

# DOMANDE ORALI DI GAAL

5 gennaio 2016

## CONSIGLI PER L'ORALE

---

- L'orale è per la maggiorparte teorico, viene chiesto di conoscere bene e precisamente gli enunciati e le dimostrazioni (ed i controesempi) di tutto ciò che è stato fatto a lezione (tutto può essere chiesto)
- É molto importante conoscere benissimo le definizioni e precisarle sempre (ad esempio un autovettore deve essere diverso da 0)
- La Fortuna vuole molta precisione nelle risposte ed è meglio scriverle piuttosto che dirghele solo a voce. E non dimenticatevi i quantificatori.
- Comunque sia agli orali non morde, ed ha alzato i voti mediamente di 4/5 punti a chi è andato bene e non li ha abbassati a nessuno)

## SESSIONE GIUGNO 2015

---

1.  $W$  sottospazio vettoriale di  $\mathbb{K}^n$ . Rappresentazione parametrica e cartesiana (Chi è lo spazio dei parametri? Chi è l'applicazione  $L_A : \mathbb{K}^k \rightarrow \mathbb{K}^n$  che ha come immagine  $W$ ? Che limiti abbiamo su  $s$  se scriviamo  $W$  come  $\text{Ker } B$  con  $L_B : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^s$ ?) Passaggio tra le due rappresentazioni.
2.  $f \in \text{End}(V)$ . Cos'è  $m_f(t)$ ? Quali limitazioni abbiamo su  $\deg m_f(t)$ ? Dimostrazione di Hamilton-Cayley. (Cosa significa che un polinomio è completamente fattorizzabile? Perché se  $A$  e  $B$  sono simili allora si ha  $p_A(A) = 0 \Leftrightarrow p_B(B) = 0$ ? Perché  $p(t) \cdot q(t) |_{t=A} = q(t) \cdot p(t) |_{t=A}$ ?)
3.  $\dim V = n$  Cos'è una forma quadratica su  $V$ ?  $Q(V)$  è uno spazio vettoriale? Che dimensione ha? (dimostrazione del fatto che abbia quella dimensione) Continua ad esistere un isomorfismo tra  $Q(V)$  e  $PS(V)$  anche se  $\text{char } \mathbb{K} = 2$ ? (Trovare un controesempio).
4. Caratterizzazione della diagonalizzabilità attraverso il polinomio minimo. Perché il polinomio minimo e quello caratteristico hanno gli stessi fattori?
5. Considera, dati  $V$  e  $W$   $\mathbb{K}$ -spazi vettoriali,  $W \times V$  come spazio vettoriale. Dimmi come sono definite la somma ed il prodotto per scalari. Quant'è  $\dim W \times V$ ? (NON è il prodotto tra le due) Dimostra Grassmann usando la formula delle dimensioni su  $W \times V$
6. Considera  $\mathbb{R}^n$  come spazio affine euclideo. Cos'è una simmetria? Perché un'affinità si può scrivere come  $AX + B$ ? Dimostra che se  $f(0) = 0$  e  $f$  mantiene le combinazioni affini allora è lineare
7. Cos'è l'applicazione trasposta? Proprietà della trasposta, elencale e dimostrale. Se  $f$  è diagonalizzabile, la trasposta è diagonalizzabile? E viceversa?

8.  $A$  e  ${}^t A$  sono simili? Dimostra che hanno lo stesso polinomio caratteristico e polinomio minimo.
9. Considera  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ . Cos'è  $O(\mathbb{R}^n, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ? Generatori di  $O(\mathbb{R}^n, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ? (Ovvero decomposizione in riflessioni) Forma canonica di una simmetria?
10. Teorema di Rouché-Capelli. (Perché le operazioni di Gauss mantengono il rango della matrice? Dimostra che rango per righe è uguale al rango per colonne). Enuncia e dimostra il criterio dei minori invertibili e quello dei minori orlati.
11. Criterio dei minori principali e di Jacobi (Se ho solo l'ipotesi che solo alcuni dei determinanti dei minori principali siano diversi da 0 (cioè i primi  $r$  minori, mentre per quelli successivi non so nulla) cosa si può dire della segnatura?)
12. Date due coniche nel piano, come si decide se sono affinemente equivalenti o no? (Perché si usano matrici  $3 \times 3$  per rappresentare le coniche in  $\mathbb{R}^2$ ? Perché abbiamo scelto l'indice di Witt come invariante e non la segnatura?)
13. Dimostra che  $\omega(\phi) = \min\{i_+(\phi), i_-(\phi)\} + \dim \text{Rad } \phi$  e decomposizione di Witt
14. Dimostra che esiste una base ciclica per  $f \Leftrightarrow m_f(t) = \pm p_f(t)$
15. Quante sono le famiglie di paraboloidi in  $\mathbb{R}^3$ ? (ovvero quante forme canoniche di quadriche paraboloidi esistono) Che conica è il luogo dei punti equidistanti da una sfera e da un piano esterno ad essa?
16. Data una matrice simmetrica  $S \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$  e definita positiva  $\exists! A \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$  definita positiva t.c.  $S = A^2$
17. Dimostra che una matrice triangolare in uno spazio euclideo può essere triangolata attraverso una matrice ortogonale
18. Teorema di Triangolabilità
19.  $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ .  $f$  diretta e con almeno un punto fisso. Che tipo di isometria può essere? Dimostra il teorema di classificazione delle isometrie. Senza usare il teorema di classificazione, come potevi arrivare allo stesso risultato? (Numero di riflessioni che servono per generarla)
20.  $V$  spazio vettoriale,  $\phi \in \text{PS}(V)$ ,  $W$  sottospazio vettoriale di  $V$ . Condizioni per cui  $\phi|_W$  è non degenerare. (Se  $\phi$  è non degenerare,  $\phi|_W$  è non degenerare?) Dimostra  $\phi|_W$  è non degenerare  $\Leftrightarrow V = W^\perp \oplus W$
21. Teorema di Sylvester reale (e spiegazione dell'algoritmo di Lagrange)
22. Trovare una famiglia infinita di rette di  $\mathbb{R}^3$  a due a due sghembe
23.  $\phi \in \text{PS}(V)$  definito positivo.  $(V, \phi)$  euclideo.  $f \in \text{End}(V)$ .  $\Psi(x, y) := \phi(f(x), f(y))$ . Calcolare la segnatura di  $\Psi$
24.  $\phi : V \times V^* \rightarrow \mathbb{K}$  definita da  $(v, f) \mapsto f(v)$  è bilineare? Calcolane radicale destro e radicale sinistro. Perché potevi dire che  $\text{Rad}_{SX}\phi = \{0\}$  anche solo sapendo che  $\text{Rad}_{DX}\phi = \{0\}$ ? (siccome  $\dim V = \dim V^*$  il rango di  $m_B(\phi)$  è molto utile)
25. Teorema di Riesz e definizione di aggiunto
26.  $(V, \phi)$  euclideo.  $f = f^* \implies f$  ortogonalmente diagonalizzabile.
27.  $(V, \phi)$  euclideo. Sia  $f$  triangolabile.  $f \circ f^* = f^* \circ f \implies \exists B$  t.c.  $m_B(f)$  è simmetrica.

1. Condizioni equivalenti all'anisotropia di un prodotto scalare in  $\mathbb{R}$  ed in  $\mathbb{C}$
2. Dimostrazione della decomposizione di Witt
3. Definizione di spazio e sottospazio affine. Esistenza ed unicità della giacitura per sottospazi affini
4. Le matrici diagonalizzabili sono un sottospazio vettoriale di  $\mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$ ?
5. Dimostra che una matrice è diagonalizzabile se e solo se il suo polinomio minimo è prodotto di fattori lineari distinti
6. Cos'è una conica? Mostra che il suo supporto è ben definito (cioè non dipende dal rappresentante della classe di euivalenza di polinomi). Il supporto individua completamente la conica? Mostra esempi di coniche diverse in  $\mathbb{R}^2$  che hanno gli stessi supporti. Continua ad essere vero anche in  $\mathbb{C}^2$ ? Esistono coniche con supporto costituito da un solo punto in  $\mathbb{C}^2$ ?
7. Dimostrazione del Teorema di Rouché-Capelli. Cosa si intende per rango di una matrice? Dimostrazione del criterio dei minori invertibili e caratterizzazione del rango come numero di pivot di una ridotta a scalini.
8.  $f \in \text{End}(V)$  e consideriamo l'applicazione trasposta  ${}^t f$ . Supponiamo che  $f$  sia triangolabile. Posso dire qualcosa sulla forma di Jordan di  ${}^t f$ , se esiste? Mostrare poi che  $p_A(t) = p_{{}^t A}(t)$
9. Prendiamo  $V$  come spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  ed in  $\text{PS}(V)$  prendiamo l'insieme  $T$  dei prodotti scalari con segnatura fissata  $\sigma = (a, b, c)$ . Per quali  $a, b, c$   $T$  è uno spazio vettoriale? Si può dire qualcosa sul sottospazio vettoriale generato da  $T$ ? (Ad esempio, può essere tutto  $\text{PS}(V)$ )
10. Cos'è l'ideale di un endomorfismo? Perché per ciascun endomorfismo esiste un polinomio  $\neq 0$  nell'ideale? (a priori l'ideale potrebbe essere l'ideale banale) Dimostrazione di Hamilton-Cayley.
11. Sia  $\varphi$  prodotto scalare definito positivo su  $V$ , spazio vettoriale reale.  $f \in \text{End}(V)$ . Sia  $b(x, y) := \varphi(f(x), f(y))$ . Qual è la segnatura di  $b$ ? Se invece  $\varphi$  è solo non degenerare (ma comunque non definito) cosa si può dire di  $\sigma(b)$ ?
12. Se hai un'isometria in  $\mathbb{R}^3$ , inversa e con almeno un punto fisso. Cosa si può dire? Inoltre, cosa può essere la composizione di 3 riflessioni (in  $\mathbb{R}^3$ )? Fai un esempio di un'isometria che composta con una traslazione abbia qualche punto fisso. È vero che per ogni isometria  $f$  esiste una traslazione  $\tau$  tale che  $\text{Fix}(\tau \circ f) \neq \emptyset$ ?
13. Prendiamo due ellissi in  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$ . Siano poi  $P_1 \in \text{Supp } \mathcal{C}_1, P_2 \in \text{Supp } \mathcal{C}_2$ . Esiste sempre un'affinità  $\varphi$  tale che  $\varphi(P_1) = P_2, \varphi(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$ ? L'affinità che manda una conica nel suo modello canonico è unica? Definizione di conica. Cosa significa applicare un'affinità ad una conica?
14. Enuncia e dimostra il teorema di Sylvester reale e complesso. Quand'è che due prodotti scalari si dicono isometrici? Sylvester ci permette di dire se due prodotti scalari sono isometrici? Definizione di  $i_+, i_-, i_0(\varphi)$ ?

15. Cosa significa che una matrice simmetrica è definita positiva? Ha qualcosa a che fare con gli autovalori della matrice? Enuncia e dimostra il criterio dei minori principali
16. Dimostrazione della Formula di Grassmann affine
17. Supponiamo di essere in  $\mathbb{R}^n$  e di avere  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ . Fissiamo  $1 < k < n$  e supponiamo che tutti i sottospazi di dimensione  $k$  siano  $f$ -invarianti. Chi sono le  $f$  che verificano questa proprietà?
18. C'è qualcosa di simile a Sylvester su  $\mathbb{Q}$ ? Ovvero possiamo sempre normalizzare una base ortonormale?
19. Cos'è una quadrica a centro? Può essere che un'affinità mandi una conica a centro in una conica senza centro? Si può costruire una quadrica di  $\mathbb{R}^3$  il cui luogo dei centri (ovvero tutti e soli i centri) sia costituito da due piani paralleli non coincidenti?
20.  $f \in \text{End}(V)$ ,  $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ . Enuncia la forma di Jordan Reale e deducila da quella complessa.
21. Su  $\mathbb{R}^n$  solitamente utilizziamo la distanza euclidea. Com'è definita? Supponiamo ora di avere  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  che conserva la distanza e tale che  $f(0) = 0$ . Dimostra allora che  $f$  è lineare.
22. Cos'è una base ortonormale? Supponiamo che tu abbia un prodotto scalare non degenere ed un insieme ortogonale di vettori tutti normalizzati (siamo in uno spazio vettoriale reale) e nessuno di questi vettori è il vettore nullo. Puoi dire che questo insieme di vettori in realtà è una base?
23. Prendiamo due rette sghembe  $r_1, r_2$  in  $\mathbb{R}^3$ . Al variare di  $P \in \mathbb{R}^3$  è vero che esiste una retta che passa per  $P$  ed interseca sia  $r_1$  sia  $r_2$ ? Qual'è il luogo dei punti per cui non funziona? (Non si accettano soluzioni analitiche poiché non le piacciono i conti, trovare una soluzione geometrica)
24.  $M \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$ ,  $\det M \neq 0$ . Sia  $\dim V = n$ ,  $\mathcal{B}$  una base di  $V$ . Si può (e se sì come) interpretare  $M$  come matrice di cambio di base?
25. Parla del determinante (ovvero assiomi, costruzione, esistenza ed unicità). Dimostrazione del Teorema di Binet
26. Enuncia e dimostra il teorema di Ortogonalizzazione Simultanea. Definizione di aggiunto. Ci sono problemi a definire l'aggiunto se il prodotto scalare è solo non degenere? Il teorema spettrale continua a valere anche se  $\varphi$  è solo non degenere?
27. Parla dell'SD-equivalenza e dimostra che il rango è un'invariante completo di SD-equivalenza
28. Definizione di spazio affine. Cos'è una combinazione affine di un certo numero di punti? Qual è la condizione che ci permette di definire una combinazione affine, indipendentemente dal punto scelto per farla? Mostra che  $\text{comb}_a(P_0, \dots, P_k)$  è un sottospazio affine, ovvero è chiuso per combinazioni affini.
29. Se prendo tre punti in  $\mathbb{R}^3$  cosa può venire se ne faccio tutte le combinazioni affini? Cos'è il baricentro di un insieme di punti? Se prendiamo una trasformazione affine  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cosa succede al baricentro?  
In  $\mathbb{R}^2$  prendiamo il luogo  $S$  definito dall'equazione  $\{x^2 + y^2 = 1\}$  e supponiamo che

$f$  sia un'affinità tale che  $f(S) = S$ . Cosa si può dire di questa  $f$ ? Come sono fatte tutte le  $f$  che lasciano fisso  $S$ ? Dimostriamo che  $f$  è lineare. Dimostriamo poi che  $f$  è un'isometria.

30. Cos'è uno spazio vettoriale finitamente generato? Definizioni di lineare indipendenza, combinazione lineare. Perché tutti gli spazi vettoriali finitamente generati ammettono una base finita? (Algoritmo di estrazione di base) Perché lo spazio dei polinomi  $\mathbb{K}[t]$  non è finitamente generato?
31. Dato  $V$  consideriamo  $V^*$ . Dimostra che se  $V$  è finitamente generato allora  $\dim V = \dim V^*$ , ovvero costruisci un isomorfismo tra  $V$  e  $V^*$ . Il fatto che  $V$  sia isomorfo a  $V^*$  è vero anche in dimensione infinita? (Si consideri come esempio  $c_0$ , ovvero lo spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  delle successioni a valori in  $\mathbb{R}$  definitivamente nulle. Una base di  $c_0^*$  ha cardinalità del continuo, mentre una di  $c_0$  è numerabile)
32. Enuncia e dimostra il Teorema di Riesz. Nel caso in cui  $\dim V$  sia infinita vale ancora che  $F_\phi$  sia iniettiva?
33. Cosa si intende per indice di Witt di un prodotto scalare? Se  $\varphi$  è non degenere dimostra che  $\omega(\varphi) \leq \frac{\dim V}{2}$ . Se  $\varphi$  è degenere invece, come si caratterizza  $\omega(\varphi)$ ?
34. Cos'è la somma diretta di due sottospazi? Enuncia e dimostra le condizioni equivalenti per la somma diretta multipla di più sottospazi. Se ho tre sottospazi e so che  $V \oplus W, W \oplus U, U \oplus V$ , è vero che  $V \oplus W \oplus U$ ?
35. Supponiamo che  $f \in \text{End}(V)$  abbia  $n = \dim V$  autovalori distinti. Dimostra allora che  $V = \bigoplus_{\lambda_i \in \text{Sp}(f)} V_{\lambda_i}$
36. Classificazione affine delle coniche (e sistemi completi di invarianti). Perché abbiamo preferito usare l'indice di Witt e non la segnatura per classificare le coniche in  $\mathbb{R}^2$ ?
37. Dimostrazione della decomposizione di Witt su  $\mathbb{R}$

## SESSIONE SETTEMBRE 2015

---

1. Sia  $V$  un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale,  $\Phi$  un prodotto scalare definito positivo,  $f \in \text{End}(V)$  e definiamo  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $b(x, y) = \Phi(f(x), f(y))$ . È una forma bilineare? È un prodotto scalare? Calcolarne la segnatura
2. Caratterizzazione della relazione di isometria tra prodotti scalari, dimostrare che  $\Phi \sim \Psi \Leftrightarrow \sigma_\Phi = \sigma_\Psi$
3. Definizione di quadrica. Come viene modificata una ipersuperficie da una affinità? (In che modo agisce l'affinità sul supporto e sulla classe di proporzionalità). Elencare tutti i tipi di paraboloide