

“En envoyant sa copie ou en validant son QCM, l’élève s’engage à avoir réalisé l’examen seul ou seule, sans l’aide d’une personne ou d’autres personnes.”

Mécanique des Milieux Continus

Examen 2020

L’examen comporte un problème de mécanique des solides et un exercice de mécanique des fluides. En général, les questions de l’examen peuvent être résolues indépendamment les unes des autres même s’il faut les aborder dans l’ordre proposé. Si vous bloquez sur une question au début qui est un peu raide, il faut bien en convenir, passez à la suite ! Le problème et l’exercice sont sans aucun doute trop longs pour être traités en 3 heures mais il n’est pas nécessaire de l’avoir résolu dans son ensemble pour obtenir la note maximale. L’objectif est que vous ne vous ennuyez pas et que vous appreniez des choses sur l’anisotropie d’une part et sur l’écoulement autour d’un cylindre, d’autre part !

Première partie

Comportement élastique anisotrope des aubes de turbine monocristallines

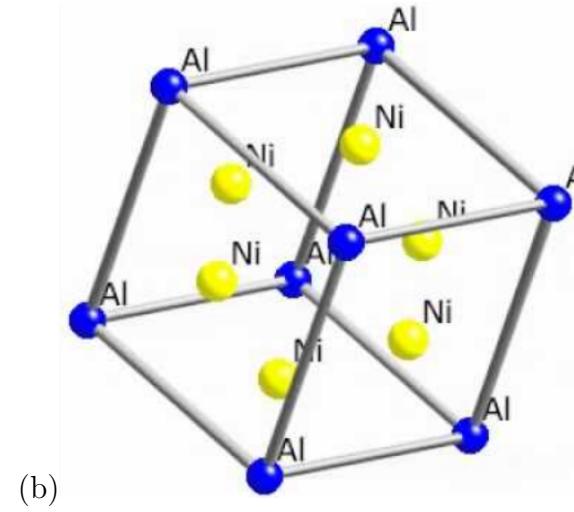
Les aubes de turbine des parties chaudes des turboréacteurs de moteurs d’avion, situées à l’aval de la chambre de combustion sont souvent des pièces monocristallines constituées d’un superalliage à base de nickel. L’aube représentée sur la figure 1(a) est un monocristal métallique d’une dizaine de centimètres de hauteur. Les ingénieurs tirent profit du comportement anisotrope de ce cristal à symétrie cubique en optimisant son orientation par rapport à la direction principale du chargement. L’aube de turbine, accrochée au disque, est en rotation rapide autour de l’axe du disque et subit de ce fait une force d’inertie dans la direction verticale sur la figure 1(a). On représentera cette sollicitation de manière approchée par un effort de traction dans le problème proposé. De plus, l’aube subit le flux des gaz de combustion qui induit, en particulier, un effort de torsion sur la pale. Ce chargement sera également étudié dans ce problème.

Les superalliages à base de nickel comportent aussi une part significative d’aluminium. Ils ont la propriété remarquable d’avoir une limite d’élasticité qui reste très élevée et constante jusqu’à 800°C avant de décroître progressivement lorsque la température augmente, comme c’est le cas de la plupart des alliages métalliques.

Les monocristaux métalliques présentent un comportement mécanique très anisotrope. L’objectif du problème est d’aborder l’élasticité et la plasticité anisotropes dans le cas de la classe de symétrie cubique qui est celle du matériau monocristallin étudié ici.



(a)



(b)

FIGURE 1: Monocristal de superalliage à base de nickel : (a) aube de turbine de moteur d'avion en monocristal (hauteur $\simeq 10$ cm) ; (b) maille cristalline Ni_3Al cubique à faces centrées.

On se place dans le contexte infinitésimal et on considère l'état de référence comme naturel. Le comportement du matériau est élastique linéarisé, du moins jusqu'à ce que sa limite d'élasticité soit atteinte. On se place dans le cas statique, dans des conditions isothermes pour simplifier et on ne considère pas les efforts volumiques.

1. Préliminaire : le tenseur d'élasticité cubique

Le monocristal de symétrie cubique est entièrement caractérisé par la maille cristalline élémentaire de forme cubique de la figure 1(b) dont les arêtes parallèles aux vecteurs unitaires ($\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$) constituent une base orthonormée. On introduit le vecteur directeur d'une des quatre grandes diagonales du cube :

$$\underline{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}) \quad (1)$$

Il y a trois structures cristallines cubiques : cubique primitive (CP), cubique centrée (CC) et cubique à faces centrées (CFC). La maille du superalliage à base de nickel Ni_3Al est CFC comme le montre la figure 1b, avec les atomes d'aluminium aux sommets et les atomes de nickel au centre des faces du cube. La réplication de la maille élémentaire par les translations $a(u\underline{i} + v\underline{j} + w\underline{k})$, $\forall u, v, w \in \mathbb{Z}$, où a est le paramètre de maille, i.e. la longueur de l'arête du cube élémentaire, permet de pavier l'espace et de décrire le monocristal périodique complet.

1.1. Le groupe d'invariance de configuration pour la classe de symétrie cubique

La classe de symétrie cubique contient 5 sous-groupes ponctuels. La maille cristalline de la figure 1(b) respecte les symétries appartenant au groupe \mathcal{O}_h caractérisé par les générateurs

suivants :

$$\mathbf{R}(2\pi/3\underline{\mathbf{c}}), \mathbf{R}(\pi/2\underline{\mathbf{i}}), \mathbf{R}_j, -\underline{\mathbf{1}}$$

La notation $\mathbf{R}(\theta \underline{\mathbf{a}})$ désigne la rotation d'angle θ autour de l'axe $\underline{\mathbf{a}}$, tandis que \mathbf{R}_j désigne la réflexion par rapport au plan de normale $\underline{\mathbf{j}}$, appelé plan-miroir. La symétrie centrale, ou inversion, est $-\underline{\mathbf{1}}$. Le groupe complet est obtenu en combinant autant de fois qu'on veut les éléments générateurs. Il contient 48 éléments. Parmi eux, il y a 24 rotations : l'identité, 3 rotations d'angle π par rapport à $\underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{j}}, \underline{\mathbf{k}}$, 8 rotations d'angle $\pm 2\pi/3$ par rapport aux 4 grandes diagonales du cube, 6 rotations d'angle π par rapport aux 6 diagonales des faces du cube et les 6 rotations d'angle $\pm\pi/2$ par rapport aux arêtes du cube. La maille élémentaire de la figure 1(b) est invariante par application de toutes ces transformations.

Le groupe d'invariance de la configuration de référence dénuée de contrainte (état naturel) considérée dans la suite est exactement le groupe \mathcal{O}_h ainsi caractérisé.

On admettra l'ensemble de ces résultats.

1.2. Tenseur de structure de l'élasticité cubique

Le triplet $(\underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{j}}, \underline{\mathbf{k}})$ de la maille élémentaire dans la configuration dénuée de contrainte constitue le trièdre directeur caractérisant la matière de symétrie cubique. Dans le contexte infinitésimal, nous ne distinguerons pas les versions lagrangiennes et eulériennes de ces vecteurs. Les tenseurs de structure pour la symétrie cubique sont les tenseurs invariants par les éléments du groupe \mathcal{O}_h . On montre qu'il y a un seul tenseur de structure pour ce groupe et qu'il est d'ordre 4. Il s'agit de :

$$\tilde{\mathfrak{T}} = \underline{\mathbf{i}} \otimes \underline{\mathbf{i}} \otimes \underline{\mathbf{i}} \otimes \underline{\mathbf{i}} + \underline{\mathbf{j}} \otimes \underline{\mathbf{j}} \otimes \underline{\mathbf{j}} \otimes \underline{\mathbf{j}} + \underline{\mathbf{k}} \otimes \underline{\mathbf{k}} \otimes \underline{\mathbf{k}} \otimes \underline{\mathbf{k}} \quad (2)$$

construit à partir des produits tensoriels des vecteurs du trièdre directeur¹.

On admettra ce résultat.

1.3. Potentiel d'élasticité cubique linéarisée

Le potentiel d'élasticité linéarisée est une fonction $\rho\psi(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tilde{\mathfrak{T}})$ de la déformation infinitésimale et du tenseur de structure. L'invariance tensorielle de cette fonction exige qu'elle soit isotrope par rapport à ses arguments. En se limitant aux termes quadratiques par rapport à $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (état naturel), montrer que cette fonction dépend de trois invariants mettant en jeu les tenseurs $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et $\tilde{\mathfrak{T}}$.

En déduire qu'il existe trois modules d'élasticité cubique, κ, μ et γ tels que la loi de Hooke s'écrive :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \kappa(\text{trace } \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \underline{\mathbf{1}} + 2\mu \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{dev}} + 2\gamma \tilde{\mathfrak{T}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3)$$

où $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{dev}}$ désigne la partie déviatorique ou déviateur de $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$. On rappelle la décomposition de tout tenseur d'ordre 2 :

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{3}(\text{trace } \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \underline{\mathbf{1}} + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{dev}}$$

Donner l'expression du potentiel d'élasticité en fonction des 3 modules κ, μ et γ .

1. On rappelle les notations concernant le produit tensoriel. Le produit tensoriel de deux vecteurs $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}$ est un tenseur d'ordre 2 dont les composantes sont les $u_i v_j : \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{v}} = u_i v_j \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j$. Plus généralement, $\underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{u}} = u_i u_j u_k u_l \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j \otimes \underline{\mathbf{e}}_k \otimes \underline{\mathbf{e}}_l$.

1.4. Le tenseur d'élasticité linéaire cubique

Vérifier que la loi d'élasticité linéaire (3) permet de définir le tenseur d'élasticité d'ordre 4 :

$$\tilde{\Lambda} = 3\kappa \tilde{K} + 2\mu \tilde{J} + 2\gamma \tilde{\Sigma} \quad (4)$$

tel que $\sigma = \tilde{\Lambda} : \tilde{\varepsilon}$. Les opérateurs d'ordre 4, \tilde{I} , \tilde{J} et \tilde{K} sont définis par leur action sur les tenseurs symétriques d'ordre 2 :

$$\tilde{I} : \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}, \quad \tilde{J} : \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}^{\text{dev}}, \quad \tilde{K} : \tilde{\varepsilon} = \frac{1}{3}(\text{trace } \tilde{\varepsilon}) \mathbf{1} \quad (5)$$

avec la relation $\tilde{I} = \tilde{J} + \tilde{K}$.

Des notations plus commodes pour manipuler les tenseurs d'élasticité d'ordre 4 dans le cas cubique sont introduites par l'intermédiaire des tenseurs d'ordre 4 suivants :

$$\tilde{L} := \tilde{I} - \tilde{\Sigma}, \quad \tilde{M} := \tilde{\Sigma} - \tilde{K} \quad \text{avec} \quad \tilde{K} + \tilde{L} + \tilde{M} = \tilde{I} \quad (6)$$

où $\tilde{\Sigma}$ est le tenseur de structure cubique (2). Montrer qu'une écriture alternative de (4) est alors :

$$\tilde{\Lambda} = 3k \tilde{K} + 2\mu_1 \tilde{L} + 2\mu_2 \tilde{M} \quad (7)$$

et exprimer les nouveaux modules k , μ_1 et μ_2 en fonction des modules précédents κ , μ et γ .

Quelle relation particulière doivent satisfaire k , μ_1 , μ_2 pour que l'élasticité cubique devienne isotrope ?

Vérifier, sans longs calculs, ou admettez, que le tenseur des souplesses, défini comme l'inverse du tenseur des modules d'élasticité, se met sous la forme :

$$\tilde{\Lambda}^{-1} = \frac{1}{3k} \tilde{K} + \frac{1}{2\mu_1} \tilde{L} + \frac{1}{2\mu_2} \tilde{M} \quad (8)$$

tel que $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\Lambda}^{-1} : \sigma$.

1.5. Equivalence avec la notation matricielle usuelle

On considère la déformation d'extension simple dans la direction \underline{i} du cristal

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \underline{i} \otimes \underline{i} \quad (9)$$

Calculer la contrainte associée $\sigma = \tilde{\Lambda} : \tilde{\varepsilon}$ en fonction de $\varepsilon, k, \mu_1, \mu_2$, en utilisant le tenseur d'élasticité cubique (7).

On utilisera avec profit les règles de calcul tensoriel suivantes :

$$(\underline{a} \otimes \underline{b} \otimes \underline{c} \otimes \underline{d}) \cdot \underline{u} = (\underline{d} \cdot \underline{u}) \underline{a} \otimes \underline{b} \otimes \underline{c}, \quad (\underline{a} \otimes \underline{b} \otimes \underline{c} \otimes \underline{d}) : (\underline{u} \otimes \underline{v}) = (\underline{c} \cdot \underline{u})(\underline{d} \cdot \underline{v}) \underline{a} \otimes \underline{b}$$

où $\underline{d} \cdot \underline{u}$ est le produit scalaire des deux vecteurs \underline{d} et \underline{u} .

Pour vous entraîner à manipuler ces opérations, montrer que :

$$\tilde{\Sigma} : (\underline{i} \otimes \underline{i}) = \underline{i} \otimes \underline{i}, \quad \tilde{\Sigma} : (\underline{j} \otimes \underline{k}) = 0$$

Les ingénieurs travaillant sur les milieux anisotropes, tels que les composites, utilisent également la notation matricielle suivante en considérant les composantes des différents tenseurs dans la base orthonormée privilégiée liée au cristal $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$. Il est en effet possible de ranger les composantes indépendantes de Λ_{pqrs} dans une matrice $6 \times 6 C_{ij}$ de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (10)$$

où C_{11}, C_{12}, C_{44} sont les trois modules indépendants intervenant dans cette représentation. Ecrite par rapport à une autre base que la base privilégiée $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$, la matrice 6×6 comporterait moins de composantes nulles et le fait qu'elle ne dépende que de trois constantes indépendantes ne serait pas apparent.

Grâce au calcul des contraintes pour l'extension simple considérée ici, identifier C_{11} et C_{12} en fonction de k et μ_2 .

Comment identifier C_{44} ?

Quelle est la condition portant sur les modules C_{ij} pour que l'élasticité soit isotrope ?

On définit le coefficient ou facteur d'anisotropie A :

$$A = \frac{2C_{44}}{C_{11} - C_{12}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (11)$$

Que vaut A dans le cas particulier isotrope ?

2. Traction simple d'une barre monocrystalline en élasticité cubique

On considère le champ de contrainte de traction simple dans la direction du vecteur \underline{d} (unitaire) :

$$\underline{\sigma} = \sigma \underline{d} \otimes \underline{d}, \quad \|\underline{d}\| = 1 \quad (12)$$

où σ est la contrainte de traction imposée.

2.1. Calcul de la déformation de traction

Le tenseur des déformations associé aux contraintes (12) se calcule par l'inverse de la loi de Hooke cubique (8) :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\tilde{\Lambda}}^{-1} : \underline{\sigma} \quad (13)$$

Exprimer $\underline{\varepsilon}$ en fonction des produits tensoriels $\underline{d} \otimes \underline{d}, \underline{i} \otimes \underline{i}, \underline{j} \otimes \underline{j}, \underline{k} \otimes \underline{k}$, de σ et des modules k, μ_1, μ_2 .

2.2. Module de Young dans la direction \underline{d}

Contrairement au cas de l'élasticité isotrope, il n'y a pas de module de Young unique en élasticité cubique. On appelle module de Young E_d dans la direction \underline{d} le rapport entre la contrainte axiale et la déformation dans la direction de traction :

$$E_d = \frac{\sigma}{\underline{d} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{d}} \quad (14)$$

Elément	C_{11} (GPa)	C_{12} (GPa)	C_{44} (GPa)	k (GPa)	μ_1 (GPa)	μ_2 (GPa)	A
aluminium (CFC)	108.2	61.3	28.5	76.93	28.5	23.45	1.22
cuivre (CFC)	168.4	121.4	75.4	137.1	75.4	23.5	3.21
nickel (CFC)	246.5	147.3	124.7	180.4	124.7	49.6	2.51
fer (CC)	228	132	116.5	164	116.5	48	2.43
niobium (CC)	245.5	139	29.3	174.5	29.3	53.4	0.55

TABLE 1: Modules d'élasticité de plusieurs monocristaux métalliques à structure cubique. CFC et CC désignent respectivement les structures cubique à faces centrées et cubique centrée.

En utilisant les résultats de la question précédente, évaluer d'abord la déformation dans la direction de traction, c'est-à-dire $\underline{d} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{d}$, puis montrer que l'inverse du module de Young dans la direction \underline{d} s'écrit :

$$\frac{1}{E_d} = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} + \frac{1}{2\mu_1} + \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1}\right)(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4) \quad (15)$$

où les composantes d_l du vecteur \underline{d} sont dans la base $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$.

2.3. Module de Young selon trois directions du cristal

Donner successivement les modules de Young lorsque $\underline{d} = \underline{i}$, puis $\underline{d} = (\underline{i} + \underline{j})/\sqrt{2}$ et enfin $\underline{d} = \underline{c} = (\underline{i} + \underline{j} + \underline{k})/\sqrt{3}$.

Commenter les résultats.

Faire l'application numérique dans le cas du monocristal de nickel en utilisant les valeurs des modules d'élasticité de la table 1.

Commenter également les propriétés élastiques rassemblées dans ce tableau pour plusieurs métaux purs.

2.4. Modules de Young extrémaux

Déterminer les extrema du module de Young (15) en fonction de la direction de traction \underline{d} .

Donner les valeurs de ces extrema et les directions pour lesquelles ces extrema sont atteints.

Commenter.

3. Torsion d'une barre monocristalline en élasticité cubique

On considère maintenant le problème de la torsion d'une barre de section circulaire constituée d'un superalliage à base de nickel monocristallin. La section du cylindre est un disque de rayon R , la longueur de la barre est ℓ et l'axe du cylindre est parallèle à la direction \underline{e}_3 de la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ représentée sur la figure 2. On applique le couple $\underline{M} = \mathcal{C}\underline{e}_3$ à l'extrémité $x_3 = \ell$ et le couple opposé à sa base. Les surfaces latérales de la barre sont libres de tout effort. Le comportement du matériau constitutif de la barre obéit à la loi d'élasticité cubique linéaire décrite par les équations (7).

L'objectif de cette section est de montrer que la réponse du cylindre dépend de l'orientation du cristal, c'est-à-dire du trièdre directeur matériel $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ par rapport au repère $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ attaché à la barre.

On propose de mettre en œuvre la méthode des déplacements déjà utilisée dans le cas isotrope en partant d'un champ de la forme :

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha X_2 X_3 \\ u_2 = \alpha X_1 X_3 \\ u_3 = \alpha \varphi(X_1, X_2) \end{cases} \quad (16)$$

où le déplacement u_3 , faisant intervenir la fonction inconnue φ , correspond à un gauchissement de la surface $X_3 = Cste$ après déformation. Les coordonnées du point matériel dans la base $(\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3)$ sont X_1, X_2, X_3 . Le coefficient α désigne un angle par unité de longueur.

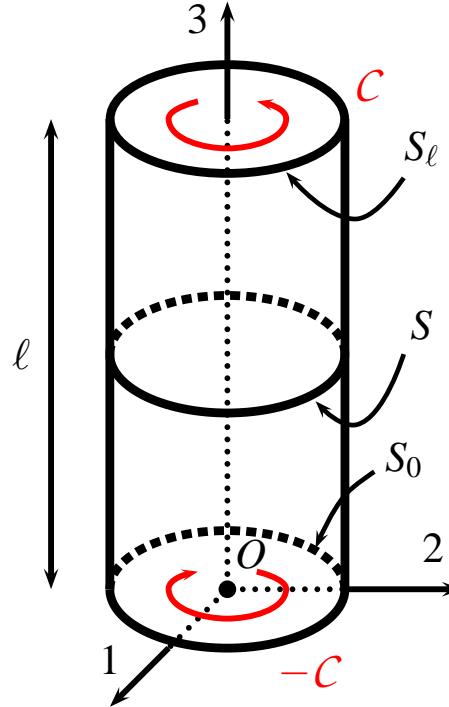


FIGURE 2: Torsion d'un barreau cylindrique : schéma de principe.

3.1. Torsion d'une barre parallèle à $\underline{\mathbf{k}}$

On commence par le cas où le trièdre directeur est parallèle aux vecteurs de la base considérée :

$$\underline{\mathbf{e}}_1 = \underline{\mathbf{i}}, \quad \underline{\mathbf{e}}_2 = \underline{\mathbf{j}}, \quad \underline{\mathbf{e}}_3 = \underline{\mathbf{k}}$$

Cela signifie que l'axe de la barre est parallèle à l'une des arêtes du cube de la maille cristalline de la figure 1(b).

Le champ des déformations qui se déduit de (16) se met sous la forme

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_{13}(\underline{\mathbf{i}} \otimes \underline{\mathbf{k}} + \underline{\mathbf{k}} \otimes \underline{\mathbf{i}}) + \varepsilon_{23}(\underline{\mathbf{j}} \otimes \underline{\mathbf{k}} + \underline{\mathbf{k}} \otimes \underline{\mathbf{j}}) \quad (17)$$

1. Exprimer ε_{13} et ε_{23} en fonction de α, X_1, X_2 et de φ .
2. Calculer les contraintes en utilisant la loi d'élasticité cubique (7).
3. Donner alors les conditions que doit vérifier la fonction de gauchissement.

4. Conclure et donner l'expression finale des contraintes.
5. Etablir enfin la relation liant le couple et l'angle par unité de longueur pour la torsion par rapport à l'axe $\underline{e}_3 = \underline{k}$:

$$\mathcal{C} = \mu_1 \frac{\pi R^4}{2} \alpha \quad (18)$$

Commenter le résultat.

3.2. Torsion d'une barre d'axe parallèle à $\underline{i} + \underline{k}$

On considère cette fois-ci une barre de section circulaire dont les axes sont orientés de la façon suivante par rapport au trièdre directeur cristallographique :

$$\underline{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\underline{i} - \underline{k}), \quad \underline{e}_2 = \underline{j}, \quad \underline{e}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\underline{i} + \underline{k}) \quad (19)$$

Cela signifie que l'axe de la barre est parallèle à la diagonale d'une des faces du cube de la maille cristalline de la figure 1.

On adopte ici aussi la proposition (16) pour le champ de déplacements. Le tenseur des déformations reste de la forme :

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_{13}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) + \varepsilon_{23}(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2) \quad (20)$$

1. Exprimer ce tenseur en fonction de produits tensoriels impliquant uniquement $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$.
2. Calculer ensuite le tenseur des contraintes en utilisant la loi (7).
3. Exprimer enfin ce tenseur des contraintes en fonction de produits tensoriels de $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$.
4. Donner l'équation aux dérivées partielles que doit satisfaire la fonction de gauchissement. Cette fonction est-elle harmonique ?
5. Donner les conditions de bord correspondantes.
6. Trouver la fonction de gauchissement associée. Vérifiez qualitativement que cette fonction conduit au gauchissement illustré sur la figure 3. Commenter.
7. Finalement, montrer que les seules composantes de contraintes non nulles s'expriment de la manière suivante :

$$\sigma_{13} = -2\alpha \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} X_2, \quad \sigma_{23} = 2\alpha \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} X_1 \quad (21)$$

8. Calculer alors la force et le moment de torsion résultant sur la surface supérieure S_ℓ .
9. Donner la relation entre le couple \mathcal{C} et l'angle par unité de longueur α .

4. Critère de plasticité cubique

Le dimensionnement des aubes de turbine monocristallines nécessite de prendre en compte la limite d'élasticité du monocristal de superalliage à base de nickel pour tout type de chargement. Pour cela, il faut élaborer un critère de plasticité, à savoir une fonction des contraintes généralisant les critères de Tresca ou von Mises, valides pour les matériaux isotropes, au cas de la symétrie cubique. Tout comme le potentiel d'élasticité, le critère de plasticité doit être une fonction tensorielle des contraintes et du tenseur de structure, i.e. une fonction isotrope par

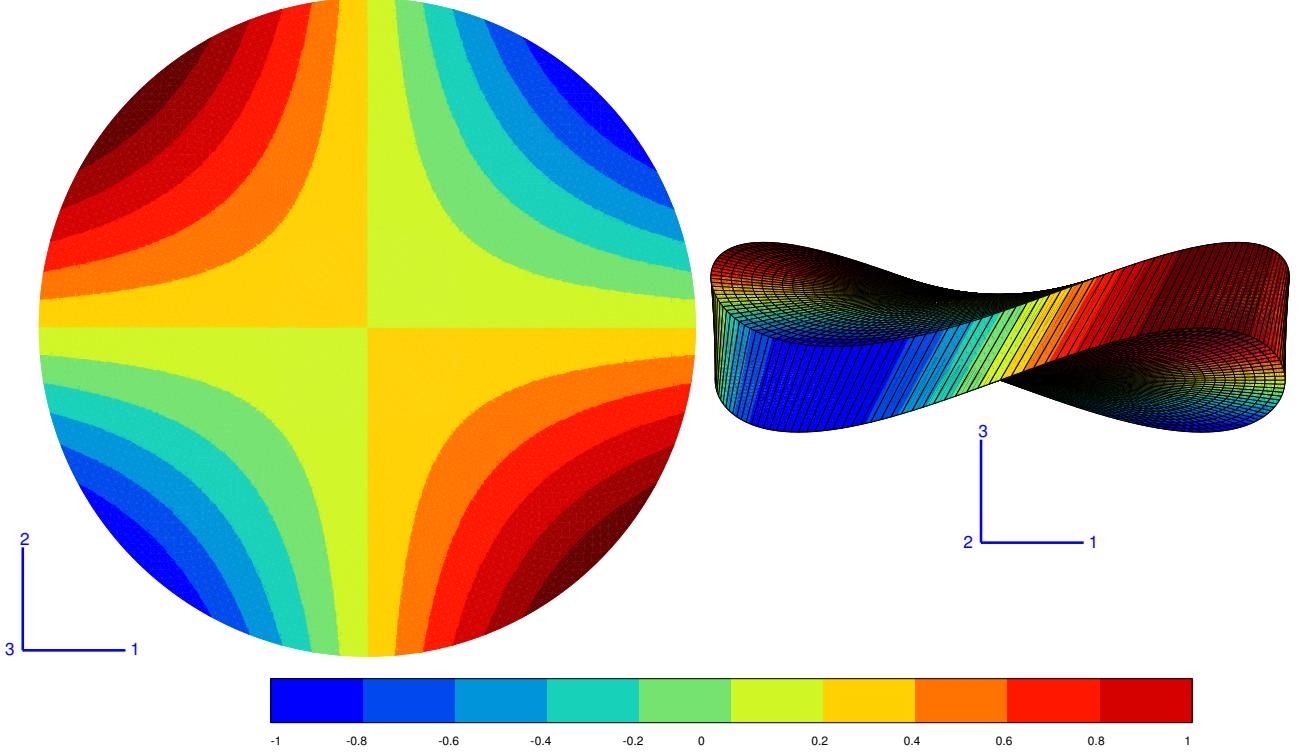


FIGURE 3: Champ de déplacement u_3 sur un tronçon de la barre en torsion dont l'axe est orienté parallèlement à $\underline{i} + \underline{k}$: lignes de niveau dans la section (valeurs normalisées par la valeur maximale, à gauche), vue latérale du tronçon déformé (déplacement exagérés d'un facteur 10), à droite.

rapport aux deux arguments. La dépendance est toutefois restreinte au déviateur des contraintes car on sait que le comportement plastique des métaux est généralement insensible à la pression hydrostatique. En se limitant à une forme quadratique comme pour le potentiel d'élasticité, on est alors en mesure de proposer le critère de plasticité suivant :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}) = \left(F\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} + L\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} : \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} \right)^{1/2} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 \quad (22)$$

où F, L et σ_0 sont les trois paramètres du modèle de plasticité. Tant que $f(\boldsymbol{\sigma}, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}})$ est négative, le comportement du matériau reste élastique. Lorsque $f(\boldsymbol{\sigma}, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}) = 0$, la limite d'élasticité est atteinte. La présence commode du facteur $\sqrt{2/3}$ est purement conventionnelle. Dans le critère apparaît la contrainte équivalente définie par

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(F\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} + L\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} : \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} \right)^{1/2} \quad (23)$$

que l'on peut interpréter comme une norme anisotrope du tenseur des contraintes. Pour des raisons de stabilité de l'écoulement plastique, la convexité de la fonction f par rapport aux composantes des contraintes est exigée. Elle est garantie en particulier lorsque $F > 0, L \geq 0$.

4.1. Limite d'élasticité en traction simple

On considère l'état de traction simple dans la direction \underline{d} du cristal :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \underline{d} \otimes \underline{d}, \quad \text{avec} \quad \|\underline{d}\| = 1 \quad (24)$$

Calculer le déviateur $\underline{\sigma}^{\text{dev}}$ de ce tenseur de contraintes.

Evaluer $\underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}}$.

Evaluer $\underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\Sigma} : \underline{\sigma}^{\text{dev}}$.

Donner la valeur critique de σ pour laquelle le critère (22) s'annule. C'est la limite d'élasticité du monocristal en traction dans la direction \underline{i} . Elle s'exprime en fonction de F, L, σ_0 et des composantes de \underline{d} dans la base du cristal $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$.

Donner les trois limites d'élasticité pour la traction selon les directions $\underline{i}, \underline{i} + \underline{j}, \underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$.

Chercher les extrema de la limite d'élasticité par rapport à l'orientation de \underline{d} .

Pour quelles directions du cristal la limite d'élasticité est-elle la plus élevée ?

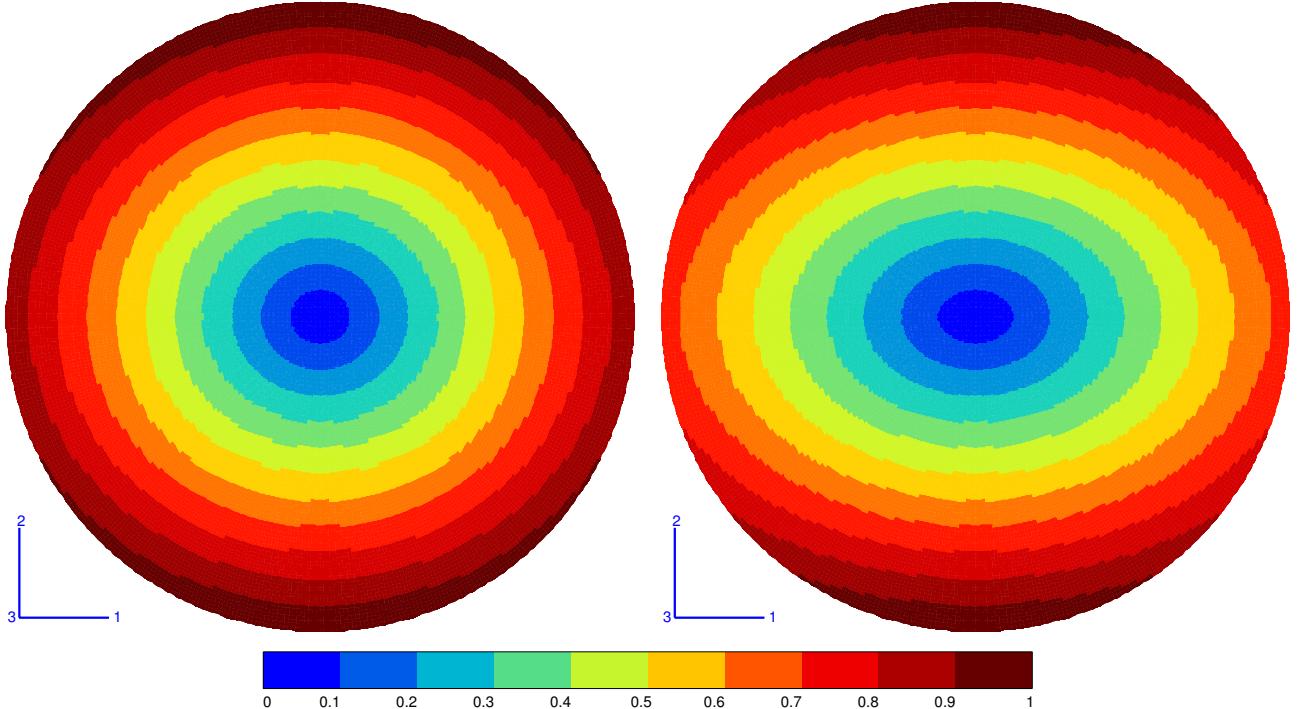


FIGURE 4: Champ de contrainte équivalente σ_{eq} (normée par la valeur maximale) pour deux valeurs des paramètres F et L : $F = 1 = 4L$ à gauche, $F = L = 1$ à droite, cf. équation (23) pour la définition de la contrainte équivalente. La section représentée est issue d'une barre monocristalline en torsion autour de l'axe $\underline{e}_3 = (\underline{i} + \underline{k})/\sqrt{2}$, avec $\underline{e}_2 = \underline{j}$.

4.2. Limite d'élasticité en torsion

On applique maintenant le critère de plasticité au cas de la torsion d'une barre monocristalline pour les deux orientations traitées au paragraphe 3.

Utiliser les champs de contraintes trouvés aux paragraphes 3.1 et 3.2 pour déterminer l'angle de torsion par unité de longueur critique α_0 pour lequel la plasticité commence. On traitera d'abord la torsion autour de \underline{k} puis on passera à la torsion autour de $\underline{i} + \underline{k}$.

On indiquera également à quel endroit la limite d'élasticité est atteinte pour la première fois.

Le champ de contrainte équivalente, σ_{eq} donnée par (23), est illustré sur la figure 4 pour deux valeurs du couple de paramètres F, L , dans le cas de la torsion autour de l'axe $\underline{i} + \underline{k}$. Commenter ces figures à la lumière des résultats tout juste acquis concernant la limite d'élasticité pour la barre en torsion selon l'axe $\underline{i} + \underline{k}$.

Deuxième partie

L'écoulement autour d'un cylindre revisité

L'objectif de cet exercice est de prolonger l'étude de l'écoulement plan irrotationnel d'un fluide parfait incompressible autour d'un cylindre de centre O et de rayon R fixe par rapport au référentiel d'observation. La géométrie du cylindre et le système de coordonnées sont indiqués sur la figure 5(a).

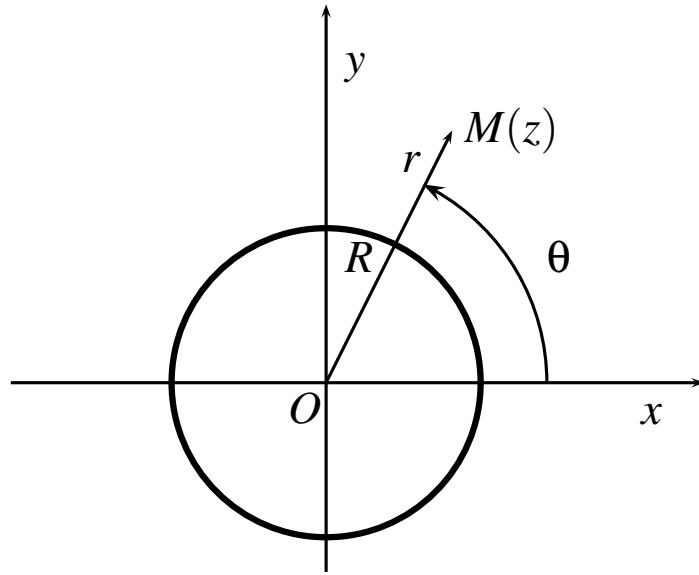


FIGURE 5: Géométrie du cylindre et système de coordonnées : le point M d'affixe z est repéré par les coordonnées r, θ et les composantes cartésiennes des vecteurs considérés dans l'exercice sont exprimées en fonction de ces coordonnées.

5. Ecoulement autour d'un cylindre avec circulation

On considère l'écoulement plan défini par le potentiel complexe suivant :

$$f(z) = V_0\left(z + \frac{R^2}{z}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z \quad (25)$$

On adoptera la détermination principale du logarithme complexe :

$$\log z = \log |z| + i \arg(z), \quad \text{avec } \arg(z) \in [0, 2\pi] \quad (26)$$

où V_0, Γ sont des réels donnés et i est le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$. Pour fixer les idées, on prendra $V_0 \geq 0, \Gamma \geq 0$. On rappelle que la variable complexe z désigne le point de coordonnées (x, y) dans le repère cartésien orthonormé d'origine O dans le plan considéré.

5.1. Nature de l'écoulement

En dérivant le potentiel complexe, donner le champ des vitesses. Donner également la fonction de courant associée à cet écoulement. On exprimera les vitesses dans le repère cartésien orthonormé d'origine O en fonction des coordonnées r, θ , comme sur la figure 5.

Justifier que, quel que soit Γ , ce champ de vitesses fournit une solution du problème de l'écoulement stationnaire irrotationnel d'un fluide parfait incompressible autour d'un cylindre de centre O et de rayon R , le fluide étant animé de la vitesse horizontale V_0 à l'infini. Cela illustre que ce problème possède une infinité de solutions.

5.2. Réalisation de l'écoulement

Imaginer comment provoquer expérimentalement l'apparition de la contribution proportionnelle à Γ au champ de vitesse étudié.

Interpréter la quantité Γ .

5.3. Etude des lignes de courant

Déterminer les points de l'écoulement où la vitesse est nulle. Discuter et interpréter physiquement ces résultats en fonction du paramètre

$$A = \frac{\Gamma}{4\pi RV_0} \quad (27)$$

Donner l'équation caractérisant les lignes de courant.

Tracer qualitativement ces lignes. Pour cela, on ne cherchera pas à exploiter l'équation trouvée mais on s'inspirera plutôt du nombre de points d'arrêt déterminés précédemment selon les différents cas apparus dans la discussion.

5.4. Efforts sur le cylindre

Calculer la résultante des efforts agissant sur le cylindre fixe.

Ce résultat résout-il le paradoxe de D'Alembert ?

Quel effet remarquable émerge de ce résultat ?

En connaissez-vous des applications pratiques ?