$|X| = m \quad , \quad |Y| = n$

I. 2,5 (а, б) а) ~~ин. от.~~ отобр. $= \cancel{m(n+1)}\ n^m$,

т.к. нез. для кажд. $x \in X$ n путей. ~~+1, значит никуда не отобразить~~

б) ин. отобр. $= \cancel{(n+1) + n + (n-1) + \ldots}$

$\neq$

$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots}_{m \text{ раз}} =$

$\frac{n!}{m!}$

$= \begin{cases} \cancel{\frac{n!}{\ldots}}, & \cancel{m > n} \\ \cancel{(n-m)m}\ \cancel{\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-m)(n-m+1)}{2}}\ \frac{n!}{m!}, & \cancel{m < n} \end{cases}$

2.11 (а, б, в) а) $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} =$

$= \frac{n!}{(n-m)!\,(n-(n-m))!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \binom{n}{m}$

б) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = (1+1)^n = 2^n$

в) $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = (1-1)^n = 0$

T.1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x) = x^3$

$x = x^3 \Rightarrow x(x^2-1) = 0$

$x \in \{0, -1, 1\}$

$\Rightarrow$ 3 неподв. точки

$A = [2, +\infty)$

$f(A) = [8, +\infty) \subset A$

$\Rightarrow$ инв. отн. f

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

$f^{-1}(A) = [\sqrt[3]{2}, +\infty)$

$\underset{f^{-1}(A)}{\underset{\cap}{\sqrt[3]{2}}} \notin A \Rightarrow$ не инв. отн. f^{-1}

Т.2 $M_{n\times n}$, $A \sim B \Leftrightarrow \exists$ обратимая $S \in M_{n\times n}$:

$$B = S^{-1} A S$$

$\sim$ — отн экв -?

1) $A \sim A \Leftrightarrow \exists S \quad A = S^{-1} A S$

$S = \mathbb{1}$

2) $\overset{(1)}{A \sim B} \overset{?}{\Leftrightarrow} \overset{(2)}{B \sim A}$

$\Rightarrow$ (1) $\exists S_1 : \quad B = S_1^{-1} A S_1$

(2) $\exists S_2 : \quad A = S_2^{-1} B S_2$?

Возьмём $S_2 = S_1^{-1}$

Тогда $S_2 A S_2^{-1} = S_1^{-1} A S_1 = B$

$\Leftarrow$ Аналогично.

3) $A \sim B$, $B \sim C \overset{?}{\Rightarrow} A \sim C$

$\exists S_1, S_2 : \quad B = S_1^{-1} A S_1, \quad C = S_2^{-1} B S_2$

$$C = S_2^{-1} S_1^{-1} A S_1 S_2 = (S_1 S_2)^{-1} A (S_1 S_2)$$

Положим $S_3 = S_1 S_2$ чтд!.

T.3 $(\mathbb{Z}, \circ)$, где $m \circ n = m + n + mn = (1+m)(1+n) - 1$ — ком. полугр.

1) $(m \circ n) \circ k \overset{?}{=} m \circ (n \circ k)$

$m + n + mn + k + k(m + n + mn) \overset{?}{=}$

$= m + n + k + nk + m(n + k + nk)$

$m + n + k + mn + km + kn + mnk \overset{?}{=}$

$= m + n + k + nk + mn + km + mnk$ ✓

2) $m \circ n = n \circ m$ $\quad m \leftrightarrow n$

(симметрие)

3) $m \circ 0 = m + 0 + 0 = m$

$\Rightarrow 0$ — нейтр. эл.

$m \circ n = 0 \Rightarrow n = \dfrac{-m}{m+1} \in \mathbb{Z}$

$\Updownarrow$

$m = 0$

II. 55.1 к)* $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0,\ |z| < r\}$

1) ас. очев.

2) нейтр. эл. $e = 1$

3) обр. эл. для z = $1/z$

Но $\frac{1}{z} \in A$?

$|z| < r \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| > r$

$\Downarrow$

$\frac{1}{z} \notin A$

Значит не группа.

II. 55.1.

м)* $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \}$

ас. . очев. | $z_1, z_2 \in A$

нейтр. эл. $1 \in A$ | $z_1^n z_2^n = (z_1 z_2)^n$, $z_1^n = 1$, $z_2^n = 1$, $(z_1 z_2)^n = 1$

обр. эл. $\frac{1}{z} \in A$ | $\Downarrow$

да | $z_1 z_2 \in A$

з)* $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1, n \in \mathbb{N} \}$

ас. очев.

нейтр. эл. $1 \in A$

обр. эл. $\frac{1}{z} \in A$

$z_1^n = 1$, $z_2^m = 1 \Rightarrow z_1^{nm} z_2^{nm} = (z_1 z_2)^{nm}$

$z_1^{nm} = (z_1^n)^m = 1$, $z_2^{nm} = (z_2^m)^n = 1$, $(z_1 z_2)^{nm} = 1$

$\Downarrow$

$z_1 z_2 \in A$

м)* $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ – непр.

$\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$, $x<y \Rightarrow \varphi(x)<\varphi(y)$

нейтр. эл. id , обр. φ^{-1} сущ.-т ед. по теор. об обр. ф-ции.

ас.? : $\varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3)(x) = (\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \varphi_3 (x)$

$$\varphi_1\left((\varphi_2 \circ \varphi_3)(x)\right) = (\varphi_1 \circ \varphi_2)(\varphi_3(x))$$

$$\varphi_1(\varphi_2(\varphi_3(x))) = \varphi_1(\varphi_2(\varphi_3(x)))$$

$\to$ группа.

55.2* $[0,1)$ с оп. $\oplus$: $\alpha \oplus \beta = \{\alpha+\beta\}$

$$(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$$

$$\{\alpha + \underbrace{\{\beta \cancel{\oplus} \gamma\}}_{(\beta+\gamma) \bmod 1}\} = \{\underbrace{\{\alpha+\beta\}}_{(\alpha+\beta) \bmod 1} + \gamma\}$$

$$\left(\alpha + (\beta+\gamma) \bmod 1\right) \bmod 1 = \left((\alpha+\beta) \bmod 1 + \gamma\right) \bmod 1$$

$$(\alpha+\beta+\gamma) \bmod 1 = (\alpha+\beta+\gamma) \bmod 1$$

ас. ✓

$e = 0$

$\alpha^{-1} = 1 - \alpha$

$\longrightarrow$ <u>Группа</u>

Изоморфна компл. числам с $|z| = 1$

Пусть $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ – кон. подгруппа G

что

~~Обозн~~ ~~$\bar{\alpha} = 1$~~

$\alpha_i \in G \rightarrow \alpha_i^{-1} \in G$

$0 \in G$

Предположим $\exists$ иррац. $\alpha \in G$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ $n\alpha \notin \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow n\alpha \in G \rightarrow$ противоречие

Значит все эл. подгр. $\in \mathbb{Q}$

$\forall g \in G$ $\exists m, n \in \mathbb{N}$: $g = \frac{m}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$ng = 0$~~ $\underbrace{g \oplus \dots \oplus g}_{n \text{ раз}} = 0$

$\Rightarrow$ подгр. <u>циклич.</u>

<u>чтд!</u>

5Т-6. $p)^*$ $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R},\ xy \neq 0 \right\}$

$$g = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = x\mathbb{1} + y\mathbb{I} = r e^{\mathbb{I}\varphi}$$

~~ас~~ $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$, $x \neq 0$

ас.: $r_1 e^{\mathbb{I}\varphi_1}\left(r_2 e^{\mathbb{I}\varphi_2} \cdot r_3 e^{\mathbb{I}\varphi_3}\right) =$

$= \left(r_1 e^{\mathbb{I}\varphi_1} \cdot r_2 e^{\mathbb{I}\varphi_2}\right) r_3 e^{\mathbb{I}\varphi_3} =$

$= r_1 r_2 r_3 e^{\mathbb{I}(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)}$

~~Обр. эл.~~

нейтр-эл. $= \mathbb{1}$

Обр. эл. к $g = re^{\mathbb{I}\varphi}$, $g^{-1} = \frac{1}{r} e^{-\mathbb{I}\varphi}$

III

53.18 б)

$$f: G \to G$$

$$f(x) = x^{-1}$$ – гом.

$$(x_1 x_2)^{-1} = x_1^{-1} x_2^{-1}$$

$$x_2 x_1 = x_1 x_2$$

→ для абелевых групп.

T.4 $\underbrace{(\mathbb{Z}, +), (n\mathbb{Z}, *), (\mathbb{Q}, +)}_{\cong}, \underbrace{(\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}^*, \cdot), (\mathbb{R}_+, \cdot)}_{\cong}$

T. 5*. $\mathbb{C}^* \cong \mathbb{R}^* \times T \not\cong \mathbb{R}^*$

гр. поворотов

IV. 35.21 $(\mathbb{Z}_4, +)$ и $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$

$$\varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) + \varphi(g_2)$$

$$\varphi : \mathbb{Z}_5^* \to \mathbb{Z}_4$$

$$\varphi(1 \cdot g) = \varphi(g) = \varphi(1) + \varphi(g)$$

$$\varphi(1) \underset{4}{\equiv} 0 \quad , \varphi(1) = 0$$

$$\varphi(g \cdot g^{-1}) = \varphi(1) = 0 = \varphi(g) + \varphi(g^{-1})$$

$$\varphi(g) + \varphi(g^{-1}) = 4 \quad , \text{ если } g \neq 1$$

$$\varphi(2) + \varphi(3) = 4$$

$$\varphi(4) + \varphi(4) = 4 \Rightarrow \varphi(4) = 2$$

$$\varphi(4 \cdot 2) = \varphi(3) = \varphi(4) + \varphi(2) = 2 + \varphi(2)$$

$$4 - \varphi(2) \underset{4}{\equiv} 2 + \varphi(2)$$

$$2 \underset{4}{\equiv} 2\varphi(2)$$

$$2(\varphi(2) - 1) \underset{4}{\equiv} 0$$

$$\varphi(2) - 1 \underset{4}{\equiv} 0 \quad \text{или} \quad \varphi(2) - 1 \underset{4}{\equiv} 2$$

$$\varphi(2) = 1 \to \varphi(3) = 3 \qquad \varphi(2) = 3 \to \varphi(3) = 1$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ или } \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

56.7. a) x и yxy^{-1} имеют одинаковый порядок

$\exists\, x^n = e$

$$\underbrace{yxy^{-1}\, yxy^{-1} \cdot \ldots \cdot yxy^{-1}}_{n \text{ раз}} = yx^n y^{-1} = yy^{-1} = e$$

чтд!

56.15 a) $\langle a \rangle$ $\quad ord\langle a\rangle = n$, $a^n = e$

$g^k = e$

$n = 24$, $k = 6$

$\forall g \Leftrightarrow g = a^m$, $m \leq n$

$(a^m)^k = e$

$a^{mk} = e \Rightarrow n \mid mk$

$24 \mid 6m$

$m \in \{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$

60.45. a) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$

Порядка 2: $(1, 2, 0)$

$(0, 2, 0)$ 3 эл.

$(1, 0, 0)$

Порядка 4: $2 \cdot 4 \cdot 1 - 1 = 7$

Порядка 6: $2 \cdot 2 \cdot 3 - 1 = 11$

Т. 6. $G: \forall g \in G \hookrightarrow g^2 = e \Rightarrow g = g^{-1}$

$$\cancel{g_1^2 g_2^2 = e}$$

$$g_1 g_2 = g_1^{-1} g_2^{-1}$$

$$e = (g_1 g_2)^2 = g_1 g_2 g_1 g_2$$

$$g_2 g_1 = g_1^{-1} g_2^{-1} = g_1 g_2$$

$\Rightarrow$ аб. гр.

Т.7. $a \in G$, $\operatorname{ord} a = m < \infty$

$(\operatorname{ord} a, n) = 1$, $(m, n) = 1$

$x^n = a$ ← реш.

~~т.к. $(m,n) = 1$~~ $x^{nm} = \cancel{a^m} = e$

т.к. $(m, n) = 1$, то $\exists k$: $kn \underset{m}{\equiv} 1$

$\Rightarrow$ a^k – решение

Т8. $\mathbb{Z}_7^*$ – цикл.?

$2 \xrightarrow{\cdot 2} 4 \xrightarrow{\cdot 2} 1 \to 2$

$3 \xrightarrow{\cdot 3} 2 \to 6 \to 4 \to 5 \to 1 \to 3$

$\Rightarrow$ $\mathbb{Z}_7^* = \langle 3 \rangle$

$4 \xrightarrow{\cdot 4} 2 \to 1 \to 4$

$5 \xrightarrow{\cdot 5} 4 \to 6 \to 2 \to 3 \to 1 \to 5$

$\Rightarrow$ $\mathbb{Z}_7^* = \langle 5 \rangle$

$6 \xrightarrow{\cdot 6} 1 \to 6$

V. 3.2 (б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 7 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} =$

$= (1\ 3\ 6\ 2)(4\ 7)$

3.4 (а) $[(1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6\ 7)] \cdot [(1\ 4\ 7)(2\ 3\ 5\ 6)] =$

$= (1\ 6\ 4\ 2\ 5\ 7\ 3)$

3.7 в) $(1\ 4\ 7\ 3)(6\ 7\ 2\ 4\ 8)(3\ 2) =$

$= (1\ 4\ 8\ 6\ 3\ 7\ 2)$

$\downarrow$

1 2 8 6 3 7 4

$\downarrow$

1 2 3 6 8 7 4

$\downarrow$

1 2 3 4 8 7 6

$\downarrow$

1 2 3 4 6 7 8

4 $\Rightarrow$ чет.

а) $(i_1, i_2) \dots (i_{2k-1}, i_{2k})$

$\rightarrow$ четность k.

T.10 $g = (1\ 4\ 8\ 6\ 3\ 7\ 2)$

$\operatorname{ord} g = 7$

$g^{2022} = g^{2022 \bmod 7} = g^{-1} = (1\ 2\ 7\ 3\ 6\ 8\ 4)$

T.11*. Пор. 2 : $\binom{7}{2}\left(1+\binom{5}{2}\left(1+\binom{3}{2}\right)\right) =$

цикли на 2

$= 21(1+10(1+3)) = 21\cdot 41 = 861$

Пор. 3: $\binom{7}{3}\left(1+\binom{4}{3}\right) = \frac{7\cdot\cancel{6}\cdot 5}{\cancel{6}}(1+4) = 35\cdot 5 = 175$

Пр. 6: $\binom{7}{6} + \binom{7}{3}\binom{4}{2}\left(1+\binom{2}{2}\right) =$

$= 7 + 35 \cdot 6 \cdot 2 = 7 + 12 \cdot 35 =$

$= 427$

VI. 56.37. а) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$

в) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0,1)$

д) $\mathbb{C}^*/U = \mathbb{R}^*$

з)* $S_n /_{\text{спец. подгр. эл. } n.} = \mathbb{Z}_n$

~~36.5~~ 56.38. $g \in GL_n(\mathbb{C})$, $H = SL_n(\mathbb{C})$

$\det(gh) = \det(g)\underbrace{\det(h)}_{1} = \det(g)$

чтд!

56.39. $H \trianglelefteq G$ $\qquad \varphi: xH \to Hx^{-1}$

~~$H^{\triangleleft G} = \{hg \mid h \in H, g \in G\}$~~

Докажем: $(gH)^{-1} = Hg^{-1}$

$\forall g_1 \in H \ \exists g_2 \in H: \ (gg_1)^{-1} = g_2 g^{-1}$

$g = g g_1 g_2$

$g_1 g_2 = e$

$g_2 = g_1^{-1} \in H$

т.е. мы задали отобр. $\psi: (xH)^{-1} \to Hx^{-1}$.

$\gamma: xH \to (xH)^{-1}$

$\varphi = \psi \circ \gamma$

Т.12*. $GL_n(K)$ — гр. обратимых матр. $n \times n$

$\downarrow$

невыр.

$\downarrow$

$\sim \mathbb{1}$

$\downarrow$

можно получить из $\mathbb{1}$ эл. преобр.

$\downarrow$

$\forall g \in GL_n(K) \quad g = \prod_{\alpha=1}^{k} \delta_\alpha$

$\uparrow$

эл. матрицы

чтд!

VII. 63.1. н) $\{q \in \mathbb{Q} \mid q = \frac{m}{p^n},\ m, n \in \mathbb{N}\}$

дистр., ас., кон., огр., сущ. нейтр. эл. огов.

63.11 а) $\mathbb{Z}_{p^n}$, p — простое

обратимые: $\{g \mid (g, p^n) = 1\}$ | дел. нуля: p^α, $\alpha \leq n$

нильпот. $\to$ $g^m \equiv_{p^n} 1$ $\quad a^{\varphi(p^n)} \equiv_{p^n} 1$

$\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$

$g = a^{\frac{p^n - p^{n-1}}{\cancel{m}} k}$, $a \in G$, $k, m \in \mathbb{N}$

г) $U = \left\{ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot \end{pmatrix} \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \right\}$

обр. : $\prod_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha\alpha} \neq 0$

дел. нуля: $\cancel{a_{ij} b_{jk}}$ $\cancel{\det(AB)} = 0$

МСU : есть нулевой столбец.

нильпотентные: $\begin{pmatrix} 0 & a_1 & & 0 \\ & & a_2 & \\ & 0 & & \ddots \\ & & 0 & a_k \end{pmatrix}$

(все эл. 0, кроме некоторой диагонали)

64.38* а) $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$

$\varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$

$\varphi(z+0) = \varphi(z) + \varphi(0) \Rightarrow \varphi(0) = 0$

$\varphi(z + (-z)) = \varphi(z) + \varphi(-z) = 0$

$\varphi(-z) = -\varphi(z)$

$\varphi(nz) = n\varphi(z)$

$\cancel{\varphi(z_1 + z_2) - \varphi(z_1 - z_3) + \varphi(z_2 + z_3)}$

φ – лин. ф-ция из $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Q}$ $\Rightarrow \varphi(z) = qz$, $q \in \mathbb{Q}$

VIII. 66.20

$$\begin{cases} 3x+y+2z=1 \\ x+2y+3z=1 \\ 4x+3y+2z=1 \end{cases}$$

в $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{cases} 3(1-2y-3z)+y+2z=1 \\ 4(1-2y-3z)+3y+2z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5y-7z+2=0 \\ -5y-10z+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z \equiv 1 \\ 3 \underset{5}{\equiv} 0 \end{cases} \rightarrow \text{не разрешимо в } \mathbb{Z}_5$$

T.13 а) $21x+76y=0$

$$\begin{cases} x=76t \\ y=-21t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

б) $21x + 76y = 1$

$(x_0, y_0) = (29, -8)$

$$\begin{cases} x = 29 - 76t \\ y = -8 + 21t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

$0 \leq x_0 < 75$ 1 раз.

в) в $\mathbb{Z}_{76}$ $\quad 21^{-1} = g$

$21 g \equiv_{76} 1$

$g = 29$

Т.14. $k \pmod{15} \mapsto (k \pmod 3, k \pmod 5)$ задаёт изоморфизм $\mathbb{Z}_{15} \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$

Возьмём $k \in \mathbb{Z}_{15}$

$k \pmod 3 = a, \quad k \pmod 5 = b$

$(3,5) = 1 \Rightarrow$ по КТО $\exists!\, c \in \mathbb{Z}_{15}$:

$k \pmod{15} = c$

$\Rightarrow$ биекция $\rightarrow$ изоморфизм

чтд!

X. 21.1. g) $1+i = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}$

p) $2+\sqrt{3}+i = (8+4\sqrt{3})(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3} \qquad \varphi = \tan^{-1}(2-\sqrt{3})$$

y) $\sin\alpha + i\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

21.2 ne) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$

$$\frac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)(1+i) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\sqrt{2} =$$

$$= \sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{5}{12}\pi}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30} = 2^{15}e^{\frac{25}{2}\pi i} = 2^{15}e^{\frac{i\pi}{2}} = \boxed{2^{15}i}$$

21.10 $\quad z+z^{-1} = 2\cos\varphi$

$$re^{i\alpha} + \frac{1}{r}e^{-i\alpha} = \left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\alpha + \left(r-\frac{1}{r}\right)i\sin\alpha$$

$$r = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \pm 1$$

$$z = \pm e^{i\alpha}, \quad \alpha \underset{\pi}{\equiv} \varphi$$

$$z^n + z^{-n} = z^n + \overline{z^n} = \pm 2\cos n\alpha = 2\cos n\varphi$$

22.7 1) $\sqrt[6]{-27} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{e^{i(\pi + 2\pi n)}} =$

$$= \sqrt{3} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}\right)}, \quad n \in \mathbb{Z}_6$$

23.1 a) $1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots = S$

$$(1-i)^n + (1+i)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left((-1)^k i^k + i^k\right) =$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k} (-1)^k$$

$$S = \cancel{\tfrac{1}{2}}\, 2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{e^{-\frac{i\pi n}{4}} + e^{\frac{i\pi n}{4}}}{2} \right) =$$

$$= \boxed{2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{\pi n}{4}}$$

T.16 $\left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset Mat_2(\mathbb{R})$

$$\downarrow$$

$$x + iy \longleftrightarrow x\mathbb{1} + y\mathbb{I}$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_2y_1 + x_1y_2)$$

$$(x_1\mathbb{1} + y_1\mathbb{I})(x_2\mathbb{1} + y_2\mathbb{I}) = (x_1x_2 - y_1y_2)\mathbb{1} + \mathbb{I}(x_2y_1 - x_1y_2)$$

$\hookrightarrow$ изоморфни

T.17 $\varphi : \mathbb{R} \to S^1, \quad \varphi(x) = \exp(2\pi i x)$

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \implies x_1 \equiv_1 x_2$$

$$\underset{\exp(2\pi i(x_1+x_2))}{\varphi(x_1+x_2)} = \underset{\exp(2\pi i x_1)\exp(2\pi i x_2)}{\varphi(x_1)\varphi(x_2)}$$

$$\downarrow$$

Сюрект- хом.

$\varphi(\mathbb{Q})$ = группа корней из 1 $\subset S^1$

$\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{Z}$

φ инд. биекцию $S^1 \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0,1)$

$\varphi([0,1)) = S^1$ биекция

✓

T. 18* 13, 19 в $\mathbb{Z}[i]$ неразл.?

$13 = 3^2+2^2 = (3-2i)(3+2i)$

$19 = (a+bi)(c+di) = ac - bd + i(bc+ad)$

$$\begin{cases} ac - bd = 19 \\ bc + ad = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -bc^2 - bd^2 = 19d \\ ac^2 + ad^2 = 19c \end{cases}$$

$$\begin{cases} b(c^2+d^2) = 19d \\ a(c^2+d^2) = 19c \end{cases} \longrightarrow (a^2+b^2)(c^2+d^2) = 19^2$$

$a^2+b^2 = 1 \rightarrow c^2+d^2 = 19^2$

$a^2+b^2 = 19$ (невозможно по mod 4)

$\Rightarrow$ 19 неразложимо.

$$x^2 = -1 \qquad x \in \mathbb{H}$$

$$x = \lambda_0 + \bar{\lambda}$$

$$\lambda_0^2 + 2\lambda_0\bar{\lambda} - (\bar{\lambda},\bar{\lambda}) + \overset{0}{\cancel{[\bar{\lambda},\bar{\lambda}]}} = -1$$

$$\lambda_0 \bar{\lambda} = 0$$

$$\lambda_0 = 0 \qquad\qquad \bar{\lambda} = 0$$

$$+(\bar{\lambda},\bar{\lambda}) = 1 \qquad\qquad \lambda_0^2 = -1 \ (?!)$$

$$\bar{\lambda} = \boxed{\begin{array}{c} \sin\theta\cos\varphi\, i + \sin\theta\sin\varphi\, j + \cos\theta\, k \\ \theta, \varphi \in \mathbb{R} \end{array}}$$