Introduction au traitement du signal

Amphi 7 - Signaux transitoires

MINES ParisTech, Tronc commun 1A

18 Juin 2020

Motivations

- Les sinusoïdes $e^{i\omega t}$ sont des vecteurs propres des opérateurs linéaires stationnaires $\rightarrow$ la transformée de Fourier (TF) est donc bien adaptée à l'étude des signaux stationnaires
- Transitions brusques du signal $\rightarrow$ apparition de coefficients de grande amplitude dans la partie haute du spectre
- Conséquence: la TF est mal adaptée à la représentation de signaux transitoires
- Nécessité de développer des outils de représentation à la fois en temps et en fréquence.

Sommaire

Fréquence instantanée

Objectif: décrire un signal $f(t)$ à chaque instant par une information d'amplitude $a(t)$ et une information de fréquence $\phi(t)$.

- Exemple simple de la fonction $f(t) = a\cos(\omega t + \phi_0)$: la fréq. instantanée est ω.
- Généralisation: on cherche à écrire tout signal f sous la forme $f(t) = a(t)\cos\phi(t)$. La fréquence instantanée est alors

$$\omega(t) := \frac{d\phi}{dt}(t).$$

- Limites de l'approche: définition ambigüe, non unicité de la décomposition, moyennage des différentes fréquences présentes dans le signal, etc.

Chirp

Definition

Un chirp est un signal défini par:

$$s(t) = \lambda \cos(f_0 t + (f_1 - f_0)\frac{t^2}{2T})$$

où $f_0, f_1 > 0$.

- Transition entre deux fréquences f_0 et f_1 au cours d'une période T.
- Pour un chirp, la fréquence instantanée est définie sans ambiguité:

$$\omega(t) = f_0 + (f_1 - f_0)\frac{t}{T}$$

Superposition de fréquences

- Signal $s(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$
- Un peu de trigonométrie:
$$s(t) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$
- Définition de la fréquence instantanée très ambigüe, et peu satisfaisante.
$$\omega(t) = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$
La fréquence instantanée moyenne ici les deux fréquences réellement présentes dans le signal
- <u>Conclusion:</u> la notion de fréquence instantanée reste artificielle: besoin en pratique d'outils plus élaborés pour caractériser les signaux transitoires.

Sommaire

Principe d'incertitude (i)

Soit f dans $L^2(\mathbb{R})$ (espace des signaux d'énergie finie). Alors:

- $t \to \dfrac{|f(t)|^2}{\|f\|^2}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
- Position moyenne en temps associée:

$$< t > := \frac{1}{\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} t |f(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

- Variance autour de cette position:

$$\sigma_t^2 := \frac{1}{\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} (t - < t >)^2 |f(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

Principe d'incertitude (ii)

D'après le théorème de Parseval- Plancherel, on a

$$\|\hat{f}\|^2 = 2\pi\|f\|^2.$$

- $\omega \to \dfrac{|\hat{f}(\omega)|^2}{2\pi\|f\|^2}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
- Position moyenne en fréquence associée:

$$< \omega > := \frac{1}{2\pi\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} \omega |\hat{f}(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega.$$

- Variance autour de cette position:

$$\sigma_\omega^2 := \frac{1}{2\pi\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} (\omega - < \omega >)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega.$$

Principe d'incertitude (iii)

Théorème (Principe d'incertitude de Heisenberg)

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ un signal d'énergie finie. Alors, on a l'inégalité

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{\pi}{4}$$

- Interprétation: Un signal ne peut pas être simultanément "bien" localisé en temps et en fréquence.

Figure: Le fameux Werner Heisenberg

Exemple

La transformée de Fourier d'une gaussienne de variance σ^2 est une gaussienne d'étalement fréquentiel $\dfrac{\pi}{4\sigma^2}$.

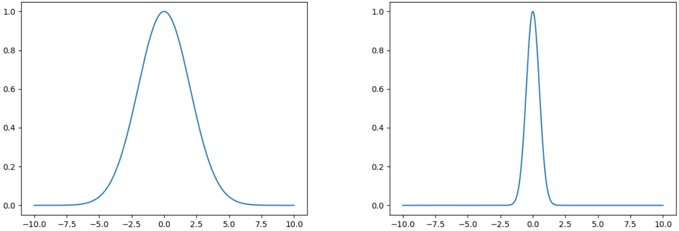

Figure: Fonction gaussienne centrée en 0 et d'écart-type $\sigma = 2$, et sa transformée de Fourier

Sommaire

Atomes de Fourier à fenêtre

- Atome temps-fréquence: fonction "bien" localisée à la fois en temps et en fréquence, dans les limites fixées par le principe de Heisenberg

- Atome de Fourier à fenêtre:

$$\phi(t) := g_{u,\xi}(t) = e^{i\xi t} g(t-u).$$

  Translation d'une fenêtre au temps u/modulation à la fréquence ξ

- Choix de fenêtre arbitraire (gaussienne, indicatrice, etc.)

Localisation temporelle

On suppose la fenêtre g symétrique et de norme unitaire. Alors:

- l'atome $g_{u,\xi}$ est centré temporellement en u
- Etalement en temps:

$$\sigma_t^2 := \int_{\mathbb{R}} (t-u)^2 g(t-u)^2 \mathrm{d}t$$

  En effectuant le changement de variable $t \leftarrow t-u$, on trouve:

$$\sigma_t^2 = \int_{\mathbb{R}} t^2 g(t)^2 \mathrm{d}t$$

- L'étalement temporel de l'atome de Fourier ne dépend que du choix de la fenêtre

Localisation fréquencielle

g étant symétrique, sa transformée de Fourier $\hat{g}$ est également réelle et symétrique, et:

$$\hat{g}_{u,\xi}(\omega) = \hat{g}(\omega - \xi)e^{-i(\omega-\xi)u}.$$

- l'atome $g_{u,\xi}$ est centré fréquentiellement en ξ
- Etalement fréquentiel:

  $$\sigma_\omega^2 := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(\omega - \xi)^2\hat{g}(\omega - \xi)^2 \mathrm{d}\omega$$

  En effectuant le changement de variable $\omega \leftarrow \omega - \xi$, on trouve:

  $$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\omega^2\hat{g}(\omega)^2 \mathrm{d}\omega$$

- L'étalement fréquentiel de l'atome de Fourier ne dépend que du choix de la fenêtre

Représentation dans le plan temps-fréquence

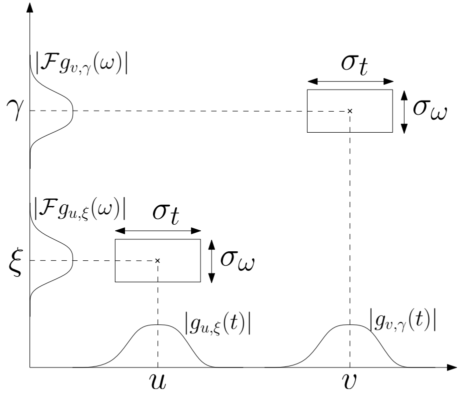

Figure: Représentation dans le plan temps-fréquence d'une famille d'atomes de Fourier

Sommaire

Transformée de Fourier à fenêtre

Definition (Transformée de Fourier à fenêtre)

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. La transformée de Fourier fenêtrée $Sf(u, \xi)$ de f est une fonction des variables temporelle et fréquentielle u et ξ, construite en projetant f sur la famille des $g_{u,\xi}$, où ξ parcourt $\mathbb{R}_+$ et u parcourt $\mathbb{R}$.

$$Sf(u, \xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t-u)e^{-i\xi t}\mathrm{d}t.$$

Propriétés

- Formule de Parseval:

$$Sf(u,\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\hat{g}_{u,\xi}(\omega)\mathrm{d}\omega$$

- Formule de reconstruction:

$$f(t) = \frac{1}{\|g\|_2^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} Sf(u,\xi)g_{u,\xi}(t)\mathrm{d}u\mathrm{d}\xi$$

Transformée de Fourier à fenêtre discrète

Definition (Transformée de Fourier à fenêtre discrète)

Soit f un signal d'énergie finie. La transformée de Fourier fenêtrée discrète du signal f est la fonction des variables m et l définie par:

$$Sf[m,l] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]g[n-m]e^{i\frac{2\pi ln}{N}}.$$

- Formule de reconstruction

$$f[n] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{S}f[m,l]g[n-m]\exp\left(\frac{2i\pi ln}{N}\right)$$

- Formule de Parseval

$$\sum_{n=0}^{N-1} |f[n]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} |\mathcal{S}f[m,l]|^2$$

Application: détection de fréquences instantanées

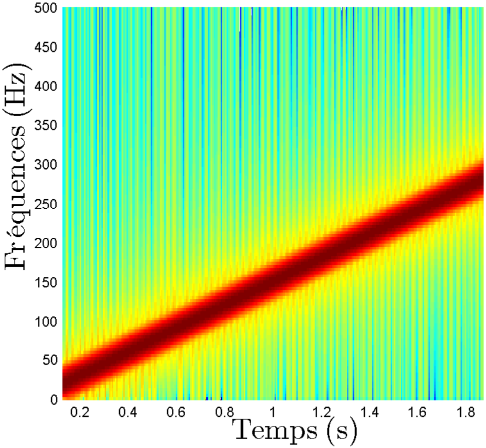

Figure: Spectrogramme: module de la transformée de Fourier à fenêtre d'un signal de type chirp