Physique Quantique : Petite classe n°4

1 Oscillateur harmonique quantique

Écrire le hamiltonien $\hat{H}$ d'un oscillateur harmonique unidimensionnel, de masse m et de période $2\pi/\omega$. La direction du mouvement est prise comme axe Ox ; on appelle x la distance à la position d'équilibre classique et p l'impulsion.

1. Montrer en s'appuyant sur les relations d'Heisenberg que la dispersion de la variable x dans l'état d'énergie minimale est de l'ordre de $\sigma = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$. On va maintenant raisonner sur la variable sans dimension $X = x/\sigma$ et sur l'opérateur différentiel associé $\hat{P} = \frac{1}{i}\frac{d}{dX}$. Mettre l'opérateur $\hat{H}$ sous la forme :
$$\hat{H} = \frac{\Delta E}{2}\left(\hat{P}^2 + \hat{X}^2\right)$$
en précisant la valeur de ΔE. Écrire les relations de commutation des opérateurs $\hat{X}$ et $\hat{P}$.

2. On introduit les opérateurs suivants :
$$\hat{\mathcal{A}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} + i\hat{P}\right) \qquad \text{et} \qquad \hat{\mathcal{A}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} - i\hat{P}\right)$$
qui sont hermitiens conjugués l'un de l'autre. Calculer le commutateur $\left[\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{A}}^\dagger\right]$. Exprimer $\hat{H}$ en fonction de l'opérateur $\hat{N} = \hat{\mathcal{A}}^\dagger\hat{\mathcal{A}}$. Montrer que les valeurs propres de $\hat{N}$ sont positives.

3. Montrer si $|\psi_\nu\rangle$ est état propre de $\hat{N}$ avec la valeur propre ν, alors $\hat{A}\,|\psi_\nu\rangle$ est aussi état propre de $\hat{N}$, avec une valeur propre que l'on précisera. Calculer la norme de $\hat{A}\,|\psi_\nu\rangle$. Quelle est l'action de l'opérateur $\hat{\mathcal{A}}^\dagger$ sur $|\psi_\nu\rangle$? Montrer qu'il doit exister nécessairement une valeur propre nulle. En déduire que ν est nécessairement un entier $n \geq 0$.

4. Quelle est l'énergie E_0 de l'état fondamental $|\psi_0\rangle$ $(n = 0)$? Pourquoi n'est-elle pas nulle ? Calculer l'amplitude de probabilité $\psi_0(X)$ de cet état. Montrer que ce niveau n'est pas dégénéré et qu'il en est de même pour tous les autres. Interpréter physiquement l'opérateur $\hat{N}$.

5. Calculer dans l'état caractérisé par le nombre quantique n les écart-types ΔX et ΔP ; on utilisera pour cela l'action des opérateurs $\hat{\mathcal{A}}$ et $\hat{\mathcal{A}}^\dagger$ sur $\psi_n(X)$. En déduire la valeur du produit des écart-types sur les variables physiques x et p. Montrer que ce produit vérifie les inégalités de Heisenberg et que sa valeur minimale est atteinte pour $n = 0$.

Réflexions à approfondir après la petite classe

— L'énergie minimale n'est pas nulle. Il n'y a pas d'immobilité possible en mécanique quantique. Au zéro absolu, les atomes d'un cristal ne sont pas immobiles ; (cas particulier de l'hélium qui reste liquide sous pression ordinaire aux températures les plus basses).

— Nous retrouvons la méthode de quantification fondée sur l'algèbre des opérateurs (et non sur les conditions aux limites sur la fonction d'onde). Pour l'oscillateur harmonique, cette méthode a été introduite par P. A. M. Dirac.

— L'inégalité de Heisenberg se rapproche de l'égalité pour les états les moins excités (petites valeurs de n). On s'est plusieurs fois servi de cette propriété (en ordre de grandeur seulement) dans le cours.

— **Pour les plus intéressés** : si vous vous reportez au chapitre 3, pages 77 à 79 (partie non traitée dans le cours oral), vous verrez que chaque mode du champ électromagnétique peut être considéré (du point de vue de la formulation hamiltonienne classique) comme un oscillateur harmonique. La quantification du champ se fait selon le schéma de l'exercice précédent : les variables canoniquement conjuguées (au sens de Hamilton) sont décrites par des opérateurs satisfaisant les mêmes relations de commutation que $\hat{x}$ et $\hat{p}$; on peut ainsi introduire de la même façon les opérateurs de destruction ($\hat{\mathcal{A}}$) et ($\hat{\mathcal{A}}^\dagger$). Il y a un opérateur $\hat{\mathcal{A}}$ et un opérateur $\hat{\mathcal{A}}^\dagger$ par mode ; l'opérateur $\hat{N} = \hat{\mathcal{A}}^\dagger\hat{\mathcal{A}}$ (à valeurs propres entières) est l'observable « nombre de photons dans ce mode ». Le vide est l'état fondamental, état propre de tous les $\hat{N}_j$ (j représentant le numéro du mode) avec les valeurs propres nulles.

Cependant, l'énergie du vide vaut $E_{\text{vide}} = \sum_j \hbar\omega_j/2$, et est donc ...infinie. La théorie des champs est en fait incapable de la calculer ; en revanche, on peut toujours calculer la différence d'énergie entre un état quelconque et le vide. Si vous passez des expressions classiques aux expressions opératorielles en remplaçant « complexe conjugué » par « hermitien conjugué », vous vérifiez sur les formules de la page 77 que le champ électrique et le champ magnétique s'expriment sous forme de combinaisons linéaires d'opérateurs $\hat{\mathcal{A}}$ et $\hat{\mathcal{A}}^\dagger$, donc qu'ils ne commutent pas avec les $\hat{N}_j$. En conséquence, le vide n'est pas un état propre du champ ; la valeur moyenne de $\vec{\mathcal{E}}$ (ou de $\vec{\mathcal{B}}$) y est certes nulle, mais non ses fluctuations. Comme $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$ et $\langle \mathcal{B}^2 \rangle$ donnent la densité moyenne d'énergie, on constate que le vide quantique ne correspond pas a priori à une énergie nulle. Les fluctuations du champ dans le vide agissent sur les dipôles électriques que constituent les atomes ; ce phénomène est à l'origine de l'instabilité des états excités.