Traitement du signal

Filtrage

Mines Paris, Tronc commun 1A

23 Mars 2023

Filtrage

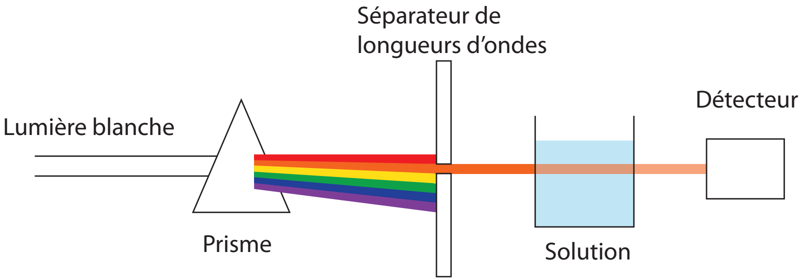


Figure – Exemple de la spectro-photométrie

Sommaire

Produit de convolution

Définition

Deux fonctions f et g sont *convolables* si $u \in \mathbb{R} \to f(t-u)g(u)$ est intégrable pour presque tout $t \in \mathbb{R}$. Le **produit de convolution** de f par g est

$$f*g(t) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(t-u)g(u)du \text{ si } u \to f(t-u)g(u) \text{ est intégrable,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

⚠Il est essentiel de vérifier que le produit de convolution est bien défini.

Produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$:

1. si $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors f et g sont convolables et
$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$
$f * g$ est donc dans $L^1(\mathbb{R})$.
2. si $g \in L^2(\mathbb{R})$, alors f et g sont convolables et
$$\|f * g\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^2}.$$
$f * g$ est donc dans $L^2(\mathbb{R})$.
3. si $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, alors f et g sont convolables et
$$\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty}.$$
$f * g$ est donc dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

Produit de convolution dans $L^2(\mathbb{R})$

Convolution $L^2 * L^2$
Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$. Alors, f et g sont convolables, et le produit de convolution $f * g$ est *borné* et *continu* sur $\mathbb{R}$.

Impulsion de Dirac
L'élément neutre du produit de convolution est noté δ, et appelé *delta, pic, distribution, ou impulsion de Dirac*. Pour tout signal f de $L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$:

$$f * \delta(t) = \int_{\mathbb{R}} f(u)\delta(t-u)du = f(t).$$

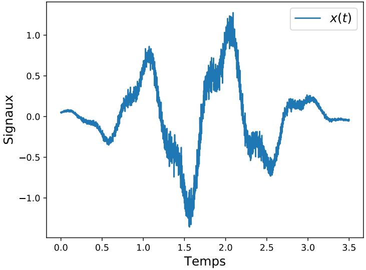
Sommaire

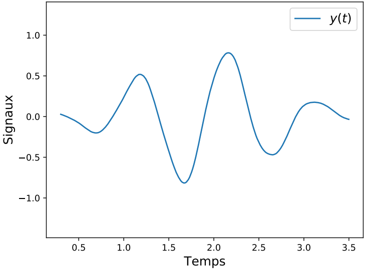
Filtrage LTI

Filtre $=$ endomorphisme de $L^2(\mathbb{R})$.

- **Exemple**

$$\begin{aligned} H: \quad & L^2 \to L^2 \\ & x \mapsto \left(y : t \mapsto \frac{1}{T} \int_{t-T}^{t} x(\tau) d\tau \right) \end{aligned}$$





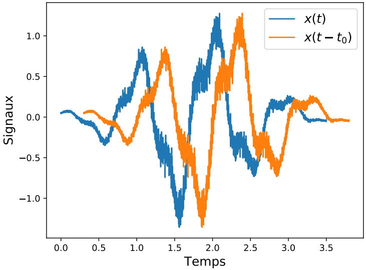
Filtrage LTI

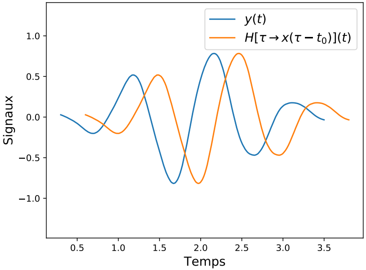
$$\text{Filtre} = \text{endomorphisme de } L^2(\mathbb{R}).$$

- **Exemple**

$$\begin{aligned} H : \quad & L^2 \to L^2 \\ & x \mapsto \left(y : t \mapsto \frac{1}{T} \int_{t-T}^{t} x(\tau) d\tau \right) \end{aligned}$$

- Linear Time-Invariant (LTI)





Réponse impulsionnelle d'un filtre

Théorème (Théorème de Riesz)

Soit $H : L^2(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R})$ un filtre linéaire. Alors, il existe une fonction $h \in L^2(\mathbb{R})$ telle que pour tout signal analogique $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$H[f](0) = \int_{\mathbb{R}} f(u)h(-u)du$$

h est appelée réponse impulsionnelle du filtre et est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = H[\delta](t).$$

Si le filtre est de plus invariant en temps, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, H[f](t) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(u)h(t-u)du}_{\text{Produit de convolution}}.$$

Notion de stabilité d'un filtre

Définition

Un filtre est dit *stable EBSB* (Entrée Bornée Sortie Bornée) si pour tout signal f borné, la sortie filtrée $H[f]$ est également bornée.

$$\begin{aligned} |H[f](t)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(u)||h(t-u)|du \\ &\leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}} h(t-u)du = \|f\|_\infty \|h\|_1 \end{aligned}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un filtre soit EBSB est que sa réponse impulsionnelle soit *intégrable*.

Notion de causalité

Définition

Un filtre est dit *causal* si sa réponse impulsionnelle vérifie

$$h(t) = 0 \text{ si } h < 0.$$

Si H est un filtre causal, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$H[x](t) = \int_{\mathbb{R}} x(u)h(t-u)du = \int_{-\infty}^{t} x(u)h(t-u)du.$$

Pour calculer la sortie d'un filtre causal, on a uniquement besoin de connaître les valeurs *passées* du signal d'entrée.

Sommaire

Produit de convolution et transformée de Fourier

Théorème

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{f * g}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega).$$

Démonstration.

Si f, g sont dans $L^1(\mathbb{R})$, $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et sa transformée de Fourier est

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(u) g(t-u) e^{-i\omega t} du dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(u) g(t-u) e^{-i\omega t} dt du \text{ (Fubini)} \\ &= \widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega). \end{aligned}$$

$\square$

Fonction de transfert d'un filtre

$$H[x](t) = x * h(t) \Leftrightarrow \widehat{H[x]}(\omega) = \widehat{x}(\omega)\widehat{h}(\omega).$$

- La transformée de Fourier (TF) de la sortie est le produit de la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle et de la TF de l'entrée. Dans l'espace fréquentiel, l'effet d'un filtre est décrit par un simple **produit**.

- La fonction $\mathcal{F}h(\omega) = \widehat{h}(\omega)$ est généralement appelée **fonction de transfert** du filtre. Son module $|\mathcal{F}h(\omega)|$ est appelé **gain** du filtre.

Filtre passe-bas idéal

- Domaine Fréquentiel

$$\hat{h}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

- Domaine Temporel

$$h(t) = \frac{1}{\pi t} \sin(\omega_c t). \tag{2}$$

⚠Filtre non stable et non causal

Filtre réalisable en pratique

- Filtre analogique réalisé en pratique à partir de **circuits électroniques** (résistances, condensateurs, etc.)

- Equation dans le domaine temporel

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n}(t) + \cdots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x}{dt^m}(t) + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt}(t) + b_0 x(t).$$

- Equation dans le domaine fréquentiel

$$\widehat{h}(\omega) = \frac{\sum_{p=0}^{m} b_p (\omega i)^p.}{\sum_{q=0}^{n} a_q (\omega i)^q}$$

Sommaire

Transformée de Laplace unilatérale

Définition

Soit f une fonction localement intégrable. La transformée de Laplace unilatérale de f est donnée pour tout $s = x + i\omega \in \mathbb{C}$ par

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$\mathcal{D}_f \subset \mathbb{C}$ est le *domaine de convergence* de $\mathcal{L}[f]$. On note $s_0 \in \mathbb{R}$ et on appelle *abscisse de sommabilité* la quantité

$$s_0 := \min\{s \in \mathbb{R} | t \mapsto f(t)e^{-st} \in L^1(\mathbb{R})\}.$$

Si $s_0 < \infty$, $\mathcal{D}_f = [s_0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

Liens avec la transformée de Fourier

1. Si le domaine de convergence de la transformée de Laplace contient l'origine, alors

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \mathcal{F}f(\omega) = \mathcal{L}[f](i\omega).$$

2. Par ailleurs, pour tout $s = x + i\omega \in \mathcal{D}_f$, on vérifie que

$$\mathcal{L}[f](s) := \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-st}dt = \mathcal{F}(t \mapsto f(t)e^{-xt})(\omega).$$

   En conséquence, la transformée de Laplace est *inversible* :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = e^{xt} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}[f](s)e^{i\omega t}d\omega.$$

Propriétés de la transformée de Laplace

Transformée de Laplace et produit de convolution
Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Pour tout $s \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$, on a :

$$\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[g](s)\mathcal{L}[f](s).$$

▶ La transformée de Laplace transforme le produit de convolution en produit

Transformée de Laplace et dérivation
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $s \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$, on a

$$\mathcal{L}[f'](s) = f(0) + s\mathcal{L}[f](s).$$

Application à l'étude des filtres

1. **Stabilité** Un filtre est stable si et seulement si le domaine de convergence de $\mathcal{L}[h]$ contient l'origine.

2. **Filtres réalisables en pratique** La fonction de transfert d'un filtre réalisable en pratique peut se mettre sous la forme

$$H(s) = \frac{\sum_{p=0}^{P} b_p s^p}{\sum_{q=1}^{Q} a_q s^q} = \frac{N(s)}{P(s)} = \sum_{k=0}^{K} \frac{\alpha_k}{(s - s_k)^{n_k}}.$$

s_k (resp. n_k) pôles (resp. multiplicité des pôles) du filtre.

3. Un filtre réalisable en pratique n'est donc stable que si pour tout $k = 1, \dots, K, Re(s_k) < 0$.

Circuit RC

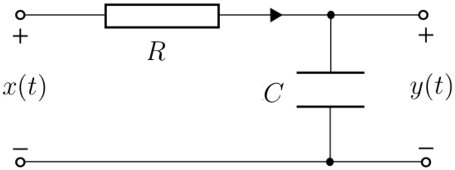


FIGURE – Réalisation d'un filtre analogique passe-bas avec une résistance en série et un condensateur en parallèle.

- **Equation différentielle du circuit**

$$\frac{dy}{dt}(t) + \omega_c y(t) = \omega_c x(t),$$

où la quantité $\omega_c = 1/RC$ est homogène à une fréquence.

Circuit RC (ii)

- **Fonction de transfert dans le domaine de Laplace**

$$Y(s) = \frac{\omega_c}{\omega_c + s} X(s).$$

- **Réponse impulsionnelle**

$$\frac{\omega_c}{\omega_c + s} = \mathcal{L}[t \mapsto \omega_c e^{-\omega_c t}](p)$$

En revenant dans le domaine temporel :

$$s(t) = u(t) * \omega_c e^{-\omega_c t},$$

ce qui permet d'identifier la réponse impulsionnelle du filtre :

$$h(t) = 1_{t>0} \omega_c e^{-\omega_c t}.$$

Circuit RC (iii)

- **Fonction de transfert**

  $$H(\omega) = \frac{\omega_c}{\omega_c + i\omega}.$$

  Le gain de cette fonction de transfert est

  $$|H(\omega)| = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2 + \omega^2}}.$$

  Le filtre défini par le circuit de la figure est donc un filtre passe-bas.

Sommaire

Sommaire

Convolution discrète

Produit de convolution

$$\underbrace{x * h(t) = \int_{\mathbb{R}} x(u)h(t-u)du}_{continu} \quad \leftrightarrow \quad \underbrace{x * h[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k]h[n-k]}_{discret}.$$

Pic de Dirac

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le pic de Dirac reste l'élément neutre du produit de convolution discret.

Réponse impulsionnelle d'un filtre LTI discret

La sortie d'un filtre discret s'écrit comme le produit de convolution discret du signal d'entrée par la réponse impulsionnelle du filtre.

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
Hf[n] &= H(f * \delta)[n] \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f[k] H(\delta[\cdot - k])[n] \text{ (linéarité)} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f[k] \underbrace{H(\delta)[n-k]}_{h[n-k]} \text{ (invariance)}
\end{aligned}
$$

$\square$

Propriétés des filtres LTI discrets

- Un filtre discret est **stable** EBSB si et seulement si sa réponse impulsionnelle h est sommable :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |h[n]| < \infty.$$

- Un filtre discret est **causal** si pour tout $n < 0$, $h[n] = 0$. Dans ce cas, l'opération de filtrage ne fait intervenir que les valeurs *passées* du signal d'entrée.

Sommaire

Transformée en z

Définition (Transformée en z)

On définit la transformée en z d'un signal discret x par

$$X(z) = \mathscr{Z}x(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}.$$

Cette transformation est définie sur le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ où la série converge simplement, appelé *domaine de convergence*.

Propriétés de la transformée en z

- Lorsque le filtre est *causal*, le domaine de convergence de la transformée en z est l'ensemble

$$\mathcal{D}_h(z) = \{z \in \mathbb{C}, |z] > \frac{1}{\rho}\},$$

où ρ est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} h[n]$.

- La transformée en z peut être interprétée comme une généralisation de la TFTD :

$$\widehat{x}(\omega) = \mathcal{Z}x(e^{i\omega}).$$

Un filtre est stable si et seulement si le cercle unité est inclus dans le domaine de convergence de sa transformée en z.

Propriétés de la transformée en z (ii)

- **Transformée en z et décalage temporel** Pour tout $n_0 \in \mathbb{Z}$, on vérifie :

$$z^{-n_0}\mathcal{Z}x(z) = \mathcal{Z}[n \to x[n - n_0]](z).$$

Un décalage temporel d'un signal se traduit par un " déphasage" de sa transformée en z.

- **Transformée en z et convolution discrète**

$$\mathcal{Z}[x * h](z) = \mathcal{Z}[x](z)\mathcal{Z}[h](z).$$

La transformée en z transforme le produit de convolution en produit.

Lien avec la transformée de Laplace

$$\mathcal{Z}h_d(z) = \frac{1}{\Delta t}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}h\left(s - i\frac{2\pi k}{\Delta t}\right), \text{ où on a posé } z = e^{s\Delta t}.$$

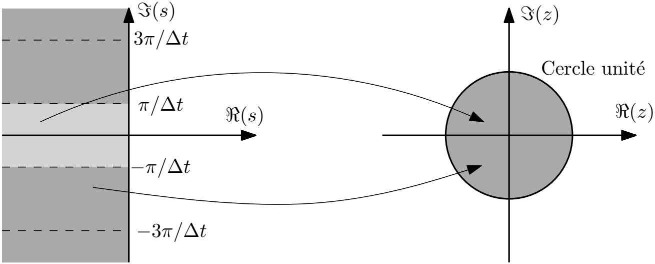


FIGURE – La transformation $s \in \mathbb{C} \mapsto z = e^{s\Delta t} \in \mathbb{C}$ envoie le demi-plan complexe gauche dans le disque unité.

Exemple : étude d'un filtre

On considère le filtre décrit par **l'équation aux différences finies**

$$y[n] + a_1 y[n-1] = b_0 x[n].$$

- **Transformée en z**

$$\mathcal{Z}h(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z}.$$

- **Condition de stabilité**

$$a_1 > 0.$$

Différentes représentations

Représentation	Continu	Discret
Entrée-sortie	$y(t) = Hx(t)$	$y[n] = Hx[n]$
Réponse impulsionnelle	$y(t) = (h * x)(t)$	$y[n] = (h * x)[n]$
Fonction de transfert	$\hat{y}(\omega) = \widehat{h}(\omega)\hat{x}(\omega)$	$Y(e^{i\omega}) = H(e^{i\omega})X(e^{i\omega})$
Eq. Diff/aux diff. finies	$\dot{Y} = AY + BX$	$y[n] = \sum_{k=1}^{K} a_k y[n-k]$ $+ \sum_{q=0}^{Q} x[n-q]$
Laplace/en z	$Y(s) = H(s)X(s)$	$Y(z) = H(z)X(z)$