Ответ:

$$y \sim C\, x^{1/3} e^{-\frac{3}{4}x^{2/3}} \sin\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} x^{\frac{2}{3}} - \frac{\pi}{6}\right)$$

Давайте проверим наш ответ с помощью Wolfram.

$$f(x) = \frac{xy'''}{y} = x\frac{\dfrac{d^3}{dx^3}\left[C\, x^{1/3} e^{-\frac{3}{4}x^{2/3}} \sin\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} x^{\frac{2}{3}} - \frac{\pi}{6}\right)\right]}{C\, x^{1/3} e^{-\frac{3}{4}x^{2/3}} \sin\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} x^{\frac{2}{3}} - \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$f(x) = x\frac{\dfrac{d^3}{dx^3}\left[x^{1/3} e^{-\frac{3}{4}x^{2/3}} \sin\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} x^{\frac{2}{3}} - \frac{\pi}{6}\right)\right]}{x^{1/3} e^{-\frac{3}{4}x^{2/3}} \sin\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} x^{\frac{2}{3}} - \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$f(1) = 1{,}77194$$

$$f(10) = 0{,}935911$$

$$f(10^2) = 0{,}996329$$

$$f(10^3) = 1{,}00003$$

$$f(10^4) = 0{,}999994$$

$$xy''' = y$$

$$\mathfrak{F}\{xy''' = y\}$$

$$i\frac{d}{d\nu}[(i\nu)^3 \hat{y}] = \hat{y}$$

$$\frac{d}{d\nu}[(\nu)^3 \hat{y}] = \hat{y}$$

$$3\nu^2\hat{y} + \nu^3 \frac{d}{d\nu}\hat{y} = \hat{y}$$

$$\frac{d\hat{y}}{\hat{y}} = \frac{1-3\nu^2}{\nu^3} d\nu$$

$$\ln \hat{y} = -\frac{1}{2\nu^2} - 3\ln\nu + C$$

$$\hat{y} = \frac{c}{\nu^3} e^{-\frac{1}{2\nu^2}}$$

$$y = c\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu^3 \exp\left(\frac{1}{2\nu^2} - ix\nu\right)}$$

$$y=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\nu}{\nu^3\exp\left(\frac{1}{2\nu^2}-ix\nu\right)}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{1}{2\nu^2}}}{\nu^3}e^{ix\nu}d\nu\overset{\nu=1/t}{=}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2+ix/t}\,t\,dt\overset{t=sx^{1/3}}{=}$$

$$=x^{2/3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^{2/3}(s^2/2-i/s)}s\,ds$$

Используя метод крутого спуска, мы ищем точки, в которых

$$\frac{d}{ds}\Big(\frac{s^2}{2}-\frac{i}{s}\Big)=0\Rightarrow s^3=-i$$

У нас есть три такие точки: $s_1=e^{-\frac{\pi i}{6}}; s_2=e^{-\frac{5\pi i}{6}}; s_3=i$. Далее мы изменим контур интегрирования в комплексной плоскости следующим образом:

$$-R\to -R-\frac{i}{2}\to R-\frac{i}{2}\to R;\ (R\to\infty)$$

наша идея – направить путь интегрирования через точки $s_{1,2}$. Внутри прямоугольного контура нет полюсов, поэтому, меняя путь, мы не меняем значение интеграла. Теперь вычисление становится простым. Например, для

$$s_1=e^{-\frac{\pi i}{6}}\Rightarrow\frac{d^2}{ds^2}\Big(\frac{s^2}{2}-\frac{i}{s}\Big)\Big|_{s=s_1}=3$$

$$I_1(x)=x^{2/3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^{2/3}(s_1^2/2-i/s_1)}s_1e^{-\frac{3}{2}x^{2/3}(s-s_1)^2}\,ds=$$

$$=x^{2/3}e^{-x^{2/3}(3/4-i3\sqrt{3}/4)-\pi i/6}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{3}{2}x^{2/3}(s-s_1)^2}\,ds=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\,x^{\frac{1}{3}}e^{-\frac{3}{4}x^{2/3}}e^{i\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}x^{\frac{2}{3}}-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$s_2=e^{-\frac{5\pi i}{6}}\Rightarrow I_2(x)=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\,x^{1/3}e^{-\frac{3}{4}x^{2/3}}e^{i\left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}x^{\frac{2}{3}}-\frac{5\pi}{6}\right)}$$

Тогда

$$y\sim I(x)=I_1(x)+I_2(x)=2i\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\,x^{1/3}e^{-\frac{3}{4}x^{2/3}}\sin\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}x^{\frac{2}{3}}-\frac{\pi}{6}\right)$$

Нашему ДУ удовлетворяет y с точностью до константы
Сделаем вывод:

$$y\sim C\,x^{1/3}e^{-\frac{3}{4}x^{2/3}}\sin\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}x^{\frac{2}{3}}-\frac{\pi}{6}\right)$$

Давайте проверим правильность асимптотики нашего интеграла с помощью Wolfram.

$$A = \frac{x^{2/3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{2/3}(s^2/2 - i/s)} s\, ds}{2i\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\, x^{1/3} e^{-\frac{3}{4}x^{2/3}} \sin\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}x^{\frac{2}{3}} - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{x^{1/3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{2/3}(s^2/2 - i/s)} s\, ds}{2i\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\, e^{-\frac{3}{4}x^{2/3}} \sin\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}x^{\frac{2}{3}} - \frac{\pi}{6}\right)} \overset{x^{1/3}=\lambda}{=}$$

$$= \frac{\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2(s^2/2 - i/s)} s\, ds}{2i\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\, e^{-\frac{3}{4}\lambda^2} \sin\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\lambda^2 - \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$A(\lambda = 5) = 1.021$$

$$A(\lambda = 6) = 0.998$$

$$A(\lambda = 7) = 1.018$$

$$A(\lambda = 8) = 1.004$$

$$A(\lambda = 9) = 1.003$$

$$A(\lambda = 10) = 1.005$$

Теперь давайте проверим, удовлетворяет ли наш ответ изначальному ДУ.

$$f(x) = \frac{xy'''}{y} = x\frac{\frac{d^3}{dx^3}\left[C\, x^{1/3} e^{-\frac{3}{4}x^{2/3}} \sin\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}x^{\frac{2}{3}} - \frac{\pi}{6}\right)\right]}{C\, x^{1/3} e^{-\frac{3}{4}x^{2/3}} \sin\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}x^{\frac{2}{3}} - \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$f(x) = x\frac{\frac{d^3}{dx^3}\left[x^{1/3} e^{-\frac{3}{4}x^{2/3}} \sin\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}x^{\frac{2}{3}} - \frac{\pi}{6}\right)\right]}{x^{1/3} e^{-\frac{3}{4}x^{2/3}} \sin\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}x^{\frac{2}{3}} - \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$f(1) = 1{,}77194$$

$$f(10) = 0{,}935911$$

$$f(10^2) = 0{,}996329$$

$$f(10^3) = 1{,}00003$$

$$f(10^4) = 0{,}999994$$