

# DOMANDE DEGLI ORALI DI ALGEBRA 1

14 gennaio 2016

## PREAPPELLO DI GENNAIO 2016

---

- Restiamo negli anelli commutativi unitari. Ce ne sono che hanno un numero finito di ideali massimali? Fai un po' di esempi. Posso trovare un anello che abbia  $m$  ideali massimali  $\forall m \in \mathbb{N}$ ?
- Supponiamo ora di avere  $A$  un UFD e supponiamo che  $|A| = +\infty$  e supponiamo che  $A^*$  sia finito. Dimostra che allora  $A$  contiene infiniti elementi primi. (Poi ci accontentiamo anche di  $\text{Char } A = 0$  ma ci assicura che si fa anche in caratteristica  $p$ )
- Conosci un gruppo finito che abbia esattamente due sottogruppi di indice due? (Suggerimento: I commutatori) Quanti possono essere i sottogruppi di indice due di un gruppo finito, ovvero quali numeri si realizzano?
- Prendo i polinomi a coefficienti interi in infinite variabili  $\mathbb{Z}[(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}]$ . Questo è un UFD?  
Ora al posto di infinite variabili mettiamo infiniti esponenti (razionali)  $B = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{Z}[x^{\frac{1}{n}}]$ .  $B$  è un UFD? (Suggerimento: ACCP non soddisfatta)
- $G$  gruppo che non ha sottogruppi normali di indice finito. Sia  $N \triangleleft G$  e  $N$  di ordine finito. Mostrare che  $N \subseteq Z(G)$  (Cioè  $N$  è sottogruppo del centro) (Suggerimento: Azioni furbe?)
- Consideriamo  $\mathbb{Q} \subseteq K_1, \dots, K_n$  estensioni distinte dei razionali tutte di grado tre su  $\mathbb{Q}$ . Se  $n = 2$  quali sono i possibili gradi del composto  $K_1 K_2$ ? Voglio ora determinare il minimo  $n$  tale che, per ogni scelta di  $K_1, \dots, K_n$  si abbia  $9 \mid [K_1 \dots K_n : \mathbb{Q}]$
- Parliamo di  $p$ -gruppi.  $|G| = p^3$ ,  $G$  non abeliano. Che dimensione ha il centro? Quante sono le classi di coniugio?
- Enuncia e dimostra il teorema di Cayley.  $|G| = n$ . Supponiamo ora  $n = 2d$  con  $d$  dispari. Mostrare che  $G$  possiede un sottogruppo di ordine  $d$ . Supponiamo ora che  $d$  sia squarefree, quindi  $|G| = 2p_1 \cdot \dots \cdot p_k$  con i  $p_i$  tutti distinti. Quanti gruppi  $G$  di quest'ordine ci sono? (Quanti sono se  $H \subseteq G, |H| = d$ ,  $H$  è ciclico?) (Mostrare poi che se  $|G| = 2d$  allora  $H \subseteq G$  di ordine  $d$  è abeliano)
- Prendiamo  $p = 13$  un primo e consideriamo  $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ . Quante sottoestensioni su  $\mathbb{Q}$  di grado 2 ci sono? Dato un sottogruppo di indice  $m$  di  $G_p^* \equiv \text{Gal}(\frac{\mathbb{Q}(\zeta_p)}{\mathbb{Q}})$  vorrei trovare un sottocampo di grado  $m$  su  $\mathbb{Q}$ , espresso come  $F = \mathbb{Q}(\alpha)$ . Dimostrare che è proprio lui ciò che cerchiamo.
- Prendo  $p, q$  primi distinti e vorrei dire che ogni gruppo di ordine  $p^2 q$  si scrive come prodotto semidiretto
- Prendo  $\mathbb{Z}$  e vorrei trovare due sottoinsiemi moltiplicativamente chiusi distinti  $S_1, S_2$  di  $\mathbb{Z}$  tali che  $S_1^{-1} \mathbb{Z} \equiv S_2^{-1} \mathbb{Z}$

- Prendo un ideale in  $A = \mathbb{Z}[x]$ . è vero che se non è massimale possono non bastare solo due generatori (al contrario di come invece avviene per quelli massimali)? (Riportiamo la soluzione integrale: Vero, notiamo che per  $I = (4, 2x, x^2) = ((2, x))^2$  e  $(2, x) = M$  è un ideale massimale. Quindi  $\frac{M}{M^2}$  è uno spazio vettoriale di dimensione 2 su  $\frac{A}{M}$ , che è un campo. Se prendo invece  $\frac{M^2}{M^3}$  e controllo che ha dimensione 3 concludo, perché il quoziente ha tre generatori quindi anche  $M^2$  deve averne almeno tre.)
- Sia  $G$  un  $p$ -gruppo.  $|G| = p^n$  e supponiamo che sia abeliano. Mostra che il numero di sottogruppi di ordine  $p$  è congruo a 1 modulo  $p$ . Vedere che ciò avviene anche per  $G$  non abeliano e per sottogruppi di ogni ordine.
- Consideriamo l'estensione ciclotomica  $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ , con  $p$  primo diverso da due. Esso avrà quindi un'unica sottoestensione (su  $\mathbb{Q}$ ) di grado 2 ed un'unica di grado  $\frac{p-1}{2}$ . Un'estensione quadratica di  $\mathbb{Q}$  si può sempre esprimere come  $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$ . Al variare di  $p$  stabilire se  $a$  è positivo o negativo.
- Com'è fatto un 2-Sylow di  $S_7$ ? (Suggerimento piccolissimo: 7 in base due si scrive come  $1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0$ )