

## Première partie

# Variations sur la torsion des barres en élasticité linéaire et isotrope

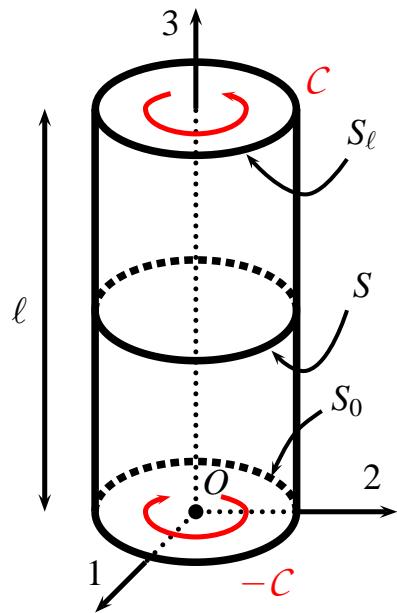


FIGURE 1: Torsion d'un barreau cylindrique de section quelconque : schéma de principe.

L'objectif de cette partie est d'apporter des compléments à l'analyse de la torsion de barres cylindriques de section quelconque, cf. Fig. 1, dans le cas de l'élasticité linéarisée et isotrope. Le moment de torsion  $C$  par rapport à l'axe du cylindre est appliqué aux extrémités de la barre. La section courante et son bord sont respectivement notés  $S$  et  $\Gamma$ . On suppose que  $S$  est simplement connexe, sauf pour la question 2.5. On étudie successivement les cas particuliers des sections de formes elliptique et triangulaire et on évalue leur résistance à la rupture et à la plasticité. Ces deux formes particulières sont choisies car il se trouve que les potentiels dont découle la solution ont une forme polynomiale simple de faible degré. Le cas de la section rectangulaire, par exemple, est plus complexe et donne lieu à l'utilisation de séries de Fourier pour expliciter les potentiels, ce qui n'est pas entrepris ici.

Le problème est traité dans le contexte isotherme (température uniforme et constante). Dans toute cette partie, le comportement du matériau est considéré comme élastique linéaire et isotrope, du moins jusqu'à une limite d'élasticité précisée dans certaines questions du problème.

## 1. Préliminaire : fonction de gauchissement et fonction de contrainte

On rappelle que l'analyse pionnière de Saint-Venant a montré que le champ de déplacement prend la forme suivante, dans une base cartésienne orthonormée :

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha X_2 X_3 \\ u_2 = \alpha X_1 X_3 \\ u_3 = \alpha \varphi(X_1, X_2) \end{cases} \quad (1)$$

où le déplacement  $u_3$  correspond à un gauchissement de la surface  $X_3 = Cste$  après déformation. L'inconnue  $\varphi(X_1, X_2)$ , solution d'un problème de Neumann, s'appelle *fonction de gauchissement*. Le coefficient  $\alpha$  désigne la rotation linéaire constante imposée et s'interprète comme le rapport  $\delta\theta/\ell$ , de la rotation relative  $\delta\theta$  appliquée entre les extrémités supérieure et inférieure, sur la longueur  $\ell$  du cylindre. La fonction de gauchissement est harmonique :  $\Delta\varphi = 0$ , où  $\Delta$  désigne ici l'opérateur laplacien.

Rappeler, sans détailler les calculs, les expressions des tenseurs des déformations et des contraintes à l'aide de la fonction de gauchissement  $\varphi$ . Une notation raccourcie est proposée pour désigner les dérivées partielles d'une fonction :

$$\varphi_{,1} = \frac{\partial \varphi}{\partial X_1}, \quad \varphi_{,2} = \frac{\partial \varphi}{\partial X_2}$$

Cette notation sera utilisée dans la suite.

Rappeler de plus les conditions que doit vérifier la fonction de gauchissement sur le contour  $\Gamma$ .

On sait également que les contraintes engendrées par le champ des déplacements précédents dérivent d'un potentiel  $\Psi(X_1, X_2)$ , appelé *fonction de contrainte*, solution d'un problème de Dirichlet, sous la forme :

$$\sigma_{31} = \frac{\partial \Psi}{\partial X_2} = \Psi_{,2}, \quad \sigma_{32} = -\frac{\partial \Psi}{\partial X_1} = -\Psi_{,1} \quad (2)$$

La fonction de contrainte vérifie l'équation aux dérivées partielles :  $\Delta\Psi = -2\mu\alpha$ , avec des conditions aux limites appropriées sur  $\Gamma$  vues en exercice.

La connaissance des fonctions  $\varphi$  ou  $\Psi$  permet de caractériser complètement la solution du problème de torsion.

Donner l'expression du cisaillement, c'est-à-dire la norme de la contrainte tangentielle, notée  $\tau$ , agissant en chaque point de la section de normale  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$ , du cylindre considéré, en fonction des composantes du tenseur des contraintes.

On dit qu'une fonction  $f(X_1, X_2)$  de classe  $C^2$  est *sous-harmonique* si son laplacien est toujours positif :  $\Delta f \geq 0$ . On démontre que toute fonction sous-harmonique sur une région du plan atteint sa (ses) valeur(s) maximale(s) sur le bord de cette région. En déduire que le cisaillement est maximal sur des points du contour  $\Gamma$  (on pourra s'aider de la fonction  $\tau^2$ ).

## 2. Torsion d'une barre de section elliptique

La section de la barre, représentée sur la figure 2, est une ellipse dont le contour  $\Gamma$  a pour équation :

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

où  $2a$  et  $2b$  désignent respectivement le grand axe et le petit axe de l'ellipse. Les axes du repère coïncident avec les axes de symétrie de l'ellipse et l'origine est prise au centre.

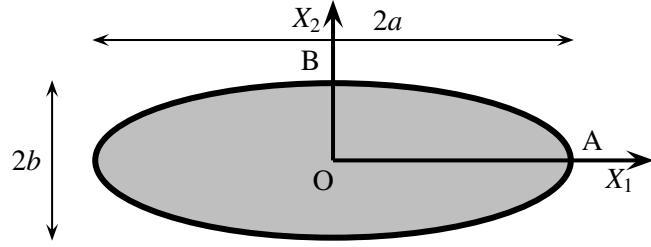


FIGURE 2: Géométrie de la section elliptique d'une barre : repère, grand et petit axes.

## 2.1. Détermination de la fonction de gauchissement

Montrer qu'une fonction polynomiale de degré 2 permet de remplir toutes les conditions du problème pour une section elliptique de barre en torsion :

$$\varphi(X_1, X_2) = AX_1^2 + 2BX_1X_2 + CX_2^2 \quad (4)$$

On déterminera les valeurs des coefficients qui permettent de satisfaire toutes les conditions requises pour  $\varphi$ .

Montrer finalement que la fonction de gauchissement se met sous la forme

$$\varphi(X_1, X_2) = -kX_1X_2 \quad (5)$$

et on exprimera  $k$  en fonction de  $a$  et  $b$ , exclusivement.

## 2.2. Etude de la section déformée

Donner les conditions à satisfaire pour respecter le contexte infinitésimal.

Indiquer à quel(s) endroit(s) de la section  $S$  le gauchissement est maximal et donner la(les) valeur(s) correspondante(s) en fonction de  $a, b, \alpha$ .

## 2.3. Rigidité de torsion

Exprimer le couple  $\mathcal{C}$  en fonction de l'angle linéique imposé  $\alpha$ .

Pour cela, on pourra établir le résultat ou bien utiliser des résultats connus sur la torsion. Par ailleurs, on admettra (ou on démontrera, bonus !) que les moments quadratiques concernés valent :

$$\int_S X_1^2 dX_1 dX_2 = \pi \frac{a^3 b}{4}, \quad \int_S X_2^2 dX_1 dX_2 = \pi \frac{a b^3}{4} \quad (6)$$

Vérifier qu'on retrouve le cas bien connu de la barre à section circulaire comme cas particulier de la formule établie.

Quelle est la valeur du rapport  $b/a$  permettant d'optimiser la rigidité de la barre sous la contrainte d'une surface de la section fixée ? Correspond-elle à un maximum ou à un minimum de la rigidité ?

Commenter la rigidité de torsion d'une barre à section elliptique lorsque le rapport  $b/a$  est petit.

## 2.4. Limite d'élasticité et analyse limite

Donner les contraintes principales, c'est-à-dire les valeurs propres du tenseur des contraintes, en chaque point de chaque section en fonction de  $\mu, \alpha, k, X_1, X_2$ , puis en remplaçant  $k$  par son expression en fonction de  $a$  et  $b$ .

On suppose que le matériau considéré est isotrope et a pour limite d'élasticité en traction simple la contrainte  $\sigma_0$  déterminée expérimentalement. Au-delà de cette valeur, un matériau fragile rompt tandis qu'un matériau ductile entre dans le régime élasto-plastique et se déforme donc de manière irréversible.

Proposer un critère de rupture fragile et un critère de plasticité.

Appliquer ces critères au cas de la torsion de la barre de section elliptique. Indiquer à quel(s) endroit(s) de la section elliptique la limite d'élasticité est atteinte en premier.

Donner la valeur critique de l'angle linéique appliqué  $\alpha = \alpha_0$  pour laquelle cette limite d'élasticité est atteinte. Exprimer  $\alpha_0$  en fonction de  $\sigma_0, \mu, a$  et  $b$ , pour les deux critères.

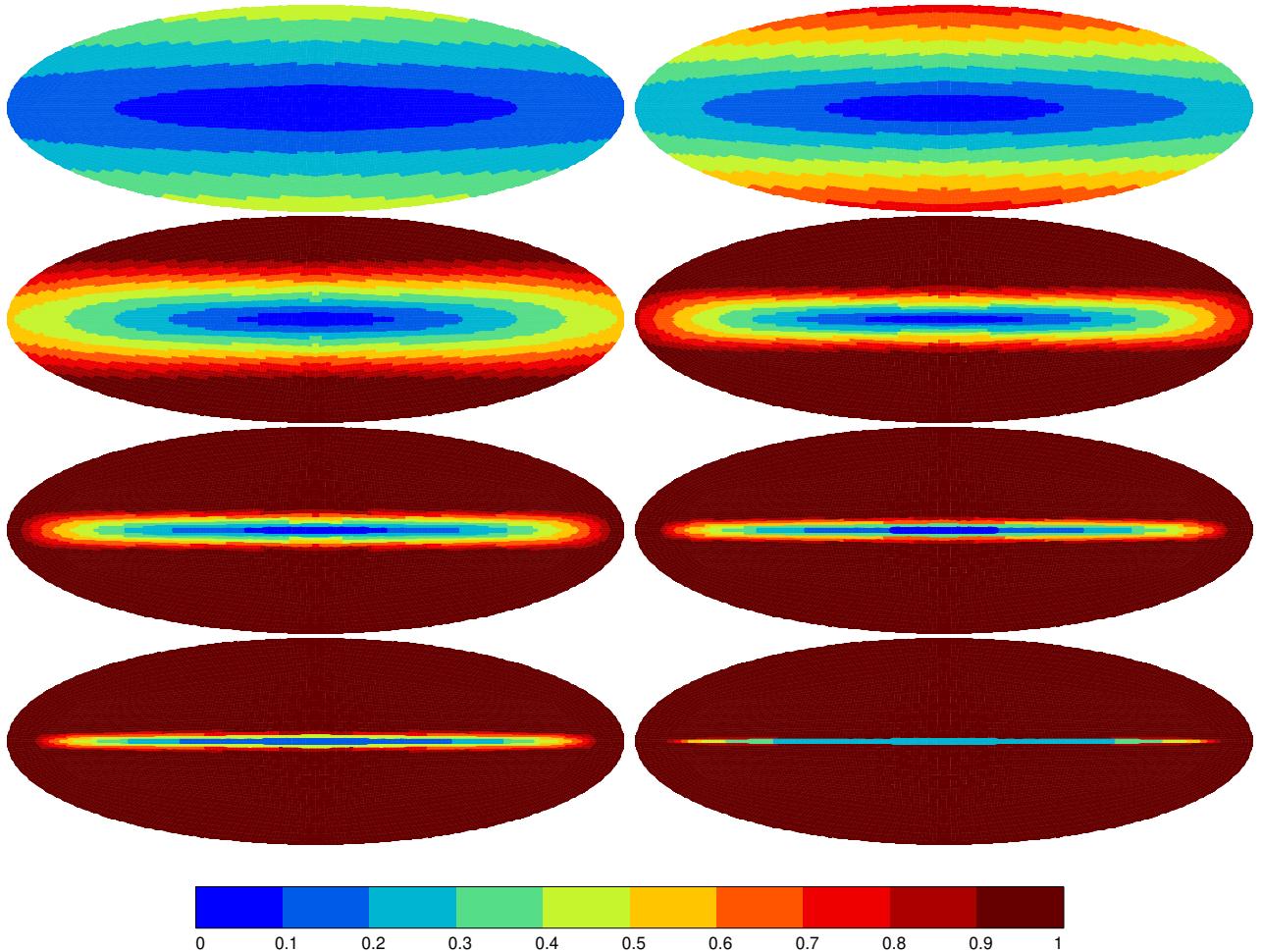


FIGURE 3: Champ de la contrainte équivalente de von Mises divisée par la limite d'élasticité  $\sigma_0$  pour huit valeurs différentes de l'angle linéique de torsion imposée,  $\alpha$ . Cet angle linéique est croissant de la gauche vers la droite et de haut en bas.

La figure 3 présente la progression de la zone plastique si l'on continue à charger la barre au-delà de la limite d'élasticité déterminée précédemment dans le cas d'un critère de von Mises. La zone plastique est caractérisée par une valeur de la contrainte équivalente de von Mises

égale à  $\sigma_0$  tandis qu'elle est plus faible dans le noyau élastique. La variable représentée est la contrainte équivalente de von Mises normalisée par  $\sigma_0$ . Ces résultats ont été obtenus grâce à un calcul par éléments finis dans le contexte non linéaire de l'élasto-plasticité. La courbe du moment de torsion en fonction de l'angle linéique est représentée sur la figure 4.

Commenter cette figure et conclure sur la résistance de la barre en torsion.

Quelle propriété du matériau considéré peut-on mesurer sur la partie linéaire du début de la courbe ? Donner cette valeur et deviner quel matériau a pu être considéré pour ce calcul.

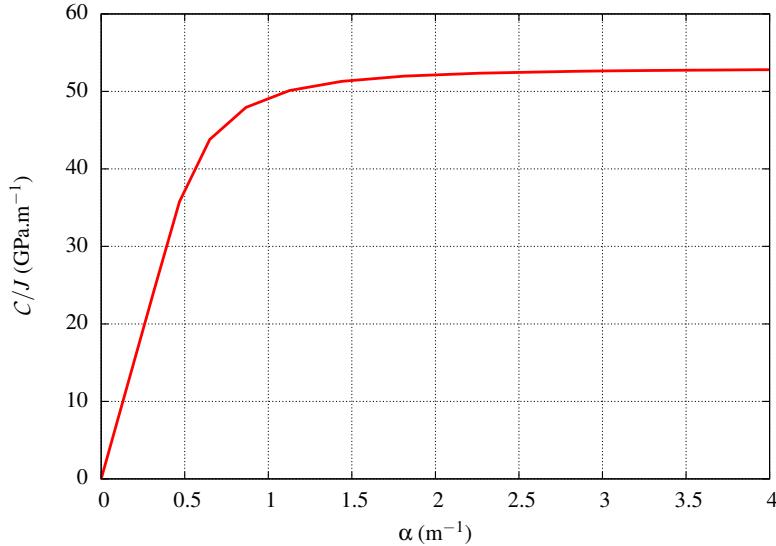


FIGURE 4: Moment normalisé par le moment quadratique de torsion  $J$  en fonction de l'angle linéique appliqué pour une barre à section elliptique constituée d'un certain matériau dont le comportement est élasto-plastique.

## 2.5. Extension de la solution pour un tube de section elliptique creuse

Prouver que la solution établie précédemment pour une barre de section elliptique est également valide dans les parois d'un tube dont la section est bornée par deux ellipses semblables et concentriques comme sur la figure 5. Le contour extérieur est toujours donné par l'équation (3) tandis que le contour intérieur a pour équation :

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = \eta^2 \quad (7)$$

où  $\eta$  est un nombre réel  $0 < \eta < 1$ .

Donner alors l'expression de la rigidité de torsion du tube en fonction en particulier du paramètre  $\eta$ .

## 3. Torsion d'une barre de section triangulaire

On considère la torsion d'une barre dont la section est triangulaire équilatérale, de hauteur  $3a$ , comme sur la figure 6.

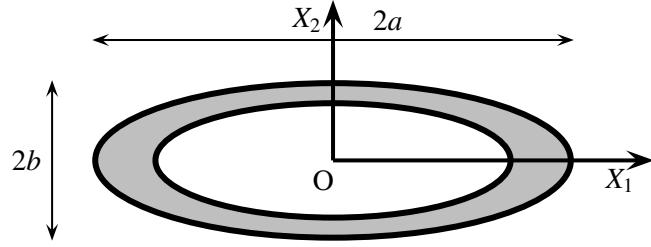


FIGURE 5: Tube de section elliptique creuse.

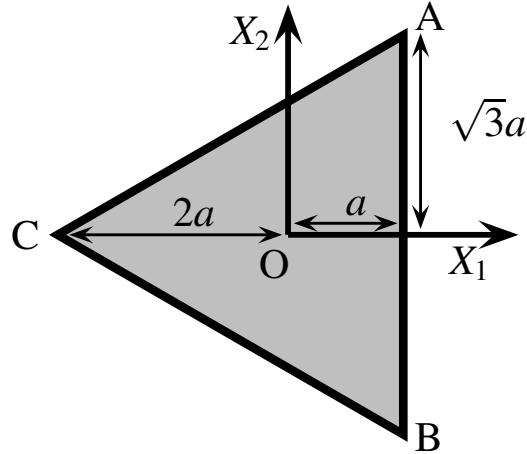


FIGURE 6: Géométrie de la section triangulaire équilatérale d'une barre : hauteur de longueur  $3a$  et côté de longueur  $2a\sqrt{3}$ .

### 3.1. Détermination de la fonction de gauchissement

La fonction polynomiale de degré deux utilisée pour la barre de section elliptique ne suffit pas pour le cas triangulaire.

Montrer qu'une fonction de gauchissement polynomiale de degré 3 de la forme

$$\varphi(X_1, X_2) = AX_1^3 + BX_1^2X_2 + CX_1X_2^2 + DX_2^3 \quad (8)$$

permet de répondre à la question.

### 3.2. Etude de la section déformée

Indiquer à quel(s) endroit(s) de la section le déplacement hors plan  $u_3$  est maximum. Donner l'amplitude maximale du gauchissement correspondant.

### 3.3. Rigidité de torsion

Poser le calcul de la rigidité de torsion de la barre de section triangulaire équilatérale. Effectuer les premières étapes mais on ne demande pas d'achever ce long calcul. On admettra que la relation entre le couple de torsion et l'angle linéique de torsion est

$$\mathcal{C} = \frac{9\sqrt{3}}{5}a^4\mu\alpha \quad (9)$$

### 3.4. Limite d'élasticité et analyse limite

Exprimer les contraintes dans la section triangulaire.

Dans le cas d'un matériau fragile, puis d'un matériau ductile, indiquer à quel(s) endroit(s) de la section la limite d'élasticité est atteinte et pour quelle valeur critique de l'angle linéique  $\alpha_0$ .

Au-delà de la limite d'élasticité, le calcul peut être mené par la méthode des éléments finis. Pour un critère de von Mises et en l'absence d'écrouissage, la progression de la zone plastique au sein de la section est présentée sur les figures 7 et 8 sous la forme des champs de la contrainte équivalente de von Mises d'une part et de la norme du tenseur des déformations plastiques d'autre part.

Commenter ces figures.

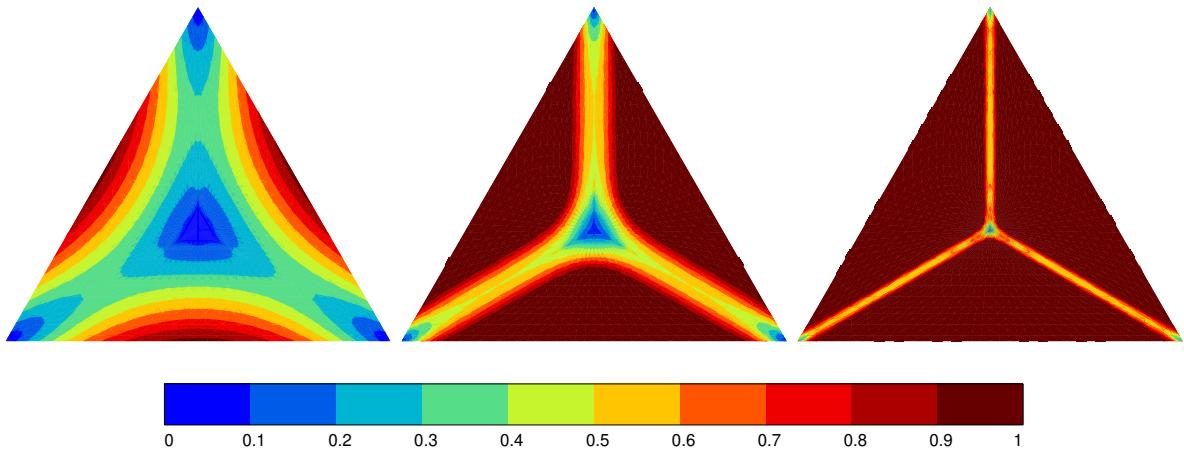


FIGURE 7: Champ de contrainte équivalente de von Mises normalisé par la limite d'élasticité  $\sigma_0$  pour la torsion d'une barre de section triangulaire. Les différents instantanés correspondent à des étapes du chargement croissant en angle linéique  $\alpha$ .

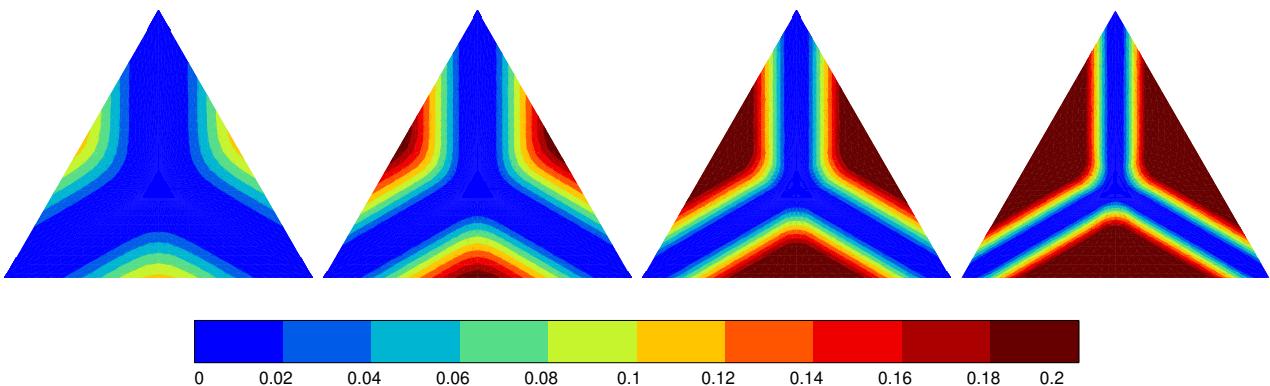


FIGURE 8: Champ de la norme du tenseur des déformations plastiques (en %) pour la torsion d'une barre de section triangulaire. Les différents instantanés correspondent à des étapes du chargement croissant en angle linéique  $\alpha$ .

### 3.5. Rigidité optimale

Pour une valeur donnée de la surface de la section de la barre, indiquer quelle section, elliptique, circulaire ou triangulaire, conduit à la plus grande rigidité de torsion.

Indiquer également pour quelle forme de section, le cisaillement maximal est le plus faible.

# Deuxième partie

# Variations autour du seau de Newton

*If a vessel, hung by a long cord, is so often turned about that the cord is strongly twisted, then filled with water, and held at rest together with the water; after, by the sudden action of another force, it is whirled about in the contrary way, and while the cord is untwisting itself, the vessel continues for some time this motion; the surface of the water will at first be plain, as before the vessel began to move; but the vessel by gradually communicating its motion to the water, will make it begin sensibly to revolve, and recede by little and little, and ascend to the sides of the vessel, forming itself into a concave figure. (d'après Wikipedia)*

Isaac Newton, *Principia*, 1687.

Inspirés par le célèbre seau de Newton (*Newton's bucket*), nous nous intéressons aux mouvements d'un fluide dans des réservoirs en rotation. On étudie d'abord le cas où le récipient a déjà communiqué son mouvement au fluide. On s'interroge ensuite, dans le cas d'un fluide visqueux, sur la façon dont le récipient transmet son mouvement au fluide initialement au repos. Dans tous les cas, on se restreint au mouvement stationnaire d'un fluide incompressible.

L'expérience du seau de Newton est un moyen de détecter le caractère galiléen ou non du référentiel d'observation, un peu comme le pendule de Foucault. Elle a alimenté les réflexions autour du concept de relativité de Newton à Mach.

## 4. Etude de la surface d'un fluide en rotation dans une réservoir cylindrique

Un fluide parfait incompressible est contenu dans un récipient cylindrique (section circulaire) animé d'un mouvement de rotation autour de son axe à la vitesse angulaire constante  $\Omega$ , comme sur la figure 9. Il est également soumis à la gravité  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ .

On observe l'expérience depuis un référentiel supposé galiléen dans un repère fixe, en coordonnées cylindriques autour de l'axe  $z$ .

### 4.1. Champ eulérien des vitesses et champ de pression

Exprimer le champ de vitesses du fluide correspondant à une rotation rigide autour de l'axe  $z$  à la vitesse angulaire constante  $\Omega$ .

Exprimer le champ de pression au sein du fluide, à une constante près.

### 4.2. Forme de la surface libre du fluide en rotation

En notant  $R$  le rayon du cylindre,  $H$  la hauteur de fluide dans le récipient au repos et  $p_0$  la pression atmosphérique s'appliquant à la surface du fluide, déterminer complètement le champ de pression exprimé précédemment.

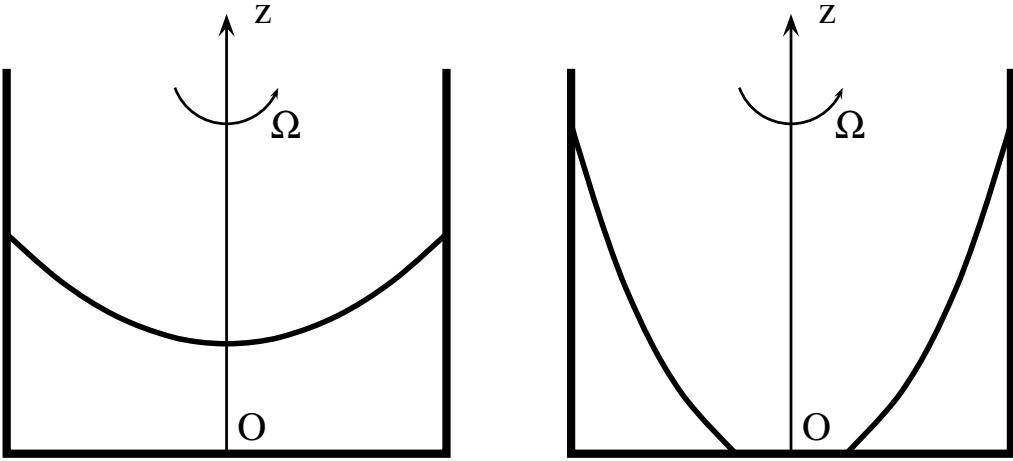


FIGURE 9: Réservoir cylindrique en rotation autour de son axe  $z$  contenant un liquide : surface libre du fluide pour une vitesse de rotation  $\Omega$  plutôt lente à gauche et plus rapide à droite.

Quelle est la forme de la surface libre du fluide en rotation uniforme ?

Indiquer la valeur critique du nombre de Froude<sup>1</sup> défini par

$$\mathcal{F}r = \frac{R^2\Omega^2}{gH} \quad (10)$$

pour laquelle le creux du fluide touche le fond. Pour des valeurs supérieures, on se trouve dans la situation de la figure 9 à droite. On donnera l'équation de la surface libre dans ce cas également.

Faire l'application numérique dans le cas où  $R = H = 0.5$  m et  $\Omega = 20$  tours par minutes. Calculer le nombre de Froude et la différence de niveau de fluide entre le point haut et le point bas de la surface libre.

#### 4.3. Cas d'un fluide visqueux newtonien incompressible

Résoudre le même problème dans le cas où le fluide est un fluide newtonien incompressible de viscosité  $\mu = 2$  Pa.s.

### 5. Fluide en rotation dans un réservoir ellipsoïdal

Un récipient de forme ellipsoïdale contenant un fluide parfait incompressible est animé d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire constante  $\Omega$  autour de l'un de ses axes principaux. On adopte un système de coordonnées cartésiennes dont les axes coïncident avec les axes principaux de l'ellipsoïde à un instant donné. L'axe de rotation est alors  $x_3$  et l'équation de l'ellipsoïde formant le bord du récipient (dont l'épaisseur est négligée) est dans ce repère à l'instant donné :

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1 \quad (11)$$

---

1. Le nombre de Froude compare le carré des vitesses, ici  $R^2\Omega^2$  à la gravitation,  $gH$ .

### 5.1. Recherche d'un champ de vitesse dérivant d'un potentiel

On recherche une solution stationnaire du problème en vitesses dérivant d'un potentiel  $\varphi(x_1, x_2, x_3)$  :

$$\underline{v} = \text{grad } \varphi = \varphi_{,1}\underline{e}_1 + \varphi_{,2}\underline{e}_2 + \varphi_{,3}\underline{e}_3$$

Montrer que la fonction (5) trouvé dans l'exercice sur la torsion fournit un potentiel satisfaisant les conditions requises par le mouvement stationnaire du fluide dans le récipient ellipsoïdal considéré. On déterminera la valeur de la constante  $k$  en fonction de  $\Omega$  et des caractéristiques de l'ellipsoïde.

Exprimer complètement le champ des vitesses obtenu ainsi que son gradient,  $\underline{L}$ .

Décrire les lignes de courant et trajectoires correspondantes.

Commenter le cas particulier  $a = b$ .

### 5.2. Mouvement relatif du fluide par rapport au récipient

Le mouvement relatif du fluide par rapport au récipient ellipsoïdal est obtenu en soustrayant au champ de vitesse absolu trouvé précédemment le champ des vitesses du récipient que l'on sait en rotation autour de l'axe  $x_3$  à vitesse angulaire  $\Omega$  constante.

Donner l'expression de ce champ des vitesses relatives et décrire la forme des lignes de courants correspondantes.

### 5.3. Calcul du champ de pression et forme de la surface libre

A partir du champ des vitesses obtenu au paragraphe 5.1, calculer la forme du champ de pression dans le fluide et indiquer la forme de la surface libre.

## 6. Prise en compte de l'accélération de Coriolis : couche d'Ekman

Pour comprendre comment le mouvement du réservoir en rotation se transmet au fluide initialement au repos, il faut faire appel au comportement visqueux du fluide et aux conditions d'adhérence aux parois. Nous n'allons pas résoudre ce problème transitoire quelque peu délicat mais nous intéresser à une situation intermédiaire stationnaire où le fluide a un mouvement différent près de la paroi et loin de cette paroi.

On rappelle les équations de Navier–Stokes pour un fluide incompressible sous la forme

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = -\text{grad} \frac{p}{\rho} + \underline{g} + \nu \Delta \underline{v} \quad (12)$$

où  $\nu = \mu/\rho$  est appelée viscosité cinématique.

On se place dans un référentiel tournant à la vitesse constante  $\Omega$  autour de  $\underline{e}_3$  en gardant la même origine. Le changement de référentiel s'écrit :

$$\underline{x}' = \underline{Q}^T \cdot \underline{x}, \quad \underline{v}' = -\underline{\Omega} \cdot \underline{x}' + \underline{Q}^T \cdot \underline{v} \quad (13)$$

où  $\underline{v}'$  désigne la vitesse par rapport au référentiel tournant et  $\underline{Q}(t)$  est la rotation autour de  $\underline{e}_3$  d'angle  $\Omega t$ .

Situation physique	$R$ (m)	$H$ (m)	$\Omega$ ( $s^{-1}$ )	$Fr$	$\mathcal{E}k$ eau air	$\delta$ (m) eau air
Seau de Newton	0.5	0.5				
Canal	100	10				
Météorologie	100	1000				

TABLE 1: Nombres de Froude et d’Ekman pour trois situations physiques très différentes.

### 6.1. Caractérisation des effets centrifuges et de Coriolis

Exprimer les équations de Navier–Stokes dans le référentiel tournant en fonction de  $\Omega$  et de  $\underline{v}'$ . Reconnaître les contributions des forces volumiques centrifuges et de Coriolis.

On néglige le terme convectif dans l’équation précédente (faible nombre de Reynolds) et on se place dans le cas stationnaire. Le nombre de Froude (10) précédemment introduit compare les effets de la force centrifuge avec ceux de la gravitation. On s’intéresse maintenant au nombre d’Ekman qui compare les effets de Coriolis aux effets de viscosité :

$$\mathcal{E}k := \frac{\nu}{2\Omega L^2} \quad (14)$$

où  $L$  est une longueur caractéristique du problème.

Nous allons juger de l’importance relative des contributions de Froude et d’Ekman dans trois situations très différentes :

- Le cas du seau de Newton avec les données  $H$ ,  $R$  et  $\Omega$  précédemment étudiées ;
- Le cas d’un canal rempli d’eau de largeur  $R$  et de profondeur  $H$ . Le fluide est soumis à la rotation terrestre ;
- Le cas de la couche atmosphérique en contact avec la surface de la Terre animée d’une rotation  $\Omega$  autour de son axe. Il s’agit d’une application à la météorologie.

On prendra  $L = H$  pour l’évaluation du nombre d’Ekman. Compléter les colonnes vides du tableau 1 (à l’exception de la dernière colonne), lorsque le fluide est l’eau ou l’air à température ambiante. Dans le cas de l’air on prendra une viscosité cinématique  $\nu_{air} = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Commenter.

### 6.2. Champ de pression dans la couche d’Ekman

On étudie comment le fluide en contact avec le fond du seau de Newton entraîne les couches supérieures dans son mouvement. La zone de transition entre le mouvement du fluide près de la paroi et le mouvement loin de la paroi s’appelle couche d’Ekman. Nous allons caractériser son épaisseur et la forme des champs de pression et de vitesses dans cette couche. Nous sommes toutefois amenés à grandement simplifier le problème.

Dans cette question et la suivante, on adopte un système de coordonnées cartésiennes orthonormées dans le référentiel tournant à la vitesse  $\Omega$ . Par souci de concision, la notation prime pour les variables dans ce référentiel est omise.

On considère une situation idéalisée où le fond d’un réservoir ou d’un canal, situé à la cote  $x_3 = 0$ , est en contact avec le fluide à vitesse  $\underline{v}$  nulle tandis qu’un écoulement  $\underline{v} = V \underline{e}_1$  est observé sur une couche épaisse du fluide située à une certaine distance du fond et appelée couche supérieure. L’extension du fluide dans les directions 1 et 2 est considérée comme infinie (bords très éloignés). La couche d’Ekman désigne la zone de transition du mouvement du fluide entre le fluide immobilisé par le fond et le mouvement de la couche supérieure.

On suppose que les effets centrifugés et convectifs sont négligeables et on s'intéresse aux seuls effets de Coriolis et de viscosité, ce qui conduit aux équations de Navier–Stokes réduites suivantes :

$$\operatorname{grad} \frac{p}{\rho} = \underline{\mathbf{g}} - 2\Omega \cdot \underline{\mathbf{v}} + \nu \Delta \underline{\mathbf{v}} \quad (15)$$

dans le référentiel tournant considéré. Le taux de rotation  $\Omega$  uniforme et constant s'effectue autour de l'axe  $\underline{e}_3$ .

Calculer le champ de pression qui règne dans la couche supérieure.

Justifier que le champ de vitesse  $\underline{\mathbf{v}}$  recherché est une fonction de  $x_3$  uniquement.

En déduire que le champ de pression trouvé dans la partie supérieure est également valable dans la couche d'Ekman.

### 6.3. Champ des vitesses dans la couche d'Ekman

Ecrire alors les équations différentielles portant sur  $v_1(x_3)$  et  $v_2(x_3)$ .

Montrer que  $v_1$  est solution de l'équation différentielle suivante

$$\frac{d^4}{dt^4}(V - v_1) = -\frac{4}{\delta^4}(V - v_1) \quad (16)$$

On donnera l'expression de la longueur  $\delta$  en fonction de  $\nu$  et  $\Omega$ .

Remplir la dernière colonne du tableau 1 et commenter.

Résoudre cette équation différentielle en utilisant les racines quatrièmes (complexes) de  $-4/\delta^4$ .

Justifier que l'épaisseur de la couche d'Ekman est de l'ordre de  $\delta$ .

\* \* \*