

Chapitre 18

Machines tournantes

Les machines tournantes sont fréquentes dans les structures industrielles. Les disques et arbres sont des pièces critiques par exemple dans les moteurs d'avion et dans les turbines pour la production d'énergie. Leur dimensionnement est d'une importance capitale pour l'intégrité de la structure en service. Ils sont soumis à des forces centrifuges importantes et ne doivent pas éclater. En guise d'exemple, un assemblage complet de turbines de moteur d'hélicoptère est présenté sur la figure 18.1(a) comprenant la partie froide (compresseur) et la partie chaude du moteur (turbines haute pression en sortie de chambre de combustion). Les spécificités du moteur d'hélicoptère par rapport au moteur d'avion de ligne sont sa taille limitée et des vitesses de rotation des turbines sensiblement plus élevées. Dans ce moteur, on distingue deux familles de disques :

- les **disques alésés** possèdent un alésage (trou) concentrique permettant le passage de l'arbre. Deux exemples sont donnés sur les figures 18.1(b) et (c).
- les **disques non alésés** sont situés en tête ou fin d'assemblage et ne possèdent pas de trou central (figure 18.1(d)).

Les disques sont munis d'aubes formant un monobloc (figure 18.1(b)) ou attachées grâce à des encoches comme sur les figures 18.1(c) et (d). Les disques non solidaires de l'arbre sont entraînés en rotation grâce à des barres reliant les disques et passant par les trous visibles sur les disques des figures 18.1(c) et (d).

Le dimensionnement des disques de turbines vise à éviter l'éclatement aux vitesses de rotation souhaitées. La résistance à l'éclatement est testée lors d'essais de sur-vitesse sur banc. La figure 18.2 montre un disque de turbine de moteur d'hélicoptère qui a éclaté lors d'un tel essai. L'objectif de l'application traitée dans ce chapitre est d'évaluer les vitesses limites du fonctionnement élastique de disques alésés et non alésés. Les disques sont en général soumis à des températures élevées. Dans ce problème, on se place dans des conditions isothermes.

Dans les paragraphes 18.1 et 18.2, des expressions simplifiées des contraintes régnant dans les disques minces en rotation sont établies et appliquées à la prévision de l'entrée en plasticité et de la rupture des composants. Une solution complète du problème, au sens de Saint-Venant, est établie au paragraphe 18.3. Elle justifie *a posteriori* les expressions mises en avant dans les sections précédentes. L'établissement de cette solution nous conduit à mener ensuite une réflexion plus générale sur la déformation axisymétrique d'un composant cylindrique de longueur finie soumis à une large gamme de sollicitations. Une telle démarche est présentée au paragraphe 18.4. On établit au passage pour quels types de sollicitations la solution remplit les conditions de contraintes planes. Ces développements viennent en complément de la discussion sur la résolution de problèmes bidimensionnels en contraintes planes, entamée au paragraphe 9.3.2.

Le chapitre se termine par une évaluation des vitesses critiques dans les arbres en rotation.

18.1 Expressions simplifiées de la réponse élastique linéarisée d'un disque mince en rotation

On va déterminer la réponse élastique linéarisée d'un disque simplifié axisymétrique d'axe \underline{e}_z présentant une section rectangulaire dans le plan (r, z) de rayon intérieur r_i et de rayon extérieur r_e comme sur la figure 18.3. On ne tient donc pas compte des variations d'épaisseur des disques réels. On supposera dans cette partie que le disque est libre d'effort en $r = r_i$ (existence d'un jeu entre l'arbre et le disque). Dans ce problème, l'aubage n'est pas pris en compte pour des raisons de simplicité. Le disque est alors libre d'effort en $r = r_e$. On se restreint au contexte des petites perturbations et au cas des contraintes planes ($\sigma_{zz} = 0$) licite pour un disque suffisamment mince. Le matériau a un comportement élastique isotrope linéarisé. La configuration initiale est supposée correspondre à un état naturel.

Le disque tourne à la vitesse angulaire $\omega \underline{e}_z$ supposée constante (ou variant très lentement). Dans le problème, on va déterminer les composantes des champs de contraintes, de déformations et de déplacements dans le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , d'origine O , attaché au disque. On travaille donc dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire $\omega \underline{e}_z$.

18.1.1 Efforts centrifuges

Dans le référentiel tournant attaché au disque, les équations d'équilibre s'écrivent

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = 0 \quad (18.1)$$

Montrer que les efforts volumiques induits par la vitesse d'entraînement du disque valent :

$$\rho \underline{f} = \rho \omega^2 r \underline{e}_r \quad (18.2)$$

On calcule la vitesse d'entraînement du référentiel attaché au disque :

$$\underline{x}^* = \underline{Q}(t). \underline{x}$$

$$\dot{\underline{x}}^* = \dot{\underline{Q}}. \underline{Q}^T. \underline{x}^* = \underline{W}. \underline{x}^* = \underline{\omega}^\times \wedge \underline{x}^*$$

où $\underline{\omega}^\times = \omega \underline{e}_z$. D'où

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{x}}^* &= \underline{\omega}^\times \wedge \dot{\underline{x}}^* = \underline{\omega}^\times \wedge (\underline{\omega}^\times \wedge \underline{x}^*) \\ &= (\underline{\omega}^\times . \underline{x}^* \underline{\omega}^\times - (\underline{\omega}^\times . \underline{\omega}^\times) \underline{x}^*) \\ &= -\omega^2 r \underline{e}_r \end{aligned} \quad (18.3)$$

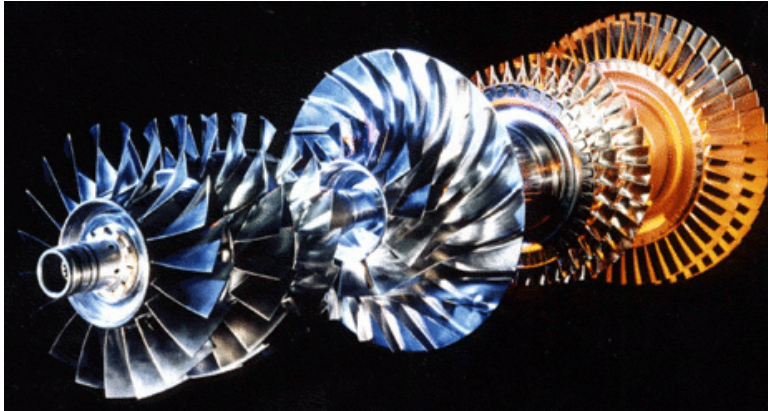
pour $\underline{x}^* = r \underline{e}_r$, où \underline{e}_r est attaché au disque. Dans le référentiel attaché au disque, il existe donc une force d'inertie $-\rho \ddot{\underline{x}}^*$. On n'utilisera plus la notation \underline{x}^* dans la suite.

18.1.2 Forme du tenseur des contraintes

On cherche l'état de contraintes dans le disque sous la forme

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18.4)$$

Le disque simplifié (ainsi que les autres données du problème) étant axisymétrique, les composantes cherchées ne dépendent pas de la variable θ . Dans ce problème, on va voir s'il est possible de trouver



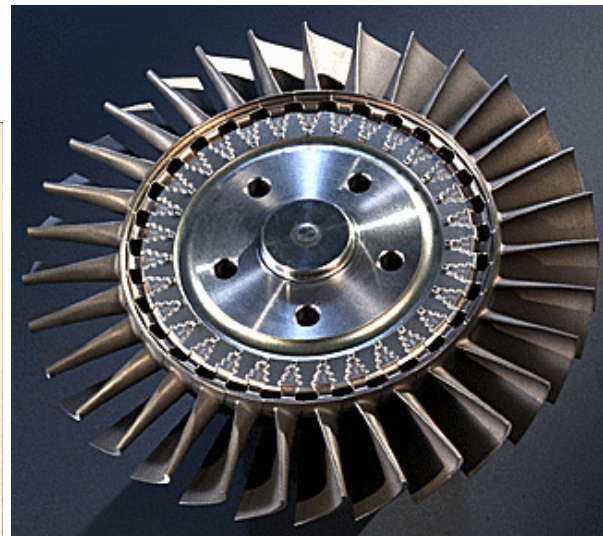
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 18.1 – (a) Vue d'ensemble de l'assemblage de turbines d'un moteur d'hélicoptère (source Turboméca, cf. (Mazière, 2007)). (b) Disque alésé et son aubage (rouet de diamètre : 60 mm sans aubes). (c) Pour comparaison, disque alésé de moteur d'avion dépouillé de ses aubes (turbine haute pression, diamètre : 1000 mm). (d) Disque non alésé et ses aubes (diamètre du disque : 100 mm).



FIGURE 18.2 – Disque de turbine éclaté après un essai de sur-vitesse sur banc (source Turboméca, cf. (Mazière, 2007)). La géométrie initiale du disque est celle de la figure 18.1(d).

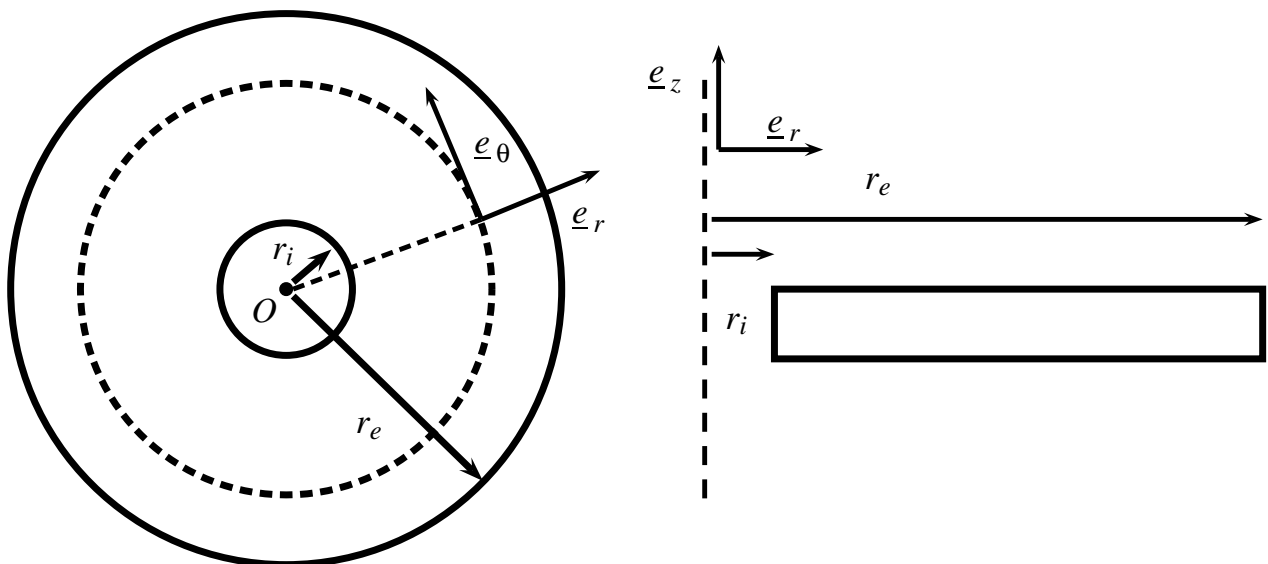


FIGURE 18.3 – Schématisation d'un disque de turbine alésé ; dimensions du disque et introduction des coordonnées cylindriques.

des expressions simplifiées de la solution, avec des contraintes qui sont indépendantes de la variable z . Les composantes σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ sont donc recherchées comme des fonctions de la variable r seulement.

Déduire de (18.1) une équation portant sur les composantes cherchées du tenseur des contraintes.

L'expression de la divergence d'un champ de tenseurs d'ordre 2 en coordonnées cylindriques conduit à l'équation suivante portant sur les composantes de contraintes :

$$\sigma'_{rr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho\omega^2 r = 0 \quad (18.5)$$

où σ'_{rr} désigne la dérivée par rapport à r de σ_{rr} .

18.1.3 Une condition de compatibilité

En utilisant une équation de compatibilité et les relations d'élasticité linéaire isotrope, établir la relation suivante

$$(1 + \nu)(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = r(\sigma'_{\theta\theta} - \nu\sigma'_{rr}) \quad (18.6)$$

où σ'_{rr} (resp. $\sigma'_{\theta\theta}$) désigne la dérivée par rapport à r de σ_{rr} (resp. $\sigma_{\theta\theta}$).

En coordonnées cylindriques et lorsque les déformations ne dépendent que de r , une équation de compatibilité est

$$\varepsilon_{rr} = u'_r = (r\varepsilon_{\theta\theta})' = \varepsilon_{\theta\theta} + r\varepsilon'_{\theta\theta} \quad (18.7)$$

où u_r est la composante radiale de déplacement. Les déformations sont liées aux contraintes par la loi d'élasticité isotrope :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E} - \frac{\nu\sigma_{\theta\theta}}{E}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} - \frac{\nu\sigma_{rr}}{E},$$

Ces relations peuvent alors être substituées dans (18.7) ce qui conduit à (18.6).

18.1.4 Détermination des contraintes

Intégrer le système des deux équations obtenues et montrer que les contraintes se mettent sous la forme

$$\sigma_{rr} = -\frac{\rho\omega^2 r^2}{8}(3 + \nu) + \frac{A}{r^2} + B \quad (18.8)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{\rho\omega^2 r^2}{8}(1 + 3\nu) - \frac{A}{r^2} + B \quad (18.9)$$

où A et B sont deux constantes d'intégration.

Donner enfin l'expression complète des contraintes en fonction des caractéristiques du disque et des propriétés du matériau.

En éliminant $\sigma_{\theta\theta}$ dans (18.5) et (18.6), on obtient l'équation différentielle suivante portant sur σ_{rr} :

$$r\sigma''_{rr} + 3\sigma'_{rr} + \rho\omega^2 r(3 + \nu) = 0 \quad (18.10)$$

dont la résolution conduit à (18.8) et (18.9).

Les conditions aux limites retenues dans ce problème sont

$$\sigma_{rr}(r = r_i) = \sigma_{rr}(r = r_e) = 0$$

ce qui donne

$$A = -\frac{3 + \nu}{8}\rho\omega^2 r_i^2 r_e^2, \quad B = \frac{3 + \nu}{8}\rho\omega^2 (r_i^2 + r_e^2)$$

On obtient finalement l'expression complète des contraintes :

$$\sigma_{rr} = -\frac{3 + \nu}{8}\frac{\rho\omega^2}{r^2}(r^2 - r_i^2)(r^2 - r_e^2) \quad (18.11)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{8} \left((3 + \nu) \left(\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} + \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right) - (1 + 3\nu) \right) \quad (18.12)$$

18.1.5 Déformations et déplacements

Les composantes du tenseur des déformations infinitésimales se déduisent des résultats précédents. En donner les expressions complètes.

Les relations d'élasticité isotrope linéarisées fournissent les déformations suivantes :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{8E} \left(3(\nu^2 - 1) + (3 + \nu)((1 - \nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} - (1 + \nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} \right) \quad (18.13)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{8E} \left((\nu^2 - 1) + (3 + \nu)((1 - \nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} + (1 + \nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} \right) \quad (18.14)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \frac{\nu}{E} \frac{\rho\omega^2 r^2}{4} \left(2(1 + \nu) - (3 + \nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right) \quad (18.15)$$

Montrer que les résultats précédents permettent de déterminer la composante radiale de déplacement u_r .

Comme le déplacement radial vaut $u_r = r\varepsilon_{\theta\theta}$, il ne dépend pas de z et est entièrement déterminé :

$$u_r = r\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2 r^3}{8E} \left((\nu^2 - 1) + (3 + \nu)((1 - \nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} + (1 + \nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} \right) \quad (18.16)$$

Donnons au passage la composante u_θ . Les dérivées partielles de u_θ par rapport à r et z interviennent dans les deux composantes de déformation suivante :

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{r\theta} &= -\frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\ 2\varepsilon_{\theta z} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \end{aligned}$$

Comme ces deux cisaillements sont nuls dans le cadre de la solution recherchée, u_θ est une fonction de r seulement et vaut

$$u_\theta = \alpha r \quad (18.17)$$

Cette composante représente une rotation infinitésimale d'angle α par rapport à l'axe \underline{e}_z . Fixons ce mouvement infinitésimal de corps rigide à $\alpha = 0$ dans la suite.

Montrer qu'il n'est pas possible de déterminer u_z . On constate donc l'échec de la démarche précédente pour trouver une solution acceptable au problème posé. Quelle hypothèse initiale doit-on remettre en cause ?

Il est possible en fait de trouver une solution acceptable à ce problème, au moins au sens de Saint-Venant. Cette solution plus complexe est illustrée par la figure 18.4 et sera établie au paragraphe 18.3. Commenter la déformée du disque vis-à-vis des résultats précédents.

L'intégration de l'équation (18.15) par rapport à z conduit à l'expression de u_z suivante :

$$u_z = \frac{\nu}{E} \frac{\rho\omega^2 r^2}{4} z \left(2(1 + \nu) - (3 + \nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right) + f(r) \quad (18.18)$$

où une fonction f de la coordonnée r doit être introduite. Pour la déterminer, il faut calculer la déformation de cisaillement

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\nu(1 + \nu)}{2E} \rho\omega^2 r z + f'(r) \quad (18.19)$$

Dans la démarche développée précédemment, un tel cisaillement est nul. Or, il est impossible de déterminer une fonction f dépendant de r seulement et annulant le cisaillement précédent.

L'échec de la démarche de résolution proposée est patent et nous amène à remettre en question les hypothèses simplificatrices introduites au début du problème. Deux hypothèses peuvent légitimement être remises en question : le cadre même des contraintes planes et l'indépendance des contraintes par rapport à la variable z . Le caractère mince du disque nous a incité à tester ces hypothèses. Toutefois, l'argument de minceur, à lui seul, ne permet d'exclure ni la dépendance en z (le contre-exemple étant la flexion d'un disque mince), ni même l'existence de contraintes σ_{zz} ou σ_{rz} dans la solution, même si ces dernières doivent s'annuler à la surface libre du disque. On montrera au paragraphe 18.3 qu'il est possible de construire une solution acceptable, en contraintes planes, au problème posé, mais seulement au sens de Saint-Venant. La différence fondamentale entre cette solution acceptable et les champs proposés précédemment est la dépendance en z des contraintes et déformations.

Cependant, il s'avère que les expressions des contraintes et déformations proposées précédemment représentent fidèlement certains aspects de la solution véritable. C'est pourquoi on propose de continuer à travailler avec ces expressions que l'on appellera dans la suite "expressions simplifiées" de la solution acceptable. Pour cela, indiquer un argument qui incite à retenir l'expression suivante de u_z :

$$u_z = \frac{\nu}{E} \frac{\rho \omega^2 r^2}{4} z \left(2(1 + \nu) - (3 + \nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right) \quad (18.20)$$

Dans la suite du problème on travaille avec les expressions simplifiées des contraintes, déformations et déplacements ainsi déterminées.

En vertu de la symétrie du disque (et des données du problème) par rapport au plan $z = 0$, la condition suivante est attendue :

$$u_z(r, z = 0) = 0, \quad \forall r \in [r_i, r_e] \quad (18.21)$$

Cette condition de symétrie entraîne la nullité de la fonction $f(r)$ dans (18.18). Le déplacement u_z prend donc la forme annoncée. Cette condition ne remet pas en cause l'échec de la démarche proposée. Mais le champ de déplacement proposé constitue une expression simplifiée de la solution. Il est donc utile dans la pratique.

La difficulté rencontrée pour remplir toutes les conditions de compatibilité avec la forme de solution initialement recherchée est typique des problèmes posés en contraintes planes. Les résultats obtenus de la sorte représentent des expressions simplifiées de la solution acceptable¹. La pertinence de ces expressions simplifiées vient systématiquement de conditions de symétries particulières, dans le cas présent la symétrie par rapport au plan $z = 0$. Il sera utile de quantifier la correction apportée par la solution valide au sens de Saint-Venant.

Les expressions simplifiées des contraintes, déformations et déplacements du disque mince alésé en rotation sont rassemblées dans la table 18.1.

18.1.6 Contexte infinitésimal

Le contexte des petites perturbations qui a présidé aux développements précédents exige en particulier que les déformations restent infinitésimales. Préciser les conditions correspondantes, en fonction de la vitesse de rotation et des caractéristiques du disque. On ne cherchera pas dans ce problème à analyser les conditions associées au caractère infinitésimal des rotations.

1. sauf circonstance exceptionnellement favorable, autorisant une dépendance affine de la déformation ε_{zz} et donc aussi de la trace des contraintes avec les coordonnées x, y pour des conditions de contraintes planes selon z . Cette dépendance affine de la déformation ε_{zz} dans le contexte des contraintes planes est une conséquence des équations de compatibilité (cf. paragraphe 9.3.2).

Examinons d'abord la déformation circonférentielle,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{\rho\omega^2}{8E} \left((\nu^2 - 1)r^2 + (3 + \nu)((1 - \nu)(r_i^2 + r_e^2) + (1 + \nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^2}) \right) \\
 &\geq \frac{\rho\omega^2}{8E} ((\nu^2 - 1)r_e^2 + (3 + \nu)((1 - \nu)(r_i^2 + r_e^2) + (1 + \nu)r_i^2)) \\
 &\geq \frac{\rho\omega^2}{4E} (r_e^2(1 - \nu) + r_i^2(3 + \nu))
 \end{aligned} \tag{18.22}$$

ce qui montre que $\varepsilon_{\theta\theta} \geq 0$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\theta\theta} &\leq \frac{\rho\omega^2}{8E} ((\nu^2 - 1)r_i^2 + (3 + \nu)((1 - \nu)(r_i^2 + r_e^2) + (1 + \nu)r_e^2)) \\
 &\leq \frac{\rho\omega^2}{4E} (r_i^2(1 - \nu) + r_e^2(3 + \nu)) \leq \frac{\rho\omega^2 r_e^2}{E}
 \end{aligned} \tag{18.23}$$

On examine ensuite les déformations radiales et axiales :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= \frac{\rho\omega^2}{8E} \left(3(\nu^2 - 1)r^2 + (3 + \nu)((1 - \nu)(r_i^2 + r_e^2) - (1 + \nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^2}) \right) \\
 |\varepsilon_{rr}| &\leq \frac{\rho\omega^2}{8E} (3(1 - \nu^2)r_e^2 + (3 + \nu)((1 - \nu)(r_i^2 + r_e^2) + (1 + \nu)r_e^2)) \\
 &\leq \frac{\rho\omega^2}{4E} (3 - \nu)r_e^2 \leq \frac{\rho\omega^2 r_e^2}{E}
 \end{aligned} \tag{18.24}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\nu}{E} \frac{\rho\omega^2}{4} (2(1 + \nu)r^2 - (3 + \nu)(r_i^2 + r_e^2)) \\
 |\varepsilon_{zz}| &\leq \frac{\nu}{E} \frac{\rho\omega^2}{4} (2(1 + \nu)r_e^2 - (3 + \nu)(r_i^2 + r_e^2)) \\
 &\leq 2 \frac{\rho\omega^2 r_e^2}{E}
 \end{aligned} \tag{18.25}$$

Pour établir ces inégalités, on a utilisé la propriété suivante du coefficient de Poisson : $-1 < \nu < 0.5$ (cf. le résultat (8.65)). Les déformations précédentes sont infinitésimales si

$$\frac{\rho\omega^2 r_e^2}{E} \ll 1 \tag{18.26}$$

L'expression (18.20) implique l'existence d'une déformation de cisaillement

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\nu(1 + \nu)}{E} \rho\omega^2 r z \tag{18.27}$$

Il se trouve que ce terme est du second ordre par rapport aux composantes de déformations retenues. En effet, d'après (18.26),

$$|\varepsilon_{rz}| = \frac{\nu(1 + \nu)}{E} \rho\omega^2 r |z| \leq \frac{\rho\omega^2 r_e^2}{E} \frac{|z|}{r_e} \ll |\varepsilon_{rr}|, |\varepsilon_{\theta\theta}|, |\varepsilon_{zz}| \tag{18.28}$$

pourvu que $|z|/r_e \ll 1$, i.e. pourvu que le disque soit suffisamment mince. Cet argument ne peut pas être utilisé pour justifier les expressions simplifiées trouvées, au titre du contexte infinitésimal. En effet, un tel cisaillement ε_{rz} se traduit, en vertu de la loi d'élasticité isotrope, par une contrainte de

cisaillement $\sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz}$ non prise en compte dans la modélisation au paragraphe 18.1.2. Lorsque cette contrainte de cisaillement est insérée dans la première équation d'équilibre

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho\omega^2 r = 0 \quad (18.29)$$

les efforts volumiques sont corrigés et se transforment en $(1 + \nu)\rho\omega^2 r$, ce qui ne représente pas en général une perturbation infinitésimale des efforts appliqués, à moins que ν soit idéalement nul.

Pour respecter le contexte infinitésimal, il reste encore à établir les conditions de rotations infinitésimales. Cette question sera abordée dans le cas de la solution correcte au sens de Saint-Venant établie au paragraphe 18.3.

18.1.7 Contact avec le carter et prise en compte de l'aubage

Il existe un jeu initial entre l'extrémité des aubes et le carter du moteur. En service, un contact entre les aubes et un matériau abradable tapissant le carter est possible en raison des déformations du disque et des aubes. Ce léger contact garantit l'étanchéité de l'écoulement des gaz. L'augmentation du rayon du disque ne doit toutefois pas dépasser une valeur critique e sous peine d'un arrêt de fonctionnement du disque. Indiquer le jeu minimal e autorisé en fonction de la vitesse de rotation en service.

L'augmentation du rayon extérieur du disque est donné par le déplacement

$$u_r(r = r_e) = \frac{\rho\omega^2}{4E} r_e (r_e^2(1 - \nu) + r_i^2(3 + \nu)) \quad (18.30)$$

Pour une vitesse de rotation du disque donnée, des caractéristiques géométriques et mécaniques données, le jeu minimal autorisé est donc $e = u_r(r = r_e)$ précédent, ou une fraction de cette valeur si une abrasion est autorisée.

Indiquer une manière approchée de prendre en compte l'influence des aubes sur la réponse du disque, tout en conservant la schématisation simplifiée axisymétrique du disque mince (figure 18.3).

Chaque aube exerce sur le disque une force égale à la résultante des forces centrifuges sur cette aube. On propose de distribuer de manière homogène cette force en tout point de la surface extérieure du disque sous la forme d'un effort surfacique donné :

$$\underline{t}^d = \rho_{aube}\omega^2 r_a^2 \underline{e}_r$$

La distance r_a est une distance effective définie à partir du rapport de n fois la norme de l'effort résultant sur chaque aube (n , nombre d'aubes) et de la surface extérieure du disque $\pi r_e H$, $2H$ étant l'épaisseur du disque. On est amené alors à reprendre les solutions en contraintes (18.8) et (18.9) et à identifier les constantes A et B avec les nouvelles conditions aux limites :

$$\sigma_{rr}(r = r_i) = 0, \quad \sigma_{rr}(r = r_e) = \rho_{aube}\omega^2 r_a^2$$

18.2 Critères de plasticité et de rupture

On cherche ici les limites de fonctionnement du disque dans le régime élastique. Une vitesse de rotation critique est ainsi déterminée en fonction des caractéristiques du disque.

18.2.1 Seuil de plasticité et vitesse critique pour le disque mince alésé

On utilise le critère de Tresca pour prévoir le développement de déformations plastiques au sein du disque. On note σ_0 la limite d'élasticité du matériau en traction. La fonction critère s'écrit

$$f(\underline{\sigma}) = \max_{(\sigma_i, \sigma_j)} (\sigma_i - \sigma_j) - \sigma_0$$

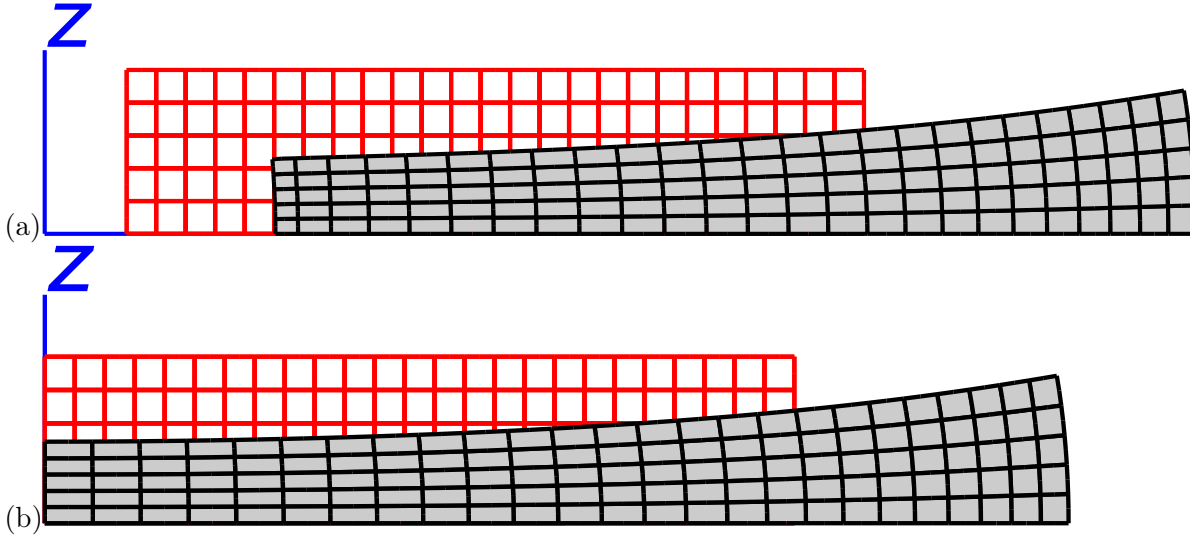


FIGURE 18.4 – Déformation des disques minces en rotation : (a) disque alésé, (b) disque non alésé. L'état initial est en rouge et l'état déformé en grisé. Les déformations ont été exagérées pour l'illustration.

où les σ_i désignent les contraintes principales. Le comportement du matériau reste purement élastique tant que

$$f(\underline{\sigma}) < 0$$

Tracer les profils de contraintes σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ obtenues au paragraphe 18.1.4. On se placera dans la situation $\nu > 0$ pertinente pour les classes de matériaux envisageables dans ce genre d'applications.

Indiquer en quel point du disque l'écoulement plastique va commencer.

Donner la vitesse de rotation ω_e correspondante, associée à l'apparition possible de la plasticité.

Remarquer que la vitesse critique ne dépend pas du module de Young du matériau.

La contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ est une fonction décroissante de r , au moins pour $\nu > 0$. Elle prend les valeurs minimale et maximale suivantes :

$$\sigma_{\theta\theta}^{min} = \sigma_{\theta\theta}(r = r_e) = \frac{\rho\omega^2}{4}((3 + \nu)r_i^2 + (1 - \nu)r_e^2) \quad (18.31)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{max} = \sigma_{\theta\theta}(r = r_i) = \frac{\rho\omega^2}{4}((3 + \nu)r_e^2 + (1 - \nu)r_i^2) \quad (18.32)$$

$$(18.33)$$

La différence

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \frac{\rho\omega^2}{4}((1 - \nu)r^2 + (3 + \nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^2}) \geq 0 \quad (18.34)$$

est positive pour $r_i \leq r \leq r_e$. Ces contraintes normalisées par $\sigma_{\theta\theta}^{min}$ sont tracées sur la figure 18.5. Les contraintes principales se rangent donc dans l'ordre

$$\sigma_{zz} = 0 \leq \sigma_{rr} \leq \sigma_{\theta\theta} \quad (18.35)$$

de sorte que le critère de Tresca devient :

$$f(\underline{\sigma}) = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_0 < 0 \quad (18.36)$$

Pour une vitesse de rotation donnée, la fonction critère est maximale en $r = r_i$. C'est donc à cet endroit que va commencer l'écoulement plastique. Ceci devient possible lorsque

$$\sigma_{\theta\theta}^{max} = \sigma_0$$

ce qui correspond à la vitesse critique

$$\rho\omega_e^2 = \frac{4\sigma_0}{r_i^2(1-\nu) + r_e^2(3+\nu)} \quad (18.37)$$

La vitesse critique dépend donc uniquement de la limite d'élasticité σ_0 en traction, de la masse volumique et du coefficient de Poisson du matériau, ainsi que des caractéristiques géométriques r_i, r_e du disque.

En admettant que la plasticité s'initie au même endroit que pour le critère de Tresca, montrer que l'utilisation d'un critère de von Mises ne modifie pas la valeur de la vitesse limite du fonctionnement élastique.

Le critère de von Mises fait intervenir la contrainte équivalente

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)}$$

(cf. paragraphe 4.4.5). Dans le cas du disque mince, elle vaut

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{rr}^2 - \sigma_{\theta\theta}\sigma_{rr}}$$

Elle prend la valeur $\sigma_{\theta\theta}^{max}$ en $r = r_i$ car la contrainte radiale s'y annule. En effet, le matériau en $r = r_i$ est soumis à un état de traction simple selon \underline{e}_θ . En admettant que la contrainte équivalente est effectivement maximale en $r = r_i$, on trouve donc la même vitesse limite qu'avec le critère de Tresca².

18.2.2 Vitesse critique pour un disque en superalliage à base de nickel

Evaluer numériquement la vitesse critique ω_e dans le cas d'un disque en superalliage à base de nickel de limite d'élasticité $\sigma_0 = 1000$ MPa. Les superalliage à base de nickel doivent leur nom à leur forte limite d'élasticité, même pour des hautes températures. On prendra les dimensions typiques pour les turbines d'hélicoptère :

$$r_i = 10 \text{ mm}, \quad r_e = 50 \text{ mm}$$

On donnera l'estimation trouvée en nombre de tours par minute.

Les disques de turbines de compresseur sont en général en alliage de titane, tandis que ceux des turbines haute pression, soumises à des températures plus élevées sont en superalliage à base de nickel. Considérons ce dernier cas en prenant $\rho = 8080 \text{ kg.m}^{-3}$:

$$\omega_e = \sqrt{\frac{4 \times 10^9}{8080(0.01^2(1-0.3) + 0.05^2(3+0.3))}} = 7750 \text{ rad.s}^{-1} \simeq 74000 \text{ tr.min}^{-1}$$

Les vitesses typiques de fonctionnement de moteur d'hélicoptère sont de $60000 \text{ tr.min}^{-1}$, contre $20000 \text{ tr.min}^{-1}$ dans les moteurs d'avion.

2. Un calcul un peu lourd montre que pour des valeurs pertinentes du coefficient de Poisson (en fait au moins pour $\nu > -1/3$) la contrainte équivalente de von Mises est maximale en $r = r_i$. Par contre, elle n'est pas monotone par rapport à r pour toutes ces valeurs de ν .

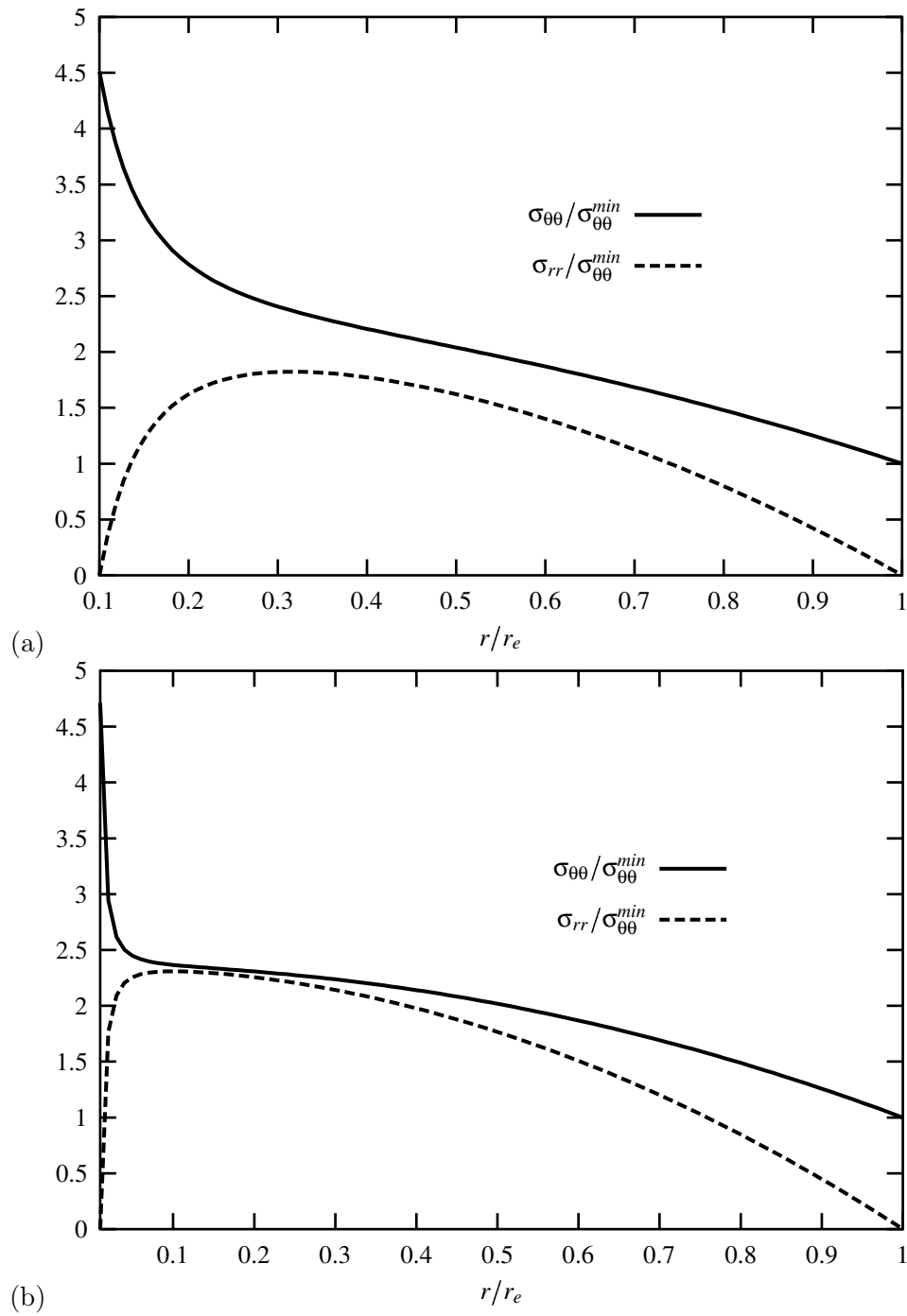


FIGURE 18.5 – Profil des contraintes radiale et circonférentielle dans un disque alésé mince en rotation, normalisées par la contrainte circonférentielle minimale : (a) cas $r_e/r_i = 10$, (b) cas $r_e/r_i = 100$. Pour les courbes, on a pris $\nu = 0.3$.

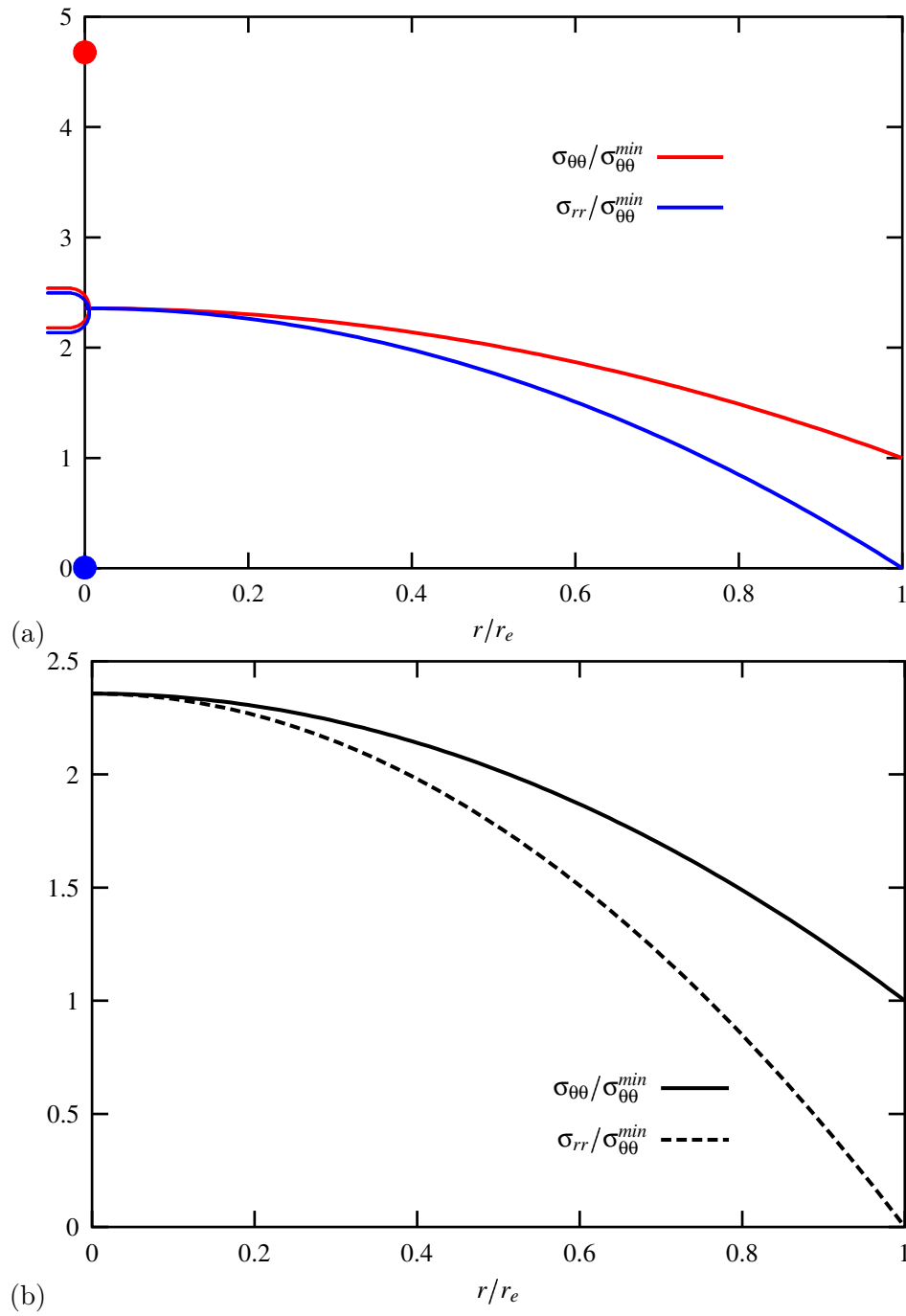


FIGURE 18.6 – Profil des contraintes radiale et circonférentielle dans un disque mince en rotation, normalisée par la contrainte circonférentielle minimale : (a) disque à alésage infinitésimal, (b) disque sans alésage. Pour les courbes, on a pris $\nu = 0.3$. Le signe \supset indique que le point entouré est exclus. Les valeurs en zéro des fonctions tracées en (a) sont données par les points.

18.2.3 Rupture brutale

Utiliser un critère de rupture fragile et déterminer la vitesse limite correspondante.

Un critère de rupture fragile est le critère de contrainte normale positive maximale (cf. paragraphe 4.4.3). Dans le disque mince alésé, les contraintes principales sont rangées dans l'ordre (18.35). La contrainte normale positive maximale est donc $\sigma_{\theta\theta}$. A une vitesse donnée, elle est maximale en $r = r_i$, ce qui conduit à même vitesse critique ω_e que celle donnée par (18.37).

18.2.4 Cas où le rayon de l'alésage est très faible

On envisage le cas de disques alésés pour lesquels r_i/r_e est très faible. Le passage à la limite $r_i \rightarrow 0$ dans les résultats précédents doit être effectué avec précaution.

Passage à la limite en un point $0 < r \leq r_e$

En considérant les contraintes déterminées au paragraphe 18.1.4, calculer les deux limites suivantes, lorsque l'on fait tendre r_i vers 0, en un point r donné du disque tel que $0 < r \leq r_e$, et fixé indépendamment de r_i :

$$\lim_{r_i \rightarrow 0} \sigma_{rr}(r)$$

$$\lim_{r_i \rightarrow 0} \sigma_{\theta\theta}(r)$$

Tracer les profils de contraintes obtenues à la limite.

En faisant tendre r_i vers 0, pour $0 < r \leq r_e$ fixé indépendamment de r_i dans les expressions (18.8) et (18.9), nous obtenons les fonctions

$$f_r(r) := \lim_{r_i \rightarrow 0} \sigma_{rr}(r) = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (r_e^2 - r^2) \quad (18.38)$$

$$f_\theta(r) := \lim_{r_i \rightarrow 0} \sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{\rho \omega^2}{8} ((3+\nu)r_e^2 - (1+3\nu)r^2) \quad (18.39)$$

Passage à la limite en $r = r_i$

Déterminer cette fois la limite de la valeur des contraintes en $r = r_i$ lorsque r_i tend vers 0 :

$$\lim_{r_i \rightarrow 0} \sigma_{rr}(r_i)$$

$$\lim_{r_i \rightarrow 0} \sigma_{\theta\theta}(r_i)$$

Ajouter les points obtenus sur le tracé précédent.

Donner alors la vitesse limite de fonctionnement élastique d'un disque en rotation percé d'un trou central de rayon infinitésimal. Vérifier la cohérence du résultat avec l'expression ω_e trouvée au paragraphe (18.2.1) dans le cas général.

En faisant tendre r_i vers 0, pour $r = r_i$ dans les expressions (18.8) et (18.9), nous obtenons les valeurs

$$f_r(0) := \lim_{r_i \rightarrow 0} \sigma_{rr}(r_i) = 0 \quad (18.40)$$

$$f_\theta(0) := \lim_{r_i \rightarrow 0} \sigma_{\theta\theta}(r_i) = \frac{\rho \omega^2}{4} (3+\nu)r_e^2 \quad (18.41)$$

On remarque que

$$f_\theta(0) = 2 \lim_{r \rightarrow 0, r > 0} f_\theta(r)$$

Autrement dit, la convergence des expressions des contraintes dans le disque alésé vers les fonctions f_r et f_θ caractérisant les contraintes dans un disque dont l'alésage est infinitésimal, est une convergence simple mais non uniforme. La figure 18.5 pour deux valeurs du rapport r_i/r_e illustre ce fait. Les fonctions f_r et f_θ présentent une discontinuité en $r = 0$.

Les profils de contraintes dans le disque à alésage infinitésimal sont représentées sur la figure 18.6(a).

Le critère de plasticité de Tresca sera atteint en premier lieu en $r = 0$ pour $f_\theta(0) = \sigma_0$ ce qui fournit la vitesse limite du disque à alésage infinitésimal :

$$\rho \left(\omega_e^{inf} \right)^2 = \frac{4\sigma_0}{(3 + \nu)r_e^2} \quad (18.42)$$

Remarquer que ω_e^{inf} s'obtient en faisant $r_i = 0$ dans l'expression (18.37) trouvée pour les disques à alésage quelconque.

18.2.5 Cas d'un disque mince non alésé

Des expressions simplifiées des contraintes et déformations régnant dans un disque mince non alésé peuvent être établies en suivant une démarche similaire à celle mise en œuvre dans la situation précédente. On peut vérifier que ces expressions simplifiées coïncident avec l'état limite $r_i \rightarrow 0$ déterminé au paragraphe 18.2.4, à condition toutefois de prolonger par continuité cette fonction en $r = 0$.

En déduire la vitesse limite de fonctionnement élastique du disque mince non alésé en rotation. Qu'en concluez-vous sur la résistance relative des disques alésé et non alésé ?

Contraintes, déformations et déplacements

Dans le cas du disque non alésé, l'équation différentielle à résoudre pour trouver σ_{rr} est toujours donnée par (18.10) lorsque le comportement du disque reste purement élastique. Les contraintes sont donc de la forme (18.8) et (18.9). L'absence de singularité attendue en $r = 0$ implique que $A = 0$. La constante B est alors déterminée à l'aide de la condition à la limite $\sigma_{rr}(r = r_e) = 0$. Finalement, les contraintes sont

$$\sigma_{rr} = \frac{\rho\omega^2(3 + \nu)}{8}(r_e^2 - r^2) \quad (18.43)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2}{8}(r_e^2(3 + \nu) - r^2(1 + 3\nu)) \quad (18.44)$$

Constater que ces contraintes sont égales aux fonctions limites f_r et f_θ sur $]0, r_e]$ trouvées au paragraphe 18.2.4 pour les disques à alésage infinitésimal. Les valeurs des contraintes en $r = 0$ sont obtenues en prolongeant par continuité ces fonctions en 0.

Les déformations associées aux contraintes par la loi d'élasticité isotrope sont

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\rho\omega^2}{8E}(1 - \nu)(r_e^2(3 + \nu) - 3r^2(1 + \nu)) \quad (18.45)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2}{8E}(1 - \nu)(r_e^2(3 + \nu) - r^2(1 + \nu)) \quad (18.46)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\rho\omega^2}{4E}(r_e^2(3 + \nu) - 2r^2(1 + \nu)) \quad (18.47)$$

Les déplacements $u_r = r\varepsilon_{\theta\theta}$ et u_z tel que $\partial u_z / \partial z = \varepsilon_{zz}$ s'en déduisent :

$$u_r = \frac{\rho\omega^2 r}{8E}(1 - \nu)(r_e^2(3 + \nu) - r^2(1 + \nu)) \quad (18.48)$$

$$u_z = -\nu z \frac{\rho\omega^2}{4E}(r_e^2(3 + \nu) - 2r^2(1 + \nu)) \quad (18.49)$$

où la condition de symétrie $u_z(z = 0) = 0$ a été utilisée.

Les contraintes, déformations et déplacements du disque mince non alésé en rotation sont rassemblées dans la table 18.2.

Limite d'élasticité

Les profils de contraintes trouvés sont illustrés sur la figure 18.6(b). Les contraintes sont à nouveau rangés dans l'ordre (18.35) de sorte que la recherche de la vitesse limite de fonction élastique du disque est similaire à l'analyse du paragraphe 18.2.1. En particulier,

$$\sigma_{\theta\theta}^{min} = \sigma_{\theta\theta}(r = r_e) = \frac{\rho\omega^2}{4}(1 - \nu)r_e^2, \quad \sigma_{\theta\theta}^{max} = \sigma_{\theta\theta}(r = 0) = \frac{\rho\omega^2}{8}(3 + \nu)r_e^2 \quad (18.50)$$

La vitesse limite est donc donnée par

$$\rho\omega_e^2 = \frac{8\sigma_0}{r_e^2(3 + \nu)} \quad (18.51)$$

Elle est $\sqrt{2}$ fois plus grande que la valeur obtenue dans le cas du disque mince avec un alésage infinitésimal d'après les résultats du paragraphe 18.2.4. En l'absence d'alésage, l'état de contrainte au centre est équi-biaxial en $r = 0$:

$$\sigma_{rr}(r = 0) = \sigma_{\theta\theta}(r = 0)$$

contrairement au cas alésé pour lequel le bord de l'alésage est caractérisé par un état de traction simple.

Cette étude montre qu'un disque alésé est plus vulnérable qu'un disque massif. Dans les applications industrielles, un disque massif sera donc préférable là où c'est possible.

Contraintes

$$\sigma_{rr} = -\frac{3+\nu}{8} \frac{\rho\omega^2}{r^2} (r^2 - r_i^2)(r^2 - r_e^2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{8} \left((3+\nu) \left(\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} + \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right) - (1+3\nu) \right)$$

Déformations

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{8E} \left(3(\nu^2 - 1) + (3+\nu) \left((1-\nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} - (1+\nu) \frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} \right) \right)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{8E} \left((\nu^2 - 1) + (3+\nu) \left((1-\nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} + (1+\nu) \frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} \right) \right)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \frac{\nu}{E} \frac{\rho\omega^2 r^2}{4} \left(2(1+\nu) - (3+\nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right)$$

Déplacements

$$u_r = r\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2 r^3}{8E} \left((\nu^2 - 1) + (3+\nu) \left((1-\nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} + (1+\nu) \frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} \right) \right)$$

$$u_z = \frac{\nu}{E} \frac{\rho\omega^2 r^2}{4} z \left(2(1+\nu) - (3+\nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right)$$

Vitesse limite

$$\rho\omega_e^2 = \frac{4\sigma_0}{r_i^2(1-\nu) + r_e^2(3+\nu)}$$

TABLE 18.1 – Récapitulatif : élastostatique d'un disque mince alésé animé d'une vitesse de rotation ω (expressions simplifiées).

Contraintes

$$\sigma_{rr} = \frac{\rho\omega^2(3+\nu)}{8}(r_e^2 - r^2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2}{8}(r_e^2(3+\nu) - r^2(1+3\nu))$$

Déformations

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\rho\omega^2}{8E}(1-\nu)(r_e^2(3+\nu) - 3r^2(1+\nu))$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2}{8E}(1-\nu)(r_e^2(3+\nu) - r^2(1+\nu))$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu\frac{\rho\omega^2}{4E}(r_e^2(3+\nu) - 2r^2(1+\nu))$$

Déplacements

$$u_r = \frac{\rho\omega^2 r}{8E}(1-\nu)(r_e^2(3+\nu) - r^2(1+\nu))$$

$$u_z = -\nu\frac{\rho\omega^2}{4E}z(r_e^2(3+\nu) - 2r^2(1+\nu))$$

Vitesse limite

$$\rho\omega_e^2 = \frac{8\sigma_0}{r_e^2(3+\nu)}$$

TABLE 18.2 – Récapitulatif : élastostatique d'un disque mince non alésé animé d'une vitesse de rotation ω (expressions simplifiées).

18.3 Solution, au sens de Saint–Venant, du problème de l'élastostatique d'un disque en rotation

Le problème du disque mince (alésé ou non) en rotation est repris ici en gardant les conditions ($\sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0$) mais en acceptant une dépendance en z pour les contraintes radiale et circonférentielle :

$$\underline{\sigma} = \sigma_{rr}(r, z)\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta}(r, z)\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \quad (18.52)$$

Une telle dépendance a été reconnue comme nécessaire au cours de la démarche mise en œuvre aux paragraphes précédents. Le disque est d'épaisseur $2H$.

18.3.1 Expressions générales des contraintes

Les relations (18.5) et (18.6) établies respectivement aux paragraphes 18.1.2 et 18.1.3 sont valables à condition de les écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho\omega^2 r = 0 \quad (18.53)$$

$$(1 + \nu)(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = r\left(\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} - \nu \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}\right) \quad (18.54)$$

La dérivée partielle de σ_{rr} par rapport à r est alors solution de l'équation

$$r \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \rho\omega^2 r(3 + \nu) = 0 \quad (18.55)$$

Les expressions générales des contraintes s'en déduisent :

$$\sigma_{rr} = -\frac{\rho\omega^2}{8}(3 + \nu)r^2 + \frac{A(z)}{r^2} + B(z) \quad (18.56)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{\rho\omega^2}{8}(1 + 3\nu)r^2 - \frac{A(z)}{r^2} + B(z) \quad (18.57)$$

où des fonctions A et B de la variable z seulement, ont été introduites.

18.3.2 Equations de compatibilité

Les équations de compatibilité en coordonnées cylindriques ont une forme complexe et ne seront pas utilisées explicitement ici. On va procéder d'une manière différente en utilisant certaines relations directes entre déformations et déplacements. Les déplacements non nuls u_r et u_z sont des fonctions de r et z . En particulier, la composante u_r du déplacement n'est autre que $r\varepsilon_{\theta\theta}$. La condition de compatibilité $\varepsilon_{rr} = \partial(r\varepsilon_{\theta\theta})/\partial r$ a en fait déjà été utilisée, de sorte que cette relation est automatiquement satisfaite. Par suite,

$$u_r = r\varepsilon_{\theta\theta} = r(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr})/E = -\frac{\rho\omega^2}{8E}(1 - \nu^2)r^3 - \frac{A(z)}{Er}(1 + \nu) + B(z)r\frac{(1 - \nu)}{E} \quad (18.58)$$

Le déplacement u_z se déduit de l'état de contraintes déterminé précédemment au travers de la relation

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_{zz} = -\nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \frac{\rho\omega^2}{2}\frac{\nu(1 + \nu)}{E}r^2 - 2\frac{\nu}{E}B(z) \quad (18.59)$$

qui s'intègre en

$$u_z = \frac{\nu(1 + \nu)}{E}\frac{\rho\omega^2}{2}r^2z - \frac{2\nu}{E}\int B(z)dz + f_z(r) \quad (18.60)$$

où la fonction f_z à déterminer ne dépend que de la variable r . La solution recherchée n'admet pas de cisaillement σ_{rz} :

$$\sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz} = 0 \implies \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0 \quad (18.61)$$

Cela se traduit par la relation

$$-\frac{A'(z)}{Er}(1+\nu) + B'(z)r\frac{1-\nu}{E} + \frac{\rho\omega^2}{E}\nu(1+\nu)rz + f'_z(r) = 0 \quad (18.62)$$

La dérivation de cette équation par rapport à z permet d'établir que

$$A''(z) = 0, \quad B''(z) = -\frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}\rho\omega^2 \quad (18.63)$$

Les fonctions cherchées sont donc de la forme

$$A(z) = A_1z + A_0, \quad B(z) = -\frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}\rho\omega^2\frac{z^2}{2} + B_1z + B_0 \quad (18.64)$$

En revenant alors à la relation initiale (18.62), on obtient

$$-\frac{1+\nu}{Er}A_1 + \frac{1-\nu}{E}rB_1 + f'_z = 0 \quad (18.65)$$

ce qui fournit la fonction f_z cherchée :

$$f_z(r) = \frac{1+\nu}{E}A_1 \log \frac{r}{r_i} - B_1\frac{1-\nu}{2E}(r^2 - r_i^2) \quad (18.66)$$

La constante d'intégration a été prise telle que $u_z(r = r_i, z = 0) = 0$.

18.3.3 Détermination complète des contraintes

La détermination complète des contraintes est présentée dans le cas où la solution présente une symétrie par rapport au plan $z = 0$. Cette condition de symétrie implique que

$$u_z(r, z = 0) = 0, \forall r \quad (18.67)$$

La fonction f_z doit donc être identiquement nulle. L'expression de f_z trouvée en (18.66) conduit alors à

$$B_1 = 0, \quad A_1 = 0$$

Les contraintes et déformation présentent donc une dépendance en z^2 et des termes constants, en plus de la dépendance vis-à-vis de r .

A ce stade, il faut distinguer le cas du disque alésé et le cas du disque massif.

Disque alésé

La forme générale suivante des contraintes a été obtenue :

$$\sigma_{rr} = -\frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)r^2 + \frac{A}{r^2} + B_2z^2 + B_0 \quad (18.68)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{\rho\omega^2}{8}(1+3\nu)r^2 - \frac{A}{r^2} + B_2z^2 + B_0 \quad (18.69)$$

où A a été mis pour A_0 par simplicité. Le vecteur-contrainte en $r = r_i$ et $r = r_e$ est dirigé selon \underline{e}_r et prend les valeurs

$$\sigma_{rr}(r = r_i) = -\frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)r_i^2 + \frac{A}{r_i^2} + B_2z^2 + B_0 \quad (18.70)$$

$$\sigma_{rr}(r = r_e) = -\frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)r_e^2 + \frac{A}{r_e^2} + B_2z^2 + B_0 \quad (18.71)$$

$$(18.72)$$

On voit qu'il n'est pas possible de trouver de constantes A et B_0 permettant de remplir la condition de bord extérieur libre, i.e.

$$\sigma_{rr}(r = r_i) = \sigma_{rr}(r = r_e) = 0$$

à toute cote z . On va donc se contenter de rechercher une solution permettant de remplir cette condition en résultante seulement. La condition à la limite $\underline{t} = 0$ ne sera donc pas remplie point par point sur les bords $r = r_i$ et r_e mais seulement en résultante sur un secteur infinitésimal du disque $r_i d\theta \times 2H$ ou $r_e d\theta \times 2H$:

$$\begin{aligned} \underline{dR} &= r_e d\theta \int_{r=r_e} \underline{t} dz = r_e d\theta \left(\int_{r=r_e} \sigma_{rr} dz \right) \underline{e}_r = 0 \\ &= r_e d\theta \left(-\frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)r_e^2 2H + \frac{A}{r_e^2} 2H + 2B_2 \frac{H^3}{3} + B_0 2H \right) \underline{e}_r \end{aligned} \quad (18.73)$$

Une condition analogue doit être écrite en $r = r_i$. Deux équations portant sur les constantes d'intégration A et B_0 s'en déduisent

$$\begin{aligned} B_0 + \frac{A}{r_i^2} &= \frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)r_i^2 - B_2 \frac{H^2}{3} \\ B_0 + \frac{A}{r_e^2} &= \frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)r_e^2 - B_2 \frac{H^2}{3} \end{aligned}$$

Il est effectivement possible de remplir la condition de résultante nulle au bord $\underline{dR} = 0$ grâce aux valeurs

$$B_0 = \frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)(r_e^2 + r_i^2) - B_2 \frac{H^2}{3}, \quad A = -\frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)r_i^2 r_e^2 \quad (18.74)$$

Il faut encore vérifier que le moment résultant sur chacun des bords infinitésimaux est bien nul. Un argument de symétrie permet en fait d'assurer cette condition.

La solution obtenue est une **solution acceptable au sens de Saint-Venant si le disque est suffisamment mince** :

$$H/r_e \ll 1, H/r_i \ll 1$$

En effet, les surfaces sur lesquelles les résultantes ont été calculées possèdent alors deux dimensions caractéristiques, à savoir H et $r_{i/e} d\theta$, qui sont faibles devant la dimension $r_e - r_i$ du disque. Les expressions que nous allons proposer sont alors proches de la solution réelle pour $r_i \ll r \ll r_e$, c'est-à-dire en tout point assez loin des bords du disque alésé, en vertu du principe de Saint-Venant.

Voici enfin les expressions complètes des contraintes régnant dans un **disque mince alésé**, en régime élastostatique :

$$\sigma_{rr} = -\frac{\rho\omega^2(3+\nu)}{8r^2}(r^2 - r_i^2)(r^2 - r_e^2) + \rho\omega^2 \frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)} \left(\frac{H^2}{3} - z^2 \right) \quad (18.75)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{\rho\omega^2}{8r^2}((1+3\nu)r^4 - (3+\nu)((r_i^2 + r_e^2)r^2 + r_i^2 r_e^2) + \rho\omega^2 \frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)} \left(\frac{H^2}{3} - z^2 \right) \quad (18.76)$$

Disque non alésé

Dans le cas du disque massif, les expressions des contraintes sous la forme (18.68) et (18.69) sont valables à condition de prendre $A = 0$, c'est-à-dire d'exclure toute singularité en $r = 0$. A nouveau il n'est pas possible de satisfaire la condition bord libre en tout point (r_e, z) du bord extérieur. Il

est possible toutefois de trouver une constante B_0 permettant d'annuler le torseur résultant sur tout secteur infinitésimal $(r_e, d\theta)$ du bord extérieur :

$$B_0 = \frac{\rho\omega^2(3+\nu)}{8}r_e^2 - B_2\frac{H^2}{3}$$

La solution proposée ici est acceptable pour les disques minces

$$H/r_e \ll 1$$

en vertu du principe de Saint-Venant. Voici enfin les expressions des contraintes qui s'établissent dans un disque mince de rayon r_e et d'épaisseur $2H$:

$$\sigma_{rr} = -\frac{\rho\omega^2(3+\nu)}{8}(r^2 - r_e^2) + \rho\omega^2\frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)}\left(\frac{H^2}{3} - z^2\right) \quad (18.77)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2}{8}((3+\nu)r_e^2 - (1+3\nu)r^2) + \rho\omega^2\frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)}\left(\frac{H^2}{3} - z^2\right) \quad (18.78)$$

Il apparaît clairement que les contributions en z^2 et H^2 sont numériquement négligeables dans les expressions précédentes par rapport aux autres contributions, dès lors que $H/r_e \ll 1$. Ce fait justifie *a posteriori* la pertinence des expressions simplifiées des contraintes données dans les tableaux 18.1 et 18.2.

18.3.4 Déformations et déplacements

Voici les déformations et déplacements au sein d'un disque mince alésé en rotation :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\rho\omega^2 r^2}{8E} \left(3(\nu^2 - 1) + (3+\nu)\left((1-\nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} - (1+\nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4}\right) \right) \\ &+ \frac{\rho\omega^2}{2E}\nu(1+\nu)\left(\frac{H^2}{3} - z^2\right) \end{aligned} \quad (18.79)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{\rho\omega^2 r^2}{8E} \left((\nu^2 - 1) + (3+\nu)\left((1-\nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} + (1+\nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4}\right) \right) \\ &+ \frac{\rho\omega^2}{2E}\nu(1+\nu)\left(\frac{H^2}{3} - z^2\right) \end{aligned} \quad (18.80)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \frac{\nu}{E}\frac{\rho\omega^2 r^2}{4} \left(2(1+\nu) - (3+\nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right) \\ &- \frac{\rho\omega^2}{E}\frac{\nu^2(1+\nu)}{1-\nu}\left(\frac{H^2}{3} - z^2\right) \end{aligned} \quad (18.81)$$

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\rho\omega^2 r^3}{8E} \left((\nu^2 - 1) + (3+\nu)\left((1-\nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} + (1+\nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4}\right) \right) \\ &+ \frac{\rho\omega^2}{2E}\nu(1+\nu)\left(\frac{H^2}{3} - z^2\right)r \end{aligned} \quad (18.82)$$

$$u_z = \frac{\nu}{E}\frac{\rho\omega^2 r^2}{4} \left(2(1+\nu) - (3+\nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right) z - \frac{\rho\omega^2}{E}\frac{\nu^2(1+\nu)}{1-\nu}\left(\frac{H^2}{3} - \frac{z^2}{3}\right)z \quad (18.83)$$

Voici les déformations et déplacements au sein d'un disque mince sans alésage en rotation :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\rho\omega^2}{8E}(1-\nu)((3+\nu)r_e^2 - 3(1+\nu)r^2) + \frac{\rho\omega^2}{2E}\nu(1+\nu)\left(\frac{H^2}{3} - z^2\right) \quad (18.84)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2}{8E}(1-\nu)((3+\nu)r_e^2 - (1+\nu)r^2) + \frac{\rho\omega^2}{2E}\nu(1+\nu)\left(\frac{H^2}{3} - z^2\right) \quad (18.85)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu\rho\omega^2}{4E}((3+\nu)r_e^2 - 2(1+\nu)r^2) - \frac{\rho\omega^2}{E}\frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}\left(\frac{H^2}{3} - z^2\right) \quad (18.86)$$

$$u_r = \frac{\rho\omega^2}{8E}(1-\nu)((3+\nu)r_e^2 - (1+\nu)r^2)r + \frac{\rho\omega^2}{2E}\nu(1+\nu)\left(\frac{H^2}{3} - z^2\right)r \quad (18.87)$$

$$u_z = -\frac{\nu\rho\omega^2}{4E}((3+\nu)r_e^2 - 2(1+\nu)r^2)z - \frac{\rho\omega^2}{E}\frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}\left(\frac{H^2}{3} - \frac{z^2}{3}\right)z \quad (18.88)$$

Il apparaît clairement que les contributions en z^2 et H^2 sont numériquement négligeables dans les expressions précédentes par rapport aux autres contributions, dès lors que $H/r_e \ll 1$. Ce fait justifie *a posteriori* la pertinence des expressions simplifiées des déformations et déplacements donnés dans les tableaux 18.1 et 18.2.

Déformée du disque

Les déformées typiques des disques alésés et non alésés sont représentées sur la figure 18.4. Analysons par exemple ce que devient la surface initiale $z = H$ d'un disque sans alésage. Les points de ce plan se déplacent en

$$r' = r + u_r(r, H) \quad (18.89)$$

$$z' = H + u_z(r, H) \quad (18.90)$$

Dans le contexte infinitésimal, il est licite de remplacer r par r' dans la dernière équation. La surface déformée a donc aussi pour équation

$$z' - H - u_z(r', H) = 0$$

En tenant compte de l'expression (18.88) de u_z , cette surface apparaît comme une portion de parabolôide de révolution qui, dans le contexte infinitésimal, ne peut être distingué de la sphère osculatrice de rayon

$$R = \frac{2E}{\rho\omega^2\nu(1+\nu)H} \quad (18.91)$$

De manière similaire, le bord libre $r = r_e, \theta$ donné, $|z| \leq H$ se transforme en une portion de parabole qui, dans le contexte infinitésimal, ne peut être distingué de la sphère osculatrice de rayon

$$R = \frac{E}{\rho\omega^2\nu(1+\nu)r_e} \quad (18.92)$$

Remarquer que les deux surfaces transformées étudiées restent orthogonales au point de coordonnées initiales (r_e, H) . Ce fait est dû à la nullité du cisaillement ε_{rz} .

Ces caractéristiques de la déformée du disque ont été mises en évidence en particulier dans (Amestoy, 2004).

18.3.5 Comparaison avec une solution numérique obtenue par la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis³ permet d'obtenir une solution numérique approchée à la précision souhaitée du problème d'un cylindre de hauteur finie soumis à des efforts centrifuges. Il est intéressant d'utiliser cette méthode numérique pour déterminer la valeur du rapport H/r_e à partir de laquelle la solution établie précédemment au sens de Saint-Venant n'est plus acceptable. Le calcul par éléments finis a été mené pour trois valeurs $H/r_e = 0.1; 0.5; 1$. Les états déformés de ces trois disques, ainsi que le champ de contraintes σ_{zz} prévu par l'analyse numériques sont représentés sur la figure 18.7. Il est effectivement légitime de négliger σ_{zz} pour le disque mince. Par contre, dans un cylindre allongé, la contrainte σ_{zz} se développe au sein de l'échantillon et peut représenter jusqu'à 20% de la valeur maximale de la contrainte orthoradiale. On peut juger de la qualité de la solution au sens de Saint-Venant et des mérites des expressions simplifiées indépendantes de z établies au paragraphe 18.1 en observant la superposition des profils de contraintes théoriques et numériques sur la figure 18.8. La solution au sens de Saint-Venant et les expressions simplifiées coïncident avec la solution numérique pour $H/r_e = 0.1$. Les expressions simplifiées ne sont plus acceptables pour $H/r_e = 0.5$ tandis que la solution au sens de Saint-Venant rend encore bien compte du champ obtenu par éléments finis. Il n'en va plus de même pour le cylindre allongé $H/r_e = 1$ pour lequel des écarts notables existent entre la solution au sens de Saint-Venant et la solution éléments finis. En particulier, la figure 18.8(c) montre bien que l'expression (18.77) de la contrainte radiale conduit à une valeur $\sigma_{rr}(r = r_e, z = 0)$ notablement éloignée de 0, alors que la méthode des éléments finis permet d'imposer cette condition de manière aussi précise que souhaitable.

18.4 Contraintes planes et réponse axisymétrique d'un cylindre de longueur finie

Les développements précédents incitent à reprendre le problème plus général de la déformation de cylindres au sein desquels s'établit un champ de contraintes de la forme :

$$\underline{\sigma}(r, z) = \sigma_{rr} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta}(r, z) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \quad (18.93)$$

Le disque est en état de contraintes planes, i.e. relevant d'une description strictement bidimensionnelle (r, θ) , lorsqu'en outre les contraintes considérées ne dépendent pas de z . On va voir que la représentation (18.93) permet d'envisager un ensemble varié de conditions de chargements (efforts centrifuges, flexion axisymétrique, pression interne/externe) mais que l'état de contraintes planes ne peut pas exister, de manière exacte, en présence de forces de volume à divergence non nulle. Cette section illustre de manière remarquable l'approche en contraintes en mécanique des solides au comportement élastique linéarisé.

18.4.1 Approche par les équations de Beltrami en coordonnées cylindriques

La méthode des contraintes dans le traitement linéarisé de la statique des structures élastiques consiste à rechercher un champ de contraintes statiquement admissible et conduisant, *in fine*, à des déformations compatibles. Une condition nécessaire et suffisante est que le champ de contraintes proposé vérifie les équations d'équilibre et les équations de Beltrami (9.13) que l'on rappelle ici :

$$\Delta \underline{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \text{grad}(\text{grad}(\text{trace } \underline{\sigma})) + \frac{\nu}{1-\nu} \rho(\text{div } \underline{f}) \underline{1} + \rho(\text{grad } \underline{f} + (\text{grad } \underline{f})^T) = 0 \quad (18.94)$$

Les efforts volumiques sont envisagés sous la forme générale

$$\rho \underline{f} = \rho f(r) \underline{e}_r \quad (18.95)$$

3. Une présentation détaillée de la méthode des éléments finis appliquée à différents problèmes de la physique et de la mécanique est offerte au travers du cours (Kern, 2004). Les documents sont disponibles sur le site mms2.ensmp.fr.

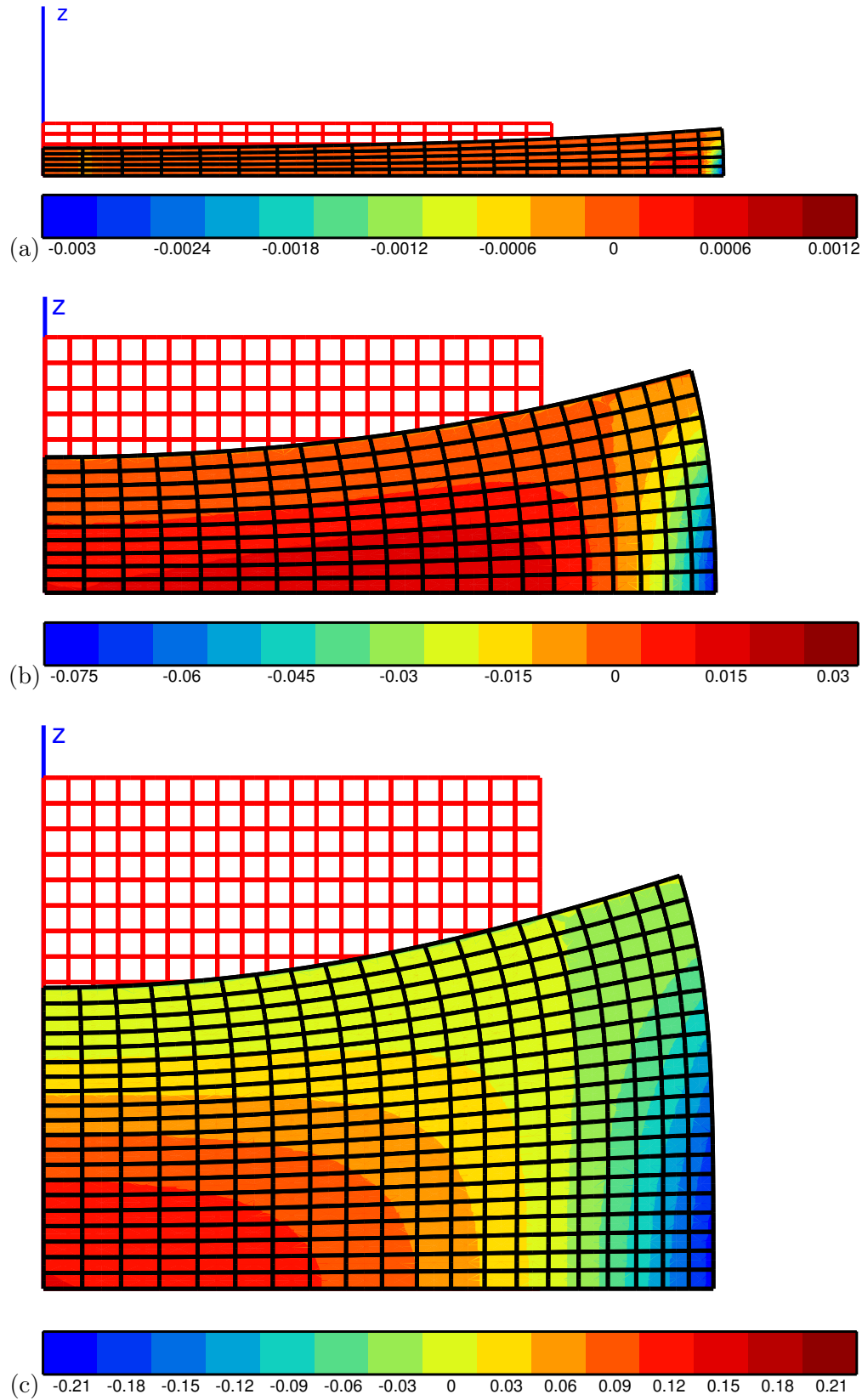


FIGURE 18.7 – Champ de contrainte σ_{zz} obtenu par la méthode des éléments finis, rapportée à la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ maximale dans un disque massif en rotation : (a) $H/r_e = 0.1$, (b) $H/r_e = 0.5$, (c) $H/r_e = 1$. Dans le cas (c), la composante σ_{zz} atteint 20% de la contrainte orthoradiale maximale. L'état initial du disque est représenté en rouge. Les déplacements ont été exagérés pour l'illustration. L'axe de rotation est z .

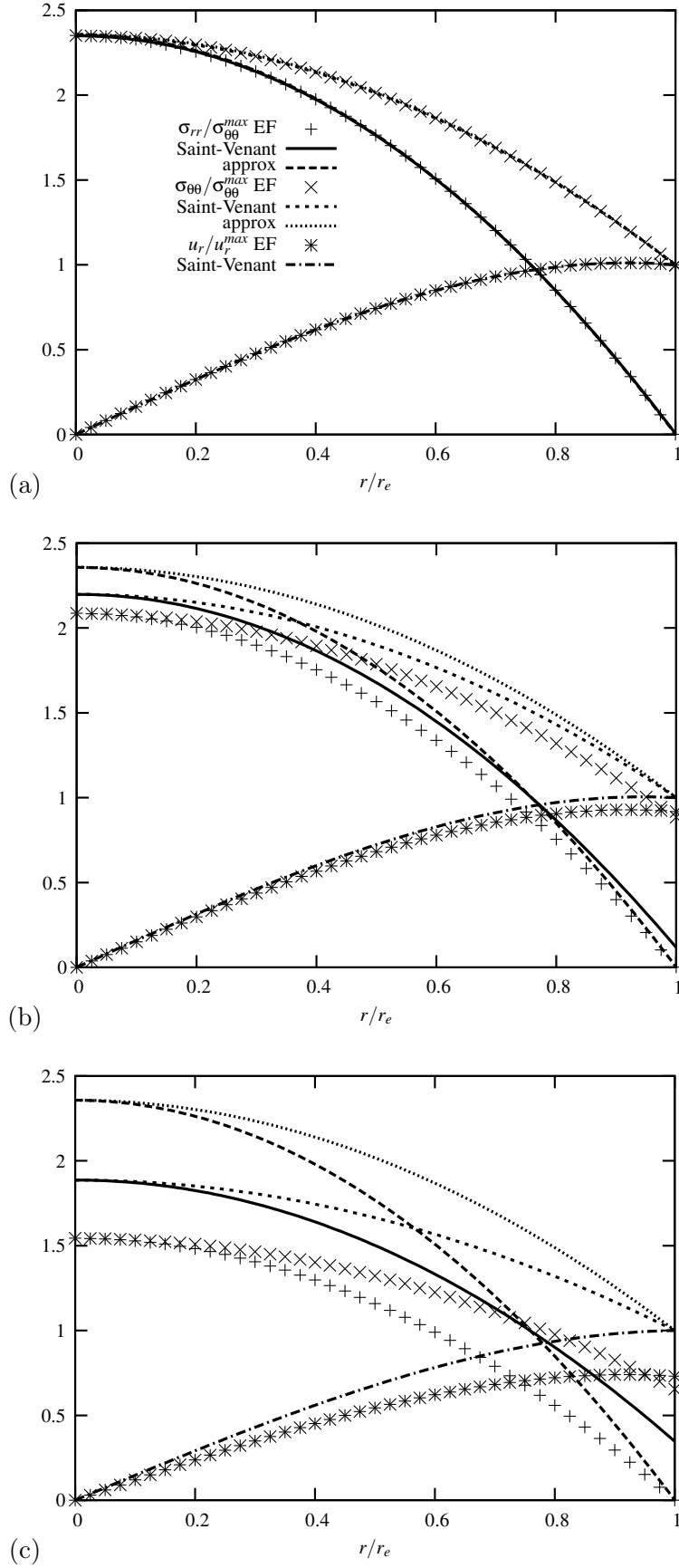


FIGURE 18.8 – Comparaison entre la solution approchée en contraintes (approx), la solution au sens de Saint-Venant et la solution numérique par la méthode des éléments finis (EF), pour les profils de contraintes radiale et orthoradiale, et le déplacement u_r en $z = 0$. La comparaison est effectuée pour trois cylindres massifs en rotation de hauteurs différentes : (a) $H/r_e = 0.1$, (b) $H/r_e = 0.5$, (c) $H/r_e = 1$.

qui inclut le cas des efforts centrifuges $f(r) = \omega^2 r$.

Les équations de Beltrami doivent être explicitées dans le cas des coordonnées cylindriques et pour une distribution de contraintes de la forme (18.93). Exprimons d'abord le laplacien du tenseur des contraintes en partant de sa définition :

$$\Delta \underline{\sigma} = \text{div grad } \underline{\sigma} = \nabla \cdot (\nabla \underline{\sigma}) \quad (18.96)$$

Pour cela, il faut partir de la définition intrinsèque (A.97) du gradient d'un tenseur. Le gradient du tenseur des contraintes est

$$\text{grad } \underline{\sigma} = \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial r} \otimes \underline{e}_r + \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \theta} \otimes \frac{\underline{e}_\theta}{r} + \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial z} \otimes \underline{e}_z \quad (18.97)$$

Dans le cas particulier d'un champ de la forme (18.93), cela donne

$$\begin{aligned} \text{grad } \underline{\sigma} &= \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r \\ &+ \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta) \\ &+ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z \end{aligned} \quad (18.98)$$

La définition intrinsèque (A.101) de la divergence d'un champ de tenseurs fournit :

$$\text{div grad } \underline{\sigma} = \frac{\partial(\text{grad } \underline{\sigma})}{\partial r} \cdot \underline{e}_r + \frac{\partial(\text{grad } \underline{\sigma})}{\partial \theta} \cdot \frac{\underline{e}_\theta}{r} + \frac{\partial(\text{grad } \underline{\sigma})}{\partial z} \cdot \underline{e}_z \quad (18.99)$$

En substituant l'expression (18.98) du gradient du tenseur des contraintes dans cette définition et en ordonnant les termes, l'expression du laplacien en coordonnées cylindriques est obtenue :

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\sigma} &= \left(\frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \sigma_{rr} + \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial z^2} \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \\ &+ \left(\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \sigma_{rr} - \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial z^2} \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \end{aligned} \quad (18.100)$$

Pour aboutir à l'expression des équations de Beltrami, il reste à calculer le second gradient de la trace des contraintes, puis le gradient des efforts massiques, et enfin la divergence des efforts massiques. Les voici successivement :

$$\begin{aligned} \text{grad}(\text{trace } \underline{\sigma}) &= \frac{\partial \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{\partial \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial \theta} \frac{\underline{e}_\theta}{r} + \frac{\partial \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial z} \underline{e}_z \\ &= \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} \right) \underline{e}_r + \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial z} \right) \underline{e}_z \end{aligned} \quad (18.101)$$

$$\begin{aligned} \text{grad}(\text{grad}(\text{trace } \underline{\sigma})) &= \frac{\partial \nabla \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial r} \otimes \underline{e}_r + \frac{\partial \nabla \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial \theta} \otimes \frac{\underline{e}_\theta}{r} + \frac{\partial \nabla \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial z} \otimes \underline{e}_z \\ &= \frac{\partial^2 \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial r^2} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \\ &+ \frac{\partial^2 \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial r \partial z} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r) + \frac{\partial^2 \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial z^2} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned} \quad (18.102)$$

$$\text{grad } \underline{f} = f' \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{f}{r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \quad (18.103)$$

$$\text{div } \underline{f} = \text{trace grad } \underline{f} = f' + \frac{f}{r} \quad (18.104)$$

où f' désigne la dérivée par rapport à r de la fonction f .

Finalement, les équations de Beltrami pour un champ de la forme (18.93) sont les quatre premières équations ci-dessous :

$$(\Delta \underline{\sigma})_{rr} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial r^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \rho \left(f' + \frac{f}{r} \right) + 2\rho f' = 0 \quad (18.105)$$

$$(\Delta \underline{\sigma})_{\theta\theta} + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial r^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \rho \left(f' + \frac{f}{r} \right) + 2\rho \frac{f}{r} = 0 \quad (18.106)$$

$$\frac{\partial^2 \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial r \partial z} = 0 \quad (18.107)$$

$$\frac{\partial^2 \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial z^2} + \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu} \rho \left(f' + \frac{f}{r} \right) = 0 \quad (18.108)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho f = 0 \quad (18.109)$$

Les équations de Beltrami suffisent à résoudre le problème posé en contraintes à condition de leur adjoindre 3 conditions supplémentaires, à savoir la vérification des équations d'équilibre en surface (voir page 206 et la note de bas de page correspondante). Il est toutefois plus facile dans les développements qui vont suivre de se servir de l'équation d'équilibre (18.109) sur tout le volume. C'est redondant mais plus pratique *in fine*.

La combinaison des équations (18.107) et (18.108) de Beltrami conduit à une restriction de la forme des efforts volumiques compatible avec le type de solution en contraintes recherché :

$$\left(f' + \frac{f}{r} \right)' = 0 \quad (18.110)$$

ce qui conduit à

$$f(r) = \omega^2 r + \frac{\alpha}{r} \quad (18.111)$$

Le terme linéaire en r est celui que l'on rencontre en présence d'effort centrifuges. C'est pourquoi le coefficient de proportionnalité a été noté ω^2 , même si en toute généralité ce coefficient n'est pas tenu d'être positif. Les efforts en $1/r$ sont délicats à interpréter. Ils seront toutefois pris en compte dans la suite par souci de généralité.

L'exploitation directe des équations (18.105) à (18.109) pour déterminer le champ des contraintes est possible mais malaisée. Il est plus rapide de tirer parti directement de l'équation de compatibilité sous la forme (18.7), combinée avec la relation de comportement pour donner l'équation (18.6) déjà mentionnée. Cette relation et l'équation d'équilibre sont réécrites sous la forme

$$(1+\nu)(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = r \left(\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} - \nu \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \right) \quad (18.112)$$

$$(1+\nu)(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = -(1+\nu)r \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - (1+\nu)r\rho f \quad (18.113)$$

$$(18.114)$$

L'addition et la soustraction des deux équations précédentes fournit un système portant sur la somme et la différence des composantes de contraintes cherchées :

$$\frac{\partial \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial r} + (1+\nu)\rho f = 0 \quad (18.115)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right) (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial r} + \rho f = 0 \quad (18.116)$$

Remarquer que l'équation (18.115) implique la troisième relation de Beltrami (18.107). La résolution de ces équations permet de trouver la dépendance en r de la somme et de la différence des contraintes radiale et orthoradiale :

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = -(1 + \nu)\rho \int f dr + g_1(z) = -(1 + \nu)\rho\left(\omega^2 \frac{r^2}{2} + \alpha \log r\right) + g_1(z) \quad (18.117)$$

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = -\frac{1 - \nu}{r^2}\rho \int f r^2 dr + g_2(z) = -\rho(1 - \nu)\left(\frac{\omega^2}{4}r^2 + \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{g_2(z)}{r^2} \quad (18.118)$$

La forme licite (18.111) des efforts massiques a été prise en compte. Les constantes d'intégration g_1 et g_2 sont *a priori* des fonctions de la variable z . L'équation de Beltrami (18.108) permet de déterminer g_1 :

$$g_1(z) = -\frac{\nu(1 + \nu)}{1 - \nu}\rho\omega^2 z^2 + 2(Az + B) \quad (18.119)$$

avec deux constantes d'intégration A et B . Une expression de la contrainte radiale peut alors être obtenue :

$$\sigma_{rr} = -\rho\omega^2 r^2 \frac{3 + \nu}{8} - \frac{\rho\alpha}{4}(1 - \nu + 2(1 + \nu) \log r) - \frac{\nu(1 + \nu)}{1 - \nu}\rho\omega^2 \frac{z^2}{2} + Az + B + \frac{g_2(z)}{2r^2} \quad (18.120)$$

Il reste à utiliser une des équations de Beltrami non encore exploitée, par exemple (18.105) qui, compte tenu de la forme des efforts volumiques, devient :

$$(\Delta \sigma)_{rr} + \frac{1 + \nu}{1 - \nu}\rho\omega^2 - \frac{\rho\alpha}{r^2} = 0 \quad (18.121)$$

On élimine $\sigma_{\theta\theta}$ dans l'équation précédente en utilisant l'équation d'équilibre (18.109). Finalement, la contrainte radiale est solution de

$$\frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial z^2} + \frac{3 - \nu}{1 - \nu}\rho\omega^2 + \frac{\rho\alpha}{r^2} = 0 \quad (18.122)$$

ce qui conduit à la détermination de g_2 :

$$g_2'' = 2\nu\rho\alpha \implies g_2(z) = \nu\rho\alpha z^2 + Cz + D \quad (18.123)$$

Les expressions générales des contraintes sont donc

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\frac{3 + \nu}{8}\rho\omega^2 r^2 + \frac{Cz + D + \nu\rho\alpha z^2}{2r^2} - \frac{\nu(1 + \nu)}{1 - \nu}\rho\omega^2 \frac{z^2}{2} + Az + B \\ &\quad - \frac{\rho\alpha}{4}(1 - \nu + 2(1 + \nu) \log r) \end{aligned} \quad (18.124)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{1 + 3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2 - \frac{Cz + D + \nu\rho\alpha z^2}{2r^2} - \frac{\nu(1 + \nu)}{1 - \nu}\rho\omega^2 \frac{z^2}{2} + Az + B \\ &\quad + \frac{\rho\alpha}{4}(1 - \nu - 2(1 + \nu) \log r) \end{aligned} \quad (18.125)$$

Encore faut-il s'assurer que l'équation de Beltrami (18.106), non encore exploitée, est bien vérifiée par la solution précédente. C'est effectivement le cas.

18.4.2 Interprétation des termes de la solution

Les différentes contributions apparaissant dans les expressions des contraintes radiale et orthoradiale mises en évidence au paragraphe précédent peuvent être classées en fonction des sollicitations mécaniques élémentaires du cylindre étudié correspondantes :

- **cylindre en rotation.** Cette situation correspond à

$$\alpha = 0, \quad A = C = 0$$

Les champs de contraintes ont été entièrement explicitées au paragraphe 18.3.3. Dans ce cas particulier, la condition de symétrie par rapport au plan $z = 0$ permet d'exclure les termes de flexion en z . Les constantes B et D sont déterminées par la condition de résultante nulle (ou imposée) aux bords $r = r_e$ et $r = r_i$. La contribution D/r^2 est nulle pour un disque sans alésage. Cette solution est acceptable au sens de Saint-Venant et concerne donc les disques minces. Il s'agit d'un cas de contraintes planes approchées puisque, pour un disque mince, les termes en z^2 sont faibles devant les termes en r^2 .

- **tube sous pression.** Cette situation est rencontrée pour

$$\omega = \alpha = 0, \quad A = C = 0$$

Les contraintes ont la forme établie pour les réservoirs cylindriques sous pression interne ou/et externe, avec des extrémités libres :

$$\sigma_{rr} = B + \frac{D}{r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = B - \frac{D}{r^2}$$

Les conditions de pression imposée en $r = r_i, r_e$ permettent de déterminer les constantes B et D . Il s'agit là de la solution exacte du réservoir sous pression, libre à ses extrémités, traité au chapitre 15. Les expressions complètes des contraintes sont données dans le tableau récapitulatif 15.1. Le réservoir est dans un état de contraintes planes.

- **flexion axisymétrique d'une plaque trouée.** Cette situation est caractérisée par

$$\omega = \alpha = 0, \quad B = D = 0$$

Le profil de contrainte est linéaire en z :

$$\sigma_{rr} = z(A + \frac{C}{r^2}), \quad \sigma_{\theta\theta} = z(A - \frac{C}{r^2})$$

Ce profil de contraintes est rencontré dans un disque troué sollicité par un moment de flexion selon \underline{e}_θ imposé sur chaque tranche élémentaire $2Hr_e d\theta$ en $r = r_e$, et, par exemple, libre d'effort en $r = r_i$. Le disque non alésé correspond à $C = 0$. Ce problème est traité dans le recueil de problèmes (Amestoy, 2004). Il sort du cadre des contraintes planes même approchées puisque la dépendance en z y est essentielle⁴.

Seule la situation du cylindre sous pression interne/externe conduit à une solution exacte en contraintes planes. Dans les autres cas, il ne s'agit que de solutions en contraintes planes approchées puisque la dépendance en z ne peut être exclue ou/et que le principe de Saint-Venant doit être invoqué. Mandel indique *qu'un cylindre de longueur finie n'est qu'exceptionnellement en état de contraintes planes* (Mandel, 1994). En particulier, l'équation de Beltrami (18.108) montre qu'en présence d'efforts volumiques à divergence non nulle, l'état de contrainte dépend nécessairement de z , ce qui exclut l'état de contraintes planes exact.

18.4.3 Complément à l'étude des contraintes planes

Si l'on recherche les situations permettant l'établissement d'un état de contraintes planes exact ou approché, dans un cylindre sollicité de manière axisymétrique, il est nécessaire d'envisager aussi

4. En effet, le contexte des contraintes planes approchées, c'est-à-dire le cas où les contributions en z peuvent être négligées, ne requiert pas seulement la bonne forme des contraintes mais aussi des condition de parité sur la dépendance réelle des contraintes en fonction de z (voir la page 534 de l'ouvrage (Mandel, 1994)). Il est pertinent dans le cas d'une plaque mince, non chargée sur ses deux faces, chargée sur sa surface latérale ou dans le volume par des forces parallèles au plan moyen, symétriquement distribuées par rapport à ce plan (de manière que le plan moyen reste plan). Ce n'est clairement pas le cas pour le chargement de flexion.

l'existence d'un cisaillement $\sigma_{r\theta}$. Par souci d'exhaustivité, ce paragraphe vient compléter l'analyse précédente où seules les composantes radiale et orthoradiale étaient envisagées. Pour englober le cas des contraintes planes approchées, une dépendance $\sigma_{r\theta}(r, z)$ est recherchée *a priori*. En fait, la dépendance en z est exclue dans le cadre présent. En effet, une dépendance en z de la composante de cisaillement entraînerait une dépendance en z de la déformation

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)$$

et donc une dépendance $u_\theta(r, z)$. Ce fait est incompatible avec la nullité de $\varepsilon_{\theta z}$ et $\sigma_{\theta z}$ en contraintes planes. Nous étudions donc le champ

$$\underline{\sigma} = \sigma_{r\theta}(r)(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r) \quad (18.126)$$

qui vient s'ajouter au champ (18.93) déjà étudié de manière exhaustive. De même, l'existence d'une densité d'efforts volumiques selon \underline{e}_θ doit aussi être envisagée et additionnée à la contribution (18.95) déjà considérée :

$$\underline{f} = f_\theta(r) \underline{e}_\theta \quad (18.127)$$

champ dont la divergence est nulle. La condition d'équilibre statique conduit à l'équation différentielle

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \rho f_\theta = 0 \quad (18.128)$$

Les équations de Beltrami se réduisent à

$$\frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} - \frac{4}{r^2} \sigma_{r\theta} + \rho \left(f'_\theta - \frac{f_\theta}{r} \right) = 0 \quad (18.129)$$

qui n'est autre que la dérivée par rapport à r de l'équation d'équilibre (18.128) divisée par r . Le problème se réduit donc à la résolution de (18.128) qui fournit

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \left(\rho \int f_\theta r^2 dr + C \right) \quad (18.130)$$

où C est une constante d'intégration. Chaque tranche $r_e H d\theta$ est soumise en $r = r_e$ à un effort tangentiel indépendant de θ et de z . Un effort tangentiel existe aussi en $r = r_i$ pour assurer l'équilibre. Ce type de sollicitation est l'analogue pour le solide élastique linéaire isotrope de l'écoulement de Couette que subit un fluide placé entre deux tubes en rotation relative.

18.5 Arbres en rotation

C'est la méthode des contraintes qui a été utilisée jusqu'ici dans ce chapitre pour établir des solutions dont la pertinence est apparue dans le cas de disques minces. On propose ici de rechercher une solution au problème d'un cylindre en rotation par rapport à son axe par la méthode des déplacements. On va montrer que cette démarche ne vaudra que pour des cylindres élancés $r_e/H \leq 1$. La forme proposée pour le champ de déplacements est la suivante :

$$\underline{u} = u_r(r) \underline{e}_r + u_z(z) \underline{e}_z \quad (18.131)$$

Les sections perpendiculaires à l'axe du cylindre sont donc supposées rester planes et orthogonales à l'axe. Le caractère axisymétrique de la géométrie et de la sollicitation radiale implique que $u_\theta = 0$.

Cette situation est rencontrée par exemple dans les arbres d'entraînement des disques de turbines dans les moteurs ou les alternateurs. La géométrie de ces arbres peut être massive ou tubulaire. Les résultats sont explicités uniquement dans le cas de l'arbre massif car l'extension au cas du tube ne pose pas de difficulté.

18.5.1 Mise en œuvre de la méthode de déplacements

A partir de la forme proposée (18.131) du champ de déplacement, on calcule successivement le tenseur des déformations

$$[\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} u_{r,r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & u_{z,z} \end{bmatrix} \quad (18.132)$$

et, dans le cas d'un comportement élastique linéarisé et isotrope, les composantes non nulles du tenseur des contraintes associées :

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)u_{r,r} + \lambda\left(\frac{u_r}{r} + \varepsilon_{zz}\right) \quad (18.133)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu)\frac{u_r}{r} + \lambda(u_{r,r} + \varepsilon_{zz}) \quad (18.134)$$

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} + \lambda(u_{r,r} + \frac{u_r}{r}) \quad (18.135)$$

où nous avons fait intervenir les coefficients de Lamé. La virgule qui suit un indice désigne comme dans les chapitre précédents la dérivation par rapport à la variable indiquée.

Les équations d'équilibre, en présence d'efforts volumiques d'inertie, se traduisent par les deux équations suivantes :

$$\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho\omega^2 r = 0 \quad (18.136)$$

$$\sigma_{zz,z} = 0 \quad (18.137)$$

En substituant l'expression (18.135) de la contrainte axiale dans la seconde équation d'équilibre, nous obtenons

$$\varepsilon_{zz} = c, \quad u_z = cz \quad (18.138)$$

où c est une constante d'intégration. La translation selon l'axe z a été fixée à 0.

L'équation d'équilibre (18.136) conduit à une équation différentielle en u_r :

$$u_{r,rr} + \left(\frac{u_r}{r}\right)_{,r} + \frac{\rho\omega^2 r}{\lambda + 2\mu} = 0 \quad (18.139)$$

dont la solution est de la forme

$$u_r = -\frac{\rho\omega^2}{8(\lambda + 2\mu)}r^3 + ar + \frac{b}{r} \quad (18.140)$$

Dans le cas d'un arbre massif, l'absence de singularité attendue en $r = 0$ implique $b = 0$. La résolution complète est menée pour deux types de conditions aux extrémités du cylindre :

- **Déformation axiale de l'arbre imposée.** La constante c est donc supposée connue. Elle est par exemple nulle si l'arbre est bloqué aux extrémités $z = \pm H$. Si l'arbre est libre d'effort sur la surface $r = r_e$, la condition

$$\sigma_{rr}(r = r_e) = 2(\lambda + \mu)a - \frac{\rho\omega^2(2\lambda + 6\mu)r_e^2}{4(\lambda + 2\mu)} + \lambda c = 0 \quad (18.141)$$

permet d'obtenir

$$a = \frac{\rho\omega^2(2\lambda + 3\mu)r_e^2}{8(\lambda + 2\mu)} - \nu c \quad (18.142)$$

ce qui achève la résolution du problème.

- **Tube libre à ses extrémités.** La condition $\sigma_{zz} = 0$ en $z = \pm H$ ne peut être satisfaite pour tout $0 \leq r \leq r_e$. Il est possible toutefois de garantir la condition d'extrémité libre d'effort en résultante :

$$\begin{aligned} F_z &= \int_{z=H} \sigma_{zz} dS = 2\pi \int_0^{r_e} \sigma_{zz} r dr = 0 \\ &= ((\lambda + 2\mu)c + 2\lambda a) \frac{r_e^2}{2} - \frac{\rho\omega^2 \lambda}{8(\lambda + 2\mu)} r_e^4 \end{aligned} \quad (18.143)$$

L'équation (18.141) traduisant la nullité des efforts appliqués sur la surface latérale de l'arbre et l'équation précédente constituent un système linéaire d'inconnues a et c . La résolution de ce système conduit à

$$c = -\frac{\rho\omega^2 r_e^2}{2} \frac{\nu}{E}, \quad a = \frac{\rho\omega^2 r_e^2}{8E} \frac{3-5\nu}{1-\nu} \quad (18.144)$$

Conformément à l'intuition, la déformation axiale ε_{zz} est négative. Les expressions des contraintes s'en déduisent. Pour obtenir ces expressions concises, il est nécessaire d'utiliser les relations entre les coefficients de Lamé, le coefficient de Poisson et le module de Young rassemblées dans la table 8.1.

La solution établie dans le cas de l'arbre libre d'effort à ses extrémités n'est valide qu'au sens de Saint-Venant. Elle ne permet pas de satisfaire point par point la condition de nullité du vecteur-contrainte en $z = \pm H$ mais seulement en terme de torseur résultant.

18.5.2 Vitesse critique pour un arbre en rotation

Les contraintes qui s'établissent dans un arbre en rotation dont les extrémités sont libres se déduisent des expressions données au paragraphe précédent :

$$\sigma_{rr} = \frac{\rho\omega^2}{4} \frac{2\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu} (r_e^2 - r^2) = \frac{\rho\omega^2}{8} \frac{3-2\nu}{1-\nu} (r_e^2 - r^2) \quad (18.145)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2}{4} \left(\frac{2\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu} r_e^2 - \frac{2\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} r^2 \right) = \frac{\rho\omega^2}{8(1-\nu)} ((3-2\nu)r_e^2 - (1+2\nu)r^2) \quad (18.146)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\rho\omega^2}{4} \frac{\nu}{1-\nu} (r_e^2 - 2r^2) \quad (18.147)$$

Il s'agit d'un état triaxial de contraintes en particulier en $r = 0$. Les contraintes radiale et orthoradiale sont toujours positives pour les valeurs licites du coefficient de Poisson. Remarquer aussi que les contraintes ne dépendent pas du module de Young mais seulement du coefficient de Poisson. La contrainte axiale n'est pas nulle mais sa résultante selon z l'est effectivement.

Les contraintes s'ordonnent de la façon suivante, en tout point $r \leq r_e$:

$$\sigma_{zz} \leq \sigma_{rr} \leq \sigma_{\theta\theta} \quad (18.148)$$

L'inégalité $\sigma_{zz} \leq \sigma_{rr}$ n'est en fait valable que pour $\nu \geq 0$. En effet,

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} &= \frac{\rho\omega^2}{8(1-\nu)} 2(1-2\nu)r^2 \geq 0 \\ \sigma_{rr} - \sigma_{zz} &= \frac{\rho\omega^2}{8(1-\nu)} ((3-4\nu)r_e^2 - (3-6\nu)r^2) \geq 0 \quad \text{pour } \nu > 0 \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} &= \frac{\rho\omega^2}{8(1-\nu)} ((3-4\nu)r_e^2 - (1-2\nu)r^2) \geq 0 \end{aligned}$$

Les écarts les plus grands entre les contraintes principales sont

$$\begin{aligned} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})_{max} &= \frac{\rho\omega^2}{8} \frac{3-4\nu}{1-\nu} r_e^2 \quad \text{en } r = 0 \\ (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})_{max} &= \frac{\rho\omega^2}{8} \frac{3-4\nu}{1-\nu} r_e^2 \quad \text{en } r = 0 \\ (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})_{max} &= -\frac{\rho\omega^2}{8} \frac{2\nu}{1-\nu} r_e^2 \quad \text{en } r = r_e \\ (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})_{max} &= \frac{\rho\omega^2}{8} \frac{3-4\nu}{1-\nu} r_e^2 \quad \text{en } r = 0 \end{aligned}$$

sans restriction autre que $-1 < \nu < 0.5$. Cette analyse permet de prévoir la limite d'élasticité selon le critère de Tresca (4.63). La plasticité commence en $r = 0$ lorsque la vitesse de rotation atteint

$$\rho \omega_e^2 = \frac{8(1-\nu)}{3-4\nu} \frac{\sigma_0}{r_e^2} \quad (18.149)$$

où σ_0 est la limite d'élasticité du matériau en traction simple. Remarquer que la vitesse limite de l'arbre massif en rotation coïncide avec celle du disque mince sans alésage (18.51) lorsque le coefficient de Poisson est nul. Pour un même rayon extérieur r_e , la vitesse critique de l'arbre en rotation est plus forte que celle du disque mince à condition que $\nu > 0$.

18.5.3 Epilogue

Le recours au principe de Saint-Venant a été mis à profit lors de la résolution de la déformation de cylindres pour choisir la méthode des contraintes ou des déplacements en fonction de l'élancement du cylindre. A priori, les deux méthodes sont légitimes mais c'est la méthode des contraintes qui s'est avérée efficace dans le traitement des disques minces, tandis que la méthode des déplacements est adaptée aux arbres. La forme simple du champ de déplacement (18.131) est en effet trop restrictive pour résoudre le problème des disques minces.