Introduction à la Microéconomie

Demande et surplus des consommateurs

Pierre Fleckinger

Version : Février 2023

1 Consommateur représentatif **2**

1.1 Demande 2

1.2 Surplus des consommateurs 3

2 Consommateurs hétérogènes **6**

2.1 Demande 6

2.2 Surplus 7

3 Origine et usage **9**

Dans cette note, les fonctions de demande et de demande inverse sont définies en partant de l'utilité des consommateurs. Le surplus des consommateurs est ensuite défini et dérivé dans les différents cas. Deux approches classiques sont présentées : soit un consommateur représentatif choisit la quantité qu'il achète, soit des consommateurs différents ont une demande unitaire : ils choisissent s'ils achètent ou non une unité du bien. Il est important de noter que le surplus du consommateur tel qu'il est défini ici de la manière classique ne prend pas en compte les inégalités entre consommateurs (chaque euro est compté de la même manière quelle que soit la poche dans laquelle il est).

1 Consommateur représentatif

1.1 Demande

Cas général. On se donne un consommateur représentatif qui obtient une utilité ("indirecte") $v(q)$ de la consommation d'une quantité q du bien considéré. La fonction v est supposée (strictement) croissante et concave : $v' > 0$ et $v'' < 0$. On supposera aussi que $v(0) = 0$. Pour un prix p donné d'une unité du bien, son utilité totale est donc :

$$U(q, p) = v(q) - pq \tag{1}$$

La maximisation de son utilité pour le bien considéré donne donc par la condition du premier ordre :

$$v'(q^*) = p$$

L'équation précédente donne immédiatement la demande inverse, p en fonction de la quantité consommée :

$$\boxed{p(q) = v'(q)} \tag{2}$$

En inversant la condition du premier ordre, la quantité achetée pour un prix p est $q^*(p) = (v')^{-1}(p)$. Comme v est concave, v' est décroissante, et $(v')^{-1}$ est donc décroissante. La fonction de demande du consommateur est :

$$d(p) \equiv q^*(p) = \left(v'\right)^{-1}(p) \tag{3}$$

Pour que cela soit bien vérifié, il faut tout de même que pour $q = 0$ le prix soit inférieur à $v'(0)$, sinon même une quantité infinitésimale achetée n'est pas intéressante. Autrement dit, si $p > v'(0)$, on a $q^* = 0$. On posera donc $\overline{p} = v'(0)$, ce qui définit le prix au-dessus duquel le consommateur n'achète rien du tout.

Application : utilité quadratique. La fonction d'utilité du consommateur est donnée par :

$$v(q) = aq - \frac{b}{2}q^2 \quad \text{pour } 0 \leq q \leq \frac{a}{b} \tag{4}$$

Ainsi :

$$v'(q) = a - bq \quad \text{pour } q \leq \frac{a}{b}$$

En appliquant les résultats précédents, on trouve directement la fonction de demande inverse :

$$\boxed{p(q) = a - bq} \quad \text{pour } q \leq \frac{a}{b} \tag{5}$$

et $p = 0$ pour $q \geq \frac{a}{b}$.
La fonction inverse

$$\left(v'\right)^{-1}(p) = \frac{1}{b}(a - p) \quad \text{pour } 0 \leq p \leq a,$$

en découle immédiatement, et en suivant la logique de l'équation (3), on obtient donc la fonction de demande (directe) du consommateur :

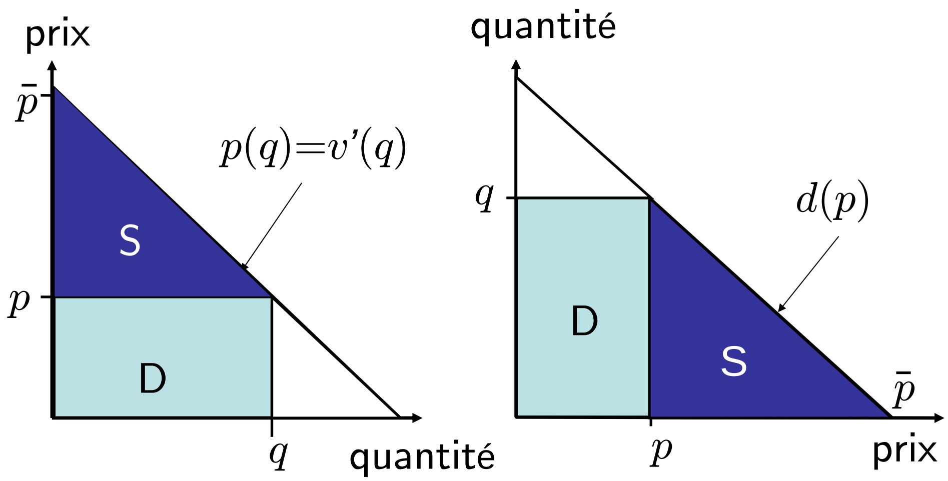
$$\boxed{d(p) = \begin{cases} \frac{1}{b}(a-p) & \text{pour } 0 \leq p \leq a \\ 0 & \text{pour } \ p > a. \end{cases}} \tag{6}$$

1.2 Surplus des consommateurs

La formule générale pour le surplus dérivé par les consommateurs d'un bien vendu au prix p est :

$$\boxed{S(p) = \int_p^{+\infty} D(z)dz} \tag{7}$$

où D est la fonction de demande totale. Les sous-sections suivantes expliquent d'où vient cette formule dans différents cadres.



Cas général. On définit simplement le surplus du consommateur comme l'utilité obtenue par la consommation (en quantité optimale) du bien :

$$S(p) = U(p) = v(q^*(p)) - pq^*(p)$$

or pour tout q,

$$v(q) = v(q) - v(0) = \int_0^q v'(x)dx = \int_0^q p(x)dx$$

en remplaçant par la demande inverse (2) dans l'intégrale. Ainsi :

$$v(q) - pq = \int_0^q p(x)dx - qp(q)$$

L'intégrale correspond à l'aire sous la courbe de demande inverse entre 0 et q sur le graphe de droite. C'est donc la somme des aires, S+D. Le deuxième terme est exactement le rectangle D, qui correspond à la dépense.
L'aire S peut être calculer directement en utilisant la fonction de demande (graphe de

droite), c'est immédiatement :

$$S(p) = \int_p^{\overline{p}} d(z)dz$$

Comme par définition $d(\overline{p}) = 0$ si $p \geq \overline{p}$, on peut réécrire l'intégrale entre les bornes p et $+\infty$, puisque

$$\int_p^{+\infty} d(z)dz = \int_p^{\overline{p}} d(z)dz + \int_{\overline{p}}^{+\infty} d(z)dz = \int_p^{\overline{p}} d(z)dz + \int_{\overline{p}}^{+\infty} 0dz = \int_p^{\overline{p}} d(z)dz$$

Si l'on a N consommateurs identiques– d'où la dénomination de consommateur représentatif –la fonction de demande totale est $D(p) = Nd(p)$, et le surplus est simplement N fois le surplus d'un consommateur.

Application : utilité quadratique. Dans le cas quadratique, $d(p)$ est donnée par (6), d'où, quand $p < a$:

$$\begin{aligned}
S(p) &= \int_p^{+\infty} d(z)dz \\
&= \int_p^{a} \frac{1}{b}(a-z)dz + \int_a^{+\infty} 0dz \\
&= \left[\frac{1}{b}(az - \frac{1}{2}z^2)\right]_p^a \\
&= \frac{1}{b}\left[z(a - \frac{1}{2}z)\right]_p^a \\
&= \frac{1}{b}\left(\frac{1}{2}a^2 - ap + \frac{1}{2}p^2\right) \\
\Rightarrow & \boxed{S(p) = \tfrac{1}{2b}(a-p)^2}
\end{aligned} \tag{8}$$

De plus, comme $p = a - bq$, on obtient en remplaçant :

$$\boxed{S(q) = \tfrac{1}{2}bq^2} \tag{9}$$

2 Consommateurs hétérogènes

2.1 Demande

Cas général. Quand les consommateurs sont hétérogènes, le modèle précédent n'est plus approprié. On considère maintenant que les consommateurs diffèrent selon leur disponibilité à payer, v. Cette disponibilité à payer varie sur un intervalle $[\underline{v}, \overline{v}]$, avec une distribution $f(v)$. La fonction de répartition est $F(v) = \int_{\underline{v}}^{v} f(t)dt$, qui représente donc la fraction des consommateurs qui ont une disponibilité à payer inférieure ou égale à v. Par définition, $F(\overline{v}) = 1$ (et même $F(v) = 1$ pour tout $v \geq \overline{v}$). La masse totale des consommateurs est N.

NB : on pourrait raisonner aussi avec la repartition de masse des consommateurs, $m(v) = N.f(v)$, et la masse cumulative $M(v) = N.F(v)$. Evidemment, si la masse totale est 1, $m = f$, les fréquences et masses sont égales.

La demande d'un consommateur pour un prix p est zéro ou un, selon v. On a donc :

$$d(p,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \geq p \\ 0 & \text{si } v < p \end{cases}$$

et la demande totale est donc directement :

$$\begin{aligned} D(p) &= \text{masse de ceux qui consomment} \\ &= \text{masse totale} - \text{masse de deux qui ne consomment pas} \\ &= N - NF(p) \end{aligned}$$

ou de manière plus formelle, en intégrant (pour sommer sur l'ensemble de consommateurs) la demande individuelle :

$$\begin{aligned} D(p) &= N \int_{\underline{v}}^{\overline{v}} d(p,t) f(t) \\ &= N \int_{\underline{v}}^{p} d(p,t) f(t) + N \int_{p}^{\overline{v}} d(p,t) f(t) dt \\ &= N \int_{\underline{v}}^{p} 0 f(t) dt + N \int_{p}^{\overline{v}} 1 f(t) \\ &= 0 + N \left(F(\overline{v}) - F(p) \right) \\ \Rightarrow & \boxed{D(p) = N(1 - F(p))} \end{aligned}$$

Application : distribution uniforme. En particulier, avec une distribution uniforme des v entre $\underline{v} = 0$ et $\overline{v} = 1$, l'application des résultats précédents donne des formules simples. Avec la distribution uniforme sur $[0, 1]$, $f(v) = 1$, et $F(v) = v$. Donc on obtient immédiatement :

$$\boxed{D(p) = N(1 - p)}$$

2.2 Surplus

Cas général. Le surplus dans ce cas est la "somme" des utilités des consommateurs, qui est ici une intégrale, puisqu'on a un continuum de v :

$$S(p) = N \int_{\underline{v}}^{\overline{v}} d(p, t)(t - p) f(t) dt$$

puisque l'utilité d'un consommateur est $t - p$ si sa demande est 1, et 0 sinon. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} S(p) &= N \int_{\underline{v}}^{p} 0 f(t) dt + N \int_{p}^{\overline{v}} (t - p) f(t) dt \\ &= N \left(\int_{p}^{\overline{v}} t f(t) dt - p \int_{p}^{\overline{v}} f(t) dt \right) \\ &= N \left(\int_{p}^{\overline{v}} t f(t) dt - p(1 - F(p)) \right) \end{aligned}$$

or on a en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \int_{p}^{\overline{v}} t f(t) dt &= [tF(t)]_{p}^{\overline{v}} - \int_{p}^{\overline{v}} F(t) dt \\ &= \overline{v} - pF(p) - \int_{p}^{\overline{v}} F(t) dt \end{aligned}$$

et en remplaçant dans l'expression du surplus :

$$\begin{aligned}
S(p) &= N\left(\overline{v} - pF(p) - \int_p^{\overline{v}} F(t)dt - p(1-F(p))\right) \\
&= N\left(\overline{v} - p - \int_p^{\overline{v}} F(t)dt\right) \\
&= N\left(\int_p^{\overline{v}} 1dt - \int_p^{\overline{v}} F(t)dt\right) \\
&= N\int_p^{\overline{v}} (1-F(t))dt \\
\Rightarrow &\boxed{S(p) = \int_p^{\overline{v}} D(z)dz}
\end{aligned}$$

Ici évidemment $\overline{p} = \overline{v}$: le prix à partir duquel la demande s'annule correspond à la disponibilité à payer maximale des consommateurs. On peut encore écrire de manière équivalente l'intégrale entre les bornes p et $+\infty$.

Application : distribution uniforme. Avec la distribution uniforme sur $[0,1]$, $f(v) = 1$, et $F(v) = v$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
S(p) &= \int_p^{\overline{v}} D(z)dz \\
&= N\int_p^1 (1-F(z))dz = N\int_p^1 (1-z)dz \\
&= N\left[z - \frac{z^2}{2}\right]_p^{\overline{v}} = N\left(\frac{1}{2} - (p - \frac{p^2}{2})\right) \\
\Rightarrow &\boxed{S(p) = \frac{N}{2}(1-p)^2}
\end{aligned}$$

NB *:* on retrouve bien le même résultat que dans le cas d'un consommateur représentatif avec une utilité quadratique en utilisant la fonction de demande $D(p) = 1 - p$.

3 Origine et usage

Jules Dupuit est le premier à avoir proposé la définition du surplus donnée ici, afin de pouvoir mener une analyse coût-bénéfice pour l'investissement public. Dans son cadre initial, il s'agit de demande unitaire pour l'usage d'une infrastructure, les usagers différant dans l'utilité obtenue, et la puissance publique subissant le coût de construction. Cette mesure du surplus est classiquement appelée surplus "Marshallien", du nom de l'économiste Alfred Marshall qui a formalisé plus généralement les idées de Dupuit.

Cette mesure du surplus permet d'analyser une situation en fonction de sa désirabilité pour les consommateurs. Pour obtenir le bien-être total, on additionne surplus des consommateurs et profit, les deux mesures étant monétaires–mais comme mentionné en introduction, elles ne prennent pas en compte les inégalités entre consommateurs. Cette notion de bien-être aggrège aussi profit et utilité, puisque l'on additionne les euros d'utilité des consommateurs et les euros de profits des entreprises, et ne permet donc pas non plus, à bien-être donné, de classer des situations en fonction du partage entre utilité et profit.