Des fluides viscoélastiques généraux aux fluides newtoniens
Equations de Navier–Stokes

Plan

1. **Hérédité : viscoélasticité unidimensionnelle infinitésimale**
   - Modèle de Maxwell
   - Modèle de Burgers
2. **Fluides viscoélastiques généraux**
3. **Fluides différentiels**
   - Fluides différentiels d'ordre n
   - Modèle de Maxwell en grandes déformations
4. **Fluides newtoniens**
   - Linéarisation des fluides de Reiner–Rivlin
   - Equations de Navier–Stokes
5. **Bilan : Navier vs Navier–Stokes**

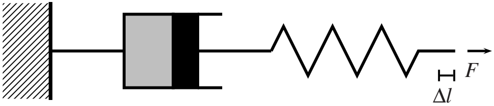
Plan

Plan

1. **Hérédité : viscoélasticité unidimensionnelle infinitésimale**
   - Modèle de Maxwell
   - Modèle de Burgers
2. **Fluides viscoélastiques généraux**
3. **Fluides différentiels**
   - Fluides différentiels d'ordre n
   - Modèle de Maxwell en grandes déformations
4. **Fluides newtoniens**
   - Linéarisation des fluides de Reiner–Rivlin
   - Equations de Navier–Stokes
5. **Bilan : Navier vs Navier–Stokes**

Modèle rhéologique de Maxwell

Modèle unidimensionnel : ressort (module E MPa, raideur k), amortisseur (viscosité η MPa.s)



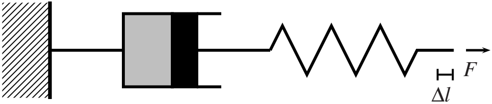
Equation différentielle associée

[1] En pratique, on privilégie la transformée de Laplace-Carson pour résoudre les problèmes de viscoélasticité.

[2] plus précisément 0^+ en cas d'application d'un échelon temporel (application instantanée de la charge de fluage ou de relaxation).

Modèle rhéologique de Maxwell

Modèle unidimensionnel : ressort (module E MPa, raideur k), amortisseur (viscosité η MPa.s)



Equation différentielle associée

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \qquad \eta\dot{\varepsilon} = \tau_\eta \dot{\sigma} + \sigma, \qquad \tau_\eta = \frac{\eta}{E}$$

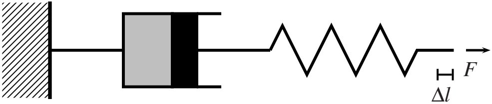
avec le temps caractéristique, dit temps de relaxation τ_η.

[1] En pratique, on privilégie la transformée de Laplace-Carson pour résoudre les problèmes de viscoélasticité.

[2] plus précisément 0^+ en cas d'application d'un échelon temporel (application instantanée de la charge de fluage ou de relaxation).

Modèle rhéologique de Maxwell

Modèle unidimensionnel : ressort (module E MPa, raideur k), amortisseur (viscosité η MPa.s)



Equation différentielle associée

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \qquad \eta\dot{\varepsilon} = \tau_\eta\dot{\sigma} + \sigma, \qquad \tau_\eta = \frac{\eta}{E}$$

avec le temps caractéristique, dit temps de relaxation τ_η.
La résolution peut se faire grâce à la transformée de Laplace[1]

$$\tilde{\varepsilon}(s) = \int_0^{+\infty} \varepsilon(t) \exp(-st)\, dt \tag{1}$$

En principe, l'histoire de déformation remonte à $-\infty$ mais, bien souvent, on se contente de conditions initiales et nous enregistrerons l'histoire de déformation à partir de cet instant choisi à 0[2]

[1] En pratique, on privilégie la transformée de Laplace-Carson pour résoudre les problèmes de viscoélasticité.

[2] plus précisément 0^+ en cas d'application d'un échelon temporel (application instantanée de la charge de fluage ou de relaxation).

Modèle rhéologique de Maxwell

En particulier, la propriété bien utile

$$\tilde{\dot{\varepsilon}}(s) = s\tilde{\varepsilon}(s) - \varepsilon(0^+)$$

Ainsi

$$\eta\dot{\varepsilon} = \tau_\eta\dot{\sigma} + \sigma \quad \Longrightarrow \quad \eta(s\tilde{\varepsilon}(s) - \varepsilon(0^+)) = \tau_\eta(s\tilde{\sigma}(s) - \sigma(0^+)) + \tilde{\sigma}(s)$$

Modèle rhéologique de Maxwell

En particulier, la propriété bien utile

$$\tilde{\dot{\varepsilon}}(s) = s\tilde{\varepsilon}(s) - \varepsilon(0^+)$$

Ainsi

$$\eta\dot{\varepsilon} = \tau_\eta\dot{\sigma} + \sigma \quad \Longrightarrow \quad \eta(s\tilde{\varepsilon}(s) - \varepsilon(0^+)) = \tau_\eta(s\tilde{\sigma}(s) - \sigma(0^+)) + \tilde{\sigma}(s)$$

On trouve

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(s) &= \frac{\eta s}{1+\tau_\eta s}\tilde{\varepsilon}(s) + \frac{\tau_\eta\sigma(0^+) - \eta\varepsilon(0^+)}{1+\tau_\eta s} \\ &= E\tilde{\varepsilon}(s) - \frac{E}{\tau_\eta}\frac{1}{1/\tau_\eta + s}\tilde{\varepsilon}(s) + \frac{\tau_\eta\sigma(0^+) - \eta\varepsilon(0^+)}{1+\tau_\eta s} \end{aligned}$$

On applique la transformée de Laplace inverse pour trouver

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) - \frac{E}{\tau_\eta}\int_0^t \exp(-\frac{\tau}{\tau_\eta})\varepsilon(t-\tau)d\tau + (\sigma(0^+) - E\varepsilon(0^+))\exp(-\frac{t}{\tau_\eta})H(t)$$

On voit que l'état de contrainte actuel dépend de la déformation instantanée et de l'histoire de déformation $\varepsilon(t-\tau)$.

Modèle rhéologique de Maxwell

Détails pour la résolution précédente

- Fonction échelon/Heaviside

$$g(t) = H(t)\exp(-\frac{t}{\tau_\eta}) \qquad \tilde{g}(s) = \frac{1}{s + 1/\tau_\eta}$$

- Produit de convolution

$$g * \varepsilon(t) = \int_0^t g(\tau)\varepsilon(t-\tau)\,d\tau$$

- Transformée de Laplace du produit de convolution

$$g \mathbin{\tilde{*}} \varepsilon(s) = \tilde{g}(s)\tilde{\varepsilon}(s)$$

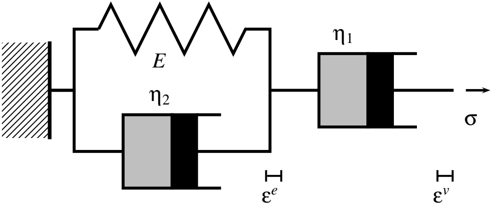
- Application à $g(t) = H(t)\exp(-\frac{t}{\tau_\eta})$

$$g \mathbin{\tilde{*}} \varepsilon(s) = \frac{1}{s + 1/\tau_\eta}\tilde{\varepsilon}(s)$$

Plan

Modèle rhéologique de Burgers

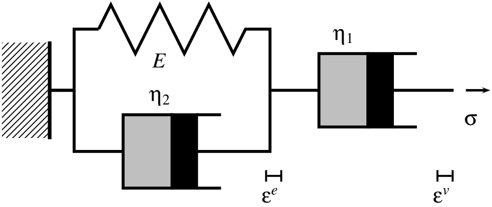
Modèle unidimensionnel : un ressort (module E MPa, raideur k), deux amortisseurs (viscosité η_1, η_2 MPa.s)



$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^v$$

Modèle rhéologique de Burgers

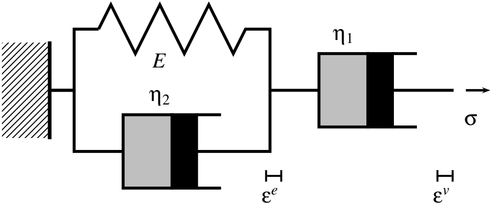
Modèle unidimensionnel : un ressort (module E MPa, raideur k), deux amortisseurs (viscosité η_1, η_2 MPa.s)



$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^v \qquad \sigma = E\varepsilon^e + \eta_2\dot{\varepsilon}^e = \eta_1\dot{\varepsilon}^v$$

Modèle rhéologique de Burgers

Modèle unidimensionnel : un ressort (module E MPa, raideur k), deux amortisseurs (viscosité η_1, η_2 MPa.s)



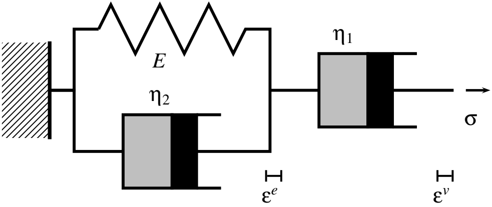
$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^v \qquad \sigma = E\varepsilon^e + \eta_2\dot{\varepsilon}^e = \eta_1\dot{\varepsilon}^v$$

Eliminer ε^e et ε^v pour obtenir la loi de comportement liant contrainte et déformation :

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}^e + \eta_2\ddot{\varepsilon}^e$$

Modèle rhéologique de Burgers

Modèle unidimensionnel : un ressort (module E MPa, raideur k), deux amortisseurs (viscosité η_1, η_2 MPa.s)



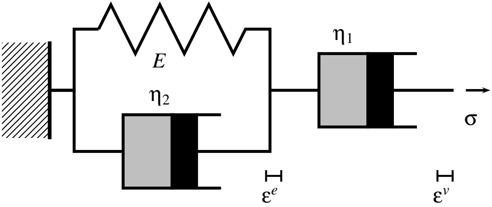
$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^v \qquad \sigma = E\varepsilon^e + \eta_2\dot{\varepsilon}^e = \eta_1\dot{\varepsilon}^v$$

Eliminer ε^e et ε^v pour obtenir la loi de comportement liant contrainte et déformation :

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}^e + \eta_2\ddot{\varepsilon}^e = E(\dot{\varepsilon} - \frac{\sigma}{\eta_1}) + \eta_2(\ddot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{\eta_1})$$

Modèle rhéologique de Burgers

Modèle unidimensionnel : un ressort (module E MPa, raideur k), deux amortisseurs (viscosité η_1, η_2 MPa.s)



$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^v \qquad \sigma = E\varepsilon^e + \eta_2\dot{\varepsilon}^e = \eta_1\dot{\varepsilon}^v$$

Eliminer ε^e et ε^v pour obtenir la loi de comportement liant contrainte et déformation :

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}^e + \eta_2\ddot{\varepsilon}^e = E(\dot{\varepsilon} - \frac{\sigma}{\eta_1}) + \eta_2(\ddot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{\eta_1})$$

$$(1 + \frac{\eta_2}{\eta_1})\dot{\sigma} + \frac{E}{\eta_1}\sigma = \eta_2\ddot{\varepsilon} + E\dot{\varepsilon}$$

On voit que l'accélération de déformation intervient dans la loi de comportement, en plus de la vitesse de déformation.

Modèle rhéologique de Burgers

Résolution par transformée de Laplace :

$$(1 + \frac{\eta_2}{\eta_1})\dot{\sigma} + \frac{E}{\eta_1}\sigma = \eta_2\ddot{\varepsilon} + E\dot{\varepsilon}$$

Modèle rhéologique de Burgers

Résolution par transformée de Laplace :

$$(1+\frac{\eta_2}{\eta_1})\dot{\sigma}+\frac{E}{\eta_1}\sigma=\eta_2\ddot{\varepsilon}+E\dot{\varepsilon}$$

$(1+\frac{\eta_2}{\eta_1})(s\tilde{\sigma}(s)-\sigma(0^+))+\frac{E}{\eta_1}\tilde{\sigma}(s)$

Modèle rhéologique de Burgers

Résolution par transformée de Laplace :

$$(1 + \frac{\eta_2}{\eta_1})\dot{\sigma} + \frac{E}{\eta_1}\sigma = \eta_2\ddot{\varepsilon} + E\dot{\varepsilon}$$

$$(1+\frac{\eta_2}{\eta_1})(s\tilde{\sigma}(s)-\sigma(0^+))+\frac{E}{\eta_1}\tilde{\sigma}(s) = \eta_2(s^2\tilde{\varepsilon}(s)-s\varepsilon(0^+)-\dot{\varepsilon}(0^+))$$

Modèle rhéologique de Burgers

Résolution par transformée de Laplace :

$$(1 + \frac{\eta_2}{\eta_1})\dot{\sigma} + \frac{E}{\eta_1}\sigma = \eta_2\ddot{\varepsilon} + E\dot{\varepsilon}$$

$$(1+\frac{\eta_2}{\eta_1})(s\tilde{\sigma}(s)-\sigma(0^+))+\frac{E}{\eta_1}\tilde{\sigma}(s) = \eta_2(s^2\tilde{\varepsilon}(s)-s\varepsilon(0^+)-\dot{\varepsilon}(0^+))+E(s\tilde{\varepsilon}(s)-\varepsilon(0^+))$$

Modèle rhéologique de Burgers

Résolution par transformée de Laplace :

$$(1+\frac{\eta_2}{\eta_1})\dot{\sigma}+\frac{E}{\eta_1}\sigma=\eta_2\ddot{\varepsilon}+E\dot{\varepsilon}$$

$$(1+\frac{\eta_2}{\eta_1})(s\tilde{\sigma}(s)-\sigma(0^+))+\frac{E}{\eta_1}\tilde{\sigma}(s)=\eta_2(s^2\tilde{\varepsilon}(s)-s\varepsilon(0^+)-\dot{\varepsilon}(0^+))+E(s\tilde{\varepsilon}(s)-\varepsilon(0^+))$$

On pose $\eta=\eta_1+\eta_2, \quad \alpha=E/(\eta_1+\eta_2)$ et on trouve

$$\tilde{\sigma}(s)=\frac{1}{\alpha+s}\left(\sigma(0^+)-\frac{\eta_1\eta_2}{\eta}\dot{\varepsilon}(0^+)-E\frac{\eta_1}{\eta}\varepsilon(0^+)-s\frac{\eta_1\eta_2}{\eta}\varepsilon(0^+)\right)+\frac{\eta_1}{\eta}\frac{s(\eta_2 s+E)}{\alpha+s}\tilde{\varepsilon}(s)$$

Modèle rhéologique de Burgers

Résolution par transformée de Laplace :

$$(1+\frac{\eta_2}{\eta_1})\dot{\sigma}+\frac{E}{\eta_1}\sigma=\eta_2\ddot{\varepsilon}+E\dot{\varepsilon}$$

$$(1+\frac{\eta_2}{\eta_1})(s\tilde{\sigma}(s)-\sigma(0^+))+\frac{E}{\eta_1}\tilde{\sigma}(s)=\eta_2(s^2\tilde{\varepsilon}(s)-s\varepsilon(0^+)-\dot{\varepsilon}(0^+))+E(s\tilde{\varepsilon}(s)-\varepsilon(0^+))$$

On pose $\eta=\eta_1+\eta_2, \quad \alpha=E/(\eta_1+\eta_2)$ et on trouve

$$\tilde{\sigma}(s)=\frac{1}{\alpha+s}\left(\sigma(0^+)-\frac{\eta_1\eta_2}{\eta}\dot{\varepsilon}(0^+)-E\frac{\eta_1}{\eta}\varepsilon(0^+)-s\frac{\eta_1\eta_2}{\eta}\varepsilon(0^+)\right)+\frac{\eta_1}{\eta}\frac{s(\eta_2 s+E)}{\alpha+s}\tilde{\varepsilon}(s)$$

On passe à la transformée inverse :

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \left(\sigma(0^+)-\frac{\eta_1\eta_2}{\eta}\dot{\varepsilon}(0^+)-E\frac{\eta_1}{\eta}\varepsilon(0^+)\right)\exp(-\alpha t)\\ &- \frac{\eta_1\eta_2}{\eta}\varepsilon(0^+)(\delta(t)-\alpha\exp(-\alpha t))+\frac{\eta_1}{\eta}(g*\varepsilon)(t)\end{aligned}$$

avec $g(t)$ transformée inverse de $\tilde{g}(t)=s(\eta_2 s+E)/(\alpha+s)$

Transformées de Laplace de fonctions usuelles

$\varphi(t)$	$\mathcal{L}\varphi(p)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t$	$\varphi^*(p)=p\,\mathcal{L}\varphi(p)$
δ_u	e^{-pu}	$p e^{-pu}$
$C\,Y_u(t)$	$\frac{e^{-pu}}{p}C$	$e^{-pu}\,C$
$Y(t)e^{-at}$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{p}{p+a}$
$Y(t)t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\frac{n!}{p^n}$
$Y(t)t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$	$\frac{p\,n!}{(p+a)^{n+1}}$
$Y(t)t^q$	$\frac{\Gamma(q+1)}{p^{q+1}}$	$\frac{\Gamma(q+1)}{p^q}$
$Y(t)\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{3/2}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{1/2}}$
$Y(t)(1-e^{-at})$	$\frac{a}{p(p+a)}$	$\frac{a}{p+a}$

Transformées de Laplace de fonctions usuelles

$Y(t)[\frac{b}{a} - (1-\frac{b}{a})e^{-at}]$	$\frac{p+b}{p(p+a)}$	$\frac{p+b}{p+a}$
$Y(t)\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\frac{p\omega}{p^2+\omega^2}$
$Y(t)e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$	$\frac{p\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$Y(t)\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\frac{p^2}{p^2+\omega^2}$
$Y(t)e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{(p+a)}{(p+a)^2+\omega^2}$	$\frac{p(p+a)}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\varphi(t)$	$(\mathcal{L}\varphi)(p+a)$	$p[(\mathcal{L}\varphi)(p+a)]$
$\frac{1}{t}\varphi(t)$	$\int_p^\infty (\mathcal{L}\varphi)(u)\,\mathrm{d}u$	$p\int_p^\infty \mathcal{L}\varphi(u)\,\mathrm{d}u$
$t\varphi(t)$	$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathcal{L}\varphi$	$-p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathcal{L}\varphi$

$(Y_u(t) = H(t-u)$, δ_u Dirac en $u)$ [Salençon, 2019]

Plan

Une définition (mécanique) des fluides viscoélastiques isotropes

Définition. *Un corps matériel est un* **fluide** *isotrope ssi*

Une définition (mécanique) des fluides viscoélastiques isotropes

Définition. *Un corps matériel est un* **fluide** *isotrope ssi*

1. *Il ne possède pas de tenseur de structure matérielle.*

Une définition (mécanique) des fluides viscoélastiques isotropes

Définition. *Un corps matériel est un* **fluide** *isotrope ssi*

1. *Il ne possède pas de tenseur de structure matérielle.*
2. *Son groupe de symétrie est le groupe unimodulaire*
$$\mathfrak{G}_{\kappa_0} = \mathcal{U}(E)$$

Une définition (mécanique) des fluides viscoélastiques isotropes

Définition. *Un corps matériel est un* **fluide** *isotrope ssi*

1. *Il ne possède pas de tenseur de structure matérielle.*
2. *Son groupe de symétrie est le groupe unimodulaire*
$$\mathfrak{G}_{\kappa_0} = \mathcal{U}(E)$$
3. *Sa loi de comportement est exclusivement eulérienne et de la forme*
$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathcal{F}(\, \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}_t(\tau)_{\tau \leq t}; \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{g}}, \quad \rho(t)\,)$$
C'est une fonctionnelle isotrope de ses arguments que sont l'histoire des déformations et la masse volumique actuelle

Contrairement aux solides, plus de trace de la métrique $\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}$, pas de configuration dénuée de contraintes...

Loi des fluides viscoélastiques

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathcal{F}(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}_t(\tau), \rho(t); \tau \leq t)$$

$$\begin{tikzcd}
\kappa_0 \arrow[rr, "F(t)"] \arrow[dr, "F(\tau)"'] & & \kappa_t \arrow[dl, "F_t(\tau)"] \\
& \kappa_\tau &
\end{tikzcd}$$

Histoire de la déformation

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}_t(\tau) = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_t^T(\tau)\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_t(\tau) \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_t(\tau) = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\tau)\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}(t)$$

Loi des fluides viscoélastiques

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathcal{F}(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}_t(\tau), \rho(t); \tau \leq t)$$

$$\begin{tikzcd}
\kappa_0 \arrow[rr, "F(t)"] \arrow[dr, "F(\tau)"'] & & \kappa_t \arrow[dl, "F_t(\tau)"] \\
& \kappa_\tau &
\end{tikzcd}$$

Histoire de la déformation

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}_t(\tau) = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_t^T(\tau)\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_t(\tau) \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_t(\tau) = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\tau)\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}(t)$$

Noter que

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_t(t) = \underset{\sim}{\mathbf{1}}, \qquad \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}_t(t) = \underset{\sim}{\mathbf{1}}$$

Plan

Plan

Tenseurs de Rivlin-Ericksen

Une classe plus réduite de fluides viscoélastiques est obtenue en supposant que la mémoire du fluide est ultra–courte et limitée aux instants immédiatement inférieurs à l'instant présent. La fonctionnelle héréditaire ne dépend alors de l'histoire des déformations qu'au travers de leurs dérivées temporelles d'ordre n à l'instant $\tau = t$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_n(t) = \frac{\partial^n \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}_t(\tau)}{\partial \tau^n}_{|\tau=t}$$

Par convention, $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_0 = \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}$.

Tenseurs de Rivlin-Ericksen

Une classe plus réduite de fluides viscoélastiques est obtenue en supposant que la mémoire du fluide est ultra–courte et limitée aux instants immédiatement inférieurs à l'instant présent. La fonctionnelle héréditaire ne dépend alors de l'histoire des déformations qu'au travers de leurs dérivées temporelles d'ordre n à l'instant $\tau = t$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_n(t) = \frac{\partial^n \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}_t(\tau)}{\partial \tau^n}_{|\tau=t}$$

Par convention, $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_0 = \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}$.

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}_t(\tau) = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}(\tau) \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}(t) \quad \Longrightarrow \quad \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}_t(\tau)_{|\tau=t} = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}(t)\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}(t) = \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}$$

Tenseurs de Rivlin-Ericksen

Une classe plus réduite de fluides viscoélastiques est obtenue en supposant que la mémoire du fluide est ultra–courte et limitée aux instants immédiatement inférieurs à l'instant présent. La fonctionnelle héréditaire ne dépend alors de l'histoire des déformations qu'au travers de leurs dérivées temporelles d'ordre n à l'instant $\tau = t$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_n(t) = \frac{\partial^n \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}_t(\tau)}{\partial \tau^n}_{|\tau=t}$$

Par convention, $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_0 = \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}$.

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}_t(\tau) = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}(\tau) \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}(t) \quad \Longrightarrow \quad \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}_t(\tau)_{|\tau=t} = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}(t)\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}(t) = \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}$$

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}}_t(\tau) = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}{}_t^T(\tau) \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_t(\tau) + \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}{}_t^T(\tau) \cdot \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}_t(\tau) \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_1 = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}}_t(t) = \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}^T + \underset{\sim}{\boldsymbol{L}} = 2\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$$

Tenseurs de Rivlin-Ericksen

Une classe plus réduite de fluides viscoélastiques est obtenue en supposant que la mémoire du fluide est ultra–courte et limitée aux instants immédiatement inférieurs à l'instant présent. La fonctionnelle héréditaire ne dépend alors de l'histoire des déformations qu'au travers de leurs dérivées temporelles d'ordre n à l'instant $\tau = t$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_n(t) = \frac{\partial^n \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}_t(\tau)}{\partial \tau^n}_{|\tau=t}$$

Par convention, $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_0 = \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}$.

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}_t(\tau) = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}(\tau) \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}(t) \quad \Longrightarrow \quad \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}_t(\tau)_{|\tau=t} = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}(t)\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}(t) = \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}$$

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}}_t(\tau) = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}{}_t^T(\tau) \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_t(\tau) + \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}{}_t^T(\tau) \cdot \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}_t(\tau) \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_1 = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}}_t(t) = \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}^T + \underset{\sim}{\boldsymbol{L}} = 2\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$$

On dispose d'une formule de récurrence pour calculer les dérivées temporelles d'ordre supérieur :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_{n+1} = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}_n + \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_n \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{L}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}^T \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_n$$

Fluides de Rivlin-Ericksen

La loi de comportement des fluides viscoélastiques de complexité n, dits de de Rivlin–Ericksen est de la forme générale

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathcal{F}(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_1(t), \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_2(t), \cdots, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_n(t); \rho(t))$$

où $\mathcal{F}$ est une fonction (non plus une fonctionnelle) isotrope par rapport à ses arguments, en vertu de l'exigence de tensorialité de la relation.

Thermo-fluides différentiels d'ordre 1

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = f(\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}, T, \underline{\boldsymbol{g}}\,; \rho), \quad \underline{\boldsymbol{q}} = g(\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}, T, \underline{\boldsymbol{g}}\,; \rho)$$

où on l'on a rajouté la dépendance par rapport à la température et au gradient de température $\underline{\boldsymbol{g}}$, ainsi que la loi de conduction thermique (flux de chaleur $\underline{\boldsymbol{q}}$). Les fonctions f et g sont *isotropes* par rapport à leurs arguments.

Thermo-fluides différentiels d'ordre 1

Les théorèmes de représentation des fonctions tensorielles d'ordres 1 et 2 opérant sur des tenseurs d'ordres 1 et 2 sont appliqués pour écrire la forme générale suivante des lois de comportement :

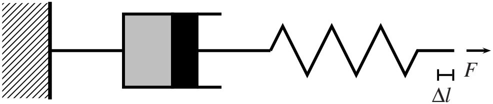
$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} &= \alpha_0 \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \alpha_2 \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} + \alpha_3 \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^2 + \beta_1 \underline{\boldsymbol{g}} \otimes \underline{\boldsymbol{g}} + \beta_2 (\underset{\sim}{\boldsymbol{D}} \cdot \underline{\boldsymbol{g}} \otimes \underline{\boldsymbol{g}} + \underline{\boldsymbol{g}} \otimes \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} \cdot \underline{\boldsymbol{g}}) \\
&+ \beta_3 \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} \cdot \underline{\boldsymbol{g}} \otimes \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} \cdot \underline{\boldsymbol{g}} \\
\underline{\boldsymbol{q}} &= k_1 \underline{\boldsymbol{g}} + k_2 \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} \cdot \underline{\boldsymbol{g}} + k_3 \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^2 \cdot \underline{\boldsymbol{g}}
\end{aligned}
$$

où les coefficients sont des fonctions des invariants des tenseurs présents, à savoir : $I_{1,2,3}(\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}), \underline{\boldsymbol{g}} \cdot \underline{\boldsymbol{g}}, \underline{\boldsymbol{g}} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} \cdot \underline{\boldsymbol{g}}, \underline{\boldsymbol{g}} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^2 \cdot \underline{\boldsymbol{g}}$.
La dépendance de ces fonctions vis–à–vis de la température et de ρ est tacite.
Les couplages entre mécanique et thermique sont clairement visibles.

Plan

Modèle rhéologique de Maxwell

Un exemple : la **viscoélasticité** (modèle de Maxwell)



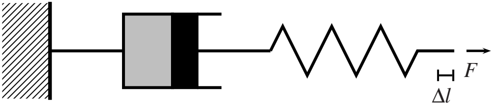
$$\eta\dot{\varepsilon} = \tau_\eta \dot{\sigma} + \sigma$$

On généralise en grandes déformations :

$$\sigma \quad \longrightarrow$$

Modèle rhéologique de Maxwell

Un exemple : la **viscoélasticité** (modèle de Maxwell)



$$\eta\dot{\varepsilon} = \tau_\eta \dot{\sigma} + \sigma$$

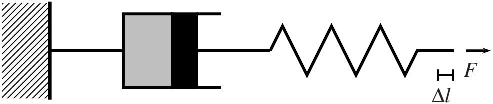
On généralise en grandes déformations :

$$\sigma \longrightarrow \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$$

$$\dot{\varepsilon} \longrightarrow$$

Modèle rhéologique de Maxwell

Un exemple : la **viscoélasticité** (modèle de Maxwell)



$$\eta \dot{\varepsilon} = \tau_\eta \dot{\sigma} + \sigma$$

On généralise en grandes déformations :

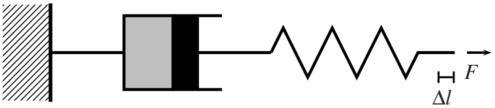
$$\sigma \longrightarrow \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$$

$$\dot{\varepsilon} \longrightarrow \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$$

$$\dot{\sigma} \longrightarrow$$

Modèle rhéologique de Maxwell

Un exemple : la **viscoélasticité** (modèle de Maxwell)



$$\eta\dot{\varepsilon} = \tau_\eta \dot{\sigma} + \sigma$$

On généralise en grandes déformations :

$$\sigma \longrightarrow \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$$

$$\dot{\varepsilon} \longrightarrow \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$$

$$\dot{\sigma} \longrightarrow \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{conv} = \frac{D\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{Dt}$$

Fluides à taux

La dérivée convective (en suivant le mouvement) des contraintes dépend de la variance des contraintes considérée, ici σ^{ij}.
Ell est obtenue par dérivation temporelle des contraintes transportées dans la configuration de référence :

Fluides à taux

La dérivée convective (en suivant le mouvement) des contraintes dépend de la variance des contraintes considérée, ici σ^{ij}.
Ell est obtenue par dérivation temporelle des contraintes transportées dans la configuration de référence :

$$\frac{D\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{Dt} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}\frac{d}{dt}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}\right)\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{T} = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}^{T}$$

dite dérivée convective d'Oldroyd ou de Lie.

Fluides à taux

La dérivée convective (en suivant le mouvement) des contraintes dépend de la variance des contraintes considérée, ici σ^{ij}.
Ell est obtenue par dérivation temporelle des contraintes transportées dans la configuration de référence :

$$\frac{D\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{Dt} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} \frac{d}{dt} \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T} \right) \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{T} = \underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{L}} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}^{T}$$

dite dérivée convective d'Oldroyd ou de Lie.
Les lois de comportement de type taux mettent en jeu simultanément les taux de déformation et de contraintes sous la forme :

$$\mathcal{F}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(t), \frac{D\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{Dt}(t), \cdots, \frac{D^p\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{Dt^p}(t), \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_1(t), \cdots, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_n(t); \rho(t)) = 0$$

Un modèle de Maxwell en transformations finies

En guise d'exemple, on considère la loi de comportement particulière avec $p = n = 1$ de la forme

$$\tau_\eta \dot{\sigma} + \sigma = \eta \dot{\varepsilon} \quad \longrightarrow \quad \tau_\eta \frac{D\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{Dt} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = 2\eta \underset{\sim}{\boldsymbol{g}}^{-1} \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} \underset{\sim}{\boldsymbol{g}}^{-1}$$

où τ_η (s, temps de relaxation) et η (Pa.s, viscosité) sont des propriétés du matériau.
Cette loi représente une généralisation tridimensionnelle en grandes déformations du modèle de Maxwell.

Un modèle de Maxwell en transformations finies

En guise d'exemple, on considère la loi de comportement particulière avec $p = n = 1$ de la forme

$$\tau_\eta \dot{\sigma} + \sigma = \eta \dot{\varepsilon} \quad \longrightarrow \quad \tau_\eta \frac{D\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{Dt} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = 2\eta \underset{\sim}{\boldsymbol{g}}^{-1} \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} \underset{\sim}{\boldsymbol{g}}^{-1}$$

où τ_η (s, temps de relaxation) et η (Pa.s, viscosité) sont des propriétés du matériau.
Cette loi représente une généralisation tridimensionnelle en grandes déformations du modèle de Maxwell.
La solution de l'équation différentielle est

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \frac{\eta}{\tau_\eta^2} \int_{-\infty}^{t} (\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}_t^{-1}(\tau) - \underset{\sim}{\boldsymbol{g}}^{-1}) \exp(-\frac{t-\tau}{\tau_\eta}) d\tau$$

cf. [Mandel, 1974] p. 190 et [Agassant et al., 2014].
C'est la forme héréditaire explicite de la loi de comportement.
Ce calcul illustre une équivalence possible entre les formes intégrale et différentielle de la loi de comportement.

Un modèle de Maxwell en transformations finies

Preuve du résultat précédent :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \frac{\eta}{\tau_\eta^2}\underset{\sim}{\boldsymbol{J}} - \frac{\eta}{\tau_\eta}\underset{\sim}{\boldsymbol{g}}^{-1} \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{J}} = \int_{-\infty}^{t} \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}_t^{-1}(\tau)\,\exp(-\frac{t-\tau}{\tau_\eta})d\tau$$

$$\begin{aligned}
\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}(t) &= \frac{\eta}{\tau_\eta^2}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{g}}^{-1} + \int_{-\infty}^{t} \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}(t)\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}(\tau)\underset{\sim}{\boldsymbol{g}}_\tau^{-1}\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}(\tau)\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{T}(t)\,\exp(-\frac{t-\tau}{\tau_\eta})d\tau \\
&+ \int_{-\infty}^{t} \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(t)\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}(\tau)\underset{\sim}{\boldsymbol{g}}_\tau^{-1}\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}(\tau)\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}^{T}(t)\,\exp(-\frac{t-\tau}{\tau_\eta})d\tau \\
&- \frac{1}{\tau_\eta}\int_{-\infty}^{t} \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(t)\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}(\tau)\underset{\sim}{\boldsymbol{g}}_\tau^{-1}\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}(\tau)\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{T}(t)\,\exp(-\frac{t-\tau}{\tau_\eta})d\tau\Big) \\
&= \frac{\eta}{\tau_\eta^2}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{g}}^{-1} + \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}\underset{\sim}{\boldsymbol{J}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{J}}\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}^{T} - \frac{1}{\tau_\eta}\underset{\sim}{\boldsymbol{J}}\Big) \\
&= \frac{\eta}{\tau_\eta^2}\underset{\sim}{\boldsymbol{g}}^{-1} + \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{2\eta}{\tau_\eta}\underset{\sim}{\boldsymbol{g}}^{-1}) + (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{2\eta}{\tau_\eta}\underset{\sim}{\boldsymbol{g}}^{-1})\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}^{T} - \frac{1}{\tau_\eta}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{2\eta}{\tau_\eta}\underset{\sim}{\boldsymbol{g}}^{-1}) \\
&= \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}^{T} + \frac{2\eta}{\tau_\eta}\underset{\sim}{\boldsymbol{g}}^{-1}\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}\underset{\sim}{\boldsymbol{g}}^{-1} - \frac{1}{\tau_\eta}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Plan

Plan

Fluides de Navier–Stokes

- Fluides différentiels d'ordre 1, dits de Reiner-Rivlin

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \alpha_0 \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \alpha_1 \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} + \alpha_2 \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^2$$

où les α_i sont des fonctions des 3 invariants principaux de $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ et de ρ.

Fluides de Navier–Stokes

- Fluides différentiels d'ordre 1, dits de Reiner-Rivlin

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \alpha_0 \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \alpha_1 \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} + \alpha_2 \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^2$$

  où les α_i sont des fonctions des 3 invariants principaux de $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ et de ρ.

- Linéarisation par rapport à $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = -p(\rho)\underset{\sim}{\mathbf{1}} + \lambda(\mathrm{trace}\, \underset{\sim}{\boldsymbol{D}})\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$$

  C'est la loi des **fluides de Navier–Stokes**, dits aussi **fluides newtoniens** compressibles. Les paramètres λ et μ caractérisent la viscosité du fluide et la fonction $p(\rho)$ son élasticité.

Fluides de Navier–Stokes

- Fluides différentiels d'ordre 1, dits de Reiner-Rivlin

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \alpha_0 \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \alpha_1 \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} + \alpha_2 \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^2$$

  où les α_i sont des fonctions des 3 invariants principaux de $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ et de ρ.

- Linéarisation par rapport à $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = -p(\rho)\underset{\sim}{\mathbf{1}} + \lambda(\mathrm{trace}\, \underset{\sim}{\boldsymbol{D}})\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$$

  C'est la loi des **fluides de Navier–Stokes**, dits aussi **fluides newtoniens** compressibles. Les paramètres λ et μ caractérisent la viscosité du fluide et la fonction $p(\rho)$ son élasticité.
  Dans le cas incompressible, la pression p est une réaction.
  Lorsque la compressibilité de viscosité $\lambda + 2\mu/3$ est négligée, on parle d'un **fluide de Stokes** :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = -p\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{dev}}$$

Dissipation dans les fluides newtoniens

Le crible de la thermodynamique peut maintenant être appliqué pour connaître les restrictions apportées par la positivité du taux de dissipation :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} - \rho\dot{\psi} \geq 0$$

Dissipation dans les fluides newtoniens

Le crible de la thermodynamique peut maintenant être appliqué pour connaître les restrictions apportées par la positivité du taux de dissipation :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} - \rho\dot{\psi} \geq 0$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} - \rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\dot{\rho} = (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho^2\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\underset{\sim}{\mathbf{1}}) : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}, \quad \text{car} \quad \dot{\rho} = -\rho \,\mathrm{trace}\, \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$$

ici dans le cas isotherme. L'énergie libre de Helmholtz est une fonction $\psi(\rho)$ qui représente le stockage d'énergie élastique.

Dissipation dans les fluides newtoniens

Le crible de la thermodynamique peut maintenant être appliqué pour connaître les restrictions apportées par la positivité du taux de dissipation :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} - \rho\dot{\psi} \geq 0$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} - \rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\dot{\rho} = (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho^2\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\underset{\sim}{\mathbf{1}}) : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}, \quad \text{car} \quad \dot{\rho} = -\rho \operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$$

ici dans le cas isotherme. L'énergie libre de Helmholtz est une fonction $\psi(\rho)$ qui représente le stockage d'énergie élastique. On peut décomposer le tenseur des contraintes en deux contributions, l'une réversible, l'autre purement dissipative :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{rev} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{v}, \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{rev} = -\rho^2\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\underset{\sim}{\mathbf{1}} \quad \text{et} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{v} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} \geq 0$$

Dissipation dans les fluides newtoniens

Le crible de la thermodynamique peut maintenant être appliqué pour connaître les restrictions apportées par la positivité du taux de dissipation :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} - \rho\dot{\psi} \geq 0$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} - \rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\dot{\rho} = (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho^2\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\underset{\sim}{\mathbf{1}}) : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}, \quad \text{car} \quad \dot{\rho} = -\rho\,\mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$$

ici dans le cas isotherme. L'énergie libre de Helmholtz est une fonction $\psi(\rho)$ qui représente le stockage d'énergie élastique. On peut décomposer le tenseur des contraintes en deux contributions, l'une réversible, l'autre purement dissipative :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{rev} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{v}, \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{rev} = -\rho^2\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\underset{\sim}{\mathbf{1}} \quad \text{et} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{v} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} \geq 0$$

Dans le cas de la loi de Navier–Stokes, on a $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{v} = \lambda(\mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{D}})\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$

Dissipation dans les fluides newtoniens

Le crible de la thermodynamique peut maintenant être appliqué pour connaître les restrictions apportées par la positivité du taux de dissipation :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} - \rho\dot{\psi} \geq 0$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho}\dot{\rho} = (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \underset{\sim}{\mathbf{1}}) : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}, \quad \text{car} \quad \dot{\rho} = -\rho \mathrm{trace}\, \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$$

ici dans le cas isotherme. L'énergie libre de Helmholtz est une fonction $\psi(\rho)$ qui représente le stockage d'énergie élastique. On peut décomposer le tenseur des contraintes en deux contributions, l'une réversible, l'autre purement dissipative :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{rev} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{v}, \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{rev} = -\rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \underset{\sim}{\mathbf{1}} \quad \text{et} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{v} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} \geq 0$$

Dans le cas de la loi de Navier–Stokes, on a $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{v} = \lambda(\mathrm{trace}\, \underset{\sim}{\boldsymbol{D}})\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$
La positivité de la puissance de la contribution de viscosité exige que

$$\mu > 0 \quad \text{et} \quad 3\lambda + 2\mu > 0$$

résultat que l'on établit en exploitant la condition $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{v} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} \geq 0$ successivement avec des taux de déformation déviatoriques puis sphériques.

Coefficients de viscosité

Les coefficients λ et μ sont les paramètres de viscosité du milieu. Leur unité est Pa·s, également appelée **Poiseuille**. Par exemple,

$$\mu_{\text{eau}} = 10^{-3} \text{ Pa.s} \quad \mu_{\text{glycerine}} = 2 \text{ Pa.s}$$

Ils ne doivent pas être confondus, malgré la notation commune, avec les coefficients de Lamé (unité Pa) caractérisant les propriétés élastiques linéaires isotropes des matériaux solides.

Coefficients de viscosité

Les coefficients λ et μ sont les paramètres de viscosité du milieu. Leur unité est Pa·s, également appelée **Poiseuille**. Par exemple,

$$\mu_{\text{eau}} = 10^{-3} \text{ Pa.s} \quad \mu_{\text{glycerine}} = 2 \text{ Pa.s}$$

Ils ne doivent pas être confondus, malgré la notation commune, avec les coefficients de Lamé (unité Pa) caractérisant les propriétés élastiques linéaires isotropes des matériaux solides.

Le fluide newtonien incompressible est régi par la loi

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = -p\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^{\text{dev}}$$

où la pression p est la réaction à la liaison interne d'incompressibilité et n'est pas fournie par la loi de comportement, mais plutôt par les conditions aux limites du problème à résoudre. C'est un multiplicateur de Lagrange.

Plan

Etablissement des équations de Navier–Stokes

On appelle équations de Navier–Stokes les équations aux dérivées partielles décrivant la dynamique d'un fluide newtonien.

Etablissement des équations de Navier–Stokes

On appelle équations de Navier–Stokes les équations aux dérivées partielles décrivant la dynamique d'un fluide newtonien.
On les établit de la manière suivante :

$$\rho \frac{d\underline{\boldsymbol{v}}}{dt} = \operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underline{\boldsymbol{f}}$$

Etablissement des équations de Navier–Stokes

On appelle équations de Navier–Stokes les équations aux dérivées partielles décrivant la dynamique d'un fluide newtonien.
On les établit de la manière suivante :

$$\rho \frac{d\underline{\boldsymbol{v}}}{dt} = \operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underline{\boldsymbol{f}}$$

$$\sigma_{ij,j} \quad =$$

Etablissement des équations de Navier–Stokes

On appelle équations de Navier–Stokes les équations aux dérivées partielles décrivant la dynamique d'un fluide newtonien.
On les établit de la manière suivante :

$$\rho \frac{d\underline{\boldsymbol{v}}}{dt} = \operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underline{\boldsymbol{f}}$$

$$\sigma_{ij,j} \quad = \quad \left(-p\delta_{ij} + \lambda D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}\right)_{,j}$$

Etablissement des équations de Navier–Stokes

On appelle équations de Navier–Stokes les équations aux dérivées partielles décrivant la dynamique d'un fluide newtonien.
On les établit de la manière suivante :

$$\rho \frac{d\underline{\boldsymbol{v}}}{dt} = \operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underline{\boldsymbol{f}}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \left(-p\delta_{ij} + \lambda D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}\right)_{,j} \\ &= -p_{,i} + \end{aligned}$$

Etablissement des équations de Navier–Stokes

On appelle équations de Navier–Stokes les équations aux dérivées partielles décrivant la dynamique d'un fluide newtonien.
On les établit de la manière suivante :

$$\rho \frac{d\underline{\boldsymbol{v}}}{dt} = \operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underline{\boldsymbol{f}}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \left(-p\delta_{ij} + \lambda D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}\right)_{,j} \\ &= -p_{,i} + \left(\lambda v_{k,k}\delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i})\right)_{,j} \end{aligned}$$

Etablissement des équations de Navier–Stokes

On appelle équations de Navier–Stokes les équations aux dérivées partielles décrivant la dynamique d'un fluide newtonien.
On les établit de la manière suivante :

$$\rho \frac{d\underline{\boldsymbol{v}}}{dt} = \mathrm{div}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underline{\boldsymbol{f}}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij,j} &= \left(-p\delta_{ij} + \lambda D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}\right)_{,j} \\
&= -p_{,i} + \left(\lambda v_{k,k}\delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i})\right)_{,j} \\
&= -p_{,i} + \lambda v_{k,ki} + \mu v_{i,jj} + \mu v_{j,ji}
\end{aligned}$$

Etablissement des équations de Navier–Stokes

On appelle équations de Navier–Stokes les équations aux dérivées partielles décrivant la dynamique d'un fluide newtonien.
On les établit de la manière suivante :

$$\rho \frac{d\underline{\boldsymbol{v}}}{dt} = \operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underline{\boldsymbol{f}}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij,j} &= \left(-p\delta_{ij} + \lambda D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}\right)_{,j} \\
&= -p_{,i} + \left(\lambda v_{k,k}\delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i})\right)_{,j} \\
&= -p_{,i} + \lambda v_{k,ki} + \mu v_{i,jj} + \mu v_{j,ji} \\
&= -p_{,i} + (\lambda + \mu) v_{j,ji} + \mu v_{i,jj}
\end{aligned}$$

Etablissement des équations de Navier–Stokes

On appelle équations de Navier–Stokes les équations aux dérivées partielles décrivant la dynamique d'un fluide newtonien.
On les établit de la manière suivante :

$$\rho \frac{d\underline{\boldsymbol{v}}}{dt} = \operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underline{\boldsymbol{f}}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij,j} &= \left(-p\delta_{ij} + \lambda D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}\right)_{,j} \\
&= -p_{,i} + \left(\lambda v_{k,k}\delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i})\right)_{,j} \\
&= -p_{,i} + \lambda v_{k,ki} + \mu v_{i,jj} + \mu v_{j,ji} \\
&= -p_{,i} + (\lambda + \mu) v_{j,ji} + \mu v_{i,jj}
\end{aligned}$$

$$\rho \frac{\partial \underline{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + \rho(\operatorname{grad} \underline{\boldsymbol{v}}) \cdot \underline{\boldsymbol{v}} + \operatorname{grad} p = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{v}} + \mu \Delta \underline{\boldsymbol{v}} + \rho \underline{\boldsymbol{f}}$$

Etablissement des équations de Navier–Stokes

On appelle équations de Navier–Stokes les équations aux dérivées partielles décrivant la dynamique d'un fluide newtonien.
On les établit de la manière suivante :

$$\rho \frac{d\underline{\boldsymbol{v}}}{dt} = \operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underline{\boldsymbol{f}}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij,j} &= \left(-p\delta_{ij} + \lambda D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}\right)_{,j} \\
&= -p_{,i} + \left(\lambda v_{k,k}\delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i})\right)_{,j} \\
&= -p_{,i} + \lambda v_{k,ki} + \mu v_{i,jj} + \mu v_{j,ji} \\
&= -p_{,i} + (\lambda + \mu) v_{j,ji} + \mu v_{i,jj}
\end{aligned}$$

$$\rho \frac{\partial \underline{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + \rho (\operatorname{grad} \underline{\boldsymbol{v}}) \cdot \underline{\boldsymbol{v}} + \operatorname{grad} p = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{v}} + \mu \Delta \underline{\boldsymbol{v}} + \rho \underline{\boldsymbol{f}}$$

Conditions aux limites : adhérence aux parois $\underline{\boldsymbol{v}} - \underline{\boldsymbol{w}} = 0$

Navier–Stokes incompressible

Dans le cas du fluide newtonien incompressible ($\operatorname{div} \underline{\boldsymbol{v}} = 0$), cette équation se réduit à

$$\frac{\partial \underline{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \underline{\boldsymbol{v}}) \cdot \underline{\boldsymbol{v}} + \operatorname{grad} \frac{p}{\rho} = \frac{\mu}{\rho} \Delta \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\boldsymbol{f}}$$

Navier–Stokes incompressible

Dans le cas du fluide newtonien incompressible ($\operatorname{div} \underline{\boldsymbol{v}} = 0$), cette équation se réduit à

$$\frac{\partial \underline{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \underline{\boldsymbol{v}}) \cdot \underline{\boldsymbol{v}} + \operatorname{grad} \frac{p}{\rho} = \frac{\mu}{\rho} \Delta \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\boldsymbol{f}}$$

On introduit souvent le **coefficient cinématique de viscosité**, à ne pas confondre avec le coefficient de Poisson en élasticité malgré la notation commune :

$$\nu := \frac{\mu}{\rho}$$

Lorsque la viscosité $\mu \to 0$, on retrouve les équations des fluides parfaits incompressibles.

Equations de Navier–Stokes adimensionnelles

Pour étudier les contributions relatives des différents termes, il est d'usage d'adimensionner les équations précédentes en introduisant des variables sans dimension physique

$$\underline{\boldsymbol{x}} = L\underline{\boldsymbol{x}}', \quad \underline{\boldsymbol{v}} = V_\infty \underline{\boldsymbol{v}}', \quad t = \frac{L}{V_\infty} t', \quad p = \rho V_\infty^2 p', \quad \underline{\boldsymbol{f}} = g_c \underline{\boldsymbol{f}}'$$

où L, V_∞, g_c sont respectivement une longueur, une vitesse et une densité massique de force caractéristiques du problème.

Equations de Navier–Stokes adimensionnelles

Pour étudier les contributions relatives des différents termes, il est d'usage d'adimensionner les équations précédentes en introduisant des variables sans dimension physique

$$\underline{\boldsymbol{x}} = L\underline{\boldsymbol{x}}', \quad \underline{\boldsymbol{v}} = V_\infty \underline{\boldsymbol{v}}', \quad t = \frac{L}{V_\infty} t', \quad p = \rho V_\infty^2 p', \quad \underline{\boldsymbol{f}} = g_c \underline{\boldsymbol{f}}'$$

où L, V_∞, g_c sont respectivement une longueur, une vitesse et une densité massique de force caractéristiques du problème. On obtient alors les équations de Navier-Stokes adimensionnées :

$$\frac{\partial \underline{\boldsymbol{v}}'}{\partial t'} + (\mathrm{grad}'\underline{\boldsymbol{v}}') \cdot \underline{\boldsymbol{v}}' + \mathrm{grad}' p' = \frac{1}{\mathcal{R}e} \Delta' \underline{\boldsymbol{v}}' + \frac{1}{\mathcal{F}r} \underline{\boldsymbol{f}}$$

où apparaissent les **nombres adimensionnels de Reynolds et de Froude** :

$$\mathcal{R}e := \frac{\rho L V_\infty}{\mu}, \quad \mathcal{F}r := \frac{V_\infty^2}{g_c L}$$

Equations de Navier–Stokes adimensionnelles

Pour étudier les contributions relatives des différents termes, il est d'usage d'adimensionner les équations précédentes en introduisant des variables sans dimension physique

$$\underline{\boldsymbol{x}} = L\underline{\boldsymbol{x}}', \quad \underline{\boldsymbol{v}} = V_\infty \underline{\boldsymbol{v}}', \quad t = \frac{L}{V_\infty} t', \quad p = \rho V_\infty^2 p', \quad \underline{\boldsymbol{f}} = g_c \underline{\boldsymbol{f}}'$$

où L, V_∞, g_c sont respectivement une longueur, une vitesse et une densité massique de force caractéristiques du problème. On obtient alors les équations de Navier-Stokes adimensionnées :

$$\frac{\partial \underline{\boldsymbol{v}}'}{\partial t'} + (\mathrm{grad}\,'\underline{\boldsymbol{v}}') \cdot \underline{\boldsymbol{v}}' + \mathrm{grad}\,' p' = \frac{1}{\mathcal{R}e} \Delta' \underline{\boldsymbol{v}}' + \frac{1}{\mathcal{F}r} \underline{\boldsymbol{f}}$$

où apparaissent les **nombres adimensionnels de Reynolds et de Froude** :

$$\mathcal{R}e := \frac{\rho L V_\infty}{\mu}, \quad \mathcal{F}r := \frac{V_\infty^2}{g_c L}$$

Les équations sans dimensions permettent de profiter de la **similitude** de problèmes dépendant d'un nombre réduit de paramètres. Deux écoulements à géométrie équivalente sont dits semblables lorsque les nombres de Reynolds et de Froude (et de Mach...) correspondants sont égaux. Cela autorise l'étude de modèles réduits.

Plan

Navier vs Navier–Stokes

- Solides élastiques linéaires isotropes : loi de Hooke + HPP

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda(\mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})\,\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Navier vs Navier–Stokes

- Solides élastiques linéaires isotropes : loi de Hooke + HPP

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda(\mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})\,\underset{\sim}{\boldsymbol{1}} + 2\mu\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Constantes de Lamé (Pa) : λ, μ

$$(\lambda+\mu)\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\underline{\boldsymbol{u}}\,) + \mu\Delta\underline{\boldsymbol{u}} + \rho\underline{\boldsymbol{f}} = \rho\underline{\boldsymbol{a}}$$

Déplacement $\underline{\boldsymbol{u}}$

Navier vs Navier–Stokes

- Solides élastiques linéaires isotropes : loi de Hooke + HPP

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda(\mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})\,\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Constantes de Lamé (Pa) : λ, μ

$$(\lambda + \mu)\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\underline{\boldsymbol{u}}\,) + \mu\Delta\underline{\boldsymbol{u}} + \rho\underline{\boldsymbol{f}} = \rho\underline{\boldsymbol{a}}$$

Déplacement $\underline{\boldsymbol{u}}$
Existence et unicité des solutions : oui

Navier vs Navier–Stokes

- Solides élastiques linéaires isotropes : loi de Hooke + HPP

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda(\operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})\, \underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Constantes de Lamé (Pa) : λ, μ

$$(\lambda + \mu)\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\, \underline{\boldsymbol{u}}\,) + \mu\Delta\underline{\boldsymbol{u}} + \rho\underline{\boldsymbol{f}} = \rho\underline{\boldsymbol{a}}$$

Déplacement $\underline{\boldsymbol{u}}$
Existence et unicité des solutions : oui

- Fluides newtoniens :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = -p\underset{\sim}{\mathbf{1}} + \lambda(\operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{D}})\, \underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$$

Coefficients de viscosité (Pa.s) : λ, μ

Navier vs Navier–Stokes

- Solides élastiques linéaires isotropes : loi de Hooke + HPP

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda(\mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})\,\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Constantes de Lamé (Pa) : λ, μ

$$(\lambda+\mu)\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\underline{\boldsymbol{u}}\,) + \mu\Delta\underline{\boldsymbol{u}} + \rho\underline{\boldsymbol{f}} = \rho\underline{\boldsymbol{a}}$$

Déplacement $\underline{\boldsymbol{u}}$
Existence et unicité des solutions : oui

- Fluides newtoniens :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = -p\underset{\sim}{\mathbf{1}} + \lambda(\mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{D}})\,\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$$

Coefficients de viscosité (Pa.s) : λ, μ

$$(\lambda+\mu)\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\underline{\boldsymbol{v}}\,) + \mu\Delta\underline{\boldsymbol{v}} - \mathrm{grad}\,p + \rho\underline{\boldsymbol{f}} = \rho\underline{\boldsymbol{a}}$$

Vitesse $\underline{\boldsymbol{v}} = \underline{\dot{\boldsymbol{u}}}$

Navier vs Navier–Stokes

- Solides élastiques linéaires isotropes : loi de Hooke + HPP

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda(\mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})\,\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

  Constantes de Lamé (Pa) : λ, μ

$$(\lambda+\mu)\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\underline{\boldsymbol{u}}\,) + \mu\Delta\underline{\boldsymbol{u}} + \rho\underline{\boldsymbol{f}} = \rho\underline{\boldsymbol{a}}$$

  Déplacement $\underline{\boldsymbol{u}}$
  Existence et unicité des solutions : oui
- Fluides newtoniens :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = -p\underset{\sim}{\mathbf{1}} + \lambda(\mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{D}})\,\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$$

  Coefficients de viscosité (Pa.s) : λ, μ

$$(\lambda+\mu)\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\underline{\boldsymbol{v}}\,) + \mu\Delta\underline{\boldsymbol{v}} - \mathrm{grad}\,p + \rho\underline{\boldsymbol{f}} = \rho\underline{\boldsymbol{a}}$$

  Vitesse $\underline{\boldsymbol{v}} = \underline{\dot{\boldsymbol{u}}}$
  Existence et unicité des solutions : ???
  L'un des 23 problèmes posés par Hilbert en 1900.
  L'un des 7 problèmes non résolus à 1 million de dollars posé au Collège de France en 2000.

Agassant, J. F., Avenas, P., Sergent, J. P., Vergnes, B., and Vincent, M. (2014).
Mise en forme des polymères.
Lavoisier, France.

Mandel, J. (1974).
Introduction à la mécanique des milieux continus déformables.
Académie Polonaise des Sciences, Varszawa.

Salençon, J. (2019).
Viscoelastic Modeling for Structural Analysis.
ISTE London, Wiley, Hoboken.