Domande Rappresentazioni Interno - 2015/16

Colloqui

Non vengono scritte le domande sugli esercizi del compitino, che ci sono state

- Rappresentazioni irriducibili di $\mathrm{SU}(2)$
- Quali rappresentazioni irriducibili di S^1 si possono estendere a rappresentazione irriducibili di $\mathrm{SU}(2)$?
- È vero che tutte le rappresentazioni irriducibili di un sottogruppo H di G si possono estendere a rappresentazioni di G?
- Se in $\rho \otimes \sigma$ (con ρ e σ irriducibili) ho una sottorappresentazione di grado 1, cosa posso dire?
- Omomorfismo tra $\mathrm{SU}(2)$ e $\mathrm{SO}(3)$ (mostrare che è surgettivo e che ha $\mathrm{Ker} = \pm\mathrm{id}$)
- Dimostra Schur 2 per rappresentazioni complesse e dai un controesempio a Schur 2 sui reali.
- Quali sono le rappresentazioni reali irriducibili di S^1?
- Quali delle rappresentazioni di $\mathrm{U}(2)$ troviamo con la stessa costruzione con cui abbiamo trovato quelle di $\mathrm{SU}(2)$? (Facendole agire sulle potenze simmetriche di $\mathbb{C}^2$) [Non sono tutte, ma quali tra queste si trovano]
- (**Gruppo di Eisenstein**) Matrici invertibili 2×2 a coefficienti in $\mathbb{F}_p$ triangolari superiori tali che $a_{22} = 1$ (ovvero le affinità di $\mathbb{F}_p$)
  Trovarne le classi di coniugio (e cardinalità) e le rappresentazioni irriducibili su $\mathbb{C}$
- G finito con ρ irriducibile e fedele. Allora $Z(G)$ è ciclico
- Sia V_m una rappresentazione irriducibile di $\mathrm{SU}(2)$. Come si scompone in irriducibili V_m^*?
- Cosa può accadere ad una rappresentazione complessa irriducibile dopo che la realifico?
- Quali delle V_m (sempre per $\mathrm{SU}(2)$) sono reali? Ovvero trova una forma bilineare su queste e dì se è simmetrica o alternante. (Viene diviso in base ai casi m pari / dispari)
- Prendi un'azione di G su X e la corrispondente rappresentazione per permutazione V. Dimostra che se l'azione di G su $X \times X$ è doppiamente transitiva allora la rappresentazione ortogonale al sottospazio generato da $e_1 + e_2 + \ldots + e_n$ è irriducibile
- Dando per buono che le uniche algebre di divisione finito dimensionali su $\mathbb{R}$ sono $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ (quaternioni) dimostra che se ρ è quaternionica (ovvero ammette una forma quadratica alternante) allora gli endomorfismi di rappresentazioni della sua realificata sono isomorfi a $\mathbb{H}$
- Discussione libera su realificazione, complessificazione
- Quali rappresentazioni irriducibili di $\mathrm{SU}(2)$ sono complessificate di rappresentazione reali irriducibili?
- È sempre vero che $\dim \mathrm{Hom}(\sigma, \rho) = \dim \mathrm{Hom}(\rho, \sigma)$? (Si intende per ogni gruppo qualunque, per ogni due rappresentazioni) (Hint: No, bisogna considerare delle rappresentazioni di $\mathbb{Z}^2$)
- Le matrici diagonali dentro $\mathrm{U}(2)$ sono un sottogruppo isomorfo a $S^1 \times S^1$. Quali caratteri di rappresentazioni di $S^1 \times S^1$ si possono ottenere restringendo una rappresentazione di $\mathrm{U}(2)$? (In particolare si possono ottenere $\lambda+\mu$, $\lambda\mu$, $\lambda^2+\mu^2$ dove λ, μ sono i due autovalori che compaiono nella diagonalizzata di una matrice di $\mathrm{U}(2)$
- Parla dell'ortogonalità dei caratteri.

- Integrazione invariante su SU (2) con formula esplicita in generale ed in particolare su S^1
- Dimostrare che le rappresentazioni di U (2) ottenute come nel secondo esercizio del compitino sono tutte le irriducibili
- (In realtà poi ha cambiato domanda) Perché $\frac{1}{2}$ non può comparire nella tavola dei caratteri di gruppi finiti?
- Come sono le potenze esterne delle irriducibili di SU (2)?
- Considera la rappresentazione di SO (2) (oppure SU (2), chi ha avuto la domanda non se lo ricorda) definita da: $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a valori nelle matrici 3×3. Si chiede di scomporla in irriducibili
- Tra tutte le rappresentazioni di A_n ne esiste una di grado minimo (tolta la banale). Sia deg (n) tale numero naturale. Mostrare allora che al variare di $n \in \mathbb{N}$, deg (n) non è limitata.
- Se ho $\phi : G \to G'$ morfismo di gruppi, quando posso sollevarlo ad un morfismo da $H \rtimes G \to H \rtimes G'$? Usando il fatto che il gruppo dell'esercizio numero tre era $\mathbb{Z}_2 \rtimes (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ e che S_3 è $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_3$, cerca di sollevare le rappresentazioni di S_3 e vedi quante distinte ne vengolo (vengono tutte e quattro le non banali)
- Come classificheresti le rappresentazioni di SU (3)?
- Decomporre le potenze alternanti delle rappresentazioni irriducibili di SU (2)
- Tavola dei caratteri di A_5
- SO (4) come quoziente di SU $(2) \times$ SU (2) e poi trovare le rappresentazioni irriducibili di dimensione finita di SO (4)