

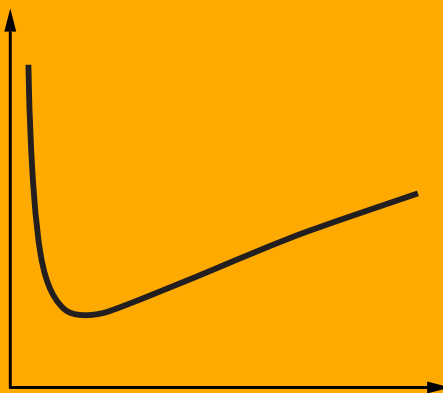
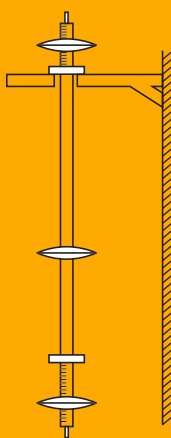


*Московский физико-технический институт  
(государственный университет)*

# ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

Том 1

М е х а н и к а



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

# ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

В трех томах

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением  
Московского физико-технического института  
(государственного университета)  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений  
по направлению «Прикладные математика и физика»*

Том 1  
М е х а н и к а

Под редакцией  
проф. А.Д. ГЛАДУНА

МОСКВА  
МФТИ  
2012

ББК 22.3

УДК 531

Л12

А в т о р ы:

А.Д. Гладун, Д.А. Александров, Ф.Ф. Игошин, П.Ф. Коротков,  
В.П. Корявов, А.П. Овчинников, Ю.А. Самарский, А.А. Теврюков,  
Г.Н. Фрейберг

Р е ц е н з е н т ы:

Кафедра общей физики Московского авиационного института  
(государственного технического университета)

Доктор физико-математических наук, профессор *А.В. Степанов*

Доктор физико-математических наук *А.В. Шелагин*

**Лабораторный практикум по общей физике:** Учебное  
Л12 пособие. В трех томах. **Т. 1. Механика.** 2-е изд., испр. /  
А.Д. Гладун, Д.А. Александров, Ф.Ф. Игошин и др.; Под ред.  
А.Д. Гладуна. — М.: МФТИ, 2012. — 316 с.  
ISBN 5-7417-0459-2

Представлены лабораторные работы по механике для студентов I курса (1-го семестра) МФТИ. Работы распределены по ключевым разделам курса общей физики. Каждый раздел содержит теоретическое введение по рассматриваемому кругу физических явлений. В начале книги приведены рекомендации по обработке результатов измерений и примеры отчета о выполненной работе. Теоретические введения и описания составлены с таким расчетом, чтобы студент мог получить ясное представление о лабораторной работе и изучаемом явлении и в том случае, когда выполнение работы опережает теоретический курс.

Книга снабжена необходимым справочным материалом.

Для физических, инженерно-физических и физико-технических специальностей вузов.

Табл. 56. Ил. 88.

**УДК 531**

**ISBN 5-7417-0453-0 (Т. 1)**  
**ISBN 5-7417-0459-2**

© Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего  
профессионального образования  
Московский физико-технический институт  
(государственный университет), 2012  
© Гладун А.Д., Александров Д.А.,  
Игошин Ф.Ф., Коротков П.Ф.,  
Корявов В.П., Овчинников А.П.,  
Самарский Ю.А., Теврюков А.А.,  
Фрейберг Г.Н., 2012

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое учебное пособие представляет собой руководство к выполнению лабораторных работ по общей физике для студентов первого курса (первого семестра) МФТИ. В соответствии с учебным планом института работы посвящены физическим основам механики. Совершенствование «Руководства к лабораторным занятиям» является традиционно одной из важнейших задач кафедры общей физики МФТИ. Предыдущие варианты Руководства выходили в 1964, 1973, 1983 годах. С момента последнего издания, однако, прошло уже 20 лет. За это время существенно обновился состав работ, изменились взгляды кафедры на объем и содержание лабораторного практикума. Поставлены новые работы, модернизированы существующие, в лабораториях кафедры используются современные приборы и электронно-вычислительная техника. Сама книга стала библиографической редкостью. Возникла необходимость в переиздании пособия, значительно переработанного как по содержанию, так и по структуре.

В данной книге работы распределены по ключевым разделам курса. Каждый раздел начинается кратким обзором теоретических представлений по выбранному кругу физических задач. Обзоры не дублируют соответствующие разделы учебников. Они содержат фундаментальные принципы, лежащие в основе рассматриваемых физических явлений, основные формулы и их качественный анализ. Как теоретические обзоры, так и изложение существа лабораторных работ составлены с таким расчетом, чтобы студент мог получить ясное представление об изучаемом явлении даже в том случае, если выполнение работы опережает теоретический курс.

С первых занятий в лаборатории студент учится работать с приборами. Он должен иметь представление об устройстве и принципе действия используемых приборов, вовремя замечать их неисправность.

Авторы старались сохранить четкость постановки экспериментальных задач, показать студенту, как он должен следить за правильно-

стью настройки и работы аппаратуры. Использование ЭВМ не должно затмевать сути изучаемых явлений.

Важнейшая задача, которую всегда приходится решать экспериментатору, состоит в том, как получить наилучшие значения измеряемых величин и как правильно оценить степень их достоверности. Широкое внедрение компьютерных методов обработки экспериментальных данных сделало эту задачу особенно актуальной. Прежде чем обрабатывать результаты современными методами, студент должен уметь быстро и грамотно от руки построить необходимые графики, которые покажут ему, правильно ли работала аппаратура, разумно ли выбран диапазон измерений и т. д.

Все это отображено в предлагаемом «Лабораторном практикуме по общей физике».

Настоящее издание является продолжением трех предыдущих. В связи с этим следует отметить большую роль в становлении физического практикума МФТИ его основателя К.А. Рогозинского и профессора Л.Л. Гольдина, который в течение многих лет был бессменным редактором книги.

Высокий научный и методический уровень лабораторных работ является результатом большой работы всего коллектива кафедры общей физики МФТИ. Несмотря на то, что во многих случаях конкретные работы имеют определенных авторов, предложивших или поставивших их впервые, они являются фактически плодом многолетнего труда всей кафедры. Авторы книги взяли на себя лишь скромный труд по систематизации и обобщению уникального опыта преподавателей кафедры.

Мы признательны кафедре физики МАИ(ГТУ), а также профессору А.В. Степанову и д.ф.-м.н. А.В. Шелагину, взявшим на себя труд по рецензированию книги. Высказанные ими замечания были учтены при окончательном редактировании лабораторного практикума.

# ВВЕДЕНИЕ

Физика — наблюдательная и экспериментальная наука. Принято считать, что эксперимент в физике является высшим судьей, если теоретическое предсказание вступает в противоречие с экспериментальными фактами, то без какой-либо апелляции вся вина ложится на теорию. Можно видеть, что это не совсем так. Существует немало физических теорий, которые «выжили», несмотря на противоречащие им эмпирические факты. Приведем один пример.

Как известно, эйнштейновская теория броуновского движения оказалась решающей в обосновании атомистической теории строения вещества, так как она подтверждалась блестящими экспериментами Ж. Перрена (Perrin). Эта теория, однако, опровергалась не менее блестящими опытами В. Анри (Henri). В чем дело? Почему подтверждение Перрена оказалось более важным, чем опровержение Анри?

Потому что любая теория, прежде чем подвергнуться эмпирической проверке, проходит целый комплекс неэмпирических испытаний. Теория должна быть логически непротиворечивой, совместимой с другими, ранее принятыми теориями, соответствовать общепринятой философии науки — быть простой, красивой и т. д. Эйнштейновская теория броуновского движения была принята, в частности, потому что она объясняла броуновское движение, согласовывалась с кинетической теорией газов и химическими представлениями об атомах. А что же опыты Анри? Как выяснилось впоследствии, они были просто неправильно истолкованы.

Таким образом, для принятия научной теории соответствие экспериментальным фактам является необходимым, но не достаточным условием. Это обстоятельство всегда имеется в виду при корректном сопоставлении теоретических и экспериментальных результатов.

Физика — не только экспериментальная, но и теоретическая наука. Ее язык — это язык математики. Математика играет двойную роль: не только обеспечивает физику вычислительным аппаратом, но и форми-

рует ее понятия. Математические понятия представляют самую суть физических идей. Без математического понятия производной нет физического понятия скорости. Без дифференциальных уравнений нет законов движения классической механики. Без операторных уравнений нет законов квантовой теории. Каждый символ, встречающийся в физической теории, имеет математическое значение. Несмотря на то, что многие математические идеи были стимулированы физическими исследованиями, математика является автономной научной дисциплиной. Возникает вопрос: почему оказывается возможным для описания физической реальности использование достижений чистой математики?

Это обусловлено тем, что математика изучает, по существу, чрезвычайно общие и достаточно четкие модели окружающей действительности. Математика — особый способ познания мира, которым физика широко пользуется, физика поэтому может служить идеалом для любой развитой системы научного знания.

Преподавание физики является моделью процесса научного познания, что определяет место и значение эксперимента в курсе общей физики. Основателем экспериментального метода следует считать Галилео Галилея. Однако мы не обязаны ему введением эксперимента как средства исследования: применение эксперимента не прекращается с античности до наших дней. Мы обязаны Галилею методологической концепцией, которой следует, порой бессознательно, современный физик-исследователь.

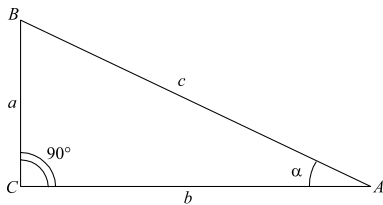


Рис. 1

Задача физики, по Галилею, — придумать эксперимент, повторив его несколько раз, исключив или уменьшив влияние возмущающих факторов, уловить в неточных экспериментальных данных математические законы, связывающие величины, характеризующие явление, предусмотреть новые экспериментальные подтверждения — в пределах экспери-

ментальных возможностей — сформулированных законов, а достигнув подтверждения, идти дальше с помощью дедуктивного метода и найти новые следствия из этих законов, в свою очередь подлежащие проверке. Это и есть так называемое физическое мышление.

Наблюдение, рабочая гипотеза, математическая разработка и опытная проверка — таковы, по Галилею, четыре фазы исследования явлений природы, которое начинается с опыта и к нему возвращается, но не может развиваться без обращения к математике.

Рассмотрим простой, но поучительный пример. Пусть в нашем распоряжении имеется набор кусков однородной жести (картона, фанеры и т. п.), форма которых представлена на рис. 1.

Будем считать также, что мы располагаем приборами для измерения массы, длины и величины углов, т. е. весами, линейкой и транспортиром.

Взвешивая достаточно большое количество таких кусков жести, вырезанных из одного и того же листа, можно убедиться в том, что для массы куска жести ( $ABC$ ) имеет место эмпирическое соотношение:

$$M_{ABC} = c^2 f(\alpha),$$

где  $f(\alpha)$  — некоторая универсальная функция, имеющая вид, представленный на рис. 2.

Разрежем кусок жести ( $ABC$ ) на две части так, как показано на рис. 3. Экспериментально убеждаемся в том, что  $\angle BCD = \angle BAC$ . В силу предыдущего можно видеть, что

$$M_{CBD} = a^2 f(\alpha), \quad M_{ACD} = b^2 f(\alpha).$$

Путем взвешивания проверяем аддитивность массы:

$$M_{ABC} = M_{CBD} + M_{ACD}.$$

Пользуясь предполагаемой универсальностью функции  $f(\alpha)$ , отсюда находим

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Полученное соотношение подвергаем дальнейшей экспериментальной проверке и убеждаемся в том, что мы добыли новое теоретическое знание.

Противоречит ли полученный нами результат соотношениям евклидовой геометрии? Конечно, нет. В самом деле, можно видеть, что

$$M_{ABC} = \rho h S_{ABC},$$

где  $\rho$  — плотность материала жести,  $h$  — толщина куска жести,  $S_{ABC}$  —

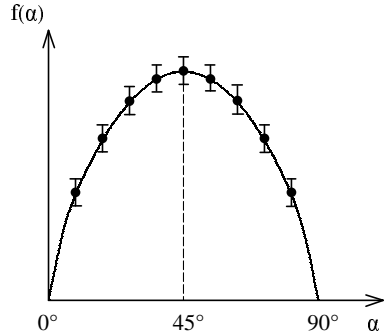


Рис. 2

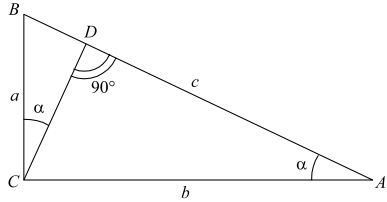


Рис. 3



площадь треугольника  $ABC$ . Очевидно, что

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}c^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}c^2 \sin 2\alpha,$$

т. е.

$$f(\alpha) = \frac{1}{4}\rho h \sin 2\alpha.$$

Рассмотренный пример является, на наш взгляд, яркой иллюстрацией экспериментального метода Галилея. Удивительно, что, используя измерительные приборы и процедуры, обладающие достаточно большими погрешностями, а также ограниченное количество кусков жести, мы получаем точное математическое соотношение (теорему Пифагора). Как говорил А. Эйнштейн, непостижимо то, что окружающий нас мир познаваем.

Главная задача лабораторного практикума по физике — способствовать освоению современного стиля физического мышления. Здесь преследуются две цели. С одной стороны, студент должен научиться самостоятельно воспроизводить и анализировать простейшие физические явления. С другой стороны, он получает при этом элементарные навыки работы в физической лаборатории, знакомится с современной научной аппаратурой.

Работающий в лаборатории должен стремиться к тому, чтобы знать:

- основные физические явления;
  - фундаментальные понятия, законы и теории классической и современной физики;
  - численные порядки величин, характерные для различных разделов физики;
  - методы физического исследования
- и уметь:
- абстрагироваться от несущественного, моделировать реальные физические ситуации;
  - делать правильные выводы из сопоставления результатов теории и эксперимента;
  - находить безразмерные параметры, определяющие данное явление;
  - производить численные оценки по порядку величины;
  - делать качественные выводы при переходе к предельным условиям;
  - обеспечить достоверность полученных результатов;
  - видеть в технических задачах физическое содержание.

К выполнению лабораторной работы необходимо относиться как к небольшому научному исследованию. Склонность к сомнениям и проверкам является ценнейшим качеством любого исследователя. Мы надеемся, что наш практикум поможет развить это качество.

# ИЗМЕРЕНИЯ В ФИЗИКЕ

## Эталоны физических величин

**Числовое значение физической величины.** Мы говорим, что величина  $x$  измерена, если известно, сколько раз в  $x$  содержится некоторая единица. Это и есть числовое значение  $\{x\}$  величины  $x$ . Если обозначить через  $[x]$  единицу величины  $x$  (единица времени 1 секунда, единица силы электрического тока 1 ампер), то при этом

$$\{x\} = \frac{x}{[x]}. \quad (1.1)$$

Пусть, например, сила тока  $i = 10$  А, это значит, что  $\{i\} = 10$ ,  $[i] = 1$  А. Соотношение (1.1) можно записать в виде

$$x = \{x\}[x]. \quad (1.2)$$

При уменьшении единицы измерения в  $\alpha$  раз:

$$[x] \rightarrow [X] = \frac{1}{\alpha}[x], \quad \{x\} \rightarrow \{X\} = \alpha\{x\}.$$

Сама физическая величина при этом не изменяется, поскольку

$$x = \{x\}[x] = \{X\}[X]. \quad (1.3)$$

Слишком высокие или слишком низкие порядки числовых (часто говорят численных) значений неудобны в употреблении. Для того чтобы избежать этого неудобства, вводят новые разряды единиц и присваивают им имя, используя старое с добавлением соответствующей приставки, например,  $1 \text{ мм}^3 = 1 \cdot (10^{-3} \text{ м})^3 = 10^{-9} \text{ м}^3$ . В таблице 1 приведены официально принятые приставки десятичного деления единиц.

Т а б л и ц а 1  
Официально принятые приставки десятичного  
деления единиц

Приставка	Обозначение		Показатель степени десяти
	Латинское	Кириллица	
экса	E	Э	18
пета	P	П	15
тера	T	Т	12
гига	G	Г	9
мега	M	М	6
кило	k	к	3
гекто	h	г	2
дека	da	да	1
деци	d	д	−1
санти	c	с	−2
милли	m	м	−3
микро	$\mu$	мк	−6
нано	n	н	−9
пико	p	п	−12
фемто	f	ф	−15
атто	a	а	−18

Существенно при этом, чтобы не использовались удвоенные или многократные приставки. Например, вместо 1 мкмкФ следует писать 1 пФ.

**Размерность.** Для каждой физической величины можно в принципе установить свою единицу, никак не связанную с единицами других величин. Это привело бы, однако, к тому, что в уравнениях, выражающих физические законы, появилось бы множество численных коэффициентов. Уравнения становились бы необозримыми, формулы — слишком сложными. Чтобы избежать этого, в физике уже давно отказались от независимого выбора единиц всех физических величин и стали применять системы единиц, построенные по определенному принципу, который состоит в следующем. Некоторые физические величины принимаются за базисные, т. е. такие, для которых единицы устанавливаются

произвольно и независимо. Так, например, в механике применяется система  $(l, m, t)$ , в которой за базисные величины принимаются длина  $(l)$ , масса  $(m)$  и время  $(t)$ . Выбор базисных величин и их число произвольны. Это вопрос соглашения. В официально принятой международной системе СИ в качестве базисных приняты девять величин: длина, масса, время, сила электрического тока, температура, сила света, количество вещества, плоский угол, телесный угол. Величины, не являющиеся базисными, называются производными. Для производных величин единицы устанавливаются на основе формул, служащих их определением. Предполагается, что коэффициенты, входящие в эти формулы, должны быть равными заранее выбранному значению. Например, скорость  $v$  равномерно движущейся материальной точки пропорциональна пройденному пути  $s$  и обратно пропорциональна времени  $t$ , затрачиваемому на прохождение этого пути. При независимом выборе единиц  $s$ ,  $t$  и  $v$  следует писать:

$$v = k \frac{s}{t},$$

где  $k$  — численный коэффициент, значение которого определяется выбором единиц. Для простоты полагают  $k = 1$  и  $s = vt$ . Если за базисные величины принять путь  $s$  и время  $t$ , то скорость становится величиной производной. За единицу скорости мы обязаны принять скорость такого равномерного движения, когда за единицу времени проходит единица длины. Говорят, что скорость имеет размерность длины, деленной на время. Символически это можно записать так:

$$\dim v = lt^{-1}.$$

Аналогично для ускорения  $a$  и силы  $F$  имеем

$$\dim a = lt^{-2}, \quad \dim F = mlt^{-2}.$$

Пусть физические величины  $x$  и  $y$  связаны уравнением

$$y = f(x). \tag{1.4}$$

В силу (1.3) из уравнения (1.4) следует, что

$$Y = f(X), \tag{1.5}$$

где  $X = \alpha x$ ,  $Y = \beta y$ . Найдем значение  $\beta$ , полагая, что аргумент  $x$  и параметр  $\alpha$  могут принимать любые значения. Дифференцируя (1.4) и (1.5) при постоянных  $\alpha$  и  $\beta$ , находим

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \quad \frac{dY}{dX} = f'(X).$$

Вторую из этих формул можно записать в виде

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{dy}{dx} = f'(X),$$

т. е.

$$\frac{\beta}{\alpha} f'(x) = f'(X).$$

Поскольку

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{xY}{yX},$$

отсюда находим

$$\frac{xY}{yX} f'(x) = f'(X)$$

или

$$x \frac{f'(x)}{f(x)} = X \frac{f'(X)}{f(X)}. \quad (1.6)$$

Правая часть уравнения (1.6) зависит только от  $X$ , левая — только от  $x$ . Это возможно только в том случае, когда они обе равны постоянной величине. Обозначая эту постоянную  $c$ , получаем дифференциальное уравнение:

$$x \frac{f'(x)}{f(x)} = c$$

или

$$\frac{df}{f} = c \frac{dx}{x}.$$

Отсюда находим

$$f(x) = f_0 x^c,$$

где  $f_0$  — постоянная интегрирования.

Аналогично,

$$Y = f_0 X^c,$$

или

$$\beta y = f_0 \cdot (\alpha x)^c.$$

Поскольку

$$y = f_0 x^c,$$

это дает

$$\beta = \alpha^c. \quad (1.7)$$

Таким образом, инвариантность физической величины по отношению к изменению единицы, определяемая условием (1.3), приводит к соотношению (1.7). Выясним, каков его физический смысл. Очевидно, если

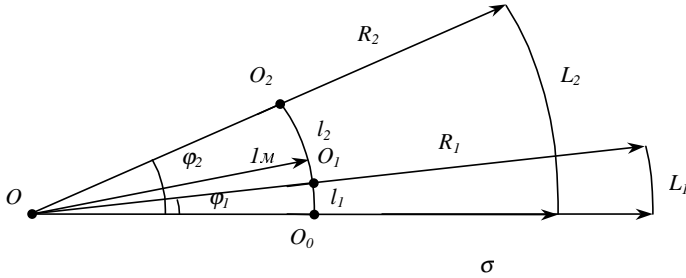


Рис. 1.1. К определению плоского угла

величина  $x$  выбрана в качестве базисной, то размерность величины  $y$  есть

$$\dim y = x^c.$$

Приведенные рассуждения нетрудно обобщить на случай, когда рассматриваемая величина зависит от нескольких базисных величин. Пусть, например, число базисных величин выбрано равным трем, и за них приняты длина ( $l$ ), масса ( $m$ ) и время ( $t$ ), тогда для любой физической величины  $y$  имеем

$$\dim y = l^p m^q t^r, \quad (1.8)$$

где  $p$ ,  $q$ ,  $r$  — постоянные числа. Формула (1.8) показывает, что если единицы длины, массы и времени уменьшить в  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  раз, то единица производной величины  $y$  уменьшится в  $\alpha^p \beta^q \gamma^r$  раз, и, следовательно, ее числовое значение увеличится в такое же число раз. В этом и состоит смысл понятия размерности. Величины  $p$ ,  $q$ ,  $r$  оказываются фактически рациональными числами. Это является следствием соответствующих определений физических величин.

Часто размерность физической величины отождествляется с ее единицей в соответствующей системе единиц. Так, например, говорят, что скорость имеет размерность м/с, а сила кг · м/с<sup>2</sup>. В этом нет большой беды, хотя, строго говоря, это неверно.

**Единицы углов.** Отдельного рассмотрения требует вопрос о единице плоского и телесного углов. При измерении плоского угла используют угол, называемый градусом, а также «дуговую меру» — «длину дуги окружности единичного радиуса» (рис. 1.1). В обоих случаях речь идет, по существу, об отношении величины дуги к радиусу:

$$\varphi = \frac{l}{1_M} = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{l_2}{1_M} - \frac{l_1}{1_M} = \frac{L_2}{R_2} - \frac{L_1}{R_1}.$$

Измеряется плоский угол  $\varphi$  между двумя радиусами-векторами  $OO_1$  и  $OO_2$ . Здесь  $l_1, l_2$  — дуги окружности единичного радиуса,  $L_1, L_2$  — дуги окружности с радиусами соответственно  $R_1$  и  $R_2$ . Чтобы подчеркнуть отличие от градусной меры, к числовому значению  $\varphi$  добавляют название «рад» (радиан). Если, например,  $l = 1$  м, то единица  $\varphi = 1 \text{ м}/1 \text{ м} = 1$  рад, что соответствует  $57^\circ 17' 44,80625''$ .

Аналогично для телесного угла имеем (рис. 1.2):

$$\Omega = \frac{S_0}{1 \text{ м}^2}.$$

Здесь  $S_0$  — площадь участка (в единицах  $\text{м}^2$ ) сферической поверхности радиуса 1 м. Если  $S$  — участок поверхности сферы радиуса  $R$ , то

$$\Omega = \frac{S_0}{1 \text{ м}^2} = \frac{S}{R^2}.$$

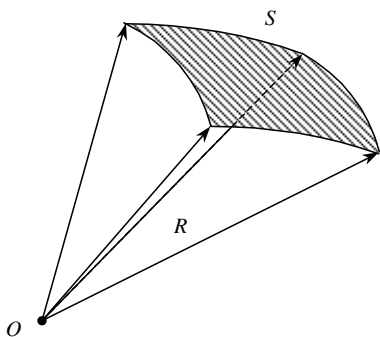


Рис. 1.2. К определению телесного угла

Единицу телесного угла определяют следующим образом: при  $S_0 = 1 \text{ м}^2$

$$\Omega = \frac{1 \text{ м}^2}{1 \text{ м}^2} = 1 \text{ ср (стерадиан)}.$$

Таким образом, полный плоский угол ( $360^\circ$ ) имеет  $\varphi = 2\pi$  рад, а полный телесный угол ( $S_0$  — полная величина площади поверхности сферы) —  $\Omega = 4\pi$  ср. Часто сокращения «рад» или «ср» опускаются, что иногда приводит к недоразумениям.

**Базисные величины системы СИ.** В международной системе СИ в качестве базисных приняты единицы, приведенные в таблице 2.

Эталоны этих величин выбираются следующим образом.

**Метр** — длина пути, проходимого светом в вакууме за интервал времени  $1/299\,792\,458$  с.

**Килограмм** — единица массы, равная массе международного прототипа. Прототип 1 кг массы представляет собой цилиндр из сплава платины (90%) и иридия (10%) диаметром около 39 мм и такой же высоты. Выбор этого сплава обеспечивает стойкость, однородность и высокую полируемость поверхности (так что его легко очищать). Плотность сплава  $21,5 \text{ г/см}^3$ . Прототип находится в Международном бюро мер и весов в Севре под Парижем. Относительная погрешность сличения с эталоном не превосходит  $2 \cdot 10^{-9}$ .

Т а б л и ц а 2

**Базисные единицы системы СИ**

Тип величины	Название единицы	Сокращенное обозначение базисной величины
Длина	Метр	м
Масса	Килограмм	кг
Время	Секунда	с
Сила электрического тока	Ампер	А
Температура	Кельвин	К
Сила света	Кандела	кд
Количество вещества	Моль	моль
Плоский угол	Радян	рад
Телесный угол	Стерadian	ср

**Секунда** — единица времени, равная 9 192 631 770 периодов излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома  $^{133}\text{Cs}$ .

**Ампер** — единица силы тока, равная силе неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и исчезающе малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м друг от друга в вакууме, вызвал бы между проводниками силу, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на каждый метр длины.

**Кельвин** — единица температуры, равная  $1/273,16$  части термодинамической температуры тройной точки воды.

**Моль** — единица количества вещества, равная такому его количеству, в котором содержится столько же структурных элементов, сколько атомов содержится в 0,012 кг изотопа углерода  $^{12}\text{C}$ .

**Кандела** — единица силы света, равная силе света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой  $540 \cdot 10^{12}$  Гц, сила излучения которого в этом направлении составляет  $1/683$  Вт/ср.

Производные единицы СИ приведены в таблице 3. Приведенные выше базисные единицы вместе с согласованными производными единицами составляют систему единиц СИ. Единицы измерения плоского и телесного углов радиан и стерадиан могут рассматриваться либо как базисные, либо как производные. В физике радиан и стерадиан отно-



Т а б л и ц а 3  
Согласованные производные единицы системы СИ

Тип единицы	Название единицы СИ	Сокращение	Отношение к другим единицам СИ
Сила	Ньютон	Н	$1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$
Давление и механическое натяжение	Паскаль	Па	$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$
Энергия, работа	Джоуль	Дж	$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$
Мощность	Ватт	Вт	$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж} \cdot \text{с}^{-1}$
Заряд	Кулон	Кл	$1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}$
Электрическое напряжение	Вольт	В	$1 \text{ В} = 1 \text{ Вт} \cdot \text{А}^{-1}$
Электрическая емкость	Фарада	Ф	$1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл} \cdot \text{В}^{-1}$
Электрическое сопротивление	Ом	Ом	$1 \text{ Ом} = 1 \text{ В} \cdot \text{А}^{-1}$
Электрическая проводимость	Сименс	См	$1 \text{ См} = 1 \text{ Ом}^{-1}$
Магнитный поток	Вебер	Вб	$1 \text{ Вб} = 1 \text{ В} \cdot \text{с}$
Плотность магнитного потока	Тесла	Тл	$1 \text{ Тл} = 1 \text{ Вб} \cdot \text{м}^{-2}$
Индуктивность	Генри	Гн	$1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб} \cdot \text{А}^{-1}$
Световой поток	Люмен	лм	$1 \text{ лм} = 1 \text{ кд} \cdot \text{ср}$
Освещенность	Люкс	лк	$1 \text{ лк} = 1 \text{ лм} \cdot \text{м}^{-2}$
Частота	Герц	Гц	$1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$
Преломляющая способность	Диоптрия	дптр	$1 \text{ дптр} = 1 \text{ м}^{-1}$

сят, вообще говоря, к классу производных единиц. В некоторых областях физики стерадиан, однако, считается базисной единицей. Символ «ср» нельзя при этом заменять числом 1.

## Измерения и обработка результатов измерений

Измерение физических величин и получение их числовых значений являются непосредственной задачей большинства физических экспериментов. При измерениях значение физической величины выражается в виде числа, которое указывает, во сколько раз измеренная величина больше (или меньше) другой величины, значение которой принято за единицу. Полученные в результате измерений числовые значения различных величин, например, времени, пути, скорости и т. д., могут зависеть друг от друга. Физика устанавливает связь между такими величинами и выражает её в виде формул, которые показывают, как числовые значения одних величин могут быть найдены по числовым значениям других.

Получение надежных числовых значений не является простой задачей из-за погрешностей, неизбежно возникающих при измерениях. Мы рассмотрим эти погрешности, а также методы, применяемые при обработке результатов измерений. Владение этими методами нужно для того, чтобы научиться получать из совокупности измерений наиболее близкие к истине результаты, вовремя заметить несоответствия и ошибки, разумно организовать сами измерения и правильно оценить точность полученных значений.

**Измерения и их погрешности.** Измерения делятся на прямые и косвенные.

**Прямые измерения** производятся с помощью приборов, которые измеряют непосредственно саму исследуемую величину. Так, массу тела можно найти с помощью весов, длину измерить линейкой, а время — секундомером.

К **косвенным** относятся измерения таких физических величин, для нахождения которых необходимо использовать связь в виде формулы с другими, непосредственно измеряемыми величинами, например, нахождение объёма тела по его линейным размерам, нахождение плотности тела по измеренным массе и объёму, расчёт сопротивления проводника по показаниям вольтметра и амперметра.

Качество измерений определяется их точностью. При прямых измерениях точность опытов устанавливается из анализа точности метода и прибора, а также из повторяемости результатов измерений. Точность косвенных измерений зависит как от надёжности используемых для расчёта данных, так и от структуры формул, связывающих эти данные с искомой величиной.

Точность измерений характеризуется их погрешностями. Абсолютной погрешностью измерений называют разность между найденным на

опыте и истинным значением физической величины. Обозначая абсолютную погрешность измерения величины  $x$  символом  $\Delta x$ , получим

$$\Delta x = x_{\text{изм}} - x_{\text{ист}}. \quad (1.9)$$

Кроме абсолютной погрешности  $\Delta x$  часто бывает важно знать относительную погрешность  $\varepsilon_x$  измерений, которая равна отношению абсолютной погрешности к значению измеряемой величины:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{\text{ист}}} = \frac{x_{\text{изм}} - x_{\text{ист}}}{x_{\text{ист}}}. \quad (1.10)$$

Качество измерений обычно определяется именно относительной, а не абсолютной погрешностью. Одна и та же погрешность в 1 мм при измерении длины комнаты не играет роли, при измерении стола может быть существенна, а при определении диаметра болта совершенно недопустима. Это происходит потому, что относительная погрешность измерений в первом случае составляет  $\sim 2 \cdot 10^{-4}$ , во втором  $\sim 10^{-3}$ , а в третьем может составлять десяток процентов и более. Вместо того чтобы говорить об абсолютной и относительной погрешности измерений, часто говорят об абсолютной и относительной ошибке. Между терминами «погрешность» и «ошибка» нет никакого различия, и мы будем пользоваться ими обоими.

Согласно (1.9) и (1.10), для того чтобы найти абсолютную и относительную погрешности измерения, нужно знать не только измеренное, но и истинное значение интересующей нас величины. Но если истинное значение известно, то незачем производить измерения. Цель измерений всегда состоит в том, чтобы узнать неизвестное заранее значение физической величины и найти если не истинное её значение, то хотя бы значение достаточно мало от него отличающееся. Что касается погрешностей, то, строго говоря, они не вычисляются, а оцениваются. При оценках учитываются условия проведения эксперимента, точность методики, качество приборов и ряд других факторов.

**Систематические и случайные погрешности.** Говоря о погрешностях измерений, необходимо прежде всего упомянуть о **грубых погрешностях** (промахах), возникших вследствие недосмотра экспериментатора или неисправности аппаратуры. Грубых ошибок следует избегать. Если установлено, что они произошли, соответствующие измерения нужно отбросить.

Не связанные с грубыми ошибками погрешности опыта делятся на систематические и случайные.

Систематические погрешности сохраняют свою величину и знак во время эксперимента. Они могут быть связаны с ошибками приборов (неправильная шкала, неравномерно растягивающаяся пружина, неравномерный шаг микрометрического винта, неравные плечи весов) и с самой постановкой опыта, например, при взвешивании тела малой плотности без учёта выталкивающей архимедовой силы, которая систематически занижает вес тела. Систематические погрешности опыта могут быть изучены и учтены путём внесения поправок в результаты измерений. Если систематическая погрешность опыта слишком велика, то обычно оказывается проще использовать новые, более точные приборы, чем исследовать погрешность старых.

Случайные погрешности меняют величину и знак от опыта к опыту. Многократно повторяя одни и те же измерения, можно заметить, что довольно часто их результаты не в точности равны друг другу, а «пляшут» вокруг некоторого среднего значения.

Случайные погрешности могут быть связаны, например, с сухим трением (из-за которого стрелка прибора вместо того, чтобы останавливаться в правильном положении, «застревает» вблизи него), с люфтом в механических приспособлениях, с тряской, которую в городских условиях трудно исключить, с несовершенством объекта измерений (например, при измерении диаметра проволоки, которая из-за случайных причин, возникающих при изготовлении, имеет не вполне круглое сечение) или с особенностями самой измеряемой величины. Примером в последнем случае может быть число космических частиц, регистрируемых счётчиком за 1 минуту. Повторяя измерения, найдём, что в разных опытах получаются разные числа, хотя и не слишком отличающиеся друг от друга, колеблющиеся около некоторого среднего значения.

Случайные погрешности эксперимента исследуются путём сравнения результатов, полученных при нескольких измерениях, проведённых в одинаковых условиях. Если при двух-трёх измерениях результаты совпали, то на этом следует остановиться. Если они расходятся, нужно попытаться понять причину расхождения и устранить её. Если устранить причину не удаётся, следует произвести 10–12 измерений и, записав все результаты, обработать их в соответствии с полученной закономерностью разброса величин.

Различие между систематическими и случайными погрешностями не является абсолютным и связано с постановкой опыта. Например, производя измерение тока не одним, а несколькими одинаковыми амперметрами, мы превращаем систематическую ошибку, связанную с неточностью шкалы, в случайную ошибку, величина и знак которой зависят от того, какой поставлен амперметр в данном опыте. Однако во всяком опыте — при заданной его постановке — различие между си-

стематическими и случайными погрешностями всегда можно и нужно устанавливать с полной определённойностью.

**Систематические погрешности.** К систематическим погрешностям относятся, как уже отмечалось, такие, которые обязаны своим происхождением действию неизменных по своей величине и направлению факторов. Теоретически рассуждая, систематические погрешности всегда могут быть учтены и, следовательно, исключены. Практически эта задача является делом трудным и требует большого искусства экспериментатора.

Оценку систематических погрешностей экспериментатор проводит, анализируя особенности методики, паспортную точность прибора и проводя контрольные опыты. В учебном практикуме учёт систематических ошибок ограничивается, как правило, лишь случаем инструментальных погрешностей. Остановимся на наиболее часто встречающихся случаях.

Систематические погрешности стрелочных электроизмерительных приборов (амперметров, вольтметров, потенциометров и т. п.) определяются их классом точности, который выражает абсолютную погрешность прибора в процентах от максимального значения включённой шкалы. Пусть на шкале вольтметра с диапазоном показаний от 0 до 10 В в кружке стоит цифра 1. Эта цифра показывает, что класс точности вольтметра 1 и предел его допустимой погрешности равен 1% от максимального значения включённой шкалы, т. е. равен  $\pm 0,1$  В. Кроме того, надо иметь в виду, что наносить деления на шкале принято с таким интервалом, чтобы величина абсолютной погрешности прибора не превышала половины цены деления шкалы.

Класс точности стрелочных электроизмерительных приборов (как и полцены деления шкалы) определяет максимальную (предельную) абсолютную погрешность, величина которой не меняется вдоль всей шкалы. Относительная же погрешность при этом резко меняется, поэтому приборы обеспечивают лучшую точность при отклонении стрелки почти на всю шкалу. Отсюда следует рекомендация: выбирать прибор (или шкалу многошкального прибора) так, чтобы стрелка прибора при измерениях находилась во второй половине шкалы.

В последнее время широко используются цифровые универсальные приборы, в том числе и электроизмерительные, отличающиеся высокой точностью и многоцелевым назначением. В отличие от стрелочных приборов систематические погрешности цифровых электроизмерительных приборов оцениваются по формулам, приводимым в инструкциях по эксплуатации. Так, например, значение относительной погрешности в процентах универсального цифрового вольтметра В7-34, работающе-

го на включённом пределе 1 В, оценивается по формуле

$$\varepsilon_x = \left[ 0,015 + 0,002 \left( \frac{U_{kx}}{U_x} - 1 \right) \right] \cdot [1 + 0,1 \cdot |t - 20|], \quad (1.11)$$

где  $U_{kx}$  — конечное значение предела измерения, В,

$U_x$  — значение измеряемой величины, В,

$t$  — температура, °С.

В случае измерения этим прибором постоянного напряжения величиной 0,5 В при температуре окружающей среды  $t = 30$  °С значение предела допустимой погрешности равняется:

$$\varepsilon_x = \left[ 0,015 + 0,002 \left( \frac{1}{0,5} - 1 \right) \right] \cdot [1 + 0,1 \cdot |30 - 20|] = 0,034\%,$$

что составляет  $\pm 0,00017$  В от измеряемой величины 0,5 В.

При изменении предела измерений прибора (на 100 или 1000 В) или вида измерений (ток, сопротивление) структура формулы не изменяется, меняются только числа, входящие в формулу. Точность вольтметра В7-34 обеспечивается при соблюдении следующих условий: окружающая температура 5–40 °С, относительная влажность воздуха до 95% при 30 °С, напряжение питающей сети  $\sim 220 \pm 22$  В.

Несколько слов о точности линейек. Металлические линейки относительно точны: миллиметровые деления наносятся с погрешностью не более  $\pm 0,05$  мм, а сантиметровые не более, чем с точностью 0,1 мм, так что считывание результата измерения можно проводить с помощью лупы, снабжённой дополнительной шкалой. Деревянными или пластмассовыми линейками лучше не пользоваться: их погрешности неизвестны и могут оказаться неожиданно большими. Исправный микрометр обеспечивает точность 0,01 мм, а погрешность измерения штангенциркулем определяется точностью, с которой может быть сделан отсчёт, т. е. точностью нониуса. У штангенциркулей цена делений нониуса составляет обычно 0,1 или 0,05 мм.

**Случайные погрешности.** Случайные величины, к которым относятся случайные погрешности, изучаются в теории вероятностей и в математической статистике. Мы опишем — с пояснениями, но без доказательств — основные свойства и правила обращения с такими величинами в том объёме, который необходим для обработки результатов измерений, полученных в лаборатории.

Случайные погрешности устранить нельзя, но благодаря тому, что они подчиняются вероятностным закономерностям, всегда можно указать пределы, внутри которых с заданной вероятностью заключается истинное значение измеряемой величины.

Задача определения случайных погрешностей была решена созданием теории, хорошо согласующейся с экспериментом. В основе этой теории лежит закон нормального распределения, включающий следующие закономерности:

1. При большом числе измерений ошибки одинаковой величины, но разного знака, встречаются одинаково часто.
2. Частота появления ошибок уменьшается с ростом величины ошибки. Иначе говоря, большие ошибки наблюдаются реже, чем малые.
3. Ошибки измерений могут принимать непрерывный ряд значений.

Случайные погрешности изучают, опираясь на изложенные закономерности, и для понимания такого подхода требуется ввести понятие вероятности.

Статистическая вероятность события определяется отношением числа  $n$  случаев его появления к общему числу  $N$  всех возможных равновероятных случаев:

$$P = \frac{n}{N}. \quad (1.12)$$

Пусть в урне находится 100 шаров, из них 7 чёрных, а остальные белые. Вероятность вытащить наугад чёрный шар равна  $7/100$ , вероятность вытащить белый —  $93/100$ .

Применим понятие вероятности к оценке разброса случайных погрешностей.

Проведем  $n$  измерений какой-либо величины (например, диаметра стержня) и будем считать, что *промахи и систематические ошибки устранены и рассматривать будем только случайные ошибки*. В результате этих измерений мы получим ряд значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Если  $x_0$  есть наивероятнейшее значение измеряемой величины (предположим, что оно нам известно), то разность  $\Delta x_i$  между измеренным значением  $x_i$  и  $x_0$  называется абсолютной случайной погрешностью отдельного измерения. Тогда

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= \Delta x_1 \\ x_2 - x_0 &= \Delta x_2 \\ &\dots\dots\dots \\ x_n - x_0 &= \Delta x_n \end{aligned}$$

Сложив эти равенства почленно, получим

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \Delta x_i}{n}, \quad (1.13)$$

где  $\Delta x$  могут быть как положительными, так и отрицательными числами. Согласно нормальному закону распределения, погрешности, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку, равновероятны. Следовательно, чем больше число измерений  $n$ , тем более вероятно полная взаимная компенсация погрешностей при их усреднении, так что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 0.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\text{ср}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = x_0. \quad (1.14)$$

Следовательно, среднее арифметическое  $x_{\text{ср}}$  результатов отдельных измерений при очень большом значении  $n$  (т. е.  $n \rightarrow \infty$ ) равно наиболее вероятнейшему значению измеряемой величины  $x_0$ . На практике  $n$  всегда конечно, и  $x_{\text{ср}}$  лишь приближённо равно наиболее вероятнейшему значению измеряемой величины  $x_0$  и тем ближе к нему, чем больше число измерений  $n$ .

В качестве наилучшего значения для измеряемой величины обычно принимают среднее арифметическое из всех полученных результатов:

$$x_{\text{ср}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \quad (1.15)$$

Чтобы оценить достоверность полученного результата, необходимо обратиться к распределению случайных погрешностей отдельных измерений. Распределение погрешностей часто подчиняется нормальному закону распределения (распределению Гаусса):

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad (1.16)$$

где  $y$  — функция распределения (плотность вероятности) погрешностей:

$$y = \frac{dn}{n \cdot d\delta},$$

где  $dn/(n \cdot d\delta)$  — доля случаев, приходящихся на бесконечно малый интервал погрешностей  $d\delta$ ,

$x_0$  — наиболее вероятнейшее значение измеряемой величины,

$\delta = (x - x_0)$  — случайная погрешность,

$\sigma$  — среднеквадратичная погрешность. Величину  $\sigma^2$  принято называть дисперсией распределения.



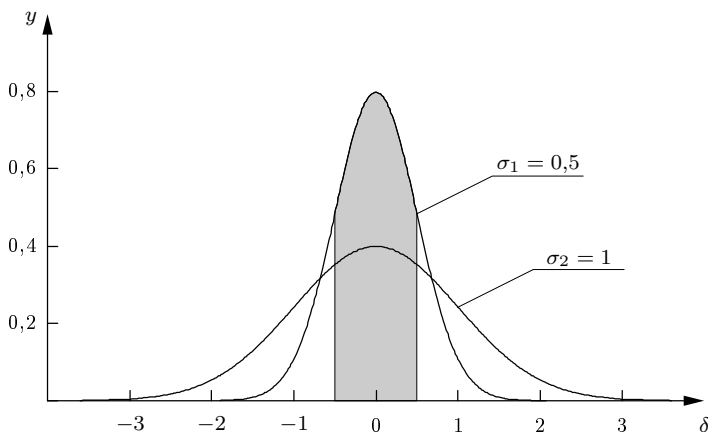


Рис. 1.3. Нормальное распределение

il

Графики закона нормального распределения с различными значениями  $\sigma$  изображены на рис. 1.3.

Точки  $|\delta| = |x - x_0| = \sigma$  есть точки перегиба кривой Гаусса. Параметр  $\sigma$  есть мера рассеяния случайных погрешностей  $\delta$ . Если результаты измерений  $x$  группируются вблизи наивероятнейшего значения  $x_0$  и значения случайных погрешностей  $\delta$  в основном малы, то мала и величина  $\sigma$  (график 1,  $\sigma = \sigma_1$ ). Наоборот, если случайные погрешности  $\delta$  имеют большие значения и сильно рассеяны, то кривая становится более размытой (график 2,  $\sigma = \sigma_2$ ) и  $\sigma_2 > \sigma_1$ . Величина  $\sigma$  количественно характеризует ширину графика функции распределения случайной величины и, следовательно, разброс значений измеряемой величины.

Отношение площади под кривой Гаусса, ограниченной значениями  $\delta = \pm\sigma$  (на рис. 1.3 эта площадь заштрихована для  $\sigma_1 = 0,5$ ), ко всей площади под кривой составляет 0,68, и запись  $x = x_0 \pm \sigma$  говорит о том, что любое проведённое измерение  $x$  с вероятностью 0,68 (68%) лежит в этом интервале.

Если записано  $x = x_0 \pm 2\sigma$ , то вероятность попадания в этот промежуток любого проведённого измерения составляет 0,95, и если  $x = x_0 \pm 3\sigma$ , то вероятность равна 0,997.

Говоря о погрешностях, мы постоянно обращаемся к Гауссовому закону распределения. В пользу применения нормального закона имеются серьёзные основания и главное из них — центральная предельная теорема: если суммарная погрешность проявляется в результате совместного действия ряда факторов, каждый из которых вносит малую долю в общую погрешность, то по какому бы закону не были распределены погрешности, вызываемые каждым из факторов, результат их суммарного действия приведёт к Гауссовому распределению погрешностей.

При ограниченном числе измерений  $n$  (т. е.  $n$  — конечно) отклонение результата отдельного измерения от наивероятнейшего значения  $x_0$  оценивается выборочным среднеквадратичным отклонением  $\sigma_{\text{отд}}$ :

$$\sigma_{\text{отд}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2}. \quad (1.17)$$

Эту формулу использовать на практике невозможно, т. к. наивероятнейшее значение измеряемой величины  $x_0$  неизвестно. Однако оценить значение  $\sigma_{\text{отд}}$  возможно, если заменить  $x_0$  в формуле (1.17) средним арифметическим значением  $x_{\text{ср}}$ :

$$\sigma_{\text{отд}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{\text{ср}})^2}. \quad (1.18)$$

Если  $n$  — невелико, то  $x_{\text{ср}}$  может заметно отличаться от  $x_0$  и формула (1.18) даёт довольно грубую оценку  $\sigma_{\text{отд}}$ . Согласно математической статистике рекомендуется использовать формулу

$$\sigma_{\text{отд}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{\text{ср}})^2}. \quad (1.19)$$

Здесь  $\sigma_{\text{отд}}$  — среднеквадратичная погрешность отдельного измерения или стандартная погрешность (стандартное отклонение), полученная путём измерений. Достоверность вычислений  $\sigma_{\text{отд}}$  увеличивается с увеличением числа измерений  $n$ .

Значение  $\sigma_{\text{отд}}$  является мерой разброса экспериментальных результатов относительно среднего значения.

**Погрешность среднего арифметического результата измерения.** Часто практически нас больше интересует не точность каждого из  $n$  измерений, а погрешность среднего арифметического и, главное, насколько оно соответствует наивероятнейшему значению измеряемой величины. Чтобы это оценить, продумаем ряд серий по  $n$  измерений величины  $x$  и найдём для каждой серии своё  $x_{\text{ср}}$ . Полученные средние значения  $x_{\text{ср}}$  колеблются по величине случайным образом около некоторого центра  $x_0$ , приближаясь по характеру разброса к нормальному закону распределения. Стандартную ошибку отклонения  $x_{\text{ср}}$  от  $x_0$  можно оценить с помощью среднеквадратичной погрешности результата  $\sigma_{\text{ср}}$  (аналогично тому, как мы это делаем для  $\sigma_{\text{отд}}$  для каждого из

$n$  измерений величины  $x$ ). В теории вероятностей доказывается, что средняя квадратичная погрешность результата  $\sigma_{\text{ср}}$  связана со средней квадратичной погрешностью отдельного измерения  $\sigma_{\text{отд}}$  следующим образом:

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_{\text{отд}}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{\text{ср}})^2}. \quad (1.20)$$

Тогда результат измерения величины  $x$  может быть представлен в виде

$$x = x_{\text{ср}} \pm \sigma_{\text{ср}}. \quad (1.21)$$

Запись утверждает, что наивероятнейшее значение измеряемой величины  $x_0$  с вероятностью 0,68 (68%) лежит в интервале  $x_{\text{ср}} \pm \sigma_{\text{ср}}$  (при значительном числе измерений  $n$ ).

Погрешность  $\sigma_{\text{ср}}$  обычно называют стандартной погрешностью опыта, а её квадрат — дисперсией.

Можно показать, что, как правило, погрешность результата измерений только в 5% случаях превосходит  $2\sigma_{\text{ср}}$  и почти всегда оказывается меньше  $3\sigma_{\text{ср}}$ .

На первый взгляд, из сказанного можно сделать вывод, что, беспредельно увеличивая число измерений, можно даже с самой примитивной аппаратурой получить очень хорошие результаты. Это, конечно, не так. С увеличением числа измерений уменьшается случайная погрешность опытов. Методические погрешности, связанные с несовершенством приборов, при увеличении числа опытов не меняются, т. е. число опытов следует выбирать разумно, не завышая его неоправданно.

Если число опытов мало (менее 8), лучше применять другие, более сложные оценки. Следует иметь в виду, что при  $n \approx 10$  измерение  $\sigma_{\text{ср}}$  определяется с точностью до 20–30%. Поэтому расчёт погрешностей следует выполнять с точностью до двух знаков, не более.

**Сложение случайных и систематических погрешностей.** В реальных опытах присутствуют как систематические, так и случайные ошибки. Если знак и величина систематической погрешности каким-либо образом определены, то она может быть вычтена непосредственно из результатов измерений. Однако обычно имеет место ситуация, в которой известно лишь оценка максимально возможного значения систематической погрешности по модулю — в таком случае можно по аналогии со случайной величиной ввести характеристику систематической ошибки  $\sigma_{\text{сист}}$  (например, при измерениях обычной линейкой  $\sigma_{\text{сист}} \approx 1\text{мм}$ ).

Пусть случайные и систематические ошибки характеризуются погрешностями  $\sigma_{\text{сист}}$  и  $\sigma_{\text{случ}}$ . Суммарная погрешность есть их среднеквадратичное значение, определяемое по формуле

$$\sigma_{\text{полн}}^2 = \sigma_{\text{сист}}^2 + \sigma_{\text{случ}}^2. \quad (1.22)$$

Обратим внимание на полезную особенность формулы. Пусть одна из ошибок, например,  $\sigma_{\text{случ}}$  в 2 раза меньше другой — в нашем случае  $\sigma_{\text{сист}}$ . Тогда

$$\sigma_{\text{полн}} = \sqrt{\sigma_{\text{сист}}^2 + \sigma_{\text{случ}}^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} \sigma_{\text{сист}} \approx 1,12 \sigma_{\text{сист}}.$$

В нашем примере с точностью 12%  $\sigma_{\text{полн}} = \sigma_{\text{сист}}$ . Таким образом, меньшая погрешность почти ничего не добавляет к большей, даже если она составляет половину от неё. Данный вывод очень важен. В том случае, когда случайная ошибка опытов хотя бы вдвое меньше систематической, нет смысла производить многократные измерения, так как полная погрешность опыта при этом практически не уменьшается. Измерения достаточно произвести 2–3 раза, чтобы убедиться, что случайная ошибка действительно мала.

**Обработка результатов при косвенных измерениях.** Если исследуемая величина представляет собой сумму или разность двух измеренных величин

$$a = b \pm c, \quad (1.23)$$

то наилучшее значение величины  $a$  равно сумме (или разности) наилучших значений слагаемых:  $a_{\text{наил}} = b_{\text{наил}} \pm c_{\text{наил}}$ , или, как рекомендовано выше,

$$a_{\text{наил}} = \langle b \rangle \pm \langle c \rangle. \quad (1.24)$$

Здесь и в дальнейшем угловые скобки (или черта сверху) означают усреднение: вместо того, чтобы писать  $a_{\text{ср}}$ , будем пользоваться обозначением  $\langle a \rangle$  (или  $\bar{a}$ ) и т. д.

Среднеквадратичная погрешность  $\sigma_a$ , если величины  $a$  и  $b$  независимы, находится по формуле

$$\sigma_a = \sqrt{\sigma_b^2 + \sigma_c^2}, \quad (1.25)$$

т. е. погрешности, как всегда, складываются квадратично, или, что то же самое, складываются дисперсии результатов измерений.

В том случае, если искомая величина равна произведению или частному двух других

$$a = bc \quad \text{или} \quad a = \frac{b}{c}, \quad (1.26)$$

то

$$a_{\text{наил}} = \langle b \rangle \langle c \rangle \quad \text{или} \quad a_{\text{наил}} = \frac{\langle b \rangle}{\langle c \rangle}. \quad (1.27)$$

Относительная среднеквадратичная погрешность произведения или частного независимых величин находится по формуле

$$\frac{\sigma_a}{a} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_c}{c}\right)^2}. \quad (1.28)$$

Приведём расчётные формулы для случая, когда

$$a = b^\beta \cdot c^\gamma \cdot e^\varepsilon \dots \quad (1.29)$$

Наилучшее значение  $a$  связано с наилучшими значениями  $b$ ,  $c$  и  $e$  и т. д. той же формулой (1.29), что и каждое конкретное значение. Относительная среднеквадратичная погрешность величины  $a$  при независимых  $b$ ,  $c$ ,  $e$ , ... определяется формулой

$$\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 = \beta^2 \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \gamma^2 \left(\frac{\sigma_c}{c}\right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\sigma_e}{e}\right)^2 + \dots \quad (1.30)$$

Наконец, приведём для справок общую расчётную формулу. Пусть

$$a = f(b, c, e, \dots), \quad (1.31)$$

где  $f$  — произвольная функция величин  $b$ ,  $c$ ,  $e$  и т. д. Тогда

$$a_{\text{наил}} = f(b_{\text{наил}}, c_{\text{наил}}, e_{\text{наил}}, \dots). \quad (1.32)$$

Формула (1.32) справедлива как в случае, когда  $b_{\text{наил}}$ ,  $c_{\text{наил}}$  и т. д. непосредственно измерены, так и в случае, если они сами найдены по измеренным значениям других величин. В первом случае значения  $b_{\text{наил}}$ ,  $c_{\text{наил}}$  и т. д., как уже указывалось, равны  $\langle b \rangle$ ,  $\langle c \rangle$  и т. д.

Погрешность  $a$  находится по формуле

$$\sigma_a^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \cdot \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 \cdot \sigma_c^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial e}\right)^2 \cdot \sigma_e^2 + \dots \quad (1.33)$$

Обозначение  $\partial f / \partial b$  имеет обычный смысл частной производной функции  $f$  по  $b$ , т. е. производной, при вычислении которой все остальные аргументы, кроме  $b$  (в нашем случае  $c$ ,  $e$  и т. д.), считаются постоянными. Аналогичный смысл имеют частные производные по  $c$ ,  $e$  и т. д. Частные производные следует вычислять при наилучших значениях

аргументов  $b_{\text{наил}}$ ,  $c_{\text{наил}}$ ,  $e_{\text{наил}}$  и т. д. Формулы (1.25), (1.28) и (1.30) являются частными случаями формулы (1.33).

Рассмотрим некоторые следствия, которые могут быть получены из анализа формул, приведённых в этом разделе. Прежде всего заметим, что следует избегать измерений, при которых искомая величина находится как разность двух больших чисел. Так, толщину стенки трубы лучше измерять непосредственно, а не определять, вычитая внутренний диаметр из внешнего (и, конечно, деля результат пополам). Относительная погрешность измерения, которая обычно представляет главный интерес, при этом сильно увеличивается, так как измеряемая величина — в нашем случае толщина стенки — мала, а ошибка в её определении находится путём сложения погрешностей измерения обоих диаметров и поэтому возрастает. Следует также помнить, что погрешность измерения, которая составляет, например, 0,5% от величины внешнего диаметра, может составить 5 и более процентов от толщины стенки.

При измерениях, которые затем обрабатываются по формуле (1.26) (например, при определении плотности тела по его массе и объёму), следует определять все измеряемые величины с приблизительно одинаковой относительной точностью. Так, если объём тела измерен с погрешностью 1%, то при взвешивании с погрешностью 0,5% его плотность определяется с точностью 1,1%, а при взвешивании с погрешностью 0,01% — с точностью 1%, т. е. с той же практически точностью. Тратить силы и время на измерение массы тела с точностью 0,01% в этом случае, очевидно, не имеет смысла.

При измерениях, которые обрабатываются по формуле (1.29), следует обращать главное внимание на точность измерения величины, входящей в расчётную формулу с наибольшим показателем степени.

Прежде чем приступить к измерениям, всегда нужно подумать о последующих расчётах и выписать формулы, по которым будут рассчитываться погрешности. Эти формулы позволят понять, какие измерения следует производить особенно тщательно, а на какие не нужно тратить больших усилий.

## Рекомендации по выполнению лабораторных работ

К каждому выполняемому эксперименту нужно относиться как к небольшому самостоятельному научному исследованию. Описания задач — только стержни, вокруг которых строится работа. *Конкретное содержание лабораторной работы, объём навыков и сведений, извлекаемых из неё, определяются главным образом не описанием, а подходом*

*студента к её выполнению.* Самое ценное, что может дать практикум, — умение обдумывать свои опыты, применять теоретические знания в экспериментальной работе, правильно планировать эксперимент и избегать ошибок, видеть важные и интересные особенности и казалось бы мелочи, из которых нередко получаются потом серьёзные научные исследования. Все эти навыки студент должен развить в себе сам в процессе упорного, вдумчивого, сознательного и сосредоточенного труда.

Результатом выполненной работы является отчёт, который должен содержать

- 1) описание теоретических предпосылок выполняемого эксперимента с кратким выводом необходимых формул и соотношений;
- 2) схема экспериментальной установки;
- 3) словесное описание хода эксперимента и таблицы для записи экспериментальных данных;
- 4) обработка результатов: вычисление расчётных величин и заполнение таблиц, построение графиков, вычисление результата эксперимента;
- 5) сравнение полученных результатов с известными (в литературе и справочниках), обсуждение возможных ошибок, предложения по улучшению эксперимента.

**Подготовка к работе.** Вначале нужно внимательно прочитать описание работы и теоретическое введение по её тематике. Это необходимо, чтобы получить представление о явлениях, закономерностях и порядках измеряемых величин, с которыми придётся иметь дело при выполнении работы, а также о методе измерения и используемых приборах, последовательности действий при проведении измерений.

Для записей результатов работы надо подготовить рабочую тетрадь, лучше большого формата, чтобы её можно было использовать в течение, по крайней мере, одного семестра. Оформление каждой работы нужно начинать с номера и названия. Далее должны быть представлены следующие разделы:

- 1) описание теоретических предпосылок выполняемого эксперимента с кратким выводом необходимых формул и соотношений;
- 2) схема экспериментальной установки;
- 3) словесное описание хода эксперимента и таблицы для записи экспериментальных данных;

Прежде чем приступить к выполнению работы, следует продумать предложенный в описании план действий, определить необходимое количество измерений. В соответствии с этим предварительно подготовить таблицы, в которые будут заноситься результаты.

Желательно заранее представлять диапазон изменения измеряемых величин и выбрать для них соответствующие единицы. В крайнем

случае, это нужно сделать на начальном этапе работы. Необходимо подумать о точности измерений. Например, при косвенных измерениях величин, имеющих степенную зависимость от непосредственно измеряемых, относительная погрешность величин, входящих с большими показателями степени, должна быть меньше, то есть их следует измерять точнее. По возможности следует избегать методов, при которых приходится вычислять разность двух близких по значениям величин. Например, толщину стенки тонкой трубки лучше измерить, как отмечалось, непосредственно, а не вычислять по значениям внешнего и внутреннего диаметров.

**Начало работы.** В начале работы необходимо тщательно ознакомиться с экспериментальной установкой, проверить работоспособность приборов. Нужно хорошо разобраться, как они регулируются, включаются и выключаются.

Всегда очень важно аккуратное и бережное обращение с приборами. Не следует вскрывать чувствительные приборы и менять настройку. Все сведения о приборах (в первую очередь класс точности, максимальное значение на шкале, по которой производятся измерения, и цену деления) и условиях эксперимента необходимо записать в рабочей тетради, так как они потребуются при получении окончательных результатов. При составлении (собирании) электрических схем источников питания подключаются к схеме в последнюю очередь.

Прежде чем приступить к основным измерениям, необходимо проверить работу установки. Первые измерения должны быть контрольными, чтобы убедиться, что всё работает нормально, диапазон и точность измерений выбраны правильно. Если разброс повторных измерений не превышает систематическую погрешность, то многократных измерений не требуется.

Замеченные неполадки в работе приборов и установок надо зафиксировать (делать соответствующую запись в тетради) и сообщить об этом преподавателю.

**Проведение измерений.** Все записи результатов измерений должны быть сделаны чётко и подробно, с нужными пояснениями.

Подойдя к установке следует определить систематическую ошибку входящих в установку приборов и провести 2-3 измерения одной и той же определяемой заданием величины. Если окажется, что случайная ошибка (1.19) полученных результатов в 2-3 раза меньше систематической ошибки приборов, в дальнейшем можно ограничиться однократными измерениями. Если же случайная ошибка окажется равна или больше систематической, то каждое измерение следует повторять такое число раз, чтобы случайная ошибка среднего значения  $\sigma_{\text{ср}}$  (1.20)



стала меньше систематической ошибки приборов. В отчёте при этом надо указать  $\sigma_{\text{ср}}$  и количество измерений  $n$ .

Если в начале работы выясняется, что разброс результатов измерений очень большой, то иногда лучше поискать и устранить причину этого, чем выполнять большое количество измерений для получения необходимой точности результата. При изучении зависимости измеряемой величины от параметра или другой измеряемой величины надо убедиться, что за время измерений в процессе работы не произошло никаких сбоев или существенных изменений внешних условий, влияющих на результаты, для чего в конце работы необходимо повторить начальные измерения либо проделать все измерения в обратном порядке.

Полезно строить предварительные графики зависимостей измеряемых величин между собой или от изменения параметров по мере получения результатов. При этом сразу выделяются области резких изменений, в которых измерения должны проводиться подробнее (больше точек), чем на участках плавного изменения. Если изучаемая закономерность, например, линейность, выполняется только на некотором участке, то область измерений должна быть выбрана шире этого участка, чтобы можно было установить границы выполнения закономерности.

Перед каждой таблицей должны быть указаны значения цены деления и класс точности каждого прибора, которым производятся измерения. В таблицу необходимо заносить число делений, а не саму величину, например, тока или напряжения. Это уберёжет вас от ошибки при записи экспериментальных данных. В конечном счёте это главное, так как обработка данных может быть проведена разными способами и в любое время, а измерения воспроизвести бывает трудно, а иногда и невозможно.

Единицы измерения надо выбирать так, чтобы результаты измерения представлялись числами в диапазоне примерно от 0,1 до 1000. При этом таблицы не будут громоздкими, а графики будут удобными для использования. Например, для модуля Юнга металлов (обозначаемых буквой  $E$ ), численные значения которых в системе СИ очень велики, в качестве единицы измерения берут  $10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>. Тогда наименование графы таблицы или оси графика будет выглядеть следующим образом:  $E$ ,  $10^{10}$  Н·м<sup>-2</sup>. Запятая здесь играет важную роль — она отделяет обозначение величины, приводимой в таблице или откладываемой по оси координат, от единицы измерения. В графе таблицы для алюминия будет стоять 7,05, а на шкалах графиков — небольшие целые числа. Вместо множителя перед единицами измерения могут быть использованы также слова или их сокращения.

Иногда используется другой способ наименования. В таблицах или на осях графиков представляют не саму величину, а произведение её на некоторый коэффициент, которое измеряют в обычных единицах. Для модуля Юнга при этом получаем:  $E \cdot 10^{-10}$ , Н·м<sup>-2</sup>. Хотя и в данном случае в таблице для алюминия будет стоять 7,05, этот способ меньше используется из-за возможных ошибок при переходе к значению  $E$ , так как множитель по ошибке может быть отнесен к единицам измерения.

**Расчёты, анализ и представление результатов.** Полученные первичные результаты в виде таблиц и графиков используются для расчёта конечных значений величин и их погрешностей либо для нахождения зависимости измеряемых величин между собой. Все расчёты удобно проводить в той же рабочей тетради, где записаны первичные результаты измерений, и заносить в соответствующие свободные колонки таблиц с экспериментальными данными. Это поможет проводить проверку, анализ и сопоставление получаемого результата с исходными данными.

Для измеряемых величин окончательные результаты должны быть представлены в виде среднего значения, погрешности и количества проведённых измерений. В случае косвенных измерений для получения окончательного результата используются их зависимости от измеряемых величин, по которым вычисляют и средние значения и погрешности.

Поскольку погрешность ошибки редко удаётся определить с точностью лучше 20%, при записи результата нужно округлять величину ошибки до одной-двух значащих цифр. Например, правильные записи погрешностей:  $\pm 3$ ;  $\pm 0,2$ ;  $\pm 0,08$ ;  $\pm 0,14$ ; неправильные записи:  $\pm 3,2$ ;  $\pm 0,23$ ;  $\pm 0,084$ . Величину  $\pm 0,14$  не следует округлять до  $\pm 0,1$ , так как при этом округлении погрешность изменяется на 40%. При записи результата измерения последняя цифра значения физической величины должна быть того же разряда, что и в погрешности. Например, некоторый результат при погрешности  $\pm 0,012$ , записываемый  $1,243 \pm 0,012$ , при большей погрешности ( $\pm 0,03$ ) принимает вид  $1,24 \pm 0,03$ , а при ещё большей погрешности ( $0,2$ ) —  $1,2 \pm 0,2$ . В промежуточных расчётах можно сохранить в числах лишнюю значащую цифру для лучшего округления конечного значения. В зависимости от выбора единиц измерения погрешность может составлять десятки, сотни, тысячи или более единиц измерения. Например, если вес тела определён с точностью до 0,5 кг и составляет  $58,3 \pm 0,5$  кг, то его можно выразить и в граммах:  $(583 \pm 5) \cdot 10^2$  г. Неправильно было бы написать:  $58300 \pm 500$  г.

Для окончательной оценки качества полученных результатов измерений надо сравнить их с данными, приводимыми в справочниках.

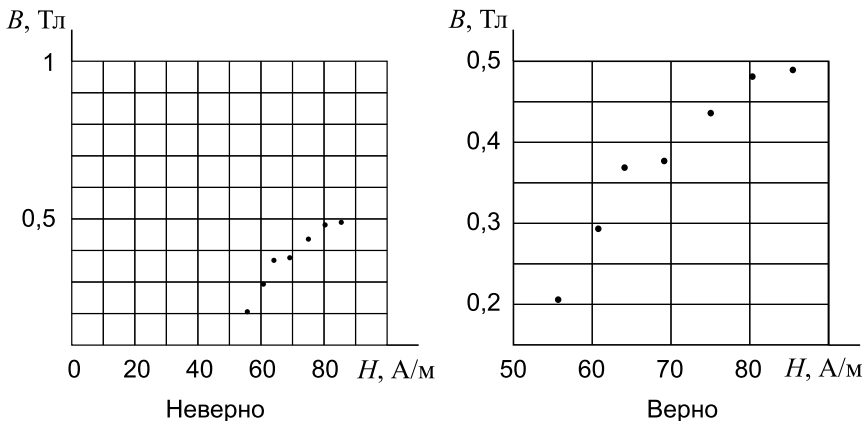


Рис. 1.4. Пример неправильного и правильного построения графика

**Построение и обработка графиков.** Для построения графиков следует использовать специальную миллиметровую бумагу. Размер графика (и соответственно формат листа бумаги) не должен быть очень малым или очень большим – оптимально от четверти до половины листа формата А4.

При построении графика, прежде чем наносить точки, нужно выбрать подходящий масштаб и начало отсчёта на осях координат. Выбор должен быть таким, чтобы наносимые точки располагались на всей площади листа. На рис. 1.4 изображены примеры правильного и неправильного построения графика. На левом (неправильно построенном) графике экспериментальные точки занимают нижнюю правую часть рисунка. Чтобы этого избежать, следует выбрать более крупный масштаб по оси  $Y$  и сместить нуль на оси абсцисс, как это сделано на правом графике.

Обозначения функций и единиц измерения на осях координат должно быть ясным и чётким. Не обязательно наименовать все деления шкалы, но надо сделать столько надписей, чтобы ими было легко и удобно пользоваться. Писать их лучше на внешней стороне осей координат. Если используется бумага с сеткой, имеющей линии различной толщины, то на жирных линиях следует располагать круглые значения величин. Удобно, если клеточка сетки соответствует 0,1; 0,2; 0,5; 1; 2; 5; 10 единицам масштаба измерения откладываемой по оси величины. Неудобно, если одной клетке соответствуют 2,5; 3; 4; 7 и тому подобное количество единиц масштаба. При неудобном масштабе нанесение

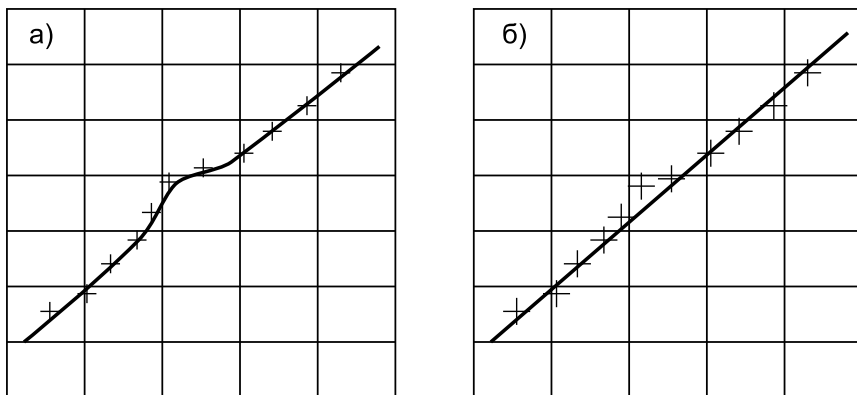


Рис. 1.5. Проведение линии по экспериментальным точкам

точек на график и определение координат точек на графике требует большего времени и нередко сопровождается ошибками. Наименование величины, откладываемой по оси абсцисс, пишется снизу у конца оси, а по оси ординат — вверху слева. Через запятую указывается единица измерения.

Точки, наносимые на график, должны изображаться чётко и ясно. Их следует наносить карандашом, чтобы можно было исправить при обнаружении ошибок. Не следует делать никаких загромождающих график больших пояснительных надписей или указывать около точек их числовые значения. Если пояснения необходимы, то точка или линия обозначается цифрой и в тексте или на полях графика делается соответствующее пояснение. Точки, полученные в различных условиях, например, при нагревании и охлаждении, при увеличении и уменьшении нагрузки и т. д., нужно изображать разными символами: окружностями, квадратами, треугольниками и другими.

При нанесении на график экспериментальных точек, для которых известны погрешности, необходимо указывать эти погрешности отрезками линий, величина которых соответствует величине погрешности по каждой из переменных, определяющих точку. В таком случае точка изображается крестом. Половина размера креста по горизонтали должна быть равна погрешности по оси абсцисс, а половина размера по вертикали — погрешности по оси ординат. В том случае, если одна из погрешностей — из-за своей малости — не может быть изображена графически, результаты изображаются черточками, вытянутыми на  $\pm\sigma$  в том направлении, где погрешность не мала. Такое изображение

экспериментальных точек облегчает анализ результатов, в частности, поиск зависимостей, наилучшим способом их описывающих, сравнение с теоретическими расчётами или результатами других исследований.

На рис. 1.5а, б, на которых изображены одни и те же экспериментальные точки при разных погрешностях измерений, график 1.5а, несомненно, указывает на нерегулярный ход изучаемой зависимости. Эта зависимость изображена на рисунке кривой линией. Те же данные при больших погрешностях опыта (рис. 1.5б) с успехом описываются прямой линией, так как только одно измерение отстает от этой прямой больше, чем на стандартную погрешность (и меньше, чем на две такие погрешности). То обстоятельство, что данные на рис. 1.5а требуют проведения кривой линии, а на рис. 1.5б не требуют, проясняется лишь при изображении результатов в виде креста погрешностей.

Часто измерения проводятся с целью получения или подтверждения зависимостей между измеряемыми величинами. В этих случаях необходимо по экспериментальным точкам провести соответствующую зависимость и, если нужно, найти погрешности измеряемых величин по разбросу экспериментальных точек. Легче всего по экспериментальным точкам проводить прямую линию. Поэтому если из теории или некоторых предположений известна возможная зависимость между измеряемыми величинами, то по осям координат надо отложить такие функции измеряемых величин, которые лучше соответствуют линейной зависимости. Например, при исследовании зависимости времени падения тела в поле тяжести от высоты, с которой оно падает, по осям нужно отложить высоту и квадрат времени, так как в однородном поле тяжести без учёта сопротивления воздуха квадрат времени падения пропорционален высоте падения. Это особенно удобно, если требуется определить ещё и ускорение падения. Менее удобным было бы откладывание по осям времени и корня квадратного из высоты, хотя и в этом случае зависимость так же линейна. Отметим, что линейная зависимость должна получиться и при откладывании по осям координат логарифмов времени и высоты. Но логарифмический масштаб в данном случае плох тем, что линейность сильно нарушается при небольших погрешностях в начале отсчёта времени и высоты. Логарифмический масштаб удобен в случае степенных зависимостей и больших диапазонов изменения переменных. Получающиеся линейные зависимости позволяют по графику найти показатель степенной зависимости.

### **Графический метод обработки экспериментальных данных.**

Существуют различные методы проведения прямых линий через экспериментальные точки. Самый простой способ, пригодный для оценки результатов, состоит в использовании прозрачной линейки или прозрачного листа с нарисованной на нём прямой линией. Благодаря про-

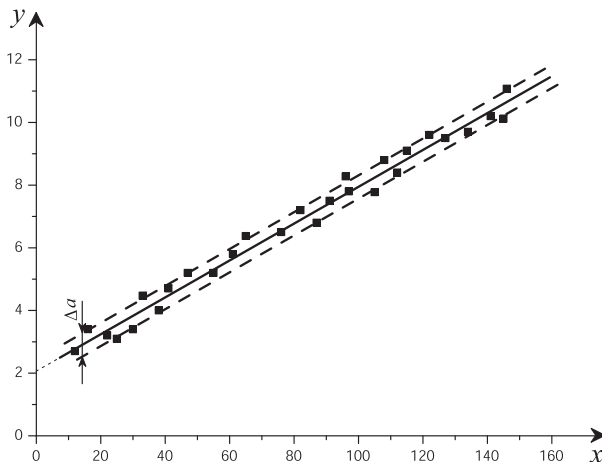


Рис. 1.6. Графический метод обработки результатов.  
Оценка случайной погрешности параметра  $a$

зрачности линейки видно сколько точек находится по обе стороны от проводимой линии. Её надо провести так, чтобы по обе стороны было одинаковое количество экспериментальных точек. Параметры этой линии (наклон, пересечения с осями координат) измеряются непосредственно на графике. В результате получаем аналитическое выражение прямой  $y = a + bx$ , которая в общем случае при  $a$ , не равном нулю, не проходит через начало координат.

Случайные погрешности определения  $a$  и  $b$  можно оценить по графику следующим образом. Для оценки погрешности  $a$  находим величины, на которые надо параллельно сместить линию, чтобы число точек по обе стороны относилось, как 1 : 2 (рис. 1.6). То есть при смещении линии вверх по  $y$  на  $\Delta a_1$  выше линии находится в два раза меньше точек, чем ниже её, а при смещении вниз на  $\Delta a_2$  ниже её находится в два раза меньше точек, чем выше. Если всего экспериментальных точек  $n$ , то для оценки погрешности  $a$  имеем

$$\sigma_a = \frac{\Delta a_1 + \Delta a_2}{\sqrt{n}}.$$

Для оценки погрешности коэффициента  $b$  надо диапазон изменения координаты  $x$  экспериментальных точек разделить на три равные части и поворачивать линию таким образом, чтобы в крайних частях соотношения числа точек на разных сторонах линии было 1 : 2 (рис. 1.7). То есть увеличиваем наклон линии до значения  $b_1$  так, чтобы в левом

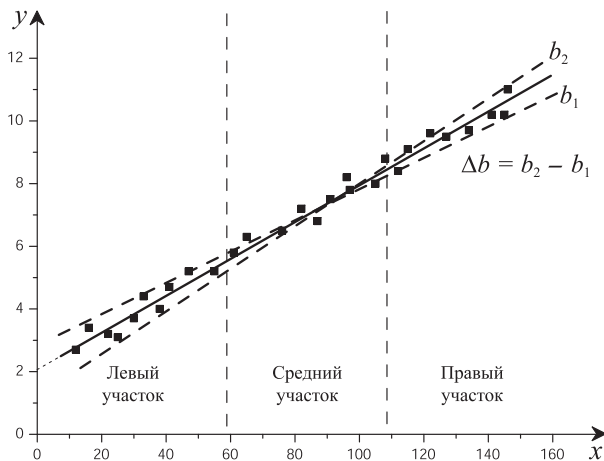


Рис. 1.7. Графический метод обработки результатов.  
Оценка случайной погрешности параметра  $b$

крайнем участке над линией оказалось в два раза больше экспериментальных точек, чем под ней, а в правом крайнем участке под линией оказалось в два раза точек больше, чем над ней. Затем уменьшаем наклон линии до  $b_2$  так, чтобы в левом крайнем участке под линией было в два раза больше точек, чем над ней, а в правом участке было под линией в два раза меньше точек, чем над ней. Для оценки погрешности  $b$  имеем

$$\sigma_b = \frac{b_1 - b_2}{\sqrt{n}}.$$

В случае зависимости  $y = kx$ , проходящей через начало координат, для оценки погрешности коэффициента  $k$  также надо диапазон изменения координаты  $x$  разбить на три равные части. Точки в ближайшей к началу координат части не учитываются. Определяется  $k_1$ , при котором над линией находится точек в два раза меньше, чем под ней (из всех точек в средней и правой частях), и  $k_2$ , при котором соотношение числа точек над и под линией противоположное. Для оценки погрешности  $k$  имеем

$$\sigma_k = \frac{k_1 - k_2}{\sqrt{n}}.$$

Графический метод обработки измерений и оценки погрешности полученного результата является предпочтительным в случае, когда количество точек мало, и их погрешности их велики.

**Метод наименьших квадратов.** Если число точек достаточно велико, а инструментальные погрешности измерения каждой точки малы, то более точным и адекватным методом проведения прямой линии по точкам является метод наименьших квадратов, который основан на минимизации суммы квадратов отклонений точек от прямой. Это означает, что коэффициенты  $a$  и  $b$  в линейной зависимости  $y = a + bx$  находятся из условия минимума функции

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (a + bx_i)]^2. \quad (1.34)$$

Здесь  $x_i$  и  $y_i$  — координаты экспериментальных точек.

Приведём окончательные формулы для  $a$  и  $b$  и их погрешностей через средние значения  $x_i$  и  $y_i$ :

$$b = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}, \quad (1.35)$$

$$a = \langle y \rangle - b \langle x \rangle. \quad (1.36)$$

Погрешности этих коэффициентов соответственно равны:

$$\sigma_b \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - b^2}, \quad (1.37)$$

$$\sigma_a = \sigma_b \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}. \quad (1.38)$$

Если известно, что точки должны описываться линейной зависимостью  $y = kx$ , проходящей через начало координат, то для коэффициента  $k$  и погрешности его определения получаем

$$k = \frac{\langle xy \rangle}{\langle x^2 \rangle}, \quad (1.39)$$

$$\sigma_k \approx \sqrt{\frac{\langle x^2 \rangle \langle y^2 \rangle - \langle xy \rangle^2}{n \langle x^2 \rangle^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle} - k^2}. \quad (1.40)$$

Этот метод довольно трудоёмкий, но при наличии калькулятора или компьютера он является наиболее предпочтительным.

Бывают случаи, когда по экспериментальным точкам не надо находить описывающую их зависимость, а требуется определить лишь численное значение функции для переменной, лежащей где-то между



Т а б л и ц а 4

## Некоторые формулы приближённых вычислений

Формула	Точность 5%	Точность 1%	Точность 0,1%
$\frac{1}{1+a} \approx 1 - a$	$ a $ меньше 0,22	$ a $ меньше 0,1	$ a $ меньше 0,032
$\sqrt{1+a} \approx 1 + \frac{1}{2}a$	0,63	0,28	0,09
$\frac{1}{\sqrt{1+a}} \approx 1 - \frac{1}{2}a$	0,36	0,16	0,052
$e^a \approx 1 + a$	0,31	0,14	0,045
$\ln(1+a) \approx a$	0,10	0,02	0,002
$\sin a \approx a$	0,55	0,24	0,077
$\operatorname{tg} a \approx a$	0,4	0,17	0,055
$\cos a \approx 1 - \frac{a^2}{2}$	0,8	0,34	0,11
$(1+a)(1+b) \dots \approx 1 + a + b + \dots$ $\sin(\theta + a) = \sin \theta + a \cos \theta$ $\cos(\theta + a) = \cos \theta - a \sin \theta$			

экспериментальными точками. В таких случаях используются интерполяционные методы. В простейшем случае предполагается линейная зависимость между соседними точками и используются значения в этих точках. Для интерполяции по параболе (метод Симпсона) требуются значения в трёх точках.

Ещё раз подчеркнём, что графики необходимы для наглядного представления результатов измерений. Они очень удобны для сравнения результатов экспериментов и теорий, выяснения качественных особенностей зависимостей, быстрых оценок характера изменения величин на отдельных участках. Однако документом эксперимента является таблица с экспериментальными данными.

Вычисления не следует проводить точнее, чем это необходимо в данном конкретном случае. Большую помощь при расчётах оказывают формулы для приближённых вычислений, позволяющих во многих случаях значительно упростить расчёты. В таблице 4 приводится ряд таких формул. В последних графах таблицы приводятся значения переменных, для которых написанные приближённые формулы обеспечивают указанную в заголовке графы точность.

Отметим, что наши рекомендации по обработке результатов эксперимента не претендуют ни на полноту, ни на особую строгость, так

Т а б л и ц а 5

## Сводка основных формул

Наилучшее значение измеряемой величины	$x_{\text{наил}} = \langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
Оценка погрешности среднего значения измеряемой величины	$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}$
Сложение погрешностей (независимых)	$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots$
Погрешность результата расчёта	$\left. \begin{aligned} A &= B \pm C \Rightarrow \sigma_A^2 = \sigma_B^2 + \sigma_C^2 \\ A &= B \cdot C \\ A &= B/C \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left( \frac{\sigma_A}{A} \right)^2 = \left( \frac{\sigma_B}{B} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_C}{C} \right)^2$ $A = B^\beta \cdot C^\gamma \Rightarrow \left( \frac{\sigma_A}{A} \right)^2 = \beta^2 \left( \frac{\sigma_B}{B} \right)^2 + \gamma^2 \left( \frac{\sigma_C}{C} \right)^2$
Допустимые масштабы	1:1; 1:2; 1:5; 1:10; 1:20 ...      2:1; 5:1; 10:1; 20:1 ...
Проведение наилучшей прямой $y = a + bx$	$b = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}, \quad a = \langle y \rangle - b \langle x \rangle$
Проведение наилучшей прямой $y = kx$	$k = \frac{\langle xy \rangle}{\langle x^2 \rangle}$

как рассчитаны на студентов 1-го курса, чья математическая подготовка недостаточна для строгого рассмотрения всех вопросов, связанных с математической статистикой. Более глубокое изложение станет возможным лишь после первых двух курсов обучения, когда накопится достаточный опыт экспериментальной работы и будет освоен соответствующий математический аппарат. Поэтому часть формул, применяемых для обработки экспериментальных результатов измерений, была приведена без вывода. Напомним о некоторых из них, включив в сводку основных формул (табл. 5).

В заключение заметим, что при обработке результатов следует тщательно обдумывать возможные источники ошибок, а промежуточные вычисления должны выполняться с точностью, превосходящей точность измерений (обычно, на один знак больше), чтобы избежать влияния ошибок округления.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лабораторные занятия по физике* / Под ред. Л.Л. Гольдина. — М.: Наука, 1983.
2. *Лабораторный практикум по общей физике. Т. 3* / Под ред. Ю.М. Ципенюка. — М.: Изд-во МФТИ, 1998.
3. *Сквайрс Дж.* Практическая физика. — М.: Мир, 1971.
4. *Тейлор Дж.* Введение в теорию ошибок. — М.: Мир, 1985.

### Работа 1.1.1

## Определение систематических и случайных погрешностей при измерении удельного сопротивления нихромовой проволоки

**Цель работы:** измерить удельное сопротивление проволоки и вычислить систематические и случайные погрешности при использовании таких измерительных приборов, как линейка, штангенциркуль, микрометр, амперметр, вольтметр и мост постоянного тока.

**В работе используются:** линейка, штангенциркуль, микрометр, отрезок проволоки из нихрома, амперметр, вольтметр, источник ЭДС, мост постоянного тока, реостат, ключ.

Удельное сопротивление материала проволоки круглого сечения, изготовленной из однородного материала и имеющей всюду одинаковую толщину, может быть определено по формуле

$$\rho = \frac{R_{\text{пр}}}{l} \frac{\pi d^2}{4}, \quad (1)$$

где  $R_{\text{пр}}$  — сопротивление измеряемого отрезка проволоки,  $l$  — его длина,  $d$  — диаметр проволоки. Таким образом, для определения удельного сопротивления материала проволоки следует измерить длину, диаметр и величину электрического сопротивления проволоки.

При этом необходимо учесть, что при изготовлении проволоки не удастся строго выдержать постоянным ее диаметр. Он немного меняется по длине, причем случайным образом. Поэтому в формулу (1) надо подставлять среднее по длине проволоки значение диаметра и учитывать в дальнейшем соответствующую случайную погрешность этого значения.

В данной работе величину сопротивления  $R_{\text{пр}}$  предлагается измерить с помощью одной из схем, представленных на рис. 1. Здесь  $R$  — переменное сопротивление (реостат),  $R_A$  — сопротивление амперметра,  $R_V$  — сопротивление вольтметра,  $R_{\text{пр}}$  — сопротивление исследуемой проволоки.

Пусть  $V$  и  $I$  — показания вольтметра и амперметра. Рассчитанные по этим показаниям величины сопротивления проволоки  $R_{\text{пр}1} = V_a/I_a$  для схемы (а) и  $R_{\text{пр}2} = V_6/I_6$  для схемы (б) будут отличаться друг от друга и от искомого  $R_{\text{пр}}$  из-за влияния внутренних сопротивлений приборов. Однако с помощью рис. 1 нетрудно найти связь между сопротивлением проволоки  $R_{\text{пр}}$  и полученными значениями  $R_{\text{пр}1}$  и  $R_{\text{пр}2}$ .

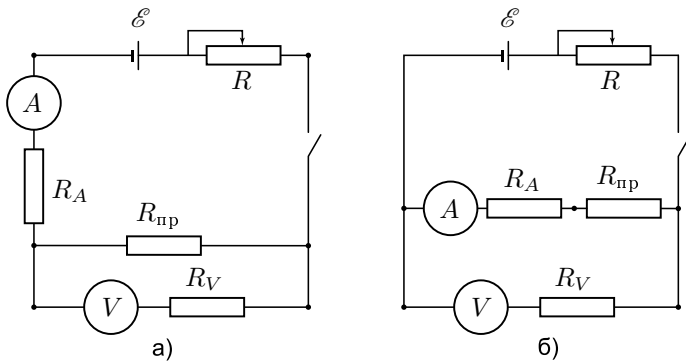


Рис. 1. Схемы для измерения сопротивления при помощи амперметра и вольтметра

В первом случае вольтметр правильно измеряет падение напряжения на концах проволоки, а амперметр измеряет не величину прошедшего через проволоку тока, а сумму токов, проходящих через проволоку и через вольтметр. Поэтому

$$R_{\text{пр1}} = \frac{V_a}{I_a} = R_{\text{пр}} \frac{R_V}{R_{\text{пр}} + R_V}. \quad (2)$$

Во втором случае амперметр измеряет силу тока, проходящего через проволоку, но вольтметр измеряет суммарное падение напряжения на проволоке и на амперметре. В этом случае

$$R_{\text{пр2}} = \frac{V_6}{I_6} = R_{\text{пр}} + R_A. \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) удобно несколько преобразовать. Для схемы (а):

$$R_{\text{пр}} = R_{\text{пр1}} \frac{R_V}{R_V - R_{\text{пр1}}} = \frac{R_{\text{пр1}}}{1 - (R_{\text{пр1}}/R_V)} \approx R_{\text{пр1}} \left( 1 + \frac{R_{\text{пр1}}}{R_V} \right). \quad (4)$$

Для схемы (б):

$$R_{\text{пр}} = R_{\text{пр2}} \left( 1 - \frac{R_A}{R_{\text{пр2}}} \right). \quad (5)$$

Члены, стоящие в скобках в формулах (4) и (5), определяют поправки, которые следует внести в измерения. Хотя поправки на сопротивление приборов в принципе всегда могут быть рассчитаны, этого,

как правило, не делают. Расчет поправок, который в нашем случае оказался несложным, при измерениях в разветвленных цепях становится очень трудоемким и при каждом переключении прибора должен производиться заново, что практически невозможно. Таким образом, получаем типичный пример систематической ошибки, возникающей из-за упрощения расчетной формулы. Для схемы (а) сопротивление  $R_{\text{пр}}$  оказывается заниженным, а для схемы (б) — завышенным относительно рассчитанного.

Более точным методом измерения сопротивлений является классический метод моста постоянного тока (мост Уитстона). Для контрольного измерения сопротивления проволоки используется стандартный мост Р4833.

В нашей установке в качестве сопротивления используется нихромовая проволока, натянутая между двумя неподвижными плоскими прижимными контактами. Вдоль проволоки может перемещаться подвижный контакт, с помощью которого устанавливается длина измеряемого участка.

## ЗАДАНИЕ

1. Ознакомьтесь с устройством и работой измерительных инструментов и приборов. Поупражняйтесь в измерениях размеров различных предметов с помощью штангенциркуля и микрометра.
2. Измерьте диаметр проволоки на 8–10 различных участках и запишите измерения в таблицу. Сравните результаты, полученные при измерениях микрометром и штангенциркулем. Усредните полученные значения диаметра. Рассчитайте площадь поперечного сечения проволоки, оцените погрешность результата.
3. Составьте таблицу основных характеристик амперметра и вольтметра: система прибора, класс точности, предел измерений  $x_n$ , число делений шкалы  $n$ , цена деления  $x_n/n$ , чувствительность  $n/x_n$ , абсолютная погрешность  $\Delta x_M$ , внутреннее сопротивление прибора (на данном пределе измерений).
4. Используя значения внутренних сопротивлений, указанных на приборах, и зная, что сопротивление проволоки по порядку величины равно 5 Ом, оцените с помощью формул (4) и (5) величину поправок при измерениях  $R_{\text{пр}}$  по схемам рис. 1. Для работы выберите ту из схем, которая приводит к меньшей поправке.
5. Измерьте с помощью линейки длину исследуемого участка проволоки (между подвижным и неподвижным прижимными контактами) и соберите выбранную электрическую схему. Включите ток. Изменяя его с помощью реостата, запишите в виде таблицы показания амперметра и

вольтметра в 5–6 точках (как правило, в процессе измерений показания приборов записывают в делениях шкалы без какой-либо обработки):

$N_{\text{изм}}$	1	2	3	4	5	6
$V$ , дел						
$I$ , дел						
$V$ , В						
$I$ , А						

Проведите измерения при возрастающих и убывающих значениях тока. Постройте график зависимости  $V = f(I)$  и с его помощью рассчитайте измеренную величину сопротивления  $R$ , а затем вычислите искомое  $R_{\text{пр}}$ . Оцените, с какой ошибкой найдена величина  $R_{\text{пр}}$ .

- Измерьте сопротивление проволоки с помощью моста Р4833. Насколько отличается найденное вами значение от ранее измеренного? Укладывается ли погрешность в оцененную вами ранее ошибку измерений с помощью вольтметра и амперметра?
- Проведите измерения по пп. 5, 6 для трех различных длин проволоки.
- Определите удельное сопротивление проволоки по формуле (1). Оцените допущенную при этом погрешность. С какой точностью следует измерять сопротивление проволоки при достигнутой точности измерения ее длины и поперечного сечения?
- Сравните полученные результаты с табличными значениями.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Лабораторные занятия по физике* / Под ред. Л.Л. Гольдина. — М.: Наука, 1983. С. 53–66.
- Сквайрс Дж.* Практическая физика. — М.: Мир, 1971.
- Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. III. — М.: Наука, 1996. §§ 40, 41, 42.

### Образец отчета о выполнении работы 1.1.1

В работе используются: линейка, штангенциркуль, микрометр, отрезок проволоки из нихрома, амперметр, вольтметр, источник ЭДС, мост постоянного тока, реостат, ключ.

1. Точность измерения с помощью штангенциркуля — 0,1 мм. Точность измерения с помощью микрометра — 0,01 мм.

2. Измеряем диаметр проволоки штангенциркулем ( $d_1$ ) и микрометром ( $d_2$ ) на 10 различных участках (табл. 1).

Т а б л и ц а 1

**Результаты измерения диаметра проволоки**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d_1$ , мм	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
$d_2$ , мм	0,36	0,36	0,37	0,36	0,37	0,37	0,36	0,35	0,36	0,37
	$\bar{d}_1 = 0,4$ мм					$\bar{d}_2 = 0,363$ мм				

При измерении диаметра проволоки штангенциркулем случайная погрешность измерения отсутствует. Следовательно, точность результата определяется только точностью штангенциркуля (систематической погрешностью):

$$d_1 = (0,4 \pm 0,1) \text{ мм.}$$

Измерения с помощью микрометра содержат как систематическую, так и случайную погрешности:

$$\sigma_{\text{сист}} = 0,01 \text{ мм}, \quad \sigma_{\text{сл}} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^n (d - \bar{d})^2} = \frac{1}{10} \sqrt{4,1 \cdot 10^{-4}} \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ мм},$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\text{сист}}^2 + \sigma_{\text{сл}}^2} = \sqrt{(0,01)^2 + (0,002)^2} \approx 0,01 \text{ мм.}$$

Поскольку  $\sigma_{\text{сл}}^2 \ll \sigma_{\text{сист}}^2$ , то можно считать проволоку однородной по диаметру, а погрешность диаметра  $\sigma_d$  определяется только  $\sigma_{\text{сист}}$  микрометра:

$$d_2 = \bar{d}_2 \pm \sigma_d = (0,363 \pm 0,010) \text{ мм} = (3,63 \pm 0,10) \cdot 10^{-2} \text{ см.}$$

3. Определим площадь поперечного сечения проволоки:

$$S = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (3,63 \cdot 10^{-2})^2}{4} \approx 1,03 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2.$$

Величину погрешности  $\sigma_S$  найдем по формуле

$$\sigma_S = 2 \frac{\sigma_d}{d} S = 2 \frac{0,01}{0,36} \cdot 1,03 \cdot 10^{-3} \approx 6 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2.$$

Итак,  $S = (1,03 \pm 0,06) \cdot 10^{-3} \text{ см}^2$ , т. е. площадь поперечного сечения проволоки определена с точностью 6%.

4. Сведем основные характеристики приборов в таблицу 2.

Т а б л и ц а 2

## Основные характеристики приборов

	Вольтметр	Миллиамперметр
Система	Магнитоэлектрическая	Электромagnetная
Класс точности	0,5	0,5
Предел измерений $x_{\text{п}}$	0,3 В	0,15 А
Число делений шкалы $n$	150	75
Цена делений $x_{\text{п}}/n$	2 мВ/дел	2 мА/дел
Чувствительность $n/x_{\text{п}}$	500 дел/В	500 дел/А
Абсолютная погрешность $\Delta x_M$	1,5 мВ	0,75 мА
Внутреннее сопротивление прибора (на данном пределе измерений)	500 Ом	1 Ом

5. Известно, что  $R_{\text{пр}} \approx 5 \text{ Ом}$ ,  $R_V = 500 \text{ Ом}$ ,  $R_A = 1 \text{ Ом}$ . Оценим по формулам (4) и (5) величину поправок при измерении  $R_{\text{пр}}$ :

для схемы рис. 1а  $R_{\text{пр}}/R_V = 5/500 = 0,01$ , т. е. 1%;

для схемы рис. 1б  $R_A/R_{\text{пр}} = 1/5$ , т. е. 20%.

Вывод: при измерении относительно небольших сопротивлений меньшую ошибку дает схема рис. 1а.

6. Собираем схему рис. 1а.

7. Опыт проводим для следующих трех длин проволоки:

$l_1 = (20,0 \pm 0,1) \text{ см}$ ;  $l_2 = (30,0 \pm 0,1) \text{ см}$ ;  $l_3 = (50,0 \pm 0,1) \text{ см}$ .

Измерения ведем при возрастающих и убывающих значениях тока. Показания приборов записываем в табл. 3. Результаты измерения сопротивлений с помощью моста Р4833 заносим в табл. 4.

8. Строим графики зависимостей  $V = f(I)$  для всех трех отрезков проволоки, проводя прямые через экспериментальные точки (рис. 2). Из графиков видно, что нет различия между значениями, полученными при возрастании и при уменьшении тока.

9. Для каждой длины  $l$  расчёт проводим методом наименьших квадратов для прямой, проходящей через начало координат. Сопротивление находим как  $R_{\text{ср}} = \frac{\langle VI \rangle}{\langle I^2 \rangle}$  (формула (1.39)) и его среднеквадратичную случайную

ошибку как  $\sigma_{R_{\text{ср}}}^{\text{случ}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \sqrt{\frac{\langle V^2 \rangle}{\langle I^2 \rangle}} - R_{\text{ср}}^2$ , где 12 — число экспериментальных точек (формула (1.40)). Результаты запишем в табл. 4.

10. Возможную систематическую погрешность  $R_{\text{ср}}$  оцениваем по формуле

$$\frac{\sigma_{R_{\text{ср}}}^{\text{сист}}}{R_{\text{ср}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2},$$



Т а б л и ц а 3

## Показания вольтметра и амперметра

$l = 20 \text{ см}$				$l = 30 \text{ см}$				$l = 50 \text{ см}$			
$V$ , дел $2 \frac{\text{мВ}}{\text{дел}}$	$I$ , дел $2 \frac{\text{мА}}{\text{дел}}$	$V$ , мВ	$I$ , мА	$V$ , дел $2 \frac{\text{мВ}}{\text{дел}}$	$I$ , дел $2 \frac{\text{мА}}{\text{дел}}$	$V$ , мВ	$I$ , мА	$V$ , дел $2 \frac{\text{мВ}}{\text{дел}}$	$I$ , дел $0,5 \frac{\text{мА}}{\text{дел}}$	$V$ , мВ	$I$ , мА
26,0	12,5	52,0	25,0	26,0	8,5	52,0	17,0	34,5	28,0	69,0	14,0
32,5	15,5	65,0	31,0	35,0	11,5	70,0	23,0	44,1	35,6	88,2	17,8
63,2	31,1	126,4	62,2	62,5	20,4	125,0	40,8	67,1	54,5	134,2	27,3
82,8	40,5	165,6	81,0	91,1	30,1	182,2	60,2	98,0	79,6	196,0	39,8
119,5	58,1	239,0	116,2	118,5	38,9	237,0	77,8	127,0	103,3	254,0	51,7
137,8	67,0	275,6	134,0	150,0	49,5	300,0	99,0	147,3	120,0	294,6	60,0
131,0	64,1	262,0	128,2	139,5	46,1	279,0	92,2	142,0	114,6	284,0	57,8
101,5	49,5	203,0	99,0	130,0	42,9	260,0	85,8	116,2	94,0	232,4	47,0
88,1	43,0	176,2	86,0	103,1	34,0	206,0	68,0	85,0	69,2	170,0	34,6
78,2	38,1	156,4	76,2	74,2	24,5	148,4	49,0	61,1	49,5	133,2	24,8
51,0	24,9	102,0	49,8	42,5	14,1	85,0	28,2	41,3	33,2	82,6	16,6
29,1	13,9	58,2	27,8	23,0	7,5	46,0	15,0	31,0	25,2	62,0	12,6

Т а б л и ц а 4

Результаты измерения сопротивления  
проволоки

$l = 20 \text{ см}$	$l = 30 \text{ см}$	$l = 50 \text{ см}$
$R_0 = 2,080 \text{ Ом}$ (по Р4833)	$R_0 = 3,062 \text{ Ом}$ (по Р4833)	$R_0 = 5,010 \text{ Ом}$ (по Р4833)
$R_{\text{ср}} = 2,060 \text{ Ом}$	$R_{\text{ср}} = 3,026 \text{ Ом}$	$R_{\text{ср}} = 4,88 \text{ Ом}$
$R_{\text{пр}} = 2,068 \text{ Ом}$	$R_{\text{пр}} = 3,044 \text{ Ом}$	$R_{\text{пр}} = 4,93 \text{ Ом}$
$\sigma_R^{\text{случ}} = 0,008 \text{ Ом}$	$\sigma_R^{\text{случ}} = 0,008 \text{ Ом}$	$\sigma_R^{\text{случ}} = 0,07 \text{ Ом}$
$\sigma_R^{\text{сист}} = 0,008 \text{ Ом}$	$\sigma_R^{\text{сист}} = 0,014 \text{ Ом}$	$\sigma_R^{\text{сист}} = 0,04 \text{ Ом}$
$\sigma_R = 0,011 \text{ Ом}$	$\sigma_R = 0,016 \text{ Ом}$	$\sigma_R = 0,08 \text{ Ом}$

где  $I$  и  $V$  — максимальные значения тока и напряжения, полученные в эксперименте, а  $\sigma_V$  и  $\sigma_I$  — ошибки измерения вольтметром и амперметром. Ошибка  $\sigma_V$  равна половине абсолютной погрешности вольтметра:

$$\sigma_V = \frac{\Delta x}{2} = \frac{1,5}{2} \approx 0,75 \text{ мВ}.$$

Аналогично для амперметра  $\sigma_I = 0,75/2 \approx 0,4 \text{ мА}$ .

Пример расчета  $\sigma_{R_{\text{ср}}}$  для проволоки длиной  $l = 30 \text{ см}$ ; из табл. 3 и 4

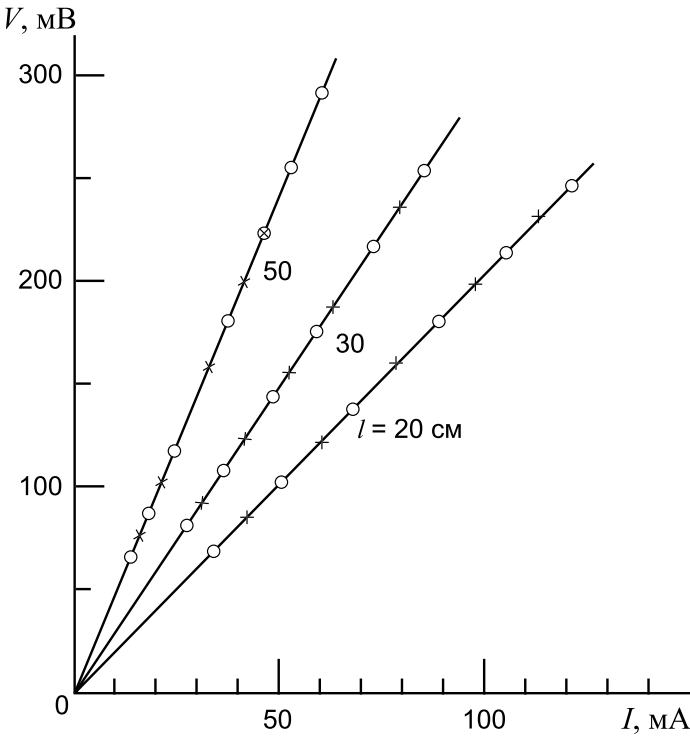


Рис. 2

$R_{cp} = 3,030 \text{ Ом}, V = 300 \text{ мВ}, I = 99 \text{ мА}.$

$$\sigma_{R_{cp}} = R_{cp} \sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2} = 3,03 \cdot \sqrt{\left(\frac{0,75}{300}\right)^2 + \left(\frac{0,4}{99}\right)^2} \approx 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}.$$

Складываем случайную и систематическую ошибки по формуле  $\sigma_R = \sqrt{(\sigma_R^{случ})^2 + (\sigma_R^{сист})^2}$  и результаты расчетов заносим в табл. 5.

Т а б л и ц а 5

$l, \text{ см}$	20	30	50
$R_{cp}, \text{ Ом}$	2,060	3,026	4,88
$\sigma_R, \text{ Ом}$	0,011	0,016	0,08

11. Для всех трех длин  $l$  вносим поправку в измеренное значение сопро-

тивления по формуле

$$R_{\text{пр}} = R_{\text{ср}} + \frac{R_{\text{ср}}^2}{R_V}.$$

Ввиду малости поправки считаем  $\sigma_{R_{\text{пр}}} = \sigma_{R_{\text{ср}}}$ . Данные заносим в табл. 4.

12. Сравниваем результаты измерения сопротивления проволоки с помощью вольтметра и амперметра с результатами измерений мостом Р4833. В пределах погрешностей опыта результаты совпадают.

13. Определяем удельное сопротивление проволоки по формуле (1) и погрешность  $\sigma_\rho$  по формуле

$$\frac{\sigma_\rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2}$$

и заносим результаты в табл. 6.

Т а б л и ц а 6

$l$ , см	$\rho$ , $10^{-4}$ Ом·см	$\sigma_\rho$ , $10^{-6}$ Ом·см
20	1,06	6
30	1,05	6
50	1,02	6

Окончательно:  $\rho = (1,04 \pm 0,06) \cdot 10^{-4}$  Ом·см.

Основной вклад в ошибку  $\sigma_\rho$  вносит погрешность измерения диаметра проволоки, составляющая  $\sim 3\%$ , но так как из-за возведения в квадрат она удваивается, вклад в погрешность окончательного результата составляет  $\sim 6\%$ . Поэтому при измерении сопротивления проволоки достаточна точность 3–4%.

Полученное значение удельного сопротивления сравниваем с табличными значениями. В справочнике (Физические величины. М.: Энергоиздат, 1991. С. 444) для удельного сопротивления нихрома при  $20^\circ\text{C}$  значения в зависимости от массового содержания компонент сплава меняются от  $1,12 \cdot 10^{-4}$  Ом·см до  $0,97 \cdot 10^{-4}$  Ом·см. Наиболее близкое значение к полученному в работе  $1,06 \cdot 10^{-4}$  Ом·см для сплава:  $70 \div 80\%$  Ni, 20% Cr,  $0 \div 2\%$  Mn (проценты по массе).

### Работа 1.1.2

## Измерение коэффициента линейного расширения стержня с помощью микроскопа

**Цель работы:** определить зависимость линейного расширения металлического стержня от температуры. Вычислить коэффициент линейного расширения.

**В работе используются:** микроскоп, объектная шкала, окулярный микрометр, линейка с миллиметровыми делениями, кварцевая трубка с меткой, исследуемый металлический стержень, электронагреватель, трансформатор (ЛАТР), термометр сопротивления, технический мост постоянного тока типа Р4833, источник ЭДС, гальванометр.

**Микроскоп.** Микроскопом называется оптический прибор, позволяющий получать сильно увеличенные изображения мелких предметов. Увеличивающая система микроскопа состоит из двух наборов линз — объектива и окуляра, укрепленных в тубусе микроскопа и разнесенных на сравнительно большое расстояние друг от друга (обычно около 160 мм). В нашу задачу не входит детальное изучение устройства микроскопа, поэтому ограничимся исследованием принципа его действия. Заменим объектив и окуляр двумя эквивалентными линзами, которые для простоты будем считать тонкими.

Ход лучей в оптической системе микроскопа изображен на рис. 1. Исследуемый предмет  $l$  помещается вблизи (несколько впереди) переднего фокуса короткофокусного объектива  $\mathcal{L}_1$ , создающего сильно увеличенное действительное изображение  $l_1$ . Это изображение рассматривается через окуляр  $\mathcal{L}_2$ , как через лупу. Окуляр создает мнимое изображение предмета  $l_2$ , которое располагается на удобном от глаза наблюдателя расстоянии. Наблюдатель передвигает  $l_2$ , меняя расположение  $l_1$  относительно переднего фокуса окуляра. Это передвижение осуществляется путем незначительного перемещения микроскопа по отношению к предмету.

Важнейшей характеристикой микроскопа является его увеличение. Различают линейное и угловое увеличение микроскопа. *Линейное увеличение* равно отношению поперечных размеров изображения  $l_2$  и предмета  $l$ :

$$\Gamma = \frac{l_2}{l}. \quad (1)$$

*Угловое увеличение* равно отношению тангенса угла  $\alpha_1$ , под которым видно изображение  $l_2$  в микроскопе, к тангенсу угла  $\alpha_2$ , под которым

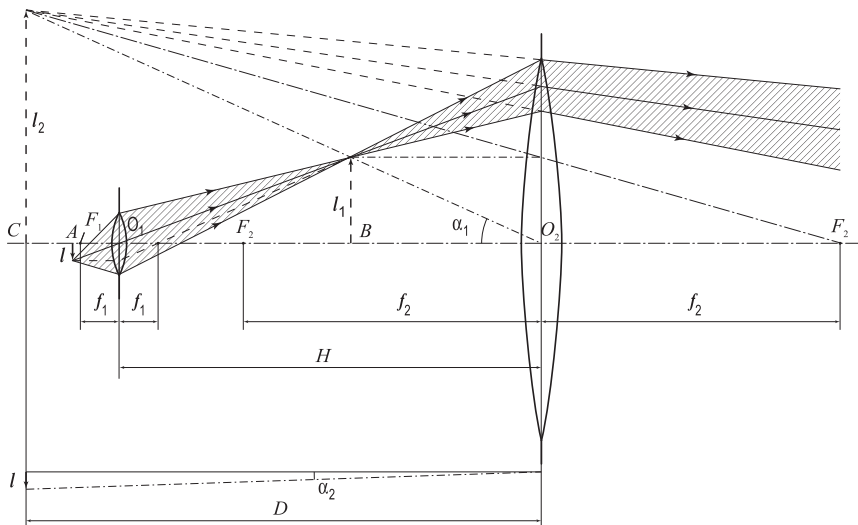


Рис. 1. Ход лучей в микроскопе

виден сам предмет  $l$  невооруженным глазом на расстоянии наилучшего зрения  $D = 25$  см:

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2}. \quad (2)$$

Обозначения  $l$ ,  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  ясны из рис. 1.

Рассмотрим сначала линейное увеличение  $\Gamma$  микроскопа. Представим его в виде

$$\Gamma = \frac{l_2}{l} = \frac{l_2}{l_1} \frac{l_1}{l} = \Gamma_{\text{ок}} \Gamma_{\text{об}}. \quad (3)$$

Первый из сомножителей  $\Gamma_{\text{ок}}$  называется *увеличением окуляра*, а второй  $\Gamma_{\text{об}}$  — *увеличением объектива*. Из рис. 1 ясно, что

$$\Gamma_{\text{об}} = \frac{l_1}{l} = \frac{O_1 B}{O_1 A}. \quad (4)$$

Расстояние  $O_1 A$  мало отличается от фокусного расстояния объектива, а точка  $B$  лежит вблизи фокуса окуляра, причем  $f_2 \ll H$ , так что

$$O_1 A \approx f_1, \quad O_1 B \approx H - f_2 \approx H. \quad (5)$$

Длина тубуса микроскопа  $H$  обычно равна 160 мм. Заменяя в (4) числи-

тель и знаменатель их приближенными значениями (5), найдем число

$$\Gamma_{об} \approx \frac{H}{f_1}, \quad (6)$$

которое не вполне точно определяет увеличение объектива, но зато не зависит ни от выбора окуляра, ни от настройки микроскопа. Это число выбито на оправе объектива.

Перейдем теперь к увеличению окуляра:

$$\Gamma_{ок} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{O_2C}{O_2B}. \quad (7)$$

Как уже отмечалось,  $O_2B \approx f_2$ . Что же касается  $O_2C$ , то оно зависит от настройки микроскопа. Близорукие наблюдатели устанавливают  $O_2C = 10 - 15$  см, а дальновзоркие отодвигают  $l_2$  на расстояние 40 см, иногда даже на бесконечное расстояние. При определении увеличения окуляра принято полагать  $O_2C = D = 25$  см, что соответствует расстоянию наилучшего зрения для нормального человеческого глаза. Подставляя эти значения в (7), получим

$$\Gamma_{ок} = \frac{D}{f_2}. \quad (8)$$

Это число называется увеличением окуляра и выбито на его оправе.

Перейдем теперь к *угловому увеличению*:

$$\gamma = \operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{l_2}{O_2C} : \frac{l}{D}. \quad (9)$$

При  $O_2C = D$  угловое и линейное увеличения микроскопа равны друг другу:  $\Gamma = \gamma$ .

Как видно из формулы (3), для первоначальной оценки увеличения микроскопа достаточно перемножить увеличения окуляра и объектива. Полученная при этом величина определяет увеличение микроскопа крайне грубо. Более надежное значение следует получать экспериментально.

При практических измерениях величина предмета сравнивается с некоторым масштабом. Масштаб можно расположить в плоскости измеряемого предмета, однако во многих случаях это оказывается неудобным. Чаще всего масштаб помещается в плоскости промежуточного изображения предмета — в плоскости  $l_1$ . В этом случае предмет и масштаб видны одновременно и, следовательно, могут быть надежно сопоставлены друг с другом. При таком измерении, однако, с масштабом сравнивается не сам предмет, а его увеличенное изображение  $l_1$ , что приводит к необходимости проводить дополнительную калибровку.

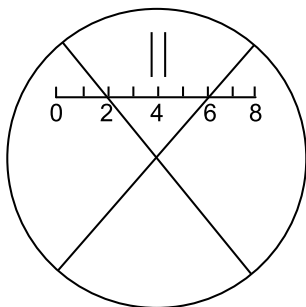


Рис. 2. Шкала окулярного микрометра

**Окулярный микрометр.** Применяемый в данной работе микроскоп снабжен окулярным микрометром: в фокальной плоскости окуляра расположены неподвижная стеклянная пластинка со шкалой и подвижная стеклянная пластинка с перекрестьем и двумя рисками (рис. 2). Подвижная пластинка перемещается относительно неподвижной шкалы: при повороте микрометрического винта на один оборот риски и перекрестье сдвигаются на одно деление шкалы (1 дел = 1 мм). Окружность барабана винта разделена на 100 делений. Поворот барабана на одно деление перемещает перекрестье и риски на 0,01 мм. Таким

образом, масштабом в плоскости изображения  $l_1$  (фокальная плоскость окуляра) является шкала окулярного микрометра.

Для того чтобы определить размер самого предмета  $l$ , надо, не переключая микроскоп, проградировать шкалу окулярного микрометра в делениях другого масштаба, располагаемого на месте исследуемого предмета. Таким масштабом является нанесенная на стекле объектная шкала, которая обычно разделяется на сотые доли миллиметра.

**Градировка окулярной шкалы.** Градировка окулярной шкалы производится перед началом работы с микроскопом в следующем порядке. Прежде всего нужно добиться того, чтобы окулярная шкала была видна ясно и четко: юстировку производят, поворачивая оправу наружной линзы окуляра. Затем на столик микроскопа помещают нанесенную на стеклянную пластинку объектную шкалу. Объектная шкала лучше всего видна в микроскоп, если свет падает на нее перпендикулярно штрихам под углом к плоскости стеклянной пластинки. Затем нужно получить четкое изображение объектной шкалы в микроскопе. Для этого тубус микроскопа сначала перемещают вниз винтом грубой наводки почти до упора в объект. За расстоянием между предметом и объективом удобно следить, помещая глаз сбоку в плоскости рассматриваемого объекта<sup>1</sup>. Наблюдая в микроскоп, *медленно* поднимают тубус винтом грубой наводки до тех пор, пока в поле зрения не мелькнет изображение шкалы, и завершают перемещение тубуса, поворачивая винт точной наводки до тех пор, пока не будет получено

<sup>1</sup> Обращаем особое внимание студентов на то, что при отсутствии контроля сбоку тубус микроскопа можно передвигать только вверх. При движении вниз нетрудно проскочить правильное расстояние, и объектив упрется в рассматриваемый объект, — объект или объектив при этом могут быть испорчены.

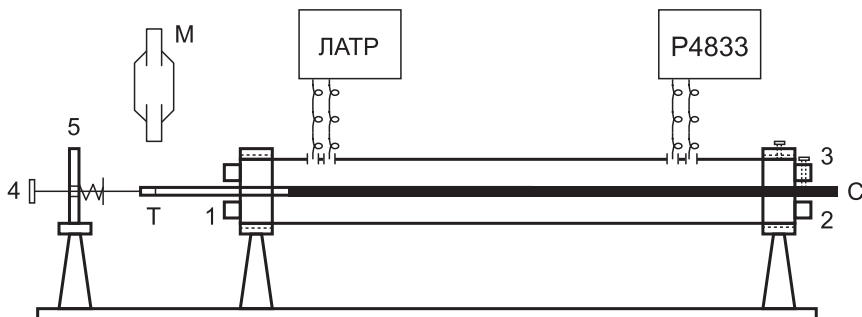


Рис. 3. Установка для измерения коэффициента линейного расширения

резкое изображение шкалы. После этого шкалу нужно сдвинуть в середину поля зрения. Освещение объектной шкалы следует подобрать так, чтобы в поле зрения микроскопа были одинаково хорошо видны объектная и окулярная шкалы.

Точность совмещения изображений окулярной и объектной шкал проверяется методом параллакса. В том случае, когда изображения действительно лежат в одной плоскости, небольшие боковые смещения глаза не приводят к их сдвигу относительно друг друга. Если сдвиг наблюдается, положение тубуса слегка поправляется винтом точной наводки до устранения параллакса.

Поворачивая и сдвигая объектную шкалу на предметном столике, следует установить ее так, чтобы деления обеих шкал были параллельны. Вращая микрометрический винт окуляра, совмещают центр перекрестья с каким-либо делением объектной шкалы. Записывают это деление и число делений на барабане микрометра. Затем смещают перекрестье вдоль объектной шкалы на несколько миллиметров, вращая микрометрический винт окуляра, и вновь отмечают показания по окулярной шкале и барабану микрометра. После этого нетрудно найти «цену деления» окулярной шкалы, т. е. измеренный в плоскости объекта размер, соответствующий одному делению окулярной шкалы. Такие измерения следует выполнить три-четыре раза, записать их в таблицу и усреднить полученные результаты.

**Экспериментальная установка.** Установка, служащая для определения коэффициента линейного расширения, изображена на рис. 3. Исследуемый стержень помещен в стальную трубу, внутри которой смонтирована электрическая печь. Правый конец трубы с помощью винта жестко прикреплен к стойке, другой ее конец поддерживается в стойке



так, что может свободно перемещаться вдоль своей оси. В торцах трубы сделаны отверстия, в которые входит исследуемый металлический стержень С. Через отверстие в торце 1 стержень проходит свободно, а в отверстии торца 2 закрепляется винтом 3.

Между выходящим из торца 1 концом стержня и пружинным упором 4, укрепленным на стойке 5, устанавливается кварцевая<sup>2</sup> трубка Т с меткой.

Электрическая печь питается переменным током от автотрансформатора (ЛАТР). Температура стержня измеряется термометром сопротивления, представляющим собой медную проволоку, намотанную на исследуемый стержень по всей длине.

Обычно нагревание стержня (а следовательно, и проволочного термометра) ведется от комнатной температуры  $t_k$ , которой соответствует сопротивление проволоки  $R_k$ . Зависимость сопротивления проволоки от температуры имеет вид

$$R_t \approx R_k(1 + \Theta(t - t_k)), \quad (10)$$

где  $\Theta$  — температурный коэффициент сопротивления (для меди  $\Theta = 4,3 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$  при  $20 \text{ } ^\circ\text{C}$ ), откуда

$$\Delta t = t - t_k = \frac{R_t - R_k}{\Theta R_k}. \quad (11)$$

При нагревании стержень удлиняется, и метка на кварцевой трубке смещается. Смещение метки измеряется с помощью микроскопа, снабженного окулярным микрометром. Коэффициент линейного расширения стержня определяется по формуле

$$\alpha = \frac{L_t - L_k}{L_k(t - t_k)}, \quad (12)$$

где  $L_t$  и  $L_k$  — длины стержня при температурах  $t$  и  $t_k$  соответственно. Подставляя разность температур  $t - t_k$  из формулы (11), получаем окончательно

$$\alpha = \frac{(L_t - L_k)R_k}{L_k(R_t - R_k)}\Theta = \frac{R_k}{L_k} \frac{\Delta L}{\Delta R} \Theta = \frac{R_k}{L_k} \frac{\Delta n}{\Delta R} B \Theta, \quad (13)$$

где  $B$  — цена деления окулярной шкалы,  $\Delta n$  — смещение в делениях окулярной шкалы.

---

<sup>2</sup> Плавленный кварц обладает ничтожным по сравнению с металлами коэффициентом линейного расширения.

## ЗАДАНИЕ

1. Ознакомьтесь с устройством микроскопа и окулярного микрометра.
2. Проградуируйте шкалу окулярного микроскопа по объектной шкале (найдите цену деления окулярной шкалы).
3. Установите на предметном столике микроскопа вместо объектной шкалы кварцевую трубку  $T$ , укрепленную на торце исследуемого стержня.

Получите в микроскопе четкое изображение метки на трубке  $T$ . Подумайте, какое положение должно занимать изображение метки на окулярной шкале, чтобы при расширении стержня изображение метки не вышло из поля зрения микроскопа. Отметьте положение метки на окулярной шкале при комнатной температуре.

4. Ознакомьтесь с устройством технического моста Р4833 и подготовьте его к работе.
5. Подсоедините термометр сопротивления к мосту и измерьте его сопротивление  $R_k$  при комнатной температуре стержня. Отметьте показания комнатного термометра  $t_k$ .

Подберите такой режим работы моста, при котором его чувствительность максимальна.

6. Снимите зависимость изменения длины исследуемого стержня от температуры (т. е. от сопротивления медной проволоки). Для этого подключите электрическую печь к выходным клеммам автотрансформатора. Ручкой автотрансформатора установите на выходе небольшое напряжение и подождите, пока стержень прогреется. Измерьте сопротивление термометра мостом Р4833 и отметьте положение перекрестья на окулярной шкале.

Постепенно увеличивая выходное напряжение автотрансформатора, измеряйте величины сопротивления и соответствующие им положения перекрестья.

7. Полученные экспериментальные результаты изобразите на графике в координатах  $n$  (положение перекрестия) и  $R$  (величина сопротивления). Проведите через экспериментальные точки наилучшую прямую и графически определите угловой коэффициент прямой  $\Delta n / \Delta R$ . Найдите величину  $\Delta n / \Delta R$  и погрешность  $\delta(\Delta n / \Delta R)$  по методу наименьших квадратов (см. с. 39).
8. Поставьте найденное отношение в формулу (13) и определите коэффициент линейного расширения  $\alpha$ . Длина исследуемого стержня указана на установке.
9. Оцените погрешность, допущенную при определении  $\alpha$ .

В приложении к работе приведена примерная схема обработки результатов.

### Контрольные вопросы

1. С какой точностью следует измерять длину стержня и сопротивление термометра при достигнутой точности измерения  $\Delta L$ ?
2. Какой вклад в ошибку измерения  $\alpha$  вносят погрешности в измерении цены деления окулярной шкалы, в определении положения метки, в измерении комнатной температуры и погрешность температурного коэффициента сопротивления?
3. Близорукие и дальнорукые наблюдатели настраивают микроскоп так, что изображение  $l_2$  оказывается на очень малом или, наоборот, очень большом расстоянии от глаза. Какое из увеличений — линейное или угловое — при этом меньше меняется?

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Элементарный учебник физики*. Т. 1. Механика. Теплота. Молекулярная физика / Под ред. Г.С. Ландсберга. — М.: Физматлит, 2000. §§ 195, 197. Т. III. Колебания, волны, оптика. Строение атома. §§ 115, 116.
2. *Ландсберг Г.С.* Оптика. — М.: Наука, 1976. Гл. XIV, § 92.
3. *Калашиников С.Г.* Электричество. — М.: Наука, 1977. Гл. VI, §§ 59, 60.

## Образец отчета о выполнении работы 1.1.2

1. Градуировка шкалы окулярного микрометра по объектной шкале. Объектная шкала имеет длину 1 мм = 100 делений.

Т а б л и ц а 1

$n$ (число делений окулярной шкалы)		$\Delta n_i$	$\overline{\Delta n}$
при $l = 0$	при $l = 0,5$ мм		
1,44	6,12	4,68	4,70
1,35	6,08	4,73	
1,52	6,21	4,69	

Цена деления шкалы окулярного микрометра

$$B = \frac{\Delta l}{\Delta n} = \frac{0,50 \text{ мм}}{4,70 \text{ дел}} = 1,06 \cdot 10^{-1} \text{ мм/дел.}$$

Относительная ошибка цены деления

$$\frac{\delta B}{B} = \sqrt{\left(\frac{\delta l}{\Delta l}\right)^2 + \left(\frac{\delta n}{\Delta n}\right)^2},$$

где  $\delta l \approx 0,005$  мм (половина цены деления объектной шкалы), а полная ошибка окулярной шкалы:

$$\delta n = \sqrt{(\delta n_1)^2 + (\delta n_2)^2},$$

определяемая систематической ошибкой  $\delta n_1 = 0,005$  деления (половина цены деления шкалы микрометра) и случайной ошибкой

$$\delta n_2 = \sqrt{\frac{1}{m(m-1)} \sum_{i=1}^m (\Delta n_i - \overline{\Delta n})^2} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ дел.}$$

Таким образом,

$$\delta n = \sqrt{(1,2)^2 + (0,5)^2} \cdot 10^{-2} \approx 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ дел,}$$

$$\frac{\delta B}{B} = \sqrt{\left(\frac{0,005}{0,5}\right)^2 + \left(\frac{0,013}{4,7}\right)^2} \approx 0,01 = 1\%.$$

Окончательно цена деления шкалы окулярного микрометра

$$B = (1,06 \pm 0,01) \cdot 10^{-1} \text{ мм/дел.}$$

2. Измерение сопротивления термометра производится при комнатной температуре  $t_k = 22^\circ \text{C}$ . На мосте постоянного тока Р4833 установлено отношение плеч  $N = 1$ ;  $R_k = 49,29 \pm 0,01$  Ом. Положение метки по окулярной шкале  $n_k = 1,88$  дел.

3. Результаты измерений зависимости удлинения стержня от температуры представлены в таблице 2 и на графике (рис. 4).

Т а б л и ц а 2

$R$ , Ом	$n$ , дел	$R$ , Ом	$n$ , дел	$R$ , Ом	$n$ , дел
49,25	1,88	52,81	3,65	55,74	5,05
49,85	2,17	53,11	3,73	56,06	5,14
50,15	2,31	53,81	4,08	56,25	5,24
50,93	2,75	54,51	4,46	56,58	5,40
51,50	2,95	55,05	4,74	56,97	5,58
52,18	3,28	55,29	4,82	57,11	5,67

По графику определяем угловой коэффициент прямой:

$$\frac{\Delta n}{\Delta R} = \frac{5,67 - 1,88}{57,11 - 49,25} = 0,482 \text{ дел/Ом.}$$

Коэффициент линейного расширения находим по формуле (13). Замечая, что  $L_k = (600 \pm 1)$  мм,  $\Theta = 4,30 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  при  $t_k = 20^\circ \text{C}$ , получаем

Найти погрешность измерения  $\Delta n / \Delta R$  по графику не удастся, поскольку точки очень хорошо ложатся на прямую линию. Это означает, что имеет смысл применить более точный метод обработки результатов — метод

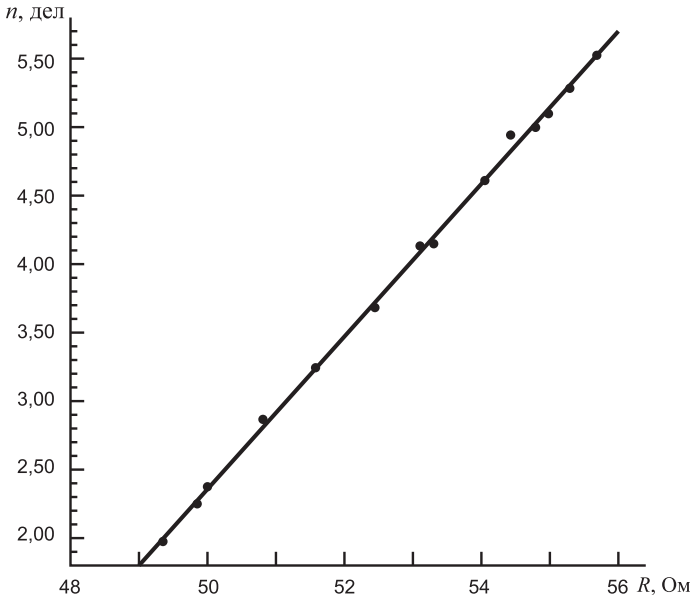


Рис. 4. График зависимости удлинения стержня от показания термометра сопротивлений

наименьших квадратов. Задача заключается в нахождении наилучшего значения  $b$  в формуле  $n_t = a + bR_t$  и погрешности этого коэффициента  $\delta b$ . Вычисление (см. (1.35) и (1.37)) дает

$$b = \frac{\langle Rn \rangle - \langle R \rangle \langle n \rangle}{\langle R^2 \rangle - \langle R \rangle^2} = 0,477 \text{ дел/Ом},$$

$$\delta b = \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{\frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle R^2 \rangle - \langle R \rangle^2} - b^2} = 0,011 \text{ дел/Ом}.$$

Коэффициент линейного расширения определяется по формуле (13):

$$\alpha = \frac{49,25 \cdot 0,477 \cdot 0,106 \cdot 4,3 \cdot 10^{-3}}{600} = 1,785 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}.$$

Относительная ошибка

$$\begin{aligned} \frac{\delta \alpha}{\alpha} &= \sqrt{\left(\frac{\delta R_K}{R_K}\right)^2 + \left(\frac{\delta L_K}{L_K}\right)^2 + \left(\frac{\delta \Theta}{\Theta}\right)^2 + \left(\frac{\delta B}{B}\right)^2 + \left(\frac{\delta b}{b}\right)^2} \approx \\ &\approx \sqrt{\left(\frac{1}{106}\right)^2 + \left(\frac{105}{4771}\right)^2} \approx 0,024 = 2,4\%. \end{aligned}$$

Абсолютная ошибка

$$\delta\alpha = \alpha \cdot 0,024 = 1,785 \cdot 0,024 \cdot 10^{-5} = 0,043 \cdot 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}.$$

Окончательно

$$\alpha = (1,79 \pm 0,04) \cdot 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}.$$

Найденное графическим методом значение  $\alpha$  в пределах точности измерений согласуется с этим результатом.

### Работа 1.1.3

## Статистическая обработка результатов многократных измерений

**Цель работы:** применение методов обработки экспериментальных данных при измерении сопротивлений.

**В работе используются:** набор резисторов (250–300 штук); универсальный цифровой вольтметр В7-23, работающий в режиме «Измерение сопротивлений постоянному току».

Производство резисторов на заводе — сложный технологический процесс. В результате величина сопротивления может отличаться от указанного на каждом экземпляре номинала. Погрешности могут быть как систематические, так и случайные. Плохая настройка производственных станков и аппаратуры приводит к систематическим погрешностям. К случайным погрешностям приводят, например, неоднородность используемой проволоки (по толщине и химическому составу), случайные изменения температурного режима, люфты станков.

Для измерения сопротивлений в данном случае, так как относительные отклонения от номинала малы, необходимо воспользоваться достаточно точным измерительным прибором. Подходящим прибором является «универсальный цифровой вольтметр В7-23», применяемый в режиме «измерение сопротивления постоянному току», который обеспечивает точность до сотых долей процента относительной погрешности. Конкретные величины надо взять из описания непосредственно используемого прибора.

Таким образом, погрешностью измерений, связанной с измерительным прибором, можно пренебречь по сравнению с отклонениями от номинала, полученными в процессе изготовления резисторов.

Основное в данной работе — измерение сопротивлений всех резисторов из набора (250–300 штук). По результатам измерений вычисляется среднее значение (1.15):

$$\langle R \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N R_i. \quad (1)$$

При большом числе измеренных сопротивлений получаем характеристику данного набора, которая перестает зависеть от числа измерений (числа резисторов).

Чтобы охарактеризовать случайные погрешности при изготовлении набора резисторов, необходимо построить гистограмму. Для этого из всех результатов измерений находим наибольший  $R_{\text{макс}}$  и наименьший  $R_{\text{мин}}$ . Разность  $R_{\text{макс}} - R_{\text{мин}}$  делим на  $m$  частей. Полученную величину называем интервалом изменения сопротивления:

$$\Delta R = \frac{R_{\text{макс}} - R_{\text{мин}}}{m}. \quad (2)$$

Гистограмму строим следующим образом. По оси абсцисс откладываем сопротивление резистора и отмечаем интервалы изменения сопротивления. А по оси ординат над каждым интервалом можно откладывать число результатов измерений  $\Delta n$ , которое попадает в данный интервал. Но удобнее это число поделить на количество всех измерений  $N$  (это дает вероятность попадания результата в данный интервал) и на ширину используемого интервала  $\Delta R$  (в итоге имеем плотность вероятности). Таким образом, по оси ординат откладывается величина

$$y = \frac{\Delta n}{N \Delta R}.$$

Интересно проследить, как изменяется гистограмма с увеличением числа разбиений. При этом  $m$  должно оставаться существенно меньше  $N$ .

На том же графике нужно отложить по оси абсцисс среднее значение сопротивления и посмотреть, как располагается гистограмма относительно этой величины.

Для характеристики разброса случайной величины используется среднеквадратичное отклонение (1.18):

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (R_i - \langle R \rangle)^2}. \quad (3)$$

На оси абсцисс гистограммы полезно отметить точки  $\langle R \rangle - \sigma$  и  $\langle R \rangle + \sigma$  и посмотреть, как располагается относительно этих точек гистограмма.

Используя  $\sigma$ , можно построить функцию распределения Гаусса (1.16):

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(R - \langle R \rangle)^2}{2\sigma^2}}. \quad (4)$$

Эту зависимость следует нанести на гистограмму.

## ЗАДАНИЕ

1. Ознакомьтесь с кратким описанием «универсального цифрового вольтметра В7-23», обратив особое внимание на пункт «измерение сопротивления постоянному току».
2. Подготовьте вольтметр к работе, включив его в сеть и дав ему прогреться в течение 15–20 минут.
3. Проведите измерения сопротивлений резисторов из набора  $N = 250\text{--}300$  штук.
4. Постройте гистограмму (см. указание в тексте работы) для  $m = 10$  и  $m = 20$ .
5. Вычислите  $\langle R \rangle$  и сравните с номиналом. Отложите эти величины на оси абсцисс и сравните с положением максимума гистограммы. Отметьте на оси абсцисс гистограммы значения  $\langle R \rangle - \sigma$  и  $\langle R \rangle + \sigma$ . Сравните ширину гистограммы с этими значениями.
6. Вычислите долю результатов, которая находится в пределах от  $\langle R \rangle - \sigma$  до  $\langle R \rangle + \sigma$  и от  $\langle R \rangle - 2\sigma$  до  $\langle R \rangle + 2\sigma$ .
7. Постройте кривую Гаусса и сравните с гистограммами при различном числе разбиений  $n$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сквайрс Дж.* Практическая физика. — М.: Мир, 1971.
2. *Зайдель А.Н.* Элементарные оценки ошибок измерений. — Л.: Наука, 1974.

## Образец отчета о выполнении работы 1.1.3

В работе используются: набор 270 сопротивлений, имеющих номинал 560 Ом, универсальный цифровой вольтметр В7-23, работающий в режиме «измерение сопротивлений постоянному току».

Результаты измерения сопротивлений 270 резисторов (в Омах) приводятся в табл. 1. Они переписаны в порядке возрастания.

По этой таблице строим гистограммы для  $m = 20$  и  $m = 10$ . Для удобства сравнения с нормальным распределением по оси ординат будем откладывать не число результатов  $\Delta n$ , попадающих в каждый интервал, а это



Т а б л и ц а 1

**Результаты измерения сопротивления 270 резисторов**

539,7	540,7	541,5	542,3	542,8	543,4	543,9	544,3	545,0
545,4	545,5	545,9	546,0	546,1	546,1	546,5	546,8	546,9
547,6	547,9	548,0	548,4	548,7	548,9	549,0	549,1	549,2
549,3	549,3	549,3	549,4	549,6	549,7	549,7	549,9	550,0
550,1	550,8	551,8	552,0	552,1	552,3	552,3	552,7	553,0
553,2	553,3	553,6	553,7	553,9	554,2	554,2	554,2	554,2
554,3	554,3	554,5	554,7	554,8	555,0	555,1	555,1	555,1
555,2	555,3	555,3	555,3	555,3	555,3	555,3	555,5	555,6
555,7	555,7	555,7	555,7	556,0	556,1	556,1	556,4	556,4
556,4	556,5	556,5	556,6	556,6	556,7	556,8	556,8	556,9
557,0	557,0	557,0	557,1	557,1	557,1	557,2	557,2	557,3
557,3	557,4	557,4	557,4	557,5	557,5	557,7	557,7	557,8
557,8	557,9	558,0	558,0	558,0	558,1	558,1	558,4	558,4
558,5	558,5	558,5	558,5	558,6	558,7	558,8	558,8	558,8
558,8	558,9	558,9	559,0	559,0	559,1	559,1	559,3	559,3
559,4	559,4	559,4	559,6	559,7	559,7	559,7	559,7	559,8
559,8	559,8	559,8	559,9	560,0	560,0	560,0	560,0	560,0
560,2	560,2	560,3	560,4	560,4	560,4	560,6	560,7	560,9
561,0	561,1	561,1	561,1	561,4	561,5	561,5	561,6	561,9
562,0	562,0	562,0	562,3	562,3	562,5	562,5	562,6	562,6
562,6	562,7	562,7	562,7	562,8	562,8	563,0	563,1	563,1
563,2	563,6	563,6	563,6	564,0	564,2	564,3	564,4	564,5
564,5	564,5	564,8	565,0	565,1	565,1	565,2	565,3	565,3
565,7	565,8	565,9	566,1	566,1	566,2	566,8	566,9	567,6
567,8	568,0	568,1	568,3	568,7	568,9	569,1	569,7	569,8
570,2	570,3	570,6	570,7	571,0	571,1	571,1	571,5	572,1
572,3	572,4	572,6	572,9	573,0	573,1	573,2	573,3	573,5
574,0	574,0	574,8	575,1	576,0	576,3	578,1	578,8	578,8
579,0	579,2	579,7	579,8	580,0	580,5	580,6	581,1	581,4
582,7	582,9	583,1	584,1	584,3	586,6	586,7	587,3	589,0

Т а б л и ц а 2

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Delta n$	4	4	10	17	8	16	44	45	28	25
$w \cdot 1000$	6	6	15	25	12	24	65	67	41	37

$k$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\Delta n$	14	10	11	10	3	7	5	5	3	1
$w \cdot 1000$	21	15	16	15	4	10	7	7	4	1

Т а б л и ц а 3

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Delta n$	8	27	24	89	53	24	21	10	10	4
$w \cdot 1000$	6	20	18	66	39	18	16	7	7	3

число, деленное на полное число результатов  $N$  и величину интервала  $\Delta R$ . В таблицах 2 и 3 в зависимости от номера группы  $k$  приведены значения  $\Delta n$  и  $w = \Delta n / (N \Delta R)$ . На рис. 1 и 2 представлены гистограммы. Среднее значение сопротивлений находим по формуле (1):

$$\langle R \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i = 560,7 \text{ Ом.}$$

Среднеквадратичное отклонение находим по формуле (3):

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (R_i - \langle R \rangle)^2} \approx 9 \text{ Ом.}$$

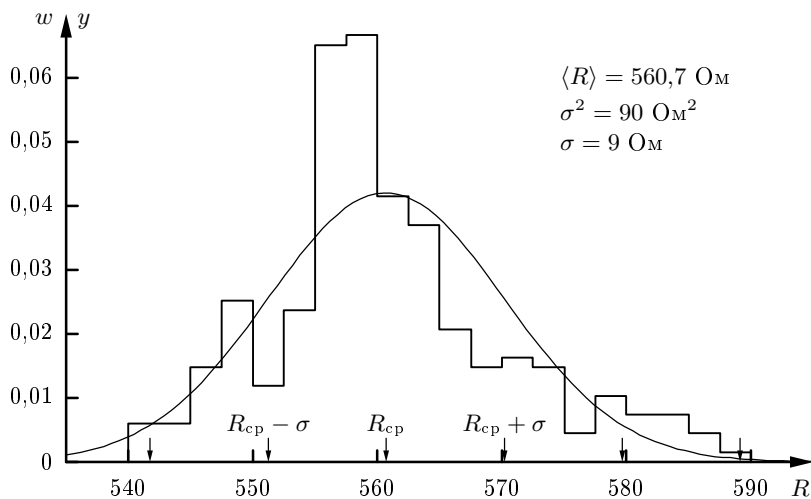
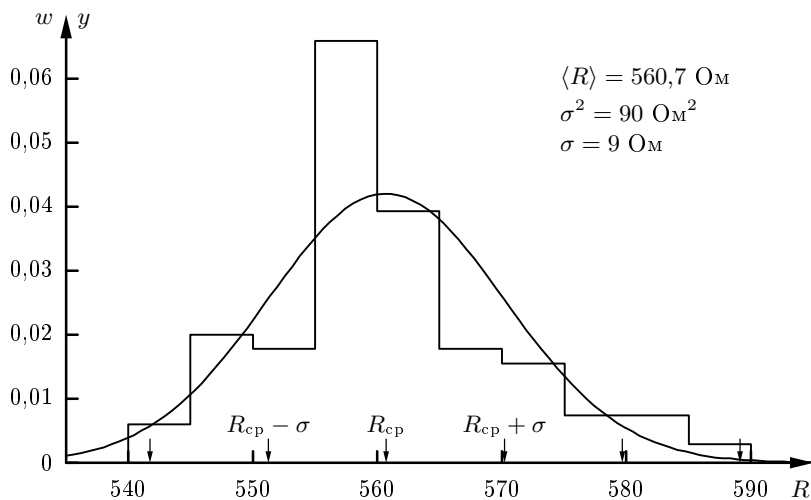
В интервал от  $\langle R \rangle - \sigma$  до  $\langle R \rangle + \sigma$  попадает 46% результатов, а в интервал от  $\langle R \rangle - 2\sigma$  до  $\langle R \rangle + 2\sigma$  соответственно — 93%. Нормальное распределение описывается формулой (4):

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(R - \langle R \rangle)^2}{2\sigma^2}}.$$

Эта функция также изображена на рис. 1 и 2. Видно, что гистограмма соответствует этой зависимости. Теоретическая вероятность попадания измерений в интервал от  $\langle R \rangle - \sigma$  до  $\langle R \rangle + \sigma$  равна 68%, а в интервал от  $\langle R \rangle - 2\sigma$  до  $\langle R \rangle + 2\sigma$  соответственно — 95%.

Практически мы получаем, что величина сопротивления резистора, наугад выбранного из данного набора, попадает в интервал  $560 \pm 9$  Ом с вероятностью 46%, в интервал  $560 \pm 18$  Ом — с вероятностью 93%, в интервал  $560 \pm 27$  Ом — с вероятностью 99%.

Таким образом, величины всех сопротивлений укладываются в 5-процентный интервал ( $\langle R \rangle \pm 3\sigma$ ).

Рис. 1. Гистограмма для  $m = 20$ Рис. 2. Гистограмма для  $m = 10$

## Работа 1.1.4

### Измерение интенсивности радиационного фона

**Цель работы:** применение методов обработки экспериментальных данных для изучения статистических закономерностей при измерении интенсивности радиационного фона.

**В работе используются:** счетчик Гейгера–Мюллера (СТС-6), блок питания, компьютер с интерфейсом связи со счетчиком.

Случайный разброс результатов измерений, как уже говорилось ранее при обсуждении случайных погрешностей, может быть связан как с погрешностью измерений, так и со случайными изменениями самой измеряемой величины. Поток космических частиц, которые составляют значительную часть радиационного фона, изменяется со временем случайным образом. Если изменения происходят около какого-либо значения, то говорят, что величина флуктуирует. В таком случае характеристиками этой величины в целом являются ее среднее значение и среднеквадратичное отклонение от этого среднего. Для нахождения среднего значения и среднеквадратичного отклонения применяются те же методы, которые используются при расчете средних значений и случайных погрешностей измерений.

**Теоретическая справка о природе космических лучей.**<sup>1</sup> Космические лучи разделяют на первичные, которые приходят на орбиту Земли из космоса, и вторичные, которые возникают благодаря взаимодействию первичных с атмосферой Земли и составляют основную часть космических лучей, доходящих до поверхности Земли.

Подавляющая часть первичных космических лучей приходит к Земле из Галактики и лишь небольшая часть и меньших энергий связана с активностью Солнца. О механизме возникновения космических лучей в Галактике пока существуют лишь гипотезы. Часть излучения возникает в звездах Галактики так же, как на Солнце во время хромосферных вспышек. Более мощное излучение, по-видимому, связано со вспышками сверхновых звезд и образующимися при этом пульсарами. Большую роль в ускорении космических частиц могут играть возникающие при вспышках сверхновых звезд плазменные облака, которые двигаются с очень большими скоростями, и галактические магнитные поля.

---

<sup>1</sup> Не обязательно при первом прочтении

Первичные космические лучи — это поток стабильных частиц, имеющих большую кинетическую энергию, которая в принятых для измерений в этих случаях единицах составляет от  $10^9$  до  $10^{21}$  электрон-вольт или сокращенно эВ ( $1$  электрон-вольт  $= 1,6 \cdot 10^{-12}$  эрг  $= 1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж). Установлено, что в космическом пространстве поток частиц одинаков по всем направлениям (изотропен).

Основной величиной, характеризующей количество частиц в космических лучах, является интенсивность  $I$ . По определению интенсивность есть число частиц, падающих в единицу времени на единичную площадку, перпендикулярную к направлению наблюдения, отнесенное к единице телесного угла (стерадиану). Единицей измерения при этом является

$$\frac{\text{число частиц}}{\text{см}^2 \cdot \text{ср} \cdot \text{с}}.$$

В случае изотропного распределения направлений космических лучей, что действительно имеет место вне атмосферы Земли, плотность  $F$  потока частиц (из полусферы направлений) равна

$$F = 2\pi \int_0^{\pi/2} I \cos \theta \sin \theta d\theta = \pi I \left( \frac{\text{число частиц}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}} \right),$$

концентрация частиц, имеющих абсолютное значение скорости  $V$ :

$$n = \frac{4\pi I}{V} \left( \frac{\text{число частиц}}{\text{см}^3} \right).$$

Отметим, что подавляющее число космических частиц вне атмосферы движется со скоростями, близкими к скорости света, поэтому для оценки концентрации  $n$  вместо  $V$  с достаточной точностью можно использовать скорость света  $c$ . Отметим также, что вблизи поверхности Земли интенсивность вторичного космического излучения пропорциональна  $\cos^2 \theta$ , где  $\theta$  — угол с вертикалью.

Плотность потока частиц измеряется количеством частиц, проходящих за 1 секунду через площадку в  $1 \text{ см}^2$ . На расстоянии порядка 50 км над поверхностью Земли плотность потока равна 1 частица/( $\text{см}^2 \cdot \text{с}$ ). Большую часть потока здесь составляют частицы с энергией 10 ГэВ. Частицы с энергией меньше 1 ГэВ практически отсутствуют, что, видимо, связано с влиянием магнитных полей Земли и Солнечной системы.

В основном первичные космические лучи состоят из протонов (92%) и ядер гелия (6,6%), называемых также  $\alpha$ -частицами. Обнаружены также и более тяжелые ядра (вплоть до никеля), составляющие все вместе

около 0,8%. Электронов и позитронов набирается примерно 1%, причем позитронов в десять раз меньше, чем электронов. Число  $\gamma$ -квантов с энергиями больше  $10^8$  эВ составляет всего 0,01%.

Временные изменения интенсивности потока первичных космических лучей невелики. Их изменения в основном для частиц с энергией порядка 1 ГэВ связаны с изменением магнитных полей в Солнечной системе, вызываемых 11-летними циклами солнечной активности, 27-дневным периодом вращения Солнца вокруг своей оси, а также хромосферными вспышками на Солнце (5–13 вспышек в активный год) и магнитными бурями в магнитосфере Земли.

Попадая в атмосферу Земли, первичные космические лучи взаимодействуют с ядрами атомов атмосферных газов и образуют вторичные космические лучи. Из 100 000 протонов первичных космических лучей до поверхности Земли доходит только один. Но появляются вторичные протоны, которые вместе с мюонами (вначале названными  $\mu$ -мезонами) и нейтронами составляют так называемую жесткую компоненту вторичных космических лучей. Жестким называется излучение, которое проходит через свинцовую пластинку толщиной в 10 см.

Мягкая компонента вторичных космических лучей (ее задерживает свинцовая пластинка толщиной 10 см) состоит в основном из электронов, позитронов и фотонов. Мягкая компонента в атмосфере существует вблизи поверхности Земли лишь благодаря тому, что она генерируется жесткой. Плотность потока мягкой компоненты космических лучей с увеличением высоты возрастает быстрее, чем плотность потока жесткой. На уровне моря плотность потока (в вертикальном направлении) мягкой компоненты составляет примерно половину плотности потока жесткой, которая равна  $1,7 \cdot 10^{-2}$  частиц/(см<sup>2</sup>·с), а на высоте 15 км над Землей плотность потока мягкой компоненты в 4–5 раз выше плотности потока жесткой. Общая плотность потока космических лучей максимальна приблизительно на высоте 17 км. В целом космические лучи на уровне моря примерно в 100 раз менее плотны, чем на верхней границе атмосферы Земли, и на две трети состоят из мюонов. Анализ ила на дне океана показал, что в среднем плотность потока космических лучей практически не изменилась за последние 35 тысяч лет.

Плотность потока вторичных космических лучей вблизи поверхности Земли сильно зависит от направления. Она максимальна в вертикальном направлении и минимальна в горизонтальном. Изменение приближенно пропорционально квадрату косинуса угла отклонения от вертикали, что связано с увеличением пути, проходимого лучами в ат-

мосфере Земли. Небольшие изменения плотности потока вторичных космических лучей со временем вызваны изменениями в атмосфере Земли давления, температуры и магнитных полей.

В настоящее время, хотя уже построены мощные ускорители частиц, космические лучи остаются единственным источником частиц сверхвысоких энергий. Но приходят такие частицы не часто. Частица с энергией  $10^{19}$  эВ пролетает через площадь в один квадратный метр вблизи земной поверхности один раз в 2 тысячи лет. Конечно, если площадь увеличить, например, до 10 квадратных километров, то это будет происходить один раз в несколько дней. Частицы больших энергий можно зарегистрировать по создаваемому ими вторичному потоку частиц, называемому атмосферными ливнями частиц. Общее число частиц в ливне, зарождающемся на высоте примерно в 20–25 км над Землей, может достигать многих миллионов и покрывать площадь в несколько квадратных километров. Одновременное появление большого числа частиц на значительной площади служит подтверждением их общего происхождения и позволяет установить энергию образовавшей их частицы.

Космические лучи и естественная радиоактивность Земли и воздуха являются основным источником ионов в нижней части атмосферы Земли (до высот порядка 60 км). Ионизация в атмосфере с увеличением высоты вначале падает, а выше 1 км начинает возрастать, особенно резко с высоты 3 км. На высоте 5 км число ионов в единице объема в 3–4 раза больше, чем вблизи поверхности Земли, а на высоте 9 км — уже в 30 раз больше.

**Устройство счетчика Гейгера–Мюллера.** Обнаружить космические лучи и измерить их интенсивность можно по ионизации, которую они производят. Для этого используется специальный прибор — счетчик Гейгера–Мюллера. Счетчик представляет собой наполненный газом сосуд с двумя электродами. Существует несколько типов таких счетчиков. Используемый в данной работе (СТС-6) представляет собой тонкостенный металлический цилиндр, который является одним из электродов (катодом). Другим электродом (анодом) является тонкая нить, натянутая вдоль оси цилиндра. Чтобы счетчик работал в режиме счета частиц, на электроды необходимо подать напряжение 400 В. Частицы космических лучей ионизируют газ, которым наполнен счетчик, а также выбивают электроны из его стенок. Образовавшиеся электроны, ускоряясь в сильном электрическом поле между электродами счетчика, соударяются с молекулами газа и выбивают из них новые вторичные электроны. Эти электроны ускоряются электрическим полем и затем ионизируют молекулы газа. В результате образуется целая

лавина электронов, и через счетчик резко увеличивается ток. На рис. 1 приведена схема включения счетчика.

Постоянное напряжение подается на счетчик от блока питания через сопротивление  $R$ . В исходном состоянии электроды СТС-6 и конденсатор  $C_1$  заряжены до напряжения 400 В, так как сопротивление резистора  $R$  много меньше сопротивлений утечки СТС-6 и конденсатора  $C_1$ . Разделительный конденсатор  $C_2$  не пропускает постоянное напряжение источника питания в интерфейсные схемы компьютера.

При возникновении тока через счетчик заряд на СТС-6 и конденсаторе  $C_1$  обеспечивает развитие электронной лавины на короткое время. В процессе разряда энергия поступает от заряженного конденсатора  $C_1$ , подсоединенного параллельно счетчику. Разряд в счетчике прекратится, когда напряжение на счетчике уменьшится до значения, при котором разность потенциалов внутри счетчика на длине свободного пробега электрона не превышает потенциала ионизации. За время порядка нескольких  $RC_1$  схема приходит в исходное состояние. При этом через конденсатор  $C_2$  в электронную схему интерфейса компьютера будет передан короткий импульс.

Емкость конденсатора  $C_1$  не должна быть ни слишком малой, ни слишком большой. Запасенной в конденсаторе энергии должно хватить на создание лавинного процесса, но вместе с тем время зарядки конденсатора от блока питания ( $\tau \sim RC_1$ ), называемое мертвым временем счетчика, не должно быть слишком большим, так как в течение этого времени счетчик не может регистрировать частицы (обычно мертвое время составляет несколько микросекунд). В нашей установке этим условиям вполне удовлетворяет емкость самого счетчика, и конденсатор  $C_1$  отсутствует.

Сопротивление резистора  $R$  также не должно быть ни слишком большим (это увеличивает мертвое время счетчика), ни слишком малым, чтобы конденсатор за время разряда не успевал существенно зарядиться и лавина гасла. Обычно  $R \sim 1$  МОм.

Число зарегистрированных частиц зависит от времени измерения, размеров счетчика, состава газа и давления в нем, а также от материала, из которого сделаны стенки счетчика. Значительную часть регистрируемых частиц составляет естественный радиоактивный фон.

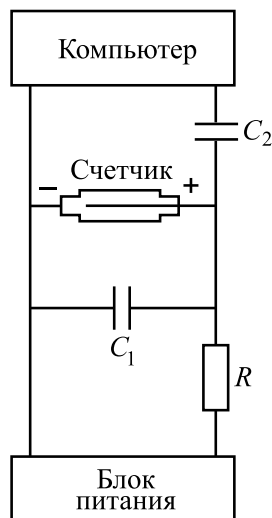


Рис. 1. Схема включения счетчика



Вариации потока частиц, которые существенны при измерениях в данной работе, связаны с кратковременными вариациями условий его возникновения и распространения в атмосфере Земли. Как уже говорилось, в данной работе измеряется величина (плотность потока частиц), которая меняется со временем случайным образом. Методы обработки результатов те же, что и для расчета случайных погрешностей. Что касается погрешностей измерений потока частиц с помощью счетчиков Гейгера–Мюллера, то оценки показывают, что они малы по сравнению с изменениями самого потока или, как говорят, с флуктуациями потока. Погрешности измерений определяются в основном временем, в течение которого восстанавливаются нормальные условия в счетчике после прохождения каждой частицы и срабатывания счетчика. Это время называется временем разрешения. Размеры счетчика должны быть такими, чтобы время между попаданиями частиц в счетчик было больше времени разрешения.

**Описание эксперимента.** Если случайные события (регистрация частиц) однородны во времени и каждое последующее событие не зависит от того, когда и как случилось предыдущее событие, то такой процесс называется пуассоновским, а результаты — количество отсчетов в одном опыте — подчиняются так называемому распределению Пуассона (см. Приложение). При больших числах отсчёт это распределение стремится к нормальному.

В теории вероятностей доказывается, что в таком процессе среднеквадратичная ошибка числа отсчетов, измеренного за некоторый интервал времени, равна квадратному корню из среднего числа отсчетов  $n_0$  за тот же интервал:  $\sigma = \sqrt{n_0}$  (см. формулу (10) Приложения). Однако истинное среднее значение измеряемой величины неизвестно (иначе для его определения не пришлось бы ставить опыты). Поэтому в формулу для определения стандартной ошибки отдельного измерения приходится подставлять не истинное среднее значение  $n_0$ , а измеренное значение  $n$ :

$$\sigma = \sqrt{n}. \quad (1)$$

Формула (1) показывает, что, как правило (с вероятностью 68%), измеренное число частиц  $n$  отличается от искомого среднего не более чем на  $\sqrt{n}$ . Результат измерений записывается так:

$$n_0 = n \pm \sqrt{n}. \quad (2)$$

Обратимся теперь к следующему важному вопросу. Пусть мы провели серию из  $N$  измерений, в результате которых получены числа частиц  $n_1, n_2, \dots, n_N$ . Эти результаты мы до сих пор использовали для

того, чтобы определить, как сильно значения, полученные в отдельных измерениях, отличаются от истинного значения. Как уже отмечалось, этот вопрос важен главным образом для выяснения того, насколько достоверен результат, полученный в одном измерении. Но если было проведено несколько измерений, их результаты могут быть использованы и с другой целью: они позволяют определить среднее значение измеряемой величины лучше, чем это можно сделать, когда произведено всего одно измерение. При  $N$  измерениях среднее значение числа сосчитанных за одно измерение частиц равно, очевидно,

$$\bar{n} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i, \quad (3)$$

а стандартную ошибку отдельного измерения можно оценить по формуле (1.18), т. е., положив в формуле (1.17)  $n_0 = \bar{n}$ :

$$\sigma_{\text{отд}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (n_i - \bar{n})^2}. \quad (4)$$

В соответствии с формулой (1) следует ожидать, что эта ошибка будет близка к  $\sqrt{n_i}$ , т. е.  $\sigma_{\text{отд}} \approx \sigma_i = \sqrt{n_i}$ , где в качестве  $n_i$  можно подставить любое из измеренных значений  $n$ . Поскольку  $n_i$  различны, мы будем, таким образом, получать для  $\sigma_{\text{отд}}$  различные оценки. Одни из них будут лучше, а другие — хуже совпадать с более надежной оценкой  $\sigma_{\text{отд}}$  — со значением, определенным по всем измерениям, т. е. по формуле (4). Это вполне естественно. Обработывая результаты измерений, мы всегда получаем приближенные значения измеряемой величины и приближенные значения погрешностей, которые, в зависимости от случая, могут лучше или хуже совпадать с истинными. Ближе всего к значению  $\sigma_{\text{отд}}$ , определенному по формуле (4), лежит, конечно, величина  $\sqrt{\bar{n}}$ , т. е.

$$\sigma_{\text{отд}} \approx \sqrt{\bar{n}}. \quad (5)$$

Величина  $\bar{n}$  из формулы (3), полученная путем усреднения результатов по серии из  $N$  опытов, конечно, тоже не вполне точно совпадает с истинным средним значением  $n_0$  и сама является случайной величиной. Теория вероятностей показывает, что стандартная ошибка отклонения  $\bar{n}$  от  $n_0$  может быть определена по формуле (1.20):

$$\sigma_{\bar{n}} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (n_i - \bar{n})^2} = \frac{\sigma_{\text{отд}}}{\sqrt{N}}. \quad (6)$$

При написании второй части равенства мы использовали формулу (4).

Обычно наибольший интерес представляет не абсолютная, а относительная точность измерений. Для рассмотренной серии из  $N$  измерений по 10 с *относительная ошибка* отдельного измерения (т. е. ожидаемое отличие любого из  $n_i$  от  $n_0$ )

$$\varepsilon_{\text{отд}} = \frac{\sigma_{\text{отд}}}{n_i} \approx \frac{1}{\sqrt{n_i}}.$$

Аналогичным образом определяется относительная ошибка в определении среднего по всем измерениям значения  $\bar{n}$ :

$$\varepsilon_{\bar{n}} = \frac{\sigma_{\bar{n}}}{\bar{n}} = \frac{\sigma_{\text{отд}}}{\bar{n}\sqrt{N}} \approx \frac{1}{\sqrt{\bar{n}N}}. \quad (7)$$

При написании последнего из равенств (7) значение  $\sigma_{\text{отд}}$  было подставлено из формулы (5).

Таким образом, относительная точность измерения  $\bar{n}$  определяется только *полным* числом отсчетов  $\bar{n}N$  и не зависит от интервалов разбиения серии (по 10, 40 или 100 с). Этого, конечно, и следовало ожидать, так как все измерения вместе составляют одно более продолжительное измерение, в котором всего зарегистрировано  $\sum n_i = \bar{n}N$  отсчетов. Как мы видим, относительная точность измерения постепенно улучшается с увеличением числа отсчетов (а значит, и с увеличением полного времени измерений).

С помощью формулы (7) найдем, что для измерения интенсивности космического излучения с точностью до 1% необходимо получить, по крайней мере,  $100^2=10\,000$  отсчетов, для точности 3% достаточно 1000 отсчетов, при точности 10% нужно всего 100 отсчетов и т. д. При этом точность измерения не зависит от того, получены ли все 1000 или 10 000 отсчетов в одном или нескольких независимых опытах.

В работе для организации процесса измерения плотности космических лучей и процесса обработки экспериментальных данных используется специально разработанная компьютерная программа. Используя эту программу, можно получить сведения об экспериментальной установке, провести численный эксперимент, в котором имитируется реальный эксперимент. При численном эксперименте данные получаются с помощью специальной программы (генератора случайных чисел). При проведении реального эксперимента программа позволяет посмотреть, как во время эксперимента меняется сама исследуемая величина, ее среднее значение, стандартное отклонение (погрешность), гистограмма, убедиться в применимости теоретических формул, приведенных в

разделе об измерениях и их погрешностях. Анализируя результаты, можно выбрать подходящие длительность интервала измерений и число отсчетов. В программе имеются определения основных понятий и формулы, используемые при обработке результатов экспериментов.

## ЗАДАНИЕ

1. Перед тем как приступить к работе, прочтите разделы, посвященные измерениям.
2. Ознакомьтесь с устройством установки.
3. Включите питание компьютера и установки. После загрузки компьютера запустится программа **STAT** и таким образом начнется проведение основного эксперимента. Познакомьтесь с описанием программы **STAT**, имеющимся в лаборатории.
4. Проведите демонстрационный эксперимент, при котором данные для обработки получаются от генератора случайных чисел. Выясните, как меняются в зависимости от числа измерений:
  - 1) измеряемая величина,
  - 2) ее среднее значение,
  - 3) погрешность отдельного измерения,
  - 4) погрешность среднего значения.
5. По окончании основного эксперимента перепишите в рабочую тетрадь все данные основного эксперимента, выдаваемые компьютером.
6. По результатам, записанным в рабочую тетрадь, постройте гистограмму  $w_n = f(n)$  распределения числа отсчетов за 10 с. Для этого по оси абсцисс отложите последовательные целые числа  $n$ , а по оси ординат — долю случаев, когда число отсчетов счетчика равнялось  $n$ . Доля случаев  $w_n$ , характеризующая вероятность получить  $n$  отсчетов, определяется по очевидной формуле:

$$w_n = \frac{\text{число случаев с отсчетом } n}{\text{полное число измерений } (N)}.$$

7. Разбейте результаты измерений для  $\tau = 20$  с в порядке их получения на группы по два и с их помощью постройте гистограмму распределения числа отсчетов за 40 с. Гистограммы распределений числа отсчетов за 10 и 40 с для наглядности следует строить на одном графике. При этом для второго распределения цена деления по оси абсцисс должна быть подобрана таким образом, чтобы положения средних значений  $\bar{n}$  совпадали. Как изменяется гистограмма при увеличении времени измерения? Чем определяется ширина пика гистограммы?
8. Определите среднее число частиц за 10 и 40 секунд и соответствующие среднеквадратичные отклонения для отдельного и среднего значений.

Убедитесь, что стандартное отклонение отдельного измерения связано со средним числом частиц  $\sigma = \sqrt{n}$ .

9. Определите процент случаев, когда отклонение от среднего не превышает  $\sigma$ ,  $2\sigma$ . Сравните результаты с теоретическими оценками.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лабораторные занятия по физике* / Под ред. Л.Л. Гольдина. — М.: Наука, 1983. С. 40–52.
2. *Лабораторный практикум по общей физике. Т. 3* / Под ред. Ю.М. Ципенюка. — М.: Издательство МФТИ, 1998. С. 159–166, 367–372.
3. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. V. Ч. 2. С. 354–370.

### Образец отчета о выполнении работы 1.1.4

В работе используются: счетчик Гейгера–Мюллера (СТС-6), блок питания, компьютер.

1. Включаем компьютер. (Начинается измерение для основного эксперимента.)

2. В результате демонстрационного эксперимента убеждаемся, что при увеличении числа измерений:

- 1) измеряемая величина флуктуирует;
- 2) флуктуации среднего значения измеряемой величины уменьшаются, и среднее значение выходит на постоянную величину;

3) флуктуации величины погрешности отдельного измерения уменьшаются, и погрешность отдельного измерения (погрешность метода) выходит на постоянную величину;

4) флуктуации величины погрешности среднего значения уменьшаются, а сама величина убывает.

3. Переходим к основному эксперименту: измерение плотности потока космического излучения за 10 секунд (результаты набирались с момента включения компьютера). На компьютере проведем обработку, аналогичную сделанной в демонстрационном эксперименте. Результаты приведены в таблицах 1 и 2.

4. Разбиваем результаты измерений из таблицы 1 в порядке их получения на группы по 2, что соответствует проведению  $N_2 = 100$  измерений числа частиц за интервал времени, равный 40 с. Результаты сведем в таблицу 3.

5. Представим результаты последнего распределения в виде, удобном для построения гистограммы (табл. 4). Гистограммы распределений среднего числа отсчетов за 10 и 40 с строим на одном графике (рис. 2). При этом для второго распределения цену деления по оси абсцисс увеличиваем в 4 раза, чтобы положения максимумов распределений совпадали.

6. Используя формулу (3), определим среднее число срабатываний счетчика за 10 с:

$$\bar{n}_1 = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} n_i = \frac{2896}{400} = 7,24.$$

Т а б л и ц а 1

**Число срабатываний счетчика за 20 с**

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	20	16	20	16	16	15	13	16	13	14
10	17	22	14	12	15	17	20	16	16	17
20	16	15	28	15	19	5	14	17	14	15
30	11	6	14	11	16	12	18	14	14	25
40	10	21	18	14	13	20	18	15	17	11
50	10	7	6	21	23	19	10	13	14	15
60	10	12	13	9	18	19	17	11	9	16
70	16	15	12	16	12	20	6	11	13	19
80	22	17	19	17	10	13	10	20	16	10
90	12	10	19	16	14	15	5	14	13	13
100	12	14	12	14	13	13	17	7	18	15
110	13	13	22	12	15	14	10	16	15	10
120	17	19	27	13	16	16	13	15	15	13
130	6	18	8	14	16	17	13	15	19	16
140	17	13	15	19	16	14	20	18	16	12
150	16	12	14	12	11	8	12	10	13	20
160	11	10	10	10	20	16	15	15	11	10
170	13	12	15	14	15	13	12	17	15	11
180	11	13	15	14	11	10	16	14	14	22
190	10	16	20	18	11	11	10	22	15	11

Примечание: Таблица составлена так, что, например, результат 123-го опыта лежит на пересечении строки, обозначенной 120, и столбца 3.

7. Найдем среднеквадратичную ошибку отдельного измерения по формуле (4):

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} (n_i - \bar{n}_1)^2} = \sqrt{\frac{2934}{400}} \approx 2,7.$$

8. Убедимся в справедливости формулы (5):

$$\sigma_1 \approx \sqrt{\bar{n}_1}; \quad 2,7 \approx \sqrt{7,24} = 2,69.$$

9. Определим долю случаев, когда отклонения от среднего значения не превышают  $\sigma_1$ ,  $2\sigma_1$ , и сравним с теоретическими оценками (табл. 5).

10. Используя формулу (3), определим среднее число импульсов счетчика

Т а б л и ц а 2

**Данные для построения гистограммы распределения числа  
срабатываний счетчика за 10 с**

Число импульсов $n_i$	0	1	2	3	4	5
Число случаев	0	3	9	15	30	59
Доля случаев $w_n$	0	0,007	0,023	0,037	0,075	0,147
Число импульсов $n_i$	6	7	8	9	10	11
Число случаев	49	53	62	45	28	20
Доля случаев $w_n$	0,123	0,132	0,155	0,113	0,070	0,050
Число импульсов $n_i$	12	13	14	15	16	17
Число случаев	14	7	2	3	0	1
Доля случаев $w_n$	0,035	0,017	0,005	0,007	0	0,003

Т а б л и ц а 3

**Число срабатываний счетчика за 40 с**

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	36	36	31	29	27	39	26	32	36	33
10	31	43	24	31	29	17	25	28	32	39
20	31	32	33	33	28	17	27	42	23	29
30	22	22	37	28	25	31	28	32	17	32
40	39	36	23	30	26	22	35	29	19	26
50	26	26	26	24	33	26	34	29	26	25
60	36	40	32	28	28	24	22	33	28	35
70	30	34	30	38	28	28	26	19	22	33
80	21	20	36	30	21	25	29	28	29	26
90	24	29	21	30	36	26	38	22	32	26

за 40 с:

$$\bar{n}_2 = \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} n_i = \frac{2896}{100} \approx 29,0.$$

11. Найдем среднеквадратичную ошибку отдельного измерения по формуле (4):

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} (n_i - \bar{n}_2)^2} = \sqrt{\frac{3210}{100}} \approx 5,7.$$

12. Убедимся в справедливости формулы (5):

$$\sigma_2 \approx \sqrt{\bar{n}_2}; \quad 5,7 \approx \sqrt{29,0} = 5,4.$$

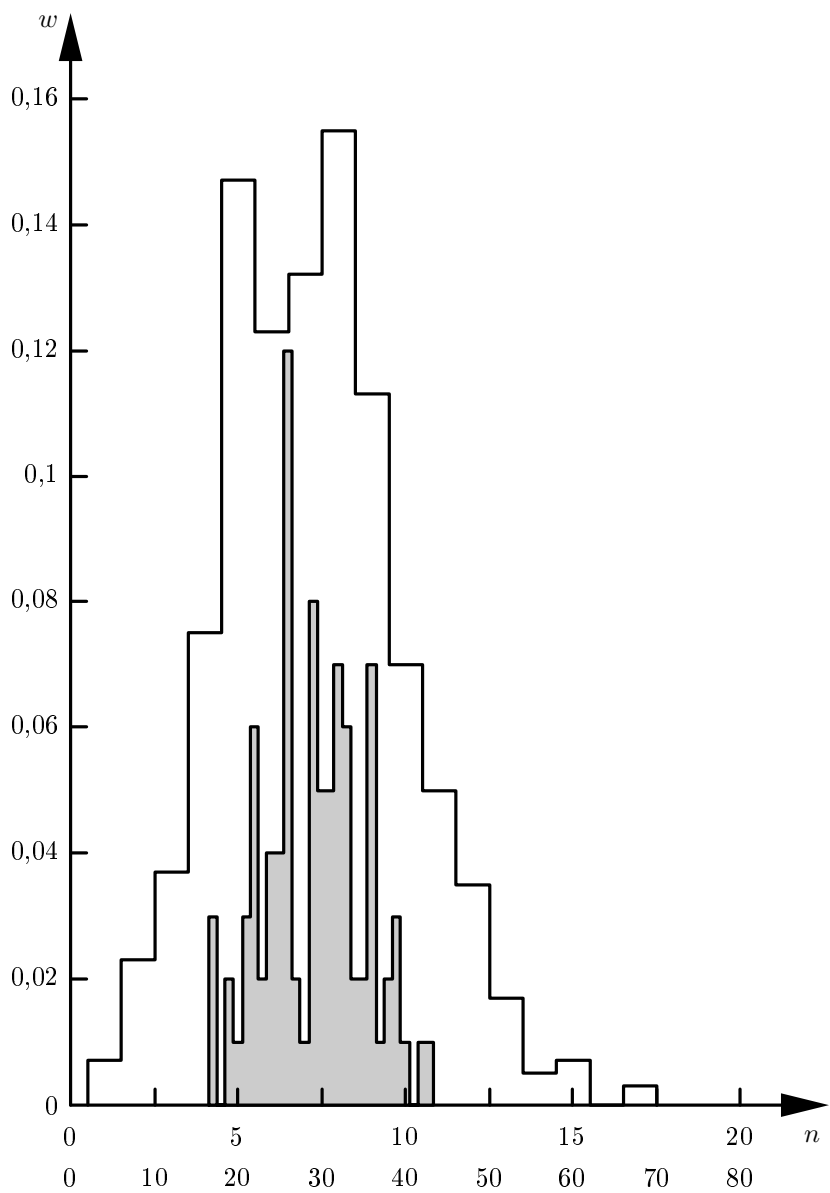


Рис. 2. Гистограммы для  $\tau = 10$  с и  $\tau = 40$  с



Т а б л и ц а 4

**Данные для построения гистограммы распределения числа  
срабатываний счетчика за 40 с**

Число импульсов $n_1$	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Число случаев	3	0	2	1	3	6	2	4	4
Доля случаев $w_n$	0,03	0	0,02	0,01	0,03	0,06	0,02	0,04	0,04
Число импульсов $n_1$	26	27	28	29	30	31	32	33	34
Число случаев	12	2	10	8	5	5	7	6	2
Доля случаев $w_n$	0,12	0,02	0,01	0,08	0,05	0,05	0,07	0,06	0,02
Число импульсов $n_1$	35	36	37	38	39	40	41	42	43
Число случаев	2	7	1	2	3	1	0	1	1
Доля случаев $w_n$	0,02	0,07	0,01	0,02	0,03	0,01	0	0,01	0,01

Т а б л и ц а 5

Ошибка	Число случаев	Доля случаев, %	Теоретическая оценка
$\pm\sigma_1 = \pm 2,7$	268	67	68
$\pm 2\sigma_1 = \pm 5,4$	384	96	95

13. Сравним среднеквадратичные ошибки отдельных измерений для двух распределений:  $\bar{n}_1 = 7,4$ ;  $\sigma_1 = 2,7$  и  $\bar{n}_2 = 29$ ;  $\sigma_2 = 5,7$ . Легко видеть, что хотя абсолютное значение  $\sigma$  во втором распределении больше, чем в первом ( $5,7 > 2,7$ ), относительная полуширина второго распределения меньше:

$$\frac{\sigma_1}{\bar{n}_1} \cdot 100\% = \frac{2,7}{7,24} \cdot 100\% \approx 37\%, \quad \frac{\sigma_2}{\bar{n}_2} \cdot 100\% = \frac{5,7}{29} \cdot 100\% \approx 20\%.$$

Это следует также из рис. 2.

14. Определим стандартную ошибку величины  $\bar{n}_1$  и относительную ошибку нахождения  $\bar{n}_1$  для  $N = 400$  измерений по 10 с. По формуле (6)

$$\sigma_{\bar{n}_1} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{N_1}} = \frac{2,7}{\sqrt{400}} \approx 0,13.$$

Найдем относительную ошибку по первому равенству (7):

$$\varepsilon_{\bar{n}_1} = \frac{\sigma_{\bar{n}_1}}{\bar{n}_1} \cdot 100\% = \frac{0,13}{7,24} \cdot 100\% \approx 1,8\%;$$

по последнему равенству (7):

$$\varepsilon_{\bar{n}_1} = \frac{100\%}{\sqrt{\bar{n}_1 N_1}} = \frac{100\%}{\sqrt{7,24 \cdot 400}} \approx 1,9\%.$$

Окончательный результат:

$$n_{t=10c} = \bar{n}_1 \pm \sigma_{\bar{n}_1} = 7,24 \pm 0,13.$$

15. Определим стандартную ошибку для величины  $\bar{n}_2$  и относительную ошибку нахождения  $\bar{n}_2$  для  $N_2 = 100$  измерений по 40 с. По формуле (6)

$$\sigma_{\bar{n}_2} = \frac{\sigma_2}{\sqrt{N_2}} = \frac{5,7}{\sqrt{100}} = 0,57.$$

Относительная ошибка по первому равенству (7):

$$\varepsilon_{\bar{n}_2} = \frac{\sigma_{\bar{n}_2}}{\bar{n}_2} \cdot 100\% = \frac{0,57}{29} \cdot 100\% \approx 2,0\%;$$

по второму равенству (7):

$$\varepsilon_{\bar{n}_2} = \frac{100\%}{\sqrt{\bar{n}_2 N_2}} = \frac{100\%}{\sqrt{29 \cdot 100}} \approx 1,9\% = \varepsilon_{\bar{n}_1}.$$

Окончательный результат:

$$n_{t=40c} = \bar{n}_2 \pm \sigma_{\bar{n}_2} = 29,0 \pm 0,6.$$

## Приложение

**Распределение Пуассона.** В физике часто приходится встречаться с измерениями, результаты которых представляются в виде целых чисел. Через счетчик Гейгера за время измерения проходит целое — и обычно не очень большое — число частиц. Делящееся ядро распадается на целое число частей. Статистические закономерности, которые имеют место в этом случае, обладают некоторыми особенностями.

Рассмотрим счетчик, регистрирующий космические частицы. В то время как число отсчетов счетчика за любой промежуток времени является целым числом, плотность  $\nu$  космического излучения (т. е. отнесенное к единице площади число отсчетов счетчика в секунду, усредненное за очень большой отрезок времени), вообще говоря, целым числом не выражается.

Найдем вероятность того, что при плотности  $\nu$  счетчик за время измерения работает  $n$  раз. Будем для простоты считать, что счетчик обладает единичной площадью, окончательные формулы от этого предположения не зависят.

Поскольку мы приступаем к вычислению вероятностей, следует представить себе очень большое число совершенно одинаковых одновременно работающих счетчиков. Некоторая часть их работает ровно  $n$  раз. Доля, составляемая этими счетчиками, по отношению к полному числу счетчиков и равна вероятности того, что через счетчик за время измерения пройдет  $n$  частиц.

Обозначим полное число счетчиков буквой  $N$ . Через них в секунду в среднем проходит  $N\nu$  частиц, а за небольшое время  $dt$  пройдет  $N\nu dt$  частиц. Если  $dt$  достаточно мало, то ни через один из счетчиков за это время не пройдет двух частиц, и наши счетчики можно разбить на два класса: те, через которые за  $dt$  прошла частица, и те, через которые не прошла. Последние составляют, конечно, огромное большинство. Число счетчиков, через которые прошла частица, равно, очевидно, числу сосчитанных частиц, т. е. приблизительно  $N\nu dt$ , а их доля по отношению к полному числу счетчиков составляет  $N\nu dt/N = \nu dt$ .

Вероятность того, что за время  $dt$  через счетчик пройдет частица, равна, следовательно,  $\nu dt$ . Это утверждение справедливо только в том случае, если  $dt$  очень мало.

Вычислим теперь вероятность  $P_0(t)$  того, что за время  $t$  через счетчик не пройдет ни одной частицы. По определению число таких счетчиков в момент  $t$  составляет  $NP_0(t)$ , а в момент  $t + dt$  равно  $NP_0(t + dt)$ . Это число меньше, чем  $NP_0(t)$ , потому что за время  $dt$  их число убавится на  $NP_0(t)\nu dt$ . Поэтому

$$NP_0(t + dt) = NP_0(t) - NP_0(t)\nu dt,$$

или

$$P_0(t + dt) - P_0(t) = -P_0(t)\nu dt.$$

Разделив это равенство на  $dt$  и переходя к пределу, получим

$$\frac{dP_0}{dt} = -\nu P_0.$$

Интегрируя, найдем

$$P_0(t) = e^{-\nu t}. \quad (8)$$

При интегрировании было принято во внимание, что в начальный момент времени вероятность найти счетчик, не сработавший ни разу, равна, конечно, единице.

Вычислим теперь  $P_n(t + dt)$  — вероятность того, что за время  $t + dt$  через счетчик пройдет ровно  $n$  частиц. Эти счетчики делятся на две группы. К первой принадлежат те, через которые все  $n$  частиц прошли за время  $t$ , а за время  $dt$  не прошло ни одной. Ко второй группе принадлежат счетчики, через которые за время  $t$  прошла  $n - 1$  частица, а последняя частица прошла за время  $dt$ . Число первых счетчиков равно  $NP_n(t)(1 - \nu dt)$ , а число вторых составляет  $NP_{n-1}(t)\nu dt$ . (Каждое из этих выражений состоит из двух сомножителей. Первый из них определяет вероятность нужного числа срабатываний за время  $t$ , а второй — вероятность несрабатывания или срабатывания за время  $dt$ .) Имеем, следовательно:

$$NP_n(t + dt) = NP_n(t)(1 - \nu dt) + NP_{n-1}(t)\nu dt.$$

Перенесем  $NP_n(t)(1 - \nu dt)$  в левую часть равенства и разделим его на  $Ndt$ :

$$\frac{dP_n}{dt} + \nu P_n = \nu P_{n-1}.$$

Последовательно применяя полученную рекуррентную формулу к  $n = 1$ ,  $n = 2$  и т. д., с помощью (8) найдем

$$P_n = \frac{(\nu t)^n}{n!} e^{-\nu t}.$$

Заметим теперь, что  $\nu t$ , которое мы обозначим через  $n_0$ , равно среднему числу частиц, проходящих через счетчик за время  $t$ . Наша формула примет вид

$$P_n = \frac{n_0^n}{n!} e^{-n_0}. \quad (9)$$

Эта формула является окончательной и носит название *закона распределения Пуассона*. Она определяет вероятность того, что при среднем числе срабатываний  $n_0$  (это число, вообще говоря, не является целым) произойдет именно  $n$  срабатываний ( $n$  — целое число).

Закон распределения Пуассона записан в такой форме, что из всех характеристик работы счетчика осталась только одна — его среднее число срабатываний за время измерения. Ни само время измерения, ни тем более площадь счетчика, которую мы вначале для простоты положили равной единице, в формулу не входят. Равным образом в формуле никак не отражено то обстоятельство, что мы рассматривали счетчик Гейгера, регистрирующий космические лучи. С тем же успехом эта формула применима к числу соединений на телефонной станции или к любой другой задаче, где число случаев является целым, а их появление в любой момент времени не зависит от числа случаев, произошедших ранее (независимые события).

Рассмотрим некоторые свойства формулы (9). Вычислим прежде всего вероятность найти какое угодно значение  $n$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(n_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n_0^n}{n!} e^{-n_0} = e^{-n_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n_0^n}{n!} = e^{-n_0} e^{n_0} = 1.$$

Этот результат является очевидным, потому что хоть какое-нибудь значение  $n$ , конечно, всегда будет найдено на опыте, так что мы вычисляли вероятность достоверного события.

Вычислим среднее значение  $n$ :

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(n_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{n_0^n}{n!} e^{-n_0} = e^{-n_0} n_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n_0^{n-1}}{(n-1)!} = \\ &= n_0 e^{-n_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n_0^n}{n!} = n_0 e^{-n_0} e^{n_0} = n_0. \end{aligned}$$

Полученный результат тоже можно было предсказать заранее, поскольку мы исходили из того, что среднее значение  $n$  равно  $n_0$ .

Найдем теперь среднеквадратичное отклонение величины  $n$ . Для этого сначала вычислим дисперсию  $n$  (среднее значение квадрата отклонения):

$$\langle (n - n_0)^2 \rangle = \langle n^2 - 2nn_0 + n_0^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - 2\langle n \rangle n_0 + n_0^2 = \langle n^2 \rangle - n_0^2.$$

Для вычисления  $\langle n^2 \rangle$  удобно сначала найти  $\langle n(n-1) \rangle$ , а затем воспользоваться тем, что  $\langle n(n-1) \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle = \langle n^2 \rangle - n_0$ :

$$\begin{aligned} \langle n(n-1) \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) P_n(n_0) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \frac{n_0^n}{n!} e^{-n_0} = \\ &= e^{-n_0} n_0^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n_0^{n-2}}{(n-2)!} = n_0^2 e^{-n_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n_0^n}{n!} = n_0^2 e^{-n_0} e^{n_0} = n_0^2. \end{aligned}$$

Отсюда:  $\langle n^2 \rangle = n_0^2 + n_0$  и

$$\sigma^2 \equiv \langle (n - n_0)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - n_0^2 = (n_0^2 + n_0) - n_0^2 = n_0.$$

Имеем, следовательно:

$$\sigma \equiv \sqrt{\langle (n - n_0)^2 \rangle} = \sqrt{n_0}. \quad (10)$$

**Распределение Гаусса.** При устремлении параметра  $n_0$  к бесконечности распределение Пуассона принимает вид распределения Гаусса. Подобные предельные соотношения существуют и для многих других законов распределения. Это объясняется центральной предельной теоремой, утверждающей, что распределение суммы большого количества независимых случайных величин является распределением Гаусса. Например, количество частиц, попадающих в счетчик за  $n$  секунд (случайная величина, имеющая распределение Пуассона), можно рассматривать как сумму  $n$  количеств частиц, прилетевших за 1 секунду.

Рассмотрим распределение Пуассона при больших  $n_0$  и  $n$ . Дискретность распределения по  $n$  в этом случае теряет свое значение, так как  $n$  меняется практически непрерывно. Будем характеризовать отличие  $n$  от  $n_0$  с помощью  $\varepsilon$ , определенного соотношением

$$n = n_0(1 + \varepsilon) \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{n - n_0}{n_0}.$$

Используя формулу Стирлинга

$$\ln n! = \ln \sqrt{2\pi n} + n \ln n - n$$

и выражение (9), найдем

$$\begin{aligned} \ln P_n &= n \ln n_0 - n_0 - \ln \sqrt{2\pi n} - n \ln n + n = \\ &= n \ln \frac{n_0}{n} + (n - n_0) - \ln \sqrt{2\pi n} \approx -\ln \sqrt{2\pi n_0} - \frac{n_0 \varepsilon^2}{2}, \end{aligned}$$

откуда

$$P_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n_0}} e^{-\frac{(n-n_0)^2}{2n_0}}. \quad (11)$$

Вероятность  $P_n$  может быть обобщена на непрерывные величины. Чтобы это сделать, заметим, что  $n - n_0$  равно отклонению найденной на опыте величины  $n$  от среднего значения  $n_0$ . Обозначим это отклонение через  $x$ :

$$x = n - n_0.$$

Заменим  $n_0$  стандартным отклонением  $\sigma$  с помощью (10). Наконец, заметим, что  $P_n$  можно интерпретировать как вероятность того, что найденное на опыте значение  $n$  лежит в интервале между  $n - 1/2$  и  $n + 1/2$ . Этому интервалу соответствует  $\Delta x = 1$ . Произведя указанные замены и перейдя от обозначения  $P_n$  к обозначению  $P(x)$ , получим

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \quad (12)$$

$P(x)$  определяет вероятность того, что величина  $x$  попадает в единичный интервал  $\Delta x$ , окружающий точку  $x$ . Выбирая вместо единичного бесконечно малый интервал  $dx$ , найдем

$$dP = \rho(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (13)$$

Формула (13) определяет вероятность того, что отклонение от среднего значения будет заключено между  $x - dx/2$  и  $x + dx/2$ . Величина  $\rho(x)$  называется плотностью вероятности. Для случайной величины, имеющей некоторое ненулевое среднее значение  $\mu$ , плотность (13) принимает вид

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (14)$$

Распределение вида (14) носит название распределения Гаусса.

С помощью (13) нетрудно найти вероятность того, что отклонение от среднего будет лежать между  $x_1$  и  $x_2$ , где  $x_1$  и  $x_2$  — любые числа. Как нетрудно понять,

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (15)$$

Интеграл (15) в элементарных функциях не выражается. Он может быть вычислен с помощью таблиц интеграла вероятности  $\text{erf}(x)$ :

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (16)$$

Нетрудно показать, что

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \frac{1}{2} \left[ \text{erf} \left( \frac{x_2}{\sqrt{2}\sigma} \right) - \text{erf} \left( \frac{x_1}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right]. \quad (17)$$

Функция  $\operatorname{erf}(x)$  антисимметрична относительно точки  $x = 0$ , так что

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x). \quad (18)$$

С помощью таблиц или графика  $\operatorname{erf}(x)$  нетрудно найти вероятность того, что для искомой величины будет найдено значение, лежащее между  $-\sigma$  и  $\sigma$ , между  $-2\sigma$  и  $2\sigma$  и между любыми другими значениями  $x$ :

$$P(-\sigma \leq x \leq \sigma) = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] = \operatorname{erf} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx 0,68,$$

$$P(-2\sigma \leq x \leq 2\sigma) \approx 0,95,$$

$$P(-3\sigma \leq x \leq 3\sigma) = 1 - 0,0044.$$

Вероятность найти величину  $x$  в заданных пределах при увеличении ширины интервала быстро приближается к единице.

### Работа 1.1.5

## Исследование упругих столкновений протонов с электронами

**Цель работы:** по фотографиям треков (следов) частиц (протонов и электронов) вычислить импульсы частиц и углы их разлета; сравнить экспериментальные результаты с расчетами по нерелятивистским и релятивистским формулам и сделать вывод о применимости этих формул.

**В работе используются:** пленка с фотографиями событий в водородной пузырьковой камере; диапроектор с координатной сеткой для просмотра пленки.

Сегодня хорошо известно, что, за немногими исключениями, единственным способом исследования атомных ядер и элементарных частиц является осуществление их столкновений с последующей регистрацией частиц, вылетевших после столкновения. Для изучения столкновений необходимо: 1) умение создавать пучки налетающих частиц; 2) умение приготовить мишени, содержащие ядра или частицы, с которыми происходят столкновения; 3) умение регистрировать возможно большее число характеристик вылетающих частиц.

Диапазон энергий вылетающих частиц во всех радиоактивных источниках ограничен несколькими МэВ<sup>1</sup>. Заряженные частицы можно

---

<sup>1</sup> 1 эВ (электрон-вольт) =  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж.

разогнать до высоких значений энергии в специальных устройствах, называемых ускорителями. В настоящее время в ускорителях получают пучки частиц с энергией от нескольких МэВ до десятков ГэВ. Все существующие источники ядер и элементарных частиц делятся на радиоактивные препараты (первичные и вторичные частицы); ускорители (первичные, вторичные и третичные пучки); ядерные реакторы и космические лучи.

Список доступных мишеней также достаточно ограничен. В него входят все стабильные ядра и электрон.

Основная трудность регистрации частиц состоит в том, что эффект воздействия частицы на вещество с макроскопической точки зрения чрезвычайно мал. Наиболее заметным эффектом такого рода является ионизация вещества заряженной частицей. В некоторых устройствах используется электромагнитное излучение заряженных частиц в среде. Нейтральные частицы регистрируются по вторичным эффектам. Главной частью регистрирующего устройства (детектора) является находящаяся в неустойчивом состоянии некоторая физическая система: переохлажденный пар, перегретая жидкость, газ в предразрядном состоянии и т. д. Попадая в такую систему, микрочастица вызывает катастрофу в макромире.

В данной работе исследуются упругие столкновения протонов с электронами на основе обработки экспериментальных данных, полученных путем фотографирования треков частиц в водородной пузырьковой камере. Рабочим веществом в камере является перегретая (выше точки кипения) жидкость. Трек (след) заряженной частицы образуется пузырьками пара. Механизм образования пузырьков точно неизвестен.

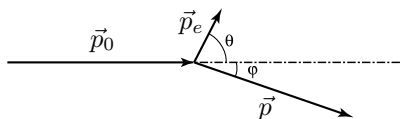


Рис. 1. Упругое соударение протона с неподвижным электроном

Рассмотрим упругое столкновение протона с неподвижным электроном. На рис. 1 показаны:  $\vec{p}_0$  — импульс протона до соударения,  $\vec{p}$  — импульс протона после соударения,  $\vec{p}_e$  — импульс электрона,  $\varphi$  и  $\theta$  — углы, на которые отклоняются после соударения импульсы протона и электрона относительно направления импульса протона до соударения.

Из закона сохранения импульса для проекций на направление импульса протона до соударения и перпендикулярное ему получаем

$$\begin{aligned} p_0 &= p \cos \varphi + p_e \cos \theta, \\ p \sin \varphi &= p_e \sin \theta. \end{aligned} \quad (1)$$



Исключая из этих уравнений угол  $\varphi$ , имеем

$$(p_0 - p_e \cos \theta)^2 + p_e^2 \sin^2 \theta = p^2$$

или

$$p_0^2 - 2p_0 p_e \cos \theta + p_e^2 = p^2. \quad (2)$$

Это соотношение является следствием закона сохранения импульса и выполняется как в нерелятивистской, так и в релятивистской механике.

При рассмотрении закона сохранения энергии необходимо иметь в виду, что релятивистские и классические формулы для энергии частиц различны. В классической (нерелятивистской) механике кинетическая энергия через массу, скорость и импульс выражается следующим образом:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}. \quad (3)$$

Обозначая массу протона  $M$ , а массу электрона  $m$  и используя введенные выше (см. рис. 1) обозначения импульсов протона и электрона, получаем закон сохранения кинетической энергии для нерелятивистского движения частиц:

$$\frac{p_0^2}{2M} = \frac{p^2}{2M} + \frac{p_e^2}{2m}. \quad (4)$$

Исключая из (2) и (4) импульс протона после соударения, получаем

$$p_e \left(1 + \frac{m}{M}\right) = 2p_0 \frac{m}{M} \cos \theta \quad (5)$$

или

$$\cos \theta = \frac{M + m}{2m} \cdot \frac{p_e}{p_0}. \quad (6)$$

Видно, что импульс, который приобретает электрон, линейно связан с косинусом угла его отклонения. Импульс растет с уменьшением угла. Учитывая, что  $M/m \approx 2000$ , имеем

$$p_e \approx 2p_0 \frac{m}{M} \cos \theta. \quad (7)$$

Отсюда следует, что в этом случае максимальное значение импульса электрона

$$p_{e\max} \approx 0,001p_0. \quad (8)$$

Из соотношений (1) при этом получаем, что  $p \approx p_0$  и  $\theta \gg \varphi$ .

В релятивистской механике для выполнения законов сохранения импульса и энергии в различных системах отсчета потребовалось новое определение импульса и энергии, их связи со скоростью движения частиц:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (9)$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (10)$$

Здесь  $v$  — скорость частицы,  $c$  — скорость света,  $m$  — масса частицы.

Вводя обозначения

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (11)$$

и

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (12)$$

из соотношений (9) и (10) можно получить

$$E = \gamma mc^2, \quad (13)$$

$$p = \frac{E}{c^2}v = \gamma\beta mc, \quad (14)$$

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (15)$$

В релятивистской механике полная энергия свободной частицы  $\gamma mc^2$  складывается из кинетической энергии  $(\gamma - 1)mc^2$  и энергии покоя  $mc^2$ .

Обозначим энергию протона до соударения  $E_0$ , а после соударения —  $E$ . Энергия электрона после соударения —  $E_e$ , а до соударения она равнялась энергии покоя электрона  $mc^2$ . Сохранение полной энергии протона и электрона дает

$$E_0 + mc^2 = E + E_e. \quad (16)$$

Отметим, что при упругом соударении после взаимодействия остаются те же частицы, что и до взаимодействия. Поэтому сохраняется

кинетическая энергия системы, которая для каждой частицы равна разности полной энергии и энергии покоя. Для электрона

$$K = E_e - mc^2. \quad (17)$$

Подставим в (15)  $p$  из (2) и  $E$  из (16):

$$(E_0 + mc^2 - E_e)^2 = (p_0^2 - 2p_0p_e \cos \theta + p_e^2)c^2 + M^2c^4$$

и упростим это выражение, учитывая, что  $E_0^2 = p_0^2c^2 + M^2c^4$  и  $E_e^2 = p_e^2c^2 + m^2c^4$ ,

$$m^2c^4 + E_0mc^2 - E_0E_e - mc^2E_e = -p_0p_ec^2 \cos \theta,$$

откуда получаем связь между импульсом электрона  $p_e$  и углом  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{E_0E_e + mc^2E_e - E_0mc^2 - m^2c^4}{p_0p_ec^2} = \frac{(E_0 + mc^2)(E_e - mc^2)}{p_e^2c^2} \frac{p_e}{p_0} = \\ &= \frac{(E_0 + mc^2)(E_e - mc^2)}{E_e^2 - (mc^2)^2} \frac{p_e}{p_0} = \\ &= \frac{E_0 + mc^2}{E_e + mc^2} \frac{p_e}{p_0} = \frac{M + m + K_0/c^2}{2m + K_e/c^2} \cdot \frac{p_e}{p_0}. \end{aligned} \quad (18)$$

При скоростях, малых по сравнению со скоростью света, кинетической энергией можно пренебречь по сравнению с энергией покоя, и тогда (18) переходит в (6).

Используя связь энергии электрона с импульсом (15), получаем зависимость между углом отклонения электрона (от направления движения протона до соударения) и его импульсом:

$$\cos \theta = \frac{E_0 + mc^2}{p_0} \cdot \frac{p_e}{\sqrt{p_e^2c^2 + m^2c^4} + mc^2}. \quad (19)$$

Видно, что между импульсом и косинусом угла зависимость нелинейная. Косинус угла при увеличении импульса растет медленнее, чем в нерелятивистском случае.

Формулу (19) удобно переписать, введя безразмерную величину

$$z = \frac{p_ec}{E_e + mc^2} = \frac{p_0c}{E_0 + mc^2} \cos \theta \approx \frac{p_0c}{E_0} \cos \theta = \beta \cos \theta. \quad (20)$$

Эта величина линейно зависит от  $\cos \theta$ . График зависимости  $z(\cos \theta)$  может быть использован для определения начального импульса протонов.

Как уже отмечалось, исследование упругих столкновений протонов с электронами проводилось в пузырьковой камере, помещенной в постоянное магнитное поле. Пузырьковая камера представляет собой цилиндр, наполненный жидкостью, находящейся при температуре, близкой к температуре кипения. От кипения жидкость удерживается высоким давлением, создаваемым поршнем или мембраной в одном из оснований цилиндра. При внезапном понижении давления, которое производится в момент регистрации событий в камере, жидкость оказывается перегретой и в течение некоторого времени находится в неустойчивом состоянии. Если в это время (несколько миллисекунд) через камеру пролетит заряженная частица, то она вызовет вскипание жидкости вдоль своего следа, и ее путь будет отмечен цепочкой пузырьков пара. Рабочая жидкость в пузырьковой камере служит одновременно и мишенью для налетающих частиц и детектором. Для наполнения камер часто применяется жидкий водород, позволяющий наблюдать взаимодействие быстрых частиц с протонами, являющимися ядрами атома водорода, или электронами из электронных оболочек атомов. Рабочий режим такой камеры: температура жидкого водорода 29 К, давление 5 атм.

Преимущество пузырьковой камеры по сравнению с камерой Вильсона в том, что плотность среды, в которой летят частицы, значительно больше, и пробеги (пути до соударения) меньше, то есть большее количество взаимодействий можно зарегистрировать при одном и том же размере поля наблюдения. В настоящее время пузырьковые камеры не используются. Основным инструментом в качестве трекового детектора частиц стали искровые камеры.

Пузырьковая камера, в которой получены фотографии треков частиц, находилась в однородном постоянном магнитном поле  $\vec{B}$ , перпендикулярном плоскости фотографирования. Напомним, что на частицу, имеющую электрический заряд  $e$  и движущуюся в магнитном поле  $\vec{B}$  со скоростью  $\vec{v}$ , действует сила Лоренца:

$$\vec{F} = e \vec{v} \times \vec{B}. \quad (21)$$

В рассматриваемых случаях с хорошей степенью точности можно считать, что  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$  взаимно перпендикулярны. Сила Лоренца перпендикулярна скорости, то есть вызывает центростремительное ускорение, и движение заряженной частицы происходит по окружности. Обозначая радиус окружности  $r$ , а импульс частицы  $p$ , имеем

$$\frac{mv^2}{r} = evB, \quad (22)$$

или

$$p = eBr. \quad (23)$$

Эта формула справедлива как в классической, так и в релятивистской механике.

В рассматриваемых далее случаях  $B = 2$  Тл. Если  $pc$  измеряется в мегаэлектрон-вольтах (МэВ), а  $r$  — в сантиметрах, то

$$pc = 6r. \quad (24)$$

Работа с фотопленкой начинается с установки ее в диапроектор и фокусировки изображения на экран. Направление, в котором происходит перемещение пленки, будем считать направлением оси абсцисс координатной сетки. Затем пленка просматривается, и отбираются подходящие фотографии.

На фотографиях видны треки — траектории всех пролетающих через камеру заряженных частиц. Протоны испытывают соударения как с атомными ядрами (в нашем случае с ядрами водорода, то есть с протонами), так и с атомными электронами. В первом случае происходят либо упругие соударения протонов, либо ядерные реакции, чаще всего сопровождающиеся рождением пионов. В обоих случаях траектория налетающего протона имеет резкий излом.

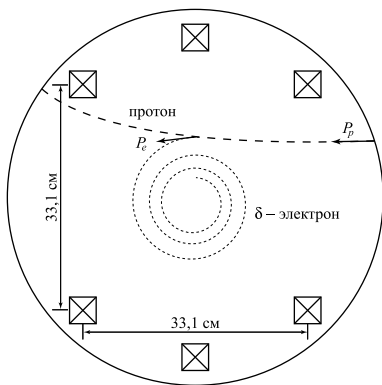


Рис. 2

При соударении быстрых протонов с атомными электронами траектории налетающих протонов практически не имеют изломов, так как тяжелые протоны сталкиваются с легкими электронами. Траектории отлетающих электронов, называемых обычно  $\delta$ -электронами, искривляются под действием магнитного поля. Как видно из (23), радиус кривизны траектории пропорционален импульсу частицы. Для электронов он оказывается значительно меньше, чем для протонов. Торможение электрона из-за взаимодействия с окружающей средой приводит к уменьшению

его импульса и, следовательно, радиуса кривизны траектории, которая превращается в спираль (см. рис. 2).

Имеющиеся на рисунке кресты (в квадратах) представляют метки, нанесенные на стекло пузырьковой камеры, через которое ведется фотографирование, для определения масштаба картины.

Кроме треков  $\delta$ -электронов, наблюдаются следы электронов, не связанные с траекториями протонов. Такие электроны, возникающие как бы из ничего, появляются при рассеянии  $\gamma$ -квантов (жесткого электромагнитного излучения) на электронах. На фотографиях могут быть также видны расходящиеся из одной точки и изгибающиеся в разные стороны треки пар частиц  $e^+$  и  $e^-$ . Такие электрон-позитронные пары рождаются  $\gamma$ -квантами в поле ядра.

Для измерений пригодны не все снимки, а только те из них, на которых центры последовательных витков спирали мало смещаются друг относительно друга, и диаметр первого витка спирали на экране проектора больше 8–10 мм. Не следует использовать для анализа случаи, когда электрон вылетел под углом меньше  $2-3^\circ$ . Дело в том, что кроме измеряемого угла, лежащего в плоскости пленки, всегда присутствует и составляющая часть угла, лежащая в плоскости, перпендикулярной пленке. В тех случаях, когда измеряемый угол невелик, резко возрастает погрешность, связанная с тем, что мы не учитываем вклад не измеренной части угла. При отборе снимков также следует иметь в виду, что вероятность возникновения  $\delta$ -электронов обратно пропорциональна квадрату их кинетической энергии, поэтому основное количество  $\delta$ -электронов имеет небольшую энергию и, следовательно, малый радиус траектории. Это усложняет измерения. Старайтесь выбирать как «узкие», так и «широкие» спирали.

Измерения производятся при помощи объектива с двадцативосьмикратным увеличением ( $\times 28$ ). Масштаб, в котором следы электронов в камере проецируются на экран диапроектора, определяется по известному расстоянию между метками, нанесенными на стекло пузырьковой камеры (крестами). Этот масштаб в нашем случае равен  $K = 0,427$ . На этот коэффициент необходимо умножать измеренные на экране проектора радиусы кривизны  $R$ , чтобы получить величину соответствующих радиусов  $r$  в пузырьковой камере. Заметим, что на рис. 2 изображен весь кадр целиком. Увидеть его полностью можно, если использовать объектив с меньшим увеличением.

По фотографиям можно определить угол между траекторией протона и начальным участком спирали, по которой летит электрон. По радиусу кривизны начального участка спирали определяется импульс электрона. Таким образом, из экспериментов получается связь между импульсом электрона и углом, который составляет направление его импульса с направлением импульса протона до соударения. Сравнение этого соотношения с теоретическими формулами (6) и (18) позволит сделать вывод о необходимости учета релятивистских эффектов.

Радиус кривизны траектории электрона  $R$  и угол  $\theta$  вылета его относительно направления движения протона до соударения определяются следующим образом. Отобранное для измерения изображение соударения располагают в центре экрана проектора так, как это показано на рис. 3 и 4. Точку вылета  $\delta$ -электрона, которую обозначаем  $(x_1, y_1)$ , принимаем за начало системы координат, а ось  $x$  направляем по касательной к следу протона. Ось  $y$  соответственно перпендикулярна оси  $x$ . Предполагаем, что начальный участок спирали близок к окружности и описывается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (25)$$

Здесь  $x_0$  и  $y_0$  — координаты центра окружности, а  $R$  — ее радиус.

На рис. 3 и 4 показаны два возможных направления движения электрона относительно направления движения протона. В первом случае центр окружности находится слева от оси  $y$ , а во втором — справа. В обоих случаях угол  $\alpha$ , который составляет радиус, проведенный из центра окружности  $(x_0, y_0)$  в начало координат  $(x_1, y_1)$ , с осью  $y$ , равен  $\theta$ , и для его определения необходимо знать  $R$  и  $y_0$ . Тогда

$$\cos \theta = \frac{y_0}{R}. \quad (26)$$

По измеренному на экране радиусу окружности  $R$  вычисляется радиус траектории в пузырьковой камере  $r = 0,427R$ , а затем по формуле (24) импульс электрона.

Радиус окружности и координаты ее центра можно найти по координатам трех точек, через которые она проходит. Одна из точек — это центр системы координат  $(x_1, y_1)$ . На рис. 3 удобно взять еще пересечение окружности с осью  $y$  — точку  $(x_3, y_3)$  и некоторую промежуточную  $(x_2, y_2)$ . Подставляя координаты этих точек в (25), получаем три уравнения:

$$\begin{aligned} x_0^2 + y_0^2 &= R^2, \\ (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 &= R^2, \\ x_0^2 + (y_3 - y_0)^2 &= R^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Откуда

$$y_0 = \frac{y_3}{2}, \quad x_0 = \frac{x_2^2 + y_2^2 - y_2 y_3}{2x_2}. \quad (28)$$

В случае, показанном на рис. 4, кроме начала координат, удобно взять точку пересечения окружности с осью  $x$ , обозначенную  $(x_2, y_2)$ ,

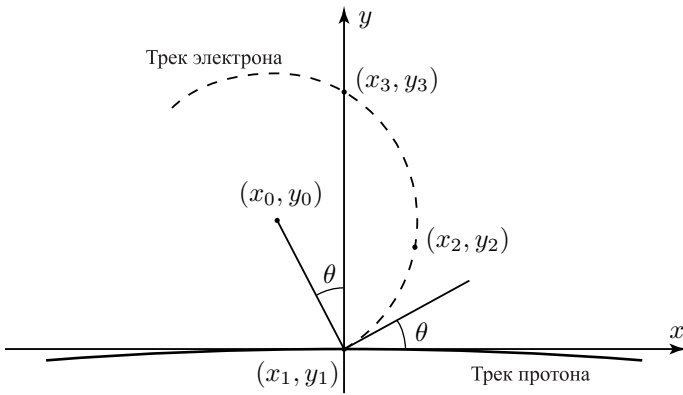


Рис. 3

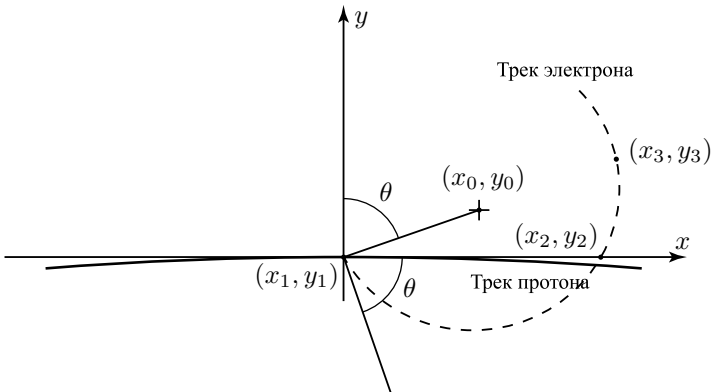


Рис. 4

и произвольную точку  $(x_3, y_3)$ . В этом случае получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} x_0^2 + y_0^2 &= R^2, \\ (x_2 - x_0)^2 + y_0^2 &= R^2, \\ (x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 &= R^2. \end{aligned} \quad (29)$$

И, следовательно,

$$x_0 = \frac{x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{x_3^2 + y_3^2 - x_2 x_3}{2y_3}. \quad (30)$$



Если форма траектории не сильно отличается от окружности вплоть до пересечения ее с осью  $y$ , то в качестве третьей точки удобно взять эту точку пересечения. Тогда

$$x_0 = \frac{x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_3}{2}. \quad (31)$$

Радиус окружности всегда находим по формуле

$$R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}. \quad (32)$$

Для проверки полезно также непосредственно измерить расстояние между началом координат и центром окружности по изображению траектории  $\delta$ -электрона на экране, используя координатную сетку.

В физике элементарных частиц обычно используется система единиц, в которой энергия измеряется в электрон-вольтах (эВ) или производных единицах: килоэлектрон-вольтах ( $1 \text{ кэВ} = 10^3 \text{ эВ}$ ), мегаэлектрон-вольтах ( $1 \text{ МэВ} = 10^6 \text{ эВ}$ ), гигаэлектрон-вольтах ( $1 \text{ ГэВ} = 10^9 \text{ эВ}$ ).  $1 \text{ эВ} = 1,60202 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,60202 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$ . Вместо импульса и массы используют  $pc$  и  $mc^2$ , которые имеют размерность энергии и выражаются в электрон-вольтах. В этой системе единиц расчеты существенно упрощаются. Применение указанной системы единиц в данной работе является обязательным. Массы электрона и протона:  $mc^2 = 0,511 \text{ МэВ}$ ,  $Mc^2 = 938 \text{ МэВ}$ .

## ЗАДАНИЕ

1. Подготовьте таблицу для записи результатов измерений и расчетов:

$N$	$x_2$ , мм	$y_2$ , мм	$y_3$ , мм	$R_{\text{экp}}$ , мм	$R$ , мм	$\cos \theta$	$p_e c$ , МэВ	$z$

Здесь  $N$  — порядковый номер рассмотренного трека,  $R_{\text{экp}}$  — радиус, измеренный на экране.

2. С помощью 28-кратного объектива сфокусируйте изображение треков на экран.
3. Выберите подходящий трек электрона (угол вылета больше  $2\text{--}3^\circ$ , диаметр первого витка  $8\text{--}80 \text{ мм}$ ).
4. Точку вылета  $\delta$ -электрона примите за начало координат  $(x_1, y_1)$ , а первоначальный след протона направьте по оси  $x$  (см. рис. 3).

5. Измерьте и запишите в таблицу координаты точек на треке:  $x_2, y_2, y_3$  для случаев, подобных изображенному на рис. 3,  $x_2, x_3, y_3$  или  $x_2, y_3$  для случаев, подобных изображенному на рис. 4.
6. Измерьте и запишите в таблицу радиус первого витка спирали (трека)  $R$ .
7. Повторите измерения по пунктам 3–6 для 40–50 треков.
8. Вычислите по формулам (28), (30) или (31) координаты центра окружности, радиус окружности — по формуле (32), косинус угла вылета электрона — по (26), импульс электрона, умноженный на скорость света, — по (24) с учетом связи  $r = 0,427R$ ,  $z(\cos \theta)$  — по (20) и запишите все в таблицу.
9. Нанесите точки с координатами  $(p_e c, \cos \theta)$  на график. На этот же график нанесите зависимость  $cp_e(\cos \theta)$ , вычисленную по нерелятивистской (7) и релятивистской (19) формулам.
10. Нанесите значения  $z$  и  $\cos \theta$  на график в координатах  $z, \cos \theta$ . Проведите через полученные точки прямую, проходящую через начало координат (желательно использовать метод наименьших квадратов). По наклону этой зависимости и формуле (20) с использованием (9), (10) и (15) вычислите импульс налетающего протона, его энергию, отношение его скорости к скорости света  $\beta = v/c$  и величину  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ .
11. Оцените случайную погрешность определения импульса и энергии протонов графическим методом. Для этого проведите через начало координат еще две прямые с наклонами  $\beta \pm \Delta\beta$  ( $\beta$  — наклон наилучшей прямой, проведенной в предыдущем пункте задания), подобрав  $\Delta\beta$  таким образом, чтобы между прямыми оказалось примерно две трети всех точек. Рассчитайте погрешность определения импульса, например, по формуле

$$\Delta p \approx \frac{p(\beta + \Delta\beta) - p(\beta)}{\sqrt{n}}$$

и сравните полученное значение с погрешностью метода наименьших квадратов (1.40).

### Контрольные вопросы

1. Выведите формулы, связывающие угол вылета электрона с его импульсом, в нерелятивистской и релятивистской механике.
2. Получите зависимость скорости частиц в релятивистской механике от их импульса и энергии.
3. Выведите формулу, связывающую импульс электрона с радиусом его траектории в магнитном поле. Покажите, что эта формула справедлива как в нерелятивистской механике, так и в релятивистской.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — М.: Наука, 1980. Т. IV. § 111. Т. V. Ч. 2. § 86.
2. *Киттель Ч., Найт У., Рудерман М.* Механика. — М.: Наука, 1983. Гл. 11, 12.
3. *Копылов Г.И.* Всего лишь кинематика. — М.: Наука, 1981.
4. *Белонучкин В.Е.* Относительно относительности: Учеб. пособие / МФТИ. М., 1996.
5. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: Физматлит, 2001. Ч. 1. Гл. 10.

## Образец отчета о выполнении работы 1.1.5

В работе используются: пленка с фотографиями событий в водородной пузырьковой камере; диапроектор с координатной сеткой для просмотра пленки.

Импульс электрона и угол, под которым он начинает движение относительно начального направления движения протона, (угол вылета), определяем по параметрам его траектории в магнитном поле. Начальная часть спиральной траектории аппроксимируется дугой окружности. Радиус окружности и угол вылета электрона определяем по координатам точек, лежащих на дуге окружности,  $x_2, y_2, y_3$  (см. рис. 3). Эти исходные данные представлены в таблице 1. Начало системы координат находится в точке вылета электрона. Координаты измерены на экране в миллиметрах с погрешностью 1 мм.

В таблицу занесены и результаты расчета. Радиус окружности и косинус угла вылета вычисляются по формулам (32), (28) и (26).

Импульс электрона вычислен по формуле (24), в которой  $r = 0,0427R$  (так как  $R$  в мм). Значения  $z$  получены по формуле (20). Погрешности можно получить, воспользовавшись формулой (1.33).

На рис. 5 нанесены расчетные точки в координатах  $pec, \cos \theta$ . Большой разброс точек связан с большими погрешностями измерений.

Видно, что импульс электрона растет при увеличении  $\cos \theta$  (уменьшении угла).

В нерелятивистском случае импульс электрона при одинаковой энергии протонов в пучке определяется формулой (7) и меняется линейно в зависимости от  $\cos \theta$ .

В релятивистском случае эта зависимость определяется формулой (19) и является нелинейной. Удобно ввести функцию

$$z = \frac{pec}{\sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4} + mc^2} = \frac{p_0 c}{E_0 + mc^2} \cos \theta \approx \frac{p_0 c}{E_0} \cos \theta = \beta \cos \theta.$$

Эта функция линейно зависит от  $\cos \theta$  и дает возможность определить скорость налетающих протонов графически.

В таблице 1 приведены вычисленные значения  $z$ .

На рис. 6 приведены результаты и проведена линия по методу наименьших квадратов (формулы (1.39) и (1.40)).

Наклон прямой  $\beta = 0,936 \pm 0,014$ .

Относительная погрешность определения  $\beta$  методом наименьших квадратов:

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = \frac{0,014}{0,936} = 0,015 = 1,5\%.$$

Оценим случайную погрешность определения  $\beta$  графически. Для этого проводим еще две прямые, так чтобы вне их оказалось примерно по  $40 \cdot 1/3 \cdot 1/2 \approx 7$  точек. Наклоны этих прямых отличаются от наклона наилучшей прямой на  $\pm 0,08$ . Случайная погрешность  $\beta$  равна

$$\Delta\beta = \frac{0,08}{\sqrt{40}} \approx 0,013; \quad \frac{\Delta\beta}{\beta} = 0,14 = 1,4\%,$$

что соответствует результатам метода наименьших квадратов.

Находим  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,936^2}} = 2,84.$$

Из формул (1.33) и (12) получаем погрешность определения  $\gamma$ :

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \gamma^2 \beta^2 \frac{\Delta\beta}{\beta} \approx \gamma^2 \frac{\Delta\beta}{\beta} \approx 8 \cdot 1,5\% = 12\%.$$

Окончательно:  $\gamma = 2,8 \pm 0,3$ .

Начальный импульс протона находим по формуле (14):

$$p_0 c = \gamma \beta m c^2 = 2,8 \cdot 0,936 \cdot 938 \text{ МэВ} = 2,5 \pm 0,3 \text{ ГэВ}.$$

Начальная энергия протона

$$E_0 = \gamma m c^2 = 2,8 \cdot 938 \text{ МэВ} = 2,6 \pm 0,3 \text{ ГэВ}.$$

Скорость протонов  $v = \beta c = 0,936 c$ . На рис. 5 пунктиром показана зависимость  $p(\cos\theta)$ , рассчитанная для таких протонов по нерелятивистской формуле (7). Сплошной линией там же показана релятивистская зависимость (19).

Видно, что для определения импульса электрона нужно было пользоваться релятивистскими формулами.

Т а б л и ц а 1

№ п/п	$x_2$ мм	$y_2$ мм	$y_3$ мм	$R$ мм	$R_{\text{экp}}$ мм	$\cos \theta$	$p_{ec}$ МэВ	$z$
1	7,5	10	24	13,2	13	0,91	3,4	0,861
2	8	15	25	13,6	13	0,919	3,5	0,864
3	3	3	8,5	4,4	4	0,95	1,1	0,64
4	2	5	10,5	8	8	0,66	2,0	0,78
5	11,5	20	33,5	17,8	18	0,94	4,6	0,895
6	29	20	40,5	21,6	22	0,939	5,5	0,911
7	11,5	20	40	23	23	0,87	5,8	0,916
8	15	10	15,5	9,6	10	0,81	2,5	0,816
9	18	23	45	23,1	23	0,97	5,9	0,917
10	8	10	19,5	9,9	10	0,98	2,5	0,822
11	6	3	6	3,8	4	0,8	0,97	0,60
12	2,5	5	10,5	7	7	0,78	1,7	0,75
13	6,5	8	13,5	6,8	7	0,99	1,74	0,75
14	22,5	15	22	14,2	14	0,77	3,64	0,869
15	24	30	57	28,9	29	0,98	7,4	0,933
16	9,5	15	28,5	15,4	15	0,92	3,9	0,879
17	37,5	47	94	48,1	48	0,97	12,32	0,959
18	21,5	12,5	24,5	14,2	14	0,86	3,64	0,869
19	30	23	47	24,2	24	0,97	6,2	0,921
20	21	15	27	14,9	15	0,91	3,82	0,875
21	5	10	19	12	12	0,82	2,9	0,84
22	22	27	50,5	22,5	22	0,99	6,53	0,925
23	6	10	19	10,5	10	0,9	2,7	0,828
24	12,5	8	19	9,9	9	0,96	2,53	0,818
25	2,5	7,5	12	8	8	0,7	2,1	0,79
26	7,5	10	21	11,1	11	0,95	2,8	0,836
27	19,5	15	30,5	15,7	16	0,97	4,02	0,881
28	17	20	40,5	20,6	20	0,98	5,28	0,908
29	16	24	47,5	25,6	25	0,93	6,6	0,925
30	9	6	10,5	6,0	6	0,87	1,55	0,72
31	5,5	9	17	9,3	9	0,9	2,4	0,81
32	10	15	28,5	15,1	15	0,94	3,9	0,877
33	35,5	26	51,5	28,2	28	0,96	7,22	0,932
34	24,5	19	38	19,6	20	0,97	5,02	0,903
35	12,5	12,5	22	11,1	11	0,99	2,84	0,836
36	8	15	28,5	17	17	0,85	4,3	0,888
37	33	40	81	41,4	41	0,98	10,61	0,953
38	11	16	32,5	17,5	18	0,93	4,5	0,892
39	12,5	17	35	18,5	18	0,95	4,7	0,898
40	34,5	40	80	40,4	40	0,99	10,35	0,952

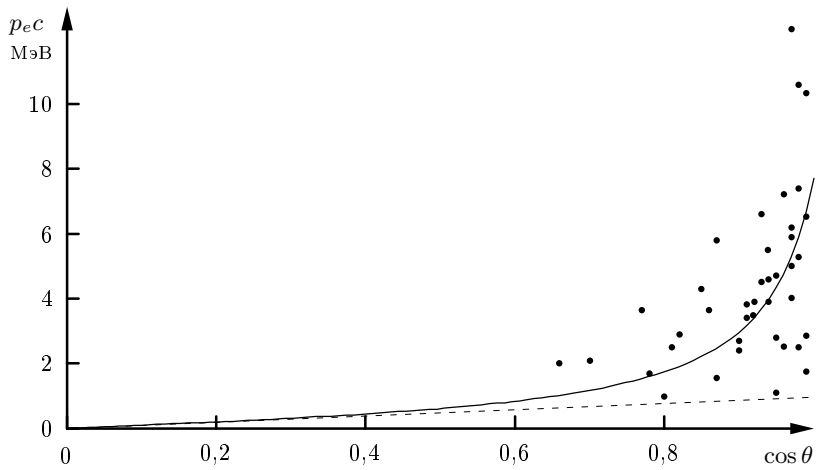


Рис. 5. График зависимости  $p_{ec}(\cos \theta)$

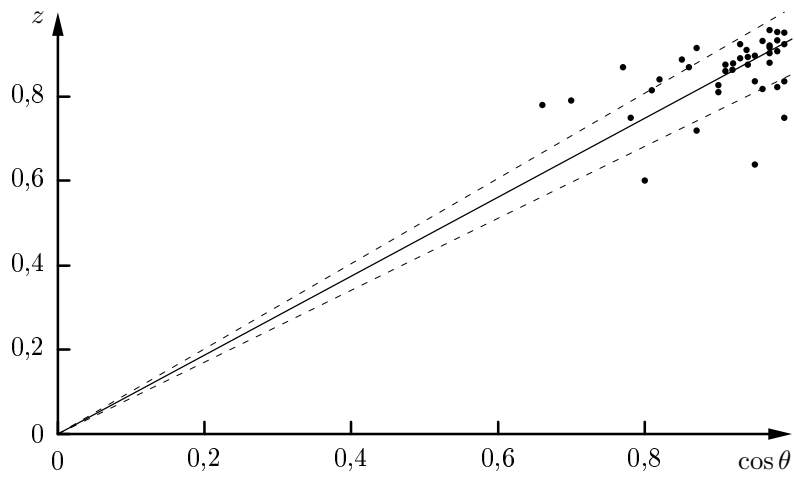


Рис. 6. График зависимости  $z(\cos \theta)$

### Работа 1.1.6

## Изучение электронного осциллографа

**Цель работы:** ознакомление с устройством и работой осциллографа и изучение его основных характеристик.

**В работе используются:** осциллограф, генераторы электрических сигналов, соединительные кабели.

Осциллограф — регистрирующий прибор, в котором исследуемое напряжение (сигнал) преобразуется в видимый на экране график изменения напряжения во времени. Осциллограф широко используется в физическом эксперименте. С его помощью можно исследовать изменение во времени любых физических величин, которые могут быть преобразованы в электрические сигналы.

Лабораторная работа проводится с использованием учебного осциллографа, разработанного на основе осциллографов С1-94 и С1-1.

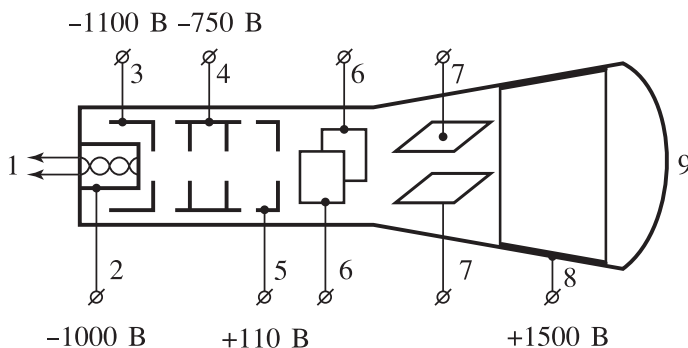


Рис. 1. Электронно-лучевая трубка

**Электронно-лучевая трубка.** Основной частью электронного осциллографа, определяющей его важнейшие технические характеристики, является электронно-лучевая трубка (ЭЛТ). Трубка представляет собой стеклянную откачанную до высокого вакуума колбу, в которой расположены (рис. 1): подогреватель катода 1, катод 2, модулятор 3 (электрод, управляющий яркостью изображения), первый (фокусирующий) анод 4, второй (ускоряющий) анод 5, горизонтально и вертикально отклоняющие пластины 6 и 7, третий (ускоряющий) анод 8, экран 9.

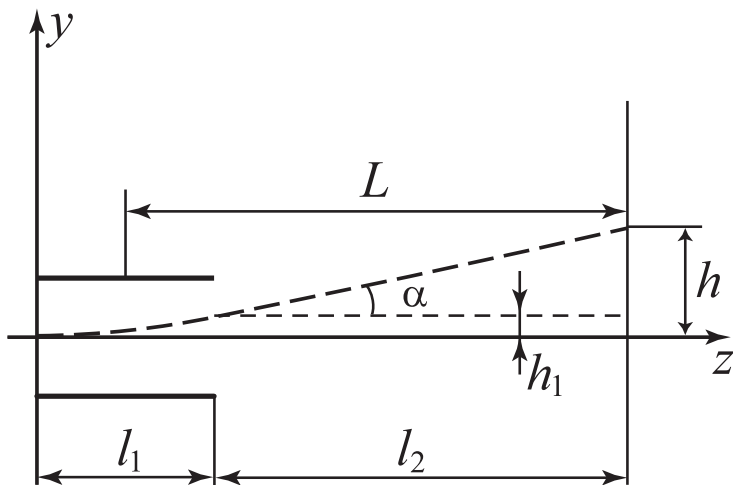


Рис. 2. Отклонение луча в электрическом поле пластин

Электронный пучок формируется системой электродов, называемой «электронной пушкой»: катод с нагревателем, модулятор, фокусирующий и ускоряющий аноды. Форма, размеры и расположение электродов подобраны таким образом, чтобы разгонять электроны и фокусировать пучок на экране. Потенциал первого (фокусирующего) анода относительно катода можно изменять ручкой «ФОКУС». Размер пятна на экране в значительной степени определяется качеством фокусирующей системы, его диаметр обычно не превышает 1 мм. Яркость пятна на экране осциллографа определяется током электронного луча, который может регулироваться изменением напряжения на модуляторе ручкой «ЯРКОСТЬ». Экраном осциллографа является покрытая флюоресцирующим веществом стенка трубки, на которую попадает электронный пучок.

На пути к экрану сформированный пучок электронов проходит две пары отклоняющих пластин. Две вертикально расположенные пластины образуют плоский конденсатор, электрическое поле которого способно отклонять пучок в горизонтальном направлении (горизонтально отклоняющие пластины). Аналогично поле горизонтально расположенных пластин вызывает вертикальное отклонение пучка (вертикально отклоняющие пластины). Подавая на пластины соответствующие напряжения, можно «нарисовать» электронным лучом на экране некоторую фигуру.



Рассмотрим движение электронов в электрическом поле отклоняющих пластин (рис. 2). Пусть электрон со скоростью  $v_0$  влетает в однородное электрическое поле пары пластин и движется вдоль оси  $z$ , т. е. перпендикулярно к линиям напряженности электрического поля. Движение электрона вдоль оси  $z$  является равномерным, а вдоль оси  $y$  — равноускоренным:

$$z = v_0 t, \quad y = \frac{at^2}{2}. \quad (1)$$

Ускорение можно найти с помощью второго закона Ньютона:

$$a = \frac{eE_y}{m}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) найдем

$$y = \frac{eE_y}{2mv_0^2} z^2. \quad (3)$$

Как следует из (3), траектория электрона между отклоняющими пластинами представляет собой параболу. На выходе из пластин электрон отклоняется от первоначального направления на расстояние  $h_1$  и летит под углом  $\alpha$  к оси  $z$ :

$$h_1 = \frac{eE_y}{2mv_0^2} l_1^2, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{eE_y}{mv_0^2} l_1, \quad (4)$$

где  $l_1$  — длина пластин. Выйдя из пластин, электрон движется по прямой. Смещение  $h$  электронного пятна на экране осциллографа получим из рис. 2:

$$h = h_1 + l_2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{eE_y l_1}{mv_0^2} \left( \frac{l_1}{2} + l_2 \right). \quad (5)$$

Обозначим расстояние от середины пластин до экрана через  $L$ . Тогда

$$h = \frac{eE_y l_1 L}{mv_0^2}. \quad (6)$$

Скорость  $v_0$ , которую имеют электроны, проходящие между пластинами, определяется ускоряющим напряжением  $U_a$  на втором аноде:

$$\frac{mv_0^2}{2} = eU_a. \quad (7)$$

Напряженность  $E_y$  электрического поля между отклоняющими пластинами

$$E_y = \frac{U_y}{d}, \quad (8)$$

где  $U_y$  — разность потенциалов между пластинами, а  $d$  — расстояние между ними. Окончательно из (6) – (8) получим

$$h = \frac{l_1 L}{2dU_a} U_y. \quad (9)$$

Таким образом, смещение луча пропорционально отклоняющему напряжению  $U_y$ . Коэффициент пропорциональности в (9) называется чувствительностью  $k$  трубки к напряжению:

$$k = \frac{h}{U_y} = \frac{l_1 L}{2dU_a} \left[ \frac{\text{см}}{\text{В}} \right]. \quad (10)$$

Аналогично вычисляется чувствительность трубки к напряжению на второй паре пластин.

Формула (9) применима и в том случае, когда на отклоняющие пластины подается переменное напряжение, но при условии, что оно мало изменяется за время  $\tau$  пролета электрона между пластинами. Характерными интервалами времени  $T$ , которое определяет скорость изменения переменного сигнала, могут быть: период сигнала, длительность импульса, время нарастания сигнала до некоторого уровня и т. д. Оценим минимальное значение  $T_{\text{мин}}$  времени  $T$ , при котором выполняется условие:  $T_{\text{мин}} \gg \tau$ . Скорость электронов после вылета из «электронной пушки» составляет примерно  $2 \cdot 10^7$  м/с (при  $U_a \approx 10^3$  В). Полагая  $l = 3$  см, для времени пролета  $\tau$  получим:  $\tau = 1,5 \cdot 10^{-9}$  с. Тогда, выбирая условие  $T_{\text{мин}}/\tau \geq 10$  в качестве критерия применимости формулы (9) для переменного сигнала, имеем  $T_{\text{мин}} = 15 \cdot 10^{-9}$  с. Таким образом, выражение (9) будет определять координаты точки попадания электрона на экран ЭЛТ, если частота синусоидального напряжения, подаваемого на отклоняющие пластины, не превышает  $\sim 10^8$  Гц  $= 0,1$  ГГц.

На практике, однако, максимальная частота оказывается существенно меньше. Чувствительность трубки к напряжению составляет доли мм/В, поэтому исследуемый сигнал, подаваемый на отклоняющие пластины, приходится предварительно усиливать. Всякий усилитель характеризуется диапазоном частот, в пределах которого его коэффициент усиления практически не меняется, а вне этого диапазона резко падает. Граничная (максимальная) частота усилителя определяется постоянной времени электрической схемы осциллографа. Как правило, рабочий диапазон частот осциллографа ограничивается именно рабочим диапазоном частот усилителя, на который подается исследуемый сигнал.

Таким образом, в рабочем диапазоне частот осциллографа (для учебного осциллографа 0–1 МГц) смещение луча по вертикали (или

горизонтали) на экране ЭЛТ можно считать пропорциональным мгновенному значению напряжения на соответствующих отклоняющих пластинах.

**Развертка.** Из формулы (9) следует, что координаты  $x$  и  $y$  точки попадания электронного луча на ЭЛТ (относительно ее центра) пропорциональны мгновенным значениям напряжений  $U_x(t)$  и  $U_y(t)$ , подаваемых на горизонтально и вертикально отклоняющие пластины.

Так как величина исследуемых сигналов лежит в достаточно широком диапазоне (от десятка микровольт до сотен вольт), а чувствительность отклоняющих пластин ЭЛТ по напряжению сравнительно невелика (доли мм/В), то в зависимости от величины подаваемого на вход сигнала его необходимо усиливать или, в случае большого сигнала, предварительно ослаблять.

Для усиления слабых сигналов в осциллографе имеются усилители вертикального отклонения луча (усилитель «Y») и горизонтального — усилитель «X». На входе усилителя «Y» установлен аттенюатор (делитель), позволяющий ослаблять входной сигнал в заданное число раз.

Для получения на экране ЭЛТ «изображения» периодического электрического сигнала  $U_c(t)$  необходимо выполнение двух условий.

1. Подаваемое на вертикально отклоняющие пластины напряжение  $U_y$  должно линейно зависеть от самого сигнала  $U_c$ :

$$U_y(t) = U_{0y} + k_{yu}U_c(t). \quad (11)$$

Здесь  $U_{0y}$  — постоянное напряжение, определяющее расположение графика сигнала по оси Y на экране ЭЛТ,  $k_{yu}$  — коэффициент преобразования входного сигнала каналом вертикального отклонения.

2. Подаваемое на горизонтально отклоняющие пластины напряжение  $U_x$  должно линейно зависеть от времени  $t$ :

$$U_x = U_{0x} + k_{xu}t. \quad (12)$$

Здесь  $U_{0x}$  — постоянное напряжение, определяющее расположение графика сигнала по оси X на экране ЭЛТ,  $k_{xu}$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от рабочих характеристик генератора развертки и усилителя «X».

Напряжение пилообразной формы, которое вырабатывает генератор развертки осциллографа, называемое также напряжением развертки, изображено на рис. 3. В течение прямого хода луча ( $T_{пр}$ ) напряжение изменяется до максимального значения так, что луч с постоянной скоростью проходит весь экран слева направо. После завершения прямого хода луча начинается процесс обратного хода луча ( $T_{обр}$ ), когда

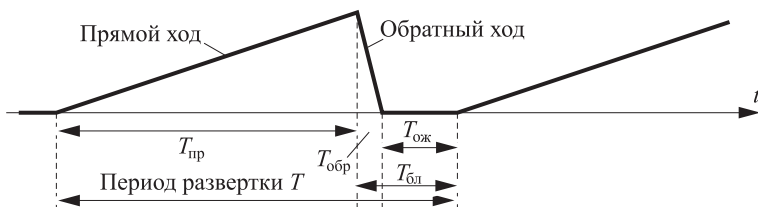


Рис. 3. Напряжение развертки

напряжение развертки возвращается к первоначальному уровню, и луч переходит в исходное положение в левый край экрана. Скорость изменения напряжения прямого хода развертки, т. е. масштаб по оси  $X$ , задается расположенным на передней панели осциллографа переключателем «ВРЕМЯ/ДЕЛ», проградуированным во времени, за которое луч проходит одно большое деление сетки экрана. Наличие интервала ожидания  $T_{ож}$  позволяет изменять масштаб по оси  $X$  независимо от периода развертки.

Во время «прямого» хода пилы на модулятор «электронной пушки» подается положительное относительно катода напряжение, при этом на экране виден светящийся след электронного луча. Во время «обратного» хода пилы (т. е. на интервале блокировки  $T_{бл}$ ) напряжение на модуляторе «запирает» трубку. В результате электронный луч на интервале блокировки не вызывает свечения экрана.

**Синхронизация.** При наблюдении периодических и особенно быстропротекающих процессов важно получить на экране осциллографа неподвижное изображение сигнала. Для этого нужно, чтобы период развертки был кратен периоду изучаемого сигнала. Однако, как правило, точное соотношение периодов соблюсти трудно из-за нестабильности генератора развертки или самого изучаемого процесса. Поэтому используют принудительное согласование периодов, при котором изучаемое напряжение «навязывает» свой период генератору развертки. При этом начало прямого хода развертки должно совпадать строго с одной и той же характерной точкой исследуемого периодического сигнала. Процесс привязки начала развертки к характерным точкам сигнала называется синхронизацией развертки с сигналом. Этот способ синхронизации поясняется осциллограммами, изображенными на рис. 4.

Сигнал произвольной формы  $U_y$  (на рисунке — сигнал трапецевидной формы) сравнивается с пороговым напряжением  $U_{ур}$  (уровнем синхронизации), устанавливаемым ручкой «УРОВЕНЬ». В момент пе-

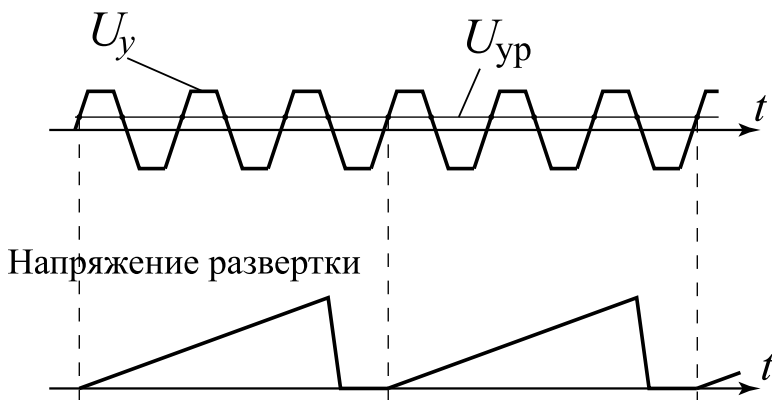


Рис. 4. Процесс синхронизации генератора развертки

пересечения сигналом  $U_y$  уровня  $U_{ур}$  снизу вверх запускается прямой ход развертки («пила»), при условии, что это произошло на интервале ожидания  $T_{ож}$  (рис. 3 и 4). Запуск «пилы» может производиться при пересечении сигнала  $U_y$  уровня  $U_{ур}$  как снизу вверх (как на рис. 4), так и сверху вниз в зависимости от выбранного положения переключателя режимов синхронизации развертки на передней панели осциллографа («ЗАПУСК +» или «ЗАПУСК –»). Напряжение  $U_{ур}$  изменяется при вращении ручки «УРОВЕНЬ» на передней панели осциллографа, что позволяет совместно с переключателем «ЗАПУСК +, –» выбрать фазу сигнала в начале развертки, исходя из наилучшей устойчивости синхронизации и удобства наблюдения. Если  $U_{ур}$  не пересекает  $U_y$ , то синхронизация невозможна.

Генератор развертки может работать в автоматическом или ждущем режимах, выбираемых тумблером «АВТ/ЖДУЩ». В автоматическом режиме время ожидания  $T_{ож}$  не может быть больше некоторого максимального времени ожидания  $T_{ож, max}$ . Если на максимальном интервале ожидания не произошло пересечения  $U_y$  и  $U_{ур}$ , то происходит автоматический запуск прямого хода развертки в момент, не связанный с определенной фазой исследуемого сигнала, а пилообразный сигнал будет иметь период  $T_{п, авт}$ , определяемый только внутренними параметрами осциллографа. В этом случае изображение исследуемого сигнала на экране перемещается влево или вправо («бежит»), а при отсутствии исследуемого сигнала видна горизонтальная линия развертки.

При пересечении  $U_y$  и  $U_{ур}$  на интервале ожидания происходит запуск прямого хода развертки в момент, связанный с определенной фазой исследуемого сигнала. На экране при этом наблюдается неподвижное изображение сигнала.

Синхронизация в автоматическом режиме возможна лишь в случае, когда собственный период генератора развертки больше периода исследуемого сигнала  $T_{п,авт} > T_c$ . В противном случае за первым циклом запуска сигнала развертки будет следовать один или несколько автоматических запусков прямого хода «пилы» в моменты времени, не привязанные к определенной фазе исследуемого сигнала, т. е. произойдет наложение друг на друга различных изображений сигнала.

В ждущем режиме запуск прямого хода развертки происходит только при наличии пересечения  $U_y$  и  $U_{ур}$  на интервале ожидания  $T_{ож}$ , причем интервал ожидания  $T_{ож}$  в этом режиме может быть сколь угодно большим, а синхронизация осуществляется при любом периоде исследуемого сигнала  $U_c(t)$ . Наблюдение на экране малой части периода процесса (например, фронта импульса или короткого импульса, длительность которого много меньше периода следования импульсов) возможно только в ждущем режиме.

Кроме синхронизации развертки исследуемым сигналом, предусмотрен режим синхронизации внешним сигналом (вместо  $U_y$ ), синхронным по отношению к исследуемому сигналу. Этот сигнал подается на гнездо «ВНЕШ. ЗАП» на передней панели осциллографа. Переключатель «ЗАПУСК» при этом должен находиться в положении «ВНЕШ». Работа элементов схемы синхронизации и развертки в этом случае аналогична описанной выше.

Выбор диапазона (масштаба) развертки осуществляется переключателем «ВРЕМЯ/ДЕЛ».

Удобный для наблюдения на экране размер изображения по вертикали устанавливается переключателем «V/ДЕЛ», проградуированным в величине напряжения, приводящего к перемещению луча по вертикали на одно большое деление (эта величина называется коэффициентом отклонения). Для смещения изображения по вертикали предусмотрен потенциометр « $\uparrow$ », который изменяет постоянную составляющую  $U_{0y}$  (см. формулу (11)).

В процессе работы с осциллографом всегда следует учитывать частотные характеристики каналов вертикального и горизонтального отклонения: амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) и фазо-частотную характеристику (ФЧХ). Если на вход «Y» осциллографа подается синусоидальное напряжение  $U_y = U_0 \sin(2\pi ft)$  амплитудой  $U_0$  и частотой  $f$ , то для перемещения луча на экране ЭЛТ можно записать:

$y = y_0(f) \sin(2\pi ft + \Delta\Phi_y(f))$ . Здесь  $y_0(f)$  — амплитуда перемещения луча на частоте  $f$ ,  $\Delta\Phi_y(f)$  — разность между фазой колебаний перемещения луча  $y$  и фазой колебаний входного сигнала  $U_y$  на частоте  $f$  (сдвиг фаз).

Тогда АЧХ канала вертикального отклонения есть зависимость

$$K_y(f) = \frac{y_0(f)}{U_0},$$

а ФЧХ — зависимость  $\Delta\Phi_y(f)$ . АЧХ и ФЧХ канала горизонтального отклонения определяются аналогично.

Как правило, АЧХ  $K_y(f)$  остается практически постоянной  $K_y = K_{y, \max}$  в диапазоне частот от  $f_{\min}$  до  $f_{\max}$  и уменьшается на частотах  $f < f_{\min}$  и  $f > f_{\max}$ . Диапазон частот от  $f_{\min}$  до  $f_{\max}$  называется полосой пропускания. Значения частот  $f_{\min}$  и  $f_{\max}$  определяют из условий

$$\frac{K_y(f_{\min})}{K_{y, \max}} = \frac{K_y(f_{\max})}{K_{y, \max}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,7.$$

Непостоянство характеристик  $K_y(f)$  и  $\Delta\Phi(f)$  во всем диапазоне частот приводит, например, к искажению формы импульсного сигнала высокой частоты при его преобразовании в канале вертикального отклонения осциллографа.

Канал «Y» может быть использован с открытым или закрытым входом. В первом случае передается как переменная  $U_{\sim}$ , так и постоянная  $U_{=}$  составляющие сигнала, во втором — только переменная. При работе в режиме с закрытым входом постоянная составляющая сигнала задерживается включенным на входе разделительным конденсатором. Путем переключения тумблера « $\sim/\simeq$ » на передней панели осциллографа можно выбрать необходимый вход усилителя «Y». Канал горизонтального отклонения имеет аналогичный усилитель «X».

При наблюдении зависимости  $U_y = F(U_x)$  сигнал  $U_x$  подается на закрытый вход « $\rightarrow \supset X$ ». В учебном осциллографе размер изображения по горизонтали не регулируется. Для смещения изображения по горизонтали предусмотрен потенциометр « $\leftrightarrow$ », изменяющий постоянную составляющую  $U_{0x}$  (см. формулу (12)).

**Фигуры Лиссажу.** При сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний с равными или кратными частотами, поданных на входы осциллографа, луч описывает на экране неподвижные замкнутые кривые, которые называются фигурами Лиссажу. При небольшом нарушении кратности частот форма фигур медленно меняется, а при большом — картина размывается.

Пусть на горизонтально отклоняющие пластины ЭЛТ подается сигнал  $U_x = U_a \cos(2\pi ft + \varphi_1)$  (при этом собственный генератор развертки осциллографа должен быть, конечно, выключен), а на вертикально отклоняющие пластины поступает смещенный по фазе сигнал той же частоты  $U_y = U_b \cos(2\pi ft + \varphi_2)$ ,  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ .

При чувствительностях пластин  $k_x$  и  $k_y$  координаты  $x$ ,  $y$  светящегося пятна на экране будут определяться выражениями

$$x = A \cos(2\pi ft + \varphi_1), \quad y = B \cos(2\pi ft + \varphi_2), \quad A = k_x U_a, \quad B = k_y U_b.$$

Исключив из этих уравнений время  $t$ , нетрудно получить уравнение траектории движения луча:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{xy}{AB} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Таким образом, фигура, которую описывает луч при сложении колебаний, имеющих одинаковую частоту, представляет собой эллипс. Ориентация этого эллипса зависит от разности фаз колебаний ( $\varphi_2 - \varphi_1$ ).

В общем случае вид фигуры Лиссажу зависит от соотношений между периодами (частотами), фазами и амплитудами складываемых колебаний. Некоторые частные случаи фигур Лиссажу для разных периодов и фаз показаны на рис. 5. Зная параметры одного колебания, например  $f_x$ , можно по фигуре Лиссажу определить параметры другого колебания —  $f_y$ . На полученное изображение накладывают мысленно две линии — горизонтальную и вертикальную, не проходящие через узлы фигуры. Фиксируют число пересечений с горизонтальной линией  $n_x$  и вертикальной линией  $n_y$ . Отношение частот  $f_y/f_x$  равно отношению  $n_x/n_y$ .

Если одно или оба колебания происходят не по гармоническому, а по более сложному закону, то получаются траектории более сложной формы.

**Калибратор.** Для проверки коэффициентов отклонения и развертки в осциллографе формируется внутренний калибровочный сигнал — прямоугольные импульсы напряжения с частотой повторения 50 Гц и фиксированной амплитудой. При поступлении этих импульсов на вход «Y» (переключатель «V/ДЕЛ» — в положении К) отклонение луча по оси Y должно составлять 4,5–5,0 делений, а период колебаний — 20 мс по оси X.



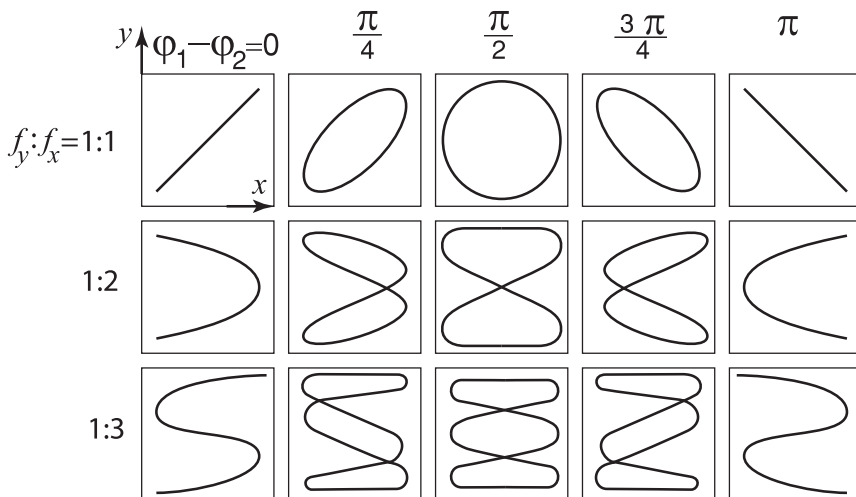


Рис. 5. Фигуры Лиссажу для колебаний одинаковой амплитуды

### Подготовка приборов

1. Проверьте соединение корпусов приборов установки с шиной общего заземления. Тумблерами «СЕТЬ» включите питание осциллографа и генераторов и дайте приборам прогреться 3–5 мин.
2. Поставьте в среднее положение следующие ручки (рис. 6): «Яркость», «Фокус», регуляторы вертикального и горизонтального отклонения луча, ручку «УРОВЕНЬ».
3. Установите на осциллографе переключатель «ЗАПУСК» в положение «ВНУТР +», а переключатель «АВТ/ЖДУЩ» — в положение «АВТ»). Переключатель «V/дел» следует поставить в положение малой чувствительности, например, 5 В/дел.
4. Переключатель «ВРЕМЯ/ДЕЛ» — в положение 2 мс.
5. После включения осциллографа через 1–2 мин на экране должна появиться горизонтальная линия развертки. Если линия не видна, то регуляторами отклонения луча добейтесь появления линии на экране. Регулировкой яркости и фокуса добейтесь наилучшего качества изображения.

### ВНИМАНИЕ!

1. Яркость не следует увеличивать до уровня, при котором начинают увеличиваться размеры изображения на экране.



Рис. 6. Внешний вид осциллографа

2. Луч на экране ЭЛТ виден только в течение прямого хода развертки. В ждущем режиме при отсутствии пересечения  $U_{ур}$  и  $U_y$  (рис. 4) на экране отсутствует какое-либо изображение. Поэтому при выполнении заданий целесообразно начинать работу в режиме «АВТ» при самой низкой чувствительности по входу «Y». При этом даже при отсутствии сигнала будет видна горизонтальная линия развертки. Увеличивая чувствительность переключателем «V/ДЕЛ», устанавливают размах изображения от 2 до 6 делений. Ручкой «УРОВЕНЬ» добиваются неподвижности изображения. Удобный масштаб изображения по оси X выбирают переключателем «ВРЕМЯ/ДЕЛ». Если это не удается, то повторяют попытку синхронизации в режиме «ЖДУЩ».
3. При необходимости отклонения электронного луча сигналом со входа «X» (для наблюдения зависимости  $U_y = F(U_x)$ ) генератор развертки выключается следующим образом:
  - в режиме «АВТ» установить начало развертки в центр экрана;
  - перевести генератор развертки в ждущий режим («ЖДУЩ»);
  - ручку «УРОВЕНЬ» повернуть до упора, при этом изображение должно исчезнуть;
  - увеличить ручкой «ЯРКОСТЬ» свечение экрана до необходимого уровня.

## ЗАДАНИЕ

### I. Наблюдение периодического сигнала от генератора звуковой частоты (ЗГ)

1. Выясните, как изменяется изображение сигнала на экране при работе осциллографа в различных режимах синхронизации. Для этого соедините кабелем вход «Y» осциллографа с выходом ЗГ. Поставьте на осциллографе соответствующие переключатели в положения: «ЗАПУСК» — «ВНУТР +», тумблер «ЖДУЩ–АВТ» — «АВТ», «V/ДЕЛ» — 5, «ВРЕМЯ/ДЕЛ» — 2 мс. Подайте на вход «Y» осциллографа с выхода генератора синусоидальный сигнал частоты 100 Гц и произвольной амплитуды (например, аттенуатор генератора — 0 дБ). На экране должна наблюдаться синусоида. Если синусоида «бежит», добейтесь неподвижного изображения вращением ручки «УРОВЕНЬ». Сместите синусоиду по горизонтали, чтобы на экране было видно начало синусоиды.
2. Вращая ручку «УРОВЕНЬ», проследите за изменением вида осциллограммы. Проведя аналогичные наблюдения при режимах развертки «АВТ», «ЖДУЩ», внутреннем запуске развертки «ВНУТР +» и «ВНУТР —», установите влияние положения органов управления системы синхронизации на вид осциллограммы.

3. Получите устойчивое изображение при трех произвольных положениях органов управления ЗГ (например: 100 Гц, 0 дБ; 1000 Гц, 10 дБ;  $3 \cdot 10^5$  Гц, 30 дБ). Удобный для наблюдения размер изображения устанавливайте переключателями «ВРЕМЯ/ДЕЛ», «V/ДЕЛ».

## II. Измерение амплитуды синусоидального сигнала.

Установите максимальную амплитуду на ЗГ. С помощью осциллографа измерьте напряжение на генераторе  $U_{max}$ , при необходимости переключая масштаб по оси Y («V/ДЕЛ»). Затем, установив ручку генератора амплитуды в среднее и крайне левое положение измерьте несколько значений амплитуды ЗГ и минимальное напряжение  $U_{min}$ .

Выразите отношение максимальной и минимальной амплитуд генератора в децибеллах [дБ]. Децибелл — логарифмическая единица ослабления или усиления сигнала, определяемая по формуле

$$\beta[\text{дБ}] = 10 \lg \frac{A^2}{A_0^2} = 20 \lg \frac{A}{A_0},$$

где  $A$  — амплитуда сигнала,  $A_0$  — некоторая амплитуда, принимаемая за базовую.

## III. Измерение частоты синусоидального сигнала

Установите размах синусоидального сигнала 6 делений, частоту ЗГ  $f_{зг}$  в соответствии с таблицей 1. Получите устойчивое изображение. Удобный масштаб изображения по горизонтали установите переключателем «ВРЕМЯ/ДЕЛ». Измерьте период сигнала, рассчитайте частоту и результаты занесите в таблицу 1.

Т а б л и ц а 1

**Период и частота синусоидального сигнала**

$f_{зг},$ Гц	<u>ВРЕМЯ</u> ДЕЛ	$T,$ ДЕЛ	$T,$ с	$f_{изм},$ Гц	$ f_{зг} - f_{изм} ,$ Гц	$\frac{ f_{зг} - f_{изм} }{f_{изм}}$
$2 \cdot 10$						
$2 \cdot 10^2$						
...	...	...	...	...	...	...
$2 \cdot 10^6$						

## IV. Получение амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) усилителей каналов «X» и «Y»

1. Подайте сигнал с ЗГ на вход «Y» осциллографа. Переключатель «V/ДЕЛ» установите в положение «1». Установите размах изображе-

ния синусоидального сигнала  $2A_0 = 6$  делений на частоте  $3\Gamma$   $f_{3\Gamma} = 10^3$  Гц. Получите устойчивое изображение. Изменяя частоту звукового генератора (при неизменном положении регулятора амплитуды  $3\Gamma$ ) во всем доступном диапазоне, измерьте размах сигнала  $2A_y$  (или  $2A_x$ ) в соответствии с таблицей 2 при открытом ( $\simeq$  или DC) и закрытом ( $\sim$  или AC) входе и рассчитайте значения коэффициента ослабления сигнала  $K$  согласно

$$K(f_{3\Gamma}) = \frac{2A(f_{3\Gamma})}{2A_0}. \quad (13)$$

Результаты занесите в таблицу 2.

Т а б л и ц а 2

## АЧХ усилителей каналов

$f_{3\Gamma}$ , Гц	10	...	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$	...	$10^7$
$2A_y$ , дел									
$K_y, \simeq$									
$2A_y$ , дел									
$K_y, \sim$									
$2A_x$ , дел									
$K_x$									

Необходимо определить те значения частоты, при которых коэффициенты  $K_x$ ,  $K_y$  составляют примерно 0,7 от своих максимальных значений. Эти значения принято считать границей полосы пропускания усилителя.

2. Выключите внутреннюю развертку по оси  $X$ . Для этого установите органы управления осциллографа в следующие положения: «ЗАПУСК» — «ВНЕШ», тумблер «ЖДУЩ-АВТ» — «ЖДУЩ», «УРОВЕНЬ» — до упора по часовой стрелке; «ЯРКОСТЬ» — максимальная. Подайте сигнал с  $3\Gamma$  на вход «X» и установите размах сигнала 6 делений на частоте  $3\Gamma$   $f_{3\Gamma} = 10^3$  Гц. Изображение должно иметь вид отрезка горизонтальной прямой в центре экрана.
3. Проведите измерения размаха сигнала  $2A_x$  и рассчитайте  $K_x(f)$  аналогично  $K_y(f)$  и результаты занесите в таблицу 2.
4. Постройте графики  $K_{y,\simeq}(f)$ ,  $K_{y,\sim}(f)$ ,  $K_x(f)$  в единых координатах в логарифмическом масштабе по частоте  $f$ .

## V. Влияние АЧХ на искажение сигнала.

Включите внутреннюю развертку осциллографа. Рассмотрите (качественно) влияние АЧХ канала «Y» на искажения импульсного сигнала. Установите переключатель вида сигнала  $3\Gamma$  в положение «П».

Размах сигнала на экране осциллографа установите 4 деления. Наблюдайте сигнал при открытом ( $\simeq$ ) и закрытом ( $\sim$ ) входе на частотах 10 Гц,  $10^3$  Гц,  $2 \cdot 10^5$  Гц,  $10^6$  Гц и зарисуйте полученные осциллограммы.

## VI. Измерение разности фазовых сдвигов сигналов на выходах усилителей канала «Y» и канала «X» при одновременной подаче на их входы одного и того же сигнала, т. е. разности фазово-частотных характеристик каналов «X» и «Y»

1. Выключите внутреннюю развертку так же, как и в п. IV.2. Подайте сигнал частотой  $10^4$  Гц с выхода ЗГ через тройник одновременно на входы каналов «X» и «Y». Установите регулятором выхода ЗГ размах по оси  $X$  — 6 делений, масштаб по оси  $Y$  — 0,5 В/ДЕЛ. На экране должен наблюдаться отрезок прямой под углом в пределах  $30$ – $60^\circ$  к вертикали (вырожденный эллипс с нулевой малой осью). При изменении частоты сигнала прямая будет переходить в эллипс.

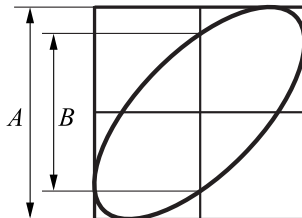


Рис. 7. Фигура Лиссажу при  $f_x = f_y$  и произвольной разности фаз  $\Delta\Phi_{xy}$

2. С помощью масштабной сетки измерьте по изображению эллипса параметры  $A$  и  $B$  (рис. 7) во всем диапазоне частот ЗГ, рассчитайте разность фаз  $\Delta\Phi_{xy}$  по формуле

$$\Delta\Phi_{xy} = \begin{cases} \pm \arcsin \frac{B}{A}, & \text{если эллипс наклонен вправо,} \\ & \text{как на рис. 7;} \\ \pm \pi \mp \arcsin \frac{B}{A}, & \text{если эллипс наклонен влево.} \end{cases}$$

Знак «+» или «−» зависит от того, в какую сторону вращается точка, описывающая эллипс, — по или против часовой стрелки. При увеличении (уменьшении) частоты перемена знака (перемена направления вращения) происходит тогда, когда эллипс вырождается в отрезок прямой линии.

Занесите данные в таблицу 3. Постройте график  $\Delta\Phi_{xy}(f)$  в логарифмическом масштабе по частоте  $f_{ЗГ}$ .

Т а б л и ц а 3

**Зависимость разности фаз  $\Delta\Phi$  от частоты**

$f_{\text{зг}}, \text{ Гц}$	10	...	50	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$	...	$10^7$
$A, \text{ дел}$										
$B, \text{ дел}$										
$\Delta\Phi_{xy}$										

## **VII. Наблюдение фигур Лиссажу при сложении колебаний во взаимно перпендикулярных направлениях**

Выключите внутреннюю развертку осциллографа. Подайте на вход «Х» осциллографа колебание с частотой  $f_x$  от первого звукового генератора, а на вход «Y» — колебание с частотой  $f_y$  от второго звукового генератора. Амплитуды колебаний обоих генераторов и положение переключателя «V/ДЕЛ» установите таким образом, чтобы фигура Лиссажу занимала большую часть экрана. Установите частоту  $f_y$ , равную 1 кГц. Изменяя частоту  $f_x$ , получите устойчивую фигуру для отношений частот  $f_y/f_x$ , равных 1:1, 2:1, 3:1 и 3:2. Зарисуйте полученные 4 осциллограммы и сравните их с приведенными на рис. 5.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лабораторные занятия по физике* / Под ред. Л.Л. Гольдина. — М.: Наука, 1983.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. III. — М.: Наука, 1996.
3. *Калашников С.Г.* Электричество. — М.: Наука, 1985.
4. *Джонс М.Х.* Электроника — практический курс. — М.: Постмаркет, 1999.

## МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

**Движение системы материальных точек.** В классической механике состояние механического движения материальной точки (частицы) в момент времени  $t$  определяется заданием ее радиуса-вектора  $\vec{r}$  и импульса  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Эволюцию состояния во времени описывает уравнение движения (второй закон Ньютона):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{p}, t). \quad (2.1)$$

Существенно при этом, что правая часть уравнения движения (сила) зависит только от состояния частицы. Решая уравнение (2.1) с заданными начальными условиями, можем найти закон движения материальной точки:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Для системы материальных точек в силу линейности уравнения движения получаем

$$\frac{d\left(\sum_{i=1}^n \vec{p}_i\right)}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (2.2)$$

Здесь учитываются только внешние силы, так как силы, действующие между материальными точками системы и называемые внутренними, в сумме для системы дают нуль.

В любой системе материальных точек существует замечательная геометрическая точка, называемая центром масс или центром инерции. Радиус-вектор центра масс по определению равен

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$



Очевидно, что скорость центра масс есть

$$\vec{v} = \frac{\vec{P}}{m},$$

где  $\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$  — полный импульс системы,  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  — ее масса. В силу (2.2)

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

Это означает, что центр масс движется как материальная точка, масса которой равна суммарной массе всей системы, а действующая сила — геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему. Скорость центра масс можно рассматривать как скорость движения системы частиц как целого.

Если внешние силы на систему не действуют, она называется изолированной или замкнутой. В этом случае из (2.2) следует сохранение полного импульса системы материальных точек:

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \text{const}, \quad (2.3)$$

т. е.

$$\vec{v} = \text{const}.$$

С такой системой частиц можно связать инерциальную систему отсчета, которую принято называть системой центра масс или системой центра инерции.

В системе центра масс полный импульс системы равен нулю.

Для взаимодействия, в частности соударения, двух материальных точек равенство суммы импульсов до соударения, отмеченных индексом «0», и после соударения имеет вид

$$\vec{p}_{10} + \vec{p}_{20} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (2.4)$$

или

$$m_1 \vec{v}_{10} + m_2 \vec{v}_{20} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2. \quad (2.5)$$

Пусть материальная точка имеет импульс  $\vec{p}$ , а ее положение относительно некоторого произвольного начала отсчета  $O$  определяется радиусом-вектором  $\vec{r}$ . Тогда, по определению, момент импульса  $\vec{L}$  этой материальной точки относительно точки  $O$  равен векторному произведению

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (2.6)$$

Аналогично, если на эту материальную точку действует сила  $\vec{F}$ , то моментом силы относительно точки  $O$  называется векторное произведение

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (2.7)$$

Умножая векторно слева уравнение (2.1) на  $\vec{r}$  и используя соотношение  $\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$ , находим

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (2.8)$$

Соотношение (2.7) можно представить в другом, наглядном виде, если заметить, что

$$M = rF \sin \theta = Fh,$$

где  $\theta$  — угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ , а  $h = r \sin \theta$  — длина перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  на направление силы, это расстояние принято называть плечом силы относительно точки  $O$ .

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(yF_z - zF_y) + \vec{j}(zF_x - xF_z) + \vec{k}(xF_y - yF_x). \end{aligned}$$

Здесь векторы  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные векторы вдоль осей  $Ox, Oy, Oz$ . Выберем систему координат таким образом, чтобы векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$  лежали в координатной плоскости  $(x, y)$ . Пусть, кроме того, ось  $Ox$  направлена вдоль вектора  $\vec{r}$ , тогда имеем

$$\vec{r} = (x, 0, 0), \quad \vec{F} = (F_x, F_y, 0),$$

т. е.

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = xF_y = xF \sin \theta = Fh.$$

Поскольку перпендикуляр, опущенный из точки  $O$  на направление силы  $\vec{F}$ , ортогонален оси  $Oz$ , его длину  $h$  можем назвать также плечом относительно  $Oz$ . В связи с этим проекции момента  $\vec{M}$  на координатные оси принято называть моментами силы относительно этих осей. Аналогичные рассуждения справедливы также и для момента импульса  $\vec{L}$ .

В случае произвольной системы координат представим векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$  в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel, \quad \vec{F} = \vec{F}_\perp + \vec{F}_\parallel.$$

Здесь  $\vec{r}_\perp$  — составляющая вектора  $\vec{r}$ , перпендикулярная к оси  $Oz$ , а  $\vec{r}_\parallel$  — составляющая, параллельная этой оси. Аналогичный смысл имеют векторы  $\vec{F}_\perp$  и  $\vec{F}_\parallel$ . Можно показать, что

$$\vec{M}_\parallel = \vec{r}_\perp \times \vec{F}_\perp,$$

т. е.

$$M_z = r_\perp \cdot F_\perp \sin \varphi,$$

где  $\varphi$  — угол между векторами  $\vec{r}_\perp$  и  $\vec{F}_\perp$ . Аналогично, для проекции момента импульса  $L_z$  имеем

$$L_z = r_\perp \cdot p_\perp \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{r}_\perp$  и  $\vec{p}_\perp$ .

Для системы материальных точек полный момент импульса представляет сумму моментов импульсов материальных точек, а полный момент сил — сумму моментов только внешних сил, так как моменты сил взаимодействия между материальными точками, называемые внутренними, в сумме дают нуль. Поэтому

$$\frac{d \left( \sum_{i=1}^n \vec{L}_i \right)}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i. \quad (2.9)$$

Если система материальных точек изолированная (замкнутая), то есть отсутствуют внешние силы, то полный момент сил равен нулю и сохраняется полный момент импульса системы:

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \text{const}. \quad (2.10)$$

Отметим, что для векторных величин, какими являются импульс и момент импульса, возможны случаи, когда полные векторы не сохраняются, но сохраняется какая-то их компонента. Например, в однородном поле тяжести сохраняются импульсы в направлениях, перпендикулярных к полю, и моменты импульсов относительно осей, параллельных полю. В системе центральных сил сохраняется момент импульса относительно центра сил.

При перемещении материальной точки под действием силы на расстояние  $d\vec{r}$  совершается работа, величина которой находится с помощью скалярного произведения силы на перемещение:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (2.11)$$

Если сила изменяет импульс материальной точки в соответствии со вторым законом Ньютона (2.1), то получаем

$$dA = \frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{r} = \vec{v} d\vec{p} = \frac{1}{m} \vec{p} d\vec{p} = \frac{1}{m} p dp = d \left( \frac{p^2}{2m} \right).$$

Таким образом, совершение работы приводит к изменению величины, которую называли кинетической энергией материальной точки:

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2}. \quad (2.12)$$

Консервативными называются силы, в поле которых работа по замкнутому пути равна нулю, то есть работа силы по перемещению тела из одной точки в другую не зависит от пути. Примером поля консервативных сил является поле тяжести. В поле консервативных сил можно ввести потенциальную энергию  $U$ . Работа сил поля равна по определению убыли потенциальной энергии:

$$dU = -\vec{F} d\vec{r}. \quad (2.13)$$

Используя второй закон Ньютона, получаем

$$dU = -\frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{r} = -\vec{v} d\vec{p} = -\frac{1}{m} \vec{p} d\vec{p} = -\frac{1}{m} p dp = -d \left( \frac{p^2}{2m} \right),$$

т. е.

$$d \left( U + \frac{p^2}{2m} \right) = 0. \quad (2.14)$$

Это соотношение выражает закон сохранения механической энергии.

Для системы материальных точек полная кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий точек. Для замкнутой системы точек, то есть при отсутствии внешних сил, полная кинетическая энергия системы может меняться (в отличие от импульса и момента импульса) за счет работы внутренних сил — сил взаимодействия между материальными точками. Сохранение кинетической энергии будет только при упругом характере взаимодействия, при котором во время взаимодействия кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию упругого сжатия, а затем полностью возвращается в кинетическую энергию материальных точек. В случае упругого взаимодействия двух материальных точек, импульсы которых до взаимодействия отмечены индексом «0», закон сохранения кинетической энергии имеет вид

$$\frac{p_{10}^2}{2m_1} + \frac{p_{20}^2}{2m_2} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2}$$

или

$$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} + \frac{m_2 v_{20}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (2.15)$$

Отметим, что использование этих соотношений в (2.4) и (2.5) позволяет установить, что в системе центра масс импульс тел при соударении изменяется только по направлению, но не по величине.

Кинетическая энергия системы материальных точек в произвольной системе координат равна сумме кинетической энергии в системе центра масс и кинетической энергии, которую имела бы вся масса системы, движущаяся со скоростью центра масс.

Законы сохранения импульса, момента импульса и энергии, полученные выше из динамических уравнений, в действительности являются общими свойствами замкнутых систем, следующими из однородности и изотропности пространства и однородности времени.

Материальную точку, скорость которой сравнима со скоростью света ( $v \sim c$ ,  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/с), принято называть **релятивистской частицей**. Опыт, накопленный при изучении ускорителей заряженных частиц, учит, что импульс релятивистской частицы

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.16)$$

где  $m$  — масса частицы,  $\vec{v}$  — ее скорость. Уравнение движения (2.1) сохраняет при этом свой вид. Можно показать, используя (2.1), что

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{dA}{dt},$$

где  $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$  — элементарная работа. Поскольку кинетическую энергию  $K$  частицы можно определить как работу силы по ускорению частицы от нулевой начальной скорости до некоторой заданной скорости  $v$ , находим

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2. \quad (2.17)$$

Так как

$$\left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots,$$

выражение (2.17) при  $v \ll c$  дает

$$K = \frac{mv^2}{2},$$

что и следовало ожидать.

Опыт, основанный на изучении взаимодействия релятивистских частиц, показывает, что энергия свободной частицы не обращается в нуль при  $v = 0$ , а остается конечной величиной, равной  $mc^2$ . Это означает, что энергией частицы следует считать величину

$$\mathcal{E} = K + mc^2,$$

т. е.

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.18)$$

Величина  $mc^2$  называется энергией покоя частицы. Сравнивая (2.16) и (2.18), можно видеть, что импульс частицы

$$\vec{p} = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \vec{v}. \quad (2.19)$$

При  $v = c$  импульс и энергия частицы, имеющей массу, обращаются в бесконечность. Это означает, что частица с отличной от нуля массой не может двигаться со скоростью света. В релятивистской механике, однако, могут существовать частицы с массой, равной нулю, движущиеся со скоростью света (таковы в реальности световые кванты-фотоны, а также нейтрино). Для таких частиц из (2.19) имеем

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c}. \quad (2.20)$$

Всюду выше мы говорили о «частице», но ее «элементарность» нигде не использовалась. В силу этого формулы (2.16), (2.18) и (2.19) применимы в равной степени и к любому сложному телу, состоящему из многих частиц. Под  $m$  следует при этом понимать полную массу тела, а под  $v$  — скорость его движения как целого.

Энергия покоящегося тела содержит в себе, помимо энергии покоя частиц, входящих в его состав, также их кинетическую энергию, и энергию взаимодействия частиц друг с другом. Другими словами,

$$mc^2 \neq \sum_i m_i \cdot c^2,$$

где  $m_i$  — масса  $i$ -й частицы.

Таким образом, в релятивистской механике не имеет места закон сохранения массы, а выполняется только закон сохранения энергии, в которую включается также и энергия покоя частиц.

Возводя в квадрат соотношения (2.16) и (2.18), можно убедиться в том, что

$$\mathcal{E}^2 - (pc)^2 = m^2 c^4, \quad (2.21)$$

т. е.

$$\mathcal{E} = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}. \quad (2.22)$$

Соотношение (2.21) часто называют основным кинематическим тождеством релятивистской механики.

Отметим, что частицу, для которой

$$p \gg mc,$$

принято называть ультрарелятивистской. Для нее приближенно справедлива формула (2.20).

При решении задач о столкновениях релятивистских частиц основное кинематическое тождество полезно записать в другом виде:

$$\left( \sum_i \mathcal{E}_i \right)^2 - \left( \sum_i \vec{p}_i c \right)^2 = \text{invariant}. \quad (2.23)$$

Слово «invariant» свидетельствует о том, что правая часть (2.23) не изменяется при переходе от одной инерциальной системы к другой.

**Движение твёрдого тела.** Одной из важнейших идеализаций механики является понятие абсолютно твёрдого тела. Абсолютно твёрдым телом называется система материальных точек, расстояния между которыми остаются постоянными в процессе движения.

Рассмотрим вращение твёрдого тела вокруг некоторой оси. В этом случае все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения. Следует отметить, что ось вращения может находиться как внутри, так и вне тела. Зафиксируем на оси вращения произвольную точку  $O$ . Тогда положение какой-либо точки  $A$  твёрдого тела можно характеризовать радиусом-вектором  $\vec{OA} = \vec{r}$ . Если за время  $dt$  тело повернулось на угол  $d\varphi$ , то перемещение точки  $A$  за это время равно

$$|d\vec{r}| = r_{\perp} \cdot d\varphi, \quad (2.24)$$

где  $r_{\perp}$  — расстояние от точки  $A$  до оси вращения.

Изменение угла, деленное на время  $dt$ , за которое оно происходит, называется угловой скоростью и обычно обозначается  $\omega$ . Так как смещение  $dl = r d\varphi$  за это же время равно  $v dt$ , получаем

$$v = \omega \cdot r. \quad (2.25)$$

Это соотношение можно записать в векторном виде, если ввести вектор  $\vec{\varphi}$  угла поворота и вектор  $\vec{\omega}$  угловой скорости. Эти векторы так же, как вектор момента силы и вектор момента импульса, введенные ранее, не совсем обычные. В отличие от обычных векторов (радиуса, скорости, силы), которые называются полярными, эти векторы при переходе от правой системы координат (ось  $z$  направлена по движению правого винта при вращении его от  $x$  к  $y$ ) к левой изменяют свое направление на противоположное. Такие векторы называются аксиальными. При использовании одной и той же системы координат (обычно правой) мы будем обращаться с этими векторами так же, как с обычными. В векторном виде соотношение (2.25) выглядит следующим образом:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.26)$$

Из этого уравнения видно, как при вращении направлена угловая скорость и соответственно угол поворота, который связан с ней соотношением

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (2.27)$$

Любое тело можно рассматривать как систему из  $n$  частиц (в том числе и при  $n \rightarrow \infty$ ). В таком случае моменты сил и импульсов находят с помощью суммирования:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i, \quad (2.28)$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i. \quad (2.29)$$

Как отмечалось выше, система материальных точек, расстояние между которыми в процессе движения не изменяется, называется **твердым телом**. Рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной оси  $Oz$ . Для всех точек твердого тела вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  при этом одинаков и направлен вдоль этой оси. Скорость произвольной точки

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i,$$



где  $\vec{r}_i$  — радиус-вектор этой точки относительно начала отсчета  $O$ . Каждая материальная точка тела движется по окружности, радиус которой равен  $r_{i\perp}$ . Это означает, что векторы  $\vec{r}_{i\perp}$  и  $\vec{v}_{i\perp}$  взаимно перпендикулярны, т. е. момент импульса  $i$ -й частицы

$$L_{i\perp} = m_i r_{i\perp} v_{i\perp} = m_i r_{i\perp}^2 \omega.$$

Для полного момента импульса тела имеем

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i r_{i\perp}^2 \omega = I_z \omega.$$

Здесь введена характеристика инерционности твердого тела при вращении — момент инерции относительно оси (в данном случае относительно оси  $z$ ), который определяется не только массой, но и распределением массы относительно оси вращения:

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i r_{i\perp}^2. \quad (2.30)$$

Момент инерции  $I$  относительно произвольной оси можно выразить через момент инерции  $I_0$  относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс тела, массу тела  $m$  и расстояние между осями  $a_0$ :

$$I = I_0 + m a_0^2. \quad (2.31)$$

Это соотношение составляет содержание так называемой теоремы Гюйгенса–Штейнера.

В формуле (2.30) расстояние  $m_i$  от оси можно выразить через ее координаты  $r_{i\perp}^2 = x_i^2 + y_i^2$ . Аналогичные формулы можно написать для моментов инерции относительно осей  $x$  и  $y$ :

$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad I_y = \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + x_i^2), \quad I_z = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (2.32)$$

Складывая моменты инерции и учитывая, что квадрат расстояния до  $m_i$  от начала координат  $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$ , получаем полезное соотношение:

$$I_x + I_y + I_z = 2 \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = 2I_{\odot}. \quad (2.33)$$

Здесь введен момент инерции относительно точки  $I_{\odot}$ .

Соотношение (2.33) оказывается очень полезным при вычислении моментов инерции тел. Так, поместив начало координат в центр тонкой сферической оболочки радиуса  $R$ , получим

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} I_{\odot} = \frac{2}{3} m R^2. \quad (2.34)$$

Уравнение вращательного движения твердого тела вокруг закрепленной оси  $Oz$  имеет вид

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z. \quad (2.35)$$

Сравнивая это уравнение со вторым законом Ньютона (2.1), видим, что роль силы играет момент сил, ускорения — угловое ускорение, а массы — момент инерции, который, повторим еще раз, зависит от массы и ее распределения относительно оси вращения. Аналогичное соответствие получаем и в выражении для кинетической энергии  $K$ :

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_{i\perp}^2 \omega_z^2 = \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 = \frac{L_z^2}{2I_z}. \quad (2.36)$$

Добавим еще, что роль смещения при вычислении работы играет угол поворота. В простейшем случае, когда сила направлена по касательной к окружности, по которой движется материальная точка, получаем

$$dA = F dr = Fr d\varphi = M d\varphi. \quad (2.37)$$

Для перехода от тела из точечных масс к однородному сплошному в уравнении (2.30) надо перейти к бесконечно малым элементам и провести интегрирование по всей массе тела:

$$I_z = \int r_{\perp}^2 dm. \quad (2.38)$$

**Векторы и тензоры.** Многие задачи физики приводят к понятию тензора, которое является обобщением понятия вектора. На вопрос о том, что такое вектор, обычно отвечают, что это упорядоченная тройка чисел. Можно видеть, однако, что не всякая упорядоченная тройка чисел образует вектор. Например, давление, объём и температура некоторой массы газа  $(P, V, T)$  образуют упорядоченную тройку чисел, которая, однако, не является вектором. С другой стороны, тройка чисел  $(x, y, z)$ , где  $x, y, z$  — координаты точки в некоторой декартовой системе

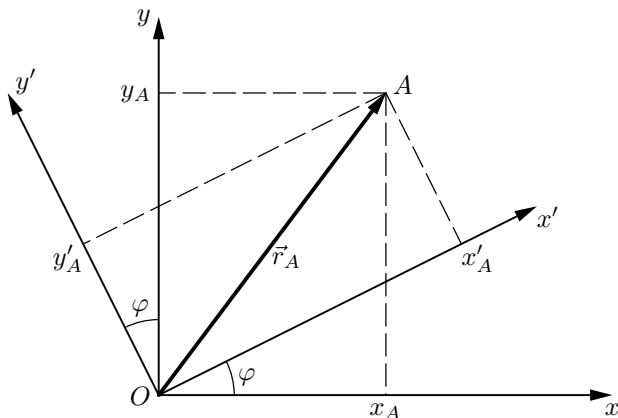
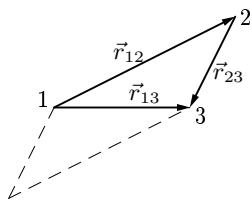


Рис. 2.2. Поворот системы координат

координат, образует вектор, который называется радиусом-вектором. В чём дело?

Понятие вектора — это абстракция, родившаяся на основе опыта по изучению перемещения реальных тел. Опыт учит, что перемещения материальной точки (направленные отрезки) складываются по правилу параллелограмма или треугольника (см. рис. 2.1):

$$\vec{r}_{13} = \vec{r}_{12} + \vec{r}_{23}.$$

Рис. 2.1. Сложение векторов:  
 $\vec{r}_{13} = \vec{r}_{12} + \vec{r}_{23}$ 

В этом заключается одно из самых ярких свойств вектора, которое не зависит от выбора системы координат. Однако определение радиуса-вектора как тройки чисел  $(x, y, z)$  зависит от выбора системы координат. На самом деле это определение можно сделать инвариантным, указав, как преобразуются координаты точки при переходе от одной системы координат к другой.

Пусть, например, система координат повернута вокруг оси  $z$  на угол  $\varphi$  (см. рис. 2.2).

Координаты точки  $A$  преобразуются по закону:

$$\begin{aligned} x'_A &= x_A \cos \varphi + y_A \sin \varphi, \\ y'_A &= -x_A \sin \varphi + y_A \cos \varphi, \\ z'_A &= z_A. \end{aligned}$$

Эти соотношения определяют закон преобразования компонент ради-

уса-вектора, поскольку  $\vec{r}_A \equiv (x_A, y_A, z_A)$ . Опыт учит, что по такому же закону преобразуются компоненты любого вектора. Например, для вектора силы  $\vec{F} \equiv (F_x, F_y, F_z)$  имеем:

$$\begin{aligned} F'_x &= F_x \cos \varphi + F_y \sin \varphi, \\ F'_y &= -F_x \sin \varphi + F_y \cos \varphi, \\ F'_z &= F_z. \end{aligned}$$

Таким образом, закон преобразования компонент радиуса-вектора определяет критерий вектора любой природы. Тройка чисел  $(P, V, T)$  не удовлетворяет этому критерию, так как она не меняется при преобразовании координат.

Дадим определение вектора в более общем виде. Пусть имеются две системы координат  $Ox_1x_2x_3$  и  $Ox'_1x'_2x'_3$  с общим началом  $O$ . Вектором  $\vec{A}$  называется упорядоченная тройка чисел  $(A_1, A_2, A_3)$ , которая при повороте системы координат преобразуется как тройка координат  $(x_1, x_2, x_3)$  радиуса-вектора некоторой точки, т. е. по закону

$$A'_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} A_k, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.39)$$

где через  $\alpha_{ik}$  обозначен косинус угла между осями  $Ox'_i$  и  $Ox_k$ .

Напрашивается естественное обобщение. Назовем тензором второго ранга тройку векторов  $(\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{T}_3)$ , которая при повороте системы координат преобразуется по такому же закону, т. е.

$$\vec{T}'_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} \vec{T}_k, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.40)$$

Векторы  $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{T}_3$  могут быть названы составляющими тензора  $T$  по осям  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$ , а векторы  $\vec{T}'_1, \vec{T}'_2, \vec{T}'_3$  соответственно — составляющими по осям  $Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3$ .

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \vec{T}_1 &= \vec{i}T_{11} + \vec{j}T_{12} + \vec{k}T_{13}, \\ \vec{T}_2 &= \vec{i}T_{21} + \vec{j}T_{22} + \vec{k}T_{23}, \\ \vec{T}_3 &= \vec{i}T_{31} + \vec{j}T_{32} + \vec{k}T_{33}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные орты системы координат. Таким образом, тензору  $T$  может быть поставлена в соответствие матрица  $T_{ik}$ , элементы которой называются компонентами тензора.

Систему уравнений (2.41) можно записать в более компактном виде:

$$\vec{T}_k = \sum_l \vec{e}_l T_{kl}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.42)$$

где  $\vec{e}_1 = \vec{i}$ ,  $\vec{e}_2 = \vec{j}$ ,  $\vec{e}_3 = \vec{k}$ . Аналогично,

$$\vec{T}'_i = \sum_m \vec{e}'_m T'_{im}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.43)$$

где  $\vec{e}'_1 = \vec{i}'$ ,  $\vec{e}'_2 = \vec{j}'$ ,  $\vec{e}'_3 = \vec{k}'$ . Подставляя (2.42) и (2.43) в (2.40), находим

$$\sum_m \vec{e}'_m T'_{im} = \sum_{k,l} \alpha_{ik} \vec{e}_l T_{kl}. \quad (2.44)$$

Умножая (2.44) скалярно на  $\vec{e}'_n$ , находим закон преобразования компонент тензора:

$$T'_{in} = \sum_{k,l} \alpha_{ik} \alpha_{nl} T_{kl}. \quad (2.45)$$

Здесь учтено, что  $(\vec{e}'_n, \vec{e}_l) = \alpha_{nl}$ ,  $(\vec{e}'_m, \vec{e}'_n) = \delta_{mn}$ , где  $\delta_{mn}$  — единичная матрица, т. е.

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{если } m = n, \\ 0, & \text{если } m \neq n. \end{cases}$$

Соотношение (2.45) определяет закон преобразования компонент тензора второго ранга при вращении системы координат. Можно видеть, что векторы разумно считать тензорами первого ранга, скаляры — тензорами нулевого ранга. Компоненты тензора третьего ранга преобразуются по закону

$$T'_{ikl} = \sum_{m,n,p} \alpha_{im} \alpha_{kn} \alpha_{lp} T_{mnp}.$$

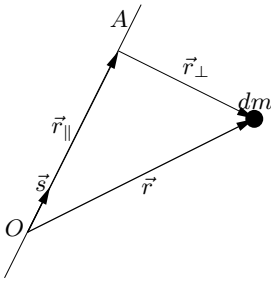


Рис. 2.3. Вычисление момента инерции тела относительно произвольной оси

В качестве примера рассмотрим тензор инерции твердого тела. Вычислим момент инерции  $I$  твердого тела относительно произвольной оси  $OA$ , проходящей через начало координат  $O$  (рис. 2.3).

Разложим радиус-вектор  $\vec{r}$  элемента массы тела  $dm$  на составляющие вдоль оси  $OA$  и перпендикулярно к ней:

$$\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}.$$

По определению момента инерции

$$I = \int r_{\perp}^2 dm = \int (r^2 - r_{\parallel}^2) dm.$$

Если  $\vec{s}$  — единичный вектор вдоль оси  $OA$ , то

$$r_{\parallel} = (\vec{r}, \vec{s}) = x_1 s_1 + x_2 s_2 + x_3 s_3.$$

Кроме того,

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1.$$

Учитывая эти соотношения, находим

$$I = I_{11}s_1^2 + I_{22}s_2^2 + I_{33}s_3^2 + 2I_{12}s_1s_2 + 2I_{23}s_2s_3 + 2I_{31}s_3s_1, \quad (2.46)$$

где

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int (x_2^2 + x_3^2) dm, & I_{12} &= I_{21} = - \int x_1 x_2 dm, \\ I_{22} &= \int (x_3^2 + x_1^2) dm, & I_{23} &= I_{32} = - \int x_2 x_3 dm, \\ I_{33} &= \int (x_1^2 + x_2^2) dm, & I_{31} &= I_{13} = - \int x_3 x_1 dm. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Формула (2.46) показывает, как зависит момент инерции относительно рассматриваемой оси  $OA$  от направляющих косинусов оси. Она допускает наглядную геометрическую интерпретацию. Будем проводить через начало координат  $O$  прямые во всех направлениях и откладывать на них отрезки длиной  $1/\sqrt{I}$ . Геометрическое место концов отрезков образует некоторую поверхность. Определим уравнение этой поверхности. Радиус-вектор текущей точки этой поверхности

$$\vec{r} = \frac{\vec{s}}{\sqrt{I}},$$

т. е.

$$s_i = x_i \sqrt{I}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.48)$$

Подставляя (2.48) в (2.46), находим

$$I_{11}x_1^2 + I_{22}x_2^2 + I_{33}x_3^2 + 2I_{12}x_1x_2 + 2I_{23}x_2x_3 + 2I_{31}x_3x_1 = 1. \quad (2.49)$$

Полученная поверхность второго порядка является эллипсоидом, поскольку она не имеет бесконечно удаленных точек ( $I \neq 0$ ). Этот эллипсоид называется **эллипсоидом инерции** тела, построенным относительно

точки  $O$ . Эллипсоид инерции изменяется при изменении точки, относительно которой он строится. **Центральным эллипсоидом инерции** называется эллипсоид инерции, построенный относительно центра масс. Можно показать, что момент инерции твердого тела обладает всеми атрибутами тензора второго ранга: ему поставлена в соответствие матрица  $I_{ik}$ , его векторные составляющие суть

$$\begin{aligned}\vec{I}_1 &= \vec{e}_1 I_{11} + \vec{e}_2 I_{12} + \vec{e}_3 I_{13}, \\ \vec{I}_2 &= \vec{e}_1 I_{21} + \vec{e}_2 I_{22} + \vec{e}_3 I_{23}, \\ \vec{I}_3 &= \vec{e}_1 I_{31} + \vec{e}_2 I_{32} + \vec{e}_3 I_{33}.\end{aligned}\tag{2.50}$$

Из алгебры известно, что уравнение (2.49) может быть приведено к главным осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ :

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1.\tag{2.51}$$

Начало отсчета  $O$  системы координат обычно помещают в центре масс (но необязательно). Величины  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$  называются **главными моментами инерции** тела. Векторные составляющие тензора по главным осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  имеют вид

$$\vec{I}_x = \vec{i} I_x, \quad \vec{I}_y = \vec{j} I_y, \quad \vec{I}_z = \vec{k} I_z.\tag{2.52}$$

Если известны направляющие косинусы рассматриваемой оси относительно главных осей

$$s_x = \cos \alpha, \quad s_y = \cos \beta, \quad s_z = \cos \gamma,$$

то поскольку

$$I_{xy} = 0, \quad I_{yz} = 0, \quad I_{zx} = 0,$$

в силу (2.46) имеем

$$I = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma.\tag{2.53}$$

Если, наоборот, известны моменты инерции  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  относительно трех произвольных осей, то, решая систему линейных уравнений

$$\begin{aligned}I_1 &= I_x \cos^2 \alpha_1 + I_y \cos^2 \beta_1 + I_z \cos^2 \gamma_1, \\ I_2 &= I_x \cos^2 \alpha_2 + I_y \cos^2 \beta_2 + I_z \cos^2 \gamma_2, \\ I_3 &= I_x \cos^2 \alpha_3 + I_y \cos^2 \beta_3 + I_z \cos^2 \gamma_3,\end{aligned}\tag{2.54}$$

можно вычислить главные моменты инерции  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$ .

Направления главных осей тела можно определить из соображений симметрии. Главные оси однородного прямоугольного параллелепипеда параллельны его ребрам. Если тело обладает осевой симметрией, его эллипсоид инерции обладает такой же симметрией. К телам такого рода относится, например, цилиндрическое тело. В этом случае моменты инерции тела относительно всех осей, перпендикулярных к оси симметрии, одинаковы. Одной из главных осей тела является его ось симметрии. Всякая прямая, перпендикулярная к ней, также является главной осью тела. Для шарообразного тела любая ось является главной.

Рассмотрим для примера однородное твердое тело, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда, длины ребер которого равны  $a$ ,  $b$  и  $c$  (рис. 3 на с. 157).

Поместим начало отсчета  $O$  системы координат  $Oxyz$  в центр масс тела. Нетрудно вычислить главные моменты инерции тела:

$$I_x = \frac{m}{12}(b^2 + c^2), \quad I_y = \frac{m}{12}(a^2 + c^2), \quad I_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2).$$

Определим момент инерции тела относительно диагонали  $OO'$ . Воспользуемся для этого формулой (2.53). Можно видеть, что направляющие косинусы оси  $OO'$  равны

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Таким образом, искомый момент инерции есть

$$I_d = \frac{m}{6} \cdot \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (2.55)$$

Для кубического тела

$$I_x = \frac{ma^2}{6}, \quad I_y = \frac{ma^2}{6}, \quad I_z = \frac{ma^2}{6}, \quad I_d = \frac{ma^2}{6}.$$

Последнее понятно, поскольку эллипсоид инерции кубического тела — сферическая поверхность.

Обратим внимание на то, что момент импульса  $\vec{L}$  твердого тела может быть представлен в виде скалярного произведения тензора инерции  $I$  на вектор  $\vec{\omega}$  угловой скорости справа:

$$\begin{aligned} L_1 &= I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3, \\ L_2 &= I_{21}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{23}\omega_3, \\ L_3 &= I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + I_{33}\omega_3. \end{aligned} \quad (2.56)$$



В главных осях имеем

$$L_x = I_x \omega_x, \quad L_y = I_y \omega_y, \quad L_z = I_z \omega_z. \quad (2.57)$$

Мы видим, таким образом, что понятие тензора наряду с понятием вектора является плодотворным.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. Гл. I–V, VII.
2. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: Физматлит, 2001. Ч. 1. Гл. 1–7, 10.

### Работа 1.2.1

#### Определение скорости полета пули при помощи баллистического маятника

**Цель работы:** определить скорость полета пули, применяя законы сохранения и используя баллистические маятники.

**В работе используются:** духовое ружье на штативе, осветитель, оптическая система для измерения отклонений маятника, измерительная линейка, пули и весы для их взвешивания, а также баллистические маятники.

Скорость вылета пули из духового ружья 150–200 м/с, из боевой винтовки ~1000 м/с.

Эти скорости большие по сравнению, скажем, со скоростью пешехода (~2 м/с) или даже автомобиля (~20 м/с). Поскольку размер лабораторной установки обычно порядка нескольких метров, время полета пули составляет величину порядка  $10^{-2}$ – $10^{-3}$  с. Для измерения таких величин необходима дорогостоящая аппаратура, регистрирующая быстропеременные процессы. Дешевле определить скорость пули по импульсу, передаваемому ею некоторому телу при неупругом соударении. В отсутствие внешних сил, а при кратковременном ударе даже и при действии внешних сил, импульс системы пуля—тело сохраняется. Если масса тела значительно больше массы пули, то скорость тела с застрявшей в нем пулей будет значительно меньше скорости пули, и ее легче измерить. Длительность неупругого соударения пули и тела, измеряемая с момента их соприкосновения до прекращения относительного движения, зависит от сопротивления, которое испытывает

пули при движении внутри тела. Оценить ее можно по глубине проникновения пули в тело, предполагая силу сопротивления постоянной. Если при скорости 200 м/с глубина проникновения  $\sim 1$  см, то время соударения  $\sim 10^{-4}$  с. За это время даже тело только в 100 раз более тяжелое, чем пуля, сдвинется всего на 0,1 мм. При малых временах соударения внешние силы конечной величины сообщают импульс, намного меньший импульса пули.

Для измерения переданного пулей импульса и, следовательно, ее скорости используют баллистический маятник. Баллистическим называется маятник, колебания которого вызываются кратковременным начальным импульсом (толчком). Кратковременным можно считать импульс, если время действия сил (время соударения) значительно меньше периода колебаний маятника. При этом отклонение маятника за время соударения значительно меньше амплитуды колебаний — максимального отклонения маятника. В случае гармонических колебаний время соударения  $\tau$ , отнесенное к периоду колебаний  $T$ , и отклонение  $\Delta\varphi$  за время соударения, отнесенное к максимальному отклонению  $\varphi_m$  (амплитуде), связаны простым соотношением

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi_m} \approx \frac{2\pi\tau}{T}.$$

В результате если время соударения составляет 0,01 периода, то отклонение равно 0,06 максимального отклонения.

Связь между максимальным отклонением маятника и начальной скоростью, полученной им в результате толчка, описывается законом сохранения механической энергии, если потери энергии за период значительно меньше энергии его колебаний. В дальнейшем будем считать затухание малым, если за десять колебаний амплитуда уменьшается меньше, чем наполовину. По начальному максимальному отклонению маятника определяются импульс и скорость пули.

При проведении эксперимента необходимо позаботиться о том, чтобы после удара пули колебания маятника происходили в одной плоскости и отсутствовали поперечные движения. Достигается это соответствующей установкой ружья. При этом надо иметь в виду, что вслед за пулей из ружья выходит воздушная струя, которая может оказать влияние на движение маятника и исказить результаты опыта. Поэтому ружье должно располагаться на расстоянии, достаточном для растекания струи. Влияние струи газов на маятник можно оценить с помощью холостого выстрела.

Ружье закреплено на специальном штативе. Чтобы зарядить ружье, надо освободить стопорный винт штатива и наклонить ружье в

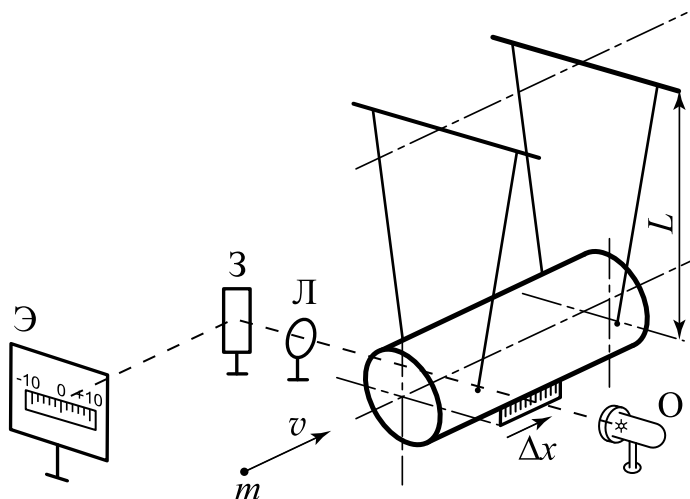


Рис. 1. Схема установки для измерения скорости полета пули

держателе набок. Затем отогнуть ствол в сторону курка до упора. Зарядив ружье, все вернуть в первоначальное состояние.

## І. Метод баллистического маятника, совершающего поступательное движение

Используемый в этой части работы баллистический маятник представляет собой тяжелый цилиндр, подвешенный на четырех нитях одинаковой длины. Он изображен на рис. 1 вместе с измерительной системой. Любая точка цилиндра при колебаниях маятника движется по дуге окружности, радиус которой равен расстоянию по вертикали между уровнями верхнего и нижнего концов нитей подвеса. Это поясняется на рис. 2 (вид сбоку, в плоскости колебаний). Все точки цилиндра движутся по дугам окружностей одинакового радиуса относительно соответствующих каждой точке центров, в частности, центр масс  $M_0$  переходит в  $M_1$  по дуге окружности с центром в точке  $O$ . Все радиусы одинаковы и обозначены  $L$ .

Выше уже говорилось о требованиях к установке ружья. В данном случае его необходимо установить таким образом, чтобы скорость пули перед ударом была направлена горизонтально вдоль оси цилиндра (по крайней мере, достаточно близко к этому). Внешними силами для

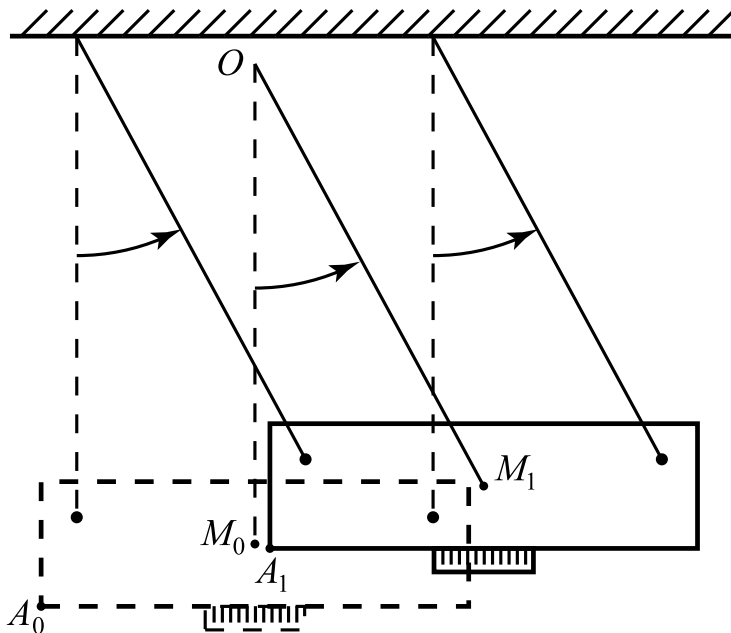


Рис. 2. Схема установки для измерения скорости полета пули

системы пуля—цилиндр являются сила тяжести, которая не имеет горизонтальной компоненты, и силы натяжения нитей, у которых появляются горизонтальные компоненты при отклонении маятника. Однако если отклонения малы, то и эти компоненты малы. Тем более мал по сравнению с импульсом пули их импульс за время соударения. Поэтому закон сохранения импульса при соударении пули с цилиндром имеет вид

$$mu = (M + m)V. \quad (1)$$

Здесь  $m$  — масса пули,  $M$  — масса цилиндра,  $u$  — скорость пули перед ударом,  $V$  — скорость цилиндра и пули после неупругого соударения.

Учитывая, что масса маятника значительно больше массы пули, можно написать

$$u = \frac{M}{m}V. \quad (2)$$

Получив начальную кинетическую энергию, маятник при отклонении будет подниматься до тех пор, пока всю ее не израсходует. Если пренебречь потерями, то вся кинетическая энергия переходит в потенциальную в поле тяжести. Тогда по закону сохранения механической

энергии высота  $h$  подъема маятника над его начальным положением связана с начальной скоростью маятника  $V$  следующим образом:

$$V^2 = 2gh. \quad (3)$$

Здесь  $g$  — ускорение свободного падения.

Высота подъема маятника выражается через угол  $\varphi$  отклонения маятника от вертикали:

$$h = L(1 - \cos \varphi) = 2L \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \text{где } \varphi \approx \frac{\Delta x}{L}. \quad (4)$$

Из (2), (3) и (4) получаем окончательную формулу для определения скорости пули:

$$u = \frac{M}{m} \sqrt{\frac{g}{L}} \Delta x. \quad (5)$$

Измерение отклонения маятника  $\Delta x$  производится с помощью оптической системы, изображенной на рис. 1. По увеличенному изображению шкалы, закрепленной на цилиндре, определяется ее горизонтальное смещение. Таким образом может быть измерено максимальное отклонение маятника и изменение максимальных отклонений для определения затухания колебаний.

Справедливость соотношения (3) и, следовательно, окончательной формулы (5) обусловлена возможностью пренебречь потерями энергии при колебаниях.

Среди причин, вызывающих затухание колебаний маятника, наиболее существенными являются трение о воздух и недостаточно жесткое закрепление точки подвеса.

Если потери энергии за четверть периода колебаний малы по сравнению с максимальной потенциальной энергией, которую маятник при этом приобретает, то их можно не учитывать в законе сохранения (3). Как уже говорилось, затуханием можно пренебречь, если за десять периодов амплитуда колебаний уменьшается меньше, чем в два раза.

## ЗАДАНИЕ

1. Ознакомьтесь с устройством баллистического маятника и измерительной установки, научитесь пользоваться духовым ружьем.
2. Измерьте на аналитических весах массу каждой пульки, полученной у лаборанта, поместите их в ячейки коробки под соответствующими номерами, чтобы не перепутать при использовании. При пользовании весами не забудьте арретировать их перед сменой пулек.
3. Измерьте с помощью двухметровой линейки расстояние  $L$  (см. рис. 1).

4. Соберите оптическую систему, предназначенную для измерения перемещения маятника. Включите осветитель и добейтесь четкого изображения шкалы на экране.
5. Произведите несколько холостых выстрелов по маятнику и убедитесь в том, что он практически не реагирует на удар воздушной струи из ружья.
6. Убедитесь в малом затухании колебаний: за десять колебаний амплитуда уменьшается меньше, чем наполовину.
7. Произведите несколько выстрелов и определите по формуле (5) скорость пули при каждом выстреле.
8. Оцените погрешность определения скорости пули в каждом выстреле.
9. Найдите среднее значение скорости пули и разброс отдельных результатов около среднего значения. С чем связан наблюдаемый разброс: с ошибками опыта или с различием скоростей от выстрела к выстрелу?

### Контрольные вопросы

1. В каком случае маятник называется баллистическим и для чего он может быть использован?
2. При каких условиях начальный импульс баллистического маятника равен импульсу пули?
3. Почему необходимо использовать неупругое соударение пули с маятником?
4. Оцените время соударения пули с маятником в проводимых опытах.
5. От чего зависит точность выполнения закона сохранения импульса при соударении тел?
6. Каковы требования к установке ружья?
7. Что влияет на затухание колебаний баллистического маятника?
8. Какие допущения, сделанные при выводе формулы (5), могут быть проверены экспериментально?
9. Для чего нити подвеса разведены в поперечном направлении (см. рис. 1)?

## II. Метод крутильного баллистического маятника

Схема эксперимента изображена на рис. 3. Пуля массой  $m$  попадает в мишень, укрепленную на стержне  $aa$ , который вместе с грузами  $M$  и проволокой  $\Pi$  образует крутильный маятник. Считая удар пули о мишень неупругим, для определения скорости  $u$  полета пули непосредственно перед ударом воспользуемся законом сохранения момента импульса в виде

$$mur = I\Omega. \quad (6)$$

Здесь  $r$  — расстояние от линии полета пули до оси вращения маятника (до проволоки  $\Pi$ ),  $I$  — момент инерции маятника,  $\Omega$  — его угловая скорость непосредственно после удара.

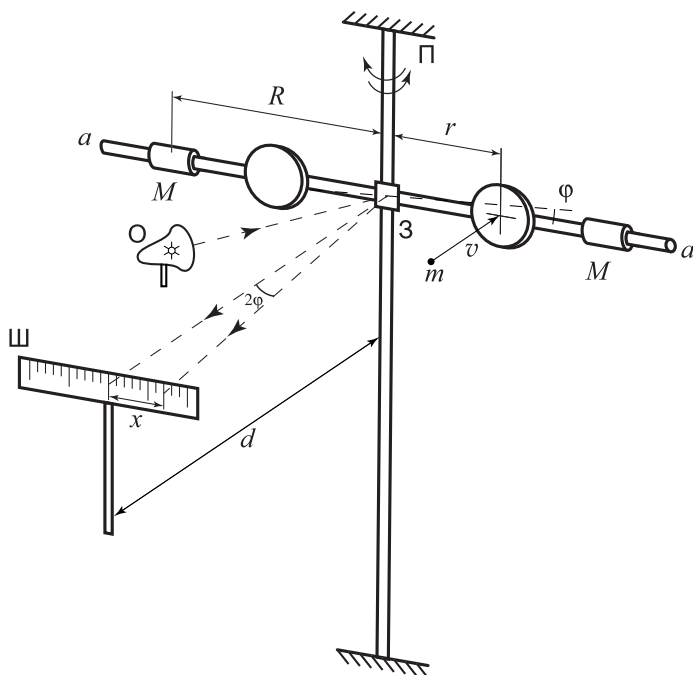


Рис. 3. Схема установки для измерения скорости полета пули с крутильным баллистическим маятником

Законом сохранения момента импульса можно воспользоваться, если время соударения пули с мишенью значительно меньше периода малых колебаний маятника. Поворот маятника за время соударения мал по сравнению с максимальным поворотом маятника при колебаниях. Соответственно мал момент кручения, возникающий при этом в проволоке, по сравнению с моментом при максимальном повороте, который всегда имеет конечную величину. Но главное — малое произведение момента кручения в проволоке на время соударения по сравнению с моментом импульса, которым обладала пуля перед ударом.

Начальная кинетическая энергия вращения маятника переходит в потенциальную — упругую энергию закручивания проволоки и расходуется на необратимые потери — в первую очередь на трение о воздух. Роль потерь можно оценить по изменению амплитуды колебаний за 10 периодов. Если амплитуда уменьшается менее чем наполовину, то затухание колебаний считаем малым, то есть потери энергии за период колебаний значительно меньше энергии колебаний. Пренебрегая

потерями, закон сохранения энергии при колебаниях записываем следующим образом:

$$k \frac{\varphi^2}{2} = I \frac{\Omega^2}{2}. \quad (7)$$

Здесь  $k$  — модуль кручения проволоки П, а  $\varphi$  — максимальный угол поворота маятника.

Из (6) и (7) получаем

$$u = \varphi \frac{\sqrt{kI}}{mr}. \quad (8)$$

Угол максимального закручивания маятника в данных опытах всегда мал и легко находится по смещению  $x$  изображения нити осветителя на измерительной шкале. Из рис. 3 следует

$$\varphi \approx \frac{x}{2d}. \quad (9)$$

Здесь  $d$  — расстояние от шкалы III до оси вращения маятника.

В формулу (8) входит произведение  $kI$ , которое можно найти по измерениям периодов колебаний маятника с грузами  $M$  и без них. В первом случае период колебаний равен

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}}. \quad (10)$$

Во втором случае

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I - 2MR^2}{k}}. \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует

$$\sqrt{kI} = \frac{4\pi MR^2 T_1}{T_1^2 - T_2^2}. \quad (12)$$

Здесь  $R$  — расстояние от центров масс грузов  $M$  до проволоки.

## ЗАДАНИЕ

1. Ознакомьтесь с конструкцией установки, научитесь пользоваться духовым ружьем.
2. Измерьте на аналитических весах массу каждой, полученной у лаборанта пульки, поместите их в ячейки коробки под соответствующими номерами, чтобы не перепутать при использовании. Не забывайте арретировать весы перед сменой пулек.
3. Измерьте с помощью линейки расстояния  $r$ ,  $R$  и  $d$  (см. рис. 3).



4. Настройте оптическую систему, предназначенную для измерения периода маятника. Включите осветитель О, направьте свет на зеркальце З и получите четкое изображение нити осветителя на шкале.
5. Произведите несколько холостых выстрелов и убедитесь, что маятник практически не реагирует на воздушную струю из ружья.
6. Убедитесь в малом затухании колебаний: за десять колебаний амплитуда уменьшается меньше, чем наполовину.
7. Измеряя время 10–15 полных крутильных колебаний маятника, определите  $T_1$  и  $T_2$ . По формуле (12) найдите величину  $\sqrt{kI}$  и оцените ее погрешность.
8. Произведите несколько выстрелов и по формулам (9) и (8) определите скорость пули при каждом выстреле.
9. Оцените погрешность определения скорости пули в каждом выстреле.
10. Найдите среднее значение скорости пули и разброс отдельных результатов около среднего значения. С чем связан разброс результатов: с погрешностями измерений или с различием скоростей пули в разных опытах?

### Контрольные вопросы

1. Как сказывается на применимости данного метода отличие угла, под которым направлена скорость пули к поверхности мишени, от прямого?
2. При каких амплитудах колебаний маятника следует измерять периоды?
3. Как влияет импульс пули на колебания маятника?
4. Какая доля энергии пули переходит в тепло в I и II опыте в результате соударения с маятником?

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. §§ 26, 30, 33, 34, 41.
2. *Стрелков С.П.* Механика. — М.: Наука, 1975. §§ 53, 124, 126.
3. *Хайкин С.Э.* Физические основы механики. — М.: Наука, 1971. §§ 22, 26, 67, 68, 89, 95.

## Работа 1.2.2

### Экспериментальная проверка закона вращательного движения на крестообразном маятнике

**Цель работы:** 1) экспериментально получить зависимость углового ускорения от момента прикладываемых к маятнику сил, убедиться, что угловое ускорение зависит линейно от момента сил, определить момент инерции маятника; 2) проанализировать влияние сил трения, действующих на ось вращения.

**В работе используются:** крестообразный маятник, набор перегрузков, секундомер, линейка, штангенциркуль.

В данной работе экспериментально проверяется уравнение вращательного движения:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M. \quad (1)$$

Для этого используется крестообразный маятник, устройство которого понятно из рис. 1.

Маятник состоит из четырех тонких стержней, укрепленных на втулке под прямым углом друг к другу. Втулка и два шкива различных радиусов ( $r_1$  и  $r_2$ ) насажены на общую ось. Ось закреплена в игольчатых подшипниках, так что вся система может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. Момент инерции маятника можно изменять, передвигая грузы  $m_1$  вдоль стержней. На один из шкивов маятника навита тонкая нить. Привязанная к ней легкая платформа известной массы служит для размещения перегрузков. Вращающий момент создается силой натяжения нити  $T$ :

$$M_n = rT, \quad (2)$$

где  $r$  — радиус шкива ( $r_1$  или  $r_2$ ). Силу  $T$  легко найти из уравнения движения платформы с перегрузком:

$$mg - T = ma. \quad (3)$$

Здесь  $m$  — масса платформы с перегрузком.

Если момент сил трения  $M_{тр}$  в подшипниках мал по сравнению с моментом  $M_n$  силы натяжения нити, то из (1), (2) и (3) следует постоянство ускорения  $a$ , и, измеряя время  $t$ , в течение которого нагруженная платформа из состояния покоя опускается на расстояние  $h$ , можно найти ее ускорение  $a$ :

$$a = \frac{2h}{t^2}, \quad (4)$$

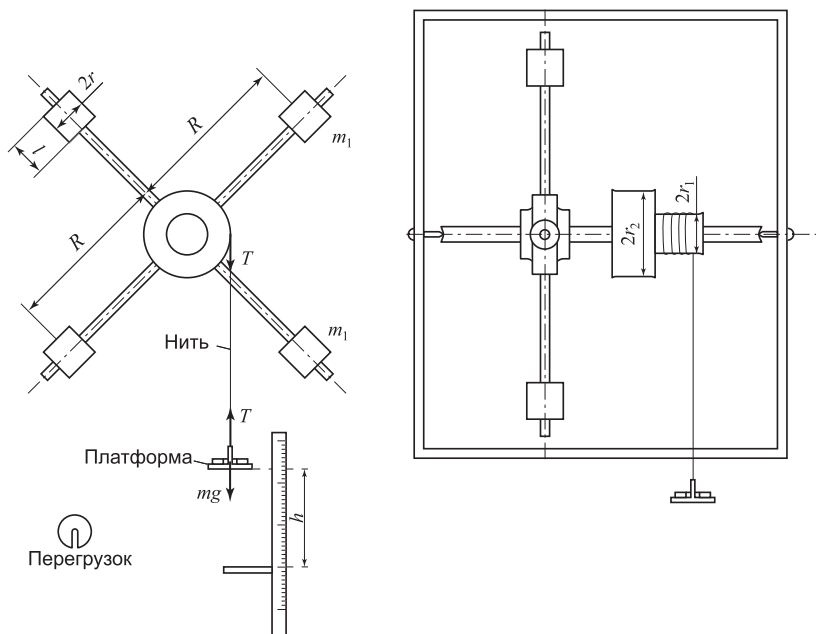


Рис. 1. Крестообразный маятник

связанное с угловым ускорением  $\beta = d\omega/dt$  простым соотношением:

$$a = r \frac{d\omega}{dt} = r\beta. \quad (5)$$

Система уравнений (2) – (5) полностью решает поставленную задачу.

В реальных опытах момент сил трения  $M_{тр}$  может оказаться достаточно большим и существенно исказить результаты опыта. На первый взгляд относительную роль этого момента легко уменьшить, увеличивая массу  $m$ . Это, однако, не так, поскольку:

- 1) увеличение массы  $m$  ведет к увеличению давления маятника на ось, что вызывает возрастание сил трения;
- 2) увеличение  $m$  уменьшает время  $t$  падения платформы и, следовательно, ухудшает точность измерения времени.

В нашей установке момент сил трения снижен благодаря креплению оси маятника в игольчатых подшипниках (см. рис. 1), однако влияние трения вполне ощутимо и должно приниматься во внимание при обработке результатов опыта.

Для дальнейшей работы удобно преобразовать уравнение (1), выделив момент сил трения в явном виде:

$$M_{\text{н}} - M_{\text{тр}} = I \frac{d\omega}{dt}. \quad (6)$$

Прежде чем начинать эксперимент, установите грузы  $m_1$  на некотором расстоянии  $R$  от оси маятника так, чтобы маятник находился в безразличном равновесии. Полезно несколько раз привести маятник во вращение, каждый раз давая ему возможность остановиться. Подумайте, зачем это нужно. Как на основании этих опытов узнать, хорошо ли сбалансирован маятник (т. е. действительно ли он находится в безразличном равновесии)? На любой из шкивов намотайте нить в один слой и установите высоту  $h$  падения платформы с перегрузком. Рекомендуемая высота 70–100 см. Все измерения удобно проводить при постоянной высоте  $h$  и при 3–5 значениях перегрузков.

Экспериментальная часть работы делится на две части. В первой исследуется вращательное движение маятника под действием различных перегрузков при постоянном моменте инерции системы (положение грузов  $m_1$  фиксировано). Из данных этого опыта определяют момент инерции системы  $I$ , а также момент сил трения  $M_{\text{тр}}$ , действующих в подшипниках.

Во второй части изучается вращательное движение маятника при различных (5–6) значениях момента инерции системы. Момент инерции системы варьируют, изменяя расстояние  $R$  центров масс грузов от оси вращения. Измеренные значения момента инерции сравниваются с расчетными. Грузы  $m_1$  имеют форму цилиндров с радиусом  $r$  и с образующей  $l$ . Момент инерции всей системы вычисляется по формуле

$$I = I_0 + 4m_1 R^2 + 4 \frac{m_1 l^2}{12} + 4 \frac{m_1 r^2}{4}, \quad (7)$$

где  $I_0$  — момент инерции системы без грузов  $m_1$ . Вывод этой формулы мы предоставляем читателю.

## ЗАДАНИЕ

1. Добейтесь безразличного равновесия маятника при некотором расстоянии  $R$  грузов  $m_1$  от его оси. Расстояние  $R$  нужно измерить и записать.
2. Увеличивая натяжение нити  $T$  с помощью перегрузков, найдите минимальное значение массы перегрузка  $m_0$ , при котором маятник начинает вращаться. Проведите этот опыт на обоих шкивах. Оцените величину момента сил трения.

3. Возьмите перегрузок и, проведя опыт, измерьте время падения груза. Повторите опыт 4–5 раз. Усредните найденные значения  $t$ . Используя формулы (2) – (5), определите угловое ускорение  $\beta = \frac{2h}{rt^2}$  и вращающий момент  $M_n$ . Данные удобно занести в таблицу:

Диаметр шкива	Масса перегрузка	Масса платформы с перегрузком	Время падения					$\bar{t} \pm \sigma_{\bar{t}}$	$\beta \pm \sigma_{\beta}$	$M_n \pm \sigma_M$
			$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	с	с <sup>-2</sup>	Н·м

4. Повторите этот опыт для 3–4 различных значений  $m$  как на одном, так и на другом шкиве (всего 6–8 измерений). Данные внесите в таблицу.
5. Результаты экспериментов (на обоих шкивах) представьте в виде графика, по оси абсцисс которого отложите величину  $M_n$ , а по оси ординат — угловое ускорение маятника  $\beta$ . Из графика определите момент инерции системы  $I$  и момент сил трения  $M_{тр}$  (пересечение линейной зависимости  $\beta(M_n)$  с осью абсцисс). Оцените ошибки в определении этих величин.
6. Для двух различных значений момента инерции системы, получающихся при максимальном и минимальном удалении грузов  $m_1$  от оси вращения, повторите измерения, описанные в пп. 3–5.
7. Сравните результаты определения  $M_{тр}$  во всех экспериментах. Зависит ли величина  $M_{тр}$  от момента инерции системы?
8. Повторите эксперименты, описанные в п. 3, для трех различных значений моментов инерции системы, используя только один перегрузок и шкив большего радиуса. Для каждого случая определите величину  $I$  по формуле (6). Значение  $M_{тр}$  возьмите из п. 5.
9. Результаты, полученные для  $I$  при различных  $R$  во всех экспериментах, представьте в виде графика  $I = f(R^2)$ , где  $R$  — расстояние грузов  $m_1$  от оси вращения. По графику определите момент инерции системы  $I_0$  без грузов.

Находятся ли результаты эксперимента в согласии с формулой (7)? Как меняется относительная роль двух последних членов формулы (7) при изменении величины  $R$ ? Существенно ли отличается поправка, определяемая этими членами, от ошибок измерений? Ответ на два последних вопроса лучше всего дать в виде графика зависимости  $\Delta I/I$

от  $R^2$ , где

$$\Delta I = 4 \frac{ml^2}{12} + 4 \frac{mr^2}{4}.$$

10. Укажите возможные причины ошибок эксперимента.

### Контрольные вопросы

1. Почему стремятся уменьшить величину момента сил трения в оси маятника? Казалось бы, даже большую величину  $M_{\text{тр}}$  можно легко учесть с помощью уравнения (6).
2. Какова роль толщины и упругости нити в опыте?
3. Какую величину в данном эксперименте следует измерять с наибольшей точностью?
4. Сформулируйте и докажите теорему Гюйгенса–Штейнера.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. §§ 30, 32, 35, 36.
2. *Стрелков С.П.* Механика. — М.: Наука, 1975. Гл. VII, §§ 52, 53, 59; гл. V, §§ 41, 42.

## Работа 1.2.3

### Определение моментов инерции твердых тел с помощью трифилярного подвеса

**Цель работы:** измерение момента инерции ряда тел и сравнение результатов с расчетами по теоретическим формулам; проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса–Штейнера.

**В работе используются:** трифилярный подвес, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить (диск, стержень, полый цилиндр и другие).

Инерционность при вращении тела относительно оси определяется моментом инерции тела относительно этой оси (см. введение к данному разделу). Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения вычисляется по формуле

$$I = \int r^2 dm. \quad (1)$$

Здесь  $r$  — расстояние элемента массы тела  $dm$  от оси вращения. Интегрирование проводится по всей массе тела  $m$ .

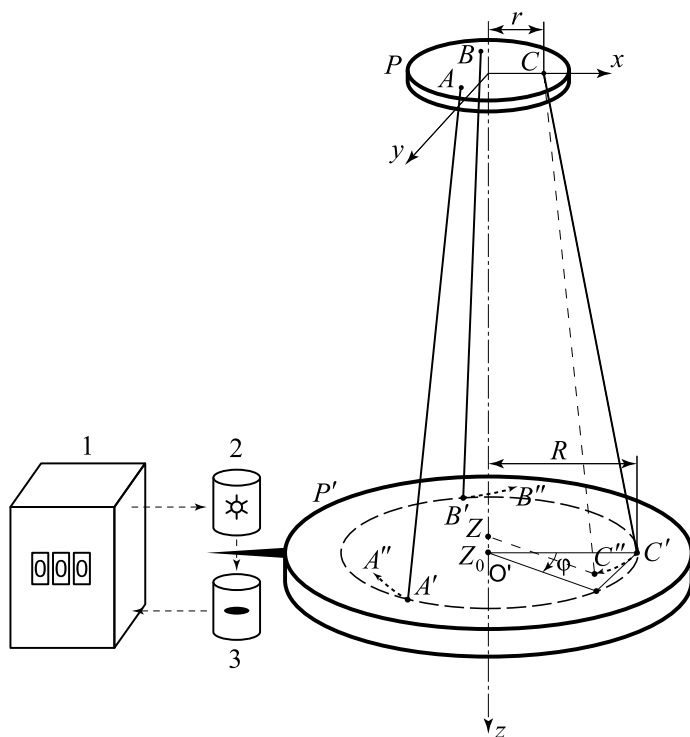


Рис. 1. Трифилярный подвес

Для однородных тел известной плотности при заданных размерах и достаточно простой форме момент инерции можно вычислить. Для неоднородных тел и тел сложной формы момент инерции можно определить экспериментально. Удобно использовать устройство, показанное на рис. 1 и называемое трифилярным подвесом. Оно состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформы  $P$  и подвешенной к ней на трех симметрично расположенных нитях  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  вращающейся платформы  $P'$ .

Платформа  $P$  укреплена на кронштейне и снабжена рычагом (на рисунке не показан), при помощи которого в системе можно создать крутильные колебания путем небольшого поворота верхней платформы. Лучше поворачивать верхнюю платформу, укрепленную на неподвижной оси, чем подвешенную на нитях нижнюю, так как нижнюю платформу трудно закрутить не вызвав ее раскачиваний, подобных

движению маятника, учет которых сильно усложнил бы расчеты. После поворота, вызывающего крутильные колебания, верхняя платформа остается неподвижной в течение всего процесса колебаний. После того, как нижняя платформа  $P'$  оказывается повернутой на угол  $\varphi$  относительно верхней платформы  $P$ , возникает момент сил, стремящийся вернуть нижнюю платформу в положение равновесия, при котором относительный поворот платформ отсутствует. Но в положении равновесия платформа не останавливается, так как имеет угловую скорость (кинетическую энергию вращения). В результате платформа совершает крутильные колебания.

Если пренебречь потерями энергии на трение (о воздух и в креплениях нитей), то уравнение сохранения энергии при колебаниях можно записать следующим образом:

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E. \quad (2)$$

Здесь  $I$  — момент инерции платформы вместе с исследуемым телом,  $m$  — масса платформы с телом,  $\varphi$  — угол поворота платформы от положения равновесия системы, точкой обозначена производная по времени (угловая скорость),  $z_0$  — координата по вертикали центра нижней платформы  $O'$  при равновесии ( $\varphi = 0$ ),  $z$  — координата той же точки при некотором угле поворота  $\varphi$ . Первый член в левой части уравнения — кинетическая энергия вращения, второй член — потенциальная энергия в поле тяжести,  $E$  — полная энергия системы (платформы с телом).

Отметим, что, как показывает соотношение (2), возвращающая сила возникает благодаря силе тяжести.

Воспользуемся системой координат  $x, y, z$ , связанной с верхней платформой, как показано на рис. 1. Координаты верхнего конца одной из нитей подвеса точки  $C$  в этой системе —  $(r, 0, 0)$ . Нижний конец данной нити  $C'$ , находящийся на нижней платформе, при равновесии имеет координаты  $(R, 0, z_0)$ , а при повороте платформы на угол  $\varphi$  эта точка переходит в  $C''$  с координатами  $(R \cos \varphi, R \sin \varphi, z)$ . Расстояние между точками  $C$  и  $C''$  равно длине нити  $L$ . Поэтому

$$(R \cos \varphi - r)^2 + R^2 \sin^2 \varphi + z^2 = L^2. \quad (3)$$

Учитывая, что при малых углах поворота  $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$ , получаем

$$z^2 = L^2 - R^2 - r^2 + 2Rr \cos \varphi = z_0^2 - 2Rr(1 - \cos \varphi) \approx z_0^2 - Rr\varphi^2. \quad (4)$$



Извлекая из (4) квадратный корень и учитывая малость угла  $\varphi$ , имеем

$$z \approx \sqrt{z_0^2 - Rr\varphi^2} \approx z_0 \sqrt{1 - \frac{Rr\varphi^2}{z_0^2}} \approx z_0 - \frac{Rr\varphi^2}{2z_0}. \quad (5)$$

Подставляя это значение  $z$  в уравнение (2), получаем

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = E. \quad (6)$$

Дифференцируя по времени и сокращая на  $\dot{\varphi}$ , находим уравнение крутильных колебаний системы:

$$I\ddot{\varphi} + mg\frac{Rr}{z_0}\varphi = 0. \quad (7)$$

Производная по времени от  $E$  равна нулю, так как потерями энергии на трение, как уже было сказано выше, пренебрегаем.

Решение этого уравнения, как нетрудно убедиться простой подстановкой, имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \sin \left( \sqrt{\frac{mgRr}{Iz_0}}t + \theta \right). \quad (8)$$

Здесь амплитуда  $\varphi_0$  и фаза  $\theta$  колебаний определяются начальными условиями. Период крутильных колебаний нашей системы равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}}. \quad (9)$$

Обратим внимание на то, что из этой формулы при  $r = R$  и  $I = mR^2$  (тонкое кольцо) получаем формулу для математического маятника.

Из (9) находим формулу для определения момента инерции:

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2 z_0}. \quad (10)$$

Учитывая, что параметры установки  $R$ ,  $r$  и  $z_0$  при проведении опытов не меняются, удобно переписать последнее уравнение следующим образом:

$$I = kmT^2. \quad (11)$$

Здесь  $k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0}$  — величина, постоянная для данной установки.

Таким образом, полученные формулы позволяют определить момент инерции платформы с телом и отдельно платформы по соответствующим периодам крутильных колебаний. Затем вычисляем момент инерции тела, пользуясь аддитивностью, в справедливости которой можно убедиться, проведя измерения сначала для каждого из двух тел отдельно, а затем для обоих тел вместе.

При выводе формул предполагалось, что малы необратимые потери энергии, связанные с трением, то есть мало затухание колебаний. О затухании колебаний можно судить, сравнивая время  $\tau$  уменьшения амплитуды колебаний в 2–3 раза с периодом колебаний  $T$ . Необратимыми потерями энергии можно пренебречь, если выполняется условие

$$\tau \gg T. \quad (12)$$

В данной работе рекомендуется период колебаний определять с относительной погрешностью 0,5%. Число колебаний, по которым надо вычислять период, определяется этой погрешностью и погрешностью измерения времени.

Для счета числа колебаний используется счетчик, состоящий из осветителя (2), фотоэлемента (3) и пересчетного устройства (1) (см. рис. 1). Легкий лепесток, укрепленный на платформе, при колебаниях пересекает световой луч дважды за период. Соответствующие сигналы от фотоэлемента поступают на пересчетное устройство.

## ЗАДАНИЕ

1. Не нагружая нижней платформы, проверьте, пригодна ли установка для измерений, то есть нормально ли функционирует устройство для возбуждения крутильных колебаний, не возникают ли при этом нежелательные маятниковообразные движения платформы, работает ли счетчик числа колебаний.
2. Возбудив в установке крутильные колебания, проверьте, достаточно ли хорошо выполняется соотношение (12). При этом добиваться большой точности в измерении периода и времени уменьшения амплитуды в 2–3 раза не имеет смысла. Проводить измерение рекомендуется для ненагруженной платформы. Объясните, почему нужно так делать.
3. Найдите рабочий диапазон амплитуд колебаний. Амплитуду надо уменьшать до тех пор, пока период колебаний, определенный по 20–30 полным колебаниям, не перестанет зависеть от амплитуды. Рабочий диапазон начинается с тех амплитуд, для которых период совпадает с периодом колебаний с амплитудой вдвое меньшей.
4. Измерьте параметры установки:  $z_0$ ,  $R$  и  $r$  (см. рис. 1). По ним вычислите константу установки  $k$ , входящую в формулу (11), и ее погрешность  $\sigma_k$ .

5. Определите момент инерции ненагруженной платформы (здесь и далее периоды колебаний следует определять с относительной погрешностью не хуже 0,5%).
6. Измерьте моменты инерции двух тел из имеющегося набора сначала порознь, а затем вместе. Помещать тела на платформу надо так, чтобы общий центр масс всегда находился на оси вращения (оси симметрии) системы, то есть чтобы не было заметного перекоса платформы. Для удобства на платформе нанесен ряд концентрических окружностей. Проверьте аддитивность моментов инерции, то есть справедливость соотношения  $I = I_1 + I_2$ , где  $I_1$  и  $I_2$  — моменты инерции первого и второго тел, а  $I$  — общий момент инерции. Погрешность, с которой выполняется это соотношение, является хорошей мерой точности проводимых измерений. Рассчитайте теоретически моменты инерции  $I$  всех используемых в эксперименте тел и сравните результаты с измеренными значениями  $I$ .

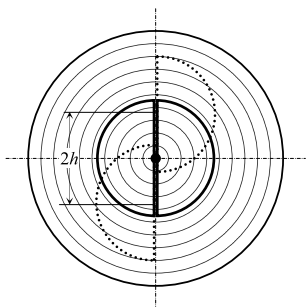


Рис. 2. Расположение тел на платформе

7. Поместите на платформу диск, разрезанный по диаметру. Постепенно раздвигая половинки диска так, чтобы их общий центр масс всё время оставался на оси вращения платформы (рис. 2), снимите зависимость момента инерции такой системы  $I$  от расстояния  $h$  каждой из половинок до оси вращения (центра платформы).

Постройте график зависимости  $I(h^2)$  и определите по нему массу и момент инерции диска.

### Контрольные вопросы

1. При каких упрощающих предположениях выведена формула (10)?
2. Можно ли пользоваться предложенным методом для определения моментов инерции тел в том случае, когда ось вращения платформы не проходит через центр масс?
3. Выведите формулу Гюйгенса–Штейнера.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. §§ 35, 36, 42.
2. Стрелков С.П. Механика. — М.: Наука, 1975. §§ 52, 55, 59.
3. Хайкин С.Э. Физические основы механики. — М.: Наука, 1971. §§ 67, 68, 89.

## Работа 1.2.4

### Определение главных моментов инерции твердых тел с помощью крутильных колебаний

**Цель работы:** измерить периоды крутильных колебаний рамки при различных положениях закрепленного в ней тела, проверить теоретическую зависимость между периодами крутильных колебаний тела относительно различных осей, определить моменты инерции относительно нескольких осей для каждого тела, по ним найти главные моменты инерции тел и построить эллипсоид инерции.

**В работе используются:** установка для получения крутильных колебаний (жесткая рамка, имеющая винты для закрепления в ней твердых тел, подвешенная на натянутой вертикально проволоке), набор исследуемых твердых тел, секундомер.

Инерционные свойства твердого тела при вращении определяет не только величина его массы, но и ее пространственное распределение. Последнее характеризует физическая величина, которая называется тензором инерции. Тензор инерции твердого тела может быть представлен симметричной матрицей, которая полностью определяется заданием шести элементов. Если для какой-либо системы координат известны все шесть элементов матрицы, то момент инерции тела относительно произвольной оси, проходящей через начало координат, может быть вычислен по формуле (2.46). Как и всякая симметричная матрица, матрица тензора инерции может быть приведена к диагональному виду, диагональные элементы  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$  которой называются главными моментами инерции тела. Геометрическим образом тензора инерции является эллипсоид, уравнение которого в главных осях имеет вид (2.51):

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1. \quad (1)$$

Этот эллипсоид принято называть эллипсоидом инерции. Эллипсоид инерции жестко связан с телом, для которого построен. Координатные оси  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  совпадают с главными осями тела. Если начало координат  $O$  совпадает с центром масс тела, то эллипсоид инерции называется центральным.

Знание эллипсоида инерции позволяет найти момент инерции тела относительно любой оси, проходящей через центр эллипсоида. Для этого необходимо вдоль выбранной оси провести радиус-вектор  $\vec{r}$  до

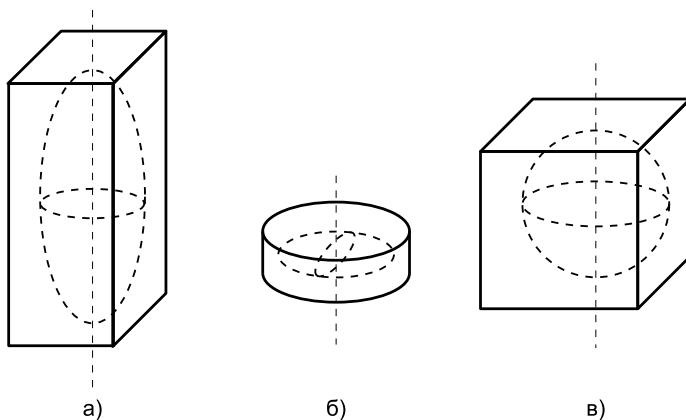


Рис. 1. Эллипсоиды инерции параллелепипеда, диска и куба

пересечения с поверхностью эллипсоида. Длина  $r$  будет определять момент инерции тела относительно этой оси:

$$I = \frac{1}{r^2}. \quad (2)$$

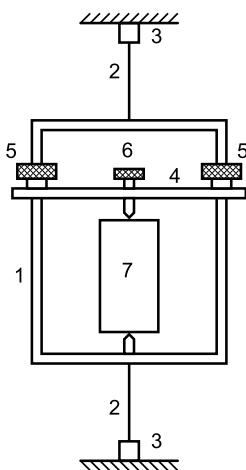


Рис. 2. Схема установки

Главные оси тела часто можно определить из его симметрии. Например, оси симметрии цилиндра или шара являются главными осями, так как для всех осей, лежащих в плоскости перпендикулярной оси симметрии, моменты инерции одинаковые, и, следовательно, эллипсоид инерции обладает такой же симметрией, являясь эллипсоидом вращения относительно оси симметрии тела. Эллипсоид инерции оказывается симметричным и для некоторых тел, не обладающих осевой симметрией. Например, для прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием и для кубика. Для последнего эллипсоид превращается в сферическую поверхность, из чего следует, что величина момента инерции не зависит от направления оси, так же как в случае шара. На рис. 1 для прямоугольного параллелепипеда, диска и кубика нарисованы (в произвольном масштабе) центральные эллипсоиды инерции.

В данной работе используется устройство для получения крутильных колебаний, изображенное на рис. 2. Рамка 1 жестко соединена с проволокой 2, закрепленной вертикально в специальных зажимах 3, позволяющих сообщить начальное закручивание для возбуждения крутильных колебаний вокруг вертикальной оси. В рамке с помощью планки 4, гаек 5 и винта 6 закрепляется твердое тело 7. На теле имеются специальные выемки, позволяющие его закрепить так, чтобы ось вращения проходила в теле под различными углами через центр масс.

Крутильные колебания рамки с телом описываются уравнением

$$(I + I_p) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -f \varphi. \quad (3)$$

Здесь  $I$  и  $I_p$  — моменты инерции тела и рамки относительно оси вращения,  $\varphi$  — угол поворота рамки, меняющийся со временем  $t$ ,  $f$  — модуль кручения проволоки. Период крутильных колебаний рамки с телом определяется формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I + I_p}{f}}. \quad (4)$$

На рис. 3 показано, как проходят оси вращения в параллелепипеде. Оси  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  являются главными. Моменты инерции относительно этих осей обозначим соответственно  $I_x$ ,  $I_y$  и  $I_z$ . Ось  $DD'$ , проходящая вдоль диагонали параллелепипеда, с главными осями составляет такие же углы, как с ребрами  $a$ ,  $b$  и  $c$ , которые им параллельны. Косинусы этих углов соответственно  $a/d$ ,  $b/d$  и  $c/d$ , где длина диагонали  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .

Момент инерции  $I_d$  при вращении относительно диагонали  $DD'$  выражается через главные моменты с помощью формулы (2.53):

$$I_d = I_x \frac{a^2}{d^2} + I_y \frac{b^2}{d^2} + I_z \frac{c^2}{d^2}. \quad (5)$$

Отсюда получаем соотношение

$$(a^2 + b^2 + c^2) I_d = a^2 I_x + b^2 I_y + c^2 I_z. \quad (6)$$

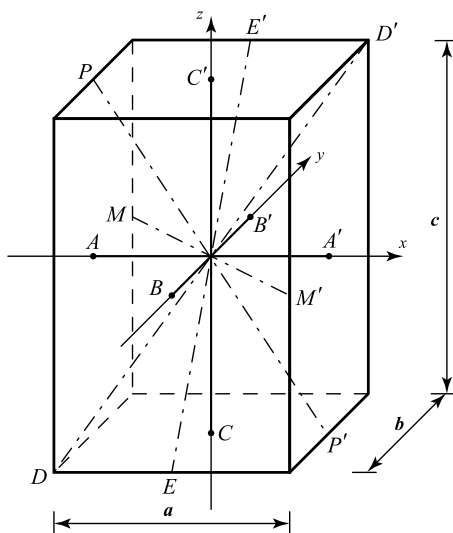


Рис. 3. Оси вращения прямоугольного параллелепипеда

Используя связь момента инерции с периодом крутильных колебаний (4), получаем соотношение между периодами колебаний

$$(a^2 + b^2 + c^2)T_d^2 = a^2T_x^2 + b^2T_y^2 + c^2T_z^2. \quad (7)$$

Экспериментальная проверка этого соотношения является вместе с тем и проверкой соотношения (5). Из этой формулы следуют также выражения, связывающие моменты инерции относительно осей  $EE'$ ,  $MM'$  и  $PP'$  с главными моментами инерции. С помощью (4) и для этих осей получаем выражения для периодов крутильных колебаний. Студентам предлагаем самим найти косинусы углов, которые данные оси составляют с главными осями, и получить формулы

$$(b^2 + c^2)T_E^2 = b^2T_y^2 + c^2T_z^2, \quad (8)$$

$$(a^2 + c^2)T_P^2 = a^2T_x^2 + c^2T_z^2, \quad (9)$$

$$(a^2 + b^2)T_M^2 = a^2T_x^2 + b^2T_y^2. \quad (10)$$

Эти соотношения также необходимо проверить экспериментально.

## ЗАДАНИЕ

1. Ознакомьтесь с установкой для получения крутильных колебаний. Проверьте: 1) хорошо ли натянута проволока, 2) жестко ли закреплена на ней рамка, 3) нормально ли работает устройство для возбуждения крутильных колебаний, 4) не возникают ли, кроме крутильных колебаний рамки, еще и колебания в вертикальной плоскости (их не должно быть).
2. Научитесь закреплять тела в рамке. На телах имеются специальные углубления, в которые должны входить винты, имеющиеся на рамке. Для закрепления тела в рамке (рис. 2) нужно, отвернув гайки 5, поднять вверх подвижную планку 4 на рамке, вставить тело в рамку, попав углублением, имеющимся на теле, на выступ нижней стороны рамки. Опуская планку, необходимо выступающим из планки на 5–7 мм винтом 6 попасть в отверстие на теле. Закрепив планку гайками 5, немного подожмите тело винтом 6. Если в дальнейшем обнаружится, что тело поворачивается в рамке, надо его еще поджать винтом 6.
3. Перед каждой серией измерений (пустая рамка или рамка с определенным закреплением тела) необходимо выбрать амплитуду крутильных колебаний (угол максимального поворота рамки). Амплитуда выбрана правильно, если при уменьшении ее в два раза период колебаний,

определяемый по 10–15 колебаниям, остается тем же. Если этого не происходит, то амплитуду надо еще уменьшать.

4. Для пустой рамки и всех тел при различных их положениях относительно оси колебаний определите периоды колебаний по времени 10–15 колебаний, повторяя каждое измерение не менее 3 раз.
5. Штангенциркулем измерьте геометрические размеры параллелепипеда. Вычислите главные моменты инерции. По полученным ранее данным проверьте справедливость формул (7) – (10).
6. Нарисуйте сечения эллипсоида инерции главными плоскостями. Для этого выберите измеренные периоды колебаний для осей в главной плоскости и для каждой оси вычислите величину  $1/\sqrt{T^2 - T_p^2}$ , которая пропорциональна расстоянию от центра масс тела до точки пересечения эллипсоида с этой осью (здесь  $T_p$  — период крутильных колебаний пустой рамки). Эти величины надо отложить вдоль направлений соответствующих осей и через их концы (должно получиться 8 точек) провести эллипс. Это и будет сечение эллипсоида главной плоскостью (в произвольном масштабе). Найдите отношения главных моментов инерции.
7. Проведите аналогичные измерения для куба и постройте для него соответствующие сечения эллипсоида инерции. Убедитесь в равенстве всех центральных моментов инерции.

### Контрольные вопросы

1. Что такое главные моменты инерции твердого тела?
2. Как выглядит эллипсоид инерции кубика?
3. Как происходит свободное (в отсутствие внешних моментов сил) вращение твердого тела?

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. §§ 53, 54.
2. *Стрелков С.П.* Механика. — М.: Наука, 1975. §§ 63, 64.



### Работа 1.2.5

## Исследование вынужденной регулярной прецессии гироскопа

**Цель работы:** исследовать вынужденную прецессию гироскопа; установить зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующих на ось гироскопа; определить скорость вращения ротора гироскопа и сравнить ее со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии.

**В работе используются:** гироскоп в кардановом подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка.

Уравнения движения твердого тела можно записать в виде

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}, \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (2)$$

Здесь (1) выражает закон движения центра масс тела, а (2) — уравнение моментов. Поскольку твердое тело имеет только шесть степеней свободы, этих двух векторных уравнений достаточно для полного описания состояния его движения.

Если сила  $\vec{F}$  не зависит от угловой скорости, а момент  $\vec{M}$  — от скорости поступательного движения, то уравнения (1) и (2) можно рассматривать независимо друг от друга. В баллистике, например при движении снаряда в воздухе, это невозможно. В случае же, когда такое раздельное рассмотрение возможно, уравнение (1) соответствует просто задаче о движении материальной точки, а уравнение (2) — задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. В данной работе рассматривается последняя из этих задач.

Момент импульса твердого тела в его главных осях  $x, y, z$  равен

$$\vec{L} = \vec{i} I_x \omega_x + \vec{j} I_y \omega_y + \vec{k} I_z \omega_z, \quad (3)$$

где  $I_x, I_y, I_z$  — главные моменты инерции,  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — компоненты вектора угловой скорости  $\vec{\omega}$ . Быстро вращающееся тело, для которого, например,

$$I_z \omega_z \gg I_x \omega_x, \quad I_y \omega_y,$$

принято называть гироскопом. Гироскоп называется уравновешенным, если его центр масс неподвижен.

В силу (2) приращение момента импульса определяется интегралом

$$\Delta \vec{L} = \int \vec{M} dt. \quad (4)$$

Если момент внешних сил действует в течение короткого промежутка времени, из интеграла (4) следует, что приращение  $\Delta \vec{L}$  момента импульса значительно меньше самого момента импульса:

$$|\Delta \vec{L}| \ll |\vec{L}|.$$

С этим связана замечательная устойчивость, которую приобретает движение гироскопа после приведения его в быстрое вращение.

Выясним, какие силы надо приложить к гироскопу, чтобы изменить направление его оси. Рассмотрим для примера маховик, вращающийся вокруг оси  $z$ , перпендикулярной к плоскости маховика (рис. 1). Будем считать, что

$$\omega_z = \omega_0, \quad \omega_x = 0, \quad \omega_y = 0.$$

Пусть ось вращения повернулась в плоскости  $zx$  по направлению к оси  $x$  на бесконечно малый угол  $d\varphi$ . Такой поворот означает добавочное вращение маховика вокруг оси  $y$ , так что

$$d\varphi = \Omega dt,$$

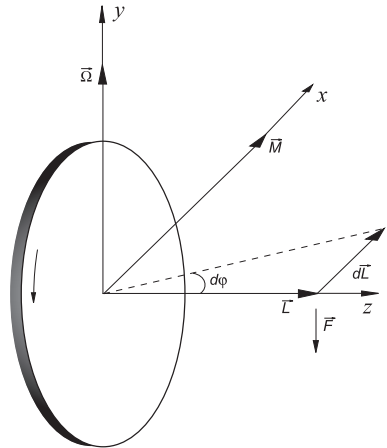


Рис. 1. Маховик

где  $\Omega$  — угловая скорость такого вращения. Будем предполагать, что

$$L_\Omega \ll L_{\omega_0}. \quad (5)$$

Это означает, что момент импульса маховика, равный  $I_z \omega_0$  до приложения внешних сил, только повернется в плоскости  $zx$  по направлению к оси  $x$  не изменяя своей величины. Таким образом,

$$|d\vec{L}| = L d\varphi = L \Omega dt.$$

Но это изменение направлено вдоль оси  $x$ , поэтому вектор  $d\vec{L}$  можно представить в виде векторного произведения вектора угловой скорости  $\vec{\Omega}$ , направленного вдоль оси  $y$ , на вектор собственного момента импульса маховика, направленного вдоль оси  $z$ ,

$$d\vec{L} = \vec{\Omega} \times \vec{L} dt,$$

т. е.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}. \quad (6)$$

Полученное уравнение имеет простой смысл: вектор  $\vec{L}$  (а значит и ось гироскопа) вращается с постоянной угловой скоростью  $\vec{\Omega}$  и неизменен по модулю (действительно, если некий радиус-вектор  $\vec{r}$  вращается с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ , то скорость его конца, согласно определению вектора  $\vec{\omega}$ , равна  $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ).

Окончательно, в силу (2) имеем

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}. \quad (7)$$

Формула (7) справедлива, если выполнено условие (5). Она позволяет определить момент сил  $\vec{M}$ , который необходимо приложить к маховику для того, чтобы вызвать вращение оси маховика с угловой скоростью  $\vec{\Omega}$ . Мы видим, таким образом, что для поворота оси вращающегося маховика к оси  $x$  необходимо приложить силы, направленные не вдоль оси  $x$ , а вдоль оси  $y$ , так чтобы их момент  $\vec{M}$  был направлен вдоль оси  $x$ .

Под действием момента  $\vec{M}$  внешних сил ось гироскопа медленно вращается вокруг оси  $y$  с угловой скоростью  $\Omega$ . Такое движение называется регулярной прецессией гироскопа. В частности, создающей момент внешней силой может оказаться сила тяжести, если центр масс гироскопа не совпадает с точкой подвеса. Для гироскопа массой  $m_{\Gamma}$ , у которого ось собственного вращения наклонена на угол  $\alpha$  от вертикали, скорость прецессии, происходящей вокруг вертикальной оси под действием силы тяжести, равна

$$\Omega = \frac{M}{I_z \omega_0 \sin \alpha} = \frac{m_{\Gamma} g l_{\text{ц}} \sin \alpha}{I_z \omega_0 \sin \alpha} = \frac{m_{\Gamma} g l_{\text{ц}}}{I_z \omega_0}, \quad (8)$$

где  $l_{\text{ц}}$  — расстояние от точки подвеса до центра масс гироскопа, т. е. скорость прецессии не зависит от угла  $\alpha$ .

Для изучения регулярной прецессии уравновешенного гироскопа к его оси подвешивают дополнительные грузы. Это смещает общий

центр масс и создает момент сил тяжести, вызывающий прецессию. Скорость прецессии в этом случае равна

$$\Omega = \frac{mgl}{I_z \omega_0}, \quad (9)$$

где  $m$  — масса груза,  $l$  — расстояние от центра карданова подвеса до точки крепления груза на оси гироскопа (рис. 3).

В данной работе исследуется регулярная прецессия уравновешенного гироскопа.

Уравновешенный гироскоп, закрепленный в кольцах карданова подвеса, показан на рис. 2. Наружное кольцо подвеса А может свободно поворачиваться вокруг вертикальной оси  $aa$ . Внутреннее кольцо Б связано с кольцом А горизонтальной осью  $bb$ . В кольце Б укреплен гироскоп, ось вращения которого  $вв$  перпендикулярна к оси  $bb$ . Центр масс гироскопа находится на пересечении всех трех осей и при любом повороте колец сохраняет свое положение в пространстве. Получается, что гироскоп как бы подвешен за центр масс.

Экспериментальная установка для исследования прецессии уравновешенного гироскопа показана на рис. 3. Ротором гироскопа является ротор высокооборотного электромотора М, питающегося током частотой 400 Гц. Кожух мотора (статор, имеющий обмотки, питаемые током частотой 400 Гц) скреплен с кольцом Б (рис. 2 и 3). Мотор с кольцом Б может вращаться в кольце А вокруг горизонтальной оси  $bb$ , которое может вращаться вокруг вертикальной оси  $aa$ . Ротор электромотора представляет массивный стальной цилиндр с прожилками меди, образующими «беличье колесо». Обозначенный на рис. 3 буквой С рычаг направлен по оси симметрии ротора. На рычаг подвешивают грузы Г. Подвешивая различные грузы, можно менять силу  $F$ , момент которой определяется расстоянием  $l$  от точки подвеса до горизонтальной оси кольца А (до центра масс гироскопа), указанным на самой установке.

Выше при выводе формул для прецессии предполагалось, что действующие на гироскоп силы лежат в плоскости  $zy$ , в которой лежат векторы угловых скоростей собственного вращения и прецессии. В этом случае, как уже говорилось, момент сил меняет лишь направление момента импульса гироскопа, но не его величину. Силы трения не лежат в плоскости осей вращения. Они приводят к изменению момента импульса и по направлению, и по величине. Для ротора гироскопа действие сил трения скомпенсировано действием электромотора. Для осей карданова подвеса компенсации нет. В результате ось гироскопа будет опускаться в направлении действия груза. Читателю предлагается проанализировать роль сил трения и оценить погрешности, которые воз-

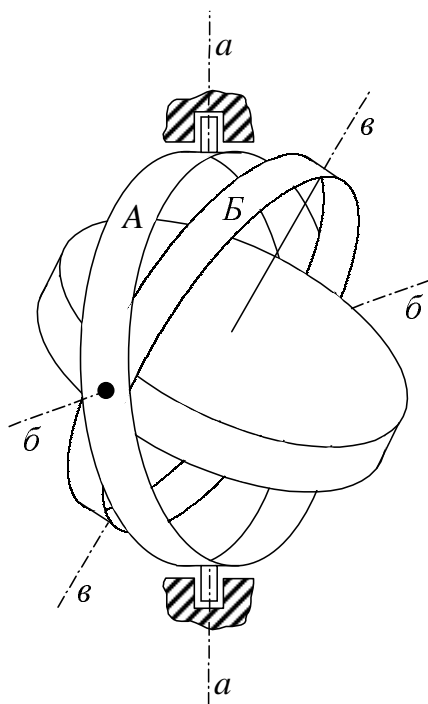


Рис. 2. Гироскоп в кардановом подвесе

никнут при определении скорости вращения гироскопа относительно его оси симметрии  $\omega_0$ , связанные с постепенным опусканием оси гироскопа.

В первой части работы исследуется зависимость скорости прецессии гироскопа от момента силы, приложенной к его оси. Для этого к оси гироскопа (к рычагу С) подвешиваются грузы Г. Скорость прецессии определяется по числу оборотов рычага вокруг вертикальной оси и времени, которое на это ушло, определяемое секундомером. В процессе измерений рычаг не только поворачивается в результате прецессии гироскопа, но и опускается. Поэтому его в начале опыта следует приподнять на  $5-6^\circ$ . Опыт надо закончить, когда рычаг опустится на такой же угол.

Измерение скорости прецессии гироскопа позволяет вычислить угловую скорость вращения его ротора. Расчет производится по формуле (9). Момент инерции ротора относительно оси симметрии  $I_0$  измеряет-

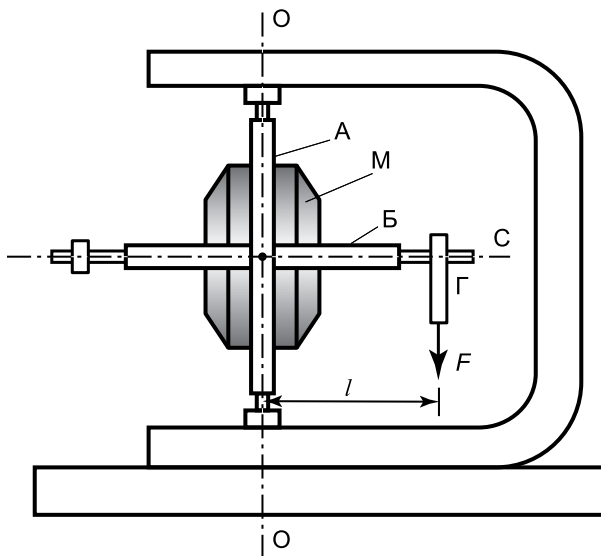


Рис. 3. Схема экспериментальной установки

ся по крутильным колебаниям точной копии ротора, подвешиваемой вдоль оси симметрии на жесткой проволоке. Период крутильных колебаний  $T_0$  зависит от момента инерции  $I_0$  и модуля кручения проволоки  $f$ :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{f}}. \quad (10)$$

Чтобы исключить модуль кручения проволоки, вместо ротора гироскопа к той же проволоке подвешивают цилиндр правильной формы с известными размерами и массой, для которого легко можно вычислить момент инерции  $I_{\text{ц}}$ . Для определения момента инерции ротора гироскопа имеем

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2}, \quad (11)$$

здесь  $T_{\text{ц}}$  — период крутильных колебаний цилиндра.

Скорость вращения ротора гироскопа можно определить и не прибегая к исследованию прецессии. У используемых в работе гироскопов статор имеет две обмотки, необходимые для быстрой раскрутки гироскопа. В данной работе одну обмотку используют для раскрутки гироскопа, а вторую — для измерения числа оборотов ротора. Ротор

электромотора всегда немного намагничен. Вращаясь, он наводит во второй обмотке переменную электродвижущую силу (ЭДС) индукции, частота которой равна частоте вращения ротора. Частоту этой ЭДС можно, в частности, измерить по фигурам Лиссажу, получаемым на экране осциллографа, если на один вход подать исследуемую ЭДС, а на другой — переменное напряжение с хорошо прокалиброванного генератора. При совпадении частот на экране получаем эллипс.

### ЗАДАНИЕ

1. Установите ось гироскопа в горизонтальное положение, осторожно поворачивая ее за рычаг С.
2. Включите питание гироскопа и подождите 4–5 минут, чтобы вращение ротора успело стабилизироваться.
3. Убедитесь в том, что ротор вращается достаточно быстро: при легком постукивании по рычагу С последний не должен изменять своего положения в пространстве. Объясните причину устойчивости оси гироскопа. «Поиграйте» с гироскопом, нажимая карандашом на рычаг С. Как движется гироскоп при нажатии на рычаг? По реакции гироскопа определите, в какую сторону вращается ротор.
4. Подвесьте к рычагу С груз Г. При этом должна начаться прецессия гироскопа. Трение в оси (в какой именно?) приводит к тому, что рычаг С начинает медленно опускаться.
5. Отклоните рычаг С на 5–6 градусов вверх от горизонтальной плоскости. Подвесьте к нему груз Г и с помощью секундомера найдите угловую скорость регулярной прецессии  $\Omega$  (по числу оборотов и времени прецессии). Измерения продолжайте до тех пор, пока рычаг С не опустится на 5–6 градусов ниже горизонтальной плоскости, сделав целое число оборотов относительно вертикальной оси. Измерьте также скорость опускания рычага С. Повторите этот опыт не менее пяти раз. Усредните полученные результаты.
6. Проведите всю серию экспериментов, описанных в пункте 5 при 5–7 значениях момента  $M$  силы  $F$  относительно центра масс гироскопа (длина плеча  $l$  указана на установке). Результаты опытов изобразите в виде графика  $\Omega$  в зависимости от  $M$ .
7. Измерьте момент инерции ротора гироскопа относительно оси симметрии  $I_0$ . Для этого подвесьте ротор, извлеченный из такого же гироскопа, к концу вертикально висящей проволоки так, чтобы ось симметрии гироскопа была вертикальна, и измерьте период крутильных колебаний получившегося маятника. Замените ротор гироскопа цилиндром, для которого известны или легко могут быть измерены радиус и масса, и определите для него период крутильных колебаний. Пользуясь формулой (11), вычислите момент инерции ротора гироскопа  $I_0$ .

8. Оцените погрешности в определении  $I_0$  и  $\Omega$ .
9. Рассчитайте с помощью (9) частоту вращения ротора гироскопа.
10. По скорости опускания рычага С во время прецессии определите момент сил трения.
11. Определите частоту вращения ротора гироскопа по фигурам Лиссажу. Для этого включите осциллограф и генератор тумблерами «Сеть» и подайте на «Вход Y» осциллографа сигнал со второй обмотки статора гироскопа (с двух клемм на подставке гироскопа), а на «Вход синхр.» — сигнал с выхода генератора. Для получения фигуры Лиссажу на осциллографе необходимо нажать тумблер «Вход X», повернуть вправо до упора ручку «Стабильность», переключателем «Усилитель U» добиться подходящего размера изображения по вертикали, а с помощью переключателя «Пределы шкалы U» и ручки «Рег. вых.» на генераторе — удобного размера изображения по горизонтали. Переключателем «Множитель частоты» и ручкой «Hz» на генераторе добейтесь, чтобы на экране осциллографа появилась фигура, похожая на эллипс. Подберите частоту генератора так, чтобы эллипс стал неподвижным. Если этого сделать не удастся, то выключите на короткое время питание электромотора гироскопа, чтобы ток первой обмотки не наводил ЭДС во второй и не мешал измерениям. Делать измерения при этом надо быстро, так как при выключенном питании ротор гироскопа начинает замедлять свое вращение. Получение на экране осциллографа неподвижного эллипса означает, что частота сигнала генератора равна частоте вращения ротора гироскопа.
12. Оцените погрешность полученных результатов. Сравните угловые скорости вращения ротора гироскопа, определяемые разными методами.
13. Убедитесь в применимости соотношения (5) в данной работе.

### Контрольные вопросы

1. Что такое гироскоп? Каковы его основные свойства?
2. От чего зависит скорость регулярной прецессии гироскопа?
3. Какова размерность модуля кручения, входящего в формулу для определения периода крутильных колебаний (10)?
4. Получите формулу (9) из формулы (8).
5. Чем объяснить, что монета, катящаяся по полу, поворачивает в ту сторону, в которую она наклонена?

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. Гл. VII, §§ 49–51.
2. *Стрелков С.П.* Механика. — М.: Наука, 1975. §§ 65–67.
3. *Хайкин С.Э.* Физические основы механики. — М.: Наука, 1971. §§ 99–104.



## МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

В механике сплошных сред деформируемые твердые тела, жидкости и газы рассматриваются макроскопически. Это означает, что всякий малый объем вещества считается еще настолько большим, что содержит очень большое число молекул. Такая идеализация позволяет применять эффективные математические методы, разработанные для непрерывных функций.

**Деформации и внутренние напряжения в деформируемом твердом теле.** Рассмотрим покоящееся твердое тело, которое не является абсолютно твердым и может деформироваться, т. е. менять свою форму и объем. В результате деформирования в нем возникают силы, стремящиеся вернуть тело в первоначальное состояние. Эти внутренние силы, отнесенные к соответствующим площадям, называются внутренними напряжениями.

Внутренние напряжения обусловлены молекулярными силами, т. е. силами взаимодействия молекул тела друг с другом. Радиус действия молекулярных сил порядка межмолекулярных расстояний. Механика сплошных сред, как макроскопическая теория, рассматривает расстояния, большие по сравнению с межмолекулярными. Это значит, что «радиус действия» молекулярных сил в механике сплошных сред должен считаться равным нулю. Внутренние силы действуют, следовательно, только через поверхность, т. е. являются поверхностными.

Пусть при деформировании некоторая точка тела, которая имела координату  $x$ , смещается на величину  $s$ . Если бы смещение было одним и тем же для всех точек тела, мы получили бы просто параллельный перенос (трансляцию) абсолютно твердого тела. Предположим поэтому, что в соседней точке с координатой  $x + dx$  смещение несколько отличается от  $s$  и равно  $s + ds$ . Деформация в точке по определению равна

$$\varepsilon = \frac{ds}{dx},$$

т. е. деформация есть относительное смещение двух точек, деленное на первоначальное расстояние между ними. Если расстояние между точками увеличивается, деформация называется растяжением. Если бы расстояние между ними уменьшалось, мы имели бы деформацию сжатия.

Следует отметить, что направление  $ds$  не обязательно должно совпадать с направлением  $dx$ . Можно представить себе, например, деформацию, при которой  $ds$  перпендикулярна  $dx$ . Такая деформация также определяется как  $\varepsilon = ds/dx$ , но называется деформацией сдвига (рис. 3.1).

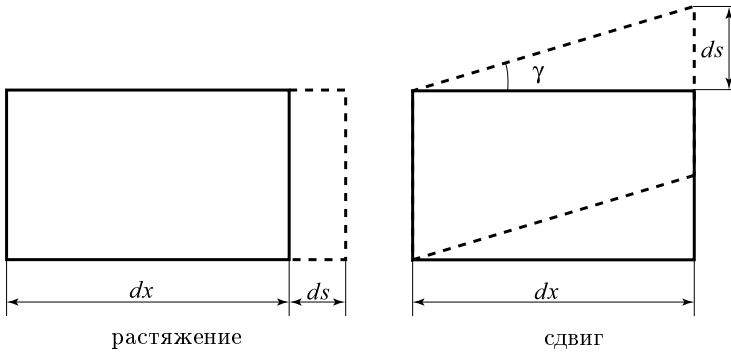


Рис. 3.1. Растяжение и сдвиг

В действительности возможны также и любые промежуточные направления, и мы должны считать  $d\vec{s}$  и  $d\vec{x}$  векторами. При этом величина  $\varepsilon$  устанавливает соотношение между двумя векторами и является тензором второго ранга. Ее можно представить в виде матрицы  $\varepsilon_{ij}$  с тремя столбцами и тремя строками.

Пусть в некоторой декартовой системе координат  $x, y, z$  компоненты вектора смещения  $\vec{s}$  суть  $u, v, w$ , т. е.

$$\vec{s} = \vec{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w.$$

В теоретических курсах показывается, что при малых деформациях матрица  $\varepsilon_{ij}$  в индексных обозначениях имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{или } x, y, z).$$

Можно видеть, что

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Силы, которые производят деформации растяжения (сжатия) и сдвига (рис. 3.2), называются растягивающими (сжимающими) и силами сдвига.

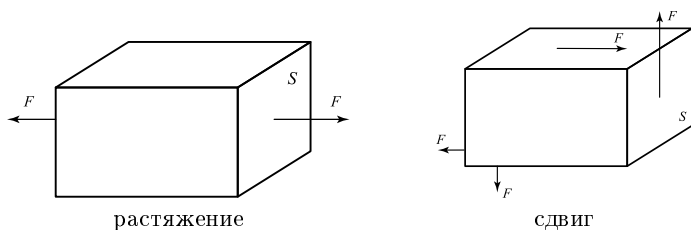


Рис. 3.2. Растяжение и сдвиг

Напряжения, соответствующие этим видам сил, определяются как сила, отнесенная к единице соответствующей площади:

$$\sigma = \frac{F}{S}.$$

Понятие напряжения имеет перед понятием силы то преимущество, что его можно установить локально в каждой точке. Оно определяется как локальный вектор силы, действующей на единицу площади некоторой воображаемой плоскости внутри тела (рис. 3.3).

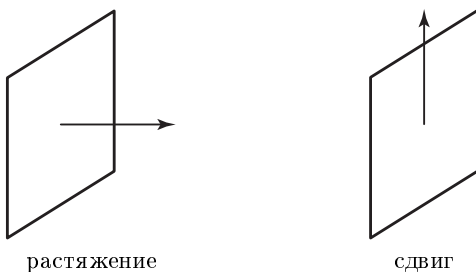


Рис. 3.3. Напряжение растяжения и сдвига

Вообще говоря, напряжение зависит от ориентации этой плоскости и опять-таки возможны все промежуточные случаи между чистым растяжением (сжатием) и чистым сдвигом. Поэтому напряжение также является тензором второго ранга, имеет девять компонент и устанавливает соотношение между тремя компонентами силы и тремя направляющими косинусами нормали к плоскости, на которую действует эта сила. Рисунок 3.4 разъясняет физический смысл компонент тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ .

На нем изображен бесконечно малый прямоугольный параллелепипед, мысленно выделенный в рассматриваемом теле, и силы, отнесенные к единице площади, действующие на его соответствующие грани.

Обратим внимание на то, что тело, находящееся под действием растяжения, будет покоиться (см. рис. 3.2), в то время как при действии напряжений сдвига оно уже покоиться не будет, а будет вращаться как целое в направлении против часовой стрелки.

Для того чтобы тело не вращалось, на него должна действовать другая пара сил в противоположном направлении. Это условие можно выполнить, если вторая пара напряжений сдвига действует на верхнюю и нижнюю грани параллелепипеда, изображенного на рис. 3.2. Таким образом, внутри тела, находящегося в равновесии, на соответствующих перпендикулярных плоскостях напряжения сдвига должны быть равными. Обращаясь к рис. 3.4, мы видим, что должны выполняться равенства

$$\sigma_{zy} = \sigma_{yz}, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx},$$

т. е. тензор напряжений является симметричным. В результате этого ограничения только шесть из девяти компонент тензора напряжений должны быть независимыми. Заметим, что тензор деформаций симметричен по определению. Таким образом, для описания равновесного состояния деформированного твердого тела необходимо задать 12 независимых переменных.

**Модули упругости.** Как известно, уравнение состояния газа при данной температуре устанавливает связь между давлением  $P$  и объемом  $V$ . В рассматриваемых нами случаях растяжения (сжатия) и чистого сдвига роль уравнения состояния должна играть связь между  $\sigma$  и  $\varepsilon$ . Это соотношение на основе эмпирических данных записывается в следующем виде: для растяжения (сжатия) стержня

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (3.1)$$

для сдвига

$$\sigma = G\varepsilon = G\gamma, \quad (3.2)$$

где  $\gamma$  — угол сдвига (см. рис. 3.1).

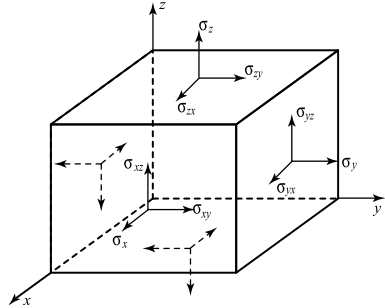


Рис. 3.4. Компоненты тензора напряжений

Величина  $E$  называется модулем Юнга, а  $G$  — модулем сдвига. Опыт показывает, что в довольно широком интервале величины  $E$  и  $G$  не зависят от напряжения. Модули упругости  $E$  и  $G$  характеризуют упругие свойства материала твердого тела в области линейной зависимости напряжений и деформаций.

В общем случае, для кристаллов, связь между напряжением и деформацией определяется с помощью тензора четвертого ранга, имеющего 81 компоненту и устанавливающего соотношения между девятью компонентами тензора напряжений и девятью компонентами тензора деформаций, по аналогии с (3.1) и (3.2). Поскольку только шесть компонент тензора напряжений и деформаций независимы, имеется только 36 модулей упругости. В действительности число независимых модулей меньше в силу той или иной симметрии кристаллов (от 21 до 3). Речь идет, конечно, о монокристаллах. Поликристаллические тела с достаточно малыми размерами входящих в их состав кристаллитов можно рассматривать как изотропные тела. Это обусловлено тем, что в механике сплошных сред мы интересуемся деформациями в участках, больших по сравнению с размерами кристаллитов. Изотропное тело, как и поликристалл, характеризуется двумя независимыми модулями упругости.

**Деформация и напряжение в бруске.** Пусть однородное изотропное тело имеет форму параллелепипеда. Перпендикулярно к его противоположным граням к телу приложены силы  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  (рис. 3.5). Соответствующие им напряжения обозначим  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ . Определим деформации, которые возникают под действием этих сил. Полагая деформации малыми, воспользуемся принципом суперпозиции малых деформаций.

Направим координатные оси параллельно ребрам параллелепипеда. Пусть  $l_x$ ,  $l_y$ ,  $l_z$  — длины этих ребер.

Если бы действовала только сила  $F_x$ , то ребро  $l_x$  получило бы приращение  $\Delta_1 l_x$ , определяемое соотношением

$$\frac{\Delta_1 l_x}{l_x} = \frac{\sigma_x}{E}.$$

Если бы действовала только сила  $F_y$ , то размеры бруска, перпендикулярные к оси  $y$ , сократились бы. В частности, ребро  $l_x$  при этом получило бы отрицательное приращение  $\Delta_2 l_x$ , которое можно вычислить по формуле

$$\frac{\Delta_2 l_x}{l_x} = -\mu \frac{\sigma_y}{E},$$

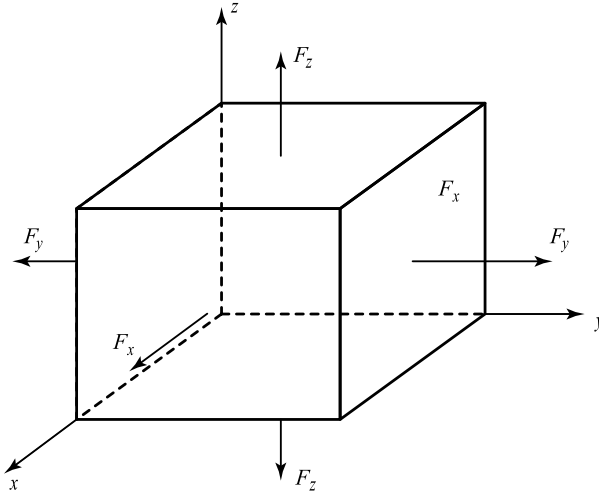


Рис. 3.5. Деформация бруска

где  $\mu$  называется коэффициентом Пуассона. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона  $\mu$  полностью характеризуют упругие свойства изотропного материала. Все прочие упругие постоянные могут быть выражены через  $E$  и  $\mu$ . Относительное приращение ребра  $l_x$  под действием только одной силы  $F_z$  было бы равно

$$\frac{\Delta_3 l_x}{l_x} = -\mu \frac{\sigma_z}{E}.$$

Если все силы действуют одновременно, то согласно принципу суперпозиции малых деформаций результирующее удлинение ребра  $l_x$  будет равно

$$\Delta l_x = \Delta_1 l_x + \Delta_2 l_x + \Delta_3 l_x.$$

Аналогично вычисляются удлинения ребер  $l_y$  и  $l_z$ . В результате находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_y + \sigma_z), \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_z + \sigma_x), \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Эти уравнения называются обобщенным законом Гука.

При квазистатическом растяжении бруска вдоль оси  $x$  совершается работа  $A_1 = \frac{1}{2}S_x\sigma_x\Delta l_x$ , где  $S_x = l_y l_z$  — площадь грани, перпендикулярной к оси  $x$ . Эту работу можно представить в виде

$$A_1 = \frac{1}{2}l_x l_y l_z \sigma_x \frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{1}{2}V\sigma_x \varepsilon_x,$$

$V = l_x l_y l_z$  — объем бруска. Аналогично,

$$A_2 = \frac{1}{2}V\sigma_y \varepsilon_y, \quad A_3 = \frac{1}{2}V\sigma_z \varepsilon_z.$$

Сложив эти три работы, находим плотность упругой энергии в бруске:

$$w_{el} = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z). \quad (3.4)$$

С учетом (3.3) выражение (3.4) может быть представлено в виде

$$w_{el} = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x + \sigma_z \sigma_x)]. \quad (3.5)$$

Заметим, что абсолютно твердый брусок ( $E \rightarrow \infty$ ) не обладает упругой энергией ( $w \rightarrow 0$ ), какие бы силы на него не действовали.

**Деформация всестороннего сжатия.** Рассмотрим частный случай, когда все напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  равны и отрицательны. В этом случае на брусок со всех сторон действует постоянное давление

$$P = -\sigma_x = -\sigma_y = -\sigma_z.$$

Из (3.3) при этом имеем

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{P}{E}(1 - 2\mu). \quad (3.6)$$

Взяв логарифмическую производную от обеих частей равенства

$$V = l_x l_y l_z,$$

получим

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l_x}{l_x} + \frac{\Delta l_y}{l_y} + \frac{\Delta l_z}{l_z},$$

или

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Формулу (3.6), следовательно, можно представить в виде

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{P}{K}, \quad (3.7)$$

где

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}. \quad (3.8)$$

Постоянная  $K$  называется модулем всестороннего сжатия.

Выражение (3.5) для плотности упругой энергии приобретает вид

$$w_{el} = \frac{3(1-2\mu)P^2}{2E} = \frac{P^2}{2K}.$$

Поскольку величина  $w_{el}$  существенно положительна, то должно быть

$$1 - 2\mu > 0,$$

т. е.

$$\mu < \frac{1}{2}.$$

Для горных пород коэффициент Пуассона  $\mu$  близок к 0,25, для металлов — к 0,3.

**Деформация одноосного растяжения.** Пусть однородный стержень может свободно растягиваться или сжиматься в направлении своей оси, которую мы примем за координатную ось  $x$ . Будем считать, что поперечные размеры стержня не изменяются, поскольку этому препятствует окружающая среда. Форма поперечного сечения стержня не играет роли. Воспользуемся поэтому формулой (3.3). Полагая  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$ , получим

$$\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x) = 0, \quad \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

Отсюда

$$\sigma_y = \sigma_z = \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x,$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \left( 1 - \frac{2\mu^2}{1-\mu} \right).$$

Окончательно имеем

$$\frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{\sigma_x}{E'}, \quad (3.9)$$

где

$$E' = E \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}. \quad (3.10)$$



Величину  $E'$  принято называть модулем одноосного растяжения.

**Взаимозависимость модулей упругости.** Как отмечалось выше, однородное изотропное упругое тело характеризуется двумя независимыми модулями упругости. Это значит, что между введенными здесь постоянными, характеризующими упругие свойства материалов, должны существовать определенные зависимости. Можно показать, что

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)},$$

$$E' = E \frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)},$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)},$$

$$E' = K + \frac{4}{3}G.$$

Здесь  $K$  — модуль всестороннего сжатия,  $E'$  — модуль одноосного растяжения,  $\mu$  — коэффициент Пуассона,  $E$  — модуль Юнга,  $G$  — модуль сдвига. Таким образом, все константы, характеризующие упругие свойства однородных изотропных тел, могут быть выражены через  $E$  и  $G$ .

**Закон Паскаля.** С точки зрения механики сплошных сред жидкости и газы могут быть определены как среды, в которых при равновесии отсутствуют касательные напряжения. Это означает, что отличны от нуля лишь диагональные компоненты (элементы матрицы) тензора напряжений:

$$\sigma_{ij} = 0, \quad \text{если } i \neq j; \quad \sigma_{ii} \neq 0 \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Более того, в силу изотропии жидкости (газа) все диагональные компоненты одинаковы. Таким образом, тензор напряжений жидкости (газа) имеет вид

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix},$$

где  $P$  — давление в данной точке среды.

Другими словами, в состоянии равновесия нормальное напряжение (давление) не зависит от ориентации площадки, на которую оно действует. Это утверждение составляет содержание так называемого закона Паскаля.

Давление  $P$ , существующее в жидкости, обусловлено ее сжатием. Поскольку касательные напряжения отсутствуют, упругие свойства жидкости (газа) характеризуются лишь одной упругой константой — коэффициентом сжимаемости

$$\chi = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP}$$

или обратной ему величиной — модулем всестороннего сжатия

$$K = -V \frac{dP}{dV}.$$

Предполагается, что температура жидкости (газа) поддерживается постоянной.

**Уравнение Бернулли.** Картина течения жидкости определена, если для каждой ее частицы известно положение в пространстве в каждый момент времени. По изменению положения во времени можно найти скорость и ускорение частицы. Каждая частица может быть отмечена ее координатами  $x_0, y_0, z_0$  в момент времени  $t_0$ . Координаты частицы в момент времени  $t$  можно найти, если заданы функции

$$x = F_1(x_0, y_0, z_0, t),$$

$$y = F_2(x_0, y_0, z_0, t),$$

$$z = F_3(x_0, y_0, z_0, t).$$

Эта система уравнений называется уравнениями Лагранжа, а аргументы функций — переменными Лагранжа. Для полной характеристики состояния движущейся жидкости необходимо знать еще давление, плотность, температуру, которые определяются из законов сохранения импульса и энергии и уравнения состояния.

Существует и другой способ описания течения, который указывает, что происходит в каждой точке пространства в каждый момент времени. Обычно задаются три проекции скорости в зависимости от координат и времени

$$u = f_1(x, y, z, t),$$

$$v = f_2(x, y, z, t),$$

$$w = f_3(x, y, z, t).$$

Эту систему уравнений называют уравнениями Эйлера. Для определения траектории какой-нибудь частицы надо проинтегрировать систему из трех уравнений:

$$dx = udt, \quad dy = vdt, \quad dz = wdt.$$

Так как три постоянные интегрирования можно рассматривать как координаты частицы в некоторый начальный момент времени, то приходим к уравнениям Лагранжа.

Наглядное представление о мгновенной картине течения жидкости дают так называемые линии тока, касательные к которым указывают направление вектора скорости в точках касания. При установившемся течении, когда картина течения со временем не изменяется, линии тока совпадают с траекториями частиц.

В случае стационарного течения все частицы жидкости, проходящие через некоторую точку пространства, будут двигаться в дальнейшем по одной и той же линии. Область течения, границами которой являются линии тока, называется трубкой тока. Для вывода уравнений, описывающих течение, удобно рассмотреть трубку тока с очень малой площадью поперечного сечения. Малость определяется тем, что можно пренебречь изменением параметров течения поперек трубки тока. Обозначая плотность жидкости  $\rho$ , скорость течения  $v$  и площадь сечения трубки тока  $S$ , для расхода  $q$  жидкости, то есть массы жидкости, проходящей через данное сечение за единицу времени, получаем

$$q = \rho v S. \quad (3.11)$$

Из закона сохранения массы жидкости, протекающей по трубке тока, для различных сечений одной и той же трубки тока имеем

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2. \quad (3.12)$$

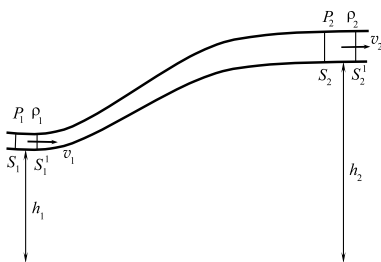


Рис. 3.6. К выводу уравнения Бернулли

В законе сохранения энергии будем учитывать изменение кинетической и потенциальной энергии жидкости за счет работы сил давления, но не будем учитывать изменение тепловой энергии, связанное со сжимаемостью, вязкостью и теплопроводностью. Жидкость, при течении которой можно пренебрегать вязкостью и теплопроводностью, называется идеальной. На рис. 3.6 представлен разрез участка трубки тока вертикаль-

ной плоскостью, то есть плоскостью, в которой лежит сила тяжести. На рисунке указаны высоты, на которых находятся сечения 1 и 2, и соответствующие параметры течения. За бесконечно малое время  $dt$  частицы жидкости смещаются на бесконечно малое расстояние  $v dt$ .

Частицы жидкости, находившиеся в сечении  $S_1$ , перейдут в сечение  $S_1^1$ , а частицы из  $S_2$  — в  $S_2^1$ . Из-за малости смещений изменением величин площадей при смещении пренебрегаем. Работа сил давления по перемещению массы жидкости, находящейся между сечениями  $S_1$  и  $S_2$ , складывается из положительной работы  $p_1 S_1 v_1 dt$  и отрицательной (сила направлена против перемещения) работы  $p_2 S_2 v_2 dt$ . При подсчете изменения потенциальной и кинетической энергии учтем, что энергия жидкости, находящейся между сечениями  $S_1^1$  и  $S_2$ , не меняется, а изменение связано как бы с переходом массы, находившейся между сечениями  $S_1$  и  $S_1^1$ ,  $dm = \rho_1 S_1 v_1 dt = \rho_2 S_2 v_2 dt$  в положение между сечениями  $S_2$  и  $S_2^1$ . Используя закон сохранения массы в выражении для работы сил давления и приравнявая эту работу изменению потенциальной и кинетической энергии, имеем

$$\left( \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) dm = dm \left( g(h_2 - h_1) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right). \quad (3.13)$$

Отсюда получаем уравнение Бернулли:

$$\frac{v_1^2}{2} + gh_1 + \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + gh_2 + \frac{p_2}{\rho_2} = \text{const}. \quad (3.14)$$

Сжимаемость жидкостей при нормальных условиях обычно мала. Например, для воды увеличение плотности на 1% требует давления более 200 атмосфер (такое давление создается на глубине 2 км), а для увеличения плотности на 10% — свыше 3000 атмосфер. Поэтому при небольших давлениях воду считают несжимаемой жидкостью. Тогда вместо (3.12) и (3.14) можно написать

$$v_1 S_1 = v_2 S_2, \quad (3.15)$$

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2. \quad (3.16)$$

С помощью уравнения Бернулли для несжимаемой жидкости (3.16) можно получить формулу Торричелли для скорости истечения струи жидкости из отверстия в сосуде. Считаем, что площадь отверстия намного меньше площади свободной поверхности жидкости в сосуде, то есть скоростью жидкости на свободной поверхности можно пренебречь по сравнению со скоростью истечения жидкости из отверстия. Струе жидкости, вытекающей из отверстия, соответствует трубка тока, начинающаяся на свободной поверхности. Давление в вытекающей струе равно атмосферному, так как граница струи, вытекающей в атмосферу,

неподвижна, т. е. на нее не действует сила. На свободной поверхности жидкости давление тоже равно атмосферному. Если отверстие находится ниже свободной поверхности жидкости на  $h$ , то из (3.16) для скорости истечения струи получаем

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (3.17)$$

Отметим, что величина скорости не зависит от ее направления (от направления нормали к площади отверстия). Величина  $\rho v^2/2$  называется скоростным напором или динамическим давлением и равна объёмной плотности кинетической энергии. Из (3.17) следует, что она равна гидростатическому давлению  $\rho gh$ . Полное давление в неподвижной жидкости на этой глубине в покоящейся жидкости получим, если добавим атмосферное давление.

**Формула Пуазейля.** В соответствии с уравнением Бернулли при стационарном течении по прямолинейной горизонтальной трубе постоянного сечения давление жидкости должно быть одним и тем же по всей длине трубы. В действительности, однако, давление жидкости в трубе падает в направлении ее течения. Для обеспечения стационарности течения необходимо поддерживать на концах трубы постоянную разность давлений, уравнивающую силы внутреннего трения, которые возникают при течении жидкости.

Рассмотрим две параллельные пластины, между которыми находится слой жидкости. Для поддержания равномерного движения пластин необходимо к одной из них приложить силу  $\vec{F}$ , а к другой — силу  $-\vec{F}$ . Еще Ньютоном экспериментально было установлено, что величина этих сил

$$F = \eta S \frac{v_2 - v_1}{h}, \quad (3.18)$$

где  $S$  — площадь пластины,  $h$  — расстояние между пластинами,  $v_1$ ,  $v_2$  — скорости пластин,  $\eta$  — коэффициент вязкости (сокращенно его называют просто вязкостью).

Сила трения между слоями вязкой жидкости зависит от изменения скорости в перпендикулярном потоку направлении (закон Ньютона для вязкой жидкости):

$$F = S\eta \frac{dv_x}{dy}. \quad (3.19)$$

Пусть вязкая несжимаемая жидкость течет вдоль прямолинейной цилиндрической трубы радиусом  $R$ . Координатную ось  $x$  направим вдоль оси трубы в сторону течения. Выделим в трубе произвольную

бесконечно короткую цилиндрическую часть длиной  $dx$  и радиусом  $r$  (рис. 3.7).

На боковую поверхность выделенного цилиндра в направлении, противоположном движению, действует касательная сила вязкого трения:

$$dF = 2\pi r \eta \frac{dv}{dr} dx.$$

На основания цилиндра в направлении движения действует сила разности давлений:

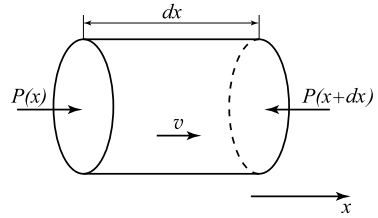


Рис. 3.7. К выводу формулы Пуазейля

$$dF_1 = \pi r^2 (P(x) - P(x + dx)) = -\pi r^2 \frac{dP}{dx} dx.$$

Линии тока рассматриваемого течения параллельны, площадь сечения трубок тока остается постоянной, и из (3.15) получаем, что при стационарном течении ускорение выделенного объема жидкости должно быть равно нулю. Следовательно, должна быть равна нулю сумма действующих на этот объем сил:

$$dF + dF_1 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$2\eta \frac{dv}{dr} = r \frac{dP}{dx}. \quad (3.20)$$

Так как скорость  $v$ , а с ней и  $dv/dr$  не зависят от  $x$ , производная  $dP/dx$  в (3.20) должна быть постоянной, равной

$$\frac{P_2 - P_1}{l},$$

где  $P_1$  — давление на входе трубы,  $P_2$  — давление на выходе трубы. В результате имеем

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta l} r. \quad (3.21)$$

Интегрируя, находим

$$v = -\frac{P_1 - P_2}{4\eta l} r^2 + C.$$

Постоянную интегрирования определяем из условия прилипания жидкости к стенке трубы:

$$v(R) = 0.$$

Это дает

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l}(R^2 - r^2).$$

Скорость  $v$  максимальна на оси трубы, где она достигает значения

$$v_0 = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l}R^2.$$

При удалении от оси скорость меняется по параболическому закону.

Определим расход жидкости, т. е. количество жидкости, протекающее в единицу времени через поперечное сечение трубы. Масса жидкости, протекающая в единицу времени через кольцевую площадку с внутренним радиусом  $r$  и внешним  $r + dr$ , равна  $dQ = 2\pi r dr \cdot \rho v$ . Подставляя сюда выражение для скорости и интегрируя от нуля до  $R$ , находим искомый расход жидкости:

$$Q = \pi \rho \frac{P_1 - P_2}{2\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr,$$

или

$$Q = \pi \rho \frac{P_1 - P_2}{8\eta l} R^4. \quad (3.22)$$

Таким образом, расход жидкости пропорционален разности давлений, четвертой степени радиуса трубы и обратно пропорционален длине трубы и коэффициенту вязкости жидкости. Эти закономерности экспериментально установил Пуазейль. Формулу (3.22) поэтому принято называть формулой Пуазейля, хотя сам Пуазейль не является ее автором.

На практике расход жидкости удобно измерять в единицах объема жидкости, протекающей в единицу времени через поперечное сечение. Формула (3.22) при этом имеет вид

$$Q_V = \frac{\pi R^4}{8\eta l} (P_1 - P_2). \quad (3.23)$$

В таком виде формула используется в лабораторной работе 1.3.3.

Течение несжимаемой вязкой жидкости в общем случае описывается уравнением Навье—Стокса:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} P + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}. \quad (3.24)$$

Здесь

$$\text{grad}P = \vec{i} \frac{\partial P}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial P}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \Delta \vec{v} = \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}.$$

Это уравнение можно привести к безразмерному виду, если ввести характерный размер течения  $L$  и характерную скорость  $u$ . Роль каждого члена в таком уравнении определяет коэффициент, стоящий перед ним. Роль члена, учитывающего вязкость, по сравнению с членами в левой стороне, учитывающими инерционность, определяется величиной так называемого числа Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{\rho L u}{\eta}.$$

При больших числах Рейнольдса коэффициент перед членом, определяющим влияние вязкости, мал, и вязкостью можно пренебречь. Число Рейнольдса определяет также переход вязкого ламинарного течения в турбулентное.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. Гл. X и XII.
2. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: Физматлит, 2001. Ч. 1. Гл. 8.

### Работа 1.3.1

#### Определение модуля Юнга на основе исследования деформаций растяжения и изгиба

**Цель работы:** экспериментально получить зависимость между напряжением и деформацией (закон Гука) для двух простейших напряженных состояний упругих тел: одноосного растяжения и чистого изгиба; по результатам измерений вычислить модуль Юнга.

**В работе используются:** в первой части — прибор Лермантова, проволока из исследуемого материала, зрительная труба со шкалой, набор грузов, микрометр, рулетка; во второй части — стойка для изгиба балки, индикатор для измерения величины прогиба, набор исследуемых стержней, грузы, линейка, штангенциркуль.

В первой части работы производят растяжение проволоки, и это соответствует случаю одноосного напряженного состояния, описываемого формулой (3.1). Во второй части работы измерения производят



при изгибе балки, которую иногда будем называть бруском, а иногда — стержнем. Связь между прогибом балки и величиной силы, приложенной посредине между точками опор балки, может быть выражена через модуль Юнга. Это позволяет по измерениям приложенных сил и прогибов определить модуль Юнга.

## 1. Определение модуля Юнга по измерениям растяжения проволоки

Для определения модуля Юнга используется прибор Лермантова, схема которого изображена на рис. 1. Верхний конец проволоки П, изготовленной из исследуемого материала, прикреплен к консоли К, а нижний — к цилиндру, которым оканчивается шарнирный кронштейн Ш. На этот же цилиндр опирается рычаг  $r$ , связанный с зеркальцем З. Таким образом, удлинение проволоки можно измерить по углу поворота зеркала.

Натяжение проволоки можно менять, перекладывая грузы с площадки М на площадку О и наоборот. Такая система позволяет исключить влияние деформации кронштейна К на точность измерений, так как нагрузка на нем все время остается постоянной.

При проведении эксперимента следует иметь в виду, что проволока П при отсутствии нагрузки всегда несколько изогнута, что не может не сказаться на результатах, особенно при небольших нагрузках. Проволока вначале не столько растягивается, сколько распрямляется.

## ЗАДАНИЕ

1. Определите площадь поперечного сечения проволоки. Для этого измерьте ее диаметр микрометром не менее чем в десяти местах и во взаимно перпендикулярных направлениях в каждом месте. При измерении следите, чтобы микрометр не деформировал проволоку. В дальнейших расчетах надо пользоваться средним значением диаметра, вычисленным по всем измерениям.
2. Измерьте длину проволоки.
3. Направьте зрительную трубу на зеркальце З. При этом в трубу должно быть четко видно отражение шкалы в зеркальце. Формулу, связывающую число делений по шкале  $n$ , расстояние  $h$  от шкалы до зеркальца, длину рычага  $r$  и удлинение проволоки  $\Delta l$ , выведите самостоятельно. Длина рычага  $r$  указана на приборе, а расстояние  $h$  следует измерить.
4. Необходимо позаботиться о том, чтобы в процессе эксперимента не выйти за пределы области, где удлинение проволоки пропорционально

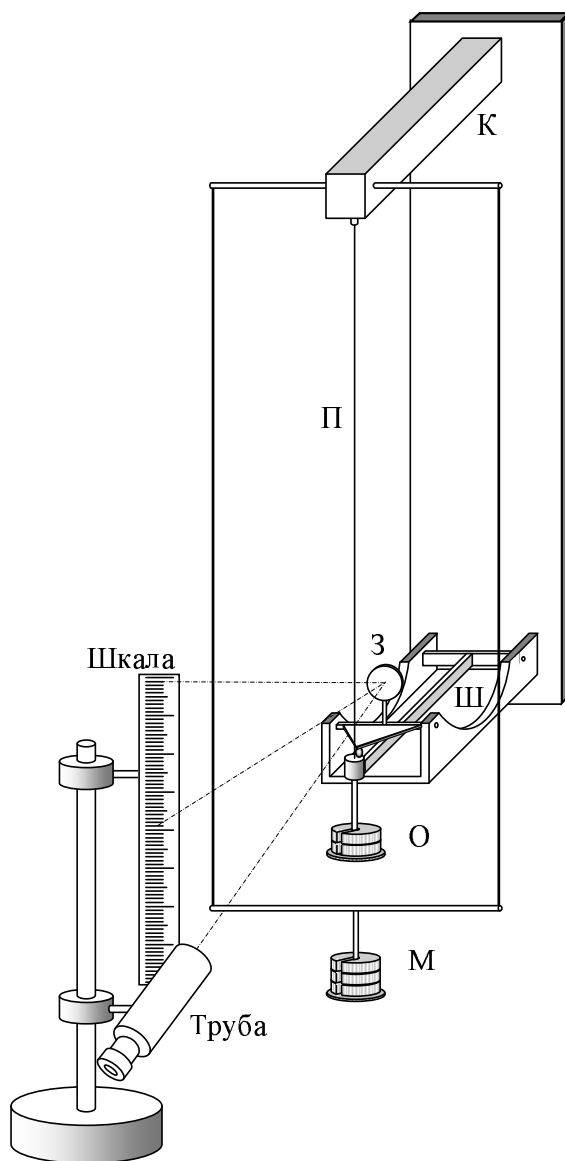


Рис. 1. Прибор Лермантова

ее натяжению (область пропорциональности). Для этого прежде всего оцените максимальную величину нагрузки, приняв, что разрушающее напряжение равно  $900 \text{ Н/мм}^2$ . Рабочее напряжение не должно превышать 30% от величины разрушающего. Проверьте правильность сделанной оценки. Для этого нагрузите проволоку одним из имеющихся грузов, затем уберите его и посмотрите, вернулась ли длина проволоки к первоначальному значению. Повторите этот эксперимент с двумя, тремя и т. д. грузами, постепенно доходя до расчетной нагрузки. Если остаточные деформации станут заметными, дальнейшее увеличение нагрузки следует прекратить. При изменении нагрузки на проволоке каждый раз необходимо предварительно арретировать прибор (на рис. 1 арретир не показан).

5. Снимите зависимость удлинения проволоки, то есть числа делений  $n$  по шкале, от массы грузов  $m$  при увеличении и уменьшении нагрузки. Повторите этот эксперимент 2–3 раза.
6. По полученным результатам постройте график зависимости удлинения проволоки  $\Delta l$  от нагрузки  $P$ . В недеформированном состоянии проволока, как правило, изогнута, и при малых нагрузках её «удлинение» определяется не растяжением, а выпрямлением. Поэтому на начальном участке зависимости  $\Delta l(P)$  (при малых  $P$ ) удлинение растёт довольно быстро, и только затем точки начинают ложиться на прямую, не проходящую, однако, через начало координат. По наклону этой прямой можно определить жёсткость проволоки  $k$ , а по ней — модуль Юнга. Начальный участок зависимости  $\Delta l(P)$  из обработки следует исключить.
7. По найденной графически жёсткости проволоки  $k$  определите модуль Юнга  $E$ . Оцените погрешности определения  $k$  и  $E$ .
8. Определите материал проволоки, сравнивая полученное значение модуля Юнга с табличными значениями.

## II. Определение модуля Юнга по измерениям изгиба балки

Экспериментальная установка состоит из прочной стойки с опорными призмами А и Б (рис. 2). На ребра призм опирается исследуемый стержень (балка) В. В середине стержня на призме Д подвешена площадка П с грузами. Измерять стрелу прогиба можно с помощью индикатора И, укрепляемого на отдельной штанге. Полный оборот большой стрелки индикатора соответствует 1 мм и одному делению малого циферблата.

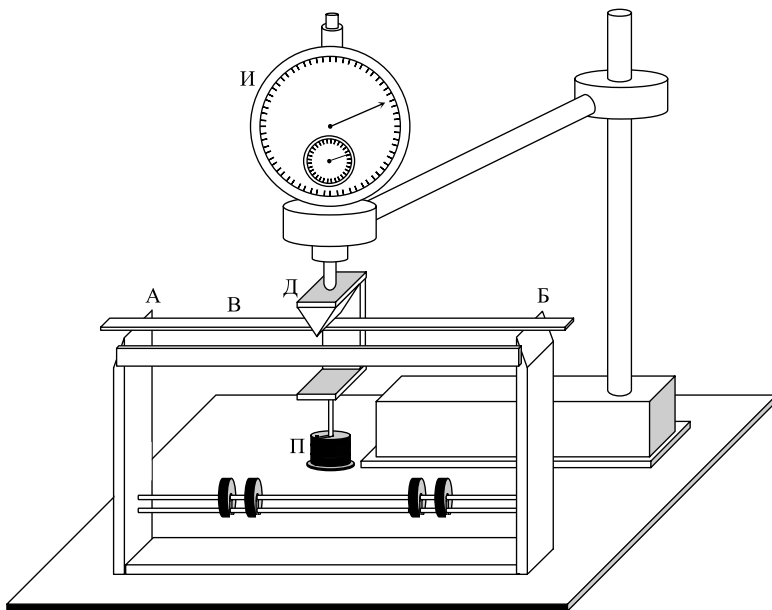


Рис. 2. Схема установки для измерения модуля Юнга

Модуль Юнга  $E$  материала стержня связан со стрелой прогиба  $y_{\max}$  (то есть с перемещением середины стержня) соотношением (20) (см. с. 192):

$$E = \frac{Pl^3}{4ab^3y_{\max}}.$$

Здесь  $P$  — нагрузка, вызывающая прогиб стержня,  $l$  — расстояние между призмами А и Б,  $a$  и  $b$  — ширина и высота сечения стержня.

Чтобы исключить ошибки, возникающие вследствие прогиба стола при изменении нагрузки на стержень, грузы перед началом эксперимента следует расположить на рейке над нижней полкой опорной стойки.

Формула (20) была выведена при условиях, что, во-первых, ребра опорных призм А и Б находятся на одной горизонтали (высоте) и, во-вторых, сила  $P$  приложена точно посередине балки. Читателю рекомендуется самостоятельно выяснить, существенно ли изменится формула (20), если эти условия будут нарушены в пределах точности проведения эксперимента.

## ЗАДАНИЕ

1. Измерьте расстояние между ребрами призм А и Б.
2. Определите ширину и толщину балки (стержня). Для этого измерьте указанные параметры не менее чем в десяти различных местах. По ним вычислите средние значения, которые будут использованы в дальнейших расчетах.
3. Исследуемую балку положите на стойку. Установите индикатор в центре балки и снимите зависимость стрелы прогиба  $y_{\max}$  от величины нагрузки  $P$ . Измерения сделайте при возрастании и убывании нагрузки. Проверьте, возвращается ли балка в первоначальное положение после снятия нагрузки.
4. Исследуйте, насколько существенна зависимость результата от положения точки приложения изгибающей силы  $P$ . Для этого сместите призму Д на 2–3 мм от точки, принятой за середину балки, и вновь измерьте стрелу прогиба. Эту величину сравните с результатом, полученным при положении призмы Д посередине балки.
5. Переверните балку таким образом, чтобы при нагружении она изгибалась в противоположную сторону, и повторите измерения. Сравните результаты с предыдущими.
6. Аналогичные измерения проведите для двух-трех балок, изготовленных из дерева, и одной металлической.
7. Для каждого образца постройте график «нагрузка — прогиб» при увеличении и уменьшении нагрузки. По наклону графиков определите средние значения модулей Юнга.
8. Оцените погрешности результатов измерений и сравните полученные модули Юнга с соответствующими табличными значениями.

## Контрольные вопросы

1. Какие основные источники погрешностей измерений? Каким образом можно уменьшить погрешности?
2. Оцените максимальную точность, с которой при данных условиях целесообразно измерять удлинение проволоки и стрелу прогиба бруса.
3. В чем различие между одноосным напряженным состоянием и одноосным деформируемым состоянием?
4. При каких напряжениях и относительных деформациях выполняется закон Гука?
5. Какие отклонения от закона Гука возможны при деформировании твердых тел?
6. Что такое коэффициент Пуассона?
7. Какие предположения сделаны, чтобы получить связь максимального прогиба балки с модулем Юнга?

8. Какой зависимостью  $y(x)$  описывается форма средней линии балки при чистом изгибе?
9. Для чего в приборе Лермантова нужна площадка М?

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. §§ 75–80.
2. *Кингсеп А.С., Локишин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: Физматлит, 2001. Ч. 1. Гл. 8. §§ 8.1, 8.2.
3. *Стрелков С.П.* Механика. — М.: Наука, 1975. §§ 81, 82, 87, 88.
4. *Хайкин С.Э.* Физические основы механики. — М.: Наука, 1971. §§ 105–108.

### Приложение

На рис. 3а показана балка, деформированная под действием силы  $P$ , приложенной посредине между опорами А и Б. Со стороны опор на балку в точках А и Б действуют силы  $P/2$ . Деформация балки происходит таким образом, что продольные слои в верхней ее части оказываются сжатыми, а в нижней — растянутыми. Можно считать, что абсолютные величины напряжений по слоям растут пропорционально расстоянию от средней линии балки, как показано стрелками на рис. 3б для выделенного элемента балки. Так как средняя часть элемента не напряжена, то длина средней линии элемента  $dl_0$  при деформации не меняется (так же, как и длина средней линии всей балки). Такое напряженное состояние балки называется чистым изгибом. Считаем, что напряжения в слоях связаны с их деформацией законом Гука:

$$\sigma = E \frac{dl - dl_0}{dl_0}. \quad (1)$$

В выделенном на рис. 3в элементе балки наклон средней линии на ее длине  $dl_0$  меняется от  $\alpha$  до  $\alpha - d\alpha$ . Длину дуги можно выразить через радиус ее кривизны  $R$ :

$$dl_0 = -Rd\alpha. \quad (2)$$

Знак минус здесь потому, что  $R$  мы считаем положительным, а угол наклона средней линии балки в выбранных на рис. 3а координатах уменьшается по длине балки (как это показано на рис. 3в). Если  $y(x)$  — зависимость, описывающая форму средней линии балки в выбранной системе координат  $x, y$  (обратим внимание, что ось  $y$  направлена на рисунке вниз), то угол наклона средней линии определяется выражением

$$\frac{dy(x)}{dx} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Длину средней линии малого элемента балки можно выразить следующим образом (см. рис. 3г):

$$dl_0 = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (4)$$

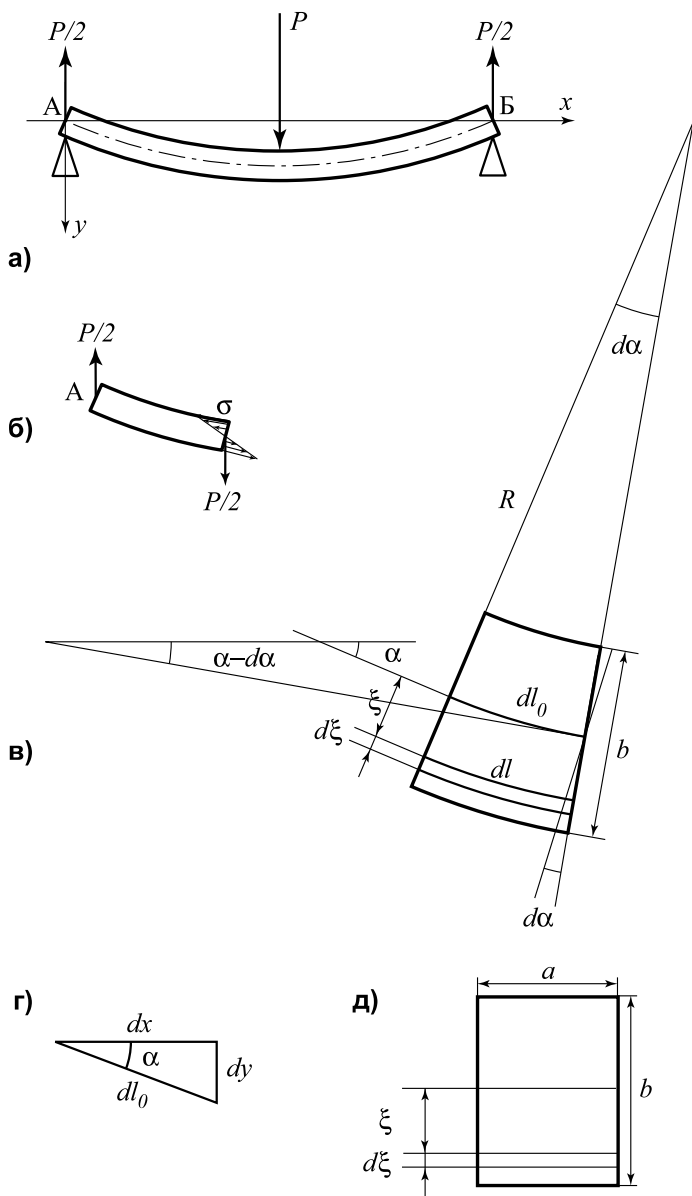


Рис. 3. Изгиб балки

Из этого же треугольника

$$\frac{dx}{dl_0} = \cos \alpha. \quad (5)$$

Дифференцируя (3) по  $x$  и пользуясь (2), получаем

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{d\alpha}{dx} = \left( \frac{dl_0}{dx} \right)^2 \frac{d\alpha}{dl_0} \frac{dl_0}{dx} = - \left( \frac{dl_0}{dx} \right)^3 \frac{1}{R}. \quad (6)$$

Отсюда и из (4) следует

$$\frac{1}{R} = - \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \quad (7)$$

Напряжение в продольном слое, находящемся на расстоянии  $\xi$  от средней линии балки (см. рис. 3в) и описываемое формулой (1), можно представить следующим образом:

$$\sigma = E \frac{dl - dl_0}{dl_0} = \frac{E}{R} \xi. \quad (8)$$

Здесь использовано соотношение, следующее из подобия треугольников на рис. 3в:

$$\frac{dl - dl_0}{\xi} = \frac{dl_0}{R}. \quad (9)$$

Сумма сил упругости, действующих в сечении балки, равна нулю, поэтому их суммарный момент не зависит от положения точки, относительно которой он вычисляется. Выберем эту точку на средней линии балки. Получаем

$$M = \int_{-b/2}^{b/2} \xi \sigma dS = \frac{E}{R} \int_{-b/2}^{b/2} \xi^2 dS = \frac{E}{R} I, \quad (10)$$

где  $dS = ad\xi$ ,  $a$  — ширина,  $b$  — высота поперечного сечения балки (см. рис. 3д).  $I$  называют моментом инерции поперечного сечения балки относительно оси, проходящей через среднюю линию балки. Из рис. 3б видно, что для части балки (от  $x = 0$  до  $x$ ) равновесие обеспечивается равенством сил, приложенных в точке опоры и в рассматриваемом сечении, а также равенством моментов этих сил и момента, определяемого формулой (10). Равенство моментов дает

$$\frac{EI}{R} = \frac{xP}{2}. \quad (11)$$

Теперь, используя (7), можно написать уравнение, определяющее форму средней линии балки:

$$y'' = -(1 + y'^2)^{3/2} \frac{P}{2EI} x. \quad (12)$$

При малых прогибах

$$y'^2 \ll 1. \quad (13)$$



В этом случае из (12) следует

$$y'' = -\frac{P}{2EI}x. \quad (14)$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$y' = -\frac{P}{4EI}x^2 + C. \quad (15)$$

Здесь  $C$  — постоянная, которая определяется из условия симметрии прогиба балки  $y' = 0$  при  $x = l/2$ . Из (15) следует

$$y' = -\frac{P}{4EI} \left( x^2 - \frac{l^2}{4} \right). \quad (16)$$

Интегрируя еще раз и учитывая, что при  $x = 0$  также и  $y = 0$ , получаем уравнение средней линии балки:

$$y = \frac{Px}{48EI} (3l^2 - 4x^2). \quad (17)$$

Максимальный прогиб балки, который определяется величиной  $y$  при  $x = l/2$ , равен

$$y_{\max} = \frac{Pl^3}{48EI}. \quad (18)$$

В случае прямоугольного сечения балки

$$I = \int_{-b/2}^{b/2} \xi^2 dS = a \int_{-b/2}^{b/2} \xi^2 d\xi = \frac{ab^3}{12}. \quad (19)$$

Из (18) и (19) для модуля Юнга получаем

$$E = \frac{Pl^3}{4ab^3y_{\max}}. \quad (20)$$

## Работа 1.3.2

### Определение модуля кручения

**Цель работы:** измерение углов закручивания в зависимости от приложенного момента сил, расчет модулей кручения и сдвига при статическом закручивании стержня, определение тех же модулей для проволоки по измерениям периодов крутильных колебаний подвешенного на ней маятника (динамическим методом).

**В работе используются:** в первой части: исследуемый стержень, отсчетная труба со шкалой, рулетка, микрометр, набор грузов; во второй части: проволока из исследуемого материала, грузы, секундомер, микрометр, рулетка, линейка.

При закручивании цилиндрических стержней круглого сечения распределение деформаций и напряжений одинаково по длине стержня только вдали от мест, где прикладываются закручивающие моменты. Для этих областей можно считать, что каждое поперечное сечение поворачивается как жесткое, то есть частички материала не сходят с тех радиальных линий, на которых они находились вначале, и все эти радиальные линии поворачиваются на один и тот же угол. Напряженное состояние, которое при этом возникает, называется чистым кручением. Далее будет показано, что касательные напряжения в поперечном сечении увеличиваются пропорционально расстоянию от оси вращения.

Рассмотрим часть закручиваемого круглого цилиндра, имеющую длину  $l$ , которая изображена на рис. 1а. Любая прямая линия, проведенная до закручивания цилиндра по частицам материала и параллельная оси симметрии, при закручивании превращается в спираль (винтовую линию). Сечения, находящиеся на расстоянии  $l$ , повернуты на угол  $\varphi$ .

Для вывода основных соотношений, описывающих кручение, удобно рассмотреть в цилиндре колечко произвольного радиуса  $r$  с бесконечно малой толщиной  $dr$  и бесконечно малой высотой  $dl$ , показанное на рис. 1б. При закручивании верхнее сечение колечка поворачивается относительно нижнего на угол  $d\varphi$ , а образующая цилиндрической поверхности колечка  $dl$  наклоняется на угол  $\alpha$ , представляя элемент тех спиральных линий, о которых говорилось выше. При небольших углах  $\alpha$  можно написать

$$\alpha dl = r d\varphi. \quad (1)$$

Видно, что  $\alpha$  возрастет с увеличением расстояния от оси цилиндра  $r$ . На рис. 1в показан элемент колечка, в котором происходит сдвиговая

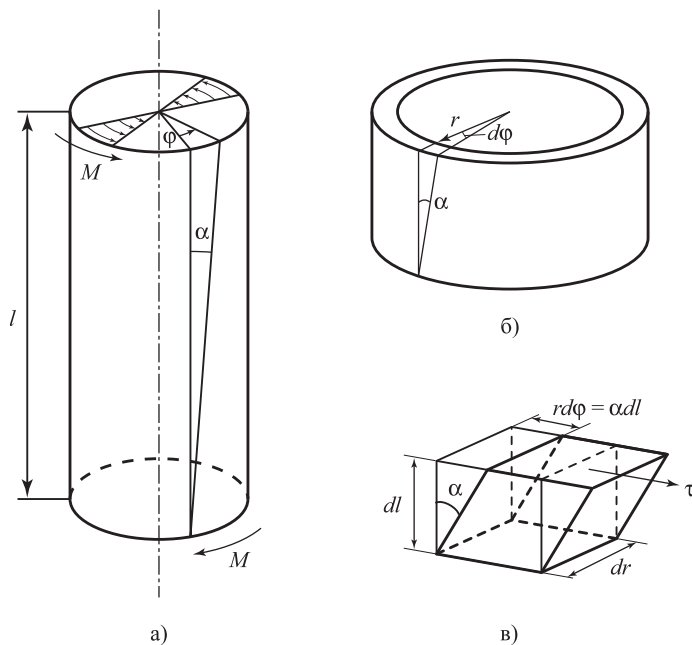


Рис. 1. Закручивание цилиндра

деформация. Касательное напряжение  $\tau$  связано с углом сдвига  $\alpha$  линейной зависимостью, в которую входит модуль сдвига  $G$  (см. (3.2)):

$$\tau = G\alpha. \quad (2)$$

Касательное напряжение  $\tau$  пропорционально  $\alpha$  и, следовательно, тоже растет с увеличением расстояния от оси цилиндра, о чем уже говорилось выше. Используя (1), получаем

$$\tau = Gr \frac{d\varphi}{dl}. \quad (3)$$

Эти касательные напряжения создают момент сил относительно оси цилиндра:

$$dM = 2\pi r dr \cdot \tau \cdot r. \quad (4)$$

Суммарный момент сил, действующий на всем поперечном сечении цилиндра, находится интегрированием по колечкам от оси цилиндра

до его радиуса  $R$ :

$$M = 2\pi G \frac{d\varphi}{dl} \int_0^R r^3 dr = \pi G \frac{d\varphi}{dl} \frac{R^4}{2}. \quad (5)$$

Этот момент не меняется по длине цилиндра. Моменты на торцах любой выделенной части цилиндра уравниваются друг друга (нет вращения цилиндра). При этом из (5) следует линейная зависимость между относительным поворотом поперечных сечений цилиндра — углом  $\varphi$  и расстоянием  $l$ , на котором они находятся. Таким образом, для связи приложенного момента сил  $M$  и угла поворота  $\varphi$  поперечных сечений цилиндра  $\varphi$ , находящихся на расстоянии  $l$ , получаем

$$M = \frac{\pi R^4 G}{2l} \varphi = f \varphi. \quad (6)$$

Здесь введен модуль кручения  $f$ , связанный с модулем сдвига  $G$ :

$$f = \frac{\pi R^4 G}{2l}. \quad (7)$$

Необходимо подчеркнуть, что зависимость (6) выполняется при напряжениях намного меньших модуля сдвига, то есть при малых углах  $\alpha$ .

## I. Определение модуля кручения стержня статическим методом

Схема экспериментальной установки для статического закручивания стержня изображена на рис. 2. Верхний конец вертикально расположенного стержня С жестко закреплен на стойке, а нижний соединен с диском Д. Момент  $M$ , закручивающий стержень, создают две навитые на диск и перекинутые через блоки Б нити, к концам которых подвешиваются одинаковые грузы Г. Диск снабжен зеркальцем З. Для определения угла закручивания стержня надо зрительную трубу направить на зеркальце и добиться того, чтобы в нее было четко видно отражение шкалы, укрепленной на том же штативе, что и труба. Измерение смещения изображения шкалы в трубе позволяет определить угол закручивания стержня.

## ЗАДАНИЕ

1. Установите зрительную трубу таким образом, чтобы в нее было четко видно отражение шкалы в зеркальце З. Измерьте расстояние от зеркальца З до шкалы. Определите диаметры стержня С и шкива Д.

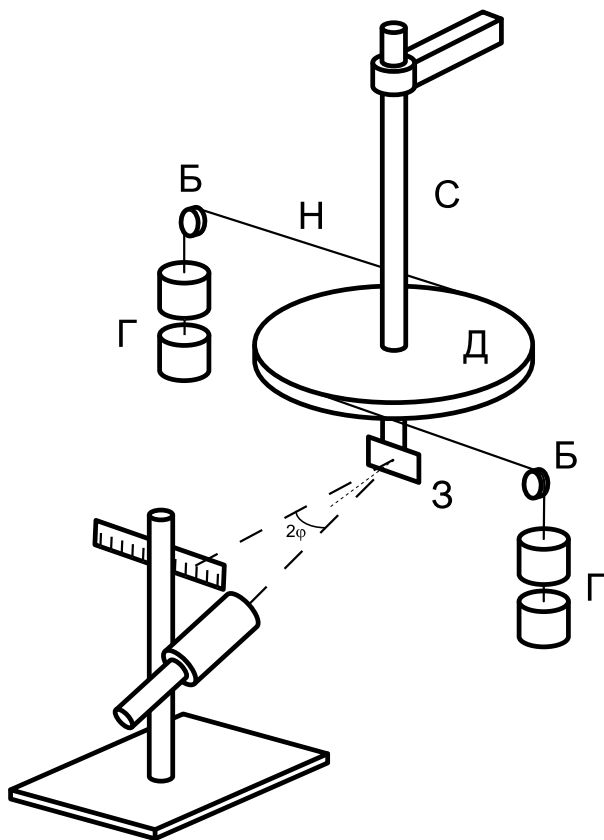


Рис. 2. Схема установки

2. Увеличивая нагрузку на нитях Н, снимите зависимость  $\varphi = \varphi(M)$ . Прodelайте эксперимент в обратном порядке, постепенно уменьшая величину закручивающего момента. Повторите измерения не менее трех раз.
3. Результаты эксперимента изобразите графически в координатах  $(\varphi, M)$ . При помощи этих графиков определите величину модуля кручения  $f$  и оцените допущенную при этом погрешность.
4. Используя формулу (7), вычислите модуль сдвига  $G$ . Сравните полученное значение с табличным.

## II. Определение модуля сдвига при помощи крутильных колебаний

Экспериментальная установка, используемая в этой части работы, изображена на рис. 3 и состоит из длинной вертикально висящей проволоки П, к нижнему концу которой прикреплен горизонтальный металлический стержень С с двумя симметрично расположенными грузами Г. Их положение на стержне можно фиксировать. Верхний конец проволоки зажат в цангу и при помощи специального приспособления может вместе с цангой поворачиваться вокруг вертикальной оси. Таким способом в системе можно возбуждать крутильные колебания. Вращение стержня С с закрепленными на нем грузами Г вокруг вертикальной оси происходит под действием упругого момента, возникающего в проволоке. Это вращение описывается уравнением (2.35):

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -M. \quad (8)$$

Здесь  $I$  — момент инерции стержня с грузами относительно оси вращения,  $\varphi$  — угол поворота стержня от положения равновесия,  $M$  — момент сил, действующий на стержень при закручивании проволоки, который при малых закручиваниях (малых  $\varphi$ ) описывается формулой (6). Вводим обозначение

$$\omega^2 = \frac{f}{I}. \quad (9)$$

При этом из (6) и (8) получаем

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0. \quad (10)$$

Это уравнение гармонических колебаний (4.4). Его решение имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \theta). \quad (11)$$

Здесь амплитуда  $\varphi_0$  и фаза  $\theta$  определяются начальными условиями. Период колебаний  $T$  равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{f}}. \quad (12)$$

Уравнение (10) и, следовательно, (11) и (12) получены для незатухающих колебаний. Для их применения необходимо убедиться, что в рассматриваемом случае затуханием колебаний, то есть необратимыми потерями энергии, можно пренебречь. Если после 10 периодов

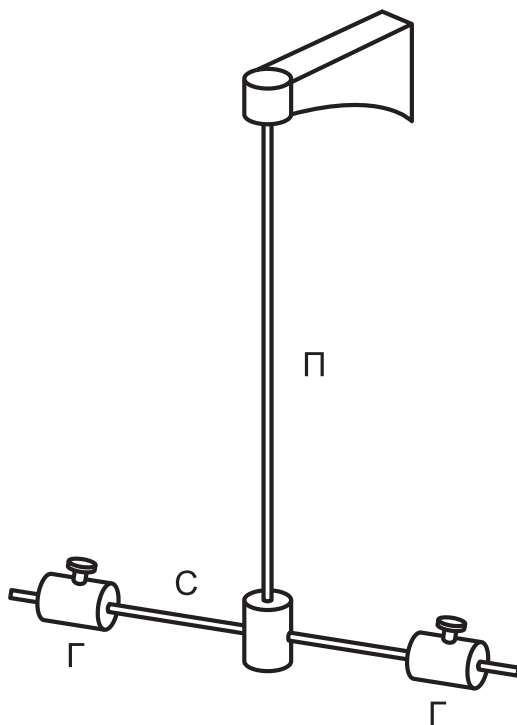


Рис. 3. Схема установки

колебаний амплитуда уменьшается меньше, чем в 2 раза, то можно пользоваться результатами для незатухающих колебаний. Кроме того, следует убедиться, что период колебаний не зависит от начальной амплитуды. Начальную амплитуду нужно уменьшать до тех пор, пока не исчезает зависимость периода от амплитуды.

### ЗАДАНИЕ

1. Прежде всего установите диапазон амплитуд, в котором применимы результаты, полученные для незатухающих колебаний. Для этого укрепите грузы на некотором расстоянии от проволоки и возбуждите в системе крутильные колебания. Измеряя время нескольких (не менее десяти) периодов колебаний, найдите период  $T_1$ . Уменьшив начальную амплитуду вдвое, тем же способом найдите соответствующий период  $T_2$ . Если  $T_1 = T_2$ , то для проведения измерений можно выбрать любую амплитуду не больше первой. Если же окажется, что периоды не равны, то

начальную амплитуду следует уменьшать до тех пор, пока не будет достигнуто равенство этих периодов.

2. Убедитесь в том, что после десяти периодов колебаний амплитуда уменьшается меньше, чем в два раза.
3. Установите грузы на стержне на одинаковом расстоянии  $l$  от оси системы (провода) до центра масс каждого груза и измерьте период колебаний  $T$ . Проведите измерения для 4–6 различных значений  $l$ . Величину модуля кручения можно найти из наклона прямой линии, проведенной по экспериментальным точкам, отложенным в координатах  $l^2, T^2$ .
4. Измерьте длину и диаметр проволоки П. По найденному модулю кручения с помощью формулы (7) получите модуль сдвига  $G$ , оцените погрешность и сравните с табличными значениями в справочниках.

### Контрольные вопросы

1. Как трение в осях блоков Б влияет на результаты измерений статическим методом? Как можно уменьшить это влияние?
2. Как меняется период колебаний при увеличении их затухания?
3. Какой метод предпочтительнее на практике: статический или динамический?
4. Как оценить погрешность измерения модуля кручения при определении его из графика в координатах  $l^2, T^2$ ?

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. §§ 78, 79.
2. *Стрелков С.П.* Механика. — М.: Наука, 1975. §§ 82, 84, 86.

## Работа 1.3.3

### Определение вязкости воздуха по скорости течения через тонкие трубки

**Цель работы:** экспериментально выявить участок сформированного течения, определить режимы ламинарного и турбулентного течения; определить число Рейнольдса.

**В работе используются:** металлические трубки, укрепленные на горизонтальной подставке; газовый счетчик; микроманометр типа ММН; стеклянная U-образная трубка; секундомер.

Рассмотрим движение вязкой жидкости или газа по трубке круглого сечения. При малых скоростях потока движение оказывается ламинарным (слоистым), скорости частиц меняются по радиусу и направлены вдоль оси трубки. С увеличением скорости потока движение



становится турбулентным, и слои перемешиваются. При турбулентном движении скорость в каждой точке быстро меняет величину и направление, сохраняется только средняя величина скорости.

Характер движения газа (или жидкости) в трубке определяется безразмерным числом Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{vr\rho}{\eta}, \quad (1)$$

где  $v$  — скорость потока,  $r$  — радиус трубки,  $\rho$  — плотность движущейся среды,  $\eta$  — ее вязкость. В гладких трубах круглого сечения переход от ламинарного движения к турбулентному происходит при  $\text{Re} \approx 1000$ .

При ламинарном течении объем газа  $V$ , протекающий за время  $t$  по трубе длиной  $l$ , определяется формулой Пуазейля (3.23):

$$Q_V = \frac{\pi r^4}{8l\eta}(P_1 - P_2). \quad (2)$$

В этой формуле  $P_1 - P_2$  — разность давлений в двух выбранных сечениях 1 и 2, расстояние между которыми равно  $l$ . Величину  $Q$  обычно называют расходом. Формула (2) позволяет определять вязкость газа по его расходу.

Отметим условия, при которых справедлива формула (2). Прежде всего необходимо, чтобы с достаточным запасом выполнялось неравенство  $\text{Re} < 1000$ . Необходимо также, чтобы при течении не происходило существенного изменения удельного объема газа (при выводе формулы удельный объем считался постоянным). Для жидкости это предположение выполняется практически всегда, а для газа — лишь в тех случаях, когда перепад давлений вдоль трубки мал по сравнению с самим давлением. В нашем случае давление газа равно атмосферному ( $10^3$  см вод. ст.), а перепад давлений составляет не более 10 см вод. ст., т. е. менее 1% от атмосферного. Формула (2) выводится для участков трубки, на которых закон распределения скоростей газа по сечению не меняется при движении вдоль потока.



Рис. 1. Формирование потока газа в трубе круглого сечения

При втекании газа в трубку из большого резервуара скорости слоев вначале постоянны по всему сечению (рис. 1). По мере продвижения газа по трубке

картина распределения скоростей меняется, так как сила трения о стенку тормозит прилежащие к ней слои. Характерное для ламинарного течения параболическое распределение скоростей устанавливается на

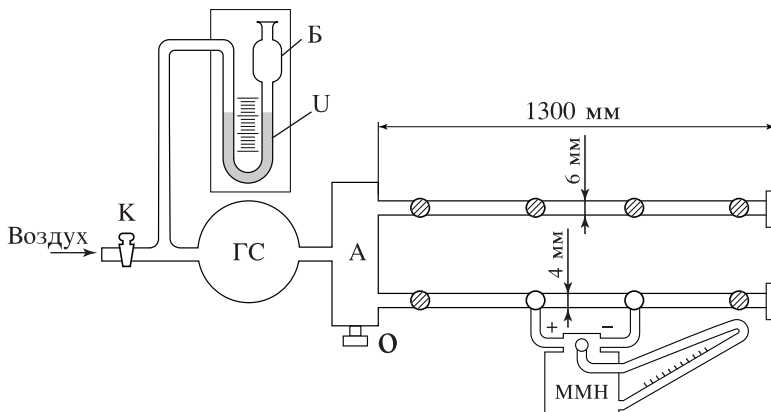


Рис. 2. Схема установки для определения вязкости воздуха

некотором расстоянии  $a$  от входа в трубку, которое зависит от радиуса трубки  $r$  и числа Рейнольдса по формуле

$$a \approx 0,2r \cdot \text{Re}. \quad (3)$$

Градиент давления на участке формирования потока оказывается бóльшим, чем на участке с установившимся ламинарным течением, что позволяет разделить эти участки экспериментально. Формула (3) дает возможность оценить длину участка формирования.

**Экспериментальная установка.** Измерения производятся на экспериментальной установке, схема которой изображена на рис. 2. Поток воздуха под давлением, несколько превышающим атмосферное (на 5–7 см вод. ст.), через газосчётчик ГС поступает в резервуар А, к которому припаяны тонкие металлические трубки. Примерные размеры трубок указаны на рисунке (точные размеры обозначены на установке). Обе трубки на концах снабжены заглушками, не пропускающими воздух. Во время измерений заглушка открывается только на рабочей трубке; конец другой трубки должен быть плотно закрыт.

Перед входом в газосчётчик поставлена U-образная трубка, наполовину заполненная водой. Она выполняет две задачи. Первая — измерение давления газа на входе в газосчётчик. Вторая — предохранение газосчётчика от выхода из строя. Дело в том, что газосчётчик устойчиво работает, если давление газа на его входе не превышает 600 мм водяного столба. Высота U-образной трубки примерно 600 мм, поэтому, когда давление на входе в счётчик превышает 600 мм водяного столба,

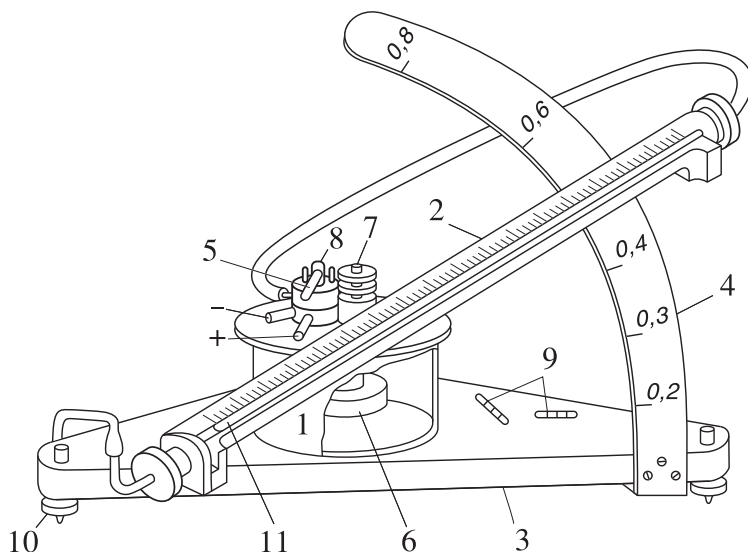


Рис. 3. Микрометрический манометр типа ММН

вода из U-образной трубки выплёскивается в защитный баллон Б и, создавая шум, привлекает к себе внимание экспериментатора. Такая ситуация часто создаётся в тех случаях, когда газ подают в систему при закрытых выходах измерительных трубок.

Для измерения давлений в трубках просверлен ряд миллиметровых отверстий. На время опыта к двум соседним отверстиям подсоединяется микроманометр, а остальные плотно закрываются заворачивающимися пробками. Подача воздуха в установку регулируется краном К.

В работе применяется *микроманометр* типа ММН (рис. 3), позволяющий измерять разность давлений до 200 мм вод. ст. Для повышения чувствительности трубка манометра установлена в наклонном положении. Числа 0,2; 0,3; 0,4; 0,6 и 0,8, нанесенные на стойке 4, обозначают коэффициент, на который должны быть умножены показания манометра при данном наклоне, для получения давления в миллиметрах водяного столба. Рабочей жидкостью является этиловый спирт. Установка мениска жидкости на нуль шкалы производится путем изменения уровня спирта в сосуде 1 с помощью цилиндра 6. Глубина погружения цилиндра в спирт регулируется винтом 7.

Микроманометр снабжен двумя уровнями 9, расположенными на плите 3 перпендикулярно один другому. Установка прибора по уровням производится двумя регулировочными ножками 10.

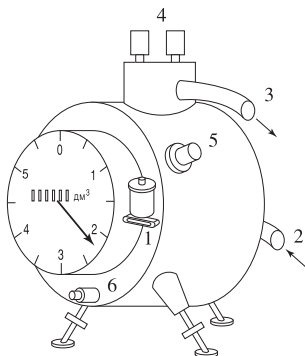


Рис. 4. Внешний вид газового счетчика

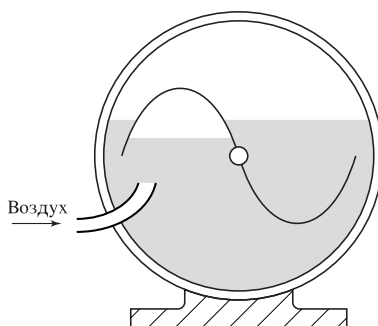


Рис. 5. Схема устройства газового счетчика

На крышке прибора установлен трехходовой кран 8, который имеет два рабочих положения — «0» и «+» (рис. 3). В положении «0» мениск жидкости устанавливается на ноль. В положении «+» производятся рабочие измерения. Перевод из положения «0» в положение «+» и наоборот осуществляется с помощью рычажка 5 (рис. 3). При этом учитывается, что в резервуаре уровень жидкости практически не меняется.

*Газовый счетчик* служит для измерения небольших количеств газа. Внешний вид его изображен на рис. 4. Корпус газового счетчика представляет собой цилиндрический баллон, на передней торцевой стенке которого находятся счетно-суммирующий механизм и шкала со стрелкой. Один оборот стрелки соответствует 5 л газа, прошедшего через счетчик.

Газовый счетчик заливается водой до уровня, определяемого по водомерному устройству 1. Трубка 2 для входа газа расположена сзади счетчика, а трубка 3 для выхода газа — наверху счетчика. Патрубки 4 предназначены для присоединения U-образного манометра, а патрубок 5 — для установки термометра. Кран 6 служит для слива воды. Счетчик снабжен уровнем и регулировочными ножками для правильной установки.

Принцип работы счетчика пояснен на рис. 5. На оси, проходящей по осевой линии цилиндра, жестко укреплены легкие чаши (для упрощения чертежа на рисунке изображены только две чаши). В чашу, находящуюся над трубкой 2, поступает воздух. Когда чаша наполняется воздухом, она всплывает, ее место занимает следующая, и т. д. Вращение оси передается счетно-суммирующему устройству.

## ЗАДАНИЕ

1. Подготовьте установку к работе: установите приборы по уровням, проверьте наличие воды в газовом счетчике по водомерному устройству, установите на нуль мениск микроманометра. Полный объём измерения проведите на одной из трубок (лучше на трубке  $d = 4$  мм).
2. По формуле (3) оцените расстояние, на котором происходит формирование потока при ламинарном течении. Расчет проведите для  $Re = 1000$ .
3. Подсоедините микроманометр к двум соседним выводам выбранной трубки на участке со сформировавшимся потоком. Отвинтите пробку на конце этой трубки; все остальные выводы на трубках должны быть плотно завинчены пробками, снабженными резиновыми прокладками.
4. Медленно открывая кран К (рис. 2) и впуская воздух в установку, внимательно следите за показаниями микроманометра. При больших перепадах давления спирт может вылиться из микроманометра через трубку 11.

Чаще всего это нежелательное явление происходит при измерениях на тонких трубках. Спирт заливает не только резиновую трубку, соединяющую манометрическую трубку 11 с трёхходовым краном, но может попасть и в трубку, соединённую с (-). В резиновых соединительных трубках остаются капли жидкости, которые приводят к тому, что  $\Delta P = P_1 - P_2$  измеряется неправильно. Поэтому перед измерениями (и после того, как спирт попадает в трубки) необходимо убедиться в том, что капелек в соединительных трубках нет. Их присутствие можно обнаружить по резким скачкам столбика в манометрической трубке 11, происходящим при осторожном перемещении соединительных трубок. В этом случае трубки надо снять и просушить.

5. Измерьте вязкость воздуха. Для этого снимите зависимость разности давлений  $\Delta P$  от расхода воздуха  $Q = \Delta V / \Delta t$ , при этом  $\Delta V$  измеряется газовым счетчиком, а  $\Delta t$  — секундомером. Установите множитель на стойке 4 равным 0,2. Начинать надо с малых перепадов давлений (2–3 мм вод. ст.), постепенно увеличивая расход  $Q$ . В диапазоне от 0 до 100 дел. по шкале 2 (рис. 3) должно быть не менее 5–6 точек замера. Это необходимо для того, чтобы заведомо попасть в режим ламинарного течения. После этого замеры можно проводить реже, но в более широком диапазоне по давлению, чтобы попасть в турбулентный режим. По полученным данным постройте график  $\Delta P = f(Q)$ . Из формулы (2) видно, что при ламинарном потоке зависимость  $\Delta P$  от  $Q$  должна быть линейной. При возникновении турбулентности линейность графика нарушается: разность давлений растёт быстрее, чем расход.

6. По угловому коэффициенту прямолинейного участка графика определите вязкость воздуха  $\eta$ . Оцените погрешность определения этого коэффициента и вычислите ошибку полученного значения вязкости.
7. Вычислите значение числа Рейнольдса  $Re$  для переходной области между ламинарным и турбулентным течениями.
8. При расходе, заведомо обеспечивающем ламинарность потока, измерьте распределение давления вдоль трубки. Для этого микроманометр последовательно подсоедините ко всем ее выводам, включая и вывод «0» (рис. 2). Постройте график зависимости давления от длины вдоль трубки  $P = f(l)$ . Из графика оцените длину участка, на котором происходит установление потока. Сравните найденный результат с результатом, вычисленным по формуле (3).
9. Для всех трубок на участках со сформированным течением (в конце трубок) в ламинарном режиме ( $Re < 500$ ) снимите зависимости  $Q = f(P)$ . Обработайте результаты по формуле

$$\frac{8l\eta Q}{\pi(P_1 - P_2)} = r^n.$$

Постройте график в двойном логарифмическом масштабе, т. е. по оси ординат отложите  $\ln(8l\eta Q/\pi(P_1 - P_2))$ , а по оси абсцисс —  $\ln r$ . Нетрудно увидеть, что тангенс угла наклона полученной прямой должен дать значение  $n$ , т. е. показатель степени, который по формуле Пуазейля должен быть равен 4. Проверьте, выполняется ли это. Оцените ошибку измерений.

### Контрольные вопросы

1. Какой формулой описывается профиль скорости ламинарного потока в трубке? Как соотносятся средняя по сечению и максимальная скорости?
2. Что такое число Рейнольдса? Как его можно определить из экспериментальных данных?
3. Как графически надо обрабатывать результаты измерений по п. 8, чтобы из них достоверно было видно различие участков со сформированным и несформированным течениями?

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. §§ 96, 97.
2. *Хайкин С.Э.* Физические основы механики. — М.: Наука, 1971. Гл. XVI, § 125.
3. *Ландау Л.Д., Ахиезер А.Л., Лифшиц Е.М.* Механика и молекулярная физика. — М.: Наука, 1969. Гл. XV, §§ 117–119.
4. *Стрелков С.П.* Механика. — М.: Наука, 1975. Гл. XII, § 111.

### Работа 1.3.4

## Исследование стационарного потока жидкости в трубе

**Цель работы:** измерить скорости течения по методам Пито и Вентури, а также сравнить результаты со скоростью, определенной по расходу воды.

**В работе используются:** расходомерная установка, секундомер.

В работе исследуется течение жидкости по трубе постоянного сечения.

Основной целью исследования потока жидкости или газа в трубе является определение скорости движения и расхода, то есть количества среды, — объема или массы, — протекающей в единицу времени. Правильное определение расхода очень важно в прикладных задачах — в газо- и нефтепроводах, а также в водопроводе и при теплоснабжении.

Ввиду важности приложений было разработано много разных способов определения расхода и скорости потока жидкости или газа, но самые простые и в то же время точные основаны на измерении перепада давления, связанного либо с положением приемников — навстречу или вдоль потока (как в трубке Пито), либо вызванного специальным препятствием — типа сужения трубы (как в трубке Вентури) или установкой внутри трубы шайбы — кольца.

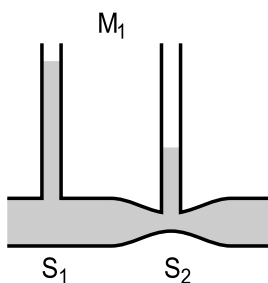


Рис. 1. Расходомер Вентури

Расходомер Вентури (рис. 1) представляет собой горизонтальную трубу с плавно меняющимся сечением. В широком (сечение  $S_1$ ) и узком (сечение  $S_2$ ) участках сделаны выводы к трубкам водяного манометра  $M_1$ . Высота поднятия воды в трубках манометра определяет давление в соответствующих сечениях.

В силу несжимаемости жидкости ( $v_1 S_1 = v_2 S_2$ ) и горизонтальности трубы ( $z_1 = z_2$ ) из уравнения Бернулли (3.14) получаем скорость потока в сечении  $S_1$  через давления в сечениях  $S_1$  и  $S_2$ :

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho [(S_1/S_2)^2 - 1]}}. \quad (1)$$

Расходомер Пито изображен на рис. 2. С исследуемой трубой Т соединены две трубки водяного манометра  $M_2$ . Одна из них (1) подведена к стенке трубы Т, а другая (2) изогнута и направлена открытым концом навстречу потоку. Перед отверстием трубы 2 жидкость неподвижна,  $v_2 = 0$ .

Пусть давления, измеренные манометрическими трубками 1 и 2, равны  $p_1$  и  $p_2$ . Уравнение Бернулли (3.14) дает  $p_1 + \rho v_1^2/2 = p_2$ , откуда

$$v_1 = \sqrt{2(p_2 - p_1)/\rho}. \quad (2)$$

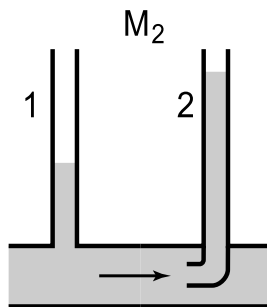


Рис. 2. Расходомер Пито

Уравнение (2) позволяет связать скорость жидкости с разностью высот в трубках манометра  $M_2$ .

С помощью трубки Пито измеряется локальная скорость потока в месте расположения трубки. Но в методе Вентури измеряется лишь средняя скорость по сечению трубы. Если нужно измерить только расход, то можно применить метод Вентури, в котором расход вычисляется по некоторой усредненной по сечению трубы скорости. Когда требуется определить скорость потока, то нужно использовать трубку Пито. Чаще такая необходимость возникает не при измерениях в трубе, а при исследовании внешнего потока. Трубка Пито применяется в самом широком диапазоне скоростей — от измерений медленных движений в вязком пограничном слое и до измерений сверхзвуковых скоростей на самолетах.

При использовании трубопроводов всегда важно знать объем или массу среды, протекающей за единицу времени. Измерения осложняются влиянием вязкости, из-за которой и жидкость, и газ «прилипают» к стенке, около которой скорость равна нулю. Поэтому в трубе скорость всегда изменяется вдоль радиуса, всегда увеличивается в той или иной степени по направлению от стенки к оси трубы. Если исследуется установившееся движение при относительно малых числах Рейнольдса, то применима формула Пуазейля, и в таком случае достаточно измерить скорость в одной точке, например, на оси трубы. В других случаях для правильного определения расхода требуется проинтегрировать скорость по площади, для чего нужно произвести измерения в нескольких точках. Например, в книге Т.Е. Фабера «Гидроаэродинамика» рекомендуется использовать 20 трубок Пито, размещенных на разных расстояниях от оси трубы по двум взаимно перпендикулярным направлениям.



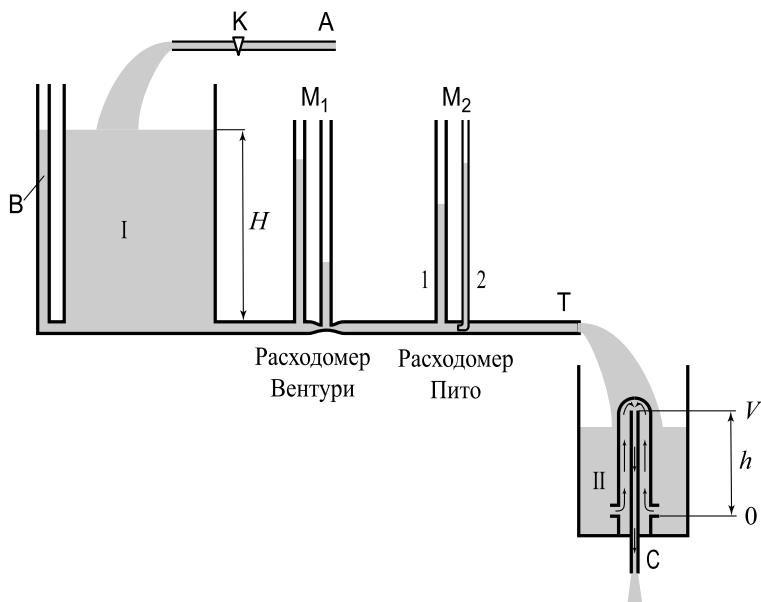


Рис. 3. Схема установки для исследования стационарного потока жидкости в трубе

К физическим методам определения расхода жидкости или газа относится ультразвуковой расходомер. Этот способ основан на том, что в движущейся среде звук, который распространяется относительно среды с постоянной скоростью, движется вместе с ней, и поэтому в направлении движения жидкости или газа скорость звука больше, а против — меньше, чем в покоящейся среде. Излучатель и приемник ультразвука устанавливаются на противоположных стенках канала или трубы с определенным сдвигом вдоль оси, так что ультразвук распространяется под некоторым углом к направлению скорости потока. Поэтому скорость в направлении движения больше, а в противоположном направлении меньше, чем в неподвижной среде. Разница между ними с учетом угла определяет скорость потока, при этом даже не нужно знать скорости звука. Преимущество ультразвукового расходомера в том, что его работа не зависит от вязкости среды. Однако в таких условиях измеряется некоторая средняя скорость на пути звукового луча, поэтому для точных измерений прибор нуждается в градуировке. При этом градуировка будет зависеть в том числе и от числа Рейнольдса, так как от него зависит профиль скорости среды.

Отметим также турбинный расходомер, в котором расход пропорционален числу оборотов турбинки. Однако его показания сильно зависят от вязкости среды.

**Экспериментальная установка.** Схема установки, служащей для исследования течения воды в трубе, изображена на рис. 3. Вода поступает в трубу Т из цилиндрического резервуара I, снабженного водомерной трубкой В из стекла. Наполнение резервуара производится из водопровода по трубе А и регулируется краном К. Выливающаяся из трубы Т вода попадает в приемный резервуар II, в дно которого вмонтирован сифон С.

Сифон предохраняет резервуар от переполнения, автоматически выливая из него воду, как только ее уровень достигнет высоты  $h$ . Труба Т снабжена расходомерами Вентури и Пито.

Скорость течения, усредненную по сечению трубы, можно определить по расходу, который находится по измеренному времени наполнения резервуара II, объем которого задан. С другой стороны, скорость может быть рассчитана по показаниям манометров с помощью формул (1) и (2). Сопоставление этих скоростей со скоростью, определенной по расходу, позволяет сделать вывод о применимости уравнения Бернулли, роли вязкости, которая, в частности, приводит к изменению скорости поперек потока. Сопоставление скоростей удобно провести на графике, по оси абсцисс которого отложена скорость по расходу при разных уровнях воды в баке, а по оси ординат — соответствующие скорости по расходомерам Вентури и Пито. Для идеальной жидкости эта зависимость представляла бы прямую линию под углом  $45^\circ$  к оси, проходящую через начало координат.

О влиянии вязкости можно судить и по уровням воды в баке и двух манометрических трубках, присоединенных к стенкам трубы. В случае идеальной жидкости уровни в манометрических трубках должны совпадать с уровнем воды в баке. Вязкость вызывает падение уровня вдоль течения.

До сих пор предполагалось, что жидкость идеальная и потеря на трение при ее движении в трубе Т не происходит. Для количественной оценки роли вязкости необходимо сделать следующий эксперимент. Установив уровень жидкости в резервуаре I на определенной высоте  $z_1$ , измерить скорость течения жидкости по трубе Т с помощью приемного резервуара II (в силу несжимаемости жидкости ее скорость на входе в трубу Т и на выходе из нее одинакова). По измеренному значению скорости по формуле Торричелли рассчитать ту высоту  $z_2$ , при которой жидкость вытекала бы с этой же скоростью в отсутствие вязкости.

Разность  $z_1 - z_2$  характеризует потери на внутреннее трение в жидкости, причем можно считать, что эти потери происходят только в трубе Т, так как скорость жидкости в резервуаре I существенно меньше.

Влияние вязкости изменяет показания манометра Вентури  $\Delta h$  на величину, которую можно оценить, умножив разность  $z_1 - z_2$  на отношение расстояния между входами манометра  $\Delta l$  ко всей длине трубы  $L$ . При условии

$$\Delta h \gg (z_1 - z_2) \frac{\Delta l}{L}$$

неидеальностью жидкости в пределах манометра М можно пренебречь. В противном случае ( $\Delta h$  сравнимо с  $(z_1 - z_2) \frac{\Delta l}{L}$ ) в уравнении (1) из  $p_1 - p_2$  необходимо вычесть  $\Delta z \frac{\Delta l}{L} \rho g$ .

Все сказанное относится и к расходомеру Пито. Кроме этого, для трубки Пито следует сделать оценку поправки к его показаниям, вызванную конечностью размеров вставленной в поток частью изогнутой трубки 2.

При измерениях очень важно обеспечить стационарность течения жидкости. Это достигается тем, что уровень воды в резервуаре I при каждом измерении с помощью крана К должен поддерживаться на одной и той же высоте  $H$ . Для удобства рядом с водомерной трубкой имеется миллиметровая шкала. Перед началом измерений следует проверить, хорошо ли работают манометры (не засорены ли трубки).

## ЗАДАНИЕ

1. Налейте немного воды в бак (резервуар I). При закрытой пробкой трубе Т убедитесь, что уровни воды в трубках манометров совпадают с уровнем в баке. Если это не так, найдите и устраните причину.
2. Для каждого уровня воды в баке (резервуар I)  $H$ , от малых уровней ( $\sim 1$  см) до больших, а затем снова до малых, добейтесь стационарного течения воды в трубе Т, что обеспечивается неизменностью уровня воды в баке, и проведите несколько раз измерение времени  $t$  заполнения резервуара II. Оцените погрешность измерения времени. Для каждого уровня  $H$  запишите также показания манометров расходомеров Вентури и Пито.
3. По времени  $t$  заполнения резервуара II, его объему  $V_0$  и заданной площади сечения  $S_1$  трубы Т вычислите скорость течения воды по расходу  $v_p = V_0/(tS_1)$ . Оцените погрешность величины скорости.
4. Измерьте длину  $L$  всей трубы Т, а также  $\Delta l$  манометров Вентури и Пито.
5. Постройте зависимость квадрата скорости  $v_p^2$  от уровня воды в баке  $H$ . На графике отметьте погрешности определения величин. Здесь же

постройте зависимость высоты, рассчитанной по формуле Торричелли  $z_2 = v^2/(2g)$ , от квадрата скорости. Совпадают ли полученные зависимости? В чем причина расхождений?

6. По показаниям расходомеров Вентури и Пито с помощью формул (1) и (2) вычислите значения скоростей  $v_B$  и  $v_P$  с поправкой на потери и без нее. Оцените погрешности этих величин. Сравните эти скорости со скоростью  $v_p$ , определенной по расходу, отложив их на графике в зависимости от  $v_p$ . Как скажутся на характере построенного графика погрешности в величине сечений  $S_1$  и  $S_2$ , входящих в формулу (1), а также сужение сечения в области, где впаина трубка 2 расходомера Пито?
7. Постройте график зависимости  $v_p$  от  $H$ . По графику определите участки ламинарного и турбулентного течения. Для точки перехода ламинарного течения в турбулентное определите число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{v_p r \rho}{\eta},$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $r$  — радиус трубы Т,  $\eta$  — коэффициент вязкости жидкости (для воды  $\eta = 1 \cdot 10^{-3}$  кг/м · с).

### Контрольные вопросы

1. При каких предположениях получено уравнение Бернулли?
2. В какую сторону изменяет показания расходомеров Пито и Вентури наличие вязкости?
3. При каких уровнях воды  $H$  в резервуаре 1 течение в трубе Т ламинарное, а при каких — турбулентное?
4. В некотором опыте происходит ламинарное течение жидкости по трубе. Как будет изменяться течение, если использовать все менее вязкую жидкость, оставляя неизменными диаметр трубы, скорость течения и плотность жидкости?
5. При каком течении — турбулентном или ламинарном — получается лучшее согласие скорости, определенной по расходомерам Пито и Вентури, со скоростью, найденной с помощью резервуара П?
6. Выведите формулу Торричелли. Используя формулу Торричелли, оцените скорости вытекания воды из очень короткой трубы при разных уровнях  $H$ . Почему реальные скорости вытекания из длинной трубы значительно меньше?
7. В расходомерах Пито и Вентури оцените разницу уровней воды  $\Delta h$  в левых измерительных трубках (рис. 3), присоединенных к трубе Т в местах одинакового сечения. Как можно объяснить наличие разницы давлений? Какие получатся результаты, если с помощью линейного экстраполирования попытаться найти давления на концах трубы Т?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. Гл. XII, §§ 93, 94, 95.
2. *Хайкин С.Э.* Физические основы механики. — М.: Наука, 1971. Гл. XVI, §§ 123, 124.
3. *Стрелков С.П.* Механика. — М.: Наука, 1975. §§ 100–106.
4. *Кингсен А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: Физматлит, 2001. Ч. 1. Гл. 8. §§ 8.3, 8.4, 8.5, 8.6.
5. *Фабер Т.Е.* Гидроаэродинамика. — М.: Постмаркет, 2001.

## МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

**Свободные колебания гармонического осциллятора.** Движения и процессы, обладающие той или иной повторяемостью во времени, обычно называют колебаниями. Такие движения могут быть связаны с различными явлениями в природе, экономике и общественной жизни. Особенность всех колебаний заключается в том, что они возникают в результате воздействия, стремящегося вернуть систему к равновесию, если она из него выведена. Эта особенность привела к единому математическому описанию изменений характеристик колебаний. Возвращающими силами в механике могут быть упругая сила пружины, сила тяжести, упругие силы, возникающие при закручивании стержня или проволоки, и тому подобные.

Простым примером колебаний является движение груза, подвешенного на упругой пружине. Но мы начнем даже с еще более простого примера. Положим груз и пружину на горизонтальную гладкую (без трения) поверхность. Один конец пружины закрепим неподвижно, к другому прикрепим тело массой  $m$ . Пусть недеформированная пружина имеет длину  $l_0$ . Если в направлении оси пружины сдвинуть тело или сообщить ему начальную скорость, то возникнет одномерное движение в направлении оси пружины, которую назовем осью  $x$ . Предположим, что сила реакции пружины  $F$  пропорциональна изменению ее длины  $l - l_0$ , которое равно смещению тела от положения равновесия  $x = l - l_0$ :

$$F = -kx. \quad (4.1)$$

Знак минус указывает, что сила направлена противоположно смещению. Постоянный коэффициент пропорциональности  $k$  называется жесткостью пружины. Следует отметить, что жесткость пружины при больших относительных деформациях может зависеть от величины деформации и приводить к нелинейности, о которой будет сказано позднее.

Движение массы  $m$  описывается вторым законом Ньютона:

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (4.2)$$

Точками над переменной обозначается дифференцирование по времени.

Введем обозначение

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (4.3)$$

Уравнение (4.2) принимает вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (4.4)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Общее решение (4.4) содержит две произвольные постоянные, для нахождения которых нужно иметь два условия. В частности, можно задать начальные (то есть при  $t = 0$ ) условия. Например, при  $t = 0$ :  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = 0$  или  $x = 0$ ,  $\dot{x} = v_0$ .

Для интегрирования уравнения (4.2) умножим его на  $\dot{x}$ . Тогда, так как  $\ddot{x} = d\dot{x}/dt$  и  $\dot{x} = dx/dt$ , имеем

$$m\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \right) = 0. \quad (4.5)$$

Отсюда

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E. \quad (4.6)$$

Первый член представляет кинетическую энергию движения массы  $m$ , а второй — упругую энергию деформированной пружины. Постоянная интегрирования  $E$  представляет полную механическую энергию системы масса—пружина. Из (4.6) видно, что  $E$  — положительная величина, которая может быть найдена из начальных условий. В случае задания начального смещения и начальной скорости, равной нулю,

$$E = \frac{kx_0^2}{2}. \quad (4.7)$$

В случае задания начальной скорости при отсутствии смещения

$$E = \frac{mv_0^2}{2}. \quad (4.8)$$

Таким образом, первый интеграл (4.6) уравнения (4.2) представляет закон сохранения механической энергии. Для дальнейшего интегрирования запишем (4.6) в виде

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m}} \sqrt{1 - \frac{k}{2E} x^2}. \quad (4.9)$$

Введем обозначение

$$x \sqrt{\frac{k}{2E}} = \sin y. \quad (4.10)$$

Из (4.9), (4.10) и (4.3) получаем

$$\dot{y} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm \omega_0.$$

Интегрируя и переходя к  $x$ , находим

$$x_1 = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin(\omega_0 t + \alpha),$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{2E}{k}} \sin(\omega_0 t + \beta) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin(\omega_0 t + \pi + \beta).$$

Оба решения можно выразить одной формулой:

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (4.11)$$

где  $\varphi_0$  — произвольная постоянная, определяемая начальными условиями. Часто (4.11) удобно записывать в виде

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.12)$$

Величина  $\omega_0 t + \varphi_0$  называется **фазой колебаний**, а постоянная интегрирования  $\varphi_0$  называется **начальной фазой колебаний**. При изменении фазы колебаний на величину, кратную  $2\pi$ , значения синуса повторяются. Таким образом, (4.12) описывает периодический процесс. Период его  $T$  определяется из соотношения

$$2\pi = \omega_0(t + T) + \varphi_0 - (\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0 T.$$

Введенная в (4.3) величина  $\omega_0$  называется **круговой (или циклической) частотой колебаний**. С числом колебаний в секунду (просто частотой) и периодом  $T$  она связана соотношениями

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}. \quad (4.13)$$



Из (4.6) видно, что при увеличении отклонения  $x$  скорость  $\dot{x}$  падает. Остановка ( $\dot{x} = 0$ ) происходит при максимальном отклонении  $x = a$ , которое называется **амплитудой колебаний**:

$$\frac{ka^2}{2} = E. \quad (4.14)$$

По определению амплитуда  $a$  считается положительной величиной. Подставляя (4.14) в (4.12), получим

$$x = a \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.15)$$

Для скорости имеем

$$\dot{x} = a\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.16)$$

Видно, что максимальное смещение в положительном направлении оси  $x$  отстает от максимальной скорости в том же направлении по фазе на  $\pi/2$  (на  $90^\circ$ ).

В общем случае, когда в начальный момент заданы и  $x_0$ , и  $v_0$ , получаем

$$a = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega_0^2}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg} \left( \frac{\omega_0 x_0}{v_0} \right). \quad (4.17)$$

Колебания, описываемые формулой (4.15), называются гармоническими (или синусоидальными), так как синус и косинус называются гармоническими функциями. Важной особенностью гармонических колебаний является их изохронность, то есть независимость периода колебаний от амплитуды. Систему, которая совершает такие колебания и описывается уравнением (4.4), называют **гармоническим осциллятором**. Отметим, что движение тела по окружности с постоянной скоростью можно рассматривать как сложение двух гармонических колебаний одинаковой амплитуды во взаимно перпендикулярных направлениях, сдвинутых по фазе на  $\pi/2$ . Круговая частота колебаний при этом совпадает с угловой скоростью движения по окружности. Видимо поэтому она называется круговой. В общем случае сложение колебаний, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях, имеющих разные амплитуды и частоты, приводит к сложной траектории, которая называется **фигурой Лиссажу**.

Выражение (4.15) можно преобразовать к виду

$$x = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t. \quad (4.18)$$

Здесь, как и в (4.15), две постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий.

С помощью (4.15) и (4.16) можно получить выражения для кинетической  $K$  и потенциальной (упругой)  $U$  энергий осциллятора:

$$K = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 a^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{m\omega_0^2 a^2}{4} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)],$$

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 a^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{m\omega_0^2 a^2}{4} [1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)].$$

Заметим, что

$$K + U = E = \frac{m\omega_0^2 a^2}{2}.$$

По определению средние значения величин  $K$  и  $U$  за период равны

$$\bar{K} = \frac{1}{T} \int_0^T K(t) dt, \quad \bar{U} = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) dt.$$

Вычисление этих интегралов дает

$$\bar{K} = \bar{U} = \frac{m\omega_0^2 a^2}{4} = \frac{E}{2}. \quad (4.19)$$

Отсюда видно, что средние значения потенциальной и кинетической энергий гармонического осциллятора равны.

Рассмотрим теперь колебания груза массой  $m$ , подвешенного на пружине жесткости  $k$  в поле тяжести с ускорением свободного падения  $g$ . В этом случае вместо (4.2) получим

$$m\ddot{x} = -kx + mg. \quad (4.20)$$

Здесь ось  $x$  направлена вертикально вниз так же, как сила тяжести.

Пусть  $x_0$  — растяжение пружины в положении равновесия, тогда

$$mg = kx_0. \quad (4.21)$$

Из (4.20) и (4.21) для отклонения от положения равновесия  $\xi = x - x_0$  получим

$$m\ddot{\xi} = -k\xi, \quad (4.22)$$

т. е. уравнение гармонического осциллятора (4.4).

**Фазовый портрет гармонического осциллятора.** Существует замечательная графическая интерпретация колебаний гармонического осциллятора на так называемой фазовой плоскости. На координатных

осях этой плоскости откладываются координата  $x$  материальной точки и величина, пропорциональная ее скорости, например, ее импульс  $m\dot{x}$ . Точка на фазовой плоскости определяет в данный момент времени состояние механической системы с одной степенью свободы. Рассмотрим фазовую плоскость гармонического осциллятора, совершающего колебание:

$$x = a \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Будем откладывать на оси абсцисс координату  $x$ , а на оси ординат — величину  $y = \dot{x}/\omega_0$ . Это удобно, поскольку  $x$  и  $y$  обладают одинаковой размерностью. Очевидно,

$$y = -a \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Можно видеть, что

$$x^2 + y^2 = a^2. \quad (4.23)$$

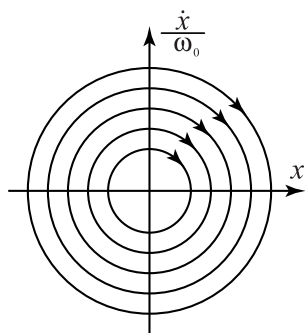


Рис. 4.1. Фазовый портрет гармонического осциллятора

Это уравнение окружности радиуса  $a$ . Точка  $(x, y)$  на фазовой плоскости изображает состояние осциллятора в данный момент времени. Назовем эту точку изображающей. Когда осциллятор движется, его скорость меняется, изображающая точка движется по фазовой траектории, которая является окружностью. Колебаниям всех возможных амплитуд соответствует семейство концентрических окружностей с центром в начале координат. Рисунок 4.1 представляет фазовый портрет гармонического осциллятора.

Колебаниям с одинаковой амплитудой, но с различными начальными фазами соответствует движение по одной и той же окружности, но при этом в один и тот же момент времени изображающие точки занимают разные положения. Разность фаз равна углу между радиусами-векторами изображающих точек. Можно убедиться в том, что движение изображающих точек происходит по часовой стрелке, полный оборот при этом совершается за время, равное периоду осциллятора  $T = 2\pi/\omega_0$ .

Фазовая плоскость дает представление о движении системы в целом.

**Свободные колебания осциллятора с вязким трением.** Рассмотрим колебания, при которых, кроме возвращающей силы, действует

еще сила, тормозящая движение, то есть всегда направленная противоположно скорости. Такие силы возникают, например, при колебаниях в средах, создающих сопротивление движению. При небольших скоростях движения они пропорциональны величине скорости:

$$F_c = -b\dot{x}. \quad (4.24)$$

В этом случае вместо (4.2) получаем

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}. \quad (4.25)$$

Введем обозначение

$$\frac{b}{m} = 2\beta. \quad (4.26)$$

Теперь вместо (4.4) имеем

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (4.27)$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$x = a_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (4.28)$$

Дифференцируя по времени и подставляя в (4.27), получаем, что (4.27) удовлетворяется тождественно, если

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2. \quad (4.29)$$

Таким образом, при увеличении вязкого трения частота колебаний падает, а период, который обратно пропорционален частоте, увеличивается. Строго говоря, такое движение не является периодическим движением. Тем не менее период в случае затухающих колебаний можно определить как время между прохождениями через положение равновесия в одном и том же направлении:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

В случае малого затухания ( $\beta \ll \omega_0$ ) можно считать, что максимальное отклонение происходит в момент, когда синус в (4.28) равен единице:

$$a = a_0 e^{-\beta t}. \quad (4.30)$$

Отношение последовательных максимальных отклонений в одну сторону называется **декрементом затухания**:

$$D = \frac{a_i}{a_{i+1}} = e^{\beta T}. \quad (4.31)$$

Натуральный логарифм этого отношения  $\delta$  называется **логарифмическим декрементом**:

$$\delta = \beta T. \quad (4.32)$$

В некоторых системах эта величина может быть отрицательной, тогда она называется **инкрементом**. В этих системах амплитуда колебаний увеличивается. При положительном  $\delta$ , близком к нулю, амплитуда уменьшается мало и затухание слабое. Если  $\beta \ll \omega_0$ , то, как следует из (4.29), частота колебаний близка к собственной частоте  $\omega_0$ .

Найдем скорость уменьшения энергии колебаний системы (диссипацию) при слабом затухании. Из (4.19) следует, что в зависимости от амплитуды энергия равна

$$E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2. \quad (4.33)$$

Подставляя (4.30) в (4.33), а затем, логарифмируя и дифференцируя, получаем усредненное по периоду колебаний относительное изменение энергии:

$$\frac{dE}{E} = -2\beta dt. \quad (4.34)$$

Для уменьшения энергии  $\Delta E$  за период  $T$  получаем

$$\frac{\Delta E}{E} = 2\beta T = 2\delta. \quad (4.35)$$

Важным параметром, характеризующим осциллятор с вязким трением, является добротность  $Q$ , которая представляет собой умноженное на  $2\pi$  отношение энергии в колебательной системе к ее потерям за период. Далее приведены выражения  $Q$  через другие параметры осциллятора в случае малого затухания:

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{m\omega_0}{b} = \frac{\sqrt{km}}{b} = \frac{k}{b\omega_0} = \pi n. \quad (4.36)$$

Здесь  $n$  — число колебаний, за которое амплитуда уменьшается в  $e$  раз ( $e = 2,71828 \dots$ ).

Для затухающих колебаний фазовый портрет представляет собой спираль, скручивающуюся к центру. В случае сильного затухания, когда  $\beta \geq \omega_0$ , движение становится аperiодическим. Случай, когда  $\beta = \omega_0$ , называется критическим.

**Физический маятник.** Физическим маятником называется любое твердое тело, совершающее колебания относительно неподвижной точки или оси под действием возвращающих сил. Рассмотрим случай, когда возвращающей является сила тяжести. При устойчивом равновесии центр масс маятника лежит на одной вертикали с точкой подвеса

ниже ее. При колебаниях прямая, соединяющая точку подвеса с центром масс, отклоняется от вертикали на угол  $\varphi$ . Уравнение колебаний физического маятника напишем для изменения этого угла. В соответствии с формулой (2.35) имеем

$$I\ddot{\varphi} = -mga \sin \varphi. \quad (4.37)$$

Здесь  $I$  — момент инерции тела относительно оси вращения (подвеса маятника),  $a$  — расстояние от оси вращения до центра масс тела.

Если углы отклонения маятника от вертикали малы и можно считать  $\sin \varphi \approx \varphi$ , то получаем уравнение гармонического осциллятора. В этом случае для периода колебаний физического маятника имеем

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}. \quad (4.38)$$

Если размер тела, подвешенного на нити или на невесомом стержне длины  $l$ , намного меньше  $l$ , то такое тело называют точечной массой (материальной точкой), а маятник математическим. В этом случае  $I = ml^2$  и  $a = l$ . Поэтому период колебаний математического маятника равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4.39)$$

Если период математического маятника совпадает с периодом физического маятника, то  $l$  называют приведенной длиной физического маятника  $l_{\text{пр}}$ :

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{ma}. \quad (4.40)$$

Центром качания физического маятника (рис. 4.2) называется точка  $O'$ , расположенная на прямой, проходящей через точку подвеса и центр масс, на расстоянии  $l_{\text{пр}}$  от точки подвеса  $O$ . Если всю массу тела сосредоточить в этой точке, то физический маятник превратится в математический с тем же периодом колебаний. Обозначим момент инерции физического маятника относительно центра масс через  $I_0$ . Пользуясь теоремой Гюйгенса–Штейнера (2.31), для момента инерции физического маятника относительно оси подвеса получаем

$$I = I_0 + ma^2. \quad (4.41)$$

Подставляя (4.41) в (4.40), имеем

$$l_{\text{пр}} = a + \frac{I_0}{ma}. \quad (4.42)$$

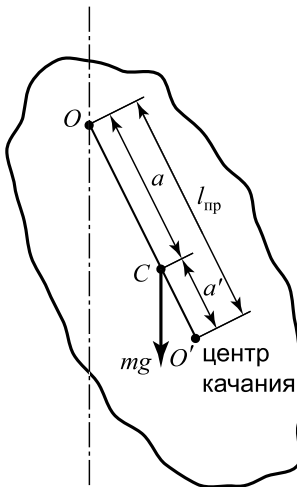


Рис. 4.2. Физический маятник

Видно, что центр качания лежит дальше от оси подвеса тела, чем центр масс. Из этих же формул можно получить, что приведенная длина физического маятника при подвешивании его за центр качания, которую обозначим  $l'_{пр}$ , равна  $l_{пр}$ . Для этого воспользуемся тем, что расстояние от точки качания, которая стала новой точкой подвеса, до центра масс

$$a' = l_{пр} - a = \frac{I_0}{ma}. \quad (4.43)$$

Получаем

$$l'_{пр} = \frac{I_0}{ma'} + a' = a + l_{пр} - a = l_{пр}. \quad (4.44)$$

Из совпадения приведенных длин следует, что период колебаний физического маятника не изменится, если колебания будут происходить относительно центра качаний.

При больших углах отклонения происходят так называемые нелинейные колебания математического маятника, период которых зависит от амплитуды колебаний (угла максимального отклонения). Интегрирование уравнения (4.37) приведено в описании к работе 1.4.3. Здесь приведем лишь окончательное выражение для учета влияния амплитуды колебаний на период при не очень больших углах отклонения:

$$T \approx T_0 \left( 1 + \frac{\varphi_m^2}{16} \right). \quad (4.45)$$

Здесь  $T_0$  — период при настолько малых отклонениях, что он не зависит от амплитуды и определяется (4.38), а  $\varphi_m$  — угол максимального отклонения (амплитуда).

Для нелинейных колебаний маятника из (4.37) получаем закон сохранения механической энергии (первый интеграл):

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \omega_0^2 \cos \varphi = \frac{E_0}{I} - \omega_0^2.$$

Здесь введено обозначение  $\omega_0^2 = mga/I$  частоты колебаний при малых отклонениях, когда нелинейностью можно пренебречь,  $E_0$  — полная

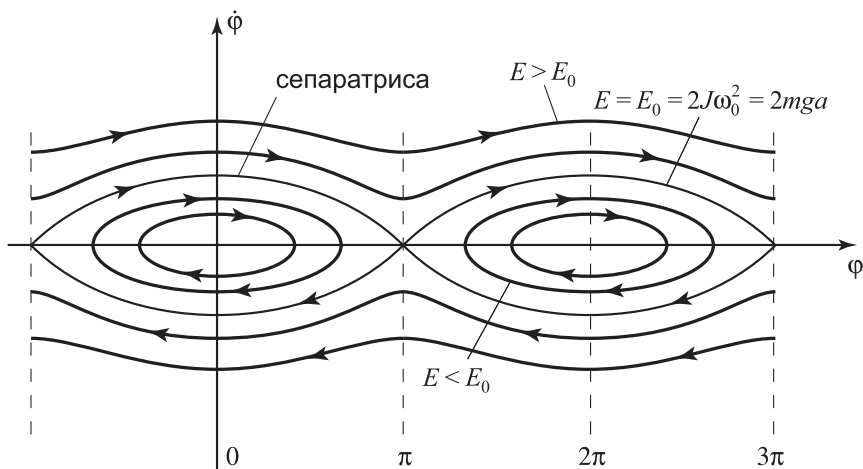


Рис. 4.3. Фазовый портрет маятника

энергия (потенциальная в положении равновесия равна нулю). Фазовый портрет колебаний маятника представлен на рис. 4.3. Эллиптические траектории в случае малых углов соответствуют окружностям рис. 4.1. С увеличением энергии (амплитуды) колебаний траектория перестает быть эллиптической. При достаточно больших энергиях колебания переходят во вращательное движение. Граничная фазовая траектория, отделяющая ограниченное (финитное) движение маятника от вращательного, называется сепаратрисой. Траектории, соответствующие неограниченному движению, называются убегающими.

**Вынужденные колебания осциллятора с вязким трением.** Установившиеся колебания осциллятора под воздействием периодической внешней силы называются **вынужденными**. Мы рассмотрим наиболее важный случай действия сил, меняющихся по гармоническому закону  $F = F_0 \sin \omega_0 t$ . Любое другое воздействие можно с помощью ряда Фурье представить через гармонические функции и затем воспользоваться принципом суперпозиции, который выполняется в случае линейных уравнений колебаний.

После начала действия вынуждающей силы возможно возникновение колебаний с различными частотами. В процессе установления остаются лишь те колебания, частота которых совпадает с частотой вынуждающей силы, которая их и поддерживает. Все остальные колебания в процессе установления затухают.



Уравнение колебаний в случае вынуждающей силы, меняющейся по гармоническому закону, имеет вид

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t. \quad (4.46)$$

Решение (4.46) для установившихся колебаний ищем в виде колебания с частотой вынуждающей силы:

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (4.47)$$

Здесь  $\varphi$  — разность фаз между смещением  $x$  и силой  $F$ , которая определяется из уравнения (4.46), в отличие от сдвига фаз в решении (4.15), который определялся начальными условиями. Отметим, что начальные условия не существенны для установившихся вынужденных колебаний.

Вычисляя производные (4.47) и подставляя в (4.46), получаем Задача заключается в нахождении наилучшего значения

Поскольку функции  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$  линейно независимы, это дает

$$\begin{aligned} [(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - 2\beta\omega \sin \varphi] x_0 &= \frac{F_0}{m}, \\ [(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + 2\beta\omega \cos \varphi] x_0 &= 0. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Из второго условия (4.48) имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (4.49)$$

Воспользуемся тригонометрическими тождествами

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha},$$

из (4.49) находим

$$\cos \varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad \sin \varphi = -\frac{2\beta\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Подставляя эти соотношения в первое уравнение (4.48), находим амплитуду  $x_0$  установившихся колебаний:

$$x_0 = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (4.50)$$

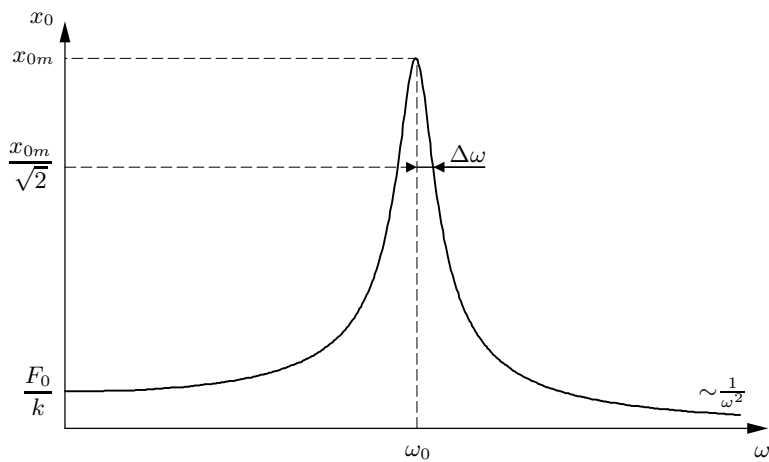


Рис. 4.4. Амплитудно-частотная характеристика ( $Q = 10$ )

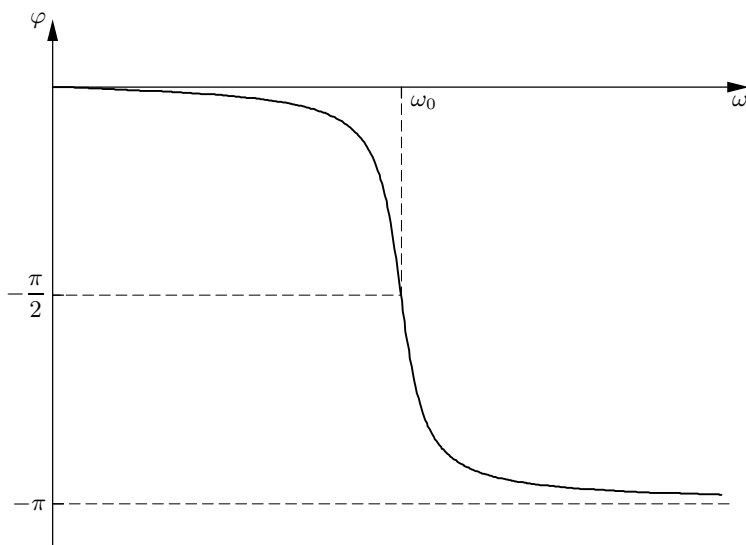


Рис. 4.5. Фазово-частотная характеристика ( $Q = 10$ )

Используя (4.49), (4.50) и (4.47), можно получить окончательное решение для вынужденных колебаний.

На рис. 4.4 и рис. 4.5 приведены графики зависимостей амплитуды и сдвига фазы вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы.

При стремлении частоты вынуждающей силы к нулю амплитуда  $x_0$  стремится к

$$\frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}. \quad (4.51)$$

Таким образом, при малых частотах и больших периодах, то есть медленном движении, смещение определяется жесткостью пружины.

При высоких частотах вынуждающей силы

$$x_0 \rightarrow \frac{F_0}{m\omega^2}, \quad (4.52)$$

то есть амплитуда колебаний падает с увеличением частоты вынуждающей силы и тем быстрее, чем больше масса осциллятора.

Максимальное значение амплитуды колебаний и частоту вынуждающей силы, при которой это происходит, можно найти, вычислив экстремум зависимости (4.50):

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad x_{0\max} = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (4.53)$$

При малом затухании

$$\omega_{\max} \approx \omega_0, \quad x_{0\max} \approx \frac{F_0}{2\beta\omega_0 m}. \quad (4.54)$$

Амплитуда тем больше, чем меньше затухание. Сильное увеличение амплитуды вынужденных колебаний при частотах вынуждающей силы, близких к собственной частоте осциллятора, называется **резонансом**. Как видно из (4.54), (4.51) и (4.36), отношение амплитуды при резонансе к амплитуде при малых частотах равно добротности осциллятора  $Q$ .

Добротностью определяется и ход зависимости (4.50) вблизи резонансной частоты, и так называемая ширина резонансного пика. Из (4.50), используя малость разности  $\omega_0 - \omega$  и (4.36), получаем

$$x_0(\omega) = \frac{F_0}{2m\beta\omega_0\sqrt{1 + \left(\frac{2\omega_0\Delta\omega}{2\beta\omega_0}\right)^2}} = \frac{x_{0\max}}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (4.55)$$

Отметим, что зависимость

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(\omega_0 - \omega)^2}{\beta^2}}}$$

называют лоренцевой функцией. Эта функция часто встречается при анализе спектральных линий.

Для ширины пика на уровне  $x_0 = x_{0\max}/\sqrt{2}$  из (4.55) имеем

$$2\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}. \quad (4.56)$$

Разность фаз между смещением и вынуждающей силой, как видно из (4.49), при стремлении частоты вынуждающей силы к нулю также стремится к нулю. Фазы совпадают. При резонансе смещение отстает от вынуждающей силы на  $\pi/2$ . Зато скорость совпадает по фазе с силой. Понятно, что максимальных амплитуд можно достигнуть, если максимальная сила действует при максимальной скорости в направлении скорости. При высоких частотах вынуждающей силы смещение отстает от силы на  $\pi$  (в противофазе).

Резонансные зависимости для амплитуд скорости  $v_0$  и ускорения  $a_0$  отличаются от резонансных зависимостей для амплитуды смещения. Так как  $v_0 = x_0\omega$ ,  $a_0 = x_0\omega^2$ , то  $v_0 = 0$  и  $a_0 = 0$  при  $\omega = 0$ . Максимальное значение амплитуды скорости получаем при  $\omega = \omega_0$ , а максимальное значение амплитуды ускорения — при  $\omega_0^2/\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ . При возрастании частоты вынуждающей силы амплитуда скорости стремится к нулю, а амплитуда ускорения — к постоянной величине  $F_0/m$ .

Когда осциллятор совершает вынужденные колебания, его энергия остается неизменной. В то же время он непрерывно поглощает энергию от источника внешней силы. Эта энергия идет на преодоление трения, т. е. превращается в тепло. Количество энергии, поглощаемой в среднем в единицу времени, равно

$$I(\omega) = \overline{F \cdot \dot{x}} = F_0\omega x_0 \overline{\cos(\omega t + \varphi) \sin \omega t} = -\frac{1}{2}F_0\omega x_0 \sin \varphi. \quad (4.57)$$

Рассмотрим ситуацию вблизи резонанса, когда  $|\omega - \omega_0| = |\Delta\omega| \ll \omega_0$ . Поскольку при этом

$$\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \approx \frac{Q}{\omega_0^2 \sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \right)^2}},$$

имеем

$$x_0 = \frac{F_0 Q}{m\omega_0^2 \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}},$$

$$\sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}}.$$

Подставляя эти выражения в (4.57), находим

$$I(\Delta\omega) = \frac{F_0^2 Q}{2m\omega_0 \left[ 1 + Q^2 \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2 \right]} \quad (4.58)$$

или

$$I(\Delta\omega) = \frac{I(0)}{1 + Q^2 \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2},$$

где

$$I(0) = \frac{F_0^2 Q}{2m\omega_0}.$$

Зависимость поглощаемой энергии от частоты внешней силы, как видно из формулы (4.58), также имеет резонансный характер. Определим ширину резонансной кривой. На уровне  $1/2$  имеем

$$\frac{I(0)}{2} = \frac{I(0)}{1 + Q^2 \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

Отсюда находим

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \pm \frac{1}{2Q},$$

т. е. ширина резонансной кривой равна

$$2|\Delta\omega| = \frac{\omega_0}{Q}.$$

Таким образом, как максимальная поглощаемая энергия, так и ширина резонансной кривой определяются добротностью осциллятора.

**Свободные колебания связанных маятников.** До сих пор рассматривались системы с одной степенью свободы. Рассмотрим теперь

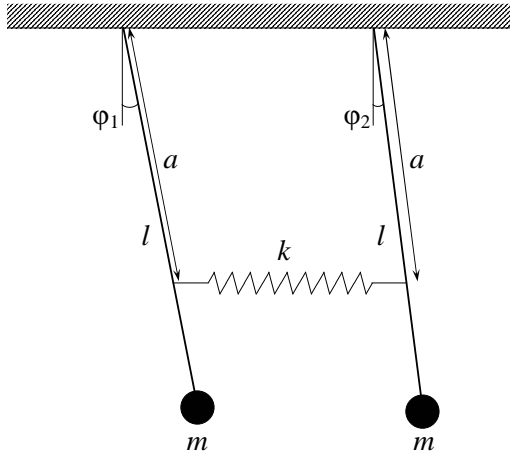


Рис. 4.6. Связанные маятники

простейшую модель системы с двумя степенями свободы — два одинаковых маятника, связанных пружиной и совершающих колебания в плоскости рисунка (рис. 4.6). Маятники представляют собой невесомые спицы с насаженными на них маленькими тяжелыми шариками.

Обозначения показаны на рисунке. Если углы отклонения маятников от положения устойчивого равновесия достаточно малы ( $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$ ), то со стороны пружины на первый маятник действует момент силы, равный

$$M_{21} = ka^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Аналогично второй маятник будет испытывать вращающий момент противоположного знака:

$$M_{12} = -ka^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Эти моменты описывают связь между маятниками.

Уравнения движения маятников имеют вид

$$ml^2 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = -mgl\varphi_1 + ka^2(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (4.59)$$

$$ml^2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} = -mgl\varphi_2 - ka^2(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (4.60)$$

Сложив эти два уравнения, находим

$$ml^2 \frac{d^2}{dt^2}(\varphi_1 + \varphi_2) = -mgl(\varphi_1 + \varphi_2). \quad (4.61)$$

Вычитание (4.60) из (4.59) дает

$$ml^2 \frac{d^2}{dt^2}(\varphi_1 - \varphi_2) = -(mgl + 2ka^2)(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (4.62)$$

Заметим, что с помощью операций сложения и вычитания нам удалось «развязать» уравнения (4.59) и (4.60). Решения уравнений (4.61) и (4.62) имеют вид

$$\varphi_1 + \varphi_2 = A \cos(\omega^+ t + \alpha), \quad (4.63)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = B \cos(\omega^- t + \beta), \quad (4.64)$$

$$\omega^+ = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega^- = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}},$$

где  $A, B, \alpha, \beta$  — произвольные константы. Складывая и вычитая (4.63) и (4.64), находим

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}A \cos(\omega^+ t + \alpha) + \frac{1}{2}B \cos(\omega^- t + \beta), \quad (4.65)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}A \cos(\omega^+ t + \alpha) - \frac{1}{2}B \cos(\omega^- t + \beta). \quad (4.66)$$

Для угловых скоростей при этом имеем

$$\dot{\varphi}_1 = -\frac{1}{2}\omega^+ A \sin(\omega^+ t + \alpha) - \frac{1}{2}\omega^- B \sin(\omega^- t + \beta), \quad (4.67)$$

$$\dot{\varphi}_2 = -\frac{1}{2}\omega^+ A \sin(\omega^+ t + \alpha) + \frac{1}{2}\omega^- B \sin(\omega^- t + \beta). \quad (4.68)$$

Проанализируем полученные решения. Пусть маятники имеют в начале (при  $t = 0$ ) одинаковые отклонения и нулевые начальные скорости:

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0.$$

Тогда из (4.65) – (4.68) находим

$$\sin \alpha = 0, \quad A = 2\varphi_0, \quad B = 0,$$

т. е.

$$\varphi_1 = \varphi_0 \cos \omega^+ t, \quad \varphi_2 = \varphi_0 \cos \omega^+ t. \quad (4.69)$$

Это означает, что маятники будут колебаться с одинаковой амплитудой и в одинаковой фазе (синфазно).

Если при  $t = 0$

$$\varphi_1(0) = -\varphi_2(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0,$$

то из (4.65) – (4.68) следует

$$\sin \beta = 0, \quad A = 0, \quad B = 2\varphi_0,$$

т. е.

$$\varphi_1 = \varphi_0 \cos \omega^- t, \quad \varphi_2 = -\varphi_0 \cos \omega^- t = \varphi_0 \cos(\omega^- t + \pi). \quad (4.70)$$

Соотношения показывают, что маятники колеблются с постоянной амплитудой, синхронно, но не синфазно: колебания маятников находятся в противофазе. Два вида движения (4.69) и (4.70) называются **нормальными модами колебаний** системы связанных осцилляторов. Нормальная мода колебаний — это коллективное колебание, при котором амплитуда колебаний каждой частицы остается постоянной. В современной физике понятие нормальной моды играет очень важную роль.

Рассмотрим теперь случай, когда в начальный момент времени отклонен лишь один маятник, т. е.

$$\varphi_1(0) = \varphi_0, \quad \varphi_2(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0.$$

Можно показать, что в этом случае

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_0}{2} (\cos \omega^+ t + \cos \omega^- t), \quad (4.71)$$

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_0}{2} (\cos \omega^+ t - \cos \omega^- t). \quad (4.72)$$

Используя тригонометрические тождества

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2},$$

уравнения (4.71) и (4.72) можно представить в виде

$$\varphi_1 = \varphi_0 \cos \frac{\omega^+ - \omega^-}{2} t \cdot \cos \frac{\omega^+ + \omega^-}{2} t, \quad (4.73)$$



$$\varphi_2 = \varphi_0 \sin \frac{\omega^- - \omega^+}{2} t \cdot \sin \frac{\omega^+ + \omega^-}{2} t. \quad (4.74)$$

Проанализируем формулы (4.73) и (4.74). Заметим, что частота колебаний четной моды (моды, отмеченной знаком «+»)  $\omega^+ = \sqrt{g/l}$  равна  $\omega_0$ , где  $\omega_0$  — собственная частота одиночного маятника (так называемая **парциальная частота**). С другой стороны, частота колебаний нечетной моды (моды, отмеченной знаком «-») равна

$$\omega^- = \omega_0 \sqrt{1 + 2\varepsilon},$$

где параметр  $\varepsilon = ka^2/mgl$  характеризует связь маятников. В случае слабой связи, когда  $\varepsilon \ll 1$ , можно считать, что

$$\omega^- \approx \omega_0(1 + \varepsilon),$$

т. е.

$$\omega^- - \omega^+ \approx \omega_0 \varepsilon, \quad \omega^- + \omega^+ \approx 2\omega_0.$$

Уравнения (4.73), (4.74) можно при этом представить приближенно в виде

$$\varphi_1 = \varphi_0 \cos \frac{\omega_0 \varepsilon}{2} t \cos \omega_0 t, \quad (4.75)$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 \sin \frac{\omega_0 \varepsilon}{2} t \sin \omega_0 t = \varphi_0 \sin \frac{\omega_0 \varepsilon}{2} t \cos \left( \omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right). \quad (4.76)$$

Таким образом, мы имеем дело с гармоническими колебаниями частоты  $\omega_0$ , амплитуда которых изменяется со временем периодически с гораздо меньшей частотой  $\omega_0 \varepsilon / 2$ . Это — так называемые **амплитудно-модулированные колебания**, или, другими словами, **биения**. Относительная фаза колебаний равна  $\pi/2$ . Модулированная амплитуда колебаний первого маятника есть величина

$$A_1(t) = \varphi_0 \cos \frac{\omega_0 \varepsilon}{2} t. \quad (4.77)$$

Аналогично амплитуда колебаний второго маятника равна

$$A_2(t) = \varphi_0 \sin \frac{\omega_0 \varepsilon}{2} t = \varphi_0 \cos \left( \frac{\omega_0 \varepsilon}{2} t - \frac{\pi}{2} \right).$$

В начальный момент времени  $t = 0$  имеем

$$A_1 = \varphi_0, \quad A_2 = 0.$$

В момент времени  $t = \frac{\pi}{\omega_0 \varepsilon}$

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \varphi_0.$$

В момент времени  $t = 2 \frac{\pi}{\omega_0 \varepsilon}$

$$A_1 = -\varphi_0, \quad A_2 = 0.$$

Отметим, что амплитуда гармонического колебания, по определению, величина положительная. Отрицательный знак здесь означает, что относительная фаза колебаний изменилась на  $\pi$ . В момент времени  $t = 3 \frac{\pi}{\omega_0 \varepsilon}$

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -\varphi_0.$$

В момент времени  $t = 4 \frac{\pi}{\omega_0 \varepsilon}$

$$A_1 = \varphi_0, \quad A_2 = 0.$$

Таким образом, происходит передача колебаний от одного маятника к другому. Маятники обмениваются энергией. При  $t = 0$  вся энергия сосредоточена в первом маятнике. В результате связи через пружину энергия постепенно передается от первого маятника ко второму до тех пор, пока в нем не накопится вся энергия. Время  $\tau$ , необходимое для перехода энергии от одного маятника к другому и обратно, можно оценить из уравнения

$$\frac{\omega_0 \varepsilon}{2} \tau = \pi,$$

т. е.

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0 \varepsilon}. \quad (4.78)$$

Частота, с которой осцилляторы обмениваются энергией, равна

$$\frac{2\pi}{\tau} = \omega_0 \varepsilon = \omega^- - \omega^+.$$

Отметим, что колебания в системе с большим числом связанных осцилляторов можно трактовать как распространение в системе определенного типа волн.

**Плоская стационарная бегущая волна.** В физике волной называют всякое изменяющееся во времени пространственное чередование максимумов и минимумов любой физической величины, например, плотности вещества, давления, температуры, напряженности электрического поля и т. д. Такие чередования являются, по существу, колебаниями в распределенной системе, т. е. в системе с бесконечным числом

степеней свободы. Часто, однако, волной называют также явление, при котором в пространстве происходит распространение кратковременного возмущения, как говорят, «толчка». Простейшей моделью волнового процесса является плоская стационарная бегущая волна.

Пусть некоторая скалярная физическая величина  $s$  зависит от времени  $t$  и пространственной координаты  $x$  (но не зависит от координат  $y, z$ ) по закону

$$s = f(x - ut), \quad (4.79)$$

где  $f$  — произвольная функция, а  $u = \text{const}$ . Рассмотрим моментальный снимок волнового процесса в момент  $t = 0$ . В этом случае

$$s(0, x) = f(x). \quad (4.80)$$

Рассмотрим далее моментальный снимок той же волны в момент  $t = t_1$ . Его уравнение имеет вид

$$s(t_1, x) = f(x - ut_1). \quad (4.81)$$

Из формул (4.80), (4.81) видно, что моментальный снимок в момент  $t = t_1$  отличается от моментального снимка  $t = 0$  только смещением в положительном направлении оси  $x$  на расстояние  $ut_1$ . Таким образом, рассматриваемая волна перемещается *не меняя своей формы* в сторону возрастающих  $x$  со скоростью распространения, равной  $u$ . Волновой процесс, описываемый функцией (4.79), называется поэтому *плоской стационарной бегущей волной*. Волна, описываемая функцией

$$s = f(x + ut),$$

распространяется в противоположном направлении.

**Плоская синусоидальная бегущая волна.** Особый интерес представляет частный случай, когда функция  $f$  синусоидальная, т. е.

$$s = A \cos(\omega t - kx) = A \cos[k(x - ut)], \quad (4.82)$$

где  $u = \omega/k$  — скорость распространения волны. В каждой точке пространства ( $x$  фиксировано) величина  $s$  совершает гармоническое колебание. Его амплитуда равна  $A$ , круговая частота —  $\omega$ . Обе эти величины одинаковы для всех  $x$ . Период колебания равен  $T = 2\pi/\omega$ . Фаза колебания равна  $kx$ .

Моментальный снимок волны (4.82) есть синусоида в пространстве. Например, при  $t = 0$

$$s = A \cos kx.$$

Пространственный период, т. е. минимальное расстояние  $\lambda$ , такое, что при любом  $x$

$$s(x + \lambda) = s(x),$$

называют **длиной волны**. Величина  $k$  называется **волновым числом** или **пространственной частотой**. Очевидно, что

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

**Стоячие волны.** Пусть скалярная величина  $s$  зависит от пространственных координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и времени  $t$  по закону

$$s = F(x, y, z) \cos(\omega t + \varphi),$$

где  $F(x, y, z)$  — некоторая произвольная функция,  $\omega$  и  $\varphi$  — постоянные. Это значит, что величина  $s$  во всех точках пространства совершает гармоническое колебание с одинаковой частотой и фазой. Но амплитуда колебания различна для различных точек пространства. Такого рода явление называют **стоячей волной**.

Убедимся в том, что наложение двух бегущих плоских синусоидальных волн одинаковой амплитуды, длины волны и частоты, распространяющихся в противоположных направлениях, есть стоячая плоская синусоидальная волна.

Действительно, пусть

$$s_1 = A \cos(\omega t - kx + \alpha_1), \quad s_2 = A \cos(\omega t + kx + \alpha_2).$$

Тогда сумма

$$s = s_1 + s_2$$

согласно известной тригонометрической формуле

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

может быть представлена в виде

$$s = 2A \cos \left( kx - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \right) \cos \left( \omega t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right). \quad (4.83)$$

Это — уравнение синусоидальной стоячей волны.

Пусть теперь

$$s_1 = A_1 \cos(\omega t - kx + \alpha_1), \quad s_2 = A_2 \cos(\omega t + kx + \alpha_2).$$

Можно показать, что в этом случае

$$s = 2A_2 \cos\left(kx - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) + a \cos(\omega t - kx + \alpha_1).$$

Здесь принято обозначение  $a = A_1 - A_2$ . Величину  $a/A_2$  называют коэффициентом бегучести.

**Волновое уравнение.** Рассмотрим функцию, описывающую плоскую стационарную волну:

$$f(x, t) = f(x - ut). \quad (4.84)$$

Продифференцируем ее дважды по  $t$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f'(x - ut) \cdot (-u), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = f''(x - ut) \cdot u^2. \quad (4.85)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по аргументу  $x - ut$ . Продифференцируем теперь функцию (4.84) дважды по  $x$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x - ut), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(x - ut). \quad (4.86)$$

Сравнивая (4.85) и (4.86), убеждаемся в том, что функция (4.84) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (4.87)$$

Уравнение (4.87) — дифференциальное уравнение в частных производных, играющее в физике очень важную роль, — называется **волновым уравнением**. В математических курсах доказывается, что его общее решение имеет вид

$$f(x, t) = f_1(x - ut) + f_2(x + ut),$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — произвольные функции, вид которых в конкретной задаче определяется из начальных или граничных условий.

**Продольные волны в деформируемом твердом теле.** Рассмотрим динамику продольных волн в упругом стержне. Координатную ось  $x$  направим вдоль стержня. Пусть материальные точки, составляющие стержень, перемещаются и при том так, что материальные точки, составляющие при  $t = 0$  плоскость, перпендикулярную к оси  $x$ , образуют также в любой момент  $t \neq 0$  плоскость, перпендикулярную к оси  $x$ . Координата  $x$  сечения в момент времени  $t = 0$  будет иметь в момент  $t = t'$

значение, отличное, вообще говоря, от  $x$ , назовем его  $x'$ . Величину (положительную или отрицательную)

$$s = x' - x$$

будем называть смещением величины  $x$ . Рассмотрим участок стержня, ограниченный плоскостями с координатами  $x$  и  $x + \Delta x$ , длина этого участка до возникновения возмущения была равна  $\Delta x$ . Возмущение вызывает перемещение плоскостей. Плоскости с координатами  $x$  и  $x + \Delta x$  после перемещения имеют координаты  $x'$  и  $x' + \Delta x'$ , отличные, вообще говоря, от  $x$  и  $x + \Delta x$ .

Пусть

$$x' = x + s(x),$$

$$x' + \Delta x' = x + \Delta x + s(x + \Delta x),$$

где  $s(x)$  — смещение плоскости с координатой  $x$ ,  $s(x + \Delta x)$  — смещение плоскости с координатой  $x + \Delta x$ . Тогда длина рассматриваемого участка равна

$$(x' + \Delta x') - x' = \Delta x'.$$

Приращение длины этого участка равно

$$\Delta x' - \Delta x = s(x + \Delta x) - s(x).$$

Средняя относительная продольная деформация участка  $x, x + \Delta x$  есть

$$\frac{s(x + \Delta x) - s(x)}{\Delta x}.$$

Продольной деформацией  $\varepsilon$  в данной точке называется предел

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{s(x + \Delta x) - s(x)}{\Delta x} = \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (4.88)$$

В силу закона Гука имеем

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (4.89)$$

где  $\sigma$  — механическое напряжение в стержне,  $E$  — модуль упругости. Применим теперь второй закон Ньютона к движению куска стержня, заключенного между плоскостями с координатами  $x$  и  $x + \Delta x$ . Масса этого куска равна  $\rho S \Delta x$ , где  $\rho$  и  $S$  — соответственно плотность и площадь сечения в отсутствие деформации. Пусть  $s$  — смещение центра масс рассматриваемого куска. Тогда

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = S\sigma(x + \Delta x) - S\sigma(x).$$

Слева стоит произведение массы куска на ускорение его центра масс, справа — результирующая внешних сил, действующих на кусок. Разделим уравнение на  $S\Delta x$ :

$$\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x)}{\Delta x}.$$

Перейдя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получим уравнение

$$\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}. \quad (4.90)$$

Подставляя (4.89) в (4.90), находим

$$\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = E \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}.$$

В силу (4.88) имеем

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2},$$

т. е.

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}. \quad (4.91)$$

Это — **волновое уравнение**. Оно указывает, что смещение распространяется по стержню в виде плоской стационарной волны  $s = f(x \mp ut)$  или образует суперпозицию таких волн. Скорость распространения этих волн (скорость звука в стержне)

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Для стали  $u = 5200$  м/с, для меди  $u = 3700$  м/с, для алюминия  $u = 5100$  м/с, для резины  $u = 46$  м/с.

Заметим, что сделанные при выводе волнового уравнения упрощающие предположения справедливы лишь в том случае, когда длина волны велика по сравнению с поперечными размерами стержня. В обратном предельном случае мы имеем дело, по существу, с неограниченной упругой средой. В теоретических курсах показывается, что скорость распространения продольной упругой волны в неограниченной среде равна

$$u_1 = \sqrt{\frac{E'}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1 - \mu)}{\rho(1 + \mu)(1 - 2\mu)}},$$

где  $\mu$  — коэффициент Пуассона.

**Плотность потока энергии.** Выделим мысленно небольшой кусок стержня, объем которого в недеформированном состоянии равен  $S\Delta x$ , а масса —  $\rho S\Delta x$ . Если этот кусок движется параллельно оси  $x$ , его кинетическая энергия равна

$$\frac{1}{2}\rho S\Delta x \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)^2,$$

где  $\partial s/\partial t$  — скорость куска в рассматриваемый момент времени. На единицу объема приходится кинетическая энергия

$$w_{\text{к}} = \frac{1}{2}\rho v^2.$$

Эта величина называется плотностью кинетической энергии.

Можно показать, что выделенный кусок стержня обладает также потенциальной энергией, плотность которой равна (см. вывод формулы (3.4))

$$w_{\text{п}} = \frac{1}{2}E\varepsilon^2.$$

Общая плотность энергии

$$w = w_{\text{к}} + w_{\text{п}} = \frac{1}{2}(\rho v^2 + E\varepsilon^2).$$

Полная энергия, содержащаяся в куске стержня, ограниченного сечениями  $x = x_1$  и  $x = x_2$ :

$$W = \int_{x_1}^{x_2} w S dx = \frac{S}{2} \int_{x_1}^{x_2} (\rho v^2 + E\varepsilon^2) dx.$$

Изменение этой энергии равно работе, совершенной силами, действующими на рассматриваемый кусок со стороны частей стержня, находящихся слева и справа от него. Будем обозначать индексами 1 и 2 величины, относящиеся соответственно к сечениям  $x = x_1$  и  $x = x_2$ . Слева действует сила  $F_1 = -S\sigma_1$  (знак минус потому, что если  $\sigma_1 > 0$ , то по определению  $F_1$  направлена влево, т. е. отрицательна), сила справа  $F_2 = S\sigma_2$  (если  $\sigma_2 > 0$ , то эта сила направлена вправо). Работа сил  $F_1, F_2$  за время  $dt$  равна соответственно  $F_1 v_1 dt, F_2 v_2 dt$ . Следовательно, общая работа есть

$$(F_1 v_1 + F_2 v_2)dt = -(\sigma_1 v_1 - \sigma_2 v_2)S dt.$$



В силу закона сохранения энергии эта работа равна изменению  $dW$  энергии за время  $dt$ , поэтому

$$\frac{dW}{dt} = Q_1 - Q_2,$$

где

$$Q_1 = -S\sigma_1 v_1, \quad Q_2 = -S\sigma_2 v_2.$$

Отсюда видно, что величина  $Q = -S\sigma v$  характеризует поток энергии через данное сечение. Единица измерения  $[Q] = 1 \text{ эрг/с}$  или  $1 \text{ Дж/с} = 1 \text{ Вт}$ . Плотностью потока энергии называется величина

$$q = -\sigma v = Pv,$$

где  $-\sigma = P$  — давление в данном сечении. Единица измерения  $[q] = 1 \text{ эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с})$  или  $1 \text{ Вт/м}^2$ . Вычислим величину плотности потока энергии в плоской синусоидальной бегущей волне, описываемой уравнением

$$s = A \cos(\omega t - kx).$$

Очевидно, что

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial s}{\partial x} = EkA \sin(\omega t - kx),$$

$$v = \frac{\partial s}{\partial t} = -A\omega \sin(\omega t - kx).$$

Поэтому

$$q = -\sigma v = Ek\omega A^2 \sin^2(\omega t - kx) = \frac{1}{2} Ek\omega A^2 (1 - \cos(2\omega t - 2kx)).$$

Можно видеть, что поток энергии достигает максимума дважды за период, а его частота в каждой точке стержня равна  $2\omega$ . Усредненное за период значение  $q$  равно

$$\bar{q} = \frac{1}{T} \int_0^T q(t) dt = \frac{1}{2} Ek\omega A^2.$$

В акустике величину  $\bar{q}$  принято называть силой звука. Сила звука обычно измеряется в децибелах (дБ), в соответствии с формулой

$$D = 10 \lg \left( \bar{q}, \frac{\text{мкВт}}{\text{см}^2} \right) + 100 \text{ (дБ)}.$$

Отсюда видно, если  $\bar{q} = 10^{-10}$  мкВт/см<sup>2</sup>, то  $D = 0$  (это начало отсчета). Если  $\bar{q} = 10^{-6}$  Вт/см<sup>2</sup>, то  $D = 100$  дБ. Болевой порог, т. е. величина  $\bar{q}$ , от восприятия которой человек испытывает болевые ощущения, равен

$$\bar{q} = 10^{-4} \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2} = 10^2 \frac{\text{мкВт}}{\text{см}^2}.$$

Ему соответствует величина  $D = 120$  дБ.

Пусть в стержне создана стоячая волна

$$s = A \sin kx \cos(\omega t + \varphi),$$

при этом

$$\sigma = EkA \cos kx \cos(\omega t + \varphi),$$

$$v = -A\omega \sin kx \sin(\omega t + \varphi),$$

$$q = \frac{1}{4}Ek\omega A^2 \sin 2kx \sin(2\omega t + 2\varphi).$$

Можно видеть, что в сечениях стержня с координатами

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2k}, \quad x_3 = 2\frac{\lambda}{4} = 2\frac{\pi}{2k}, \quad x_4 = 3\frac{\lambda}{4} = 3\frac{\pi}{2k}, \quad \dots$$

плотность потока энергии в любой момент времени равна нулю. Это означает, что каждый участок стержня длины  $\lambda/4$ , заключенный между узлом напряжения и ближайшим к нему узлом скорости, не обменивается энергией с соседними участками. Его энергия постоянна.

**Поперечные волны на струне.** Струной в акустике называют однородную тонкую гибкую нить, в которой с помощью внешних сил создано большое натяжение. Под это определение подходят не только струны музыкальных инструментов, но также, например, натянутый шнур, трос или резиновый жгут.

Пусть координатная ось  $x$  совпадает с осью струны при равновесии. Пусть, кроме того, частицы струны смещаются только в плоскости  $x, y$ . Обозначим через  $s(x, t)$  смещение точки, имеющей при равновесии абсциссу  $x$ . Рассмотрим кусок струны  $x, x + \Delta x$  и запишем для него второй закон Ньютона. Масса этого куска равна  $\rho S \Delta x$ , где  $\rho$  — плотность материала струны,  $S$  — площадь ее поперечного сечения. Произведение массы куска на ускорение  $\partial^2 s / \partial t^2$  его центра масс равно сумме проекций на ось  $y$  сил, действующих на его концы:

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -S \sigma(x) \sin \alpha(x) + S \sigma(x + \Delta x) \sin \alpha(x + \Delta x). \quad (4.92)$$

Здесь  $\sigma(x)$  — натяжение в точке  $x$ ,  $\alpha(x)$  — угол между направлением касательной к струне в точке  $x$  и осью  $x$ . Очевидно, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial s}{\partial x}.$$

Предположим, что смещения  $s(x, t)$  настолько малы, что можно с достаточным приближением пренебречь: 1) отличием натяжения  $\sigma(x)$  от натяжения струны  $\sigma$  в равновесном состоянии; 2) отличием между  $\sin \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha$ .

В результате этих упрощений уравнение (4.92) приобретает вид

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \sigma \left[ \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)_x \right]. \quad (4.93)$$

Разделив (4.93) на  $\Delta x$  и сделав предельный переход  $\Delta x \rightarrow 0$ , получим волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}. \quad (4.94)$$

Согласно этому уравнению, поперечные волны на струне распространяются не меняя формы со скоростью

$$c_s = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \sqrt{\frac{F}{\rho S}},$$

где  $F$  — сила, натягивающая струну,  $\rho S$  — масса струны на единицу длины.

**Собственные колебания струны.** При определенных условиях опыта на струне могут образоваться стоячие поперечные волны, описываемые уравнением

$$s = A \sin kx \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.95)$$

где  $k = \omega/u$ . Выделим участок струны, закрепив точки  $x = 0$ ,  $x = n(\lambda/2) = n\pi/k$ . Поскольку точки  $x = 0$ ,  $x = n\pi/k$  неподвижны (это узлы смещения  $s$ ), их закрепление ничего не меняет. Это означает, что ограниченная, закрепленная на концах струна длиной  $l$ , может совершать собственные колебания, имеющие характер синусоидальных стоячих волн с узлами смещения на концах. На струне укладывается при этом целое число полуволн:

$$l = n \frac{\lambda}{2} = n \frac{\pi u}{\omega}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Частоту  $n$ -го собственного колебания ( $n$ -го обертона) легко вычислить:

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{F}{\rho S}}, \quad \nu_n = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\rho S}} \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.96)$$

Если частота внешней поперечной синусоидальной силы совпадает с частотой того или иного собственного колебания струны, возникает явление резонанса. При этом образуется стоячая волна того же вида, что и при соответствующем собственном колебании.

**Прохождение продольной волны через границу двух сред.** Пусть плоскость  $x = 0$  является границей раздела двух сред, обладающих различными упругими свойствами. Величины, относящиеся к среде, находящейся слева от плоскости раздела, будем отмечать индексом 1, величины, относящиеся к среде, находящейся справа от плоскости раздела, — индексом 2. Пусть слева приходит упругая волна:

$$s_1 = A_1 \cos(\omega t - k_1 x). \quad (4.97)$$

Здесь  $s_1$  — смещение в направлении оси  $x$ . Что происходит на границе?

Ответить на этот вопрос можно, исходя из физических условий на границе. Во-первых, сплошность и непроницаемость одного вещества в другое, выражаемая уравнением

$$s_1(0, t) = s_2(0, t), \quad (4.98)$$

согласно которому смещения по обе стороны границы ( $x = 0$ ) равны. Во-вторых, равенство действия и противодействия, т. е. равенство напряжений, выражаемое уравнением

$$\sigma_1(0, t) = \sigma_2(0, t). \quad (4.99)$$

Предположим, что волна проникает из первой среды во вторую:

$$s_2 = A_2 \cos(\omega t - k_2 x), \quad (4.100)$$

но в первой среде все происходит так, как будто нет второй среды, т. е. остается справедливым (4.97). Подставляя (4.97), (4.100) в (4.98), (4.99), находим

$$A_1 = A_2, \quad A_1 = \gamma A_2,$$

где

$$\gamma = \frac{E_2 k_2}{E_1 k_1} = \frac{E_2 c_{l1}}{E_1 c_{l2}} = \frac{\sqrt{E_2 \rho_2}}{\sqrt{E_1 \rho_1}}.$$

Здесь  $c_l$  — скорость продольных волн. Отметим, что величину  $\sqrt{E\rho} = \rho c_l$  часто называют акустическим сопротивлением среды. Эти уравнения, однако, несовместимы, т. к. противоречат одно другому, за исключением тривиального случая отсутствия границы:

$$\gamma = 1.$$

При  $\gamma \neq 1$  обоим условиям (4.98), (4.99) можно удовлетворить, если принять (как учит опыт), что в первой среде к первоначальной (падающей) волне добавляется при наличии второй среды отраженная волна

$$A'_1 \cos(\omega t + k_1 x)$$

и что, следовательно, при наличии второй среды

$$s_1 = A_1 \cos(\omega t - k_1 x) + A'_1 \cos(\omega t + k_1 x). \quad (4.101)$$

Подставляя (4.100), (4.101) в (4.98), (4.99), находим

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A'_1 &= A_2, \\ A_1 - A'_1 &= \gamma A_2 \end{aligned} \right\}. \quad (4.102)$$

Уравнения (4.102), где неизвестными являются  $A'_1$  и  $A_2$ , всегда совместны. При заданной амплитуде падающей волны  $A_1$  уравнения (4.102) однозначно определяют амплитуды отраженной и проходящей волн:

$$A'_1 = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} A_1, \quad A_2 = \frac{2}{1 + \gamma} A_1. \quad (4.103)$$

Заметим, что

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c_{l1}}{c_{l2}}.$$

Длины волн в обеих средах различны. Длина волны больше в той среде, где больше скорость распространения. Введем обозначения

$$R = \frac{\overline{q'_1}}{q_1}, \quad T = \frac{\overline{q_2}}{q_1}.$$

Величины  $R$  и  $T$  естественно назвать коэффициентом отражения и коэффициентом прохождения (проникновения). Нетрудно убедиться в том, что

$$R = \left( \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right)^2, \quad T = \frac{4\gamma}{(1 + \gamma)^2}. \quad (4.104)$$

Как и следовало ожидать,

$$R + T = 1.$$

Это равенство является следствием закона сохранения энергии:

$$\overline{q_1'} + \overline{q_2} = \overline{q_1}.$$

При  $\gamma = 0$  и  $\gamma = \infty$  имеем  $R = 1$ ,  $T = 0$ : вся энергия возвращается в первую среду. При  $\gamma = 1$  имеем  $R = 0$ ,  $T = 1$ : вся энергия проходит во вторую среду. Заметим, что формулы (4.104) не меняются при замене  $\gamma$  на  $1/\gamma$ . Это означает, что энергетические коэффициенты отражения и прохождения не зависят от того, с какой стороны границы приходит падающая волна.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. Гл. VI, X, §§ 81–85.
2. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: Физматлит, 2001. Ч. III. Гл. 1–5.
3. *Крауфорд Ф.* Волны. — М.: Наука, 1974. Гл. 1–7.
4. *Горелик Г.С.* Колебания и волны. — М.: ГИФМЛ, 1959. Гл. I–VI.
5. *Киттель Ч., Найт У., Рудерман М.* Механика. — М.: Наука, 1983.

### Работа 1.4.1

## Изучение физического маятника

**Цель работы:** исследовать зависимость периода колебаний физического маятника от его момента инерции.

**В работе используются:** физический маятник (однородный стальной стержень), опорная призма, математический маятник, счетчик числа колебаний, линейка, секундомер.

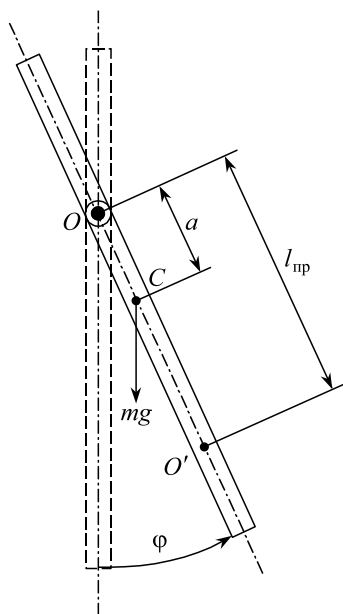


Рис. 1. Физический маятник

Физическим маятником называют любое твердое тело, которое под действием силы тяжести может свободно качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Движение маятника описывается уравнением

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M, \quad (1)$$

где  $I$  — момент инерции маятника,  $\varphi$  — угол отклонения маятника от положения равновесия,  $t$  — время,  $M$  — момент сил, действующих на маятник.

В данной работе в качестве физического маятника (рис. 1) используется однородный стальной стержень длиной  $l$ . На стержне закрепляется опорная призма, острое ребро которой является осью качания маятника. Призму можно перемещать вдоль стержня, меняя таким образом расстояние  $OC$  от точки опоры маятника до его центра масс. Пусть это расстояние равно  $a$ . Тогда по теореме Гюй-

генса–Штейнера (2.31) момент инерции маятника

$$I = \frac{ml^2}{12} + ma^2,$$

где  $m$  — масса маятника. Момент силы тяжести, действующий на маятник,

$$M = -mga \sin \varphi.$$

Если угол  $\varphi$  мал, то  $\sin \varphi \approx \varphi$ , так что

$$M \approx -mga\varphi.$$

В исправной установке маятник совершает несколько сот колебаний без заметного затухания. Поэтому моментом силы трения в первом приближении можно пренебречь. Подставляя выражение для  $I$  и  $M$  в (1), получим уравнение

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad (2)$$

где

$$\omega^2 = \frac{ga}{a^2 + \frac{l^2}{12}}. \quad (3)$$

Решением этого уравнения является функция (4.15):

$$\varphi(t) = A \sin(\omega t + \alpha).$$

Амплитуда колебаний  $A$  и начальная фаза  $\alpha$  зависят от того, как возбуждаются колебания маятника, т. е. определяются начальными условиями задачи, а частота колебаний  $\omega$  согласно (3) определяется только ускорением свободного падения  $g$  и параметрами маятника  $l$  и  $a$ .

Период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + \frac{l^2}{12}}{ag}}. \quad (4)$$

Мы видим, что период малых колебаний физического маятника не зависит ни от фазы, ни от амплитуды колебаний. Это утверждение (изохронность) справедливо для колебаний, подчиняющихся уравнению (2). Движение маятника описывается этим уравнением приближенно — в той мере, в какой справедлива использованная при выводе (2) формула  $\sin \varphi \approx \varphi$ .

Период колебаний математического маятника определяется формулой (4.39):

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}},$$

где  $l'$  — длина математического маятника. Поэтому величину

$$l_{\text{пр}} = a + \frac{l^2}{12a} \quad (5)$$



называют приведенной длиной физического маятника. Точку  $O'$ , отстоящую от точки опоры  $O$  на расстояние  $l_{\text{пр}}$ , называют центром качания физического маятника. Точка опоры и центр качания маятника обратимы, т. е. при качании маятника вокруг точки  $O'$  период будет таким же, как и при качании вокруг точки  $O$ .

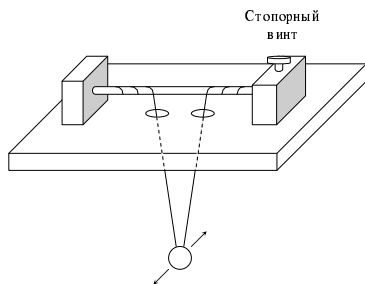


Рис. 2. Математический маятник

Исследование справедливости этого утверждения является хорошим методом проверки теории. Еще один метод заключается в проверке правильности формулы (4). Входящую в эту формулу величину  $a$  можно изменять, передвигая опорную призму по стержню. В данной работе в качестве математического маятника используется свинцовый шарик, подвешенный на двух расходящихся нитях, как это показано на рис. 2. Длину нитей можно изменять, наматывая нити на ось.

## ЗАДАНИЕ

1. Определите диапазон амплитуд, в пределах которого период  $T$  колебаний маятника можно считать не зависящим от амплитуды. Для этого отклоните маятник из положения равновесия на некоторый угол  $\varphi_1$  ( $\sim 10^\circ$ ) и измерьте время 100 колебаний. Число колебаний измеряется электрическим или механическим счетчиком, а время — секундомером. Для уменьшения ошибки отсчета времени секундомер лучше всего включать и выключать в момент прохождения маятника через положение равновесия. По результатам опыта найдите период колебаний  $T_1$ .

Повторите опыт, уменьшив начальное отклонение в 1,5–2 раза, а затем уменьшите амплитуду еще во столько же раз. Если в пределах точности измерения периоды совпадут, для дальнейших измерений можно выбирать любое значение начального отклонения, меньшее  $\varphi_1$ . Если этого не произошло, исследуйте поведение маятника при еще меньших углах.

Подумайте, что вносит основную ошибку в определение периода, и постарайтесь уменьшить эту погрешность.

2. Перемещая опорную призму вдоль стержня, исследуйте зависимость периода колебаний  $T$  от расстояния  $a$  между точкой опоры и центром масс. Постройте график функции  $T^2 a$  от  $a^2$ . Аппроксимируя полученную зависимость прямой линией, найдите по этому графику величины

- $g/4\pi^2$  и  $l^2/12$ , используя формулу (4). Сравните найденное значение  $g$  с табличным, а величину  $l$  — с результатом непосредственных измерений.
3. Для одного из положений призмы подберите длину математического маятника так, чтобы в пределах точности измерений периоды колебаний обоих маятников совпали. Измерьте длину математического маятника и сравните ее с приведенной длиной физического маятника, вычисленной по формуле (5).
  4. Проверьте на опыте обратимость точки подвеса (опоры) и центра качения физического маятника. Подумайте, при каких положениях опорной призмы эта проверка выполняется более точно.

### Контрольные вопросы

1. При каких упрощающих предположениях выведена формула (4)?
2. При каком расстоянии от центра масс до точки подвеса период колебаний маятника минимален?
3. Как будет вести себя физический маятник, если совместить точку его подвеса с центром масс?
4. С какой целью в данной работе математический маятник подвешивается на двух нитях?
5. Сформулируйте и докажите теорему Гюйгенса–Штейнера.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. §§ 30, 33, 35, 36, 40, 41.
2. *Стрелков С.П.* Механика. — М.: Наука, 1975. §§ 52, 59, 124.

## Работа 1.4.2

### Определение ускорения свободного падения при помощи оборотного маятника

**Цель работы:** определить величину ускорения свободного падения, пользуясь оборотным маятником.

**В работе используются:** оборотный маятник, счетчик числа колебаний, секундомер, штангенциркуль с пределом измерений 1 м.

Свободным падением называют движение тела вблизи поверхности Земли, при котором можно не учитывать силы сопротивления, возникающие в среде, окружающей тело. Ускорение свободного падения, которое вблизи поверхности Земли обычно обозначают  $g$ , определяется массой тела  $m$  и силой  $F$ , действующей на тело,

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (1)$$

Система отсчета, связанная с Землей, не является инерциальной. В этой системе на тело, кроме гравитационных сил, действуют еще центробежная сила и сила Кориолиса. Последняя всегда направлена перпендикулярно к скорости движения и изменяет только направление скорости, но не ее величину. Под ускорением свободного падения обычно понимается тангенциальная (касательная) к траектории движения компонента ускорения, и сила Кориолиса при этом не учитывается. Очевидно, что для покоящегося на поверхности Земли тела сумма силы притяжения к Земле и центробежной равна силе реакции опоры, то есть весу тела.

Сила притяжения тела к Земле определяется произведением его массы  $m$  на напряженность поля тяготения Земли, которая обычно обозначается  $\vec{g}_0$ :

$$\vec{F}_0 = m\vec{g}_0. \quad (2)$$

Напряженность поля тяготения определяется распределением масс в Земле. Если бы Земля представляла собой шар постоянной плотности, то внутри шара напряженность росла пропорционально расстоянию от центра Земли (линейно), а вне шара падала бы обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли. В действительности Земля не очень однородна. Плотность ее растет с глубиной. Из-за этого напряженность поля тяготения даже немного увеличивается с глубиной, примерно до 2800 км (при этом расстояние до центра Земли

около 3600 км), а затем начинает падать по линейному закону (пропорционально расстоянию от центра). Над поверхностью Земли распределение напряженности гравитационного поля близко к распределению вне однородного шара. На высоте полета спутников (порядка 300 км) напряженность поля тяготения меньше, чем у поверхности Земли, примерно на 10%. Наблюдения за движением спутников позволяют измерять распределение поля тяготения и анализировать распределение масс в Земле, что используется, в частности, для поиска полезных ископаемых.

Кроме сил притяжения к Земле, действуют еще силы притяжения к Луне и Солнцу, но вклад их в полную напряженность гравитационного поля очень мал, хотя они в глобальных масштабах вызывают такие заметные явления, как приливы.

Вращение Земли вокруг своей оси привело к ее деформации за счет центробежных сил. Расстояние от центра Земли до полюса примерно на 21 км меньше расстояния до экватора, которое равно 6 378 140 км. Для тел, вращающихся вместе с Землей, центробежные силы, как уже было сказано выше, объединяют с силами тяготения. Суммарная напряженность поля, обозначаемая  $g$  и равная ускорению свободного падения, обычно и приводится в таблицах распределения ускорения свободного падения по поверхности Земли. На полюсе  $g = 983,2155 \text{ см/с}^2$ , а затем уменьшается с уменьшением широты, и на экваторе  $g = 978,0300 \text{ см/с}^2$ . Это приводит, например, к тому, что маятниковые часы на экваторе за сутки отстанут от аналогичных часов на полюсе на 3,8 минуты. Направление этого поля всегда перпендикулярно к поверхностям водоемов и очень мало отличается от направления на центр Земли.

Неоднородность Земли в горизонтальном направлении также приводит к локальным изменениям  $g$ . Большое количество очень точных и длительных измерений на поверхности Земли показало, что  $g$  меняется также со временем. Периодические изменения, связанные с лунными приливами, равны примерно  $2,49 \cdot 10^{-4} \text{ см/с}^2$ , а с солнечными — порядка  $9,6 \cdot 10^{-5} \text{ см/с}^2$ . Такого же порядка изменения, происходящие в течение года, связаны с геологическими процессами внутри Земли (так называемые вековые изменения).

Измерения  $g$  на поверхности Земли и составление гравиметрических карт используются для поиска полезных ископаемых и изучения внутреннего строения Земли.

Первые измерения  $g$  с точностью до  $10^{-3} \text{ см/с}^2$  (миллигал) выполнены были в начале века с помощью оборотных маятников. Для получения такой точности периоды колебаний маятников должны быть

измерены с точностью до  $10^{-6}$  с, а приведенные длины — до 1 микрона. Современные методы измерения полей  $g$  делятся на динамические и статические. К динамическим относятся измерения с помощью маятников, в том числе и оборотных. Измерения с помощью маятников могут производиться с достаточной точностью только в стационарных лабораториях и требуют большого времени. Таких же стационарных условий требует измерение  $g$  с помощью струнного гравиметра, в котором частота колебаний струны зависит от натяжения ее грузом в поле тяжести.

В последнее время благодаря увеличению точности измерений расстояний и времен стали применяться прямые методы измерения ускорения падающих тел. Использование лазерных интерферометров для измерения пути падающего в вакуумной трубе тела, снабженного уголковым отражателем, и атомных часов позволило определить абсолютное значение ускорения свободного падения с точностью до  $3 \cdot 10^{-6}$  см/с<sup>2</sup>. Динамические методы позволяют измерять абсолютные значения ускорения свободного падения. Статические методы позволяют измерять относительное изменение ускорения свободного падения с точностью до  $1,5 \cdot 10^{-5}$  см/с<sup>2</sup> и основываются на измерении деформации пружин, на которых подвешены грузики, либо на закручивании горизонтально закрепленных нитей (или торсионов: двух параллельно натянутых нитей) под действием рычагов с грузиками. Для большей точности (меньшего влияния изменений температуры) используются пружины и нити из кварца. Точные абсолютные измерения этими способами затруднены из-за отклонения зависимости между деформацией пружины и нагрузкой на нее от линейной (закона Гука). Измеренные относительные изменения  $g$  привязываются к ряду опорных точек, в которых получены абсолютные значения динамическими методами. Такими методами создаются гравиметрические карты.

Период колебаний физического маятника определяется формулой (4.38):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}. \quad (3)$$

Здесь  $I$  — момент инерции маятника относительно оси качания,  $m$  — масса маятника,  $a$  — расстояние от центра масс до оси качания.

Приведенная длина физического маятника, равная длине математического маятника, имеющего такой же период колебаний, выражается формулой (4.40):

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{ma}. \quad (4)$$

Массу маятника и период его колебаний можно измерить с очень высокой точностью, но точно измерить момент инерции не удастся. Указанного недостатка лишен метод оборотного маятника, который позволяет исключить момент инерции из расчетной формулы для  $g$ .

Метод оборотного маятника основан на том, что период колебаний физического маятника не изменяется при перемещении оси качаний в центр качаний, т. е. в точку, отстоящую от оси качаний на расстояние, равное приведенной длине маятника, и лежащую на одной прямой с точкой подвеса и центром масс маятника.

Применяемый в настоящей работе оборотный маятник (рис. 1) состоит из стальной пластины (или стержня), на которой укреплены две однородные призмы  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ . Период колебаний маятника можно менять при помощи подвижных грузов  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$ .

Допустим, что нам удалось найти такое положение грузов, при котором периоды колебаний маятника  $T_1$  и  $T_2$  на призмах  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  совпадают, т. е.

$$T_1 = T_2 = T = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{mgl_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_2}{mgl_2}}, \quad (5)$$

где  $l_1$  и  $l_2$  — расстояния от центра масс маятника до призм  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ .

Условием этого, очевидно, является равенство приведенных длин, т. е. равенство величин  $I_1/ml_1$  и  $I_2/ml_2$ . По теореме Гюйгенса–Штейнера

$$I_1 = I_0 + ml_1^2, \quad I_2 = I_0 + ml_2^2, \quad (6)$$

где  $I_0$  — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр масс (и параллельной оси качаний). Исключая из (5) и (6)  $I_0$  и  $m$ , получим формулу для определения  $g$ :

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}(l_1 + l_2) = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}. \quad (7)$$

Здесь  $L = l_1 + l_2$  — расстояние между призмами  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , которое легко может быть измерено с высокой точностью (0,1 мм) при помощи

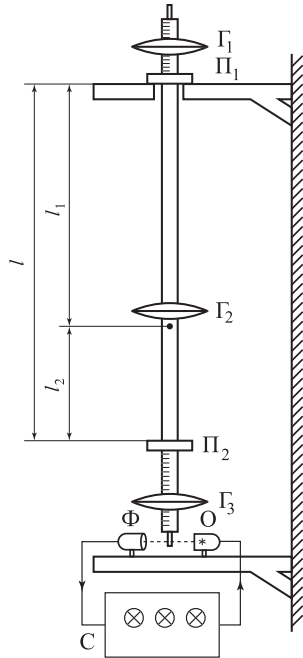


Рис. 1. Оборотный маятник

большого штангенциркуля (но не путем суммирования измерений  $l_1$  и  $l_2$ , погрешность получения которых в работе велика и составляет несколько миллиметров).

Заметим, что формула (7) следует из формул (5) и (6) лишь при условии, что

$$l_1 \neq l_2, \quad (8)$$

так как при  $l_1 = l_2$  равенства (5) и (6) удовлетворяются тождественно.

При выводе формулы (7) мы полагали, что  $T_1 = T_2$ . На самом деле точного равенства периодов добиться, конечно, невозможно. Тогда

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + ml_1^2}{mgl_1}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + ml_2^2}{mgl_2}}.$$

Из этих равенств имеем

$$T_1^2 gl_1 - T_2^2 gl_2 = 4\pi^2(l_1^2 - l_2^2),$$

откуда

$$g = 4\pi^2 \frac{l_1^2 - l_2^2}{l_1 T_1^2 - l_2 T_2^2} = 4\pi^2 \frac{L}{T_0^2}, \quad (9)$$

где

$$T_0^2 = \frac{l_1 T_1^2 - l_2 T_2^2}{l_1 - l_2} = T_2^2 + \frac{l_1}{l_1 - l_2} (T_1 + T_2)(T_1 - T_2). \quad (10)$$

Погрешность определения  $g$  может быть найдена из (9):

$$\frac{\sigma_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_{T_0}}{T_0}\right)^2}. \quad (11)$$

Входящая в эту формулу погрешность  $\sigma_{T_0}$  сама должна быть вычислена. Прежде чем это сделать, исследуем, как зависит период колебаний от расстояния  $l$  между центром масс и осью качаний маятника. Для этого выразим момент инерции  $I$  с помощью (6) через  $I_0$ :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + ml^2}{mgl}}. \quad (12)$$

График этой зависимости изображен на рис. 2. При  $l \rightarrow 0$  период  $T$  стремится к бесконечности по закону  $l^{-1/2}$ . При  $l \rightarrow \infty$  он стремится к бесконечности как  $l^{1/2}$ . Период минимален при  $l_{\min} = \sqrt{I_0/m}$ . При  $T > T_{\min}$  каждое значение  $T$  достигается при двух разных значениях

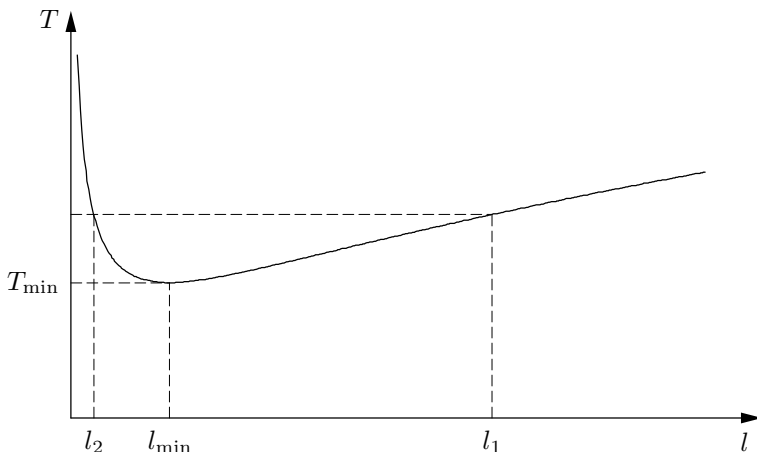


Рис. 2. Зависимость периода колебаний маятника от расстояния между центром масс и осью качаний

$l$ : одно из них больше, а другое меньше  $l_{\min}$ . Эти разные значения и были использованы в формулах (5) – (7). Из графика видно, что при изменении  $T$  величины  $l_1, l_2$  сближаются или удаляются друг от друга.

Найдем зависимость погрешности в определении  $T_0$  от разности  $l_1 - l_2$ . Для этого исследуем, например, как зависит  $\sigma_{T_0}$  от погрешности в определении  $T_1$ . Дифференцируя первое равенство (10) и полагая  $T_2$  неизменным, мы получаем

$$2T_0(dT_0)_{T_2} = \frac{l_1}{l_1 - l_2} 2T_1 dT_1, \quad (dT_0)_{T_2} = \frac{l_1}{l_1 - l_2} \cdot \frac{T_1}{T_0} dT_1.$$

Аналогично при неизменном  $T_1$  получим

$$(dT_0)_{T_1} = -\frac{l_2}{l_1 - l_2} \cdot \frac{T_2}{T_0} dT_2.$$

Рассмотрим случай, когда  $l_1$  и  $l_2$  близки друг к другу. Знаменатель формулы при этом мал и погрешность в определении  $T_0$  резко возрастает. Тот же вывод справедлив для пересчета погрешности  $dT_2$  в погрешность  $dT_0$  (при неизменном  $T_1$ ). Поэтому период колебаний следует выбирать так, чтобы  $l_1$  и  $l_2$  заметно отличались друг от друга (при различии их в 1,5 раза погрешность  $T_0$  превышает погрешность  $T_1$  менее чем на порядок).

Получим формулу для расчета погрешности  $dT_0$ . Обратимся для этого ко второму равенству (10). Заметим, что  $T_1 \approx T_2$ , так что  $T_1 - T_2$



мало. Поэтому при не слишком малых  $l_1 - l_2$  второй член в этой формуле играет роль небольшой поправки.

Следовательно, если учитывать ошибки измерений  $l_1$  и  $l_2$  (но не  $T_1$  и  $T_2$ ), то эти ошибки будут умножаться на малую величину  $T_1 - T_2$  и ими при расчете погрешностей  $\sigma_{T_0}$  можно пренебречь (даже несмотря на то, что эти ошибки могут быть равны нескольким миллиметрам, что обычно получается в данной работе). Учитывая, что погрешности в измерении периодов  $T_1$  и  $T_2$  независимы и примерно равны друг другу, окончательно найдем, используя для расчета ошибок общую формулу (1.33):

$$\sigma_{T_0} \approx \frac{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}{l_1 - l_2} \sigma_T, \quad (13)$$

где  $\sigma_T$  — погрешность измерения периодов.

Мы видим, таким образом, что погрешность измерения слабо зависит от точности, с которой выполняется равенство  $T_1 = T_2$ . Поэтому нет смысла тратить время на уточнение этого равенства после того, как периоды оказались равны друг другу с точностью нескольких процентов.

Заметим, наконец, что отношение  $l_1/l_2$  не должно быть слишком большим. В самом деле,  $l_1$  всегда меньше расстояния между призмами  $L$ . Для больших  $l_1/l_2$  величина  $l_2$  неизбежно оказывается малой, и период колебаний резко возрастает (напомним, что  $I$  всегда больше  $I_0$ ). При этом увеличивается время измерения и растет роль сил трения, которые при выводе формулы (3) не учитывались.

Поясним это утверждение. Роль трения определяется отношением работы, производимой этими силами за период колебаний, к запасу колебательной энергии в системе. Работа сил трения слабо зависит от  $l_2$  (она равна произведению момента сил трения, почти не зависящего от  $l_2$ , на угол качания, который от  $l_2$  совсем не зависит). Запас колебательной энергии равен потенциальной энергии, которую приобретает маятник при поднятии его центра масс, т. е.

$$W_{\text{кол}} = mgl_2(1 - \cos \varphi),$$

где  $\varphi$  — угол отклонения маятника. При уменьшении  $l_2$  значение  $W_{\text{кол}}$  падает.

Таким образом, мы приходим к выводу, что отношение  $l_1$  к  $l_2$  не должно быть ни слишком малым, ни слишком большим; желательно, чтобы выполнялось условие

$$1,5 < \frac{l_1}{l_2} < 3. \quad (14)$$

**Экспериментальная установка.** Схема устройства обратного маятника изображена на рис. 1. Расстояние  $L$  между опорными призмами  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  не меняется. Расстояния  $l_1$  и  $l_2$  можно менять, перемещая грузы  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$ .

Для определения числа колебаний используется счетчик, состоящий из осветителя, фотоэлемента и пересчетного устройства. Легкий стержень, укрепленный на торце маятника, пересекает световой луч дважды за период. Возникающие в фотоэлементе импульсы поступают на пересчетный прибор. Если  $n_1$  и  $n_2$  — начальное и конечное значения показаний прибора за время наблюдения  $t$ , то измеренное число периодов, очевидно, равно  $N = (n_2 - n_1)/2$ , а период колебаний составляет  $T = t/N$ . Время  $t$  измеряется секундомером, установленным на пересчетном приборе. Для определения расстояний  $l_1$  и  $l_2$  маятник снимают с консоли и располагают горизонтально на специальной подставке, имеющей острую грань. Перемещая маятник, нетрудно найти положение центра масс. Расстояния от него до опорных призм и есть искомые  $l_1$  и  $l_2$ . Если они достаточно сильно отличаются друг от друга (условие (14)), а периоды  $T_1$  и  $T_2$  близки, то, как следует из формулы (10), нет необходимости определять  $l_1$  и  $l_2$  с высокой точностью.

## ЗАДАНИЕ

1. Ознакомьтесь с конструкцией обратного маятника.
2. Определите рабочий диапазон амплитуд, в пределах которого период колебаний  $T$  маятника можно считать не зависящим от амплитуды. Для этого установите маятник на одной из опорных призм и, отклонив маятник из положения равновесия на некоторый угол  $\varphi_1$  ( $\sim 10^\circ$ ), измерьте время 100 полных колебаний. Найдите период колебаний  $T_1$ . Повторите опыт, уменьшив начальное отклонение в 1,5–2 раза, и определите период  $T'_1$ . Если в пределах точности измерений окажется, что  $T_1 = T'_1$ , то для дальнейших опытов можно выбрать любую амплитуду  $\varphi$ , не превосходящую  $\varphi_1$ . Если же  $T_1 \neq T'_1$ , то следует выбрать в качестве  $\varphi_1$  меньший из использованных углов и повторить измерения. Не рекомендуется выбирать начальную амплитуду более  $10^\circ$ , так как при этом может возникнуть скольжение призмы по опорной площадке.
3. Установите, каким образом периоды колебаний  $T_1$  и  $T_2$  (при опоре на призмы  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  соответственно) зависят от положения грузов  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$ . При этом достаточно измерять время 10–15 полных колебаний. В результате этих опытов необходимо выяснить:
  - а) какой из грузов оказывает большее влияние на  $T_1$  и  $T_2$ , а какой — меньше;

- б) какой из грузов существеннее влияет на разность периодов  $|T_1 - T_2|$ . Изменяет ли перемещение грузов периоды  $T_1$  и  $T_2$  в одну или в разные стороны? (Опыты проделать для всех грузов).
4. Перемещая груз, наиболее сильно влияющий на величину разности  $|T_1 - T_2|$  (обычно это  $G_2$ ), добейтесь грубого совпадения периодов. Определите  $T_1$  и  $T_2$  по 10–15 полным колебаниям маятника. Сняв маятник с консоли, определите положение его центра масс и величины  $l_1$  и  $l_2$ . Как указывалось выше, они должны отличаться не менее чем в 1,5 и не более чем в 3 раза.
5. Меняя положение груза, менее заметно влияющего на периоды, добейтесь совпадения  $T_1$  и  $T_2$  с точностью не хуже процента. Проверьте, удовлетворяют ли в этом случае значения  $l_1$  и  $l_2$  неравенствам (14). Окончательное измерение величин проведите по 200–300 полным колебаниям маятника. Попутно убедитесь, что трение не оказывает существенного влияния на колебания, т. е. что за 200–300 колебаний амплитуда маятника заметно (в 2–3 раза) не уменьшается.
6. По результатам измерений и формулам (9) и (10) вычислите ускорение свободного падения. Оцените погрешность. Сравните результат с табличными данными.

### Контрольные вопросы

1. Как влияют на точность эксперимента колебания температуры, сила трения, амплитуда колебаний маятника?
2. При каком расстоянии от опорной призмы до центра масс период колебаний маятника минимален?
3. Покажите, что точка опоры маятника и его центр качания лежат по разные стороны от центра масс.
4. Сформулируйте и докажите теорему Гюйгенса–Штейнера.
5. Покажите, что при перемещении оси качаний в центр качаний период колебаний маятника не должен изменяться.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. §§ 35, 36, 41, 66.
2. *Стрелков С.П.* Механика. — М.: Наука, 1975. §§ 50, 124.

## Работа 1.4.3

# Исследование нелинейных колебаний длиннопериодного маятника

**Цель работы:** определение зависимости периода колебаний маятника от амплитуды.

**В работе используются:** установка с длиннопериодным маятником, секундомер.

**Уравнение движения маятника.** Используемый в работе маятник представляет собой два одинаковых груза, закрепленных на жестком стержне, способном вращаться вокруг горизонтальной оси, немного смещенной относительно центра масс системы. На рис. 1 показано расположение грузов и стержня, приведены используемые обозначения.

Колебания маятника происходят под действием момента силы тяжести. Движение маятника будем описывать временной зависимостью угла отклонения  $\varphi$  от положения равновесия. Величина момента  $M_t$  силы тяжести, возвращающего маятник в положение равновесия, может быть выражена следующим образом:

$$M_t = - \left( m + \rho \frac{L+l}{2} \right) g(L-l) \sin \varphi.$$

Силу сопротивления, приводящую к затуханию колебаний маятника, будем считать пропорциональной скорости. При небольших скоростях это согласуется с экспериментальными данными. В нашем случае сила сопротивления определяется вязкостью воздуха, а также незначительным моментом силы трения в подшипниках оси маятника, вклад которого можно не учитывать. Поэтому момент  $M_c$  силы сопротивления равен

$$M_c = -b(L^2 + l^2)\dot{\varphi},$$

где  $b$  — некоторая постоянная.

Момент инерции  $I$  маятника относительно оси вращения равен сумме моментов инерции его элементов относительно той же оси:

$$I = m(L^2 + l^2) + \rho \frac{L^3 + l^3}{3},$$

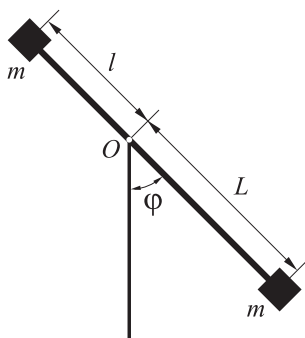


Рис. 1. Длиннопериодный маятник

где  $m$  — масса каждого груза, которую считаем сосредоточенной,  $\rho$  — масса стержня на единицу длины.

В результате уравнение вращательного движения маятника

$$I\ddot{\varphi} = M_{\text{т}} + M_{\text{с}}$$

принимает вид

$$I\ddot{\varphi} = - \left( m + \rho \frac{L+l}{2} \right) g(L-l) \sin \varphi - b(L^2 + l^2)\dot{\varphi}$$

или

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad (1)$$

где

$$2\beta = b \frac{L^2 + l^2}{I} \quad \text{и} \quad \omega_0^2 = \left( m + \rho \frac{L+l}{2} \right) \frac{g(L-l)}{I}.$$

Если массой стержня можно пренебречь по сравнению с массой грузов, то

$$2\beta = \frac{b}{m}, \quad \omega_0^2 = g \frac{L-l}{L^2 + l^2}.$$

**Малые колебания.** При небольших углах отклонения маятника можно пренебречь разницей между углом  $\varphi$  и его синусом. Заменяя в (1)  $\sin \varphi$  на  $\varphi$ , получаем уравнение (4.27) для затухающих колебаний малой амплитуды:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (2)$$

Решение этого уравнения имеет вид (4.28)

$$\varphi = ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (3)$$

где (см. (4.29))

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2. \quad (4)$$

Постоянные  $a$  и  $\alpha$  определяются начальными условиями.

Формула (4) показывает, что наличие затухания уменьшает частоту и, следовательно, увеличивает период. Оценим относительную величину этого эффекта, полагая затухание малым ( $\beta^2 \ll \omega^2$ ). Переписав формулу (4) в виде  $\Delta\omega^2 = -\beta^2$ , получим

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{2\omega\Delta\omega}{2\omega^2} = -\frac{\Delta\omega^2}{2\omega^2} = \frac{\beta^2}{2\omega^2} = \frac{\beta^2 T^2}{8\pi^2}.$$

Используя (4.31) и (4.32), окончательно имеем

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\delta^2}{8\pi^2}, \quad \text{где} \quad \delta = \beta T = \ln \frac{a_i}{a_{i+1}}. \quad (5)$$

Формула (5) позволяет экспериментально оценить вклад затухания в изменение периода, так как величины максимальных отклонений  $a_i$  легко измеряются. В дальнейшем будем предполагать, что этот вклад мал, и изменение периода обусловлено преимущественно нелинейностью. Это предположение следует проверить экспериментально.

**Нелинейные колебания.** Уравнение колебаний маятника без затухания получим, полагая в (1)  $\beta = 0$ :

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0. \quad (6)$$

Это уравнение является нелинейным<sup>1</sup>. Если ограничиться небольшими углами отклонений, при которых  $\sin \varphi \approx \varphi$ , то уравнение (6) становится линейным и совпадает с уравнением гармонического осциллятора (4.4).

Зависимость периода нелинейных колебаний от амплитуды можно найти, проинтегрировав соотношение

$$dt = \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}}, \quad (7)$$

например, за четверть периода. Чтобы найти зависимость угловой скорости  $\dot{\varphi}$  от угла отклонения маятника  $\varphi$ , домножим (6) на  $\dot{\varphi}$ :

$$\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}\omega_0^2 \sin \varphi = 0$$

и проинтегрируем один раз<sup>2</sup>:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \omega_0^2 (\cos \varphi_m - \cos \varphi) = 0, \quad (8)$$

здесь  $\varphi_m$  — угол максимального отклонения маятника. Отсюда

$$\dot{\varphi}^2 = 2\omega_0^2 (\cos \varphi - \cos \varphi_m) = 4\omega_0^2 \left( \sin^2 \frac{\varphi_m}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$\dot{\varphi} = 2\omega_0 \sin \frac{\varphi_m}{2} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi_m}{2}}}. \quad (9)$$

---

<sup>1</sup> Напомним, что линейными называются уравнения, в которые функция и ее производные входят только в первой степени. В уравнении (6) нелинейность связана с синусом. В других случаях могут быть полиномы или более сложные функции.

<sup>2</sup> Можно также получить (8) из закона сохранения энергии.

Используя (9) и (7), получаем

$$T = 4 \int_0^{T/4} dt = 4 \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = \frac{4}{2\omega_0 \sin \frac{\varphi_m}{2}} \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi_m}{2}}}}. \quad (10)$$

Введём новую переменную  $\theta$ :

$$\sin^2 \theta = \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi_m}{2}}. \quad (11)$$

Тогда для периода колебаний  $T$  можно получить

$$T = T_0 \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_m}{2} \sin^2 \theta}}. \quad (12)$$

Здесь  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  — период малых (линейных) колебаний маятника. Интеграл (12) в элементарных функциях не выражается, но его можно вычислить, разлагая подынтегральную функцию в ряд Тейлора. Тогда зависимость периода колебаний от амплитуды, связанная с нелинейностью, будет иметь вид

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_m}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\varphi_m}{2} + \dots \quad (13)$$

Отсюда для достаточно малых углов отклонения получаем

$$T \approx T_0 \left( 1 + \frac{\varphi_m^2}{16} \right). \quad (14)$$

На рис. 2 изображены точное решение (13) (сплошная линия) и приближение (14) (пунктир). Видно, что при амплитудах порядка  $90^\circ$  погрешность приближения составляет примерно 2%. Сам эффект при таких амплитудах составляет 15–20%, что может быть измерено простым секундомером для маятников с периодом порядка 10 секунд.

На период колебаний маятника оказывают влияние как затухание, так и нелинейность уравнения (6). Мы рассмотрели вклад каждого из этих факторов по отдельности, считая, что другой отсутствует. В действительности они проявляются одновременно, и период колебаний является некоторой сложной функцией декремента и амплитуды. Если,

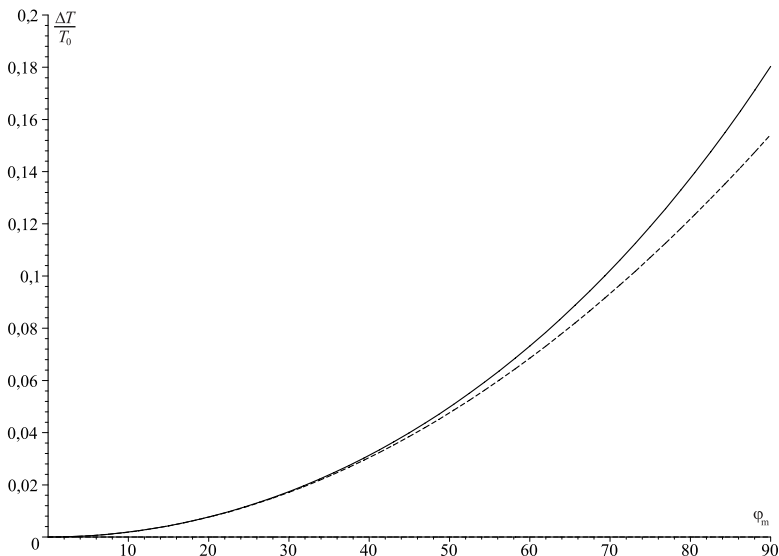


Рис. 2. Зависимость периода колебаний маятника от амплитуды

однако, изменение периода невелико, можно воспользоваться формулой Тейлора для функции двух переменных

$$f(x, y) \approx f(0, 0) + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}x + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}y$$

и получить, учитывая (5) и (14):

$$T(\delta^2, \varphi_m^2) \approx T_0 \left( 1 + \frac{\delta^2}{8\pi^2} + \frac{\varphi_m^2}{16} \right), \quad (15)$$

т. е. в первом приближении вклады от затухания и нелинейности суммируются независимо.

## ЗАДАНИЕ

1. Подберите расположение грузов на стержне таким образом, чтобы период колебаний маятника составил несколько секунд.
2. Отклоните маятник на  $80\text{--}90^\circ$  и отпустите без толчка, включив секундомер в момент начала движения.
3. При каждом максимальном отклонении маятника запишите в таблицу номер отклонения  $n$  (количество периодов, прошедших с начала движения), угол максимального отклонения  $\varphi_n$  и показание секундомера.



4. Повторите эксперимент несколько раз с различными периодами колебаний.
5. Оцените влияние затухания. Для этого постройте график зависимости  $\ln \varphi_n$  от  $n$  и по его наклону определите логарифмический декремент затухания  $\delta$  (см. (5)). По формуле (5) определите вклад в изменение периода, обусловленный затуханием, и убедитесь, что он мал по сравнению с реально наблюдаемым эффектом (или с ожидаемым, рассчитанным по формуле (14)). В противном случае при интерпретации следующего графика необходимо, пользуясь (15), ввести поправку на затухание и использовать вместо периода малых колебаний  $T_0$  величину  $T_0 - \frac{\delta^2}{8\pi^2}$ .
6. Постройте график зависимости периода колебаний маятника  $T$  от квадрата максимального угла отклонения  $\varphi^2$  (в радианах). Сравните результат с предсказаниями теории (формула (14)).

### Контрольные вопросы

1. Как меняется период колебания маятника при увеличении затухания?
2. Как устроен длиннопериодный маятник, имеющий большие периоды колебаний при небольших размерах? Можно ли в работе вместо него использовать обычный маятник?
3. Как изменяется период колебания маятника при увеличении амплитуды колебаний?

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика. — М.: Наука, 1983. С. 251.
2. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: Физматлит, 2001. Ч. III. §§ 2.4, 3.2.

## Работа 1.4.4

## Исследование свободных колебаний связанных маятников

**Цель работы:** изучение колебательной системы с двумя степенями свободы.

**В работе используются:** установка с двумя одинаковыми математическими маятниками, бифилярно подвешенными на натянутую горизонтально струну, секундомер, измерительная линейка.

Перед началом работы прочтите о связанных маятниках во введении к данному разделу.

Измерения производятся на установке, изображенной на рис. 1.

Один конец струны прикреплен к вертикальной стойке установки, а другой конец переброшен через неподвижный блок и натянут с помощью груза массой  $M$ . Точки струны  $A$  и  $B$  неподвижны. В точках  $C$  и  $D$ , которые делят расстояние между  $A$  и  $B$  на три равные части (каждая длиной  $a$ ), подвешены одинаковые математические маятники массой  $m$  и длиной  $l$ . Каждый маятник подвешен на двух нитях в плоскости струны (бифилярно), чтобы колебания маятников происходили в плоскостях, перпендикулярных струне. Сила натяжения струны намного больше веса маятников ( $M \gg m$ ). Вертикальная составляющая смещения струны никак не сказывается на движении маятников при малых отклонениях. Горизонтальная составляющая смещения струны, хотя она и мала по сравнению со смещениями маятников, осуществляет слабую связь между маятниками.

На рис. 2 показаны смещения точек  $C$  и  $D$  струны и отклонения маятников в вертикальной (рис. 2а) и горизонтальной (рис. 2б) плоскостях.

При небольших отклонениях маятников для силы натяжения подвеса маятника  $T$  имеем (рис. 2а)

$$mg \approx T. \quad (1)$$

Для движения маятников в горизонтальном направлении (рис. 2)

$$m\ddot{x}_1 = -T \sin \varphi_1 \approx -T \frac{x_1 - x_3}{l} \approx -mg \frac{x_1 - x_3}{l}, \quad (2)$$

$$m\ddot{x}_2 = -T \sin \varphi_2 \approx -T \frac{x_2 - x_4}{l} \approx -mg \frac{x_2 - x_4}{l}. \quad (3)$$

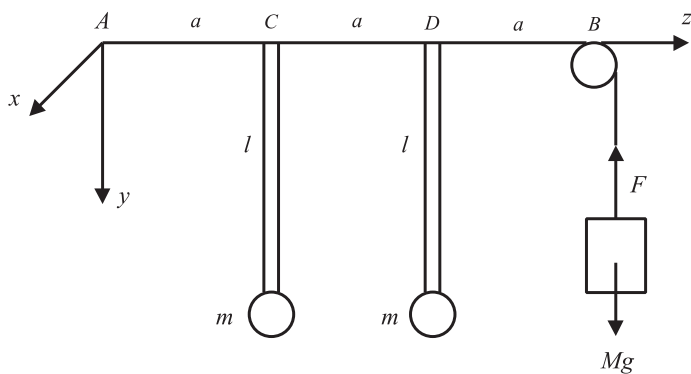
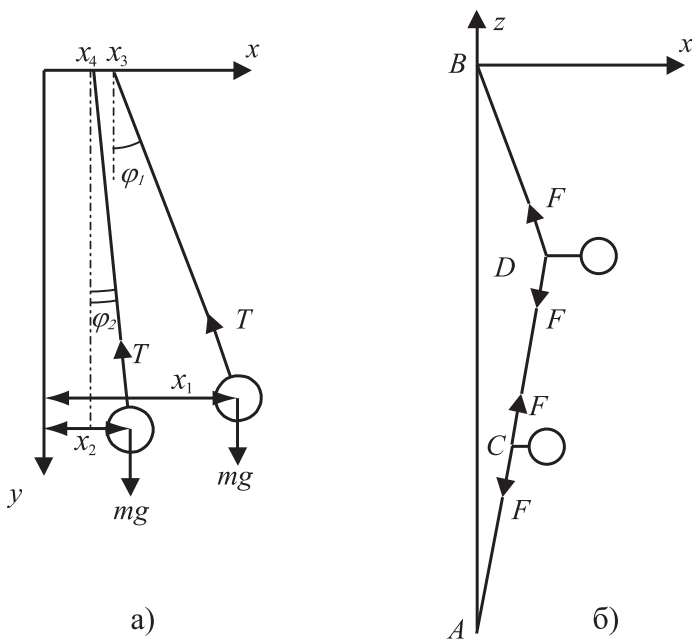


Рис. 1. Общий вид установки

Рис. 2. Отклонения маятников и струны  
а) вид вдоль струны, б) вид сверху

Связь между натяжением струны и натяжением подвеса получаем из рис. 2:

$$T \frac{x_1 - x_3}{l} = F \frac{x_3}{a} + F \frac{x_3 - x_4}{a}, \quad (4)$$

$$T \frac{x_2 - x_4}{l} = F \frac{x_4}{a} + F \frac{x_4 - x_3}{a}. \quad (5)$$

Введем безразмерный параметр

$$\sigma = \frac{T a}{F l} = \frac{m a}{M l},$$

который в нашем случае много меньше единицы (слабая связь). Тогда из (4) и (5) получаем

$$\sigma x_1 = (2 + \sigma)x_3 - x_4, \quad \sigma x_2 = (2 + \sigma)x_4 - x_3. \quad (6)$$

Пренебрегая  $\sigma$  по сравнению с 2, получаем

$$x_3 = \sigma \frac{2x_1 + x_2}{3}, \quad x_4 = \sigma \frac{x_1 + 2x_2}{3}. \quad (7)$$

Уравнения движения маятников примут вид

$$\ddot{x}_1 + \frac{g}{l}(1 - \sigma)x_1 = \sigma \frac{g}{3l}(x_2 - x_1), \quad (8)$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{g}{l}(1 - \sigma)x_2 = \sigma \frac{g}{3l}(x_1 - x_2). \quad (9)$$

Заметим, что система уравнений (4.59), (4.60) может быть записана в виде

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{l}\varphi_1 = \frac{g}{l}\varepsilon(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l}\varphi_2 = \frac{g}{l}\varepsilon(\varphi_1 - \varphi_2)$$

или

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 = \omega_0^2 \varepsilon(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (10)$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2 \varphi_2 = \omega_0^2 \varepsilon(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (11)$$

Уравнения (10), (11) с точностью до обозначений совпадают с уравнениями (8), (9). Введем обозначения

$$\frac{g}{l}(1 - \sigma) = \omega_0^2, \quad \sigma \frac{g}{3l} = \omega_0^2 \varepsilon.$$

Отсюда находим

$$\frac{\sigma}{1 - \sigma} = 3\varepsilon$$

или

$$\sigma(1 + \sigma) \approx 3\varepsilon,$$

т. е.

$$\sigma \approx 3\varepsilon \quad (\text{для слабой связи}).$$

Система уравнений (8), (9) приобретает вид

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \omega_0^2 \varepsilon (x_2 - x_1), \quad (12)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -\omega_0^2 \varepsilon (x_2 - x_1). \quad (13)$$

Таким образом, все рассуждения, приведенные во введении к данному разделу, полностью относятся к данной лабораторной работе. В частности, время, необходимое для перекачки энергии от одного маятника к другому и обратно, равно (4.78):

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0 \varepsilon}. \quad (14)$$

Можно видеть, что параметр связи

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{\omega_0^2 l}{g} \right). \quad (15)$$

В силу (15) соотношение (14) приобретает вид

$$\tau = \frac{6\pi}{\omega_0(1 - \omega_0^2 l/g)} \approx 6\pi \frac{Ml}{ma} \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (16)$$

Формулу (16) можно проверить экспериментально, измеряя парциальную частоту маятника, его длину и время обмена энергией.

## ЗАДАНИЕ

1. Измерьте длину маятников, расстояние между неподвижными точками струны и точками подвеса маятников. Запишите массу маятников и массу груза, натягивающего струну.
2. Измерьте периоды нормальных колебаний (мод). Для измерения периода  $T_1$  колебаний маятников в фазе (синфазных) отклоните их на

одинаковые углы (примерно  $30^\circ$ ) в одну сторону и одновременно отпустите. Напомним, что отсчеты надо производить в моменты прохождения положения равновесия маятников (примерно по 10 периодам). Повторите измерения 2–3 раза и усредните результаты. Для измерения периода  $T_2$  колебаний маятников в противофазе (встречных) начальные отклонения маятников должны быть сделаны в разные стороны.

3. Измерьте периоды парциальных колебаний. Для этого надо отцепить или положить один маятник на подставку.
4. Проведите измерения при раскачивании одного маятника другим. Для этого в начальный момент отклоните только один маятник. Измерьте период биений  $\tau$ .
5. Проверьте справедливость соотношения

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}. \quad (17)$$

6. Повторите предыдущие измерения при других натяжениях струны.
7. Постройте график зависимости периода биений от натяжения струны.
8. Проведите сравнение полученных результатов с теоретическими расчетами по формуле (16).

### Контрольные вопросы

1. Приведите примеры колебательных систем с двумя степенями свободы.
2. Что такое нормальные колебания (моды)?
3. Какие колебания называются парциальными?
4. При каком начальном условии возникает поочередная раскачка маятников?
5. Выведите формулу (17).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика. — М.: Наука, 1983.
2. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: Физматлит, 2001. Ч. III. Гл. 2. § 2.5.

### Работа 1.4.5

## Изучение колебаний струны

**Цель работы:** исследование зависимости частоты колебаний струны от величины натяжения, а также условий установления стоячей волны, получающейся в результате сложения волн, идущих в противоположных направлениях.

**В работе используются:** рейка со струной, звуковой генератор, постоянный магнит, разновесы.

Основное свойство струны — гибкость — является следствием ее большой длины по сравнению с поперечными размерами. Даже струны, изготовленные из жестких материалов, практически не сопротивляются изгибу, если размер изгибаемого участка значительно больше поперечного размера струны. Это позволяет в дальнейшем при рассмотрении струны не учитывать изгибные напряжения.

Горизонтально расположенная струна с закрепленными концами провисает в поле тяжести, если она плохо натянута. При увеличении натяжения струна вытягивается практически в прямую линию. Сила натяжения при этом значительно превосходит вес струны. Поэтому для прямой натянутой струны в дальнейшем силами тяжести будем пренебрегать.

Натянутая струна с жестко закрепленными концами удобна для изучения колебательных процессов. Это связано с тем, что в струне можно непосредственно наблюдать простейшие типы колебаний и волн, измерять их параметры и сравнивать результаты наблюдения с результатами теоретических расчетов.

Движение элементов струны может быть вызвано изменением ее формы или передачей ей импульса. Натяжение струны стремится вернуть её в начальное прямолинейное положение, и это приводит к тому, что возникает движение элементов струны. Возмущения бегут вдоль струны.

В силу волнового уравнения (4.94) скорость распространения поперечной волны на струне равна

$$u = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}}, \quad (1)$$

где  $F$  — сила натяжения струны,  $\rho_l$  — масса струны на единицу длины. При заданной частоте  $\nu$  длина волны

$$\lambda = \frac{u}{\nu}. \quad (2)$$

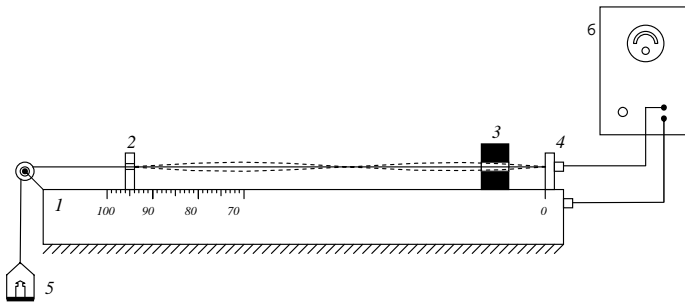


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

Частоты собственных колебаний струны определяются формулой (4.96):

$$\nu_n = n \frac{u}{2l}, \quad (3)$$

где  $l$  — длина струны,  $n$  — число полуволн.

**Экспериментальная установка.** Схема экспериментальной установки изображена на рис. 1. На массивной металлической рейке 1 установлены опоры 2 и магнит 3, которые можно перемещать вдоль рейки, а также неподвижная опора 4. Один конец струны закреплен в изоляторе опоры 4. От него струна проходит между полюсами магнита и через опору 2, которая дает возможность струне перемещаться в горизонтальном направлении, неподвижный блок и соединяется с чашкой 5, на которую помещают грузы. Такое устройство необходимо для натяжения струны. К концу струны, закрепленному в изоляторе опоры 4, и к массивной металлической рейке 1 подводится переменное напряжение от звукового генератора 6. Движение струны вызывается силой Ампера, действующей на проводник с током в магнитном поле. Частота действия силы, раскачивающей струну, равна частоте колебаний тока в струне, то есть частоте генератора.

В натянутой струне возникнут колебания и по ней побегут волны, которые отразятся от опор 2 и 4 и, сложившись друг с другом, создадут стоячую волну, если на длине струны уложится целое число полуволн.

В реальных условиях колебания струны существуют потери энергии, связанные с трением струны о воздух, передачей некоторого движения опорам, необратимыми процессами в самой струне и, возможно, какими-то другими процессами. Чтобы колебания струны происходили долго, нужно подводить энергию. В стационарном режиме подводимая



энергия равна потерям энергии. В данной установке сила Ампера не только возбуждает, но и поддерживает колебания в струне.

Поток энергии при этом распространяется по всей струне. Однако в чисто стоячей волне распространение энергии невозможно (см. введение к данному разделу). Наличие отличного от нуля коэффициента бегучести необходимо поэтому принципиально. Реально это приводит к размытию узлов стоячей волны. Если потери энергии за период колебаний малы по сравнению с запасом колебательной энергии в системе, то коэффициент бегучести значительно меньше единицы:

$$\frac{A_1 - A_2}{A_2} \ll 1. \quad (4)$$

Здесь  $A_1$  — амплитуда падающей волны,  $A_2$  — амплитуда отраженной волны. В этом случае можно пользоваться соотношениями, полученными для чисто стоячей волны. Заметим, что величину  $A_1 - A_2$  можно оценить по размытию узлов стоячей волны, она равна половине величины размытия. Амплитуда стоячей волны в пучности равна  $2A_2$ .

Если соотношение (4) выполняется не достаточно хорошо, то надо уменьшить величину подводимой от генератора энергии. При этом уменьшение потерь энергии происходит быстрее, чем уменьшение энергии в волне.

Необходимо сделать еще одно замечание. Действие силы Ампера должно привести к поляризованным волнам, плоскость колебания которых перпендикулярна направлению магнитного поля. В реальных условиях на установке не всегда получаются линейно поляризованные волны.

## ЗАДАНИЕ

1. Изучите конструкцию установки. Установите опору 2 (рис. 1) так, чтобы колеблющийся участок струны имел длину  $L$  не менее 80 см.
2. Включите питание звукового генератора. Дайте ему прогреться 5–10 минут.
3. При работе с генератором ЗГ-18 установите нулевое значение шкалы частот генератора. Для этого лимбы «Частота» и «Расстройка» установите на нуль. Вращая ручку «Установка нуля», устраните биения стрелки. При этом стрелка прибора должна оставаться на нуле. После этого лимб «Установка нуля» трогать не следует. Прибор готов к работе.
4. Нагрузите струну.
5. Перемещая магнит и вращая ручку изменения частоты генератора, получите картину стоячих волн. (Передвижение магнита вдоль струны

- перемещает точку приложения внешней силы, которая не должна попадать на узел, но должна быть к нему достаточно близка).
6. Увеличивая частоту звукового генератора при некотором постоянном натяжении струны, получите стоячие волны, соответствующие  $n = 1, 2, 3, \dots$ , дойдя, по крайней мере, до  $n = 6$ . Фиксируя каждый раз показания лимба звукового генератора, повторите процесс при понижении, а затем снова при повышении частоты. Проведите эти измерения при различных натяжениях струны (не менее пяти).
  7. При проведении эксперимента проверьте справедливость условия (4), измерив величину размытости узла и амплитуду в пучности. Если оно выполняется недостаточно хорошо, надо уменьшить выходную мощность звукового генератора.
  8. Для каждого значения натяжения струны  $F$  постройте график зависимости частоты резонанса  $\nu_n$  от  $n$ . По наклону прямой с помощью формулы (3) определите скорость  $u$  волн в струне при данном натяжении. Оцените погрешность результатов.
  9. Постройте график зависимости  $u^2$  от  $F$ . По наклону прямой с помощью формулы (1) определите погонную плотность струны  $\rho_l$ . Оцените погрешность результата и сравните вашу оценку с действительной погрешностью. Истинное значение  $\rho_l$  указано на установке.

### Контрольные вопросы

1. Что такое продольные и поперечные волны? Напишите уравнение бегущей волны.
2. Выведите уравнение стоячей волны. Дайте определение пучности и узла стоячей волны. Как происходит передача энергии по струне?
3. Покажите, что скорость распространения поперечных волн по струне равна  $u = \sqrt{F/\rho_l}$ . Чему равна эта скорость в ваших измерениях?
4. Как происходит отражение бегущей волны от жестко закрепленного конца струны и от конца, который может свободно двигаться в направлении, перпендикулярном к направлению натяжения струны? Как меняется фаза отраженной волны?
5. При каком условии влиянием бегущей волны на картину колебаний струны можно пренебречь? Как это условие можно проверить при проведении эксперимента?

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стрелков С.П. Механика. — М.: Наука, 1975. С. 137–143.
2. Хайкин С.Э. Физические основы механики. — М.: Наука, 1971. С. 150–154.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. §§ 81, 84.
4. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: Физматлит, 2001. Ч. III. Гл. 5. § 5.6.

### Работа 1.4.6

## Измерение скорости ультразвука в жидкости с помощью ультразвукового интерферометра

**Цель работы:** измерение в различных средах длины волны ультразвука с помощью ультразвукового интерферометра, вычисление скоростей распространения ультразвука и адиабатической сжимаемости сред.

**В работе используются:** ультразвуковой интерферометр, генератор стандартных сигналов Г4-42, микроамперметр.

Механические колебания с частотой выше 20 кГц называются ультразвуковыми, в отличие от звуковых колебаний они не воспринимаются человеческим ухом.

Ультразвуковые колебания, так же как и звуковые, могут распространяться в твердых, жидких и газообразных телах. В твердых телах они распространяются в виде продольных и поперечных волн, а в жидких и газообразных — только как продольные волны. Скорость распространения ультразвуковых волн зависит от упругих свойств и плотности вещества, в котором распространяется звук. Поэтому, зная скорость ультразвука и плотность среды, можно определить ее упругие константы.

В работе определяется скорость ультразвука в жидкости. Существует несколько методов ее измерения. Используемый в работе метод ультразвукового интерферометра принадлежит к числу наиболее точных.

В интерферометре между излучателем и жесткой отражающей поверхностью устанавливается стоячая волна. (См. введение к разделу). Расстояние между излучателем и отражающей поверхностью должно содержать целое число полуволн:

$$l = n \frac{\lambda}{2}, \quad c_s = \lambda \nu_n, \quad (1)$$

где  $c_s$  — скорость распространения ультразвуковой волны,  $\nu_n$  — частота.

Интерферометр можно рассматривать как резонатор, который настроен на частоты, получаемые из (1):

$$\nu_n = n \frac{c_s}{2l}. \quad (2)$$

При таких частотах генератора в интерферометре устанавливаются стоячие волны. Эти частоты называются резонансными. Чтобы перейти от одной резонансной частоты к соседней, надо расстояние  $l$  между излучателем и отражающей поверхностью  $l$  изменить на

$$\Delta l = \frac{\lambda}{2}. \quad (3)$$

Формула (3) имеет более общую применимость, чем (1). В самом деле, равенство (1) было получено в предположении, что оба торца у столба жидкости закрыты абсолютно упругими (полностью отражающими звук) стенками. Это условие никогда не выполняется точно. Сдвиг фаз между отраженной и падающей волнами никогда поэтому в точности не равен  $\pi$ .

Формула (3), определяющая расстояние между двумя последовательными резонансами, не зависит от условий отражения на дне и на крышке сосуда. Коль скоро резонансные условия один раз были достигнуты, при увеличении длины столба на  $\lambda/2$  путь звуковой волны, проходящей между двумя последовательными отражениями от крышки, увеличивается на  $\lambda$ , а фаза волны изменяется на  $2\pi$ , и, следовательно, резонансные условия снова оказываются выполненными.

Рассмотрим некоторые способы возбуждения ультразвуковых колебаний. Обычно такие колебания возбуждаются с помощью кварцевой пластинки, помещенной между обкладками плоского конденсатора (обкладки, как правило, приклеиваются или напыляются на поверхность кварца). При возникновении поля в конденсаторе размер кварцевой пластинки изменяется (пьезоэффект). Подавая на конденсатор электрическое поле нужной частоты, возбуждают звуковые колебания кварцевой пластинки, которые затем передаются жидкости.

Обычно пьезокварц помещают в жидкость, чтобы не вводить лишних отражающих звук поверхностей. В нашем случае пластинка прижата ко дну сосуда. При этом колебания передаются в жидкость через дно, которое в идеальных условиях должно быть узлом смещения.

Легко видеть, однако, что возбуждать колебания можно вблизи узла, но не в самом узле, так как в узле нет перемещений и, следовательно, не производится работа. В то же время от излучателя к жидкости должна передаваться энергия, компенсирующая естественные потери в жидкости и на отражающих поверхностях. В этом нет, однако, никакого противоречия. Дно сосуда является узлом колебаний лишь в интерферометре с абсолютно упругими стенками и при отсутствии потерь в жидкости. Но если энергия не тратится, ее не следует и восстанавливать. В реальных установках потери энергии неизбежны, но

и дно сосуда не должно быть и не является совсем неподвижным.

Как уже отмечалось, в случае резонанса и при полном отсутствии потерь в интерферометре амплитуда бегущих волн, движущихся вверх и вниз, одинакова, а их сумма дает стоячую волну. В реальном случае амплитуда  $A_{\text{вверх}}$  волны, движущейся от излучателя, несколько превосходит амплитуду  $A_{\text{вниз}}$  встречной волны. Сложение этих волн дает стоячую волну с амплитудой  $2A_{\text{вниз}}$  и бегущую волну с амплитудой  $A_{\text{вверх}} - A_{\text{вниз}}$ . Бегущая волна осуществляет передачу энергии и «размывает» картину в узлах стоячей волны.

Обратимся к измерению длины волны звука. Из изложенного ясно, что измерение сводится к определению расстояния между двумя соседними положениями крышки интерферометра, при которых выполняются резонансные условия в столбе жидкости. Удвоив полученное расстояние, найдем, согласно формуле (3), длину ультразвуковой волны.

После того как длина волны ультразвука в интерферометре измерена, следует найти скорость звука. Это можно сделать с помощью формул (1). Как видно из формул, кроме длины волны, необходимо знать частоту колебаний кварцевой пластинки, которая совпадает с частотой напряжения, подводимого к пьезокварцу.

Зная  $c_s$ , можно определить сжимаемость  $\chi$  исследуемой жидкости:

$$c_s = \sqrt{\frac{1}{\chi\rho}}, \quad \chi = \frac{1}{\rho c_s^2}, \quad (4)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости. Так как процесс распространения звуковых колебаний является адиабатическим, в эту формулу входит адиабатическая сжимаемость жидкости  $\chi_{\text{ад}}$ . У жидкостей адиабатическая и изотермическая сжимаемости отличаются мало, например, для воды — всего на 1%, поэтому часто между ними можно не делать различия.

При растворении в воде сильных электролитов, последние диссоциируют на ионы. Электрическое поле ионов ориентирует близлежащие молекулы воды, что приводит к резкому снижению сжимаемости. Грубо говоря, каждый ион оказывается в центре сферы, коэффициент сжимаемости которой практически равен нулю. Наличие таких сфер приводит к уменьшению общего коэффициента сжимаемости жидкости, в результате чего скорость ультразвука существенно возрастает.

**Экспериментальная установка.** Используемый в работе интерферометр (рис. 1) представляет собой цилиндрический сосуд С, к дну которого приклеена кварцевая пластинка К. Пластинка вырезана из

кварца специальным образом (так называемый «Х-срез») и обладает пьезоэлектрическими свойствами. При сжатии и растяжении пластины на гранях, к которым приложено усилие, возникают электрические заряды противоположных знаков. В интерферометре используется обратный эффект: к посеребренным горизонтальным граням пластины подводится переменное электрическое напряжение, что приводит к ее колебаниям по толщине. Переменное напряжение подается от генератора стандартных сигналов Г4-42, достаточно точно (с погрешностью менее 1%) проградуированного по частоте. В генератор вмонтирован резонансный усилитель, настроенный на собственную частоту кварцевой пластины (1 МГц). Амплитуда напряжения, подаваемого на пьезокварц, достигает нескольких десятков вольт.

Толщина дна интерферометра выбрана так, чтобы при рабочей частоте в слое, образующем дно сосуда, наступали резонансные явления.

Возбуждаемая пьезокварцем поверхность дна интерферометра является источником ультразвука в исследуемой жидкости. Такой способ возбуждения колебаний позволяет проводить исследования с любыми жидкостями, в том числе и с электропроводящими, не опасаясь замыкания электродов пластины или ее порчи.

Величина тока, потребляемого колеблющейся кварцевой пластиной, контролируется микроамперметром. Микроамперметр через полупроводниковый диод Д включен параллельно сопротивлению  $R$ , установленному в цепи пластины. Он служит для определения резонанса. При наступлении резонансных условий мощность, потребляемая пьезокварцем, а следовательно, и сила тока в его цепи резко увеличиваются.

Отражателем в интерферометре является диск О из нержавеющей стали. Его нижняя плоская поверхность параллельна дну интерферометра. При помощи микрометрического винта М диск перемещается в жидкости вверх и вниз. Пружина П поднимает шток Ш вверх до упора в торец микрометрического винта.

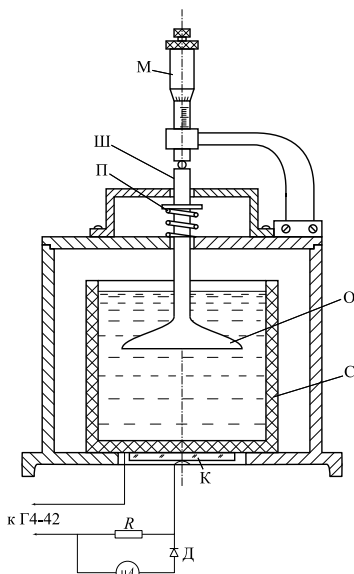


Рис. 1. Схема ультразвукового интерферометра

## ЗАДАНИЕ

1. Включите генератор Г4-42 и дайте ему прогреться несколько минут. Если в интерферометре была жидкость, слейте ее, открыв зажим шланга. Выберите нужный рабочий диапазон частот Г4-42, т. е. диапазон, позволяющий получать частоту 1 МГц (собственную частоту кварцевой пластинки).

Меняя частоту генератора, добейтесь резонанса в кварцевой пластинке, — ток через микроамперметр должен при этом пройти через максимум. Ручкой «Установка уровня выхода» подберите амплитуду колебаний на Г4-42 так, чтобы стрелка микроамперметра отклонялась примерно на  $2/3$  шкалы прибора. Перемещая отражатель сверху вниз при помощи микрометрического винта, наблюдайте за изменениями показаний микроамперметра. Если при этом в показаниях прибора наблюдаются периодические изменения, следует убедиться в том, что их причиной является установление резонанса (например, по постоянству смещений между последовательными максимумами). Может оказаться, что резонанс в интерферометре не наблюдается. Это еще не означает, что прибор неисправен, так как для наблюдения резонанса в столбе воздуха нужны, вообще говоря, более чувствительные индикаторы, чем при работе с жидкостями.

Причиной небольших отклонений стрелки прибора может быть прикосновение или отрыв руки от микрометрического винта. При этом изменяется электрическая ёмкость прибора, и поэтому несколько сбивается настройка резонансной частоты. Если не отрывать пальцев от микрометрического винта и плавно вращать его, то такие колебания стрелки не должны наблюдаться.

2. Зажмите выпускной шланг и через воронку заполните сосуд интерферометра водой. Поднимите отражатель, следя за тем, чтобы его рабочая поверхность не вышла из воды. Убедитесь в том, что на рабочей поверхности отражателя нет пузырьков воздуха. Проверьте установку резонансной частоты. Плавно перемещая отражатель вниз, следите за колебаниями тока через микроамперметр и по числу максимумов найдите число полуволн, укладывающихся на пути, пройденном отражателем.

Постройте график, откладывая по оси абсцисс номер максимума, а по оси ординат — его положение. Проверьте, что все экспериментальные точки хорошо ложатся на прямую. Используя соотношение (3), определите по графику скорость ультразвука в воде.

Рассчитайте по формуле (4) адиабатическую сжимаемость среды  $\chi_{\text{ад}}$ . Повторите опыт 4–5 раз. Оцените погрешность в определении  $c_s$  и  $\chi_{\text{ад}}$ .

3. Аналогичные измерения проведите, заполняя сосуд растворами NaCl с концентрацией 5, 10, 15 и 20%. Плотность растворов измерьте ареометром. Постройте график зависимости  $c_s$  и  $\chi_{ад}$  от концентрации раствора. Определите по нему неизвестную концентрацию и  $\chi_{ад}$  контрольного раствора. Перед заливкой контрольного раствора сполосните им сосуд интерферометра.

Закончив работу, обязательно сполосните сосуд интерферометра чистой водой.

### Контрольные вопросы

1. Какие механические колебания называются ультразвуковыми?
2. Что такое продольные и поперечные волны и какова их природа? В каких веществах они могут распространяться?
3. Напишите выражение для бегущей волны.
4. При каких условиях возможна интерференция волн?
5. Выведите формулу, определяющую условия возникновения резонанса в интерферометре. Как влияют граничные условия на эту формулу?
6. При каких условиях возникает стоячая волна? Что такое узлы и пучности? Как происходит передача энергии в волне?
7. Почему в растворах электролитов скорость распространения ультразвука больше, чем в чистой жидкости?
8. Вместо металлического отражателя в интерферометре можно использовать свободную поверхность исследуемой жидкости. При этом высоту столба можно плавно менять, выпуская жидкость из интерферометра. Какая разность фаз устанавливается между падающей и отраженной волнами смещения на границе раздела жидкость-воздух?
9. Какие изменения следовало бы сделать в интерферометре, чтобы можно было производить измерения в газах?

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М. Механика. — М.: Наука, 1969. Гл. XVI, §§ 125–129.
2. Хайкин С.Э. Физические основы механики. — М.: Наука, 1971. Гл. XIX, §§ 153–155.
3. Кингсеп А.С., Локишин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: Физматлит, 2001. Ч. III. Гл. 5. §§ 5.2–5.5.



### Работа 1.4.7

## Определение упругих констант жидких и твердых тел по скорости распространения ультразвука

**Цель работы:** измерить скорости звука в жидких и твердых телах и по этим измерениям определить упругие константы исследуемых тел.

**В работе используются:** ультразвуковой дефектоскоп, измерительная стойка, набор образцов, миллиметровая линейка, призматические щупы.

Ультразвуком называются механические колебания, частота которых превышает 20 кГц. Самым простым типом ультразвуковых волн являются плоские волны, среди которых различают продольные и поперечные. У продольных волн смещение частиц происходит в том же направлении, в котором движется волна, у поперечных оно перпендикулярно движению волны. Продольные ультразвуковые волны могут распространяться в любых веществах. Поперечные волны распространяются только в твердых телах, в которых могут возникать напряжения сдвига.

В обычных условиях скорость ультразвука в воздухе составляет около 330 м/с, в воде 1500 м/с, в кварце 5700 м/с, в стали 6000 м/с.

**Генерация и детектирование ультразвуковых волн.** Одним из распространенных методов определения скорости ультразвука является импульсный метод. В исследуемую среду посылается короткий ультразвуковой импульс и измеряется время пробега  $t$ , которое тратит ультразвук на прохождение некоторого расстояния  $l$ . Скорость ультразвука определяется по очевидной формуле:

$$c_s = \frac{l}{t}. \quad (1)$$

Ультразвуковой импульс генерируется пьезоэлектрическим излучателем. Импульс регистрируется приемником, расположенным на некотором расстоянии от излучателя. Вместо приемника можно установить рефлектор (рис. 1). В этом случае отраженный от рефлектора импульс возвращается к излучателю, который теперь не только генерирует, но и регистрирует ультразвук. При использовании рефлектора установленное расстояние проходится дважды, поэтому в формуле (1) следует подставить удвоенное расстояние между излучателем и рефлектором.

Для измерения времени прохождения импульса удобно использовать электронно-лучевой осциллограф, на трубке которого видны два импульса, возникающие в момент генерации и в момент возвращения сигнала. Время  $t$  измеряется по расстоянию между импульсами (скорость развертки осциллографа калибруется). Измеренная таким образом скорость ультразвука является групповой скоростью волн, отличной от их фазовой скорости, о которой мы говорили до сих пор. При отсутствии дисперсии (дисперсией называется зависимость фазовой скорости распространения волн от их длины волны) эти две скорости равны друг другу.

Обычно в качестве излучателей используются пьезоэлектрические пластинки из титаната бария ( $\text{BaTiO}_3$ ). Чтобы в исследуемом теле возбуждались как продольные, так и поперечные волны, применяют так называемые призматические щупы. В призматическом щупе (рис. 2) излучатель расположен под некоторым углом  $\alpha$  к опорной поверхности прямоугольной призмы, которую удобно делать из плексигласа. Излучатель возбуждает в плексигласе продольную волну, падающую под углом  $\alpha$  на границу раздела плексиглас – исследуемое тело. При небольших углах падения после преломления на границе в исследуемом теле распространяются две волны — продольная и поперечная. Так как их скорости различны, то на экране осциллографа, кроме пускового, видны два отраженных импульса.

Для передачи поперечных волн щуп должен быть приклеен к образцу, жидкие смазки для этого не годятся.

**Экспериментальная установка.** Для измерения скорости ультразвука в жидкостях используется стандартный дефектоскоп. (Прибор предназначен для определения глубины залегания дефектов в различных изделиях). Генератор возбуждает в излучателе (изготовленном из титаната бария  $\text{BaTiO}_3$ ) короткие импульсы высокочастотных колебаний. Ультразвуковые импульсы передаются в образец через тонкий слой смазки и, отражаясь от противоположной границы образца, воз-

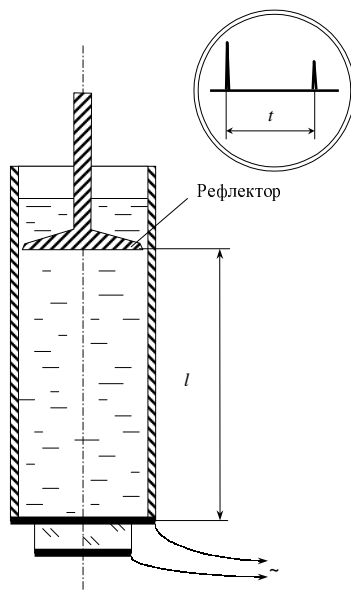


Рис. 1. Схема, поясняющая импульсный метод измерения скорости ультразвука

вращаются в излучатель, который вновь преобразует их в электрические сигналы. После усилителя сигналы подаются на электронно-лучевую трубку дефектоскопа. На экране трубки сигналы наблюдаются в виде импульсов: излучаемый — в начале развертки, отраженные — справа от него. Расстояние между импульсами пропорционально времени  $t$  прохождения ультразвука от излучателя до отражающей поверхности и обратно. Это расстояние измеряется при помощи метки (ступеньки на линии развертки), передвигаемой вдоль линии развертки ручкой шкалы глубиномера.

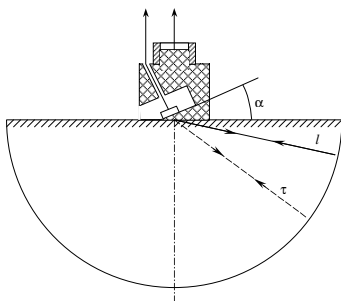


Рис. 2. Призматический щуп

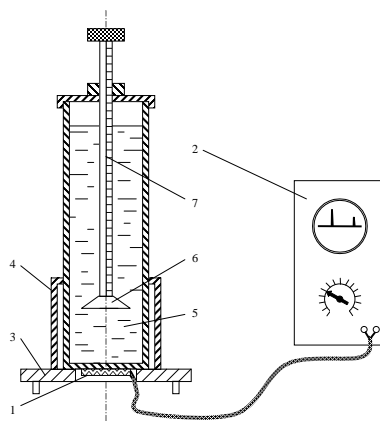


Рис. 3. Схема установки

Схема установки изображена на рис. 3. Излучатель 1, соединенный экранированным кабелем с дефектоскопом 2, вмонтирован в дно 3 измерительной стойки. С помощью поддерживающего цилиндра 4 на стойке устанавливается исследуемый стержень или цилиндрический сосуд из нержавеющей стали с исследуемой жидкостью 5. Их контакт с излучателем осуществляется с помощью жидкого масла, передающего в образец только продольные волны. В твердых образцах импульс отражается от верхнего, свободного конца; при работе с жидкостями отражающей поверхностью служит изготовленный из нержавеющей стали поршень 6, высота поднятия которого над дном отсчитывается по шкале на его штоке 7. Для градуировки шкалы глубиномера используется вода (скорость распространения  $c_s = 1497$  м/с при  $25^\circ\text{C}$ , температурный коэффициент  $dc_s/dt = 2,5$  м/(с·K)).

При измерении скорости ультразвука (и при градуировке прибора) можно измерять интервал времени между излученным и отраженным

сигналами или между двумя последовательно отраженными сигналами. Последний способ является предпочтительным, так как при этом результат не содержит ошибки, связанной с прохождением ультразвука через дно сосуда.

Для измерения скорости распространения поперечных ультразвуковых волн (наряду с продольными) вместо измерительной стойки к дефектоскопу подключается установка с призматическим щупом. Образец имеет форму полуцилиндра. Щуп расположен на его оси (рис. 2), так что расстояния, проходимые в образце продольными и поперечными волнами, одинаковы (они равны удвоенному радиусу полуцилиндра) и не зависят от угла, под которым волны входят в образец. Акустический контакт щупа с образцом достигается с помощью тонкого слоя минерального воска или клея БФ-2. Эти вещества способны передавать в образец тангенциальные напряжения.

### ЗАДАНИЕ

1. Включите дефектоскоп в сеть переменного тока. Включение производится поворотом ручки «Яркость» по часовой стрелке.
2. Прогрейте прибор 1–2 минуты, а затем ручками «Яркость» и «Фокус» добейтесь наибольшей четкости линии развертки. Ручкой «Смещение X» установите начало развертки около левого края экрана. Поставьте переключатель «Частота» в положение «5 МГц», что соответствует резонансной частоте излучателя. Остальные ручки установите в следующие положения: «Электронная лупа» — в положение «Выкл.», «Вид измерений» — в положение «Развертка плавно», «Зона автоматического контроля» — в крайнее правое положение, «Чувствительность» — в среднее положение, «ВРЧ» (временная регулировка чувствительности) — в крайнее положение, «Мощность импульса» — в правое крайнее положение, «Отсечка» — в среднее положение, переключатель «I и I + II» — в положение «I».
3. Отградуируйте шкалу глубиномера. Для этого установите в измерительную стойку сосуд с водой. Устанавливая сосуд или образец, не забудьте смазать жидким маслом поверхность излучателя! Переключатель «Вид измерений» поставьте в положение «Д. Пр.». Переключатель «Диапазоны прозвучивания» установите на нужный диапазон (в соответствии с расстоянием  $t$  от излучателя до поверхности отражающего поршня). Градуировку прибора произведите по нескольким (5–6) значениям расстояний между излучателем и поршнем. Постройте градуировочный график, откладывая по одной из осей деления шкалы глубиномера, а по другой — вычисленное значение времени пробега импульса. Расстояние  $l$  измеряется по линейке на штоке отражающего поршня. Скорость ультразвука в воде указана выше.

4. Измерьте скорость распространения продольных колебаний  $c_l$  ультразвука в образцах из различных материалов (сталь, алюминий, латунь, органическое стекло и т. д.) и в различных жидкостях (четырёххлористый углерод, масло). Длину  $l$  образцов твердых тел измерьте миллиметровой линейкой, а расстояние между дном сосуда и отражателем — по линейке на штоке поршня. Время прохождения импульса определите по шкале глубиномера с помощью градуировочного графика. Вычислите скорость распространения ультразвука в каждом из исследуемых материалов.

**Указание.** При проведении опыта следует убедиться, что выбранные вами для измерений импульсы действительно соответствуют двум последовательно отраженным импульсам. Помимо них на экране осциллографа обычно наблюдаются различные побочные импульсы, возникающие, например, из-за отражения непосредственно от нижней грани образца.

При измерениях с самыми короткими образцами амплитуды отраженных импульсов мало отличаются друг от друга, тогда как для самых длинных образцов различие амплитуд двух соседних отраженных импульсов может оказаться существенным. Иногда для того, чтобы увидеть второй отраженный сигнал, приходится увеличивать чувствительность усилителя (ручкой «Чувствительность»).

5. Измерьте скорость распространения продольных  $c_l$  и поперечных  $c_\tau$  волн в различных материалах (сталь, алюминий, латунь и т. д.), используя призматический щуп с таким углом падения  $\alpha$  (величина угла указана на призме щупа), который обеспечивает введение в исследуемое тело обоих типов волн. Время прохождения каждого импульса определите по шкале глубиномера с помощью построенного ранее градуировочного графика. Длину пути ультразвука измерьте миллиметровой линейкой.
6. Вычислите коэффициент Пуассона  $\mu$ , модуль Юнга  $E$  и модуль сдвига  $G$  для исследуемых твердых тел с помощью формул

$$c_\tau = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

$$c_l = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}},$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Плотность материала  $\rho$  возьмите из таблиц.

7. Вычислите коэффициент адиабатической сжимаемости исследуемых жидкостей, воспользовавшись формулой

$$\chi = \frac{1}{\rho c_l^2}.$$

8. Оцените погрешность всех полученных результатов и сравните их с табличными значениями в справочниках.

### Контрольные вопросы

1. При определении скорости распространения ультразвука с помощью дефектоскопа на экране помимо последовательно отраженных импульсов наблюдаются побочные импульсы. Какие причины приводят к появлению этих импульсов? Как от них избавиться?
2. При измерении скорости ультразвука с помощью призматического щупа в результат вносится систематическая погрешность, возникающая из-за того, что между излучателем и исследуемым материалом находится клиновидная часть плексигласового щупа. Оцените величину этой погрешности, исходя из размеров щупа и образца.
3. Покажите, что коэффициент отражения ультразвуковой волны на границе двух сред не зависит от направления движения волны.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. §§ 78, 81, 83, 85.
2. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: Физматлит, 2001. Ч. III. Гл. 5.

ТАБЛИЦЫ

Т а б л и ц а 1

Основные физические постоянные

Величина	Обозначение или формула	Числовое значение
Скорость света в вакууме	$c$	299 792 458 м/с (точно)
Постоянная Планка	$h$ $\hbar = h/2\pi$	$6,62606876(52) \cdot 10^{-34}$ Дж·с $1,054571596(82) \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Больцмана	$k$	$1,3806503(24) \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Постоянная Авогадро	$N_A$	$6,02214199(47) \cdot 10^{23}$ моль <sup>-1</sup>
Атомная единица массы	1 а.е.м	$1,66053873(13) \cdot 10^{-27}$ кг
Газовая постоянная	$R = kN_A$	8,314472(15) Дж/(моль·К)
Объем моля идеального газа при нормальных условиях ( $T_0 = 273,15$ К, $P_0 = 101325$ Па)	$V_0 = \frac{RT_0}{P_0}$	$22,413996(39) \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$
Гравитационная постоянная	$G$	$6,673(10) \cdot 10^{-11}$ Н · м <sup>2</sup> /кг <sup>2</sup>
Элементарный заряд (заряд электрона)	$e$	$1,602176462(63) \cdot 10^{-19}$ Кл $4,8032042 \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ
Удельный заряд электрона	$e/m_e$	$1,758820174(71) \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Масса электрона	$m_e$	$0,910938188(72) \cdot 10^{-30}$ кг
Масса протона	$m_p$	$1,67262158(13) \cdot 10^{-27}$ кг
Масса нейтрона	$m_n$	$1,67492716(13) \cdot 10^{-27}$ кг

Т а б л и ц а 1 (продолжение)

Величина	Обозначение или формула	Числовое значение
Энергия покоя электрона	$m_e c^2$	0,510998902(21) МэВ
Энергия покоя протона	$m_p c^2$	938,271998(38) МэВ
Энергия покоя нейтрона	$m_n c^2$	939,565330(38) МэВ

В скобках указана погрешность последних знаков.

Т а б л и ц а 2

**Внесистемные единицы**

Длины:

Ангстрем

$$1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м} = 10^{-8} \text{ см} = 0,1 \text{ нм}$$

Астрономическая единица

$$1 \text{ а. е.} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ м} = 1,5 \cdot 10^{13} \text{ см}$$

Световой год

$$1 \text{ св. год} = 9,5 \cdot 10^{15} \text{ м} = 9,5 \cdot 10^{17} \text{ см}$$

Парсек

$$1 \text{ пк} = 3,1 \cdot 10^{16} \text{ м} = 3,1 \cdot 10^{18} \text{ см}$$

Давления:

Атмосфера (физическая)

$$1 \text{ атм} = 760 \text{ мм рт. ст.} = 101325 \text{ Па (точно)}$$

Энергии:

Эрг

$$1 \text{ эрг} = 10^{-7} \text{ Дж}$$

Калория

$$1 \text{ кал} = 4,1868 \text{ Дж (точно)}$$

Электрон-вольт

$$1 \text{ эВ} = 1,6021765 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,6021765 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$$

Температура, соответствующая энергии 1 эВ,

$$11605 \text{ К}$$



## Т а б л и ц а 3

**Астрофизические постоянные**

Масса Солнца

$$M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ кг} = 1,99 \cdot 10^{33} \text{ г}$$

Энергия, испускаемая Солнцем в 1 секунду, или светимость

$$L_{\odot} = 3,86 \cdot 10^{26} \text{ Вт} = 3,86 \cdot 10^{33} \text{ эрг/с}$$

Солнечная постоянная

$$E_{\odot} = 1,35 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2 = 1,35 \cdot 10^6 \text{ эрг/(с} \cdot \text{см}^2)$$

Радиус Солнца

$$R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^5 \text{ км} = 6,96 \cdot 10^8 \text{ м}$$

Угловой диаметр Солнца на среднем расстоянии от Земли

$$\alpha_{\odot} = 0,92 \cdot 10^{-2} \text{ рад}$$

Температура Солнца вблизи поверхности

$$T_{\odot} = 5,9 \cdot 10^3 \text{ К}$$

Масса Земли

$$M_{\oplus} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ кг} = 5,98 \cdot 10^{27} \text{ г}$$

Средняя плотность Земли

$$\rho_{\oplus} = 5,52 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 = 5,52 \text{ г/см}^3$$

Экваториальный ( $a$ ) и полярный ( $b$ ) радиусы Земли

$$a = 6378 \text{ км}, \quad b = 6357 \text{ км}$$

Средний радиус равновеликой сферы

$$R = 6371 \text{ км}$$

Стандартное ускорение свободного падения на поверхности Земли

$$g_n = 9,80665 \text{ м/с}^2$$

Среднее расстояние от Земли до Солнца

$$L_{\oplus} = 1 \text{ а.е.} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ км} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ м}$$

Средняя температура поверхности Земли

$$T_{\oplus} = 300 \text{ К}$$

Средняя скорость движения Земли по орбите

$$v_{\oplus} = 30 \text{ км/с} = 3 \cdot 10^4 \text{ м/с}$$

Угловая скорость вращения Земли

$$\omega_{\oplus} = 0,727 \cdot 10^{-4} \text{ рад/с}$$

Космические скорости (1-я и 2-я) на поверхности Земли

$$v_1 = \sqrt{GM_{\oplus}/R_{\oplus}} = 7,9 \text{ км/с} = 7,9 \cdot 10^3 \text{ м/с},$$

$$v_2 = v_1 \sqrt{2} = 11,2 \text{ км/с} = 11,2 \cdot 10^3 \text{ м/с}$$

Масса Венеры

$$M_{\text{В}} = 0,82M_{\oplus} = 4,87 \cdot 10^{24} \text{ кг} = 4,87 \cdot 10^{27} \text{ г}$$

Среднее расстояние от Венеры до Солнца

$$L_B = 1,08 \cdot 10^8 \text{ км} = 1,08 \cdot 10^{11} \text{ м}$$

Период обращения Венеры вокруг Солнца

$$T_B = 225 \text{ сут}$$

Радиус Венеры

$$R_B = 0,99R_3 = 6,3 \cdot 10^3 \text{ км} = 6,3 \cdot 10^6 \text{ м}$$

Средняя плотность Венеры

$$\rho_B = 4,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 = 4,7 \text{ г/см}^3$$

Ускорение свободного падения на поверхности Венеры

$$g_B = 0,84g_3 = 8,2 \text{ м/с}^2$$

Масса Марса

$$M_M = 0,11M_3 = 0,66 \cdot 10^{24} \text{ кг} = 0,66 \cdot 10^{27} \text{ г}$$

Расстояние от Марса до Солнца

$$L_M = (2,06 - 2,49) \cdot 10^8 \text{ км}$$

Расстояние от Марса до Земли

$$L_{M3} = (0,55 - 4,0) \cdot 10^8 \text{ км}$$

Средняя плотность Марса

$$\rho_M = 4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 = 4 \text{ г/см}^3$$

Ускорение свободного падения на поверхности Марса

$$g_M = 0,37g_3 = 3,6 \text{ м/с}^2$$

Масса Луны

$$M_L = 7,4 \cdot 10^{22} \text{ кг} = 7,4 \cdot 10^{25} \text{ г}$$

Диаметр Луны

$$D_L = 3,48 \cdot 10^3 \text{ км} = 3,48 \cdot 10^6 \text{ м}$$

Среднее расстояние между Луной и Землей

$$L_L = 3,84 \cdot 10^5 \text{ км} = 3,84 \cdot 10^8 \text{ м}$$

Средняя плотность Луны

$$\rho_L = 3,3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 = 3,3 \text{ г/см}^3$$

Ускорение свободного падения на поверхности Луны

$$g_L = 1,64 \text{ м/с}^2$$

Т а б л и ц а 4

**Ускорение свободного падения на различных широтах**

$\theta$ , град	$g$ , см/с <sup>2</sup>	$\theta$ , град	$g$ , см/с <sup>2</sup>	$\theta$ , град	$g$ , см/с <sup>2</sup>
0	978,0300	35	979,7299	70	982,6061
5	978,0692	40	980,1659	75	982,8665
10	978,1855	45	980,6159	80	983,0584
15	978,3756	50	981,0663	85	983,1759
20	978,6337	55	981,5034	90	983,2155
25	978,9521	60	981,9141		
30	979,3213	65	982,2853		

## Постоянные элементов при давлении 760 мм рт. ст.

$\rho$  — плотность (при 20 °С);  $C_P$  — молярная теплоемкость (при 25 °С);  $t_{\text{пл}}$  и  $t_{\text{кип}}$  — температуры плавления и кипения;  $q$  — молярная теплота плавления;  $r$  — молярная теплота парообразования;  $\lambda$  — теплопроводность (значения приведены для температур, указанных в скобках);  $\alpha$  — температурный коэффициент линейного расширения изотропных элементов при 0 °С.

Элемент	Сим- вол	$\rho$ , $\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$	$C_P$ , $\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$	$t_{\text{пл}}$ , °С	$t_{\text{кип}}$ , °С	$q$ , $\frac{\text{кДж}}{\text{моль}}$	$r$ , $\frac{\text{кДж}}{\text{моль}}$	$\lambda$ , $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	$\alpha$ , $10^{-6} \text{ К}^{-1}$
Алюминий	Al	2,70	24,35	660	2447	10,7	293,7	207 (27)	22,58
Барий	Ba	3,78	26,36	710	1637	7,66	150,9	—	19,45
Бериллий	Be	1,84	16,44	1283	2477	12,5	294	182 (27)	10,5
Бор (крист.)	B	3,33	11,09	2030	3900	22,2	540	1,5 (27)	8
Бром	Br	3,12	75,71	−7,3	58,2	10,58	30,0	—	8,3
Ванадий	V	5,96	24,7	1730	3380	17,5	458	33,2 (20)	—
Висмут	Bi	9,75	25,52	271,3	1559	10,9	151,5	8 (20)	16,6 <sup>2</sup>
Вольфрам	W	18,6–19,1	24,8	3380	5530	35,2	799	130 (27)	4,3
Германий	Ge	5,46	28,8	937,2	2830	29,8	334	60,3 (0)	5,8
Железо	Fe	7,87	25,02–26,74	1535	—	15,5	—	75(0)	12,1
Золото	Au	19,3	25,23	1063	2700	12,77	324,4	310(0)	14,0 <sup>2</sup>
Индий	In	7,28	26,7	156,01	2075	3,27	226	88(20)	30,5 <sup>2</sup>
Йод	I	4,94	26,02	113,6	182,8	15,77	41,71	0,44(30)	93,0
Иридий	Ir	22,42	25,02	2443	4350	—	—	138(20)	6,5
Кадмий	Cd	8,65	26,32	321,03	765	6,40	99,81	93(20)	29,0
Калий	K	0,87	29,96	63,4	753	2,33	77,5	100 (7)	84
Кальций	Ca	1,55	26,28	850	1487	8,66	150	98 (0)	22(0)
Кобальт	Co	8,71	24,6	1492	2255	15,3	383	70,9 (17)	12,0
Кремний (крист.)	Si	2,42	—	1423	2355	46,5	394,5	167 (0)	2,3
Литий	Li	0,534	24,65	180,5	1317	3,01	148,1	71 (0-100)	—
Магний	Mg	1,74	24,6	649	1120	8,95	131,8	165 (0)	—
Марганец	Mn	7,42	26,32	1244	2095	141,6	224,7	—	22,6
Медь	Cu	8,93	24,52	1083	2595	130,1	304	395–402 (20)	16,6 <sup>2</sup>
Молибден	Mo	9,01	23,8	2625	4800	27,6	594	162 (27)	5,19

Т а б л и ц а 5 (продолжение)

Элемент	Сим- вол	$\rho$ , $\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$	$C_P$ , $\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$	$t_{\text{пл}}$ , °C	$t_{\text{кип}}$ , °C	$q$ , $\frac{\text{кДж}}{\text{моль}}$	$r$ , $\frac{\text{кДж}}{\text{моль}}$	$\lambda$ , $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	$\alpha$ , $10^{-6} \text{ К}^{-1}$
Натрий	Na	0,971	28,12	97,82	890	2,602	89,04	133 (27)	72
Неодим	Nd	6,96	27,49	1019	3110	14,6	—	—	8,6
Никель	Ni	8,6–8,9	25,77	1453	2800	17,8	380,6	92 (20)	14,0
Олово (серое)	Sn	5,8	25,77	231,9	2687	7,07	290,4	65 (20)	—
Палладий	Pd	12,16	25,52	1552	3560	17,2	—	76,2 (20)	12,4 <sup>2</sup>
Платина	Pl	21,37	25,69	1769	4310	21,7	447	74,1 (20)	9
Родий	Rh	12,44	25,52	1960	3960	—	—	—	8,7
Ртуть (жидк.)	Hg	13,546	27,98	–38,86	356,73	2,295	59,11	8,45 (20)	—
Рубидий	Rb	1,53	30,88	38,7	701	2,20	69,20	35,5 (20)	90
Свинец	Pb	11,34	26,44	327,3	1751	4,772	179,5	34,89 (20)	28,3
Селен (крист.)	Se	4,5	25,36	217,4	657	5,42	—	0,13 (25)	20,3
Сера (ромбич.)	S	2,1	22,60	115,18	444,6	1,718	90,75	0,2 (0)	74
Серебро	Ag	10,42–10,59	25,49	960,8	2212	11,27	254,0	418 (27)	19,0 <sup>2</sup>
Стронций	Sr	2,54	25,11	770	1367	9,2	138	—	20,6
Сурьма	Sb	6,62	25,2	630,5	1637	20,41	128,2	23 (20)	9,2
Тантал	Ta	16,6	25,4	2996	5400	31,4	75,3	63 (27)	6,2
Теллур (крист.)	Te	6,25	25,7	449,5	989,8	17,5	114,06	—	17,0
Титан	Ti	4,5	25,02	1668	3280	15,5	430	15,5 (20)	7,7
Торий	Th	11,1–11,3	27,32	1695	4200	15,65	544	35,6 (27)	9,8
Углерод (алмаз)	C	3,52	6,12	—	—	—	—	—	1,2
Углерод (графит) <sup>1</sup>	C	2,25	8,53	3500	3900	—	—	114 (20)	—
Уран (13 °C)	U	18,7	27,8	1133	3900	19,7	412	22,5 (27)	10,7
Фосфор (белый)	P	1,83	24,69	44,2	—	2,51	—	—	125
Хром	Cr	7,1	23,22	1903	2642	14,6	349	67 (27)	7,78
Цезий	Cs	1,87	31,4	28,64	685	2,18	65,9	23,8 (20)	97
Цинк	Zn	6,97	25,40	419,5	907	7,28	114,7	111 (20)	32
Цирконий	Zr	6,44	25,15	1855	4380	20	582	21,4 (20)	5,1

<sup>1</sup> Реакторный графит,  $\rho = 1,65 - 1,72 \text{ г/см}^3$ ; приведено значение  $\lambda_{\perp}$  поперек направления прессования,  $\lambda_{\perp}/\lambda_{\parallel} = 1,5$ .

<sup>2</sup> При 20 °C.

Т а б л и ц а 6

## Постоянные твердых тел (при 20 °С)

$\rho$  — плотность;  $\alpha$  — температурный коэффициент линейного расширения;  $\lambda$  — теплопроводность.

Вещество	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$\alpha$ , 10 <sup>-6</sup> К <sup>-1</sup>	$\lambda$ , Вт/(м·К)
<i>Сплавы</i>			
Бронзы (Cu, Zn, Sn, Al)	8,7–8,9	16–20	200
Дюралюминий (Al, Cu)	2,8	27	186
Инвар (Fe, Ni, C)	8,0	~1	11
Константан (Cu, Ni)	8,8	15–17	21–22
Латунь (Cu, Zn)	8,4–8,7	17–20	80–180
Манганин (Cu, Mn, Ni)	8,5	16	—
Платино-иридиевый сплав (Pt, Ir)	21–22	8,7	—
Стали	7,5–7,9	10–13	~40
<i>Дерево (сухое)<sup>1</sup></i>			
Бальза (пробковое)	0,11–0,14	—	0,04
Бамбук	0,31–0,40	—	0,14–0,17
Бук	0,7–0,9	2,57	—
Береза	0,5–0,7	—	0,117
Дуб	0,6–0,9	4,92	0,171
Кедр	0,49–0,57	—	0,08–0,09
Клен	0,62–0,75	6,38	0,12–0,13
Сосна	0,37–0,60	5,41	0,08–0,11
Тополь	0,35–0,5	—	0,1
Ясень	0,65–0,85	9,51	0,12–0,14
<i>Минералы</i>			
Алмаз	3,01–3,52	1,5	628
Асбест	2,0–2,8	—	0,1
Базальт	2,4–3,1	—	2,177
Гипс	1–2,3	—	0,18–1,05
Глина	1,8–2,6	8,1	1,05–1,26
Гранит	2,34–2,76	8,3	2,7–3,3
Кварц (плав.)	2,65	1,46	—
Мел	1,9–2,8	—	1,1
Мрамор	2,6–2,84	3–15	2,7–3
Слюда	2,6–3,2	—	—

<sup>1</sup> Коэффициенты теплопроводности древесины приведены для направлений, перпендикулярных волокнам; теплопроводность вдоль волокон в 2–3 раза выше.

Т а б л и ц а 6 (продолжение)

Вещество	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$\alpha$ , 10 <sup>-6</sup> К <sup>-1</sup>	$\lambda$ , Вт/(м·К)
<i>Другие вещества</i>			
Картон	0,69	—	0,21
Кирпич	1,4-2,2	3-9	1-1,3
Лед	0,913	—	—
Парафин	0,87-0,91	—	2,5
Плексиглас	1,16-1,20	92-130	0,17-0,18
Пробка	0,22-0,26	—	—
Резина	1,1	220	0,146
Стекло обычн.	2,4-2,8	6	0,7-1,13
Стекло флинт	3,9-5,9	7-8	0,84
Фарфор	2,3-2,5	2,5-6	1,05
Эбонит	1,15	84,2	0,17
Янтарь	1,1	57	—

Т а б л и ц а 7

**Постоянные жидкостей** (при давлении 760 мм рт. ст.)

$\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения при указанной в соседнем столбце температуре (в — на границе с воздухом, п — на границе с парами этой же жидкости);  $\eta$  — вязкость при 20 °С;  $\lambda$  — теплопроводность при 0 °С.

Вещество	$t$ , °С	$\sigma$ , 10 <sup>-3</sup> $\frac{\text{Н}}{\text{м}}$	$\eta$ , 10 <sup>-3</sup> $\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$	$\lambda$ , $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$
Анилин	19,5	40,8 (п)	4,40	0,181
Ацетон	16,8	23,3 (п)	0,324	0,170
Бензол	17,5	29,2 (в)	0,647	0,153
Вода	20	72,75 (в)	1,0019	0,596
Глицерин	20	63,4 (в)	1495,0	0,290
Дихлорэтан		—	—	0,146
Кислота азотная 70%	20	59,4 (в)	—	—
Кислота серная 85%	18	57,6 (в)	27	—
Масло касторовое	18	33,1 (в)	986	—
Нитробензол	13,6	42,7 (п)	2,01	0,166
Олово	232	526,1 (СО <sub>2</sub> )	—	34,3
Ртуть	20	487 (п)	1,552	8,45
Скипидар	20	26,7 (в)	—	—
Спирт метиловый	20	23,0 (п)	0,578	0,222
Спирт этиловый	20	22,75 (п)	1,200	0,184
Углерод четырёххлористый	20	27 (п)	0,972	0,112
Эфир этиловый	20	16,96 (п)	0,242	—

Т а б л и ц а 8

## Постоянные жидкостей

$\rho$  — плотность при 20 °С;  $t_{\text{пл}}$  и  $t_{\text{кип}}$  — температуры плавления и кипения при нормальном давлении;  $t_{\text{кр}}$  — критическая температура;  $P_{\text{кр}}$  — критическое давление;  $c$  — удельная теплоемкость при 20 °С;  $q$  и  $r$  — удельная теплота плавления и парообразования;  $\beta$  — температурный коэффициент объемного расширения при 20 °С.

Вещество	Формула	$\rho$ , $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$t_{\text{пл}}$ , °С	$t_{\text{кип}}$ , °С	$t_{\text{кр}}$ , °С	$P_{\text{кр}}$ , атм	$c$ , $\frac{\text{Дж}}{\text{г} \cdot \text{К}}$	$q$ , $\frac{\text{Дж}}{\text{г}}$	$r$ , $\frac{\text{Дж}}{\text{г}}$	$\beta$ , $10^{-5} \text{ К}^{-1}$
Анилин	$\text{C}_6\text{H}_7\text{N}$	1026 <sup>1</sup>	−6	184	426	52,4	2,156	87,5	458,9	85
Ацетон	$\text{C}_3\text{H}_6\text{O}$	792	−95	56,5	235	47,0	2,18	82,0	521,2	143
Бензол	$\text{C}_6\text{H}_6$	897	+5,5	80,1	290,5	50,1	1,72	126	394,4	122
Вода	$\text{H}_2\text{O}$	998,2	0,0	100,00	374	218	4,14	334	2259	18
Глицерин	$\text{C}_3\text{H}_8\text{O}_3$	1260	+20	290	—	—	2,43	176	—	51
Метиловый спирт	$\text{CH}_4\text{O}$	792,8	−93,9	61,1	240	78,7	2,39	68,7	1102	119
Нитробензол	$\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_2\text{N}$	1173,2 <sup>2</sup>	+5,9	210,9	—	—	1,419	—	—	—
Сероуглерод	$\text{CS}_2$	1293	−111	46,3	275,0	77,0	1,00	—	356	—
Спирт этиловый	$\text{C}_2\text{H}_6\text{O}$	789,3	−117	78,5	243,5	63,1	2,51	108	855	112
Толуол	$\text{C}_7\text{H}_8$	867	−95,0	110,6	320,6	41,6	1,616 <sup>3</sup>	—	364	114
Углерод четыреххлористый	$\text{CCl}_4$	1595	−23	76,7	283,1	45,0	—	16,2	195,1	122
Уксусная кислота	$\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2$	1049	+16,7	118	321,6	57,2	2,6 <sup>4</sup>	187	405,3	107
Фенол	$\text{C}_6\text{H}_6\text{O}$	1073	+40,1	181,7	419	60,5	—	123	495,3	—
Хлороформ	$\text{CHCl}_3$	1498,5 <sup>1</sup>	−63,5	61	260	54,9	0,96	197	243	—
Эфир этиловый	$\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}$	714	−116	34,5	193,8	35,5	2,34	98,4	355	163

<sup>1</sup> при 15 °С; <sup>2</sup> при 25 °С; <sup>3</sup> при 0 °С; <sup>4</sup> при 1–8 °С.

Т а б л и ц а 9

Скорость звука в различных средах

Газы (при 0 °С)

Вещество	$c$ , м/с	$\frac{dc}{dt}$ , $\frac{\text{м}}{\text{с}\cdot\text{К}}$	Вещество	$c$ , м/с	$\frac{dc}{dt}$ , $\frac{\text{м}}{\text{с}\cdot\text{К}}$
Азот	333,64	0,85	Кислород	314,84	0,57
Аммиак	415,0	0,73	Метан	430	0,62
Аргон	319,0	—	Неон	435	0,78
Водород	1286,0	2,0	Пары воды	405	—
Воздух (сухой)	331,46	0,607	(100 °С)		
Гелий	970	1,55	Углекислый газ	260,3	0,87

Жидкости

Вещество	$t$ , °С	$c$ , м/с	$\frac{dc}{dt}$ , $\frac{\text{м}}{\text{с}\cdot\text{К}}$	Вещество	$t$ , °С	$c$ , м/с	$\frac{dc}{dt}$ , $\frac{\text{м}}{\text{с}\cdot\text{К}}$
Азот	−199,0	962	−10	Сероуглерод	25	1149	−3,3
Анилин	20	1659	−4,0	Скипидар	25	1225	—
Ацетон	25	1170	−5,5	Спирт	20	1177	−3,6
Бензол	25	1295	−5,2	этиловый			
Вода	25	1497	+2,5	Толуол	25	1300	−4,3
Глицерин	26	1930	−1,8	Углерод			
Керосин	25	1315	−3,6	четырёх-	25	930	−3,0
Ртуть	20	1451	−0,46	хлористый			



*Твердые тела*

$c_{\parallel}$  — скорость продольных волн,  $c_{\perp}$  — скорость поперечных волн,  $c$  — скорость продольных волн в тонком стержне.

Вещество	$c_{\parallel}$ , м/с	$c_{\perp}$ , м/с	$c$ , м/с
Алюминий	6400	3130	5240
Бетон	4250–5250	—	—
Вольфрам	5174	2842	—
Гранит	5400	—	—
Дерево (дуб, вдоль волокна)	—	—	4100
Дерево (сосна, вдоль волокна)	—	—	3600
Дюралюминий	6400	3120	—
Железо	5930	—	5170
Кварц кристал. ( $X$ -срез)	5720	—	5440
Кварц плавленый	5980	3760	5760
Латунь	4280–4700	2020–2110	3130–3450
Медь (отожженная)	4720	—	3790
Мрамор	—	—	3810
Никель (отожженный, немагнитный)	—	—	4810
Олово	3320	—	2730
Полистирол	2350	1120	—
Полиэтилен	2000	—	—
Серебро	3700	1694	2802
Стекло: крон	5260–6120	3050–3550	4710–5300
флинт	3760–4800	—	3490–4550
Сталь инструментальная	5900–6100	—	5150
Сталь нержавеющая	5740	3092	—
Цинк	4170	—	3810
Эбонит	2500	—	—

Т а б л и ц а 10

**Упругие свойства материалов (при 18 °С)**

$E$  и  $G$  — модули Юнга и сдвига;  $\mu$  — коэффициент Пуассона;  $K$  — модуль всестороннего сжатия.

Материал	$E, 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$	$G, 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$	$\mu$	$K, 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$
<i>Металлы</i>				
Алюминий	7,05	2,63	0,345	7,58
Бронза (66% Cu)	9,7–10,2	3,3–3,7	0,34–0,40	11,2
Висмут	3,19	1,20	0,33	3,13
Железо	19–20	7,7–8,3	0,29	16,9
Золото	7,8	2,7	0,44	21,7
Кадмий	4,9	1,92	0,30	4,16
Константан	16,3	6,11	0,32	15,5
Латунь	9,7–10,2	3,5	0,34–0,40	10,65
Медь	10,5–13,0	3,5–4,9	0,34	13,76
Никель	20,4	7,9	0,28	16,1
Олово	5,43	2,04	0,33	5,29
Платина	16,8	6,1	0,37	22,8
Свинец	1,62	0,56	0,44	4,6
Серебро	8,27	3,03	0,37	10,4
Сталь	20–21	7,9–8,9	0,25–0,33	16,8
Титан	11,6	4,38	0,32	10,7
Цинк	9,0	3,6	0,25	6,0
<i>Другие материалы</i>				
Бамбук	3,3	—	—	—
Дуб	1,3	—	—	—
Кварцевые нити	7,3	—	—	—
Красное дерево	0,88	—	—	—
Резина мягкая	0,00015– 0,0005	0,00005– 0,00015	0,46–0,49	16,8
Сосна	0,9	—	—	—
Стекло	5,1–7,1	3,1	0,17–0,32	3,75

Т а б л и ц а 11

**Коэффициенты поверхностного  
натяжения воды и анилина  
при различных температурах**

Границы: вода — воздух, анилин — воздух.

$t$	$\sigma, 10^{-3} \text{ Н/м}$		$t$	$\sigma, 10^{-3} \text{ Н/м}$
°C	Вода	Анилин	°C	Вода
0	75,64	—	60	66,18
10	74,22	44,10	70	64,42
20	72,75	42,7	80	62,61
30	71,18	—	90	60,75
40	69,56	—	100	58,85
50	67,91	39,4		

Т а б л и ц а 12

**Вязкость жидкостей при различных температурах**

$(\eta, 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{с/м}^2)$

$t,$ °C	Вода	Глице- рин	Раствор сахара водный		$t,$ °C	Касто- ровое масло	$t,$ °C	Ртуть
			20%	60%				
0	1,788	12100	3,804	238	5	3760	—20	1,86
10	1,306	3950	2,652	109,8	10	2418	0	1,69
15	1,140	—	2,267	74,6	15	1514	20	1,55
20	1,004	1480	1,960	56,5	20	950	30	1,50
25	0,894	—	1,704	43,86	25	621	50	1,41
30	0,801	600	1,504	33,78	30	451	100	1,24
40	0,653	330	1,193	21,28	35	312	200	1,05
50	0,549	180	0,970	14,01	40	231	300	0,95
60	0,470	102	0,808	9,83	100	16,9		
70	0,406	59	0,685	7,15				
80	0,356	35	0,590	5,40				
90	0,316	21						
100	0,283	13						

Т а б л и ц а 13

**Вязкость водного раствора глицерина**

(указан весовой процент глицерина)

$t$	10%	25%	50%	80%	95%	96%	97%	98%	99%	100%
20	1,31	2,09	6,03	61,8	544	659	802	971	1194	1495
25	1,15	1,81	5,02	45,7	365	434	522	627	772	942
30	1,02	1,59	4,23	34,8	248	296	353	423	510	662

Т а б л и ц а 14

**Сжимаемость некоторых жидкостей**

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

Вещество	Формула	Давление $P$ , атм	$t$ , °C	$\kappa$ , $10^{-6} \text{ атм}^{-1}$
Анилин	$\text{C}_6\text{H}_5\text{NH}_2$	85,5	25	43,2
Ацетон	$(\text{CH}_3)_2\text{CO}$	0–500	0	82
Бензол	$\text{C}_6\text{H}_6$	1–4	15,4	87
Вода	$\text{H}_2\text{O}$	0–100	20	46,8
Глицерин	$\text{C}_3\text{H}_8\text{O}_3$	1–10	14,8	22,1
Керосин	—	1–100	16,5	69,6
Кислота серная	$\text{H}_2\text{SO}_4$	1–16	0	302,5
Нитробензол	$\text{C}_6\text{H}_5\text{NO}_2$	86,5	25	46,1
Сероуглерод	$\text{CS}_2$	1–2	20	80,95
Спирт метиловый	$\text{CH}_3\text{OH}$	1–500	0	79,4
Спирт этиловый	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$	1–50	0	96
Углерод четырёххлористый	$\text{CCl}_4$	0–98,7	20	91,6
Углерода двуокись	$\text{CO}_2$	60	13	1740
Хлороформ	$\text{CHCl}_3$	1–2	0	87,27
Этил бромистый	$\text{C}_2\text{H}_5\text{Br}$	1–500	10,1	80

Т а б л и ц а 15

**Удельная теплоемкость воды и скорость звука в воде  
при различных температурах**

$t$ , °C	$c$ , Дж/(г·K)	$v$ , м/с	$t$ , °C	$c$ , Дж/(г·K)	$v$ , м/с
0	4,2174	1407	60	4,1841	1556
10	4,1919	1445	70	4,1893	1561
20	4,1816	1484	80	4,1961	1557
30	4,1782	1510	90	4,2048	
40	4,1783	1528	99	4,2145	
50	4,1804	1544			

Т а б л и ц а 16

**Температура кипения воды при различных давлениях**

$P$ , торр	$t$ , °C	$P$ , торр	$t$ , °C	$P$ , торр	$t$ , °C
680	96,9138	725	96,6846	770	100,3666
685	96,1153	730	98,8757	775	100,5484
690	97,3156	735	99,0657	780	100,7293
695	97,5146	740	99,2547	785	100,9092
700	97,7125	745	99,4426	790	101,0881
705	97,9092	750	99,6294	795	101,2661
710	98,1048	755	99,8152	799	101,4079
715	98,2992	760	100,000		
720	98,4925	765	100,1838		

Т а б л и ц а 17

**Плотность воды при различных температурах**

$t$ , °C	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$t$ , °C	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$t$ , °C	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>
0	0,99987	12	0,99952	24	0,99732
1	0,99993	13	0,99940	25	0,99707
2	0,99997	14	0,99927	26	0,99681
3	0,99999	15	0,99913	27	0,99654
4	1,00000	16	0,99897	28	0,99626
5	0,99999	17	0,99880	29	0,99597
6	0,99997	18	0,99862	30	0,99567
7	0,99993	19	0,99843	31	0,99537
8	0,99988	20	0,99823	32	0,99505
9	0,99981	21	0,99802	33	0,99472
10	0,99973	22	0,99780	34	0,99440
11	0,99963	23	0,99757	35	0,99406

Т а б л и ц а 18

**Коэффициенты диффузии растворов  
поваренной соли в воде (при 18 °C)**

Концентрация NaCl, моль/л	$D$ , $10^{-5}$ см <sup>2</sup> /с
0,05	1,26
0,40	1,2
1,00	1,24
2,0	1,29
3,0	1,36
4,0	1,43
5,0	1,49

Т а б л и ц а 19

**Коэффициенты диффузии растворов  
неорганических веществ в воде**

Растворенное вещество	Концентрация, моль/л	$t$ , °C	$D$ , $10^{-5}$ см <sup>2</sup> /с
Br <sub>2</sub>	0,0050	25	1,18
CO <sub>2</sub>	0 <sup>1</sup>	18	1,46
CaCl <sub>2</sub>	1,5	9	0,84
CdSO <sub>4</sub>	1,0	16,8	0,33
Cl <sub>2</sub>	0,1	16,3	1,3
CoCl <sub>2</sub>	0,0127	11	0,73
CuCl <sub>2</sub>	1,5	10	0,5
CuSO <sub>4</sub>	0,1	17	0,45
H <sub>2</sub>	0 <sup>1</sup>	18	3,6
HCl	0,2	25	3,0
HNO <sub>3</sub>	3,0	6	1,8
KBr	1,0	10	1,2
KCl	0,1	25	1,89
KNO <sub>3</sub>	0,2	18	1,39
KOH	0,1	13,5	2,0
K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	0,02	19,6	1,27
LiCl	1,0	18	1,06
MgSO <sub>2</sub>	1,0	15,5	0,53
N <sub>2</sub>	0 <sup>1</sup>	18	1,63
NH <sub>3</sub>	0,683	4	1,23
NaBr	2,9	10	1,0
Na <sub>2</sub> CO <sub>3</sub>	2,4	10	0,45
NaCl	1,0	18,5	1,24
NaNO <sub>3</sub>	0,6	13	1,04
O <sub>2</sub>	0 <sup>1</sup>	25	2,60
NaOH	0,1	12	1,29

<sup>1</sup> Сильно разбавленный раствор.

Т а б л и ц а 20

**Коэффициенты диффузии газов***Коэффициенты самодиффузии (при  $t = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $P = 1\text{ атм}$ )*

Газ	$D$ , $\text{см}^2/\text{с}$	Газ	$D$ , $\text{см}^2/\text{с}$
Азот $\text{N}_2$	0,17	Ксенон $\text{Xe}$	0,048
Аргон $\text{Ar}$	0,156	Криптон $\text{Kr}$	0,08
Водород $\text{H}_2$	1,28	Метан $\text{CH}_4$	0,206
Водяной пар	0,277	Неон $\text{Ne}$	1,62
Гелий $\text{He}$	1,62	Углерода окись $\text{CO}$	0,175
Кислород $\text{O}_2$	0,18	Углекислый газ $\text{CO}_2$	0,097

*Коэффициенты взаимной диффузии (при  $t = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ )*

Система	$D$ , $\text{см}^2/\text{с}$	Система	$D$ , $\text{см}^2/\text{с}$
$\text{He} - \text{CH}_4$	0,57	$\text{H}_2 - \text{воздух}$	0,66
$\text{He} - \text{O}_2$	0,45	$\text{H}_2 - \text{CH}_4$	0,62
$\text{He} - \text{воздух}$	0,62	$\text{H}_2 - \text{O}_2$	0,69
$\text{Ne} - \text{H}_2$	0,99	$\text{CH}_4 - \text{N}_2$	0,2
$\text{Ne} - \text{N}_2$	0,28	$\text{CH}_4 - \text{O}_2$	0,22
$\text{Ar} - \text{CH}_4$	0,172	$\text{CH}_4 - \text{воздух}$	0,186
$\text{Ar} - \text{O}_2$	0,167	$\text{N}_2 - \text{H}_2\text{O}$	0,204
$\text{Ar} - \text{воздух}$	0,165	$\text{N}_2 - \text{CO}_2$	0,208
$\text{Ar} - \text{CO}_2$	0,177	$\text{CO} - \text{O}_2$	0,175
$\text{Kr} - \text{N}_2$	0,13	$\text{CO} - \text{воздух}$	0,182
$\text{Kr} - \text{CO}$	0,13	$\text{O}_2 - \text{CO}_2$	0,174
$\text{Xe} - \text{H}_2$	0,54	$\text{воздух} - \text{CO}_2$	0,207
$\text{Xe} - \text{N}_2$	0,106	$\text{H}_2\text{O} - \text{CO}_2$	0,41

Т а б л и ц а 21

**Теплопроводность воздуха при различных температурах**(при  $P = 1\text{ атм}$ )

$t$ , $^{\circ}\text{C}$	$\lambda$ , $10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	$t$ , $^{\circ}\text{C}$	$\lambda$ , $10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	$t$ , $^{\circ}\text{C}$	$\lambda$ , $10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$
-173	0,922	-23	2,207	27	2,553
-143	1,204	-3	2,348	37	2,621
-113	1,404	0,1	2,370	67	2,836
-83	1,741	7	2,417	97	3,026
-53	1,983	17	2,485		

Т а б л и ц а 22  
Коэффициенты Джоуля–Томсона  
( $\mu_{Д-Т} = \Delta T / \Delta P$ ; в единицах К/атм)

$t, \text{ }^{\circ}\text{C}$	Оксид углерода (CO)			
	$P, \text{ атм}$			
	1	50	100	200
0	0,295	0,240	0,190	0,093
25	0,251	0,206	0,162	0,084
50	0,213	0,175	0,137	0,072
100	0,150	0,122	0,095	0,049
$T, \text{ К}$	Водород (H <sub>2</sub> )			
	$P, \text{ атм}$			
	$\approx 0$	20	100	180
60	0,391	0,287	0,035	—
70	0,287	0,234	0,059	−0,039
80	0,220	0,192	0,061	−0,037
$t \text{ }^{\circ}\text{C}$	Метан (CH <sub>4</sub> )			
	$P, \text{ атм}$			
	$\approx 0$	17	51	102,1
21,1	0,405	0,425	0,410	0,332
37,8	0,359	0,375	0,365	0,294
71,1	0,283	0,298	0,290	0,229
104,4	0,227	0,239	0,233	0,180
$t \text{ }^{\circ}\text{C}$	Этан (C <sub>2</sub> H <sub>6</sub> )			
	$P, \text{ атм}$			
	$\approx 0$	17	51	102,1
21,1	0,939	1,217	—	—
37,8	0,833	1,037	—	—
71,1	0,657	0,760	0,890	0,353
104,4	0,498	0,572	0,586	0,399



Т а б л и ц а 22 (продолжение)

$t, \text{ }^{\circ}\text{C}$	Аргон (Ar)				Гелий (He)
	$P, \text{ атм}$				$P, \text{ атм}$
	1	20	100	200	200
−150	1,81	—	−0,025	−0,056	−0,052
−100	0,860	0,800	0,285	0,040	−0,058
0	0,431	0,406	0,305	0,192	−0,0616
25	0,371	0,350	0,264	0,175	—
100	0,242	0,224	0,175	0,127	−0,0638
200	0,137	0,126	0,095	0,068	−0,0641
$t, \text{ }^{\circ}\text{C}$	Азот ( $\text{N}_2$ ), кислород ( $\text{O}_2$ )				
	$P, \text{ атм}$				
	1	20	100	200	
−150	1,265	1,128	0,020	−0,027	
−100	0,649	0,594	0,274	0,058	
0	0,267	0,250	0,169	0,087	
25	0,222	0,206	0,140	0,078	
100	0,129	0,119	0,077	0,042	
200	0,056	0,048	0,026	0,006	
$t, \text{ }^{\circ}\text{C}$	Углекислый газ ( $\text{CO}_2$ )				
	$P, \text{ атм}$				
	1	20	100	200	
−25	1,650	0,000	−0,005	−0,012	
0	1,290	1,402	0,022	0,005	
20	1,105	1,136	0,070	0,027	
40	0,958	0,966	0,262	0,066	
60	0,838	0,833	0,625	0,125	
80	0,735	0,724	0,597	0,196	
100	0,649	0,638	0,541	0,256	
200	0,373	0,358	0,315	0,246	
$t, \text{ }^{\circ}\text{C}$	Воздух				
	$P, \text{ атм}$				
	1	20	100	200	
−100	0,5895	0,5700	0,2775	0,0655	
−50	0,3910	0,3690	0,2505	0,1270	
−25	0,3225	0,3010	0,2130	0,1240	
0	0,2746	0,2577	0,1446	0,1097	
25	0,2320	0,2173	0,1550	0,0959	
50	0,1956	0,1830	0,1310	0,0829	
75	0,1614	0,1508	0,1087	0,0707	
100	0,1355	0,1258	0,0884	0,0580	

Т а б л и ц а 23

**Критические параметры и коэффициенты  $a$  и  $b$   
в уравнении состояния Ван-дер-Ваальса**

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT; \quad a = \frac{27}{8}RT_{\text{кр}}b, \quad b = \frac{RT_{\text{кр}}}{8P_{\text{кр}}}$$

Вещество	$T_{\text{кр}}$ К	$P_{\text{кр}}$ МПа	$\rho_{\text{кр}}$ $\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$	$a$ $\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^4}{\text{моль}^2}$	$b$ $\frac{\text{см}^3}{\text{моль}}$
Азот ( $\text{N}_2$ )	126,25	3,399	0,304	0,1368	38,607
Аргон (Ar)	150,65	4,86	0,531	0,1361	32,191
Вода (пары) ( $\text{H}_2\text{O}$ )	647,30	22,12	0,32	0,5524	30,413
Водород ( $\text{H}_2$ )	33,24	1,297	0,0310	0,02484	26,635
Воздух	132,45	3,77	0,35	0,1357	36,51
Гелий (He)	5,20	0,229	0,0693	0,00344	23,599
Закись азота ( $\text{N}_2\text{O}$ )	309,58	7,255	0,453	0,3852	44,347
Кислород ( $\text{O}_2$ )	154,78	5,081	0,41	0,1375	31,662
Неон (Ne)	44,45	2,72	0,484	0,0211	16,948
Окись азота (NO)	180	6,54	0,52	0,1444	28,579
Окись углерода (CO)	132,92	3,499	0,301	0,1473	39,482
Метан ( $\text{CH}_4$ )	190,60	4,63	0,160	0,2288	42,777
Метиловый спирт ( $\text{CH}_4\text{O}$ )	513,15	7,95	0,272	0,9654	67,047
Спирт этиловый ( $\text{C}_2\text{H}_6\text{O}$ )	516	6,4	0,276	1,2164	84,006
Сероуглерод ( $\text{CS}_2$ )	552	7,90	0,44	1,1243	72,585
Углекислый газ ( $\text{CO}_2$ )	304,15	7,387	0,468	0,3652	42,792
Хлор ( $\text{Cl}_2$ )	417	7,71	0,573	0,6576	56,202
Четыреххлористый углерод ( $\text{CCl}_4$ )	556,25	4,56	0,558	1,9789	126,78
Этан ( $\text{C}_2\text{H}_6$ )	305,45	4,87	0,203	0,5571	64,997

Т а б л и ц а 24

**Зависимость параметров  $a$  и  $b$  для аргона  
от температуры**

Температура, °C	$a, 10^6 \text{ атм} \cdot \text{см}^6 / \text{моль}^2$	$b, \text{ см}^3 / \text{моль}$
151	1,90	61
157	1,87	59,5
163	1,84	58
173	1,785	55,5
183	1,735	53
193	1,69	51
213	1,60	48
233	1,53	45
253	1,47	43
273	1,42	41

Т а б л и ц а 25

## Постоянные газов

$M$  — молекулярная масса;  $\rho$  — плотность (при  $t = 0$  °С,  $P = 1$  атм);  $t_{кр}$  — критическая температура;  $P_{кр}$  — критическое давление;  $\rho_{кр}$  — критическая плотность;  $t_{пл}$  — температура плавления (при  $P = 1$  атм);  $t_{кип}$  — температура кипения (при  $P = 1$  атм).

Вещество	Формула	$M$	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$t_{кр}$ , °С	$P_{кр}$ , атм	$\rho_{кр}$ , кг/м <sup>3</sup>	$t_{пл}$ , °С	$t_{кип}$ , °С
Азот	N <sub>2</sub>	28,016	1,2505	147,1	33,5	311	−210,02	−195,81
Аммиак	NH <sub>3</sub>	17,031	0,7714	132,4	112,0	234	−77,7	−33,4
Аргон	Ar	39,944	1,7839	122,4	48,0	531	−189,3	−185,9
Водород	H <sub>2</sub>	2,0158	0,08988	239,9	12,80	31,0	−259,20	−252,78
Водяной пар	H <sub>2</sub> O	18,0156	0,768	374,2	218,5	324	0,00	100,00
Воздух сухой <sup>1</sup>	—	28,96	1,2928	140,7	37,2	310	−213	−193
Гелий	He	4,002	0,1785	267,9	2,26	69,3	−272,2	−268,93
Закись азота	N <sub>2</sub> O	44,013	1,9775	36,5	71,7	450	−90	−88,6
Кислород	O <sub>2</sub>	32,000	1,42896	118,8	49,7	430	−218,83	−182,97
Метан	CH <sub>4</sub>	16,04	0,7168	82,5	45,7	162	−182,5	−116,7
Неон	Ne	20,183	0,8999	228,7	26,9	484	−248,60	−246,1
Окись азота	NO	30,006	1,3402	92,9	64,6	520	−167	−150
Окись углерода	CO	28,01	1,2500	140,2	34,5	301	−205	−191,5
Углекислый газ	CO <sub>2</sub>	44,01	1,9768	31,0	73	460	−56,6 <sup>2</sup>	−78,48 <sup>3</sup>
Хлор	Cl <sub>2</sub>	70,914	3,22	144	76,1	573	−100,5	−33,95

<sup>1</sup> Состав воздуха по объему: 78,03% N<sub>2</sub>, 20,99% O<sub>2</sub>, 0,933% Ar, 0,03% CO<sub>2</sub>, 0,01% H<sub>2</sub>, 0,0018% Ne и др.

<sup>2</sup> При давлении  $P = 5,12$  атм (тройная точка).

<sup>3</sup> Температура возгонки.

Т а б л и ц а 26

## Тепловые постоянные газов

$c_p$  и  $C_p$  — удельная и молярная теплоемкости (даны в указанных интервалах температур);  $\gamma = c_p/c_v$  при 20 °С;  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости при 20 °С;  $\lambda$  — теплопроводность при 0 °С;  $\beta = (1/V)(\partial V/\partial T)_P$  — температурный коэффициент объемного расширения

Вещество	Формула	$t$ , °С	$c_p$ , $\frac{\text{Дж}}{\text{г} \cdot \text{К}}$	$C_p$ , $\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$	$\gamma$	$\lambda$ , $10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	$\eta$ , $10^{-7} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$	$t$ , °С	$\beta$ , $10^{-3} \text{ К}^{-1}$
Азот	N <sub>2</sub>	0–20	1,038	29,1	1,404	2,43	174	0–100	3,671
Аммиак (пары)	NH <sub>3</sub>	24–200	2,244	38,1	1,34	2,18	97,0	—	—
Аргон	Ar	15	0,523	20,9	1,67	1,62	222	100	3,676
Ацетон (пары)	C <sub>3</sub> H <sub>6</sub> O	26–110	1,566	90,9	1,26	1,70	73,5	—	—
Водород	H <sub>2</sub>	10–200	14,273	28,8	1,41	16,84	88	100	3,679
Водяной пар <sup>1</sup>	H <sub>2</sub> O	100	1,867	34,5	1,324	2,35	128	1–120	4,187
Воздух сухой	—	0–100	0,992	29,3	1,40	2,41	181	—	—
Гелий	He	–180	5,238	21,0	1,66	14,15	194	100	3,659
Закись азота	N <sub>2</sub> O	16–200	0,946	41,7	1,32	1,51	146	0	3,761
Кислород	O <sub>2</sub>	13–207	0,909	29,1	1,40	2,44	200	0–100	3,67
Метан	CH <sub>4</sub>	18–208	2,483	39,8	1,31	3,02	109	–50 ÷ +50	3,580
Окись азота	NO <sub>2</sub>	13–172	0,967	29,0	1,40	2,38	188	0	3,677
Окись углерода	CO	26–198	1,038	28,5	1,40	2,32	177	0–100	3,671
Сернистый газ	SO <sub>2</sub>	16–202	0,561	36,0	1,29	0,77	126	—	—
Углекислый газ	CO <sub>2</sub>	15	0,846	37,1	1,30	1,45	144,8	0–100	3,723
Хлор	Cl <sub>2</sub>	13–202	0,519	36,8	1,36	0,72	132	0–100	3,830
Этилен	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	15–100	1,670	46,8	1,25	1,64	103	—	—

<sup>1</sup>  $\lambda$  даны при 100 °С.

Т а б л и ц а 27

**Вязкость газов и паров при различных температурах**

$\eta, 10^{-8} \text{ кг}/(\text{м}\cdot\text{с})$								
$t, ^\circ\text{C}$	Азот $\text{N}_2$	Аргон $\text{Ar}$	Водо- род $\text{H}_2$	Водяной пар	Воздух	Гелий $\text{He}$	Кисло- род $\text{O}_2$	Углекислый газ $\text{CO}_2$
-75	1285	1585	677	—	1312	1526	1452	1007
-50	1419	1760	733	—	1445	1640	1612	1126
-25	1542	1930	788	—	1582	1750	1753	1247
0	1665	2085	840	883	1708	1860	1910	1367
20	1766	2215	880	—	1812	1946	2026	1463
25	1778	2248	890	975	1840	1968	2052	1486
50	1883	2400	938	1065	1954	2065	2182	1607
75	1986	2550	985	1157	2068	2175	2310	1716
100	2086	2695	1033	1250	2180	2281	2437	1827

Т а б л и ц а 28

**Давление и плотность насыщенного водяного пара  
при различных температурах**

$t, ^\circ\text{C}$	$P, \text{ торр}$	$\rho, \text{ г}/\text{м}^3$	$t, ^\circ\text{C}$	$P, \text{ торр}$	$\rho, \text{ г}/\text{м}^3$	$t, ^\circ\text{C}$	$P, \text{ торр}$	$\rho, \text{ г}/\text{м}^3$
-30	0,28	0,33	-2	3,88	4,13	26	25,21	24,4
-28	0,35	0,41	0	4,58	4,84	28	28,35	27,2
-26	0,43	0,51	2	5,29	5,60	30	31,82	30,3
-24	0,52	0,60	4	6,10	6,40	32	35,66	33,9
-22	0,64	0,73	6	7,01	7,3	34	39,90	37,6
-20	0,77	0,88	8	8,05	8,3	36	44,56	41,8
-18	0,94	1,05	10	9,21	9,4	38	49,69	46,3
-16	1,13	1,27	12	10,52	10,7	40	55,32	51,2
-14	1,36	1,51	14	11,99	12,1	50	92,5	83,0
-12	1,63	1,80	16	13,63	13,6	60	149,4	130
-10	1,95	2,14	18	15,48	15,4	70	233,7	198
-8	2,32	2,54	20	17,54	17,3	80	355,1	293
-6	2,76	2,99	22	19,83	19,4	90	525,8	424
-4	3,28	3,51	24	22,38	21,8	100	760,0	598

Т а б л и ц а 29

**ЭДС термопар при различных температурах**

$t, ^\circ\text{C}$	ЭДС, мВ			
	Платина — платина+10% родия	Хромель — алюмель	Железо — константан	Медь — константан
100	0,64	4,1	5	4
200	1,44	8,1	11	9
300	2,31	12,2	16	15
400	3,25	16,4	22	21
500	4,22	20,6	27	
600	5,23	24,9	33	
700	6,26	29,1	39	
800	7,34	33,3	45	
900	8,45	37,4	52	
1000	9,59	41,3	58	
1200	11,95	48,9		
1400	14,37	55,9		
1600	16,77			

Т а б л и ц а 30

**Удельное сопротивление и температурный коэффициент сопротивления металлических проволок (при 18 °C)**

Вещество	$\rho, 10^{-6} \text{ Ом}\cdot\text{см}$	$\alpha \cdot 10^4, \text{ К}^{-1}$
Алюминий	3,21	38
Вольфрам	5,5	51
Железо (0,1% C)	12,0	62
Золото	2,42	40
Латунь	6–9	10
Манганин (3% Ni, 12% Mn, 85% Cu)	44,5	0,02–0,5
Медь	1,78	42,8
Никель	11,8	27
Константан (40% Ni, 1,2% Mn, 58,8% Cu)	49,0	–0,4 ÷ 0,1
Нихром (67,5% Ni, 1,5% Mn, 16% Fe, 15% Cr)	110	1,7
Олово	11,3	45
Платина	11,0	38
Свинец	20,8	43
Серебро	1,66	40
Цинк	6,1	37

Т а б л и ц а 31

**Работа выхода электронов**

Металл	A, эВ
Алюминий	4,25
Барий	2,49
Вольфрам	4,54
Железо	4,31
Медь	4,40
Никель	4,50
Окись бария (тонкая пленка на вольфраме)	1,1
Олово	4,38
Платина	5,32
Ртуть	4,52
Серебро	4,3
Цезий	1,81
Цинк	4,24

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лабораторные* занятия по физике / Под ред. Л.Л. Гольдина. — М.: Наука, 1983.
2. *Таблицы* физических величин / Под ред. И.К. Кикоина. — М.: Атомиздат, 1976.
3. *Физические* величины / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. — М.: Энергоатомиздат, 1991.
4. *Landolt H., Bornstein R.* Zahlenwerte und Funktionen aus Physik, Chemie, Astronomie und Technik. — Berlin: Springer, 1960.
5. *CODATA* Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 1998. (<http://physics.nist.gov/constants>)



# ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
ВВЕДЕНИЕ .....	5
<b>Р а з д е л I. Измерения в физике .....</b>	<b>9</b>
Эталоны физических величин .....	9
Числовое значение физической величины .....	9
Размерность .....	10
Единицы углов .....	13
Базисные величины системы СИ .....	14
Измерения и обработка результатов измерений .....	17
Измерения и их погрешности .....	17
Систематические и случайные погрешности .....	18
Систематические погрешности .....	20
Случайные погрешности .....	21
Погрешность среднего арифметического результата измерения .....	25
Сложение случайных и систематических погрешностей .....	26
Обработка результатов при косвенных измерениях .....	27
Рекомендации по выполнению лабораторных работ .....	29
Подготовка к работе .....	30
Начало работы .....	31
Проведение измерений .....	31
Расчёты, анализ и представление результатов .....	33
Построение и обработка графиков .....	34
Графический метод обработки экспериментальных данных .....	36
Метод наименьших квадратов .....	39
Работа 1.1.1. Определение систематических и случайных погрешностей при измерении удельного сопротивления нихромовой проволоки .....	42

Образец отчета о выполнении работы 1.1.1.....	45
Работа 1.1.2. Измерение коэффициента линейного расширения стержня с помощью микроскопа.....	51
Образец отчета о выполнении работы 1.1.2.....	58
Работа 1.1.3. Статистическая обработка результатов многократных измерений.....	61
Образец отчета о выполнении работы 1.1.3.....	63
Работа 1.1.4. Измерение интенсивности радиационного фона.....	67
Теоретическая справка о природе космических лучей.....	67
Устройство счетчика Гейгера–Мюллера.....	70
Описание эксперимента.....	72
Образец отчета о выполнении работы 1.1.4.....	76
Распределение Пуассона.....	81
Распределение Гаусса.....	84
Работа 1.1.5. Исследование упругих столкновений протонов с электронами.....	86
Образец отчета о выполнении работы 1.1.5.....	98
Работа 1.1.6. Изучение электронного осциллографа.....	102
<b>Р а з д е л II. Механика твердого тела.....</b>	<b>119</b>
Движение системы материальных точек.....	119
Движение твёрдого тела.....	126
Векторы и тензоры.....	129
Работа 1.2.1. Определение скорости полета пули при помощи баллистического маятника.....	136
I. Метод баллистического маятника, совершающего поступательное движение.....	138
II. Метод крутильного баллистического маятника... ..	141
Работа 1.2.2. Экспериментальная проверка закона вращательного движения на крестообразном маятнике.....	145
Работа 1.2.3. Определение моментов инерции твердых тел с помощью трифилярного подвеса.....	149
Работа 1.2.4. Определение главных моментов инерции твердых тел с помощью крутильных колебаний.....	155
Работа 1.2.5. Исследование вынужденной регулярной прецессии гироскопа.....	160

<b>Р а з д е л III. Механика сплошных сред</b> .....	168
Деформации и внутренние напряжения в деформируемом твердом теле .....	168
Модули упругости .....	171
Деформация и напряжение в бруске .....	172
Деформация всестороннего сжатия .....	174
Деформация одноосного растяжения .....	175
Взаимозависимость модулей упругости .....	176
Закон Паскаля .....	176
Уравнение Бернулли .....	177
Формула Пуазейля .....	180
Работа 1.3.1. Определение модуля Юнга на основе исследования деформаций растяжения и изгиба .....	183
I. Определение модуля Юнга по измерениям растяжения проволоки .....	184
II. Определение модуля Юнга по измерениям изгиба балки .....	186
Работа 1.3.2. Определение модуля кручения .....	193
I. Определение модуля кручения стержня статическим методом .....	195
II. Определение модуля сдвига при помощи крутильных колебаний .....	197
Работа 1.3.3. Определение вязкости воздуха по скорости течения через тонкие трубки .....	199
Работа 1.3.4. Исследование стационарного потока жидкости в трубе .....	206
<b>Р а з д е л IV. Механические колебания и волны</b> .....	213
Свободные колебания гармонического осциллятора .....	213
Фазовый портрет гармонического осциллятора .....	217
Свободные колебания осциллятора с вязким трением .....	218
Физический маятник .....	220
Вынужденные колебания осциллятора с вязким трением ..	223
Свободные колебания связанных маятников .....	228
Плоская стационарная бегущая волна .....	233
Плоская синусоидальная бегущая волна .....	234
Стоячие волны .....	235
Волновое уравнение .....	236
Продольные волны в деформируемом твердом теле .....	236

---

Плотность потока энергии . . . . .	239
Поперечные волны на струне . . . . .	241
Собственные колебания струны . . . . .	242
Прохождение продольной волны через границу двух сред . . . . .	243
Работа 1.4.1. Изучение физического маятника . . . . .	246
Работа 1.4.2. Определение ускорения свободного падения при помощи обратного маятника . . . . .	250
Работа 1.4.3. Исследование нелинейных колебаний длиннопериодного маятника . . . . .	259
Работа 1.4.4. Исследование свободных колебаний связанных маятников . . . . .	265
Работа 1.4.5. Изучение колебаний струны . . . . .	270
Работа 1.4.6. Измерение скорости ультразвука в жидкости с помощью ультразвукового интерферометра . . . . .	274
Работа 1.4.7. Определение упругих констант жидких и твердых тел по скорости распространения ультразвука . . . . .	280
<b>Р а з д е л V. Таблицы . . . . .</b>	<b>286</b>

Учебное издание

*Гладун Анатолий Деомидович*  
*Александров Дмитрий Анатольевич*  
*Игошин Федор Федорович*  
*Коротков Павел Федорович*  
*Корявов Владимир Павлович*  
*Овчинников Алексей Петрович*  
*Самарский Юрий Александрович*  
*Теврюков Алексей Андреевич*  
*Фрейберг Геннадий Николаевич*

## ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

### Т. 1. М е х а н и к а

Компьютерная верстка *Д.А. Александров, П.В. Попов*  
Редактор *И.А. Волкова*. Корректор *О.П. Котова*  
Рисунки: *Д.А. Александров, Д.Е. Масев, А.Е. Наумушкин,*  
*К.А. Овчинников, В.В. Усков, Г.Н. Фрейберг*

Подписано в печать 16.04.2012. Формат 60 × 90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Печать  
офсетная. Усл. печ. л. 19,75. Уч.-изд. л. 20,1. Тираж 1000 экз. Заказ №

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего профессионального образования  
Московский физико-технический институт (государственный университет)  
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

---

Отпечатано в полном соответствии  
с качеством предоставленных диапозитивов  
в ООО Печатный салон «Шанс»  
125412, Москва, ул. Ижорская, д. 13, стр. 2

ISBN 5-7417-0459-X



9785741704592