquoi le terme principe est utilisé. On trouvera d'ailleurs une formulation mathématiquement plus précise et une démonstration de ce "principe" pour quelques situations dans la référence (Ladevèze, 1983). La clef consiste à établir le caractère **localisé** des perturbations induites par certains types de

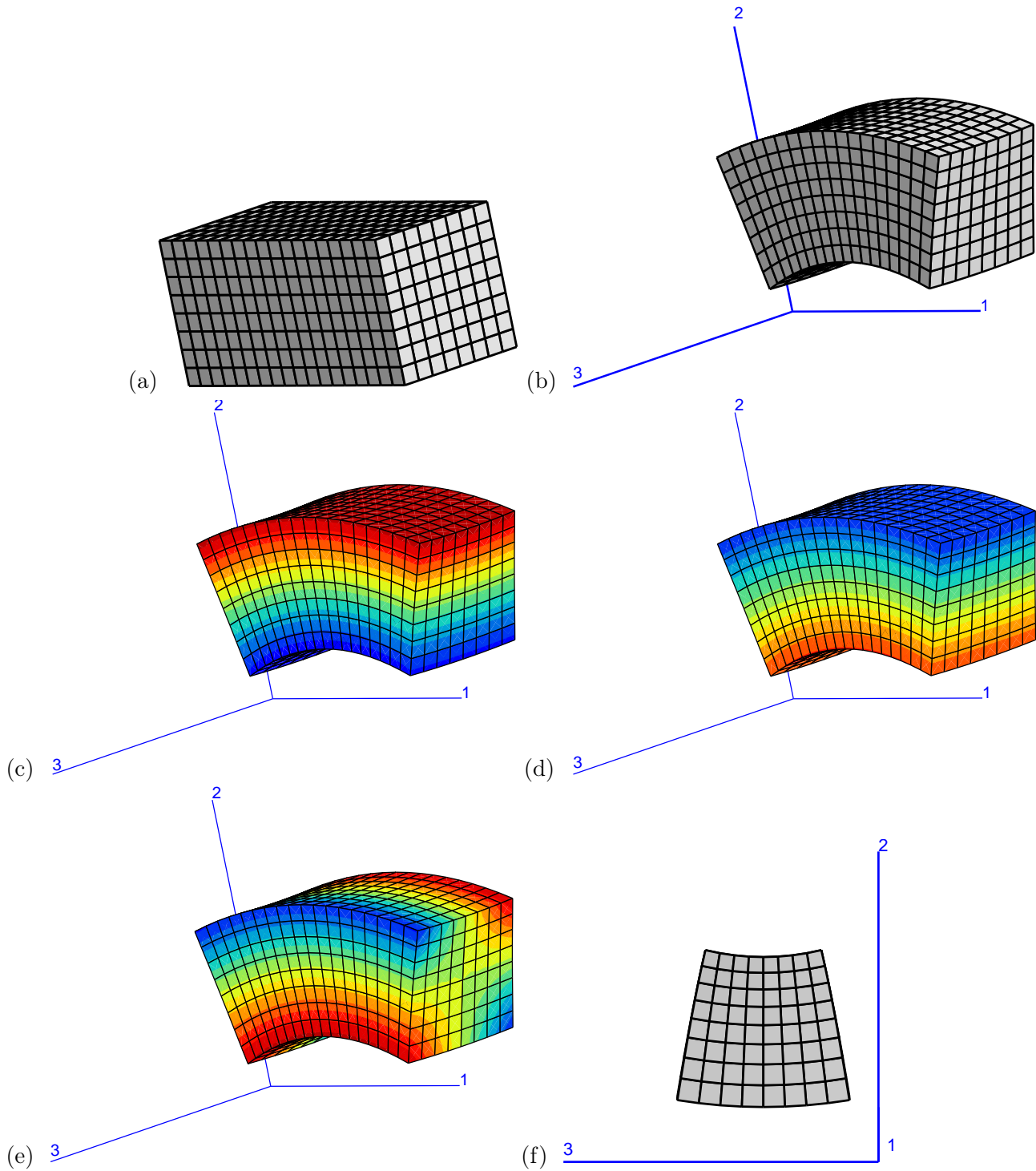


FIGURE 9.7 – Flexion d’une barre à section carrée munie d’une grille sur ses faces extérieures : (a) état initial, (b) état fléchi par rapport à l’axe \underline{e}_3 , (c) champ de contrainte σ_{11} d’après la théorie linéarisée, (d) champ de déformation ϵ_{33} d’après la théorie linéarisée, (e) champ de déplacement u_3 , (f) vue de la déformée d’une section courante (effet “gomme”). La couleur rouge correspond à des valeurs positives, la couleur bleue à des valeurs négatives.

changements de conditions aux limites à torseur constant. Le principe de Saint–Venant doit permettre de déconnecter l’effet intérieur à grande longueur d’onde, des effets locaux à petite longueur d’onde tels que les effets de bord ou d’extrémité. De façon précise, c’est un théorème qui devrait décrire la nature des conditions aux limites assurant la localisation du champ de contrainte ou de déplacement. Il existe en fait un principe de Saint–Venant pour les conditions en efforts imposés et un autre pour

les conditions en déplacement. En effet la localisation des contraintes n'entraîne pas en général la localisation des déplacements. On peut mentionner aussi un théorème important, dit de Toupin, qui montre la décroissance exponentielle de la partie localisée de certaines solutions (Toupin, 1965).

La restriction mentionnée plus haut quant aux dimensions de la surface $\partial\Omega_{SV}$ est essentielle. On peut l'illustrer par un paradoxe qui découlerait d'une utilisation abusive du principe. On considère un cylindre de hauteur H et de section circulaire de rayon R . Une pression uniforme est appliquée sur la surface latérale du cylindre tandis que les faces supérieure et inférieure sont libres d'effort. Il est clair que la résultante des forces sur la surface latérale est nulle. Pour autant, on ne peut en conclure que ce problème a une solution proche de celle correspondant au même cylindre libre de tout effort appliqué, ce qu'une lecture hâtive du principe pourrait suggérer... La raison vient du fait que la surface $\partial\Omega_{SV}$ considérée est d'aire $2\pi RH$ à comparer aux faces πR^2 . Que le disque soit mince $H \ll R$ ou qu'il s'agisse d'une tige $R \ll H$, la surface $\partial\Omega_{SV}$ ne possède qu'une seule longueur caractéristique petite devant R ou H , respectivement, ce qui exclut toute application du principe. Le principe de Saint-Venant est appliqué à un disque en rotation, de manière correcte cette fois-ci, au chapitre 18, page 395. Le principe s'applique sans ambiguïté à une barre de section carrée H^2 et de longueur L lorsque la surface $\partial\Omega_{SV}$ est composée des faces latérales, dès que $H \ll L$.

En pratique, on invoque fréquemment ce principe pour justifier la validité de solutions de nombreux problèmes aux limites tels que la flexion, la torsion, et les chargements combinées, notamment dans certaines structures industrielles. La validité de la solution proposée sera d'autant meilleure qu'on se situe loin des bords où les conditions aux limites sont mal connues.

Adhémar Jean-Claude Barré de Saint-Venant fut un grand mécanicien français professeur à l'Ecole des Ponts et Chaussées dont on a fêté en 1997 les 200 ans de la naissance. En même temps qu'il établissait pour la première fois la solution du problème de torsion des barres prismatiques, il a énoncé la nécessité d'un tel principe dans la référence historique (Saint-Venant, 1853).

9.3 Problèmes bidimensionnels

Dans la résolution pratique des problèmes d'équilibre linéarisés, on cherche à limiter au maximum le nombre d'inconnues à l'aide d'hypothèses simplificatrices qui peuvent être strictement vérifiées pour la situation étudiée ou bien constituer une approximation du problème réel. L'une d'entre elle consiste à considérer que les phénomènes pertinents se passent dans un plan et à écrire des conditions simplifiées pour ce qui se passe dans la troisième direction. On analyse successivement les simplifications apportées par quelques-unes de ces hypothèses. D'autres simplifications sont aussi mentionnées. La démarche de simplification passe par l'analyse des symétries du problème.

9.3.1 Déformations planes

On s'intéresse aux champs de déplacements de la forme

$$[\underline{u}] = [u_1(X_1, X_2), \quad u_2(X_1, X_2), \quad u_3(X_1, X_2) = 0]^T$$

Le champ de déformation correspondant est dit plan et revêt la forme

$$[\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(X_1, X_2) & \varepsilon_{12}(X_1, X_2) & 0 \\ \varepsilon_{12}(X_1, X_2) & \varepsilon_{22}(X_1, X_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.55)$$

En élasticité isotrope, le tenseur des contraintes prend alors la forme suivante

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(X_1, X_2) & \sigma_{12}(X_1, X_2) & 0 \\ \sigma_{12}(X_1, X_2) & \sigma_{22}(X_1, X_2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}(X_1, X_2) \end{bmatrix} \quad (9.56)$$