Introduction au Génie énergétique
Transferts thermiques

Pascal Stabat

Vendredi 17 février 2023

MINES PARIS | PSL

Introduction aux transferts thermiques

- Premier Principe pour un système fermé

$$dU = \delta W + \delta Q$$

δQ (en Joule) représente les transferts thermiques échangés entre le système et son environnement au cours d’un laps de temps déterminé

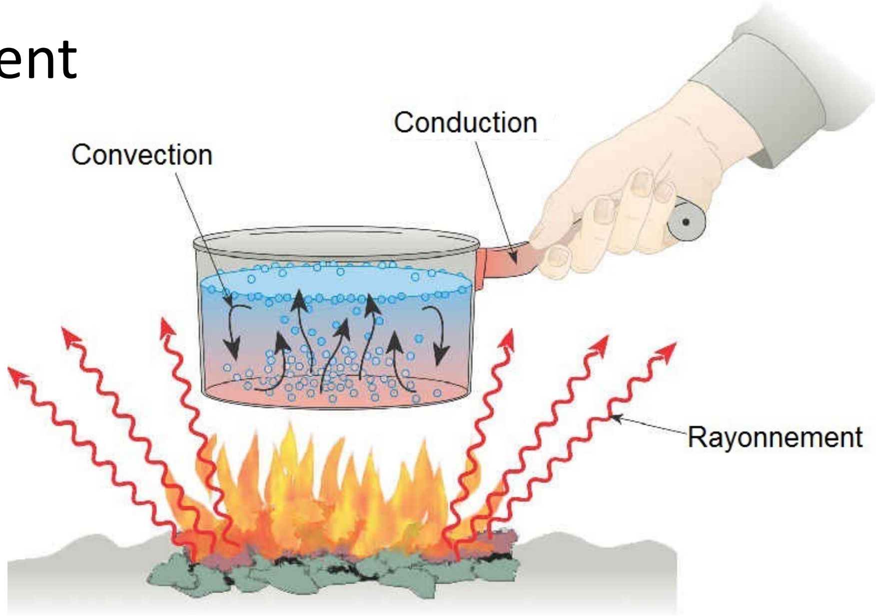
Pour résoudre la plupart des problèmes énergétiques, il faut spécifier ce terme

On utilise pour cela des <u>lois phénoménologiques</u> pour caractériser les différents modes de transferts thermiques

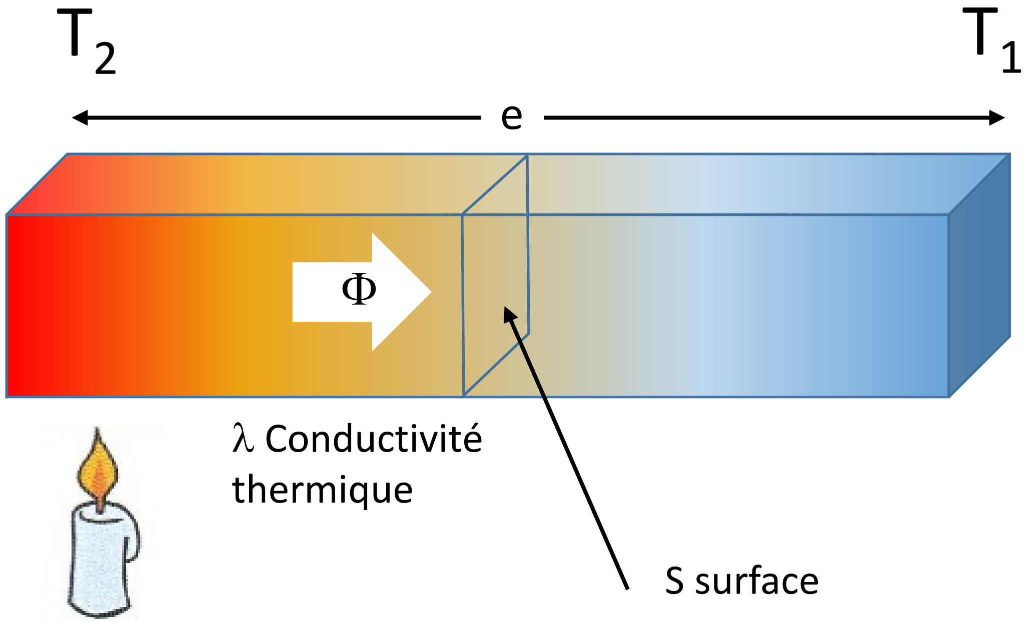
Introduction aux transferts thermiques

3 modes de transferts thermiques :

- Conduction
  - Transfert direct de proche en proche dans un milieu matériel
    - Phonons/ Électrons
    - Métaux > autres solides >> verres et liquides >> gaz
- Convection
  - Transfert indirect par transport via un fluide en mouvement
    - Convection naturelle (mouvement gravitaire)
    - Convection forcée (mouvement causé par une force extérieure)
- Rayonnement
  - Transfert à distance
    - sans support matériel



CONDUCTION



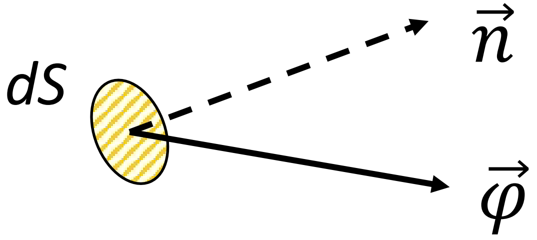
- Puissance thermique ou flux thermique Φ en [W]
- Energie thermique échangée Q = puissance $\times$ Δt en [J]
- Densité de flux thermique $\vec{\varphi}$ en [W/m²]

CONDUCTION

- Le flux d'énergie thermique, traversant *dS* dans le sens de $\vec{n}$ et par unité de temps, s'écrit :

$$\delta\Phi = \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

$$\Phi = \iint_S \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \cdot dS$$



- Hypothèse d'un équilibre thermodynamique local, ETL (Comme la variation de la température est lente, on peut définir en chaque point une température et une pression locale)
- **Loi de Fourier**
  - Milieu homogène et isotrope
  - ETL

$$\boxed{\vec{\varphi} = -\lambda \cdot \overrightarrow{grad}\, T}$$

Avec λ la conductivité thermique du milieu en $W.m^{-1}.K^{-1}$

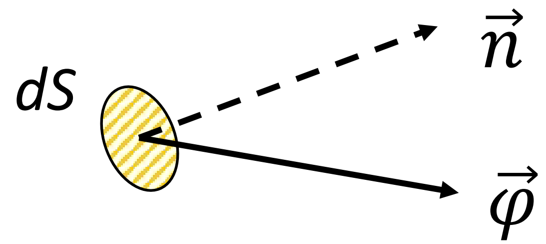
Et le signe (-) indique que le transfert se fait du point le plus chaud vers le plus froid

CONDUCTION

- Le flux d’énergie thermique de conduction s’écrit comme :

$$\delta\Phi = -\lambda \cdot \vec{\nabla}\, T \cdot \vec{n} \cdot dS$$

$$\Phi = -\iint_S \lambda \cdot \vec{\nabla}\, T \cdot \vec{n} \cdot dS$$



- La conductivité thermique dépend du milieu matériel et parfois aussi de la température $\lambda = \lambda(T)$

Milieux courants

Milieu	Conductivité à 20°C W.m^{-1}.K^{-1}
Argent	418
Cuivre	390
Aluminium	237
Acier	45-50
Béton	0,92
Eau	0,6
Air	0,0262

Cas des matériaux anisotropes

CRISTAUX

ex : monoclinique

$$\delta\Phi = -K \cdot \vec{\nabla}\, T \cdot \vec{n} \cdot dS$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{12} & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}$$

FIBRE DE CARBONE

BRIQUES ALVEOLAIRES

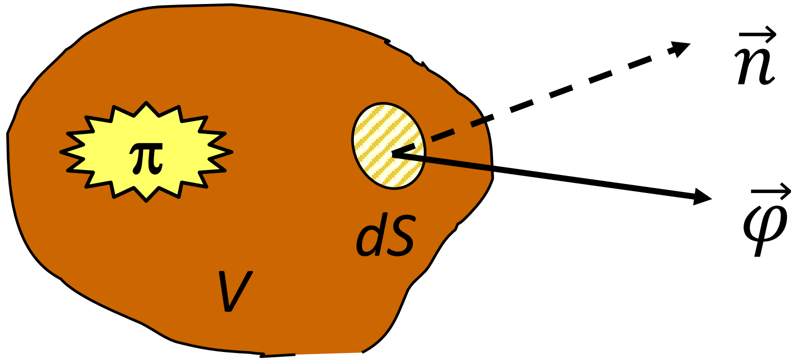
BOIS

Équation de la chaleur

CONDUCTION : équation de la chaleur

- Dans un milieu immobile le principe de conservation d'énergie s'écrit :

$$\underbrace{\iiint_V \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dV}_{\text{Variation d'enthalpie interne}} = \underbrace{\iiint_V \pi \, dV}_{\text{Puissance générée par les sources internes}} - \underbrace{\iint_S \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \cdot dS}_{\text{Puissance échangée à la surface avec l'environnement}}$$



En appliquant le théorème de la divergence,

$$\iiint_V \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dV = \iiint_V \pi \, dV - \iiint_V div(\vec{\varphi}) \cdot dV$$

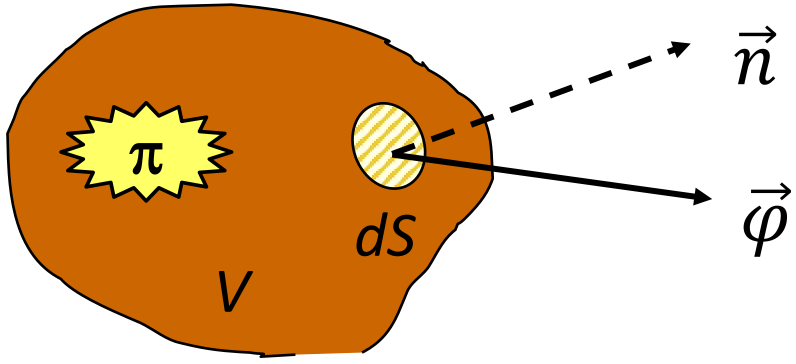
En utilisant la loi de Fourier, on obtient une relation locale (équation de la chaleur)

$$\boxed{\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \pi + div(\lambda . grad(T))}$$

CONDUCTION : équation de la chaleur

Dans le cas où la conductivité thermique est constante, l'équation de la chaleur devient :

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \pi + \lambda \cdot \Delta T$$



et sans production interne

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \Delta T$$

avec a la diffusivité thermique en m²/s

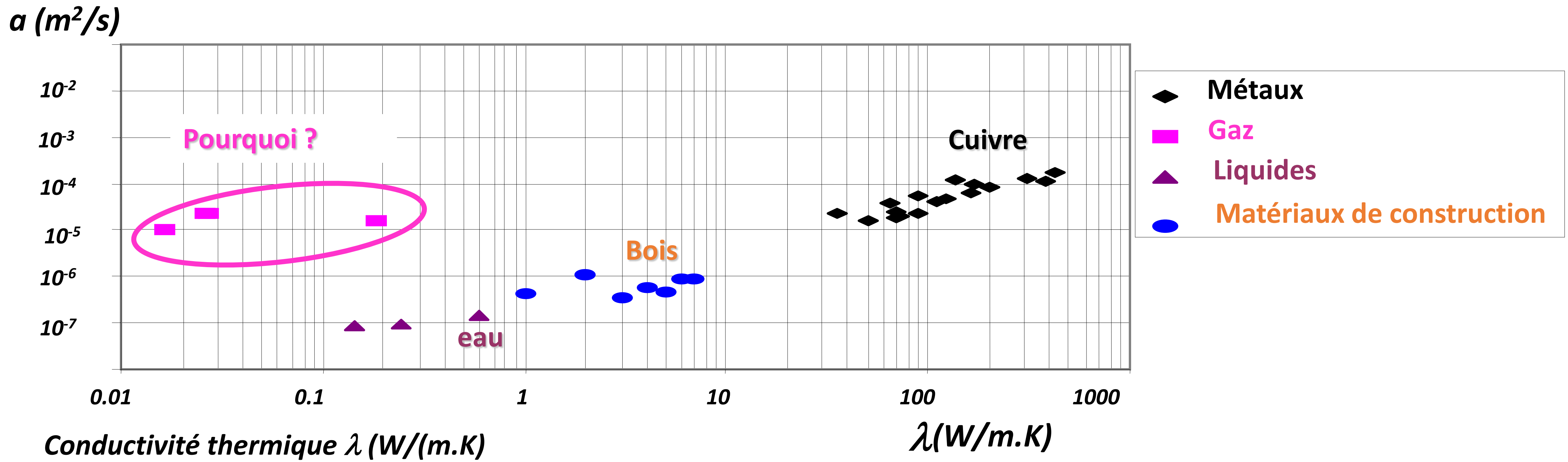
$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}$$

a mesure la vitesse de diffusion de la chaleur

Plus a est grand, plus les variations de températures seront rapides

CONDUCTION : équation de la chaleur

Diffusivité thermique :



Conductivité thermique λ (W/(m.K)

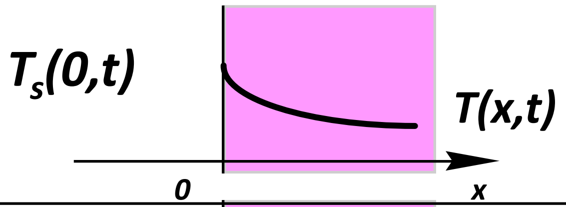
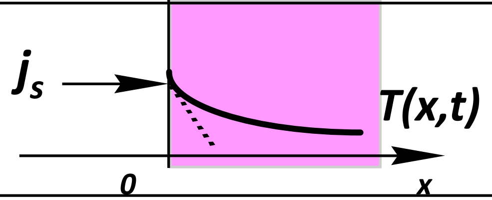
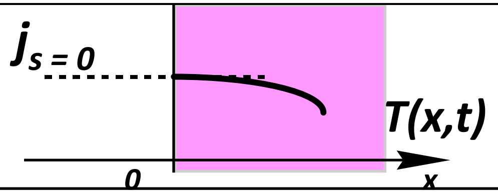
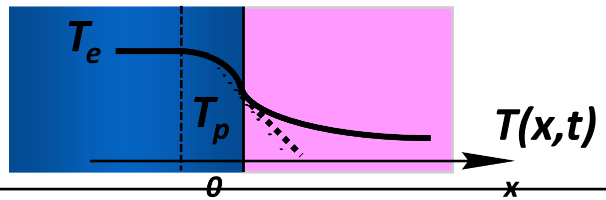
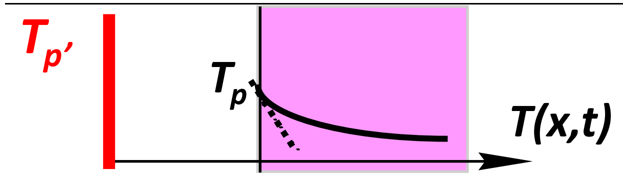
Métaux solides :
de 10 à 400 W/m.K

Liquides :
de 0,1 à 1 W/m.K

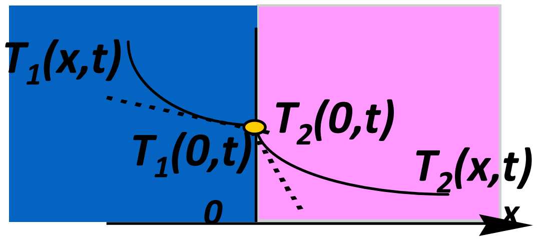
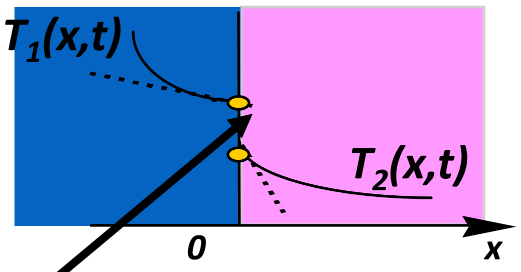
Solides non métalliques :
de 1 à 10 W/m.K

Gaz, isolants :
de 0,01 à 0,05 W/m.K

Conditions aux limites:

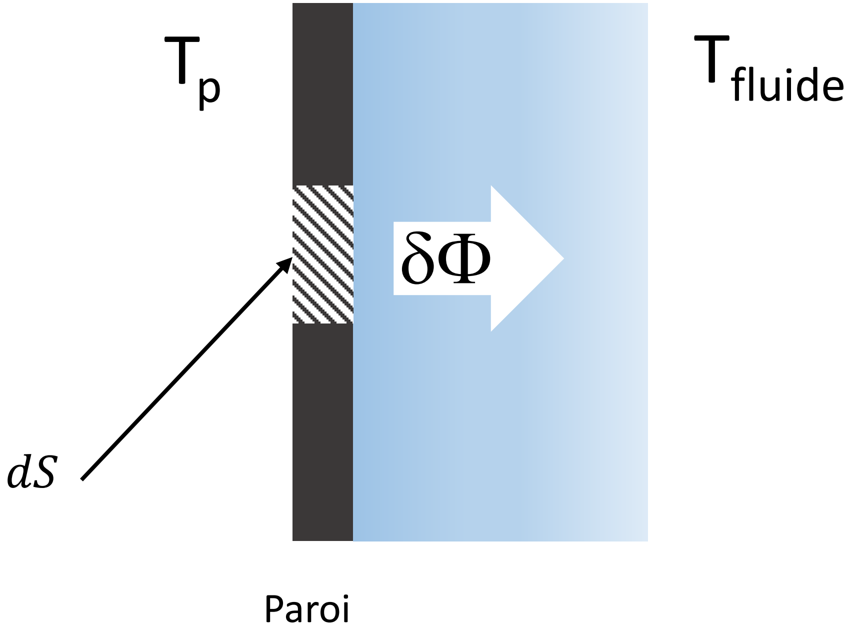
Température imposée (Dirichlet)	T(x=0,t) = T_s Souvent isothermie paroi	
Densité de flux imposée (Neumann)	$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right\|_{x=0} = \varphi_s$	
Flux nul	$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right\|_{x=0} = 0$	
Transfert linéaire (Newton)	$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right\|_{x=0} = h.(T_e - T_p)$	
Transfert Radiatif	$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right\|_{x=0} = F_{p'p}(T_{p'}^4 - T_p^4)$	

Conditions aux limites (contact entre deux solides) :

<table>
<tr><td>Contact parfait</td><td>$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}\bigg|_{x=0}$$
$$T_1 = T_2$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Contact imparfait</td><td>$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}\bigg|_{x=0}$$
$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{1}{R_c}(T_1 - T_2)$$</td><td>
</td></tr>
</table>

R_c
Résistance de contact

CONDUCTION : loi de Newton



Le flux échangé δΦ (W) entre la surface dS et le fluide s'exprime :

$$\boxed{\delta\Phi = \boldsymbol{h}.\left(T_p - T_{fluide}\right)\cdot dS}$$

Loi phénoménologique : Loi de Newton

avec **h** un coefficient d'échange convectif

	h en $W.m^{-2}.K^{-1}$
Convection naturelle	
gaz	5 à 30
eau	100 à 1 000
Convection forcée	
gaz	100 à 300
eau	300 à 10 000

- h dépend de la nature de l'écoulement
- Il faudra choisir une valeur pour T_{fluide}

Régime stationnaire

CONDUCTION en régime stationnaire

En régime stationnaire, sans source de production interne, l'équation de la chaleur se réduit à :

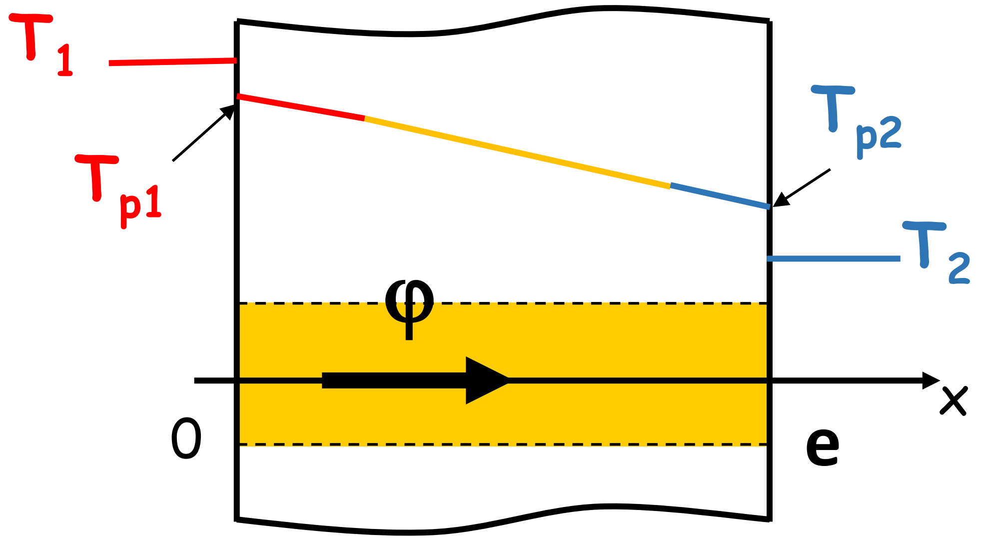
$$\Delta T = 0$$

Dans le cas d'un mur plan (monodirectionnel),

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

D'où $\quad T(x) = a \cdot x + b$

$$T(x) = \frac{T_{p2} - T_{p1}}{e} x + T_{p1}$$



CONDUCTION en régime stationnaire

Le flux d'énergie thermique traversant le mur s'écrit :

$$\Phi = \iint_S \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

$$\Phi = -\iint_S \lambda \cdot \vec{\nabla}\, T \cdot dS$$

$$= \lambda \cdot S \cdot \frac{T_{p1} - T_{P2}}{e}$$

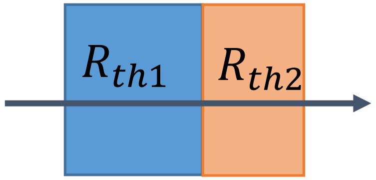
On définit la résistance thermique

$$\boxed{R_{th} = \frac{T_{p1} - T_{P2}}{\Phi} = \frac{e}{\lambda \cdot S}\ [\mathrm{K/W}]}$$

Loi d'association des résistances thermiques

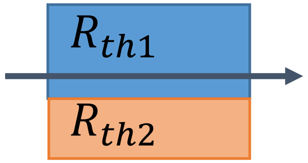
- Association en série

$$R_{th} = R_{th1} + R_{th2}$$

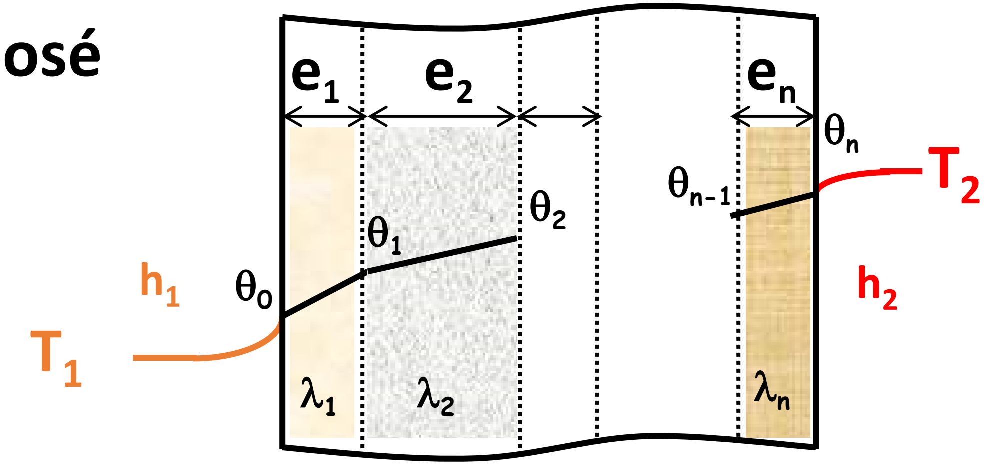


- Association en parallèle

$$\frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R_{th1}} + \frac{1}{R_{th2}}$$



Mur composé



$$\frac{\Phi}{h_1 \cdot S} = T_1 - \cancel{\theta_0}$$

$$\frac{\Phi \cdot e_1}{\lambda_1 \cdot S} = \cancel{\theta_0} - \cancel{\theta_1}$$

$$\cancel{\theta_1} - \cancel{\theta_2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\Phi}{h_2 \cdot S} = \cancel{\theta_n} - T_2$$

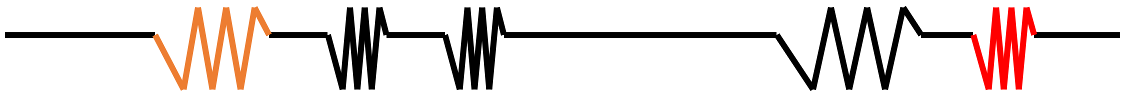
$$R_{th}.\Phi = T_1 - T_2$$

En général les températures intermédiaires ne nous intéressent pas

Résistance thermique [W/K]

$$R_{th} = \frac{1}{h_1 S} + \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{\lambda_i S} + \frac{1}{h_2 S}$$

Analogie électrique



$$\frac{1}{h_1 S} \qquad \frac{e_i}{\lambda_i S} \qquad \frac{1}{h_2 S}$$

Résistance thermique dans un cylindre

$$\Phi = -\iint_S \lambda \cdot \frac{dT}{dr} \cdot r d\theta \cdot dz$$

$$\Phi = -\lambda \cdot \frac{dT}{dr} \cdot 2\pi . H . \mathrm{r}$$

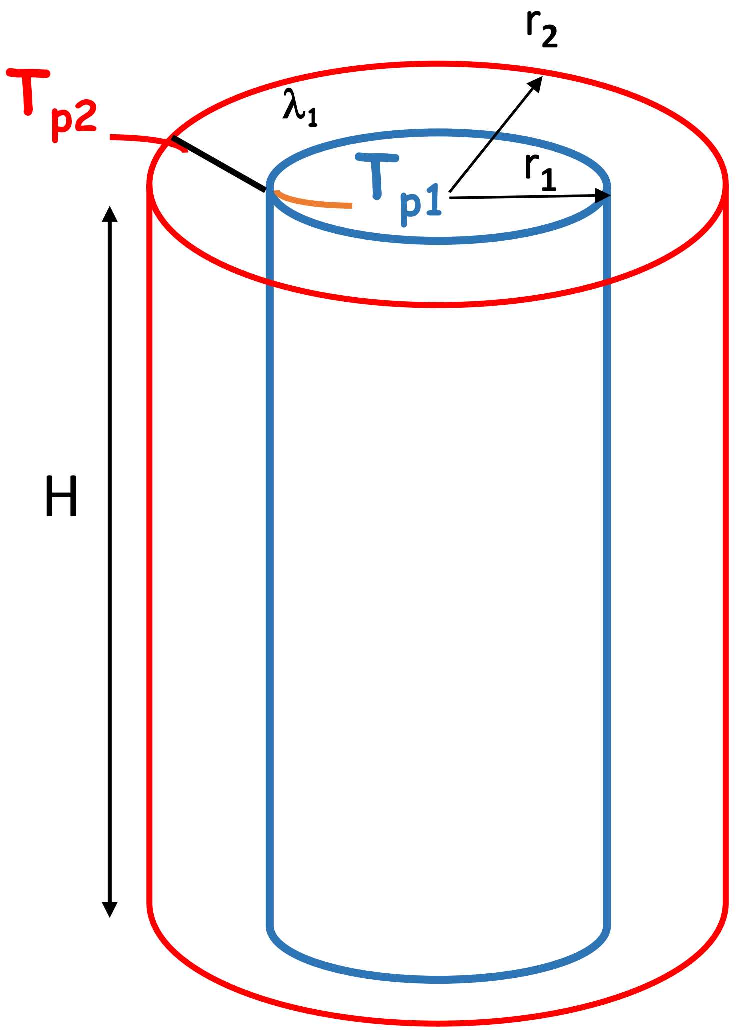
$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -\frac{\lambda \cdot 2\pi . H}{\Phi} . \int_{T_{p1}}^{T_{p2}} dT$$

L'intégrale entre 1 et 2 donne

$$\Phi = 2\pi \cdot \lambda \cdot H \cdot \frac{T_{p1} - T_{P2}}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

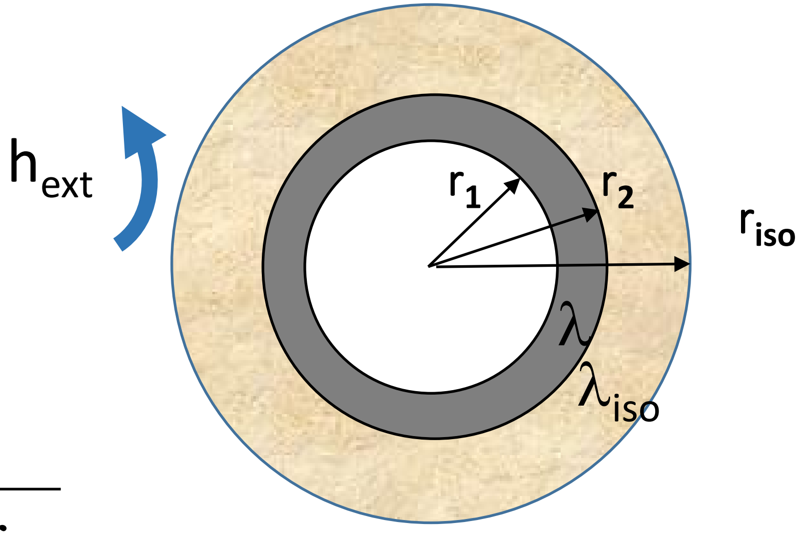
Résistance thermique [W/K]

$$\boxed{R = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\,\pi\,\lambda\,\mathrm{H}}}$$



Rayon critique

Est-il intéressant d'isoler un tube ?



La résistance thermique globale s'écrit

$$R_{th} = \frac{1}{h_{int} \cdot 2\pi \cdot H \cdot r_1} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi.\lambda.H} + \frac{\ln\left(\frac{r_{iso}}{r_2}\right)}{2\pi.\lambda_{iso}.H} + \frac{1}{h_{ext} \cdot 2\pi \cdot H \cdot r_{iso}}$$

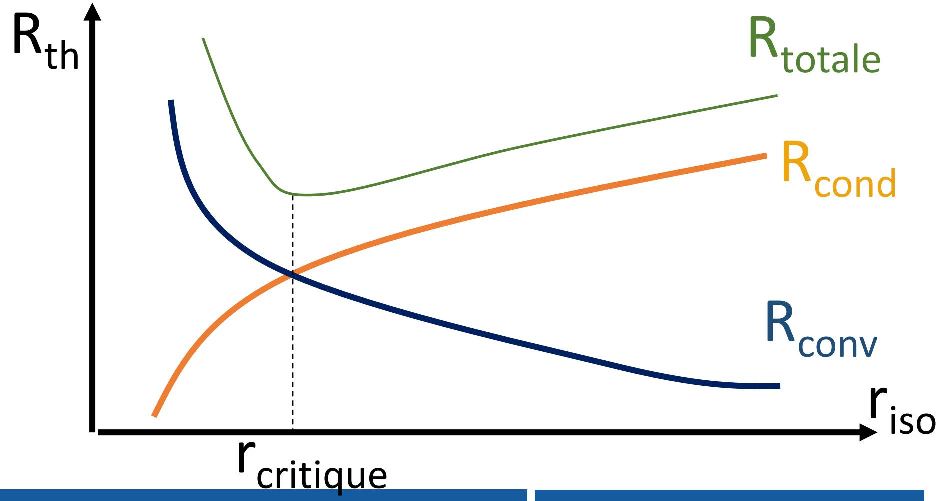
Si on dérive la résistance globale par rapport au rayon de l'isolant, il vient

$$2\pi \cdot H \cdot \frac{\partial R_{th}}{\partial r_{iso}} = \frac{1}{\lambda_{iso} \cdot r_{iso}} - \frac{1}{h_{ext} \cdot r_{iso}^2}$$

La dérivée s'annule si

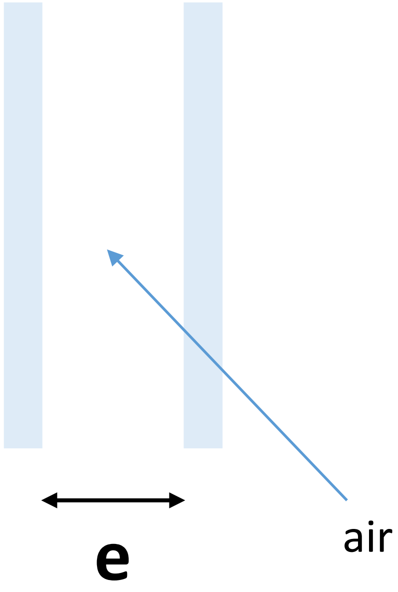
$$r_{iso} = \frac{\lambda_{iso}}{h_{ext}}$$

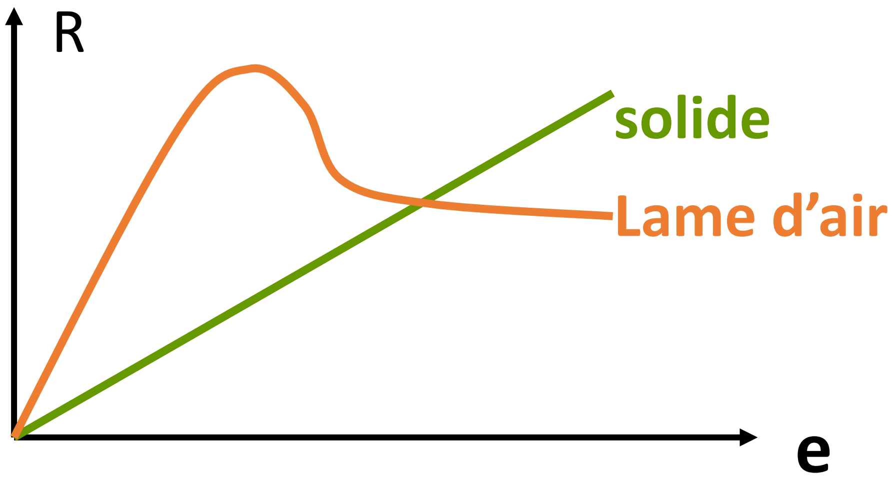
C'est le rayon critique



Résistance d'une lame d'air

Si l'épaisseur devient importante, des mouvements de convection naturelle dans la lame d'air se produisent, augmentant le transfert thermique et donc réduisant la résistance thermique





Régime variable

CONDUCTION en régime variable

Repartons de l'équation de la chaleur :

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \pi + \lambda \cdot \Delta T$$

et sans production interne

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \Delta T$$

Pour résoudre le problème, il faut

une condition initiale T_0 en tout point du volume

une condition aux limites du volume considéré

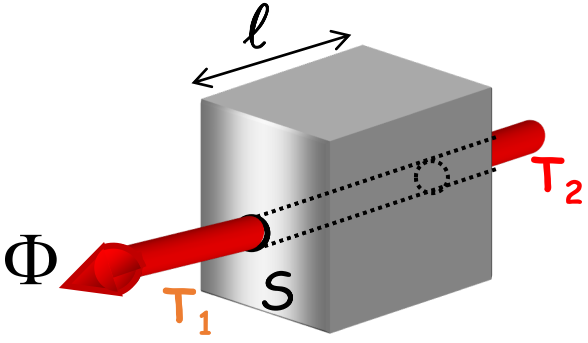
Nombres adimensionnels utiles en conduction

- Nombre de FOURIER

$$\boxed{Fo = \frac{a \cdot t}{\ell^2}}$$

$$Fo = \frac{(\lambda/\ell) \cdot S \cdot \Delta T \cdot t}{(\rho \cdot c) \cdot \ell \cdot S \cdot \Delta T}$$

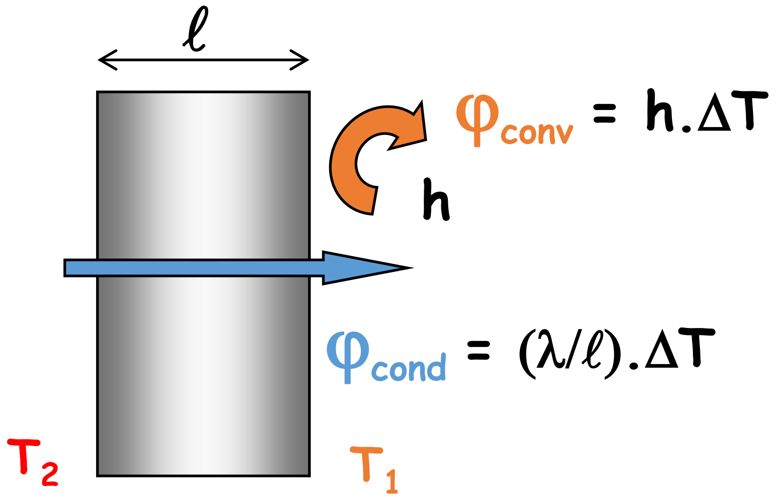
$$Fo = \frac{quantit\acute{e}\ de\ chaleur\ traversant\ pendant\ t}{quantit\acute{e}\ de\ chaleur\ accumul\acute{e}e}$$



- Nombre de BIOT

$$Bi = \frac{\varphi_{conv}}{\varphi_{cond}} = \frac{h \cdot \Delta T}{(\lambda/\ell) \cdot \Delta T}$$

$$\boxed{Bi = \frac{h \cdot \ell}{\lambda}}$$



CONDUCTION en régime variable

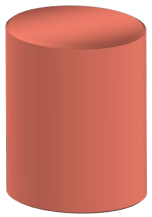
Corps thermiquement mince

Si le nombre de Biot est inférieur à 0,1, la résistance de convection limite le transfert thermique. Dans ce cas, on peut réduire la dimension du problème et considérer la température uniforme dans le corps

$$Bi = \frac{h \cdot L_c}{\lambda} < 0{,}1$$

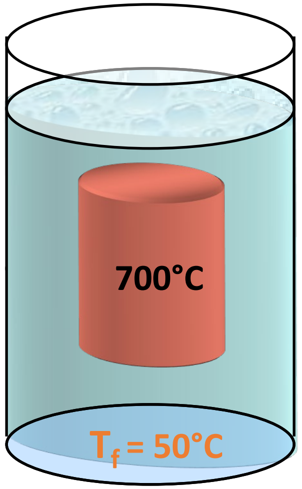
avec L_c une longueur caractéristique du corps (par exemple le rayon R pour une sphère ou un cylindre)

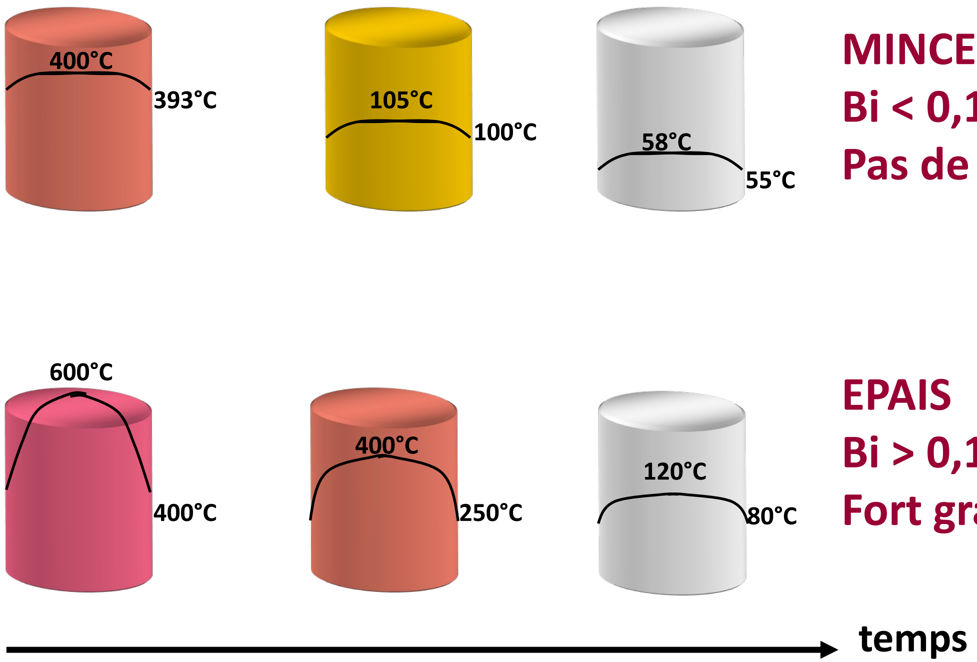
Corps thermiquement mince



Acier
λ = 46 $Wm^{-1}K^{-1}$
R = 5 cm

	h [$Wm^{-2}K^{-1}$]	$Bi = \frac{hR}{\lambda}$
Air	10	0,01
Eau	100	0,1
Huile	2000	2,2



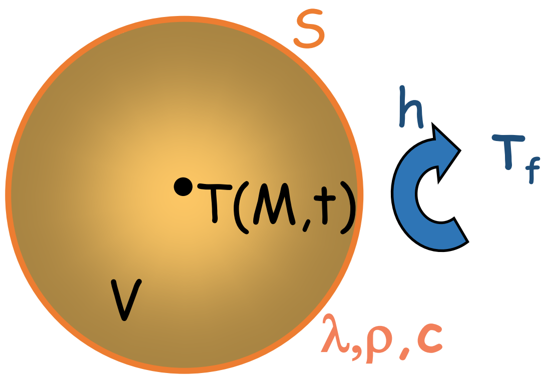


MINCE
Bi < 0,1
Pas de gradient interne

EPAIS
Bi > 0,1
Fort gradient interne

Milieu à température uniforme (thermiquement mince)

$$\boxed{Bi = \frac{hR}{\lambda} < 0,1}$$



BILAN THERMIQUE DIRECT

$\frac{\partial}{\partial t}$ Energie interne = Somme des flux entrants

tout le volume V **toutes les surfaces frontière S**

$$\rho c V \frac{\partial T}{\partial t} = hS(T_f - T)$$

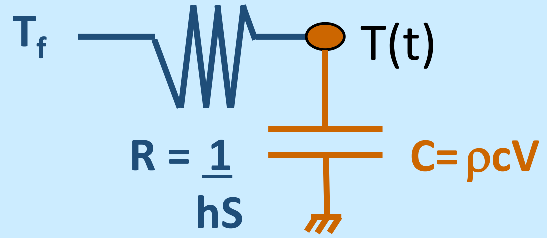
Condition Initiale : $T = T_0$

$$(T - T_f) = (T_0 - T_f)e^{-t/\left(\frac{\rho c V}{hS}\right)}$$

Constante de temps $\tau = \dfrac{\rho c V}{hS}$

Analogie électrique

$\tau = RC$



CONDUCTION en régime variable

METHODES DE RESOLUTION DE L'EQUATION DE LA CHALEUR

- ANALYTIQUES

  Séparation des variables

  Transformation Laplace

  Fourier

- *NUMERIQUES*

  Discrétisation spatiale

  différences finies

  éléments finis

  volumes finis

  Discrétisation temporelle

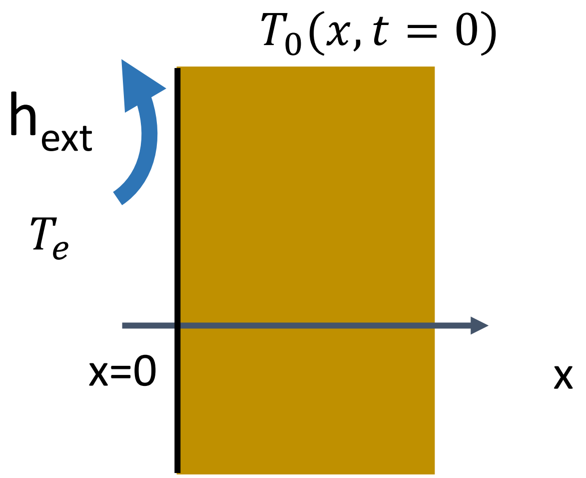
  Schéma à pas unique

  à pas multiples

Exemple de résolution analytique de l'équation de la chaleur

Cas d'un massif semi-infini (monodirectionnel, sans production interne)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



On adimensionne les équations

$$\theta^* = \frac{T - T_e}{T_0 - T_e}$$

L'équation de la chaleur devient

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^2}$$

Avec comme conditions limites :

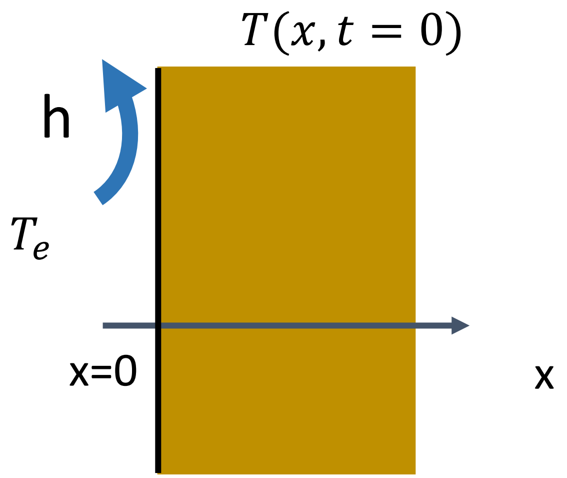
Une condition de Newton à la paroi : $-\lambda \left.\frac{\partial \theta^*}{\partial x}\right|_{x=0} = -h \cdot \theta^*(0, t)$

Une condition en x=∞ où la température est inchangée : $\theta^*(x = \infty, t) = 1$

Et une condition initiale $\theta^*(x, t = 0) = 1$

Exemple de résolution analytique de l'équation de la chaleur

Cas d'un massif semi-infini (monodirectionnel, sans production interne)



La solution de l'équation est de la forme

$$\theta^* = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot t}}\right) + exp\left(\frac{h \cdot x}{\lambda} + \frac{h^2 \cdot a \cdot t}{\lambda^2}\right) \cdot erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot t}} + \frac{h \cdot \sqrt{a \cdot t}}{\lambda}\right)$$

Dans laquelle

erf est la fonction erreur définie par

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x exp(-u^2)du$$

Et ***erfc*** est la fonction erreur complémentaire

$$erfc(x) = 1 - erf(x)$$

Dans le cas particulier où le contact entre le massif et le milieu extérieur serait parfait (coefficient h infini), la solution se simplifie

$$\theta^* = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot t}}\right)$$

Cette expression est applicable dans le cas du massif semi-infini avec condition de température de surface

Mise en contact de deux milieux (Effusivité)

Repartons de l'équation précédente

$$\theta^* = \frac{T - T_e}{T_0 - T_e} = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot t}}\right)$$

La densité de flux à l'interface s'écrit :

$$\varphi_{x=0} = -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = -\lambda(T_0 - T_e)\frac{\partial}{\partial x}\left(erf\left(\frac{x}{2\sqrt{a\cdot t}}\right)\right)_{x=0} = (T_e - T_0)\frac{\lambda}{\sqrt{\pi\cdot a\cdot t}} = (T_e - T_0)\frac{\sqrt{\lambda\cdot\rho\cdot c_p}}{\sqrt{\pi\cdot t}}$$

On appelle l'effusivité

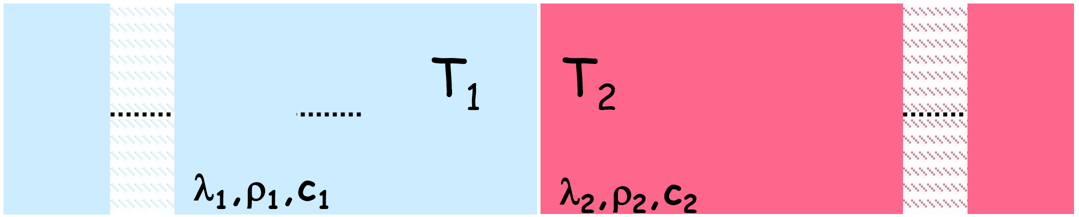
$$b = \sqrt{\lambda \cdot \rho \cdot c_p}$$

Température de contact, T_c, entre 2 milieux

$$(T_c - T_1)\frac{b_1}{\sqrt{\pi\cdot t}} = (T_c - T_2)\frac{b_2}{\sqrt{\pi\cdot t}}$$

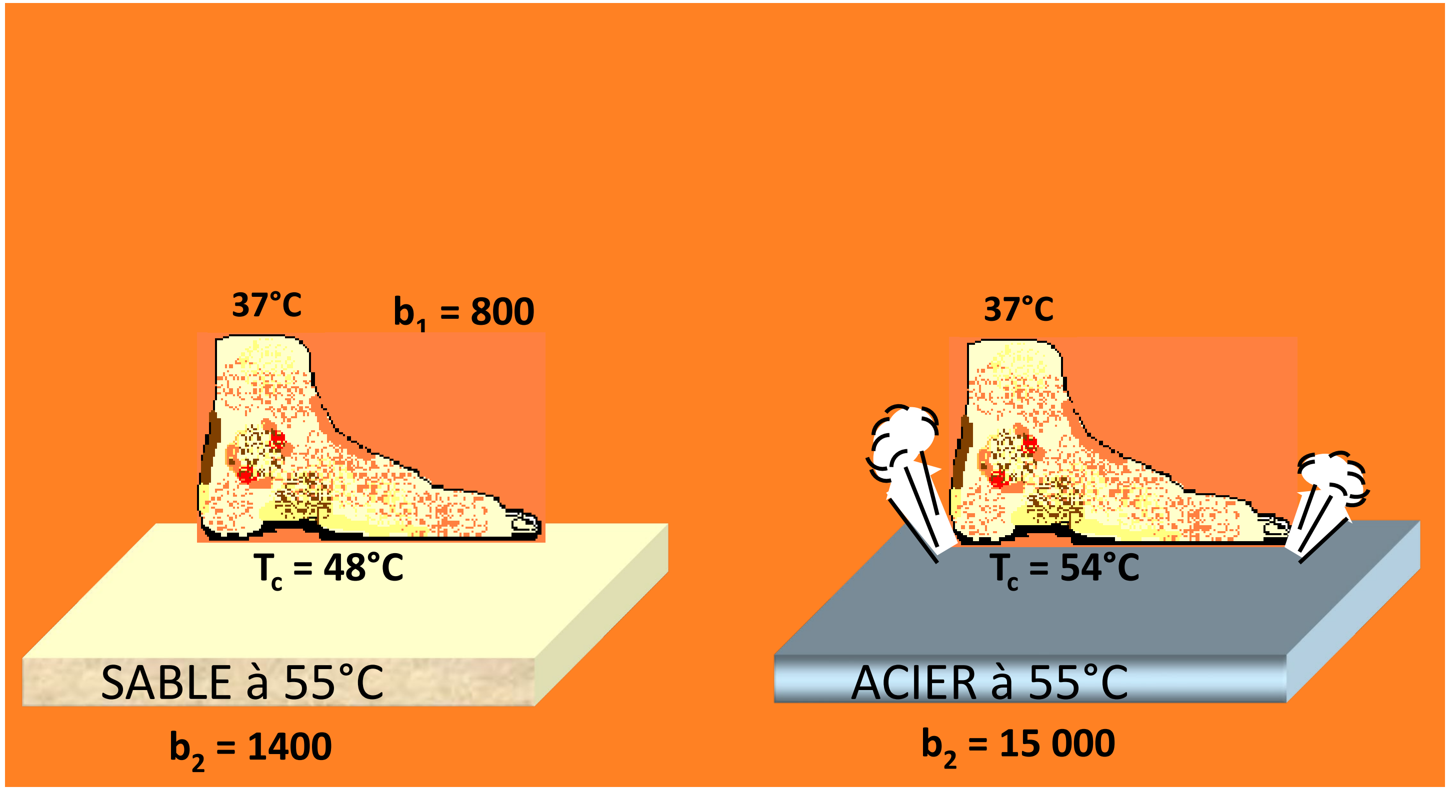
D'où

$$T_c = \frac{b_1\cdot T_1 + b_2\cdot T_2}{b_1 + b_2}$$



Mise en contact de deux milieux (Effusivité)

Température de contact

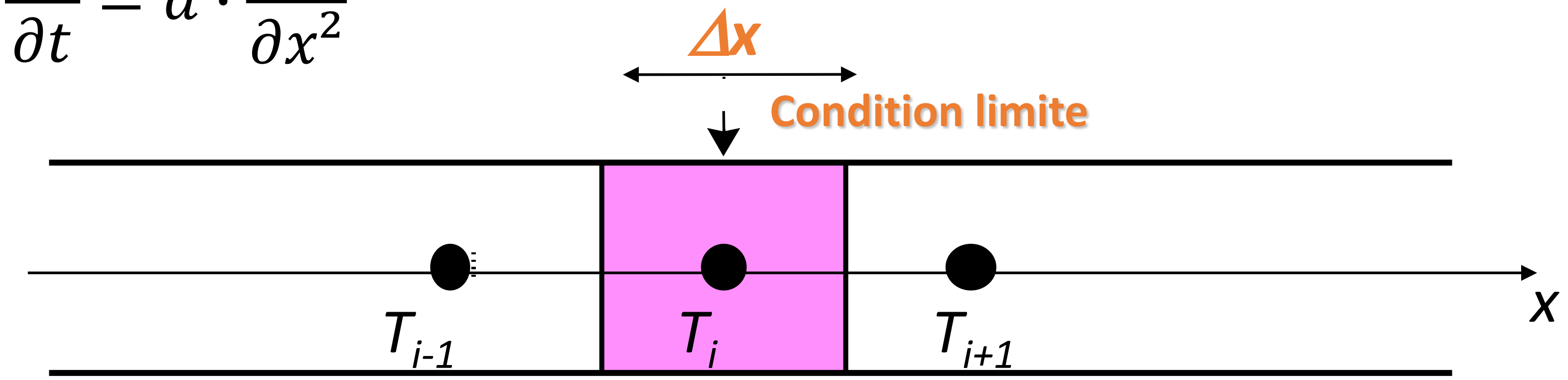


LE PLUS EFFUSIF IMPOSE SA TEMPERATURE

Méthode des différences finies

Mono dimensionnel

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]_i = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{(\Delta x)^2} + \theta(\Delta x^2)$$

Discrétisation spatiale

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]_i = \frac{T_i^{t+\Delta t} - T_i^t}{\Delta t}$$

Discrétisation temporelle

CONDUCTION en régime variable

Méthode des différences finies

Schéma explicite

$$\frac{T_i^{t+\Delta t} - T_i^t}{\Delta t} = a \cdot \frac{T_{i+1}^t - 2T_i^t + T_{i-1}^t}{(\Delta x)^2} + \theta(\Delta x^2)$$

$$T_i^{t+\Delta t} = \underbrace{\left(1 - \frac{2a \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2}\right)}_{} T_i^t + \frac{a \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2}\left(T_{i+1}^t + T_{i-1}^t\right)$$

Stable si > 0 il faut donc que $\Delta t < \frac{(\Delta x)^2}{2a}$

Schéma implicite

$$\frac{T_i^{t+\Delta t} - T_i^t}{\Delta t} = a \cdot \frac{T_{i+1}^{t+\Delta t} - 2T_i^{t+\Delta t} + T_{i-1}^{t+\Delta t}}{(\Delta x)^2} + \theta(\Delta x^2)$$

Toujours stable