DOMANDE DEGLI ORALI DI ALGEBRA 1

1 febbraio 2016

PREAPPELLO DI GENNAIO 2016

- Restiamo negli anelli commutativi unitari. Ce ne sono che hanno un numero finito di ideali massimali? Fai un po' di esempi. Posso trovare un anello che abbia m ideali massimali $\forall m \in \mathbb{N}$?
- Supponiamo ora di avere A un UFD e supponiamo che $\mid A \mid = +\infty$ e supponiamo che A^* sia finito. Dimostra che allora A contiene infiniti elementi primi. (Poi ci accontentiamo anche di Char $A = 0$ ma ci assicura che si fa anche in caratteristica p)
- Conosci un gruppo finito che abbia esattamente due sottogruppi di indice due? (Suggerimento: I commutatori) Quanti possono essere i sottogruppi di indice due di un gruppo finito, ovvero quali numeri si realizzano?
- Prendo i polinomi a coefficienti interi in infinite variabili $\mathbb{Z}[(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}]$. Questo è un UFD?
  Ora al posto di infinite variabili mettiamo infiniti esponenti (razionali) $B = \cup_{n \geq 0} \mathbb{Z}[x^{\frac{1}{n}}]$. B è un UFD? (Suggerimento: ACCP non soddisfatta)
- G gruppo che non ha sottogruppi normali di indice finito. Sia $N \lhd G$ e N di ordine finito. Mostrare che $N \sqsubseteq Z(G)$ (Cioè N è sottogruppo del centro) (Suggerimento: Azioni furbe?)
- Consideriamo $\mathbb{Q} \subseteq K_1, \ldots, K_n$ estensioni distinte dei razionali tutte di grado tre su $\mathbb{Q}$. Se $n = 2$ quali sono i possibili gradi del composto $K_1 K_2$? Voglio ora determinare il minimo n tale che, per ogni scelta di $K_1, \ldots, K_n$ si abbia $9 \mid [K_1 \ldots K_n : \mathbb{Q}]$
- Parliamo di p-gruppi. $\mid G \mid = p^3$, G non abeliano. Che dimensione ha il centro? Quante sono le classi di coniugio?
- Enuncia e dimostra il teorema di Cayley. $\mid G \mid = n$. Supponiamo ora $n = 2d$ con d dispari. Mostrare che G possiede un sottogruppo di ordine d. Supponiamo ora che d sia squarefree, quindi $\mid G \mid = 2p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ con i p_i tutti distinti. Quanti gruppi G di quest'ordine ci sono? (Quanti sono se $H \sqsubseteq G, \mid H \mid = d$, H è ciclico?)
- Prendiamo $p = 13$ un primo e consideriamo $\mathbb{Q}(\zeta_p)$. Quante sottoestensioni su $\mathbb{Q}$ di grado 2 ci sono? Dato un sottogruppo di indice m di $C_p^* \equiv \text{Gal}\left(\frac{\mathbb{Q}(\zeta_p)}{\mathbb{Q}}\right)$ vorrei trovare un sottocampo di grado m su $\mathbb{Q}$, espresso come $F = \mathbb{Q}(\alpha)$. Dimostrare che è proprio lui ciò che cerchiamo.
- Prendo p, q primi distinti e vorrei dire che ogni gruppo di ordine $p^2 q$ si scrive come prodotto semidiretto
- Prendo $\mathbb{Z}$ e vorrei trovare due sottoinsiemi moltiplicativamente chiusi distinti S_1, S_2 di $\mathbb{Z}$ tali che $S_1^{-1}\mathbb{Z} \equiv S_2^{-1}\mathbb{Z}$

- Prendo un ideale in $A = \mathbb{Z}[x]$. è vero che se non è massimale possono non bastare solo due generatori (al contrario di come invece avviene per quelli massimali)? (Riportiamo la soluzione integrale: Vero, notiamo che per $I = (4, 2x, x^2) = ((2, x))^2$ e $(2, x) = M$ è un ideale massimale. Quindi $\frac{M}{M^2}$ è uno spazio vettoriale di dimensione 2 su $\frac{A}{M}$, che è un campo. Se prendo invece $\frac{M^2}{M^3}$ e controllo che ha dimensione 3 concludo, perché il quoziente ha tre generatori quindi anche M^2 deve averne almeno tre.)

- Sia G un p-gruppo. $\mid G \mid = p^n$ e supponiamo che sia abeliano. Mostra che il numero di sottogruppi di ordine p è congruo a 1 modulo p. Vedere che ciò avviene anche per G non abeliano e per sottogruppi di ogni ordine.

- Consideriamo l'estensione ciclotomica $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$, con p primo diverso da due. Esso avrà quindi un'unica sottoestensione (su $\mathbb{Q}$) di grado 2 ed un'unica di grado $\frac{p-1}{2}$. Un'estensione quadratica di $\mathbb{Q}$ si può sempre esprimere come $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$. Al variare di p stabilire se a è positivo o negativo.

- Com'è fatto un 2-Sylow di $S7$? (Suggerimento piccolissimo: 7 in base due si scrive come $1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0$)

Sessione di Fine Gennaio 2016

- Trova un esempio di anello commutativo unitario A nel quale esiste una catena ascendente infinita e non stazionaria di ideali $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$

- G gruppo finito e $H \sqsubseteq G$ un sottogruppo che interseca ogni classe di coniugio. Ovvero $\forall x \in G \exists g \in G \quad$ t.c. $gxg^{-1} \in H$. Dimostrare allora che $H = G$. (Suggerimenti: Considerare l'azione di coniugio di G sui sottogruppi coniugati di H e dimostrare che H è normale)

- Costruisci un'estensione di Galois con gruppo di Galois D_5 (puoi scegliere tu i campi)

- Come sono fatti i 2-Sylow ed i 3-Sylow di S_9. Che gruppi sono?

- L'unione di tre sottogruppi propri (tali che nessuno sia contenuto in qualcun'altro) può essere un sottogruppo? Se $G = C_p \times C_p$ si può fare (esistono tre sottogruppi tali che)? Qual è il minimo numero di sottogruppi propri tali che la loro unione sia tutto $C_p \times C_p$?

- A dominio euclideo. $B \subset A$ è un sottoanello (unitario). è vero o no che B è a sua volta un dominio euclideo? (Con una qualunque funzione grado)

- Prendiamo il campo di spezzamento di un polinomio di terzo grado su $\mathbb{Q}$. Quali radici dell'unità può contenere? (Ovvero ζ_n per quali n). E se prendiamo un polinomio di grado quattro? (Suggerimento: usando corrispondenza di Galois deve essere che il gruppo Gal $(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$ si ottiene come quoziente di S_4)

- Supponiamo che G sia generato da n elementi $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$. $H \sqsubseteq G$. Esistono per forza $\geq n$ elementi che generano H? E se G è abeliano finito?

- Ci sono anelli c.u. A tali che $(A^*, \cdot) \cong (\mathbb{Z}, +)$ come gruppo? (Suggerimento: $(\mathbb{Z}, +)$ ha solo elementi di ordine infinito. Può essere che $\mathbb{Z}_m$ si immerga in A (come sottoanello)? Che ordine ha $\{-1\}$? Se esiste deve avere $\mathbb{Z}_2$ come sottoanello fondamentale. A questo punto posso considerare $S = \{1, x, x^2, \ldots\}$ e $B = \mathbb{F}_2[x]$ allora $A = S^{-1}B$ è un anello cercato.

- Classificare i gruppi di ordine $3 \cdot 5 \cdot 7$. Chi sono i sottogruppi normali di $\mathbb{Z}_{35} \rtimes_\phi \mathbb{Z}_3$?