

Lorsque la viscosité $\mu \rightarrow 0$, on retrouve les équations des fluides parfaits incompressibles (5.2).

Pour étudier les contributions relatives des différents termes, il est d'usage d'adimensionner les équations précédentes en introduisant des variables sans dimension physique

$$\underline{x} = L\underline{x}', \quad \underline{v} = V_\infty \underline{v}', \quad t = \frac{L}{V_\infty} t', \quad p = \rho V_\infty^2 p', \quad \underline{f} = g_c \underline{f}'$$

où L, V_∞, g_c sont respectivement une longueur, une vitesse et une densité massique de force caractéristiques du problème (Pedley, 1997). On obtient alors les équations de Navier-Stokes adimensionnées :

$$\frac{\partial \underline{v}'}{\partial t'} + (\text{grad}' \underline{v}') \cdot \underline{v}' + \text{grad}' p' = \frac{1}{\mathcal{R}e} \Delta' \underline{v}' + \frac{1}{\mathcal{F}r} \underline{f}' \quad (11.25)$$

où apparaissent les **nombre adimensionnels de Reynolds et de Froude** :

$$\mathcal{R}e := \frac{\rho L V_\infty}{\mu}, \quad \mathcal{F}r := \frac{V_\infty^2}{g_c L} \quad (11.26)$$

Les équations sans dimensions permettent de profiter de la **similitude** de problèmes dépendant d'un nombre réduit de paramètres. Deux écoulements à géométrie équivalente sont dits semblables lorsque les nombres de Reynolds et de Froude correspondants sont égaux⁹. Cela autorise l'étude de modèles réduits. Sur l'analyse dimensionnelle et les similitudes physiques, on renvoie lecteur à l'ouvrage de (Barenblatt, 2003) et aux nombreuses applications en mécanique des fluides dans (Batchelor, 2000).

11.6 Applications directes pour les fluides newtoniens incompressibles

11.6.1 Ecoulements de Poiseuille et de Couette

Pertes de charge dans un écoulement entre deux plans parallèles

On considère un écoulement stationnaire, dans la direction 1, d'un fluide newtonien incompressible entre deux plaques parallèles espacées d'une distance $2h$ dans la direction 2 du repère. Le champ des vitesses est de la forme

$$v_1(x_1, x_2), \quad v_2 = v_3 = 0$$

L'isochorie de l'écoulement implique que $\text{div } \underline{v} = 0 = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0$ de sorte que le champ inconnu est une fonction $v_1(x_2)$. L'équilibre du fluide s'écrit

$$\text{grad } p + \rho(\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v} = \mu \Delta \underline{v}$$

On vérifie que

$$\text{grad } \underline{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 \implies (\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v} = 0$$

Le gradient de pression vaut donc

$$p_{,1} = \mu v_{1,22}, \quad p_{,2} = p_{,3} = 0$$

Ces équations montrent que p ne dépend que de x_1 tandis que v_1 est une fonction de x_2 . Il s'ensuit que chaque membre de la première équation précédente est une constante uniforme $-a$ et que

$$p = -ax_1 + b, \quad v_1 = -\frac{a}{2\mu} x_2^2 + cx_2 + d$$

où les constantes c et d sont déterminées par les conditions aux limites d'adhérence du fluide visqueux :

$$v_1(h) = v_1(-h) = 0 \implies v_1 = \frac{a}{2\mu} (h^2 - x_2^2) \quad (11.27)$$

9. En toute rigueur, il faut y ajouter le nombre de Mach relatif au terme en gradient de p .

Cet écoulement parabolique est caractéristique de la distribution de Poiseuille des vitesses dans la section. La vitesse moyenne du fluide est

$$\bar{v} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h v_1 dx_2 = \frac{ah^2}{3\mu} \quad (11.28)$$

La constante $-a$ est le gradient de pression, ici une chute linéique de pression ($-a < 0$), i.e. une perte de charge dictée par les conditions de pression en amont et en aval.

11.6.2 Ecoulement de Couette

En modifiant les conditions aux limites dans le problème précédent on obtient l'écoulement de Couette entre deux plaques en mouvement relatif l'une par rapport à l'autre :

$$v_1(h) = V, \quad v_1(-h) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{x_2 + h}{2h}V + \frac{a}{2\mu}(h^2 - x_2^2) \quad (11.29)$$

avec une vitesse moyenne

$$\bar{v} = \frac{V}{2} + \frac{ah^2}{3\mu} \quad (11.30)$$

En l'absence de perte de charge ($a = 0$), on trouve l'écoulement de Couette proprement dit, à savoir un profil linéaire des vitesses. Le contrôle de la vitesse de la plaque et la mesure de la force résultante permettent, grâce à cet **essai viscométrique**, de mesurer la viscosité du fluide.

L'analyse prévoit un **écoulement en retour**, i.e. $v_{1,2}(-h) \leq 0$ si la perte de charge $a \leq a_0 = -\mu V/2h^2$. La vitesse moyenne (11.30) devient même négative, c'est-à-dire dans le sens opposé au mouvement du plan, si $a \leq 3a_0$! On peut exprimer le champ de vitesse en fonction du "point de non retour" a_0 :

$$\frac{v_1}{V} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_2}{h} + 1 \right) \left(1 + \frac{a}{2a_0} \left(\frac{x_2}{h} - 1 \right) \right) \quad (11.31)$$

Ce champ de vitesse est représenté pour différentes valeurs du rapport a/a_0 sur la figure 11.2.

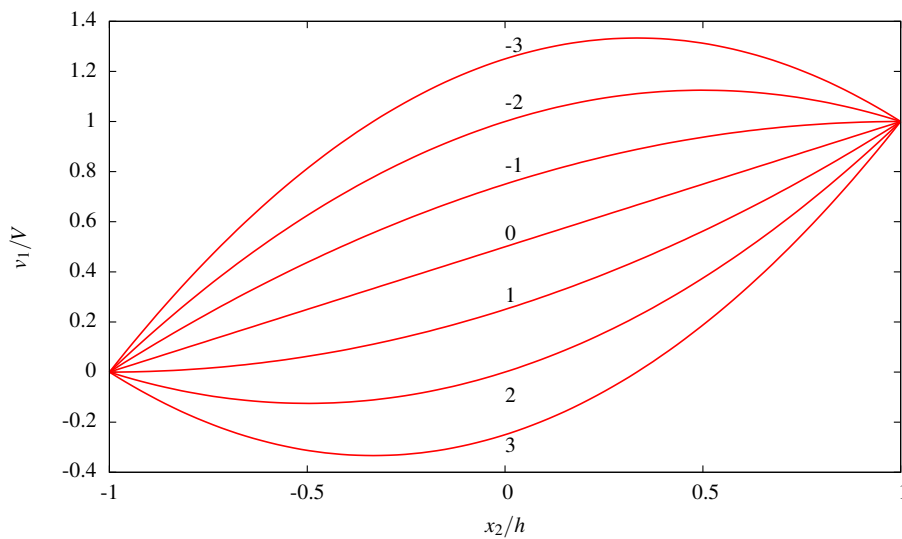


FIGURE 11.2 – Ecoulement en retour en fonction de la valeur du gradient de pression a/a_0 d'après l'expression (11.31).

Application à la lubrification

La solution précédente peut être étendue dans le cas de films fluides très minces d'épaisseur $0 \leq x_2 \leq h(x_1, t)$ lentement variable le long de l'écoulement, dans la direction x_1 , comme on en rencontre entre deux solides rigides lubrifiés¹⁰.

La paroi supérieure est notée $\mathcal{C}(x_1, x_2 = h(x_1, t))$ est animée d'une vitesse V dans la direction 1 :

$$\frac{dx_2}{dt}(\mathcal{C}) = \frac{dh}{dt} = V = \frac{\partial h}{\partial t} + \underline{v} \cdot \text{grad } h = \frac{\partial h}{\partial t} + v_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad (11.32)$$

tandis que la paroi inférieure est $x_2 = 0$.

Le film étant très mince, on suppose que la pression est une fonction $p(x_1)$. Le champ de vitesse est conforme à l'écoulement de Couette traité précédemment avec les conditions aux limites $v_1(x_1, x_2 = 0, t) = 0, v_1(x_1, x_2 = h, t) = V$. On trouve :

$$v_1 = V \frac{x_2}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} x_2 (h - x_2) \quad (11.33)$$

Le débit par unité de largeur (selon x_3) s'évalue de la manière suivante :

$$Q(x_1, t) = \int_0^{h(t)} v_1 dx_2 = V \frac{h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \quad (11.34)$$

La conservation de la masse pour le fluide incompressible impose que

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = - \frac{\partial h}{\partial t} \quad (11.35)$$

On obtient l'équation dite de Reynolds

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) = 6\mu \left(\frac{\partial V h}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right) \quad (11.36)$$

où l'on peut également remplacer la dérivée partielle temporelle de la hauteur par la dérivée selon x_1 en utilisant (11.32).

Écoulement stationnaire dans une conduite cylindrique

On reprend l'écoulement de type Poiseuille dans le cas d'une conduite cylindrique de section quelconque. L'écoulement a lieu dans la direction x_1 qui coïncide avec l'axe du cylindre. Le champ recherché est de la forme

$$v_1(x_2, x_3), \quad v_2 = v_3 = 0$$

où v_1 ne dépend pas de x_1 en raison de l'incompressibilité du fluide. On vérifie que $(\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v} = 0$ dans ce cas, de sorte que

$$\text{grad } p = \mu \Delta \underline{v} \implies p_{,1} = \mu \Delta v_1 = \mu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right) = Cste = -a \implies \Delta v_1 + \frac{a}{\mu} = 0 \quad (11.37)$$

ce qui correspond à une chute linéique de charge comme dans l'écoulement entre deux plans.

Dans le cas d'une section circulaire de rayon R , la solution

$$v_1 = \frac{a}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad (11.38)$$

s'annule en $r = R$, comme il se doit.

Le débit de la canalisation à section circulaire vaut

$$Q = 2\pi \int_0^R v_1 r dr = \pi R^2 \bar{v}_1 = \frac{\pi R^4 a}{8\mu}$$

10. D'après (Germain, 1986).

La résolution dans le cas d'une section de forme quelconque revient à résoudre un problème de Dirichlet, i.e. la recherche d'une fonction harmonique ϑ s'annulant sur le bord du domaine :

$$\vartheta = v_1 + \frac{a}{4\mu}(x_2^2 + x_3^2)$$

qui est effectivement harmonique d'après (11.37). Cette problématique se rencontre également dans le cas de la torsion de barres élastiques au chapitre 16 qui discute le problème de Dirichlet au paragraphe 16.1.1.

11.6.3 Ecoulement de Couette–Taylor entre deux cylindres

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible entre deux cylindres coaxiaux circulaires de rayons intérieur et extérieur R_i et R_e respectivement. Le dispositif s'appelle un rhéomètre ou un viscosimètre car il permet, on le verra, de mesurer la viscosité d'un fluide. On cherche les conditions d'existence d'un champ de vitesses de la forme

$$\underline{v} = v_\theta(r) \underline{e}_\theta, \quad R_i \leq r \leq R_e \quad (11.39)$$

dans un repère cylindrique dont l'axe est celui des cylindres étudiés. La divergence d'un tel champ est nulle, d'après le formulaire (G.8), de sorte que l'écoulement recherché est isochore, comme il se doit. D'après le formulaire (G.7), le gradient d'un tel champ de vitesse est

$$\underline{L} = -\frac{v_\theta}{r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{dv_\theta}{dr} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r, \quad \underline{D} = \frac{1}{2} \left(v'_\theta - \frac{v_\theta}{r} \right) (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r) \quad (11.40)$$

où le prime indique la dérivation par rapport à r .

L'équation du mouvement stationnaire, en négligeant les efforts volumiques, est donnée par

$$\rho(\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v} + \text{grad } p = \text{div } (2\mu \underline{D}) \quad (11.41)$$

On calcule successivement

$$\begin{aligned} (\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v} &= -\frac{v_\theta^2}{r} \underline{e}_r \\ \text{div } \underline{D} &= \frac{\partial D_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2D_{r\theta}}{r} = \left(v'_\theta - \frac{v_\theta}{r} \right)' \underline{e}_\theta \end{aligned}$$

La pression $p(r, \theta, z)$ ne dépend pas de θ en raison de la symétrie de révolution du problème. L'équation du mouvement montre également que p ne dépend pas de z car les vecteurs précédents n'ont pas de composante selon z . Par conséquent,

$$\text{grad } p = p' \underline{e}_r$$

En projetant l'équation (11.41) sur l'axe \underline{e}_θ , on obtient l'équation différentielle :

$$\left(v'_\theta - \frac{v_\theta}{r} \right)' = 0 \quad \implies \quad v_\theta = ar + \frac{b}{r}$$

Les conditions aux bords des cylindres permettent d'identifier les constantes :

$$v_\theta(r = R_i) = R_i \omega_i = aR_i + \frac{b}{R_i}, \quad v_\theta(r = R_e) = R_e \omega_e = aR_e + \frac{b}{R_e}$$

où ω_i et ω_e sont les vitesses de rotation des cylindres intérieur et extérieur. Ces vitesses sont constantes car on étudie le cas stationnaire. Le cas instationnaire sera abordé dans l'exercice suivant. Finalement,

$$a = \frac{R_e^2 \omega_e - R_i^2 \omega_i}{R_e^2 - R_i^2}, \quad b = \frac{R_i^2 R_e^2 (\omega_i - \omega_e)}{R_e^2 - R_i^2}$$

Lorsque $R_i \rightarrow 0$, on a $b = 0$ et la solution $v_\theta = ar$ correspond à un mouvement de corps rigide. Lorsque $R_e \rightarrow \infty$, le mouvement tend vers celui d'un tourbillon dont la cinématique (13.5) est étudiée au chapitre 13.

La distribution de pression est calculée ensuite grâce à la projection de l'équation (11.41) sur l'axe \underline{e}_r :

$$\frac{p'}{\rho} = \frac{v_0^2}{r} = ar + \frac{2ab}{r} + \frac{b^2}{r^3}$$

qui s'intègre en

$$\frac{p(r)}{\rho} = \frac{1}{2}a^2r^2 + 2ab \log \frac{r}{R_e} - \frac{b^2}{2r^2} + p_0$$

La constante p_0 s'identifie à partir de la pression moyenne imposée aux extrémités du rhéomètre ou bien à partir de la pression mesurée sur l'un des cylindres.

Le fluide résiste à ce mouvement relatif des cylindres en opposant un moment résultant par rapport à l'axe de rotation. On calcule ici le moment exercé par le fluide sur le cylindre extérieur de hauteur H . Ce moment est l'opposé du moment appliqué par la paroi sur le fluide :

$$\begin{aligned} \underline{M} &= -H \int_{r=R_e} \underline{OM} \wedge (\underline{\sigma}(R_e) \cdot \underline{e}_r) R_e d\theta \\ &= -H \int_{r=R_e} \underline{OM} \wedge (\underline{\sigma}^{\text{dev}}(R_e) \cdot \underline{e}_r) R_e d\theta \\ &= -H R_e \int_{r=R_e} R_e \underline{e}_r \wedge \mu \left(v'_\theta - \frac{v_\theta}{r} \right) \underline{e}_\theta d\theta \\ &= 4\pi H \mu \frac{R_i^2 R_e^2 (\omega_e - \omega_i)}{R_e^2 - R_i^2} \underline{e}_z \end{aligned} \quad (11.42)$$

La puissance nécessaire à fournir est alors $M_e(\omega_e - \omega_i)$. Cette puissance est nulle si $R_i \rightarrow 0$ car le dispositif ne subit alors qu'un mouvement de corps rigide, sans résistance opposée par le fluide.

Il resterait à étudier la stabilité des écoulements décrits précédemment, question que nous n'aborderons pas dans ce cours.

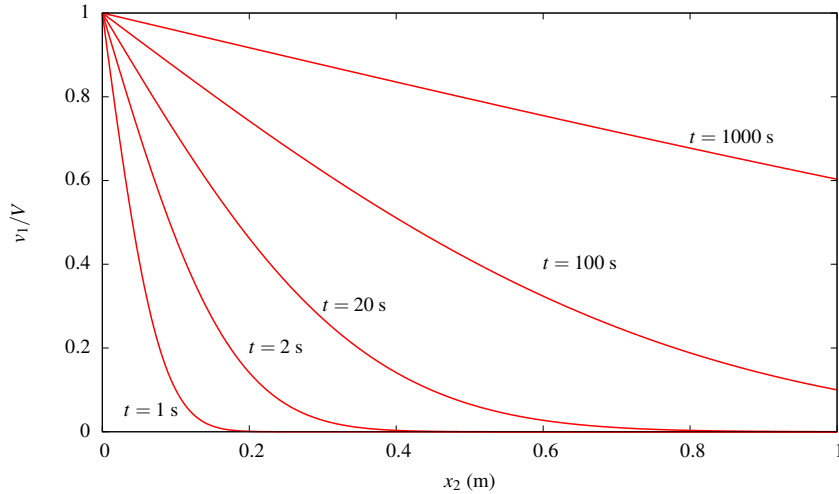


FIGURE 11.3 – Ecoulement instationnaire de Stokes pour la glycérine ($\mu = 2.33 \text{ MPa} \cdot \text{s}$, $\rho = 1260 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) à différents instants. A $t = 0$ le plateau inférieur est soudain animé d'une vitesse V .

11.6.4 Premier problème de Stokes

Nous terminons ce florilège par un exemple d'écoulement non stationnaire de fluide visqueux. Il s'agit du problème de l'évolution temporelle d'un fluide dans un bassin dont le fond est mis soudainement

en mouvement :

$$v_1(x_1, x_2 = 0, t) = H(t)V, \quad v_2 = v_3 = 0$$

où $H(t)$ désigne la fonction de Heaviside. Cela signifie que le fond initialement au repos par rapport fluide subit une impulsion amenant instantanément sa vitesse à la valeur constante V . On va voir que la réponse du fluide newtonien n'est pas instantanée, contrairement au cas d'un fluide parfait qui serait insensible à cette sollicitation¹¹. Au contraire, le mouvement de la plaque inférieure est communiqué progressivement au sein du fluide. La profondeur du bassin selon x_2 est supposée infinie. On recherche la vitesse de la forme $\underline{v} = v_1(x_2)\underline{e}_1$.

On résout l'équation instationnaire suivante :

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad } p = \mu \Delta \underline{v} \quad (11.43)$$

Le laplacien d'un champ de tenseur en coordonnées cartésiennes orthonormées a pour composantes le laplacien de chaque composante, ce qui donne ici

$$\Delta \underline{v} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \underline{e}_1$$

La deuxième composante de l'équation (11.43) indique que $\partial p / \partial x_2 = 0$ de sorte que la pression est uniforme (en l'absence d'efforts massiques). La première composante fournit alors l'équation différentielle à résoudre pour v_1 :

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \quad (11.44)$$

Il s'agit d'une équation de type diffusion faisant intervenir la viscosité cinématique ν . Elle doit être comparée à l'équation de la chaleur analogue

$$\dot{T} = \frac{k}{\rho C_v} \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}$$

où T est la température, k le coefficient de Fourier de conduction thermique et C_v la capacité calorifique. La différentiabilité de v_1 par rapport au temps exigée dans (11.44) fournit la condition initiale :

$$v_1(x_2, 0) = 0, \quad \forall x_2$$

Les conditions aux limites du problème sont

$$v_1(x_2 = \infty, t) = 0, \quad v_2(x_2 = 0, t) = V, \quad \forall t > 0$$

Les solutions de (11.44) sont décrites par la fonction erreur de Gauss¹²

$$v_1(x_2, t) = A \operatorname{erf} \left(\frac{x_2}{2\sqrt{\nu t}} \right) = B, \quad \text{avec} \quad \operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt \quad (11.45)$$

En tenant compte des conditions initiales et aux limites, on trouve

$$v_1(x_2, t) = V \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x_2}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right) \quad (11.46)$$

La quantité $\sqrt{\nu t}$ représente une longueur caractéristique de diffusion. Les profils de vitesses à différents instants sont tracés sur la figure dans un cas particulier. On voit qu'aux premiers instants, seule la partie basse est mise en mouvement. Bien plus tard, le champ devient quasi-linéaire, le cisaillement ayant été transmis à une grande partie du fluide.

Pour finir, mentionnons que le second problème de Stokes considère un mouvement oscillant de la plaque inférieure (Batchelor, 2000).

11. Cf. (Batchelor, 2000) p. 190.

12. La fonction de répartition de la loi normale est liée à la fonction erf. En particulier, $\operatorname{erf}(0) = 0$, $\operatorname{erf}(+\infty) = 1$, $\operatorname{erf}(-\infty) = -1$.