Physique Statistique : Petite classe n^{o}5

1 Expansion de l'univers

Juste après le Big Bang, la matière et le rayonnement sont restés en équilibre tant que la température est restée au dessus de 3000 K. En passant à des températures inférieures, matière et rayonnement se sont découplés : le rayonnement a suivi une évolution indépendante, adiabatique et réversible.

1. On considère le rayonnement comme un gaz de photons en équilibre. Donnez la condition d'évolution en fonction du volume et de la température.
2. Sachant que le rayonnement fossile est aujourd'hui mesuré à 3 K, en déduire quelle fraction du volume de l'univers actuel représentait le volume de l'univers à l'époque de la séparation.
3. En supposant qu'avant le découplage, les populations de bosons et de fermions étaient en équilibre thermodynamique mutuel (avec un potentiel chimique nul), et que toutes les particules étaient ultrarelativistes, calculer le rapport entre les densités d'énergie de fermions et de bosons (on peut supposer que les toutes les particules ont deux états de polarisation).
   On donne :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx = \frac{\pi^4}{15} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x + 1}\, dx = \frac{7}{120}\pi^4$$

2 Correction à l'approximation de Maxwell-Boltzmann

Le but de cet exercice est de trouver la petite correction **quantique** à apporter à l'approximation de Maxwell-Boltzmann pour un gaz parfait, selon que ce gaz est constitué de fermions ou de bosons. Le gaz parfait est en contact avec un thermostat de température T_0. Il occupe le volume V_0 et comporte un nombre N_0 de particules de masse m et de spin J. On appelle μ le potentiel chimique du gaz et l'on pose :

$$\phi = \exp\left(\frac{\mu}{k_B T_0}\right)$$

Cette dernière quantité est appelée « fugacité » du gaz. On définit également la longueur Λ par :

$$\Lambda = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m k_B T_0}\right)^{1/2}$$

1. Donner une interprétation physique de Λ (en ordre de grandeur). On se place d'abord dans l'approximation de Maxwell-Boltzmann et on appelle ϕ_{MB} la valeur de la fugacité calculée dans cette condition. Exprimer ϕ_{MB} en fonction de N_0, V_0, J et Λ. Montrer que $\phi_{MB} \ll 1$; on justifiera cette inégalité à partir de l'interprétation de Λ donnée plus haut.

2. On se place maintenant dans le cas où l'approximation de Maxwell-Boltzmann n'est plus exacte. Donner l'expression du nombre moyen n de particules par état quantique individuel en fonction de l'énergie E de l'état, de la fugacité ϕ et de T_0. On posera $\varepsilon = +1$ si les constituants sont des fermions et $\varepsilon = -1$ si ce sont des bosons. Donner simplement le *principe* du calcul de ϕ à partir des caractéristiques du gaz et de l'expression de $\bar{n}$.

3. Si l'on est dans des conditions assez proches de l'approximation de Maxwell-Boltzmann, on peut se contenter d'un développement de $\bar{n}$ au deuxième ordre en ϕ. Avec un minimum de calculs [1], déduire la relation :

$$\phi_{MB} = \phi \left(1 - \frac{\varepsilon\phi}{2\sqrt{2}}\right)$$

   Donner réciproquement le développement limité de ϕ au second ordre en ϕ_{MB}.

4. Toujours dans les mêmes conditions, on veut calculer l'énergie interne moyenne $\bar{U}$ du gaz. On appelle $\bar{U}_{MB}$ sa valeur à l'approximation de Maxwell-Boltzmann ($\bar{U}_{MB} = (3/2)N_0 k_B T_0$). Montrer avec un minimum de calculs que l'on a :

$$\frac{\bar{U}}{\bar{U}_{MB}} = \frac{\phi}{\phi_{MB}} \left(1 - \frac{\varepsilon\phi}{4\sqrt{2}}\right) \ .$$

   En déduire la correction au premier ordre en ϕ_{MB} à apporter à $\bar{U}_{MB}$ pour obtenir $\bar{U}$. Montrer que le caractère fermionique ou bosonique des constituants simule une interaction entre eux. Quand s'agit-il d'une répulsion apparente ? Quand s'agit-il d'une attraction apparente ?

---

1. On donne les intégrales définies suivantes : $I = \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}/2$ et $I' = \int_0^{+\infty} x^{3/2} e^{-x} dx = 3I/2$.