Physique Générale
Corrigé de la petite classe $n^o 1$
RELATIVITÉ RESTREINTE

1 Mise en train : masse effective

1. Voir livre, pages 58 et 59.
2. On peut raisonner directement dans le repère du laboratoire. Soit E_0 l'énergie du photon et $\vec{p_0}$ son impulsion, avec $E_0 = p_0$ (relation due à la masse nulle du photon). Appelons $\vec{p_1}$ et $\vec{p_2}$ les impulsions respectives de l'électron et du positron. La conservation de l'impulsion ($\vec{p_0} = \vec{p_1} + \vec{p_2}$) entraîne $p_0 = E_0 \leq p_1 + p_2$, ce qui est en contradiction avec la conservation de l'énergie. En effet : $E_0 = \sqrt{m_e^2 + p_1^2} + \sqrt{m_e^2 + p_2^2} > p_1 + p_2$. On ne peut donc conserver à la fois l'énergie et l'impulsion.

   On peut également utiliser les résultats de la première question. Si l'on suppose que la réaction a lieu, alors on se place dans le repère du centre de masse des particules résultantes (on ne peut immédiatement se placer dans le repère du centre de masse du photon car un photon n'est jamais au repos). Dans ce repère, l'impulsion totale est nulle. Or l'impulsion totale étant conservée, cela signifierait qu'elle était nulle pour le photon initial ce qui est impossible.
3. Si en revanche le processus s'écrit comme une réaction sur un noyau N de masse M ($\gamma + N \to N + e^+ + e^-$), la quadrinorme de l'énergie du système dans le repère du centre de masse est l'invariant de Lorentz associé au quadri-vecteur énergie-impulsion totale. Cet invariant peut être évalué à partir des impulsions et des énergies initiales dans le laboratoire, soit $(E_0 + M)^2 - (\vec{p_0} + \vec{0})^2$, le noyau étant au repos dans le repère du laboratoire. Cette énergie dans le repère du centre de masse, estimée à partir de l'état final, est la masse effective des 3 particules finales, soit le noyau et les deux électrons. Celle-ci est supérieure ou égale à $M + 2m_e$, l'égalité étant atteinte si toutes les particules sont produites au repos dans le repère du centre de masse. On a donc :

   $$(E_0 + M)^2 - E_0^2 \geq (M + 2m_e)^2$$

   D'où finalement :

$$E_0 \geq 2m_e + \frac{2m_e^2}{M}$$

Le second membre correspond à l'énergie minimale nécessaire pour produire une paire e^+e^- (ou seuil de production de paire), proche de $2m_e \approx 1$ MeV puisque $m_e \ll M$.

2 Le mouvement uniformément accéléré relativiste

1. Les coordonnées de la quadri-vitesse sont :

$$u_0 = \frac{cdt}{d\tau}\ ,\ u_1 = \frac{dx}{d\tau}\ ,\ u_2 = \frac{dy}{d\tau}\ ,\ u_3 = \frac{dz}{d\tau}$$

Par conséquent, sa quadri-norme s'exprime :

$$u^2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = \frac{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}{d\tau^2} = c^2$$

d'où : $u_0 = c\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{c^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

On en déduit donc que (en prenant comme exemple l'axe x) :

$$u_1 = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\ \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{c^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}{c}\ v_1 \quad \text{d'ou} \quad v_1 = \frac{c\ u_1}{\sqrt{c^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$$

On en déduit la norme de la vitesse $\vec{v}$:

$$v^2 = \frac{c^2\ \ (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)}{c^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = c^2\ \frac{\vec{u}^2/c^2}{1 + \vec{u}^2/c^2} < c^2$$

On voit donc bien que la vitesse mesurée par l'observateur est toujours de norme inférieure à c.

2. En inversant la dernière relation de la question précédente, on sait que $\vec{u}^2 = \frac{v^2}{1 - v^2/c^2}$ et que donc $u_i = \frac{v_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. On réemploie pour les composantes de l'accélération la dérivée composée :

$$\gamma_0 = \frac{du_0}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\ \frac{du_0}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ \frac{d}{dt}\left(\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)$$

et

$$\gamma_i = \frac{du_i}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\ \frac{du_i}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ \frac{d}{dt}\left(\frac{v_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)$$

On sait que :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = -\frac{1}{2}\ \left(1-v^2/c^2\right)^{-3/2}\cdot -2\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} = \left(1-v^2/c^2\right)^{-3/2}\cdot\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\right)$$

D'où :

$$\gamma_0 = \frac{1}{\left(1-v^2/c^2\right)^2}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}\right) \qquad \text{et} \qquad \gamma_i = \frac{a_i}{1-v^2/c^2} + \frac{v_i}{\left(1-v^2/c^2\right)^2}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\right)$$

On a vu à la question précédente que la quadri-norme de u est constante. On dérive cette relation par rapport à τ :

$$\frac{du^2}{d\tau} = 2u\cdot\gamma = 2\ (u_0\gamma_0 - u_1\gamma_1) = 0$$

Par ailleurs, on peut calculer la quantité :

$$v_1\gamma_1 = c\ \frac{u_1\gamma_1}{\sqrt{c^2+\vec{u}^2}} = \frac{c\ u_0\gamma_0}{\sqrt{c^2+\vec{u}^2}} = c\ \gamma_0$$

3. Si on aligne les axes x du repère lié au laboratoire et du repère en accélération suivant la direction de l'accélération, alors la transformation de Lorentz dans les axes spatiaux transverses se résume à l'identité. Les vitesses et accélérations suivant ces axes sont donc nulles. Les équations sur u et γ deviennent donc :

$$u_0^2 - u_1^2 = c^2 \qquad \text{et} \qquad \gamma_0^2 - \gamma_1^2 = -g^2$$

La première équation nous dit que l'on peut trouver un paramètre θ tel que $u_0 = c\cosh\theta$ et $u_1 = c\sinh\theta$. Ce paramètre est en fait une fonction du temps propre τ, donc $\theta = f(\tau)$. Par ailleurs, ce paramètrage implique les relations suivantes sur l'accélération :

$$\gamma_0 = cf'(\tau)\sinh(f(\tau)) \qquad \text{et} \qquad \gamma_1 = cf'(\tau)\cosh(f(\tau))$$

D'où l'on tire : $c^2 f'(\tau)^2 = g^2$ soit encore $f(\tau) = \dfrac{g\tau}{c}$ Le signe choisi pour f' donne le sens d'écoulement du temps, qui peut être pris positif ou négatif au choix car la condition d'accélération uniforme est invariante par renversement du temps. La constante d'intégration est nulle car on choisit l'origine des temps au point de rebroussement dans le référentiel du laboratoire.

4. La relation qui permet de passer de t à τ est alors :

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{u_0}{c} = \cosh\left(\frac{g\tau}{c}\right) \quad \text{soit} \quad t = \frac{c}{g}\ \sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right)$$

$x(\tau)$ s'obtient en intégrant simplement u_1 :

$$x(\tau) = \frac{c^2}{g}\cosh\left(\frac{g\tau}{c}\right) + h$$

h étant une constante d'intégration. on peut donc établir l'équation de la trajectoire dans le repère au repos par la relation entre x et t :

$$(x-h)^2 - c^2t^2 = \frac{c^4}{g^2} \qquad \text{soit} \qquad x = h + c\sqrt{t^2 + c^2/g^2} = h + \frac{c^2}{g}\sqrt{1+(gt/c)^2}$$

5. La 3-vitesse $\vec{v}$ n'a en fait qu'une seule composante non nulle, dx/dt :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c\ u_1}{\sqrt{c^2+u_1^2}} = c\ \frac{\sinh(g\tau/c)}{\cosh(g\tau/c)} = c\ \tanh\left(\frac{g\tau}{c}\right)$$

Exprimée en fonction de t, cela donne :

$$v = c\ \frac{gt/c}{\sqrt{1+(gt/c)^2}} = \frac{gt}{\sqrt{1+(gt/c)^2}}$$

L'accélération correspondante est :

$$a = g\ \frac{\sqrt{1+(gt/c)^2} - \dfrac{t\cdot 2g^2t/c^2}{2\sqrt{1+(gt/c)^2}}}{1+(gt/c)^2} = \frac{g}{(1+(gt/c)^2)^{3/2}}$$

On peut également inverser la relation entre a et γ_0 établie à la question 2 :

$$a = \frac{c}{v}\frac{\gamma_0}{(1-v^2/c^2)^2} = \frac{\gamma_1}{(1-v^2/c^2)^2} = \frac{g}{\cosh(g\tau/c)^3}$$

<u>Limites $t\to\infty$</u> :

$$v \to c \qquad \text{et} \qquad a \approx \frac{c^3}{g^2t^3}$$

<u>Limites faibles vitesses</u> :

$$x \approx h + \frac{c^2}{g} + \frac{1}{2}gt^2 \qquad , \qquad v \approx gt \qquad \text{et} \qquad a \approx g$$

On retrouve donc à faible vitesse les expressions classiques du mouvement uniformément accéléré tandis qu'à temps très grand, la vitesse du point P vue dans le repère au repos sature à c et l'accélération devient nulle.

6. La trajectoire décrite correspond à $h=0$. Les lignes d'univers de ces trajectoires sont respectivement une droite parallèle à l'axe des temps d'équation $x = c^2/g$ et une branche d'hyperbole (cf. Fig. 1).

7. L'équation de la ligne d'univers d'un photon émis vers les x positifs dans un diagramme (t,x) est toujours du type : $x = ct + x_0$. Sachant que le photon part de $x = c^2/g$ à $t = t_{em}$, l'équation est : $x = c^2/g + c(t - t_{em})$.

La lumière atteint le point P_{acc} à condition qu'il existe t tel que :

$$c^2/g + c(t - t_{em}) = c\sqrt{t^2 + c^2/g^2}$$

D'où : $(t - t_{em} + c/g)^2 = t^2 + c^2/g^2$
Sachant que le temps t doit être supérieur au temps d'émission t_{em}, on va converver $t - -_{em}$ comme inconnue :

$$2c/g(t - t_{em}) = 2(t - t_{em})t_{em} + t_{em}^2 \qquad \text{et donc} \qquad 2(c/g - t_{em})(t - t_{em}) = t_{em}^2$$

Il faut donc que $t_{em} < c/g$ pour que cette équation ait une solution. Si l'on émet un photon après le temps c/g, on ne peut jamais atteindre le point qui accélère. Inversement dans le passé, aucun photon émis par le point ne peut atteindre l'observateur au repos avant le temps $-c/g$. Il existe donc un horizon temporel au-delà duquel aucune information ne peut être transmise.

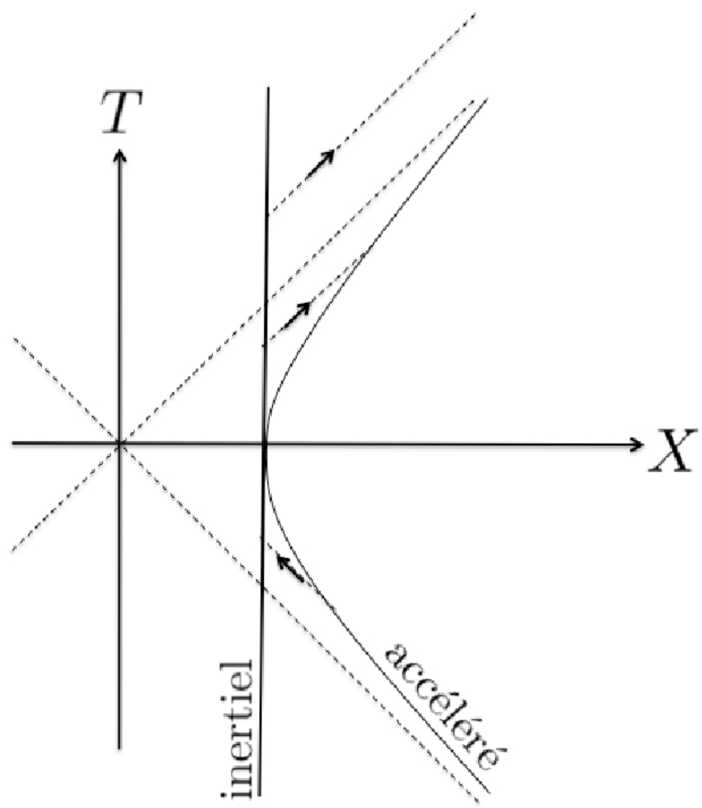

Figure 1 –