

# Lois de comportement des milieux thermo-visco-élastiques

# Plan

- ① Formulation des lois de comportement de la matière
- ② Une définition des fluides et des solides
- ③ Lois de comportement élastique
  - Forme générale
  - Solides élastiques isotropes
  - Fluides élastiques isotropes
- ④ Thermodynamique des milieux continus
  - Energie
  - Entropie
- ⑤ Matériaux hyperélastiques
  - Lois d'état
  - Propriétés des matériaux élastiques
  - Liaison interne : cas de l'incompressibilité
  - Exemple : les élastomères

# Plan

## ① Formulation des lois de comportement de la matière

## ② Une définition des fluides et des solides

## ③ Lois de comportement élastique

- Forme générale
- Solides élastiques isotropes
- Fluides élastiques isotropes

## ④ Thermodynamique des milieux continus

- Energie
- Entropie

## ⑤ Matériaux hyperélastiques

- Lois d'état
- Propriétés des matériaux élastiques
- Liaison interne : cas de l'incompressibilité
- Exemple : les élastomères

# Position du problème

- les lois universelles : lois de conservation  
chercher des champs  $(\rho, \underline{\sigma}, \underline{\mathbf{v}})$  tels que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{\mathbf{v}}) &= 0 \\ \operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho \underline{\mathbf{f}} &= \rho \dot{\underline{\mathbf{v}}}\end{aligned}$$

i.e. 1+3=4 équations

nombre d'inconnues : 1  $(\rho)$  + 3  $(v_i)$  + 6  $(\sigma_{ij}) = 10$

il manque 6 équations...

# Position du problème

- les lois universelles : lois de conservation  
chercher des champs  $(\rho, \underline{\sigma}, \underline{v})$  tels que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) &= 0 \\ \operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho \underline{f} &= \rho \dot{\underline{v}}\end{aligned}$$

i.e. 1+3=4 équations

nombre d'inconnues : 1  $(\rho)$  + 3  $(v_i)$  + 6  $(\sigma_{ij}) = 10$

il manque 6 équations...

- relations non universelles : la **loi de comportement**  
6 relations  $\sigma_{ij} \longleftrightarrow v_i, L_{ij}, F_{ij} \dots$

# Position du problème

- les lois universelles : lois de conservation  
chercher des champs  $(\rho, \underline{\sigma}, \underline{v})$  tels que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) &= 0 \\ \operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho \underline{f} &= \rho \dot{\underline{v}}\end{aligned}$$

i.e. 1+3=4 équations

nombre d'inconnues : 1 ( $\rho$ ) + 3 ( $v_i$ ) + 6 ( $\sigma_{ij}$ ) = 10

il manque 6 équations...

- relations non universelles : la **loi de comportement**

6 relations  $\sigma_{ij} \longleftrightarrow v_i, L_{ij}, F_{ij} \dots$

- il faut ajouter la **conservation de l'énergie**

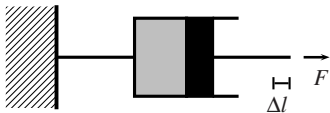
1 équation / 4 inconnues : le champ de température  $T(\underline{x}, t)$  et le flux de chaleur  $\underline{q}(\underline{x}, t)$

**loi de comportement** :  $q_i \longleftrightarrow T, \operatorname{grad} T$

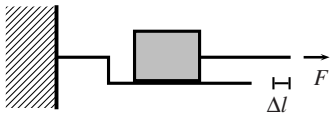
# Les grandes classes de comportement



Elasticité  $F = k\Delta l$



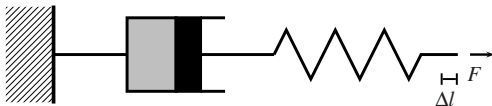
Viscosité  $F = \eta \Delta \dot{l}$



Plasticité  $F = F_0 \text{signe}(\Delta \dot{l})$  si  $\Delta \dot{l} \neq 0$

# Forme de la loi de comportement

- un exemple : la **viscoélasticité** (modèle de Maxwell)



$$\Delta \dot{l}(t) = \Delta \dot{l}_{\text{piston}}(t) + \Delta \dot{l}_{\text{ressort}}(t) = \frac{F(t)}{\eta} + \frac{\dot{F}(t)}{k}$$

$$F(t) = k \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{k}{\eta}(t - \tau)\right) \Delta \dot{l} d\tau$$

la réponse actuelle dépend de **l'historie** complète de déformation

- extension à un corps matériel 3D : la **fonctionnelle-mémoire**

$$\underline{\sigma}(\underline{x}, t) = \mathcal{F}_{0 \leq \tau \leq t, \underline{Y} \in \Omega_0} (\Phi(\underline{Y}, \tau))$$



# Origine physique des lois de comportements

- Dynamique de particules régies par les lois de Newton

$$\underline{\mathbf{f}}^{(i)} = m \underline{\mathbf{a}}^{(i)}$$

- Formule du viriel pour les contraintes / mécanique statistique

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{V} \left( \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sum_j \underline{\mathbf{f}}^{(ij)} \otimes (\underline{\mathbf{x}}^{(j)} - \underline{\mathbf{x}}^{(i)}) - \sum_i \underline{\mathbf{v}}^{(i)} \otimes m^{(i)} \underline{\mathbf{v}}^{(i)} \right)$$

[Murdoch, 2012]

# Origine physique des lois de comportements

- Dynamique de particules régies par les lois de Newton

$$\underline{\mathbf{f}}^{(i)} = m \underline{\mathbf{a}}^{(i)}$$

- Formule du viriel pour les contraintes / mécanique statistique

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{V} \left( \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sum_j \underline{\mathbf{f}}^{(ij)} \otimes (\underline{\mathbf{x}}^{(j)} - \underline{\mathbf{x}}^{(i)}) - \sum_i \underline{\mathbf{v}}^{(i)} \otimes m^{(i)} \underline{\mathbf{v}}^{(i)} \right)$$

[Murdoch, 2012]

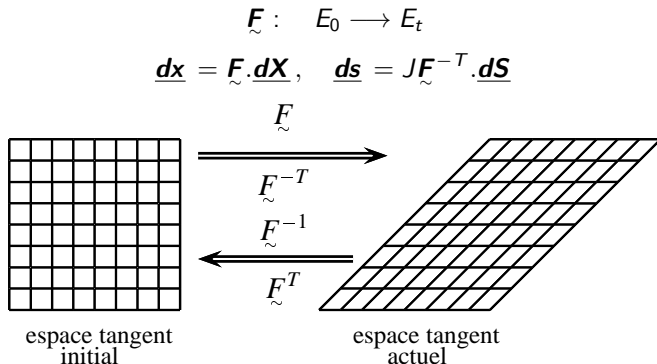
- Théorie cinétique des gaz, méthode due à Maxwell et Boltzmann

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{\sigma}} &= -p \underline{\mathbf{1}} + 2\eta \underline{\mathbf{D}}^{\text{dev}} + \frac{4\eta^2}{3p} (\underline{\mathbf{D}}^{\text{dev}} : \underline{\mathbf{D}}^{\text{dev}}) \underline{\mathbf{1}} \\ &\quad - \frac{2\eta^2}{p} ((\text{trace } \underline{\mathbf{D}}) \underline{\mathbf{D}}^{\text{dev}} + 2\underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{D}}^{\text{dev}} + \underline{\mathbf{W}} \cdot \underline{\mathbf{D}} - \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{W}}) \\ \underline{\mathbf{q}} &= -\alpha \eta \underline{\mathbf{g}} + \frac{\alpha \eta^2}{2p} (5(\text{trace } \underline{\mathbf{D}}) \underline{\mathbf{g}} + 3\underline{\mathbf{L}} \cdot \underline{\mathbf{g}} + 8\underline{\mathbf{D}}^{\text{dev}} \cdot \underline{\mathbf{g}}) \end{aligned}$$

où  $\underline{\mathbf{D}}^{\text{dev}}$  désigne la partie déviatorique du tenseur  $\underline{\mathbf{D}}$ ,  $p$  désigne la pression.  
[Chapman and Cowling, 1970]

# Retour sur les transports convectifs

L'application linéaire  $\tilde{\mathbf{F}}$  permet les transports entre l'espace matériel  $E_0$  et l'espace physique  $E_t$ .



# Tenseurs des contraintes

- tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$ , contraintes “vraies”
- tenseur des contraintes de Boussinesq (ou Piola–Kirchhoff I) :  
 $\underline{\underline{S}} = J \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T}$ , contraintes de “l’ingénieur”

$$\underline{t} \, ds = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \, ds =$$

# Tenseurs des contraintes

- tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$ , contraintes “vraies”
- tenseur des contraintes de Boussinesq (ou Piola–Kirchhoff I) :  
 $\underline{\underline{S}} = J \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T}$ , contraintes de “l’ingénieur”

$$\underline{t} \, ds = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \, ds = J \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{N} \, dS = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{N} \, dS$$

# Tenseurs des contraintes

- tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\sigma}$ , contraintes “vraies”
- tenseur des contraintes de Boussinesq (ou Piola–Kirchhoff I) :  
 $\underline{\tilde{S}} = J \underline{\tilde{\sigma}} \cdot \underline{\tilde{F}}^{-T}$ , contraintes de “l’ingénieur”

$$\underline{\tilde{t}} \, ds = \underline{\tilde{\sigma}} \cdot \underline{\tilde{n}} \, ds = J \underline{\tilde{\sigma}} \cdot \underline{\tilde{F}}^{-T} \cdot \underline{\tilde{N}} \, dS = \underline{\tilde{S}} \cdot \underline{\tilde{N}} \, dS$$

- tenseur des contraintes de Piola (ou Piola–Kirchhoff II) :  
 $\underline{\tilde{\Pi}} = J \underline{\tilde{F}}^{-1} \cdot \underline{\tilde{\sigma}} \cdot \underline{\tilde{F}}^{-T} = \underline{\tilde{F}}^{-1} \cdot \underline{\tilde{S}}$

$$\underline{\tilde{T}} \, dS = \underline{\tilde{F}}^{-1} \cdot \underline{\tilde{t}} \, ds = \underline{\tilde{\Pi}} \cdot \underline{\tilde{N}} \, dS$$

# Tenseurs des contraintes

- tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$ , contraintes “vraies”
- tenseur des contraintes de Boussinesq (ou Piola–Kirchhoff I) :  
 $\underline{\underline{S}} = J \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T}$ , contraintes de “l’ingénieur”

$$\underline{\underline{t}} \, ds = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} \, ds = J \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{N}} \, dS = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{N}} \, dS$$

- tenseur des contraintes de Piola (ou Piola–Kirchhoff II) :  
 $\underline{\underline{\Pi}} = J \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{S}}$

$$\underline{\underline{T}} \, dS = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{t}} \, ds = \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{\underline{N}} \, dS$$

- tenseur des contraintes de Mandel

$$\underline{\underline{M}} = J \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\Pi}}$$

Lesquels sont symétriques?

# Structure de l'espace physique

L'espace physique  $\mathcal{E}$  d'observation est un *espace affine euclidien orienté*, d'espace vectoriel euclidien associé  $E$ , de dimension 3.

- le *tenseur métrique*, représenté par la 2-forme

$$\underline{\underline{g}} = g_{ij} \underline{\underline{e}}^i \otimes \underline{\underline{e}}^j \text{ dans une base } \mathcal{B} = (\underline{\underline{e}}_1, \underline{\underline{e}}_2, \underline{\underline{e}}_3)$$

$$\mathbf{g}^M = \mathbf{M}^T \mathbf{g} \mathbf{M}$$



# Structure de l'espace physique

L'espace physique  $\mathcal{E}$  d'observation est un *espace affine euclidien orienté*, d'espace vectoriel euclidien associé  $E$ , de dimension 3.

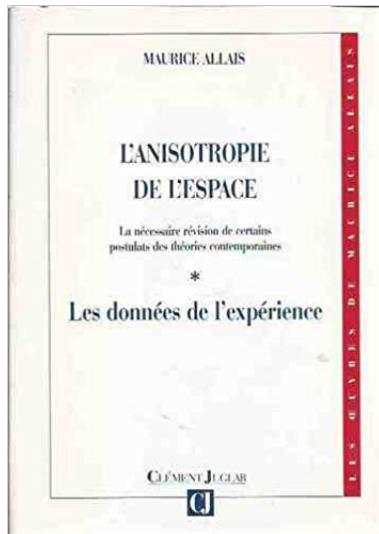
- le *tenseur métrique*, représenté par la 2-forme

$$\underline{\underline{g}} = g_{ij} \underline{\underline{e}}^i \otimes \underline{\underline{e}}^j \text{ dans une base } \mathcal{B} = (\underline{\underline{e}}_1, \underline{\underline{e}}_2, \underline{\underline{e}}_3)$$

$$\mathbf{g}^M = \mathbf{M}^T \mathbf{g} \mathbf{M}$$

- *Principe d'isotropie de l'espace* : pas d'autre tenseur de structure!  
( $\neq$  Maurice Allais!)

# Maurice Allais : prix Nobel d'économie (1988)



M. Allais avait prévu qu'il obtiendrait le prix Nobel de physique!

# Structure de l'espace matériel

L'espace tangent sur la variété matérielle  $\Omega_0$  au point matériel étudié  $\underline{\mathbf{X}}$  définit une *configuration locale de référence*, noté  $\kappa_0$ . C'est un espace vectoriel euclidien noté  $E_0$  de dimension 3, appelé *espace matériel*, caractérisé par les tenseurs suivants :

- La masse volumique,  $\rho_0$ , du point matériel dans la configuration  $\kappa_0$ .

# Structure de l'espace matériel

L'espace tangent sur la variété matérielle  $\Omega_0$  au point matériel étudié  $\underline{X}$  définit une *configuration locale de référence*, noté  $\kappa_0$ . C'est un espace vectoriel euclidien noté  $E_0$  de dimension 3, appelé *espace matériel*, caractérisé par les tenseurs suivants :

- La masse volumique,  $\rho_0$ , du point matériel dans la configuration  $\kappa_0$ .
- Une base locale lagrangienne privilégiée ou **trièdre directeur** (anisotropie de la matière)

$$\mathcal{B}_0 = (\underline{E}_1 = \underline{A}, \underline{E}_2 = \underline{B}, \underline{E}_3 = \underline{C})$$

Le tenseur métrique matériel est la forme

$$\underline{\underline{G}} = G_{IJ} \underline{E}^I \otimes \underline{E}^J$$

- Le tenseur d'orientation lagrangien  $\underline{\underline{\overset{\circ}{Q}}}_L = \epsilon^{IJK} \underline{E}_I \otimes \underline{E}_J \otimes \underline{E}_K$

# Structure de l'espace matériel

L'espace tangent sur la variété matérielle  $\Omega_0$  au point matériel étudié  $\underline{X}$  définit une *configuration locale de référence*, noté  $\kappa_0$ . C'est un espace vectoriel euclidien noté  $E_0$  de dimension 3, appelé *espace matériel*, caractérisé par les tenseurs suivants :

- La masse volumique,  $\rho_0$ , du point matériel dans la configuration  $\kappa_0$ .
- Une base locale lagrangienne privilégiée ou **trièdre directeur** (anisotropie de la matière)

$$\mathcal{B}_0 = (\underline{E}_1 = \underline{A}, \underline{E}_2 = \underline{B}, \underline{E}_3 = \underline{C})$$

Le tenseur métrique matériel est la forme  $\underline{G} = G_{IJ} \underline{E}^I \otimes \underline{E}^J$

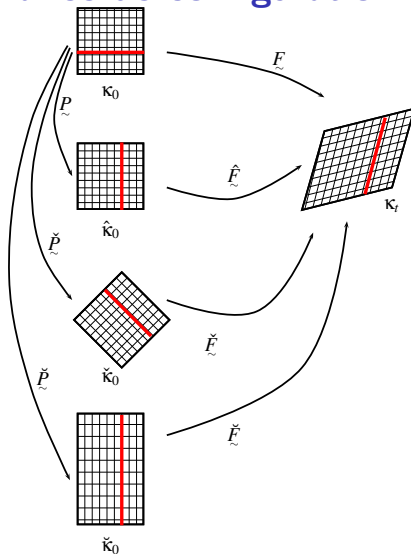
- Le tenseur d'orientation lagrangien  $\underline{\hat{O}}_L = \epsilon^{IJK} \underline{E}_I \otimes \underline{E}_J \otimes \underline{E}_K$
- **Tenseurs de structure matérielle** : généralement d'autres  $\mathfrak{T}$ , d'ordres variés, produits tensoriels des vecteur du trièdre directeur. Ils se transforment en  $\mathfrak{T}^{H^{-1}}$  par changement de configuration  $\mathcal{H}$  :

$$\mathfrak{T}^{H^{-1} \hat{I} \hat{J} \hat{K} \hat{L} \dots} = H^{\hat{I}}_{\ I} H^{\hat{J}}_{\ J} H^{\hat{K}}_{\ K} H^{\hat{L}}_{\ L} \dots \mathfrak{T}^{IJKL \dots}$$

- Résumé :

$$\mathcal{S}_{\kappa_0} = \{ \underline{G}, \quad \underline{\hat{O}}_L, \quad \mathfrak{T} \}$$

# Groupe d'invariance de configuration



Un changement de configuration locale est l'application linéaire  $\tilde{P}$ ,

$$\kappa_0 \longrightarrow \hat{\kappa}_0 \quad \tilde{F} = \hat{F} \tilde{P}$$

# Groupe d'invariance de configuration

- On s'intéresse aux propriétés d'invariance des tenseurs de structures par les transformations  $\underset{\sim}{F} \longrightarrow \underset{\sim}{F}\underset{\sim}{H}$  où  $\underset{\sim}{H} \in GL(E_0)$  est un endomorphisme de  $E_0$
- On définit alors le **groupe d'invariance de configuration**  $\kappa_0$  :

$$\mathfrak{G}_{\kappa_0} = \{ \underset{\sim}{H} \in GL(E_0), \quad \mathfrak{T}^H \equiv \mathfrak{T} \}$$

Deux configurations locales liées par un élément de cet ensemble possèdent les mêmes tenseurs de structure matérielle. Elles sont dites **indiscernables**.

# Groupe d'invariance de configuration

- On s'intéresse aux propriétés d'invariance des tenseurs de structures par les transformations  $\underset{\sim}{F} \longrightarrow \underset{\sim}{F}\underset{\sim}{H}$  où  $\underset{\sim}{H} \in GL(E_0)$  est un endomorphisme de  $E_0$
- On définit alors le **groupe d'invariance de configuration**  $\kappa_0$  :

$$\mathfrak{G}_{\kappa_0} = \{ \underset{\sim}{H} \in GL(E_0), \quad \mathfrak{T}^H \equiv \mathfrak{T} \}$$

Deux configurations locales liées par un élément de cet ensemble possèdent les mêmes tenseurs de structure matérielle. Elles sont dites **indiscernables**.

- Les éléments de  $\mathfrak{G}_{\kappa_0}$  sont également appelées **symétries matérielles**
- En pratique c'est un sous-groupe du groupe unimodulaire

$$\mathfrak{G}_{\kappa_0} \leq \mathcal{U}(E)$$



## Exemple de groupes d'invariance de configuration

On donne ici des exemples de groupes d'invariance de configuration dans le cas où les tenseurs de structure se limitent à quelques éléments particuliers :

- Cas où l'unique tenseur de structure est une base lagrangienne donnée :

$$(\mathcal{B}_0)^H \equiv \mathcal{B}_0$$

# Exemple de groupes d'invariance de configuration

On donne ici des exemples de groupes d'invariance de configuration dans le cas où les tenseurs de structure se limitent à quelques éléments particuliers :

- Cas où l'unique tenseur de structure est une base lagrangienne donnée :

$$(\mathcal{B}_0)^H \equiv \mathcal{B}_0 \implies \mathbf{H} = \mathbb{1}, \quad \mathfrak{G}_{\kappa_0} = \{\mathbb{1}\}$$

- Cas où le tenseur de structure est le tenseur métrique

$$(\mathbf{\tilde{G}})^H \equiv \mathbf{\tilde{G}}$$

# Exemple de groupes d'invariance de configuration

On donne ici des exemples de groupes d'invariance de configuration dans le cas où les tenseurs de structure se limitent à quelques éléments particuliers :

- Cas où l'unique tenseur de structure est une base lagrangienne donnée :

$$(\mathcal{B}_0)^H \equiv \mathcal{B}_0 \implies \mathbf{H} = \mathbb{1}, \quad \mathfrak{G}_{\kappa_0} = \{\mathbb{1}\}$$

- Cas où le tenseur de structure est le tenseur métrique

$$(\underset{\sim}{\mathbf{G}})^H \equiv \underset{\sim}{\mathbf{G}} \implies \mathbf{H} \in GO(E), \quad \mathfrak{G}_{\kappa_0} = GO(E)$$

- Cas où le tenseur de structure est le pseudo-tenseur d'orientation :

$$\left( \overset{\circ}{\mathcal{O}}_L \right)^H =$$

# Exemple de groupes d'invariance de configuration

On donne ici des exemples de groupes d'invariance de configuration dans le cas où les tenseurs de structure se limitent à quelques éléments particuliers :

- Cas où l'unique tenseur de structure est une base lagrangienne donnée :

$$(\mathcal{B}_0)^H \equiv \mathcal{B}_0 \implies \mathbf{H} = \mathbb{1}, \quad \mathfrak{G}_{\kappa_0} = \{\mathbb{1}\}$$

- Cas où le tenseur de structure est le tenseur métrique

$$(\underset{\sim}{\mathbf{G}})^H \equiv \underset{\sim}{\mathbf{G}} \implies \mathbf{H} \in GO(E), \quad \mathfrak{G}_{\kappa_0} = GO(E)$$

- Cas où le tenseur de structure est le pseudo-tenseur d'orientation :

$$\left(\overset{\circ}{\mathcal{O}}_L\right)^H = (\det \mathbf{H}) \overset{\circ}{\mathcal{O}}_L \equiv \overset{\circ}{\mathcal{O}}_L$$

# Exemple de groupes d'invariance de configuration

On donne ici des exemples de groupes d'invariance de configuration dans le cas où les tenseurs de structure se limitent à quelques éléments particuliers :

- Cas où l'unique tenseur de structure est une base lagrangienne donnée :

$$(\mathcal{B}_0)^H \equiv \mathcal{B}_0 \implies \mathbf{H} = \mathbb{1}, \quad \mathfrak{G}_{\kappa_0} = \{\mathbb{1}\}$$

- Cas où le tenseur de structure est le tenseur métrique

$$(\underset{\sim}{\mathbf{G}})^H \equiv \underset{\sim}{\mathbf{G}} \implies \mathbf{H} \in GO(E), \quad \mathfrak{G}_{\kappa_0} = GO(E)$$

- Cas où le tenseur de structure est le pseudo-tenseur d'orientation :

$$\left(\overset{\circ}{\mathcal{O}}_L\right)^H = (\det \mathbf{H}) \overset{\circ}{\mathcal{O}}_L \equiv \overset{\circ}{\mathcal{O}}_L \implies \mathbf{H} \in \mathcal{U}(E), \quad \mathfrak{G}_{\kappa_L} = \mathcal{U}(E)$$

- Pas d'invariance possible sur  $GL(E)$  car ni  $\underset{\sim}{\mathbf{G}}$ , ni  $\overset{\circ}{\mathcal{O}}_L$  ne sont invariants par homothétie.

# Loi de comportement, premières simplifications

- principe du **déterminisme**

$$\underline{\sigma}(\underline{x}, t) = \mathcal{F}_{0 \leq \tau \leq t, \underline{Y} \in \Omega_0} (\Phi(\underline{Y}, \tau); \mathcal{S}_{\kappa_0}, \mathcal{S})$$

théorie non locale

# Loi de comportement, premières simplifications

- principe du **déterminisme**

$$\underline{\sigma}(\underline{x}, t) = \mathcal{F}_{0 \leq \tau \leq t, \underline{Y} \in \Omega_0} (\Phi(\underline{Y}, \tau); \mathcal{S}_{\kappa_0}, \mathcal{S})$$

théorie non locale

- principe de l'**action locale**

$$\underline{\sigma}(\underline{x}, t) = \mathcal{F}_{0 \leq \tau \leq t, n > 0} \left( \Phi(\underline{X}, \tau), \frac{\partial^n \Phi}{\partial \underline{X}^n}(\underline{X}, \tau); \mathcal{S}_{\kappa_0}, \mathcal{S} \right)$$

# Loi de comportement, premières simplifications

- principe du **déterminisme**

$$\underline{\sigma}(\underline{x}, t) = \mathcal{F}_{0 \leq \tau \leq t, \underline{Y} \in \Omega_0} (\Phi(\underline{Y}, \tau); \mathcal{S}_{\kappa_0}, \mathcal{S})$$

théorie non locale

- principe de l'**action locale**

$$\underline{\sigma}(\underline{x}, t) = \mathcal{F}_{0 \leq \tau \leq t, n > 0} \left( \Phi(\underline{X}, \tau), \frac{\partial^n \Phi}{\partial \underline{X}^n}(\underline{X}, \tau); \mathcal{S}_{\kappa_0}, \mathcal{S} \right)$$

- milieu **matériellement simple** : théorie du premier gradient

$$\underline{\sigma}(\underline{x}, t) = \mathcal{F}_{0 \leq \tau \leq t} (\Phi(\underline{X}, \tau), \underline{F}(\underline{X}, \tau); \mathcal{S}_{\kappa_0}, \mathcal{S})$$



# Invariance galiléenne

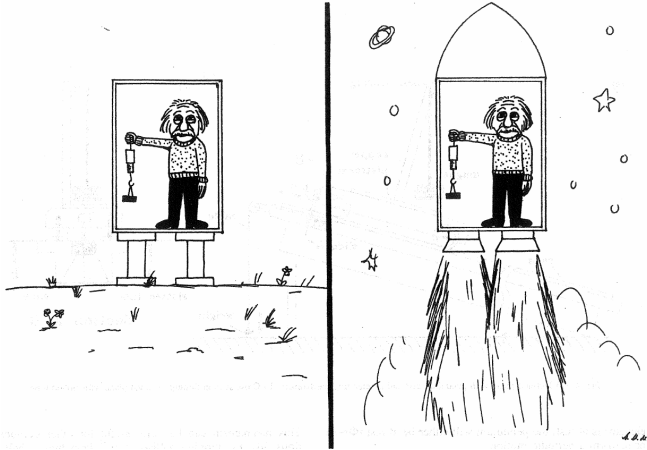
- Les lois de Newton qui sont à la base des mécanismes élémentaires microscopiques de déformation du corps matériel sont invariantes par transformation galiléenne

$$(\underline{x}, t) \longrightarrow (\underline{Q}_0 \cdot \underline{x} + \underline{v}_0 t + \underline{c}_0, t + t_0)$$

- Il en va de même de la loi de comportement macroscopique, ce qui exclut la dépendance explicite de la loi de comportement par rapport au temps, à la position du point matériel (cas homogène) et à la vitesse.

# Principe d'équivalence d'Einstein

*Einstein's elevator Gedankenexperiment from [Klein and Mittelstaedt, 1997]*



“Within a closed elevator, an observer can never detect whether the elevator is exposed to a static homogeneous gravitational field or is subject to a constant acceleration, due, for instance, to the thrust of a rocket.”

“A freely falling elevator is equivalent to an elevator at rest in an inertial frame of reference.”

# Principe d'équivalence d'Einstein

- Gedankenexperiment d'Einstein *Le résultat d'une expérience réalisée dans un "ascenseur" en chute libre dans un champ gravitationnel sera identique si elle est réalisée dans un référentiel galiléen en l'absence d'efforts volumiques externes.*

L'effet du champ gravitationnel sur un corps ne peut être distingué de celui des efforts d'inertie.

- On introduit les transformations galiléennes étendues

$$(\underline{x}, t) \longrightarrow (\underline{Q}_0 \cdot \underline{x} + \underline{c}(t), t + t_0)$$

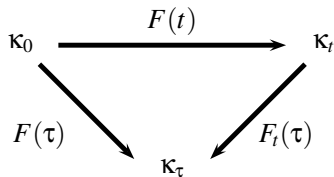
- La loi de comportement macroscopique est invariante par transformation galiléenne étendue :

$$\mathcal{F}_{0 \leq \tau \leq t}(\underline{a}(\tau), \underline{F}(\tau); \mathcal{S}_{\kappa_0}, \mathcal{S}) = \mathcal{F}_{0 \leq \tau \leq t}(\underline{a}(\tau) + \underline{\ddot{c}}(\tau), \underline{F}(\tau); \mathcal{S}_{\kappa_0}, \mathcal{S}), \quad \forall \underline{\ddot{c}}$$

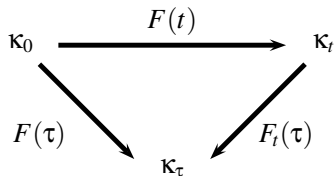
qui exclut *de facto* toute dépendance par rapport aux dérivées temporelles de la vitesse à tout ordre

$$\underline{\sigma}(t) = \mathcal{F}_{0 \leq \tau \leq t}(\underline{F}(\tau); \mathcal{S}_{\kappa_0}, \mathcal{S})$$

# Histoire des déformations



# Histoire des déformations



$$\tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) = \tilde{\mathbf{F}}(\tau) \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-1}(t)$$

- Histoire lagrangienne des déformations

$$\tilde{\mathbf{C}}(\tau) = \tilde{\mathbf{F}}^T(\tau) \cdot \tilde{\mathbf{F}}(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq t$$

- Histoire eulérienne des déformations

$$\mathbf{C}_t(\tau) = \mathbf{F}_t^T(\tau) \cdot \mathbf{F}_t(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq t$$

# Les jeux de variables de la loi de comportement

grandeur	eulérienne	lagrangienne
contraintes	$J\underset{\sim}{\sigma}$	
déformations	$\underset{\sim}{C}_t(\tau)$	$\underset{\sim}{C}(\tau)$
espace	$\underset{\sim}{g}$	
matière		$\underset{\sim}{G}$ $\overset{\circ}{O}^{(L)}$ $\mathfrak{T}$

*Les jeux eulérien et lagrangien de variables de la loi de comportement.  
 Les variables originelles de la modélisation sont en bleu.*

# Les jeux de variables de la loi de comportement

grandeur	eulérienne	lagrangienne
contraintes	$J_{\tilde{\sigma}}$	$\Pi = \tilde{F}^{-1} J_{\tilde{\sigma}} \tilde{F}^{-T}$
déformations	$\tilde{C}_t(\tau)$	$\tilde{C}(\tau)$
espace	$\tilde{g}$	$\tilde{F}^T \cdot \tilde{F} = \tilde{C}(t)$
matière	$\tilde{F} \tilde{F}^T = \tilde{B}(t)$ $(\det \tilde{F}^{-1}(t)) \overset{\circ}{\mathcal{O}}$ $\mathfrak{T}^{F^{-1}}$	$\tilde{G}$ $\overset{\circ}{\mathcal{O}}_L$ $\mathfrak{T}$

*Les jeux eulérien et lagrangien de variables de la loi de comportement.  
Les variables originelles de la modélisation sont en bleu.*

# Covariance de la loi de comportement

La loi de comportement

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{F}(\boldsymbol{C}_t(\tau); \quad \boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{B}(t), \quad \det \boldsymbol{F}(t), \quad \boldsymbol{\mathfrak{T}}^{F^{-1}(t)})$$

est une relation invariante par changement de base orthonormée en vertu de l'isotropie de l'espace.



# Covariance de la loi de comportement

La loi de comportement

$$\underline{\sigma}(t) = \mathcal{F}(\underline{C}_t(\tau); \quad \underline{g}, \quad \underline{B}(t), \quad \det \underline{F}(t), \quad \underline{\mathfrak{T}}^{F^{-1}(t)})$$

est une relation invariante par changement de base orthonormée en vertu de l'isotropie de l'espace.

Les fonctions polynomiales sont des exemples de lois satisfaisant à cette exigence. Ce ne sont pas les seules et nous aurons besoin d'appliquer des **théorèmes de représentation** des fonctions tensorielles.

# Plan

## ① Formulation des lois de comportement de la matière

## ② Une définition des fluides et des solides

## ③ Lois de comportement élastique

- Forme générale
- Solides élastiques isotropes
- Fluides élastiques isotropes

## ④ Thermodynamique des milieux continus

- Energie
- Entropie

## ⑤ Matériaux hyperélastiques

- Lois d'état
- Propriétés des matériaux élastiques
- Liaison interne : cas de l'incompressibilité
- Exemple : les élastomères

# Une définition (mécanique) des solides

**Définition.** *Un corps matériel est un **solide** ssi*

- ④ *Il existe un trièdre directeur orthonormé privilégié  $\mathcal{B}_0$*

# Une définition (mécanique) des solides

**Définition.** *Un corps matériel est un solide ssi*

- ① *Il existe un trièdre directeur orthonormé privilégié  $\mathcal{B}_0$*
- ② *Il existe une configuration de référence privilégiée  $\kappa_0$  dénuée de contrainte et de masse volumique  $\rho_0$*
- ③ *Le groupe d'invariance de configuration associé à  $\kappa_0$  est un sous-groupe du groupe orthogonal :*  $\mathfrak{G}_{\kappa_0} \subset GO(E)$

# Une définition (mécanique) des solides

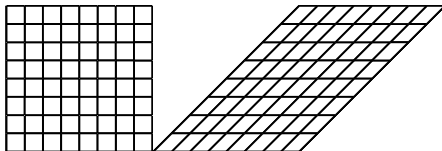
**Définition.** Un corps matériel est un **solide** ssi

- 1 Il existe un trièdre directeur orthonormé privilégié  $\mathcal{B}_0$
- 2 Il existe une configuration de référence privilégiée  $\kappa_0$  dénuée de contrainte et de masse volumique  $\rho_0$
- 3 Le groupe d'invariance de configuration associé à  $\kappa_0$  est un sous-groupe du groupe orthogonal :  $\mathfrak{G}_{\kappa_0} \subset GO(E)$
- 4 La loi de comportement eulérienne par rapport à cette configuration s'écrit :

$$\underline{\sigma}(t) = \mathcal{F}(\underline{\mathcal{C}}_t(\tau); \rho_0, \underline{\mathcal{B}}(t), \det \underline{\mathcal{F}}(t), \underline{\mathfrak{T}}^{F^{-1}(t)})$$

La configuration locale  $\kappa_0$  est dite **naturelle sans distorsion**. Pour une autre configuration locale  $\hat{\kappa}_0$  distordue par un endomorphisme auto-adjoint défini positif  $\underline{\mathcal{Z}}$ , le groupe d'invariance associé est le *transmué* du précédent.

$$\mathfrak{G}_{\hat{\kappa}_0} = \underline{\mathcal{Z}} \cdot \mathfrak{G}_{\kappa_0} \cdot \underline{\mathcal{Z}}^{-1}$$



## Une définition (mécanique) des fluides

Au contraire du milieu solide, la structure euclidienne de l'espace matériel  $E_L$  ne joue pas de rôle dans le comportement du fluide. Il est uniquement caractérisé par la mesure de volume. Il n'existe pas de trièdre directeur privilégié.

$$\sigma(t) = \mathcal{F}(\mathcal{C}_t(\tau); \rho_0, \det \mathbf{F}(t))$$

En tenant compte de  $\det \mathbf{F}(t) = \rho_0/\rho$ , on obtient la forme

$$\sigma(t) = \mathcal{F}(\mathcal{C}_t(\tau); \rho(t))$$

## Une définition (mécanique) des fluides

Au contraire du milieu solide, la structure euclidienne de l'espace matériel  $E_L$  ne joue pas de rôle dans le comportement du fluide. Il est uniquement caractérisé par la mesure de volume. Il n'existe pas de trièdre directeur privilégié.

$$\sigma(t) = \mathcal{F}(\mathcal{C}_t(\tau); \rho_0, \det \mathbf{F}(t))$$

En tenant compte de  $\det \mathbf{F}(t) = \rho_0/\rho$ , on obtient la forme

$$\sigma(t) = \mathcal{F}(\mathcal{C}_t(\tau); \rho(t))$$

Le groupe d'invariance de configuration du fluide est le groupe unimodulaire  $\mathcal{U}(E_L)$  lui-même. La loi de comportement du fluide est la même par rapport à toutes les configurations reliées par une transformation isochore.

# Une définition (mécanique) des fluides

Au contraire du milieu solide, la structure euclidienne de l'espace matériel  $E_L$  ne joue pas de rôle dans le comportement du fluide. Il est uniquement caractérisé par la mesure de volume. Il n'existe pas de trièdre directeur privilégié.

$$\underline{\sigma}(t) = \mathcal{F}(\underline{\mathcal{C}}_t(\tau); \rho_0, \det \underline{F}(t))$$

En tenant compte de  $\det \underline{F}(t) = \rho_0 / \rho$ , on obtient la forme

$$\underline{\sigma}(t) = \mathcal{F}(\underline{\mathcal{C}}_t(\tau); \rho(t))$$

Le groupe d'invariance de configuration du fluide est le groupe unimodulaire  $\mathcal{U}(E_L)$  lui-même. La loi de comportement du fluide est la même par rapport à toutes les configurations reliées par une transformation isochore.

La dépendance en  $\rho$  tombe dans le cas des fluides incompressibles. Le comportement le plus général du **fluide incompressible** relève exclusivement d'une description spatiale :

$$\underline{\sigma}(t) = \mathcal{F}_{\rho_0}(\underline{\mathcal{C}}_t(\tau))$$

Si on enlève l'hérédité, il reste le *fluide parfait incompressible*, il est "sans comportement".



# Classification des corps matériels

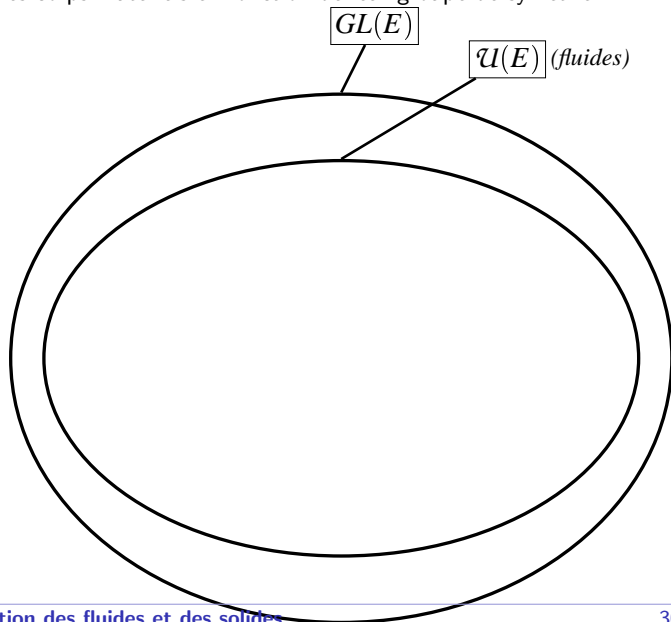
On classe les corps matériels en fonction de leur groupe de symétrie

$GL(E)$

A large empty circle is centered on the slide. A thin black line extends from the top of the circle, connecting it to the  $GL(E)$  label.

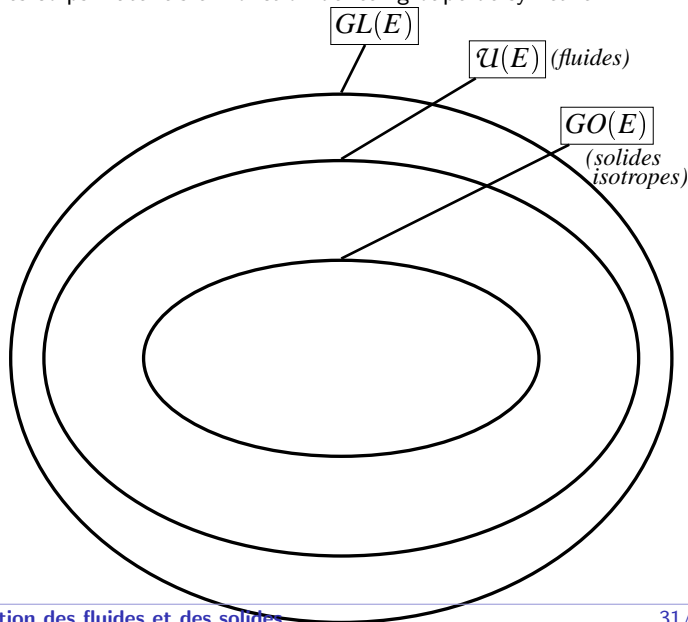
# Classification des corps matériels

On classe les corps matériels en fonction de leur groupe de symétrie

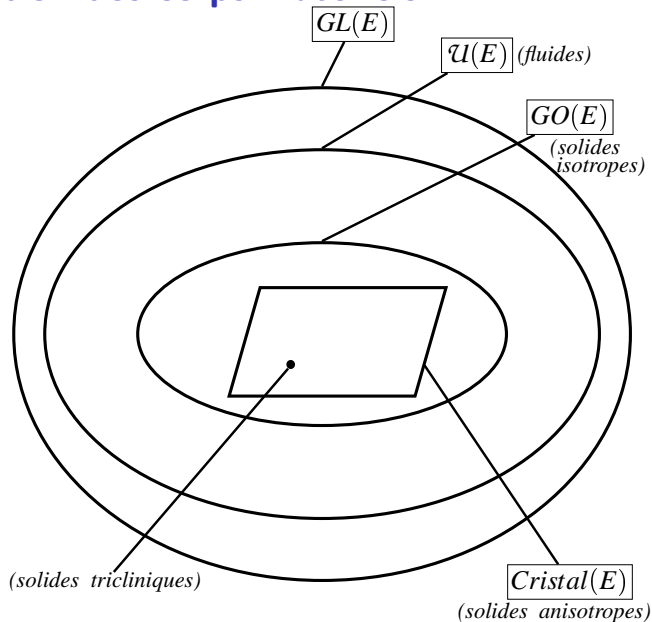


# Classification des corps matériels

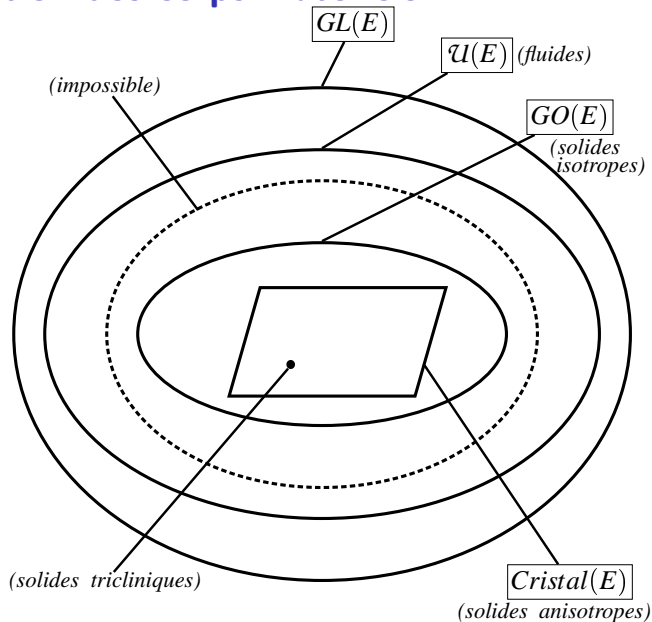
On classe les corps matériels en fonction de leur groupe de symétrie



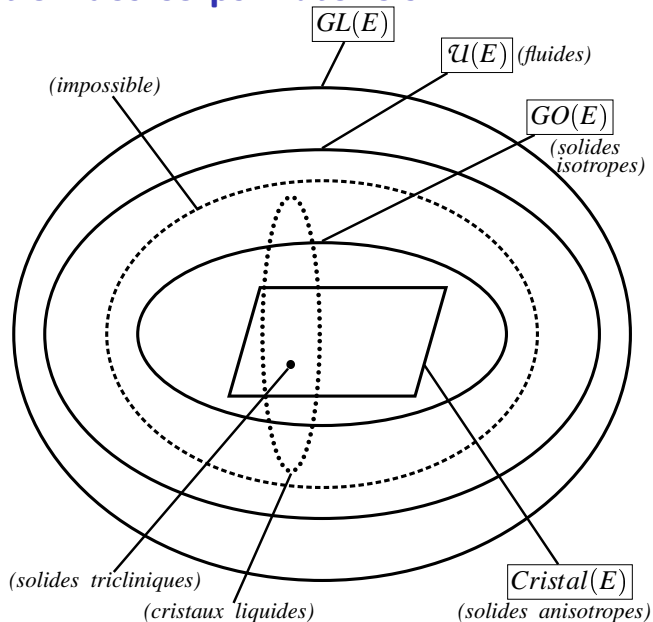
# Classification des corps matériels



# Classification des corps matériels



# Classification des corps matériels



# Comportement cristal-fluide

Les classes de comportement solide et fluide n'épuisent pas la variété des réponses de la matière. On peut introduire une classification plus détaillée basée sur la richesse de l'espace matériel et des tenseurs de structure associés :

- **Cristal fluide d'ordre 3** : c'est le **solide** décrit précédemment caractérisé par un espace matériel euclidien;
- **Cristal fluide d'ordre 2** : il est caractérisé par un espace euclidien de dimension 2 engendré par deux directeurs non parallèles;
- **Cristal fluide d'ordre 1** : il est caractérisé par un espace euclidien de dimension 1 engendré par un seul directeur. C'est le cas des **cristaux liquides** proprement dits;
- **Cristal fluide d'ordre 0** : c'est le **fluide** proprement dit, décrit précédemment. L'espace matériel ne possède pas de structure euclidienne.

# Plan

## ① Formulation des lois de comportement de la matière

## ② Une définition des fluides et des solides

## ③ Lois de comportement élastique

- Forme générale
- Solides élastiques isotropes
- Fluides élastiques isotropes

## ④ Thermodynamique des milieux continus

- Energie
- Entropie

## ⑤ Matériaux hyperélastiques

- Lois d'état
- Propriétés des matériaux élastiques
- Liaison interne : cas de l'incompressibilité
- Exemple : les élastomères



# Plan

- ① Formulation des lois de comportement de la matière
- ② Une définition des fluides et des solides
- ③ **Lois de comportement élastique**
  - Forme générale
  - Solides élastiques isotropes
  - Fluides élastiques isotropes
- ④ Thermodynamique des milieux continus
  - Energie
  - Entropie
- ⑤ Matériaux hyperélastiques
  - Lois d'état
  - Propriétés des matériaux élastiques
  - Liaison interne : cas de l'incompressibilité
  - Exemple : les élastomères

# Loi de comportement thermoélastique

- Température  $T(\underline{\mathbf{x}}, t)$  and its Eulerian gradient  $\underline{\mathbf{g}}(t) = \text{grad } T(\underline{\mathbf{x}}, t)$

# Loi de comportement thermoélastique

- Température  $T(\underline{\mathbf{x}}, t)$  and its Eulerian gradient  $\underline{\mathbf{g}}(t) = \text{grad } T(\underline{\mathbf{x}}, t)$
- Loi de comportement **thermoélastique** eulérienne

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathcal{F}(T(t), \underline{\mathbf{g}}(t); \rho_0, \underline{\mathbf{B}}(t), \det \underline{\mathbf{F}}(t), \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{F^{-1}}(t))$$

# Loi de comportement thermoélastique

- Température  $T(\underline{\mathbf{x}}, t)$  and its Eulerian gradient  $\underline{\mathbf{g}}(t) = \text{grad } T(\underline{\mathbf{x}}, t)$
- Loi de comportement **thermoélastique** eulérienne

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathcal{F}(T(t), \underline{\mathbf{g}}(t); \rho_0, \underline{\mathbf{B}}(t), \det \underline{\mathbf{F}}(t), \underline{\boldsymbol{\mathfrak{T}}}^{F^{-1}(t)})$$

- Loi de comportement **élastique**

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathcal{F}(\rho_0, \underline{\mathbf{B}}(t), \det \underline{\mathbf{F}}(t), \underline{\boldsymbol{\mathfrak{T}}}^{F^{-1}(t)})$$

# Loi de comportement thermoélastique

- Température  $T(\underline{\mathbf{x}}, t)$  and its Eulerian gradient  $\underline{\mathbf{g}}(t) = \text{grad } T(\underline{\mathbf{x}}, t)$
- Loi de comportement **thermoélastique** eulérienne

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathcal{F}(T(t), \underline{\mathbf{g}}(t); \rho_0, \underline{\mathbf{B}}(t), \det \underline{\mathbf{F}}(t), \underline{\boldsymbol{\mathfrak{T}}}^{F^{-1}(t)})$$

- Loi de comportement **élastique**

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathcal{F}(\rho_0, \underline{\mathbf{B}}(t), \det \underline{\mathbf{F}}(t), \underline{\boldsymbol{\mathfrak{T}}}^{F^{-1}(t)})$$

- Discussion selon le groupe d'invariance de configuration  $\mathfrak{G}_{\kappa_0}$

# Plan

- ① Formulation des lois de comportement de la matière
- ② Une définition des fluides et des solides
- ③ **Lois de comportement élastique**
  - Forme générale
  - Solides élastiques isotropes
  - Fluides élastiques isotropes
- ④ Thermodynamique des milieux continus
  - Energie
  - Entropie
- ⑤ Matériaux hyperélastiques
  - Lois d'état
  - Propriétés des matériaux élastiques
  - Liaison interne : cas de l'incompressibilité
  - Exemple : les élastomères

# Solides élastiques isotropes

- Dans le cas de l'isotropie, les tenseurs de structure se réduisent à la métrique  $\underset{\sim}{\mathbf{G}}$  et donc à  $\underset{\sim}{\mathbf{B}}$  dans la formulation eulérienne :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathcal{F}\left(\underset{\sim}{\mathbf{g}}, \underset{\sim}{\mathbf{B}}(t)\right)$$

# Solides élastiques isotropes

- Dans le cas de l'isotropie, les tenseurs de structure se réduisent à la métrique  $\underset{\sim}{\mathbf{G}}$  et donc à  $\underset{\sim}{\mathbf{B}}$  dans la formulation eulérienne :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathcal{F} \left( \underset{\sim}{\mathbf{g}}, \underset{\sim}{\mathbf{B}}(t) \right)$$

- Le théorème de représentation de Rivlin–Ericksen fournit la forme de  $\mathcal{F}$  compatible avec l'exigence de tensorialité

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \beta_0 \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \beta_1 \underset{\sim}{\mathbf{B}} + \beta_2 \underset{\sim}{\mathbf{B}}^2$$

où les  $\beta_i$  sont des fonctions de  $\rho_0$  et des 3 invariants principaux de  $\underset{\sim}{\mathbf{B}}$ , ou, de manière équivalente, des fonctions symétriques des 3 déformations principales  $\lambda_i$ .



# Solides élastiques isotropes

- Forme lagrangienne de la loi d'élasticité

$$\mathbf{\Pi}(t) = \mathcal{F}(\mathbf{\mathcal{C}}(t), \mathbf{\mathcal{G}})$$

# Solides élastiques isotropes

- Forme lagrangienne de la loi d'élasticité

$$\mathbf{\Pi}(t) = \mathcal{F}(\mathbf{C}(t), \mathbf{G})$$

- Version lagrangienne de la loi des corps élastiques isotropes

$$\mathbf{\Pi} = \alpha_0 \mathbf{1} + \alpha_1 \mathbf{C} + \alpha_2 \mathbf{C}^2$$

Les fonctions  $\alpha_i$  dépendent des valeurs propres de  $\mathbf{C}$ .

- Remarquer que

$$\text{trace}(\mathbf{B}) = \text{trace}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T) = \text{trace}(\mathbf{F}^T\mathbf{F}) = \text{trace}(\mathbf{C})$$

# Plan

- ① Formulation des lois de comportement de la matière
- ② Une définition des fluides et des solides
- ③ **Lois de comportement élastique**
  - Forme générale
  - Solides élastiques isotropes
  - Fluides élastiques isotropes
- ④ Thermodynamique des milieux continus
  - Energie
  - Entropie
- ⑤ Matériaux hyperélastiques
  - Lois d'état
  - Propriétés des matériaux élastiques
  - Liaison interne : cas de l'incompressibilité
  - Exemple : les élastomères

# Fluides élastiques isotropes

- Groupe d'invariance de configuration

$$\mathfrak{G}_{\kappa_0} = \mathcal{U}(E)$$

C'est un corps isotrope par rapport à toutes les configurations!

- Loi eulérienne du fluide élastique isotrope

$$\underline{\sigma}(t) = \mathcal{F}(\underline{g}, \rho_0, \det \underline{F})$$

# Fluides élastiques isotropes

- Groupe d'invariance de configuration

$$\mathfrak{G}_{\kappa_0} = \mathcal{U}(E)$$

C'est un corps isotrope par rapport à toutes les configurations!

- Loi eulérienne du fluide élastique isotrope

$$\underline{\sigma}(t) = \mathcal{F}(\underline{\mathbf{g}}, \rho_0, \det \underline{\mathbf{F}})$$

- La fonction d'élasticité  $\mathcal{F}$  doit vérifier, en vertu de sa propriété de tensorialité,  $\forall \mathbf{Q} \in GO(E)$  (indépendante du temps)

$$\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T = \mathcal{F}(\mathbf{Q}^T\mathbf{G}\mathbf{Q}, \rho_0, \det \mathbf{Q}\mathbf{F}) = \mathcal{F}(\mathbf{G}, \rho_0, \det \mathbf{F}) = \boldsymbol{\sigma}$$

# Fluides élastiques isotropes

- Groupe d'invariance de configuration

$$\mathfrak{G}_{\kappa_0} = \mathcal{U}(E)$$

C'est un corps isotrope par rapport à toutes les configurations!

- Loi eulérienne du fluide élastique isotrope

$$\underline{\sigma}(t) = \mathcal{F}(\underline{g}, \rho_0, \det \underline{F})$$

- La fonction d'élasticité  $\mathcal{F}$  doit vérifier, en vertu de sa propriété de tensorialité,  $\forall \underline{Q} \in GO(E)$  (indépendante du temps)

$$\underline{Q} \underline{\sigma} \underline{Q}^T = \mathcal{F}(\underline{Q}^T \underline{G} \underline{Q}, \rho_0, \det \underline{Q} \underline{F}) = \mathcal{F}(\underline{G}, \rho_0, \det \underline{F}) = \underline{\sigma}$$

- Loi eulérienne du fluide isotrope

$$\underline{\sigma} = -p(\rho_0, J) \underline{1}$$

où  $p$  est une fonction scalaire de  $J$ , ou de manière équivalente de la masse volumique actuelle  $\rho$ , appelée contrainte hydrostatique ou pression. On reconnaît l'état de contrainte d'un fluide parfait non visqueux.

# Plan

## ① Formulation des lois de comportement de la matière

## ② Une définition des fluides et des solides

## ③ Lois de comportement élastique

- Forme générale
- Solides élastiques isotropes
- Fluides élastiques isotropes

## ④ Thermodynamique des milieux continus

- Energie
- Entropie

## ⑤ Matériaux hyperélastiques

- Lois d'état
- Propriétés des matériaux élastiques
- Liaison interne : cas de l'incompressibilité
- Exemple : les élastomères

# Plan

## ① Formulation des lois de comportement de la matière

## ② Une définition des fluides et des solides

## ③ Lois de comportement élastique

- Forme générale
- Solides élastiques isotropes
- Fluides élastiques isotropes

## ④ Thermodynamique des milieux continus

- Energie
- Entropie

## ⑤ Matériaux hyperélastiques

- Lois d'état
- Propriétés des matériaux élastiques
- Liaison interne : cas de l'incompressibilité
- Exemple : les élastomères



# Bilan d'énergie

- l'énergie cinétique

$$\mathcal{K} := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, dv$$

- la puissance des efforts appliqués

$$\mathcal{P} := \mathcal{P}^c + \mathcal{P}^e = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\mathbf{t}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, ds + \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, dv$$

- l'énergie interne  $\mathcal{E}$  du système, densité massique  $e$  d'énergie interne

$$\mathcal{E} := \int_{\mathcal{D}} \rho e(\underline{\mathbf{x}}, t) \, dv$$

- l'apport de **chaleur**  $\mathcal{Q}$  au système sous la forme d'un apport surfacique  $h(\underline{\mathbf{x}}, t, \partial\mathcal{D})$  et d'un apport volumique  $\rho r(\underline{\mathbf{x}}, t)$

$$\mathcal{Q} := \int_{\partial\mathcal{D}} h \, ds + \int_{\mathcal{D}} \rho r \, dv$$

# Bilan d'énergie

- l'énergie cinétique

$$\mathcal{K} := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, dv$$

- la puissance des efforts appliqués

$$\mathcal{P} := \mathcal{P}^c + \mathcal{P}^e = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\mathbf{t}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, ds + \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, dv$$

- l'énergie interne  $\mathcal{E}$  du système, densité massique  $e$  d'énergie interne

$$\mathcal{E} := \int_{\mathcal{D}} \rho e(\underline{\mathbf{x}}, t) \, dv$$

- l'apport de **chaleur**  $\mathcal{Q}$  au système sous la forme d'un apport surfacique  $h(\underline{\mathbf{x}}, t, \partial\mathcal{D})$  et d'un apport volumique  $\rho r(\underline{\mathbf{x}}, t)$

$$\mathcal{Q} := \int_{\partial\mathcal{D}} h \, ds + \int_{\mathcal{D}} \rho r \, dv$$

vecteur flux de chaleur  $\underline{\mathbf{q}}$       $h(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{n}}, t) = -\underline{\mathbf{q}}(\underline{\mathbf{x}}, t) \cdot \underline{\mathbf{n}}$

# Premier principe de la thermodynamique

$$\dot{\mathcal{E}} + \dot{\mathcal{K}} = \mathcal{P} + \mathcal{Q}$$

En tenant compte du **théorème de l'énergie cinétique**,

$$\dot{\mathcal{K}} = \mathcal{P}^i + \mathcal{P}^e + \mathcal{P}^c$$

où, en l'absence de discontinuité,  $\mathcal{P}^i = - \int_{\mathcal{D}} \underline{\sigma} : \underline{D} \, dv$  est la **puissance des efforts intérieurs**, le premier principe s'écrit aussi

$$\dot{\mathcal{E}} = -\mathcal{P}^i + \mathcal{Q}$$

# Premier principe de la thermodynamique

$$\dot{\mathcal{E}} + \dot{\mathcal{K}} = \mathcal{P} + \mathcal{Q}$$

En tenant compte du **théorème de l'énergie cinétique**,

$$\dot{\mathcal{K}} = \mathcal{P}^i + \mathcal{P}^e + \mathcal{P}^c$$

où, en l'absence de discontinuité,  $\mathcal{P}^i = - \int_{\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{\sigma}} : \underline{\mathbf{D}} \, dv$  est la **puissance des efforts intérieurs**, le premier principe s'écrit aussi

$$\dot{\mathcal{E}} = -\mathcal{P}^i + \mathcal{Q}$$

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \dot{e} \, dv = \int_{\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{\sigma}} : \underline{\mathbf{D}} \, dv - \int_{\partial \mathcal{D}} \underline{\mathbf{q}} \cdot \underline{\mathbf{n}} \, ds + \int_{\mathcal{D}} \rho r \, dv$$

# Formulation locale du premier principe

de la formulation globale valable pour tout sous-domaine  $\mathcal{D} \subset \Omega_t \dots$

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \dot{e} \, dv = \int_{\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{\sigma}} : \underline{\boldsymbol{D}} \, dv - \int_{\partial \mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{q}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}} \, ds + \int_{\mathcal{D}} \rho r \, dv$$

... à la formulation locale, en un point régulier de  $\Omega_t$

$$\rho \dot{e} = \underline{\boldsymbol{\sigma}} : \underline{\boldsymbol{D}} - \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{q}} + \rho r$$

# Formulation lagrangienne du premier principe

description lagrangienne en thermodynamique

$$e(\underline{x}, t) = e_0(\underline{X}, t), \quad \underline{Q}(\underline{X}, t) = J \underline{F}^{-1} \cdot \underline{q}$$

de la formulation globale valable pour tout sous-domaine  $\mathcal{D}_0 \subset \Omega_0 \dots$

$$\int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \dot{e}_0 dV = \int_{\mathcal{D}_0} \underline{\Pi} : \underline{\dot{E}} dV - \int_{\partial \mathcal{D}_0} \underline{Q} \cdot \underline{N} dS + \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 r_0 dV$$

... à la formulation locale, en un point régulier de  $\Omega_0$

$$\rho_0 \dot{e}_0 = \underline{\Pi} : \underline{\dot{E}} - \text{Div } \underline{Q} + \rho_0 r_0$$

# Formulation lagrangienne du premier principe

description lagrangienne en thermodynamique

$$e(\underline{x}, t) = e_0(\underline{X}, t), \quad \underline{Q}(\underline{X}, t) = J \underline{F}^{-1} \cdot \underline{q}$$

de la formulation globale valable pour tout sous-domaine  $\mathcal{D}_0 \subset \Omega_0 \dots$

$$\int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \dot{e}_0 dV = \int_{\mathcal{D}_0} \underline{\Pi} : \underline{\dot{E}} dV - \int_{\partial \mathcal{D}_0} \underline{Q} \cdot \underline{N} dS + \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 r_0 dV$$

... à la formulation locale, en un point régulier de  $\Omega_0$

$$\rho_0 \dot{e}_0 = \underline{\Pi} : \underline{\dot{E}} - \text{Div } \underline{Q} + \rho_0 r_0$$

Tenseur des déformations de Green-Lagrange :

$$\underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{C} - 1)$$

Tenseur des contraintes de Piola :

$$\underline{\Pi} = J \underline{F}^{-1} \underline{\sigma} \underline{F}^{-T}$$

Equivalence des puissances massiques :

$$J \underline{\sigma} : \underline{D} = \underline{\Pi} : \underline{\dot{E}} = 2 \underline{\Pi} : \underline{\dot{C}} = J \sigma_{ij} D_{ij} = 2 \Pi_{IJ} \dot{C}_{IJ}$$

Vitesse de déformation eulérienne :  $2 \underline{D} = \underline{F}^{-T} \underline{\dot{C}} \underline{F}^{-1}$

# Plan

## ① Formulation des lois de comportement de la matière

## ② Une définition des fluides et des solides

## ③ Lois de comportement élastique

- Forme générale
- Solides élastiques isotropes
- Fluides élastiques isotropes

## ④ Thermodynamique des milieux continus

- Energie
- Entropie

## ⑤ Matériaux hyperélastiques

- Lois d'état
- Propriétés des matériaux élastiques
- Liaison interne : cas de l'incompressibilité
- Exemple : les élastomères



## Second principe de la thermodynamique

- entropie du système / densité massique d'entropie

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} \rho s \, dv$$

- production d'entropie dans le système

$$\varphi(\mathcal{D}) = - \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \underline{\mathbf{n}} \, ds + \int_{\mathcal{D}} \frac{\rho r}{T} \, dv$$

- formulation globale du second principe pour tout sous-domaine  $\mathcal{D} \subset \Omega_t$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{S}}(\mathcal{D}) - \varphi(\mathcal{D}) &\geq 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho s \, dv + \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \underline{\mathbf{n}} \, ds - \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{r}{T} \, dv &\geq 0 \end{aligned}$$

# Formulation lagrangienne du second principe

description lagrangienne en thermodynamique

$$s(\underline{\mathbf{x}}, t) = s_0(\underline{\mathbf{X}}, t), \quad \underline{\mathbf{Q}}(\underline{\mathbf{X}}, t) = J\tilde{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{q}}$$

de la formulation globale valable pour tout sous-domaine  $\mathcal{D}_0 \subset \Omega_0 \dots$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 s_0(\underline{\mathbf{X}}, t) dV + \int_{\partial \mathcal{D}_0} \frac{\underline{\mathbf{Q}}}{T} \cdot \underline{\mathbf{N}} dS + \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \frac{r_0}{T} dV \geq 0$$

... à la formulation locale, en un point régulier de  $\Omega_0$

$$\rho_0 \dot{s}_0 + \text{Div} \frac{\underline{\mathbf{Q}}}{T} - \rho_0 \frac{r_0}{T} \geq 0$$

# Plan

## ① Formulation des lois de comportement de la matière

## ② Une définition des fluides et des solides

## ③ Lois de comportement élastique

- Forme générale
- Solides élastiques isotropes
- Fluides élastiques isotropes

## ④ Thermodynamique des milieux continus

- Energie
- Entropie

## ⑤ Matériaux hyperélastiques

- Lois d'état
- Propriétés des matériaux élastiques
- Liaison interne : cas de l'incompressibilité
- Exemple : les élastomères

# Plan

- ① Formulation des lois de comportement de la matière
- ② Une définition des fluides et des solides
- ③ Lois de comportement élastique
  - Forme générale
  - Solides élastiques isotropes
  - Fluides élastiques isotropes
- ④ Thermodynamique des milieux continus
  - Energie
  - Entropie
- ⑤ **Matériaux hyperélastiques**
  - Lois d'état
  - Propriétés des matériaux élastiques
  - Liaison interne : cas de l'incompressibilité
  - Exemple : les élastomères

# Dissipation

- fonctions d'état : énergie interne  $e_0(\mathbf{\tilde{E}}, s_0)$   
énergie libre de Helmholtz<sup>1</sup>  $\psi_0(\mathbf{\tilde{E}}, T) = e_0 - Ts_0$

---

<sup>1</sup> Dans cette partie, par souci de concision, les tenseurs de structure, non variables avec le temps, ne sont pas indiqués.

# Dissipation

- fonctions d'état : énergie interne  $e_0(\underline{\tilde{\mathbf{E}}}, s_0)$   
énergie libre de Helmholtz<sup>1</sup>  $\psi_0(\underline{\tilde{\mathbf{E}}}, T) = e_0 - Ts_0$
- inégalité de Clausius–Duhem (dissipation volumique  $D$ )

$$D = \underline{\tilde{\boldsymbol{\Pi}}} : \dot{\underline{\tilde{\mathbf{E}}}} - \rho_0(\dot{\psi}_0 + \dot{T}s_0) - \underline{\mathbf{Q}} \cdot \frac{\text{Grad } T}{T} \geq 0$$

---

<sup>1</sup>Dans cette partie, par souci de concision, les tenseurs de structure, non variables avec le temps, ne sont pas indiqués.

# Dissipation

- fonctions d'état : énergie interne  $e_0(\underline{\mathbf{E}}, s_0)$   
énergie libre de Helmholtz<sup>1</sup>  $\psi_0(\underline{\mathbf{E}}, T) = e_0 - Ts_0$
- inégalité de Clausius–Duhem (dissipation volumique  $D$ )

$$D = \underline{\mathbf{\Pi}} : \dot{\underline{\mathbf{E}}} - \rho_0(\dot{\psi}_0 + \dot{T}s_0) - \underline{\mathbf{Q}} \cdot \frac{\text{Grad } T}{T} \geq 0$$

- corps thermoélastiques  $\underline{\mathbf{\Pi}} = \mathcal{F}(\underline{\mathbf{E}}, T), \quad \psi_0(\underline{\mathbf{E}}, T)$

$$\dot{\psi}_0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{\mathbf{E}}} : \dot{\underline{\mathbf{E}}} + \frac{\partial \psi_0}{\partial T} \dot{T}$$

---

<sup>1</sup>Dans cette partie, par souci de concision, les tenseurs de structure, non variables avec le temps, ne sont pas indiqués.

# Dissipation

- fonctions d'état : énergie interne  $e_0(\underline{\tilde{\mathbf{E}}}, s_0)$   
énergie libre de Helmholtz<sup>1</sup>  $\psi_0(\underline{\tilde{\mathbf{E}}}, T) = e_0 - Ts_0$
- inégalité de Clausius–Duhem (dissipation volumique  $D$ )

$$D = \underline{\tilde{\boldsymbol{\Pi}}} : \dot{\underline{\tilde{\mathbf{E}}}} - \rho_0(\dot{\psi}_0 + \dot{T}s_0) - \underline{\mathbf{Q}} \cdot \frac{\text{Grad } T}{T} \geq 0$$

- corps thermoélastiques  $\underline{\tilde{\boldsymbol{\Pi}}} = \mathcal{F}(\underline{\tilde{\mathbf{E}}}, T), \quad \psi_0(\underline{\tilde{\mathbf{E}}}, T)$

$$\dot{\psi}_0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{\tilde{\mathbf{E}}}} : \dot{\underline{\tilde{\mathbf{E}}}} + \frac{\partial \psi_0}{\partial T} \dot{T}$$

$$D = (\underline{\tilde{\boldsymbol{\Pi}}} - \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{\tilde{\mathbf{E}}}}) : \dot{\underline{\tilde{\mathbf{E}}}} - \rho_0 \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial T} + s_0 \right) \dot{T} - \underline{\mathbf{Q}} \cdot \frac{\text{Grad } T}{T} \geq 0$$

---

<sup>1</sup>Dans cette partie, par souci de concision, les tenseurs de structure, non variables avec le temps, ne sont pas indiqués.



# Lois d'état des corps thermoélastiques

- relations d'hyperélasticité

$$\underline{\Pi} = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{\mathbf{E}}}$$

$$s_0 = - \frac{\partial \psi_0}{\partial T}$$

$\psi_0$  s'appelle le **potentiel d'élasticité** (dissipation intrinsèque nulle)

- dissipation résiduelle thermique

$$D = - \underline{\mathbf{Q}} \cdot \frac{\text{Grad } T}{T} = - \frac{\rho_0}{\rho} \underline{\mathbf{q}} \cdot \text{grad } T \geq 0$$

# Lois d'état des corps thermoélastiques

- relations d'hyperélasticité

$$\underline{\Pi} = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{\Xi}}$$

$$s_0 = -\frac{\partial \psi_0}{\partial T}$$

$\psi_0$  s'appelle le **potentiel d'élasticité** (dissipation intrinsèque nulle)

- dissipation résiduelle thermique

$$D = -\underline{Q} \cdot \frac{\text{Grad } T}{T} = -\frac{\rho_0}{\rho} \underline{q} \cdot \text{grad } T \geq 0$$

loi de Fourier (*loi de comportement thermique*)

$$\underline{Q} = -\underline{K}(\underline{\Xi}, T) \cdot \text{Grad } T$$

il n'y a pas de potentiel thermique (dissipation totale)

# Formulation eulérienne des lois hyperélastiques

- Energie libre spécifique (massique) de Helmholtz eulérienne

$$\psi_0(\underline{\mathbf{E}}, \underline{\mathbf{G}}, \underline{\mathfrak{T}}) = \psi(\underline{\mathbf{g}}, \underline{\mathbf{B}}, \underline{\mathfrak{T}}^{F^{-1}})$$

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{C}} - \underline{\mathbf{1}}), \quad \underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}}, \quad {}^b\underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{F}}^* \underline{\mathbf{g}} \underline{\mathbf{F}}, \quad C_{IJ} = F^*_I{}^i g_{ij} F^j{}_J$$

# Formulation eulérienne des lois hyperélastiques

- Energie libre spécifique (massique) de Helmholtz eulérienne

$$\psi_0(\mathbf{\underline{E}}, \mathbf{\underline{G}}, \mathbf{\underline{\mathfrak{T}}}) = \psi(\mathbf{\underline{g}}, \mathbf{\underline{B}}, \mathbf{\underline{\mathfrak{T}}}^{F^{-1}})$$

$$\mathbf{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\mathbf{\underline{C}} - \mathbf{\underline{1}}), \quad \mathbf{\underline{C}} = \mathbf{\underline{F}}^T \mathbf{\underline{F}}, \quad {}^b\mathbf{\underline{C}} = \mathbf{\underline{F}}^* \mathbf{\underline{g}} \mathbf{\underline{F}}, \quad C_{IJ} = F^*{}_I{}^i g_{ij} F^j{}_J$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial g_{ij}} = \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{IJ}} \frac{\partial E_{IJ}}{\partial g_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{IJ}} F^*{}_I{}^i F^j{}_J$$

# Formulation eulérienne des lois hyperélastiques

- Energie libre spécifique (massique) de Helmholtz eulérienne

$$\psi_0(\underline{\mathbf{E}}, \underline{\mathbf{G}}, \underline{\mathfrak{T}}) = \psi(\underline{\mathbf{g}}, \underline{\mathbf{B}}, \underline{\mathfrak{T}}^{F^{-1}})$$

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{C}} - \underline{\mathbf{1}}), \quad \underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}}, \quad {}^b\underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{F}}^* \underline{\mathbf{g}} \underline{\mathbf{F}}, \quad C_{IJ} = F^*{}_I{}^i g_{ij} F^j{}_J$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial g_{ij}} = \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{IJ}} \frac{\partial E_{IJ}}{\partial g_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{IJ}} F^*{}_I{}^i F^j{}_J$$

$$2\rho \frac{\partial \psi}{\partial g_{ij}} = \frac{\rho_0}{J} \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{IJ}} F^*{}_I{}^i F^j{}_J = J^{-1} F^i{}_I \Pi^{IJ} F_j^{*j} = \sigma^{ij}$$

# Formulation eulérienne des lois hyperélastiques

- Energie libre spécifique (massique) de Helmholtz eulérienne

$$\psi_0(\underline{\mathbf{E}}, \underline{\mathbf{G}}, \underline{\mathfrak{T}}) = \psi(\underline{\mathbf{g}}, \underline{\mathbf{B}}, \underline{\mathfrak{T}}^{F^{-1}})$$

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{C}} - \underline{\mathbf{1}}), \quad \underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}}, \quad {}^b\underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{F}}^* \underline{\mathbf{g}} \underline{\mathbf{F}}, \quad C_{IJ} = F^*{}_I{}^i g_{ij} F^j{}_J$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial g_{ij}} = \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{IJ}} \frac{\partial E_{IJ}}{\partial g_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{IJ}} F^*{}_I{}^i F^j{}_J$$

$$2\rho \frac{\partial \psi}{\partial g_{ij}} = \frac{\rho_0}{J} \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{IJ}} F^*{}_I{}^i F^j{}_J = J^{-1} F^i{}_I \Pi^{IJ} F^{*j}{}_J = \sigma^{ij}$$

- Loi d'état eulérienne

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{g}}}$$

Le tenseur métrique émerge comme la quantité fondamentale de l'hyperélasticité eulérienne!

[Doyle and Ericksen, 1956, Marsden and Hughes, 1994]

# Plan

- ① Formulation des lois de comportement de la matière
- ② Une définition des fluides et des solides
- ③ Lois de comportement élastique
  - Forme générale
  - Solides élastiques isotropes
  - Fluides élastiques isotropes
- ④ Thermodynamique des milieux continus
  - Energie
  - Entropie
- ⑤ **Matériaux hyperélastiques**
  - Lois d'état
  - Propriétés des matériaux élastiques
  - Liaison interne : cas de l'incompressibilité
  - Exemple : les élastomères

# Propriétés des matériaux hyperélastiques

- dissipation nulle—énergie stockée  
potentiel d'élasticité : l'exploitation du second principe implique que tout milieu élastique est hyperélastique.
- le travail mécanique fourni ne dépend pas du trajet de déformation

$$\begin{aligned} W(\mathbf{\tilde{E}}_A \longrightarrow \mathbf{\tilde{E}}_B) &:= \int_{t_A}^{t_B} \mathbf{\tilde{\Pi}} : \dot{\mathbf{\tilde{E}}} dt = \int_{t_A}^{t_B} \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{\tilde{E}}} : \dot{\mathbf{\tilde{E}}} dt \\ &= \rho_0 \psi_0(\mathbf{\tilde{E}}_B) - \rho_0 \psi_0(\mathbf{\tilde{E}}_A) \end{aligned}$$

Si le trajet est fermé (cycle de déformation), le travail mécanique fourni est nul. C'est le caractère **réversible** de la déformation élastique.

- l'état de contrainte ne dépend pas de la vitesse de déformation  $\dot{\mathbf{\tilde{E}}}$



# Hyperélasticité isotrope

- **théorème de représentation** pour les fonctions isotropes de variables tensorielles d'ordre 2

$$\psi_0(\mathbf{\tilde{E}}, T) \equiv \psi_0(I_1, I_2, I_3, T)$$

les **invariants principaux** de  $\mathbf{\tilde{E}}$  sont

$$I_1(\mathbf{\tilde{E}}) := \text{trace } \mathbf{\tilde{E}}, \quad I_2(\mathbf{\tilde{E}}) := \frac{1}{2} \text{trace } \mathbf{\tilde{E}}^2, \quad I_3(\mathbf{\tilde{E}}) := \frac{1}{3} \text{trace } \mathbf{\tilde{E}}^3$$

- lois de comportement hyperélastique

$$\mathbf{\tilde{\Pi}} = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{\tilde{E}}} + \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{\tilde{E}}} + \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{\tilde{E}}}$$

$$\mathbf{\tilde{\Pi}} = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_1} \mathbf{1} + \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_2} \mathbf{\tilde{E}} + \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_3} \mathbf{\tilde{E}}^2$$

à rapprocher de la loi des corps élastiques isotropes déjà établie

$$\mathbf{\tilde{\Pi}} = \alpha_0 \mathbf{1} + \alpha_1 \mathbf{\tilde{E}} + \alpha_2 \mathbf{\tilde{E}}^2$$

# Plan

- ① Formulation des lois de comportement de la matière
- ② Une définition des fluides et des solides
- ③ Lois de comportement élastique
  - Forme générale
  - Solides élastiques isotropes
  - Fluides élastiques isotropes
- ④ Thermodynamique des milieux continus
  - Energie
  - Entropie
- ⑤ **Matériaux hyperélastiques**
  - Lois d'état
  - Propriétés des matériaux élastiques
  - Liaison interne : cas de l'incompressibilité
  - Exemple : les élastomères

# Matériaux hyperélastiques incompressibles

- notion de liaison interne; les états de déformations licites sont tels que

$$g(\mathbf{\tilde{C}}) = 0, \quad \dot{g}(\mathbf{\tilde{C}}) = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{\tilde{C}}} : \dot{\mathbf{\tilde{C}}} = 0$$

- exploitation du second principe avec liaison interne

$$(\mathbf{\tilde{\Pi}} - 2\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{\tilde{C}}}) : \dot{\mathbf{\tilde{C}}} \geq 0$$

$$\implies \mathbf{\tilde{\Pi}} - 2\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{\tilde{C}}} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \mathbf{\tilde{C}}} = \mathbf{\tilde{\Pi}}^R$$

la contrainte  $\mathbf{\tilde{\Pi}}^R$  est la **réaction** à la liaison  $g$

- incompressibilité

$$g(\mathbf{\tilde{C}}) = \det \mathbf{\tilde{C}} - 1, \quad \frac{\partial g}{\partial \mathbf{\tilde{C}}} = (\det \mathbf{\tilde{C}}) \mathbf{\tilde{C}}^{-1}$$

$$\mathbf{\tilde{\Pi}} = \lambda J \mathbf{\tilde{C}}^{-1} + 2\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{\tilde{C}}}$$

# Matériaux hyperélastiques incompressibles

- notion de liaison interne; les états de déformations licites sont tels que

$$g(\mathbf{\tilde{C}}) = 0, \quad \dot{g}(\mathbf{\tilde{C}}) = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{\tilde{C}}} : \dot{\mathbf{\tilde{C}}} = 0$$

- exploitation du second principe avec liaison interne

$$(\mathbf{\tilde{\Pi}} - 2\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{\tilde{C}}}) : \dot{\mathbf{\tilde{C}}} \geq 0$$

$$\implies \mathbf{\tilde{\Pi}} - 2\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{\tilde{C}}} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \mathbf{\tilde{C}}} = \mathbf{\tilde{\Pi}}^R$$

la contrainte  $\mathbf{\tilde{\Pi}}^R$  est la **réaction** à la liaison  $g$

- incompressibilité

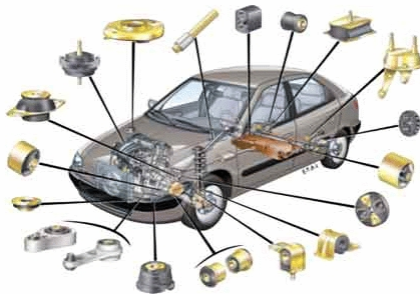
$$g(\mathbf{\tilde{C}}) = \det \mathbf{\tilde{C}} - 1, \quad \frac{\partial g}{\partial \mathbf{\tilde{C}}} = (\det \mathbf{\tilde{C}}) \mathbf{\tilde{C}}^{-1}$$

$$\mathbf{\tilde{\Pi}} = \lambda J \mathbf{\tilde{C}}^{-1} + 2\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{\tilde{C}}}, \quad \boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{1} + 2\rho \mathbf{\tilde{F}} \cdot \frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{\tilde{C}}} \cdot \mathbf{\tilde{F}}^T$$

# Plan

- ① Formulation des lois de comportement de la matière
- ② Une définition des fluides et des solides
- ③ Lois de comportement élastique
  - Forme générale
  - Solides élastiques isotropes
  - Fluides élastiques isotropes
- ④ Thermodynamique des milieux continus
  - Energie
  - Entropie
- ⑤ **Matériaux hyperélastiques**
  - Lois d'état
  - Propriétés des matériaux élastiques
  - Liaison interne : cas de l'incompressibilité
  - Exemple : les élastomères

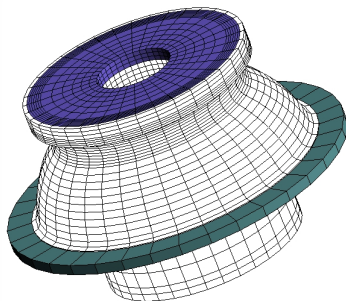
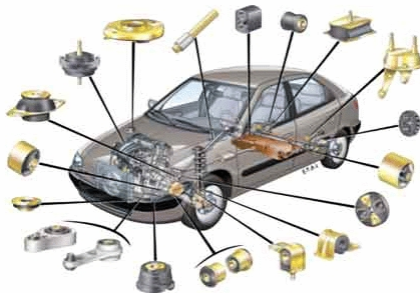
# L'automobile et les élastomères



supports de bloc-moteur

source : Centre des Matériaux Sabine Cantournet

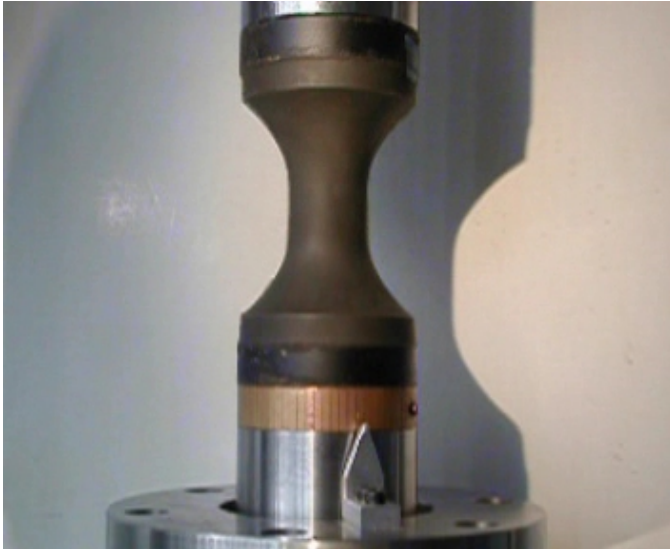
# L'automobile et les élastomères



calcul de support de bloc-moteur (méthode des éléments finis)

source : Centre des Matériaux Sabine Cantournet

# Traction-compression d'un élastomère

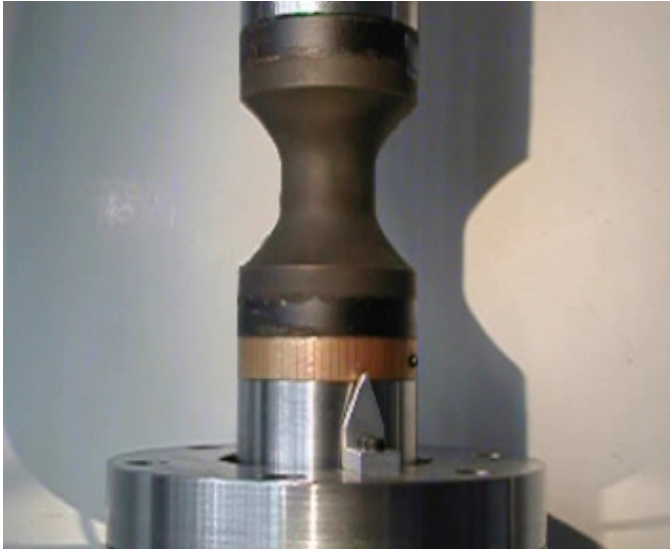




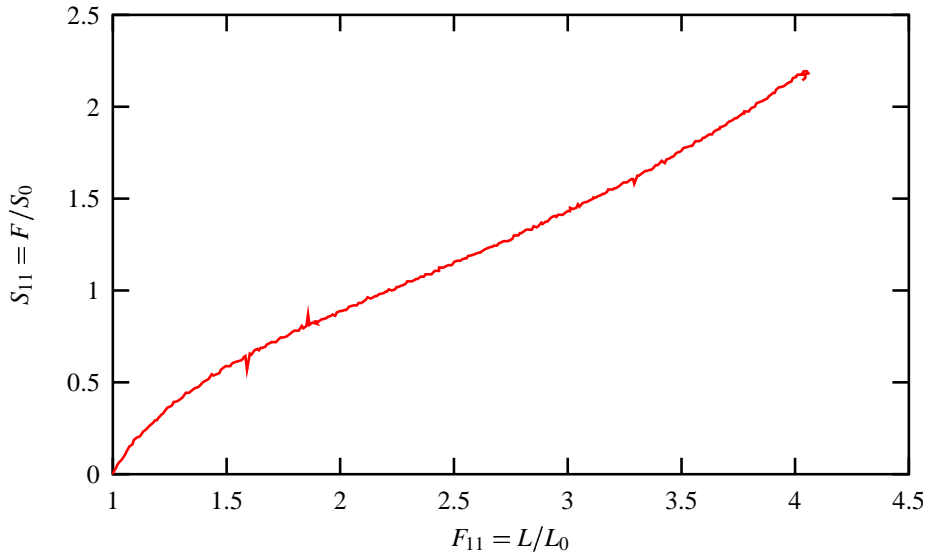
# Traction-compression d'un élastomère



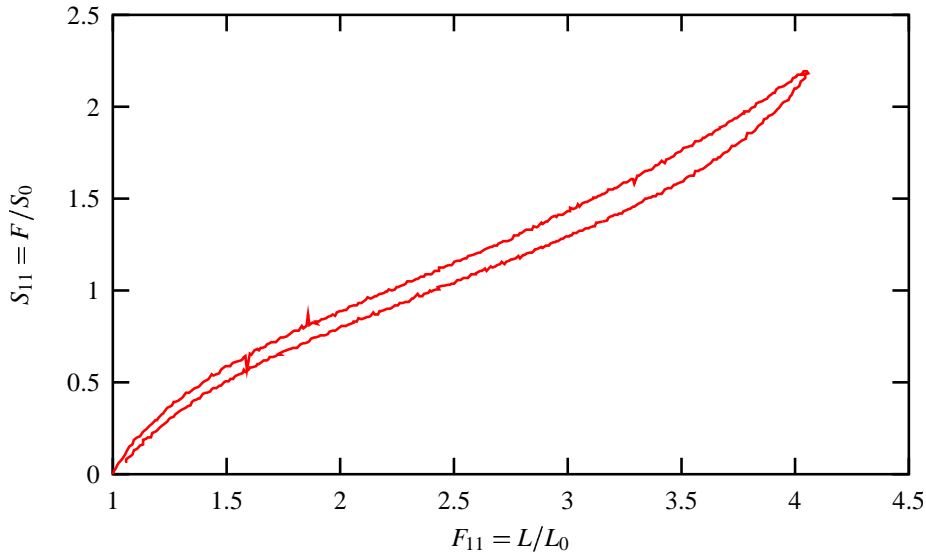
# Traction-compression d'un élastomère



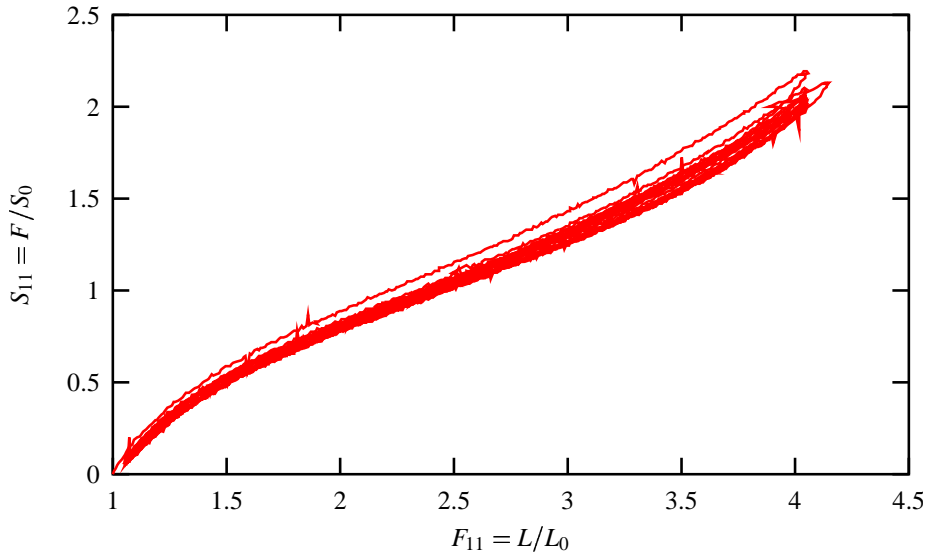
## Traction-compression d'un élastomère



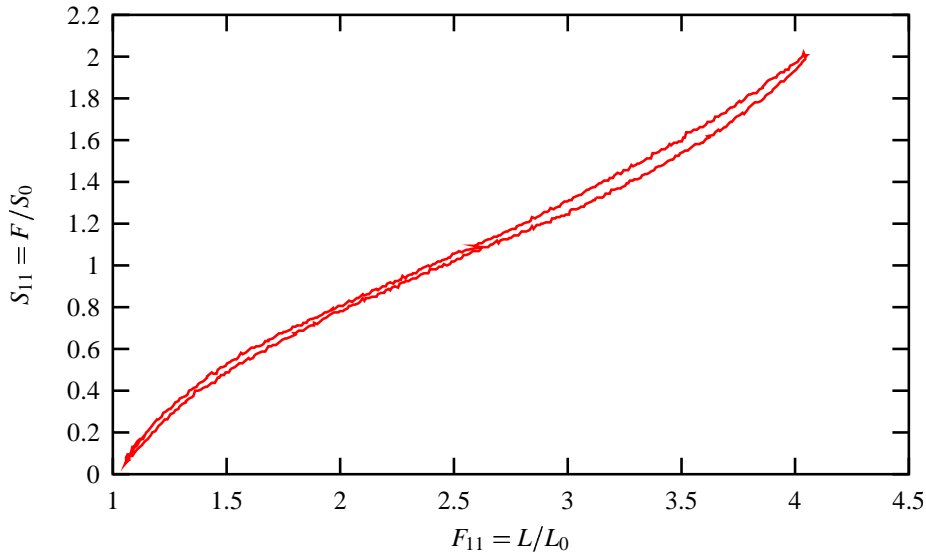
# Traction-compression d'un élastomère



## Traction-compression d'un élastomère



## Traction-compression d'un élastomère



# Loi de comportement identifiée

le potentiel de Rivlin généralisé

$$\begin{aligned}\rho\psi_0(\mathbf{C}) &= A_{10}(I_1 - 3) + A_{01}(I_2 - 3) \\ &+ A_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + A_{20}(I_2 - 3)^2 + A_{30}(I_1 - 3)^3\end{aligned}$$

$$\mathbf{\Pi} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{C}} + \mathbf{\Pi}^R$$

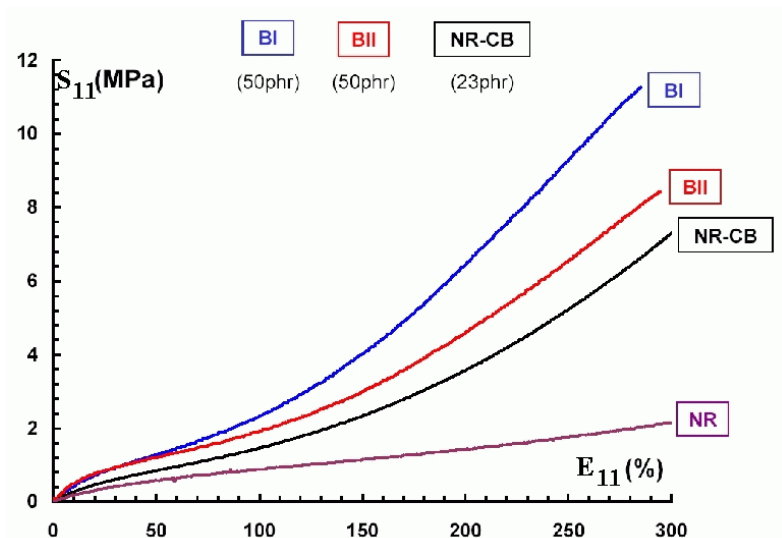
la réaction de pression  $\mathbf{\Pi}^R$  doit être ajoutée ici car le milieu est considéré comme incompressible

les invariants de  $\mathbf{C}$  sont ici

$$\begin{aligned}I_1 &= \text{trace } \mathbf{C} \\ I_2 &= \frac{1}{2}((\text{trace } \mathbf{C})^2 - \text{trace } \mathbf{C}^2) \\ I_3 &= \det \mathbf{C}\end{aligned}$$

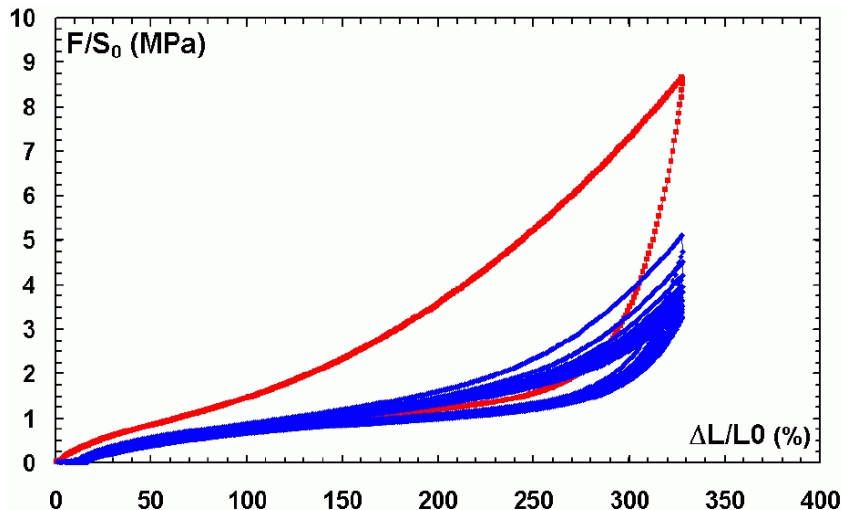
les coefficients  $A_{ij}$  sont déterminés expérimentalement

# Influence des charges sur le comportement des élastomères





## L'effet Mullins



# Torsion d'un élastomère



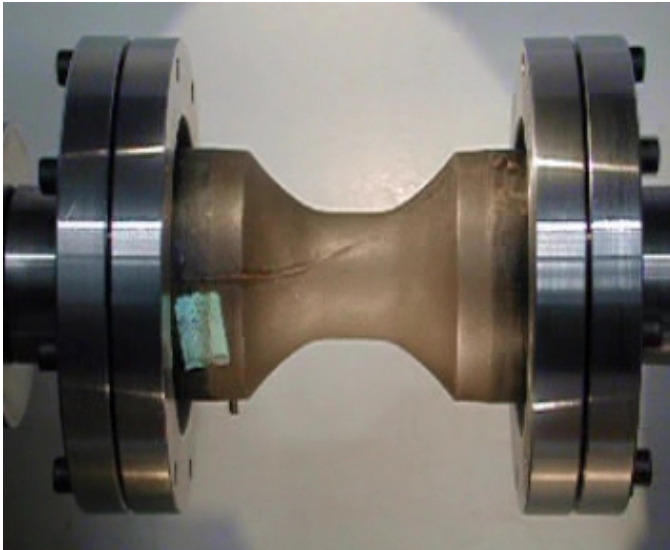
# Torsion d'un élastomère



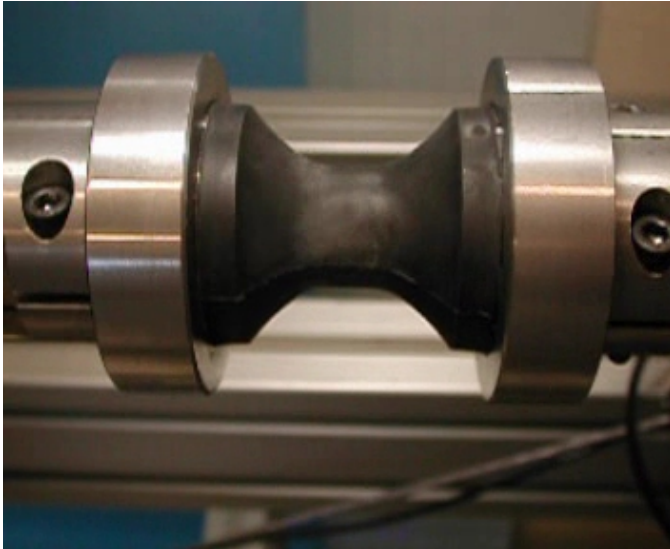
# Torsion d'un élastomère



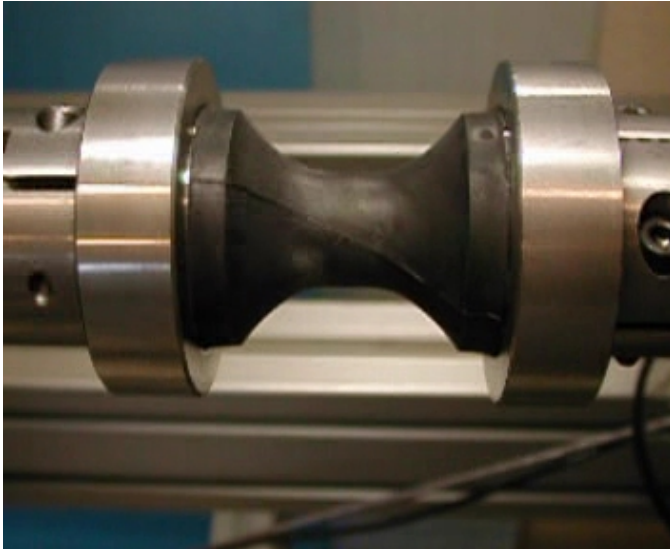
# Torsion d'un élastomère



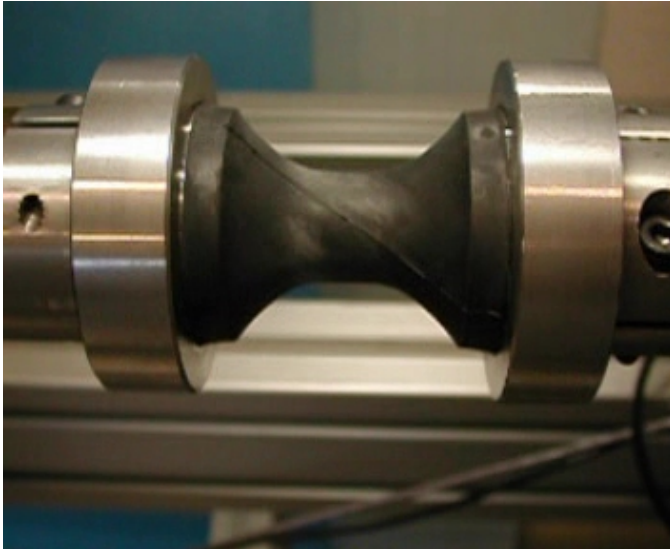
# Traction-torsion d'un élastomère



# Traction-torsion d'un élastomère

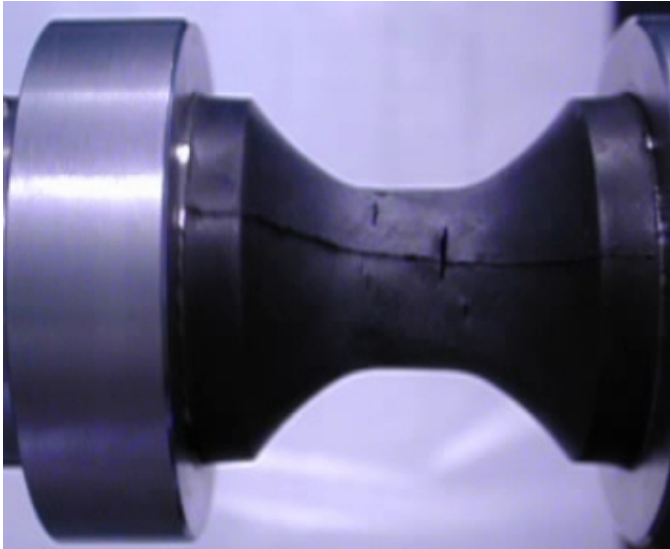


# Traction-torsion d'un élastomère

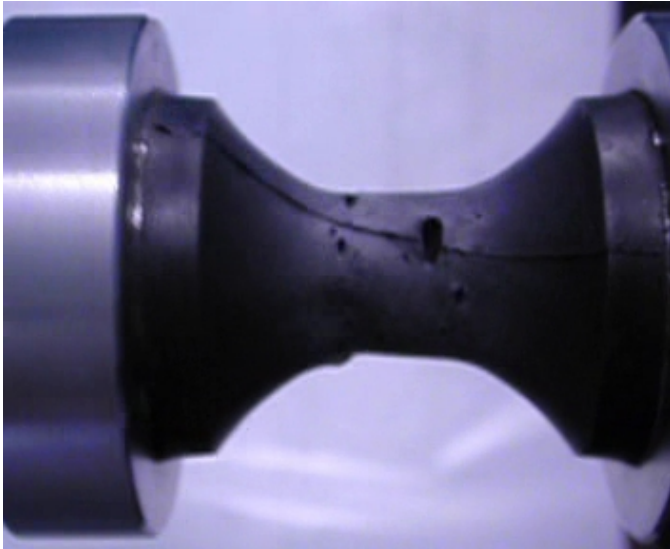




# Fissuration par fatigue d'un élastomère



# Fissuration par fatigue d'un élastomère



# Fissuration par fatigue d'un élastomère



# Fissuration par fatigue d'un élastomère





Chapman, S. and Cowling, T. (1970).  
*The mathematical theory of non-uniform gases.*  
Cambridge University Press.



Doyle, T. and Ericksen, J. (1956).  
Nonlinear elasticity.  
*Advances in Applied Mechanics*, 4:53 – 115.



Marsden, J. E. and Hughes, T. J. R. (1994).  
*Mathematical Foundations of Elasticity.*  
Dover Publications, Inc., New York.



Murdoch, A. (2012).  
*Physical Foundations of Continuum Mechanics.*  
Cambridge University Press.