



ESTUDIO DE LA COMPETENCIA ENTRE DOS PROCESOS INFECCIOSOS EN ESTRUCTURAS DÚPLEX DE CONTACTOS

José Arnal Trespallé

Directores

Luis Mario Floría Peralta

Hugo Pérez Martínez

Facultad de Ciencias

Curso 2022–2023

Agradecimientos

Quisiera mostrar mi gratitud hacia Hugo Pérez, Luis Mario Floría y Francisco Bauzá, por la profesionalidad y el entusiasmo con los que me han acompañado y dirigido durante la elaboración de este trabajo. Han conseguido que me sintiese parte de algo importante. Durante un año he tenido la sensación de estar sentado en la mesa de los mayores.

Mi agradecimiento también a mi familia y amigos, sin cuyo apoyo y comprensión seguramente hace tiempo que habría perdido la cordura.

Índice

1. Introducción	1
2. El modelo HCO	2
3. El modelo HCO dúplex	7
3.1. Puntos fijos del sistema	10
3.1.1. Puntos fijos triviales	12
3.1.2. Bifurcaciones	12
3.2. Estudio de la dinámica del sistema	13
3.2.1. Situación simétrica	13
3.2.2. Ruptura de la simetría	17
4. Conclusiones	24

1. Introducción

Algo que desde los albores de la humanidad ha distinguido al *homo sapiens* del resto de animales de su mismo tamaño, colocándolo en la posición privilegiada que ocupa desde hace tiempo en la biosfera, es su capacidad para cooperar en gran número [1]. Hoy en día, uno puede llenar la nevera en el supermercado o embarcarse en un vuelo a un lugar remoto de globo gracias al trabajo coordinado de gran cantidad de desconocidos (agricultores, transportistas, controladores aéreos...) a través de estructuras sociales complejas. La cooperación exitosa de un elevado número de individuos requiere, irremediabilmente, de la existencia de normas.

Entendidas en su sentido más amplio, las normas (y la imposición de castigos a quienes las violan) son algo universal a todos los tiempos y culturas. Los seres humanos interaccionan entre sí en un complejo abanico de formas diversas, lo que conduce a la existencia de normas de muy distinta naturaleza. Quizás más relevantes que aquellas impuestas por la autoridad (por medio, con frecuencia, del uso monopolístico de la violencia) son las que podríamos denominar *normas sociales*: aquellas que nacen del consenso general que suele haber en una comunidad acerca de lo que es *correcto* y lo que no lo es, así como de la necesidad inherentemente humana de sentir la aceptación de los otros. Es habitual que muchas de las primeras sean un reflejo de estas últimas.

Algo que caracteriza a las normas sociales es que, más allá de posibles represalias por parte de la autoridad legal, quienes las incumplen corren el riesgo de enfrentarse a un castigo social: el de tener a la opinión pública en contra y ser *desterrados* (al menos, temporalmente) a una situación de ostracismo.

En el presente documento nos referiremos a la violación de normas sociales sencillamente como *corrupción*. La palabra *corrupción* es muy genérica y puede ser utilizada para hacer referencia a gran cantidad de conceptos distintos, pero en este trabajo solo será empleada con ese significado.

Como cualquier asunto, la propagación de la corrupción en poblaciones humanas puede ser estudiada desde muy diversos enfoques. De entre todos ellos, el uso de ecuaciones y modelos matemáticos parece una manera razonable de minimizar el grado en que nuestro estudio pueda quedar contaminado por los prejuicios, sesgos y falacias propios del razonamiento humano.

Desde el último tercio del siglo pasado, la Física ha ampliado su horizonte de estudio a través de lo que a menudo se ha llamado *Física de los Sistemas Complejos*[2]. Esta disciplina emplea métodos y herramientas matemáticas típicamente usados en Física para el análisis de sistemas que tradicionalmente no han sido objeto de estudio de la Física (como el clima global, el cerebro humano, la economía, los organismos vivos...). Con frecuencia, se trata de sistemas formados por gran cantidad de componentes que, al interactuar, dan lugar a fenómenos o comportamientos colectivos que, a priori, uno no podría haber deducido del análisis de sus partes por separado.

Aunque estos sistemas ofrecen mucha mayor dificultad a ser modelizados matemáticamente que aquellos tradicionalmente estudiados por la Física, el análisis de los sistemas complejos es un campo en auge en el que, en las últimas décadas, se han producido avances significativos (prueba de ello es el Premio Nobel de Física de 2021, concedido a Syukuro Manabe, Klaus Hasselmann y Giorgio Parisi por su trabajo en el entendimiento de los sistemas complejos). El estudio de la propagación de la corrupción llevado a cabo en este trabajo se enmarca en esta rama del conocimiento.

Hacer predicciones con seres humanos es muy complicado. En comparación, el abanico de interacciones que pueden darse (por ejemplo) entre los átomos de una red cristalina es muy limitado. Los humanos, en cambio, se enamoran, creen en dioses, van a la guerra, desarrollan adicciones, organizan levantamientos que tumban regímenes y enferman en masa debido a epidemias inesperadas. En el presente documento no se pretende desarrollar herramientas que permitan predecir con alto grado de exactitud como proliferará la corrupción en una determinada población.

En cambio, se pretende, partiendo de algunas suposiciones sencillas y razonables sobre cómo son las interacciones entre los individuos, desarrollar un modelo que capte la esencia de la propagación de la corrupción en una sociedad. En concreto, haremos uso del modelo que se ha llamado HCO [3] (por *honestidad*, *corrupción* y *ostracismo*, los tres compartimentos en los que, en este modelo sencillo, se asume que se divide la población). Será introducido en la sección 2.

Pondremos especial atención en el modelo HCO dúplex, una versión algo más elaborada del modelo HCO que admite la interacción de los individuos en dos entornos sociales diferenciados, llamados *capas*. Desde una perspectiva más matemática, podemos pensar en una colección de N nodos (los individuos de la población) y dos conjuntos distintos de *links* entre ellos. La existencia de dos capas distintas en las que los individuos pueden interaccionar (que es, precisamente, a lo que hace referencia al término *dúplex* que aparece en el nombre del modelo) parece mucho más razonable que la asunción de un único medio de interacción: en nuestro día a día las personas nos relacionamos en esferas distintas (la vida profesional y la personal, las redes sociales y el *cara a cara...*), estableciendo en cada una de ellas conexiones diferentes con los demás (por ejemplo, quizás dos personas pasan mucho tiempo juntas en el trabajo, pero su relación fuera del entorno laboral se limita a saludarse cordialmente si se encuentran en algún sitio, o tal vez dos individuos interaccionan mucho a través de *Twitter*, pero nunca se han visto en persona).

En la sección 3, una aproximación de campo medio nos permitirá construir, a partir del modelo HCO dúplex, un sistema de ecuaciones diferenciales que dictará la evolución temporal de la corrupción en las dos capas de la población. La no linealidad de estas ecuaciones hará imposible obtener solución analítica alguna. Ante esta tesitura, optaremos por obtener una descripción cualitativa del retrato de fases por medio del cálculo numérico de puntos fijos. Para ello, será necesario recordar en la sección 3.1 algunos conceptos clave sobre sistemas dinámicos (análisis de estabilidad de puntos fijos, bifurcaciones...). En la sección 3.2 abordaremos el estudio de la dinámica del sistema, comparando el caso en el que ambas capas son idénticas desde el punto de vista de la propagación de la corrupción (sección 3.2.1) y aquel en el que las dinámicas de contagio están favorecidas en una de ellas (sección 3.2.2). Las conclusiones extraídas de este estudio se recogerán en la sección 4.

2. El modelo HCO

El modelo HCO es un modelo compartimental que pretende capturar la esencia de la propagación de la corrupción en una sociedad [3].

Los modelos compartimentales han sido típicamente usados en epidemiología para simplificar la modelización matemática de las enfermedades infecciosas. Algunos ejemplos notorios son el SIS o el SIRS. Reciben ese nombre porque, en ellos, la sociedad se asume como dividida en varios compartimentos de individuos idénticos entre los que se producen flujos de población. En el

SIRS, por ejemplo, los compartimentos son tres, correspondientes a los tres estados en los que, de acuerdo a este modelo, puede hallarse un individuo en relación a la enfermedad: *susceptible* (de contraerla), *infectado* y *recuperado*.

En el caso del modelo HCO, la población también se divide en tres compartimentos, correspondientes a los estados:

- **Honesto.** Los individuos honestos son aquellos que respetan las normas sociales.
- **Corrupto.** Los agentes corruptos son aquellos que, en cambio, las violan.
- **En ostracismo.** Es el estado de *repudia social* en el que acaban aquellos individuos que violaron las normas en el pasado y fueron delatados.

Cada individuo tiene un conjunto de *vecinos*. Los *vecinos* son la representación en el modelo de aquellas personas con las que uno se relacionan en el día a día (familia, amigos, conocidos...). Se denotará por k al número promedio de vecinos de cada individuo (o *conectividad promedio*).

Los individuos interaccionan con sus vecinos a lo largo del tiempo, que está discretizado. Así, a cada paso temporal, la población evoluciona de acuerdo a la siguiente reglas sencillas:

- Si un individuo es corrupto, corromperá a cada uno de sus vecinos honestos con probabilidad α . Es decir, si Alice y Bob son vecinos y, en el instante t , ella es corrupta y él es honesto, hay una probabilidad α de que la interacción con Alice lleve a Bob a ser corrupto en el instante $t + 1$. α es, pues, la *probabilidad de corromper*.
- Si un individuo es honesto, delatará a cada uno de sus vecinos corruptos con probabilidad β . Los corruptos delatados pasan al estado de ostracismo. Así, volviendo a Alice y Bob, si en el instante t ella es honesta y él, corrupto, hay una probabilidad β de que Bob sea delatado por Alice y amanezca castigado en $t + 1$. Así, β es la *probabilidad de delación*.
- Si un individuo está en ostracismo, se reinsertará en la sociedad como honesto con probabilidad r . r es, por tanto, la *tasa de reinserción*.

Uno se puede preguntar por la probabilidad de que un individuo que es honesto a tiempo t sea corrupto a tiempo $t + 1$. Nótese que, si en el instante t el individuo i es honesto y su vecino j es corrupto, hay una probabilidad $(1 - \alpha)$ de que j no corrompa a i en el paso de t a $t + 1$. En general, por tanto, si i tiene $n_{c,i}$ vecinos corruptos, hay una probabilidad $(1 - \alpha)^{n_{c,i}}$ de que ninguno de ellos lo corrompa. La probabilidad de que alguno de ellos lo haga es la complementaria. En consecuencia, el agente honesto i tiene una probabilidad $1 - (1 - \alpha)^{n_{c,i}}$ de pasar a ser corrupto en el paso de t a $t + 1$.

Similarmente, la probabilidad de que un individuo i que es corrupto a tiempo t esté en ostracismo a tiempo $t + 1$ es $1 - (1 - \beta)^{n_{h,i}}$ siendo $n_{h,i}$ el número de vecinos honestos del agente i (es decir, es la complementaria de la probabilidad de que ninguno de sus vecinos honestos lo delate).

Por tanto, podemos reescribir las reglas que rigen la dinámica del sistema de una forma equivalente: en el paso de t a $t + 1$ (ver figura 1),

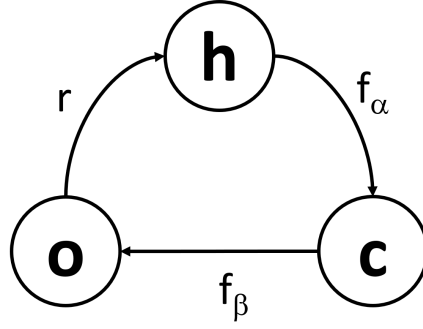


Figura 1: Esquema de los compartimentos en los que puede encontrarse un individuo en el modelo HCO y las probabilidades de transición entre ellos.

- cada individuo honesto pasa a ser corrupto con probabilidad $f_{\alpha,i} = 1 - (1 - \alpha)^{n_{c,i}}$,
- cada individuo corrupto es delatado con probabilidad $f_{\beta,i} = 1 - (1 - \beta)^{n_{h,i}}$, pasando a estar castigado,
- cada individuo en ostracismo se reinserta como honesto con probabilidad r .

El modelo HCO se asemeja a otros modelos compartimentales en la medida en que otorga a la corrupción un carácter *infeccioso*: ésta se propaga por contagio. No obstante, hay algo que lo diferencia sustancialmente de modelos epidemiológicos como los antes mencionados: en estos últimos, la tasa de recuperación es típicamente independiente de los contactos de cada individuo y de las interacciones entre ellos. En el modelo HCO, en cambio, la recuperación se produce por contacto: la probabilidad de ser delatado depende del número de honestos en el vecindario de cada agente corrupto. Esto lleva, como se verá más adelante, a situaciones que son imposibles en modelos como el SIRS, como la estabilidad del estado de corrupción total.

En aras de alcanzar una comprensión más profunda del modelo, optaremos por tratar de describir la evolución temporal de la población por medio de ecuaciones diferenciales. Para ello, haremos una aproximación de campo medio. En concreto, asumiremos que los vecindarios de todos los individuos son iguales, y que la fracción de honestos, corruptos y castigados en el vecindario de un individuo cualquiera coincide con la fracción global de honestos, corruptos y castigados. A estas fracciones las denotaremos como $\rho_h(t)$, $\rho_c(t)$ y $\rho_o(t)$, y las interpretaremos también como la probabilidad que tiene un individuo cualquiera en el instante t de ser honesto, corrupto o estar castigado, respectivamente.

Esta aproximación de campo medio hace que la expresión matemática de la probabilidad de que un agente que es honesto a tiempo t sea corrupto a tiempo $t + 1$ cambie ligeramente. Antes era $1 - (1 - \alpha)^{n_{c,i}}$. Ahora es:

$$1 - (1 - \rho_c(t)\alpha)^k \equiv f_{\alpha} \quad (1)$$

El cambio se debe a que, ahora, cada uno de los k vecinos de un individuo honesto i es corrupto con probabilidad $\rho_c(t)$, por lo que cada uno de los k vecinos de i corromperá a i con proba-

bilidad $\rho_c(t)\alpha$. Así, la complementaria de la probabilidad de que ningún vecino corrompa i es exactamente f_α (tal y como esta cantidad ha sido definida en (1)).

Similarmente, la probabilidad de que un individuo que es corrupto a tiempo t esté en ostracismo a tiempo $t + 1$ viene dada por:

$$1 - (1 - \rho_h(t)\beta)^k \equiv f_\beta \quad (2)$$

En la aproximación de campo medio, conocidos los valores de las de las fracciones de población en el instante t , es sencillo determinar su valor a tiempo $t + 1$:

$$\begin{aligned} \rho_h(t+1) &= \rho_h(t) + r\rho_o(t) - f_\alpha\rho_h(t) \\ \rho_c(t+1) &= \rho_c(t) + f_\alpha\rho_h(t) - f_\beta\rho_c(t) \\ \rho_o(t+1) &= \rho_o(t) + f_\beta\rho_c(t) - r\rho_o(t) \end{aligned} \quad (3)$$

La primera ecuación dice, esencialmente, que el número de individuos honestos a $t + 1$ *es igual* al número de individuos honestos a tiempo t *más* el número de castigados que se reinsertan y *menos* la cantidad de honestos que se corrompen (que, a su vez, *es igual* al número de honestos a tiempo t multiplicado por la probabilidad f_α de que cada uno de ellos se corrompa). De forma similar pueden entenderse las otras dos ecuaciones.

Debido a la condición de normalización (es decir, $\rho_h + \rho_c + \rho_o = 1$), las dos primeras ecuaciones son suficientes para, dadas unas condiciones iniciales, conocer el valor de todas las fracciones de población en cualquier instante de tiempo (es decir, en campo medio, el sistema es determinista).

Por tanto, ya casi hemos terminado de construir el sistema de ecuaciones diferenciales que buscábamos. Basta con eliminar la discretización del tiempo haciendo tender a cero el paso temporal (hasta ahora fijado en 1) en las ecuaciones (3), con lo que, tras algo de reorganización de los términos, las diferencias finitas que en ellas aparecen (o más bien, las tasas de cambio, $\frac{\rho_i(t+1) - \rho_i(t)}{1}$, $i = h, c, o$) pasan a ser derivadas. Así, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_h &= r(1 - \rho_h - \rho_c) - f_\alpha\rho_h \\ \dot{\rho}_c &= f_\alpha\rho_h(t) - f_\beta\rho_c(t) \end{aligned} \quad (4)$$

Nótese que, aunque no lo parezca a simple vista, el sistema dinámico descrito por las ecuaciones anteriores es un sistema altamente no lineal (pues $f_\alpha = 1 - (1 - \rho_c\alpha)^k$ y $f_\beta = 1 - (1 - \rho_h\beta)^k$). Por ello, no se puede resolver analíticamente.

La integración numérica de estas ecuaciones revela que, para toda elección de los valores de α , β y r , el sistema descrito por (4) tiende irremediabilmente a un estado estacionario de equilibrio en la que las fracciones de población son constantes en el tiempo. El valor de las fracciones de población en el equilibrio depende de los valores de α , β y r , pero, una vez fijados estos, hay un único estado de equilibrio estable. Lo que se observa es que (ver figura 2):

- Dado un valor de β , si la probabilidad de corromper α es lo suficientemente pequeña, en el estado de equilibrio estable todos los individuos son honestos.

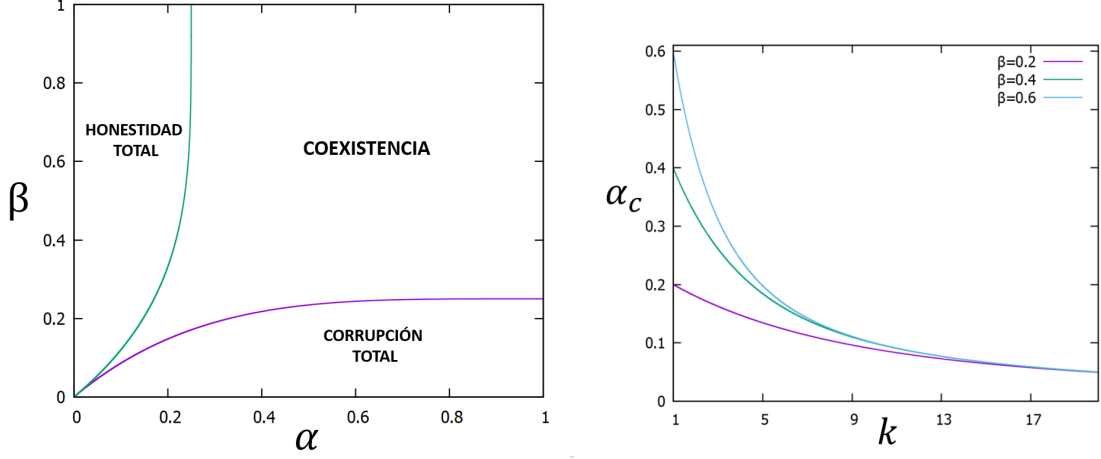


Figura 2: Izquierda: diagrama que muestra cómo es el estado estacionario del sistema (de honestidad total, de corrupción total o de coexistencia) según los valores de los parámetros α y β . Derecha: α_c frente a k para distintos valores de β .

- Similarmente, fijado el valor de α , si la probabilidad de delación β es lo suficientemente pequeña, en el estado de equilibrio estable todos los individuos son corruptos.
- Para muchas combinaciones de valores de α y β en las que ambos parámetros tienen un tamaño comparable, el estado de equilibrio estable corresponde a una situación de equilibrio dinámico en la que hay coexistencia de agentes corruptos, honestos y castigados.

Como puede verse en la figura 2 (izquierda), por cada valor de β existe un valor crítico de α por debajo del cual el estado estacionario es de honestidad total, y por encima del cual el estado estacionario es de coexistencia de agentes corruptos, honestos y castigados.

Podemos hallar una expresión analítica para dicho valor umbral de la probabilidad de corromper a partir de un argumento sencillo. Supongamos que el sistema se encuentra en el estado de honestidad total y, en un momento dado, apartamos a la población ligeramente del equilibrio sustituyendo unos pocos individuos honestos por corruptos. Para que el estado sea estable el sistema ha de responder a este pequeño aumento $\delta\rho_c$ en la fracción de corruptos mediante un flujo poblacional que lo elimine, restaurando la situación inicial. Como $\delta\rho_c$ es muy pequeño, podemos asumir que ρ_h no cambia (es decir, $\rho_h \simeq 1$). Así, haciendo algunas aproximaciones a primer orden:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_c(1, \delta\rho_c) &\simeq \dot{\rho}_c(1, 0) + \left. \frac{\partial \dot{\rho}_c}{\partial \rho_c} \right|_{(1,0)} \delta\rho_c = 0 + \left(\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \rho_c} \rho_h \right) \Big|_{(1,0)} + f_\beta \Big|_{(1,0)} \right) \delta\rho_c = \\ &= \left(\alpha k (1 - \delta\rho_c)^{k-1} - (1 - (1 - \beta)^k) \right) \delta\rho_c \simeq \left(\alpha k - (1 - (1 - \beta)^k) \right) \delta\rho_c \end{aligned}$$

Por el argumento previo, en consecuencia:

$$\dot{\rho}_c(1, \delta\rho_c) < 0 \implies \alpha < \frac{1 + (1 - \beta)^k}{k} = \alpha_c \quad (5)$$

Nótese que α_c es una función decreciente de k , como puede apreciarse en la figura 2 (derecha).

Mediante un razonamiento similar se llega a la conclusión de que, dado un valor de α , el valor de β por debajo del cual todos los individuos son corruptos en el equilibrio viene dado por:

$$\beta_c = \frac{1 + (1 - \alpha)^k}{k} \quad (6)$$

Las expresiones (5) y (6) corresponden a las curvas que se observan en la gráfica de la izquierda de la figura 2.

3. El modelo HCO dúplex

Como se mencionó en la introducción, el modelo HCO dúplex es una versión algo más sofisticada del modelo HCO que admite la interacción de los agentes en dos entornos sociales diferenciados o *capas*. Desde un punto de vista de teoría de grafos, esto corresponde a un mismo conjunto de nodos (los individuos de la población) conectados entre sí por medio de dos conjuntos distintos de *links* (las capas). Así, el vecindario de cada individuo en la capa 1 es distinto de su vecindario en la capa 2. El hecho de que los agentes dispongan de dos medios distintos en los que poder relacionarse parece una asunción más realista que la de la existencia de un único entorno de interacción: en nuestro día a día, las personas interactuamos en distintas esferas (el entorno laboral, la familia y amigos, las redes sociales...) y, en cada una de ellas, la lista de conexiones que establecemos con otros individuos es diferente.

Se denotará por k_1 y k_2 , respectivamente, a la conectividad promedio de los agentes en las capas 1 y 2.

La existencia de dos capas amplía el abanico de posibles estados de los individuos. Así, un miembro de la población puede ser honesto en la primera capa y corrupto en la segunda, o viceversa. También puede haber individuos que sean honestos en las dos capas y agentes doblemente corruptos. Lo que aparta al modelo dúplex de ser la suma de dos copias inconexas del modelo HCO de una sola capa es el hecho de que asume que el castigo es público y conocido en las dos capas. Así, si un corrupto es delatado en una de las capas, experimenta ostracismo social también en la segunda, aunque fuese honesto en ella en el momento de ser delatado. De esta forma, la población queda dividida en cinco compartimentos, que denotaremos por medio de las etiquetas *hh* (honestos en ambas capas), *hc* (honestos en la primera capa y corruptos en la segunda), *ch*, *cc* y *o* (el compartimiento de castigados).

Igual que en el modelo HCO, los individuos interaccionan con sus vecinos a lo largo del tiempo, que esta discretizado. La diferencia sustancial radica en que, en el modelo dúplex, al principio de cada paso temporal se decide de forma aleatoria en qué capa se producirán las interacciones. Estas tendrán lugar en la capa 1 con probabilidad p y en la capa 2 con probabilidad $q = 1 - p$. Decidida la capa, las interacciones entre vecinos tendrá lugar siguiendo exactamente las mismas reglas que en el modelo HCO, con el matiz importante, ya mencionado, de que hay un único compartimento de castigados y que si, por ejemplo, un individuo que es corrupto en la capa 1 es delatado por alguno de sus vecinos honestos en esa capa, pasará al estado de ostracismo aunque fuese honesto en la capa 2.

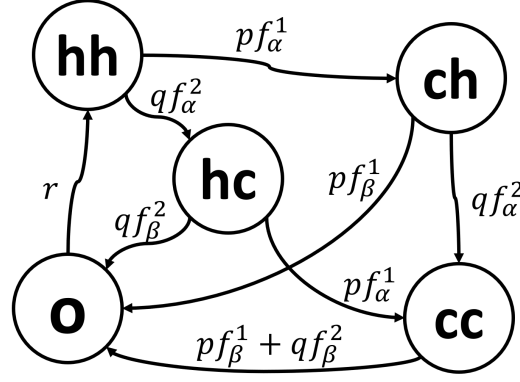


Figura 3: Esquema de los distintos compartimentos del modelo HCO dúplex y de las probabilidades de transición entre ellos.

En el caso dúplex, ya no hablamos de la probabilidad de que un individuo que es honesto a tiempo t sea corrupto a tiempo $t + 1$, sino de la probabilidad de que un individuo que es honesto a tiempo t en la capa i sea corrupto a tiempo $t + 1$ en esa misma capa, supuesto que se interacciona en ella. También haremos distinción entre capas al hablar de la probabilidad de que un agente corrupto sea delatado. De esta forma, tenemos cuatro probabilidades distintas, si bien su expresión matemática es esencialmente idéntica a la que ya obtuvimos en (1) y (2):

$$\begin{aligned} f_\alpha^1 &= 1 - (1 - (\rho_{ch} + \rho_{cc})\alpha)^{k_1} \\ f_\beta^1 &= 1 - (1 - (\rho_{hh} + \rho_{hc})\beta)^{k_1} \\ f_\alpha^2 &= 1 - (1 - (\rho_{hc} + \rho_{cc})\alpha)^{k_2} \\ f_\beta^2 &= 1 - (1 - (\rho_{hh} + \rho_{ch})\beta)^{k_2} \end{aligned}$$

Así, f_α^1 es, por ejemplo, la probabilidad de que, supuesto que se interacciona en la capa 1, un individuo que es honesto en la capa 1 en el instante t pase a ser corrupto en esa misma capa en el instante $t + 1$. La suma $\rho_{ch} + \rho_{cc}$ aparece en la expresión de f_α^1 porque $\rho_{ch} + \rho_{cc}$ es la fracción de individuos que son corruptos en la primera capa. Similarmente se explica la forma que tienen las probabilidades f_β^1 , f_α^2 y f_β^2 .

Un esquema de los diferentes flujos entre compartimentos puede observarse en la figura 3.

Por medio de una aproximación de campo medio análoga a la que hicimos en el modelo de una sola capa, se llega a las siguientes ecuaciones para la evolución temporal de las fracciones de población:

$$\begin{aligned} \rho_{hh}(t+1) &= \rho_{hh}(t) + r\rho_o(t) - (pf_\alpha^1 + qf_\alpha^2)\rho_{hh}(t) \\ \rho_{ch}(t+1) &= \rho_{ch}(t) + pf_\alpha^1\rho_{hh}(t) - (pf_\beta^1 + qf_\alpha^2)\rho_{ch}(t) \\ \rho_{hc}(t+1) &= \rho_{hc}(t) + qf_\alpha^2\rho_{hh}(t) - (pf_\alpha^1 + qf_\beta^2)\rho_{hc}(t) \\ \rho_{cc}(t+1) &= \rho_{cc}(t) + qf_\alpha^2\rho_{ch}(t) + pf_\alpha^1\rho_{hc}(t) - (pf_\beta^1 + qf_\beta^2)\rho_{cc}(t) \\ \rho_o(t+1) &= \rho_o(t) + pf_\beta^1\rho_{ch}(t) + qf_\beta^2\rho_{hc}(t) + (pf_\beta^1 + qf_\beta^2)\rho_{cc}(t) - r\rho_o(t) \end{aligned}$$

La primera ecuación esencialmente dice que el número de agentes que son honestos en las dos

capas a tiempo $t + 1$ es igual al número de individuos doblemente honestos a tiempo t más el número de castigados que se reinsertan y menos la cantidad de agentes hh que son corrompidos. Esta última, a su vez, es igual al número de individuos hh a tiempo t por la suma de la probabilidad de ser corrompido en la primera capa (pf_α^1) y la probabilidad de ser corrompido en la segunda (qf_β^2). pf_α^1 es la probabilidad de ser corrompido en la primera capa porque p es la probabilidad de que se interaccione en la primera capa y f_α^1 , la probabilidad de ser corrompido en la primera capa supuesto que se interacciona en ella (un razonamiento análogo es aplicable a qf_β^2). De forma similar se pueden explicar el resto de las ecuaciones.

Utilizando la condición de normalización (es decir, $\rho_{hh} + \rho_{ch} + \rho_{hc} + \rho_{cc} + \rho_o = 1$) y eliminando la discretización del tiempo, se llega al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales para nuestro sistema dinámico:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{hh} &= r(1 - \rho_{hh} - \rho_{ch} - \rho_{hc} - \rho_{cc}) - (pf_\alpha^1 + qf_\beta^2)\rho_{hh} \\ \dot{\rho}_{ch} &= pf_\alpha^1\rho_{hh} - (pf_\beta^1 + qf_\alpha^2)\rho_{ch} \\ \dot{\rho}_{hc} &= qf_\alpha^2\rho_{hh} - (pf_\alpha^1 + qf_\beta^2)\rho_{hc} \\ \dot{\rho}_{cc} &= qf_\alpha^2\rho_{ch} + pf_\alpha^1\rho_{hc} - (pf_\beta^1 + qf_\beta^2)\rho_{cc}\end{aligned}\tag{7}$$

El sistema anterior puede ser entendido como una ecuación vectorial, de la forma $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\rho})$ (siendo $\boldsymbol{\rho} = (\rho_{hh}(t), \rho_{ch}(t), \rho_{hc}(t), \rho_{cc}(t))$).

El sistema dinámico descrito por las ecuaciones (7) depende de seis parámetros: la probabilidad de corromper α , la probabilidad de delación β , la probabilidad de reinsertión r , la probabilidad p de interactuar en la primera capa, y k_1 y k_2 , que son las conectividades o grados promedio de los agentes en las capas 1 y 2.

Para aliviar la notación, cuando resulte conveniente nos referiremos al conjunto de los seis parámetros como

$$\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, r, p, k_1, k_2)$$

De ahora en adelante, escribiremos sencillamente “ $\forall \boldsymbol{\theta}$ ” para referirnos a *para cualquier elección de los valores de los parámetros que tenga sentido físico*, es decir, cualquiera en la que α , β , r y p sean números reales entre 0 y 1, y k_1 y k_2 sean reales positivos (aunque cada individuo tiene un número entero de vecinos, k_1 y k_2 no están restringidos a tomar valores enteros porque son promedios).

Aunque el campo de velocidades (7) está definido en todo \mathbb{R}^4 , las variables ρ_{hh} , ρ_{ch} , ρ_{hc} y ρ_{cc} representan fracciones de población, por lo que se tiene que cumplir:

$$\begin{aligned}\rho_{hh}, \rho_{ch}, \rho_{hc}, \rho_{cc} &\geq 0 \\ \rho_{hh} + \rho_{ch} + \rho_{hc} + \rho_{cc} &\leq 1\end{aligned}$$

La región delimitada por las ecuaciones anteriores es un simplex. Un simplex n -dimensional es el análogo en \mathbb{R}^n del triángulo en \mathbb{R}^2 o el tetraedro en \mathbb{R}^3 . En nuestro sistema dinámico, el espacio de fases es el simplex cuatridimensional cuyos vértices son el origen (que corresponde al estado en el que todos los individuos se hayan en el estado de ostracismo) y los vectores unitarios $\hat{\boldsymbol{\rho}}_{hh} = (1, 0, 0, 0)$, $\hat{\boldsymbol{\rho}}_{ch}$, $\hat{\boldsymbol{\rho}}_{hc}$ y $\hat{\boldsymbol{\rho}}_{cc}$. De ahora en adelante, no referiremos a él sencillamente como *el simplex*.

El flujo definido por (7) está confinado en el simplex: toda trayectoria que comienza en el simplex permanece en él.

3.1. Puntos fijos del sistema

Un punto fijo del sistema es un punto $\rho_0 \in \mathbb{R}^4$ en el que el campo de velocidades definido en (7) se anula (es decir, $\dot{\rho}(\rho_0) = \mathbf{0}$). Si en el instante inicial el sistema se encuentran en ρ_0 , permanecerá en ρ_0 *in æternum*.

En el análisis de la dinámica del modelo HCO de una sola capa, a estos puntos se los llamó simplemente *estados estacionarios de equilibrio*, para poder hablar de ellos sin entrar en una descripción demasiado detallada o técnica de su naturaleza y propiedades. Sin embargo, un correcto entendimiento de la dinámica del modelo dúplex pasa necesariamente por un estudio de estos objetos (los puntos fijos) en mayor profundidad.

Un punto fijo ρ_0 se dice estable si *todas* las trayectorias que empiezan *cerca* de ρ_0 tienden a ρ_0 asintóticamente conforme $t \rightarrow \infty$. Un punto fijo que no es estable se dice inestable.

Si hacemos un desarrollo en serie de nuestro campo de velocidades $\dot{\rho} = F(\rho)$ cerca de un punto fijo ρ_0 , obtenemos:

$$\dot{\rho}(\rho_0 + \Delta\rho) = F(\rho_0 + \Delta\rho) = F(\rho_0) + J(\rho_0)\Delta\rho + \dots$$

donde $J(\rho_0)$ es la matriz jacobiana del sistema evaluada en ρ_0 .

$$J(\rho) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{hh}}{\partial \rho_{hh}} & \frac{\partial F_{hh}}{\partial \rho_{ch}} & \frac{\partial F_{hh}}{\partial \rho_{hc}} & \frac{\partial F_{hh}}{\partial \rho_{cc}} \\ \frac{\partial F_{ch}}{\partial \rho_{hh}} & \frac{\partial F_{ch}}{\partial \rho_{ch}} & \frac{\partial F_{ch}}{\partial \rho_{hc}} & \frac{\partial F_{ch}}{\partial \rho_{cc}} \\ \frac{\partial F_{hc}}{\partial \rho_{hh}} & \frac{\partial F_{hc}}{\partial \rho_{ch}} & \frac{\partial F_{hc}}{\partial \rho_{hc}} & \frac{\partial F_{hc}}{\partial \rho_{cc}} \\ \frac{\partial F_{cc}}{\partial \rho_{hh}} & \frac{\partial F_{cc}}{\partial \rho_{ch}} & \frac{\partial F_{cc}}{\partial \rho_{hc}} & \frac{\partial F_{cc}}{\partial \rho_{cc}} \end{pmatrix}$$

Como ρ_0 es un punto fijo, la velocidad en él es nula y $F(\rho_0) = \mathbf{0}$. En consecuencia, si despreciamos los términos cuadráticos y de orden superior (estamos cerca de ρ_0 y $\Delta\rho$ es pequeño) y hacemos el cambio de variable $u = \Delta\rho = \rho - \rho_0$, podemos escribir:

$$\dot{u} = J(\rho_0)u \tag{8}$$

donde hemos utilizado que, como ρ y u solo se diferencian en la suma de un vector constante (ρ_0), $\dot{u} = \dot{\rho}$.

El anterior es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales para u . En la situación típica, $J(\rho_0)$ tiene 4 autovalores distintos. En tal caso, es un resultado conocido del cálculo diferencial que la solución viene dada por [4]:

$$u(t) = v_1 e^{\lambda_1 t} + v_2 e^{\lambda_2 t} + v_3 e^{\lambda_3 t} + v_4 e^{\lambda_4 t}$$

o lo que es lo mismo (deshaciendo el cambio de variable):

$$\rho(t) = \rho_0 + v_1 e^{\lambda_1 t} + v_2 e^{\lambda_2 t} + v_3 e^{\lambda_3 t} + v_4 e^{\lambda_4 t}$$

donde v_1, v_2, v_3 y v_4 son autovectores de $J(\rho_0)$.

De lo anterior se desprende que ρ_0 será un punto fijo estable si los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y λ_4 de $J(\rho_0)$ tienen todos la parte real negativa (pues entonces los $v_i e^{\lambda_i t}$ tenderán a $\mathbf{0}$ conforme $t \rightarrow \infty$ y, en consecuencia, $\rho(t)$ tenderá a ρ_0).

Por tanto, hemos llegado a una forma sistemática de determinar la estabilidad de un punto fijo ρ_0 :

1. Se calcula $J(\rho_0)$ y se hallan sus autovalores.
2. Si todos ellos tienen parte real negativa, ρ_0 es estable. En caso contrario, es inestable.

Dado que en la ecuación (8) hemos despreciado todos los términos no lineales, una pregunta que parece razonable hacerse es si esta manera de determinar la estabilidad de un punto fijo es válida en todos los casos. La respuesta es que, en general, lo es siempre que los autovalores de $J(\rho_0)$ tengan parte real no nula [5], lo cual, en la práctica, ocurre la mayor parte de las veces (sólo habremos de tener cuidado en las bifurcaciones, de las que se hablará más adelante).

Para simplificar el estudio de la dinámica, en la discusión que sigue no entenderemos los puntos fijos del sistema como puntos de \mathbb{R}^4 , sino como funciones univalueadas de los parámetros. Denotaremos estas funciones mediante letras mayúsculas ($P, Q, B...$). Es decir, supongamos que, para cierta elección de los valores de los parámetros θ , el sistema presenta un punto fijo en $\rho_0 \in \mathbb{R}^4$ y que, al introducir un pequeño cambio en los parámetros $\Delta\theta$, el campo de velocidades pasa a anularse en $\rho_0 + \Delta\rho_0$ en vez de en ρ_0 . En tal caso, entenderemos que el punto fijo que *antes* había en ρ_0 es el mismo que *ahora* hay en $\rho_0 + \Delta\rho_0$, solo que ha cambiado de posición. Se ha desplazado como consecuencia del cambio en los parámetros. Si llamamos a dicho punto fijo P , tenemos:

$$\begin{aligned} P(\theta) &= \rho_0 \\ P(\theta + \Delta\theta) &= \rho_0 + \Delta\rho_0 \end{aligned}$$

Así, conforme los parámetros varían, los puntos fijos del sistema describen trayectorias continuas en el espacio de fases.

Encontrar los puntos fijos del sistema para una elección dada θ de los valores de los parámetros pasa por resolver el sistema no lineal de ecuaciones que resulta de igualar en (7) las cuatro componentes de la velocidad a cero. Dado que hacer esto analíticamente es una tarea casi imposible, optaremos por emplear el potente algoritmo numérico de Newton-Raphson [6].

El cálculo numérico de puntos fijos por medio de este algoritmo proporciona una visión mucho más completa de la dinámica del sistema que la alcanzable por medio la integración numérica de las ecuaciones. Esto es así, entre otras cosas, porque con Newton-Raphson se pueden conocer con exactitud las posiciones de todos los puntos fijos inestables del sistema, que, como veremos, juegan un papel muy relevante en la forma de las soluciones, y cuya ubicación, en el caso de integrar las ecuaciones, solo se puede intuir parcialmente (en el mejor de los casos).

Una exploración exhaustiva del espacio de fases y sus inmediaciones llevada a cabo por medio

de la ejecución repetida del algoritmo de Newton-Raphson revela que, para cualquier elección θ de los valores de los parámetros, el campo de velocidades presenta una gran cantidad de puntos fijos. No obstante, la mayoría de ellos se sitúan fuera del simplex y no serán de nuestro interés. Solo serán relevantes para nosotros los cuatro puntos fijos triviales (de los que hablaremos a continuación) y unos pocos puntos fijos no triviales que serán introducidos cuando se estudie la situación simétrica (apartado 3.2.1).

3.1.1. Puntos fijos triviales

Hay cuatro puntos del simplex que son puntos fijos para toda elección de los valores de los parámetros. Los denotaremos como:

$$\begin{aligned} \mathbf{HH} &= \hat{\rho}_{hh} = (1, 0, 0, 0) \quad \forall \theta \\ \mathbf{CH} &= \hat{\rho}_{ch} = (0, 1, 0, 0) \quad \forall \theta \\ \mathbf{HC} &= \hat{\rho}_{hc} = (0, 0, 1, 0) \quad \forall \theta \\ \mathbf{CC} &= \hat{\rho}_{cc} = (0, 0, 0, 1) \quad \forall \theta \end{aligned}$$

Corresponden a situaciones en las que todos los individuos de la población se hallan en el mismo compartimento, y los demás están vacíos.

La notación anterior, si bien parece algo redundante, es necesaria para ser consistentes con nuestro entendimiento de los puntos fijos como trayectorias de los parámetros ($\hat{\rho}_{hh}$ es un punto de \mathbb{R}^4 , $\mathbf{HH}(\theta)$ es una trayectoria de los parámetros).

Que los anteriores son puntos fijos es algo que se obtiene fácilmente por simple sustitución en (7), pero podemos ver que necesariamente han de serlo por medio de un sencillo razonamiento lógico: si todos los individuos son honestos en ambas capas (\mathbf{HH}), entonces no hay agentes que los puedan corromper. Si todos los individuos son corruptos en ambas capas (\mathbf{CC}), no hay agentes que los puedan delatar. Por último, en \mathbf{CH} y \mathbf{HC} ocurre algo similar: en una de las capas todos los agentes son honestos y no hay nadie para corromperlos, y en la otra todos son corruptos y no hay nadie para delatarlos, por lo que el estado del sistema no cambia.

Nótese que el punto $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0)$ (correspondiente a la situación en la que todos los individuos se encuentran en el estado de ostracismo) no es un punto fijo, pues la tasa de reinserción r es independiente del valor de las fracciones de población, por lo que el flujo de reinserción $\rho_o \rightarrow \rho_{hh}$ siempre está activo. Si inicialmente el sistema se encuentra en $\mathbf{0}$, con el tiempo el compartimento de castigados se irá vaciando y, el de agentes hh , llenando, hasta que finalmente todos los individuos sean hh (y ese será el estado estacionario del sistema).

3.1.2. Bifurcaciones

Muchos de los cambios que uno puede introducir en los valores de los parámetros conducen solo a variaciones cuantitativas del retrato de fases y no alteran significativamente su estructura. No obstante, en ocasiones, una variación en los parámetros puede producir un cambio en la estructura cualitativa del campo de velocidades. En concreto, pueden aparecer o desaparecer puntos fijos, o la estabilidad de alguno de ellos puede cambiar. Estos cambios cualitativos en la

dinámica reciben el nombre de **bifurcaciones** y serán objeto de nuestro interés.

Aunque el sistema dinámico bajo estudio es un sistema cuatridimensional, la mayor parte de las bifurcaciones que se dan en él pueden ser explicadas en términos de bifurcaciones propias de sistemas unidimensionales. En el anexo II se hace un breve repaso de cuáles son los principales tipos de bifurcaciones que pueden darse en un sistema unidimensional al variar uno de los parámetros, haciendo una pequeña mención también a la bifurcación Hopf (propia de sistemas con dimensión mayor que uno).

3.2. Estudio de la dinámica del sistema

El sistema descrito por (7) presenta una gran riqueza de comportamientos dinámicos. Según θ recorre el espacio de parámetros, se distinguen fundamentalmente tres regímenes: monoestabilidad (hay un único punto fijo estable en el simplex), biestabilidad y triestabilidad. Como consecuencia del elevado número de parámetros, el paso de un régimen a otro puede ser llevado a cabo de múltiples formas, observándose una amplia variedad de bifurcaciones distintas.

A menudo, el paso de un régimen a otro se produce a través de una transición de segundo orden. En otras ocasiones, el cambio de régimen tiene lugar de forma brusca, por medio de una transición de primer orden. Poco o nada ganaremos intentando definir de forma rigurosa a qué nos referimos con *transición de primer orden* y *de segundo orden* en este contexto. Nos limitaremos a la noción intuitiva, comúnmente usada en muchas ramas de la Física, de que, en las transiciones de primer orden, las fracciones de población en el equilibrio presentan una discontinuidad, mientras que, en las de segundo orden, la discontinuidad está en la primera derivada de las fracciones de población respecto del parámetro que varía en la transición.

Como veremos más adelante, las transiciones de segundo orden son debidas a bifurcaciones transcíticas o *pitchfork* subcríticas, mientras que las de primer orden están asociadas a bifurcaciones *saddle-node*, *pitchfork* supercríticas y Hopf supercríticas.

3.2.1. Situación simétrica

En primer lugar, asumiremos que la probabilidad de los agentes de interactuar en cada una de las capas es la misma y que en ambas tienen, en promedio, el mismo número de contactos ($p = 0,5$ y $k_1 = k_2 = k$).

En esta situación, el sistema es simétrico ante intercambio de ρ_{ch} y ρ_{hc} . Es decir, si el vector $(\rho_{hh}(t), \rho_{ch}(t), \rho_{hc}(t), \rho_{cc}(t))$ es una solución de las ecuaciones, entonces $(\rho_{hh}(t), \rho_{hc}(t), \rho_{ch}(t), \rho_{cc}(t))$ también lo es. Por tanto, por cada punto fijo $\mathbf{P} = (P_{hh}, P_{ch}, P_{hc}, P_{cc})$ habrá otro $\mathbf{P}' = (P_{hh}, P_{hc}, P_{ch}, P_{cc})$.

Por simplicidad, se fijará $r = 0,5$ y $k = 4$ y se estudiará la dependencia del retrato de fases con los parámetros α y β .

Aparición de la biestabilidad: bifurcación múltiple

Por cada valor de β , existe un valor de α (que llamaremos α_1) tal que para $\alpha < \alpha_1$ el único punto fijo estable del sistema es **HH** (honestidad total en ambas capas), mientras que para $\alpha > \alpha_1$ el estado (o, como veremos, los estados) estable tiene $\rho_{hh} < 1$.

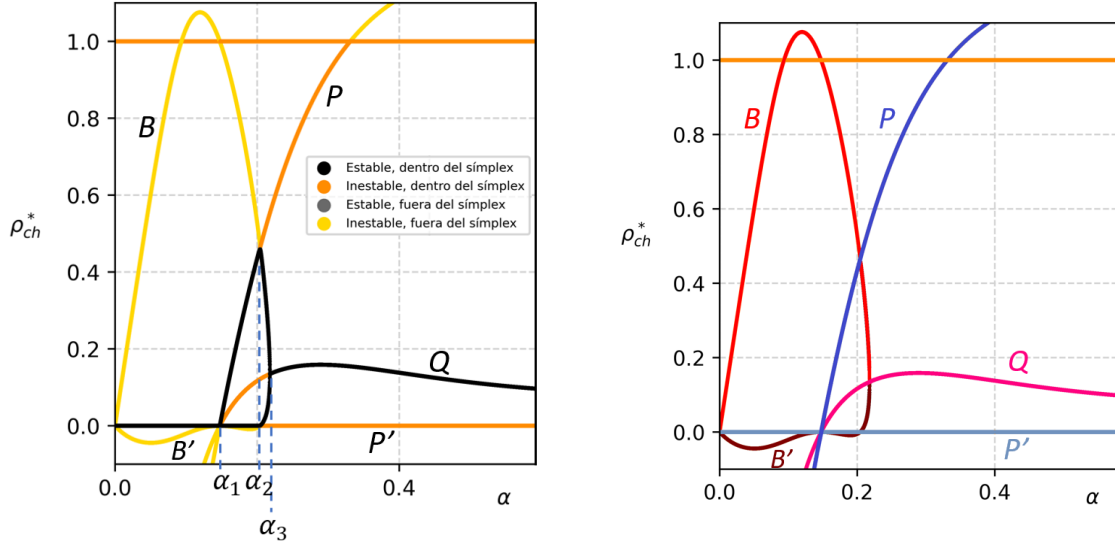


Figura 4: Coordenada ρ_{ch} de los principales puntos fijos del sistema frente a α . La segunda figura es igual que la primera, pero coloreada de tal forma que sea sencillo identificar los distintos puntos fijos y distinguir sus trayectorias. La gráfica correspondiente a la coordenada ρ_{hc} es idéntica, pero intercambiando las etiquetas de P y P' , y B y B' . $\beta = 0,2$

Se puede probar (la demostración es sencilla pero algo laboriosa, ver anexo I) que este valor crítico de α es el mismo que en el modelo HCO de una sola capa:

$$\alpha_1 = \frac{1 - (1 - \beta)^k}{k} \quad (9)$$

En el modelo HCO de una sola capa, no obstante, la única implicación que tiene el que el valor de α supere el umbral α_1 es la aparición de corrupción en el estado estacionario del sistema: más allá de eso, tanto para $\alpha > \alpha_1$ como para $\alpha < \alpha_1$ hay un único punto fijo estable en el espacio de fases.

En el modelo HCO dúplex, en cambio, el cálculo numérico de puntos fijos por medio del algoritmo de Newton-Raphson muestra que, si la probabilidad de delación β no es demasiado elevada ($0 < \beta < \beta_1$), para α mayor que α_1 y menor que un cierto valor α_2 el sistema presenta biestabilidad (ver figura 4). En concreto, los dos estados estables que aparecen corresponden a situaciones en las que sólo hay agentes corruptos en una de la capas. Esto hace que la *versión dúplex* de la bifurcación que tiene lugar en α_1 sea considerablemente más compleja que su homóloga en el modelo de una sola capa.

Para comprender la bifurcación en profundidad, procederemos a enumerar los puntos fijos que intervienen en ella (algunos de ellos se muestran en el esquema de la figura 5):

- El punto fijo $HH = (1, 0, 0, 0) \quad \forall \theta$. Es el estado de honestidad total.
- Los puntos fijos que llamaremos P y P' . P está contenido en el plano $\rho_{hc} = \rho_{cc} = 0$ para cualquier elección de los valores de α y β . Lo mismo ocurre con P' y el plano $\rho_{ch} = \rho_{cc} = 0$. No obstante, para ciertos valores de ambos parámetros P y P' se sitúan fuera del simplex.

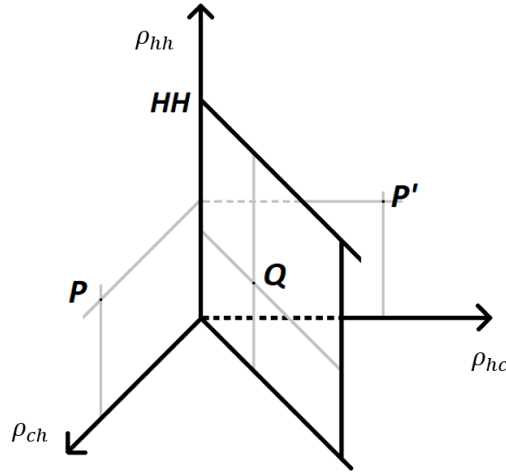


Figura 5: Esquema de la posición de algunos de los principales puntos fijos del sistema para $\alpha > \alpha_1$.

Usaremos esta notación debido a que \mathbf{P} y \mathbf{P}' ocupan siempre posiciones simétricas respecto del hiperplano $\rho_{ch} = \rho_{hc}$, esto es: $P_{ch} = P'_{hc}$, $P_{hc} = P'_{ch}$. En lo sucesivo, siempre que nos refiramos a una pareja de puntos fijos de esta manera (con la misma letra y primando uno de ellos) estaremos indicando que guardan entre sí esta relación. Como se ha dicho, cuando están dentro del simplex, \mathbf{P} y \mathbf{P}' corresponden a estados en los que sólo hay individuos corruptos en una de las capas (la capa 1 en el caso de \mathbf{P} , y la 2 en el de \mathbf{P}').

- El punto fijo \mathbf{Q} , que está contenido en el subespacio simétrico $\rho_{ch} = \rho_{hc}$ para cualquier elección de los valores de α y β (aunque, de nuevo, no siempre está dentro del simplex). Corresponde a un estado en el que el número de individuos corruptos en cada capa es el mismo.

Para $\alpha \lesssim \alpha_1$, \mathbf{P} , \mathbf{P}' y \mathbf{Q} se encuentran fuera del simplex y cerca de \mathbf{HH} . En $\alpha = \alpha_1$, los cuatro puntos fijos colisionan en $(1, 0, 0, 0)$ y, para $\alpha \gtrsim \alpha_1$, \mathbf{P} , \mathbf{P}' y \mathbf{Q} están dentro del simplex.

En cuanto a la estabilidad, en esta bifurcación \mathbf{HH} pierde su estabilidad a favor de los puntos fijos de las caras \mathbf{P} y \mathbf{P}' , que pasan a ser estables.

Cabe recordar que estos dos nuevos puntos estables que aparecen se corresponden a estados en los que solo hay corrupción en una de las capas: o hay algo de corrupción en la capa 1 y nada de corrupción en la capa 2 (\mathbf{P}) o viceversa (\mathbf{P}'), pero no hay coexistencia de agentes corruptos en ambas capas.

Aparición de la coexistencia

En el caso $0 < \beta < \beta_1$, si seguimos aumentando α por encima de α_1 , llegaremos eventualmente a otra bifurcación que dará lugar a la aparición de coexistencia de agentes corruptos en ambas capas.

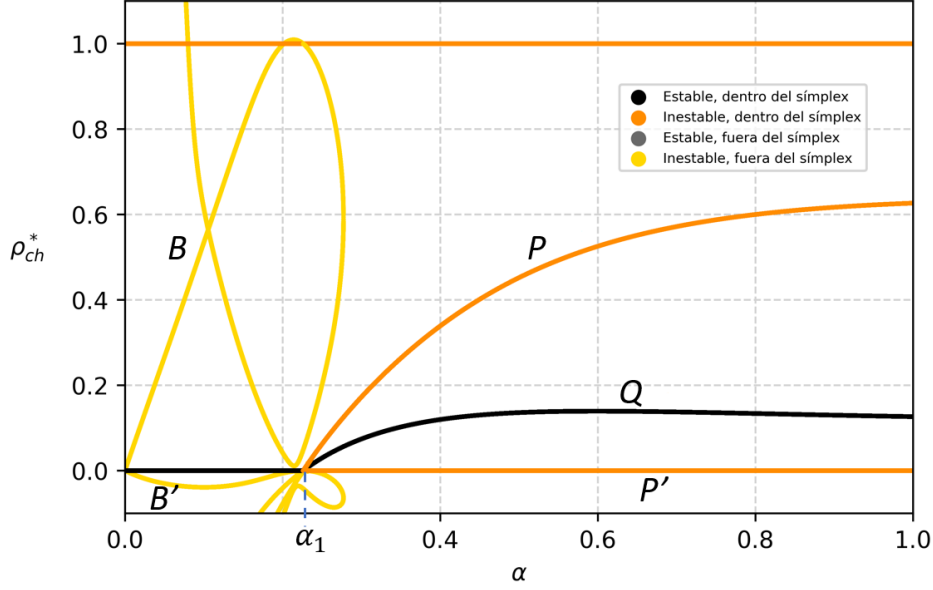


Figura 6: Coordenada ρ_{ch} de los puntos fijos frente a α para $\beta = 0,444 > \beta_1$.

Existe un valor $\beta_2 < \beta_1$ tal que, para $\beta < \beta_2$, la transición a la fase de coexistencia es de segundo orden, mientras que, para $\beta > \beta_2$, la transición es de primer orden y, además, aparece triestabilidad.

Transición de segundo orden ($\beta < \beta_2$)

La bifurcación, que tiene lugar en $\alpha = \alpha_2$, involucra a P , P' y a otros dos puntos fijos B y B' que hasta ahora no hemos mencionado y cuya componente ρ_{ch} puede observarse en la figura 4.

En ella, da la sensación de que B y B' también colisionan con P , P' , Q y HH en $(1, 0, 0, 0)$ y en $\alpha = \alpha_1$. No obstante, esta ilusión es solo el efecto de proyectar las trayectorias de los puntos fijos sobre una única dirección: en realidad, en $\alpha = \alpha_1$, $B = (0, 1, 0, 0)$ y $B' = (0, 0, 1, 0)$.

Para $\alpha \lesssim \alpha_2$, B y B' están fuera del simplex y cerca de las caras. En $\alpha = \alpha_2$, B y B' colisionan con P y P' , respectivamente, en sendas bifurcaciones transcíticas, entrando en el simplex. P y P' dejan de ser estables y pasan a ser inestables, y lo contrario ocurre con B y B' . Conforme α sigue aumentando, B y B' (ahora estables) se van acercando progresivamente al subespacio simétrico $\rho_{ch} = \rho_{hc}$.

De esta manera, aparece la coexistencia: en los nuevos estados estables B y B' , hay agentes corruptos en ambas capas (hemos abandonado las caras del simplex $\rho_{ch} = \rho_{cc} = 0$ y $\rho_{hc} = \rho_{cc} = 0$). En B hay mas agentes ch que hc y, en consecuencia, más corruptos en la primera capa. En B' sucede justamente lo contrario y, además, en la misma proporción: debido a la simetría mencionada, el número de individuos hc en B' coincide con el número de agentes ch en B , y viceversa.

Conforme α aumenta, los puntos fijos estables B y B' se van acercando paulatinamente al subespacio simétrico $\rho_{ch} = \rho_{hc}$. Es decir, se produce una migración progresiva de agentes del compartimento ch al hc , en el caso de B , y del hc al ch , en el caso de B' , de tal forma que las

fracciones de población asociadas a estos compartimentos van siendo cada vez más parecidas.

En un valor de α al que llamaremos α_3 , se produce una bifurcación *pitchfork* subcrítica en la que \mathbf{B} , \mathbf{B}' y \mathbf{Q} se funden en un único punto fijo estable, que identificaremos con \mathbf{Q} por pertenecer al subespacio simétrico (de esta forma, \mathbf{B} y \mathbf{B}' se desvanecen). Así, desaparece la biestabilidad, y en la única solución estable del sistema hay el mismo número de agentes corruptos en ambas capas: \mathbf{Q} es el único punto fijo estable que hay en el simplex para $\alpha > \alpha_3$.

Transición de primer orden ($\beta > \beta_2$): triestabilidad

Conforme aumentamos β con respecto a la situación anterior, los valores de α_1 , α_2 y α_3 , si bien aumentan, cada vez son más próximos entre sí. En concreto, $\alpha_3 - \alpha_2$ va disminuyendo progresivamente hasta que, para cierto valor $\beta = \beta_2$, $\alpha_2 = \alpha_3$.

En la figura 7 se puede apreciar como, para $\beta = 0,4 > \beta_2$, $\alpha_3 < \alpha_2$. Por tanto, la descripción de lo que ocurre para $\alpha > \alpha_1$ cambia ligeramente.

En $\alpha = \alpha_3$ se produce una bifurcación *pitchfork* supercrítica (para $\beta < \beta_2$, era subcrítica) en la que \mathbf{Q} pasa de ser inestable a estable y aparecen dos puntos fijos inestables nuevos, que llamaremos \mathbf{S} y \mathbf{S}' . Conforme el valor de α aumenta de α_3 a α_2 (lo cual es un intervalo muy pequeño de valores de α), \mathbf{S} y \mathbf{S}' se acercan a las caras $\rho_{ch} = \rho_{cc} = 0$ y $\rho_{hc} = \rho_{cc} = 0$, donde, para $\alpha = \alpha_2$, colisionan con \mathbf{P} y \mathbf{P}' respectivamente, en sendas bifurcaciones transcriticals, de tal forma que estos dos puntos fijos pierden su estabilidad.

Aunque esto no es relevante para la dinámica asintótica del sistema, cabe destacar que, fuera del simplex, \mathbf{S} experimenta una bifurcación Hopf supercrítica en la que pierde su estabilidad generando una pequeña órbita inestable y, para un valor de α algo superior, se aniquila con \mathbf{B} en una *saddle-node*. Lo mismo ocurre con \mathbf{S}' y \mathbf{B}' . Este curioso fenómeno (una Hopf supercrítica inmediatamente sucedida por otra bifurcación) aparecerá en más ocasiones durante el estudio de las bifurcaciones de este sistema dinámico.

Nótese que, en el estrecho intervalo (α_3, α_2) , hay triestabilidad. Los tres puntos estables se corresponden con dos estados de presencia de corrupción en una capa y ausencia total de corrupción en la otra (\mathbf{P} y \mathbf{P}') y un estado de coexistencia en el que el número de agentes corruptos en cada capa es el mismo (\mathbf{Q}).

3.2.2. Ruptura de la simetría

Podemos romper la simetría existente entre las variables ρ_{ch} y ρ_{hc} favoreciendo la frecuencia de interacción en una de las capas (es decir, haciendo $p \neq 0,5$) y/o aumentando la conectividad promedio de una de las capas con respecto de la otra ($k_1 \neq k_2$). En ambos casos se observan comportamientos dinámicos interesantes.

Ambas formas de romper la simetría contribuyen a aumentar la cantidad de interacciones entre agentes en una de las capas, lo que acelera los procesos infecciosos que tienen lugar en ella, como la propagación de la corrupción (si bien también supone un impulso para los procesos de delación). Nos referiremos a la capa en la que los procesos infecciosos se ven facilitados como *capa favorecida* y, a la otra capa, como *capa desfavorecida*.

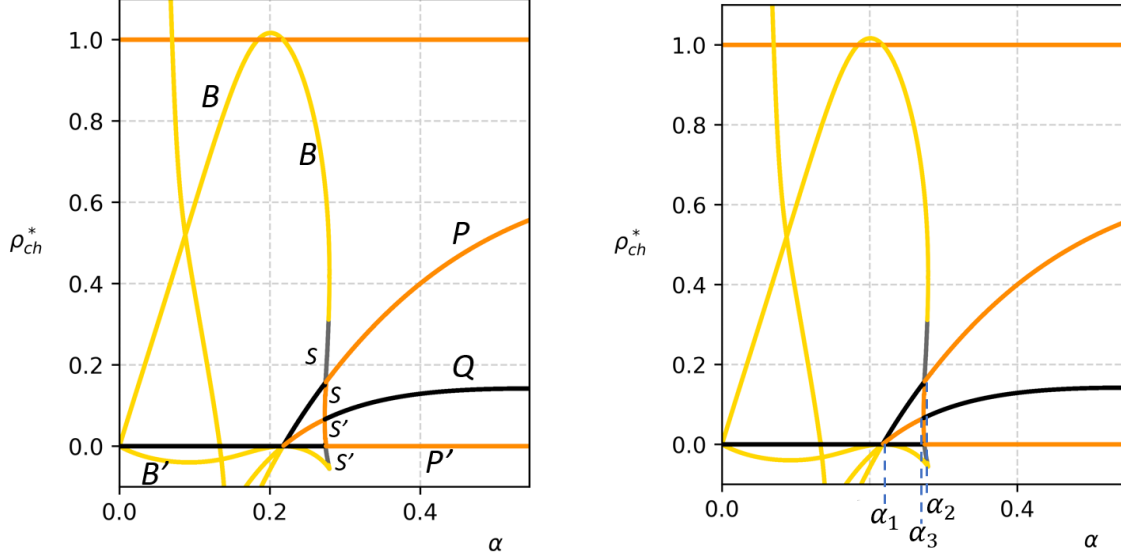


Figura 7: Coordenada ρ_{ch} de los principales puntos fijos del sistema frente a α para $\beta = 0,4$ en la situación simétrica ($p = 0,5$, $k_1 = k_2$). La gráfica de la derecha es idéntica a la de la izquierda, pero se han eliminado las etiquetas de los puntos fijos y se han indicado los valores de α relevantes. Se aprecia como, para este valor de β , $\alpha_3 < \alpha_2$.

Por simplicidad, en la discusión que sigue fijaremos $\beta = 0,2$ y $r = 0,5$ y estudiaremos, como hemos hecho hasta ahora, la dependencia del retrato de fases con α para distintos valores de p , k_1 y k_2 . Nótese que si $p = 0,5$ y $k_1 = k_2 = 4$, recuperamos la situación de la figura 4, que ya conocemos en detalle.

Aunque ahora el sistema es asimétrico ante intercambio de ch y hc , existen otras simetrías de las que podemos aprovecharnos. Nótese que, si $(\rho_{hh}(t), \rho_{ch}(t), \rho_{hc}(t), \rho_{cc}(t))$ es una solución de las ecuaciones para $p = p_0$, $k_1 = m$ y $k_2 = n$, entonces $(\rho_{hh}(t), \rho_{hc}(t), \rho_{ch}(t), \rho_{cc}(t))$ es una solución de las ecuaciones para $p = 1 - p_0$, $k_1 = n$ y $k_2 = m$. Por tanto, basta que estudiamos lo que ocurre para $p > 0,5$ y $k_1 > k_2$.

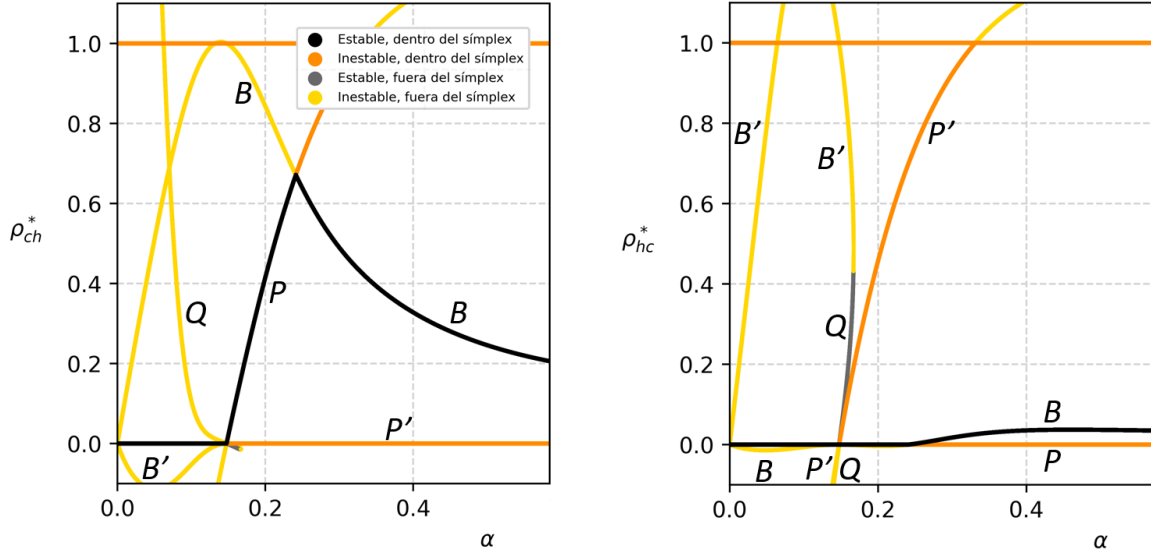


Figura 8: Coordenada ρ_{ch} (izquierda) y ρ_{hc} (derecha) de los principales puntos fijos del sistema frente a α para $p = 0,7$ (en cuanto a los demás parámetros, $\beta = 0,2$, $k_1 = k_2 = 4$ y $r = 0,5$).

Brotes anómalos de corrupción en la capa desfavorecida por el cambio en p

Una forma de romper la simetría es mantener las conectividades promedio iguales ($k_1 = k_2 = 4$, como en la situación de la figura 4) y variar la probabilidad p de que los agentes interaccionen en la primera capa. Para p considerablemente mayor que 0.5, la ventana de biestabilidad que se observa en la figura 4 ya no existe. Por ejemplo, en la figura 8 se muestran las coordenadas ρ_{ch} y ρ_{hc} de los puntos fijos del sistema frente a α para $p = 0,7$.

Como puede verse, el valor de α para el que aparece corrupción en la capa 1 es menor que aquel para el que aparece corrupción en la capa 2. Esto parece razonable: p es la probabilidad de que los agentes interactúen en la capa 1. Si p es mayor que 0.5, la propagación de la corrupción en la primera capa está favorecida.

Para ganar intuición sobre por qué esto es así, podemos pensar en el caso extremo $p = 1$. En tal caso, no hay ningún mecanismo que permita aumentar el número de agentes corruptos en la segunda capa (pues los agentes no interaccionan en ella), pero sí hay uno que permite disminuirlo: el flujo $\rho_{cc} \rightarrow \rho_o$ debido a la delación de agentes que son corruptos en ambas capas por parte de individuos que son honestos en la primera. Como también hay un flujo $\rho_{hc} \rightarrow \rho_{cc}$, el número de agentes corruptos en la segunda capa tenderá irremediablemente a cero.

No obstante, para valores de p superiores a 0.5 pero no demasiado grandes se observa un fenómeno sorprendente. Por ejemplo, la figura 9 muestra las coordenadas ρ_{ch} y ρ_{hc} de los principales puntos fijos del sistema para $p = 0,567$.

Como puede observarse, para un intervalo estrecho de valores de α aparece un punto fijo estable donde antes no lo había, que se corresponde con una situación de presencia de agentes corruptos en la capa 2 (la capa desfavorecida) y, al mismo tiempo, ausencia total de corrupción en la capa favorecida. Para un valor de α lo suficientemente elevado, este estado estable se desvanece abruptamente en una transición de primer orden.

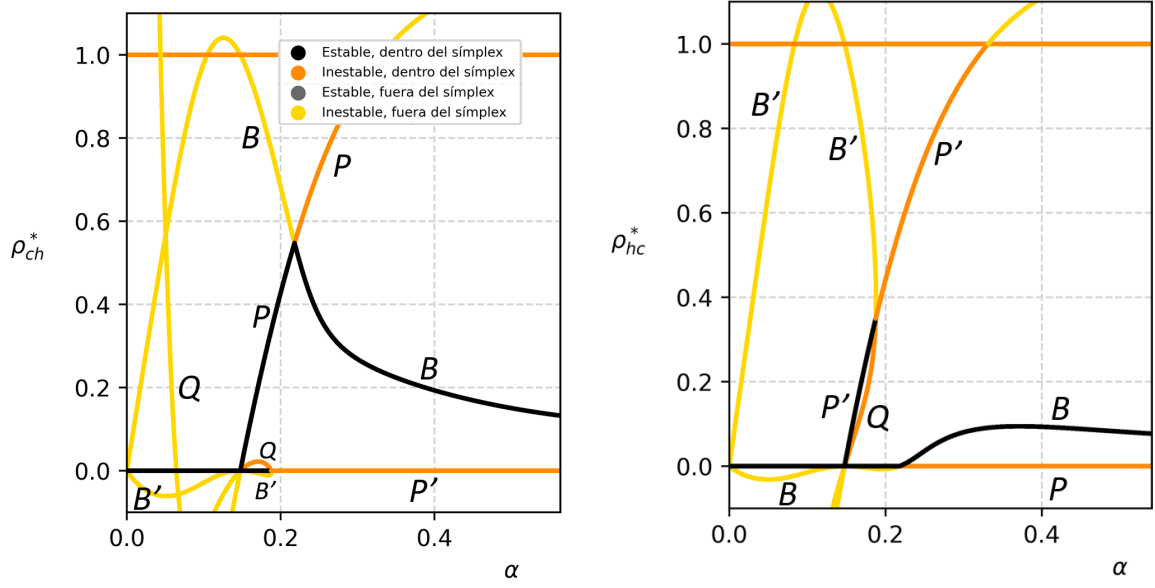


Figura 9: Coordenada ρ_{ch} (izquierda) y ρ_{hc} (derecha) de los principales puntos fijos del sistema frente a α para $p = 0,567$ (en cuanto a los demás parámetros, $\beta = 0,2$, $k_1 = k_2 = 4$ y $r = 0,5$).

Este efecto anómalo se entiende mejor si, partiendo de la situación simétrica de la figura 4, hacemos $p \gtrsim 0,5$. La figura 10 se corresponde a $p = 0,502$.

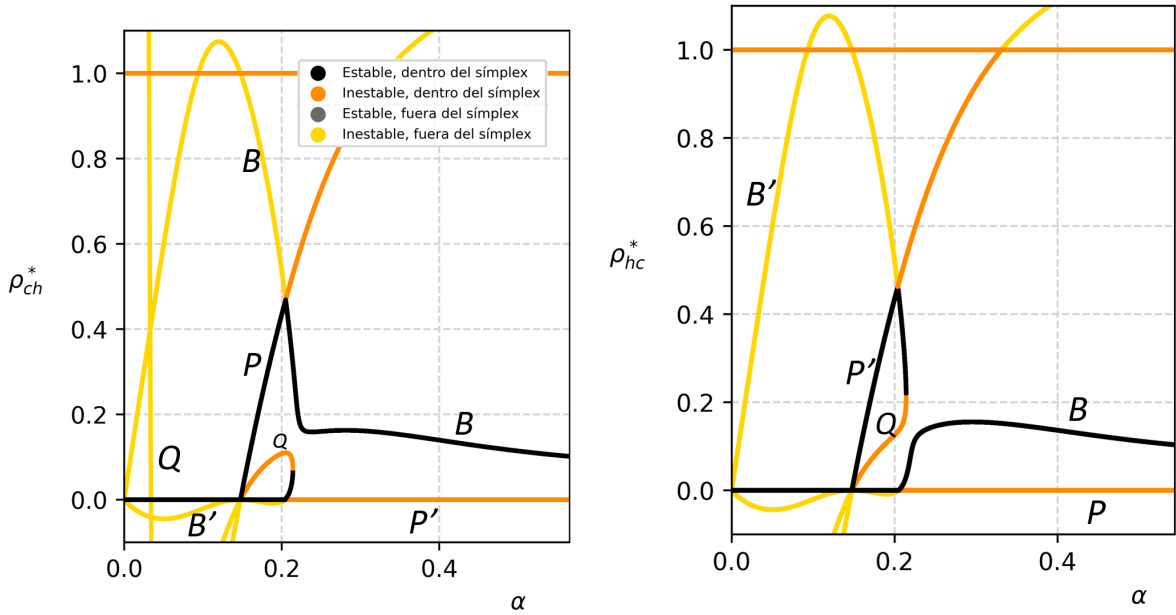


Figura 10: Coordenada ρ_{ch} (izquierda) y ρ_{hc} (derecha) de los principales puntos fijos del sistema frente a α para $p = 0,502$ (en cuanto a los demás parámetros, $\beta = 0,2$, $k_1 = k_2 = 4$ y $r = 0,5$).

Como podemos ver, el ligero aumento en p ha llevado a la desaparición de la bifurcación *pitchfork* subcrítica que, en la situación simétrica, protagonizan B , B' y Q . En su lugar, B' y Q se aniquilan en una bifurcación *saddle-node*, y B pasa a ocupar la posición que antes correspondía

a \mathbf{Q} , describiendo, según se aumenta α , una trayectoria que, si bien ya no está contenida en el subespacio simétrico $\rho_{ch} = \rho_{hc}$ (debido a la ruptura de la simetría), se mantiene muy próxima a dicho subespacio.

Conforme aumentamos p por encima de 0.502, el valor de α para el que \mathbf{B}' y \mathbf{Q} se aniquilan se va reduciendo progresivamente. Para $p = 0,567$ (figura 9), este valor coincide con aquel para el que \mathbf{B}' colisiona con \mathbf{P}' (entrando en un símplex y quitándole la estabilidad). De esta forma, para ese valor de α se produce una bifurcación *pitchfork* supercrítica que pone fin a la ventana de biestabilidad.

Brotes anómalos de corrupción en la capa desfavorecida por el cambio en k_1

En esta ocasión, romperemos la simetría manteniendo $p = 0,5$ y $k_2 = 4$ y variando la conectividad promedio en la primera capa, k_1 .

De nuevo, para k_1 considerablemente mayor que k_2 , la ventana de biestabilidad que se observa en la figura 4 ya no existe. De hecho, ni siquiera hemos de aumentar mucho k_1 con respecto a k_2 para verla desaparecer: la figura 11 muestra las coordenadas ρ_{ch} y ρ_{hc} de los puntos fijos del sistema frente a α para $k_1 = 5$.

Como puede verse, el valor de α para el que aparece corrupción en la capa 1 es menor que aquel para el que aparece la corrupción en la capa 2. Esto es acorde con la expresión (9) obtenida en el estudio de la situación simétrica, de la que se deduce que el valor umbral de α para el que aparece la corrupción es decreciente con la conectividad media de la capa en la que aparece.

No obstante, para $k_1 \gtrsim k_2$ se observa un fenómeno que parece contradecir esta tendencia: para un pequeño intervalo de valores de α , el sistema presenta dos puntos fijos estables, y uno de ellos corresponde a una situación de presencia de agentes corruptos en la capa 2 y ausencia total de corrupción en la capa 1 (la capa favorecida). Esto se observa en la figura 12, correspondiente a $k_1 = 4,5$.

Llama la atención, además, la manera abrupta en que en este caso aparece la ventana de biestabilidad, que contrasta con la forma continua en que lo hacía cuando era p el parámetro alterado para romper la simetría (figura 10).

El fenómeno se comprende mejor si se estudia el modo en que aumentar k_1 ligeramente por encima de k_2 afecta a las posiciones de los puntos fijos \mathbf{P} , \mathbf{P}' , \mathbf{B} , \mathbf{B}' y \mathbf{Q} como funciones de α . La figura 13 corresponde a $k_1 = 4,1$. En ella se observa como la bifurcación *pitchfork* en la que, en la situación simétrica, \mathbf{B} y \mathbf{B}' desaparecen (cediendo su estabilidad a \mathbf{Q}) se desvanece de forma muy similar a como lo hacía al variar p : \mathbf{Q} y \mathbf{B}' se aniquilan en una *saddle-node*, y \mathbf{B} toma el relevo de \mathbf{Q} en la zona central del símplex. La diferencia está en que, en este caso, también en α_1 (o, mejor dicho, en lo que en la situación simétrica era α_1) las cosas cambian.

La bifurcación múltiple que en la situación simétrica (figura 4) tiene lugar en α_1 (en la que colisionan \mathbf{HH} , \mathbf{P} , \mathbf{P}' y \mathbf{Q} , entrando estos tres últimos en el símplex) se desdoblan varias bifurcaciones que suceden en distintos valores de α , a los que llamaremos α_{1A} , α_{1B} y α_{1C} . Estos desdoblamientos, que se aprecian mejor en la figura 12, son lógicos y consistentes con la estrecha relación entre el umbral y la conectividad que ya vimos en la expresión (9). El orden de los acontecimientos, en sentido creciente de α , es el siguiente:

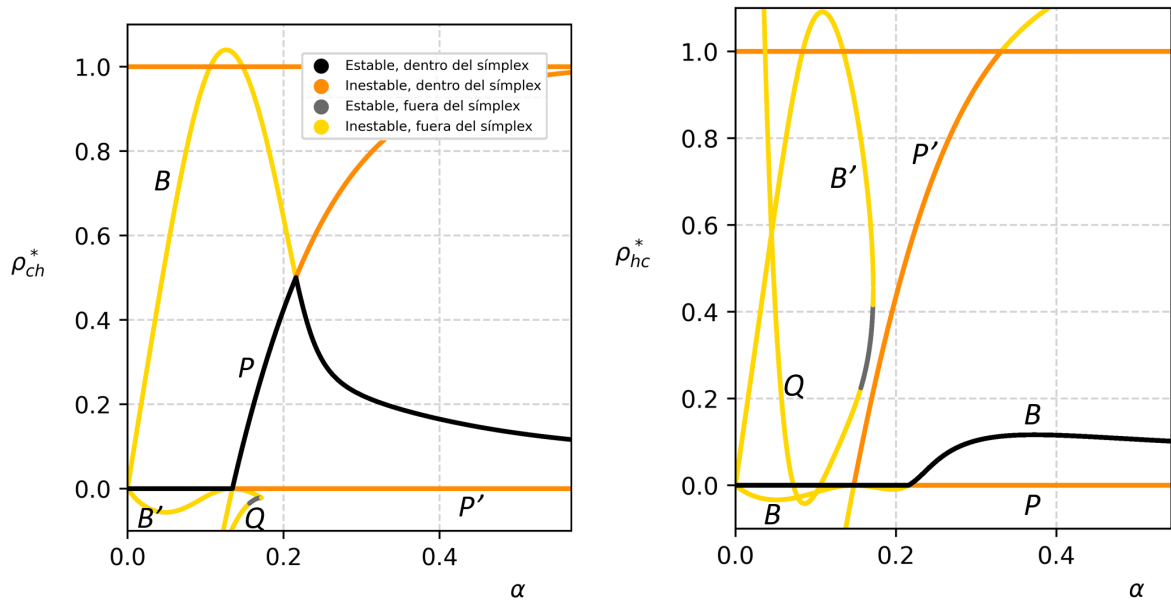


Figura 11: Coordenada ρ_{ch} (izquierda) y ρ_{hc} (derecha) de los principales puntos fijos del sistema frente a α para $k_1 = 5$ y $k_2 = 4$ (en cuanto a los demás parámetros, $\beta = 0,2$, $p = 0,5$ y $r = 0,5$).

1. En α_{1A} , P colisiona con HH entrando en el simplex y arrebatándole su estabilidad. Se trata de una bifurcación transcítica.
2. En α_{1B} , P' colisiona con HH entrando en el simplex, sin que se produzca intercambio de estabilidad alguno. Además, aún fuera del simplex (pero muy próximo a una de las caras), Q experimenta una bifurcación Hopf supercrítica por la que se torna estable espontáneamente, dejando como residuo una pequeña órbita inestable.
3. En α_{1C} , el ahora estable Q entra en el simplex colisionando con P' en una bifurcación transcítica en la que le cede su estabilidad.

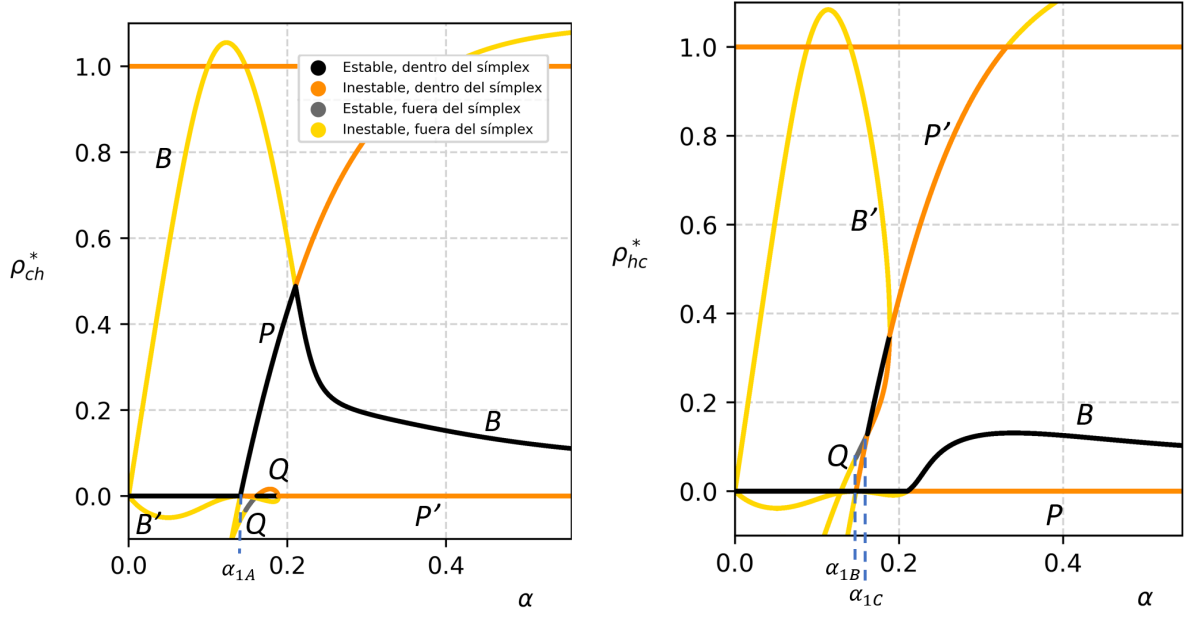


Figura 12: Coordenada ρ_{ch} (izquierda) y ρ_{hc} (derecha) de los principales puntos fijos del sistema frente a α para $k_1 = 4,5$ y $k_2 = 4$ (en cuanto a los demás parámetros, $\beta = 0,2$, $p = 0,5$ y $r = 0,5$).

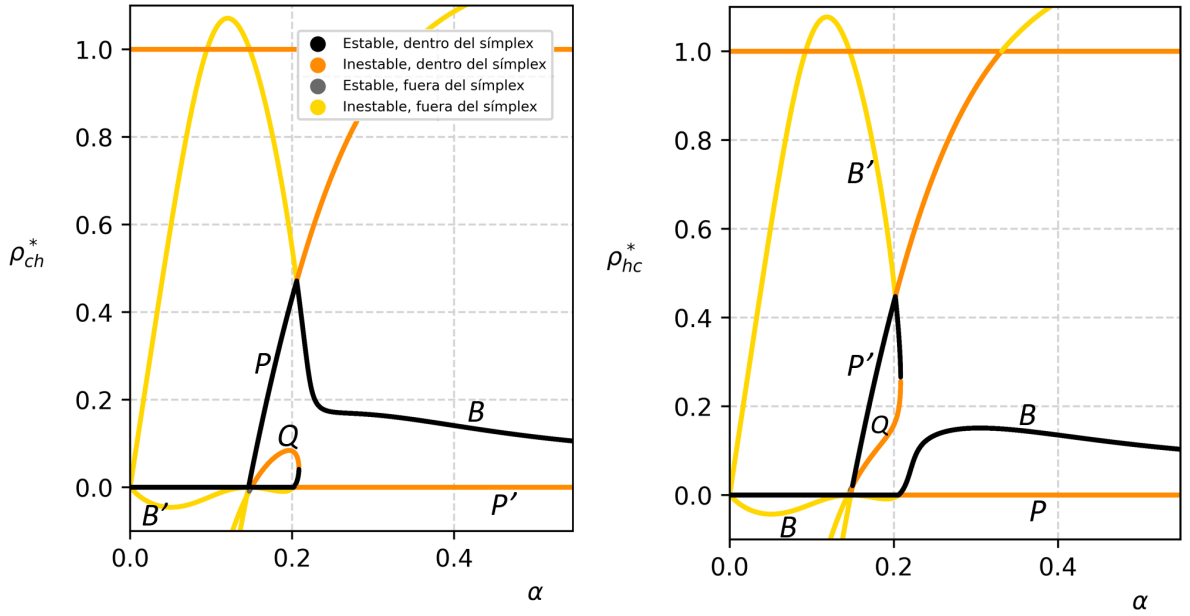


Figura 13: Coordenada ρ_{ch} (izquierda) y ρ_{hc} (derecha) de los principales puntos fijos del sistema frente a α para $k_1 = 4,1$ y $k_2 = 4$ (en cuanto a los demás parámetros, $\beta = 0,2$, $p = 0,5$ y $r = 0,5$).

De esta intrincada manera aparece la ventana de biestabilidad cuando $k_1 \gtrsim k_2$. Como se ha dicho, la concatenación de bifurcaciones puede ser más claramente apreciada en el caso $k_1 = 4,5$, $k_2 = 4$ (ver figura 12).

Conforme $k_1 \rightarrow k_2$, $\alpha_{1i} \rightarrow \alpha_1$ ($i = A, B, C$) y todas las bifurcaciones se fusionan en una sola.

4. Conclusiones

El modelo HCO dúplex no pretende reproducir fidedignamente y de forma cuantitativa la manera en que prolifera la corrupción en la vasta complejidad de una población humana. En cambio, su objetivo es, partiendo de unas pocas asunciones sencillas y plausibles sobre el comportamiento de los individuos a nivel *microscópico*, capturar cualitativamente parte de la esencia de la propagación de la violación de normas sociales en poblaciones en las que los individuos interaccionan entre sí en dos entornos diferenciados (lo cual es, seguramente, un enfoque más realista que asumir un único medio de interacción). En la delicada empresa de capturar dicha esencia, desempeñan una labor fundamental los mecanismos de delación y denuncia pública. Estos distiguen sustancialmente al HCO de otros modelos de propagación en redes, en la medida en que convierten la condena de agentes corruptos (equivalente a la recuperación de individuos enfermos en los modelos epidemiológicos) en un proceso mediado por interacción social.

Al haber asumido, por simplicidad, que tanto la probabilidad de corromper como la de delatar toman el mismo valor en ambas capas, el estudio de la que se ha llamado *situación simétrica* (sección 3.2.1) ha conducido a un resultado lógico: cuando las capas son idénticas, en la mayor parte de los casos hay el mismo número de agentes corruptos en ambas capas y, en aquellos casos en los que hay más corrupción en una de las capas que en la otra, existe siempre otro estado del sistema exactamente igual de probable en el que ocurre justamente lo contrario.

Algo más llamativa es, quizás, la situación asimétrica. Como se ha visto, cuando los agentes interaccionan con menor frecuencia en una capa que en la otra o cuando en una de las capas la conectividad promedio es menor, la corrupción se propaga con menor facilidad en ella. En concreto, en la capa desfavorecida, el umbral α_1 en el que aparece la corrupción es más elevado y la fracción de individuos corruptos en el equilibrio, más baja. Esto puede resultar de interés a la hora de idear mecanismos para hacer frente a la corrupción. Los resultados obtenidos invitan a pensar que quizás lo más razonable es estudiar formas de combatir la corrupción en una de las capas, más que maneras de combatir la corrupción *en general*.

La posibilidad de que solo una de las capas sea de nuestro interés no es descabellada: quizás, por ejemplo, un gobierno quiera combatir la disidencia política y no le importe hacerlo a costa de fomentar el contrabando (pues quizás los contrabandistas no se consideran una amenaza real). En términos más generales, es posible que una administración quiera mitigar el comportamiento corrupto en una determinada esfera de la población y no tenga problema en que, en el proceso, la corrupción prolifere en otro ámbito distinto.

En este escenario, en el presente documento se han estudiado varios mecanismos que permitirían mitigar la corrupción en la capa de interés: fundamentalmente, reducir su conectividad promedio con respecto a la de la otra capa y disminuir la frecuencia con la que los individuos interaccionan en ella.

Esta última medida es, posiblemente, la más sencilla de implementar. Acontecimientos históricos recientes como la pandemia de 2020 han puesto de manifiesto la facilidad con que una administración es capaz de reducir significativamente la frecuencia de ciertas interacciones sociales.

Así, limitar la frecuencia de interacción en una de las capas puede ser una medida de contención del comportamiento corrupto en ella. No obstante, una estrategia más efectiva puede ser

adoptada, quizás, en el escenario de biestabilidad observado en la sección 3.2.1: en tal caso, para valores bajos de β , una limitación temporal de las interacciones en la capa de interés puede llevar al sistema a pasar de uno de los estados estables al otro a través de una suerte de proceso de histéresis, viéndose el número de agentes corruptos en esta capa significativamente reducido en el proceso.

Diversas modificaciones podrían ser introducidas en el modelo con el fin de darle un carácter más realista o ampliar el abanico de situaciones a los que este es aplicable. Por ejemplo, no es descabellado pensar en que las probabilidades de corromper y delatar (α y β) puedan tomar valores diferentes en los distintos entornos de interacción, y seguramente esto sea lo que más se acerca a la realidad en ciertas situaciones. También sería interesante estudiar el efecto de aumentar el número de esferas de interacción consideradas. Por último, se podría introducir en el modelo un término de *forcing*, independiente de los valores de las fracciones de población, que representase el esfuerzo por parte de la autoridad o la administración por perseguir la violación de normas. Con frecuencia, este esfuerzo tiene un efecto mayor que el de la labor delatora de los individuos honestos (que, a menudo, pueden actuar con pasividad frente a la corrupción).

En cualquier caso, el modelo HCO dúplex supone un avance con respecto a modelos anteriores en el estudio de la propagación de la corrupción (en la medida en que tiene en cuenta el efecto, hasta ahora desestimado, de la existencia de dos entornos distintos de interacción), y constituye un paso hacia delante en la dirección de construir modelos más sofisticados y realistas que nos permitan alcanzar una mejor comprensión de la naturaleza de la propagación de la violación de normas en la vasta complejidad de una sociedad.

Referencias

- [1] Yuval Noah Harari. *Sapiens. De animales a dioses: Una breve historia de la humanidad*. Debate, 2014.
- [2] Mark EJ Newman. “Complex systems: A survey”. En: *arXiv preprint arXiv:1112.1440* (2011).
- [3] Dan Lu et al. “Norm violation versus punishment risk in a social model of corruption”. En: *Physical Review E* 101.2 (2020), pág. 022306.
- [4] Steven H Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press, 2018.
- [5] Kenneth R Meyer. *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems (AA Andronov, EA Leontovich, II Gordon and AG Maier); Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane (AA Andronov, EA Leontovich, II Gordon and AG Maier)*. 1975.
- [6] Saul A Teukolsky et al. “Numerical recipes in C”. En: *SMR* 693.1 (1992), págs. 59-70.