Apprentissage de la Programmation --- C++

Sujet d'évaluation

Context et modalités d'évaluation

L'objectit de ce sujet est d'étudier la résolution numérique de l'équation de la chaleur instationnaire.

Le problème à résoudre peut se formuler de la manière suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(D(x)\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0$$

$$T(x=0,t) = 0, \forall t$$

$$T(x=L,t) = 0, \forall t$$

$$T(x,0) = \frac{1}{2} + \sin(2\pi x) - \frac{1}{2}\cos(2\pi x)\ \forall x$$

La démarche pour résoudre ce problème est d'utiliser la méthode des différences finies. Le principe est le suivant :

1. On introduit une discrétisation en espace

$$x_0 = 0 < x_1 = \Delta x < x_2 = x_1 + \Delta x < ... < x_{i+1} = x_i + \Delta x < ... < x_{N-1} = 1.$$

2. A l'aide de cette discrétisation en espace nous pouvons approximer les dérivées spatiales de la manière suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x}\ ;\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1} - 2\cdot T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}$$

Où $T_i = T(x_i)$.

En introduisant alors cette discrétisation nous pouvons réécrire le problème initiale sous la forme matricielle suivante

$$\frac{\partial}{\partial t}\{T\} + [K]\cdot\{T\} = \{0\}$$

Avec $\{T\} \in \mathbb{R}^N$ le vecteur global des température en chaque point de la discrétisation et $[K] \in \mathbb{R}^{N\times N}$ la matrice de conductivité thermique qui s'exprime de la manière suivante :

$$[K]_{i,j} = \begin{cases} D_i \text{ si } j = i-1 \\ -D_i - D_{i+1} \text{ si } i = j \\ D_{i+1} \text{ si } j = i+1 \end{cases}$$

3. On introduit alors une discrétisation en temps :

$$t^0 = 0 < t^1 = \Delta t < t^2 = t^1 + \Delta t < ... < t^{k+1} = t^k + \Delta t < ... < t^{N_t - 1} = t_final$$

Nous pouvons alors discrétiser le terme de dérivée temporelle de la manière suivante en notant $\{T\}^{(k)} = \{T\}(t = t^k)$

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\{T\}^{(k+1)} - \{T\}^{(k)}\right) = -[K]\cdot\{T\}^{(??)}$$

La question apparaissant alors est prend-on (k) ou $(k+1)$ pour le terme de droite ? Les deux sont possibles est suivant le choix deux méthodes différentes en découlent

Euler Explicite : on prend (k) ce qui nous donne la relation :

$$\{T\}^{(k+1)} = \{T\}^{(k)} - \Delta t\,[K]\cdot\{T\}^{(k)}$$

Euler Implicite : on prend $(k+1)$ ce qui nous donne la relation :

$$([1]+\Delta t\,[K])\,\{T\}^{(k+1)} = \{T\}^{(k)}$$

Pour le moment nous prendrons pour la suite du sujet les valeurs numériques suivantes :

$$D(x) = 1\ \forall x,\ x \in [0,1],\ t \in [0,0.5]$$

Évaluation :

Code C++, fait en **autonomie** écrit dans le paradigme Orienté Objet rendu sous la forme d'un **dépôt Github**. Le lien du dépôt devra nous être envoyé avant le 7/01/2022 midi et le projet devra être terminé et accessible sur le dépôt au plus tard le **20/01/2022 à 23h59**.

Les critères d'évaluation seront :

1. La lisibilité du code : (i) code découpé en classe ; (ii) dans des fichiers séparés ; (iii) commenté
2. La modularité du code
3. Validation du code - base de tests
4. Simplicité de compilation du code - chaine de build (make/cmake/...) ou pas

Toute initiative personnelle sera bien entendu fortement appréciée.

Indication sur la notation : le sujet est décomposé en 4 questions plus 3 questions Bonus. Si vous faites les 4 premières questions seulement (et que cela fonctionne) cela correspondra à une note entre 10 et 15. Les questions bonus permettent d'aller vers le 20, elles sont toutes les 3 indépendantes vous pouvez donc faire celle(s) que vous souhaitez.

Question 1 :

Développer une classe *Matrix* permettant de représenter un objet de type matrice. Et implémenter les fonctionnalités nécessaires à la réalisation du projet à savoir :

1. Somme/différence de deux matrices
2. Produit matriciel
3. Produit d'une matrice par un scalaire

Il est fortement recommandé que vous mettiez en place quelques tests pour vérifier que vos opérations matricielles sont correctes.

Question 2 :

Mettre en place le code permettant de résoudre le problème de thermique instationnaire en utilisant le schéma Euler explicite. Attention au pas de temps que vous prenez !

Exporter les résultats dans un fichier texte et proposer un script Python permettant de tracer l'évolution de la température en fonction de x et t.

Question 3 :

Pour la résolution du problème de thermique vous allez avoir besoin de résoudre un système linéaire. Il vous faut donc implémenter une méthode de résolution d'un système linéaire. Vous pouvez choisir la méthode que vous souhaitez mais si vous n'avez pas de préférence je vous conseille d'implémenter la méthode du gradient conjugué.

Là encore il est fortement conseillé de mettre en place des tests pour vérifier le bon fonctionnement de la méthode.

Question 4 :

Mettre en place le code permettant de résoudre le problème de thermique instationnaire en utilisant le schéma **Euler Implicite**.

Exporter les résultats dans un fichier texte et proposer un script Python permettant de tracer l'évolution de la température en fonction de x et t.

Question Bonus 1 :

Considérons maintenant un milieu hétérogène, c'est-à-dire un $D(x)$ qui n'est plus constant. Pour cela générer un vecteur de D_i aléatoires dont les valeurs sont comprises entre 0.5 et 1.5. Refaire les résolutions des questions 2 et 4 (si elles ont bien été faites dès le début c'est instantanné ;)). **Attention** avec un D hétérogène la matrice K n'est plus symmétrique donc la résolution ne peut plus se faire à l'aide d'un gradient conjugué ...

Question Bonus 2 :

En utilisant le module chrono de la librairie standard C++ procéder à des mesures de temps de vos méthodes de résolutions pour les deux schémas temporels et pour différentes discrétisations spatiales.

Comment évolue le temps de calcul ?

Pour réduire ce temps de résolution une piste envisageable est de tirer parti de la stucture de la matrice K. En effet cette dernière est pleine de zéro. Pour optimiser cela nous devons utiliser une matrice creuse. Proposer une nouvelle implémentation de la classe Matrix en faisant du stockage creux et les opérations associées. Pour les plus malins vous avez le droit pour cette question de vous accrocher à une librairie externe ;)

Question Bonus 3 :

En utilisant une librairie graphique (celle que vous voulez) faire la visualisation en direct de l'évolution du champ de température en fonction de l'espace et du temps.