Physique I : Petite classe n^o1
RELATIVITÉ RESTREINTE

1 Mise en train : masse effective

1. Soient deux particules respectivement de masses m_1 et m_2, d'énergies E_1 et E_2 et d'impulsions $\vec{p_1}$ et $\vec{p_2}$. On définit la **masse effective** μ de l'ensemble des deux particules par la formule :

$$\mu^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p_1} + \vec{p_2})^2 \quad .$$

Justifier cette appellation de « masse effective ». On définit le repère du **centre de masse** comme celui dans lequel $\vec{p_1} + \vec{p_2} = \vec{0}$. Exprimer μ^2 dans le système du centre de masse des deux particules en fonction des masses m_1 et m_2 (fixées) et d'un seul paramètre variable que l'on précisera. Montrer que l'on a toujours :

$$\mu \geq m_1 + m_2$$

Pour quelle configuration l'égalité est-elle atteinte ? On exprimera cette condition sous une forme **valable dans tous les repères**. Montrer que la notion de masse effective se généralise à un nombre quelconque de particules et que l'on a : $\mu \geq \sum_i m_i$.

2. Montrer qu'un photon γ ne peut se transformer en paire e^+e^- dans le vide.
3. On suppose maintenant que le photon γ est en interaction coulombienne avec un noyau de masse M. Montrer qu'alors la réaction précédente est possible en présence du noyau, et calculer l'énergie minimale du photon pour créer une paire électron-positron. On appelle m_e la masse de l'électron ($m_e = 511$ Kev/c^2) et on utilisera le fait que M est au moins 2000 fois supérieure à m_e.

2 Le mouvement uniformément accéléré relativiste

Une ligne d'univers L est une courbe paramétrée de l'espace-temps de Minkowski : $\lambda \to P(\lambda)$. Ses équations dans un repère minkowskien de coordonnées $X_{\alpha,\ (0\leq\alpha\leq3)} = (ct, x, y, z)$ sont $(ct(\lambda), x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))$. Sa tangente en P est le vecteur $dP/d\lambda$. Pour une ligne d'univers de genre temps, $c^2\ dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 > 0$ en tout point de L.

On peut de plus choisir comme paramètre λ l'abscisse curviligne τ de L telle que $cd\tau = \sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$. La tangente $u = dP/d\tau$ est la quadri-vitesse, que l'on distingue de la 3-vitesse de composantes $\vec{v} = d(x, y, z)/dt$.

1. Justifier que $u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = c^2$ et en déduire u_0 en fonction de u_i , $(1 \leq i \leq 3)$. Montrer alors que
$$v_i = \frac{c\ u_i}{\sqrt{c^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$$
et en déduire que $v^2 < c^2$.

2. Pour simplifier les calculs, on se place dans un Univers à une seule dimension d'espace. On définit la quadri-accélération (maintenant « bi-accélération ») par $\gamma = du/d\tau$ de composantes $\gamma_\alpha = du_\alpha/d\tau$. Exprimer ses composantes en fonction de celles de la vitesse spatiale $\vec{v}$ et de l'accélération spatiale $\vec{a} = d\vec{v}/dt$. Montrer que :
$$u_0\gamma_0 - u_1\gamma_1 = 0 \quad \text{et que} \quad v_1\gamma_1 = c\gamma_0$$

3. On considère un mouvement rectiligne uniformément accéléré, défini par :
$$\gamma_0^2 - \gamma_1^2 = -g^2$$
g étant une constante. Montrer que les deux composantes de la quadri-vitesse sont $u_0 = c \cosh f(\tau)$ et $u_1 = c \sinh f(\tau)$. Exprimer la fonction $f(\tau)$ en fonction de g et de τ.

4. En déduire $x(\tau)$ et $t(\tau)$ et montrer que la ligne d'univers est une branche d'hyperbole d'équation $(x - h)^2 - c^2t^2 = c^4/g^2$ où h est une constante d'intégration.

5. Calculer la vitesse spatiale $v = dx/dt$ et l'accélération $a = d^2x/dt^2$. Donner leurs limites quand $t \to \infty$ et leurs expressions dans la limite des faibles vitesses. Commenter.

6. Nous considérons maintenant 2 observateurs, le premier P_{in} au repos en $x = c^2/g$ et le second P_{acc} uniformément accéléré et passant en $x = c^2/g$ à $t = 0$. Tracer leur lignes d'univers dans un diagramme d'espace-temps (x, t).

7. P_{in} envoie un signal lumineux vers P_{acc} à $t = t_{\text{em}}$. Donner l'équation de la ligne d'univers d'un tel rayon lumineux et la tracer dans le diagramme d'espace-temps. A quelle condition sur t_{em} et g le signal atteint-il P_{acc} ? Que se passe-t-il du point de vue de P_{acc} ? En particulier, y a-t-il un moment après lequel celui-ci ne reçoit plus de signaux émis par P_{in} ?