Задание

В скобках указано число баллов за обоснованное решение задачи.

1. (2) Запишите уравнения Эйлера–Лагранжа для одномерного движения по координате x, если функция Лагранжа задана в виде

$$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x).$$

2. (3) Запишите уравнения Эйлера–Лагранжа для движения с обобщенными координатами $\{x, v\}$, если функция Лагранжа задана в рамках формализма первого порядка (производные обобщенных координат по времени входят в функцию Лагранжа только в первой степени) в виде

$$L(x,\dot{x},v,\dot{v}) = \frac{1}{2}m\left(2\dot{x}v - v^2\right) - U(x).$$

Покажите, что «уравнения движения» для обобщенной координаты v являются алгебраическими, а не дифференциальными. Исключите переменную v из уравнений движения.

3. (2) Выведите уравнения движения для скалярного комплексного поля ϕ в одномерном пространстве:

$$S = \int \mathrm{d}^2x \,\left(\partial_0\phi^*\partial_0\phi - \partial_x\phi^*\partial_x\phi - m^2\phi^*\phi\right),$$

(система единиц $c = 1$).

4. (3) Для комплексного скалярного поля в одномерном пространстве (см. Задачу 3) запишите ток Нётер при симметрии действия относительно преобразований комплексной фазы поля

$$\phi_a = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\,\phi,$$

где a не зависит от координат и времени, т.е. является глобальным параметром преобразования. Обсудить плотность заряда и поток заряда через границы.

5. (2) С помощью скобок Пуассона на фазовой плоскости (p, q) найдите уравнение движения для величины $x = q - t \cdot p/m$ для свободной частицы. Какой физический смысл имеет этот интеграл движения?

6. (4) Докажите следующие свойства скобок Пуассона:

1. линейность,
$$\{F, c_1G_1 + c_2G_2\}_{\mathrm{P}} = c_1\{F, G_1\}_{\mathrm{P}} + c_2\{F, G_2\}_{\mathrm{P}},$$
где $c_{1,2}$ — числа,

2. антисимметричность,
$$\{F, G\}_{\mathrm{P}} = -\{G, F\}_{\mathrm{P}},$$

3. тождество Якоби (циклическая перестановка)
$$\{F_1, \{F_2, F_3\}_{\mathrm{P}}\}_{\mathrm{P}} + \{F_2, \{F_3, F_1\}_{\mathrm{P}}\}_{\mathrm{P}} + \{F_3, \{F_1, F_2\}_{\mathrm{P}}\}_{\mathrm{P}} = 0.$$

7. (3) Рассмотреть в качестве генератора канонического преобразования проекцию вектора орбитального момента импульса $\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, скажем, на ось z и найти вид бесконечно малых канонических преобразований — вращения координат и импульса вокруг оси z на угол ϵ.

8. (2) Докажите утверждение

$$\delta f(q,p) = \epsilon\,\{f, \Gamma\}_{\mathrm{P}}.$$

9. (1) Покажите, что в потенциале притяжения вида $U \sim -1/r^2$ частица падает на центр. При каком условии?

10. (2) Докажите, что любой луч, исходящий из фокуса эллипса, после зеркального отражения от эллипса проходит через второй фокус.

11. (2) Докажите, что сумма расстояний от точки на траектории до фокусов эллипса остается постоянной величиной. Чему равна эта величина?

12. (1) Докажите, что квадраты периодов обращения планет T соотносятся как кубы больших полуосей орбит-эллипсов a:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

13. (2) В гравитационном поле Солнца вычислите малое отклонение луча света, проходящего возле края Солнца (указание: гравитационное ускорение не зависит от массы). Сравните результат с углом отклонения, рассчитанным в общей теории относительности, т.е. с учетом искривления пространства-времени,

$$\delta\phi = \frac{4GM_\odot}{c^2 R_\odot}.$$

14. (1) Запишите элемент объема d^3V в сферических координатах, пользуясь ортогональностью рёбер кубика, построенного по ортам вектора $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ в терминах $\mathrm{d}\mathcal{C}^\alpha$.

15. (1) Покажите, что частные производные ∂_α обладают положительной пространственной четностью.

16. (1) Покажите, что символ Кронекера $\delta^\alpha_\beta = \partial_\beta r^\alpha$ — тензор второго ранга с положительной пространственной четностью.

17. (1) Покажите, что свертка ковариантного индекса тензора с контрвариантным индексом этого тензора не меняет пространственную четность.

18. (3) На евклидовой плоскости найдите базис $\mathfrak{h}^{1,2}$ ковариантного пространства, выразив его через базис векторного пространства, который задан в виде

$$\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_x, \qquad \mathfrak{e}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathfrak{e}_x + \frac{1}{2}\,\mathfrak{e}_y.$$

Запишите метрику в заданном базисе векторного пространства. Используйте метод определения ковариантного базиса соотношениями ортонормировки и метод градиента к линии постоянной координаты.

19. (3) Используя графические построения для изменения базисных векторов в полярных кооринатах, вычислите оператор Лапласа на плоскости

$$\triangle_{\mathrm{2D}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

20. (3) Вычислите в уме, считая вектор $\boldsymbol{k}$ постоянным:

$$\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}), \qquad \mathrm{div}\,\{\boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\}, \qquad \mathrm{rot}\,\{\boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\}.$$

21. (3) Вычислить: $\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$, $\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})$, где $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{a}$— постоянные векторы.

22. (3) Вычислить: $(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{r}$, $\mathrm{grad}\,f(r)$, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}(r)$, где $r = |\boldsymbol{r}|$.

23. (3) Покажите, что коммутатор производных Ли по двум направлениям для скаляра сводится к производной Ли

$$[\text{Ł}_\xi, \text{Ł}_\eta] f \equiv (\text{Ł}_\xi\,\text{Ł}_\eta - \text{Ł}_\eta\,\text{Ł}_\xi) f = \text{Ł}_{[\xi,\eta]} f, \quad \text{где} \qquad [\xi,\eta] = \text{Ł}_\xi \eta.$$

24. (4) Покажите, что коммутатор производных Ли по двум направлениям для вектора сводится к производной Ли

$$[\text{Ł}_\xi, \text{Ł}_\eta] a^\gamma = \text{Ł}_{[\xi,\eta]} a^\gamma.$$

25. (5) Покажите, что

$$\text{Ł}_\mu \mathfrak{e}^\alpha_\nu - \text{Ł}_\nu \mathfrak{e}^\alpha_\mu = (\mathfrak{e}^\gamma_\mu \mathfrak{e}^\beta_\nu - \mathfrak{e}^\beta_\mu \mathfrak{e}^\gamma_\nu)(T^\alpha_{\beta\gamma} - T^\alpha_{\gamma\beta}).$$

26. (4) Найдите векторы Киллинга для евклидовой метрики трехмерного пространства в декартовых координатах.

27. (5) Вычислите символы Кристоффеля для евклидовой метрики в сферических координатах.

28. (3) Найти закон преобразования метрической связности при замене координат. Убедитесь, что симметричная связность не является тензором. Докажите, что кручение — это тензор.

29. (3) Докажите тождество для ковариантной дивергенции вектора

$$\nabla_\alpha A^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_\alpha\,\{\sqrt{g}\,A^\alpha\}$$

где $g = \det g_{\alpha\beta}$, т.е. детерминант метрики, для которого $\delta g = g\, g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}$.

30. **(2)** С помощью задачи 29 докажите, что квадрат оператора ∇ сводится к оператору Бельтрами–Лапласа:

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_\alpha\left\{g^{\alpha\beta}\sqrt{g}\,\partial_\beta\right\},$$

по крайней мере, при действии на скаляр.

31. **(2)** Вычислите оператор Лапласа в сферических координатах из выражения для оператора Бельтрами.

32. **(2)** В ортогональной системе координат метрика имеет диагональный вид $g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(H_1^2,\, H_2^2,\, H_3^2)$, где H_k называют коэффициентами Ламе. Запишите оператор Бельтрами–Лапласа через коэффициенты Ламе.

33. **(1)** Докажите, что свертка симметричного тензора $s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}$ с антисимметричным $t^{\alpha\beta} = -t^{\beta\alpha}$ тождественно равна нулю:

$$s_{\alpha\beta}t^{\alpha\beta} \equiv 0.$$

34. **(5)** При наличии кручения следует заменить симметричную связность на

$$\mathcal{A}^\lambda_{\alpha\beta} = \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} + T^\lambda_{\alpha\beta}.$$

Докажите, что в этом случае коммутатор ковариантных производных включает в себя еще и тензор кручения, так что

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]\, a_\gamma = -a_\lambda R^\lambda_{\ \gamma\alpha\beta} - T^\lambda_{\alpha\beta}\nabla_\lambda a_\gamma.$$

Как видим, коммутатор ковариантных производных на векторах выражается через ковариантную производную вектора с кручением, но член с тензором кривизны не включает в себя ковариантную производную вектора, как говорят, этот член представляет собой центральный заряд для коммутатора операторов.

35. **(5)** На сфере радиуса a (метрика: $\mathrm{d}\mathcal{C}^2 = a^2\left\{\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\right\}$) вычислите тензоры Римана и Риччи, а также скалярную кривизну.

36. **(6)** Докажите в общем случае ненулевого кручения, что имеет место следующее равенство для коммутатора производных Ли,

$$\begin{aligned}[\text{Ł}_\mu, \text{Ł}_\nu]\, a^\alpha &= \frac{1}{2}\,(\mathfrak{e}^\gamma_\mu\mathfrak{e}^\beta_\nu - \mathfrak{e}^\beta_\mu\mathfrak{e}^\gamma_\nu)[\nabla_\gamma, \nabla_\beta]\, a^\alpha + \nabla_{\alpha'}a^\alpha\,(\text{Ł}_\mu\mathfrak{e}^{\alpha'}_\nu - \text{Ł}_\nu\mathfrak{e}^{\alpha'}_\mu) = \\ &= \mathfrak{e}^\gamma_\mu\mathfrak{e}^\beta_\nu[\nabla_\gamma, \nabla_\beta]\, a^\alpha + \nabla_{\alpha'}a^\alpha\,(\mathfrak{e}^\gamma_\mu\mathfrak{e}^\beta_\nu - \mathfrak{e}^\beta_\mu\mathfrak{e}^\gamma_\nu)(T^{\alpha'}_{\beta\gamma} - T^{\alpha'}_{\gamma\beta}).\end{aligned}$$

37. **(2)** Используя теорему Стокса и полагая векторное поле равным $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{k}\, f(\boldsymbol{r})$, где вектор $\boldsymbol{k}$ — постоянный, не равный нулю, преобразуйте интеграл по контуру в интеграл по поверхности

$$\oint\limits_{\partial\Sigma} f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{C}} = -\int\limits_{\Sigma} \mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{r}) \times \mathrm{d}^2\,\boldsymbol{\Sigma}.$$

38. **(3)** С помощью теоремы Гаусса покажите, что

$$\int\limits_V \nabla f\,\mathrm{d}^3 r = \oint\limits_{\partial V} f\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{\Sigma}, \qquad \int\limits_V \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^3 r = -\oint\limits_{\partial V} \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}) \times \mathrm{d}^2\boldsymbol{\Sigma}.$$

39. **(3)** С помощью теоремы Стокса покажите, что

$$\int\limits_S \nabla f \times \mathrm{d}^2\boldsymbol{\Sigma} = -\oint\limits_{\partial S} f\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{C}}, \quad \oint\limits_S (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}))\cdot \mathrm{d}^2\boldsymbol{\Sigma} = 0.$$

40. **(2)** Запишите элемент объема в сферических координатах, применяя метод с использованием детерминанта метрики.

41. **(2)** Найдите преобразование матриц спина векторного поля, которое переводит эти матрицы из базиса декартовых координат к матрицам в стандартном базисе собственных векторов с заданными значениями проекции спина на ось z.

42. **(3)** Вычислите все компоненты символа Кронекера в базисе $\{+,-,0\}$.
Ответ: ненулевые компоненты $\delta_{00} = -\delta_{+-} = -\delta_{-+} = 1$.

43. **(3)** Вычислите нормировочный коэффициент сферической гармоники

$$\mathcal{Y}_{l,l}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{(2l+1)!}{2^l}} \, \frac{1}{l!} \, (n_+)^l$$

(методом интегрирования по частям и рекуррентных соотношений).

44. **(4)** Постройте в явном виде результат разложения в сумму неприводимых слагаемых тензорного произведения в задаче $SO(3):\ 5 \otimes 3$.

Итого: 120 баллов.

Во время семинарских занятий разбираются задачи объемом до 60 баллов. Студентам самостоятельно необходимо дополнительно к разобранным задачам решить задачи еще на 20 баллов.

Рейтинговые баллы за работу на семинаре (в сумму к баллам за тесты на лекциях) выставляются семинаристами по итогам обсуждения обоснования студентом решений задач (сдача):

- отл. = “3”,
- хор. = “2”,
- удов. = “1”,
- неуд. = “0”.

Как правило оценка семинариста за работу на семинарах коррелирует с процентом баллов, засчитанных за задачи, из расчета 100%= 80 баллов:

- 75+% = отл. = “3”,
- 50+% = хор. = “2”,
- 25+% = удов. = “1”,
- 25-% = неуд. = “0”.