ДВОЙНЫЕ СМЕЖНЫЕ КЛАССЫ И ФОРМУЛА ИНДЕКСА ФРОБЕНИУСА

Сейчас мы рассмотрим важное обобщение понятие смежного класса, введенное в 1887–1894 годах Георгом Фробениусом и Рихардом Дедекиндом. В современных учебниках это понятие обычно спрятано в действия групп (орбиты подгруппы $F \leq G$ на однородном G-множестве G/H). Однако, нам кажется, что начинающему *намного* проще понять доказательства многих классических теорем, если явно артикулировать их в терминах двойных смежных классов, как это, собственно, и делали Фробениус и Бернсайд. Содержание настоящего параграфа — в особенности формула индекса Фробениуса! — абсолютно необходимо для понимания большинства доказательств в лекции о p-группах и теоремах Силова.

1. Двойные смежные классы.

Пусть G – группа, $F, H \leq G$. Произведение вида

$$FgH = \{fgh \mid f \in F, h \in H\}$$

называется **двойным смежным классом** (`double coset`, `Doppelnebenklasse`) группы G по паре подгрупп (F, H). Множество всех двойных смежных классов обозначается через

$$F\backslash G/H = \{FgH \mid g \in G\}.$$

Вся теория алгебраических групп и весь гармонический анализ основаны на изучении этих множеств. Перенесем на них основные факты, относящиеся к обычным смежным классам.

Лемма 1. *Два двойных смежных класса FxH и FyH либо не пересекаются, либо совпадают.*

Доказательство. Пусть $z \in FxH \cap FyH$. Это значит, что z можно представить в виде $z = f_1xh_1 = f_2yh_2$, где $f_i \in F$, $h_i \in H$. Тогда $x = f_1^{-1}f_2yh_2h_1^{-1} \in FyH$, тем самым $FxH \leq FyH$. Доказательство обратного включения совершенно аналогично. □

Таким образом, отношение $\sim$ на G, определенное посредством: $x \sim y$ если и только если $FxH = FyH$, является отношением эквивалентности, называемым **сравнимостью по двойному модулю** (F, H). Трансверсаль к этому отношению эквивлентности называется **системой представителей** двойных смежных классов по модулю (F, H). Например, если $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — система представителей смежных классов, то

$$G = Fx_1H \sqcup \ldots \sqcup Fx_nH.$$

Это разложение известно как **разложение на двойные смежные классы** по модулю (F, H) или, коротко, `Doppelnebenklassenzerlegung`.

Задача 1. Убедитесь, что в качестве системы представителей двойных смежных классов по модулю (H, F) можно взять

$$X^{-1} = \{x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}\},$$

иными словами,

$$G = Hx_1^{-1}F \sqcup \ldots \sqcup Hx_n^{-1}F.$$

2. Формула Фробениуса для индекса.

Сейчас мы докажем один из самых фундаментальных фактов всей теории групп, столь же элементарный, как теорема Лагранжа, но гораздо более `могущественный`.

Лемма 2. *Двойной смежный класс FxH содержит в точности*

$$|H : H \cap x^{-1}Fx|$$

левых смежных классов по F.

Доказательство. Каждый левый смежный класс по F, содержащийся в FxH имеет вид Fxh для некоторого $h \in H$. Ясно, что для двух $h, g \in H$ равенство $Fxh = Fxg$ означает в точности $hg^{-1} \in x^{-1}Fx$. Но так как изначально, кроме того, $hg^{-1} \in H$, то $hg^{-1} \in H \cap x^{-1}Fx$. Но это как раз и значит, что

$$Fxh = Fxg \iff (H \cap x^{-1}Fx)h = (H \cap x^{-1}Fx)g,$$

как и утверждалось. □

Следствие 3. *Двойной смежный класс FxH содержит в точности*

$$|F : F \cap xHx^{-1}|$$

правых смежных классов по H.

Доказательство. Лемма утверждает, что двойной класс $Hx^{-1}F$ содержит $|F : F \cap xHx^{-1}|$ левых смежных классов по H. Однако $fxH \mapsto Hx^{-1}f^{-1}$ устанавливает биекцию между правыми смежными классами в FxH и левыми смежными классами в $Hx^{-1}F$. □

Мы будем *десятки* раз пользоваться следующим утверждением, классически известным как **формула Фробениуса для индекса** = `Indexformel`, но последнее время все чаще называемым **формулой индекса Фробениуса** = `Frobenius index formula`[1].

Теорема 4 (Indexformel)**.** *Пусть $G = Fx_1H \sqcup \ldots \sqcup Fx_nH$ — разложение G по двойному модулю (F, H). Тогда*

$$|G : F| = |H : H \cap x_1^{-1}Fx_1| + \ldots + |H : H \cap x_n^{-1}Fx_n|.$$

Доказательство. В силу леммы 1 имеем $|G| = |Fx_1H| \sqcup \ldots \sqcup |Fx_nH|$, осталось подставить сюда формулу для количества левых смежных классов по F, содержащихся в FxH, установленную в лемме 2. □

Теорема Лагранжа является частным случаем этого утверждения, получающимся при $H = 1$.

Следствие 5. *В условиях теоремы 4*

$$|G : H| = |F : F \cap x_1Hx_1^{-1}| + \ldots + |F : F \cap x_nHx_n^{-1}|.$$

3. Пересечения левых и правых смежных классов, общая формула произведения.

Приведем еще несколько вариаций на тему леммы 2 предыдущего параграфа, с тем, чтобы парафразировать доказательство формулы Фробениуса. Хотя это второе доказательство не содержит ничего нового и даже чуть длиннее, в нем эксплицируется связь с пересечениями односторонних классов, а сама формула индекса принимает более симметричный вид, который, по-видимому, легче запомнить тому, кто видит формулу в первый раз.

Пусть G – группа, $F, H \leq G$. Что можно сказать о пересечениях *левых* смежных классов Fx и *правых* смежных классов yH? Сейчас мы дадим полный ответ на этот вопрос. Лемма 1 утверждает, что два двойных смежных класса по (F, H) либо не пересекаются, либо совпадают. Это можно сформулировать чуть иначе, а именно: если Fx и Fy — два левых смежных класса по F, то множества правых смежных классов zH таких, что $Fx \cap zH \neq \emptyset$ и $Fy \cap zH \neq \emptyset$ либо не пересекаются, либо совпадают. Таким образом, если множество двойных смежных классов $F\backslash G/H$ конечно, то левые смежные классы $F\backslash G$ и правые смежные классы G/H можно разбить на одинаковое количество $n = |F\backslash G/H|$ дизъюнктных блоков $F\backslash G = X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$ и $G/H = Y_1 \sqcup \ldots \sqcup Y_n$ так что если $Fx \in X_i$, $yH \in Y_j$ и $Fx \cap yH \neq \emptyset$, то $i = j$. Оказывается, этот результат можно уточнить, а именно, если $Fx \in X_i$ и $yH \in Y_i$, то порядок их пересечения $Fx \cap yH$ зависит не от самих классов Fx и yH, а только от i.

Лемма 6. *Если $Fx \cap yH, Fx \cap zH \neq \emptyset$, то $|Fx \cap yH| = |Fx \cap zH|$.*

[1] В этом месте те из первокурсников, кто еще не слышал о нарушении ассоциативности в языке, обычно спрашивают, что такое `индекс Фробениуса`.

Доказательство. Пусть $u \in Fx \cap yH$, $v \in Fx \cap zH$. Тогда $Fu = Fx = Fv$, $uH = yH$ и $vH = zH$ и, таким образом,

$$Fx \cap yH = Fu \cap uH = u(u^{-1}Fu \cap H),$$

$$Fx \cap zH = Fv \cap vH = v(v^{-1}Fv \cap H).$$

С другой стороны, так как $Fu = Fv$, то $u^{-1}Fu = v^{-1}Fv$ (проверьте!). Это значит, что оба пересечения $Fx \cap yH$ и $Fx \cap zH$ являются смежными классами по одной и той же подгруппе $u^{-1}Fu \cap H$, и, тем самым,

$$|Fx \cap yH| = |u^{-1}Fu \cap H| = |Fx \cap zH|,$$

как и утверждалось. □

В частности, отсюда получается такое обобщение формулы произведения: $|F| \cdot |H| = |FgH| \cdot |F \cap gHg^{-1}|$. Сформулируем его чуть иначе.

Теорема 7 (Allgemeine Produktformel)**.** *Если $F, H \leq G$ подгруппы конечной группы G, $g \in G$, то*

$$|FgH| = \frac{|F| \cdot |H|}{|F \cap gHg^{-1}|}.$$

Обычная формула произведения получается если подставить сюда $g = 1$. Теперь у нас все готово, чтобы еще раз доказать формулу Фробениуса. В самом деле, суммируя общую формулу произведения по всем классам $G = Fx_1H \sqcup \ldots \sqcup Fx_nH$, получаем

$$|G| = \sum_{i=1}^{n} \frac{|F||H|}{|F \cap x_iHx_i^{-1}|}.$$

Обе части формулы можно разделить хоть на $|H|$, хоть — воспользовавшись тем, что $|F \cap x_iHx_i^{-1}| = |x_i^{-1}Fx_i \cap H|$ — на $|F|$.