Physique Statistique : Petite classe n°4
Gaz de Bose et de Fermi

1 Le gaz de bosons bidimensionnel

On considère un gaz de bosons confinés dans une boîte bidimensionnelle de taille $S = L_x \times L_y$. Ces bosons ont un spin nul et une masse m, et sont sans interaction entre eux. On suppose par ailleurs que ce gaz de bosons est à une température T fixée.

1. Calculer la densité d'états d'énergie pour des particules quantiques de masse m confinées dans cette boîte. Quel est l'espacement typique entre niveaux d'énergie ? À quelle condition sur la température peut-on considérer que l'on a affaire à une densité d'états continue ? (On prendra comme masse celle d'un atome d'hélium 4).

2. Dans la réalité, ce gaz n'est pas absolument bidimensionnel, mais est confiné dans une très faible épaisseur ε dans la troisième dimension. À quelle condition liant la température et l'épaisseur ε peut-on considérer qu'il s'agit d'un gaz bidimensionnel ?

3. On conserve l'hypothèse bidimensionnelle. Exprimer la relation entre le potentiel chimique μ et le nombre de bosons N dans le système. On introduira notamment $\Lambda_{\text{th}} = \left(\hbar^2\beta/2m\right)^{1/2}$. Que représente cette quantité ?

4. Comment évolue le potentiel chimique lorsque la température tend vers 0 ? Le nombre de bosons, vu comme une fonction de μ, est-il borné supérieurement ? Comparer avec le cas tridimensionnel vu en cours.

5. Peut-on observer une condensation de Bose-Einstein dans un gaz bidimensionnel de bosons ?

2 Semiconducteur à impuretés

On modélise un semiconducteur à impuretés de la manière suivante :

— Les seuls électrons « libres » sont fournis par les impuretés (appelées « donneurs »). Le cristal pur est isolant.

— Un électron peut toutefois être piégé par une impureté et donc ne plus contribuer à la conduction. Au zéro absolu, **tous les électrons sont piégés**.

— Le zéro des énergies est celui des énergies cinétiques des électrons libres. Avec cette convention, l'énergie individuelle d'un électron piégé est **négative** et vaut $-E_d$ avec $E_d > 0$.

— Le nombre total d'électrons N se décompose en N_p électrons piégés et $N_\ell = N - N_p$ électrons libres. On suppose $E_d \gg k_B T$ à température ordinaire ; on a donc $N_\ell \ll N$. On désigne par μ le potentiel chimique des électrons ; l'un des buts de l'exercice est de calculer μ qui **n'a pas** ici la valeur donnée dans le cours pour un système d'électrons tous libres.

1. Donner le nombre moyen N_p d'électrons piégés, en fonction de N, E_d, μ et T. Comment se traduit sur les 3 dernières variables la condition $N_\ell \ll N$?
2. Donner la probabilité d'occupation d'un état « libre » (donc d'énergie $E > 0$) en fonction de E, μ et T. On admettra dans la suite que μ est négatif et satisfait $\exp\left(-\mu/(k_B T)\right) \gg 1$, sous réserve de vérification ultérieure.
3. Si V est le volume du cristal, on rappelle que le nombre d'états [1] « libres » d'énergie comprise entre E et $E + dE$ vaut :

$$g(E)\ dE = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{2m_e^3} \sqrt{E}\ dE\ ,$$

m_e étant la masse de l'électron. Dans l'approximation $\exp\left(-\mu/(k_B T)\right) \gg 1$, montrer que le nombre moyen N_ℓ d'électrons libres vaut :

$$N_\ell = N \left(\frac{k_B T}{E_0}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{\mu}{k_B T}\right) \qquad \text{avec} \qquad E_0 = \frac{\pi \hbar^2}{2m_e} \left(\frac{4N}{V}\right)^{2/3} .$$

On donne l'intégrale définie : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}/2$.

4. Donner une autre expression de N_ℓ à partir de la valeur de N_p calculée en (1). En déduire que :

$$\mu = -\frac{E_d}{2} + \frac{3}{4} k_B T \ln\left(\frac{E_0}{k_B T}\right)$$

et justifier *a posteriori* l'hypothèse sur μ faite en (2).

5. Calculer N_ℓ en fonction de N, E_d, E_0 et T.

---

1. Il s'agit évidemment d'états linéairement indépendants au sens de la mécanique quantique.