# Transformation de Lorentz

M. Filoche

18 mars 2018

On se place dans un système d'unités où $c = 1$ et on cherche la forme générale de la transformation pour passer d'un repère $(x, t)$ à un repère $(x', t')$ en translation uniforme par rapport au premier d'une vitesse $\beta$, en supposant une coïncidence des repères en $(x, t) = (0, 0)$. On pose donc :

$$\begin{cases} x' &= F_\beta(x, t) \\ t' &= G_\beta(x, t) \end{cases}$$

L'invariance de la distance relativiste (ici à deux dimensions d'espace-temps) impose :

$$x^2 - t^2 = x'^2 - t'^2 = F_\beta^2(x, t) - G_\beta^2(x, t)$$

d'où l'on déduit que

$$G_\beta^2(x, t) = F_\beta^2(x, t) - x^2 + t^2\,.$$

Par ailleurs, on sait que tous les points se déplaçant à la vitesse $\beta$ dans $R$ (soit $x = \beta t + x_0$) demeurent en une abscisse constante dans le repère $R'$. Ceci implique que $x'$ ne dépend pas du temps mais uniquement de $(x - \beta t)$ (et de $\beta$) :

$$F_\beta(x, t) = f_\beta(x - \beta t)$$

Il suffit donc de trouver la fonction $f_\beta$ à une seule variable. On utilise pour cela le fait qu'un référentiel galiléen par rapport à $R$ est également galiléen par rapport à $R'$. Par conséquent, un point se déplaçant à vitesse constante $\beta_1$ dans $R$ se déplacera à vitesse constante $a_\beta(\beta_1)$ dans $R'$, $a_\beta$ étant une fonction à déterminer. Ainsi, si un point suit la trajectoire $x = \beta_1 t$ dans $R$, alors sa trajectoire dans $R'$ vérifie (en utilisant la coïncidence en $(0, 0)$) :

$$a_\beta(\beta_1) = \frac{x'}{t'} = \frac{F_\beta(\beta_1 t, t)}{G_\beta(\beta_1 t, t)} = \frac{f_\beta((\beta_1 - \beta)t)}{\sqrt{f_\beta^2((\beta_1 - \beta)t) + t^2(1 - \beta_1^2)}}$$

On en déduit donc l'expression de $f_\beta$ en inversant l'équation précédente pour l'obtenir en fonction de $a_\beta$ :

$$\frac{f_\beta^2((\beta_1 - \beta)t)}{f_\beta^2((\beta_1 - \beta)t) + t^2(1 - \beta_1^2)} = a_\beta^2(\beta_1)$$

On en déduit donc :

$$f_\beta((\beta_1 - \beta)t) = \sqrt{1 - \beta_1^2}\; a_\beta(\beta_1)\; t$$

Cette égalité étant valable à tout instant $t$, la seule forme de fonction pouvant satisfaire cela est une fonction linéaire (il suffit de passer de $t$ à $\lambda t$ pour le voir). On en déduit qu'il existe une fonction $\gamma(\beta)$ telle que :

$$f_\beta(X) = \gamma(\beta)\ X \qquad \text{et donc} \qquad F_\beta(x,t) = \gamma(\beta)(x - \beta t)$$

On se sert de cette expression pour obtenir $G_\beta(x,t)$ grâce à la relation trouvée précédemment :

$$G_\beta(x,t) = \sqrt{\gamma^2(\beta)(x-\beta t)^2 + t^2 - x^2}$$

Pour $x = \beta t$, on a donc $t' = G_\beta(\beta t, t) = \sqrt{1-\beta^2}\ x$ . Or le point $x = 0$ du repère $R$ va à la vitesse $-\beta$ dans le repère $R'$. On doit donc retrouver la relation symétrique entre les horloges si l'on prend $x = 0$ dans l'équation précédente, ce qui donne :

$$G_\beta(0,t) = \sqrt{\gamma^2(\beta)\beta^2 + 1}\ t = \gamma(-\beta)\ t$$

Pour des raison de symétrie, $\gamma(-\beta) = \gamma(\beta)$ d'où

$$\gamma^2(\beta)\beta^2 + 1 = \gamma^2(\beta) \qquad \text{et donc} \qquad \gamma(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

En reportant cette expression dans $G_\beta$, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} G_\beta(x,t) &= \gamma(\beta)\ \sqrt{x^2 - 2\beta x t + \beta^2 t^2 + (1-\beta^2)(t^2 - x^2)} = \gamma(\beta)\ \sqrt{t^2 - 2\beta x t + \beta^2 x^2} \\ &= \gamma(\beta)(-\beta x + t) \end{aligned}$$

(On prend la racine positive pour retrouver $t' = t$ si $\beta = 0$). En définitive, on a donc :

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_\beta(x,t) \\ G_\beta(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\beta)(x-\beta t) \\ \gamma(\beta)(-\beta x + t \end{pmatrix} = \gamma(\beta) \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$