# Physique Quantique
# Corrigé de la petite classe n°4

## 1 Filtres quantiques

*Voir livre, page 249*

1. À la sortie du four, les atomes ne sont pas « préparés » dans un état de spin bien défini. La description relève de la physique statistique quand l'incertitude porte non seulement sur les observables, mais aussi sur l'état du système lui-même (mélange statistique). De ce fait, si l'on place un écran juste derrière SG1 et si l'on fait pivoter SG1 autour de l'axe $Ox$, on trouvera toujours sur l'écran deux taches de même intensité. Le jet d'atomes est polarisé quand on connaît parfaitement leur état de spin. C'est le cas à l'entrée du second appareil de Stern et Gerlach (SG2) puisque seul survit le faisceau correspondant à l'état de $S_z = +\hbar/2$. On dit qu'on a alors un état pur.
2. Les états $|\theta+\rangle$ et $|\theta-\rangle$ sont les états propres de la projection du spin sur la direction de mesure de SG2, soit $S_u = S_z \cos\theta + S_y \sin\theta$. Dans la représentation matricielle où la base est constituée des états propres de $S_z$ (soit $|z+\rangle$ et $|z-\rangle$), la matrice correspondant à $S_u$ s'écrit :

$$\hat{S}_u = \hat{S}_z \cos\theta + \hat{S}_y \sin\theta = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

   Les valeurs propres de la matrice en facteur de $\hbar/2$ valent +1 et -1 (comme pour n'importe quelle matrice de Pauli). Pour la valeur propre +1, le vecteur propre est :

$$|\theta+\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ i\sin(\theta/2) \end{pmatrix} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|z+\rangle + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|z-\rangle$$

   Pour la valeur propre -1, le vecteur propre est :

$$|\theta-\rangle = \begin{pmatrix} i\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix} = i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|z+\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|z-\rangle$$

   On vérifie que ces deux vecteurs sont orthogonaux au sens de l'espace de Hilbert (attention à prendre le complexe conjugué de l'un des vecteurs !). On a normalisé les vecteurs en choisissant la phase de manière que l'on retrouve $|z+\rangle$ et $|z-\rangle$ pour $\theta = 0$.
3. À la sortie de SG2, on observe les impacts des atomes qui, initialement, étaient dans l'état $|z+\rangle$. On ne peut trouver comme états finaux que $|\theta+\rangle$ et $|\theta-\rangle$. On doit alors développer $|z+\rangle$ sur la base de $|\theta+\rangle$ et $|\theta-\rangle$ :

$$|z+\rangle = c_+ |\theta+\rangle + c_- |\theta-\rangle$$

avec $c_+ = \langle \theta + \rangle\, z+ = \cos\theta/2$ et $c_- = \langle \theta - \rangle\, z+ =: -i\sin\theta/2$. Les probabilités correspondantes sont données par :

$$P_+ = |c_+|^2 = \cos^2\theta/2 \qquad \text{et} \qquad P_- = |c_-|^2 = \sin^2\theta/2$$

4. Quand l'angle $\theta$ est nul, on n'observe que la tache supérieure à la sortie de SG2 ; en effet, « la nature ne se dément pas » et on vient de s'assurer avec SG1 et l'absorbeur que les atomes entrant dans SG2 sont dans l'état pur $|z+\rangle$. Quand on fait pivoter SG2 autour de l'axe $Ox$, cette tache diminue d'intensité proportionnellement à $\cos^2\theta/2$, tandis qu'apparaît une seconde tache dont l'intensité croît comme $\sin^2\theta/2$. Les deux taches sont d'égales intensités quand SG2 mesure la direction du spin selon $Oy$. En comparant avec ce que l'on obtiendrait en faisant pivoter SG1 devant un écran, on voit comment distinguer si le faisceau incident est un état pur ou un mélange statistique.
5. L'analogie avec les expériences d'optique en lumière polarisée est frappante : SG1 joue le rôle de polariseur et SG2 le rôle d'analyseur. Le mélange statistique à la sortie du four est l'analogue de la lumière non polarisée et les atomes entrant dans SG2 constituent l'analogue du faisceau de lumière polarisée. Toutefois, le spin du photon est 1 (en unités $\hbar$) et non 1/2, et les intensités en optique varient comme $\cos^2\theta$. Sur le fait qu'il n'y a que 2 états linéairement indépendants de polarisation du photon et non $2S+1=3$, voir le livre p. 242.

# 2 Évolution temporelle d'un état de spin

*Voir livre, page 250.*

1. La partie du hamiltonien qui intervient dans ce problème est celle qui concerne le spin : il faut donc transcrire sous forme d'opérateur l'énergie potentielle magnétique du dipôle $-\vec{M}\cdot\vec{B} = -\gamma\vec{S}\cdot\vec{B}$. Le champ est ici dirigé selon $Oy$, donc cette énergie vaut $-\gamma S_y B$. Dans la représentation où la base est constituée des états propres de $S_z$ (soit $|z+\rangle$ et $|z-\rangle$), la matrice hamiltonienne s'écrit donc :

$$\hat{H} = -\gamma B\hat{S}_y = -\frac{\gamma\hbar B}{2}\hat{\sigma}_y = -\frac{\gamma\hbar B}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$$

L'état de spin à l'instant $t$ est décrit dans la même représentation par le vecteur colonne :

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix}c_+\\ c_-\end{pmatrix} = c_+\,|z+\rangle + c_-\,|z-\rangle$$

L'équation de Schrödinger qui décrit l'évolution du spin s'écrit $\hat{H}\,|\psi\rangle = i\hbar\dfrac{\partial\,|\psi\rangle}{t}$, soit dans la représentation précédente :

$$i\hbar\begin{pmatrix}\dfrac{dc_+}{dt}\\ \dfrac{dc_-}{dt}\end{pmatrix} = -\frac{\gamma\hbar B}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_+\\ c_-\end{pmatrix}$$

ce qui donne deux équations différentielles couplées :

$$\frac{dc_+}{dt} = \frac{\gamma B}{2} c_- \qquad \text{et} \qquad \frac{dc_-}{dt} = -\frac{\gamma B}{2} c_+$$

En posant $\omega = \gamma B/2$, on constate que $c_+$ et $c_-$ satisfont les équations différentielles du second ordre :

$$\frac{d^2 c_+}{dt^2} + \omega^2 c_+ = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2 c_-}{dt^2} + \omega^2 c_- = 0$$

dont la solution correspondant à l'état initial $|\psi\rangle = |z+\rangle$ à $t = 0$, soit $c_+(0) = 1$ et $c_-(0) = 0$, s'écrit :

$$c_+ = \cos(\omega t) \qquad \text{et} \qquad c_- = -\sin(\omega t)$$

Les probabilités correspondantes $P_+(t) = \cos^2(\omega t)$ et $P_-(t) = \sin^2(\omega t)$ s'en déduisent aussitôt. Chaque fois que $t$ vaut un nombre entier de fois $\pi/(2\omega)$, le résultat de la mesure est connu avec certitude.

2. Au temps $t$, l'état de spin est décrit par $\cos(\omega t)\,|z+\rangle - \sin(\omega t)\,|z-\rangle$, soit en notation de vecteur-colonne :

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Il nous faut maintenant exprimer cet état sur la base des états propres de $S_z$. On obtient sans peine ces derniers dans la base des états propres de $S_z$ en diagonalisant

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'on trouve les vecteurs-colonnes :

$$|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad |x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$Q_+ = |\langle x+\rangle\,\psi|^2 = \frac{1}{2}(\cos(\omega t) - \sin(\omega t))^2 = \frac{1}{2}(1 - \sin(2\omega t))$$
$$Q_- = |\langle x-\rangle\,\psi|^2 = \frac{1}{2}(\cos(\omega t) + \sin(\omega t))^2 = \frac{1}{2}(1 + \sin(2\omega t))$$

3. Après la mesure de $S_x$, l'état de spin est $|x+\rangle$. Le problème est le même que celui de la question 1 avec une condition initiale différente. À $\Delta t = 0$, on doit avoir $c_+(0) = c_-(0) = 1/\sqrt{2}$. On obtient donc :

$$c_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\omega \Delta t) + \sin(\omega \Delta t))$$
$$c_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\omega \Delta t) - \sin(\omega \Delta t))$$

La probabilité de trouver l'état $|z+\rangle$ au bout du temps $\Delta t$ vaut donc $|c_+|^2$, soit

$$\frac{1}{2}(1 + \sin(2\omega \Delta t))$$