Séance de TD : Analyse de Fourier

Jeudi 14 Mai 2020

Exercice 2.4.1: Séries de Fourier

Enoncé

Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = x^2$.

1. Calculer sa série de Fourier et étudier sa convergence.
2. En déduire les valeurs de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^4}$.

Exercice 2.4.1: Rappels de cours

Somme de Fourier partielle

$Sf_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{-inx}$, où $c_n(f) := \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$.

Théorème de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux. Alors:

1. $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)).$$
2. Si de plus f est continue sur $\mathbb{R}$, alors la convergence des sommes de Fourier partielles est uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.4.1: Solution (i)

Question 1

- f est *continue* sur $\mathbb{R}$, de *classe* C^1 *par morceaux* sur $\mathbb{R}$ et 2π-*périodique*.
  Th. de Dirichlet: la série de Fourier de f CVU vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.4.1: Solution (i)

Question 1

- f est *continue* sur $\mathbb{R}$, de *classe* C^1 *par morceaux* sur $\mathbb{R}$ et 2π-*périodique*.
  Th. de Dirichlet: la série de Fourier de f CVU vers f sur $\mathbb{R}$.

- Par déf, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi[} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{[0,\pi[} x^2 \cos(nx) \mathrm{d}x$$

par parité de x^2. En effectuant une double IPP:

$$c_0(f) = \frac{\pi^2}{3}, \quad c_n(f) = 2\frac{(-1)^n}{n^2}$$

Exercice 2.4.1: Solution (ii)

Question 2

D'après le th. de Dirichlet

$\forall x \in [0, 2\pi], f(x) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$

Exercice 2.4.1: Solution (ii)

Question 2

D'après le th. de Dirichlet
$\forall x \in [0, 2\pi], f(x) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$

- Pour $x = \pi$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$

Exercice 2.4.1: Solution (ii)

Question 2

D'après le th. de Dirichlet
$\forall x \in [0, 2\pi], f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$

- Pour $x = \pi$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- Pour $x = 0$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$

Exercice 2.4.1: Solution (ii)

Question 2

D'après le th. de Dirichlet

$\forall x \in [0, 2\pi], f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$.

- Pour $x = \pi$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- Pour $x = 0$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.
- D'après la relation de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \mathrm{d}x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

de sorte que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 2.4.3: Théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$

Enoncé

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction

$$f_n(t) := 1_{[-n,n]}(t)$$

1. Calculer la transformée de Fourier de f_n pour tout $n \geq 1$. Etudier les convergences simples et dans $L^2(\mathbb{R})$ des suites de fonction $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(\hat{f}_n)_{n\geq 1}$.
2. En utilisant le théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$, montrer que la fonction
$$t \to \frac{\sin t}{t}$$
n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.4.3: Rappels de cours

Transformée de Fourier

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, comme $f \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction $x \to f(x)e^{-i\omega x}$ est intégrable. La quantité

$$\mathcal{F}f(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x.$$

est donc bien définie pour tout $\omega \in \mathbb{R}$. La fonction $\omega \in \mathbb{R} \to \mathcal{F}f(\omega)$, que nous noterons indifféremment $\mathcal{F}f$ ou $\hat{f}$ dans la suite, est appelée transformée de Fourier de f.

Théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$

La transformation de Fourier est injective de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$, où $C_0(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 en $\pm\infty$. De plus, si $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$, alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on vérifie

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\omega)e^{i\xi x}\mathrm{d}\omega.$$

Exercice 2.4.3: Théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$

Question 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Sa transformée de Fourier est donc donnée pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ par

$$\hat{f}_n(\omega) := \int_{-n}^{n} e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = 2\frac{\sin(n\omega)}{\omega}.$$

Exercice 2.4.3: Théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$

Question 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Sa transformée de Fourier est donc donnée pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ par

$$\hat{f}_n(\omega) := \int_{-n}^{n} e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = 2\frac{\sin(n\omega)}{\omega}.$$

- $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction 1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.4.3: Théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$

Question 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Sa transformée de Fourier est donc donnée pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ par

$$\hat{f}_n(\omega) := \int_{-n}^{n} e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = 2\frac{\sin(n\omega)}{\omega}.$$

- $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction 1 sur $\mathbb{R}$.
- $\forall n \geq 1$, $||f||_2 = \sqrt{2n} \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2.4.3: Théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$

Question 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Sa transformée de Fourier est donc donnée pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ par

$$\hat{f}_n(\omega) := \int_{-n}^{n} e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = 2\frac{\sin(n\omega)}{\omega}.$$

- $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction 1 sur $\mathbb{R}$.
- $\forall n \geq 1$, $||f||_2 = \sqrt{2n} \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
- $(\hat{f}_n)_{n\geq 1}$ ne possède pas de limite simple.

Exercice 2.4.3: Théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$

Question 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Sa transformée de Fourier est donc donnée pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ par

$$\hat{f}_n(\omega) := \int_{-n}^{n} e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = 2\frac{\sin(n\omega)}{\omega}.$$

- $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction 1 sur $\mathbb{R}$.
- $\forall n \geq 1$, $||f||_2 = \sqrt{2n} \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
- $(\hat{f}_n)_{n\geq 1}$ ne possède pas de limite simple.
- Enfin, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\|\hat{f}_n\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{4\sin^2(\omega n)}{\omega^2}\mathrm{d}\omega = n\int_{\mathbb{R}} \frac{4\sin^2 u}{u^2}\mathrm{d}u$$

On en conclut que $\|\hat{f}_n\|_2 \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2.4.3: Théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$

Question 2

Exercice 2.4.3: Théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$

Question 2

- Par l'absurde, supposons que la fonction $t \to \dfrac{\sin t}{t}$ soit dans $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 2.4.3: Théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$

Question 2

- Par l'absurde, supposons que la fonction $t \to \dfrac{\sin t}{t}$ soit dans $L^1(\mathbb{R})$.
- D'après le théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de cette fonction est $t \to 1_{[-1,1]}(t)$

Exercice 2.4.3: Théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$

Question 2

- Par l'absurde, supposons que la fonction $t \to \dfrac{\sin t}{t}$ soit dans $L^1(\mathbb{R})$.
- D'après le théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de cette fonction est $t \to 1_{[-1,1]}(t)$
- Cette fonction n'est pas continue en -1 et 1, en contradiction avec le th. d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 2.4.4: Transformée de Fourier et dérivation

Enoncé

Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On suppose que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, on a

$$\widehat{f'}(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega).$$

Exercice 2.4.4: Solution (i)

- $f' \in L^1$ donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(x)dx \tag{1}$$

existe et vaut zéro, puisque $f \in L^1$.

Exercice 2.4.4: Solution (i)

- $f' \in L^1$ donc
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(x)dx \tag{1}$$
existe et vaut zéro, puisque $f \in L^1$.
- De même, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Exercice 2.4.4: Solution (i)

- $f' \in L^1$ donc
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(x)dx \tag{1}$$
existe et vaut zéro, puisque $f \in L^1$.
- De même, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- On a
$$\mathcal{F}f'(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f'(x)dx \tag{2}$$
$$= \left[f(x)e^{-i\omega x}\right]_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x)dx \tag{3}$$

Exercice 2.4.9: Correspondance signaux-spectres

Associer les 4 signaux (1,2,3,4) aux 4 spectres (A,B,C,D) suivants.

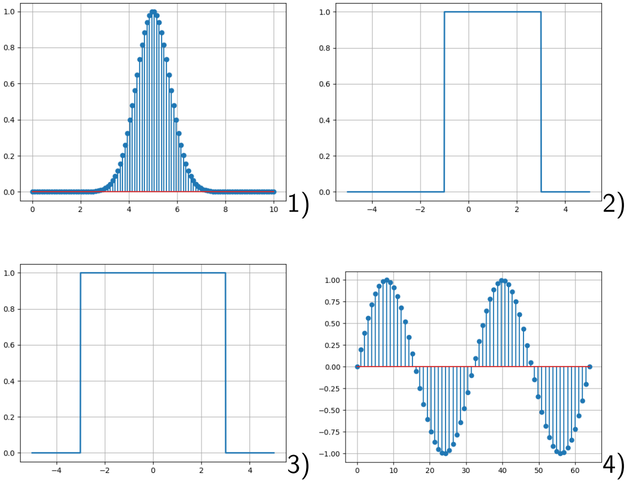

Figure: Signaux

Exercice 2.4.9: Correspondance signaux-spectres

Associer les 4 signaux (1,2,3,4) aux 4 spectres (A,B,C,D) suivants.

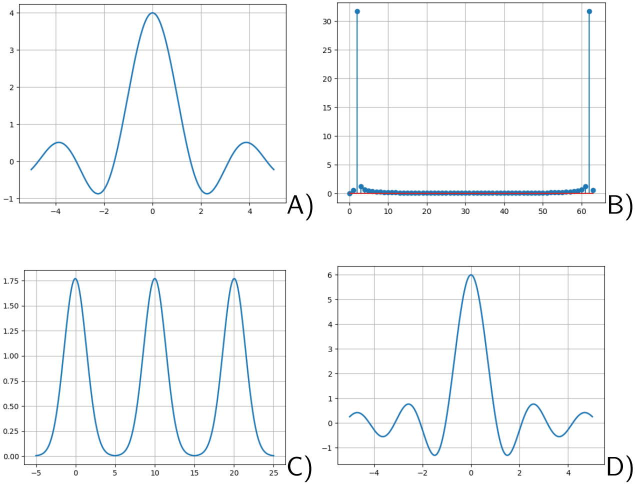

Figure: Spectres

Exercice 2.4.9: Solution

Exercice 2.4.9: Solution

- 1: Echantillonnage d'une fonction gaussienne. La TFTD d'une gaussienne est elle-même une gaussienne et périodise le spectre. **Réponse:** 1=C

Exercice 2.4.9: Solution

- 1: Echantillonnage d'une fonction gaussienne. La TFTD d'une gaussienne est elle-même une gaussienne et périodise le spectre.
  Réponse: 1=C

- 2, 3: Fonctions indicatrices. La transformée de Fourier d'une fonction indicatrice est un sinus cardinal. L'étalement fréquentiel est d'autant plus important que la fenêtre du signal est étroite.
  Réponse: 2=A et 3=D

Exercice 2.4.9: Solution

- 1: Echantillonnage d'une fonction gaussienne. La TFTD d'une gaussienne est elle-même une gaussienne et périodise le spectre.
  Réponse: 1=C

- 2, 3: Fonctions indicatrices. La transformée de Fourier d'une fonction indicatrice est un sinus cardinal. L'étalement fréquentiel est d'autant plus important que la fenêtre du signal est étroite.
  Réponse: 2=A et 3=D

- 4: La transformée de Fourier d'un sinus $t \to \sin(\omega$ correspond à deux pics de Dirac dans l'espace fréquentiel
  Réponse: 4=B