

Chapitre 16

Torsion

16.1 Introduction

La solution du problème de torsion d'une barre cylindrique de section quelconque a été établie par A. Barré de Saint-Venant¹ entre 1853 et 1855. Pour aborder sa résolution, il est utile de commencer par un préliminaire d'ordre mathématique sur les problèmes aux limites de Dirichlet et de Neumann pour les fonctions harmoniques.

16.1.1 Problème de Dirichlet pour les fonctions harmoniques

On considère un domaine Ω de l'espace ou du plan, supposé simplement connexe, de frontière $\partial\Omega$. Le problème de Dirichlet pour les fonctions harmoniques consiste à chercher les fonctions ψ à laplacien nul et prenant des valeurs imposées sur le contour $\partial\Omega$ de Ω :

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & \text{sur } \Omega \\ \psi(\underline{x}) = f(\underline{x}) & \forall \underline{x} \in \partial\Omega \end{cases} \quad (16.1)$$

où la fonction f est supposée continue. Les fonctions à laplacien nul sont dites **harmoniques**.

Si le contour $\partial\Omega$ est suffisamment régulier, le problème de Dirichlet admet une solution unique.

16.1.2 Problème de Neumann pour les fonctions harmoniques

On considère un domaine Ω de l'espace, supposé simplement connexe, de frontière $\partial\Omega$. Le problème de Neumann pour les fonctions harmoniques consiste à chercher les fonctions φ à laplacien nul et à flux imposé q^d sur la frontière :

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{sur } \Omega \\ \nabla\varphi \cdot \underline{n} = q^d & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (16.2)$$

On établit d'abord une condition nécessaire à l'existence d'une solution. Pour cela, on évalue le flux total de φ sortant de Ω :

$$\int_{\partial\Omega} \nabla\varphi \cdot \underline{n} \, dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla\varphi \, dV = \int_{\Omega} \Delta\varphi \, dV = 0 \quad (16.3)$$

Le théorème de la divergence (A.133) a été utilisé au passage. Dans le calcul précédent est apparue la dérivée normale de φ en un point matériel $\underline{x} \in \partial\Omega$ définie comme

$$\frac{d\varphi}{dn} := \nabla\varphi \cdot \underline{n} \quad (16.4)$$

1. Adémard Barré de Saint-Venant (1797–1886)

La donnée q^d doit être compatible avec la condition précédente. Une condition nécessaire d'existence d'une solution est par conséquent

$$\int_{\partial\Omega} q^d dS = 0 \quad (16.5)$$

Dans ces conditions, des résultats d'ordre mathématique montrent que la solution est déterminée de manière unique, à une constante additive près.

Cas plan

Si $\varphi(x, y)$ est une fonction du plan définie sur la surface plane S , simplement connexe, de bord Γ , le problème de Neumann s'écrit

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 & \text{sur } S \\ \nabla\varphi \cdot \underline{n} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}n_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}n_2 = q^d & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (16.6)$$

Il est instructif de reprendre la preuve de la condition nécessaire (16.5) dans le cas bidimensionnel. Soit $x(t), y(t)$ une paramétrisation du contour Γ . Le vecteur tangent en tout point de Γ est colinéaire à $[x'(t) \ y'(t)]^T$ où la notation $x' = dx/dt$ est utilisée. Le vecteur normal à Γ dans le plan (x, y) est colinéaire à $[y' \ -x']^T$. On introduit l'élément de longueur $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}dt$ et l'abscisse curviligne s le long du contour. La dérivée normale de φ le long de Γ est

$$\frac{d\varphi}{dn} = \nabla\varphi \cdot \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}y' - \frac{\partial\varphi}{\partial y}x' \right) \quad (16.7)$$

L'intégration de ce flux le long de Γ conduit à

$$\int_{\Gamma} \frac{d\varphi}{dn} ds = \int_{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy - \frac{\partial\varphi}{\partial y}dx \right) = \int_S \underbrace{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \right)}_{\Delta\varphi=0} dxdy = 0 \quad (16.8)$$

car $y'ds = dy\sqrt{x'^2 + y'^2}$ et $x'ds = dx\sqrt{x'^2 + y'^2}$. Pour passer de la deuxième à la troisième égalité, on a utilisé le théorème de Green, qui n'est guère qu'un cas particulier du théorème de la divergence dans le cas bidimensionnel :

Théorème 26 (Théorème de Green) *Soit P, Q deux fonctions régulières définies sur une surface S du plan, de frontière Γ , alors*

$$\int_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \quad (16.9)$$

On obtient finalement la condition nécessaire d'existence de solution pour le problème de Neumann bidimensionnel

$$\int_{\Gamma} q^d dl = 0 \quad (16.10)$$

Il ne s'agit en fait que d'un cas particulier de (16.5), démontré plus haut en toute généralité.

16.2 Torsion élastostatique d'un barreau cylindrique

On considère un barreau cylindrique de section courante S de forme quelconque (simplement connexe, c'est-à-dire en un seul morceau) et de longueur ℓ , comme l'indique la figure 16.1. L'axe du cylindre est l'axe 3. Le barreau est constitué d'un matériau homogène et isotrope. Il est soumis aux efforts suivants :

- les efforts volumiques sont nuls ou négligés ;
- les surfaces latérales, i.e. $\partial S \setminus (S_0 \cup S_\ell)$, sont libres :

$$\underline{t}^d = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = 0 \quad (16.11)$$

- les extrémités S_0 et S_ℓ sont soumises à des densités surfaciques d'effort dont seul le torseur résultant est donné sur chaque extrémité. Le torseur des efforts appliqués à la section S_ℓ est

$$\{O, \underline{R} = 0, \underline{M}_0 = \mathcal{C} \underline{e}_3\} \quad (16.12)$$

Le torseur des efforts appliqués à la section S_0 est

$$\{O, \underline{R} = 0, \underline{M}_0 = -\mathcal{C} \underline{e}_3\} \quad (16.13)$$

Un couple \mathcal{C} selon l'axe \underline{e}_3 est donc appliqué à l'extrémité S_ℓ et le couple opposé à l'autre extrémité. La résultante des forces sur chaque section est nulle.

On peut vérifier que le torseur résultant des efforts appliqués au barreau est nul.

De manière similaire au cas de la flexion traité à la section 9.2.2, on est confronté à un problème aux limites mal posé, puisque seul le torseur des efforts appliqués aux extrémités est donné au lieu du vecteur contrainte ou déplacement en chaque point des extrémités. On ne peut donc attendre de solution unique au problème posé. Toutefois, en vertu du principe de Saint-Venant exposé à la section 9.2.3, il existe une solution qui, suffisamment loin des extrémités, ne dépend quasiment pas de la façon dont les efforts sont appliqués aux extrémités. C'est cette solution qui nous intéresse ici. Pour la mettre en évidence, une certaine distribution particulière d'efforts ou de déplacements sera admise aux extrémités, compatible avec le torseur appliqué. Pour un tel choix, la solution devient bel et bien unique.

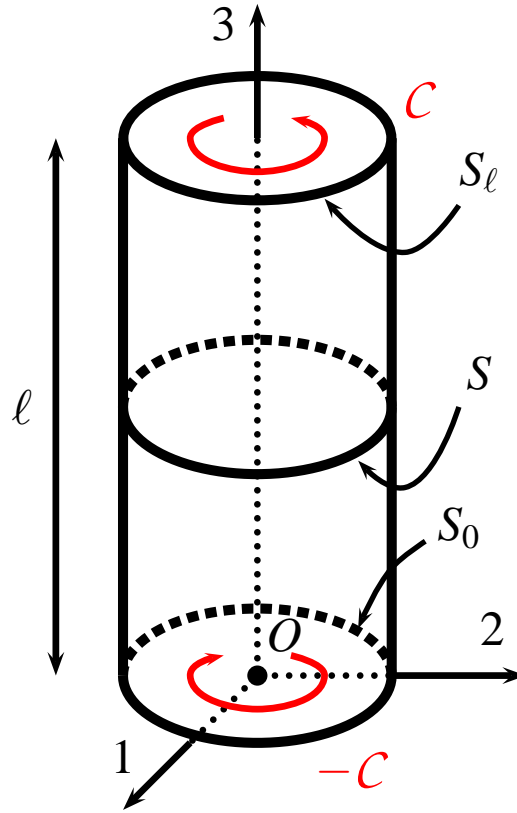


FIGURE 16.1 – Torsion d'un barreau cylindrique : schéma de principe.

16.2.1 Méthode des déplacements

Bien que le problème ait été posé en terme d'efforts par l'intermédiaire du moment \mathcal{C} , c'est vers une solution par la méthode des déplacements que l'on se tourne ici. En effet, on imagine que l'application du moment d'axe 3 va provoquer une rotation des sections par rapport à cet axe. Proposer, dans le contexte infinitésimal, une cinématique dictant une rotation relative d'une section de cote donnée à la suivante. On supposera que la section S_0 ne bouge pas tandis que la section S_ℓ subit la rotation maximale.

Si l'on suppose qu'une section de cote $X_3 = Z$ subit une rotation $\underline{\tilde{Q}}$ d'axe \underline{e}_3 et d'angle θ , chaque point de cette section aura pour nouvelle position :

$$\underline{x} = \underline{X}_Z + \underline{\tilde{Q}} \cdot (\underline{X} - \underline{X}_Z) \quad (16.14)$$

On calcule le déplacement associé :

$$\underline{u}(\underline{X}) = (\underline{\tilde{Q}} - \underline{1}) \cdot (\underline{X} - \underline{X}_Z) \quad (16.15)$$

Le centre de rotation $\underline{X}_Z = Z\underline{e}_3$ ne jouera en fait aucun rôle dans la suite. Dans le contexte infinitésimal, la rotation $\underline{\tilde{Q}}$ peut être remplacée par son vecteur axial $\underline{\tilde{Q}}^\times$ tel que

$$\underline{u}(\underline{X}) = (\underline{\tilde{Q}} - \underline{1}) \cdot (\underline{X} - \underline{X}_Z) = \underline{\tilde{Q}}^\times \wedge (\underline{X} - \underline{X}_Z) \quad (16.16)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 - X_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta X_2 \\ \theta X_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16.17)$$

Les matrices sont écrites dans le système de coordonnées cartésiennes orthonormées dont la base figure sur la figure 16.1. L'angle θ est nul en $X_3 = 0$ et maximal en $X_3 = \ell$. La fonction $\theta(X_3)$ peut être intuitivement supposée monotone croissante. La nécessité d'une dépendance linéaire ou affine s'établit en calculant successivement déformations et contraintes. Les conditions d'équilibre local $\sigma_{1j,j} = 0$ et $\sigma_{2j,j} = 0$ conduisent à l'équation différentielle $\theta''(X_3) = 0$, de sorte que

$$\theta = \alpha X_3 \quad (16.18)$$

Le coefficient α désigne un angle imposé par unité de longueur.

L'expérience courante nous indique, par exemple lors de la torsion de barre à section rectangulaire (tordre une gomme...), que, si chaque section subit effectivement une rotation, on ne peut exclure un gondolement ou gauchissement de la surface venant se superposer à la rotation : une section plane ne le reste pas nécessairement. On se propose donc de tester le champ de déplacement suivant :

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha X_2 X_3 \\ u_2 = \alpha X_1 X_3 \\ u_3 = \alpha \varphi(X_1, X_2) \end{cases} \quad (16.19)$$

où le déplacement u_3 correspond à un gauchissement de la surface $X_3 = Cste$ après déformation. La fonction φ inconnue est la fonction de gauchissement. Le gradient de la transformation vaut

$$[\underline{\tilde{F}}] = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha X_3 & -\alpha X_2 \\ \alpha X_3 & 1 & \alpha X_1 \\ \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} & \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} & 1 \end{bmatrix} \quad (16.20)$$

qui se décompose en une déformation et une rotation infinitésimales :

$$[\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\alpha}{2}(\frac{\partial\varphi}{\partial X_1} - X_2) \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2}(\frac{\partial\varphi}{\partial X_2} + X_1) \\ \frac{\alpha}{2}(\frac{\partial\varphi}{\partial X_1} - X_2) & \frac{\alpha}{2}(\frac{\partial\varphi}{\partial X_2} + X_1) & 0 \end{bmatrix} \quad (16.21)$$

$$[\underline{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha X_3 & -\frac{\alpha}{2}(\frac{\partial\varphi}{\partial X_1} + X_2) \\ \alpha X_3 & 0 & \frac{\alpha}{2}(X_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial X_2}) \\ \frac{\alpha}{2}(\frac{\partial\varphi}{\partial X_1} + X_2) & \frac{\alpha}{2}(\frac{\partial\varphi}{\partial X_2} - X_1) & 0 \end{bmatrix} \quad (16.22)$$

La déformation proposée ne s'accompagne d'aucun changement de volume puisque la trace de $\underline{\varepsilon}$ est nulle. La barre ne s'allonge pas lorsqu'on la tord puisque $\varepsilon_{33} = 0$.

Evaluation des contraintes et des conditions d'équilibre

Dans le cadre de l'élasticité isotrope linéarisée, évaluer les contraintes engendrées par les déformations calculées précédemment. A quelles conditions portant sur la fonction de gauchissement, l'équilibre statique est-il réalisé ?

Comme la trace de la déformation est nulle, la loi d'élasticité isotrope linéarisée à partir d'un état naturel (8.44), s'écrit :

$$\underline{\sigma} = 2\mu \underline{\varepsilon}, \quad [\underline{\sigma}] = \mu\alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial\varphi}{\partial X_1} - X_2 \\ 0 & 0 & \frac{\partial\varphi}{\partial X_2} + X_1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial X_1} - X_2 & \frac{\partial\varphi}{\partial X_2} + X_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (16.23)$$

où μ est le module de cisaillement. En l'absence de forces volumiques et dans le cas statique, la divergence du tenseur des contraintes est nulle. En coordonnées cartésiennes orthonormées, cette condition s'écrit $\sigma_{ij,j} = 0$. La seule équation pertinente en tenant compte de la forme trouvée (16.23) pour le tenseur des contraintes, est

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} = 0 \quad (16.24)$$

En substituant les composantes trouvées, on obtient la condition :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial X_2^2} = \Delta\varphi = 0, \quad \forall \underline{X} \in S \quad (16.25)$$

pour toute section S . La fonction de gauchissement doit donc être harmonique pour que la solution en déplacements proposée soit recevable.

La fonction de gauchissement doit en outre permettre de satisfaire les conditions à la frontière (16.11) à (16.13). On commence par la condition de bord libre (16.11) que l'on écrit sur la frontière Γ d'une section courante S et de vecteur normal $[n_1 \ n_2 \ 0]^T$:

$$\begin{aligned} \underline{t}^d &= \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = (\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2)\underline{e}_3 \\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial X_1}n_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial X_2}n_2 - X_2n_1 + X_1n_2 \right) \underline{e}_3 = 0 \end{aligned} \quad (16.26)$$

On aboutit à la condition supplémentaire portant sur φ :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial X_1}n_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial X_2}n_2 = \nabla\varphi \cdot \underline{n} = \frac{d\varphi}{dn} = n_1X_2 - n_2X_1, \quad \forall \underline{X} \in \Gamma \quad (16.27)$$

Remarquer que $n_1 X_2 - n_2 X_1 = (\underline{n} \wedge \underline{X}) \cdot \underline{e}_3$. Au passage, on a reconnu le flux du gradient de φ à travers Γ , appelée aussi dérivée normale de φ , en suivant la définition (16.4). La condition de bord libre impose donc le flux de φ . Sur une section courante S , la fonction de gauchissement est donc solution de l'équation (16.25) avec la condition de flux imposé (16.27) sur son contour Γ . On reconnaît un problème de Neumann, du type (16.2), avec

$$q^d = n_1 X_2 - n_2 X_1, \quad \forall \underline{X} \in \Gamma \quad (16.28)$$

On sait qu'une condition nécessaire à l'existence d'une solution est que le flux total de la donnée q^d soit nul, i.e. la condition (16.5). Il faut vérifier cette condition dans le cas du flux (16.28). Le contour Γ admet une paramétrisation $X_1(s), X_2(s)$ et un vecteur normal dans le plan (X_1, X_2) égal à $[X_2' - X_1' \ 0]^T$, ce qui permet d'évaluer l'intégrale

$$\int_{\Gamma} (n_1 X_2 - n_2 X_1) ds = \int_{\Gamma} \left(\frac{dX_2}{ds} X_2 + \frac{dX_1}{ds} X_1 \right) ds = \int_{\Gamma} (X_1 dX_1 + X_2 dX_2) = 0 \quad (16.29)$$

La dernière intégrale est effectivement nulle sur un contour fermé. D'après le préliminaire mathématique 16.1.2, la réalisation de la condition (16.5) garantit l'existence de la fonction de gauchissement et son unicité à une constante additive près correspondant à une translation selon \underline{e}_3 , qu'il reste à fixer.

Il reste à évaluer les conditions imposées sur les surfaces S_0 et S_ℓ , à savoir la résultante nulle et le moment appliqué \mathcal{C} . Ce point fait l'objet de la section suivante.

16.2.2 Force résultante

On évalue d'abord la résultante des efforts induits par les contraintes calculées précédemment :

$$\begin{aligned} \underline{R} &= \int_{S_\ell} \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_3 dS \\ &= \mu\alpha \left(\int_{S_\ell} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) dS \right) \underline{e}_1 + \mu\alpha \left(\int_{S_\ell} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right) dS \right) \underline{e}_2 \end{aligned} \quad (16.30)$$

Le résultat semble dépendre de la fonction de gauchissement et donc de la géométrie particulière de la section. En fait, on va montrer qu'il n'en est rien. Pour le voir, on part de la condition (16.27) portant sur φ établie plus haut et remplie sur Γ :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) n_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right) n_2 = 0 \quad (16.31)$$

On multiplie l'expression précédente par X_1 et on l'intègre sur le contour Γ :

$$\int_{\Gamma} \left(X_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) n_1 + X_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right) n_2 \right) ds = 0 \quad (16.32)$$

$$\int_{\Gamma} \left(\underbrace{X_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) dX_2}_Q - \underbrace{X_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right) dX_1}_P \right) = 0 \quad (16.33)$$

Les termes P et Q ont été soulignés dans l'expression précédente afin de pouvoir appliquer le théorème de Green (16.9). L'expression précédente est donc égale à

$$\int_S \left(\frac{\partial}{\partial X_1} \left(X_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) \right) + \frac{\partial}{\partial X_2} \left(X_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right) \right) \right) dS = 0 \quad (16.34)$$

$$\int_S \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) + X_1 \left(\underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_2^2}}_{=0 \text{ d'après (16.25)}} \right) \right) dS = 0 \quad (16.35)$$

On en déduit que

$$\int_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) dS = 0, \quad \int_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right) dS = 0 \quad (16.36)$$

La première équation (16.36)₁ résulte de la chaîne de calculs (16.35). La deuxième équation (16.36)₂ est le résultat que l'on obtient en suivant le même démarche mais en multipliant l'équation (16.31) par X_2 au lieu de X_1 . Les résultats (16.36) permettent de conclure que, pour toute fonction de gauchissement φ vérifiant (16.25) et (16.27), la résultante (16.30) des efforts sur la section S_ℓ est nulle. Il en va de même pour la résultante sur la section S_0 . Ces résultats sont compatibles avec le chargement imposé (16.12) et (16.13).

16.2.3 Rigidité de torsion

Il reste à calculer le moment résultant des forces sur la section S_ℓ par rapport au point O :

$$\underline{\mathbf{M}}_O = \int_{S_\ell} \underline{\mathbf{OM}} \wedge (\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}}) dS \quad (16.37)$$

$$\begin{aligned} [\underline{\mathbf{M}}_O] &= \mu\alpha \int_{S_\ell} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ell \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \\ 0 \end{bmatrix} dS \\ &= \mu\alpha \int_{S_\ell} \begin{bmatrix} -\ell(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1) \\ \ell(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2) \\ X_1(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1) - X_2(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2) \end{bmatrix} dS \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu\alpha \int_{S_\ell} \left(X_1(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1) - X_2(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2) \right) dS \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16.38)$$

où l'on a utilisé le résultat (16.36). Le moment résultant est donc porté par $\underline{\mathbf{e}}_3$. On peut l'identifier au couple imposé à S_ℓ , à savoir $\mathcal{C} \underline{\mathbf{e}}_3$ d'après (16.12) :

$$\mathcal{C} = \mu J \alpha, \quad J := \int_S \left(X_1(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1) - X_2(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2) \right) dS \quad (16.39)$$

La formule (16.39) relie le couple imposé \mathcal{C} à l'angle de rotation de section par unité de longueur axiale α , par le biais de la **rigidité de torsion** μJ . La rigidité de torsion dépend du module de cisaillement du matériau et de la géométrie de la section. J est appelé **inertie de torsion** de la section.

Une autre expression du moment d'inertie J peut être obtenue en reprenant la démarche mise en œuvre pour le calcul de la force résultante au paragraphe 16.2.2. On multiplie cette fois l'expression (16.31) par φ , on l'intègre sur le contour Γ et on applique le théorème de Green. On peut alors montrer

que

$$\begin{aligned} J &= \int_S \left(X_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right) - X_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) \right) dS \\ &= \int_S \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right)^2 \right) dS \end{aligned} \quad (16.40)$$

Cette expression met en valeur le fait que J soit positif quelle que soit la forme de la section non réduite à un point. Un couple $\mathcal{C} > 0$ positif selon Z implique donc nécessairement une rotation des sections dans le même sens d'après (16.39), ce qui est conforme à l'intuition.

16.2.4 Méthode des contraintes

Le problème de la torsion d'une barre cylindrique a été résolu dans les sections précédentes par la méthode des déplacements. Il est en fait tout aussi légitime de l'aborder du point de vue des contraintes. En effet, le moment de torsion sur une extrémité de la barre résulte de l'existence de contributions de contraintes de cisaillement σ_{13} et σ_{23} . Cette remarque conduit à rechercher des contraintes de la forme :

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (16.41)$$

Les équations d'équilibre indiquent que $\sigma_{13,3} = \sigma_{23,3} = 0$ de sorte que ces contraintes de cisaillement sont des fonction de X_1 et X_2 . Elles vérifient également

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} = 0 \implies \frac{\partial}{\partial X_1} (\sigma_{31} + g(X_2)) = \frac{\partial}{\partial X_2} (-\sigma_{32} + f(X_1))$$

où f et g sont des fonctions dérivables arbitraires. L'équation précédente montre que la forme différentielle $\alpha(X_1, X_2) = (-\sigma_{32} + f(X_1))dX_1 + (\sigma_{31} + g(X_2))dX_2$ est exacte sur S . Il existe donc une fonction $\Psi(X_1, X_2)$ telle que

$$\sigma_{31} = \frac{\partial \Psi}{\partial X_2} - g(X_2), \quad \sigma_{32} = -\frac{\partial \Psi}{\partial X_1} + f(X_1) \quad (16.42)$$

Les équations de compatibilité appliquées aux déformations ε_{31} et ε_{32} conduisent alors aux relations supplémentaires suivantes :

$$\sigma_{31,22} - \sigma_{32,12} = 0 = \frac{\partial}{\partial X_2} (\sigma_{31,2} - \sigma_{32,1}) = \frac{\partial}{\partial X_2} (\Delta \Psi - f' - g')$$

$$\sigma_{31,12} - \sigma_{32,11} = 0 = \frac{\partial}{\partial X_1} (\sigma_{31,2} - \sigma_{32,1}) = \frac{\partial}{\partial X_1} (\Delta \Psi - f' - g')$$

Il s'ensuit qu'il existe une constante A telle que $\Delta \Psi = -2A + f' + g'$.

La condition au bord Γ de chaque section S s'écrit :

$$\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 = 0 \implies \sigma_{31}dX_2 - \sigma_{32}dX_1 = 0$$

Lorsque l'on prend $f = g = 0$, cette condition s'écrit

$$\frac{\partial \Psi}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial X_2} dX_2 = d\Psi = 0$$

ce qui traduit que Ψ est constante le long du contour. La valeur de cette constante n'a pas d'importance car elle n'influence pas la valeur des contraintes. La fonction Ψ est alors solution du problème

$$\begin{cases} \Delta \Psi = -2A & \text{sur } S \\ \Psi(\underline{\mathbf{X}}) = \text{Cste} & \forall \underline{\mathbf{X}} \in \Gamma \end{cases} \quad (16.43)$$

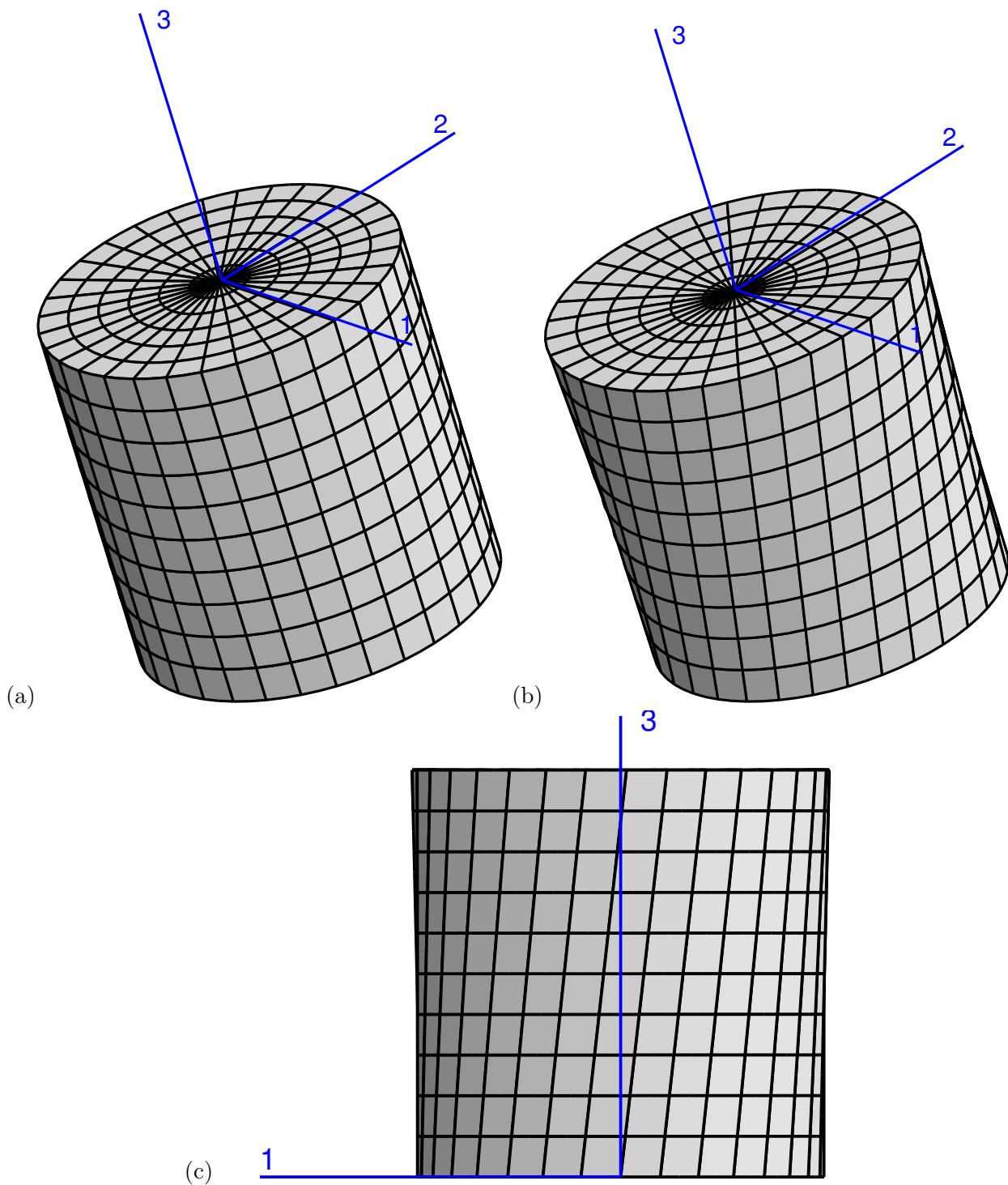


FIGURE 16.2 – Déformée d'une barre cylindrique à section circulaire ($R = 1 \text{ mm}$, $\ell = 2 \text{ mm}$, $\alpha = 10^\circ \text{mm}^{-1}$) : (a) état initial, (b) vue 3D de la déformée, (c) vue selon l'axe 2.

Il est possible de se ramener à un problème de Dirichlet (16.1) et donc à rechercher une fonction harmonique ψ , en utilisant les fonctions

$$f(X_1) = AX_1, \quad g(X_2) = AX_2$$

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & \text{sur } S \\ \psi(\underline{x}) = \text{Cste} + \frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2) & \forall \underline{x} \in \Gamma \end{cases} \quad (16.44)$$

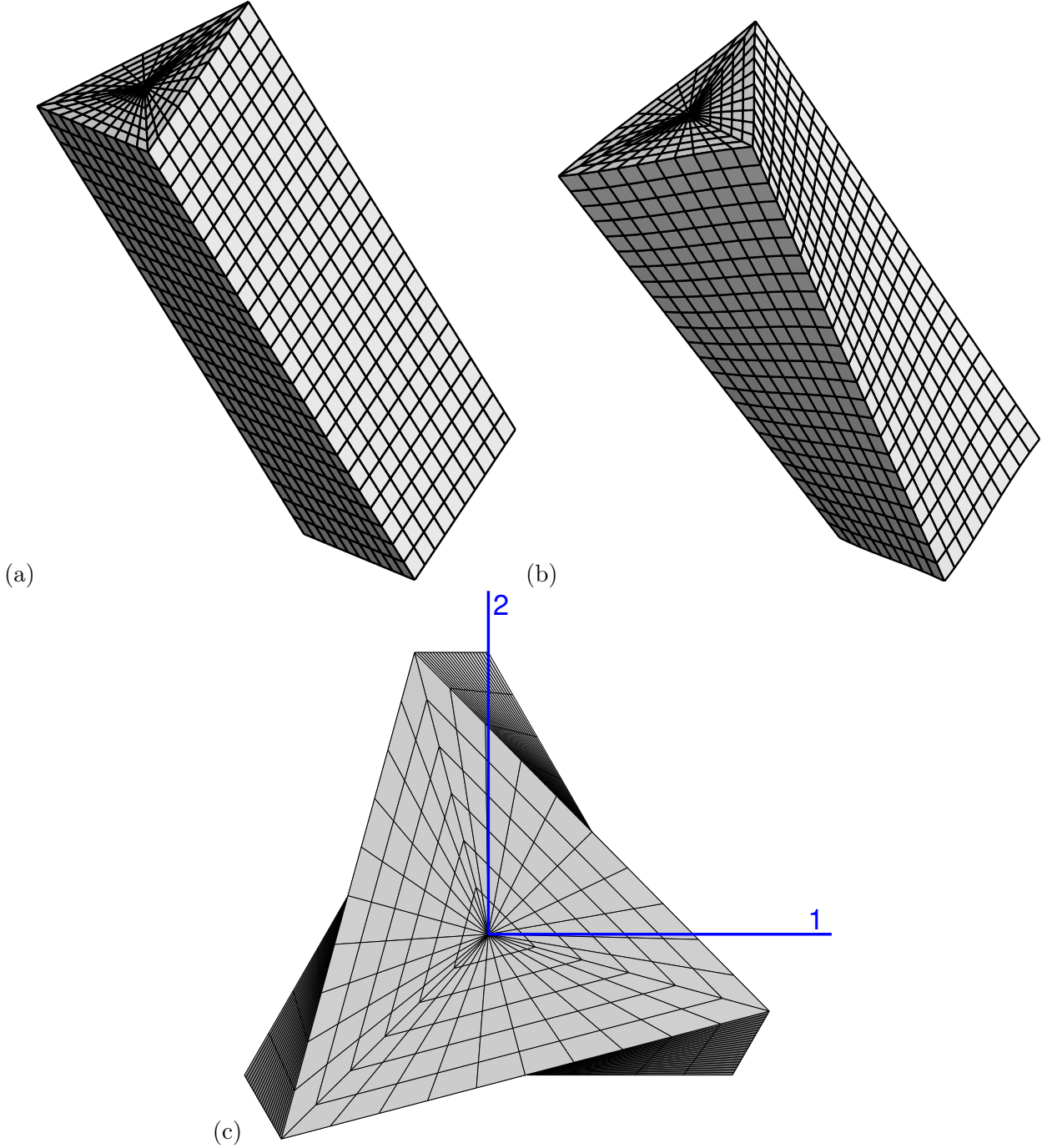


FIGURE 16.3 – Etat déformé d'une barre cylindrique à section triangulaire (côté $a = 1 \text{ mm}$ $\ell = 4 \text{ mm}$, $\alpha = 8^\circ \text{mm}^{-1}$) : (a) état initial, (b) état déformé, (c) vue de dessus (selon l'axe de torsion).

Les deux fonctions précédentes sont liées par la relation :

$$\Psi = A(\psi - (X_1^2 + X_2^2)/2)$$

Les contraintes sont

$$\sigma_{31} = A\left(\frac{\partial \psi}{\partial X_2} - X_2\right), \quad \sigma_{32} = -A\left(\frac{\partial \psi}{\partial X_1} - X_1\right)$$

La constante A est directement liée au moment de torsion appliqué :

$$AJ = \mathcal{C}, \quad J = \int_{S_l} (X_1^2 + X_2^2 - X_1 \frac{\partial \psi}{\partial X_1} - X_2 \frac{\partial \psi}{\partial X_2}) dS \quad (16.45)$$

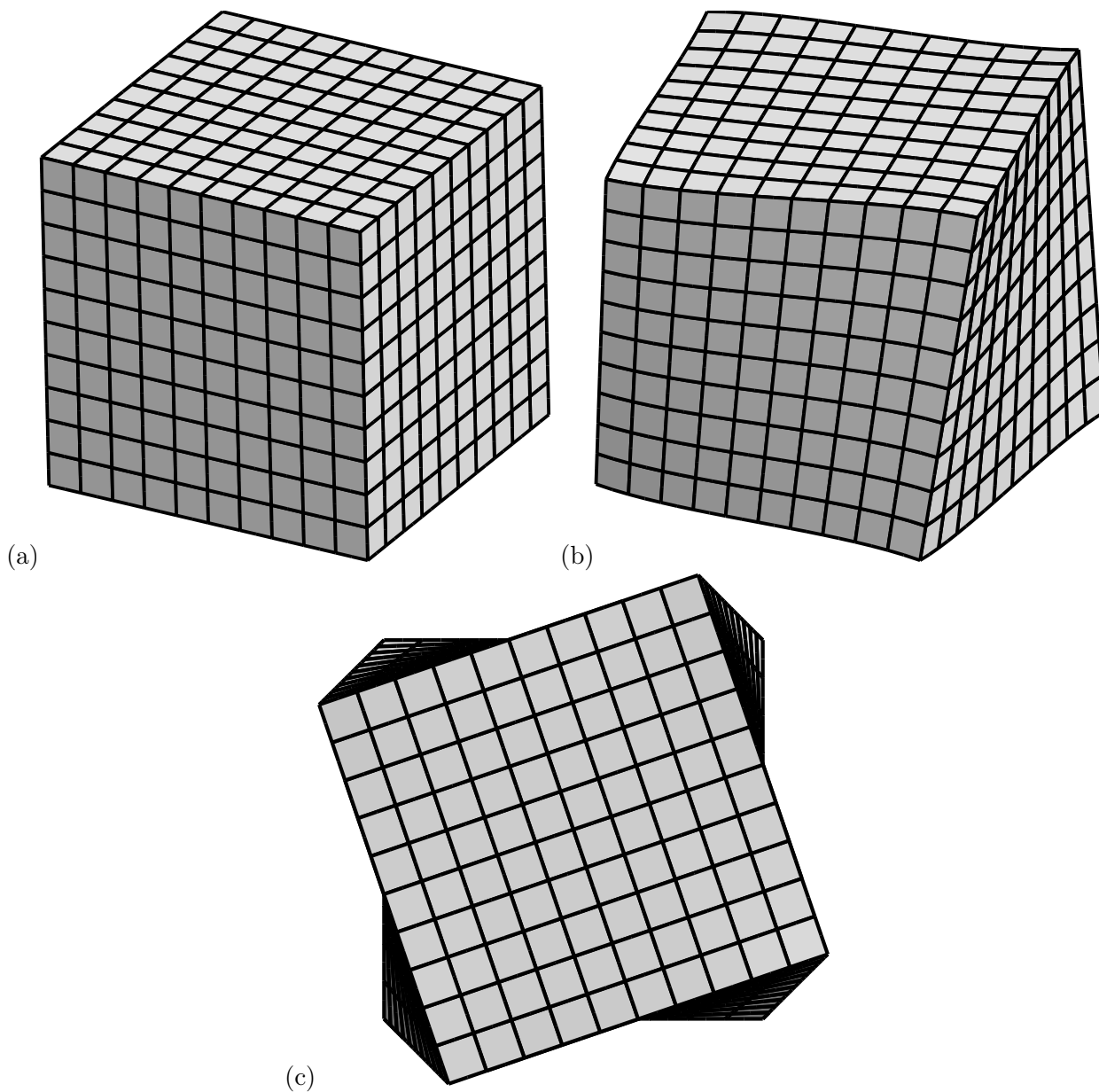


FIGURE 16.4 – Etat déformé d'une barre cylindrique à section carrée (côté $a = 2 \text{ mm}$, $\ell = 2 \text{ mm}$, $\alpha = 5^\circ \text{mm}^{-1}$) : (a) état initial, (b) état déformé, (c) vue de dessus (selon l'axe de torsion).

La définition du moment d'inertie de torsion J est identique à celle déjà établie sous la forme (16.39). L'égalité de ces expressions apparaîtra dans le paragraphe suivant où la relation (16.47) entre ψ et la fonction de gauchissement de torsion ϕ sera établie.

Détermination des déplacements

La procédure systématique de construction du champ de déplacement peut être appliquée. Elle fait appel au calcul des rotations infinitésimales $\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i}$:

$$\omega_{12,1} = 0, \quad \omega_{12,2} = 0, \quad \omega_{12,3} = \varepsilon_{13,2} - \varepsilon_{23,1} = -\frac{A}{\mu}$$

$$\omega_{23,1} = -\varepsilon_{31,2} = \frac{A}{2\mu} \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial X_2^2} + 1 \right), \quad \omega_{23,2} = -\varepsilon_{32,1} = \frac{A}{2\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X_2 \partial X_1}, \quad \omega_{23,3} = 0$$

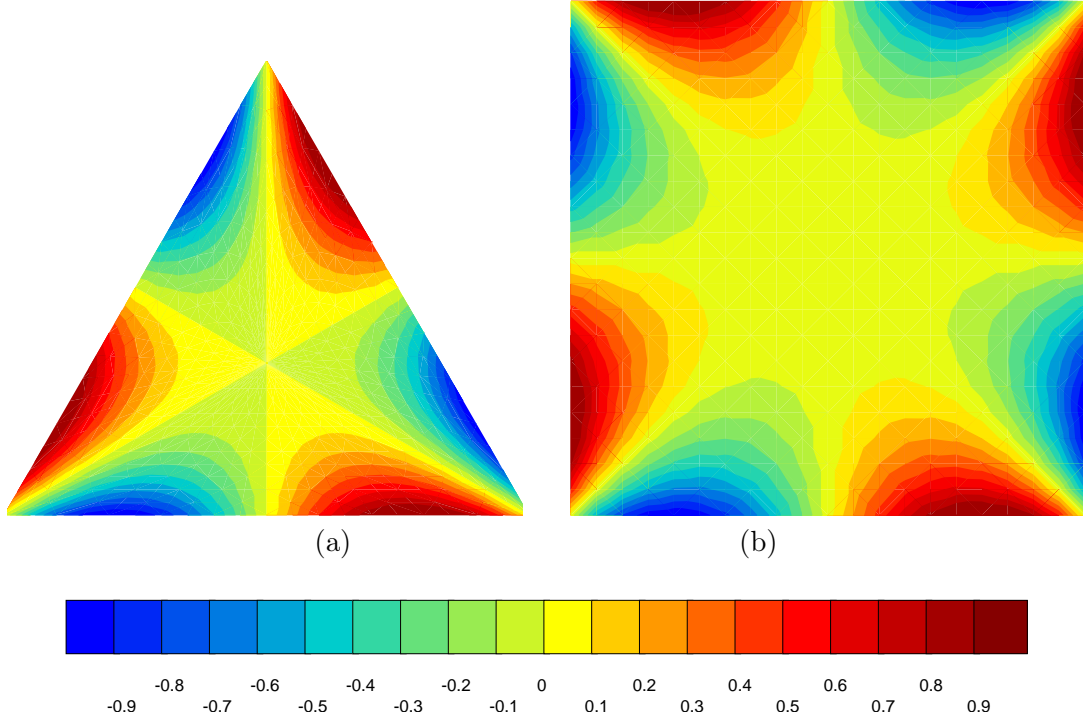


FIGURE 16.5 – Cartes de déplacement u_3 normalisé par la valeur maximale pour une barre à section triangulaire (a) et carrée (b).

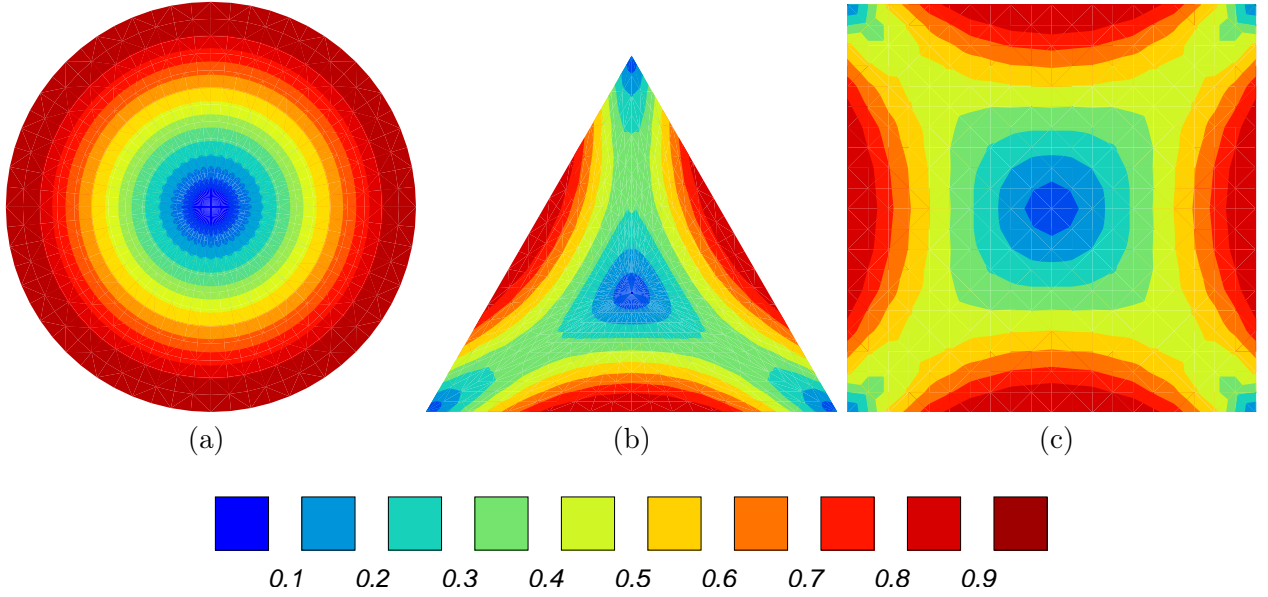


FIGURE 16.6 – Cartes de contrainte $\sigma_{\theta z}$ normalisée par la valeur maximale pour une barre à section circulaire (a), triangulaire (b) et carrée (c).

$$\omega_{31,1} = \varepsilon_{31,1} = \frac{A}{2\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X_2 \partial X_1}, \quad \omega_{31,2} = \varepsilon_{32,1} = -\frac{A}{2\mu} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial X_1^2} - 1 \right), \quad \omega_{31,3} = 0$$

On en déduit que

$$\omega_{12} = -\frac{A}{\mu} X_3, \quad \omega_{23} = \frac{A}{2\mu} \left(\frac{\partial \psi}{\partial X_1} + X_1 \right), \quad \omega_{31} = \frac{A}{2\mu} \left(\frac{\partial \psi}{\partial X_2} + X_2 \right) \quad (16.46)$$

à trois constantes près. Le fait que ψ soit harmonique a été utilisé dans l'intégration. Le gradient du déplacement s'obtient ensuite :

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= 0, & u_{1,2} &= \omega_{12} = -\frac{A}{\mu}X_3, & u_{1,3} &= \varepsilon_{13} - \omega_{31} = -\frac{A}{\mu}X_2 \\ u_{2,1} &= -\omega_{12} = \frac{A}{\mu}X_3, & u_{2,2} &= 0, & u_{2,3} &= \varepsilon_{23} + \omega_{23} = \frac{A}{\mu}X_1 \\ u_{3,1} &= \varepsilon_{31} + \omega_{31} = \frac{A}{\mu}\frac{\partial\psi}{\partial X_2}, & u_{3,2} &= \varepsilon_{32} + \omega_{32} = -\frac{A}{\mu}\frac{\partial\psi}{\partial X_1}, & u_{3,3} &= 0 \end{aligned}$$

La forme différentielle $\alpha = \frac{\partial\psi}{\partial X_2}dX_1 - \frac{\partial\psi}{\partial X_1}dX_2 = a dX_1 + b dX_2$ est telle que

$$\frac{\partial a}{\partial X_2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial X_2^2} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial X_1^2} = \frac{\partial b}{\partial X_1}$$

Il existe donc une fonction $\varphi(X_1, X_2)$ telle que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial X_1} = \frac{\partial\psi}{\partial X_2}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial X_2} = -\frac{\partial\psi}{\partial X_1} \quad (16.47)$$

La fonction φ est par conséquent harmonique. Le champ de déplacement s'intègre alors sous la forme (16.19) avec $\alpha = A/\mu$. La fonction φ est la fonction de gauchissement de torsion.

16.2.5 Barre de section circulaire

Lorsque la section de la barre est un disque de rayon R , le flux de la fonction de gauchissement donné par (16.28) devient :

$$q^d = n_1X_2 - n_2X_1 = \frac{1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}(X_1X_2 - X_2X_1) = 0 \quad (16.48)$$

Les solutions du problème de Neumann avec un flux imposé nul sont les fonctions constantes. En effet, $\varphi = 0$ est à laplacien nul et à flux nul, c'est donc une solution du problème de Neumann. Les autres en diffèrent par une constante. On prend ici

$$\varphi_{disque} = 0 \quad (16.49)$$

Il n'y a donc pas de gauchissement des sections perpendiculaires à l'axe de torsion : elles restent planes. Les champs de déplacement, contraintes et déformations donnés par (16.19), (16.23) et (16.21) s'écrivent plus simplement en coordonnées cylindriques :

$$\underline{u} = \alpha Z r \underline{e}_\theta \quad (16.50)$$

$$\underline{\varepsilon} = \frac{\alpha}{2} r (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta) \quad (16.51)$$

$$\underline{\sigma} = \mu \alpha r (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta) \quad (16.52)$$

$$\mathcal{C} = \mu J \alpha, \quad \text{avec} \quad J = \frac{\pi R^4}{2} \quad (16.53)$$

Seules les composantes $u_\theta, \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{z\theta}, \sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta}$ sont actives. Elles sont linéaires en r et, comme prévu, indépendantes de Z . Les contraintes sont nulles sur l'axe de torsion. Pour un même angle de rotation α par unité de longueur, la déformation est d'autant plus faible que le fil est mince de même

donc que la contrainte. C'est pourquoi il est plus simple de tordre des fils que des barres ! Si le fil est élané, les déplacements peuvent être grands alors même que les déformations restent faibles.

Le vecteur contrainte sur S_ℓ correspond à une densité d'efforts purement tangentiels qui engendrent le moment de torsion \mathcal{C} :

$$\underline{t}^d = \mu \alpha r \underline{e}_\theta \quad (16.54)$$

L'état déformé d'une barre de section circulaire est illustré sur la figure 16.2. On voit en particulier que les droites $X = Y = Cste$ initialement verticales se transforment en droites inclinées.

Plus généralement, la torsion de barres à section triangulaire et carrée est illustrée par les figures 16.3 et 16.4. Contrairement au cas de la section circulaire, les sections triangulaires ou carrées ne restent pas planes. La fonction de gauchissement n'est pas nulle. Le champ de déplacement u_z normalisé est présenté sur la figure 16.5. La fonction de gauchissement est nulle au centre mais ondule près des bords. Les figures 16.3(c) et 16.4(c) montrent par contre que, vues de dessus (selon \underline{e}_z), les sections gardent leur forme et ne subissent qu'une rotation, conformément au champ (16.19).

Les champs de contraintes $\sigma_{\theta z}$ sont illustrés par les figures 16.6 pour les trois types de section. Les résultats présentés ici pour les sections triangulaires et carrées ont été obtenus de manière numérique par la méthode des éléments finis.

Respect du contexte infinitésimal

Les analyses précédentes supposent que les composantes des tenseurs de déformation (16.21) et rotation (16.22) restent infinitésimales. Dans le cas d'une barre de section circulaire ces résultats se traduisent par

$$|\alpha|R \ll 1, \quad |\alpha|\ell \ll 1 \quad (16.55)$$

La seconde condition faisant intervenir la longueur de la barre est la plus stricte et requiert que l'angle de torsion imposé aux extrémités soit suffisamment petit.

Cas d'un tube mince

La solution établie pour une barre à section circulaire est en fait valable aussi pour un tube d'épaisseur e quelconque. En effet, avec le champ de contraintes obtenu (16.23), le vecteur contrainte est nul en tout point d'une surface $r = r^d$ donnée, de sorte que la solution s'applique directement à un tube. L'inertie de torsion pour le tube de rayon intérieur r_i et de rayon extérieur r_e vaut

$$J_{tube} = \pi \frac{r_e^4 - r_i^4}{2} \quad (16.56)$$

Lorsque, de plus, le tube est mince, $r \simeq R$ si bien que contraintes et déformations peuvent être considérées comme constantes dans l'épaisseur du tube. Les champs de contraintes et de déformations sont quasi-homogènes. L'essai de torsion devient alors un bon candidat pour la caractérisation des matériaux puisque l'on recherche des états homogènes, autant que faire se peut. L'essai de torsion sur tube mince est une manière commode de réaliser pratiquement les conditions de glissement simple (dans le plan $(\underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$), qui sont difficiles à réaliser sur des tôles, en raison d'effets de bord plus marqués.

L'essai de torsion sur tube ou sur barre permet de déterminer le module de cisaillement μ du matériau, tout comme l'essai de traction donne accès au module d'Young. Toutefois les précisions obtenues sur ces modules par ces essais de caractérisation statiques sont nettement moins bonnes qu'avec des essais dynamiques (vibrations). L'intérêt de l'essai sur tube mince apparaît plutôt lorsque l'on rentre dans le domaine de plasticité, problème abordé dans la section suivante.

16.3 Au-delà du régime élastique

16.3.1 Rupture fragile d'une barre de section circulaire

Un exemple de rupture fragile d'une éprouvette métallique en torsion a été donné sur la figure 4.4 au chapitre 4 introduisant les contraintes. On demande d'expertiser cette rupture.

La section de la partie utile de l'éprouvette est circulaire. Lors de l'essai de torsion, la contrainte maximale (en valeur absolue), dans la zone utile de l'éprouvette, est atteinte au bord $r = R$ avec la valeur $|\sigma_{\theta z}|^{max} = \mu |\alpha| R$. L'état de contrainte est de cisaillement simple (cf. table 4.3). Les contraintes principales sont donc $\sigma_{\theta z}, -\sigma_{\theta z}$. Les directions principales sont

$$(\underline{e}_\theta + \underline{e}_z)/\sqrt{2}, \quad (\underline{e}_\theta - \underline{e}_z)/\sqrt{2}$$

Le critère de rupture fragile décrit au paragraphe 4.4.3 stipule que la rupture a lieu lorsque la contrainte principale maximale atteint une valeur critique σ_{rupt} . Pour la torsion de la barre, la rupture se produit donc pour :

$$|\alpha| = \alpha_{rupt} := \frac{\sigma_{rupt}}{\mu R} \quad (16.57)$$

On constate souvent en rupture fragile que la surface de rupture est perpendiculaire à la direction principale correspondant à la contrainte principale maximale. Dans le cas présent, ces directions sont à 45° des vecteurs \underline{e}_θ et \underline{e}_z . Cela explique la surface de rupture hélicoïdale² observée sur la figure 4.4.

16.3.2 Limite d'élasticité d'une barre à section circulaire en torsion

Si le matériau est ductile, c'est un critère de plasticité qu'il faut invoquer pour prévoir la limite du fonctionnement élastique de la barre en torsion. Le critère de Tresca (4.63) est un critère classique de plasticité. Il porte sur la différence maximale entre les contraintes principales. Dans le cas de la barre de section circulaire en torsion, le critère devient donc

$$|\sigma_{\theta z}|^{max} = \frac{\sigma_0}{2} \quad (16.58)$$

où σ_0 est la limite d'élasticité en traction. La contrainte est maximale en $r = R$, et c'est à cet endroit que la plasticité apparaît en premier. Ainsi, le fonctionnement de la barre reste élastique tant que :

$$|\alpha| < \frac{\sigma_0}{2\mu R} \quad (16.59)$$

Le critère peut aussi s'énoncer en fonction du couple imposé via l'équation (16.39) :

$$|\mathcal{C}| < \mathcal{C}^{max} := \frac{J\sigma_0}{2R} = \frac{\pi R^3 \sigma_0}{4} \quad (16.60)$$

Que deviennent ces valeurs critiques si l'on utilise le critère de von Mises (4.64) ?

2. Cette observation est facile à faire sur une craie à section circulaire après torsion. La craie est un matériau fragile obéissant avec une bonne approximation au critère de rupture en contrainte normale maximale.

