



2019-2020

Ce polycopié de cours appartient à .....

# Introduction au traitement du signal

1A

Florent Di Meglio, Bruno Figliuzzi

<http://cas.ensmp.fr/~dimeglio/>

MINES PARISTECH



# Table des matières

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Analyse harmonique</b>   | <b>5</b>  |
| 2.1      | Signaux continus . . . . .  | 5         |
| 2.1.1    | Signaux périodiques et série de Fourier . . . . .                                     | 6         |
|          | Définitions . . . . .   | 6         |
|          | Théorème de Dirichlet et convergence ponctuelle des<br>séries de Fourier . . . . .    | 8         |
| 2.1.2    | Transformation de Fourier . . . . .   | 8         |
|          | Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ . . . . .                               | 9         |
|          | Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .                               | 12        |
|          | Energie d'un signal . . . . .   | 13        |
| 2.2      | Signaux discrets . . . . .  | 14        |
| 2.2.1    | Signaux périodiques – Série de Fourier discrète . . . . .                             | 14        |
|          | Signaux dans $l^1(\mathbb{R})$ – Transformée de Fourier en temps<br>discret . . . . . | 15        |
|          | Transformée de Fourier Discrète . . . . .   | 16        |
| 2.3      | Echantillonnage . . . . .   | 17        |
| 2.3.1    | Echantillonnage régulier et théorème de Shannon . . . . .                             | 18        |
| 2.3.2    | Repliement spectral . . . . .   | 20        |
| 2.3.3    | Pré-filtrage . . . . .  | 22        |
| 2.3.4    | Sur le lien entre le signal continu et ses échantillons . . . . .                     | 23        |
| 2.4      | Exercices . . . . .   | 25        |
| <b>3</b> | <b>Filtrage</b>   | <b>29</b> |
| 3.1      | Preliminaire : convolution et Dirac . . . . .   | 29        |
| 3.1.1    | Produit de convolution . . . . .  | 29        |
| 3.1.2    | Distribution de Dirac . . . . .   | 30        |
| 3.2      | Définition et généralités . . . . .   | 31        |
| 3.3      | Stabilité et transformée de Laplace bilatérale . . . . .                              | 32        |
| 3.3.1    | Stabilité . . . . .   | 32        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 3.3.2    | Transformée de Laplace bilatérale . . . . .   | 32        |
| 3.4      | Filtres passe-bas . . . . .   | 33        |
| 3.4.1    | Filtre de Butterworth . . . . .   | 34        |
| 3.4.2    | Filtres de Tchebychev . . . . .   | 35        |
| 3.5      | Filtrage discret . . . . .  | 35        |
| 3.5.1    | Transformée en $z$ . . . . .  | 36        |
| 3.5.2    | Convolution discrète . . . . .  | 37        |
| 3.5.3    | Stabilité des filtres discrets . . . . .  | 38        |
|          | Filtres LTI décrits par des équations aux différences à<br>coefficients constants . . . . . | 39        |
| 3.5.4    | Un exemple . . . . .  | 39        |
| 3.5.5    | Conversion Analogique-Numérique de filtres . . . . .  | 40        |
|          | Echantillonnage de la réponse impulsionnelle . . . . .                                      | 40        |
|          | Transformée bilinéaire de Tustin . . . . .  | 42        |
| 3.5.6    | Quelques FIR . . . . .  | 43        |
|          | Moyenne glissante . . . . .   | 43        |
|          | Filtre de Savitzki-Golay . . . . .  | 43        |
| 3.6      | Sous-échantillonnage et sur-échantillonnage . . . . .                                       | 44        |
| 3.6.1    | Sous-échantillonnage . . . . .  | 45        |
| 3.6.2    | Suréchantillonnage par insertion de zéros . . . . .   | 47        |
| 3.6.3    | Conversion de pas d'échantillonnage d'un ratio $I/D$ . . . . .                              | 48        |
| 3.7      | Exercices . . . . .   | 48        |
| <b>4</b> | <b>Signaux aléatoires</b>   | <b>53</b> |
| 4.1      | Processus stationnaires . . . . .   | 53        |
| 4.1.1    | Définitions préliminaires . . . . .   | 53        |
| 4.1.2    | Estimation des statistiques d'ordre deux d'un signal<br>aléatoire . . . . .                 | 55        |
| 4.2      | Puissance spectrale . . . . .   | 58        |
| 4.3      | Filtrage de Wiener . . . . .  | 60        |
| 4.4      | Exercices . . . . .   | 63        |
| <b>5</b> | <b>Du stationnaire au transitoire</b>   | <b>65</b> |
| 5.1      | Fréquence instantanée . . . . .   | 65        |
| 5.2      | Transformée de Fourier fenêtrée . . . . .   | 68        |
| 5.2.1    | Définition . . . . .  | 68        |
| 5.2.2    | Incertitude de Heisenberg . . . . .   | 70        |
|          | Boîtes de Heisenberg et spectrogramme . . . . .   | 70        |
|          | Incertitude de Heisenberg . . . . .   | 71        |
| 5.3      | Fenêtrage . . . . .   | 73        |
| 5.3.1    | Propriétés des fenêtres . . . . .   | 73        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 5.3.2    | Exemples de fenêtres . . . . .   | 74        |
| 5.4      | Transformée de Fourier Fenêtrée Discrète . . . . .                           | 74        |
| 5.5      | Crêtes de Fourier à Fenêtre . . . . .  | 75        |
| <b>6</b> | <b>Du temps-fréquence au temps-échelle de temps</b>                          | <b>77</b> |
| 6.1      | Transformée en ondelettes . . . . .  | 77        |
| 6.1.1    | Ondelettes analytiques . . . . .   | 78        |
| 6.1.2    | Ondelettes réelles . . . . .   | 79        |
| 6.2      | Etude de la régularité . . . . .   | 80        |
| 6.2.1    | Préliminaires . . . . .  | 80        |
|          | Régularité Lipschitz $\alpha$ . . . . .                                      | 80        |
|          | Analyse de la régularité par la transformée de Fourier<br>Fenêtrée . . . . . | 81        |
| 6.2.2    | Analyse de la régularité par les ondelettes . . . . .                        | 81        |
|          | Moments nuls . . . . .   | 81        |
|          | Théorèmes de régularité . . . . .  | 81        |
| 6.3      | Bases d'ondelettes . . . . .   | 82        |
| 6.3.1    | Approximations multi-résolutions . . . . .                                   | 82        |
| 6.3.2    | Fonction d'échelle . . . . .   | 84        |
| 6.3.3    | Filtres miroirs conjugués . . . . .  | 85        |
| 6.3.4    | Ondelettes orthogonales . . . . .  | 85        |
| 6.3.5    | Bancs de filtres . . . . .   | 86        |
| <b>7</b> | <b>Théorie de l'information</b>  | <b>89</b> |
| 7.1      | Théorie de l'information . . . . .   | 90        |
| 7.1.1    | Codage entropique . . . . .  | 92        |
| 7.1.2    | Codage de Huffman . . . . .  | 98        |
| 7.1.3    | Entropie relative et information mutuelle . . . . .                          | 100       |
| 7.2      | Quantification . . . . .   | 101       |
| 7.3      | Exercices . . . . .  | 103       |



# Chapitre 1

## Introduction

Ce polycopié a pour objectif de fournir aux élèves le bagage mathématique et technique de base de la vaste théorie du traitement du signal. Ces outils fondamentaux seront reliés à des applications industrielles pertinentes qui nécessitent leur utilisation. Le traitement du signal est une discipline qui a la particularité de couvrir l'intégralité du spectre comportant des concepts mathématiques complexes et abstraits (analyse fonctionnelle, théorie des distributions,...), des questions algorithmiques (transformée de Fourier rapide, compression,...) ainsi que des défis techniques importants (filtres analogiques, convertisseur Sigma-Delta,...). Nous essayons ici de donner un aperçu rigoureux des difficultés inhérentes à chacun de ces concepts.

**Qu'entendons-nous par signal ?** Nous nous restreignons dans ce polycopié à l'étude des signaux dits "1-D". Dans ce cadre, un signal n'est rien d'autre qu'une fonction ne dépendant que d'une seule variable, généralement le temps, et qui contient une information. Typiquement, un signal correspond à la mesure d'une grandeur physique enregistrée par un capteur : relevé de température ou de pression, tension électrique, son enregistré par un microphone, couleur et intensité d'une image enregistrée par une caméra etc., dont on veut extraire ou modifier l'information, en partie ou en tout.

On distingue traditionnellement signaux continus et discrets. Du point de vue mathématique, on traite généralement les signaux continus comme des fonctions d'une ou plusieurs variables réelles, à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Cela permet l'utilisation de nombreux résultats d'analyse fonctionnelle, notamment pour l'étude du contenu fréquentiel de ces signaux : c'est toute la théorie de la transformée de Fourier, qui est exposée dans le Chapitre 2 de ce polycopié. D'un point de vue technologique, c'est par l'étude et le traitement des signaux continus que la discipline s'est développée, notamment pour les télécommunications. Toutefois, l'avènement des technologies numériques a profondément modifié l'approche du traitement du signal. La possibilité de

programmer des filtres en langage informatique (bien plus aisée que leur réalisation par des circuits électriques), ainsi que l'augmentation de la puissance de calcul a rendu très attractive l'étude des signaux numériques, par essence discrets.

Le passage du continu au discret est une question essentielle du traitement du signal. Les capteurs convertissent généralement des grandeurs physiques en un courant continu dont l'intensité est proportionnelle à la valeur mesurée. Convertir ce signal en une suite discrète de bits nécessite de porter une attention toute particulière aux processus d'*échantillonnage* et de *quantification*. Là encore, l'étude du spectre en fréquence du signal considéré est fondamentale, comme détaillé dans la section 2.3 du Chapitre 2.

Les signaux discrets sont, eux, représentés par des suites à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . La théorie de Fourier s'étend à l'étude de ces signaux, comme détaillé au Chapitre 2.2. La synthèse et l'étude des filtres discrets, qui reposent sur les propriétés de la transformée en  $z$  (paragraphe 3.5.1), font l'objet du paragraphe 3.5.

Le traitement du signal s'appuie en outre très largement sur la théorie des probabilités et les statistiques. De nombreuses classes de signaux se caractérisent ainsi par une forte variabilité intrinsèque, de sorte que la notion de signal déterministe est souvent insuffisante pour prétendre représenter fidèlement la réalité. Dans le cas des signaux de parole par exemple, la prononciation d'un son dépend ainsi fortement du timbre et de la prononciation du locuteur. Il est par conséquent intéressant d'utiliser des modèles probabilistes qui permettent de capturer les propriétés communes des signaux de chaque classe de son tout en autorisant une certaine variabilité. Ces modèles peuvent être utilisés pour identifier les signaux d'une classe donnée, comme un son prononcé par un locuteur, ou encore coder les signaux d'une classe de manière efficace. Nous introduisons dans le Chapitre 4 les outils de base permettant de caractériser les signaux aléatoires.

Bien que les Chapitres 2 et 2.2 concernent l'étude de signaux stationnaires, les signaux réels sont en général de nature *transitoire* : soit parce qu'on ne dispose que de portions du signal à un moment donné, soit parce que les propriétés auxquelles on s'intéresse varient dans le temps<sup>1</sup>. Nous présentons au Chapitre 5 un outil pour l'étude des signaux non stationnaires : la transformée de Fourier fenêtrée. Celle-ci permet une étude des signaux dans le plan temps-fréquence : au voisinage d'un instant et d'une fréquence données.

La transformée de Fourier fenêtrée est particulièrement adaptée à l'étude des signaux réguliers dont le contenu fréquentiel varie dans le temps de

---

1. L'exemple le plus frappant est celui d'un morceau de musique, pour lequel les notes ou les accords qui se succèdent correspondent à un contenu fréquentiel à chaque fois différent.



manière relativement régulière. Pour les signaux présentant des discontinuités ou simplement des variations rapides, les ondelettes, présentées au Chapitre 6 se révèlent un outil plus adapté. La transformée en ondelettes, qui permet une analyse dans le plan temps-échelle de temps du signal, adapte naturellement sa largeur de bande à la fréquence d'intérêt.

Nous concluons enfin le polycopié par une introduction à la théorie de l'information, qui permet de donner un sens mathématique à la notion d'information, et fournit des outils permettant de représenter et d'extraire l'information d'un signal de manière optimale. La théorie de l'information est en particulier à la base de la quasi-totalité des méthodes de compression de données actuelles.



# Chapitre 2

## Analyse harmonique

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux outils permettant de décrire le contenu fréquentiel (ou harmonique, ou spectral) de signaux. La notion de fréquence, très intuitive pour des signaux sinusoïdaux, est progressivement étendue aux signaux périodiques puis aux signaux d'énergie finie. On distingue ici l'analyse des signaux continus (“analogiques”) des signaux discrets (“numériques”), avant d'étudier la conversion d'une classe de signaux à l'autre par la méthode de l'échantillonnage.

### 2.1 Signaux continus

Dans ce paragraphe, nous considérons des signaux continus 1-D, c'est à dire des fonctions continues

$$f : t \in \Omega \subset \mathbb{R} \mapsto f(t) \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

que l'on prolonge par  $f(t) = 0$  hors de l'ouvert  $\Omega$ .

**Exemple 2.1.1.** *La Figure 2.1 représente la tension de sortie d'un capteur de pression installé sur un puits de pétrole.*

La modélisation de signaux par des fonctions est un déjà un choix en soi : certains cours utilisent plutôt la notion de *distribution*, plus générale, et qui a l'avantage d'unifier les approches discrètes et continues. Elle nécessite toutefois un bagage mathématique plus lourd que nous n'aborderons pas dans ce cours. On s'intéresse d'abord à une classe de fonctions particulières, pour laquelle la notion de contenu spectral (ou harmonique) est intuitive : les signaux périodiques.

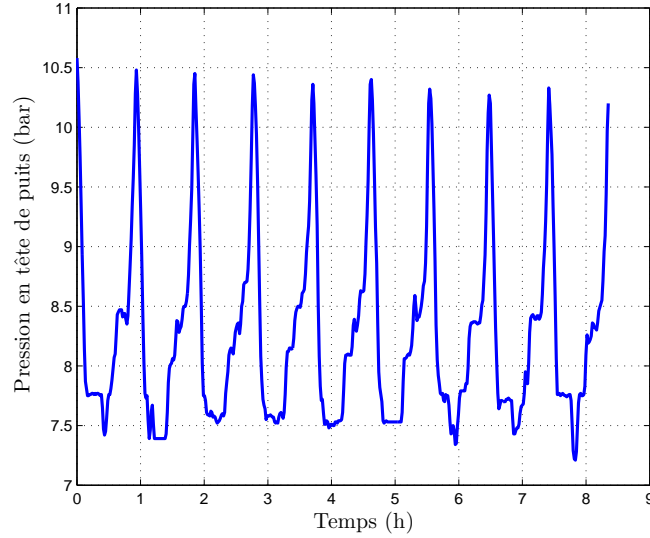


FIGURE 2.1 – Tension de sortie d'un capteur pression sur un puits de pétrole.

### 2.1.1 Signaux périodiques et série de Fourier

**Rappel** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ . On note, pour  $p \geq 1$ ,  $L^p(\Omega)$  (abrégé  $L^p$ ) l'ensemble des fonctions  $f$  mesurables de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$  telles que  $|f(\cdot)|^p$  est intégrable, quotienté par la relation d'égalité presque partout<sup>1</sup>. Muni de la norme naturelle

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2.2)$$

$L^p$  est un espace de Banach, c'est à dire un espace vectoriel normé complet. On note  $L^\infty$  l'ensemble des fonctions bornées presque partout sur  $\Omega$ .  $L^\infty$  est également un espace de Banach.

#### Définitions

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction mesurable et  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ . La fonction  $f$  est entièrement caractérisée par sa restriction à l'intervalle  $[0, 2\pi[$ . Plaçons nous dans l'espace  $L^1([0, 2\pi[)$  des fonctions intégrables sur  $[0, 2\pi[$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_L^1$  définie par

$$\|f\|_L^1 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt.$$

---

1. i.e.  $f$  et  $g$  sont égales presque partout si l'ensemble  $\{t \mid f(t) \neq g(t)\}$  est de mesure de Lebesgue nulle.

$L^1([0, 2\pi[)$  est un espace complet pour la norme  $L^1$  [2].

**Proposition 2.1.2.** *L'espace  $L^2([0, 2\pi[)$  des fonctions de carré intégrable sur  $[0, 2\pi[$  est inclus dans  $L^1([0, 2\pi[)$ .*

*Démonstration.* Soit  $f$  une fonction de  $L^2([0, 2\pi[)$ . Pour tout  $x \in [0, 2\pi[$ , on vérifie que

$$|f(x)| \leq \max(1, |f(x)|^2),$$

ce qui prouve que  $|f|$  est bien intégrable sur  $[0, 2\pi[ : f \in L^1([0, 2\pi[)$ .  $\square$

L'application  $f, g \in [0, 2\pi[ \rightarrow (f, g)$  définie par

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi[} f(t) \overline{g(t)} dt$$

définit un produit scalaire sur  $L^2([0, 2\pi[)$ , de norme hilbertienne associée la norme  $L^2$ . D'après le théorème de Riesz, muni de cette norme,  $L^2([0, 2\pi[)$  est un espace de Hilbert.

**Proposition 2.1.3.**  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , on note  $e_n$  la fonction de  $L^2([0, 2\pi[)$  définie par

$$\forall t \in [0, 2\pi[, e_n(t) := e^{int}.$$

Alors, la famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une famille orthonormée de  $L^2([0, 2\pi[)$ .

*Démonstration.* Soit  $p, q \in \mathbb{Z}$ . On a

$$\langle e_p, e_q \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(q-p)t} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\square$

**Définition 2.1.4** (Coefficient de Fourier). Soit  $f \in L^1([0, 2\pi[)$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , le  $n$ -ième coefficient de Fourier de  $f$  est défini par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Comme  $L^2([0, 2\pi[) \subset L^1([0, 2\pi[)$ , la définition s'étend à toute fonction  $f$  de  $L^2([0, 2\pi[)$ . Dans  $L^2([0, 2\pi[)$ , le  $n$ -ième coefficient de Fourier de  $f$  s'interprète de façon immédiate comme le produit scalaire

$$c_n(f) = \langle f, e_n \rangle.$$

Une conséquence de la définition des coefficients de Fourier dans  $L^2([0, 2\pi[)$  est que [2]

$$\forall f \in L^2([0, 2\pi[), \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 < \infty$$

**Définition 2.1.5** (Série de Fourier). *Soit  $f \in L^1([0, 2\pi[)$ . Alors, on appelle série de Fourier de  $f$  et on note  $S(f)$  la série*

$$S(f)(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{int}.$$

On note  $S_N(f)$  la  $N$ -ième somme partielle de  $S(f)$  :

$$S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{n=N} c_n(f) e^{int}.$$

### **Théorème de Dirichlet et convergence ponctuelle des séries de Fourier**

Nous rappelons dans cette section un résultat fondamental sur la convergence ponctuelle des séries de Fourier, le théorème de Dirichlet. Le lecteur intéressé par une démonstration complète de ce théorème pourra se reporter à [2].

**Théorème 2.1.1** (Théorème de Dirichlet). *Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $2\pi$ -périodique et de classe  $C^1$  par morceaux. Alors :*

1.  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(t) = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)).$$

2. Si de plus  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , alors la convergence des sommes de Fourier partielles est uniforme sur  $\mathbb{R}$ .

### **2.1.2 Transformation de Fourier**

La transformation de Fourier peut être vue comme une extension au cas des fonctions non périodiques du développement en série de Fourier des fonctions périodiques.

**Transformée de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R})$** 

**Définition 2.1.6** (Transformée de Fourier). Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , comme  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , la fonction  $t \rightarrow f(t)e^{-i\omega t}$  est intégrable. La quantité

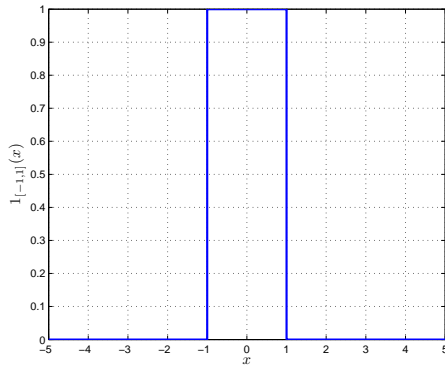
$$\mathcal{F}f(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

est donc bien définie pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ . La fonction  $\omega \in \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}f(\omega)$ , que nous noterons indifféremment  $\mathcal{F}f$  ou  $\hat{f}$  dans la suite, est appelée transformée de Fourier de  $f$ .

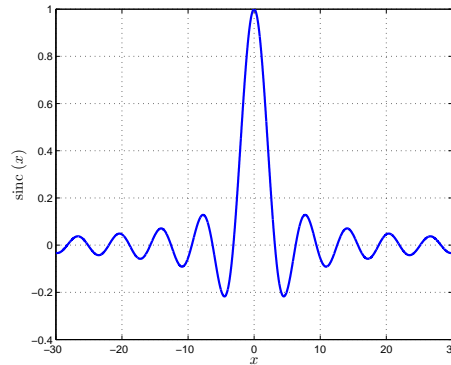
Dans la littérature, on utilise souvent la dénomination de variable spatiale, temporelle ou physique pour désigner la variable  $t$  et de variable fréquentielle ou de Fourier pour désigner la variable  $\omega$ . De la même manière, on emploie souvent les termes d'espace physique et d'espace fréquentiel pour désigner les espaces d'appartenance respectifs des variables  $t$  et  $\omega$ .

**Exemple 2.1.7.** Considérons la fonction indicatrice  $f = 1_{[-1,1]}$  représentée sur la Figure 2.2(a). Sa transformée de Fourier est le sinus cardinal, représenté sur la Figure 2.2(b).

$$\mathcal{F}f(\omega) = 2 \operatorname{sinc}(\omega) = 2 \frac{\sin \omega}{\omega}$$



(a)



(b)

FIGURE 2.2 – Fonctions indicatrice  $f = 1_{[-1,1]}$  2.2(a) et sinus cardinal 2.2(b)

Comme l'illustre l'exemple suivant, la transformée de Fourier d'une fonction temporelle contient son information *spectrale*, c'est-à-dire qu'elle donne des renseignements sur son contenu fréquentiel.

**Exemple 2.1.8.** On souhaiterait calculer la transformée de Fourier d'un cosinus à la pulsation  $\omega_0$ . Comme cette fonction n'est pas dans  $L^1$ , on ne peut pas directement utiliser la formule (2.1.6), qui résulterait par ailleurs en une intégrale divergente. On tronque donc le cosinus en le multipliant par une "fenêtre", c'est-à-dire une fonction indicatrice  $\mathbb{1}_{[-T,T]}(\cdot)$ . On cherche donc la transformée de la fonction suivante

$$f(t) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(t) \times \cos \omega_0 t. \quad (2.3)$$

Par définition de la transformée de Fourier, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[-1,1]}(t) \cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-T}^T e^{-i\omega t} \cos \omega_0 t dt \\ &= \int_{-T}^T \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t} - e^{-i(\omega_0 + \omega)t}}{2} dt \\ &= \frac{2}{(\omega_0 - \omega)} \sin[(\omega_0 - \omega)T] + \frac{2}{(\omega_0 + \omega)} \sin[(\omega_0 + \omega)T] \\ &\boxed{\mathcal{F}f(\omega) = 2T \operatorname{sinc}[(\omega_0 - \omega)T] - 2T \operatorname{sinc}[(\omega_0 + \omega)T]} \end{aligned} \quad (2.4)$$

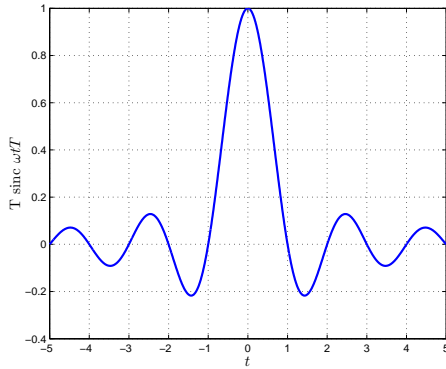
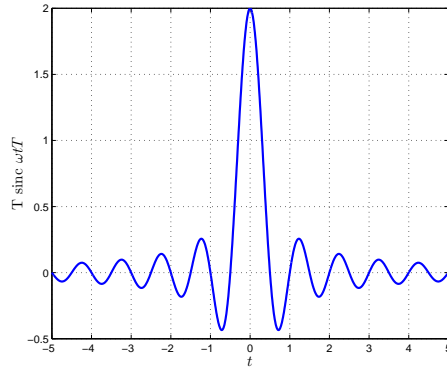
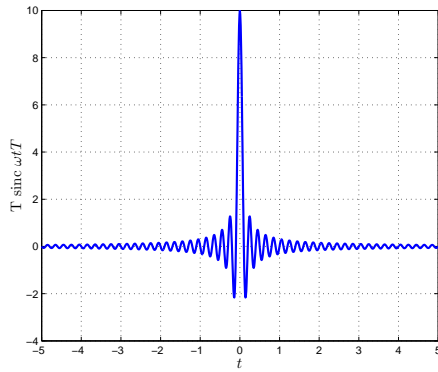
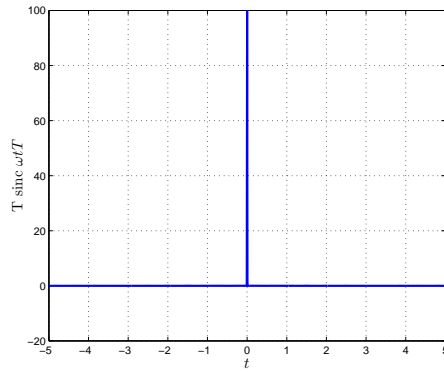
La transformée (2.4) présente deux pics en  $\omega_0$  et  $-\omega_0$ , correspondant à la fréquence du cosinus. Toutefois, la troncature par la fenêtre fait apparaître un contenu haute fréquence lié à l'irrégularité de la fonction tronquée en  $t = -T$  et  $t = T$ . Ce phénomène est à l'origine d'une question classique en traitement du signal : comment tronquer un signal sans faire apparaître de hautes fréquences ou autres perturbations indésirables ? On verra au Chapitre 5 comment construire des "fenêtres" appropriées. On remarque simplement ici qu'en faisant tendre la largeur de la fenêtre vers l'infini, la transformée (2.4) "tend" vers deux distributions de Dirac centrées en  $\omega_0$  et  $-\omega_0$ . La notion de distribution n'étant pas au programme de ce cours, on se contentera d'illustrer ce phénomène en affichant sur les Figures 2.3(a)– 2.3(d) la forme de la fonction pour  $\omega_0 = 0$  et plusieurs valeurs de  $T$ .

La transformation de Fourier vérifie un certain nombre de propriétés de calcul, détaillées dans la proposition qui suit.

**Proposition 2.1.9** (Propriétés de calculs de la transformation de Fourier). Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

1.  $\forall a \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(t \rightarrow f(t+a))(\omega) = e^{ia\omega} \mathcal{F}f(\omega)$  : une translation dans l'espace physique se traduit par un décalage de phase dans l'espace fréquentiel.



(a)  $T = 1$ (b)  $T = 2$ (c)  $T = 10$ (d)  $T = 100$ FIGURE 2.3 – Forme du sinus cardinal  $t \mapsto T \operatorname{sinc}(\omega t T)$  pour différentes valeurs de  $T$ .

2. Réciproquement,  $\forall a \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(t \rightarrow e^{-iat} f(t))(\omega) = \mathcal{F}f(\omega + a)$  : un décalage de phase dans l'espace physique se traduit par une translation dans l'espace fréquentiel.
3.  $\forall \delta > 0, \mathcal{F}(t \rightarrow f(t/\delta))(\omega) = \delta \mathcal{F}f(\delta\omega)$  : dilater la fonction dans l'espace physique par un facteur  $\delta > 0$  revient à dilater (et renormaliser) sa transformée de Fourier par le facteur  $1/\delta$ .
4. (Propriété de transfert) Si  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \mathcal{F}g(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(t) g(t) dt.$$

Le théorème suivant, d'une importance fondamentale, montre qu'on peut reconstruire une fonction de  $L^1(\mathbb{R})$  à partir de sa transformée de Fourier si

elle-même est dans  $L^1(\mathbb{R})$ . On pourra se reporter à la référence [2] pour une démonstration de ce résultat.

**Théorème 2.1.2** (Théorème d'inversion dans  $L^1(\mathbb{R})$ ). *La transformation de Fourier est injective de  $L^1(\mathbb{R})$  dans  $C_0(\mathbb{R})$ , où  $C_0(\mathbb{R})$  est l'espace des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  qui tendent vers 0 en  $\pm\infty$ . De plus, si  $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$ , alors, pour presque tout  $t \in \mathbb{R}$ , on vérifie*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Autrement dit, on a

$$f = \frac{1}{2\pi} \bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f),$$

où  $\bar{\mathcal{F}}$  désigne la transformée de Fourier inverse, définie pour toute fonction  $f \in L^1(\mathbb{R})$  par

$$\bar{\mathcal{F}}f(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(t) e^{i\omega t} dt = \mathcal{F}f(-\omega).$$

### Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

La formule de la définition (2.1.6) n'a a priori de sens que pour des fonctions dans  $L^1$ . Toutefois, on peut étendre cette définition à l'espace des fonctions de carré sommable  $L^2$ , dans lequel la transformée de Fourier a des propriétés intéressantes. Pour cela, on définit l'espace de Schwartz

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{C}^\infty \mid \forall \alpha, \beta > 0 \quad \|t \mapsto t^\alpha f^{(\beta)}(t)\|_\infty < \infty\}, \quad (2.5)$$

c'est-à-dire l'espace des fonctions infiniment dérivables, dont toutes les dérivées décroissent plus rapidement que toute fonction polynôme à l'infini.

**Théorème 2.1.10.** *On a les résultats suivants*

- $\mathcal{F}|_{\mathcal{S}}$  est un automorphisme de  $\mathcal{S}$ , d'inverse  $\mathcal{F}|_{\mathcal{S}}^{-1}f = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}|_{\mathcal{S}}(-f)$ ,
- $\mathcal{F}$  est uniformément continue sur  $\mathcal{S}$  au sens de la norme  $\|\cdot\|_2$ ,
- $\mathcal{S} \subset L^1 \cap L^2$  est dense dans  $L^2$ , au sens de la norme  $\|\cdot\|_2$ ,
- $\mathcal{F}|_{\mathcal{S}}$  se prolonge en un automorphisme sur  $L^2$ , c'est-à-dire que pour toute fonction  $f \in L^2$ , et toute suite de fonctions  $f_n \in \mathcal{S}$  convergeant vers  $f$  au sens de la norme  $\|\cdot\|_2$ , on définit

$$\mathcal{F}f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}f_n \quad (2.6)$$

Pour une preuve de ce théorème, admis ici, on pourra se rapporter à [4, 5] ou à [2]. Cette définition permet de considérer une classe de signaux plus large

dont on peut étudier les propriétés spectrales. Le fait qu'on ait affaire à un automorphisme de  $L^2$  indique que la transformée de Fourier d'un signal  $L^2$  est une représentation équivalente du signal original : il y a autant d'information contenue dans la représentation temporelle que dans la représentation fréquentielle. Selon la manipulation à effectuer sur le signal, l'une ou l'autre de ces représentations peut s'avérer plus appropriée. Il est enfin important de noter que la construction de la transformation de Fourier  $\mathcal{F}$  sur  $L^2(\mathbb{R})$  à partir de l'espace de Schwartz conduit à une définition purement abstraite. Ainsi, dans le cas général, si  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , il est impossible de donner un sens à l'expression

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\omega} dt.$$

Rien ne garantit en effet l'intégrabilité de la fonction  $f$ . Néanmoins, si  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , alors les définitions de la transformation de Fourier sur  $L^1(\mathbb{R})$  et sur  $L^2(\mathbb{R})$  coïncident, comme le montre la proposition qui suit.

**Proposition 2.1.11.** *Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Alors, pour presque tout  $\omega \in \mathbb{R}$ ,*

$$\mathcal{F}f(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\omega} dt.$$

### Energie d'un signal

On définit l'énergie d'un signal comme sa norme  $\|\cdot\|_2$ . La formule de Plancherel permet une interprétation intéressante de cette définition

**Proposition 2.1.12** (Formule de Plancherel). *Soit  $f \in L^2$ . On a l'égalité suivante*

$$\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\mathcal{F}f\|_2. \quad (2.7)$$

Plus généralement, on vérifie, pour tout couple de fonctions  $f$  et  $g$  dans  $L^2$  :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\bar{g}(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\omega)\bar{\mathcal{F}g}(\omega)d\omega. \quad (2.8)$$

En d'autres termes, le produit scalaire de deux fonctions est invariant par la transformation de Fourier.

Cette formule n'est pas surprenante si l'on considère la transformée de Fourier de  $f$  comme une représentation alternative de  $f$ , dans le domaine

fréquentiel : on ne modifie pas l'énergie du signal en changeant de représentation. Toutefois, elle illustre la définition suivante : la quantité  $|\mathcal{F}f(\omega)|^2$  s'appelle la densité spectrale d'énergie de  $f$  à la fréquence  $\omega$ .

La plupart des définitions précédentes possèdent leur analogue dans le domaine discret, comme on va le voir dans la section qui suit.

## 2.2 Signaux discrets

On s'intéresse maintenant à des signaux discrets, c'est à dire à des suites de  $\mathbb{R}$

$$x : n \in \mathbb{Z} \mapsto x[n] \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

**Exemple 2.2.1.** *Commençons par donner quelques exemples utiles de signaux discrets :*

— *L'impulsion, notée  $\delta$ , définie par*

$$\begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.10)$$

— *L'échelon, généralement noté  $u$ , défini par*

$$\begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.11)$$

— *Pour  $N \in \mathbb{N}^*$ , un signal discret est dit  $N$ -périodique si et seulement si  $\forall n \in \mathbb{Z} \ x[n + N] = x[n]$ . Par exemple, le signal défini par*

$$x[n] = e^{\frac{2ni\pi}{N}} \quad (2.12)$$

*est  $N$ -périodique.*

Pour étudier les propriétés des signaux discrets, nous allons définir plusieurs transformées, dont certaines sont très similaires à la transformée de Fourier continue, et d'autres permettent des interprétations plus variées.

### 2.2.1 Signaux périodiques – Série de Fourier discrète

**Définition 2.2.2.** *Soit  $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  un signal  $N$ -périodique. On définit sa série de Fourier discrète par*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad X[n] := \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{2i\pi kn}{N}} \quad (2.13)$$

où les coefficients de Fourier  $X_k$  sont définis par

$$\forall k = 0, \dots, N-1 \quad X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2i\pi kn}{N}} \quad (2.14)$$

$$(2.15)$$

La séquence  $(X_k)_{k=0, \dots, N-1}$  est appelée *spectre* du signal. On note que la Série de Fourier discrète d'un signal  $N$ -périodique est également  $N$ -périodique. La puissance d'un signal périodique peut être obtenue à partir de la formule de Parseval

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2 \quad (2.16)$$

### Signaux dans $l^1(\mathbb{R})$ – Transformée de Fourier en temps discret

On définit l'ensemble  $l^1(\mathbb{R})$  l'ensemble des signaux  $x$  absolument sommables, c'est-à-dire tels que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < +\infty \quad (2.17)$$

**Définition 2.2.3.** Soit  $x \in l^1$ . On définit sa transformée de Fourier en temps discret (TFTD) par

$$X(\omega) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-i\omega n} \quad (2.18)$$

La TFTD est donc une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique. De manière analogue à la transformée de Fourier d'un signal analogique, elle contient l'information spectrale du signal discret. La formule d'inversion s'écrit maintenant

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{i\omega n} d\omega \quad (2.19)$$

La formule de Plancherel (section 2.1.2) s'étend également au cas des signaux discrets. Si on définit l'énergie d'un signal par

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2, \quad (2.20)$$

alors, on a l'égalité

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (2.21)$$

Une fois de plus, la fonction  $|X(\cdot)|^2/2\pi$  correspond donc à la répartition fréquentielle de l'énergie du signal. La TTFD, fonction d'une variable continue, ne peut toutefois pas être calculées numériquement. On s'intéresse donc généralement, pour l'analyse fréquentielle numérique, à la transformée de Fourier discrète (TFD).

### Transformée de Fourier Discrète

**Définition 2.2.4.** Soit une famille de  $N$  éléments  $\{x[n], n = 0, \dots, N-1\}$ . On définit sa Transformée de Fourier Discrète (TFD) à  $N$  points par

$$\forall k = 0, \dots, N-1, \quad \tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2ikn\pi}{N}} \quad (2.22)$$

La transformée de Fourier à  $N$  points est donc définie pour une "séquence" de même taille. La séquence peut être reconstituée à partir de sa TFD en utilisant la formule d'inversion suivante

$$\forall n = 0, \dots, N-1, \quad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{\frac{2ikn\pi}{N}} \quad (2.23)$$

Pour un signal  $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  donné quelconque, la TFD ne donne donc pas forcément directement d'information sur le contenu fréquentiel de l'ensemble du signal, qui dépend a priori des valeurs en dehors de l'intervalle  $\{0, \dots, N-1\}$ . Les interprétations suivantes sont toutefois possibles.

**Signaux périodiques : Série de Fourier discrète et TFD** Soit  $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$  un signal  $N$ -périodique. La comparaison de (2.14) avec (2.22) donne immédiatement

$$\forall k = 0, \dots, N-1 \quad \tilde{X}(k) = NX_k \quad (2.24)$$

La TFD à  $N$  points coïncide donc exactement avec les  $N$  coefficients du spectre de  $x$ . Toutefois, il faut connaître à l'avance la période de  $x$ , faute de quoi la formule (2.22) ne donne qu'une approximation du spectre de  $x$ .

**Signaux à support compact : TFTD et TFD** Supposons maintenant que le signal  $x$  est nul en dehors de l'intervalle  $\{x[n], n = 0, \dots, N - 1\}$ . Alors, en comparant les équations (2.22) et (2.18), on obtient aisément l'identité suivante

$$\tilde{X}(k) = X\left(\frac{2k\pi}{N}\right) \quad (2.25)$$

Ce qui s'interprète de la manière suivante : pour un signal  $x$  nul en dehors de  $\{0, \dots, N - 1\}$ , la TFD correspond à la discrétisation de la TFTD avec un pas d'échantillonnage constant égal à  $\frac{2\pi}{N}$ .

**Transformée de Fourier Rapide (TFR, ou FFT)** Il existe, pour calculer la TFD d'une séquence discrète, un algorithme particulièrement efficace, appelé Transformée de Fourier Rapide (*Fast Fourier Transform* en anglais, soit FFT). L'algorithme est du type *divide and conquer*, et consiste à diviser le signal en sous signaux de taille inférieure, dont on calcule les TFD, puis à recomposer la TFD du signal initial à partir de celles des sous-signaux. Il est d'une complexité  $N \log N$ , où  $N$  est la taille du signal. Pour plus de détails, on pourra se reporter à [6].

Maintenant que nous disposons d'outils pour analyser le spectre des signaux discrets et continus, et d'outils pour évaluer numériquement le contenu spectral de signaux numériques, nous sommes en mesure de faire le lien entre ces différentes notions, en étudiant un processus extrêmement courant de discrétisation d'un signal continu : l'échantillonnage.

## 2.3 Echantillonnage

La majorité des applications du traitement du signal sont désormais numériques. Toutefois, la conversion d'un signal physique continu, par essence analogique, en une séquence de valeurs discrètes ne peut quasiment jamais se faire sans perte. Un effort important est donc consacré à limiter la dégradation de la qualité du signal lors de la conversion. Voyons pour commencer comment, dans le cas idéal, on peut reconstruire un signal donné sans pertes : c'est la théorie de Shannon.

### 2.3.1 Échantillonnage régulier et théorème de Shannon

On cherche donc à représenter un signal continu par une série de valeurs discrètes. Une méthode naturelle consiste à prendre des valeurs de la fonction considérée à des intervalles de temps régulièrement espacés, c'est-à-dire à construire, pour un signal continu  $f(t)$  le signal discret suivant

$$f_d[n] = f(n\Delta t) \quad (2.26)$$

où  $\Delta t$  est communément appelé *pas d'échantillonnage*. On se pose les questions suivantes

- Existe-t-il une condition sur  $\Delta t$  telle qu'il n'y ait pas de perte d'information lors de l'échantillonnage ? En d'autres termes, telle qu'on puisse reconstruire le signal continu à partir des échantillons discrets ?
- Que se passe-t-il lorsque cette condition n'est pas respectée ?

Le lemme suivant (formule de Poisson) est à l'origine des réponses à ces deux questions : il permet de démontrer le Théorème de Shannon, énoncé ci-dessous, ainsi que d'expliquer le phénomène de repliement du spectre (ou *aliasing*).

**Lemme 2.3.1** (Formule de Poisson). *Soit  $f \in \mathcal{S}$ . Pour tout  $\Delta t > 0$ , les sommes suivantes sont bien définies et on a l'égalité*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}f\left(\frac{2\pi n}{\Delta t}\right) \quad (2.27)$$

Une preuve de ce Lemme est disponible dans [4]. Des énoncés plus généraux existent, voir par exemple [3] pour le cas  $f \in L^1$  et [8] pour le cas où  $f$  est simplement  $\mathcal{C}^2$ , avec des dérivées à décroissance rapide. Nous pouvons maintenant énoncer le Théorème de Shannon, qui donne le lien entre le signal continu et ses échantillons, dans les domaines temporel et spectral.

**Théorème 2.3.2** (Théorème de Shannon). *Soit  $f \in L^2$  un signal continu. En définissant  $\phi_{\Delta t}$  la sommation périodique<sup>2</sup> suivante*

$$\phi_{\Delta t}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}f\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta t}\right) \quad (2.28)$$

---

2. Cette fonction correspond en fait à la convolution entre la transformée de  $f$  et un peigne de Dirac



et  $x$  le signal discret constitué des échantillons de  $f$ , i.e.  $x[n] = f(n\Delta t)$ , on a alors

$$\Delta t X(\omega \Delta t) = \phi_{\Delta t}(\omega) \quad (2.29)$$

De plus, si  $\mathcal{F}f$  est à support contenu dans  $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ , alors, pour  $\Delta t \leq T$ , le signal  $f$  peut être reconstitué à partir de ses échantillons  $f(n\Delta t)$  selon la formule

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\Delta t) \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi}{\Delta t} (t - n\Delta t) \right) \quad (2.30)$$

**Preuve** Commençons par démontrer (2.29). En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier, la sommation périodique se réécrit

$$\phi_{\Delta t}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} [t \mapsto \exp(i\omega t) f(-t)] \left( \frac{2\pi n}{\Delta t} \right) \quad (2.31)$$

En appliquant la formule de Poisson (Lemme 2.3.1), on a donc

$$\phi_{\Delta t}(\omega) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\Delta t) \exp(-i\omega n\Delta t) \quad (2.32)$$

D'où on déduit (2.29), par définition de la TFTD. Par ailleurs, si  $\mathcal{F}f$  est à support compact contenu dans  $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ , alors, pour  $\Delta t \leq T$  la formule (2.28) s'interprète comme une somme infinie de fonctions à supports disjoints, et on peut notamment écrire

$$\mathcal{F}f(\omega) = \phi_{\Delta t}(\omega) \mathbf{1}_{[-\frac{\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}]}(\omega) \quad (2.33)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(\omega) &= \Delta t \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\Delta t) \exp(-i\omega n\Delta t) \mathbf{1}_{[-\frac{\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}]}(\omega) \\ &= \Delta t \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\Delta t) \mathcal{F} \left[ t \mapsto \frac{1}{\Delta t} \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi}{\Delta t} (t - n\Delta t) \right) \right] (\omega) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} \left[ t \mapsto f(n\Delta t) \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi}{\Delta t} (t - n\Delta t) \right) \right] (\omega) \end{aligned}$$

D'où (2.30), par linéarité et injectivité de la transformée de Fourier.

L'esprit de cette démonstration est le suivant : si le spectre du signal est à support compact et l'échantillonnage suffisamment rapide, alors la sommation périodique est constituée du spectre d'origine, périodisé. Il suffit alors de la fenêtrer pour récupérer le signal d'origine (dans le domaine fréquentiel). Cette opération correspond à une convolution par un sinus cardinal dans le domaine temporel, d'où la formule de reconstruction. Le théorème permet également de décrire ce qu'il se produit lorsque les conditions pour la reconstruction parfaite ne sont pas remplies : c'est l'objet du paragraphe suivant.

### 2.3.2 Repliement spectral

Le phénomène qui se produit lorsque la condition suffisante du théorème de Shannon  $\Delta t \leq T$  n'est pas respectée s'appelle le *repliement spectral*. En effet, dans ce cas, la formule (2.28) ne s'interprète plus comme une somme de fonctions disjointes. La formule (2.33) n'est alors plus exacte, et l'identité (2.30) n'est plus vérifiée. Ce phénomène est illustré par les Figures 2.4 à 2.7. On considère la fonction à bande limitée et son spectre représentés en Figure 2.4.

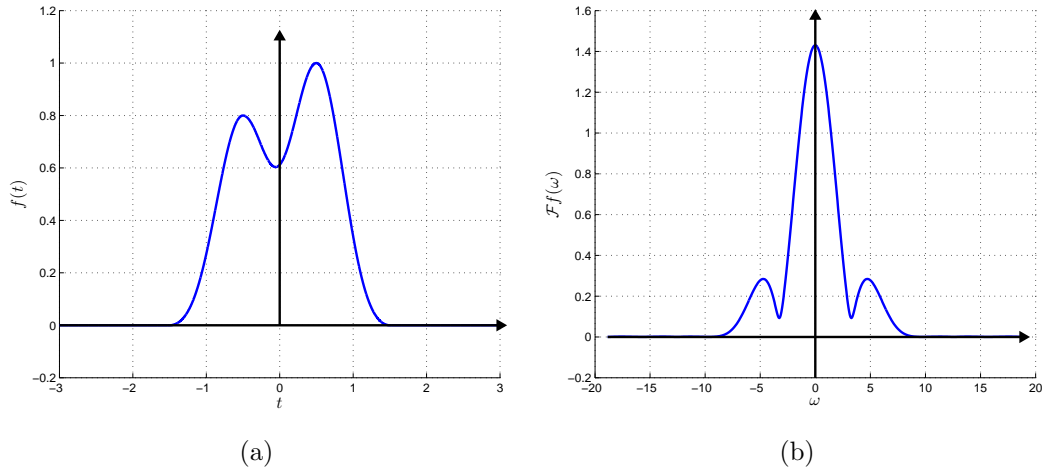


FIGURE 2.4 – Fonction à bande limitée et son spectre, à support contenu dans  $[-10, 10]$ .

La sommation périodique de sa transformée de Fourier avec un pas d'échantillonnage satisfaisant le théorème de Shannon a la forme représentée en Figure 2.5

Le spectre de  $f$  est dupliqué à intervalles réguliers et en multipliant par une fenêtre de la bonne taille, on peut isoler le spectre initial. A l'inverse, si le pas d'échantillonnage est trop grand, la sommation périodique prend la

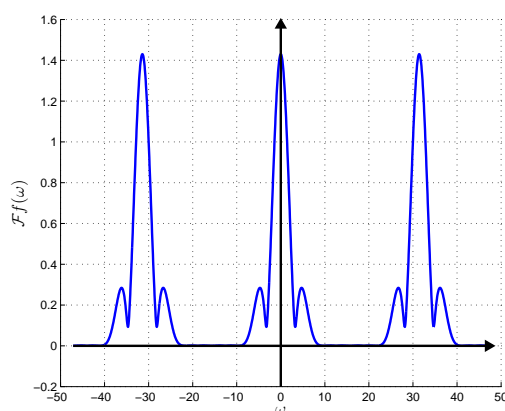


FIGURE 2.5 – Sommation périodique de la transformée de Fourier de  $f$  dans le cadre du Théorème de Shannon.

forme représentée en Figure 2.6. On voit bien que la multiplication par une

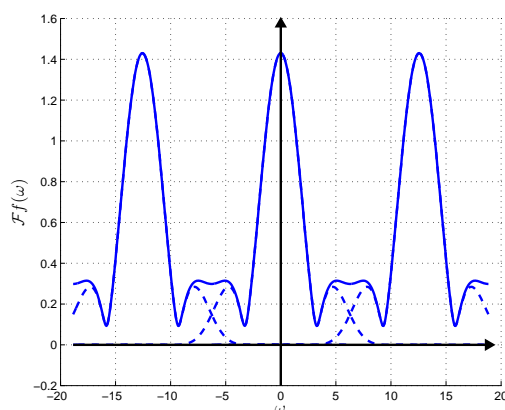


FIGURE 2.6 – Sommation périodique de la transformée de Fourier de  $f$  à un pas d'échantillonnage ne respectant pas les conditions du Théorème de Shannon.

fenêtre ne permettra jamais de récupérer la transformée de Fourier initiale de la Figure 2.4(b). Le repliement du spectre sur lui-même amplifie les hautes fréquences et ajoute un terme de basse fréquence. De même, l'application directe de la formule (2.30) produit le résultat représenté en Figure 2.7, qui ne correspond pas à la fonction initiale de la Figure 2.4(a).

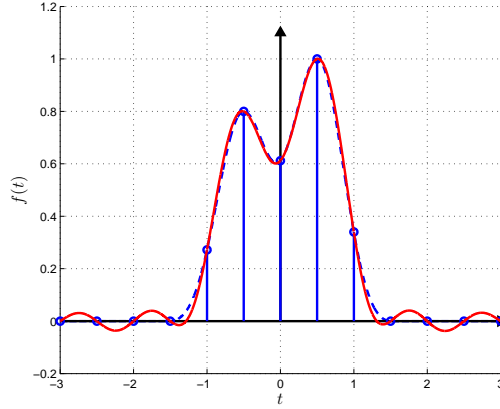


FIGURE 2.7 – Résultat de l'application directe de la formule (2.30) lorsque le pas d'échantillonnage est trop grand (i.e. la fréquence d'échantillonnage trop faible). En pointillés bleus, la fonction initiale de la Figure 2.4(a). Les bâtonnets bleus représentent l'échantillonnage de cette fonction. En rouge, la reconstruction d'une fonction continue à partir des points d'échantillonnage, selon l'équation (2.30). De nouvelles oscillations apparaissent par rapport à la fonction initiale.

### 2.3.3 Pré-filtrage

L'application rigoureuse du théorème de Shannon à des signaux réels n'est en réalité jamais possible. La raison en est donnée par la proposition suivante

**Proposition 2.3.3.** *Soit  $f \in L^2$  une fonction non identiquement nulle. Si  $\mathcal{F}f$  est à support compact, alors  $f$  ne peut pas s'annuler sur tout un intervalle. De même, si  $f$  est à support compact,  $\mathcal{F}f$  ne peut pas s'annuler sur tout un intervalle.*

**Preuve** Il suffit de démontrer le premier point, car la démonstration du deuxième est identique. Supposons que  $\mathcal{F}f$  est nulle en dehors de  $[-\Omega, \Omega]$ . Alors, la formule d'inversion donne

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \mathcal{F}f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.34)$$

On en déduit immédiatement que  $f$  est analytique. Donc, si  $f$  s'annule sur un intervalle, elle est nulle partout.

Ce résultat a une importance pratique fondamentale. En effet, aucun signal réel n'est à support infini. Par conséquent, un signal possède toujours des

hautes fréquences, et le Théorème de Shannon ne s'applique jamais rigoureusement. Pour cette raison, il est nécessaire de *pré-filtrer* tout signal par un filtre passe bas (comme ceux de la Section 3.4) afin d'atténuer au maximum les hautes fréquences et la dégradation du signal lors de l'échantillonnage.

### 2.3.4 Sur le lien entre le signal continu et ses échantillons

Concluons ce chapitre sur quelques remarques concernant le lien entre le monde continu et le monde discret, ainsi qu'entre les domaines temporel et fréquentiel. En particulier, la formule (2.35) ci-dessous est centrale en traitement du signal : elle établit un lien entre le calcul numérique de la TFD et son interprétation physique en tenant compte des processus d'échantillonnages temporel et fréquentiel.

Considérons un signal physique continu  $x \in L^2$ , a priori défini sur  $\mathbb{R}$  tout entier, mais duquel on ne dispose que de  $N$  échantillons  $x[0], \dots, x[N\Delta t]$ . La TFD de cette séquence est-elle porteuse d'information sur la transformée de Fourier continu du signal physique ? La réponse est a priori non, si l'on ne fait pas d'hypothèse supplémentaire sur le signal. Toutefois, les deux interprétations suivantes sont possibles

- Si l'on suppose que le signal *continu* est nul en dehors de l'intervalle  $[0, N\Delta t]$ , alors en comparant (2.25) et (2.29), on obtient l'égalité fondamentale suivante

$$\tilde{X}(k) = \frac{1}{\Delta t} \phi_{\Delta t} \left( \frac{2k\pi}{N\Delta t} \right) \quad (2.35)$$

Remarquons d'emblée que puisque  $x$  est à support compact, sa transformée de Fourier ne s'annule pas sur un intervalle, et  $\phi_{\Delta t}$  présente nécessairement un phénomène de repliement spectral. Ce phénomène peut être atténué par des techniques de *fenêtrage* comme présenté au Chapitre 5.3, mais jamais complètement supprimé. Par ailleurs, la formule (2.35) indique que la TFD correspond à un échantillonnage en fréquence de la fonction  $\phi_{\Delta t}$ . Le pas d'échantillonnage en fréquence est  $\frac{1}{N\Delta t}$ <sup>3</sup>, soit l'inverse de la durée en secondes de notre signal continu. On voit donc que si l'on souhaite améliorer la "résolution" en fréquence de la TFD, il faut augmenter la longueur du signal. En l'absence d'échantillons (donc d'information) supplémentaires, il est courant d'augmenter fictivement la longueur du signal en y apposant des zéros. Si l'on a choisi, comme interprétation, de faire l'hypothèse que le signal

---

3. soit  $\frac{2\pi}{N\Delta t}$  en pulsation

était nul en dehors des échantillons dont on dispose, apposer des zéros ne modifie pas cette interprétation, et permet d'améliorer l'aspect visuel de la TFD (sans pour autant la rendre plus "précise" vis-à-vis du signal réel). Cette méthode est appelée *zero padding* en anglais.

- On peut également reprendre le lien entre série de Fourier discrète et TFD pour mettre en lumière la correspondance entre "périodisation" et échantillonnage : la périodisation d'un signal temporel implique un échantillonnage en fréquence, et vice-versa. En utilisant les transformations appropriées, on s'aperçoit alors que le calcul de la TFD en partant d'un signal continu correspond à combiner trois opérations (échantillonnage, périodisation, passage au domaine fréquentiel), et que certaines de ces opérations commutent. Ce mécanisme est illustré sur la Figure 2.8.

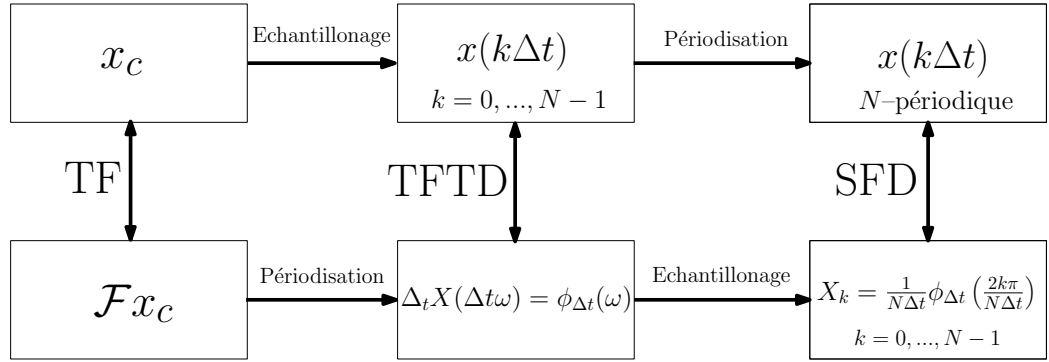


FIGURE 2.8 – Echantillonnage et périodisation dans les domaines temporels et fréquentiels.

## 2.4 Exercices

**Exercice 2.4.1** (Séries de Fourier\*). Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie sur  $[-\pi, \pi[$  par  $f(x) = x^2$ . Calculer sa série de Fourier et étudier sa convergence. En déduire les valeurs de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ .

**Exercice 2.4.2** (Série de Fourier d'une fonction lipschitzienne\*\*). Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique et  $L$ -lipschitzienne. L'objectif de cet exercice est de montrer que la série de Fourier de  $f$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

1. Pour  $h \in \mathbb{R}$ , on note  $\tau_h(f)$  la fonction  $t \rightarrow f(x - h)$ . En évaluant la quantité  $\|\tau_h(f) - f\|_2^2$ , montrer que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{e^{inh} - 1}{h} \right|^2 |c_n(f)|^2 \leq L^2.$$

2. Dédurre de l'inégalité précédente que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2 \leq L^2.$$

3. Dédurre enfin de cette dernière inégalité que la série

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|$$

converge, et que la série de Fourier de  $f$  converge donc uniformément vers  $f$ .

**Exercice 2.4.3** (Théorème d'inversion dans  $L^1(\mathbb{R})$  \*). Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère la fonction

$$f_n(t) := \mathbb{1}_{[-n, n]}(t)$$

1. Calculer la transformée de Fourier de  $f_n$  pour tout  $n \geq 1$ . Étudier les convergences simples et dans  $L^2(\mathbb{R})$  des suites de fonction  $(f_n)_{n \geq 1}$  et  $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$ .
2. En utilisant le théorème d'inversion dans  $L^1(\mathbb{R})$ , montrer que la fonction

$$t \rightarrow \frac{\sin t}{t}$$

n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 2.4.4** (Transformée de Fourier et dérivation \*). Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  et  $f'$  sont intégrables sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que, pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , on a

$$\hat{f}'(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega).$$

Indice : On pourra considérer la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  définie pour tout  $n \geq 1$  par

$$f_n(x) = f(x) \rho\left(\frac{x}{n}\right),$$

où  $\rho$  est une fonction de classe  $C^\infty$  à support compact sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\rho(0) = 1$ . On montrera dans un premier temps que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $f$  dans  $L^1(\mathbb{R})$ , puis que la suite des transformées de Fourier  $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément vers  $\hat{f}$ . On en déduira le résultat demandé.

**Exercice 2.4.5** (Transformée de Fourier d'une fonction Gaussienne \*). Soit  $a > 0$ . On considère la fonction Gaussienne

$$f_a : t \rightarrow e^{-at^2}$$

1. Montrer que la transformée de Fourier  $\hat{f}_a$  de la fonction  $f_a$  est bien définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . En déduire que  $\hat{f}_a$  est solution de l'équation différentielle

$$\hat{f}_a(\omega) + \frac{\omega}{2a} \hat{f}(\omega) = 0.$$

2. En notant que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

en déduire l'expression de  $\hat{f}_a$ .

**Exercice 2.4.6** (Transformée de Fourier d'une fonction à support compact \*\*). Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  une fonction à support compact.

1. Montrer que la transformée de Fourier de  $f$  est analytique sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout  $\omega_0 \in \mathbb{R}$ ,

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \hat{f}(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\hat{f}^{(n)}(\omega_0)}{n!} (\omega - \omega_0)^n,$$

2. En déduire que si  $\hat{f}$  s'annule sur un intervalle de  $\mathbb{R}$ , alors  $\hat{f}$  est identiquement nulle.



**Exercice 2.4.7** (Relation d'incertitude de Heisenberg \*). Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f, f' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  et que la fonction  $x \rightarrow xf(x) \in L^2(\mathbb{R})$ . Sous ces hypothèses, on peut montrer que  $x|f(x)|^2 \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$ .

1. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \leq 2 \left( \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

2. En déduire la relation d'incertitude de Heisenberg

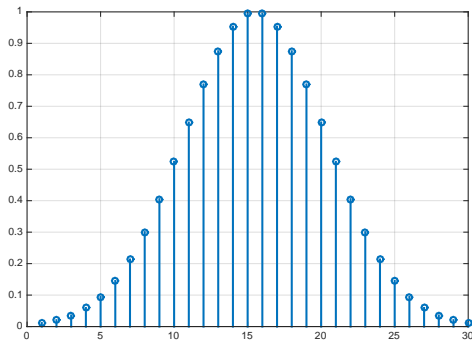
$$\frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \leq 2 \left( \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}$$

**Exercice 2.4.8** (Repliement spectral \*). On considère le signal suivant

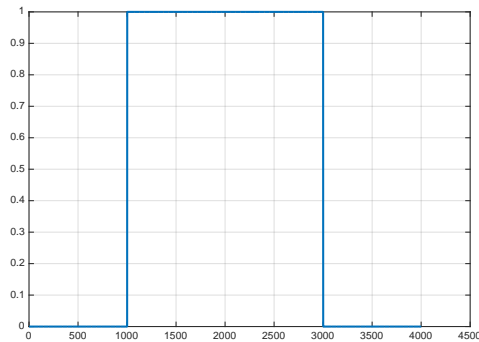
$$x(t) = 2 \cos \left( 100\pi t + \frac{\pi}{4} \right) + 5 \sin(180\pi t) - 4 \sin \left( 30\pi t - \frac{\pi}{6} \right) \quad (2.36)$$

1. A quelle fréquence  $f_e$  (en Hz) faut-il l'échantillonner pour éviter le repliement spectral ?
2. Esquisser la TFTD du signal échantillonné à une fréquence  $f = 2f_e$  et tronqué après plusieurs périodes de chacune des sinusoïdes. Indiquer en abscisse les fréquences continues (en Hz) et les fréquences discrètes (en 1/éch).
3. Faire de même pour le signal échantillonné à une fréquence  $f = 190$  Hz.

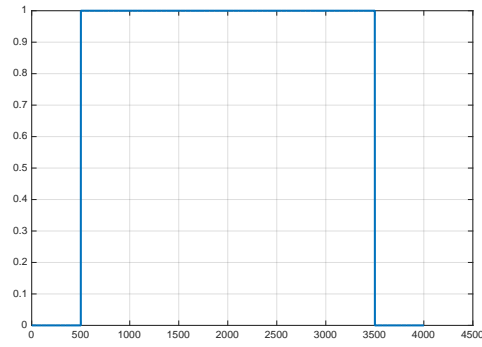
**Exercice 2.4.9** (Correspondance signaux-spectres \*). Associer les 4 signaux (1,2,3,4) aux 4 spectres (A,B,C,D) suivants.



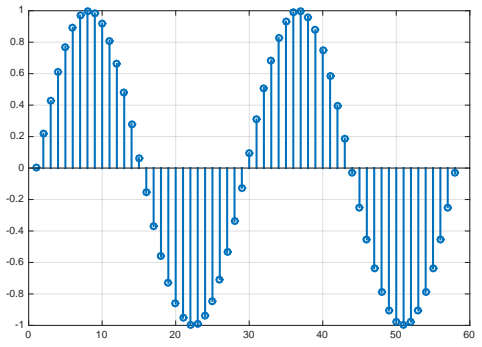
1)



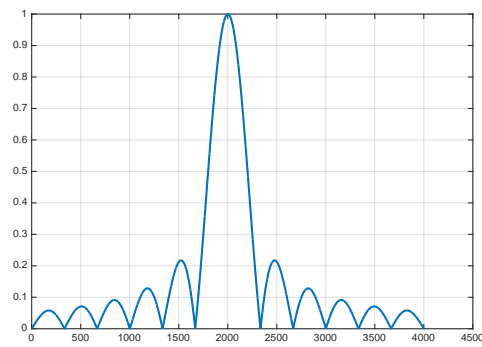
2)



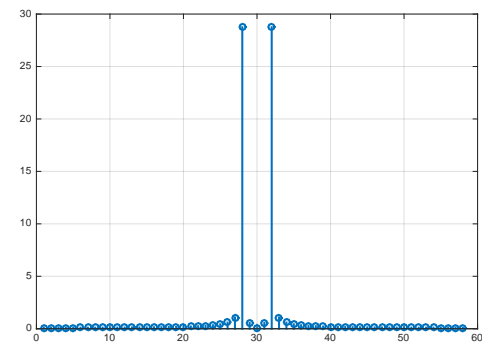
3)



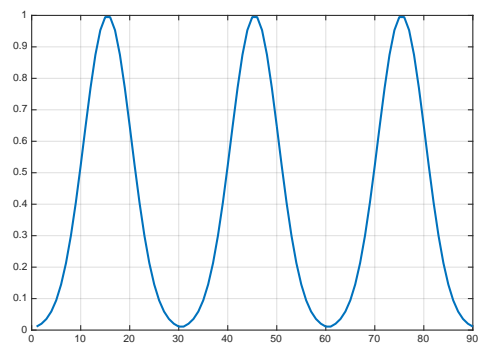
4)



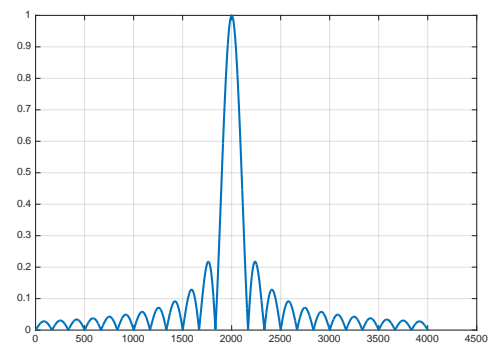
A)



B)



C)



D)

# Chapitre 3

## Filtrage

Le terme “filtre” est aussi central en traitement du signal qu’il est général. Un filtre est un opérateur associant à un signal dit d’entrée un signal de sortie aux propriétés différentes. Mathématiquement, c’est une fonctionnelle, une fonction de fonctions. La transformée de Fourier, vue au chapitre précédent, est par exemple un filtre qui, à un signal, associe sa représentation fréquentielle. L’objet du filtre est, souvent, d’extraire une partie intéressante d’un signal donné. La question du débruitage, par exemple, consiste à séparer l’information utile du “bruit”. Différentes représentations de l’un ou de l’autre mènent à des méthodes différentes : il est par exemple courant de supposer que l’information utile possède un spectre concentré vers les basses fréquences, et d’utiliser un filtre passe-bas pour l’extraire. Le filtre passe-bas, en tant qu’outil d’ingénierie classique et de brique de base pour la construction d’autres filtres, fera l’objet dans ce chapitre d’une attention particulière. Plus généralement, on focalisera ici notre attention sur les filtres linéaires. Pour leur étude, les transformées de Fourier et de Laplace se révèlent des outils puissants : elles permettent d’obtenir une représentation compacte du filtre par sa fonction de transfert. La section qui suit définit les outils mathématiques utiles à cette construction.

### 3.1 Préliminaire : convolution et Dirac

#### 3.1.1 Produit de convolution

Le produit de convolution est un outil fondamental dans l’étude des filtres analogiques. Pour  $f, g \in L^2$ , il est défini par

$$[f * g](t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)ds. \quad (3.1)$$

Pour toutes fonctions  $f, g, h \in L^2$ , on a les propriétés suivantes

**Associativité :**  $(f * g) * h = f * (g * h) = f * g * h$

**Commutativité :**  $f * g = g * f$

**Trans. de Fourier d'un produit de convolution :**  $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \times \mathcal{F}g$

**Trans. de Fourier d'un produit :**  $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}f * \mathcal{F}g$

### 3.1.2 Distribution de Dirac

L'élément neutre du produit de convolution est noté  $\delta$ , et appelé *delta*, *distribution*, ou *impulsion de Dirac*. Ce n'est pas un élément de  $L^2$ , ni même une fonction, mais une *distribution*, notion qui n'est pas au programme de ce cours. On se contentera ici d'utiliser  $\delta$  comme l'élément neutre de  $*$  pour les calculs, qui trouvent donc leur justification dans la théorie des distributions [7]. On a donc, pour  $f \in L^2$

$$f * \delta = \delta * f = f \quad (3.2)$$

Physiquement, il correspond à une "impulsion" d'amplitude infinie en 0, mais d'intégrale finie puisque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s) ds = 1 * \delta = 1 \quad (3.3)$$

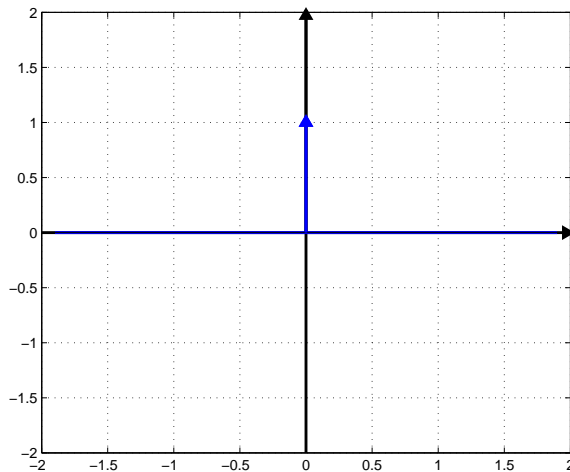


FIGURE 3.1 – Distribution de Dirac

## 3.2 Définition et généralités

Un filtre n'est ni plus ni moins qu'une application d'un espace de signaux dans un autre. Les fonctions de l'espace de départ sont appelées *entrées* du filtre, et les fonctions de l'espace d'arrivée sont appelées *sorties*. Un filtre *LTI* (pour *Linear Time-Invariant*) est une application linéaire, invariante par translation dans le temps, c'est-à-dire que si l'image d'un signal d'entrée  $x(t)$  est le signal de sortie  $y(t)$ , alors la sortie correspondant à  $x(t-T)$  est  $y(t-T)$ . En pratique, un filtre est un système physique qu'on utilise pour modifier les propriétés d'un signal. C'est là que la transformée de Fourier intervient, car l'interprétation de ces modifications se fait le plus souvent dans le domaine fréquentiel. Or, l'effet d'un filtre sur le spectre d'un signal (i.e., sur sa transformée de Fourier) se calcule très simplement, grâce aux deux résultats suivants.

**Théorème 3.2.1** (Théorème de représentation de Riesz). *Soit  $H$  un endomorphisme de  $L^2$ . On suppose que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la forme linéaire*

$$\mathcal{H}_t f = Hf(t) \quad (3.4)$$

*est continue sur  $L^2$ . Alors il existe une unique fonction  $K_0 \in L^2$  telle que*

$$[\mathcal{H}_0 f] = \int_{-\infty}^{+\infty} K_0(s) f(-s) ds. \quad (3.5)$$

Pour une preuve de ce théorème, on peut se rapporter à [1]. En utilisant l'invariance par translation dans le temps, on obtient trivialement le corollaire suivant

**Corollaire 3.2.2** (Formule de convolution). *Soit  $H$  un filtre LTI. Il existe une fonction  $h \in L^2$  telle que, pour tout signal d'entrée  $u \in L^2$ , le signal de sortie  $y$  est donné par le produit de convolution de  $h$  et  $u$ , i.e.*

$$y(t) = [Hu](t) = [h * u](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) u(t-s) ds. \quad (3.6)$$

La fonction  $h$  est appelée *réponse impulsionnelle*. En effet, comme vu au paragraphe 3.1.2, la distribution (parfois appelée impulsion) de Dirac est l'élément neutre du produit de convolution. La sortie correspondant à une impulsion de Dirac en entrée est donc

$$y = H\delta = h * \delta = h \quad (3.7)$$

La sortie d'un filtre est donc la convolution de l'entrée avec la réponse impulsionnelle. En vertu des propriétés du produit de convolution évoquées au paragraphe 3.1.2, cela implique que dans le domaine fréquentiel, la transformée de Fourier de la sortie est simplement

$$\mathcal{F}y = \mathcal{F}(h * u) = \mathcal{F}h\mathcal{F}u \quad (3.8)$$

La fonction  $\mathcal{F}h(\omega)$  est généralement appelée *transfert* du filtre. Son module  $|\mathcal{F}h(\omega)|$  est appelé *gain* du filtre.

### 3.3 Stabilité et transformée de Laplace bilatérale

#### 3.3.1 Stabilité

Une caractéristique importante des filtres LTI réside dans leur *stabilité*. Il existe plusieurs notions de stabilité, mais on se concentrera ici sur la suivante : on souhaite que, lorsque l'entrée d'un filtre est bornée, la sortie le soit aussi. Il s'agit de la stabilité *Entrée-Bornée-Sortie-Bornée* (EBSB). Une condition nécessaire et suffisante de stabilité d'un filtre est que sa réponse impulsionnelle soit absolument intégrale, i.e.  $h \in L^1$ .

#### 3.3.2 Transformée de Laplace bilatérale

Pour une fonction quelconque  $h$ , on définit la transformée de Laplace bilatérale par

$$\forall s \in \mathcal{D} \quad \mathcal{L}\{h\}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} h(t) dt \quad (3.9)$$

où  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$  est le *domaine de convergence* de  $\mathcal{L}\{f\}$ , c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes  $s \in \mathbb{C}$  tels que l'intégrale (3.9) est convergente. Lorsque l'axe imaginaire  $s = i\omega$  est contenu dans le domaine de convergence de  $h$ , la transformée de Laplace y coïncide avec la transformée de Fourier. Un filtre LTI est entièrement caractérisé par la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle. En particulier, on retiendra le résultat suivant portant sur la stabilité des filtres LTI rationnels.

**Proposition 3.3.1.** *Soit  $H$  un filtre LTI tel que  $\mathcal{L}\{h\}$  est une fraction rationnelle. On a les résultats suivants*

- *Le filtre  $H$  est stable si et seulement si la bande de convergence de  $\mathcal{L}\{h\}$  contient l'axe imaginaire  $s = i\omega$ .*

- *Si  $H$  est causal, c'est-à-dire si la sortie à l'instant  $t$  ne dépend que des valeurs passées de l'entrée (et éventuellement de la sortie elle-même), alors  $H$  est stable si et seulement si tous les pôles de  $\mathcal{L}\{h\}$  (i.e. les racines du dénominateur) sont à parties réelles strictement négatives.*

Dans la suite, on utilisera la notation  $\hat{h}$  pour désigner la fonction de transfert, que ce soit dans le domaine de Laplace ou de Fourier. On pourra se référer à un cours de calcul intégral pour des précisions sur les conditions dans lesquelles la restriction de la transformée de Laplace d'une fonction à l'axe imaginaire est bien définie : celle-ci coïncide alors avec la transformée de Fourier.

## 3.4 Filtres passe-bas

La grande majorité des filtres implantés aujourd'hui sont des filtres numériques. Toutefois, avant la conversion d'un signal analogique en un signal numérique, il est généralement nécessaire de restreindre l'étendue de son spectre (cf. Chapitre 2.3.3). On utilise pour cela un filtre passe-bas : étant donné une *fréquence de coupure*  $\omega_c$ , on cherche à réaliser un filtre qui atténue autant que possible les fréquences supérieures à  $\omega_c$ , en laissant intact le signal pour les fréquences inférieures. Les filtres passe-bas servent par ailleurs à la construction d'autres filtres (passe-haut, passe-bande, etc.) et de nombreux systèmes dynamiques linéaires sont des passe-bas.

Un filtre idéal possède donc le gain suivant

$$|\hat{h}_{id}(\omega)| = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega < \omega_c \\ 0 & \text{si } \omega > \omega_c \end{cases} \quad (3.10)$$

Or une telle fonction de transfert correspond, dans le domaine temporel, à une convolution avec un sinus cardinal. Pour réaliser un tel filtre, il serait donc nécessaire de connaître l'intégralité du signal à l'avance. Que faire lorsque le signal doit être filtré en temps réel ? Nous présentons maintenant deux filtres classiques qui approchent le filtre idéal : le filtre de Butterworth, qui possède un gain très proche de l'unité dans la bande passante, et le filtre de Tchebychev, qui permet une meilleure sélectivité.

### 3.4.1 Filtre de Butterworth

Un filtre de Butterworth d'ordre  $N$  est caractérisé par le gain suivant

$$\left| \hat{h}_B^N(\omega) \right| = \sqrt{\frac{1}{1 + \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2N}}} \quad (3.11)$$

La Figure 3.2 représente ce gain en fonction de la fréquence pour plusieurs valeurs de  $N$ .

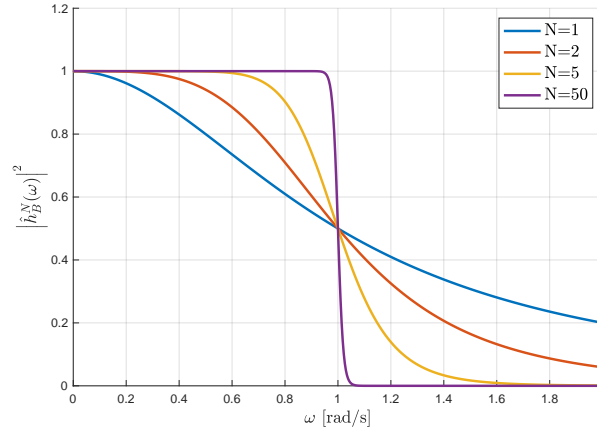


FIGURE 3.2 – Gain du filtre de Butterworth pour différents ordres.

**Proposition 3.4.1.** *Les propriétés suivantes du filtre de Butterworth se déduisent aisément de la formule (3.11) ou de la Figure 3.2*

- $\forall N \in \mathbb{N} \quad \left| \hat{h}_{but}(0) \right|^2 = 1$  : aux basses fréquences, le gain est toujours unitaire, le signal est donc restitué exactement en amplitude.
- $\forall N \in \mathbb{N} \quad \left| \hat{h}_{but}(\omega_c) \right|^2 = \frac{1}{2}$ , soit, quel que soit l'ordre, une atténuation à 3 dB à  $\omega_c$ . Rappelons qu'un décibel est une unité permettant de caractériser le rapport entre deux puissances. Plus précisément, un décibel correspond à 10 fois le logarithme décimal du rapport entre les deux puissances. A la fréquence  $\omega_c$ , le rapport entre les puissances du signal filtré et du signal d'origine est de  $0.5 \simeq 10^{0.3}$ .

$$\text{— } \forall n, N \in \mathbb{N} \quad \left. \frac{d^n \left| \hat{h}_{but}(\omega) \right|}{d\omega^n} \right|_{\omega=0} = 0$$



- $\left| \hat{h}_{but}(\cdot) \right|$  est une fonction décroissante
- Lorsque  $N$  tend vers l'infini, le gain du filtre de Butterworth tend (au sens de la norme  $L^2$ ) vers le gain du filtre idéal

La fonction de transfert, elle, est déterminée par l'expression suivante (en Laplace)

$$\hat{h}(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^N (s - s_k) / \omega_c} \quad (3.12)$$

où les  $s_k$  sont les racines des polynômes de Butterworth, définies pour  $k = 1, \dots, N$  par

$$s_k = \omega_c e^{\frac{j(2k+N-1)\pi}{2N}} \quad (3.13)$$

où  $N$  est l'ordre du filtre.

### 3.4.2 Filtres de Tchebychev

Il existe deux classes de filtres de Tchebychev. Un filtre de Tchebychev “de type I”, d'ordre  $N$  et de fréquence de coupure  $\omega_c$  est caractérisé par le gain suivant

$$\left| \hat{h}_{T1}^N(\omega) \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 T_N^2 \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)}} \quad (3.14)$$

où  $\epsilon$  est un paramètre ajustable, et  $T_N$  un polynôme de Tchebychev d'ordre  $N$ . Un filtre de Tchebychev “de type II”, d'ordre  $N$  et de fréquence de coupure  $\omega_c$  est caractérisé par le gain suivant

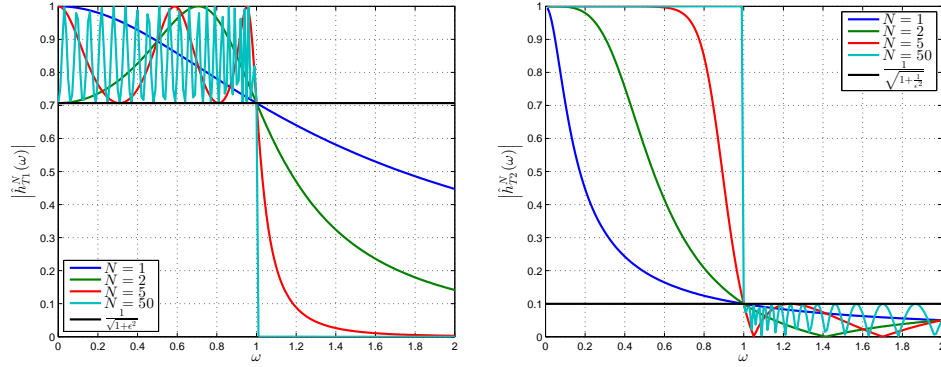
$$\left| \hat{h}_{T2}^N(\omega) \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\epsilon^2 T_N^2(\omega/\omega_c)}}} \quad (3.15)$$

Le gain du filtre de Tchebyshev de type I (resp. type II) présente des oscillations dans la bande passante (resp. dans la bande atténuée). La Figure 3.3 illustre ce phénomène, dont l'importance peut-être ajustée en faisant varier le paramètre  $\epsilon$ , qui porte en anglais le nom de *ripple factor*.

## 3.5 Filtrage discret

On définit naturellement un filtre discret comme une application

$$H : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \quad (3.16)$$



(a) Filtres de type I avec  $\epsilon = 1$ , pour différents ordres. (b) Filtres de type II avec  $\epsilon = 0.1$ , pour différents ordres.

FIGURE 3.3 – Filtres de Tchebychev de types I et II de différents ordres, avec la même fréquence de coupure  $\omega_c = 1$ .

qui fait correspondre, à un signal d'entrée  $x$  un signal de sortie, également appelé *réponse*,  $y$ . On va s'intéresser dans ce chapitre plus spécifiquement aux filtres LTI discrets, c'est-à-dire aux filtres linéaires invariants par translation dans le temps.

### 3.5.1 Transformée en $z$

On définit la transformée en  $z$  d'un signal discret  $x$  par

$$X(z) = \mathcal{Z}x(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad (3.17)$$

Cette transformation est définie sur le sous-ensemble de  $\mathbb{C}$  où la série converge simplement, appelé *domaine de convergence*. Elle est inversible, d'inverse

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad x(n) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C X(z)z^{n-1}dz \quad (3.18)$$

où  $C$  est un chemin fermé entièrement contenu dans le domaine de convergence. La transformée en  $z$  peut-être vue comme une généralisation de la TFTD, au sens où, en évaluant (3.17) le long du cercle unité (i.e. en  $z = e^{i\omega}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ ), on retrouve la définition de la TFTD (2.18) (cette correspondance n'est valable que si le cercle unité est bien dans le domaine de convergence de la transformée en  $z$ ). En ce sens, la variable  $z$  est souvent considérée comme une *fréquence complexe*, d'amplitude  $|z|$  et de pulsation réelle  $\arg z$ . La variable  $z$  est également considérée comme la variable de "décalage", en raison

de la propriété suivante

$$\forall n_0 \in \mathbb{Z}, \quad z^{-n_0} \mathcal{Z}x(n) = \mathcal{Z}[m \rightarrow x(m - n_0)](n) \quad (3.19)$$

Ainsi, une multiplication par  $z^{-1}$  correspond à un décalage vers la droite du signal. La transformée en  $z$  possède des propriétés très utiles pour l'étude des filtres discrets.

### 3.5.2 Convolution discrète

Soient  $x$  et  $y$  deux signaux discrets. On note  $*$  et on définit, sous réserve d'existence, le produit de convolution discrète par

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad [x * y](n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n - k) \quad (3.20)$$

Comme dans le cas des filtres analogiques, la sortie d'un filtre discret  $H$  s'exprime comme la convolution entre l'entrée et la *réponse impulsionnelle*  $h$ , définie par

$$h(n) = H(\delta(n)) \quad (3.21)$$

où  $\delta$  est l'impulsion discrète définie par (2.10). Pour un signal d'entrée  $x$  quelconque, la sortie est donc donnée par

$$y(n) = H(x(n)) = [x * h](n) = [h * x](n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n - k) \quad (3.22)$$

Il découle de cette formule une classification naturelle des filtres discrets : on distingue traditionnellement les *filtres à réponse finie* (FIR, pour *finite impulse response*), dont la réponse impulsionnelle est à support fini, et pour lesquels la formule (3.22) s'interprète comme une somme finie, et les *filtres à réponse infinie* (IIR). Par ailleurs, en notant  $X$ ,  $Y$  et  $H$  les transformées en  $z$  de  $x$ ,  $y$  et  $h$ , respectivement, on a, pourvu qu'on puisse intervertir les

sommations

$$Y(z) = \mathcal{Z}(x * h)(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \right) z^{-n} \quad (3.23)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)z^{-k}h(n-k)z^{-(n-k)} \quad (3.24)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n-k)z^{-(n-k)} \right) x(k)z^{-k} \quad (3.25)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)z^{-(m)} \right) x(k)z^{-k} \quad (3.26)$$

$$= \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)z^{-k} \right) \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)z^{-(m)} \right) \quad (3.27)$$

$$= X(z)H(z) \quad (3.28)$$

De manière analogue au cas continu, les filtres discrets sont donc entièrement caractérisés par la transformée en  $z$  de leur réponse impulsionnelle, ce qui facilite l'étude de la stabilité des filtres, comme nous allons maintenant le voir.

### 3.5.3 Stabilité des filtres discrets

Tout comme pour les filtres analogiques, on s'intéresse ici à la stabilité *Entrée-Bornée-Sortie-Bornée* (EBSB). On peut aisément montrer qu'une condition nécessaire et suffisante de stabilité est que la réponse impulsionnelle soit absolument sommable

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < +\infty \quad (3.29)$$

Une condition suffisante est également donnée par l'étude de la fonction de transfert du filtre  $H(z)$  : si le cercle unité est contenu dans son domaine de convergence, alors le filtre est stable EBSB. La stabilité est évidemment une propriété désirable des filtres discrets : il est rare de vouloir faire diverger la sortie d'un filtre lorsque l'entrée est bornée... Intéressons-nous maintenant à une classe particulière de filtres, pour lesquels  $H(z)$  prend la forme d'une fraction rationnelle.

### Filtres LTI décrits par des équations aux différences à coefficients constants

Considérons un filtre LTI satisfaisant les conditions suivantes

- (i) **causalité** : la sortie au temps  $n$  ne dépend que des valeurs de l'entrée aux temps  $k \leq n$ , et de la sortie aux temps  $k < n$ .
- (ii) le filtre ne nécessite qu'une mémoire finie,
- (iii) le calcul de la sortie ne nécessite, à tout moment, qu'un nombre fini d'opérations.

Les deux dernières conditions définissent un filtre *implémentable en pratique*. Pour un filtre respectant ces trois conditions, la sortie s'écrit, dans le cas général

$$y(n) = - \sum_{k=1}^P a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^Q d_k x(n-k) \quad (3.30)$$

où les paramètres  $a_k, d_k$  peuvent dépendre, dans le cas général, du temps ou des signaux d'entrée et/ou de sortie (le filtre est alors dit *non-linéaire*). Dans le cas de paramètres constants, en prenant la transformée en  $z$  de l'égalité précédente, on obtient

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^Q d_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^P a_k z^{-k}} \quad (3.31)$$

Le transfert du filtre s'écrit donc comme une fraction rationnelle. Le filtre est stable si et seulement si ses pôles, c'est-à-dire les racines du dénominateur  $1 + \sum_{k=1}^P a_k z^{-k}$  sont toutes contenues strictement dans le disque unité.

#### 3.5.4 Un exemple

Les paragraphes précédents indiquent que l'on peut définir un filtre de plusieurs manières équivalentes, mais qui permettent des interprétations différentes :

- par la réponse impulsionnelle  $h$ , dont la connaissance permet de calculer la sortie du filtre par une convolution discrète
- par une équation aux différences de type (3.30)
- par sa fonction de transfert  $H(z)$

L'exemple suivant illustre les correspondances entre ces trois représentations.

**Exemple 3.5.1.** On considère le filtre numérique défini par l'équation aux différences suivantes

$$y(k) = (1 - a)y(k - 1) + ax(k) \quad (3.32)$$

où  $0 < a < 1$  est un paramètre constant. En prenant  $x(k) = \delta(k)$ , on en déduit la réponse impulsionnelle suivante

$$h(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ a(1 - a)^k & \text{si } k \geq 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

et le transfert est donné par

$$H(z) = \frac{a}{1 - (1 - a)z^{-1}} = \frac{az}{z - (1 - a)} \quad (3.34)$$

Le filtre possède un pôle unique en  $z = 1 - a$ , qui est bien à l'intérieur du cercle unité : il est donc stable.

### 3.5.5 Conversion Analogique-Numérique de filtres

Une manière naturelle de synthétiser un filtre numérique consiste à “discrétiser” un filtre analogique. Nous allons voir qu'il existe plusieurs manières de réaliser cette opération, et qu'elles ne mènent pas toutes au même résultat. Informellement, on cherche des transformations du plan complexe liant la variable de Laplace  $s$ , qui correspond au transfert du filtre continu, à la variable  $z$  qui correspond au transfert du filtre numérique.

#### Echantillonnage de la réponse impulsionnelle

Une méthode naturelle consiste à prendre comme réponse impulsionnelle du filtre discret les échantillons, avec un pas  $\Delta t$  bien choisi, de la réponse  $h_a$  du filtre analogique

$$h(n) = h_a(n\Delta t) \quad (3.35)$$

La transformation du plan complexe correspondante est la suivante :

$$z = e^{s\Delta t} \quad (3.36)$$

et les transferts des filtres discrets et continus sont liés par la relation

$$H(z) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{-\infty}^{+\infty} H_a \left( s - \frac{2ik\pi}{\Delta t} \right) \quad (3.37)$$

La transformation (3.36) envoie l'ensemble du demi-plan complexe stable  $\{\Re(s) < 0\}$ , sur le disque unité ouvert  $\{|z| < 1\}$ , l'axe des ordonnées sur le cercle unité et le demi-plan instable à l'extérieur du disque unité, comme illustré sur la figure 3.4. Ainsi, un filtre analogique stable EBSB résulte en un filtre numérique stable EBSB. De plus, en s'intéressant à la transformation

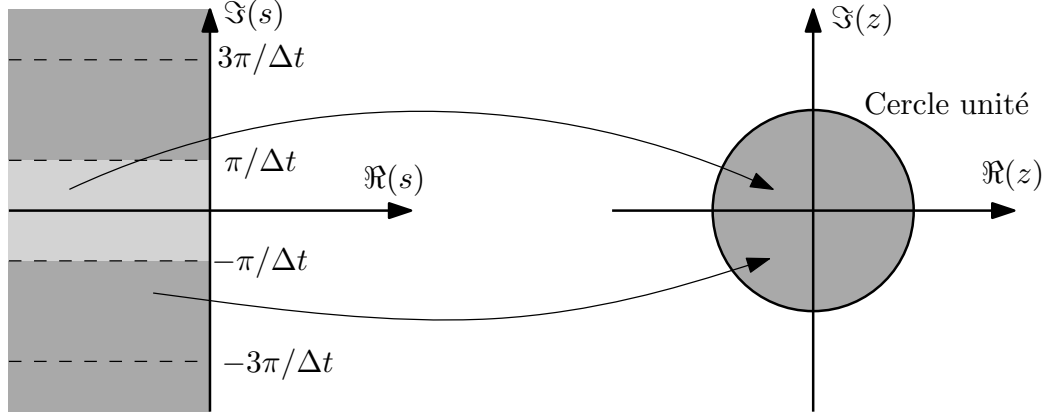


FIGURE 3.4 – La transformation envoie le demi-plan complexe gauche dans le disque unité. Elle n'est pas bijective, mais induit une bijection de chaque bande infinie  $\left\{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) < 0, \frac{(2k-1)\pi}{\Delta t} < \Im(s) \leq \frac{(2k+1)\pi}{\Delta t}\right\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  sur le disque unité.

sur l'axe des ordonnées dans le plan  $s$ , i.e. en prenant  $s = i\Omega$ , et donc  $z = e^{i\Omega\Delta t}$ , on remarquera que :

- la “fréquence numérique”  $\omega = \arg z$  et la fréquence analogique  $\Omega$  sont liées par la relation **linéaire**

$$\Omega = \omega\Delta t, \quad (3.38)$$

- on retrouve avec (3.37) la relation (2.25) entre DTFT de  $h$  et transformée de Fourier de  $h_a$ .

Toutefois, l'échantillonnage de la réponse impulsionnelle est soumis aux mêmes restrictions que celles observées au Chapitre 2.3. Si le transfert du filtre analogique n'est pas à bande limitée (ce qui est le cas de n'importe quel filtre réalisable en pratique), il apparaîtra un phénomène de repliement du spectre, ou aliasing, indésirable. Le phénomène sera d'autant plus important que le paramètre  $\Delta t$ , qui joue donc ici un rôle crucial, sera grand. Il est possible d'éviter ce phénomène en considérant la transformée du paragraphe qui suit.

### Transformée bilinéaire de Tustin

Cette méthode est considérée comme la meilleure manière de convertir un filtre analogique en filtre numérique, car elle évite le phénomène d'aliasing. Elle consiste à effectuer une transformation du plan complexe bijective du demi-plan gauche (en Laplace) vers le cercle unité (en  $z$ ). Les transformations directes et inverses s'écrivent

$$s = \frac{2}{\Delta t} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad z = \frac{1 + s\Delta t/2}{1 - s\Delta t/2} \quad (3.39)$$

D'un point de vue pratique, cela signifie que la fonction de transfert  $H_d(z)$  du filtre discret est obtenu à partir de la fonction de transfert  $H_c(s)$  du filtre continu grâce à l'égalité

$$H_d(z) = H_c\left(\frac{2}{\Delta t} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right) \quad (3.40)$$

En réarrangeant les termes des égalités (3.39), on obtient l'équation suivante

$$\frac{\Delta t}{2} sz + \frac{\Delta t}{2} s - z + 1 = 0 \quad (3.41)$$

d'où le nom de transformée bilinéaire. On vérifie aisément que cette transformation

- est une bijection du demi-plan complexe stable  $\Re(s) < 0$  dans le disque unité ouvert stable  $|z| < 1$ , et préserve ainsi la stabilité des filtres,
- est une bijection de l'axe imaginaire analogique dans le cercle unité, *et évite ainsi le phénomène de repliement spectral*.

Contrairement à la première transformation, les fréquences analogiques et discrètes sont reliées par une relation non-linéaire. En effet, en évaluant la transformation précédente sur l'axe imaginaire analogique  $s = i\omega$ , on a

$$z = \frac{1 + i\frac{\omega\Delta t}{2}}{1 - i\frac{\omega\Delta t}{2}} \quad (3.42)$$

D'où, en passant à l'argument

$$\Omega = \arg z = \arg \left\{ \frac{1 + i\frac{\omega\Delta t}{2}}{1 - i\frac{\omega\Delta t}{2}} \right\} \quad (3.43)$$

$$= 2 \tan^{-1} \left( \frac{\omega\Delta t}{2} \right) \quad (3.44)$$

Cette relation est bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $] -\pi, \pi[$  : les hautes fréquences ne se “replient” pas, comme elles le feraient avec une transformation linéaire.



### 3.5.6 Quelques FIR

On étudie dans cette section deux filtres à réponse impulsionnelle finie (Finite Impulse Response, ou FIR), dont la formulation peut se faire directement dans le domaine discret.

#### Moyenne glissante

La moyenne glissante d'ordre  $N \in \mathbb{N}$  s'écrit

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(n-i) \quad (3.45)$$

C'est un filtre passe bas. Sa fonction de transfert s'écrit

$$H(z) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} z^{-i} = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \quad (3.46)$$

et sa réponse impulsionnelle vaut

$$h(n) = \begin{cases} 1/N & \text{si } n = 0, \dots, N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.47)$$

C'est un filtre fréquemment utilisé en raison de sa simplicité.

#### Filtre de Savitzki-Golay

Le filtre de Savitzki-Golay est un FIR reposant sur une approximation locale du signal par un polynôme au sens des moindres carrés. Il possède deux paramètres de calibration : le degré  $p$  du polynôme et le nombre d'échantillons, généralement impair, que l'on notera donc  $2N + 1 > p$ . Soit un signal d'entrée  $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ . Le calcul de la sortie à l'indice  $n \in \mathbb{N}$  repose sur la résolution du problème de minimisation

$$\min_{P=a_0+a_1X+a_pX^p} \left\| \begin{pmatrix} P(-N) & \dots & P(0) & \dots & P(N) \end{pmatrix}^{\top} - \begin{pmatrix} x(n-N) & \dots & x(n) & \dots & x(n+N) \end{pmatrix}^{\top} \right\|_2^2 \quad (3.48)$$

En d'autres termes, on cherche le polynôme de degré  $p$  approchant le mieux les  $2N+1$  derniers échantillons. Le polynôme est défini sur l'intervalle  $[-N, N]$ ,

ce qui n'affecte pas le calcul. Ce problème se réécrit

$$\min_{a_0, a_1, a_p} \left\| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & (-N)^p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & N^p \end{pmatrix}}_J \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(n-N) \\ \vdots \\ x(n) \\ \vdots \\ x(n+N) \end{pmatrix} \right\|_2^2 \quad (3.49)$$

qui possède la solution

$$(a_0 \ \cdots \ a_p)^\top = (J^\top J)^{-1} J^\top (x(n-N) \ \cdots \ x(n+N))^\top \quad (3.50)$$

La valeur du signal de sortie du filtre est alors prise comme la valeur du polynôme au centre de la fenêtre, i.e.

$$y(n) = P(0) = a_0 \quad (3.51)$$

qui se calcule donc par un simple produit scalaire. Notons que la moyenne glissante s'interprète simplement comme un filtre de Savitzky-Golay d'ordre 0. Le filtre de Savitzky-Golay est également un passe-bas (l'approximation par un polynôme possède un effet lissant). Par ailleurs, le filtre s'utilise également pour calculer les dérivées successives d'un signal numérique : il suffit de dériver analytiquement le polynôme. La valeur estimée de la dérivée première est par exemple simplement donnée par

$$P'(0) = a_1 \quad (3.52)$$

Le lecteur est vivement encouragé à comparer le résultat de ce calcul (par exemple avec un filtre d'ordre 2 et une fenêtre de taille 5) avec un schéma de dérivation aux différences finies sans filtrage en présence de bruit.

### 3.6 Sous-échantillonnage et sur-échantillonnage

Pour des raisons pratiques ou esthétiques, on peut être amené à vouloir sur-échantillonner, ou sous-échantillonner un signal. On a par exemple vu comment améliorer la résolution visuelle d'une TFD à l'aide du *zero padding* au paragraphe 2.2.1. Il existe d'autres méthodes d'extrapolation, auxquelles nous allons maintenant nous intéresser. A l'inverse, principalement pour des raisons de mémoire, on peut vouloir se débarrasser d'échantillons lorsque le pas d'échantillonnage est largement inférieur au temps caractéristique de variation du signal. Dans les chapitres qui suivent, nous détaillons les conséquences de ces opérations sur le spectre du signal.

### 3.6.1 Sous-échantillonnage

La technique de base pour sous-échantillonner un signal consiste à naïvement enlever un échantillon sur  $D$ , où  $D$  est le ratio de sous-échantillonnage. La proposition suivante explicite le spectre du signal résultant de cette opération.

**Proposition 3.6.1.** *Soit  $x$  un signal discret absolument sommable et  $y$  le signal défini par*

$$y(n) = x(Dn)$$

*Alors la TFTD de  $y$  est donnée par*

$$Y(\Omega) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X\left(\frac{\Omega + 2k\pi}{D}\right) \quad (3.53)$$

**Preuve**

$$\begin{aligned} \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X\left(\frac{\Omega + 2k\pi}{D}\right) &= \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-in\Omega/D} e^{-i2nk\pi/D} \\ &= \frac{1}{D} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-in\Omega/D} \sum_{k=0}^{D-1} e^{-i2nk\pi/D} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nD) e^{-in\Omega} \\ &= Y(\Omega) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que

$$\sum_{k=0}^{D-1} e^{-i2nk\pi/D} = \begin{cases} D & \text{si } n \text{ est un multiple de } D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.54)$$

Ce calcul très simple indique que l'opération de sous-échantillonnage induit un phénomène de repliement spectral si et seulement si la TFTD du signal initial est non nulle en dehors de l'intervalle  $[-\frac{\pi}{D}, \frac{\pi}{D}]$ . En effet, considérons, dans le cas  $D = 2$ , un signal discret dont la TFTD est donnée à gauche de la Figure 3.5. La figure de droite contient les signaux correspondant à chacun des termes de la somme (3.53). Comme ils sont à supports disjoints, la sommation les laisse intact et le spectre résultant du sous-échantillonnage est simplement la dilatation du spectre d'origine. Notons que ce résultat est intuitif : un signal périodique de période  $N$  échantillons sera de période  $N/2$  après sous-échantillonne, c'est-à-dire de fréquence  $\frac{2}{N}$  : le spectre est

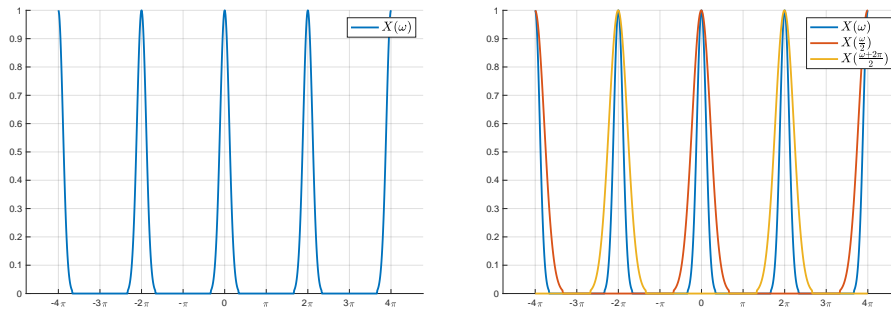


FIGURE 3.5 – Effet du sous-échantillonnage sur le spectre dans le cas favorable

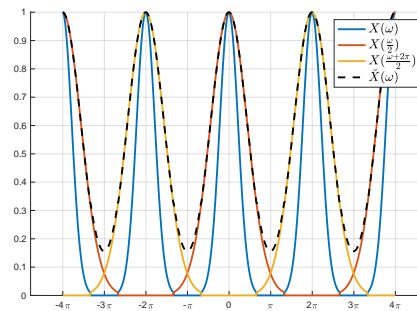


FIGURE 3.6 – Effet du sous-échantillonnage sur le spectre en présence de repliement spectral

dilaté d'un facteur 2. La figure 3.6 contient, elle, un cas problématique où le spectre est non-nul au-delà de  $\pi/2$ . Le signal reconstitué contient du repliement spectral. Ainsi, il est courant d'appliquer un filtre passe-bas à la fréquence de coupure  $\Omega_c = \frac{\pi}{D}$  avant de sous-échantillonner le signal.

### 3.6.2 Suréchantillonnage par insertion de zéros

L'idée du sur-échantillonnage est la suivante : imaginons qu'à cause de limitations technologiques, on ne puisse échantillonner un signal continu qu'avec un pas  $\Delta t$ . Que faire pour "simuler" un échantillonnage à un pas  $I$  fois plus rapide ? La méthode de base pour interpoler entre les échantillons dont on dispose consiste à insérer  $(I - 1)$  zéros après chaque échantillon, puis à appliquer un filtre passe-bas pour "lisser" le signal. Pour un signal discret donné  $x$ , on définit donc d'abord le signal sur-échantillonné par

$$y(n) = \check{x}(n) = \begin{cases} x(p) & \text{si } n = pI \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.55)$$

**Proposition 3.6.2.** *La TFTD de  $y$  est donnée par*

$$Y(\Omega) = X(I\Omega). \quad (3.56)$$

**Preuve**

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)e^{-i\Omega n} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x(p)e^{-i\Omega pI} = X(I\Omega)$$

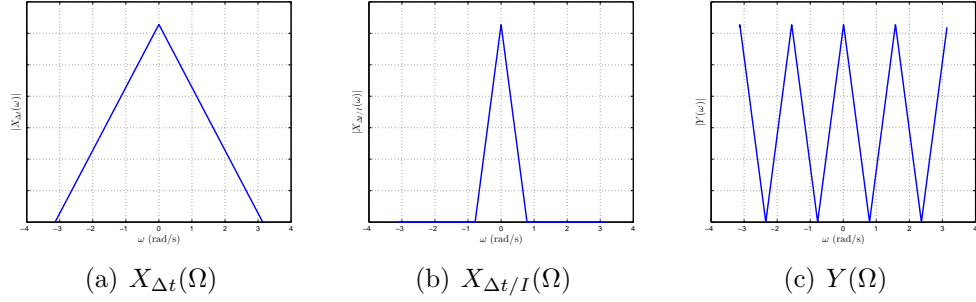
Le sur-échantillonnage induit donc une compression du spectre de  $x$ . La TFTD de  $x$  étant  $2\pi$ -périodique (cf. §2.2.1), celle de  $y$  est donc  $\frac{2\pi}{I}$ -périodique. Or, si l'on avait simplement échantillonné le signal  $I$  fois plus rapidement, la TFTD du signal discrétisé ne serait que  $2\pi$ -périodique. Pour mieux comprendre, notons

- $x_{\Delta t}$  le signal échantillonné avec un pas  $\Delta t$
- $x_{\Delta t/I}$  le signal échantillonné avec un pas  $\Delta t/I$
- $y = \check{x}_{\Delta t}$  le signal échantillonné avec un pas  $\Delta t$  **puis** sur-échantillonné avec un ratio  $I$

On a représenté sur la Figure 3.7 les TFTD de ces trois signaux pour un signal fictif. On s'aperçoit que la TFTD de  $y$  est la périodisée de celle de  $x_{\Delta t/I}$ . En effet, l'application de la formule (2.29) donne, avec des notations évidentes

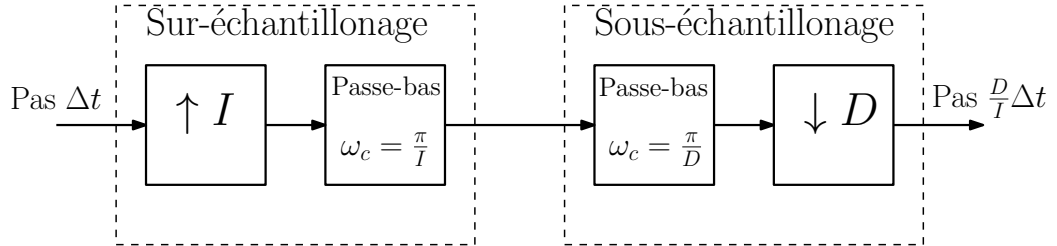
$$X_{\Delta t}(\Omega) = \phi_{\Delta t} \left( \frac{\Omega}{\Delta t} \right), \quad X_{\Delta t/I}(\Omega) = \phi_{\Delta t/I} \left( \frac{\Omega I}{\Delta t} \right), \quad Y(\Omega) = X_{\Delta t}(I\Omega) = \phi_{\Delta t} \left( \frac{\Omega I}{\Delta t} \right)$$

Pour retrouver la TFTD du signal  $x_{\Delta t/I}$ , il faut donc appliquer un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure  $\Omega_c = \pi/I$ .

FIGURE 3.7 – TFTD des signaux  $x_{\Delta t}$ ,  $x_{\Delta t/I}$ ,  $y = \tilde{x}_{\Delta t}$ 

### 3.6.3 Conversion de pas d'échantillonnage d'un ratio $I/D$

On peut combiner les approches des deux paragraphes précédents pour modifier le pas d'échantillonnage d'un ratio  $\frac{I}{D}$ . Il suffit pour cela de sur-échantillonner d'un facteur  $I$  puis de sous-échantillonner d'un facteur  $D$ . Il est primordial de respecter cet ordre afin de préserver les caractéristiques spectrales du signal. Le processus est résumé sur la figure 3.8.

FIGURE 3.8 – Processus de conversion du pas d'échantillonnage d'un signal discret d'un facteur  $I/D$ .

## 3.7 Exercices

**Exercice 3.7.1** (Moyenne glissante \*). On considère le filtre dont la réponse impulsionnelle vaut

$$h(n) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } n = 0 \text{ ou } 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.57)$$

1. Exprimer la sortie  $y$  du filtre en fonction de l'entrée  $x$ .

2. Calculer la transformée en  $z$  de la réponse impulsionnelle.
3. Calculer la transformée de Laplace du filtre continu équivalent et montrer qu'on retrouve un filtre de Butterworth dont on précisera l'ordre et la fréquence de coupure.
4. On note  $h^\uparrow$  le suréchantillonné de  $h$  par insertion de zéros aux indices impairs (sans filtre). Calculer  $h^\uparrow * y$  en fonction de  $x$ .
5. En déduire une méthode pour calculer récursivement la moyenne des  $2^k$  derniers termes de  $x$ . Vérifier qu'on tombe bien sur un filtre de Savitzky-Golay d'ordre zéro.

**Exercice 3.7.2** (Filtre anti-aliasing \*). Dans cet exercice, on s'intéresse à l'efficacité du filtre qui permet d'éviter le repliement spectral. On définit les éléments suivants :

- Soit  $x(t)$  un signal continu, à bande spectrale a priori quelconque (donc possiblement à support infini), soit  $x_d(n)$  le signal discret correspondant à l'échantillonnage de  $x$  avec un pas  $\Delta t$
- soit  $H$  un filtre passe-bas idéal de pulsation de coupure  $\omega_c = \pi/\Delta t$
- soit  $y(t) = Hx(t)$  la sortie du filtre lorsque  $x$  est à l'entrée,
- soit  $y_d(n)$  le signal discret correspondant à l'échantillonnage de  $y$  avec un pas  $\Delta t$

Le théorème de Shannon indique qu'on peut reconstruire un signal  $x$  à partir de ses échantillons si et seulement si il est à bande limitée incluse dans  $[-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t]$  Ca n'est a priori pas le cas de  $x$  ici. On va étudier ce qu'il se passe quand on applique la formule de reconstruction du théorème dans ce cas, et comment le filtre passe-bas diminue l'erreur d'estimation. On considère donc deux signaux :

- La reconstruction de  $x$  à partir de ses échantillons sans pré-filtrage

$$\hat{x}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_d(n) \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi}{\Delta t} (t - n\Delta t) \right) \quad (3.58)$$

- La reconstruction de  $x$  à partir de ses échantillons avec pré-filtrage

$$\check{x}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} y_d(n) \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi}{\Delta t} (t - n\Delta t) \right) \quad (3.59)$$

1. Exprimer  $x_d$  et  $y_d$  en fonction de  $x$  et  $y$  et donner la fonction de transfert de  $H$  dans le domaine de Fourier. Exprimer la relation entre la transformée de Fourier de  $x$  et celle de  $y$ , ainsi qu'entre la TFTD de  $x_d$  et celle de  $y_d$
2. Montrer que

$$1_{[-\frac{\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}]}(\omega) = \frac{1}{\Delta t} \mathcal{F} \left( \omega \mapsto \operatorname{sinc} \left( t \frac{\pi}{\Delta t} \right) \right) (\omega) \quad (3.60)$$

3. On note  $X$  la TFTD de  $x_d$ . Montrer que

$$\mathcal{F}\hat{x}(\omega) = \Delta t X(\Delta t \omega) 1_{[-\frac{\pi}{N}, \frac{\pi}{N}]}(\omega) \quad (3.61)$$

En déduire que

$$\mathcal{F}_{\hat{x}(\omega)} = \begin{cases} \phi_{\Delta t}(\omega) & \text{si } \omega \in [-\frac{\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.62)$$

4. De la même manière, on a

$$\mathcal{F}\check{x}(\omega) = \Delta t Y(\Delta t \omega) 1_{[-\frac{\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}]}(\omega) \quad (3.63)$$

En déduire que

$$\mathcal{F}\check{x}(\omega) = \begin{cases} \mathcal{F}x(\omega) & \text{si } \omega \in [-\frac{\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.64)$$

5. On définit  $\hat{e} = x - \hat{x}$  et  $\check{e} = x - \check{x}$  les erreurs de reconstructions. En utilisant le théorème de Parseval, et en divisant l'axe réel en trois portions  $]-\infty, -\frac{\pi}{\Delta t}[$ ,  $[-\frac{\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}]$ , et  $]\frac{\pi}{\Delta t}, +\infty[$ , montrer que l'énergie de  $\check{e}$  est toujours inférieure à celle de  $\hat{e}$ . Conclure sur l'utilité du filtre anti-aliasing.

**Exercice 3.7.3** (Filtre de Butterworth d'ordre 2 \*). On rappelle que la fonction de transfert d'un filtre de Butterworth d'ordre  $N$  et de pulsation de coupure  $\omega_c$  est donnée par

$$H_N(s) = \prod_{k=1}^N \frac{1}{\frac{s-s_k}{\omega_c}}, \quad s_k = \omega_c \exp\left(\frac{(2k+N-1)i\pi}{2N}\right) \quad (3.65)$$

1. Donner l'expression de cette fonction de transfert  $H_2$  dans le cas  $N = 2$ .
2. Montrer que cette fonction de transfert se met sous la forme

$$H_2(s) = \frac{a}{s - s_k} + \frac{b}{s - s_k} \quad (3.66)$$

avec  $a, b \in i\mathbb{R}$ .

3. En déduire une expression similaire pour la fonction de transfert dans le domaine de Fourier.
4. Pour  $a \in \mathbb{C}$  avec  $\Re(a) > 0$  donner la transformée de Fourier de la fonction

$$f(t) = e^{at} 1_{[0, +\infty[}(t) \quad (3.67)$$



5. En déduire la réponse impulsionnelle du filtre de Butterworth d'ordre 2.
6. Proposer deux discrétisations différentes du filtre, dont une utilisant la transformée de Tustin.
7. Proposer une implémentation du filtre discret (de Tustin) par une équation aux différences.
8. Donner les 3 premiers termes de la réponse impulsionnelle de chaque filtre discret.



# Chapitre 4

## Signaux aléatoires

Jusqu'à présent, nous avons fait l'hypothèse que les signaux étudiés étaient entièrement déterministes. Cependant, en pratique, la notion de signal déterministe est souvent insuffisante pour prétendre représenter fidèlement la réalité. De nombreuses classes de signaux se caractérisent ainsi par une forte variabilité intrinsèque. Au cours d'une année, les températures d'un relevé quotidien vont par exemple osciller autour de valeurs moyennes, plus élevées en été et plus basses en hiver. Autre exemple : celui de la parole. Dans ce cas, la prononciation d'un son dépend ainsi fortement du timbre et de la prononciation du locuteur. Il est alors intéressant d'utiliser des modèles probabilistes qui permettent de capturer les propriétés communes des signaux de chaque classe de son tout en autorisant une certaine variabilité. Ces modèles peuvent être utilisés pour identifier les signaux d'une classe donnée, comme un son prononcé par un locuteur, ou encore coder les signaux d'une classe de manière efficace. Par ailleurs, de nombreux signaux, même déterministes, peuvent être *bruités*, c'est à dire contaminés par un signal aléatoire ne contenant pas d'information utile. L'objectif de ce chapitre est d'introduire les outils statistiques de base permettant de caractériser les signaux aléatoires. A titre d'application, nous nous intéresserons en particulier à une méthode classique de débruitage permettant d'estimer un signal bruité, le filtrage de Wiener.

### 4.1 Processus stationnaires

#### 4.1.1 Définitions préliminaires

**Définition 4.1.1.** *Un processus discret à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est une suite de variables aléatoires  $\{X[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$  définies sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .*

Un processus discret est caractérisé par la loi de probabilité

$$P(X[n_1] \in [a_1, b_1], \dots, X[n_k] \in [a_k, b_k]), \quad (4.1)$$

définie pour tout sous-ensemble de  $k$  variables aléatoires et pour tout intervalle de  $\mathbb{R}$  de la forme  $[a_k, b_k]$ .

Une *réalisation* d'un processus discret aléatoire est un signal discret  $\{X[n]\}_{n=1, \dots, N}$  qui recense les valeurs prises par les variables aléatoires.

Enfin, un processus discret est dit *stationnaire* lorsque sa loi de probabilité est indépendante de l'indice  $k$ . En termes mathématiques, si le processus  $\{X[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est stationnaire, alors, pour tout  $p \in \mathbb{Z}$ , on vérifie :

$$\begin{aligned} P\{X[n_1] \in [a_1, b_1], \dots, X[n_k] \in [a_k, b_k]\} = \\ P\{X[n_1 + p] \in [a_1, b_1], \dots, X[n_k + p] \in [a_k, b_k]\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

**Exemple 4.1.1** (Processus sinusoïdal). Soit  $\omega > 0$ . Alors, la suite de variables aléatoires  $\{X[n]\}_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \geq 0$  par

$$X[n] := \cos(\omega n + \phi),$$

où  $\phi$  est une variable aléatoire distribuée uniformément sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$  définit un processus discret aléatoire stationnaire appelé *processus sinusoïdal*.

Dans tout ce chapitre, sauf mention contraire, nous considérerons comme stationnaires les signaux étudiés. Une conséquence immédiate de la stationnarité est que la moyenne du signal  $X[n]$  ne dépend pas de l'indice  $n$  considéré :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \mu[n] := E\{X[n]\} = \mu. \quad (4.3)$$

Dans le cas des processus sinusoïdaux, on vérifie par exemple que, pour tout entier  $n \geq 0$ ,

$$E\{X[n]\} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega n + \phi) d\phi = 0.$$

**Définition 4.1.2.** Soit  $\{X[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$  un processus discret à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Alors, l'autocovariance du signal est la fonction définie par

$$\text{Cov}(X[p], X[q]) := E\{(X[p] - \mu[p])(X[q] - \mu[q])\} \quad (4.4)$$

On notera en particulier que lorsque  $p = q$ , l'autocovariance est simplement la valeur de la variance de la variable aléatoire  $X[p]$ . En pratique, la fonction d'autocovariance permet de capturer les corrélations entre deux valeurs du signal considérées à des instants distincts. La fonction d'autocovariance est donc une *statistique d'ordre deux* du signal.

**Exemple 4.1.2.** Revenons sur l'exemple des processus sinusoïdaux. Dans ce cas, un calcul rapide permet de montrer que, pour tout couple  $(p, q)$  d'entiers positifs, on a :

$$\text{Cov}(X[p], X[q]) := E\{X[p]X[q]\} = \cos[\omega(p - q)].$$

Si  $\omega$  est de la forme  $2\pi/N$ , où  $N$  est un entier strictement positif, alors on voit que dès lors que  $p - q$  est multiple de  $N$ , les variables aléatoires  $X[p]$  et  $X[q]$  sont égales et la fonction d'autocovariance prend donc la valeur 1.

**Proposition 4.1.3.** *Pour un signal stationnaire, l'auto-covariance ne dépend que de la différence d'indices  $p - q$  :*

$$\forall p, q \in \mathbb{Z}, \text{Cov}(X[p], X[q]) = R_X(p - q).$$

*Démonstration.* Si  $X$  est un processus aléatoire stationnaire, pour tout couple d'entiers relatifs  $(p, q)$ , on vérifie, par définition de l'auto-covariance :

$$\text{Cov}(X[p], X[q]) := E\{(X[p] - \mu)(X[q] - \mu)\}. \quad (4.5)$$

Dans cette expression, l'espérance est calculée par rapport à la loi de probabilité jointe  $P(X[p], X[q])$ . Or, par stationnarité, on a :

$$P(X[p], X[q]) = P(X[0], X[p - q]). \quad (4.6)$$

On en conclut que la covariance ne dépend que de la différence  $p - q$ .  $\square$

### 4.1.2 Estimation des statistiques d'ordre deux d'un signal aléatoire

Un signal aléatoire est complètement caractérisé par sa loi de probabilité. Analyser un signal aléatoire est donc équivalent en principe à déterminer cette loi. Cependant, en pratique, lors de l'analyse d'un signal, on ne dispose souvent que d'une réalisation du processus. Dans ce contexte, compte-tenu de la faible quantité d'information disponible, il est irréaliste de chercher à déterminer la loi de probabilité du processus. On se limite donc en pratique à estimer les *statistiques d'ordre deux* du processus que sont sa moyenne et son auto-covariance, à l'aide d'*estimateurs statistiques*. Cette contrainte pratique motive l'introduction d'une classe de signaux moins restrictive que celle des signaux stationnaires : celle des signaux stationnaires au sens large (SSL).

**Définition 4.1.4** (Signal stationnaire au sens large). *Un signal  $\{X[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est dit stationnaire au sens large (SSL) si sa moyenne et son auto-covariance sont indépendantes de l'indice  $n$ .*

**Estimateur statistique** Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité. Supposons que nous disposions d'une réalisation d'un processus stationnaire  $X$ , et que nous cherchions à déterminer un paramètre  $\theta$  dépendant directement de la loi de  $X$ . Un *estimateur statistique* est une fonction qui fait correspondre à chaque réalisation possible d'un processus stationnaire un paramètre  $\tilde{\theta}$  appelé estimé ou estimation de  $\theta$ . Dans ce contexte, on définit le biais de l'estimateur  $\tilde{\theta}$  comme étant la quantité :

$$\text{Biais} = E[\tilde{\theta}] - \theta. \quad (4.7)$$

Dans cette formule, l'espérance est calculée par rapport à l'ensemble des réalisations possibles du processus stationnaire. En particulier, on dit qu'un estimateur est *sans biais* lorsque  $E[\tilde{\theta}] = \theta$ .

**Estimation de la moyenne** Supposons connue une réalisation d'un processus stationnaire aléatoire  $X$ . On peut estimer la moyenne du signal par sa moyenne empirique

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]. \quad (4.8)$$

La moyenne empirique est un estimateur non biaisé. En effet, on vérifie bien que l'espérance de l'estimation de la moyenne par rapport à l'ensemble des réalisations possibles est :

$$E[\tilde{\mu}] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} E[X[n]] = \mu$$

**Définition 4.1.5.** *Un processus aléatoire stationnaire est dit ergodique pour la moyenne si la variance de la moyenne empirique tend vers 0 lorsque le nombre  $N$  d'observations augmente.*

En pratique, pour un processus ergodique, l'étude d'une seule réalisation du signal permet de déterminer la moyenne. La proposition qui suit permet de caractériser l'ergodicité d'un processus à partir des propriétés de décroissance de sa fonction d'auto-covariance.

**Proposition 4.1.6.** *Un processus aléatoire stationnaire est ergodique pour la moyenne si et seulement si*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} E[(\tilde{\mu} - \mu)^2] = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{q=1-N}^{N-1} \left(1 - \frac{|q|}{N}\right) R_X[q] = 0$$

*Démonstration.* La démonstration de ce résultat se base sur le calcul qui suit. En revenant à la définition de la variance, on trouve que

$$\begin{aligned}
E[(\tilde{\mu} - \mu)^2] &= E\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] - \mu\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{N^2} E\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} (X[n] - \mu)(X[m] - \mu)\right)\right] \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} R_X[n - m] \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} R_X[n - m] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{q=1-N}^{N-1} \left(1 - \frac{|q|}{N}\right) R_X[q].
\end{aligned}$$

On notera bien que dans le calcul précédent, l'espérance est calculée sur l'ensemble des réalisations possibles du processus aléatoire  $X$ .  $\square$

La proposition montre que l'estimation de la moyenne converge d'autant plus vite vers la moyenne que la fonction d'autocovariance décroît rapidement, c'est à dire quand les corrélations entre variables éloignées sont de faible amplitude. Ce résultat est relativement intuitif : pour capturer des corrélations entre des variables éloignées, il est nécessaire d'observer une réalisation de taille suffisante du processus aléatoire. A l'inverse, le cas le plus favorable pour l'estimation de la moyenne est celui où les variables aléatoires sont deux à deux décorréliées :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, R_X[n] = R_X[0]\delta[n].$$

On a alors :

$$\frac{1}{N} \sum_{q=1-N}^{N-1} \left(1 - \frac{|q|}{N}\right) R_X[q] = \frac{R_X[0]}{N}.$$

**Estimation de l'auto-covariance** Partant d'une réalisation d'un processus stationnaire aléatoire  $X$ , il est également possible d'estimer l'auto-covariance de  $X$  à partir de la moyenne empirique :

$$\tilde{R}_X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} (X[n] - \tilde{\mu})(X[n+k] - \tilde{\mu}). \quad (4.9)$$

On notera cependant que l'estimateur obtenu est biaisé. En effet, on a

$$E\{\tilde{R}_X[k]\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} R_X[k] = \frac{N-k}{N} R_X[k],$$

de sorte que le biais de l'estimateur est

$$E\{\tilde{R}_X[k] - R_X[k]\} = \frac{k}{N} R_X[k].$$

Le biais dépend fortement de la décroissance de  $R_X[k]$  lorsque  $k$  augmente.

**Proposition 4.1.7.** *L'erreur quadratique moyenne associée à l'estimateur  $\tilde{R}_X$  est la somme du biais au carré et de la variance de l'estimateur :*

$$\begin{aligned} E\{(\tilde{R}_X[k] - R_X[k])^2\} &= E\{(\tilde{R}_X[k] - E\{\tilde{R}_X[k]\})^2\} + E\{\tilde{R}_X[k] - R_X[k]\}^2 \\ &= \text{Var}(\tilde{R}_X[k]) + \text{Biais}(\tilde{R}_X[k]). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Voir l'exercice 4.4.3. □

## 4.2 Puissance spectrale

Pour certaines applications, comme le débruitage, il est souvent intéressant d'étudier un signal aléatoire d'un point de vue fréquentiel en évaluant sa transformée de Fourier discrète. Pour un signal stationnaire  $X$ , la transformée de Fourier apparaît en outre de manière naturelle lorsqu'on s'intéresse à l'opérateur de covariance associé à  $X$  qui permet de calculer la covariance entre combinaisons linéaires du signal  $X$ .

**Définition 4.2.1** (Opérateur de covariance). *Rappelons que  $l^2(\mathbb{R})$  désigne l'ensemble des signaux discrets de carré sommable à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $X$  un processus aléatoire, non nécessairement stationnaire, de fonction d'auto-covariance  $R_X$ . On peut définir un opérateur linéaire sur  $l^2(\mathbb{R})$  en posant :*

$$C : a \in l^2(\mathbb{R}) \rightarrow Ca \in l^2(\mathbb{R}), \quad (4.10)$$

où pour tout entier relatif  $n$ ,

$$Ca[n] := \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a[m] R_X[n, m]. \quad (4.11)$$

*Cet opérateur est appelé opérateur de covariance associé au processus aléatoire  $X$ .*



**Proposition 4.2.2.** *L'opérateur de covariance est un opérateur symétrique et positif sur  $l^2(\mathbb{R})$ .*

*Démonstration.* Soient  $a$  et  $b$  deux séquences dans  $l^2(\mathbb{R})$ . Considérons les variables aléatoires réelles

$$A = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]X[n], \quad B = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b[n]X[n].$$

La covariance de ces variables aléatoires est, par définition :

$$\text{Cov}(A, B) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a[n]b[m]R_X[n, m] = \langle a, Cb \rangle$$

où  $C$  est l'opérateur de covariance associé au processus aléatoire  $X$  et  $\langle a, b \rangle$  désigne le produit scalaire usuel sur  $l^2(\mathbb{R})$  :

$$\langle a, b \rangle := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]b[n].$$

Comme  $R_X[n, m] = R_X[m, n]$  pour tout couple  $(m, n)$  d'entiers relatifs, il est clair que l'opérateur de covariance est symétrique. Par ailleurs, on vérifie, pour tout  $a \in l^2(\mathbb{R})$ ,

$$\text{Cov}(A, A) = \langle a, Ca \rangle \geq 0,$$

ce qui prouve la positivité de l'opérateur de covariance.  $\square$

Lorsque le processus aléatoire  $X$  considéré est stationnaire, on vérifie que

$$\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, R_X[n, m] = R_X[n - m].$$

Par conséquent, l'opérateur de covariance se ramène à une simple convolution discrète :

$$\forall a \in l^2(\mathbb{R}), Ca[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a[m]R_X[n - m] = a * R_X[n].$$

Or, on sait que les fonctions  $\{e_\omega(n) := e^{-i\omega n}\}$  forment une base de vecteurs propres pour la convolution dans  $l^2(\mathbb{R})$ . Ainsi, pour tout entier  $n$  et tout  $\omega \in \mathbb{R}$ ,

$$Ce_\omega[n] = \hat{R}_X(e^{i\omega})e_\omega[n]$$

Comme l'opérateur de covariance est positif, les valeurs propres correspondantes sont positives et données par la transformée de Fourier

$$\hat{R}_X(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_X[n]e^{-in\omega}$$

**Définition 4.2.3** (Puissance spectrale). *Soit  $X$  un processus aléatoire stationnaire discret de fonction d'autocovariance  $R_X$ . Alors, la fonction de la variable réelle  $\omega$  définie par :*

$$\hat{R}_X(e^{i\omega n}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_X[n]e^{-in\omega} \quad (4.12)$$

*est appelée puissance spectrale du processus et vérifie*

$$\hat{R}_X(e^{i\omega}) \geq 0 \quad (4.13)$$

*pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$  et pour tout entier  $n$ .*

La puissance spectrale permet de caractériser certaines classes de signaux aléatoires, comme les bruits blancs.

**Définition 4.2.4** (Bruit blanc gaussien). *Un bruit blanc gaussien est la réalisation d'un processus aléatoire dont la puissance spectrale est donnée par une fonction gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$ .*

## 4.3 Filtrage de Wiener

Nous nous intéressons dans cette section à la question du filtrage d'un signal aléatoire contaminé par un bruit. D'un point de vue mathématique, on peut modéliser un signal bruité  $S$  comme la somme du signal réel  $X$  et d'un bruit  $B$  définies sur un ensemble discret  $I$  :

$$\forall n \in I, S[n] = X[n] + B[n]. \quad (4.14)$$

Nous considérerons le signal réel et le bruit comme des réalisations indépendantes de deux processus stationnaires. Pour simplifier les différents calculs, nous supposerons enfin, quitte à considérer le signal centré  $X - E\{X\}$ , que l'espérance de  $X$  est nulle.

D'un point de vue statistique, nous cherchons, connaissant une réalisation du signal bruité  $S$ , à construire un estimateur  $\tilde{X}$  du signal réel  $X$ . Mathématiquement, le problème du débruitage consiste donc à déterminer un opérateur  $\tilde{X}$  sur l'espace des réalisations du signal bruité qui minimise l'erreur quadratique moyenne

$$E\{(\tilde{X} - X)^2\}. \quad (4.15)$$

**Proposition 4.3.1.** *L'estimateur statistique minimisant l'erreur quadratique moyenne  $E\{|\tilde{X} - X|^2\}$  est l'espérance conditionnelle  $\tilde{X} := E\{X|S\}$ .*

*Démonstration.* Se reporter à l'exercice 4.4.4.  $\square$

La proposition 4.3.1 donne un résultat d'estimation très général, mais souvent difficilement exploitable en pratique. L'expression de l'espérance conditionnelle est en effet très souvent une fonction non-linéaire des données observées, qu'il est difficile d'évaluer pratiquement. Le *filtrage de Wiener* permet de déterminer le filtre *linéaire* qui minimise l'erreur quadratique moyenne. Comme précédemment, considérons un signal aléatoire  $X$  contaminé par un bruit  $B$  tel que les valeurs du signal et du bruit soient indépendantes. Cette fois-ci, nous cherchons à estimer le signal  $X$  à l'aide d'un estimateur linéaire  $\tilde{X}$  à partir des données observées  $S$  : l'estimateur  $\tilde{X}[n]$  de l'échantillon  $X[n]$  est une combinaison linéaire des observations  $\{S[m], m \in I\}$  pondérées par les coefficients scalaires  $h[n, m]$  :

$$\forall n, \tilde{X}[n] = \sum_{m \in I} h[n, m] S[m].$$

L'erreur d'estimation est donnée par l'espérance quadratique moyenne

$$\epsilon(L) = E\{(\tilde{X} - X)^2\} = \sum_n \left( \sum_m h[n, m] S[m] - X[n] \right)^2.$$

Le filtre de Wiener va chercher à ajuster les coefficients scalaires  $L[m, n]$  afin de minimiser l'erreur d'estimation.

**Proposition 4.3.2.** *Fixons  $n \in \mathbb{Z}$ . Alors, l'estimateur linéaire  $\tilde{X}[n] := \sum_m h[n, m] S[m]$  de  $X[n]$  minimise l'erreur d'estimation si et seulement si*

$$\forall m \in \mathbb{Z}, E\{(\tilde{X} - X)S[m]\} = 0$$

*Démonstration.* Nous cherchons ici à déterminer les coefficients scalaires  $h[m, n]$  qui minimisent l'erreur d'estimation. Aux extrema de l'erreur, on a donc nécessairement

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \frac{\partial \epsilon}{\partial h[n, m]} = 2E\{(\tilde{X} - X)S[m]\} = 0.$$

En outre, on vérifie que

$$\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial h[n, m]^2}(h) = 2E\{|X|^2\} \geq 0,$$

et l'extremum est donc bien un minimum.  $\square$

**Théorème 4.3.1** (Théorème de Wiener). *L'estimateur linéaire qui minimise l'erreur quadratique moyenne est donné par le produit de convolution*

$$\tilde{X} = S * h, \quad (4.16)$$

où la puissance spectrale de  $h$  est donnée pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$  par

$$\hat{h}(e^{i\omega}) = \frac{\hat{R}_S(e^{i\omega})}{\hat{R}_S(e^{i\omega}) + \hat{R}_B(e^{i\omega})}. \quad (4.17)$$

*Démonstration.* Soit  $\tilde{X}$  l'estimateur linéaire optimal du signal réel  $X$ . Pour tout  $n$ ,  $\tilde{X}[n]$  est une combinaison linéaire des réalisations  $\{S[k], k \in \mathbb{Z}\}$ , de sorte qu'on peut écrire cette quantité sous la forme

$$\tilde{X}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n, k] S[k].$$

L'estimateur linéaire optimal s'obtient en choisissant les coefficients  $h[n, k]$  minimisant l'erreur quadratique. D'après la proposition 4.3.2, ces coefficients vérifient, pour tout couple d'entiers  $(n, k)$  :

$$E\{X[n]S[n]\} = E\{\tilde{X}[n]S[n]\} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h[n, l] E\{S[l]S[k]\}.$$

Par ailleurs, on a

$$E\{X[n]B[k]\} = 0,$$

de sorte que

$$E\{X[n]X[k]\} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h[n, l] \left( E\{X[l]X[k]\} + E\{B[l]B[k]\} \right).$$

Par hypothèse, le signal et le bruit sont stationnaires, ce qui implique qu'on ait

$$E\{X[n]X[k]\} = R_X[n - k], \quad E\{B[n]B[k]\} = R_B[n - k].$$

Au vu de la formule précédente, on a donc  $h[n, k] = h[n - k]$ . Par simple changement de variable, on trouve finalement que

$$R_X[n - k] = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h[p] \left( R_X[n - k - p] + R_B[n - k - p] \right).$$

Cette expression s'exprime bien sous la forme du produit de convolution

$$\forall n \in \mathbb{Z}, R_X[n] = h * (R_X + R_B)[n],$$

ce qui achève la preuve. □

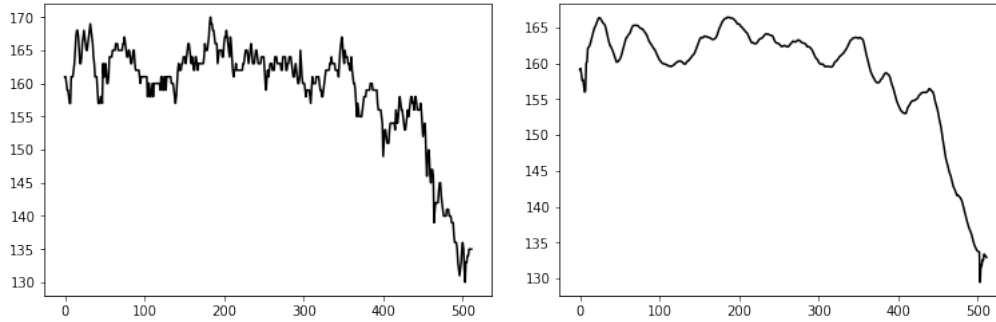


FIGURE 4.1 – Filtrage de Wiener appliqué à un signal bruité

Si on adopte un point de vue fréquentiel, il est relativement facile d'interpréter l'action du filtre de Wiener. Aux fréquences  $\omega$  telles que  $\hat{R}_X(e^{i\omega}) \geq \hat{R}_B(e^{i\omega})$ , c'est à dire aux fréquences pour lesquelles le ratio signal sur bruit est grand, la valeur de  $\hat{h}(e^{i\omega})$  est proche de 1 et le contenu fréquentiel est très peu modifié. A l'inverse, les fréquences pour lesquelles le ratio signal sur bruit est faible sont fortement atténuées lors de l'opération de filtrage.

## 4.4 Exercices

**Exercice 4.4.1** (Processus de Poisson). Soit  $X$  un processus stationnaire discret obéissant à une loi de probabilité de Poisson de paramètre  $\theta$  inconnu. Un tel processus consiste en une séquence de variables aléatoires prenant des valeurs entières positives selon la loi de probabilité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p\{X = n\} = \frac{\theta^n}{n!} \exp(-\theta).$$

Proposer un estimateur statistique du paramètre  $\theta$  à partir d'une réalisation  $\{X_n\}_{0 \leq n \leq N-1}$  du processus  $X$ .

**Exercice 4.4.2** (Estimateur de la variance d'une source). Soit  $X$  une source aléatoire et  $\{X_n, 0 \leq n \leq N\}$  une séquence de réalisations de cette source.

1. Supposons que l'espérance  $\mu$  de la source  $X$  soit connue. Dans ce cas, montrer que l'estimateur

$$\bar{S}_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (X_n - \mu)^2$$

est un estimateur sans biais de la variance  $\sigma^2$  de la source  $X$ .

2. Supposons maintenant que l'espérance  $\mu$  de la source  $X$  soit inconnue. Dans ce cas, proposer un estimateur de la variance non biaisé de la variance de la source à partir des réalisations  $\{X_n, 0 \leq n \leq N\}$ .

**Exercice 4.4.3** (Décomposition biais-variance). Soit  $\tilde{R}_X$  un estimateur statistique de l'autocovariance  $R_X[k]$ . Montrer que l'erreur quadratique associée à l'estimateur est la somme de la variance et du carré du biais de l'estimateur.

**Exercice 4.4.4** (Estimateur optimal). Considérons un signal bruité  $S$ , défini pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  comme la somme d'un signal réel  $X$  et d'un bruit  $B$ .

$$S[n] = X[n] + B[n]. \quad (4.18)$$

On suppose que le signal réel et le bruit sont des réalisations indépendantes de deux processus stationnaires dont les lois de probabilité sont décrites par les loi de densités  $p_X(x)$  et  $p_B(b)$  respectives.

Nous cherchons, connaissant une réalisation du signal bruité  $S$ , à construire un estimateur de  $X$  en déterminant un opérateur  $Y(S)$  sur l'espace des réalisations du signal bruité qui minimise l'erreur quadratique moyenne

$$E\{(Y - X)^2\}. \quad (4.19)$$

Montrer que l'estimateur statistique minimisant l'erreur quadratique moyenne  $E\{|Y - X|^2\}$  est l'espérance conditionnelle  $Y := E\{X|S\}$ .

# Chapitre 5

## Du stationnaire au transitoire

Nous avons, jusqu'à présent, considéré les signaux certes comme des fonctions du temps mais toujours dans leur globalité : on a par exemple parlé du spectre d'un signal comme un objet figé, déterminé entièrement par l'*ensemble* de la fonction temporelle que constitue le signal (que ce soit dans le cadre continu ou discret). La réalité du traitement du signal est autrement plus complexe, comme l'illustre l'exemple suivant.

**Exemple 5.0.1.** *On considère les deux signaux discrets suivants, constitués de deux sinus de fréquences différentes concaténés*

$$x_1(n) = \begin{cases} \cos \frac{2n\pi\Delta t}{10}, & n = 0, \dots, 199 \\ \cos \frac{2n\pi\Delta t}{2}, & n = 200, \dots, 400 \end{cases}, \quad x_2(n) = \begin{cases} \cos \frac{2n\pi\Delta t}{2}, & n = 0, \dots, 199 \\ \cos \frac{2n\pi\Delta t}{10}, & n = 200, \dots, 400 \end{cases} \quad (5.1)$$

avec  $\Delta t = 0.5$ . Ces signaux sont représentés sur les Figures 5.1(a) et 5.1(b). Le calcul de la DFT de ces deux signaux donne le même résultat, représenté sur la Figure 5.2, malgré la différence majeure des séquences temporelles.

Cet exemple –ainsi que bien d'autres : voix, musique, etc.– illustre la nécessité d'étudier les signaux d'un point de vue *transitoire*, plutôt que stationnaire comme cela a été fait jusqu'ici. Commençons par définir la notion de *fréquence instantanée*.

### 5.1 Fréquence instantanée

Pour une sinusoïde  $a \cos(\omega_0 t + \phi_0)$ , la notion de fréquence est parfaitement définie : il s'agit de la dérivée (constante) de l'argument du sinus par rapport

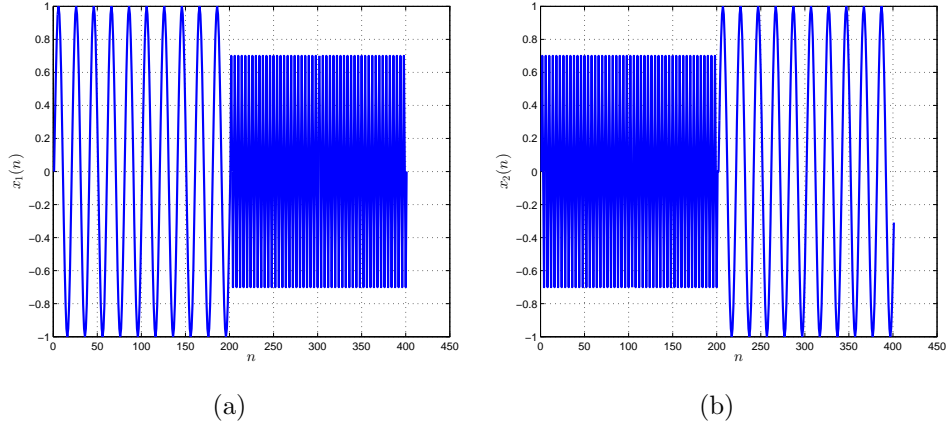
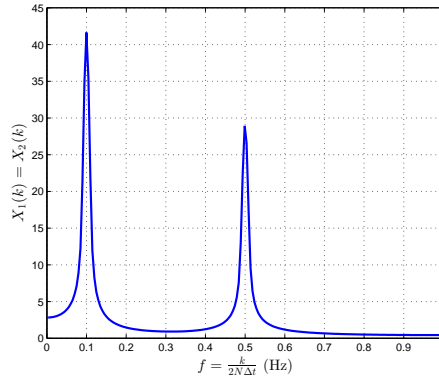


FIGURE 5.1 – Sinus de fréquences différentes concaténés.

FIGURE 5.2 – DFT des signaux  $x_1$  et  $x_2$  en fonction de la fréquence discrète  $f = k/2N\Delta t$ , où  $N = 401$  correspond à la longueur des signaux.

au temps,  $\omega_0$ . On aimerait étendre cette définition en représentant un signal quelconque  $f$  par

$$f(t) = a(t) \cos \phi(t), \quad (5.2)$$

et définir sa “fréquence instantanée” par  $\omega(t) = \phi'(t)$ . Toutefois, dans le cas général, la paire  $(a(t), \phi(t))$  n’est pas définie de manière unique. Il existe tout de même une classe de signaux pour lesquels on a l’unicité : ceux dont la transformée de Fourier est nulle pour les fréquences négatives, qu’on appelle signaux *analytiques*. Etant donné un signal réel continu  $f$ , notons  $f_a$  sa “partie analytique”, définie en retirant à  $f$  ses fréquences négatives, c’est-à-



dire

$$\mathcal{F}f_a(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega < 0, \\ 2\mathcal{F}f(\omega) & \text{si } \omega \geq 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

En prenant la transformée de Fourier inverse de (5.3), on obtient aisément

$$f_a(t) = f(t) + if(t) * \left( t \mapsto \frac{1}{\pi t} \right) \quad (5.4)$$

Ainsi,  $f_a$  est un signal complexe, qu'on peut donc représenter de manière unique (à  $2\pi$ -près pour la phase) par

$$f_a = a(t)e^{i\phi(t)} \quad (5.5)$$

et le signal initial s'écrit

$$f(t) = \Re\{f_a(t)\} = a(t) \cos \phi(t) \quad (5.6)$$

Une manière particulière de déterminer le couple  $(a(t), \phi(t))$  pour  $f$  est donc de prendre l'amplitude et la phase de sa partie analytique. On définit alors la fréquence instantanée comme  $\omega(t) = \phi'(t)$ . Ce choix s'avère pertinent pour certains signaux, et très peu pour d'autres, comme nous allons le voir dans l'exemple qui suit.

**Exemple 5.1.1.** *Considérons le signal suivant, composé de deux sinusoïdes aux pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , de même amplitude.*

$$f(t) = a \cos(\omega_1 t) + a \cos(\omega_2 t) \quad (5.7)$$

*Sa partie analytique s'écrit*

$$f_a(t) = e^{i\omega_1 t} + e^{i\omega_2 t} = a \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) e^{i\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t} \quad (5.8)$$

*On identifie donc la fréquence instantanée comme étant la moyenne des deux fréquences  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ . Lorsque les deux fréquences sont égales, ou que l'une est nulle, on retrouve bien la définition de la fréquence pour une sinusoïde. Toutefois, pour  $\omega_1 \neq \omega_2$ , la fréquence instantanée décrit mal le signal initial : on a perdu de l'information puisqu'on a remplacé la superposition de deux fréquences par leur moyenne.*

L'exemple qui précède illustre les limites de la notion de fréquence instantanée. Le paragraphe qui suit présente un outil qui permet d'analyser l'évolution du contenu fréquentiel d'un signal au cours du temps sans perte d'information.

## 5.2 Transformée de Fourier fenêtrée

Comme nous venons de le voir, la notion de fréquence instantanée ne permet pas une analyse efficace du contenu fréquentiel d'un signal du point de vue transitoire. Une idée alternative naturelle consiste à isoler et analyser des “portions” du signal temporel, par exemple en le multipliant par un créneau, qu'on ferait glisser afin de parcourir tout le signal. Une autre idée, similaire, consiste à isoler des “portions” du spectre en le multipliant également par un créneau (que l'on ferait “glisser” afin de parcourir tout le spectre), et à observer leur évolution dans le temps. Comme nous allons le voir, la transformée de Fourier fenêtrée correspond à ces deux idées. Toutefois, la multiplication par un simple créneau pose des problèmes de régularité aux bords de la fenêtre. Le chapitre 5.3 discute l'élaboration de “bonnes” fenêtres, dans un sens qui est encore à définir. Commençons tout d'abord par définir formellement la transformée de Fourier fenêtrée pour une forme de fenêtre quelconque.

### 5.2.1 Définition

L'idée de la transformée de Fourier fenêtrée est d'analyser le contenu fréquentiel d'un signal *au voisinage* d'un instant donné, en multipliant le signal par une “fenêtre” glissante. Elle est définie comme suit.

**Définition 5.2.1.** Soit  $f \in L^2$  et  $g \in L^2$  une fonction paire telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = 1 \quad (5.9)$$

qu'on appellera fenêtre. On définit la Transformée de Fourier fenêtrée de  $f$  au voisinage de  $u$ , à la pulsation  $\xi$  par

$$Sf(u, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t - u)e^{-i\xi t} dt \quad (5.10)$$

Cette transformée mesure peu ou prou la corrélation de  $f$  avec la fonction (parfois appelée *atome de Fourier*) définie par

$$g_{u,\xi}(t) = g(t - u)e^{-i\xi t} \quad (5.11)$$

qui est temporellement centrée en  $u$ . Sa transformée de Fourier est donnée par

$$\hat{g}_{u,\xi}(\omega) = e^{-i(\omega - \xi)u} \hat{g}(\omega - \xi) \quad (5.12)$$

et, puisque  $g$  est paire,  $\mathcal{F}g$  l'est également :  $g_{u,\xi}$  est donc fréquemment localisée autour de  $\xi$ . En appliquant la formule de Parseval à (5.10), on obtient

$$Sf(u, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \hat{g}_{u,\xi}(\omega) d\omega \quad (5.13)$$

Les formules (5.10) et (5.13) sont très similaires : elles indiquent que  $Sf$  ne dépend que du comportement de  $f$  et  $\hat{f}$  dans les “domaines” où, respectivement,  $g_{u,\xi}$  et  $\hat{g}_{u,\xi}$  ne sont pas négligeables. La Figure 5.3 représente un exemple de fenêtre, la fenêtre de Hanning, d'expression

$$g(t) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) & \text{si } t \in [-T, T] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ainsi que sa transformée de Fourier.

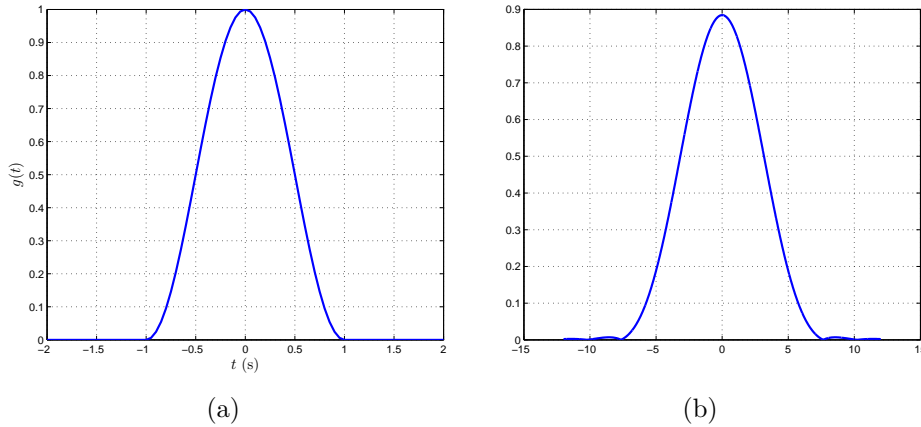


FIGURE 5.3 – Exemple de fenêtre (de Hanning) et sa transformée de Fourier.

La transformée de Fourier fenêtrée est une représentation complète du signal : on peut reconstruire le signal d'origine à partir de la transformation inverse suivante

$$f(t) = \frac{1}{\|g\|_2^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Sf(u, \xi) g_{u,\xi}(t) du d\xi \quad (5.14)$$

Toute la difficulté de l'utilisation de la transformée de Fourier fenêtrée consiste à bien choisir la fenêtre  $g$  afin de permettre une analyse appropriée du signal. Pour mieux comprendre la difficulté de ce choix, prenons l'exemple d'un

morceau de musique, constitué d'accords joués successivement à un rythme régulier. Une fenêtre très "large" en temps, par exemple de la durée de deux ou trois accords) nous donnera toute l'information fréquentielle contenue dans ces accords, mais sans nous donner d'information sur le moment auquel ils sont joués. A l'inverse, une fenêtre très étroite en temps pourrait ne pas réussir à capturer toutes les composantes fréquentielles de l'accord. On voit se dessiner un compromis entre les "étalements" temporel et fréquentiel de la fenêtre, formalisé dans la section 5.2.2 qui suit.

### 5.2.2 Incertitude de Heisenberg

#### Boîtes de Heisenberg et spectrogramme

Commençons par définir formellement l'étalement autour de  $x_0$  d'une fonction à variance finie, i.e. telle que  $(x \mapsto xf(x)) \in L^2$  par

$$\sigma_{x_0}(f)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0)^2 |f(x)|^2 dx \quad (5.15)$$

De manière intéressante, les étalements temporel et fréquentiel de l'atome  $g_{u,\xi}$  autour de  $u$  et  $\xi$ , respectivement, ne dépendent ni de  $u$ , ni de  $\xi$  :

$$\begin{aligned} \sigma_u(g_{\cdot,\xi})^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (t - u)^2 |g(t - u)e^{-i\xi t}|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |g(t)|^2 dt \end{aligned} \quad (5.16)$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_\xi(\hat{g}_{u,\xi})^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \xi)^2 |e^{-i(\omega - \xi)u} \hat{g}(\omega - \xi)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (5.17)$$

On peut donc parler de l'étalement temporel  $\sigma_t = \sigma(g_{u,\xi})$  de l'atome et de son étalement fréquentiel  $\sigma_\omega = \sigma(\mathcal{F}g_u, \xi)$ . Pour cette raison, on représente les atomes  $g_{u,\xi}$  par des "boîtes" de Heisenberg de taille fixe dans le plan temps-fréquence, comme sur la Figure 5.4. La transformée de Fourier fenêtrée donne donc l'information fréquentielle contenue dans chacune de ces boîtes. Cette information se lit sur un *spectrogramme*, qui représente dans le plan temps-fréquence le module au carré de la transformée :

$$|Sf(u, \xi)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t - u)e^{-i\xi t} dt \right|^2 \quad (5.18)$$

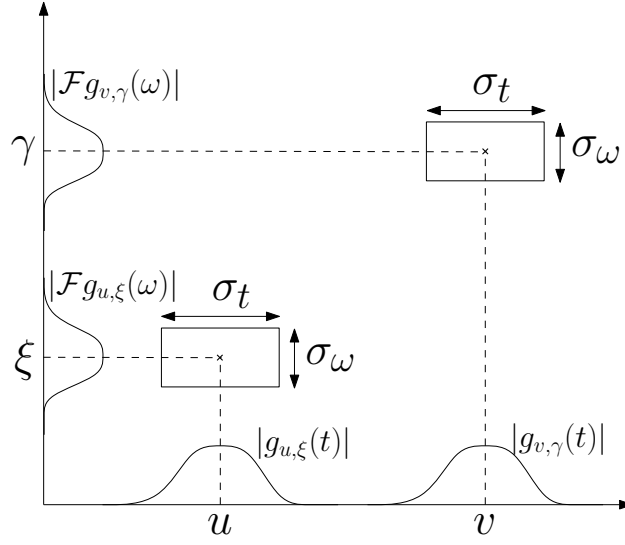


FIGURE 5.4 – Boîtes de Heisenberg dans le plan temps-fréquence.

**Exemple 5.2.2.** La figure 5.5 représente le spectrogramme du chirp suivant

$$f(t) = \cos \frac{t^2}{150} \quad (5.19)$$

On observe que la fréquence évolue linéairement avec le temps, ce qui est cohérent avec la définition de la fréquence instantanée. Pour obtenir ce diagramme, on a utilisé une fenêtre de Hanning (cf. §5.3).

Le choix de la fenêtre dans l'exemple précédent n'est pas anodin : il permet de suivre l'évolution "linéaire" de la fréquence en réalisant un bon compromis entre étalement temporel et étalement fréquentiel. Dans l'idéal, on aurait aimé obtenir une ligne droite parfaite, ce qui correspondrait à des "boîtes" ponctuelles, mais s'avère en fait impossible comme nous allons maintenant le voir.

### Incertitude de Heisenberg

Supposons que, pour une fenêtre donnée  $g$ , on veuille réduire son étalement temporel sans changer son énergie. Il suffit pour cela d'opérer un changement d'échelle, disons d'un facteur  $s$  et de normaliser, c'est-à-dire de prendre une nouvelle fenêtre

$$\bar{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} g\left(\frac{t}{s}\right) \quad (5.20)$$

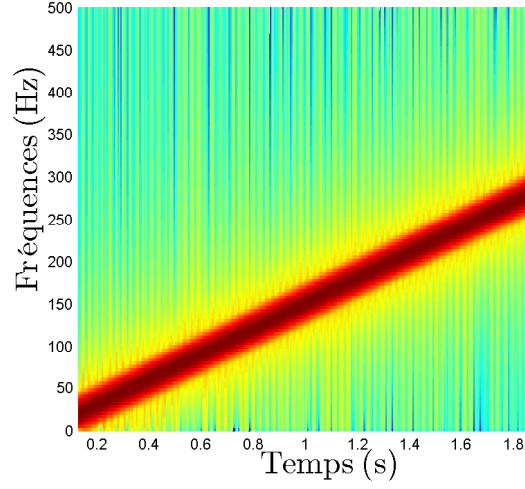


FIGURE 5.5 – Spectrogramme d'un chirp linéaire

L'effet sur la transformée de Fourier est une dilatation :

$$\mathcal{F}\bar{g}(\omega) = \sqrt{s}\mathcal{F}g(s\omega). \quad (5.21)$$

On a donc augmenté l'étalement fréquentiel : on perd dans le domaine spectral ce qu'on a gagné dans le domaine temporel. Le théorème qui suit présente les limites du compromis entre étalement fréquentiel et temporel : il donne une borne inférieure sur le volume des boîtes.

**Théorème 5.2.3** (Principe d'incertitude de Heisenberg). *Soit  $g \in L^2$  une fonction centrée en 0 et dont la transformée de Fourier est également centrée en 0 :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t|g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |\mathcal{F}g(\omega)|^2 d\omega = 0 \quad (5.22)$$

Alors, les étalements  $\sigma_t$  et  $\sigma_\omega$  satisfont

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4} \quad (5.23)$$

Cette inégalité est une égalité pour les fonctions de la forme  $g(t) = ae^{-bt^2}$ ,  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ .

Pour une démonstration de ce théorème, on pourra consulter [5]. Le choix de la fenêtre appropriée au signal considéré s'avère donc systématiquement délicat. Le paragraphe qui suit s'intéresse de plus près à l'élaboration de fenêtres.

## 5.3 Fenêtrage

La question du fenêtrage (*windowing* en anglais) est centrale en traitement du signal : n'importe quelle opération s'effectue sur une portion finie du signal, les techniques de fenêtrage permettent d'en isoler une partie sans trop altérer sa régularité. Commençons par définir les caractéristiques importantes d'une fenêtre.

### 5.3.1 Propriétés des fenêtres

Les propriétés des fenêtres s'expriment principalement dans le domaine de Fourier. Prenons l'exemple de la fenêtre la plus simple, le créneau  $g(t) = 1_{[0,1]}(t)$ . Comme nous l'avons vu au Chapitre 2, sa transformée de Fourier est un sinus cardinal, représenté schématiquement sur la figure 5.6.

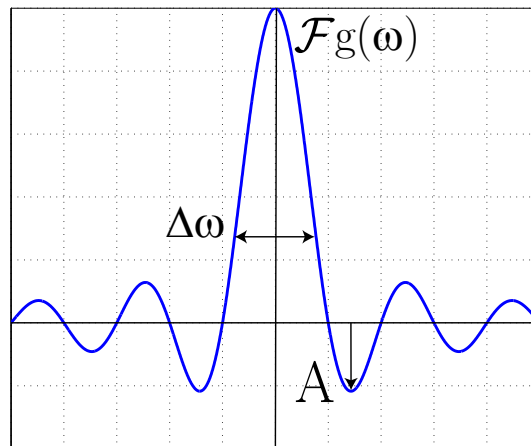


FIGURE 5.6 – Transformée de Fourier de la fonction sinus cardinal.

Idéalement, on souhaiterait que cette transformée soit un pic de Dirac, ce qui correspondrait à une précision infinie en fréquence, évidemment inatteignable en pratique. L'allure du sinus cardinal de la figure 5.6, à savoir une succession de lobes, est représentative des transformées de Fourier des fenêtres. Qualitativement, on souhaite rendre le lobe central aussi étroit que possible, et les lobes latéraux aussi faibles que possibles. Quantitativement, on s'intéresse aux grandeurs suivantes :

— la largeur quadratique moyenne de base  $\Delta\omega$  définie par

$$\frac{|\mathcal{F}g(\frac{\Delta\omega}{2})|^2}{|\mathcal{F}g(0)|^2} = \frac{1}{2} \quad (5.24)$$

— L'amplitude maximale  $A$  du premier lobe latéral, en décibels

$$A = 10 \log_{10} \frac{|\mathcal{F}g(\omega_0)|^2}{|\mathcal{F}g(0)|^2} \quad (5.25)$$

— Le taux de décroissance polynomial  $p$  de la transformée de Fourier de  $g$  à l'infini défini par

$$|\mathcal{F}g(\omega)| = O(\omega^{-p-1}) \quad (5.26)$$

qui résume ce qui se passe au-delà du premier lobe latéral. Le tableau qui suit donne les valeurs de ces paramètres pour quelques fenêtres bien connues.

### 5.3.2 Exemples de fenêtres

La Table 5.1 présente les caractéristiques de fenêtres couramment utilisées.

| Nom        | $g(t)$                                      | $\Delta\omega$ | $A$    | $p$ |
|------------|---|----------------|--------|-----|
| Rectangle  | 1   | 5.59           | -13 db | 0   |
| Hamming    | $0.54 + 0.46 \cos(2\pi t)$                  | 8.54           | -43 db | 0   |
| Gaussienne | $\exp(-18t^2)$                              | 9.73           | -55 db | 0   |
| Hanning    | $\cos^2 \pi t$                              | 9.04           | -32 db | 2   |
| Blackman   | $0.42 + 0.5 \cos 2\pi t + 0.08 \cos 4\pi t$ | 10.55          | -58 db | 2   |

TABLE 5.1 – Fenêtres courantes

## 5.4 Transformée de Fourier Fenêtrée Discrète

La Transformée de Fourier Fenêtrée Discrète (TFFD) se construit, pour les signaux discrets périodiques de période  $N$  de manière similaire à sa version continue, par produit scalaire avec les atomes de Fourier discrets, définis par

$$g_{m,l}[n] = g[n - m] \exp\left(\frac{2i\pi ln}{N}\right) \quad (5.27)$$



dont la TFD est

$$\hat{g}_{m,l}[k] = \hat{g}[k-l] \exp\left(-\frac{2i\pi m(k-l)}{N}\right) \quad (5.28)$$

où  $g$  est une “fenêtre” discrète, donc un signal discret symétrique, de période  $N$  et de norme  $\|g\| = 1$ . La TFFD s’écrit alors

$$\mathcal{S}f[m, l] = \langle f, g_{m,l} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]g[n-m] \exp\left(\frac{-2i\pi ln}{N}\right)$$

On dispose également d’une formule de reconstruction

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{S}f[m, l]g[n-m] \exp\left(\frac{2i\pi ln}{N}\right) \quad (5.29)$$

et d’une égalité de type Plancherel

$$\sum_{n=0}^{N-1} |f[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} |\mathcal{S}f[m, l]|^2 \quad (5.30)$$

## 5.5 Crêtes de Fourier à Fenêtre

On aimerait que les informations données par le calcul de la TFFD soient cohérentes avec la notion de fréquence instantanée définie en Section 5.1. On va voir que c’est le cas lorsque la fenêtre est “adaptée” aux propriétés du signal, notamment à sa régularité. Plus précisément, on considère la fenêtre dilatée  $g_{s,u,\xi}$  définie par

$$g_{s,u,\xi}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} g_{u,\xi}\left(\frac{t}{s}\right) \quad (5.31)$$

et une fonction  $f(t) = a(t) \cos \phi(t)$ . On a alors le résultat suivant

**Théorème 5.5.1** (Mallat). *Si  $\xi \geq 0$ , on a*

$$\langle f, g_{s,u,\xi} \rangle = \frac{\sqrt{s}}{2} a(u) \exp(i[\phi(u) - \xi u]) (\hat{g}(s[\xi - \phi'(u)]) + \epsilon(u, \xi)) \quad (5.32)$$

où le résidu  $\epsilon$  satisfait

$$|\epsilon(u, \xi)| \leq \epsilon_{a,1}(u) + \epsilon_{a,2}(u) + \epsilon_{\phi,2} + \sup_{|\omega| \geq s\phi'(u)} |\hat{g}(\omega)| \quad (5.33)$$

avec

$$\epsilon_{a,1}(u) \leq \frac{s|a'(u)|}{a(u)}, \quad \epsilon_{a,2}(u) \leq \sup_{|t-u| \leq s/2} \frac{s^2|a''(t)|}{a(u)} \quad (5.34)$$

et, si  $s|a'(u)|a(u) \leq 1$ , alors

$$\epsilon_{\phi,2} \leq \sup_{|t-u| \leq s/2} s^2|\phi''(t)| \quad (5.35)$$

Le théorème s'interprète de la manière suivante :

- En fixant l'instant  $u$ , on peut montrer que (5.32) est maximale en  $\xi(u) = \phi'(u)$  : les crêtes de la TFF correspondent donc bien aux fréquences instantanées.
- Le dernier terme  $\sup_{|\omega| \geq s\phi'(u)} |\hat{g}(\omega)|$  est petit si  $\phi'(u) \geq \Delta\omega/s$  où  $\Delta\omega$  est la largeur de bande de la fenêtre  $g_s$ .
- les autres termes sont petits si  $a(t)$ ,  $\phi(t)$  varient peu sur le support de de la fenêtre  $g_s$ .

Le choix de  $s$  résulte d'un compromis entre ces différentes inégalités. En particulier, si la fréquence instantanée est simultanément grande et varie beaucoup, la transformée de Fourier peut se révéler inefficace pour l'identifier. Cette limitation est étroitement liée au fait que les boîtes de Heisenberg de la TFF sont de taille fixe : la largeur de bande en temps et en fréquence ne dépendent ni de l'instant, ni de la fréquence considérés. En ce sens, la transformée en ondelettes présentée au chapitre suivant se révèle un outil intéressant pour l'étude de signaux présentant des hautes fréquences sur un intervalle de temps réduit, c'est-à-dire des discontinuités.

# Chapitre 6

## Du temps-fréquence au temps-échelle de temps

Dans ce chapitre, on s'intéresse à une nouvelle représentation des signaux, proche de la représentation temps-fréquence mais conceptuellement différente : la représentation temps-échelle de temps. On la construit en utilisant la transformée en ondelettes.

### 6.1 Transformée en ondelettes

Une ondelette est une fonction  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ , de norme 1, centrée en 0 et de moyenne nulle, i.e. telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (6.1)$$

On construit, à partir d'une ondelette, les atomes

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \quad (6.2)$$

qui sont également de norme unité. De manière similaire à la TFF, on définit la transformée en ondelettes de  $f$  au temps  $u$  et à l'échelle  $s$  comme

$$\mathcal{W}f(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right) \quad (6.3)$$

$$= f * \bar{\psi}_s(u) \quad (6.4)$$

où  $\bar{\psi}_s(t) = \psi^*\left(\frac{-t}{s}\right)$ . L'égalité (6.4) indique que la transformée en ondelettes peut se calculer à l'aide d'un filtre linéaire. En prenant la transformée de

Fourier de  $\bar{\psi}_s$ , il vient

$$\mathcal{F}[\bar{\psi}_s](\omega) = \sqrt{s}\mathcal{F}[\psi]^*(s\omega) \quad (6.5)$$

qui est donc un passe-bande dilaté d'un facteur  $s$ . Différents types d'ondelettes sont utilisées en fonction de l'analyse du signal que l'on souhaite faire. Pour l'analyse fréquentielle des signaux, on utilise des ondelettes analytiques. Pour la détection des transitions brutales, on utilise des ondelettes réelles.

### 6.1.1 Ondelettes analytiques

On rappelle qu'une fonction  $\psi$  est analytique si et seulement si sa TF vérifie  $\mathcal{F}\psi(\omega) = 0$  pour  $\omega < 0$ . Intéressons-nous à la résolution temps-fréquence d'une ondelette analytique. On rappelle que  $\psi$  est centrée en 0, les atomes  $\psi_{u,s}$  sont donc centrés en  $u$ . Leur étalement en temps est donné par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t-u)^2 |\psi_{u,s}(t)|^2 dt = s^2 \sigma_t^2 \quad (6.6)$$

où  $\sigma_t$  est l'étalement en temps de  $\psi$ . Cette formule explique l'appellation d'*échelle de temps* : la variable  $s$  détermine la "plage temporelle" autour de  $u$  dans laquelle on mesure l'énergie du signal. Le centre fréquentiel de  $\psi$ , lui est donné par

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \omega |\mathcal{F}\psi(\omega)|^2 d\omega \quad (6.7)$$

La transformée de Fourier des atomes étant

$$\mathcal{F}[\psi_{u,s}](\omega) = \sqrt{s}\mathcal{F}[\psi](s\omega) \exp(-i\omega u), \quad (6.8)$$

leur centre fréquentiel est  $\frac{\eta}{s}$  : plus l'échelle de temps  $s$  est petite, plus on s'intéresse aux hautes fréquences. De plus, l'étalement en fréquence est  $\frac{\sigma_\omega^2}{s^2}$ , où  $\sigma_\omega$  est l'étalement fréquentiel de  $\psi$  autour de  $\eta$ . Ces propriétés sont résumées en Figure 6.1. La transformée en ondelettes analytiques adapte donc la résolution temps-fréquence en fonction de la fréquence :

- pour les grandes échelles de temps  $s$ , on étudie les basses fréquences avec une fenêtre large en temps et étroite en fréquence.
- pour les petites échelles de temps  $s$ , on étudie les hautes fréquences avec une fenêtre étroite en temps et large en fréquence.

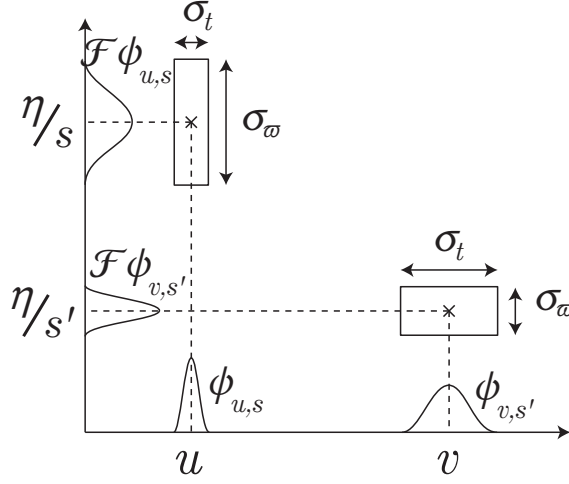


FIGURE 6.1 – Boîtes de Heisenberg d’ondelettes dans le plan temps/fréquence. La taille des boîtes ne dépend que de l’échelle de temps  $s$  considérée, liée à la fréquence par  $\omega = \eta/s$ .

**Construction** La construction d’ondelettes analytiques peut se faire à partir d’une fenêtre réelle  $g$  à support fréquentiel compact, i.e. telle que  $\mathcal{F}g(\omega) = 0$  pour  $|\omega| > \eta$  pour un certain  $\eta$ . Alors, la fonction

$$\psi(t) = \exp(i\eta t)g(t) \quad (6.9)$$

est une ondelette analytique.

**Exemple 6.1.1.** *L’ondelette de Gabor*

$$\psi(t) = g(t)e^{i\eta t}, \text{ avec } g(t) = \frac{1}{(\sigma^2\pi)^{1/4}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \text{ une gaussienne} \quad (6.10)$$

est approximativement analytique pour  $\sigma^2\eta^2 \gg 1$ .

### 6.1.2 Ondelettes réelles

On a vu que la transformée en ondelettes  $\mathcal{W}f(u, s)$  mesure la variation de  $f$  dans un voisinage de  $u$  de taille  $s$ . La transformée en ondelettes réelles est une représentation équivalente du signal dans le domaine temps-échelle de temps sous une condition d’admissibilité sur  $\psi$ .

**Théorème 6.1.2.** *Soit  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  telle que*

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\mathcal{F}\psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty \quad (6.11)$$

alors, pour toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , on a la formule de reconstruction suivante

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}f(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s^2} \quad (6.12)$$

et l'énergie du signal est conservé selon la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{W}f(u, s)|^2 du \frac{ds}{s^2} \quad (6.13)$$

La condition (6.11) impose  $\mathcal{F}\psi(0) = 0$ , ce qui revient à dire que  $\psi$  est de moyenne nulle, ce qui est toujours le cas pour les ondelettes. Cette condition nécessaire n'est pas suffisante, mais il suffit par exemple d'imposer  $\mathcal{F}\psi \in \mathcal{C}^1$  pour qu'elle le devienne. Cette condition de régularité sur  $\mathcal{F}\psi$  peut s'exprimer à son tour comme une propriété de décroissance à l'infini de  $\psi$ , on a par exemple

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |t|) |\psi(t)| ds < +\infty \Rightarrow \mathcal{F}\psi \in \mathcal{C}^1 \quad (6.14)$$

**Exemple 6.1.3.** Les ondelettes dites en “chapeaux mexicains”, définies par

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi^{1/4} \sqrt{3\sigma}} \left(1 - \frac{t^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right) \quad (6.15)$$

sont des ondelettes communément utilisées pour la détection de transitions brutales.

## 6.2 Etude de la régularité

Les propriétés de la transformée en ondelettes  $\mathcal{W}f$  d'un signal  $f$  sont étroitement liées à la régularité de  $f$ . On peut notamment lier les crêtes de la transformée avec les points de discontinuité, ou d'irrégularité du signal. On commence dans cette partie par introduire la définition de la régularité Lipschitz  $\alpha$ , avant de donner les résultats principaux.

### 6.2.1 Préliminaires

#### Régularité Lipschitz $\alpha$

**Définition 6.2.1.** On dit que  $f$  est ponctuellement Lipschitz  $\alpha > 0$  en  $v$  si il existe  $K > 0$  et un polynôme  $p_v$  de degré  $m = \lfloor \alpha \rfloor$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |f(t) - p_v(t)| \leq K|t - v|^\alpha \quad (6.16)$$

Si  $f \in \mathcal{C}^m$ , alors  $p_v$  est le développement de Taylor au voisinage de  $v$ .

### Analyse de la régularité par la transformée de Fourier Fenêtrée

La TFF donne une information non-locale sur la régularité Lipschitz de  $f$ .

**Proposition 6.2.2.** *Si*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}f(\omega)| (1 + |\omega|)^\alpha d\omega < +\infty \quad (6.17)$$

*alors  $f$  est bornée et uniformément Lipschitz  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ .*

### 6.2.2 Analyse de la régularité par les ondelettes

Le choix de l'ondelette conditionne le “niveau” de régularité que l'on est capable d'étudier avec la transformée. Plus une ondelette a de moments nuls, plus on peut s'en servir pour étudier des irrégularités fines.

#### Moments nuls

On définit le  $k$ -ième moment de  $\psi$  par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt \quad (6.18)$$

Une conséquence directe de cette définition est que si  $\psi$  a  $n > \alpha$  moments nuls, alors  $\psi$  est orthogonale aux polynômes de degré  $n$ . Or on a vu que toute fonction  $f$  Lipschitz  $\alpha$  s'exprime, au voisinage de  $v$ , comme

$$f(t) = p_v(t) + \epsilon_v(t) \quad (6.19)$$

avec  $p_v$  de degré  $\lfloor \alpha \rfloor$  et  $\epsilon_v(t) < K|t - v|^\alpha$ . On a alors

$$\mathcal{W}f(u, s) = \mathcal{W}\epsilon_v(u, s) \quad (6.20)$$

ce qui va nous permettre de borner la transformée en ondelette au voisinage des points où  $f$  est régulière (i.e. où  $\epsilon_v$  est petit) et donc, en détectant les crêtes de la transformée, d'identifier les points où  $f$  est peu régulière.

#### Théorèmes de régularité

Les deux théorèmes suivants donnent les liens entre régularité du signal et amplitude de la transformée en ondelettes, d'abord sur un intervalle, puis en un point. On suppose dans tous les cas que les ondelettes considérées ont leurs  $n > 0$  premiers moments nuls.

**Théorème 6.2.3** (Régularité sur un intervalle). *Si  $f$  est uniformément Lipschitz  $\alpha \leq n$  sur  $[a, b]$ , alors il existe  $A > 0$  tel que*

$$\forall (u, s) \in [a, b] \times \mathbb{R}^+ \quad |\mathcal{W}f(u, s)| \leq As^{\alpha+1/2} \quad (6.21)$$

*Réciproquement, si  $f$  est bornée et (6.21) est vraie pour  $\alpha \notin \mathbb{N}$ ,  $\alpha < n$ , alors  $f$  est uniformément Lipschitz  $\alpha$  sur  $[a + \epsilon, b - \epsilon]$  pour tout  $\epsilon > 0$ .*

**Théorème 6.2.4** (Régularité ponctuelle). *Si  $f \in L^2(\mathbb{R})$  est Lipschitz  $\alpha \leq n$  en  $v$ , alors il existe  $A > 0$  telle que*

$$\forall (u, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad |\mathcal{W}f(u, s)| \leq As^{\alpha+1/2} \left( 1 + \left| \frac{u-v}{s} \right|^\alpha \right) \quad (6.22)$$

*Réciproquement, si  $\alpha \notin \mathbb{N}$  et  $\alpha < n$  et si il existe  $A$  et  $\alpha' < \alpha$  tels que*

$$\forall (u, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad |\mathcal{W}f(u, s)| \leq As^{\alpha+1/2} \left( 1 + \left| \frac{u-v}{s} \right|^{\alpha'} \right) \quad (6.23)$$

*alors  $f$  est Lipschitz  $\alpha$  en  $v$ .*

Ces deux théorèmes servent de base à l'étude des singularités d'un signal. Si l'ondelette possède un seul moment nul, les maxima de  $|\mathcal{W}f(u, s)|$  aux fines échelles (i.e. quand  $s$  tend vers 0) correspondent aux grandes valeurs de la dérivée première de  $f$ . Si l'ondelette a deux moments nuls, les crêtes de la transformée correspondent aux points de grande courbure, etc.

## 6.3 Bases d'ondelettes

Cette propriété de la transformée en ondelette est utile non seulement pour détecter les irrégularités d'un signal, mais aussi pour décomposer le signal en ses parties régulières et irrégulières. Cette décomposition se fait de manière itérative : on projette le signal sur des sous-ensembles de  $L^2(\mathbb{R})$  correspondant à des approximations régulières de plus en plus fines du signal. Ces sous-ensembles s'appellent les approximations multi-résolutions. A chaque étape, le complémentaire des approximations multi-résolutions possède une base composée d'ondelettes translatées et dilatées, sur laquelle on peut projeter la partie irrégulière du signal.

### 6.3.1 Approximations multi-résolutions

On va donc définir une famille d'ensembles  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  sur lesquels projeter le signal. Chaque  $V_j$  correspond à une approximation "à l'échelle  $2^{-j}$ ". On définit les approximations multi-résolutions comme suit.



**Définition 6.3.1.** Une approximation multi-résolutions est une famille  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  de fermés de  $L^2(\mathbb{R})$  telle que

1. Les  $V_j$  sont stables par translation d'un facteur  $2^j$  en temps, c'est-à-dire

$$\forall j, k \quad f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j$$

2. La suite des  $(V_j)$  est décroissante, c'est-à-dire

$$\forall j \quad V_{j+1} \subset V_j$$

En particulier, une approximation dans  $V_j$  contient toute l'information nécessaire pour calculer une approximation plus grossière dans  $V_{j+1}$ .

3. Une approximation  $V_j$  est deux fois moins "grossière" que la suivante, c'est-à-dire

$$\forall j \quad f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1}$$

$$4. \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$$

$$5. \quad \lim_{i \rightarrow -\infty} V_j = \overline{\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j} = L^2(\mathbb{R})$$

6. Il existe  $\theta$  telle que  $\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  soit une base de  $V_0$ .

Comme  $\theta$  est une base de Riesz, tout  $f \in V_0$  s'écrit

$$f(t) = \sum_{\mathbb{Z}} a[n] \theta(t - n), \quad \text{avec} \quad A \|f\|^2 \leq \sum_{\mathbb{Z}} a[n]^2 \leq B \|f\|^2 \quad (6.24)$$

La fonction  $\theta$  s'appelle la cellule unitaire.

**Exemple 6.3.2.** Les fonctions constantes par morceaux sur des intervalles de taille  $2^j$  sont une approximation multi-résolutions. Plus précisément, les

$$V_j = \{g \in L^2, \quad g(t) = \text{cte} \quad \forall t \in [n2^j, (n+1)2^j]\} \quad (6.25)$$

ont pour cellule unitaire

$$\theta = \mathbf{1}_{[0,1]} \quad (6.26)$$

**Exemple 6.3.3.** Le théorème de Shannon indique que les fonctions dont la TF est à support dans  $[-2^{-j}\pi, 2^{-j}\pi]$  ont pour cellule unitaire

$$\theta(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} \quad (6.27)$$

On note par ailleurs que si  $\theta$  est cellule unitaire, les  $\{2^{-j/2} \theta(2^{-j}t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  forment une base de Riesz de  $V_j$ . Cette base n'est toutefois pas nécessairement orthonormée, c'est pourquoi on introduit la fonction d'échelle.

### 6.3.2 Fonction d'échelle

Le théorème suivant est un résultat d'existence d'une fonction qui sert de base à la décomposition des signaux.

**Théorème 6.3.4.** *Il existe  $\varphi$  telle que*

$$\mathcal{F}\varphi(\omega) = \frac{\mathcal{F}\theta(\omega)}{\sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}\theta(\omega + 2k\pi)|^2}} \quad (6.28)$$

*La fonction  $\varphi$  s'appelle fonction d'échelle, et les  $\varphi_{j,n}$  définies par translation-dilatation comme suit*

$$\varphi_{j,n} = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \varphi\left(\frac{t - n}{2^j}\right) \quad (6.29)$$

*forment une base orthonormée de  $V_j$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ .*

Cette base orthonormée est utilisée pour calculer la projection d'un signal  $f$  sur les  $V_j$ . On a alors

$$P_{V_j} f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,n} \rangle \varphi_{j,n} \quad (6.30)$$

Les coordonnées de  $f$  dans la base des  $\varphi_{j,n}$  s'écrivent donc

$$\begin{aligned} a_j[n] &= \langle f, \varphi_{j,n} \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \varphi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) dt \\ &= f * \bar{\varphi}_j(2^j n) \end{aligned} \quad (6.31)$$

avec

$$\bar{\varphi}_j(t) = \sqrt{2^{-j}} \varphi(2^{-j}t) \quad \text{et donc} \quad \mathcal{F}\bar{\varphi}_j(\omega) = \sqrt{2^j} \mathcal{F}\varphi^* 2^j \omega$$

Remplacer  $f$  par ses coordonnées  $a_j[n]$  revient donc à effectuer un échantillonnage à intervalles de  $2^j$  d'un filtrage de  $f$  par un passe-bas. Cette procédure nécessite néanmoins de disposer d'une fonction d'échelle  $\varphi$ . Nous allons maintenant voir comment construire une telle fonction d'échelle, justement à partir de filtres.

### 6.3.3 Filtres miroirs conjugués

On peut construire une fonction d'échelle grâce à un filtre discret  $h[n]$ .

**Théorème 6.3.5.** *Soit  $h$  un signal discret dont la TFTD  $H(\omega)$  est  $2\pi$ -périodique,  $\mathcal{C}^1$  au voisinage de  $\omega = 0$ . Si  $H$  vérifie*

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 2 \quad (6.32)$$

et

$$H(0) = \sqrt{2} \quad (6.33)$$

et si

$$\inf_{\omega \in ]-\pi/2, \pi/2[} |H(\omega)| > 0 \quad (6.34)$$

alors il existe une fonction d'échelle  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  dont la transformée de Fourier s'écrit

$$\mathcal{F}\varphi(\omega) = \prod_{p=1}^{+\infty} \frac{H(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} \quad (6.35)$$

Réciproquement, pour toute fonction d'échelle  $\varphi$ , la TFTD  $H$  de

$$h[n] = \langle t \mapsto 2^{-1/2}\varphi(t/2), t \mapsto \varphi(t - n) \rangle \quad (6.36)$$

vérifie (6.32) et (6.33).

Comme on le verra, cette propriété permet de calculer les projections successives d'un signal sur les  $V_j$  en construisant des *bancs de filtres miroirs conjugués*, i.e. qui satisfont la propriété (6.32). Avant de donner des exemples de tels bancs de filtres, on s'intéresse aux espaces complémentaires des  $V_j$ .

### 6.3.4 Ondelettes orthogonales

Pour chaque  $V_j$ , on peut définir son complémentaire  $W_j$  dans l'espace moins grossier  $V_{j-1}$ , c'est-à-dire tel que

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j \quad \text{ce qui implique} \quad P_{V_{j-1}}f = P_{V_j}f + P_{W_j}f \quad (6.37)$$

Le théorème suivant indique comment construire une base de  $W_j$  à partir d'une fonction d'échelle et de son filtre miroir conjugué. Cette base est constitué d'ondelettes translatées et dilatées.

**Théorème 6.3.6.** *Soit  $\varphi$  une fonction d'échelle et  $h$  son filtre miroir conjugué. Soit  $\psi$  telle que*

$$\mathcal{F}\psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{F}g\left(\frac{\omega}{2}\right) \mathcal{F}\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (6.38)$$

avec

$$\mathcal{F}g(\omega) = e^{-i\omega} \mathcal{F}H^*(\omega + \pi) \quad (6.39)$$

On pose  $\psi_{j,n} = \sqrt{2^j} \psi\left(\frac{t-2^j n}{2^j}\right)$ . Alors, pour toute échelle  $2^j$ , la famille  $\{\psi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $W_j$ .

Il est important de noter que  $g$  se construit extrêmement facilement à partir de  $h$ , puisqu'on a

$$g[n] = (-1)^n h[1 - n] \quad (6.40)$$

### 6.3.5 Bancs de filtres

Etant donnée une approximation d'un signal à la résolution  $V_{j-1}$ , on dispose désormais d'une manière de décomposer sans perte le signal en le projetant sur  $V_j$  et  $W_j$ . On peut ensuite recommencer l'opération, en décomposant l'information de  $V_j$  sur  $V_{j+1}$  et  $W_{j+1}$ . A chaque étape, on peut extraire ou modifier l'information du signal projeté. Cette opération est inversible : on peut remonter au signal d'origine à l'aide d'une formule de reconstruction. Plus précisément, pour un signal  $f$  donné, notons

$$a_j[n] = \langle f, \varphi_{j,n} \rangle, \quad d_j[n] = \langle f, \psi_{j,n} \rangle \quad (6.41)$$

Par ailleurs, on note

$$\bar{x}[n] = x[-n], \quad \text{et} \quad \tilde{x}[n] = \begin{cases} x[p] & \text{si } n = 2p \\ 0 & \text{si } n = 2p + 1 \end{cases} \quad (6.42)$$

On a alors le théorème suivant.

**Théorème 6.3.7.** *Décomposition :*

$$a_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n - 2p] a_j[n] = a_j * \bar{h}[2p] \quad (6.43)$$

$$d_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n - 2p] a_j[n] = a_j * \bar{g}[2p] \quad (6.44)$$

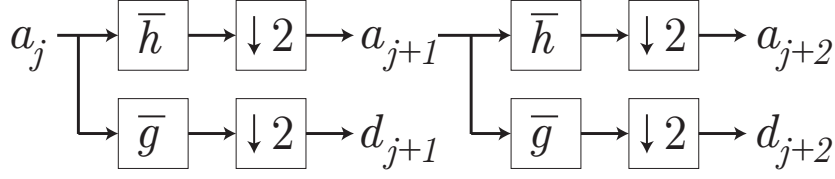


FIGURE 6.2 – Décomposition par banc de filtres

*Reconstruction :*

$$a_j[p] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[p-2n]a_{j+1}[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[p-2n]d_{j+1}[n] \quad (6.45)$$

$$= \check{a}_{j+1} * h[n] + \check{d}_{j+1} * g[n] \quad (6.46)$$

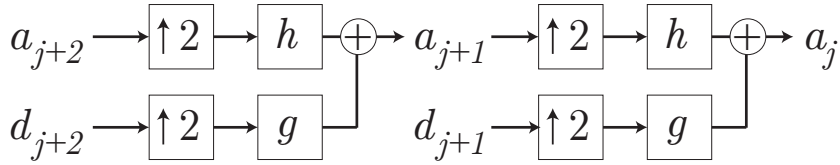


FIGURE 6.3 – Reconstruction par banc de filtres

Cette opération se résume par le schéma des Figures 6.2 et 6.3. Par ailleurs, on appelle représentation en ondelettes orthogonales l'ensemble des coefficients  $\{\{d_j\}_{L < j \leq J}, a_J\}$ . Il n'est en effet nécessaire de garder que les derniers coefficients  $a_j$ , qui contiennent toute l'information des approximations plus grossières. Il faut en revanche garder tous les coefficients  $d_j$ , qui contiennent les informations sur les parties irrégulières du signal.



# Chapitre 7

## Théorie de l'information

Un système de communication cherche à faire transiter une information entre une source et un utilisateur par le biais d'un canal de transmission. La source peut être de nature très variée, et consister en une suite de variables discrètes, comme une séquence de symboles binaires, une voix, ou encore un signal électromagnétique. Pour pouvoir transmettre le signal de la source, il est indispensable d'*encoder* l'information que contient le signal sous une forme exploitable par l'utilisateur. Pour un signal analogique, cela implique en particulier d'*échantillonner* et de *quantifier* le signal, c'est à dire de remplacer les valeurs échantillonnées du signal par des valeurs piochées dans un ensemble fini discret.

Il est également important que la représentation choisie soit compatible avec le canal de transmission, et surtout soit la plus concise possible sans pour autant altérer l'information transmise par la source. Le rôle de l'encodeur est précisément de transformer la sortie brute de la source en un signal compatible avec un canal de transmission, qui va faire transiter l'information entre la source et l'utilisateur. A la sortie du canal de transmission, un décodeur permet de restituer l'information fournie par la source.

La théorie de l'information, développée notamment par le mathématicien Claude Shannon (1916–2001) permet de fournir un cadre théorique à la notion d'information. Ce chapitre constitue une première introduction aux principaux aspects de cette théorie. Nous présentons dans un premier temps les fondamentaux de la théorie de l'information, avant de présenter quelques résultats sur la quantification des signaux continus.

## 7.1 Théorie de l'information

Dans tout ce qui suit, nous considérerons qu'un signal est une séquence de *symboles* prenant leurs valeurs dans un ensemble fini discret. Nous ferons l'hypothèse que la source du signal peut être modélisée par une variable aléatoire stationnaire  $X$ , à valeur dans un espace discret fini  $\{x_1, \dots, x_K\}$  contenant  $K$  symboles. Dans le cas d'un texte par exemple, le signal produit par la source consiste en une séquence de lettres et chaque symbole prend donc sa valeur dans l'ensemble discret  $\{a, b, c, \dots, z\}$  de cardinal  $K = 26$ . On notera que tous les symboles n'ont pas la même probabilité d'apparition : on trouvera ainsi beaucoup plus de  $a$  dans un texte en français que de  $z$ .

Soit donc  $X$  une variable aléatoire à valeur dans un espace  $\mathcal{S} := \{x_k\}_{1 \leq k \leq K}$  de symboles de cardinal fini  $K$ , représentant un signal élémentaire émis par une source. On suppose connue la loi de probabilité

$$p_k := P\{X = x_k\}.$$

La théorie de l'information de Shannon vise à proposer un moyen de quantifier l'information portée par la variable aléatoire  $X$ . Pour ce faire, la théorie se base sur deux principes :

1. La survenue d'un évènement apporte d'autant plus d'information que l'évènement se produit avec une faible probabilité. D'un point de vue mathématique, on en déduit la règle suivante : la quantité d'information  $h(x_k)$  apportée par l'évènement  $\{X = x_k\}$  est nécessairement une fonction décroissante de la probabilité  $p_k$  de survenue de l'évènement  $\{X = x_k\}$ .
2. L'information apportée par deux évènements indépendants doit être la somme des informations apportées par chacun des évènements. En termes mathématiques, si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, le gain d'information  $H(X, Y)$  apporté par l'observation conjointe de  $X$  et  $Y$  est

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y). \quad (7.1)$$

Par ailleurs, du fait de l'indépendance de  $X$  et  $Y$ , la probabilité jointe  $p(X, Y)$  est donnée par

$$p(X, Y) = p(X)p(Y). \quad (7.2)$$



Puisque l'information est une fonction de la probabilité de survenue de  $X$ , on a d'une part

$$H(X, Y) = H(p_{X,Y}) = H(p_X p_Y)$$

et d'autre part

$$H(X, Y) = H(p_X) + H(p_Y)$$

en utilisant les relations (7.1) et (7.2). L'information transforme donc un produit en une somme, ce qui est caractéristique des fonctions logarithmes. A partir des deux principes énoncés précédemment, on montre donc que la quantité d'information est nécessairement caractérisée par une fonction de la forme

$$H(X) := -\log_a p(X), \quad (7.3)$$

où  $\log_a$  désigne la fonction logarithmique de base  $a$ , avec  $a > 0$ . Le choix de la base  $a$  peut être entièrement arbitraire.

**Définition 7.1.1** (Entropie d'une variable aléatoire). *Considérons une source stationnaire émettant de façon séquentielle la valeur d'une variable aléatoire  $X$  de loi de probabilité  $p(X)$ . Alors, la quantité moyenne d'information  $\mathcal{H}(X)$  émise par la source est*

$$\mathcal{H}(X) := E[H(X)] = -\sum_{k=1}^K p(X = x_k) \log_a p(X = x_k). \quad (7.4)$$

*Cette quantité fondamentale définit l'entropie de la variable aléatoire  $X$ .*

**Remarque** On vérifie que

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} p \log_a p = 0,$$

de sorte qu'on considèrera que  $p(x) \log_a(x) = 0$  dès lors que  $p(x) = 0$ .

**Proposition 7.1.2** (Entropie maximale). *Soit  $X$  une variable aléatoire à valeur dans un espace  $\mathcal{S} := \{x_k\}_{1 \leq k \leq K}$  de symboles de cardinal fini  $K$  et de loi de probabilité*

$$p_k := P\{X = x_k\}.$$

*Alors, l'entropie de  $X$  est maximale lorsque  $\forall k \in \{1, \dots, K\}, p_k = \frac{1}{K}$ . Dans ce cas, l'entropie est égale à  $\ln K$ .*

*Démonstration.* Voir l'exercice 7.3.1. □

**Lien avec l'entropie physique** La notion d'entropie au sens de la déf. 7.1.1 est intimement liée à la notion d'entropie physique. L'entropie physique est une mesure du nombre de configurations microscopiques d'un système physique associées à un état macroscopique donné du système. On peut donc interpréter l'entropie physique comme notre degré de connaissance sur le micro-état du système correspondant à l'état macroscopique observé.

Le parallèle avec l'entropie physique nous permet de proposer une première interprétation de la notion d'entropie. Considérons ainsi un ensemble de  $N$  objets identiques et supposons qu'on cherche à répartir ces objets dans  $K$  sous-ensembles de cardinaux respectifs  $\{n_1, n_2, \dots, n_K\}$ . Essayons de dénombrer le nombre de manières possibles d'allouer les objets aux sous-ensembles. Il y a  $N$  possibilités pour choisir le 1er objet,  $N - 1$  possibilités pour le second objet, et ainsi de suite, ce qui donne au total  $N!$  possibilités. Par ailleurs, il y a exactement  $n_k!$  réarrangement possibles au sein de chaque sous-ensemble. Comme nous ne souhaitons pas distinguer entre les réarrangements au sein d'un même sous-ensemble, le nombre total de manières d'affecter les  $N$  objets aux  $K$ -sous-ensembles, appelé *multiplicité*, est

$$W = \frac{N!}{\prod_{k=1}^K n_k!}.$$

On peut alors définir la notion d'entropie comme étant le logarithme de la multiplicité, normalisé par le nombre d'objet :

$$H = \frac{1}{N} \ln W = \frac{1}{N} \ln N! - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^K \ln n_k!$$

Lorsqu'on fait tendre  $N$  vers  $+\infty$ , en utilisant la formule de Sterling  $\ln N! \simeq N \ln N - N$ , on trouve :

$$H = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_k \left( \frac{n_k}{N} \right) \ln \left( \frac{n_k}{N} \right) = - \sum_k p_k \ln p_k,$$

où  $p_k = \lim_{N \rightarrow \infty} (n_k/N)$  s'interprète comme étant la probabilité d'affecter un objet au sous-ensemble  $i$ . Dans le contexte de l'entropie physique, un arrangement spécifique d'objets dans les sous-ensemble est appelé un micro-état du système physique. La loi de distribution des micro-états, décrite par les quantités  $n_k/N$ , caractérise quant à elle l'état macroscopique du système.

### 7.1.1 Codage entropique

La définition 7.1.1 introduit l'entropie d'une source comme étant la quantité moyenne d'information émise par cette source. Nous nous intéressons dans

cette section aux liens entre l'entropie d'une source et la manière optimale d'encoder le signal émis par la source.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que le canal de transmission utilisé pour relier la source et l'utilisateur ne peut transmettre que deux types de symboles. Au niveau de l'encodeur, nous cherchons donc à coder en binaire, c'est à dire en n'utilisant que des 0 et des 1, la valeur de la variable aléatoire  $X$  retournée par la source. Commençons par préciser quelques définitions.

**Définition 7.1.3** (code). *Notons  $\{0, 1\}^*$  l'ensemble des séquences finies d'éléments de l'ensemble  $\{0, 1\}$ . Un code sur l'ensemble de symboles discret ou alphabet  $\mathcal{S}$  généré par la source est une application  $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \{0, 1\}^*$  qui associe à tout élément  $s_k$  de  $\mathcal{S}$  une séquence finie constituée de 0 et de 1. On appelle mot de code tout élément de  $\phi(\mathcal{S})$ .*

Pour construire un code binaire, une première possibilité est d'associer à chacune des symboles possibles  $x_k$  de l'alphabet un mot de taille fixe  $l_k = \log_2 K$ . Si on adopte cette approche, quel que soit le résultat de l'expérience, on obtient un code binaire où chaque symbole, c'est à dire chaque observation de la variable aléatoire  $X$ , sera représentée par un mot de taille  $R_X = \log_2 K$ . Supposons ainsi que notre variable aléatoire corresponde à une lettre dans l'ensemble  $\{a, b, c, d\}$ . Alors, on peut adopter le codage binaire suivant :

$$\{a : 00, b : 01, c : 10, d : 11\}.$$

Le code retourné pour chaque symbole est invariablement de taille 2 bits dans cet exemple.

Une manière plus élaborée de coder la variable aléatoire  $X$  est d'utiliser des mots de longueurs *variables*. L'intérêt de cette approche est qu'on peut espérer réduire la quantité de bits nécessaire pour représenter la variable aléatoire  $X$ , et donc *in fine* compresser le signal sans altérer sa qualité et limiter le nombre de bits à transmettre. Le nombre de bits moyen nécessaire pour coder chaque symbole devient en effet

$$R_X = \sum_{k=1}^K l_k p_k. \quad (7.5)$$

**Exemple 7.1.1.** Considérons l'alphabet constitué des cinq symboles  $\{x_k\}_{1 \leq k \leq 5}$  de probabilités d'occurrence

$$\{p_1 = 0.1, p_2 = 0.1, p_3 = 0.12, p_4 = 0.18, p_5 = 0.5\}$$

et codés par les mots

$$\{w_1 = 111, w_2 = 110, w_3 = 10, w_4 = 01, w_5 = 00\} \quad (7.6)$$

Le nombre de bits moyen nécessaire pour coder un symbole est

$$R_X = 3 \times 0.1 + 3 \times 0.1 + 2 \times 0.12 + 2 \times 0.18 + 2 \times 0.5 = 2.2$$

Par contraste, en utilisant un code de longueur fixe, on aurait nécessairement dû utiliser un mot de longueur 3 pour chaque symbole. L'utilisation de codes de longueur fixe permet donc de significativement limiter la quantité moyenne de bits à transmettre pour un signal donné. Dans l'exemple proposé, la quantité de bits à transmettre est ainsi réduite de plus de 25%. Notons que dans ce contexte, la compression se fait sans aucune perte d'information.

L'utilisation de mots de longueurs variables pose cependant un problème essentiel. Supposons en effet que notre variable aléatoire corresponde à une lettre dans l'ensemble  $\{a, b, c, d\}$ , et qu'elle soit codée en utilisant le codage binaire suivant :

$$\{a : 0, b : 1, c : 10, d : 11\}.$$

On peut immédiatement voir que le codage obtenu est vite ambigu. La séquence 0110 peut ainsi correspondre à *abba*, à *ada* ou encore à *abc* : l'utilisation de codes de longueur variable nécessite d'établir des règles qui permettent de lever toute ambiguïté relative à la séquence d'événements représentée.

**Définition 7.1.4** (code ambigu). *Un code (resp. codage) est dit non ambigu si deux symboles (resp. séquences de symboles) distincts sont codés par des mots distincts. Un code est dit à décodage unique si le codage associé est non ambigu.*

Parmi les codes non ambigu, les codes dit *de préfixe* jouent un rôle fondamental en pratique.

**Définition 7.1.5.** *Un codage préfixe est un type de codage pour lequel aucun mot ne peut être le préfixe d'un autre mot. On montre aisément que tout codage préfixe est non ambigu.*

Un codage préfixe de  $K$  mots peut être construit en utilisant un *arbre binaire* contenant  $K$  feuilles, chacune des feuilles correspondant à un des mots  $\{x_k\}_{k=1,\dots,K}$ . Rappelons qu'un arbre binaire est une structure de données hiérarchique, acyclique, constituée de noeuds ayant un unique parent et au plus deux descendants, et possédant une unique racine. Les noeuds terminaux

de l'arbre sont appelés *feuilles*. La *profondeur* d'un *noeud* de l'arbre est égale au nombre d'arêtes reliant ce noeud à la racine. La *profondeur* de l'arbre correspond à la profondeur maximale observée parmi les noeuds de l'arbre. Enfin, on dira qu'un arbre binaire de profondeur  $P$  est *complet* si le cardinal de l'ensemble des noeuds de profondeur  $P$  est  $2^P$ .

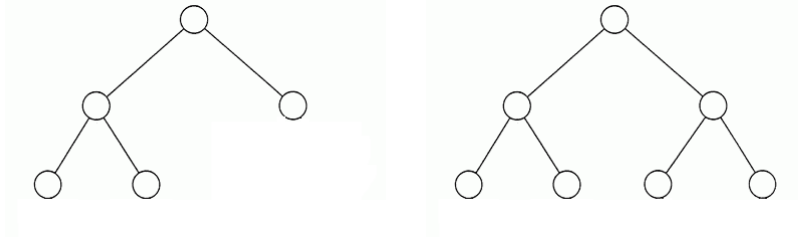


FIGURE 7.1 – Arbre binaire quelconque de profondeur  $P = 2$  (gauche). Arbre binaire complet de profondeur  $P = 2$  (droite)

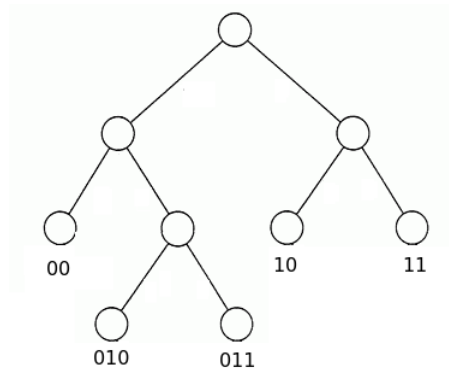


FIGURE 7.2 – Codage associé à un arbre binaire

**Proposition 7.1.6.** *Un ensemble fini de mots sur  $\{0, 1\}$  est un code préfixe si et seulement s'il est le code des feuilles d'un arbre binaire.*

*Démonstration.* Par l'absurde, supposons qu'un mot  $m$  soit préfixe d'un autre mot  $m'$  dans le code obtenu. Alors, il existe nécessairement un mot  $s$  tel que  $m'$  soit la concaténation de  $m$  et  $s$  ( $m' = ms$ ). Cela implique que  $m'$  est un descendant de  $m$  dans l'arbre binaire. Or, par construction,  $m$  est une feuille de l'arbre, et ne possède donc pas de descendants. On aboutit donc à une contradiction.  $\square$

**Lemme 7.1.1** (Lemme de Kraft). *Tout code préfixe vérifie l'inégalité*

$$\sum_{k=1}^K \frac{1}{2^{l_k}} \leq 1. \quad (7.7)$$

Inversement, s'il existe une suite  $\{l_1, \dots, l_K\}$  d'entiers positifs vérifiant l'inégalité (7.7), alors il existe un code préfixe de mots binaires  $\{m_1, \dots, m_K\}$  de longueurs respectives  $\{l_1, \dots, l_K\}$ .

*Démonstration.* Considérons un code préfixe de  $K$  mots de longueurs respectives  $l_1, \dots, l_K$  et notons  $m := \max(l_1, \dots, l_K)$ . Pour démontrer l'inégalité (7.7), on considère un arbre binaire complet dont toutes les feuilles sont à la profondeur  $m$ . On note  $n_k$  le noeud correspondant au mot  $w_k$ . Ce noeud est à la profondeur  $l_k$ . Le sous-arbre  $T_k$  de  $T$  obtenu en prenant  $n_k$  comme racine est de profondeur  $m - l_k$  et contient  $2^{m-l_k}$  feuilles (qui sont également des feuilles de  $T$ ). La condition de préfixe impose que les ensembles  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_K$  des feuilles des arbres  $T_1, T_2, \dots, T_K$  soient deux à deux disjoints. Par conséquent, on vérifie nécessairement :

$$\sum_{k=1}^K |\mathcal{F}_k| = \sum_{k=1}^K 2^{m-l_k} \leq 2^m, \quad (7.8)$$

ce qui prouve (7.7).

Réciproquement, soit  $\{l_k\}_{k=1, \dots, K}$  une séquence d'entiers vérifiant (7.7). Quitte à réindexer la séquence, on peut faire l'hypothèse que  $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_K$ . Construisons alors un arbre binaire complet  $T$  de profondeur  $l_K$ .

On note alors  $S_1$  l'ensemble des  $2^{l_K-l_1}$  premiers noeuds du niveau  $l_K$  de l'arbre,  $S_2$  les  $2^{l_K-l_1}$  suivants, et ainsi de suite. Comme  $\{l_k\}_{k=1, \dots, K}$  vérifie (7.7), les ensembles  $\{S_k, k = 1, \dots, K\}$  contiennent moins de  $2^m$  noeuds de l'arbre et peuvent donc tous être placés au niveau  $l_K$  de l'arbre. A chaque ensemble  $S_k$ , on peut associer un sous-arbre  $T_k$  de  $T$  en remontant au premier parent commun à tous les éléments de  $S_k$ .

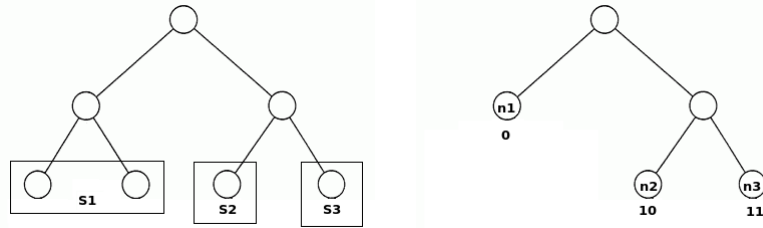


FIGURE 7.3 – Arbre binaire complet  $T$  associé à la séquence d'entiers  $\{l_1 = 1, l_2 = 1, l_3 = 2\}$ , et construction des sous-arbres et des mots de code

Notons  $n_k$  ce noeud, qui est la racine de l'arbre  $T_k$ .  $n_k$  est à la profondeur  $l_k$  de l'arbre  $T$  et peut donc être mis en correspondance avec un mot binaire

$w_k$  de longueur  $l_k$ . Par construction, tous les sous-arbres  $T_k$  sont disjoints deux à deux :  $\{w_k\}_{k=1,\dots,K}$  est un code préfixe où chaque mot de code  $w_k$  est de longueur  $l_k$ .  $\square$

Le théorème d'entropie de Shannon, énoncé ci-dessous, est un résultat fondamental en théorie de l'information.

**Théorème 7.1.1** (Théorème d'entropie de Shannon). *Soit  $X$  une variable aléatoire à valeur dans  $\mathcal{S} := \{x_k\}_{1 \leq k \leq K}$ . Pour tout  $k \in \{1, \dots, K\}$ , on suppose que l'évènement  $\{X = x_k\}$  se produit avec une probabilité  $p_k$ . Alors, la taille moyenne  $R_X$  du code utilisé pour un symbole en utilisant un code préfixe est bornée inférieurement par l'entropie  $\mathcal{H}(X)$  :*

$$R_X \geq \mathcal{H}(X). \quad (7.9)$$

Il existe de plus un code préfixe tel que

$$R_X \leq \mathcal{H}(X) + 1. \quad (7.10)$$

*Démonstration.* Pour déterminer le code de longueur minimale, on cherche à déterminer la séquence  $\{l_1, \dots, l_K\}$  d'entiers positifs qui minimise la quantité

$$R_X = \sum_{k=1}^K l_k p_k$$

sous la contrainte posée par l'inégalité

$$\sum_{k=1}^K \frac{1}{2^{l_k}} \leq 1,$$

qui, d'après le lemme de Kraft, assure l'obtention d'un code préfixe. Dans un premier temps, relaxons en partie les contraintes de ce problème d'optimisation en autorisant les quantités  $l_k$  à prendre n'importe quelles valeurs réelles positives. Le Lagrangien correspondant prend la forme

$$L(l_1, \dots, l_K, \lambda) = \sum_{k=1}^K l_k p_k + \lambda \sum_{k=1}^K \left( \frac{1}{2^{l_k}} - 1 \right).$$

Pour tout  $k$ , on a :

$$\frac{\partial L}{\partial l_k}(l_1, \dots, l_K, \lambda) = p_k - \lambda 2^{-l_k} \ln(2)$$

De manière évidente, le minimum est atteint lorsque

$$\sum_{k=1}^K \frac{1}{2^{l_k}} = 1.$$

Par conséquent, en sommant les égalités précédentes, on trouve :

$$\lambda = \frac{1}{\ln 2},$$

de sorte que

$$\forall k, l_k = \log_2 p_k.$$

A ce stade, nous avons résolu le problème d'optimisation précédent, mais pour des valeurs réelles des  $l_k$ . Afin de garantir que  $l_k$  soit entier pour tout  $k = 1, \dots, K$ , posons

$$l_k := \lceil \log_2 p_k \rceil,$$

où  $\lceil x \rceil$  correspond à la première valeur entière au-dessus de  $x$ . On a alors

$$\sum_{k=1}^K \frac{1}{2^{l_k}} \leq \sum_{k=1}^K \frac{1}{2^{\log_2 p_k}} \leq 1,$$

de sorte que l'inégalité de Kraft est vérifiée. D'après le lemme de Kraft, il existe bien un code préfixe correspondant aux longueurs de mots  $\{l_1, \dots, l_K\}$ . De plus, pour ce code, on vérifie que

$$R_X = \sum_{k=1}^K l_k p_k \leq \sum_{k=1}^K (\log_2 p_k + 1) p_k,$$

ce qui achève la preuve du théorème. □

### 7.1.2 Codage de Huffman

L'algorithme de Huffman permet en pratique la construction d'un codage optimal au sens du théorème d'entropie de Shannon. Considérons un alphabet composé de  $K$  symboles  $\{x_1, \dots, x_K\}$ , dont les probabilités d'occurrence  $\{p_1, \dots, p_K\}$  sont connues. On peut, quitte à réindexer les symboles, supposer que  $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_K$ . Au vu de l'expression (7.5), il est clair qu'on obtient un code de longueur minimale en affectant les mots les plus longs aux symboles dont la probabilité d'occurrence est la plus faible. L'algorithme de Huffman construit un arbre de code préfixe optimal en agglomérant progressivement les symboles de probabilité minimale en un unique symbole.



L'algorithme de Huffman commence la construction de l'arbre binaire à partir des feuilles  $\{x_1, \dots, x_K\}$ . A la 1ère étape, il aggrège les deux feuilles de probabilités minimales  $x_1$  et  $x_2$ , créant ainsi un nouvel alphabet  $\{x_{1,2}, \dots, x_K\}$  de  $K - 1$  symboles. Au niveau de l'arbre, l'algorithme crée un nouveau noeud qui sera un parent commun aux feuilles  $x_1$  et  $x_2$ . A l'étape suivante, l'algorithme réindexe les nouveaux noeuds  $\{x_{1,2}, x_3, \dots, x_K\}$  par probabilités d'occurrence croissantes, et répète l'opération d'aggrégation pour les deux noeuds de plus faibles probabilités. L'algorithme stoppe lorsque tous les noeuds ont été aggrégés. L'algorithme de Huffman est illustré dans l'exemple ci-dessous pour un alphabet relativement simple.

**Exemple 7.1.2.** Considérons l'alphabet composé des symboles  $x_1, x_2, \dots, x_5$ , dont les probabilités d'occurrence sont

$$\{p_1 = 0.1, p_2 = 0.1, p_3 = 0.12, p_4 = 0.18, p_5 = 0.5\}.$$

L'algorithme de Huffman commence par agglomérer les symboles  $x_1$  et  $x_2$  en un symbole  $x_{1,2}$  de probabilité 0.2, pour obtenir un nouvel alphabet  $x_{1,2}, x_3, x_4, x_5$  avec les probabilités d'occurrence

$$\{p_{1,2} = 0.2, p_3 = 0.12, p_4 = 0.18, p_5 = 0.5\}.$$

Au niveau de l'arbre binaire, on construit un noeud parent commun à  $x_1$  et  $x_2$ . A la seconde étape du processus de construction de l'arbre binaire, l'algorithme de Huffman agglomère les deux symboles de probabilités d'occurrence minimales, à savoir  $x_3$  et  $x_4$ , en un symbole  $x_{3,4}$  de probabilité  $p_{3,4} = 0.3$ . Dans les étapes suivantes, l'algorithme regroupe les noeuds  $x_{1,2}$  et  $x_{3,4}$  en un noeud unique  $x_{1,2,3,4}$  de probabilité 0.5, qui est finalement aggrégé avec  $x_5$ . La construction aboutit au codage préfixe optimal suivant :

$$\{x_1 : 111, x_2 : 110, x_3 : 101, x_4 : 100, x_5 : 0\}.$$

Avec ce codage, le nombre de bits moyens nécessaire à la transmission du signal est  $R_X = 2$ .

**Remarques** Le codage de Huffman permet d'encoder un signal de manière optimale. Néanmoins, le codage obtenu est assez peu robuste en pratique, puisqu'une erreur de transmission d'un seul bit peut significativement modifier le signal transmis. En ajoutant de la redondance au codage, il est possible de développer des codes plus robustes : on parle de *codes correcteurs d'erreurs*.

### 7.1.3 Entropie relative et information mutuelle

Dans ce paragraphe, nous supposons que la source du signal obéit à une loi de probabilité  $p$  inconnue. Supposons que nous ayons pu approcher  $p$  par une loi de probabilité  $q$  afin d'encoder le signal émis par la source. En encodant le signal de cette manière, la quantité d'information à fournir est :

$$\mathcal{H}(X) = - \sum_{k=1}^K p_k \ln q_k$$

La quantité d'information nécessaire pour encoder le signal à partir de la loi de probabilité approchée  $q$  par rapport à un encodage basé sur la loi de probabilité réelle  $p$  est donc :

$$KL(p||q) = - \sum_{k=1}^K p_k \ln q_k + \sum_{k=1}^K p_k \ln p_k = - \sum_{k=1}^K p_k \ln \left\{ \frac{q_k}{p_k} \right\}.$$

Cette quantité, appelée divergence de Kullback-Leibler des lois de probabilités  $p$  et  $q$  et notée  $KL(p||q)$  quantifie en pratique la différence entre les distributions de probabilités  $p$  et  $q$ .

**Proposition 7.1.7.** *Soient  $p$  et  $q$  deux lois de probabilités sur un même espace fini discret  $\mathcal{S}$ . Alors, la divergence de Kullback-Leibler de  $p$  et  $q$  vérifie :*

$$KL(p||q) \geq 0.$$

*Par ailleurs,  $KL(p||q) = 0$  si, et seulement si  $p = q$ .*

*Démonstration.* La preuve de la proposition se base sur l'inégalité de Jensen, que nous rappelons ici sans démonstration : En utilisant l'inégalité de Jensen et la convexité stricte de la fonction  $x \rightarrow -\ln(x)$ , on obtient

$$- \sum_{k=1}^K p_k \ln \left\{ \frac{q_k}{p_k} \right\} \geq - \ln \sum_{k=1}^K q_k = 0$$

Comme  $x \rightarrow -\ln(x)$  est strictement convexe, il y a égalité si et seulement si  $q_k = p_k, \forall k = 1, \dots, |\mathcal{S}|$ .  $\square$

La proposition permet d'affirmer que la distance de Kullback-Leibler de deux distributions  $p$  et  $q$  est définie positive. Cependant, il est important de noter la divergence de Kullback-Leibler n'est pas symétrique par rapport aux distributions de probabilité  $p$  et  $q$ , et ne constitue donc pas une distance au sens mathématique du terme. La divergence de Kullback-Leibler est très

souvent employée en apprentissage artificiel pour caractériser la différence entre deux distributions de probabilités, dans les algorithmes d'espérance-maximisation par exemple.

En utilisant la divergence de Kullback-Leibler, il est possible de caractériser la notion d'information mutuelle de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  en comparant la loi de distribution jointe  $p(X, Y)$  au produit  $p(X)p(Y)$  des distributions de  $X$  et  $Y$ . Nous savons en effet que si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires indépendantes, alors  $p(X, Y) = p(X)p(Y)$ .

**Définition 7.1.8** (Information mutuelle). *L'information mutuelle entre les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  correspond à la quantité*

$$I[X, Y] := - \sum_{i,j=1}^K p_k \ln \left\{ \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)P(y_j)} \right\}.$$

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, on vérifie bien que l'information mutuelle  $I[X, Y]$  est nulle.

## 7.2 Quantification

Dans la section précédente, nous avons considéré des signaux générés séquentiellement par une source définie sur un espace de symbole discrets. Cependant, en pratique, les signaux sur lesquels nous travaillons sont très souvent continus, et doivent donc être discrétisés avant de pouvoir être encodés. La discrétisation de ces signaux s'effectue au cours d'une opération appelée *quantification* du signal.

Dans ce qui suit, nous considérons une variable aléatoire  $X$  qui prend ses valeurs continûment dans un intervalle  $[a, b]$  spécifié. L'opération de quantification consiste à approcher la variable aléatoire  $X$  par une variable aléatoire  $\tilde{X}$  à valeurs dans un alphabet fini. L'erreur de quantification est alors définie par

$$\epsilon := E\{|X - \tilde{X}|^2\}. \quad (7.11)$$

Le principe d'un quantificateur scalaire  $Q$  est de découper l'intervalle  $[a, b]$  en une séquence de  $K$  intervalles  $[y_k, y_{k+1}]_{k=0, \dots, K-1}$  tels que  $k_0 = a$  et  $k_K = b$  et d'associer une valeur  $a_k$  à la variable aléatoire  $\tilde{X}$  si  $X \in [y_k, y_{k+1}]$  :

$$\tilde{X} := Q(X) = a_k \text{ si } X \in [y_k, y_{k+1}]. \quad (7.12)$$

**Définition 7.2.1.** *Un quantificateur scalaire pour la variable aléatoire  $X$  est dit à haute définition si, sur chaque intervalle  $[y_k, y_{k+1}]$ , la densité de probabilité  $p(x)$  de  $X$  peut être considérée comme constante :*

$$\forall x \in [y_k, y_{k+1}], p(x) = \frac{p_k}{\Delta_k},$$

où  $\Delta_k := y_{k+1} - y_k$ .

Considérons un quantificateur scalaire  $Q$  à haute définition. Alors, en repartant de la définition, l'erreur de quantification est

$$\epsilon = \sum_{k=0}^{K-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} |x - a_k| p(x) dx. \quad (7.13)$$

Avec l'hypothèse de haute définition, on a  $p(x) = \frac{p_k}{\Delta_k}$  pour tout  $x \in [y_k, y_{k+1}]$ , de sorte que

$$\epsilon = \sum_{k=0}^{K-1} \frac{p_k}{\Delta_k} \int_{y_k}^{y_{k+1}} |x - a_k| dx. \quad (7.14)$$

On a alors le résultat suivant, dont la démonstration est immédiate :

**Proposition 7.2.2.** *La discrétisation  $\{y_0, \dots, y_K\}$  étant fixée, l'erreur de quantification pour un quantificateur scalaire  $Q$  à haute définition est minimale lorsque, pour tout  $k = 0, \dots, K - 1$ ,*

$$a_k = \frac{y_k + y_{k+1}}{2}. \quad (7.15)$$

*Ce choix pour les valeurs  $\{a_k\}_{k=0, \dots, K-1}$  consiste simplement à prendre la moyenne des valeurs de l'intervalle  $[y_k, y_{k+1}]$ . L'erreur de quantification est alors :*

$$\epsilon = \frac{1}{12} \sum_{k=0}^{K-1} p_k \Delta_k^2. \quad (7.16)$$

**Quantification uniforme** La quantification uniforme est un cas particulier important de quantification souvent rencontré en pratique. Un quantificateur uniforme s'appuie sur un découpage en intervalles régulier de longueur  $\Delta$  de l'espace de valeurs du signal. Dans l'hypothèse d'un quantificateur uniforme de haute définition, l'erreur de quantification minimale est donc

$$\epsilon = \frac{1}{12} \Delta^2 \sum_{k=0}^{K-1} p_k = \frac{\Delta^2}{12}. \quad (7.17)$$

## 7.3 Exercices

**Exercice 7.3.1** (Entropie maximale). Soit  $X$  une variable aléatoire à valeur dans un espace  $\mathcal{S} := \{x_k\}_{1 \leq k \leq K}$  de symboles de cardinal fini  $K$  et de loi de probabilité

$$p_k := P\{X = x_k\}.$$

Montrer que l'entropie de  $X$  est maximale lorsque  $\forall k \in \{1, \dots, K\}, p_k = \frac{1}{K}$ , et que dans ce cas, l'entropie est égale à  $\ln K$ .

**Exercice 7.3.2** (Quantification optimale). Considérons une source continue  $X$  à valeurs dans un intervalle réel  $[a, b]$  quelconque et de loi de probabilité de densité  $p(x)$ . On définit l'entropie différentielle de la variable aléatoire  $X$  comme la quantité :

$$\mathcal{H}_d(X) := - \int_{\mathbb{R}} \log_2 xp(x) dx. \quad (7.18)$$

On cherche à déterminer le quantificateur scalaire à haute résolution optimal de  $X$ , c'est à dire le quantificateur scalaire à haute résolution d'entropie minimale. Soit  $\tilde{X}$  un quantificateur scalaire de  $X$  à haute résolution. On note  $\{y_0, \dots, y_K\}$  la discrétisation associée et on pose :

$$\tilde{X} = a_k \text{ si } X \in [y_{k-1}, y_k],$$

où  $a_k = \frac{1}{2}(y_{k-1} + y_k)$ .

1. Montrer que l'entropie de la variable aléatoire  $\tilde{X}$  est

$$\mathcal{H}(\tilde{X}) = \mathcal{H}_d(X) - \sum_{k=1}^K p_k \log_2 \Delta_k, \quad (7.19)$$

où  $\Delta_k := y_k - y_{k-1}$ .

2. En utilisant l'inégalité de Jensen, montrer que l'entropie de tout quantificateur scalaire à haute résolution vérifie :

$$\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_d - \frac{1}{2} \log_2(12\epsilon),$$

où  $\epsilon$  désigne l'erreur de quantification. Dans quel cas a-t-on une égalité ?

*Inégalité de Jensen : Soit  $f$  une fonction convexe sur  $\mathbb{R}$ , et  $X$  une variable aléatoire sur  $\mathbb{R}$ . Alors, on vérifie :*

$$f(E\{X\}) \leq E\{f(X)\}.$$

**Exercice 7.3.3** (Code ternaire). Soit  $X$  une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans l'espace discret  $\mathcal{S} := \{x_k\}_{k=1,\dots,7}$ , avec des probabilités respectives  $\{0.49, 0.26, 0.12, 0.04, 0.04, 0.03, 0.02\}$ .

1. Quelle est l'entropie de la variable aléatoire  $X$  ? Construire un code binaire pour  $X$  à l'aide de l'algorithme de Huffman. Quelle est la longueur moyenne des mots binaires ?
2. Adapter l'algorithme de Huffman pour proposer un code ternaire pour  $X$  basé sur les valeurs  $\{0, 1, 2\}$ .

**Exercice 7.3.4** (Code de Huffman). Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans l'espace discret  $\mathcal{S} := \{x_k\}_{k=1,\dots,K}$ ,  $x_1$  le symbole de plus forte probabilité de  $X$ , tel que  $p_1 > p_k$  pour tout  $k = 2, \dots, K$ , et  $l_1$  la longueur du mot binaire associé dans un code de Huffman.

1. Montrer que si  $p_1 > 2/5$ , alors  $l_1 = 1$ .
2. Montrer que si  $p_1 < 1/3$ , alors  $l_1 \geq 2$ .

**Exercice 7.3.5** (Quantification). Soit  $X$  une variable aléatoire continue de densité de probabilité  $p(x)$ . Soit  $Q$  un quantificateur dont les boîtes sont  $]y_{k-1}, y_k]\}_{1 \leq k \leq K}$ .

1. Montrer que l'erreur de quantification est minimale si et seulement si

$$Q(x) := \frac{\int_{y_{k-1}} y^k x p(x) dx}{\int_{y_{k-1}} y^k p(x) dx}$$

pour  $x \in ]y_{k-1}, y_k]$ .

Supposons que  $p(x)$  soit une Gaussienne centrée en 0 et de variance  $\sigma^2$ . Pour un quantificateur à 1 bit  $Q$  dont les boîtes sont  $] -\infty, 0]$  et  $[0, +\infty[$ , quelles sont les valeurs de  $Q(x)$  sur chacune des boîtes qui minimisent l'erreur de quantification ?

# Bibliographie

- [1] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle - Théorie et Applications*. Masson, 1983.
- [2] B. Figliuzzi. *Rappels Mathématiques pour le traitement du signal*. Ecole des Mines de Paris, 2020.
- [3] C. Gasquet and P. Witomski. *Analyse de Fourier et Applications*. Masson, 1990.
- [4] F. Maisonneuve. *Mathématiques 2 - Calcul intégral*. Ecole des Mines de Paris, 2012.
- [5] S. Mallat. *Une exploration des signaux en ondelettes*. Les éditions de l'Ecole Polytechnique, 2000.
- [6] D. G. Manolakis, V. K. Ingle, and S. M. Kogon. *Statistical and adaptive signal processing*. Artech House, Boston, 2005.
- [7] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann, Paris, 1966.
- [8] E. M. Stein and G. Weiss. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton University Press, 1971.