

27 Mécanique des matériaux composites

27.1 Inclusion cylindrique hétérogène dans une matrice élastique et application aux composites à fibres longues

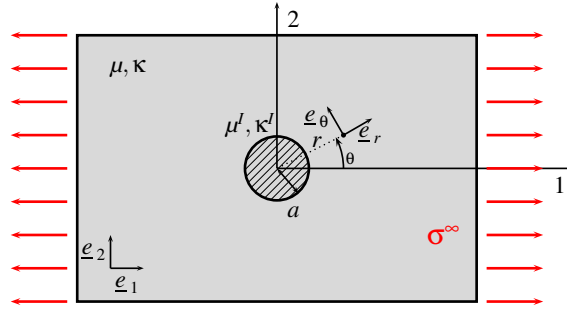


Figure 27.1 : Inclusion circulaire de rayon a au sein d'une matrice infinie dont les propriétés élastiques diffèrent. La plaque est soumise, très loin de l'inclusion, à l'effort de traction σ^∞ .

L'objectif de cette partie est d'étudier les contraintes qui se développent dans une plaque infinie contenant une inclusion circulaire et soumise à une contrainte de traction, σ^∞ , à l'infini, comme sur la figure 27.1. Le plan représenté est le plan (1,2). La matrice et l'inclusion sont des matériaux homogènes dont le comportement est élastique isotrope linéarisé, respectivement caractérisés par les modules de cisaillement et de compressibilité, (μ, κ) et (μ^I, κ^I) . L'exposant I fait référence à l'inclusion. L'inclusion et la matrice sont supposées être dans leur état naturel avant d'être sollicitées en traction, dans le cas isotherme. L'interface entre l'inclusion et la matrice est supposée parfaite (pas d'ouverture ni de glissement) de sorte que l'inclusion et la matrice sont "soudées" en $r = a$.

Si le milieu s'étend également dans la direction 3, il représente une matrice contenant une fibre. Cette situation correspond au cas d'un composite unidirectionnel renforcé par des fibres longues parallèles suffisamment éloignées les unes des autres (fraction volumique faible) pour que l'interaction fibre-matrice soit correctement décrite par le problème idéalisé de la figure 27.1.

27.1.1 Contraintes et déformations dans l'inclusion pour la traction transverse

Le champ des contraintes dans l'inclusion, i.e. $r \leq a$, dans le système de coordonnées cylindriques est donné par les expressions

$$\sigma_{rr}^I = \frac{\sigma^\infty}{2}(\beta^I + \delta^I \cos 2\theta) \quad (27.1)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^I = \frac{\sigma^\infty}{2}(\beta^I - \delta^I \cos 2\theta) \quad (27.2)$$

$$\sigma_{r\theta}^I = -\frac{\sigma^\infty}{2}\delta^I \sin 2\theta \quad (27.3)$$

pour une traction dans la direction 1. Les constantes en jeu dans ces expressions sont définies par :

$$\beta^I = \frac{\mu^I(\chi + 1)}{2\mu^I + \mu(\chi^I - 1)}, \quad \delta^I = \frac{\mu^I(\chi + 1)}{\mu + \mu^I\chi}, \quad (27.4)$$

et

$$\chi = 3 - 4\nu, \quad \chi^I = 3 - 4\nu^I \quad (27.5)$$

en déformations planes et

$$\chi = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}, \quad \chi^I = \frac{3 - \nu^I}{1 + \nu^I} \quad (27.6)$$

en contraintes planes.

Ce résultat s'établit en utilisant les fonctions d'Airy comme on l'a fait dans le problème du trou dans une plaque au chapitre 26. Cependant, on ne demande pas ici de démontrer ce résultat et on renvoie le lecteur au détail de la solution développée par (Muskhelishvili, 1977) et consignée dans le manuel (Kachanov et al., 2003).

Le champ est homogène dans l'inclusion

Montrer que le champ des contraintes données par les équations (27.1),(27.2),(27.3) est homogène dans l'inclusion et correspond aux composantes cartésiennes des contraintes suivantes :

$$\sigma_{11}^I = \frac{\sigma^\infty}{2}(\beta^I + \delta^I), \quad \sigma_{22}^I = \frac{\sigma^\infty}{2}(\beta^I - \delta^I), \quad \sigma_{12}^I = 0 \quad (27.7)$$

Commenter ce résultat en se rappelant que la plaque est soumise à une traction simple dans la direction 1 à l'infini.

Obtient-on le résultat attendu dans le cas où la matrice et l'inclusion ont les mêmes propriétés élastiques ?

Remarquer que ces contraintes ne dépendent pas de la taille a de l'inclusion. Commenter.

► Les vecteurs de la base cylindrique sont liés de la manière suivante à la base cartésienne orthonormée :

$$\underline{e}_r = \cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2, \quad \underline{e}_\theta = -\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2, \quad \underline{e}_z = \underline{e}_3$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= \sigma_{rr} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \sigma_{r\theta} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r) + \sigma_{zz} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \\ &= (\sigma_{rr} \cos^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \sin^2 \theta - \sigma_{r\theta} \sin 2\theta) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \\ &+ (\sigma_{rr} \sin^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \cos^2 \theta + \sigma_{r\theta} \sin 2\theta) \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 \\ &+ \frac{1}{2} ((\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \sin 2\theta + 2\sigma_{r\theta} \cos 2\theta) (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) + \sigma_{zz} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned}$$

En substituant les composantes (27.1) à (27.3), on obtient les expressions (27.7) indiquées. On constate qu'elles sont indépendantes de la position du point matériel, ce qui signifie que les contraintes sont homogènes dans l'inclusion. On remarque que l'état de contraintes dans l'inclusion est biaxial alors que la sollicitation imposée à l'infini est uniaxial. C'est une conséquence du confinement imposé par la matrice.

Les contraintes et déformations dans une inclusion au sein d'une matrice infinie ne dépendent pas de sa taille. La propriété d'homogénéité des contraintes et déformations dans l'inclusion s'étend au cas ellipsoïdal et le résultat ne dépend alors que du rapport

a/b . Ces deux derniers points ne sont plus valides dans le cas d'une matrice de dimensions finies proches de celles de l'inclusion.

Dans le cas du matériau homogène, $\mu^I = \mu$ etc., on trouve $\beta^I = \delta^I = 1$ de sorte que l'état de contrainte se réduit à la traction simple σ^∞ comme il se doit.

L'inclusion est sous pression

Dans le cas des contraintes planes, puis dans le cas des déformations planes, calculer la pression hydrostatique qui règne dans l'inclusion en fonction des paramètres en jeu et de σ^∞ .

► Dans le cas des contraintes planes, la pression hydrostatique dans l'inclusion vaut

$$p^I = -\frac{1}{3}(\sigma_{11}^I + \sigma_{22}^I) = -\frac{\sigma^\infty}{3}\beta^I$$

Dans le cas des déformations planes s'ajoute la composante $\sigma_{33}^I = \nu^I(\sigma_{11}^I + \sigma_{22}^I) = \nu^I\beta^I\sigma^\infty$ de sorte que

$$p^I = -\frac{1}{3}(\sigma_{11}^I + \sigma_{22}^I + \sigma_{33}^I) = -\frac{\sigma^\infty}{3}\beta^I(1 + \nu^I)$$

Déformée de l'inclusion

Donner le champ des déplacements dans l'inclusion dans le cas des déformations planes.

Quelle forme prend l'inclusion ? La caractériser précisément.

Donner les conditions du respect du contexte infinitésimal de l'étude.

► Les déformations se calculent grâce à la loi de Hooke pour donner :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^I &= \frac{\sigma^\infty}{2E^I} ((1 + \nu^I)(1 - 2\nu^I)\beta^I + (1 + \nu^I)\delta^I) \\ \varepsilon_{22}^I &= \frac{\sigma^\infty}{2E^I} ((1 + \nu^I)(1 - 2\nu^I)\beta^I - (1 + \nu^I)\delta^I)\end{aligned}$$

Toutes les autres composantes du tenseur des déformations infinitésimales sont nulles.

Le champ des déplacements s'en déduit aisément

$$\begin{aligned}u_1^I &= \frac{\sigma^\infty}{2E^I} ((1 + \nu^I)(1 - 2\nu^I)\beta^I + (1 + \nu^I)\delta^I) X_1 \\ u_2^I &= \frac{\sigma^\infty}{2E^I} ((1 + \nu^I)(1 - 2\nu^I)\beta^I - (1 + \nu^I)\delta^I) X_2\end{aligned}$$

à un mouvement de corps rigide infinitésimal près.

Que devient alors le cercle d'équation $X_1^2 + X_2^2 = a^2$? Il se transforme en

$$\frac{x_1^2}{(1 + \varepsilon_{11}^I)^2} + \frac{x_2^2}{(1 + \varepsilon_{22}^I)^2} = a^2$$

Il s'agit d'une ellipse dont le rapport grand axe sur petit axe vaut :

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + \varepsilon_{11}^I}{1 + \varepsilon_{22}^I} \simeq 1 + \varepsilon_{11}^I - \varepsilon_{22}^I = 1 + \frac{\sigma^\infty}{E^I}(1 + \nu^I)\delta^I$$

Le contexte infinitésimal est garanti tant que $\sigma^\infty / E^I \ll 1$.

27.1.2 Concentration de contraintes dans la matrice pour la traction transverse

Le champ de contraintes qui règne dans la matrice, i.e. pour $r \geq a$, est donné, quant à lui, par les expressions suivantes :

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - \gamma \frac{a^2}{r^2} + \left(1 - 2\beta \frac{a^2}{r^2} - 3\delta \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right) \quad (27.8)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \gamma \frac{a^2}{r^2} - \left(1 - 3\delta \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right) \quad (27.9)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \beta \frac{a^2}{r^2} + 3\delta \frac{a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \quad (27.10)$$

où les paramètres β et δ sont définis par

$$\beta = -\frac{2(\mu^I - \mu)}{\mu + \mu^I \chi}, \quad \delta = \frac{\mu^I - \mu}{\mu + \mu^I \chi}, \quad \gamma = \frac{\mu(\chi^I - 1) - \mu^I(\chi - 1)}{2\mu^I + \mu(\chi^I - 1)} \quad (27.11)$$

On admet que ce champ de contraintes vérifie les équations d'équilibre statique.

Contrainte normale et tangentielle le long de l'interface

Vérifier que la solution en contraintes proposée dans la matrice satisfait les conditions aux limites à l'infini et au bord de l'inclusion.

Donner au passage les expressions de la contrainte normale σ_n et de la contrainte tangentielle le long de l'interface $r = a$.

► Pour $r \rightarrow \infty$, les composantes des contraintes sont celles d'une traction simple dans la direction 1 :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= \sigma^\infty \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \\ &= \sigma^\infty (\cos^2 \theta \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sin^2 \theta \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta - \sin \theta \cos \theta (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r)) \end{aligned}$$

Quant à l'interface inclusion/matrice, la contrainte normale et la contrainte tangentielle sont obtenues en calculant le vecteur-contrainte $\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r$ et en le projetant sur \underline{e}_r et \underline{e}_θ , respectivement :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{rr}(r=a) = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 - \gamma + (1 - 2\beta - 3\delta) \cos 2\theta), \\ \tau &= \sigma_{r\theta}(r=a) = -\frac{\sigma^\infty}{2} (1 + \beta + 3\delta) \sin 2\theta \end{aligned}$$

La continuité du vecteur-contrainte à l'interface $r = a$ entre l'inclusion et la matrice exige que

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^I(r=a) &= \sigma_{rr}(r=a) \quad \forall \theta \implies \beta^I + \delta^I \cos 2\theta = 1 - \gamma + (1 - 2\beta - 3\delta) \cos 2\theta \\ \sigma_{r\theta}^I(r=a) &= \sigma_{r\theta}(r=a) \quad \forall \theta \implies \delta^I \sin 2\theta = (1 + \beta + 3\delta) \sin 2\theta \end{aligned}$$

Ces relations sont effectivement vérifiées car l'utilisation des expressions des paramètres

permet de montrer que

$$\beta^I = 1 - \gamma, \quad \delta^I = 1 - 2\beta - 3\delta = 1 + \beta + 3\delta$$

Contraintes le long du ligament et facteur de concentration de contrainte

Donner l'expression de la contrainte σ_{11} dans la matrice le long de la ligne $\theta = \pi/2$, perpendiculaire à la direction de la charge de traction appliquée. Exprimer alors le facteur de concentration de contrainte

$$K_t = \frac{\sigma_{11}(r = a, \theta = \pi/2)}{\sigma^\infty} \quad (27.12)$$

► La contrainte axiale σ_{11} le long du ligament perpendiculaire à la charge appliquée n'est autre que

$$\sigma_{11}(r > a, \theta = \pi/2) = \sigma_{\theta\theta}(r > a, \theta = \pi/2) = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(2 + \gamma \frac{a^2}{r^2} - 3\delta \frac{a^4}{r^4} \right)$$

On en déduit que

$$K_t = \frac{1}{2} (2 + \gamma - 3\delta) \quad (27.13)$$

On donne également le profil de contrainte le long de la ligne $\theta = 0$:

$$\sigma_{22}(r > a, \theta = 0) = \sigma_{\theta\theta}(r > a, \theta = 0) = \frac{\sigma^\infty}{2} \frac{a^2}{r^2} (\gamma + 3\delta \frac{a^2}{r^2})$$

On obtient également un facteur de concentration de contrainte au pôle :

$$K_t^0 = \frac{1}{2} (\gamma + 3\delta) \quad (27.14)$$

Cas limites du trou et de l'inclusion rigide

Calculer le facteur de concentration de contrainte dans les trois cas suivants :

1. L'inclusion a les mêmes propriétés élastiques que la matrice ;
2. L'inclusion est un trou ;
3. L'inclusion est rigide.

Commenter dans chaque cas.

En particulier, discuter la valeur du facteur de concentration de contrainte dans le cas de l'inclusion rigide en fonction du coefficient de Poisson de la matrice.

► Les réponses sont consignées dans la table 27.1. Si l'inclusion a les mêmes propriétés élastiques que la matrice, la plaque peut être considérée comme homogène de sorte qu'il n'y a pas de concentration de contrainte. On a $\delta = \gamma = 0$ et $K_t = 1$. Dans le cas du trou dans une plaque, $\gamma = -\delta = 1$ et on retrouve le résultat établi au chapitre 26, à savoir $K_t = 3$. Dans le cas de l'inclusion rigide, les modules de cisaillement et de compressibilité dans l'inclusion sont considérés comme infinis de sorte que $\delta = 1/\chi$ et $\gamma = (1 - \chi)/2$. On trouve que le facteur de concentration de contrainte ne dépend que de

inclusion	homogène	vide	rigide
μ^I	μ	0	$+\infty$
δ	0	-1	$1/\chi$
γ	0	1	$-\chi/2$
K_t	1	3	$1 - \chi/4 - 3/4\chi$
K_t^0	1	-1	$(3/\chi - \chi/2)/2$

Tableau 27.1: Facteurs de concentration de contrainte selon la nature de l'inclusion dans une matrice infinie.

χ et, par conséquent, du coefficient de Poisson de la matrice seulement, à savoir ν . On a également ajouté K_t^0 défini dans la question précédente.

27.1.3 Extension au chargement biaxial quelconque

Le composite de la figure 27.1 est désormais chargé dans les deux directions perpendiculaires \underline{e}_1 et \underline{e}_2 : contrainte σ_1^∞ à l'infini dans la direction 1 et contrainte σ_2^∞ à l'infini dans la direction 2.

Trouver les contraintes $\sigma_{11}^I, \sigma_{22}^I, \sigma_{12}^I$ qui règnent dans l'inclusion en fonction des propriétés élastiques de la matrice et de l'inclusion et du chargement σ_1^∞ et σ_2^∞ .

► Nous faisons appel au théorème de superposition du paragraphe 9.1.4. La solution du problème de traction simple σ_1^∞ dans la direction 1 est

$$\sigma_{11}^I = \frac{\sigma_1^\infty}{2}(\beta^I + \delta^I), \quad \sigma_{22}^I = \frac{\sigma_1^\infty}{2}(\beta^I - \delta^I), \quad \sigma_{12}^I = 0$$

La solution du problème de traction simple σ_2^∞ dans la direction 2 est

$$\sigma_{11}^I = \frac{\sigma_2^\infty}{2}(\beta^I - \delta^I), \quad \sigma_{22}^I = \frac{\sigma_2^\infty}{2}(\beta^I + \delta^I), \quad \sigma_{12}^I = 0$$

La superposition des deux chargements conduit à la somme des champs précédents

$$\sigma_{11}^I = \frac{\sigma_1^\infty}{2}(\beta^I + \delta^I) + \frac{\sigma_2^\infty}{2}(\beta^I - \delta^I) \quad (27.15)$$

$$\sigma_{22}^I = \frac{\sigma_1^\infty}{2}(\beta^I - \delta^I) + \frac{\sigma_2^\infty}{2}(\beta^I + \delta^I), \quad \sigma_{12} = 0 \quad (27.16)$$

En effet, la géométrie, les propriétés du composite étudié sont les mêmes dans les deux cas et les conditions aux limites de type Neumann sont appliquées sur les mêmes frontières (à l'infini) de la matrice.

27.1.4 Application aux composites à fibres longues

Les résultats précédents sont appliqués au cas d'un composite à matrice métallique composé de fibres de carbure de silicium dans une matrice d'alliage de titane. Les propriétés élastiques supposées isotropes de ces matériaux sont données dans la table 27.2. Ce type de composite allie la rigidité du renfort fibreux à la ductilité de la matrice métallique.

On utilise le problème de la figure 27.1 pour estimer les contraintes dans la fibre et la matrice, en faisant ainsi l'approximation d'une faible interaction entre les fibres (fraction

matériau	module de cisaillement μ (GPa)	module de compressibilité κ (GPa)
titane	44	110
SiC	168	215

Tableau 27.2: Modules d'élasticité des constituants du composite à matrice métallique étudié.

volumique faible de fibres). Dans les questions suivantes, la matrice est soumise à l'infini à la contrainte de traction simple σ^∞ donnée, dans la direction 1, comme sur la figure 27.1.

Modules de Young des constituants

Donner les valeurs du module de Young du titane et du carbure de silicium (SiC) qui se déduisent des propriétés élastiques de la table 27.2.
Commenter.

► Le module de Young et le coefficient de Poisson se déduisent des valeurs des modules de compressibilité et de cisaillement par les formules de la table 8.1.

Pour le titane, on trouve $E = 116$ GPa, $\nu = 0.32$.

Pour le carbure de silicium, on a $E = 400$ GPa, $\nu = 0.19$.

Le carbure de silicium est presque quatre fois plus rigide que le titane. C'est ce qui explique son usage comme renfort de la matrice.

Profils et champs de contraintes

Les champs de contraintes $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ normalisés par la traction appliquée σ^∞ sont illustrés sur la figure 27.2 dans l'inclusion et dans la matrice environnante.

Commenter ces champs.

La figure 27.3 à gauche montre les profils des contraintes normalisées $\sigma_{11}/\sigma^\infty$ et $\sigma_{22}/\sigma^\infty$ le long de la ligne d'équation $x_2 = 0$. La figure 27.3 à droite montre les profils des contraintes normalisées $\sigma_{11}/\sigma^\infty$ et $\sigma_{22}/\sigma^\infty$ le long du ligament (axe 2 d'équation $x_1 = 0$).

Commenter ces profils.

► Conformément aux résultats établis précédemment, les contraintes dans l'inclusion sont uniformes. La contrainte σ_{11} dans l'inclusion est plus de 20% supérieure à la contrainte appliquée. Il existe une légère contrainte σ_{22} de compression dans l'inclusion. Alors que, comme prévu, le cisaillement σ_{12} est nul dans l'inclusion, il y a des contraintes de cisaillement dans la matrice et près de l'interface inclusion/matrice.

La contrainte σ_{22} (resp. σ_{11}) présente une discontinuité à l'interface inclusion/matrice le long de la ligne $x_2 = 0$ (resp. $x_1 = 0$), au contraire de la composante σ_{11} (resp. σ_{22}). Ces observations sont en accord avec la transmission du vecteur-contrainte à l'interface.

Rupture de fibre en traction transverse

Le carbure de silicium est un matériau fragile qui rompt lorsque la contrainte principale maximale atteint une valeur critique σ_c . L'ordre de grandeur de cette contrainte critique est de 500 MPa à température ambiante mais ces matériaux sont surtout utilisés pour les applications aéronautiques à haute température. On exprimera donc les résultats de cette question en fonction de σ_c sans passer à l'application numérique.

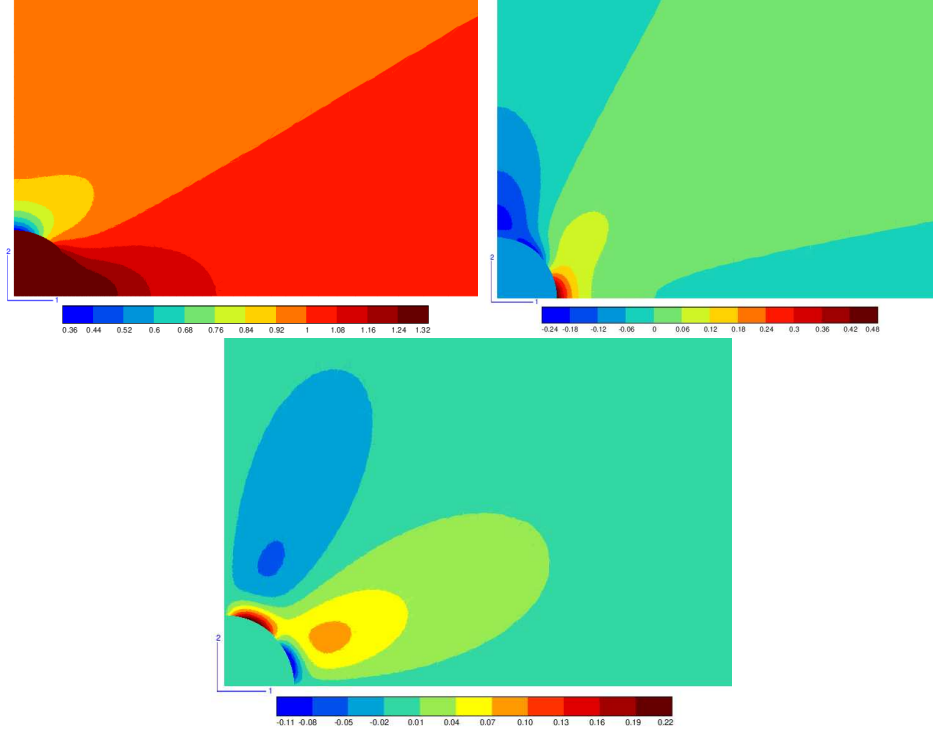


Figure 27.2 : Contraintes dans l'inclusion et la matrice en traction selon l'axe 1 : champs des composantes $\sigma_{11}/\sigma^\infty$ (en haut à gauche), $\sigma_{22}/\sigma^\infty$ (en haut à droite) et $\sigma_{12}/\sigma^\infty$ (en bas).

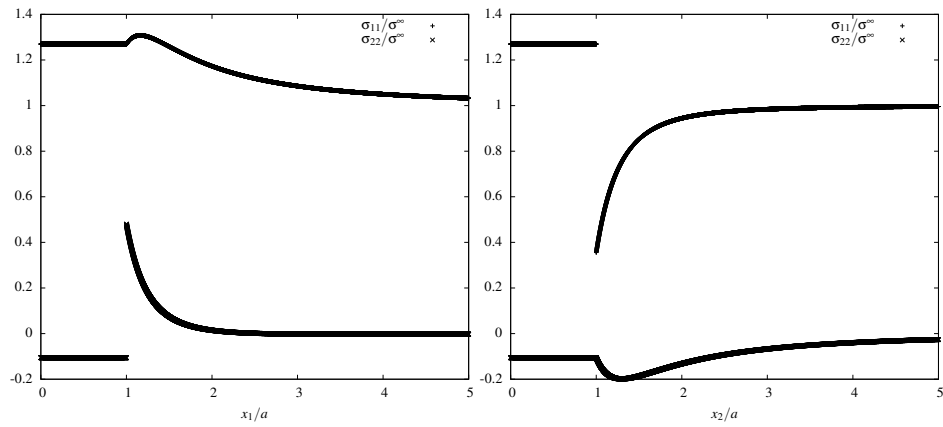


Figure 27.3 : Profils de contraintes le long de la ligne $x_2 = 0$ (à gauche) et de la ligne $x_1 = 0$ (à droite).

Trouver pour quelle valeur de contrainte de traction appliquée σ^∞ la condition de rupture est atteinte dans l'inclusion. On exprimera cette valeur en fonction de σ_c et des propriétés élastiques de la fibre et de la matrice.

Qu'en est-il en compression ($\sigma^\infty < 0$) ?

► L'état de contraintes dans l'inclusion est biaxial et les contraintes principales sont $\sigma_{11}^I, \sigma_{22}^I$ ainsi que σ_{33}^I dans le cas des déformations planes. En cas de traction la contrainte principale maximale est σ_{11}^I qui est positive. Le critère de rupture est atteint lorsque

$$\sigma_{11}^I = \sigma_c \quad \Rightarrow \quad \sigma^\infty = \frac{2\sigma_c}{\beta^I + \delta^I}$$

En compression ($\sigma^\infty < 0$), les courbes de la figure 27.3 montrent que la contrainte principale max sera $\sigma_{22}^I > 0$ (car elle est négative en traction sur la figure) alors que les deux autres contraintes seront négatives. Finalement, la rupture aura lieu lorsque

$$\sigma_{22}^I = \sigma_c \quad \Rightarrow \quad \sigma^\infty = \frac{2\sigma_c}{\beta^I - \delta^I}$$

Décohésion à l'interface

Un autre mécanisme d'endommagement possible est la décohésion entre la fibre et la matrice qui correspond à la rupture de l'interface fibre/matrice. Un critère simple de décohésion est obtenu en considérant que la rupture de l'interface a lieu lorsque la contrainte normale σ_n atteint une valeur critique σ_n^c .

Donner la valeur de σ^∞ pour laquelle σ_n^c est atteinte à un point de l'interface. Indiquer la position de ce point.

Distinguer le cas de la traction ($\sigma^\infty > 0$) du cas de la compression.

► La contrainte normale le long de l'interface est simplement donnée par $\sigma_{rr}^I(r=a) = \sigma^\infty(\beta^I + \delta^I \cos 2\theta)/2$. En traction, cette contrainte est maximum en $\theta = 0$ et la rupture de l'interface se produit donc lorsque $\sigma^\infty = 2\sigma_n^c/(\beta^I + \delta^I)$.

En compression, la contrainte normale est maximale et positive en $\theta = \pi/2$ et la rupture de l'interface se produit donc lorsque $\sigma^\infty = 2\sigma_n^c/(\beta^I - \delta^I)$.

Rupture de fibre en cisaillement dans le plan 1-2

Le composite est maintenant soumis à un chargement de cisaillement simple de valeur τ^∞ à l'infini.

Donner les contraintes dans l'inclusion en fonction de τ^∞ et des caractéristiques élastiques de l'inclusion et de la matrice. Commenter.

Pour quelle valeur de τ^∞ la rupture de l'inclusion a-t-elle lieu et quelle est l'orientation de la fissure correspondante ? Le critère de rupture de l'inclusion est le même qu'à la question 27.1.4.

► On se place dans le repère principal associé au chargement de cisaillement τ^∞ . Le composite est alors sollicité en traction $\sigma_1^\infty = \tau^\infty$ dans la direction 1, et en compression $\sigma_2^\infty = -\tau^\infty$ dans la direction 2. On peut alors appliquer les formules de superposition (27.15, 27.16) :

$$\sigma_{11}^I = \delta^I \tau^\infty, \quad \sigma_{22}^I = -\delta^I \tau^\infty, \quad \sigma_{12}^I = 0$$

On constate que l'inclusion est également dans un état de contrainte de cisaillement (2 valeurs propres opposées). Par suite, la contrainte principale maximale est σ_{11}^I et la rupture se produit lorsque $\tau^\infty = \sigma_c/\delta^I$, avec une fissure verticale.