

Le formalisme hamiltonien ondulatoire

Potentiel vecteur dans une boîte

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{n,s} \left\{ \vec{A}_{n,s} \exp(i\vec{k}_n \cdot \vec{r}) + \vec{A}_{n,s}^* \exp(-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}) \right\}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\sum_{n,s} \left\{ \dot{\vec{A}}_{n,s} \exp(i\vec{k}_n \cdot \vec{r}) + \dot{\vec{A}}_{n,s}^* \exp(-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}) \right\} \\ \vec{B} &= \text{rot} \vec{A} = \sum_{n,s} \left\{ \vec{k}_n \wedge \vec{A}_{n,s} \exp(i\vec{k}_n \cdot \vec{r}) - \vec{k}_n \wedge \vec{A}_{n,s}^* \exp(-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}) \right\} \end{aligned}$$

Energie du champ : $\mathbf{E} = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\Omega} \vec{E}^2 d\tau + \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\Omega} \vec{B}^2 d\tau$

$$\mathbf{E} = \varepsilon_0 \Omega \sum_{n,s} \dot{\vec{A}}_{n,s}^*(t) \cdot \dot{\vec{A}}_{n,s}(t) + \frac{\Omega}{\mu_0} \sum_{n,s} k_n^2 \vec{A}_{n,s}^*(t) \cdot \vec{A}_{n,s}(t)$$

Le formalisme hamiltonien ondulatoire

$$\mathbf{E} = \varepsilon_0 \Omega \sum_{n,s} \dot{\vec{A}}_{n,s}^*(t) \cdot \dot{\vec{A}}_{n,s}(t) + \frac{\Omega}{\mu_0} \sum_{n,s} \vec{k}_n^2 \vec{A}_{n,s}^*(t) \cdot \vec{A}_{n,s}(t)$$

$$\mathbf{E} = \varepsilon_0 \Omega \left\{ \sum_{n,s} \dot{\vec{A}}_{n,s}^*(t) \cdot \dot{\vec{A}}_{n,s}(t) + \vec{k}_n^2 c^2 \vec{A}_{n,s}^*(t) \cdot \vec{A}_{n,s}(t) \right\}$$

On introduit : $Q_{n,s}(t) = \sqrt{\varepsilon_0 \Omega} \left(\vec{A}_{n,s}^*(t) + \vec{A}_{n,s}(t) \right)$

alors $\mathbf{E} = \frac{1}{2} \sum_{n,s} \left(\dot{Q}_{n,s}^2 + \omega_{n,s}^2 Q_{n,s}^2 \right)$

La formulation hamiltonienne permet d'exprimer le champ électromagnétique libre comme un système classique possédant un nombre **infini** de degrés de liberté !

Le principe de moindre action

$$S = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} n(\vec{x}) ds$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 - U(\vec{x}) \right) dt$$



$$S = -\frac{1}{4\mu_0} \int_1^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} ds$$

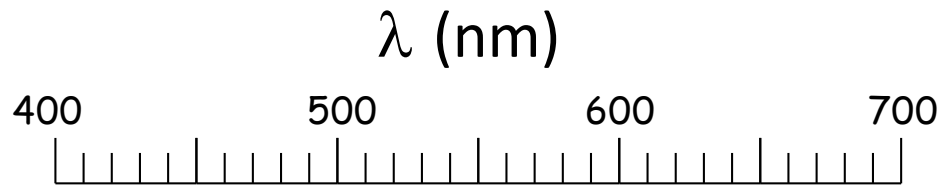
$$S = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

L'étrange monde des atomes

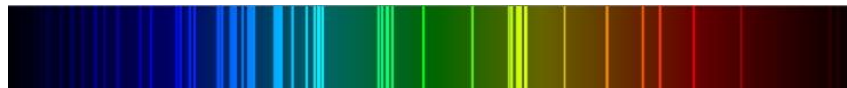
Toujours plus de problèmes

- Caractère discret des spectres.
- Instabilité de l'atome.
- Interaction de l'infinité de degrés de liberté d'un champ électromagnétique avec la matière.
- Rayonnement du corps noir.
- Nature de la lumière.

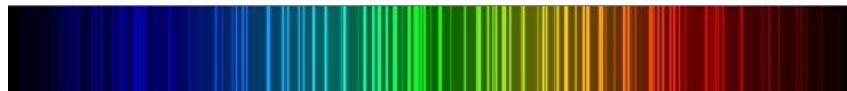
Les spectres atomiques



Hydrogène (Z=1)



Potassium (Z=19)



Xénon (Z=54)



Johann Jakob Balmer
(1825 - 1898)

Pourquoi des spectres discrets ?

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

$R_H = 10967776 \text{ m}^{-1}$
constante de Rydberg



Johannes Rydberg
(1854 - 1919)

Le modèle planétaire de l'atome



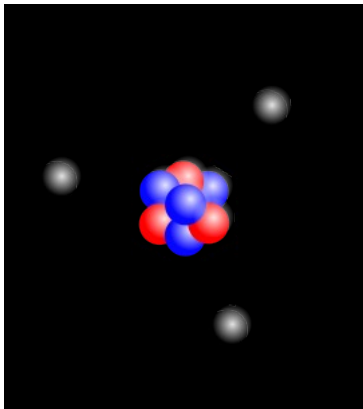
Joseph John Thomson
(1856 - 1940)

1897 : découverte de l'électron
modèle « plum-pudding »

1909 : expérience de Rutherford
« It was almost as incredible as if you fired a fifteen inch shell at a piece of tissue paper and it came back to hit you »



Ernest Rutherford
(1871 - 1937)

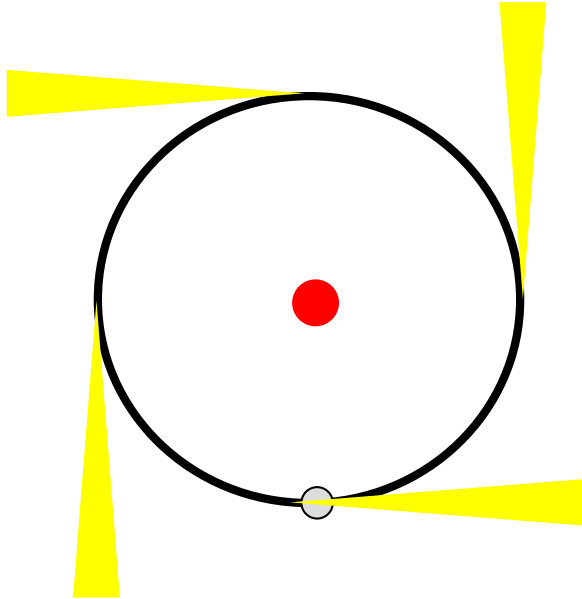


1911 : modèle de Rutherford

Un noyau massif entouré d'un nuage d'électrons en orbite.

Toujours pas de spectre discret

L'instabilité de l'atome de Rutherford



Une particule chargée en rotation émet un champ électromagnétique dirigé vers l'avant.

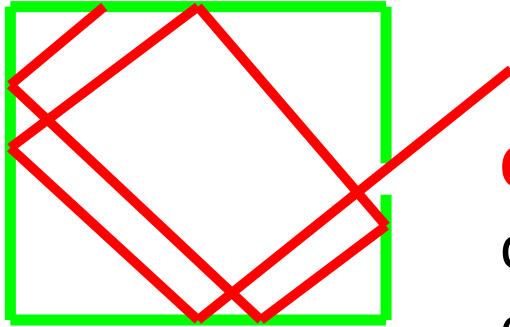
$$\left. \frac{dP}{d\Omega} \right|_{\text{avant}} = \frac{e^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{a^2}{(1 - \beta)^3}$$

Temps caractéristique de dissipation de l'énergie

$$\tau \approx 10^{-10} \text{ s} \quad !!!$$

Le rayonnement du corps noir

Corps noir : pouvoir absorbant égal à 1 à toutes les fréquences



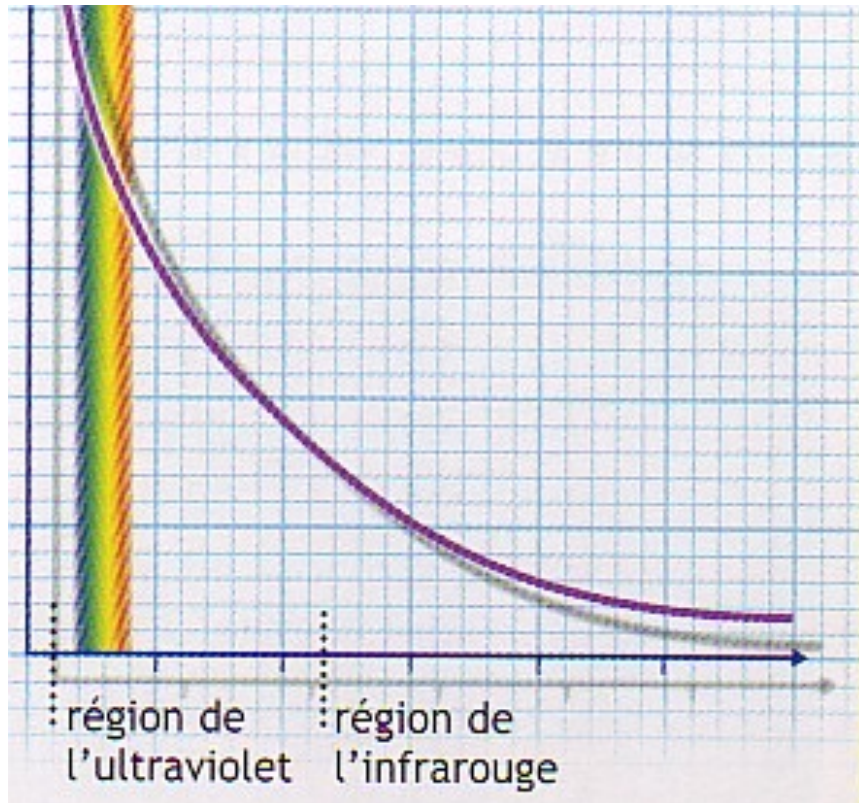
Catastrophe ultraviolette : d'après le théorème d'équipartition de l'énergie, tous les modes emportent une énergie égale, $kT/2$.

En électromagnétisme classique, la densité de modes en fréquence varie comme :

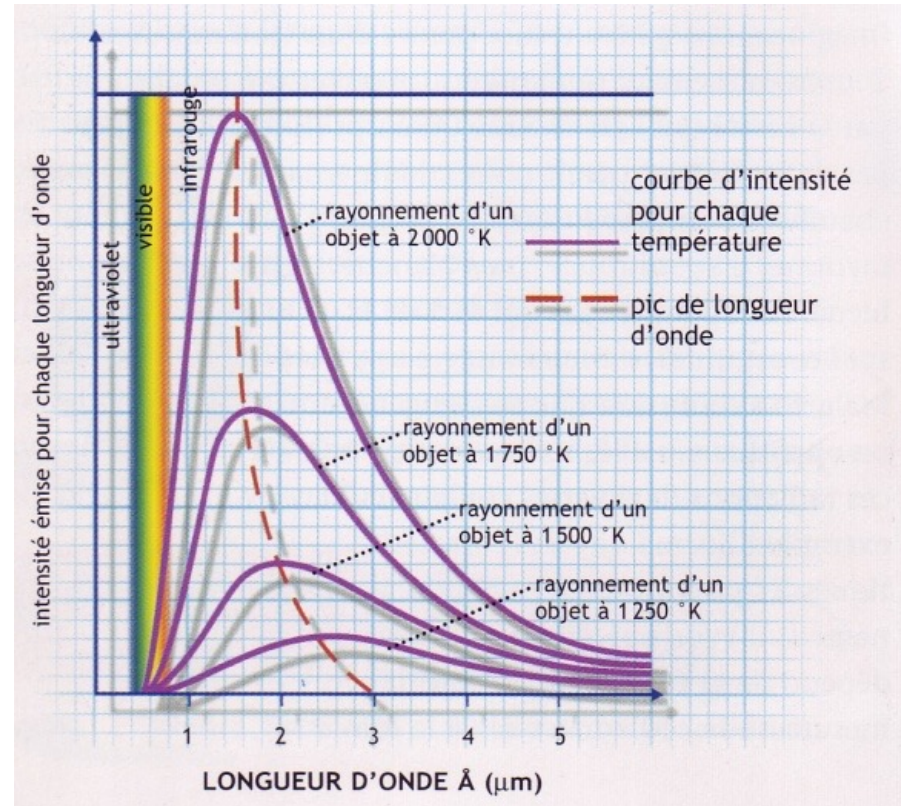
$$\frac{dN}{d\nu} = K \nu^2$$

La puissance rayonnée totale diverge en haute fréquence !

La catastrophe ultraviolette



La théorie classique



La mesure expérimentale

L'hypothèse des quanta



Max Planck
(1858 - 1947)

Planck émet l'hypothèse que l'énergie électromagnétique ne peut survenir que par « **paquets** » élémentaires dont l'énergie est proportionnelle à la fréquence.

$$E = h \nu = \hbar \omega$$

$$h = 6,62607095 \times 10^{-34} \text{ J.s}$$

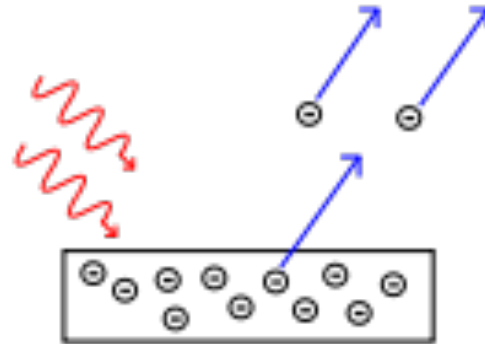
h : unité d'**action** élémentaire

Les ondes sont-elles des particules ?



Heinrich Rudolf Hertz
(1857 - 1894)

1887 : mise en évidence de l'effet photoélectrique



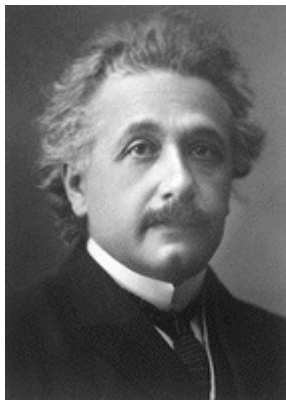
Des électrons peuvent être arrachés à un matériau illuminé par un rayonnement.

En deçà d'une certaine fréquence (spécifique du matériau), **aucun** électron n'est produit.

Le nombre d'électrons dépend lui de l'intensité.

1905

La lumière n'arrive que sous la forme de « **quanta** » (ou photons). Bien que la lumière soit une onde, elle possède une nature également **corpusculaire**.



Albert Einstein
(1879 - 1955)

Les unités fondamentales de la physique ?

Unités : $\vec{x}, t, m, [p] = [m][x][t]^{-1}, [E] = [m][x]^2[t]^{-2}$

Relativité : c est une constante de la physique

$$(\vec{x}, t), m, [E] = [m] = [p]$$

Physique quantique : h est une constante de la physique

$$(\vec{x}, t), [(E, m, p)] = [s]^{-1}$$

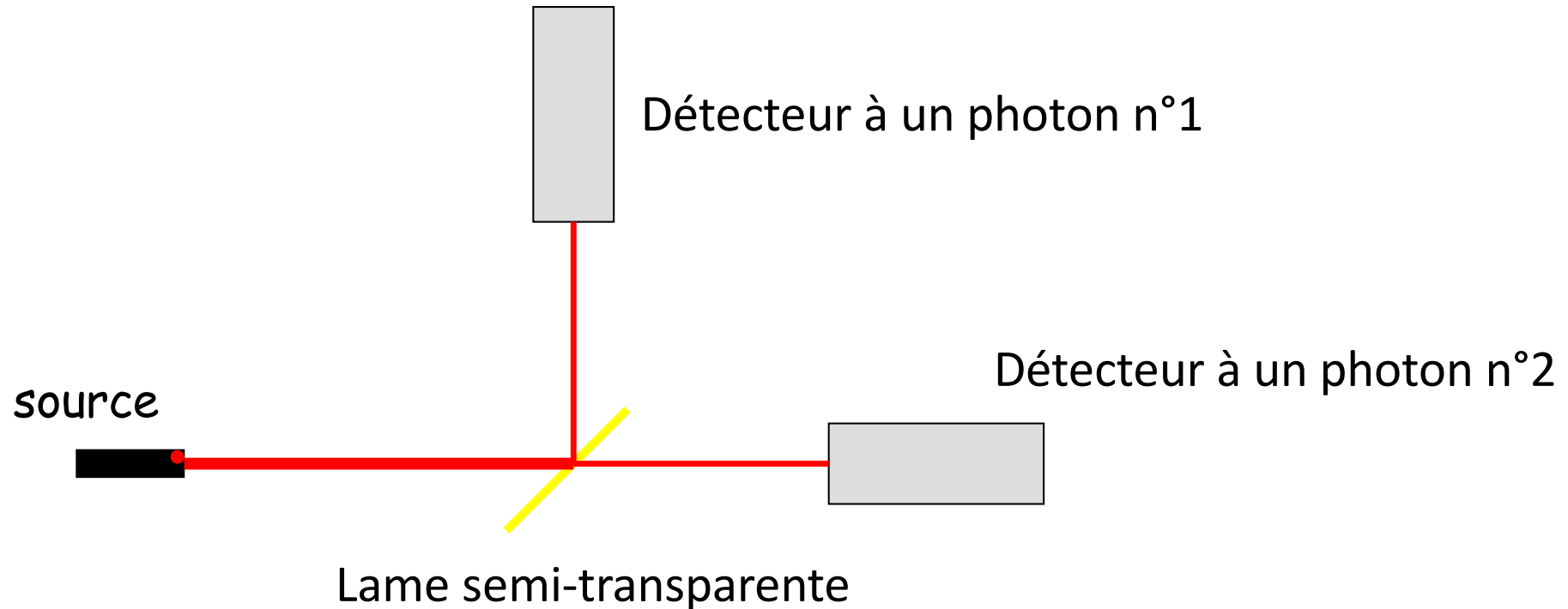
$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx (137,036)^{-1}$$

Constante de structure fine

Longueur,
temps,
masse de Planck

$$\left\{ \begin{array}{l} l_P = \left(\frac{\hbar G}{c} \right)^{1/2} \approx 10^{-35} m \\ \tau_P = \left(\frac{\hbar G}{c^5} \right)^{1/2} \approx 5.10^{-44} s \\ m_P = \left(\frac{\hbar G}{c^3} \right)^{1/2} \approx 2.10^{-8} Kg \end{array} \right.$$

Les nouvelles propriétés du photon



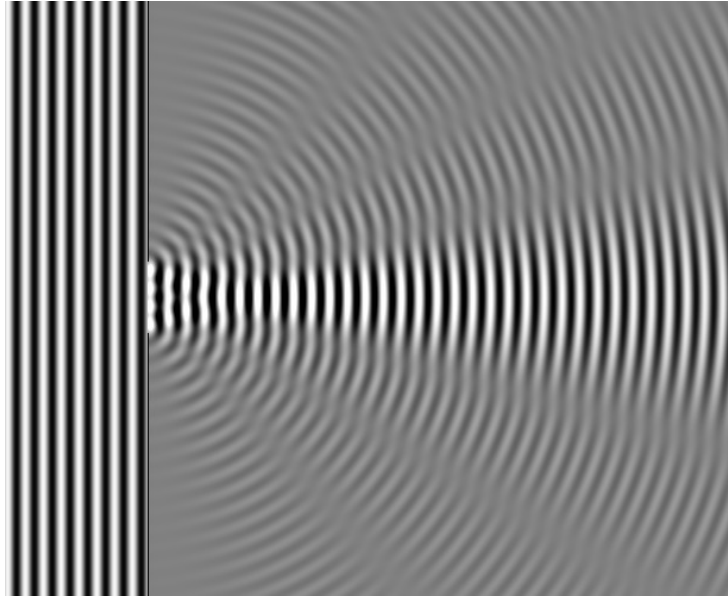
A l'échelle du photon, il n'y a jamais coïncidence des détecteurs

Le photon possède bien des caractéristiques d'une particule

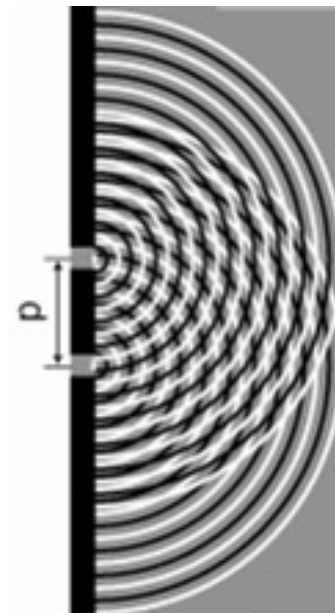
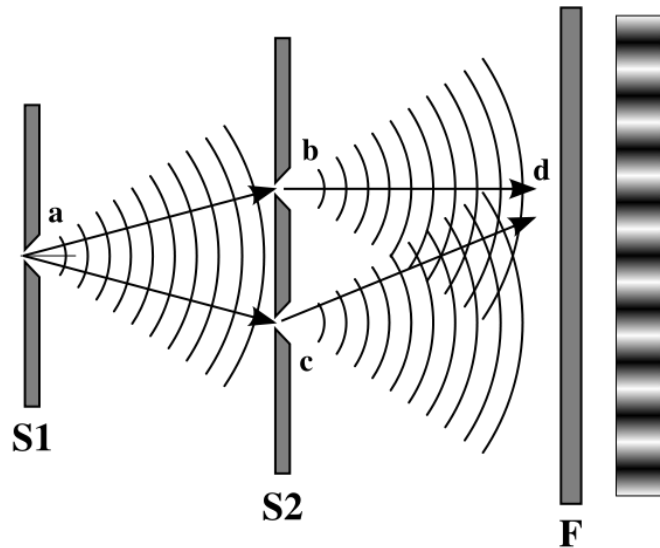
L'expérience des fentes d'Young



Thomas Young
(1773 - 1829)



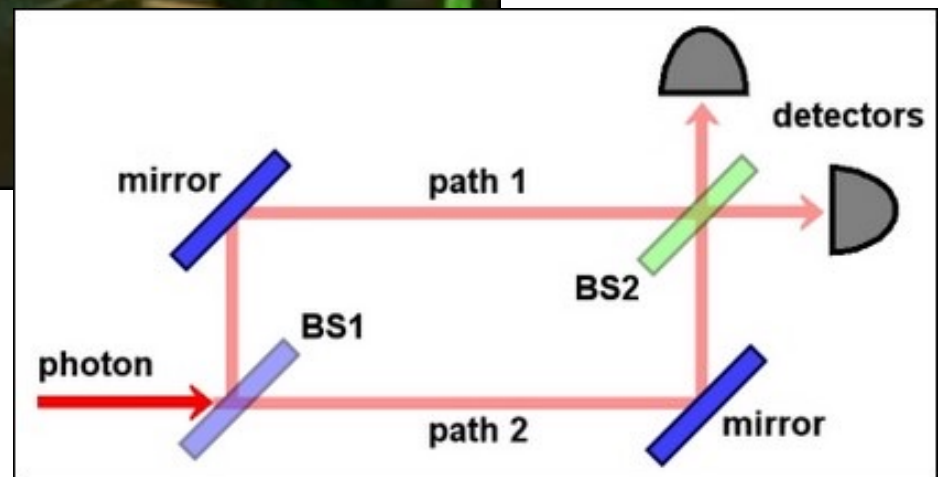
▲ x



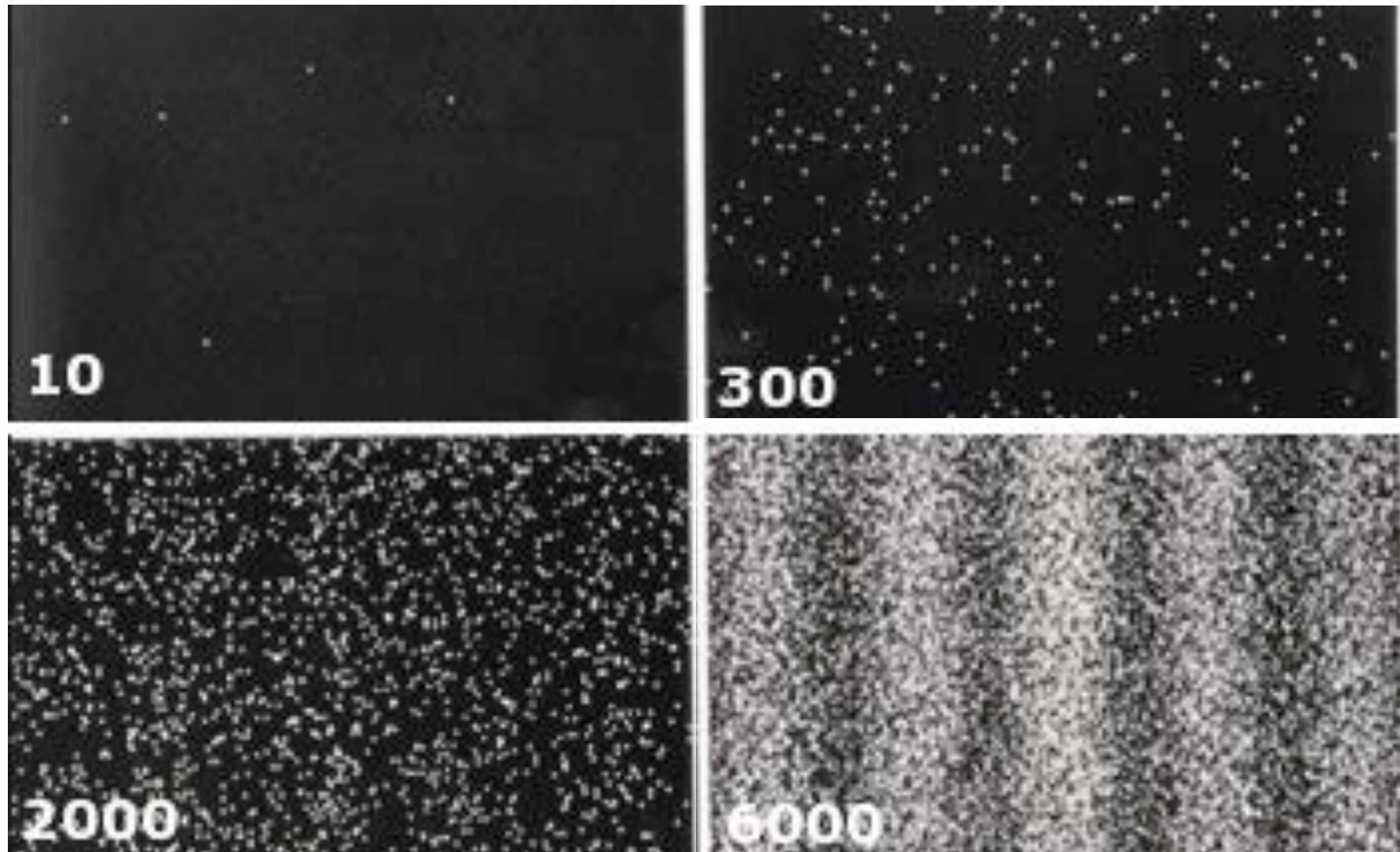
Observation et interférence photon par photon



Laboratoire LPQM (CNRS-ENS Cachan)

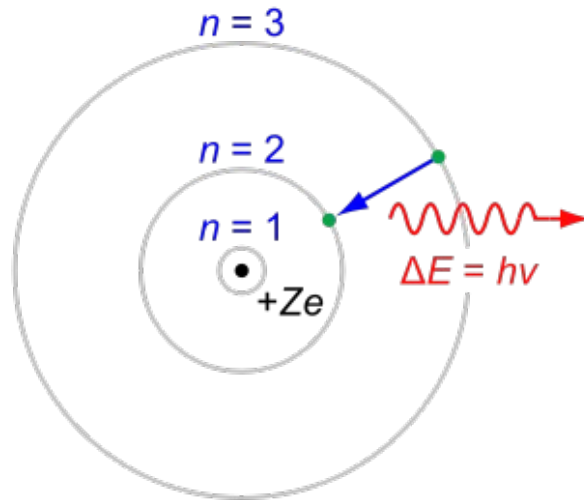


Les fentes d'Young photon par photon



L'atome de Bohr

1913

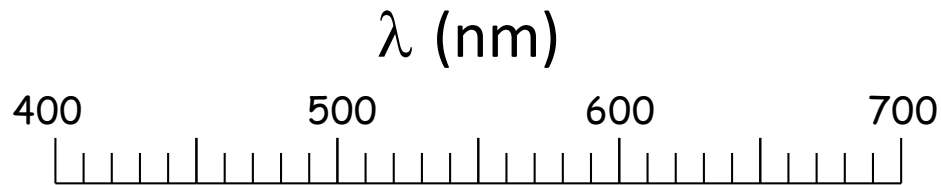


Niels Bohr
(1885 - 1962)

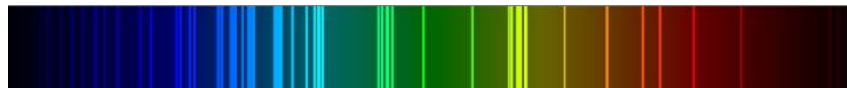
- ➡ Les électrons sont en orbite autour du noyau.
- ➡ Ils ne peuvent occuper qu'un nombre limité d'orbites **stables**.
- ➡ Chaque saut d'une orbite à une autre s'accompagne de l'émission ou de la capture d'un photon. L'énergie du photon est proportionnelle à la différence des énergies.

$$\Delta E = h\nu = \hbar\omega$$

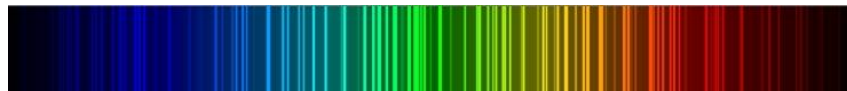
Les spectres atomiques



Hydrogène (Z=1)



Potassium (Z=19)



Xénon (Z=54)



Johann Jakob Balmer
(1825 - 1898)

Pourquoi des spectres discrets ?

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

$R_H = 10967776 \text{ m}^{-1}$
constante de Rydberg



Johannes Rydberg
(1854 - 1919)

Les particules sont-elles des ondes ?



Louis de Broglie
(1892 - 1987)

1924 : A toute particule matérielle de masse m et de vitesse v doit être « associée » une onde réelle.

Dualité onde-corpuscule :

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$
$$E = \hbar \omega$$

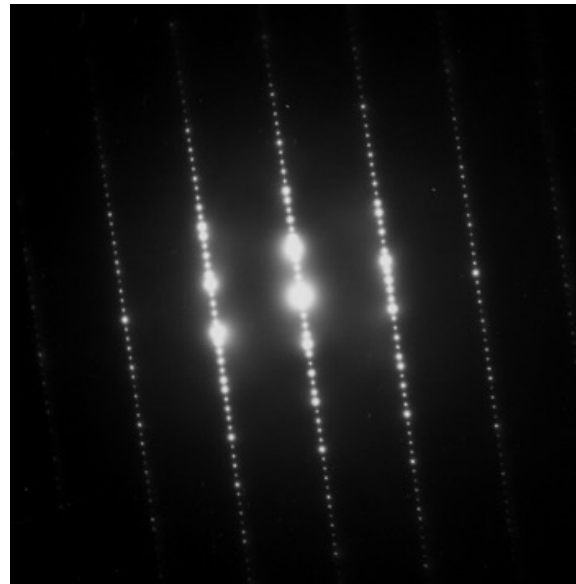
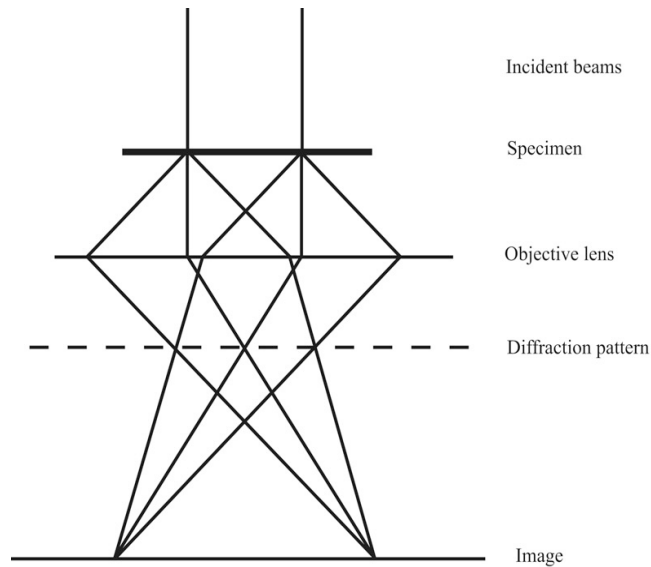
On doit donc pouvoir réaliser des interférences
avec des particules matérielles !

Les particules sont-elles des ondes ?

1927 : expérience de Davisson et Germer

Diffraction des électrons

Microscope électronique à transmission (TEM)



Clinton Joseph Davisson
(1881 - 1958)
Lester Halbert Germer
(1896 - 1971)

Potentiel de 200 kV :

$$\lambda = 2,5 \times 10^{-12} \text{ m}$$

La microscopie électronique



Microscope Electronique à Balayage

1 – 40 KeV



Microscope Electronique à Transmission

40 KeV – 1 MeV

La résolution en microscopie

Longueur d'onde de de Broglie : $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{E^2 - m^2 c^4}}$

Energie cinétique : $T = E - mc^2$

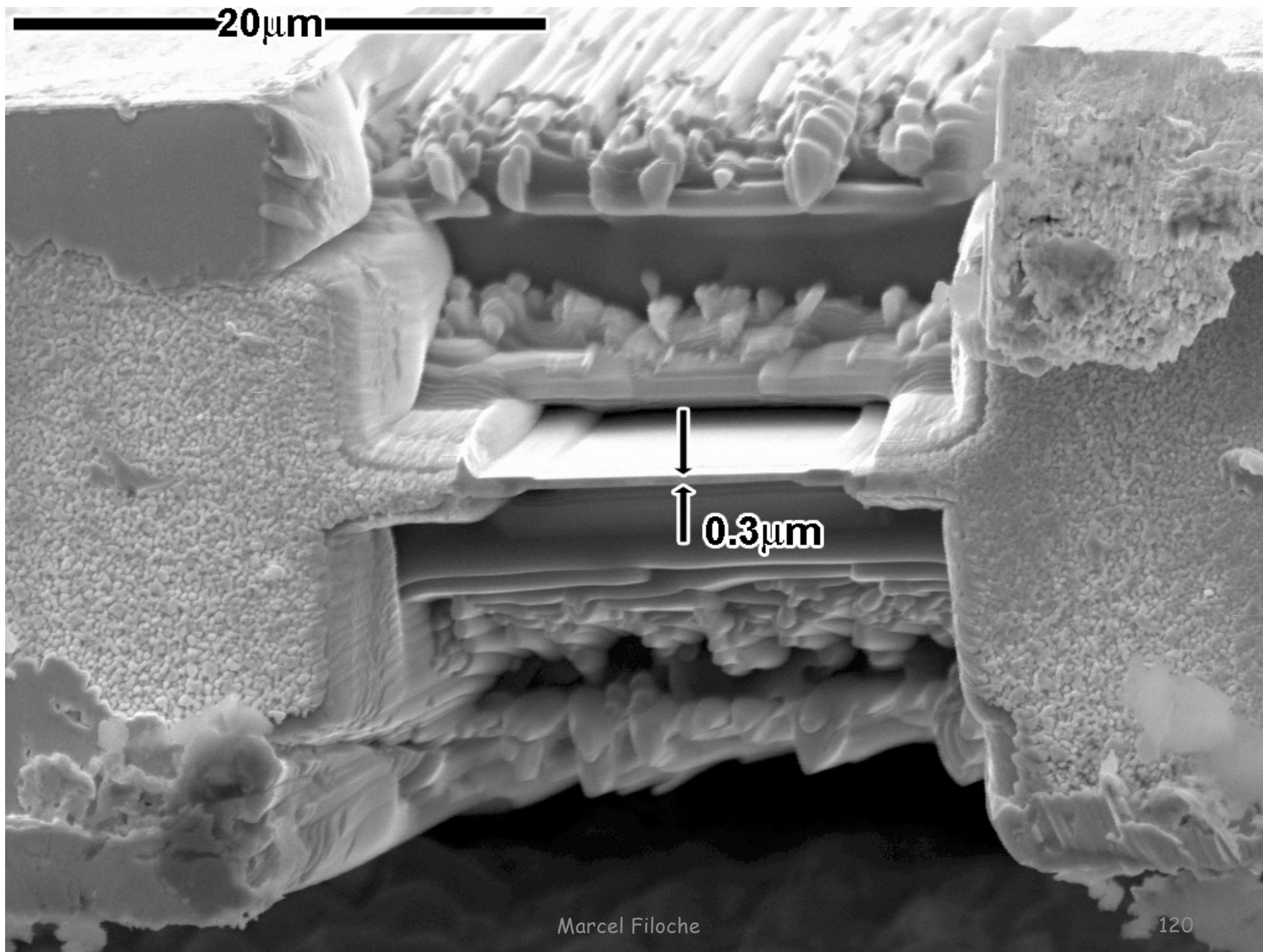
d'où : $p^2 c^2 = E^2 - m^2 c^4 = T(T + 2mc^2)$

Pour des particules ultra-relativistes : $\lambda = \frac{h}{p} \approx \frac{hc}{T}$

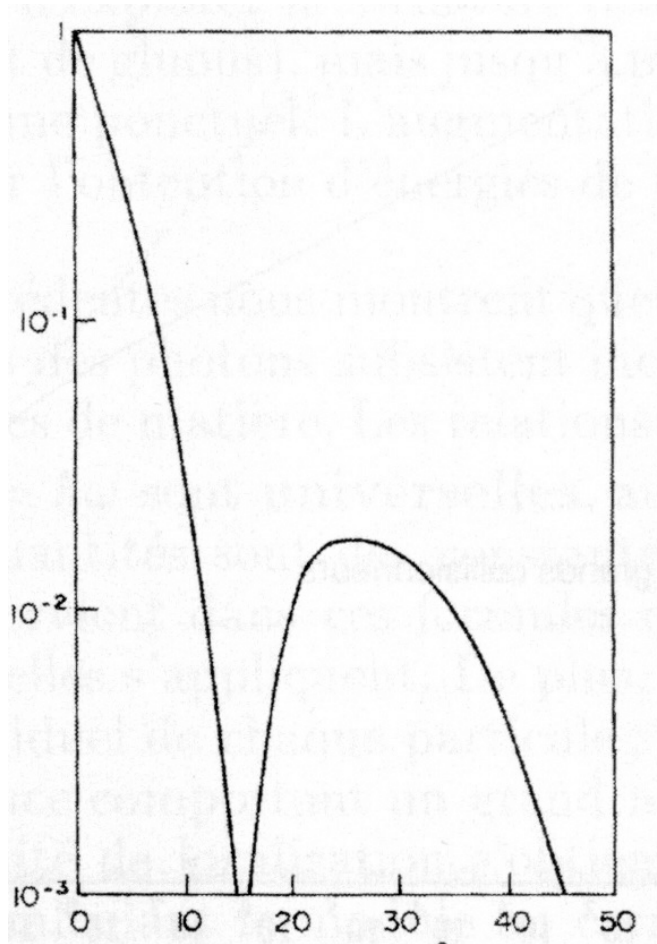
Photons : quelques fractions de microns

Electrons : Quelques keV $\rightarrow 10^{-10}$ m

Quelques GeV $\rightarrow 10^{-16} - 10^{-17}$ m

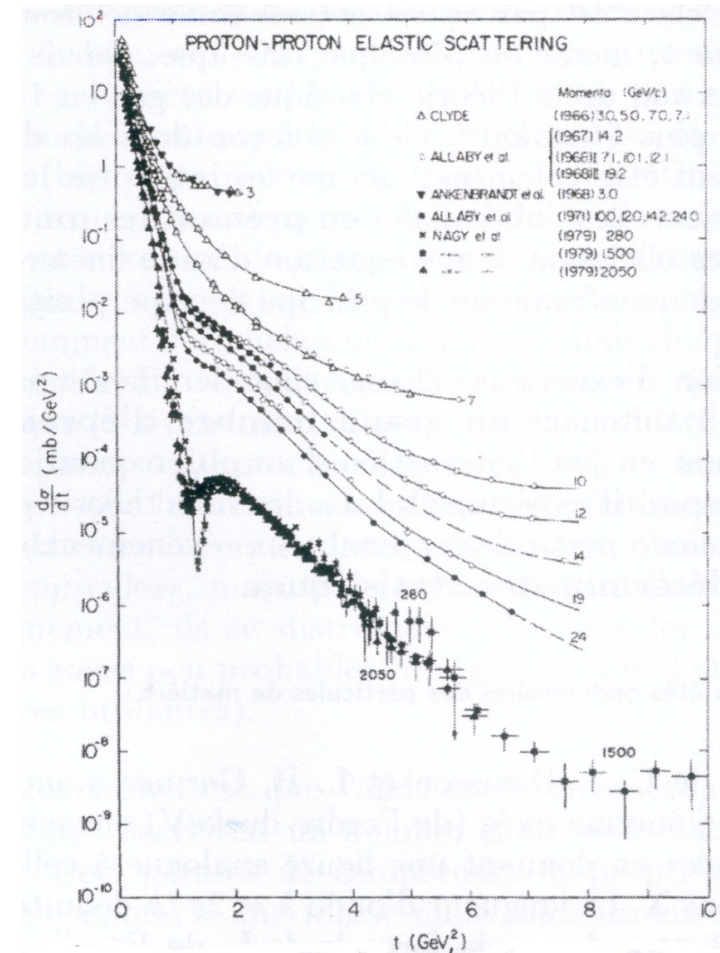


La diffusion élastique



$$\left(2kR \sin \frac{\theta}{2}\right)^2$$

Lumière sur une sphère opaque



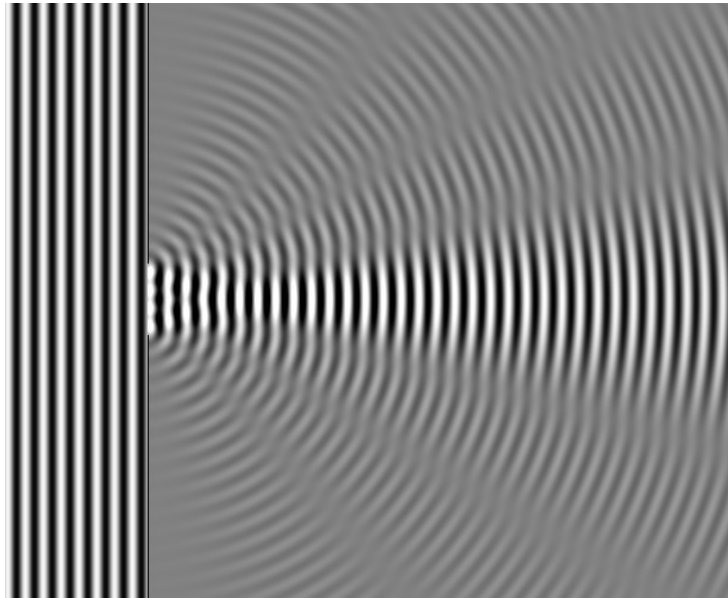
T (GeV)

Diffusion proton-proton

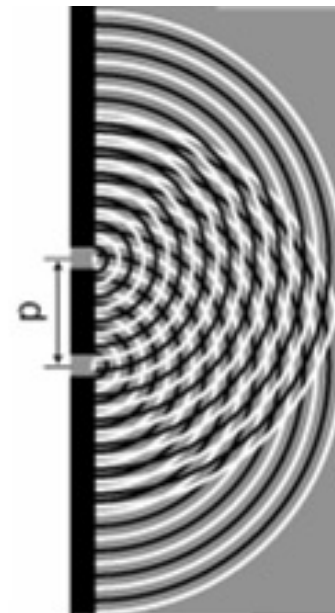
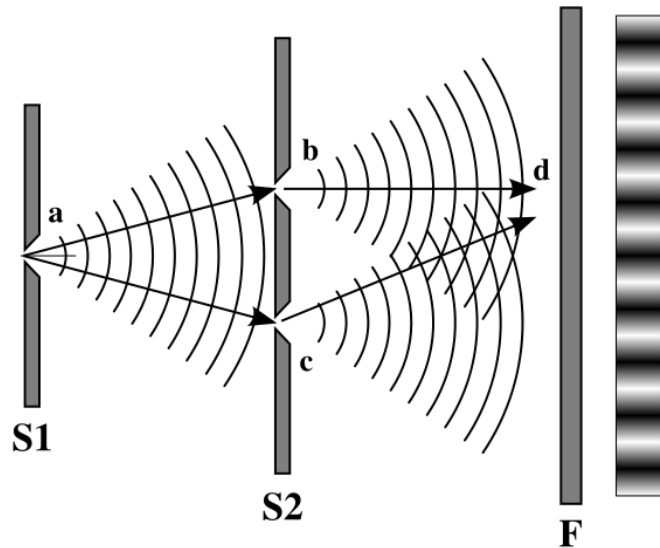
L'expérience des fentes d'Young



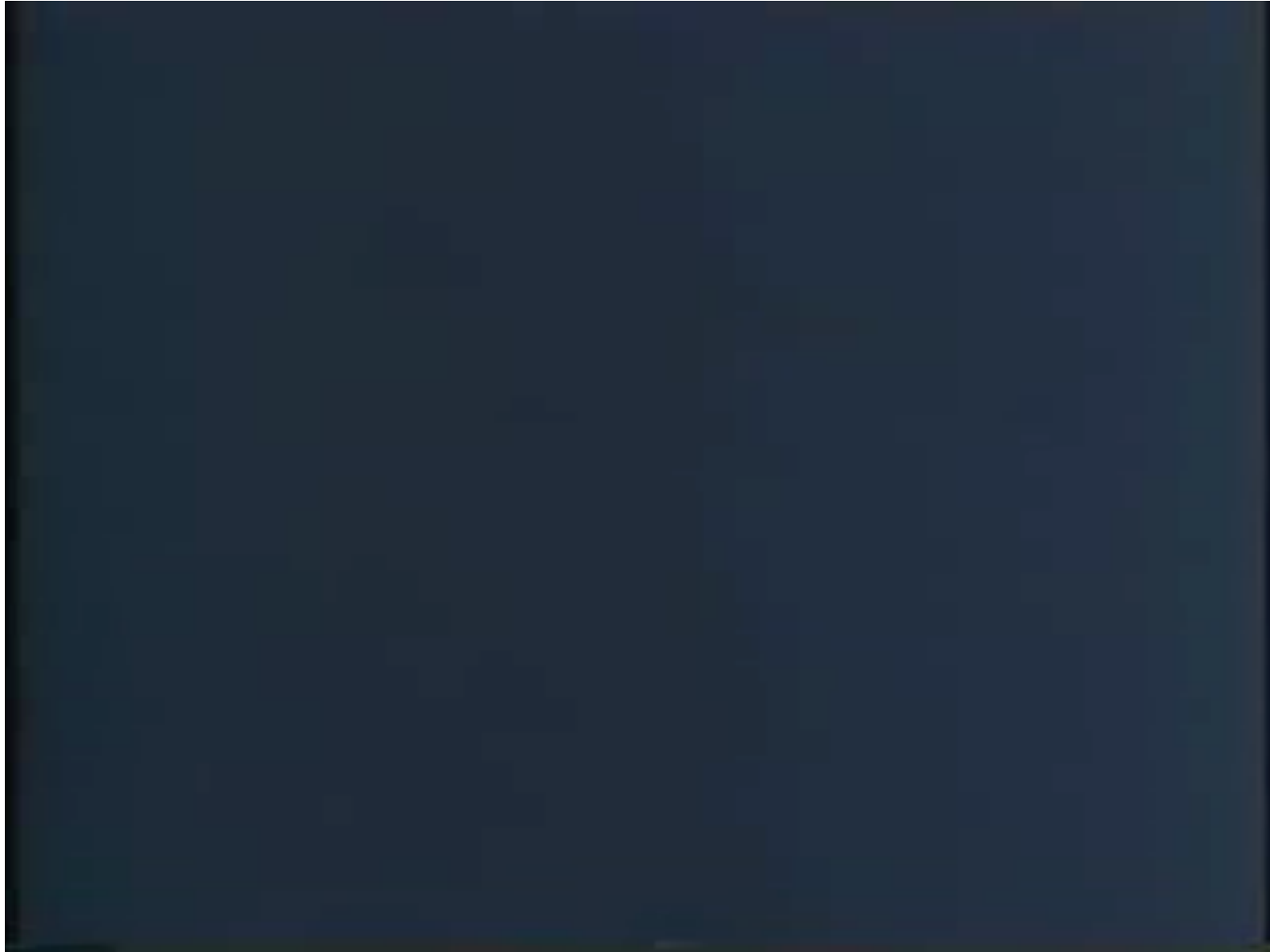
Thomas Young
(1773 - 1829)



▲ x



Interférences d'électrons



Position et localisation

Par où le photon (ou l'électron) est-il passé ?

p_A = probabilité de passer par A

p_B = probabilité de passer par B

Physique classique

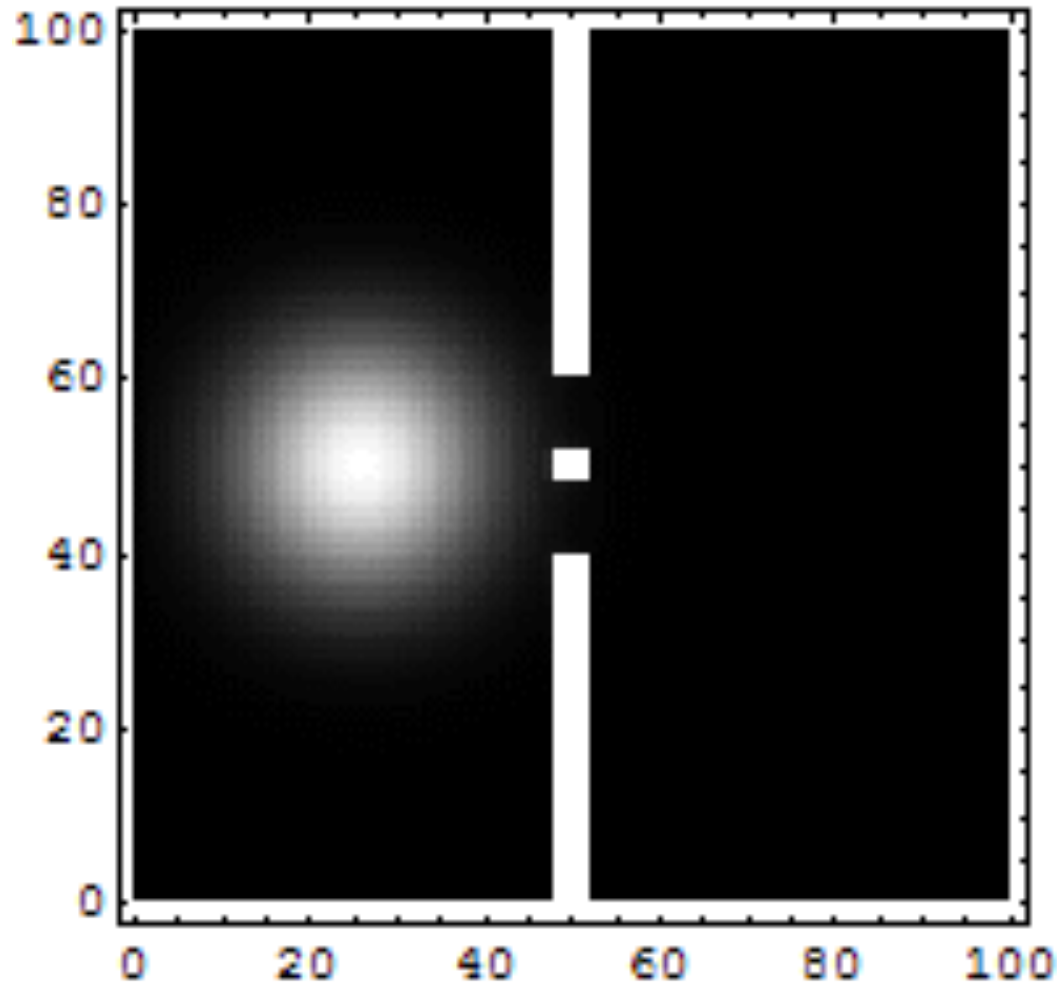
$$D_{AB}(z) = p_A D_A(z) + p_B D_B(z) = \frac{1}{2} \left[D\left(z - \frac{a}{2}\right) + D\left(z + \frac{a}{2}\right) \right]$$

Physique quantique

Les interférences ne peuvent s'expliquer si l'on est capable d'attribuer une **trajectoire** à chaque particule !

⇒ **Chaque particule « porte avec elle » la figure d'interférence**

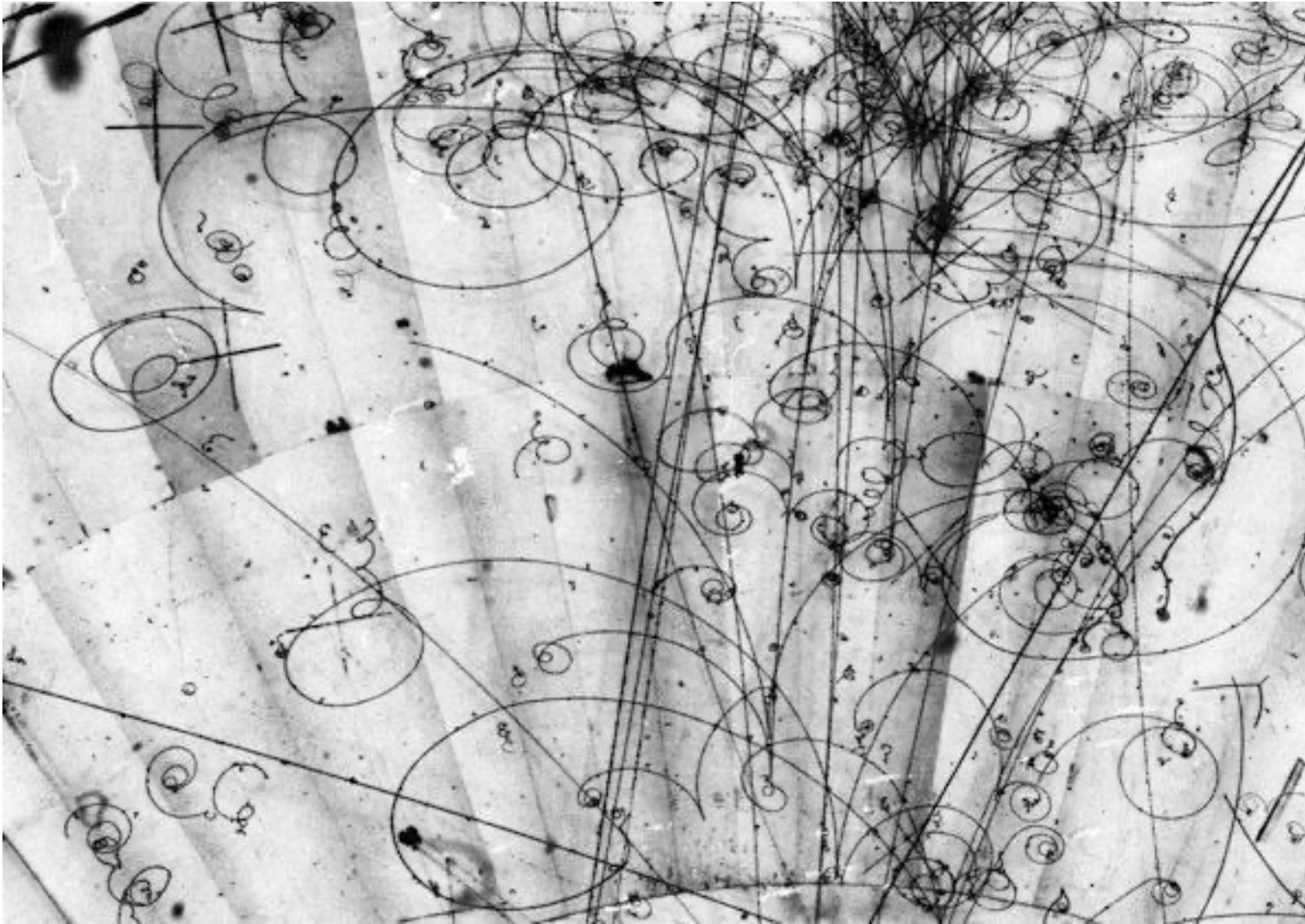
Les fentes d'Young vue par une particule



La particule unique porte en fait une onde qui réalise l'interférence à elle seule.

Lors de l'observation, la particule « retrouve » une localisation classique.

La particule-onde



Licence d'usage dans un contexte public, sans modification

La licence confère à l'utilisateur un droit d'usage sur le document consulté ou téléchargé, totalement ou en partie, dans les conditions définies ci-après et à l'exclusion expresse de toute utilisation commerciale.

Le droit d'usage défini par la licence autorise un usage à destination de tout public qui comprend :

- Le droit de reproduire tout ou partie du document sur support informatique ou papier,
- Le droit de diffuser tout ou partie du document au public sur support papier ou informatique, y compris par la mise à la disposition du public sur un réseau numérique.

Aucune modification du document dans son contenu, sa forme ou sa présentation n'est autorisée.

Les mentions relatives à la source du document et/ou à son auteur doivent être conservées dans leur intégralité.

Le droit d'usage défini par la licence est personnel, non exclusif et non transmissible. Tout autre usage que ceux prévus par la licence est soumis à autorisation préalable et expresse de l'auteur.

