

Dans le cas d'un tube mince, on a

$$\frac{e}{R} \ll 1 \quad (15.48)$$

En conséquence, l'expression (15.27) devient

$$\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle = \frac{(p_i - p_e)R}{e} + \mathcal{O}(1) \quad (15.49)$$

On voit que la contrainte tangentielle moyenne devient d'autant plus grande, que e/R est petit. Il n'est pas possible d'établir ici strictement le résultat mais on peut d'ores-et-déjà l'annoncer : $\sigma_{\theta\theta}$ devient prépondérante par rapport à σ_{rr} qui reste, quant à elle, de l'ordre de $-p_e$ et $-p_i$.

Si le tube est libre d'efforts axiaux ($\Sigma = 0$, i.e. tube ouvert), le tube mince est essentiellement dans un état de **traction simple**. Le dimensionnement du réservoir sous pression va alors porter sur $\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle$ afin d'éviter son éclatement.

Si le tube est fermé par une calotte, la contrainte axiale vaut :

$$\sigma_{zz} = \Sigma = \frac{(p_i - p_e)R}{2e} + \mathcal{O}(1) \simeq \frac{\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle}{2} \quad (15.50)$$

d'après le résultat (15.39). La contrainte axiale est donc deux fois moindre que la contrainte tangentielle qui reste donc prépondérante.

15.2 Elastostatique du réservoir sous pression

On considère à nouveau le problème du réservoir sous pression mais, dans cette partie, on prend explicitement en compte le comportement mécanique du matériau constitutif du tube. On considère que le comportement du matériau est convenablement décrit par l'élasticité linéarisée isotrope. La géométrie et le chargement mécanique sont indiqués sur la figure 15.1. Les composantes des déplacements, déformations et contraintes sont données dans le système de coordonnées cylindriques d'axe \underline{e}_z , axe du tube.

15.2.1 Distribution des déplacements, déformations et contraintes

Les conditions aux limites du problème ont été précisées au paragraphe 15.1.1. On adopte ici la méthode des déplacements. Postuler la forme du champ de déplacements que subit le tube. Trouver l'équation différentielle qui les régit, puis l'intégrer. Déterminer enfin déformations et contraintes de manière exhaustive. Distinguer *in fine* le cas du tube ouvert (libre selon z) du cas du tube fermé.

Les propriétés de symétrie relatives à la géométrie, au chargement et au matériau ont été discutées au paragraphe 15.1.3. On en déduit en particulier que le champ de déplacement présente une symétrie de révolution. Il ne dépend *a priori* que des variables (r, z) . On le cherche sous la forme :

$$\underline{u} = f(r) \underline{e}_r + g(z) \underline{e}_z \quad (15.51)$$

où f et g sont deux fonctions inconnues à déterminer. On calcule ensuite le gradient de la transformation

proposée en utilisant l'opérateur correspondant en coordonnées cylindriques :

$$[\nabla \underline{u}] = \begin{bmatrix} f' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f}{r} & 0 \\ 0 & 0 & g' \end{bmatrix} = [\underline{\varepsilon}] \quad (15.52)$$

Le gradient du champ de déplacement (15.51) étant symétrique, il coïncide avec le tenseur des déformations infinitésimales $\underline{\varepsilon}$. La dérivée de f (resp. g) par rapport à r (resp. z) est notée f' (resp. g').

L'étape suivante consiste à calculer le champ des contraintes à l'aide des relations d'élasticité linéarisée. On suppose que le tube est initialement dans un état naturel (i.e. sans contraintes initiales). La loi d'élasticité est écrite à l'aide des coefficients de Lamé :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= \lambda(\text{trace } \underline{\varepsilon}) \underline{1} + 2\mu \underline{\varepsilon} \\ [\underline{\sigma}] &= \begin{bmatrix} \lambda(f' + \frac{f}{r} + g') + 2\mu f' & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(f' + \frac{f}{r} + g') + 2\mu \frac{f}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(f' + \frac{f}{r} + g') + 2\mu g' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15.53)$$

Les composantes de contraintes non nulles sont donc $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$. Ce résultat est conforme à l'analyse purement statique proposée au paragraphe 15.1.4. Il est temps d'utiliser les équations d'équilibre établies dans ce même paragraphe. En se limitant aux composantes de contraintes *a priori* non nulles, et en l'absence de forces volumiques, ces équations se réduisent à

$$\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (15.54)$$

$$\sigma_{zz,z} = 0 \quad (15.55)$$

La seconde équation (15.55) à une contrainte axiale constante :

$$\sigma_{zz} = C \quad (15.56)$$

où C est une constante à déterminer. En substituant les valeurs de contraintes (15.53) dans l'équation d'équilibre (15.54), on obtient l'équation différentielle² régissant la fonction f :

$$f'' - \frac{f}{r^2} + \frac{f'}{r} = (f' + \frac{f}{r})' = 0 \quad (15.57)$$

L'équation précédente s'intègre en

$$f = ar + \frac{b}{r} \quad (15.58)$$

où a, b sont deux constantes d'intégration. Ceci permet d'évaluer les déformations et les contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr} = a - \frac{b}{r^2} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = a + \frac{b}{r^2} \\ \varepsilon_{zz} = c \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{zz} = C \end{array} \right. \quad (15.59)$$

2. Il est remarquable que les modules d'élasticité n'apparaissent plus dans (15.57) alors qu'ils étaient présents dans l'expression des contraintes (15.53). Cela vient du fait que les modules se factorisent et que l'équation obtenue (15.57) est en fait :

$$(\lambda + 2\mu)(f'' - \frac{f}{r^2} + \frac{f'}{r}) = 0$$

Le déplacement axial se déduit de la valeur constante c trouvée pour ε_{zz} :

$$u_z = g = cz + d \quad (15.60)$$

Les constantes introduites sont liées par les relations suivantes :

$$\begin{cases} A = (\lambda + \mu)2a + \lambda c \\ B = 2\mu b \\ C = (\lambda + 2\mu)c + 2\lambda a \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1-\nu}{E}A - \frac{\nu}{E}C \\ b = \frac{B}{2\mu} \\ c = \frac{1}{E}(C - 2\nu A) \end{cases} \quad (15.61)$$

En raison de la plus grande simplicité des expressions, on a utilisé le module de Young E et le coefficient de Poisson ν pour les formules donnant a, b, c en fonction de A, B, C . Les multiples formules de passage entre les coefficients de Lamé et la paire (E, ν) se trouvent dans la table 8.1. Pour identifier les constantes, on utilise les conditions aux limites (15.6) et (15.9) qui portent sur σ_{rr} en $r = r_i$ et $r = r_e$. On résout donc le système linéaire,

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r_i) = -p_i = A - \frac{B}{r_i^2} \\ \sigma_{rr}(r_e) = -p_e = A - \frac{B}{r_e^2} \end{cases} \quad (15.62)$$

et on trouve

$$A = \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \quad B = \frac{p_i - p_e}{r_e^2 - r_i^2} r_i^2 r_e^2 \quad (15.63)$$

Pour $p_i - p_e > 0$, la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale en $r = r_i$ et vaut :

$$\sigma_{\theta\theta}^{max} = \frac{p_i(r_e^2 + r_i^2) - 2p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \quad (15.64)$$

Les profils de contrainte pour deux géométries différentes de tube sont tracés sur la figure 15.3. On observe en particulier que si le tube est mince l'état de contrainte est quasiment homogène dans l'épaisseur. Pour se rendre compte de la façon dont les éléments de matériau élastique se déforment, l'état déformé est illustré sur la figure 15.4.

Les résultats obtenus ne dépendent en fait que des rapports de longueurs r/r_i et r_e/r_i . Pour un même chargement en pression et un même rapport r_e/r_i , deux tubes de rayons intérieurs distincts présenteront des profils de contraintes et de déformations identiques, en fonction de r/r_i . En particulier, les contraintes maximales seront identiques. L'analyse s'applique donc aussi bien à une aiguille de seringue qu'à un réservoir d'hydrocarbures. Il n'y a pas d'effet d'échelles ou d'effet de taille absolue dans ces situations régulières d'élastostatique.

15.2.2 Différentes conditions aux extrémités du tube

On distingue successivement :

- Le tube est **libre** à ses extrémités. Dans ce cas, la contrainte axiale $\sigma_{zz} = \Sigma = 0$ de sorte que :

$$\sigma_{zz} = 0 \implies C = 0 \quad (15.65)$$

En contrepartie, le tube se déforme axialement selon :

$$\varepsilon_{zz} = c = -\frac{2\nu A}{E} \quad (15.66)$$

où A est donné par (15.63).

- Le tube est **bloqué** à ses extrémités, ce qui signifie que tout déplacement axial est empêché. Dans ce cas,

$$\varepsilon_{zz} = c = 0 \implies \sigma_{zz} = C = 2\nu A \quad (15.67)$$

où A est donné par (15.63). Si A est négatif (cela dépend du chargement en pression et des caractéristiques géométriques du tube), les contraintes axiales sont de compression. Au contraire, il s'agit de contraintes de traction si $A \geq 0$. Une telle condition à la limite n'est possible que si le tube est coincé, encastré ou collé aux extrémités.

- Le tube est muni d'une calotte à l'une de ses extrémités. Cette situation a été analysée du point de vue statique au paragraphe 15.1.5. On a mis en évidence l'existence d'une densité surfacique d'efforts axiaux Σ donnée par (15.39). On en déduit :

$$\sigma_{zz} = C = \Sigma = \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_i^2 - r_e^2} = A \quad (15.68)$$

15.2.3 Cas d'un tube mince

Lorsque le tube est mince, en reprenant les notations (15.47), faire les développements limités qui s'imposent et décrire les états de contraintes tangentielle et axiale.

Dans le cas d'un tube mince de rayon R et d'épaisseur e définis par les équations (15.47) et tels que $e/R \ll 1$, les expressions précédentes se simplifient. Des développements limités par rapport à e/R fournissent :

$$A = \frac{(p_i - p_e)R}{2e} + \mathcal{O}(1), \quad B = \frac{(p_i - p_e)R^3}{2e} + \mathcal{O}(1) \quad (15.69)$$

Les contraintes se réduisent alors à

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(p_i - p_e)R}{e}, \quad \sigma_{rr} = 0 \quad (15.70)$$

Les expressions précédentes sont correctes à l'ordre $\mathcal{O}(1)$. Clairement, la composante prépondérante est la contrainte de traction ou de compression $\sigma_{\theta\theta}$. Le résultat (15.70) est d'une importance pratique

Déplacements

$$\underline{u} = \left(ar + \frac{b}{r}\right) \underline{e}_r + (cz + d) \underline{e}_z$$

Déformations

$$\underline{\varepsilon} = \left(a - \frac{b}{r^2}\right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \left(a + \frac{b}{r^2}\right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + c \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$

$$\operatorname{div} \underline{u} = \operatorname{trace} \underline{\varepsilon} = 2a + c = \text{Cste}$$

Contraintes

$$\underline{\sigma} = \left(A - \frac{B}{r^2}\right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \left(A + \frac{B}{r^2}\right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + C \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$

Chargement

$$A = \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \quad B = \frac{p_i - p_e}{r_e^2 - r_i^2} r_i^2 r_e^2$$

$$C = 0 \text{ (libre)}, \quad C = 2\nu A \text{ (bloqué)}, \quad C = A \text{ (calotte)}, \quad C = \Sigma \text{ (donné)}$$

$$a = \frac{1-\nu}{E} A - \frac{\nu}{E} C, \quad b = \frac{B}{2\mu}, \quad c = \frac{1}{E} (C - 2\nu A)$$

$$A = (\lambda + \mu)2a + \lambda c, \quad B = 2\mu b, \quad C = (\lambda + 2\mu)c + 2\lambda a$$

TABLE 15.1 – Récapitulatif : élastostatique du tube sous pression interne et externe avec ou sans effort axial.

considérable et mérite d'être mémorisé³. Le choix de l'épaisseur d'un tube pour un chargement donné est critique puisque la contrainte tend vers l'infini lorsque l'épaisseur diminue.

La valeur de la composante axiale σ_{zz} dépend des conditions aux extrémités :

- Tube **libre**. Dans ce cas, la contrainte axiale σ_{zz} est nulle. L'état de contrainte du tube mince sous pression se réduit à un état de **traction/compression simple**, selon le signe de $p_i - p_e$. Il est important de se rappeler que l'application d'une pression interne à un tube mince (libre à ses extrémités) met le tube en traction simple selon la direction tangentielle. Comme le comportement des matériaux est très souvent caractérisé en traction simple, ces données expérimentales sont directement applicables au dimensionnement d'un tel tube sous pression.
- Tube **bloqué** selon z . La contrainte axiale engendrée vaut

$$\sigma_{zz} = \nu \frac{(p_i - p_e)R}{e} = \nu \sigma_{\theta\theta} \quad (15.71)$$

au premier ordre.

- Tube terminé par une **calotte**. Le résultat (15.68) donne, dans le cas du tube mince :

$$\sigma_{zz} = A = \frac{(p_i - p_e)R}{2e} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{2} \quad (15.72)$$

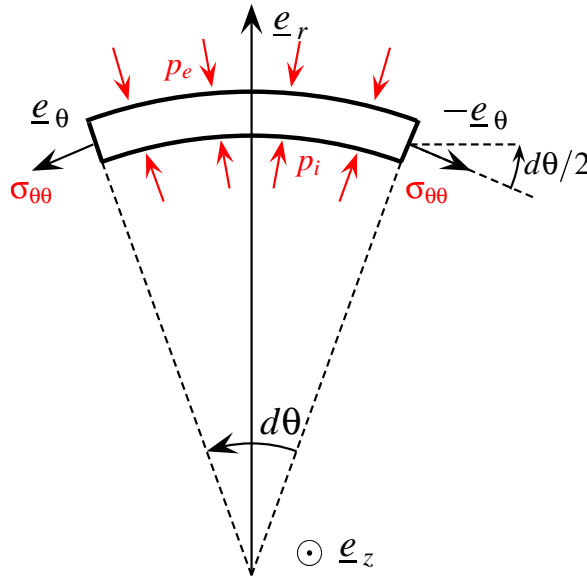
au premier ordre. La contrainte axiale vaut donc la moitié de la contrainte tangentielle qui reste par conséquent prépondérante.

Remarquer en particulier que, dans les deux derniers cas, σ_{zz} et $\sigma_{\theta\theta}$ sont du même signe.

15.2.4 Respect du contexte infinitésimal

Les résultats précédents ne sont pertinents que si la transformation reste infinitésimale. Cela suppose en particulier que les composantes de déformations $|\varepsilon_{rr}|$ et $|\varepsilon_{\theta\theta}|$ sont petites devant 1. Il en va donc de

3. On peut d'ailleurs retrouver rapidement ce résultat en raisonnant de la manière suivante. On considère le secteur de tube suivant d'angle $d\theta$ et de hauteur dz :



On voit que les pressions appliquées sont équilibrées par la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$. On calcule alors la résultante des efforts appliqués à cet élément de volume dans la direction \underline{e}_r :

$$\underbrace{(p_i - p_e) R d\theta dz}_{\text{pression appliquée}} = 2 \underbrace{\sigma_{\theta\theta} \sin \frac{d\theta}{2} e dz}_{\text{composante de la réaction du tube}}$$

Pour le petit angle $d\theta$ considéré, la fonction sinus peut être remplacé par son argument, ce qui conduit à la relation cherchée (15.70). Dans ce calcul, on suppose implicitement que $\sigma_{\theta\theta}$ est homogène dans l'épaisseur du tube, approximation licite pour le tube mince seulement.

même de

$$|\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}| = 2|a| \ll 1, \quad |\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\theta\theta}| = \frac{2|b|}{r^2} \ll 1$$

Pour un tube mince libre à ses extrémités par exemple, cela implique

$$2|a| \sim \frac{2|A|}{E} \sim \frac{|p_i - p_e|R}{Ee} \ll 1, \quad \frac{2|b|}{r^2} \sim \frac{2|B|}{R^2E} \sim \frac{|p_i - p_e|R}{Ee} \ll 1$$

où E est le module d'Young. Le contexte infinitésimal est donc respecté tant que

$$\frac{|p_i - p_e|}{E} \ll \frac{e}{R} \quad (15.73)$$

La condition concerne le chargement appliqué $p_i - p_e$ et la géométrie du tube. Pour $e/R \ll 1$, on voit que $|p_i - p_e|/E$ doit être un infiniment petit d'ordre 2. Cette condition laisse toutefois la place à un large domaine d'application puisque le module d'Young est très élevé (pour les métaux en tout cas, 200000 MPa par exemple pour un acier) et les pressions appliquées se comptent en bars (1 bar = 10^5 Pa = 0.1 MPa). On reviendra à ces ordres de grandeurs au paragraphe 15.2.6.

La condition (15.73) garantit certes la validité de l'analyse dans le contexte infinitésimal mais n'assure en rien la pertinence de la solution. En effet, une telle solution peut s'avérer instable et d'autres solutions doivent être envisagées hors du carcan infinitésimal, en particulier des modes de flambage du tube, en particulier si $p_e > p_i$. De telles instabilités deviennent d'autant plus probables que le tube est mince.

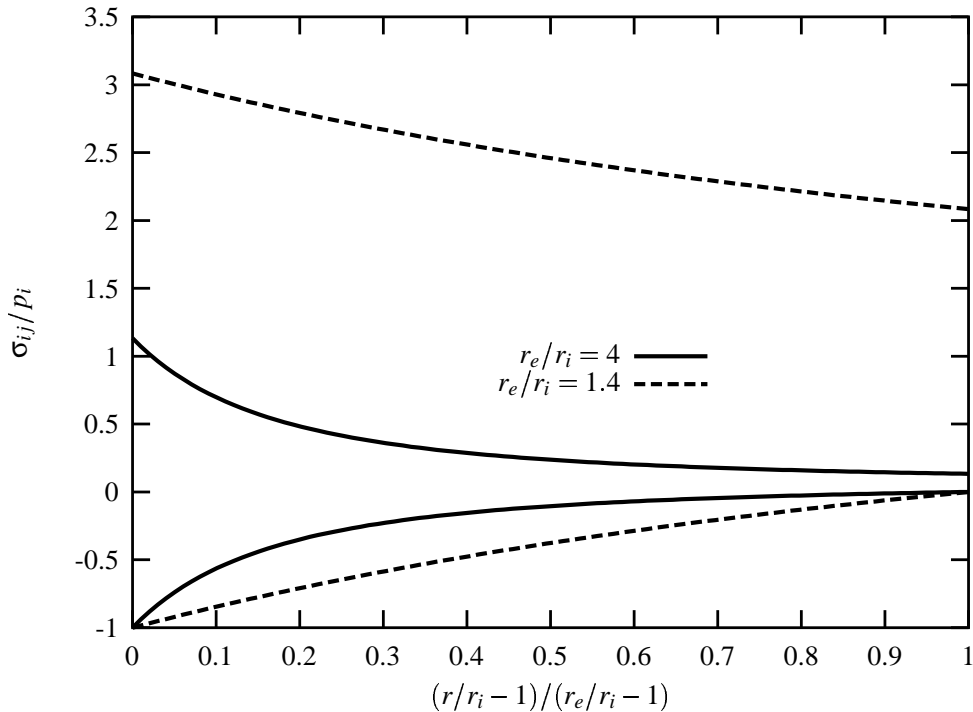


FIGURE 15.3 – Profils de contraintes dans des réservoirs sous pression interne uniquement avec deux rapports de rayons distincts. La composante positive est $\sigma_{\theta\theta}$, la composante négative est σ_{rr} . Le tube est supposé libre dans la direction axiale.

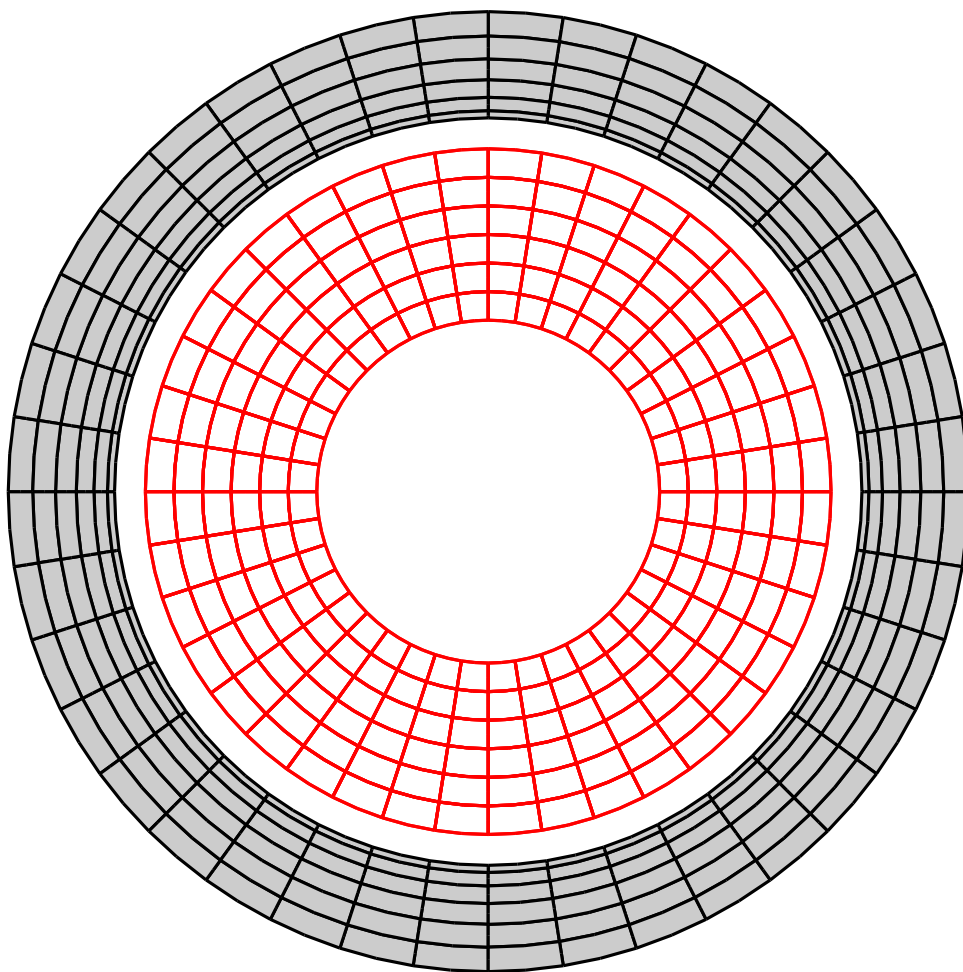


FIGURE 15.4 – Déformation d'un tube sous pression interne avec $r_e/r_i = 2$. L'état initial est au centre (en rouge). L'état final déformé est grisé. La déformation a été démesurément exagérée (facteur 1000) pour l'illustration.

15.2.5 Cavité dans un massif infini

Le comportement d'une cavité soumise à une pression interne p_i dans un massif infini siège pour $r \rightarrow \infty$ d'une pression p_e s'obtient en faisant tendre r_e vers l'infini dans les formules de la table 15.1. En particulier,

$$A = -p_e, \quad B = (p_i - p_e)r_i^2$$

Dans le cas où $p_i = 0$, on définit le coefficient de concentration de contrainte au bord du trou comme le rapport

$$K_T = \frac{\sigma_{\theta\theta}(r_i)}{\sigma_{\theta\theta}(r_e)} = 2$$

i.e. deux fois la pression appliquée à l'infini.

15.2.6 Dimensionnement du réservoir sous pression

Si, pour un tube de géométrie donnée, la pression appliquée est trop grande, on risque d'atteindre localement la limite d'élasticité, voire de rupture, du matériau. Il est donc essentiel d'utiliser un critère de dimensionnement du tube pour donner les limites de validité du comportement élastique de la structure. En utilisant le critère de plasticité de Tresca (cf. le paragraphe 4.4.4 et l'expression de ce critère (4.63)), indiquer, pour un tube fermé par une calotte par exemple, à quel endroit de la structure

la plasticité va apparaître. Fournir un critère de dimensionnement du tube en fonction de l'écart de pression appliqué $|p_i - p_e|$ et du rapport des rayons r_i/r_e . Reprendre enfin l'analyse avec le critère de von Mises.

Le critère de Tresca consiste à comparer l'écart maximum entre les contraintes principales à une valeur critique σ_0 , égale à la limite d'élasticité en traction du matériau. Le matériau se comporte de manière élastique en un point donné tant que

$$\sup |\sigma_i - \sigma_j| = \sigma_1 - \sigma_3 < \sigma_0 \quad (15.74)$$

où les σ_i sont les contraintes principales classées dans l'ordre décroissant. Dans le cas du tube sous pression, le tenseur des contraintes est diagonal (cf. équation (15.59)) de sorte que les contraintes principales sont $\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}$. Pour comparer ces contraintes principales entre elles, dans le cas du tube muni d'une calotte, on évalue les différences

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_{zz} - \sigma_{rr} = \frac{B}{r^2} \quad (15.75)$$

Les résultats (15.59) et (15.68) ont été utilisés. Il est alors aisé de ranger les contraintes principales dans l'ordre croissant :

$$\sigma_{rr} < \sigma_{zz} < \sigma_{\theta\theta} \quad \text{si} \quad p_e \leq p_i, \quad \sigma_{\theta\theta} < \sigma_{zz} < \sigma_{rr} \quad \text{si} \quad p_i \leq p_e \quad (15.76)$$

Dans tous les cas de chargement, l'écart maximal entre les contraintes principales est $|\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}|$. Le comportement du tube reste donc élastique au point matériel considéré tant que

$$|\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}| = \frac{2|B|}{r^2} < \sigma_0 \quad (15.77)$$

En conséquence, la plasticité va apparaître entre premier lieu en $r = r_i$ où la différence $|\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}|$ est maximale. Par suite, la structure dans son ensemble reste dans le domaine élastique si $2|B|/r_i^2 < \sigma_0$. En tenant compte de l'expression (15.63) donnant B , on aboutit au critère suivant⁴ :

$$\Delta p := |p_i - p_e| < \Delta p_c := \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{r_i^2}{r_e^2}\right) \quad (15.78)$$

La courbe correspondante donnant l'écart de pression critique en fonction du rapport des rayons du tube fait l'objet de la figure 15.5. Le **choix de la géométrie** est un paramètre-clé dans le dimensionnement du réservoir. Pour un diamètre intérieur donné, le fait d'accroître le rayon extérieur, i.e. l'épaisseur, permet d'augmenter la limite de pression admissible. Mais ce bénéfice va en s'amenuisant puisque la pression critique tend vers

$$\Delta p_c^\infty = \frac{\sigma_0}{2} \quad (15.79)$$

lorsque $r_e \rightarrow \infty$. Même un tube d'épaisseur infinie, i.e. une cavité cylindrique dans un massif, peut plastifier. Ce résultat a des implications importantes notamment en mécanique des sols, pour le

4. Il est également possible de recourir au critère de von Mises, cf. section 4.4.5. Les composantes non nulles du déviateur des contraintes sont $\sigma_{11}^{\text{dev}} = -(C - A)/3 - B/r^2$, $\sigma_{22}^{\text{dev}} = -(C - A)/3 + B/r^2$, $\sigma_{33}^{\text{dev}} = 2(C - A)/3$. La contrainte équivalente de von Mises vaut ainsi $\sigma_{eq} = J_2(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{(C - A)^2 + 3B^2/r^4}$. Elle est maximale en $r = r_i$. Dans le cas du réservoir avec couvercle, $C = A$, le comportement du réservoir reste élastique si

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{3}|B|}{r_i^2} < \sigma_0 \quad \implies \quad \Delta p < \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{r_i^2}{r_e^2}\right)$$

Si l'on adopte la même limite d'élasticité en traction, σ_0 , pour Tresca et von Mises, le critère de Tresca est donc plus restrictif dans le cas du tube sous pression que le critère de von Mises.

dimensionnement de galeries ou de tunnels par exemple. La convergence en r_e/r_i étant lente, on gagne peu sur la limite autorisée lorsqu'on augmente l'épaisseur du tube, ce qui d'ailleurs conduit à un surcroît de matière et donc de coût prohibitif. Un autre levier pour le dimensionnement du réservoir est le **choix du matériau** qui détermine la limite d'élasticité σ_0 intervenant dans le critère (15.78). On considère les deux exemples suivants pour un tube tel que $r_e/r_i = 1.01$:

- le choix d'un alliage d'aluminium pour lequel $\sigma_0 = 400$ MPa conduit un écart de pression critique $\Delta p_c \simeq 4$ MPa soit 40 bars.
- le choix d'un acier à haute résistance pour lequel $\sigma_0 = 1000$ MPa conduit un écart de pression critique $\Delta p_c \simeq 10$ MPa soit 100 bars.

Le choix entre l'aluminium et l'acier à haute résistance est aussi une affaire de coût. D'autres paramètres rentrent en ligne de compte, comme la résistance du matériau à l'apparition et à la propagation de fissure, sa résistance à la corrosion, mais aussi la plus ou moins grande facilité de mise en œuvre du matériau pour la réalisation du réservoir (soudabilité, usinage...), etc. Certains de ces points seront abordés dans le cours (Cailletaud, 2003), et les exercices correspondants, dont plusieurs prolongent l'analyse présentée dans cet exercice.

On n'introduit pas ici de coefficient de sécurité venant pondérer, dans une approche d'ingénieur plus complète, la valeur critique Δp_c prévue en raison des incertitudes et de la variabilité du matériau et de la géométrie de la structure. De tels facteurs font l'objet de normes dont on trouvera une introduction et les références nécessaires dans (Trotignon, 1997; Ashby, 2000).

Un aspect essentiel du dimensionnement du tube consiste d'autre part à étudier ses conditions de stabilité, notamment les critères d'apparition des différents modes de flambage. Une telle analyse n'est pas entreprise dans ce paragraphe.

15.3 Frettage

Le frettage est une méthode d'assemblage utilisée depuis l'antiquité⁵ et fréquente aujourd'hui dans de nombreuses applications industrielles. L'assemblage fretté constitue un exemple simple de structure qui, bien que soumise à aucun chargement extérieur, est le siège de contraintes internes auto-équilibrées. Le calcul de ces contraintes résiduelles est possible dans le cas de deux tubes frettés à l'aide des résultats obtenus dans les sections précédentes.

On montre enfin l'avantage que présente un assemblage de deux tubes frettés, vis-à-vis d'un tube simple, en terme de limite d'élasticité de l'ensemble.

15.3.1 Opération de frettage de deux tubes

On considère deux tubes de rayons intérieur et extérieur initiaux R_i, ρ_i et ρ_e, R_e respectivement, tels que

$$R_i < \rho_e < \rho_i < R_e \quad (15.80)$$

Le frettage consiste à insérer le premier tube, dit *tube intérieur*, noté (*i*), dans le second, dit *tube extérieur*, noté (*e*). Comme $\rho_i \neq \rho_e$, il est nécessaire de déformer les deux tubes pour qu'un tel assemblage soit possible. A la fin de l'opération, le tube intérieur a pour rayon intérieur r_i et pour rayon extérieur ρ , tandis que le tube extérieur a pour dimensions finales ρ et r_e . Ces grandeurs sont indiquées sur la figure 15.6. Le frettage est possible en insérant en force le tube intérieur, ou bien en chauffant le tube extérieur. Dans ce dernier cas, le tube extérieur se dilate et, si la dilatation thermique est suffisante, ses dimensions sont telles que l'on peut insérer plus aisément le tube intérieur. Lorsque le tube extérieur refroidit, le frettage se réalise. On peut aussi refroidir le tube intérieur.

5. Les celtes ont utilisé ce procédé pour le cerclage des roues. Le cercle métallique extérieur était chauffé pour être fretté sur la roue en bois.