Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

Лабораторная работа №1.4.1

по курсу общей физики
на тему:
«Физический маятник»

Работу выполнил:
Третьяков Александр
(группа Б02-206)

Долгопрудный
2 октября 2022 г.

1 Введение

Цели работы:
1) на примере измерения периода свободных колебаний физического маятника познакомиться с систематическими и случайными погрешностями, прямыми и косвенными измерениями;
2) проверить справедливость формулы для периода колебаний физического маятника и определить значение ускорения свободного падения;
3) убедиться в справедливости теоремы Гюйгенса об обратимости точек опоры и центра качания маятника;
4) оценить погрешность прямых и косвенных измерений и конечного результата.

Оборудование: металлический стержень; опорная призма; торцевые ключи; закреплённая на стене консоль; подставка с острой гранью для определения цента масс маятника; секундомер; линейки металлические длиной 30, 50 и 100 см; штангенциркуль; электронные весы; математический маятник (небольшой груз, подвешенный на нитях).

2 Теоретические сведения

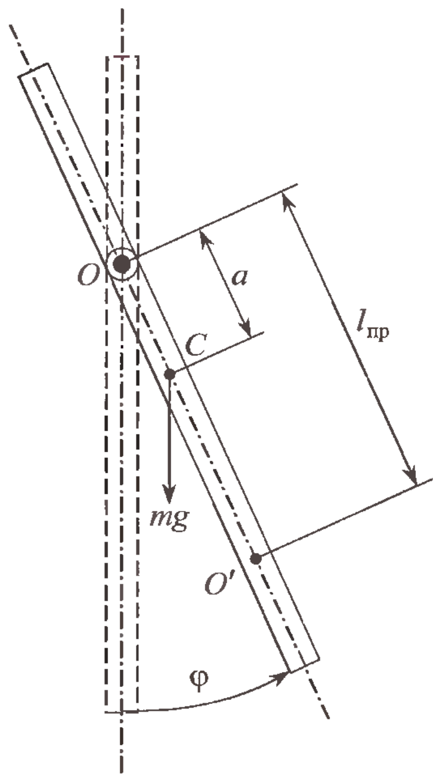

Рис. 1: Физический маятник

В работе изучается динамика движения физического маятника. Физический маятник, используемый в работе, представляет собой однородный стальной стержень массы m, длина которого l много больше ее диаметра. На стержне закрепляется опорная призма, острое ребро которой является осью качания маятника.

Второй закон Ньютона определяет динамику движения тела точечной массы m. Импульс тела $P = mv$ изменяется во времени t под действием силы F:

$$F = \frac{dP}{dt}$$

Если рассмотреть точечную массу, которая движется по окружности радиуса r с угловой скоростью ω, тогда линейная скорость $v = \omega r$, то формулу для силы можно преобразовать:

$$Fr = \frac{dP}{dt}r$$

$$M = \frac{dP}{dt}r = \frac{dL}{dt}$$

где $L = J\omega$, и $J = mr^2$. Величину J называют *моментом инерции.*

$$J = \sum_{i=1} m_i r_i^2$$

Посчитаем момент инерции для данного нам стержня, при вращении вокруг препендикулярной стержню оси. Для этого разобьем стержень на отрезки dr и $dm = m \cdot \frac{dr}{l}$ и возьмем интеграл:

$$J_c = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2 dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{mr^2}{l} dr = \frac{ml^2}{12}$$

Призму можно перемещать вдоль стержня, меняя таким образом расстояние OC от точки опоры маятника до его центра масс. Пусть это расстояние равно a. Тогда по теореме Гюйгенса-Штейнера момент инерции маятника

$$J = \frac{ml^2}{12} + ma^2,$$

где m – масса маятника.

Период колебаний получим из дифференциального уравнения:

$$-mga\alpha = \frac{dL}{dt} = \frac{d(J\dot{\alpha})}{dt} = J\ddot{\alpha} \Rightarrow \ddot{\alpha} + \frac{mga}{J}\alpha = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \omega^2\alpha = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{J}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}$$

После подстановки период колебаний, для стержня длиной l подвешенного на расстоянии a от центра, равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + \frac{l^2}{12}}{ag}} \tag{1}$$

Таким образом, период малых колебаний не зависит ни от начальной фазы, ни от амплитуды колебаний.

Период колебаний математического маятника определяется формулой

$$T_{\text{м}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l – длина математического маятника. Поэтому величину

$$l_{\text{пр}} = a + \frac{l^2}{12a}$$

называют приведённой длиной математического маятника. Поэтому точку O' (см. рис. 1), отстоящую от точки опоры на расстояние $l_{\text{пр}}$, называют центром качания физического маятника. Точка опоры и центр качания маятника обратимы, т.е. при качании маятника вокруг точки O' период будет таким же, как и при качании вокруг точки O.

3 Экспериментальная установка

Тонкий стальной стержень, подвешенный на прикрепленной к стене консоли с помощью небольшой призмы, которая опирается на поверхность консоли острым основанием. Призму можно перемещать вдоль стержня, изменяя положение точки подвеса. Период колебаний измеряется с помощью секундомера, расстояния измеряются линейкой и штангенциркулем. Положение центра масс можно определить с помощью балансирования маятника на вспомогательной подставке.

3.1 Расчет поправок

Если быть честными, то для вычисления периода следует использовать формулу, учитывающую оба тела (и стержень, и призму):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_{\text{ст}} + J_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}}ga_{\text{ст}} - m_{\text{пр}}ga_{\text{пр}}}}$$

Однако призма мала по размеру и массе, поэтому поправка на момент инерции призмы в условиях опыта составляет не более 0,1% $\Rightarrow$ ей можно пренебречь.

Сравним теперь моменты сил, действующие на призму и стержень при $a = 10$ см:

$$\frac{M_{\text{пр}}}{M_{\text{ст}}} = \frac{m_{\text{пр}}ga_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}}ga_{\text{ст}}} \approx 10^{-2}$$

В данном случае поправка достигает 1% $\Rightarrow$ ей пренебречь нельзя. Учесть влияние призмы можно – исключив $a_{\text{пр}}$, изменяя положение центра сиситемы. Пусть X – расстояние от центра масс системы до точки подвеса, тогда:

$$X = \frac{m_{\text{ст}}a_{\text{ст}} - m_{\text{пр}}a_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}} + m_{\text{пр}}}$$

Исключая из двух уравнений $a_{\text{пр}}$, получаем:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{g\beta X}} \tag{2}$$

где $\beta = 1 + \frac{m_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}}}$.

4 Задание

4.1 Оценка погрешностей измерительных приборов и g

Секундомер: $\sigma_c = 0{,}01$ с
Линейка: $\sigma_{\text{лин}} = 0{,}05$ см

Погрешность g зависит от точности измерения длин и периода колебаний. Длины измеряли линейкой. Наименьшее измеренное расстояние 15 см, а наибольшее 100 см. Абсолютная погрешность линейки: $\sigma_{\text{лин}} = 0{,}05$ см. Тогда относительная погрешность длин составляет порядка $\varepsilon_{\max} \approx 0{,}3\%$ ($\frac{0{,}05}{15} \times 100\% = 0{,}3\%$).

Вывод: используемые в работе инструменты позволяют вести измерения длин с точностью вплоть до 0,1%. Для получения конечного результата с данной точностью период колебаний следует измерять с той же относительной погрешностью: не хуже, чем $\varepsilon_{\max} \approx 0{,}3\%$.

4.2 Длина стержня и множитель β

Длина стержня $l = (100{,}0 \pm 0{,}05)$ см, масса стержня $m = (868{,}4 \pm 0{,}1)$ г, масса призмы $m_{\text{пр}} = (75{,}7 \pm 0{,}1)$ г. Формула для множителя β:

$$\beta = 1 + \frac{m_{\text{пр}}}{m}$$

Рассчитаем множитель используя снятые массы: $\beta = 1 + \frac{75{,}7}{868{,}4} \approx 1{,}08717$. Погрешность σ_β будет рассчитывается по формуле:

$$\sigma_\beta = \beta \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\text{пр}}}{m_{\text{пр}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{m}\right)^2}$$

$$\sigma_\beta = 1{,}08717 \sqrt{\left(\frac{0{,}1}{75{,}7}\right)^2 + \left(\frac{0{,}1}{868{,}4}\right)^2} \approx 1{,}44 \cdot 10^{-3}$$

Получаем, что $\beta = (1{,}08717 \pm 0{,}00144)$ с учетом погрешности. В соответствии с правилами округления получаем, что β следует округлять до четырех знаков после запятой: $\beta = (1{,}0872 \pm 0{,}0014)$.

4.3 Центр масс стержня и конструкции

Центр масс стержня расположен на расстоянии $b = (50,05 \pm 0{,}05)$ см от одного из его концов. Острие призмы расположено на расстоянии $a = (20{,}00 \pm$

0,05) см. Сбалансировав маятник *с призмой* на острие вспомогательной установки, измерим положение центра масс конструкции $x_{ц} = 27{,}3$ см. Определение точного положения центра масс усложняется тем, что достичь точного равновесия конструкции на установке почти невозможно, поэтому погрешность измерения увеличится: $x_{ц} = (27{,}3 \pm 0{,}1)$ см.

4.4 Предварительный опыт

Установим маятник на консоли и отклоним его на малый угол $\varphi_0 \approx 5°$. Измерим время $n = 20$ полных колебаний и вычислим период колебаний $T = t/n$. Результаты измерений приведем в таблице 1.

№	1	2	3	ср.
t, с	30,54	30,56	30,55	30,55
T, с	1,527	1,528	1,528	1,528
ΔT, с	0,001	0,001	0,001	0,001

Таблица 1: Результаты измерения периода колебаний

Предварительное значение ускорения свободного падения посчитаем по формуле

$$g = \frac{4\pi^2(\frac{l^2}{12} + a^2)}{T^2 \beta x_{ц}} \tag{3}$$

Полученное значение равно $g = 9{,}74$ м/с^2. Отличие от табличного значения $g = 9{,}81$ м/с^2 составляет

$$\alpha = \frac{9{,}81 - 9{,}74}{9{,}81} \times 100\% = 0{,}71\%$$

Так как случайная погрешность измерения времени пренебрежимо мала, полная погрешность измерения времени совпадает с приборной

$$\sigma_{\text{t}} = 0{,}01 \text{ с}$$

$$\sigma_{\text{T}} = \frac{\sigma_{\text{t}}}{10} = 0{,}001 \text{ с}$$

Следовательно, с учетом погрешности период колебаний равен $T = 1{,}528 \pm 0{,}001$ с.

4.5 Измерение периода колебаний для различных значений a

Изменяем положение цилиндра, каждый раз измеряя его положение a относительно центра и время 20 полных колебаний. Результаты приведены в таблице 2.

Таблица 2: Результаты измерения периода колебаний для различных a

№	ц.м. цилиндра, cm	T за 20 периодов, s	T, s	g, $\frac{m}{s^2}$
1	73,9	32,44	1,622	9,82
2	67,9	31,68	1,584	9,82
3	61,9	30,99	1,550	9,81
4	55,9	30,34	1,517	9,80
5	49,9	29,74	1,487	9,81
6	43,9	29,25	1,463	9,80
7	37,9	28,84	1,442	9,81
8	31,9	28,59	1,430	9,80
9	25,9	28,47	1,424	9,80
10	19,9	28,56	1,428	9,79
11	13,9	28,85	1,443	9,79
12	7,9	29,40	1,470	9,79

5 Обработка результатов измерений

5.1 Усредненное значение g

Усредним значение $g = 9{,}81\text{м/с}^2$.

По формуле (3) Найдем систематическую погрешность g:

$$\sigma_g^{\text{сист}} = g \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\frac{l^2}{12}+a^2}}{\frac{l^2}{12}+a^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{T^2\beta X}}{T^2\beta X}\right)^2}$$

$$\sigma_{\frac{l^2}{12}+a^2} = \sqrt{(\sigma_{l^2}^2 + \sigma_{a^2}^2)}$$

$$\sigma_g^{\text{сист}} = g \cdot \sqrt{\frac{\left(\frac{2\sigma_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_a}{a}\right)^2}{\left(\frac{l^2}{12}+a^2\right)^2} + \left(\frac{2\sigma_T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\beta}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_X}{X}\right)^2}$$

$$\sigma_g^{\text{сист}} \approx 0{,}10\frac{\text{м}}{c^2}$$

Полную погрешность g получим из $\sigma_g^{\text{случ}}$ и $\sigma_g^{\text{сист}}$:

$$\sigma_g^{\text{полн}} = \sqrt{(\sigma_g^{\text{сист}})^2 + (\sigma_g^{\text{случ}})^2} \approx 0{,}10\frac{\text{м}}{c^2}$$

где $\sigma_g^{\text{случ}} = 0{,}01\frac{\text{м}}{c^2}$.

Тогда получаем: $g = (9{,}81 \pm 0{,}10)\ \frac{\text{м}}{c^2}$.

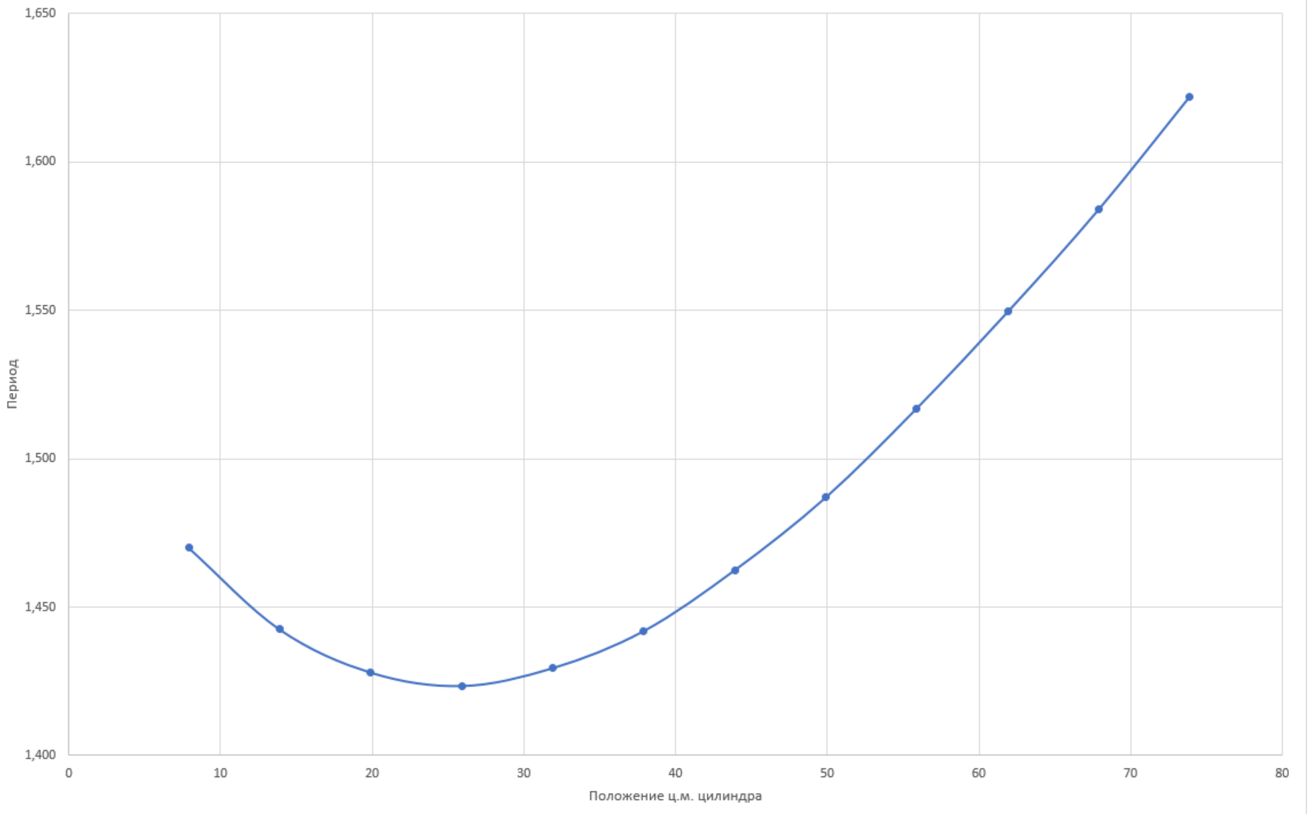

Рис. 2: Зависимость T от a

5.2 График $T(a)$

Минимум графика (Рисунок 2) находится на $a_{\text{min}} \approx 27$ см, что сходится с рассчетом минимума по формуле (1): $a_{\text{формулы}} \approx 27{,}3$ см

5.3 График зависимости $T^2 x_ц$ от $Cx^2_{цил}$

№	x_c, cm	$T^2 x_c, m \cdot s^2$	$Cx^2_{цил}, m^2$	$g, \frac{m}{s^2}$
1	38,92	1,0240	5,3771	9,82
2	37,43	0,9390	4,5394	9,82
3	35,93	0,8626	3,7726	9,81
4	34,43	0,7924	3,0767	9,80
5	32,94	0,7283	2,4517	9,81
6	31,44	0,6725	1,8975	9,80
7	29,94	0,6226	1,4143	9,81
8	28,45	0,5813	1,0019	9,80
9	26,95	0,5461	0,6605	9,80
10	25,45	0,5191	0,3899	9,79
11	23,96	0,4985	0,1902	9,79
12	22,46	0,4854	0,0614	9,79

Используя формулу для периода физического маятника (2) получаем следующее соотношение:

$$T^2 x_ц \beta = \frac{4\pi^2}{g} a^2 + \frac{\pi^2 l^2}{3g}.$$

Иначе говоря:

$$T^2 x_ц g = \frac{4\pi^2 m_{цил}}{M} a^2 + \frac{\pi^2 l^2 m_{ст}}{3M} \Rightarrow C = 4\pi^2 \frac{m_{цил}}{M}$$

(g в таблице было рассчитано по этой формуле)

Отсюда можно сделать вывод о том, что $T^2 x_ц \beta$ линейно зависит от a^2, поэтому это зависимость можно представить в виде

$$T^2 x_ц \beta = k a^2 + b,$$

где

$$k = \frac{4\pi^2}{g} \text{ и } b = \frac{\pi^2 l^2}{3g}. \tag{4}$$

С другой стороны $T^2 x_ц$ линейно зависит от $Cx^2_{цил}$

График зависимости $T^2 x_ц$ от $Cx^2_{цил}$ представлен на рисунке 3.

По графику определяем коэффициент наклона k = 9,864 - это и будет ускорение свободного падения.

Погрешность расчёта a^2 найдём по следующей формуле:

$$\varepsilon_{a^2} = 2\varepsilon_a = 2\frac{\sigma_a}{a}$$

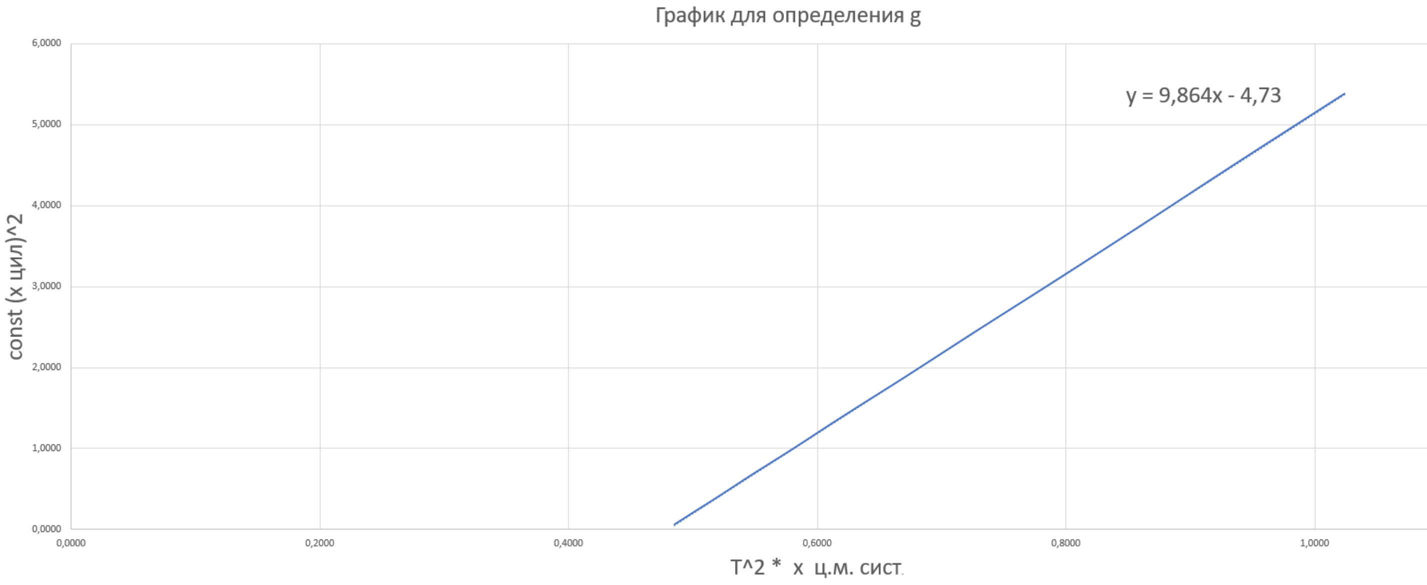

Рис. 3: Зависимость $T^2 x_ц$ от $Cx^2_{цил}$

где $\sigma_a = 0{,}1$ см.

Погрешность вычисления $T^2 x_ц \beta$ можно найти по формуле:

$$\varepsilon_{T^2 x_ц \beta} = \sqrt{\left(2 \cdot \frac{\sigma_T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_X}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\beta}{\beta}\right)^2} \approx 0{,}01,$$

Для вычисления коэффициентов k и b из (4) воспользуемся методом наименьших квадратов:

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 0{,}0406 \ \frac{\text{с}^2}{\text{см}},$$

$$b = \langle y \rangle - k \langle x \rangle \approx 33{,}54 \text{ см} \cdot \text{с}^2,$$

где $x = a^2$, $y = T^2 x_ц \beta$.

Случайные погрешности вычисления k и b можно найти по следующим формулам:

$$\sigma_k^{сл} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2} \approx 2{,}08 \cdot 10^{-4} \ \frac{\text{с}^2}{\text{см}},$$

$$\sigma_b^{сл} = \sigma_k^{сл} \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 0{,}11 \text{ см} \cdot \text{с}^2.$$

Систематическая погрешность вычисления коэффициентов определяется следующим соотношением:

$$\sigma_k^{сист} = k \sqrt{(\varepsilon_{T^2 X \beta})^2 + (\varepsilon_{a^2})^2} \approx 4{,}5 \cdot 10^{-4} \ \frac{\text{с}^2}{\text{см}},$$

$$\sigma_b^{\text{сист}} = b\sqrt{\left(\varepsilon_{T^2X\beta}\right)^2 + \left(\varepsilon_{a^2}\right)^2} \approx 0{,}37\ \text{см} \cdot \text{с}^2.$$

Тогда полную погрешность вычисления коэффициентов подсчитываем по следующей формуле:

$$\sigma_k = \sqrt{\left(\sigma_k^{\text{сл}}\right)^2 + \left(\sigma_k^{\text{сист}}\right)^2} \approx 4{,}96 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{с}^2}{\text{см}},$$

$$\sigma_b = \sqrt{\left(\sigma_b^{\text{сл}}\right)^2 + \left(\sigma_b^{\text{сист}}\right)^2} \approx 0{,}39\ \text{см} \cdot \text{с}^2.$$

Таким образом, получаем:

- $k = \left(0{,}0406 \pm 4{,}96 \cdot 10^{-4}\right)\ \frac{\text{с}^2}{\text{см}},\ \varepsilon_k = 1{,}22\%$
- $b = (33{,}54 \pm 0{,}39)\ \ \text{см} \cdot \text{с}^2,\ \varepsilon_b = 1{,}16\%$

Учитывая формулу (4), вычисляем g через угол наклона прямой:

$$g_k = \frac{4\pi^2}{k} \approx 9{,}723\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$\sigma_{gk} = g \cdot \varepsilon_k \approx 0{,}088\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

Учитывая формулу (4), вычисляем g через пересечение с осью "y":

$$g_b = \frac{\pi^2 l^2}{3b} \approx 9{,}809\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$\sigma_{gb} = g \cdot \varepsilon_b \approx 0{,}114\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

В итоге имеем следующие результаты:

- $\underline{g_k = (9{,}723 \pm 0{,}088)\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},\ \varepsilon_{gk} = 1{,}22\%}$
- $\underline{g_b = (9{,}809 \pm 0{,}114)\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},\ \varepsilon_{gb} = 1{,}16\%}$
- $\underline{g_{line} = (9{,}864 \pm 0{,}100)\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},\ \varepsilon_{g_{line}} \approx 1{,}01\%}$
- $\underline{g_{anal} = (9{,}80 \pm 0{,}10)\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},\ \varepsilon_{g_{anal}} \approx 1{,}02\%}$

Исходя из полученных данных, пожно сказать, что все использованные методы определения g дают довольно хороший результат, но особенно удивляет точность определения g по свободному члену МНК. Так как случайная погрешность очень мала, основной вклад вносят погрешности приборов, поэтому погрешность можно увеличить за счет повышения точности используемого оборудования.

6 Вывод

Проделанный опыт подтверждает теорию для периода колебаний физического маятника.

В ходе работы мы получили следующие величины:

- $g_k = (9{,}723 \pm 0{,}088)\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $\varepsilon_{gk} = 1{,}22\%$
- $g_b = (9{,}809 \pm 0{,}114)\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $\varepsilon_{gb} = 1{,}16\%$
- $g_{line} = (9{,}864 \pm 0{,}100)\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $\varepsilon_{g_{line}} \approx 1{,}01\%$
- $g_{anal} = (9{,}80 \pm 0{,}10)\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $\varepsilon_{g_{anal}} \approx 1{,}02\%$

Точность полученных результатов можно повысить, если использовать более точные приборы. Погрешность вносит неточность определения расстояния от точки опоры до центра масс стержня, а также смещенный центр масс цилиндра. Последнюю погрешность можно нивелировать за счет использования двух цилиндров, расположенных симметрично, так чтобы их центр масс лежал на стержне.