

DOMANDE ORALI DI GAAL

15 giugno 2015

CONSIGLI PER L'ORALE

- L'orale è per la maggiorparte teorico, viene chiesto di conoscere bene e precisamente gli enunciati e le dimostrazioni (ed i controesempi) di tutto ciò che è stato fatto a lezione (tutto può essere chiesto)
- É molto importante conoscere benissimo le definizioni e precisarle sempre (ad esempio un autovettore deve essere diverso da 0)
- La Fortuna vuole molta precisione nelle risposte ed è meglio scriverle piuttosto che dirglieste solo a voce. E non dimenticatevi i quantificatori.
- Comunque sia agli orali non morde, ed ha alzato i voti mediamente di 4/5 punti a chi è andato bene e non li ha abbassati a nessuno)

SESSIONE GIUGNO 2015

1. W sottospazio vettoriale di \mathbb{K}^n . Rappresentazione parametrica e cartesiana (Chi è lo spazio dei parametri? Chi è l'applicazione $L_A : \mathbb{K}^k \rightarrow \mathbb{K}^n$ che ha come immagine W ? Che limiti abbiamo su s se scriviamo W come $\text{Ker } B$ con $L_B : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^s$?) Passaggio tra le due rappresentazioni.
2. $f \in \text{End}(V)$. Cos'è $m_f(t)$? Quali limitazioni abbiamo su $\deg m_f(t)$? Dimostrazione di Hamilton-Cayley. (Cosa significa che un polinomio è completamente fattorizzabile? Perché se A e B sono simili allora si ha $p_A(A) = 0 \Leftrightarrow p_B(B) = 0$? Perché $p(t) \cdot q(t) |_{t=A} = q(t) \cdot p(t) |_{t=A}$?)
3. $\dim V = n$ Cos'è una forma quadratica su V ? $Q(V)$ è uno spazio vettoriale? Che dimensione ha? (dimostrazione del fatto che abbia quella dimensione) Continua ad esistere un isomorfismo tra $Q(V)$ e $PS(V)$ anche se $\text{char } \mathbb{K} = 2$? (Trovare un controesempio).
4. Caratterizzazione della diagonalizzabilità attraverso il polinomio minimo. Perché il polinomio minimo e quello caratteristico hanno gli stessi fattori?
5. Considera, dati V e W \mathbb{K} -spazi vettoriali, $W \times V$ come spazio vettoriale. Dimmi come sono definite la somma ed il prodotto per scalari. Quant'è $\dim W \times V$? (NON è il prodotto tra le due) Dimostra Grassmann usando la formula delle dimensioni su $W \times V$
6. Considera \mathbb{R}^n come spazio affine euclideo. Cos'è una simmetria? Perché un'affinità si può scrivere come $AX + B$? Dimostra che se $f(0) = 0$ e f mantiene le combinazioni affini allora è lineare
7. Cos'è l'applicazione trasposta? Proprietà della trasposta, elencale e dimostrale. Se f è diagonalizzabile, la trasposta è diagonalizzabile? E viceversa?

8. A e ${}^t A$ sono simili? Dimostra che hanno lo stesso polinomio caratteristico e polinomio minimo.
9. Considera $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot | \cdot \rangle)$. Cos'è $O(\mathbb{R}^n, \langle \cdot | \cdot \rangle)$? Generatori di $O(\mathbb{R}^n, \langle \cdot | \cdot \rangle)$? (Ovvero decomposizione in riflessioni) Forma canonica di una simmetria?
10. Teorema di Rouché-Capelli. (Perché le operazioni di Gauss mantengono il rango della matrice? Dimostra che rango per righe è uguale al rango per colonne). Enuncia e dimostra il criterio dei minori invertibili e quello dei minori orlati.
11. Criterio dei minori principali e di Jacobi (Se ho solo l'ipotesi che solo alcuni dei determinanti dei minori principali siano diversi da 0 (cioè i primi r minori, mentre per quelli successivi non so nulla) cosa si può dire della segnatura?)
12. Date due coniche nel piano, come si decide se sono affinemente equivalenti o no? (Perché si usano matrici 3×3 per rappresentare le coniche in \mathbb{R}^2 ? Perché abbiamo scelto l'indice di Witt come invariante e non la segnatura?)
13. Dimostra che $\omega(\phi) = \min\{i_+(\phi), i_-(\phi)\} + \dim \text{Rad } \phi$ e decomposizione di Witt
14. Dimostra che esiste una base ciclica per $f \Leftrightarrow m_f(t) = \pm p_f(t)$
15. Quante sono le famiglie di paraboloidi in \mathbb{R}^3 ? (ovvero quante forme canoniche di quadriche paraboloidi esistono) Che conica è il luogo dei punti equidistanti da una sfera e da un piano esterno ad essa?
16. Data una matrice simmetrica $S \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ e definita positiva $\exists! A \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ definita positiva t.c. $S = A^2$
17. Dimostra che una matrice triangolare in uno spazio euclideo può essere triangolata attraverso una matrice ortogonale
18. Teorema di Triangolabilità
19. $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$. f diretta e con almeno un punto fisso. Che tipo di isometria può essere? Dimostra il teorema di classificazione delle isometrie. Senza usare il teorema di classificazione, come potevi arrivare allo stesso risultato? (Numero di riflessioni che servono per generarla)
20. V spazio vettoriale, $\phi \in \text{PS}(V)$, W sottospazio vettoriale di V . Condizioni per cui $\phi|_W$ è non degenere. (Se ϕ è non degenere, $\phi|_W$ è non degenere?) Dimostra $\phi|_W$ è non degenere $\Leftrightarrow V = W^\perp \oplus W$
21. Teorema di Sylvester reale (e spiegazione dell'algoritmo di Lagrange)
22. Trovare una famiglia infinita di rette di \mathbb{R}^3 a due a due sghembe
23. $\phi \in \text{PS}(V)$ definito positivo. (V, ϕ) euclideo. $f \in \text{End}(V)$. $\Psi(x, y) := \phi(f(x), f(y))$. Calcolare la segnatura di Ψ
24. $\phi : V \times V^* \rightarrow \mathbb{K}$ definita da $(v, f) \mapsto f(v)$ è bilineare? Calcolane radicale destro e radicale sinistro. Perché potevi dire che $\text{Rad}_{SX} \phi = \{0\}$ anche solo sapendo che $\text{Rad}_{DX} \phi = \{0\}$? (siccome $\dim V = \dim V^*$ il rango di $m_B(\phi)$ è molto utile)
25. Teorema di Riesz e definizione di aggiunto
26. (V, ϕ) euclideo. $f = f^* \implies f$ ortogonalmente diagonalizzabile.
27. (V, ϕ) euclideo. $f \circ f^* = f^* \circ f \implies \exists \mathcal{B}$ t.c. $m_B(f)$ è simmetrica.