

Chapitre 21

Forces concentrées, forces distribuées

L'application d'efforts distribués ou concentrés à la surface d'un massif, domaine matériel occupant un demi-espace infini, constitué d'un matériau homogène élastique linéaire et isotrope, est une situation fréquente en génie civil et en mécanique des structures. Elle engendre des contraintes dont la connaissance est de première importance pour le dimensionnement de bâtiments sur un sol ou de composants industriels. Le premier type d'efforts considérés dans ce chapitre est d'intérêt essentiellement académique, mais délivre une solution d'une remarquable simplicité. Ce problème débouche dans la deuxième partie sur celui traité par Alfred-Aimé Flamant (1839–1915) en 1892¹, disciple d'Adhémar Barré de Saint-Venant, ami de Joseph-Valentin Boussinesq et Ferdinand de Lesseps, professeur à l'Institut Industriel du Nord, et dont on célèbre ainsi les cent ans de la disparition. La solution de Flamant pose de sérieuses questions à la mécanique des milieux continus, on le verra. Elle sert enfin de générateur pour résoudre un problème d'une grande portée dans les techniques de l'ingénieur, à savoir celui de la réponse d'un massif à une distribution donnée de pression sur une bande de sa surface.

Dans tout le problème, on se contente de solutions bidimensionnelles en contraintes planes et dans le contexte infinitésimal. Le matériau constitutif du massif est pris dans son état initial naturel. Il se comporte de manière élastique linéaire et isotrope jusqu'à une limite d'élasticité suivant un critère de plasticité de Tresca ou de von Mises. Les efforts de volume et d'inertie ne sont pas considérés. La méthode de résolution adoptée dans tout le problème est la méthode des contraintes.

21.1 Distribution de pression appliquée le long d'une gouttière

On considère un demi-espace $X_1 \geq 0$ percé d'une rigole semi-cylindrique de section semi-circulaire de rayon r_0 , d'axe (O, \underline{e}_3) contenu dans la surface $X_1 = 0$ du massif. Le plan de coupe (X_1, X_2) est représenté sur la figure 21.1, ainsi que le système de coordonnées polaires utilisées dans le plan d'étude (X_1, X_2) .

21.1.1 Conditions aux limites

La surface du massif $X_1 = 0$ et la rigole $r = r_0$ sont soumises à la distribution surfacique de forces suivante² :

- $\underline{t}^d = 0$ pour $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ et $r \geq r_0$,
- $\underline{t}^d = p_0 \cos \theta \underline{e}_r$ pour $r = r_0$.

Calculer la force résultante à la surface du massif, par unité d'épaisseur, F/h , h étant l'épaisseur du massif selon X_3 considérée pour le calcul de la résultante.

1. cf. (Flamant, 1892)

2. D'après (Bellet, 1990).

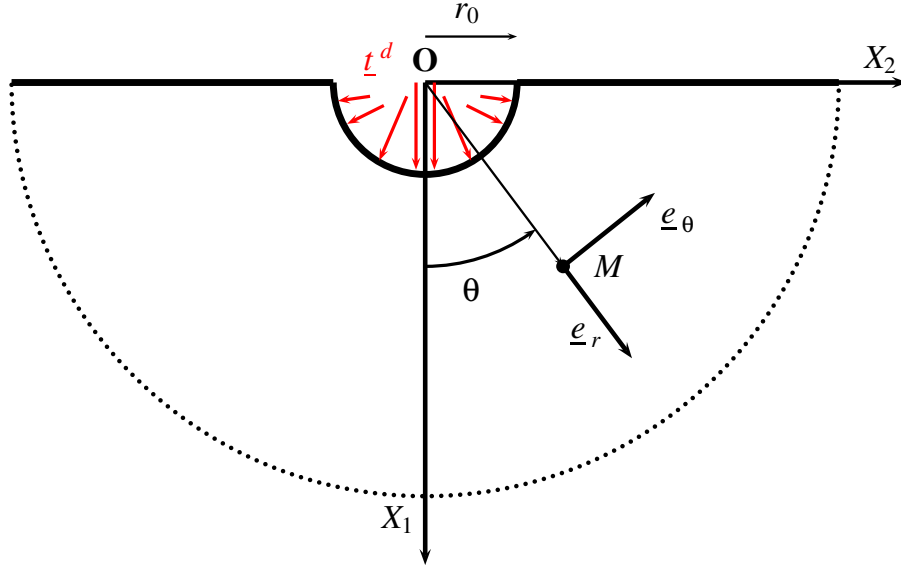


FIGURE 21.1 – Coupe d'un massif semi-infini par le plan (X_1, X_2) percé d'une rigole cylindrique de rayon r_0 et soumis à sa surface à une distribution de forces \underline{t}^d . Le demi-cercle pointillé suggère la nature semi-infinie du massif.

Le vecteur contrainte étant nul pour $r > r_0$, la résultante se calcule en intégrant la distribution d'efforts surfaciques le long de la rigole :

$$\begin{aligned} \underline{R} &= \int_{\theta=-\pi/2, r=r_0}^{\theta=\pi/2} \underline{t}^d dS = hr_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p_0 \cos \theta \underline{e}_r d\theta \\ &= p_0 r_0 h \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \right) \underline{e}_1 = \frac{\pi p_0 r_0 h}{2} \underline{e}_1 \end{aligned}$$

La force linéique est donc dirigée selon \underline{e}_1 et son intensité est $\frac{F}{h} = \frac{\pi}{2} p_0 r_0$.

21.1.2 Champ de contraintes

Montrer que le champ de contraintes

$$\underline{\sigma} = k \frac{\cos \theta}{r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \quad (21.1)$$

est statiquement admissible³. Identifier k en conséquence et l'exprimer également en fonction de la force linéique appliquée.

La divergence du champ (21.1) est effectivement nulle. Le long de la rigole, on a

$$\underline{\sigma} \cdot (-\underline{e}_r)(r = r_0) = \underline{t}^d = -k \frac{\cos \theta}{r_0} \underline{e}_r = p_0 \cos \theta \underline{e}_r$$

de sorte que

$$k = -p_0 r_0 = -\frac{2F}{\pi h} \quad (21.2)$$

3. Un champ de contraintes est statiquement admissible s'il vérifie les équations d'équilibre en volume et les conditions d'efforts imposés au bord.

21.1.3 Champ de déformations

Calculer le champ des déformations associées aux contraintes (21.1). Les caractéristiques élastiques du matériau constitutif du massif sont E et ν .

Commenter l'état de contraintes et de déformations en chaque point du massif.

La loi de Hooke fournit :

$$\underline{\varepsilon} = \frac{\sigma_{rr}}{E} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r - \nu(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)) \quad (21.3)$$

Il s'agit d'un état de traction/compression simple en chaque point du massif, l'axe de traction étant mobile et dirigé selon \underline{e}_r . Si $F > 0$, chaque point matériel subit une compression simple.

21.1.4 Expression des déplacements dans le plan

Déterminer les expressions des déplacements u_r et u_θ à partir de celles trouvées pour ε_{rr} et $\varepsilon_{\theta\theta}$. On introduira les fonctions d'intégration $f(\theta)$ et $g(r)$.

En utilisant la valeur de $\varepsilon_{r\theta}$ déterminer les fonctions f et g précédentes en faisant intervenir trois constantes d'intégration.

Donner la signification mécanique des termes associés à ces constantes d'intégration.

On ne cherchera pas à déterminer la composante de déplacement u_z et on se contente ici de la solution bidimensionnelle établie⁴.

Les définitions des déformations en coordonnées cylindriques fournissent :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \implies u_r = \frac{k}{E} \cos \theta \ln r + f(\theta)$$

De $\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} = -\nu \varepsilon_{rr}$, on déduit

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = -\frac{k}{E} (\nu + \ln r) \cos \theta - f(\theta)$$

qui s'intègre en

$$u_\theta = -\frac{k}{E} (\nu + \ln r) \sin \theta - \int_0^\theta f(\theta) d\theta + g(r)$$

D'autre part, la déformation de cisaillement est nulle

$$2r\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta + r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = 0$$

ce qui fournit l'équation différentielle

$$f'(\theta) + \int_0^\theta f(\theta) d\theta - \frac{k}{E} (1 - \nu) \sin \theta = g(r) - rg'(r) \quad (21.4)$$

Le membre de gauche ne dépend que de θ tandis que le membre de droite ne dépend que de r . Par suite,

$$g - rg' = C \implies g(r) = Ar + C$$

où A, C sont deux constantes d'intégration. D'autre part,

$$f' + \int f d\theta - \frac{k}{E} (1 - \nu) \sin \theta = C \implies f'' + f - \frac{k}{E} (1 - \nu) \cos \theta = 0$$

4. On sait que la situation des contraintes planes ne permet pas, en général, d'aboutir à une solution tridimensionnelle acceptable, mais qu'elle fournit, dans certaines conditions, une estimation fructueuse, cf. les discussions des paragraphes 9.3.2 et 19.6.

Une solution particulière de cette équation différentielle est

$$f_0(\theta) = \frac{k}{2E}(1-\nu)\theta \sin \theta$$

La solution complète

$$f(\theta) = \frac{k}{2E}(1-\nu)\theta \sin \theta + B \cos \theta + D \sin \theta$$

fait intervenir deux nouvelles constantes d'intégration. Une relation entre les quatre constantes introduites est donnée par l'équation (21.4) et on trouve $C = D$. Finalement,

$$g(r) = Ar + C, \quad f(\theta) = \frac{k}{2E}(1-\nu)\theta \sin \theta + B \cos \theta + C \sin \theta \quad (21.5)$$

$$u_r = \frac{k}{E} \cos \theta \ln r + \frac{k}{2E}(1-\nu)\theta \sin \theta + B \cos \theta + C \sin \theta \quad (21.6)$$

$$u_\theta = -\frac{k}{E} \sin \theta (\ln r + \nu) - B \sin \theta + C \cos \theta - \frac{k}{2E}(1-\nu)(\sin \theta - \theta \cos \theta) + Ar \quad (21.7)$$

Le champ

$$\underline{u}_0 = (B \cos \theta + C \sin \theta) \underline{e}_r + (C \cos \theta - B \sin \theta + Ar) \underline{e}_\theta$$

est un mouvement infinitésimal de corps rigide de translation $B\underline{e}_1 + C\underline{e}_2$ et de rotation d'angle A autour de l'axe \underline{e}_3 .

La solution ainsi établie souffre des défauts classiques associés aux solutions en contraintes planes décrites au chapitre 18 en particulier, à savoir qu'il n'est pas possible de trouver un champ u_z satisfaisant à partir des champs précédents dans le plan. On renvoie le lecteur aux discussions et estimation d'erreur sur ce point dans le chapitre indiqué ainsi que le chapitre 19. Comme dans ces exemples, il est possible cependant d'établir une solution exacte du problème dans le cas des déformations planes.

21.1.5 Conditions aux limites en déplacements et déplacements finaux

On donne les conditions cinématiques suivantes :

$$u_r(r = \ell, \theta = 0) = u_\theta(r = \ell, \theta = 0) = 0, \quad u_\theta(r = r_0, \theta = 0) = 0$$

où $\ell > r_0$ est une distance fixée quelconque.

Justifier sans recours aux équations, que ces conditions permettent de fixer le mouvement de corps rigide infinitésimal qui restait indéterminé dans la résolution précédente par la méthode des contraintes.

Montrer finalement que le champ de déplacements s'écrit :

$$u_r = \frac{k}{E} \left(\cos \theta \ln \frac{r}{\ell} + \frac{1-\nu}{2} \theta \sin \theta \right) \quad (21.8)$$

$$u_\theta = -\frac{k}{E} \left(\left(\nu + \ln \frac{r}{\ell} \right) \sin \theta + \frac{1-\nu}{2} (\sin \theta - \theta \cos \theta) \right) \quad (21.9)$$

Bloquer le point $Q(r = \ell, \theta = 0)$ permet de fixer la translation du mouvement de corps rigide. Empêcher le déplacement latéral d'un point de la droite (OQ) annule ensuite la rotation d'axe \underline{e}_3 . En substituant ces conditions dans les expressions (21.6) et (21.7) des déplacements, on obtient :

$$\frac{k}{E} \ln \ell + B = 0, \quad C + A\ell = 0, \quad C + Ar_0 = 0$$

qui implique $A = C = 0$ et $B = k/E \ln(1/\ell)$ et les résultats (21.9) en découlent. Les déformées de plusieurs arcs de cercles de rayons sont illustrées sur la figure 21.2. On peut comparer la déformation de ces lignes selon que $R < \ell$ ou $R > \ell$. Le plus petit cercle $R = 0.3\ell$ correspond en fait à des déformations violant le contexte infinitésimal, pour l'illustration.

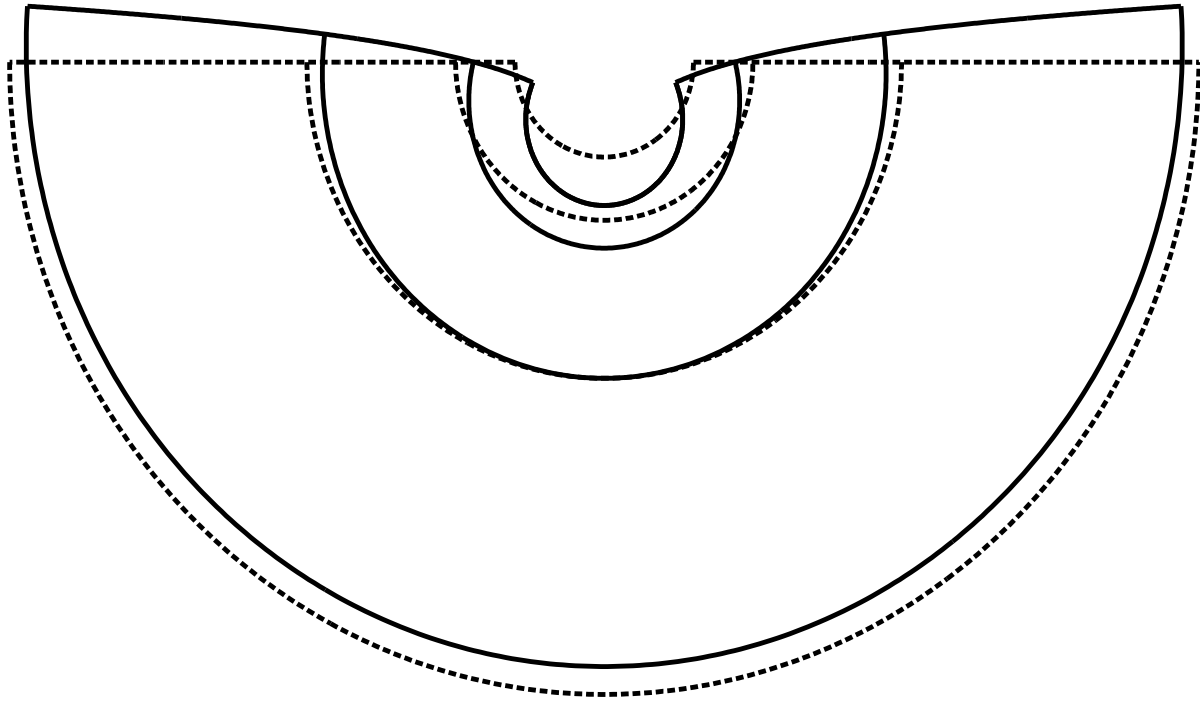


FIGURE 21.2 – Déformées de 4 demi-cercles avec : $R = 0.3\ell, R = 0.5\ell, R = \ell, R = 2\ell$. L'arc initial est en pointillé tandis que les déformées sont en trait continu. Le cas d'un substrat en polyuréthane a été considéré pour le tracé : $E = 5 \text{ GPa}, \nu = 0.4, F = 1000 \text{ N}, h = 1 \text{ mm}, \ell = 1 \text{ mm}$. On vérifie que le contexte infinitésimal est respecté seulement pour $R = 2\ell$ ($|2F/Eh\pi R|$ égal à 6.4%).

21.1.6 Respect du contexte infinitésimal

Donner les conditions assurant que le contexte infinitésimal est respecté. Elles portent sur la force linéique F/h appliquée, la géométrie du problème et les propriétés mécaniques du matériau.

Dans le cas $r_0 = 1 \text{ mm}$ et d'un massif en acier, chiffrer ces conditions.

Partant de

$$|\varepsilon_{rr}| \leq \left| \frac{k}{Er_0} \right| = \left| \frac{2F}{Eh\pi r_0} \right| \ll 1$$

Cette relation indique en particulier que, pour une force linéique et un matériau donnés, le rayon de la rigole ne peut pas être trop petit, sinon les déformations locales seront trop grandes.

Remarquer par ailleurs que

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} = -\frac{k}{E} \frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) = \frac{k}{rE} \sin \theta$$

ce qui n'ajoute pas de condition supplémentaire.

Si le rayon r_0 est fixé, la force linéique ne peut excéder :

$$\left| \frac{F}{h} \right| \ll E \frac{\pi r_0}{2} = 314 \text{ kN mm}^{-1}$$

21.1.7 Energie élastique stockée

Calculer l'énergie élastique stockée par unité d'épaisseur dans une couronne $[r_0, r_1]$ pour le rayon extérieur r_1 donné.

L'énergie élastique W divisée par l'épaisseur h est calculée de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\frac{W}{h} &= \frac{1}{2} \int_{r_0}^{r_1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} dS = \frac{1}{2} \int_{r_0}^{r_1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_{rr} \varepsilon_{rr} r dr d\theta \\ &= \frac{k^2}{2E} \int_{r_0}^{r_1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta}{r} dr d\theta = \frac{\pi k^2}{4E} \ln \frac{r_1}{r_0}\end{aligned}\quad (21.10)$$

21.1.8 Limite d'élasticité

Le matériau possède une limite d'élasticité σ_0 en traction. Calculer la force linéique F/h maximale autorisée avant que le régime plastique ne soit atteint. On utilisera les critères de von Mises et de Tresca.

A quel endroit du massif la limite d'élasticité est-elle atteinte ?

Faire l'application numérique pour le massif en acier avec $\sigma_0 = 100$ MPa, $r_0 = 1$ mm.

En traction simple, la contrainte équivalente de von Mises est égale à la valeur absolue de la contrainte de traction/compression :

$$J_2(\boldsymbol{\sigma}) = |\sigma_{rr}| = \left| \frac{k \cos \theta}{r} \right| \leq \sigma_0$$

Cette contrainte est maximale en $r = r_0$ et $\theta = 0$. La condition

$$|k| \leq \sigma_0 r_0 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{F}{h} \right| \leq \frac{\pi \sigma_0 r_0}{2}$$

fournit la valeur maximale $F/h = 157$ N.mm⁻¹.

21.2 Le problème de Flamant

On considère le problème traité dans la première partie comme un élément d'une suite de problèmes paramétrés par le rayon r_0 de la gouttière. Pour chaque valeur de r_0 , la pression p_0 appliquée sur la rigole est ajustée pour que la force linéique résultante F/h appliquée à la surface soit constante.

21.2.1 Formulation du problème

Formuler le problème-limite obtenu en faisant tendre le rayon de la rigole r_0 vers 0 dans cette suite de problèmes.

Comment évolue la pression p_0 lors de ce passage à la limite ? Quelle est la différence essentielle entre ce problème, dit de Flamant, et ceux traités dans le cours jusqu'ici ?

Lorsque le rayon r_0 tend vers 0, le problème obtenu consiste à appliquer la force concentrée $F/h \mathbf{e}_1$ au point O à la surface d'un demi-espace, le vecteur-contrainte étant nul par ailleurs sur cette surface. Dans ce problème on n'applique donc pas une distribution surfacique de forces mais une force sur une ligne de mesure surfacique nulle, contrairement aux situations admises en mécanique des milieux continus au sens de Cauchy. Cette force concentrée peut s'interpréter comme une distribution de Dirac d'efforts surfaciques, dans un sens qui sera apparent dans la troisième partie du problème. Le problème de Flamant est illustré sur la figure 21.3.

21.2.2 Contraintes de Flamant

Proposer un champ de contraintes solution du problème de Flamant défini au paragraphe 21.2.1, pour un massif élastique linéaire homogène et isotrope, dans l'hypothèse des petites perturbations.

Le champ de contraintes (21.1) étendu à toutes les valeurs de $r > 0$ et toutes les valeurs de $|\theta| \leq \pi/2$ est statiquement admissible. Il vérifie les équations d'équilibre en volume et conduit à un vecteur-contrainte nul à la surface sauf en O où il n'est pas défini.

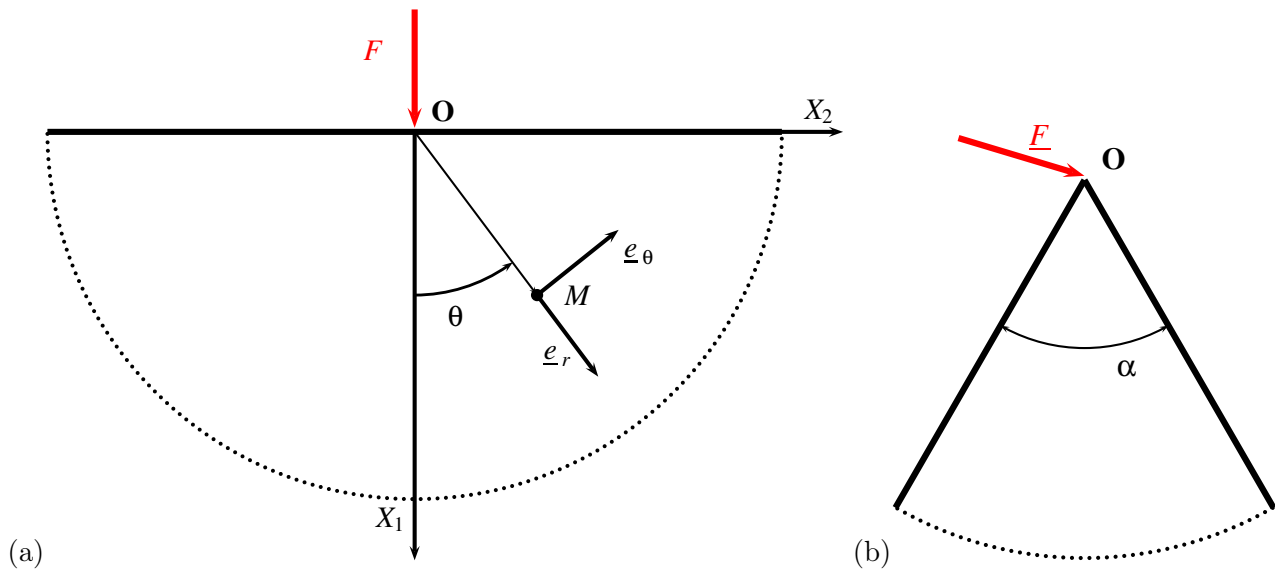


FIGURE 21.3 – Le problème de Flamant : (a) cas d’une force normale sur un massif, (b) cas général.

Il reste à identifier la constante k à l’aide du calcul de la résultante des efforts sur le demi-disque de rayon R :

$$\int \underline{t} dS = \frac{F}{h} \underline{e}_1 + \int_{r=R} \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r R d\theta$$

qui conduit à la même relation (21.2) entre k et F/h .

La contrainte est infinie en $r = 0$ comme dans le cas de la fissure, caractéristique pathologique ne suffisant pas à exclure la pertinence de cette solution valable presque partout. On y reviendra toutefois à la question (21.2.4).

21.2.3 Visualisation par photoélasticité

Lorsque le massif est constitué d’un matériau photoélastique, le champ de contraintes précédent est visible comme le montre la figure 21.4. Sachant que les lignes observées, dites *isochromes*, représentent les lieux des points où $\sigma_1 - \sigma_2 = Cste$, σ_1 et σ_2 étant les contraintes principales dans le plan (X_1, X_2) , interpréter les courbes visibles sur la figure 21.4. Indiquer également les raisons pouvant expliquer les différences entre l’expérience et la théorie.

En traction simple, la seule contrainte principale non nulle est σ_{rr} . Les lignes le long desquelles cette contrainte est constante ont pour équation :

$$r = C \cos \theta$$

où C est une constante. Il s’agit de cercles passant par l’origine, de rayon $C/2$. Ces cercles sont en accord avec les observations de la figure 21.4. Toutefois, les isochromes de la figure ne sont pas des cercles parfaits. Deux raisons peuvent être avancées. D’abord l’expérience n’a pas pu être réalisée sur un massif infini. Le cas fini conduit nécessairement à une solution légèrement différente. D’autre part, la tache grise sous l’indenteur montre qu’une indentation plastique a peut-être eu lieu très localement, ce qui peut conduire à un étalement de la zone de contact, ce qui nous éloigne de la force linéique idéale.

21.2.4 Caractère pathologique de la solution de Flamant

Indiquer plusieurs raisons suggérant que la solution de Flamant est physiquement inacceptable. On verra toutefois dans la partie 21.3 le profit que l’on peut tirer de cette solution mathématique.

La contrainte est infinie en $r = 0$ mais cette condition n'est pas en soi rédhibitoire car on a vu tout le profit qu'on peut tirer d'une solution singulière dans le cas de la fissure, cf. la discussion au paragraphe 19.8.2. C'est la dépendance en $1/r$ de cette contrainte qui pose réellement problème puisqu'elle conduit à la divergence de l'énergie dans un disque fini, ce que montre l'expression (21.10) lorsque r_0 tend vers zéro. Enfin, le déplacement que l'on peut construire de la même manière qu'au paragraphe 21.1.4, diverge à l'origine, ce qui n'est guère acceptable non plus et se distingue du cas de la fissure. Cette double pathologie, contraintes en $1/r$ et déplacement logarithmique, se retrouve dans le cas de la dislocation étudiée au chapitre 20.

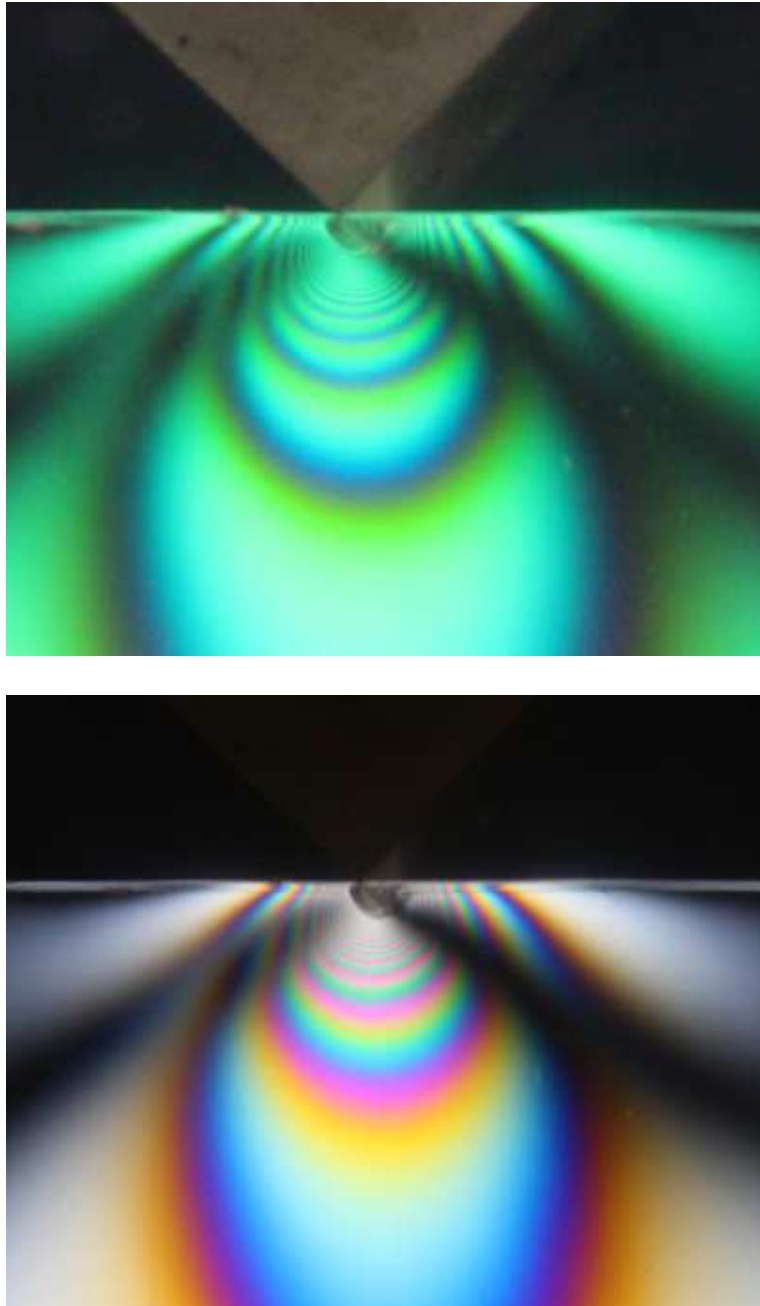


FIGURE 21.4 – Visualisation par photoélasticité des contraintes induites par l'application d'une force sur une ligne à la surface d'un massif élastique : en lumière monochromatique en haut, en lumière blanche en bas (réalisation : M. Mazière). La force linéique est appliquée par l'arête d'un cube dont une partie est visible sur la figure du haut. Des images en photoélasticité pour ce type de chargements se trouvent également dans le livre de (Johnson, 2004) repris par (Sadd, 2005).

21.3 Distribution de pression sur un massif

La solution de Flamant peut être utilisée comme génératrice de la solution d'un problème d'une importance indiscutable en mécanique des sols et des structures. Il s'agit de l'application d'une distribution de pression sur un segment $[AB]$ de longueur $2a$ à la surface d'un massif semi-infini, comme sur la figure 21.5. Le segment $[AB]$ engendre dans la troisième direction X_3 une bande sur laquelle la distribution de pression est appliquée. La méthode permet d'obtenir la réponse du massif pour toute distribution hétérogène de pression le long de $[AB]$ mais on considère dans cette partie une pression uniforme p :

$$\underline{t}^d = p \underline{e}_1, \quad \forall \underline{X} \in [AB]$$

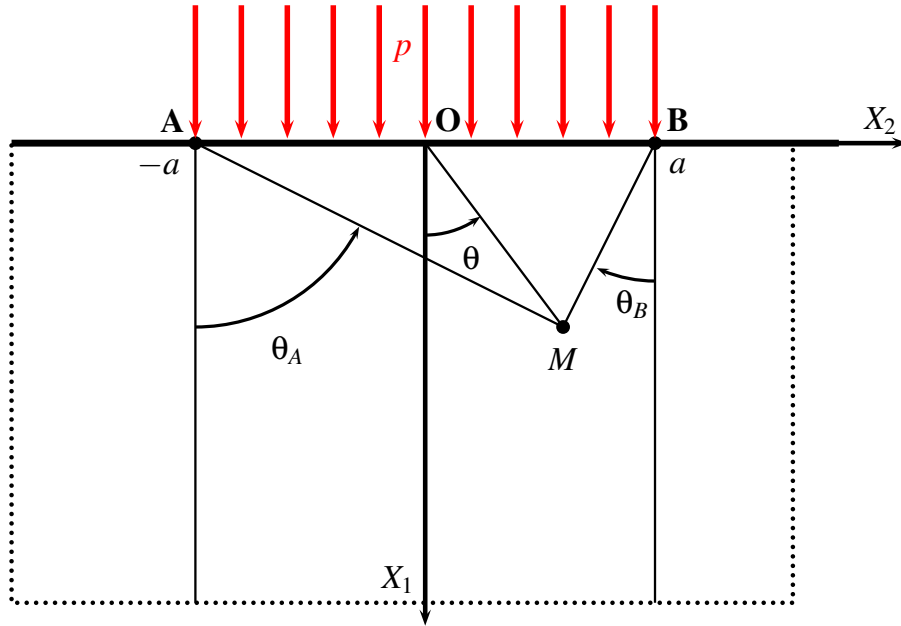


FIGURE 21.5 – Coupe d'un massif semi-infini par le plan (X_1, X_2) soumis à une pression uniforme p le long d'une bande décrite par le segment $[AB]$ et l'épaisseur h dans la troisième direction. Définition des angles $\theta, \theta_A, \theta_B$ associés au point M . Les lignes pointillées indiquent que le domaine matériel $X_1 \geq 0$ est infini.

21.3.1 Question préliminaire

Montrer que les composantes cartésiennes des contraintes de Flamant, exprimées en fonction des coordonnées r, θ , s'écrivent :

$$\underline{\sigma} = \frac{k \cos \theta}{r} (\cos^2 \theta \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sin^2 \theta \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sin \theta \cos \theta (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)) \quad (21.11)$$

Partant de la contrainte de Flamant (21.1),

$$\underline{\sigma} = \frac{k \cos \theta}{r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r = \frac{k \cos \theta}{r} (\cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2) \otimes (\cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2)$$

on obtient le résultat annoncé.

21.3.2 Champ de contraintes dans le massif

A l'aide de la solution du problème de Flamant et du théorème de superposition en élasticité linéarisée, établir les expressions suivantes des contraintes qui se développent dans le massif en conséquence des pressions appliquées à sa surface :

$$\sigma_{11} = \frac{p}{2\pi} [2\theta + \sin 2\theta]_A^B \quad (21.12)$$

$$\sigma_{22} = \frac{p}{2\pi} [2\theta - \sin 2\theta]_A^B \quad (21.13)$$

$$\sigma_{12} = \frac{p}{2\pi} [-\cos 2\theta]_A^B \quad (21.14)$$

avec la notation $[f(\theta)]_A^B = f(\theta_B) - f(\theta_A)$, les angles θ_A et θ_B étant définis pour chaque point M du massif par la figure 21.5, en respectant l'orientation directe dans le plan (X_1, X_2) .

Vérifier que les conditions aux limites sur le plan $X_1 = 0$ sont satisfaites par le champ proposé.

Le champ de contraintes induit par la distribution de pression est la superposition d'efforts ponctuels élémentaires $dF/h = p dX_2$ équivalents à l'application de la pression p sur le segment infinitésimal dX_2 en chaque point $P \in [AB]$. A ce titre, le champ de contrainte engendré par chaque force élémentaire est celui de Flamant (21.1) avec $k = -2pdX_2/\pi$ et $r = r_P = PM$, P étant l'origine des coordonnées cylindriques. En utilisant les composantes cartésiennes (21.11) du champ de Flamant, la superposition s'écrit :

$$[\sigma] = -\frac{2p}{\pi} \int_A^B \frac{1}{r_P} \begin{bmatrix} \cos^3 \theta & \cos^2 \theta \sin \theta \\ \cos^2 \theta \sin \theta & \cos \theta \sin^2 \theta \end{bmatrix} dX_2$$

En remarquant⁵ que $\cos \theta dX_2 = -r_P d\theta$, on obtient les composantes individuelles :

$$\sigma_{11} = \frac{2p}{\pi} \int_A^B \cos^2 \theta d\theta, \quad \sigma_{22} = -\frac{2p}{\pi} \int_A^B \sin^2 \theta d\theta, \quad \sigma_{12} = \frac{p}{\pi} \int_A^B \sin 2\theta d\theta$$

On vérifie que

$$M \in [AB], \theta_A = \frac{\pi}{2}, \theta_B = -\frac{\pi}{2}, \quad \sigma_{11} = -p, \quad \sigma_{12} = 0$$

$$M \notin [AB], X_1 = 0, \theta_A = \theta_B = -\frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \theta_A = \theta_B = \frac{\pi}{2}, \quad \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$$

de sorte que la distribution demandée pour le vecteur-contrainte est satisfaite.

Les notations utilisées pour ce problème sont dues à (Mandel, 1994). Ces champs de contraintes sont illustrés sur la figure 21.6.

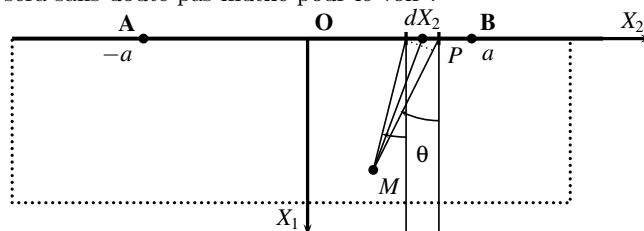
21.3.3 Régularité des contraintes

Montrer que le champ de contraintes (21.12)–(21.14) ne présente pas de singularité.

Etudier la continuité des composantes du tenseur des contraintes le long d'une ligne d'équation $X_1 = b$, pour $b \geq 0$ donné. Justifier que les discontinuités observées ne contreviennent pas aux lois de l'équilibre. Les fonctions $\theta, \sin \theta, \cos \theta$ étant bornées, il en est de même des composantes de contraintes (21.12)–(21.14). Le problème de Flamant est donc en quelque sorte régularisé. Pour s'en convaincre, il est instructif de vérifier que le champ (21.12)–(21.14) tend vers la solution de Flamant quand on fait tendre la largeur $2a$ du segment vers 0.

Le champ (21.12)–(21.14) présente des problèmes de définition et de continuité en A et B à examiner. A la surface $X_1 = 0$, les trois composantes de contraintes sont nulles à l'extérieur du segment $[AB]$. Les composantes σ_{11} et σ_{22} valent $-p$ sur le segment $[AB]$ tandis que $\sigma_{12} = 0$. Ces deux composantes

5. Le dessin ci-dessous ne sera sans doute pas inutile pour le voir :



présentent donc une discontinuité sur les lignes (A, \underline{e}_3) et (B, \underline{e}_3) .

Les fonctions θ_A et θ_B sont continues le long de toute ligne $X_1 = b$, $b > 0$, il en va donc de même des composantes des contraintes (21.12)–(21.14). Les valeurs des contraintes aux points d'intersection entre la ligne $X_1 = b$, $b > 0$ et les verticales passant par A et B sont

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^b(\theta_A = 0, \theta_B) &= \frac{p}{2\pi}(2\theta_B + \sin 2\theta_B), & \sigma_{22}^b(\theta_A = 0, \theta_B) &= \frac{p}{2\pi}(2\theta_B - \sin 2\theta_B) \\ \sigma_{12}^b(\theta_A = 0, \theta_B) &= \frac{p}{2\pi}(1 - \cos 2\theta_B)\end{aligned}$$

On calcule alors les limites de ces valeurs lorsqu'on s'approche de la surface :

$$\lim_{b \rightarrow 0} \sigma_{11}^b(\theta_A = 0, \theta_B) = \lim_{\theta_B \rightarrow -\pi/2} \sigma_{11}^b(\theta_A = 0, \theta_B) = -p/2$$

$$\lim_{b \rightarrow 0} \sigma_{22}^b(\theta_A = 0, \theta_B) = \lim_{\theta_B \rightarrow -\pi/2} \sigma_{22}^b(\theta_A = 0, \theta_B) = -p/2, \quad \lim_{\theta_B \rightarrow -\pi/2} \sigma_{12}^b(\theta_A = 0, \theta_B) = p/\pi$$

La condition de transmission du vecteur-contrainte le long des plans $\theta_A = 0$ et $\theta_B = 0$ est donc remplie presque partout sauf en A et B . Comme les lignes (A, \underline{e}_3) et (B, \underline{e}_3) sont de mesure surfacique nulle, l'équilibre est réalisé au sens des distributions.

La répartition de la contrainte équivalente de von Mises est illustrée sur la figure 21.6.

21.3.4 Respect du contexte infinitésimal

Fournir une condition de respect du contexte infinitésimal par la solution (21.12)–(21.14).

Les contraintes sont majorées par p et les déformations sont du même ordre que σ_{ij}/E . On en déduit la condition $p/E \ll 1$. Il est à noter que la seule dimension caractéristique du problème, à savoir la largeur $2a$ du segment, n'intervient pas dans cette condition. Cela est dû au fait que le massif est infini et qu'aucun rapport de longueur ne se manifeste dans le problème.

21.3.5 Limite d'élasticité

Donner les contraintes principales du tenseur (21.12)–(21.14).

Lorsque le massif est constitué d'un matériau élastoplastique de limite d'élasticité σ_0 en traction simple, indiquer pour quelle valeur de la pression imposée p la limite d'élasticité est atteinte et à quel endroit. On utilisera le critère de Tresca.

Montrer enfin que les directions principales des contraintes (21.12)–(21.14) sont les bissectrices des droites (AM) et (BM) .

La trace et le sous-déterminant 2×2 du tenseur des contraintes fournissent la somme et le produit de ses deux contraintes principales non nulles :

$$\text{trace } \underline{\sigma} = \frac{2p}{\pi}(\theta_B - \theta_A), \quad \det_2 \underline{\sigma} = \left(\frac{p}{\pi}\right)^2 ((\theta_B - \theta_A)^2 - \sin^2(\theta_B - \theta_A))$$

Les contraintes principales, dans l'ordre décroissant⁶, sont donc

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \frac{p}{\pi}(\theta_B - \theta_A + \sin(\theta_A - \theta_B)), \quad \sigma_3 = \frac{p}{\pi}(\theta_B - \theta_A + \sin(\theta_B - \theta_A)) \quad (21.15)$$

Le critère de Tresca est atteint lorsque

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{p}{\pi}(\theta_A - \theta_B + \sin(\theta_A - \theta_B)) = \sigma_0$$

Cette fonction de $\theta_A - \theta_B \geq 0$ est maximale en π , c'est-à-dire à la surface sur le segment $[AB]$. La limite d'élasticité est donc atteinte simultanément pour tous les points de $[AB]$ lorsque $p = \sigma_0$.

Les directions principales sont les vecteurs de composantes (α, β) solution du système :

$$\sigma_{11}\alpha + \sigma_{12}\beta = \lambda\alpha, \quad \sigma_{12}\alpha + \sigma_{22}\beta = \lambda\beta$$

6. Remarquer que $\theta_A - \theta_B \geq 0$.

où $\lambda \in \sigma_1, \sigma_2$. L'orientation des directions principales, β/α , est solution de

$$x^2 + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\sigma_{12}}x - 1 = 0$$

avec $\sigma_{11} - \sigma_{22} = p/\pi [\sin 2\theta]_A^B$. On trouve

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\sigma_{12}} \pm \sqrt{4 + \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\sigma_{12}} \right)^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{[\sin 2\theta]_A^B \pm 2 \sin(\theta_A - \theta_B)}{[\cos 2\theta]_A^B}$$

Mandel⁷ en donne une expression alternative :

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pm 1 - \cos(\theta_A + \theta_B)}{\sin(\theta_A + \theta_B)} = \tan \frac{\theta_A + \theta_B}{2} \quad \text{ou} \quad -\cotan \frac{\theta_A + \theta_B}{2} \quad (21.16)$$

qui montre que les directions principales sont les bissectrices de l'angle BMA .

21.3.6 Déformée de la surface

En utilisant à nouveau le théorème de superposition, donner les déplacements à la surface du massif. Les déplacements des points de la surface du massif s'obtiennent en superposant les déplacements induits par une force concentrée $-2pdX_2/\pi$ en chaque point $P(0, X_2) \in [AB]$ comme on l'a fait pour les contraintes. On cherche à déterminer les composantes cartésiennes $u_1(0, X_2), u_2(0, X_2)$.

Pour $X_2 \leq -a$, $\theta = -\pi/2$

$$u_2 = -u_r = \frac{2p}{\pi E} \int_{-a}^a \frac{1 - \nu}{2} \frac{\pi}{2} du = \frac{(1 - \nu)pa}{E}$$

Pour $X_2 \geq a$, $\theta = \pi/2$

$$u_2 = u_r = -\frac{2p}{\pi E} \int_{-a}^a \frac{1 - \nu}{2} \frac{\pi}{2} du = -\frac{(1 - \nu)pa}{E}$$

Pour $|X_2| \leq a$, on trouve une évolution linéaire du déplacement interpolant les deux déplacements d'ensemble de part et d'autre de $[AB]$.

Quant au déplacement vertical u_1 égal à u_θ ou $-u_\theta$ selon la position relative par rapport au point d'application de la force élémentaire, une expression unifiée peut être établie à partir de la considération des trois situations précédentes :

$$u_1(X_2) = -\frac{2p}{\pi E} \int_{-a}^a \left(\frac{1 + \nu}{2} + \ln \frac{|u - X_2|}{\ell} \right) du \quad (21.17)$$

Cette intégrale est convergente. Le déplacement n'est donc pas singulier. Il est logarithmique loin du segment $[AB]$.

Cette solution est présentée, au moins partiellement, dans l'ouvrage de (Barber, 2004).

21.4 Le problème de Flamant général

L'étude précédente ne constitue en fait qu'un cas particulier du problème général de Flamant qui considère l'application d'une force sur l'arête d'un dièdre d'angle α comme sur la figure 21.3(b). Elle correspond au cas $\alpha = \pi$ et à une force purement normale au massif. La solution générale en contrainte du problème de Flamant mérite d'être donnée ici :

$$\underline{\sigma} = \left(\frac{C_1 \cos \theta}{r} + \frac{C_2 \sin \theta}{r} \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \quad (21.18)$$

7. (Mandel, 1994), p. 545.

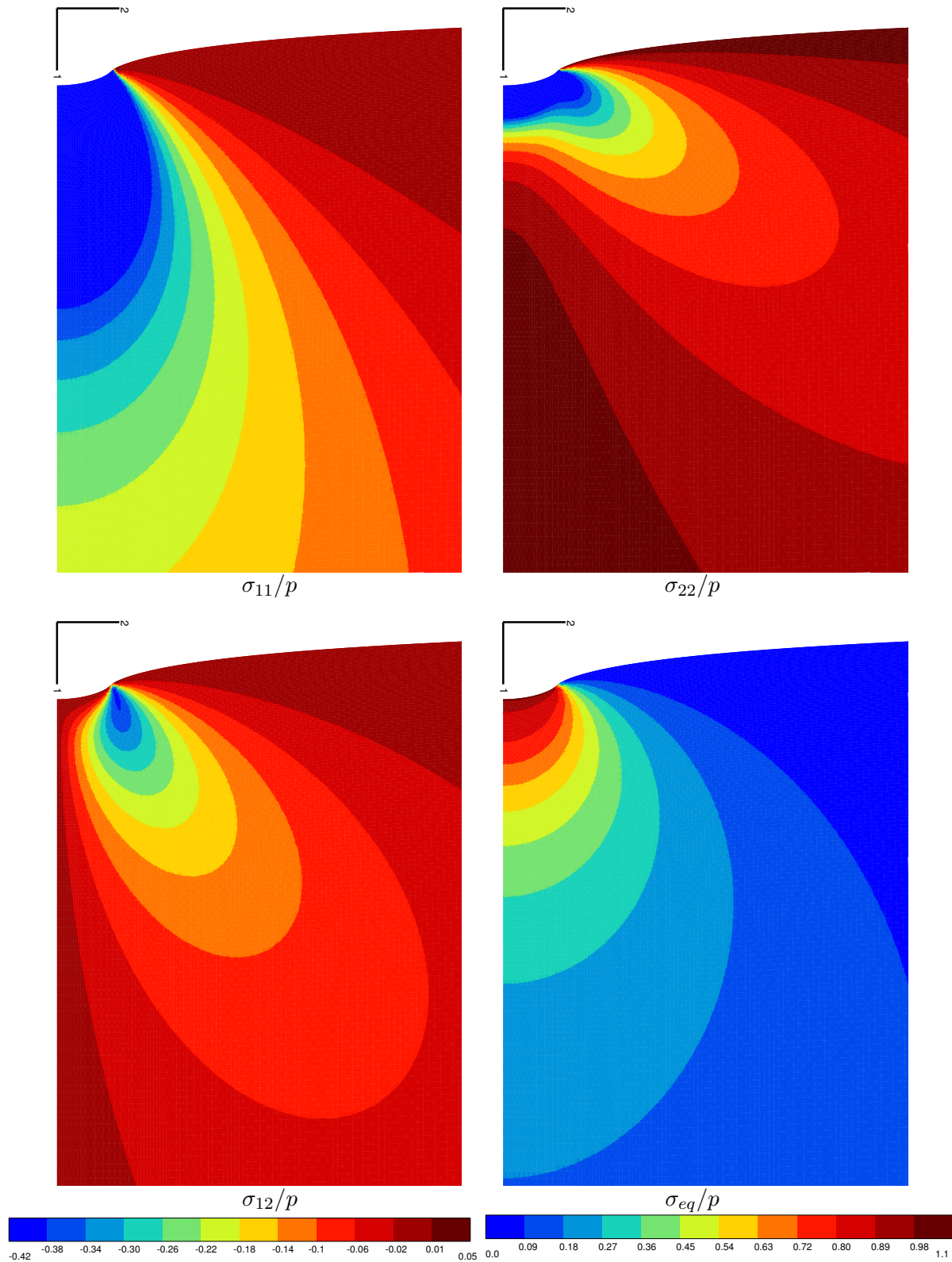


FIGURE 21.6 – Champs de contraintes normalisées par la pression appliquée sur un segment de la surface d'un massif semi-infini. La légende de gauche s'applique aux trois composantes des contraintes tandis que celle de droite concerne le champ de contrainte équivalente de von Mises, σ_{eq} . Seule la moitié du massif est représentée. La déformation a été amplifiée d'un facteur 500 pour l'illustration.

Il est remarquable que ce chargement complexe conduise à un état de traction simple selon \underline{e}_r . Les constantes C_1 et C_2 peuvent être directement reliées aux composantes de la force \underline{F} appliquée selon une direction donnée indépendante de la géométrie du dièdre. La dépendance des contraintes en $1/r$ est attendue dans la mesure où la force imposée est équilibrée par les efforts de contact sur tout arc de cercle distant de r du point d'application et dont la surface est en rh . A noter que le problème de Flamant ne comporte aucune longueur caractéristique.

La question de l'existence et de l'unicité des solutions de problèmes impliquant des forces concentrées sortant du cadre classique de Cauchy, est extrêmement délicate. Quelques éléments peuvent être trouvés dans le travail de (Sternberg and Eubanks, 1955).

La question de la pertinence physique de cette solution se pose à nouveau, la dépendance en $1/r$ conduisant à la divergence de l'énergie dans un demi-disque de centre O. On peut se demander si une régularisation peut être obtenue en dépassant la théorie de Cauchy des milieux continus, par exemple en utilisant la théorie du second gradient ou en introduisant des couples de contraintes surfaciques, extensions de la théorie de Cauchy introduisant des longueurs caractéristiques dans la loi de comportement élastique et permettant de lever certaines singularités de la mécanique des milieux continus classique, cf. (Bogy and Sternberg, 1968; Forest, 2006).

21.5 L'essai brésilien de compression diamétrale

*Je suis brésilien, j'ai de l'or,
Et j'arrive de Rio-Janeire
Plus riche aujourd'hui que naguère,
Paris, je te reviens encor—!
Rondeau du Brésilien, La Vie Parisienne,
Jacques Offenbach.*

L'essai brésilien a été inventé en 1943 et est aujourd'hui largement utilisé en mécanique des roches et des sols, ainsi que pour bien d'autres matériaux, cf. (Carneiro, 1943; Fairbairn and Ulm, 2002).

La détermination expérimentale de la limite d'élasticité en traction simple des matériaux fragiles ou quasi-fragiles⁸ est particulièrement délicate. En effet, les essais de traction sur des éprouvettes en forme *d'os de chien*⁹ conduisent à une rupture précoce dans les congés, en raison des concentrations de contraintes qui s'y développent. Ils ne donnent donc pas accès à la limite d'élasticité de traction simple qui correspondrait à une rupture dans le fût de l'éprouvette. L'essai brésilien, appelé aussi essai de traction indirect¹⁰ est un essai de compression diamétrale sur un cylindre ou un disque d'épaisseur h . C'est un essai complexe dans le sens où les champs de contraintes et de déformations ne sont pas homogènes dans l'échantillon. Cependant, on va voir dans ce problème comment cet essai simple et astucieux, dont l'interprétation n'est pas sans difficulté, permet d'estimer la limite d'élasticité en traction d'un matériau quasi-fragile.

L'objectif du problème est d'étudier, dans l'hypothèse des petites perturbations, les contraintes qui règnent dans un cylindre ou un disque placé entre deux plateaux rigides parallèles soumis à deux forces résultantes opposées de norme F , comme sur la figure 21.7a. Le cylindre a une épaisseur h et un rayon R . Il est constitué d'un matériau homogène, élastique, linéaire et isotrope. L'idéalisation de cet essai conduit au problème aux limites de la figure 21.7b où le cylindre est soumis à deux forces opposées. Ces forces correspondent en fait à deux distributions linéiques de forces F/h appliquées sur deux génératrices diamétralement opposées du cylindre. La solution de ce problème idéalisé est proposée d'abord en utilisant de manière astucieuse la solution du problème de Flamant. Les contraintes obtenues permettent ensuite de prévoir la limite d'élasticité de la structure pour les matériaux fragiles.

8. Les matériaux quasi-fragiles s'endommagent un peu avant de rompre brutalement. Les céramiques et les verres sont des matériaux fragiles. Le béton quant à lui présente un endommagement avant la rupture.

9. *Dogbone samples*, en anglais, expression imagée décrivant la forme d'une éprouvette élancée avec des têtes massives permettant le serrage sur une machine d'essai mécanique.

10. *Splitting tension test* ou *indirect tension test* en anglais.