# Correction des exercices

## 2 Analyse de Fourier

**Exercice 2.4.1** (Séries de Fourier*). *Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique définie sur $[-\pi,\pi[$ par $f(t)=t^2$. Calculer sa série de Fourier et étudier sa convergence. En déduire les valeurs de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.*

**Solution:** La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $2\pi$-périodique. D'après le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier converge donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on a

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi[} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi[} t^2\cos(nt)\mathrm{d}t$$

par un argument de parité. En effectuant une double intégration par parties, on trouve que

$$c_0(f)=\frac{\pi^2}{3},\quad \forall n\neq 0, c_n(f)=2\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

D'après le théorème de Dirichlet, on a donc

$$\begin{aligned}\forall t\in[-\pi,\pi[, t^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} 2\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)+\frac{\pi^2}{3}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)+\frac{\pi^2}{3}.\end{aligned}$$

En particulier, lorsque $t=\pi$, on trouve :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},$$

et lorsque $t=0$ :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}.$$

Enfin, d'après la formule de Plancherel, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4 \mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2,$$

de sorte que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

□

**Exercice 2.4.2** (Série de Fourier d'une fonction lipschitzienne**)**.** *Soit $f$ une fonction $2\pi$- périodique et $L$-lipschitzienne. L'objectif de cet exercice est de montrer que la série de Fourier de $f$ converge uniformément vers $f$ sur $\mathbb{R}$.*

1. *Pour $h \in \mathbb{R}$, on note $\tau_h(f)$ la fonction $t \to f(t-h)$. En évaluant la quantité $\|\tau_h(f) - f\|_2^2$, montrer que*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\frac{e^{inh}-1}{h}\right|^2 |c_n(f)|^2 \leq L^2.$$

2. *Déduire de l'inégalité précédente que*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2 \leq L^2.$$

3. *Déduire enfin de cette dernière inégalité que la série*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$$

*converge, et que la série de Fourier de $f$ converge donc uniformément vers $f$.*

**Solution:** 1. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a, d'une part

$$\|\tau_h(f) - f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t-h) - f(t)|^2 \mathrm{d}t \leq L^2 h^2,$$

et d'autre part, en appliquant le théorème de Plancherel :

$$\|\tau_h(f) - f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\tau_h(f) - f)|^2.$$

Or, on a

$$c_n(\tau_h(f)) := \int_0^{2\pi} f(t-h)e^{-int}\mathrm{d}t = e^{inh}c_n(f).$$

On en conclut :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\frac{e^{inh}-1}{h}\right|^2 |c_n(f)|^2 \leq L^2.$$

2. On obtient l'inégalité demandée en appliquant le lemme de Fatou et en notant que

$$\left|\frac{e^{inh}-1}{h}\right|^2 \to n^2$$

lorsque $h \to 0$.

3. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n(f)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} < \infty.$$

La série de Fourier de $f$ converge donc uniformément vers une limite $\tilde{f}$. Par ailleurs, on sait (d'après la théorie des séries de Fourier dans $L^2$), que la série de Fourier de $f$ converge en norme quadratique vers $f$. On a donc nécessairement $\tilde{f} = f$. □

**Exercice 2.4.3** (Théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$ *)**.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction*

$$f_n(t) := \mathbb{1}_{[-n,n]}(t)$$

1. *Calculer la transformée de Fourier de $f_n$ pour tout $n \geq 1$. Etudier les convergences simples et dans $L^2(\mathbb{R})$ des suites de fonction $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(\widehat{f}_n)_{n\geq 1}$.*
2. *En utilisant le théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$, montrer que la fonction*

$$t \to \frac{\sin t}{t}$$

*n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.*

**Solution:** 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n$ est dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Sa transformée de Fourier est donc donnée pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ par

$$\widehat{f}_n(\omega) := \int_{-n}^{n} e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = 2\frac{\sin(n\omega)}{\omega}.$$

— $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction 1 sur $\mathbb{R}$.
— $\forall n \geq 1$, $||f||_2 = \sqrt{2n} \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
— $(\widehat{f_n})_{n\geq 1}$ ne possède pas de limite simple.
— Enfin, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\|\widehat{f_n}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{4\sin^2(\omega n)}{\omega^2} \mathrm{d}\omega = n \int_{\mathbb{R}} \frac{4\sin^2 u}{u^2} \mathrm{d}u.$$

On en conclut que $\|\widehat{f_n}\|_2 \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

2. Par l'absurde, supposons que la fonction

$$t \to \frac{\sin t}{t}$$

soit dans $L^1(\mathbb{R})$. D'après le théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de cette fonction est nécessairement

$$t \to \mathbb{1}_{[-1,1]}(t).$$

On note que cette fonction n'est pas continue en $-1$ et 1. Or, on sait que la transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ est nécessairement continue. On aboutit donc à une contradiction. $\square$

**Exercice 2.4.4** (Transformée de Fourier et dérivation *)**.** *Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que $f$ et $f'$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, on a*

$$\widehat{f'}(\omega) = i\omega\widehat{f}(\omega).$$

*Indice :* *On pourra considérer la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n \geq 1$ par*

$$f_n(t) = f(t)\rho\left(\frac{t}{n}\right),$$

*où $\rho$ est une fonction de classe $C^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}$ telle que $\rho(0) = 1$. On montrera dans un premier temps que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers $f$ dans $L^1(\mathbb{R})$, puis que la suite des transformées de Fourier $(\widehat{f_n})_{n\geq 1}$ converge uniformément vers $\widehat{f}$. On en déduira le résultat demandé.*

**Solution:** Soit $f$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé. La transformée de Fourier de $f'$ est bien définie puisque $f' \in L^1(\mathbb{R})$ et est donnée pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ par :

$$\widehat{f'}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$$

Pour arriver à l'expression de l'énoncé, une idée évidente est de faire une intégration par parties. On trouve alors :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{f'}(\omega) := \Big[f(t)e^{-i\omega t}\Big]_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$$

La présence du 1er terme du membre de droite est cependant problématique pour arriver à la formule demandée. On remarque toutefois que lorsque $f$ est à support compact, ce terme s'annule, et qu'on a alors $\widehat{f'}(\omega) = i\omega\widehat{f}(\omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$.

La question qui se pose est donc de savoir comment généraliser ce résultat à une fonction $f$ à support non compact vérifiant les hypothèses de l'énoncé. Pour ce faire, l'idée est de construire une suite de fonctions $(f_n)_{n\leq 1}$ à support compact et vérifiant les hypothèses de l'énoncé (une suite "régularisante") telle que $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(f_n')_{n\geq 1}$ convergent uniformément vers $f$ et $f'$. Montrons que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ proposée dans l'énoncé fait l'affaire ici.

1. Par définition de la transformée de Fourier, on a, pour tout $n \geq 1$,

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, |\widehat{f_n}(\omega) - \widehat{f}(\omega)| = \left| \int_{\mathbb{R}} (f_n(t) - f(t))e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \right| \leq \|f_n - f\|_{L^1}.$$

   Cette majoration étant uniforme par rapport à la variable $\omega$, on vérifie :

$$\|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f_n - f\|_{L^1}.$$

2. On vérifie aisément que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction $f$. Enfin, en notant $M = \sup_{t\in\mathbb{R}} \rho(t) - 1$, on vérifie que

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f_n(t) - f(t)| \leq M|f(t)|.$$

   Comme $f$ est intégrable, le théorème de convergence dominée permet d'affirmer que $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. La suite des transformées de Fourier $(\widehat{f_n})_{n\geq 1}$ converge donc uniformément vers $\widehat{f}$.

3. Par un raisonnement similaire, on peut montrer que $\|\widehat{f_n'} - \widehat{f'}\|_{L^\infty} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Pour tout $n \geq 1$, on vérifie enfin à l'aide d'une simple intégration par parties que

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{f_n}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = i\omega\widehat{f_n}(\omega).$$

En passant à la limite à gauche et à droite (ce qui est licite du fait des convergences uniformes), on vérifie bien que

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{f'}(\omega) = i\omega\widehat{f}(\omega).$$

□

**Exercice 2.4.5** (Transformée de Fourier d'une fonction Gaussienne *). *Soit $a > 0$. On considère la fonction Gaussienne*

$$f_a : t \to e^{-at^2}$$

1. *Montrer que la transformée de Fourier $\widehat{f_a}$ de la fonction $f_a$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. En déduire que $\widehat{f_a}$ est solution de l'équation différentielle*
$$\widehat{f_a}(\omega)' + \frac{\omega}{2a}\widehat{f_a}(\omega) = 0.$$

2. *En notant que*
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi},$$
*en déduire l'expression de $\widehat{f_a}$.*

**Solution:** 1. $\forall a > 0$, la fonction $t \to e^{-at^2}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$. Sa transformée de Fourier est donc bien définie et vaut :

$$\widehat{f_a}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, on vérifie que

1. $\forall \omega \in \mathbb{R}$, $t \to e^{-at^2}e^{-i\omega t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$,
2. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\omega \to e^{-at^2}e^{-i\omega t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée la fonction $\omega \to -ite^{-at^2}e^{-i\omega t}$
3. $\forall \omega \in \mathbb{R}$, $|-ite^{-at^2}e^{-i\omega t}| \leq |te^{-at^2}|$, $t \to |te^{-at^2}|$ étant une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrable, $\widehat{f_a}(\omega)$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$\widehat{f'_a}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} -ite^{-at^2}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$$

En effectuant une intégration par parties, on trouve :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{f'_a}(\omega) = -\frac{\omega}{2a}\widehat{f_a}(\omega).$$

2. On peut intégrer l'équation différentielle précédente pour trouver :

$$\widehat{f_a}(\omega) = \widehat{f_a}(0)\exp\left(\frac{-\omega^2}{4a}\right).$$

On trouve le résultat demandé en notant que

$$\widehat{f_a}(0) := \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

□

**Exercice 2.4.6** (Transformée de Fourier d'une fonction à support compact **). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction à support compact.*

1. *Montrer que la transformée de Fourier de $f$ est analytique sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $\omega_0 \in \mathbb{R}$,*

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{f}(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\widehat{f}^{(n)}(\omega_0)}{n!}(\omega - \omega_0)^n.$$

2. *En déduire que si $\widehat{f}$ s'annule sur un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $\widehat{f}$ est identiquement nulle.*

**Solution:** 1. Comme $f$ est à support compact, il existe $A > 0$ tel que si $|t| > A$, alors $f(t) = 0$. Comme $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a, pour tout $\omega_0 \in \mathbb{R}$

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i(\omega-\omega_0)t} e^{-i\omega_0 t} \mathrm{d}t.$$

En utilisant le développement en séries entières de la fonction exponentielle, on obtient

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega_0 t} \frac{(-i)^n t^n (\omega - \omega_0)^n}{n!} \mathrm{d}t.$$

De manière évidente, on souhaite inverser l'ordre des sommations. Pour ce faire, on peut s'appuyer sur le théorème de convergence dominée. Considérons ainsi la suite des fonctions $(h_N)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $N \geq 0$ par

$$h_N(t) = \sum_{n=0}^{N} f(t) e^{-i\omega_0 t} \frac{(-i)^n t^n (\omega - \omega_0)^n}{n!}.$$

De manière évidente, la suite de fonctions $(h_N)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega_0 t} \frac{(-i)^n t^n (\omega - \omega_0)^n}{n!}.$$

Par ailleurs, comme $f$ est à support compact, on a la majoration (uniforme par rapport à $N$) :

$$|h_N(t)| \leq \sum_{n=0}^{N} |f(t)| \frac{A^n(\omega - \omega_0)^n}{n!}| \leq |f(t)| \exp(A|\omega - \omega_0|) \in L^1(\mathbb{R}).$$

D'après le théorème de convergence dominée, on a donc

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{f}(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega_0 t} \frac{(-i)^n t^n}{n!} \mathrm{d}t \right] (\omega - \omega_0)^n,$$

ce qui prouve bien que $\widehat{f}$ est analytique. Par ailleurs, en appliquant le théorème de dérivation sous le signe intégral, on peut aisément montrer que, pour tout $\omega_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{f}^{(n)}(\omega_0) = \int_{\mathbb{R}} (-it)^n f(t) e^{-i\omega_0 t} \mathrm{d}t,$$

de sorte que, pour tout $\omega_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{f}(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\widehat{f}^{(n)}(\omega_0)}{n!} (\omega - \omega_0)^n.$$

2. Supposons que $\widehat{f}$ s'annule sur un intervalle $]a, b[$, avec $a < b$. Soit alors $\omega_0 = \frac{a+b}{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\widehat{f}^{(n)}(\omega_0) = 0$, de sorte que $\forall \omega \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}(\omega) = 0$. $\widehat{f}$ est donc identiquement nulle sur $\mathbb{R}$. □

**Exercice 2.4.7** (Relation d'incertitude de Heisenberg *). *Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que $f, f' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et que la fonction $t \to tf(t) \in L^2(\mathbb{R})$. Sous ces hypothèses, on peut montrer que $t|f(t)|^2 \to 0$ lorsque $t \to \pm\infty$.*

1. *Montrer que*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \leq 2 \Big( \int_{\mathbb{R}} t^2 |f(t)|^2 \Big)^{1/2} \Big( \int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 \Big)^{1/2}$$

2. *En déduire la relation d'incertitude de Heisenberg*

$$\frac{\pi}{2} \Big( \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \Big)^2 \leq \Big( \int_{\mathbb{R}} t^2 |f(t)|^2 \Big) \Big( \int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 \Big).$$

**Solution:** 1. En effectuant une intégration par parties, on trouve, puisque $t|f(t)|^2 \to 0$ lorsque $t \to \pm\infty$ :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = 2\left| \int_{\mathbb{R}} tf(t)f'(t)\mathrm{d}t \right| \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |tf(t)f'(t)|\mathrm{d}t.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au membre de droite, on en déduit :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \leq 2\left( \int_{\mathbb{R}} t^2 |f(t)|^2 \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 \right)^{1/2}$$

2. D'après le théorème de Plancherel, on a

$$\int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f'}(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega.$$

Or, on sait que $\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{f'}(\omega) = i\omega \widehat{f}(\omega)$, sorte que

$$\int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\omega \widehat{f}(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega.$$

□

**Exercice 2.4.8** (Distributions).

**Définition 1.** *On appelle fonction test (sur $\mathbb{R}$) toute fonction $C^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_0^\infty$ cet ensemble.*

**Définition 2.** *On appelle distribution toute application linéaire $f$*

$$f \ : \ \phi \in \mathcal{C}_0^\infty \mapsto \langle f, \phi \rangle \in \mathbb{R} \tag{1}$$

*continue au sens suivant : si $\lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi$, alors $\lim_{n\to\infty} \langle f, \phi_n \rangle = \langle f, \phi \rangle$.*

**Exemple 1.** *Toute fonction continue $f$ peut être interprétée comme une distribution avec*

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\phi(t)dt \tag{2}$$

**Exemple 2.** *On note $\delta$ la distribution de Dirac définie par*

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0) \tag{3}$$

**Définition 3.** *On étend la définition de la transformée de Fourier comme suit. Soit $f$ une distribution, alors $\mathcal{F}f$ est la distribution définie par*

$$\langle \mathcal{F}f, \phi \rangle = \langle f, \mathcal{F}\phi \rangle\,, \quad \forall \phi \in C_0^\infty \tag{4}$$

*On peut maintenant passer aux questions.*

1. *Calculer la transformée de Fourier du delta de Dirac* $\delta$
2. *Calculer la transformée de Fourier de la distribution notée abusivement* $\delta_{t_0} \ : t \mapsto \delta(t - t_0)$
3. *En déduire la transformée de Fourier au sens des distributions d'un sinusoïde* $f(t) = e^{-i\omega_0 t}$
4. *Montrer que la transformée de Fourier du peigne de Dirac* $g = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{nT}$ *est un peigne de Dirac. On pourra pour cela étudier les sommes partielles* $g_N = \sum_{n=-N}^{N} \delta_{nT}$.

**Solution:**

1. On a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}\delta, \phi \rangle &= \langle \delta, \mathcal{F}\phi \rangle &(5)\\ &= [\mathcal{F}\phi]\,(0) &(6)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi(t)dt &(7) \end{aligned}$$

   On identifie donc $\mathcal{F}\delta = 1$.

2. On a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}\delta_{t_0}, \phi \rangle &= \langle \delta_{t_0}, \mathcal{F}\phi \rangle &(8)\\ &= [\mathcal{F}\phi]\,(t_0) &(9)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi(t)e^{-itt_0}dt &(10) \end{aligned}$$

   On a donc $\mathcal{F}\delta_{t_0} \ : t \mapsto e^{-itt_0}$

3. On a $f = \mathcal{F}\delta_{\omega_0}$ et donc en passant à l'inverse

$$\mathcal{F}f(\omega) = 2\pi\mathcal{F}^{-1}f(-\omega) = 2\pi\delta_{\omega_0}(-\omega) = 2\pi\delta_{\omega_0}(\omega) \tag{11}$$

4. Par linéarité on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}g_N(\omega) &= \sum_{n=-N}^{N} e^{-i\omega nT} &(12)\\ &= \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)T\omega}{\sin\frac{T\omega}{2}} &(13) \end{aligned}$$

On remarque que $\mathcal{F}g_N(\omega)$ est périodique, de période $2\pi/T$. Pour prouver l'assertion de l'énoncé, il suffit donc de montrer que la restriction de $\mathcal{F}g_N(\omega)$ à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]$ est un Dirac.
Considérons par conséquent une fonction test $\phi$ à support dans $\left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]$. On a alors

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{g}_N, \phi \rangle &= \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)T\omega}{\sin\frac{T\omega}{2}} \phi(\omega) d\omega && (14) \\
&= \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{1}{T} \left[\frac{2\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)T\omega}{\omega}\right] \left[\frac{\frac{T\omega}{2}}{\sin\frac{T\omega}{2}} \phi(\omega) d\omega\right] && (15)
\end{aligned}$$

Le premier terme entre crochets est la transformée de Fourier de

$$t \mapsto \mathbb{1}_{[-(N+1/2)T,(N+1/2)T]}(t)$$

Notons enfin

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \mathbb{1}_{[-\pi/T,\pi/T]}(\omega) \frac{\frac{T\omega}{2}}{\sin\frac{T\omega}{2}} \phi(\omega)$$

le second terme entre crochets. Ce terme est la transformée de Fourier d'une fonction

$$t \mapsto \varphi(t)$$

En appliquant la formule de Parseval, on trouve :

$$\langle \widehat{g}_N, \phi \rangle = \frac{2\pi}{T} \int_{-(N+1/2)T}^{(N+1/2)T} \varphi(t) dt.$$

Lorsque $N$ tend vers $+\infty$, on vérifie bien que l'intégrale converge vers $\frac{2\pi}{T}\widehat{\varphi}(0) = \frac{2\pi}{T}\phi(0)$ : la restriction de $\mathcal{F}g_N(\omega)$ à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]$ est bien un Dirac en 0 multiplé par le facteur $\frac{2\pi}{T}$. On en déduit :

$$\mathcal{F}g = \frac{2\pi}{T} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right).$$

□

**Exercice 2.4.9** (Repliement spectral *)**.** *On considère le signal suivant*

$$x(t) = 2\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 5\sin(380\pi t) - 4\sin\left(30\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \tag{16}$$

1. *Montrer que le signal continu est périodique et calculer sa période fondamentale $T$.*

2. *A quelle fréquence minimale $f_{\min}$ (en Hz) faut-il l'échantillonner pour éviter le repliement spectral ?*
3. *On construit un signal discret $x_1$ par échantillonnage de $x$ a la fréquence $f_s = 2f_{\min}$. On suppose qu'on dispose de $N$ échantillons, avec $N = f_sT$, où $T$ est la période calculée a la question 1. Calculer et représenter la TFD à $N$ points du signal résultant.*
4. *On construit maintenant un nouveau signal $x_2$ en échantillonnant $x$ à une fréquence $f_s = 135$ Hz. On suppose toujours que $N = f_sT$. Calculer et représenter la TFD à $N$ points du signal résultant.*

**Solution:**

1. Le signal contient des termes de fréquences respectives $\pm 50$, $\pm 190$ et $\pm 15$ Hz. Le PGCD de ces fréquences est 5. On en déduit que la période fondamentale du signal est $T = 0.2$s.
2. Les fréquences présentes dans le signal sont respectivement 15Hz, 50Hz et 190Hz. D'après le théorème d'échantillonnage de Shannon, il est donc nécessaire d'échantillonner le signal à une fréquence strictement supérieure à $f_{\min} = 380$Hz.
3. Calculer la TFD à $N$ points revient a trouver les coefficients de sa décomposition dans la base des $\{e_k\}_{k=0,\ldots,N-1}$ qui sont les signaux définis pour $k = 0, \ldots, N-1$ par

$$e_k(n) = \exp\left(\frac{2ink\pi}{N}\right).$$

On a en effet :

$$x_d[n] := x(n\Delta t) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{x}[k] \exp\left(\frac{2ink\pi}{N}\right).$$

Avec la fréquence d'échantillonnage considérée, $N = 152$. Le premier terme du signal discret s'écrit comme suit, lorsqu'on cherche à faire apparaître ces termes

$$\begin{aligned}
2\cos\left(100\pi n\Delta t + \frac{\pi}{4}\right) &= \exp(i2\pi 50\Delta t n)e^{i\pi/4} + \exp(-i2\pi 50\Delta t n)e^{-i\pi/4} \\
&= \exp\left(i2\pi\frac{50N\Delta t}{N}n\right)e^{i\pi/4} + \exp\left(-i2\pi\frac{50N\Delta t}{N}n\right)e^{-i\pi/4} \\
&= \exp\left(i2\pi\frac{50N\Delta t}{N}n\right)e^{i\pi/4} + \exp\left(i2\pi\frac{(N-50N\Delta t)}{N}n\right)e^{-i\pi/4}
\end{aligned}$$

On a bien $50N\Delta t = 10 \in \{0, ..., N-1\}$ et $N - 50N\Delta t = 142 \in \{0, ..., N-1\}$. On aboutit donc bien à une décomposition du premier terme sur la base des $\{e_k\}_{k=0,...,N-1}$, qui fait apparaître des pics de TFD d'amplitude $N$ pour $k = 10$ et $k = 142$. De même, les autres termes du signal font apparaître des pics d'amplitude $2N$ en $k = 3$ et $N - 3$, et d'amplitude $5N/2$ en $k = 38$ et $N - 38$.

**Remarque 1.** *Ces pics correspondent bien aux fréquences présentes dans le signal d'origine. Les formules du cours indiquent en effet que le $k$–ième terme de la TFD correspond a l'énergie contenue à la fréquence $\frac{k}{N\Delta t}$, ce qui permet de retrouver les fréquences $\pm 15Hz$, $\pm 50Hz$ et $\pm 190$ Hz. Le spectre resultant est représenté sur la Figure 1.*

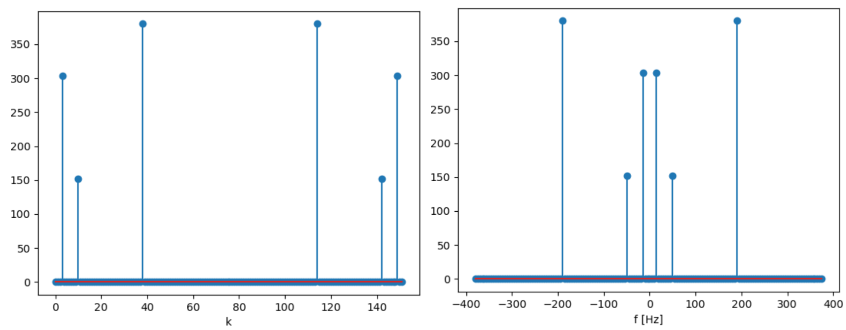


FIGURE 1 – TFD du signal affiché en fonction de $k$ (gauche) et en fonction des fréquences continues centrées en 0 (droite).

*Pour que le calcul "tombe juste", c'est-a-dire que les fréquences présentes dans le signal correspondent exactement aux fréquences calculées par la TFD, on a utilisé le fait que le signal discret était périodique et on a choisi une taille de signal correspondant exactement a une période. On a donc exploité le fait que $f_s T \in \mathbb{N}$.*

4. Avec cette nouvelle fréquence d'échantillonnage, le critère de Shannon n'est pas respecté en raison de la fréquence à 190 Hz présente dans le signal continu. Les calculs au-dessus restent valables mais on a désormais $38 \notin \{0, ..., N-1\}$ puisque $N = 27$. Pour trouver où seront les pics de la TFD, il faut exploiter la periodicité du spectre d'un signal discret pour faire apparaitre des valeurs de $k$ entre 0 et 26. On peut effectivement

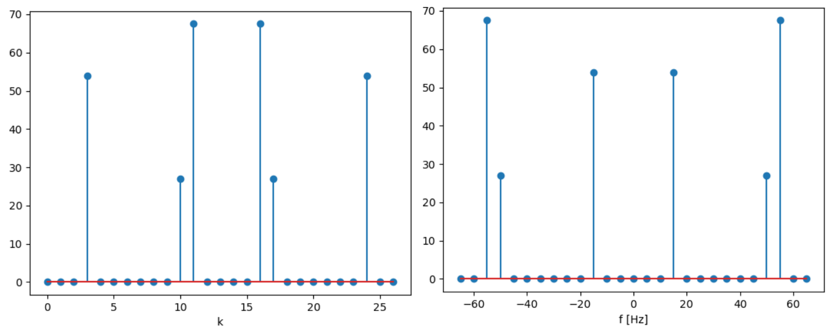


FIGURE 2 – TFD du signal affiché en fonction de $k$ (gauche) et en fonction des fréquences continues centrées en 0 (droite) en présence de repliement spectral.

écrire, pour le terme de fréquence 190 Hz :

$$\begin{aligned}
\sin(380\pi n\Delta t) &= \frac{1}{2i}\left[\exp\left(i\frac{2\pi 190N\Delta tn)}{N}\right) - \exp\left(i\frac{2\pi(N-190N\Delta t)n}{N}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[\exp\left(i\frac{2\pi 38n}{N}\right) - \exp\left(-i\frac{2\pi 11n}{N}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[\exp\left(i\frac{2\pi(27+11)n}{N}\right) - \exp\left(-i\frac{2\pi(27-16)n}{N}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[\exp\left(i\frac{2\pi 11n}{N}\right) - \exp\left(i\frac{2\pi 16n}{N}\right)\right]
\end{aligned}$$

Ce terme fait alors apparaitre des pics en $k = 11$ et $k = 16$. Ils donnent l'illusion que le signal d'origine contenait de l'énergie a la fréquence $\frac{11}{N\Delta t} = 55$ Hz, ce qu'on a représenté sur la Figure 2.

$\square$

**Exercice 2.4.10** (Correspondance signaux-spectres). *Voir polycopié*

**Solution:**

— (1) correspond à l'échantillonnage temporel d'une fonction Gaussienne. Le spectre associé est $(A)$, qui correspond à la TFDT du signal sur l'intervalle de pulsations $[-3\pi, 3\pi]$.

— (2) et (3) correspondent à des créneaux continus. On sait que la transformée de Fourier d'un créneau est un sinus cardinal. Par ailleurs, d'après la prop. 2.1.9 du cours, une dilatation d'un signal par un facteur $\lambda$ se traduit par une dilation d'un facteur $1/\lambda$ de sa transformée de Fourier. On en déduit que les spectres associés à (2) et (3) sont (B) et (C), respectivement.

— (4) correspond à l'échantillonnage de la fonction $t \to \sin(2t)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi[$ avec un pas $\Delta t = \pi/16$. Le signal échantillonné est donc

$$\left\{ s[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{16}n - 2\pi\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{16}n\right), n = 0, \dots, 31 \right\}.$$

Le spectre de $s$ présente donc pics aux pulsations $-\frac{\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{8}$.

□

**Exercice 2.4.11** (Modulation d'amplitude)**.** *Pour $0 \leq n < N$, on suppose que le signal continu $s_n$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et que le support de sa transformée de Fourier $\widehat{s_n}$ est inclus dans une bande fréquentielle $]-\omega_0, \omega_0[$. On considère le signal à modulation d'amplitude multiplexé défini par :*

$$s(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n(t) \cos(2n\omega_0 t).$$

1. *Calculer la transformée de Fourier de $s$.*
2. *Quel est le support fréquentiel des fonctions $t \mapsto s_n(t)\cos(2n\omega_0 t)$ ? Avec quel pas de temps faut-il échantillonner le signal pour respecter le critère de Nyquist ?*
3. *Proposer une formule qui permet, sous la forme d'un produit de convolution, de reconstruire les signaux $s_n$ à partir de $s$.*

**Solution:**

1. Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{s}(\omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\mathbb{R}} s_n(t) \cos(2n\omega_0 t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\mathbb{R}} s_n(t) \left( e^{-i(\omega - 2n\omega_0)t} + e^{-i(\omega + 2n\omega_0)t} \right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \widehat{s}_n(\omega - 2n\omega_0) + \widehat{s}_n(\omega + 2n\omega_0) \right).
\end{aligned}$$

Pour $0 \leq n < N$, le support de la transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto s_n(t)\cos(2n\omega_0 t)$ est inclus dans

$$]-(2n+1)\omega_0, -(2n-1)\omega_0[ \cup ](2n-1)\omega_0, (2n+1)\omega_0[.$$

On note que les supports des transformées de Fourier des signaux $t \mapsto s_n(t)\cos(2n\omega_0 t)$ sont deux à deux disjoints. La pulsation maximale présente dans le signal $s$ est :

$$\omega_{max} = (2N-1)\omega_0.$$

La fréquence de Nyquist est donc :

$$f_n = 2(2N-1)\frac{\omega_0}{2\pi}.$$

Le signal doit donc être échantillonné avec un pas de temps

$$\Delta t < \frac{\pi}{(2N-1)\omega_0}$$

pour que le critère de Nyquist soit satisfait.

2. Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, on a :

$$\widehat{s}_n(\omega \mp 2n\omega_0) = 2\widehat{s}(\omega)1_{](-1\pm 2n)\omega_0,(1\pm 2n)\omega_0[}(\omega),$$

de sorte que :

$$\widehat{s}_n(\omega) = 2\widehat{s}(\omega \pm 2n\omega_0)1_{]-\omega_0,\omega_0[}(\omega) = (\widehat{s}(\omega+2n\omega_0)+\widehat{s}(\omega-2n\omega_0))1_{]-\omega_0,\omega_0[}(\omega).$$

D'après la proposition 2.1.9 du cours, la fonction $\omega \mapsto \widehat{s}(\omega+2n\omega_0) + \widehat{s}(\omega-2n\omega_0)$ est la transformée de Fourier de la fonction $h_n : t \mapsto s(t)2\cos(2n\omega_0 t)$. Par ailleurs, la fonction $\widehat{g} : \omega \mapsto 1_{]-\omega_0,\omega_0[}(\omega)$ est dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. En appliquant la formule de la transformée de Fourier inverse, on trouve :

$$g(t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{\sin\omega_0 t}{\pi t}.$$

Pour $0 \leq n < N$, le signal $s_n$ peut donc être reconstitué à partir de $s$ en calculant le produit de convolution

$$s_n(t) = h_n * g(t).$$

Approche alternative : En appliquant la formule de la transformée de Fourier inverse, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$s_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} 1_{]-\omega_0,\omega_0[}(\omega)\Big[\widehat{s}(\omega+2n\omega_0) + \widehat{s}(\omega-2n\omega_0)\Big]e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

L'intégrale correspond au produit hermitien entre la transformée de Fourier de la fonction $u \mapsto g(u)$ et la transformée de Fourier de $u \mapsto h_n(t-u)$ (cf. proposition 2.1.9 du cours). Par conséquent, en appliquant la formule de Plancherel, on trouve que :

$$s_n(t) = \int_{\mathbb{R}} g(u) h_n(t-u) \mathrm{d}u,$$

ce qui correspond bien au produit de convolution ci-dessus.

$\square$

**Exercice 2.4.12** (Tomographie)**.** *La tomographie est une technique d'imagerie très utilisée dans l'imagerie médicale ou en mécanique des matériaux. Le principe de la tomographie consiste à mesurer l'absorption d'un faisceau de rayons X monochromatiques le long de différentes droites traversant l'objet qu'on cherche à imager.*

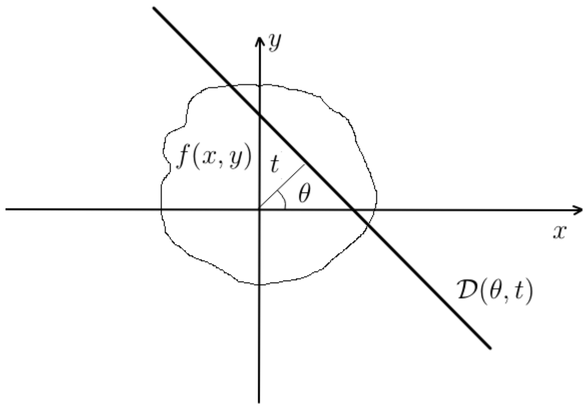


FIGURE 3 – Schéma de principe d'une mesure de tomographie.

*Notons $\mathcal{D}(\theta,t)$ la droite de direction $(-\sin\theta, \cos\theta)$ qui passe par le point $(t\cos\theta, t\sin\theta)$ situé à une distance $t$ de l'origine. Supposons qu'on émette un faisceau de rayons X d'intensité $I_0$ le long de cette droite. Alors, l'intensité transmise à un détecteur situé de l'autre côté de l'objet à imager est donnée par :*

$$I = I_0 \exp(-p_\theta(t))$$

*où*

$$p_\theta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t\cos\theta - \rho\sin\theta, t\sin\theta + \rho\cos\theta) \mathrm{d}\rho.$$

*Dans cette expression, la quantité $f(x,y)$ décrit l'atténuation du rayonnement en chaque point $(x,y)$ de l'espace et correspond à la quantité qu'on cherche à* *déterminer. Dans la suite, on supposera que la fonction $(x, y) \mapsto f(x, y)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$.*

**Transformée de Fourier dans $\mathbb{R}^2$** *La transformée de Fourier bidimensionnelle d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ est définie par :*

$$\hat{f}(\omega_x, \omega_y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) e^{-i(x\omega_x + y\omega_y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

*La transformation de Fourier inverse est donnée par :*

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega_x, \omega_y) e^{i(x\omega_x + y\omega_y)} \mathrm{d}\omega_x \mathrm{d}\omega_y.$$

1. *En effectuant un changement de variable, montrer que la transformée de Fourier de $p_\theta$ est donnée, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ et pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, par :*
$$\widehat{p_\theta}(\omega) = \hat{f}(\omega \cos\theta, \omega \sin\theta).$$

2. *En pratique, on peut faire l'hypothèse que l'essentiel de l'énergie de la fonction $\widehat{p_\theta}$ est concentré dans une bande de fréquence $[-\omega_c, \omega_c]$. Quelle est la taille maximale du pas spatial $\Delta t$ permettant d'échantillonner le signal sans créer de phénomènes d'aliasing ?*

3. *Montrer que pour tout $\theta \in [0, \pi[$, $\widehat{p_{\theta+\pi}}(\omega) = \widehat{p_\theta}(-\omega)$. En effectuant un changement de variable polaire, en déduire que la fonction $f$ peut être reconstruite en posant*
$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{p_\theta}(\omega) |\omega| e^{i\omega(x\cos\theta + y\sin\theta)} \mathrm{d}\omega \right) \mathrm{d}\theta$$
*La fonction $\omega \mapsto |\omega|$ est-elle dans $L^1(\mathbb{R})$ ?*

4. *Pour tout $\epsilon > 0$, on considère la fonction $\hat{g}_\epsilon : \omega \mapsto |\omega| e^{-\epsilon|\omega|}$. Calculer la transformée de Fourier inverse de $\hat{g}_\epsilon$.*

5. *On admet que*
$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{p_\theta}(\omega) \hat{g}_\epsilon(\omega) e^{i\omega(x\cos\theta + y\sin\theta)} \mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{p_\theta}(\omega) |\omega| e^{i\omega(x\cos\theta + y\sin\theta)} \mathrm{d}\omega$$
*En déduire que*
$$f(x, y) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi p_\theta * g_\epsilon(x\cos\theta + y\sin\theta) \mathrm{d}\theta$$

**Solution:**

1. Par définition, on a :

$$\widehat{p_\theta}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t\cos\theta - \rho\sin\theta, t\sin\theta + \rho\cos\theta)e^{i\omega t}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}t$$

   En effectuant le changement de variable donné par :

$$u = t\cos\theta - \rho\sin\theta, \quad v = t\sin\theta + \rho\cos\theta,$$

   on trouve

$$p_\theta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)e^{i\omega(u\cos\theta + v\sin\theta)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \hat{f}(\omega\cos\theta, \omega\sin\theta).$$

2. D'après le critère de Nyquist, l'échantillonnage spatial doit être réalisé à une fréquence supérieure à $\frac{\omega_c}{\pi}$, et donc à un pas de temps inférieur à $\frac{\pi}{\omega_c}$.

3. Par définition de la transformée de Fourier inverse, on a

$$f(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \hat{f}(\omega_x, \omega_y)e^{i(x\omega_x + y\omega_y)}\mathrm{d}\omega_x\mathrm{d}\omega_y.$$

   En passant en coordonnées polaires, on trouve :

$$f(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \hat{g}_\theta(\omega)e^{i\omega x(\cos\theta + y\sin\theta)}\omega\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\theta$$

   En utilisant le fait que $\hat{g}_{\theta+\pi}(\omega) = -\hat{g}_\theta(\omega)$, on trouve finalement :

$$f(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{g}_\theta(\omega)e^{i\omega x(\cos\theta + y\sin\theta)}|\omega|\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\theta$$

4. Pour tout $\epsilon > 0$, la fonction $\hat{g_\epsilon} : \omega \mapsto |\omega|e^{-\epsilon|\omega|}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En découpant l'intégrale sur $\mathbb{R}$ en une intégrale sur $]-\infty, 0]$ et une intégrale sur $[0, +\infty[$, et en effectuant le changement de variable $\omega := -\omega$ dans la première de ces intégrales, on montre que :

$$g_\epsilon(t) = \int_0^{+\infty} \omega e^{-\epsilon\omega}(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t})\mathrm{d}\omega$$

   En effectuant une intégration par parties, on trouve finalement que :

$$g_\epsilon(t) = \frac{2\epsilon^2 - 2t^2}{(t^2+\epsilon^2)^2}.$$

5. D'après la proposition 2.1.9 du cours, la fonction $\omega \to \hat{g}_\epsilon(\omega)e^{-i\omega(x\cos\theta+y\sin\theta)}$ est la transformée de Fourier de la fonction :

$$t \to g_\epsilon(t - x\cos\theta - y\sin\theta).$$

En appliquant la théorème de Plancherel et en notant que $g_\epsilon$ est paire, on trouve :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{p_\theta}(\omega)\hat{g}_\epsilon(\omega)e^{i\omega(x\cos\theta+y\sin\theta)}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} p_\theta(t)g_\epsilon(x\cos\theta+y\sin\theta-t)\mathrm{d}t,$$

On reconnait bien au membre de droite le produit de convolution $p_\theta * g_\epsilon(x\cos\theta + y\sin\theta)$.

$\square$