

23 Torsion

23.1 Introduction

La solution du problème de torsion d'une barre cylindrique de section quelconque a été établie par A. Barré de Saint-Venant¹ entre 1853 et 1855. Pour aborder sa résolution, il est utile de commencer par un préliminaire d'ordre mathématique sur les problèmes aux limites de Dirichlet et de Neumann pour les fonctions harmoniques.

23.1.1 Problème de Dirichlet pour les fonctions harmoniques

On considère un domaine Ω de l'espace ou du plan, supposé simplement connexe, de frontière $\partial\Omega$. Le problème de Dirichlet pour les fonctions harmoniques consiste à chercher les fonctions ψ à laplacien nul et prenant des valeurs imposées sur le contour $\partial\Omega$ de Ω :

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & \text{sur } \Omega \\ \psi(\underline{x}) = f(\underline{x}) & \forall \underline{x} \in \partial\Omega \end{cases} \quad (23.1)$$

où la fonction f est supposée continue. Les fonctions à laplacien nul sont dites **harmoniques**.

Si le contour $\partial\Omega$ est suffisamment régulier, le problème de Dirichlet admet une solution unique.

23.1.2 Problème de Neumann pour les fonctions harmoniques

On considère un domaine Ω de l'espace, supposé simplement connexe, de frontière $\partial\Omega$. Le problème de Neumann pour les fonctions harmoniques consiste à chercher les fonctions φ à laplacien nul et à flux imposé q^d sur la frontière :

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{sur } \Omega \\ \nabla\varphi \cdot \underline{n} = q^d & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (23.2)$$

On établit d'abord une condition nécessaire à l'existence d'une solution. Pour cela, on évalue le flux total de φ sortant de Ω :

$$\int_{\partial\Omega} \nabla\varphi \cdot \underline{n} dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla\varphi dV = \int_{\Omega} \Delta\varphi dV = 0 \quad (23.3)$$

Le théorème de la divergence (12.159) a été utilisé au passage. Dans le calcul précédent est apparue la dérivée normale de φ en un point matériel $\underline{x} \in \partial\Omega$ définie comme

$$\frac{d\varphi}{dn} := \nabla\varphi \cdot \underline{n} \quad (23.4)$$

La donnée q^d doit être compatible avec la condition précédente. Une condition nécessaire d'existence d'une solution est par conséquent

$$\int_{\partial\Omega} q^d dS = 0 \quad (23.5)$$

Dans ces conditions, des résultats d'ordre mathématique montrent que la solution est déterminée de manière unique, à une constante additive près.

1. Adémard Barré de Saint-Venant (1797-1886)

Cas plan

Si $\varphi(x, y)$ est une fonction du plan définie sur la surface plane S , simplement connexe, de bord Γ , le problème de Neumann s'écrit

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 & \text{sur } S \\ \nabla\varphi \cdot \underline{n} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} n_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y} n_2 = q^d & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (23.6)$$

Il est instructif de reprendre la preuve de la condition nécessaire (23.5) dans le cas bidimensionnel. Soit $x(t), y(t)$ une paramétrisation du contour Γ . Le vecteur tangent en tout point de Γ est colinéaire à $[x'(t) \ y'(t)]^T$ où la notation $x' = dx/dt$ est utilisée. Le vecteur normal à Γ dans le plan (x, y) est colinéaire à $[y' \ -x']^T$. On introduit l'élément de longueur $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$ et l'abscisse curviligne s le long du contour. La dérivée normale de φ le long de Γ est

$$\frac{d\varphi}{dn} = \nabla\varphi \cdot \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} y' - \frac{\partial\varphi}{\partial y} x' \right) \quad (23.7)$$

L'intégration de ce flux le long de Γ conduit à

$$\int_{\Gamma} \frac{d\varphi}{dn} ds = \int_{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial\varphi}{\partial y} dx \right) = \int_S \underbrace{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \right)}_{\Delta\varphi=0} dxdy = 0 \quad (23.8)$$

car $y'ds = dy\sqrt{x'^2 + y'^2}$ et $x'ds = dx\sqrt{x'^2 + y'^2}$. Pour passer de la deuxième à la troisième égalité, on a utilisé le théorème de Green, qui n'est guère qu'un cas particulier du théorème de la divergence dans le cas bidimensionnel :

Théorème 39 (Théorème de Green) *Soit P, Q deux fonctions régulières définies sur une surface S du plan, de frontière Γ , alors*

$$\int_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \quad (23.9)$$

On obtient finalement la condition nécessaire d'existence de solution pour le problème de Neumann bidimensionnel

$$\int_{\Gamma} q^d dl = 0 \quad (23.10)$$

Il ne s'agit en fait que d'un cas particulier de (23.5), démontré plus haut en toute généralité.

23.2 Torsion élastostatique d'un barreau cylindrique

On considère un barreau cylindrique de section courante S de forme quelconque (simplement connexe, c'est-à-dire d'un seul "tenant" et sans trou ni "poignée") et de longueur ℓ , comme l'indique la figure 23.1. L'axe du cylindre est l'axe 3. Le barreau est constitué d'un matériau homogène et isotrope. Il est soumis aux efforts suivants :

- les efforts volumiques sont nuls ou négligés ;
- les surfaces latérales, i.e. $\partial S \setminus (S_0 \cup S_{\ell})$, sont libres :

$$\underline{t}^d = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = 0 \quad (23.11)$$

- les extrémités S_0 et S_ℓ sont soumises à des densités surfaciques d'effort dont seul le torseur résultant est donné sur chaque extrémité. Le torseur des efforts appliqués à la section S_ℓ est

$$\{O, \underline{\mathbf{R}} = 0, \underline{\mathbf{M}}_0 = \mathcal{C} \underline{\mathbf{e}}_3\} \quad (23.12)$$

Le torseur des efforts appliqués à la section S_0 est

$$\{O, \underline{\mathbf{R}} = 0, \underline{\mathbf{M}}_0 = -\mathcal{C} \underline{\mathbf{e}}_3\} \quad (23.13)$$

Un couple \mathcal{C} selon l'axe $\underline{\mathbf{e}}_3$ est donc appliqué à l'extrémité S_ℓ et le couple opposé à l'autre extrémité. La résultante des forces sur chaque section est nulle.

On peut vérifier que le torseur résultant des efforts appliqués au barreau est nul. De manière similaire au cas de la flexion traité à la section 9.2.2, on est confronté à un problème aux limites mal posé, puisque seul le torseur des efforts appliqués aux extrémités est donné au lieu du vecteur contrainte ou déplacement en chaque point des extrémités. On ne peut donc attendre de solution unique au problème posé. Toutefois, en vertu du principe de Saint-Venant exposé à la section 9.2.3, il existe une solution qui, suffisamment loin des extrémités, ne dépend quasiment pas de la façon dont les efforts sont appliqués aux extrémités. C'est cette solution qui nous intéresse ici. Pour la mettre en évidence, une certaine distribution particulière d'efforts ou de déplacements sera admise aux extrémités, compatible avec le torseur appliqué. Pour un tel choix, la solution devient bel et bien unique.

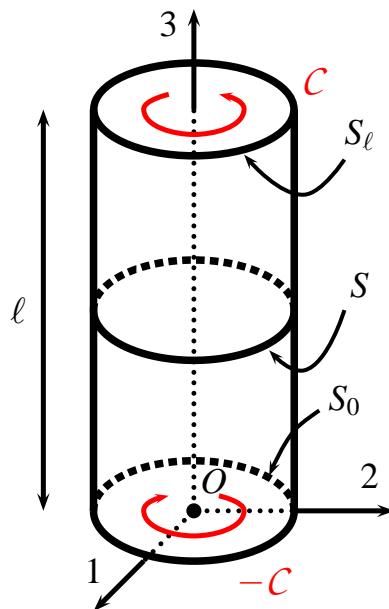


Figure 23.1 : Torsion d'un barreau cylindrique : schéma de principe.

23.2.1 Méthode des déplacements

Bien que le problème ait été posé en terme d'efforts par l'intermédiaire du moment \mathcal{C} , c'est vers une solution par la méthode des déplacements que l'on se tourne ici. En effet, on imagine que l'application du moment d'axe 3 va provoquer une rotation des sections par rapport à cet axe.

Proposer, dans le contexte infinitésimal, une cinématique dictant une rotation relative d'une section de cote donnée à la suivante. On supposera que la section S_0 ne bouge pas tandis que la section S_ℓ subit la rotation maximale.

► Si l'on suppose qu'une section de cote $X_3 = Z$ subit une rotation \underline{Q} d'axe \underline{e}_3 et d'angle θ , chaque point de cette section aura pour nouvelle position :

$$\underline{x} = \underline{X}_Z + \underline{Q} \cdot (\underline{X} - \underline{X}_Z) \quad (23.14)$$

On calcule le déplacement associé :

$$\underline{u}(\underline{X}) = (\underline{Q} - \underline{1}) \cdot (\underline{X} - \underline{X}_Z) \quad (23.15)$$

Le centre de rotation $\underline{X}_Z = Z\underline{e}_3$ ne jouera en fait aucun rôle dans la suite. Dans le contexte infinitésimal, la rotation \underline{Q} peut être remplacée par son vecteur axial $\overset{\times}{\underline{Q}}$ tel que

$$\underline{u}(\underline{X}) = (\underline{Q} - \underline{1}) \cdot (\underline{X} - \underline{X}_Z) = \overset{\times}{\underline{Q}} \wedge (\underline{X} - \underline{X}_z) \quad (23.16)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 - X_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta X_2 \\ \theta X_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23.17)$$

Les matrices sont écrites dans le système de coordonnées cartésiennes orthonormées dont la base figure sur la figure 23.1. L'angle θ est nul en $X_3 = 0$ et maximal en $X_3 = \ell$. La fonction $\theta(X_3)$ peut être intuitivement supposée monotone croissante. La nécessité d'une dépendance linéaire ou affine s'établit en calculant successivement déformations et contraintes. Les conditions d'équilibre local $\sigma_{1j,j} = 0$ et $\sigma_{2j,j} = 0$ conduisent à l'équation différentielle $\theta''(X_3) = 0$, de sorte que

$$\theta = \alpha X_3 \quad (23.18)$$

Le coefficient α désigne un angle imposé par unité de longueur.

L'expérience courante nous indique, par exemple lors de la torsion de barre à section rectangulaire (tordre une gomme...), que, si chaque section subit effectivement une rotation, on ne peut exclure un gondolement ou gauchissement de la surface venant se superposer à la rotation : une section plane ne le reste pas nécessairement. On se propose donc de tester le champ de déplacement suivant :

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha X_2 X_3 \\ u_2 = \alpha X_1 X_3 \\ u_3 = \alpha \varphi(X_1, X_2) \end{cases} \quad (23.19)$$

où le déplacement u_3 correspond à un gauchissement de la surface $X_3 = Cste$ après déformation. La fonction φ inconnue est la fonction de gauchissement. Le gradient de la transformation vaut

$$[\underline{F}] = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha X_3 & -\alpha X_2 \\ \alpha X_3 & 1 & \alpha X_1 \\ \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} & \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} & 1 \end{bmatrix} \quad (23.20)$$

Il se décompose en une déformation et une rotation infinitésimales :

$$[\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right) \\ \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) & \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (23.21)$$

$$[\underline{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha X_3 & -\frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} + X_2 \right) \\ \alpha X_3 & 0 & \frac{\alpha}{2} \left(X_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} \right) \\ \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} + X_2 \right) & \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} - X_1 \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (23.22)$$

La déformation proposée ne s'accompagne d'aucun changement de volume puisque la trace de $\underline{\varepsilon}$ est nulle. La barre ne s'allonge pas lorsqu'on la tord puisque $\varepsilon_{33} = 0$.

Evaluation des contraintes et des conditions d'équilibre

Dans le cadre de l'élasticité isotrope linéarisée, évaluer les contraintes engendrées par les déformations calculées précédemment. A quelles conditions portant sur la fonction de gauchissement, l'équilibre statique est-il réalisé ?

► Comme la trace de la déformation est nulle, la loi d'élasticité isotrope linéarisée à partir d'un état naturel (8.44), s'écrit :

$$\sigma = 2\mu \underline{\varepsilon}, \quad [\sigma] = \mu \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 & \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (23.23)$$

où μ est le module de cisaillement. En l'absence de forces volumiques et dans le cas statique, la divergence du tenseur des contraintes est nulle. En coordonnées cartésiennes orthonormées, cette condition s'écrit $\sigma_{ij,j} = 0$. La seule équation pertinente en tenant compte de la forme trouvée (23.23) pour le tenseur des contraintes, est

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} = 0 \quad (23.24)$$

En substituant les composantes trouvées, on obtient la condition :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_2^2} = \Delta \varphi = 0, \quad \forall \underline{X} \in S \quad (23.25)$$

pour toute section S . La fonction de gauchissement doit donc être harmonique pour que la solution en déplacements proposée soit recevable.

La fonction de gauchissement doit en outre permettre de satisfaire les conditions à la frontière (23.11) à (23.13).

On commence par la condition de bord libre (23.11) que l'on écrit sur la frontière Γ d'une

section courante S et de vecteur normal $[n_1 \ n_2 \ 0]^T$:

$$\begin{aligned}\underline{\boldsymbol{t}}^d &= \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}} = (\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2)\underline{\boldsymbol{e}}_3 \\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial X_1}n_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial X_2}n_2 - X_2n_1 + X_1n_2 \right) \underline{\boldsymbol{e}}_3 = 0\end{aligned}\quad (23.26)$$

On aboutit à la condition supplémentaire portant sur φ :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial X_1}n_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial X_2}n_2 = \nabla\varphi \cdot \underline{\boldsymbol{n}} = \frac{d\varphi}{dn} = n_1X_2 - n_2X_1, \quad \forall \underline{\boldsymbol{X}} \in \Gamma \quad (23.27)$$

Remarquer que $n_1X_2 - n_2X_1 = (\underline{\boldsymbol{n}} \wedge \underline{\boldsymbol{X}}) \cdot \underline{\boldsymbol{e}}_3$. Au passage, on a reconnu le flux du gradient de φ à travers Γ , appelée aussi dérivée normale de φ , en suivant la définition (23.4). La condition de bord libre impose donc le flux de φ . Sur une section courante S , la fonction de gauchissement est donc solution de l'équation (23.25) avec la condition de flux imposé (23.27) sur son contour Γ . On reconnaît un problème de Neumann, du type (23.2), avec

$$q^d = n_1X_2 - n_2X_1, \quad \forall \underline{\boldsymbol{X}} \in \Gamma \quad (23.28)$$

On sait qu'une condition nécessaire à l'existence d'une solution est que le flux total de la donnée q^d soit nul, i.e. la condition (23.5). Il faut vérifier cette condition dans le cas du flux (23.28). Le contour Γ admet une paramétrisation $X_1(s), X_2(s)$ et un vecteur normal dans le plan (X_1, X_2) égal à $[X'_2 \ -X'_1 \ 0]^T$, ce qui permet d'évaluer l'intégrale

$$\int_{\Gamma} (n_1X_2 - n_2X_1) ds = \int_{\Gamma} \left(\frac{dX_2}{ds}X_2 + \frac{dX_1}{ds}X_1 \right) ds = \int_{\Gamma} (X_1 dX_1 + X_2 dX_2) = 0 \quad (23.29)$$

La dernière intégrale est effectivement nulle sur un contour fermé. D'après le préliminaire mathématique 23.1.2, la réalisation de la condition (23.5) garantit l'existence de la fonction de gauchissement et son unicité à une constante additive près correspondant à une translation selon $\underline{\boldsymbol{e}}_3$, qu'il reste à fixer.

Il reste à évaluer les conditions imposées sur les surfaces S_0 et S_{ℓ} , à savoir la résultante nulle et le moment appliqué \mathcal{C} . Ce point fait l'objet de la section suivante.

23.2.2 Force résultante

On évalue d'abord la résultante des efforts induits par les contraintes calculées précédemment :

$$\begin{aligned}\underline{\boldsymbol{R}} &= \int_{S_{\ell}} \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{e}}_3 dS \\ &= \mu\alpha \left(\int_{S_{\ell}} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) dS \right) \underline{\boldsymbol{e}}_1 + \mu\alpha \left(\int_{S_{\ell}} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial X_2} + X_1 \right) dS \right) \underline{\boldsymbol{e}}_2\end{aligned}\quad (23.30)$$

Le résultat semble dépendre de la fonction de gauchissement et donc de la géométrie particulière de la section. En fait, on va montrer qu'il n'en est rien. Pour le voir, on part de la condition (23.27) portant sur φ établie plus haut et remplie sur Γ :

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) n_1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial X_2} + X_1 \right) n_2 = 0 \quad (23.31)$$

On multiplie l'expression précédente par X_1 et on l'intègre sur le contour Γ :

$$\int_{\Gamma} \left(X_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) n_1 + X_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right) n_2 \right) ds = 0 \quad (23.32)$$

$$\int_{\Gamma} \left(\underbrace{X_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) dX_2}_{Q} - \underbrace{X_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right) dX_1}_{P} \right) = 0 \quad (23.33)$$

Les termes P et Q ont été soulignés dans l'expression précédente afin de pouvoir appliquer le théorème de Green (23.9). L'expression précédente est donc égale à

$$\int_S \left(\frac{\partial}{\partial X_1} \left(X_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) \right) + \frac{\partial}{\partial X_2} \left(X_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right) \right) \right) dS = 0 \quad (23.34)$$

$$\int_S \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) + X_1 \left(\underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_2^2}}_{=0 \text{ d'après (23.25)}} \right) \right) dS = 0 \quad (23.35)$$

On en déduit que

$$\int_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) dS = 0, \quad \int_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right) dS = 0 \quad (23.36)$$

La première équation (23.36)₁ résulte de la chaîne de calculs (23.35). La deuxième équation (23.36)₂ est le résultat que l'on obtient en suivant le même démarche mais en multipliant l'équation (23.31) par X_2 au lieu de X_1 . Les résultats (23.36) permettent de conclure que, pour toute fonction de gauchissement φ vérifiant (23.25) et (23.27), la résultante (23.30) des efforts sur la section S_ℓ est nulle. Il en va de même pour la résultante sur la section S_0 . Ces résultats sont compatibles avec le chargement imposé (23.12) et (23.13).

23.2.3 Rigidité de torsion

Il reste à calculer le moment résultant des forces sur la section S_ℓ par rapport au point O :

$$\underline{\underline{M}}_O = \int_{S_\ell} \underline{\underline{OM}} \wedge (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) dS \quad (23.37)$$

$$\begin{aligned}
[\underline{\mathbf{M}}_O] &= \mu\alpha \int_{S_\ell} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ell \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial X_1} - X_2 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial X_2} + X_1 \\ 0 \end{bmatrix} dS \\
&= \mu\alpha \int_{S_\ell} \begin{bmatrix} -\ell(\frac{\partial\varphi}{\partial X_2} + X_1) \\ \ell(\frac{\partial\varphi}{\partial X_1} - X_2) \\ X_1(\frac{\partial\varphi}{\partial X_2} + X_1) - X_2(\frac{\partial\varphi}{\partial X_1} - X_2) \end{bmatrix} dS \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu\alpha \int_{S_\ell} \left(X_1(\frac{\partial\varphi}{\partial X_2} + X_1) - X_2(\frac{\partial\varphi}{\partial X_1} - X_2) \right) dS \end{bmatrix} \quad (23.38)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le résultat (23.36). Le moment résultant est donc porté par $\underline{\mathbf{e}}_3$. On peut l'identifier au couple imposé à S_ℓ , à savoir $\mathcal{C} \underline{\mathbf{e}}_3$ d'après (23.12) :

$$\mathcal{C} = \mu J \alpha, \quad J := \int_S \left(X_1(\frac{\partial\varphi}{\partial X_2} + X_1) - X_2(\frac{\partial\varphi}{\partial X_1} - X_2) \right) dS \quad (23.39)$$

La formule (23.39) relie le couple imposé \mathcal{C} à l'angle de rotation de section par unité de longueur axiale α , par le biais de la **rigidité de torsion** μJ . La rigidité de torsion dépend du module de cisaillement du matériau et de la géométrie de la section. J est appelé **inertie de torsion** de la section.

Une autre expression du moment d'inertie J peut être obtenue en reprenant la démarche mise en œuvre pour le calcul de la force résultante au paragraphe 23.2.2. On multiplie cette fois l'expression (23.31) par φ , on l'intègre sur le contour Γ et on applique le théorème de Green. On peut alors montrer que

$$\begin{aligned}
J &= \int_S \left(X_1(\frac{\partial\varphi}{\partial X_2} + X_1) - X_2(\frac{\partial\varphi}{\partial X_1} - X_2) \right) dS \\
&= \int_S \left((\frac{\partial\varphi}{\partial X_1} - X_2)^2 + (\frac{\partial\varphi}{\partial X_2} + X_1)^2 \right) dS \quad (23.40)
\end{aligned}$$

Cette expression met en valeur le fait que J soit positif quelle que soit la forme de la section non réduite à un point. Un couple $\mathcal{C} > 0$ positif selon Z implique donc nécessairement une rotation des sections dans le même sens d'après (23.39), ce qui est conforme à l'intuition.

23.2.4 Méthode des contraintes

Le problème de la torsion d'une barre cylindrique a été résolu dans les sections précédentes par la méthode des déplacements. Il est en fait tout aussi légitime de l'aborder du point de vue des contraintes. En effet, le moment de torsion sur une extrémité de la barre résulte de l'existence de contributions de contraintes de cisaillement σ_{13} et σ_{23} .

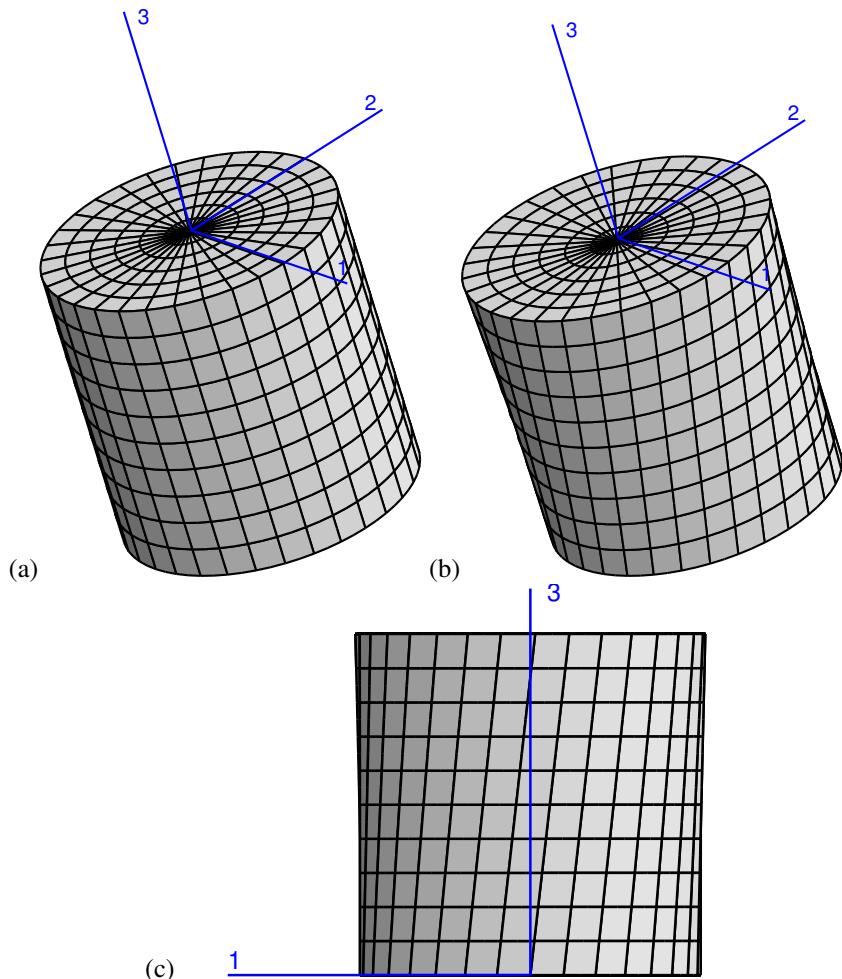


Figure 23.2 : Déformée d'une barre cylindrique à section circulaire ($R = 1 \text{ mm}$, $\ell = 2 \text{ mm}$, $\alpha = 10^\circ \text{mm}^{-1}$) : (a) état initial, (b) vue 3D de la déformée, (c) vue selon l'axe 2.

Cette remarque conduit à rechercher des contraintes de la forme :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (23.41)$$

Les équations d'équilibre indiquent que $\sigma_{13,3} = \sigma_{23,3} = 0$ de sorte que ces contraintes de cisaillement sont des fonctions de X_1 et X_2 . Elles vérifient également

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} = 0 \implies \frac{\partial}{\partial X_1} (\sigma_{31} + g(X_2)) = \frac{\partial}{\partial X_2} (-\sigma_{32} + f(X_1))$$

où f et g sont des fonctions dérivables arbitraires. L'équation précédente montre que la forme différentielle $\alpha(X_1, X_2) = (-\sigma_{32} + f(X_1))dX_1 + (\sigma_{31} + g(X_2))dX_2$ est exacte

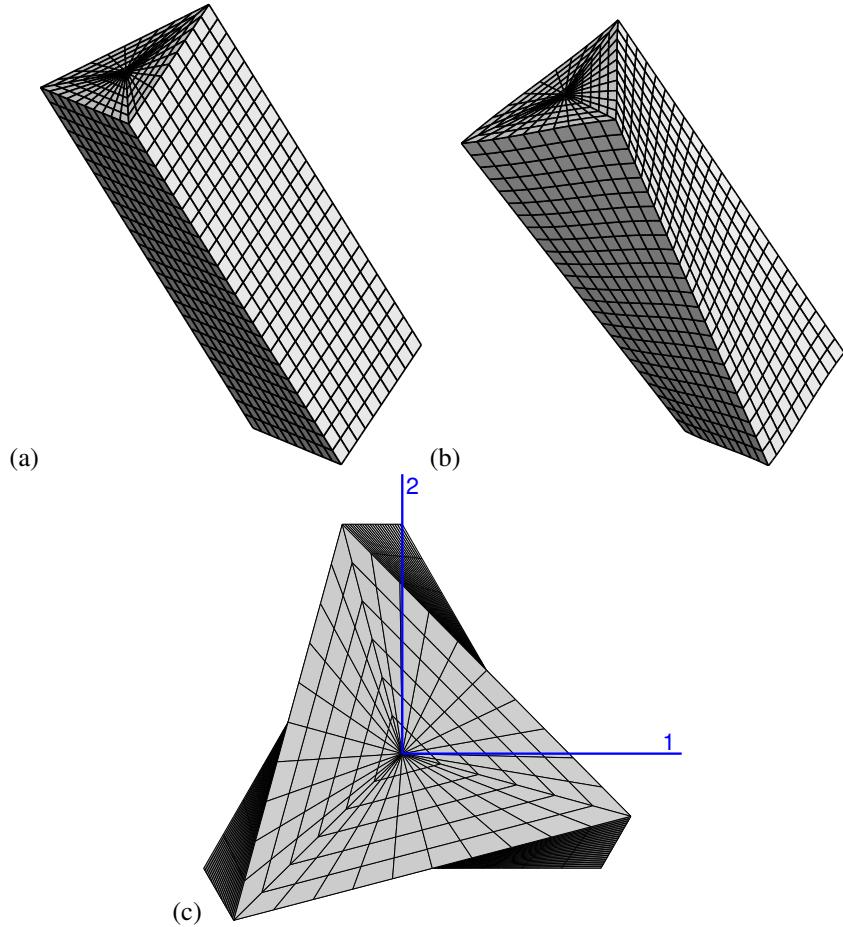


Figure 23.3 : Etat déformé d'une barre cylindrique à section triangulaire (côté $a = 1 \text{ mm}$, $\ell = 4 \text{ mm}$, $\alpha = 8^\circ \text{mm}^{-1}$) : (a) état initial, (b) état déformé, (c) vue de dessus (selon l'axe de torsion).

sur S . Il existe donc une fonction $\Psi(X_1, X_2)$ telle que

$$\sigma_{31} = \frac{\partial \Psi}{\partial X_2} - g(X_2), \quad \sigma_{32} = -\frac{\partial \Psi}{\partial X_1} + f(X_1) \quad (23.42)$$

Les équations de compatibilité appliquées aux déformations ε_{31} et ε_{32} conduisent alors aux relations supplémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{31,22} - \sigma_{32,12} &= 0 = \frac{\partial}{\partial X_2}(\sigma_{31,2} - \sigma_{32,1}) = \frac{\partial}{\partial X_2}(\Delta\Psi - f' - g') \\ \sigma_{31,12} - \sigma_{32,11} &= 0 = \frac{\partial}{\partial X_1}(\sigma_{31,2} - \sigma_{32,1}) = \frac{\partial}{\partial X_1}(\Delta\Psi - f' - g') \end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'il existe une constante A telle que $\Delta\Psi = -2A + f' + g'$.

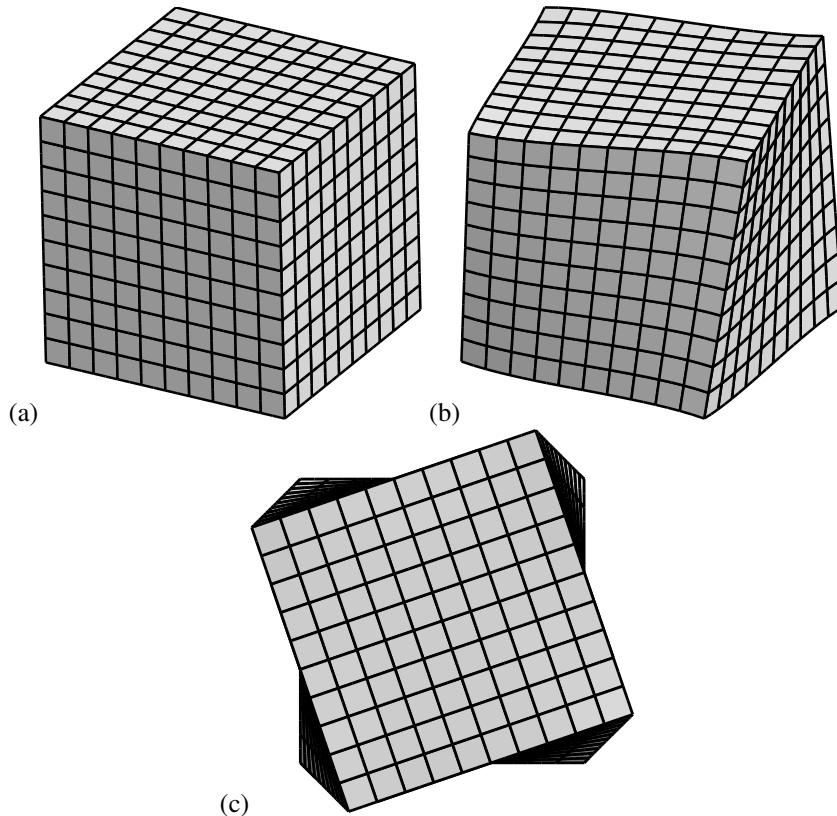


Figure 23.4 : Etat déformé d'une barre cylindrique à section carrée ($côté a = 2 \text{ mm}$, $\ell = 2 \text{ mm}$, $\alpha = 5^\circ \text{mm}^{-1}$) : (a) état initial, (b) état déformé, (c) vue de dessus (selon l'axe de torsion).

La condition au bord Γ de chaque section S s'écrit :

$$\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 = 0 \implies \sigma_{31}dX_2 - \sigma_{32}dX_1 = 0$$

Lorsque l'on prend $f = g = 0$, cette condition s'écrit

$$\frac{\partial \Psi}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial X_2} dX_2 = d\Psi = 0$$

ce qui traduit que Ψ est constante le long du contour. La valeur de cette constante n'a pas d'importance car elle n'influence pas la valeur des contraintes. La fonction Ψ est alors solution du problème

$$\begin{cases} \Delta \Psi = -2A & \text{sur } S \\ \Psi(\underline{X}) = \text{Cste} & \forall \underline{X} \in \Gamma \end{cases} \quad (23.43)$$

Il est possible de se ramener à un problème de Dirichlet (23.1) et donc à rechercher une fonction harmonique ψ , en utilisant les fonctions

$$f(X_1) = AX_1, \quad g(X_2) = AX_2$$

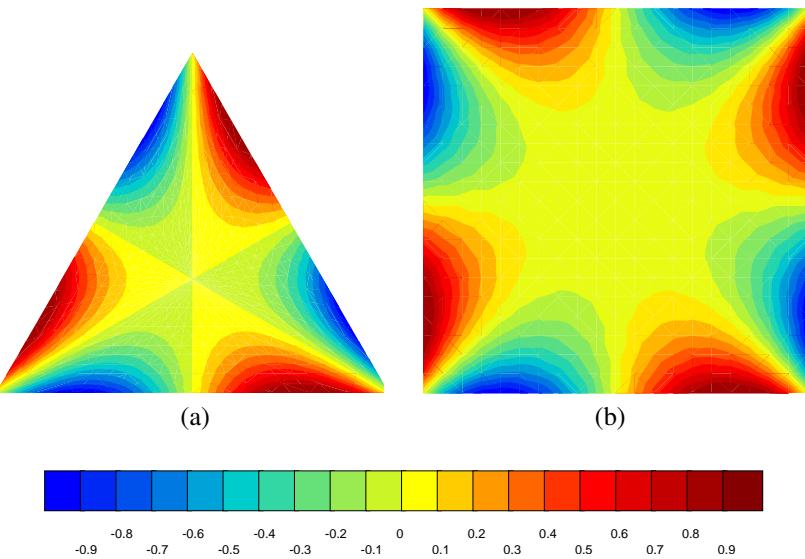


Figure 23.5 : Cartes de déplacement u_3 normalisé par la valeur maximale pour une barre à section triangulaire (a) et carrée (b).

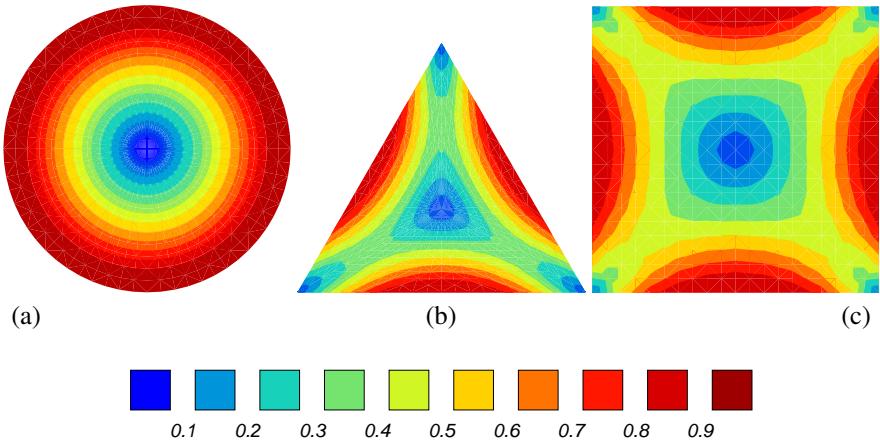


Figure 23.6 : Cartes de contrainte de cisaillement normalisée par la valeur maximale pour une barre à section circulaire (a), triangulaire (b) et carrée (c).

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & \text{sur } S \\ \psi(\underline{x}) = \text{Cste} + \frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2) & \forall \underline{x} \in \Gamma \end{cases} \quad (23.44)$$

Les deux fonctions précédentes sont liées par la relation :

$$\Psi = A(\psi - (X_1^2 + X_2^2)/2)$$

Les contraintes sont

$$\sigma_{31} = A\left(\frac{\partial\psi}{\partial X_2} - X_2\right), \quad \sigma_{32} = -A\left(\frac{\partial\psi}{\partial X_1} - X_1\right)$$

La constante A est directement liée au moment de torsion appliqué :

$$AJ = \mathcal{C}, \quad J = \int_{S_l} (X_1^2 + X_2^2 - X_1 \frac{\partial\psi}{\partial X_1} - X_2 \frac{\partial\psi}{\partial X_2}) dS \quad (23.45)$$

La définition du moment d'inertie de torsion J est identique à celle déjà établie sous la forme (23.39). L'égalité de ces expressions apparaîtra dans le paragraphe suivant où la relation (23.47) entre ψ et la fonction de gauchissement de torsion φ sera établie.

Détermination des déplacements

La procédure systématique de construction du champ de déplacement peut être appliquée. Elle fait appel au calcul des rotations infinitésimales $\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i}$:

$$\begin{aligned} \omega_{12,1} &= 0, \quad \omega_{12,2} = 0, \quad \omega_{12,3} = \varepsilon_{13,2} - \varepsilon_{23,1} = -\frac{A}{\mu} \\ \omega_{23,1} &= -\varepsilon_{31,2} = \frac{A}{2\mu}\left(-\frac{\partial^2\psi}{\partial X_2^2} + 1\right), \quad \omega_{23,2} = -\varepsilon_{32,2} = \frac{A}{2\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial X_2 \partial X_1}, \quad \omega_{23,3} = 0 \\ \omega_{31,1} &= \varepsilon_{31,1} = \frac{A}{2\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial X_2 \partial X_1}, \quad \omega_{31,2} = \varepsilon_{32,1} = -\frac{A}{2\mu}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial X_1^2} - 1\right), \quad \omega_{31,3} = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\omega_{12} = -\frac{A}{\mu}X_3, \quad \omega_{23} = \frac{A}{2\mu}\left(\frac{\partial\psi}{\partial X_1} + X_1\right), \quad \omega_{31} = \frac{A}{2\mu}\left(\frac{\partial\psi}{\partial X_2} + X_2\right) \quad (23.46)$$

à trois constantes près. Le fait que ψ soit harmonique a été utilisé dans l'intégration. Le gradient du déplacement s'obtient ensuite :

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= 0, \quad u_{1,2} = \omega_{12} = -\frac{A}{\mu}X_3, \quad u_{1,3} = \varepsilon_{13} - \omega_{31} = -\frac{A}{\mu}X_2 \\ u_{2,1} &= -\omega_{12} = \frac{A}{\mu}X_3, \quad u_{2,2} = 0, \quad u_{2,3} = \varepsilon_{23} + \omega_{23} = \frac{A}{\mu}X_1 \\ u_{3,1} &= \varepsilon_{31} + \omega_{31} = \frac{A}{\mu}\frac{\partial\psi}{\partial X_2}, \quad u_{3,2} = \varepsilon_{32} + \omega_{32} = -\frac{A}{\mu}\frac{\partial\psi}{\partial X_1}, \quad u_{3,3} = 0 \end{aligned}$$

La forme différentielle $\alpha = \frac{\partial\psi}{\partial X_2} dX_1 - \frac{\partial\psi}{\partial X_1} dX_2 = a dX_1 + b dX_2$ est telle que

$$\frac{\partial a}{\partial X_2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial X_2^2} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial X_1^2} = \frac{\partial b}{\partial X_1}$$

Il existe donc une fonction $\varphi(X_1, X_2)$ telle que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial X_1} = \frac{\partial\psi}{\partial X_2}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial X_2} = -\frac{\partial\psi}{\partial X_1} \quad (23.47)$$

La fonction φ est par conséquent harmonique. Le champ de déplacement s'intègre alors sous la forme (23.19) avec $\alpha = A/\mu$. La fonction φ est la fonction de gauchissement de torsion.

23.2.5 Barre de section circulaire

Lorsque la section de la barre est un disque de rayon R , le flux de la fonction de gauchissement donné par (23.28) devient :

$$q^d = n_1 X_2 - n_2 X_1 = \frac{1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} (X_1 X_2 - X_2 X_1) = 0 \quad (23.48)$$

Les solutions du problème de Neumann avec un flux imposé nul sont les fonctions constantes. En effet, $\varphi = 0$ est à laplacien nul et à flux nul, c'est donc une solution du problème de Neumann. Les autres en diffèrent par une constante. On prend ici

$$\varphi_{disque} = 0 \quad (23.49)$$

Il n'y a donc pas de gauchissement des sections perpendiculaires à l'axe de torsion : elles restent planes. Les champs de déplacement, contraintes et déformations donnés par (23.19), (23.23) et (23.21) s'écrivent plus simplement en coordonnées cylindriques :

$$\underline{u} = \alpha Z r \underline{e}_\theta \quad (23.50)$$

$$\underline{\varepsilon} = \frac{\alpha}{2} r (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta) \quad (23.51)$$

$$\underline{\sigma} = \mu \alpha r (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta) \quad (23.52)$$

$$\mathcal{C} = \mu J \alpha, \quad \text{avec} \quad J = \frac{\pi R^4}{2} \quad (23.53)$$

Seules les composantes $u_\theta, \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{z\theta}, \sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta}$ sont actives. Elles sont linéaires en r et, comme prévu, indépendantes de Z . Les contraintes sont nulles sur l'axe de torsion. Pour un même angle de rotation α par unité de longueur, la déformation est d'autant plus faible que le fil est mince de même donc que la contrainte. C'est pourquoi il est plus simple de tordre des fils que des barres ! Si le fil est élancé, les déplacements peuvent être grands alors même que les déformations restent faibles.

Le vecteur contrainte sur S_ℓ correspond à une densité d'efforts purement tangentiels qui engendrent le moment de torsion \mathcal{C} :

$$\underline{t}^d = \mu \alpha r \underline{e}_\theta \quad (23.54)$$

L'état déformé d'une barre de section circulaire est illustré sur la figure 23.2. On voit en particulier que les droites $X = Y = Cste$ initialement verticales se transforment en droites inclinées.

Plus généralement, la torsion de barres à section triangulaire et carrée est illustrée par les figures 23.3 et 23.4. Contrairement au cas de la section circulaire, les sections triangulaires ou carrées ne restent pas planes. La fonction de gauchissement n'est pas nulle. Le champ de déplacement u_z normalisé est présenté sur la figure 23.5. La fonction de gauchissement est nulle au centre mais ondule près des bords. Les figures 23.3(c) et 23.4(c) montrent par contre que, vues de dessus (selon \underline{e}_z), les sections gardent leur forme et ne subissent qu'une rotation, conformément au champ (23.19).

Les champs de contraintes $\sigma_{\theta z}$ sont illustrées par les figures 23.6 pour les trois types de section. Les résultats présentés ici pour les sections triangulaires et carrées ont été obtenus de manière numérique par la méthode des éléments finis.

Respect du contexte infinitésimal

Les analyses précédentes supposent que les composantes des tenseurs de déformation (23.21) et rotation (23.22) restent infinitésimales. Dans le cas d'une barre de section circulaire ces résultats se traduisent par

$$|\alpha|R \ll 1, \quad |\alpha|\ell \ll 1 \quad (23.55)$$

La seconde condition faisant intervenir la longueur de la barre est la plus stricte et requiert que l'angle de torsion imposé aux extrémités soit suffisamment petit.

Cas d'un tube mince

La solution établie pour une barre à section circulaire est en fait valable aussi pour une tube d'épaisseur e quelconque. En effet, avec le champ de contraintes obtenu (23.23), le vecteur contrainte est nul en tout point d'une surface $r = r^d$ donnée, de sorte que la solution s'applique directement à un tube. L'inertie de torsion pour le tube de rayon intérieur r_i et de rayon extérieur r_e vaut

$$J_{tube} = \pi \frac{r_e^4 - r_i^4}{2} \quad (23.56)$$

Lorsque, de plus, le tube est mince, $r \simeq R$ si bien que contraintes et déformations peuvent être considérées comme constantes dans l'épaisseur du tube. Les champs de contraintes et de déformations sont quasi-homogènes. L'essai de torsion devient alors un bon candidat pour la caractérisation des matériaux puisque l'on recherche des états homogènes, autant que faire se peut. L'essai de torsion sur tube mince est une manière commode de réaliser pratiquement les conditions de glissement simple (dans le plan $(\underline{\sigma}_\theta, \underline{\sigma}_z)$), qui sont difficiles à réaliser sur des tôles, en raison d'effets de bord plus marqués.

L'essai de torsion sur tube ou sur barre permet de déterminer le module de cisaillement μ du matériau, tout comme l'essai de traction donne accès au module d'Young. Toutefois les précisions obtenues sur ces modules par ces essais de caractérisation statiques sont nettement moins bonnes qu'avec des essais dynamiques (vibrations). L'intérêt de l'essai sur tube mince apparaît plutôt lorsque l'on rentre dans le domaine de plasticité, problème abordé dans la section suivante.

23.3 Au-delà du régime élastique

23.3.1 *Rupture fragile d'une barre de section circulaire*

Un exemple de rupture fragile d'une éprouvette métallique en torsion a été donné sur la figure 4.4 au chapitre 4 introduisant les contraintes. On demande d'expertiser cette rupture.

► La section de la partie utile de l'éprouvette est circulaire. Lors de l'essai de torsion, la contrainte maximale (en valeur absolue), dans la zone utile de l'éprouvette, est atteinte au bord $r = R$ avec la valeur $|\sigma_{\theta z}|^{max} = \mu |\alpha| R$. L'état de contrainte est de cisaillement simple (cf. table 4.3). Les contraintes principales sont donc $\sigma_{\theta z}, -\sigma_{\theta z}$. Les directions principales sont

$$(\underline{\sigma}_\theta + \underline{\sigma}_z)/\sqrt{2}, \quad (\underline{\sigma}_\theta - \underline{\sigma}_z)/\sqrt{2}$$

Le critère de rupture fragile décrit au paragraphe 4.4.3 stipule que la rupture a lieu lorsque la contrainte principale maximale atteint une valeur critique σ_{rupt} . Pour la torsion de la barre, la rupture se produit donc pour :

$$|\alpha| = \alpha_{rupt} := \frac{\sigma_{rupt}}{\mu R} \quad (23.57)$$

On constate souvent en rupture fragile que la surface de rupture est perpendiculaire à la direction principale correspondant à la contrainte principale maximale. Dans le cas présent, ces directions sont à 45° des vecteurs e_θ et e_z . Cela explique la surface de rupture hélicoïdale² observée sur la figure 4.4.

23.3.2 Limite d'élasticité d'une barre à section circulaire en torsion

Si le matériau est ductile, c'est un critère de plasticité qu'il faut invoquer pour prévoir la limite du fonctionnement élastique de la barre en torsion. Le critère de Tresca (4.62) est un critère classique de plasticité. Il porte sur la différence maximale entre les contraintes principales. Dans le cas de la barre de section circulaire en torsion, le critère devient donc

$$|\sigma_{\theta z}|^{max} = \frac{\sigma_0}{2} \quad (23.58)$$

où σ_0 est la limite d'élasticité en traction. La contrainte est maximale en $r = R$, et c'est à cet endroit que la plasticité apparaît en premier. Ainsi, le fonctionnement de la barre reste élastique tant que :

$$|\alpha| < \frac{\sigma_0}{2\mu R} \quad (23.59)$$

Le critère peut aussi s'énoncer en fonction du couple imposé via l'équation (23.39) :

$$|\mathcal{C}| < \mathcal{C}^{max} := \frac{J\sigma_0}{2R} = \frac{\pi R^3 \sigma_0}{4} \quad (23.60)$$

Que deviennent ces valeurs critiques si l'on utilise le critère de von Mises (4.63) ?

23.4 Torsion de barres à sections elliptiques et triangulaires

L'objectif de cette partie est d'apporter des compléments à l'analyse de la torsion de barres cylindriques de section quelconque, cf. Fig. 23.1, dans le cas de l'élasticité linéarisée et isotrope. Le moment de torsion \mathcal{C} par rapport à l'axe du cylindre est appliqué aux extrémités de la barre. La section courante et son bord sont respectivement notés S et Γ . On suppose que S est simplement connexe, sauf pour la question 23.4.2. On étudie successivement les cas particuliers des sections de formes elliptique et triangulaire et on évalue leur résistance à la rupture et à la plasticité. Ces deux formes particulières sont choisies car il se trouve que les potentiels dont découle la solution ont une forme polynomiale simple de faible degré. Le cas de la section rectangulaire, par exemple, est plus complexe et donne lieu à l'utilisation de séries de Fourier pour expliciter les potentiels, ce qui n'est pas entrepris ici. On renvoie à (Sokolnikoff, 1946; Sadd, 2005) pour l'étude de la torsion des barres à section rectangulaire.

23.4.1 Préliminaire : retour sur les fonctions de gauchissement et fonction de contrainte

On rappelle que l'analyse pionnière de Saint-Venant a montré que le champ de déplacement prend la forme suivante, dans une base cartésienne orthornormée :

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha X_2 X_3 \\ u_2 = \alpha X_1 X_3 \\ u_3 = \alpha \varphi(X_1, X_2) \end{cases}$$

où le déplacement u_3 correspond à un gauchissement de la surface $X_3 = Cste$ après déformation. L'inconnue $\varphi(X_1, X_2)$, solution d'un problème de Neumann³ s'appelle *fonction de gauchissement*.

2. Cette observation est facile à faire sur une craie à section circulaire après torsion. La craie est un matériau fragile obéissant avec une bonne approximation au critère de rupture en contrainte normale maximale.

3. cf. le problème aux limites de Neumann (23.6) et (23.28).

Le coefficient α désigne la rotation linéaire constante imposée et s'interprète comme le rapport $\delta\theta/\ell$, de la rotation relative $\delta\theta$ appliquée entre les extrémités supérieure et inférieure, sur la longueur ℓ du cylindre. La fonction de gauchissement est harmonique : $\Delta\varphi = 0$, où Δ désigne ici l'opérateur laplacien.

Rappeler, sans détailler les calculs, les expressions des tenseurs des déformations et des contraintes à l'aide de la fonction de gauchissement φ . Une notation raccourcie est proposée pour désigner les dérivées partielles d'une fonction :

$$\varphi_{,1} = \frac{\partial\varphi}{\partial X_1}, \quad \varphi_{,2} = \frac{\partial\varphi}{\partial X_2}$$

Cette notation sera utilisée dans la suite.

Rappeler de plus les conditions que doit vérifier la fonction de gauchissement sur le contour Γ de la section.

► Ces relations sont

$$\underline{\varepsilon} = \frac{\alpha}{2}(\varphi_{,1} - X_2)(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) + \frac{\alpha}{2}(\varphi_{,2} + X_1)(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)$$

$$\underline{\sigma} = \mu\alpha(\varphi_{,1} - X_2)(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) + \mu\alpha(\varphi_{,2} + X_1)(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)$$

La condition de bord libre se traduit par la condition de Neumann

$$\varphi_{,1}n_1 + \varphi_{,2}n_2 = n_1X_2 - n_2X_1, \quad \forall \underline{X} \in \Gamma \quad (23.61)$$

où n_1, n_2 désigne les composantes cartésiennes du vecteur normal le long du contour Γ ($n_3 = 0$), tandis que les conditions d'équilibre local statique en l'absence de forces volumiques se traduisent par la condition d'harmonicité de la fonction de gauchissement. Remarquer que la condition (23.61) a pour conséquence que, relativement à une similitude λ , φ sera en λ^2 , i.e. proportionnel à la surface.

On sait également que les contraintes engendrées par le champ des déplacements précédents dérivent d'un potentiel $\Psi(X_1, X_2)$, appelé *fonction de contrainte*, solution d'un problème de Dirichlet, sous la forme⁴ :

$$\sigma_{31} = \frac{\partial\Psi}{\partial X_2} = \Psi_{,2}, \quad \sigma_{32} = -\frac{\partial\Psi}{\partial X_1} = -\Psi_{,1} \quad (23.62)$$

La fonction de contrainte vérifie l'équation aux dérivées partielles : $\Delta\Psi = -2\mu\alpha$, avec des conditions aux limites appropriées sur Γ vues en exercice.

La connaissance des fonctions φ ou Ψ permet de caractériser complètement la solution du problème de torsion.

Donner l'expression du cisaillement, c'est-à-dire la norme de la contrainte tangentielle, notée τ , agissant en chaque point de la section de normale $\underline{n} = \underline{e}_3$, du cylindre considéré, en fonction des composantes du tenseur des contraintes.

On dit qu'une fonction $f(X_1, X_2)$ de classe C^2 est *sous-harmonique* si son laplacien est toujours positif : $\Delta f \geq 0$. On démontre⁵ que toute fonction sous-harmonique sur une région du plan atteint sa (ses) valeur(s) maximale(s) sur le bord de cette région. En déduire que le cisaillement est maximal sur des points du contour Γ (on pourra s'aider de la fonction τ^2).

► Le vecteur-contrainte en chaque point de la section S a pour composante $(\sigma_{31}, \sigma_{32}, 0)$. La contrainte normale est donc nulle et la contrainte tangentielle vaut $\tau = \sqrt{\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2}$.

4. cf. le problème aux limites de Dirichlet (23.43).

5. Voir (Sokolnikoff, 1946) (p. 117) pour la preuve.

Calculons le laplacien de $\tau^2 = \Psi_{,1}^2 + \Psi_{,2}^2$:

$$\begin{aligned} (\tau^2)_{,1} &= 2\Psi_{,1}\Psi_{,11} + 2\Psi_{,2}\Psi_{,21}, & (\tau^2)_{,2} &= 2\Psi_{,1}\Psi_{,12} + 2\Psi_{,2}\Psi_{,22} \\ (\tau^2)_{,11} &= 2\Psi_{,12}^2 + 2\Psi_{,2}\Psi_{,211} + 2\Psi_{,11}^2 + 2\Psi_{,1}\Psi_{,111} \\ (\tau^2)_{,22} &= 2\Psi_{,22}^2 + 2\Psi_{,2}\Psi_{,222} + 2\Psi_{,12}^2 + 2\Psi_{,1}\Psi_{,122} \end{aligned}$$

Comme $\Psi_{,11} + \Psi_{,22} = -2\mu\alpha$, on voit que $\Psi_{,112} = -\Psi_{,111}$ et que $\Psi_{,221} = -\Psi_{,222}$. Le calcul du laplacien du cisaillement au carré se simplifie alors :

$$\Delta\tau^2 = 2\Psi_{,11}^2 + 4\Psi_{,12}^2 + 2\Psi_{,22}^2 \geq 0$$

Le carré du cisaillement est donc une fonction sous-harmonique, ce qui implique que le cisaillement trouve son maximum sur le contour Γ .

Si le contour est convexe, ce maximum est atteint aux points du contour les plus proches du centre géométrique de la section.

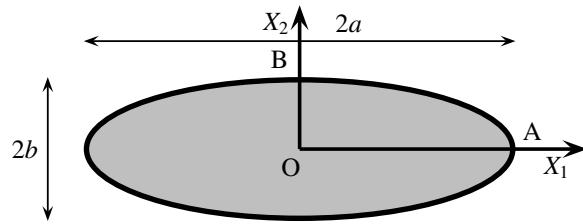


Figure 23.7 : Géométrie de la section elliptique d'une barre : repère, grand et petit axes.

23.4.2 Torsion d'une barre de section elliptique

La section de la barre, représentée sur la figure 23.7, est une ellipse dont le contour Γ a pour équation :

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = 1 \quad (23.63)$$

où $2a$ et $2b$ désignent respectivement le grand axe et le petit axe de l'ellipse. Les axes du repère coïncident avec les axes de symétrie de l'ellipse et l'origine est prise au centre.

Détermination de la fonction de gauchissement

Montrer qu'une fonction polynomiale de degré 2 permet de remplir toutes les conditions du problème pour une section elliptique de barre en torsion :

$$\varphi(X_1, X_2) = AX_1^2 + 2BX_1X_2 + CX_2^2 \quad (23.64)$$

On déterminera les valeurs des coefficients qui permettent de satisfaire toutes les conditions requises pour φ .

Montrer finalement que la fonction de gauchissement se met sous la forme

$$\varphi^\infty(X_1, X_2) = -kX_1X_2 \quad (23.65)$$

et on exprimera k en fonction de a et b , exclusivement.

► La première condition requise est que la fonction soit harmonique ce qui implique $\Delta\varphi = 2A + 2C = 0$, si bien que $A = -C$.

La fonction doit ensuite satisfaire les conditions aux limites de Neumann (23.61). Pour cela, on note que le vecteur normal en un point de l'ellipse Γ est parallèle au vecteur $[X_1/a^2 \quad X_2/b^2 \quad 0]$. La condition (23.61) s'écrit alors :

$$(2AX_1 + 2BX_2)\frac{X_1}{a^2} + (2BX_1 - 2AX_2)\frac{X_2}{b^2} = \frac{X_1X_2}{a^2} - \frac{X_1X_2}{b^2}$$

$$2A\left(\frac{X_1^2}{a^2} - \frac{X_2^2}{b^2}\right) + 2B(a^{-2} + b^{-2})X_1X_2 = X_1X_2(a^{-2} - b^{-2})$$

L'identification fournit $A = 0$ et $2B = (b^2 - a^2)/(a^2 + b^2)$ ce qui conduit à la fonction (23.65) avec

$$k = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

Cette relation implique que $k < 1$.

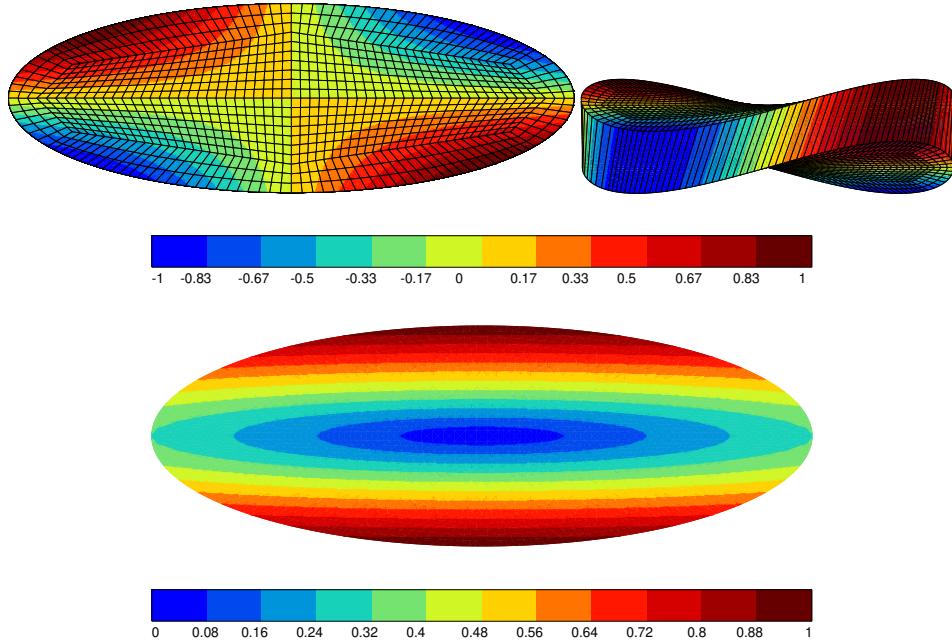


Figure 23.8 : Champ de déplacement u_3 (gauchissement) normalisé par la valeur maximale atteinte : lignes de niveau dans la section elliptique (en haut à gauche) et vue de la déformée d'une tranche de profil (en haut à droite, déplacements exagérés d'un facteur 10). Lignes de niveau de la contrainte équivalente de von Mises normalisée par la valeur maximale (en bas). Le rapport des paramètres de l'ellipse est $a/b = 3$.

Etude de la section déformée

Donner les conditions à respecter pour respecter le contexte infinitésimal.
Indiquer à quel(s) endroit(s) de la section S le gauchissement est maximal et donner la(les) valeur(s) correspondante(s) en fonction de a, b, α .

► Maintenant que la fonction de gauchissement est déterminée, le champ de déplacement s'écrit

$$u_1 = -\alpha X_2 X_3, \quad u_2 = \alpha X_1 X_3, \quad u_3 = -k\alpha X_1 X_2$$

Le gradient du champ de déplacement vaut quant à lui

$$\text{Grad } \underline{u} = \alpha X_3 (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2) + \alpha X_1 (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 - k \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2) - \alpha X_2 (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + k \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1)$$

Le contexte infinitésimal exige que les composantes du gradient du déplacement soient suffisamment petites :

$$|\alpha X_3| \leq |\delta\theta| \ll 1, \quad |\alpha X_1| \leq |\delta\theta| \frac{a}{\ell} \ll 1, \quad |\alpha X_2| \leq |\delta\theta| \frac{b}{\ell} \ll 1$$

$$|k\alpha X_1| \leq k|\delta\theta| \frac{a}{\ell} \ll 1, \quad |k\alpha X_2| \leq k|\delta\theta| \frac{b}{\ell} \ll 1$$

Dans le cas d'une barre élancée, $\text{Max}(a, b) \ll \ell$, la première condition reste la plus limitante.

La fonction $X_1 X_2$ est maximale sur le contour Γ . On peut calculer la valeur du carré du déplacement sur le bord de l'ellipse :

$$u_3^2 = k^2 \alpha^2 X_1^2 X_2^2 = k^2 \alpha^2 X_1^2 b^2 \left(1 - \frac{X_1^2}{a^2}\right)$$

Le maximum de cette quantité par rapport à X_1^2 s'obtient en calculant

$$\frac{du_3^2}{dX_1^2} = k^2 \alpha^2 b^2 \left(1 - 2 \frac{X_1^2}{a^2}\right) = 0 \implies X_1 = \pm \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad X_2 = \pm \frac{b}{\sqrt{2}}$$

En ces 4 points, on trouve le déplacement hors plan maximal :

$$u_3^{max} = \alpha k \frac{ab}{2} = \alpha \frac{ab(a^2 - b^2)}{2(a^2 + b^2)}$$

La distribution de u_3 et les extrema associés sont visibles sur la figure 23.8.

Rigidité de torsion

Exprimer le couple \mathcal{C} en fonction de l'angle linéique imposé α .

Pour cela, on pourra établir le résultat ou bien utiliser des résultats connus sur la torsion. Par ailleurs, on admettra (ou on démontrera, bonus !) que les moments quadratiques concernés valent :

$$\int_S X_1^2 dX_1 dX_2 = \pi \frac{a^3 b}{4}, \quad \int_S X_2^2 dX_1 dX_2 = \pi \frac{a b^3}{4} \quad (23.66)$$

Vérifier qu'on retrouve le cas bien connu de la barre à section circulaire comme cas particulier de la formule établie.

Quelle est la valeur du rapport b/a permettant d'optimiser la rigidité de la barre sous la contrainte d'une surface de la section fixée ? Correspond-elle à un maximum ou à un minimum de la rigidité ?

Commenter la rigidité de torsion d'une barre à section elliptique lorsque le rapport b/a est petit.

► La relation entre le couple et l'angle linéique est $\mathcal{C} = \mu J \alpha$ où l'expression de J est donnée par la formule (23.40) établie dans le chapitre consacré à la torsion des barres :

$$\begin{aligned} J &= \int_S \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right)^2 \right) dS = (1-k)^2 \int_S X_1^2 dS + (1+k)^2 \int_S X_2^2 dS \\ &= \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Les expressions suivantes ont été utilisées :

$$1+k = \frac{2a^2}{a^2+b^2}, \quad 1-k = \frac{2b^2}{a^2+b^2}$$

La rigidité de torsion de la barre est μJ . L'optimisation de cette rigidité à aire imposée $\pi ab = S_0$ est possible en éliminant $b = S_0/\pi a$ dans l'expression précédent de J et en dérivant par rapport à a^2 . Cette expression est alors proportionnelle à $a^2/(S_0^2/\pi^2 + a^4)$ et sa dérivée s'annule en $a^2 = S_0/\pi$ qui conduit à $a = b$. La fonction précédente est nulle en $a = 0$ et en $a = +\infty$ et atteint un maximum à la valeur annoncée. La barre à section circulaire présente donc le maximum de rigidité relative en torsion.

Lorsque le ratio $b/a = \pi b^2/S_0$ devient faible devant 1, la rigidité élastique se met sous la forme :

$$\mu J = \mu \frac{\pi ab^3}{1+b^2/a^2} \sim \mu \pi ab^3 = \mu S_0 b^2$$

et devient donc de plus en plus faible. Les barres aplatis sont donc peu rigides élastiquement en torsion, ce que révèle l'expérience de tous les jours.

Le calcul des moments quadratiques introduits peut se faire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_S X_1^2 dX_1 dX_2 &= \int_{-b}^b dX_2 \int_{-a\sqrt{1-\frac{X_2^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{X_2^2}{b^2}}} X_1^2 dX_1 = \int_{-b}^b \left[\frac{X_1^3}{3} \right]_{-a\sqrt{1-\frac{X_2^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{X_2^2}{b^2}}} dX_2 \\ &= \frac{2a^3}{3} \int_{-b}^b \left(1 - \frac{X_2^2}{b^2} \right)^{3/2} dX_2 = \frac{2a^3 b}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta)^{3/2} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{2a^3 b}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = \frac{2a^3 b}{3} \times \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

où le changement de variables $X_2 = b \sin \theta$ a été utilisé. Un calcul similaire permet d'obtenir le second moment quadratique de la section.

Limite d'élasticité et analyse limite

Donner les contraintes principales, c'est-à-dire les valeurs propres du tenseur des contraintes, en chaque point de chaque section en fonction de μ, α, k, X_1, X_2 , puis en remplaçant k par son expression en fonction de a et b .

On suppose que le matériau considéré est isotrope et a pour limite d'élasticité en traction simple la contrainte σ_0 déterminée expérimentalement. Au-delà de cette valeur, un matériau fragile rompt tandis qu'un matériau ductile entre dans le régime élasto-plastique et se déforme donc de manière irréversible.

Proposer un critère de rupture fragile et un critère de plasticité.

Appliquer ces critères au cas de la torsion de la barre de section elliptique. Indiquer à quel(s) endroit(s) de la section elliptique la limite d'élasticité est atteinte en premier.

Donner la valeur critique de l'angle linéique appliqué $\alpha = \alpha_0$ pour laquelle cette limite d'élasticité est atteinte. Exprimer α_0 en fonction de σ_0, μ, a et b , pour les deux critères.

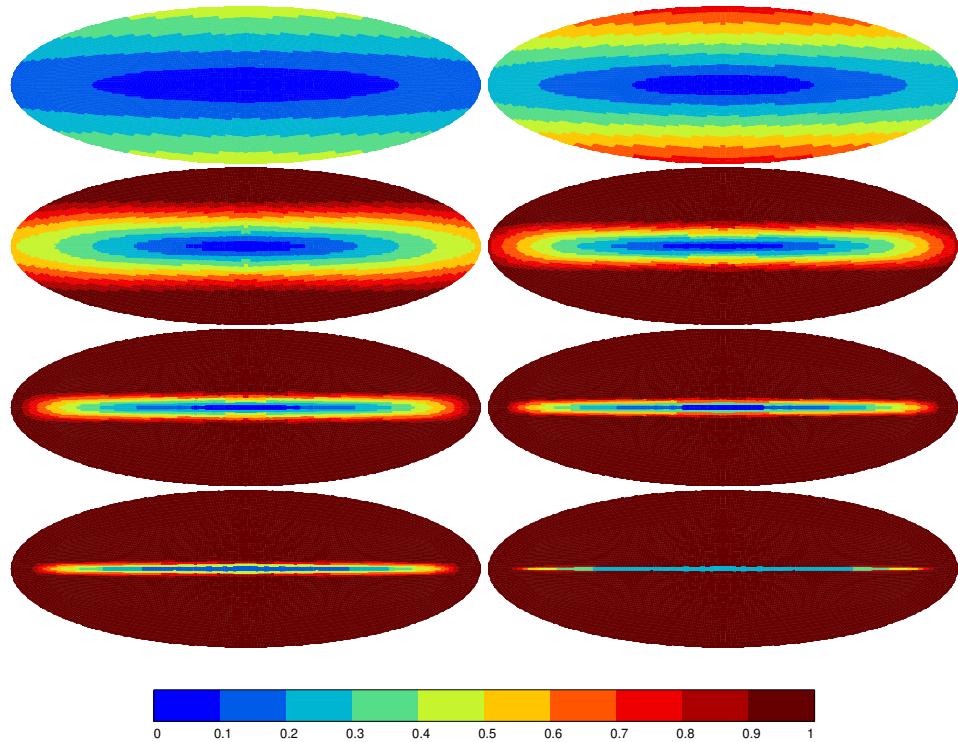


Figure 23.9 : Champ de la contrainte équivalente de von Mises divisée par la limite d'élasticité σ_0 pour huit valeurs différentes de l'angle linéique de torsion imposé, α . Cet angle linéique est croissant de la gauche vers la droite et de haut en bas.

► Le tenseur des contraintes est de la forme $\boldsymbol{\sigma} = \tau_1(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) + \tau_2(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)$, avec $\tau_1 = \sigma_{13} = -\mu\alpha(1+k)X_2$ et $\tau_2 = \sigma_{23} = \mu\alpha(1-k)X_1$. Il possède la valeur propre intermédiaire $\sigma_2 = 0$ et les deux autres sont solutions de

$$\text{trace } \boldsymbol{\sigma} = 0 = \sigma_1 + \sigma_3, \quad \text{trace } \boldsymbol{\sigma}^2 = 2\tau_1^2 + 2\tau_2^2 = \sigma_1^2 + \sigma_3^2 = 2\sigma_1^2$$

La plus grande contrainte principale est égale au cisaillement en chaque point de la section :

$$\sigma_1 = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} = \mu|\alpha| \sqrt{(1+k)^2 X_2^2 + (1-k)^2 X_1^2} = \frac{2\mu|\alpha|a^2b^2}{a^2+b^2} \sqrt{\frac{X_1^2}{a^4} + \frac{X_2^2}{b^4}}$$

La question préliminaire a permis d'établir que le cisaillement prend ses valeurs maximales sur la frontière Γ de la section. En tenant compte de l'équation de l'ellipse (23.63), la contrainte principale maximale vaut sur le bord Γ

$$\sigma_1 = \frac{2\mu|\alpha|b}{a^2+b^2} \sqrt{a^4 + (b^2-a^2)X_1^2}$$

Cette valeur est maximale en $X_1 = 0, X_2 = \pm b$ ce qui donne

$$\sigma_1^{\max} = \frac{2ba^2}{a^2 + b^2} \mu |\alpha|$$

Pour un matériau fragile, le critère de contrainte principale positive maximale conduit à

$$\sigma_1^{\max} = \sigma_0 \implies \mu \alpha_0 = \frac{a^2 + b^2}{2ba^2} \sigma_0$$

Pour un matériau ductile obéissant au critère de Tresca, la limite d'élasticité est atteinte pour

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\sigma_1^{\max} = \sigma_0 \implies \mu \alpha_0 = \frac{a^2 + b^2}{4ba^2} \sigma_0$$

où, on le rappelle, σ_0 est la limite d'élasticité en traction simple. Dans le cas d'un critère de von Mises, cela donne

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^{dev} : \boldsymbol{\sigma}^{dev}} = \sqrt{3} |\sigma_1^{\max}| = \sigma_0 \implies \mu \alpha_0 = \frac{a^2 + b^2}{2\sqrt{3}ba^2} \sigma_0$$

Les critères de Tresca et von Mises prévoient des limites d'élasticité proches mais distinctes (rapport $\sqrt{3}/2$). L'expérience permettra de décider lequel des deux critères est le mieux adapté pour le matériau considéré.

La figure 23.8 représente les lignes de niveau de la contrainte équivalente de von Mises. On vérifie la position des maxima de cette fonction le long du contour Γ .

La figure 23.9 présente la progression de la zone plastique si l'on continue à charger la barre au-delà de la limite d'élasticité déterminée précédemment dans le cas d'un critère de von Mises. La zone plastique est caractérisée par une valeur de la contrainte équivalente de von Mises égale à σ_0 tandis qu'elle est plus faible dans le noyau élastique. La variable représentée est la contrainte équivalente de von Mises normalisée par σ_0 . Ces résultats ont été obtenus grâce à un calcul par éléments finis dans le contexte non linéaire de l'élastoplasticité. La courbe du moment de torsion en fonction de l'angle linéaire est représentée sur la figure 23.10. Commenter cette figure et conclure sur la résistance de la barre en torsion.

Quelle propriété du matériau considéré peut-on mesurer sur la partie linéaire du début de la courbe ? Donner cette valeur et deviner quel matériau a pu être considéré pour ce calcul.

► On voit que le noyau élastique se réduit comme peau de chagrin lorsqu'on augmente le chargement. A la fin, il ne reste qu'une fine bande sur l'axe X_1 . La courbe du moment en fonction de la torsion appliquée est d'abord linéaire comme il se doit. On peut d'ailleurs mesurer la pente qui doit être égale au module de cisaillement $\mu = E/2(1 + \nu)$ d'après la relation $\mathcal{C} = \mu J \alpha$. On trouve sur le graphe $\mu \simeq 77$ GPa, ce qui, avec un coefficient de Poisson typique $\nu = 0.3$ fournit un module de Young $E \simeq 200$ GPa, typiquement le module d'un acier. La courbe sature ensuite au fur et à mesure que la plasticité envahit la barre. Le moment atteint une limite infranchissable qui représente la résistance maximale de la barre en torsion. On parle de charge limite de la barre, grandeur essentielle pour le dimensionnement des structures.

Extension de la solution pour un tube de section elliptique creuse

Prouver que la solution établie précédemment pour une barre de section elliptique est également valide dans les parois d'un tube dont la section est bornée par deux ellipses semblables et concentriques comme sur la figure 23.11.

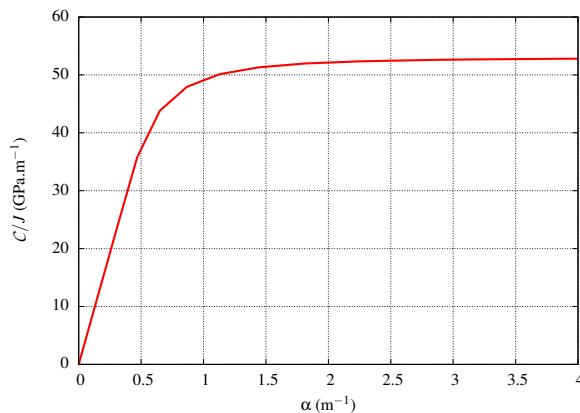


Figure 23.10 : Moment normalisé par le moment quadratique de torsion J en fonction de l'angle linéique appliquée pour une barre à section elliptique constituée d'un certain matériau dont le comportement est élasto-plastique.

Le contour extérieur est toujours donné par l'équation (23.63) tandis que le contour intérieur a pour équation :

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = \eta^2 \quad (23.67)$$

où η est un nombre réel $0 < \eta < 1$.

Donner alors l'expression de la rigidité de torsion du tube en fonction en particulier du paramètre η .

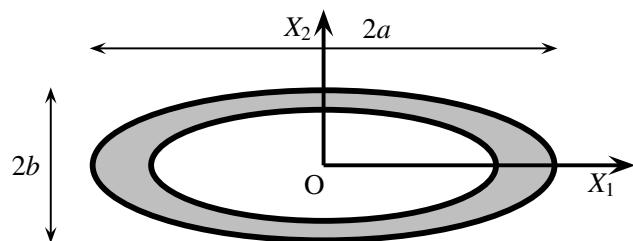


Figure 23.11 : Tube de section elliptique creuse.

► Le champ de contraintes établi précédemment a le bon goût de satisfaire les conditions de bord libre sur la paroi intérieure du tube. Cela vient du fait que le vecteur normal est parallèle au vecteur $[X/a^2 \quad X/b^2 \quad 0]$ aussi bien pour les points de l'ellipse extérieure que pour ceux de l'ellipse intérieure. On vérifie alors que la condition

$$\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 = 0$$

est satisfaite à l'intérieur comme à l'extérieur en utilisant les contraintes calculées au paragraphe 23.4.2, avec la même valeur du paramètre k .

Le calcul de la rigidité de torsion fait intervenir les moments quadratiques de la section tubulaire :

$$\int_S X_1^2 dS = \int_{S(a,b)} X_1^2 dS - \int_{S(\eta a, \eta b)} X_1^2 dS = \pi \frac{a^3 b}{4} (1 - \eta^4)$$

où $S(a, b)$, resp. $S(\eta a, \eta b)$, désigne la surface de l'ellipse de paramètres a et b , resp. ηa , ηb .
Finalement

$$\mu J = \mu \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} (1 - \eta^4)$$

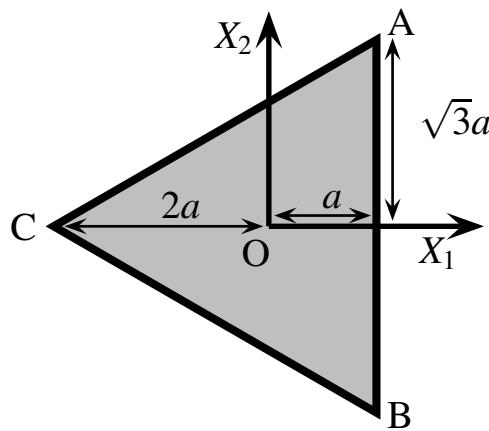


Figure 23.12 : Géométrie de la section triangulaire équilatérale d'une barre : hauteur de longueur $3a$ et côté de longueur $2a\sqrt{3}$.

23.4.3 Torsion d'une barre de section triangulaire

On considère la torsion d'une barre dont la section est triangulaire équilatérale, de hauteur $3a$, comme sur la figure 23.12.

Détermination de la fonction de gauchissement

La fonction polynomiale de degré deux utilisée pour la barre de section elliptique ne suffit pas pour le cas triangulaire.

Montrer qu'une fonction de gauchissement polynomiale de degré 3 de la forme

$$\varphi(X_1, X_2) = AX_1^3 + BX_1^2 X_2 + CX_1 X_2^2 + DX_2^3 \quad (23.68)$$

permet de répondre à la question.

► Les sommets du triangle de la figure 23.12 ont pour coordonnées $A(a, a\sqrt{3})$, $B(a, -a\sqrt{3})$ et $C(-2a, 0)$. On en déduit les composantes des vecteurs normaux aux trois faces : côté AC : $\underline{n} \parallel [-a\sqrt{3}, 3a, 0]$; côté BC : $\underline{n} \parallel [a\sqrt{3}, 3a, 0]$; côté AB : $\underline{n} \parallel [1, 0, 0]$.

Nous avons également besoin des équations des trois arêtes du triangle : arête AC : $X_2 = (X_1 + 2a)/\sqrt{3}$; arête BC : $X_2 = -(X_1 + 2a)/\sqrt{3}$; arête AB : $X_1 = a$.

On calcule ensuite

$$\varphi_{,1} = 3AX_1^2 + 2BX_1 X_2 + CX_2^2, \quad \varphi_{,2} = BX_1^2 + 2CX_1 X_2 + 3DX_2^2$$

On vérifie aisément que cette fonction est harmonique si

$$3A + C = 0, \quad B + 3D = 0$$

La condition (23.61) s'écrit successivement :

- sur l'arête AB :

$$3Aa^2 + 2BaX_2 + CX_2^2 = X_2 \quad \forall X_2 \implies A = C = 0, \quad B = \frac{1}{2a}$$

- sur l'arête BC : on substitue $X_2 = -(X_1 + 2a)/\sqrt{3}$ dans la condition (23.61) :

$$\varphi_{,1}a\sqrt{3} + \varphi_{,2}3a = a\sqrt{3}X_2 - 3aX_1 \implies D = -\frac{1}{6a}$$

- sur l'arête AC : il reste à vérifier que les valeurs des constantes trouvées permettent de satisfaire également la condition (23.61) sur cette arête.

Finalement

$$\varphi^\triangleleft(X_1, X_2) = \frac{X_2}{6a}(3X_1^2 - X_2^2)$$

Etude de la section déformée

Indiquer à quel(s) endroit(s) de la section le déplacement hors plan u_3 est maximum.
Donner l'amplitude maximale du gauchissement correspondant.

► Le déplacement hors plan vaut

$$u_3(X_1, X_2) = \alpha \frac{X_2}{6a}(3X_1^2 - X_2^2)$$

Les maxima de cette fonction se trouvent sur les arêtes du bord. Les trois arêtes étant équivalentes du point de vue de la symétrie, on peut se contenter d'étudier ce déplacement le long de l'arête AB d'équation $X_1 = a$:

$$u_3(a, X_2) = \alpha \frac{X_2}{6a}(3a^2 - X_2^2)$$

Cette fonction a des extrema en $X_2 = \pm a$.

Le gauchissement maximum vaut donc

$$u_2(a, \pm a) = \pm \frac{\alpha a^2}{3}$$

Le champ de déplacement est illustré sur la figure 23.5(b).

Rigidité de torsion

Poser le calcul de la rigidité de torsion de la barre de section triangulaire équilatérale. Effectuer les premières étapes mais on ne demande pas d'achever ce long calcul. On admettra que la relation entre le couple de torsion et l'angle linéique de torsion est

$$\mathcal{C} = \frac{9\sqrt{3}}{5}a^4\mu\alpha \tag{23.69}$$

d'après (Sadd, 2005).

► La fonction de gauchissement est utilisée maintenant pour calculer les contraintes :

$$\sigma_{31} = \mu\alpha(\varphi_{,1} - X_2) = \mu\alpha \frac{X_2}{a}(X_1 - a) \quad (23.70)$$

$$\sigma_{32} = \mu\alpha(\varphi_{,2} + X_1) = \frac{\mu\alpha}{2a}(X_1^2 - X_2^2 + 2aX_1) \quad (23.71)$$

Deux formules s'offrent à nous pour calculer J , à savoir (23.39) et (23.40) et nous choisissons la première :

$$\begin{aligned} J &= \int_S \left(X_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right) - X_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) \right) dS \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-2a}^a dX_1 \int_{-(X_1+2a)/\sqrt{3}}^{(X_1+2a)/\sqrt{3}} (X_1^3 - 3X_1X_2^2 + 2a(X_1^2 + X_2^2)) dX_2 \end{aligned} \quad (23.72)$$

Limite d'élasticité et analyse limite

Exprimer les contraintes dans la section triangulaire.

Dans le cas d'un matériau fragile, puis d'un matériau ductile, indiquer à quel(s) endroit(s) de la section la limite d'élasticité est atteinte et pour quelle valeur critique de l'angle linéique α_0 .

Au-delà de la limite d'élasticité, le calcul peut être mené par la méthode des éléments finis. Pour un critère de von Mises et en l'absence d'écrouissage, la progression de la zone plastique au sein de la section est présentée sur les figures 23.13 et 23.14 sous la forme des champs de la contrainte équivalente de von Mises d'une part et de la norme du tenseur des déformations plastiques d'autre part.

Commenter ces figures.

► Le champ de cisaillement est illustré sur la figure 23.6(b). Les deux seules composantes non nulles sont données par les équations (23.70) et (23.71). Le cisaillement maximal est atteint sur les bords du triangle. Pour des raisons de symétrie, il suffit de se concentrer sur l'une d'entre elles, par exemple AB . Le long de cette arête σ_{31} est nulle comme il se doit. Seule subsiste la composante de cisaillement

$$\sigma_{32} = \frac{\mu\alpha}{2a}(3a^2 - X_2^2)$$

On voit que les contraintes s'annulent sur les pointes du triangle $X_2 = \pm\sqrt{3}a$. Il apparaît également que cette contrainte est maximale au milieu de l'arête $X_2 = 0$:

$$\sigma_{32}^{max} = \frac{3a}{2}\mu\alpha$$

La contrainte principale maximale est égale à la valeur précédente de sorte que la limite d'élasticité est atteinte pour

$$\mu\alpha_0 = \frac{2\sigma_0}{3a}$$

dans le cas d'un matériau fragile dont la limite à rupture est σ_0 en traction. S'il s'agit d'un matériau élasto-plastique avec un critère de Tresca et une limite d'élasticité σ_0 en traction, il faut diviser par deux la valeur précédente de α_0 .

La figure 23.13 montre la fraction de la surface où la contrainte de cisaillement atteint σ_0 augmente avec le chargement jusqu'à la limite où seules trois portions de médianes restent à des niveaux de contraintes plus faibles.

Noter en particulier le centre et les pointes du triangle qui restent à des niveaux proches de zéro. Le champ de déformation plastique est similaire avec trois lignes sans plasticité connectant le centre aux sommets.

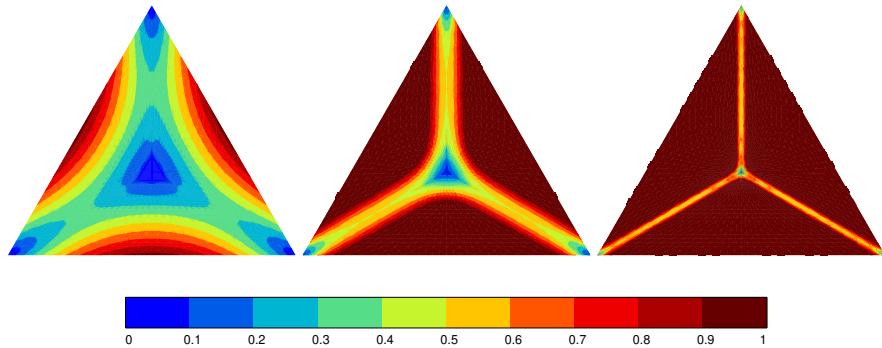


Figure 23.13 : Champ de contrainte équivalente de von Mises normalisée par la limite d'élasticité σ_0 pour la torsion d'une barre de section triangulaire. Les différents instantanés correspondent à des étapes du chargement croissant en angle linéique α .

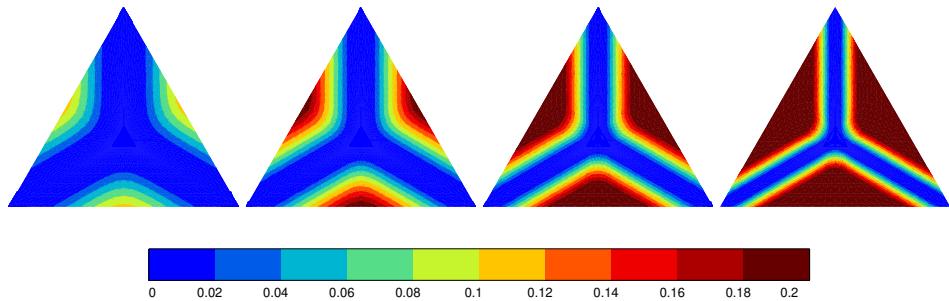


Figure 23.14 : Champ de la norme du tenseur des déformations plastiques (en %) pour la torsion d'une barre de section triangulaire. Les différents instantanés correspondent à des étapes du chargement croissant en angle linéique α .

Rigidité optimale

Pour une valeur donnée de la surface de la section de la barre, indiquer quelle section, elliptique, circulaire ou triangulaire, conduit à la plus grande rigidité de torsion.

Indiquer également pour quelle forme de section, le cisaillement maximal est le plus faible.

► On a déjà conclu que la section circulaire réalise le maximum de la rigidité de torsion pour une section elliptique. Soit S la valeur de la surface de la section recherchée, les moments quadratiques de torsion des barres circulaire et triangulaire sont respectivement

$$J^\circ = \frac{S^2}{2\pi}, \quad J^\triangleleft = \frac{S^2}{5\sqrt{3}}$$

de sorte que $J^\circ > J^\triangleleft$.

La contrainte principale maximale vaut

$$\sigma_1^{max\circ} = \sqrt{\frac{S}{\pi}}\mu\alpha, \quad \sigma_1^{max\triangleleft} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{S}{3\sqrt{3}}}\mu\alpha$$

de sorte que $\sigma_1^{max\circ} < \sigma_1^{max\triangleleft}$.

