

Inclusion dans une matrice fluide ou solide

Première partie

Inclusion cylindrique hétérogène dans une matrice élastique et application aux composites à fibres longues

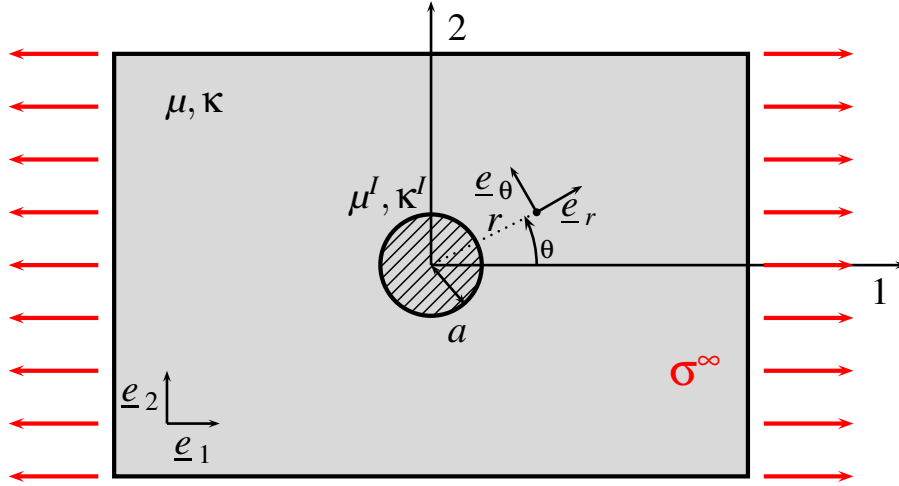


FIGURE 1: Inclusion circulaire de rayon a au sein d'une matrice infinie dont les propriétés élastiques diffèrent. La plaque est soumise, très loin de l'inclusion, à l'effort de traction σ^∞ .

L'objectif de cette partie est d'étudier les contraintes qui se développent dans une plaque infinie contenant une inclusion circulaire et soumise à une contrainte de traction, σ^∞ , à l'infini, comme sur la figure 1. Le plan représenté est le plan (1,2). La matrice et l'inclusion sont des matériaux homogènes dont le comportement est élastique isotrope linéarisé, respectivement caractérisés par les modules de cisaillement et de compressibilité, (μ, κ) et (μ^I, κ^I) . L'exposant I fait référence à l'inclusion. L'inclusion et la matrice sont supposées être dans leur état naturel avant d'être sollicitées en traction, dans le cas isotherme. L'interface entre l'inclusion et la matrice est supposée parfaite (pas d'ouverture ni de glissement) de sorte que l'inclusion et la matrice sont "soudées" en $r = a$.

Si le milieu s'étend également dans la direction 3, il représente une matrice contenant une fibre. Cette situation correspond au cas d'un composite unidirectionnel renforcé par des fibres longues parallèles suffisamment éloignées les unes des autres (fraction volumique faible) pour que l'interaction fibre-matrice soit correctement décrite par le problème idéalisé de la figure 1.

1. Contraintes et déformations dans l'inclusion pour la traction transverse

Le champ des contraintes dans l'inclusion, i.e. $r \leq a$, dans le système de coordonnées cylindriques est donné par les expressions

$$\sigma_{rr}^I = \frac{\sigma^\infty}{2}(\beta^I + \delta^I \cos 2\theta) \quad (1)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^I = \frac{\sigma^\infty}{2}(\beta^I - \delta^I \cos 2\theta) \quad (2)$$

$$\sigma_{r\theta}^I = -\frac{\sigma^\infty}{2}\delta^I \sin 2\theta \quad (3)$$

pour une traction dans la direction 1. Les constantes en jeu dans ces expressions sont définies par :

$$\beta^I = \frac{\mu^I(\chi + 1)}{2\mu^I + \mu(\chi^I - 1)}, \quad \delta^I = \frac{\mu^I(\chi + 1)}{\mu + \mu^I\chi}, \quad (4)$$

et

$$\chi = 3 - 4\nu, \quad \chi^I = 3 - 4\nu^I \quad (5)$$

en déformations planes et

$$\chi = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}, \quad \chi^I = \frac{3 - \nu^I}{1 + \nu^I} \quad (6)$$

en contraintes planes.

Ce résultat s'établit en utilisant les fonctions d'Airy comme on l'a fait dans le problème du trou dans une plaque au chapitre 26. Cependant, on ne demande pas ici de démontrer ce résultat et on renvoie le lecteur au détail de la solution développée par [Muskhelishvili \(1952, 1977\)](#) et consignée dans le manuel ([Kachanov et al., 2003](#)).

1.1. Le champ est homogène dans l'inclusion

Montrer que le champ des contraintes données par les équations (1),(2),(3) est homogène dans l'inclusion et correspond aux composantes cartésiennes des contraintes suivantes :

$$\sigma_{11}^I = \frac{\sigma^\infty}{2}(\beta^I + \delta^I), \quad \sigma_{22}^I = \frac{\sigma^\infty}{2}(\beta^I - \delta^I), \quad \sigma_{12}^I = 0 \quad (7)$$

Commenter ce résultat en se rappelant que la plaque est soumise à une traction simple dans la direction 1 à l'infini.

Obtient-on le résultat attendu dans le cas où la matrice et l'inclusion ont les mêmes propriétés élastiques ?

Remarquer que ces contraintes ne dépendent pas de la taille a de l'inclusion. Commenter.

1.2. L'inclusion est sous pression

Dans le cas des contraintes planes, puis dans le cas des déformations planes, calculer la pression hydrostatique qui règne dans l'inclusion en fonction des paramètres en jeu et de σ^∞ .

1.3. Déformée de l'inclusion

Donner le champ des déplacements dans l'inclusion dans le cas des déformations planes.

Quelle forme prend l'inclusion ? La caractériser précisément.

Donner les conditions du respect du contexte infinitésimal de l'étude.

2. Concentration de contraintes dans la matrice pour la traction transverse

Le champ de contraintes qui règne dans la matrice, i.e. pour $r \geq a$, est donné, quant à lui, par les expressions suivantes :

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - \gamma \frac{a^2}{r^2} + \left(1 - 2\beta \frac{a^2}{r^2} - 3\delta \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right) \quad (8)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \gamma \frac{a^2}{r^2} - \left(1 - 3\delta \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right) \quad (9)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \beta \frac{a^2}{r^2} + 3\delta \frac{a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \quad (10)$$

où les paramètres β et δ sont définis par

$$\beta = -\frac{2(\mu^I - \mu)}{\mu + \mu^I \chi}, \quad \delta = \frac{\mu^I - \mu}{\mu + \mu^I \chi}, \quad \gamma = \frac{\mu(\chi^I - 1) - \mu^I(\chi - 1)}{2\mu^I + \mu(\chi^I - 1)} \quad (11)$$

On admet que ce champ de contraintes vérifie les équations d'équilibre statique.

2.1. Contrainte normale et tangentielle le long de l'interface

Vérifier que la solution en contraintes proposée dans la matrice satisfait les conditions aux limites à l'infini et au bord de l'inclusion.

Donner au passage les expressions de la contrainte normale σ_n et de la contrainte tangentielle le long de l'interface $r = a$.

2.2. Contraintes le long du ligament et facteur de concentration de contrainte

Donner l'expression de la contrainte σ_{11} dans la matrice le long de la ligne $\theta = \pi/2$, perpendiculaire à la direction de la charge de traction appliquée.

Exprimer alors le facteur de concentration de contrainte

$$K_t = \frac{\sigma_{11}(r = a, \theta = \pi/2)}{\sigma^\infty} \quad (12)$$

2.3. Cas limites du trou et de l'inclusion rigide

Calculer le facteur de concentration de contrainte dans les trois cas suivants :

1. L'inclusion a les mêmes propriétés élastiques que la matrice ;
2. L'inclusion est un trou ;
3. L'inclusion est rigide.

Commenter dans chaque cas.

En particulier, discuter la valeur du facteur de concentration de contrainte dans le cas de l'inclusion rigide en fonction du coefficient de Poisson de la matrice.

3. Extension au chargement biaxial quelconque

Le composite de la figure 1 est désormais chargé dans les deux directions perpendiculaires \underline{e}_1 et \underline{e}_2 : contrainte σ_1^∞ à l'infini dans la direction 1 et contrainte σ_2^∞ à l'infini dans la direction 2.

Trouver les contraintes $\sigma_{11}^I, \sigma_{22}^I, \sigma_{12}^I$ qui règnent dans l'inclusion en fonction des propriétés élastiques de la matrice et de l'inclusion et du chargement σ_1^∞ et σ_2^∞ .

matériau	module de cisaillement μ (GPa)	module de compressibilité κ (GPa)
titane	44	110
SiC	168	215

TABLE 1: Modules d'élasticité des constituants du composite à matrice métallique étudié.

4. Application aux composites à fibres longues

Les résultats précédents sont appliqués au cas d'un composite à matrice métallique composé de fibres de carbure de silicium dans une matrice d'alliage de titane. Les propriétés élastiques supposées isotropes de ces matériaux sont données dans la table 1. Ce type de composite allie la rigidité du renfort fibreux à la ductilité de la matrice métallique.

On utilise le problème de la figure 1 pour estimer les contraintes dans la fibre et la matrice, en faisant ainsi l'approximation d'une faible interaction entre les fibres (fraction volumique faible de fibres). Dans les questions suivantes (sauf la question 4.5), la matrice est soumise à l'infini à la contrainte de traction simple σ^∞ donnée, dans la direction 1, comme sur la figure 1.

4.1. Modules de Young des constituants

Donner les valeurs du module de Young du titane et du carbure de silicium (SiC) qui se déduisent des propriétés élastiques de la table 1.

Commenter.

4.2. Profils et champs de contraintes

Les champs de contraintes $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ normalisées par la traction appliquée σ^∞ sont illustrés sur la figure 2 dans l'inclusion et dans la matrice environnante.

Commenter ces champs.

La figure 3 à gauche montre les profils des contraintes normalisées $\sigma_{11}/\sigma^\infty$ et $\sigma_{22}/\sigma^\infty$ le long de la ligne d'équation $x_2 = 0$. La figure 3 à droite montre les profils des contraintes normalisées $\sigma_{11}/\sigma^\infty$ et $\sigma_{22}/\sigma^\infty$ le long du ligament (axe 2 d'équation $x_1 = 0$).

Commenter ces profils.

4.3. Rupture de fibre en traction transverse

Le carbure de silicium est un matériau fragile qui rompt lorsque la contrainte principale maximale atteint une valeur critique σ_c . L'ordre de grandeur de cette contrainte critique est de 500 MPa à température ambiante mais ces matériaux sont surtout utilisés pour les applications aéronautiques à haute température. On exprimera donc les résultats de cette question en fonction de σ_c sans passer à l'application numérique.

Trouver pour quelle valeur de contrainte de traction appliquée σ^∞ la condition de rupture est atteinte dans l'inclusion. On exprimera cette valeur en fonction de σ_c et des propriétés élastiques de la fibre et de la matrice.

Qu'en est-il en compression ($\sigma^\infty < 0$) ?

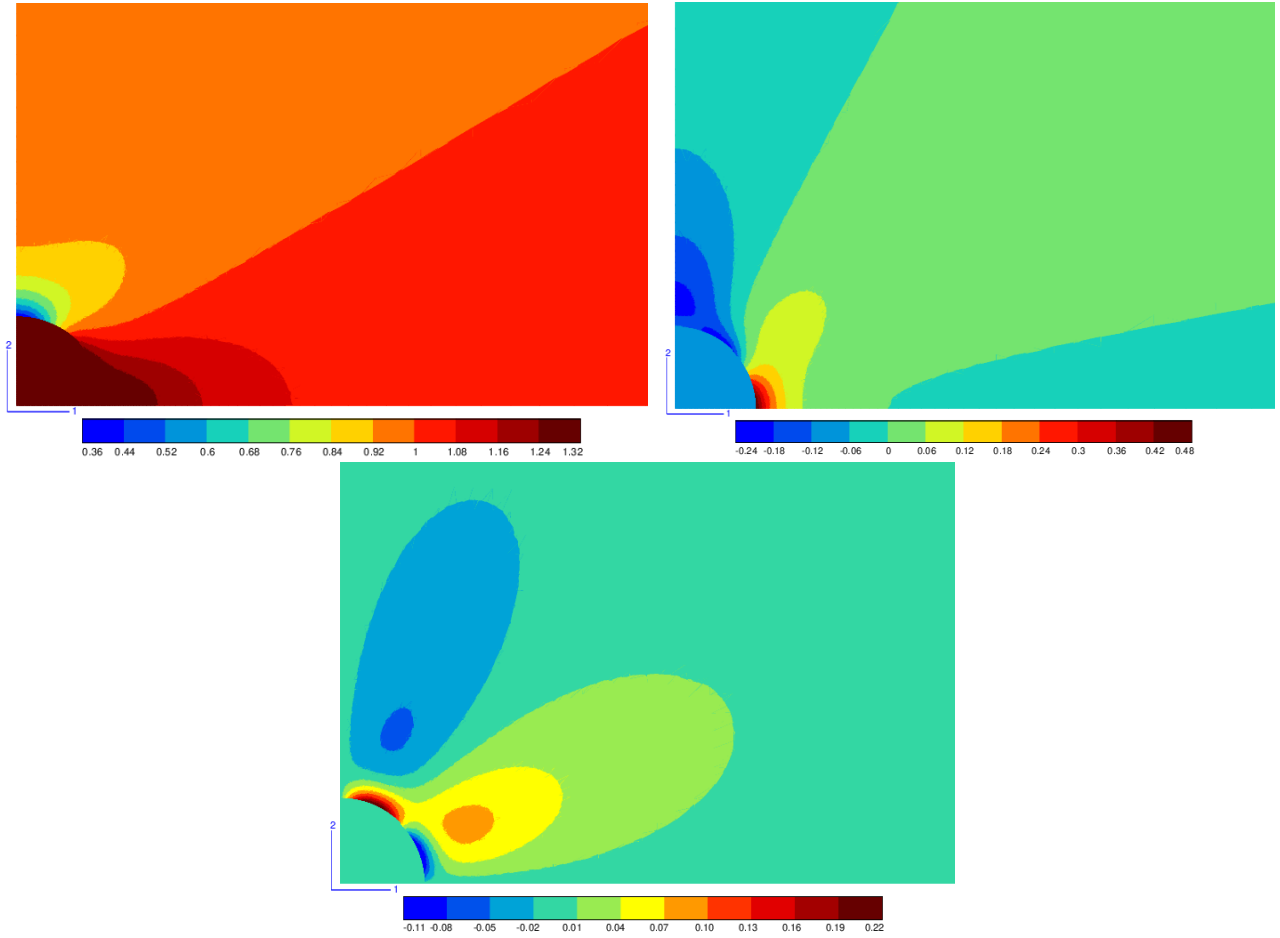


FIGURE 2: Contraintes dans l'inclusion et la matrice en traction selon l'axe 1 : champs des composantes $\sigma_{11}/\sigma^\infty$ (en haut à gauche), $\sigma_{22}/\sigma^\infty$ (en haut à droite) et $\sigma_{12}/\sigma^\infty$ (en bas).

4.4. Décohésion à l'interface

Un autre mécanisme d'endommagement possible est la décohésion entre la fibre et la matrice qui correspond à la rupture de l'interface fibre/matrice. Un critère simple de décohésion est obtenu en considérant que la rupture de l'interface a lieu lorsque la contrainte normale σ_n atteint une valeur critique σ_n^c .

Donner la valeur de σ^∞ pour laquelle σ_n^c est atteinte à un point de l'interface. Indiquer la position de ce point.

Distinguer le cas de la traction ($\sigma^\infty > 0$) du cas de la compression.

4.5. Rupture de fibre en cisaillement dans le plan 1-2

Le composite est maintenant soumis à un chargement de cisaillement simple de valeur τ^∞ à l'infini.

Donner les contraintes dans l'inclusion en fonction de τ^∞ et des caractéristiques élastiques de l'inclusion et de la matrice. Commenter.

Pour quelle valeur de τ^∞ la rupture de l'inclusion a-t-elle lieu et quelle est l'orientation de la fissure correspondante ? Le critère de rupture de l'inclusion est le même qu'à la question 4.3.

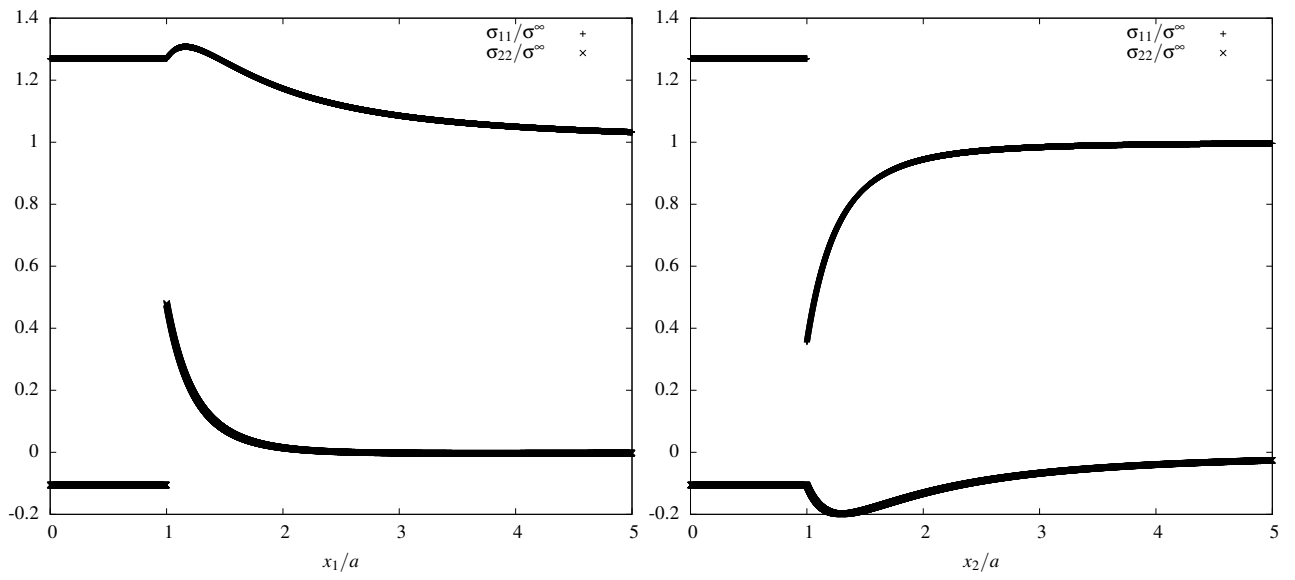


FIGURE 3: Profils de contraintes le long de la ligne $x_2 = 0$ (à gauche) et de la ligne $x_1 = 0$ (à droite).

Deuxième partie

Obstacle sphérique dans un écoulement de fluide

A l'occasion du centenaire des équations de Stokes–Oseen

L'objectif de cette partie est d'étudier l'écoulement de fluide autour d'un obstacle sphérique considéré comme fixe, dans le cas de deux comportements de fluides distincts. Dans un premier temps, le fluide est considéré comme parfait et incompressible. Dans un second temps, il s'agit d'un fluide visqueux incompressible. Dans les deux cas, l'analyse se termine par le calcul de la force de traînée.

5. Obstacle sphérique dans un écoulement de fluide parfait incompressible

On s'intéresse à l'écoulement stationnaire et irrotationnel d'un fluide parfait incompressible autour d'une sphère rigide de rayon a . La sphère est supposée fixe dans le référentiel d'observation, caractérisé par le repère cartésien orthonormé $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, tandis que le fluide est supposé s'étendre à l'infini. Le centre de la sphère est pris comme origine du repère. Suffisamment loin de la sphère, le champ de vitesse du fluide vaut $\underline{v} = \underline{V}_0 = V_0 \underline{e}_1$, où V_0 est constante.

L'écoulement étant irrotationnel, le champ de vitesse du fluide dérive du potentiel réel $\phi(\underline{x})$ tel que

$$\underline{v} = \text{grad } \phi$$

Comme le fluide est également supposé incompressible, le potentiel ϕ est une fonction harmonique. Contrairement à l'écoulement d'un fluide parfait incompressible autour d'un cylindre, étudié au chapitre 5, il s'agit ici d'une situation tridimensionnelle avec toutefois une symétrie de révolution autour de l'axe \underline{e}_1 . L'étude des fonctions harmoniques sphériques, qu'on ne demande pas de mener ici, conduit à proposer un potentiel de la forme suivante :

$$\phi(\underline{x}) = \underline{V}_0 \cdot \underline{x} \left(1 - \frac{\alpha}{r^3}\right) \quad \text{avec } r = \|\underline{x}\| \quad (13)$$

où α est une constante à déterminer.

5.1. Champ des vitesses autour de la sphère

Montrer que les composantes des vitesses en coordonnées sphériques sont

$$\underline{v} = V_0 \cos \theta \left(1 + \frac{2\alpha}{r^3}\right) \underline{e}_r - V_0 \sin \theta \left(1 - \frac{\alpha}{r^3}\right) \underline{e}_\theta \quad (14)$$

où θ est l'angle que fait le vecteur $\underline{x} = r \underline{e}_r$ avec l'axe \underline{e}_1 .

Vérifier que ce champ satisfait les conditions aux limites et en profiter pour déterminer la constante α .

5.2. Lignes de courant autour de la sphère

Dans le cas axisymétrique, comme ici autour de l'axe \underline{e}_1 , les fonctions ne dépendent que de (r, θ) et on admet que l'on peut introduire une fonction de courant $\psi(r, \theta)$ en coordonnées sphériques, définie par

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_\varphi = 0 \quad (15)$$

et garantissant la condition $\text{div } \underline{v} = 0$.

Trouver une telle fonction de courant $\psi(r, \theta)$ pour le champ des vitesses (14).

Les lignes de courant correspondent aux isovaleurs de la fonction de courant.

Vérifier que la sphère $r = a$ est une ligne de courant et que les lignes de courant à l'infini sont comme on les attend.

5.3. Champ de pression dans le fluide et calcul de la trainée

Déterminer le champ de pression sur le bord de la sphère.

Calculer la force résultante qu'exerce le fluide sur la sphère.

Commenter.

6. Obstacle sphérique dans un écoulement de fluide de Stokes

La particule sphérique est cette fois plongée dans un fluide incompressible de Stokes dont la loi de comportement est donnée par

$$\underline{\sigma} = -p\underline{1} + 2\mu\underline{D} \quad (16)$$

où la viscosité de cisaillement μ est supposée homogène dans le fluide.

6.1. Propriétés des équations de Stokes

Montrer que les champs de vitesses et de pression sont solutions des équations de Stokes, considérées ici en l'absence de force volumique et en négligeant les effets d'accélération et d'inertie :

$$-\text{grad } p + \mu \Delta \underline{v} = 0 \quad (17)$$

où $\Delta = \nabla^2$ est l'opérateur laplacien eulérien.

En déduire que, pour un fluide incompressible, le champ de pression est une fonction harmonique.

6.2. Champ de pression

La fonction harmonique suivante s'avère pertinente pour la pression

$$p(\underline{x}) = p_0 + \alpha_1 \underline{V}_0 \cdot \frac{\underline{x}}{r^3} = p_0 + \alpha_1 V_0 \frac{x_1}{r^3}, \quad \text{avec} \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (18)$$

où α_1 est une constante déterminée dans la suite du problème.

Vérifier que cette fonction est effectivement harmonique.

Vérifier également qu'elle conduit à une pression égale à p_0 à l'infini.

6.3. Une solution particulière des équations de Stokes

En déduire que le champ de vitesses

$$\underline{v}^{(p)} = \frac{p - p_0}{2\mu} \underline{x} \quad (19)$$

est une solution particulière des équations (17).

6.4. Détermination du champ des vitesses

Une solution de l'équation homogène (17), c'est-à-dire sans le terme de pression, s'obtient en piochant dans les fonctions vectorielles harmoniques sphériques décroissantes. Deux contributions s'avèrent pertinentes :

$$\underline{v}^{(h)} = \frac{\alpha_2}{r} \underline{V}_0 + \frac{\alpha_3}{r^3} \left(\underline{V}_0 - \frac{3}{r^2} (\underline{V}_0 \cdot \underline{x}) \underline{x} \right) \quad (20)$$

où α_2, α_3 sont deux constantes supplémentaires. On ne demande pas de vérifier le caractère harmonique de ce champ.

Le champ des déplacements complet proposé est donc

$$\underline{v} = \underline{V}_0 + \underline{v}^{(p)} + \underline{v}^{(h)} \quad (21)$$

ce champ de vitesses doit vérifier la condition d'incompressibilité. On admet que cette condition, un peu fastidieuse à exploiter en temps limité, conduit à la relation

$$\operatorname{div} \underline{v} = 0 \quad \implies \quad 2\mu\alpha_2 = \alpha_1 \quad (22)$$

Déterminez alors les constantes α_1, α_2 et α_3 permettant de satisfaire à toutes les conditions restantes qu'il vous revient d'identifier.

6.5. Lignes de courant autour de la sphère

Les vitesses trouvées précédemment peuvent s'exprimer en coordonnées sphériques sous la forme suivante¹ :

$$v_r = V_0 \cos \theta \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right) \quad (23)$$

$$v_\theta = -V_0 \sin \theta \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) \quad (24)$$

$$v_\varphi = 0 \quad (25)$$

Trouver une telle fonction de courant $\psi(r, \theta)$ pour le champ des vitesses (23-25).

Les lignes de courant correspondent aux isovaleurs de la fonction de courant.

Vérifier que la sphère $r = a$ est une ligne de courant et que les lignes de courant à l'infini sont comme on les attend.

Quelques lignes de courant sont tracées sur la figure 4 dans le cas de la sphère dans un fluide parfait incompressible et dans le cas de la sphère dans un fluide de Stokes. Commenter.

1. On ne demande pas d'établir ce résultat.

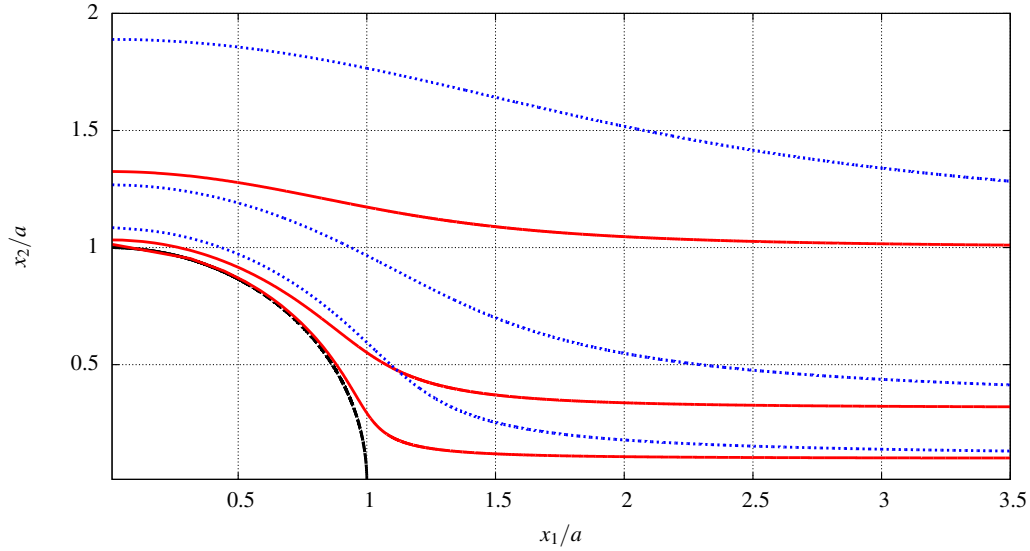


FIGURE 4: Lignes de courant pour une sphère dans un fluide parfait incompressible (en pointillé bleu) et dans une fluide de Stokes (trait continu rouge). Les lignes choisies correspondent à trois valeurs distinctes de la fonction de courant. Pour chaque valeur, les courbes bleue et rouge correspondantes sont confondues loin en aval de la sphère.

6.6. Le gradient des vitesses

Calculer le gradient des vitesses en coordonnées sphériques.

6.7. Contraintes déviatoriques dans le fluide

Utiliser les expressions précédentes pour déterminer le tenseur des contraintes déviatoriques en coordonnées sphériques.

Donner en particulier ses valeurs prises sur la sphère ($r = a$).

6.8. Force de traînée

On souhaite calculer la résultante \underline{F} des forces qu'exerce le fluide sur la sphère.

Commencer par calculer la force \underline{F}_p induite par la partie hydrostatique p du champ des contraintes sur la sphère.

Calculer ensuite la contribution \underline{F}_v due à la partie déviatorique des contraintes.

Montrer enfin que la force de traînée vaut

$$\underline{F} = \underline{F}_p + \underline{F}_v = 6\pi V_0 \mu a \underline{e}_1 \quad (26)$$

Commenter le résultat.

Expliquer le fait que la masse volumique du fluide, ρ , ne joue pas de rôle dans cette expression. Justifier que le résultat soit proportionnel au produit $V_0 \mu a$.

Evaluer cet effort pour une boule $a = 1$ m dans un écoulement $V_0 = 1$ m.s⁻¹ dans le cas de l'eau et puis celui de la glycérine, à la température ambiante. Commenter.

6.9. Epilogue malheureux

La solution en vitesses mise en évidence précédemment vérifie certes les équations (17), les conditions aux limites requises et la loi de comportement. Hélas, on va le voir, elle ne remplit pas toutes les conditions qui ont présidé à l'établissement des équations de Stokes (17). Elle n'est

par conséquent pas satisfaisante et des efforts supplémentaires doivent être déployés. Seules des solutions approchées ont été développées notamment grâce à l'équation d'Oseen² ou par la méthode des développements asymptotiques raccordés (Landau and Lifchitz, 1989).

Les équations (17) sont obtenues en négligeant les efforts d'inertie $\underline{\mathbf{L}} \cdot \underline{\mathbf{v}}$. Montrer, avec très peu de calculs, que, suffisamment loin de la sphère, ces efforts sont de l'ordre de grandeur suivant :

$$\|\underline{\mathbf{L}} \cdot \underline{\mathbf{v}}\| \sim V_0^2 \frac{a}{r^2} \quad (27)$$

Justifier ensuite l'ordre de grandeur suivant, suffisamment loin de la sphère :

$$\|\frac{\mu}{\rho} \Delta \underline{\mathbf{v}}\| \sim \frac{\mu V_0 a}{\rho r^3} \quad (28)$$

En déduire que la solution proposée précédemment n'est valable que pour r inférieur à un rayon critique que l'on déterminera.

Faire l'application numérique pour l'eau et la glycérine dans la configuration proposée à la question 6.8. Conclure.

Indiquer des conditions plus favorables d'utilisation de la solution déficiente.

Il n'en demeure pas moins que la formule (26) de la traînée précédemment établie fournit, en pratique, un bon ordre de grandeur et est largement utilisée en pratique.

Dans le cas de l'obstacle cylindrique dans un fluide de Stokes, la situation est plus dramatique encore car le champ des vitesses que l'on peut proposer en suivant la démarche utilisée pour la sphère et basée sur l'emploi de fonctions harmoniques, permet certes de remplir les conditions aux limites en $r = a$ mais diverge à l'infini, cf. Guazzelli et al. (2011).

Références

- Guazzelli, E., Morris, J., Pic, S., 2011. A Physical Introduction to Suspension Dynamics. Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press. doi :[10.1017/CB09780511894671](https://doi.org/10.1017/CB09780511894671).
- Kachanov, M., Shafiro, B., Tsukrov, I., 2003. Handbook of Elasticity Solutions. Kluwer Academic Publishers.
- Landau, L., Lifchitz, D., 1989. Mécanique des fluides. Mir.
- Muskhelishvili, N., 1952, 1977. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Fourth Edition, Noordhoff International Publishing, Leyden.

2. Carl Wilhelm Oseen (1878-1944), né à Lund en Suède, et professeur à Uppsala.