Topologie & Calcul différentiel

Quizz 4

1) Calculer les matrices hessiennes (en précisant leurs domaines de définition) des fonctions suivantes :

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2\,,\;\; f(x_1,x_2) = x_1\,x_2\,,\;\; f(x_1,x_2) = \frac{x_1}{x_2}.$$

2) Soit f une fonction affine de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Alors f est deux fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n$, et $H(x)$ est la matrice nulle pour tout $x \in U$.

Vrai ☐ Faux ☐

3) Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, deux fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n$, et telle que $H(x)$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^n$. Alors f est affine.

Vrai ☐ Faux ☐

4) Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, deux fois continûment différentiable au voisinage d'un point $x \in \mathbb{R}^n$. On suppose que l'on connait $\langle H(x)\cdot h \,|\, h\rangle$ pour tout h de $\mathbb{R}^n$. Peut on en déduire la matrice $H(x)$?

Oui ☐ Non ☐

5) Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, qui s'écrit $g_1(x_1) + g_2(x_2)$, où g_1 et g_2 sont deux fonctions C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors f est deux fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}^2$, et la matrice $H(x)$ est diagonale en tout point.

Vrai ☐ Faux ☐

5) Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, qui s'écrit $g(x_2 - x_1)$, où g est une fonction C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors

Vrai ☐ Faux ☐ f est deux fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}^2$

Vrai ☐ Faux ☐ $H(x)$ est une matrice antisymétrique pour tout $x \in \mathbb{R}^2$

Vrai ☐ Faux ☐ $H(x)$ est de rang ≤ 1 pour tout $x \in \mathbb{R}^2$

Vrai ☐ Faux ☐ Le vecteur $(1,1)$ est dans $\ker H(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$