Chapitre 1

Produit de convolution et espaces L^p

1.1 Rappels sur les espaces $L^p(\mathbb{R})$

Dans cette section, nous rappelons, sans les démontrer, les principaux résultats à connaître sur les espaces $L^p(\mathbb{R})$.

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$. On note $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ l'espace

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, |f|^p \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}\}.$$

et on note $\|\cdot\|_{L^p}$ l'application définie pour tout $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ par

$$||f||_{L^p} := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

De même, on note $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$ bornées presque partout :

$$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \exists C > 0, |f(x)| \leq C \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}\}.$$

L'inégalité de Hölder énoncée ci-dessous est un outil d'étude fondamental des espaces $\mathcal{L}^p$.

Théorème 1.1.1 (Inégalité de Hölder). *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'exposant conjugué q de p par*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

En particulier, l'exposant conjugué de $p = 1$ est $q = \infty$. Si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et si $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$ avec p et q conjugués, alors $fg \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)|\mathrm{d}x = \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

On peut vérifier que l'application $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \to \|f\|_{L_p}$ définit une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. En effet :

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda f\|_{L^p} = |\lambda|\|f\|_{L^p}$
- (Inégalité de Minkowski) Si $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, alors $\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$. L'inégalité de Minkowski est un résultat non trivial, qui se démontre en utilisant l'inégalité de Hölder.
- On notera cependant que $\|f-g\|_{L^p} = 0$ dès lors que f et g sont égales presque partout. On peut donc trouver f et g dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ telles que $f \neq g$ mais $\|f-g\|_{L^p} = 0$: $\|\cdot\|_{L^p}$ ne définit qu'une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on définit une relation d'équivalence sur l'espace $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ en considérant que deux fonctions f et g sont équivalentes si leur différence $f - g$ est nulle presque partout. Plus formellement, soit

$$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f \text{ mesurable et nulle presque partout } \}$$

l'ensemble des fonctions mesurables nulles presque partout sur $\mathbb{R}$. V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, +\infty]$. On note alors $L^p(\mathbb{R})$ l'espace quotient de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ par V :

$$L^p(\mathbb{R}) := \mathcal{L}^p(\mathbb{R})/V$$

Par construction, $\|\cdot\|_{L_p}$ est une norme sur l'espace $L^p(\mathbb{R})$.

Définition 1.1.1 (Convergence en norme L^p)**.** Une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en norme L^p vers une fonction f si

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L_p} := \lim_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} = 0.$$

En particulier, une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en norme L^∞ vers une fonction f si

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Les espaces L^p jouent un rôle central en analyse. L'importance des espaces L^p en calcul intégral s'explique en grande partie par le théorème de Fischer-Riesz qui suit :

Théorème 1.1.2 (Fischer-Riesz)**.** *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mathbb{R})$ est un espace de Banach (ou de manière équivalente un espace vectoriel normé complet).*

On rappelle qu'un espace vectoriel normé E est dit complet si toute suite de Cauchy de E possède une limite dans E. L'intérêt de la notion de complétude dans les espaces L^p est qu'elle permet, en pratique, d'étudier la convergence en norme $\|\cdot\|_p$ d'une suite de fonctions sans avoir nécessairement besoin de travailler explicitement avec sa limite. Outre cet aspect fondamental des espaces L^p, ces derniers possèdent de "bonnes" propriétés topologiques :

Théorème 1.1.3. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'ensemble $C_c^0(\mathbb{R})$ (resp. $C_c^\infty(\mathbb{R})$) des fonctions continues (resp. de classe C^∞) à support compact sur $\mathbb{R}$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.*

Convergence simple et convergence dans $\mathbf{L}^p$

En règle générale, la convergence simple d'une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une fonction f n'entraîne pas la convergence en norme L^p, comme le montre l'exemple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \geq 0$ par $f_n : x \to \mathbb{1}_{[n,n+1]}(x)$. Néanmoins, s'il existe une fonction g intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - f_n(x)|^p \leq g(x),$$

d'après le théorème de convergence dominée, $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{L^p} = 0$.

De la même manière, la convergence d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^p(\mathbb{R})$ n'implique pas nécessairement la convergence simple de cette suite de fonction. Pour s'en convaincre, on peut considérer, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $p \in \{0, ..., n-1\}$, la fonction $f_{n,p}$ définie pour tout $x \in [0, 1]$ par

$$f_{n,p}(x) = \mathbb{1}_{[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}]}(x).$$

Considérons alors la suite $(g_n)_{n\geq 0}$ définie de la manière suivante :

$$(g_0 := f_{1,0}, g_1 := f_{2,0}, g_2 := f_{2,1}, g_3 := f_{3,0}, g_4 := f_{3,1}, ...)$$

On peut facilement montrer que $(g_n)_{n\geq 0}$ ne possède pas de limite simple mais converge vers la fonction nulle dans $L^p([0, 1])$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Le résultat qui suit constitue néanmoins une réciproque partielle au théorème de convergence dominée :

Théorème 1.1.4. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. On suppose qu'il existe une fonction $f \in L^p(\mathbb{R})$ tel que $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$. Alors, il existe une suite extraite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction $h \in L^p(\mathbb{R})$ de sorte que :*

1. *$f_{n_k}(x) \to f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ lorsque $k \to +\infty$;*
2. *$|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.*

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 1.1.1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f et en norme L^p vers une fonction g. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$f(x) = g(x).$$

1.2 Produit de convolution

Notons $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$, c'est à dire l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrables sur tout compact $C \subset \mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est en particulier inclus dans $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$. De la même manière, désignons par $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ le quotient de $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ par l'ensemble des fonctions nulles presque partout.

Définition 1.2.1. Soient $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. f et g sont dites convolables si l'application $y \in \mathbb{R} \to f(x-y)g(y)$ est intégrable pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. On appelle alors produit de convolution de f par g et on note $f * g$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f * g(x) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \text{ si } y \to f(x-y)g(y) \text{ est intégrable,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Le produit de convolution peut s'interpréter comme une généralisation de l'idée de moyenne glissante (voir exercice 1.3.1). Il constitue un outil central du traitement du signal et de la théorie des équations aux dérivées partielles. Dans ce chapitre, nous nous focalisons sur les fondements mathématiques du produit de convolution.

En présence du produit de convolution de deux fonctions, on cherchera systématiquement à vérifier si ce dernier est bien défini. La définition 1.2.1 est en effet très générale et ne garantit pas a priori que deux fonctions f et g localement intégrables soient convolables. Néanmoins, les fonctions de $L^p(\mathbb{R})$ possèdent généralement de bonnes propriétés vis à vis du produit de convolution, énoncées dans les théorèmes qui suivent.

Espaces $L^p(\mathbb{R})$ et produit de convolution

Théorème 1.2.1 (Convolution $L^1 * L^p$). *Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \times L^p(\mathbb{R})$, avec $p \in [1, +\infty]$. Alors, f et g sont convolables, $f * g \in L^p(\mathbb{R})$, et*

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}.$$

Démonstration.

1. Supposons que $p = \infty$. Alors, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(x-y)g(y)| < |f(x-y)|\|g\|_{L^\infty}.$$

Comme de plus $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &:= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|\mathrm{d}y \\ &\leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^\infty} < +\infty \end{aligned}$$

On en conclut que $\|f * g(x)\|_{L^\infty} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f * g(x)| \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^\infty} < +\infty$.

2. Supposons que $p = 1$. On peut appliquer le théorème de Fubini-Tonelli à la fonction positive $(x, y) \to |f(x-y)g(y)|$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|\mathrm{d}x \\ &= \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1} < +\infty, \end{aligned}$$

en utilisant le changement de variable $x := x - y$ dans la dernière égalité. On en déduit que le produit de convolution $f * g$ est bien défini sur $\mathbb{R}$. Enfin, d'après le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \|f * g(x)\|_{L^1} &:= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|\mathrm{d}y \\ &\leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1} < +\infty. \end{aligned}$$

3. Supposons enfin $1 < p < \infty$. Notons q l'exposant conjugué de p. On rappelle que q est l'exposant conjugué de p si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $y \to |f(x-y)|^{\frac{1}{q}}$ et $y \to |f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|$ sont dans $L^q(\mathbb{R})$ et dans $L^p(\mathbb{R})$, respectivement. En effet, d'une part, $f \in L^1(\mathbb{R})$, et d'autre part,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|^p \mathrm{d}y \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}\|g\|^p_{L^p(\mathbb{R})} < +\infty,$$

en notant que le membre de gauche correspond au produit de convolution des fonctions $|f| \in L^1(\mathbb{R})$ et $|g|^p \in L^1(\mathbb{R})$ et en utilisant le résultat prouvé en 2. En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|\mathrm{d}y \\ &\leq \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|^p \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{q}} (|f| * |g|^p(x))^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

On en déduit, en utilisant le résultat démontré dans la deuxième partie de la démonstration sur le produit de convolution $L^1 * L^1$:

$$\|f * g\|^p_{L^p} \leq \|f\|^{\frac{p}{q}}_{L^1}\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p} = \|f\|^p_{L^1}\|g\|^p_{L^p}.$$

En effet, puisque p et q sont conjugués, on a $p = 1 + \dfrac{p}{q}$.

□

Une conséquence immédiate du théorème est que le produit de convolution de deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ est une fonction de $L^1(\mathbb{R})$. On en déduit le résultat suivant (admis) :

Proposition 1.2.1. *Le produit de convolution est commutatif et associatif sur $L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$.*

Théorème 1.2.2 (Convolution $L^p * L^q$)**.** *Soit $p \in [1, +\infty]$ et soit q l'exposant conjugué de p. Soit $f, g \in L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$. Alors, f et g sont convolables, et le produit de convolution $f * g$ est borné et continu sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. 1. D'après l'inégalité d'Hölder, on a

$$|f * g(x)| := \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \right| \leq \|f(x-\cdot)\|_{L^p}\|g\|_{L^q} = \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

On en conclut que le produit de convolution $f * g$ est bien défini et borné pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Pour prouver la continuité du produit de convolution, on a besoin du lemme qui suit :

   Lemme 1.2.1. *Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $p \in [1, +\infty]$. Alors,*

$$\lim_{\delta \to 0^+} \|f(\cdot - \delta) - f(\cdot)\|_{L^p} = 0.$$

   Démonstration. La démonstration du lemme s'appuie sur la densité de l'espace $C_c^0(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact dans $L^p(\mathbb{R})$.
   Soit $f \in C_c^0(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\delta \to |f(x-\delta) - f(x)|$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, comme f est à support compact, il existe $R > 0$ tel que f soit nulle en dehors de l'intervalle $[-R, R]$. Par conséquent, si $|\delta| < 1$,

$$|f(x-\delta) - f(x)| \leq 2\|f\|_{L^\infty} \mathbb{1}_{|x| \leq R+1} \in L^1(\mathbb{R}).$$

   D'après le théorème de continuité de Lebesgue, on a donc

$$\lim_{\delta \to 0^+} \|f(\cdot - \delta) - f(\cdot)\|_{L^p} = 0.$$

   Le lemme est donc démontré pour les fonctions de l'espace $C_c^0(\mathbb{R})$.

   Soit maintenant $f \in L^p(\mathbb{R})$. Fixons $\epsilon > 0$. Par densité, il existe une fonction $g \in C_c^0(\mathbb{R})$ tel que

$$\|f - g\|_{L^p} < \frac{\epsilon}{3}$$

   On en déduit

$$\begin{aligned} \|f(\cdot - \delta) - f(\cdot)\|_{L^p} &\leq \|f(\cdot - \delta) - g(\cdot - \delta)\|_{L^p} + \\ &\quad \|g(\cdot - \delta) - g(\cdot)\|_{L^p} + \\ &\quad \|f(\cdot) - g(\cdot)\|_{L^p} \\ &\leq \frac{2\epsilon}{3} + \|g(\cdot - \delta) - g(\cdot)\|_{L^p}. \end{aligned}$$

   Comme $g \in C_c^0(\mathbb{R})$, d'après ce qui précède, $\lim_{\delta \to 0^+} \|g(\cdot - \delta) - g(\cdot)\|_{L^p} = 0$. Pour $|\delta|$ suffisamment petit, on a donc

$$\|f(\cdot - \delta) - f(\cdot)\|_{L^p} < \epsilon,$$

   ce qui achève la démonstration du lemme. □

Pour conclure la preuve du théorème, montrons que $f*g$ est continue. Soit $h \in \mathbb{R}$. On vérifie, en utilisant l'inégalité d'Hölder,

$$\begin{aligned}(f*g)(x+h)-(f*g)(x) &= \int_{\mathbb{R}}[f(x+h-y)-f(x-y)]g(y)\mathrm{d}y \\ &\leq \|f(\cdot-\delta)-f(\cdot)\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.\end{aligned}$$

D'après le lemme 1.2.1, on vérifie donc bien que $\lim_{h\to 0}|(f*g)(x+h)-(f*g)(x)|=0$, ce qui prouve la continuité de $f*g$ en x.

□

La convolution $L^2 \times L^2$ constitue un cas particulier important du théorème.

1.3 Exercices

Exercice 1.3.1 (Fonction plateau)**.** Soit $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction de classe C^∞ et nulle en dehors de l'intervalle $[-1,1]$. On suppose de plus que

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Pour tout $n \geq 1$, on définit la fonction ρ_n par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \rho_n(x) := n\rho(nx).$$

1. Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Montrer que $\rho_n * f(x_0) \to f(x_0)$ en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que f est continue.
2. On pose $f := \mathbb{1}_{[-1,1]}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\rho_n * f$ est de classe C^∞, et vérifie $0 \leq \rho_n * f \leq 1$ et

$$\rho_n * f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}] \\ 0 \text{ si } x \notin [-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}] \end{cases}$$

Exercice 1.3.2 (Fonction de Heaviside et convolution)**.** Soit $H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ la fonction de Heaviside. Pour tout $n \geq 1$, on note $H^{n*} = H * \cdots * H$.
1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+, H^{n*}(t) = H(t)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

2. En déduire que pour toute pplication $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ continue, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \int_0^t \mathrm{d}\tau_n \int_0^{\tau_n} \mathrm{d}\tau_{n-1} \cdots \int_0^{\tau_1} g(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t g(\tau)\frac{(t-\tau)^n}{n!}\mathrm{d}\tau.$$

Chapitre 2

Transformation de Fourier

2.1 Transformation de Fourier dans $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$

Définition 2.1.1 (Transformée de Fourier)**.** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, comme $f \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction $x \to f(x)e^{-i\xi x}$ est intégrable. La quantité

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}\mathrm{d}x.$$

est donc bien définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. La fonction $\xi \in \mathbb{R} \to \hat{f}(\xi)$, que nous noterons indifféremment $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}f$ dans la suite, est appelée transformée de Fourier de f.

Dans la littérature, on utilise souvent la dénomination de variable spatiale, temporelle ou physique pour désigner la variable x et de variable fréquentielle ou de Fourier pour désigner la variable ξ. De la même manière, on emploie souvent les termes d'espace physique et d'espace de Fourier pour désigner les espaces d'appartenance respectifs des variables x et ξ. Néanmoins, d'un point de vue purement mathématique, il n'y a pas lieu d'établir de distinction entre l'espace physique et l'espace de Fourier. On peut ainsi tout à fait calculer la transformée de Fourier d'une fonction définie dans l'espace de Fourier.

Exemples

1. *Transformée de Fourier d'une fonction indicatrice* Pour tout $a > 0$, considérons la fonction $f_a = \mathbb{1}_{[-a,a]}$. On peut calculer la transformée de Fourier de f en revenant à la définition. Un calcul élémentaire donne alors :
$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)e^{-\xi x}\mathrm{d}x = 2\frac{\sin(a\xi)}{\xi}.$$

2. *Transformée de Fourier d'une fonction gaussienne* On peut montrer (voir ex. **??**) que la transformée de Fourier d'une fonction gaussienne est elle-même une fonction gaussienne. Plus précisément, on a, pour tout réel $a > 0$:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(x \to e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

La transformation de Fourier vérifie un certain nombre de propriétés de calcul, détaillées dans la proposition qui suit.

Proposition 2.1.1 (Propriétés de calculs de la transformation de Fourier)**.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.*

1. $\forall a \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(x \to f(x+a))(\xi) = e^{ia\xi} \hat{f}(\xi)$ *: une translation dans l'espace physique se traduit par un décalage de phase dans l'espace fréquentiel.*
2. *Réciproquement,* $\forall a \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(x \to e^{-iax} f(x))(\xi) = \hat{f}(\xi + a)$ *: un décalage de phase dans l'espace physique se traduit par une translation dans l'espace fréquentiel.*
3. $\forall \delta > 0, \mathcal{F}(x \to f(x/\delta))(\xi) = \delta \hat{f}(\delta \xi)$ *: dilater la fonction dans l'espace physique par un facteur $\delta > 0$ revient à dilater (et renormaliser) sa transformée de Fourier par le facteur $1/\delta$.*
4. *(Propriété de transfert) Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \hat{g}(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) g(x) \mathrm{d}x.$$

Démonstration.

1. Soit $a > 0$. Comme $x \to f(x+a)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier est bien définie sur $\mathbb{R}$. $\forall \xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x \to f(x+a))(\xi) &:= \int_{\mathbb{R}} f(x+a) e^{-i\xi x} \mathrm{d}x \\ &= e^{i\xi a} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} \mathrm{d}x = e^{ia\xi} \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

par le simple changement de variable affine $x := x + a$.

2. Soit $a > 0$. Comme $x \to e^{-i\xi a} f(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier est bien définie sur $\mathbb{R}$. $\forall \xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathcal{F}(x \to e^{-i\xi a} f(x))(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} e^{-i\xi a} \mathrm{d}x = \hat{f}(\xi + a)$$

par définition de la transformée de Fourier.

3. Soit $\delta > 0$. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on vérifie :

$$\mathcal{F}\left(x \to f\left(\frac{x}{\delta}\right)\right)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x}{\delta}\right) e^{-i\xi x} \mathrm{d}x = \delta \hat{f}(\delta\xi)$$

   en effectuant le changement de variable linéaire $x := \frac{x}{\delta}$.
4. La propriété de transfert découle directement du théorème de Fubini. Supposons ainsi que f et g soient deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$. Alors, pour tout couple $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $(x, \xi) \to f(x)g(\xi)e^{-ix\xi}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. D'après le théorème de Fubini, on vérifie donc d'une part en intégrant d'abord par rapport à x que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x)g(\xi)e^{-ix\xi} \mathrm{d}x \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

   et d'autre part en intégrant d'abord par rapport à ξ que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x)g(\xi)e^{-ix\xi} \mathrm{d}x \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

□

Notons $C_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues qui tendent vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$. Il est clair que $C_0(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

Proposition 2.1.2. *Muni de la norme L^∞ de la convergence uniforme, $C_0(\mathbb{R})$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans $C_0(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on vérifie,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, |f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leq \|f_{n+k} - f_n\|_{L^\infty}$$

$(f_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy. Il existe donc une suite $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers 0 et telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\forall k \in \mathbb{N}, |f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leq \epsilon_n.$$

On en déduit, comme $\mathbb{R}$ est complet, que la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ vers une limite que nous noterons $f(x)$. Comme la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue. Il reste à montrer que la fonction f tend bien vers 0 en $\pm\infty$. Pour ce faire, remarquons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq |f_n(x)| + \|f_n - f\|_{L^\infty}.$$

Soit alors $\epsilon > 0$ arbitraire. Il existe $N \geq 0$ tel que

$$\forall n \geq N, \|f_n - f\|_{L^\infty} \leq \epsilon.$$

Par ailleurs, $f_n(x) \to 0$ lorsque x tend vers $\pm\infty$. Il existe donc $R > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $|x| > R$, alors $|f_n(x)| < \epsilon$. On a donc montré que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que si $|x| > R$, alors $f(x) < 2\epsilon$. $f(x)$ tend donc bien vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$. □

Théorème 2.1.1. *La transformation de Fourier est une application linéaire, continue et de norme 1 de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$ muni de la norme L^∞.*

Démonstration.

1. (Linéarité) Il est évident au vu de sa définition que la transformation de Fourier est une application linéaire.
2. (Continuité) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $x \to f(x)e^{-i\xi x}$ est mesurable et intégrable sur $\mathbb{R}$. En effet, $\forall \xi \in \mathbb{R}, |f(x)e^{-i\xi x}| \leq |f(x)| \in L^1(\mathbb{R})$. On notera que le majorant est indépendant de la variable ξ. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\xi \to f(x)e^{-i\xi x}$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de continuité de Lebesgue, la transformée de Fourier de f est donc bien une fonction continue.

   Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a $\hat{f}(\xi) \leq \int |f(x)| \mathrm{d}x := ||f||_{L^1}$. On en déduit que

   $$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \hat{f}(\xi) := ||\hat{f}||_{L^\infty} \leq ||f||_{L^1},$$

   ce qui prouve la continuité de la transformation de Fourier de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C(\mathbb{R})$.
3. (Limite nulle en $\pm\infty$) A ce stade, il reste à prouver que $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$, c'est à dire que $\lim_{\xi \to +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$. Pour ce faire, on utilise le fait que l'ensemble C_c^∞ des fonctions de classe C^∞ à support compact est dense dans l'espace $L^1(\mathbb{R})$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe donc $g \in C_c^\infty$ tel que

   $$||f - g||_{L^1(\mathbb{R})} < \frac{\epsilon}{2}.$$

   Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on vérifie, en effectuant une intégration par parties et en exploitant le fait que g soit à support compact, que

   $$|\hat{g}(\xi)| := \left| \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-i\xi x} \mathrm{d}x \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} g'(x) \frac{e^{-i\xi x}}{i\xi} \mathrm{d}x \right| \leq \frac{1}{\xi} ||g'||_{L^1(\mathbb{R})}.$$

   En particulier, si $\xi > ||g'||_{L^1}$, alors $|\hat{g}(\xi)| < \frac{\epsilon}{2}$. Enfin, on a :

   $$|\hat{f}(\xi)| \leq |(\hat{f} - \hat{g})(\xi)| + |\hat{g}(\xi)| \leq ||f - g||_{L^1(\mathbb{R})} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

ce qui achève la preuve.

□

Théorème 2.1.2 (Théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$)**.** *La transformation de Fourier est injective de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$. De plus, si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on vérifie*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} \mathrm{d}\xi.$$

Autrement dit, on a

$$f = \frac{1}{2\pi} \bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F} f),$$

où $\bar{\mathcal{F}}$ désigne la transformée de Fourier inverse, définie pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ par

$$\bar{\mathcal{F}} f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) e^{i\xi x} \mathrm{d}x = \mathcal{F} f(-\xi).$$

Démonstration. 1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On suppose que la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f est dans $L^1(\mathbb{R})$. Considérons alors la fonction

$$f_\delta(x) := \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \exp(-\delta^2 x^2/2) e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi$$

D'après le théorème de convergence dominée, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\delta \to 0^+} f_\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi$$

2. Montrons que f_δ converge en norme L^1 vers la fonction f. En appliquant le théorème de Fubini et la forumle de la transformée de Fourier pour les fonctions gaussiennes, on vérifie que

$$f_\delta(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp(-\frac{(x-y)^2}{2\delta^2}) \mathrm{d}y,$$

Par ailleurs, rappelons que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\delta^2}} \mathrm{d}y = 1,$$

On en déduit la relation

$$|f(x) - f_\delta(x)| = \int_{\mathbb{R}} [f(x) - f(x-y)] \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\delta^2}} \mathrm{d}y.$$

En appliquant le théorème de Fubini-Tonelli, on trouve donc que

$$\begin{aligned}
\|f - f_\delta\|_{L^1(\mathbb{R})} &:= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \left| \int_{\mathbb{R}} [f(x) - f(x-y)] \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\delta^2}} \mathrm{d}y \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x-y)| \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\delta^2}} \mathrm{d}y \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \|f(\cdot) - f(\cdot - y)\|_{L^1(\mathbb{R})} \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\delta^2}} \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Pour tout $r > 0$, on vérifie, par un simple changement de variable, que

$$\int_{|y|>r} \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\delta^2}} \mathrm{d}y = \int_{|y|>r/_delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y.$$

Par conséquent, en appliquant le théorème de convergence dominée, on montre que $\lim_{\delta\to 0^+} \int_{|y|>r} \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\delta^2}} \mathrm{d}y = 0$.

Soit $\epsilon > 0$. D'après le lemme 1.2.1, il existe $r > 0$ tel que

$$\sup_{|y|\leq r} \|f(\cdot) - f(\cdot - y)\|_{L^1(\mathbb{R})} < \epsilon.$$

Par ailleurs, si $y > r$, on a

$$\int_{[y|>r} \|f(\cdot) - f(\cdot - y)\|_{L^1(\mathbb{R})} \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\delta^2}} \mathrm{d}y \leq 2\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \int_{[y|>r} \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\delta^2}} \mathrm{d}y.$$

D'après ce qui précède, il existe donc $\delta_0 > 0$ tel que, si $0 < \delta < \delta_0$,

$$\|f - f_\delta\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \epsilon.$$

On en conclut que

$$\lim_{\delta\to 0^+} \|f - f_\delta\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0.$$

3. On conclut la preuve en notant que f_δ converge à la fois ponctuellement et en norme L^1 vers f.

□

2.1.1 Transformation de Fourier et dérivation

La transformation de Fourier possède des propriétés intéressantes vis à vis des opérations de dérivation. Ces propriétés en font un outil central en théorie des équations aux dérivées partielles. La transformation de Fourier permet en effet de transformer certaines équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Nous revenons dans cette section sur ces propriétés, qui sont également fondamentales en traitement du signal, de par le lien qu'elles établissent entre les propriétés de régularité d'une fonction et la décroissance de sa transformée de Fourier à l'infini.

Proposition 2.1.3. *Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$. On suppose que la dérivée f' de f est intégrable ($f' \in L^1(\mathbb{R})$). Alors, $\forall \xi \in \mathbb{R}$,*

$$\widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi). \tag{2.1}$$

Démonstration. Supposons dans un premier temps que f est une fonction de classe C^∞ à support compact. Alors, on a, en effectuant une intégration par parties,

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\xi) &:= \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-i\xi x} \mathrm{d}x \\ &= i\xi \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} \mathrm{d}x \\ &= i\xi \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

La proposition est donc vraie si $f \in C_c^\infty$.

Soit maintenant ρ une fonction de classe C^∞ à support compact telle que $\rho(0) = 1$, et soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pour tout $\delta > 0$, on considère la fonction f_δ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_\delta(x) = f(x)\rho(\delta x)$. D'après le théorème de convergence dominée, on vérifie d'une part que

$$\lim_{\delta \to 0} ||f - f_\delta||_{L^1(\mathbb{R})} = 0$$

et d'autre part que

$$\lim_{\delta \to 0} ||f' - f'_\delta||_{L^1(\mathbb{R})} = 0.$$

D'après le théorème 2.1.1, la transformée de Fourier $\hat{f}_\delta$ (resp. $\widehat{f'}_\delta$) converge donc uniformément vers $\hat{f}$ (resp. $\hat{f}'$). Par conséquent, on vérifie bien la relation

$$\widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi).$$

□

Le corollaire qui suit établit un lien fondamental entre la régularité d'une fonction et la décroissance à l'infini de sa transformée de Fourier.

Corollaire 2.1.1. *Si f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et si sa dérivée $f^{(n)}$ d'ordre n est dans $L^1(\mathbb{R})$ pour tout $n \geq 1$, alors*

$$\widehat{f^{(n)}}(\xi) = (i\xi)^n \hat{f}(\xi). \tag{2.2}$$

Démonstration. Ce résultat se démontre aisément en appliquant de manière répétée la proposition 2.1.3 à f et à ses dérivées successives. □

De la même manière, on a le résultat "inverse" sur les dérivées successives de la transformée de Fourier :

Proposition 2.1.4. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On suppose que*

$$\int_{\mathbb{R}} |x||f(x)|\mathrm{d}x < +\infty. \tag{2.3}$$

Alors, $\hat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (-ix)f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x = \mathcal{F}(x \to -ixf(x))(\xi). \tag{2.4}$$

Démonstration. Ce résultat se prouve en appliquant le théorème de dérivation de Lebesgue. En effet, on vérifie aisément que

$$|(-ix)f(x)e^{-ix\xi}| \leq |x||f(x)|, \forall \xi \in \mathbb{R},$$

et $x \to |x||f(x)| \in L^1(\mathbb{R})$ par hypothèse. □

La proposition précédente se généralise aux dérivées de $\hat{f}$ d'ordre n quelconque :

Corollaire 2.1.2. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On suppose que, $\forall n \in \mathbb{N}$,*

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^k|f(x)|\mathrm{d}x < +\infty, \forall k \leq n. \tag{2.5}$$

Alors, $\hat{f}$ est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $k \leq n$,

$$\hat{f}^{(k)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (-ix)^k f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x = \mathcal{F}(x \to (-ix)^k f(x))(\xi). \tag{2.6}$$

2.2 Transformation de Fourier dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$

2.2.1 Espace de Schwarz

Définition 2.2.1. L'espace de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ telles que, $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^p f^{(q)}(x)| < +\infty. \tag{2.7}$$

Proposition 2.2.1. *L'espace de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est une algèbre pour la multiplication et est stable par dérivation et par multiplication par un polynôme de degré quelconque.*

Démonstration. La preuve de cette proposition est évidente compte-tenu de la définition de l'espace de Schwarz. □

Dans le langage courant, une fonction de l'espace de Schwarz est souvent désignée sous le nom de fonction à décroissance rapide. La condition exprime que f et ses dérivées à tout ordre décroissent plus vite à l'infini que n'importe quelle puissance de $|x|$. L'espace de Schwarz possède d'excellentes propriétés vis à vis de la transformation de Fourier, énoncées dans le théorème qui suit :

Théorème 2.2.1. *L'espace de Schwarz est stable pour la transformation de Fourier. Plus précisément, la restriction $\mathcal{F}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ de la transformation de Fourier à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un automorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit f une fonction à décroissance rapide. Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ et comme $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par dérivation, la transformée de Fourier $\hat{f}$ de $f^{(q)}$ est bien définie à tout ordre de dérivation $q \in \mathbb{N}$ et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. $\forall q \in \mathbb{N}$, on a

$$\hat{f}^{(q)} := \mathcal{F}(x \to (-i)^q x^q f(x)).$$

□

Proposition 2.2.2. *Pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'espace de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.*

Démonstration. On vérifie aisément que $\forall p \geq 1$, $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$. Or, on sait que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \geq 1$. On en conclut que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^q(\mathbb{R})$ □

2.2.2 Transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$

Proposition 2.2.3. *L'application $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ peut être prolongée en une application $\mathcal{F}$ sur $L^2(\mathbb{R})$ telle que*

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on vérifie que

$$\bar{\hat{f}}(\xi) = \hat{\bar{f}}(-\xi). \tag{2.8}$$

Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$, f est de carré intégrable, avec

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \bar{\hat{f}}(\xi)\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{\bar{f}}(-\xi)\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Par ailleurs, $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$. On peut donc utiliser la propriété de transfert de la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ et le théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$ pour montrer que :

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \hat{\hat{\bar{f}}}(-\xi)f(x)\mathrm{d}x = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x)f(x)\mathrm{d}x$$

On en déduit que $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a la relation

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ pour la norme L^2, la transformation de Fourier $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur l'espace de Schwarz peut être prolongée en une application $\mathcal{F}$ sur $L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

□

La construction de la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ sur $L^2(\mathbb{R})$ à partir de l'espace de Schwarz conduit à une définition purement abstraite. Ainsi, dans le cas général, si $f \in L^2(\mathbb{R})$, il est impossible de donner un sens à l'expression

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x.$$

Rien ne garantit en effet l'intégrabilité de la fonction f. Néanmoins, si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors les définitions de la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ et sur $L^2(\mathbb{R})$ coincident, comme le montre la proposition qui suit.

Proposition 2.2.4. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Alors, pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$,*

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Il existe une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{n\to 0} \|\varphi_n - f\|_{L^1} = 0, \qquad \lim_{n\to 0} \|\varphi_n - f\|_{L^2} = 0.$$

D'après le théorème de Plancherel, on a

$$\lim_{n\to 0} \|\mathcal{F}\varphi_n - \mathcal{F}f\|_{L^2} = 0.$$

Il existe donc une suite de fonctions $(\varphi_{n_k})_{k\geq 0}$ extraite de $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ telle que, pour presque tout x,

$$\mathcal{F}\varphi_n(x) \to \mathcal{F}f(x)$$

lorsque $n \to +\infty$. □

2.3 Transformation de Fourier et produit de convolution

Pour conclure ce chapitre, intéressons-nous aux liens entre produit de convolution et transformation de Fourier. La proposition ci-dessous montre que la transformation de Fourier transforme un produit de convolution en un produit de fonctions, et réciproquement.

Proposition 2.3.1.
1. *Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, alors $\widehat{fg} = (2\pi)^{-1}\hat{f} * \hat{g}$.*
2. *Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ et si $f * g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.*
3. *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si $g \in L^2(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.*

Démonstration.
1. Soit $sf, g \in L^2(\mathbb{R})$. $\forall \eta \in \mathbb{R}$, la fonction $x \to \overline{g(x)}e^{i\eta x}$ est dans $L^2(\mathbb{R})$. Sa transformée de Fourier est définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{F}(x \to \overline{g(x)}e^{i\eta x})(\xi) := \overline{\hat{g}(\eta - \xi)}.$$

D'après le théorème de Plancherel, on a donc

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\eta - \xi)}\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)e^{-i\eta x}\mathrm{d}x.$$

On reconnait au membre de gauche le produit de convolution de $\hat{f}$ et de $\hat{g}$ et au membre de droite la transformée de Fourier du produit fg. □

2.4 Exercices

Exercice 2.4.1. Pour tout $a > 0$, soit $f_a = \mathbb{1}_{[-a,a]}$.

1. Calculer la transformée de Fourier $\hat{f}_a$ de f_a et étudier l'existence de limites simples ou dans $L^2(\mathbb{R})$ pour f_a et $\hat{f}_a$ lorsque $a \to +\infty$
2. Montrer que $\hat{f}_a$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, d'abord par un calcul direct, puis en utilisant un résultat du cours.
3. Utiliser les questions précédentes pour montrer que $x \to \frac{\sin x}{x} \notin L^1(\mathbb{R})$.
4. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f := \mathbb{1}_{[0,1]} - \mathbb{1}_{[-1,0]}$. En déduire celle des fonctions

$$g(x) := (|x| - 1)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x), \qquad h(x) := |x|\mathbb{1}_{[-1,1]}(x).$$

Exercice 2.4.2. Calculer l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2}\mathrm{d}x,$$

où $0 \leq a \leq b$.

Exercice 2.4.3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction à support compact.

1. Montrer que $\hat{f}$ est analytique sur $\mathbb{R}$, c'est à dire développable en série entière au voisinage de tout point $\xi_0 \in \mathbb{R}$. En déduire que $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Pouvait-on directement obtenir ce résultat à partir d'un théorème du cours ?
2. En déduire que la transformée de Fourier d'un fonction de $L^1(\mathbb{R})$ non nulle n'est jamais à support compact.

Exercice 2.4.4 (Transformée de Fourier d'une fonction gaussienne)**.** Pour tout réel $a > 0$, on considère la fonction f_a définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = e^{-ax^2}.$$

On admet le résultat suivant :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

1. Montrer que la transformée de Fourier $\hat{f}_a$ est de classe C^1 et que, $\forall \xi \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}_a{}' + \frac{\xi}{2a}\hat{f}_a = 0.$$

2. En déduire que pour tout $a > 0$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}_a(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

Exercice 2.4.5 (Relation d'incertitude de Heisenberg)**.** Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ à valeur dans $\mathbb{C}$. On suppose que $f, f' \in L^1(\mathbb{R} \cap L^2(\mathbb{R})$, que $x \to xf(x) \in L^2(\mathbb{R})$ et que

$$\lim_{x \to \pm\infty} x|f(x)|^2 = 0.$$

Etablir la *relation d'incertitude d'Heisenberg*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 \mathrm{d}x \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \right) \geq \frac{\pi}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \right)^2$$

Exercice 2.4.6 (Transformation de Fourier et produit de convolution)**.** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. pour tout $n \geq 1$, on considère l'application f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} f(x+t)\mathrm{d}t.$$

1. Après avoir exprimé f_n sous la forme d'un produit de convolution de deux fonctions, montrer que

$$f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}).$$

2. Montrer que $L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$.
3. Calculer $\hat{f}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et montrer que la suite de fonctions $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers $\hat{f}$.
4. Supposons maintenant que $f \in L^2(\mathbb{R})$. Les fonctions f_n sont-elles toujours bien définies ? Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$.

Chapitre 3

Séries de Fourier

3.1 Définitions

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. La fonction f est entièrement caractérisée par sa restriction à l'intervalle $[0, 2\pi[$. Considérons l'espace $L^1([0, 2\pi[)$ des fonctions intégrables sur $[0, 2\pi[$, muni de la norme $\| \cdot \|_L^1$ définie par

$$\|f\|_L^1 := \int_0^{2\pi} |f(x)| \mathrm{d}x.$$

D'après le théorème de Riesz, $L^1([0, 2\pi[)$ est un espace complet pour la norme L^1.

Proposition 3.1.1. *L'espace* $L^2([0, 2\pi[)$ *des fonctions de carré intégrable sur* $[0, 2\pi[$ *est inclus dans* $L^1(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit f une fonction de $L^1([0, 2\pi[)$. Comme f est intégrable, on a

$$f(x) < +\infty$$

pour presque tout $x \in [0, 2\pi[$. On en déduit, comme $[0, 2\pi[$ est un intervalle borné, que f est nécessairement de carré intégrable : $f \in L^2([0, 2\pi[)$. □

L'application $f, g \in [0, 2\pi[\to (f, g)$ définie par

$$\int_{2\pi} f(x)\overline{g(x)} \mathrm{d}x$$

défini un produit scalaire sur $L^2([0, 2\pi[)$, de norme hilbertienne associée la norme L^2. D'après le théorème de RIesz, muni de cette norme, $L^2([0, 2\pi[)$ est un espace de Hilbert.

Proposition 3.1.2. *$\forall n \in \mathbb{Z}$, on note e_n la fonction de $L^2([0,2\pi[)$ définie par*

$$\forall x \in [0,2\pi[, e_n(x) := e^{inx}.$$

Alors, la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée dans $L^2([0,2\pi[)$.

Démonstration. Soit $p, q \in \mathbb{Z}$. On a

$$(e_p, e_q) := \int_0^{2\pi} e^{i(q-p)x} \mathrm{d}x = \begin{cases} 1 \text{ si } p = q \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

□

Définition 3.1.1 (Coefficient de Fourier)**.** Soit $f \in L^1([0,2\pi[)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le n-ième coefficient de Fourier de f est défini par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x.$$

Comme $L^2([0,2\pi[) \subset L^1([0,2\pi[)$, la définition s'étend à toute fonction f de $L^2([0,2\pi[)$. Dans $L^2([0,2\pi[)$, le n-ième coefficient de Fourier de f s'interprète de façon immédiate comme le produit scalaire

$$c_n(f) = (f, e_n).$$

Une conséquence immédiate de la définition des coefficients de Fourier dans $L^2([0,2\pi[)$, qui découle de l'inégalité de Bessel, est que

$$\forall f \in L^2([0,2\pi[), \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 < \infty$$

Définition 3.1.2 (Série de Fourier)**.** Soit $f \in L^1([02\pi[)$. Alors, on appelle série de Fourier de f et on note $S(f)$ la série

$$s(f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}.$$

On note $S_N(f)$ la n-ième somme partielle de $S(f)$:

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{n=N} c_n(f) e^{inx}.$$

3.2 Théorème de Dirichlet

Nous étudions dans cette section la convergence ponctuelle des séries de Fourier.

Lemme 3.2.1 (Lemme de Riemann-Lebesgue). *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ et soit $f \in L^1(]a, b[)$. Alors,*

$$\lim_{y \to \pm\infty} \int_a^b f(x) e^{-ixy} \mathrm{d}x = 0.$$

Démonstration. La démonstration se base sur des arguments de densité. Fixons $\epsilon > 0$. Comme l'ensemble $C_c^\infty(]a, b[)$ des fonctions de classe C^∞ à support compact est dense dans $L^1(]a, b[)$, il existe $g \in C_c^\infty(]a, b[)$ tel que

$$\|f - g\|_{L^1(]a,b[)} < \epsilon.$$

Or, on a

$$\left| \int_a^b f(x) e^{-ixy} \mathrm{d}x \right| \leq \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) e^{-ixy} \mathrm{d}x \right| + \left| \int_a^b g(x) e^{-ixy} \mathrm{d}x \right|$$

En effectuant une intégration par partie, on remarque que

$$\left| \int_a^b g(x) e^{-ixy} \mathrm{d}x \right| \leq \frac{1}{|y|} \int_a^b |g'(x)| \mathrm{d}x$$

Il existe donc $R > 0$ tel que, pour $|y| > R$,

$$\left| \int_a^b f(x) e^{-ixy} \mathrm{d}x \right| \leq 2\epsilon,$$

ce qui prouve le résultat. □

Les propriétés de convergence ponctuelle des séries de Fourier sont énoncées par le théorème de Dirichlet ci-dessous.

Théorème 3.2.1 (Théorème de Dirichlet). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux. Alors :*

1. $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{n \to +\infty} S_n(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)).$$
2. *Si de plus f est continue sur $\mathbb{R}$, alors la convergence des sommes de Fourier partielles est uniforme sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. 1. Pour prouver le théorème de Dirichlet, introduisons le noyau de Dirichlet D_n défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$D_n(x) := \sum_{k=-n}^{k=n} e^{ikx}.$$

Un calcul rapide permet de montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, D_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} = D_n(-x).$$

La somme partielle $S_n(f)$ peut s'écrire sous la forme d'un produit de convolution entre f et le noyau de Dirichlet :

$$S_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)D_n(x-y)\mathrm{d}y.$$

En effectuant le changement de variable $t := y - x$ et en exploitant successivement la parité de D_n et la 2π-périodicité de f, on montre que

$$S_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)D_n(t)\mathrm{d}t$$

Par ailleurs, on vérifie que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Par conséquent, on vérifie, en découpant l'intégrale sur $[0, 2\pi]$ en deux intégrales sur $[0, \pi]$ et $[\pi, 2\pi]$ et en effectuant le changement de variable $t := 2\pi - t$,

$$\begin{aligned} & S_n(f)(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \\ = & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(x+t) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}\right]D_n(t)\mathrm{d}t \\ & = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t) - f(x^+)]D_n(t)\mathrm{d}t \\ & + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[f(x-t) - f(x^-)]D_n(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Il reste à montrer que l'expression au membre de droite tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Pour ce faire, on peut remarquer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t) - f(x^+)]D_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} h(t)\sin(n+\frac{1}{2})t\mathrm{d}t,$$

où

$$h(t) = 2\frac{f(x+t) - f(x^+)}{t}\frac{t/2}{\sin t/2}$$

En notant que $\sin(n+\frac{1}{2})t = \mathcal{I}\Updownarrow(e^{i(n+\frac{1}{2})t})$ et en appliquant le lemme de Riemann-Lebesgue, on montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [f(x+t) - f(x^+)]D_n(t)\mathrm{d}t = 0.$$

De la même manière, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [f(x-t) - f(x^-)]D_n(t)\mathrm{d}t = 0,$$

ce qui achève la preuve de 1. 2. Supposons de plus f de classe C^1 par morceaux et continue. Notons alors $x_0 := 0 < x_1 < .. < x_N := 2\pi$ une subdivision de $[0, 2\pi[$ telle que $\forall i \in \{0, 1, .., N-1\}$, f' est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on vérifie, en effectuant une intégration par partie,

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{in}\frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x)e^{-inx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{in}c_n(f'). \end{aligned}$$

□

Par ailleurs, $f' \in L^\infty$ et est donc de carré intégrable. On en déduit, d'après l'inégalité de Bessel, que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 < \infty.$$

De plus, on a $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} < +\infty$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a donc

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|n|}|c_n(f')| \\ &\leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{n^2}|c_n(f')|^2\right)^{1/2} < +\infty. \end{aligned}$$

On en conclut que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. D'après 1., sa somme est $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Annexe A

Calcul intégral

Nous rappelons dans cette annexe quelques résultats de calcul intégral indispensables à la compréhension du cours. Dans tout ce qui suit, nous nous plaçons sur l'espace $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 1$. Une fonction f sur $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite intégrable si

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < +\infty.$$

A.1 Convergence simple

La notion de convergence simple concerne la convergence ponctuelle d'une suite de fonctions.

Définition A.1.1 (Convergence simple)**.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de sur $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, la suite numérique $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

La convergence simple est un mode de convergence relativement pauvre, dans le sens où la plupart des propriétés des fonctions f_n ne sont pas conservées lors du passage à la limite. Ainsi, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f et si f_n est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$, cela ne garantit en rien la continuité de la fonction f. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où la fonction f_n est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$ par

$$f_n(x) := x^n.$$

Il est clair que f_n est continue sur $[0, 1]$ pour tout n. Néanmoins, la suite de fonction converge vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

qui présente une discontinuité en 1.

Convergence simple et intégration

La convergence simple d'une suite de fonctions ne garantit pas qu'on puisse, dans le cas général, inverser intégration et passage à la limite. Ainsi, le fait que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f ne permet pas d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{R^N} f_n(x)dx = \int_{R^N} f(x)dx.$$

Prenons ainsi le cas de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n par

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{[n,n+1]}(x)$$

où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle. Pourtant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x = 1$$

de sorte que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x = 1 \neq \int_R f(x)dx.$$

Les théorèmes de convergence monotone et dominée énoncés ci-après fournissent des conditions suffisantes pour qu'il soit possible d'intervertir passage à la limite et intégration.

Théorème A.1.1 (Théorème de convergence monotone)**.** *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante de fonctions de fonctions positives. Alors, on vérifie, pour tout ouvert* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

On notera qu'il est possible de relaxer l'hypothèse selon laquelle les fonctions f_n sont positives en appliquant le théorème de convergence monotome à la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où g_n est définie pour tout $n \geq 0$ par

$$g_n(x) := f_n(x) - f_0(x).$$

Lemme A.1.1 (Lemme de Fatou)**.** *Pour tout $n \geq 0$, soit $f_n : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ une application mesurable sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Alors,*

$$\int_\Omega (\liminf_{n\to+\infty} f_n(x))\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\mathrm{d}x.$$

En pratique, le lemme de Fatou s'avère très utile dans des cas où il est impossible d'appliquer les théorème de convergence monotone ou de convergence dominée.

Théorème A.1.2 (Théorème de convergence dominée)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables qui converge vers une fonction f. On suppose qu'il existe une fonction g intégrable sur Ω telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \Omega, |f_n(x)| \leq g(x).$$

Alors, f est intégrable et

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\mathrm{d}x.$$

A.2 Intégrales dépendant de paramètres

Une application fondamentale du théorème de convergence dominée est qu'il permet d'établir la continuité ou la dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale.

Théorème A.2.1 (Théorème de continuité de Lebesgue)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application telle que*

1. *$\forall x \in \mathbb{R}$, l'application $f(\cdot, x)$ est mesurable,*
2. *l'application $f(t, x)$ est continue en x_0 pour presque tout $t \in \mathbb{R}$,*
3. *il existe une fonction $g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ telle que $|f(t, x)| \leq g(t)$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.*

Alors, l'application

$$F(x) := \int_\Omega f(t, x)\mathrm{d}t$$

est continue en x_0.

Le théorème qui suit énonce un résultat similaire au théorème de continuité de Lebesgue concernant la dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre.

Théorème A.2.2 (Théorème de dérivation de Lebesgue)**.** *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}$ *un ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*. Soit* $f : \Omega \times I \to \mathbb{C}$ *une application telle que*

1. $\forall x \in \mathbb{R}$*, l'application* $f(\cdot, x)$ *est intégrable,*
2. *l'application* $f(t, \cdot)$ *est dérivable pour presque tout* $t \in \mathbb{R}$*, de dérivée notée* $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$*.*
3. *il existe une fonction* $g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ *telle que* $|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)| \leq g(t)$ *pour presque tout* $t \in \mathbb{R}$*.*

Alors, l'application

$$F(x) := \int_\Omega f(t, x)\mathrm{d}t$$

est dérivable sur I *et sa dérivée est donnée pour tout* $x \in I$ *par*

$$F'(x) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\mathrm{d}t.$$

A.3 Intégrales multiples

Théorème A.3.1 (Théorème de Fubini-Tonelli)**.** *Soit* $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}_+$*. Alors, on a*

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\mathbb{R} \mathrm{d}x \int_\mathbb{R} f(x, y)\mathrm{d}y = \int_\mathbb{R} \mathrm{d}y \int_\mathbb{R} f(x, y)\mathrm{d}x.$$

On notera que le théorème de Fubini-Tonelli s'applique uniquement aux fonctions positives, mais ne fait pas d'hypothèse sur l'intégrabilité de la fonction considérée.

Théorème A.3.2 (Théorème de Fubini)**.** *Soit* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*. On suppose que la fonction* f *est intégrable sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *:*

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(x, y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty.$$

Alors, la fonction $x \to f(x, y)$ *(resp.* $y \to f(x, y)$*) est intégrable sur* $\mathbb{R}$*, la fonction* $y \to \int_\mathbb{R} f(x, y)\mathrm{d}x$ *(resp.* $x \to \int_\mathbb{R} f(x, y)\mathrm{d}y$*) est intégrable sur* $\mathbb{R}$*, et on vérifie :*

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\mathbb{R} \mathrm{d}x \int_\mathbb{R} f(x, y)\mathrm{d}y = \int_\mathbb{R} \mathrm{d}y \int_\mathbb{R} f(x, y)\mathrm{d}x.$$

En pratique, pour appliquer le théorème de Fubini à une fonction f, on commencera par appliquer le théorème de Fubini-Tonelli pour s'assurer que f est bien intégrable.

Annexe B

Espaces de Hilbert

B.1 Définitions

Soit H un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$).

Définition B.1.1 (Produit scalaire)**.** Un produit scalaire sur H est une application $f : H \times H \to \mathbb{R}$ bilinéaire, symétrique et définie positive :

1. $\forall (x, y) \in H \times H, f(x, y) = \overline{f(y, x)}$,
2. $\forall (x, y, z) \in H \times H \times H, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}, f(\lambda x + \mu y, z) = \lambda f(x, z) + \mu f(y, z)$,
3. $\forall x \in H, f(x, x) \geq 0$,
4. $\forall x \in H, f(x, x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

On note $(x, y) = f(x, y)$ le produit scalaire.

Il est possible d'associer au produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ la norme $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Cette norme est appelée norme hilbertienne associée au produit scalaire $(\cdot, \cdot)$.

Définition B.1.2 (Espace de Hilbert)**.** Un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien. Un espace préhilbertien H complet pour la norme associée au produit scalaire est appelé un espace de Hilbert.

Le produit scalaire défini sur un espace préhilbertien vérifie l'inégalité suivante dite de Cauchy-Schwarz :

Lemme B.1.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.**

$$\forall x, y \in H, |(x, y)| \leq \|x\| \|y\|. \tag{B.1}$$

Un corollaire immédiat de l'inégalité de Cauchy-Schwarz est l'inégalité de Minkowski, qui prouve que la norme associée au produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ vérifie bien l'inégalité triangulaire.

Corollaire B.1.1 (Inégalité de Minkowski)**.**

$$\forall x, y \in H, |(x, y)| \leq \|x\|\|y\|. \tag{B.2}$$

B.2 Théorème de projection et bases hilbertiennes

Définition B.2.1 (Orthogonal d'une partie de H)**.** Deux éléments non nuls x et y de H sont dits orthogonaux si $(x, y) = 0$.
Soit $F \subset H$. L'orthogonal de F, noté $F^{\perp}T$, est l'ensemble

$$F^{\perp} = \{x \in H; (x, y) = 0, \forall y \in F\}. \tag{B.3}$$

On vérifie aisément que $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de H.

Théorème B.2.1 (Projection sur un convexe fermé)**.** *Soit F un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert H. Alors,*

1. *$\forall x \in H$, il existe un unique élément $u \in F$ tel que*

$$\|x - u\| = \inf_{v \in F} \|x - v\|.$$

   Cet élément est la projection de x sur F, et sera noté $\Pi_F(x)$.

2. *$u = \Pi_F(x)$ si et seulement si $u \in F$ et la partie réelle de $(x - u, v - u)$ est négative pour tout $v \in F$.*
3. *La projection sur F est $1-$lipschitzienne :*

$$\|\Pi_F(x) - \Pi_F(y)\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in H.$$

Un cas particulier important du théorème de projection sur un convexe fermé concerne la projection sur un sous-espace vectoriel fermé de H. Soit ainsi F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors, on vérifie :

1. $\Pi_F \circ \Pi_F = \Pi_F$
2. $\forall x \in H, x = \Pi_F(x) + (x - \Pi_F(x))$, avec $x - \Pi_F(x) \in F^{\perp}$: H est la somme orthogonale de F et de $F^{\perp}$.
3. Π_F est une application linéaire, et $\Pi_{F^{\perp}} = I - \Pi_F$.

Base Hilbertienne

Définition B.2.2. Soit H un espace de Hilbert et soit J un ensemble dénombrable. Une famille $(e_j)_{j\in J}$ de vecteurs de H est orthonormée si :

$$\forall i, j \in J, (e_i, e_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

Etant donnée une famille orthonormée de vecteurs de H, le théorème de projection permet de prouver le résultat qui suit :

Proposition B.2.1. *Soit $(e_j)_{j\in J}$ une famille orthonormée d'un espace de Hilbert H. On suppose J fini. Notons $F = Vect(e_j, j \in J)$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs e_j. F vérifie alors les propriétés suivantes :*

1. *F est un un sous-espace vectoriel fermé de H.*
2. *$\forall x \in F$, $\|x\|^2 = \sum_{j\in J} |(x, e_j)|^2$.*
3. *$\forall x \in H$, $\Pi_F(x) = \sum_{j\in J}(x, e_j)e_j$.*

L'inégalité de Bessel est un corollaire immédiat de la proposition B.2.1 :

Corollaire B.2.1 (Inégalité de Bessel)**.** *Soit $(e_j)_{j\in J}$ une famille orthonormée d'un espace de Hilbert H avec J fini. Alors*

$$\forall x \in H, \sum_{j\in J} |(x, e_j)|^2 \leq \|x\|^2.$$