I. 25.1 (a)

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4-3x^3+4x^2-5x+6 & x^2-3x+1 \\
-\underline{2x^4-6x^3+2x^2} & 2x^2+3x+11 \\
\qquad 3x^3+2x^2-5x & \\
\qquad -\underline{3x^3-9x^2+3x} & \\
\qquad\qquad 11x^2-8x+6 & \\
\qquad\qquad -\underline{11x^2-33x+11} & \\
\qquad\qquad\qquad 25x-5 &
\end{array}
$$

$$2x^4-3x^3+4x^2-5x+6=(x^2-3x+1)(2x^2+3x+11)$$

$$+25x-5$$

26.1 (a)

$$
\begin{array}{l|l}
x^4-2x^3+4x^2-6x+8 & x-1 \\
-\underline{x^4-x^3} & x^3-x^2+3x-3 \\
\quad -x^3+4x^2 & \\
\quad -\underline{-x^3+x^2} & \\
\qquad 3x^2-6x & \\
\qquad -\underline{3x^2-3x} & \\
\qquad\quad -3x+8 & \\
\qquad\quad -\underline{-3x+3} & \\
\qquad\qquad 5 &
\end{array}
$$

$$x^4-2x^3+4x^2-6x+8=\cancel{(x^3-x^2+3x)(x-1)-3x+8}$$

$$(x^3-x^2+3x-3)(x-1)+5$$

26.4 $\quad ?\, a$

$P(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$

-1 входит ≥ 2 раза.

$P(-1) = 0$

$-1 - a + a + 1 = 0 \quad \checkmark$

$P(x) = (x+1)^2 (H(x))$

$H(x) = x^3 + bx^2 + cx + 1$

$(x^2+2x+1)(x^3+bx^2+cx+1) = x^5 - ax^2 - ax + 1$

$\qquad \parallel$

$(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) - ax(x+1)$

$\qquad \parallel$

$(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - (a+1)x + 1)$

$(x+1)(x^3 + bx^2 + cx + 1) = x^4 - x^3 + x^2 - (a+1)x + 1$

$$\begin{cases} 1 + b = -1 \\ b + c = 1 \\ 1 + c = -(a+1) \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -2 \\ c = 3 \\ a = -5 \end{cases}$$

Отв.: $\underline{a = -5}$

263 (a) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8, \quad x_0 = 2$

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 & x-2 \\
\hline
-\ x^5 - 2x^4 & x^4 - 3x^3 + x^2 + 4 \\
\quad -3x^4 + 7x^3 & \\
\quad -\ -3x^4 + 6x^3 & \\
\qquad x^3 - 2x^2 & \\
\qquad -\ x^3 - 2x^2 & \\
\qquad\quad 0 + 4x & \\
\qquad\quad -\ 0 + 0 & \\
\qquad\qquad 4x - 8 & \\
\qquad\qquad -\ 4x - 8 & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 3x^3 + x^2 + 0 + 4 & x-2 \\
\hline
-\ x^4 - 2x^3 & x^3 - x^2 - x - 2 \\
\quad -x^3 + x^2 & \\
\quad -\ -x^3 + 2x^2 & \\
\qquad -x^2 - 0 & \\
\qquad -\ -x^2 + 2x & \\
\qquad\quad -2x + 4 & \\
\qquad\quad -\ -2x + 4 & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - x^2 - x - 2 & x-2 \\
\hline
-\ x^3 - 2x^2 & x^2 + x + 1 \\
\quad x^2 - x & \\
\quad -\ x^2 - 2x & \\
\qquad x - 2 & \\
\qquad -\ x - 2 & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$f(x) = (x-2)^3 (x^2 + x + 1)$

26.8* $P(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$

~~$x > 0 \Rightarrow e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$~~

= Заметим $P(x) \uparrow$ при $x > 0$

$P(x) > 1$ при $x > 0 \Rightarrow$ нет корней > 0

Δ $x < 0$

1) $n = 2k$

$0 < e^x < 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$

$\Rightarrow$ $P_n(x)$ не им. к. при n – чет.

2) $n = 2k+1$

~~$e^x < P_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$~~

$P'_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} > e^x > 0 \quad \forall x < 0$

$\Rightarrow$ $P_n(x) \uparrow$ на $(-\infty; 0]$,

а на $(0, +\infty)$ нет корней. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $P_n(x)$ им. макс. 1 корень,

т. е. не имеет крат. корней.

чтд!

31.1(2) $P_4(x)$: $3, 3, -2, -4$

$$P_4(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$-a = 3+3-2-4 = 0$$

$$b = 3\cdot3 - 3\cdot2 - 4\cdot3 - 3\cdot2 - 3\cdot4 + 2\cdot4 = 9 - 6 - 12 - 6 - 12 + 8 = 17 - 36 = -19$$

$$-c = +4\cdot3\cdot2 + 8\cdot3 - 9\cdot4 - 9\cdot2 = -6$$

$$d = 3\cdot3\cdot2\cdot4 = 72$$

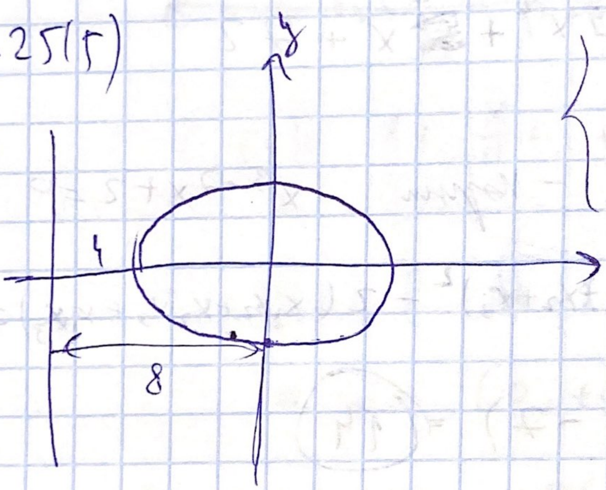
$$P(x) = x^4 - 19x^2 + 6x + 72$$

T1. x_1, x_2, x_3 — корни $x^3 - 7x + 2 = 0$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = 0 - 2(-7) = 14$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3}{x_1x_2x_3} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$$

II . 7 . 25 (5)



$$\begin{cases} \frac{a}{e} = 8 \\ a\left(\frac{1}{e} - 1\right) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 4 \\ e = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$b = a\sqrt{1-e^2} =$$

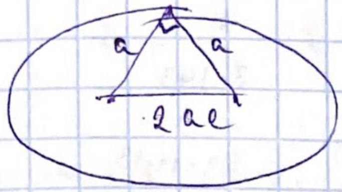
$$= 4\sqrt{1-\frac{1}{4}} = 2\sqrt{3}$$

$$\boxed{\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 1}$$

7.26(4) $e - ?$

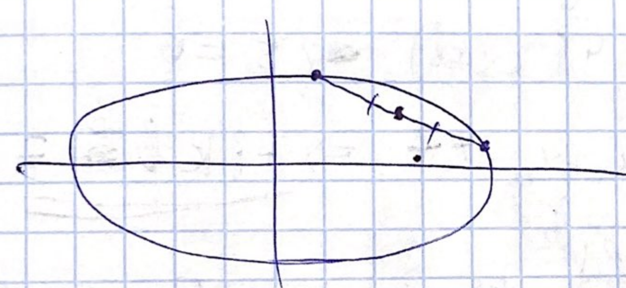
$\sqrt{2} = 2e$

$\boxed{e = \frac{\sqrt{2}}{2}}$



7.29* $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{5/2}\right)^2 = 1$

$A\left(7/2, 7/4\right)$



$$\begin{cases} \left(\frac{x_0}{5}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{5/2}\right)^2 = 1 \\ \left(\frac{7 - x_0}{5}\right)^2 + \left(\frac{7/2 - y_0}{5/2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$$2\left(\frac{7}{5}\right)^2 = 2\left(\frac{7}{5}x_0 + \frac{7}{5}y_0\right)$$

$$\frac{7}{5} = x_0 + y_0$$

$$x_0^2 + 4\left(\frac{7}{5} - x_0\right)^2 = 25$$

$$25x_0^2 + 4\left(7 - 5x_0\right)^2 = 625$$

7.29^*. $y = kx + b$

$$x^2 + 4(kx+b)^2 = 25$$

$$x_1 + x_2 = 7$$

$$\begin{cases} -\dfrac{8kb}{1+4k^2} = 7 \\ \dfrac{7}{4} = \dfrac{7}{2}k + b \end{cases}$$

$$b = \frac{7}{4}(1-2k)$$

$$\frac{8k \cdot \cancel{\frac{7}{4}}(2k-1)}{1+4k^2} = \cancel{7}$$

$$\frac{2k(2k-1)}{1+4k^2} = 1$$

$$4k^2 - 2k = 1 + 4k^2$$

$$k = -\frac{1}{2}$$

$$b = \frac{7}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$x + 2y - 7 = 0$$

7.38 (д) ур-е!

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (-1,3)$$

$y=\pm 2x$ (ас.) $\Rightarrow$ $\frac{b}{a}=2$; $b=2a$

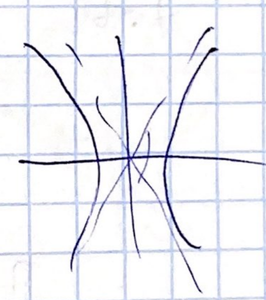
$$\frac{1}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1$$

$$\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{9}{4}\right)=1$$

$$a^2=-\frac{5}{4} \Rightarrow \varnothing.$$

7.40(г)

$$y=\pm \operatorname{tg} 120^\circ x$$



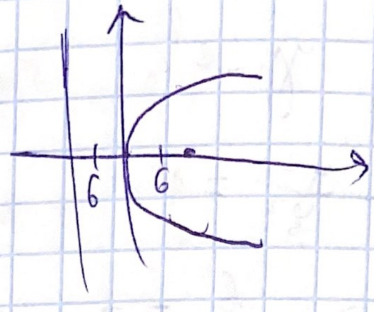
$$y=\pm\sqrt{3}x$$

$$\cancel{\frac{b}{a}=\sqrt{3}=\sqrt{1+e^2}}$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=2$$

7.49.(1) $d_1 d_2 \sim \dfrac{|ay - bx| \cdot |ay + bx|}{a^2 + b^2} = \dfrac{|a^2y^2 - b^2x^2|}{a^2 + b^2} = \dfrac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$

7.54(2)

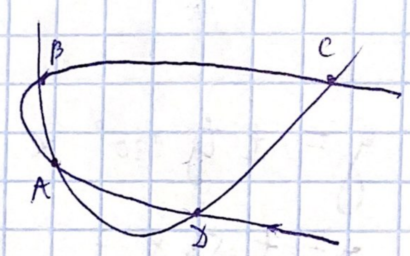


$2px = y^2$

$p = 12$

$\boxed{24x = y^2}$

7.64*



Повернем так, чтобы в нашей СК ур-е имело следующий вид: $\begin{cases} f = y - ax^2 = 0 \\ g = (y-y_0)^2 - bx + c = 0 \end{cases}$

f и $g = 0$ на A, B, C, D

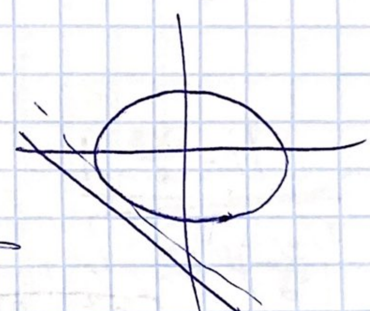
$-f + g$ тоже $= 0$ на A, B, C, D

$-f + g = (y - y_0)^2 \cancel{-} y + ax^2 - bx + c = 0$

это окр.

8.9(1) $\frac{27}{28}x^2 + \frac{9}{7}y^2 = 1$, $3x + 4y + 5 = 0$

$d = \frac{|3x + 4y + 5|}{5}$



$\cancel{25 d^2 = 9x^2 + 16y^2 + 24xy}$

кас.: $\frac{27}{28}x_0 x + \frac{9}{7}y_0 y = 1$

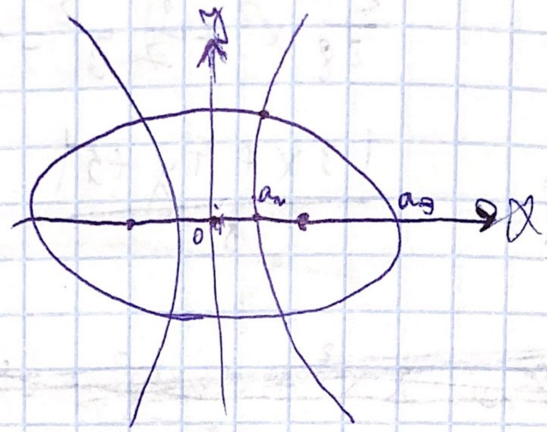
$\frac{3}{4} = \frac{27 x_0}{28} \cdot \frac{7}{9 y_0} = \frac{3}{4}\frac{x_0}{y_0}$

$\Rightarrow x_0 = y_0$

$x_0^2 \left(\frac{27}{28} + \frac{9}{7} \right) = 1$

$x_0^2 = \frac{28}{63} = \frac{4}{9}$; $\boxed{x_0 = y_0 = -\frac{2}{3}}$

8.30(1)



$$\sqrt{a_{\text{э}}^2 - b_{\text{э}}^2} = \sqrt{a_{\text{г}}^2 + b_{\text{г}}^2}$$

$$a_{\text{э}}^2 - b_{\text{э}}^2 = a_{\text{г}}^2 + b_{\text{г}}^2$$

$$\frac{x_0^2}{a_{\text{э}}^2} + \frac{y_0^2}{b_{\text{э}}^2} = \frac{x_0^2}{a_{\text{г}}^2} - \frac{y_0^2}{b_{\text{г}}^2} \Rightarrow \frac{x_0^2(-a_{\text{г}}^2 + a_{\text{э}}^2)}{a_{\text{г}}^2 a_{\text{э}}^2} = \frac{y_0^2(b_{\text{э}}^2 + b_{\text{г}}^2)}{b_{\text{э}}^2 b_{\text{г}}^2} \Rightarrow \frac{x_0}{a_{\text{г}} a_{\text{э}}} = \frac{y_0}{b_{\text{э}} b_{\text{г}}}$$

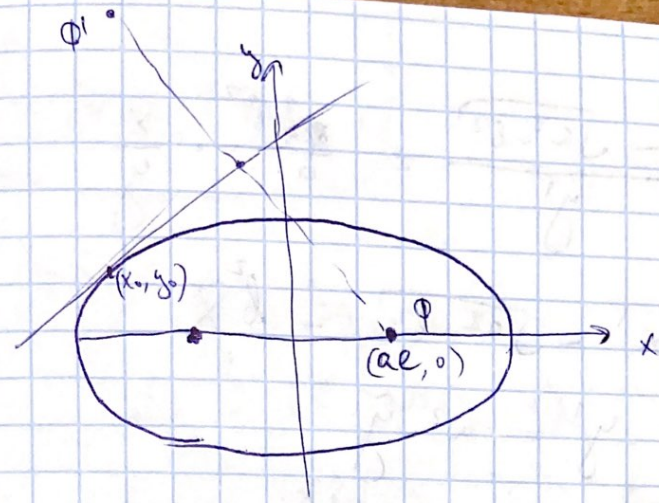
кас. 1: $\frac{x x_0}{a_{\text{э}}^2} + \frac{y y_0}{b_{\text{э}}^2} = 1$

кас. 2: $\frac{x x_0}{a_{\text{г}}^2} - \frac{y y_0}{b_{\text{г}}^2} = 1$

$$\left\langle \frac{x_0}{a_{\text{э}}^2}, \frac{y_0}{b_{\text{э}}^2} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{x_0}{a_{\text{г}}^2}, -\frac{y_0}{b_{\text{г}}^2} \right\rangle =$$

$$= \frac{x_0^2}{a_{\text{э}}^2 a_{\text{г}}^2} - \frac{y_0^2}{b_{\text{э}}^2 b_{\text{г}}^2} = 0. \Rightarrow \text{кас.} \perp \text{ чтд!}$$

T.2 *.



$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

кас.: $$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$$

$$d = \frac{\left|\frac{ae x_0}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}} = \frac{\left|\frac{e x_0}{a} - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}}$$

$$\Phi' = \Phi + \frac{\left\langle \frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2} \right\rangle}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}} \cdot 2d =$$

$$= \Phi + 2 \left| \frac{e x_0}{a} - 1 \right| \left\langle \frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2} \right\rangle =$$

$$= \Phi + 2\left(1 - \frac{e x_0}{a}\right) \left\langle \frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2} \right\rangle =$$

$$= \left\langle ae + 2\frac{x_0}{a^2}\left(1 - \frac{e x_0}{a}\right), 2\left(1 - \frac{e x_0}{a}\right)\frac{y_0}{b^2} \right\rangle$$

$$\begin{cases} x' = \sqrt{a^2 - b^2} + 2\frac{x}{a^2}\left(1 - x\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}\right) \\ y' = \frac{2}{b}\left(1 - x\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \end{cases}$$

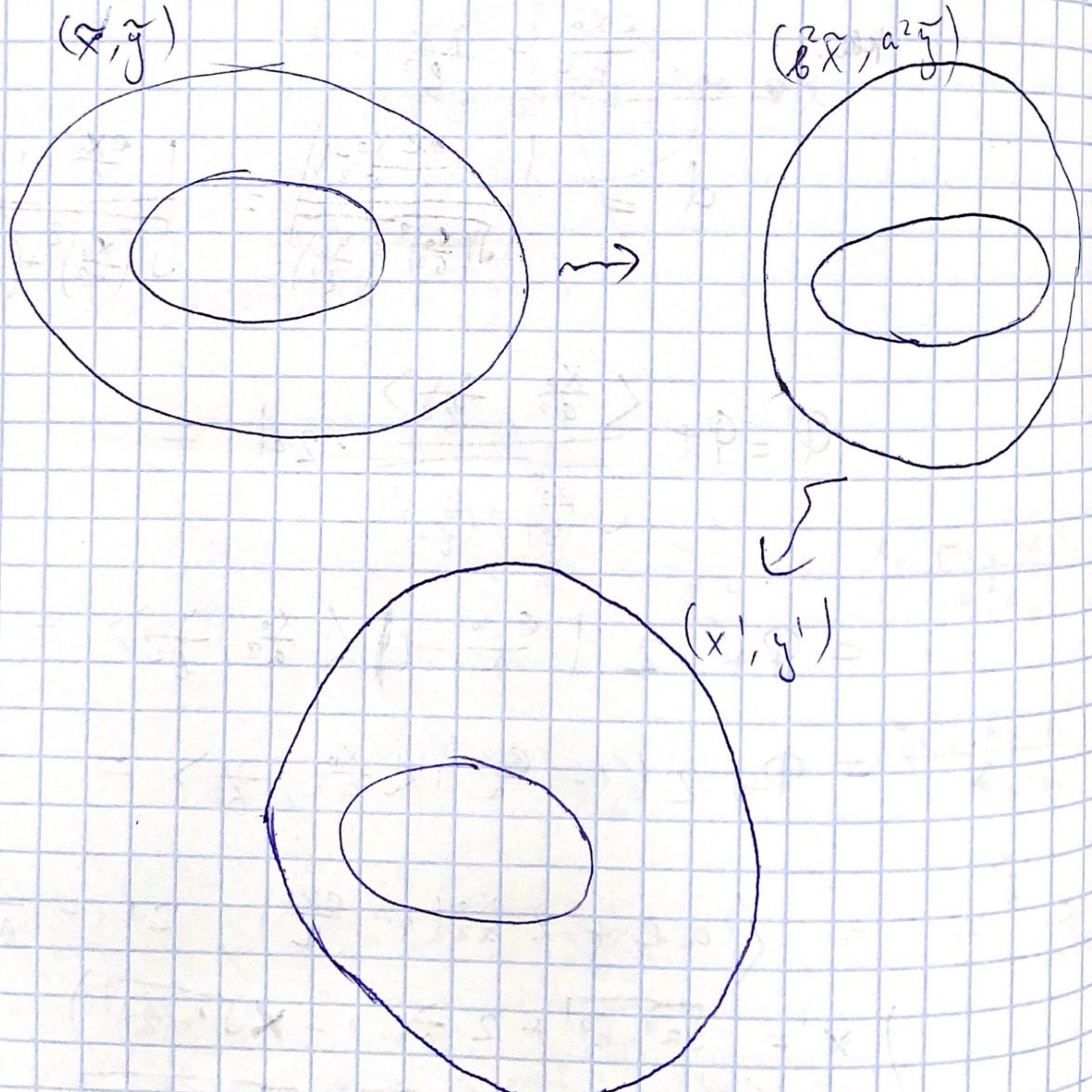
$|x| \leq a$

$$\frac{x' - \sqrt{a^2-b^2}}{y'} = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$$

$$x' - \sqrt{a^2-b^2} = b^2\tilde{x}$$

$$y' = a^2\tilde{y}$$

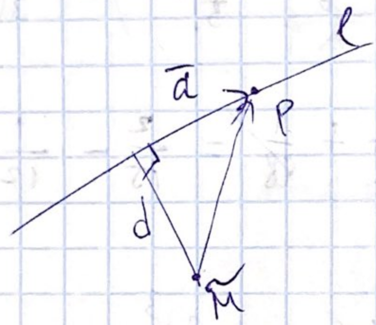
$$\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}} = \frac{x}{y} \Rightarrow (\tilde{x},\tilde{y})$$ — эллипс, подобный (x,y)



III. Поверхности.

10.38. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 3+t \end{cases}$ $\quad M = (1, 1, 2)$

$\bar{a} = (1, 1, 1)^T$



$$\rho^2(\tilde{M}, l) = \tilde{M}P^2 - \left(\frac{(\tilde{M}P, \bar{a})}{|\bar{a}|}\right)^2$$

$P(1, 2, 3)$, $\tilde{M}(x, y, z)$

$\overline{MP} = (0, 1, 2)^T$

$$\rho^2(\tilde{M}, l) = \rho^2(M, l)$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 - \frac{(x+y+z-6)^2}{3} =$$

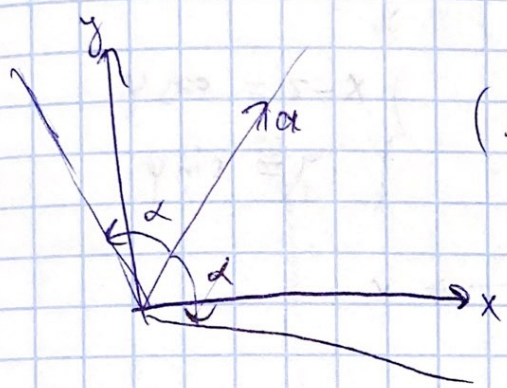
$$= 5 - \frac{3^2}{3} = 2$$

$$\boxed{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{1}{3}(x+y+z-6)^2 + 2}$$

10.39.

$a(1,1,1)$

$\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$



(в проекции)

$\exists$ $\bar{r}$ – рад-век. т. на конусе.

Тогда $\dfrac{(\bar{r}, \bar{a})}{|\bar{r}||\bar{a}|} = \cos\alpha$

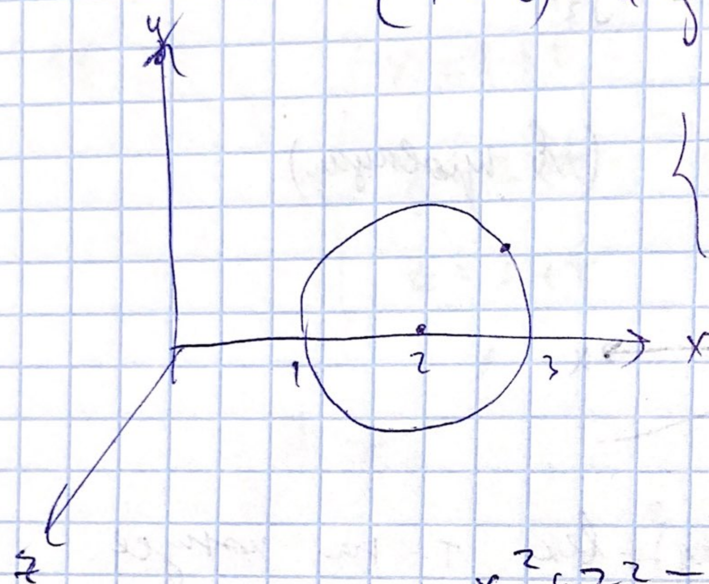
$$\frac{(\bar{r}, \bar{a})}{|\bar{r}|} = 1$$

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2$$

$$\boxed{xy + yz + xz = 0}$$

10.32. $x^2+y^2-4x+3=0$

$$(x-2)^2+y^2=1$$



$$\begin{cases} x-2=\cos\varphi \\ y=\sin\varphi \end{cases}$$

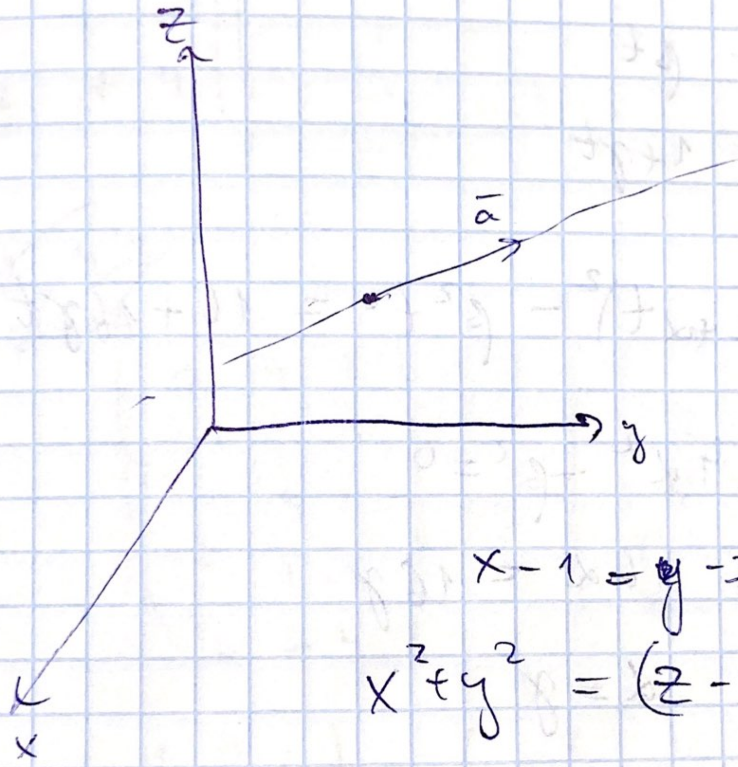
$$x^2+z^2=\left(2\pm\sqrt{1-y^2}\right)^2$$

$$x^2+z^2=4+1-y^2\pm4\sqrt{1-y^2}$$

$$\boxed{\left(x^2+y^2+z^2-5\right)^2=16\left(1-y^2\right)}$$

10.40. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = z = 3 + t \end{cases}$

$a = (1, 1, 1)$



$x - 1 = y - 3 = z - 3$

$x^2 + y^2 = (z - 2)^2 + z^2$

$x^2 + y^2 = 2z^2 - 4z + 4$

$x^2 + y^2 = 2(z-1)^2 + 2$

$x^2 + y^2 - 2(z-1)^2 = 2$

$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{z-1}{1}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow$ однополостный гиперболоид.

10.81. $4x^2 - y^2 = 16z$

$M(2,0,1)$

$$\begin{cases} x = 2 + \alpha t \\ y = \beta t \\ z = 1 + \gamma t \end{cases}$$

$$4(2+\alpha t)^2 - \beta^2 t^2 = 16 + 16\gamma t$$

$$\begin{cases} 4\alpha^2 - \beta^2 = 0 \\ 16\alpha = 16\gamma \end{cases}$$

$$\alpha = \gamma$$

$$\beta = \pm 2\alpha$$

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\bar{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \bar{a} t}$$

IV. 16.18(17)

$$\operatorname{rk}\left\|\begin{matrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \end{matrix}\right\| - ?$$

$$\begin{vmatrix} \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{2} \\ \cancel{-1} & \cancel{-2} & \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 48 + 1 - 40 - 3 + 4 =$$

$$= 8 + 5 - 13 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{rk} A < 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{rk} A = 2$$

16.19(3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 0 \Rightarrow \mathrm{rk}\, A = 2.$

$\alpha \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{rk}\, A = 2$$

16.22.

$$A = \begin{pmatrix} \bigcirc & \vdots \\ \dots & \end{pmatrix}$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ & \dots & & & \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rk}\, A \le 2$$

$$\le 1$$

16.26 (2) $\quad \mathrm{rk}\, A = 1. \Rightarrow \forall a_i \; \exists \lambda_i :$

$$a_i = a_1 \lambda_i$$

Тогда $\quad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} (a_{11}, \dots, a_{1n})$

чтд!

Т3. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

сист. баз. стол: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

сист. баз. стр.: $(2\ 4\ 2),\ (1\ 5\ 3)$

минор:

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 2 = -3 \neq 0$$

V. 15.24.(3) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B) =$

$$= A^2 + \underbrace{AB - BA}_{\neq 0} - B^2$$

если A - не скал. мат.

15.22(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$f(t) = t^2 - 2t + 1$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

15.72. $AB = BA$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A_d} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{A'}$$

$A_d B$: $b_i \to a_{ii} b_i$

15.72. $AB = BA \quad \forall B$.

Возьмем $B = \cancel{E_{ij}}\ E_{ii}$

Тогда $\begin{pmatrix} 0 & A^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_i \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \forall j \neq i \ A_{ij} = 0$.

прот.

$A_{ik} B_{km} = B_{ik} A_{km}$

Приравняем коэф. при B_{lh} : $\sum_i A_{il} = \sum_m A_{hm} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall j,k \quad \sum_i A_{ij} = \sum_i A_{ik} \Rightarrow \quad A_{jj} = A_{kk} \Rightarrow$

A – скал. мат.

T.4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & O & & 1 \end{pmatrix}$

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 1 \\ & O & & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} O \end{pmatrix}$

б) $(E + A)^{11} = E + 11A + \frac{11 \cdot 10}{2} A^2 =$

$= E + 11A + 55A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 55 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 55 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

VI. 15.45. 2)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 4 - 1 - 2 = 1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

15.65. 1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) *

$$X \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

A

$$|A| = -4 - 4 - 4 + 1 - 8 - 8 = -27$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{27} \begin{pmatrix} -6 & -6 & 5 \\ -6 & 5 & -6 \\ 5 & -6 & -6 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 6 & 6 & -5 \\ 6 & -5 & 6 \\ -5 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix} A^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 6 & -5 \\ 6 & -5 & 6 \\ -5 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 50 & 17 & 17 \\ 83 & -16 & 17 \end{pmatrix}$$

VII.

14.15.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ & a_{22} & \vdots \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \prod_{\alpha \le n} a_{\alpha\alpha} + a_{12} a_{23} \cdots a_{n-1,n} \cdot 0 + \cdots + (\ ) \cdot 0$$

$$- 0 = \prod_{\alpha \le n} a_{\alpha\alpha}$$

cqd!

14.29* $1081, 1403, 2093$ и $1541 \underset{23}{\equiv} 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A \underset{23}{\overset{?}{\equiv}} 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 10^3 & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \cdots \\ 10^2 & \lambda_{22} & & \\ 10^1 & \vdots & & \\ 10^0 & \vdots & & \end{pmatrix}, \quad \lambda_{ij} \in \mathbb{Z}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1081 & \cdots \\ 1403 & \text{что-то} \\ 2093 & \\ 1541 & \end{pmatrix}$$

$$\det(AB) \underset{23}{\equiv} 0$$

Можем подобрать λ_{ij} : $\det B \underset{23}{\not\equiv} 0$

Тогда $\det A \underset{23}{\equiv} 0$

чтд!

14.31. 1) $\partial_t \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \partial_t (ad - bc) =$

$$= a'd + ad' - b'c - bc' =$$

$$= \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c' & d' \end{vmatrix}$$

2)* $\partial_t \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & \cdots & \\ & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \epsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \partial_t a_{1\alpha_1} \ldots a_{n\alpha_n} =$

$$= \epsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} a'_{1\alpha_1} \ldots a_{n\alpha_n} + \ldots + \epsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} a_{1\alpha_1} \ldots a'_{n\alpha_n} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a_{21} & & \cdots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} + \ldots + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & & \\ a'_{n1} & & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

19.29.* 1) $Ax = 0 \sim Bx = 0$

$\Updownarrow$ д-ть.

строки одной – лин. комб. строк другой.

$$Ax = 0 \sim Bx = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$Ax \sim Bx$$

$$\Updownarrow$$

$\exists S_1, \dots S_k$ (эл. преобр.) $\quad S_1 \dots S_k A x = Bx$

$$\Updownarrow$$

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n : \quad \sum_{i \le n} \lambda_i (Ax)_i = (Bx)_j \quad \forall j \le n$

$$\Updownarrow$$

строки одной сист. – лин. комб. строк другой

чтд!

2) $Ax = a \sim Bx = b$, сист. совм.

$\Updownarrow$ в-ть.

ур-е одной – лин. комб. ур-й др.

Сист. совм. $\Rightarrow \exists\, x_1, x_2 : \begin{cases} Ax_1 = a \\ Bx_2 = b \end{cases}$

$x \to x_1 + x$

$Ax = 0 \sim Bx = b - a$

$\Updownarrow$

$Ax \sim Bx - b + a$

$\Updownarrow$

$\exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n : \sum\limits_{i \le n} \lambda_i (Ax)_i = (Bx - b + a)_j \quad \forall j \le n$

чтд!

20.22 3)* $\dim V$ - ? базис?

$$\cancel{A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad Ax = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \\ -15 & 5 & -10 \end{pmatrix}$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rk} A = 1$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$\dim V = 2$

Выберем базис: $(1\ 3\ 0)$ и $(0\ 2\ 1)$

они лин. независ. очев.

20.23 (4)*   сост. сист. ур-й, опр. лин. об.

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix} \Longrightarrow \text{~~свобод~~ гиперплоскость.}$$

$v \qquad w$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \exists a_2, a_3, a_4 : \quad x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$

$x = \alpha v + \beta w$

$$\alpha + \beta + a_2(\alpha + 2\beta) + a_3(\alpha + \beta) + a_4(\alpha + 3\beta) = 0$$

1) $\alpha = 0, \beta \neq 0$

$$1 + 2a_2 + a_3 + 3a_4 = 0$$

2) $\alpha \neq 0 \quad \beta = 0$

$$1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$$

3) $-\alpha = \beta \neq 0$

$\cancel{1 + a_2 + 2a_3 + 4a_4 = 0} \qquad a_2 + 2a_4 = 0$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\1 & 1 & 1\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$|A| = 8 + 3 + 6 - 9 - 4 - 4 = 0$

$\Downarrow$

сист. несовм.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha+2\beta \\ \alpha+\beta \\ \alpha+3\beta \end{pmatrix} = 0$$

$$\alpha\underbrace{(a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14})}_{S_{11}} + \beta\underbrace{(a_{11}+2a_{12}+a_{13}+3a_{14})}_{S_{12}} = 0$$

Анал. для II строчки.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}}_{S} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

$\Downarrow$

$|S| = 0$

$$(a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14})(a_{21}+2a_{22}+a_{23}+3a_{24}) =$$
$$= (a_{11}+2a_{12}+a_{13}+3a_{14})(a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24})$$

$$\begin{cases} a_{22}+2a_{24}=0 & \text{или } a_{11}=0 \\ a_{22}+2a_{24}=0 & \text{или } a_{13}=0 \\ a_{21}+a_{23}=a_{24} & \text{или } a_{12}=0 \\ 2a_{21}+a_{22}+2a_{23}=0 & \text{или } a_{14}=0 \\ a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}=0 & a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}=0 \\ a_{11}+2a_{12}+a_{13}+3a_{14}=0 & \dots \end{cases}$$

$a_{22} = -2a_{24}$, $a_{12} = a_{14} = 0$

$\cancel{a_{21} + a_{23} = a_{24}}$

$a_{11} + a_{13} = 0$

$a_{21} + a_{23} = a_{24}$

$\cancel{a_{21} + a_{23}}$] $a_{23} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Т.5*.

$$\begin{pmatrix} r_1 & & r_2 \\ & & \\ r_4 & & r_3 \end{pmatrix}$$

Будем доказывать по инд.

База: $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_4 & r_3 \end{pmatrix}$ очев.

Переход: Пусть верно для матриц $m \times n$. Докажем, что верно и для $(m+1) \times n$.

$$A = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{r_1 \quad - \quad - \quad r_2}}^{n} \\ m+1 \left\{ \begin{pmatrix} r_1 & - & - & r_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a & - & - & b \\ - & - & - & - \\ r_4 & & & r_3 \end{pmatrix} \right. \end{array}$$

a, b – параметры
по ним однозначно
строится
матрица $m \times n$

Нижнюю строчку заполним так, чтобы
каждое число было ср. ар. своих соседей

$$B = \begin{pmatrix} r_1 & \cancel{\quad\quad} & r_2 \\ c & - & d \\ \vdots & & \vdots \\ r_4 & - & r_4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{A+B}{2} = C \; : \quad \underset{(i,j \neq 1,n)}{c_{ij}} = \frac{a_{ij} + b_{ij}}{2}$$

$$a_{ij} = \langle \text{сос}_{a_{ij}} \rangle \qquad b_{ij} = \langle \text{сос}_{b_{ij}} \rangle$$

$$c_{ij} = \left\langle \frac{\text{сос}_{a_{ij}} + \text{сос}_{b_{ij}}}{2} \right\rangle = \langle \text{сос}_{c_{ij}} \rangle$$

Пример: $$\frac{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4,5 & 6 \\ 4 & 5,5 & 8 \end{pmatrix}}{2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1,5 & 3,75 & 4,5 \\ 5,5 & 5,25 & 6,5 \end{pmatrix}$$

$3 \cdot 3,75 = 1,5 + 4,5 + 5,25 = 11,25$ ✓

$\angle$ I строку: $c_{1j} = \frac{1}{2}(a_{1j} + b_{1j})$

$$3a_{1j} = a_{1j-1} + a_{1j+1} + a_{2j}$$
$$3b_{1j} \overset{?}{=} b_{1j-1} + b_{1j+1} + b_{2j}$$

$$\frac{3}{2}b_{1j} + \frac{3}{2}a_{1j} \overset{?}{=} c_{1j-1} + c_{1j+1} + c_{2j} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a_{1j-1} + b_{1j-1} + a_{1j+1} + b_{1j+1} + a_{2j} + b_{2j}\right)$$

$$= \frac{3}{2}a_{1j} + \frac{3}{2}b_{1j} \quad \checkmark.$$

Значит я получил то, что нужно.

Мы доказали, что для $\forall m \in \mathbb{N}$ и фикс. n можно постр. мат. $m \times n$, уд. нашему св-ву.

Аналогично для столбцов. (просто $m \leftrightarrow n$)

Значит мы умеем ~~для~~ строить мат. для $\forall m, n \in \mathbb{N}$.

Докажем ед-ть.

Если $\exists A \neq B$, уд. св-ву. То $\frac{A+B}{2}$ тоже уд. св-ву.

Пр-чие. Значит $\forall r_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, 4}$ $\exists!\, A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$ уд. св-ву.