

## Chapitre 13

# Réservoirs sous pression

### 13.1 Statique du réservoir sous pression

Un tube homogène de longueur courante  $l$ , de rayon interne  $r_i$ , de rayon externe  $r_e$  et d'épaisseur  $e = r_e - r_i$  est soumis à une pression interne  $p_i$  et à une pression externe  $p_e$  (figure 13.1). Il est d'autre part soumis à une densité surfacique homogène d'effort  $\Sigma$  (algébrique) axial (selon  $z$ ) sur la surface  $z = L$ , et  $-\Sigma$  en  $z = 0$ . On cherche à obtenir des informations sur les contraintes qui règnent dans le tube, sans tenir compte de la nature du matériau dont il est constitué. Il s'agit donc d'une analyse purement statique du problème du réservoir sous pression.

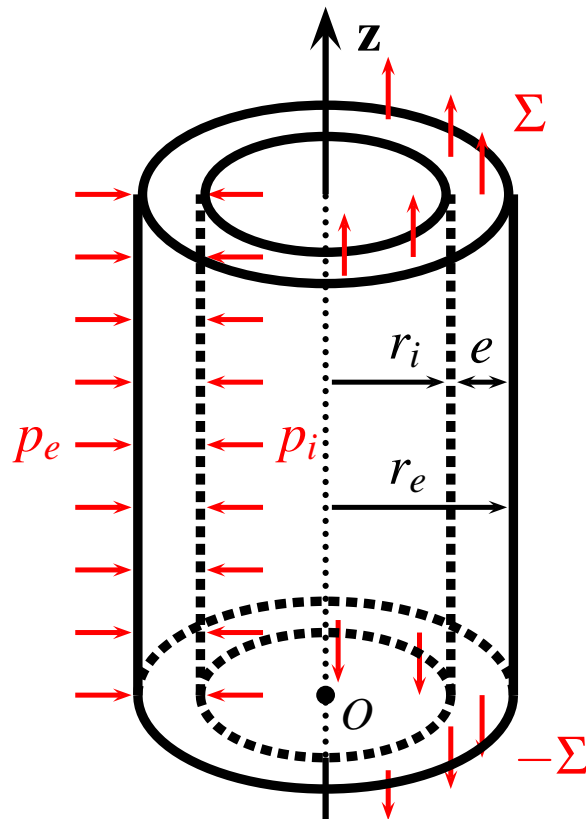


FIGURE 13.1 – Tube sous pression interne  $p_i$ , externe  $p_e$  et chargement axial  $\Sigma$ .

### 13.1.1 Conditions à la frontière du tube

Définir les conditions de chargement en tout point de la frontière du tube. On utilise les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  d'axe  $\underline{e}_z$ . On ne tient pas compte des forces de gravitation.

On travaille sur la configuration actuelle sur laquelle les efforts sont appliqués. Le problème est posé en effort uniquement :

- En  $z = l$ , le vecteur contrainte est égal à la densité d'effort imposée :

$$\underline{t} = \underline{t}^d = \Sigma \underline{e}_z = \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_z = \begin{bmatrix} \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (13.1)$$

On en déduit que,  $\forall r, \theta$

$$\sigma_{rz}(r, \theta, z = l) = \sigma_{\theta z}(r, \theta, z = l) = 0, \quad \sigma_{zz}(r, \theta, z = l) = \Sigma \quad (13.2)$$

- En  $z = 0$ , le vecteur contrainte est égal à la densité d'effort imposée :

$$\underline{t} = \underline{t}^d = -\Sigma \underline{e}_z = \underline{\sigma} \cdot (-\underline{e}_z) = \begin{bmatrix} -\sigma_{rz} \\ -\sigma_{\theta z} \\ -\sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (13.3)$$

On en déduit que,  $\forall r, \theta$

$$\sigma_{rz}(r, \theta, z = 0) = \sigma_{\theta z}(r, \theta, z = 0) = 0, \quad \sigma_{zz}(r, \theta, z = 0) = \Sigma \quad (13.4)$$

Remarquer que  $\sigma_{zz}$  prend la même valeur aux extrémités.

- En  $r = r_e$ , le vecteur normal  $\underline{n}$  sortant est  $\underline{e}_r$  et l'effort appliqué est  $-p_e \underline{e}_r$  :

$$\underline{t} = \underline{t}^d = -p_e \underline{e}_r = \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta r} \\ \sigma_{zr} \end{bmatrix} \quad (13.5)$$

On en déduit que,  $\forall \theta, z$ ,

$$\sigma_{rr}(r = r_e, \theta, z) = -p_e, \quad \sigma_{\theta r}(r = r_e, \theta, z) = \sigma_{zr}(r = r_e, \theta, z) = 0 \quad (13.6)$$

On peut aussi obtenir le résultat précédent en raisonnant de la manière suivante. La pression appliquée l'est en général à l'aide d'un fluide où règne la pression  $p_e$ . La condition d'équilibre à l'interface fluide/solide est donc une condition de saut :

$$\underline{t}^{fluide} + \underline{t}^{tube} = [\underline{\sigma}].\underline{n} = 0 = (\underline{\sigma}^{fluide} - \underline{\sigma}^{tube}).\underline{n} = (-p_e \underline{1} - \underline{\sigma}).\underline{e}_r \quad (13.7)$$

ce qui est conforme au résultat (13.6).

- En  $r = r_i$ , le vecteur normal  $\underline{n}$  sortant est  $-\underline{e}_r$  et l'effort appliqué est  $p_i \underline{e}_r$  :

$$\underline{t} = \underline{t}^d = \underline{\sigma} \cdot (-\underline{e}_r) = p_i \underline{e}_r = \begin{bmatrix} -\sigma_{rr} \\ -\sigma_{\theta r} \\ -\sigma_{zr} \end{bmatrix} \quad (13.8)$$

On en déduit que,  $\forall \theta, z$ ,

$$\sigma_{rr}(r = r_i, \theta, z) = -p_i, \quad \sigma_{\theta r}(r = r_i, \theta, z) = \sigma_{zr}(r = r_i, \theta, z) = 0 \quad (13.9)$$

On peut aussi obtenir le résultat précédent en raisonnant de la manière suivante. La pression appliquée l'est en général à l'aide d'un fluide où règne la pression  $p_i$ . La condition d'équilibre à l'interface fluide/solide est donc une condition de saut :

$$\underline{t}^{fluide} + \underline{t}^{tube} = [\underline{\sigma}].\underline{n} = 0 = (\underline{\sigma}^{fluide} - \underline{\sigma}^{tube}).\underline{n} = (-p_i \underline{1} - \underline{\sigma}).(-\underline{e}_r) \quad (13.10)$$

ce qui est conforme au résultat (13.9).

### 13.1.2 Equilibre des efforts appliqués

Un préalable à toute recherche de solution au problème de statique posé est de vérifier que les efforts appliqués sont compatibles avec l'équilibre du tube. Faire cette vérification.

Les efforts extérieurs sont compatibles avec l'équilibre si leur torseur est nul. Le torseur d'un système de forces est le triplet  $\{O, \underline{\mathbf{R}}, \underline{\mathbf{M}}\}$  composé de la résultante de l'ensemble des forces appliquées  $\underline{\mathbf{R}}$  et du moment résultant  $\underline{\mathbf{M}}$  de ces forces calculé par rapport au point  $O$ . On comptabilise les forces ponctuelles  $\underline{\mathbf{F}}_i$ , la densité linéique de forces  $\underline{\mathbf{F}}_L$ , la densité surfacique de forces  $\underline{\mathbf{\Sigma}}$  et la densité volumique de forces  $\underline{\mathbf{F}}_V$ . On évalue cette résultante dans le cas du tube pour lequel seules des densités surfaciques d'efforts ont été envisagées ( $\underline{\mathbf{F}}_i = 0, \underline{\mathbf{F}}_L = 0, \underline{\mathbf{F}}_V = 0$ ) :

$$\underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{F}}_i + \int_L \underline{\mathbf{F}}_L dl + \int_S \underline{\mathbf{\Sigma}} ds + \int_V \underline{\mathbf{F}}_V dv \quad (13.11)$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\int_{z=l} \Sigma \underline{\mathbf{e}}_z ds + \int_{z=0} (-\Sigma) \underline{\mathbf{e}}_z ds}_0 + \underbrace{\int_{r=r_e} (-p_e) \underline{\mathbf{e}}_r r_e d\theta dz}_0 + \underbrace{\int_{r=r_i} p_i \underline{\mathbf{e}}_r r_i d\theta dz}_0 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (13.12)$$

Le moment résultant par rapport au point 0 vaut quant à lui :

$$\underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{OM}}_i \wedge \underline{\mathbf{F}}_i + \int_L \underline{\mathbf{OM}} \wedge \underline{\mathbf{F}}_L dl + \int_S \underline{\mathbf{OM}} \wedge \underline{\mathbf{\Sigma}} ds + \int_V \underline{\mathbf{OM}} \wedge \underline{\mathbf{F}}_V dv \quad (13.13)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{z=l} \underline{\mathbf{OM}} \wedge \Sigma \underline{\mathbf{e}}_z r dr d\theta + \int_{z=0} \underline{\mathbf{OM}} \wedge (-\Sigma) \underline{\mathbf{e}}_z r dr d\theta \\ &+ \int_{r=r_e} \underline{\mathbf{OM}} \wedge (-p_e) \underline{\mathbf{e}}_r r_e d\theta dz + \int_{r=r_i} \underline{\mathbf{OM}} \wedge p_i \underline{\mathbf{e}}_r r_i d\theta dz \\ &= \underbrace{\left( \int_{z=l} \underline{\mathbf{OM}} r dr d\theta \right) \wedge \Sigma \underline{\mathbf{e}}_z}_{\parallel \underline{\mathbf{e}}_z} + \underbrace{\left( \int_{z=0} \underline{\mathbf{OM}} r dr d\theta \right) \wedge (-\Sigma) \underline{\mathbf{e}}_z}_{=0} \\ &+ \left( \int z dz \right) \underbrace{\left( \int (-p_e) \underline{\mathbf{e}}_z \wedge \underline{\mathbf{e}}_r r_e d\theta \right)}_{\propto \int \underline{\mathbf{e}}_\theta d\theta = 0} + \left( \int z dz \right) \left( \int p_i \underline{\mathbf{e}}_z \wedge \underline{\mathbf{e}}_r r_i d\theta \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (13.14)$$

Le résultat est toujours valable si l'on calcule le moment par rapport à un autre point  $O'$  puisque les torseurs  $\{O, \underline{\mathbf{R}}, \underline{\mathbf{M}}\}$  et  $\{O', \underline{\mathbf{R}}, \underline{\mathbf{M}}'\}$  sont alors reliés par

$$\underline{\mathbf{M}}' = \underline{\mathbf{M}} + \underline{\mathbf{O'O}} \wedge \underline{\mathbf{R}} \quad (13.16)$$

Finalement, les efforts indiqués sont bel et bien statiquement admissibles.

### 13.1.3 Considérations de symétrie

Est-il possible de réduire la dépendance des composantes  $\sigma_{ij}$  du tenseur des contraintes vis-à-vis des variables  $(r, \theta, z)$  ?

Des restrictions dues aux symétries en jeu dans le problème seront envisageables si les conditions de symétrie portent simultanément sur :

- **la géométrie.** Le tube présente une symétrie de révolution autour de l'axe  $\underline{\mathbf{e}}_z$ , ainsi qu'une invariance par translation le long de  $\underline{\mathbf{e}}_z$ .

- **le chargement.** Le chargement appliqué aux surfaces extérieure et intérieure, ainsi qu'aux extrémités, présente une symétrie de révolution autour de l'axe  $\underline{e}_z$ . Le chargement appliqué aux surfaces extérieure et intérieure présente une invariance par translation le long de  $\underline{e}_z$ .
- **le matériau.** Le tube est supposé homogène, c'est-à-dire constitué du même matériau en tout point. On fait par ailleurs l'hypothèse ici que les propriétés mécaniques du matériau sont invariantes par rotation autour de  $\underline{e}_z$  et par symétrie par rapport à tout plan perpendiculaire à  $\underline{e}_z$ . Dans le cas contraire, les simplifications qui vont suivre ne sont pas licites et le problème devient sensiblement plus complexe.

Il résulte de ces considérations une invariance attendue du champ des contraintes par rapport aux variables  $\theta$  et  $z$ . On cherche donc un tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}(r)$ .

#### 13.1.4 Etablissement de quelques informations sur les contraintes au sein du tube

Pousser au maximum la démarche de détermination des contraintes au sein du tube. On commencera par décomposer les équations et les inconnues et à en tirer la conséquence qui s'impose. A l'aide des conditions d'équilibre et des conditions à la frontière, réduire le nombre de composantes *a priori* non nulles pour le tenseur des contraintes. Evaluer enfin la contrainte moyenne le long d'un segment  $r \in [r_i, r_e]$  à  $\theta$  et  $z$  donnés :

$$\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle := \frac{1}{r_e - r_i} \int_{r_i}^{r_e} \sigma_{\theta\theta} dr \quad (13.17)$$

En l'absence de forces de volume, les équations d'équilibre pour un champ de contraintes ne dépendant que de la variable  $r$  se réduisent à

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (13.18)$$

$$\frac{d\sigma_{\theta r}}{dr} + \frac{2\sigma_{\theta r}}{r} = 0 \quad (13.19)$$

$$\frac{d\sigma_{zr}}{dr} + \frac{\sigma_{zr}}{r} = 0 \quad (13.20)$$

On cherche six composantes de contraintes satisfaisant les trois équations précédentes. On ne peut donc pas espérer *a priori* les déterminer toutes sans plus d'informations (en particulier sur le comportement du matériau). Toutefois, on va voir que de nombreuses informations peuvent être obtenues sur ces contraintes. Remarquer que les composantes  $\sigma_{zz}$  et  $\sigma_{\theta z}$  n'apparaissent pas dans les équations (13.18) à (13.20). Voici les informations que l'on peut tirer des équations d'équilibre et des conditions aux limites :

- La composante  $\sigma_{zz}$  ne dépend pas de  $z$  et vaut  $\Sigma$  en  $z = 0$  et  $z = l$  d'après (13.3) et (13.2). Par conséquent, le champ de contrainte axiale est homogène dans le tube et vaut,  $\forall r, \theta, z$ ,

$$\sigma_{zz} = \Sigma \quad (13.21)$$

- La composante  $\sigma_{\theta z}$  ne dépend pas de  $z$  et s'annule en  $z = 0$  et  $z = l$  d'après (13.3) et (13.2). Par conséquent, en tout point du tube,

$$\sigma_{\theta z} = 0 \quad (13.22)$$

- Les composantes  $\sigma_{r\theta}$  et  $\sigma_{rz}$  s'obtiennent en intégrant les équations (13.19) et (13.20) :

$$\sigma_{r\theta} = \frac{\alpha}{r^2}, \quad \sigma_{rz} = \frac{\beta}{r} \quad (13.23)$$

Les constantes d'intégration  $\alpha$  et  $\beta$  s'obtiennent en considérant les conditions aux limites (13.6) et (13.9) en  $r = r_e$  et  $r = r_i$ , où ces composantes s'annulent. Par conséquent,  $\forall r, \theta, z$ ,

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0 \quad (13.24)$$

- La composante  $\sigma_{rr}$  passe de  $-p_i$  en  $r = r_i$  à  $-p_e$  en  $r = r_e$ . On ne pourra pas en dire plus avant de donner des spécifications plus précises sur le comportement du matériau.

Finalement, le tenseur des contraintes a la forme suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{rr}\underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r + \sigma_{\theta\theta}\underline{\underline{e}}_\theta \otimes \underline{\underline{e}}_\theta + \sigma_{zz}\underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z, \quad [\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (13.25)$$

Les équations ne permettent pas de déterminer  $\sigma_{\theta\theta}$  point par point dans la paroi du tube. Il est cependant possible d'évaluer sa moyenne, en se servant de l'équation d'équilibre (13.19) :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{\theta\theta} \rangle &= \frac{1}{r_e - r_i} \int_{r_i}^{r_e} \sigma_{\theta\theta} dr \\ &= \frac{1}{r_e - r_i} \int_{r_i}^{r_e} \left( r \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \sigma_{rr} \right) dr = \frac{1}{r_e - r_i} \int_{r_i}^{r_e} \frac{d}{dr} (r\sigma_{rr}) dr \\ &= \frac{1}{r_e - r_i} (r_e\sigma_{rr}(r_e) - r_i\sigma_{rr}(r_i)) \end{aligned} \quad (13.26)$$

d'où le résultat remarquable<sup>1</sup>

$$\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle = \frac{p_i r_i - p_e r_e}{r_e - r_i} \quad (13.27)$$

### 13.1.5 Cas d'un tube fermé par une calotte de forme quelconque

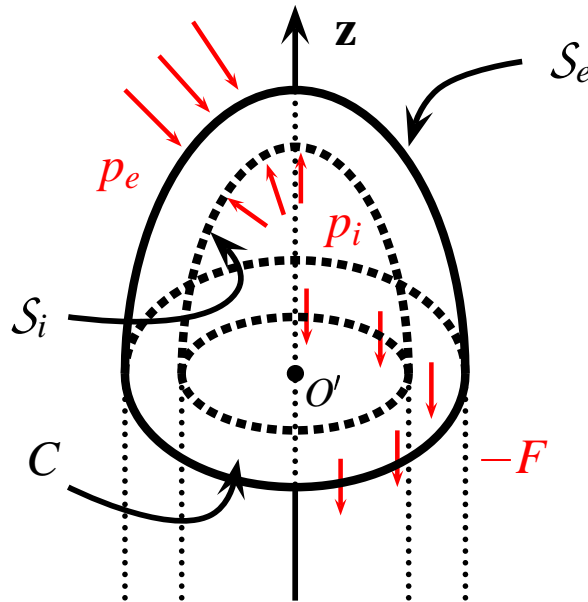


FIGURE 13.2 – Calotte de forme quelconque fermant le tube sous pression interne  $p_i$  et externe  $p_e$ . La couronne  $C$  est soumise à la densité surfacique homogène d'effort axial  $-\Sigma \underline{\underline{e}}_z$ .

Le réservoir cylindrique est fermé à une extrémité par une calotte de forme absolument quelconque schématisée sur la figure 13.2. La calotte est soumise aux efforts suivants :

1. Le résultat (13.27) est appelé *formule des chaudronniers*.

- La surface intérieure  $\mathcal{S}_i$  subit la pression  $p_i$  du fluide intérieur. Soit  $\underline{n}_i$  le champ de normales sortantes (*a priori* distinctes de  $-\underline{e}_r$ ).

$$\underline{t}^d = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_i = -p_i \underline{n}_i \quad (13.28)$$

- La surface extérieure  $\mathcal{S}_e$  subit la pression  $p_e$  du fluide extérieur. Soit  $\underline{n}_e$  le champ de normales sortantes (*a priori* distinctes de  $\underline{e}_r$ ).

$$\underline{t}^d = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_e = -p_e \underline{n}_e \quad (13.29)$$

- La couronne  $C$  est soumise à la densité surfacique homogène d'efforts  $-\Sigma \underline{e}_z$  :

$$\underline{t}^d = \underline{\sigma} \cdot (-\underline{e}_z) = -\Sigma \underline{e}_z \quad (13.30)$$

Etudier les conditions d'équilibre de la calotte.

On calcule d'abord l'effort résultant sur la couronne  $C$  :

$$\begin{aligned} \underline{R}_c &= \int_C \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \, ds = -\Sigma \int_C \underline{e}_z \, ds \\ &= -\Sigma \pi (r_e^2 - r_i^2) \underline{e}_z \end{aligned} \quad (13.31)$$

puis la résultante des efforts s'exerçant sur la surface  $\mathcal{S}_i$ . Pour cela, on appelle :

$$\partial\Omega_i = \mathcal{S}_i \cup D_i \quad (13.32)$$

où  $D_i$  est le disque de centre  $O'$  et de rayon  $r_i$  (cf. figure 13.2). La surface fermée  $\partial\Omega_i$  délimite le volume  $\Omega_i$ . On calcule alors :

$$\begin{aligned} \underline{R}_i &= \int_{\mathcal{S}_i} \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_i \, ds = \int_{\mathcal{S}_i} (p_i \underline{1}) \cdot (-\underline{n}_i) \, ds \\ &= \int_{\partial\Omega_i} (p_i \underline{1}) \cdot (-\underline{n}_i) \, ds - \int_{D_i} (p_i \underline{1}) \cdot (-\underline{e}_z) \, ds = \underbrace{\int_{\Omega_i} \operatorname{div} (p_i \underline{1}) \, dv}_0 + p_i \int_{D_i} \underline{e}_z \, ds \end{aligned} \quad (13.33)$$

$$= p_i \pi r_i^2 \underline{e}_z \quad (13.34)$$

On a utilisé le théorème de la divergence dans l'équation (13.33) et le fait que le champ  $p_i \underline{1}$  est constant sur  $\Omega_i$ . En effet, le champ de normales sortantes à la surface  $\partial\Omega_i$  de  $\Omega_i$  est  $-\underline{n}_i$ .

De même, on introduit le volume  $\Omega_e$  dont la frontière est

$$\partial\Omega_e = \mathcal{S}_e \cup D_e \quad (13.35)$$

où  $D_e$  est le disque de centre  $O'$  et de rayon  $r_e$ . On calcule alors

$$\begin{aligned} \underline{R}_e &= \int_{\mathcal{S}_e} \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_e \, ds = - \int_{\mathcal{S}_e} (p_e \underline{1}) \cdot \underline{n}_e \, ds \\ &= - \int_{\partial\Omega_e} (p_e \underline{1}) \cdot \underline{n}_e \, ds + \int_{D_e} (p_e \underline{1}) \cdot (-\underline{e}_z) \, ds \\ &= - \underbrace{\int_{\Omega_e} \operatorname{div} (p_e \underline{1}) \, dv}_0 + p_e \int_{D_e} (-\underline{e}_z) \, ds \end{aligned} \quad (13.36)$$

$$= -p_e \pi r_e^2 \underline{e}_z \quad (13.37)$$

Le théorème de la divergence a été utilisé à la ligne (13.36).

La calotte est en équilibre si la résultante des forces est nulle :

$$\underline{R}_c + \underline{R}_i + \underline{R}_e = 0 \quad (13.38)$$

d'où

$$\Sigma = \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \quad (13.39)$$

L'étape suivante consiste à calculer les moments qui s'appliquent sur la calotte. On commence par le moment par rapport à  $O'$  des forces s'exerçant sur  $\mathcal{S}_i$  :

$$\underline{\Gamma}_{O'}^{\mathcal{S}_i} = \int_{\mathcal{S}_i} \underline{O'M} \wedge (-p_i \underline{n}_i) ds = \int_{\mathcal{S}_i} \underline{O'M} \wedge p_i \underline{n}' ds \quad (13.40)$$

où  $\underline{n}' = -\underline{n}_i$ . On explicite ensuite le produit vectoriel précédent sous la forme :

$$\begin{aligned} [\underline{O'M} \wedge \underline{n}'] &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} n'_1 \\ n'_2 \\ n'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} yn'_3 - zn'_2 \\ zn'_1 - xn'_3 \\ xn'_2 - yn'_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n'_1 \\ n'_2 \\ n'_3 \end{bmatrix} = [\underline{\mathcal{A}} \cdot \underline{n}'] \end{aligned} \quad (13.41)$$

où  $x, y, z$  et  $n'_1, n'_2, n'_3$  sont respectivement les coordonnées cartésiennes du point  $M$  et du vecteur  $\underline{n}'$ . On a introduit le tenseur antisymétrique  $\underline{\mathcal{A}}$ . On vérifiera que le champ de tenseurs antisymétriques  $\underline{\mathcal{A}}$  a la propriété suivante :

$$\operatorname{div} \underline{\mathcal{A}} = 0 \quad (13.42)$$

En conséquence, l'équation (13.40) s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma}_{O'}^{\mathcal{S}_i} &= p_i \int_{\mathcal{S}_i} \underline{\mathcal{A}} \cdot \underline{n}' ds \\ &= p_i \int_{\partial\Omega_i} \underline{\mathcal{A}} \cdot \underline{n}' ds - p_i \int_{D_i} \underline{\mathcal{A}} \cdot (-\underline{e}_z) ds = p_i \int_{\Omega_i} \operatorname{div} \underline{\mathcal{A}} dv + p_i \int_{D_i} \underline{\mathcal{A}} \cdot \underline{e}_z ds \end{aligned} \quad (13.43)$$

$$= p_i \int_{D_i} \underline{O'M} \wedge \underline{e}_z ds = p_i \int_{D_i} r \underline{e}_r \wedge \underline{e}_z ds = 0 \quad (13.44)$$

Le théorème de la divergence a été utilisé à la ligne (13.43). Un calcul tout à fait analogue montre que

$$\underline{\Gamma}_{O'}^{\mathcal{S}_e} = 0 \quad (13.45)$$

Enfin,

$$\underline{\Gamma}_{O'}^{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} \underline{O'M} \wedge (-\Sigma \underline{e}_z) ds = \int_{\mathcal{C}} r \underline{e}_r \wedge \underline{e}_z ds = 0 \quad (13.46)$$

Le moment résultant est donc nul et la calotte est en équilibre si  $\Sigma$  est donnée par (13.39).

On n'a pas eu besoin de connaître point par point les champs  $\underline{n}_i$  et  $\underline{n}_e$  de sorte que les résultats obtenus sont valables quelle que soit la forme de la calotte s'appuyant sur la couronne  $\mathcal{C}$ .

### 13.1.6 Cas d'un tube mince

Indiquer la (les) composante(s) de contraintes prépondérante(s) dans le cas d'un tube mince.

On introduit le rayon  $R$  tel que

$$r_e = R + \frac{e}{2}, \quad r_i = R - \frac{e}{2} \quad (13.47)$$

Dans le cas d'un tube mince, on a

$$\frac{e}{R} \ll 1 \quad (13.48)$$

En conséquence, l'expression (13.27) devient

$$\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle = \frac{(p_i - p_e)R}{e} + \mathcal{O}(1) \quad (13.49)$$

On voit que la contrainte tangentielle moyenne devient d'autant plus grande, que  $e/R$  est petit. Il n'est pas possible d'établir ici strictement le résultat mais on peut d'ores-et-déjà l'annoncer :  $\sigma_{\theta\theta}$  devient prépondérante par rapport à  $\sigma_{rr}$  qui reste, quant à elle, de l'ordre de  $-p_e$  et  $-p_i$ .

Si le tube est libre d'efforts axiaux ( $\Sigma = 0$ , i.e. tube ouvert), le tube mince est essentiellement dans un état de **traction simple**. Le dimensionnement du réservoir sous pression va alors porter sur  $\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle$  afin d'éviter son éclatement.

Si le tube est fermé par une calotte, la contrainte axiale vaut :

$$\sigma_{zz} = \Sigma = \frac{(p_i - p_e)R}{2e} + \mathcal{O}(1) \simeq \frac{\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle}{2} \quad (13.50)$$

d'après le résultat (13.39). La contrainte axiale est donc deux fois moindre que la contrainte tangentielle qui reste donc prépondérante.

## 13.2 Elastostatique du réservoir sous pression

On considère à nouveau le problème du réservoir sous pression mais, dans cette partie, on prend explicitement en compte le comportement mécanique du matériau constitutif du tube. On considère que le comportement du matériau est convenablement décrit par l'élasticité linéarisée isotrope. La géométrie et le chargement mécanique sont indiqués sur la figure 13.1. Les composantes des déplacements, déformations et contraintes sont données dans le système de coordonnées cylindriques d'axe  $\underline{e}_z$ , axe du tube.

### 13.2.1 Distribution des déplacements, déformations et contraintes

Les conditions aux limites du problème ont été précisées au paragraphe 13.1.1. On adopte ici la méthode des déplacements. Postuler la forme du champ de déplacements que subit le tube. Trouver l'équation différentielle qui les régit, puis l'intégrer. Déterminer enfin déformations et contraintes de manière exhaustive. Distinguer *in fine* le cas du tube ouvert (libre selon  $z$ ) du cas du tube fermé.

Les propriétés de symétrie relatives à la géométrie, au chargement et au matériau ont été discutées au paragraphe 13.1.3. On en déduit en particulier que le champ de déplacement présente une symétrie de révolution. Il ne dépend *a priori* que des variables  $(r, z)$ . On le cherche sous la forme :

$$\underline{u} = f(r) \underline{e}_r + g(z) \underline{e}_z \quad (13.51)$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions inconnues à déterminer **Note non pertinente car difficile à établir.** L'argument  $g(z)$  est liée simplement à l'absence de gauchissement attendu pour des raisons de



#### 4.1.4 Changement de base

Les formules de transformation des composantes du tenseur des contraintes selon des bases quelconques correspondent aux formules de changement de base établies à la page A.1.1 de l'annexe A pour les tenseurs d'ordre 2 de variance quelconque.

On a seulement besoin dans ce chapitre de rappeler ces formules dans le cas d'un changement de bases orthonormées pour un tenseur euclidien d'ordre 2 :

$$\underline{e}'_i = Q_{ki} \underline{e}_k, \quad \underline{e}_i = Q_{ki}^{-1} \underline{e}'_k = Q_{ik} \underline{e}'_k \quad (4.21)$$

La matrice de passage formée des composantes  $Q_{ik}$  (premier indice : ligne, second indice : colonne) est orthogonale dans le cas d'un changement de bases orthonormées. Son inverse coïncide avec sa transposée. On peut dès lors établir les formules de changement de base pour le tenseur euclidien  $\underline{\sigma}$  :

$$\underline{\sigma} = \sigma_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \sigma'_{kl} \underline{e}'_k \otimes \underline{e}'_l = \sigma'_{kl} Q_{ik} Q_{jl} \underline{e}'_i \otimes \underline{e}'_j \quad (4.22)$$

L'identification des composantes dans la base  $(\underline{e}'_k \otimes \underline{e}'_l)_{i,j=1,3}$  conduit aux formules de passage suivantes :

$$\sigma_{kl} = Q_{ik} Q_{jl} \sigma'_{ij}, \quad \sigma'_{ij} = Q_{ki} Q_{lj} \sigma_{kl}, \quad (4.23)$$

En notation matricielle, cela donne

$$[\sigma'] = [Q]^T [\sigma] [Q] \quad (4.24)$$

On notera l'équivalence de forme entre les expressions de changement de base (4.23) et les expressions de changement de référentiel (4.17). Le sens en est certes différent, mais dans la pratique, les résultats établis en termes de changement de base (notamment les propriétés d'invariance) pourront être interprétés en termes de changement de référentiel.

## 4.2 Valeurs et directions principales des contraintes

### 4.2.1 Décomposition spectrale et invariants du tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes de Cauchy est une forme bilinéaire symétrique. Il est par conséquent diagonalisable : il possède trois valeurs propres réelles  $\sigma_i$ , appelées **contraintes principales** et trois vecteurs propres  $\underline{n}_i$  deux à deux orthogonaux, appelés **directions principales des contraintes** :

$$\underline{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \underline{n}_i \otimes \underline{n}_i, \quad \text{avec} \quad \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_i = \sigma_i \underline{n}_i \quad (4.25)$$

Dans la suite, on supposera que les contraintes principales sont rangées dans l'ordre décroissant tel que :

$$\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 \quad (4.26)$$

où  $\sigma_1$  est la contrainte normale maximale et  $\sigma_3$  la contrainte normale minimale. Il faut noter qu'en général les directions et contraintes principales du tenseur symétrique des contraintes de Piola sont distinctes de celles du tenseur des contraintes de Cauchy.

La base  $(\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3)$ , dite principale, constitue une base orthonormée de l'espace. La matrice des composantes du tenseur des contraintes de Cauchy dans cette base prend la forme diagonale :

$$[\underline{\sigma}]_{\text{principale}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

### Invariants des contraintes par changement de base

On appelle invariants des contraintes des fonctions à valeurs réelles des composantes du tenseur des contraintes qui ne dépendent pas du choix de la base de décomposition. De tels invariants existent pour tout endomorphisme. Les invariants principaux d'un endomorphisme sont définis au paragraphe A.3.1. Ils s'agit des coefficients du polynôme caractéristique de l'endomorphisme considéré, ou plus généralement de fonctions des racines de ce polynôme. Dans le cas du tenseur des contraintes, tenseur euclidien d'ordre 2 symétrique, ces racines sont les contraintes principales. Les expressions classiquement utilisées pour les invariants principaux sont :

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{trace } \underline{\sigma} \quad (4.28)$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = \frac{1}{2}((\text{trace } \underline{\sigma})^2 - \text{trace } \underline{\sigma}^2) = \text{trace } \underline{\sigma}^{-1} \det \underline{\sigma} \quad (4.29)$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \det \underline{\sigma} = \frac{1}{6}((\text{trace } \underline{\sigma})^3 - 3(\text{trace } \underline{\sigma})(\text{trace } \underline{\sigma}^2) + 2(\text{trace } \underline{\sigma}^3)) \quad (4.30)$$

La seconde relation utilisant l'inverse de  $\underline{\sigma}$  n'est bien sûr valable que si aucune contrainte principale n'est nulle. Les expressions précédentes indiquent que les ensembles  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ ,  $\{I_1, I_2, I_3\}$  et  $\{\text{trace } \underline{\sigma}, \text{trace } \underline{\sigma}^2, \text{trace } \underline{\sigma}^3\}$  contiennent la même information et sont donc équivalents. Ils méritent le nom d'invariants puisque leurs valeurs ne dépendent pas de la base ni du référentiel choisis. Ils sont équivalents à la connaissance des valeurs propres du tenseur des contraintes. A partir de là, on peut construire une multitude d'invariants comme autant de fonctions des trois valeurs propres du tenseur des contraintes.

#### 4.2.2 Contraintes normale et tangentielle, cisaillement

On décompose maintenant le vecteur–contrainte  $\underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$  s'appliquant sur une facette de normale  $\underline{n}$  en une composante normale  $\sigma_n$  et une composante tangentielle  $\underline{\tau}$  contenue dans le plan de la facette de norme  $\tau$  appelée contrainte tangentielle ou de **cisaillement** ou **cission** (cf. figure 4.1) :

$$\underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \sigma_n \underline{n} + \underline{\tau} \quad (4.31)$$

$$\text{avec } \sigma_n := \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = n_i \sigma_{ij} n_j \quad (4.32)$$

$$\tau^2 := \underline{t} \cdot \underline{t} - \sigma_n^2 \quad (4.33)$$

Lorsque la facette est normale à une direction principale des contraintes  $\underline{n} = \underline{n}_i$ , la composante tangentielle  $\underline{\tau}$  est nulle et  $\sigma_n$  est égal à la contrainte principale  $\sigma_i$ . Si l'on considère maintenant un parallélépipède dont les faces sont orthogonales aux vecteurs d'une base orthonormée ( $\underline{e}_i$ ), les 3 composantes du vecteur contrainte sur la facette de normale  $\underline{e}_i$  sont exactement les composantes  $\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, \sigma_{3i}$  du tenseur des contraintes dans cette base (i<sup>ème</sup> colonne de la matrice des composantes de  $\underline{\sigma}$  dans la base ( $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ )) :

$$\underline{t} = \sigma_{1i} \underline{e}_1 + \sigma_{2i} \underline{e}_2 + \sigma_{3i} \underline{e}_3 \quad (4.34)$$

Cette signification des composantes du tenseur des contraintes est illustrée sur la figure 4.2. On remarquera en particulier qu'en vertu de la symétrie du tenseur des contraintes, l'existence d'un cisaillement ou cission  $\sigma_{32}$  appliquée sur la facette de normale  $\underline{e}_2$  implique l'existence d'une cission  $\sigma_{23} = \sigma_{32}$  sur la face de normale  $\underline{e}_3$ . Le résultat s'étend à des facettes non nécessairement orthogonales entre elles de normales respectives  $\underline{n}$  et  $\underline{n}'$  :

$$\underline{t} \cdot \underline{n}' = \underline{t}' \cdot \underline{n}, \quad \text{où } \underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \text{ et } \underline{t}' = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}' \quad (4.35)$$

relation parfois dite de *réciprocité des cissions*.

#### 4.2.3 Représentation de Mohr

Comment le vecteur–contrainte en un point matériel donné varie-t-il lorsque l'on change l'orientation de la facette? Pour répondre à cette question, on adopte la représentation proposée par Otto Mohr qui consiste à travailler dans le plan  $(\sigma_n, \tau)$  des contraintes normales et tangentielles.

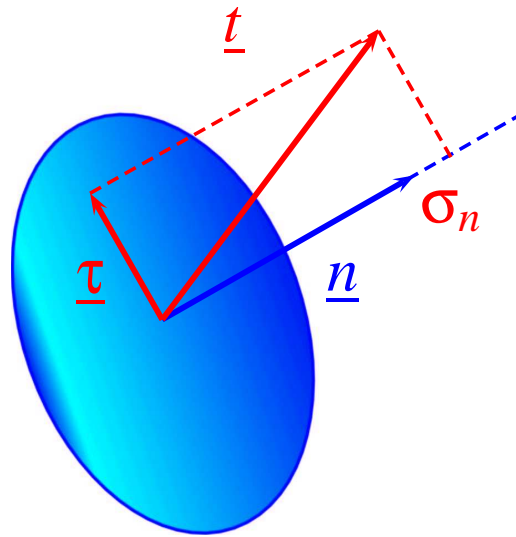


FIGURE 4.1 – Décomposition du vecteur–contrainte en contraintes normale et tangentielle sur une facette de normale  $\underline{n}$ .

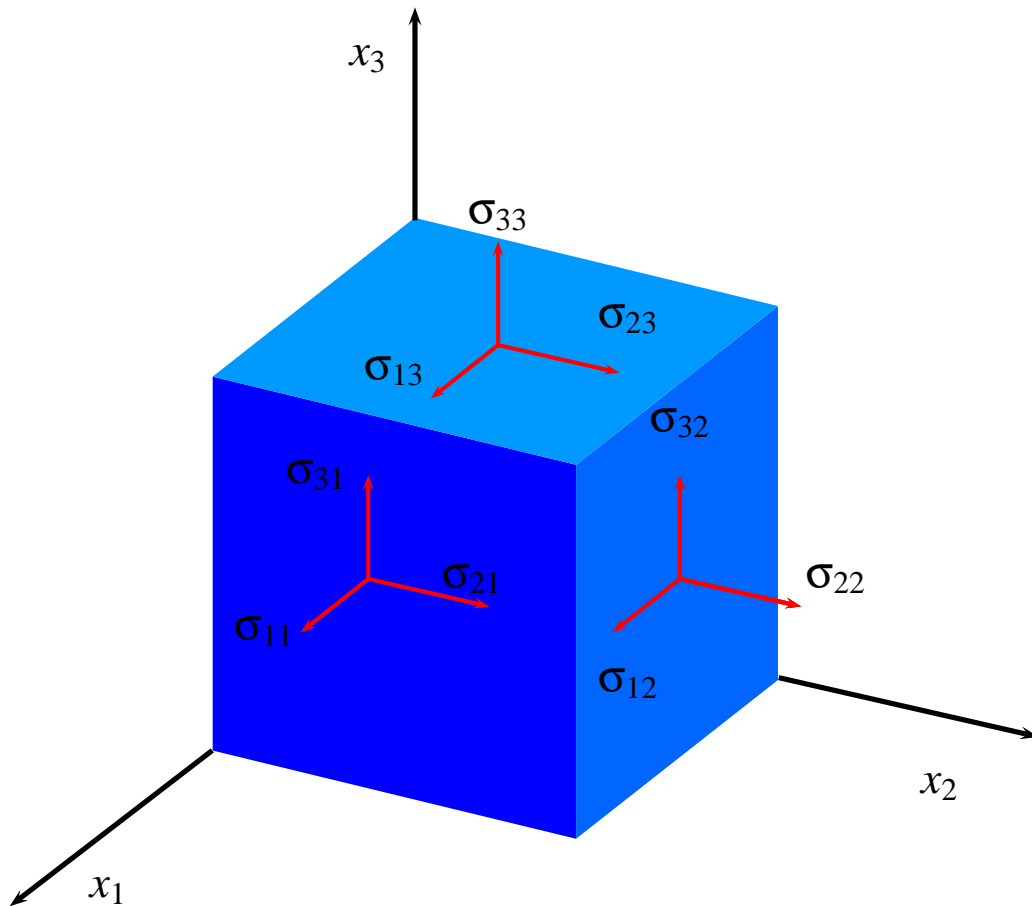


FIGURE 4.2 – Composantes des vecteurs-contraintes sur les faces d'un cube dans une base orthonormée.

Soient  $(n_1, n_2, n_3)$  les composantes d'un vecteur normal  $\underline{n}$  dans la base principale  $(\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3)$  de  $\underline{\sigma}$  donné et fixé. On établit d'abord les expressions reliant les composantes  $n_i$  et les contraintes normale  $\sigma_n$  et tangentielle  $\tau$ , par l'intermédiaire des contraintes principales  $\sigma_i$  rangées dans l'ordre décroissant

(4.26). Par définition (voir équation (4.27)),

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \sigma_1 n_1 \underline{n}_1 + \sigma_2 n_2 \underline{n}_2 + \sigma_3 n_3 \underline{n}_3 \quad (4.36)$$

de sorte que, d'après (4.32),

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad (4.37)$$

et d'après (4.33),

$$\sigma_n^2 + \tau^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \quad (4.38)$$

En ajoutant l'équation indiquant que la norme de  $\underline{n}$  est par définition égale à un, on peut interpréter les trois équations obtenues comme un système linéaire d'inconnues  $n_i^2$  :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sigma_n \\ \sigma_n^2 + \tau^2 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

La résolution du système (4.39) fournit<sup>5</sup> :

$$n_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \quad (4.41)$$

$$n_2^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \quad (4.42)$$

$$n_3^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \quad (4.43)$$

On remarque alors que la positivité des  $n_i^2$  implique les inégalités suivantes sur  $\sigma_n$  et  $\tau$  :

$$\begin{aligned} \tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) &\geq 0 \\ \tau^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) &\leq 0 \\ \tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) &\geq 0 \end{aligned}$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \quad (4.44)$$

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right)^2 + \tau^2 \leq \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 \quad (4.45)$$

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \quad (4.46)$$

La figure 4.3 représente les trois cercles de centres respectifs  $(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0)$ ,  $(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0)$ ,  $(\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}, 0)$  et de rayons respectifs  $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ ,  $\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$ ,  $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ , dans le plan de Mohr  $(\sigma_n, \tau)$ . Les inégalités (4.44) à (4.46) signifient que l'extrémité du vecteur-contrainte  $\underline{t}$  de coordonnées  $(\sigma_n, \tau)$  dans le plan de Mohr se situe à l'extérieur des deux premiers cercles mentionnés et à l'intérieur du plus grand cercle. La zone contenant *a priori* l'extrémité de  $\underline{t}$  est bleue sur la figure 4.3a. Ce domaine est délimité par les **cercles de Mohr**. Réciproquement, on peut établir que tout point  $(\sigma_n, \tau)$  donné de la zone bleue est atteint pour une direction  $\underline{n}$  donnée par les formules (4.41) à (4.43). En particulier les frontières du domaine constituées par les cercles de Mohr sont atteints respectivement pour  $n_3 = 0$ ,  $n_1 = 0$  ou  $n_2 = 0$ .

5. Pour obtenir le résultat sous la forme simple donnée par les équations (4.41) à (4.43), il faut remarquer que le déterminant de la matrice (4.39) (dite de Vandermonde) se met sous la forme

$$\sigma_2 \sigma_3^2 + \sigma_1 \sigma_2^2 + \sigma_3 \sigma_1^2 - \sigma_1^2 \sigma_2 - \sigma_3^2 \sigma_1 - \sigma_2^2 \sigma_3 = (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_3 - \sigma_1) \quad (4.40)$$

### Etude du grand cercle de Mohr

A titre d'exemple, on étudie plus spécifiquement le cas où l'extrémité du vecteur–contrainte est sur le grand cercle de Mohr. Les facettes concernées sont celles qui contiennent la seconde direction principale des contraintes  $\underline{n}_2$ .

On va suivre l'évolution du vecteur–contrainte lorsque la facette tourne autour de l'axe  $\underline{n}_2$ . Pour cela on construit un trièdre direct à l'aide de directions  $(\underline{n}_1, \underline{n}_3, \underline{n}_2)$  (changer au besoin le sens des vecteurs initialement choisis). Le vecteur normal évolue dans le plan  $(\underline{n}_1, \underline{n}_3)$  et fait l'angle  $\theta$  avec la direction  $\underline{n}_1$ . De

$$\underline{n} = \cos \theta \underline{n}_1 + \sin \theta \underline{n}_3$$

on tire

$$\underline{t} = \sigma_1 \cos \theta \underline{n}_1 + \sigma_3 \sin \theta \underline{n}_3$$

ce qui montre que le vecteur–contrainte n'a pas de composante selon  $\underline{n}_2$  pour les facettes étudiées. Il est donc possible de construire un trièdre direct  $(\underline{n}, \underline{m}, \underline{n}_2)$ . L'intérêt de cette définition est de pouvoir considérer la contrainte algébrique  $\tau$  (on n'avait jusqu'ici guère évoqué que son carré<sup>6</sup>) telle que

$$\underline{\tau} = \tau \underline{m}, \quad \text{avec} \quad \underline{m} = -\sin \theta \underline{n}_1 + \cos \theta \underline{n}_3$$

Les contraintes normale et tangentielle se calculent alors

$$\sigma_n = \underline{t} \cdot \underline{n} = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta \quad (4.47)$$

$$\tau = \underline{t} \cdot \underline{m} = -\sigma_1 \sin \theta \cos \theta + \sigma_3 \sin \theta \cos \theta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta \quad (4.48)$$

On reconnaît la représentation paramétrique du cercle centré en  $(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0)$  et de rayon  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ . On confirme donc que lorsque la facette tourne autour de l'axe  $\underline{n}_2$ , le vecteur–contrainte décrit le grand cercle de Mohr. En outre, lorsque  $\underline{n}$  tourne de l'angle  $\theta$ , le vecteur–contrainte se déplace sur le grand cercle d'un angle double dans le sens opposé. Cette situation est représentée sur la figure 4.3. Cette règle permet donc d'associer à chaque point du grand cercle l'orientation de la facette correspondant à cette valeur du vecteur–contrainte.

Le raisonnement conduit dans le plan  $(\underline{n}_1, \underline{n}_3)$  est identique pour les autres cercles principaux, en choisissant avec précaution le vecteur  $\underline{m}$  faisant un angle de  $\pi/2$  positif avec  $\underline{n}$ .

Une conséquence très importante des constructions précédentes est le

**Théorème 12 (Cisaillement maximal)** *Soit  $\underline{\sigma}$  le tenseur des contraintes en un point matériel, la contrainte tangentielle  $\tau_{\max}$  maximale subie sur les facettes lorsqu'on fait varier les normales  $\underline{n}$  vaut  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$  où  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$  sont respectivement les contraintes principales maximale et minimale. Elle s'exerce sur les facettes contenant la direction  $\underline{n}_2$ , à  $\pm\pi/4$  des directions  $\underline{n}_1$  et  $\underline{n}_3$ .*

Le résultat se lit sur le grand cercle de Mohr de la figure 4.3. L'orientation de la facette correspondante s'obtient avec  $2\theta = \pi/2$ .  $\square$

La construction de Mohr permet d'établir aussi que la contrainte normale maximale subie en un point matériel est bien la contrainte principale maximale  $\sigma_1$ .

## 4.3 Etats de contraintes remarquables

On peut classer les états de contraintes rencontrés dans les éprouvettes ou les composants industriels selon les valeurs des contraintes principales. On distingue alors les états de contraintes à une, deux ou trois contraintes principales imposées indépendantes.

6. Une telle définition algébrique de la cission n'est pas possible dans le cas général car il n'existe pas de choix naturel de  $\underline{m}$  pour toutes les facettes en un point donné. On doit alors se contenter d'une représentation dans le demi-plan  $(\sigma_n, |\tau|)$ .

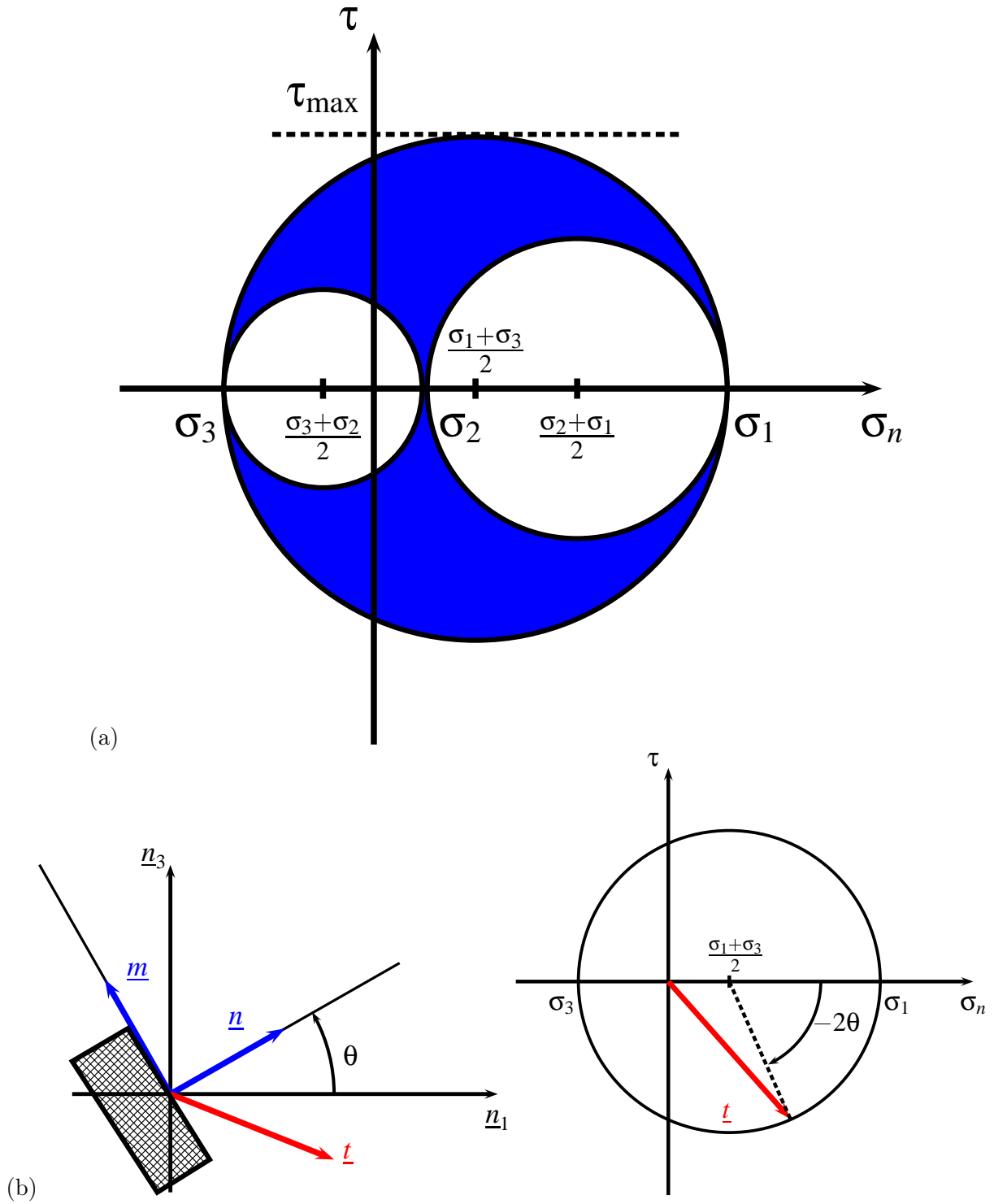


FIGURE 4.3 – Représentation de Mohr : (a) les cercles principaux, (b) vecteur-contrainte pour une facette contenant la direction principale des contraintes  $\underline{n}_2$ .

#### 4.3.1 Etat de traction/compression simple : $(\sigma, 0, 0)$

L'état de contrainte en un point est dit de traction simple lorsqu'il existe à chaque instant  $t$  un vecteur  $\underline{d}$  unitaire de l'espace tel que

$$\underline{\sigma} = \sigma \underline{d} \otimes \underline{d} \quad (4.49)$$

La direction  $\underline{d}$  s'appelle direction ou **axe de traction**. Il s'agit d'un état de contrainte **uni-axial**. La matrice de ses composantes prend la forme simple suivante dans la base  $(\underline{e}_1 = \underline{d}, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  :

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Un état de traction simple peut toutefois se cacher derrière une matrice de forme plus compliquée. Pour le voir, considérons l'axe de sollicitation suivant, dans une base orthonormée donnée  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  :

$$\underline{d} = \cos \alpha \underline{e}_1 + \sin \alpha \underline{e}_2$$

L'état de traction simple selon  $\underline{d}$  se décompose en

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= \sigma \underline{d} \otimes \underline{d} = \sigma (\cos \alpha \underline{e}_1 + \sin \alpha \underline{e}_2) \otimes (\cos \alpha \underline{e}_1 + \sin \alpha \underline{e}_2) \\ &= \sigma (\cos^2 \alpha \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sin^2 \alpha \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sin \alpha \cos \alpha (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)) \end{aligned} \quad (4.51)$$

ce qui, sous forme matricielle, donne

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma \cos^2 \alpha & \sigma \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ \sigma \sin \alpha \cos \alpha & \sigma \sin^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

C'est ainsi que les états de contraintes suivants

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} 50 & 50 & 0 \\ 50 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} 75 & 43 & 0 \\ 43 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

correspondent respectivement à une traction de 100 MPa selon la direction bissectrice de  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$  et à une traction de 100 MPa dans la direction contenue dans le plan  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$  et faisant un angle de  $30^\circ$  avec  $\underline{e}_1$ . Pour dévoiler l'état qui se cache derrière une matrice de chargement donné, il faut en faire l'analyse spectrale.

La représentation de Mohr de l'état de traction simple donnée dans le tableau 4.2, montre que les facettes perpendiculaires à l'axe de traction  $\underline{d}$  ne subissent qu'une contrainte normale égale à  $\sigma$ . Par contre, les facettes contenant l'axe  $\underline{d}$  sont libres de forces. Les autres facettes subissent à la fois des efforts normaux et tangentiels. La contrainte tangentielle maximale vaut  $\sigma/2$  sur les facettes dont les normales sont situées sur le cône faisant un angle de  $\pi/4$  avec  $\underline{d}$ .

Lorsque  $\sigma > 0$ , il s'agit d'un état de **traction**. Lorsque  $\sigma < 0$ , il s'agit d'un état de **compression**.

### 4.3.2 Etat de cisaillement simple : $(\tau, -\tau, 0)$

L'état de contraintes en un point donné est dit de cisaillement simple s'il existe deux directions orthogonales<sup>7</sup>  $\underline{d}_1$  et  $\underline{d}_2$  telles que

$$\underline{\sigma} = \tau (\underline{d}_1 \otimes \underline{d}_2 + \underline{d}_2 \otimes \underline{d}_1) \quad (4.53)$$

Ses composantes dans la base  $(\underline{e}_1 = \underline{d}_1, \underline{e}_2 = \underline{d}_2, \underline{e}_3)$  sont

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

7. Si l'état de contraintes prend la forme (4.53) avec  $\underline{d}_1, \underline{d}_2 = \cos \alpha$ , alors on vérifiera que les contraintes principales associées sont  $(\cos \alpha + 1)\tau$ ,  $(\cos \alpha - 1)\tau$  et 0. Les contraintes principales maximale et minimale sont opposées seulement lorsque  $\alpha = \pm \pi/2$ . Dans les autres cas, il s'agit d'un état de contrainte bi-axial analysé au paragraphe 4.3.3.

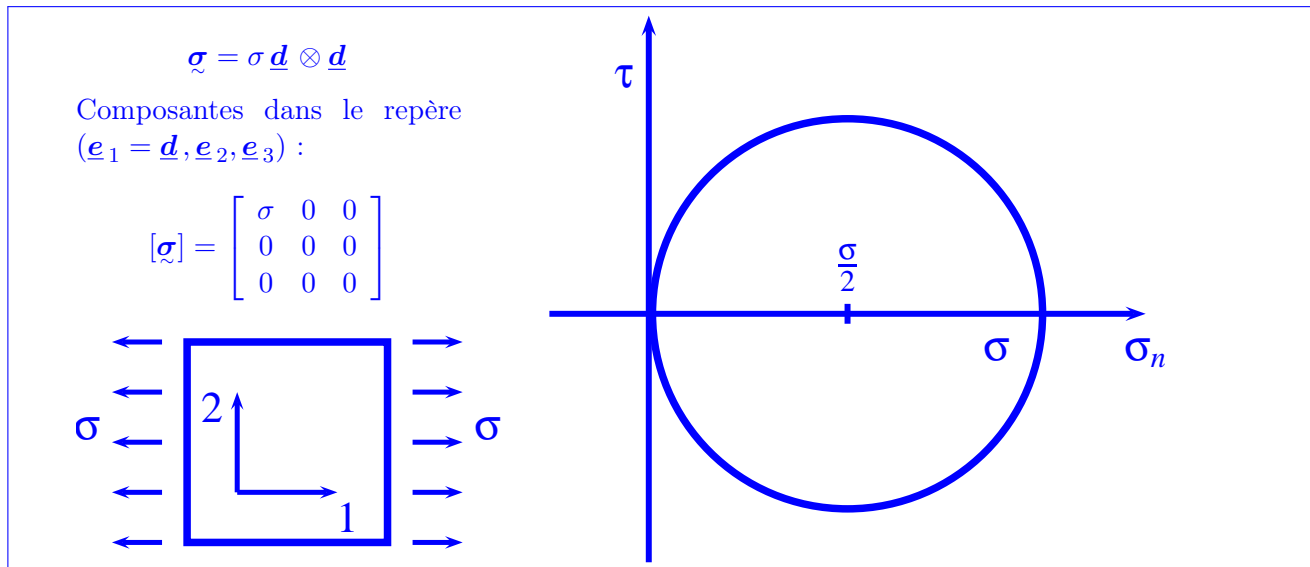


TABLE 4.2 – Récapitulatif : l'état de traction simple.

L'analyse spectrale de l'état de cisaillement simple conduit à

$$\sigma_1 = \tau, \quad \underline{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{d}_1 + \underline{d}_2) \quad (4.55)$$

$$\sigma_2 = 0, \quad \underline{n}_2 = \underline{d}_1 \wedge \underline{d}_2 \quad (4.56)$$

$$\sigma_3 = -\tau, \quad \underline{n}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{d}_1 - \underline{d}_2) \quad (4.57)$$

La matrice des composantes de l'état de contraintes (4.53) dans la base  $(\underline{n}_1, \underline{n}_3, -\underline{d}_1 \wedge \underline{d}_2)$  est donc

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Les facettes normales à  $\underline{n}_1$  subissent donc une contrainte normale de traction  $\tau$  et ne sont soumises à aucune contrainte tangentielle. Au contraire, les facettes normales à  $\underline{n}_3$  subissent une contrainte normale de compression  $-\tau$ . On peut donc interpréter l'état de cisaillement simple comme un état de contraintes bi-axial composé d'une traction selon  $\underline{n}_1$  et d'une compression de même valeur absolue selon  $\underline{n}_3$ . Cette propriété remarquable est illustrée par les figures du tableau 4.3.

#### 4.3.3 Etat de contraintes bi-axial / contraintes planes : $(\sigma_1, \sigma_2, 0)$

L'état de contraintes est dit **plan** dans le plan  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ , si, pour  $\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \wedge \underline{e}_2$ ,

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_3 = 0$$

La matrice des composantes dans la base orthonormée  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  s'écrit

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

On voit que l'une des contraintes principales est 0 pour la direction principale  $\underline{e}_3$ . Pour obtenir les deux autres contraintes principales, il faut diagonaliser la sous-matrice 2x2 contenant les composantes  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ . Il existe donc des directions  $\underline{d}_1$  et  $\underline{d}_2$  orthogonales telles que

$$\underline{\sigma} = \sigma_1 \underline{d}_1 \otimes \underline{d}_1 + \sigma_2 \underline{d}_2 \otimes \underline{d}_2 \quad (4.60)$$



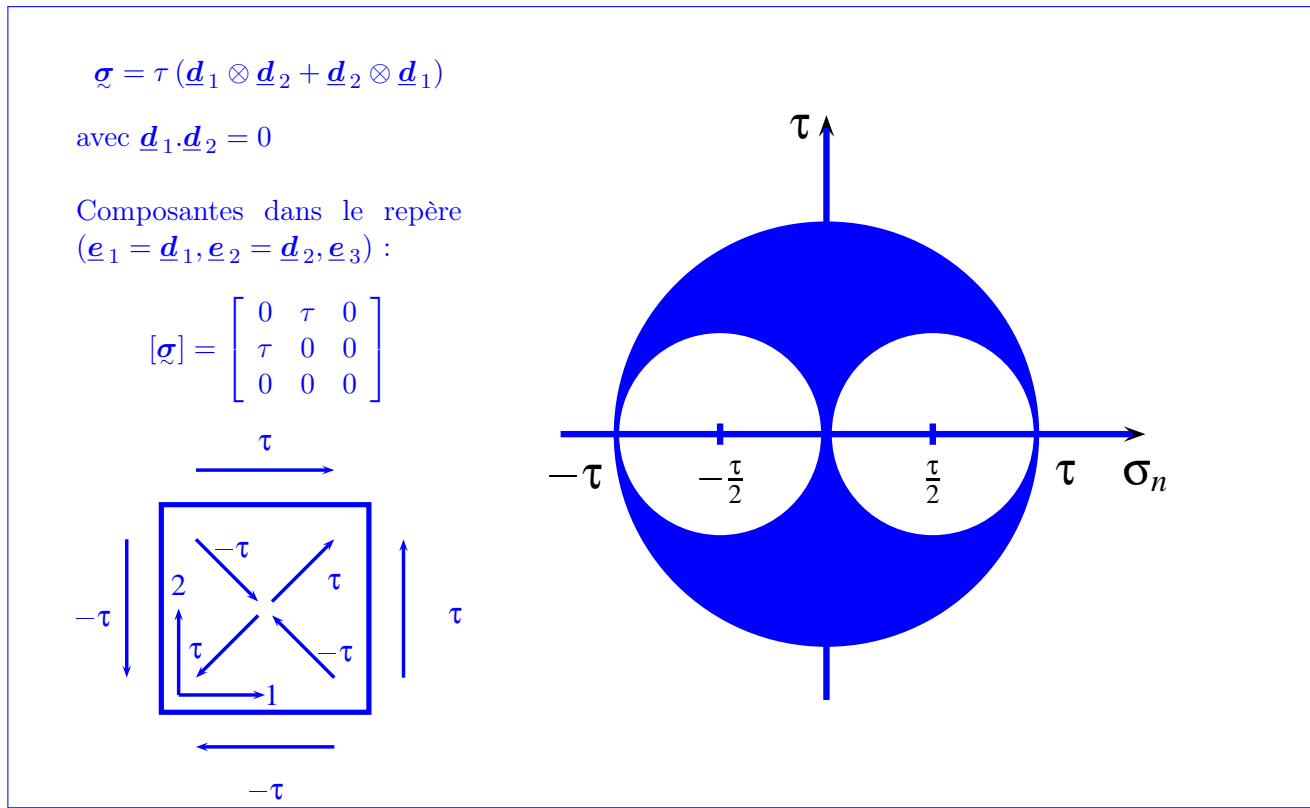


TABLE 4.3 – Récapitulatif : l'état de cisaillement simple.

La matrice des composantes de  $\underline{\sigma}$  donné par (4.59) prend la forme suivante dans la base  $(\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{e}_3)$

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

On parle d'un état de contrainte bi-axial puisque l'état de contraintes est contrôlé par les deux variables indépendantes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . La représentation de Mohr du tableau 4.4 montre que les facettes contenant la direction  $\underline{e}_3$  voient le cisaillement maximal (resp. la contrainte normale maximale)  $\sigma_1/2$  (resp.  $\sigma_1$ ) si  $\sigma_1 > 0$  et  $|\sigma|/2$  (resp. 0), si  $\sigma_1 = 0$ .

#### 4.3.4 Etat de contrainte tri-axial : $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

Lorsqu'aucune des contraintes principales n'est nulle, on parle d'état de contrainte tri-axial. La représentation de Mohr correspondante est sur la figure 4.3. En toute rigueur, on cherchera pour de tels essais mécaniques à imposer indépendamment chacune des contraintes principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

## 4.4 Critères en contrainte pour les matériaux isotropes

Comment peut-on comparer des états de contraintes entre eux ? On sait bien qu'il n'existe pas de relation d'ordre total sur l'espace des matrices ou des tenseurs d'ordre deux. Comment déclarer alors qu'un état de contrainte est plus sévère qu'un autre ? Il faut recourir à une norme ou plus généralement à une fonction scalaire du tenseur des contraintes, qui dépendra du facteur critique étudié (plasticité, rupture...) et du matériau. En effet, on peut utiliser une fonction **critère** pour délimiter un domaine de fonctionnement du matériau. Par exemple, pour des solides élastiques, on cherche à déterminer la limite en contrainte au-delà de laquelle la réponse du matériau n'est plus réversible. Au-delà de cette

$$\underline{\sigma} = \sigma_1 \underline{d}_1 \otimes \underline{d}_1 + \sigma_2 \underline{d}_2 \otimes \underline{d}_2$$

avec  $\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_2 = 0$

Composantes dans le repère  
( $\underline{e}_1 = \underline{d}_1, \underline{e}_2 = \underline{d}_2, \underline{e}_3$ ) :

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

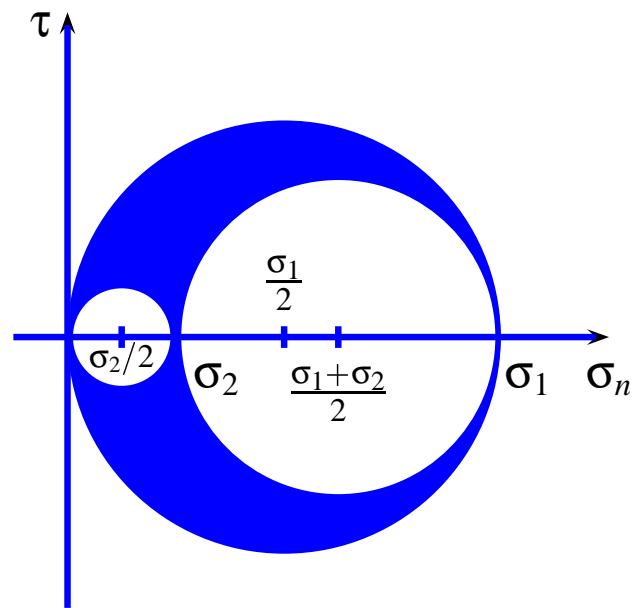
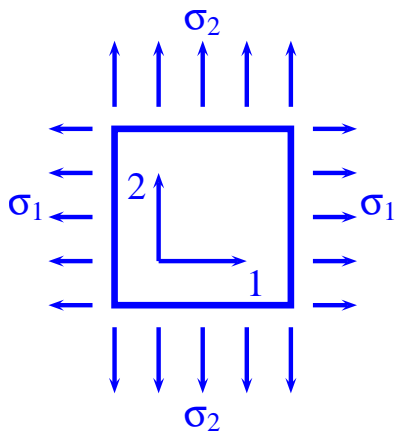


TABLE 4.4 – Récapitulatif : l'état de contraintes bi-axial.