1 Задача 2.3

В последовательности вещественных чисел $a_0,a_1,a_2...,a_N$ первые два члена (a_0,a_1) заданы, а последующие $(a_0,a_1,a_2...,a_N)$ определяются с помощью рекуррентного соотношения

$$a_{n+1}+a_{n-1}=\arcsin 2a_n$$

Последовательность обрывается в тот момент, когда дальнейшее применение этого соотношения становится невозможным ($|a_N|>1/2$, так что арксинус неопределен). Таким образом, длина последовательности $\mathrm{N}(a_0,a_1)$ полностью определяется ее начальными условиями (т.е., первыми двумя членами).
1. Покажите, что при некоторых особых начальных условиях (a_0^*,a_1^*) последовательность бесконечна: $N(a_0^*,a_1^*)=\infty$. Как выглядит множество особых точек (a_0^*,a_1^*) на плоскости начальных условий (a_0,a_1)? Что это: одна точка, множество изолированных точек, линии, целые области?

2. Как выглядят достаточно далекие члены в бесконечной последовательности?

3. По какому закону расходится величина $\mathrm{N}(a_0,a_1)$ при приближении точки (a_0,a_1) к какой-либо особой точке (a_0^*,a_1^*)?

4. Опишите далекие члены в очень длинной, но конечной последовательности $(N\gg 1)$

Решение

$\frac{d}{dx}(\arcsin x - x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\geq 0$ при $0\leq x<1$ и $\arcsin 0-0=0$, значит $\arcsin x\geq x$ при $0\leq x<1$

Также $\arcsin x\leq x$ при $-1<x\leq 0$

Тогда $|\arcsin x|\geq|x|$

Пусть $\exists N:\begin{cases}a_N<0\\ a_{N-1}\geq 0\end{cases}$

Тогда $a_{N+1}=\arcsin(2a_N)-a_{N-1}\leq 2a_N-a_{N-1}<a_N<0$

$a_{N+2}=\arcsin(2a_{N+1})-a_N\leq 2a_{N+1}-a_N=a_{N+1}+(a_{N+1}-a_N)<a_{N+1}<a_N<0$

Мы только что показали, что $a_{N+1}<a_N<0\Rightarrow a_{N+2}<a_{N+1}<a_N<0$

Тогда $\forall n\geq N\ a_{n+1}<a_n$, то есть $\{a_n\}\downarrow$

Значит либо $\{a_n\}$ обрывается, либо имеет конечный предел: $-\frac{1}{2}\leq\lim\limits_{n\to\infty}a_n<0$

Предположим, что предел существует и конечен и равен x.

Тогда $x + x = \arcsin 2x \Rightarrow x = 0$. Противоречие. Значит $\{a_n\}$ обрывается.

Пусть $\exists N : \begin{cases} a_N < 0 \\ a_{N-1} \geq a_N \end{cases}$

Тогда $a_{N+1} = \arcsin(2a_N) - a_{N-1} < 2a_N - a_{N-1} \leq a_N < 0$

$a_{N+2} = \arcsin(2a_{N+1}) - a_N < 2a_{N+1} - a_N = a_{N+1} + (a_{N+1} - a_N) \leq a_{N+1} < a_N < 0$

Мы только что показали, что $a_{N+1} < a_N < 0 \Rightarrow a_{N+2} < a_{N+1} < a_N < 0$

Тогда $\forall n \geq N \; a_{n+1} < a_n$, то есть $\{a_n\} \downarrow$

Значит либо $\{a_n\}$ обрывается, либо имеет конечный предел: $-\frac{1}{2} \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n < 0$

Предположим, что предел существует и конечен и равен x.

Тогда $x + x = \arcsin 2x \Rightarrow x = 0$. Противоречие. Значит $\{a_n\}$ обрывается.

Иначе $\forall N \; \left[\begin{array}{l} a_N \geq 0 \\ a_{N-1} < a_N \end{array}\right.$

Пусть $\exists N : a_N < 0$. Тогда $0 > a_N > a_{N-1}$.

$a_{N-1} < 0 \Rightarrow a_{n-1} > a_{N-2}$.

Значит $\forall n \leq N \; 0 > a_n > a_{n-1} > \cdots > a_0$, то есть $\{a_n\} \uparrow$ до $n = N$

$A = \{N | a_N < 0\}$. Предположим, что A конечно. Возьмем $M = \sup A$.

Тогда $\forall m \leq M \; \{a_m\} \uparrow$ и $a_m < 0$

$\forall n > M \; a_n \geq 0$

$a_{M+1} > a_M$

$a_{M+2} = \arcsin(2a_{M+1}) - a_M \geq 2a_{M+1} - a_M = a_{M+1} + (a_{M+1} - a_M) > a_{M+1}$

$a_{M+3} = \arcsin(2a_{M+2}) - a_{M+1} \geq 2a_{M+2} - a_{M+1} = a_{M+2} + (a_{M+2} - a_{M+1}) > a_{M+2}$

Тогда $\{a_m\} \uparrow$ при $m \geq M$

Значит либо $\{a_m\}$ обрывается, либо имеет конечный предел: $0 < \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \frac{1}{2}$

Но если этот предел существует, то он равен 0. Противоречие. Значит $\{a_m\}$ обрывается.

Тогда осталось 2 варианта:

1) $\forall n \; a_n \geq 0$

Пусть $\exists N : a_N > a_{N-1}$

Тогда $a_{N+1} = \arcsin(2a_N) - a_{N-1} \geq 2a_N - a_{N-1} = a_N + (a_N - a_{N-1}) > a_N$

Аналогичными рассуждениями приходим к тому, что $\{a_n\} \uparrow$ и последовательность обрывается.

Иначе $\forall n \; a_n \leq a_{n-1}$

Тогда $\{a_n\} \downarrow$ и ограничена снизу, значит если такая ситуация возможна, то по т. Вейерштрасса $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

2) $\forall N \begin{cases} a_N < 0 \\ a_{N-1} < a_N \end{cases}$

Аналогичными рассуждениями приходим к тому, что $\{a_n\} \uparrow$ и ограничена сверху, значит если такая ситуация возможна, то по т. Вейерштрасса $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Теперь поймем, возможны ли вообще последние 2 случая.

При больших n $a_n \ll 1 \Rightarrow a_{n+1} + a_{n-1} = \arcsin 2a_n \sim 2a_n$

$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} \Rightarrow \{a_n\}$ – арифметическая прогрессия

Значит если $\forall n$ $a_n \neq a_{n+1}$, то $\{a_n\}$ расходится(обрывается), так как $a_n \simeq a_0 + (a_1 - a_0)n$ и $\exists N :\mid a_N \mid > \frac{1}{2}$.

Тогда единственный возможный вариант $a_n \equiv 0$

2. Достаточно далекие члены в бесконечной последовательности выглядят как арифметическая прогрессия или тождественный ноль

3. При приближении точки (a_0,a_1) к нашей особой точке (0,0) несложно оценить, по какому закону расходится величина N(a_0,a_1):

$a_N \simeq a_0 + (a_1 - a_0)N = \frac{1}{2} \Rightarrow N \propto \mid \frac{\frac{1}{2} - a_0}{a_1 - a_0} \mid$

4. Далекие члены в очень длинной, но конечной последовательности($N \gg 1$):

$a_n \simeq a_0 + (a_1 - a_0)n$

(Тут используем формулу для малых a_n, так как иначе последовательность оборвется довольно быстро)