Examen de Physique II
Physique Statistique

Mercredi 26 janvier 2022

Durée : 2h30.
Documents autorisés : Poly de Physique statistique ; notes de cours ou de petites classes ; corrigés d'anciens examens de l'École. **Pas de calculatrice**.

Les 3 exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre qui vous convient. Il est demandé de donner des explications claires et complètes ***en justifiant vos réponses****. Les applications numériques sont demandées en ordre de grandeur, à un facteur 2 près. Les poids respectifs de chaque partie pourront être 18/6/6 pour une note sur 30.*

Constantes :
constante de Planck : $\hbar = 1,06 \times 10^{-34}$ J $\cdot$ s , vitesse de la lumière : $c = 3 \times 10^8$ m $\cdot$ s^{-1} ,
charge absolue de l'électron : $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C , masse de l'électron : $m_e = 9,08 \times 10^{-31}$ kg = 511 KeV/c^2,
constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J $\cdot$ K^{-1}, masse du nucléon : $m_N \approx 1$ Gev/c^2.
constante de structure fine : $\alpha \approx 1/137$

On rappelle en outre qu'à température ambiante, $k_B T \approx \dfrac{1}{40}$ eV.

Formulaire : $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^3}{3}.$$

1 L'équilibre statistique de l'atome d'hydrogène

Le but de l'exercice est de comprendre l'équilibre thermodynamique de l'atome d'hydrogène individuel, constitué d'un proton et d'un électron. On rappelle que les états d'énergie $|n, \ell, m\rangle$ de l'électron dans l'atome d'hydrogène sont numérotés par trois indices entiers n, ℓ et m, où $n \geq 1$ est le nombre quantique principal (donnant le numéro de la couche), ℓ est le nombre quantique secondaire (donnant le numéro de la sous-couche, avec $0 \leq \ell \leq n-1$), et m est le nombre quantique magnétique ($-\ell \leq m \leq \ell$). En raison de la dégénérescence de spin, il y a deux états électroniques par niveau d'énergie.

On rappelle également que l'énergie de l'état $|n, \ell, m\rangle$ est $E_n = -\dfrac{E_0}{n^2}$, avec $E_0 = 13,6$ eV. Enfin, l'énergie E_0 ainsi que le rayon de Bohr a_B s'expriment en fonction de la constante de structure fine α et de la masse de l'électron m_e

$$E_0 = \frac{1}{2}\alpha^2 m_e c^2 \qquad \text{et} \qquad a_B = \frac{\hbar}{\alpha m_e c}$$

1. On fixe n. Combien y a-t-il d'états électroniques dans une couche n donnée ?
2. On ne considère dans les 3 questions suivantes (2 à 4) que les deux couches électroniques correspondant à $n = 1$ et $n = 2$. On suppose que l'atome d'hydrogène est placé en contact avec un thermostat à

la température T, et qu'il est dans un volume suffisamment grand pour qu'on puisse estimer que les états liés de l'électron sont ceux vus dans le cours dans le cadre d'un volume infini. Calculer dans ce cas la fonction de partition $z(\beta)$ de l'électron, avec $\beta = 1/(k_B T)$. Dans quel ensemble s'est-on placé ?

3. A température ambiante, en supposant que seules les couches 1 et 2 peuvent être occupées. Quelles sont les probabilités p_1 et p_2 respectives de trouver l'électron de l'atome d'hydrogène dans la couche 1 ou dans la couche 2 ? Qu'en conclure ? On demande ici des probabilités numériques. (On pourra commencer par calculer le rapport p_2/p_1.) On donne par ailleurs la valeur $e^{-136} \approx 10^{-59}$.
4. À partir de quelle température la couche 2 est-elle remplie de manière significative (de l'ordre du pourcent) ? On demande ici une expression analytique puis une application numérique.
5. Écrire formellement la fonction de partition de l'électron en prenant en compte cette fois tous les niveaux d'énergie de l'électron lié au proton. Que constate-t-on ? Sachant que la distance moyenne d'un électron de la couche n au proton est na_B, a_B étant le rayon de Bohr, quelle conclusion devrait-on en tirer sur l'équilibre statistique d'un atome d'hydrogène individuel, quelque soit la température ? En quoi ce résultat est-il en contradiction apparente avec les résultats des questions précédentes ?
6. On va maintenant tenir compte du fait que l'électron est à l'intérieur d'un volume cubique $V = L^3$, L étant le côté du cube, ce qui contraint la taille des états liés. Quel est l'indice $n_{\max}$ auquel on doit limiter la somme de la fonction de partition vue dans la question précédente ? En écrivant la fonction de partition sous la forme :

   $$z(\beta) = 2e^{\beta E_0} + z_e(\beta)$$

   où z_e est une somme sur tous les états excités jusqu'à la couche $n_{\max}$, montrer que :

   $$z_e(\beta) \leq \frac{2V}{3a_B^3}\, e^{\frac{\beta E_0}{4}}$$

   (On pourra considérer que $n_{\max}$ est suffisamment grand pour que $n_{\max} + 1 \approx n_{\max}$).
7. Quelle est la probabilité p_e pour que l'électron soit dans un état excité ? Donner une borne supérieure simple à cette probabilité en fonction de β et V. Montrer que cette borne supérieure est de l'ordre de 1 pour une température T_0 telle que :

   $$T_0 \approx \frac{E_0}{4k_B \ln\left(\frac{L}{a_B}\right)}\,.$$

   Calculer numériquement cette température dans le cas où le volume est un cube de 100 km de côté.
8. Tous les états de l'électron lié au proton sont des états d'énergie négative. Dans le volume V, on doit en fait également tenir compte des états d'énergie positive. Montrer alors, en justifiant votre raisonnement, qu'on peut écrire la fonction de partition sous la forme

   $$z(\beta) = 2e^{\beta E_0} + z_e(\beta) + 2V\left(\frac{m_e}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{\frac{3}{2}}\,.$$

   En supposant qu'on se place à la température obtenue à la question 7, exprimer les termes respectifs correspondant aux états liés et aux états libres en fonction du rapport L/a_B (on négligera les termes correspondant à $n \geq 2$ dans la partie des états liés). Que vaut alors le rapport R du second terme sur le premier ? Quelle conclusion en tirer, en regard du résultat de la question 5 ?

2 Exercice court : l'énergie du rayonnement électromagnétique hautes fréquences

Dans une pièce grande comme un amphi (de volume $V = 10\,\mathrm{m} \times 10\,\mathrm{m} \times 4\,\mathrm{m}$), où l'on suppose le rayonnement électromagnétique en équilibre avec la matière à la température ambiante, quelle est l'énergie électromagnétique stockée dans le spectre ultraviolet et au-delà ? Donner une expression analytique en fonction de V, de la longueur d'onde λ_0 maximale du spectre ultraviolet et de T, puis une valeur numérique (en eV). (Pour cette dernière, on pourra vérifier d'abord qu'on peut utiliser l'approximation $e^x - 1 \approx e^x$).

On donne : $\displaystyle\int_x^{+\infty} y^3 e^{-y} dy \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3 e^{-x}$ et $e^{-100} \approx 3.10^{-44}$.

3 Exercice court : le gaz parfait dans l'ensemble grand-canonique

Retrouver les lois d'états du gaz parfait classique mono-atomique ($U = \frac{3}{2} N k_B T$, $PV = N k_B T$) en vous plaçant dans l'ensemble grand-canonique (on se placera dans l'approximation de Maxwell-Boltzmann et on pourra utiliser la fonction de partition canonique du gaz parfait classique mono-atomique comme un résultat de cours).