

Chapitre 14

Déformations libres

On appelle déformation libre un champ de déformations susceptible d'exister en l'absence de toute contrainte : déformation d'origine thermique, de transformation de phases, déformation plastique, d'origine électromagnétique (déformation piézoélectrique, magnétostriction...), etc. Il s'agit alors de champs de déformations compatibles. Ces champs peuvent être homogènes ou hétérogènes comme on va le voir au paragraphe 14.1. Si toutefois les conditions aux limites ou d'interface ne sont pas compatibles avec le développement du champ de déformation libre, des contraintes souvent considérables peuvent apparaître. Un champ de déformation d'origine élastique vient s'y superposer afin de restaurer la compatibilité du champ de déformations totales.

14.1 Compatibilité des déformations d'origine thermique

14.1.1 Déformations infinitésimales d'origine thermique

Dans le contexte infinitésimal, un point matériel élevé à la température T par rapport à l'état de référence T_0 subit une dilatation thermique de la forme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{th} = (T - T_0) \underline{\underline{\alpha}} \quad (14.1)$$

où $\underline{\underline{\alpha}}$ est le tenseur des dilatations thermiques linéarisées autour de T_0 , propriété intrinsèque du matériau. Dans le cas d'un matériau isotrope¹, ce tenseur d'ordre 2 est purement sphérique et ne fait intervenir qu'un seul coefficient de dilatation α :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{th} = \alpha(T - T_0) \underline{\underline{\mathbf{1}}} \quad (14.2)$$

La figure 14.1 illustre le champ de déplacement dans le cas où le champ de température T est homogène. On envisage plus généralement dans ce paragraphe des champs de température $T(\underline{\underline{x}})$ non nécessairement homogènes.

A quelle condition, le champ de déformation d'origine thermique (14.2) est-il compatible ? Autrement dit, quel champ de température peut se développer dans un corps matériel supposé homogène et par ailleurs libre d'effort à sa frontière, sans y engendrer de contraintes ?

1. Reconsidérer l'exercice dans le cas général anisotrope.

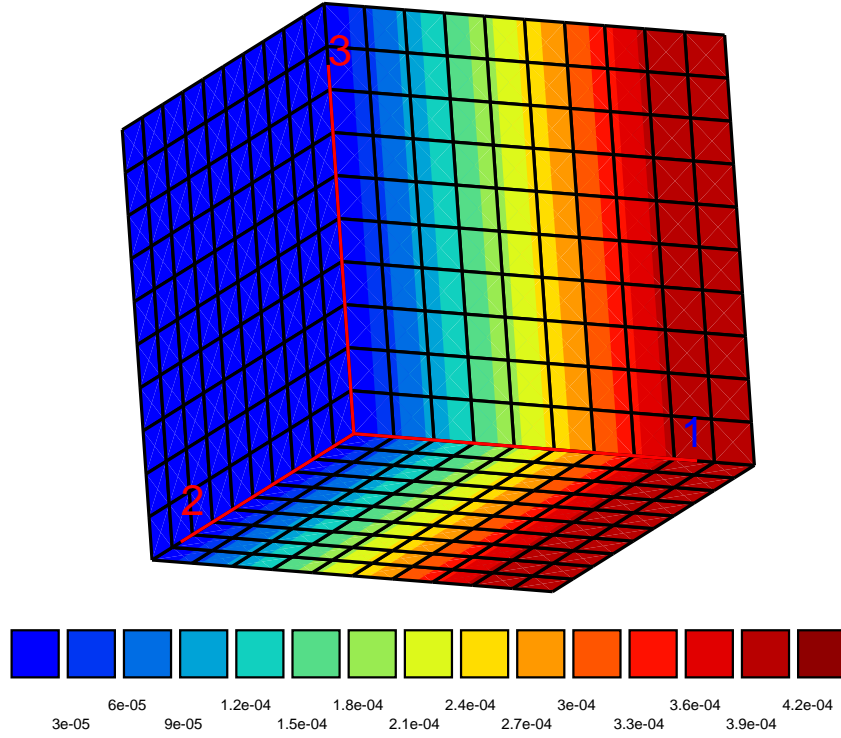


FIGURE 14.1 – Champ de déplacement u_1 dû à une variation de température de 50°C dans un cube d'acier de 1 mm de côté ($\alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$). Les conditions aux limites en déplacement sont telles que la face $x_1 = 0$ ne peut pas se déplacer selon l'axe 1, tandis que le point matériel coïncidant avec l'origine des axes est fixé. De plus, le point de coordonnées $(0, 1, 0)$ ne peut pas se déplacer dans la direction 3. Les faces du cube sont libres d'effort.

Le champ (14.2) où $T(\underline{X})$ est supposé pouvoir varier dans le corps matériel tandis que $\underline{\alpha}$ est considéré comme homogène. On lui applique les conditions de compatibilité (2.143). Elles conduisent au système suivant :

$$\begin{cases} T_{,11} + T_{,22} = 0 \\ T_{,22} + T_{,33} = 0 \\ T_{,33} + T_{,11} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} T_{,12} = 0 \\ T_{,23} = 0 \\ T_{,31} = 0 \end{cases} \quad (14.3)$$

La notation $T_{,1}$ désigne la dérivée partielle de T par rapport à la coordonnée X_1 . La combinaison des équations (14.3)₄ et (14.3)₆, (14.3)₄ et (14.3)₅, puis (14.3)₅ et (14.3)₆ conduit à la dépendance spatiale suivante du champ de température :

$$T_{,1} = a(X_1), \quad T_{,2} = b(X_2), \quad T_{,3} = c(X_3) \quad (14.4)$$

où a , b et c sont trois fonctions à préciser. En substituant ces expressions dans les équations (14.3)₁ à (14.3)₃, on obtient le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} a_{,1} + b_{,2} = 0 \\ b_{,2} + c_{,3} = 0 \\ c_{,3} + a_{,1} = 0 \end{cases} \quad (14.5)$$

La première équation (14.5)₁ signifie que $a_{,1}(X_1) = -b_{,2}(X_2)$ est une constante. Il en va de même pour $c_{,3}$. Le système (14.5) est par conséquent un système linéaire homogène d'inconnues $a_{,1}, b_{,2}, c_{,3}$. Il s'ensuit que :

$$a_{,1} = b_{,2} = c_{,3} = 0 \quad (14.6)$$

La forme du champ de températures conduisant à un champ de dilatation thermique compatible en découle :

$$T = AX_1 + BX_2 + CX_3 + D \quad (14.7)$$

où A, B, C, D sont quatre constantes. Le champ de température est donc affine. Pour un tel champ de température, la déformation d'origine thermique est compatible de sorte que

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^{total} = \underline{\varepsilon}^{th} \quad (14.8)$$

Si les conditions à la frontière du corps matériel ne s'opposent pas aux déplacements qui s'ensuivent, un tel champ existe donc sans contraintes, i.e. sans contribution élastique $\underline{\varepsilon}^e$.

Plus généralement, on montre que tout champ de déformation affine

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{X} + \underline{\varepsilon}_0 \quad (14.9)$$

avec $\underline{\underline{A}}$ tenseur d'ordre 3 constant, est compatible.

14.1.2 Déformée d'un corps soumis à un gradient de température

On étudie en détail la forme que prend un corps matériel soumis à un champ de température affine de la forme (14.7). Le système de coordonnées cartésiennes selon une base orthonormée est choisi de telle sorte que le gradient de température soit selon la direction 3 :

$$\alpha(T - T_0) = AX_3, \quad [\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} AX_3 & 0 & 0 \\ 0 & AX_3 & 0 \\ 0 & 0 & AX_3 \end{bmatrix} \quad (14.10)$$

Si T_1 est la température à l'altitude $X_3 = 0$, et T_2 la température à l'altitude $X_3 = H$, et en prenant la référence $T_0 = T_1$, alors le coefficient A n'est autre que

$$A = \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{H} \quad (14.11)$$

Quel est (sont) le(s) champ(s) de déplacements associé(s) au champ de déformation (14.10) ?

On met en œuvre ici la démarche systématique qui, à partir d'un champ de déformation donné, permet de trouver la famille des déplacements correspondants. La méthode peut sembler fastidieuse mais elle a le mérite de conduire inmanquablement à la famille de solutions cherchée. Toute tentative pour la court-circuiter en "intégrant à vue" peut se solder par une suite de calculs inextricables... La difficulté vient du fait que l'on cherche une famille de champs de vecteur \underline{u} dont le gradient *symétrisé* est égal au champ de déformation $\underline{\varepsilon}$ donné. La tâche serait plus aisée si la donnée du problème était le champ de gradient $\underline{\underline{F}}$ complet.

Le point de départ est le gradient de la rotation infinitésimale qui s'exprime en fonction du gradient de la déformation selon l'expression (2.146) :

$$\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i} \quad (14.12)$$

A partir du champ de déformation $\underline{\varepsilon}$ donné (14.10), on calcule :

$$\begin{aligned} \omega_{12,1} &= 0, & \omega_{23,1} &= 0, & \omega_{31,1} &= -\varepsilon_{11,3} = -A, \\ \omega_{12,2} &= 0, & \omega_{23,2} &= \varepsilon_{22,3} = A, & \omega_{31,2} &= 0, \\ \omega_{12,3} &= 0, & \omega_{23,3} &= 0, & \omega_{31,3} &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\omega_{12} = -r, \quad \omega_{23} = AX_2 - p, \quad \omega_{31} = -AX_3 - q \quad (14.13)$$

où p, q, r sont trois constantes d'intégration.

Le gradient du champ de déplacement est la somme de la déformation infinitésimale $\underline{\varepsilon}$ et de la rotation infinitésimale $\underline{\omega}$:

$$[u_{i,j}] = [\varepsilon_{ij}] + [\omega_{ij}] = \begin{bmatrix} AX_3 & -r & AX_1 + q \\ r & AX_3 & AX_2 - p \\ -AX_1 - q & p - AX_2 & AX_3 \end{bmatrix} \quad (14.14)$$

$$= \begin{bmatrix} AX_3 & 0 & AX_1 \\ 0 & AX_3 & AX_2 \\ -AX_1 & -AX_2 & AX_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \quad (14.15)$$

où l'on a isolé la rotation infinitésimale arbitraire dont le vecteur rotation est $[p, q, r]$. Dans la suite, cette rotation n'est pas écrite par commodité et sera réintroduite dans le résultat final. Il s'agit maintenant d'intégrer le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= AX_3, & u_{2,1} &= 0, & u_{3,1} &= -AX_1 \\ u_{1,2} &= 0, & u_{2,2} &= AX_3, & u_{3,2} &= -AX_2 \\ u_{1,3} &= AX_1, & u_{2,3} &= AX_2, & u_{3,3} &= AX_3 \end{aligned}$$

L'intégration du système précédent conduit au champ de déplacement :

$$u_1 = AX_1X_3 + c_1, \quad u_2 = AX_2X_3 + c_2, \quad u_3 = \frac{A}{2}(-X_1^2 - X_2^2 + X_3^2) + c_3 \quad (14.16)$$

Les constantes c_1, c_2, c_3 désignent une translation arbitraire. Il faut ajouter au champ précédent la rotation infinitésimale arbitraire :

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (14.17)$$

Seules des conditions aux limites précises en déplacement permettent de fixer la translation $[c_1, c_2, c_3]^T$ et la rotation $[p, q, r]^T$.

Les champs de températures, de déformations et de déplacements sont illustrés pour un cube d'acier sur la figure 14.3.

Contexte infinitésimal

Préciser les conditions de validité de la solution précédente dans le contexte infinitésimal. Donner en particulier les gradients de température licites dans le cas d'une barre cylindrique de rayon R et de hauteur H .

Les composantes des tenseurs de déformation $\underline{\varepsilon}$ et de rotation $\underline{\omega}$ doivent rester suffisamment petites. Dans le cas d'une barre cylindrique de rayon R et de hauteur H par exemple, les conditions s'écrivent :

$$|p|, |q|, |r| \ll 1, \quad |AX_3| \leq |AH| \ll 1, \quad |AX_1| \leq |AR| \ll 1 \quad (14.18)$$

Elles impliquent les conditions suivantes sur le gradient de température imposé vis-à-vis de la géométrie de la barre :

$$|\alpha(T_2 - T_1)| \ll 1, \quad |\alpha(T_2 - T_1)| \ll \frac{H}{R} \quad (14.19)$$

Dans le cas d'une barre ou d'une tige (i.e. $R/H \ll 1$), la condition (14.19)₁ est la plus restrictive. Si cette barre est en acier, $\alpha \sim 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, et si des valeurs $|\alpha \Delta T|$ de l'ordre de 0.01 sont visées, alors les variations de température licites peuvent aller jusqu'à $\Delta T \sim 1000^\circ\text{C}$, sans quitter le contexte des transformations infinitésimales.

Dans le cas d'un disque ou plus généralement d'une plaque (i.e. $H/R \ll 1$), la condition (14.19)₂ est la plus restrictive. Prenons par exemple $H/R \sim 0.01$. En tenant compte de (14.19)₂, on doit donc viser des valeurs $|\alpha \Delta T|$ de l'ordre de 0.0001. Si la plaque est en acier, les variations de température licites ne pourront dépasser $\Delta T \sim 10^\circ\text{C}$. Cette situation est beaucoup plus restrictive que le cas de la barre. Cela est dû au fait que, dans le cas d'une plaque mince, des déformations très faibles peuvent s'accompagner de rotations significatives conduisant à de grands déplacements. Le contexte infinitésimal cesse donc d'être valide de manière précoce, comme on l'a déjà fait remarquer à la page 44.

On rappelle toutefois que, même si les conditions (14.19) sont remplies, ce qui garantit que la solution (14.16) est licite, on n'est pas à l'abri d'instabilités que seules des analyses sortant du contexte infinitésimal permettent de prévoir.

Déformée d'un plan

Que devient le plan $X_3 = 0$ dans le champ de déformation précédent ?

La position actuelle \underline{x} d'un point matériel s'exprime en fonction de sa position initiale et de son déplacement selon :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + u_1 = X_1 + AX_1X_3 \\ x_2 = X_2 + u_2 = X_2 + AX_2X_3 \\ x_3 = X_3 + u_3 = X_3 + \frac{A}{2}(X_3^2 - X_1^2 - X_2^2) \end{cases} \quad (14.20)$$

Les points situés initialement sur le plan d'équation $X_3 = 0$ se transforment donc en

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = -\frac{A}{2}(X_1^2 + X_2^2) \end{cases} \quad (14.21)$$

Ils se trouvent donc sur la surface d'équation

$$x_3 + \frac{A}{2}(x_1^2 + x_2^2) = 0 \quad (14.22)$$

Il s'agit de l'équation d'un **paraboloïde de révolution** d'axe 3. Une coupe de ce paraboloïde par le plan $X_2 = 0$ est visible sur la figure 14.2.

Dans le contexte infinitésimal, les termes $|AX_1|$ et $|AX_2|$, ou de manière équivalente $|Ax_1|$ et $|Ax_2|$, sont des infiniment petits d'ordre $\mathcal{O}(h)$ (cf. équation (14.18)). En réécrivant l'équation (14.22) sous la forme

$$Ax_3 + \frac{1}{2}((Ax_1)^2 + (Ax_2)^2) = 0$$

on voit que le terme $|Ax_3|$ est de l'ordre $\mathcal{O}(h^2)$. Par conséquent, l'équation de la déformée du plan initial $X_3 = 0$ est tout aussi bien

$$Ax_3 + \frac{1}{2}((Ax_1)^2 + (Ax_2)^2 + (Ax_3)^2) = 0 \quad (14.23)$$

puisque la correction ajoutée $(Ax_3)^2$ est d'ordre $\mathcal{O}(h^4)$, i.e. de deux ordres inférieure aux termes de l'expression initiale. Dans le contexte infinitésimal, le paraboloïde est alors **indiscernable** de sa sphère osculatrice d'équation (14.23). Le rayon de la sphère et, de manière équivalente, le rayon de courbure minimal du paraboloïde est $1/A$. Son centre a pour coordonnées $[0, 0, -1/A]$. Remarquer que le contexte

infinitésimal via la condition (14.18) exige que le rayon de courbure de la déformée soit significativement plus grand que R :

$$R \ll \frac{1}{|A|}$$

Des conclusions similaires peuvent être tirées pour des plans de cote initiale $X_3 \neq 0$. La transformée de ces plans est visible sur la figure 14.2.

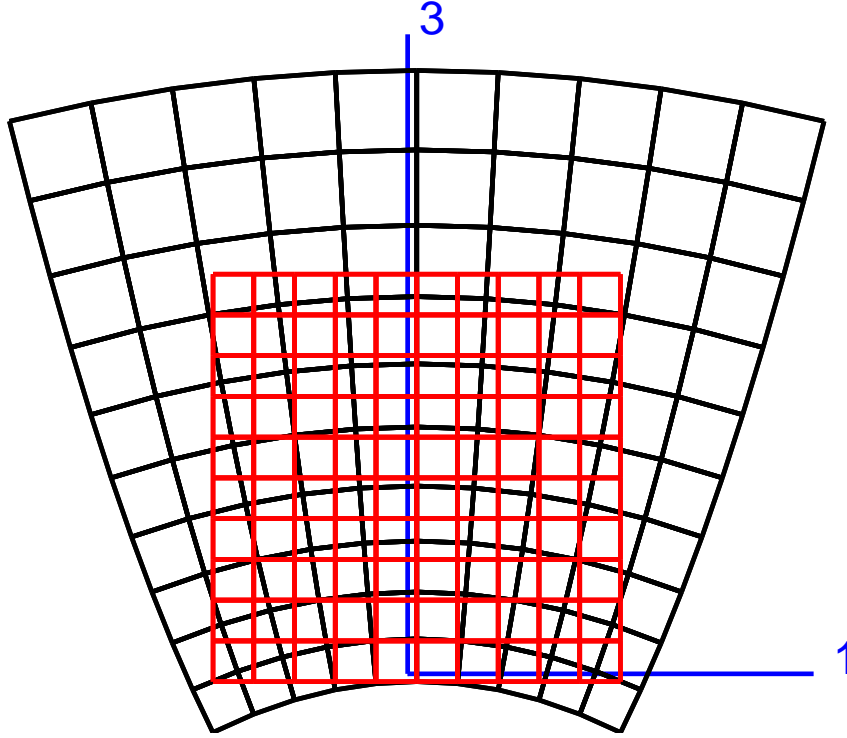


FIGURE 14.2 – Déformée d'un carré d'acier de côté 1 mm soumis à un gradient constant de température de 100°C : $T = 0^\circ\text{C}$ sur la face $X_3 = 0$ et $T = 100^\circ\text{C}$ sur la face $X_3 = 1$. Le coefficient de dilatation est $\alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Les déplacements sont amplifiés d'un facteur 1000 pour l'illustration. Le carré rouge représente l'état initial. Le carré déformé est en noir. Les axes sont en bleu. Cette figure s'obtient en considérant la coupe $X_2 = 0$ du cube de la figure 14.3.

14.2 Effet bilame

Les composants constitués de plusieurs couches de matériaux différents sont très fréquents dans les systèmes électromécaniques ou microélectroniques. La connaissance de leurs propriétés mécaniques est essentielle afin de leur garantir une durée de vie suffisante et d'éviter l'apparition de défauts. Ces composants sont souvent le siège de contraintes d'origine thermique dues à la différence de propriétés thermoélastiques des matériaux utilisés. On envisage ici le cas élémentaire du bilame constitué de deux couches possédant des coefficients de dilatation distincts. L'objet des sections 14.2 et 14.3 est de mettre en évidence l'effet bilame de manière quantitative et d'en déduire ensuite quelques conséquences dans le domaine des composants électroniques (microprocesseurs, etc.).

On considère une plaque composée de deux couches de matériaux différents. La géométrie de la plaque est engendrée par translation le long d'un axe OX_3 à partir d'une surface plane S dont le contour extérieur est de forme quelconque. L'épaisseur de la plaque obtenue est supposée significativement plus petite que les deux autres dimensions caractéristiques.

Le repérage est cartésien orthonormé. Une vue en perspective et une section OX_1OX_3 du bicouche font l'objet de la figure 14.4. La couche inférieure constitue le substrat, d'épaisseur h_s . Il est recouvert d'une

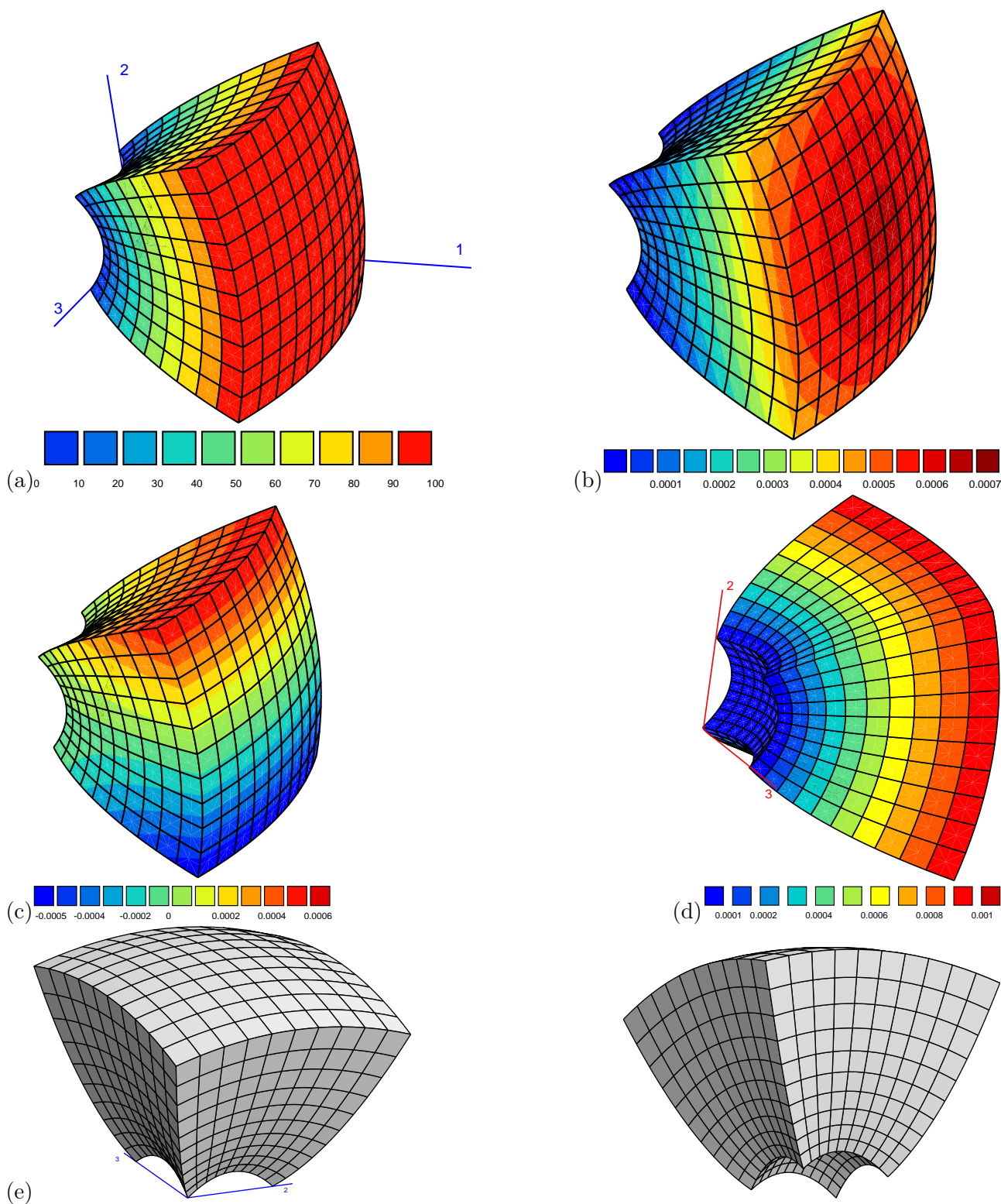


FIGURE 14.3 – Cube d’acier de côté 1 mm soumis à un gradient constant de température de 100°C : $T = 0^\circ\text{C}$ sur la face $x_1 = 0$ et $T = 100^\circ\text{C}$ sur la face $x_1 = 1$. Le coefficient de dilatation est $\alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Les déplacements sont amplifiés d’un facteur 2000 pour l’illustration. Les faces du cube sont libres d’effort. Les champs représentés sont : (a) le champ de température, (b) le champ de déplacement u_1 , (c) le champ de déplacement u_2 , (d) le champ de déformation ε_{11} , (e) deux vues de la déformée.

couche ou film d’épaisseur h_f . L’épaisseur totale de la plaque est $h = h_s + h_f$. Conformément au système