Introduction à la Microéconomie

Préférences et utilité

Pierre Fleckinger

Version : Février 2023

Cette note examine les préférences d'un agent économique. La première partie étudie le choix de l'agent entre différentes alternatives et la possibilité de *réprésenter* ces préférences par une fonction d'utilité. La deuxième partie discute deux propriétés importantes des préférences : la monotonie et la convexité. La troisième partie présente les courbes d'indifférence de l'agent qui représentent les compromis ("tradeoffs") entre différents biens, et des exemples sont donnés dans la dernière partie.

1 Fondations de la fonction d'utilité

1.1 Axiomes des préférences

Un agent fait face à un ensemble d'alternatives, c'est-à-dire de choix possibles mutuellement exclusifs : $A = \{a, b, c...\}$, par exemple un ensemble de biens comme des télévisions ou des voitures dont il n'achètera qu'une unité, ou encore un ensemble de paniers de biens (des caddies de supermarchés remplis de différents produits).

Pout deux biens a et b, l'agent préfère faiblement a à b si a est au moins aussi bien pour lui que b. La **relation de préférence** correspondante est noté $a \succcurlyeq b$.

Nous imposons deux propriétés fondamentales sur les préférences, décrites par les deux axiomes suivants :

Axiome 1 : Complétude. Pour toute paire $(a, b) \in A^2$, soit $a \succcurlyeq b$, soit $b \succcurlyeq a$, soit les deux à la fois.

Axiome 2 : Transitivité. Pour tout triplet $(a, b, c) \in A^3$, si $a \succcurlyeq b$ et $b \succcurlyeq c$, alors $a \succcurlyeq c$.

Ainsi, un agent a des préférences complètes s'il est toujours capable de comparer deux alternatives. Il peut être indifférent entre deux d'entre elles (ce qui correspond au troisième cas de l'axiome de complétude). [1] Il a des préférences transitives si elles sont cohérentes (elles ne comportent pas de cycles). Ceci est illustré dans les exemples suivants.

Premier exemple : supposons qu'entre deux voitures, un agent préfère toujours la plus rapide. Ces préférences sont complètes, puisque soit l'une des voitures est plus rapide que

1. On utilise aussi la notation "$a \sim b$" dans le cas d'indifférence, c'est-à-dire quand à la fois $a \succcurlyeq b$ et $b \succcurlyeq a$, ainsi que la notation "$a \succ b$" quand $a \succcurlyeq b$, mais que $b \succcurlyeq a$ n'est pas vrai.

l'autre, soit elles sont aussi rapides. Elles sont aussi transitives, puisque si une voiture a va plus qu'une vite qu'une voiture b, qui elle même va plus vite qu'une voiture c, alors a va plus vite que c.

Deuxième exemple : supposons qu'entre deux voiture, un agent préfère toujours la plus rapide et la plus grosse. Ces préférences sont bien transitives. Cependant, elles ne sont pas complètes : entre une Ferrari, plus rapide et plus petite, et un SUV, plus lent et plus gros, on ne sait pas ce que préfère l'agent. L'axiome de complétude indique que ces préférences sont déraisonnables ; et en pratique, un agent se déciderait entre l'une ou l'autre des voitures si on lui permet d'examiner les deux voitures.

Troisième exemple : supposons que l'agent préfère une Ferrari à une Tesla parce qu'elle est plus rapide, un SUV à une Ferrari parce qu'il est plus gros, et une Tesla à un SUV, parce qu'elle est moins polluante (en tout cas à la consommation). Alors l'axiome de transitivité indique que ces préférences ne sont pas raisonnables : si l'environnement est un aspect qui lui importe, l'agent doit aussi le prendre en compte dans ses choix entre une Ferrari et une Tesla, et entre un SUV et une Ferrari.

1.2 Fonction d'utilité

S'il est naturel de raisonner avec des préférences, il est beaucoup plus pratique de pouvoir associer un réel à chaque option et de raisonner avec un agent qui choisit le plus élevé. C'est exactement ce que propose la théorie de l'utilité. La **fonction d'utilité** est précisément celle qui permet de "numériser" l'espace des alternatives dans $\mathbb{R}$:

$$u : A \to \mathbb{R}$$

On dira que la fonction u **représente** les préférences de l'agent si :

$$u(a) \geq u(b) \text{ si et seulement si } a \succcurlyeq b, \text{ pour toute paire } (a, b). \tag{1}$$

Ainsi un agent qui cherche à maximiser la fonction u a exactement le même comportement qu'un agent qui utilise la relation de préférence $\succcurlyeq$.

1.3 Théorème de représentation

Le théorème fondamental qui permet de cerner les conditions pour utilliser des fonctions d'utilités est le suivant :

Théorème 1 (Représentation). Si la relation de préférence $\succcurlyeq$ est complète et transitive, et A est un ensemble fini, alors il existe une fonction d'utilité qui représente $\succcurlyeq$.

Intuitivement, le théorème nous dit qu'on peut classer les alternatives avec une fonction d'utilité dès que les préférences sont complètes et transitives. Ainsi, pour un nombre fini d'alternatives, disons $k \triangleq |A|$, il est par exemple immédiat de leur attribuer comme utilité k à la meilleure, $k-1$ à la suivante etc. (et autant qu'à la précédente en cas d'indifférence). C'est exactement l'idée de la démonstration qui suit.

Preuve. Pour tout $a \in A$, définissons l'ensemble $PMQ(a) = \{b \in A | a \succcurlyeq b\}$, l'ensemble des alternatives "pas meilleures que" a. On attribue simplement à l'utilité de A la cardinalité de $PMQ(a)$:

$$u(a) \triangleq |PMQ(a)| \tag{2}$$

Ainsi, la pire alternative a par exemple une utilité de 0. Vérifions que cette fonction d'utilité représente les préférence de l'agent, en deux temps : nous montrons pour toute paire (a, b) : (1) $a \succcurlyeq b \Rightarrow u(a) \geq u(b)$, puis (2) $u(a) \geq u(b) \Rightarrow a \succcurlyeq b$.

(1) supposons $a \succcurlyeq b$. Pour tout $c \in PMQ(b)$, par définition de $PMQ(b)$, $b \succcurlyeq c$. Comme les préférences sont complètes, nous savons aussi que c est comparable à a. La transitivité nous dit de plus que $a \succcurlyeq c$, donc $c \in PMQ(a)$. Ainsi tout élément de $PMQ(b)$ est aussi un élément de $PMQ(a)$, soit $PMQ(b) \subset PMQ(a)$. Donc au total :

$$u(a) = |PMQ(a)| \geq |PMQ(b)| = u(b).$$

(2) supposons $u(a) \geq u(b)$. Comme les préférences sont complètes, (au moins) l'une des deux propositions $a \succcurlyeq b$ et $b \succcurlyeq a$ est vraie. En utilisant le début de la preuve du (1) on a donc soit $PMQ(b) \subset PMQ(a)$, soit $PMQ(a) \subset PMQ(b)$, donc les deux ensembles ne peuvent pas être partiellement disjoints, encore moins disjoints. Par la définition de l'utilité (2), nous savons qu'il y a plus d'éléments dans $PMQ(a)$ puisque $u(a) \geq u(b)$. Donc nécessairement $PMQ(b) \subset PMQ(a)$. Puisque les préférences sont complètes, $b \in PMQ(b)$, et donc comme $PMQ(b) \subset PMQ(a)$, $b \in PMQ(a)$. Par définition de $PMQ(a)$, on a donc $a \succcurlyeq b$. ■

2 Propriétés des préférences et de la fonction d'utilité

2.1 Transformation de la fonction d'utilité

Une fonction d'utilité dont l'existence est garantie par le théorème 1 doit être comprise comme une notion **ordinale** : seul l'ordre compte, pas la magnitude. Au contraire une notion **cardinale** prendrait en compte cette dimension. [2] Par exemple, pour avoir la médaille d'or au 100m des Jeux Olympiques, ce qui compte est d'arriver premier–c'est une pure notion ordinale. En revanche, battre le record du monde implique une cardinalité : il faut faire plus dans la métrique considérée–ici un temps.

Le théorème suivant indique bien en effet que le théorème 1 est ordinal, car la fonction d'utilité est définie à une transformation croissante près. (La preuve est élémentaire et est donc omise.)

Théorème 2. Soit une fonction d'utilité u représentant la relation de préférence $\succcurlyeq$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante, alors $f \circ u$ représente aussi la relation de préférence $\succcurlyeq$.

Ce théorème est à la fois instructif conceptuellement et utile pratiquement : pour résoudre un problème, on peut toujours se ramener à une forme la plus simple possible de l'utilité, par transformations croissantes successives. Enfin, dans les soirées mondaines et autre salons parisiens, il permet d'expliquer que chacun est effectivement légitime à avoir son propre classement sur une échelle de 1 à 10 pour tous ses choix individuels. [3]

2.2 Choix dans $\mathbb{R}^n$

Jusqu'à présent, l'espace des alternatives était fini, ce qui est réaliste, mais peu pratique quand on s'intéresse à des choix complexes, comme des quantités multiples, et pour lesquels une version continue de la fonction d'utilité est donc plus mathématiquement maniable.

2. Dans la suite, il sera d'ailleurs nécessaire d'avoir une telle notion, quand il s'agit par exemple d'une décision d'achat contre un prix.

3. Bien entendu ce choix n'appartient qu'à l'agent en question, et ne peut directement être confronté au classement d'un autre agent.

Supposons donc que l'espace de choix est $A \subseteq \mathbb{R}_+^n$. Typiquement, dans une application classique, chaque dimension de l'espace pourraitt correspondre à une quantité d'un certain bien, et A représenterait l'ensembles de consommations atteignables pour des prix donnés. [4] Afin d'obtenir un théorème de représentation pour cet espace de choix plus riche, nous devons imposer un axiome en plus.

Axiome 3 : Continuité. Pour toute suite de choix réalisables $(a_k) \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $a \in A$, si pour tout k, $a_k \succcurlyeq b$, alors $a \succcurlyeq b$.

Théorème 3. Si la relation de préférence $\succcurlyeq$ est complète, transitive et continue sur un esnemble $A \subseteq \mathbb{R}_+^n$, alors il existe une fonction d'utilité continue qui représente $\succcurlyeq$.

La démonstration est omise (elle n'est pas spécialement instructive et assez technique). L'importance de ce théorème est d'ouvrir la voie à une analyse générale utilisant des fonctions d'utilité. Une remarque conclusive avant d'appliquer ces théorème : la continuité n'est pas une propriété anodine. En effet, les préférences lexicographiques (analogue à un ordre alphabétique sur les différentes dimensions de l'ensemble A) ne sont pas continues. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer un agent face à un choix à deux dimensions : il choisit d'abord selon la première dimension, et selon la deuxième ensuite, si les choix sont égaux sur la première dimension. La suite $a_k = (1 + 1/k, 1)$ tend vers $(1, 1)$ et chaque élément est préféré à $(1, 2)$, puisqu'il fait mieux sur la première dimension. Cependant, à la limite, $(1, 2) \succ (1, 1)$. Plus généralement, on peut montrer qu'aucune fonction continue ne peut représenter de telles préférences lexicographiques.

2.3 Monotonie et convexité

Deux propriétés importantes des préférences sont généralement supposées pour des préférences sur un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}_+^n$: la monotonie et la convexité.

4. Remarquons aussi que dans certaines applications, les dimensions peuvent concerner des maux plutôt que des biens (tels que des pollutions). Dans ces cas là on peut toujours transformer le problème pour se ramener à un tel espace de choix (par exemple en raisonnant alors en réduction de la pollution).

Monotonie. Des préférences sont monotones si pour deux paniers $a = (a_1, .., a_n)$ et $b = (b_1, .., b_n)$ tels que $a_i \geq b_i$ pour tout i et $a_i > b_i$ pour au moins une dimension, alors $a \succ b$.

Simplement, des préférences sont monotones si disposer de plus de n'importe lequel des biens améliore la situation de l'agent. Une fondation évidente pour des préférences faiblement monotones réside dans le fait qu'un agent peut se débarasser s'il a trop de quelque chose, en donnant, revendant, jetant etc. Le point plus fort de cette définition de monotonicité est qu'elle est stricte : il n'y a pas de satiété, même si l'utilité des unités supplémentaires peut diminuer aussi vite que l'on veut. Enfin, on peut bien entendu traduire immédiatement en utilité cette définition, en conservant exactement les inégalités strictes.

Convexité. Des préférences sont convexes si : quand $a \succcurlyeq b$, $\lambda a + (1 - \lambda)b \succeq b$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$.

La convexité signifie donc qu'un agent préfère les moyennes aux extrêmes. En particulier, s'il est indifférents entre a et b, il leur préférera toute moyenne pondérée $\lambda a + (1 - \lambda)b$.

En termes d'utilité, cela se traduit par une propriété appellée (avec quelque risque de confusion malheureusement) la quasi-concavité :

$$u(a) \geq u(b) \Rightarrow \{u(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq u(b) \quad \forall \lambda \in [0, 1]\}.$$

Cette propriété est importante dans les problèmes de maximisation du consommateur, puisque par exemple à une dimension, elle implique qu'une simple condition du premier ordre permet de caractériser la consommation optimale.

3 Courbes d'indifférence.

Dans cette section, nous considérons un espace des choix à deux dimensions, $A = X \times Y$. Dans cet espace, les courbes d'indifférences représentent des ensembles d'allocations (de choix dans A) entre lesquelles l'agent est indifférent :

$$\text{Courbe d'indifférence} = \{(x, y) \in X \times Y | u(x, y) = \text{constante}\}$$

La monotonie se traduit par des préférences croissantes vers le Nord-Est, la convexité par

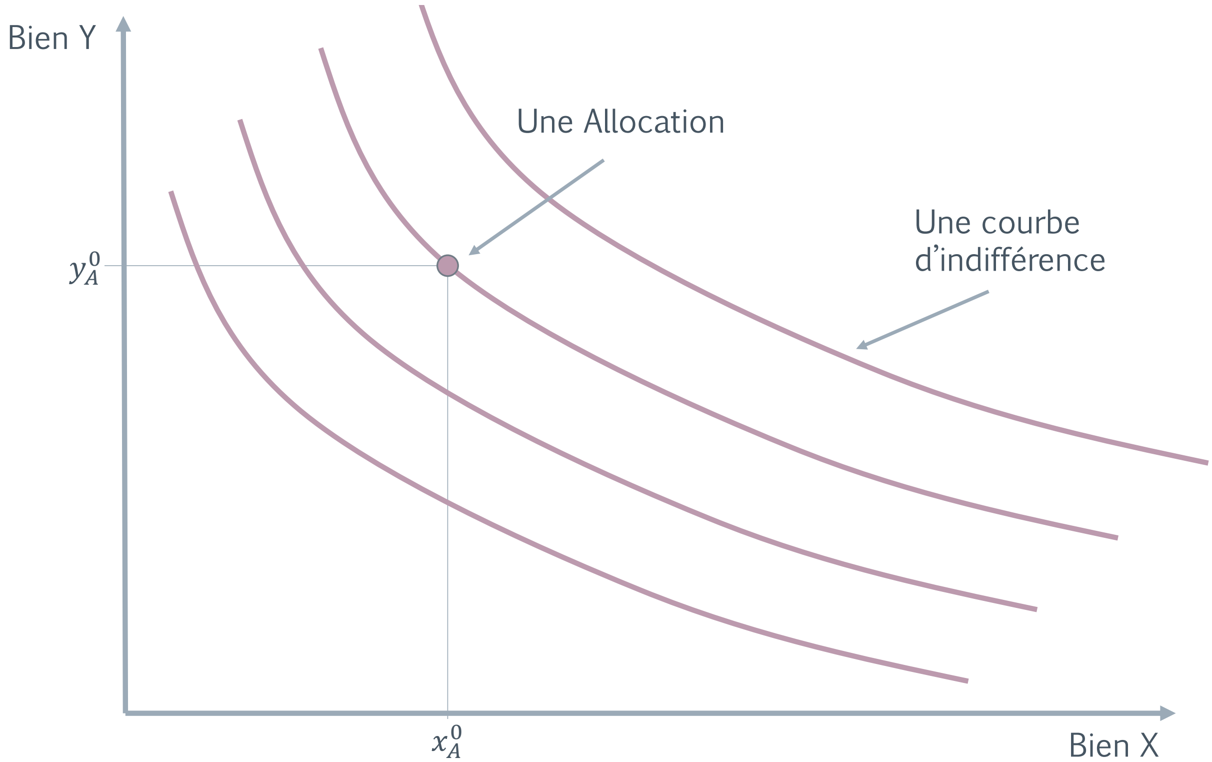

FIGURE 1 – Courbes d'indifférence pour des préférences monotones et convexes.

des préférences dont les courbes d'indifférences sont convexes. Par exemple, si la fonction d'utilité est $u(x, y) = x.y$, les courbes d'indifférences sont des hyperboles.

La pente des courbes d'indifférences est appelé le taux marginal de substitution :

$$TMS = -\left.\frac{dy}{dx}\right|_{u(x,y)=constante}$$

qui correspond à la mesure (locale) du nombre d'unité de y que l'agent est prêt à échanger pour une unité de plus en x. Ce TMS donne donc une idée des compromis que l'agent est prêt à faire. En l'occurence, plus on se déplace vers la droite à hauteur constante, moins une unité de x a de valeur relativement à une unité de y : la pente est de plus en plus faible (en valeur absolue).

Plus systématiquement, les courbes d'indifférences de préférences monotones et continues ont les propriétés suivantes :

— elles sont strictement décroissantes.
— elles ne peuvent pas se croiser (une conséquence de la monotonie).
— elles sont continues (une conséquence du théorème 3).

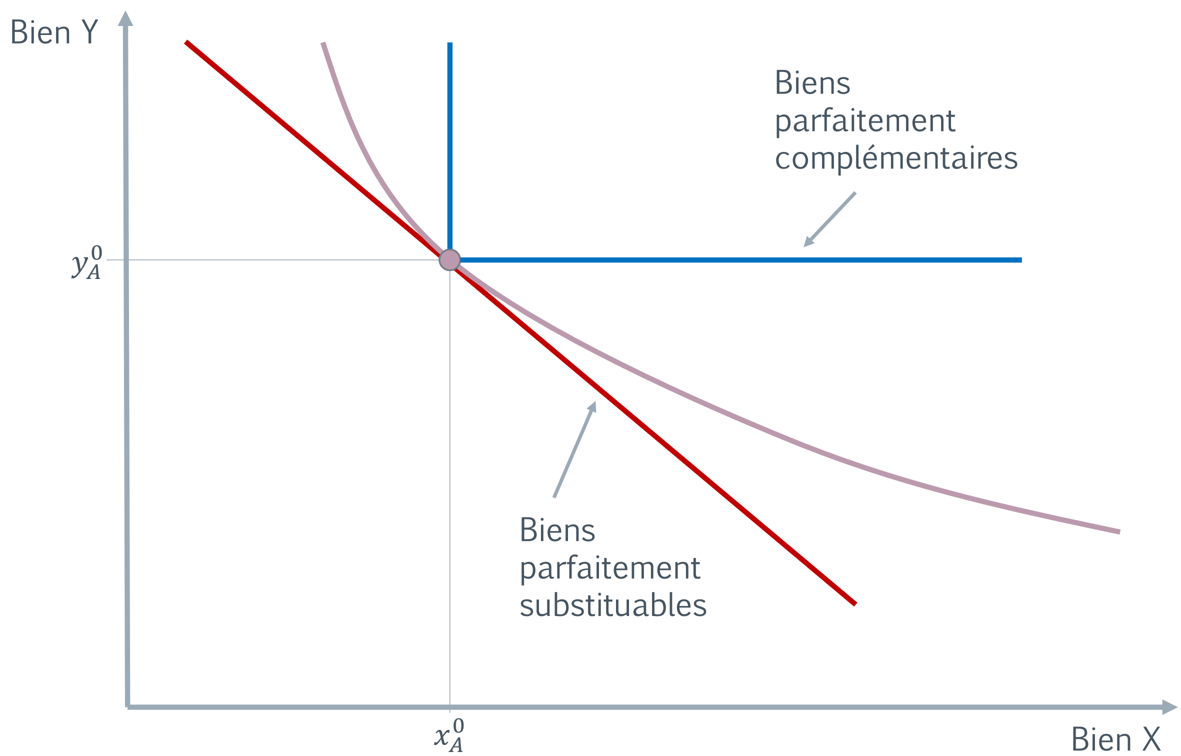

FIGURE 2 – Différents types de biens et préférences associées.

Enfin, les courbes d'indifférences informent sur la nature économique des biens considérés, comme représenté sur la figure. Le TMS est par exemple constant pour des bien parfaitements substituts.

4 Exemples de fonctions d'utilité classiques

Cobb-Douglas. La fonction d'utilité de Cobbb-Douglas est donnée par :

$$u(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta} \text{ avec } \alpha, \beta > 0.$$

On peut manipuler cette expression grâce au théorème 2 (qui s'étend au cas d'un espace de choix inclus dans $\mathbb{R}^n$) en prenant par exemple le logarithme pour linéariser l'expression et considérer $\alpha \log(x) + \beta \log(y)$, qui est une fonction linéaire en échelle logarithmique, et représente toujours les mêmes préférences. Dans le cas symétrique où $\alpha = \beta$, on peut en utilisant le même théorème prendre $\alpha = \beta = 1$ sans perte de généralité. Enfin, le TMS est simplement $\frac{\alpha y}{\beta x}$.

Leontief. La fonction d'utilité de Leontief correspond au cas de complémentarité parfaite :

$$u(x, y) = \min\{\alpha x, \beta y\}.$$

Ce cas limite correspond à des préférences qui ne sont pas strictement convexes.

Biens parfaitement substituts. Ce cas correspond simplement à une combinaison linéaire :

$$u(x, y) = \alpha x + \beta y.$$

Quasi-linéaire. Un cas très largement utilisé pour se concentrer sur le marché d'un bien (x), en considérant l'utilité que l'on peut obtenir avec la monnaie par ailleurs (y), sous forme d'un bien agrégé :

$$u(x, y) = v(x) + y$$

avec v une fonction concave. Le TMS capture ici simplement l'utilité marginale en euros apportée par une dépense supplémentaire de 1 euros dans le bien.