

Transformations du milieu continu

Plan

- ① Mise en évidence expérimentale
- ② Le gradient de la transformation
 - Transports convectifs
 - Décomposition polaire
 - Extension et glissement simples
- ③ Déformations
 - Mesures de déformations
 - Transformations infinitésimales
- ④ Equations de compatibilité dans le contexte infinitésimal
- ⑤ Bilan : déformation du milieu continu

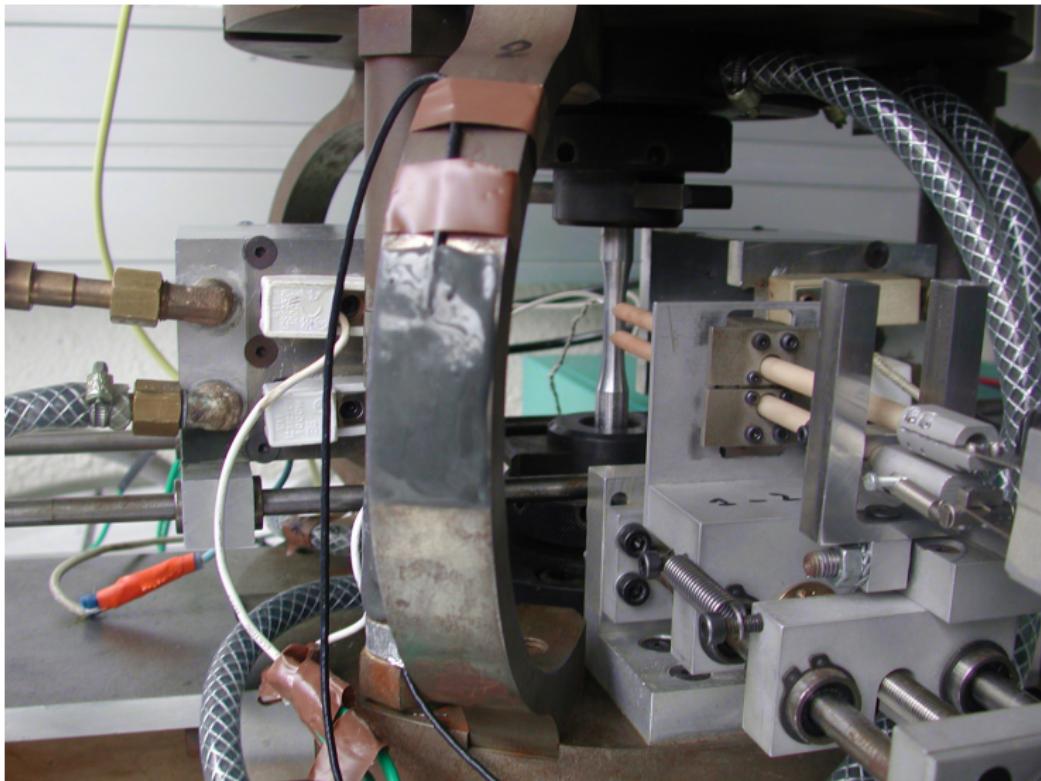
Extensométrie

mesures du déplacement relatif de deux points



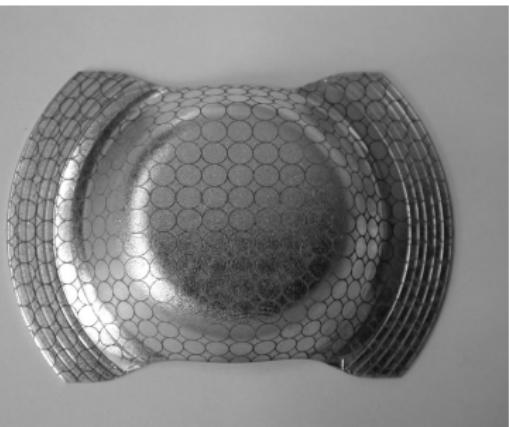
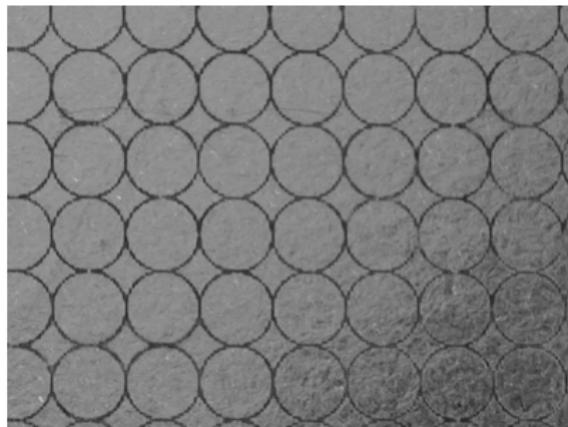
Extensométrie

mesures du déplacement relatif de deux points



Mesures de champ

mesures de champs de déformations



Mesures de champ de déplacement

essai de traction simple



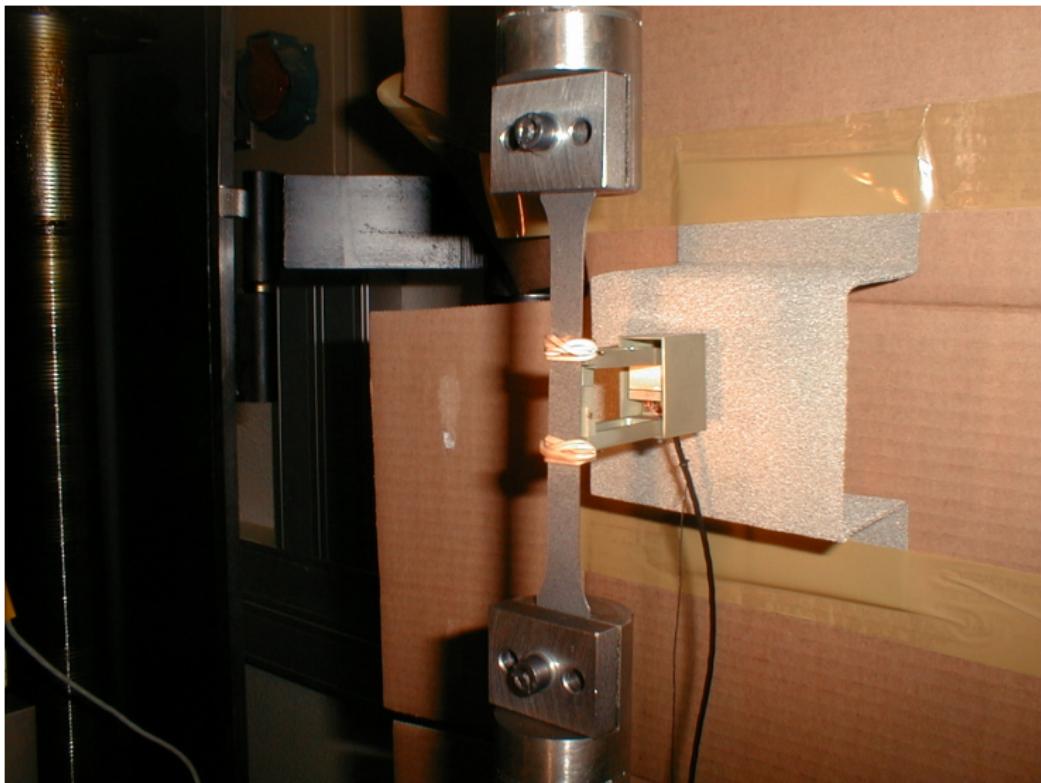
Mesures de champ de déplacement

essai de traction simple



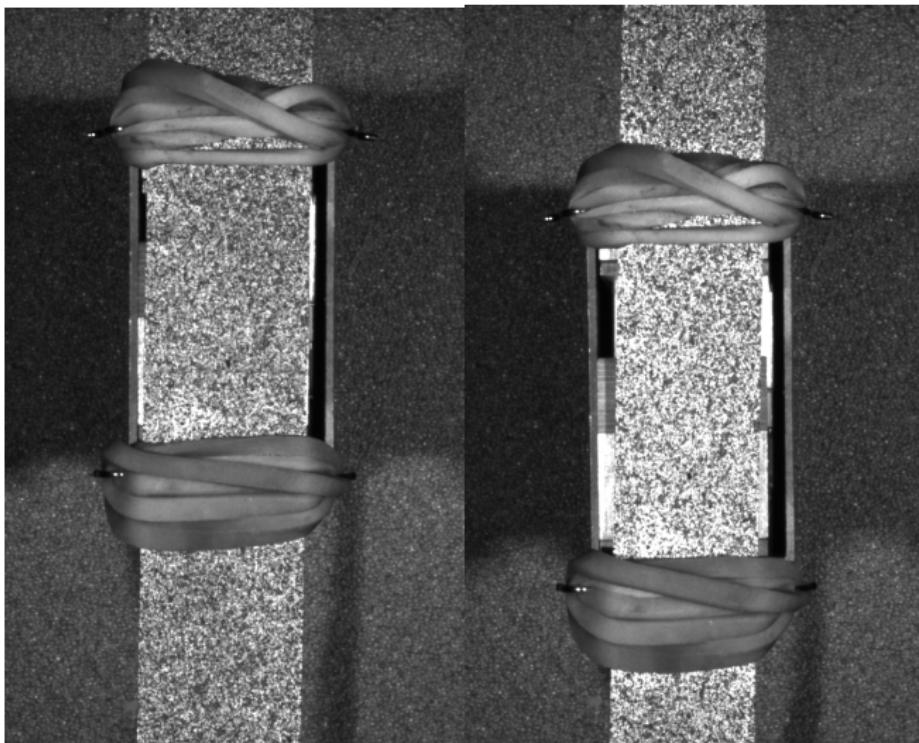
Mesures de champ de déplacement

essai de traction simple



Mesures de champ de déplacement

allongement de la zone utile

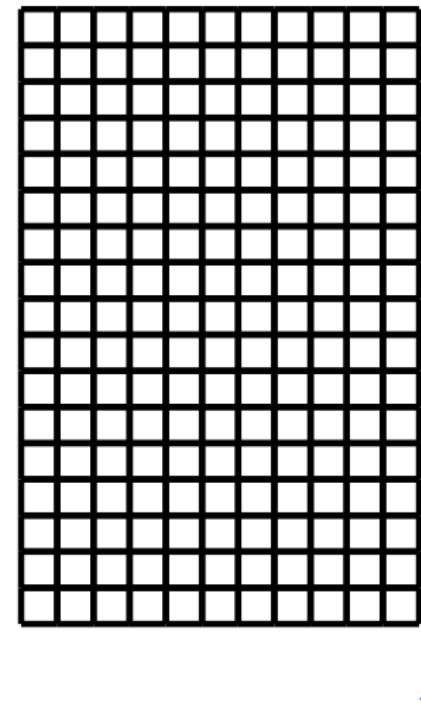
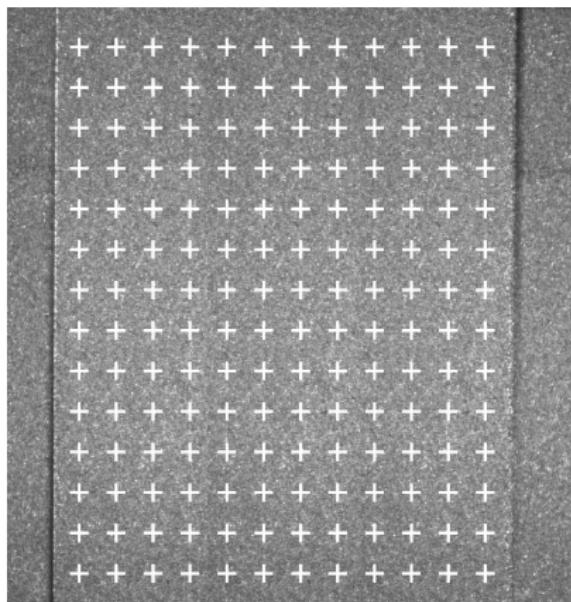


état initial

état déformé

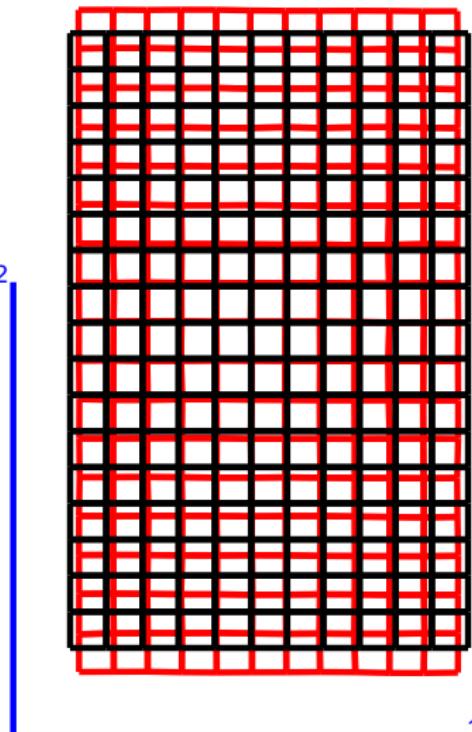
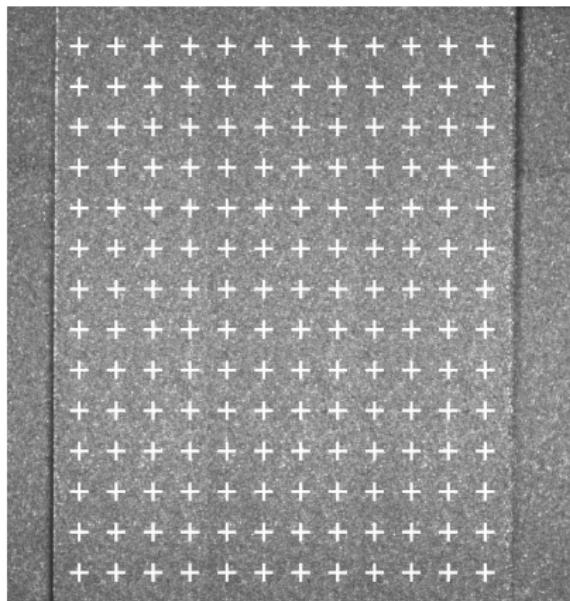
Mesures de champ de déplacement

méthode de corrélation d'images : reconnaissance des motifs autour d'un réseau de points matériels et suivi de leurs déplacements



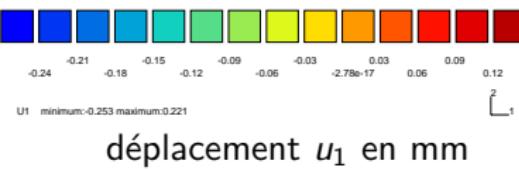
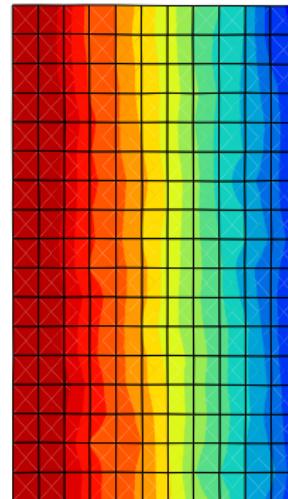
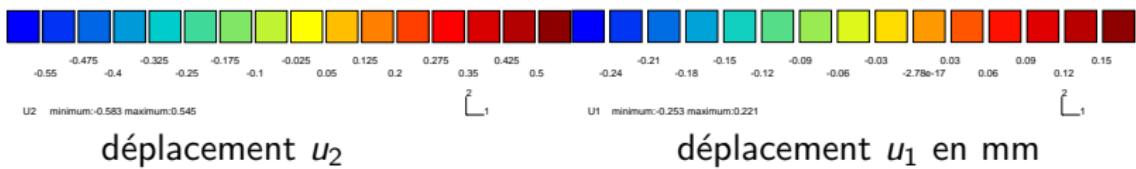
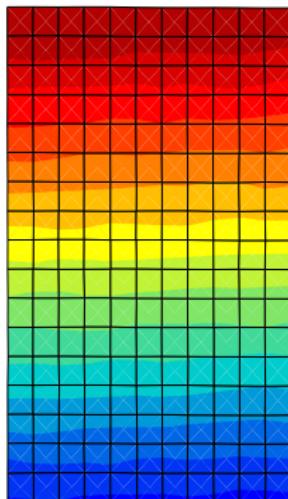
Mesures de champ de déplacement

méthode de corrélation d'images : reconnaissance des motifs autour d'un réseau de points matériels et suivi de leurs déplacements



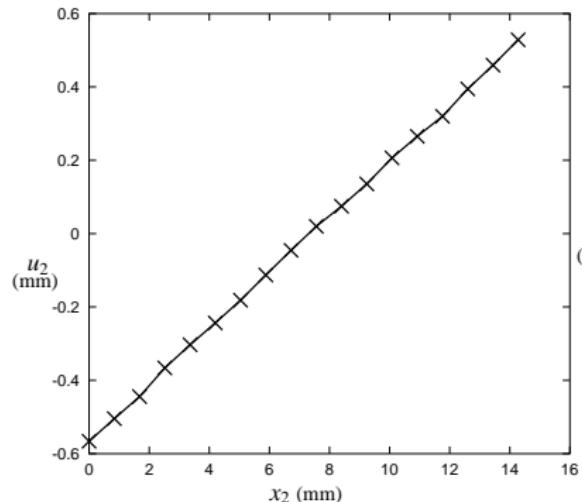
Mesures de champ de déplacement

champs de...

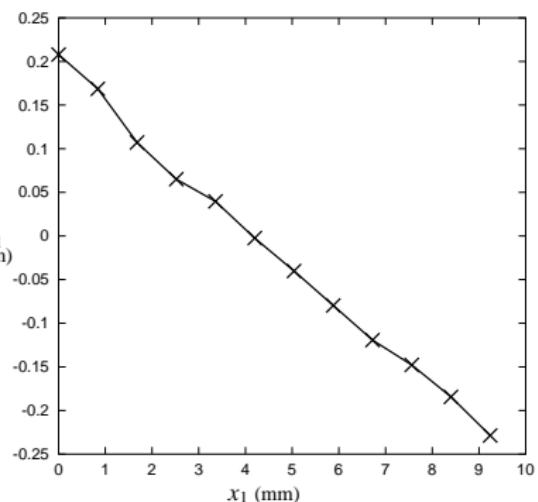


Mesures de champ de déplacement

profils de déplacement le long d'une ligne



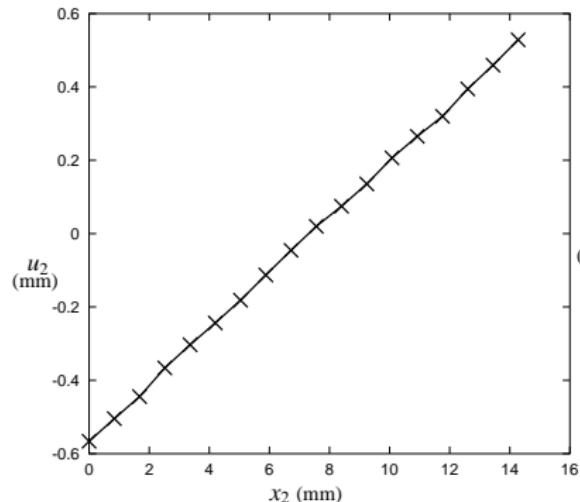
verticale



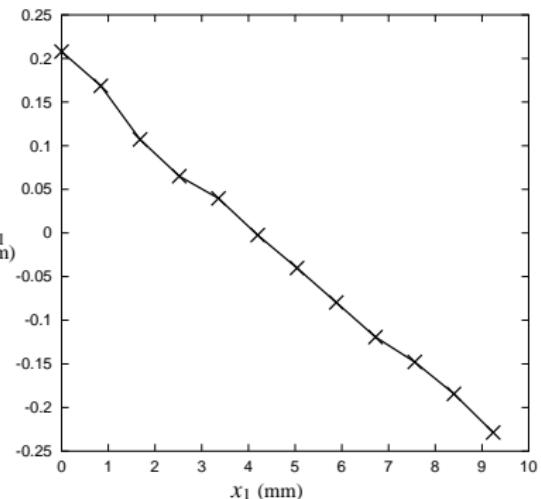
horizontale

Mesures de champ de déplacement

profils de déplacement le long d'une ligne



verticale



horizontale

$$F_{22} - 1 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

$$F_{11} - 1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

Plan

① Mise en évidence expérimentale

② Le gradient de la transformation

- Transports convectifs
- Décomposition polaire
- Extension et glissement simples

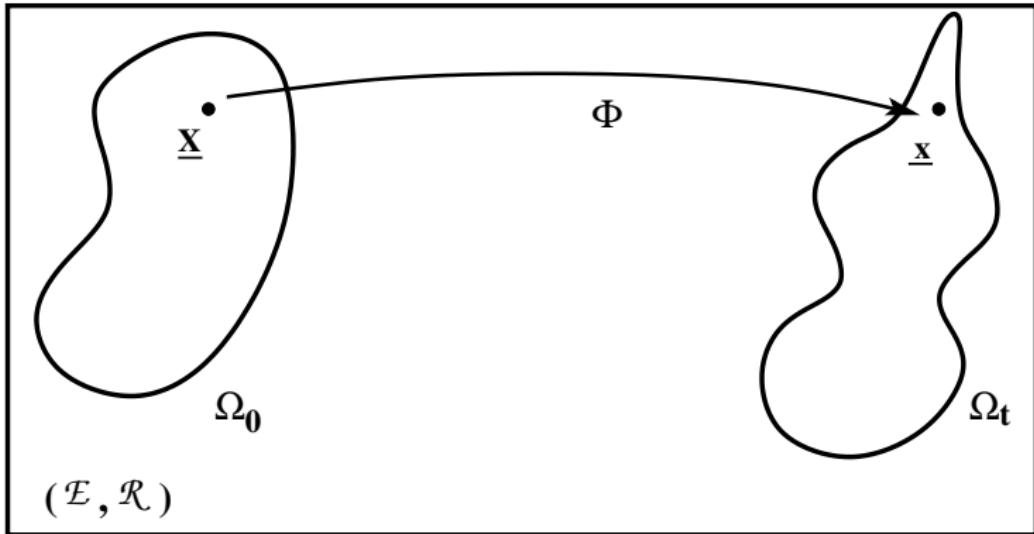
③ Déformations

- Mesures de déformations
- Transformations infinitésimales

④ Equations de compatibilité dans le contexte infinitésimal

⑤ Bilan : déformation du milieu continu

Transformation du milieu continu



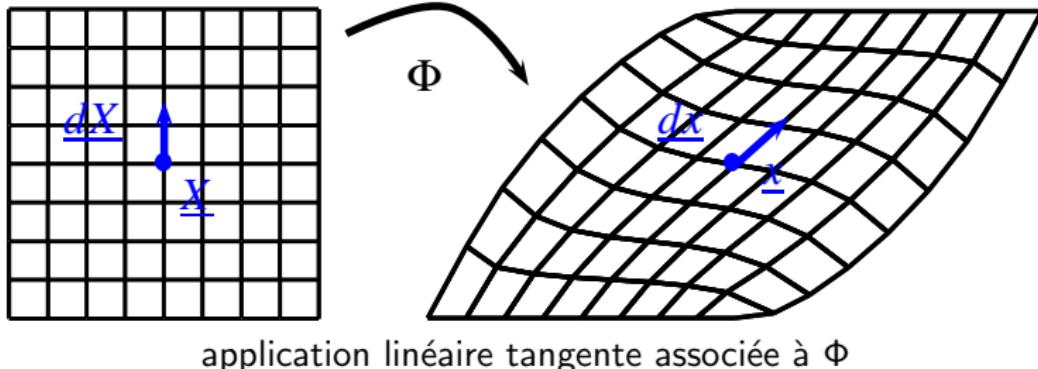
la transformation Φ

$$\underline{x} = \Phi(\underline{X}, t)$$

le champ de déplacement

$$\underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{x} - \underline{X} = \Phi(\underline{X}, t) - \underline{X}$$

Le gradient de la transformation



$$\Phi(\underline{X} + d\underline{X}) - \Phi(\underline{X}) = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{X}} \cdot d\underline{X} + o(\underline{X}, d\underline{X})$$

élément de fibre matérielle $d\underline{X}$ initiale et $d\underline{x}$ actuelle

$$\tilde{\mathbf{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{X}} = \text{Grad } \Phi = \mathbf{1} + \text{Grad } \underline{u}, \quad d\underline{x} = \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\underline{X}$$

Le gradient de la transformation $\tilde{\mathbf{F}}$ est une caractérisation locale de la transformation
 $(\tilde{\mathbf{F}}(\underline{X}, t = 0) = \mathbf{1})$

Le gradient de la transformation

Le gradient en coordonnées cartésiennes orthonormées $(\underline{e}_i)_{i=1,3}$

$$dx_i = F_{ij} dX_j, \quad \text{avec} \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad \text{et} \quad \underline{F} = F_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$dx_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_3} dX_3$$

$$dx_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial X_3} dX_3$$

$$dx_3 = \frac{\partial \Phi_3}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial X_3} dX_3$$

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{bmatrix}$$

les composantes de \underline{F} sont sans dimension physique

Plan

- ① Mise en évidence expérimentale
- ② Le gradient de la transformation
 - Transports convectifs
 - Décomposition polaire
 - Extension et glissement simples
- ③ Déformations
 - Mesures de déformations
 - Transformations infinitésimales
- ④ Equations de compatibilité dans le contexte infinitésimal
- ⑤ Bilan : déformation du milieu continu

Transport d'un élément de volume

- volume élémentaire initial dV et actuel dv

Transport d'un élément de volume

- volume élémentaire initial dV et actuel dv

$$dV = \underline{dX}_1 \cdot (\underline{dX}_2 \wedge \underline{dX}_3) = [\underline{dX}_1, \underline{dX}_2, \underline{dX}_3] = \det(\underline{dX}_1, \underline{dX}_2, \underline{dX}_3)$$

$$dv = [\underline{dx}_1, \underline{dx}_2, \underline{dx}_3] = [\underline{\tilde{F}} \cdot \underline{dX}_1, \underline{\tilde{F}} \cdot \underline{dX}_2, \underline{\tilde{F}} \cdot \underline{dX}_3]$$

$$dv = J dV$$

$$J = \det \underline{\tilde{F}} > 0$$

jacobien de la transformation

- transformation **isochore** en un point ou en tout point
un matériau est dit **incompressible** s'il ne peut subir que des transformations isochores

$$J = 1$$

Retour sur la conservation de la masse

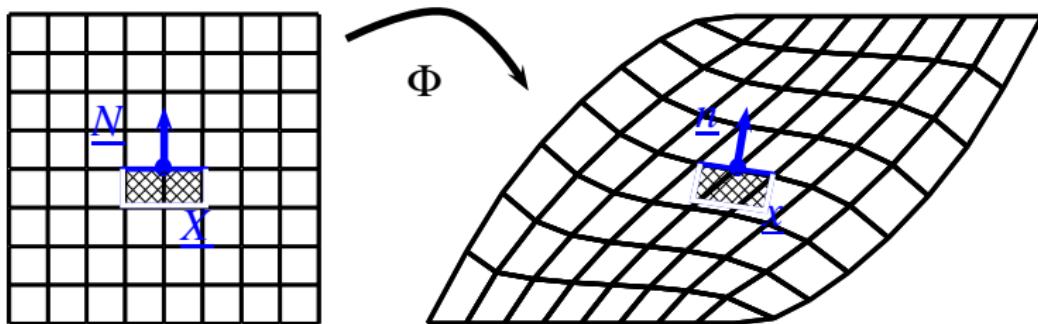
$$\rho \, dv = \rho_0 \, dV = \rho J \, dV \implies \rho_0 = J\rho$$

interprétation en terme de changement de variable dans une intégrale sur un domaine matériel $\mathcal{D}(t)$

$$\int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\underline{x}, t) \, dv = \int_{\mathcal{D}_0} \underbrace{\rho(\Phi(\underline{X}, t), t) J}_{\rho_0(\underline{X})} \, dV$$

avec $\mathcal{D}_0 = \Phi^{-1}(\mathcal{D}(t))$

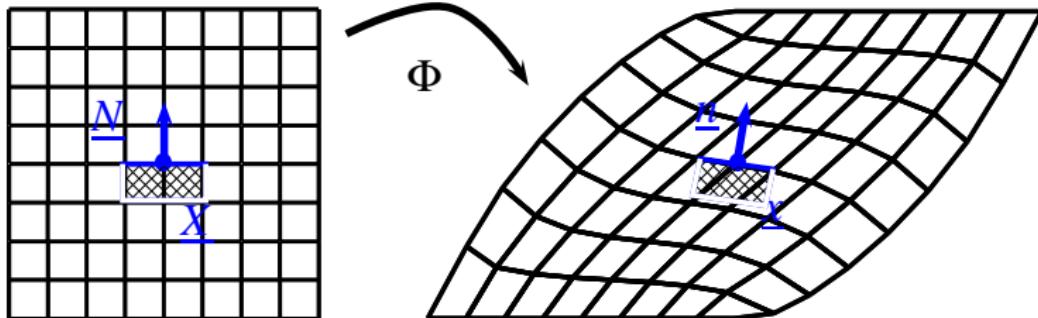
Transport d'un élément de surface



$$d\underline{S} = d\underline{X}_1 \wedge d\underline{X}_3 = dS \underline{N}, \quad d\underline{s} = d\underline{x}_1 \wedge d\underline{x}_3 = ds \underline{n}$$

l'élément de surface est défini par les directions matérielles orthogonales \underline{dX}_1 et \underline{dX}_3 qu'il contient.

Transport d'un élément de surface



$$d\mathbf{S} = d\mathbf{X}_1 \wedge d\mathbf{X}_3 = dS \mathbf{N}, \quad ds = dx_1 \wedge dx_3 = ds \mathbf{n}$$

l'élément de surface est défini par les directions matérielles orthogonales $d\mathbf{X}_1$ et $d\mathbf{X}_3$ qu'il contient. Le vecteur élément de surface $d\mathbf{S}$ ne se transforme pas comme une fibre matérielle :

$$\underline{ds} = J \underline{F}^{-T} \cdot \underline{dS}$$

$d\mathbf{S}$ et ds (resp. \mathbf{N} et \mathbf{n}) ne sont pas constitués des mêmes points matériels

Plan

1 Mise en évidence expérimentale

2 Le gradient de la transformation

- Transports convectifs
- Décomposition polaire
- Extension et glissement simples

3 Déformations

- Mesures de déformations
- Transformations infinitésimales

4 Equations de compatibilité dans le contexte infinitésimal

5 Bilan : déformation du milieu continu

Décomposition polaire du gradient de la transformation

Pour tout tenseur \tilde{F} inversible, il existe deux tenseurs symétriques définis positifs \tilde{U} et \tilde{V} uniques et un unique tenseur orthogonal \tilde{R} tels que

$$\tilde{F} = \tilde{R} \cdot \tilde{U} = \tilde{V} \cdot \tilde{R}$$

Si $\det \tilde{F} > 0$, \tilde{R} est une rotation pure (i.e. $\det \tilde{R} = +1$).

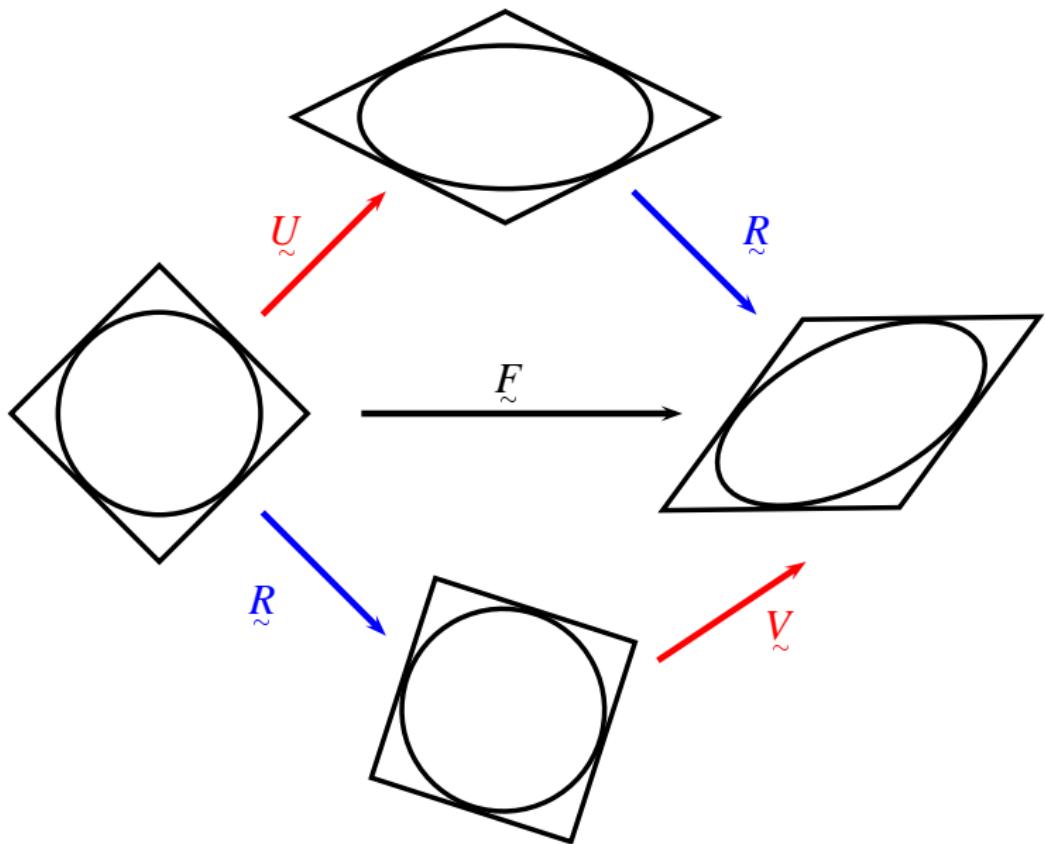
\tilde{R} rotation propre (3 composantes)

$$\tilde{R}^{-1} = \tilde{R}^T$$

\tilde{U}, \tilde{V} déformations pures (6 composantes)

$$\tilde{U}^T = \tilde{U}, \quad \tilde{V}^T = \tilde{V}$$

Décomposition polaire de \tilde{F}

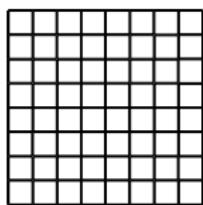


Plan

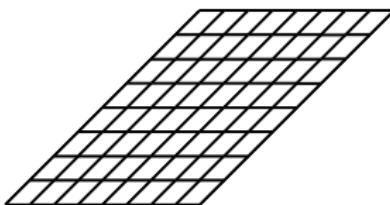
- ① Mise en évidence expérimentale
- ② Le gradient de la transformation
 - Transports convectifs
 - Décomposition polaire
 - Extension et glissement simples
- ③ Déformations
 - Mesures de déformations
 - Transformations infinitésimales
- ④ Equations de compatibilité dans le contexte infinitésimal
- ⑤ Bilan : déformation du milieu continu

Transformations homogènes

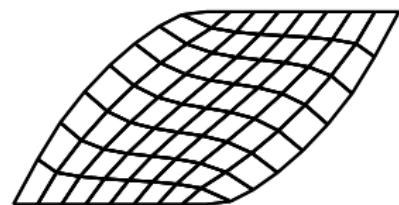
- transformation **homogène** : $\tilde{\mathbf{F}}(\underline{\mathbf{X}}, t) = \tilde{\mathbf{F}}(t)$



état initial



homogène



hétérogène

lorsque tous les carrés déformés sont superposables, la déformation est homogène

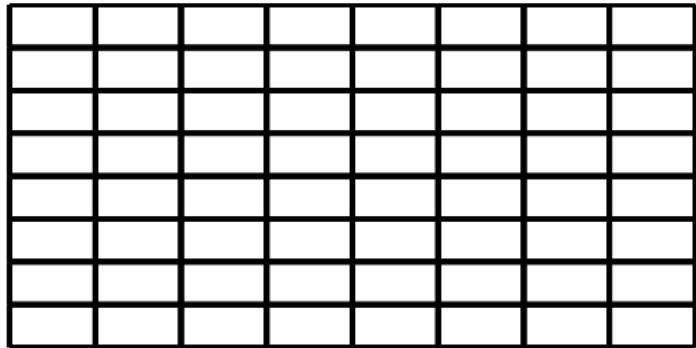
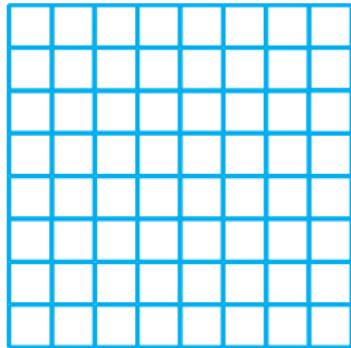
- conséquence sur le champ de déplacement :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{F}}(t) \cdot \underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{c}}(t)$$

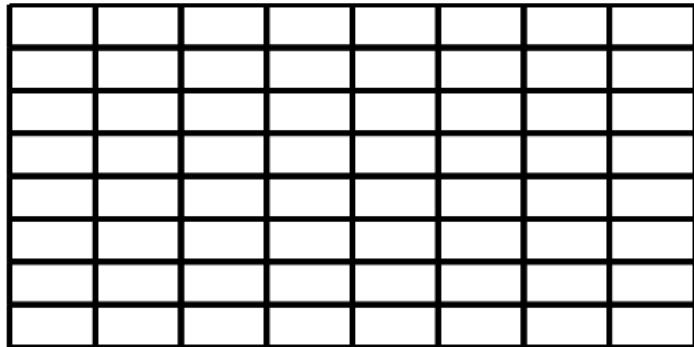
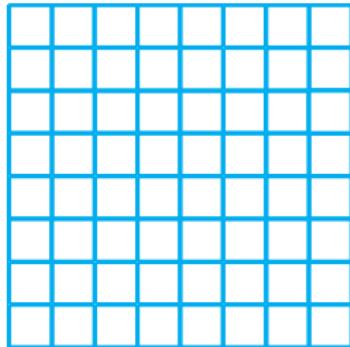
pour tout couple de points matériels

$$\underline{\mathbf{x}}_1 - \underline{\mathbf{x}}_2 = \tilde{\mathbf{F}} \cdot (\underline{\mathbf{X}}_1 - \underline{\mathbf{X}}_2)$$

Extension simple



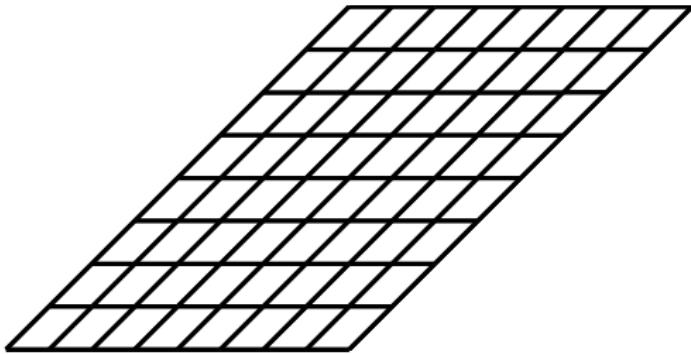
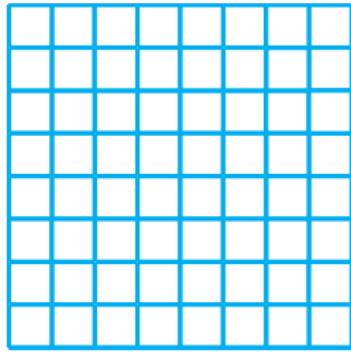
Extension simple



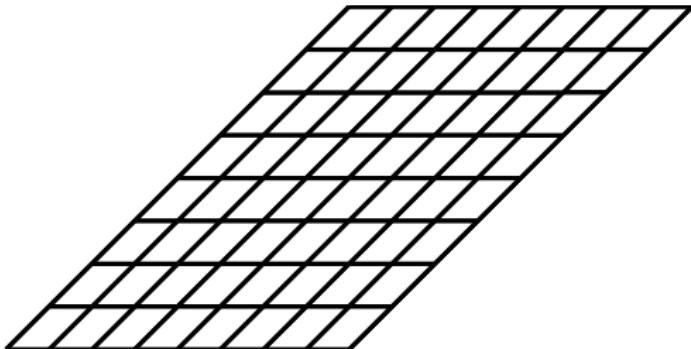
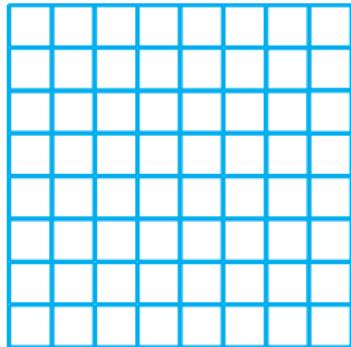
$$\begin{cases} x_1 = X_1(1 + \lambda) \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases} \quad \tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathbf{1}} + \lambda \underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_1, \quad [\tilde{\mathcal{F}}] = \begin{bmatrix} 1 + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathcal{R}} = \tilde{\mathbf{1}}, \quad \tilde{\mathcal{U}} = \tilde{\mathcal{F}}$$

Glissement simple



Glissement simple



$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \gamma X_2 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}, \quad \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{1} + \gamma \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, \quad [\tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Glissement simple

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{1} + \gamma(\underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_2 + \underline{\mathbf{e}}_2 \otimes \underline{\mathbf{e}}_1) + \gamma^2 \underline{\mathbf{e}}_2 \otimes \underline{\mathbf{e}}_2, \quad [\tilde{\mathbf{C}}] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 + \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de $\tilde{\mathbf{C}}$ sont

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\gamma^2 + 2 + \gamma\sqrt{\gamma^2 + 4}) = (\frac{1}{2}(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4}))^2$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(\gamma^2 + 2 - \gamma\sqrt{\gamma^2 + 4}) = (\frac{1}{2}(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4}))^2$$

$$\lambda_3 = 1$$

Les vecteurs propres de $\tilde{\mathbf{C}}$ et $\tilde{\mathbf{U}}$ sont

$$\underline{\mathbf{V}}_1 = \frac{1}{2}(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4})\underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2$$

$$\underline{\mathbf{V}}_2 = \frac{1}{2}(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4})\underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2$$

$$\underline{\mathbf{V}}_3 = \underline{\mathbf{e}}_3$$

Glissement simple

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + (\gamma/2)^2}} & \frac{\gamma}{2\sqrt{1 + (\gamma/2)^2}} & 0 \\ \frac{\gamma}{2\sqrt{1 + (\gamma/2)^2}} & \frac{1 + \gamma^2/2}{\sqrt{1 + (\gamma/2)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} \frac{1 + \gamma^2/2}{\sqrt{1 + (\gamma/2)^2}} & \frac{\gamma}{2\sqrt{1 + (\gamma/2)^2}} & 0 \\ \frac{\gamma}{2\sqrt{1 + (\gamma/2)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 + (\gamma/2)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + (\gamma/2)^2}} & \frac{\gamma}{2\sqrt{1 + (\gamma/2)^2}} & 0 \\ \frac{-\gamma}{2\sqrt{1 + (\gamma/2)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 + (\gamma/2)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la rotation propre est une rotation autour de \underline{e}_3 d'angle $\tan \theta = -\frac{\gamma}{2}$

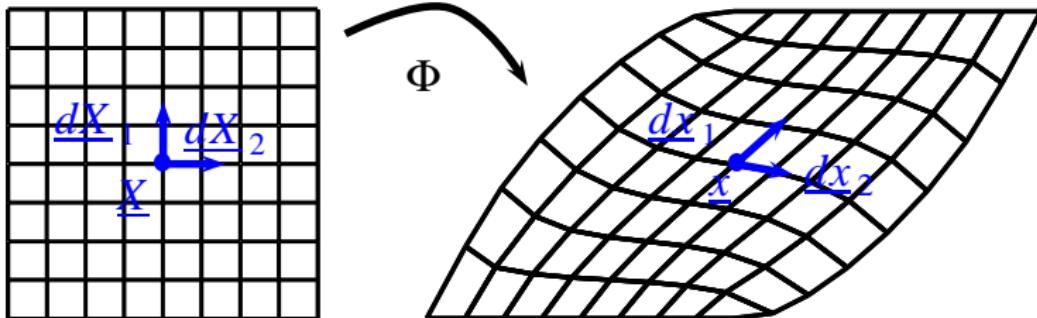
Plan

- ① Mise en évidence expérimentale
- ② Le gradient de la transformation
 - Transports convectifs
 - Décomposition polaire
 - Extension et glissement simples
- ③ Déformations
 - Mesures de déformations
 - Transformations infinitésimales
- ④ Equations de compatibilité dans le contexte infinitésimal
- ⑤ Bilan : déformation du milieu continu

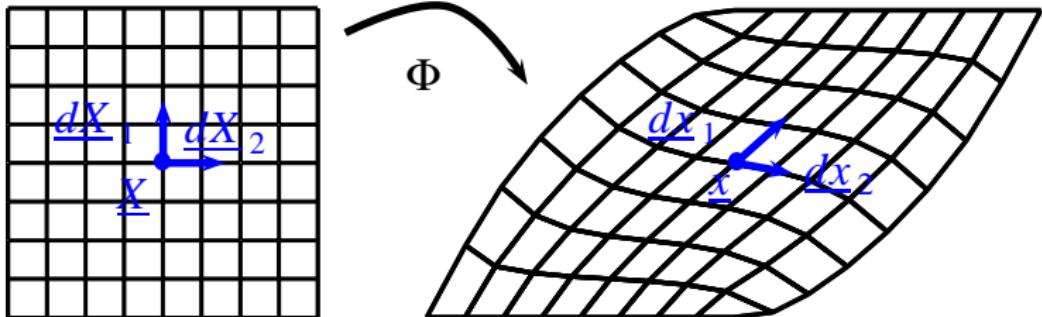
Plan

- ① Mise en évidence expérimentale
- ② Le gradient de la transformation
 - Transports convectifs
 - Décomposition polaire
 - Extension et glissement simples
- ③ Déformations
 - Mesures de déformations
 - Transformations infinitésimales
- ④ Equations de compatibilité dans le contexte infinitésimal
- ⑤ Bilan : déformation du milieu continu

Les tenseurs de Cauchy–Green



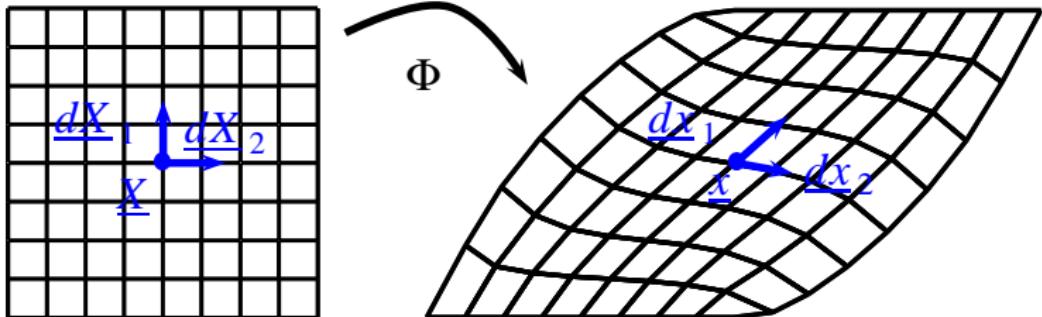
Les tenseurs de Cauchy–Green



$$\underline{dx}_1 \cdot \underline{dx}_2 = (\underline{F} \cdot \underline{dX}_1) \cdot (\underline{F} \cdot \underline{dX}_2) = \underline{dX}_1 \cdot \underline{F}^T \cdot \underline{F} \cdot \underline{dX}_2 = \underline{dX}_1 \cdot \underline{C} \cdot \underline{dX}_2$$

le tenseur de Cauchy–Green droit $\underline{C} = \underline{F}^T \cdot \underline{F}$ instaure une métrique sur Ω_0

Les tenseurs de Cauchy–Green



$$\underline{dx}_1 \cdot \underline{dx}_2 = (\underline{F} \cdot \underline{dX}_1) \cdot (\underline{F} \cdot \underline{dX}_2) = \underline{dX}_1 \cdot \underline{F}^T \cdot \underline{F} \cdot \underline{dX}_2 = \underline{dX}_1 \cdot \underline{C} \cdot \underline{dX}_2$$

le tenseur de Cauchy–Green droit $\underline{C} = \underline{F}^T \cdot \underline{F}$ instaure une métrique sur Ω_0

$$\underline{dX}_1 \cdot \underline{dX}_2 = \underline{dx}_1 \cdot \underline{B}^{-1} \cdot \underline{dx}_2$$

le tenseur de Cauchy–Green gauche $\underline{B} = \underline{F} \cdot \underline{F}^T$ instaure une métrique sur Ω_t

(\underline{C} et \underline{B} sont symétriques et définis positifs,

$\underline{B} \neq \underline{C}^T$!!)

Variation de longueurs

- variation de longueurs

$$\|\underline{dx}\|^2 - \|\underline{dX}\|^2$$

- allongement relatif

$$\underline{dX} = \|\underline{dX}\| \underline{M}$$

$$\lambda(\underline{M}) = \frac{\|\underline{dx}\|}{\|\underline{dX}\|}$$

- interprétation des composantes de $\tilde{\underline{C}}$

$$\lambda(\underline{e}_1)$$

Variation de longueurs

- variation de longueurs

$$\|\underline{dx}\|^2 - \|\underline{dX}\|^2 = \underline{dX} \cdot (\underline{\mathcal{C}} - \underline{\mathcal{1}}) \cdot \underline{dX} = \underline{dx} \cdot (\underline{\mathcal{1}} - \underline{\mathcal{B}}^{-1}) \cdot \underline{dx}$$

- allongement relatif

$$\underline{dX} = \|\underline{dX}\| \underline{M}$$

$$\lambda(\underline{M}) = \frac{\|\underline{dx}\|}{\|\underline{dX}\|} = \sqrt{\underline{M} \cdot \underline{\mathcal{C}} \cdot \underline{M}} = \|\underline{F} \cdot \underline{M}\| = \|\underline{U} \cdot \underline{M}\|$$

- interprétation des composantes de $\underline{\mathcal{C}}$

$$\lambda(\underline{e}_1) = \sqrt{C_{11}} = \sqrt{F_{11}^2 + F_{21}^2 + F_{31}^2}$$

C_{11} désigne donc le carré de l'allongement du premier vecteur de base

Variation d'angles

- variation d'angle entre deux éléments de fibre matérielle

$$\underline{dX}_1 = |\underline{dX}_1| \underline{M}_1, \quad \underline{dX}_2 = |\underline{dX}_2| \underline{M}_2$$

$$\underline{dx}_1 = |\underline{dx}_1| \underline{m}_1, \quad \underline{dx}_2 = |\underline{dx}_2| \underline{m}_2$$

$$\cos \Theta = \underline{M}_1 \cdot \underline{M}_2$$

$$\cos \theta = \underline{m}_1 \cdot \underline{m}_2$$

- angle de glissement γ des directions \underline{M}_1 et \underline{M}_2 dans le plan de glissement ($\underline{M}_1, \underline{M}_2$)

$$\gamma := \Theta - \theta$$

Si $\Theta = \pi/2$ (directions initialement orthogonales)

$$\sin \gamma =$$

- interprétation des composantes de $\tilde{\mathbf{C}}$: $\underline{M}_1 = \underline{E}_1$ et $\underline{M}_2 = \underline{E}_2$

$$\sin \gamma =$$

Variation d'angles

- variation d'angle entre deux éléments de fibre matérielle

$$\underline{dX}_1 = |\underline{dX}_1| \underline{M}_1, \quad \underline{dX}_2 = |\underline{dX}_2| \underline{M}_2$$

$$\underline{dx}_1 = |\underline{dx}_1| \underline{m}_1, \quad \underline{dx}_2 = |\underline{dx}_2| \underline{m}_2$$

$$\cos \Theta = \underline{M}_1 \cdot \underline{M}_2$$

$$\cos \theta = \underline{m}_1 \cdot \underline{m}_2 = \frac{\underline{M}_1 \cdot \mathcal{C} \cdot \underline{M}_2}{\lambda(\underline{M}_1) \lambda(\underline{M}_2)}$$

- angle de glissement γ

$$\gamma := \Theta - \theta$$

Si $\Theta = \pi/2$ (directions initialement orthogonales)

$$\sin \gamma = \frac{\underline{M}_1 \cdot \mathcal{C} \cdot \underline{M}_2}{\lambda(\underline{M}_1) \lambda(\underline{M}_2)}$$

- interprétation des composantes de \mathcal{C} : $\underline{M}_1 = \underline{E}_1$ et $\underline{M}_2 = \underline{E}_2$

$$\sin \gamma = \frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11} C_{22}}}$$

Retour sur les mouvements de corps rigide

Une transformation homogène est appelée mouvement de corps rigide lorsque la distance entre tout couple de points matériels reste inchangée au cours du mouvement :

$$\forall \underline{X}_1, \underline{X}_2, \quad \|\underline{x}_1 - \underline{x}_2\| = \|\underline{X}_1 - \underline{X}_2\|$$

Retour sur les mouvements de corps rigide

Une transformation homogène est appelée mouvement de corps rigide lorsque la distance entre tout couple de points matériels reste inchangée au cours du mouvement :

$$(\tilde{\mathbf{F}} \cdot (\underline{\mathbf{X}}_1 - \underline{\mathbf{X}}_2))^2 = (\underline{\mathbf{X}}_1 - \underline{\mathbf{X}}_2) \cdot \tilde{\mathbf{F}}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}} \cdot (\underline{\mathbf{X}}_1 - \underline{\mathbf{X}}_2) = (\underline{\mathbf{X}}_1 - \underline{\mathbf{X}}_2) \cdot (\underline{\mathbf{X}}_1 - \underline{\mathbf{X}}_2)$$
$$\implies \tilde{\mathbf{F}}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{1}}$$

Le gradient de la transformation est donc orthogonal direct. C'est une rotation $\tilde{\mathbf{Q}}(t)$. La transformation correspondante est

$$\underline{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{Q}}(t) \cdot \underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{c}}(t)$$

Mesures de déformation

- candidats

$$\underline{\mathbf{C}}, \underline{\mathbf{B}}, \underline{\mathbf{U}}, \underline{\mathbf{V}}$$

- quelques règles supplémentaires conventionnelles pour une mesure de déformation :

- elle est symétrique et sans dimension physique;
- elle est nulle pour un mouvement de corps rigide et en $\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{1}}$;
- son développement limité autour de $\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{1}}$ s'écrit $\frac{1}{2}(\underline{\mathbf{H}} + \underline{\mathbf{H}}^T) + o(\underline{\mathbf{H}})$

$$\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{1}} = \text{Grad } \underline{\mathbf{u}}$$

- les tenseurs de Green–Lagrange et d'Almansi

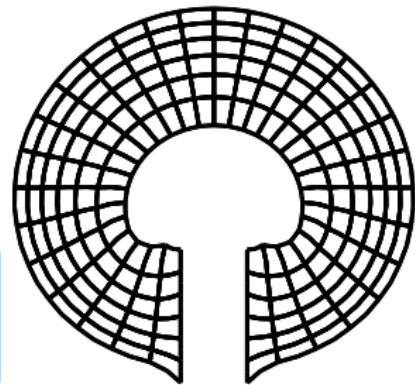
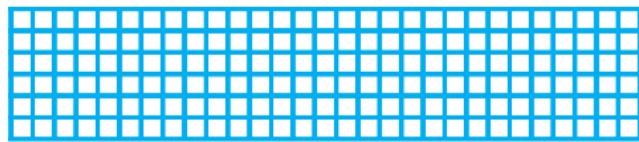
$$\underline{\mathbf{E}} := \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{C}} - \underline{\mathbf{1}}), \quad \underline{\mathbf{A}} := \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{1}} - \underline{\mathbf{B}}^{-1})$$

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{H}} + \underline{\mathbf{H}}^T + \underline{\mathbf{H}}^T \cdot \underline{\mathbf{H}})$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right)$$

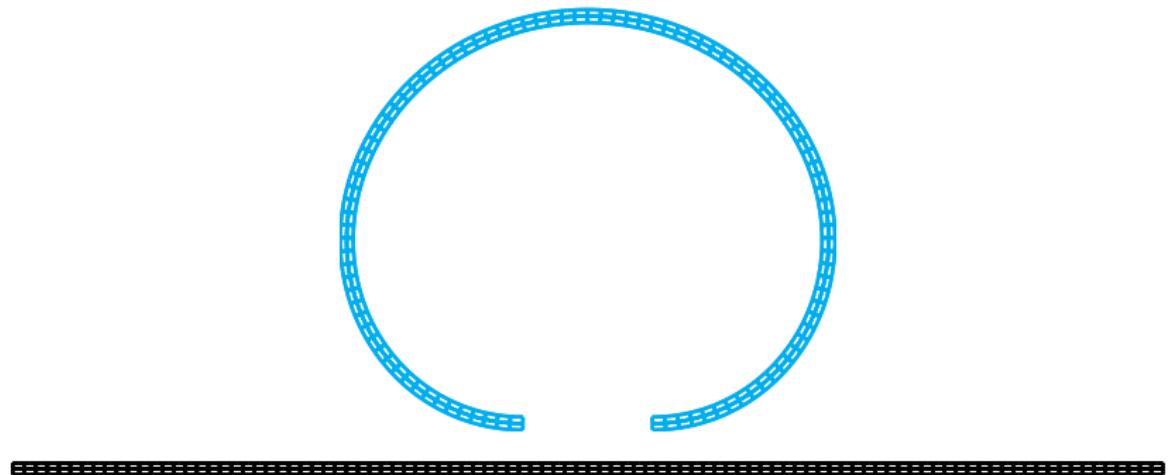
- mesures **lagrangiennes** / mesures **eulériennes** de déformation

Grandes déformations / grandes rotations



$$\tilde{F} = \tilde{R} \cdot \tilde{U}$$

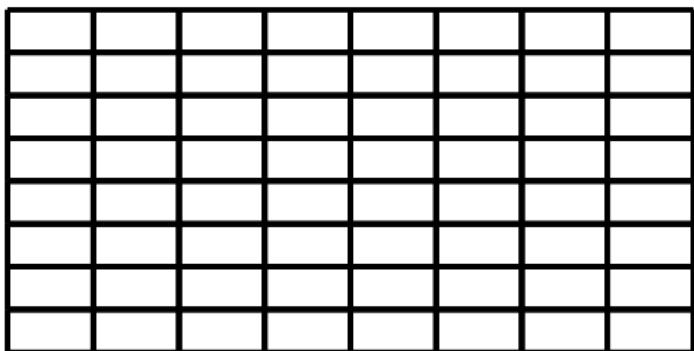
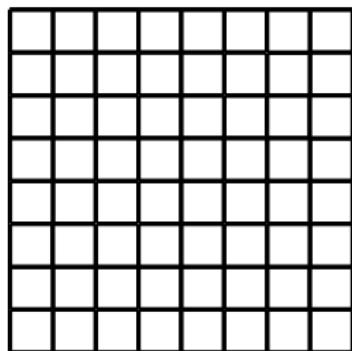
Petites déformations / grandes rotations



$$\tilde{\boldsymbol{U}} \simeq \tilde{\boldsymbol{1}} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\| \ll 1$$

pour les corps élancés dans une ou deux directions (poutres, plaques et coques...), "grande transformation" n'implique pas nécessairement "grande déformation" ...

Grandes déformations / petites rotations



représentation des petites rotations

$$[\tilde{R}] = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\phi & 0 \\ \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R} \simeq \mathbf{1} + \tilde{\omega}$$

$\tilde{\omega}$ antisymétrique : $\tilde{\omega}^T = -\tilde{\omega}$

Plan

- ① Mise en évidence expérimentale
- ② Le gradient de la transformation
 - Transports convectifs
 - Décomposition polaire
 - Extension et glissement simples
- ③ Déformations
 - Mesures de déformations
 - Transformations infinitésimales
- ④ Equations de compatibilité dans le contexte infinitésimal
- ⑤ Bilan : déformation du milieu continu

Petites déformations / petites rotations

$$\tilde{\boldsymbol{H}} = \text{Grad } \underline{\boldsymbol{u}}, \quad \tilde{\boldsymbol{F}} = \tilde{\boldsymbol{1}} + \tilde{\boldsymbol{H}} = \tilde{\boldsymbol{1}} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{H}} + \tilde{\boldsymbol{H}}^T), \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{H}} - \tilde{\boldsymbol{H}}^T)$$

- le contexte des transformations infinitésimales (dans un référentiel donné) :

$$\|\tilde{\boldsymbol{H}} = \text{Grad } \underline{\boldsymbol{u}}\| \ll 1 \iff \tilde{\boldsymbol{F}} = \mathcal{O}(\tilde{\boldsymbol{1}})$$

transformation infinitésimale = petite déformation + petite rotation

$$\tilde{\boldsymbol{F}} = \tilde{\boldsymbol{1}} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \simeq (\tilde{\boldsymbol{1}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}).(\tilde{\boldsymbol{1}} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})$$

tenseur des **déformations infinitésimales** $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$

tenseur des **rotations infinitésimales** $\omega_{ij} := \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$

- objectif : tenue en service des matériaux et des structures (dimensionnement, fiabilité)
- piège : on peut toujours calculer $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ mais il n'a de sens que dans le contexte infinitésimal...

$$\tilde{\boldsymbol{F}} = \tilde{\boldsymbol{Q}} \implies \tilde{\boldsymbol{C}} = \tilde{\boldsymbol{1}}, \quad \tilde{\boldsymbol{E}} = 0 \quad \text{mais} \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{Q}} + \tilde{\boldsymbol{Q}}^T) - \tilde{\boldsymbol{1}} \neq 0 !!!$$

Etude des déformations dans le contexte infinitésimal

- $\tilde{\mathbf{C}} \simeq \mathbf{1} + 2\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\tilde{\mathbf{E}} \simeq \boldsymbol{\varepsilon}$
- variation de volume

$$\frac{dV}{dV} = \det \tilde{\mathbf{F}} = \det \begin{bmatrix} 1 + u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & 1 + u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & 1 + u_{3,3} \end{bmatrix}$$

cas d'une transformation isochore

- variation de longueur

$$\lambda(\underline{\mathbf{M}}) = \frac{\|\underline{dx}\|}{\|\underline{dX}\|} = \sqrt{\underline{\mathbf{M}} \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{M}}}$$

- variation d'angle

$$\cos \theta = \underline{\mathbf{m}}_1 \cdot \underline{\mathbf{m}}_2 = \frac{\underline{\mathbf{M}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{M}}_2}{\lambda(\underline{\mathbf{M}}_1) \lambda(\underline{\mathbf{M}}_2)}$$

Etude des déformations dans le contexte infinitésimal

- $\tilde{C} \simeq \tilde{1} + 2\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{E} \simeq \tilde{\varepsilon}$
- variation de volume

$$\frac{dv - dV}{dV} \simeq \operatorname{div} \underline{u} = \operatorname{trace} \tilde{\varepsilon}$$

cas d'une transformation isochore : $\operatorname{trace} \tilde{\varepsilon} = 0$

- variation de longueur

$$\frac{\|\underline{dx}\| - \|\underline{dX}\|}{\|\underline{dX}\|} \simeq \underline{M} \cdot \tilde{\varepsilon} \cdot \underline{M}$$

si $\underline{M} = \underline{e}_1$, l'allongement relatif est ε_{11}

- variation d'angle

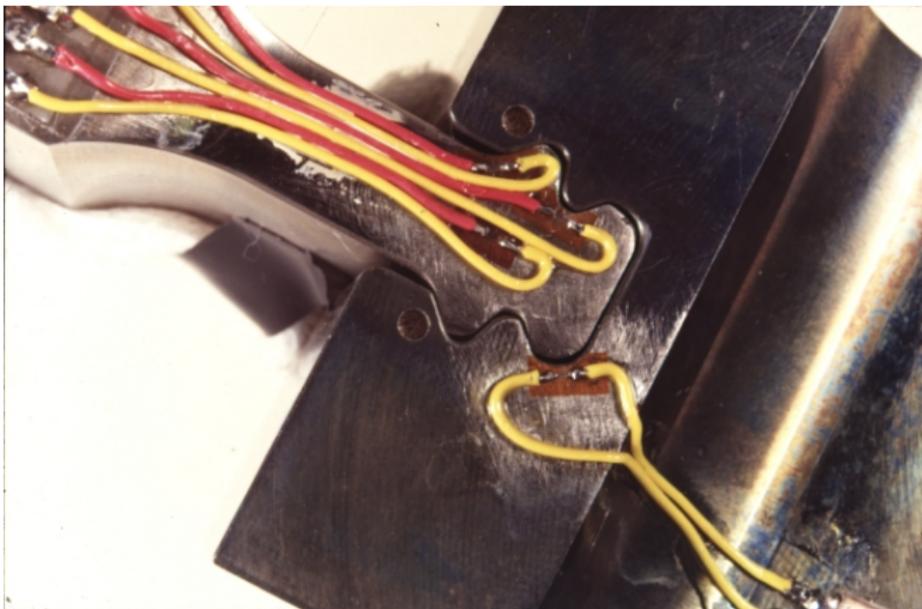
$$\cos \theta = \frac{\underline{M}_1 \cdot \underline{M}_2 + 2\underline{M}_1 \cdot \tilde{\varepsilon} \cdot \underline{M}_2}{(1 + \underline{M}_1 \cdot \tilde{\varepsilon} \cdot \underline{M}_1)(1 + \underline{M}_2 \cdot \tilde{\varepsilon} \cdot \underline{M}_2)}$$

cas de deux directions initialement orthogonales : $\gamma \simeq 2\underline{M}_1 \cdot \tilde{\varepsilon} \cdot \underline{M}_2$

si $\underline{M}_1 = \underline{e}_1$, $\underline{M}_2 = \underline{e}_2$, alors

$\gamma \simeq 2\varepsilon_{12}$

Application : jauge de déformation



$$\frac{\|\underline{dx}\| - \|\underline{dX}\|}{\|\underline{dX}\|} \simeq \underline{M} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{M}$$

Application : jauge et extensomètres

Dans une zone “utile” où la transformation est (quasi-)homogène,

$$\underline{\mathbf{X}}_2 - \underline{\mathbf{X}}_1 = \ell_0 \underline{\mathbf{M}}$$

$$\underline{\mathbf{x}}_2 - \underline{\mathbf{x}}_1 = \ell \underline{\mathbf{m}}$$

$$C_{11} = \frac{\ell^2}{\ell_0^2}, \quad E_{11} = \frac{\ell^2 - \ell_0^2}{2\ell_0^2}$$

Dans le contexte infinitésimal

$$\varepsilon_{11} = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = \frac{\delta\ell}{\ell_0}$$

Si $\underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{M}} \parallel \underline{\mathbf{M}}$,

$$F_{11} = U_{11} = \frac{\ell}{\ell_0}$$

Plan

- ① Mise en évidence expérimentale
- ② Le gradient de la transformation
 - Transports convectifs
 - Décomposition polaire
 - Extension et glissement simples
- ③ Déformations
 - Mesures de déformations
 - Transformations infinitésimales
- ④ Equations de compatibilité dans le contexte infinitésimal
- ⑤ Bilan : déformation du milieu continu

Compatibilité dans le contexte infinitésimal

Soit $\underline{\varepsilon}(\underline{X})$ un champ de tenseurs symétriques, à quelles conditions existe-t-il un champ de déplacements $\underline{u}(\underline{X})$ tel que

$$\frac{1}{2} ((\text{Grad } \underline{u}) + (\text{Grad } \underline{u})^T) = \underline{\varepsilon}(\underline{X}) \quad ?$$

les 6 champs $\varepsilon_{ij}(\underline{X})$ ne doivent dépendre en fait que de la connaissance de 3 champs $u_i(\underline{X})$

Preuve de la condition nécessaire

On suppose que le champ donné $\tilde{\varepsilon}(\underline{x})$ est compatible, c'est-à-dire qu'il existe $\underline{u}(\underline{X})$ tel que, dans un repère cartésien orthonormé,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

Preuve de la condition nécessaire

On suppose que le champ donné $\tilde{\varepsilon}(\underline{x})$ est compatible, c'est-à-dire qu'il existe $\underline{u}(\underline{X})$ tel que, dans un repère cartésien orthonormé,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

- On calcule le champ des rotations infinitésimales $\omega_{ij} := \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$

Preuve de la condition nécessaire

On suppose que le champ donné $\varepsilon(\underline{x})$ est compatible, c'est-à-dire qu'il existe $\underline{u}(\underline{X})$ tel que, dans un repère cartésien orthonormé,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

- On calcule le champ des rotations infinitésimales $\omega_{ij} := \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$
- On calcule alors le gradient du champ des rotations infinitésimales

$$\begin{aligned}\omega_{ij,k} &= \frac{1}{2}(u_{i,jk} - u_{j,ik}) \\ &= \frac{1}{2}(u_{i,kj} + u_{k,ij} - (u_{k,ji} + u_{j,ki})) \\ &= \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i}\end{aligned}$$

La courbure s'exprime en fonction du gradient des déformations!

Preuve de la condition nécessaire

On suppose que le champ donné $\varepsilon(\underline{x})$ est compatible, c'est-à-dire qu'il existe $\underline{u}(\underline{X})$ tel que, dans un repère cartésien orthonormé,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

- On calcule le champ des rotations infinitésimales $\omega_{ij} := \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$
- On calcule alors le gradient du champ des rotations infinitésimales

$$\begin{aligned}\omega_{ij,k} &= \frac{1}{2}(u_{i,jk} - u_{j,ik}) \\ &= \frac{1}{2}(u_{i,kj} + u_{k,ij} - (u_{k,ji} + u_{j,ki})) \\ &= \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i}\end{aligned}$$

La courbure s'exprime en fonction du gradient des déformations!

- Le champ précédent doit vérifier la condition suivante (Schwarz)

$$\omega_{ij,kl} = \omega_{ij,lk}$$

ce qui, appliqué à l'équation précédente, fournit

$$\varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jk,il} = \varepsilon_{il,jk} - \varepsilon_{jl,ik}$$

qui constituent les conditions nécessaires recherchées

Preuve du caractère suffisant

On suppose que le champ $\underline{\varepsilon}(\underline{X})$ vérifie les conditions nécessaires précédentes.

Preuve du caractère suffisant

On suppose que le champ $\underline{\varepsilon}(\mathbf{X})$ vérifie les conditions nécessaires précédentes. Il s'ensuit que le champ

$$W_{ijk} := \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i} \quad \text{est tel que} \quad W_{ijk,I} = W_{ijl,k}$$

En vertu du théorème de Poincaré, $\exists \omega_{ij}$ telles que

$$W_{ijk} = \omega_{ij,k}$$

En remarquant que $W_{ijk} = -W_{jik}$, on peut choisir ω_{ij} antisymétrique.

Preuve du caractère suffisant

On suppose que le champ $\tilde{\varepsilon}(\underline{X})$ vérifie les conditions nécessaires précédentes. Il s'ensuit que le champ

$W_{ijk} := \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i}$ est tel que $W_{ijk,I} = W_{ijl,k}$
En vertu du théorème de Poincaré, $\exists \omega_{ij}$ telles que

$$W_{ijk} = \omega_{ij,k}$$

En remarquant que $W_{ijk} = -W_{jik}$, on peut choisir ω_{ij} antisymétrique.
Evaluons alors

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \\ H_{ij,k} - H_{ik,j} &= \varepsilon_{ij,k} + \omega_{ij,k} - \varepsilon_{ik,j} - \omega_{ik,j} \\ &= \varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i} - \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{kj,i} = 0 \end{aligned}$$

La quantité H_{ij} vérifie donc les conditions du théorème de Poincaré :

$$\exists u_i, \quad H_{ij} = u_{i,j}, \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

c'est-à-dire que le champ $\tilde{\varepsilon}(\underline{X})$ est compatible.

Conditions de compatibilité

- Conditions de compatibilité :

$$\forall i, j, k, l, \quad \varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{il,jk} + \varepsilon_{jk,il}$$

- cas 2D

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0$$

3 champs ε_{ij} - 1 condition = 2 degrés de liberté (u_1, u_2)

- cas 3D

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0$$

$$\varepsilon_{22,33} + \varepsilon_{33,22} - 2\varepsilon_{23,23} = 0$$

$$\varepsilon_{33,11} + \varepsilon_{11,33} - 2\varepsilon_{31,31} = 0$$

$$\varepsilon_{12,23} + \varepsilon_{23,12} = \varepsilon_{22,31} + \varepsilon_{31,22}$$

$$\varepsilon_{23,31} + \varepsilon_{31,23} = \varepsilon_{33,12} + \varepsilon_{12,33}$$

$$\varepsilon_{31,12} + \varepsilon_{12,31} = \varepsilon_{11,23} + \varepsilon_{23,11}$$

on peut établir trois relations supplémentaires liant ces équations \implies 3 conditions indépendantes seulement

6 champs ε_{ij} - 3 conditions = 3 degrés de liberté (u_1, u_2, u_3)

Plan

- ① Mise en évidence expérimentale
- ② Le gradient de la transformation
 - Transports convectifs
 - Décomposition polaire
 - Extension et glissement simples
- ③ Déformations
 - Mesures de déformations
 - Transformations infinitésimales
- ④ Equations de compatibilité dans le contexte infinitésimal
- ⑤ Bilan : déformation du milieu continu

Bilan : transports convectifs

Transport d'un élément de fibre matérielle : $\underline{dx} = \underline{\tilde{F}} \cdot \underline{dX}$

Transport d'un élément de surface : $\underline{ds} = J \underline{\tilde{F}}^{-T} \underline{dS}$

Transport d'un élément de volume : $dv = J dV$

Bilan : transformations finies

$\tilde{F} = \tilde{R} \cdot \tilde{U} = \tilde{V} \cdot \tilde{R}$ gradient de la transformation ($\det \tilde{F} > 0$)

\tilde{R} rotation propre ($\det \tilde{R} = 1$)

\tilde{U} tenseur droit de déformation pure

\tilde{V} tenseur gauche de déformation pure

$\tilde{C} := \tilde{F}^T \cdot \tilde{F} = \tilde{U}^2$ tenseur de Cauchy–Green droit

$\tilde{B} := \tilde{F} \cdot \tilde{F}^T = \tilde{V}^2$ tenseur de Cauchy–Green gauche

$\tilde{E} := \frac{1}{2}(\tilde{C} - \mathbf{1})$ tenseur de Green–Lagrange

$\tilde{A} := \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \tilde{B}^{-1})$ tenseur d'Almansi

Bilan : le contexte infinitésimal

$$\underline{H} = \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} = \text{Grad } \underline{u}$$

gradient du déplacement

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\text{Grad } \underline{u} + (\text{Grad } \underline{u})^T)$$

tenseur des déformations infinitésimales

$$\underline{\omega} = \frac{1}{2}(\text{Grad } \underline{u} - (\text{Grad } \underline{u})^T)$$

tenseur des rotations infinitésimales

$$\underline{F} = \underline{1} + \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} \simeq (\underline{1} + \underline{\varepsilon}).(\underline{1} + \underline{\omega}),$$

$$\underline{C} \simeq \underline{1} + 2\underline{\varepsilon} \simeq \underline{B}, \quad \underline{E} \simeq \underline{\varepsilon}$$

$$\frac{|\underline{dx}| - |\underline{dX}|}{|\underline{dX}|} \simeq \underline{M} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{M}$$

allongement infinitésimal

$$\frac{dv - dV}{dV} \simeq \text{div } \underline{u} = \text{trace } \underline{\varepsilon}$$

variation de volume infinitésimale