

*Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования*

**«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

Лабораторная работа №1.2.3

по курсу общей физики на тему: *«Определение момента инерции
твёрдых тел с помощью трифилярного подвеса»*

*Работу выполнил:
Никифоров Дмитрий
(группа Б02-205)*

Долгопрудный
30 октября 2022 г.

1 Аннотация

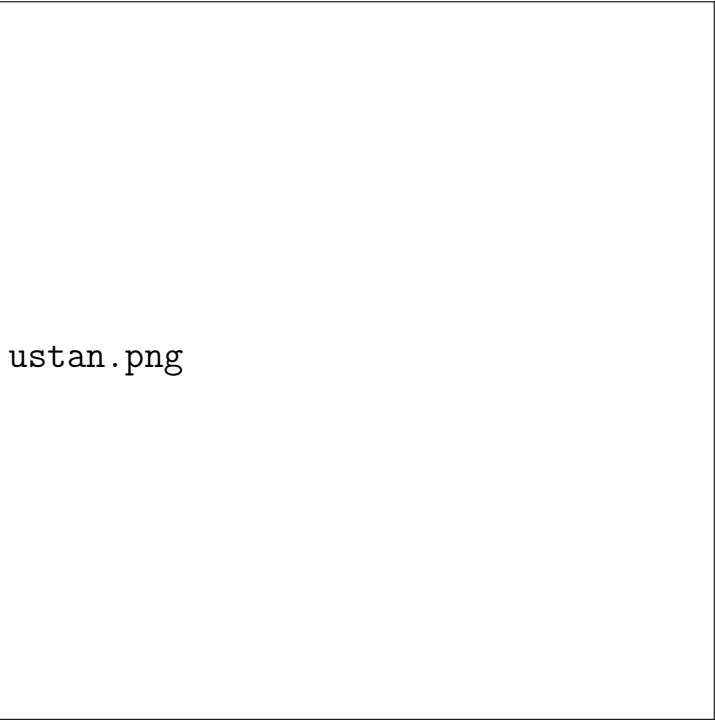
Цели работы: измерение момента инерции тел и сравнение результатов с расчетами по теоретическим формулам; проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса-Штейнера.

Оборудование: трифилярный подвес, весы, линейка, штангенциркуль, лазерный дальномер, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить (стержень, полый цилиндр (с толстыми стенками), полуцилиндры и диск).

2 Экспериментальная установка

Для наших целей удобно использовать устройство, показанное на Рис. ?? и называемое трифилярным подвесом. Оно состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформы P и подвешенной к ней на трех симметрично расположенных нитях AA' , BB' и CC' , вращающейся платформы P' .

Чтобы не вызывать дополнительных раскачиваний, лучше поворачивать верхнюю платформу, укрепленную на неподвижной оси. После поворота верхняя платформа остается неподвижной в течение всего процесса колебаний. После того, как нижняя платформа P' оказывается повернутой на угол φ относительно верхней платформы P , возникает момент сил, стремящийся вернуть нижнюю платформу в положение равновесия, при котором относительный поворот платформ отсутствует. В результате платформа совершает крутильные колебания.



ustan.png

Рис. 1: Трифилярный подвес

3 Теоретические сведения

Инерционность при вращении тела относительно оси определяется моментом инерции тела относительно этой оси. Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения вычисляется по формуле:

$$I = \int r^2 dm$$

Здесь r – расстояние элемента массы тела dm от оси вращения. Интегрирование проводится по всей массе тела m .

Если пренебречь потерями энергии на трение о воздух и крепление нитей, то уравнение сохранения энергии при колебаниях можно записать следующим образом:

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E$$

Здесь I – момент инерции платформы вместе с исследуемым телом, m – масса платформы с телом, φ – угол поворота платформы от положения равновесия системы, z_0 – координата по вертикали центра нижней платформы O' при равновесии ($\varphi = 0$), z – координата той же точки при некотором угле поворота φ . Первый член в левой части уравнения – кинетическая энергия вращения, второй член – потенциальная энергия в поле тяжести, E – полная энергия системы (платформы с телом).

Воспользуемся системой координат x, y, z , связанной с верхней платформой, как показано на Рис. ???. Координаты верхнего конца одной из нитей подвеса точки C в этой системе – $(r, 0, 0)$. Нижний конец данной нити C' , находящийся на нижней платформе, при равновесии имеет координаты $(R, 0, z_0)$, а при повороте платформы на угол φ эта точка переходит в C'' с координатами $(R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)$. расстояние между точками C и C'' равно длине нити, поэтому, после некоторых преобразований, получаем:

$$\begin{aligned} (R\cos\phi - r)^2 + R^2\sin^2\phi + z^2 &= L^2 \\ z^2 &= L^2 - R^2 - r^2 + 2Rr\cos\phi \approx z_0^2 - 2Rr(1 - \cos\phi) \approx z_0^2 - Rr\phi^2 \\ z &= \sqrt{z_0^2 - Rr\phi^2} \approx z_0 - \frac{Rr\phi^2}{2z_0} \end{aligned}$$

Подставляя z в уравнение (??), получаем:

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = E$$

Дифференцируя по времени и сокращая на $\dot{\varphi}$, находим уравнение крутильных колебаний системы:

$$I\ddot{\varphi}^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = 0$$

Производная по времени от E равна нулю, так как потерями на трение, как уже было сказано выше, пренебрегаем. Решение этого уравнения имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 \sin \left(\sqrt{\frac{mgRr}{Iz_0}} t + \theta \right)$$

Здесь амплитуда φ_0 и фаза θ колебаний определяются начальными условиями. Период криволинейных колебаний нашей системы равен:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I z_0}{mgRr}}$$

Из формулы для периода получаем:

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2 z_0} = kmT^2$$

где $k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0}$ – величина, постоянная для данной установки.

4 Задание

4.1 Проверка установки

При выводе формул мы предполагали, что потери энергии, связанные с трением, малы, то есть мало затухание колебаний. Это значит, что теоретические вычисления будут верны, если выполняется условие:

$$\tau \gg T$$

Проверим данное условие. При отклонении на угол $\alpha \approx 30^\circ$ время, за которое амплитуда уменьшится в 2 раза, $\tau \approx 240$ с, а $T \approx 3$ с. Соотношение выполняется – установка пригодна для проведения эксперимента.

4.2 Параметры установки и коэффициент k

Работа выполнялась на установке №7, ее параметры указаны в Таблице (??)

| Z_0 , см | σ_{Z_0} , см | R, мм | σ_R , мм | r, мм | σ_r , мм | m, г | σ_m , г |
|------------|---------------------|-------|-----------------|-------|-----------------|-------|----------------|
| 206 | 1 | 115,4 | 0,5 | 30,5 | 0,3 | 993,5 | 0,5 |

Таблица 1: Параметры установки

где σ_m , σ_R , σ_r , σ_L , σ_{z_0} – погрешности соответствующих величин.

По полученным данным вычислим постоянную для конструкции №3:

$$k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0} \approx 4,24395 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$$

Погрешность же k будет равна:

$$\sigma_k = k \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{z_0}}{z_0}\right)^2} \approx 0,05 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$$

4.3 Момент инерции платформы

Определить момент инерции платформы можно по формуле (??). Для этого нам необходимо определить период колебаний ненагруженной платформы. Измеряем период, получаем:

| T, с | N | T _{ср} , с | A ₀ | A _k |
|---------|----|---------------------|----------------|----------------|
| 134,452 | 30 | 4,482 | 35 | 25 |

Тогда, средний период колебания платформы будет: $T_{\text{ср}} \approx 4,482$, с
Давайте здесь же и определим погрешность времени:

$$\sigma_T^{\text{сист}} = 0,001, \text{ с} \quad \sigma_N = 0,5$$
$$\sigma_{T_{\text{ср}}} = T_{\text{ср}} \sqrt{\varepsilon_T^2 + \varepsilon_N^2} \approx 0,075, \text{ с}$$

Значит $T_{\text{ср}} = (4,482 \pm 0,075)$ с. Теперь мы можем определить момент инерции платформы:

$$I_{\text{пл}} = k m T^2 \approx 8,469, \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}$$

Найдем погрешность найденного нами момента инерции платформы:

$$\varepsilon_I = \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_T}{T}\right)^2} \approx 0,035$$
$$\sigma_{I_{\text{пл}}} = \varepsilon_I \cdot I_{\text{пл}} \approx 0,295, \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}$$

Получаем, что с помощью данной конструкции мы можем определять момент инерции тела с погрешностью 3,5%, и $I_{\text{пл}} = (8,469 \pm 0,295)$, кг · м² · 10⁻³

4.4 Определение моментов инерции различных тел. Аддитивность моментов инерции

Измерим периоды колебаний платформы с различными телами таким же образом, как и для ненагруженной платформы. Данные полученные в результате измерений представлены в таблице ниже:

Для подтверждения аддитивности необходимо показать, что выполняются условия:

$$I_{\text{пл+д}} = I_{\text{пл}} + I_{\text{д}}$$
$$I_{\text{пл+пол.ц.}} = I_{\text{пл}} + I_{\text{пол.ц.}}$$
$$I_{\text{пл+д+пол.ц.}} = I_{\text{пл}} + I_{\text{д}} + I_{\text{пол.ц.}}$$
$$(3) + (4) + (5) \Rightarrow I_{\text{пл+д+пол.ц.}} = I_{\text{д+пл}} + I_{\text{пол.ц.+пл}} - I_{\text{пл}}$$

Подставим в правую часть последней формулы данные из таблицы (??) и сравним с экспериментально полученной левой частью:

| | | | | | | | | |
|---------------------------------|---------------|---------|----------------|---------|----|--------|-------|-------|
| 1 | стержень | m, г | σ_m , г | T, с | N | Tcp, с | A_0 | A_k |
| $I, \text{кг} \cdot \text{м}^2$ | 0,01115 | 1039,40 | 0,05 | 115,030 | 32 | 3,595 | 25 | 20 |
| 2 | полуцилиндры | m, г | σ_m , г | T, с | N | Tcp, с | A_0 | A_k |
| $I, \text{кг} \cdot \text{м}^2$ | 0,01003 | 1442,20 | 0,05 | 93,448 | 30 | 3,115 | 25 | 20 |
| 3 | полый цилиндр | m, г | σ_m , г | T, с | N | Tcp, с | A_0 | A_k |
| $I, \text{кг} \cdot \text{м}^2$ | 0,01348 | 777,20 | 0,05 | 127,043 | 30 | 4,235 | 30 | 25 |
| 4 | диск | m, г | σ_m , г | T, с | N | Tcp, с | A_0 | A_k |
| $I, \text{кг} \cdot \text{м}^2$ | 0,01068 | 584,40 | 0,05 | 119,797 | 30 | 3,993 | 35 | 30 |

Таблица 2: Моменты инерции платформы с различными телами

| | | | | | | | | |
|--|--|---------|-------|---------|----|----------|----|----|
| $I_{\text{д} + \text{пл}} + I_{\text{пол.ц.} + \text{пл}} - I_{\text{пл}}$ | $I_{\text{пл}+\text{д}+\text{пол.ц.}}$ | m, г | dm, г | T, с | N | Tcp, с | A0 | Ak |
| 0,01569 | 0,01573 | 1361,60 | 0,05 | 158,793 | 40 | 3,969825 | 30 | 25 |

Из таблицы видно, что $I_{\text{д} + \text{пл}} + I_{\text{пол.ц.} + \text{пл}} - I_{\text{пл}}$ и $I_{\text{пл}+\text{д}+\text{пол.ц.}}$ хорошо сходятся, то есть условие аддитивности выполняется.

Из Таблицы (??) и формул (??), (??) мы можем найти момент инерции полого цилиндра, диска, стержня и полуцилиндров:

$$I_{\text{пол.ц.}} = I_{\text{пл}+\text{пол.ц.}} - I_{\text{пл}} = (5,011 \pm 0,768), \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3},$$

$$I_{\text{д}} = I_{\text{пл}+\text{д}} - I_{\text{пл}} = (2,211 \pm 0,670), \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3},$$

$$I_{\text{ст}} = I_{\text{пл}+\text{ст}} - I_{\text{пл}} = (2,681 \pm 0,687), \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3} \text{ и}$$

$$I_{\text{полуц}} = I_{\text{пл}+\text{полуц}} - I_{\text{пл}} = (1,561 \pm 0,647), \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}.$$

Теперь сравним полученные нами моменты инерции для тел, и их теоретические значения. Для цилиндра (двух полуцилиндров) момент инерции вычисляется так же как и для диска: $I_{\text{полуц}} = \frac{m_{\text{ц}} R_{\text{ц}}^2}{2} = I_{\text{д}}$. Для стержня: $I_{\text{ст}} = \frac{ml^2}{12}$.

Для полого цилиндра же: $I_{\text{пол.ц.}} = \frac{m_{\text{пол.ц.}} (R_{\text{внеш}}^2 + R_{\text{внутр}}^2)}{2}$.

В следующей таблице представленный геометрические характеристики всех тел и их моменты инерций рассчитанные по формулам сверху:

| | | | | | | | |
|---------------------------------|---------------|-------|-----------------|-------|-----------------|-------|-----------------|
| 1 | стержень | l, см | σ_l , см | a, см | σ_a , см | | |
| $I, \text{кг} \cdot \text{м}^2$ | 0,00250 | 17,0 | 0,1 | 2,710 | 0,005 | | |
| 2 | полуцилиндры | R, см | σ_R , см | a, см | σ_a , см | | |
| $I, \text{кг} \cdot \text{м}^2$ | 0,00147 | 5 | 0,005 | 2,7 | 0,005 | | |
| 3 | полый цилиндр | D, см | σ_D , см | a, см | σ_d , см | H, см | σ_H , см |
| $I, \text{кг} \cdot \text{м}^2$ | 0,00478 | 15,9 | 0,01 | 0,435 | 0,005 | 5,650 | 0,005 |
| 4 | диск | D, см | σ_D , см | a, см | σ_a , см | h, см | σ_h |
| $I, \text{кг} \cdot \text{м}^2$ | 0,00212 | 17,03 | 0,01 | 0,350 | 0,005 | 2,6 | 0,005 |

4.5 Зависимость момента инерции системы тел от их расположения. График зависимости $I(h^2)$

Определим зависимость момента инерции системы двух тел от их взаимного расположения. Для этого располагая грузы, как показано на рис.2, получим зависимость от расстояния. Затем Используя формулу ??, определим зависимость $I(h^2)$.

Полученные результаты измерений занесем в таблицу снизу соответственно. Основываясь на результатах таблицы (??), построим график зависимости $I(h^2)$ (Рис. ??).

| парал | сдвиг | T, с | N | Tср, с | h, см | dh, см | h^2 , м ² | I, кг*м ² |
|-------|-----------------|---------|----|--------|-------|--------|------------------------|----------------------|
| 1 | 2h = 4 деления | 95,043 | 30 | 3,168 | 2 | 0,008 | 0,0004 | 0,01038 |
| 2 | 2h = 8 делений | 112,405 | 35 | 3,212 | 4 | 0,016 | 0,0016 | 0,01066 |
| 3 | 2h = 12 делений | 99,983 | 30 | 3,333 | 6 | 0,024 | 0,0036 | 0,01148 |
| 4 | 2h = 16 делений | 123,285 | 35 | 3,522 | 8 | 0,032 | 0,0064 | 0,01283 |
| 5 | 2h = 20 делений | 111,021 | 30 | 3,701 | 10 | 0,04 | 0,01 | 0,01416 |
| 6 | 2h = 24 деления | 140,084 | 36 | 3,891 | 12 | 0,048 | 0,0144 | 0,01565 |
| 7 | 2h = 28 делений | 123,652 | 30 | 4,122 | 14 | 0,056 | 0,0196 | 0,01756 |
| перп | 0 делений | 93,448 | 30 | 3,115 | 0 | 0 | 9,703 | 0,01003 |
| 1 | 2h = 4 деления | 97,379 | 30 | 3,246 | 2 | 0,008 | 0,0004 | 0,01089 |
| 2 | 2h = 8 делений | 101,884 | 30 | 3,396 | 4 | 0,016 | 0,0016 | 0,01192 |
| 3 | 2h = 12 делений | 107,324 | 30 | 3,577 | 6 | 0,024 | 0,0036 | 0,01323 |
| 4 | 2h = 16 делений | 112,717 | 30 | 3,757 | 8 | 0,032 | 0,0064 | 0,01459 |
| 5 | 2h = 20 делений | 121,002 | 30 | 4,033 | 10 | 0,04 | 0,01 | 0,01682 |
| 6 | 2h = 24 деления | 112,58 | 26 | 4,330 | 12 | 0,048 | 0,0144 | 0,01938 |

Таблица 3: Зависимость момента инерции системы от расстояния

Рис. 2: Графики зависимости $I(h^2)$

По левому графику понятно, что $I = kh^2 + b$. Тогда b – момент инерции платформы + полуцилиндров ($I_{пл} + I_{цил}$), т.е. $b = I_{пл} + \frac{m_{цил}R^2}{2}$.

По теореме Гюйгенса-Штейнера должно выполняться:

$$(I - I_{\text{пл}})I'_{\text{цил}} = m_{\text{цил}}h^2 + I_{\text{цил}} \Leftrightarrow I = m_{\text{цил}}h^2 + I_{\text{цил}} + I_{\text{пл}}$$

,т.е. для подтверждения формулы Гюйгенса-Штейнера необходимо показать, что:

$$k = m_{\text{цил}} \text{ и } b = I_{\text{цил}} + I_{\text{пл}}$$

Для вычисления коэффициентов k и b (левого графика) воспользуемся методом наименьших квадратов:

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 1,534, \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^2},$$

$$b = \langle y \rangle - k \langle x \rangle \approx 0,01016, \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

где $x = h^2$, $y = I$.

Случайные погрешности вычисления k и b можно найти по следующим формулам:

$$\sigma_k^{\text{случ}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2} \approx 0,026, \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^2},$$

$$\sigma_b^{\text{случ}} = \sigma_k^{\text{случ}} \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 0,00004, \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Систематическая погрешность вычисления коэффициентов определяется следующим соотношением:

$$\sigma_b^{\text{сист}} = b \sqrt{(\varepsilon_I)^2 + (\varepsilon_{h^2})^2} \approx b \cdot \varepsilon_I \approx 0,00036, \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Тогда полную погрешность вычисления коэффициентов подсчитываем по следующей формуле:

$$\sigma_b = \sqrt{(\sigma_b^{\text{случ}})^2 + (\sigma_b^{\text{сист}})^2} \approx 0,00036, \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Таким образом $k = (1,534 \pm 0,026)\text{кг}$ неплохо ($3,5\sigma_k$) совпадает с $m_{\text{цил}} = 1442 \text{ г}$ и $b = (10,16 \pm 0,36) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ хорошо (σ_b) совпадает с $I_{\text{пл}} + I_{\text{цил}} = 10,03 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Значит теорема Гюйгенса-Штейнера выполняется.

5 Вывод

С помощью трифилярного подвеса можно определять момент инерции тел, момент инерции которых больше момента инерции самой платформы, с достаточно большой точностью. В проведенном эксперименте моменты инерции тел были определены с ε_I от 15% до 40%. Такая погрешность обусловлена несовершенством датчика фиксирующего колебания и человеческим фактором.

Мы экспериментально доказали аддитивность моментов инерции с помощью различных тел.

Полученная зависимость $I(h^2)$ аппроксимируется линейной зависимостью, что подтверждает формулу Гюйгенса-Штейнера ($I = I_c + Mh^2$, где I – момент инерции тела, I_c – момент инерции тела относительно центра, M – масса тела, а h – расстояние между двумя осями, в нашем случае – между осью вращения и половинками диска).