$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(n+1)(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!\ (2n)!!}{(n+1)(2n)!!(2n+1)!!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(1)_n}{(\frac{3}{2})_n}=$$

$$=\int\limits_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n(1)_n}{(\frac{3}{2})_n(1)_n}y^n\ dy=\int\limits_0^1 {}_2F_1(1,1;\frac{3}{2};y)\ dy$$

$${}_2F_1(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-1}\ dt$$

$$S=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})}\int\limits_0^1\int\limits_0^1(1-t)^{-\frac{1}{2}}(1-tz)^{-1}\ dt\ dz=\frac{1}{2}\int\limits_0^1(1-t)^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^1(1-tz)^{-1}\ dz\ dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1(1-t)^{-\frac{1}{2}}\left[-\frac{1}{t}\ln(\frac{1}{t}-z)\Bigg|_{z=0}^{z=1}\right]\ dt==-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{-1}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\ln(1-t)\ dt=-\frac{1}{2}I$$

$$I=....$$