

## Topologie & Calcul différentiel

### Quizz 3

**1)** Soit  $d \geq 1$ . Il existe des constantes  $m$  et  $M$  telles que, pour  $d \geq 1$ , toute norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^d$ , on ait

$$m \|x\| \leq \|x\|_\infty \leq M \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Vrai ☐ Faux ☐

**2)** Soit  $f = (f_1, \dots, f_m)$  une application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ , différentiable en  $x$ .

Vrai ☐ Faux ☐ La  $i$ ème ligne de la jacobienne de  $f$  en  $x$  contient les coordonnées dans la base canonique du gradient de la fonction  $f_i$  en  $x$

**3)** Soit  $\alpha \in ]0, +\infty[$ . Préciser, selon les valeurs de  $\alpha$ , les points de différentiabilité de la fonction

$$f_\alpha : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f_\alpha(x, y) = |x|^\alpha + |y|^\alpha.$$

**4)** Applicabilité du Théorèmes des Fonctions Implicites (TFI)

Vrai ☐ Faux ☐ On peut exprimer localement  $y$  fonction de  $x$  au voisinage de  $(0, 0)$ , avec  $x$  et  $y$  liés par la relation  $yx^2 + y^2x - 1 = 0$ .

Vrai ☐ Faux ☐ On peut exprimer localement  $y$  fonction de  $x$  au voisinage de  $(1, 0)$ , avec  $x$  et  $y$  liés par la relation  $yx^2 + y^2x - 1 = 0$ .

Vrai ☐ Faux ☐ On peut exprimer localement  $(y_1, y_2)$  fonction de  $x$  au voisinage de  $(1, 2, 0)$ , avec  $x$  et  $(y_1, y_2)$  liés par la relation  $y_1x^2 + y_2^2x - 1 = 0$ .

## Exercice 1

(Retour sur le théorème de point fixe de Banach (ou Picard))

a) On considère la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{1+x^2}.$$

Montrer que  $f$  est faiblement contractante au sens où  $|f(y) - f(x)| < |y - x|$  pour tous  $x \neq y$ .  
Montrer que  $f$  n'admet pas de point fixe.

b) On considère maintenant une application  $T$  définie d'un compact  $K$  dans lui même, telle que

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y).$$

Montrer que  $T$  admet un point fixe unique.

## Exercice 2 (Coordonnées sphériques)

a) On considère la fonction

$$f : (r, \varphi, \theta) \in U = ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

a) Calculer la matrice jacobienne de  $f$ , et montrer que  $f$  est différentiable sur  $U$ .

b) L'application  $f$  est-elle bijective? Peut-on la rendre bijective en modifiant les espaces d'arrivée et de départ?

c) En quels points de  $U$  la différentielle de  $f$  est-elle inversible?