

10.4 Module de Young apparent d'un cylindre encastré en traction/compression

10.4.1 Position du problème

On considère une barre cylindrique d'axe (O, \underline{e}_3) , de longueur ℓ et de section S de forme a priori quelconque, par exemple carrée ou circulaire etc. La barre est soumise à des déplacements imposés à ses extrémités :

- $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ pour les points de la section $x_3 = 0$;
- $u_1 = u_2 = 0, u_3 = \delta$ pour les points de la section $x_3 = \ell$.
- le vecteur contrainte $\underline{t} = \underline{t}^d = 0$ sur toute la surface latérale notée S_L de la barre.

Ces conditions aux limites correspondent à un encastrement complet des extrémités de la barre. Le déplacement imposé δ est positif en traction et négatif pour un essai de compression. En compression, ces conditions aux limites sont réalisées en présence de frottement entre les plateaux et les sections de la barre en contact, frottement tel que le glissement ne soit pas possible. En traction, les extrémités peuvent être collées ou vissées aux plateaux de la machine. Ces conditions aux limites se distinguent de celles de la traction et de la compression simples étudiées à la page 202, conditions qui autorisent une contraction/expansion latérale des extrémités exigée par l'état de traction/compression simple.

L'essai considéré ne correspond donc pas à l'essai de traction/compression simple de la figure 9.4. Un état de contrainte/déformation hétérogène est attendu en général puisque les contraction/expansion latérales sont libres le long de la barre mais empêchées aux extrémités, comme sur la figure 9.5 illustrant la forme de diabolo prise par la barre en traction et la mise en tonneau en compression, ces déformées étant exagérées pour l'illustration, puisqu'on s'intéresse ici au cas des transformations infinitésimales.

La barre est constituée d'un matériau isotrope au comportement élastique linéarisé, caractérisé par son module de Young E et son coefficient de Poisson ν ou, de manière équivalente, par les constantes de Lamé, λ et μ .

Soit F la force nécessaire à la prescription du déplacement δ , c'est la résultante des forces sur la section $x_3 = \ell$. On appelle module de Young apparent la quantité E_{app} définie par :

$$\frac{F}{S} = E_{app} \frac{\delta}{\ell} \quad (10.27)$$

où S est la surface de la chaque section transversale du cylindre. Le module apparent ne coïncide avec le module de Young du matériau que dans le cas où l'état des contraintes et des déformations est celui correspondant à une traction/compression simple. Sinon, ce module apparent résulte à la fois des propriétés du matériau et des caractéristiques géométriques de la barre.

Dans ces conditions, la formule de Clapeyron (10.26) conduit à l'expression :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} F \delta = \frac{1}{2} E_{app} \frac{S}{\ell} \delta^2 \quad (10.28)$$

Il n'existe pas de solution analytique explicite à ce problème. L'objectif est ici d'obtenir des encadrements de la solution grâce aux méthodes énergétiques développées dans ce chapitre. Les encadrements obtenus ci-dessous sont analytiques mais la solution peut également être approchée aussi près que l'on veut grâce à des méthodes numériques basées sur les mêmes théorèmes de l'énergie, telles que la méthode des éléments finis correspondant à des champs-tests sur des espaces de dimensions aussi grandes que nécessaire.

10.4.2 Un premier encadrement du module apparent

On cherche d'abord un encadrement par des champs homogènes. Le champ de déplacements

$$u_1^* = 0, \quad u_2^* = 0, \quad u_3^* = \frac{\delta}{\ell} x_3 \quad (10.29)$$

est cinématiquement admissible pour le problème posé à la section 10.4.1. Il conduit au champ de déformation homogène d'extension simple :

$$\underline{\varepsilon}^* = \frac{\delta}{\ell} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (10.30)$$

Un majorant est obtenu en appliquant le théorème de l'énergie potentielle (10.23) au champ $\underline{u}^* \in \mathcal{CA}$:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\varepsilon} : \underline{C} : \underline{\varepsilon} dV \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}^* : \underline{C} : \underline{\varepsilon}^* dV$$

Par la formule de Clapeyron (10.26), on obtient :

$$\frac{1}{2} F \delta \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}^* : \underline{C} : \underline{\varepsilon}^* dV \quad (10.31)$$

On calcule :

$$\underline{\varepsilon}^* = \frac{\delta}{\ell} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \implies \underline{C} : \underline{\varepsilon}^* = \lambda \frac{\delta}{\ell} \underline{1} + 2\mu \frac{\delta}{\ell} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \implies \underline{\varepsilon}^* : \underline{C} : \underline{\varepsilon}^* = \left(\frac{\delta}{\ell} \right)^2 (\lambda + 2\mu) \quad (10.32)$$

Le champ-test \underline{u}^* n'est en général pas solution du problème considéré car il engendre des contraintes σ_{11} et σ_{22} non nulles sur S_L . En introduisant le module apparent E_{app} dans l'inégalité (10.31),

$$E_{app} \frac{S}{\ell} \delta^2 \leq (\lambda + 2\mu) \frac{\delta^2}{\ell^2} \times S \ell$$

un majorant est obtenu : $E_{app} \leq \lambda + 2\mu$.

Le champ de contraintes de traction simple

$$\underline{\sigma}^\dagger = \sigma^\dagger \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (10.33)$$

est statiquement admissible pour le problème posé à la section 10.4.1. Il n'est en général pas solution du problème car le déplacement associé à la déformation homogène de traction n'est pas cinématiquement admissible. Un minorant est obtenu grâce au théorème de l'énergie complémentaire (10.24) appliqué au champ statiquement admissible, $\underline{\sigma}^\dagger$ proposé :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{S} : \underline{\sigma} dV - \int_{\partial\Omega_u} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d dS &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma}^\dagger : \underline{S} : \underline{\sigma}^\dagger dV - \int_{\partial\Omega_u} (\underline{\sigma}^\dagger \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d dS \\ \frac{1}{2} F \delta - F \delta &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma}^\dagger : \underline{S} : \underline{\sigma}^\dagger dV - \sigma^\dagger S \delta \end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned} \underline{S} : \underline{\sigma}^\dagger &= \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma}^\dagger - \frac{\nu}{E} (\text{trace } \underline{\sigma}^\dagger) \underline{1} = \frac{\sigma^\dagger}{E} (\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 - \nu (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2)) \\ \underline{\sigma}^\dagger : \underline{S} : \underline{\sigma}^\dagger &= \frac{\sigma^{\dagger 2}}{E} \end{aligned}$$

L'inégalité devient alors

$$\frac{1}{2} F \delta \geq -\frac{1}{2} \frac{\sigma^{\dagger 2}}{E} S \ell + \sigma^\dagger S \delta$$

En cherchant le maximum du minorant, on trouve $\sigma^\dagger = E\delta/\ell$ et finalement

$$\frac{1}{2} E_{app} \frac{\delta}{\ell} \delta^2 \geq -\frac{1}{2} E \frac{\delta^2}{\ell} S + E \frac{\delta^2}{\ell} S \implies E_{app} \geq E$$

On obtient donc l'encadrement

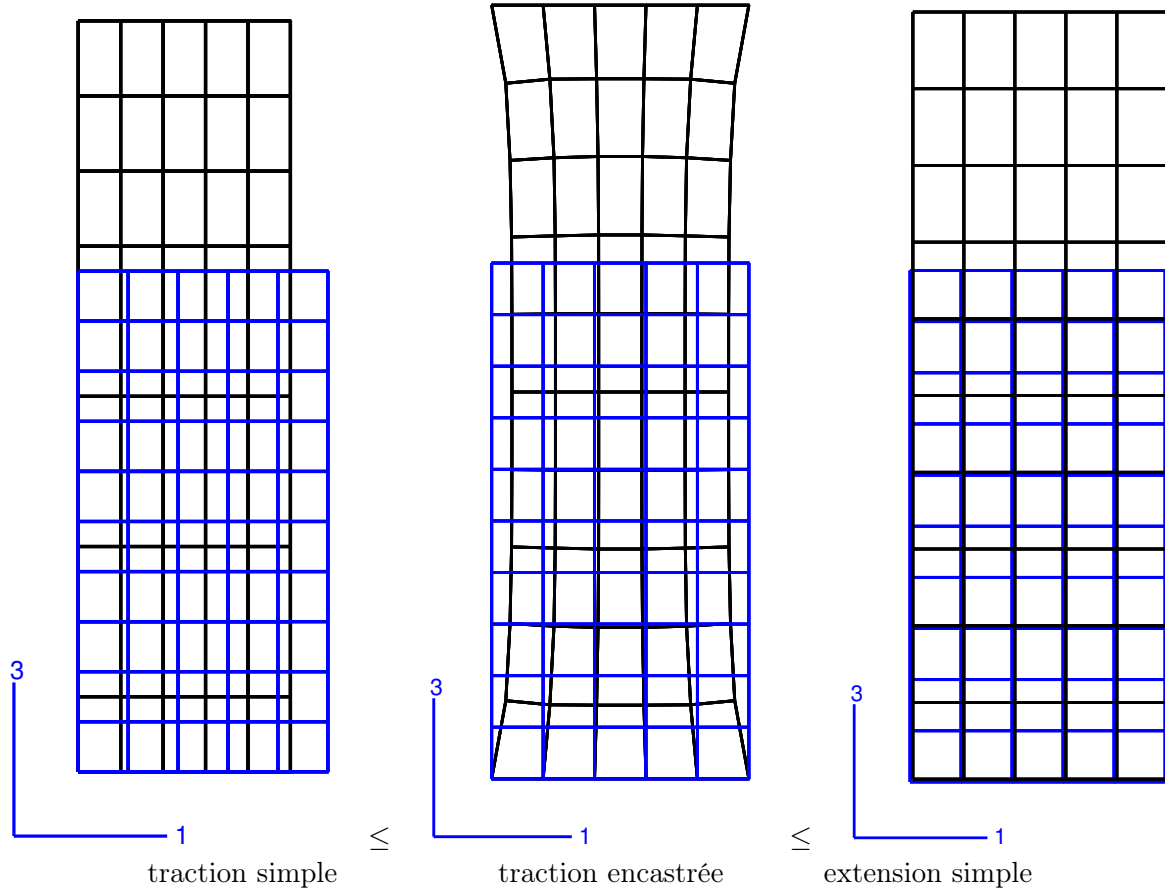


FIGURE 10.1 – Illustration de l'encadrement du module de Young apparent dans le cas de la traction (configuration de référence en rouge, déplacements multiplié par un facteur 100).

$$E \leq E_{app} \leq E \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (10.34)$$

Le majorant $\lambda + 2\mu$ est le module associé à l'extension simple, il est plus grand que le module de Young. A noter que les deux bornes coïncident lorsque le coefficient de Poisson est nul. C'est un cas exceptionnel de comportement de matériau pour lequel l'essai de traction simple et l'essai d'extension simple sont identiques. La déformation axiale ne s'accompagne d'aucune déformation transversale. La solution du problème est alors homogène. Dans les autres cas, l'encadrement est strict. Lorsque ν tend vers 0.5, la borne supérieure tend vers l'infini. Elle est donc de peu d'utilité pour majorer le module apparent d'un matériau quasi-incompressible.

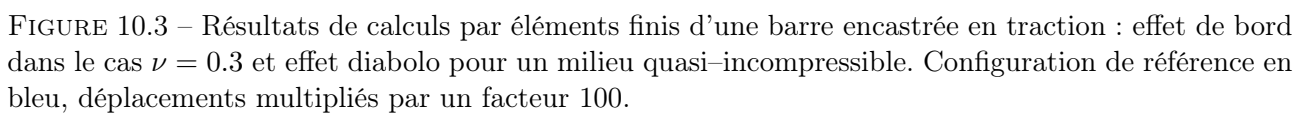
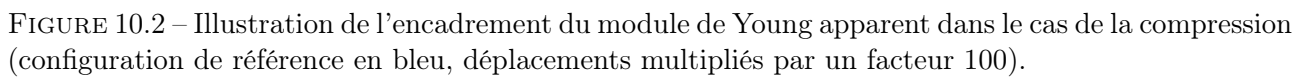
Cet encadrement est illustré sur les figures 10.2 et ???. Les figures 10.4 et ??? montrent l'influence du coefficient de Poisson sur la déformation d'une barre encastree en traction et compression, les résultats étant obtenus grâce à des calculs par éléments finis.

10.4.3 Améliorations de la borne supérieure

Il est possible de proposer un encadrement plus resserré en considérant des fonctions-tests conduisant à des déformations et contraintes hétérogènes⁸.

Le champ cinématiquement admissible (10.29) est enrichi en introduisant des déplacements

8. Les améliorations de cette partie sont dues aux contributions de Michel Amestoy et Jean-Jacques Marigo. La présente rédaction a bénéficié de la compilation enrichie réalisée par Patrick Ballard (Ballard, 2015).



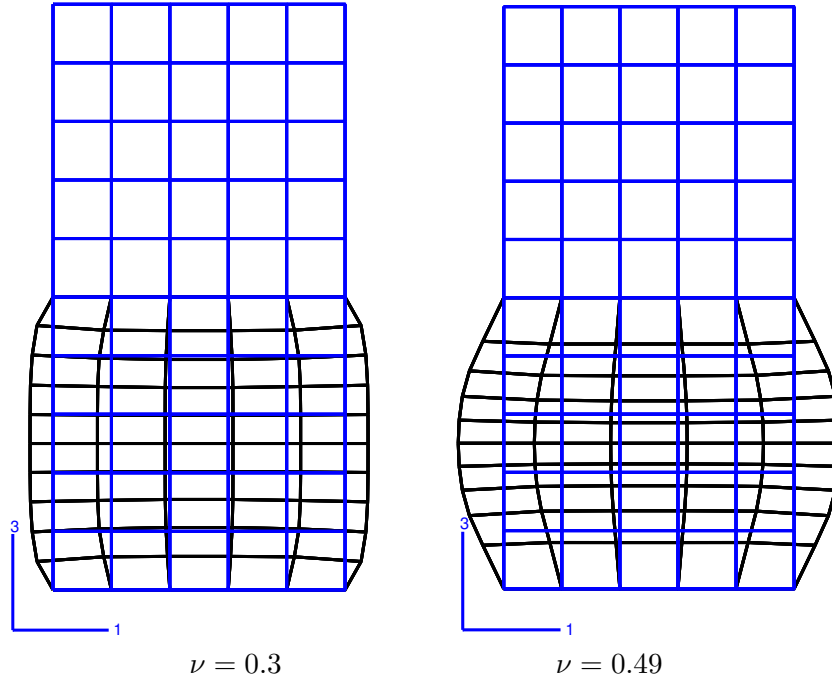


FIGURE 10.4 – Résultats de calculs par éléments finis d'une barre encastrée en compression : effet de bord dans le cas $\nu = 0.3$ et effet tonneau pour un milieu quasi-incompressible. Configuration de référence en bleu, déplacements multipliés par un facteur 100.

transverses dépendant de la coordonnée axiale :

$$u_1^* = -\nu \frac{\delta}{\ell} f\left(\frac{x_3}{\ell}\right) x_1, \quad u_2^* = -\nu \frac{\delta}{\ell} f\left(\frac{x_3}{\ell}\right) x_2, \quad u_3^* = \frac{\delta}{\ell} x_3 \quad (10.35)$$

Le champ précédent est cinématiquement admissible à condition que la fonction f appartienne à l'espace vectoriel des fonctions telles que $f(0) = f(1) = 0$. Les fonctions sont prises de classe C^2 . Le champ des déformations associées est :

$$[\xi^*] = \frac{\delta}{\ell} \begin{bmatrix} -\nu f & 0 & -\frac{\nu}{2\ell} f'\left(\frac{x_3}{\ell}\right) x_1 \\ 0 & -\nu f & -\frac{\nu}{2\ell} f'\left(\frac{x_3}{\ell}\right) x_2 \\ -\frac{\nu}{2\ell} f'\left(\frac{x_3}{\ell}\right) x_1 & -\frac{\nu}{2\ell} f'\left(\frac{x_3}{\ell}\right) x_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.36)$$

On calcule le champ de contraintes associé par la loi de comportement :

$$[\mathbf{C} : \xi^*] = \frac{\delta}{\ell} \begin{bmatrix} \lambda - 2(\lambda + \mu)\nu f & 0 & -\mu\nu f' \frac{x_1}{\ell} \\ 0 & \lambda - 2(\lambda + \mu)\nu f & -\mu\nu f' \frac{x_2}{\ell} \\ -\mu\nu f' \frac{x_1}{\ell} & -\mu\nu f' \frac{x_2}{\ell} & \lambda + 2\mu - 2\lambda\nu f \end{bmatrix} \quad (10.37)$$

Ce champ n'est pas solution du problème. En effet, le cisaillement σ_{31} doit s'annuler sur la génératrice normale à l'axe 1, ce qui implique $f'(x_3/\ell) = 0 \implies f = Cste = 0$, ce qui nous ramène au champ cinématiquement admissible de la section précédente. Ensuite,

$$\xi^* : \mathbf{C} : \xi^* = \left(\frac{\delta}{\ell}\right)^2 \left(4(\lambda + \mu)\nu^2 f^2 - 4\lambda\nu f + \lambda + 2\mu + \mu\nu^2 \frac{f'^2}{\ell^2} (x_1^2 + x_2^2)\right) \quad (10.38)$$

Un majorant du module apparent se déduit de (10.31) et du changement de variable $u = x_3/\ell$:

$$E_{app} \leq \int_0^1 \left(4(\lambda + \mu)\nu^2 f^2(u) - 4\lambda\nu f(u) + \lambda + 2\mu + \frac{\mu\nu^2}{6e^2} f'^2(u) \right) du \quad (10.39)$$

où les calculs ont été faits pour une section carrée de côté a , sans perte de généralité, et où $e = \ell/a$ est l'éclatement de la barre. On peut alors essayer d'optimiser le choix de la fonction f pour obtenir le plus petit majorant dans cette classe de champs cinématiquement admissible et déterminer le

$$\min_{f \in C^2, f(0)=f(1)=0} J(f) \quad \text{avec} \quad J(f) = \int_0^1 L(f, f')(u) du, \quad (10.40)$$

$$\text{et} \quad L(f, f')(u) = af'^2(u) + bf^2(u) - 2cf(u) + d \quad (10.41)$$

avec $a = \frac{\mu\nu^2}{6e^2} \geq 0$, $b = 4(\lambda + \mu)\nu^2 \geq 0$, $c = 2\lambda\nu$, $d = \lambda + 2\mu$. A noter que $b = c$ car $2\nu = \lambda/(\lambda + \mu)$.

Ce problème de calcul des variations peut être résolu grâce aux méthodes mathématiques adaptées (Maisonneuve, 2013a). La stricte convexité de la fonction $J(f)$ résulte de la stricte convexité du potentiel d'élasticité. L'ensemble des fonctions f vérifiant les conditions de bord est convexe, ce qui assure l'existence du minimum recherché. Une caractérisation de ce minimum est donnée par les équations d'Euler–Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial f}(u) - \frac{d}{du} \frac{\partial L}{\partial f'}(u) = 0 \implies af'' - bf + c = 0 \quad (10.42)$$

d'après (Maisonneuve, 2013a) (p. 36). La solution optimale est de la forme :

$$f(u) = f^*(u) := \alpha \cosh(\omega u) + \beta \sinh(\omega u) + 1, \quad \text{avec} \quad \omega = 2e\sqrt{\frac{6}{1-2\nu}} \quad (10.43)$$

Les conditions aux limites

$$f^*(0) = 0 \implies \alpha = -1 \quad \text{et} \quad f^*(1) = 0 \implies \beta = \frac{\cosh \omega - 1}{\sinh \omega} = \tanh \frac{\omega}{2}$$

déterminent f^* de manière unique :

$$f(u) = 1 - \cosh(\omega u) + \tanh\left(\frac{\omega}{2}\right) \sinh(\omega u) \quad (10.44)$$

Il reste à calculer la valeur du minimum $J(f^*)$. Pour cela on utilise une autre caractérisation du minimum (10.41) :

$$dJ_f(\varphi) := \int_0^1 \frac{\partial L}{\partial f}(u)\varphi(u) + \frac{\partial L}{\partial f'}(u)\varphi'(u) du = 0, \quad \forall \varphi, \varphi(0) = \varphi(1) = 0$$

d'après (Maisonneuve, 2013a) (p. 33). Appliquée à $\varphi = f^*$ elle-même, cette caractérisation prouve que

$$\int_0^1 af^{*2}(u) + bf^{*2}(u) - bf^*(u) du = 0 \implies J(f^*) = -b \int_0^1 f(u) du + d$$

Finalement, $J(f^*) = -2\nu\lambda(1 - \frac{2}{\omega} \tanh \frac{\omega}{2}) + \lambda + 2\mu = E + \frac{4\nu\lambda}{\omega} \tanh \frac{\omega}{2}$ et le majorant suivant

$$E \leq E_{app} \leq E \left(1 + \frac{2\nu^2}{(1+\nu)\sqrt{1-2\nu}} \frac{\tanh \frac{e\sqrt{6}}{1-2\nu}}{e\sqrt{6}} \right) \quad (10.45)$$

améliore l'encadrement (10.34). Ce nouvel encadrement a plusieurs mérites. Il fournit la solution exacte pour $\nu = 0$ mais aussi pour $e \rightarrow +\infty$. Lorsque l'élancement est infini, l'effet de bord induit par les conditions aux limites du paragraphe 10.4.1 s'estompe et la solution de traction simple est valide au sens de Saint-Venant. Lorsque l'élancement tend vers 0, on retrouve le majorant (10.34), et la solution est celle de l'extension simple. Par contre, le majorant perd son intérêt dans le cas de matériaux quasi-incompressibles car il tend vers l'infini lorsque $\nu \rightarrow 0.5$. Cela est dû au fait que la variation de volume $\text{trace } \underline{\varepsilon}^* = 1 - 2\nu f$ ne peut s'annuler que si $f = 1$, qui conduit à un champ non cinématiquement admissible. Les fonctions-tests peuvent être enrichies afin de remédier à ce défaut de l'encadrement.

Pour cela, on considère des champs cinématiquement admissibles faisant intervenir deux fonctions-tests $f(u)$ et $g(u)$ de la forme :

$$u_1^* = -\nu \delta f\left(\frac{x_3}{\ell}\right) \frac{x_1}{\ell}, \quad u_2^* = -\nu \delta f\left(\frac{x_3}{\ell}\right) \frac{x_2}{\ell}, \quad u_3^* = \delta g\left(\frac{x_3}{\ell}\right) \quad (10.46)$$

avec les conditions $f(0) = f(1) = 0, g(0) = 0, g(1) = 1$ pour que $\underline{u}^* \in \mathcal{CA}$. Les fonctions f et g sont prises de classe C^2 . Le champ des déformations associées est :

$$[\underline{\varepsilon}^*] = \frac{\delta}{\ell} \begin{bmatrix} -\nu f & 0 & -\frac{\nu}{2\ell} f' x_1 \\ 0 & -\nu f & -\frac{\nu}{2\ell} f' x_2 \\ -\frac{\nu}{2\ell} f' x_1 & -\frac{\nu}{2\ell} f' x_2 & g' \end{bmatrix} \quad (10.47)$$

La méthodologie appliquée précédemment conduit alors au majorant :

$$E_{app} \leq \int_0^1 (a f'^2(u) + b f^2(u) - 2c f(u) g'(u) + d g'^2(u)) du \quad (10.48)$$

avec les mêmes expressions des constantes a, b, c et d que pour le problème (10.41). On cherche le plus petit des majorants en optimisant par rapport aux deux fonctions f et g :

$$\min_{f, g \in C^2} J(f, g) \quad \text{avec} \quad J(f, g) = \int_0^1 L(f, f', g')(u) du, \quad (10.49)$$

$$\text{et} \quad L(f, f', g')(u) = a f'^2(u) + b f^2(u) - 2c f(u) g'(u) + d g'^2(u) du \quad (10.50)$$

avec les conditions $f(0) = f(1) = 0, g(0) = 0, g(1) = 1$. La généralisation aux problèmes dits à intégrale multiple des équations d'Euler-Lagrange donne :

$$\frac{\partial L}{\partial f}(u) - \frac{d}{du} \frac{\partial L}{\partial f'}(u) = 0 \implies a f'' - b f + c g' = 0 \quad (10.51)$$

$$\frac{\partial L}{\partial g}(u) - \frac{d}{du} \frac{\partial L}{\partial g'}(u) = 0 \implies c f' - d g'' = 0 \quad (10.52)$$

La seconde équation fournit $g' = c f / d + C_1$ et la constante d'intégration C_1 est déterminée en intégrant g' sur $[0 : 1]$ en tenant compte des deux conditions aux limites :

$$g' = 1 + 4\nu^2(f - \bar{f}) \quad \text{avec} \quad \bar{f} = \int_0^1 f(u) du$$

Quant à f , on trouve la forme :

$$f(u) = \alpha \cosh(\omega u) + \beta \sinh(\omega u) + \gamma \quad \text{avec} \quad \omega = 2e \sqrt{\frac{6(1+\nu)}{1-\nu}} \quad (10.53)$$

Les conditions aux limites portant sur f fournissent : $\beta = -\alpha \tanh \frac{\omega}{2}$ et $\gamma = -\alpha$. Une condition supplémentaire est obtenue en évaluant (10.51) en $u = 0$:

$$af''(0) + cg'(0) = 0 \implies \alpha a \omega^2 + c(1 - 4\nu^2 \bar{f}) = 0$$

La moyenne de f est évaluée à partir de (10.53) : $\bar{f} = \alpha(\frac{2}{\omega} \tanh \frac{\omega}{2} - 1)$. Finalement, on obtient la fonction optimale :

$$\alpha = -(1 - \frac{4\nu^2}{1 - \nu} \frac{\tanh(\omega/2)}{\omega}) \quad \text{et} \quad f^*(u) := -\alpha(1 - \frac{\cosh(\omega(u - 1/2))}{\cosh(\omega/2)})$$

Il reste à calculer la valeur de $J(f^*, g^*)$. Pour simplifier ce calcul, on fait appel à la seconde caractérisation du minimum, à savoir :

$$\frac{\partial J}{\partial f}(\varphi) := \int_0^1 \frac{\partial L}{\partial f}(u) \varphi(u) + \frac{\partial L}{\partial f'}(u) \varphi'(u) du = 0, \quad \forall \varphi, \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \quad (10.54)$$

$$\frac{\partial J}{\partial g}(\psi) := \int_0^1 \frac{\partial L}{\partial g}(u) \psi(u) + \frac{\partial L}{\partial g'}(u) \psi'(u) du = 0, \quad \forall \psi, \psi(0) = \psi(1) = 0 \quad (10.55)$$

En prenant $\varphi = f^*$ dans la première condition, on obtient la relation

$$\int_0^1 b f^{*2}(u) + a f^{*''}(u) - c g^{*'}(u) f^*(u) du = 0$$

qui, substituée dans l'expression (10.50) de $J(f^*, g^*)$, conduit à

$$J(f^*, g^*) = \int_0^1 -c f(u) g'(u) + d g'^2(u) du \quad (10.56)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 -c f(u) (1 + 4\nu^2 (f - \bar{f})) + d (1 + 4\nu^2 (f - \bar{f})^2) du \\ &= -c \bar{f} + d + \int_0^1 4\nu^2 (f - \bar{f}) (-df(u) + 4\nu^2 d(f - \bar{f})) du \\ &= -c \bar{f} + d = \lambda + 2\mu - 2\nu \lambda \bar{f} \end{aligned} \quad (10.57)$$

car $4\nu^2 c - d = 0$. L'encadrement final est obtenu

$$E \leq E_{app} \leq E \left(1 - \frac{4\nu^2}{1 - \nu} \frac{\tanh(\omega/2)}{\omega} \right)^{-1}, \quad \text{avec} \quad \omega = 2e \sqrt{\frac{6(1 + \nu)}{1 - \nu}} \quad (10.58)$$

Cet encadrement encore resserré fournit un majorant valable dans le cas quasi-incompressible $\nu \rightarrow 0.5 \implies \omega = 6\sqrt{2}e$, et

$$E_{app} \leq E \left(1 - \frac{\tanh(3\sqrt{2}e)}{3\sqrt{2}e} \right)^{-1}$$

Pour les forts élancements, on retrouve $E_{app} = E$ comme il se doit. Lorsque $e \rightarrow 0$, le majorant tend vers l'infini, ce qui est compréhensible puisque l'on force le changement de volume du milieu quasi-incompressible.

Les trois majorants obtenus précédemment sont illustrés par la figure 10.5 en fonction de l'élancement de la barre et pour deux valeurs du coefficient de Poisson. Les comportements asymptotiques pour $e \rightarrow 0$ et $e \rightarrow \infty$ différents pour ces trois majorants y sont clairement visibles. L'écart entre les bornes devient important lorsque le coefficient de Poisson s'approche de 0.5.

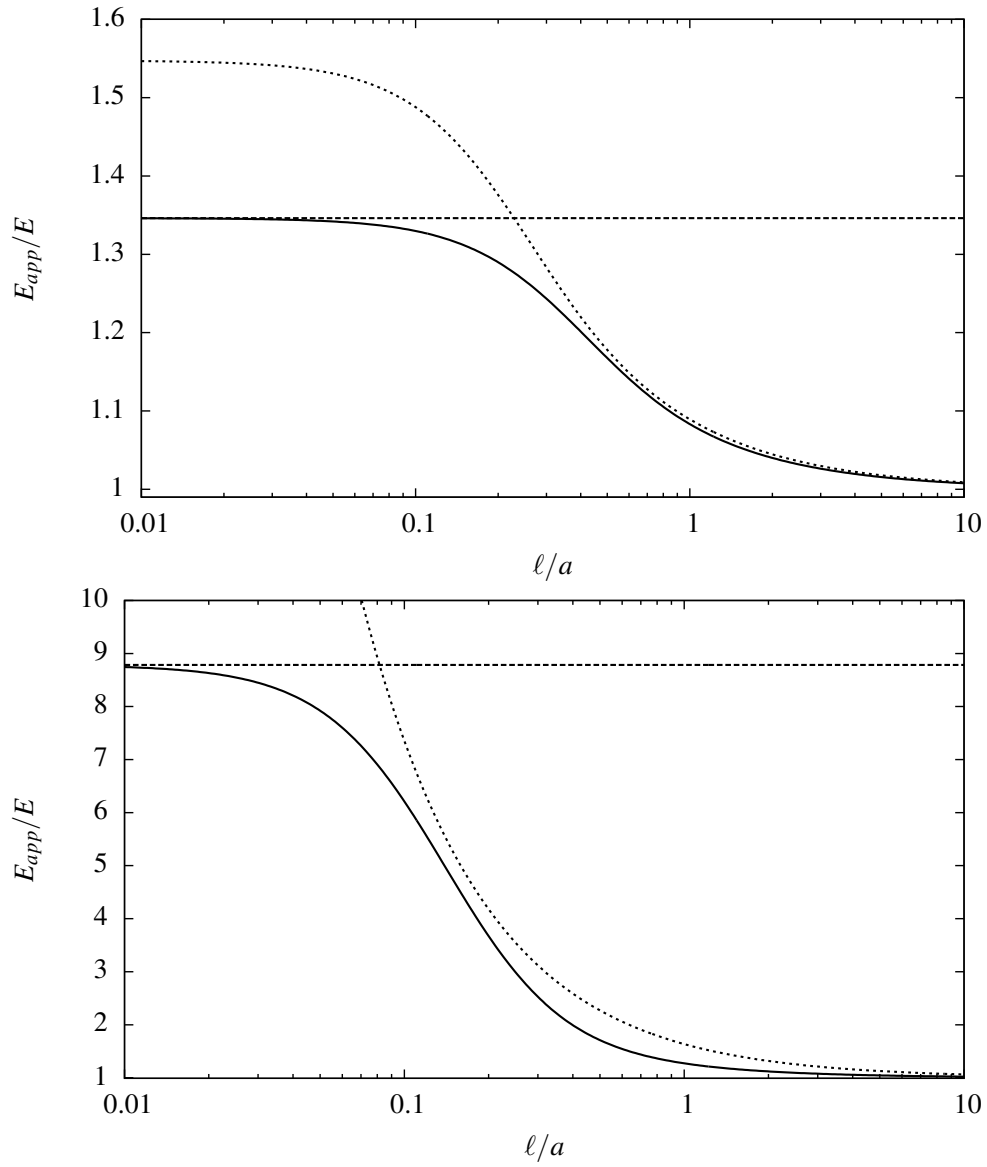


FIGURE 10.5 – Les trois bornes supérieures du module de Young apparent d'une barre cylindrique en traction encastrée en fonction de son élancement avec $\nu = 0.3$ en haut et $\nu = 0.48$ en bas. Elles correspondent aux trois expressions (10.34,10.45,10.58) avec un degré croissant de précision.