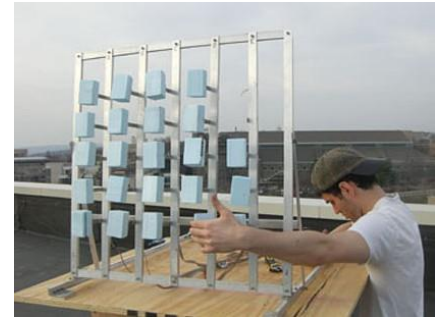


## Petite Classe 7      SYSTEME PIEZOELECTRIQUE POUR LA RECUPERATION D'ENERGIE - HARVESTING

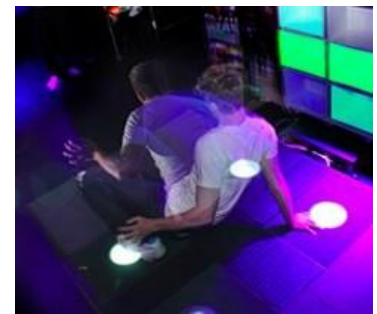
La piézoélectricité, propriété qui permet de produire de l'électricité à partir de sollicitations mécaniques, découverte dans les années 1880 par les frères Pierre et Jacques Curie, fait l'objet de nombreuses innovations, dans le contexte actuel de transition énergétique.

### Revue de presse

- « Les éoliennes exploitent aujourd'hui avec efficacité l'énergie du vent. Mais celles-ci sont plus efficaces et rentables dans les zones très exposées au vent et génèrent souvent des nuisances sonores. La piézoélectricité permet d'exploiter le vent autrement : en utilisant les vibrations. [www.piezo-electrique.com/vibro-electricite-quand-les-vibrations-du-vent-generent-de-l-electricite](http://www.piezo-electrique.com/vibro-electricite-quand-les-vibrations-du-vent-generent-de-l-electricite) Francis Moon, professeur de l'université de Cornell, a conçu avec ses étudiants un nouveau type de générateur électrique appelé "vibro-wind" qui utilise les vibrations induites par le vent pour générer de l'électricité à faible coût et sans faire de bruit. L'avantage, c'est que ce système prend beaucoup moins de place qu'une éolienne, coûte beaucoup moins cher à produire, ne fait pas de bruit et peut être installé dans de nombreux endroits. Dans les zones peu ventées comme les zones urbaines, le vibro-vent pourrait s'avérer plus rentable que les éoliennes. De quoi récupérer l'énergie du vent même en ville. Une nouvelle source d'énergie renouvelable sur laquelle il faudra compter à l'avenir... »



- « Pavegen, ces dalles qui produisent de l'électricité grâce à vos pas ! La start-up britannique fabrique des pavés connectés qui produisent de l'énergie grâce à la pression des pas exercée par les piétons et récupèrent les données. Une solution innovante pour les lieux à fort trafic comme les gares, les aéroports ou les rues commerçantes. Les pavés mesurent 9 centimètres d'épaisseur et 43 centimètres de longueur et sont fabriqués à partir de matériaux recyclés comme des pneus de camion. D'autres dispositifs permettent déjà de récupérer l'énergie. En 2016, la première route solaire de France a ainsi été installée dans l'Orne par l'entreprise Colas. Mais cette technologie est peu adaptée aux centres-villes, où les rues sont souvent à l'ombre des grands immeubles. Les pavés développés par Pavegen sont utilisables aussi bien en intérieur qu'à l'extérieur et sont extrêmement résistants aux dégradations et aux intempéries ». [www.futura-sciences.com/tech/actualites/technologie-pavegen-produit-electricite-chacun-vos-pas-63447](http://www.futura-sciences.com/tech/actualites/technologie-pavegen-produit-electricite-chacun-vos-pas-63447)



- « La start-up italienne Veranu, basée en Sardaigne, a eu la formidable idée de développer un carrelage permettant de produire de l'électricité lorsque l'on marche dessus. A l'heure où la tendance est plutôt d'optimiser le moindre de nos mouvements, cette innovation pourrait changer nos habitudes et nous inciter à nous dépenser pour produire de l'électricité (Smart Energy Floor) ». [www.quelleenergie.fr/magazine/electricite/le-carrelage-qui-produit-de-lelectricite-48214](http://www.quelleenergie.fr/magazine/electricite/le-carrelage-qui-produit-de-lelectricite-48214)

Comment optimiser cette voie, afin que se généralisent à grande échelle toutes ces innovations ?

**Objectif de la petite classe :** analyser l'aspect « Matériaux ». Il s'agira de « concevoir » un dispositif incluant un cristal piézoélectrique optimisant le couplage mécanique et électrique. L'importance de l'anisotropie de comportement sera mise en évidence à travers le choix des matériaux (constantes d'élasticité et coefficients piézoélectriques) et l'impact de leur orientation cristallographique vis-vis de la sollicitation mécanique. Dans la petite classe, seul le formalisme de la symétrie cristalline cubique sera développé car les lois constitutives couplées se simplifient grandement.

## I- DISPOSITIF ENVISAGE : MICROGENERATEURS

Le dispositif envisagé pour récupérer de l'énergie à travers l'application d'une sollicitation mécanique est composé d'un microsystème de type cantilever incluant un film mince piézoélectrique (en vert) déposé sur un substrat (en bleu) comportant une masse sismique à des fins d'amplification (schéma ci-contre n'est pas à l'échelle).

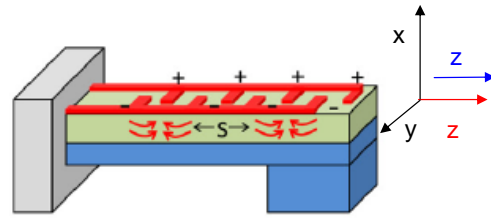


Figure 1 : microsystème pour le harvesting

L'assemblage du cristal piézoélectrique (diélectrique) avec des électrodes métalliques (conductrices, en rouge) constitue un condensateur dont la capacité  $C$  dépend de sa surface, de la distance entre les deux électrodes, et sa constante diélectrique. Lors de sa polarisation selon une tension  $V$ , le condensateur se charge et l'énergie emmagasinée est égale au travail fourni par le champ électrique pour accumuler les charges à ses bornes est :

$$\text{Energie} = 1/2 \cdot \Delta C \cdot V^2$$

## II- ORIENTATION DU CRISTAL PIEZOELECTRIQUE DANS LE REPERE DU DISPOSITIF

Le repère du cristal ( $[100], [010], [001]$ ) est noté (1,2,3), et celui du dispositif, (x,y,z). Afin d'analyser le caractère anisotrope marqué du comportement piézoélectrique, plusieurs cas seront étudiés :

- un cristal dont les axes se confondent avec le repère de la sollicitation mécanique (Piezo\_100),
- un cristal ayant la direction  $[110]$  alignée suivant l'axe x du dispositif (Piezo\_110),
- un cristal ayant la direction  $[001]$  alignée suivant l'axe x du dispositif (Piezo\_001),

Suivant qu'il soit orienté  $[100]$ ,  $[110]$  selon l'axe x, le cristal piézoélectrique possède un module d'Young très différent suivant cet axe (voir partie III, cas du système cubique). De même, les coefficients piézoélectriques sont également différents suivant les directions cristallines.

**Ces orientations seront donc exploitées dans la conception du système : Piezo\_100 et Piezo\_110 dans le cas d'un cristal cubique ainsi que Piezo\_100 et Piezo\_001 pour un cristal quadratique.**

a) Pour le dispositif envisagé, **dessiner (à l'aide des repères donnés ci-dessous) le cristal (assimilé à un cube), en perspective**. Les arêtes du cube seront en trait plein au dessus du plan (yz) et en tiret au dessous du plan (yz) (en tiret également, ce qui est derrière). **NB** : aligner [001] du cristal avec l'axe z.

La direction **y** (à déterminer donc) sera utile pour déduire la matrice de passage entre les deux repères.

**Donner les orientation (HKL)[UVW] des deux cristaux dessinés.**

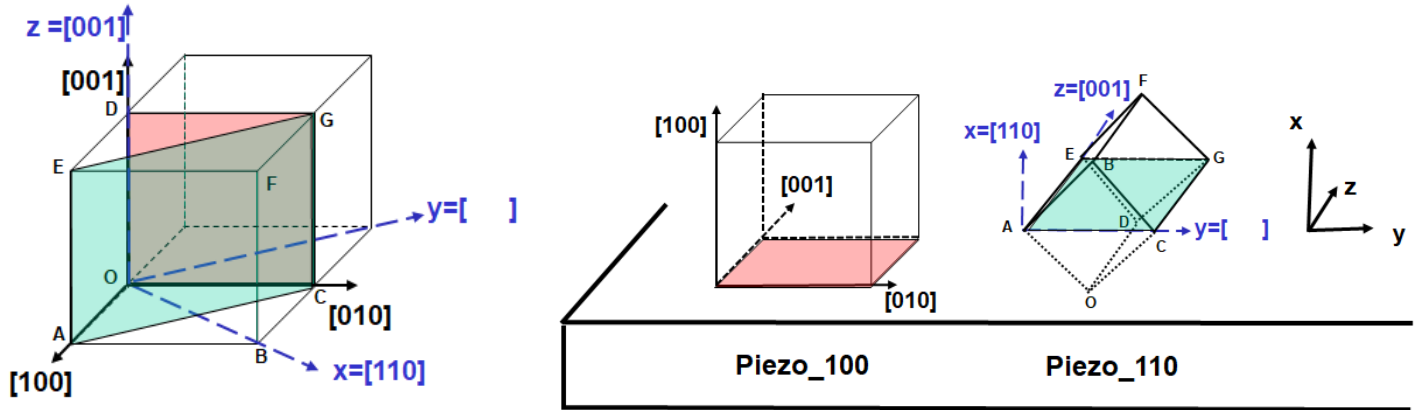


Figure 2 : **Orientations (100)[010] pour Piezo\_100, et (110)[110] pour Piezo\_110**

b) **Remplissez** la matrice de passage  $A_{mn}$  du repère (x,y,z) correspondant au cantilever vers le repère du cristal ([100],[010],[001]) qui sera noté (1,2,3), avec  $x=[110]$ ,  $y=[\bar{1}10]$  et  $z=[001]$ .

$A_{mn}$	$x=[110]$	$y=[\bar{1}10]$	$z=[001]$
1=[100]	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0
2=[010]	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	0
3=[001]	0	0	1

c) Pour le cristal du système quadratique, ci-dessous, la matrice de passage  $A_{mn}$  du repère (x,y,z) vers le repère du cristal ([100],[010],[001]) avec  $x=[001]$ ,  $y=[100]$  et  $z=[010]$ .

$A_{mn}$	$x=[001]$	$y=[100]$	$z=[010]$
1=[100]	0	1	0
2=[010]	0	0	1
3=[001]	1	0	0

### III- ANISOTROPIE ELASTIQUE

La loi de Hooke du cristal de symétrie cubique relie les contraintes et les déformations en considérant soit le tenseur de rigidité élastique  $C_{ijkl}$  ou tenseur de souplesse  $S_{ijkl}$  :  $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$  ou  $\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}$

Du fait des symétries, il est commode d'adopter la notation de Voigt qui « transforme » une matrice 3x3 en un vecteur 1x6, et donc la matrice 3x3x3x3 en une matrice 6x6 :

$$11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \text{ et } 32 \rightarrow 4, 13 \text{ et } 31 \rightarrow 5, 12 \text{ et } 21 \rightarrow 6$$

La loi de Hooke s'écrit alors :  $\sigma_I = C_{IJ}\varepsilon_J$  ou  $\varepsilon_I = S_{IJ}\sigma_J$ , avec  $C_{IJ} = C_{JI}$

Les constantes de rigidité, ou plutôt de souplesse (pour cet exercice) du cristal de symétrie cubique,  $S_{11}$ ,  $S_{12}$  et  $S_{44}$ , sont données dans le tenseur suivant, exprimé dans le repère du cristal :

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1 + S_{12}\sigma_2 + S_{12}\sigma_3 \\ \varepsilon_2 &= S_{12}\sigma_1 + S_{11}\sigma_2 + S_{12}\sigma_3 \\ \varepsilon_3 &= S_{12}\sigma_1 + S_{12}\sigma_2 + S_{11}\sigma_3 \\ \gamma_4 &= 2 \cdot \varepsilon_4 = S_{44} \cdot \sigma_4 \\ \gamma_5 &= 2 \cdot \varepsilon_5 = S_{44} \cdot \sigma_5 \\ \gamma_6 &= 2 \cdot \varepsilon_6 = S_{44} \cdot \sigma_6 \end{aligned}$$

A l'aide de changements de repères, l'expression du module de Young en fonction de la direction [uvw] est déduite dans le système cubique<sup>1</sup> :

$$\frac{1}{E_{[uvw]}} = S_{11} + (2 \cdot S_{12} - 2 \cdot S_{11} + S_{44}) \cdot \frac{(v^2 w^2 + u^2 w^2 + u^2 v^2)}{(u^2 + v^2 + w^2)^2}$$

#### 1) Donner les valeurs extrêmes

**Pour le terme ne contenant que u, v et w, zéro (pour  $E_{[100]}$ ) et un tiers (pour  $E_{[111]}$ )**

$$1/E_{[100]} = S_{11} \quad \text{ou} \quad E_{[100]} = 1/S_{11}$$

$$1/E_{[111]} = S_{11} + 1/3 (2 \cdot S_{12} - 2 \cdot S_{11} + S_{44}) \quad \text{ou} \quad E_{[111]} = 3/[S_{11} + 2 \cdot S_{12} + S_{44}]$$

#### 2) Exprimer le rapport $A = E_{[111]} / E_{[100]}$ en fonction de $S_{11}$ , $S_{12}$ et $S_{44}$

$$E_{[111]}/E_{[100]} = 3 \cdot S_{11}/(S_{11} + 2 \cdot S_{12} + S_{44})$$

#### 3) Compléter et commenter le tableau suivant

Matériau	Structure cristalline	$S_{11}$ ( $10^{-3}$ GPa $^{-1}$ )	$S_{12}$ ( $10^{-3}$ GPa $^{-1}$ )	$S_{44}$ ( $10^{-3}$ GPa $^{-1}$ )	$E_{[100]}$ (GPa)	$E_{[110]}$ (GPa)	$E_{[111]}$ (GPa)	$E_{[111]}/E_{[100]}$
W	CC	2,45	-0,69	6,22	<b>408</b>	<b>411</b>	<b>412</b>	<b>1,01</b>
Cu	CFC	15,25	-6,39	13,23	<b>66</b>	<b>129</b>	<b>191</b>	<b>2,91</b>
Fe	CC	7,56	-2,78	8,59	<b>132</b>	<b>220</b>	<b>283</b>	<b>2,14</b>
Al	CFC	15,82	-5,73	35,34	<b>63</b>	<b>72</b>	<b>76</b>	<b>1,20</b>
Cr	CC	3,10	-0,46	10,10	<b>323</b>	<b>260</b>	<b>244</b>	<b>0,76</b>
Nb	CC	6,5	-2,23	35,44	<b>154</b>	<b>91</b>	<b>80</b>	<b>0,52</b>

**Cu plus anisotrope que.... Al faiblement anisotrope, W "isotrope", et aussi très forte valeur de E**

**Différence entre CC et CFC, car  $E_{[111]}/E_{[100]}$  s'inverse (sauf fer...)**

**Notion de seuil : par exemple, à déformation imposée, quelle orientation, quel cristal va atteindre une valeur critique en contrainte plus ou moins rapidement ( $\sigma = E \cdot \varepsilon$ ) ?**

<sup>1</sup> Pour le système hexagonal, l'expression est :  $1/E_{[uvw]} = (1 - \gamma^2)S_{11} + \gamma^4 S_{33} + \gamma^2(1 - \gamma^2)(2 \cdot S_{13} + S_{44})$

avec  $\gamma = w/\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$  (w correspondant à l'axe de l'hexagone),  $1/E_{[100]} = S_{11}$  et  $1/E_{[001]} = S_{33}$

#### IV- PIEZOELECTRICITE

##### 1) Lois constitutives du couplage mécanique-électrique

Les deux effets (direct et indirect) piézoélectriques sont décrits par un couple d'équations (I) et (II) constitutives reliant les grandeurs mécaniques  $\sigma$  (le tenseur de contrainte),  $\varepsilon$  (le tenseur des déformations),  $C$  (le tenseur de rigidité), aux grandeurs électriques  $E$  (le champ électrique),  $D$  (le champ déplacement électrique ou induction électrique),  $e$  (tenseur piézoélectrique qui traduit la proportionnalité entre la déformation et le déplacement des charges électriques) et  $\kappa$  (tenseur des permittivités ou constantes diélectriques).

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} - e_{kij} \cdot E_k \quad (I)$$

avec  $e_{kij}$ , les constantes piézoélectriques de contraintes et  $E_k$ , le champ électrique.  $e_{kij}$  sont les composantes d'un tenseur de rang 3 qui ne compte que 18 composantes indépendantes. En notation Voigt,  $e_{kJ} = e_{kij}$  ( $ij \rightarrow J$ ).

$$D_i = e_{ikl} \cdot \varepsilon_{kl} + \kappa_{ik}^\varepsilon \cdot E_k \quad (II)$$

avec  $D_i$ , le déplacement électrique (ou induction) et  $\kappa_{ik}^\varepsilon$ , les constantes diélectriques (tenseur d'ordre 3).

**2) Pour la symétrie cristalline cubique**, alors que l'élasticité du monocristal est décrite par trois coefficients indépendants, le caractère piézoélectrique résulte d'un seul coefficient  $e_{kl}$  et d'un seul coefficient  $\kappa_{ik}^\varepsilon$ . Ci-dessous, les grandeurs exprimées dans le repère du cristal (repère noté (1,2,3)).

$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}$	<p>3 coefficients indépendants :</p> $C_{11} = C_{22} = C_{33}$ $C_{12} = C_{13} = C_{23}$ $C_{44} = C_{55} = C_{66}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{14} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \kappa_{11}^\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11}^\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{11}^\varepsilon \end{pmatrix}$
1 coefficient indépendant $e_{14} = e_{25} = e_{36}$	1 coefficient indépendant $\kappa_{11}^\varepsilon = \kappa_{22}^\varepsilon = \kappa_{33}^\varepsilon$

En considérant les données ci-dessus, les équations de couplage pour le système cubique sont :

$$\sigma_{11}^{(1,2,3)} = C_{11kl} \cdot \varepsilon_{kl}^{(1,2,3)} - e_{k11} \cdot E_k^{(1,2,3)} = C_{1J} \varepsilon_J - e_{k1} \cdot E_k = (C_{11} \varepsilon_1 + C_{12} \varepsilon_2 + C_{12} \varepsilon_3) - (e_{11} \cdot E_1 + e_{21} \cdot E_2 + e_{31} \cdot E_3) = (C_{11} \varepsilon_1 + C_{12} \varepsilon_2 + C_{12} \varepsilon_3) \quad (1)$$

$$\sigma_{22}^{(1,2,3)} = C_{22kl} \cdot \varepsilon_{kl}^{(1,2,3)} - e_{k22} \cdot E_k^{(1,2,3)} = C_{2J} \varepsilon_J - e_{k2} \cdot E_k = (C_{21} \varepsilon_1 + C_{22} \varepsilon_2 + C_{23} \varepsilon_3) - (e_{12} \cdot E_1 + e_{22} \cdot E_2 + e_{32} \cdot E_3) = (C_{12} \varepsilon_1 + C_{11} \varepsilon_2 + C_{12} \varepsilon_3) \quad (2)$$

$$\sigma_{33}^{(1,2,3)} = C_{33kl} \cdot \varepsilon_{kl}^{(1,2,3)} - e_{k33} \cdot E_k^{(1,2,3)} = C_{3J} \varepsilon_J - e_{k3} \cdot E_k = (C_{31} \varepsilon_1 + C_{32} \varepsilon_2 + C_{33} \varepsilon_3) - (e_{13} \cdot E_1 + e_{23} \cdot E_2 + e_{33} \cdot E_3) = (C_{12} \varepsilon_1 + C_{12} \varepsilon_2 + C_{11} \varepsilon_3) \quad (3)$$

$$\sigma_{23}^{(1,2,3)} = C_{23kl} \cdot \varepsilon_{kl}^{(1,2,3)} - e_{k23} \cdot E_k^{(1,2,3)} = C_{4J} \varepsilon_J - e_{k4} \cdot E_k = C_{44} \gamma_4 - (e_{14} \cdot E_1 + e_{24} \cdot E_2 + e_{34} \cdot E_3) = C_{44} \gamma_4 - e_{14} \cdot E_1 \quad (4)$$

$$\sigma_{13}^{(1,2,3)} = C_{13kl} \cdot \varepsilon_{kl}^{(1,2,3)} - e_{k13} \cdot E_k^{(1,2,3)} = C_{5J} \varepsilon_J - e_{k5} \cdot E_k = C_{44} \gamma_5 - (e_{15} \cdot E_1 + e_{25} \cdot E_2 + e_{35} \cdot E_3) = C_{44} \gamma_5 - e_{14} \cdot E_2 \quad (5)$$

$$\sigma_{12}^{(1,2,3)} = C_{12kl} \cdot \varepsilon_{kl}^{(1,2,3)} - e_{k12} \cdot E_k^{(1,2,3)} = C_{6J} \varepsilon_J - e_{k6} \cdot E_k = C_{44} \gamma_6 - (e_{16} \cdot E_1 + e_{26} \cdot E_2 + e_{36} \cdot E_3) = C_{44} \gamma_6 - e_{14} \cdot E_3 \quad (6)$$

$$D_1 = e_{1jk} \cdot \varepsilon_{kj} + \kappa_{1k}^\varepsilon \cdot E_k = e_{1j} \cdot \varepsilon_j + \kappa_{1k}^\varepsilon \cdot E_k = e_{14} \cdot \gamma_4 + \kappa_{11}^\varepsilon \cdot E_1 \quad (7)$$

$$D_2 = e_{2jk} \cdot \varepsilon_{kj} + \kappa_{2k}^\varepsilon \cdot E_k = e_{2j} \cdot \varepsilon_j + \kappa_{2k}^\varepsilon \cdot E_k = e_{14} \cdot \gamma_5 + \kappa_{11}^\varepsilon \cdot E_2 \quad (8) \quad (\kappa_{22}^\varepsilon = \kappa_{11}^\varepsilon)$$

$$D_3 = e_{3jk} \cdot \varepsilon_{kj} + \kappa_{3k}^\varepsilon \cdot E_k = e_{3j} \cdot \varepsilon_j + \kappa_{3k}^\varepsilon \cdot E_k = e_{14} \cdot \gamma_6 + \kappa_{11}^\varepsilon \cdot E_3 \quad (9) \quad (\kappa_{33}^\varepsilon = \kappa_{11}^\varepsilon)$$

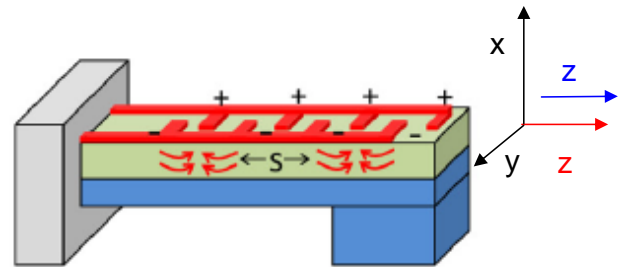
Ces équations générales allient donc les constantes d'élasticité ainsi que les coefficients piézoélectriques, pour relier contraintes, déformations, champ électrique. 9 équations pour trop d'inconnues. Il y a donc une étape, dite de réduction des conditions aux limites.

### 3) Conditions aux limites pour le micro-système cantilever, récupérateur d'énergie

L'épaisseur du **film piezoélectrique** (en vert) est mince devant le **substrat** épais et rigide (silicium, en bleu) avec masse sismique à des fins d'amplification (schéma n'est pas à l'échelle).

En rouge, les « **peignes** » (design choisi) **métalliques** pour collecter les charges.

La surface du film est libre, et du fait qu'il est très mince, il ne se développe pas, non plus de contrainte normale dans la profondeur  $\Rightarrow \sigma_{xx} = 0$



Par contre, le substrat impose sa déformation normale au film  $\Rightarrow \varepsilon_{xx}$

De plus, l'encastrement de la partie du film au niveau de l'appui (en gris) et au niveau de la masse sismique autorise à considérer une déformation nulle selon l'axe y (celui de l'encastrement)  $\Rightarrow \varepsilon_{yy} = 0$

Le film ne subit aucun cisaillement.

**A partir de tous ces éléments, précisez les tenseurs de contrainte et déformation appliqués au film.**

$$\varepsilon_{ij}^{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_{ij}^{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Selon la direction de sollicitation et la direction de polarisation résultante, il est défini deux modes, parallèle (mode 33) et perpendiculaire (mode 31), figurés ci-dessous (premier indice est pour la polarisation)

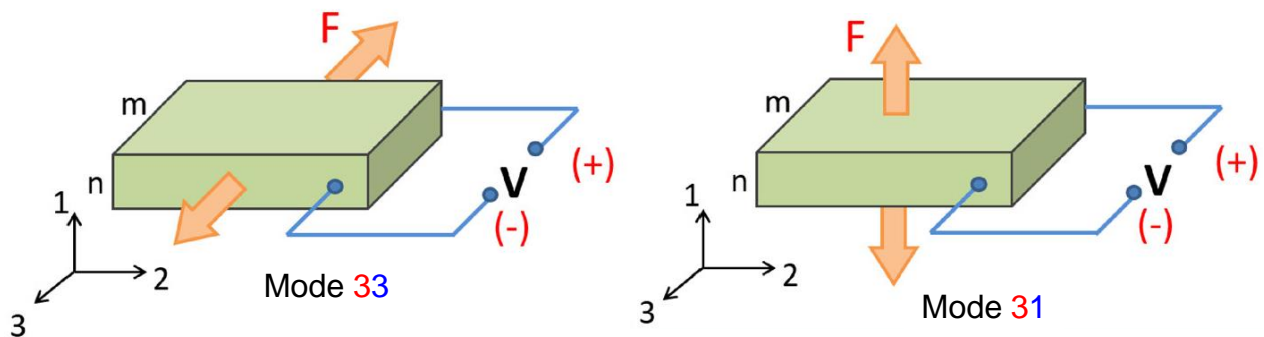


Figure 3 : Deux modes d'activation, parallèle et perpendiculaire

En mode 31, c'est l'épaisseur du film qui compte pour passer du champ électrique à la tension aux bornes du diélectrique. En mode 33, c'est la largeur du film (selon le design des contacts électrique, sous forme de peigne) qui compte.



#### 4) Cristal du système cubique en configuration Piezo\_100

Ces sollicitations mécaniques sont maintenant appliquées suivant la direction [100] car le cristal piézoélectrique a été élaboré puis assemblé dans la configuration Piezo\_100 (voir Figure IIa). Les deux repères sont confondus :

$$\varepsilon_{ij}^{(1,2,3)} = \varepsilon_{ij}^{(x,y,z)} \quad \text{et} \quad \sigma_{ij}^{(1,2,3)} = \sigma_{ij}^{(x,y,z)}$$

Au système d'équations précédent, appliquer ces conditions aux limites et conclure sur l'effet piézoélectrique lorsque le cristal est orienté [100]. Plusieurs équations sont explicitées ci-dessous, **compléter celles manquantes**.

a) Pour les équations (1), (2) et (3)

$$\sigma_{11}^{(1,2,3)} = (C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3) = C_{11}\varepsilon_{xx} = \sigma_{xx} \quad (1)$$

$$\sigma_{22}^{(1,2,3)} = (C_{12}\varepsilon_1 + C_{11}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3) = C_{12}\varepsilon_{xx} = \sigma_{yy} \quad (2)$$

$$\sigma_{33}^{(1,2,3)} = (C_{12}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{11}\varepsilon_3) = C_{12}\varepsilon_{xx} = \sigma_{zz} \quad (3)$$

b) Sachant que les composantes de cisaillement du tenseur des contraintes données par les équations (4), (5) et (6) sont nulles, que pouvez-vous conclure sur les trois composantes du champ électrique ?

**Comme, de plus,  $\gamma_4, \gamma_5$  et  $\gamma_6$  sont nuls, il vient donc :**

$$\sigma_{23}^{(1,2,3)} = C_{44}\gamma_4 - e_{14} \cdot E_1 = 0 \quad \text{soit} \quad E_1 = 0$$

$$\sigma_{13}^{(1,2,3)} = C_{44}\gamma_5 - e_{25} \cdot E_2 = 0 \quad \text{soit} \quad E_2 = 0$$

$$\sigma_{12}^{(1,2,3)} = C_{44}\gamma_6 - e_{36} \cdot E_3 = 0 \quad \text{soit} \quad E_3 = 0$$

c) Que peut-on conclure sur les trois composantes du déplacement électrique ?

**Sachant que  $E_1, E_2$  et  $E_3$  sont nuls, et que de, plus,  $\gamma_4, \gamma_5$  et  $\gamma_6$  sont nuls, les équations (7), (8) et (9) permettent de conclure sur  $D_1, D_2$  et  $D_3$ .**

$$D_1 = e_{14} \cdot \gamma_4 + \kappa_{11}^\varepsilon \cdot E_1 \quad (7)$$

$$D_2 = e_{25} \cdot \gamma_5 + \kappa_{22}^\varepsilon \cdot E_2 \quad (8)$$

$$D_3 = e_{36} \cdot \gamma_6 + \kappa_{33}^\varepsilon \cdot E_3 \quad (9)$$

**Par conséquent,  $D_1 = D_2 = D_3 = 0$**

d) Conclure sur l'effet piézoélectrique

**Nonobstant ses propriétés piézoélectriques, le couplage mécano-électrique ne se manifeste pas dans le cristal cubique sollicité dans de telles conditions aux limites, dans la configuration Piezo\_100.**

**Les équations se réduisent à celles de l'élasticité anisotrope.**

#### 5) Cristal en configuration Piezo\_110

La sollicitation mécanique est maintenant appliquée suivant la direction [110] au lieu de [100]. Un changement de repère s'impose donc de telle façon à réécrire les conditions aux limites, non pas dans le repère du dispositif mais dans celui du cristal. Cela autorisera, une fois le changement de repère effectué, à utiliser les relations données au paragraphe 2) (celles exprimées dans le repère du cristal).

La matrice de passage déduite auparavant (question IIb) est rappelée :

$A_{mn}$	x=[110]	y=[ $\bar{1}10$ ]	z=[001]
1=[100]	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0
2=[010]	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	0
3=[001]	0	0	1

$$\varphi_{ij}^{(1,2,3)} = A_{ip} \cdot A_{jq} \cdot \varphi_{pq}^{(x,y,z)}$$

a) Sachant que, seuls, les termes  $\varepsilon_{11}^{(x,y,z)} = \varepsilon_{xx}$  et  $\varepsilon_{33}^{(x,y,z)} = \varepsilon_{zz}$  sont non nuls pour nos conditions aux limites (dans le repère du dispositif), le changement de repère se simplifie considérablement puisque la sommation ne

se fait que pour  $p=q=1$  et  $p=q=3$ . Les composantes des tenseurs des déformations et des contraintes dans le repère du cristal sont données ci-dessous.

$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^{(1,2,3)} &= A_{11} \cdot A_{11} \cdot \varepsilon_{11}^{(x,y,z)} = \frac{1}{2} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{22}^{(1,2,3)} &= A_{21} \cdot A_{21} \cdot \varepsilon_{11}^{(x,y,z)} = \frac{1}{2} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{33}^{(1,2,3)} &= A_{33} \cdot A_{33} \cdot \varepsilon_{33}^{(x,y,z)} = \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{32}^{(1,2,3)} &= A_{31} \cdot A_{21} \cdot \varepsilon_{11}^{(x,y,z)} = 0 \\ \varepsilon_{31}^{(1,2,3)} &= A_{31} \cdot A_{11} \cdot \varepsilon_{11}^{(x,y,z)} = 0 \\ \varepsilon_{12}^{(1,2,3)} &= A_{11} \cdot A_{21} \cdot \varepsilon_{11}^{(x,y,z)} = \frac{1}{2} \varepsilon_{xx}\end{aligned}$	$\varepsilon_{ij}^{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \text{ donne } \varepsilon_{ij}^{(1,2,3)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \varepsilon_{xx} & 0 \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$ $\sigma_{ij}^{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \text{ donne } \sigma_{ij}^{(1,2,3)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sigma_{yy} & -\frac{1}{2} \sigma_{yy} & 0 \\ -\frac{1}{2} \sigma_{yy} & \frac{1}{2} \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$
--	---

b) Au système d'équations de couplage mécanique-électrique, appliquer ces conditions aux limites et conclure sur l'effet piézoélectrique lorsque le cristal est orienté [110]. Plusieurs équations sont explicitées ci-dessous, **compléter les celles manquantes**.

- Pour les équations (1) à (6)

$$\sigma_{11}^{(1,2,3)} = (C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3) = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12})\varepsilon_{xx} + C_{12}\varepsilon_{zz} = \frac{1}{2}\sigma_{yy} \quad (1)$$

$$\sigma_{22}^{(1,2,3)} = (C_{12}\varepsilon_1 + C_{11}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3) = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12})\varepsilon_{xx} + C_{12}\varepsilon_{zz} = \frac{1}{2}\sigma_{yy} \quad (2)$$

$$\sigma_{33}^{(1,2,3)} = (C_{12}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{11}\varepsilon_3) = C_{12}\varepsilon_{xx} + C_{11}\varepsilon_{zz} = \sigma_{zz} \quad (3)$$

Comme, de plus,  $\gamma_4$  et  $\gamma_5$  sont nuls, il vient donc :

$$\sigma_{23}^{(1,2,3)} = C_{44}\gamma_4 - e_{14} \cdot E_1 = 0 \quad (\text{et } E_1 = 0) \quad (4)$$

$$\sigma_{13}^{(1,2,3)} = C_{44}\gamma_5 - e_{25} \cdot E_2 = 0 \quad (\text{et } E_2 = 0) \quad (5)$$

Du fait que  $\gamma_6 (=2 \cdot \varepsilon_6)$  est non nul, l'équation (6) s'écrit :

$$\sigma_{12}^{(1,2,3)} = C_{44}\gamma_6 - e_{14} \cdot E_3 = -\frac{1}{2}\sigma_{yy} \quad \text{soit} \quad C_{44} \left( 2 \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_{xx} \right) - e_{14} \cdot E_3 = -\frac{1}{2}\sigma_{yy}$$

$$\text{Ce qui conduit à } E_3 = \frac{(C_{44}\varepsilon_{xx} + \frac{1}{2}\sigma_{yy})}{e_{14}}$$

**En appliquant  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$ , les équations (1) et (3) (ou (2) et (3)) donnent  $\varepsilon_{xx}$  et  $\varepsilon_{zz}$ , ce qui permet donc de déterminer  $E_3$  à partir de l'équation (6).**

**Le développement des équations aboutit donc à une polarisation  $E_3$ , c'est-à-dire suivant l'axe [001] dans le repère du cristal (l'indice 3 de  $E$  est relatif à l'indice 3 du repère cristallin, soit [001]). Dans le repère du dispositif, [001] correspond à l'axe x. C'est donc une activation perpendiculaire car l'application de la contrainte est suivant l'axe y (ou z).**

c) Conclure sur l'effet piézoélectrique

**Lorsque le cristal est sollicité, non pas suivant l'axe [100] mais selon l'axe [110], un champ électrique est créé ! Le fort caractère anisotrope des propriétés élastiques et piézoélectriques est manifeste. Pour ces conditions de sollicitation, il rend le couplage possible en imposant un mode d'activation perpendiculaire.**



## V- Choix des matériaux (BONUS)

Plusieurs matériaux (voir Tableau 1) peuvent être comparés vis-à-vis des mêmes conditions de sollicitation. Un autre système cristallin, à savoir quadratique est étudié sans que les équations ne soient développées ici, elles sont toutefois données en annexe.

Matériaux	Système	Classe	Constantes d'élasticité - Rigidités (en $10^{10}$ N/m <sup>2</sup> )								Masse volumique (en g/cm <sup>3</sup> )
			C <sub>11</sub>	C <sub>12</sub>	C <sub>13</sub>	C <sub>33</sub>	C <sub>44</sub>	C <sub>66</sub>	C <sub>16</sub>	C <sub>14</sub>	
Arsénure de gallium	Cubique	$\bar{4}3m$	11,88	5,38			5,94				5,3
Oxyde de bismuth et de titane BTO	Cubique	23	11,2	2,6			2,5				7,1
Oxyde de zinc	Hexagonal	6mm	20,97	12,11	10,51	21,09	4,25				5,7
PZT-4		Iso. transv.	13,9	7,8	7,4	11,5	2,56				7,5
Titanate de Baryum BaTiO <sub>3</sub>	Quadratique	4mm	22,2	10,8	11,1	15,1	6,1	13,4			6,0
Titanate de plomb PbTiO <sub>3</sub>	Quadratique	4mm	23,5	10,1	9,9	10,5	6,5	10,4			7,5

Matériaux	Classe	Coefficients piézoélectriques (en C/m <sup>2</sup> )				Permittivités (en $10^{-11}$ F/m)	
Système cubique		$e_{14}$				$K^e$	
Arsénure de gallium AsGa	$\bar{4}3m$	-0,16				9,73	
Oxyde BTO Bi <sub>12</sub> TiO <sub>20</sub>	23	0,99				42,4	
Système hexagonal			$e_{15}$	$e_{31}$	$e_{33}$	$K^e_{11}$	$K^e_{33}$
Oxyde de zinc ZnO	6mm		-0,59	-0,61	1,14	7,38	7,83
Céramique PZT-4	Iso. transv.		12,7	-5,2	15,1	650	560
Système quadratique		$e_{14}$	$e_{15}$	$e_{31}$	$e_{33}$	$K^e_{11}$	$K^e_{33}$
Titanate de plomb PbTiO <sub>3</sub>	4mm		4,8	-0,7	4,1	102	34
Titanate de Baryum BaTiO <sub>3</sub>	4mm		34,4	-1,03	6,18	1948	50

Tableau 1 : Constantes d'élasticité, piézoélectriques et diélectriques à 25°C, (Blakemore, 1982) (Dieulesaint & Royer, 2001) (Kalinichev & Bass, 1997) (Shen, et al., 2014) (Zgonik, et al., 1994)

Les mêmes conditions aux limites sont appliquées à des cristaux de ZnO, PbTiO<sub>3</sub> et BaTiO<sub>3</sub>. L'ensemble des développements (donné en annexe) conduit, après simplification dans un second temps, aux relations suivantes, en considérant deux configurations, Piezo\_100 et Piezo\_001 (axe c du quadratique) :

### Quadratique 4mm, Piezo\_100

$$E_3 = \frac{(C_{13}-C_{12})}{(C_{12}e_{33}-C_{13}e_{31})} \sigma_{yy} \quad \text{et} \quad D_3 = e_{31} \cdot \frac{e_{31}}{C_{11}} E_3 + \kappa_{33}^e \cdot E_3 \quad \text{Activation en mode parallèle}$$

### Quadratique 4mm, Piezo\_001

$$E_3 = \frac{C_{33}}{(C_{13}e_{33}-C_{33}e_{31})} \sigma_{yy} \quad \text{et} \quad D_3 = e_{31} \cdot \frac{e_{33}}{C_{33}} E_3 + \kappa_{33}^e \cdot E_3 \quad \text{Activation en mode perpendiculaire}$$

100 MPa est appliqué au film carré de côté 100 microns et d'épaisseur 10 microns.

L'énergie électrique récupérable pour ce type de structure est :  $E_V = \frac{1}{2} V^2 (\Delta C)$ ,  $C$  étant la capacité. Pour le calcul de cette dernière, on considérera qu'initialement, elle est n'est pas chargée.  $V$  se déduit du champ électrique  $E$  et pour déterminer la capacité  $C$ , il suffit de multiplier le déplacement électrique  $D$  (déplacement des charges) par la surface du cristal à considérer suivant le mode d'activation (voir Figure 3).

Si l'action de poser le pied sur la dalle correspond à un temps de 1 seconde, la conversion de  $E_V$  (Joule) en puissance (W) est immédiate.

La rigidité électrique est une caractéristique importante car elle définit le champ électrique de claquage, seuil à partir duquel, un arc électrique se déclenche, le condensateur devient inopérant. Les oxydes, les céramiques, les verres ont des rigidités diélectriques comprises entre  $10^6$  et  $10^8$  V/m ( $1,5 \cdot 10^8$  V/m pour l'alumine, malheureusement, non piézoélectrique,  $10^7$  V/m pour les polymères).

### a) Données chiffrées

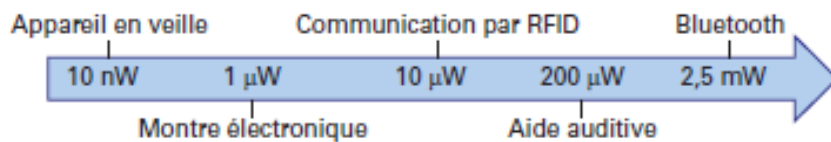
	N/m <sup>2</sup>	N/m <sup>2</sup>	N/m <sup>2</sup>	N/m <sup>2</sup>	C/m <sup>2</sup>	C/m <sup>2</sup>	F/m	N/m <sup>2</sup>	sans unité	V/m	V	C/m <sup>2</sup>	C	microW
Cristal	$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{33}$	$e_{31}$	$e_{33}$	$\kappa_{33}^e$	$\sigma_{yy}$	$\epsilon_{xx}$	$E_3$	$V_3$	$D_3$	$C_3$	P électrique
ZnO_100	2,10E+11	1,21E+11	1,05E+11	2,11E+11	-0,61	1,14	7,83E-11	1,00E+08	-4,28E-05	-7,91E+06	-791	-6,3E-04	-6,34E-13	0,198
PbTiO <sub>3</sub> _100	2,35E+11	1,01E+11	9,90E+10	1,05E+11	-0,7	4,1	3,40E-10	1,00E+08	-1,62E-05	-4,14E+05	-41	-1,4E-04	-1,42E-13	0,000
BaTiO <sub>3</sub> _100	2,22E+11	1,08E+11	1,11E+11	1,51E+11	-1,03	6,18	5,60E-10	1,00E+08	1,57E-05	3,84E+05	38	2,2E-04	2,17E-13	0,000
ZnO_001	2,10E+11	1,21E+11	1,05E+11	2,11E+11	-0,61	1,14	7,83E-11	1,00E+08	-2,47E-04	8,49E+07	849	6,4E-03	6,37E-11	22,935
PbTiO <sub>3</sub> _001	2,35E+11	1,01E+11	9,90E+10	1,05E+11	-0,7	4,1	3,40E-10	1,00E+08	-6,52E-05	2,19E+07	219	6,8E-03	6,85E-11	1,643
BaTiO <sub>3</sub> _001	2,22E+11	1,08E+11	1,11E+11	1,51E+11	-1,03	6,18	5,60E-10	1,00E+08	-8,33E-05	1,79E+07	179	9,3E-03	9,29E-11	1,496

### b) Commentaire

Attention à ne pas dépasser les champs de claquage. Pour une activation en mode perpendiculaire (piezo\_001), c'est très limite (presque  $10^8$  V/m pour ZnO !) mais la performance est meilleure. En sollicitant plus (par augmentation de la contrainte), on ne pourrait utiliser que le mode parallèle (Piezo\_100). Attention toutefois à ne pas dépasser la limite d'élasticité (quelques centaines de MPa selon la céramique).

Le choix du matériau est, sans conteste, un compromis, devant exploiter l'anisotropie et la recherche d'un couplage fort.

Plusieurs applications sont hautement compatibles avec les mW :



Recharger des batteries (même celles *in vivo*) en courant...

Ce qui est important aussi, c'est la répétition des oscillations du cantilever, ce qui permet d'accumuler dans un circuit électrique associé les charges produites. Il faut également signaler l'excellent rendement des cristaux piézoélectriques en fréquence.

### Références

- Blakemore, J. S. (1982). Semiconducting and other major properties of gallium arsenide. *Journal of Applied Physics*, 53 (10), 123-181.
- Dieulesaint, E., & Royer, D. (2001). Propagation et génération des ondes élastiques. *E3*(210).
- Kalinichev, A., & Bass, J. (1997). Elastic properties of tetragonal PbTiO<sub>3</sub> single crystals by Brillouin scattering. *J. Mater. Res.*, 12 (10), 2623-2627.
- Shen, C., Zhang, H., Zhang, Y., Xu, H., Yu, H., Wang, J., & Zhang, S. (2014). Orientation and Temperature Dependence of Piezoelectric Properties for Sillenite-Type Bi<sub>12</sub>TiO<sub>20</sub> and Bi<sub>12</sub>SiO<sub>20</sub> Single Crystals. *Crystals*, A, 141-151.
- Zgonik, M., Bernasconi, P., Duelli, M., Schlessner, R., Gunter, P., & Garrett, M. (1994). Dielectric, elastic, piezoelectric, electrooptic, and elasto-optic tensors of BaTiO<sub>3</sub> crystals. *Phys. Rev. B*, 50(9), 5941–5949.

**ANNEXE : LOIS CONSTITUTIVES POUR LE SYSTEME CRISTALLIN QUADARTIQUE (CLASSE 4mm)**

Alors que l'élasticité du monocristal est décrite par 6 coefficients indépendants, le caractère piézoélectrique résulte de trois coefficients  $e_{kl}$  et de deux coefficients  $\kappa_{ik}^\varepsilon$ .

$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}$	6 coefficients indépendants : $C_{11} = C_{22} \quad C_{33} \quad C_{31} = C_{32} \quad \text{et} \quad C_{12}$ $C_{44} = C_{55}$ $C_{66}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \kappa_{11}^\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11}^\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33}^\varepsilon \end{pmatrix}$
3 coefficients indépendants : $e_{24} = e_{15}$ $e_{31} = e_{32}$ et $e_{33}$	2 coefficients indépendants : $\kappa_{11}^\varepsilon = \kappa_{22}^\varepsilon$ et $\kappa_{33}^\varepsilon$

Equations de couplage, grandeurs exprimées dans le repère du cristal :

$$\sigma_{11}^{(1,2,3)} = C_{11kl} \cdot \varepsilon_{kl}^{(1,2,3)} - e_{k11} \cdot E_k^{(1,2,3)} = C_{1J} \varepsilon_J - e_{k1} \cdot E_k = (C_{11} \varepsilon_1 + C_{12} \varepsilon_2 + C_{13} \varepsilon_3) - (e_{11} \cdot E_1 + e_{21} \cdot E_2 + e_{31} \cdot E_3) = (C_{11} \varepsilon_1 + C_{12} \varepsilon_2 + C_{13} \varepsilon_3) - e_{31} \cdot E_3 \quad (1)$$

$$\sigma_{22}^{(1,2,3)} = C_{22kl} \cdot \varepsilon_{kl}^{(1,2,3)} - e_{k22} \cdot E_k^{(1,2,3)} = C_{2J} \varepsilon_J - e_{k2} \cdot E_k = (C_{21} \varepsilon_1 + C_{22} \varepsilon_2 + C_{23} \varepsilon_3) - (e_{12} \cdot E_1 + e_{22} \cdot E_2 + e_{32} \cdot E_3) = (C_{12} \varepsilon_1 + C_{11} \varepsilon_2 + C_{13} \varepsilon_3) - e_{31} \cdot E_3 \quad (2)$$

$$\sigma_{33}^{(1,2,3)} = C_{33kl} \cdot \varepsilon_{kl}^{(1,2,3)} - e_{k33} \cdot E_k^{(1,2,3)} = C_{3J} \varepsilon_J - e_{k3} \cdot E_k = (C_{31} \varepsilon_1 + C_{32} \varepsilon_2 + C_{33} \varepsilon_3) - (e_{13} \cdot E_1 + e_{23} \cdot E_2 + e_{33} \cdot E_3) = (C_{13} \varepsilon_1 + C_{13} \varepsilon_2 + C_{33} \varepsilon_3) - e_{33} \cdot E_3 \quad (3)$$

$$\sigma_{23}^{(1,2,3)} = C_{23kl} \cdot \varepsilon_{kl}^{(1,2,3)} - e_{k23} \cdot E_k^{(1,2,3)} = C_{4J} \varepsilon_J - e_{k4} \cdot E_k = C_{44} \gamma_4 - (e_{14} \cdot E_1 + e_{24} \cdot E_2 + e_{34} \cdot E_3) = C_{44} \gamma_4 - e_{15} \cdot E_2 \quad (4)$$

$$\sigma_{13}^{(1,2,3)} = C_{13kl} \cdot \varepsilon_{kl}^{(1,2,3)} - e_{k13} \cdot E_k^{(1,2,3)} = C_{5J} \varepsilon_J - e_{k5} \cdot E_k = C_{44} \gamma_5 - (e_{15} \cdot E_1 + e_{25} \cdot E_2 + e_{35} \cdot E_3) = C_{44} \gamma_5 - e_{15} \cdot E_1 \quad (5)$$

$$\sigma_{12}^{(1,2,3)} = C_{12kl} \cdot \varepsilon_{kl}^{(1,2,3)} - e_{k12} \cdot E_k^{(1,2,3)} = C_{6J} \varepsilon_J - e_{k6} \cdot E_k = C_{66} \gamma_6 - (e_{16} \cdot E_1 + e_{26} \cdot E_2 + e_{36} \cdot E_3) = C_{66} \gamma_6 \quad (6)$$

$$D_1 = e_{1jk} \cdot \varepsilon_{kj} + \kappa_{1k}^\varepsilon \cdot E_k = e_{1J} \cdot \varepsilon_J + \kappa_{1k}^\varepsilon \cdot E_k = e_{15} \cdot \gamma_5 + \kappa_{11}^\varepsilon \cdot E_1 \quad (7)$$

$$D_2 = e_{2jk} \cdot \varepsilon_{kj} + \kappa_{2k}^\varepsilon \cdot E_k = e_{2J} \cdot \varepsilon_J + \kappa_{2k}^\varepsilon \cdot E_k = e_{15} \cdot \gamma_4 + \kappa_{11}^\varepsilon \cdot E_2 \quad (8)$$

$$D_3 = e_{3jk} \cdot \varepsilon_{kj} + \kappa_{3k}^\varepsilon \cdot E_k = e_{3J} \cdot \varepsilon_J + \kappa_{3k}^\varepsilon \cdot E_k = e_{31} \cdot \varepsilon_1 + e_{31} \cdot \varepsilon_2 + e_{33} \cdot \varepsilon_3 + \kappa_{33}^\varepsilon \cdot E_3 \quad (9)$$

**Piezo\_001**

$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1,2,3)} &= A_{12} \cdot A_{12} \cdot \sigma_{22}^{(x,y,z)} = \sigma_{yy} \\ \sigma_{22}^{(1,2,3)} &= A_{23} \cdot A_{23} \cdot \sigma_{33}^{(x,y,z)} = \sigma_{zz} \\ \sigma_{33}^{(1,2,3)} &= A_{31} \cdot A_{31} \cdot \sigma_{11}^{(x,y,z)} = 0 \\ \sigma_{32}^{(1,2,3)} &= A_{31} \cdot A_{21} \cdot \sigma_{11}^{(x,y,z)} + A_{32} \cdot A_{22} \cdot \sigma_{22}^{(x,y,z)} \\ &\quad + A_{33} \cdot A_{23} \cdot \sigma_{33}^{(x,y,z)} = 0 \\ \sigma_{31}^{(1,2,3)} &= A_{31} \cdot A_{11} \cdot \sigma_{11}^{(x,y,z)} + A_{32} \cdot A_{12} \cdot \sigma_{22}^{(x,y,z)} \\ &\quad + A_{33} \cdot A_{13} \cdot \sigma_{33}^{(x,y,z)} = 0 \\ \sigma_{12}^{(1,2,3)} &= A_{11} \cdot A_{21} \cdot \sigma_{11}^{(x,y,z)} + A_{12} \cdot A_{22} \cdot \sigma_{22}^{(x,y,z)} \\ &\quad + A_{13} \cdot A_{23} \cdot \sigma_{33}^{(x,y,z)} = 0 \end{aligned}$	$\varepsilon_{ij}^{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \text{ donne } \varepsilon_{ij}^{(1,2,3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{xx} \end{pmatrix}$ $\sigma_{ij}^{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \text{ donne } \sigma_{ij}^{(1,2,3)} = \begin{pmatrix} \sigma_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
--	--

$$\sigma_{11}^{(1,2,3)} = C_{12} \varepsilon_{zz} + C_{13} \varepsilon_{xx} - e_{31} \cdot E_3 = \sigma_{yy} \quad (1)$$

$$\sigma_{22}^{(1,2,3)} = C_{11}\varepsilon_{zz} + C_{13}\varepsilon_{xx} - e_{31}\cdot E_3 = \sigma_{zz} \quad (2)$$

$$\sigma_{33}^{(1,2,3)} = C_{13}\varepsilon_{zz} + C_{33}\varepsilon_{xx} - e_{33}\cdot E_3 = 0 \quad (3)$$

L'équation (3) permet d'établir l'expression de  $\varepsilon_{xx}$  en fonction de  $\varepsilon_{zz}$  :

$$C_{33}\varepsilon_{xx} = e_{33}\cdot E_3 - C_{13}\varepsilon_{zz} \quad \text{soit} \quad \varepsilon_{xx} = \frac{(e_{33}\cdot E_3 - C_{13}\varepsilon_{zz})}{C_{33}} \quad (3')$$

En injectant  $\varepsilon_{xx}$  dans (1), une équation à deux inconnues est obtenue :

$$C_{12}\varepsilon_{zz} + C_{13}\frac{(e_{33}\cdot E_3 - C_{13}\varepsilon_{zz})}{C_{33}} - e_{31}\cdot E_3 = \sigma_{yy}$$

$$\text{soit } C_{12}\varepsilon_{zz} + \frac{C_{13}e_{33}}{C_{33}}E_3 - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}\varepsilon_{zz} - e_{31}E_3 = \sigma_{yy}$$

$$\text{soit encore } \left(C_{12} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}\right)\varepsilon_{zz} + \left(\frac{C_{13}e_{33}}{C_{33}} - e_{31}\right)E_3 = \sigma_{yy} \quad (1')$$

En injectant  $\varepsilon_{xx}$  dans (2), une deuxième équation à deux inconnues est obtenue :

$$\left(C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}\right)\varepsilon_{zz} + \left(\frac{C_{13}e_{33}}{C_{33}} - e_{31}\right)E_3 = \sigma_{zz} \quad (2')$$

Connaissant  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$  (ce qui est appliqué au cristal), la résolution du système d'équations (1') et (2') permet de déterminer  $\varepsilon_{zz}$  et  $E_3$ .

A des fins de simplification du développement analytique, l'hypothèse de contraintes équi-biaxiales est considérée ( $\sigma_{yy} = \sigma_{zz}$ ). Le système d'équations (1') et (2') impose, comme conséquence directe (termes associés à la variable  $E_3$  sont égaux),  $\varepsilon_{zz} = 0$ .

Il en découle les relations suivantes :

$$E_3 = \frac{C_{33}}{(C_{13}e_{33} - C_{33}e_{31})} \sigma_{yy}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{e_{33}}{C_{33}} E_3$$

$$D_3 = e_{31}\cdot \frac{e_{33}}{C_{33}} E_3 + \kappa_{33}^\varepsilon \cdot E_3$$

Les équation (4) à (8) permettent d'établir :  $E_2 = 0$  et  $E_1 = 0$  ainsi que  $D_1 = 0$  et  $D_2 = 0$ , activation suivant [001] donc suivant x, mode perpendiculaire

### Piezo\_100

La même démarche est appliquée et aboutit à un système de deux équations à deux inconnues

$$\left(C_{13} - \frac{C_{12}C_{13}}{C_{11}}\right)\varepsilon_{zz} + \left(\frac{C_{12}e_{31}}{C_{11}} - e_{31}\right)E_3 = \sigma_{yy}$$

$$\left(C_{33} - \frac{C_{13}^2}{C_{11}}\right)\varepsilon_{zz} + \left(\frac{C_{13}e_{31}}{C_{11}} - e_{33}\right)E_3 = \sigma_{zz}$$

Toujours à des fins de simplification du développement analytique, les mêmes conditions aux limites simplifiées dans la résolution ci-dessus (Piezo\_001) sont appliquées.

$$\varepsilon_{ij}^{(1,2,3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{xx} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_{ij}^{(1,2,3)} = \begin{pmatrix} \sigma_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il vient alors :

$$E_3 = \frac{C_{33}}{(C_{13}e_{33} - C_{33}e_{31})} \sigma_{yy} \quad \text{et} \quad D_3 = e_{31}\cdot \frac{e_{33}}{C_{33}} E_3 + \kappa_{33}^\varepsilon \cdot E_3 \quad \text{activation parallèle}$$