1 Задача 4.1

Если некоторое выпуклое трехмерное тело спроектировать на плоскость, характеризуемую нормалью n, то площадь получившейся проекции будет равна S(n). Выразите среднее по направлениям нормали $< S(\vec{n}) >_{\vec{n}}$ через интегральные характеристики тела (например, такие, как объем, площадь поверхности, ее средняя кривизна, наибольшее или наименьшее сечение, и т.п.)
Ответ: $< S(\vec{n}) >_{\vec{n}} = \frac{S}{4}$, где S - площадь поверхности тела.

Решение

$S(\vec{n}) = \int_D \vec{n} d\vec{S} = \int_{D^*} \vec{n^*} d\vec{S} = S(\vec{n^*})$, где $\vec{n^*} = -\vec{n}$,

а D и D^* – противоположные части поверхности тела

$2S(\vec{n}) = S(\vec{n}) + S(-\vec{n}) = \oint \vec{n} d\vec{S}$

Рассмотрим площадку S с единичным вектором нормали $\vec{N}$

Тогда $S(\vec{n}) = \mid \vec{n} \cdot \vec{N} \mid S$

$< S(\vec{n}) >_{\vec{n}} = \frac{1}{4\pi} \int S(\vec{n}) \mid d\Omega \mid = \frac{1}{4\pi} \iint S(\vec{n}) \mid \cos\theta d\phi d\theta \mid, \phi \in (0, 2\pi), \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$< S(\vec{n}) >_{\vec{n}} = \frac{1}{4\pi} \iint \mid \vec{n} \cdot \vec{N} \mid \cdot S \cdot \mid \cos\theta \, d\phi \, d\theta \mid$

$\vec{n} = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta)$

Так как мы усредняем по всем направлениям, $< S(\vec{n}) >_{\vec{n}}$ не зависит от $\vec{N}$.

Выберем $\vec{N} = (0, 0, 1)$

Тогда $< S(\vec{n}) >_{\vec{n}} = \frac{S}{4\pi} \iint \mid (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta) \cdot (0, 0, 1) \cos\theta \, d\phi \, d\theta \mid$

$< S(\vec{n}) >_{\vec{n}} = \frac{S}{4\pi} \iint \mid \sin\theta\cos\theta \, d\phi \, d\theta \mid = \frac{S}{4\pi} \iint \mid \sin\theta\cos\theta \, d\phi \, d\theta \mid$

$< S(\vec{n}) >_{\vec{n}} = \frac{S}{8\pi} \iint \mid \sin 2\theta \, d\phi \, d\theta \mid = \frac{S}{8\pi} \cdot 2\pi \cdot \frac{-2\cos 2\theta}{2} \Bigg|_0^{\frac{pi}{2}} = \frac{S}{2}$

Разобьем поверхность тела на много маленьких площадок $d\vec{S}$

$< dS(\vec{n}) >_{\vec{n}} = \frac{dS}{2}$

$\int < dS(\vec{n}) >_{\vec{n}} = \int_S \frac{dS}{2} = \frac{S}{2}$

С другой стороны из 3 строчки следует, что $\int < dS(\vec{n}) >_{\vec{n}} = 2 < S(\vec{n}) >_{\vec{n}}$

Значит $< S(\vec{n}) >_{\vec{n}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{S}{2} = \frac{S}{4}$

Ответ: $< S(\vec{n}) >_{\vec{n}} = \frac{S}{4}$