

Chapitre 5

Ecoulement des fluides parfaits incompressibles

Un fluide est dit *parfait* si son état de contraintes est décrit, en toute circonstance, par la représentation pression :

$$\underline{\sigma}(\underline{x}, t) = -p(\underline{x}, t) \underline{1} \quad (5.1)$$

où $p(\underline{x}, t)$ est le champ de pression. Un tel fluide est incapable de transmettre un effort tangentiel sur une surface. Si, en outre, ce milieu peut être considéré comme incompressible, c'est-à-dire s'il ne peut subir que des transformations isochores, nous allons montrer que nous sommes en mesure, munis des équations de conservation de la quantité de mouvement, de poser et de résoudre de manière exhaustive un grand nombre de problèmes aux limites pour ces milieux. Ces problèmes, en général non linéaires, de mécanique des fluides sont formulés et résolus dans le cadre de l'approche eulérienne, avec des fonctions vitesses et contraintes du jeu de variables eulériennes (\underline{x}, t) . C'est l'objet de ce court chapitre¹. Cette liaison interne de type isochorie sera traitée dans le cas de comportements plus généraux de la matière au paragraphe 7.4. Les liquides sont quasi-incompressibles² tandis que les gaz peuvent être traités comme incompressibles lorsque de grands volumes et de petites vitesses sont en jeu.

5.1 Equations d'Euler pour les fluides parfaits

Dans le cas des fluides parfaits, la première loi de Cauchy (3.51), équation locale de la dynamique, prend la forme :

$$\rho \underline{a} + \text{grad } p - \rho \underline{f} = 0 \quad (5.2)$$

L'accélération peut également se mettre sous les formes suivantes³ :

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v} \quad (5.3)$$

$$= \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \wedge (\text{rot } \underline{v}) + \frac{1}{2} \text{grad } (\underline{v} \cdot \underline{v}) \quad (5.4)$$

où la définition du rotationnel d'un champ de vecteur est donnée par (A.107). En voici la démonstration, en coordonnées cartésiennes orthonormées et en tenant compte des définitions (2.187) du taux de

1. Le lecteur pourra se référer à une présentation plus complète de cette théorie dans l'ouvrage (Germain, 1986).

2. Plus compressible qu'un acier cependant, du moins aux pressions usuelles ! L'incompressibilité du fluide veut dire que son module de compressibilité est bien (infiniment) plus grand que son module de cisaillement.

3. Le terme dit *de convection* dans l'expression de l'accélération est souvent écrit $(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = v_j v_{i,j} \underline{e}_i$ alors qu'il est noté $(\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v}$ dans ce cours. En suivant les notations de ce cours, $\underline{v} \cdot \nabla = \text{div } \underline{v}$. De même, la définition du rotationnel adoptée dans certains ouvrages est l'opposée de celle retenue ici.

rotation, \underline{W} , du milieu et (2.192) du pseudo-vecteur associé à ce tenseur antisymétrique :

$$\begin{aligned}
 (\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v} &= v_{i,j} v_j \underline{e}_i = ((v_{i,j} - v_{j,i}) v_j + v_{j,i} v_j) \underline{e}_i \\
 &= (2W_{ij} v_j + L_{ji} v_j) \underline{e}_i = -2\epsilon_{ijk} \overset{\times}{W}_k v_j \underline{e}_i + \frac{1}{2} \text{grad } (\underline{v} \cdot \underline{v}) \\
 &= \epsilon_{ijk} (\text{rot } \underline{v})_k v_j \underline{e}_i + \frac{1}{2} \text{grad } (\underline{v} \cdot \underline{v}) \\
 &= \underline{v} \wedge \text{rot } \underline{v} + \frac{1}{2} \text{grad } (\underline{v} \cdot \underline{v})
 \end{aligned}$$

□

Si, en outre, le fluide est incompressible, on a la relation supplémentaire

$$\text{div } \underline{v} = 0 \quad (5.5)$$

en vertu du fait que $\dot{J} = 0$, où J est le jacobien, indiquant que le volume élémentaire ne change pas, et de la relation (2.217). La masse volumique ρ du fluide est alors constante.

Les équations de champ à résoudre sont donc les quatre relations (5.2) et (5.5). Les inconnues du problème sont au nombre de quatre également, à savoir les trois composantes du vecteur-vitesse et le champ de pression. La résolution de ces équations aux dérivées partielles non linéaires exige la définition de conditions aux limites appropriées. On considère souvent les conditions de glissement du fluide parfait le long d'une paroi baignée de fluide :

$$(\underline{v} - \underline{w}) \cdot \underline{n} = 0 \quad (5.6)$$

où \underline{w} est la vitesse du point de la paroi en contact avec le point matériel en \underline{x} à l'instant t et \underline{n} est un vecteur unitaire normal à la surface en ce point. Ces conditions doivent être reconsidérées si l'on s'avise de prendre en compte le capillarité de la surface du fluide ou du caractère hydrophile ou hydrophobe de certaines surfaces, ce que nous ne ferons pas dans ce chapitre.

Les conditions de Neumann

$$\underline{t} = -p\underline{n} = \underline{t}^d \quad (5.7)$$

restent de mise sur les autres contours du domaine matériel étudié. D'autres conditions aux limites sont possibles mais nous nous en tiendrons aux précédentes dans ce chapitre.

5.2 Théorèmes généraux pour les fluides parfaits

5.2.1 Théorème d'Euler

Dans le cas d'un fluide parfait, la première loi d'Euler (3.27) caractérisant la conservation de la quantité de mouvement d'un domaine matériel \mathcal{D}_t prend la forme, en l'absence de discontinuité des vitesses :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) dv = \int_{\mathcal{D}_t} \rho(\underline{x}, t) \underline{f}(\underline{x}, t) dv - \int_{\partial \mathcal{D}_t} p(\underline{x}, t) \underline{n}(\underline{x}, t) ds \quad (5.8)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial \rho \underline{v}}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \rho \underline{v} v_n ds \quad (5.9)$$

d'après la formule de transport de Reynolds (3.93), avec $v_n = \underline{v} \cdot \underline{n}$. On en déduit la relation sur la variation de quantité de mouvement :

$$\int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial \rho \underline{v}}{\partial t} dv = \int_{\mathcal{D}_t} \rho(\underline{x}, t) \underline{f} dv - \int_{\partial \mathcal{D}_t} (p \underline{n}(\underline{x}, t) + \rho \underline{v} v_n) ds \quad (5.10)$$

Dans le cas stationnaire⁴ en l'absence d'efforts de volume, on a donc

$$\int_{\partial \mathcal{D}_t} (p \underline{n}(\underline{x}, t) + \rho \underline{v} v_n) ds = 0$$

4. Attention : *stationnaire* veut dire *permanent*, les dérivées partielles par rapport au temps sont nulles. Cela ne signifie pas que l'accélération est nulle car $d\underline{v}/dt \neq \partial \underline{v}/\partial t$!

Cette expression permet par exemple de calculer l'effort exercé par un fluide sur un obstacle immergé de bord $\partial\mathcal{B}$:

$$\int_{\partial\mathcal{B}} p \underline{n} ds = \int_{\Sigma} (p \underline{n} + \rho \underline{v} v_n) ds$$

où Σ désigne une surface de contrôle entourant une portion de domaine fluide et l'obstacle \mathcal{B} . Plus généralement, on peut calculer le torseur des efforts appliqués à l'obstacle en calculant le torseur associé à $p \underline{n} + \rho \underline{v} v_n$ dont la résultante a déjà été obtenue précédemment.

5.2.2 Théorèmes de Bernoulli

Lorsque que les efforts volumiques dérivent d'un potentiel \mathcal{U} , comme c'est le cas des forces de gravitation,

$$\rho \underline{f} = -\rho \text{grad } \mathcal{U} \quad (5.11)$$

le champ d'accélération d'un fluide parfait incompressible dérive alors lui aussi du potentiel :

$$\underline{a} = -\text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \mathcal{U} \right) \quad (5.12)$$

ou de manière équivalente

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \wedge \text{rot } \underline{v} + \text{grad } \mathcal{H} = 0, \quad \text{avec } \mathcal{H} = \frac{p}{\rho} + \mathcal{U} + \frac{v^2}{2} \quad (5.13)$$

On a alors le

Théorème 13 (Premier théorème de Bernoulli) *Dans un écoulement stationnaire d'un fluide parfait incompressible soumis à des efforts massiques dérivant d'un potentiel, la quantité $\mathcal{H} = \frac{p}{\rho} + \mathcal{U} + \frac{v^2}{2}$ est constante le long des lignes de courant et trajectoires.*

Preuve. En effet,

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \text{grad } \mathcal{H} \cdot \underline{v} = 0$$

car les champs sont stationnaires et $\text{grad } \mathcal{H}$ est alors perpendiculaire à \underline{v} d'après (5.13). Bien noter que la constante dépend de la ligne de courant ou de la trajectoire choisie. On rappelle que les lignes de courant, tangentes au champ des vitesses, coïncident, dans le cas stationnaire, avec les trajectoires des particules matérielles. \square

Si l'écoulement est **irrotationnel**, alors le champ de vitesse lui-même dérive d'un potentiel $\phi(\underline{x}, t)$:

$$\text{rot } \underline{v} = 0 \implies \underline{v} = \text{grad } \phi \quad (5.14)$$

L'existence du potentiel résulte du théorème 30 dit de Poincaré (voir annexe A). Les potentiels possibles diffèrent d'une fonction du temps. Si le fluide est incompressible et l'écoulement est irrotationnel, alors le potentiel des vitesses est une fonction harmonique des variables d'espace :

$$\text{div } \underline{v} = 0 = \text{div grad } \phi = \Delta \phi \quad (5.15)$$

On a le

Théorème 14 (Second théorème de Bernoulli) *Dans un écoulement irrotationnel d'un fluide parfait incompressible soumis à des efforts massiques dérivant d'un potentiel, la quantité $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{H} = C(t)$ est uniforme dans toute composante connexe du domaine occupé par le fluide, $C(t)$ est une fonction dépendant au plus du temps t . Si, en outre, l'écoulement est stationnaire, alors la quantité \mathcal{H} est uniforme et constante.*

Preuve. En effet, d'après (5.13), pour un fluide parfait incompressible dans un champ de forces dérivant d'un potentiel, on a

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad } \mathcal{H} = 0 = \text{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{H} \right) \implies \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{H} = C(t)$$

Si, en outre, l'écoulement est stationnaire, le potentiel ϕ ne dépend pas du temps et \mathcal{H} est une constante uniforme dans chaque composante connexe du domaine fluide. \square

Dans le cas simple d'un écoulement stationnaire ($\partial \underline{v} / \partial t = 0$) et irrotationnel pour lequel les efforts massiques sont négligeables ($\mathcal{U} = 0$), le champ de pression est lié à la vitesse par

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_0$$

où p_0 est la *pression d'arrêt* en un point, s'il en existe, dont la vitesse est nulle. La quantité $p + \frac{1}{2} \rho v^2$ est appelée *pression dynamique*.

5.3 Écoulements plans irrotationnels : potentiel complexe

Dans le cas d'un écoulement plan (x, y) , on note $u = v_1$ et $v = v_2$ les composantes du vecteur vitesse. Si l'écoulement est irrotationnel, on a vu qu'il existe un potentiel $\phi(x, y)$ tel que

$$\text{rot } \underline{v} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \implies \exists \phi \text{ tel que } u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (5.16)$$

Si le fluide est incompressible, il existe d'autre part une *fonction de courant* ψ telle que

$$\text{div } \underline{v} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \implies \exists \psi \text{ tel que } u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5.17)$$

En effet, la condition $\partial u / \partial x = -\partial v / \partial y$ implique que la forme $u dy - v dx$ est une différentielle exacte $d\psi$. Les lignes de courant correspondent, à chaque instant t , aux lignes $\psi = C \text{ste}$.

Si le fluide est incompressible ET l'écoulement irrotationnel, alors les fonctions ϕ et ψ sont harmoniques :

$$\text{div } \underline{v} = \text{div grad } \phi = \Delta \phi = 0 \quad (5.18)$$

$$\text{rot } \underline{v} = -2 \underline{W}^\times = \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \underline{e}_3 = (\Delta \psi) \underline{e}_3 = 0 \implies \Delta \psi = 0 \quad (5.19)$$

Il est commode, dans ce cas, de recourir à la théorie des fonctions de la variable complexe en introduisant la position

$$z = x + iy$$

et le potentiel complexe

$$f(z, t) = \phi(z, t) + i\psi(z, t) \quad (5.20)$$

avec les fonctions réelles ϕ, ψ harmoniques. Cette fonction à variable complexe vérifie les conditions dites de Cauchy–Riemann :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5.21)$$

qui garantissent que f est différentiable par rapport à z au sens des fonctions *holomorphes* de la théorie des fonctions d'une variable complexe (Maisonneuve, 2013b). La dérivée de f par rapport à z est

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} = u - iv \quad (5.22)$$

est appelée *vitesse complexe*.

En guise d'exemples, on considère les potentiels complexes suivants :

- Le potentiel linéaire

$$f(z) = V_0 \exp(-i\alpha)z$$

correspond à un champ de vitesse constant de norme V_0 et dans la direction d'angle $\alpha \in \mathbb{R}$. On vérifie aisément que cette fonction est holomorphe, c'est-à-dire qu'elle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann (5.21) : $\phi = V_0(\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y)$, $\psi = V_0(-\sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y)$.

- Le potentiel logarithmique

$$f(z) = \frac{\epsilon D}{2\pi} \log z \quad (5.23)$$

correspond à un écoulement radial de source ($\epsilon = 1$) ou de puits ($\epsilon = -1$) de débit D . En effet,

$$f'(z) = \frac{\epsilon D}{2\pi z} \implies u = \frac{\epsilon D \cos \theta}{2\pi r}, v = \frac{\epsilon D \sin \theta}{2\pi r}, \quad \underline{v} = \frac{\epsilon D}{2\pi r} \underline{e}_r$$

- Le potentiel logarithmique

$$f(z) = -i \frac{\epsilon \Gamma}{2\pi} \log z \quad (5.24)$$

correspond à un *tourbillon* centré en O de circulation $\epsilon \Gamma$. En effet,

$$f'(z) = -i \frac{\epsilon \Gamma}{2\pi z} \implies u = -\frac{\epsilon \Gamma \sin \theta}{2\pi r}, v = \frac{\epsilon \Gamma \cos \theta}{2\pi r}, \quad \underline{v} = \frac{\epsilon \Gamma}{2\pi r} \underline{e}_\theta$$

Ce champ est étudié en détail au chapitre 13, voir en particulier la définition (13.6) de la circulation du champ de vitesses autour du centre du tourbillon.

- Le *doublet* plan d'axe Ox est obtenu avec

$$f(z) = -\frac{K}{2\pi z} \quad (5.25)$$

et fait l'objet du paragraphe 5.4 suivant. Le caractère holomorphe de la fonction $1/z$ se vérifie en montrant que les parties réelle et imaginaire sont : $\phi = x/(x^2 + y^2)$, $\psi = -y/(x^2 + y^2)$, qui sont des fonctions harmoniques vérifiant les conditions (5.21).

Les champs de vitesses associés à ces potentiels sont illustrés par la figure 5.1.

5.4 Application à l'écoulement autour d'un cylindre

On considère un cylindre de section circulaire de rayon R immergé dans un fluide parfait incompressible⁵. Le champ des vitesses stationnaire du fluide est donné par ses composantes cartésiennes dans un repère (O, x, y) dont l'origine est le centre de la section du cylindre

$$u = v_1 = V_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \cos(2\theta)\right), \quad v = v_2 = -V_0 \frac{R^2}{r^2} \sin(2\theta), \quad \forall r \geq R \quad (5.26)$$

Noter que les composantes cartésiennes sont traitées comme des fonctions des coordonnées polaires (r, θ) . C'est une pratique assez usuelle dans la résolution de certains problèmes plans. L'écoulement est plan dans le sens où $v_3 = 0$.

Le cylindre est fixe dans le référentiel considéré tandis que, loin du cylindre, le fluide s'écoule à la vitesse V_0 dans la direction Ox . Sur le bord du cylindre, on calcule

$$\underline{v} \cdot \underline{n} = V_0 ((1 - \cos(2\theta)) \cos \theta - \sin(2\theta) \sin \theta) = V_0 (\cos \theta - (\cos(2\theta) \cos \theta + \sin(2\theta) \sin \theta)) = 0$$

Les conditions de glissement autour du cylindre sont donc respectées.

Il faudrait vérifier également que $\operatorname{div} \underline{v} = 0$ et $\operatorname{rot} \underline{v} = 0$, ce qui n'est pas très commode. On préfère recourir au potentiel complexe associé à ce champ de vitesse :

$$f(z) = V_0 \left(z + \frac{R^2}{z}\right) \implies f'(z) = V_0 \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) = V_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \exp(-2i\theta)\right) = V_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \cos(2\theta) + i \frac{R^2}{r^2} \sin(2\theta)\right) \quad (5.27)$$

5. Cet exercice est issu des notes manuscrites de Michel Amestoy.

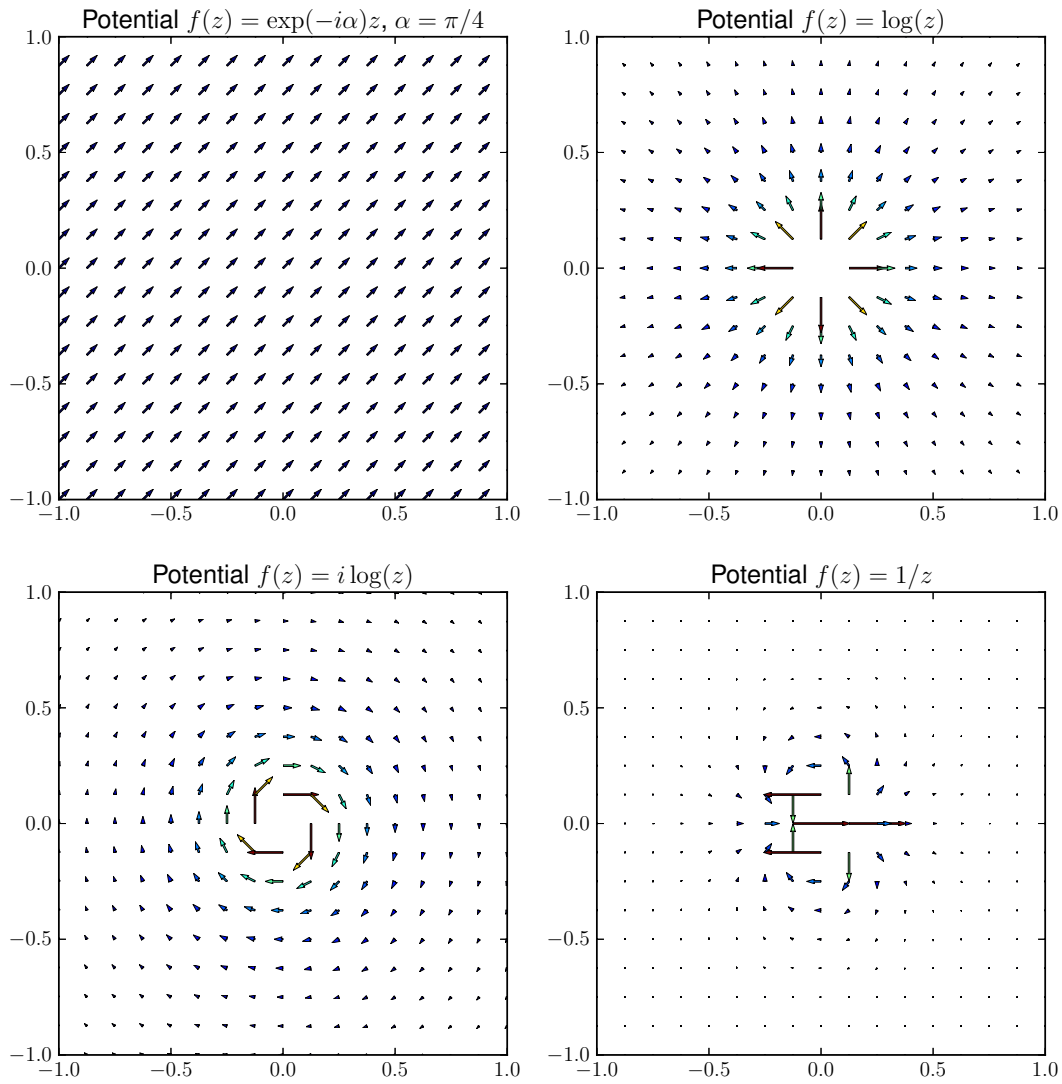


FIGURE 5.1 – Champs des vitesses pour quatre potentiels complexes. Les petits vecteurs indiquent la direction et l'intensité du vecteur-vitesse aux différents points.

ce qui fournit le champ de vitesse (5.26). Cette fonction est holomorphe (propriété vérifiée au paragraphe précédent pour z et $1/z$) de sorte que l'isochorie et le caractère irrotationnel du champ de vitesse sont garantis.

5.4.1 Lignes de courant

Les lignes de courant sont les courbes tangentes au champ du vecteur vitesse. Elles sont solutions des équations

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad (5.28)$$

en coordonnées cartésiennes. On calcule successivement

$$(1 - \frac{R^2}{r^2} \cos(2\theta)) dx_2 + \frac{R^2}{r^2} \sin(2\theta) dx_1 = 0$$

$$dx_2 - \frac{R^2}{r^2} \cos(2\theta) d(r \sin \theta) + \frac{R^2}{r^2} \sin(2\theta) d(r \cos \theta) = dx_2 - R^2 d\left(\frac{\sin \theta}{r}\right) = 0$$

et finalement

$$d(r \sin \theta) - R^2 d\left(\frac{\sin \theta}{r}\right) = 0$$

qui s'intègre explicitement en

$$\sin \theta (r^2 - R^2) = Cr \quad (5.29)$$

où C est une constante⁶. On peut exprimer r en fonction de θ pour tracer le diagramme polaire en résolvant l'équation $r^2 - Cr/\sin \theta - R^2 = 0$, dont la solution positive est

$$\frac{r}{R} = \frac{C}{2R \sin \theta} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4R^2}{C^2} \sin^2 \theta} \right)$$

ou bien le diagramme paramétrique

$$\frac{x}{R} = \cotan \theta \frac{C}{2R} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4R^2}{C^2} \sin^2 \theta} \right), \quad \frac{y}{R} = \frac{C}{2R} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4R^2}{C^2} \sin^2 \theta} \right) \quad (5.30)$$

Les lignes de courant dans le plan sont tracées sur la figure 5.2. On remarque que le champ observé est en accord au moins qualitatif avec les résultats expérimentaux de la figure 5.3. Dans le cas stationnaire, les lignes de courant sont aussi les trajectoires des particules. Notons les cas particuliers

$$C \rightarrow 0 \implies x \rightarrow R \cos \theta, \quad y \rightarrow R \sin \theta$$

Le bord du cylindre, léché par le fluide, est une trajectoire.

$$C \rightarrow \infty \implies x/R \simeq \cotan \theta \frac{C}{R}, \quad \frac{y}{R} \simeq \frac{C}{R}$$

qui est l'équation paramétrique d'une droite horizontale, correspondant au mouvement du fluide loin de l'obstacle. En $\theta \rightarrow \pi$, on a $r \sin \theta = y \simeq C$ et on obtient la trajectoire horizontale aboutissant au point d'arrêt $(-R, 0)$ en faisant tendre $C \rightarrow 0$. On peut le voir aussi en remarquant que $v(\theta = 0, \pi) = 0$ de sorte que x_2 est constant, égal à 0 pour ces valeurs de θ .

Quel est le temps mis par un point matériel en $\theta = \pi$ pour atteindre le point d'arrêt $(-R, 0)$? La vitesse verticale est nulle et la vitesse horizontale vaut

$$u = \frac{dx}{dt} = V_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) = V_0 \left(1 - \frac{R^2}{x^2}\right) \implies V_0 dt = \frac{x^2}{x^2 - R^2} dx$$

dont l'intégration entre $x = x_0 < -R$ et $x = -R$ fournit

$$V_0(t_\infty - t_0) = \int_{x_0}^{-R} \frac{x^2}{x^2 - R^2} dx$$

Cette intégrale se cacule et fait intervenir la fonction $\log \sqrt{(x-R)/(x+R)}$ qui tend vers l'infini lorsque $x \rightarrow -R, x < -R$. Le point matériel met donc un temps infini pour s'arrêter et atteindre le point singulier $(-R, 0)$.

6. On obtient également ce résultat en exprimant la fonction de courant, $\psi = yV_0(1 - R^2/r^2)$ grâce au potentiel complexe $f(z) = V_0(z + R^2/z)$. Les lignes de courant sont les lignes de niveau de ψ .

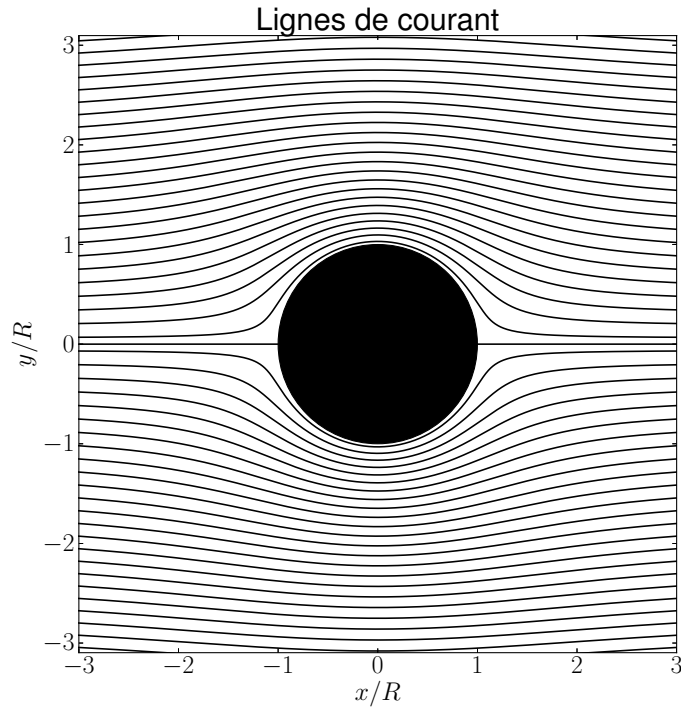


FIGURE 5.2 – Lignes de courant pour un écoulement autour d'un cylindre de rayon R . Les lignes sont tracées dans le plan normalisé $x/R, y/R$.

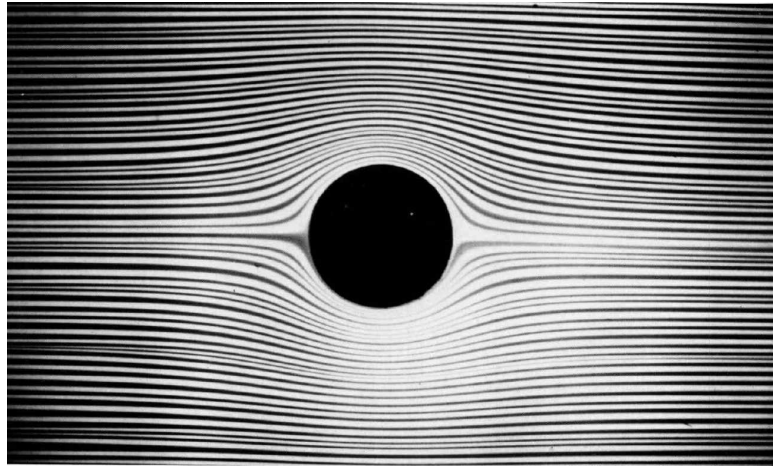


FIGURE 5.3 – Visualisation expérimentale d'un écoulement laminaire autour d'un cylindre, issu de (Van Dyke, 1982). L'écoulement de deux fluides colorés alternés, à une vitesse de 1 mm/s a lieu entre deux plaques de verre espacées de 1 mm.

5.4.2 Lignes de courant et trajectoires dans un autre référentiel

On s'intéresse au changement de référentiel $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$:

$$x' = x - V_0 t, \quad y' = y$$

de sorte que le champ de vitesse mesuré par rapport à ce référentiel s'exprime

$$u' = -V_0 \frac{R^2}{r^2} \cos(2\theta), \quad v' = -V_0 \frac{R^2}{r^2} \sin(2\theta), \quad \forall r \geq R \quad (5.31)$$

où r désigne toujours la distance entre le centre du cylindre et le point considéré, et θ garde la signification précédente, voir figure 5.4. Ce champ de vitesse est nul à l'infini. On peut l'interpréter comme le mouvement d'un cylindre animé de la vitesse V_0 dans un fluide au repos, situation d'intérêt pratique évident. Cet écoulement n'est pas stationnaire car les fonctions r et θ dépendent de x', y' et du temps explicitement. Les questions de la détermination des lignes de courant et des trajectoires dans \mathcal{R}' sont donc distinctes dans ce cas.

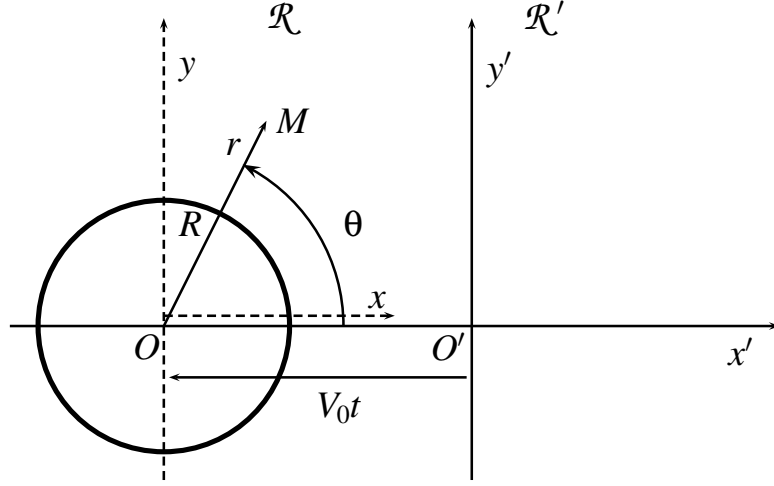


FIGURE 5.4 – Changement de référentiel pour l'observation du mouvement d'un fluide autour d'un cylindre.

Pour la détermination des lignes de courant, on travaille à un instant $t = t_0$ fixé de sorte que $dx' = dx$, $dy' = dy$ et l'équation à résoudre est

$$\frac{dx'}{u'} = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v'} \implies v' dx - u' dy = 0 = R^2 d\left(\frac{\sin \theta}{r}\right)$$

qui s'intègre en

$$\frac{r}{\sin \theta} = C(t_0) = \frac{x^2 + y^2}{y} \iff x^2 - Cy + y^2 = x^2 + \left(y - \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{C^2}{4}$$

Les lignes de courant sont donc des cercles centrés en $x = 0, y = C/2$ et de rayon $C/2$ qui sont par conséquent tangents à l'axe Ox en O . Elles sont représentées sur la figure 5.5 et leur allure justifie la dénomination de doublet correspondant au potentiel complexe $f(z) = V_0 R^2 / z$ du mouvement considéré, cf. équation (5.25). Une validation expérimentale se trouve à la page 12 de l'album (Van Dyke, 1982).

Intéressons-nous maintenant aux trajectoires des points matériels vues du référentiel \mathcal{R}' . Remarquer d'abord que $y' = y$ dans ce référentiel et que par conséquent cette coordonnée de la trajectoire est la même que (5.30)₂, à savoir

$$\frac{y'(t)}{R} = \frac{C}{2R} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4R^2}{C^2} \sin^2 \theta(t)} \right) \quad (5.32)$$

où, cette fois-ci, θ est une fonction de t , on l'a vu. D'autre part,

$$\frac{dx'}{dy'} = \frac{u'}{v'} = \cotan(2\theta) \implies \frac{dx'}{dt} = \cotan(2\theta) \frac{dy'}{dt}$$

On peut effectuer un changement de paramétrage $\theta(t)$ et calculer

$$\frac{dx'}{d\theta} = \cotan(2\theta) \frac{dy'}{d\theta} = \frac{R^2}{C} \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{1 + \frac{4R^2}{C^2} \sin^2 \theta}}$$

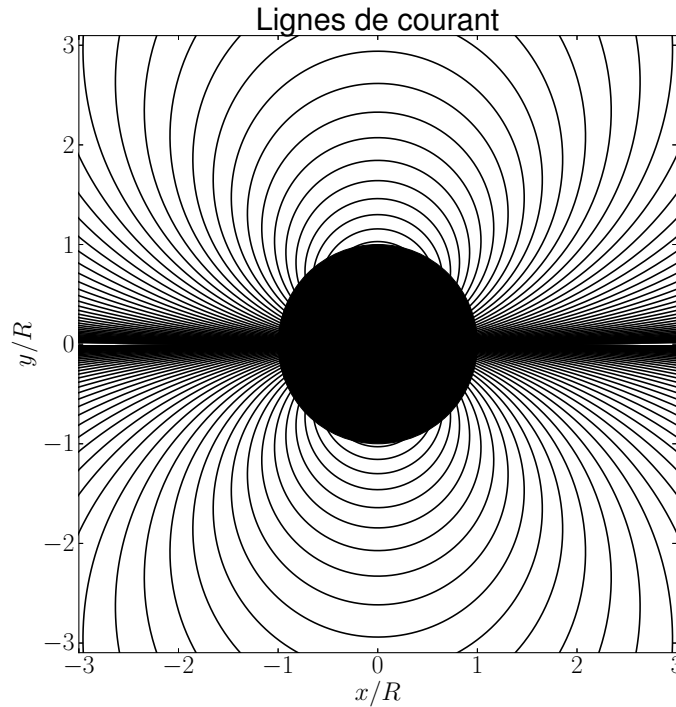


FIGURE 5.5 – Lignes de courant dans un fluide parfait incompressible parcouru par un cylindre animé d'une vitesse horizontale.

On en déduit les équations paramétriques des trajectoires

$$x'(\varphi) = x'_0 + \frac{R^2}{C} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{1 + \frac{4R^2}{C^2} \sin^2 \theta}} d\theta, \quad y'(\varphi) = \frac{C}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4R^2}{C^2} \sin^2 \varphi(t)} \right) \quad (5.33)$$

Le couple de constantes (φ_0, C) est équivalent à la donnée initiale (x'_0, y_0) . En effet, pour $\varphi = \varphi_0$, on a $x' = x_0$ et $y(\varphi_0) = y_0$ où C peut s'exprimer en fonction de y_0 et φ_0 grâce à (5.33)₂.

Lorsque $C \rightarrow 0$, $y' = R \sin \varphi$ et

$$x' - x'_0 = \frac{R}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\cos(2\theta)}{\sin \theta} d\theta = R \left[\cos \theta + \frac{1}{2} \log \left| \tan \frac{\theta}{2} \right| \right]_{\varphi_0}^{\varphi} \quad (5.34)$$

Ce cas limite est illustré sur la figure 5.6 et permet de se faire une idée de la forme de boucle de certaines des trajectoires (5.33) de points assez proches du passage de l'obstacle.

5.4.3 Paradoxe de D'Alembert

On considère à nouveau le point de vue du cylindre au repos dans un écoulement de fluide parfait incompressible animé d'une vitesse V_0 à l'infini et on souhaite calculer l'effort résultant appliqué par le fluide sur le cylindre.

Pour cela on fait appel au second théorème de Bernoulli pour un mouvement stationnaire irrotationnel d'un fluide incompressible. Le théorème stipule que la pression dynamique est constante et uniforme :

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_0 + \frac{1}{2} \rho V_0^2 \quad (5.35)$$

où V_0 et p_0 sont la vitesse et la pression régnant loin du cylindre. En utilisant le champ de vitesse (5.26), on calcule le champ de pression

$$p = p_0 + \frac{\rho}{2} V_0^2 \frac{R^2}{r^2} (2 \cos(2\theta) - \frac{R^2}{r^2}) \quad (5.36)$$

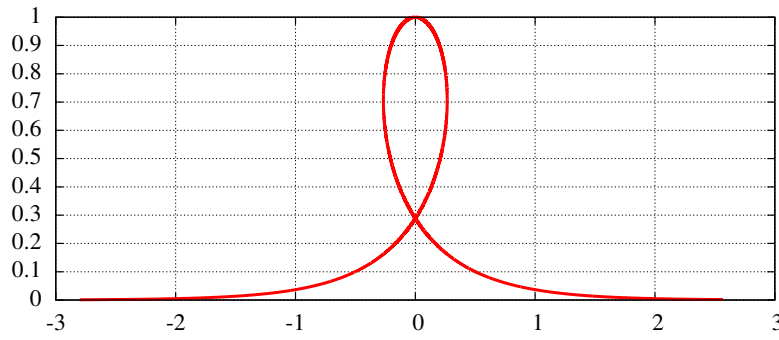


FIGURE 5.6 – Trajectoire limite donnée par (5.34) pour $x_0 = 0$, $\varphi_0 = \pi/2$ et φ variant de 0.001 à π .

Le champ de pression sur le cylindre vaut donc

$$\frac{p - p_0}{\rho V_0^2 / 2} = 2 \cos(2\theta) - 1$$

La résultante des forces appliquées par le fluide sur le cylindre est donc

$$\underline{\mathbf{R}} = \int_{r=R} -p \underline{\mathbf{n}} ds = - \int_{r=R} (p_0 + \frac{\rho}{2} V_0^2 (2 \cos(2\theta) - 1)) \underline{\mathbf{n}} ds = -hR\rho V_0^2 \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) \underline{\mathbf{n}} d\theta$$

où h est la hauteur du cylindre. En particulier la composante horizontale

$$F_1 = -hR\rho V_0^2 \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) \cos \theta d\theta = 0$$

De même, mais on s'y attendait, pour des raisons de symétrie, $F_2 = 0$.

Le fait que la résultant des efforts sur le cylindre est nul est surprenant et constitue le *paradoxe de D'Alembert*. Ce résultat va à l'encontre de l'observation expérimentale immédiate. Il remet en question la validité d'un modèle qui pourtant est en mesure de donner une description cinématique réaliste comme le montre la comparaison des figures 5.2 et 5.3. Il résulte de la symétrie parfaite inattendue du champ de pression à l'amont et à l'aval du cylindre, comme le montre la figure 5.7. Le paradoxe, découvert dès le XVIIIème siècle, a donné lieu à de nombreux développements jusqu'à aujourd'hui pour le résoudre. Il faut pour cela remettre en question les diverses hypothèses qui ont conduit à ce résultat. La viscosité du fluide mérite par exemple d'être considérée, au moins dans une couche limite autour du cylindre comme le fit Prandtl. On peut également considérer la présence d'un sillage à l'aval du cylindre qui brise la symétrie de la solution précédente. Nous reviendrons sur ces points, cf. (Batchelor, 2000).

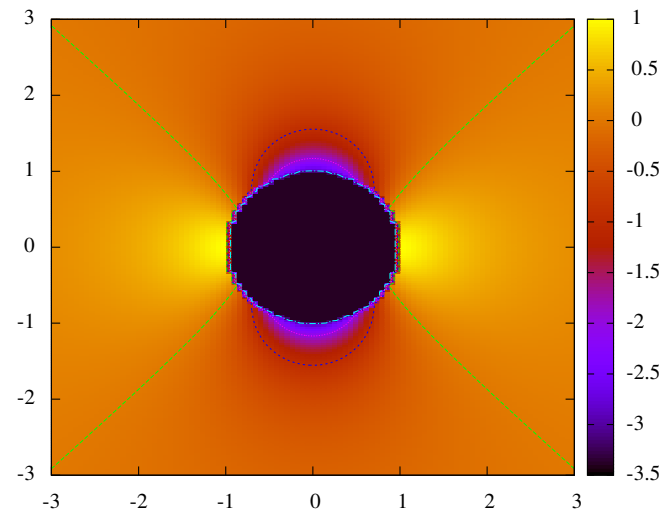


FIGURE 5.7 – Champ de pression normalisé $2(p-p_0)/(\rho V_0^2)$ régnant dans le fluide autour d'un cylindre.

Chapitre 6

Formulation des lois de comportement

En première lecture, le lecteur pourra se contenter de lire la section 6.1 et passer directement au chapitre 7.

6.1 Nécessité des lois de comportement

6.1.1 Décompte des inconnues et des équations

Dans le cas des corps rigides dont le mouvement a été décrit au paragraphe 2.2.7, les inconnues du problème sont au nombre de 6, à savoir 3 degrés de liberté de translation et 3 angles de rotations qui interviennent dans la cinématique (2.52). Les équations à résoudre se résument aux équations d'Euler du mouvement (3.27) et (3.28), à savoir les bilans globaux de quantité de mouvement et de moment cinétique pour un torseur des efforts appliqués donné. Il s'agit de 6 équations qui, en principe, permettent donc de déterminer sans ambiguïté les 6 degrés de liberté cinématiques.

Il en va tout autrement dans le cas des corps déformables. Les équations de champ du problème *mécanique* à résoudre se résument aux bilans locaux de masse et de quantité de mouvement, à savoir une équation scalaire et une équation vectorielle, c'est-à-dire **4 équations** au total. On fait l'économie du bilan de moment cinétique en considérant que la partie antisymétrique du tenseur des contraintes de Cauchy est donnée, et prise à zéro pour simplifier dans la suite (tenseur des contraintes symétrique). Ces équations de la mécanique des milieux continus sont consignées dans la table 3.2 et on ne s'intéresse ici qu'au cas de points réguliers d'un corps Ω . En général, les actions extérieures (forces massiques) \underline{f} sont supposées connues et elles constituent des données du problème. Les inconnues du problème sont donc la masse volumique ρ , la transformation $\Phi(\underline{X}, t)$ et la contrainte $\underline{\sigma}$ en chaque point matériel \underline{X} . Cela représente au total **10 inconnues**¹ scalaires attachées à chaque point matériel (à comparer aux 6 inconnues globales pour les corps rigides!). En l'état le problème est donc mal posé.

On met ainsi en évidence le **problème de fermeture**², omniprésent en théorie physique des champs. Il reste 6 équations de champs à trouver. Il s'agit des équations qui expriment les 6 composantes des contraintes $\underline{\sigma}$ en fonction des inconnues fondamentales du problème que sont la masse volumique, ρ et la transformation Φ . De telles équations ne sont pas universelles. En effet, l'expérience courante nous enseigne qu'un même champ de déplacement linéaire (conduisant donc à une déformation homogène) appliqué à un échantillon en acier ou en caoutchouc ne donne pas lieu aux mêmes efforts internes. Les équations manquantes n'ont donc pas un caractère universel contrairement aux 4 équations de bilan déjà formulées. Elles revêtent une forme différente selon la nature physique de la matière ou du matériau étudié et prennent le nom de **lois de comportement mécanique**³. Il y aura donc des lois de comportement dont la forme et les paramètres associés seront différents pour les métaux, les polymères, les céramiques, les gels et les liquides...

1. Noter que la variation de densité se déduit de la connaissance du champ $\Phi(\underline{X}, t)$.

2. *Closure problem* en anglais.

3. *Constitutive equations* en anglais.