ESTUDIO DE LA COMPETENCIA ENTRE DOS PROCESOS INFECCIOSOS EN ESTRUCTURAS DÚPLEX DE CONTACTOS

ANEXOS

José Arnal Trespallé

Directores

Luis Mario Floría Peralta

Hugo Pérez Martínez

Facultad de Ciencias

Curso 2022–2023

Índice

1. Anexo I: Cálculo del valor umbral de α para el que se desestabiliza el estado de honestidad total en el modelo HCO dúplex

Sea α_c el valor umbral de α por encima del cual se desestabiliza el estado de honestidad total en el modelo HCO de una sola capa. Como ya vimos:

$$\alpha_c(k) = \frac{1-(1-\beta)^k}{k}$$

Centrando ahora nuestra atención en el modelo dúplex, podemos asumir, sin perdida de generalidad, que la capa 1 tiene una conectividad promedio mayor o igual a la de la capa 2 ($k_1 \geq k_2$). En el presente anexo se pretende probar lo siguiente:

En el modelo HCO dúplex, el valor umbral de α (al que llamaremos α_1) por encima del cual el estado de honestidad total $\rho_{hh} = 1$ pasa a ser inestable es $\alpha_c(k_1)$ (es decir, el mismo que en el modelo HCO de una sola capa, si esa capa es la de mayor grado).

Para probar este resultado, supondremos que el sistema se encuentra en el estado $\rho_{hh} = 1$ y consideraremos, por separado, cual sería su respuesta a un pequeño aumento en cada una de las demás fracciones de población.

Por un lado, es evidente que una perturbación del estado $\rho_{hh} = 1$ consistente en introducir una pequeña cantidad de individuos en el compartimento de ostracismo no desestabiliza dicho estado, pues los castigados introducidos se irán recuperando progresivamente hasta vaciar por completo el compartimento de nuevo.

Consideremos ahora una perturbación del estado $\rho_{hh} = 1$ consistente en introducir una fracción muy pequeña $\rho_{cc} = \epsilon_{cc}$. De las ecuaciones del sistema se deduce que la ecuación linealizada de su evolución temporal será:

$$\dot{\epsilon}_{cc} = -(pf_\beta^1 + qf_\beta^2)\epsilon_{cc} < 0$$

de modo que el estado es estable frente a este tipo de perturbaciones.

Por otro lado, si la perturbación consiste en introducir una fracción muy pequeña $\rho_{ch} = \epsilon_{ch}$, la ecuación linealizada de su evolución temporal es:

$$\dot{\epsilon}_{ch} = pf_\alpha^1 - (pf_\beta^1)\epsilon_{ch} \simeq p(k_1\alpha - 1 + (1-\beta)^{k_1})\epsilon_{ch}$$

donde hemos utilizado que:

$$\begin{aligned} &f_\beta^1(1, \epsilon_{ch}, 0, 0) = 1 - (1-\beta)^{k_1} \\ &f_\alpha^1(1, \epsilon_{ch}, 0, 0) = 1 - (1-\epsilon_{ch}\alpha)^{k_1} \simeq 1 - (1 - k_1\alpha\epsilon_{ch}) = k_1\alpha\epsilon_{ch} \end{aligned}$$

Por tanto, el estado es estable frente a este tipo de perturbaciones mientras $\alpha < \frac{1-(1-\beta)^{k_1}}{k_1} = \alpha_c(k_1)$, independientemente del valor de p.

Finalmente, por medio de un calculo completamente análogo, se llega a que un pequeño aumento ϵ_{hc} en la fracción de agentes hc evolucionará de acuerdo a la siguiente ecuación linealizada:

$$\dot{\epsilon}_{hc} = pf_{\alpha}^2 - (qf_{\beta}^2)\epsilon_{hc} \simeq p(k_2\alpha - 1 + (1-\beta)^{k_2})\epsilon_{hc}$$

Así, el estado será estable frente a esta pequeña perturbación mientras $\alpha < \frac{1-(1-\beta)^{k_2}}{k_2} = \alpha_c(k_2)$, independientemente, de nuevo, del valor de p.

Dado que $\alpha_c(k_1) \leq \alpha_c(k_2)$ (pues, recordemos, $\alpha_c(k)$ es una función monótonamente decreciente de k, y $k_1 \geq k_2$) el estado de honestidad total $\rho_{hh} = 1$ pierde su estabilidad en $\alpha = \alpha_c(k_1)$, como queríamos probar.

2. Anexo II: Bifurcaciones en sistemas dinámicos

Muchos de los cambios que uno puede introducir en los valores de los parámetros de un sistema dinámico conducen solo a variaciones cuantitativas del retrato de fases y no alteran significativamente su estructura. No obstante, en ocasiones, una variación en los parámetros puede producir un cambio en la estructura cualitativa del campo de velocidades. En concreto, pueden aparecer o desaparecer puntos fijos, o la estabilidad de alguno de ellos puede cambiar. Estos cambios cualitativos en la dinámica reciben el nombre de *bifurcaciones*.

Aunque el sistema HCO dúplex es un sistema cuatridimensional, la mayor parte de las bifurcaciones que se dan en él pueden ser explicadas en términos de bifurcaciones propias de sistemas unidimensionales. Por ello, es conveniente recordar brevemente cuáles son los principales tipos de bifurcaciones que pueden darse en un sistema unidimensional al variar uno de los parámetros [1]:

- En una bifurcación ***saddle-node*** (figura 1, izquierda), un punto fijo estable y otro inestable colisionan, aniquilándose mutuamente (o al revés: una pareja de puntos fijos de estabilidad opuesta aparece donde antes no había ninguno).
- En una bifurcación **transcrítica** (figura 1, derecha), dos puntos fijos de estabilidad opuesta colisionan, intercambiando su estabilidad.
- En una bifurcación ***pitchfork*** (figura 2), un punto fijo se *desdobla* en tres al variar un parámetro (o al revés: tres puntos fijos colapsan en uno solo). Una *pitchfork* se dice *subcrítica* si tanto antes como después de la bifurcación hay al menos un punto fijo estable en el sistema. En caso contrario, la bifurcación *pitchfork* se dice *supercrítica* (si bien están nomenclatura puede parecer arbitraria o poco clara, uno se convence de que es acertada en cuanto piensa en las consecuencias que puede tener la desaparición del único punto fijo estable de un sistema físico).

Estos tres tipos de bifurcaciones se dan también en sistemas dinámicos de varias dimensiones, pero con una sutil diferencia: en vez de pasar de ser estables a ser inestables (o viceversa), los puntos fijos involucrados pasan de ser *atractores* en un determinado subespacio unidimensional a ser *repulsores* en ese mismo subespacio (o viceversa). Esto es porque, en estas bifurcaciones, sólo uno de los autovalores de la matriz jacobiana cambia de signo. En el caso unidimensional, ese autovalor es el *único* autovalor, por lo que su signo determina completamente la estabilidad del punto fijo. En cambio, en el caso, por ejemplo, cuatridimensional, aparte del autovalor que cambia de signo en la bifurcación, hay otros tres autovalores que, junto al primero, determinan la estabilidad del punto fijo. Así, en 4D podemos encontrarnos con situaciones que son imposibles en 1D, como, por ejemplo, bifurcaciones *saddle-node* en las que dos puntos fijos inestables se aniquilan.

Sólo hay un tipo de bifurcación que no puede darse en sistemas unidimensionales y que necesitamos conocer para entender correctamente la dinámica del HCO dúplex. Se trata de la bifurcación **Hopf**.

Las bifurcaciones Hopf involucran no sólo puntos fijos, sino también órbitas. Una *órbita* o *ciclo límite* es una solución a las ecuaciones del sistema en forma de trayectoria cerrada. Si las trayectorias vecinas a un ciclo límite tienden a él *en espiral*, el ciclo límite se dice estable. Si, en cambio, se alejan de él, el ciclo límite es inestable.

Al igual que las *pitchfork* (y siguiendo un criterio similar), las bifurcaciones Hopf también pueden ser subcríticas y supercríticas.

En una Hopf subcrítica, al variar un parámetro, un punto fijo estable pasa a ser inestable sin interaccionar con ningún otro y, en el proceso, una órbita estable aparece a su alrededor (o al revés: una órbita estable colapsa sobre un punto fijo inestable, convirtiéndolo en estable). En una Hopf supercrítica, en cambio (figura 3), una órbita inestable colapsa sobre un punto fijo estable, perdiendo éste su estabilidad (o al revés).

En el modelo HCO dúplex no encontramos órbitas estables, por lo que no veremos ninguna Hopf subcrítica. No obstante, la Hopf supercrítica sí será un mecanismo por el que, en ocasiones, ciertos puntos fijos relevantes del sistema cambiarán su estabilidad fuera del símplex, en las inmediaciones del espacio de fases.

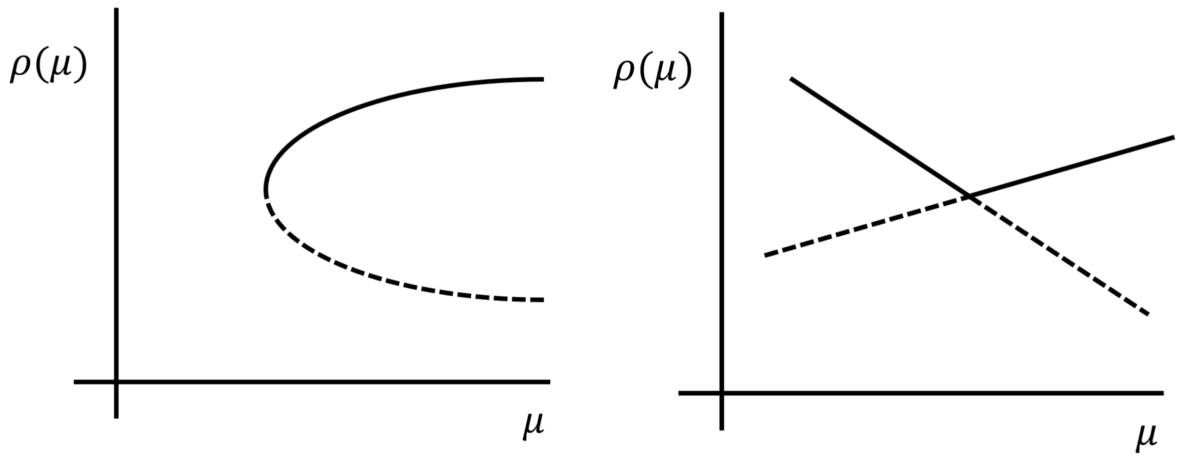

Figura 1: Diagrama de una bifurcación *saddle-node* (izquierda) y de una transcrítica (derecha). Las líneas continuas corresponden a puntos fijos estables, las discontinuas, a puntos fijos inestables. ρ es la única variable del sistema dinámico unidimensional y μ es el parámetro cuya variación provoca la bifurcación.

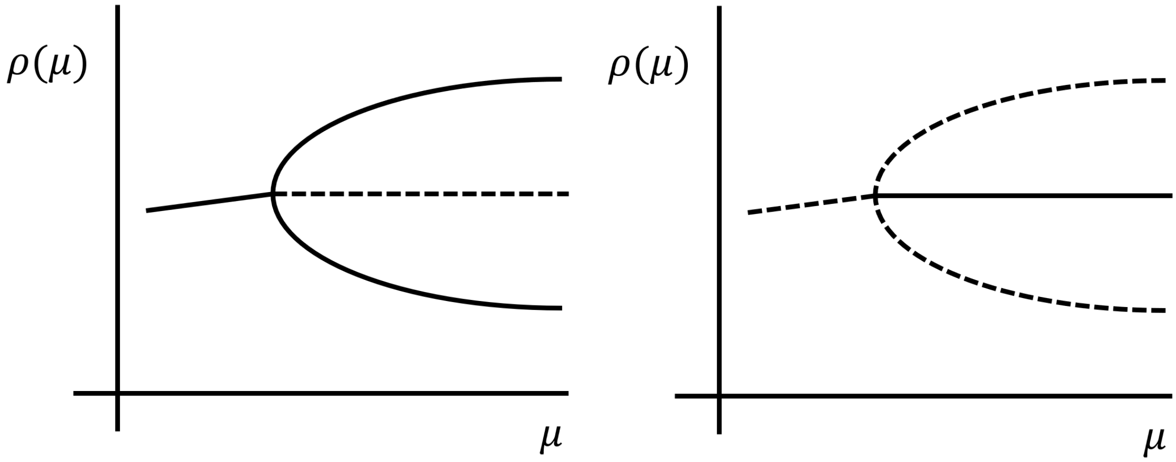

Figura 2: Diagrama de una bifurcación *pitchfork* subcrítica (izquierda) y supercrítica (derecha). Las líneas continuas corresponden a puntos fijos estables, y las discontinuas, a puntos fijos inestables. ρ es la única variable del sistema dinámico unidimensional y μ es el parámetro cuya variación provoca la bifurcación.

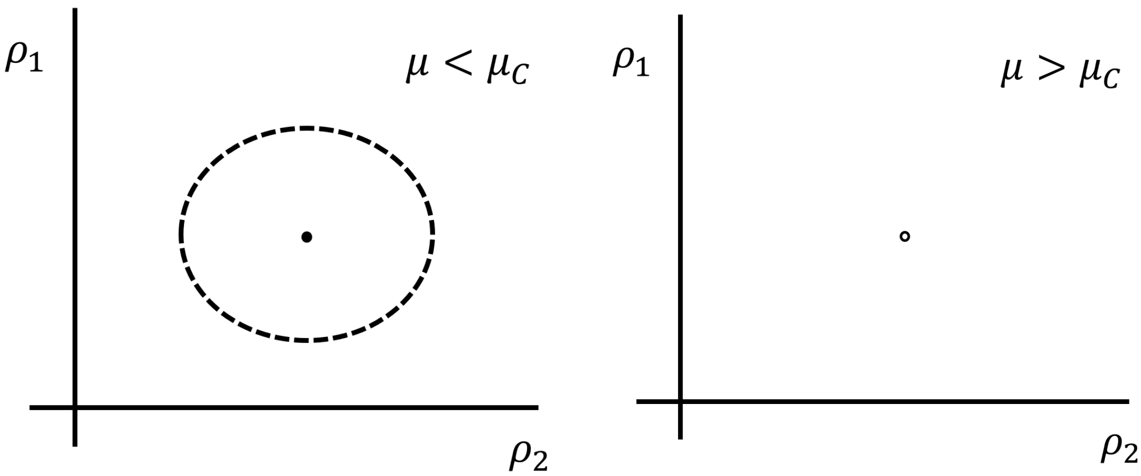

Figura 3: Esquema de lo que sucede en una bifurcación Hopf supercrítica. A la izquierda, la circunferencia discontinua representa una órbita inestable y, el punto negro en su centro, un punto fijo estable. A la derecha, el punto blanco del centro es inestable (la órbita ha colapsado sobre él quitándole la estabilidad). ρ_1 y ρ_2 son dos de las variables del sistema dinámico.