

Vitesses de déformation

Samuel Forest

Centre des Matériaux/UMR 7633
Mines ParisTech /CNRS
BP 87, 91003 Evry, France
Samuel.Forest@ensmp.fr



Plan

① Le champ de gradient des vitesses

- Dérivées temporelles
- Equation locale de conservation de la masse
- Le tenseur vitesse de déformation
- Le tenseur vitesse de rotation
- Exemples : glissement, tourbillon

② Bilan : vitesses de déformation du milieu continu

③ Puissance de déformation

- Formulation variationnelle de la dynamique des milieux continus
- Contraintes nominales, contraintes de Piola–Kirchhoff

Plan

① Le champ de gradient des vitesses

- Dérivées temporelles
- Equation locale de conservation de la masse
- Le tenseur vitesse de déformation
- Le tenseur vitesse de rotation
- Exemples : glissement, tourbillon

② Bilan : vitesses de déformation du milieu continu

③ Puissance de déformation

- Formulation variationnelle de la dynamique des milieux continus
- Contraintes nominales, contraintes de Piola–Kirchhoff

Plan

① Le champ de gradient des vitesses

- Dérivées temporelles
- Equation locale de conservation de la masse
- Le tenseur vitesse de déformation
- Le tenseur vitesse de rotation
- Exemples : glissement, tourbillon

② Bilan : vitesses de déformation du milieu continu

③ Puissance de déformation

- Formulation variationnelle de la dynamique des milieux continus
- Contraintes nominales, contraintes de Piola–Kirchhoff

Retour sur le champ des vitesses

- champ de vitesses

$$\underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{X}}, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\underline{\mathbf{X}}, t)$$

- descriptions matérielle/spatiale (lagrangienne/eulérienne)

$$\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}, t) := \underline{\mathbf{V}}(\Phi^{-1}(\underline{\mathbf{x}}, t), t)$$

plus généralement

$$f(\underline{\mathbf{x}}, t) := F(\underline{\mathbf{X}}, t), \quad \text{avec} \quad \underline{\mathbf{x}} = \Phi(\underline{\mathbf{X}}, t)$$

- dérivée temporelle en suivant le mouvement

$$\begin{aligned} \dot{F}(\underline{\mathbf{X}}, t) &:= \frac{d}{dt} F(\underline{\mathbf{X}}, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(\underline{\mathbf{X}}, t) \\ &= \frac{d}{dt} f(\underline{\mathbf{x}}, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(\underline{\mathbf{x}}, t) + \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \cdot \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}, t) = \dot{f}(\underline{\mathbf{x}}, t) \end{aligned}$$

Le champ de gradient des vitesses

- évolution instantanée d'un vecteur matériel transporté par le mouvement

$$\underline{dx} = \underbrace{\overset{\bullet}{F}}_{\underline{dx}} \cdot \underline{dX}$$

- le tenseur gradient des vitesses

Le champ de gradient des vitesses

- évolution instantanée d'un vecteur matériel transporté par le mouvement

$$\underline{dx} = \underline{F} \cdot \underline{dX}$$

$$\dot{\underline{dx}} = \underline{\underset{\sim}{L}} \cdot \underline{dx}, \quad \text{avec} \quad \underline{\underset{\sim}{L}} = \dot{\underline{\underset{\sim}{F}}} \cdot \underline{\underset{\sim}{F}}^{-1}$$

- le tenseur gradient des vitesses

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\underset{\sim}{F}}} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \underline{X}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{X} \partial t}(\underline{X}, t) \\ &= \text{Grad } \underline{V}(\underline{X}, t) = (\text{grad } \underline{v}(\underline{x}, t)) \cdot \underline{\underset{\sim}{F}} \\ \underline{\underset{\sim}{L}}(\underline{x}, t) &= \text{grad } \underline{v}(\underline{x}, t) = \dot{\underline{\underset{\sim}{F}}} \cdot \underline{\underset{\sim}{F}}^{-1} \end{aligned}$$

Plan

① Le champ de gradient des vitesses

- Dérivées temporelles
- Equation locale de conservation de la masse
- Le tenseur vitesse de déformation
- Le tenseur vitesse de rotation
- Exemples : glissement, tourbillon

② Bilan : vitesses de déformation du milieu continu

③ Puissance de déformation

- Formulation variationnelle de la dynamique des milieux continus
- Contraintes nominales, contraintes de Piola–Kirchhoff

Retour sur la conservation de la masse

- évolution instantanée d'un élément de volume

$$dv = J dV, \quad \text{avec} \quad J = \det \tilde{\mathbf{F}}$$

$$\dot{dv} = \frac{\dot{J}}{J} dv$$

$$\dot{dv} = \left[\dot{\underline{dx}}_1, \dot{\underline{dx}}_2, \dot{\underline{dx}}_3 \right]$$

- équation locale de la conservation de la masse

Retour sur la conservation de la masse

- évolution instantanée d'un élément de volume

$$dv = J dV, \quad \text{avec} \quad J = \det \tilde{\mathbf{F}}$$

$$\dot{dv} = \frac{j}{J} dv$$

$$\dot{dv} = [\dot{\underline{dx}}_1, \dot{\underline{dx}}_2, \dot{\underline{dx}}_3]$$

$$\frac{\dot{dv}}{dv} = \frac{j}{J} = \text{trace } \tilde{\mathbf{L}} = \text{div } \underline{\mathbf{v}}$$

- équation locale de la conservation de la masse

$$\dot{\rho} + \rho \text{div } \underline{\mathbf{v}} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{\mathbf{v}}) = 0$$

“équation de continuité”

Plan

① Le champ de gradient des vitesses

- Dérivées temporelles
- Equation locale de conservation de la masse
- Le tenseur vitesse de déformation
- Le tenseur vitesse de rotation
- Exemples : glissement, tourbillon

② Bilan : vitesses de déformation du milieu continu

③ Puissance de déformation

- Formulation variationnelle de la dynamique des milieux continus
- Contraintes nominales, contraintes de Piola–Kirchhoff

Tenseur vitesse de déformations

- évolution instantanée du produit scalaire de deux éléments de fibres matérielles

$$\overbrace{\underline{dx}_1 \cdot \underline{dx}_2}^{\bullet} =$$

Tenseur vitesse de déformations

- évolution instantanée du produit scalaire de deux éléments de fibres matérielles
d'une part...

$$\frac{d}{dt}(\underline{dx}_1 \cdot \underline{dx}_2) = \underline{dx}_1 \cdot \underline{\dot{L}}^T \cdot \underline{dx}_2 + \underline{dx}_1 \cdot \underline{\dot{L}} \cdot \underline{dx}_2 = 2 \underline{dx}_1 \cdot \underline{\dot{D}} \cdot \underline{dx}_2$$

... et d'autre part

$$\frac{d}{dt}(\underline{dx}_1 \cdot \underline{dx}_2) = \frac{d}{dt}(\underline{dX}_1 \cdot \underline{\dot{C}} \cdot \underline{dX}_2) = \underline{dX}_1 \cdot \underline{\dot{C}} \cdot \underline{dX}_2 = 2 \underline{dX}_1 \cdot \underline{\dot{E}} \cdot \underline{dX}_2$$

d'où ...

$$\underline{\dot{E}} = \frac{1}{2} \underline{\dot{C}} = \underline{F}^T \cdot \underline{\dot{D}} \cdot \underline{F}, \quad \underline{\dot{D}} := \frac{1}{2}(\underline{\dot{L}} + \underline{\dot{L}}^T)$$

tenseur vitesse de déformation ou taux de déformation

- taux d'allongement relatif :

$$\underline{dx} = \|\underline{dx}\| \underline{m}, \quad \underline{m} \text{ unitaire}$$

$$\lambda = \frac{\|\underline{dx}\|}{\|\underline{dX}\|}$$

Tenseur vitesse de déformations

- évolution instantanée du produit scalaire de deux éléments de fibres matérielles
d'une part...

$$\overbrace{\underline{dx}_1 \cdot \underline{dx}_2}^{\bullet} = \underline{dx}_1 \cdot \underline{\tilde{L}}^T \cdot \underline{dx}_2 + \underline{dx}_1 \cdot \underline{\tilde{L}} \cdot \underline{dx}_2 = 2 \underline{dx}_1 \cdot \underline{\tilde{D}} \cdot \underline{dx}_2$$

... et d'autre part

$$\overbrace{\underline{dx}_1 \cdot \underline{dx}_2}^{\bullet} = \overbrace{d\underline{X}_1 \cdot \underline{\tilde{C}} \cdot d\underline{X}_2}^{\bullet} = d\underline{X}_1 \cdot \underline{\dot{\tilde{C}}} \cdot d\underline{X}_2 = 2 d\underline{X}_1 \cdot \underline{\dot{\tilde{E}}} \cdot d\underline{X}_2$$

d'où ...

$$\underline{\dot{\tilde{E}}} = \frac{1}{2} \underline{\dot{\tilde{C}}} = \underline{\tilde{F}}^T \cdot \underline{\tilde{D}} \cdot \underline{\tilde{F}}, \quad \underline{\tilde{D}} := \frac{1}{2} (\underline{\tilde{L}} + \underline{\tilde{L}}^T)$$

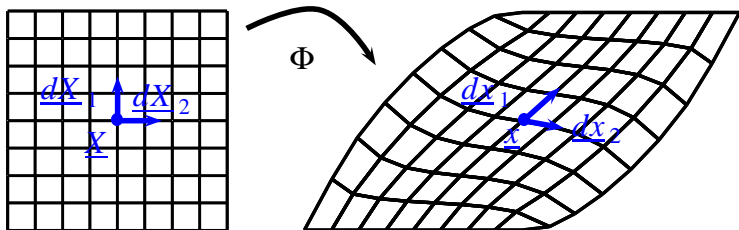
tenseur vitesse de déformation ou taux de déformation

- taux d'allongement relatif :

$$\underline{dx} = \|\underline{dx}\| \underline{m}, \quad \underline{m} \text{ unitaire}$$

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \overbrace{\frac{\|\underline{dx}\|}{\|\underline{dx}\|}}^{\bullet} = \underline{m} \cdot \underline{\tilde{D}} \cdot \underline{m}$$

Taux de glissement angulaire



- angle de glissement : $\gamma = \Theta - \theta$

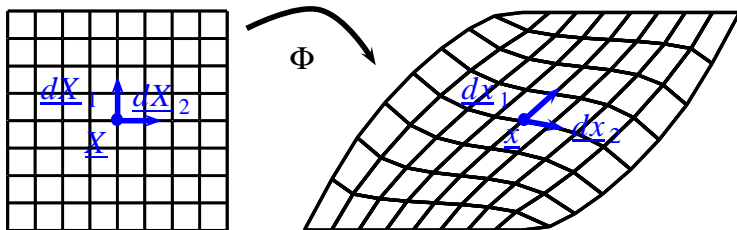
$$\dot{\gamma} = -\dot{\theta}$$

$$\dot{\underline{dx}}_1 \cdot \dot{\underline{dx}}_2 = \|\dot{\underline{dx}}_1\| \|\dot{\underline{dx}}_2\| \cos \theta = 2 \underline{dx}_1 \cdot \underline{D} \cdot \underline{dx}_2$$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ à l'instant t donné,

$$\dot{\gamma} =$$

Taux de glissement angulaire



- angle de glissement : $\gamma = \Theta - \theta$

$$\dot{\gamma} = -\dot{\theta}$$

$$\dot{\underline{dx}}_1 \cdot \underline{dx}_2 = \|\underline{dx}_1\| \|\underline{dx}_2\| \cos \theta = 2 \underline{dx}_1 \cdot \underline{D} \cdot \underline{dx}_2$$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ à l'instant t donné,

$$\dot{\gamma} = 2 \underline{m}_1 \cdot \underline{D} \cdot \underline{m}_2$$

où $\underline{m}_1 = \underline{dx}_1 / \|\underline{dx}_1\|$, $\underline{m}_2 = \underline{dx}_2 / \|\underline{dx}_2\|$

- cas particulier, $\underline{m}_1 = \underline{e}_1$, $\underline{m}_2 = \underline{e}_2 \implies \dot{\gamma} = 2D_{12}$

Directions orthogonales dans le mouvement

- Conséquence 1 : $\underline{m}_1, \underline{m}_2$ 2 éléments de fibres matérielles coïncidant à l'instant t avec 2 directions principales orthogonales de $\underline{\tilde{D}}$ restent orthogonales à l'instant t
- Conséquence 2 : *Les trièdres de directions matérielles deux à deux orthogonales et qui le restent à l'instant t sont les trièdres des directions matérielles qui coïncident à l'instant t avec les directions principales du tenseur $\underline{\tilde{D}}$ des taux de déformation. Lorsque les valeurs propres de $\underline{\tilde{D}}$ sont distinctes, un tel trièdre est unique.*

Plan

① Le champ de gradient des vitesses

- Dérivées temporelles
- Equation locale de conservation de la masse
- Le tenseur vitesse de déformation
- Le tenseur vitesse de rotation
- Exemples : glissement, tourbillon

② Bilan : vitesses de déformation du milieu continu

③ Puissance de déformation

- Formulation variationnelle de la dynamique des milieux continus
- Contraintes nominales, contraintes de Piola–Kirchhoff

Le tenseur vitesse de rotation

- évolution d'une direction de fibre matérielle

$$\underline{dx} = \|\underline{dx}\| \underline{m}$$

$$\underline{\dot{m}} =$$

- cas où \underline{m} est parallèle à une direction principale de \underline{D}
- Conséquence :

Le tenseur vitesse de rotation

- évolution d'une direction de fibre matérielle $\underline{m} = \underline{dx} / \|\underline{dx}\|$

$$\dot{\underline{m}} = \underline{\tilde{L}} \cdot \underline{m} - (\underline{m} \cdot \underline{\tilde{D}} \cdot \underline{m}) \underline{m}$$

- cas où \underline{m} est parallèle à une direction principale de $\underline{\tilde{D}}$

$$\underline{\tilde{W}} := \underline{\tilde{L}} - \underline{\tilde{D}} = \frac{1}{2}(\underline{\tilde{L}} - \underline{\tilde{L}}^T)$$

$$\dot{\underline{m}} = \underline{\tilde{W}} \cdot \underline{m} = \underline{\tilde{W}}^\times \wedge \underline{m}$$

tenseur vitesse ou taux de rotation

- Conséquence : *Le trièdre orthonormé des vecteurs unitaires portés par les directions matérielles qui coïncident à l'instant t avec les directions principales de $\underline{\tilde{D}}$, évolue selon un mouvement de solide rigide dont le taux de rotation à l'instant t vaut $\underline{\tilde{W}}$.*
- Attention : Le trièdre des directions principales de $\underline{\tilde{D}}$ ne tournent pas à la vitesse $\underline{\tilde{W}}$... (voir le cas du glissement simple)

Décomposition du gradient des vitesses

- vitesse de déformation + vitesse de rotation

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{W}}$$

parties symétrique et antisymétrique

- décomposition polaire

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}$$

$$\underline{\underline{L}} = \dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = \dot{\underline{\underline{R}}} \cdot \underline{\underline{R}}^T + \underline{\underline{R}} \cdot \dot{\underline{\underline{U}}} \cdot \underline{\underline{U}}^{-1} \cdot \underline{\underline{R}}^T$$

attention, le dernier terme n'est pas nécessairement symétrique... En général, $\underline{\underline{W}} \neq \dot{\underline{\underline{R}}} \cdot \underline{\underline{R}}^T$

- vecteur vitesse de rotation

$$\forall \underline{\underline{y}}, \quad \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{y}} = \overset{\times}{\underline{\underline{W}}} \wedge \underline{\underline{y}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{\times}{\underline{\underline{W}}}_1 = -W_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \\ \overset{\times}{\underline{\underline{W}}}_2 = -W_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \overset{\times}{\underline{\underline{W}}}_3 = -W_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \end{array} \right. , \quad \overset{\times}{\underline{\underline{W}}} = -\frac{1}{2} \text{rot } \underline{\underline{v}}$$

Décomposition du gradient des vitesses

- vitesse de déformation + vitesse de rotation

$$\underline{\tilde{L}} = \underline{\tilde{D}} + \underline{\tilde{W}}$$

parties symétrique et antisymétrique

- décomposition polaire

$$\underline{\tilde{F}} = \underline{\tilde{R}} \cdot \underline{\tilde{U}}$$

$$\underline{\tilde{L}} = \dot{\underline{\tilde{F}}} \cdot \underline{\tilde{F}}^{-1} = \dot{\underline{\tilde{R}}} \cdot \underline{\tilde{R}}^T + \underline{\tilde{R}} \cdot \dot{\underline{\tilde{U}}} \cdot \underline{\tilde{U}}^{-1} \cdot \underline{\tilde{R}}^T$$

attention, le dernier terme n'est pas nécessairement symétrique... En général, $\underline{\tilde{W}} \neq \dot{\underline{\tilde{R}}} \cdot \underline{\tilde{R}}^T$

- contexte infinitésimal

$$\|\underline{\tilde{H}} = \text{Grad } \underline{u}\| \ll 1 \iff \underline{\tilde{F}} = \mathcal{O}(\underline{1})$$

$$\underline{\tilde{F}} = \underline{1} + \text{Grad } \underline{u} \implies \underline{\tilde{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\tilde{H}} + \underline{\tilde{H}}^T), \quad \underline{\tilde{\omega}} = \frac{1}{2}(\underline{\tilde{H}} - \underline{\tilde{H}}^T)$$

$$\underline{\tilde{D}} \simeq \frac{1}{2}(\dot{\underline{\tilde{H}}} + \dot{\underline{\tilde{H}}}^T) = \underline{\dot{\tilde{\varepsilon}}}, \quad \underline{\tilde{W}} \simeq \frac{1}{2}(\dot{\underline{\tilde{H}}} - \dot{\underline{\tilde{H}}}^T) = \underline{\dot{\tilde{\omega}}}$$

Plan

① Le champ de gradient des vitesses

- Dérivées temporelles
- Equation locale de conservation de la masse
- Le tenseur vitesse de déformation
- Le tenseur vitesse de rotation
- Exemples : glissement, tourbillon

② Bilan : vitesses de déformation du milieu continu

③ Puissance de déformation

- Formulation variationnelle de la dynamique des milieux continus
- Contraintes nominales, contraintes de Piola–Kirchhoff

Mouvement de corps rigide

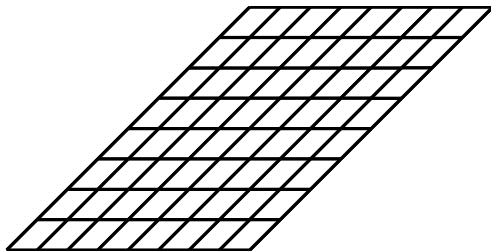
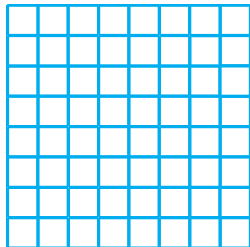
$$\underline{x} = \underset{\sim}{Q}(t) \cdot \underline{X} + \underline{c}(t)$$

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \underset{\sim}{W}(t) \cdot \underline{x} + \underline{v}_0(t) = \overset{\times}{\underset{\sim}{W}}(t) \wedge \underline{x} + \underline{v}_0(t)$$

$$\underset{\sim}{W} = \underset{\sim}{\dot{Q}} \cdot \underset{\sim}{Q}^T$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^0 \\ v_2^0 \\ v_3^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^0 \\ v_2^0 \\ v_3^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Le glissement simple

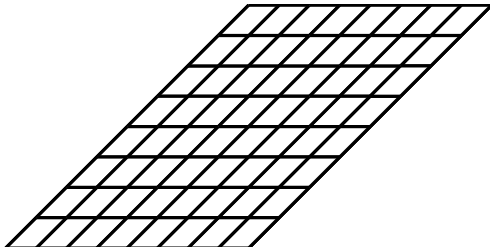
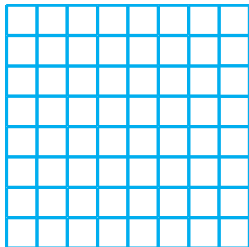


$$[\tilde{L}] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{D}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \\ \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{W}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \\ -\frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le glissement simple



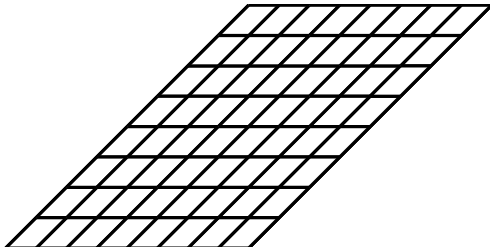
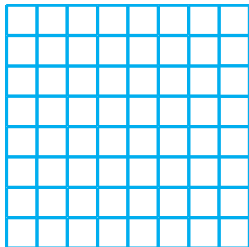
$$[\tilde{\mathbf{L}}] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{\mathbf{D}}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \\ \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{\mathbf{W}}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \\ -\frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarquer que les directions principales de $\tilde{\mathbf{D}}$ ne tournent pas. Pour autant, $\tilde{\mathbf{W}}$ n'est pas nul...

Le glissement simple



$$[\tilde{\mathbf{W}}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \\ -\frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\tilde{\mathbf{R}}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+(\gamma/2)^2}} & \frac{\gamma}{2\sqrt{1+(\gamma/2)^2}} & 0 \\ \frac{-\gamma}{2\sqrt{1+(\gamma/2)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+(\gamma/2)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\dot{\theta}_W = -\frac{\dot{\gamma}}{2}, \quad \tan \theta_R = -\frac{\gamma}{2}, \quad \dot{\theta}_R = -\frac{\dot{\gamma}}{2} \frac{1}{1 + \gamma^2/4}$$

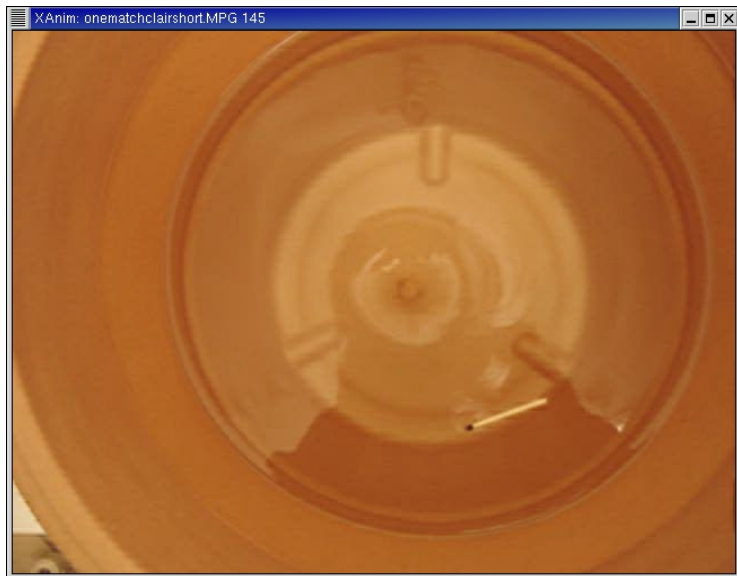
Le tourbillon ponctuel



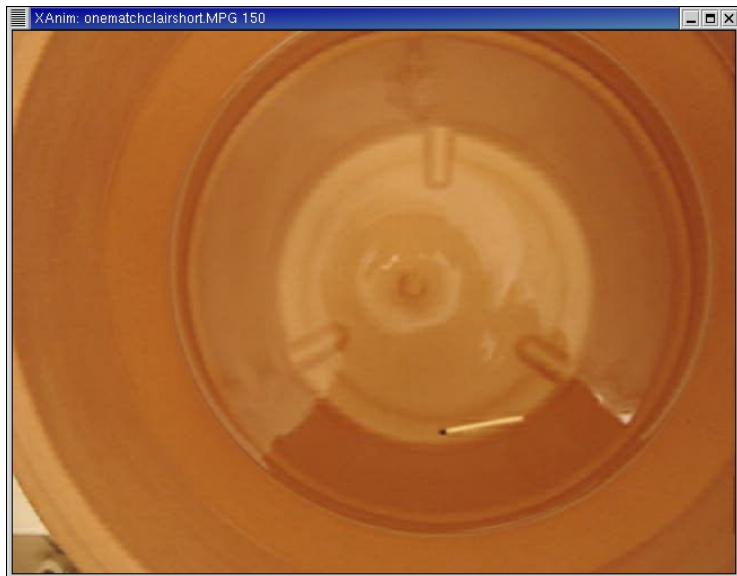
Le tourbillon ponctuel



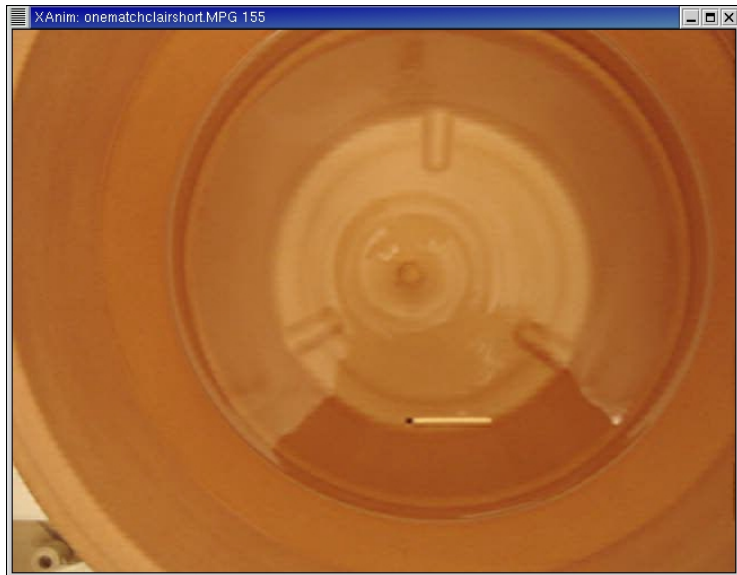
Le tourbillon ponctuel



Le tourbillon ponctuel



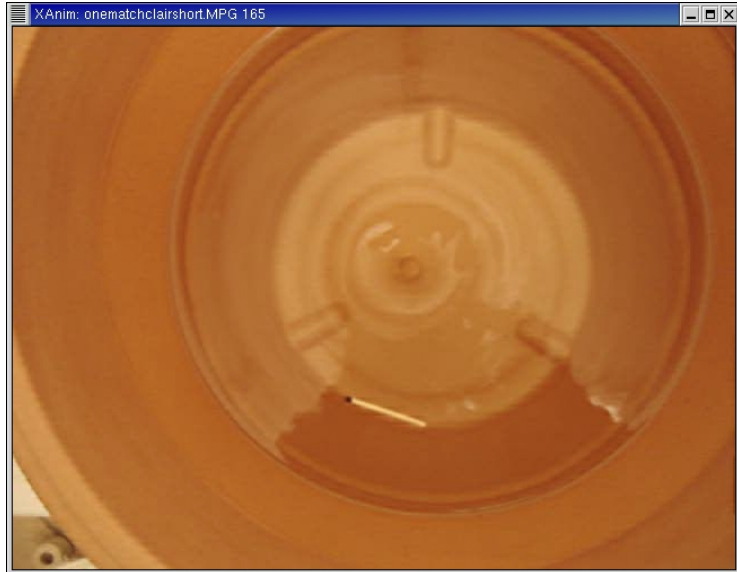
Le tourbillon ponctuel



Le tourbillon ponctuel



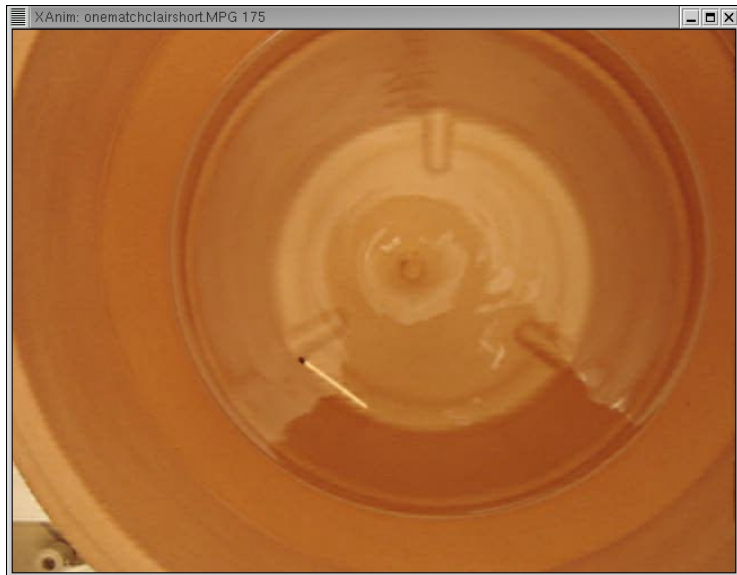
Le tourbillon ponctuel



Le tourbillon ponctuel



Le tourbillon ponctuel



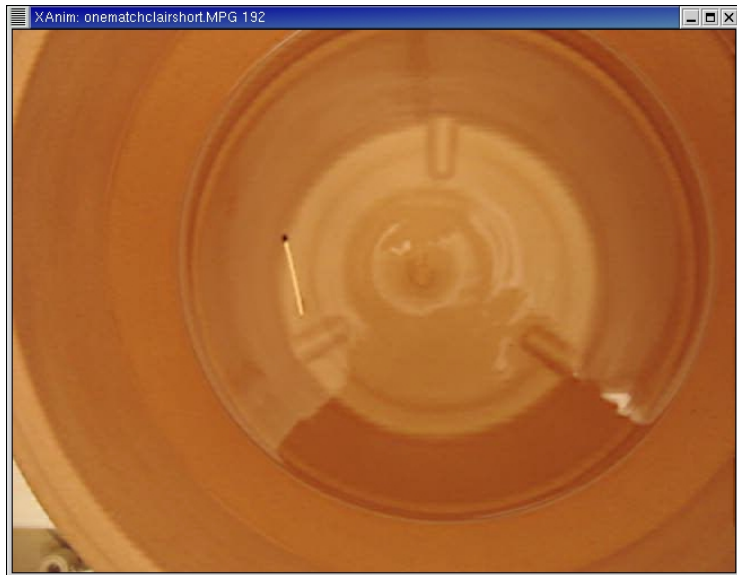
Le tourbillon ponctuel



Le tourbillon ponctuel



Le tourbillon ponctuel



Le tourbillon ponctuel

- cinématique

$$\underline{\mathbf{v}}(r, \theta, z, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \underline{\mathbf{e}}_\theta$$

les lignes de courant sont des cercles de centre O

- gradient des vitesses

$$\underline{\mathbf{L}} = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} (\underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{e}}_\theta + \underline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \underline{\mathbf{e}}_r)$$

- la transformation est localement isochore

$$\text{trace } \underline{\mathbf{D}} = \text{div } \underline{\mathbf{v}} = 0$$

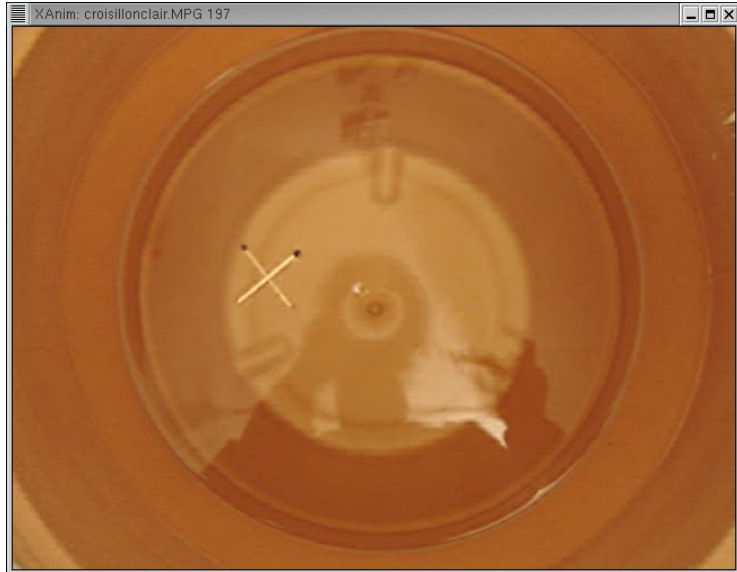
- l'écoulement est irrotationnel en tout point $\neq O$

$$\underline{\mathbf{W}} = 0$$

- circulation de $\underline{\mathbf{v}}$ autour de O

$$\oint \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_\theta r d\theta = \Gamma$$

Le vorticimètre



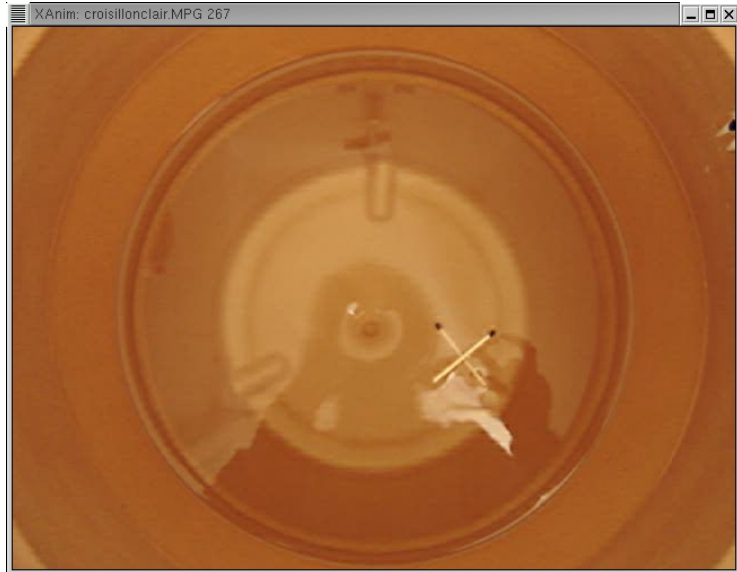
Le vorticimètre



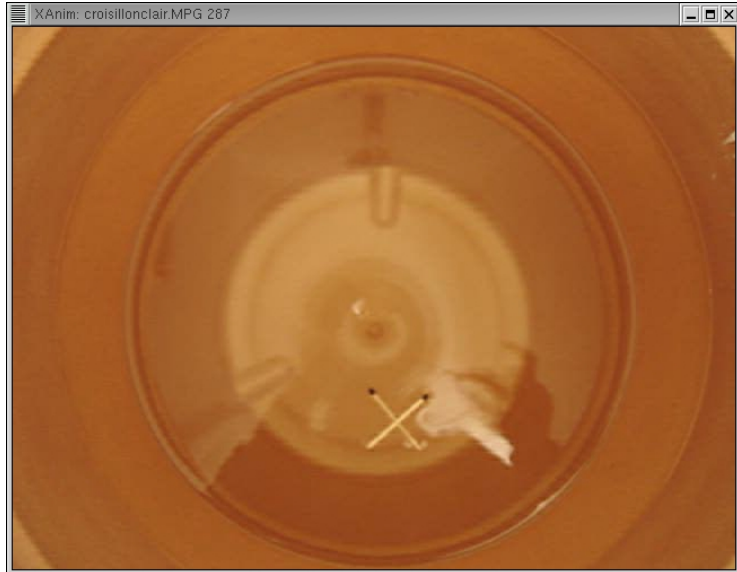
Le vorticimètre



Le vorticimètre



Le vorticimètre



Le vorticimètre



Le vorticimètre



Le vorticimètre



Le vorticimètre



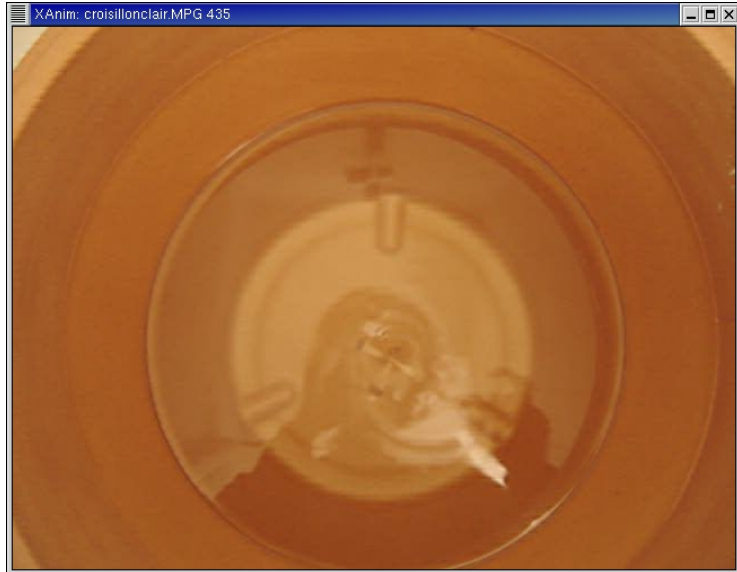
Le vorticimètre



Le vorticimètre



Le vorticimètre



Le vorticimètre (1)

- directions unitaires caractérisant le croisillon \underline{m}_1 et \underline{m}_2

$$\dot{\underline{m}}_1 = \underline{L} \cdot \underline{m}_1 - (\underline{m}_1 \cdot \underline{D} \cdot \underline{m}_1) \underline{m}_1$$

$$\dot{\underline{m}}_2 = \underline{L} \cdot \underline{m}_2 - (\underline{m}_2 \cdot \underline{D} \cdot \underline{m}_2) \underline{m}_2$$

- Evolution de l'angle entre un axe du croisillon et une direction fixe de l'espace \underline{a}

$$-\sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 = \dot{\underline{m}}_1 \cdot \underline{a} = \underline{a} \cdot \underline{L} \cdot \underline{m}_1 - (\underline{m}_1 \cdot \underline{D} \cdot \underline{m}_1) \underline{m}_1 \cdot \underline{a}$$

Le choix de \underline{a} n'importe pas si l'on s'intéresse à $\dot{\varphi}$ seulement.
Prenons

$$\varphi_1 = (\underline{a} = \underline{m}_2, \underline{m}_1) = -\frac{\pi}{2} \implies \dot{\varphi}_1 = \underline{m}_2 \cdot \underline{L} \cdot \underline{m}_1$$

$$\varphi_2 = (\underline{a} = \underline{m}_1, \underline{m}_2) = \frac{\pi}{2} \implies \dot{\varphi}_2 = -\underline{m}_1 \cdot \underline{L} \cdot \underline{m}_2$$

Le vorticimètre (2)

- Lorsque l'assemblage est rigide ($\underline{m}_1 \cdot \underline{m}_2 = 0$ à chaque instant), sa vitesse de rotation sera la moyenne des vitesses instantanées précédentes :

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2}{2} = \underline{m}_2 \cdot \underline{\tilde{W}} \cdot \underline{m}_1 \\ &= \underline{m}_2 \cdot (\underline{\tilde{W}}^\times \wedge \underline{m}_1) = \underline{\tilde{W}}^\times \wedge (\underline{m}_1 \wedge \underline{m}_2) = \underline{\tilde{W}}^\times \cdot \underline{e}_z\end{aligned}$$

- La vitesse de rotation du croisillon rigide est exactement donnée par le taux de rotation du fluide $\underline{\tilde{W}}$. Le vorticimètre permet de mesurer ce taux de rotation.
- Dans le cas du tourbillon simple, $\underline{\tilde{W}} = 0$. Le vorticimètre ne tourne pas!

Plan

① Le champ de gradient des vitesses

- Dérivées temporelles
- Equation locale de conservation de la masse
- Le tenseur vitesse de déformation
- Le tenseur vitesse de rotation
- Exemples : glissement, tourbillon

② Bilan : vitesses de déformation du milieu continu

③ Puissance de déformation

- Formulation variationnelle de la dynamique des milieux continus
- Contraintes nominales, contraintes de Piola–Kirchhoff

Analogie $\underline{D} \longleftrightarrow \underline{\varepsilon}$

	vitesse de déformation \underline{D} (cas général)	déformations infinitésimales $\underline{\varepsilon}$ (contexte infinitésimal)
opérateur gradient symétrisé	$\underline{D} = \frac{1}{2}(\text{grad } \underline{v} + (\text{grad } \underline{v})^T)$ $D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$	$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\text{Grad } \underline{u} + (\text{Grad } \underline{u})^T)$ $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$
variation de volume	$\frac{\dot{d}v}{dv} = \text{div } \underline{v} = \text{trace } \underline{D}$	$\frac{dv - dV}{dV} \simeq \text{Div } \underline{u} = \text{trace } \underline{\varepsilon}$
allongement relatif	$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \underline{m} \cdot \underline{D} \cdot \underline{m}$	$\lambda - 1 \simeq \underline{M} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{M} \simeq \frac{\lambda - 1}{\lambda}$

Analogie $\underline{D} \longleftrightarrow \underline{\varepsilon}$

	vitesse de déformation \underline{D} (cas général)	déformations infinitésimales $\underline{\varepsilon}$ (contexte infinitésimal)
opérateur gradient symétrisé	$\underline{D} = \frac{1}{2}(\text{grad } \underline{v} + (\text{grad } \underline{v})^T)$ $D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$	$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\text{Grad } \underline{u} + \text{Grad } \underline{u})$ $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$
variation de volume	$\frac{\dot{dv}}{dv} = \text{div } \underline{v} = \text{trace } \underline{D}$	$\frac{dv - dV}{dV} \simeq \text{Div } \underline{u} = \text{trace } \underline{\varepsilon}$
allongement relatif	$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \underline{m} \cdot \underline{D} \cdot \underline{m}$	$\lambda - 1 \simeq \underline{M} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{M} \simeq \frac{\lambda - 1}{\lambda}$
compatibilité	$D_{ik,jl} + D_{jl,ik}$ $= D_{il,jk} + D_{jk,il}$	$\varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik}$ $= \varepsilon_{il,jk} + \varepsilon_{jk,il}$

Autour des vitesses de déformation et de rotation

$$\underline{\underline{L}} = \dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = \text{grad } \underline{v}$$

tenseur gradient des vitesses

$$\underline{\underline{D}} := \frac{1}{2}(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T)$$

tenseur taux de déformation

$$\underline{\underline{W}} := \frac{1}{2}(\underline{\underline{L}} - \underline{\underline{L}}^T)$$

tenseur taux de rotation

$$\dot{\underline{\underline{E}}} = \frac{1}{2}\dot{\underline{\underline{C}}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{F}}$$

$$\overbrace{\underline{dx}}^{\bullet} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{dx}$$

élément de fibre matérielle

$$\overbrace{\underline{dx}_1 \cdot \underline{dx}_2}^{\bullet} = 2\underline{dx}_1 \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{dx}_2 = \underline{dX}_1 \cdot \dot{\underline{\underline{C}}} \cdot \underline{dX}_2$$

$$\overbrace{dv}^{\bullet} = (\text{trace } \underline{\underline{L}}) dv = \int \dot{v}$$

élément de volume

$$\frac{\dot{\lambda}(\underline{m})}{\lambda(\underline{m})} = \underline{m} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{m}$$

taux d'allongement relatif

Plan

① Le champ de gradient des vitesses

- Dérivées temporelles
- Equation locale de conservation de la masse
- Le tenseur vitesse de déformation
- Le tenseur vitesse de rotation
- Exemples : glissement, tourbillon

② Bilan : vitesses de déformation du milieu continu

③ Puissance de déformation

- Formulation variationnelle de la dynamique des milieux continus
- Contraintes nominales, contraintes de Piola–Kirchhoff

Plan

① Le champ de gradient des vitesses

- Dérivées temporelles
- Equation locale de conservation de la masse
- Le tenseur vitesse de déformation
- Le tenseur vitesse de rotation
- Exemples : glissement, tourbillon

② Bilan : vitesses de déformation du milieu continu

③ Puissance de déformation

- Formulation variationnelle de la dynamique des milieux continus
- Contraintes nominales, contraintes de Piola–Kirchhoff

Puissance de déformation

Soit $\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$ un champ de contraintes vérifiant les équations locales de la dynamique pour les efforts imposés (cas régulier)

- Puissance des efforts appliqués sur un domaine matériel $\mathcal{D} \subset \Omega_t$

$$\mathcal{P}^c(\underline{\mathbf{v}}) + \mathcal{P}^e(\underline{\mathbf{v}}) = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\mathbf{t}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, ds + \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, dv$$

Puissance de déformation

Soit $\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$ un champ de contraintes vérifiant les équations locales de la dynamique pour les efforts imposés (cas régulier)

- Puissance des efforts appliqués sur un domaine matériel $\mathcal{D} \subset \Omega_t$

$$\mathcal{P}^c(\underline{v}) + \mathcal{P}^e(\underline{v}) = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{t} \cdot \underline{v} \, ds + \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{f} \cdot \underline{v} \, dv$$

- Puissance du champ d'accélération

$$\mathcal{P}^a(\underline{v}) := \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{a} \cdot \underline{v} \, dv$$

- Puissance des efforts intérieurs

$$\mathcal{P}^i(\underline{v}) := - \int_{\mathcal{D}} \underline{\sigma} : \underline{D} \, dv, \quad \underline{\sigma} : \underline{D} \sim \text{MPa.s}^{-1} = \text{Wm}^{-3}$$

- on a

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^c(\underline{v}) + \mathcal{P}^e(\underline{v}) + \mathcal{P}^i(\underline{v}) &= \mathcal{P}^a(\underline{v}) \\ - \int_{\mathcal{D}} \underline{\sigma} : \underline{D} \, dv + \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{t} \cdot \underline{v} \, ds + \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{f} \cdot \underline{v} \, dv &= \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{a} \cdot \underline{v} \, dv \end{aligned}$$

“Principe” des puissances virtuelles

- énoncé (cas régulier) : *Le champ des contraintes $\underline{\sigma}$ et d'accélération \underline{a} dans un corps matériel soumis aux effort $\rho \underline{f}$ et \underline{t} , vérifient les équations locales de la dynamique si et seulement si la puissance des efforts intérieurs, à distance et de contact équilibre la puissance du champ d'accélération dans tout mouvement virtuel \underline{v}^* et sur tout sous-domaine $\mathcal{D} \subset \Omega_t$:*

$$\mathcal{P}^i(\underline{v}^*) + \mathcal{P}^c(\underline{v}^*) + \mathcal{P}^e(\underline{v}^*) = \mathcal{P}^a(\underline{v}^*)$$
$$- \int_{\mathcal{D}} \underline{\sigma} : \underline{D}^* dv + \int_{\partial \mathcal{D}} \underline{t} \cdot \underline{v}^* ds + \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{f} \cdot \underline{v}^* dv = \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{a} \cdot \underline{v}^* dv$$

- Dans ce cours, il s'agit d'un théorème mais on peut aussi partir d'un tel principe pour fonder la dynamique des milieux continus.
- Ce théorème est à la base des méthodes énergétiques de résolution, ainsi que des méthodes numériques qui s'en déduisent (Eléments Finis)

Plan

① Le champ de gradient des vitesses

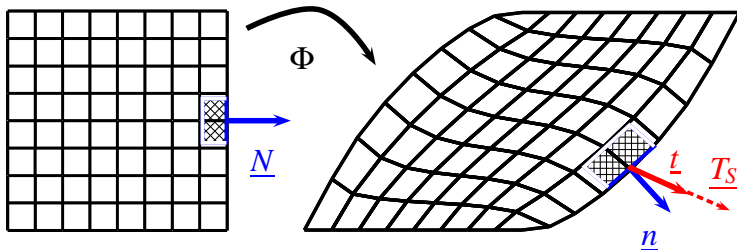
- Dérivées temporelles
- Equation locale de conservation de la masse
- Le tenseur vitesse de déformation
- Le tenseur vitesse de rotation
- Exemples : glissement, tourbillon

② Bilan : vitesses de déformation du milieu continu

③ Puissance de déformation

- Formulation variationnelle de la dynamique des milieux continus
- Contraintes nominales, contraintes de Piola–Kirchhoff

Le tenseur des contraintes nominales



- Représentation lagrangienne des équations de la dynamique

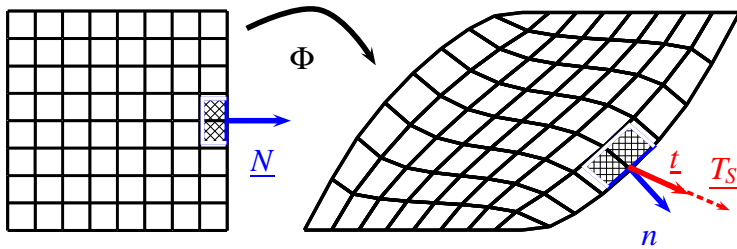
$$\int_{\mathcal{D}} \rho \underline{a} \, dv = \int_{\partial \mathcal{D}} \underline{\tilde{\sigma}} \cdot \underline{n} \, ds + \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{f} \, dv$$

$$\int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{A} \, dV = \int_{\partial \mathcal{D}_0} \underline{\tilde{S}} \cdot \underline{N} \, dS + \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{F} \, dV$$

- transport d'un élément de surface

$$\underline{n} \, ds = J \underline{\tilde{F}}^{-T} \cdot \underline{N} \, dS$$

Le tenseur des contraintes nominales



- Représentation lagrangienne des équations de la dynamique

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \underline{a} \, dv = \int_{\partial \mathcal{D}} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \, ds + \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{f} \, dv$$

$$\int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{A} \, dV = \int_{\partial \mathcal{D}_0} \underline{S} \cdot \underline{N} \, dS + \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{F} \, dV$$

- le tenseur des contraintes nominales

$$\underline{t} \, ds = \underline{T}_S dS = \underline{S} \cdot \underline{N} \, dS, \quad \text{avec} \quad \underline{S} := J \underline{\sigma} \cdot \underline{F}^{-T}$$

tenseur des contraintes nominales, dit de Bousinesq.

Le tenseur des contraintes de Piola–Kirchhoff

- puissance des efforts intérieurs

$$\int_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} \, dv = \int_{\mathcal{D}_0} \underline{\underline{\Pi}} : \underline{\underline{\dot{E}}} \, dV$$

Le tenseur des contraintes de Piola–Kirchhoff

- puissance des efforts intérieurs

$$\int_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} \, dv = \int_{\mathcal{D}_0} \underline{\underline{\Pi}} : \underline{\underline{\dot{E}}} \, dV$$

$$\underline{\underline{\Pi}} = J \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{S}}$$

tenseur des contraintes de Piola–Kirchhoff

- densité massique de puissance des efforts intérieurs

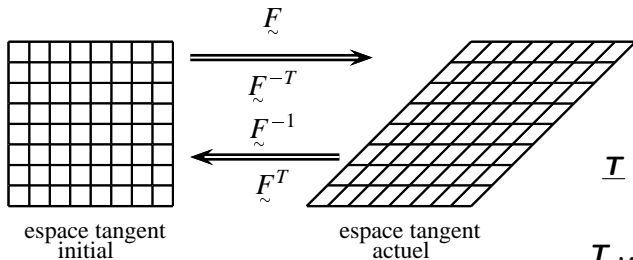
$$\frac{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}}{\rho} = \frac{\underline{\underline{\Pi}} : \underline{\underline{\dot{E}}}}{\rho_0}$$

couples de contraintes et déformations conjuguées

- transport convectif du vecteur traction

$$\underline{\underline{T}} \, dS := \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{t}} \, ds = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{T}}_S \, dS = \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{\underline{N}} \, dS$$

Retour sur les transports convectifs



$$\underline{dx} = \tilde{F} \cdot \underline{dX}$$

$$\underline{ds} = J \tilde{F}^{-T} \cdot \underline{dS}$$

$$\underline{T} dS = \tilde{F}^{-1} \cdot \underline{t} ds$$

$$\begin{aligned} \underline{T}_M dS &= \tilde{F}^T \cdot \underline{t} ds \\ &= \tilde{C} \cdot \tilde{\Pi} \cdot \underline{N} dS \end{aligned}$$

tenseur des contraintes de Mandel