

Chapitre 19

Concentrations de contraintes

Ce chapitre a pour objectif de montrer que la présence de trous, entailles et autres congés de raccordement conduit à un affaiblissement de la structure en raison de surcontraintes locales, appelées concentrations de contrainte. Il est donc bon d'éviter, autant que possible, le perçage ou l'usinage de défauts ou de parties fonctionnelles de ce type. Lorsque la présence de concentrateurs de contraintes est inévitable, il est nécessaire de connaître le **facteur de concentration de contrainte** associé à chaque géométrie, notion introduite dans ce chapitre, afin de dimensionner les structures. Ce fait a été reconnu tardivement dans la communauté scientifique, près de cent ans après l'établissement de la théorie tridimensionnelle des milieux continus élastiques. Des ruptures précoces sont ainsi restées longtemps inexplicables. La prise en compte des concentrations de contraintes est aujourd'hui codifiée. Un tel catalogue de concentrateurs de contraintes est disponible par exemple dans (Pilkey, 1997).

Le cas de la traction d'une plaque percée d'un trou circulaire est analysé dans le détail avant d'évoquer d'autres concentrateurs tels que les trous elliptiques, sphériques et les entailles avec un rayon de courbure donné. L'étude est menée dans le contexte des petites perturbations pour un milieu isotrope, dans son état naturel, au comportement élastique linéarisé.

Le chapitre commence par la description de l'outil de résolution privilégié pour les problèmes traités, à savoir les fonctions de contraintes ou fonctions d'Airy, qui sera appliqué dans les sections suivantes.

19.1 Préliminaire : fonction de contraintes et coordonnées cylindriques

La résolution d'un problème bidimensionnel d'élasticité isotrope linéarisée peut se ramener à la recherche d'une fonction, appelée fonction de contraintes introduite au paragraphe 9.3.3. En coordonnées cartésiennes dans une base orthonormée et dans le cas où les contraintes recherchées sont de la forme :

$$\sigma_{11}(x_1, x_2), \sigma_{22}(x_1, x_2), \sigma_{12}(x_1, x_2), \sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0 \quad (19.1)$$

et, en l'absence d'efforts volumiques, il existe une fonction $\chi(x_1, x_2)$ telle que

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Les équations de compatibilité exigent alors que cette fonction soit biharmonique :

$$\Delta^2 \chi = \chi_{,1111} + \chi_{,2222} + 2\chi_{,1122} = 0$$

Les relations précédentes peuvent être traduites dans un système de coordonnées cylindriques, pour un champ de contraintes recherché de la forme

$$\sigma_{rr}(r, \theta), \sigma_{\theta\theta}(r, \theta), \sigma_{r\theta}(r, \theta), \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0 \quad (19.2)$$

Il existe une fonction de contraintes $\chi(r, \theta)$ telle que

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \quad (19.3)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \quad (19.4)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) \quad (19.5)$$

L'opérateur bilaplacien s'écrit :

$$\Delta^2 \chi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (19.6)$$

Une large classe de fonctions biharmoniques s'obtient sous la forme

$$\chi = \Phi_1(r, \theta) + r^2 \Phi_2(r, \theta)$$

où Φ_1 et Φ_2 sont des fonctions harmoniques, i.e. telles que $\Delta \Phi = 0$. On vérifie qu'effectivement les fonctions construites de la sorte sont biharmoniques. La grande variété des fonctions harmoniques permet alors d'engendrer de nombreuses familles de solutions de l'équation biharmonique. Une telle famille de fonctions biharmoniques est

$$\begin{aligned} \chi(r, \theta) = & A_0 \log r + B_0 r^2 \log r + C_0 r^2 + D_0 \\ & + (A_1 r \log r + B_1 r^3 + C_1 r + \frac{D_1}{r}) \cos \theta + (A_1^* r \log r + B_1^* r^3 + C_1^* r + \frac{D_1^*}{r}) \sin \theta \\ & + F\theta + r\theta(G_1 \cos \theta + G_2 \sin \theta) \\ & + \sum_{k=2}^{\infty} (A_k r^k + B_k r^{-k} + C_k r^{k+2} + D_k r^{-k+2}) \cos k\theta \\ & + \sum_{k=2}^{\infty} (A_k^* r^k + B_k^* r^{-k} + C_k^* r^{k+2} + D_k^* r^{-k+2}) \sin k\theta \end{aligned} \quad (19.7)$$

qui permet de résoudre de nombreux problèmes aux limites d'élasticité linéaire plane avec des conditions de chargement périodiques en θ (Rekatch, 1980; Szabó, 1985). Il reste au lecteur à vérifier qu'effectivement cette famille de fonctions satisfait à l'équation (19.6). Les constantes $A_k, A_k^*, B_k, B_k^*, C_k, C_k^*, D_k, D_k^*, F, G_1, G_2$ doivent être déterminées grâce aux conditions à la frontière, lorsque cela est possible.

19.2 Champ de contraintes dans une plaque trouée en traction simple

Une plaque d'épaisseur $2h$ percée d'un trou cylindrique à section circulaire de rayon a est soumise à ses extrémités à un état de traction simple. La géométrie et les données de ce problème¹ sont illustrées par le schéma de la figure 19.1. L'axe du trou est \underline{e}_3 et la direction de traction est \underline{e}_1 . La longueur et la largeur L sont supposées suffisamment grandes par rapport à a pour que l'état de contrainte loin du trou ne soit pas affecté par la présence du trou et puisse donc être assimilé à l'état homogène suivant :

$$\underline{\sigma}^\infty = \sigma^\infty \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \quad (19.8)$$

où σ^∞ est la contrainte imposée, donnée du problème. Dans cette partie, le bord du trou ainsi que les surfaces $z = \pm h$ sont libres d'effort.

Un système de coordonnées cylindriques (O, r, θ) est adopté, O étant le centre du trou, l'angle θ étant mesuré par rapport à \underline{e}_1 . Il est représenté sur la figure 19.1.

Compte tenu des caractéristiques du chargement, le traitement du problème est justiciable d'une résolution en contraintes planes, fût-elle approchée. Le champ de contraintes est donc recherché sous la forme (19.2).

1. aussi appelé problème de Kirsch qui le résolut en 1898.

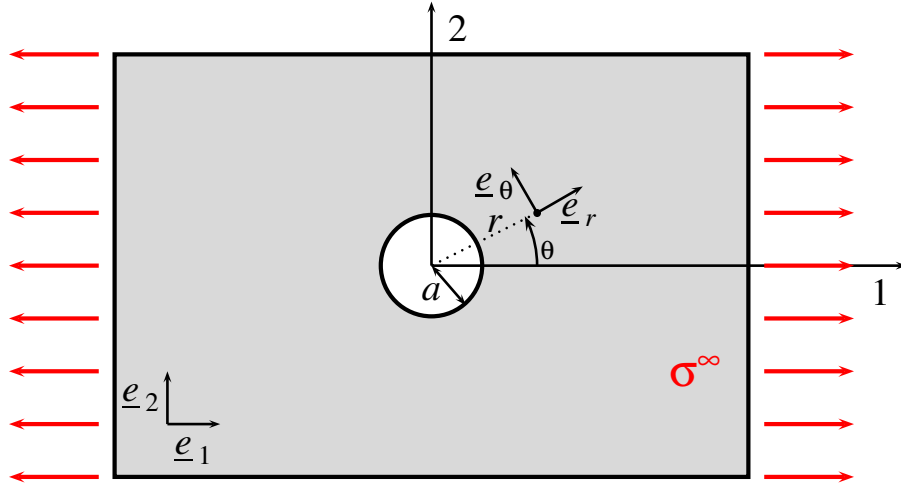


FIGURE 19.1 – Plaque percée d'un trou circulaire de rayon a et soumise, loin du trou, à une sollicitation de traction simple d'intensité σ^∞ .

19.2.1 Champ de contraintes loin du trou

Donner les composantes du tenseur des contraintes loin du trou dans le système de coordonnées cylindriques. Donner une fonction de contraintes $\chi(r, \theta)$ correspondant à un champ de traction simple en intégrant les relations (19.3) à (19.5).

On substitue

$$\underline{e}_1 = \cos \theta \underline{e}_r - \sin \theta \underline{e}_\theta$$

dans l'état de contrainte (19.8) pour trouver

$$\underline{\underline{\sigma}}^\infty = \frac{\sigma^\infty}{2} ((1 + \cos 2\theta) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + (1 - \cos 2\theta) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta - \sin 2\theta (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r)) \quad (19.9)$$

Autrement dit,

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^\infty = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 + \cos 2\theta) \\ \sigma_{\theta\theta}^\infty = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 - \cos 2\theta) \\ \sigma_{r\theta}^\infty = -\frac{\sigma^\infty}{2} \sin 2\theta \end{cases} \quad (19.10)$$

Pour trouver une fonction de contraintes conduisant au champ de traction simple, on intègre l'équation (19.4) en

$$\chi = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 - \cos 2\theta) \frac{r^2}{2} + g(\theta)r + h(\theta)$$

En calculant $\sigma_{r\theta}$ grâce à (19.5), on trouve que $h = Cste$. En calculant σ_{rr} grâce à (19.4), on trouve que $g = g_1 \cos \theta + g_2 \sin \theta$. On vérifie que la contribution aux contraintes des termes en h, g_1, g_2 est nulle de sorte qu'on ne perd pas en généralité en prenant $h = g_1 = g_2 = 0$. Finalement, une fonction de contraintes associée à l'état de traction simple est

$$\chi = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 - \cos 2\theta) \frac{r^2}{2} \quad (19.11)$$

19.2.2 Forme générale des contraintes

Le résultat précédent nous incite à rechercher, au sein de la collection répertoriée en (19.7), la fonction de contraintes, en tout point de la plaque trouée, sous la forme :

$$\chi(r, \theta) = A \log r + Br^2 \log r + Cr^2 + (A_2 r^2 + B_2 r^4 + \frac{C_2}{r^2} + D_2) \cos 2\theta \quad (19.12)$$

où $A, B, C, A_2, B_2, C_2, D_2$ sont des constantes à déterminer. D'après les relations (19.3) à (19.5), donner l'expression du champ de contraintes général associé à la famille de fonctions de contraintes précédente. Identifier certaines des constantes grâce à l'expression du champ de contraintes à l'infini mise en évidence en 19.2.1.

La famille de fonctions de contraintes choisie conduit au champ de contraintes suivant :

$$\sigma_{rr} = \frac{A}{r^2} + 2B \log r + B + 2C + (-2A_2 - \frac{6C_2}{r^4} - \frac{4D_2}{r^2}) \cos 2\theta \quad (19.13)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{A}{r^2} + 2B \log r + 3B + 2C + (2A_2 + 12B_2 r^2 + \frac{6C_2}{r^4}) \cos 2\theta \quad (19.14)$$

$$\sigma_{r\theta} = 2 \sin 2\theta (A_2 + 3B_2 r^2 - \frac{3C_2}{r^4} - \frac{D_2}{r^2}) \quad (19.15)$$

Loin du trou, i.e. lorsque r est suffisamment grand, le champ précédent prend la forme asymptotique

$$\sigma_{rr}^\infty = 2B \log r + B + 2C - 2A_2 \cos 2\theta \quad (19.16)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^\infty = 2B \log r + 3B + 2C + (2A_2 + 12B_2 r^2) \cos 2\theta \quad (19.17)$$

$$\sigma_{r\theta}^\infty = 2 \sin 2\theta (A_2 + 3B_2 r^2) \quad (19.18)$$

L'identification entre ce champ et celui de traction simple (19.9) permet de déterminer les constantes :

$$B = 0, \quad C = \frac{\sigma^\infty}{4}, \quad A_2 = -\frac{\sigma^\infty}{4}, \quad B_2 = 0$$

19.2.3 Prise en compte des conditions à la frontière

Utiliser les conditions aux limites non prises en compte à ce stade pour déterminer complètement le champ de contraintes.

L'analyse du paragraphe précédent a permis d'aboutir à la forme suivante du champ des contraintes dans la plaque :

$$\sigma_{rr} = \frac{A}{r^2} + \frac{\sigma^\infty}{2} + (\frac{\sigma^\infty}{2} - \frac{6C_2}{r^4} - \frac{4D_2}{r^2}) \cos 2\theta \quad (19.19)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{A}{r^2} + \frac{\sigma^\infty}{2} + (-\frac{\sigma^\infty}{2} + \frac{6C_2}{r^4}) \cos 2\theta \quad (19.20)$$

$$\sigma_{r\theta} = 2 \sin 2\theta (-\frac{\sigma^\infty}{4} - \frac{3C_2}{r^4} - \frac{D_2}{r^2}) \quad (19.21)$$

Les bords du trou sont libres d'effort de sorte que $\underline{\sigma}(r=a) \cdot \underline{e}_r = 0$, ce qui implique la nullité en $r=a$ des composantes σ_{rr} et $\sigma_{r\theta}$, pour toutes les valeurs de l'angle θ :

$$\sigma_{rr}(r=a) = \frac{A}{a^2} + \frac{\sigma^\infty}{2} + (\frac{\sigma^\infty}{2} - \frac{6C_2}{a^4} - \frac{4D_2}{a^2}) \cos 2\theta = 0$$

$$\sigma_{r\theta}(r=a) = 2 \sin 2\theta (-\frac{\sigma^\infty}{4} - \frac{3C_2}{a^4} - \frac{D_2}{a^2}) = 0$$

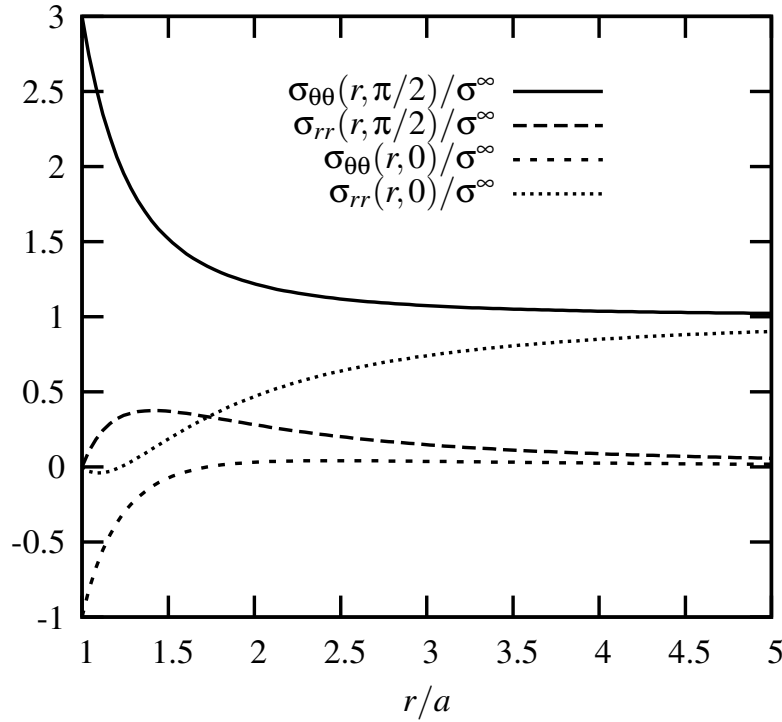


FIGURE 19.2 – Profils des contraintes radiale et orthoradiale normalisées par la contrainte appliquée en partant du pôle ($\theta = 0$) et de l'équateur ($\theta = \pi/2$) en fonction de la distance relative r/a par rapport au trou.

Un système linéaire portant sur les inconnues A, C_2, D_2 en découle :

$$\frac{A}{a^2} + \frac{\sigma^\infty}{2} = 0, \quad \frac{\sigma^\infty}{2} - \frac{6C_2}{a^4} - \frac{4D_2}{a^2} = 0, \quad \frac{\sigma^\infty}{4} + \frac{3C_2}{a^4} + \frac{D_2}{a^2} = 0$$

dont la résolution fournit

$$A = -\frac{\sigma^\infty}{2}a^2, \quad C_2 = -\frac{\sigma^\infty}{4}a^4, \quad D_2 = \frac{\sigma^\infty}{2}a^2 \quad (19.22)$$

Finalement, le champ de contraintes et la fonction de contraintes identifiés sont

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right) \cos 2\theta \quad (19.23)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \quad (19.24)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right) \sin 2\theta \quad (19.25)$$

$$\chi = -\frac{\sigma^\infty}{2}a^2 \log r + \frac{\sigma^\infty}{4}r^2 + \frac{\sigma^\infty}{4} \left(-r^2 + 2a^2 - \frac{a^4}{r^2}\right) \cos 2\theta \quad (19.26)$$

Il s'agit d'un état de contraintes planes (CP), tel qu'il a été recherché dans cette section. Ces relations sont rassemblées dans le tableau récapitulatif 19.1.

La fonction de contrainte loin du trou s'obtient, à r fixé, en faisant tendre $a \rightarrow 0$ (situation correspondant au trou dans une plaque infinie). L'expression précédente conduit alors à la fonction de contrainte (19.11) associée à la traction simple.

19.3 Concentration de contrainte au bord du trou

Le champ de contraintes trouvé précédemment indique que les contraintes ne sont pas homogènes dans une plaque trouée sollicitée en traction à ses extrémités. La décroissance rapide en $1/r^2$ du champ

Champ de contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right) \cos 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \\ \sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right) \sin 2\theta \\ \sigma_{zz} = 0 \quad (\text{CP}) \\ \sigma_{zz} = \sigma^\infty \nu \left(1 - \frac{2a^2}{r^2} \cos 2\theta\right) \quad (\text{DP}) \end{array} \right.$$

$$\chi = -\frac{\sigma^\infty}{2} a^2 \log r + \frac{\sigma^\infty}{4} r^2 + \frac{\sigma^\infty}{4} \left(-r^2 + 2a^2 - \frac{a^4}{r^2}\right) \cos 2\theta$$

Champ de déformations (DP)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr} = \frac{\sigma^\infty}{2} \frac{1+\nu}{E} \left(1 - 2\nu - \frac{a^2}{r^2} + \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}(1-\nu)\right) \cos 2\theta\right) \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2} \frac{1+\nu}{E} \left(1 - 2\nu + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\nu\right) \cos 2\theta\right) \\ \varepsilon_{r\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{2} \frac{1+\nu}{E} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right) \sin 2\theta \\ \varepsilon_{zz} = 0 \end{array} \right.$$

Champ de déplacements (DP)

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r = \frac{\sigma^\infty}{2} \frac{1+\nu}{E} \left((1-2\nu)r + \frac{a^2}{r} + \left(r - \frac{a^4}{r^3} + \frac{4a^2}{r}(1-\nu)\right) \cos 2\theta \right) \\ u_\theta = -\frac{\sigma^\infty}{2} \frac{1+\nu}{E} \left(r + \frac{a^4}{r^3} + \frac{2a^2}{r}(1-2\nu) \right) \sin 2\theta \\ u_z = 0 \end{array} \right.$$

TABLE 19.1 – Récapitulatif : plaque infinie percée d'un trou circulaire en traction simple (expressions simplifiées en contraintes planes (CP)) et en traction plane (solution exacte en déformations planes (DP)).

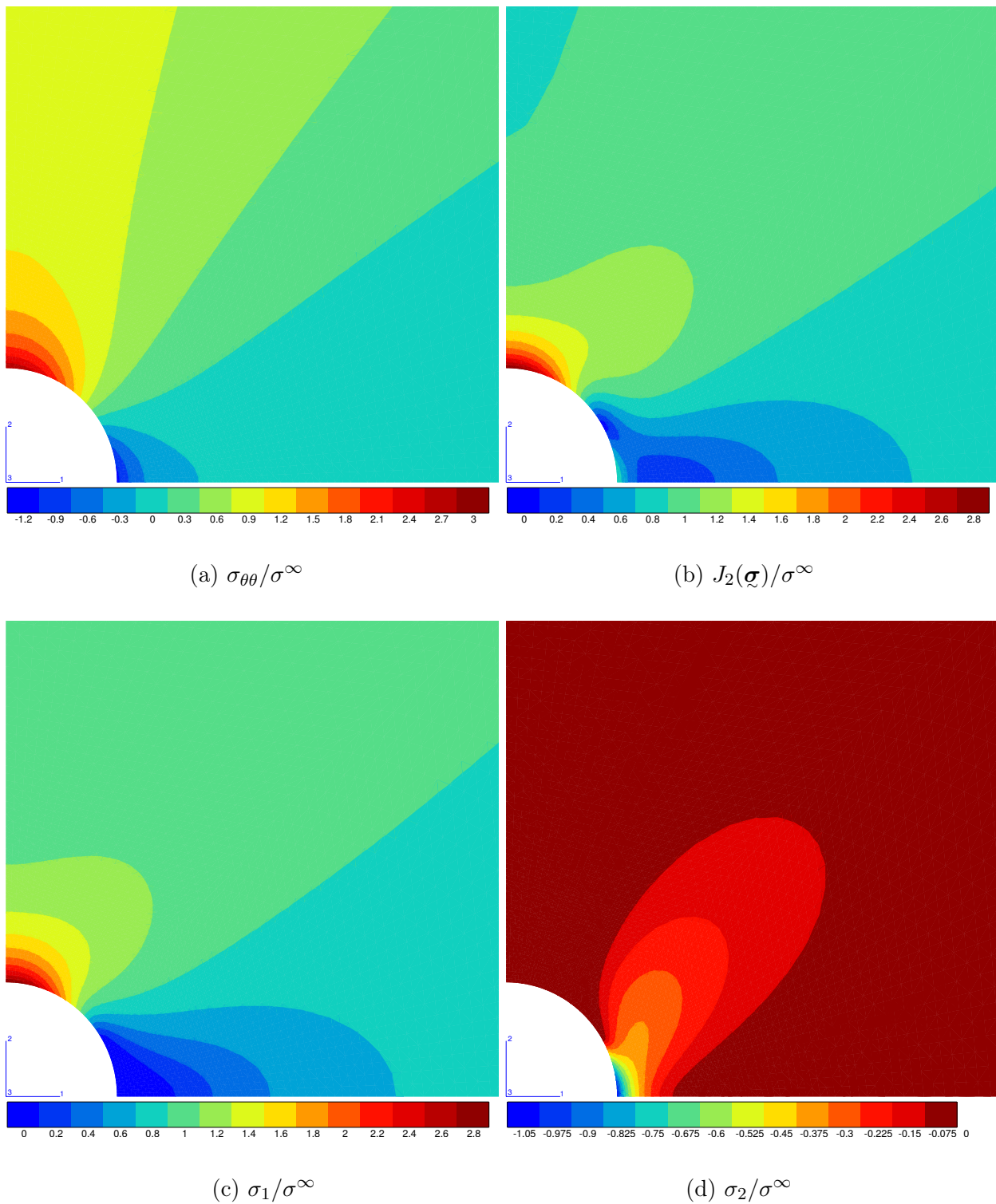


FIGURE 19.3 – Représentation par lignes de niveaux du champ de contraintes autour d'un trou dans une plaque en traction selon la direction 1. Les grandeurs représentées sont : (a) la composante $\sigma_{\theta\theta}$, (b) la contrainte équivalente de von Mises, (c) la plus grande contrainte principale en chaque point, (d) la plus petite contrainte principale en chaque point. Toutes les contraintes sont normalisées par la valeur de la contrainte axiale loin du trou. Pour des raisons de symétrie, un quart seulement de la plaque trouée est représenté.

de contraintes assure que ces hétérogénéités se développent seulement au voisinage du trou et que le champ suffisamment loin du trou peut être considéré comme homogène. Cette décroissance en fonction de r/a est visible sur la figure 19.2 où sont tracées les contraintes à partir du pôle et de l'équateur. Le champ de contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ est représenté sur la figure 19.3(a), ce qui permet de voir que cette composante est plus forte au bord du trou que partout ailleurs dans la plaque. Plus généralement, les cartes des contraintes principales des figures 19.3(c) et (d) montrent que celles-ci sont maximales au bord du trou. Il existe donc des surcontraintes en bord de trou, appelées aussi concentrations de contraintes. Elles jouent un rôle essentiel dans l'amorçage de la rupture et/ou l'apparition de la plasticité, dont l'étude fait l'objet de cette partie.

19.3.1 Facteur de concentration de contrainte

Donner la valeur de la contrainte orthoradiale² $\sigma_{\theta\theta}$ au bord du trou en fonction de l'angle θ . Indiquer à quel endroit cette contrainte est maximale et quelle valeur elle y prend. Calculer le facteur de concentration de contrainte défini par

$$K_t := \frac{\sigma_{\theta\theta}^{max}}{|\sigma^\infty|} \quad (19.27)$$

On distinguera la situation de traction simple $\sigma^\infty > 0$ de celle de compression simple $\sigma^\infty < 0$.

La contrainte orthoradiale vaut

$$\sigma_{\theta\theta}(r = a) = \sigma^\infty(1 - 2 \cos 2\theta) \quad (19.28)$$

au bord du trou. On distingue deux situations :

- **traction simple** : la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale en $\theta = \pm\pi/2$ et vaut trois fois la contrainte appliquée. Le facteur de concentration de contraintes vaut donc :

$$K_t^{\text{traction}} = 3$$

La contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ est minimale en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ où elle vaut $-\sigma^\infty$.

- **compression simple** : la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ et vaut $|\sigma^\infty|$. Le facteur de concentration de contraintes vaut donc :

$$K_t^{\text{compression}} = 1$$

La contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ est minimale en $\theta = \pm\pi/2$ où elle vaut $-3\sigma^\infty$.

Le facteur de concentration de 3 en traction montre l'affaiblissement qu'apporte la présence d'un trou dans une plaque. Il peut conduire à une rupture précoce de la plaque étudiée au paragraphe suivant. Les facteurs de concentration de contrainte se lisent aussi sur les courbes de la figure 19.2.

19.3.2 Plasticité et rupture

Donner les contraintes principales et la contrainte équivalente de von Mises au bord du trou en fonction de l'angle θ . En déduire à quel endroit et pour quelle valeur de la contrainte imposée σ^∞ la rupture ou la plasticité peuvent apparaître. Pour prévoir la rupture d'une plaque trouée constituée d'un matériau fragile, le critère de contrainte principale positive maximale est adopté (cf. paragraphe 4.4.3). Pour prévoir l'apparition de la plasticité dans une plaque métallique ductile, le critère de von Mises est utilisé (cf. paragraphe 4.4.5). La contrainte à rupture ou la limite d'élasticité du matériau constitutif de la plaque sont notées σ_0 . On demande de donner successivement ces valeurs de contraintes appliquées critiques pour deux situations de chargement distinctes, en fonction de σ_0 :

- **traction simple**, pour laquelle $\sigma^\infty > 0$;
- **compression simple**, pour laquelle $\sigma^\infty < 0$;

2. *Hoop stress* en anglais.

Dans le cas d'un matériau fragile, faire un dessin représentant schématiquement la forme et l'orientation de la fissure qui peut apparaître. On supposera pour cela que la fissure est orthogonale à la direction principale associée à la contrainte principale positive maximale.

La rupture d'une plaque en composite percée d'un trou et sollicitée en traction simple est illustrée sur la figure 19.5(a). Commenter cette figure. Commenter ensuite la figure 19.6 qui montre la rupture d'une plaque de béton multi-perforée sollicitée en compression.

Les composantes σ_{rr} et $\sigma_{r\theta}$ sont nulles en bord de trou de sorte que l'état de contrainte en tout point du bord de trou est un état de traction ou compression simple d'intensité $\sigma_{\theta\theta}$, seule contrainte principale non nulle. La direction principale associée est \underline{e}_θ . La contrainte équivalente de von Mises vaut donc :

$$J_2(\underline{\sigma}) = |\sigma_{\theta\theta}| \quad (19.29)$$

On envisage d'abord le cas de plaque trouée chargée en traction $\sigma^\infty > 0$. Au bord du trou, la contrainte principale est $\sigma_{\theta\theta}$. Elle est maximale en $\theta = \pm\pi/2$ et vaut $3\sigma^\infty$. La direction principale correspondante est \underline{e}_θ qui coïncide avec $\mp\underline{e}_1$ à cet endroit-là. Dans une plaque constituée d'un matériau fragile, une fissure perpendiculaire à \underline{e}_1 risque donc d'apparaître à partir de la charge appliquée :

$$\sigma_{rupture}^\infty = \frac{\sigma_0}{3} \quad (19.30)$$

Cette valeur représente aussi la limite du fonctionnement élastique d'une plaque ductile. La plasticité apparaît au même endroit $\theta = \pm\pi/2$ pour la même valeur critique de chargement.

On envisage ensuite le cas de la plaque trouée chargée en compression σ^∞ . Au bord du trou, la contrainte principale est maximale en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ et vaut $|\sigma^\infty|$. La direction principale correspondante est \underline{e}_θ qui coïncide avec $\pm\underline{e}_2$ à cet endroit-là. Dans une plaque constituée d'un matériau fragile, une fissure perpendiculaire à \underline{e}_2 risque donc d'apparaître à partir de la charge appliquée :

$$\sigma_{rupture}^\infty = -\sigma_0 \quad (19.31)$$

Dans le cas d'une plaque ductile, le comportement plastique se manifeste encore en $\theta = \pm\pi/2$ puisque la contrainte équivalente de von Mises prend les mêmes valeurs indépendamment du signe de σ^∞ d'après (19.29). La plasticité est donc plus précoce dans ce cas que la rupture et intervient pour la charge appliquée (19.30).

Les différentes situations de fissuration sont représentées sur la figure 19.4.

Les concentrations de contraintes représentent un danger majeur pour le fonctionnement des structures puisqu'elles multiplient les risques d'amorçage local de la rupture ou de la plasticité. Le facteur 3 rencontré dans le cas du trou dans une plaque est, à ce titre, remarquable.

Le facteur de concentration de contrainte est indépendant de la taille a du trou, c'est un résultat important. Les petits trous sont aussi dangereux que les gros trous! Ce raisonnement a toutefois des limites qui sont celles de la validité de la mécanique des milieux continus classique. On constate en effet que les plaques munies de trous plus petits sont en général plus résistantes à la rupture (cas de composites stratifiés dans (Lahellec et al., 2005)) ou à la plasticité (cas d'un acier dans (Bascoul and Maso, 1981)). Cet effet d'échelle se manifeste en fait lorsque la taille du trou devient comparable à celle des éléments de la microstructure du matériau (grains d'un polycristal, pli ou fibre d'un composite...). La prise en compte de ces effets d'échelle peut se faire de plusieurs manières :

- *approche statistique* : des défauts présents dans la microstructure des matériaux sont responsables des fluctuations de contraintes à rupture de plaques trouées fragiles (inclusions, porosités, état de surface...). Le nombre de défauts susceptibles de s'activer dépend du volume de la zone où les contraintes sont élevées. Ce volume dépend effectivement de la taille du trou. Si le volume de matière fortement sollicité est faible (petit trou), la probabilité de rencontrer un défaut critique est faible. La contrainte à rupture apparente de la plaque n'en sera que plus grande (Beremin, 1983).

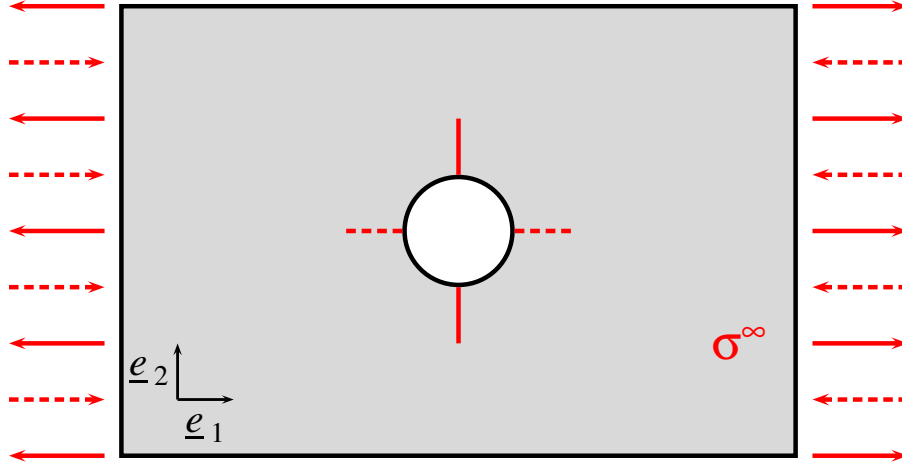


FIGURE 19.4 – Apparition de fissures dans une plaque trouée soumise à une sollicitation uniaxiale à ses extrémités. La direction de sollicitation est \underline{e}_1 . Les fissures en trait plein sont induites par un état de traction simple loin du trou ($\sigma^\infty > 0$). Les fissures en trait pointillé sont induites par un état de compression loin du trou ($\sigma^\infty < 0$).

- *calcul du gradient de contrainte* : le gradient de contrainte est sensible à la taille de l'inclusion. Calculons par exemple

$$K_{grad} := -\frac{1}{\sigma_{\theta\theta}} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} (r = a, \theta = \pi/2)$$

ce qui donne

$$aK_{grad} = \frac{7}{3}$$

Des critères portant sur K_{grad} ont été développés pour modéliser les effets d'échelles observés (Filippini, 2000).

- *milieux continus généralisés* : il est possible de construire des théories de milieux continus enrichis pour incorporer certains aspects de la microstructure des matériaux. La prise en compte de couples de contraintes dans la théorie des milieux de Cosserat conduit à un facteur de concentration de contrainte qui dépend explicitement de la taille du trou (Mindlin, 1962).

Ces approches ont en commun d'introduire une longueur interne ou longueur caractéristique, absente de la modélisation continue classique.

Des effets de taille ont également été constatés lors de la fatigue de plaques trouées ou entaillées (Rau and Burck, 1971).

19.4 Déformations et déplacements

D'après (19.23) et (19.24), on a

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \sigma^\infty \left(1 - \frac{2a^2}{r^2} \cos 2\theta\right)$$

Cette expression n'étant pas affine vis-à-vis des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2) , la résolution en contraintes planes n'est donc qu'approchée. Il est impossible d'associer au champ de contraintes calculé précédemment un champ de déplacements défini dans toute l'épaisseur de la plaque. La seule connaissance à laquelle on peut accéder est la restriction dans le plan $z = 0$ du champ de déplacements de la solution exacte du problème, grâce au fait que la satisfaction de la relation de compatibilité strictement "bidimensionnelle"

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0$$

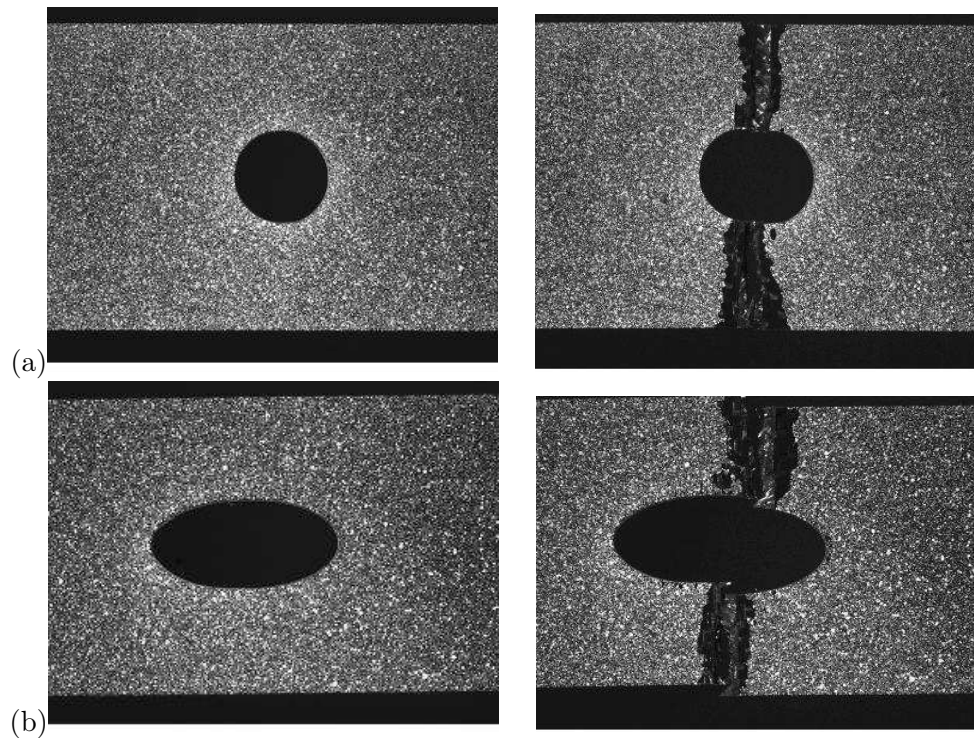


FIGURE 19.5 – Rupture fragile de plaques en composites à fibres de carbone et matrice de résine percée d’un trou circulaire (a) ou elliptique (b). Les plaques sont sollicitées en traction simple selon la direction horizontale. Les images de gauche montrent l’état initial tandis que les images de droite correspondent à l’état rompu. La surface des plaque est recouverte d’un mouchetis permettant de réaliser des mesures de champs de déplacements par corrélation d’images, non présentées ici (source LMA–CNRS, Marseille, cf. (Lahellec et al., 2005)).



FIGURE 19.6 – Multifissuration en compression d’une plaque de béton perforée d’un réseau périodique de trous cylindriques d’axes parallèles (source, K. Sab, LAMI–ENPC). L’appareillage visible est le capteur de déplacement ainsi que les plateaux de la machine de compression.

y est rigoureusement assurée.

Le travail d'intégration à venir sera donc mené dans un univers purement bidimensionnel (le plan $z = 0$) à l'aide d'un tenseur des déformations réduit à ses composantes $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r}$, sans utiliser en aucune façon la variable z .

19.4.1 Détermination partielle des déformations et des déplacements

A partir du champ de contraintes identifié en 19.2.3, donner le champ de déformations bidimensionnel correspondant.

Trouver alors les composantes de déplacements u_r et u_θ qui lui sont associées.

Les composantes de déformations sont liées aux composantes de contraintes par les lois de l'élasticité isotrope linéarisée :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}) \quad (19.32)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}) \quad (19.33)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \quad (19.34)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{r\theta} \quad (19.35)$$

La substitution des relations (19.23) à (19.25) dans les expressions précédentes fournit les déformations

$$E\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - \nu + (1 + \nu) \left(\left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta - \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{4a^2}{r^2} \cos 2\theta \right) \quad (19.36)$$

$$E\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - \nu + (1 + \nu) \left(\frac{a^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right) + \nu \frac{4a^2}{r^2} \cos 2\theta \right) \quad (19.37)$$

$$E\varepsilon_{zz} = -\nu\sigma^\infty \left(1 - \frac{2a^2}{r^2} \cos 2\theta \right) \quad (19.38)$$

$$E\varepsilon_{r\theta} = -(1 + \nu) \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \quad (19.39)$$

Ces composantes de déformation sont reliées aux composantes du vecteur déplacement par le biais de l'opérateur gradient en coordonnées cylindriques :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (19.40)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad (19.41)$$

$$2\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \quad (19.42)$$

La composante radiale de déplacement est évaluée en intégrant l'équation (19.40) :

$$Eu_r = \frac{\sigma^\infty}{2} \left((1 - \nu)r + (1 + \nu) \left(\frac{a^2}{r} + \left(r - \frac{a^4}{r^3} \right) \cos 2\theta \right) + \frac{4a^2}{r} \cos 2\theta \right) + f(\theta) \quad (19.43)$$

La composante orthoradiale est estimée ensuite en intégrant l'équation (19.41) :

$$Eu_\theta = -\frac{\sigma^\infty}{2} \left((1 + \nu) \left(1 + \frac{a^4}{r^4} \right) r + (1 - \nu) \frac{2a^2}{r} \right) \sin 2\theta - \int_0^\theta f(\theta) d\theta + g(r) \quad (19.44)$$

Ces expressions font intervenir des fonctions inconnues $f(\theta)$ et $g(r)$ à déterminer. Elles doivent alors être substituées dans la relation (19.42), ce qui fournit une équation différentielle portant sur ces fonctions inconnues :

$$f'(\theta) + rg'(r) + \int_0^\theta f(\theta) d\theta - g(r) = 0 \quad (19.45)$$

A l'évidence, la relation (19.45) est satisfaite par le couple de fonctions

$$f(\theta) = 0, \quad g(r) = 0$$

Le champ de composantes

$$Eu_r = \frac{\sigma^\infty}{2} \left((1-\nu)r + (1+\nu) \left(\frac{a^2}{r} + \left(r - \frac{a^4}{r^3} \right) \cos 2\theta \right) + \frac{4a^2}{r} \cos 2\theta \right) \quad (19.46)$$

$$Eu_\theta = -\frac{\sigma^\infty}{2} \left((1+\nu) \left(1 + \frac{a^4}{r^4} \right) r + (1-\nu) \frac{2a^2}{r} \right) \sin 2\theta \quad (19.47)$$

est donc un champ de déplacement solution pour le problème posé, dans le contexte indiqué. Dès lors, la résolution exhaustive de (19.45) ne fournira rien d'autre que le déplacement d'ensemble arbitraire qu'il est loisible d'ajouter aux expressions précédentes.

En effet, la dérivation de cette équation par rapport à r et à θ conduit respectivement aux deux équations

$$\frac{d}{dr}(rg'(r) - g(r)) = 0, \quad f''(\theta) + f(\theta) = 0$$

qui suffisent à déterminer

$$f(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta, \quad g(r) = Cr + D \quad (19.48)$$

Muni de ces expressions, on revient à la relation (19.45) qui exige alors que $B + D = 0$. Quelle est la signification de la partie du champ de déplacements trouvé (19.43) et (19.44) faisant intervenir les constantes d'intégration A, B, C ? Un changement de bases permet de le voir précisément :

$$\begin{aligned} \underline{u}^0 &= (A \cos \theta + B \sin \theta) \underline{e}_r + (B \cos \theta - A \sin \theta - Cr) \underline{e}_\theta \\ &= (A \cos \theta + B \sin \theta)(\cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2) + (B \cos \theta - A \sin \theta - Cr)(-\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2) \\ &= (A + Cr \sin \theta) \underline{e}_1 + (B - Cr \cos \theta) \underline{e}_2 \\ &= (A + CX_2) \underline{e}_1 + (B - CX_1) \underline{e}_2 \end{aligned} \quad (19.49)$$

Il s'agit donc d'un mouvement de corps rigide infinitésimal, composé d'une translation caractérisée par les constantes A et B , et d'une rotation infinitésimale d'axe \underline{e}_3 d'angle $-C$. C'est bien ce que l'on attend d'une procédure d'intégration du champ de déformation. Dans la suite, ce mouvement d'ensemble est fixé à 0 : $A = B = C = 0$.

19.4.2 Précision du contexte infinitésimal

Préciser les conditions de validité du contexte infinitésimal adopté dans ce chapitre, en fonction du chargement appliqué σ^∞ et des caractéristiques du matériau.

Le gradient de la transformation fait intervenir le gradient du champ de déplacements calculé précédemment. Les termes qui apparaissent peuvent systématiquement être majorés par un multiple de σ^∞/E puisqu'ils ne font intervenir que des fonctions bornées de r et de θ . Les déformations et rotations restent infinitésimales tant que

$$\frac{\sigma^\infty}{E} \ll 1$$

i.e. la même condition que pour la traction simple infinitésimale.

19.4.3 Déformée du trou

Donner, dans le contexte infinitésimal et en utilisant les expressions des déplacements u_r et u_θ trouvées précédemment, l'équation de la déformée du trou initialement circulaire, en fonction de la charge appliquée. Ce travail gagne à être réalisé en coordonnées cartésiennes dans le repère $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$.

Dessiner le trou initial et sa déformée. L'équation trouvée représente effectivement la déformée du trou dans une plaque mince, dans le plan $z = 0$ uniquement.

Calculer la variation relative de l'aire du trou après déformation.

Les déplacements au bord du trou sont

$$u_r(r = a) = \frac{\sigma^\infty}{E} a(1 + 2 \cos 2\theta) \quad (19.50)$$

$$u_\theta(r = a) = -\frac{\sigma^\infty}{E} 2a \sin 2\theta \quad (19.51)$$

On va donner l'équation de la déformée du trou dans le système de coordonnées associé à la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$. Ce changement de base pour les composantes de déplacement en $r = a$ se traduit par :

$$\begin{aligned} \underline{u} &= u_r \underline{e}_r + u_\theta \underline{e}_\theta \\ &= (u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta) \underline{e}_1 + (u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta) \underline{e}_2 \\ &= \frac{\sigma^\infty}{E} 3a \cos \theta \underline{e}_1 - \frac{\sigma^\infty}{E} a \sin \theta \underline{e}_2 \end{aligned} \quad (19.52)$$

La position actuelle (x_1, x_2) des points matériels appartenant au bord du trou s'exprime donc en fonction de leur position initiale (X_1, X_2) en tenant compte du fait que $(X_1 = a \cos \theta, X_2 = a \sin \theta)$:

$$x_1 = X_1 \left(1 + 3 \frac{\sigma^\infty}{E}\right), \quad x_2 = X_2 \left(1 - \frac{\sigma^\infty}{E}\right) \quad (19.53)$$

Comme ces points sont initialement sur le cercle d'équation $X_1^2 + X_2^2 = a^2$, on obtient l'équation de la surface déformée :

$$\frac{x_1^2}{\left(1 + \frac{3\sigma^\infty}{E}\right)^2} + \frac{x_2^2}{\left(1 - \frac{\sigma^\infty}{E}\right)^2} = a^2 \quad (19.54)$$

Cette déformée est illustrée par la figure 19.7 et comparée à la forme initiale. Il s'agit d'une ellipse dont le grand axe est dans la direction de traction. Remarquer que la forme du trou après déformation dépend du module de Young du matériau mais pas du coefficient de Poisson.

L'aire du trou déformé est celle de l'ellipse qui vaut

$$\pi ab = \pi \left(1 + \frac{3\sigma^\infty}{E}\right) \left(1 - \frac{\sigma^\infty}{E}\right) \simeq \pi \left(1 + 2 \frac{\sigma^\infty}{E}\right) a^2$$

puisque $\sigma^\infty/E \ll 1$. La variation relative d'aire est donc

$$\frac{\Delta S}{S_0} = 2 \frac{\sigma^\infty}{E} \quad (19.55)$$

19.5 Plaque trouée sollicitée en traction plane

Les contraintes et les déformations d'une plaque trouée sollicitée en conditions de déformations planes (DP) sont analysées dans ce paragraphe. Dans ces conditions, le chargement appliqué loin du trou est un état dit de traction plane présentée dans la première section. Contrairement au cas des contraintes planes, on va déterminer complètement les champs de contraintes, déformations et déplacements du problème.

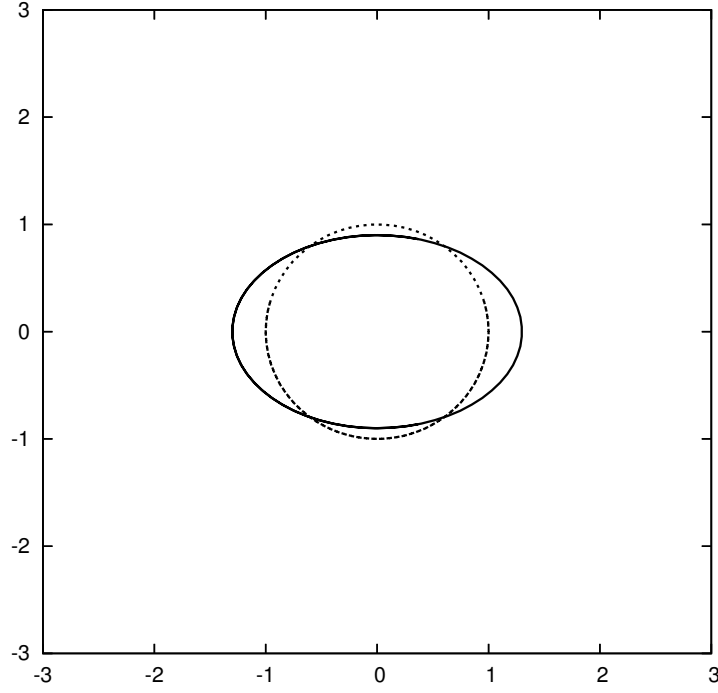


FIGURE 19.7 – Tracé de la déformée du trou initialement circulaire dans le plan $(X_1/a, X_2/a)$. Le chargement appliqué est $\sigma^\infty/E = 0.1$, valeur touchant les limites du contexte infinitésimal pour l'illustration. Le coefficient de Poisson utilisé est $\nu = 0.3$. La forme initiale est en trait pointillé tandis que la déformée est en trait plein.

19.5.1 Etude de la traction plane

Les conditions de déformations planes $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$ rendent impossible, en général, l'établissement d'un état de contraintes de traction simple dans une plaque homogène sollicitée dans le plan $(1, 2)$. C'est pourquoi l'on introduit l'état dit de traction plane correspondant à

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma^\infty \underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_1 + \sigma_{zz} \underline{\mathbf{e}}_z \otimes \underline{\mathbf{e}}_z \quad (19.56)$$

qui fait intervenir une composante de contrainte σ_{zz} supplémentaire par rapport à la traction simple (19.8). Calculer cette composante en fonction de σ^∞ et des propriétés du matériau.

En déformations planes, la composante σ_{zz} se déduit de la relation d'élasticité isotrope linéarisée suivante :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{zz} - \frac{\nu}{E} \text{trace } \boldsymbol{\sigma}$$

Compte tenu de l'hypothèse $\varepsilon_{zz} = 0$, on obtient

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

En traction plane, cela donne

$$\sigma_{zz} = \nu \sigma^\infty \quad (19.57)$$

et finalement

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma^\infty (\underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_1 + \nu \underline{\mathbf{e}}_z \otimes \underline{\mathbf{e}}_z) \quad (19.58)$$

Les autres relations d'élasticité linéaire isotrope conduisent aux déformations suivantes

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = (1+\nu) \frac{\sigma^\infty}{E} ((1-\nu) \underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_1 - \nu \underline{\mathbf{e}}_2 \otimes \underline{\mathbf{e}}_2) \quad (19.59)$$

qui s'intègrent en

$$\underline{u} = (1 + \nu) \frac{\sigma^\infty}{E} ((1 - \nu) X_1 \underline{e}_1 - \nu X_2 \underline{e}_2) \quad (19.60)$$

à un mouvement bidimensionnel infinitésimal de corps rigide près.

19.5.2 Plaque trouée en déformations planes

Montrer qu'il est possible d'utiliser le champ de contraintes construit dans la partie 19.2 (du moins les composantes $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$) pour trouver la solution exacte et complète du problème de la traction plane d'une plaque trouée. Pour cela, on proposera d'abord un champ de contraintes statiquement admissible permettant de construire un champ de déformations compatible. La compatibilité du champ de déformations sera établie en construisant explicitement les champs de déplacements solutions.

Le champ de contraintes

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right) \cos 2\theta \quad (19.61)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \quad (19.62)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right) \sin 2\theta \quad (19.63)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma^\infty \nu \left(1 - \frac{2a^2}{r^2} \cos 2\theta\right) \quad (19.64)$$

obtenu à partir des équations (19.23) à (19.25) en rajoutant la composante $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$ nécessaire en conditions de déformations planes, vérifie les conditions d'équilibre statique. En effet, les composantes $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ et $\sigma_{r\theta}$ dérivent de la fonction de contraintes (19.26) tandis que la composante σ_{zz} est indépendante de z . Les relations d'élasticité isotrope linéarisées permettent d'en déduire le champ des déformations associé :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma^\infty}{2} \frac{1 + \nu}{E} \left(1 - 2\nu - \frac{a^2}{r^2} + \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}(1 - \nu)\right) \cos 2\theta\right) \quad (19.65)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2} \frac{1 + \nu}{E} \left(1 - 2\nu + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\nu\right) \cos 2\theta\right) \quad (19.66)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{2} \frac{1 + \nu}{E} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right) \sin 2\theta \quad (19.67)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (19.68)$$

La procédure d'intégration mise en œuvre au paragraphe 19.4.1 est utilisée à nouveau pour construire les champs de déplacements dont dérivent les déformations précédentes. En particulier, les relations de compatibilité (19.40) et (19.41) conduisent à

$$u_r = \frac{\sigma^\infty}{2} \frac{1 + \nu}{E} \left((1 - 2\nu)r + \frac{a^2}{r} + \left(r - \frac{a^4}{r^3} + \frac{4a^2}{r}(1 - \nu)\right) \cos 2\theta \right) + f(\theta) \quad (19.69)$$

$$u_\theta = -\frac{\sigma^\infty}{2} \frac{1 + \nu}{E} \left(r + \frac{a^4}{r^3} + \frac{2a^2}{r}(1 - 2\nu) \right) \sin 2\theta - \int f(\theta) d\theta + g(r) \quad (19.70)$$

Lorsque ces composantes sont introduites dans (19.42), l'équation aux dérivées partielles (19.45) portant sur les fonctions inconnues $f(\theta), g(r)$ est obtenue, dont une solution est $f = g = 0$, retenue ici.

A ces composantes de déplacement, il faut ajouter : $u_z = 0$,

compatible avec les conditions de déformations planes $\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = 0$. Ceci achève la résolution du problème d'une plaque trouée en traction plane. Ces résultats sont consignés dans le tableau 19.1.

La déformée du trou dans le cas des déformations planes s'obtient en suivant la même méthodologie que pour les contraintes planes, à ceci près que, cette fois-ci, la déformée obtenue est valable quelle

que soit la cote z et non plus seulement pour $z = 0$. Il s'agit à nouveau d'une ellipse de grand axe $(1 + 3(1 - \nu^2)\sigma^\infty/E)$, dans la direction de traction, et de petit axe $(1 - (1 - \nu^2)\sigma^\infty/E)$. Contrairement au cas des contraintes planes, la déformée du trou dépend aussi du coefficient de Poisson.

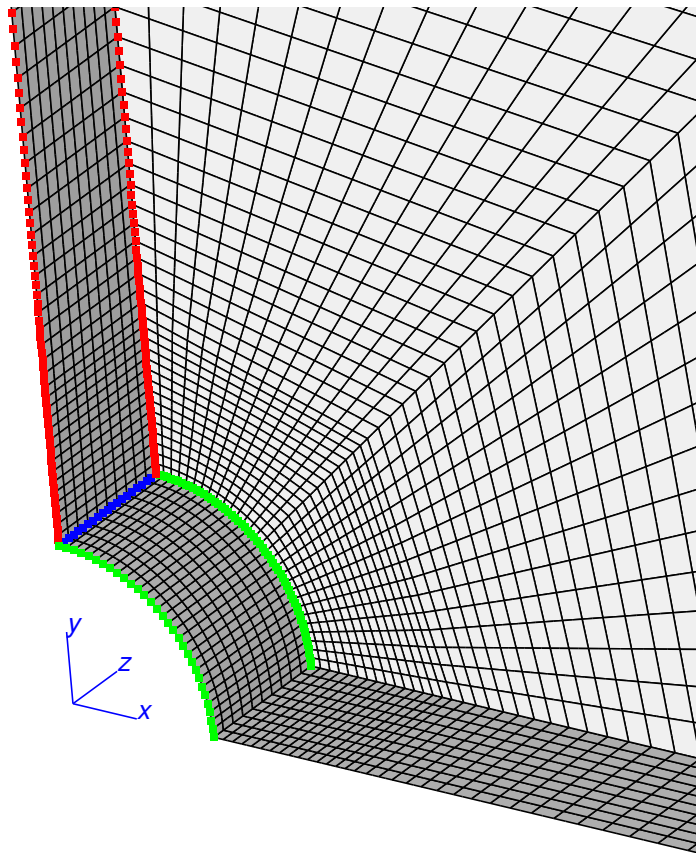


FIGURE 19.8 – Maillage par éléments finis d'un huitième de plaque trouée avec $h/a = 1$. Des lignes ont été soulignées, le long desquelles les profils de contraintes et de déformations peuvent être étudiées.

19.6 Qualité des estimations proposées vis-à-vis de simulations numériques tridimensionnelles

Le calcul numérique permet de s'approcher aussi près qu'on le souhaite de la solution exacte des problèmes de plaques trouées de différentes épaisseurs. On propose, dans le cas de la traction simple, de comparer ces résultats numériques avec, d'une part, les estimations analytiques proposées sous l'hypothèse de contraintes planes, et, d'autre part, la solution trouvée en déformations planes. L'outil numérique employé est la méthode des éléments finis. Il suffit pour le calcul numérique de considérer un huitième de plaque trouée pour des raisons de symétrie. On rappelle que le trou circulaire est de rayon a . L'épaisseur de la plaque est de $2h$. Le plan $z = 0$ à l'intérieur de la plaque est un plan de symétrie, la composante de déplacement u_z des points de ce plan peut être prise nulle. De même, le plan $X_1 = 0$ (resp. $X_2 = 0$) est un plan de symétrie, la composante de déplacement u_1 (resp. u_2) peut être prise nulle. Un déplacement dans la direction 1 est imposé loin du trou. Avec ces conditions aux limites, le mouvement de corps rigide est fixé. Les calculs sont réalisés pour une plaque de dimensions finies mais suffisamment grandes, dans le plan $(1, 2)$, par rapport au rayon a du trou pour que la solution obtenue ne puisse plus être distinguée pratiquement de celles obtenues avec des plaques plus grandes. Un rapport $L/a = 15$ s'avère suffisant où $2L$ est la plus grande dimension de la plaque. Les calculs ont été réalisés pour différentes valeurs du rapport h/a , à savoir 0.1, 1 et 10. Une portion du maillage par éléments finis utilisé pour $h/a = 1$ est illustrée sur la figure 19.8. Pour compléter la donnée des

conditions aux limites, la surface $z = h$, ainsi que la surface latérale et le bord du trou sont libres de tout effort.

La figure 19.9 illustre les profils de contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ le long des deux lignes rouges de la figure 19.8 qui sont perpendiculaires à l'axe de traction, situées l'une sur la surface libre, l'autre à l'intérieur de la plaque. Les expressions (19.23), (19.24) et (19.25) des contraintes obtenues dans des conditions de contraintes planes s'avèrent être d'excellentes estimations des contraintes réelles dans une plaque de faible épaisseur ($h/a = 0.1$, figure 19.9(a)), aussi bien à l'intérieur que sur la surface libre. Au contraire, lorsque la taille du trou est comparable à l'épaisseur, les valeurs déduites de ces expressions se distinguent notablement de la solution réelle ($h/a = 1$, figure 19.9(b)). Pour des plaques épaisses ($h/a = 10$, figure 19.9(c)), l'expression (19.24) est en bon accord avec l'état de contrainte réelle à l'intérieur mais s'en distingue à la surface libre. Des conclusions similaires peuvent être tirées de l'observation des profils de contraintes au bord du trou à l'intérieur et sur la surface libre (lignes vertes de la figure 19.8). Ces profils issus de la simulation numérique sont comparés à l'expression (19.24) sur la figure 19.10 pour différentes épaisseurs de plaques.

Les champs de contraintes autour du trou sont illustrés sous forme de lignes de niveaux dans le cas d'une plaque $h/a = 1$ sur la figure 19.11. La concentration de contrainte équivalente de von Mises à l'équateur est visible sur la figure 19.11(a). La dépendance des contraintes par rapport à la variable z apparaît aussi grâce à la vue en coupe de cette même figure. La surface visible est la surface libre tandis que l'intérieur de la plaque est à l'arrière-plan. La figure 19.11(b) montre la contrainte σ_{zz} qui, si elle est nulle bien sûr en surface, se développe au bord du trou à l'intérieur de la plaque. Certes, cette composante ne dépasse pas le tiers de la contrainte appliquée. Elle est positive (traction) à l'équateur et négative (compression) au pôle. L'existence d'une dépendance en z des champs de contraintes et, par conséquent, des déformations implique le développement d'un champ de déplacements u_z près du trou, ce qui est visible sur la figure 19.12. En surface libre, le bord du trou se creuse légèrement à l'équateur et fait légèrement saillie au pôle. La surface libre ne reste donc pas plane lors d'un tel essai.

Par contre, la dépendance en z du champ de contraintes devient négligeable dans le cas d'une plaque mince comme l'illustre la figure 19.13.

La dépendance en z des composantes de déformations en bord de trou fait l'objet de la figure 19.14. Les déformations ε_{rr} , $\varepsilon_{\theta\theta}$ et ε_{zz} obtenues par simulation numérique sont tracées le long de la ligne bleue (équateur) du maillage de la figure 19.8, en fonction de la cote z . Lorsque la plaque est mince par rapport à la taille du trou ($h/a = 0.1$, figure 19.14(a)), ces déformations ne dépendent quasiment pas de z et les valeurs trouvées sont conformes aux prédictions (19.36) à (19.38) obtenues dans le contexte des contraintes planes (CP). Ce n'est plus le cas lorsque la plaque est épaisse ($h/a = 10$, figure 19.14(c)). Dans ce cas, c'est la solution obtenue en déformations planes (DP), à savoir les expressions (19.65) à (19.68), qui s'approchent le plus de l'état des déformations au cœur de la plaque, tandis que les expressions de type (CP) restent pertinentes en surface. Dans la situation intermédiaire ($h/a = 1$, figure 19.14(b)), les expressions de type CP fournissent une bonne estimation mais la composante ε_{zz} commence à se distinguer de la composante ε_{rr} au cœur de la plaque. Ce constat justifie la règle d'ingénieur courante selon laquelle les plaques minces trouées sont plutôt en situations de contraintes planes, tandis que les plaques épaisses sont plus proches d'un état de déformations planes.

19.7 Trou elliptique dans une plaque

Une plaque infinie est percée d'un trou cylindrique de forme elliptique caractérisée par les paramètres a (demi grand axe) et b (demi petit axe), $0 < b < a$, comme sur la figure 19.15. Le grand axe de l'ellipse est parallèle à l'axe 1. La plaque est soumise, loin du trou, à un effort de traction simple $\sigma^\infty > 0$ selon une direction faisant un angle α avec l'axe 1. On s'interroge sur l'état de contrainte autour du trou et sur le facteur de concentration de contrainte introduit par la présence du trou. La résolution complète de ce problème³ est plus délicate que dans le cas du trou circulaire. Seuls quelques éléments de la solution sont étudiés ici, tirés des traités (Rekatch, 1980; Kachanov et al., 2003).

3. Elle a été obtenue par Kolossov en 1910 et Inglis en 1913 (Inglis, 1913). Pour un exposé plus complet de la solution du problème d'Inglis, le lecteur est renvoyé à la référence (Timoshenko and Goodier, 1970) et (Rekatch, 1980).

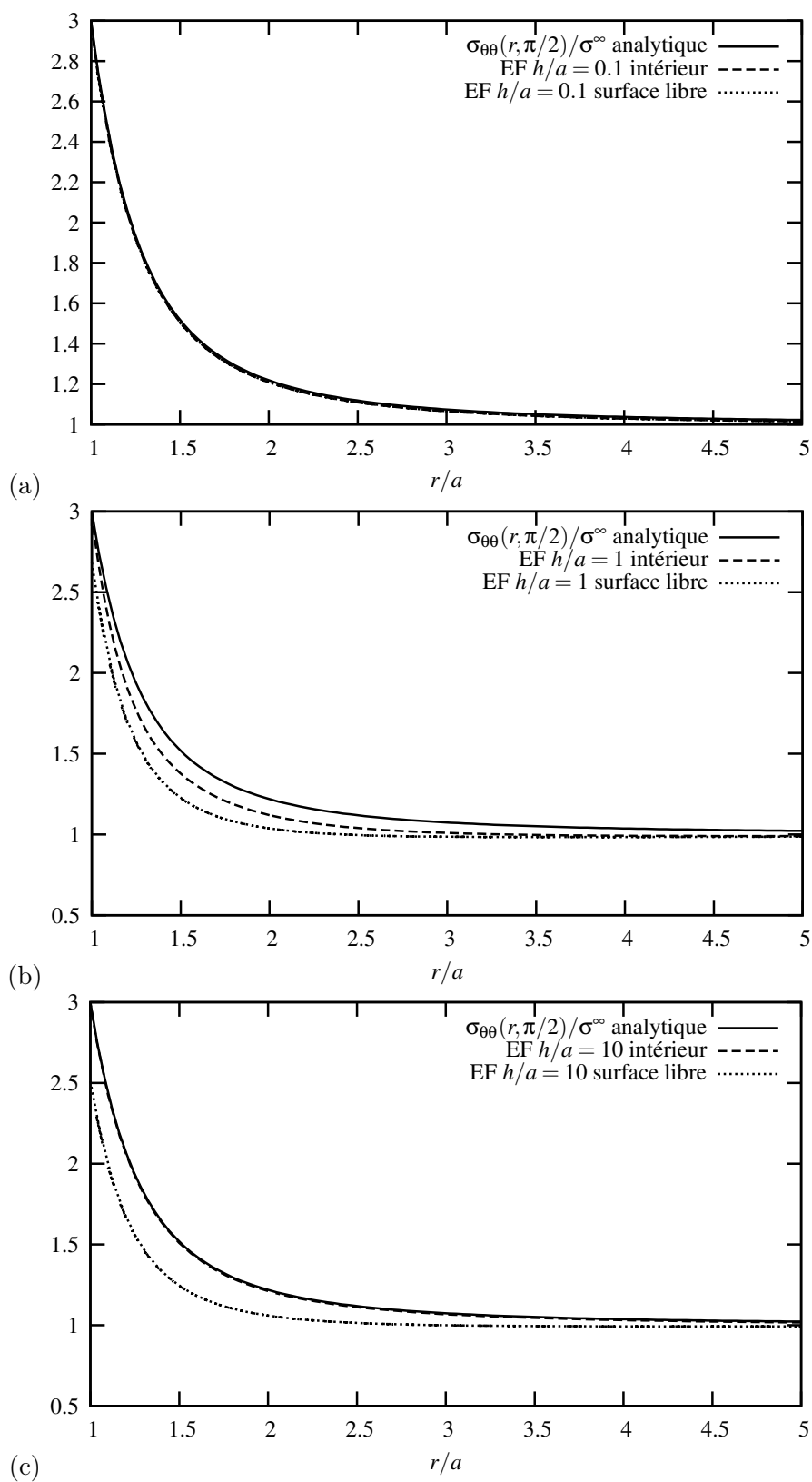


FIGURE 19.9 – Comparaison entre le champ de contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ donné analytiquement par (19.24) et les résultats de calculs par éléments finis (EF) pour des plaques trouées d'épaisseurs différentes : (a) $h/a = 0.1$, (b) $h/a = 1$, (c) $h/a = 10$. Les profils de contraintes sont donnés le long de deux lignes d'équations $\theta = \pi/2$ et $z = 0$ (intérieur, ligne située dans le plan de symétrie normal à l'axe z) ou $z = h$ (surface libre), lignes rouges de la figure 19.8.

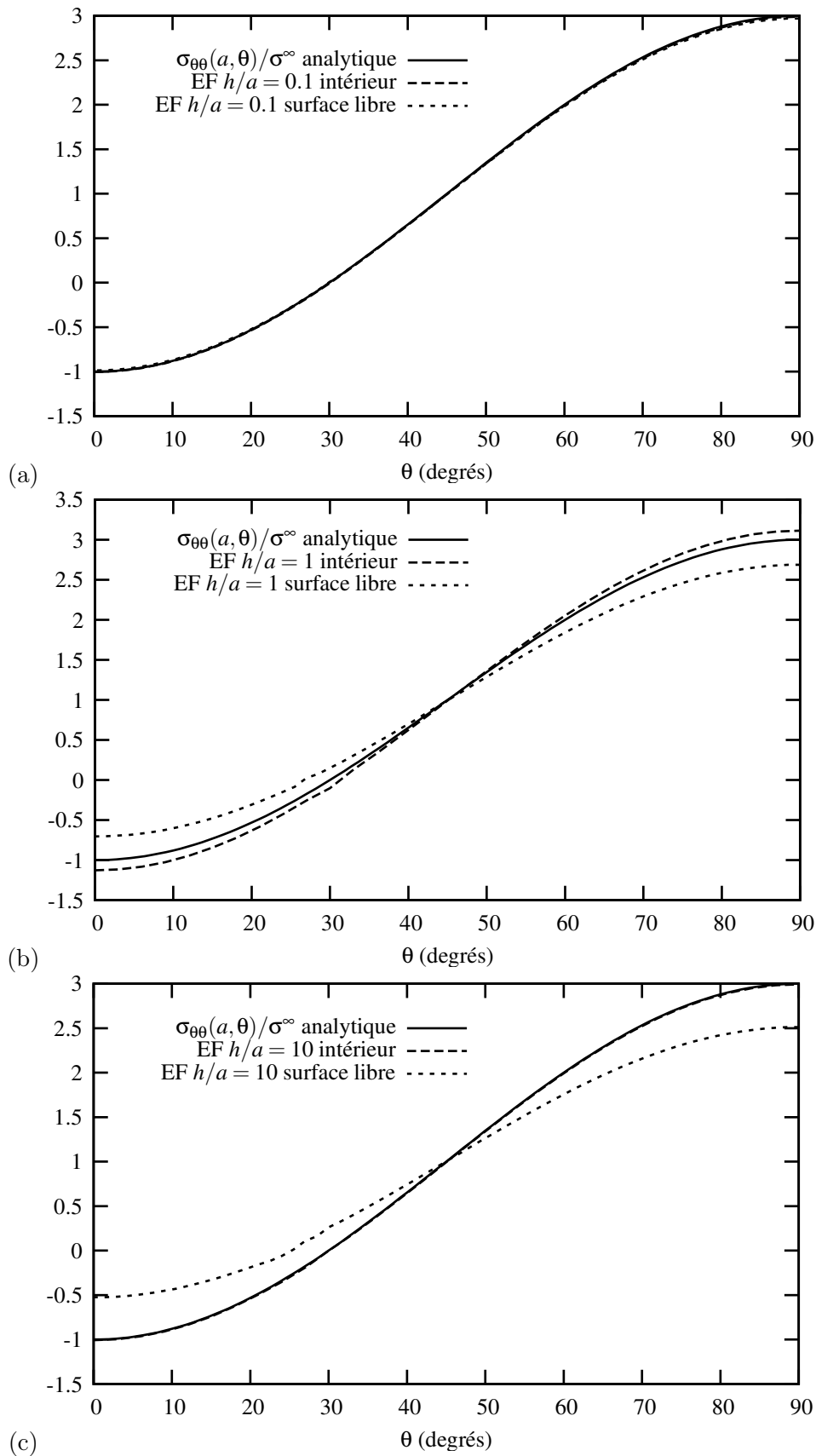


FIGURE 19.10 – Comparaison entre le champ de contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ donné analytiquement par (19.24) et les résultats de calculs par éléments finis (EF) pour des plaques trouées d'épaisseurs différentes : (a) $h/a = 0.1$, (b) $h/a = 1$, (c) $h/a = 10$. Les profils de contraintes sont donnés au bord du trou, le long de deux lignes d'équations $r = a$ et $z = 0$ (intérieur, ligne située dans le plan de symétrie normal à l'axe z) ou $z = h$ (surface libre), lignes vertes de la figure 19.8.

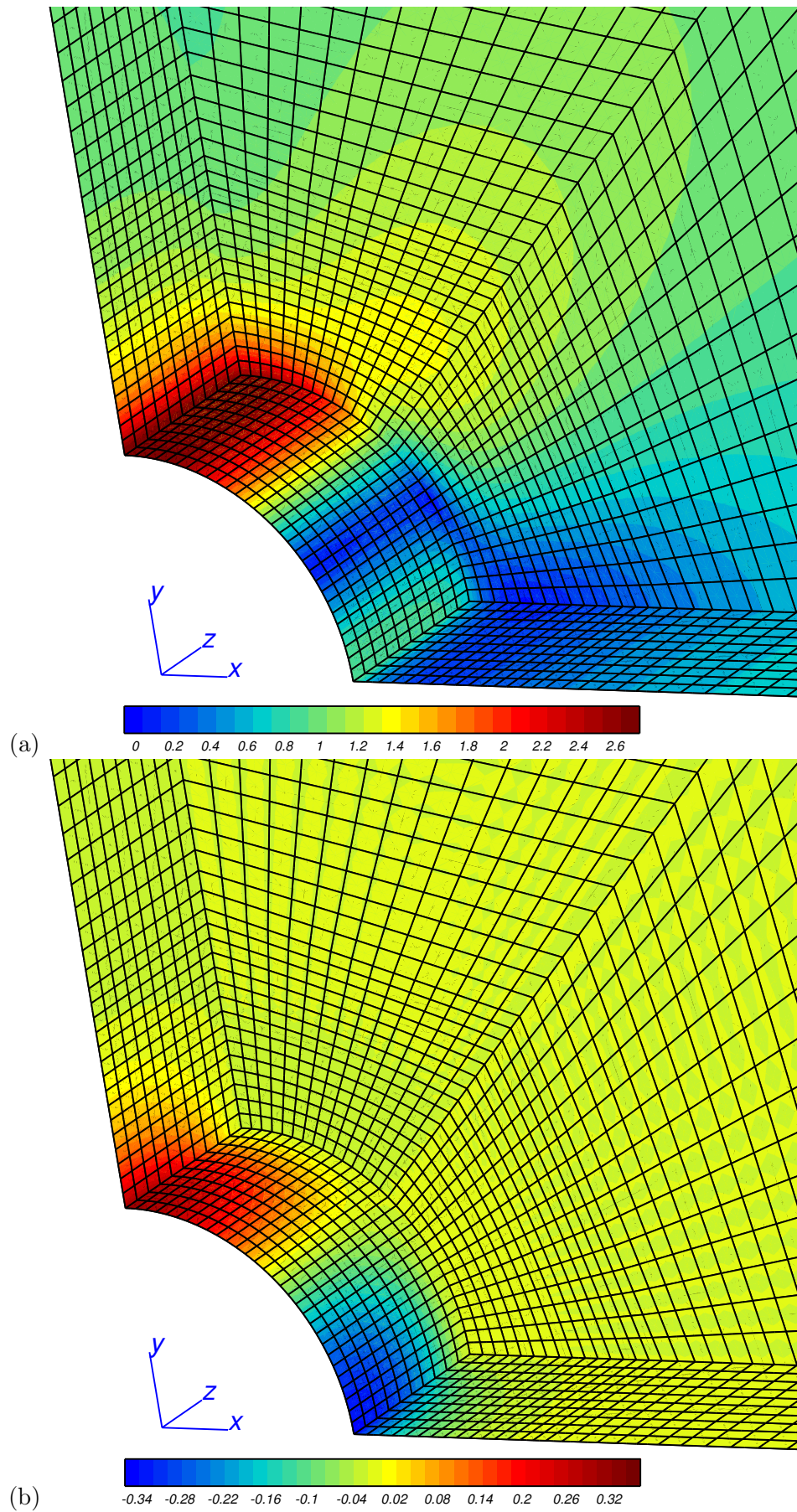


FIGURE 19.11 – Champs de contraintes autour du trou dans une plaque trouée telle que $h/a = 1$, obtenus numériquement par la méthode des éléments finis : (a) contrainte équivalente de von Mises, (b) contrainte σ_{zz} . Les contraintes sont normalisées par la valeur σ^∞ .

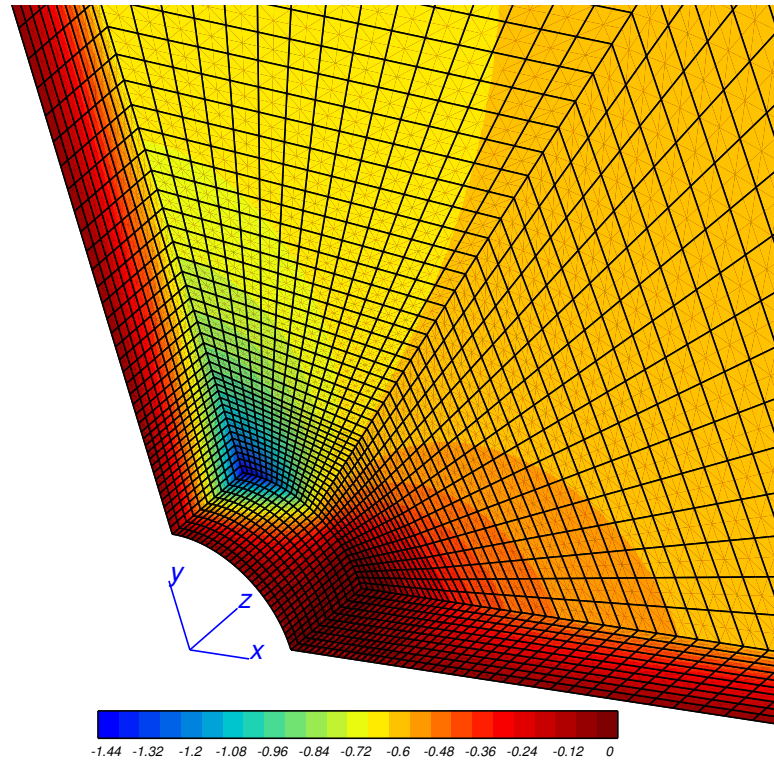


FIGURE 19.12 – Champ de déplacements u_z autour du trou dans une plaque trouée telle que $h/a = 1$, obtenu numériquement par la méthode des éléments finis. Les valeurs sont normalisées par $h\sigma^\infty/E$.

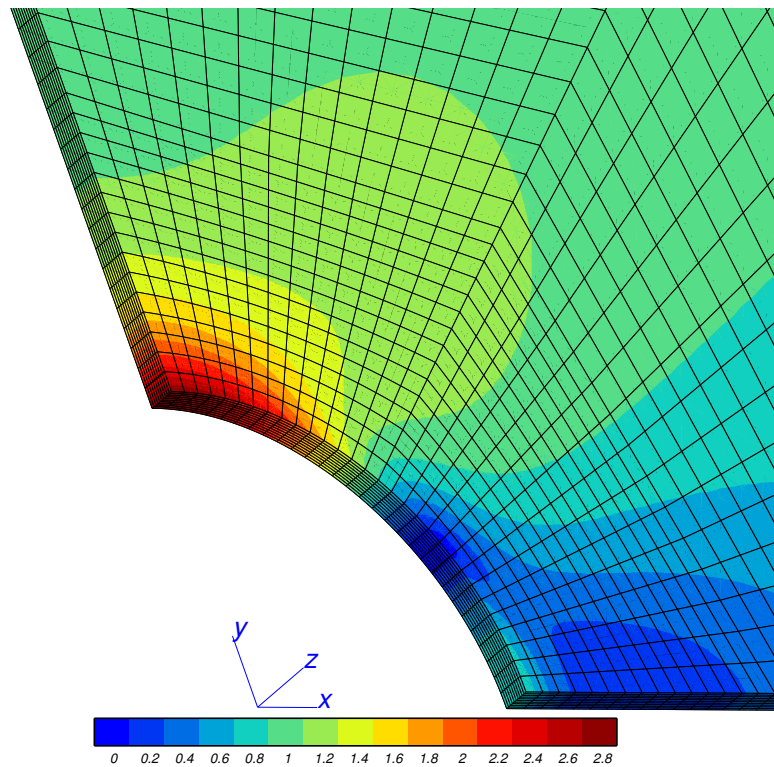


FIGURE 19.13 – Champ de contrainte équivalente de von Mises autour du trou dans une plaque mince trouée telle que $h/a = 0.1$, obtenu numériquement par la méthode des éléments finis. Les valeurs sont normalisées par σ^∞ .

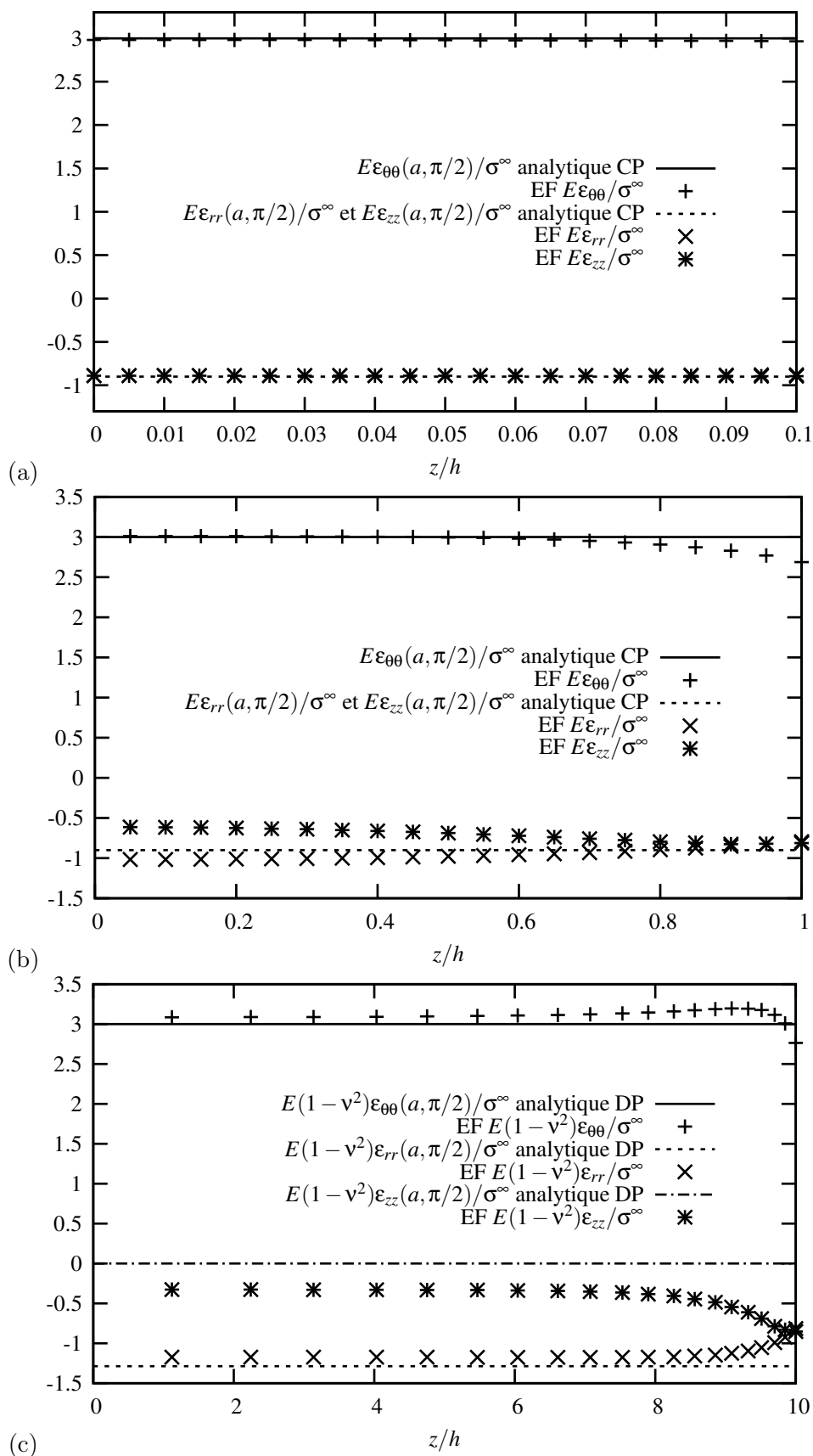


FIGURE 19.14 – Profils des déformations le long de la ligne d'équation $(r = a, \theta = \pi/2)$ pour des plaques trouées telles que (a) $h/a = 0.1$, (b) $h/a = 1$, (c) $h/a = 10$. Les résultats sont obtenus numériquement par la méthode des éléments finis. Ils sont comparés aux expressions simplifiées des déformations en contraintes planes (CP) ou à la solution du problème en déformations planes (DP).

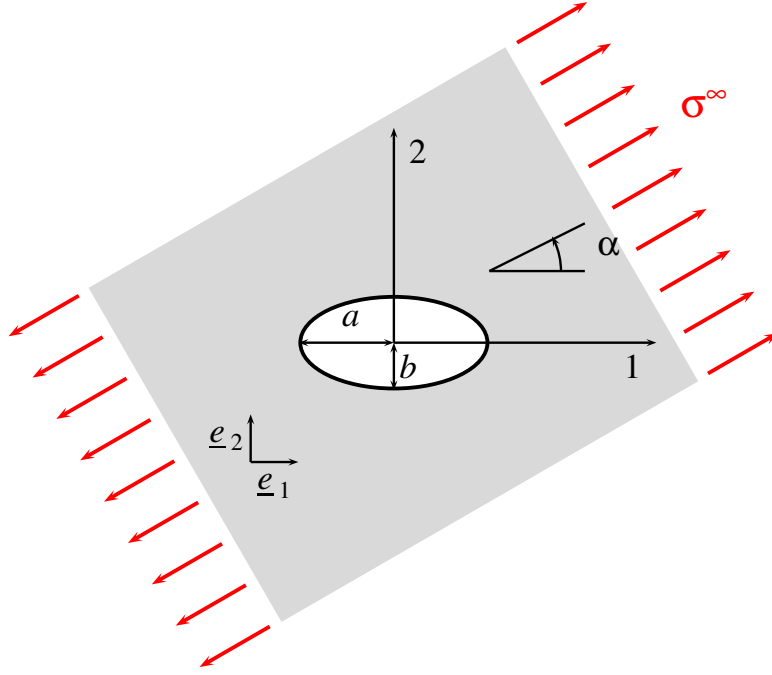


FIGURE 19.15 – Plaque percée d’un trou elliptique et soumise, loin du trou, à une sollicitation de traction simple d’intensité σ^∞ , inclinée d’un angle α par rapport au grand axe de l’ellipse.

19.7.1 Contrainte au bord du trou elliptique

On adopte la représentation paramétrique suivante des points du bord du trou elliptique représenté sur la figure 19.15 :

$$X_1 = a \cos \theta, \quad X_2 = b \sin \theta \quad (19.71)$$

Dans le contexte des contraintes planes, justifier qu’il n’existe, au bord du trou elliptique, qu’une seule contrainte principale non nulle que l’on exprimera à l’aide de $\underline{\sigma}$ et d’un vecteur unitaire adapté (sans explicitation détaillée). Dans la suite on note $\bar{\sigma}$ cette contrainte principale, en vue de l’application d’un critère de rupture fragile.

Le bord du trou est libre d’effort. Le vecteur-contrainte est donc nul en chaque point du bord. Dans le repère local $(\underline{m}, \underline{n})$ où \underline{m} est tangent à l’ellipse et \underline{n} normal, et sous l’hypothèse de contraintes planes, seule la composante $\sigma_{mm} = \underline{m} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{m} = \bar{\sigma}$ est non nulle.

Lorsque la plaque trouée est soumise à une traction simple selon une direction faisant un angle α avec l’axe 1, on admettra que $\bar{\sigma}$ vaut, en un point (X_1, X_2) de l’ellipse, caractérisé par le paramètre θ de (19.71) :

$$\bar{\sigma} = \sigma^\infty \frac{1 - m^2 + 2m \cos 2\alpha - 2 \cos 2(\theta - \alpha)}{1 - 2m \cos 2\theta + m^2} \quad (19.72)$$

L'expression ⁴ fait intervenir la quantité suivante, fonction des paramètres de l'ellipse :

$$m = \frac{a-b}{a+b}, \quad 0 \leq m \leq 1 \quad (19.73)$$

Compte tenu de la périodicité de $\bar{\sigma}$, l'étude doit être menée *a priori* pour $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$. Toutefois, l'invariance du problème vis-à-vis de la transformation $(\alpha, \theta) \rightarrow (-\alpha, -\theta)$ permet de se limiter à $\alpha \in [0, \pi/2]$.

19.7.2 Cas d'une sollicitation perpendiculaire au grand axe de l'ellipse

On considère d'abord le cas $\alpha = \pi/2$, c'est-à-dire une traction dans la direction 2, perpendiculaire au grand axe de l'ellipse. Préciser alors $\bar{\sigma}$ et calculer la contrainte maximale $\bar{\sigma}^{max}$ et la contrainte minimale $\bar{\sigma}^{min}$. Remarquer que σ^{min} est indépendante de m et donc des paramètres de l'ellipse.

A quel endroit ces valeurs extrémales sont-elles atteintes ?

Le facteur de concentration de contrainte K_t est toujours défini par (19.27). Le calculer pour le trou elliptique en fonction de m puis en fonction du rapport b/a .

On étudie ensuite les cas particuliers suivants :

Trou circulaire

Retrouver les résultats établis au paragraphe 19.3.1, à ceci près que la direction de traction est ici l'axe 2 au lieu de l'axe 1.

Ellipse infiniment aplatie

Que devient le facteur de concentration de contrainte K_t , pour une ellipse de plus en plus aplatie, c'est-à-dire lorsque $b/a \rightarrow 0$, autrement dit $m \rightarrow 1$.

Quelle situation physique ce cas asymptotique évoque-t-il pour vous ?

Que suggère l'analyse précédente à propos du tenseur des contraintes dans cette circonstance ?

Pour une traction dans la direction 2, on a $\alpha = \pi/2$ et la contrainte au bord du trou donnée par (19.72) vaut

$$\bar{\sigma} = \sigma^\infty \frac{1 - m^2 - 2m + 2 \cos 2\theta}{1 - 2m \cos 2\theta + m^2} \quad (19.74)$$

La dérivée de cette fonction de θ est

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\theta} = -4\sigma^\infty \sin 2\theta \frac{1 + m - m^2 - m^3}{(1 - 2m \cos 2\theta + m^2)^2} \quad (19.75)$$

Cette fonction est du signe de $-\sin 2\theta$, en tenant compte du fait que $0 \leq m \leq 1$. La contrainte $\bar{\sigma}$ est donc croissante pour $\theta \in [-\pi/2, 0]$ et décroissante pour $\theta \in [0, \pi/2]$. Compte tenu de la périodicité de

4. Dans son article original, Inglis donne la relation (19.72) sous la forme équivalente suivante :

$$\bar{\sigma} = \sigma^\infty \frac{\sinh 2\alpha_0 + \cos 2\alpha - e^{2\alpha_0} \cos 2(\alpha - \theta)}{\cosh 2\alpha_0 - \cos 2\theta}$$

car il utilise un système de coordonnées curvilignes dites elliptiques :

$$x = c \cosh \alpha_0 \cos \theta, \quad y = c \sinh \alpha_0 \sin \theta$$

constitué d'un réseau orthogonal d'ellipses et d'hyperboles d'équations respectives

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \alpha_0} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \alpha_0} = 1, \quad \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \theta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \theta} = 1$$

Lorsque (x, y) appartient au bord du trou, on a $c \cosh \alpha_0 = a$ et $b = c \sinh \alpha_0$. On vérifie alors que l'expression précédente est effectivement équivalente à (19.72). Le lecteur est renvoyé à la référence (Timoshenko and Goodier, 1970) pour un usage plus systématique des coordonnées elliptiques.

$\bar{\sigma}$, les contraintes maximale et minimale sont

$$\bar{\sigma}^{max} = \bar{\sigma}(\theta = 0) = \frac{3+m}{1-m}\sigma^\infty \quad (19.76)$$

$$\bar{\sigma}^{min} = \bar{\sigma}(\theta = \frac{\pi}{2}) = -\sigma^\infty \quad (19.77)$$

La contrainte est donc maximale au bord du trou en $r = a$ ($\theta = 0$) et minimale en $r = b$ ($\theta = \pm \frac{\pi}{2}$). C'est une situation comparable au cas du trou circulaire déjà traité. On retrouve d'ailleurs le cas circulaire pour $m = 0$ pour lequel $\bar{\sigma}^{max} = 3\sigma^\infty$.

Dans le cas du trou elliptique en traction simple, le facteur de concentration de contrainte vaut donc :

$$K_t := \frac{\bar{\sigma}_t^{max}}{\sigma^\infty} = \frac{3+m}{1-m} = 1 + 2\frac{a}{b} \quad (19.78)$$

On retrouve le facteur de concentration de contrainte $K_t = 3$ pour le trou circulaire. Pour $b/a = 1/2$, il vaut 5, ce qui correspond à une concentration de contrainte très sévère.

On peut utiliser ces valeurs de contraintes pour prévoir la rupture d'une plaque constituée d'un matériau fragile, percée d'un trou elliptique et sollicitée en traction simple, comme sur la figure 19.5(b).

On exprime parfois le facteur K_t pour le trou elliptique en fonction du rayon de courbure R de l'ellipse au point ($X_1 = 0, X_2 = \pm a$) qui vaut

$$R = \frac{b^2}{a} \quad (19.79)$$

de sorte que

$$K_t = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{R}} \quad (19.80)$$

La concentration de contrainte devient d'autant plus sévère que l'ellipse est aplatie, ou, de manière équivalente, que le rayon de courbure est petit. A la limite,

$$\lim_{b/a \rightarrow 0} K_t = \lim_{R \rightarrow 0} K_t = \infty$$

L'ellipse infiniment aplatie fait penser à une fissure. L'analyse précédente suggère l'existence d'une singularité des contraintes en pointe de fissure. Nous reviendrons plus précisément sur ces remarques dans la suite.

19.7.3 Cas d'une sollicitation parallèle au grand axe de l'ellipse

On considère cette fois-ci le cas $\alpha = 0$, c'est-à-dire une traction dans la direction parallèle au grand axe. Reprendre les questions de la section précédente dans ce cas. En comparant les cas $\alpha = \pi/2$ et $\alpha = 0$, quelle est la situation la plus pénalisante du point de vue des concentrations de contraintes? Quelle différence essentielle observe-t-on pour une ellipse infiniment aplatie?

Pour une traction dans la direction 1, on a $\alpha = 0$ et la contrainte au bord du trou donnée par (19.72) vaut

$$\bar{\sigma} = \sigma^\infty \frac{1 - m^2 + 2m - 2\cos 2\theta}{1 - 2m\cos 2\theta + m^2} \quad (19.81)$$

La dérivée de cette fonction de θ est

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 4\sigma^\infty \sin 2\theta \frac{1 - m - m^2 + m^3}{(1 - 2m\cos 2\theta + m^2)^2} \quad (19.82)$$

Cette fonction est du signe de $\sin 2\theta$, en tenant compte du fait que $0 \leq m \leq 1$. La contrainte $\bar{\sigma}$ est donc décroissante pour $\theta \in [-\pi/2, 0]$ et croissante pour $\theta \in [0, \pi/2]$. Compte tenu de la périodicité de $\bar{\sigma}$, les contraintes maximale et minimale sont

$$\bar{\sigma}^{min} = \bar{\sigma}(\theta = 0) = -\sigma^\infty \quad (19.83)$$

$$\bar{\sigma}^{max} = \bar{\sigma}(\theta = \frac{\pi}{2}) = \frac{3-m}{1+m}\sigma^\infty \quad (19.84)$$

La contrainte est donc maximale au bord du trou en $r = b$ ($\theta = \pm \frac{\pi}{2}$) et minimale en $r = a$ ($\theta = 0$). Le facteur de concentration de contrainte vaut :

$$K_t = \frac{3 - m}{1 + m} \quad (19.85)$$

Il reste borné pour $0 \leq m \leq 1$, contrairement à l'expression (19.78) pour la traction selon 2. La concentration de contrainte en $\theta = \pi/2$ est moins sévère et reste inférieure à 3. La situation la plus pénalisante est donc celle d'une plaque sollicitée perpendiculairement au grand axe de l'ellipse.

19.7.4 Cas d'une ellipse infiniment aplatie sollicitée en traction dans une direction quelconque $0 < \alpha < \pi/2$

On envisage les autres situations pour lesquelles $0 < \alpha < \pi/2$, mais seulement dans le cas d'une ellipse infiniment aplatie :

$$m = 1 - \eta, \quad \eta = \frac{2b}{a} \ll 1 \quad (19.86)$$

On montre alors que le maximum de $\bar{\sigma}$ est atteint en

$$\theta = -\frac{\eta}{2} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + o(\eta) \quad (19.87)$$

Le maximum vaut

$$\sigma^\infty \left(\frac{2 \sin \alpha (1 + \sin \alpha)}{\eta} + \mathcal{O}(1) \right)$$

et est donc positif.

Identifier alors (pour $\eta \rightarrow 0$) le point du bord de l'ellipse et la facette correspondante où la contrainte est maximale. L'orientation de cette facette par rapport à l'axe 1 est notée β . Déterminer β et tracer la courbe de $-\beta$ en fonction de α pour $0 < \alpha < \pi/2$. Compléter cette courbe avec le résultat acquis au paragraphe 19.7.2 ($\alpha = \pi/2$). Tracer en outre la courbe de $-\beta$ en fonction de α pour $-\pi/2 \leq \alpha < 0$. En supposant un mécanisme de rupture fragile, dessiner schématiquement une fissure amorcée à l'endroit critique trouvé pour un chargement de traction de la plaque dans la direction $\alpha = \pi/6$.

La convergence simple à $\theta \neq 0$ fixé de la contrainte (19.72) conduit à la limite

$$\lim_{m \rightarrow 1} \bar{\sigma}/\sigma^\infty = \frac{\cos 2\alpha - \cos 2(\theta - \alpha)}{1 - \cos 2\theta} = \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \cotan \theta \quad (19.88)$$

La contrainte devient infiniment grande pour $\theta \rightarrow 0^-$ où la rupture est attendue quel que soit l'angle $\alpha \neq 0, \pi/2$ de la sollicitation.

Le cas $\alpha = 0$ présente une indétermination mais ce cas particulier a déjà été étudié au paragraphe 19.7.3. Il est illustré par la figure 19.16(a) pour différentes valeurs de m proches de 1. Le cas limite ne donne pas lieu à une singularité.

Le cas $\alpha = \pm \pi/2$ présente une indétermination mais ce cas particulier a déjà été étudié au paragraphe 19.7.2. Il est illustré par la figure 19.16(b) pour différentes valeurs de m proches de 1. Le cas limite donne lieu à une singularité en $\theta = 0$.

Pour les autres cas et pour m proche de 1, on attend un minimum et un maximum de $\bar{\sigma}$ d'autant plus proche de $\theta = 0$ que m est proche de 1. Cette intuition est confirmée par le tracé de la figure 19.16(c). C'est pourquoi on recherche les angles où $\bar{\sigma}$ est extrémal sous la forme

$$\theta = k\eta \quad (19.89)$$

Pour étudier les extrema de $\bar{\sigma}$, on calcule la dérivée de l'expression générale (19.72). On trouve que la dérivée s'annule lorsque

$$2m \sin 2\alpha + \sin 2\theta (1 - m^2) (\cos 2\alpha - m) - \sin 2\alpha \cos 2\theta (1 + m^2) = 0 \quad (19.90)$$

Les zéros de cette fonction sont de la forme $k\eta$, $\eta \ll 1$ lorsque m est proche de 1. Le développement limité de l'expression précédente par rapport à η fournit l'équation suivante :

$$2(1 - \eta) \sin 2\alpha + 4k\eta^2(\cos 2\alpha - 1) - \sin 2\alpha(1 - 2k^2\eta^2)(2 - 2\eta + \eta^2) = 0$$

qui se simplifie en

$$4k^2 - 4k \tan \alpha - 1 = 0$$

Cette équation possède deux racines, l'une positive, l'autre négative :

$$k_+ = \frac{1 + \sin \alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \quad (19.91)$$

$$k_- = \frac{\sin \alpha - 1}{2 \cos \alpha} = -\frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \quad (19.92)$$

L'évaluation de la contrainte $\bar{\sigma}$ en $\theta = k_-\eta$ et $\theta = k_+\eta$ fournit respectivement le maximum et le minimum cherchés lorsque m est proche de 1 :

$$\bar{\sigma}_{max}/\sigma^\infty \simeq \frac{2 \sin \alpha(1 + \sin \alpha)}{1 - m}, \quad \bar{\sigma}_{min}/\sigma^\infty \simeq -\frac{2 \sin \alpha(1 - \sin \alpha)}{1 - m} \quad (19.93)$$

La direction principale associée à la contrainte principale $\bar{\sigma}$ est tangente à l'ellipse. Le vecteur tangent de l'ellipse en θ est colinéaire à $[-a \sin \theta, b \cos \theta]^T$. La facette dont la normale est tangente à l'ellipse est donc parallèle à $[b \cos \theta, a \sin \theta]^T$. La facette fait un angle β avec la direction 1, qui vaut donc

$$\tan \beta = \frac{a}{b} \tan \theta \quad (19.94)$$

La contrainte est maximale en $\theta = k_-(1 - m)$. A cet endroit, la facette est orientée selon :

$$\tan \beta \simeq \frac{a}{b} k_-(1 - m) \simeq \frac{a}{b} \frac{2b}{a} k_- = 2k_- \implies -\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \quad (19.95)$$

angle représenté, en fonction de α sur la figure 19.17. A la limite $m \rightarrow 1$, le point où la contrainte est maximale est en $\theta = 0^-$ et l'orientation de la facette correspondante est donnée par l'expression précédente, indépendante de η . Noter que l'équation (19.95) fournit aussi la solution $\beta = \alpha/2 + 3\pi/4$ qui n'a de sens qu'en $\theta = \pi^-$. Les situations suivantes méritent d'être distinguées :

- Lorsque $\alpha = \pi/2$, on a $\beta = 0$, ce qui correspond à la situation étudiée au paragraphe 19.7.2. L'amorçage de la fissuration et la propagation suivante se font dans le prolongement du trou elliptique initial.
- Lorsque $\alpha = \pi/6$, on a $\beta = -\pi/6$. L'orientation de la fissure attendue dans un matériau fragile est illustrée sur la figure 19.18.
- Lorsque $\alpha = 0$, la limite du facteur de concentration de contraintes (19.7.3) est finie lorsque $m \rightarrow 1$. Aucune singularité n'est attendue dans ce cas. Toutefois, une légère déviation de α par rapport à cette orientation idéale fait apparaître une singularité en $\theta = 0$ pour $m \rightarrow 1$. Conformément à l'étude précédente, une fissure va s'amorcer en $\theta = 0^-$. Elle fait un angle $\beta = -\pi/4$ avec le grand axe de l'ellipse.

Le diagramme de la figure 19.17 est complété pour des angles α négatifs en remarquant qu'un chargement dans la direction $-\alpha$ conduit à un amorçage de fissure d'angle $-(\beta(\alpha))$.

19.7.5 Expérience de mécanique de la rupture

Concevoir et réaliser une série d'expériences susceptibles d'illustrer les conclusions précédentes relatives à l'ellipse infiniment aplatie. Critiquer la fidélité du dispositif retenu vis-à-vis de la définition du problème que nous venons d'étudier.

Joindre les échantillons expérimentaux à la copie.

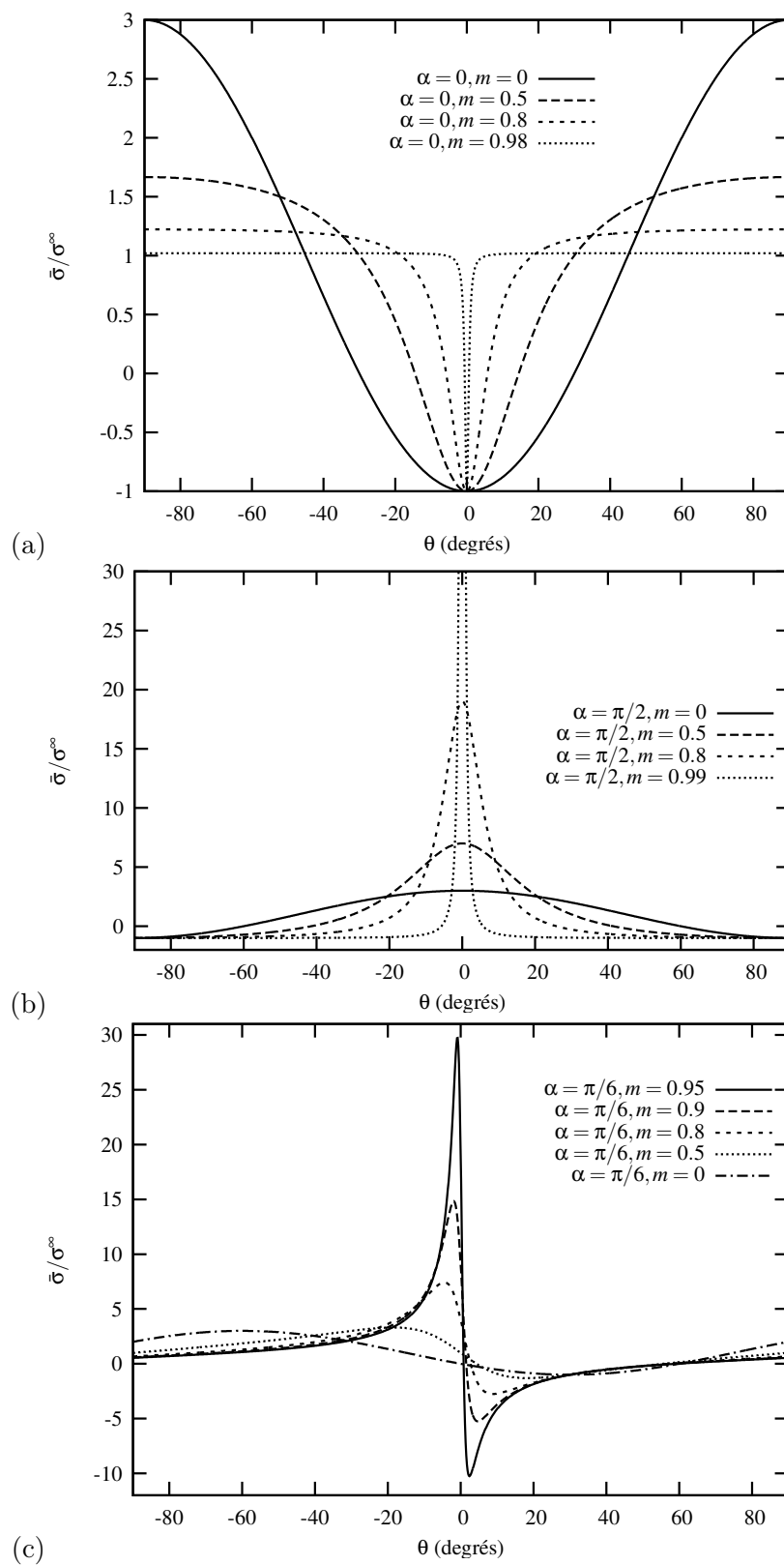


FIGURE 19.16 – Contrainte principale au bord d'un trou elliptique dans une plaque sollicitée en traction parallèlement (a), perpendiculairement (b), ou dans une direction faisant un angle $\alpha = \pi/6$ (c) par rapport au grand axe de l'ellipse.

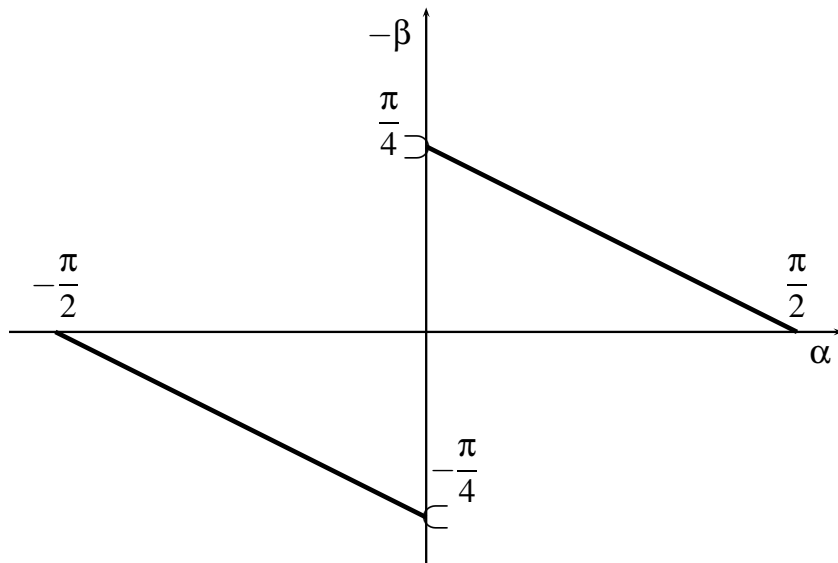


FIGURE 19.17 – Orientation de la fissure attendue par rapport à l'axe 1 pour un trou elliptique infiniment aplati sollicité en traction dans une direction faisant l'angle α avec l'axe 1 qui est par ailleurs parallèle au grand axe de l'ellipse. Cette fissure s'amorce en $\theta = 0^-$.

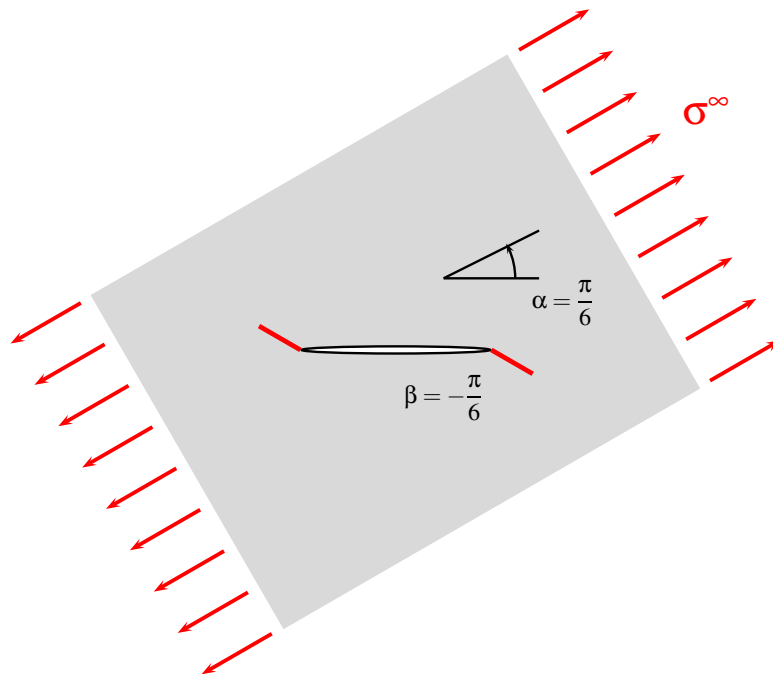


FIGURE 19.18 – Amorçage de la rupture d'une plaque percée d'un trou elliptique infiniment aplati sollicité en traction dans une direction inclinée à 30° par rapport au grand axe de l'ellipse.

L'ellipse infiniment aplatie évoque une coupure dans le matériau, ou **fissure**. L'analyse directe de la fissure conduit effectivement à un comportement singulier des contraintes (voir paragraphe 19.8). Le fait que $K_t \rightarrow \infty$ pour le trou infiniment aplati semble confirmer la similarité avec une fissure. Pour voir si l'analogie fissure/ellipse aplatie peut être poussée plus loin encore, on peut réaliser l'expérience simple qui consiste, à l'aide d'un cutter, à introduire une fissure au centre d'une feuille de papier de format A4 par exemple et à solliciter la feuille incisée en traction selon une direction donnée jusqu'à la déchirer. On mesure alors l'angle que fait la fissure qui s'est amorcée à chaque pointe de la fissure initiale. Les résultats d'une telle série d'expériences sont consignés sur la figure 19.19 et comparés au critère établi pour l'ellipse aplatie. Ces résultats présentent une dispersion importante due au caractère rudimentaire du dispositif expérimental. Des résultats moins dispersés ont été obtenus au début des années 1960 avec du plexiglas (matériau polymère fragile) et confirment le résultat entrevu ici avec le papier : l'angle de bifurcation observé expérimentalement s'écarte notablement de la valeur prévue pour l'ellipse infiniment aplatie dès que l'angle α s'éloigne de $\pi/2$. L'écart le plus important est obtenu pour α proche de 0. Dans ce cas d'ailleurs l'expérience est difficile à réaliser et demande un surcroît d'effort, en raison du facteur $\sin \alpha$ dans (19.93) qui s'annule en $\alpha = 0$. On se rapproche en effet du cas strict $\alpha = 0$ pour lequel aucune singularité n'existe à la pointe de la fissure et aucune rupture précoce n'est attendue. Toutefois, l'expérience pour α s'approchant de 0 indique l'existence d'un angle limite proche de $-\beta = 70^\circ$. Pour éviter cette difficulté, sans modifier la structure du chargement, il faut recourir à une sollicitation de cisaillement, dite de mode II. Un tel angle de bifurcation peut en effet être obtenu pour une sollicitation différente de la plaque fissurée, à savoir un cisaillement simple parallèlement à la direction de fissure initiale. Dans ce cas, la singularité des contraintes existe bel et bien et conduit à la rupture de la plaque si un cisaillement suffisant est appliqué. Ce cas est traité au paragraphe 19.8.4.

On ne peut donc pas dire qu'un trou elliptique infiniment aplati corresponde exactement à une fissure. Cela est dû à la courbure imposée par la forme elliptique pour tout $\eta \neq 0$, par opposition au caractère aigu de la fissure. En fait, on pourrait étudier des formes différentes de trous (rectangles, losanges aplatis...) et comparer le cas limite infiniment aplati avec la fissure idéale. Pour bien comprendre cette subtile distinction entre fissure et ellipse aplatie, un complément d'information sur les contraintes en pointe de fissure est nécessaire et fait l'objet du paragraphe suivant. En particulier, on va montrer au paragraphe 19.8 que le critère de rupture fragile appliqué en pointe de fissure prévoit, pour le cas limite $\alpha = 0$ l'amorçage d'une nouvelle fissure à la pointe de la première et faisant un angle proche de 70.5° avec la fissure initiale. Ce résultat diffère du **branchement** à 45° prévu précédemment pour une ellipse infiniment aplatie.

19.8 Différence entre le comportement d'un trou elliptique infiniment aplati et celui d'une fissure

D'après l'analyse précédente, on s'attend à l'existence d'une singularité des contraintes à la pointe d'une ellipse infiniment aplatie dont la forme s'approche de celle d'une fissure. Le champ de contraintes en pointe de fissure, donné dans ce paragraphe, sans l'établir, pour deux modes de sollicitations, comporte effectivement une telle singularité. Toutefois, le comportement d'une fissure diffère fondamentalement de celui de l'ellipse infiniment aplatie quant à l'amorçage d'une nouvelle fissure lorsque le chargement appliqué est trop fort. C'est ce qu'a montré l'expérience de déchirure d'une feuille de papier fissurée au paragraphe 19.7.5. Ce fait est illustré ici dans le cas d'une sollicitation de la fissure en mode mixte (traction/cisaillement).

19.8.1 Champ de contraintes en pointe de fissure

Une fissure est une surface de coupure au sein d'un matériau au travers de laquelle le champ de déplacement peut présenter des discontinuités. On considère le cas d'une fissure plane de longueur $2a$ présente dans une plaque dont les dimensions sont grandes par rapport à a . La géométrie et les systèmes de coordonnées adoptés sont donnés sur la figure 19.20. Lorsque la plaque est soumise, loin du trou, à

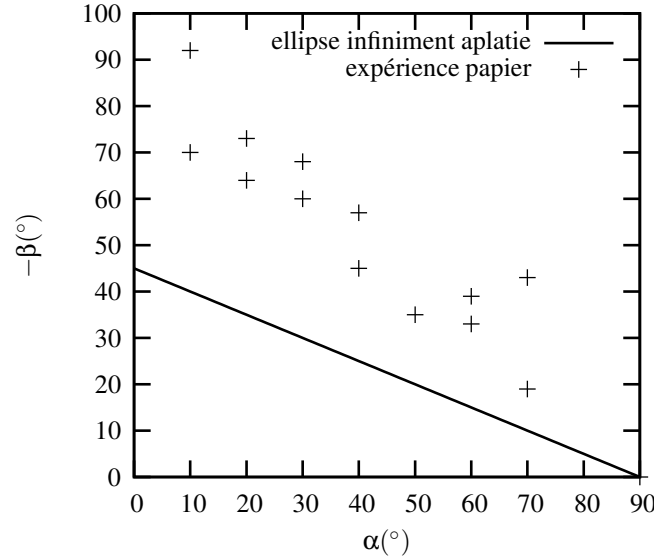


FIGURE 19.19 – Angle de bifurcation de fissure dans une plaque en traction : résultat théorique pour le trou elliptique infiniment aplati et résultats expérimentaux pour du papier.

une sollicitation homogène, on dispose d'une solution asymptotique donnant les termes prépondérants du champ de contrainte autour, et suffisamment près, de la pointe de la fissure. La fissure peut être chargée en mode d'ouverture (traction σ^∞ à l'infini), appelé mode I en mécanique de la rupture, ou/et en cisaillement dans le plan de la fissure (cisaillement τ^∞ à l'infini), appelé mode II en mécanique de la rupture :

$$\underline{\sigma}^\infty = \sigma^\infty \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \tau^\infty (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)$$

Les lèvres de la fissure sont supposées libres d'effort. Le champ de contrainte proche de la pointe de la fissure prend la forme suivante, d'après les résultats de la mécanique de la rupture dont on trouvera un exposé dans l'ouvrage ([Sanford and Thompson, 1997](#)) rassemblant les textes fondateurs sur le sujet, et dans les manuels récents en français ([François et al., 1993](#); [Miannay, 1995](#); [Leblond, 2003](#)) :

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(K_I (1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}) + K_{II} \left(\frac{3}{2} \sin \theta - 2 \tan \frac{\theta}{2} \right) \right) \quad (19.96)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right) \quad (19.97)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1)) \quad (19.98)$$

dans un système de coordonnées cylindriques⁵ dont l'origine est à la pointe de la fissure, r désignant la distance du point courant à cette pointe, comme sur la figure [19.20](#). Les expressions font intervenir les coefficients K_I et K_{II} , appelés **facteurs d'intensité de contrainte**, reliés au chargement appliqué par :

$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a}, \quad K_{II} = \tau^\infty \sqrt{\pi a} \quad (19.102)$$

5. Quelques transformations des fonctions trigonométriques permettent aussi d'écrire le champ de contraintes sous la forme équivalente :

$$\sigma_{rr} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left(5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left(-5 \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (19.99)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left(3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left(-3 \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (19.100)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (19.101)$$

La vérification que ces formules sont effectivement identiques aux expressions [\(19.96\)](#), [\(19.97\)](#) et [\(19.98\)](#) est immédiate.

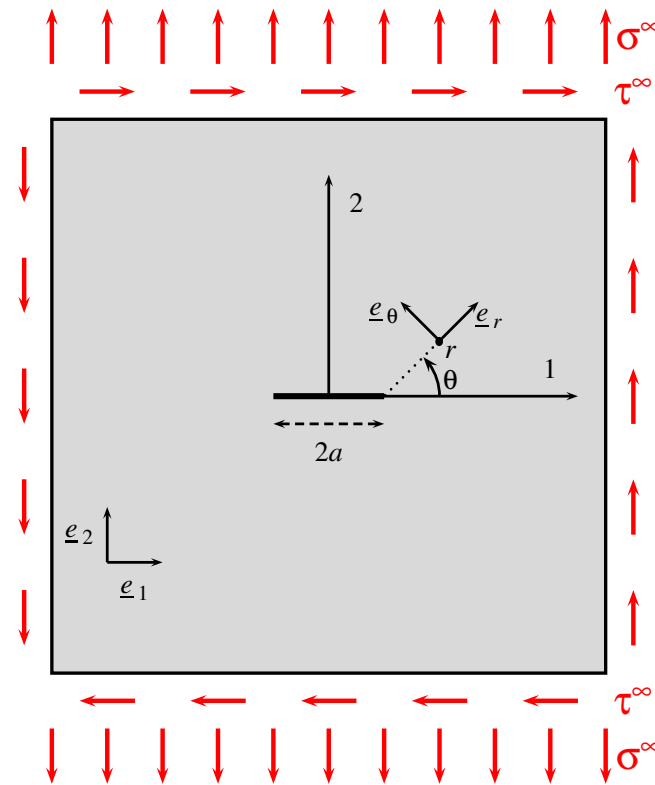


FIGURE 19.20 – Plaque munie d’une fissure de longueur $2a$ et soumise, loin du trou, à une sollicitation de traction σ^∞ et de cisaillement τ^∞ .

Le champ de contrainte présente une singularité en $r = 0$. Le fait que le facteur de concentration de contrainte K_t puisse devenir infini pour une ellipse infiniment aplatie a permis de soupçonner l’existence d’une telle singularité dans le cas d’une fissure. La forme de la singularité s’avère être en $1/\sqrt{r}$. Une illustration artistique du mode II est donnée par le dessin de R. Topor de la figure 19.22.

19.8.2 Quelques paradoxes liés à la rupture

La mise en évidence d’une singularité des contraintes en pointe de fissure suscite de nombreuses interrogations.

Comment un matériau peut-il résister à une contrainte locale infinie sans rompre à la moindre charge appliquée ? On montre en fait que la singularité du champ de contraintes est telle que l’énergie élastique contenue dans un volume fini entourant la fissure reste finie. Par conséquent, la rupture ne se produit que lorsque cette énergie est suffisante pour créer des surfaces nouvelles correspondant à la propagation de la fissure sur une certaine distance.

Mais alors, pourquoi une plaque fragile percée d’un trou circulaire et chargée en traction casse-t-elle pour une valeur critique finie atteinte à l’équateur tandis qu’une plaque fissurée ne casse pas spontanément sous l’effet de la moindre charge ? C’est la notion de défaut qu’il faut invoquer ici. Le volume de matière fragile fortement sollicité à l’équateur contient des défauts (microfissures, microcavités, microinclusions, défauts de surface...). Dès lors la contrainte à rupture n’est pas une donnée intrinsèque du matériau mais dépend de la statistique de défauts présents, qui est intimement liée à son élaboration et aux traitements de surface.

On est en droit aussi de rétorquer que l’existence d’un champ de contraintes singulier n’est pas compatible avec l’hypothèse des petites perturbations qui a présidé à l’établissement de cette solution. Il est légitime de s’interroger sur la pertinence du champ trouvé près de la pointe de la fissure. On peut, pudiquement, s’interdire d’appliquer alors un critère rupture en-deçà d’une distance critique à la pointe de la fissure. Cette précaution ne lève toutefois pas le doute émis sur la légitimité de la solution

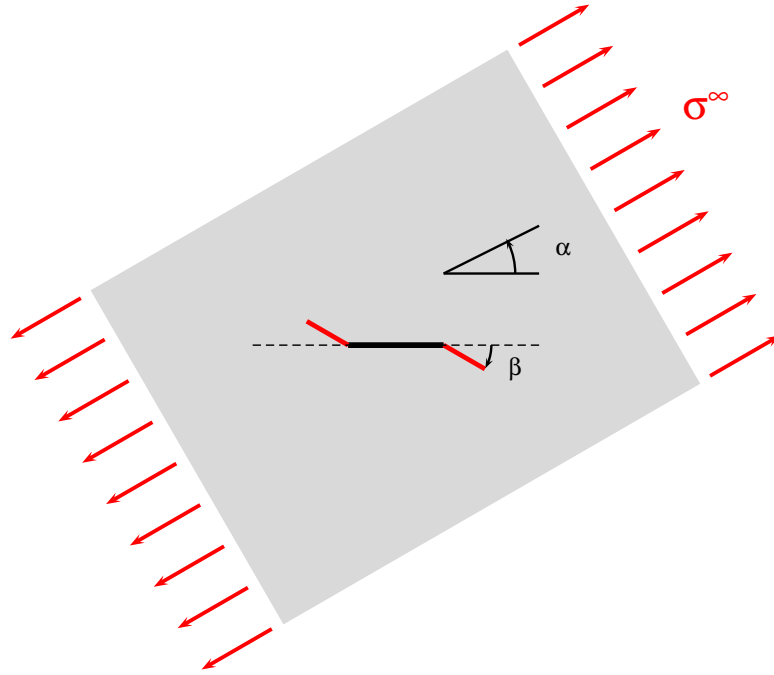


FIGURE 19.21 – Plaque munie d’une fissure de longueur $2a$ et soumise, loin du trou, à une sollicitation de traction σ^∞ inclinée de l’angle α par rapport à la direction de la fissure initiale. Sous la charge appliquée, la fissure initiale se propage en bifurquant sur un plan faisant un angle β avec la direction initiale de la fissure.

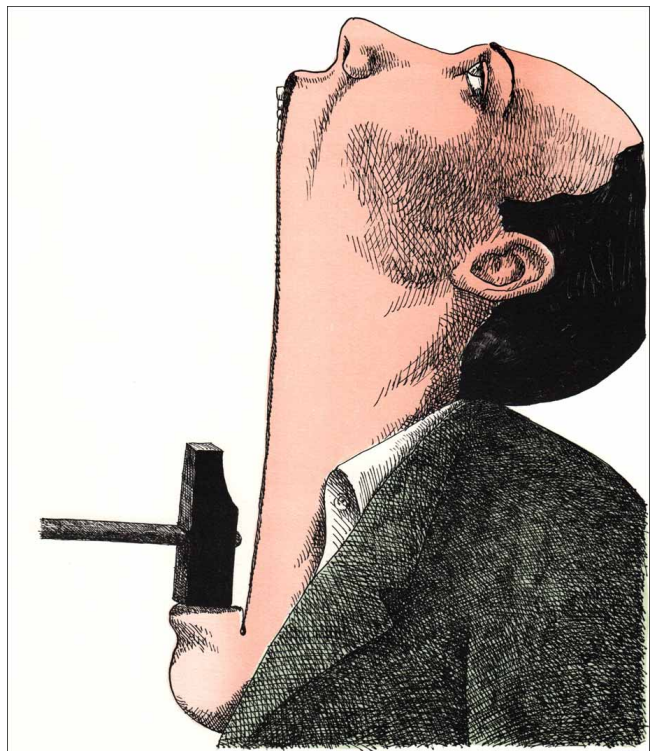


FIGURE 19.22 – *A gorge déployée* et *Marteau pilon poil au menton*, les modes I et II selon Roland Topor (source : https://www.bnf.fr/sites/default/files/2019-02/dp_monde_topor.pdf).

exhibée. En effet, on utilise une théorie asymptotique en résolvant un problème linéarisé par rapport au problème de perturbation initial qui dépend d'un petit paramètre η . Rien ne garantit, en général, la convergence de la solution du problème linéarisé vers le premier terme de la solution asymptotique du problème réel. Dans certains cas, cette convergence n'est pas assurée uniformément sur tout le domaine étudié⁶. Dans le cas de la fissure, la convergence est acquise pour tout domaine excluant un cylindre $r < \eta$ pourvu que η soit suffisamment petit pour un chargement donné. Toutefois, rien ne garantit que le type de singularité trouvé en $r = 0$, dans le contexte HPP, soit le même que celui du problème asymptotique réel. Le mérite de cette "solution" tient en fait à la pertinence remarquable qu'elle présente vis-à-vis de nombreux résultats expérimentaux de mécanique de la rupture.

Le critère simple de rupture consistant à décréter qu'un matériau fragile rompt lorsque la contrainte principale maximale atteint une valeur critique contient en germe un autre paradoxe. C'est que la rupture d'une plaque (suffisamment grande par rapport à a) ne dépendrait pas de la taille du défaut. En effet la concentration de contrainte au bord d'un trou dans une plaque infinie ne dépend pas de sa taille, on l'a vu. Or les grandes fissures sont plus dangereuses que les petites. En rupture il y a un effet de taille de fissure (même dans une plaque infinie). A nouveau, c'est l'approche énergétique signalée précédemment qui permet de lever ce paradoxe et de modéliser un effet d'échelle en rupture. Comme de toute façon, un critère de contrainte maximale n'est pas tenable en présence d'un champ singulier, c'est la notion de **ténacité** K_{Ic} qui prend le pas, c'est-à-dire une valeur critique du facteur d'intensité de contrainte. Cette notion est intimement liée à l'approche énergétique mentionnée.

Considérons enfin un barreau soumis à une sollicitation de traction simple. Quel que soit le niveau de contrainte appliqué, une barre suffisamment longue devrait permettre de mobiliser suffisamment d'énergie élastique dans le volume sollicité pour conduire à l'amorçage d'une fissure si l'on en croit le critère énergétique invoqué déjà à plusieurs reprises. A la limite, une barre très longue devrait rompre à la moindre charge...

En fait, la rupture résulte bel et bien de la combinaison d'une condition de contrainte critique atteinte localement et d'un critère énergétique (McClintock and Argon, 1966; Leguillon, 2002).

19.8.3 Un critère simple de bifurcation de fissure

Lorsqu'une plaque fissurée est sollicitée mécaniquement, on peut se demander, d'une part, à partir de quelle charge appliquée la fissure initiale va se propager et, d'autre part, dans quelle direction aura lieu cette propagation. La fissure va-t-elle continuer à se propager dans son plan initial ou bifurquer sur un plan incliné? On présente un élément de réponse à cette deuxième question⁷, à savoir une estimation de l'angle de bifurcation de la fissure par rapport à son orientation initiale. L'approche proposée est due à (Erdogan and Sih, 1963).

Une plaque fissurée est soumise, loin de la fissure, à une sollicitation de traction σ^∞ selon une direction faisant un angle α avec la fissure, comme sur la figure 19.21. Le champ de contraintes en pointe de fissure est obtenu à partir des expressions (19.96) à (19.98) en prenant

$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} \sin^2 \alpha, \quad K_{II} = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} \sin \alpha \cos \alpha \quad (19.103)$$

En effet, la charge de traction appliquée se décompose en une composante d'ouverture en mode I, $\sigma^\infty \sin^2 \alpha$, et en une composante de cisaillement (mode II), $\sigma^\infty \sin \alpha \cos \alpha$.

Le critère de bifurcation proposé est basé sur les deux hypothèses suivantes :

(i) la bifurcation s'effectue sur un plan radial à partir de la pointe initiale de la fissure ;

6. Le lecteur est renvoyé à la référence (Germain, 1973a) aux pages 108 et 114.

7. La réponse à première question, à savoir la prévision de la contrainte à rupture, est plus délicate. Les résultats expérimentaux issus de (Erdogan and Sih, 1963) sont assez mal décrits par les critères de rupture proposés. D'autres approches, prenant notamment en compte la statistique des défauts contenus dans le matériau, permettent d'améliorer ces prévisions de rupture. Au contraire, l'angle de bifurcation observé expérimentalement est remarquablement bien décrit par le critère simple développé dans ce paragraphe. Une analyse plus rigoureuse et plus complète, développée dans (Leblond, 1989; Amestoy and Leblond, 1992; Leblond, 2003) permet de justifier *a posteriori* la remarquable efficacité du critère d'Erdogan et Sih.

(ii) le plan de bifurcation est celui pour lequel la contrainte normale d'ouverture est maximale (à $r \neq 0$ fixé).

Ces hypothèses, certes confortées par l'intuition, sont pour le moins discutables mais ont le mérite de la simplicité. Elles ont pour conséquence que la fissure va bifurquer sur le plan radial pour lequel la contrainte orthoradiale $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale et la contrainte de cisaillement $\sigma_{r\theta}$ est nulle. Sur un plan radial, la contrainte normale est effectivement $\sigma_{\theta\theta}$. Cette contrainte est maximale pour l'angle θ tel que

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0$$

La seconde équation d'équilibre statique indique qu'alors

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0$$

Or, d'après (19.98), la dérivée de la contrainte de cisaillement est égale à $-\sigma_{r\theta}/r$, de sorte que l'équation précédente implique que $\sigma_{r\theta}$ s'annule à l'endroit où la contrainte orthoradiale est maximale.

La mise en œuvre du critère de bifurcation (ii) passe par le calcul de la dérivée par rapport à θ de la composante (19.97) :

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = -\frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(K_I \sin \frac{\theta}{2} + K_{II}(3 \cos \theta - 1) \right)$$

En conséquence, la contrainte orthoradiale présente des extrêmes en

$$\theta = \pm\pi, \quad K_I \sin \frac{\theta}{2} + K_{II}(3 \cos \theta - 1) = 0 \quad (19.104)$$

Les angles $\theta = \pm\pi$ correspondent aux lèvres de la fissures où les efforts sont supposés nuls. Le plan de bifurcation est donc donné par la seconde équation.

En mode I pur ($K_{II} = 0$), ce critère prévoit une propagation coplanaire de la fissure ($\beta = 0$).

En mode II pur ($K_I = 0$), ce critère prévoit une bifurcation sur le plan incliné de l'angle⁸

$$\beta = -\arccos \frac{1}{3} \simeq -70.5^\circ \quad (19.105)$$

Dans le cas d'une plaque fissurée en traction, les facteurs d'intensité de contraintes sont donnés par (19.103) et peuvent être substitués dans l'équation précédente. Lorsque $\alpha \neq 0$ (le cas $\alpha = 0$ ne conduit pas à une singularité des contraintes en pointe de fissure), l'angle de bifurcation β de la fissure lors de sa propagation est solution de l'équation suivante :

$$\sin \beta + (3 \cos \beta - 1) \cotan \alpha = 0 \quad (19.106)$$

Pour $0 < \alpha < \pi/2$, cette équation indique que β est négatif, conformément à l'intuition (cf. figure 19.21). La courbe correspondante donnant l'angle β en fonction de α est tracée sur la figure 19.23. Cette courbe se prolonge en $\alpha = \pi/2$ par la valeur $\beta = 0$.

F.A. McClintock, dans sa discussion de l'article de (Erdogan and Sih, 1963), remarque que cette courbe est distincte de celle correspondant au trou elliptique infiniment aplati. L'expérience sur le papier, comme sur le plexiglas dans l'article original, corrobore indiscutablement le critère établi dans cette section, comme l'indique la figure 19.23.

Il est important de noter que ce critère de contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ maximale ne coïncide pas avec le critère de contrainte normale maximale. Pour le voir, on donne les composantes cartésiennes des contraintes,

8. Parmi les solutions possibles $\beta = \pm \arccos(1/3)$, seul l'angle $\beta = -\arccos(1/3)$ conduit à une contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ positive, d'après (19.97).

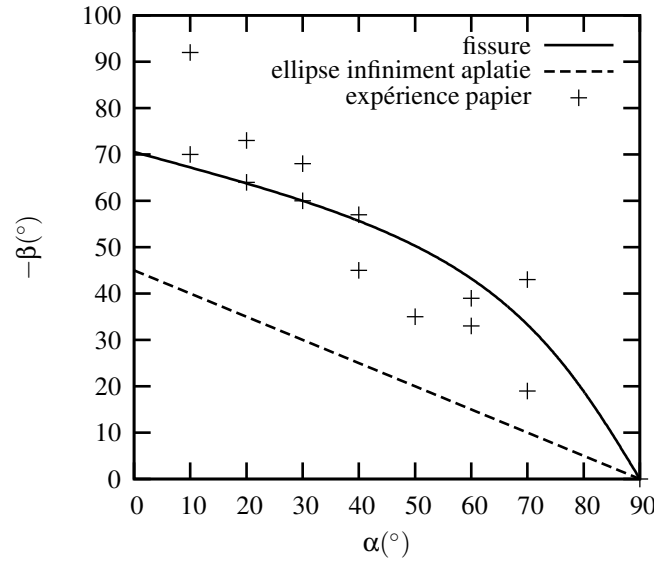


FIGURE 19.23 – Angle de bifurcation de fissure dans une plaque en traction : résultat théorique pour la fissure, le trou elliptique infiniment aplati et résultats expérimentaux pour du papier.

d'après (François et al., 1993; Miannay, 1995), selon le repère de la figure 19.20 :

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (19.107)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (19.108)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (19.109)$$

En mode I pur par exemple ($K_{II} = 0$), on peut vérifier que les contraintes principales sont

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right), \quad \sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (19.110)$$

La contrainte principale σ_1 , à r fixé, est maximale en $\theta = \pi/3$ où elle vaut

$$\sigma_1^{max} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{3\sqrt{3}}{4} \simeq 1.3\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0)$$

La contrainte orthoradiale $\sigma_{\theta\theta}$ est clairement maximale en $\theta = 0$ où elle prend une valeur plus faible que la contrainte principale maximale. On vérifie en fait que, en $\theta = \pi/3$, la contrainte de cisaillement σ_{12} est nulle de sorte que les contraintes σ_{11} et σ_{22} sont principales. La contrainte $\sigma_{22}(r, \theta = \pi/3)$ n'est autre que la contrainte principale maximale σ_1^{max} .

Pourquoi ne pas utiliser le critère de contrainte normale maximale en présence d'une fissure ? En mode I pur, le critère de contrainte principale maximale, appliqué en $r \neq 0$ prévoit la propagation de la fissure à partir d'un point situé sur une ligne $\theta = \pi/3$. L'observation courante indique que la fissure principale se propage selon sa direction initiale sans bifurquer, c'est-à-dire en suivant le plan où $\sigma_{\theta\theta}$ est maximal. Les facette correspondant à la contrainte principale maximale, à une distance $r \neq 0$, est horizontale et ne passe pas, en général, par la pointe de la fissure initiale de sorte que la rupture se produirait par multifissuration non radiale, ce qui n'est, en général, pas observé dans les matériaux fragiles.

19.8.4 Trou elliptique infiniment aplati chargé en mode II

La plaque munie d'un trou elliptique est soumise à un chargement de cisaillement simple loin du trou, $\sigma_{12}^\infty = \tau^\infty$ dans le repère de la figure 19.15. La contrainte $\bar{\sigma}$ au bord du trou s'obtient en utilisant l'expression (19.72) successivement pour $\sigma^\infty = \tau^\infty, \alpha = \pi/4$ et $\sigma^\infty = -\tau^\infty, \alpha = -\pi/4$. La superposition de ces chargements de traction simple à 45° et de compression simple à -45° , de même amplitude, est équivalente au chargement de cisaillement simple envisagé ici. On trouve

$$\bar{\sigma} = -\tau^\infty \frac{4 \sin 2\theta}{1 - 2m \cos 2\theta + m^2} \quad (19.111)$$

Cette contrainte est extrémale lorsque

$$\cos 2\theta = \frac{2m}{1 + m^2} \quad (19.112)$$

Pour m proche de 1, les angles solutions sont proches de 0. Seule la solution $\theta < 0$ de l'équation précédente fournit un maximum positif de $\bar{\sigma}$ pour $\tau^\infty > 0$. La tangente de l'angle correspondant vaut

$$\tan \theta = -\frac{1 - m}{1 + m}$$

et peut alors être insérée dans l'équation (19.94) donnant l'angle de bifurcation

$$\tan \beta = -\frac{1}{1 - b/a} \quad (19.113)$$

dont la limite lorsque $b/a \rightarrow 0$ fournit $\beta = -\pi/4$. On retrouve l'angle de bifurcation limite trouvé lors de la traction de la plaque pour $\alpha \rightarrow 0^+$ (cf. figure 19.17).

L'analogie entre le trou elliptique chargé en cisaillement selon son grand axe et le problème initial du trou elliptique en traction parallèlement au grand axe apparaît lorsque l'on compare l'expression⁹ de la contrainte maximale atteinte en mode II pour m proche de 1 :

$$\bar{\sigma}^{max} = \frac{2\tau^\infty}{1 - m} \quad (19.114)$$

avec l'expression (19.93) trouvée en traction et donnée ici lorsque α est proche de 0 :

$$\bar{\sigma}^{max} = \frac{2\alpha\sigma^\infty}{1 - m} \quad (19.115)$$

Ces expressions sont identiques, au terme d'affaiblissement α prêt. Le chargement en mode II permet de retrouver la structure du chargement de traction en évacuant l'affaiblissement de la singularité α . Dans le cas d'une fissure chargée en mode II, on a trouvé $\beta \simeq -70.5^\circ$, valeur qui distingue clairement le cas de la fissure du cas du trou elliptique infiniment aplati.

19.8.5 Comportement asymptotique de trous de formes plus générales

On peut imaginer d'autres formes géométriques de trous cylindriques dans une plaque susceptibles de ressembler à une fissure lorsqu'on les aplatit indéfiniment. Une famille générique de telles géométries est décrite par l'équation suivante

$$\left(\frac{|X_1|}{a}\right)^n + \left(\frac{|X_2|}{b}\right)^n = 1 \quad (19.116)$$

où l'exposant n caractérise la géométrie intrinsèque de la zone amenée à jouer le rôle de la pointe de fissure. Le cas $n = 2$ correspond au trou elliptique étudié dans ce chapitre. D'autres formes sont

9. Pour trouver l'expression (19.114), on substitue le résultat (19.112) et la relation $\sin 2\theta = -(1 - m^2)/(1 + m^2)$ (le signe moins vient de la valeur négative de l'angle θ pour laquelle la contrainte maximale est atteinte) dans l'équation (19.111) donnant la contrainte au bord du trou.

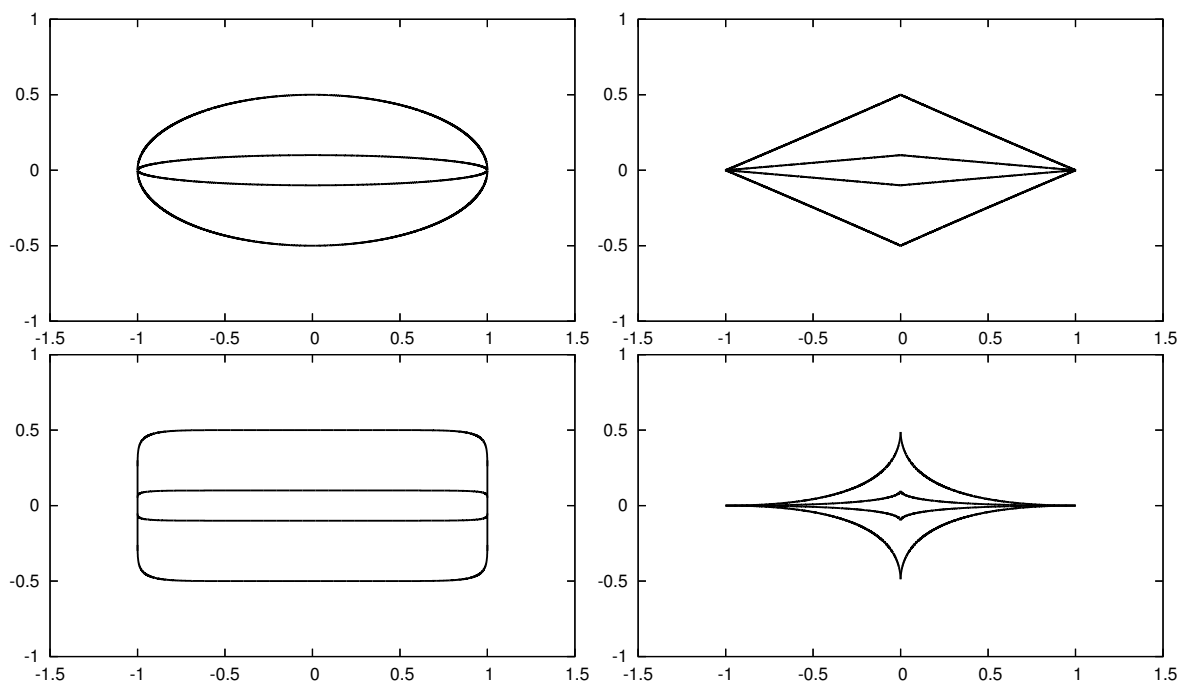


FIGURE 19.24 – Trous dans une plaque de forme géométrique d'équation (19.116) avec : $n = 2$ en haut à gauche, $n = 1$ en haut à droite, $n = 10$ en bas à gauche, $n = 0.5$ en bas à droite. Dans chaque cas, deux trous sont représentés pour $b/a = 0.5$ et $b/a = 0.1$.

illustrées sur la figure 19.24. Les puissances élevées sont proches du trou rectangulaire pour lequel la courbure en $\theta = 0$ est nulle. Les puissances plus petites que 1 conduisent à un point de rebroussement en $\theta = 0$, les deux lèvres ayant une tangente commune, situation qui semble plus proche de l'image de la fissure. Le cas intermédiaire $n = 1$ introduit un angle vif en $\theta = 0$, angle qui devient nul pour $n < 1$ et plat pour $n > 1$. En faisant tendre b/a vers 0, ces figures ressemblent de plus en plus à une fissure.

A la lumière de l'étude précédente, on peut suspecter que chacune de ces géométries conduise à un comportement asymptotique spécifique qui diffère, à la limite, de celui de la fissure, en raison de la forme particulière associée à chaque valeur de n . Il reste toutefois à mener cette étude jusqu'au bout pour s'en assurer.

19.9 Cavités sphériques et ellipsoïdales dans un massif

La question de l'existence d'une concentration de contraintes se pose aussi dans le cas d'un trou sphérique ou, plus généralement ellipsoïdal, de petite taille dans une pièce massive.

L'intérêt pratique de cette analyse est lié à l'existence de défauts sphériques (porosités) inévitables dans les pièces de fonderie par exemple (culasses automobiles, aubes de turbine monocristallines...) même s'ils sont généralement de tailles très limitées (du micromètre au millimètre). La concentration de contrainte mise en évidence limite l'endurance de la pièce, i.e. sa résistance à la fatigue à grands nombres de cycles.

La méthode de résolution du problème du trou ellipsoïdal dans un massif infini diffère fondamentalement de l'approche résolument bidimensionnelle mise en œuvre dans ce chapitre. Elle fait appel à des techniques plus générales qui ne sont pas rapportées dans ce chapitre. C'est dans l'ouvrage de (Mura, 1987) qu'on trouvera l'exposé le plus détaillé des problèmes de défauts (cavités, inclusions...) dans les solides élastiques. On se contente ici, par souci d'exhaustivité vis-à-vis des problèmes de concentrations de contraintes, de donner le facteur de concentration de contrainte K_t

géométrie	K_t
trou circulaire (DP et CP)	3
cavité sphérique	$\frac{3(9 - 5\nu)}{2(7 - 5\nu)}$
trou elliptique (CP et DP) (axes a, b , rayon de courbure R)	$1 + 2\frac{a}{b} = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{R}}$

TABLE 19.2 – Récapitulatif : facteurs de concentration de contrainte pour différents types de défauts dans une plaque sollicitée en traction simple.

pour un trou sphérique en traction :

$$K_t = \frac{3(9 - 5\nu)}{2(7 - 5\nu)} \quad (19.117)$$

La concentration de contrainte est maximale dans le cas quasi-incompressible (ν proche de 0.5), avec une valeur d'environ 2.17, et minimale pour ν proche de -1 , avec un facteur de 1.75. Le facteur est de 2.04 pour ν proche de 0.3.

19.10 Epilogue

L'ensemble des situations évoquées dans ce chapitre et les facteurs de concentration de contraintes associés sont rassemblés dans le tableau 19.2. Des cas beaucoup plus généraux d'entailles, de fissures et de défauts peuvent être consultés dans l'ouvrage (Pilkey, 1997).