

- Le potentiel linéaire

$$f(z) = V_0 \exp(-i\alpha)z$$

correspond à un champ de vitesse constant de norme  $V_0$  et dans la direction d'angle  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On vérifie aisément que cette fonction est holomorphe, c'est-à-dire qu'elle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann (5.21) :  $\phi = V_0(\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y)$ ,  $\psi = V_0(-\sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y)$ .

- Le potentiel logarithmique

$$f(z) = \frac{\epsilon D}{2\pi} \log z \quad (5.23)$$

correspond à un écoulement radial de source ( $\epsilon = 1$ ) ou de puits ( $\epsilon = -1$ ) de débit  $D$ . En effet,

$$f'(z) = \frac{\epsilon D}{2\pi z} \implies u = \frac{\epsilon D \cos \theta}{2\pi r}, v = \frac{\epsilon D \sin \theta}{2\pi r}, \quad \underline{v} = \frac{\epsilon D}{2\pi r} \underline{e}_r$$

- Le potentiel logarithmique

$$f(z) = -i \frac{\epsilon \Gamma}{2\pi} \log z \quad (5.24)$$

correspond à un *tourbillon* centré en O de circulation  $\epsilon \Gamma$ . En effet,

$$f'(z) = -i \frac{\epsilon \Gamma}{2\pi z} \implies u = -\frac{\epsilon \Gamma \sin \theta}{2\pi r}, v = \frac{\epsilon \Gamma \cos \theta}{2\pi r}, \quad \underline{v} = \frac{\epsilon \Gamma}{2\pi r} \underline{e}_\theta$$

Ce champ est étudié en détail au chapitre 13, voir en particulier la définition (13.6) de la circulation du champ de vitesses autour du centre du tourbillon.

- Le *doublet* plan d'axe  $Ox$  est obtenu avec

$$f(z) = -\frac{K}{2\pi z} \quad (5.25)$$

et fait l'objet du paragraphe 5.4 suivant. Le caractère holomorphe de la fonction  $1/z$  se vérifie en montrant que les parties réelle et imaginaire sont :  $\phi = x/(x^2 + y^2)$ ,  $\psi = -y/(x^2 + y^2)$ , qui sont des fonctions harmoniques vérifiant les conditions (5.21).

Les champs de vitesses associés à ces potentiels sont illustrés par la figure 5.1.

## 5.4 Application à l'écoulement autour d'un cylindre

On considère un cylindre de section circulaire de rayon  $R$  immergé dans un fluide parfait incompressible<sup>5</sup>. Le champ des vitesses stationnaire du fluide est donné par ses composantes cartésiennes dans un repère  $(O, x, y)$  dont l'origine est le centre de la section du cylindre

$$u = v_1 = V_0 \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \cos(2\theta) \right), \quad v = v_2 = -V_0 \frac{R^2}{r^2} \sin(2\theta), \quad \forall r \geq R \quad (5.26)$$

Noter que les composantes cartésiennes sont traitées comme des fonctions des coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . C'est une pratique assez usuelle dans la résolution de certains problèmes plans. L'écoulement est plan dans le sens où  $v_3 = 0$ .

Le cylindre est fixe dans le référentiel considéré tandis que, loin du cylindre, le fluide s'écoule à la vitesse  $V_0$  dans la direction  $Ox$ . Sur le bord du cylindre, on calcule

$$\underline{v} \cdot \underline{n} = V_0 ((1 - \cos(2\theta)) \cos \theta - \sin(2\theta) \sin \theta) = V_0 (\cos \theta - (\cos(2\theta) \cos \theta + \sin(2\theta) \sin \theta)) = 0$$

Les conditions de glissement autour du cylindre sont donc respectées.

Il faudrait vérifier également que  $\operatorname{div} \underline{v} = 0$  et  $\operatorname{rot} \underline{v} = 0$ , ce qui n'est pas très commode. On préfère recourir au potentiel complexe associé à ce champ de vitesse :

$$f(z) = V_0 \left( z + \frac{R^2}{z} \right) \implies f'(z) = V_0 \left( 1 - \frac{R^2}{z^2} \right) = V_0 \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \exp(-2i\theta) \right) = V_0 \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \cos(2\theta) + i \frac{R^2}{r^2} \sin(2\theta) \right) \quad (5.27)$$

5. Cet exercice est issu des notes manuscrites de Michel Amestoy.

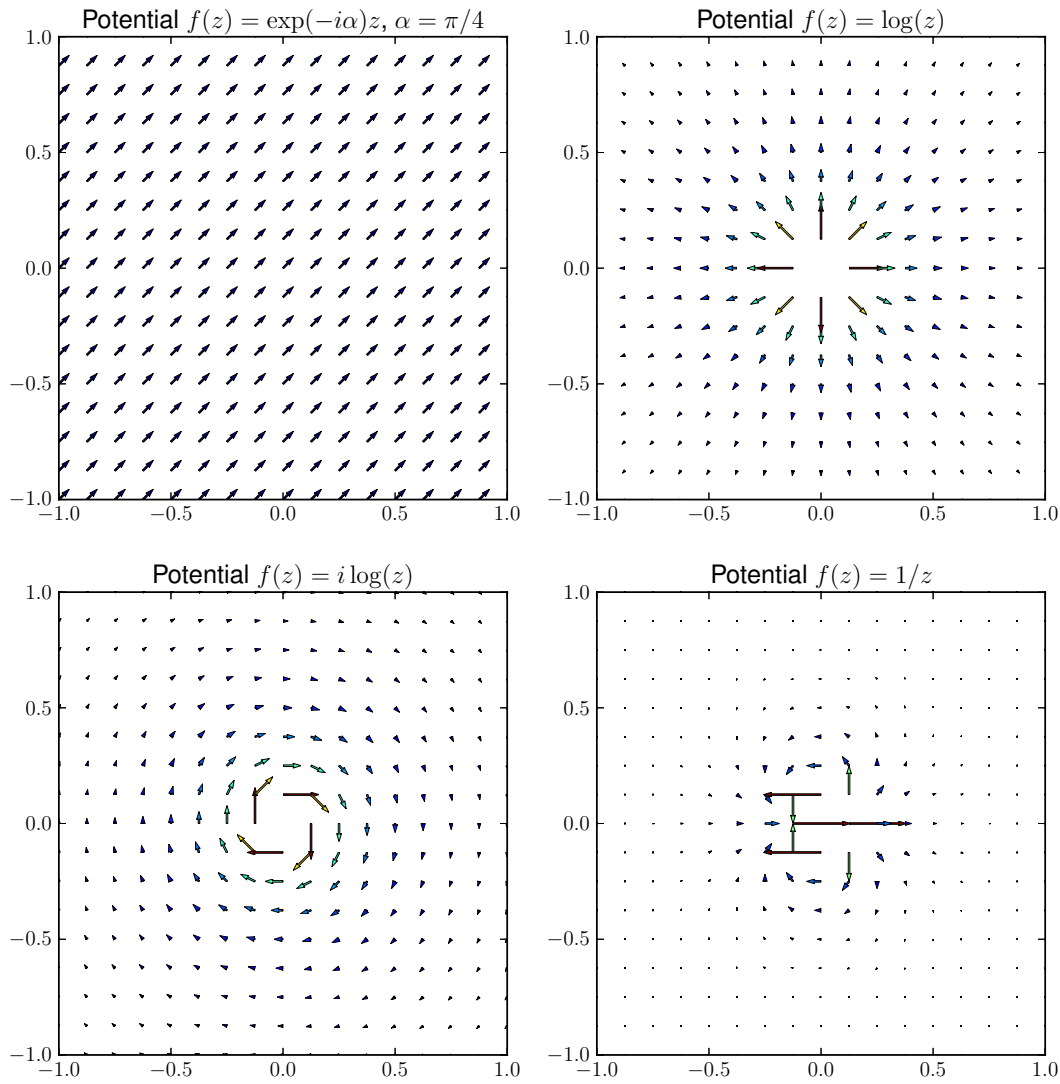


FIGURE 5.1 – Champs des vitesses pour quatre potentiels complexes. Les petits vecteurs indiquent la direction et l'intensité du vecteur-vitesse aux différents points.

ce qui fournit le champ de vitesse (5.26). Cette fonction est holomorphe (propriété vérifiée au paragraphe précédent pour  $z$  et  $1/z$ ) de sorte que l'isochorie et le caractère irrotationnel du champ de vitesse sont garantis.

On peut aussi le vérifier directement en calculant le gradient du champ de vitesses précédent en coordonnées cartésiennes :

$$[\mathcal{L}] = \frac{2V_0 R^2}{(x^2 + y^2)^3} \begin{bmatrix} x(x^2 - 3y^2) & y(y^2 - 3x^2) & 0 \\ y(y^2 - 3x^2) & -x(x^2 - 3y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

On voit que  $\mathcal{L}$  est symétrique, ce qui traduit le caractère irrotationnel de l'écoulement, tandis que sa trace est nulle, ce qui confirme l'isochorie de la transformation. Le gradient a une forme particulièrement

simple aux points d'arrêt :

$$\underline{L}(-R, 0) = \frac{V_0}{R}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) = -\underline{L}(R, 0)$$

### 5.4.1 Lignes de courant

Les lignes de courant sont les courbes tangentes au champ du vecteur vitesse. Elles sont solutions des équations

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad (5.29)$$

en coordonnées cartésiennes. On calcule successivement

$$(1 - \frac{R^2}{r^2} \cos(2\theta)) dx_2 + \frac{R^2}{r^2} \sin(2\theta) dx_1 = 0$$

$$dx_2 - \frac{R^2}{r^2} \cos(2\theta) d(r \sin \theta) + \frac{R^2}{r^2} \sin(2\theta) d(r \cos \theta) = dx_2 - R^2 d\left(\frac{\sin \theta}{r}\right) = 0$$

et finalement

$$d(r \sin \theta) - R^2 d\left(\frac{\sin \theta}{r}\right) = 0$$

qui s'intègre explicitement en

$$\sin \theta (r^2 - R^2) = Cr \quad (5.30)$$

où  $C$  est une constante<sup>6</sup>. On peut exprimer  $r$  en fonction de  $\theta$  pour tracer le diagramme polaire en résolvant l'équation  $r^2 - Cr/\sin \theta - R^2 = 0$ , dont la solution positive est

$$\frac{r}{R} = \frac{C}{2R \sin \theta} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4R^2}{C^2} \sin^2 \theta} \right)$$

ou bien le diagramme paramétrique

$$\frac{x}{R} = \cotan \theta \frac{C}{2R} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4R^2}{C^2} \sin^2 \theta} \right), \quad \frac{y}{R} = \frac{C}{2R} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4R^2}{C^2} \sin^2 \theta} \right) \quad (5.31)$$

Les lignes de courant dans le plan sont tracées sur la figure 5.2. On remarque que le champ observé est en accord au moins qualitatif avec les résultats expérimentaux de la figure 5.3. Dans le cas stationnaire, les lignes de courant sont aussi les trajectoires des particules. Notons les cas particuliers

$$C \rightarrow 0 \implies x \rightarrow R \cos \theta, \quad y \rightarrow R \sin \theta$$

Le bord du cylindre, léché par le fluide, est une trajectoire.

$$C \rightarrow \infty \implies x/R \simeq \cotan \theta \frac{C}{R}, \quad \frac{y}{R} \simeq \frac{C}{R}$$

qui est l'équation paramétrique d'une droite horizontale, correspondant au mouvement du fluide loin de l'obstacle. En  $\theta \rightarrow \pi$ , on a  $r \sin \theta = y \simeq C$  et on obtient la trajectoire horizontale aboutissant au point d'arrêt  $(-R, 0)$  en faisant tendre  $C \rightarrow 0$ . On peut le voir aussi en remarquant que  $v(\theta = 0, \pi) = 0$  de sorte que  $x_2$  est constant, égal à 0 pour ces valeurs de  $\theta$ .

Quel est le temps mis par un point matériel en  $\theta = \pi$  pour atteindre le point d'arrêt  $(-R, 0)$ ? La vitesse verticale est nulle et la vitesse horizontale vaut

$$u = \frac{dx}{dt} = V_0 \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) = V_0 \left( 1 - \frac{R^2}{x^2} \right) \implies V_0 dt = \frac{x^2}{x^2 - R^2} dx$$

6. On obtient également ce résultat en exprimant la fonction de courant,  $\psi = yV_0(1 - R^2/r^2)$  grâce au potentiel complexe  $f(z) = V_0(z + R^2/z)$ . Les lignes de courant sont les lignes de niveau de  $\psi$ .

dont l'intégration entre  $x = x_0 < -R$  et  $x = -R$  fournit

$$V_0(t_\infty - t_0) = \int_{x_0}^{-R} \frac{x^2}{x^2 - R^2} dx$$

Cette intégrale se cacule et fait intervenir la fonction  $\log \sqrt{(x - R)/(x + R)}$  qui tend vers l'infini lorsque  $x \rightarrow -R, x < -R$ . Le point matériel met donc un temps infini pour s'arrêter et atteindre le point singulier  $(-R, 0)$ .

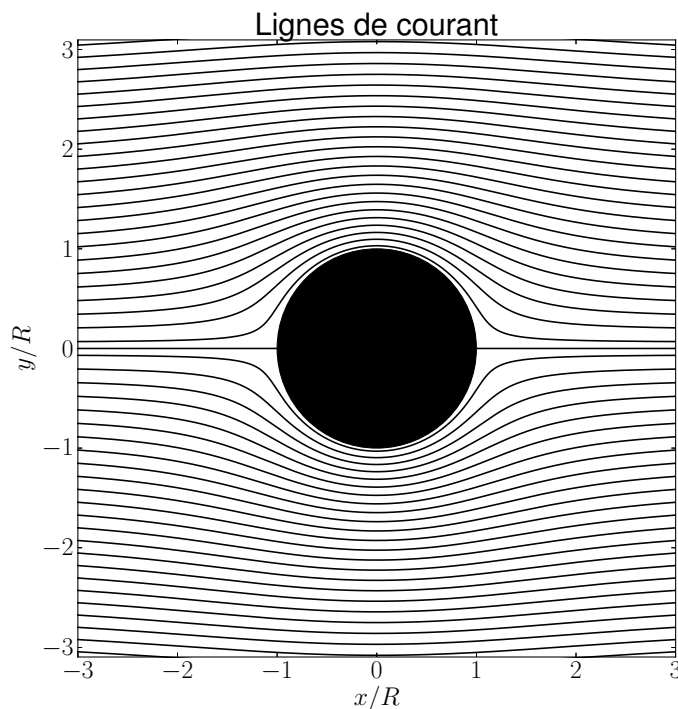


FIGURE 5.2 – Lignes de courant pour un écoulement autour d'un cylindre de rayon  $R$ . Les lignes sont tracées dans le plan normalisé  $x/R, y/R$ .

#### 5.4.2 Lignes de courant et trajectoires dans un autre référentiel

On s'intéresse au changement de référentiel  $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$  :

$$x' = x - V_0 t, \quad y' = y$$

de sorte que le champ de vitesse mesuré par rapport à ce référentiel s'exprime

$$u' = -V_0 \frac{R^2}{r^2} \cos(2\theta), \quad v' = -V_0 \frac{R^2}{r^2} \sin(2\theta), \quad \forall r \geq R \quad (5.32)$$

où  $r$  désigne toujours la distance entre le centre du cylindre et le point considéré, et  $\theta$  garde la signification précédente, voir figure 5.4. Ce champ de vitesse est nul à l'infini. On peut l'interpréter comme le mouvement d'un cylindre animé de la vitesse  $V_0$  dans un fluide au repos, situation d'intérêt pratique évident. Cet écoulement n'est pas stationnaire car les fonctions  $r$  et  $\theta$  dépendent de  $x', y'$  et du temps explicitement. Les questions de la détermination des lignes de courant et des trajectoires dans  $\mathcal{R}'$  sont donc distinctes dans ce cas.

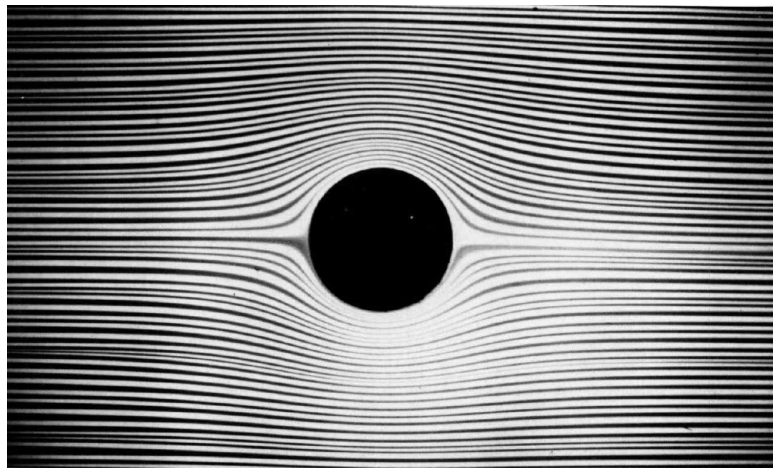


FIGURE 5.3 – Visualisation expérimentale d'un écoulement laminaire autour d'un cylindre, issu de (Van Dyke, 1982). L'écoulement de deux fluides colorés alternés, à une vitesse de 1 mm/s a lieu entre deux plaques de verre espacées de 1 mm.

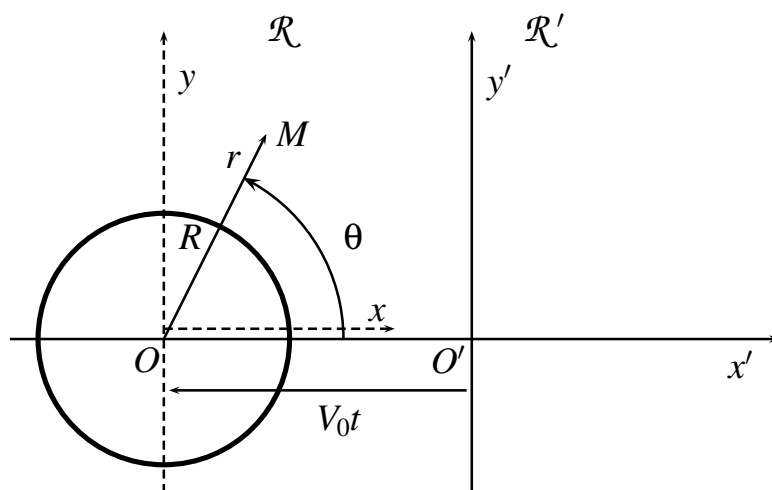


FIGURE 5.4 – Changement de référentiel pour l'observation du mouvement d'un fluide autour d'un cylindre.

Pour la détermination des lignes de courant, on travaille à un instant  $t = t_0$  fixé de sorte que  $dx' = dx, dy' = dy$  et l'équation à résoudre est

$$\frac{dx'}{u'} = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v'} \implies v'dx - u'dy = 0 = R^2 d\left(\frac{\sin \theta}{r}\right)$$

qui s'intègre en

$$\frac{r}{\sin \theta} = C(t_0) = \frac{x^2 + y^2}{y} \iff x^2 - Cy + y^2 = x^2 + \left(y - \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{C^2}{4}$$

Les lignes de courant sont donc des cercles centrés en  $x = 0, y = C/2$  et de rayon  $C/2$  qui sont par conséquent tangents à l'axe  $Ox$  en  $O$ . Elles sont représentées sur la figure 5.5 et leur allure justifie la dénomination de doublet correspondant au potentiel complexe  $f(z) = V_0 R^2 / z$  du mouvement considéré, cf. équation (5.25). Une validation expérimentale se trouve à la page 12 de l'album (Van Dyke, 1982).

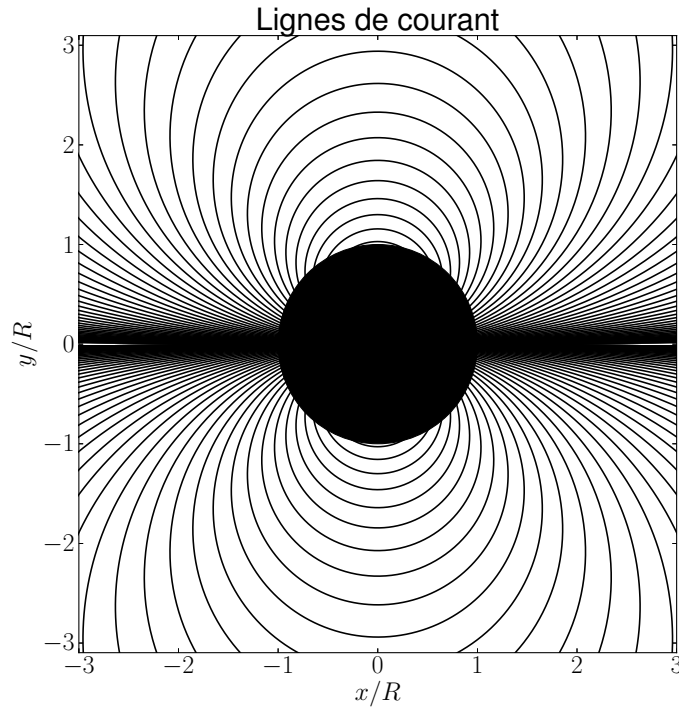


FIGURE 5.5 – Lignes de courant dans un fluide parfait incompressible parcouru par un cylindre animé d'une vitesse horizontale.

Intéressons-nous maintenant aux trajectoires des points matériels vues du référentiel  $\mathcal{R}'$ . Remarquer d'abord que  $y' = y$  dans ce référentiel et que par conséquent cette coordonnée de la trajectoire est la même que (5.31)<sub>2</sub>, à savoir

$$\frac{y'(t)}{R} = \frac{C}{2R} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4R^2}{C^2} \sin^2 \theta(t)} \right) \quad (5.33)$$

où, cette fois-ci,  $\theta$  est une fonction de  $t$ , on l'a vu. D'autre part,

$$\frac{dx'}{dy'} = \frac{u'}{v'} = \cotan(2\theta) \implies \frac{dx'}{dt} = \cotan(2\theta) \frac{dy'}{dt}$$

On peut effectuer un changement de paramétrage  $\theta(t)$  et calculer

$$\frac{dx'}{d\theta} = \cotan(2\theta) \frac{dy'}{d\theta} = \frac{R^2}{C} \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{1 + \frac{4R^2}{C^2} \sin^2 \theta}}$$

On en déduit les équations paramétriques des trajectoires

$$x'(\varphi) = x'_0 + \frac{R^2}{C} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{1 + \frac{4R^2}{C^2} \sin^2 \theta}} d\theta, \quad y'(\varphi) = \frac{C}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4R^2}{C^2} \sin^2 \varphi(t)} \right) \quad (5.34)$$

Le couple de constantes  $(\varphi_0, C)$  est équivalent à la donnée initiale  $(x'_0, y_0)$ . En effet, pour  $\varphi = \varphi_0$ , on a  $x' = x_0$  et  $y(\varphi_0) = y_0$  où  $C$  peut s'exprimer en fonction de  $y_0$  et  $\varphi_0$  grâce à (5.34)<sub>2</sub>.

Lorsque  $C \rightarrow 0$ ,  $y' = R \sin \varphi$  et

$$x' - x'_0 = \frac{R}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\cos(2\theta)}{\sin \theta} d\theta = R \left[ \cos \theta + \frac{1}{2} \log \left| \tan \frac{\theta}{2} \right| \right]_{\varphi_0}^{\varphi} \quad (5.35)$$

Ce cas limite est illustré sur la figure 5.6 et permet de se faire une idée de la forme de boucle de certaines des trajectoires (5.34) de points assez proches du passage de l'obstacle.

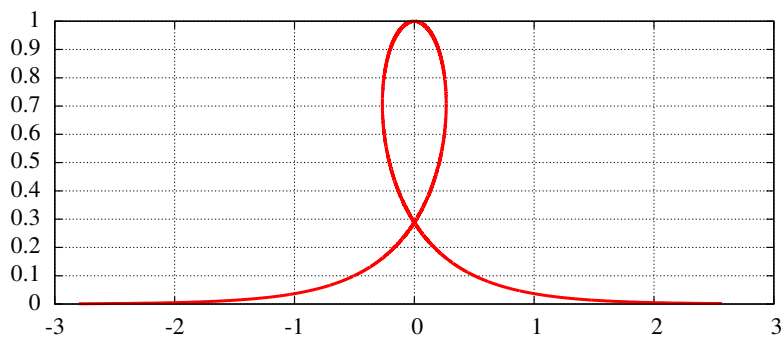


FIGURE 5.6 – Trajectoire limite donnée par (5.35) pour  $x_0 = 0$ ,  $\varphi_0 = \pi/2$  et  $\varphi$  variant de 0.001 à  $\pi$ .

### 5.4.3 Paradoxe de D'Alembert

On considère à nouveau le point de vue du cylindre au repos dans un écoulement de fluide parfait incompressible animé d'une vitesse  $V_0$  à l'infini et on souhaite calculer l'effort résultant appliqué par le fluide sur le cylindre.

Pour cela on fait appel au second théorème de Bernoulli pour un mouvement stationnaire irrotationnel d'un fluide incompressible. Le théorème stipule que la pression dynamique est constante et uniforme :

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho V_0^2 \quad (5.36)$$

où  $V_0$  et  $p_0$  sont la vitesse et la pression régnant loin du cylindre. En utilisant le champ de vitesse (5.26), on calcule le champ de pression

$$p = p_0 + \frac{\rho}{2}V_0^2 \frac{R^2}{r^2} (2\cos(2\theta) - \frac{R^2}{r^2}) \quad (5.37)$$

Le champ de pression sur le cylindre vaut donc

$$\frac{p - p_0}{\rho V_0^2 / 2} = 2\cos(2\theta) - 1$$

La résultante des forces appliquées par le fluide sur le cylindre est donc

$$\underline{\mathbf{R}} = \int_{r=R} -p \underline{\mathbf{n}} ds = - \int_{r=R} (p_0 + \frac{\rho}{2}V_0^2 (2\cos(2\theta) - 1)) \underline{\mathbf{n}} ds = -hR\rho V_0^2 \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) \underline{\mathbf{n}} d\theta$$

où  $h$  est la hauteur du cylindre. En particulier la composante horizontale

$$F_1 = -hR\rho V_0^2 \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) \cos \theta d\theta = 0$$

De même, mais on s'y attendait, pour des raisons de symétrie,  $F_2 = 0$ .

Le fait que la résultante des efforts sur le cylindre est nul est surprenant et constitue le *paradoxe de D'Alembert*. Ce résultat va à l'encontre de l'observation expérimentale immédiate. Il remet en question la validité d'un modèle qui pourtant est en mesure de donner une description cinématique réaliste comme le montre la comparaison des figures 5.2 et 5.3. Il résulte de la symétrie parfaite inattendue du champ de pression à l'amont et à l'aval du cylindre, comme le montre la figure 5.7. Le paradoxe, découvert dès le XVIIIème siècle, a donné lieu à de nombreux développements jusqu'à aujourd'hui pour le résoudre. Il faut pour cela remettre en question les diverses hypothèses qui ont conduit à ce résultat. Le caractère compressible du fluide pourrait par exemple être pris en compte. La viscosité du fluide mérite également d'être considérée, au moins dans une couche limite autour du cylindre comme le fit Prandtl. On peut également considérer la présence d'un sillage à l'aval du cylindre qui brise la symétrie de la solution précédente. Nous reviendrons sur ces points, cf. (Batchelor, 2000).

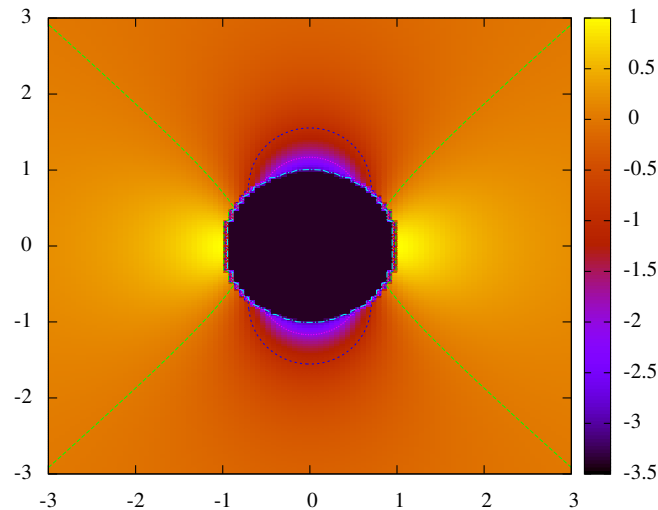


FIGURE 5.7 – Champ de pression normalisé  $2(p-p_0)/(\rho V_0^2)$  régnant dans le fluide autour d'un cylindre.

## 5.5 Tourbillons libres dans un écoulement. Portance

L'objectif de cet exercice<sup>7</sup> est de reprendre l'étude de l'écoulement plan irrotationnel d'un fluide parfait incompressible autour d'un cylindre de centre  $O$  et de rayon  $R$  fixe par rapport au référentiel d'observation, en considérant la présence d'un ou plusieurs tourbillons et les efforts qu'ils induisent sur le cylindre. La géométrie du cylindre et le système de coordonnées sont indiqués sur la figure 5.8(a).

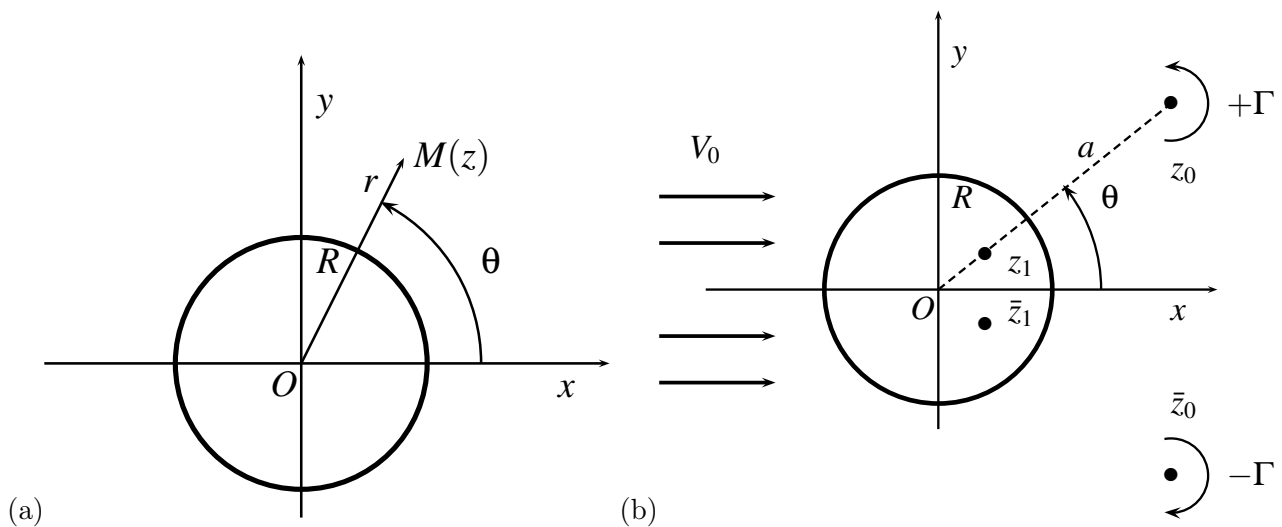


FIGURE 5.8 – (a) Géométrie du cylindre et système de coordonnées : le point  $M$  d'affixe  $z$  est repéré par les coordonnées  $r, \theta$  et les composantes cartésiennes des vecteurs considérés dans l'exercice sont exprimées en fonction de ces coordonnées. (b) Introduction dans l'écoulement de deux tourbillons aux points conjugués  $z_0$  et  $\bar{z}_0$ , ainsi que leurs images  $z_1$  et  $\bar{z}_1$  par rapport au cercle.

7. Cet exercice est basé sur la contribution de (Mandel, 1994) (p. 186) et sur la première partie du problème de composition proposé par M. Amestoy à l'Ecole Polytechnique en 1987. Quelques éléments sont issus de (Germain and Muller, 1995) et (Obala, 1997) (exercice p. 195).



### 5.5.1 Écoulement autour d'un cylindre avec circulation

On considère l'écoulement plan défini par le potentiel complexe suivant :

$$f(z) = V_0(z + \frac{R^2}{z}) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z \quad (5.38)$$

On adoptera la détermination principale du logarithme complexe :

$$\log z = \log |z| + i \arg(z), \quad \text{avec} \quad \arg(z) \in [0, 2\pi] \quad (5.39)$$

où  $V_0, \Gamma$  sont des réels donnés et  $i$  est le nombre imaginaire tel que  $i^2 = -1$ . Pour fixer les idées, on prendra  $V_0 \geq 0, \Gamma \geq 0$ . On rappelle que la variable complexe  $z$  désigne le point de coordonnées  $(x, y)$  dans le repère cartésien orthonormé d'origine  $O$  dans le plan considéré.

#### Nature de l'écoulement

En dérivant le potentiel complexe, donner le champ des vitesses. Donner également la fonction de courant associée à cet écoulement. On exprimera les vitesses dans le repère cartésien orthonormé d'origine  $O$  en fonction des coordonnées  $r, \theta$ , comme sur la figure 5.8(a).

Justifier que, quel que soit  $\Gamma$ , ce champ de vitesses fournit une solution du problème de l'écoulement stationnaire irrotationnel d'un fluide parfait incompressible autour d'un cylindre de centre  $O$  et de rayon  $R$ , le fluide étant animé de la vitesse horizontale  $V_0$  à l'infini. Cela illustre que ce problème possède une infinité de solutions.

La fonction de courant est donnée par la partie imaginaire du potentiel  $f(z)$  :

$$\psi(x, y) = \Im(f(z)) = V_0 y \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

La vitesse s'obtient en dérivant la fonction précédente mais il est plus commode de dériver directement le potentiel complexe

$$\begin{aligned} f'(z) &= V_0 \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} \\ u &= \Re(f'(z)) = V_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \cos(2\theta)\right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r} \\ v &= -\Im(f'(z)) = -V_0 \frac{R^2}{r^2} \sin(2\theta) + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r} \end{aligned}$$

où  $\Re$  désigne la partie réelle du nombre complexe et  $\Im$  sa partie imaginaire. Ce champ de vitesses vaut  $V_0 \underline{e}_1$  à l'infini. Il est à divergence nulle et irrotationnel (sauf en  $z = 0$ ) car la fonction  $f(z)$  est holomorphe. On peut vérifier que  $\underline{v} \cdot \underline{n} = 0$  pour  $r = R$ , ce qui correspond à la condition de glissement le long du cylindre. Ce champ est donc une solution du problème de l'écoulement stationnaire étudié. On connaissait la solution avec  $\Gamma = 0$ . La présence du tourbillon centré en  $O$  ne modifie pas la condition de bord sur le cylindre. La partie du champ de vitesses pour  $|z| < R$  est exclue.

#### Réalisation de l'écoulement

Imaginer comment provoquer expérimentalement l'apparition de la contribution proportionnelle à  $\Gamma$  au champ de vitesse étudié.

Interpréter la quantité  $\Gamma$ .

On peut espérer provoquer une circulation  $\Gamma$  autour du cylindre en l'entraînant en rotation autour de son axe. La rotation du cylindre entraîne le fluide par un effet de viscosité (même infime puisque nous parlons ici d'un fluide parfait). La partie en  $1/z$  correspond à un tourbillon caractérisé par la circulation  $\Gamma$ , cf. équation (13.6).

### Etude des lignes de courant

Déterminer les points de l'écoulement où la vitesse est nulle. Discuter et interpréter physiquement ces résultats en fonction du paramètre

$$A = \frac{\Gamma}{4\pi RV_0} \quad (5.40)$$

Donner l'équation caractérisant les lignes de courant.

Tracer qualitativement ces lignes. On ne cherchera pas à exploiter l'équation trouvée mais on s'inspirera plutôt du nombre de points d'arrêt déterminés précédemment selon les différents cas apparus dans la discussion.

La vitesse est nulle lorsque

$$f'(z) = V_0(1 - \frac{R^2}{z^2}) - i\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} = 0$$

ce qui conduit à résoudre l'équation du second degré :

$$\xi^2 + 2iA\xi - 1 = 0, \quad \text{avec} \quad \xi = \frac{R}{z} \quad \text{et} \quad A = \frac{\Gamma}{4\pi RV_0}$$

dont les solutions sont

$$\xi = -iA \pm \sqrt{1 - A^2}$$

ce qui conduit à la discussion :

- Si  $|A| < 1$ , il y a deux points d'arrêt avec  $|\xi| = 1$ , ce qui signifie que ces points sont sur le bord du cylindre et symétriques par rapport à l'axe  $y$  :

$$z = \frac{R}{\xi} = R(iA \pm \sqrt{1 - A^2})$$

- Si  $|A| = 1$ , il y a un seul point d'arrêt situé au pôle nord du cylindre.
- Si  $|A| > 1$ , on trouve deux solutions situées sur l'axe  $y$  :  $z = Ri/(A \pm \sqrt{A^2 - 1})$ . Comme  $A + \sqrt{A^2 - 1} > 1$  et  $A - \sqrt{A^2 - 1} < 1$  (pour  $A > 0$  pour fixer les idées), l'un des deux points est à l'intérieur du disque et on ne garde que la solution au-dessus du cylindre.

Les trajectoires, identiques aux lignes de courant dans le cas stationnaire, sont les équipotentielles de la fonction de courant :

$$\frac{\psi}{RV_0} = \frac{r \sin \theta}{R} (1 - \frac{R^2}{r^2}) - \frac{\Gamma}{2\pi RV_0} \log \frac{r}{R} = Cste$$

On peut obtenir des équations paramétriques pour les lignes de courant :

$$\frac{y}{R}(t) = (Cste + 2A \log(t)) \frac{t^2}{t^2 - 1}, \quad \frac{x}{R}(t) = \sqrt{t^2 - \frac{y^2}{R^2}}$$

Les lignes de courant sont représentées sur la figure 5.9. Pour  $|A| < 1$ , on voit les deux points d'arrêt décalés vers le haut par rapport au cas sans tourbillon. Pour  $|A| > 1$ , ce qui correspond à un tourbillon suffisamment puissant, il existe des trajectoires fermées autour du cylindre.

### Efforts sur le cylindre

Calculer la résultante des efforts agissant sur le cylindre fixe.

Ce résultat résout-il le paradoxe de D'Alembert ?

Quel effet remarquable émerge de ce résultat ?

En connaissez-vous des applications pratiques ?

Le premier théorème de Bernoulli indique que  $p/\rho + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}/2 = Cste$  le long des lignes de courant. Cette constante est la même pour les trajectoires ouvertes mais est différente pour chaque trajectoire fermée autour du cylindre, comme il en existe dans le cas  $A > 1$ , car le milieu fluide considéré n'est

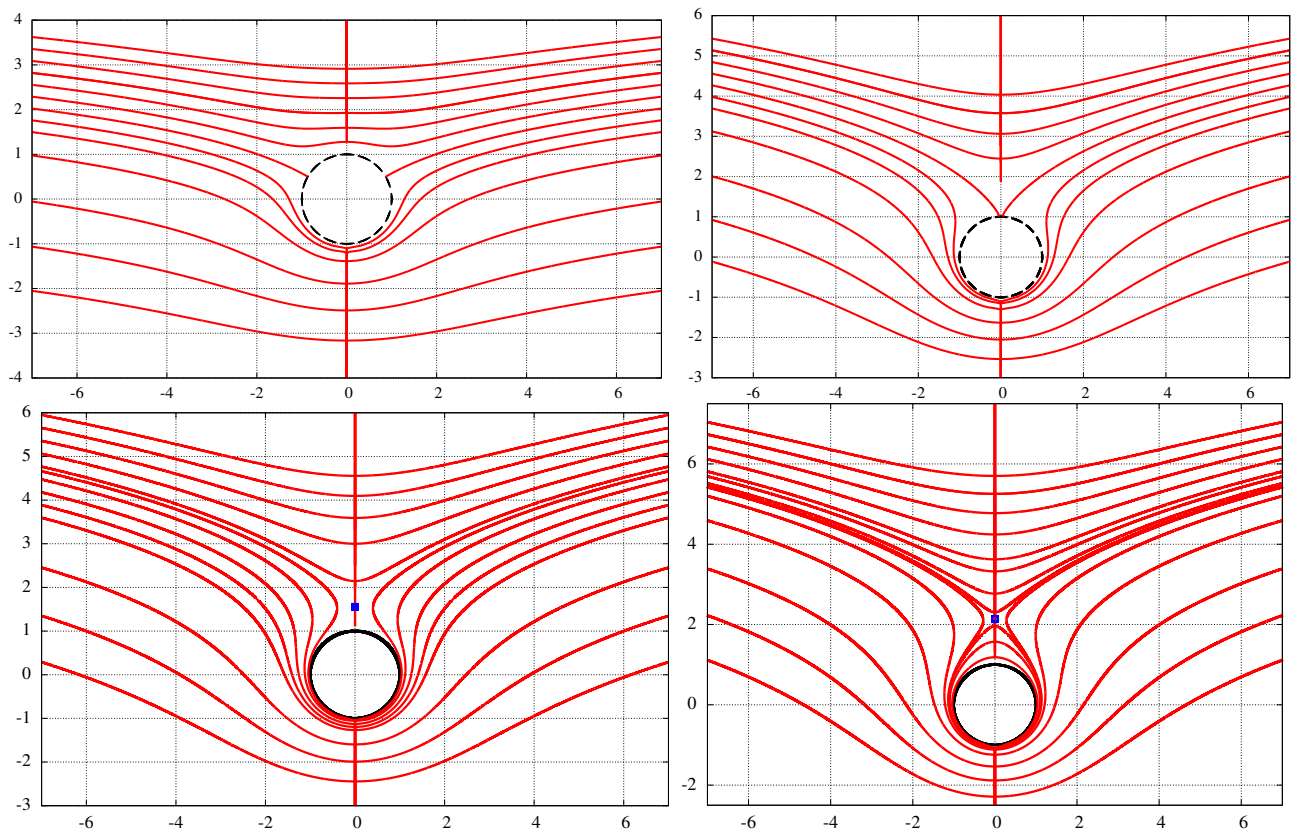


FIGURE 5.9 – Lignes de courant d'un écoulement autour d'un cylindre avec circulation en fonction de la valeur du paramètre  $A = \Gamma/2\pi RV_0$ . De gauche à droite et de haut en bas :  $A = 0.5$ ,  $A = 0.9$ ,  $A = 1.1$ ,  $A = 1.3$ . Le cylindre central est en trait épais noir. Les lignes verticales sur l'axe  $y$  sont un artefact de la simulation. Le point d'arrêt pour  $A > 1$  est marqué par un carré.

pas simplement connexe. On calcule les composantes du vecteur vitesse sur le bord du cylindre  $r = R$  et sa norme au carré :

$$u(r = R) = V_0(1 - \cos(2\theta) - 2A \sin \theta), \quad v(r = R) = V_0(-\sin(2\theta) + 2A \cos \theta)$$

$$\frac{u^2 + v^2}{V_0^2} = 4(A - \sin \theta)^2$$

La résultante des efforts sur le cylindre de hauteur  $h$  se calcule grâce au champ de pression issu du théorème de Bernoulli :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{R}} &= -h \int_{r=R} p R \underline{\mathbf{n}} \, d\theta = -Rh \int_{r=R} (Cste - \frac{\rho}{2} \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{v}}) \underline{\mathbf{n}} \, d\theta \\ &= -\rho 2RV_0^2 h \int_{r=R} (A - \sin \theta)^2 (\cos \theta \underline{\mathbf{e}}_1 + \sin \theta \underline{\mathbf{e}}_2) d\theta \end{aligned}$$

car la contribution constante a une résultante nulle. En développant l'expression précédente, on voit que seule la composante selon  $y$  subsiste :

$$\underline{\mathbf{R}} = -4\rho ARV_0^2 h \int_{r=R} \sin^2 \theta \, d\theta \underline{\mathbf{e}}_2$$

Finalement

$$\underline{\mathbf{R}} = -\rho V_0 \Gamma h \underline{\mathbf{e}}_2$$

La résultante est donc non nulle en présence d'une circulation  $\Gamma$ . Le paradoxe de D'Alembert subsiste car cette résultante n'a pas la composante horizontale attendue. Noter qu'un tourbillon seul ( $V_0 = 0$ ) ne suffit pas à engendrer cette force. La résultante est dirigée vers le bas lorsque  $V_0\Gamma > 0$ , car les vitesses sont plus grandes en-dessous qu'au-dessus du cylindre, la pression est donc plus forte au-dessus. C'est l'effet Magnus<sup>8</sup>. Il explique les effets des balles liftées au tennis ou au football. L'utilisation de l'effet Magnus a été proposée pour mettre au point des systèmes de propulsion composés de gros cylindres verticaux en rotation capables de produire une poussée longitudinale lorsque le vent est sur le côté. L'océanographe Jacques-Yves Cousteau fit construire l'Alcyone au début des années 1980. Les deux cylindres (non tournants, il s'agit plutôt d'une voile) de sa turbovoile, fournissaient environ 25 à 30% de l'énergie propulsive qui venait assister la propulsion par hélice. C'est également le principe élémentaire expliquant la **portance** agissant sur une aile d'avion même si l'étude de cette portance pour une géométrie réaliste d'aile est un autre sujet copieux à traiter.

### 5.5.2 Ecoulement autour d'un cylindre avec tourbillons libres

Dans cette partie, on peuple l'écoulement autour du cylindre de tourbillons pour essayer de gagner en réalisme par rapport à l'écoulement réel.

#### Préliminaire : méthode des images

Soit  $z_0$  un point non nul du plan complexe, on lui associe le nombre complexe  $z_1$ , défini comme son image par rapport au cercle  $\mathcal{C}(O, R)$  de centre  $O$  et de rayon  $R$  :

$$z_1 = \frac{R^2}{\bar{z}_0} \quad (5.41)$$

Le point  $z_1$  a le même argument que  $z_0$  et son module est  $R^2/|z_0|$ . Son interprétation géométrique est la suivante : c'est l'unique point  $M_1$  du plan tel que  $MM_0/MM_1 = |z_0|/R$ ,  $\forall M \in \mathcal{C}(O, R)$ . C'est également l'unique point  $M_1$  tel que  $OM_0 \times OM_1 = R^2$ .

**Théorème 15 (Cercle de Milne–Thomson)** Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe, on définit son image par rapport au cercle  $\mathcal{C}(O, R)$  par la fonction<sup>9</sup>

$$g(z) = f(z) + \overline{f(R^2/\bar{z})} \quad (5.42)$$

Le cercle  $\mathcal{C}(O, R)$  est une ligne de courant de l'écoulement associé à  $g(z)$ .

**Preuve.** Si  $z \in \mathcal{C}(O, R)$ ,  $z\bar{z} = R^2$  et  $g(z) = f(z) + \overline{f(\bar{z})}$  est réel. Par conséquent, sa partie imaginaire  $\psi(z \in \mathcal{C}(O, R)) = 0$  est constante et décrit une ligne de courant.  $\square$

Le théorème est utilisé pour construire un nouveau potentiel pour un fluide lorsqu'un cylindre est placé dans l'écoulement. C'est d'ailleurs comme cela que l'on procède pour proposer un potentiel pour l'écoulement autour d'un cylindre au repos. On part du champ uniforme  $V_0z$  et on calcule son image par rapport au cercle :

$$V_0z + V_0\frac{R^2}{\bar{z}} = V_0\left(z + \frac{R^2}{\bar{z}}\right)$$

#### Ajout d'un tourbillon non centré sur l'obstacle

Donner le potentiel complexe correspondant à un tourbillon seul centré en  $z_0$  extérieur au disque de centre  $O$  et de rayon  $R$ . Tourbillon seul veut dire que dans cette question  $V_0 = 0$ . On appellera  $a$  le module de  $z_0$ .

Donner le champ des vitesses correspondant.

8. Heinrich Gustav Magnus (1802-1870)

9. Louis Melville Milne–Thomson (1891–1974)

Montrer que ce champ ne vérifie pas les conditions de glissement du fluide parfait incompressible sur le bord du cylindre  $\mathcal{C}(O, R)$ .

Un changement d'origine sur l'expression du potentiel du tourbillon centré en  $O$  permet de répondre à la question

$$f(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(z - z_0), \quad f'(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z - z_0} = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{|z - z_0|^2} \quad (5.43)$$

Le glissement le long du cylindre se traduit par  $\underline{v} \cdot \underline{n} = 0$ . Le produit scalaire se calcule avec les nombres complexes sous la forme

$$\Re(f'(z = R \exp(i\theta)) \exp(i\theta)) = \Re\left(-\frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{|z - z_0|^2} \exp(i\theta)\right) = \Re\left(-\frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{R - \bar{z}_0 \exp(i\theta)}{|z - z_0|^2}\right) \neq 0$$

### Trois tourbillons autour d'un cylindre

Pour lever la difficulté précédente, on ajoute au tourbillon  $(\Gamma, z_0)$  son image par rapport au cercle  $\mathcal{C}(O, R)$ . En vertu du théorème 15, l'écoulement associé à ce potentiel ainsi complété est compatible avec la présence du cylindre et la condition de bord associée.

Calculer le potentiel  $g(z)$  correspondant à cet écoulement. A nouveau, on considère ici :  $V_0 = 0$ .

En utilisant la formule de Blasius (5.44), calculer les efforts agissant sur le cylindre et sur le tourbillon  $(\Gamma, z_0)$ .

En conclure que les tourbillons ne sont pas stables et ne subsisteront pas.

Pour calculer les efforts, on utilisera le

**Théorème 16 (Formule de Blasius)** *Le torseur des efforts appliqués sur une ligne de courant fermée  $\gamma$  est caractérisé par les formules suivantes pour la force résultante et le moment résultant :*

$$R = i \frac{\rho}{2} \int_{\gamma} \left( \frac{df}{dz}(z) \right)^2 dz, \quad M = -i \frac{\rho}{2} \Re \left( \int_{\gamma} z \left( \frac{df}{dz}(z) \right)^2 dz \right) \quad (5.44)$$

où les forces et moment complexes  $R = R_1 - iR_2, M = M_3$  s'expriment en fonction des composantes du torseur. Seule la composante  $M_3$  est considérée dans le problème plan. Elle est reliée à la partie réelle de l'intégrale indiquée.

Pour une expression plus générale dans le cas de courbes non fermées et pour la preuve de ces résultats, on renvoie le lecteur aux ouvrages (Germain, 1986; Germain and Muller, 1995; Batchelor, 2000).

On fera également appel au

**Théorème 17 (Théorème des résidus)** *Soit un contour fermé  $\gamma$  et  $f_h$  une fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe  $\mathcal{D}$  et non singulière, i.e. ne possédant pas de pôle dans le domaine circonscrit par  $\gamma \subset \mathcal{D}$ , on a alors les formules de Cauchy suivantes*

$$\oint_{\gamma} \frac{f_h(z)}{z - z_i} dz = 2i\pi f_h(z_i), \quad \oint_{\gamma} \frac{f_h(z)}{(z - z_i)^{n+1}} dz = 2i\pi f_h^{(n)}(z_i) \quad (5.45)$$

où les  $z_i \in \mathcal{D}$  sont entourés par  $\gamma$  et  $f_h^{(n)}$  est la dérivée  $n$ -ième de  $f_h$  ( $n \in \mathbb{N} \geq 0$ ).

On applique la transformation (5.42) au potentiel du tourbillon  $(\Gamma, z_0)$  pour obtenir le potentiel :

$$\begin{aligned} g(z) &= -i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(z - z_0) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \log\left(\frac{R^2}{\bar{z}} - z_0\right) \\ &= -i \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \log(z - z_0) - \log\left(\frac{R^2}{\bar{z}} - z_0\right) \right) \\ &= -i \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \log(z - z_0) - \log\left(\bar{z}_0 \left(\frac{R^2}{\bar{z}_0} - z\right)/z\right) \right) \\ &= -i \frac{\Gamma}{2\pi} (\log(z - z_0) - \log(z - z_1) + \log z) + Cste \end{aligned}$$

où la constante est proportionnelle à  $\log(\bar{z}_0)$  et  $z_1 = R^2/\bar{z}_0$ . Finalement on retient le potentiel

$$g(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi} \log \frac{z(z-z_0)}{z-z_1}, \quad \text{avec} \quad z_1 = \frac{R^2}{\bar{z}_0} \quad (5.46)$$

On trouve donc trois tourbillons :  $(\Gamma, z_0)$ ,  $(-\Gamma, z_1)$  et  $(\Gamma, O)$ . On calcule la dérivée du potentiel :

$$g'(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{1}{z-z_0} - \frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z} \right) \quad (5.47)$$

Pour utiliser la formule de Blasius (5.44), il faut calculer le carré de la fonction précédente :

$$(g'(z))^2 = \left( \frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 \left( \frac{1}{(z-z_0)^2} + \frac{1}{(z-z_1)^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{(z-z_0)(z-z_1)} + \frac{2}{z(z-z_0)} - \frac{2}{z(z-z_1)} \right)$$

Calculons la résultante de la force agissant sur le tourbillon  $(\Gamma, z_0)$  en considérant un contour fermé  $\gamma_0$  entourant  $z_0$  mais pas les pôles  $O$  et  $z_1$ . L'application du théorème des résidus (5.45) montre que les termes au carré à numérateur constant ne contribuent pas à l'intégrale. Il subsiste :

$$\begin{aligned} R &= R_1 - iR_2 = -i\frac{\rho}{2} \left( \frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 \oint_{\gamma_0} \left( \frac{2}{z(z-z_0)} - \frac{2}{(z-z_0)(z-z_1)} \right) dz \\ &= -i\frac{\rho}{2} \left( \frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 2i\pi \left( \frac{2}{z_0} - \frac{2}{z_0-z_1} \right) = -\rho \frac{\Gamma^2}{2\pi} \frac{z_1}{z_0(z_0-z_1)} \end{aligned}$$

Il y donc un effort résultant qui empêchera le tourbillon de rester stationnaire. Le tourbillon  $z_0$  n'est donc pas stable et entraînera les autres dans sa chute.

Pour stabiliser le tourbillon  $z_0$ , on introduit

#### Quatre tourbillons dans l'écoulement autour du cylindre

On considère le potentiel

$$f(z) = V_0 \left( z + \frac{R^2}{z} \right) - i\frac{\Gamma}{2\pi} \log(z-z_0) + i\frac{\Gamma}{2\pi} \log(z-z_1) + i\frac{\Gamma}{2\pi} \log \frac{z-\bar{z}_0}{z-\bar{z}_1} \quad (5.48)$$

Ce potentiel correspond à l'introduction dans l'écoulement induit par  $V_0$  de deux tourbillons  $(\Gamma, z_0)$  et  $(-\Gamma, \bar{z}_0)$  situés en deux points conjugués et de circulation opposée, cf. figure 5.8(b). Afin de garantir que le bord du cercle est une ligne de courant on ajoute les deux tourbillons images en  $z_1 = R^2/\bar{z}_0$  et  $\bar{z}_1$ . A noter que les tourbillons en  $O$  issus du potentiel image (5.46) se neutralisent, ce qui explique l'absence de  $\log z$  dans le potentiel précédent.

On cherche où positionner  $z_0$  pour que ce tourbillon soit en équilibre. Il faut donc calculer l'effort exercé par le fluide sur un contour  $\gamma_0$  entourant  $z_0$  mais ne contenant pas  $z_1$ . L'utilisation de la formule de Blasius (5.44) requiert le calcul de

$$f'(z) = V_0 \left( 1 - \frac{R^2}{z^2} \right) - i\frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{1}{z-z_0} + \frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-\bar{z}_0} - \frac{1}{z-\bar{z}_1} \right) = h'(z) - i\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z-z_0}$$

où la partie  $h(z)$  du potentiel (5.48) ne contenant pas le pôle  $z_0$  a été isolée pour une utilisation plus aisée du théorème des résidus. L'étape suivante consiste à calculer

$$(f'(z))^2 = (h'(z))^2 - \left( \frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{(z-z_0)^2} - i\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{h'(z)}{z-z_0}$$

et à appliquer la formule de Blasius en utilisant le théorème des résidus :

$$\oint_{\gamma_0} (f'(z))^2 dz = -i\frac{\Gamma}{2\pi} \oint_{\gamma_0} \frac{h'(z)}{z-z_0} dz = -i\frac{\Gamma}{2\pi} \times 2i\pi h'(z_0)$$

La condition nécessaire pour que le tourbillon  $(\Gamma, z_0)$  soit en équilibre est donc que

$$h'(z_0) = V_0(1 - \frac{R^2}{z_0^2}) + i\frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{1}{z_0 - z_1} + \frac{1}{z_0 - \bar{z}_0} - \frac{1}{z_0 - \bar{z}_1} \right) = 0 \quad (5.49)$$

Cette équation fournit le lieu des points d'équilibre du tourbillon en fonction de sa circulation  $\Gamma$ . On montre de manière similaire que le tourbillon situé en  $\bar{z}_0$  est également en équilibre à la même condition. On peut enfin établir que l'effort exercé par le fluide sur le cylindre est nul dès lors que les tourbillons introduits sont en équilibre. Le calcul n'est pas reproduit ici. Le potentiel (5.48) correspond donc à une solution du problème de l'écoulement autour d'un cylindre. L'introduction des tourbillons permet de dissymétriser la forme de l'écoulement par rapport à la solution sans tourbillon, ce qui est plus réaliste d'un point de vue physique. Cependant, cette solution ne permet toujours pas de lever le paradoxe de D'Alembert...

Déterminons plus précisément le lieu des tourbillons libres en exploitant la condition (5.49). En utilisant  $z_0 = a \exp(i\theta)$  et  $z_1 = R^2 \exp(i\theta)/a$ , on peut mettre  $h'(z_0)$  sous la forme

$$\begin{aligned} h'(z_0) &= V_0(1 - \frac{R^2}{a^2} \exp(-2i\theta)) + \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{-2 \sin \theta R^2 a}{(a^2 - R^2)(z_0^2 - R^2)} + \frac{1}{2a \sin \theta} \right) \\ &= V_0(1 - \frac{R^2}{a^2} \exp(-2i\theta)) + \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{-2 \sin \theta R^2 a (a^2 \exp(-2i\theta) - R^2)}{(a^2 - R^2)|z_0^2 - R^2|^2} + \frac{1}{2a \sin \theta} \right) \end{aligned}$$

dont on extrait les parties réelle et imaginaire

$$\Re(h'(z_0)) = V_0(1 - \frac{R^2}{a^2} \cos 2\theta) + \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{-2 \sin \theta R^2 a (a^2 \cos(2\theta) - R^2)}{(a^2 - R^2)|z_0^2 - R^2|^2} + \frac{1}{a \sin \theta} \right) = 0 \quad (5.50)$$

$$\Im(h'(z_0)) = V_0 \frac{R^2}{a^2} \sin 2\theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{2R^2 a^3 \sin \theta \sin(2\theta)}{(a^2 - R^2)|z_0^2 - R^2|^2} = 0 \quad (5.51)$$

La dernière équation (5.51) fournit les solutions suivantes :

$$\sin 2\theta = 0 \quad \text{ou} \quad V_0 \frac{R^2}{a^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{2R^2 a^3 \sin \theta}{(a^2 - R^2)|z_0^2 - R^2|^2} = 0$$

La première solution conduit à  $\theta = 0, \pi$  mais alors  $z_0 = \bar{z}_0$  et les deux tourbillons confondus et opposés s'annihilent. Le cas  $\theta = \pi/2$  substitué dans (5.50) exige que

$$\frac{\Gamma}{2\pi} = -2V_0 \frac{(a^2 - R^2)(a^2 + R^2)^2}{a(a^4 - R^4 + 4a^2 R^2)}$$

Explorons alors la deuxième solution qui est telle que

$$-\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{2R^2 a^3 \sin \theta}{(a^2 - R^2)|z_0^2 - R^2|^2} = \frac{V_0 R^2}{a^2} \quad (5.52)$$

Lorsqu'on substitue cette relation dans (5.50), on obtient finalement

$$\frac{\Gamma}{4\pi} = -V_0(1 - \frac{R^4}{a^4}) \sin \theta$$

Noter que le signe de  $\Gamma$  doit être opposé à  $V_0$ .

Pour trouver l'argument  $\theta$  il faut revenir à (5.52) en notant que  $|z_0^2 - R^2|^2 = a^4 + R^4 - 2a^2 R^2 \cos 2\theta$  :

$$2 \sin \theta = 1 - \frac{R^2}{a^2} \quad (5.53)$$

L'équation polaire du lieu des points  $z_0$  est donc

$$a = \frac{R}{\sqrt{1 - 2 \sin \theta}}$$

Pour  $\theta = 0$ ,  $a = R$ , les deux tourbillons s'annihilent sur le bord du cercle. La courbe possède une asymptote en  $\pi/6$ , comme l'illustre la figure 5.10.

Si nous privilégions les positions en aval de l'obstacle, ce modèle d'écoulement avec tourbillons libres est susceptible de représenter l'allure de l'écoulement plus fidèlement qu'un modèle sans tourbillons où l'écoulement, symétrique par rapport au disque, est peu réaliste. Pour que ce modèle soit satisfaisant il faudrait néanmoins étudier la stabilité des tourbillons en équilibre qui n'est pas garantie.

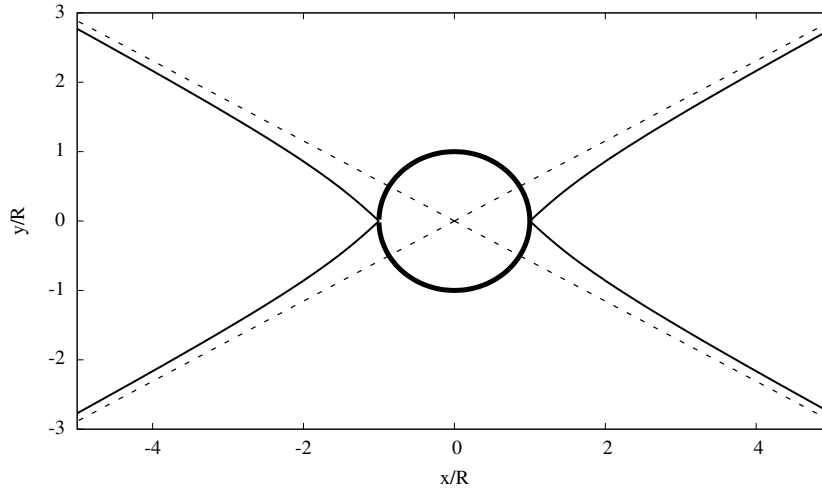


FIGURE 5.10 – Lieu des centres des tourbillons libres en aval d'un écoulement autour d'un cylindre. Le contour du cylindre est en trait épais. Les asymptotes sont également représentées en pointillés.