

Il est remarquable que ce chargement complexe conduise à un état de traction simple selon \underline{e}_r . Les constantes C_1 et C_2 peuvent être directement reliées aux composantes de la force \underline{F} appliquée selon une direction donnée indépendante de la géométrie du dièdre. La dépendance des contraintes en $1/r$ est attendue dans la mesure où la force imposée est équilibrée par les efforts de contact sur tout arc de cercle distant de r du point d'application et dont la surface est en rh . A noter que le problème de Flamant ne comporte aucune longueur caractéristique.

La question de l'existence et de l'unicité des solutions de problèmes impliquant des forces concentrées sortant du cadre classique de Cauchy, est extrêmement délicate. Quelques éléments peuvent être trouvés dans le travail de (Sternberg and Eubanks, 1955).

La question de la pertinence physique de cette solution se pose à nouveau, la dépendance en $1/r$ conduisant à la divergence de l'énergie dans un demi-disque de centre O. On peut se demander si une régularisation peut être obtenue en dépassant la théorie de Cauchy des milieux continus, par exemple en utilisant la théorie du second gradient ou en introduisant des couples de contraintes surfaciques, extensions de la théorie de Cauchy introduisant des longueurs caractéristiques dans la loi de comportement élastique et permettant de lever certaines singularités de la mécanique des milieux continus classique, cf. (Bogy and Sternberg, 1968; Forest, 2006).

21.5 L'essai brésilien de compression diamétrale

*Je suis brésilien, j'ai de l'or,
Et j'arrive de Rio-Janeire
Plus riche aujourd'hui que naguère,
Paris, je te reviens encor—!
Rondeau du Brésilien, La Vie Parisienne,
Jacques Offenbach.*

L'essai brésilien a été inventé en 1943 et est aujourd'hui largement utilisé en mécanique des roches et des sols, ainsi que pour bien d'autres matériaux, cf. (Carneiro, 1943; Fairbairn and Ulm, 2002).

La détermination expérimentale de la limite d'élasticité en traction simple des matériaux fragiles ou quasi-fragiles⁸ est particulièrement délicate. En effet, les essais de traction sur des éprouvettes en forme *d'os de chien*⁹ conduisent à une rupture précoce dans les congés, en raison des concentrations de contraintes qui s'y développent. Ils ne donnent donc pas accès à la limite d'élasticité de traction simple qui correspondrait à une rupture dans le fût de l'éprouvette. L'essai brésilien, appelé aussi essai de traction indirect¹⁰ est un essai de compression diamétrale sur un cylindre ou un disque d'épaisseur h . C'est un essai complexe dans le sens où les champs de contraintes et de déformations ne sont pas homogènes dans l'échantillon. Cependant, on va voir dans ce problème comment cet essai simple et astucieux, dont l'interprétation n'est pas sans difficulté, permet d'estimer la limite d'élasticité en traction d'un matériau quasi-fragile.

L'objectif du problème est d'étudier, dans l'hypothèse des petites perturbations, les contraintes qui règnent dans un cylindre ou un disque placé entre deux plateaux rigides parallèles soumis à deux forces résultantes opposées de norme F , comme sur la figure 21.7a. Le cylindre a une épaisseur h et un rayon R . Il est constitué d'un matériau homogène, élastique, linéaire et isotrope. L'idéalisation de cet essai conduit au problème aux limites de la figure 21.7b où le cylindre est soumis à deux forces opposées. Ces forces correspondent en fait à deux distributions linéiques de forces F/h appliquées sur deux génératrices diamétralement opposées du cylindre. La solution de ce problème idéalisé est proposée d'abord en utilisant de manière astucieuse la solution du problème de Flamant. Les contraintes obtenues permettent ensuite de prévoir la limite d'élasticité de la structure pour les matériaux fragiles.

8. Les matériaux quasi-fragiles s'endommagent un peu avant de rompre brutalement. Les céramiques et les verres sont des matériaux fragiles. Le béton quant à lui présente un endommagement avant la rupture.

9. *Dogbone samples*, en anglais, expression imagée décrivant la forme d'une éprouvette élancée avec des têtes massives permettant le serrage sur une machine d'essai mécanique.

10. *Splitting tension test* ou *indirect tension test* en anglais.

La dernière partie aborde les inconvénients de l'idéalisation de l'essai brésilien en considérant différents types de conditions aux limites plus réalistes. On utilisera pour cela des résultats que l'on peut trouver dans les références (Markides et al., 2010; Li and Wong, 2013; Markides and Kourkoulis, 2013).

Les efforts dus à la pesanteur et à toute autre force volumique sont négligés. L'analyse est limitée au cas statique et isotherme. Le matériau est supposé homogène, élastique et isotrope et dans son état naturel. Toutes les surfaces du disque sont libres. Les efforts ne sont appliqués qu'aux points O_1 et O_2 . Il est donc légitime de se placer dans le contexte des contraintes planes, i.e. $\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0$.

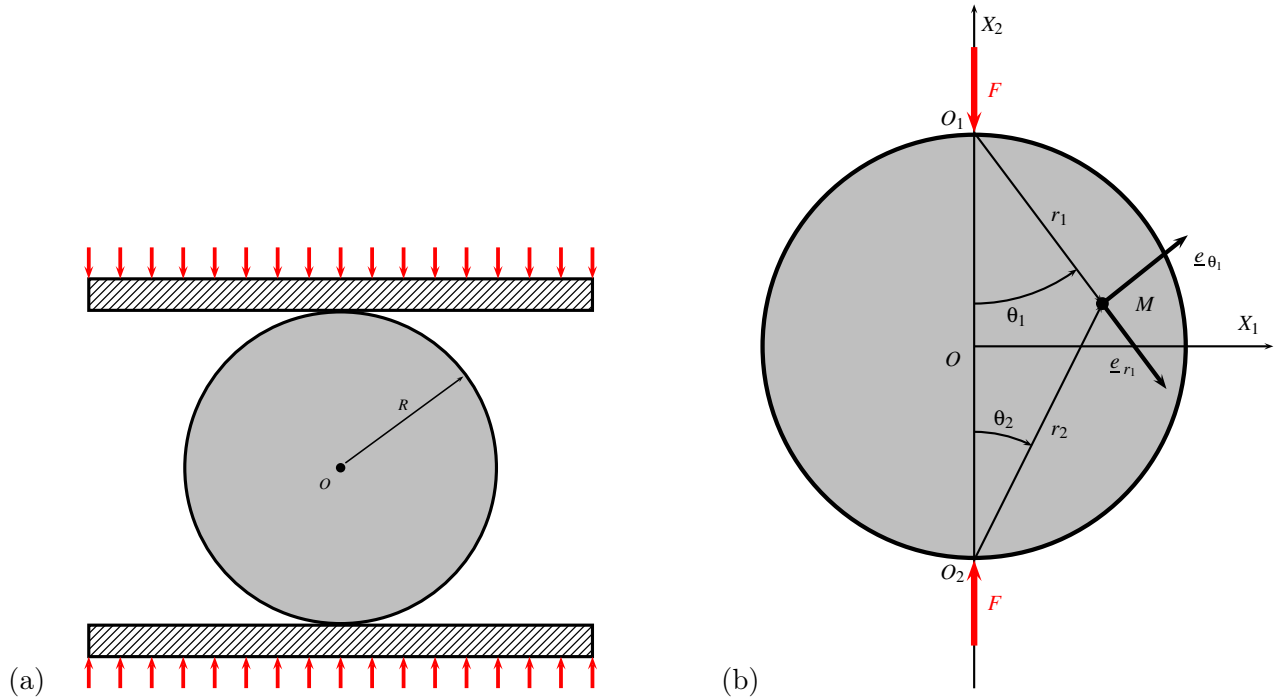


FIGURE 21.7 – Compression diamétrale d'un disque de centre O et de rayon R : (a) schéma de la réalisation pratique de l'essai ; (b) idéalisation de l'essai brésilien, ainsi que le repérage d'un point du disque par les coordonnées polaires (r_1, θ_1) ou (r_2, θ_2) .

Les questions du problème peuvent être résolues indépendamment les unes des autres même s'il faut les aborder dans l'ordre proposé.

21.5.1 Champ de contrainte dans un disque en compression diamétrale

On considère le problème de la compression diamétrale de la figure 21.7b où les génératrices représentées par les points diamétralement opposés O_1 et O_2 sont soumises respectivement aux forces $-F\mathbf{e}_2$ et $F\mathbf{e}_2$, supposées uniformément réparties sur l'épaisseur h .

Une manière élégante et efficace de résoudre le problème de compression diamétrale consiste à le décomposer en trois problèmes élémentaires présentés sur la figure 21.8, à savoir deux problèmes de Flamant et un problème de traction radiale qui reste à définir. Cette résolution à l'aide du principe de superposition est dû à (Timoshenko and Goodier, 1970). C'est la démarche présentée plus récemment dans (Sadd, 2005) qui est suivie ici.

Problème de Flamant n°1

On considère le problème de Flamant n°1 de la figure 21.8 où une force $-F\mathbf{e}_2$ est appliquée uniformément sur la ligne parallèle à la direction 3 (perpendiculaire à la figure) passant par le point O_1 à la surface d'un massif occupant un demi-espace infini.

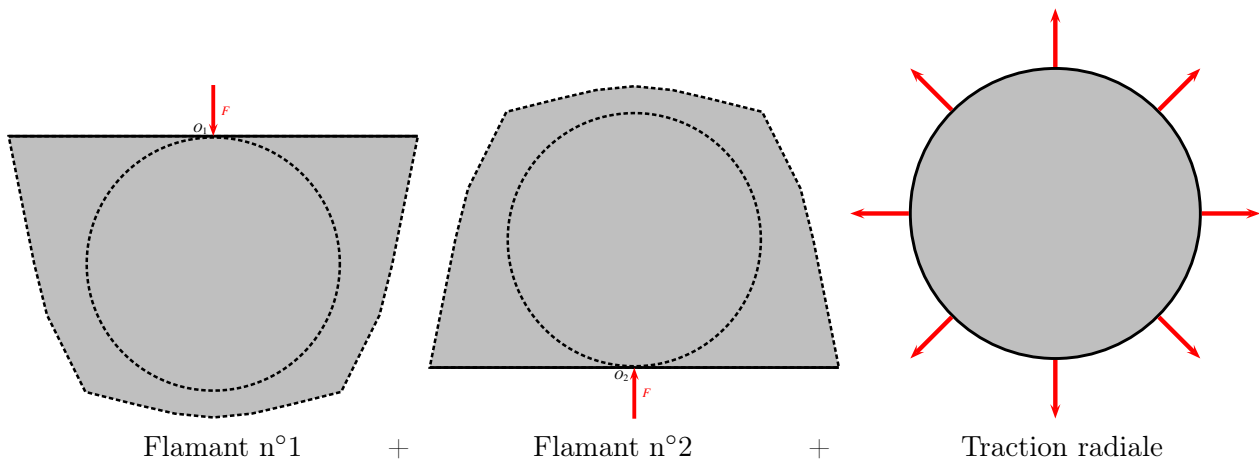


FIGURE 21.8 – Décomposition du problème de compression diamétrale en la superposition de trois problèmes distincts.

En utilisant le repérage polaire (r_1, θ_1) de la figure 21.7b, donner le champ de contrainte solution de ce problème tel qu'il a été obtenu en exercice au chapitre 21. Constater qu'il est purement radial. On ne demande pas d'établir ces formules mais simplement de les adapter aux notations utilisées ici.

Montrer ensuite que cette composante radiale de contrainte est constante le long du cercle de rayon R et tangent en O_1 à la surface du massif de rayon R . Ce cercle est représenté en pointillé sur le dessin de gauche de la figure 21.8. Exprimer cette valeur en fonction de F, h et R .

Calculer le vecteur-contrainte \underline{t}_1 agissant sur les facettes tangentes au cylindre engendré par le cercle précédent. L'exprimer en fonction de F, h, R et du vecteur \underline{e}_{r_1} .

D'après les résultats (21.1) et (21.2), le champ de contraintes est purement radial et de la forme :

$$\underline{\sigma}^{(1)} = -\frac{2F \cos \theta_1}{\pi h r_1} \underline{e}_{r_1} \otimes \underline{e}_{r_1} \quad (21.19)$$

En considérant l'angle au centre du cercle en pointillé dont la valeur est $2\theta_1$, on établit que

$$r_1 = 2R \cos \theta_1$$

Par suite,

$$\underline{\sigma}^{(1)}(r_1 = 2R \cos \theta_1) = -\frac{F}{\pi h R} \underline{e}_{r_1} \otimes \underline{e}_{r_1}, \quad \sigma_{r_1 r_1}^{(1)} = -\frac{F}{\pi h R}$$

Il est remarquable que cette valeur soit identique tout le long du cercle de rayon R !

Le vecteur normal au cercle tangent en O_1 et de rayon R est

$$\underline{e}_r = \cos \theta_1 \underline{e}_{r_1} + \sin \theta_1 \underline{e}_{\theta_1} \quad (21.20)$$

Le vecteur-contrainte agissant sur la facette de normale \underline{e}_r vaut donc

$$\underline{t}^{(1)} = \underline{\sigma}^{(1)}(r_1 = 2R \cos \theta_1) \cdot \underline{e}_r = -\frac{F}{\pi h R} \cos \theta_1 \underline{e}_{r_1} \quad (21.21)$$

Problème de Flamant n°2

Reprendre les trois questions du paragraphe 21.5.1 dans le cas du problème de Flamant n°2 de la figure 21.8. Ce problème consiste en une force linéique $F/h \underline{e}_2$ agissant sur la génératrice du cylindre passant par O_2 sur le demi-espace $X_2 \geq -R$ d'après le repère de la figure 21.7. On utilisera le jeu de

coordonnées polaires (r_2, θ_2) . On notera \underline{t}_2 le vecteur–contrainte agissant sur les facettes tangentes au cylindre engendré par le cercle tangent au plan $X_2 = -R$ passant par O_2 .

On calcule successivement :

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}^{(2)} &= -\frac{2F \cos \theta_2}{\pi h r_2} \underline{e}_{r_2} \otimes \underline{e}_{r_2} \\ \underline{\sigma}^{(2)}(r_2 = 2R \cos \theta_2) &= -\frac{F}{\pi h R} \underline{e}_{r_2} \otimes \underline{e}_{r_2}, \quad \sigma_{r_2 r_2}^{(2)} = -\frac{F}{\pi h R} \\ \underline{t}^{(2)} &= \underline{\sigma}^{(2)}(r_2 = 2R \cos \theta_2) \cdot \underline{e}_r = -\frac{F}{\pi h R} \cos \theta_2 \underline{e}_{r_2}\end{aligned}$$

Traction radiale sur le cercle tangent

Montrer que la superposition des efforts surfaciques précédents \underline{t}_1 et \underline{t}_2 sur un point quelconque du cercle de centre O et de rayon R de la figure 21.7 vaut :

$$\underline{t}^{(1)} + \underline{t}^{(2)} = -\frac{F}{\pi h R} \underline{e}_r \quad (21.22)$$

où \underline{e}_r est le vecteur normal sortant au cercle étudié.

On considère alors le troisième problème de la figure 21.8 (à droite), à savoir la traction radiale d'un disque de rayon R et de centre O soumis à la densité surfacique d'efforts donnée suivante :

$$\underline{t}^d = \frac{F}{\pi h R} \underline{e}_r \quad (21.23)$$

Trouver un champ de contraintes statiquement admissible dans le disque pour la sollicitation (21.23). Montrer qu'il conduit à un champ de déformation compatible.

On a les relations suivantes entre les systèmes de coordonnées (r_1, θ_1) et (r_2, θ_2) pour un point appartenant à la frontière du cercle de rayon R et de centre O (voir figure 21.7b) :

$$\underline{e}_{r_2} = \underline{e}_{\theta_1}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1$$

de sorte que

$$\underline{t}^{(1)} + \underline{t}^{(2)} = -\frac{F}{\pi h R} (\cos \theta_1 \underline{e}_{r_1} + \cos \theta_2 \underline{e}_{r_2}) = -\frac{F}{\pi h R} (\cos \theta_1 \underline{e}_{r_1} + \sin \theta_1 \underline{e}_{\theta_1}) = -\frac{F}{\pi h R} \underline{e}_r$$

en utilisant (21.20).

Le troisième problème aux limites de la figure 21.8 consiste à appliquer le vecteur–contrainte donné opposé au vecteur qui vient d'être calculé. La sollicitation au bord étant homogène, la solution homogène

$$\underline{\sigma}^{(3)} = \frac{F}{\pi h R} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta) = \frac{F}{\pi h R} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) \quad (21.24)$$

remplit les conditions d'équilibre en volume (la divergence d'un champ homogène est nulle) et les conditions au bord (21.23). Il s'agit d'un état de traction équi-biaxiale. Le champ de déformation calculé à partir de la loi de Hooke est nécessairement compatible puisqu'il est homogène. Le champ de contraintes (21.24) est donc la solution du problème n°3.

Résolution à l'aide du principe de superposition

Justifier que le champ de contraintes solution du problème de l'essai brésilien idéalisé de la figure 21.7b est la somme, sur le domaine occupé par le disque, des champs solutions des trois problèmes individuels de la figure 21.8.

Les 3 champs solutions des problèmes de la figure 21.8 sont à divergence nulle. Leur somme vérifie donc les équations de champs d'équilibre statique en l'absence d'efforts volumiques. En tout point

du bord du disque ($r = R$) autre que les points O_1 et O_2 , le vecteur-contrainte est la somme des vecteurs-contraintes appliqués dans les trois problèmes :

$$\underline{t} = \underline{t}^{(1)} + \underline{t}^{(2)} + \underline{t}^d = 0$$

de sorte que les bords du disque sont libres d'effort, condition requise par l'essai brésilien. Le vecteur-contrainte présente une singularité en O_1 et O_2 où sa valeur est indéterminée. La connaissance du problème de Flamant nous informe que les champs de contraintes de Flamant conduisent aux résultantes $-F\underline{e}_1$ et $F\underline{e}_1$. La mécanique des milieux continus à la Cauchy ne permet pas de relier le vecteur-contrainte à un effort ponctuel. On a vu que cette force ponctuelle doit s'interpréter comme la limite d'une distribution surfacique de la forme donnée au paragraphe 21.1.1.

Champ de contraintes pour l'essai brésilien

Montrer que les composantes non nulles des contraintes dans le repère cartésien orthonormé $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ associé aux coordonnées X_1 et X_2 indiquées sur la figure 21.7b, sont

$$\sigma_{11} = -\frac{2F}{\pi h} \left(\frac{(R - X_2)X_1^2}{r_1^4} + \frac{(R + X_2)X_1^2}{r_2^4} - \frac{1}{2R} \right) \quad (21.25)$$

$$\sigma_{22} = -\frac{2F}{\pi h} \left(\frac{(R - X_2)^3}{r_1^4} + \frac{(R + X_2)^3}{r_2^4} - \frac{1}{2R} \right) \quad (21.26)$$

$$\sigma_{12} = \frac{2F}{\pi h} \left(\frac{(R - X_2)^2 X_1}{r_1^4} - \frac{(R + X_2)^2 X_1}{r_2^4} \right) \quad (21.27)$$

avec $r_1^2 = X_1^2 + (R - X_2)^2$ et $r_2^2 = X_1^2 + (R + X_2)^2$.

Le champ des contraintes est la somme des contributions des trois problèmes de la figure 21.8 :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= \underline{\sigma}^{(1)} + \underline{\sigma}^{(2)} + \underline{\sigma}^{(3)} \\ &= -\frac{2F}{\pi h} \left(\frac{\cos \theta_1}{r_1} \underline{e}_{r_1} \otimes \underline{e}_{r_1} + \frac{\cos \theta_2}{r_2} \underline{e}_{r_2} \otimes \underline{e}_{r_2} \right) + \frac{F}{\pi R h} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta) \end{aligned} \quad (21.28)$$

Pour le passage aux coordonnées cartésiennes, on utilise les relations

$$\begin{aligned} X_1 &= r_1 \sin \theta_1 = -r_2 \sin \theta_2, & X_2 &= R - r_1 \cos \theta_1 = r_2 \cos \theta_2 - R \\ \underline{e}_{r_1} &= \sin \theta_1 \underline{e}_1 - \cos \theta_1 \underline{e}_2, & \underline{e}_{r_2} &= -\sin \theta_2 \underline{e}_1 + \cos \theta_2 \underline{e}_2 \end{aligned}$$

Contraintes le long du diamètre comprimé $X_1 = 0$

Donner l'expression des contraintes le long du diamètre $X_1 = 0$.

Souligner deux caractéristiques remarquables de ces profils de contraintes.

Donner les expressions des contraintes au centre O . Commenter.

Justifier la dénomination d'«essai de traction indirect» parfois utilisée pour désigner l'essai brésilien.

Les contraintes le long de l'axe diamétral comprimé valent

$$\sigma_{11} = \frac{F}{\pi R h}, \quad \sigma_{22} = -\frac{2F}{\pi h} \left(\frac{1}{R - X_2} + \frac{1}{R + X_2} - \frac{1}{2R} \right), \quad \sigma_{12} = 0 \quad (21.29)$$

Le diamètre est donc soumis à une contrainte de traction selon 1 de valeur constante. La contrainte selon 2 est quant à elle de compression et variable le long du diamètre. Elle présente une singularité en O_1 et O_2 . Au centre du disque, l'état de contrainte est biaxial :

$$\boxed{\sigma_{11}^O = \frac{F}{\pi R h}, \quad \sigma_{22}^O = -\frac{3F}{\pi R h} = -3\sigma_{11}^O} \quad (21.30)$$

Les contraintes principales par ordre décroissant sont donc, au centre du disque :

$$\sigma_1 = \frac{F}{\pi R h}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\frac{3F}{\pi R h}$$

La plus grande contrainte principale est de traction tandis que la plus petite est de compression mais trois fois plus grande en amplitude.

Contraintes le long du diamètre $X_2 = 0$

Donner les contraintes le long de la ligne $X_2 = 0$.
Commenter ces profils en vous aidant de la figure 21.9 sur laquelle sont tracées ces contraintes ainsi que celles trouvées précédemment.

On trouve sur cette ligne :

$$\sigma_{11}(X_1, 0) = \frac{F}{\pi R h} \left(\frac{R^2 - X_1^2}{R^2 + X_1^2} \right)^2, \quad \sigma_{22}(X_1, 0) = -\frac{F}{\pi R h} \left(\frac{4R^4}{r_1^4} - 1 \right) \quad (21.31)$$

La contrainte σ_{22} reste de compression jusqu'au bord $X_1 = R, X_2 = 0$. La contrainte σ_{11} est toujours de traction mais décroissante du centre vers le bord le long de cette ligne.

Observation des champs

On a représenté les champs de contraintes σ_{11}, σ_{22} et σ_{12} sur les figures 21.9b, c et d, respectivement. A partir de ces champs, on a pu calculer la contrainte principale maximale et le cisaillement maximal en tout point, sur la figure 21.10. Montrer qu'avec la forme du tenseur des contraintes dont les seules composantes non nulles sont $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$, le cisaillement maximal vaut :

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2} \quad (21.32)$$

Les observations de photoélasticimétrie de l'essai brésilien conduisent aux lignes isochromes de la figure 21.11. A la lumière des champs de contraintes calculés et représentés sur les figures 21.9 et 21.10, commenter ces résultats expérimentaux.

Les contraintes σ_{11} et σ_{22} sont les contraintes principales non nulles le long des diamètres $X_1 = 0$ et $X_2 = 0$. Il y en a une positive et une négative. La troisième est nulle. Les champs tracés révèlent que cette répartition des valeurs propres s'étend à l'ensemble du disque. La trace et le déterminant de la sous-matrice fournissent :

$$\sigma_1 + \sigma_3 = \sigma_{11} + \sigma_{22}, \quad \sigma_1 \sigma_3 = \sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12}^2$$

Avec ces relations, on établit alors que

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2$$

Le cisaillement maximal n'est autre que $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ ce qui conduit à la relation recherchée (21.32). Les interférences de photoélasticimétrie sont directement liées à la différence des valeurs propres dans le plan et donc au champ de cisaillement maximal. C'est pourquoi les courbes obtenues ont des formes similaires aux lignes de niveau du cisaillement maximal de la figure 21.10.

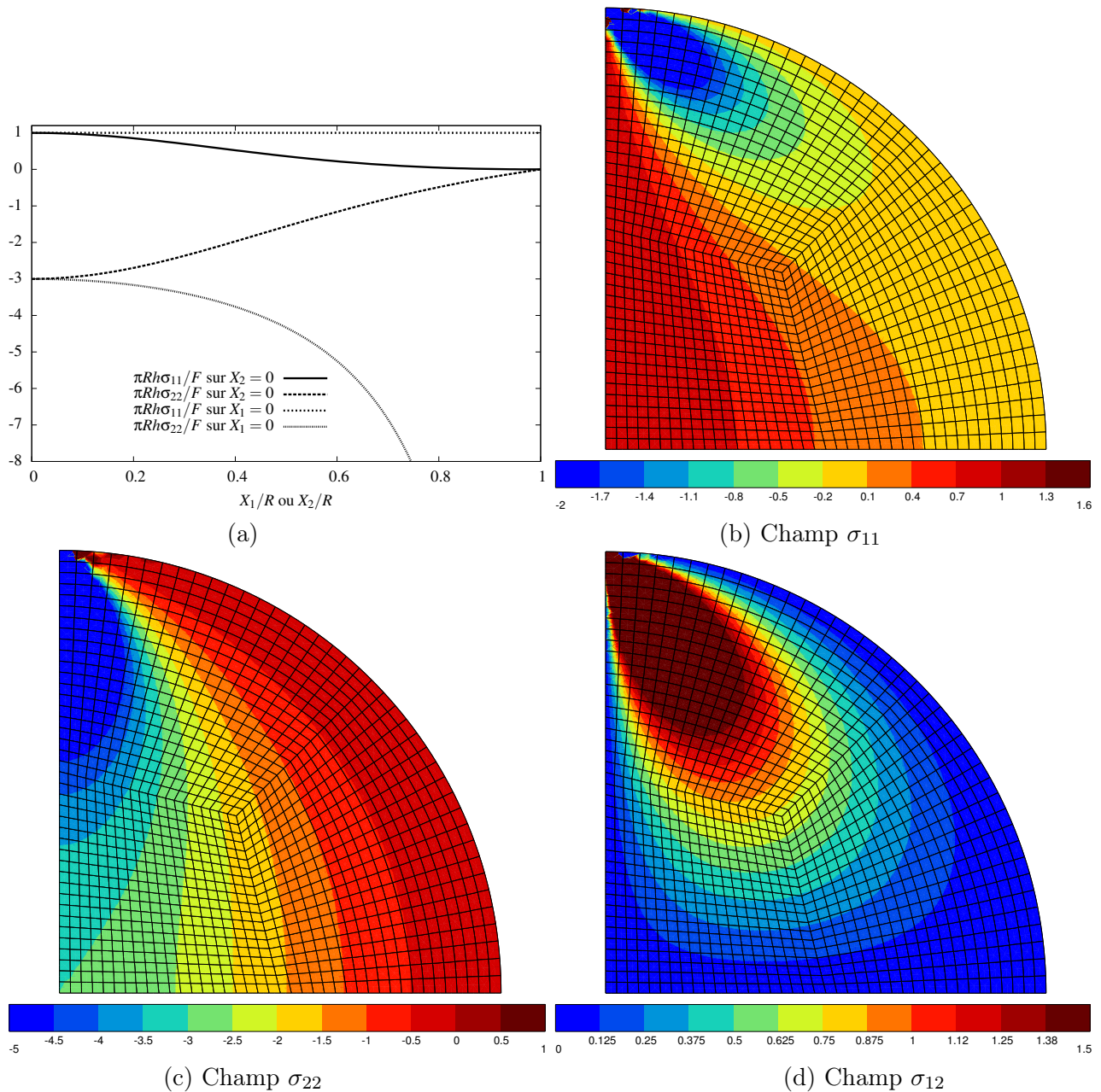


FIGURE 21.9 – (a) Profils des contraintes normalisées le long des diamètres $X_1 = 0$ et $X_2 = 0$, cf. figure 21.7 pour le système de coordonnées. Les abscisses sont limitées à $X_1 \geq 0$ et $X_2 \geq 0$ pour des raisons de symétrie. Champs des contraintes (b) σ_{11} , (c) σ_{22} et (d) σ_{12} . Ces contraintes, calculées grâce à la méthode des éléments finis, sont normalisées par $F/\pi R h$. Un quart du disque seulement est représenté pour des raisons de symétrie. Le coin correspond au centre O du disque. Les quelques artefacts visibles près du point O_1 sont dus aux effets de maillage à l'endroit de l'application de la force. Ils dépendent de la finesse du maillage dans cette zone.

Application d'un critère de rupture

Proposer un critère de rupture fragile, par exemple adapté à la prévision de la rupture du béton pour lequel l'essai brésilien a d'ailleurs été développé à l'origine.

En supposant que la rupture ait lieu dans la zone centrale, hypothèse que l'on tentera de justifier, exprimer la force F_c à rupture en fonction des caractéristiques de l'essai et du matériau. Vous serez amené à introduire une nouvelle caractéristique importante du matériau, contenue dans le critère

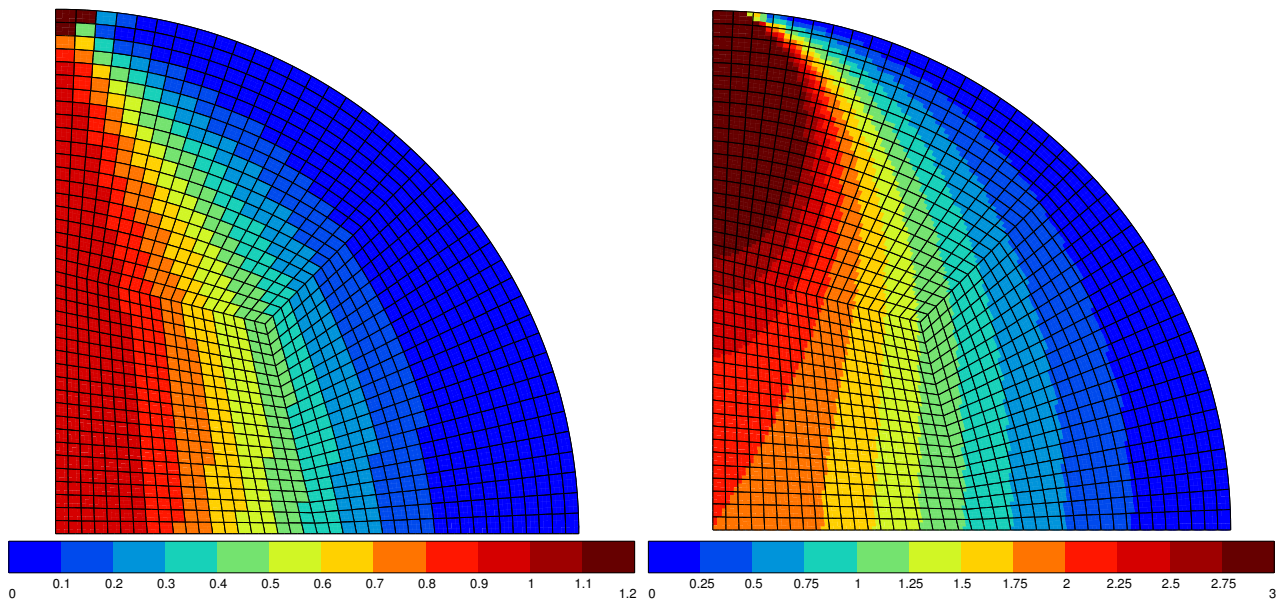


FIGURE 21.10 – Champs de la contrainte principale maximale (à gauche) et du cisaillement maximal (à droite). Elles sont normalisées par la contrainte de référence $F/\pi Rh$.

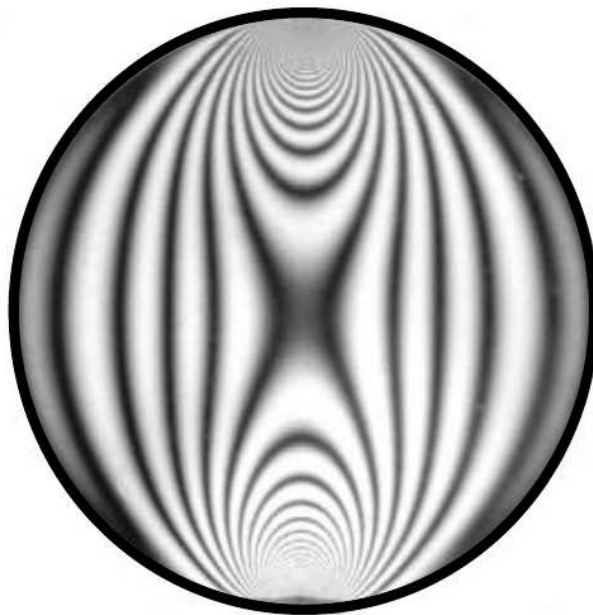


FIGURE 21.11 – Lignes isochromes obtenues par photoélasticité de l'essai brésilien sur un polymère biréfringent soumis à l'essai de compression diamétrale (d'après (Sadd, 2005)).

proposé.

Quelle est l'orientation de la fissure ? Dessiner l'échantillon rompu.

Les matériaux fragiles se rompent typiquement lorsque la contrainte principale maximale atteint une valeur critique positive, σ_c . Cette caractéristique importante du matériau est la contrainte à rupture en traction simple. Le champ de contrainte principale σ_1 est donné sur la figure 21.10. Si l'on excepte les zones des pôles O_1 et O_2 , sièges d'une singularité des contraintes en $1/r$ et donc où ces valeurs n'ont pas

de réel sens physique, la contrainte principale est maximale et positive tout le long du diamètre $X_1 = 0$. Cette contrainte de traction, si elle atteint la valeur critique σ_c , va provoquer la rupture. Dans cette zone diamétrale, la contrainte principale est proche de la contrainte σ_{11} de la figure 21.9b. Nous avons observé que σ_{11} est constante tout au long de ce diamètre. C'est cette contrainte qui va engendrer une fissure perpendiculaire à la direction principale X_1 . L'échantillon est rompu en deux morceaux selon ce diamètre comme sur la figure 21.12. La valeur critique de la force est obtenue lorsque

$$\sigma_{11} = \frac{F_c}{\pi R h} = \sigma_c \quad \Rightarrow \quad F_c = \pi \sigma_c R h$$

Application numérique

Calculer la force F à appliquer pour rompre un disque d'épaisseur 1 cm et de rayon 5 cm constitué d'un béton dont la contrainte à rupture en traction est de 3 MPa.

$$F_c = 4712 \text{ N}$$

21.5.2 Etude du champ des déformations

Méthode de calcul du champ des déformations et des déplacements

Indiquer comment calculer les déformations à partir des résultats précédents. On ne demande pas de le faire explicitement car c'est un peu long à écrire. On va se contenter de calculer les déformations diamétrales dans la question suivante.

Indiquer la méthode de construction du champ de déplacement à partir du champ des déformations ainsi obtenues. Il n'est pas demandé de le faire car ce n'est guère possible dans le temps imparti. Pensez-vous que cette démarche pourra aboutir ?

La loi de Hooke nous permet de passer des contraintes calculées précédemment et données par les expressions (21.25) à (21.27), aux déformations.

L'existence du champ des déplacements dépend de la compatibilité des déformations ainsi obtenues. Il faut vérifier si les équations de compatibilité, données en coordonnées cartésiennes, sont satisfaites. Dans le cas favorable, la méthode de construction du champ de déplacement en passant par le calcul des rotations infinitésimales est possible dans le cas des coordonnées cartésiennes. Cela dit, les déformations sont également la superposition des déformations associées aux trois problèmes de la figure 21.8. Il est clair que le problème numéro 3 d'expansion biaxiale conduit indubitablement à un champ de déformation compatible. Le cas du problème de Flamant a été traité au paragraphe 21.1.4. Il y est montré que les déplacements dans le plan peuvent être calculés mais qu'aucun champ u_3 satisfaisant ne peut être déduit. Cela remet en question l'absence de dépendance des champs de contraintes envisagés par rapport à X_3 . On sait que la situation des contraintes planes ne permet pas, en général, d'aboutir à une solution tridimensionnelle acceptable, mais qu'elle fournit, dans certaines conditions, une estimation fructueuse, cf. les discussions des paragraphes 9.3.2 et 19.6, voir également le chapitre 18. C'est le cas ici et on va continuer à étudier la solution, approchée, déterminée précédemment.

Déformations diamétrales

Montrer que la déformation ε_{22} le long du diamètre $X_1 = 0$ vaut

$$\varepsilon_{22} = \frac{F}{\pi E R h} \left(1 - \nu - \frac{4R^2}{R^2 - X_2^2} \right) \quad (21.33)$$

Montrer que la déformation ε_{11} le long du diamètre $X_2 = 0$ vaut

$$\varepsilon_{11} = \frac{F}{\pi E R h} \left(1 - \nu - \frac{4R^2(X_1^2 - \nu R^2)}{(R^2 + X_1^2)^2} \right) \quad (21.34)$$

Calculer la variation de longueur de ces deux diamètres. Vous allez rencontrer une difficulté dans un des cas. Commenter.

La déformation le long du diamètre vertical $X_1 = 0$ se calcule à partir des contraintes (21.31) :

$$\varepsilon_{22}(X_1) = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11})$$

La déformation le long du diamètre horizontal $X_2 = 0$ se calcule à partir des contraintes (21.31) :

$$\varepsilon_{11}(X_1) = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22})$$

Pour trouver l'expression (21.34), on utilise le fait que

$$(R^2 - X_1^2)^2 = (R^2 + X_1^2)^2 - 4R^2 X_1^2$$

La variation de longueur entre deux points du diamètre vertical avec $X_2 = \pm a/R$ est fournie par la différence :

$$\begin{aligned} u_2(0, a) - u_2(0, -a) &= \int_{-a}^a u_{2,2} dX_2 = \int_{-a}^a \varepsilon_{22} dX_2 \\ &= \frac{F}{\pi ERh} \left((1-\nu)2a - 2R \int_{-a/R}^{a/R} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) du \right) \\ &= \frac{F}{\pi ERh} \left((1-\nu)2a + 4R \log \frac{1-a/R}{1+a/R} \right) \end{aligned} \quad (21.35)$$

Cette expression n'a pas de limite quand $a \rightarrow R$. Cela est dû à la singularité des champs aux points O_1 et O_2 . Le modèle ne permet pas de prévoir la réduction diamétrale correspondante.

La variation de longueur entre deux points du diamètre horizontal avec $X_1 = \pm a/R$ est fournie par la différence :

$$\begin{aligned} u_1(a, 0) - u_1(-a, 0) &= \int_{-a}^a u_{1,1} dX_2 = \int_{-a}^a \varepsilon_{11} dX_1 \\ &= \frac{F}{\pi ERh} \left((1-\nu)2a - 4R \int_{-a/R}^{a/R} \frac{u^2 - \nu}{(1+u)^2} du \right) \\ &= \frac{F}{\pi ERh} \left(2(1-\nu)(a - 2R \arctan \frac{a}{R}) + 4R^2(1+\nu) \frac{a}{R^2 + a^2} \right) \end{aligned} \quad (21.36)$$

En prenant $a = R$, on obtient la variation relative du diamètre horizontal :

$$\frac{u_1(R, 0) - u_1(-R, 0)}{2R} = \frac{\nu F}{\pi ERh}$$

On voit qu'il s'agit d'une augmentation du diamètre dès que $\nu > 0$.

Identification des modules d'élasticité

Calculer les déformations ε_{11}^O et ε_{22}^O au centre O .

A partir des expressions des déformations au centre du disque, établir une condition nécessaire permettant de respecter le contexte infinitésimal.

Montrer que la mesure de ces déformations, avant rupture, permet de déterminer expérimentalement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau. Exprimer ces modules en fonction de la charge F appliquée, des caractéristiques du disque et des déformations mesurées dans la zone centrale. Comment mesurer ces déformations expérimentalement ?

Les déformations au centre se déduisent des contraintes (21.30)

$$\varepsilon_{11}^O = \frac{(1+3\nu)F}{\pi ERh}, \quad \varepsilon_{22}^O = -\frac{(3+\nu)F}{\pi ERh} = -\frac{3+\nu}{1+3\nu}\varepsilon_{11}^O \quad (21.37)$$

Elles peuvent être mesurées de manière classique grâce à des jauges de déformations collées à cet endroit. Aujourd'hui on a également recours à la méthode appelée DIC (*Digital Image Correlation*) en filmant, au cours de l'essai, la surface de l'échantillon marquée par un réseau de lignes, de points, une peinture de motifs aléatoires noirs et blancs ou le contraste naturel, comme dans (Han et al., 2018)¹¹. Cette méthode a l'avantage de fournir non seulement une valeur locale mais également le champ bidimensionnel complet des déplacements.

Ces déformations doivent rester suffisamment petites ce qui exige que la force appliquée soit telle que

$$\frac{F}{ERh} \ll 1$$

On peut inverser les relations précédentes pour exprimer les modules d'élasticité en fonction des caractéristiques de l'expérience et des déformations mesurées :

$$E = -\frac{8F}{\pi Rh(\varepsilon_{11} + 3\varepsilon_{22})}, \quad \nu = -\frac{3\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11} + 3\varepsilon_{22}}$$

ce qui autorise une identification de ces paramètres intrinsèques du matériau à partir des mesures.

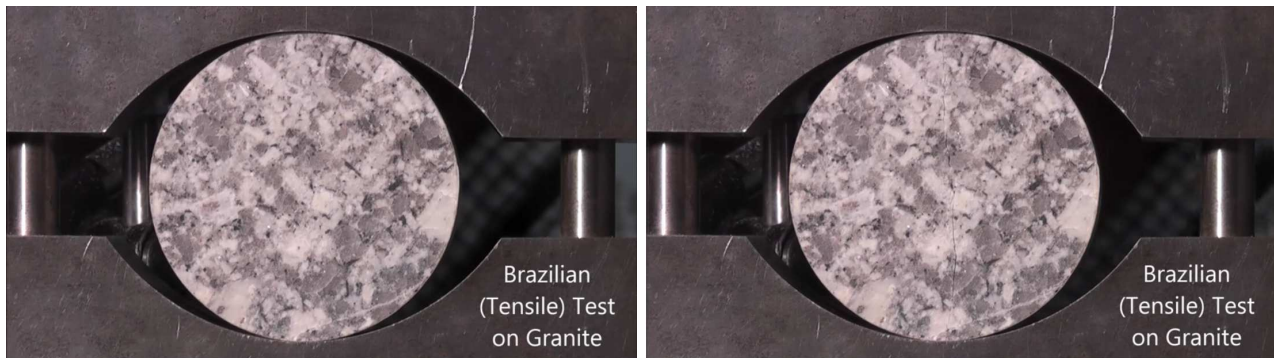


FIGURE 21.12 – Réalisation de l'essai brésilien sur une carotte de granite : état initial (à gauche) et rompu (à droite). La fissure à droite est très fine et visible en zoomant. Le film de l'essai est consultable sur YouTube : <https://www.youtube.com/watch?v=IsoN2dzJn6w>.

21.5.3 Considération de conditions aux limites plus réalistes

L'application d'une force concentrée en O_1 et en O_2 est une idéalisation de l'essai brésilien qui entraîne certaines difficultés de comparaison entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux. Pour s'approcher de conditions plus réalistes, on propose de passer de l'application de forces concentrées à des forces distribuées sur une surface.

Charge distribuée sur un arc d'angle α

On remplace la force ponctuelle considérée précédemment par une distribution de pression p constante imposée sur les arcs de cercle d'angle 2α représentés sur la figure 21.13.

11. Noter que les expressions données par (Han et al., 2018) sont fausses pour le cisaillement. Voir également le document en ligne :

<http://eduscol.education.fr/sti/sites/eduscol.education.fr.sti/files/ressources/pedagogiques/5746/5746-application-de-la-correlation-dimages-identification-de-parametres-elastiques-ens-v2.pdf>

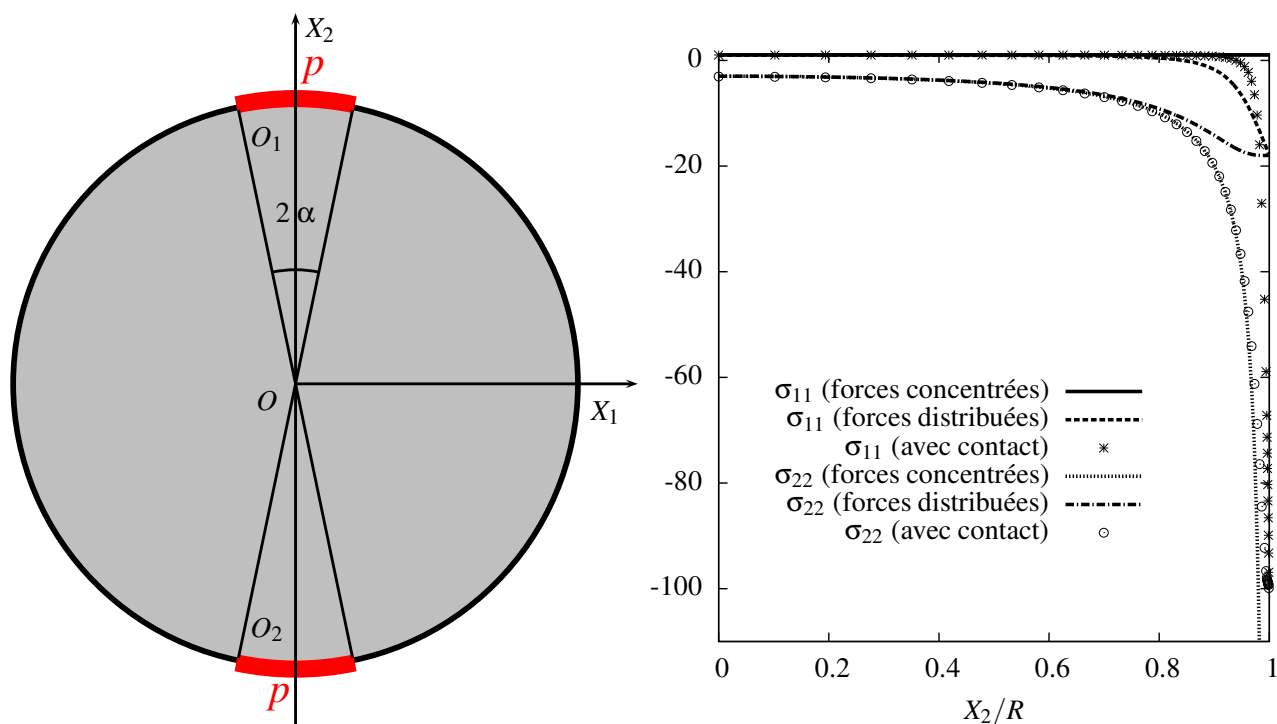


FIGURE 21.13 – A gauche : disque soumis à une pression constante p sur les arcs de cercle d'angle 2α représentés par un trait épais rouge. A droite : Comparaison des profils de contraintes normalisées le long du diamètre $X_1 = 0$ pour trois types de conditions aux limites permettant de s'approcher des conditions de plus en plus réalistes de l'essai brésilien : forces concentrées ou pression distribuée (solutions analytiques trouvées dans le problème) et prise en compte du contact disque/plateau (calcul par éléments finis).

Quelle est la force F résultante associée à la pression p appliquée sur l'arc centré en O_1 ?

La résolution de ce problème peut se faire grâce à la superposition des solutions associées à des forces élémentaires connues d'après le travail précédent. On ne demande pas de le faire. On se contente de donner ici les expressions des contraintes¹² le long du diamètre $X_1 = 0$:

$$\sigma_{11} = \frac{F}{\pi R h \alpha} \left(\frac{R^2(R^2 - X_2^2) \sin 2\alpha}{R^4 - 2R^2 X_2^2 \cos 2\alpha + X_2^4} - \arctan \left(\frac{R^2 + X_2^2}{R^2 - X_2^2} \tan \alpha \right) \right) \quad (21.38)$$

$$\sigma_{22} = -\frac{F}{\pi R h \alpha} \left(\frac{R^2(R^2 - X_2^2) \sin 2\alpha}{R^4 - 2R^2 X_2^2 \cos 2\alpha + X_2^4} + \arctan \left(\frac{R^2 + X_2^2}{R^2 - X_2^2} \tan \alpha \right) \right) \quad (21.39)$$

Comparer ce champ à celui trouvé au paragraphe 21.5.1 en extrayant deux faits remarquables. On pourra s'aider de la figure 21.14.

Exprimer ces contraintes au centre O .

Vérifier la cohérence avec les expressions trouvées au paragraphe 21.5.1.

Calculer la déformation ε_{22} le long du diamètre $X_1 = 0$.

Etes-vous en mesure de calculer la réduction diamétrale ?

La pression appliquée p correspond à la force $F = 2phR \sin \alpha$.

Par rapport au champ de contrainte trouvé précédemment, on remarque que la contrainte σ_{11} n'est plus constante. C'est une contrainte de traction sauf près des zones où la pression est appliquée. Il est remarquable que la contrainte σ_{22} n'est pas singulière en $X_2 = \pm R$. En effet, les expressions précédentes

12. Elles sont issues de la référence (Li and Wong, 2013).

possèdent une limite finie lorsque $X_2 \rightarrow R$:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = -\frac{F}{2Rh\alpha}$$

Elles tendent vers l'infini lorsque $\alpha \rightarrow 0$ et qu'on se rapproche de l'application d'une force concentrée. Les contraintes au centre valent :

$$\sigma_{11} = \frac{F}{\pi Rh} \left(\frac{\sin 2\alpha}{\alpha} - 1 \right), \quad \sigma_{22} = -\frac{F}{\pi Rh} \left(\frac{\sin 2\alpha}{\alpha} + 1 \right)$$

Elles tendent vers les valeurs (21.30) lorsque $\alpha \rightarrow 0$, comme il se doit.

La déformation $\varepsilon_{22} = (1 - \nu)\sigma_{22}/E - \nu\sigma_{11}/E$ se calcule à partir des contraintes précédentes :

$$\varepsilon_{22} = -\frac{F}{\pi ERh\alpha} \left((1 + \nu) \frac{R^2(R^2 - X_2^2) \sin 2\alpha}{R^4 - 2R^2X_2^2 \cos 2\alpha + X_2^4} + (1 - \nu) \arctan \left(\frac{R^2 + X_2^2}{R^2 - X_2^2} \tan \alpha \right) \right) \quad (21.40)$$

La contraction diamétrale se calcule en intégrant la déformation ε_{22} le long du diamètre $X_1 = 0$:

$$-\frac{\pi Rh\alpha}{F} (u_2(O_2) - u_2(O_1)) = \int_{-1}^1 (1 + \nu) \frac{(1 - u^2) \sin 2\alpha}{1 - 2u^2 \cos 2\alpha + u^4} + (1 - \nu) \arctan \left(\frac{1 + u^2}{1 - u^2} \tan \alpha \right) du$$

Ces deux intégrales ont le mérite d'être convergentes de sorte qu'il est loisible de calculer une contraction diamétrale finie en fonction de la force appliquée. C'est un progrès par rapport à la solution du problème avec des forces concentrées qui conduit à une divergence du déplacement relatif, cf. paragraphe 21.5.2.

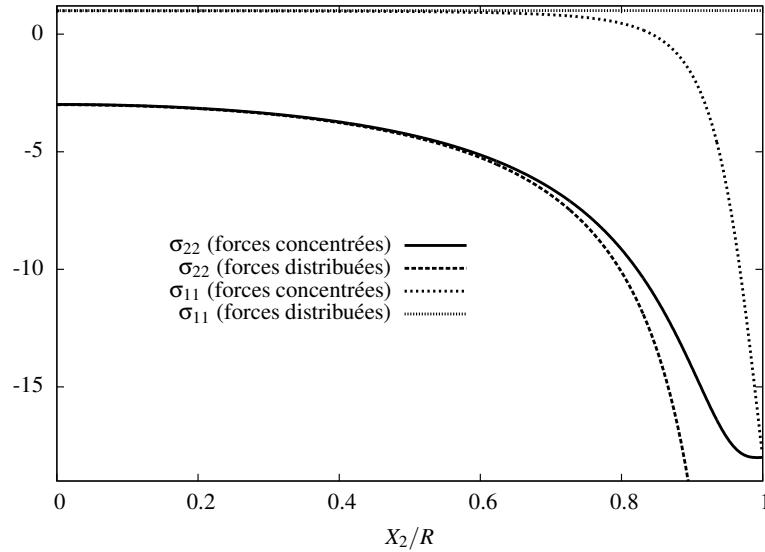


FIGURE 21.14 – Profils des contraintes le long du diamètre $X_1 = 0$ obtenus en appliquant au disque des efforts concentrés F ou en distribuant ces efforts grâce à une pression p appliquée sur deux arcs d'angle au centre $2\alpha = 10^\circ$. Les contraintes sont normalisées par $F/\pi Rh$.

Prise en compte du contact

L'application de la charge lors de l'essai brésilien résulte bien plutôt du contact entre une plaque rigide, plane (comme sur la figure 21.7a) ou courbe comme sur l'expérience de la figure 21.12. La surface de contact entre le corps rigide et l'échantillon est une inconnue du problème. Autrement dit, l'angle α de la question précédente n'est pas une donnée du problème réel. En outre, les efforts de contact diffèrent d'une pression uniforme. Pour déterminer toutes ces inconnues il faut recourir à

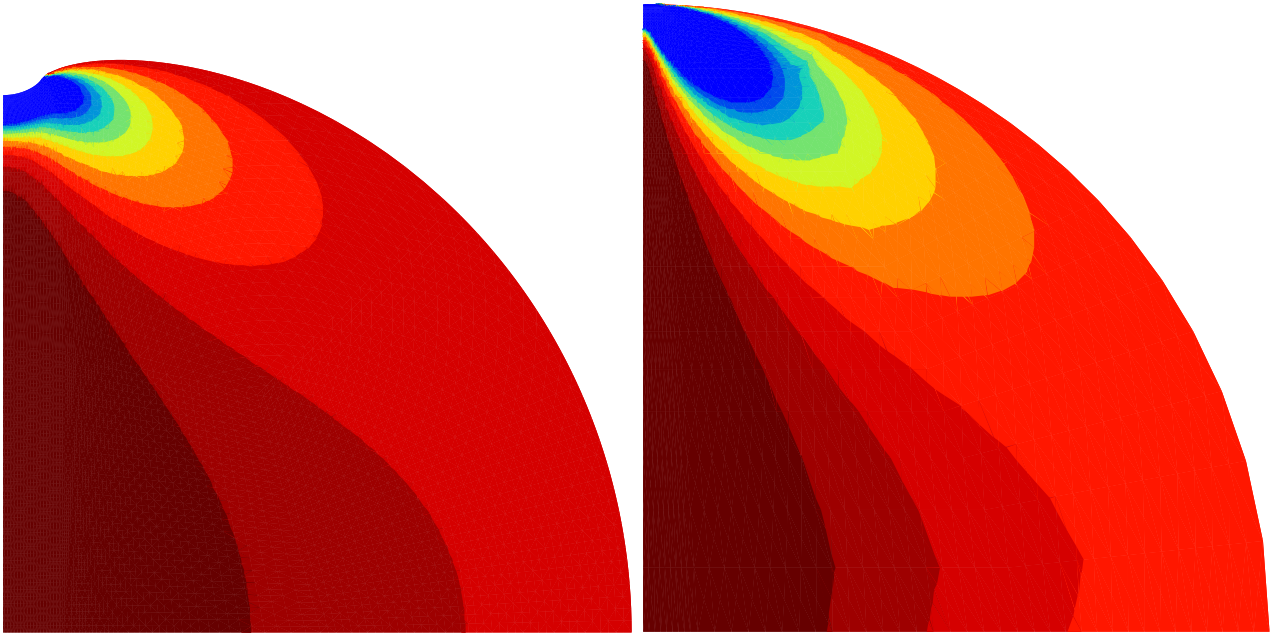


FIGURE 21.15 – Comparaison qualitative des distributions de la contrainte σ_{11} obtenue par éléments finis pour deux types de conditions aux limites : pression imposée sur un secteur de 10° (à gauche) et contact avec une plaque rigide (à droite). Sur la figure de gauche, la déformée du disque a été amplifiée d'un facteur 2000 pour montrer que la surface d'application de la pression n'est pas plane, contrairement au cas de la prise en compte du contact.

la théorie de Hertz du contact, non présentée ici. Il est possible également de réaliser un calcul par éléments finis prenant en compte le contact entre la plaque et l'échantillon. La surface de contact est initialement nulle et augmente progressivement avec la charge appliquée. C'est un problème non linéaire en raison des conditions de contact. Le contact peut être supposé glissant ou non glissant en première approximation. Le frottement est une question importante supplémentaire qui doit également être prise en compte pour une analyse plus fine (Markides and Kourkoulis, 2013). Le frottement introduit des contraintes de cisaillement s'ajoutant aux contraintes normales sur la surface de l'échantillon en contact avec la plaque.

Les contraintes σ_{11} et σ_{22} le long du diamètre $X_1 = 0$ sont données sur la figure 21.13b et comparées aux estimations précédentes. Elles ont été obtenues grâce à un calcul par éléments finis prenant en compte le contact d'une plaque (plane) sans frottement avec l'échantillon.

Commenter les différences entre les prévisions des différents modèles.

Les solutions analytiques des deux problèmes traités représentent une bonne description du champ solution correspondant à l'application d'une pression constante appliquée (cf. (Markides and Kourkoulis, 2013)), à condition que la rupture ne s'amorce pas dans la zone de contact. Une rupture à partir de la zone de contact peut se produire lorsque le frottement est non négligeable. La prise en compte du contact conduit à des contraintes de compression plus fortes dans la zone de contact ($X_2 = R$) par rapport à la solution en pression appliquée. Les champs de contrainte σ_{11} dans le disque dans le cas d'une pression appliquée et dans le cas du contact sont représentées sur la figure 21.15. Ils sont qualitativement assez proches, les différences quantitatives étant marquées dans la zone d'application des efforts.

