Correction des exercices

2 Analyse de Fourier

Exercice 2.4.1 (Séries de Fourier*). *Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi,\pi[$ par $f(t)=t^2$. Calculer sa série de Fourier et étudier sa convergence. En déduire les valeurs de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.*

Solution: La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. D'après le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier converge donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on a

$$c_n(f):=\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi[}f(t)e^{-int}\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi[}t^2\cos(nt)\mathrm{d}t$$

par un argument de parité. En effectuant une double intégration par parties, on trouve que

$$c_0(f)=\frac{\pi^2}{3},\quad \forall n\neq 0, c_n(f)=2\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

D'après le théorème de Dirichlet, on a donc

$$\begin{aligned}\forall t\in[-\pi,\pi[, t^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^*}2\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)+\frac{\pi^2}{3}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}4\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)+\frac{\pi^2}{3}.\end{aligned}$$

En particulier, lorsque $t=\pi$, on trouve :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},$$

et lorsque $t=0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}.$$

Enfin, d'après la formule de Plancherel, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4 \mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2,$$

de sorte que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

□

Exercice 2.4.3 (Théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$ *)**.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction*

$$f_n(t) := \mathbb{1}_{[-n,n]}(t)$$

1. *Calculer la transformée de Fourier de f_n pour tout $n \geq 1$. Etudier les convergences simples et dans $L^2(\mathbb{R})$ des suites de fonction $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(\widehat{f_n})_{n\geq 1}$.*
2. *En utilisant le théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$, montrer que la fonction*

$$t \to \frac{\sin t}{t}$$

n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

Solution: 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Sa transformée de Fourier est donc donnée pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ par

$$\widehat{f_n}(\omega) := \int_{-n}^{n} e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = 2\frac{\sin(n\omega)}{\omega}.$$

— $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction 1 sur $\mathbb{R}$.
— $\forall n \geq 1$, $||f||_2 = \sqrt{2n} \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
— $(\widehat{f_n})_{n\geq 1}$ ne possède pas de limite simple.
— Enfin, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\|\widehat{f_n}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{4\sin^2(\omega n)}{\omega^2}\mathrm{d}\omega = n\int_{\mathbb{R}} \frac{4\sin^2 u}{u^2}\mathrm{d}u.$$

On en conclut que $\|\widehat{f_n}\|_2 \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

2. Par l'absurde, supposons que la fonction

$$t \to \frac{\sin t}{t}$$

soit dans $L^1(\mathbb{R})$. D'après le théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de cette fonction est nécessairement

$$t \to \mathbb{1}_{[-1,1]}(t).$$

On note que cette fonction n'est pas continue en -1 et 1. Or, on sait que la transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ est nécessairement continue. On aboutit donc à une contradiction. $\square$

Exercice 2.4.5 (Transformée de Fourier d'une fonction Gaussienne *)**.** *Soit $a > 0$. On considère la fonction Gaussienne*

$$f_a : t \to e^{-at^2}$$

1. *Montrer que la transformée de Fourier $\widehat{f_a}$ de la fonction f_a est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. En déduire que $\widehat{f_a}$ est solution de l'équation différentielle*
$$\widehat{f_a}(\omega)' + \frac{\omega}{2a}\widehat{f_a}(\omega) = 0.$$
2. *En notant que*
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi},$$
en déduire l'expression de $\widehat{f_a}$.

Solution: 1. $\forall a > 0$, la fonction $t \to e^{-at^2}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$. Sa transformée de Fourier est donc bien définie et vaut :

$$\widehat{f_a}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, on vérifie que

1. $\forall \omega \in \mathbb{R}$, $t \to e^{-at^2}e^{-i\omega t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$,
2. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\omega \to e^{-at^2}e^{-i\omega t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée la fonction $\omega \to -ite^{-at^2}e^{-i\omega t}$
3. $\forall \omega \in \mathbb{R}$, $|-ite^{-at^2}e^{-i\omega t}| \leq |te^{-at^2}|$, $t \to |te^{-at^2}|$ étant une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrable, $\widehat{f_a}(\omega)$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$\widehat{f_a'}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} -ite^{-at^2}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$$

En effectuant une intégration par parties, on trouve :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{f'_a}(\omega) = -\frac{\omega}{2a}\widehat{f_a}(\omega).$$

2. On peut intégrer l'équation différentielle précédente pour trouver :

$$\widehat{f_a}(\omega) = \widehat{f_a}(0) \exp\left(\frac{-\omega^2}{4a}\right).$$

On trouve le résultat demandé en notant que

$$\widehat{f_a}(0) := \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

$\square$