Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

Лабораторная работа №1.2.3

по курсу общей физики
на тему:
«Определение моментов инерции твердых тел с помощью трифилярного подвеса»

Работу выполнил:
Третьяков Александр
(группа Б02-206)

Долгопрудный
17 октября 2022 г.

1 Введение

Цели работы: измерение момента инерции тел и сравнение результатов с расчетми по теоретиеским формулам; проверка аддитивноски моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса-Штейнера.
Оборудование: трифилярный подвес, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить (диск, стержень, полный цилиндр и другие).

2 Экспериментальная установка

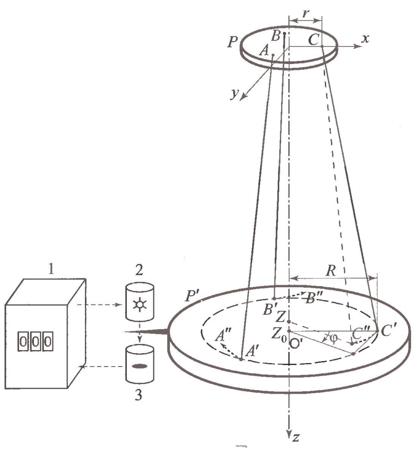

Рис. 1. Физический маятник

Для наших целей удобно использовать устройство, показанное на Рис. 1 и называемое трифилярным подвесом. Оно состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформы P и подвешенной к ней на трех симметрично расположеных нитях AA', BB' и CC', вращающейся платформы P'.

Чтобы не вызывать дополнительных раскачиваний, лучше поворачивать верхнюю платформу, укрепленную на неподвижной оси. После поворота верхняя платформа остается неподвижной в течение всего процесса колебний. После того, как нижняя платформа P' оказывается повернутой на угол φ относительно верхней платформы P, вощникает момент сил, стремящийся вернуть нижнюю платформу в положение равновесия, при котором относительный поворот платформ отсутствует. В результате платформа совершает крутильные колебания.

3 Теоретические сведения

Инерционность при вращении тела относительно оси определяется моментом инерции тела относительно этой оси. Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения вычисляется по формуле:

$$I = \int r^2 dm \tag{1}$$

Здесь r – расстояние элемента массы тела dm от оси вращения. Интегрирование проводится по всей массе тела m.

Если пренебречь потерями энергии на трение о воздух и крепление нитей, то уравнение сохранения энергии при коебаниях можно записать следующим образом:

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E \tag{2}$$

Здесь I – момент инерции платформы вместе с исследуемым телом, m – масса платформы с телом, φ – угол поворота платформы от положения равновесия системы, z_0 – координата по вертикали центра нижней платформы O' при равновесии ($\varphi = 0$), z – координата той же точки при некотором угле поворота φ. Превый член в левой части уравнения – кинетическач энергия вращения, второй член – потенциальная энергия в поле тяжести, E – полная энергия системы (платформы с телом).

Воспользуемся системой координат x, y, z, связанной с верхней платформой, как показано на Рис. 1. Координаты верхнего конца одной из нитей подвеса точки C в этой системе – $(r, 0, 0)$. Нижний конец данной нити C', находящийся на нижней платформе, при равновесии имеет координаты $(R, 0, z_0)$, а при повороте платформы на угол φ эта точка переходит в C'' с координатами $(Rcos\varphi, Rsin\varphi, z)$. расстояние между точками C и C'' равно длине нити, поэтому, после некоторых преобразований, получаем:

$$(R\cos\phi - r)^2 + R^2\sin^2\phi + z^2 = L^2$$

$$z^2 = L^2 - R^2 - r^2 + 2Rr\cos\phi \approx z_0^2 - 2Rr(1 - \cos\phi) \approx z_0^2 - Rr\phi^2$$

$$z = \sqrt{z_0^2 - Rr\phi^2} \approx z_0 - \tfrac{Rr\phi^2}{2z_0}$$

Подставляя z в уравнение (2), получаем:

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = E \tag{3}$$

Дифференцируя по времени и сокращая на $\dot{\varphi}$, находим уравнение крутильных колебаний системы:

$$I\ddot{\varphi}^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = 0 \tag{4}$$

Производная по времени от E равна нулю, так как потерями на трение, как уже было сказано выше, пренебрегаем.

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 sin\left(\sqrt{\frac{mgRr}{Iz_0}}t + \theta\right) \tag{5}$$

Здесь амплитуда φ_0 и фаза θ колебаний определяются начальными условиями. Период кртуильных полебаний нашей системы равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}} \tag{6}$$

Из формулы для периода получаем:

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2 z_0} = kmT^2 \tag{7}$$

где $k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0}$ – величина, постоянная для данной установки.

4 Задание

4.1 Параметры установки и коэффицент k

Работа выполнялась на установке №2, ее параметры указаны в Таблице (1)

m, г	R, мм	r, мм	L, см	z_0, см
983,2	114,6	30,5	215,2	215,0
σ_m, г	σ_R, мм	σ_r, мм	σ_L, см	σ_{z_0}, см
0,5	0,5	0,5	0,4	0,4

Таблица 1. Парметры установки

где σ_m, σ_R, σ_r, σ_L, σ_{z_0} – погрешности соответсвующих величин.

По полученным данным вычислим постоянную для конструкции №3:

$$k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0} \approx 3{,}99 \cdot 10^{-4}\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \tag{8}$$

Погрешность же k будет равна:

$$\sigma_k = k \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{z_0}}{z_0}\right)^2} \approx 0{,}05 \cdot 10^{-4}\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \tag{9}$$

4.2 Момент инерции платформы

Определить момент инерции платформы можно по формуле (7). Для этого нам необходимо определить период колебаний ненагруженной платформы. Измеряем преиод, получаем:

Тогда, средний период колебания платформы будет: $T_{\text{ср}} \approx 4{,}396$, с

Давайте здесь же и определим погрешность времени:

$$\sigma_T^{\text{сист}} = 0{,}001, \text{ с} \tag{10}$$

$$\sigma_T^{\text{случ}} = \sigma_{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{изм}}\left(N_{\text{изм}} - 1\right)} \sum_{i=1}^{N_{\text{изм}}} \left(T_{\text{ср}} - T_i\right)^2} \approx 0{,}007, \text{ с} \tag{11}$$

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_{\text{случ}}^2 + \sigma_{\text{сист}}^2} \approx 0{,}007, \text{ с} \tag{12}$$

Значит $T_{\text{ср}} = (4{,}396 \pm 0{,}007)$, с. Теперь мы можем определить момен инерции платформы:

$$I_{\text{пл}} = kmT^2 \approx 7{,}446, \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3} \tag{13}$$

Найдем погрешность найденного нами момента инерции платформы:

$$\varepsilon_I = \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_T}{T}\right)^2} \approx 0{,}01 \tag{14}$$

$$\sigma_{I_{\text{пл}}} = \varepsilon_I \cdot I_{\text{пл}} \approx 0{,}074, \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3} \tag{15}$$

Получаем, что с помощью данной конструкции мы можем определять момент инерции тела с погрешностью 1%, и $I_{\text{пл}} = (7{,}446 \pm 0{,}074)$, кг $\cdot$ м^2 $\cdot 10^{-3}$

4.3 Определение моментов инерции различных тел. Аддитивность моментов инерции

Измерим периоды колебаний платформы с различными телами таким же образом, как и для ненагруженной платформы, а именно – 3 измерения по 20 колебаний для каждого набора тел, получаем:

Для подтверждения аддитивности необходимо показать,что выполняются условия:

$$I_{\text{пл+ц}} = I_{\text{пл}} + I_{\text{ц}} \tag{16}$$

$$I_{\text{пл+к}} = I_{\text{пл}} + I_{\text{к}} \tag{17}$$

$$I_{\text{пл+ц+к}} = I_{\text{пл}} + I_{\text{ц}} + I_{\text{к}} \tag{18}$$

Из Таблицы (**??**) и формул (16), (17) мы можем найти момент инерции цилиндра и кольца: $I_{\text{ц}} = I_{\text{пл+ц}} - I_{\text{пл}} = (2{,}109 \pm 0{,}121)$, кг $\cdot$ м^2 $\cdot 10^{-3}$, а $I_{\text{к}} = I_{\text{пл+к}} - I_{\text{пл}} = (4{,}398 \pm 0{,}139)$, кг $\cdot$ м^2 $\cdot 10^{-3}$.

Тогда, для доказательства аддитивности, проверим уравнение (18). Оно выполняется, следовательно моменты инерции аддитивны.

Теперь сравним полученные нами моменты инерциии для тел, и их теоретические значения. Для цилиндра момент инерции вычисляется так же как и для диска: $I_ц = \frac{1}{2} m_ц R_ц^2$. Радиус данного цилиндра $R_ц = 10{,}96$, см, тогда $I_ц = 2{,}135$, кг $\cdot$ м^2 $\cdot 10^{-3}$, что подтверждает экспериментальное значение.

Для кольца же: $I_к = m_к R_к^2$. Так как данное кольцо не идеально тонко, то $R_к = \frac{D_{внут}+h}{2}$, где $h = 0{,}41$, см, а $D_{внут} = 15{,}08$, см, тогда $R_к = 7{,}745$, см. Получаем, что $I_к = 4{,}487$, кг $\cdot$ м^2 $\cdot 10^{-3}$, что тоже совпадает с полученным экспериментально значением.

4.4 Зависимость момента инерции системы тел от их расположения. График зависимости $I(h^2)$

Используя формулу 7, определим зависимость $I(h^2)$.

Построим график зависимости $I(h^2)$ (Рис. 2).

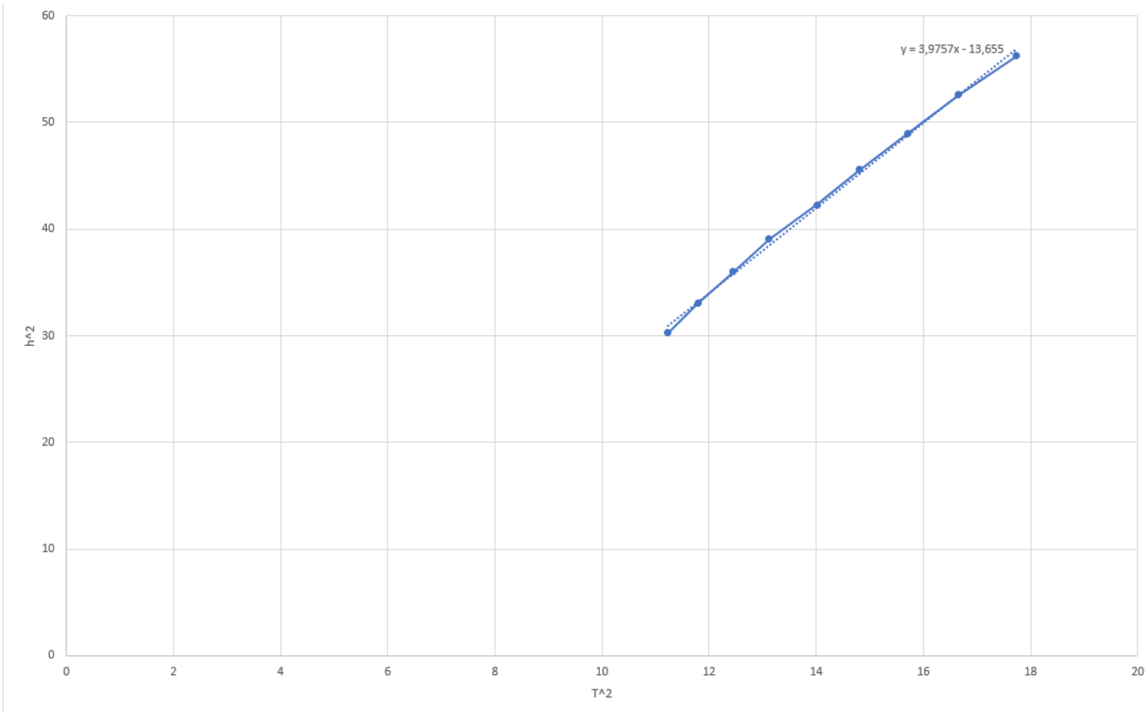

Рис. 2. График зависимости $I(h^2)$

По графику понятно, что $I = kh^2 + b$.Тогда b – момент инерции платформы + диска. Для вычисления коэффициентов k и b воспользуемся методом наименьших квадратов:

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 0{,}1843, \ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{см}^2} \cdot 10^{-3}, \tag{19}$$

$$b = \langle y \rangle - k \langle x \rangle \approx 8{,}743, \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}, \tag{20}$$

где $x = h^2$, $y = I$.

Случайные погрешности вычисления k и b можно найти по следующим формулам:

$$\sigma_k^{\text{случ}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{\langle y^2\rangle - \langle y\rangle^2}{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} - k^2} \approx 0{,}006,\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{см}^2}\cdot 10^{-3}, \tag{21}$$

$$\sigma_b^{\text{случ}} = \sigma_k^{\text{случ}}\sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} \approx 0{,}095,\ \text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot 10^{-3}. \tag{22}$$

Систематическая погрешность вычисления коэффициентов определяется следующим соотношением:

$$\sigma_b^{\text{сист}} = b\sqrt{(\varepsilon_I)^2 + (\varepsilon_{h^2})^2} \approx b\cdot\varepsilon_I \approx 0{,}087,\ \text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot 10^{-3}. \tag{23}$$

Тогда полную погрешность вычисления коэффициентов подсчитываем по следующей формуле:

$$\sigma_b = \sqrt{(\sigma_b^{\text{случ}})^2 + (\sigma_b^{\text{сист}})^2} \approx 0{,}129,\ \text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot 10^{-3}. \tag{24}$$

Необходимый нам моент инерции можно найти при $h = 0$, тогда $b = I_{\text{пл+д}} = I_{\text{пл}} + I_{\text{д}} = (8{,}743 \pm 0{,}129)$, кг $\cdot$ м^2 $\cdot 10^{-3}$. Так как момент инерции платформы уже изветсен, и он равняется: $I_{\text{пл}} = (7{,}446 \pm 0{,}745)$, кг $\cdot$ м^2 $\cdot 10^{-3}$, то момент инерции диска $\underline{I_{\text{д}} = (1{,}297 \pm 0{,}149)\text{, кг}\cdot\text{м}^2\cdot 10^{-3}}$.

Зная радиус диска $R_{\text{д}} = (0{,}0413 \pm 0{,}0001)$, м, мы можем определить его массу: $m_{\text{д}} = 2I_{\text{д}}/R_{\text{д}}^2 \approx 1{,}521$, кг, $\sigma_{m_{\text{д}}} = m_{\text{д}}\cdot\sqrt{\varepsilon_I^2 + (2\varepsilon_R)^2} \approx 0{,}175$, кг. Значит, что экспериментальная масса диска $\underline{m_{\text{д}} = (1{,}521 \pm 0{,}175)\text{, кг}}$, что совпадает с реальной полной массой диска $m = (1527{,}2 \pm 0{,}1)$, г.

5 Вывод

С помощью трифилярного подвеса можно определять момент инерции с достаточно большой точностью $\varepsilon \approx 5{,}7\%$. Такая точность обусловлена малой погрешностью измерения времени и условиями, при которых колебания подвеса можно считать слабозатухающими.

Мы экспериментально доказали аддитивность моментов инерции с помощью различных тел.

Полученная зависимость $I(h^2)$ аппроксимируется линейой зависимостью, что подтверждает формулу Гюйгенса-Штейнера ($I = I_c + Mh^2$, где I – момент инерции тела, I_c –момент инерции тела относительно центра, M – масса тела, а h – расстояние между двумя осями, в нашем случае – между осью вращения и половинками диска).