Le moment conjugué de Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) \qquad \boxed{\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}}$$

Pour une particule isolée : $\vec{p} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right) = \boxed{m\vec{v}}$

Pour une particule dans un potentiel :

$$\vec{p} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2 - U(\vec{r})\right) = \boxed{m\vec{v}}$$

Pour une particule dans un champ magnétique :

$$\vec{p} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2 + q\vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{r})\right) = \boxed{m\vec{v} + q\vec{A}(\vec{r})}$$

Invariance $\Rightarrow$ conservation

Invariance par translation dans le temps du Lagrangien

$$\frac{dL}{dt} = \cancel{\frac{\partial L}{\partial t}} + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} + \frac{d\vec{v}_i}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right) + \frac{d\vec{v}_i}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right)$$

$$\boxed{\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\vec{v}_i\cdot\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\vec{v}_i\cdot\vec{p}_i\right)}$$

Eq. de Lagrange

La quantité $\left(\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i\cdot\vec{v}_i\right) - L$ est conservée au cours du temps

$$\boxed{\text{Invariance dans le temps} \longrightarrow \text{conservation de l'énergie}}$$

Invariance $\Rightarrow$ conservation

Invariance par translation dans l'espace

On imagine une translation de vecteur $\vec{\mathcal{E}}$

$$\delta L = L\left(\{\vec{r}_i + \vec{\varepsilon}, \vec{v}_i\}\right) - L\left(\{\vec{r}_i, \vec{v}_i\}\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{\varepsilon} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\right)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{\varepsilon} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \, dt\right) = \vec{\varepsilon} \cdot \boxed{\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i(t_2) - \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i(t_1)\right)}$$

La quantité $\left(\sum_i \vec{p}_i\right)$ est conservée au cours du temps

Invariance par translation $\longrightarrow$ conservation de l'impulsion

Invariance $\Rightarrow$ conservation

Invariance par rotation dans l'espace

On imagine une rotation infinitésimale dans le plan (x,y)

$$\delta L = L\left(\left\{\left(x_i - \varepsilon y_i, \varepsilon x_i + y_i\right), \left(\dot{x}_i - \varepsilon \dot{y}_i, \varepsilon \dot{x}_i + \dot{y}_i\right)\right\}\right) - L\left(\left\{\left(x_i, y_i\right), \left(\dot{x}_i, \dot{y}_i\right)\right\}\right)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt$$

$$= \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{N} \left(x^{(i)} p_y^{(i)} - y^{(i)} p_x^{(i)} \right)(t_2) - \sum_{i=1}^{N} \left(x^{(i)} p_y^{(i)} - y^{(i)} p_x^{(i)} \right)(t_1) \right)$$

La quantité $\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i \right)$ est conservée au cours du temps

Invariance par rotation → conservation du moment cinétique

Invariance $\Rightarrow$ conservation

Le théorème de Noether

« A toute invariance du Lagrangien par une classe de transformations correspond une quantité conservée. »

Emmy Noether
(1882 – 1935)

- translation dans le temps $\longrightarrow$ énergie
- translation dans l'espace $\longrightarrow$ quantité de mouvement
- rotation dans l'espace $\longrightarrow$ moment cinétique
- multiplication par une phase $\longrightarrow$ charge électrique

La formulation hamiltonienne

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) \qquad \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

Sir William Rowan Hamilton
(1805-1865)

Formuler la physique, et notamment l'énergie, en utilisant les moments conjugués : $H(\vec{r}, \vec{p})$

$$dH = d\left(\sum_{i=1}^{N}(\vec{p}_i \cdot \vec{v}_i) - L\right) = \sum_{i=1}^{N}(\vec{p}_i \cdot d\vec{v}_i + d\vec{p}_i \cdot \vec{v}_i) - \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot d\vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \cdot d\vec{v}_i\right)$$

$$dH = \sum_{i=1}^{N}\left(-\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot d\vec{r}_i + \vec{v}_i \cdot d\vec{p}_i\right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i} = -\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} = \vec{v}_i$$

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} \\[2ex] \dfrac{d\vec{p}_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \vec{r}_i} \end{cases}}$$

Equations de Hamilton

Quelques hamiltoniens

Hamiltonien libre à une particule

$$H\left(\vec{r},\vec{p}\right) = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = m\vec{v}^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \boxed{\frac{\vec{p}^2}{2m}}$$

Hamiltonien à une particule dans un potentiel

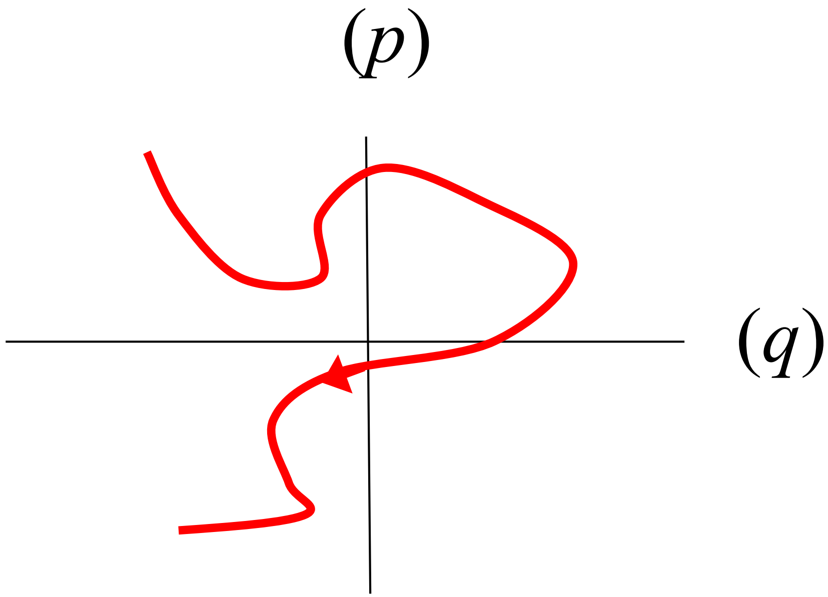
$$H\left(\vec{r},\vec{p}\right) = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = m\vec{v}^2 - \left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2 - U(\vec{r})\right) = \boxed{\frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r})}$$

Hamiltonien à une particule dans un champ électromagnétique

$$H\left(\vec{r},\vec{p}\right) = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = \left(m\vec{v} + q\vec{A}\right) - \left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2 + q\vec{v}\cdot\vec{A}\right) = \boxed{\frac{\vec{p}^2}{2m}}$$

Le déterminisme classique de la mécanique

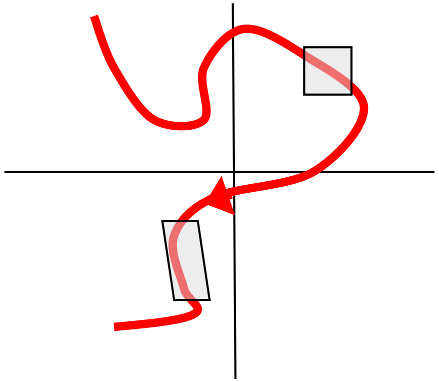
Espace des degrés de liberté (q,p) du système



Pour un système à N particules, l'espace des phases est un espace à $6N$ dimensions !

Les données de (q_i,p_i) à un instant t donné déterminent l'évolution du système pour tous les instants futurs $t_1 > t$.

Le théorème de Liouville



Espace des phases à 6*N* dimensions

L'état du système est représenté par un point

On considère un volume *dV* de cet espace qui se déforme au cours de l'évolution.

$$dV = dq_1 \cdots dq_N \, dp_1 \ldots dp_N$$

Après un temps *dt* : $q_1 \to q_1 + \dot{q}_1 dt \,, \ldots, \; p_N \to p_N + \dot{p}_N dt$

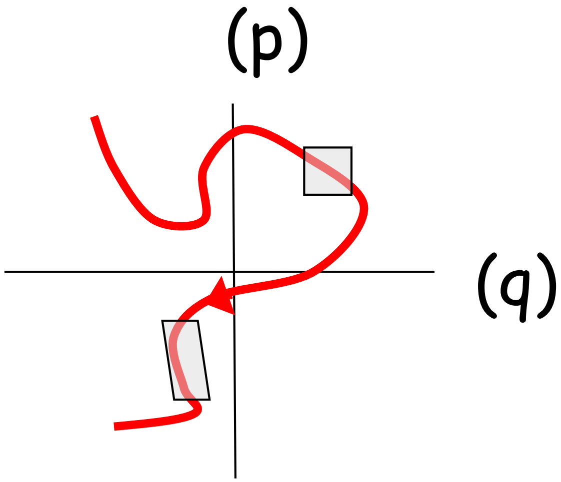
Le nouveau volume *dV'* est donc : $dV' = \det(J) \times dV$

$$\det(J) = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1'}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial q_1'}{\partial p_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_N'}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial p_N'}{\partial p_N} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} dt & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial p_N \partial p_1} dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial q_N} dt & \cdots & 1 - \frac{\partial^2 H}{\partial p_N \partial q_N} dt \end{vmatrix} = 1 + dt \times tr(M) + O(dt^2)$$

$$tr(M) = \sum_i \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(dV) = 0}$$

Le théorème de Liouville



Espace des phases à $6N$ dimensions
L'état du système est représenté par un point

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(dV\right)=0}$$

L'ensemble des trajectoires d'un système hamiltonien dans l'espace des phases s'apparente aux lignes de courant d'un **écoulement fluide incompressible** !!

Evolution temporelle

On considère une variable F évoluant au cours du temps.

$$\frac{dF\left[\left(\vec{q}_i, \vec{p}_i\right), t\right]}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{q}_i} \frac{d\vec{q}_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \vec{p}_i} \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right)$$

Donc $$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} - \frac{\partial F}{\partial \vec{p}_i} \frac{\partial H}{\partial \vec{q}_i} \right) = \boxed{\frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}}$$

Crochet de Poisson

<u>Conséquence</u> : toute fonction de $\left(\vec{q}, \vec{p}\right)$ dont le crochet de Poisson avec le hamiltonien est nul, est une constante du mouvement !

Principes de moindre action

Principe de Maupertuis :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{v}_i - E \right) dt$$

Pour une particule : $\boxed{S = \int_1^2 \vec{p} \cdot d\vec{\ell}}$

Principe de Fermat : $S = \int_1^2 n(\vec{x})\, d\ell$

$$\boxed{S = \frac{c}{\omega} \int_1^2 k(\vec{x})\, d\ell}$$

La réinvention de la mécanique

De manière générale, le lagrangien d'une particule libre

$\longrightarrow$ est indépendant de t

$\longrightarrow$ est indépendant de $\vec{r}$

$\longrightarrow$ est indépendant de la direction de $\vec{v}$

$$L\left(\vec{v}^2\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \vec{0}$$

$\dfrac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ est constant

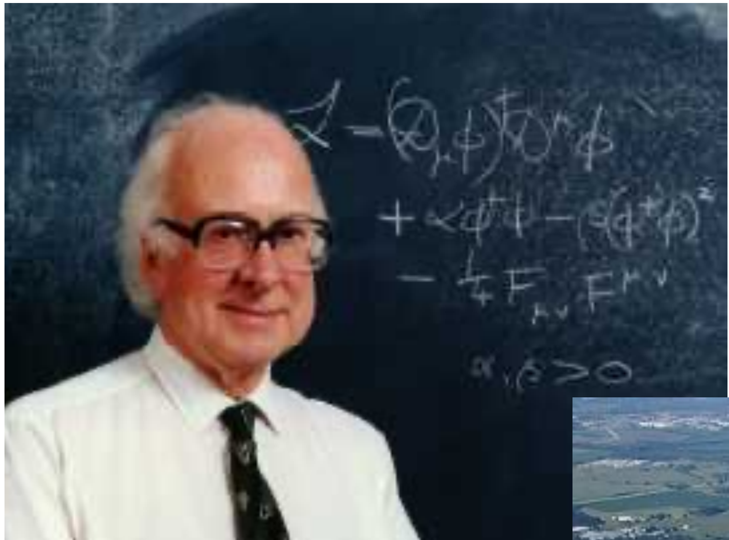
Principe d'inertie

Basses vitesses $\Rightarrow$ $\boxed{L\left(\vec{v}^2\right) = K\vec{v}^2}$

Pour une particule soumise à un potentiel U, on modifie

le lagrangien : $\boxed{L\left(\vec{v}^2\right) = \frac{m}{2}\vec{v}^2 - U}$ **PFD**

Le boson de Higgs



Peter Higgs
(1929 -)

$$L = \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi + \ldots$$

La relativité restreinte

une nouvelle géométrie de l'espace-temps

Les problèmes

- **Incompatibilité** entre l'électromagnétisme de Maxwell et la transformation galiléenne de changement de repère.

- Nécessité d'invoquer un « **éther** » comme support de la propagation des ondes électromagnétiques en l'absence de toute charge.

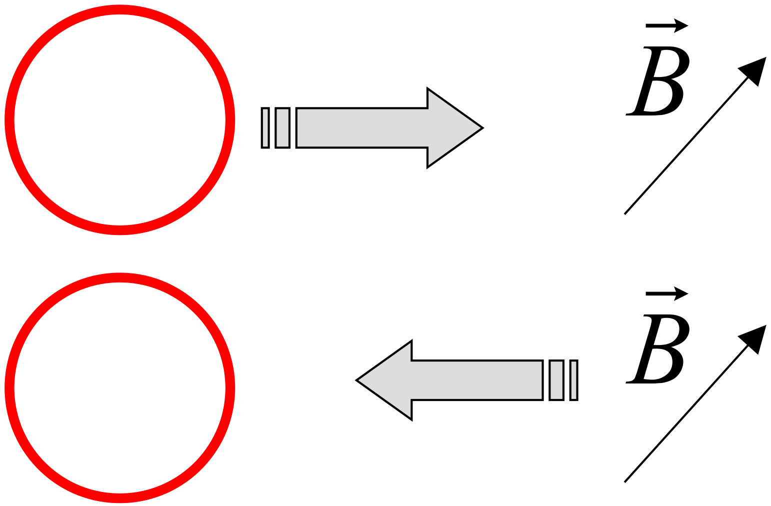
- Si cette hypothèse est vraie, alors on doit pouvoir déceler l'existence de cet éther en **mesurant la vitesse de la lumière** dans différentes directions à différentes périodes de l'année.

Problème : le magnétisme

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

La force dépend du repère !

<u>Expérience de pensée</u>



Force de Lorentz

$$\vec{F} = q\,\vec{v} \wedge \overleftarrow{B} = q\,\vec{E}_m$$

Loi de Faraday

$$e = -\frac{d}{dt}\int_{spire} \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Une même expérience, deux explications différentes !

Licence d’usage dans un contexte public, sans modification