

Chapitre VI

Corrigés des exercices

Sommaire

VI.1 Topologie	153
VI.2 Calcul Différentiel	162
VI.3 Mesure et Intégration	175

VI.1 Topologie

Correction du I.2.1 (page 8)

Une matrice est dans \mathcal{D} si et seulement si :

1. ses éléments diagonaux sont nuls, tous les autres étant strictement positifs ;
2. elle est symétrique : $d_{ij} = d_{ji}$ pour tous $i \neq j$;
3. ses coefficient vérifient les inégalités triangulaires : pour tout triangle (i, j, k) dans X^3 , on a

$$d_{ij} \leq d_{ik} + d_{kj}.$$

L'ensemble \mathcal{D} est un cône de sommet 0 : on a $D \in \mathcal{D} \implies \lambda D \in \mathcal{D}$ pour tout $\lambda > 0$, qui ne contient pas son sommet. Ce cône est par ailleurs convexe : pour tous D_0, D_1 dans \mathcal{D} , tout $t \in [0, 1]$, on a

$$(1 - \lambda)D_0 + \lambda D_1 \in \mathcal{D}.$$

Correction du I.2.2 (page 8)

On peut considérer par exemple la distance

$$(x, y) \in]-1, 1[\longmapsto d(x, y) = |g(y) - g(x)|, \text{ avec } g(u) = \frac{u}{1 - u^2}.$$

Le caractère strictement croissant de cette fonction assure la séparation, la symétrie est immédiate, et l'inégalité triangulaire résulte de celle de la valeur absolue :

$$|g(u) - g(v)| = |g(u) - g(w) + g(w) - g(v)| \leq |g(u) - g(w)| + |g(w) - g(v)|.$$

Correction du I.2.3 (page 8)

Si A est un singleton, ou une collection finie de points, ou un intervalle de type $[a, b]$, la distance est toujours atteinte.

En revanche si l'on prend $A =]0, 1[$, la distance $d(x, A)$ n'est atteinte que pour $x \in A$.

Correction du I.2.4 (page 8)

La connaissance de la fonction distance à A dit beaucoup de chose sur A , mais ne suffit pas à le déterminer, comme le suggère l'exercice précédent : les intervalles $[0, 1]$, $[0, 1[$, $]0, 1[$, $]0, 1]$ on la même "signature" en termes de fonction distance, ils sont pourtant différents. Comme on le verra, la distance permet d'identifier l'adhérence de A .

Pour $A = \mathbb{D} \subset X = \mathbb{R}$, la distance à A est identiquement nulle (on peut approcher avec une précision arbitraire un réel par un décimal). De façon plus générale, comme on le verra, la distance est nulle dès que A est *dense* dans X .

Correction du I.2.5 (page 9)

a) La séparation et la symétrie sont immédiates. Si l'on considère maintenant x, y , et z dans H_N . Si aucun des bits qui diffèrent entre x et y ne correspond à l'un de ceux qui diffèrent entre y et z , on a $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$. Si ces deux ensemble ont un ou des éléments communs, on a $d(x, z) < d(x, y) + d(y, z)$, d'où l'inégalité triangulaire.

Chaque point est seul dans sa boule de rayon $1/2$, il s'agit donc d'un espace discret.

Pour tout $x \in H_N$, le point le plus éloigné est celui obtenu en changeant tous les bits, il est donc à distance N . La diamètre est donc N , et l'on peut dire que tout point est "sur le bord de H_N ", au sens où tout point admet un élément diamétralement opposé.

2) On considère le cas $x = (0, 0, \dots, 0)$, la situation étant exactement la même si l'on part d'un autre éléments. Pour $r < 1$, la boule est réduite au centre. Pour $1 \leq r < 2$, on a tous les points qui diffèrent d'un bit, il y en a donc N . Pour $2 \leq r < 3$ on a $C_N^2 = N(N-1)/2$. De façon générale, pour $k \leq r < k+1$, le cardinal est C_N^k , et $C_N^N = 1$ pour $r \geq N$ (la sphère est constituée de l'unique point diamétralement opposé).

Correction du I.2.6 (page 9)

On a

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \implies \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|.$$

On démontre la même inégalité sur $\|x\| - \|y\|$ en intervertissant les rôles de x et y , d'où l'inégalité sur $|\|y\| - \|x\||$.

Correction du I.3.1 (page 11)

On a A_1 fermé, A_2 fermé, A_3 ni fermé ni ouvert, A_4 fermé, A_5 ni fermé ni ouvert, A_6 est ouvert, A_7 est fermé, A_8 ouvert, A_9 ni fermé ni ouvert, A_{10} fermé.

Correction du I.2.7 (page 10)

La sphère unité pour la norme infinie est le carré $[-1, 1] \times [-1, 1]$. La sphère unité pour la norme 1 est aussi un carré centré en l'origine, dont l'un des côtés est le segment $[(1, 0), (0, 1)]$ (les autres sont obtenus par rotations d'angles $\pi/2$, π , et $3\pi/2$. Pour $p = 2$, on a le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. Entre 2 et ∞ , la sphère a la forme d'un carré aux coins arrondis, d'autant plus proche du carré (en restant intérieure au carré limite) que p tend vers $+\infty$. On a le même type de convergence, quand p passe de 2 à 1, vers le carré du cas $p = 1$ (par

l'extérieur).

Correction du I.3.2 (page 11)

L'intersection des intervalles $] -1/n, 1/n[$ est le singleton $\{0\}$, qui n'est pas ouvert car il ne contient aucune boule ouverte de centre 0.

L'union des $[1/n, 1]$ est $]0, 1]$, qui n'est pas fermé.

Correction du I.3.3 (page 12)

a) L'intérieur étant un ouvert par définition, un ensemble qui s'identifie à son intérieur est ouvert. Par ailleurs un ouvert se contient, et c'est évidemment le plus grand des ouverts qu'il contient. Le raisonnement est analogue pour les fermés.

b) Un ensemble qui s'identifie à sa frontière est un fermé (il l'est comme adhérence de quelque chose), d'intérieur vide.

Correction du I.3.4 (page 12)

a) $\bar{A} = A$, $\mathring{A} = \emptyset$, $\partial A = A$.

b) $\bar{A} = \overline{B}(0, 1)$, $\mathring{A} = A$, $\partial A = S(0, 1)$.

c) $\bar{A} = A$, $\mathring{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$, $\partial A = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$.

d) $\bar{A} = A \cup \{0\}$, $\mathring{A} = \emptyset$, $\partial A = \bar{A}$.

e) $\bar{A} = A \cup \{0\} \times [-1, 1]$, $\mathring{A} = \emptyset$, $\partial A = \bar{A}$.

Correction du I.3.5 (page 13)

Toute boule $B(q, \varepsilon)$ contient un non rationnel (par exemple $q + \varepsilon\pi/4$), \mathbb{Q} est donc d'intérieur vide. Comme \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , son adhérence est \mathbb{R} tout entier, et sa frontière aussi. Pour un tel ensemble, la frontière est infinie non dénombrable, alors que l'ensemble lui-même est dénombrable.

Correction du I.3.6 (page 15)

Le diamètre de $\overline{\mathbb{R}}$ pour cette métrique est π , et on a

$$B(0, \pi/2) =] -\infty, +\infty[, \quad B(1, \pi/2) =] -1, +\infty[,$$

Correction du I.3.7 (page 15)

On peut par exemple remplacer la fonction arctan par $x \mapsto \frac{1}{1+|x|}$.

Correction du I.5.1 (page 17)

Soient a_1, a_2, \dots, a_p les valeurs prises par la suite de Cauchy. La quantité $d(a_i, a_j)$ admet un minimum $\varepsilon > 0$ sur l'ensemble des $1 \leq i < j \leq p$. On écrit le critère de Cauchy pour cet ε particulier : il existe N tel que, pour tous p, q plus grand que N , $d(x_p, x_q) < \varepsilon$. Les termes x_p pour $p \geq N$ s'identifient donc forcément à x_N .

Correction du I.5.2 (page 17)

C'est une conséquence directe de la définition : pour tout ε , il existe N tel que, pour tous p, q plus grands que N , $d(x_p, x_q) < \varepsilon$, d'où $\text{diam}((X_N)) \leq \varepsilon$ (on prendra garde au fait que l'inégalité stricte devient large, mais ça ne remet pas en cause la convergence vers 0).

Correction du I.5.3 (page 18)

La suite $x_n = 0.1111 \dots 1100$ (décimales égales à 1 jusqu'à la n -ième) est de Cauchy, mais ne converge pas vers un décimal.

Correction du I.5.4 (page 18)

a) On peut considérer par exemple la suite $x_n = \log(n)$.

b) Les termes de la suite des $\sin(x_n)$ est dense dans $[-1, 1]$. On peut lui appliquer la fonction \tan (en supprimant par sécurité les n tels que $\sin(C_n) = \pm 1$, même si on peut penser a priori il n'y en a aucun, puisque cela signifierait que π est commensurable au \log d'un entier, *ce qui se saurait*¹), pour obtenir un ensemble dense dans \mathbb{R} .

Correction du I.6.1 (page 19)

a) \mathbb{R} n'est pas compact car de $\mathbb{R} = \cup_{\mathbb{Z}}]n-1, n+1[$ on ne peut extraire aucun recouvrement fini. Pour $]0, 1[$, on peut considérer

$$]0, 1[\subset \bigcup_{n \geq 2} \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1} \right[.$$

d'où on ne peut extraire aucun recouvrement fini.

b) Si un ensemble est fini, de cardinal N chaque point est contenu dans l'un des ouverts du recouvrement, on peut donc extraire un recouvrement par N ouverts (voire moins).

c) Soit x_n décroissante vers 0. On peut recouvrir l'ensemble de ses termes par l'union des $]x_n/2, 2x_n[$, dont on ne peut extraire aucun recouvrement fini. Si l'on rajoute 0, alors pour tout recouvrement par des ouverts il existe un recouvrement qui contient 0. Les termes de la suite qui ne sont pas dans cet ouvert sont en nombre fini, on peut donc extraire un recouvrement fini de ce sous ensemble (voir (b)).

Correction du I.6.2 (page 19)

L'application

$$T : x \in \overline{\mathbb{R}} \mapsto T(x) = \arctan(x),$$

(avec la convention $\arctan(\pm\infty) = \pm\pi/2$), est une isométrie entre $[-\pi/2, \pi/2]$ muni de la distance usuelle et \mathbb{R} . Pour toute suite x_n dans $\overline{\mathbb{R}}$, on peut extraire une sous suite telle que $y_{\varphi(n)} = T(x_{\varphi(n)})$ converge vers $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, d'où la convergence de $T^{-1}(x_{\varphi(n)})$ vers $T^{-1}(y)$.

Correction du I.6.3 (page 20)

Si l'on considère une suite de points dans l'intersection, on peut extraire une suite qui converge dans le premier compact. On extrait ensuite de cette première sous-suite une sous-suite qui converge dans le second.

Correction du I.6.4 (page 20)

On considère une suite de points du fermé. Elle est dans le compact, on peut donc extraire une sous-suite qui converge dans le compact. La limite est dans le fermé, puisqu'il est fermé.

Correction du I.6.5 (page 21)

On définit P_n le polynôme de degré n donc le k -ième coefficient vaut $\exp(-k)$, pour $0 \leq k \leq n$. La suite ainsi construite est de Cauchy, mais ne converge vers aucun polynôme.

1. On aura compris qu'il ne s'agit pas ici d'une démonstration d'une grandeur rigueur...

Correction du I.7.1 (page 22)

L'application $f : x \mapsto f(x) = \sin(x)$ est continue, mais l'image de l'ouvert \mathbb{R} (ou de l'ouvert $] -\pi, \pi[$ par f , égale à $[-1, +1]$, n'est pas ouverte.

L'application $f : x \mapsto f(x) = e^x$ est continue, mais l'image du fermé \mathbb{R} par f , égale à $]0, +\infty[$, n'est pas fermée.

On notera que cette deuxième application est injective, on pourrait penser que ça “marche dans les deux sens”, mais comme elle n'est pas surjective, sa réciproque doit être vue comme application (le logarithme) de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} , qui est aussi continue. L'image réciproque du fermé \mathbb{R} est $]0, +\infty[$, qui est bien *fermé* comme espace métrique à part entière (voir remarque I.3.4, page 11).

Correction du I.7.2 (page 23)

- a) Tout borné est d'adhérence compacte, d'où f est bornée sur l'adhérence, donc sur le borné.
- b) La fonction $x \mapsto 1/x$ est continue sur le borné $]0, 1[$ de \mathbb{R} , mais non bornée.

Correction du I.10.1 (page 26)

- a) Il suffit de considérer la suite des intervalles $]0, 1/n[$.
- b) Comme on le verra, une suite décroissante de compacts a une intersection non vide (exercice I.10.6), il est donc sans espoir de chercher un exemple avec des bornés. On pourra considérer par exemple la suite des intervalles semi-infinis $[n, +\infty[$.

Correction du I.10.2 (page 26)

1) La distance n'est nulle que si les points sont confondus, par définition. Les rôles joués par x et y dans la définition sont interchangeables, ce qui implique la symétrie. Pour l'inégalité triangulaire, considérons x , y , et z , et k_{xy} le plus petit indice pour lequel les bits de x et y diffèrent. On définit de même k_{xz} et k_{yz} . Les éléments x et y s'identifient sur les $k_{xy} - 1$ premiers bits, y et z sur les $k_{yz} - 1$, d'où x et z s'identifient par transitivité sur les $\min(k_{xy}, k_{yz}) - 1$ premiers bits, d'où l'on déduit, $k_{xz} \geq \min(k_{xy}, k_{yz})$, et l'inégalité triangulaire en appliquant la fonction décroissante $k \mapsto 2^{-k}$.

2) 3) 4) 5) 6)

Correction du I.10.3 (page 27)

Le complémentaire de l'adhérence du complémentaire de A est un ouvert comme complémentaire d'un fermé.

Montrons qu'il est contenu dans A : pour tout $x \in (\overline{A^c})^c$, on a $x \notin \overline{A^c}$ d'où $x \notin A^c$, et donc $x \in A$.

Montrons pour finir que tout ouvert contenu dans A est contenu dans $x \in (\overline{A^c})^c$. Soit U un ouvert contenu dans A . Il existe une boule $B(x, \varepsilon) \subset U \subset A$. Le point x n'est donc pas dans l'adhérence du complémentaire de A (aucune suite du complémentaire de A ne peut tendre vers x), il appartient donc à $(\overline{A^c})^c$. Cet ouvert contient donc tous les ouverts contenus dans A , c'est donc le plus grand, à savoir l'intérieur de A .

Correction du I.10.4 (page 27)

Tout point \bar{A} est limite d'une suite (x_n) de points de A (proposition I.4.6), on a donc

$$0 \leq d(x, A) \leq d(x, x_n) \rightarrow 0,$$

d'où $d(x, A) = 0$. Réciproquement, si $d(x, A) = 0$, il existe une suite minimisante (x_n) d'éléments de A telle que $d(x, x_n)$ tend vers 0, d'où $d(x, A) = 0$.

Si $x \in \overset{\circ}{A}$, il existe une boule $B(x, \varepsilon) \subset A$, la distance de x à tout point de A est donc supérieure à ε , d'où $d(x, A) \geq \varepsilon > 0$. Inversement, si $d(x, A^c) = \alpha > 0$, alors tous les points y tels que $d(x, y) < \alpha$ sont dans A , i.e. $B(x, \alpha) \subset A$.

Par définition, la frontière est l'ensemble des points de l'adhérence de A (donc tels que $d(x, A) = 0$ d'après ce qui précède), qui ne sont pas dans $\overset{\circ}{A}$ (et donc tels que $d(x, A^c) = 0$).

Correction du I.10.5 (page 27)

a) Il suffit de considérer par exemple le segment $[0, 1[\times \{0\}$. La distance est atteinte pour tout point de $\{(x, y), x < 1\}$, non atteinte pour les autres points.

b) Il suffit de prendre un ensemble non convexe, par exemple la réunion de deux singletons disjoints. En chaque point de la médiatrice, la distance est atteinte en deux points. On peut aussi avoir une distance atteinte en une infinité de points. Considérer par exemple le cercle unité. La distance est atteinte en un seul point pour tous les x non nuls, mais en tous les points de l'ensemble pour $x = (0, 0)$.

c)

d) On considère l'ensemble des stations-relais comme une famille de points du plan. Lorsque l'on passe un appel, le téléphone passe par la borne la plus proche. La zone couverte par une station données (en les supposant toutes de même puissance) est donc la *cellule* de Voronoï associée à la position de la station. Le terme de cellule provient du fait que la zone ressemble à une cellule organique (cellules de peau d'oignon par exemple).

Correction du I.10.6 (page 27)

Pour tout n on choisit x_n dans K_n . La suite (x_n) est dans K_0 compact, elle admet donc une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente vers $x \in K_0$. Pour tout n , la suite extraite est dans K_n au-delà d'un certain rang. Comme K_n est compact, il est fermé, la limite x est donc dans K_n . L'élément x appartient donc à tous les K_n .

Correction du I.10.7 (page 27)

a) L'application $y \mapsto d(x, y)$ est continue sur le compact K , elle atteint donc ses bornes, en particulier sa borne inférieure.

b) Si F est un fermé non vide, on choisit arbitrairement $y_0 \in F$. La distance de x à F est par définition inférieure ou égale à $d(x, y_0)$. Elle s'écrit donc comme infimum de $d(x, \cdot)$ sur

$$F \cap \{y, d(x, y) \leq d(x, y_0)\}.$$

Le second ensemble est fermé comme image réciproque du fermé $] -\infty, d(x, y_0)]$ par l'application $d(x, \cdot)$, c'est donc un fermé, et il est borné par définition. L'intersection ci-dessus est donc un fermé comme intersection de fermés, et borné, c'est un compact. La fonction distance atteint donc ses bornes, d'où l'on déduit que l'infimum est atteint.

Correction du I.10.8 (page 28)

Correction du I.10.9 (page 28)

On s'intéresse à la continuité de l'application

$$x \in X \longmapsto d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Pour tout $a \in A$, on a

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a).$$

En appliquant cette inégalité à une suite minimisante pour $d(y, A)$, c'est à dire une suite (a_n) dans A telle que $d(y, A) = \lim d(y, a_n)$, on obtient

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A).$$

On montre en échangeant les rôles de x et y que

$$d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A).$$

On a donc montré

$$\max(d(x, A) - d(y, A), d(y, A) - d(x, A)) = |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y),$$

qui exprime le caractère 1-lipchitzien de $d(\cdot, A)$.

Correction du I.10.10 (page 28)

On se place dans le cas où le demi-plan ne contient pas l'origine (sinon le minimiseur est 0), le mieux est de tracer la plus grosse "boule" centrée en 0, c'est à dire ici un carré donc les côtés sont orientés à $\pi/4$ et $3\pi/4$. On voit que le minimum est en général réalisé par un coin du carré (donc un point sur l'un des axes), sauf si la frontière du demi plan est alignée avec l'un des côté, auquel cas le minimum n'est pas unique, car réalisé par tous les points de l'un des côtés. Cela illustre l'intérêt de l'utilisation de rajouter cette norme ℓ^1 à certains problèmes de minimisation sous contraintes (approche de type lasso), car ce terme a tendance à diminuer le nombre de coefficients non nuls pour le minimiseurs (approche *parcimonieuse*, voir aussi exercice I.10.11).

Correction du I.10.11 (page 28)

On peut bien sûr définir la quantité $\sum |x_k|^p$ pour $p < 1$, on garde les propriétés de séparation et de symétrie, mais on perd l'inégalité triangulaire. On pourra par exemple considérer le cas $p = 1/2$, et $x = (1, 0)$, $y = (0, 1)$, on a

$$\|x\|_{1/2} = 1, \|y\|_{1/2} = 1, \|x + y\|_{1/2} = 4 > \|x\|_{1/2} + \|y\|_{1/2}.$$

Lorsque l'on fait tendre p vers 0 dans $\sum |x_k|^p$, chaque terme nul reste nul, et les termes non nuls tendent vers 1, on converge donc vers un entier positif qui est le nombre de termes non nuls parmi les composantes de x . Bien que cela sorte du cadre de la norme, il s'agit d'une quantité (on parle de *norme 0*), qui peut être très intéressante à utiliser dans un contexte d'optimisation. Si l'on cherche à minimiser une fonctionnelle par rapport à un vecteur x de \mathbb{R} , rajouter à la fonctionnelle un terme proportionnelle à $\|x\|_0$ aura tendance à minimiser cette quantité, et donc à limiter le nombre de termes non nul dans le minimum trouvé, ce qui peut être très intéressant si le problème d'optimisation consistant par exemple à approcher une fonction par une combinaison de fonctions particulières, dont les coefficients sont les x_i . On parle d'approximation *parcimonieuse* quand on cherche de la sorte à approcher quelque

chose par une combinaison de constituants élémentaires de façon en quelque sorte économique (l'approximant sera en particulier plus léger à stocker sur un ordinateur).

Correction du I.10.12 (page 29)

a) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty.$$

On réalise l'égalité à droite pour $x = (1, 1, \dots, 1)$, et l'égalité à gauche pour $x = (1, 0, \dots, 0)$.

b) La constante de l'inégalité de droite tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, ce qui suggère que les normes ne sont pas équivalentes en dimension infinies.

Correction du I.10.13 (page 29)

a) On a

$$m_p = \frac{1}{n^{1/p}} \|x\|_p = \frac{1}{n^{1/p}} \left(\sum x_k^p \right)^{1/p} \leq \frac{1}{n^{1/p}} (n \max(x_k)^p)^{1/p} = \max(x_k),$$

et de la même manière $m_p \geq \min(x_k)$. Il s'agit bien d'un nombre compris entre la valeur min et la valeur max.

On a par ailleurs, d'après l'inégalité de Hölder (proposition IV.1.31, page 131),

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n \theta_i |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n \theta_i |y_k|^q \right)^{1/q},$$

avec $1/p + 1/q = 1$. En appliquant cette inégalité à (x_k) et le vecteur constant égal à 1, on obtient

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \theta_i |x_k|^p \right)^{1/p} n^{1/q},$$

d'où

$$n^{1/q-1} \left(\sum_{k=1}^n \theta_i |x_k|^p \right)^{1/p} \geq m_1.$$

Comme $1/q - 1 = -1/p$, on en déduit $m_p \geq m_1$. Chaque élève voit donc sa moyenne augmenter par rapport au calcul classique.

b) Le fait d'utiliser une somme des notes à la puissance $p > 1$ renforce l'importance des notes élevées, d'autant plus que p est grand. La moyenne 1 habituellement utilisée favorise les élèves qui ne sacrifient aucune épreuves, alors qu'un p grand favorisera les profil plus spécialisés, qui brillent à certaines épreuves quitte à en sacrifier d'autres. Dans le cas extrême $p = +\infty$, on ne garde que la meilleure note. Dans le cas $n = 10$, un élève ayant 20 à une épreuve, 0 aux autres, aura une moyenne m_1 de 2, et une moyenne m_∞ de 20, alors qu'un élève ayant 10 à toutes les épreuves aura une moyenne m_1 de 10 (donc largement au-dessus du premier), et une moyenne m_∞ de 10 (très en-dessous du premier).

Correction du I.10.14 (page 29)

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f , pour tout $x \in K$, il existe $\eta_x > 0$ tel que, pour tout y à distance de x strictement inférieure à η_x ,

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Le compact K est recouvert par l'union des boules $B(x, \eta_x/2)$, on peut donc en extraire un recouvrement fini

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_i, \eta_i/2)$$

(en notant $\eta_i = \eta_{x_i}$). Soit maintenant x et y tels que $d(x, y) < \eta = \min(\eta_i/2)$. Le point x est dans l'une des boules $B(x_i, \eta_i/2)$, et y aussi par hypothèse, on a donc

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

Correction du I.10.15 (page 29)

a) Soit K compact. En premier lieu, f étant continue, l'image réciproque de tout fermé est fermée (proposition I.7.2, page 22), l'image réciproque du fermé K est donc fermée. Si elle n'était pas bornée, on pourrait construire une suite (x_n) de points de $f^{-1}(K)$ non bornée, dont l'image serait non bornée par hypothèse, ce qui est absurde. L'image réciproque de K est donc compacte comme fermé borné de \mathbb{R}^n .

b) Soit (x_n) une suite de \mathbb{R}^n telle que $\|x\|$ tend vers $+\infty$. Si la suite des images est bornée, alors on peut l'inclure dans un intervalle fermé (donc compact comme fermé borné), dont l'image réciproque est compacte donc bornée, alors qu'elle est censée contenir tous les x_n , ce qui est absurde.

c) On sait que $|f(x)|$ tend vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$. Il existe donc en particulier un $R > 0$ tel que, pour tout x de norme plus grande que R , $|f(x)| \geq 1$. Si f prend des valeurs à la fois positives et négatives à l'extérieur de B_R , on peut trouver deux points x et x' de norme plus grande que R tels que, par exemple, $f(x) > 0$ et $f(x') < 0$. On relie alors les deux points par un chemin continu qui évite la boule (si le segment ne convient pas, on *fait le tour*). La restriction de f à cette ligne est continue, donc prend la valeur 0 en un certain point (d'après le théorème des valeurs intermédiaires), ce qui est absurde puisque l'on doit avoir $\|f(x)\| \geq 1$ en tout point de la ligne.

La dimension 1 est d'une certaine manière pathologique, car on ne peut pas *faire le tour* de 0 pour passer d'un nombre négatif à un nombre positif. De fait, la conclusion est invalidée : l'application identité vérifie bien l'hypothèse que l'image réciproque de tout compact est compacte, et pourtant la fonction tend bien vers $+\infty$ ou $-\infty$ selon la direction que l'on prend.

d) Soit f une fonction coercive au sens du (a). Soit $x \in \mathbb{R}^n$ (par exemple 0). Par hypothèse, $f(x) > f(0)$ pour $\|x\| \geq C$. L'infimum $m \in [-\infty, +\infty[$ de f sur \mathbb{R}^n est donc l'infimum de f sur $\overline{B}(0, C)$. Comme f est continue sur le compact $\overline{B}(0, C)$, elle est bornée et atteint ses bornes, on a donc en particulier $m > -\infty$, et cet infimum est atteint.

Correction du I.10.16 (page 29)

L'application $x \mapsto f(x) = 1 - e^{-x}$ sur \mathbb{R}_+ est de dérivée positive, strictement inférieure à 1 sur $]0, +\infty[$. Pour tous $x \neq y$ dans \mathbb{R}_+ , il existe c entre x et y tel que, d'après le théorème des accroissements finis, on ait

$$|f(x) - f(y)| = f'(c) |x - y| < |x - y|.$$

On a aussi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0) = 1,$$

il ne peut donc exister aucun $\kappa \in [0, 1[$ tel que f soit κ -contractante.

Correction du I.10.17 (page 29)

L'application T^p étant contractante, elle admet un point fixe x unique : $T^p x = x$. On a donc, en composant cette identité par p , $T^p(T(x)) = T(x)$, d'où l'on tire que $T(x)$ est aussi point fixe de T^p . On a donc $T(x) = x$ par unicité du point fixe de T^p . Tout point fixe de T étant aussi point fixe de T^p , on en déduit l'unicité.

Correction du I.10.18 (page 30)

a) Pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|Ax\|^2 = \sum a_i^2 x_i^2 \leq \max(|a_i|^2) \sum x_i^2.$$

Si l'on considère maintenant le j qui réalise le max des $|a_i|$, et que l'on prend $x_j = 1$, et $x_i = 0$ pour $i \neq j$, le vecteur ainsi défini réalise l'égalité. On a donc $\|A\| = \max(|a_i|)$.

b) Toute matrice symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée (v_i) . Tout vecteur x de \mathbb{R}^n peut s'écrire

$$x = \sum x_i v_i \implies Ax = \sum x_i \lambda_i v_i,$$

et donc

$$\|Ax\|^2 = \sum |x_i|^2 |\lambda_i|^2 \leq \max(|\lambda_i|^2) \sum |x_i|^2 = \max(|\lambda_i|^2) \|x\|^2,$$

et, comme précédemment, le vecteur $x = v_j$ (où j réalise le max des $|\lambda_i|$) réalise l'égalité. La norme d'opérateur de A est donc le max des valeurs absolues des valeurs propres de A .

VI.2 Calcul Différentiel

Correction du II.1.2 (page 35)

Lorsque l'application est affine, on a directement le développement limité

$$f(x+h) = f(x) + A \cdot h.$$

La différentielle est donc l'application qui à h associe $A \cdot h$, qui se représente donc matriciellement par la matrice A .

Correction du II.1.3 (page 35)

a) On a (avec $x = (x_1, x_2)$, $h = (h_1, h_2)$)

$$\begin{aligned} F(x+h) &= F(x_1+h_1, x_2+h_2) = f(x_1+h_1, x_2+h_2)g(x_1+h_1, x_2+h_2) \\ &= (f(x)+df(x) \cdot h+o(h))(g(x)+dg(x) \cdot h+o(h)) = f(x)g(x) + \underbrace{(g(x)df(x) + f(x)dg(x))}_{dF(x)} \cdot h + o(h). \end{aligned}$$

b) On a maintenant (avec $x_{ij} = (x_i, x_j)$, $h_{ij} = (h_i, h_j)$)

$$\begin{aligned} G(x+h) &= f(x_{12}+h_{12})g(x_{34}+h_{34}) \\ &= (f(x_{12})+df(x_{12}) \cdot h_{12}+o(h_{12}))(g(x_{34})+dg(x_{34}) \cdot h_{34}+o(h_{34})) \\ &= \underbrace{f(x_{12})g(x_{34})}_{G(x)} + \underbrace{(g(x_{34})df(x_{12}) \cdot h_{12} + f(x_{12})dg(x_{34}) \cdot h_{34})}_{dG(x) \cdot h} + o(h). \end{aligned}$$

La matrice Jacobienne s'écrit par bloc de la façon suivante

$$J_G = \begin{pmatrix} g(x_{34})J_f(x_{12}) & 0 \\ 0 & f(x_{12})J_g(x_{34}) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R}),$$

où J_f et J_g sont des matrices-lignes (à deux éléments).

Correction du II.1.1 (page 35)

La fonction est identiquement nulle sur les axes de coordonnées, elle admet donc des dérivées partielles nulles sur ces axes, et en particulier en 0. La fonction n'est par contre pas continue en 0. On a par exemple

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \frac{1}{2}$$

qui n'est pas la valeur en 0. La fonction n'est donc *a fortiori* pas différentiable en 0.

Correction du II.1.4 (page 37)

a) On a

$$dF(x) = df(b + Ax) \circ A,$$

et $J_F(x) = J_f A$ (produit matrice-vecteur).

b) On a

$$J_F(x, y) = f'(x^2 + y^2)(2x \ 2y).$$

$$F(x + h_x, y + h_y) = F(x, y) + f'(x^2 + y^2)(2xh_x + 2yh_y) + o(h).$$

Correction du II.1.5 (page 37)

a) Le gradient est tel que, pour tout h ,

$$\langle \nabla F(x) | h \rangle = dF(x) \cdot h = df(b + Ax) \cdot Ah = \langle \nabla f(b + Ax) | Ah \rangle = \langle A^T \nabla f(b + Ax) | h \rangle,$$

d'où

$$\nabla F(x) = A^T \nabla f(b + Ax).$$

b) On a ici

$$\langle \nabla F(x | y), h \rangle = dF(x) \cdot h = f'(x^2 + y^2)(2xh_x + 2yh_y)$$

d'où

$$\nabla F = f'(x^2 + y^2) \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Correction du II.1.6 (page 38)

On a, pour $h \in \mathbb{R}^{3N}$,

$$E(u + h) = E(u) + \sum_{n=1}^N m_n \langle u_n | h_n \rangle + o(h),$$

d'où l'on déduit que E est différentiable, la différentielle étant l'application qui à h associe le deuxième terme du membre de droite ci-dessus. Ce terme s'écrit $\langle p | h \rangle$, avec

$$p = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^{3N}, \quad p_n = m_n u_n.$$

Le gradient de l'énergie cinétique par rapport aux vitesses est $\nabla E = p$, qui est la quantité de mouvement. Si l'on choisit de munir l'espace en vitesse du produit scalaire pondéré par les masses, le gradient est le vecteur vitesse $u \in \mathbb{R}^{3N}$.

Correction du II.1.7 (page 39)

Ce terme vient du fait que la solution du système différentiel canoniquement associé à la fonction, appelé *flot de gradient*, et qui s'écrit $\dot{x} = -\nabla f(x)$, admet comme solution particulière $x \equiv x_s$ pour tout x_s qui annule le gradient. On parle aussi de *point d'équilibre* dans le contexte des systèmes dynamiques.

Correction du II.1.8 (page 40)

On a

$$df = 2x dx + 2y dy + 2z dz - 2c^2 t dt,$$

que l'on peut aussi représenter matriciellement par $(2x \ 2y \ 2z \ -2c^2 t)$.

Correction du II.1.8 (page 40)

Cette inégalité peut être étendue immédiatement à d'autres normes sur \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m , non nécessairement construites sur le même principe, sous réserve de munir l'espace des applications linéaires entre ces deux espaces de la norme subordonnée adaptée (pour le terme $\|df(x + th)\|$ dans l'inégalité des accroissements finis).

Correction du II.4.3 (page 52)

On définit la fonction f de la façon suivante

$$(c, z) \in \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R} \mapsto f(c, z) = P_c(z) \in \mathbb{R}.$$

L'équation

$$f(c, z) = 0$$

exprime que $z \in \mathbb{R}$ est racine du polynôme P_c

On se propose d'appliquer le théorème des fonctions implicites à cette fonction, en vue d'exprimer z en fonction de x . En premier lieu on a bien $f(\tilde{c}, \tilde{z}) = 0$. La différentielle partielle $\partial_z f$ est obtenue en faisant un développement limité

$$\begin{aligned} f(c, z + h) = P_c(z + h) &= \sum_{n=0}^N c_n (z + h)^n \\ &= \sum_{n=0}^N c_n (z)^n + \sum_{n=1}^N c_n (z)^{n-1} h + o(h) \\ &= f(c, z) + P'_c(z) h + o(h). \end{aligned}$$

La dérivée partielle de f par rapport à z est donc $P'_c(z)$. Or $P'_c(\tilde{z}) \neq 0$ du fait que \tilde{z} est racine simple, et $P'_c(z)$ dépend continûment de z . La dérivée est donc non nulle dans un voisinage U de \tilde{z} , ce qui assure l'existence d'une fonction Ψ qui aux coefficient c associe une racine du polynôme. La différentielle de Ψ en c s'exprime

$$d\Psi(c) = -(\partial_z f)^{-1} \partial_c f, \text{ avec } z = \Psi(c),$$

et peut donc se représenter matriciellement par

$$\frac{1}{P'_c(z)} \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & \dots & z^N \end{bmatrix}.$$

Correction du II.2.1 (page 43)

a) On a

$$\max(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \leq \max(x_1, x_2) + \max(|h_1|, |h_2|)$$

et

$$\max(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \geq \max(x_1, x_2) - \max(|h_1|, |h_2|),$$

d'où

$$|\max(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - \max(x_1, x_2)| \leq \max(|h_1|, |h_2|) \leq \|h\|_2,$$

d'où la continuité de f .

b) Pour $a = (x_1, x_2)$ tel que $x_1 < x_2$, cette inégalité stricte reste vérifiée dans un voisinage de x , la fonction f s'identifie donc dans ce voisinage à $x \mapsto x_2$, qui est différentiable, de différentielle dx_2 . Son gradient est le vecteur $(0, 1)$. De la même manière au voisinage d'un point tel que $x_2 < x_1$, le gradient est $(1, 0)$.

c) En un point du type (x, x) , pour tout $h > 0$, on a

$$f((x + h, x)) = f(x) + h,$$

et

$$f((x - h, x)) = f(x).$$

Il n'existe donc pas de développement limité à l'ordre 1 de f en tout point du type (x, x) .

Correction du II.2.2 (page 43)

on a

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{2}(\langle Ax | h \rangle + \langle Ah | x \rangle) - \langle b | h \rangle + o(h) = f(x) + \frac{1}{2} \left(\langle (A + A^T)x - b | h \rangle \right) + o(h),$$

d'où l'on déduit que f est différentiable, de différentielle

$$h \mapsto \frac{1}{2} \left(\langle (A + A^T)x - b | h \rangle \right),$$

et donc de gradient

$$\nabla f = \frac{1}{2}(A + A^T)x - b,$$

b) Le gradient devient $Ax - b$ pour une matrice symétrique.

c) Un point est critique pour f si et seulement s'il est solution du système linéaire $Ax = b$ (pour le cas symétrique). Cette propriété est utilisée pour approcher la solution de systèmes linéaires associés à des matrices symétriques définies positives. Pour résoudre le système on cherche un minimiseur de la fonctionnelle quadratique f .

Correction du II.2.3 (page 43)

a) On développe comme dans l'exercice précédent, pour obtenir (on prend $a = 0$ pour alléger l'écriture)

$$f(x + h) = f(x) + \exp\left(-\frac{1}{2}\langle A \cdot x | x \rangle\right) \langle Ax | h \rangle + o(h),$$

d'où

$$\nabla f = \exp\left(-\frac{1}{2}\langle A \cdot x | x \rangle\right) Ax.$$

b) Le seul point critique / stationnaire de f est donc 0 (ou plus généralement a si $a \neq 0$).

Correction du II.2.4 (page 44)

a) Pour un singleton $a \in \mathbb{R}^2$ la fonction est continûment différentiable sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$.

Pour une paire de points, la fonction distance n'est pas différentiable sur la médiatrice, continûment différentiable sur son complémentaire.

Pour un cercle C de centre c , la fonction distance est différentiable sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus (\{c\} \cup C)$.

Pour un disque, la fonction est différentiable sur le complémentaire du disque fermé, différentiable à l'intérieur du disque (car constante égale à 0), non différentiable sur le cercle frontière.

Pour un rectangle la fonction est continûment différentiable sur l'extérieur du rectangle, non différentiable sur la frontière, et différentiable à l'intérieur en dehors du "squelette" du rectangle : bissectrices des angles jusqu'à leur point de croisement, et segment reliant les deux points de croisement (en forme d'enveloppe postale).

b) L'ensemble des points de non différentiabilité est l'ensemble des points qui sont situés à équidistance de 2 centre urbains. Il s'agit de points qui ont une distance importante à la réunion des centres par rapport à la moyenne, on trouvera en particulier parmi ces points le point le plus "isolé" (le point le plus éloigné de toute ville). Il s'agit aussi de points pour lesquels on aura typiquement le choix entre deux hopitaux de centre ville, plus généralement pour tout service restreints aux grandes agglomérations.

Correction du II.2.5 (page 44)

a) La plupart des points critiques visibles correspondent à des maxima locaux (sommets ou pointes locales). La plupart des minima locaux semblent "cachés" par les zones bleues représentant des lacs. On peut aussi identifier quelques points-cols (minimum dans une direction, maximum dans une autre), en particulier si l'on trace le chemin que l'on emprunterait pour relier deux maxima locaux en se descendant le moins possible possible (comme dans la zone en bas à gauche de l'image, au nord-est de l'indication '...morens'), on passe par un minimum local qui est un point col.

Les minima locaux, maxima locaux, et points-cols peuvent être approché par des fonctions de types respectifs

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad f(x, y) = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

respectivement.

b) Pour qu'il y ait un lac il faut qu'il y ait un minimum local de l'altitude. Le contour du lac correspond à une isovaleur de l'altitude, qui doit être une courbe fermée (qui boucle sur elle-même) associée à une valeur supérieure au minimum, qui délimite une zone qui contient ce minimum. Pour un lac sans île, les valeurs d'altitude prises dans la zone sont inférieures à la valeur du contour.

c) Pour chaque point x_0 de la zone, on peut considérer l'équation différentielle (appelée flot de gradient) $dx/dt = -\nabla f$, qui suit la trajectoire selon la ligne de plus grande pente. Les x_0 tels que cette trajectoire arrive à un lac constituent le bassin d'attraction de ce lac. En tout généralité, ce bassin peut prendre des formes complexes, qui peuvent en particulier contenir des "trous", on pourrait par exemple imaginer une petite colline entourée d'un lac (que l'on peut voir comme une île sur ce lac), qui contiendrait elle-même un petit lac sur-élevé par rapport au lac périphérique. Il n'y en a pas sur la carte proposée, mais on trouve ce type de bizarrerie en Finlande par exemple (on trouve même une île sur un lac qui contient elle-même un lac, qui contient lui-même une île).

d) Le nombre de lac peut varier en fonction de la pluviométrie. Le nombre maximal de lacs possibles est le nombre de minima locaux, au voisinage desquels émerge un lac en cas de première pluie sur un paysage sec. Mais le nombre de lac peut diminuer alors que leur taille augmente. Le grand lac allongé *estany de Lanòs*, sur la carte, est par exemple susceptible de contenir plusieurs minima locaux, qui constitueront autant de lacs en cas de sécheresse.

Correction du II.2.6 (page 45)

a) On peut écrire

$$u(x+h) = u(x) + du(x) \cdot h + o(h) = u(x) + J(x) \cdot h + o(h) = u(x) + \frac{1}{2}(J - J^T) \cdot h + \frac{1}{2}(J + J^T) \cdot h + o(h).$$

La matrice antisymétrique $J - J^T$ peut s'écrire

$$J - J^T = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

de telle sorte que le produit matrice-vecteur $J \cdot u$ corresponde au produit vectoriel $\omega \wedge u$. Les ω_i dépendent des dérivées partielles des composantes de u , on a par exemple

$$\omega_2 = \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3.$$

La matrice $D = (J + J^T)/2$ est symétrique par construction.

b) La matrice $J = J(x)$ étant symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Si l'on se place dans cette base (e_1, e_2, e_3) , la matrice s'écrit $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Considérons le développement limité ci-dessus pour $y = x + he_1$. Le premier terme signifie que la vitesse en y est à l'ordre 0 la même que celle en x . Le second terme indique une rotation instantanée de y autour de x , donc sans changement de la distance de x à y . Le troisième terme s'écrit $hD \cdot e_1 = \lambda_1 h e_1$. Si par exemple $\lambda_1 > 0$, cela signifie que le point matériel situé à l'instant considéré en y s'éloigne de x dans la direction e_1 . Il s'agit donc du terme qui modifie les distances entre les points, ce qui correspond à une déformation du milieu fluide, les deux premiers termes encodant un *mouvement rigide* instantané.

La figure VI.2.1 illustre en dimension 2 la décomposition locale du champ de vitesse en ces trois composantes : translation, rotation, et déformation

c) Si la divergence $\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3$ est nulle au point considéré, cela implique que la trace de la matrice D est nulle, donc que la somme des valeurs propres est nulle. Si elles

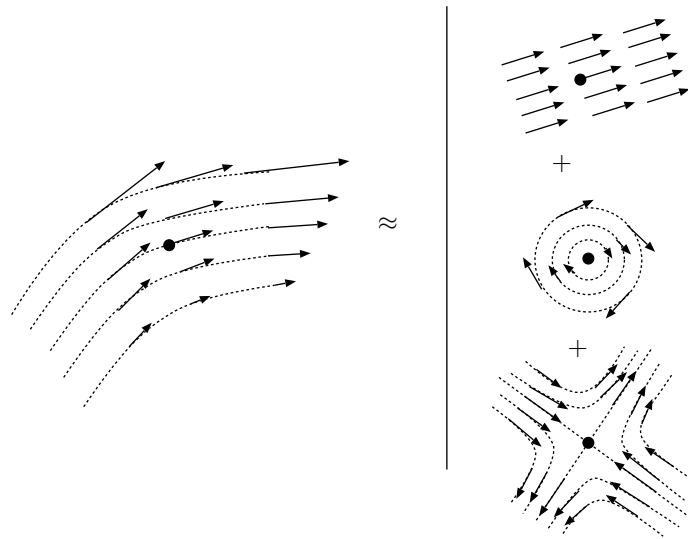


FIGURE VI.2.1 – Décomposition locale d'un champ de vitesse

sont toutes nulles, le mouvement instantané est rigide. Si ça n'est pas le cas, elle ne peuvent pas être toutes de même signe, il y en a donc au moins > 0 (étirement dans la direction correspondante), et au moins une < 0 (compression dans cette direction).

d) On peut par exemple considérer un mouvement (rigide) de rotation autour de l'axe vertical, caractérisé par le champ de vitesses

$$u = (u_1, u_2, u_3) = (-x_2, x_1, 0),$$

pour lequel on peut vérifier que la matrice D des taux de déformation est nulle.

e) Le champ suivant peut être vu comme la rencontre de deux masses de fluides qui “se rencontrent” sur le plan $x_1 = 0$ (on pourra faire un dessin dans le plan (x_1, x_2))

$$u = (u_1, u_2, u_3) = (x_1, -x_2, 0).$$

f) Si le champ dérive d'un potentiel, $u = -\nabla\Phi$ avec Φ régulier, alors les composantes du vecteur ω associé, qui sont du type $\partial_i u_j - \partial_j u_i$, sont toutes nulles.

Correction du II.2.7 (page 45)

a) La fonction D est régulière comme composée de fonctions régulières, en dehors des points qui annulent la norme, c'est-à-dire le complémentaire de la diagonale. Pour calculer son gradient, on considère $D(q_1, q_2)$ comme fonction de q_1 seulement. Si l'on se déplace de ε petit de 1 vers 2, la distance diminue de ε :

$$D(q_1 + h e_{12}, q_2) = D(q_1, q_2) - h,$$

pour h petit. Si l'on perturbe q_1 selon une direction orthogonale à e_{12} , la variation de la distance est d'ordre 2, la dérivée partielle est donc nulle. En procédant de même pour q_2 (en prenant garde au fait que si l'on se déplace de ε dans la direction e_{12} , la distance *augmente* de ε), on obtient

$$\nabla_{q_1} = -e_{12}, \quad \nabla_{q_2} = e_{12}.$$

b) Le potentiel est différentiable sur U comme composé de fonctions différentiables, et l'on a

$$\nabla_{q_1} V(q) = \varphi'(D) \nabla_{q_1} D = -\varphi'(D) e_{12},$$

et l'opposé pour $\nabla_{q_2} V(q)$.

c) Dans le cas du potentiel d'interaction gravitationnel, on obtient

$$\nabla_{q_1} V(q) = -\varphi'(D) e_{12} = -\frac{1}{D^2} e_{12},$$

et l'opposé pour ∇_{q_2} . On retrouve bien le fait que, pour la force gravitationnelle qui dérive de ce potentiel (c'est à dire que la force est l'opposé du gradient du potentiel), on a une force d'attraction mutuelle proportionnelle à l'inverse du carré de la distance.

d) L'équation s'écrit, pour chaque particule i ,

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = -\nabla_{q_i} V(q) = \sum_{j \neq i} \varphi'(D(q_i, q_j)) e_{ij}$$

e) On a

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{dq_i}{dt} \mid \frac{d^2 q_i}{dt^2} \right\rangle + \left\langle \nabla V \mid \frac{dq}{dt} \right\rangle,$$

qui s'annule du fait que $d^2 q/dt^2 = -\nabla V$.

Dans le cas du potentiel gravitationnel, qui n'est pas borné inférieurement, cela n'implique aucunement que la vitesse soit bornée². En revanche si le potentiel est minoré, comme pour le potentiel électrostatique entre deux charges identiques, la conservation de l'énergie assure que l'énergie cinétique, et donc la norme de la vitesse, sont majorées. Noter aussi symétriquement que, l'énergie cinétique étant positive, la conservation de l'énergie assure que l'énergie potentielle est majorée, et qu'ainsi les masses ne peuvent pas se rapprocher en-dessous d'un certain seuil³.

Correction du II.4.1 (page 52)

L'ensemble F est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par une application continue (car différentiable). Si l'on peut appliquer le TFI en un point (x_0, y_0) , alors il existe un voisinage ouvert W de (x_0, y_0) tel que $\partial_y f$ est inversible sur W . On peut donc appliquer le TFI au voisinage de tout $(x, y) \in F \cap W$.

Correction du II.4.2 (page 52)

a) L'ensemble des zéros de f est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon r . On peut appliquer le TFI (exprimer y fonction de x) en dehors des points situés à l'est et à l'ouest $((r, 0)$ et $(-r, 0))$. En ces points, on peut appliquer le théorème dans l'autre sens, i.e. exprimer x fonction de y .

b) L'ensemble F est une parabole d'axe l'axe des y . On peut appliquer le TFI au voisinage de tout point. Pour exprimer localement x fonction de y , il faut exclure l'origine.

2. Si la lune cessait brusquement de tourner autour de la terre, elle *tomberait* vers la terre avec une vitesse d'impact telle que l'énergie cinétique de la lune correspondrait à la variation d'énergie potentielle entre la position initiale et la configuration de contact.

3. Cette propriété permet de montrer l'existence d'une solution globale au système dynamique, qui est cantonnée à rester à une certaine distance des points de non-différentiabilité du second membre.

c) l'ensemble F est l'union de la courbe $y = x^3$ et de l'axe des x . On peut appliquer le TFI au voisinage de tout point de F en dehors de l'origine.

Correction du II.4.3 (page 52)

On définit la fonction f de la façon suivante

$$(c, z) \in \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R} \longmapsto f(c, z) = P_c(z) \in \mathbb{R}.$$

L'équation

$$f(c, z) = 0$$

exprime que $z \in \mathbb{R}$ est racine du polynôme P_c

On se propose d'appliquer le théorème des fonctions implicites à cette fonction, en vue d'exprimer z en fonction de x . En premier lieu on a bien $f(\tilde{c}, \tilde{z}) = 0$. La différentielle partielle $\partial_z f$ est obtenue en faisant un développement limité

$$\begin{aligned} f(c, z+h) = P_c(z+h) &= \sum_{n=0}^N c_n (z+h)^n \\ &= \sum_{n=0}^N c_n (z)^n + \sum_{n=1}^N c_n (z)^{n-1} h + o(h) \\ &= f(c, z) + P'_c(z)h + o(h). \end{aligned}$$

La dérivée partielle de f par rapport à z est donc $P'_c(z)$. Or $P'_c(\tilde{z}) \neq 0$ du fait que \tilde{z} est racine simple, et $P'_c(z)$ dépend continûment de z . La dérivée est donc non nulle dans un voisinage U de \tilde{z} , ce qui assure l'existence d'une fonction Ψ qui aux coefficient c associe une racine du polynôme. La différentielle de Ψ en c s'exprime

$$d\Psi(c) = -(\partial_z f)^{-1} \partial_c f, \text{ avec } z = \Psi(c),$$

et peut donc se représenter matriciellement par

$$\frac{1}{P'_c(z)} \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & \dots & z^N \end{bmatrix}.$$

Correction du II.4.4 (page 53)

On écrit, pour tout $n \leq N$, $c_n = a_n + ib_n$, avec a_n, b_n réels, ou plus globalement $c = a + ib$, avec a et b dans \mathbb{R}^{N+1} . On définit la fonction f de la façon suivante

$$(a, b, x, y) \in \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}^2 \longmapsto f(a, b, x, y) = P_{a+ib}(x+iy) \in \mathbb{R}^2$$

(on identifie le résultat complexe à un couple de réels, correspondant aux parties réelle et imaginaire). L'équation

$$f(a, b, x, y) = 0$$

exprime que $z = x + iy$ est racine du polynôme P_{a+ib}

On se propose d'appliquer le théorème des fonctions implicites à cette fonction, en vue d'exprimer (x, y) (ou $z = x + iy$) en fonction de (a, b) . En premier lieu on a bien $f(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{x}, \tilde{y}) =$

$0 \in \mathbb{R}^2$. La différentielle partielle $\partial_{x,y}f$ est obtenue en faisant un développement limité (on utilise ci-après les notations $c = a + ib$, $z = x + iy$, $h = h_x + ih_y$)

$$\begin{aligned} f(a, b, x + h_x, y + h_y) = P_c(z + h) &= \sum_{n=0}^N c_n(z + h)^n \\ &= \sum_{n=0}^N c_n(z)^n + \sum_{n=1}^N c_n(z)^{n-1} h + o(h) \\ &= f(a, b, x, y) + P'(z)h + o(h). \end{aligned}$$

Si l'on écrit $P'(z) = \alpha + i\beta$ et $h = h_x + ih_y$, la différentielle $\partial_{x,y}f$ s'écrit donc matriciellement

$$\partial_{x,y}f = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice est $\alpha^2 + \beta^2$. Une matrice de cette forme est donc inversible si et seulement si elle non nulle. Or $P'(\tilde{z}) = \tilde{\alpha} + i\tilde{\beta}$ est non nul en \tilde{z} (car la racine est supposée simple), et $P'(z)$ dépend continûment de z . La différentielle est donc inversible dans un voisinage U de \tilde{z} , ce qui assure l'existence d'une fonction Ψ qui aux coefficient c associe une racine du polynôme.

Pour représenter la différentielle, on a intérêt à reprendre la notation complexe, pour écrire

$$d\Psi(c) = P'_c(z)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & z & \dots & z^N \end{bmatrix}, \text{ avec } z = \Psi(c),$$

qui est l'application qui, à une variation des coefficients $h = (h_0, h_2, \dots, h_N)$, associe le complexe

$$P'(z)^{-1} \sum_{n=0}^N h_n z^n.$$

On peut retrouver une représentation matricielle réelle, comme application de $\mathbb{R}^{2(N+1)}$ (parties réelle et imaginaire de la variation de la collection c de coefficients) dans \mathbb{R}^2 (parties réelle et imaginaire de la racine), en introduisant explicitement les parties réelle et imaginaire de h .

Correction du II.4.5 (page 53)

a) Avec les valeurs de référence données, on trouve

$$T_0 \approx 289 \text{ K} = 16 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Cette température en en général estimée à 15 °C la différence (qui correspond à une variation relative de 0.3 % sur la valeur en Kelvin), s'explique par le fait que les valeurs de S et A sont des estimations. La valeur correspondant à un effet de serre nul est de $-18 \text{ }^\circ\text{C}$.

b) Le modèle peut s'écrire

$$f(S, A, F, T) = \sigma T^4(1 - S) - (1 - A)F = 0.$$

La fonction f est polynomiale, donc différentiable, et l'on a

$$\partial_T f = 4\sigma T^3(1 - S),$$

qui est non nul sur toute la plage $]0, +\infty[$ des températures physiques, et en particulier en T_0 . On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites qui assure l'existence d'un voisinage de T_0 sur lequel on peut exprimer T comme fonction des paramètres S , A , et F . La différentielle de cette application peut s'écrire, d'après le même théorème,

$$dT = -\frac{1}{4\sigma T^3(1-S)} \left(-\sigma T^4 dS + F dA - (1-A) dF \right).$$

On a donc en particulier

$$\frac{\partial T}{\partial S} = +\frac{T}{4(1-S)},$$

dont la valeur aux conditions de référence est 120 K (S est sans unité). La variation de S induisant une augmentation de 2 °C de la température est donc $+2/120 \approx 0.016$.

c) La variation relative de la concentration en CO_2 susceptible d'induire une variation de S de 0.016 est donc, si l'on admet que l'effet de serre dû au CO_2 est proportionnel à cette concentration,

$$\frac{\delta c}{c} = \frac{1}{0.6 \times 0.3} 0.016 \approx 0.09.$$

Pour un taux actuel de 415 ppm (parties par million), cela correspond donc à une augmentation de l'ordre de 40 ppm.

d) Le modèle s'écrit maintenant

$$g(S, T) = \sigma T^4(1-S) - (1-A_0 + \beta(T-T_0))F_0.$$

La dérivée de g par rapport à T est

$$\partial_T g = 4\sigma T^3(1-S) - \beta F_0.$$

Pour β petit, plus précisément inférieur à $4\sigma(1-S_0)$, cette dérivée est strictement positive au voisinage de S_0 , on peut donc utiliser le théorème des fonctions implicites et exprimer T fonction de S , avec une sensibilité modifiée :

$$\partial_S T = \frac{\sigma T^4}{4\sigma T^3(1-S) - \beta F_0} > \frac{T}{4(1-S)}.$$

La sensibilité de T vis-à-vis de S est donc augmentée par cet effet (on parle de boucle de rétroaction positive, ou en langage commun de *cercle vicieux*, : quand la température augmente, elle induit un renforcement d'un des facteurs qui tendent à l'augmenter).

La valeur critique est $\beta_c = 4\sigma T^3(1-S)/F_0 \approx 10^{-3} \text{ K}^{-1}$. Pour cette valeur de β , une augmentation de 10 °C diminue l'albedo de 0.01.

Lorsque β s'approche de cette valeur, $\partial_S T$ tend vers $+\infty$, et prend des valeurs négatives pour lorsque β_0 est dépassé. Le fait que les valeurs soit négative pourrait laisser penser que la situation s'est inversée : une augmentation de l'effet de serre entraînerait une *diminution* de la température. La situation est bien sûre tout autre, comme le suggère l'explosion en β_0 . En fait, nous allons vérifier que, pour $\beta \geq 0$, le point d'équilibre considéré n'en est plus un, ou plus précisément que c'est un point d'équilibre *instable*, qui n'a aucune chance d'être observé comme solution pérenne dans la réalité. Pour comprendre ce qui se passe, considérons un modèle dynamique d'évolution de la température, basée sur des hypothèses

hautelement simplificatrices. On considère que la chaleur (on exclut les autres formes d'énergie) emmagasinée par la terre à un instant donné s'écrit comme le produit d'une constante C (capacité calorifique du système terre-atmosphère) avec la température. On écrit que cette énergie évolue selon le bilan radiatif, que l'on ne suppose plus équilibré :

$$C \frac{dT}{dt} = (1 - A_0 + \beta(T - T_0)) - \sigma T^4(1 - S) = -f(T, S).$$

Pour $S = S_0$, la température T_0 est dite point d'équilibre de l'équation d'évolution, c'est à dire que $T \equiv T_0$ en est une solution triviale. Mais si l'on perturbe légèrement la température, tant que la température reste proche de T_0 , la variation u de cette température vérifie

$$C \frac{du}{dt} = C \frac{d(T_0 + u)}{dt} = -f(T_0 + u, S_0) \approx -f(T_0, S_0) - \partial_T f(T_0, S_0) u.$$

Si $\partial_T f(T_0, S_0) > 0$ (petites valeurs de β), l'évolution peut être décrite par une équation linéaire avec coefficient négatif, qui correspond à une relaxation exponentielle vers la température d'équilibre T_0 . Si $\beta > \beta_0$, on a $\partial_T f(T_0, S_0) < 0$, et l'évolution devient instable, avec une solution du type $u = u_0 \exp(\lambda t)$, $\lambda > 0$. La température a donc tendance à s'éloigner de la température d'équilibre. Noter que, dès que cette température est significativement différente de T_0 , le modèle linéaire n'a plus aucune légitimité, il faut mener une étude du modèle non linéaire pour étudier le comportement en temps long de la solution. En tout cas pour $\beta > \beta_0$, il apparaît que la température T_0 n'est pas un point d'équilibre stable, donc son étude en tant que point d'équilibre pertinent d'un système physique réel n'a pas de sens, ce qui peut expliquer le caractère paradoxal de la négativité de $\partial_S T$ dans ce régime.

Correction du II.6.1 (page 59)

Correction du II.6.2 (page 59)

a) On a

$$f(x + h) = \langle A \cdot x | x \rangle + \langle A \cdot x | h \rangle + \langle A \cdot h | x \rangle + o(h) = f(x) + \langle (A + A^T) \cdot x | h \rangle + o(h),$$

d'où $\nabla f = (A + A^T) \cdot x$, et par suite $H(x) = A + A^T$.

Cette matrice est identiquement nulle si et seulement si la matrice est anti-symétrique.

Correction du II.6.3 (page 59)

a) On fait un développement limité à l'ordre 2 (proposition II.5.7), pour obtenir

$$\frac{f(x - \varepsilon h) - 2f(x) + f(x + \varepsilon h)}{\varepsilon^2} = \langle h | H(x) \cdot h \rangle + o(1),$$

qui converge donc vers $\langle h | H(x) \cdot h \rangle$ quand ε tend vers 0.

b) On écrit l'inégalité de convexité au milieu du segment $[x - \varepsilon h, x + \varepsilon h]$ (pour ε suffisamment petit pour que le segment soit dans l'ouvert U), qui implique la positivité de la quantité $f(x - \varepsilon h) - 2f(x) + f(x + \varepsilon h)$, d'où, en faisant tend ε vers 0,

$$\langle h | H(x) \cdot h \rangle \geq 0 \quad \forall h.$$

c) La même démarche conduit à l'inégalité

$$\langle h | H(x) \cdot h \rangle \geq \lambda \|h\|^2 \quad \forall h.$$

On en déduit donc que, en tout x , la plus petite valeur propre de $H(x)$ (qui est bien réelle car H est symétrique) est minorée par λ . On retrouve bien la positivité de H pour les fonctions convexes (i.e. 0 - convexe).

d) Si $\nabla f(x) = 0$ et $\langle H(x) \cdot h | h \rangle > 0$ pour tout h non nul, le développement limité en x assure que x est un minimum local strict pour f , c'est à dire qu'il existe $\eta > 0$ tel que $f(y) > f(x)$ pour tout $y \neq x$ à distance de x inférieure à η .

e) On écrit le développement de Taylor avec reste intégral (proposition II.5.8) entre x et y :

$$f(y) = f(x) + \underbrace{\langle \nabla f(x) | y - x \rangle}_{=0} + \int_0^1 \underbrace{\langle H(x + t(y-x)) \cdot (y-x) | y-x \rangle}_{=0} (1-t) dt \geq f(x).$$

f) D'après le a), on a, pour tout h , $\langle h | H(x) \cdot h \rangle \geq 0$ pour tout h

Correction du II.6.4 (page 60)

On a $\|\nabla f\|^2/2 \equiv 1$, d'où, pour tout j

$$0 = \partial_i \left(\|\nabla f\|^2/2 \right) = \frac{1}{2} \partial_i \left(\sum_{j=1}^n (\partial_j f)^2 \right) = \sum_{j=1}^n \partial_{ij} f \partial_j f$$

qui exprime précisément que la i -ième composante de $H \cdot \nabla f$ est nulle.

Correction du II.6.5 (page 60)

On écrit le développement limité à l'ordre 2 de f en x :

$$f(x + \varepsilon e_\theta) = f(x) + \varepsilon \nabla f(x) \cdot e_\theta + \frac{\varepsilon^2}{2} \langle H \cdot e_\theta | e_\theta \rangle + o(\varepsilon^2).$$

Si l'on intègre $f(x + \varepsilon e_\theta) - f(x)$ entre 0 et 2π , le premier terme (avec le gradient), donne

$$\int_0^{2\pi} \nabla f(x) \cdot e_\theta d\theta = \nabla f(x) \cdot \int_0^{2\pi} e_\theta d\theta = 0.$$

Le terme d'ordre 2 est la somme de 4 contributions. La première s'écrit

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \partial_{11} f(x) \cos(\theta)^2 = \frac{\pi}{2} \partial_{11} f(x).$$

L'autre contribution diagonale (en $\sin(\theta)^2$), vaut de la même manière $\partial_{22} f \pi/2$. Les contributions extra-diagonales sont multiples de l'intégrale de $\sin(\theta) \cos(\theta) = \sin(2\theta)/2$, dont l'intégrale sur $[0, 2\pi[$ vaut 0. On a donc finalement

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x + \varepsilon e_\theta) - f(x)) \longrightarrow \frac{1}{4} (\partial_{11} f(x) + \partial_{22} f(x)) = \frac{1}{4} \Delta f(x).$$