

# PC 2: écoulement d'un fluide parfait

Vladislav A. Yastrebov



Je soutien  
l'Ukraine  
#nowar

*MINES Paris, PSL University, Centre des Matériaux  
CNRS UMR 7633, Evry, France*

Ecole des Mines de Paris  
7 mars 2022

# Un peu de théorie

- Fluide parfait  $\equiv$  pas de contrainte de cisaillement

# Un peu de théorie

- Fluide parfait  $\equiv$  pas de contrainte de cisaillement
- Tenseur de contrainte  $\underline{\sigma}(x, t) = -p(x, t) \underline{\mathcal{I}}$

# Un peu de théorie

- Fluide parfait  $\equiv$  pas de contrainte de cisaillement
- Tenseur de contrainte  $\underline{\sigma}(x, t) = -p(x, t) \underline{\mathcal{I}}$
- Si le fluide est incompressible, *i.e.*  $\dot{J} = 0$ , cela simplifie la résolution du problème

# Un peu de théorie

- Fluide parfait  $\equiv$  pas de contrainte de cisaillement
- Tenseur de contrainte  $\underline{\sigma}(x, t) = -p(x, t) \underline{\mathbb{I}}$
- Si le fluide est incompressible, *i.e.*  $\dot{J} = 0$ , cela simplifie la résolution du problème
- Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) = 0 \quad (1)$$

# Un peu de théorie

- Fluide parfait  $\equiv$  pas de contrainte de cisaillement
- Tenseur de contrainte  $\underline{\sigma}(x, t) = -p(x, t) \underline{\mathcal{I}}$
- Si le fluide est incompressible, *i.e.*  $\dot{J} = 0$ , cela simplifie la résolution du problème
- Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) = 0 \quad (1)$$

- Si le fluide est incompressible :  $\operatorname{grad}(\rho) = 0$ ,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  alors

$$\operatorname{div}(\underline{v}) = 0 \quad (2)$$

# Un peu de théorie

- Fluide parfait  $\equiv$  pas de contrainte de cisaillement
- Tenseur de contrainte  $\underline{\sigma}(x, t) = -p(x, t) \underline{\mathcal{I}}$
- Si le fluide est incompressible, *i.e.*  $\dot{J} = 0$ , cela simplifie la résolution du problème
- Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) = 0 \quad (1)$$

- Si le fluide est incompressible :  $\operatorname{grad}(\rho) = 0$ ,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  alors

$$\operatorname{div}(\underline{v}) = 0 \quad (2)$$

- Compressibilités typiques des liquides à  $p = 0$  :  $K = -Vdp/dV$   
eau  $K_0 \approx 2.1$  GPa, glycérine  $K_0 \approx 4.1$  GPa, huile  $K_0 \approx 2$  GPa  
VS acier  $K \approx 200$  GPa, aluminium  $K \approx 70$  GPa

# Un peu de théorie

- Fluide parfait  $\equiv$  pas de contrainte de cisaillement
- Tenseur de contrainte  $\underline{\sigma}(x, t) = -p(x, t) \underline{\mathbb{I}}$
- Si le fluide est incompressible, *i.e.*  $\dot{J} = 0$ , cela simplifie la résolution du problème
- Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) = 0 \quad (1)$$

- Si le fluide est incompressible :  $\operatorname{grad}(\rho) = 0$ ,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  alors

$$\operatorname{div}(\underline{v}) = 0 \quad (2)$$

- Compressibilités typiques des liquides à  $p = 0$  :  $K = -Vdp/dV$   
eau  $K_0 \approx 2.1$  GPa, glycérine  $K_0 \approx 4.1$  GPa, huile  $K_0 \approx 2$  GPa  
VS acier  $K \approx 200$  GPa, aluminium  $K \approx 70$  GPa
- En réalité, la compressibilité des liquides n'est pas constante  
 $K = K(p) = K_0 + K_1 p$  :  
eau  $K_1 \approx 6.5$ , glycérine  $K_1 \approx 8.7$ , huile  $K_1 \approx 9.25$ .

# Equations d'Euler

- Première loi de Cauchy :  $\rho \underline{a} - \text{div}(\underline{\sigma}) - \rho \underline{f} = 0$ , pour  $\underline{\sigma} = -p \underline{I}$  :

$$\rho \dot{\underline{v}} + \text{grad}(p) - \rho \underline{f} = 0 \quad (3)$$

# Equations d'Euler

- Première loi de Cauchy :  $\rho \underline{a} - \text{div}(\underline{\sigma}) - \rho \underline{f} = 0$ , pour  $\underline{\sigma} = -p \underline{I}$  :

$$\rho \dot{\underline{v}} + \text{grad}(p) - \rho \underline{f} = 0 \quad (3)$$

- Si  $\rho = \text{const}$  et uniforme, alors les équations d'Euler sont :

$$\begin{cases} \rho \dot{\underline{v}} + \text{grad}(p) - \rho \underline{f} = 0, \\ \text{div}(\underline{v}) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

# Equations d'Euler

- Première loi de Cauchy :  $\rho \underline{a} - \text{div}(\underline{\sigma}) - \rho \underline{f} = 0$ , pour  $\underline{\sigma} = -p \underline{I}$  :

$$\rho \dot{\underline{v}} + \text{grad}(p) - \rho \underline{f} = 0 \quad (3)$$

- Si  $\rho = \text{const}$  et uniforme, alors les équations d'Euler sont :

$$\begin{cases} \rho \dot{\underline{v}} + \text{grad}(p) - \rho \underline{f} = 0, \\ \text{div}(\underline{v}) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

- Acceleration  $\dot{\underline{v}} = \underline{a}$  ?

# Equations d'Euler II

## 5.1 Equations d'Euler pour les fluides parfaits

Dans le cas des fluides parfaits, la première loi de Cauchy (3.51), équation locale de la dynamique, prend la forme :

$$\rho \underline{a} + \text{grad } p - \rho \underline{f} = 0 \quad (5.2)$$

L'accélération peut également se mettre sous les formes suivantes<sup>3</sup> :

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v} \quad (5.3)$$

$$= \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \wedge (\text{rot } \underline{v}) + \frac{1}{2} \text{grad}(\underline{v} \cdot \underline{v}) \quad (5.4)$$

où la définition du rotationnel d'un champ de vecteur est donnée par (A.107). En voici la démonstration, en coordonnées cartésiennes orthonormées et en tenant compte des définitions (2.187) du taux de rotation,  $\underline{W}$ , du milieu et (2.192) du pseudo-vecteur associé à ce tenseur antisymétrique :

$$\begin{aligned} (\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v} &= v_{i,j} v_j \underline{e}_i = ((v_{i,j} - v_{j,i}) v_j + v_{j,i} v_j) \underline{e}_i \\ &= (2W_{ij} v_j + L_{ji} v_j) \underline{e}_i = -2\epsilon_{ijk} \overset{\times}{W}_k v_j \underline{e}_i + \frac{1}{2} \text{grad}(\underline{v} \cdot \underline{v}) \\ &= \epsilon_{ijk} (\text{rot } \underline{v})_k v_j \underline{e}_i + \frac{1}{2} \text{grad}(\underline{v} \cdot \underline{v}) \\ &= \underline{v} \wedge \text{rot } \underline{v} + \frac{1}{2} \text{grad}(\underline{v} \cdot \underline{v}) \end{aligned}$$

---

3. Le terme dit *de convection* dans l'expression de l'accélération est souvent écrit  $(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = v_j v_{i,j} \underline{e}_i$  alors qu'il est noté  $(\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v}$  dans ce cours. En suivant les notation de ce cours,  $\underline{v} \cdot \nabla = \text{div } \underline{v}$ . De même, la définition du rotationnel adoptée dans certains ouvrages est l'opposée de celle retenue ici.

# Equations d'Euler II

## 5.1 Equations d'Euler pour les fluides parfaits

Dans le cas des fluides parfaits, la première loi de Cauchy (3.51), équation locale de la dynamique, prend la forme :

$$\rho \underline{a} + \text{grad } p - \rho \underline{f} = 0 \quad (5.2)$$

L'accélération peut également se mettre sous les formes suivantes<sup>3</sup> :

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v} \quad (5.3)$$

$$= \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \wedge (\text{rot } \underline{v}) + \frac{1}{2} \text{grad}(\underline{v} \cdot \underline{v}) \quad (5.4)$$

où la définition du rotationnel d'un champ de vecteur est donnée par (A.107). En voici la démonstration, en coordonnées cartésiennes orthonormées et en tenant compte des définitions (2.187) du taux de rotation,  $\underline{W}$ , du milieu et (2.192) du pseudo-vecteur associé à ce tenseur antisymétrique :

$$\begin{aligned} (\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v} &= v_{i,j} v_j \underline{e}_i = ((v_{i,j} - v_{j,i}) v_j + v_{j,i} v_j) \underline{e}_i \\ &= (2W_{ij} v_j + L_{ji} v_j) \underline{e}_i = -2\epsilon_{ijk} \overset{\times}{W}_k v_j \underline{e}_i + \frac{1}{2} \text{grad}(\underline{v} \cdot \underline{v}) \\ &= \epsilon_{ijk} (\text{rot } \underline{v})_k v_j \underline{e}_i + \frac{1}{2} \text{grad}(\underline{v} \cdot \underline{v}) \\ &= \underline{v} \wedge \text{rot } \underline{v} + \frac{1}{2} \text{grad}(\underline{v} \cdot \underline{v}) \end{aligned}$$

---

3. Le terme dit *de convection* dans l'expression de l'accélération est souvent écrit  $(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = v_j v_{i,j} \underline{e}_i$  alors qu'il est noté  $(\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v}$  dans ce cours. En suivant les notation de ce cours,  $\underline{v} \cdot \nabla = \text{div } \underline{v}$ . De même, la définition du rotationnel adoptée dans certains ouvrages est l'opposée de celle retenue ici.

# Equations d'Euler II

$$\text{grad}(\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}}) = \text{grad}(\underline{\boldsymbol{a}}) \cdot \underline{\boldsymbol{b}} + \text{grad}(\underline{\boldsymbol{b}}) \cdot \underline{\boldsymbol{a}} + \text{rot}(\underline{\boldsymbol{a}}) \wedge \underline{\boldsymbol{b}} + \text{rot}(\underline{\boldsymbol{b}}) \wedge \underline{\boldsymbol{a}} \quad (5)$$

si  $\underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\boldsymbol{b}} = \underline{\boldsymbol{v}}$  alors

$$\text{grad}(\underline{\boldsymbol{v}}^2) = 2\text{grad}(\underline{\boldsymbol{v}}) \cdot \underline{\boldsymbol{v}} + 2\text{rot}(\underline{\boldsymbol{v}}) \wedge \underline{\boldsymbol{v}} \quad (6)$$

$$\text{grad}(\underline{\boldsymbol{v}}^2) = 2\text{grad}(\underline{\boldsymbol{v}}) \cdot \underline{\boldsymbol{v}} - 2\underline{\boldsymbol{v}} \wedge \text{rot}(\underline{\boldsymbol{v}}) \quad (7)$$

$$\text{grad}(\underline{\boldsymbol{v}}) \cdot \underline{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{2}\text{grad}(\underline{\boldsymbol{v}}^2) + \underline{\boldsymbol{v}} \wedge \text{rot}(\underline{\boldsymbol{v}}) \quad (8)$$

# Equations d'Euler II

## 5.1 Equations d'Euler pour les fluides parfaits

Dans le cas des fluides parfaits, la première loi de Cauchy (3.51), équation locale de la dynamique, prend la forme :

$$\rho \underline{a} + \text{grad } p - \rho \underline{f} = 0 \quad (5.2)$$

L'accélération peut également se mettre sous les formes suivantes<sup>3</sup> :

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v} \quad (5.3)$$

$$= \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \wedge (\text{rot } \underline{v}) + \frac{1}{2} \text{grad}(\underline{v} \cdot \underline{v}) \quad (5.4)$$

où la définition du rotationnel d'un champ de vecteur est donnée par (A.107). En voici la démonstration, en coordonnées cartésiennes orthonormées et en tenant compte des définitions (2.187) du taux de rotation,  $\underline{W}$ , du milieu et (2.192) du pseudo-vecteur associé à ce tenseur antisymétrique :

$$\begin{aligned} (\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v} &= v_{i,j} v_j \underline{e}_i = ((v_{i,j} - v_{j,i}) v_j + v_{j,i} v_j) \underline{e}_i \\ &= (2W_{ij} v_j + L_{ji} v_j) \underline{e}_i = -\cancel{(\epsilon_{ijk} \overset{\times}{V}_k v_j)} + \frac{1}{2} \text{grad}(\underline{v} \cdot \underline{v}) \\ &= \epsilon_{ijk} (\text{rot } \underline{v})_k v_j \underline{e}_i + \frac{1}{2} \text{grad}(\underline{v} \cdot \underline{v}) \\ &= \underline{v} \wedge \text{rot } \underline{v} + \frac{1}{2} \text{grad}(\underline{v} \cdot \underline{v}) \end{aligned}$$

---

3. Le terme dit *de convection* dans l'expression de l'accélération est souvent écrit  $(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = v_j v_{i,j} \underline{e}_i$  alors qu'il est noté  $(\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v}$  dans ce cours. En suivant les notation de ce cours,  $\underline{v} \cdot \nabla = \text{div } \underline{v}$ . De même, la définition du rotationnel adoptée dans certains ouvrages est l'opposée de celle retenue ici.

# Equations d'Euler II

$$\underline{e}_i \wedge \underline{e}_j = \epsilon_{ijk} \underline{e}_k \quad (5)$$

où  $\epsilon_{ijk}$  est le symbole de Levi-Civita dont les composantes sont :

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{si } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 1\}, \{3, 1, 2\} \\ -1, & \text{si } \{i, j, k\} = \{2, 1, 3\}, \{1, 3, 2\}, \{3, 2, 1\} \\ 0, & \text{si } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } i = k \end{cases} \quad (6)$$

# Equations d'Euler II

$$\underline{e}_i \wedge \underline{e}_j = \epsilon_{ijk} \underline{e}_k \quad (5)$$

où  $\epsilon_{ijk}$  est le symbole de Levi-Civita dont les composantes sont :

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{si } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 1\}, \{3, 1, 2\} \\ -1, & \text{si } \{i, j, k\} = \{2, 1, 3\}, \{1, 3, 2\}, \{3, 2, 1\} \\ 0, & \text{si } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } i = k \end{cases} \quad (6)$$

Exemples :

$$\underline{e}_1 \wedge \underline{e}_2 = \epsilon_{12k} \underline{e}_k = \underline{e}_3 \quad (7)$$

$$\underline{e}_3 \wedge \underline{e}_2 = \epsilon_{32k} \underline{e}_k = -\underline{e}_1 \quad (8)$$

# Equations d'Euler III

- Pour  $\text{grad}(\rho) = 0$ , les équations d'Euler sont :

$$\begin{cases} \rho \dot{\underline{v}} + \text{grad}(p) - \rho \underline{f} = 0, \\ \text{div}(\underline{v}) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

# Equations d'Euler III

- Pour  $\text{grad}(\rho) = 0$ , les équations d'Euler sont :

$$\begin{cases} \rho \dot{\underline{v}} + \text{grad}(p) - \rho \underline{f} = 0, \\ \text{div}(\underline{v}) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

- Avec la dérivée de la vitesse :

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}(\underline{v}^2) + \underline{v} \wedge \text{rot}(\underline{v}) + \text{grad}(p)/\rho - \underline{f} = 0, \\ \text{div}(\underline{v}) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

# Equations d'Euler III

- Pour  $\text{grad}(\rho) = 0$ , les équations d'Euler sont :

$$\begin{cases} \rho \dot{\underline{v}} + \text{grad}(p) - \rho \underline{f} = 0, \\ \text{div}(\underline{v}) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

- Avec la dérivée de la vitesse :

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}(\underline{v}^2) + \underline{v} \wedge \text{rot}(\underline{v}) + \text{grad}(p)/\rho - \underline{f} = 0, \\ \text{div}(\underline{v}) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

- 4 équations (3+1), 4 inconnus  $\underline{v}, p$

# Equations d'Euler III

- Pour  $\text{grad}(\rho) = 0$ , les équations d'Euler sont :

$$\begin{cases} \rho \dot{\underline{v}} + \text{grad}(p) - \rho \underline{f} = 0, \\ \text{div}(\underline{v}) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

- Avec la dérivée de la vitesse :

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}(\underline{v}^2) + \underline{v} \wedge \text{rot}(\underline{v}) + \text{grad}(p)/\rho - \underline{f} = 0, \\ \text{div}(\underline{v}) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

- 4 équations (3+1), 4 inconnus  $\underline{v}, p$
- Simplifications :
  - (i) si la solution est stationnaire :  $\partial \underline{v} / \partial t = 0$
  - (ii) si le mouvement est irrotationnel  $\text{rot}(\underline{v}) = 0$  :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \text{grad}(\underline{v}^2) + \text{grad}(p)/\rho - \underline{f} = 0, \\ \text{div}(\underline{v}) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

# Ecoulement plan irrotationnel I

- En 2D  $\underline{v} = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y$

# Ecoulement plan irrotationnel I

- En 2D  $\underline{v} = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y$
- Si le mouvement est irrotationnel  $\text{rot}(\underline{v}) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ , alors il existe le potentiel  $\phi(x, y)$  t.q. :

$$\underline{v} = \text{grad}(\phi) \quad (12)$$

# Ecoulement plan irrotationnel I

- En 2D  $\underline{v} = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y$
- Si le mouvement est irrotationnel  $\text{rot}(\underline{v}) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ , alors il existe le potentiel  $\phi(x, y)$  t.q. :

$$\underline{v} = \text{grad}(\phi) \quad (12)$$

- NB : on peut prouver pour un fluide parfait que si à  $t = 0$  :  $\text{rot}(\underline{v}) = 0$  alors  $\text{rot}(\underline{v}) = 0 \forall t$

# Ecoulement plan irrotationnel I

- En 2D  $\underline{v} = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y$
- Si le mouvement est irrotationnel  $\text{rot}(\underline{v}) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ , alors il existe le potentiel  $\phi(x, y)$  t.q. :

$$\underline{v} = \text{grad}(\phi) \quad (12)$$

- NB : on peut prouver pour un fluide parfait que si à  $t = 0$  :  $\text{rot}(\underline{v}) = 0$  alors  $\text{rot}(\underline{v}) = 0 \forall t$
- Pour un fluide incompressible  $\text{div}(\underline{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  il découle qu'il existe un autre potentiel  $\psi(x, y)$  t.q. :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{alors} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \quad (13)$$

# Ecoulement plan irrotationnel I

- En 2D  $\underline{v} = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y$
- Si le mouvement est irrotationnel  $\text{rot}(\underline{v}) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ , alors il existe le potentiel  $\phi(x, y)$  t.q. :

$$\underline{v} = \text{grad}(\phi) \quad (12)$$

- NB : on peut prouver pour un fluide parfait que si à  $t = 0$  :  $\text{rot}(\underline{v}) = 0$  alors  $\text{rot}(\underline{v}) = 0 \forall t$
- Pour un fluide incompressible  $\text{div}(\underline{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  il découle qu'il existe un autre potentiel  $\psi(x, y)$  t.q. :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{alors} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \quad (13)$$

- Les lignes de courant se trouvent de l'équation :

$$\underline{v} \wedge d\underline{r} = 0$$

# Ecoulement plan irrotationnel I

- En 2D  $\underline{v} = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y$
- Si le mouvement est irrotationnel  $\text{rot}(\underline{v}) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ , alors il existe le potentiel  $\phi(x, y)$  t.q. :

$$\underline{v} = \text{grad}(\phi) \quad (12)$$

- NB : on peut prouver pour un fluide parfait que si à  $t = 0$  :  $\text{rot}(\underline{v}) = 0$  alors  $\text{rot}(\underline{v}) = 0 \forall t$
- Pour un fluide incompressible  $\text{div}(\underline{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  il découle qu'il existe un autre potentiel  $\psi(x, y)$  t.q. :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{alors} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \quad (13)$$

- Les lignes de courant se trouvent de l'équation :

$$\underline{v} \wedge d\underline{r} = 0$$

# Ecoulement plan irrotationnel I

- En 2D  $\underline{v} = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y$
- Si le mouvement est irrotationnel  $\text{rot}(\underline{v}) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ , alors il existe le potentiel  $\phi(x, y)$  t.q. :

$$\underline{v} = \text{grad}(\phi) \quad (12)$$

- NB : on peut prouver pour un fluide parfait que si à  $t = 0$  :  $\text{rot}(\underline{v}) = 0$  alors  $\text{rot}(\underline{v}) = 0 \forall t$
- Pour un fluide incompressible  $\text{div}(\underline{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  il découle qu'il existe un autre potentiel  $\psi(x, y)$  t.q. :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{alors} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \quad (13)$$

- Les lignes de courant se trouvent de l'équation :

$$\underline{v} \wedge d\underline{r} = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

# Ecoulement plan irrotationnel I

- En 2D  $\underline{v} = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y$
- Si le mouvement est irrotationnel  $\text{rot}(\underline{v}) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ , alors il existe le potentiel  $\phi(x, y)$  t.q. :

$$\underline{v} = \text{grad}(\phi) \quad (12)$$

- NB : on peut prouver pour un fluide parfait que si à  $t = 0$  :  $\text{rot}(\underline{v}) = 0$  alors  $\text{rot}(\underline{v}) = 0 \forall t$
- Pour un fluide incompressible  $\text{div}(\underline{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  il découle qu'il existe un autre potentiel  $\psi(x, y)$  t.q. :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{alors} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \quad (13)$$

- Les lignes de courant se trouvent de l'équation :

$$\underline{v} \wedge d\underline{r} = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Leftrightarrow \frac{dx}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = -\frac{dy}{\frac{\partial \psi}{\partial x}}$$

# Ecoulement plan irrotationnel I

- En 2D  $\underline{v} = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y$
- Si le mouvement est irrotationnel  $\text{rot}(\underline{v}) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ , alors il existe le potentiel  $\phi(x, y)$  t.q. :

$$\underline{v} = \text{grad}(\phi) \quad (12)$$

- NB : on peut prouver pour un fluide parfait que si à  $t = 0$  :  $\text{rot}(\underline{v}) = 0$  alors  $\text{rot}(\underline{v}) = 0 \forall t$
- Pour un fluide incompressible  $\text{div}(\underline{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  il découle qu'il existe un autre potentiel  $\psi(x, y)$  t.q. :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{alors} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \quad (13)$$

- Les lignes de courant se trouvent de l'équation :

$$\underline{v} \wedge d\underline{r} = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Leftrightarrow \frac{dx}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = -\frac{dy}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} \Leftrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi = 0 \quad (14)$$

# Ecoulement plan irrotationnel I

- En 2D  $\underline{v} = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y$
- Si le mouvement est irrotationnel  $\text{rot}(\underline{v}) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ , alors il existe le potentiel  $\phi(x, y)$  t.q. :

$$\underline{v} = \text{grad}(\phi) \quad (12)$$

- NB : on peut prouver pour un fluide parfait que si à  $t = 0$  :  $\text{rot}(\underline{v}) = 0$  alors  $\text{rot}(\underline{v}) = 0 \forall t$
- Pour un fluide incompressible  $\text{div}(\underline{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  il découle qu'il existe un autre potentiel  $\psi(x, y)$  t.q. :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{alors} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \quad (13)$$

- Les lignes de courant se trouvent de l'équation :

$$\underline{v} \wedge d\underline{r} = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Leftrightarrow \frac{dx}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = -\frac{dy}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} \Leftrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi = 0 \quad (14)$$

- Alors  $\psi = \text{const}$  le long des lignes de courant.

# Ecoulement plan irrotationnel II

- Les potentiels  $\phi$  et  $\psi$  ne sont pas indépendants, ils vérifient les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{array} \right. \quad (15)$$

# Ecoulement plan irrotationnel II

- Les potentiels  $\phi$  et  $\psi$  ne sont pas indépendants, ils vérifient les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{array} \right. \quad (15)$$

- Les lignes équipotentielle  $\phi(x, y) = C$  et les lignes de courant  $\psi(x, y) = C'$  sont orthogonales :

$$\text{grad}(\phi) \cdot \text{grad}(\psi) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = -uv + vu = 0 \quad (16)$$

# Ecoulement plan irrotationnel II

- Les potentiels  $\phi$  et  $\psi$  ne sont pas indépendants, ils vérifient les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{array} \right. \quad (15)$$

- Les lignes équipotentielle  $\phi(x, y) = C$  et les lignes de courant  $\psi(x, y) = C'$  sont orthogonales :

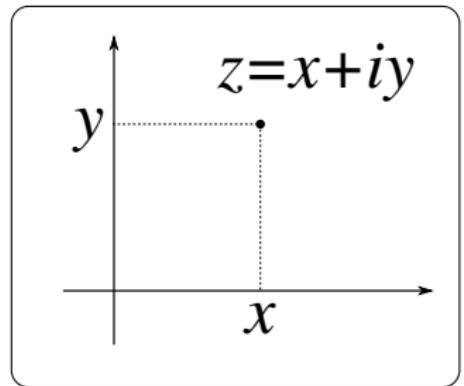
$$\text{grad}(\phi) \cdot \text{grad}(\psi) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = -uv + vu = 0 \quad (16)$$

- Le passage des coordonnées cartesiennes  $\{x, y\}$  vers coordonnées curvilignes  $\phi = \phi(x, y), \psi = \psi(x, y)$  qui sont aussi orthogonales.

# Ecoulement plan irrotationnel III

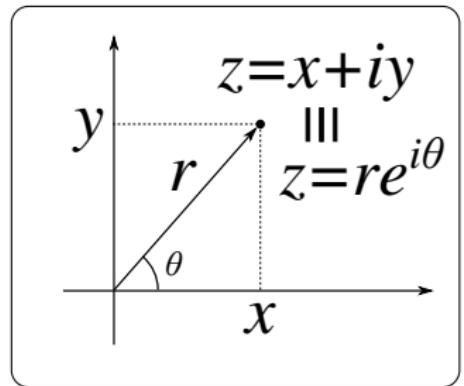
- Passons de  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathbb{C}$ , i.e.

$$\underline{v} = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y \rightarrow V = u + iv \text{ et}$$
$$z = x + iy$$



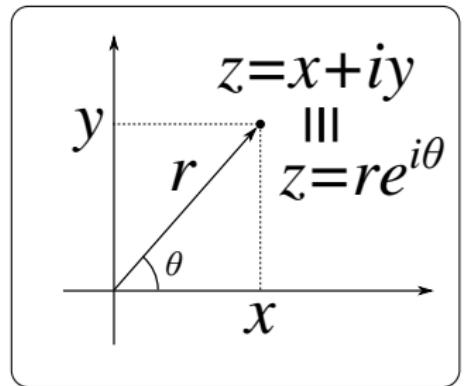
# Ecoulement plan irrotationnel III

- Passons de  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathbb{C}$ , i.e.  
 $\underline{v} = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y \rightarrow V = u + iv$  et  
 $z = x + iy$
- La partie réelle  $\text{Re}(z) = x$  et la partie imaginaire  $\text{Im}(z) = y$ , où  $i^2 = -1$



# Ecoulement plan irrotationnel III

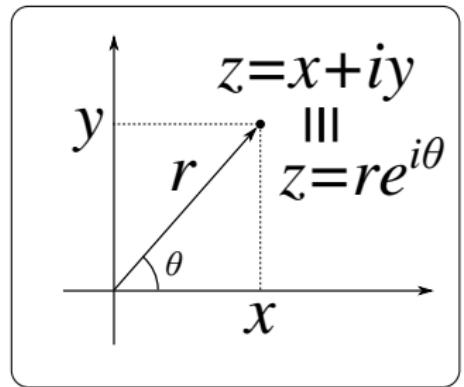
- Passons de  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathbb{C}$ , i.e.  
 $\underline{v} = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y \rightarrow V = u + iv$  et  
 $z = x + iy$
- La partie réelle  $\text{Re}(z) = x$  et la partie imaginaire  $\text{Im}(z) = y$ , où  $i^2 = -1$
- Nombre conjugué :  $z = x + iy$ ,  
 $z^* = x - iy$ , alors  $|z|^2 = zz^* = x^2 + y^2$



# Ecoulement plan irrotationnel III

- Passons de  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathbb{C}$ , i.e.  
 $\underline{v} = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y \rightarrow V = u + iv$  et  
 $z = x + iy$
- La partie réelle  $\text{Re}(z) = x$  et la partie imaginaire  $\text{Im}(z) = y$ , où  $i^2 = -1$
- Nombre conjugué :  $z = x + iy$ ,  
 $z^* = x - iy$ , alors  $|z|^2 = zz^* = x^2 + y^2$
- Représentation :

$$z = re^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = \sqrt{x^2 + y^2} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$



# Ecoulement plan irrotationnel III

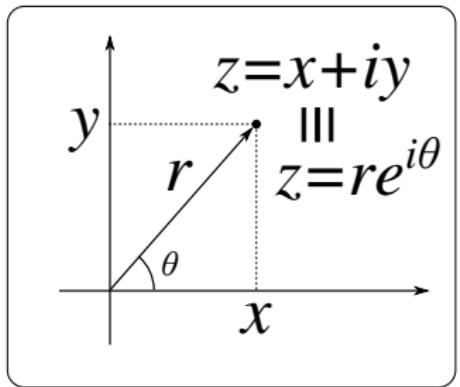
- Passons de  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathbb{C}$ , i.e.

$$\underline{v} = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y \rightarrow V = u + iv \text{ et}$$
$$z = x + iy$$

- La partie réelle  $\operatorname{Re}(z) = x$  et la partie imaginaire  $\operatorname{Im}(z) = y$ , où  $i^2 = -1$
- Nombre conjugué :  $z = x + iy$ ,  
 $z^* = x - iy$ , alors  $|z|^2 = zz^* = x^2 + y^2$
- Représentation :

$$z = re^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = \sqrt{x^2 + y^2} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

- Rotation de  $\pi/2$  dans le sens inverse des aiguilles d'une montre :  
 $zi = ze^{i\pi/2} = re^{i\theta}e^{i\pi/2} = re^{i(\theta+\pi/2)}$

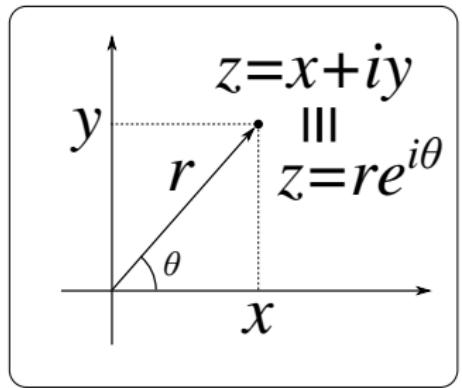


# Ecoulement plan irrotationnel III

- Passons de  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathbb{C}$ , i.e.  
 $\underline{v} = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y \rightarrow V = u + iv$  et  
 $z = x + iy$
- La partie réelle  $\text{Re}(z) = x$  et la partie imaginaire  $\text{Im}(z) = y$ , où  $i^2 = -1$
- Nombre conjugué :  $z = x + iy$ ,  
 $z^* = x - iy$ , alors  $|z|^2 = zz^* = x^2 + y^2$
- Représentation :

$$z = re^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = \sqrt{x^2 + y^2} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

- Rotation de  $\pi/2$  dans le sens inverse des aiguilles d'une montre :  
 $zi = ze^{i\pi/2} = re^{i\theta}e^{i\pi/2} = re^{i(\theta+\pi/2)}$
- Rotation de  $\pi/2$  dans le sens des aiguilles d'une montre :  
 $z/i = -zi = ze^{-i\pi/2} = re^{i(\theta-\pi/2)}$



# Ecoulement plan irrotationnel IV

- Comme  $\phi$  et  $\psi$  vérifient les conditions de Cauchy-Riemann, la fonctionne complexe  $f = \phi + i\psi$  est différentiable au sens des fonctions holomorphes, i.e.

$$\forall \theta : f'(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(z + re^{i\theta}) - f(z)}{re^{i\theta}} \quad (17)$$

# Ecoulement plan irrotationnel IV

- Comme  $\phi$  et  $\psi$  vérifient les conditions de Cauchy-Riemann, la fonctionne complexe  $f = \phi + i\psi$  est différentiable au sens des fonctions holomorphes, i.e.

$$\forall \theta : f'(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(z + re^{i\theta}) - f(z)}{re^{i\theta}} \quad (17)$$

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial(iy)} = -i \frac{\partial f}{\partial y} \quad (18)$$

# Ecoulement plan irrotationnel IV

- Comme  $\phi$  et  $\psi$  vérifient les conditions de Cauchy-Riemann, la fonctionne complexe  $f = \phi + i\psi$  est différentiable au sens des fonctions holomorphes, i.e.

$$\forall \theta : f'(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(z + re^{i\theta}) - f(z)}{re^{i\theta}} \quad (17)$$

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial(iy)} = -i \frac{\partial f}{\partial y} \quad (18)$$

- Alors

$$f'(z) = u - iv = V^* \quad (19)$$

# Ecoulement plan irrotationnel IV

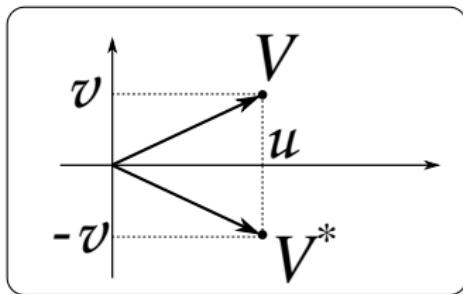
- Comme  $\phi$  et  $\psi$  vérifient les conditions de Cauchy-Riemann, la fonctionne complexe  $f = \phi + i\psi$  est différentiable au sens des fonctions holomorphes, i.e.

$$\forall \theta : f'(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(z + re^{i\theta}) - f(z)}{re^{i\theta}} \quad (17)$$

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial(iy)} = -i \frac{\partial f}{\partial y} \quad (18)$$

- Alors

$$f'(z) = u - iv = V^* \quad (19)$$



# Quelques potentiels harmoniques

- Quelques potentiels qui sont harmoniques  $\Delta\phi = 0, \Delta\psi = 0$
- Potentiel 1 (vitesse uniforme) :  $f(z) = V_0 e^{i\theta} z$

# Quelques potentiels harmoniques

- Quelques potentiels qui sont harmoniques  $\Delta\phi = 0, \Delta\psi = 0$
- Potentiel 1 (vitesse uniforme) :  $f(z) = V_0 e^{i\theta} z$   
$$\phi = V_0(\cos(\theta)x - \sin(\theta)y)$$

# Quelques potentiels harmoniques

- Quelques potentiels qui sont harmoniques  $\Delta\phi = 0, \Delta\psi = 0$
- Potentiel 1 (vitesse uniforme) :  $f(z) = V_0 e^{i\theta} z$

$$\phi = V_0(\cos(\theta)x - \sin(\theta)y)$$

$$\psi = V_0(\sin(\theta)x + \cos(\theta)y)$$

# Quelques potentiels harmoniques

- Quelques potentiels qui sont harmoniques  $\Delta\phi = 0, \Delta\psi = 0$

- Potentiel 1 (vitesse uniforme) :  $f(z) = V_0 e^{i\theta} z$

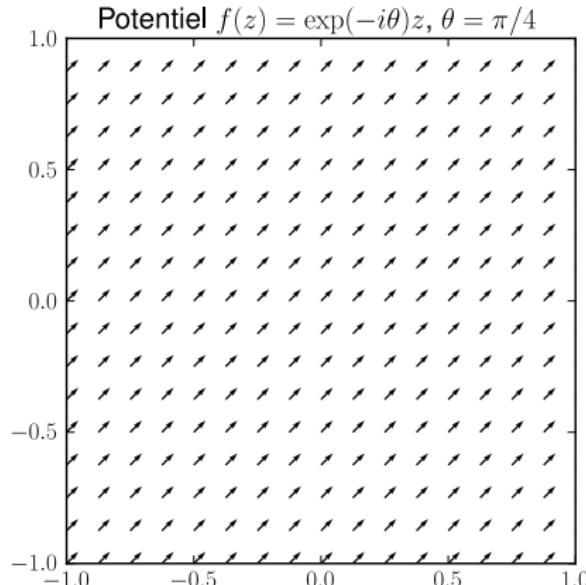
$$\phi = V_0(\cos(\theta)x - \sin(\theta)y)$$

$$\psi = V_0(\sin(\theta)x + \cos(\theta)y)$$

$$f' = V_0 e^{i\theta} = V_0 \cos(\theta) + V_0 \sin(\theta) \quad \Rightarrow u = V_0 \cos(\theta), v = -V_0 \sin(\theta)$$

# Quelques potentiels harmoniques

- Quelques potentiels qui sont harmoniques  $\Delta\phi = 0, \Delta\psi = 0$
- Potentiel 1 (vitesse uniforme) :  $f(z) = V_0 e^{i\theta} z$   
 $\phi = V_0(\cos(\theta)x - \sin(\theta)y)$   
 $\psi = V_0(\sin(\theta)x + \cos(\theta)y)$   
 $f' = V_0 e^{i\theta} = V_0 \cos(\theta) + V_0 \sin(\theta) \Rightarrow u = V_0 \cos(\theta), v = -V_0 \sin(\theta)$



# Quelques potentiels harmoniques

- Potentiel 2 :  $f(z) = \frac{\epsilon D}{2\pi} \log(z)$

Ecoulement radiale, source ( $\epsilon = 1$ ) ou puits ( $\epsilon = -1$ ) de débit  $D$

$$\phi = \frac{\epsilon D}{4\pi} \log(x^2 + y^2), \quad \psi = \frac{\epsilon D}{2\pi} \arctan(x/y)$$

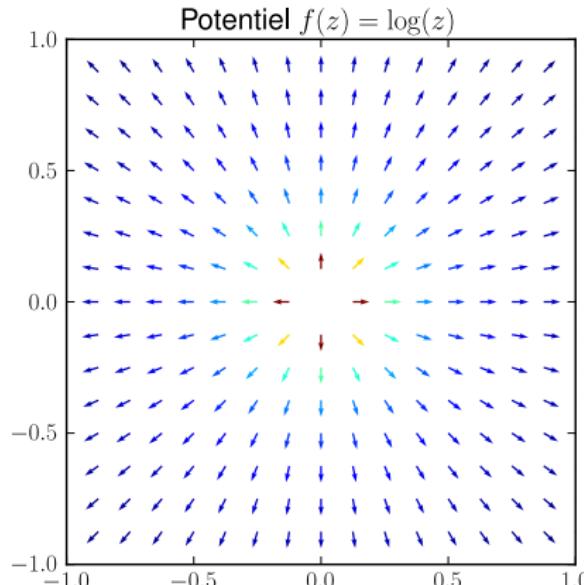
# Quelques potentiels harmoniques

- Potentiel 2 :  $f(z) = \frac{\epsilon D}{2\pi} \log(z)$

Ecoulement radiale, source ( $\epsilon = 1$ ) ou puits ( $\epsilon = -1$ ) de débit  $D$

$$\phi = \frac{\epsilon D}{4\pi} \log(x^2 + y^2), \quad \psi = \frac{\epsilon D}{2\pi} \arctan(x/y)$$

$$f' = \frac{\epsilon D}{2\pi} \frac{1}{z} = \frac{\epsilon D}{2\pi} \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \Rightarrow u = \frac{\epsilon D}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, v = \frac{\epsilon D}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$



# Quelques potentiels harmoniques

- Potentiel 2' :  $f(z) = i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(z)$

Tourbillon de circulation  $\Gamma$  dans le sens des aiguilles d'une montre

$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \arctan(x/y), \quad \psi = \frac{\Gamma}{4\pi} \log(x^2 + y^2)$$

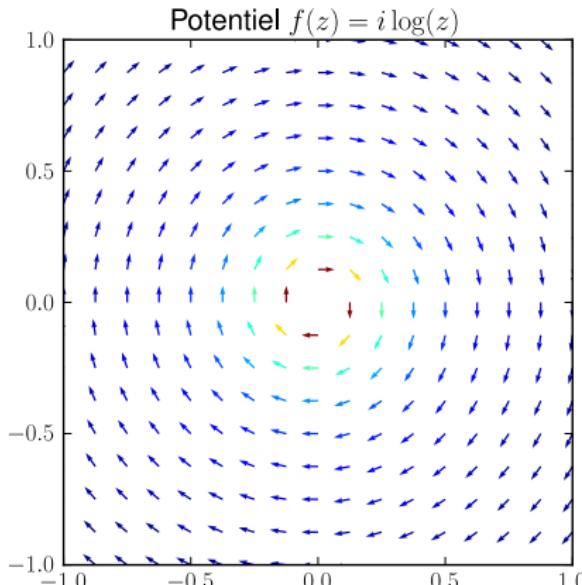
# Quelques potentiels harmoniques

- Potentiel 2' :  $f(z) = i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(z)$

Tourbillon de circulation  $\Gamma$  dans le sens des aiguilles d'une montre

$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \arctan(x/y), \quad \psi = \frac{\Gamma}{4\pi} \log(x^2 + y^2)$$

$$f' = i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{ix + y}{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow u = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, v = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

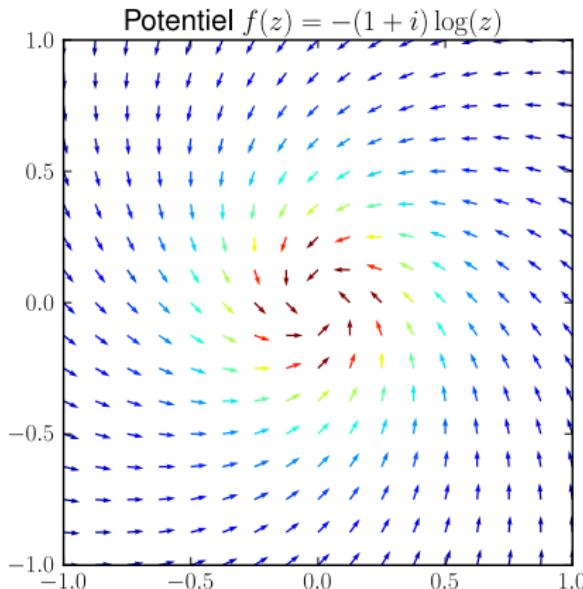


# Quelques potentiels harmoniques

- Potentiel 2<sup>"</sup> :  $f(z) = -C(i+1) \log(z)$

Puits avec un tourbillon dans le sens inverse des aiguilles d'une montre  $C > 0$  (indication de l'hémisphère nord)

$$f' = -\frac{C(i+1)}{z} = -C \frac{(i+1)(x-iy)}{x^2+y^2} \Rightarrow u = -C \frac{y+x}{x^2+y^2}, v = C \frac{x-y}{x^2+y^2}$$



# Quelques potentiels harmoniques

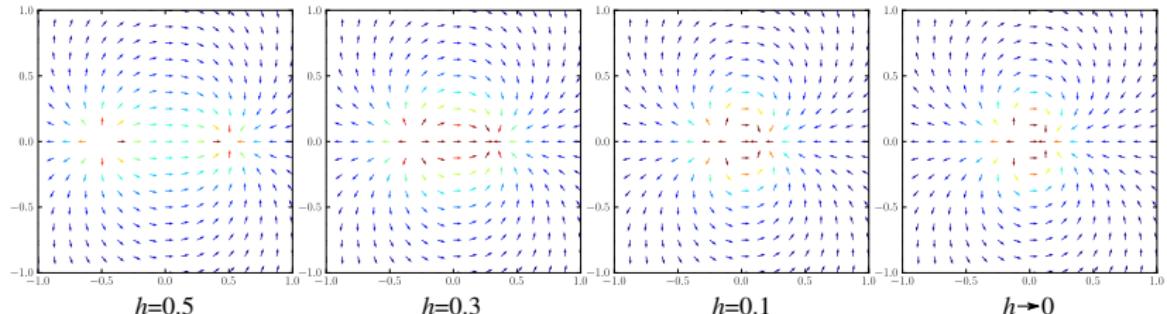
- Potentiel 3 :  $f(z) = \frac{Q}{2\pi} \log(z + h) - \frac{Q}{2\pi} \log(z - h)$

Source et puits de débit  $Q$  séparés de  $2h$ , t.q.  $2Qh = K$ , en limite de  $h \rightarrow 0$ , dipôle (doublet) :

$$f(z) = \frac{K}{2\pi z} \quad (20)$$

$$f' = -\frac{K}{2\pi z^2} = \frac{K}{2\pi} \frac{y^2 - x^2 - 2ixy}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow u = \frac{K}{2\pi} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, v = \frac{K}{2\pi} \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

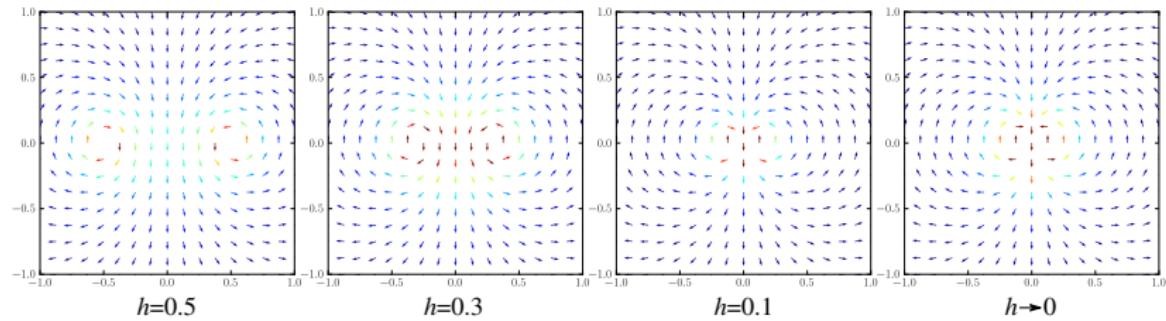
$$f(z) = Q (\log(z - h) - \log(z + h))$$



# Quelques potentiels harmoniques

Pareil pour les deux tourbillons approchés

$$f(z) = \lim_{h \rightarrow 0, 2Qh \rightarrow K} \frac{Q}{2\pi} (i \log(z+h) - i \log(z-h)) = \frac{iK}{2\pi z}$$



# Quelques potentiels harmoniques

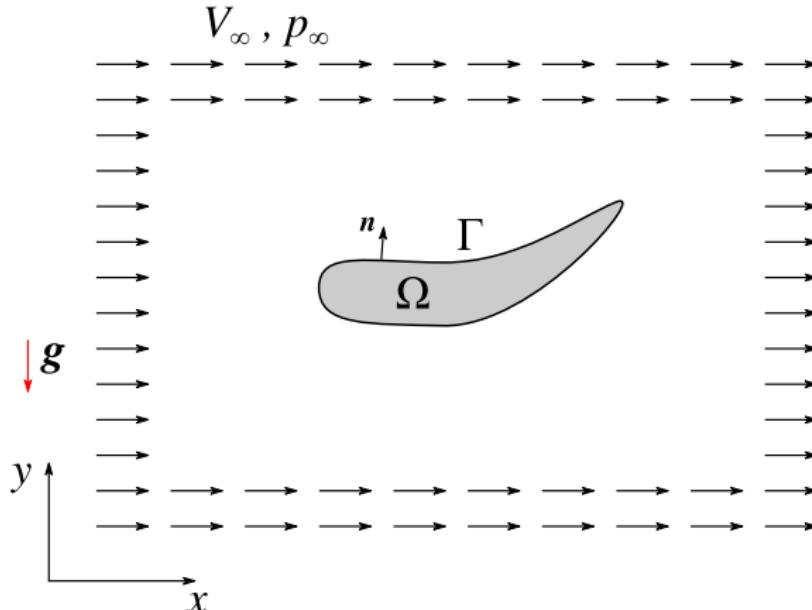
- Si  $f_1(z), f_2(z)$  sont tels que  $\Delta f_1 = 0$  et  $\Delta f_2 = 0$ , alors

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} : \quad \Delta(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = 0 \quad (21)$$

$$/\!/\; \Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

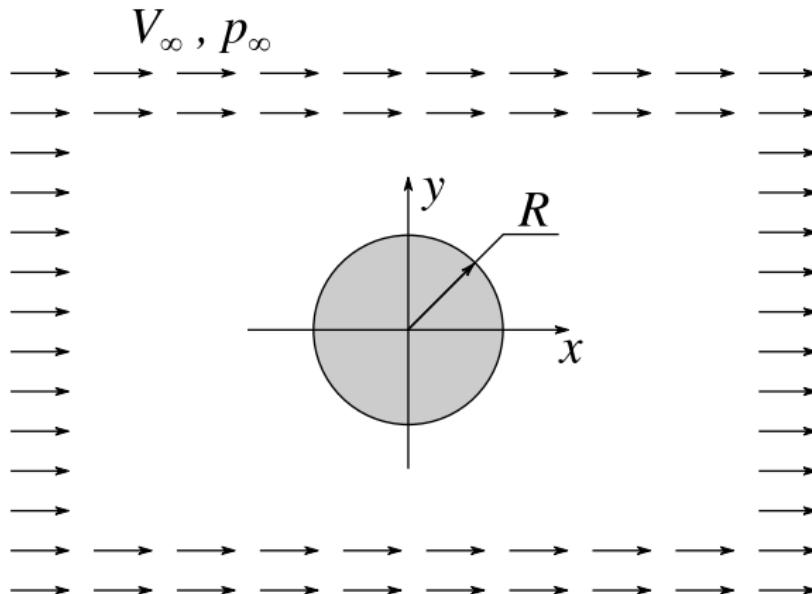
# Problème d'écoulement autour d'un corps

- Loin du corps  $|z| \rightarrow \infty : V = V_\infty = \operatorname{Re}(V_\infty) + i\operatorname{Im}(V_\infty)$ ,  $p = p_\infty$
- Sur la surface du corps  $\Gamma \subseteq \partial\Omega$   
 $V_n = \underline{V} \cdot \underline{n} = 0 \quad \equiv \quad \operatorname{Re}(n)\operatorname{Re}(V) + \operatorname{Im}(n)\operatorname{Im}(V) = 0$
- Trouver  $\phi, \psi$  t.q.  $\Delta\phi = 0, \Delta\psi = 0 \Rightarrow$  le champs de vitesse  $V = f'^*$
- Trouver la pression à partir de l'équation  $v^2/2 + p/\rho + \mathcal{U} = \text{const}$



# Ecoulement autour d'un cylindre

- Densité  $\rho$
- Loin du cylindre  $|z| \rightarrow \infty : V = V_\infty \in \mathbb{R}, p = p_\infty$
- La surface du cylindre  $|z| = R$ , la normale  $n = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ , la vitesse devrait être  $V = V_0(1 - \cos(2\theta) - i \sin(2\theta))$
- La composante normale est nulle  $\operatorname{Re}(V)\operatorname{Re}(n) + \operatorname{Im}(V)\operatorname{Im}(n) = 0$



# Ecoulement autour d'un cylindre

- Considerons le potentiel :  $f(z) = V_\infty z + \frac{a}{z}$

# Ecoulement autour d'un cylindre

- Considerons le potentiel :  $f(z) = V_\infty z + \frac{a}{z}$
- Champs de vitesse  $V = f'^* = V_\infty - a/z^{*2} = V_\infty - az^2/|z|^4$

$$V = V_\infty - \frac{a(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{2axy}{(x^2 + y^2)^2}$$

# Ecoulement autour d'un cylindre

- Considerons le potentiel :  $f(z) = V_\infty z + \frac{a}{z}$
- Champs de vitesse  $V = f'^* = V_\infty - a/z^{*2} = V_\infty - az^2/|z|^4$ 
$$V = V_\infty - \frac{a(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{2axy}{(x^2 + y^2)^2}$$
- Conditions sur la surface :
  - (1)  $u(x = 0, y = R) = u(\theta = \pi/2) = 2V_0$
  - (2)  $u(x = R, y = 0) = u(\theta = 0) = 0$

# Ecoulement autour d'un cylindre

- Considerons le potentiel :  $f(z) = V_\infty z + \frac{a}{z}$
- Champs de vitesse  $V = f'^* = V_\infty - a/z^2 = V_\infty - az^2/|z|^4$

$$V = V_\infty - \frac{a(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{2axy}{(x^2 + y^2)^2}$$

- Conditions sur la surface :

- (1)  $u(x = 0, y = R) = u(\theta = \pi/2) = 2V_0$
- (2)  $u(x = R, y = 0) = u(\theta = 0) = 0$

- On peut donc déduire :  $V_0 = V_\infty$ ,  $a = V_\infty R^2$ , et alors

$$f(z) = V_\infty \left( z + \frac{R^2}{z} \right) \tag{22}$$

# Ecoulement autour d'un cylindre

- Considerons le potentiel :  $f(z) = V_\infty z + \frac{a}{z}$
- Champs de vitesse  $V = f'^* = V_\infty - a/z^{*2} = V_\infty - az^2/|z|^4$

$$V = V_\infty - \frac{a(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{2axy}{(x^2 + y^2)^2}$$

- Conditions sur la surface :

- (1)  $u(x = 0, y = R) = u(\theta = \pi/2) = 2V_0$
- (2)  $u(x = R, y = 0) = u(\theta = 0) = 0$

- On peut donc déduire :  $V_0 = V_\infty$ ,  $a = V_\infty R^2$ , et alors

$$f(z) = V_\infty \left( z + \frac{R^2}{z} \right) \tag{22}$$

- $\phi = V_\infty \left( x + \frac{R^2 x}{x^2 + y^2} \right)$ ,  $\psi = V_\infty \left( y - \frac{R^2 y}{x^2 + y^2} \right)$

# Ecoulement autour d'un cylindre

- Considerons le potentiel :  $f(z) = V_\infty z + \frac{a}{z}$
- Champs de vitesse  $V = f'^* = V_\infty - a/z^{*2} = V_\infty - az^2/|z|^4$

$$V = V_\infty - \frac{a(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{2axy}{(x^2 + y^2)^2}$$

- Conditions sur la surface :

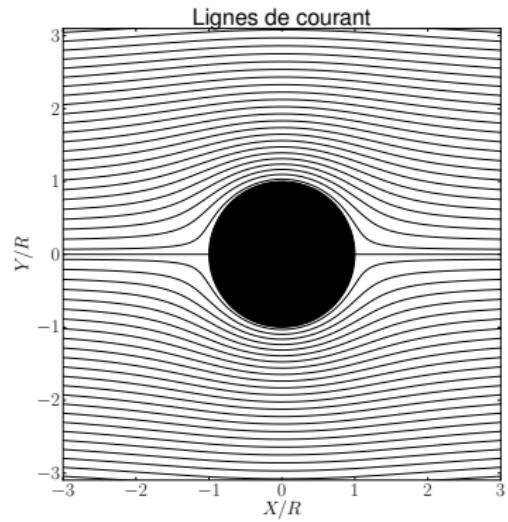
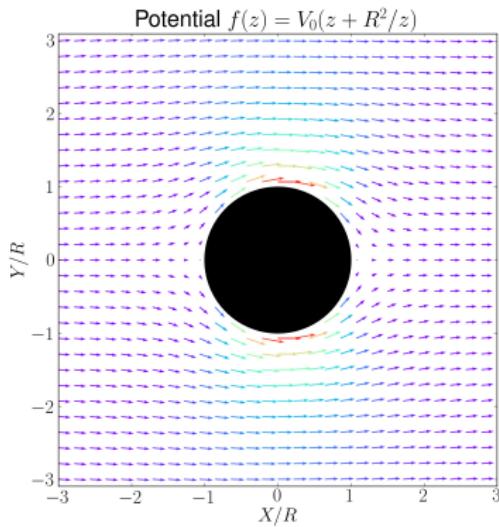
- (1)  $u(x = 0, y = R) = u(\theta = \pi/2) = 2V_0$
- (2)  $u(x = R, y = 0) = u(\theta = 0) = 0$

- On peut donc déduire :  $V_0 = V_\infty$ ,  $a = V_\infty R^2$ , et alors

$$f(z) = V_\infty \left( z + \frac{R^2}{z} \right) \tag{22}$$

- $\phi = V_\infty \left( x + \frac{R^2 x}{x^2 + y^2} \right)$ ,  $\psi = V_\infty \left( y - \frac{R^2 y}{x^2 + y^2} \right)$
- $\psi = \text{const}$  sont les lignes de courant

# Ecoulement autour d'un cylindre



# Ecoulement autour d'un cylindre

- Pression se trouve de l'équation  $v^2/2 + p/\rho + \mathcal{U} = \text{const}$

# Ecoulement autour d'un cylindre

- Pression se trouve de l'équation  $v^2/2 + p/\rho + \mathcal{U} = \text{const}$
- En absence de forces volumiques  $v^2/2 + p/\rho = \text{const}$

# Ecoulement autour d'un cylindre

- Pression se trouve de l'équation  $v^2/2 + p/\rho + \mathcal{U} = \text{const}$
- En absence de forces volumiques  $v^2/2 + p/\rho = \text{const}$
- A l'infini  $|V_\infty|^2/2 + p_\infty/\rho = \text{const}$

# Ecoulement autour d'un cylindre

- Pression se trouve de l'équation  $v^2/2 + p/\rho + \mathcal{U} = \text{const}$
- En absence de forces volumiques  $v^2/2 + p/\rho = \text{const}$
- A l'infini  $|V_\infty|^2/2 + p_\infty/\rho = \text{const}$
- Alors  $\rho v^2/2 + p = \rho|V_\infty|^2/2 + p_\infty$

# Ecoulement autour d'un cylindre

- Pression se trouve de l'équation  $v^2/2 + p/\rho + \mathcal{U} = \text{const}$
- En absence de forces volumiques  $v^2/2 + p/\rho = \text{const}$
- A l'infini  $|V_\infty|^2/2 + p_\infty/\rho = \text{const}$
- Alors  $\rho v^2/2 + p = \rho|V_\infty|^2/2 + p_\infty$
- Alors  $p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho(V_\infty^2 - v^2)$

# Ecoulement autour d'un cylindre

- Pression se trouve de l'équation  $v^2/2 + p/\rho + \mathcal{U} = \text{const}$
- En absence de forces volumiques  $v^2/2 + p/\rho = \text{const}$
- A l'infini  $|V_\infty|^2/2 + p_\infty/\rho = \text{const}$
- Alors  $\rho v^2/2 + p = \rho|V_\infty|^2/2 + p_\infty$
- Alors  $p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho(V_\infty^2 - v^2)$
- Normalisation classique :

$$\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} = 1 - \frac{v^2}{V_\infty^2} \quad (23)$$

# Ecoulement autour d'un cylindre

- Pression se trouve de l'équation  $v^2/2 + p/\rho + \mathcal{U} = \text{const}$
- En absence de forces volumiques  $v^2/2 + p/\rho = \text{const}$
- A l'infini  $|V_\infty|^2/2 + p_\infty/\rho = \text{const}$
- Alors  $\rho v^2/2 + p = \rho|V_\infty|^2/2 + p_\infty$
- Alors  $p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho(V_\infty^2 - v^2)$
- Normalisation classique :

$$\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} = 1 - \frac{v^2}{V_\infty^2} \quad (23)$$

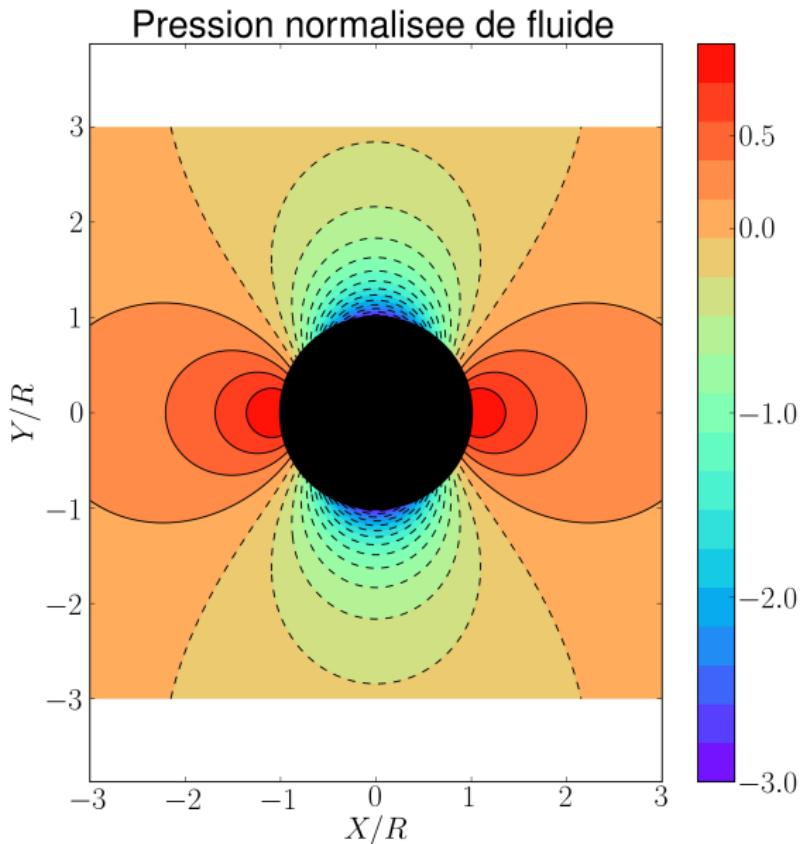
- Sur la surface du cylindre :

$$\bar{p} = 1 - (1 - \cos(2\theta))^2 - \sin^2(2\theta) = 1 - 4\sin^2(\theta) \quad (24)$$

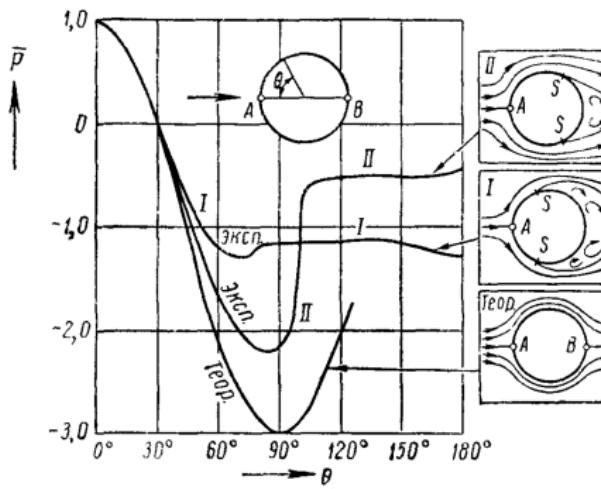
La force résultante horizontale  $F_x = -\underline{e}_x \cdot \int_0^\pi p \underline{e}_r R d\theta = 0$  (!)

Paradoxe de d'Alambert.

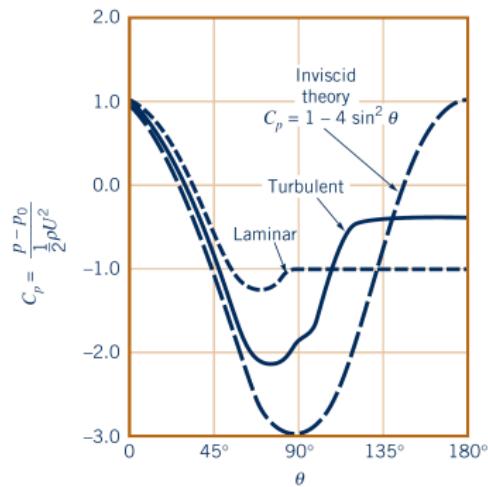
# Ecoulement autour d'un cylindre



# Explication du paradoxe

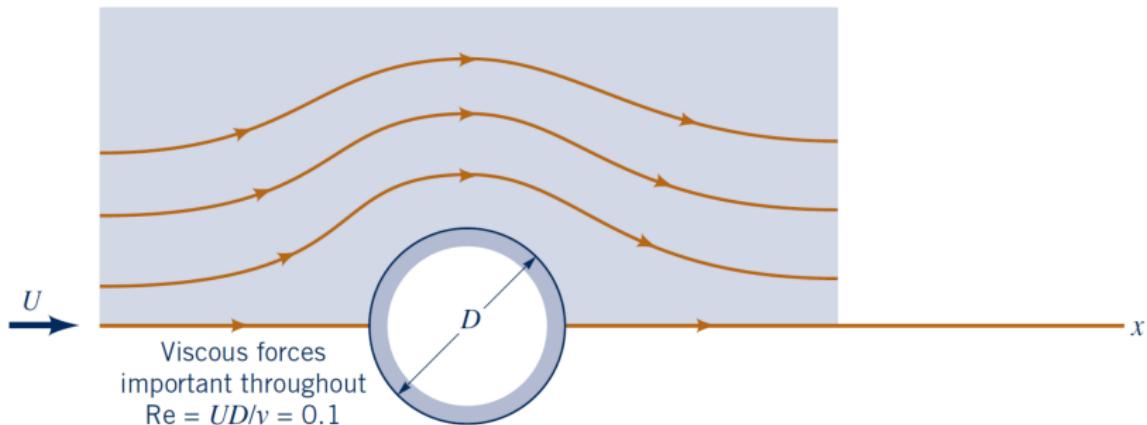


L.G. Loizjanski,  
Fluid Mechanics, Gos. Izd. Tech. Theor. Lit. Moscow, 1950



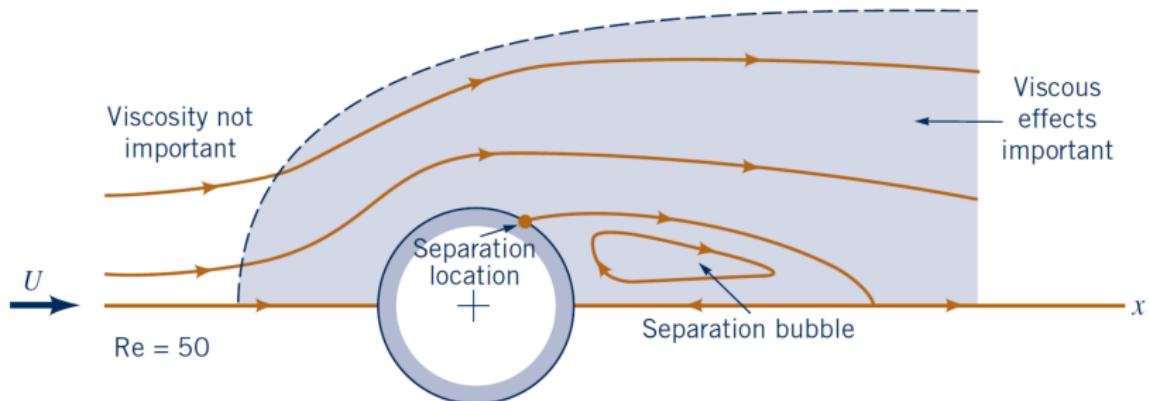
Munson, B. R., Young, D. F.,  
Okiishi, T. H., & Huebsch, W. W.  
**Fundamentals of Fluid Mechanics**, Wiley, 2006.

# Explication du paradoxe



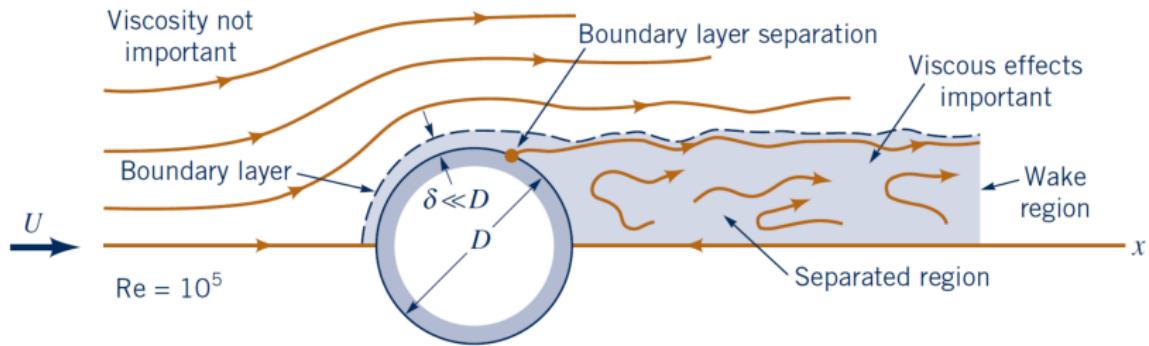
- [1] Munson, B. R., Young, D. F., Okiishi, T. H., & Huebsch, W. W. Fundamentals of Fluid Mechanics, Wiley, 2006.

# Explication du paradoxe



[1] Munson, B. R., Young, D. F., Okiishi, T. H., & Huebsch, W. W. Fundamentals of Fluid Mechanics, Wiley, 2006.

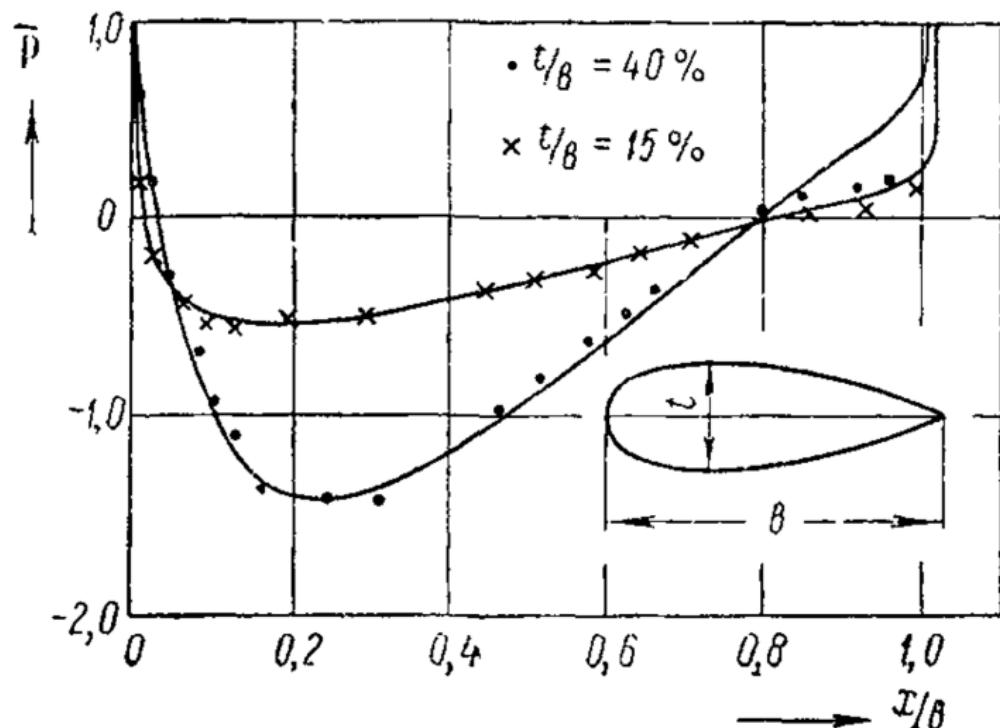
# Explication du paradoxe



[1] Munson, B. R., Young, D. F., Okiishi, T. H., & Huebsch, W. W. Fundamentals of Fluid Mechanics, Wiley, 2006.

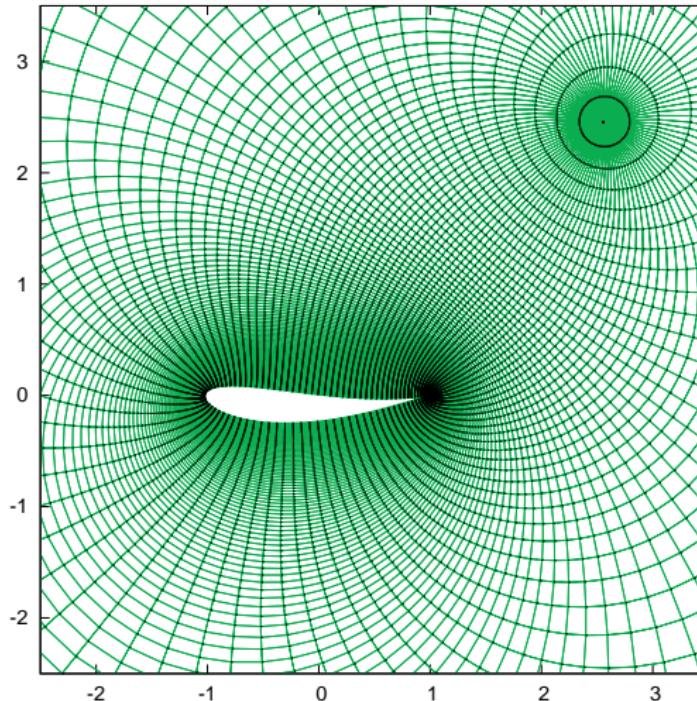
# Explication du paradoxe

Solution pour un profil plus rationalisé (pas de détachement des lignes de courant) VS expériences :



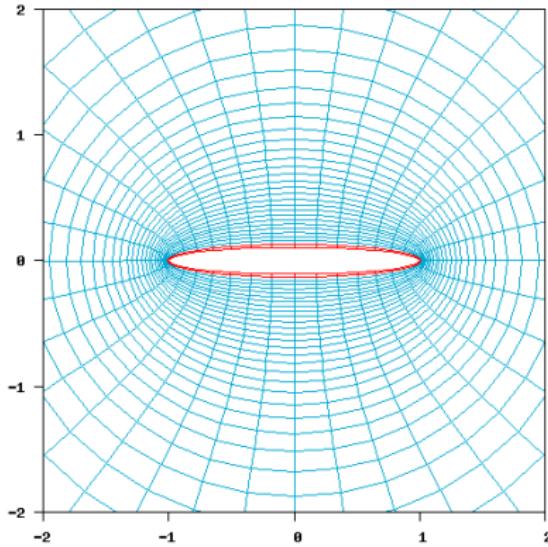
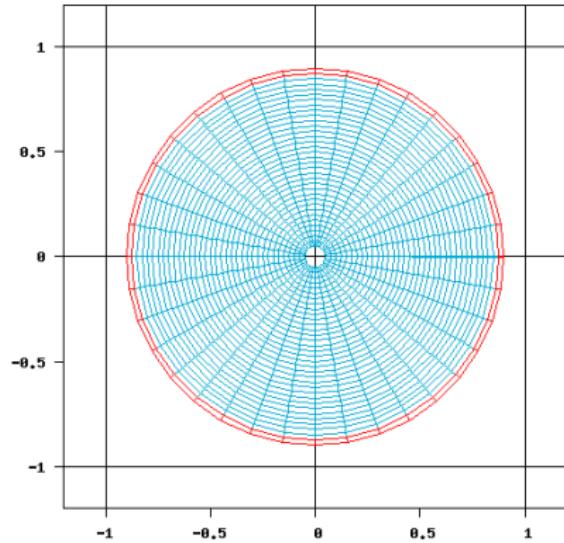
# Vers des profiles plus complexes

Transformation conforme de Joukovsky  $\varphi = z + \frac{1}{z}$



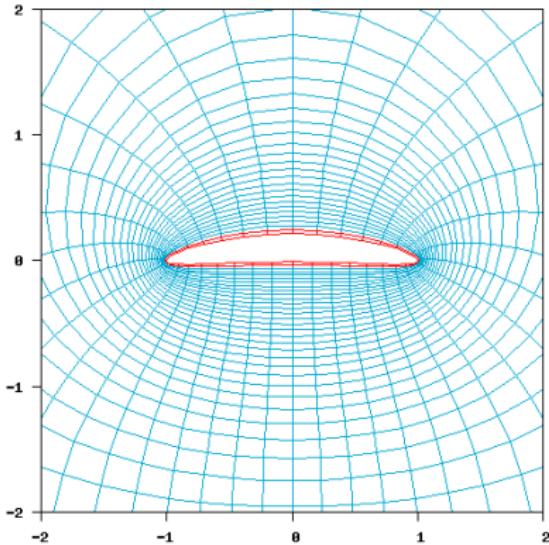
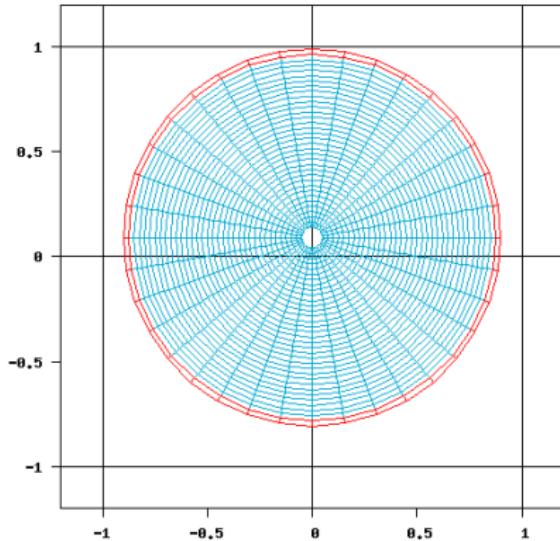
# Vers des profiles plus complexes

Transformation conforme de Joukovsky  $\varphi = z + \frac{1}{z}$



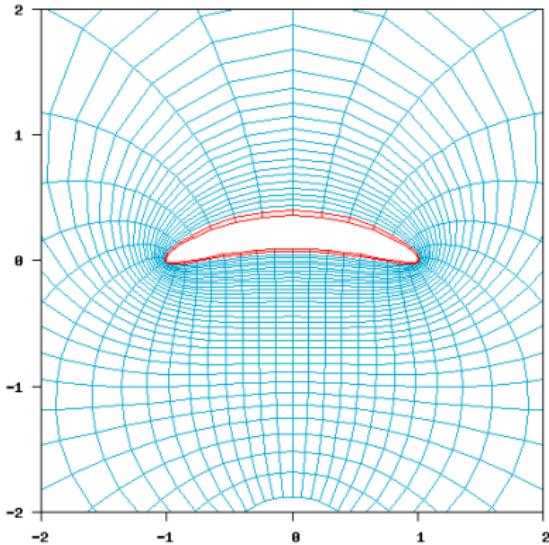
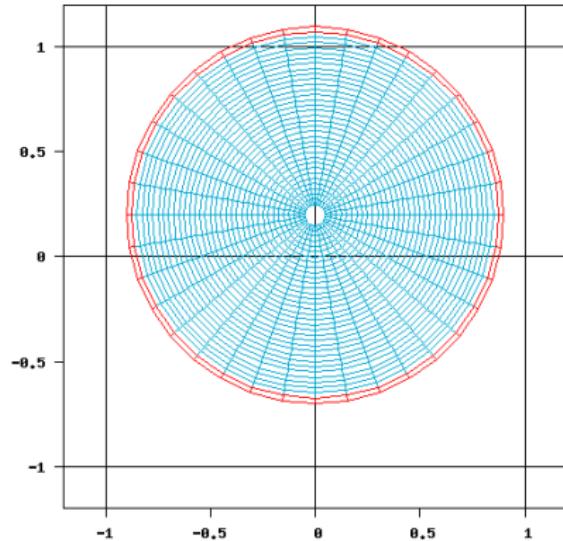
# Vers des profiles plus complexes

Transformation conforme de Joukovsky  $\varphi = z + \frac{1}{z}$



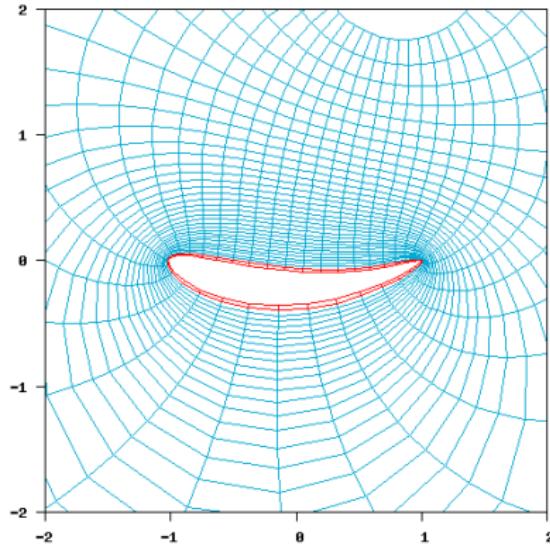
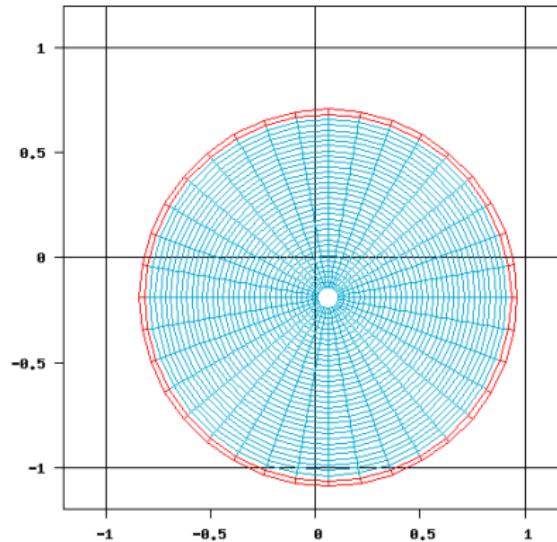
# Vers des profiles plus complexes

Transformation conforme de Joukovsky  $\varphi = z + \frac{1}{z}$



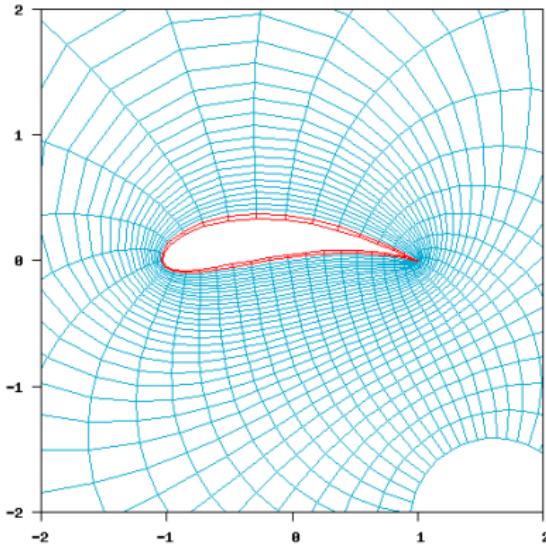
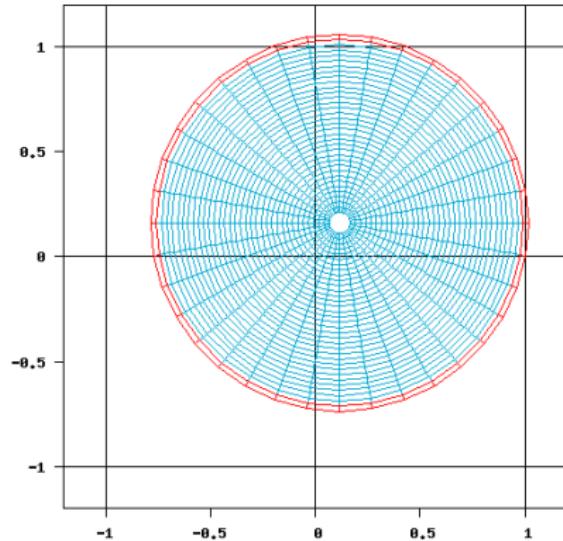
# Vers des profiles plus complexes

Transformation conforme de Joukovsky  $\varphi = z + \frac{1}{z}$



# Vers des profiles plus complexes

Transformation conforme de Joukovsky  $\varphi = z + \frac{1}{z}$



# Solveur interactif LBM

<https://physics.weber.edu/schroeder/fluids/>

