

## Première partie

# Variations sur la torsion des barres en élasticité linéaire et isotrope

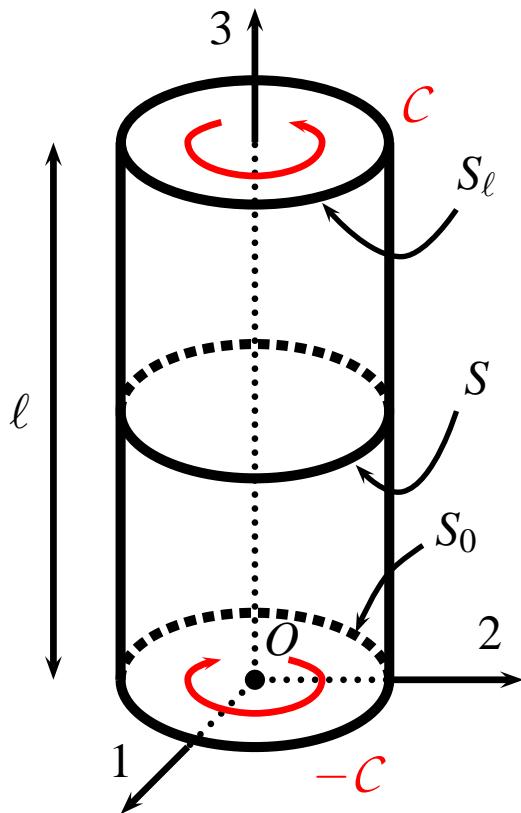


FIGURE 1: Torsion d'un barreau cylindrique de section quelconque : schéma de principe.

L'objectif de cette partie est d'apporter des compléments à l'analyse de la torsion de barres cylindriques de section quelconque, cf. Fig. 1, dans le cas de l'élasticité linéarisée et isotrope. Le moment de torsion  $C$  par rapport à l'axe du cylindre est appliqué aux extrémités de la barre. La section courante et son bord sont respectivement notés  $S$  et  $\Gamma$ . On suppose que  $S$  est simplement connexe, sauf pour la question 2.5. On étudie successivement les cas particuliers des sections de formes elliptique et triangulaire et on évalue leur résistance à la rupture et à la plasticité. Ces deux formes particulières sont choisies car il se trouve que les potentiels dont découle la solution ont une forme polynomiale simple de faible degré. Le cas de la section rectangulaire, par exemple, est plus complexe et donne lieu à l'utilisation de séries de Fourier pour expliciter les potentiels, ce qui n'est pas entrepris ici. On renvoie à [Sokolnikoff \(1946\)](#); [Sadd \(2005\)](#) pour l'étude de la torsion des barres à section rectangulaire.

## 1. Préliminaire : fonction de gauchissement et fonction de contrainte

On rappelle que l'analyse pionnière de Saint-Venant a montré que le champ de déplacement prend la forme suivante, dans une base cartésienne orthornormée :

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha X_2 X_3 \\ u_2 = \alpha X_1 X_3 \\ u_3 = \alpha \varphi(X_1, X_2) \end{cases} \quad (1)$$

où le déplacement  $u_3$  correspond à un gauchissement de la surface  $X_3 = Cste$  après déformation. L'inconnue  $\varphi(X_1, X_2)$ , solution d'un problème de Neumann<sup>1</sup> s'appelle *fonction de gauchissement*. Le coefficient  $\alpha$  désigne la rotation linéaire constante imposée et s'interprète comme le rapport  $\delta\theta/\ell$ , de la rotation relative  $\delta\theta$  appliquée entre les extrémités supérieure et inférieure, sur la longueur  $\ell$  du cylindre. La fonction de gauchissement est harmonique :  $\Delta\varphi = 0$ , où  $\Delta$  désigne ici l'opérateur laplacien.

Rappeler, sans détailler les calculs, les expressions des tenseurs des déformations et des contraintes à l'aide de la fonction de gauchissement  $\varphi$ . Une notation raccourcie est proposée pour désigner les dérivées partielles d'une fonction :

$$\varphi_{,1} = \frac{\partial\varphi}{\partial X_1}, \quad \varphi_{,2} = \frac{\partial\varphi}{\partial X_2}$$

Cette notation sera utilisée dans la suite.

Rappeler de plus les conditions que doit vérifier la fonction de gauchissement sur le contour  $\Gamma$ .

[Ces relations sont](#)

$$\underline{\varepsilon} = \frac{\alpha}{2}(\varphi_{,1} - X_2)(\underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_3 + \underline{\mathbf{e}}_3 \otimes \underline{\mathbf{e}}_1) + \frac{\alpha}{2}(\varphi_{,2} + X_1)(\underline{\mathbf{e}}_2 \otimes \underline{\mathbf{e}}_3 + \underline{\mathbf{e}}_3 \otimes \underline{\mathbf{e}}_2)$$

$$\underline{\sigma} = \mu\alpha(\varphi_{,1} - X_2)(\underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_3 + \underline{\mathbf{e}}_3 \otimes \underline{\mathbf{e}}_1) + \mu\alpha(\varphi_{,2} + X_1)(\underline{\mathbf{e}}_2 \otimes \underline{\mathbf{e}}_3 + \underline{\mathbf{e}}_3 \otimes \underline{\mathbf{e}}_2)$$

[La condition de bord libre se traduit par la condition de Neumann](#)

$$\varphi_{,1} n_1 + \varphi_{,2} n_2 = n_1 X_2 - n_2 X_1, \quad \forall \underline{\mathbf{X}} \in \Gamma \quad (2)$$

[tandis que les conditions d'équilibre local statique en l'absence de forces volumiques se traduisent par la condition d'harmonicité de la fonction de gauchissement.](#)

On sait également que les contraintes engendrées par le champ des déplacements précédents dérivent d'un potentiel  $\Psi(X_1, X_2)$ , appelé *fonction de contrainte*, solution d'un problème de Dirichlet, sous la forme<sup>2</sup> :

$$\sigma_{31} = \frac{\partial\Psi}{\partial X_2} = \Psi_{,2}, \quad \sigma_{32} = -\frac{\partial\Psi}{\partial X_1} = -\Psi_{,1} \quad (3)$$

[La fonction de contrainte vérifie l'équation aux dérivées partielles :  \$\Delta\Psi = -2\mu\alpha\$ , avec des conditions aux limites appropriées sur  \$\Gamma\$  vues en exercice.](#)

La connaissance des fonctions  $\varphi$  ou  $\Psi$  permet de caractériser complètement la solution du problème de torsion.

---

1. cf. le problème aux limites de Neumann (??) et (??).

2. cf. le problème aux limites de Dirichlet (??).

Donner l'expression du cisaillement, c'est-à-dire la norme de la contrainte tangentielle, notée  $\tau$ , agissant en chaque point de la section de normale  $\underline{n} = \underline{e}_3$ , du cylindre considéré, en fonction des composantes du tenseur des contraintes.

On dit qu'une fonction  $f(X_1, X_2)$  de classe  $C^2$  est *sous-harmonique* si son laplacien est toujours positif :  $\Delta f \geq 0$ . On démontre<sup>3</sup> que toute fonction sous-harmonique sur une région du plan atteint sa (ses) valeur(s) maximale(s) sur le bord de cette région. En déduire que le cisaillement est maximal sur des points du contour  $\Gamma$  (on pourra s'aider de la fonction  $\tau^2$ ).

Le vecteur-contrainte en chaque point de la section  $S$  a pour composante  $(\sigma_{31}, \sigma_{32}, 0)$ . La contrainte normale est donc nulle et la contrainte tangentielle vaut  $\tau = \sqrt{\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2}$ . Calculons le laplacien de  $\tau^2 = \Psi_{,1}^2 + \Psi_{,2}^2$  :

$$\begin{aligned} (\tau^2)_{,1} &= 2\Psi_{,1}\Psi_{,11} + 2\Psi_{,2}\Psi_{,21}, & (\tau^2)_{,2} &= 2\Psi_{,1}\Psi_{,12} + 2\Psi_{,2}\Psi_{,22} \\ (\tau^2)_{,11} &= 2\Psi_{,12}^2 + 2\Psi_{,2}\Psi_{,211} + 2\Psi_{,11}^2 + 2\Psi_{,1}\Psi_{,111} \\ (\tau^2)_{,22} &= 2\Psi_{,22}^2 + 2\Psi_{,2}\Psi_{,222} + 2\Psi_{,12}^2 + 2\Psi_{,1}\Psi_{,122} \end{aligned}$$

Comme  $\Psi_{,11} + \Psi_{,22} = -2\mu\alpha$ , on voit que  $\Psi_{,112} = -\Psi_{,111}$  et que  $\Psi_{,221} = -\Psi_{,222}$ . Le calcul du laplacien du cisaillement au carré se simplifie alors :

$$\Delta\tau^2 = 2\Psi_{,11}^2 + 4\Psi_{,12}^2 + 2\Psi_{,22}^2 \geq 0$$

Le carré du cisaillement est donc une fonction sous-harmonique, ce qui implique que le cisaillement trouve son maximum sur le contour  $\Gamma$ .

Si le contour est convexe, ce maximum est atteint aux points du contour les plus proches du centre géométrique de la section.

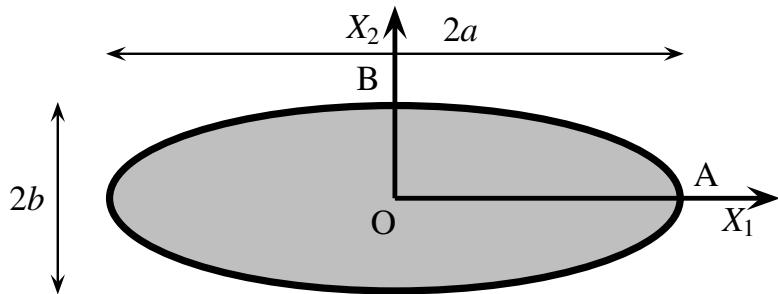


FIGURE 2: Géométrie de la section elliptique d'une barre : repère, grand et petit axes.

## 2. Torsion d'une barre de section elliptique

La section de la barre, représentée sur la figure 2, est une ellipse dont le contour  $\Gamma$  a pour équation :

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

où  $2a$  et  $2b$  désignent respectivement le grand axe et le petit axe de l'ellipse. Les axes du repère coïncident avec les axes de symétrie de l'ellipse et l'origine est prise au centre.

---

3. Voir Sokolnikoff (1946) (p. 117) pour la preuve.

## 2.1. Détermination de la fonction de gauchissement

Montrer qu'une fonction polynomiale de degré 2 permet de remplir toutes les conditions du problème pour une section elliptique de barre en torsion :

$$\varphi(X_1, X_2) = AX_1^2 + 2BX_1X_2 + CX_2^2 \quad (5)$$

On déterminera les valeurs des coefficients qui permettent de satisfaire toutes les conditions requises pour  $\varphi$ .

Montrer finalement que la fonction de gauchissement se met sous la forme

$$\varphi^\ominus(X_1, X_2) = -kX_1X_2 \quad (6)$$

et on exprimera  $k$  en fonction de  $a$  et  $b$ , exclusivement.

La première condition requise est que la fonction soit harmonique ce qui implique  $\Delta\varphi = 2A + 2C = 0$ , si bien que  $A = -C$ .

La fonction doit ensuite satisfaire les conditions aux limites de Neumann (2). Pour cela, on note que le vecteur normal en un point de l'ellipse  $\Gamma$  est parallèle au vecteur  $[X_1/a^2 \quad X_2/b^2 \quad 0]$ . La condition (2) s'écrit alors :

$$(2AX_1 + 2BX_2)\frac{X_1}{a^2} + (2BX_1 - 2AX_2)\frac{X_2}{b^2} = \frac{X_1X_2}{a^2} - \frac{X_1X_2}{b^2}$$

$$2A\left(\frac{X_1^2}{a^2} - \frac{X_2^2}{b^2}\right) + 2B(a^{-2} + b^{-2})X_1X_2 = X_1X_2(a^{-2} - b^{-2})$$

L'identification fournit  $A = 0$  et  $2B = (b^2 - a^2)/(a^2 + b^2)$  ce qui conduit à la fonction (6) avec

$$k = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

## 2.2. Etude de la section déformée

Donner les conditions à satisfaire pour respecter le contexte infinitésimal.

Indiquer à quel(s) endroit(s) de la section  $S$  le gauchissement est maximal et donner la(les) valeur(s) correspondante(s) en fonction de  $a, b, \alpha$ .

Maintenant que la fonction de gauchissement est déterminée, le champ de déplacement s'écrit

$$u_1 = -\alpha X_2 X_3, \quad u_2 = \alpha X_1 X_3, \quad u_3 = -k\alpha X_1 X_2$$

Le gradient du champ de déplacement vaut quant à lui

$$\text{Grad } \underline{\mathbf{u}} = \alpha X_3 (\underline{\mathbf{e}}_2 \otimes \underline{\mathbf{e}}_1 - \underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_2) + \alpha X_1 (\underline{\mathbf{e}}_2 \otimes \underline{\mathbf{e}}_3 - k\underline{\mathbf{e}}_3 \otimes \underline{\mathbf{e}}_2) - \alpha X_2 (\underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_3 + k\underline{\mathbf{e}}_3 \otimes \underline{\mathbf{e}}_1)$$

Le contexte infinitésimal exige que les composantes du gradient du déplacement soient suffisamment petites :

$$|\alpha X_3| \leq |\delta\theta| \ll 1, \quad |\alpha X_1| \leq |\delta\theta| \frac{a}{\ell} \ll 1, \quad |\alpha X_2| \leq |\delta\theta| \frac{b}{\ell} \ll 1$$

$$|k\alpha X_1| \leq k|\delta\theta| \frac{a}{\ell} \ll 1, \quad |k\alpha X_2| \leq k|\delta\theta| \frac{b}{\ell} \ll 1$$

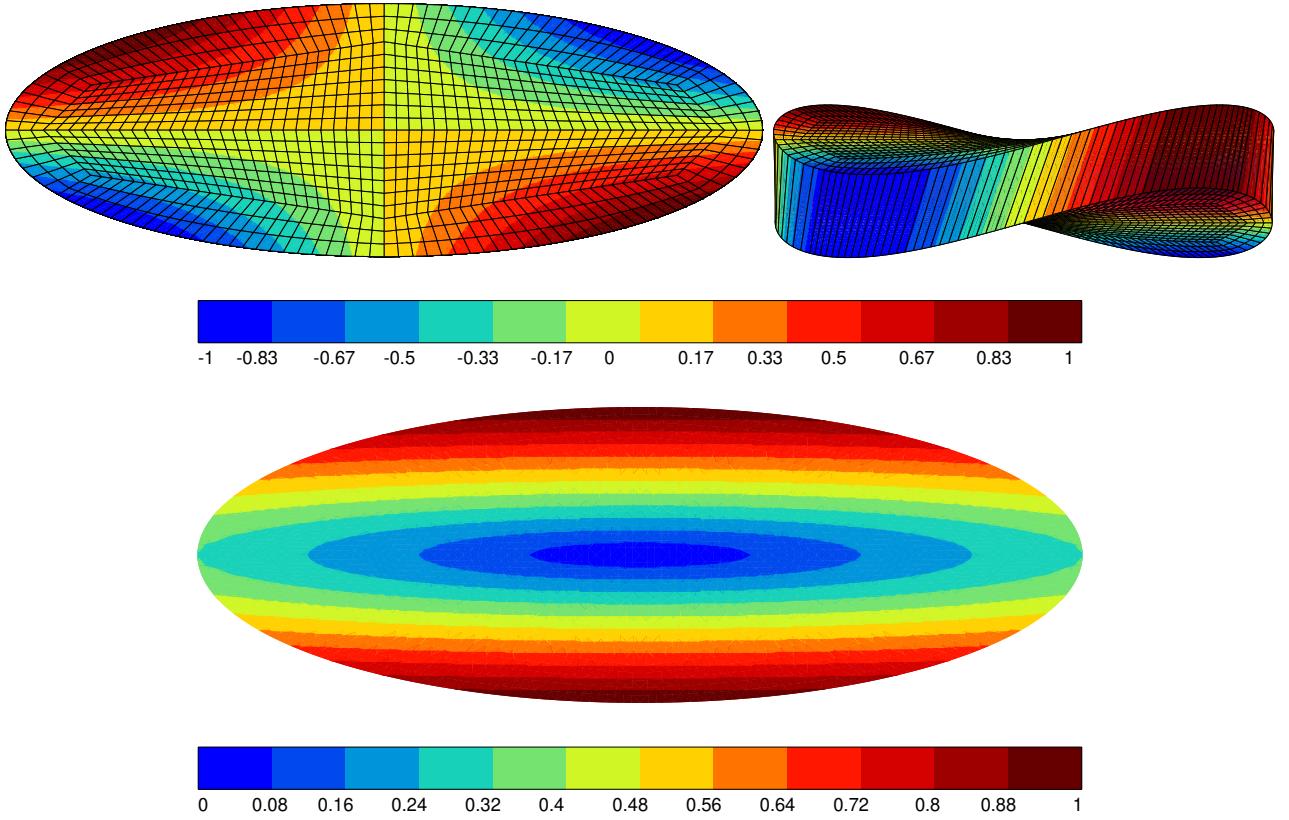


FIGURE 3: Champ de déplacement  $u_3$  (gauchissement) normalisé par la valeur maximale atteinte : lignes de niveau dans la section elliptique (en haut à gauche) et vue de la déformée d'une tranche de profil (en haut à droite, déplacements exagérés d'un facteur 10). Lignes de niveau de la contrainte équivalente de von Mises normalisée par la valeur maximale (en bas). Le rapport des paramètres de l'ellipse est  $a/b = 3$ .

Dans le cas d'une barre élancée,  $\text{Max}(a, b) \ll \ell$ , la première condition reste la plus limitante. La fonction  $X_1 X_2$  est maximale sur le contour  $\Gamma$ . On peut calculer la valeur du carré du déplacement sur le bord de l'ellipse :

$$u_3^2 = k^2 \alpha^2 X_1^2 X_2^2 = k^2 \alpha^2 X_1^2 b^2 \left(1 - \frac{X_1^2}{a^2}\right)$$

Le maximum de cette quantité par rapport à  $X_1^2$  s'obtient en calculant

$$\frac{du_3^2}{dX_1^2} = k^2 \alpha^2 b^2 \left(1 - 2 \frac{X_1^2}{a^2}\right) = 0 \implies X_1 = \pm \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad X_2 = \pm \frac{b}{\sqrt{2}}$$

En ces 4 points, on trouve le déplacement hors plan maximal :

$$u_3^{max} = \alpha k \frac{ab}{2} = \alpha \frac{ab(a^2 - b^2)}{2(a^2 + b^2)}$$

La distribution de  $u_3$  et les extrema associés sont visibles sur la figure 3.

### 2.3. Rigidité de torsion

Exprimer le couple  $C$  en fonction de l'angle linéique imposé  $\alpha$ .

Pour cela, on pourra établir le résultat ou bien utiliser des résultats connus sur la torsion. Par ailleurs, on admettra (ou on démontrera, bonus !) que les moments quadratiques concernés valent :

$$\int_S X_1^2 dX_1 dX_2 = \pi \frac{a^3 b}{4}, \quad \int_S X_2^2 dX_1 dX_2 = \pi \frac{ab^3}{4} \quad (7)$$

Vérifier qu'on retrouve le cas bien connu de la barre à section circulaire comme cas particulier de la formule établie.

Quelle est la valeur du rapport  $b/a$  permettant d'optimiser la rigidité de la barre sous la contrainte d'une surface de la section fixée ? Correspond-elle à un maximum ou à un minimum de la rigidité ?

Commenter la rigidité de torsion d'une barre à section elliptique lorsque le rapport  $b/a$  est petit.

La relation entre le couple et l'angle linéique est  $\mathcal{C} = \mu J \alpha$  où l'expression de  $J$  est donnée par la formule (??) établie dans le chapitre consacré à la torsion des barres :

$$J = \int_S \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right)^2 \right) dS = (1-k)^2 \int_S X_1^2 dS + (1+k)^2 \int_S X_2^2 dS = \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

Les expressions suivantes ont été utilisées :

$$1+k = \frac{2a^2}{a^2+b^2}, \quad 1-k = \frac{2b^2}{a^2+b^2}$$

La rigidité de torsion de la barre est  $\mu J$ . L'optimisation de cette rigidité à aire imposée  $\pi ab = S_0$  est possible en éliminant  $b = S_0/\pi a$  dans l'expression précédent de  $J$  et en dérivant par rapport à  $a^2$ . Cette expression est alors proportionnelle à  $a^2/(S_0^2/\pi^2 + a^4)$  et sa dérivée s'annule en  $a^2 = S_0/\pi$  qui conduit à  $a = b$ . La fonction précédente est nulle en  $a = 0$  et en  $a = +\infty$  et atteint un maximum à la valeur annoncée. La barre à section circulaire présente donc le maximum de rigidité relative en torsion.

Lorsque le ratio  $b/a = \pi b^2/S_0$  devient faible devant 1, la rigidité élastique se met sous la forme :

$$\mu J = \mu \frac{\pi ab^3}{1+b^2/a^2} \sim \mu \pi ab^3 = \mu S_0 b^2$$

et devient donc de plus en plus faible. Les barres aplatis sont donc peu rigides élastiquement en torsion, ce que révèle l'expérience de tous les jours.

Le calcul des moments quadratiques introduits peut se faire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_S X_1^2 dX_1 dX_2 &= \int_{-b}^b dX_2 \int_{-a\sqrt{1-\frac{X_2^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{X_2^2}{b^2}}} X_1^2 dX_1 = \int_{-b}^b \left[ \frac{X_1^3}{3} \right]_{-a\sqrt{1-\frac{X_2^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{X_2^2}{b^2}}} dX_2 \\ &= \frac{2a^3}{3} \int_{-b}^b (1 - \frac{X_2^2}{b^2})^{3/2} dX_2 = \frac{2a^3 b}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta)^{3/2} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{2a^3 b}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = \frac{2a^3 b}{3} \times \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

où le changement de variables  $X_2 = b \sin \theta$  a été utilisé. Un calcul similaire permet d'obtenir le second moment quadratique de la section.

## 2.4. Limite d'élasticité et analyse limite

Donner les contraintes principales, c'est-à-dire les valeurs propres du tenseur des contraintes, en chaque point de chaque section en fonction de  $\mu, \alpha, k, X_1, X_2$ , puis en remplaçant  $k$  par son expression en fonction de  $a$  et  $b$ .

On suppose que le matériau considéré est isotrope et a pour limite d'élasticité en traction simple la contrainte  $\sigma_0$  déterminée expérimentalement. Au-delà de cette valeur, un matériau fragile rompt tandis qu'un matériau ductile entre dans le régime élasto-plastique et se déforme donc de manière irréversible.

Proposer un critère de rupture fragile et un critère de plasticité.

Appliquer ces critères au cas de la torsion de la barre de section elliptique. Indiquer à quel(s) endroit(s) de la section elliptique la limite d'élasticité est atteinte en premier.

Donner la valeur critique de l'angle linéique appliqué  $\alpha = \alpha_0$  pour laquelle cette limite d'élasticité est atteinte. Exprimer  $\alpha_0$  en fonction de  $\sigma_0, \mu, a$  et  $b$ , pour les deux critères.

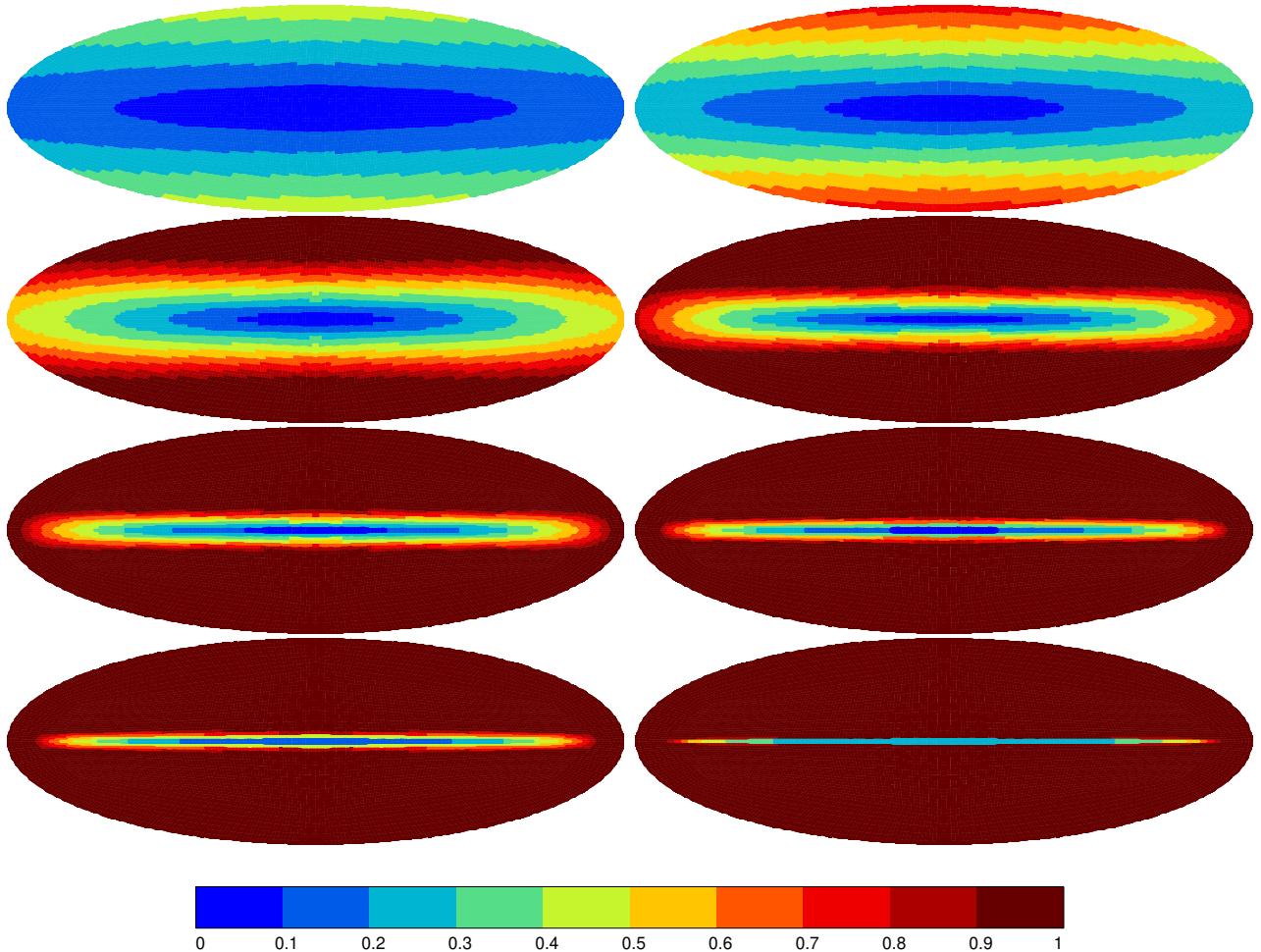


FIGURE 4: Champ de la contrainte équivalente de von Mises divisée par la limite d'élasticité  $\sigma_0$  pour huit valeurs différentes de l'angle linéique de torsion imposée,  $\alpha$ . Cet angle linéique est croissant de la gauche vers la droite et de haut en bas.

Le tenseur des contraintes est de la forme  $\underline{\sigma} = \tau_1(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) + \tau_2(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)$ , avec  $\tau_1 = \sigma_{13} = -\mu\alpha(1+k)X_2$  et  $\tau_2 = \sigma_{23} = \mu\alpha(1-k)X_1$ . Il possède la valeur propre

intermédiaire  $\sigma_2 = 0$  et les deux autres sont solutions de

$$\text{trace } \underline{\boldsymbol{\sigma}} = 0 = \sigma_1 + \sigma_3, \quad \text{trace } \underline{\boldsymbol{\sigma}}^2 = 2\tau_1^2 + 2\tau_2^2 = \sigma_1^2 + \sigma_3^2 = 2\sigma_1^2$$

La plus grande contrainte principale est égale au cisaillement en chaque point de la section :

$$\sigma_1 = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} = \mu|\alpha| \sqrt{(1+k)^2 X_1^2 + (1-k)^2 X_2^2} = \frac{2\mu|\alpha|a^2b^2}{a^2+b^2} \sqrt{\frac{X_1^2}{a^4} + \frac{X_2^2}{b^4}}$$

La question préliminaire a permis d'établir que le cisaillement prend ses valeurs maximales sur la frontière  $\Gamma$  de la section. En tenant compte de l'équation de l'ellipse (4), la contrainte principale maximale vaut sur le bord  $\Gamma$

$$\sigma_1 = \frac{2\mu|\alpha|b}{a^2+b^2} \sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)X_1^2}$$

Cette valeur est maximale en  $X_1 = 0, X_2 = \pm b$  ce qui donne

$$\sigma_1^{\max} = \frac{2ba^2}{a^2+b^2} \mu|\alpha|$$

Pour un matériau fragile, le critère de contrainte principale positive maximale conduit à

$$\sigma_1^{\max} = \sigma_0 \implies \mu\alpha_0 = \frac{a^2+b^2}{2ba^2} \sigma_0$$

Pour un matériau ductile obéissant au critère de Tresca, la limite d'élasticité est atteinte pour

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\sigma_1^{\max} = \sigma_0 \implies \mu\alpha_0 = \frac{a^2+b^2}{4ba^2} \sigma_0$$

où, on le rappelle,  $\sigma_0$  est la limite d'élasticité en traction simple. Dans le cas d'un critère de von Mises, cela donne

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{dev}} : \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{dev}}} = \sqrt{3} |\sigma_1^{\max}| = \sigma_0 \implies \mu\alpha_0 = \frac{a^2+b^2}{2\sqrt{3}ba^2} \sigma_0$$

Les critères de Tresca et von Mises prévoient des limites d'élasticité proches mais distinctes (rapport  $\sqrt{3}/2$ ). L'expérience permettra de décider lequel des deux critères est le mieux adapté pour le matériau considéré.

La figure 3 représente les lignes de niveau de la contrainte équivalente de von Mises. On vérifie la position des maxima de cette fonction le long du contour  $\Gamma$ .

La figure 4 présente la progression de la zone plastique si l'on continue à charger la barre au-delà de la limite d'élasticité déterminée précédemment dans le cas d'un critère de von Mises. La zone plastique est caractérisée par une valeur de la contrainte équivalente de von Mises égale à  $\sigma_0$  tandis qu'elle est plus faible dans le noyau élastique. La variable représentée est la contrainte équivalente de von Mises normalisée par  $\sigma_0$ . Ces résultats ont été obtenus grâce à un calcul par éléments finis dans le contexte non linéaire de l'élasto-plasticité. La courbe du moment de torsion en fonction de l'angle linéaire est représentée sur la figure 5. Commenter cette figure et conclure sur la résistance de la barre en torsion.

Quelle propriété du matériau considéré peut-on mesurer sur la partie linéaire du début de la courbe ? Donner cette valeur et deviner quel matériau a pu être considéré pour ce calcul.

On voit que le noyau élastique se réduit comme peau de chagrin lorsqu'on augmente le chargement. A la fin, il ne reste qu'une fine bande sur l'axe  $X_1$ . La courbe du moment en fonction de la torsion appliquée est d'abord linéaire comme il se doit. On peut d'ailleurs mesurer la pente qui doit être égale au module de cisaillement  $\mu = E/2(1 + \nu)$  d'après la relation  $C = \mu J\alpha$ . On trouve sur le graphe  $\mu \simeq 77$  GPa, ce qui, avec un coefficient de Poisson typique  $\nu = 0.3$  fournit un module de Young  $E \simeq 200$  GPa, typiquement le module d'un acier. La courbe sature ensuite au fur et à mesure que la plasticité envahit la barre. Le moment atteint une limite infranchissable qui représente la résistance maximale de la barre en torsion. On parle de charge limite de la barre, grandeur essentielle pour le dimensionnement des structures.

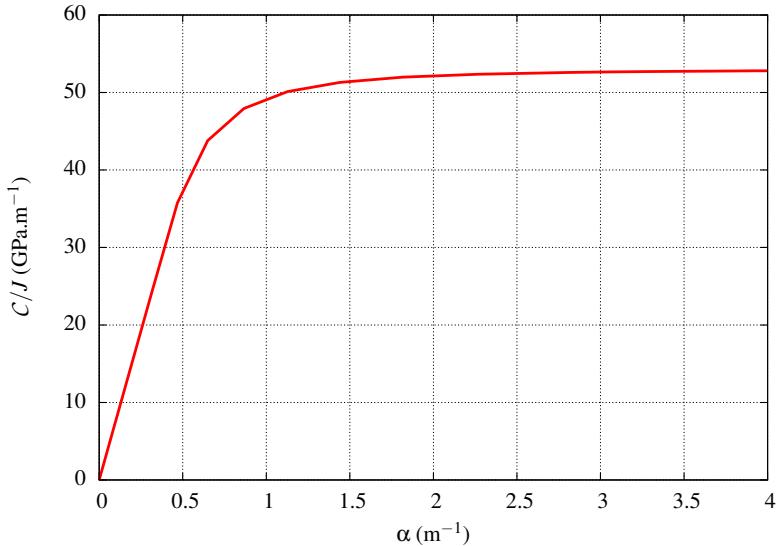


FIGURE 5: Moment normalisé par le moment quadratique de torsion  $J$  en fonction de l'angle linéique appliqué pour une barre à section elliptique constituée d'un certain matériau dont le comportement est élasto-plastique.

## 2.5. Extension de la solution pour un tube de section elliptique creuse

Prouver que la solution établie précédemment pour une barre de section elliptique est également valide dans les parois d'un tube dont la section est bornée par deux ellipses semblables et concentriques comme sur la figure 6. Le contour extérieur est toujours donné par l'équation (4) tandis que le contour intérieur a pour équation :

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = \eta^2 \quad (8)$$

où  $\eta$  est un nombre réel  $0 < \eta < 1$ .

Donner alors l'expression de la rigidité de torsion du tube en fonction en particulier du paramètre  $\eta$ .

Le champ de contraintes établi précédemment a le bon goût de satisfaire les conditions de bord libre sur la paroi intérieure du tube. Cela vient du fait que le vecteur normal est parallèle au vecteur  $[X/a^2 \quad X/b^2 \quad 0]$  aussi bien pour les points de l'ellipse extérieure que pour ceux de l'ellipse intérieure. On vérifie alors que la condition

$$\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 = 0$$

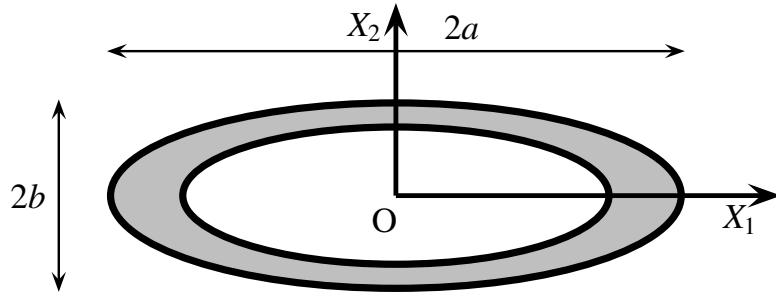


FIGURE 6: Tube de section elliptique creuse.

est satisfaite à l'intérieur comme à l'extérieur en utilisant les contraintes calculées au paragraphe 2.4, avec la même valeur du paramètre  $k$ .

Le calcul de la rigidité de torsion fait intervenir les moments quadratiques de la section tubulaire :

$$\int_S X_1^2 dS = \int_{S(a,b)} X_1^2 dS - \int_{S(\eta a, \eta b)} X_1^2 dS = \pi \frac{a^3 b}{4} (1 - \eta^4)$$

où  $S(a, b)$ , resp.  $S(\eta a, \eta b)$ , désigne la surface de l'ellipse de paramètres  $a$  et  $b$ , resp.  $\eta a, \eta b$ . Finalement

$$\mu J = \mu \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} (1 - \eta^4)$$

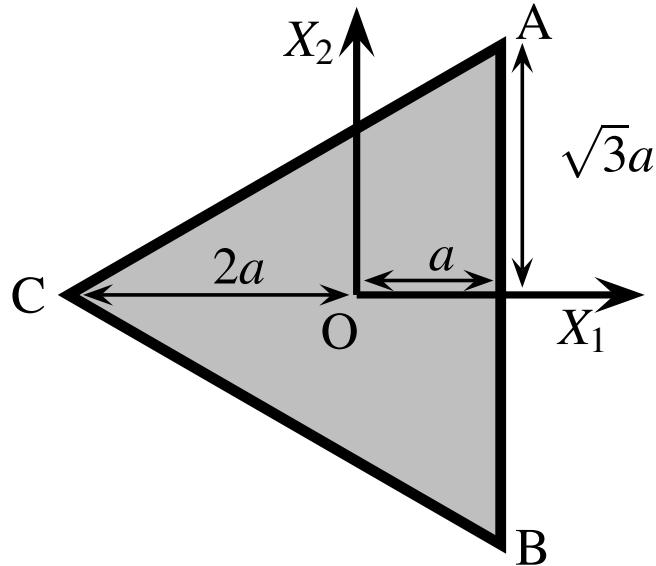


FIGURE 7: Géométrie de la section triangulaire équilatérale d'une barre : hauteur de longueur  $3a$  et côté de longueur  $2a\sqrt{3}$ .

### 3. Torsion d'une barre de section triangulaire

On considère la torsion d'une barre dont la section est triangulaire équilatérale, de hauteur  $3a$ , comme sur la figure 7.

### 3.1. Détermination de la fonction de gauchissement

La fonction polynomiale de degré deux utilisée pour la barre de section elliptique ne suffit pas pour le cas triangulaire.

Montrer qu'une fonction de gauchissement polynomiale de degré 3 de la forme

$$\varphi(X_1, X_2) = AX_1^3 + BX_1^2X_2 + CX_1X_2^2 + DX_2^3 \quad (9)$$

permet de répondre à la question.

Les sommets du triangle de la figure 7 ont pour coordonnées  $A(a, a\sqrt{3})$ ,  $B(a, -a\sqrt{3})$  et  $C(-2a, 0)$ . On en déduit les composantes des vecteurs normaux aux trois faces : côté  $AC$  :  $\underline{n} \parallel [-a\sqrt{3}, 3a, 0]$ ; côté  $BC$  :  $\underline{n} \parallel [a\sqrt{3}, 3a, 0]$ ; côté  $AB$  :  $\underline{n} \parallel [1, 0, 0]$ .

Nous avons également besoin des équations des trois arêtes du triangle : arête  $AC$  :  $X_2 = (X_1 + 2a)/\sqrt{3}$ ; arête  $BC$  :  $X_2 = -(X_1 + 2a)/\sqrt{3}$ ; arête  $AB$  :  $X_1 = a$ .

On calcule ensuite

$$\varphi_{,1} = 3AX_1^2 + 2BX_1X_2 + CX_2^2, \quad \varphi_{,2} = BX_1^2 + 2CX_1X_2 + 3DX_2^2$$

On vérifie aisément que cette fonction est harmonique si

$$3A + C = 0, \quad B + 3D = 0$$

La condition (2) s'écrit successivement :

- sur l'arête  $AB$  :

$$3Aa^2 + 2BaX_2 + CX_2^2 = X_2 \quad \forall X_2 \implies A = C = 0, \quad B = \frac{1}{2a}$$

- sur l'arête  $BC$  : on substitue  $X_2 = -(X_1 + 2a)/\sqrt{3}$  dans la condition (2) :

$$\varphi_{,1}a\sqrt{3} + \varphi_{,2}3a = a\sqrt{3}X_2 - 3aX_1 \implies D = -\frac{1}{6a}$$

- sur l'arête  $AC$  : il reste à vérifier que les valeurs des constantes trouvées permettent de satisfaire également la condition (2) sur cette arête.

Finalement

$$\varphi^\triangleleft(X_1, X_2) = \frac{X_2}{6a}(3X_1^2 - X_2^2)$$

### 3.2. Etude de la section déformée

Indiquer à quel(s) endroit(s) de la section le déplacement hors plan  $u_3$  est maximum. Donner l'amplitude maximale du gauchissement correspondant.

Le déplacement hors plan vaut

$$u_3(X_1, X_2) = \alpha \frac{X_2}{6a}(3X_1^2 - X_2^2)$$

Les maxima de cette fonction se trouvent sur les arêtes du bord. Les trois arêtes étant équivalentes du point de vue de la symétrie, on peut se contenter d'étudier ce déplacement le long de l'arête  $AB$  d'équation  $X_1 = a$  :

$$u_3(a, X_2) = \alpha \frac{X_2}{6a}(3a^2 - X_2^2)$$

Cette fonction a des extrema en  $X_2 = \pm a$ .

Le gauchissement maximum vaut donc

$$u_2(a, \pm a) = \pm \frac{\alpha a^2}{3}$$

Le champ de déplacement est illustré sur la figure ??(b).

### 3.3. Rigidité de torsion

Poser le calcul de la rigidité de torsion de la barre de section triangulaire équilatérale. Effectuer les premières étapes mais on ne demande pas d'achever ce long calcul. On admettra que la relation entre le couple de torsion et l'angle linéique de torsion est

$$\mathcal{C} = \frac{9\sqrt{3}}{5} a^4 \mu \alpha \quad (10)$$

d'après Sadd (2005).

La fonction de gauchissement est utilisée maintenant pour calculer les contraintes :

$$\sigma_{31} = \mu \alpha (\varphi_{,1} - X_2) = \mu \alpha \frac{X_2}{a} (X_1 - a) \quad (11)$$

$$\sigma_{32} = \mu \alpha (\varphi_{,2} + X_1) = \frac{\mu \alpha}{2a} (X_1^2 - X_2^2 + 2aX_1) \quad (12)$$

Deux formules s'offrent à nous pour calculer  $J$ , à savoir (??) et (??) et nous choisissons la première :

$$\begin{aligned} J &= \int_S \left( X_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right) - X_2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) \right) dS \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-2a}^a dX_1 \int_{-(X_1+2a)/\sqrt{3}}^{(X_1+2a)/\sqrt{3}} (X_1^3 - 3X_1X_2^2 + 2a(X_1^2 + X_2^2)) dX_2 \end{aligned} \quad (13)$$

### 3.4. Limite d'élasticité et analyse limite

Exprimer les contraintes dans la section triangulaire.

Dans le cas d'un matériau fragile, puis d'un matériau ductile, indiquer à quel(s) endroit(s) de la section la limite d'élasticité est atteinte et pour quelle valeur critique de l'angle linéique  $\alpha_0$ .

Au-delà de la limite d'élasticité, le calcul peut être mené par la méthode des éléments finis. Pour un critère de von Mises et en l'absence d'écrouissage, la progression de la zone plastique au sein de la section est présentée sur les figures 8 et 9 sous la forme des champs de la contrainte équivalente de von Mises d'une part et de la norme du tenseur des déformations plastiques d'autre part.

Commenter ces figures.

Le champ de cisaillement est illustré sur la figure ??(b). Les deux seules composantes non nulles sont données par les équations (11) et (12). Le cisaillement maximal est atteint sur les bords du triangle. Pour des raisons de symétrie, il suffit de se concentrer sur l'une d'entre elles, par exemple  $AB$ . Le long de cette arête  $\sigma_{31}$  est nulle comme il se doit. Seule subsiste la composante de cisaillement

$$\sigma_{32} = \frac{\mu \alpha}{2a} (3a^2 - X_2^2)$$

On voit que les contraintes s'annulent sur les pointes du triangle  $X_2 = \pm\sqrt{3}a$ . Il apparaît également que cette contrainte est maximale au milieu de l'arête  $X_2 = 0$  :

$$\sigma_{32}^{max} = \frac{3a}{2} \mu\alpha$$

La contrainte principale maximale est égale à la valeur précédente de sorte que la limite d'élasticité est atteinte pour

$$\mu\alpha_0 = \frac{2\sigma_0}{3a}$$

dans le cas d'un matériau fragile dont la limite à rupture est  $\sigma_0$  en traction. S'il s'agit d'un matériau élasto-plastique avec un critère de Tresca et une limite d'élasticité  $\sigma_0$  en traction, il faut diviser par deux la valeur précédente de  $\alpha_0$ .

La figure 8 montre la fraction de la surface où la contrainte de cisaillement atteint  $\sigma_0$  augmente avec le chargement jusqu'à la limite où seules trois portions de médianes restent à des niveaux de contraintes plus faibles. Noter en particulier le centre et les pointes du triangle qui restent à des niveaux proches de zéro. Le champ de déformation plastique est similaire avec trois lignes sans plasticité connectant le centre aux sommets.

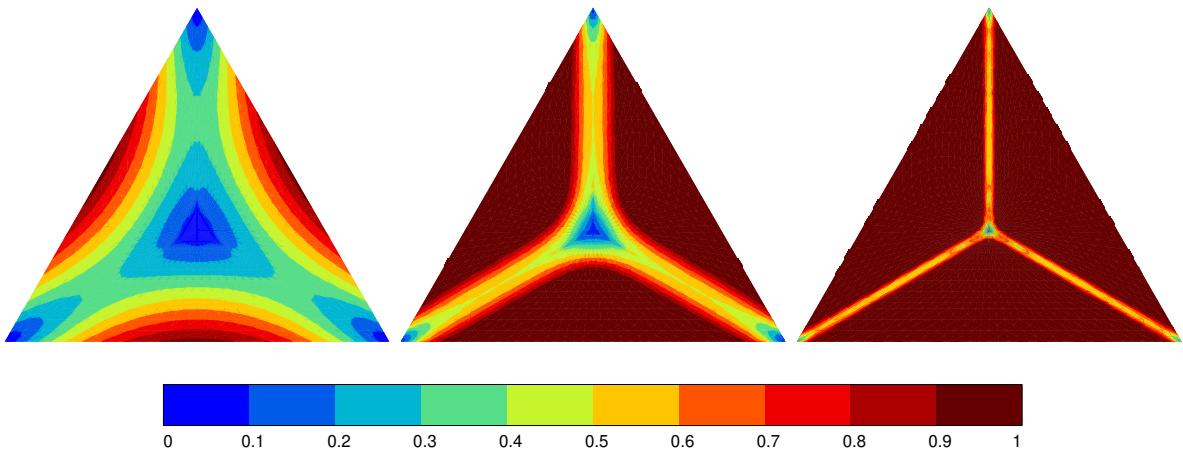


FIGURE 8: Champ de contrainte équivalente de von Mises normalisée par la limite d'élasticité  $\sigma_0$  pour la torsion d'une barre de section triangulaire. Les différents instantanés correspondent à des étapes du chargement croissant en angle linéaire  $\alpha$ .

### 3.5. Rigidité optimale

Pour une valeur donnée de la surface de la section de la barre, indiquer quelle section, elliptique, circulaire ou triangulaire, conduit à la plus grande rigidité de torsion.

Indiquer également pour quelle forme de section, le cisaillement maximal est le plus faible.

On a déjà conclu que la section circulaire réalise le maximum de la rigidité de torsion pour une section elliptique. Soit  $S$  la valeur de la surface de la section recherchée, les moments quadratiques de torsion des barres circulaire et triangulaire sont respectivement

$$J^\circ = \frac{S^2}{2\pi}, \quad J^\triangle = \frac{S^2}{5\sqrt{3}}$$

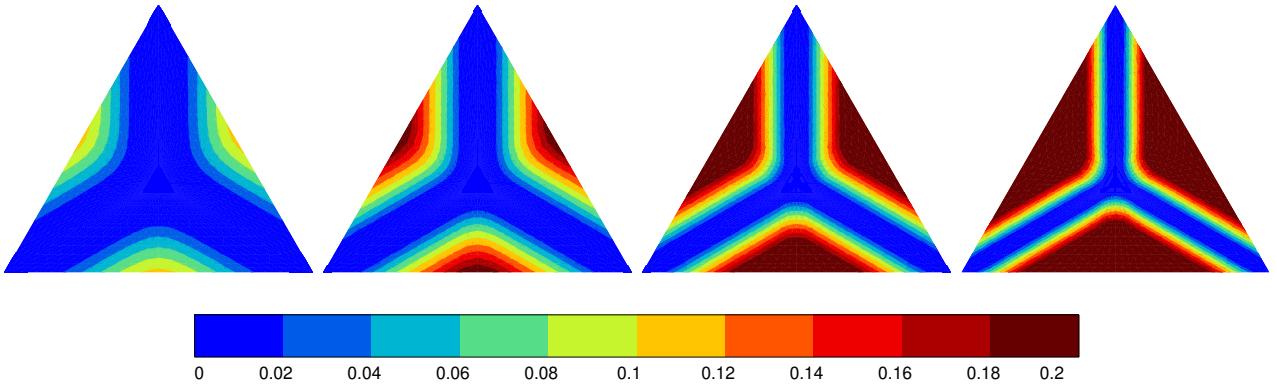


FIGURE 9: Champ de la norme du tenseur des déformations plastiques (en %) pour la torsion d'une barre de section triangulaire. Les différents instantanés correspondent à des étapes du chargement croissant en angle linéique  $\alpha$ .

de sorte que  $J^\circ > J^\triangleleft$ .

La contrainte principale maximale vaut

$$\sigma_1^{max\circ} = \sqrt{\frac{S}{\pi}}\mu\alpha, \quad \sigma_1^{max\triangleleft} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{S}{3\sqrt{3}}}\mu\alpha$$

de sorte que  $\sigma_1^{max\circ} < \sigma_1^{max\triangleleft}$ .

# Deuxième partie

## Variations autour du seau de Newton

*If a vessel, hung by a long cord, is so often turned about that the cord is strongly twisted, then filled with water, and held at rest together with the water; after, by the sudden action of another force, it is whirled about in the contrary way, and while the cord is untwisting itself, the vessel continues for some time this motion; the surface of the water will at first be plain, as before the vessel began to move; but the vessel by gradually communicating its motion to the water, will make it begin sensibly to revolve, and recede by little and little, and ascend to the sides of the vessel, forming itself into a concave figure. (d'après Wikipedia)*

Isaac Newton, *Principia*, 1687.

Inspirés par le célèbre seau de Newton (*Newton's bucket*), nous nous intéressons aux mouvements d'un fluide dans des réservoirs en rotation. On étudie d'abord le cas où le récipient a déjà communiqué son mouvement au fluide. On s'interroge ensuite, dans le cas d'un fluide visqueux, sur la façon dont le récipient transmet son mouvement au fluide initialement au repos. Dans tous les cas, on se restreint au mouvement stationnaire d'un fluide incompressible.

L'expérience du seau de Newton est un moyen de détecter le caractère galiléen ou non du référentiel d'observation, un peu comme le pendule de Foucault. Elle a alimenté les réflexions autour du concept de relativité de Newton à Mach, cf. ([Barbour and Pfister, 1995](#); [Krawietz, 2015](#)).

### 4. Etude de la surface d'un fluide en rotation dans une réservoir cylindrique

Un fluide parfait incompressible est contenu dans un récipient cylindrique (section circulaire) animé d'un mouvement de rotation autour de son axe à la vitesse angulaire constante  $\Omega$ , comme sur la figure 10. Il est également soumis à la gravité  $\underline{g} = -g\underline{e}_z$ .

On observe l'expérience depuis un référentiel supposé galiléen dans un repère fixe, en coordonnées cylindriques autour de l'axe  $z$ .

#### 4.1. Champ eulérien des vitesses et champ de pression

Exprimer le champ de vitesses du fluide correspondant à une rotation rigide autour de l'axe  $z$  à la vitesse angulaire constante  $\Omega$ .

Exprimer le champ de pression au sein du fluide, à une constante près.

[Le champ des vitesses s'écrit](#)

$$\underline{v} = \underline{\Omega} \cdot \underline{x} = \underline{\Omega} \wedge \underline{x} = \Omega \underline{e}_z \wedge r \underline{e}_r = r \Omega \underline{e}_\theta \quad (14)$$

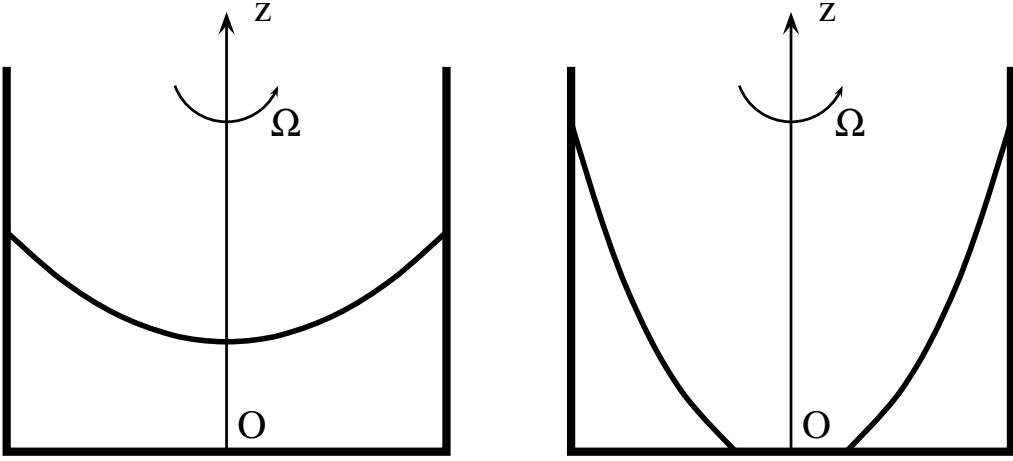


FIGURE 10: Réservoir cylindrique en rotation autour de son axe  $z$  contenant un liquide : surface libre du fluide pour une vitesse de rotation  $\Omega$  plutôt lente à gauche et plus rapide à droite.

Le gradient des vitesses vaut

$$\underline{L} = \text{grad } \underline{v} = \underline{\Omega} = \Omega(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r - \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta) \quad (15)$$

Les équations de la dynamique des fluides parfaits s'écrivent

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \underline{L} \cdot \underline{v} = -\text{grad } p + \rho \underline{g}$$

Il s'agit d'un écoulement stationnaire de sorte que la dérivée partielle par rapport au temps est nulle. La pression est une fonction  $p(r, z)$  si bien que

$$\begin{aligned} -\rho r \Omega^2 \underline{e}_r &= -\frac{\partial p}{\partial r} \underline{e}_r - \frac{\partial p}{\partial z} \underline{e}_z - \rho g \underline{e}_z \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{\rho} = -gz + f(r) \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= \rho \Omega^2 r \quad \Rightarrow \quad f(r) = \Omega^2 \frac{r^2}{2} + C \end{aligned}$$

Finalement

$$\frac{p}{\rho} = -gz + \Omega^2 \frac{r^2}{2} + C \quad (16)$$

#### 4.2. Forme de la surface libre du fluide en rotation

En notant  $R$  le rayon du cylindre,  $H$  la hauteur de fluide dans le récipient au repos et  $p_0$  la pression atmosphérique s'appliquant à la surface du fluide, déterminer complètement le champ de pression exprimé précédemment.

Quelle est la forme de la surface libre du fluide en rotation uniforme ?

Indiquer la valeur critique du nombre de Froude<sup>4</sup> défini par

$$\mathcal{F}r = \frac{R^2 \Omega^2}{gH} \quad (17)$$

---

4. Le nombre de Froude compare le carré des vitesses, ici  $R^2 \Omega^2$  à la gravitation,  $gH$ .

pour laquelle le creux du fluide touche le fond. Pour des valeurs supérieures, on se trouve dans la situation de la figure 10 à droite. On donnera l'équation de la surface libre dans ce cas également.

Faire l'application numérique dans le cas où  $R = H = 0.5$  m et  $\Omega = 20$  tours par minutes. Calculer le nombre de Froude et la différence de niveau de fluide entre le point haut et le point bas de la surface libre.

Il s'agit d'un problème classique, cf. Landau and Lifchitz (1989) p.37, ayant également fait l'objet d'une épreuve du Concours Mines–Ponts 2005<sup>5</sup>. La surface du fluide est caractérisée par la pression atmosphérique  $p_0$ . Cette surface a donc pour équation

$$z = \frac{\Omega^2}{2g}r^2 - \frac{p_0}{\rho g} + \frac{C}{g} \quad (18)$$

Le fluide étant considéré comme incompressible, le volume reste constant et vaut  $\pi R^2 H$ . Calculons ce volume dans l'état déformé :

$$V = \int_0^R 2\pi r z dr \implies \frac{V}{2\pi} = \frac{\Omega^2}{8g} R^4 + \left( \frac{C}{g} - \frac{p_0}{\rho g} \right) \frac{R^2}{2}$$

si bien que  $\frac{C}{g} = \frac{p_0}{\rho g} + H - \frac{R^2 \Omega^2}{4g}$  et finalement :

$$\frac{p - p_0}{\rho g} = H - z + \frac{\Omega^2}{2g} \left( r^2 - \frac{R^2}{2} \right) \quad (19)$$

L'équation de la surface libre s'obtient pour  $p = p_0$  :

$$z = H + \frac{\Omega^2}{2g} \left( r^2 - \frac{R^2}{2} \right) \quad (20)$$

Il s'agit d'un paraboloïde de révolution dont la courbure au centre vaut  $\Omega^2/g$ . Le niveau d'eau touche le fond lorsque  $z = 0$  en  $r = 0$ , ce qui correspond à

$$\mathcal{Fr} = \frac{R^2 \Omega^2}{g H} = 4$$

Pour des valeurs plus grandes de ce nombre, l'équation de la surface reste donnée par (18) mais la cote  $z = 0$  est atteinte pour une valeur non nulle du rayon  $r = r_c$  telle que

$$\frac{\Omega^2}{2g} r_c^2 - \frac{p_0}{\rho g} + \frac{C}{g} = 0$$

L'équation de la surface libre se met alors sous la forme

$$z = \frac{\Omega^2}{2g} \left( r^2 - r_c^2 \right)$$

où la valeur de  $r_c$  est déterminée en écrivant la conservation du volume

$$\frac{V}{2\pi} \frac{2g}{\Omega^2} = \int_{r_c}^R (r^2 - r_c^2) r dr$$

---

5. [www.sujetsetcorriges.fr/cpge-spe/mines-pont/mines-ponts-physiquechimie](http://www.sujetsetcorriges.fr/cpge-spe/mines-pont/mines-ponts-physiquechimie).

d'où l'on tire

$$r_c^2 = R^2 \left( 1 - \sqrt{\frac{4}{\mathcal{F}r}} \right) \quad (21)$$

cf. Mougel et al. (2015).

L'application numérique donne  $\mathcal{F}r \simeq 0.22 < 4$  de sorte que nous sommes dans la situation de la figure 10 de gauche. Les points bas et haut valent respectivement  $z^- = H(1 - \frac{\mathcal{F}r}{4})$  et  $z^+ = H(1 + \frac{\mathcal{F}r}{4})$  de sorte que  $z^+ - z^- = \frac{H}{2}\mathcal{F}r = 0.11$  m.

#### 4.3. Cas d'un fluide visqueux newtonien incompressible

Résoudre le même problème dans le cas où le fluide est un fluide newtonien incompressible de viscosité  $\mu = 2$  Pa.s.

La solution proposée reste valable dans le cas d'un fluide visqueux. En effet le champ de vitesse est purement en rotation. Le taux de déformation  $\mathbf{D}$  associé au champ de vitesse (14) est nul. Par conséquent, la contribution de la partie visqueuse dans les équations de Navier-Stokes est nulle et le champ de pression trouvé reste valable.

### 5. Fluide en rotation dans un réservoir ellipsoïdal

Un récipient de forme ellipsoïdale contenant un fluide parfait incompressible est animé d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire constante  $\Omega$  autour de l'un de ses axes principaux. On adopte un système de coordonnées cartésiennes dont les axes coïncident avec les axes principaux de l'ellipsoïde à un instant donné. L'axe de rotation est alors  $x_3$  et l'équation de l'ellipsoïde formant le bord du récipient (dont l'épaisseur est négligée) est dans ce repère à l'instant donné :

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1 \quad (22)$$

Il s'agit d'un problème proposé par Landau and Lifchitz (1989), p.39.

#### 5.1. Recherche d'un champ de vitesse dérivant d'un potentiel

On recherche une solution stationnaire du problème en vitesses dérivant d'un potentiel  $\varphi(x_1, x_2, x_3)$  :

$$\underline{\mathbf{v}} = \text{grad } \varphi = \varphi_{,1}\underline{\mathbf{e}}_1 + \varphi_{,2}\underline{\mathbf{e}}_2 + \varphi_{,3}\underline{\mathbf{e}}_3$$

Montrer que la fonction (6) trouvé dans l'exercice sur la torsion fournit un potentiel satisfaisant les conditions requises par le mouvement stationnaire du fluide dans le récipient ellipsoïdal considéré. On déterminera la valeur de la constante  $k$  en fonction de  $\Omega$  et des caractéristiques de l'ellipsoïde.

Exprimer complètement le champ des vitesses obtenu ainsi que son gradient,  $\underline{\mathbf{L}}$ .

Décrire les lignes de courant et trajectoires correspondantes.

Commenter le cas particulier  $a = b$ .

Si l'on suppose que le champ de vitesse dérive du potentiel  $\varphi$ , la condition d'incompressibilité  $\text{div } \underline{\mathbf{v}} = 0$  implique que ce potentiel est harmonique. Noter également que l'existence du potentiel implique que l'écoulement est irrotationnel :  $\text{rot } \underline{\mathbf{v}} = \text{rot grad } \varphi = 0$ .

Le potentiel doit vérifier des conditions aux limites sur le bord du récipient. Il s'agit des conditions stipulant que la vitesse normale du fluide sur le bord coïncide avec celle du récipient :

$$\underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{n}}$$

où  $\underline{u} = \underline{\Omega} \cdot \underline{x}$  est la vitesse du réservoir et  $\underline{n}$  le vecteur normal à l'ellipsoïde qui est parallèle à  $[x_1/a^2, x_2/b^2, x_3/c^2]$ . On obtient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} n_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} n_3 = (\underline{\Omega} \cdot \underline{x}) \cdot \underline{n} = \Omega(-x_2 n_1 + x_1 n_2)$$

On vérifie que le potentiel  $\varphi(x_1, x_2) = kx_1x_2$  (pas de dépendance en  $x_3$ ) est harmonique et vérifie la condition précédente à condition que

$$k = \Omega \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

Noter que si  $a = b$  alors  $\varphi = 0$ . C'est effectivement la solution unique du problème de Neumann avec  $d\varphi/dn = (\underline{\Omega} \cdot \underline{x}) \cdot \underline{n} = 0$  (cas circulaire). C'est une solution du problème physique car dans ce cas le fluide parfait glisse idéalement sur les parois du réservoir et reste donc sans mouvement par rapport au référentiel absolu. Une autre solution acceptable est celle considérée dans la question précédente, à savoir que le fluide suit le mouvement de rotation du saut,  $\underline{v} = \underline{\Omega} \cdot \underline{x}$ . Force est de constater que cette solution n'est pas irrotationnelle puisque

$$\text{rot } \underline{v} = -2 \underline{\Omega}^\times = -2\Omega \underline{e}_z$$

dans ce cas. On ne peut donc pas la rechercher sous la forme d'un gradient. Ce qui est étonnant, c'est que dans le cas du réservoir elliptique non circulaire, on puisse mettre en évidence une solution dérivant d'un potentiel. L'existence de ce potentiel non trivial est due à la contribution non nulle au bord de  $(\underline{\Omega} \cdot \underline{x}) \cdot \underline{n}$  dans le cas du réservoir ellipsoïdal. Le réservoir entraîne ainsi le fluide dans son mouvement.

Le champ des vitesses obtenu et son gradient sont alors

$$v_1 = \Omega \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x_2, \quad v_2 = \Omega \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x_1, \quad v_3 = 0, \quad \underline{\tilde{L}} = \Omega \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) \quad (23)$$

Le gradient des vitesses est symétrique comme il se doit avec l'hypothèse formulée d'existence d'un potentiel des vitesses.

Les lignes de courant et les trajectoires coïncident dans le cas d'un mouvement stationnaire. Elles sont données par

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} \implies d(x_1^2 - x_2^2) = 0$$

Les lignes de courant sont donc les hyperboles  $x_1^2 - x_2^2 = C$  où  $C$  est une constante.

## 5.2. Mouvement relatif du fluide par rapport au récipient

Le mouvement relatif du fluide par rapport au récipient ellipsoïdal est obtenu en soustrayant au champ de vitesse absolu trouvé précédemment le champ des vitesses du récipient que l'on sait en rotation autour de l'axe  $x_3$  à vitesse angulaire  $\Omega$  constante.

Donner l'expression de ce champ des vitesses relatives et décrire la forme des lignes de courants correspondantes.

Le champ des vitesses relatives est  $\underline{v}^* = \underline{v} - \underline{\Omega} \cdot \underline{x}$  et a pour composantes

$$v_1^* = kx_2 + \Omega x_2 = \Omega \frac{2a^2}{a^2 + b^2} x_2, \quad v_2^* = kx_1 - \Omega x_1 = -\Omega \frac{2b^2}{a^2 + b^2} x_1 \quad (24)$$

$$\underline{\mathbf{L}} = \frac{2\Omega}{a^2 + b^2} (a^2 \underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_2 - b^2 \underline{\mathbf{e}}_2 \otimes \underline{\mathbf{e}}_1) \quad (25)$$

Les équations de lignes de courant sont obtenues en résolvant

$$\frac{dx_1}{v_1^*} = \frac{dx_2}{v_2^*} \implies d(x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2) = 0$$

Les lignes de courant sont donc les ellipses  $x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = \eta^2$  semblables aux ellipses du contour.

### 5.3. Calcul du champ de pression et forme de la surface libre

A partir du champ des vitesses obtenu au paragraphe 5.1, calculer la forme du champ de pression dans le fluide et indiquer la forme de la surface libre.

On écrit les équations de la dynamique des fluides parfaits incompressibles :

$$\rho \underline{\mathbf{L}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = \rho k^2 (x_1 \underline{\mathbf{e}}_1 + x_2 \underline{\mathbf{e}}_2) = -\text{grad } p + \rho \underline{\mathbf{g}}$$

ce qui fournit successivement

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_3} &= \rho g \implies \frac{p}{\rho} = gx_3 + f(x_1, x_2) \\ \frac{\partial p}{\partial x_1} &= -\rho k^2 x_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \implies f(x_1, x_2) = -k^2 \frac{x_1^2}{2} + g(x_2) \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} &= -\rho k^2 x_2 = \frac{\partial g}{\partial x_2} \implies g(x_2) = -k^2 \frac{x_2^2}{2} + C \end{aligned}$$

et finalement

$$\frac{p}{\rho} = gx_3 - \frac{k^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) + C \quad (26)$$

où  $C$  est une constante.

La surface libre est obtenue pour  $p = p_0$  :

$$x_3 = \frac{k^2}{2g}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{p_0}{\rho g} + Cste$$

Il s'agit d'un paraboloïde de révolution comme dans le cas du réservoir cylindrique.

## 6. Prise en compte de l'accélération de Coriolis : couche d'Ekman

Pour comprendre comment le mouvement du réservoir en rotation se transmet au fluide initialement au repos, il faut faire appel au comportement visqueux du fluide et aux conditions d'adhérence aux parois. Nous n'allons pas résoudre ce problème transitoire quelque peu délicat mais nous intéresser à une situation intermédiaire stationnaire où le fluide a un mouvement différent près de la paroi et loin de cette paroi.

On rappelle les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible sous la forme

$$\frac{d\underline{\mathbf{v}}}{dt} = -\text{grad } \frac{p}{\rho} + \underline{\mathbf{g}} + \nu \Delta \underline{\mathbf{v}} \quad (27)$$

Situation physique	$R$ (m)	$H$ (m)	$\Omega$ ( $s^{-1}$ )	$\mathcal{F}r$	$\mathcal{E}k$ eau air	$\delta$ (m) eau air
Seau de Newton	0.5	0.5	2.1	0.22	$9.6 \times 10^{-7}$ 1.4 × 10 <sup>-5</sup>	0.0007 0.0027
Canal	100	10	$7.3 \times 10^{-5}$	$2.6 \times 10^{-7}$	$1.7 \times 10^{-5}$ 2.5 × 10 <sup>-4</sup>	0.12 0.45
Météorologie	100	1000	$7.3 \times 10^{-5}$	$5.3 \times 10^{-8}$	$6.9 \times 10^{-7}$ 1.0 × 10 <sup>-5</sup>	0.12 0.45

TABLE 1: Nombres de Froude et d'Ekman pour trois situations physiques très différentes.

où  $\nu = \mu/\rho$  est appelée viscosité cinématique.

On se place dans un référentiel tournant à la vitesse constante  $\Omega$  autour de  $\underline{e}_3$  en gardant la même origine. Le changement de référentiel s'écrit :

$$\underline{x}' = \underline{\tilde{Q}}^T \cdot \underline{x}, \quad \underline{v}' = -\underline{\tilde{\Omega}} \cdot \underline{x}' + \underline{\tilde{Q}}^T \cdot \underline{v} \quad (28)$$

où  $\underline{v}'$  désigne la vitesse par rapport au référentiel tournant et  $\underline{\tilde{Q}}(t)$  est la rotation autour de  $\underline{e}_3$  d'angle  $\Omega t$ .

## 6.1. Caractérisation des effets centrifuges et de Coriolis

Exprimer les équations de Navier–Stokes dans le référentiel tournant en fonction de  $\underline{\Omega}$  et de  $\underline{v}'$ . Reconnaître les contributions des forces volumiques centrifuges et de Coriolis.

On néglige le terme convectif dans l'équation précédente (faible nombre de Reynolds) et on se place dans le cas stationnaire. Le nombre de Froude (17) précédemment introduit compare les effets de la force centrifuge avec ceux de la gravitation. On s'intéresse maintenant au nombre d'Ekman qui compare les effets de Coriolis aux effets de viscosité :

$$\mathcal{E}k := \frac{\nu}{2\Omega L^2} \quad (29)$$

où  $L$  est une longueur caractéristique du problème.

Nous allons juger de l'importance relative des contributions de Froude et d'Ekman dans trois situations très différentes :

- Le cas du seau de Newton avec les données  $H, R$  et  $\Omega$  précédemment étudiées ;
- Le cas d'un canal rempli d'eau de largeur  $R$  et de profondeur  $H$ . Le fluide est soumis à la rotation terrestre ;
- Le cas de la couche atmosphérique en contact avec la surface de la Terre animée d'une rotation  $\Omega$  autour de son axe. Il s'agit d'une application à la météorologie.

On prendra  $L = H$  pour l'évaluation du nombre d'Ekman. Compléter les colonnes vides du tableau 1 (à l'exception de la dernière colonne), lorsque le fluide est l'eau ou l'air à température ambiante. Dans le cas de l'air on prendra une viscosité cinématique  $\nu_{air} = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Commenter.

Le changement de référentiel  $\underline{x}' = \underline{\tilde{Q}}^T(t) \cdot \underline{x}$  s'interprète de la manière suivante. Soit  $x_1, x_2, x_3$  et  $x'_1, x'_2, x'_3$  les coordonnées cartésiennes respectivement dans le référentiel galiléen d'origine et dans le référentiel tournant à la vitesse  $\Omega$  autour de  $\underline{e}_3$ . On se convaincra aisément que les relations entre ces coordonnées sont les suivantes :

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}'} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) & 0 \\ -\sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}} \quad (30)$$

où l'on voit bien apparaître la rotation d'angle  $-\Omega t$  par rapport à  $\underline{e}_3$ . Pour calculer l'accélération par rapport à ce nouveau référentiel, on fait appel à la règle de transformation (??) du cours avec la rotation appropriée :

$$\underline{\underline{a}}' = \tilde{\underline{\underline{Q}}}^T \cdot \underline{\underline{a}} + \tilde{\underline{\underline{\Omega}}}^2 \cdot \underline{\underline{x}}' - 2\tilde{\underline{\underline{\Omega}}} \cdot \underline{\underline{v}}' \quad (31)$$

On multiplie les équations de Navier–Stokes par  $\tilde{\underline{\underline{Q}}}^T$  :

$$\underline{\underline{a}} = -\text{grad} \frac{p}{\rho} + \underline{\underline{g}} + \nu \Delta \underline{\underline{v}} \quad \tilde{\underline{\underline{Q}}}^T \cdot \underline{\underline{a}} = -\text{grad}' \frac{p}{\rho} + \underline{\underline{g}}' + \nu \tilde{\underline{\underline{Q}}}^T \cdot \Delta \underline{\underline{v}}$$

où  $\text{grad}'$  désigne le gradient par rapport aux coordonnées  $\underline{\underline{x}}'$ . En effet,

$$\tilde{\underline{\underline{Q}}}^T \cdot \text{grad} \frac{p}{\rho} = \text{grad} \frac{p}{\rho} \cdot \tilde{\underline{\underline{Q}}} = \frac{\partial p/\rho}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \underline{\underline{e}}'_j = \frac{\partial p/\rho}{\partial x'_j} \underline{\underline{e}}'_j = \text{grad}' \frac{p}{\rho}$$

D'une manière similaire on montre que

$$\text{grad} \underline{\underline{v}} = \tilde{\underline{\underline{Q}}} \cdot (\text{grad}' \underline{\underline{v}}') \cdot \tilde{\underline{\underline{Q}}}^T$$

et que

$$\Delta \underline{\underline{v}} = \text{div}(\text{grad} \underline{\underline{v}}) = \text{div}'((\text{grad} \underline{\underline{v}}) \cdot \tilde{\underline{\underline{Q}}}) = \text{div}'(\tilde{\underline{\underline{Q}}} \cdot \text{grad}' \underline{\underline{v}}') = \tilde{\underline{\underline{Q}}} \cdot \Delta' \underline{\underline{v}}'$$

Finalement, on obtient les équations de Navier–Stokes dans le référentiel tournant à vitesse de rotation constante :

$$\underline{\underline{a}}' - \tilde{\underline{\underline{\Omega}}}^2 \cdot \underline{\underline{x}}' + 2\tilde{\underline{\underline{\Omega}}} \cdot \underline{\underline{v}}' = -\text{grad}' \frac{p}{\rho} + \underline{\underline{g}}' + \nu \Delta' \underline{\underline{v}}' \quad (32)$$

Les contributions faisant intervenir le taux de rotation  $\tilde{\underline{\underline{\Omega}}}$  donnent lieu aux efforts volumiques centrifuges et de Coriolis, respectivement.

La viscosité cinématique de l'eau à l'ambiance est  $1 \times 10^{-3} / 1 \times 10^3 = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$ . Le tableau 1 montre clairement que le nombre de Froude est dominant pour le problème du seuil tandis que le nombre d'Ekman contrôle les problèmes faisant intervenir la rotation de la Terre.

## 6.2. Champ de pression dans la couche d'Ekman

On étudie comment le fluide en contact avec le fond du seuil de Newton entraîne les couches supérieures dans son mouvement. La zone de transition entre le mouvement du fluide près de la paroi et le mouvement loin de la paroi s'appelle couche d'Ekman. Nous allons caractériser son épaisseur et la forme des champs de pression et de vitesses dans cette couche. Pour cela, nous allons grandement simplifier le problème en suivant la démarche proposée dans (Lautrup, 2011). Dans cette question et la suivante, on adopte un système de coordonnées cartésiennes orthonormées dans le référentiel tournant à la vitesse  $\Omega$ . Par souci de concision, la notation prime pour les variables dans ce référentiel est omise.

On considère une situation idéalisée où le fond d'un réservoir ou d'un canal, situé à la cote  $x_3 = 0$ , est en contact avec le fluide à vitesse  $\underline{\underline{v}}$  nulle tandis qu'un écoulement  $\underline{\underline{v}} = V \underline{\underline{e}}_1$  est observé sur une couche épaisse du fluide située à une certaine distance du fond et appelée couche supérieure. L'extension du fluide dans les directions 1 et 2 est considérée comme infinie (bords très éloignés). La couche d'Ekman désigne la zone de transition du mouvement du fluide entre le fluide immobilisé par le fond et le mouvement de la couche supérieure.

On suppose que les effets centrifugés et convectifs sont négligeables et on s'intéresse aux seuls effets de Coriolis et de viscosité, ce qui conduit aux équations de Navier–Stokes réduites suivantes :

$$\text{grad} \frac{p}{\rho} = \underline{\mathbf{g}} - 2\Omega \cdot \underline{\mathbf{v}} + \nu \Delta \underline{\mathbf{v}} \quad (33)$$

Le taux de rotation  $\Omega$  uniforme et constant s'effectue autour de l'axe  $\underline{\mathbf{e}}_3$ .

Calculer le champ de pression qui règne dans la couche supérieure.

Justifier que le champ de vitesse  $\underline{\mathbf{v}}$  recherché est une fonction de  $x_3$  uniquement.

En déduire que le champ de pression trouvé dans la partie supérieure est également valable dans la couche d'Ekman.

Les équations (33) s'obtiennent à partir de (32) en négligeant l'accélération et la force centrifuge.

Dans la couche supérieure,  $\underline{\mathbf{v}} = V \underline{\mathbf{e}}_1$ , les équations de Navier–Stokes (33) conduisent alors à

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = -2\rho\Omega V, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g$$

d'où l'on tire

$$\frac{p}{\rho} = -gx_3 - 2\Omega V x_2 + C \quad (34)$$

où  $C$  est une constante que l'on ne cherche pas à identifier. La réponse du fluide est indépendante des positions  $x_1, x_2$ . Le champ de vitesse ne peut donc dépendre que de  $x_3$ .

Le fluide est en outre incompressible de sorte que  $\text{div } \underline{\mathbf{v}} = 0 = \partial v_3 / \partial x_3$ . La composante  $v_3$  est donc uniforme. Comme elle s'annule au fond, elle est nulle partout. Par suite, la troisième équation (33) implique que

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g \implies p = -\rho g x_3 + p_0(x_1, x_2)$$

La fonction  $p_0$  indépendante de  $x_3$  peut être identifiée pour les grandes valeurs de  $x_3$ , dans la couche supérieure où règne la pression (34), de sorte que  $p_0(x_1, x_2) = -2\Omega V x_2$ . L'expression (34) est donc valable dans la couche d'Ekman également.

### 6.3. Champ des vitesses dans la couche d'Ekman

Ecrire alors les équations différentielles portant sur  $v_1(x_3)$  et  $v_2(x_3)$ .

Montrer que  $v_1$  est solution de l'équation différentielle suivante

$$\frac{d^4}{dt^4}(V - v_1) = -\frac{4}{\delta^4}(V - v_1) \quad (35)$$

On donnera l'expression de la longueur  $\delta$  en fonction de  $\nu$  et  $\Omega$ .

Remplir la dernière colonne du tableau 1 et commenter.

Résoudre cette équation différentielle en utilisant les racines quatrièmes (complexes) de  $-4/\delta^4$ . Justifier que l'épaisseur de la couche d'Ekman est de l'ordre de  $\delta$ .

Les équations de Navier–Stokes (33) s'écrivent dans la couche d'Ekman de la manière suivante :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} = 2\Omega v_2 + \nu \Delta v_1, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} = -2\Omega v_1 + \nu \Delta v_2 \quad (36)$$

En considérant l'expression des pressions (34), on obtient les deux équations différentielles portant sur  $v_1(x_3)$  et  $v_2(x_3)$  :

$$2\Omega v_2 + \nu \frac{d^2 v_1}{dx_3^2} = 0, \quad -2\Omega v_1 + \nu \frac{d^2 v_2}{dx_3^2} = -2\Omega V$$

On tire de ces équations :

$$v_2 = -\frac{\nu}{2\Omega} \frac{d^2 v_1}{dx_3^2} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 v_2}{dx_3^2} = -\frac{2\Omega}{\nu} (V - v_1)$$

Par suite,

$$\frac{d^2 v_2}{dx_3^2} = -\frac{\nu}{2\Omega} \frac{d^4 v_1}{dx_3^4} = \frac{\nu}{2\Omega} \frac{d^4}{dx_3^4} (V - v_1)$$

Finalement,

$$\frac{\nu}{2\Omega} \frac{d^4}{dx_3^4} (V - v_1) = -\frac{2\Omega}{\nu} (V - v_1) \implies \frac{d^4}{dx_3^4} (V - v_1) = -\frac{4\Omega^2}{\nu^2} (V - v_1)$$

L'identification avec l'équation (35) conduit à

$$\delta = \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}} \tag{37}$$

dont on vérifie l'homogénéité à une longueur.

Les quatre racines de  $-4/\delta^4$  sont  $\pm(1 \pm i)/\delta$  permettent d'exhiber les solutions de l'équation (35) sous la forme :

$$V - v_1 = A e^{-(1+i)x_3/\delta} + B e^{-(1-i)x_3/\delta} \tag{38}$$

où l'on a rejeté les termes en  $e^{(1\pm i)x_3/\delta}$  parce que non bornés lorsque  $x_3 \rightarrow +\infty$ . La condition  $V - v_1 = 0$  suffisamment loin du fond est aussi satisfaite.

La condition  $v_1(x_3 = 0) = 0$  exige que  $A + B = V$ . On obtient également la vitesse

$$v_2 = -\frac{\delta^2}{2} \frac{d^2 v_1}{dt^2} = \frac{A}{2} (1+i)^2 e^{-(1+i)x_3/\delta} + \frac{B}{2} (1-i)^2 e^{-(1-i)x_3/\delta} = i(A e^{-(1+i)x_3/\delta} - B e^{-(1-i)x_3/\delta})$$

La condition  $v_2(x_3 = 0) = 0$  exige que  $A(1+i)^2 + B(1-i)^2 = 2i(A - B) = 0$ , i.e.  $A = B$ . Finalement, on obtient

$$v_1(x_3) = V - \frac{V}{2} (e^{-(1+i)x_3/\delta} + e^{-(1-i)x_3/\delta}) = V e^{-x_3/\delta} (1 - \cos \frac{x_3}{\delta}) \tag{39}$$

$$v_2(x_3) = V e^{-x_3/\delta} \sin \frac{x_3}{\delta} \tag{40}$$

Ces vitesses sont représentées sur la figure 11. On voit en particulier que la vitesse horizontale dépasse légèrement  $V$  avant de tendre définitivement vers cette valeur. La composante  $v_2$  croît d'abord avant de rejoindre 0 dans la couche supérieure. La spirale d'Ekman, représentation paramétrique du champ de vitesse, est illustrée sur la figure de droite.

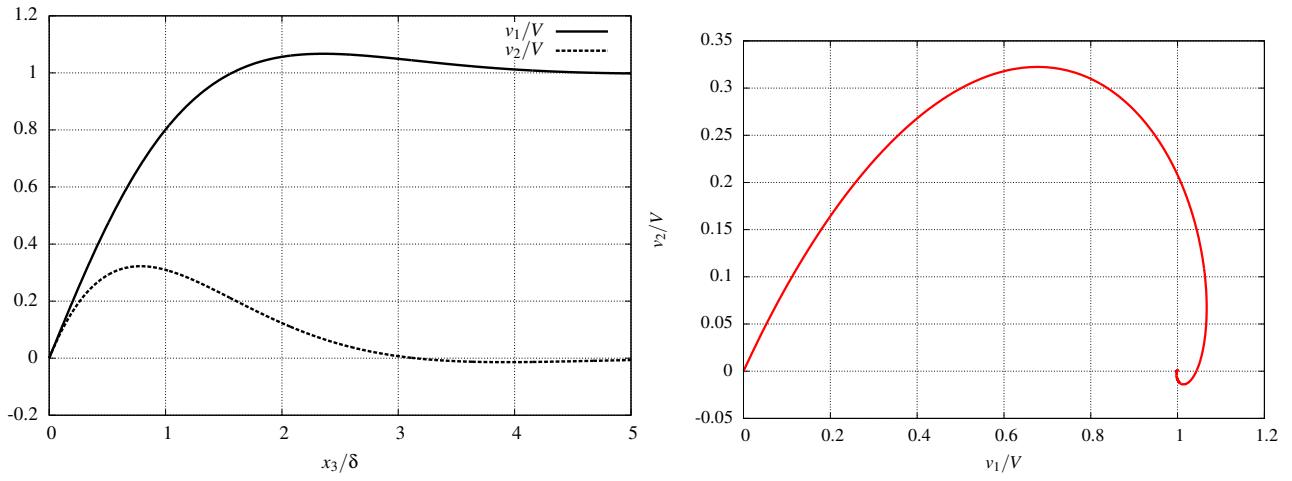


FIGURE 11: Vitesses dans la couche d’Ekman : représentation des composantes en fonction de la profondeur normalisée (à gauche), représentation paramétrique à droite montrant la spirale d’Ekman.

## Références

- Barbour, J.B., Pfister, H., 1995. Mach’s principle : From Newton’s bucket to quantum gravity. Einstein series, vol. 6, Birkhäuser Basel-Boston.
- Krawietz, A., 2015. Classical mechanics recast with Mach’s principle. Technische Mechanik 35, 49–59.
- Landau, L., Lifchitz, D., 1989. Mécanique des fluides. Mir.
- Lautrup, B., 2011. Physics of Continuous Matter, Second Edition : Exotic and Everyday Phenomena in the Macroscopic World. CRC Press.
- Mougel, J., Fabre, D., Lacaze, L., 2015. Waves in Newton’s bucket. Journal of Fluid Mechanics 783, 211–250. doi :[10.1017/jfm.2015.527](https://doi.org/10.1017/jfm.2015.527).
- Sadd, M.H., 2005. Elasticity. Elsevier Academic Press.
- Sokolnikoff, I.S., 1946. Mathematical Theory of Elasticity. McGraw-Hill.