

M. Kl. Mex. u T. gun. cue.

## Лекция 1.

Понятие динамической системы. Определение gun. cue.

Опн. dim. cue. — мат. модель некоторых процессов, где кот. определяет конечное составное в оператор законом во времени.

$\vec{x}$  — состояние  $\vec{x} \in X$  (уп-бо состояний)  $\dim X = n$   
(раз-раз-бо)

$$f: X \xrightarrow{f} X, t - время \quad t \in T = \mathbb{R}^1 \cup \{0, 1, 2, \dots\}$$

$t \in \{0, 1, 2, \dots\}$   $\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n)$

начальное

Фундаментал:  $X \times T \rightarrow X$

- 1) линейн.
- 2) нелинейн.
- 3) квантиф. методы

D. cue.  $t$ -во времени.  $\dim X = 1$

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^1$$

Пример 1.  $\dot{x} = x^2 \sin^2 x, \quad x(0) = \frac{\pi}{2}, \quad x(t) = ?$

Пример 2. дин-коэф. нонли.

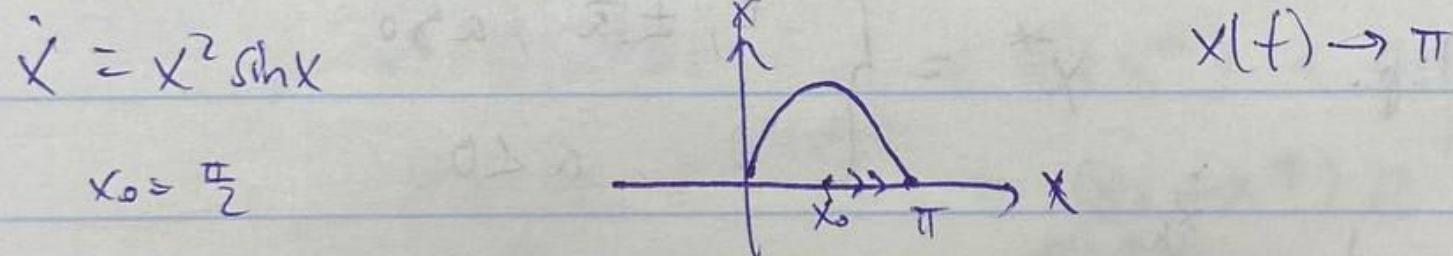
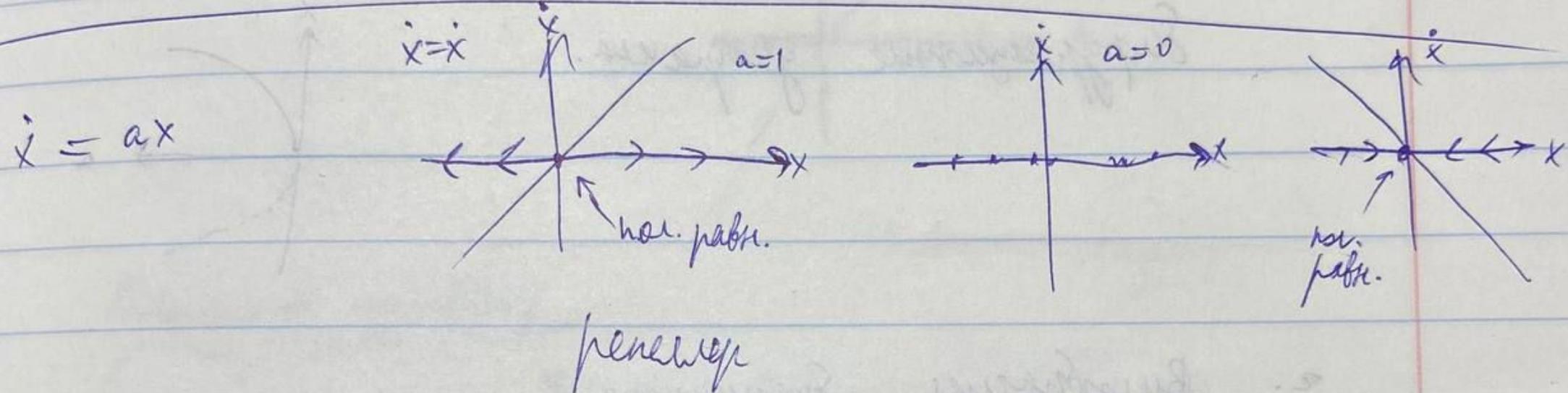
$$x_{n+1} = \lambda x_n$$

$$\dot{x} = \alpha x$$

$$\lambda > 0 = \text{const}$$

$$x = C e^{\alpha t}, \quad x(0) = x_0$$

$$x = x_0 e^{\alpha t}$$

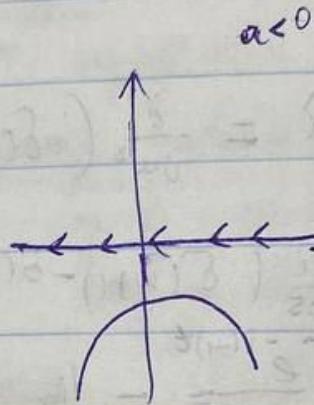
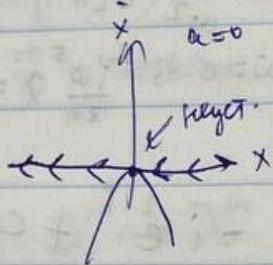
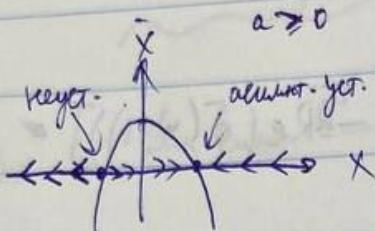


Бифуркация - квазиизотропика ~~существование~~ гладких нордикер  
акт - это матрица из симм. направлений.

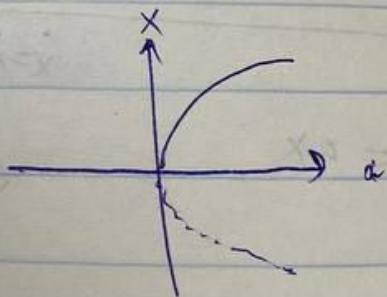
Техн. кривые дин. б. огнестр. оруж.

1. Сегментистическая Бифуркационная  $\dot{x} = a - x^2$

П.п.  $\dot{x} = 0$   $x^* = \begin{cases} \pm\sqrt{a}, & a \geq 0 \\ \emptyset, & a < 0 \end{cases}$



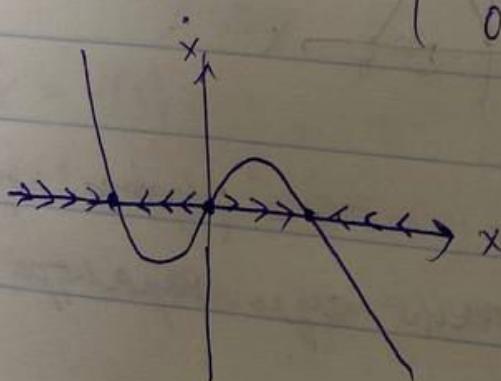
Бифуркационные квадратичные.



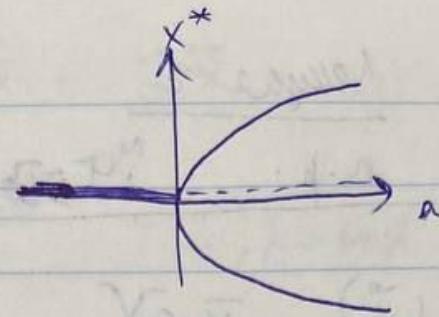
2. Вихревая Бифуркационная

$\dot{x} = ax - x^3$

П.п.  $\dot{x} = 0$   $x^* = \begin{cases} 0, \pm\sqrt{a}, & a > 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}$

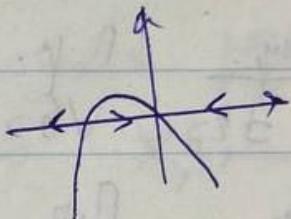
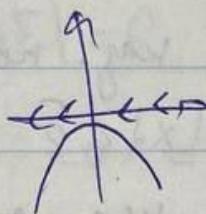
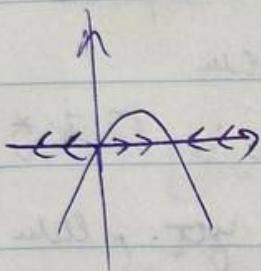


Дис. грав.

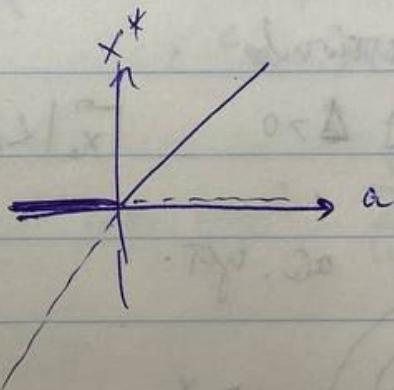


Трансверс. дис.

$$\dot{x} = x(a-x)$$



Дис. грав.



уст. и неуст.  
неподатл  
метастаб

Локальное уравнение.

$$x = x^* + \varepsilon$$

$$\dot{x}^* = 0 = f(x^*)$$

$$\dot{x} = \dot{\varepsilon} = f(x^* + \varepsilon) = \varepsilon f'(x^*) + o(\varepsilon)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{f'(x^*)t} = (x_0 - x^*) e^{f'(x^*)t}$$

$$x = x^* + (x_0 - x^*) e^{f'(x^*)t}$$

$f'(x^*) < 0$ , то  $x^*$  - асимпт. уст.

$f'(x^*) > 0$ ,  $x^*$  - неуст. н.п.

$f'(x^*) = 0$  нул. уравн. неуст.

Лекция 2

SGT-PB

n.p.

Уст.-тв. по лин. методам.

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad \bar{x} \in X \quad \dim X = n$$

Оп.  $f(x^*) = 0 \Rightarrow x^* - \text{n.p.}$  Рассмотрим  $x^* = 0$

Оп. П.п.  $x^* = 0$  наз. уст. (no Langrange)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall |x_0| < \delta \Rightarrow |\bar{x}(x_0, t)| < \varepsilon \quad \forall t > 0$$

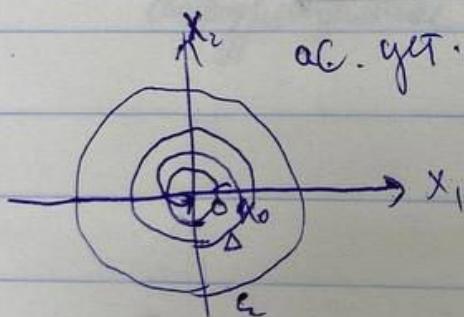
Оп. П.п.  $x^* = 0$  наз. неуст., если

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists |\bar{x}| < \delta \quad \exists t^* > 0 : |\bar{x}(x_0, t^*)| \geq \varepsilon$$

Оп. П.п.  $x^* = 0$  наз. асимм. уст. + если

1) устойчив

$$2) \exists \Delta > 0 : |\bar{x}_0| < \Delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(x_0, t) = 0$$



$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(0) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}^T} \Big|_0 \bar{x} + o(\bar{x})$$

$$y = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}^T}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\text{B. nmr. hynode. } \dot{\bar{x}} = \gamma \bar{x}$$

$$\bar{x} = \bar{u} e^{\lambda t} \quad \bar{u}, \lambda = \text{const}$$

$$\lambda \bar{u} e^{\lambda t} = \gamma \bar{u} e^{\lambda t}$$

$$[\gamma - \lambda E] \bar{u} = 0$$

$$\bar{u} = 0$$

$$|\gamma - \lambda E| = 0 \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ - reż. eigen}$$

$$[\gamma - \lambda_i E] \bar{u}_i = 0 \Rightarrow \bar{u}_i \neq 0 \quad \lambda_1 \bar{u}_1, \dots, \lambda_n \bar{u}_n$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n c_i \bar{u}_i e^{\lambda_i t} \quad c_1, \dots, c_n = \text{const}$$

$$\text{Df. 1} \quad \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n - \text{nmr. niezab.} \quad \sum_{i=1}^n c_i \bar{u}_i = 0$$

$$c_i = 0 \quad \forall i$$

$$\gamma \sum_{i=1}^n c_i \bar{u}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n c_i \gamma \bar{u}_i = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i \bar{u}_i = 0$$

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^n c_i \bar{u}_i = 0$$

$$\sum_{i=2}^n c_i (\lambda_i - \lambda_1) \bar{u}_i = 0 \quad (\cancel{\lambda_2 - \lambda_1})$$

$$\gamma \sum_{i=2}^n c_i (\lambda_i - \lambda_1) \lambda_i \bar{u}_i = 0$$

$$\lambda_2 \sum_{i=2}^n c_i (\lambda_i - \lambda_1) \bar{u}_i = 0 \quad \sum_{i=2}^n c_i (\lambda_i - \lambda_1) \lambda_i \bar{u}_i = 0$$

$$\sum_{i=3}^n c_i (\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_2) \bar{u}_i = 0$$

$$c_n (\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2) \dots (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \bar{u}_n = 0$$

$$c_n = 0$$

t.e.  $\sum_{i=1}^n c_i \bar{u}_i = 0 \Rightarrow c_i = 0 \quad \forall i = 1, n$

Thm. 2  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n c_i \bar{u}_i e^{\lambda_i t}$  - free beginning

plur. met.  $\dot{x} = \sum \bar{x}_i$

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0 = \sum c_i \bar{u}_i \Leftrightarrow [\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \bar{x}_0 \Rightarrow$$

nachsp.

3. plur.  $c_1, \dots, c_n \quad \forall \bar{x}_0 \in X$

Zusammenfassung.  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n c_i (\bar{u}_i + \bar{u}_i t + \dots) e^{\lambda_i t} \in \text{Kernraum } \lambda$ .

Thm. 3 Wenn  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ , TO h.p. nur. stab. ac. yet.

Wenn  $\exists i : \operatorname{Re} \lambda_i > 0$ , TO ~~h.p.~~ inst. stab. teyer.

Wenn  $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ , TO h.p. yet. (freie p. zugeordnet)

Пример

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = 0 \quad m, c > 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{\beta y - cx}{m} \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{J} - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{c}{m} & -\frac{\beta}{m} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{\beta}{m}\lambda + \frac{c}{m} = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \left( -\frac{\beta}{m} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - 4 \frac{c}{m}} \right)$$

$$\beta > 0 \quad \operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \text{ac. yet. w.h.}$$

$$\beta < 0 \quad \operatorname{Re} \lambda_{1,2} > 0 \Rightarrow \text{негат.}$$

$$\beta = 0 \quad \operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{c}{m}} - \text{yet.}$$

$$\bar{x} = f(x) = \mathbf{J} \bar{x} + \dots$$

Теорема Шанжнова об устойчивости в квадратичном приближении.

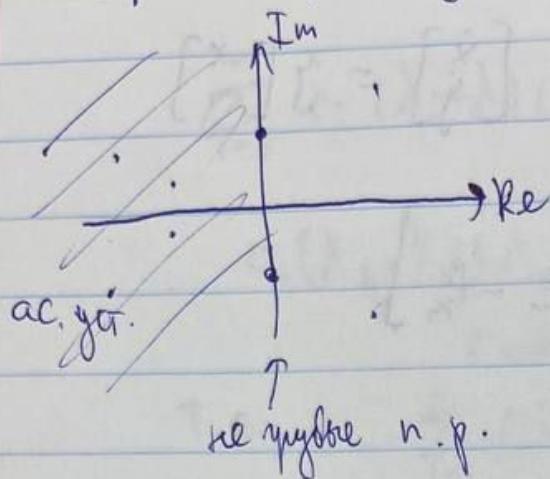
Если все  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  кв. кв. ст., то  $\mathbf{w.p.}$  уст. кв.

уст. кв. ас. yet.

Если  $\exists \lambda_i : \operatorname{Re} \lambda_i > 0$ , то  $\mathbf{w.p.}$  уст. кв. Негат.  
(Гантмахер §38)

Замечание Если  $\exists \operatorname{Re} \lambda_i = 0$ , то не устойчиво  
сигн. о хар-ре уст-ти невозл ( $\dot{x} = \lambda x \oplus \dot{x}'$ )

Очевидно. Д.п. неустойчив, even  $\operatorname{Re} \lambda_i \neq 0$

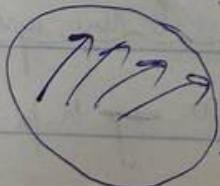


(Лекция 3).

Дин. стат. 2-го порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Теорема о бифуркации фик. точ.



$$\dot{x}_1 = 1, \dot{x}_2 = 0, \dots, \dot{x}_n = 0 \quad (\text{нет н.п. биф.})$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^* \\ \dot{y}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \bar{u}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \bar{u}_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$(\mathcal{J} - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} \mathcal{J} + \det \mathcal{J} = 0$$

$$1. \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0 \quad 3. \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 \neq 0$$

$$2. \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \lambda_1, \lambda_2 < 0 \quad 4. \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = 0$$

$$1. \lambda_2 < \lambda_1 < 0 \quad \bar{u}_1, \bar{u}_2$$

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} \quad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = c_1 u_{11} e^{\lambda_1 t} + c_2 u_{21} e^{\lambda_2 t} \\ y = c_1 u_{12} e^{\lambda_1 t} + c_2 u_{22} e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

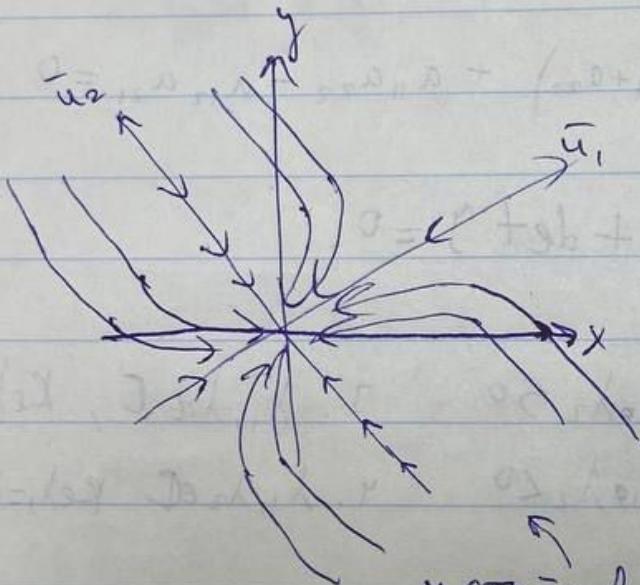
$$\frac{c_1 u_{12} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 u_{22} \lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 u_{11} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 u_{21} \lambda_2 e^{\lambda_2 t}} =$$

$$\frac{y}{x} = \frac{c_1 u_{12} \lambda_1 + c_2 u_{22} \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}}{c_1 u_{11} \lambda_1 + c_2 u_{21} \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}}$$

$t \rightarrow +\infty$

$$\frac{y}{x} \rightarrow \frac{u_{12}}{u_{11}}, \text{ when } c_1 \neq 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{when } c_1 = 0 \\ \frac{y}{x} = \frac{u_{22}}{u_{21}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{y}{x} \rightarrow \bar{u}_{11}, c_1 \neq 0$$

$\frac{y}{x} \rightarrow \bar{u}_{11}$



$t \rightarrow -\infty e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \rightarrow 0$

$$\frac{y}{x} \rightarrow \frac{u_{22}}{u_{21}}, \text{ when } c_2 \neq 0$$

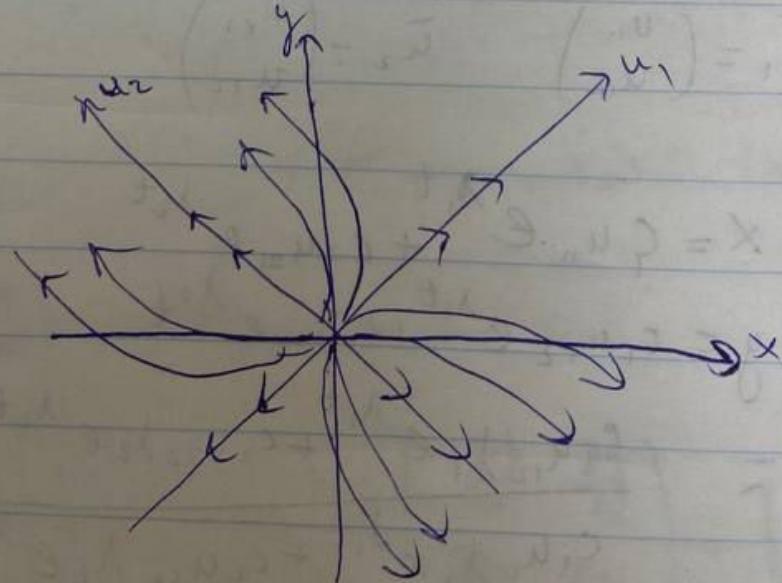
when  $c_2 = 0$

$$\frac{y}{x} = \frac{u_{12}}{u_{11}}$$

stabilität  
y-Achse

keiger.  
y-Achse.

$$\lambda_2 > \lambda_1 > 0$$



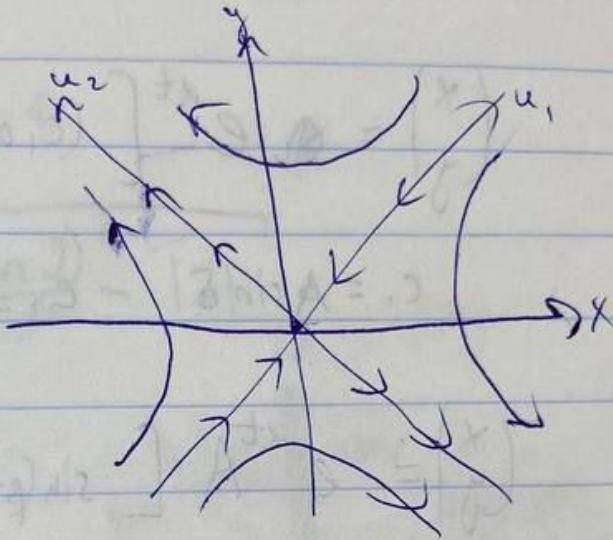
2.  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$   $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \bar{u}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \bar{u}_2 e^{\lambda_2 t}$$

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$

cego

(negat.)



$\bar{u}_1$  - yet. monoedragne

$\bar{u}_2$  - negat. monoedragne

3.  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$   $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$

$(\bar{u}_1 + i\bar{u}_2)$  - esdotb. b-op  $\lambda_1$

yet.-plm.  $(\bar{u}_1 + i\bar{u}_2) e^{\lambda_1 t} = e^{\alpha t} (\bar{u}_1 + i\bar{u}_2) (\cos \beta t + i \sin \beta t) =$

$$= e^{\alpha t} (\cos \beta t \bar{u}_1 - \sin \beta t \bar{u}_2) + i e^{\alpha t} (\cos \beta t \bar{u}_2 + \sin \beta t \bar{u}_1) =$$

$$= \bar{q}(t) + i \bar{p}(t)$$

$$c = \frac{q_1}{2} - i \frac{p_1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C(\bar{q} + i\bar{p}) + \bar{C}(q - i\bar{p}) =$$

$$= C_1 \bar{q} + C_2 \bar{p}$$

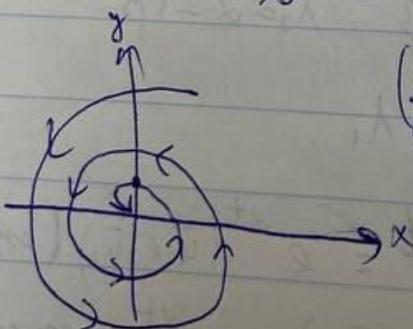
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \left[ (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) \bar{u}_1 + (-c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t) \bar{u}_2 \right]$$

$$c_1 = A \sin \delta \quad c_2 = A \cos \delta$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\alpha t} A \left[ \sin(\beta t + \delta) \bar{u}_1 + \cos(\beta t + \delta) \bar{u}_2 \right]$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A e^{\alpha t} \left( \sin(\beta t + \delta), \cos(\beta t + \delta) \right) \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix}$$

$\alpha < 0$  устойчивый пологий



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

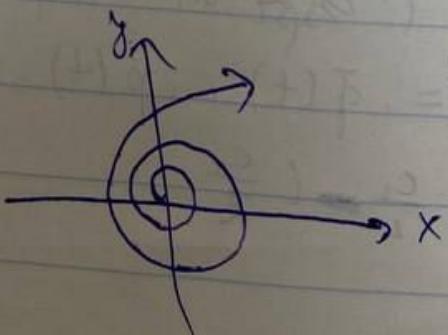
$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \quad y^{(0,1)} = a_{21}$$

$$x^{(0,1)} = a_{12}$$

$$a_{12} > 0 \rightarrow$$

$$a_{12} < 0 \leftarrow$$

$\alpha > 0$



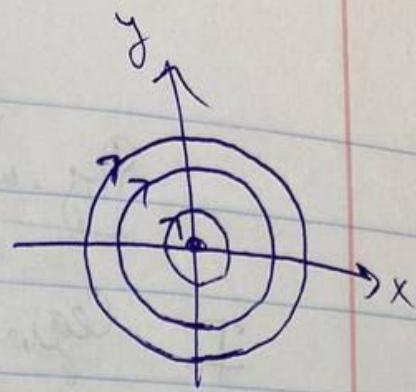
неустойчивый

$$4. \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = 0$$

zentP

$$\omega = 0$$

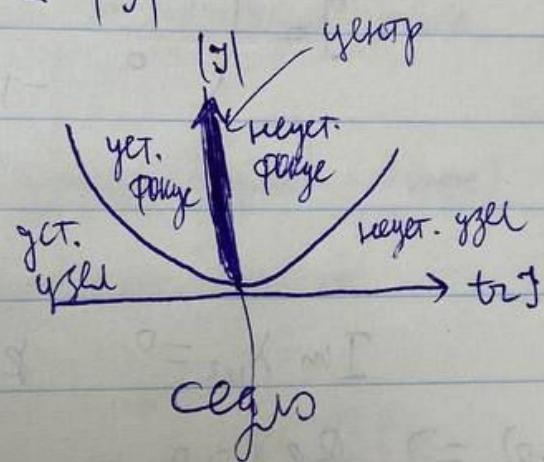
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A(\sin(\dots), \cos(\dots)) \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix}$$



$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} J)\lambda + |J| = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} J}{2} \pm \sqrt{\frac{(\operatorname{tr} J)^2}{4} - |J|}$$

$$|J| = \frac{(\operatorname{tr} J)^2}{4}$$



Лекция 4

Разн.-дифр. в сингуляр. & гипер-г.e.

I. Сингулярные сингулярии

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

п.п.  $x = \pm \sqrt{\lambda}, \lambda \geq 0 \quad x \neq 0, \lambda < 0$   
 $y = 0$

$$g = \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(\sqrt{\lambda}, 0) \Rightarrow J = \begin{pmatrix} -2\sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(-2\sqrt{\lambda} - \lambda)(-1 - \lambda) = 0 \Rightarrow \text{ycles (ya.)}$$

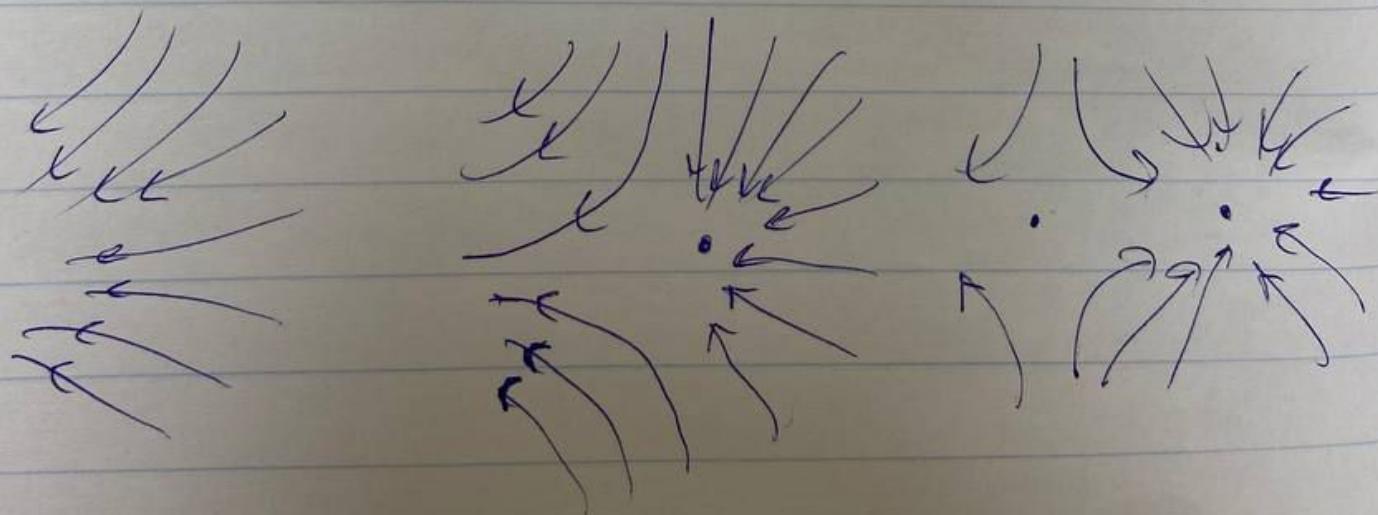
$$\operatorname{Im} \lambda_{1,2} = 0 \quad \operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$$

$$(-\sqrt{\lambda}, 0) \Rightarrow \operatorname{Re} \lambda_1 > 0 \quad \operatorname{Re} \lambda_2 < 0 \Rightarrow \text{cycles} \quad \operatorname{Im} \lambda_{1,2} = 0$$

$$\lambda = -1$$

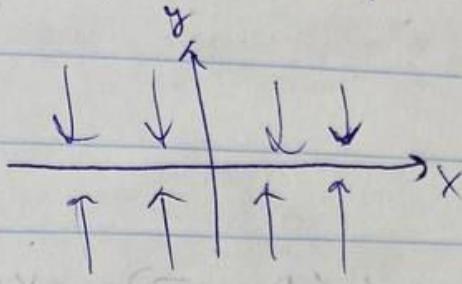
$$\lambda = 0$$

$$\lambda = 1$$



$$\omega = 0 \Rightarrow (0,0) - \text{n.p.}$$

$$J = \begin{bmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad -\lambda(1-\lambda) = 0$$

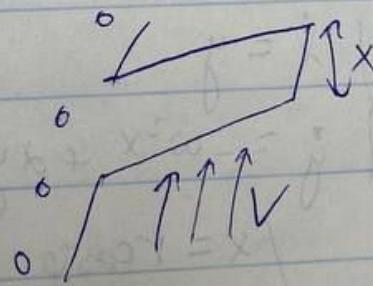


## II. Бирүзгүштүрүлген көзбүрелдердеги циклдар.

(Д. Пуанкаре - Аппенба - Хонга)

Пример! 1. Задача о застывании крови.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = V^2 \left( a_1 \frac{\dot{x}}{V} - a_3 \frac{\dot{x}^3}{V^3} \right)$$



$$m, b, c, a_1, a_3, V > 0$$

жт. н.п.  $x^* = 0$  ?

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{b}{m}y - \frac{c}{m}x + V a_1 y - \frac{a_3}{V} y^3 \end{cases}$$

$$\frac{c}{m} = \omega^2 \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{a_1 - b}{m}} \quad ; \quad \beta = +\frac{a_3}{mV}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x + \alpha y - \beta y^3 \end{cases}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$-\lambda(\alpha - \lambda) + \omega^2 = 0$$

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + \omega^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2} (\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2}) =$$

$$= \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega^2}$$

$\alpha < 0 \Rightarrow x = 0$  ae. yet. n.p.

$\omega > \frac{\alpha}{2}$ ?

$$\alpha = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm i\omega$$

$\alpha > 0 \Rightarrow x = 0$  - sleyer. n.p.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x + \alpha y - \beta y^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$(1) \quad \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi = \omega r \sin \varphi$$

$$(2) \quad \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi = -\omega r \cos \varphi + \alpha r \sin \varphi - \beta r^3 \sin^3 \varphi$$

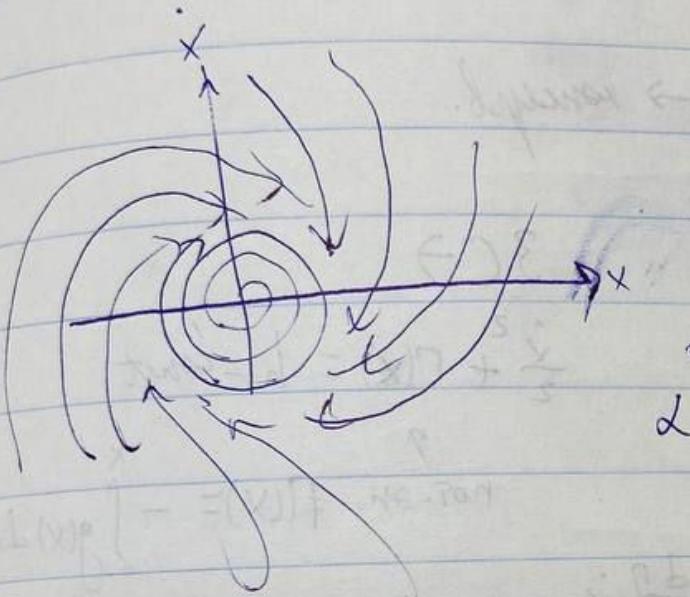
(1).  $\cos \varphi$  + (2).  $\sin \varphi$

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r \sin^2 \varphi - \beta \omega^2 r^3 \sin^4 \varphi \\ \dot{\varphi} = -\omega \varphi + \alpha r \sin \varphi \cos \varphi - \beta \omega^2 r^2 \sin^3 \varphi \cos \varphi \end{cases}$$

$\alpha, \beta > 0$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r(2\sin^2\varphi - \beta\omega^2 r^2 \sin^4\varphi)}{-\omega + \sin\varphi \cos\varphi(\alpha - \beta\omega^2 r^2 \sin^2\varphi)}$$

(Масса брызг  $\rho$   
и упругость)



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{d\varphi} \\ d\varphi \end{array} \right.$$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\varphi - \beta\omega^2 r_0^2) \sin^4\varphi d\varphi$$

$r$       "

$\pi$        $\frac{3\pi}{4}$

$$r_0 = \sqrt{\frac{4\alpha}{3\beta\omega^2}}$$

Оп. Предельный циклон наз. замкнутая  
неподвижная траектория, в окр. кот. 1) нет дробил.  
неподв.; 2) все траект. из некр. окр. притя-  
жение к ней при  $t \rightarrow \infty$  (уст. нр. унч.)

при  $t \rightarrow \infty$  (уст. нр. унч.)

изолированные

Оп. АтTRACTOR наз. замкнутые все траектории  
подвига, к кот. ~~не~~ стремится все траектории  
из некр. эл. окр. при  $t \rightarrow \infty$ . Область притяж.  
наз. сфера сходимости атTRACTора

Одн. Решение - - -

при  $t \rightarrow -\infty$

### III. Консерв. сист. в механике

$\ddot{x} = +g(x) \rightarrow$  консерв.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = +g(x) \end{cases}$$

$\exists C \ni$

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \Pi(x) = h = \text{const}$$

$$\text{наст. эн. } f(x) = - \int_0^x g(x) dx$$

$$\dot{x} \ddot{x} + \frac{d\Pi}{dx} \dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = - \frac{d\Pi}{dx} = g(x)$$

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2(h - \Pi(x))}$$

Пример 2

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin x \end{cases}$$

$y=0, \sin x=0 \Rightarrow x=0, \pm\pi$

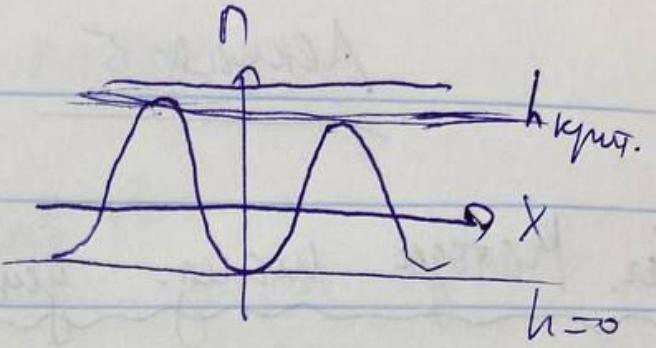
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos x & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_{x=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{1,2} = \pm i\omega \quad (\text{уступ})$$

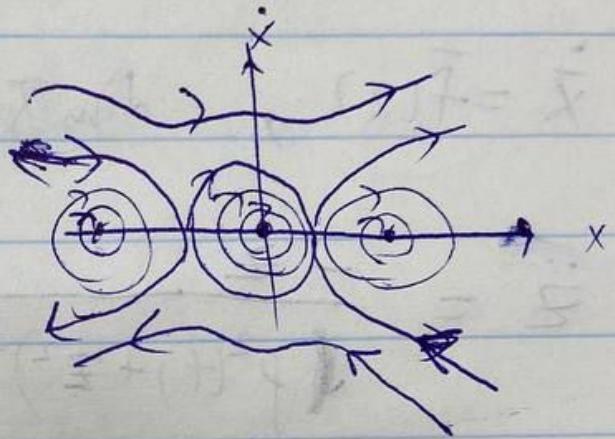
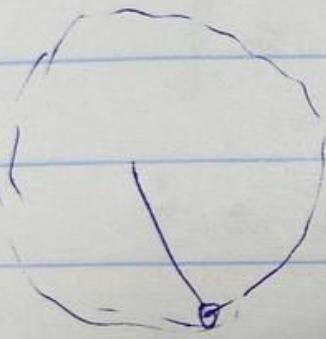
$$J_{x=\pm\pi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{1,2} = \pm \omega$$

(седло)

$$P(x) = -\omega^2 \cos x$$



$$X = S^1 \times \mathbb{R}^1$$



## Лекция 5

Kar. Методы нелинейн. уравн.

$$\dot{x} = \bar{f}(x), \quad \dim X = n$$

$$\ddot{z} = \frac{-\dot{z}}{(p^2(t) + z^2)^{3/2}}$$

$$\begin{cases} \dot{z} = v \\ \dot{v} = \frac{-z}{(p^2(t) + z^2)^{3/2}} \end{cases}$$

$$\dot{u} = 1$$

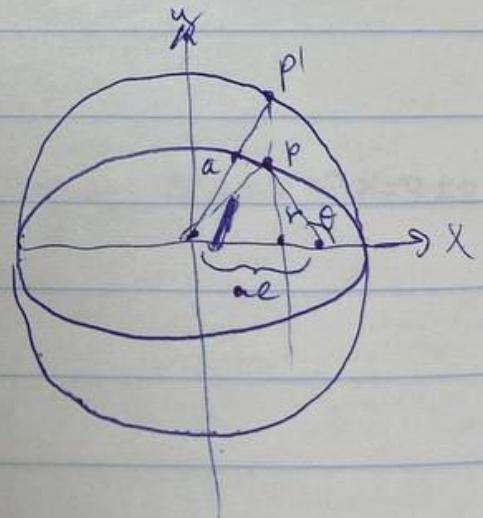
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

E - эквивалент. азимут

$$\cos E = \frac{x}{a}$$

$$\sin E = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{y}{b}$$

$$\begin{aligned} p^2 &= y^2 + (ae - a\cos E)^2 = b^2 \sin^2 E + a^2(e - \cos E)^2 = \\ &= a^2(1 - e^2) \sin^2 E + a^2(e - \cos E)^2 = \\ &= a^2(1 - e^2 \sin^2 E + e^2 - 2e \cos E) = \end{aligned}$$



$$= a^2 (1 + e^2 \cos^2 E - 2e \cos E) = \\ = a^2 (1 - e \cos E)^2$$

$$p = a(1 - e \cos E)$$

$$\dot{s} = \text{const}$$

$$S_{\text{AFD}} = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$$

$$S_{\text{AFD}} = \pi a^2 \sqrt{1-e^2} \frac{t-t_0}{T}$$

$$S_{\text{POA}} = \frac{a^2 E}{2}, \quad S_{\text{POA}} = \frac{a^2 E}{2} \sqrt{1-e^2}$$

$$S_{\text{oFP}} = \frac{1}{2} yae = \frac{abe \sin E}{2} = \frac{a^2 e \sin E \sqrt{1-e^2}}{2}$$

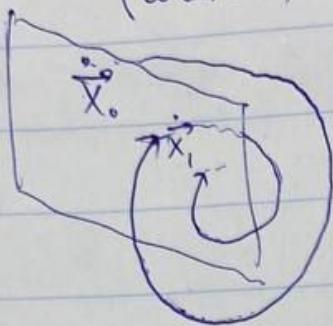
$$S_{\text{AFP}} = S_{\text{POA}} - S_{\text{oFP}} = \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{2} (E - e \sin E)$$

$$E - e \sin E = 2\pi \frac{(t-t_0)}{T} = M - \text{gr. answinkel}$$

$$T \rightarrow 2\pi, t_0 \rightarrow 0$$

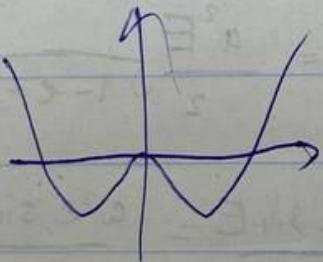
$$\begin{cases} E - e \sin E = t & - \text{gr. e Kehlgr} \\ p = a(1 - e \cos E) \end{cases}$$

Одномерное Пуассоне  
(секунда)



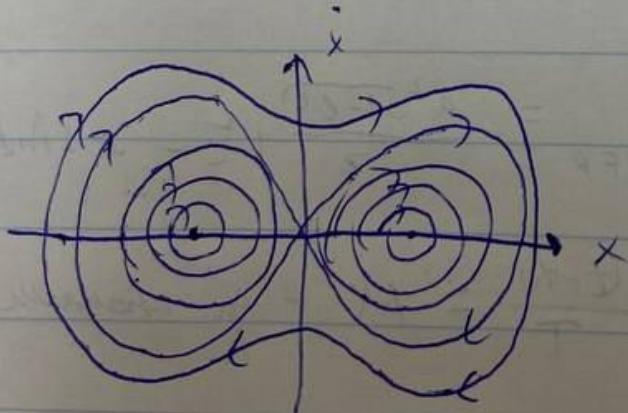
Одномерная Диаграмма

$$\Pi = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \quad \ddot{x} = -\frac{d\Pi}{dx}$$



$$\ddot{x} + x^3 - x = 0$$

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x^3 - x = \varepsilon \cos t$$



$$t \bmod 2\pi$$

Метог 90-жын Анызеба.

$$\vec{x} = \vec{f}(\vec{x}) \quad , \quad \dim X = h$$

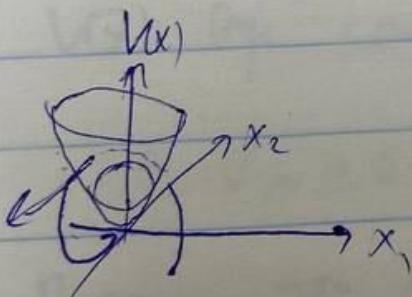
$V(x)$ ,  $\frac{dV_f}{dt}$  - прауб. в сине  $y_n = \bar{u}$  гб-л

$$\frac{dV_f}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n = \text{grad } V \cdot \vec{f}(\vec{x}) < 0$$

$$\bar{x} = 0 - h \cdot p.$$

$\bar{X} = \bar{0}$  - ac. yct. np.

$$V(0) = 0 \quad V(\bar{x}) > 0 \text{ bei } \text{opt. } \bar{x}_0 = 0$$



## Лекция 6

### Метод ε-окрестности Ляпунова

Предна Ляпунова об устойчивости.  $\dot{x} = \bar{f}(x)$   
 $\dim X = n$

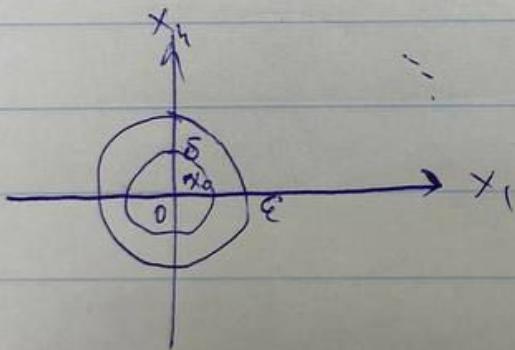
Если  $\exists V(x)$  б-окр. н.п.  $\dot{x} = 0$ :

$$1) V(\dot{x}) > 0 \quad \forall \dot{x} \neq 0$$

$$2) V(0) = 0$$

$$3) \dot{V}_f(\dot{x}) \leq 0 \quad \forall |\dot{x}| \geq \varepsilon,$$

то н.п.  $\dot{x} = 0$  — уст.



$V(0) - \min_{\varepsilon} V_{\varepsilon}^{\min} > 0$  — мин. значение функции  
в ε-окр.

δ-окр. ⊂ ε-окр.,  $V_{\delta}^{\max}$  — макс. на фнк. δ-окр.

$$\bar{x}_0 \in \delta\text{-окр.} \quad V(\bar{x}(x_0, t)) \leq V(\bar{x}_0) \leq V_{\delta}^{\max} < V_{\varepsilon}^{\min}$$

Проверка Барбенника - Красовского (об ас. yet.)

- II -

3)  $\dot{V}_f(\bar{x}) \leq 0 \quad V(\bar{x}) < \varepsilon$  и наверху

здесь ну-фа, на rot. form.  $\dot{V}_f(\bar{x}) = 0$   
не содержит тр-рии кроме  $\bar{x} = 0$ ,  
т.о.  $\bar{x} = 0$  — ас. yet. н.п.

Если  $\bar{x}(x_0, t) \neq 0$ , т.о.  $\exists t^* \quad V(x(\bar{x}, t^*)) < V(\bar{x}_0)$

□  $\bar{x} = 0$  — yet. н.п.

$V(\bar{x})$  дин. связь и мон. устр.  $\Rightarrow \exists \lim_{t \rightarrow \infty} V(\bar{x}(x_0, t)) =$   
 $= V_\infty > 0$ .

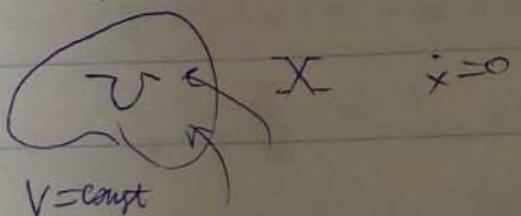
Предпол., что  $\bar{x}(x_0, t) \rightarrow 0$ , тогда  $V_\infty > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}_f(\bar{x}(x_0, t)) = 0$$

$\bar{x}(x_0, t) \text{ ну-фа} \rightarrow \infty: \quad V \rightarrow V = \text{const}$

$\bar{x}_0 \in V \rightarrow \text{пем. } \bar{x}(x, t) \quad V = \text{const}$

противоречие.  $\Rightarrow V_\infty = 0 \Rightarrow \bar{x} \rightarrow 0$



Теорема Красовского (о неустойчивости)

Если в  $\mathbb{E}$ -окр. н.п.  $\exists$  однос.  $\sigma$  и

$\exists V(\bar{x})$ :

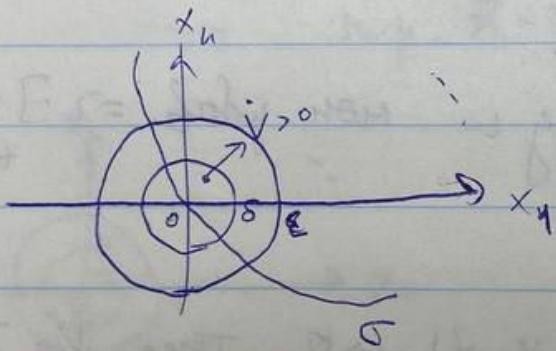
1)  $V(\bar{x}) > 0$  в одн.  $\sigma$

2)  $V = 0$  на границе  $\sigma$

3)  $\dot{V}_+(\bar{x}) \geq 0$  в  $\sigma$ , кроме

некоторых погранич., в нер. форм.  $\dot{V}(\bar{x}) = 0$   
на сегменте пер. сечения, отв. от  
 $\bar{x} = 0$ ,

то  $\bar{x} = 0$  — неуст. н.п.



Пример 1.

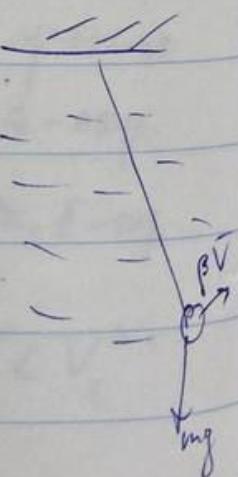
$$m\ddot{x} + \beta \dot{x} + \sin x = 0$$

$$ml^2\ddot{\varphi} + \beta l^2\dot{\varphi} + mglsin\varphi = 0$$

$$\frac{\beta}{m} = 1 \quad \frac{g}{l} = 1$$

$$x = \varphi \quad y = \dot{\varphi}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \cdot y \end{cases}$$



$$V = \frac{y^2}{2} + 1 - \cos x$$

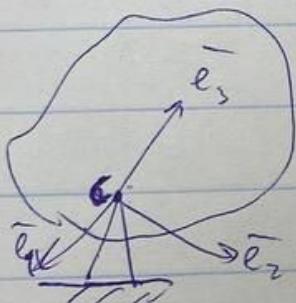
$$\dot{V}_f = y\dot{y} + \dot{x}\sin x = -y^2 - y\sin x + y\sin x = -y^2 \leq 0$$

$$y \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ ac. yet. n.p.}$$

Пример 2

$$\dot{\bar{e}} = \bar{\omega} \times \bar{e}$$



$$\vec{L} = L_1 \bar{e}_1 + L_2 \bar{e}_2 + L_3 \bar{e}_3$$

c - y.m.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad (\text{b. неизменн. фазы})$$

$$L_1 \dot{e}_1 + L_2 \dot{e}_2 + L_3 \dot{e}_3 + \dot{L}_1 \bar{e}_1 + \dot{L}_2 \bar{e}_2 + \dot{L}_3 \bar{e}_3$$

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} \gamma_x \omega_x \\ \gamma_y \omega_y \\ \gamma_z \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_x & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \gamma_x \dot{\omega}_x \bar{e}_x + \gamma_x \omega_x [\bar{\omega} \times \bar{e}_x], \quad \omega = \omega_x \bar{e}_x$$

$$\left( \frac{d\vec{L}}{dt} \right)_y = \gamma_x \dot{\omega}_y \bar{e}_y + \gamma_x \omega_x \epsilon_{nmp} \omega_n \delta_{dm} = \gamma_x \dot{\omega}_y \bar{e}_y + \gamma_x \omega_x \epsilon_{nmp} \omega_n \delta_{dm}$$

$$\begin{cases} \gamma_x \dot{\omega}_x + (\gamma_z - \gamma_y) \omega_y \omega_z = 0 \\ \gamma_y \dot{\omega}_y + (\gamma_x - \gamma_z) \omega_x \dot{\omega}_z = 0 \\ \gamma_z \dot{\omega}_z + (\gamma_y - \gamma_x) \omega_x \omega_y = 0 \end{cases}$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\vec{\omega}} = \begin{pmatrix} \omega+x \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \gamma_x \dot{x} + (\gamma_z - \gamma_y) \gamma z = 0 & \text{безумение} \\ \gamma_y \dot{y} + (\gamma_x - \gamma_z) (\omega+x) \tilde{z} = 0 & \text{чт-е гл-е} \\ \gamma_z \dot{z} + (\gamma_y - \gamma_x) (\omega+x) \tilde{y} = 0 \end{cases}$$

$$\dot{x} = \frac{\gamma_z + \gamma_y}{\gamma_x} \gamma z$$

$$\dot{y} = \frac{\gamma_z - \gamma_x}{\gamma_y} (\omega+x) \tilde{z}$$

$$\dot{z} = \frac{\gamma_x - \gamma_y}{\gamma_z} (\omega+x) \tilde{y}$$

$$V = y \tilde{z}$$

$$V_f = \dot{y} \tilde{z} + y \dot{\tilde{z}} = (\omega+x) \left[ \frac{\gamma_z - \gamma_x}{\gamma_y} \tilde{z}^2 + \frac{\gamma_x - \gamma_y}{\gamma_z} y^2 \right]$$

$$\Gamma = \{ y \geq 0, \tilde{z} \geq 0, x > -\omega \} \Rightarrow \text{бран. бранж. очн. согл. ном-ки. неустойчив}$$

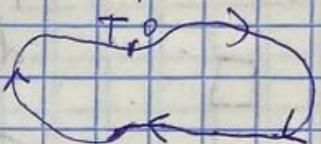
## Приводящие функции.

Теорема. Если  $\exists G(x)$ , т.е.  $\dot{x} = \bar{f}(x) = -\text{grad } G(x)$ ,

то непр. пересечений в системе нет.

Проверка на сопадение.  $\exists \bar{f}$  непр. пер.

$$G(\bar{x}(T)) = G(\bar{x}(0))$$



$$G(x(T)) - G(x(0)) =$$

$$= \int_0^T \frac{dG}{dt} dt = \int_0^T \left( \frac{\partial G}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial G}{\partial x_n} \dot{x}_n \right) dt =$$

$$= \int_0^T (-\dot{x}_1^2 - \dots - \dot{x}_n^2) dt < 0 \quad \blacksquare$$

Пример 3

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos y \\ \dot{y} = -x \sin y \end{cases}$$

Потенциальное

$$G = -x \cos y$$

Пример 4.

$$\dot{x} - x = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

$$G = -xy$$

## Теорема (критерий Дирака)

$$h = 2 \quad \dot{x} = f(x, y) \quad \dot{y} = g(x, y)$$

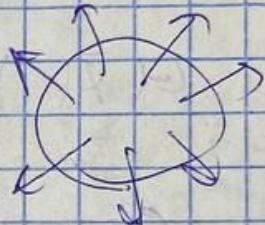
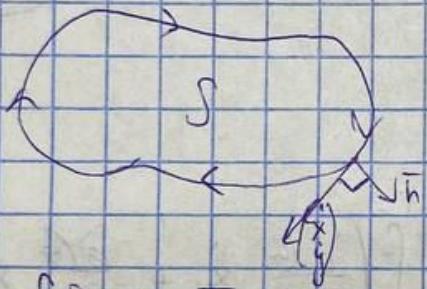
Если в окрестности одн.  $\exists B(x, y)$ ,

такая что  $\operatorname{div}(B[\frac{\dot{x}}{\dot{y}}])$  неподсчитана,

то неподсчит. траектории в окр одн. нет.

□

$$\operatorname{div}(B[\frac{\dot{x}}{\dot{y}}]) > 0$$



$$\iint_S \operatorname{div} F \, dS = \oint_{\gamma} (F \cdot h) \, dy$$

$$F = B \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad F \cdot h = B \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \cdot h = 0$$

Противоречие.

$\Rightarrow$  нет неподсчит. траекторий

Пример 5

$$\dot{x} + \dot{y} + \frac{x^3}{3} + f(x) = 0$$

$$\beta = 1$$

$$\operatorname{div} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x) - y - \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$= \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = 0 - 1 - \cancel{y} - \frac{y^2}{2} < 0 \Rightarrow$$

неп. плоск. нет

Теорема Пуанкаре - Бенуа

$$n=2 \quad \dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y)$$

Предположим, что  $G$  (коэффициент) одн., а  $f$  и  $g$  непрерывные трех  $\Rightarrow$  Тп-пл., вида  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$ .  
 б. эти случаи. Тогда эти тп-пл. или неп.,  
 или симметрич. к неп.

Лекция 2  
Кватернионы

1. Планкас

1)  $\mathbb{R}$ ,  $\det R=1$ ,  $\dim R=2$

2)  $r e^{i\varphi}$ ;  $e^{i\varphi}$ ,  $|e^{i\varphi}|=1$

2. 3-х мерные нпр-б. 1)  $\mathbb{R}$ ,  $\det R=1$ ,  $\dim R=3$

2) кватернионы (нинеупакованн.)

$V$  - 4-х мерные 1нр, нпр-бо кваг  $\mathbb{R}$

$$\lambda_k \in \mathbb{R}, i_k, k = \overline{0, 3}$$

$$\Delta = \lambda_0 i_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3$$

	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
$i_0$	$i_0$	$i_1$	$i_4$	$i_3$
$i_1$	$i_1$	$-i_0$	$i_3$	$-i_2$
$i_2$	$i_2$	$-i_3$	$-i_0$	$i_1$
$i_3$	$i_3$	$i_2$	$-i_1$	$-i_0$

$$i_0 = 1$$

$$i_1, i_2, i_3 - OHSE E^3$$

$$\vec{i}_k \cdot \vec{i}_m = -\vec{i}_k \cdot \vec{i}_m + \vec{i}_{k \times} \vec{i}_m$$

$$\forall k, m = 1, 2, 3$$

$$\Delta = \lambda_0 + \lambda_1 \vec{i}_1 + \lambda_2 \vec{i}_2 + \lambda_3 \vec{i}_3 = \\ = \lambda_0 + \vec{\lambda}$$

$$M = \mu_0 + \bar{\mu}$$

$$\Lambda \circ M = \underbrace{\lambda_0 \mu_0 - (\vec{\lambda} \cdot \vec{\mu})}_{\text{char. roots}} + \underbrace{\lambda_0 \bar{\mu} + \mu_0 \vec{\lambda}}_{\text{char. roots}} + \vec{\lambda} \times \bar{\mu}$$

1) accy.

2) grwp.

3) summe.

4) Heisen.

Obr. компонен. кват.  $\bar{\Lambda} = \cancel{\lambda^0} - \vec{\lambda}$

Норма:  $\|\Lambda\| = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \Lambda \circ \bar{\Lambda}$

Магнит.  $|\Lambda| = \sqrt{\|\Lambda\|^2}$

Если  $|\Lambda| \neq 0$ , то  $\exists \Lambda^{-1} = \frac{\bar{\Lambda}}{\|\Lambda\|}$

$$\Lambda \circ \Lambda^{-1} = 1$$

Об-ба:  $\|\Lambda \circ M\| = \|\Lambda\| \cdot \|M\|$

$$\overline{\Lambda \circ M} = \overline{(\lambda_0 + \lambda) \circ (\mu_0 + \bar{\mu})} =$$

$$= \lambda_0 \mu_0 - (\lambda \cdot \bar{\mu}) - \lambda_0 \bar{\mu} - \bar{\lambda} \mu_0 - \bar{\lambda} \times \bar{\mu} =$$

$$= (\mu_0 - \bar{\mu}) \circ (\lambda_0 - \bar{\lambda}) = \bar{M} \circ \bar{\Lambda}$$

$$(\Lambda \circ M)^{-1} = M^{-1} \circ \Lambda^{-1}$$

$$\|\Lambda\| = 1 \quad - \text{норм. квадр.}$$

Продолжение оценки:  $R' = \Lambda \circ R \circ \bar{\Lambda}$

$$R \xrightarrow{\Delta} R'$$

Об-фа: 1.  $R = r_0 + \vec{r}$ ,  $R' = r'_0 + \vec{r}'$ , т.к.

$$r_0 = r'_0$$

$$(\lambda_0 + \bar{\lambda}) \circ (r_0 + \vec{r}) \circ (\lambda_0 - \bar{\lambda}) = \Lambda \circ (r_0 + \vec{r}) \circ \bar{\Lambda} =$$

$$= \Lambda \circ (r_0 \bar{\Lambda}) + \Lambda \circ \vec{r} \circ \bar{\Lambda} = r_0 + \underbrace{\Lambda \circ \vec{r} \circ \bar{\Lambda}}_{\text{смешал}} =$$

$$= r'_0 + \vec{r}$$

смешал  
сказ. разн?

$$\Lambda \circ \vec{r} \circ \bar{\Lambda} = \vec{r} \circ \bar{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} =$$

$$= \Lambda \circ \vec{r} \circ \bar{\Lambda} = -\Lambda \circ \vec{r} \circ \bar{\Lambda}$$

сказ. разн  $\Rightarrow 0$ .

$r_0 = r'_0$

2.  $R = r_0 + \vec{r}$ ,  $R' = r'_0 + \vec{r}'$ , т.к.  $|\vec{r}| = |\vec{r}'|$

$$\|R'\| = \|\Lambda\| \cdot \|R\| \cdot \|\bar{\Lambda}\| = \|R\|, \Rightarrow |\vec{r}| = |\vec{r}'|$$

$$\|\Delta\|=1, \quad \Delta = \lambda_0 + \bar{\lambda} = \lambda_0 + \lambda \bar{e}$$

$$\lambda_0^2 + \lambda^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = \cos \frac{\varphi}{2} \\ \lambda = \sin \frac{\varphi}{2} \end{cases}$$

$$\Delta = \cos \frac{\varphi}{2} + \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2} \quad - \text{транс. форма записи в кватернионах}$$

Теорема Поворот, определимый вектором  $\Delta$  и

3-мерном евклид.пр-ве  $E^3$  —

это поворот вокруг вектора  $\bar{e}$  на угол  $\varphi$ .

$$\square \quad \vec{i}_1 = \bar{e} \quad \vec{i}_2, \vec{i}_3 \perp \bar{e}$$

$$\Delta = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{i}_1 \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$\vec{i}'_1 = \Delta \circ \vec{i}_1 \circ \bar{\Delta} = (\cos \frac{\varphi}{2} + \vec{i}_1 \sin \frac{\varphi}{2}) \circ \vec{i}_1 \circ (\cos \frac{\varphi}{2} - \vec{i}_1 \sin \frac{\varphi}{2})$$

$$= (\cos \frac{\varphi}{2} + \vec{i}_1 \sin \frac{\varphi}{2}) \cdot (\cos \frac{\varphi}{2} \vec{i}_1 + \vec{i}_1 \sin \frac{\varphi}{2}) =$$

$$= \vec{i}_1 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \cancel{\vec{i}_1} \vec{i}_1 +$$

$$+ \vec{i}_1 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} (-1) = \cancel{\vec{i}_1} \vec{i}_1$$

$$\vec{i}'_2 = \vec{i}_3 \sin \varphi + \vec{i}_2 \cos \varphi$$

$$\vec{i}'_3 = -\vec{i}_2 \sin \varphi + \vec{i}_3 \cos \varphi$$

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{r}' = \Delta \circ \vec{r} \circ \Delta} \quad \leftarrow \text{найбільш багато}\vec{r}$$

на уяву  $\varphi$  відповідає

$$\Delta = \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \vec{e}$$