

В.В.Киселев

Нерелятивистская механика  
частиц и полей:  
ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И СИММЕТРИИ

ASPIRA AD OPTIMUM

# Оглавление

Предисловие	4
Тема 1. Динамика и действие	6
Лекция № 1	6
1. Причинность и действие на траектории	6
1.1. Частица: вероятность достоверности траектории	6
1.2. Поле: локальный лагранжиан	15
2. Принцип наименьшего действия	17
3. Теорема Нётер	18
3.1. Однородность пространства	23
3.2. Однородность времени	24
3.3. Изотропность пространства	24
Лекция № 2	25
4. Инерциальные системы и функция Лагранжа свободной частицы	25
5. Амплитуда вероятности и постоянная действия	27
6. Гамильтонова механика	28
6.1. Уравнения Гамильтона–Як’оби	28
6.2. Уравнения Гамильтона	30
6.3. Флуктуации свободной квантовой частицы	31
6.4. Скобки Пуассона	34
6.5. Канонические преобразования	34
§а. Генераторы бесконечно малых канонических преобразований	36
§б. Генераторы и коммутаторы	37
§с. Метод решения уравнений Гамильтона–Як’оби	38
6.6. Сферически симметричный потенциал	39
Лекция № 3	40
7. Замкнутые финитные орбиты	40
7.1. Замкнутость любой финитной орбиты ( $\ell \neq 0$ )	42
8. Движение в кулоновском поле	44
8.1. Финитное движение (задача Кеплера)	46
8.2. Резерфордовское рассеяние	47
9. Изотропный гармонический осциллятор	50
10. Теорема вириала	51
Тема 2. Векторный анализ	53
Лекция № 4	53
§а. Координатный подход	53
11. Евклидово пространство	53
11.1. Векторы, ковекторы, тензоры	53
§а. Связь координатного и инвариантного подхода	57
§б. Метрический тензор	58
11.2. Тензор Леви-Чивиты	59
§а. Зеркальная инверсия пространства	61
11.3. Изометрии евклидовой метрики	64
11.4. Волновое уравнение, инвариантная скорость и изометрия	66
§а. Действие свободной релятивистской частицы из теоремы Нётер	69
§б. Энергия, импульс, 4-скорость	71
11.5. Градиент, дивергенция, ротор	72
§а. Дифференцирование в сферических координатах при параллельном переносе	74
Лекция № 5	77
11.5. Дифференцирование в криволинейных координатах	77
§а. Производная Ли по направлению	77
§б. Ковариантная производная	79
§с. Векторы Киллинга	84
§д. Ковариантные уравнения Эйлера–Лагранжа и принцип эквивалентности масс	84
§е. Тензор Римана	88
§ф. Принцип относительности Галилея: общековариантная реинкарнация	90

Лекция № 6	90
11.6. Теорема Гаусса	91
11.7. Теорема Стокса	92
11.8. Дифференциальные формы в координатном подходе и интегрирование	93
§а. Ориентированная площадь и внешнее произведение	93
§b. Внешнее дифференцирование	95
§с. Теоремы	97
§d. Ориентированный объем в криволинейных координатах	98
§е. Криволинейная метрика как внешнее поле и закон сохранения энергии-импульса	99
12. Уравнения Максвелла	104
12.1. Сила Лоренца, суперпозиция полей	104
12.2. Закон Кулона	105
12.3. Закон сохранения заряда	106
12.4. Закон Био-Савара	106
12.5. Индукция	107
12.6. Магнитные заряды	107
12.7. Ток смещения	108
ТЕМА 3. ГРУППА ПОВОРОТОВ И СПИН	109
Лекция № 6	109
13. Генераторы инфинитезимальных преобразований	109
13.1. Сдвиги $\equiv$ трансляции координат	109
13.2. Группа поворотов	113
13.3. Группа поворотов $O(3)$	115
13.4. Общий вид генераторов поворотов и спин	116
Лекция № 7	118
14. Спин $s = 1$	118
§а. Полнота базиса и измерение среднего значения	120
15. Совместный базис двух эрмитовых матриц	122
16. Квантование спина	123
17. Тензорные поля	125
Лекция № 8	127
18. Разложение приводимых тензоров на неприводимые	127
19. Спин $s = \frac{1}{2}$	128
20. Спинорная метрика	132
21. Поперечные векторные и тензорные поля	135
ТЕМА 4. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА И ТОК	136
Лекция № 9	136
22. Тензор энергии-импульса нерелятивистских частиц	136
22.1. Баланс энергии	138
22.2. Баланс импульса	138
23. Тензор орбитального момента	139
24. Скалярное поле амплитуды вероятности траектории	140
24.1. Тензор энергии-импульса	142
24.2. Глобальная калибровочная инвариантность	143
24.3. Локальная калибровочная инвариантность и векторный бозон	144
24.4. Дискретные симметрии $P$ и $T$	145
ТЕМА 5. СИММЕТРИИ ЗАМКНУТЫХ ОРБИТ	146
Лекция № 10	146
25. Вектор Рунге–Ленца–Лапласа	146
25.1. Скобки Пуассона и симметрия $SO(4)$	147
26. Тензор Фрадкина	149
26.1. Группа $SU(3)$	149
26.2. Дополнительные интегралы движения	151
27. Квазипериодическое движение в магнитном поле	153
27.1. Периодическое движение	153
27.2. Теорема Адемолло–Гатто	155
Приложения 6. КВАЗИУПРУГИЙ ДИПОЛЬ В ПОЛЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ	157

Лекция № 11	157
28. Квазиупругий диполь . . . . .	157
28.1. Метод преобразования Фурье . . . . .	158
29. Функция Грина классического осциллятора . . . . .	160
30. Ряды Фурье . . . . .	162
Приложение. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	164
Предисловие к Приложению	164
Лекция П.1	165
31. Случайная величина . . . . .	165
31.1. Событие и выборка: биномиальное распределение . . . . .	165
32. Усреднение . . . . .	166
33. Распределение Пуассона . . . . .	167
§a. Экспонента и натуральный логарифм . . . . .	168
§b. Ряд Тейлора . . . . .	170
§c. Дисперсия по Пуассону . . . . .	172
Лекция П.2	172
34. Непрерывная случайная величина . . . . .	172
§a. Формула Стирлинга . . . . .	173
§b. Нормальное распределение . . . . .	175
ЛИТЕРАТУРА	178

## Предисловие

*Дух познает приходящее,  
знания сохраняют уходящее.*

*Конфуций*

Материал данного учебного пособия представляет собой вариант лекций, предлагаемых автором в бакалавриате студентам первого и второго курса Московского физико-технического института (Национального исследовательского университета). Аттестация первокурсников по этому спецкурсу проводится в рамках регулярного тестирования на каждом занятии и по мере участия в семинарах по решению задач, в то время как для студентов второго курса на кафедре физики высоких энергий дополнительно проводится экзамен, а посещение семинаров и сдача задания являются обязательными. Цель дисциплины — показать единый корень классической и квантовой механики так, как это представляется современной науке, а также обозначить единство принципов построения механики частиц и полей, что предполагает использование и соответствующего математического аппарата. Весь подход в целом — это фейнмановская формулировка механики таким образом, как она видится с позиций настоящего времени<sup>1</sup>.

Этот тезис предполагает, что вместо эмпирико-эвристического построения мозаики различных аспектов описания механики частиц и полей предлагается пойти по пути более общей идеи, минимизирующей необходимость детализации опытных изысканий и опирающейся на логически ясную и явно указанную базу аксиом, благодаря чему обширное множество эмпирико-эвристических клипов становятся довольно простыми следствиями этой общей идеи. Это можно сравнить с известной притчей о трех мудрецах, которым дали возможность по отдельности прощупать хобот, ногу и хвост слона, а затем спросили, с чем они имеют дело. Понятно, что, расширяя ареал своих эмпирических знаний и эвристических догадок, каждый из мудрецов, в конце концов, даст верный ответ о предмете исследований — слоне. Но все исследование предстанет совсем в другом свете, если опереться на более общую и глубокую идею эволюции видов: это исследование обратится в частный эпизод на древе развития жизни. Нечто подобное автор этого курса считает необходимым проделать и с механикой, а именно, с самого начала оперировать терминами, в которых общая идея механики становится логическим корнем для вывода множества фактов, которые сами прежде казались постулатами.

В основе курса — законы механики [1], сформулированные в таком ракурсе, который позволяет затем их наиболее просто и эффектно применять для описания частиц и полей в классической нерелятивистской механике и подготовить методический инструментарий для логически ясного перехода к релятивистской механике частиц и теории поля, а также к квантовой теории в качестве продолжения данного спецкурса. В такой постановке целей изложения особый упор сделан на обосновании и применении таких понятий как действие, теорема Нётер и сохраняющиеся величины, пространственно-временные симметрии, гамильтонова механика, движение в кулоновском или гравитационном поле и в поле изотропного осциллятора. Изложение пространственно-временных симметрий предусматривает обучение векторному анализу и, как следствие, введение генераторов пространственных трансляций и поворотов для полей, понятия спина для поля, а значит, описание всей процедуры «квантования» собственных значений эрмитовых матриц для генераторов группы  $SU(2)$ . Рассмотрение матричного представления спинных генераторов поворотов полей позволяет построить неприводимые тензорные представления для полей с собственным моментом  $s = 0, 1, 2$ , а при рассмотрении неприводимых тензорных произведений единичного радиус-вектора вывести выражения для сферических гармоник скаляра, вектора и тензора второго ранга.

Векторный анализ излагается в научном стиле: если в логике изложения возникает ключевой, хоть и не простой вопрос, то он не откладывается на потом (тогда «потом» растет как снежный ком), а рассматривается сразу, на месте. Как следствие такого подхода, изучается описание в криволинейных координатах, включая производную Ли и ковариантную производную, что позволяет перевести физический принцип эквивалентности инерционной и гравитационной массы в плоскость математического рассмотрения, которое приводит к введению псевдоевклидова пространства-времени Минковского и риманова пространства. Кроме того, пространственно-временной взгляд на движение позволяет провести рассмотрение тензора энергии-импульса для частиц и поля, а также калибровочную симметрию преобразования поля.

В качестве приложений изучения симметрий движений построены сохраняющиеся интегралы движения для траекторий в кулоновском поле и для изотропного осциллятора, а также фазовый инвариант

---

<sup>1</sup>Более точно следует сказать, что фейнмановская формулировка механики излагается так, как видится автору этой книги, конечно.

периодического и квазипериодического движения с рассмотрением его физического смысла в случае движения в магнитном поле.

Наконец, излагается метод решения уравнений движения с помощью преобразования Фурье с определением дельта-функции Дирака на примере квазиупругого диполя в поле электромагнитной волны, описан метод функции Грина для вынужденных колебаний классического осциллятора, подчеркнуты физические различия для разных прескрипций обхода полюсов в плоскости комплексной частоты и их роль при использовании запаздывающей и причинной функций Грина классического осциллятора.

Таким образом, изложение построено так, чтобы дать единый взгляд как на классическую нерелятивистскую механику частиц и полей, так и на классическую и квантовую механику с их общим генезисом в терминах действия и его симметрий.

Автор выражает свою признательность своим коллегам Н.Колганову и В.Шмидту, которые вели семинары по спецкурсу, благодаря чему по ходу практических занятий в текст пособия были внесены правки, хотя ряд вопросов излагается автором в своей манере, а не так, как это предпочитали делать коллеги на семинарах.

Автор признателен студентам Физтеха П.Лебедеву, М.Князеву и Д.Самоделкину, благодаря которым были исправлены ошибки и опечатки в тексте, а также некоторые формулировки и подходы к изложению материала книги.

Прошу читателей направлять свои замечания и отзывы о книге по электронному адресу

kiselev.vv@phystech.edu

с пометкой «Спецкурс по нерелятивистской механике» или просто «NRMech».

# Тема 1

## Динамика и действие

### Лекция № 1

Детерминизм классической механики и начальные данные, траектории с фиксированными концами, динамический функционал на траектории, погрешность измерений и неопределенность траектории, трубка эквивалентных траекторий, функционал вероятности для пучка траекторий и его экстремальность на трубке классической траектории физической системы, принцип запрета Паули и введение амплитуды вероятности, операция перестановки траекторий тождественных частиц, фермионы и бозоны, функционал действия как логарифм амплитуды вероятности, экстремальность действия на «прямой» траектории, переход от механики точки к механике поля, действие в локальной теории поля, принцип наименьшего действия в механике, уравнения Эйлера–Лагранжа для частицы и для поля, правило Эйнштейна для суммирования по индексам, теорема Нётер, интегралы движения из однородности пространства и времени и из изотропии пространства.

#### 1. Причинность и действие на траектории

##### 1.1. Частица: вероятность достоверности траектории

В механике частица представляет собой точку, которая движется в пространстве под воздействием сил. В качестве *наблюдаемой величины* измеряется положение частицы в пространстве, которое задается координатой  $q$ , а зависимость от времени траекторией  $q(t)$ .

Это движение полностью детерминировано, если заданы координата и скорость частицы в начальный момент времени, а также силы во всех точках пространства на протяжении всего времени их действия. В таком понимании, силы должны однозначно определять изменение скорости, т.е. ускорение. Подобное описание движения частицы под действием сил представляет собой механистическую формулировку *принципа причинности*: всякая точка на траектории частицы возникает как следствие воздействия на частицу сил в предыдущие моменты времени при заданных начальных данных: положении и скорости в исходный момент времени. Детерминированность математически выражается в виде уравнений движения, которые по начальным данным в момент времени  $t_0$ : координате и скорости,  $\{q_0 = q(t_0), \dot{q}_0 = dq(t_0)/dt\}$ , — задают единственную траекторию  $q(t)$ . Эта траектория в момент времени  $t'$  проходит через точку  $q' = q(t')$ . Это означает, что для данной траектории от начальных данных в виде  $\{q_0, \dot{q}_0\}$  можно перейти к данным на концах траектории: парам  $\{q_0, t_0\}$  и  $\{q', t'\}$ . Для свободной частицы, т.е. в отсутствие всяких сил, существуют инерциальные системы отсчета, в которых частица движется поступательно и равномерно, т.е. траектория является прямой линией. Для свободной частицы, таким образом, переход от начальных данных к данным на концах траектории является взаимно однозначным. При наличии сил переход к данным на концах траектории также будет взаимно однозначным, если рассматривать движение на бесконечно малом промежутке времени  $t' - t_0 \mapsto dt \rightarrow 0$ . На конечных промежутках времени задание конечных точек на траектории может отвечать множеству траекторий с разными значениями скорости в начальный момент времени. В этом случае говорят, что физическая система обладает либо симметрией, либо сингулярными точками. Например, от одного полюса на шаре можно прийти к другому полюсу за одинаковое время, если идти по разным меридианам с одной и той же угловой скоростью, что отвечает симметричной системе<sup>1</sup>. В качестве случая наличия сингулярных точек можно указать систему линз, например, с двумя фокусами, так что траектории фотонов от фокуса до фокуса, по сути, охватывают все множество траекторий с началом в одном из фокусов с одинаковыми оптическими длинами<sup>2</sup>.

Итак, для бесконечно малых сдвигов по времени траектория движения частицы однозначно задается данными на концах траектории. Это справедливо и для траекторий на конечных отрезках времени, если в системе нет сингулярностей или особых симметрий. Все другие «траектории», т.е. функции  $q(t)$  с теми же данными на концах не будут удовлетворять уравнениям движения с заданными начальными данными. Траектории, не являющиеся решением уравнений движения, можно трактовать как траектории с другим набором сил, что влечет за собой, конечно, и соответствующие изменения начальных данных,

<sup>1</sup>При наличии симметрии существуют преобразования перемещающие концы траектории в допустимой области значений, сохраняя при этом свойства траекторий. В приведенном примере со сферой в качестве полюсов можно выбрать любую пару противоположащих точек сферы.

<sup>2</sup>В отличие от случая симметрии в системе, сингулярные точки фиксированы и нет преобразований, перемещающих эти точки в системе без изменения свойств траекторий с концами в сингулярных точках.

а именно, скорости в исходной точке. В этом смысле, траектория, которая мало отличается от решения уравнений движения в заданной физической системе с фиксированными концами, получается за счет малой флуктуации сил.

Траектории с фиксированными концами можно поставить в соответствие число, равное единице, если эта траектория  $q(t)$  — решение уравнений движения в заданной физической системе, и нулю, если траектория  $\tilde{q}(t)$  не является решением уравнений движения. Такое отображение траектории на множество чисел в общем случае называется *функционалом*. Сконструированное нами сейчас соответствие можно назвать динамическим функционалом достоверности траектории  $\mathcal{C}$ : если траектория соответствует динамике системы, то значение динамического функционала достоверности равно единице,  $\mathcal{C}[q(t)] = 1$ , если не соответствует, то нулю,  $\mathcal{C}[\tilde{q}(t)] = 0$ :

$$\mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если траектория — решение уравнений движения,} \\ 0, & \text{если траектория не является решением уравнений движения.} \end{cases}$$

Ясно, что при наличии нескольких частиц, которые движутся под воздействием внешних сил<sup>3</sup>, динамический функционал достоверности всей системы частиц является произведением динамических функционалов достоверности для отдельных частиц:

$$\mathcal{C}_{1\dots n} = \prod_{k=1}^n \mathcal{C}_k.$$

Аналогично, динамический функционал достоверности траектории частицы, разбитой на последовательные участки точками на достоверной траектории, является произведением динамических функционалов достоверности для отдельных участков траектории.

Мы рассматриваем координаты и скорости частицы как *непрерывные вещественные величины*, которые в топологическом смысле определяются как множество точек с малыми окрестностями, покрывающими область непрерывности, а в физическом смысле эти окрестности отвечают погрешностям измерения непрерывной величины. В идеале окрестность может считаться бесконечно малой, но ненулевой. Именно наличием погрешности (открытой окрестности) непрерывные величины существенно отличаются от дискретных изолированных величин, счетных по натуральному ряду, поскольку счет дает абсолютно точное значение дискретной изолированной величины. Если начальные данные для координаты и скорости принимают центральные значения с конечной погрешностью, то траектории из такой малой области начальных данных могут на малых интервалах времени либо мало отличаться от центральной траектории, либо быстро расходиться. В последнем случае говорят, что система находится в состоянии динамической неустойчивости или хаоса. Мы ограничимся рассмотрением систем без хаоса. В этом случае вся описанная нами выше трубка траекторий из исходной области начальных данных является эквивалентной в рамках погрешности измерений, так что для всего пучка динамический функционал достоверности траекторий в пучке равен единице.

Неопределенность траектории может быть связана не только с инструментальной погрешностью приборов измерения наблюдаемых величин, она может иметь и казуальный характер. Само предположение о том, что начальные данные в исходный момент времени (положение и скорость) могут быть заданы с инструментальной погрешностью приборов, базируется на опыте классической механики и, по сути, постулирует, что предел бесконечно малой инструментальной погрешности во всех механических системах достижим, и начальные данные могут задаваться с бесконечно малой неопределенностью, что может оказаться неверным (и оказалось в действительности при изучении этого предела в физике атомов). Вместе с тем, в самой логике построения механики возникают вопросы, которые показывают причинно-следственную проблематику парадигмы абсолютно точных начальных данных в пределе нулевой инструментальной погрешности приборов. Это становится понятно, если поставить задачу не о единичной траектории частицы, однократно зарегистрированной в приборе, а о многократных измерениях, проводимых одинаковыми приборами для частиц с определенными характеристиками, заданными логически замкнуто, по крайней мере, мысленно. Если приборная погрешность связана с регистрацией траектории частицы, то многократная регистрация траекторий вносит в задачу новые характеристики. Так, например, в случае, когда свободная частица движется с некоторой скоростью равномерно и поступательно, т.е. никак не взаимодействует с окружающей средой (приборами), положение центра системы координат в приборе для свободной частицы никак не выделено и, стало быть, является неопределенным, так как оно с точки зрения взаимодействия частицы с прибором абсолютно произвольно: если

<sup>3</sup>В этом случае из системы можно изъять любую из частиц без влияния на траектории оставшихся частиц, а значит, траектории являются независимыми друг от друга, они зависят только от внешних сил в системе. Напротив, если частицы влияют на траектории друг друга, т.е., как говорят, взаимодействуют, то очевидно, что имеет смысл рассматривать не траектории отдельных частиц, а совокупность траекторий всех взаимодействующих частиц, и в этом случае понятие изолированной траектории теряет смысл, адекватный самой задаче о движении системы.



в момент регистрации частицы прибором<sup>4</sup> тем самым поставить в приборе реперную точку, которая будет измерена с инструментальной погрешностью самого прибора, то многократные повторы регистрации дадут некую форму распределения вероятности расположения реперных точек в приборе<sup>5</sup>. Это распределение будет иметь свои погрешности и другие вероятностные характеристики<sup>6</sup> многократных измерений в зависимости от физики источника свободной частицы. Подобные вероятностные характеристики имеют совершенно иную природу, не связанную с природой погрешностей прибора. (Например, если в качестве источника электронов иметь электронную пушку с малым разбросом импульса электронов по импульсу, то в приборе распределение по координате будет иметь вид широкой полосы в области значений показаний прибора.) Другими словами, распределение положения точки регистрации частицы в приборе, если частица двигалась до этого свободно, без взаимодействия с системой, является распределением случайной величины, значение которой никак казуально не предопределено на каждой отдельной траектории. Неопределенности этой случайной величины — это новый эффект, который требует адекватного описания. С точки зрения проблемы начальных данных следует признать, что для свободной частицы задать её положение в начальный момент времени означает задать исходную точку частицы в приборе, а значит, взаимодействие частицы с прибором должно быть не равно нулю! В этом смысле переход от эволюции системы (в данном случае, речь идет об эволюции свободной частицы) с заданными исходными данными к описанию эволюции с заданными координатами на концах траектории становится логически более замкнутым и обоснованным: измерять координаты частицы действительно можно с любой инструментальной погрешностью<sup>7</sup>.

Далее, напротив, в случае, если частица совершенно точно находится в заданной точке пространства, отсутствуют какие-либо данные о траектории в других точках пространства, т.е. совершенно неопределено, с какой скоростью движется частица, поскольку для определения скорости необходимо получить данные о сдвиге частицы в другую точку<sup>8</sup>. Значит, если на частицу начинают действовать внешние силы, т.е. она взаимодействует с окружающей средой, положение частицы уже может быть более определено, поскольку силы изменяют скорость частицы, т.е. от них зависит сравнение характеристик движения в разных точках, но так как это положение еще имеет ненулевую неопределенность, то и значение сил задается неоднозначно, силы при повторных опытах имеют флуктуации, что делает траекторию несколько неопределенной, а не абсолютно точной<sup>9</sup>. Мы видим, что неопределенности в значениях скорости и координаты частицы каким-то образом связаны казуально, но эта связь в области применимости классической механики может быть пренебрежимо малой, она существенна в квантовой механике. Для нас же здесь важно, что неопределенность траектории частицы отвечает пучку траекторий или трубке траекторий возле центрального значения, эквивалентных с точки зрения динамического функционала

<sup>4</sup>Речь идет о включении взаимодействия частицы с внешней системой в виде акта измерения положения частицы, после чего сама физическая система уже изменяется и эволюционирует не как свободная частица и прибор по отдельности, а интегрально, в комплексе, что уже представляет собой другую задачу.

<sup>5</sup>Имеется в виду возможность многократного исследования физической системы с идентичными характеристиками, в данном случае, системы свободной частицы, которая попадает в детектор, измеряющий координату частицы в некий момент времени, который причинно не задан с точки зрения взаимодействия частицы с детектором.

<sup>6</sup>Для полноты изложение описание элементарных основ теории вероятностей, включая понятия случайной величины, функции распределения и средних отклонений приводится в Приложении на стр. 164.

<sup>7</sup>Вопрос о возможности точного измерения разных компонент координат частицы также ставится в современной науке: при наличии скрытых динамических связей между координатами, например, в теории суперструн с внешними полями возникает ситуация, когда компоненты координат испытывают флуктуации, и говорят о некоммутативной геометрии пространства.

<sup>8</sup>По сути, речь идет о способе измерения скорости: начальная точка координаты частицы задана в исходный момент времени,  $q_0 = q(t_0)$ , а по прошествии малого интервала времени  $dt \rightarrow 0$  проводится измерение положения частицы  $q'$  в момент времени  $t_0 + dt$ , так что скоростью называют величину  $\dot{q}_0 = \lim_{dt \rightarrow 0} (q' - q_0)/dt$ . Если многократные повторения опыта приводят к одним и тем же значениям  $q'$  с инструментальной точностью, которая стремится к нулю, а значит,  $q' = q(t_0 + dt)$  лежит на одной и той же траектории, то предел отвечает скорости частицы на этой траектории в начальный момент времени. Однако логически строго утверждать, что при сдвиге по времени опыт будет давать одно и то же значение координаты  $q'$ , невозможно, так как само понятие скорости определяется в результате описанного опыта многократных измерений координаты в ходе эволюции. Поэтому мы не можем *a priori* утверждать, что частица с заданной исходной координатой  $q_0$  имеет одно и то же положение в момент времени  $t_0 + dt$ , так как казуально фиксация исходной точки никак не задает скорость частицы в этой точке: скорость нужно измерить при смещении по времени в другую точку. Конечно, эксперименты в некоторой области точности измерений убеждают нас, что траектория с начальными данными задается однозначно. Но эксперименты, которые выходят за рамки этого приближения показали, что точно заданная исходная точка эволюции вовсе не означает, что скорость в этой точке может быть определена точно, без казуальных неопределенностей.

<sup>9</sup>Забегая вперед, скажем, что согласно второму закону Ньютона изменение импульса частицы  $\delta p$  за характерное время  $\delta t$  связано с силой, в частности, с изменением потенциальной энергии  $\delta U$  при изменении координаты  $\delta x$ :  $\delta p/\delta t \sim \delta U/\delta x$ , — или, другими словами, работа силы  $F \sim \delta p/\delta t$  на отрезке  $\delta x$  — это  $\delta U \sim F \delta x \sim \delta p \delta x/\delta t$ . Отсюда  $\delta x \cdot \delta p \sim \delta U \cdot \delta t$ . Такое соотношение вариаций динамических величин можно трактовать в следующем смысле: неопределенность в значении импульса  $\delta p$  связана с неопределенностью в значении работы сил, которые действуют на частицу,  $\delta U$ , причем, сами силы и их работа флуктуируют за период времени  $\delta t$ , когда неопределенность в положении частицы составляет  $\delta x$ . Это согласуется со случаем свободной частицы, когда в пределе постоянного импульса  $\delta p \rightarrow 0$  и при отсутствии работы внешних сил для частицы сил  $\delta U \rightarrow 0$  неопределенность положения частицы относительно начала отсчета  $\delta x \rightarrow \infty$  и время, за которое произойдет изменение энергии,  $\delta t \rightarrow \infty$ . При этом, величина в виде произведения флуктуаций  $\delta x \cdot \delta p \sim \delta U \cdot \delta t$  имеет неопределенности типа «ноль на бесконечность». Как мы увидим, это произведение не может быть бесконечно малым вследствие квантовых эффектов. Другими словами, при стремлении к абсолютной точности измерения непрерывных динамических величин остается неотличимый набор траекторий, отвечающий заданным граничным условиям для движения.

достоверности траекторий, и этот функционал определяется на траектории с заданными концами.

Несколько иной взгляд на происхождение неопределенностей при движении частицы предлагает *теория скрытых параметров*: если наряду с известными нам наблюдаемыми величинами, определяющими динамику движения частицы, существуют параметры, которые скрыты для нашего наблюдения, то в зависимости от частоты, с которой эти скрытые параметры изменяются в области своего определения, для каждой попытки описать траекторию частицы с некоторой вероятностью возникнут разные траектории возле центральной траектории, для которой скрытые параметры принимают наиболее вероятное значение. Тогда траектория частицы зависит от сил, которые несколько изменяются из-за разных значений скрытых параметров. Вследствие этого возникает распределение вероятности достоверности траектории из-за того, что известные нам начальные данные неполны, к ним необходимо добавить знание скрытых параметров и уравнения движения для этих параметров.

Возвращаясь от замечания о скрытых параметрах к ситуации, когда есть погрешность измерения наблюдаемых характеристик частицы, представим теперь себе ситуацию, когда центральное значение начальных данных немного сдвинуто так, чтобы при заданной погрешности новая область начальных данных лишь наполовину перекрывается с исходной областью начальных данных при той же погрешности. В этом случае динамический функционал достоверности траекторий в половине случаев принимает значение, равное единице, если траектория находится в пересечении двух областей данных, и равное нулю, если траектория находится вне исходной трубки траекторий. В этом случае естественно говорить уже не о динамическом функционале достоверности траектории, а о функционале вероятности достоверности траектории  $W$ , где вероятность понимается как математическое выражение существования возможного — доля определенных событий в общей бесконечной сумме попыток, а в приведенном примере можно положить эту вероятность равной  $W = \frac{1}{2}$ . Конечно, определение вероятности достоверности пучка близких траекторий может быть не столь упрощенным и существенно более формализованным. Например, можно брать  $N_{in}$  траекторий в области погрешности определения начальной координаты и начальной скорости и вычислять, сколько из этих траекторий попали в область фиксированных значений координаты и скорости на конце траектории  $N_{out}$  за фиксированный интервал времени, и определять вероятность в зависимости от отношения  $N_{out}/N_{in}$ .

Таким образом, в общем случае при наличии ненулевой погрешности измерений координат и скорости следует ввести функционал вероятности достоверности траектории со значениями во всем спектре от нуля до единицы:  $W \in [0, 1]$ . Эта вероятность достоверности достигает своего максимума на решении уравнений движения с фиксированными концами траектории в заданной физической системе, т.е.  $W$  имеет экстремум на «истинной» или, как говорят, «прямой» траектории (см. рис. 1.1).

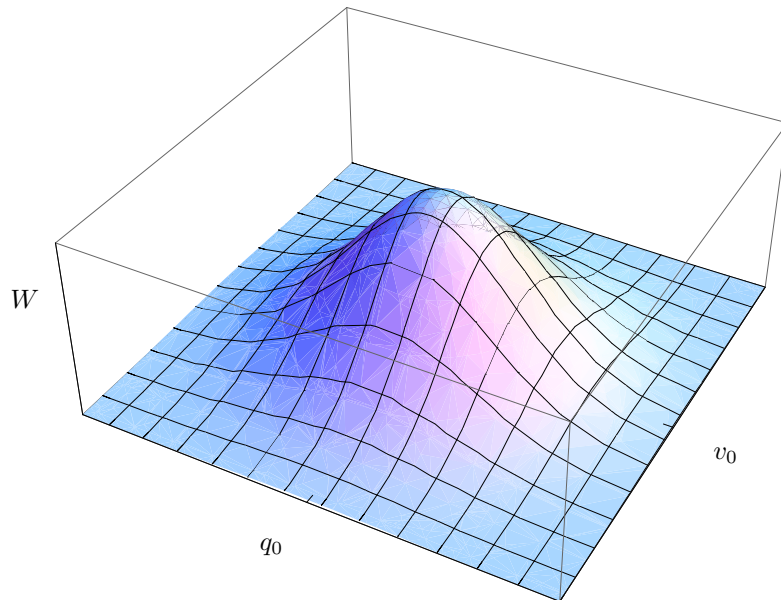


Рис. 1.1: Зависимость вероятности достоверности пучка траекторий при наличии погрешности в определении координат и скорости.

Для придирчивого читателя специально подчеркнем, что плавная зависимость вероятности возле максимума на рис. 1.1 обусловлена тем, что сама вероятность определения погрешности измерения координаты, например, не имеет резких границ, а сосредоточена возле центрального значения интервала погрешности координаты и плавно спадает за границами этого интервала, что отличается от наивного

представления о вероятности погрешности, которая равномерно распределена строго в пределах отрезка погрешности с резкими границами, что приводило бы к линейному спаду перекрытия двух таких отрезков погрешности координаты в зависимости от смещения центров отрезков, а максимум на рис. 1.1 вместо плавного приобрел бы форму вершины в виде угла.

Экстремум функционала означает, что сравнение значения функционала проводится на разных траекториях  $q(t)$  и  $\tilde{q}(t) = q(t) + \delta q(t)$ ,

$$\delta W = W[\tilde{q}(t)] - W[q(t)],$$

так что в пределе произвольного бесконечно малого различия траекторий  $\delta q(t) \rightarrow 0$  в случае, когда начало и конец траектории, соответственно, при  $t = t_0$  и  $t = t'$  фиксированы, получается

$$\delta W = 0, \quad \text{при } \delta q(t) \rightarrow 0, \quad \delta q(t_0) = \delta q(t') = 0. \quad (1.1)$$

Траекторию можно описывать в разных системах координат, в разных системах отсчета. Значение вероятности достоверности при переходе от одних таких систем к другим не меняется, т.е. остается *инвариантным*.

По построению, функционал вероятности достоверности траекторий вычисляется как произведение вероятностей для независимых подсистем и подтраекторий:

$$\mathcal{W}_{1\dots n} = \prod_{k=1}^n \mathcal{W}_k. \quad (1.2)$$

Рассмотрим, в частности, систему из двух тождественных частиц. Тождественность означает, что частицы имеют *одинаковый спектр (набор) траекторий во всех физических системах*. Если на частицы действуют лишь внешние силы, то для каждой из них можно установить вероятность достоверности  $\mathcal{W}_1 \neq 0$  и  $\mathcal{W}_2 \neq 0$  для траекторий “1” и “2”, соответственно. При этом можно было бы предположить, что совместная вероятность достоверности двух траекторий  $\mathcal{W}_{(1,2)} = \mathcal{W}_1 \cdot \mathcal{W}_2$ . При этом для тождественных частиц можно перейти к пределу “2”  $\rightarrow$  “1”, так что  $\mathcal{W}_{(1,1)} = \mathcal{W}_1^2$ . Однако такое построение противоречит принципу запрета Паули: тождественные траектории для тождественных фермионов запрещены<sup>10</sup>, т.е. для фермионов  $\mathcal{W}_{(1,1)} = 0$ , что приводило бы к условию отсутствия прямой траектории и для единственного фермиона,  $\mathcal{W}_1 = 0$ .

Подчеркнем, что принцип запрета Паули для фермионов является универсальным, т.е. не зависит ни от природы взаимодействий частиц, ни от величины силы взаимодействия, и, в частности, принцип запрета применим и в случае, который мы сейчас рассмотрели, когда частицы движутся под воздействием лишь внешних сил и не взаимодействуют друг с другом. Однако, совершенно ясно, что противоречие вероятностного описания фермионов, полученное нами в частном случае независимых траекторий, является и общим противоречием такого описания в силу универсальности принципа запрета Паули.

Как принцип запрета Паули может сочетаться с вероятностной картиной описания траекторий тождественных фермионов, для которых вероятность тождественных траекторий должна точно обращаться в нуль? Идея разрешения этого парадокса пришла из опыта описания волн. А именно, волны характеризуются интерференцией, которая возникает при сложении амплитуд волн с учетом относительных фаз, причем интенсивность волны в узлах тождественно обращается в нуль. При этом, для описания интерференции амплитуд разной величины с разными фазами наиболее эффективное описание отвечает введению комплексных амплитуд, т.е. модуля амплитуды и ее комплексной фазы для каждой волны. А интенсивность волны тогда будет определяться квадратом модуля суммы комплексных амплитуд при интерференции. Поэтому нулевая вероятность достоверности тождественных траекторий тождественных фермионов может быть представлена как результат деструктивной интерференции комплексных амплитуд вероятности. Но каких амплитуд? Рассмотрим этот вопрос более детально.

Итак, введем вероятность достоверности  $\mathcal{W}$  траектории как интенсивность амплитуды вероятности  $\Psi$ :  $\mathcal{W} = |\Psi|^2$ , где амплитуда вероятности может быть, вообще говоря, уже комплексным числом в отличие от вероятности<sup>11</sup>,  $\Psi \in \mathbb{C}$ . В случае, когда в системе с внешними силами лишь одна частица, для траектории частицы “1” амплитуда вероятности траектории номер “1” —  $\Psi_1(q'_1)$ , для траектории частицы “2” амплитуда вероятности траектории номер “2” —  $\Psi_2(q'_2)$ . Если же в системе движутся обе частицы, то амплитуда вероятности для двух независимых траекторий —  $\Psi_1(q'_1)\Psi_2(q'_2)$ . Однако, если частицы тождественны, то их невозможно отличить, и наряду с записанной амплитудой вероятности имеется второй вариант —  $\Psi_1(q'_2)\Psi_2(q'_1)$ . Какой из вариантов действительно имеет место? Принцип Паули совместно с понятием амплитуды вероятности позволяет сформулировать ответ на этот вопрос:

<sup>10</sup>Важно подчеркнуть, что принцип запрета Паули универсален: он не зависит от природы фермионов и от их взаимодействий!

<sup>11</sup>Ясно, что амплитуды  $\Psi$  и  $e^{i\alpha}\Psi$  эквивалентны, так как они задают одну и ту же вероятность достоверности траектории, но мы опустим эту тонкость из нашего рассмотрения в рамках этого курса.

необходимо рассмотреть вполне определенную *интерференцию амплитуд вероятности* (1.3). При интерференции существенны относительные комплексные фазы всех вкладов в суперпозиции: только при определенном значении этих фаз и имеет смысл говорить о суперпозиции. Такая определенность называется условием когерентности амплитуд вероятности, в противном случае говорят о декогерентности, т.е. о невозможности рассматривать суперпозицию амплитуд вероятности. В случае суперпозиции амплитуд для двух тождественных фермионов условие когерентности строго фиксировано относительной фазой, отвечающей знаку минус, что обеспечит деструктивную интерференцию,

$$\Psi_{(1,2)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_{(1,2)} (\Psi_1[q'_1] \Psi_2[q'_2] - \Psi_2[q'_1] \Psi_1[q'_2]), \quad \mathcal{A}_{(1,2)} \neq 0, \quad |\mathcal{A}_{(1,2)}| < \infty, \quad (1.3)$$

где для простоты записи мы указали лишь координаты траектории в момент времени  $t'$ , считая, что исходные точки траекторий и интервалы времени эволюции совпадают, а в число координат включили и одинаковые поляризации фермионов. Тогда, конечно,  $\mathcal{W}_{(1,1)} = |\Psi_{(1,1)}|^2 \equiv 0$  для фермионов. В случае, когда траектории удовлетворяют уравнениям движения и  $|\Psi_{(1,2)}|^2 \neq 0$ , коэффициент нормировки  $\mathcal{A}_{(1,2)}$  подбирается так, чтобы вероятность достоверности экстремальных траекторий была равна единице.

Чтобы продемонстрировать, что идея об амплитуде вероятности достоверности траекторий тождественных частиц в связи с необходимостью описания принципа запрета Паули для фермионов не зависит от того, как взаимодействуют тождественные частицы, с какой силой они взаимодействуют, являются ли траектории тождественных частиц независимыми друг от друга или изменяются при введении в систему с одной частицей второй, тождественной ей, частицы, запишем амплитуду в системе с двумя тождественными фермионами, у которых все характеристики траекторий совпадают, за исключением конечных точек траекторий: у первой частицы конечная точка траектории  $q'_1$ , у второй —  $q'_2$ . Тогда амплитуда вероятности достоверности траекторий таких двух тождественных фермионов  $\Psi_{(1,2)}$  может быть записана либо в виде

$$\Psi[q'_1, q'_2],$$

либо в виде, где аргументы конечных точек траектории переставлены,

$$\Psi[q'_2, q'_1],$$

так как частицы тождественны, и следовательно, нет никакой возможности установить, какая из этих тождественных частиц оказалась в точке  $q'_1$ , а какая — в  $q'_2$ . Идея комплексной амплитуды вероятности заключается в том, что вводится суперпозиция амплитуд, так что

$$\Psi_{(1,2)} = c_1 \Psi[q'_1, q'_2] + c_2 \Psi[q'_2, q'_1], \quad c_{1,2} \in \mathbb{C},$$

и тогда неоднозначность соответствия двух возможных вариантов записи амплитуды для двух тождественных частиц сводится к выбору комплекснозначных коэффициентов в суперпозиции  $c_{1,2}$ . Однако в силу тождественности частиц существует предел  $q'_2 \rightarrow q'_1$ , когда оба тождественных фермиона оказываются на одной траектории номер 1, и согласно принципу запрета Паули  $\Psi_{(1,1)} \equiv 0$  независимо от того, какое взаимодействие есть у этих фермионов. Это условие автоматически удовлетворяется, если  $c_2 = -c_1$ , и тогда перестановка концов траекторий  $q'_1 \leftrightarrow q'_2$  приводит к амплитуде

$$\Psi_{(2,1)} = c_1 (\Psi[q'_2, q'_1] - \Psi[q'_1, q'_2]) = -\Psi_{(1,2)},$$

а значит,  $W_{(1,2)} = |\Psi_{(1,2)}|^2 = |\Psi_{(2,1)}|^2 = W_{(2,1)}$ , и вероятности совпадают, если переставить местами тождественные частицы, а в пределе одной траектории для двух тождественных фермионов получится

$$\Psi_{(1,1)} = -\Psi_{(1,1)} \Rightarrow \Psi_{(1,1)} \equiv 0. \quad (1.4)$$

Этот результат не зависит от природы взаимодействия фермионов, он универсален. Подобный итог достигается, если вместо вероятности достоверности траекторий ввести комплексную амплитуду вероятности и постулировать принцип суперпозиции амплитуд, а для тождественных фермионов еще и вполне определенный способ деструктивной интерференции. Само введение амплитуды вероятности и принципа суперпозиции амплитуд вероятности является открытием: это позволяет не только описать принцип запрета Паули, но и становится принципом построения механики, который проявляется для всех физических систем и позволяет не только объяснять уже известные явления природы, но и предсказывать новые физические закономерности.

Подчеркнем, что разрешение парадокса нулевой вероятности наблюдать тождественные фермионы на тождественных траекториях привело к открытию пространства комплексных амплитуд вероятности траекторий, и в этом пространстве имеет место принцип суперпозиции амплитуд. Это пространство — фундаментальная основа механики в фейнмановской формулировке.

Отметим, что в теории скрытых параметров, которая может объяснить вероятностный характер движения, совершенно нет возможности описать принцип запрета Паули: тождественность траекторий имеет место только при тождественности скрытых параметров для тождественных частиц, а значит, необходимо потребовать, чтобы вероятность тождественных значений скрытых параметров была равна нулю, а следовательно, вместо объяснения необходимо постулировать запрет Паули и в пространстве скрытых параметров. Однако для не взаимодействующих друг с другом тождественных частиц это совершенно невозможно: независимость движения означала бы произведение вероятностей и в пространстве скрытых параметров, что опять приводило бы к нулевой вероятности наблюдать одну тождественную частицу на фиксированной заданной траектории. В теории же с амплитудой вероятности, когда допускается интерференция амплитуд, подобных проблем нет.

В общем случае рассмотрим теперь операцию перестановок траекторий тождественных частиц  $\mathcal{S}_{12}$ :

$$\mathcal{S}_{12}\Psi_{(1,2)} \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_{(2,1)},$$

причем необязательно фермионов, для которых выполняется принцип запрета Паули. Вероятности достоверности траекторий для тождественных частиц не зависят от того, как мы пронумеровали тождественные частицы, так как они неотличимы,  $\mathcal{W}_{(1,2)} = \mathcal{W}_{(2,1)}$ , а следовательно,  $\Psi_{(2,1)} = \lambda \Psi_{(1,2)}$ , где  $|\lambda| = 1$ , т.е.  $\lambda^* \lambda = 1$ .

Покажем, что  $\lambda$  – вещественное число. Это можно доказать, если использовать условие, что наборы траекторий для тождественных частиц в любой физической системе идентичны, а значит, имеет место равенство для сумм по некоторому спектру траекторий

$$\sum_{(1,2)} \Psi_{(1,2)}^* \Psi_{(2,1)} = \sum_{(1,2)} \Psi_{(2,1)}^* \Psi_{(1,2)} < \infty, \quad (1.5)$$

так как эти суммы являются записью одной и той же величины с переменной обозначений элементов суммирования из совпадающих множеств траекторий<sup>12</sup>.

Для фермионов, согласно принципу запрета Паули,  $\Psi_{(1,1)} \equiv 0$  и  $\Psi_{(2,2)} \equiv 0$ , так что, если теперь рассмотреть сумму по двум разным траекториям 1 и 2, то исходное равенство (1.5) примет вид

$$\sum_{(1,2)} \Psi_{(1,2)}^* \mathcal{S}_{12} \Psi_{(1,2)} = \sum_{(1,2)} (\mathcal{S}_{12} \Psi_{(1,2)})^* \Psi_{(1,2)}, \quad \Rightarrow \quad \sum_{(1,2)} \Psi_{(1,2)}^* \lambda_{(1,2)} \Psi_{(1,2)} = \sum_{(1,2)} \lambda_{(1,2)}^* \Psi_{(1,2)}^* \Psi_{(1,2)},$$

и тождество имеет место для произвольных амплитуд траекторий, а следовательно, только при

$$\lambda = \lambda^*,$$

так что с учетом  $|\lambda| = 1$  находим

$$\lambda = \pm 1.$$

Для фермионов допустимо только значение  $\lambda = -1$ , так как равенство

$$\mathcal{S}_{12} \Psi_{(1,2)} = \lambda_{(1,2)} \Psi_{(1,2)} = \Psi_{(2,1)}$$

сводится к

$$-\Psi_{(1,2)} = \Psi_{(2,1)},$$

так что предел совпадения траекторий  $2 \rightarrow 1$  при условии, что  $\lambda_{(1,2)}$  – это непрерывная функция без скачков, а значит,  $\lambda_{(1,2)} = \lambda_{(1,1)} = \lambda = -1$ , даст

$$-\Psi_{(1,1)} = \Psi_{(1,1)} \quad \Rightarrow \quad \Psi_{(1,1)} \equiv 0,$$

в силу того, что комплексное число равно самому себе с обратным знаком только в случае, если это число нуль.

Вводя непрерывность собственного значения оператора перестановок, мы постулируем, что фермионы являются фермионами во всех физических системах, то есть на любых траекториях. Это значит, что при перестановке тождественных фермионов амплитуда вероятности меняет знак,  $\lambda = -1$ .

Если частицы не являются фермионами, то на одной и той же траектории могут находиться тождественные частицы,  $\Psi_{(1,1)} \neq 0$ , и равенство

$$\mathcal{S}_{12} \Psi_{(1,2)} = \lambda \Psi_{(1,2)} = \Psi_{(2,1)}$$

<sup>12</sup>Понятно, что говорить о суммах можно, только если эти суммы конечны. Равенство получается, если переобозначить  $(1,2) \mapsto (2',1')$ , а потом заметить, что штрихи не имеют значения, так как мы просто нумеруем траектории из одного и того же множества траекторий.

в пределе совпадения траекторий  $2 \rightarrow 1$  при условии непрерывности собственного значения оператора перестановок даст

$$\lambda \Psi_{(1,1)} = \Psi_{(1,1)}, \quad \Psi_{(1,1)} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = +1.$$

Говорят, что такие тождественные частицы — бозоны. Тогда в сумме по двум траекториям 1 и 2 в исходном равенстве (1.5) можно сократить вклады, когда бозоны находятся на одной и той же траектории, и получить

$$\sum_{(1,2)} \Psi_{(1,2)}^* \mathcal{S}_{12} \Psi_{(1,2)} = \sum_{(1,2)} (\mathcal{S}_{12} \Psi_{(1,2)})^* \Psi_{(1,2)}, \quad \Rightarrow \quad \sum_{(1,2)} \Psi_{(1,2)}^* \lambda_{(1,2)} \Psi_{(1,2)} = \sum_{(1,2)} \lambda_{(1,2)}^* \Psi_{(1,2)}^* \Psi_{(1,2)},$$

так что тождество имеет место для произвольных амплитуд траекторий только при

$$\lambda = \lambda^*,$$

и с учетом  $|\lambda| = 1$  находим

$$\lambda = \pm 1.$$

Вводя непрерывность собственного значения оператора перестановок, мы постулируем, что бозоны являются бозонами во всех физических системах, то есть на любых траекториях. Это значит, что при перестановке тождественных бозонов амплитуда вероятности не меняет знак,  $\lambda = +1$ .

Применяя операцию перестановок повторно, найдем

$$\mathcal{S}_{12}^2 \Psi_{(1,2)} = \mathcal{S}_{12} \Psi_{(2,1)} = \Psi_{(1,2)},$$

и если постулировать, что оператор перестановок тождественных частиц — это линейный оператор, который не действует на собственное число  $\lambda$ , то мы придем к тому же результату совсем коротким путем,

$$\mathcal{S}_{12}^2 \Psi_{(1,2)} = \mathcal{S}_{12} \lambda \Psi_{(1,2)} = \lambda \mathcal{S}_{12} \Psi_{(1,2)} = \lambda^2 \Psi_{(1,2)}$$

откуда получаем  $\lambda^2 = 1$ , а значит,

$$\lambda = \pm 1.$$

Требование о линейности оператора перестановок не случайно, поскольку он действует в пространстве амплитуд вероятности. Поэтому, если потребовать, что свойство суперпозиции амплитуд вероятности имеет место как до действия оператора перестановок на суперпозицию амплитуд, так и для образа суперпозиции с теми же коэффициентами для амплитуд в суперпозиции, то это и означает линейность оператора

Отметим, что рассмотренная сумма (1.5) сводится к

$$\sum_{(1,2)} \Psi_{(1,2)}^* \Psi_{(2,1)} = \lambda \sum_{(1,2)} \Psi_{(1,2)}^* \Psi_{(1,2)} = \lambda \sum_{(1,2)} W_{(1,2)},$$

причем величина

$$\sum_{(1,2)} W_{(1,2)}$$

имеет вполне определенный смысл: при соответствующей нормировке это — сумма вероятностей найти систему тождественных частиц на всех существующих в системе траекториях. Конечное значение этой суммы означает, что любая ограниченная комбинация траекторий имеет, вообще говоря, ненулевую относительную вероятность реализации. В то время, как расходимость суммы означает, что любая ограниченная комбинация траекторий имеет нулевую относительную вероятность реализации, т.е. наблюдаются только системы с конечным значением суммы. Это устанавливает условия квантования. Например, при рассмотрении траекторий с заданной энергией в системе реализуются только те значения энергий, которые принадлежат спектру с конечной суммой вероятностей при фиксированной энергии, а остальные значения энергии вне спектра не могут наблюдаться. Значит, в действительности реализуются только физические системы, для которых сумма по траекториям с необходимостью конечна. Это условие верно не только для рассматриваемого случая двух тождественных частиц, но и для любых физических систем.

Таким образом, поскольку физические наблюдаемые для системы тождественных частиц не изменяются при перестановке траекторий тождественных частиц<sup>13</sup>, мир тождественных частиц делится на две части, а именно, траектории бозонов с  $\lambda = 1$  и фермионов с  $\lambda = -1$ : амплитуды вероятности тождественных бозонов симметричны относительно перестановок траекторий бозонов, а амплитуды вероятности тождественных фермионов антисимметричны относительно перестановок траекторий фермионов.

<sup>13</sup>В противном случае можно было бы отличить «первую» частицу от «второй».

Связь статистики, т.е. собственного значения оператора перестановок тождественных частиц, со спином устанавливается в релятивистской квантовой механике свободных частиц: фермионы имеют полуцелый спин, а бозоны — целый. Это обусловлено требованием положительного значения энергии свободной частицы или требованием принципа причинности для релятивистских частиц, т.е. условием, что следствие по сравнению с причиной находится в будущем и возникает не раньше, чем сигнал от точки причины достигнет точки следствия не быстрее максимальной скорости распространения взаимодействий, которая совпадает со скоростью движения безмассовых частиц, в частности, со скоростью света.

Заметим, что введение амплитуды для функционала вероятности достоверности траекторий частиц было подтверждено эмпирически путем исследования неравенств Белла, которые мы здесь не описываем (см. учебники по квантовой механике, например, [2]).

Подчеркнем теперь, что амплитуда вероятности достоверности траектории, как и сама вероятность, имеет экстремум на «прямой» траектории. В самом деле, так как вариация вероятности достоверности траектории сводится к вариации функционала амплитуды вероятности,

$$\delta W = \delta\{\Psi^*\Psi\} = \Psi^*\delta\Psi + \Psi\delta\Psi^*,$$

то экстремум амплитуды означает и экстремум вероятности,

$$\delta\Psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta\Psi^* = 0, \quad \delta W = 0.$$

Если ввести экспоненциальное представление амплитуды в виде

$$\Psi = e^{S/\kappa}, \quad (1.6)$$

где  $S$  — это функционал на траектории, а  $\kappa$  — универсальная, независящая от физической системы постоянная, то вариация функционала амплитуды вероятности выразится через вариацию функционала  $S$ ,

$$\delta\Psi = e^{S/\kappa} \frac{1}{\kappa} \delta S,$$

и экстремум функционала  $S$  приводит к экстремуму амплитуды вероятности.

Значит, и логарифм амплитуды имеет экстремум на «прямой» траектории. Разбивая «прямую» траекторию на подтраектории, в силу мультипликативности для амплитуд вероятности как следствия мультипликативности вероятности для независимых событий (1.2) найдем, что

$$\ln \Psi_{1\dots n} = \sum_{k=1}^n \ln \Psi_k.$$

Введем понятие действия как функционала на траектории, пропорционального логарифму амплитуды вероятности<sup>14</sup>:

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \kappa \ln \Psi, \quad S_{1\dots n} = \sum_{k=1}^n S_k. \quad (1.7)$$

Если амплитуда вероятности — это безразмерная величина, то действие может иметь размерность. В этом случае размерность коэффициента  $\kappa$  совпадает с размерностью действия  $S$ :

$$[\kappa] = [S].$$

При этом значение  $\kappa$  является универсальным, оно не зависит от физической системы,  $\kappa$  — фундаментальная постоянная. Значение  $\kappa$  мы установим позже, когда проведем описание действия для свободной частицы:

$$\kappa = -i\hbar, \quad (1.8)$$

где  $i$  — мнимая единица, а  $\hbar$  — постоянная Планка с чертой. Значение постоянной Планка определяется единицами измерения длины, времени, импульса, энергии, как станет понятно при дальнейшем развитии фейнмановской формулировки механики. В частности, единицы измерения величин можно выбрать такими, чтобы было  $\hbar \equiv 1$ . Как видим, комплексное значение амплитуды вероятности достоверности классической траектории отражается и в комплексном значении постоянной  $\kappa$ .

<sup>14</sup> Логарифм положительного числа мы принимаем равным вещественному числу. Однако, имея ввиду то, что амплитуда вероятности может принимать комплексные значения, необходимо учитывать многолистность логарифма как функции комплексного переменного, поскольку  $\exp\{2\pi ni\} = 1$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . В частности, фиксация значения логарифма от положительного числа означает вполне определенный выбор листа поверхности Римана. Тем не менее, многозначность логарифма, вообще говоря, может отвечать нетривиальным топологическим эффектам в физической системе, когда действие приобретает дополнительные вклады  $S_t = \kappa 2\pi ni$ .

Из установленных нами свойств вероятности достоверности траектории следует, что функционал действия — это инвариант, который не зависит от того, в каких координатах описывается траектория, действие имеет экстремум на «прямой» траектории. Действие для независимых траекторий равно сумме действий на каждой из траекторий, а действие на прямой траектории равно сумме функционалов действия при разбиении траектории на отдельные участки.

Разбивая бесконечно малый интервал эволюции на два отрезка эволюции  $dt_{12} = dt_1 + dt_2$ , из (1.7) найдем

$$dS_{12} = dS_1 + dS_2. \quad (1.9)$$

На бесконечно малом интервале действие зависит от одних и тех же значений координаты и скорости  $\{q(t), \dot{q}(t)\}$ , так что при произвольном разбиении интервала условие (1.9) может быть удовлетворено, только если

$$dS = L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (1.10)$$

где функция Лагранжа  $L(q, \dot{q}, t)$  зависит от определения динамических свойств физической системы. В итоге, функционал действия на траектории задается в виде интеграла

$$S[q] = \int_{t_0, q_0}^{t', q'} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (1.11)$$

Мы установили, что на траектории, удовлетворяющей уравнениям движения, действие экстремально.

Подчеркнем, что мы рассматриваем физические системы с полным описанием, когда определяется не только движение частицы, но и законы сил, которые действуют на частицу: только в этом случае действие на траектории задает уравнения движения. Если же описание не является полным, то силы моделируются, т.е. какие-то аспекты динамики упускаются из описания, и тогда силы не всегда возможно смоделировать введением подходящего действия, например, при диссипации энергии за счет трения, так как мы опускаем из описания движение частиц в среде, вызывающей диссипацию.

## 1.2. Поле: локальный лагранжиан

В механике точки измеряется координата частицы  $q$  в зависимости от времени, т.е. траектория  $q(t)$ . В теории поля измеряют локальные характеристики, например, электрического  $\mathcal{E}$  или магнитного  $\mathcal{H}$  полей, которые мы для общности изложения обозначим символом  $\Phi$ . Локальность означает введение зависимости поля от его позиции в пространстве  $\Phi(\mathbf{r})$ , а также производных поля по координатам в точке, т.е.  $\partial\Phi/\partial x$  и т.п. Определим стандартное короткое обозначение для производных по независимым переменным согласно правилу  $\partial\Phi/\partial x = \partial_x \Phi$  с нижним индексом, что по общепринятой договоренности в матричных обозначениях отвечает строке

$$(\partial_x \Phi, \partial_y \Phi, \partial_z \Phi) \equiv \partial\Phi,$$

причем символом  $\partial\Phi$  без индекса будем обозначать производные по какой-либо координате пространства. Подобное введение строки частных производных поля согласовано с введением столбца дифференциалов координат

$$d\mathbf{r} \equiv \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

так, что дифференциал поля  $\Phi$

$$d\Phi = \partial_x \Phi dx + \partial_y \Phi dy + \partial_z \Phi dz$$

можно записать в терминах матричного умножения строки на столбец:

$$d\Phi = \sum_{\alpha=\{x,y,z\}} \partial_\alpha \Phi dr^\alpha \equiv \partial\Phi \cdot d\mathbf{r}.$$

«Траекторией» поля является набор полевых конфигураций  $\Phi(\mathbf{r}, t)$ ,  $\partial\Phi(\mathbf{r}, t)$  и, возможно, производных более высокого порядка, которые мы будем опускать для краткости записи в дальнейшем.

Согласно принципу причинности траектория частицы однозначно определяется начальными данными для координаты  $q(t_0)$  и ее производной по времени<sup>15</sup>  $\partial_t q(t_0) \equiv \dot{q}(t_0)$  при решении уравнений движения,

<sup>15</sup>В дальнейшем символ «частной» производной, например, по времени  $\partial_t$  мы используем и для полной производной, т.е. для дифференцирования физических величин по времени, если есть зависимость какой-либо функции от времени как явно, так и неявно, так что берется как частная производная явной зависимости, так и производная по времени



а сами эти уравнения могут быть получены из принципа экстремального действия  $S$ , которое вычисляется по траектории (1.11). Аналогично, действие для поля в бесконечно малой окрестности точки  $\mathbf{r}$  будет иметь вид

$$dS[\Phi] = \int dt dL[\Phi, \partial_t \Phi, \partial \Phi, \dots],$$

со своей, полевой функцией Лагранжа  $dL$ . В *локальной* теории полагают, что действие поля в заданной точке зависит только от значений всех полей физической системы в этой же точке, т.е. траектория поля в точке не зависит от траекторий поля в другой точке. Зависимость полей друг от друга называется взаимодействием полей, и в локальной теории поля взаимодействуют только в общих точках, локально. В механике независимость траекторий отвечает набору невзаимодействующих друг с другом частиц  $q_k$  с действием в виде суммы независимых вкладов

$$S = \sum_k S[q_k],$$

что по аналогии дает для локального поля действие в виде суммы по малым областям пространства возле бесконечного дискретного набора точек

$$S = \sum_{\mathbf{r}} dS[\Phi(\mathbf{r})].$$

Рассмотрим теперь бесконечно малый объем  $dV_{12}$  возле точки  $\mathbf{r} \in dV_{12}$  для поля с действием

$$dS_{12} = \int dt dL_{12}[\Phi(\mathbf{r}, t), \partial \Phi(\mathbf{r}, t)].$$

Разобьем этот объем на две произвольных части  $dV_{12} = dV_1 + dV_2$ . Действия поля в точках, размещенных в объемах  $dV_1$  и  $dV_2$  будут независимы, т.е.  $dS_{12} = dS_1 + dS_2$ , но с точностью до малых поправок по размеру области они будут зависеть от значения поля все в той же точке  $\mathbf{r}$ , т.е. на одной и той же траектории поля:

$$dS_1 \approx \int dt dL_1[\Phi(\mathbf{r}, t), \partial \Phi(\mathbf{r}, t)], \quad dS_2 \approx \int dt dL_2[\Phi(\mathbf{r}, t), \partial \Phi(\mathbf{r}, t)].$$

Из аддитивности действия в локальной теории поля следует условие для функции Лагранжа  $dL_{12} = dL_1 + dL_2$ , которое для произвольного разбиения объема может быть выполнено только, если положить

$$dL = \mathcal{L}(\Phi(\mathbf{r}, t), \partial \Phi(\mathbf{r}, t)) dV,$$

где  $\mathcal{L}$  — локальная функция поля и его частных производных, которую называют лагранжианом, так как он является плотностью функции Лагранжа поля. Тогда суммирование по разбиению всего пространства на бесконечно малые объемы приводит к действию поля в виде интеграла

$$S[\Phi] = \int dt dV \mathcal{L}(\Phi(\mathbf{r}, t), \partial \Phi(\mathbf{r}, t)). \quad (1.12)$$

В декартовых координатах  $dV = dx dy dz = d^3r$ . Мы полагаем, что лагранжиан в явном виде не зависит от координат и времени, т.е. физическая система не содержит внешних источников энергии и импульса, а зависит только от динамических полей, т.е. полей, которые являются решениями уравнений движения, а не заданы в произвольном виде.

Итак, для изучения теории поля нам необходимо знать общие свойства механики в формализме действия.

---

сложной функции, т.е. полная производная по времени, и этот факт в физике отмечают дополнительной фразой «на уравнениях движения» или «on shell». Это позволяет более содержательно использовать символическую производную частного дифференцирования, которая в математике строго ограничена понятием частной производной явной зависимости функции в теории многих переменных. В теории поля, в отличие от механики частиц, наблюдаемые поля на уравнениях движения зависят не только от времени, но и от независимых от времени координат пространства. А в этом случае было бы неуместно использовать символ полной производной по разным координатным компонентам пространства-времени. Другими словами, в механике использование символа частной производной по времени вместе с фразой «на уравнениях движения» сразу подразумевает, что вычисляется полная производная сложной функции, которая имеет зависимость от времени как явно, так и неявно.

## 2. Принцип наименьшего действия

Вариация действия для частицы в первом порядке по отклонению траектории  $\delta q(t) = \tilde{q}(t) - q(t)$  с фиксированными концами (см. рис. 1.2), т.е. при  $\delta q(t_0) = \delta q(t') = 0$ , имеет вид

$$\delta S \stackrel{\text{def}}{=} S[q + \delta q] - S[q] = \int_{t_0, q_0}^{t', q'} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right).$$

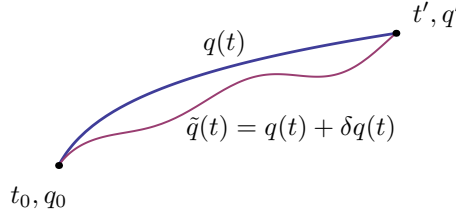


Рис. 1.2: Траектория с фиксированными концами и ее вариация. Малую вариацию экстремальной траектории можно рассматривать как результат решения уравнений движения, в которых немного изменили силы: малая флуктуация сил приводит к малому изменению траектории.

Поскольку

$$\delta \dot{q} = \dot{\tilde{q}}(t) - \dot{q}(t) = \frac{d}{dt} \tilde{q}(t) - \frac{d}{dt} q(t) = \frac{d}{dt} \delta q,$$

можно проинтегрировать второй член под интегралом по частям, приняв во внимание нулевой вклад граничных членов в силу условия фиксированных концов траектории. Тогда

$$\delta S = \int_{t_0, q_0}^{t', q'} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q(t).$$

Согласно принципу экстремального действия на траектории частицы  $\delta S = 0$  при любых малых  $\delta q$ :  $\delta S / \delta q = 0$ ,  $\forall \delta q$ , т.е. подинтегральное выражение тождественно равно нулю, а значит, имеет место уравнение Эйлера–Лагранжа

$$\partial_t \frac{\partial L}{\partial \partial_t q} = \frac{\partial L}{\partial q}. \quad (1.13)$$

**Задача 1.** Запишите уравнения Эйлера–Лагранжа для одномерного движения по координате  $x$ , если функция Лагранжа задана в виде

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x).$$

**Задача 2.** Запишите уравнения Эйлера–Лагранжа для движения с обобщенными координатами  $\{x, v\}$ , если функция Лагранжа задана в рамках формализма первого порядка (производные обобщенных координат по времени входят в функцию Лагранжа только в первой степени) в виде

$$L(x, \dot{x}, v, \dot{v}) = \frac{1}{2} m (2\dot{x}v - v^2) - U(x).$$

Покажите, что «уравнения движения» для обобщенной координаты  $v$  являются алгебраическими, а не дифференциальными. Исключите переменную  $v$  из уравнений движения.

Из вида действия для локального поля  $\Phi$  в (1.12) сразу получаем полевые уравнения Эйлера–Лагранжа, если учесть, что интегрирование производится не только по времени, но и по координатам пространства, и положить, что порядок частных производных по пространственным координатам не превышает единицы, как это имеет место для производной по времени,

$$\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \Phi} + \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_x \Phi} + \partial_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_y \Phi} + \partial_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_z \Phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}.$$

Введем четырехкомпонентные обозначения для величины с размерностью длины с *верхним индексом*, что по общепринятой договоренности в матричных обозначениях отвечает столбцу,

$$x^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_0 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

где  $\mu = \overline{0,3} = \{0,1,2,3\}$  в декартовых координатах, а  $c$  имеет размерность скорости. Эта скорость сокращается при записи полевого уравнения Эйлера–Лагранжа, которое теперь можно переписать в виде

$$\sum_{\mu=0}^3 \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}.$$

Определим *правило Эйнштейна для суммирования по индексам*: в выражении может быть пара одинаковых индексов, которые называются немymi, тогда подразумевается, что по немому индексу производится суммирование, а знак суммы опускается. Например, имеет место следующее преобразование записи произведения строки на столбец по этому правилу:  $\sum_{\mu} A_{\mu} B^{\mu} \mapsto A_{\mu} B^{\mu}$ . В итоге, приходим к полемому уравнению движения Эйлера–Лагранжа<sup>16</sup>

$$\partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}. \quad (1.14)$$

Решение этого уравнения задает экстремум действия относительно вариации поля  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  с фиксированными значениями поля во всем пространстве во времена  $t_0$  и  $t'$ .

**Задача 3.** Выведите уравнения движения для скалярного комплексного поля  $\phi$  в одномерном пространстве:

$$S = \int d^2x \left( \partial_0 \phi^* \partial_0 \phi - \partial_x \phi^* \partial_x \phi - m^2 \phi^* \phi \right),$$

(система единиц  $c = 1$ ).

### 3. Теорема Нётер

Если задать траекторию  $q(t)$  — решение уравнения движения для физической системы с функцией Лагранжа  $L$  и ее преобразование в другое решение уравнений  $q_a(t_a)$  с той же функцией Лагранжа, зависящее от непрерывного параметра  $a$ ,

$$q_a = q_a(a, q(t), t), \quad t_a = t_a(a, q(t), t), \quad (1.15)$$

то можно рассмотреть изменение экстремума действия в зависимости от параметра  $a$  с учетом изменения граничных точек траектории. Обычно полагают, что при  $a = 0$  преобразование сводится к тождественному, т.е.  $q_a = q_a(a, q(t), t)|_{a=0} = q(t)$  и  $t_a = t_a(a, q(t), t)|_{a=0} = t$ . Но это нисколько не меняет физического содержания теоремы, а только указывает то, что исходная траектория  $q(t)$  принадлежит классу однопараметрических преобразований, которые включают в себя тождественное преобразование как раз при  $a = 0$ . Поэтому обычно рассматривают изменение действия при бесконечно малом преобразовании одной траектории в другую  $d_a S$  при  $a \rightarrow 0$ . Задачу решает теорема Нётер: при бесконечно малом смещении параметра  $a$  дифференциал экстремума действия на «прямых траекториях» вычисляется по формуле

$$d_a S = da \cdot \int_{t_a^{(1)}(a, q_1, t_1)}^{t_a^{(2)}(a, q_2, t_2)} \frac{d}{dt_a} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \left( \frac{\partial q_a}{\partial a} - \dot{q}_a \frac{\partial t_a}{\partial a} \right) + L \frac{\partial t_a}{\partial a} \right\} dt_a. \quad (1.16)$$

**Доказательство.** Рассмотрим параметрическое преобразование координат и времени, переводящее «прямую» траекторию  $q(t)$  в «прямую» траекторию  $q_a(t_a)$  согласно (1.15).

Траектория  $q_a(t_a)$  является экстремальной для действия с той же функцией Лагранжа

$$S[q_a(t_a)] = \int_{t_a^{(1)}(a, q_1, t_1)}^{t_a^{(2)}(a, q_2, t_2)} dt_a L(q_a(t_a), \dot{q}_a(t_a), t_a), \quad (1.17)$$

в котором от параметра  $a$  явно зависят граничные точки траектории, а  $t_a$  является независимой переменной интегрирования и переменной эволюции на траектории  $q_a(t_a)$ . Это значит, что при рассмотрении действия (1.17) параметрическое преобразование траектории  $q(t)$  в траекторию  $q_a(t_a)$  в формулах (1.15) трактуется как преобразование в обратную сторону: траектория  $q_a(t_a)$  преобразуется в траекторию  $q(t)$ .

<sup>16</sup>Напомним: производная по столбцу — строка, а производная по строке — столбец.

Тогда говорят, что формулы (1.15) задают такое обратное преобразование в неявном виде. Если в качестве простого примера записать (1.15) как преобразование, которое изменяет начало отсчета времени,

$$q_a = q, \quad t_a = t - a,$$

то обратное преобразование даст

$$q = q_a, \quad t = t_a + a.$$

В этом случае неявная зависимость может быть переписана в явную элементарным образом. В общем же случае приходится использовать запись через дифференциалы. В частности, в рассматриваемом примере дифференциал функции преобразования очевидно дает

$$dq_a = dq, \quad dt_a = dt - da.$$

Если теперь считать, что  $t_a$  — это независимый параметр эволюции на траектории  $q_a(t_a)$ , то значение времени  $t_a$  не зависит от того, как меняются переменные  $a$  и  $t$ , и, следовательно, даже при ненулевых изменениях  $da$  и  $dt$  значение переменной  $t_a$  остается равным заданной величине в данный момент времени  $t_a$ , т.е. в дифференциалах это специальное условие<sup>17</sup> будет иметь вид

$$d_a t_a \equiv 0 \Rightarrow d_a t - da \equiv 0, \quad d_a t = da,$$

и мы видим, что дифференциал переменной времени  $t$  зависит от дифференциала переменной  $a$ , что в данном примере и есть выражение неявной зависимости этих переменных при условии, что время  $t_a$  является независимым временем эволюции для координаты  $q_a$ . Как видим, использование дифференциалов «on shell» (при заданных условиях) позволяет легко находить следствия, которые получаются при неявном преобразовании траектории  $q_a(t_a)$  в траекторию  $q(t)$ .

Те же дифференциалы позволяют описать и то, что на отрезке  $[t_a^{(1)}, t_a^{(2)}]$  его начало и конец также преобразуются как функции параметра  $a$ .

Рассмотрим эти утверждения более детально в общем случае на основе преобразований «прямых траекторий» (1.15), которые заданы условием теоремы. А именно, запишем эти преобразования в дифференциальной форме, учитывая, что на уравнениях движения  $q = q(t)$ , а значит,

$$\begin{aligned} dq_a &= \frac{\partial q_a}{\partial a} da + \frac{dq_a}{dt} dt, \\ dt_a &= \frac{\partial t_a}{\partial a} da + \frac{dt_a}{dt} dt, \end{aligned} \tag{1.18}$$

где, конечно, полные производные по времени  $t$  вычисляются при подстановке траектории  $q(t)$  в формулы (1.15):

$$\frac{dq_a}{dt} \equiv \frac{\partial q_a}{\partial q} \frac{dq(t)}{dt} + \frac{\partial q_a}{\partial t}, \quad \frac{dt_a}{dt} \equiv \frac{\partial t_a}{\partial q} \frac{dq(t)}{dt} + \frac{\partial t_a}{\partial t}.$$

Сначала сфокусируем внимание на концах эволюции по времени  $t_a$ . Например, в начале эволюции  $t = t_1$ , т.е. фиксировано время начала эволюции на исходной траектории  $q(t)$ , и следовательно,  $dt_1 = 0$ , что при подстановке в (1.18) дает

$$d_a t_a(a, q_1, t_1) \equiv d_a t_a^{(1)} = \frac{\partial t_a^{(1)}}{\partial a} da,$$

и совершенно аналогично на конце отрезка эволюции

$$d_a t_a^{(2)} = \frac{\partial t_a^{(2)}}{\partial a} da.$$

Как видим, нам удалось для концов отрезка эволюции записать дифференциалы в виде, свободном от символов полных производных как по параметру преобразований  $a$ , так и по времени  $t$  на исходной траектории  $q(t)$ .

Теперь сфокусируем внимание на времени  $t_a$ , которое течет независимо от параметра  $a$ , и также проведем выкладки так, чтобы в итоговых выражениях не было полных производных как по параметру

<sup>17</sup>Заметьте, что в отличие от случая произвольных и независимых друг от друга дифференциалов  $dt$  и  $da$  мы ограничиваем их значения или, как говорят, переходим на специальную поверхность «on shell» в пространстве произвольных значений дифференциалов. Вместо громоздкой записи для обозначения этого ограничения  $d_{\text{on shell}}$  мы используем более короткое обозначение  $d_a$ , имея виду, что дифференциал по времени  $dt$  выражается через дифференциал параметра  $da$ .

преобразований  $a$ , так и по времени  $t$  на исходной траектории  $q(t)$ . В силу независимости переменной эволюции  $t_a$  от параметра преобразования  $a$

$$d_a t_a = \frac{\partial t_a}{\partial a} da + \frac{dt_a}{dt} d_a t \equiv 0, \quad (1.19)$$

откуда с помощью понятия о неявной функции следует

$$\frac{dt_a}{dt} d_a t = -\frac{\partial t_a}{\partial a} da, \quad (1.20)$$

где мы опять свели выражения к частному дифференцированию по параметру в соотношениях (1.15), исключив неявные зависимости. Кроме того, независимость течения времени  $t_a$  от параметра  $a$  математически означает теперь перестановочность дифференцирования по независимым переменным

$$d_a \dot{q}_a(t_a) = d_a \left( \frac{dq_a}{dt_a} \right) = \frac{d}{dt_a} d_a q_a.$$

Независимость течения времени  $t_a$  от параметра  $a$ , выраженная в виде (1.20), означает, что зависимость от параметра  $a$  в функции замены переменных (1.15) неявно переносится на зависимость  $t$  от  $a$ . Тогда согласно (1.19) дифференциал координаты равен

$$d_a q_a = \frac{\partial q_a}{\partial a} da + \frac{dq_a}{dt} d_a t = \frac{\partial q_a}{\partial a} da + \frac{dq_a}{dt_a} \frac{dt_a}{dt} d_a t = \left( \frac{\partial q_a}{\partial a} - \dot{q}_a \frac{\partial t_a}{\partial a} \right) da, \quad (1.21)$$

где мы ввели обычное обозначение для полной производной по времени на траектории посредством точки

$$\frac{dq_a}{dt_a} \equiv \dot{q}_a.$$

Подчеркнем, что (1.21) опять позволяет исключить неявные функциональные зависимости: в выражении остается только скорость на траектории  $\dot{q}_a$  и частные производные, которые вычисляются по исходным формулам преобразований траекторий (1.15) как символьные производные и не имеют никакого произвола, связанного с наложением каких либо условий при дифференцировании.

Теперь мы можем перейти к вычислению производной экстремума действия по параметру. Для этого напомним, как производится дифференцирование определенного интеграла по параметру.

**Дифференцирование определенного интеграла по параметру.** Формула Ньютона–Лейбница устанавливает, что определенный интеграл от производной функции задается разницей значений этой функции на концах:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{d}{d\tau} F(\tau) = F(\tau_2) - F(\tau_1) = F(\tau) \Big|_{\tau_1}^{\tau_2}.$$

Введение зависимости от параметра  $a$  эту формулу никак не изменит,

$$\int_{\tau_1(a)}^{\tau_2(a)} d\tau \frac{d}{d\tau} F(\tau, a) = F(\tau_2(a), a) - F(\tau_1(a), a),$$

так что вычисление дифференциала по параметру  $a$  дает

$$\begin{aligned} d_a \left( \int_{\tau_1(a)}^{\tau_2(a)} d\tau \frac{d}{d\tau} F(\tau, a) \right) &= d_a \{ F(\tau_2(a), a) - F(\tau_1(a), a) \} = \\ &= \frac{dF(\tau, a)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_2(a)} \frac{\partial \tau_2(a)}{\partial a} da - \frac{dF(\tau, a)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_1(a)} \frac{\partial \tau_1(a)}{\partial a} da + \\ &+ d_a F(\tau, a) \Big|_{\tau=\tau_2(a)} - d_a F(\tau, a) \Big|_{\tau=\tau_1(a)}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$f(\tau, a) \equiv \frac{d}{d\tau} F(\tau, a).$$

Тогда

$$\frac{dF(\tau, a)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_2(a)} \frac{\partial \tau_2(a)}{\partial a} - \frac{dF(\tau, a)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_1(a)} \frac{\partial \tau_1(a)}{\partial a} = f(\tau_2(a), a) \frac{\partial \tau_2(a)}{\partial a} - f(\tau_1(a), a) \frac{\partial \tau_1(a)}{\partial a}.$$

Затем

$$d_a F(\tau, a) \Big|_{\tau=\tau_2(a)} - d_a F(\tau, a) \Big|_{\tau=\tau_1(a)} = \int_{\tau_1(a)}^{\tau_2(a)} d\tau \frac{d}{d\tau} (d_a F(\tau, a)),$$

но поскольку переменная интегрирования  $\tau$  и параметр  $a$  являются независимыми, порядок дифференцирования по  $\tau$  и  $a$  можно менять, так что

$$\frac{d}{d\tau} (d_a F(\tau, a)) = d_a \left( \frac{d}{d\tau} F(\tau, a) \right) = d_a f(\tau, a).$$

В итоге, собрав все слагаемые, находим

$$\begin{aligned} d_a \left( \int_{\tau_1(a)}^{\tau_2(a)} d\tau f(\tau, a) \right) &= f(\tau_2(a), a) \frac{\partial \tau_2(a)}{\partial a} da - f(\tau_1(a), a) \frac{\partial \tau_1(a)}{\partial a} da + \int_{\tau_1(a)}^{\tau_2(a)} d\tau d_a f(\tau, a) = \\ &= f(\tau_2(a), a) d_a \tau_2(a) - f(\tau_1(a), a) d_a \tau_1(a) + \int_{\tau_1(a)}^{\tau_2(a)} d\tau d_a f(\tau, a), \end{aligned} \quad (1.22)$$

т.е. дифференциал определенного интеграла по параметру включает в себя следующие члены: подынтегральную функцию на верхнем пределе интегрирования, умноженную на дифференциал верхнего предела по параметру, минус подынтегральную функцию на нижнем пределе интегрирования, умноженную на дифференциал нижнего предела по параметру, а также интеграл от дифференциала подынтегральной функции по параметру.

Для расчета дифференциала действия по параметру  $a$  на прямой траектории

$$d_a S = d_a \left( \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} L(q_a, \dot{q}_a, t_a) dt_a \right)$$

необходимо варьировать, во-первых, пределы интегрирования, а во-вторых, подынтегральную функцию от  $q_a$  и  $\dot{q}_a$ , которые сами зависят от параметра, в отличие от переменной эволюции на траектории  $t_a$ , так что

$$d_a S = da \cdot L \frac{\partial t_a}{\partial a} \Big|_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} + \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_a} d_a q_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} d_a \dot{q}_a \right\} dt_a.$$

Далее, во-первых,

$$L \frac{\partial t_a}{\partial a} \Big|_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} = \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \frac{d}{dt_a} \left( L \frac{\partial t_a}{\partial a} \right) dt_a,$$

во-вторых, уравнение движения

$$\frac{d}{dt_a} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial L}{\partial q_a}$$

дает

$$\int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_a} d_a q_a \right\} dt_a = \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \left\{ \left( \frac{d}{dt_a} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) d_a q_a \right\} dt_a.$$

Получаем

$$\int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_a} d_a q_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} d_a \dot{q}_a \right\} dt_a = \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \left\{ \left( \frac{d}{dt_a} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) d_a q_a + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} d_a \dot{q}_a \right\} dt_a.$$

Из перестановочности дифференцирования по параметру  $a$  и переменной эволюции  $t_a$  запишем

$$d_a \dot{q}_a = \frac{d}{dt_a} d_a q_a$$

откуда в итоге следует, что

$$\int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_a} d_a q_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} d_a \dot{q}_a \right\} dt_a = \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \frac{d}{dt_a} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} d_a q_a \right) dt_a,$$

так что, собирая все члены, получаем

$$d_a S = \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \frac{d}{dt_a} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} d_a q_a + L \frac{\partial t_a}{\partial a} \right\} dt_a. \quad (1.23)$$

В итоге, подставляя связь (1.21) для  $d_a q_a$ , находим

$$d_a S = da \cdot \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \frac{d}{dt_a} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \left( \frac{\partial q_a}{\partial a} - \dot{q}_a \frac{\partial t_a}{\partial a} \right) + L \frac{\partial t_a}{\partial a} \right\} dt_a, \quad (1.24)$$

что и составляет содержание *теоремы Нётер*. ■

В случае, когда координата не единственная, следует провести суммирование по координатам в системе:

$$d_a S = da \cdot \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \frac{d}{dt_a} \left\{ L \frac{\partial t_a}{\partial a} + \sum_q \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \left( \frac{\partial q_a}{\partial a} - \dot{q}_a \frac{\partial t_a}{\partial a} \right) \right\} dt_a, \quad (1.25)$$

а если и число параметров больше одного, то необходимо провести подстановку  $a \mapsto a^n$ , где  $n$  — мульти-индекс, и записать теорему через сумму дифференциалов  $da^n$  с использованием правила суммирования Эйнштейна по немym индексам:

$$d_a S = da^n \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \frac{d}{dt_a} \left\{ L \frac{\partial t_a}{\partial a^n} + \sum_q \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \left( \frac{\partial q_a}{\partial a^n} - \dot{q}_a \frac{\partial t_a}{\partial a^n} \right) \right\} dt_a. \quad (1.26)$$

Непрерывное преобразование называется *симметрией*, если экстремум не зависит от параметра, т.е.  $d_a S \equiv 0$ , а значит, одному и тому же экстремуму отвечает целое семейство решений уравнений движения. Из наличия симметрии  $d_a S = 0$  следует сохранение во времени величины<sup>18</sup>

$$\mathcal{I} \stackrel{\text{def}}{=} L \frac{\partial t}{\partial a} + \sum_q \frac{\partial L}{\partial \partial_t q} \left( \frac{\partial q}{\partial a} - \frac{\partial t}{\partial a} \partial_t q \right), \quad (1.27)$$

которую называют интегралом движения:  $\mathcal{I}(t') = \mathcal{I}(t_0)$ .

Подчеркнем, что физическое содержание теоремы Нётер полностью определяется нетривиальным фактом существования определенных параметрических преобразований в классе решений уравнений движений для заданной системы, т.е. при неизменной функции Лагранжа. Именно этот факт является квинтэссенцией комплиментарного ряда эмпирических данных или теоретических идей и моделей, факт, который, на самом деле, многое говорит о физической системе, а значит, и о функции Лагранжа этой системы, как мы это увидим чуть позже. Сама же теорема обладает безусловной математической красотой, присущей безупречному потоку тождественных преобразований.

Легко написать аналог теоремы Нётер в теории поля, просто проводя подстановку переменных интегрирования и дифференцирования в (1.24):

$$dt \mapsto dt d^3 r = \frac{1}{c} d^4 x, \quad \partial_t \mapsto \partial_\nu, \quad \partial_t \mapsto \partial x^\nu, \quad L \mapsto \mathcal{L}, \quad q \mapsto \Phi,$$

так что выражение в механике точки (1.23), которое мы запишем в терминах дифференцирования on shell, опуская маркер  $a$  у параметрических функций, чтобы не загромождать формулы,

$$d_a S = \int dt \partial_t \left\{ L \frac{\partial t_a}{\partial a} da + \sum_q \frac{\partial L}{\partial \partial_t q} d_a q_a \right\}, \quad \text{при } d_a t_a \equiv 0,$$

<sup>18</sup>Для краткости опустим маркер  $a$  у преобразованных величин при записи частных производных по этому параметру, чтобы не загромождать и без того сложные выражения, во-первых, а во-вторых, будем иметь ввиду предел  $a \rightarrow 0$ , так что параметрически преобразованные координаты и время становятся равными величинам на исходной траектории. Заметим, что такое бесконечно малое преобразование позволяет получить все значимые физические выводы, если преобразования обратимы и образуют параметрическую группу, когда вычисление дифференциалов возле  $a = 0$  и возле другого значения параметра совершенно эквивалентны, что в математике называют термином «изоморфизм».

переходит в

$$d_a S = \frac{1}{c} \int d^4 x \partial_\nu \left\{ \mathcal{L} \frac{\partial x_a^\nu}{\partial a} da + \sum_\Phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \Phi} d_a \Phi_a \right\}, \quad \text{при } d_a x_a^\lambda \equiv 0,$$

где последнее условие означает, что координаты детекторов  $x_a^\lambda$ , которые измеряют значения локального поля в различных точках, и момент времени  $t_a = x_a^{(0)}/c$ , в который детектируется локальное поле, никак не зависят от изменения параметра  $a$ , а эта параметрическая зависимость неявно переносится на дифференциалы исходного момента времени  $t$  и координаты  $x^\mu$ . Для параметрических преобразований полей и координат пространства-времени

$$\Phi_a = \Phi(a, \Phi(x), x), \quad x_a^\lambda = x_a^\lambda(a, x)$$

дифференциалы этих преобразований в общем виде вычисляются на траектории  $\Phi = \Phi(x)$ ,

$$d\Phi_a = \frac{\partial \Phi_a}{\partial a} da + dx^\mu \partial_\mu \Phi_a, \quad dx_a^\lambda = \frac{\partial x_a^\lambda}{\partial a} da + dx^\mu \partial_\mu x_a^\lambda.$$

Из независимости переменных интегрирования  $x_a^\lambda$  от параметра  $a$ , т.е. из условия, что положения детекторов локального поля в пространстве-времени не зависят от параметра, и, следовательно, «on shell» находим

$$d_a x_a^\lambda = \frac{\partial x_a^\lambda}{\partial a} da + d_a x^\mu \partial_\mu x_a^\lambda \equiv 0,$$

откуда следует, что

$$d_a \Phi_a = \frac{\partial \Phi_a}{\partial a} da + d_a x^\mu \frac{\partial x_a^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Phi_a}{\partial x_a^\lambda} = \frac{\partial \Phi_a}{\partial a} da - \frac{\partial x_a^\lambda}{\partial a} da \frac{\partial \Phi_a}{\partial x_a^\lambda}.$$

Опуская для краткости обозначений маркер для явной зависимости преобразованных полей и координат от параметра  $a$ , находим полевою теорему Нётер

$$d_a S = da \cdot \frac{1}{c} \int d^4 x \partial_\nu \left\{ \mathcal{L} \frac{\partial x^\nu}{\partial a} + \sum_\Phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \Phi} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial a} - \frac{\partial x^\lambda}{\partial a} \partial_\lambda \Phi \right) \right\}. \quad (1.28)$$

В случае инвариантности действия  $d_a S \equiv 0$  в произвольно выбранной области пространства в любом интервале времени находим локальный закон сохранения тока

$$\partial_\nu \mathcal{J}^\nu = 0, \quad \mathcal{J}^\nu \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L} \frac{\partial x^\nu}{\partial a} + \sum_\Phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \Phi} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial a} - \frac{\partial x^\lambda}{\partial a} \partial_\lambda \Phi \right) - \text{ток Нётер}. \quad (1.29)$$

Важный частный случай — преобразования полей без изменения координат пространства-времени, т.е. при условии

$$\frac{\partial x_a^\nu}{\partial a} \equiv 0.$$

Тогда ток Нётер —

$$\mathcal{J}^\nu = \sum_\Phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial a}. \quad (1.30)$$

Физически содержательные примеры включают в себя законы сохранения электрического тока, тока слабых и сильных взаимодействий.

Полевые законы сохранения мы исследуем позже с использованием тензорных обозначений из векторного анализа. Сейчас же приведем примеры в механике.

### 3.1. Однородность пространства

Если сдвиг начала отсчета координат не влияет на законы движения в физической системе, т.е. перенос этой системы целиком вместе с источниками сил невозможно установить по движению внутри системы, то говорят, что пространство обладает однородностью или трансляционно инвариантно. Трансляция вдоль оси  $x$  задает преобразование траектории

$$x_a = x + a, \quad t_a = t,$$



так что инвариантность действия в однородном пространстве согласно теореме Нётер (1.24) дает инвариант согласно (1.27)

$$p_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

который называют импульсом. Однородность пространства по каждому направлению означает сохранение вектора импульса

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}. \quad (1.31)$$

Импульс сохраняется, если функция Лагранжа не зависит от координат системы явно.

Для пространственных координат по общепринятой договоренности в матричных обозначениях вводят столбец с тремя индексами из начала греческого алфавита:

$$r^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \alpha = \overline{1, 3},$$

так что вектор скорости  $v^\alpha = \dot{r}^\alpha$  — тоже столбец, а импульс, как частная производная по компонентам столбца, является строкой  $p_\alpha = \partial_{v^\alpha} L$ .

### 3.2. Однородность времени

Однородность времени означает, что начало отсчета времени никак не сказывается на динамике физической системы, так что преобразования

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}, \quad t_a = t - a,$$

оставляют инвариантным действие, и по теореме Нётер (1.24) сохраняется следующий интеграл движения согласно (1.27)

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} - L, \quad (1.32)$$

который называют энергией.

Энергия сохраняется, если функция Лагранжа не зависит от времени явно.

### 3.3. Изотропность пространства

Изотропность пространства означает эквивалентность всех направлений в пространстве, а значит действие системы инвариантно относительно поворотов в пространстве<sup>19</sup>:

$$r_a^\alpha = \mathcal{R}_{\bullet\beta}^\alpha(\mathbf{a}) r^\beta, \quad t_a = t, \quad (1.33)$$

где матрица  $\mathcal{R}$  размерностью  $3 \times 3$  зависит от угла поворота  $a$  вокруг некой оси, заданной единичным вектором  $\mathcal{O}$ , что определяет вектор  $\mathbf{a} = a \mathcal{O}$ . В формуле (1.33) мы используем матричное умножение, так что в матрице поворотов необходимо указать порядок следования индексов, и для этого мы в явном виде обозначаем символом  $\bullet$  занятое место индекса по порядку, когда индексы матрицы располагаются и сверху, и снизу, чтобы обратить внимание читателя на порядок индексов<sup>20</sup>: первый индекс нумерует позицию в столбце, а второй позицию в строке. В этой логике столбец  $r^\beta$  тоже можно рассматривать как часть матрицы, у которой нет номера в строке,

$$r^\beta \equiv r^{\beta\bullet}. \quad (1.34)$$

Подчеркнем, что при использовании матричного умножения часто пользуются операцией транспонирования матрицы — перестановкой порядка следования индексов,

$$(\mathcal{R}^T)_{\beta}^{\bullet\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}_{\bullet\beta}^\alpha, \quad \text{или} \quad (A^T)_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} A_{\beta\alpha}, \quad (M^T)^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} M^{\beta\alpha}. \quad (1.35)$$

<sup>19</sup>Мы будем отличать понятие преобразований поворотов базиса и координат пространства от понятия вращений, поскольку, вообще говоря, вращение — это процесс, т.е. изменение положения системы при повороте вокруг оси в зависимости от времени. Однако в литературе часто используют и термин «вращение» тогда, когда имеют ввиду преобразование поворота, а не процесс. Наблюдение за этим нюансом оставим в зоне внимания читателя.

<sup>20</sup>Мы могли бы вместо  $\bullet$  просто оставлять пустое место, но тогда факт определенного порядка индексов при матричном умножении мог бы ускользнуть из фокуса внимания.

Тогда транспонирование столбца координат согласно (1.34) и (1.35) дает

$$(r^T)^{\bullet\beta} = r^{\beta\bullet}. \quad (1.36)$$

Для примера, при повороте вокруг оси  $z$  единичный вектор вдоль оси поворота  $\mathbf{O} \mapsto \mathbf{e}_z$ , а декартовы координаты преобразуются как

$$x_a = x \cos a - y \sin a, \quad y_a = y \cos a + x \sin a,$$

так что при бесконечно малом угле поворота  $a \rightarrow 0$ , имеют место преобразования

$$x_a = x - ya, \quad y_a = y + xa, \quad t_a = t,$$

задающие инвариант согласно (1.27)

$$\ell_z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} (-y) + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} x = xp_y - yp_x,$$

т.е. не что иное, как проекцию на ось  $z$  момента количества движения

$$\ell_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z.$$

Из изотропности пространства следует сохранение вектора момента количества движения  $\ell$ .

Орбитальный момент импульса сохраняется, если функция Лагранжа не зависит от направлений координат системы явно.

В теории поля возникают полные аналоги рассмотренных законов сохранения, следующих из однородности пространства, времени и изотропии пространства.

**Задача 4.** Для комплексного скалярного поля в одномерном пространстве (см. Задачу 3) запишите ток Нётер при симметрии действия относительно преобразований комплексной фазы поля

$$\phi_a = e^{-ia} \phi,$$

где  $a$  не зависит от координат и времени, т.е. является глобальным параметром преобразования. Обсудить плотность заряда и поток заряда через границы.

## Лекция № 2

Инерциальные системы, преобразования Галилея и вывод импульса и энергии свободной частицы из теоремы Нётер, единичная вероятность достоверности пучка экстремальных траекторий и вещественность действия, постоянная Планка, связь эйконала геометрической оптики с действием. Гамильтонова механика, скобки Пуассона, производящая функция канонических преобразований, метод решения уравнений Гамильтона–Якоби при помощи канонического преобразования и интегралов движения, центробежный потенциал в сферически симметричных полях, инкремент угла вращения при движении от перицентра к апоцентру.

### 4. Инерциальные системы и функция Лагранжа свободной частицы

В инерциальных системах свободная частица движется по инерции поступательно, равномерно и прямолинейно. В ньютоновой механике переход из одной инерциальной системы в другую описывается специальным преобразованием Галилея:

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r} + \mathbf{v}_a t, \quad t_a = t, \quad (1.37)$$

где  $\mathbf{v}_a$  — скорость движения одной инерциальной системы относительно другой. Законы движения не меняются при переходе от одной инерциальной системы к другой.

Рассмотрим свободную частицу. В силу однородности пространства импульс частицы сохраняется и согласно уравнениям Эйлера–Лагранжа функция Лагранжа свободной частицы не зависит от координат. Аналогично из однородности времени следует, что сохраняется энергия, а функция Лагранжа не зависит явно от времени, т.е. для свободной частицы  $L_0 = L(\mathbf{v})$ . Из изотропности пространства следует, что вид функции Лагранжа не зависит от направления скорости, т.е. функция Лагранжа свободной частицы зависит только от квадрата скорости  $L(\mathbf{v}) \mapsto \tilde{L}(v^2)$ . Более того, для определения явного вида этой функции можно без ограничения общности считать, что частица движется вдоль оси  $x$  и специальное преобразование Галилея выполняется также вдоль той же оси.

Тогда по теореме Нётер (1.24) изменение действия при переходе к другой инерциальной системе примет вид

$$d_a S = dv_a^x \cdot \int dt \frac{d}{dt} \{p_x t\} = dv_a^x \cdot \int dt p_x,$$

где мы учли закон сохранения импульса свободной частицы:  $dp_x/dt = 0$ .

Уравнения движения при переходе в другую инерциальную систему не меняются. Эти уравнения получаются при вариации действия при фиксированных концах, а значит, уравнения после специального преобразования Галилея останутся прежними, если только изменение  $dS/dv_a^x$  сведется к значениям динамических переменных на концах траектории. Это возможно, если подынтегральное выражение есть полная производная по времени, т.е.

$$p_x = \frac{df_x}{dt}.$$

Однако, поскольку импульс свободной частицы является только функцией скорости, как это следует из определения  $p_x = \partial L / \partial v^x$  с учетом того, что функция Лагранжа свободной частицы зависит только от квадрата скорости, то функция  $f_x$  может зависеть только от координат, так как

$$\frac{df_x}{dt} = \frac{\partial f_x}{\partial t} + \frac{\partial f_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial f_x}{\partial v_x} \dot{v}_x + \dots$$

В этом разложении ненулевыми могут быть только два первых члена, потому что остальные вклады зависят от высших производных скорости, что исключено, так что  $f_x$  может зависеть только от координаты и времени. Величина  $\partial f_x / \partial t$  зависит только от скорости, но  $f_x$  от скорости не зависит, а значит, это — постоянная величина. Эту константу полагают тождественно равной нулю, так как ее ненулевое значение отвечало бы величине импульса частицы при нулевой скорости самой частицы, так что ненулевой вектор импульса при нулевой скорости нарушал бы принцип изотропности пространства из-за наличия выделенного направления в изотропном пространстве<sup>21</sup>. Тогда частная производная  $\partial f_x / \partial x$  зависит от координат, но это может быть согласовано с условием зависимости импульса свободной частицы только от скорости, только если эта частная производная — постоянное число,  $\partial f_x / \partial x = \text{const}$ . Эту постоянную называют инерциальной массой частицы,  $m$ , и, при этом, полагают, что эта величина является вещественной и положительной<sup>22</sup>: выбор положительного, а не отрицательного знака массы является условным и он считается удобным при описании других динамических свойств (см. ниже), а вот вещественность массы имеет принципиальное значение, которое мы подчеркнем при обсуждении вероятности достоверности траектории частицы.

Итак, однородность пространства и времени вместе с изотропией пространства и явным видом специальных преобразований Галилея при переходе от одной инерциальной системы к другой по теореме Нётер однозначно определяют явный вид импульса частицы

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad (1.38)$$

а значит, и явный вид функции Лагранжа свободной частицы

$$L_0 = \frac{1}{2} m v^2, \quad (1.39)$$

как решения уравнения<sup>23</sup>  $\partial L_0 / \partial \mathbf{v} = \mathbf{p} = m\mathbf{v}$ .

При введении взаимодействия эквивалентность инерциальных систем требует в простейшем случае, чтобы к функции Лагранжа добавлялись вклады, зависящие только от относительных расстояний и времени в системе,  $L_0 \mapsto L = L_0 - U(\mathbf{r} - \mathbf{r}_*, t - t_*)$ , где звездочкой помечены параметры источника сил. Функцию  $U$  называют потенциалом.

Заметим, что в частном случае масса может быть равной нулю. Тогда мы видим, что принцип относительности Галилея для инерциальных систем приводил бы к значениям импульса и энергии, тождественно равным нулю для частиц с нулевой массой, т.е. к отсутствию всякого движения безмассовых частиц. Однако в природе существует движение частиц с нулевой массой, например, движение частиц света и переносчиков гравитационного взаимодействия — гравитонов. Это означает, что необходимо ввести принцип относительности, отличный от принципа относительности Галилея, так, чтобы принцип

<sup>21</sup>Изотропный вектор тождественно равен нулю.

<sup>22</sup>Масса не может зависеть от направления движения частицы в силу изотропности пространства.

<sup>23</sup>Константа интегрирования  $C_L$  приведет к изменению действия  $\Delta S = C_L \int dt$ , что сводится к члену, зависящему только от концов траектории  $\Delta S = C_L(t' - t_0)$ , и при выводе уравнений движения при вариации траектории с фиксированными концами дает нулевой вклад. Из определения энергии (1.32) следует, что  $C_L$  дает сдвиг начала отсчета энергии  $E$ , а значит, прескрипция для начала отсчета энергии никак не влияет на уравнения движения в классической нерелятивистской механике.

относительности Галилея являлся бы предельным случаем для массивных частиц, т.е. когда вклад в кинетическую энергию и импульс, получаемых из принципа относительности Галилея, являлся бы доминирующим в кинетической энергии и импульсе свободных частиц, значения которых получаются из более общего принципа относительности, имеющего силу и для массивных, и для безмассовых частиц. Этот принцип — постулат релятивистской теории относительности, который находится вне рамок излагаемого сейчас материала<sup>24</sup>.

## 5. Амплитуда вероятности и постоянная действия

Рассмотрим пучок  $n$  траекторий в малой окрестности «истинной» траектории, т.е. траектории, удовлетворяющей уравнениям движения с фиксированными концами, заданными с бесконечно малой погрешностью. Мы полагаем, что для траекторий в пучке  $q_k(t)$  действие  $S_k$  задается с точностью первого порядка по вариации траектории  $\delta q_k(t) = q_k(t) - q_{\text{ext.}}(t)$ . Это значит, что для траекторий из этого узкого пучка траекторий действие экстремально. Определим вероятность достоверности для траекторий из этого пучка, как интенсивность средней амплитуды вероятности:

$$\mathcal{W} \stackrel{\text{def}}{=} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Psi_k \right|^2 = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp \left\{ \frac{1}{\kappa} S_k \right\} \right|^2,$$

где мы использовали определение действия как логарифма амплитуды вероятности достоверности классической траектории. В силу экстремальности действия и бесконечно малой неопределенности пучка траекторий, действие на каждой такой траектории принимает значение в экстремуме, т.е.

$$S_k = S_{\text{ext.}} + \delta S_k \quad \delta S_k = 0 \quad \Rightarrow \quad S_k = S_{\text{ext.}},$$

а значит,

$$\mathcal{W} = \left| \exp \left\{ \frac{1}{\kappa} S_{\text{ext.}} \right\} \right|^2.$$

По построению, вероятность «прямой» классической траектории равна единице,

$$\mathcal{W} = 1,$$

откуда следует, что аргумент экспоненты в формуле для вероятности является *чисто мнимым*. В частности, для свободных частиц действие зависит от одного параметра — массы частицы, так что если принять универсальное условие, что все массы являются вещественными и положительными, то само действие будет вещественным, а экстремальное условие для действия будет означать, что экстремум — это **минимум** действия<sup>25</sup>. При этом постоянная  $\kappa$  будет чисто мнимой величиной. Ясно, что в амплитуду вероятности входит лишь отношение массы к постоянной  $\kappa$ , так что комплексная фаза в определении массы должна быть в точности компенсирована ровно такой же фазой постоянной  $\kappa$ . В итоге, условились считать, что

$$\kappa \stackrel{\text{def}}{=} -i \hbar, \tag{1.8}$$

где  $\hbar$  — положительная постоянная Планка  $\hbar/2\pi$ . Численно с хорошей точностью  $\hbar c \approx 200$  МэВ·Фм, где  $c$  — скорость света, а длина в один ферми равна  $\text{Фм} = 10^{-13}$  см, т.е. один ферми отвечает размеру протона<sup>26</sup>.

При включении взаимодействий вероятность достоверности «истинной» классической траектории останется равной единице, а следовательно, действие должно всегда оставаться *вещественным*,  $S \in \mathbb{R}$ .

<sup>24</sup>Отметим однако, что при выводе функции Лагранжа свободной частицы мы неявно полагали, что скорость — это величина, которая может принимать различные значения как следствие преобразований Галилея: в различных инерциальных системах отсчета скорость изменяется на относительную скорость движения двух таких систем. Если ввести предположение о том, что существует инвариантная скорость, которая одна и та же для различных инерциальных систем с идентичными линейками и часами, то проведенный вывод становится неприменим, но и само предположение об инвариантной скорости не совместимо с преобразованиями Галилея.

<sup>25</sup>Первая вариация действия на экстремальной траектории равна нулю, в то время как вторая вариация в случае свободной частицы сводится к виду

$$\delta^2 S = \int \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 L_0}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} \delta v^\alpha \delta v^\beta dt = \frac{1}{2} m \int (\delta v)^2 dt > 0.$$

так что малые вариации второго порядка возле экстремума увеличивают значение действия, и экстремум действительно является минимумом.

<sup>26</sup>Значения кванта действия  $\hbar$  зависит от выбора единиц измерения импульса и энергии при фиксированных единицах измерения длины и времени, как мы увидим это дальше по ходу построения гамильтоновой механики. Ясно, что можно выбрать такие единицы измерения импульса и энергии, что в этих единицах получится значение  $\hbar = 1$ .

Рассмотрим теперь узкий пучок из  $n$  траекторий вблизи центральной траектории  $q_c(t)$ , которая не удовлетворяет принципу наименьшего действия. Это значит, что при усреднении амплитуды вероятности в пучке

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp \left\{ \frac{1}{\kappa} S_k \right\}$$

происходит суммирование комплексных чисел с единичным модулем и хаотически меняющейся фазой, поскольку действие существенно меняется от траектории к траектории в таком пучке, поскольку

$$S_k = S_c + \delta S_k, \quad \delta S_k \neq 0,$$

а значит,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp \left\{ \frac{1}{\kappa} S_k \right\} = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_c \right\} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \delta S_k \right\} \right).$$

Так как средние значения синуса и косинуса равны нулю и  $\exp\{i\alpha\} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ , мы найдем, что и средняя амплитуда для такого пучка траекторий обращается в нуль, чего и следовало ожидать. Это утверждение справедливо, конечно, если изменение фазы  $\alpha_k = \delta S_k / \hbar$  с необходимостью охватывает хотя бы период в  $2\pi$ , что заведомо будет иметь место, если  $|\delta S_k| / \hbar \gg 2\pi$ , что и составляет критерий применимости классической механики в приведенном рассмотрении. Кроме того, в общем случае нужно еще рассмотреть ширину трубки траекторий при вариации действия второго порядка малости в сравнении с фазой «квантовой» амплитуды: если квантовые флуктуации существенно меньше ширины трубки за счет погрешности измерений приборов, то динамика вполне может описываться классическими траекториями.

Другими словами, если отклонение действия от экстремального за счет погрешности приборов  $\delta S$  много больше постоянной Планка:  $\delta S / \hbar \gg 1$ , – то мы наблюдаем только экстремальную траекторию, а значит, классическая механика формально отвечает пределу  $\hbar \rightarrow 0$ . Однако, нужно иметь ввиду, что при изучении траекторий, которые за счет флуктуаций сил обладают  $\delta S / \hbar \sim 1$ , с соответствующей точностью измерений мы вступаем в область квантовой механики, причем, для примера, если мы исследуем движение, экстремальная траектория которого, а значит, классическое движение есть просто покой в устойчивом положении, то флуктуации сил с квантовой точностью будут приводить к тому, что в действительности система не покоится.

Итак, мы установили, что на узких пучках «прямых» траекторий вероятность достоверности классической траектории равна единице, а на пучках не «экстремальных» траекторий вероятность достоверности обращается в нуль.

Отметим, что в приведенном рассмотрении мы предполагали, что возможно выделение достаточно узких пучков траекторий как возле «прямой» классической траектории, так и возле не «экстремальной» траектории. Это отвечает предельному случаю описания траекторий в рамках классической механики. В действительности, общим случаем является квантовая траектория в пучке, которая характеризуется *флуктуацией сил*, причем законы таких флуктуаций описываются амплитудой вероятности в квантовой механике. Стандартный способ сравнения предсказаний квантовой теории с экспериментом обычно использует многократное повторение одной и той же ситуации движения (ансамбль) для вычисления вероятности флуктуаций траектории. Однако, вообще говоря, квантовые флуктуации имеют место и в единичном случае, «без ансамбля». Так, к примеру, у нас нет ансамбля Вселенных, с которыми мы повторяли бы опыты по эволюции, есть только одна Вселенная, а значит, лишь одна реализация флуктуаций ее движения, и, при этом, нам удастся верно описать квантовые флуктуации, произошедшие на ранней стадии эволюции Вселенной, которые определили спектр неоднородности распределения вещества, запечатленный в видимой крупномасштабной структуре Вселенной, а также в анизотропии реликтового излучения, дающего «фотоснимок» Вселенной в ее младенческом возрасте около 380 тысяч лет с начала расширения.

Наконец, отдельно подчеркнем, что проведенные рассуждения с точки зрения математического описания, как мы установим несколько позже, отвечают введению векторного пространства квантовых состояний, элементами которого являются амплитуды вероятности  $\Psi$  того, что частица находится на некоторой траектории, причем необязательно на единственной «прямой траектории» в классическом понимании, и эти квантовые состояния могут образовывать суперпозиции, которые также являются амплитудами вероятности для таких суперпозиций состояний на нескольких траекториях.

## 6. Гамильтонова механика

### 6.1. Уравнения Гамильтона–Якоби

Принимая во внимание интегралы движения, которые получаются из теоремы Нётер согласно однородности пространства и времени, т.е. импульс  $p$  и энергию  $E$ , перейдем от пары лагранжевых переменных

$\{\dot{q}, q\}$  к гамильтоновым  $\{p, q\}$ , а также совершим преобразование Лежандра и введем функцию Гамильтона

$$H \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \Big|_{\dot{q}=\dot{q}(p)}, \quad p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \quad (1.40)$$

или в многомерном случае, когда  $p_\alpha = \partial L / \partial \dot{r}^\alpha$ ,

$$H = p_\alpha \dot{r}^\alpha - L. \quad (1.41)$$

В частности, при

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - U(\mathbf{r}) \quad (1.42)$$

находим

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{r}). \quad (1.43)$$

При нулевом потенциале имеется только вклад свободной частицы, который называют кинетической энергией  $K = L_0 = \mathbf{p}^2 / 2m$ .

Действие можно теперь переписать в виде (при указании пределов интегрирования введем в обозначения штрихи для подынтегральных переменных)

$$S = \int L dt = \int \{p \dot{q} dt - H dt\} = \int_{t_0, q_0}^{t, q} p' dq' - H(q', p', t') dt' \equiv \int_{q_0}^q p' dq' - \int_{t_0}^t H(q', p', t') dt', \quad (1.44)$$

откуда сразу получаем уравнения Гамильтона–Якоби<sup>27</sup>

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H,$$

или в многомерном случае, когда

$$S = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} p_\alpha d\mathbf{r}^\alpha - \int_{t_0}^t H dt, \quad (1.45)$$

установим

$$\partial_\alpha S = p_\alpha, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H. \quad (1.46)$$

Итак, уравнения Гамильтона–Якоби — это уравнения в частных производных первого порядка, в которых ищется действие как функция от точек-концов траектории. Подчеркнем, что уравнения Ньютона — это уравнения второго порядка по времени, в которых ищется траектория частицы с заданными начальными условиями. Мы покажем, что из действия, которое является решением уравнений Гамильтона–Якоби, можно найти траекторию с заданными концами.

В теории распространения колебаний установлено, что волны, к примеру, в оптике волны электромагнитного излучения характеризуются частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k} = \mathbf{e} 2\pi / \lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны,  $\mathbf{e}$  — единичный вектор в направлении движения излучения и  $\omega = c |\mathbf{k}|$ , где  $c$  — скорость света. Частота и волновой вектор определяют фазу волны

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} - \omega dt,$$

причем, согласно принципу Гюйгенса, волна задается суперпозицией по разным путям распространения  $C_n$

$$\sum_n \mathcal{A}_n \exp \left\{ i \int_{C_n} \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} - \omega dt \right\},$$

<sup>27</sup> Дифференцирование по верхнему пределу интегрирования производится элементарно, в то время как относительно дифференцирования подынтегрального выражения заметим, что оно сводится к вариации действия на траектории, которая удовлетворяет уравнениям движения, а значит, согласно принципу экстремального действия такая вариация равна нулю, и дифференцирование подынтегрального выражения на уравнениях движения дает нуль. Тот же результат получится, если воспользоваться теоремой Нётер, в которой в качестве параметров дифференцирования действия выбрать координату и время в конечной точке истинной классической траектории.

а в случае распространения из одной точки в другую амплитуды  $\mathcal{A}_n$  нужно положить равными,  $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_0$ . Интенсивность волны принимает вид

$$|\mathcal{A}_0|^2 \left| \sum_n \exp \left\{ i \int_{C_n} \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} - \omega dt \right\} \right|^2,$$

В пределе геометрической оптики интерференция сводится к учету распространения по лучам, для которых фаза колебаний удовлетворяет условию экстремальности  $\delta\varphi = 0$  при варьировании траектории  $\delta\mathbf{r}(t)$ , так что её экстремальное значение называют эйконалом, и при этом, лучи в геометрической оптике имеют физический смысл траекторий корпускул света, т.е. фотонов, для которых можно записать вероятность достоверности траектории в терминах действия

$$|\Psi|^2 = \left| \frac{1}{n} \sum_n \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{C_n} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} - E dt \right\} \right|^2.$$

Естественно положить, что интенсивность волны в пределе геометрической оптики и вероятность достоверности траекторий пропорциональны друг другу: гипотеза де Бройля —

$$\varphi = \frac{S}{\hbar},$$

откуда сразу следует связь частоты и волнового вектора с энергией и импульсом фотона,

$$E = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}, \quad (1.47)$$

так что из данных фотоэффекта устанавливается, что  $\hbar$  действительно постоянная Планка с чертой.

Заметим, что свободные фотоны обладают ненулевыми значениями кинетической энергии и импульса, закон дисперсии которых, т.е. связь энергии с импульсом,  $E^2 = c^2 \mathbf{p}^2$ , отличается от закона дисперсии свободных нерелятивистских частиц с массой,  $E = \mathbf{p}^2/2m$ . Это — пример закона дисперсии для частиц с нулевой массой: такие частицы не удовлетворяют принципу относительности Галилея для инерциальных систем.

## 6.2. Уравнения Гамильтона

Прямое вычисление производных функции Гамильтона дает, во-первых,

$$\partial_\beta H = \partial_\beta \{p_\alpha \dot{r}^\alpha - L\} = -\partial_\beta L = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^\beta} = -\dot{p}_\beta,$$

а во-вторых,

$$\frac{\partial H}{\partial p_\beta} = \frac{\partial}{\partial p_\beta} \{p_\alpha \dot{r}^\alpha - L\} = \dot{r}^\beta + p_\alpha \frac{\partial \dot{r}^\alpha}{\partial p_\beta} - \frac{\partial L}{\partial p_\beta},$$

и в силу определения импульса,

$$\frac{\partial L}{\partial p_\beta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^\alpha} \frac{\partial \dot{r}^\alpha}{\partial p_\beta} = p_\alpha \frac{\partial \dot{r}^\alpha}{\partial p_\beta}$$

что приводит к уравнениям Гамильтона

$$\frac{\partial H}{\partial p_\beta} = \dot{r}^\beta, \quad \partial_\beta H = -\dot{p}_\beta. \quad (1.48)$$

В случае нерелятивистской функции Лагранжа вида (1.42) получаем функцию Гамильтона (1.43),

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{r}),$$

и

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\partial U(\mathbf{r}). \quad (1.49)$$

Уравнения Гамильтона можно получить и при вариации действия (1.45) по траекториям в фазовом пространстве:

$$\delta S = \int_{t_0, \mathbf{r}_0}^{t, \mathbf{r}} \left( \delta p_\alpha \dot{r}^\alpha dt - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \delta p_\alpha dt \right) + \int_{t_0, \mathbf{r}_0}^{t, \mathbf{r}} \left\{ p_\alpha \delta \dot{r}^\alpha dt - \frac{\partial H}{\partial r^\alpha} \delta r^\alpha dt \right\},$$

где, конечно, в фигурных скобках необходимо проинтегрировать по частям вклад с вариацией скорости движения с учетом условия фиксированных концов траектории по координатам, что приведет к члену с производной импульса по времени. В итоге, принцип экстремального действия при вариации по импульсам (в круглых скобках) и координатам (в фигурных скобках) дает уравнения Гамильтона (1.48).

Решением уравнений Гамильтона является траектория в фазовом пространстве (на фазовой плоскости  $\{p, q\}$  в случае одномерного движения).

### 6.3. Флуктуации свободной квантовой частицы

В качестве простейшего примера рассмотрим амплитуду вероятности для свободной частицы в одномерном декартовом пространстве, которая за время от  $t'$  до  $t$  распространяется из точки  $q'$  в точку  $q$ , так что

$$\Psi(t, q) = A e^{iS(t, q)/\hbar},$$

где действие определяется прямой траекторией

$$S(t, q) = \frac{m\dot{q}^2}{2} \int_{t'}^t dt = \frac{1}{2} m \frac{(q - q')^2}{t - t'},$$

причем строго  $t > t'$ , а независящую от координат амплитуду  $A$  мы ввели для общности рассмотрения. В силу уравнений Гамильтона-Якоби

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \Psi(t, q) = \frac{\partial S(t, q)}{\partial q} \Psi(t, q) = p \Psi(t, q).$$

В случае, когда в силу принципа суперпозиции, т.е. в силу принципа Гюйгенса, амплитуда — это сумма амплитуд для различных траекторий с различными начальными точками, но с одной и той же конечной точкой  $(t, q)$ , оператор импульса, который действует на амплитуду вероятности,

$$\hat{p}\Psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \Psi,$$

сводится к сумме импульсов с весами в виде отдельных амплитуд соответствующей траектории. В самом деле, для

$$\Psi(t, q) = \sum_k A_k e^{iS_k(t, q)/\hbar}$$

найдем

$$\hat{p}\Psi(t, q) = \sum_k A_k \hat{p} e^{iS_k(t, q)/\hbar} = \sum_k A_k p_k e^{iS_k(t, q)/\hbar},$$

так что  $\hat{p}$  переводит суперпозицию в суперпозицию, и тогда говорят, что  $\hat{p}$  — это линейный оператор.

Для комплексно сопряженной амплитуды для свободной частицы

$$(\hat{p}\Psi)^* = \Psi^* \hat{p}.$$

В рассматриваемом простейшем случае естественно определить среднее значение оператора импульса в



виде<sup>28</sup>

$$\langle \hat{p} \rangle = \frac{1}{2} (\Psi^* (\hat{p} \Psi) + (\hat{p} \Psi)^* \Psi) \frac{1}{\Psi^* \Psi}, \quad (1.50)$$

чтобы учесть сокращение произвольной нормировки амплитуды. Элементарная подстановка дает для свободной частицы, конечно,

$$\langle \hat{p} \rangle = m \frac{q - q'}{t - t'} = m \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Подчеркнем, что речь идет о траектории с фиксированными концами, а не о траектории с заданным импульсом или энергией.

Далее, определим флуктуацию импульса как среднее значение квадратичного отклонения от среднего значения

$$(\delta p)^2 = \langle (\hat{p} - \langle p \rangle)^2 \rangle.$$

Раскрывая квадрат и учитывая, что среднее значение числа по данному нами определению среднего равно самому числу, найдем

$$(\delta p)^2 = \langle (\hat{p}^2 - 2\hat{p}\langle p \rangle + \langle p \rangle^2) \rangle = \langle \hat{p}^2 \rangle - 2\langle p \rangle^2 + \langle p \rangle^2 = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle p \rangle^2,$$

а значит, флуктуация определяется разностью среднего значения квадрата импульса и квадрата среднего значения. В случае свободной частицы

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Psi^* \Psi} \Psi^* (\hat{p}^2 \Psi) &= -\hbar^2 e^{-iS/\hbar} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} m \frac{(q - q')^2}{2(t - t')} \right\} = -\hbar^2 e^{-iS/\hbar} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{i}{\hbar} m \frac{q - q'}{t - t'} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} m \frac{(q - q')^2}{2(t - t')} \right\} \right) = \\ &= \left( m \frac{q - q'}{t - t'} \right)^2 - i \frac{m\hbar}{t - t'}. \end{aligned}$$

Чисто мнимый вклад сокращается при вычислении

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \frac{1}{2} (\Psi^* (\hat{p}^2 \Psi) + (\hat{p}^2 \Psi)^* \Psi) \frac{1}{\Psi^* \Psi} = \left( m \frac{q - q'}{t - t'} \right)^2 = \left( m \frac{\Delta q}{\Delta t} \right)^2,$$

так что  $(\delta p)^2 \equiv 0$ . Однако в более изощренных случаях флуктуация оказывается отличной от нуля: в рассмотренном примере амплитуда была собственной функцией оператора импульса с вещественным собственным значением, которое равно среднему значению импульса, а стало быть, ясно, что в случае, когда амплитуда не является собственной для оператора импульса, флуктуации импульса становятся ненулевыми.

Вместе с тем, интересно отметить, что, во-первых, чисто мнимый вклад формально стремиться к нулю при  $\hbar \rightarrow 0$ , а во-вторых, если иметь ввиду, что  $\hbar$  — это, все-таки, размерная величина, мнимая добавка пренебрежимо мала, когда действие в аргументе экспоненты много больше  $\hbar$ ,

$$S = \frac{1}{2} m \frac{(q - q')^2}{t - t'} = \frac{\langle p \rangle^2}{2m} \Delta t \gg \hbar,$$

а стало быть, аргумент амплитуды вероятности, фаза для чисто мнимого аргумента экспоненты много больше единицы. Это же условие можно переписать в терминах энергии,

$$E = \frac{\langle p \rangle^2}{2m} \gg \frac{\hbar}{\Delta t}.$$

<sup>28</sup>В формализме квантовой механики, когда амплитуда является суперпозицией для многих траекторий, необходимо более строго подходить как к определению среднего значения физических величин, так и к трактовке амплитуды вероятности найти частицу в заданной точке в заданный момент времени. В частности, на единицу нормируют сумму вероятностей найти частицу в какой-либо точке пространства. В нашем изложении мы здесь не касаемся этих принципиальных для квантовой механики вопросов. Отметим лишь, что, если определить для независимых траекторий «вероятности»

$$w_k = |A_k|^2 \frac{1}{\sum_{k'} |A_{k'}|^2}, \quad \sum_k w_k = 1,$$

то естественно ввести среднее значение импульса в виде

$$\langle p \rangle = \sum_k p_k w_k,$$

и в случае, когда есть только одна амплитуда, это выражение сводится к формуле (1.50).

В этом выражении значение энергии на классической траектории сравнивается с флуктуацией энергии  $\Delta E$ , которая выражается через время наблюдения  $\Delta t$ , а именно,

$$\Delta E \sim \frac{\hbar}{\Delta t},$$

если действие становится порядка постоянной Планка,

$$S \sim \hbar.$$

Итак, приближение для амплитуды в виде вклада от единственной прямой траектории для свободной частицы применимо только в пределе длительного отрезка наблюдения, когда величина действия много больше постоянной Планка и флуктуации пренебрежимо малы. Смысл этого утверждения становится понятней, если вспомнить, что мы рассматриваем траекторию свободной частицы с фиксированными концами, а значит, энергия, в принципе, может в такой постановке задачи, как видим, несколько флуктуировать. При этом, всегда можно указать длительность наблюдения за траекторией, когда флуктуация становится несущественной.

С точки зрения уравнений Гамильтона энергия свободной частицы связана с импульсом как

$$E = \frac{p^2}{2m}.$$

При записи энергии в уравнении Гамильтона–Якоби в виде  $E = -\partial S/\partial t$  легко установить и вид оператора, который действует на амплитуду, т.е. на экспоненту от действия

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{iS/\hbar} = -\frac{\partial S}{\partial t} e^{iS/\hbar} = E e^{iS/\hbar},$$

так что

$$\hat{E}\Psi \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi.$$

Тогда следует полагать, что должно выполняться операторное уравнение для свободной частицы

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 \Psi. \quad (1.51)$$

Однако мы выяснили, что действие квадрата импульса приводит к флуктуациям

$$\frac{1}{2m} \hat{p}^2 \Psi = \frac{1}{2m} \left( m \frac{\Delta q}{\Delta t} \right)^2 \Psi - \frac{i\hbar}{2\Delta t} \Psi.$$

Эта флуктуация в операторном уравнении (1.51) в точности сократится, если предэкспоненциальный фактор амплитуды вероятности прямой траектории станет вполне определенным образом зависеть от времени,

$$\Psi(t, q) = A(t) e^{iS(t, q)/\hbar} = \frac{A_0}{\sqrt{t-t'}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{1}{2} m \frac{(q-q')^2}{t-t'} \right\},$$

так что элементарное дифференцирование произведения экспоненты на фактор  $A(t)$  дает

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, q) = \frac{1}{2m} \left( m \frac{\Delta q}{\Delta t} \right)^2 \Psi - \frac{i\hbar}{2\Delta t} \Psi = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 \Psi.$$

Итак, мы убедились, что действие операторов на амплитуду вероятности траектории может приводить к флуктуациям по сравнению с классическими значениями импульса и энергии. Эти флуктуации скоррелированы так, чтобы в среднем, если траектория единственная, выполнялись уравнения классической механики на прямой траектории.

Зависимость предэкспоненциального фактора от времени мы получили здесь из условия согласованности классических и операторных уравнений движения. В квантовой механике этот фактор строго вычисляется методом суммирования по всем траекториям с заданными концами, т.е. при расчете фейнмановского интеграла по траекториям.

Проведенное рассмотрение можно обобщить и для частицы, которая движется в потенциале, так что функция Гамильтона

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(q),$$

а уравнение для амплитуды  $\Psi(t, q) = \Psi$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \frac{\hat{p}^2}{2m} \Psi + U(q) \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q^2} + U(q) \Psi. \quad (1.52)$$

называется уравнением Шрёдингера.

#### 6.4. Скобки Пуассона

На «фазовой плоскости»  $(\mathbf{p}, \mathbf{r})$  динамические уравнения для произвольной наблюдаемой  $F(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial r^\alpha} \dot{r}^\alpha + \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha,$$

можно преобразовать с помощью уравнений Гамильтона (1.48) к виду

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial r^\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial r^\alpha},$$

так что, если ввести определение скобки Пуассона для двух величин на фазовой плоскости

$$\{F, H\}_P \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial F}{\partial r^\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial r^\alpha}, \quad (1.53)$$

то уравнение движения примет вид<sup>29</sup>

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}_P. \quad (1.54)$$

Скобка Пуассона координаты и сопряженного к ней импульса  $p = \partial L / \partial \dot{q}$  как независимых переменных легко вычисляется и дает единицу:

$$\{q, p\}_P = \frac{\partial q}{\partial q} \frac{\partial p}{\partial p} - \frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial q} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1. \quad (1.55)$$

Такая пара, как говорят, обладает каноническими скобками Пуассона, а потому и саму пару называют канонически сопряженными переменными на фазовой плоскости.

**Задача 5.** С помощью скобок Пуассона на фазовой плоскости  $(p, q)$  найдите уравнение движения для величины  $x = q - t \cdot p/m$  для свободной частицы. Какой физический смысл имеет этот интеграл движения?

**Задача 6.** Докажите следующие свойства скобок Пуассона:

1. линейность,

$$\{F, c_1 G_1 + c_2 G_2\}_P = c_1 \{F, G_1\}_P + c_2 \{F, G_2\}_P,$$

где  $c_{1,2}$  — числа,

2. антисимметричность,

$$\{F, G\}_P = -\{G, F\}_P,$$

3. тождество Якоби (циклическая перестановка)

$$\{F_1, \{F_2, F_3\}_P\}_P + \{F_2, \{F_3, F_1\}_P\}_P + \{F_3, \{F_1, F_2\}_P\}_P = 0.$$

Заметим, что, если для некоторой линейной оболочки динамических величин  $\{F_1(q, p, t), \dots, F_n(q, p, t)\}$  значение скобки Пуассона содержится в этом множестве, то говорят, что имеет место реализации скобки Ли в виде скобки Пуассона, а саму линейную оболочку тогда называют алгеброй Ли.

#### 6.5. Канонические преобразования

Совершим преобразование координат от переменных  $q$  к переменным  $Q = Q(q, t)$  так, чтобы в новых переменных можно было сформулировать гамильтонову механику на фазовой плоскости канонически сопряженных переменных  $(P, Q)$  вместо канонически сопряженных переменных  $(p, q)$  с прежними траекториями. Это означает, что в новых переменных также имеет место принцип наименьшего действия  $S'(t, Q)$ , которое связано со старым действием  $S(t, q)$  и может отличаться от него лишь граничными

<sup>29</sup>Это уравнение движения для физической величины, заданной в фазовом пространстве, послужило Полю Дираку основой для формулировки связи классической механики с матричной квантовой механикой, открытой Гейзенбергом и разработанной им в соавторстве с Борном и Иорданом в 1925 году. Аналогичное уравнение для эволюции квантовых величин называется уравнением Гейзенберга.

членами, которые не дают вклада в уравнения движения, поскольку вариация действия происходит при фиксированных концах, т.е.<sup>30</sup>

$$S(t, q) = S'(t, Q) + \int_{t, q, Q}^{t, q, Q} dF(t, q, Q),$$

или, что то же,

$$\int_{t, q}^{t, q} p dq - H dt = \int_{t, Q}^{t, Q} P dQ - H' dt + \int_{t, q, Q}^{t, q, Q} dF(t, q, Q). \quad (1.56)$$

Производящая функция канонического преобразования  $F$  должна удовлетворять тождеству (1.56), а следовательно,

$$dF = p dq - P dQ + \frac{\partial F}{\partial t} dt, \quad (1.57)$$

и, значит,

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad p = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q}. \quad (1.58)$$

Эти соотношения позволяют неявно исключить старые канонически сопряженные переменные  $(p, q)$  и перейти к новым  $(P, Q)$ .

Действительно, вычислим скобку Пуассона новых переменных на фазовой плоскости старых переменных,

$$\{Q, P\}_P = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q}.$$

Из (1.58) следует, что

$$dp = \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} dq + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} dQ + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial t} dt, \quad dP = -\frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q} dq - \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} dQ - \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial t} dt,$$

откуда легко выразить дифференциалы «новых» переменных через дифференциалы «старых» переменных

$$dQ = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} \right)^{-1} \left\{ dp - \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} dq - \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial t} dt \right\},$$

и

$$dP = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} \right)^{-1} \left\{ \left( \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} - \left( \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q} \right)^2 \right) dq - \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} dp + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial t} - \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q} \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial t} \right) dt \right\},$$

т.е.

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = -\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} \right)^{-1}, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} \right)^{-1},$$

а также

$$\frac{\partial P}{\partial q} = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} \right)^{-1} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} - \left( \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q} \right)^2 \right), \quad \frac{\partial P}{\partial p} = -\left( \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} \right)^{-1} \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2},$$

что, в итоге, дает каноническое значение скобок Пуассона

$$\{Q, P\}_P = 1.$$

Таким образом, новые переменные являются канонически сопряженными и, действительно, задают фазовую плоскость.

<sup>30</sup>Мы рассматриваем унивалентные преобразования: в общем случае вариационный принцип в новом и старом фазовом пространствах будет давать одни и те же траектории, если одно действие пропорционально другому с точностью до вкладов на концах траекторий:

$$S(t, q) = \xi \cdot S'(t, Q) + \int_{t, q, Q}^{t, q, Q} dF(t, q, Q),$$

так что наш выбор  $\xi = 1$ , конечно, никак не сказывается на содержании преобразования, так как из определений импульса и функции Гамильтона следует, что выбор значения  $\xi$ , отличного от единицы просто означает переход к другим единицам измерения импульса и энергии, и, соответственно, к другому значению постоянной Планка для новых единиц измерения импульса и энергии при прежних единицах измерения длины и времени.

### §а. Генераторы бесконечно малых канонических преобразований

В качестве производящей функции канонических преобразований наряду с  $F(q, Q, t)$  можно выбрать и функцию от двух других канонических переменных, например,  $F \mapsto G(q, P, t) - QP$ . Тогда требование отличия действия в разных координатах в виде полного дифференциала совершенно аналогично проведенному нами выше рассмотрению приведет к условиям:

$$S(t, q) = S'(t, Q) + \int dG(t, q, P) - \int d(QP),$$

а стало быть,

$$dG = p dq + Q dP + \frac{\partial G}{\partial t} dt, \quad (1.59)$$

и, значит,

$$H' = H + \frac{\partial G}{\partial t}, \quad p = \frac{\partial G}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial G}{\partial P}. \quad (1.60)$$

Если

$$G \mapsto G_I = qP,$$

то имеет место тождественное преобразование:  $q \mapsto Q = q$ ,  $p \mapsto P = p$ .

Рассмотрим бесконечно малое каноническое преобразование,  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

$$G(q, P, t) \stackrel{\text{def}}{=} qP + \epsilon \Gamma(q, p, t), \quad (1.61)$$

где *генератор канонического преобразования*  $\Gamma(q, p, t)$  в линейном приближении по  $\epsilon \rightarrow 0$  можно считать зависящим уже от прежнего импульса, так как согласно каноническому преобразованию

$$p \approx P + \epsilon \frac{\partial \Gamma}{\partial q}, \quad Q \approx q + \epsilon \frac{\partial \Gamma}{\partial p}.$$

Значит, бесконечно малые изменения выражаются в виде скобок Пуассона

$$\delta q = Q - q \approx \epsilon \{q, \Gamma\}_P, \quad \delta p = P - p \approx \epsilon \{p, \Gamma\}_P. \quad (1.62)$$

Отсюда следует, что и любая физическая величина на фазовой плоскости изменяется согласно скобке Пуассона с генератором бесконечно малых канонических преобразований:

$$\delta f(q, p) = \epsilon \{f, \Gamma\}_P. \quad (1.63)$$

**Задача 7.** Докажите утверждение (1.63).

В частности, канонический импульс — генератор бесконечно малых сдвигов координаты:  $\Gamma = p$  дает  $P = p$ ,  $Q = q + \epsilon$ . Выбор  $\Gamma = H(q, p, t)$  дает  $\delta f = \epsilon \{f, H\}_P$ , т.е. функция Гамильтона — генератор сдвигов физических величин по времени, другими словами, генератор эволюции. Мы видим связь генератора канонических преобразований с преобразованиями симметрии физической системы, когда эта симметрия приводит к сохранению генератора со временем: в самом деле, заменяя  $\epsilon$  на  $\delta a \rightarrow 0$  из теоремы Нётер (1.24), где теперь следует ассоциировать  $q_a \cong Q$ , находим вид интеграла движения

$$\Gamma = p \frac{\partial q_a}{\partial a} - H \frac{\partial t_a}{\partial a}, \quad \text{при } a \rightarrow 0. \quad (1.64)$$

Тогда отсюда легко найти, что

$$\delta q = \delta a \{q, \Gamma\}_P = \delta a \left( \frac{\partial q_a}{\partial a} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial t_a}{\partial a} \right) = \delta a \left( \frac{\partial q_a}{\partial a} - \dot{q}_a \frac{\partial t_a}{\partial a} \right) = d_a q_a,$$

где мы использовали уравнения Гамильтона и связь для выражения в частных производных, установленную при выводе теоремы Нётер:

$$d_a \left( \frac{\partial q_a}{\partial a} - \dot{q}_a \frac{\partial t_a}{\partial a} \right) \equiv d_a q_a.$$

Следовательно, для одной и той же функции Лагранжа параметрический переход от одной «прямой» траектории к другой, как это записано в условиях теоремы Нётер, может быть описан с помощью канонического преобразования с генератором (1.64).

В частности, для трансляций  $q_a = q + a$  находим

$$\frac{\partial q_a}{\partial a} = 1, \quad \frac{\partial t_a}{\partial a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma = p.$$

Другой пример: в случае сдвига начала отсчета времени  $t_a = t - a$  переменная эволюции не зависит от параметра преобразования,

$$d_a t_a = 0,$$

(см. вывод теоремы Нётер (1.24)), т.е.

$$d_a t - da = 0,$$

а значит, генератор

$$\Gamma = H,$$

а

$$d_a t = da,$$

и, следовательно, величина на фазовой плоскости  $f(q, p, t)$  при параметрическом сдвиге начала отсчета времени меняется при каноническом преобразовании с генератором, равным функции Гамильтона, на величину

$$d_a f = d_a t \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + da \cdot \{f, H\}_P = da \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}_P \right).$$

Поэтому

$$\frac{d_a f}{da} = \frac{d_a f}{d_a t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}_P,$$

т.е. эволюция  $f(q, p, t)$  – это каноническое преобразование со сдвигом по времени.

Мы установили также, что в случае симметрии действия сохраняющаяся по теореме Нётер величина является генератором канонического преобразования, тождественного преобразованию симметрии в теореме Нётер. Более того, скобки Пуассона сохраняющихся величин могут определять алгебру Ли генераторов симметрии физической системы.

**Задача 8.** Рассмотреть в качестве генератора канонического преобразования проекцию вектора орбитального момента импульса  $\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , скажем, на ось  $z$  и найти вид бесконечно малых канонических преобразований — поворотов координат и импульса вокруг оси  $z$  на угол  $\epsilon$ .

## §b. Генераторы и коммутаторы

Как мы видели, генераторы канонических преобразований могут быть связаны с бесконечно малыми преобразованиями симметрии действия и являться сохраняющимися величинами согласно теореме Нётер. Исследование подобных симметрий в рамках теории групп и алгебр Ли позволяет получать важные физические выводы. Как мы уже подчеркнули, свойства скобок Пуассона соответствуют определению скобки Ли, а для построения алгебр Ли необходимо ввести векторное пространство, в котором эта скобка Ли действует. Для этих целей в физике вводят операторы и их коммутатор, и в этом параграфе мы установим связь скобок Пуассона с операторами и их коммутаторами, т.е. сформулируем принцип канонического квантования. Это позволит в дальнейшем использовать теорию алгебр Ли и их представлений для описания свойств физических систем.

На примере генератора сдвигов по координате рассмотрим бесконечно малое преобразование наблюдаемой  $f(q)$ ,

$$\delta f = f(q + \epsilon) - f(q) = \epsilon \{f, p\}_P.$$

Но это же преобразование можно записать с помощью операции дифференцирования,

$$\delta f = f(q + \epsilon) - f(q) = \epsilon \partial_q f.$$

Если ввести определение коммутатора величин  $A$  и  $B$

$$[A, B] \stackrel{\text{def}}{=} AB - BA,$$

то дифференцирование можно свести к вычислению коммутатора: для этого необходимо, как говорят, подействовать коммутатором на произвольную, но достаточно гладкую функцию  $F$ ,

$$[\partial_q, f]F = \partial_q(fF) - f\partial_q F = F\partial_q f + f\partial_q F - f\partial_q F = (\partial_q f)F, \quad \forall F.$$

Отсюда заключаем, что

$$[\partial_q, f] = (\partial_q f).$$

Поскольку дифференцирование — линейная операция, так что константы можно вносить и выносить из под знака коммутатора, запишем каноническое преобразования сдвига координат в виде

$$\delta f = \epsilon \{f, p\}_P = \epsilon \frac{i}{\hbar} [-i\hbar \partial_q, f] = \epsilon \frac{i}{\hbar} [\hat{p}, f],$$

где мы ввели факторы, которые отвечают оператору импульса  $\hat{p} = -i\hbar \partial_q$ . Используя антисимметрию скобок Пуассона, устанавливаем связь между скобкой Пуассона и коммутатором, которую называют соотношением канонического квантования,

$$[\hat{p}, f] = i\hbar \{p, f\}_P. \quad (1.65)$$

Дирак обобщил эту связь, постулируя, что коммутатору операторных величин  $\hat{f}$  и  $\hat{g}$  соответствует скобка Пуассона этих величин в классической гамильтоновой механике,

$$[\hat{f}, \hat{g}] = i\hbar \widehat{\{f, g\}_P}, \quad (1.66)$$

причем после вычисления скобки Пуассона необходимо перейти от классических величин к операторным. Подчеркнем, что операторные величины действуют в пространстве амплитуд, которые задают вероятности обнаружить, что частица оказалась в фиксированной конечной точке траекторий при условии, что траектории могли исходить, вообще говоря, из разных начальных точек. В таком подходе переход от классического выражения значения скобки Пуассона к операторам может быть неоднозначным, если итоговое выражение для скобки Пуассона включает в себя величины, коммутаторы которых отличны от нуля. Это называют проблемой упорядочивания операторов.

В частности, каноническое квантование при  $f \mapsto q$  приводит к коммутатору операторов импульса и координаты, равному

$$[\hat{p}, q] = i\hbar \{p, q\}_P = -i\hbar. \quad (1.67)$$

Каноническое квантование позволило Дираку получить квантовое уравнение Гейзенберга для операторов, действующих на амплитуду вероятности  $\Psi(t, q)$ , из уравнения для эволюции в механике Гамильтона (1.54) простым умножением на фактор  $i\hbar$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}_P \xrightarrow{i\hbar} i\hbar \frac{d\hat{F}}{dt} = i\hbar \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + [\hat{F}, \hat{H}]. \quad (1.68)$$

### §с. Метод решения уравнений Гамильтона–Якоби

В качестве примера применения канонического преобразования приведем метод решения уравнений Гамильтона–Якоби (1.46). Основной объект этих уравнений – действие – зависит от концов траектории:  $S = S(t, q; q_0)$ . При изменении интервала эволюции, т.е.  $t$ , и конца траектории  $q$ , начальные данные, т.е.  $q_0 = q(t_0)$  остаются неизменными, а значит, начальное положение траектории эквивалентно набору интегралов движения  $I_0 \leftrightarrow q_0$ . Следовательно, решение уравнений Гамильтона–Якоби может быть представлено в виде  $S = S_I(t, q; I_0)$ , а значит, по-прежнему

$$\frac{\partial S_I}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial S_I}{\partial t} = -H.$$

Используем  $S_I$  в качестве производящей функции канонического преобразования  $F = F(q, I_0, t)$  от координат  $q$  к координатам  $I_0$  (их число заведомо совпадает по построению). Тогда гамильтониан в координатах  $I_0$  и канонически сопряженных к ним импульсах по общей схеме равен

$$H' = H + \frac{\partial S_I}{\partial t} \equiv 0,$$

т.е. он тождественно равен нулю. Отсюда следует, что импульсы, канонически сопряженные<sup>31</sup> к  $I_0$ , т.е.  $P_0 = -\partial S_I / \partial I_0$  (см. уравнения (1.58)), также являются постоянными в силу уравнений Гамильтона с  $H' \equiv 0$ ,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial S_I}{\partial I_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial S_I}{\partial I_0} = \text{const.}$$

<sup>31</sup>Мы можем считать величины  $I_0$  не координатами, а импульсами гамильтоновой системы, но тогда следует пользоваться формулами (1.60), что, как заметит вдумчивый читатель, никак не изменит сделанных нами выводов о функции Гамильтона  $H'$ , равной нулю, а также о постоянстве координат, которым сопряжены величины  $I_0$ .

В проведенном изложении ясно, что если интеграл движения совпадает с начальным значением одной из координат частиц, то каноническое преобразование становится тривиальным для этой координаты: оно не содержит в себе никакой новой информации. В самом деле, согласно гамильтоновой механике действие, записанное в интегральной форме (1.44), имеет частные производные

$$\left. \frac{\partial S}{\partial q} \right|_{t=t_0} = p(t)|_{t=t_0} = p_0 = -\frac{\partial S}{\partial q_0},$$

так что исходная информация о действии никак не дополняется каноническим преобразованием, в котором новые координаты — это начальные значения исходных координат. Поэтому сам метод становится эффективным, если известны интегралы движения, отличные от начальных значений координат частиц.

Проиллюстрируем этот метод решения уравнений Гамильтона–Якоби на движении в сферически симметричном потенциале.

## 6.6. Сферически симметричный потенциал

Для консервативной системы сферически симметричный потенциал зависит только от модуля расстояния от центра до частицы и не зависит ни от направления радиус-вектора, ни от времени:  $U = U(r)$ . Это значит, что функция Гамильтона

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(r)$$

обладает симметрией относительно сдвигов по времени и поворотов вокруг центра потенциала. Этой же симметрией обладает и функция Лагранжа, и следовательно, действие. Как мы уже установили ранее, согласно теореме Нётер в такой системе сохраняются энергия  $E$  и момент количества движения  $\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ .

В терминах момента количества движения кинетическую энергию можно в базисе сферических координат разложить на вращение, ортогонально радиус-вектору  $\mathbf{r}$ , и движение по радиус-вектору:

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} = \frac{mv_{\perp}^2}{2} + \frac{m\dot{r}^2}{2} = \frac{\ell^2}{2mr^2} + \frac{p_r^2}{2m},$$

поскольку  $\ell^2 = m^2 r^2 v_{\perp}^2$ . Для определенности направим вектор  $\ell$  вдоль оси  $z$ . Тогда при  $\ell \neq 0$  движение происходит в плоскости, ортогональной вектору  $\ell$ , т.е. зависят от времени только  $r$  и угол  $\phi$  в сферических координатах, так что

$$v_{\perp} = r\dot{\phi}, \quad \ell_z = mr^2\dot{\phi}, \quad \ell_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{2mr^2} \frac{\partial \ell_z^2}{\partial \dot{\phi}},$$

угол  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , т.е. все движение происходит в плоскости координат  $(x, y)$ , поскольку  $\ell_{x,y} \equiv 0$ ,  $\dot{\ell}_{x,y} \equiv 0$ , и значит, координата  $z$  и скорость движения вдоль оси  $z$  тождественно равны нулю, если<sup>32</sup>  $\ell_z \neq 0$ . Тогда уравнения Гамильтона–Якоби дают законы сохранения, т.е. интегралы движения:

$$\frac{\partial S}{\partial \phi} = \ell_z = \ell, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -E,$$

а также выражение для импульса, канонически сопряженного длине радиус-вектора:

$$\frac{\partial S}{\partial r} = p_r,$$

откуда получаем уравнение первого порядка по производной

$$H = \frac{\ell^2}{2mr^2} + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + U(r) = E.$$

Потенциал движения по радиусу  $V(r)$  включает в себя центробежный потенциал  $U_l(r)$ ,

$$V(r) = U(r) + U_l(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}. \quad (1.69)$$

<sup>32</sup>Покажите самостоятельно.



В итоге, действие как функция времени, угла, радиуса и интегралов движения примет вид

$$S = -Et + \ell\phi + \tilde{S}(r) + S_0, \quad (1.70)$$

где производная  $\tilde{S}' = d\tilde{S}/dr$  удовлетворяет уравнению

$$\left(\tilde{S}'\right)^2 = 2m \left( E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right), \quad (1.71)$$

откуда

$$\tilde{S} = \pm \int^r dr \sqrt{2m \left( E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}. \quad (1.72)$$

Дифференцирование действия по интегралам движения дает константы,

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \text{const.}, \quad \frac{\partial S}{\partial \ell} = \text{const.},$$

откуда из (1.70)–(1.72)

$$-t \pm \int^r dr \frac{m}{\sqrt{2m \left( E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}} = \text{const.}, \quad \phi \mp \int^r dr \frac{\ell}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m \left( E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}} = \text{const.}$$

Производная этих равенств по времени дает скорости

$$1 = \pm \dot{r} \frac{m}{\sqrt{2m \left( E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}}, \quad \dot{\phi} = \pm \dot{r} \frac{\ell}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m \left( E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}}. \quad (1.73)$$

Точки поворота для радиального движения задаются условием  $p_r = 0$ ,

$$E = U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}.$$

За время движения от одной точки поворота до другой ( $r_+ > r_-$ , апоцентр орбиты отвечает  $r_+$ , а перицентр —  $r_-$ ) инкремент угла вращения составляет

$$\Delta\phi = \int_{r_-}^{r_+} dr \frac{\ell}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m \left( E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}}. \quad (1.74)$$

### Лекция № 3

Инкремент угла вращения от перицентра до апоцентра для замкнутой орбиты, бесконечно близкой к круговой, исследование критерия замкнутости любой финитной орбиты, инкремент угла поворота орбиты для бесконечно большой и нулевой энергии, траектория в кулоновском потенциале при ненулевом моменте импульса, эксцентриситет и его значения для эллипса, гиперболы и параболы, задача Кеплера, дифференциальное сечение резерфордского рассеяния и зеркального рассеяния на непроницаемом шаре, параметры эллипса при движении в поле изотропного гармонического осциллятора, среднее значение наблюдаемой по времени и ее производной по времени для финитного движения, теорема вириала.

## 7. Замкнутые финитные орбиты

Финитная орбита замкнута, если после счетного числа вращений  $n$  от перицентра до перицентра (от перицентра до апоцентра  $\Delta\phi$  и от апоцентра до перицентра  $\Delta\phi$ ) получится конечное число полных оборотов  $n'$ , т.е. при

$$2\Delta\phi \cdot n = 2\pi \cdot n', \quad n, n' \in \mathbb{N}, \quad (1.75)$$

где инкремент угла вращения при движении от перигентра к апоцентру (см. рис. 1.3)  $\Delta\phi$  составляет, согласно (1.74), величину

$$\Delta\phi = \int_{r_-}^{r_+} dr \frac{\ell}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m(E - V(r))}}, \quad V(r) \stackrel{\text{def}}{=} U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}. \quad (1.76)$$

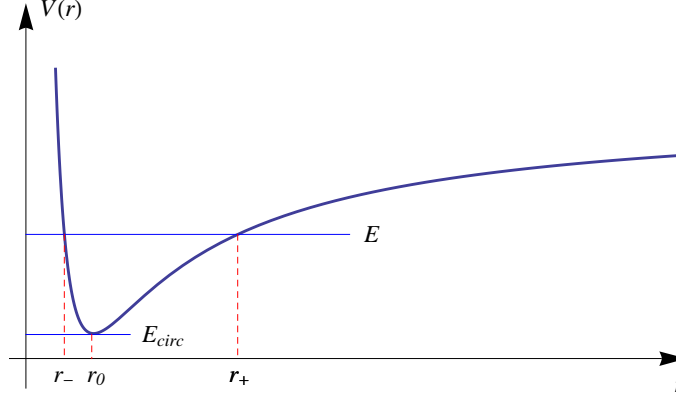


Рис. 1.3: Потенциал радиального движения при фиксированном значении орбитального момента импульса: показаны точки поворота  $r_{\pm}$  и радиус круговой орбиты  $r_0$ .

Для круговой орбиты точки поворота становятся идентичными,  $r_{\pm} \rightarrow r_0$ , где  $r_0$  — радиус круговой орбиты, для которого потенциал  $V(r)$ , включающий в себя потенциал центробежных сил, имеет экстремум в виде минимума,

$$V'(r_0) = 0 \Rightarrow U'(r_0) - \frac{\ell^2}{mr_0^3} = 0, \quad (1.77)$$

$$V''(r_0) > 0 \Rightarrow U''(r_0) + 3\frac{\ell^2}{mr_0^4} = U''(r_0) + \frac{3}{r_0} U'(r_0) > 0. \quad (1.78)$$

Для орбиты, бесконечно близкой к круговой, движение по радиусу происходит в параболическом потенциале, который получается при разложении  $V(r)$  возле точки минимума потенциала  $r_0$  с точностью до членов второго порядка малости отклонения от положения минимума (см. Приложение, стр. 170, раздел 33.§b.),

$$\Delta\phi_{\text{circ}} = \lim_{r_{\pm} \rightarrow r_0} \int_{r_-}^{r_+} dr \frac{\ell}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m \left( E - V(r_0) - \frac{1}{2} V''(r_0)(r - r_0)^2 \right)}}, \quad E > V(r_0).$$

В пределе можно считать  $\ell/r^2 \rightarrow \ell/r_0^2$ , так что

$$\Delta\phi_{\text{circ}} = \frac{\ell}{r_0^2} \frac{1}{\sqrt{2m(E - V(r_0))}} \lim_{r_{\pm} \rightarrow r_0} \int_{r_-}^{r_+} dr \frac{1}{\sqrt{\left( 1 - \frac{V''(r_0)}{2(E - V(r_0))} (r - r_0)^2 \right)}},$$

и подстановка

$$r - r_0 = \sqrt{\frac{2(E - V(r_0))}{V''(r_0)}} \sin x, \quad x \in [-\pi/2, \pi/2],$$

дает

$$\Delta\phi_{\text{circ}} = \frac{\ell}{r_0^2} \frac{1}{\sqrt{mV''(r_0)}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}},$$

и в итоге,

$$\Delta\phi_{\text{circ}} = \frac{\ell}{r_0^2} \frac{\pi}{\sqrt{mV''(r_0)}} = \pi \sqrt{\frac{U'(r_0)}{r_0 U''(r_0) + 3U'(r_0)}}, \quad (1.79)$$

где мы воспользовались тождествами (1.77), (1.78). Последнее выражение не зависит явно от орбитального момента  $\ell$ .

### 7.1. Замкнутость любой финитной орбиты ( $\ell \neq 0$ )

Рассмотрим центральные потенциалы консервативных систем, в которых существуют финитные орбиты с  $\ell \neq 0$  и все они замкнуты<sup>33</sup>. В этом случае, в частности, круговая орбита как предел бесконечно близкой к ней орбите тоже замкнута, так что

$$\Delta\phi_{\text{circ}} = \pi \frac{n'}{n} = \text{const.},$$

и эта величина не зависит от радиуса, так как в противном случае малое изменение радиуса вращения приводило бы к скачку в значениях натуральных чисел  $n$  и  $n'$ , что означало бы наличие хаоса: бесконечно малое изменение траектории приводило бы к существенному изменению параметров орбиты. Найдем все такие потенциалы с  $\Delta\phi_{\text{circ}} = \text{const.}$  Из (1.79) следует

$$U' = C(rU'' + 3U'), \quad C \geq 0,$$

откуда

$$C \frac{dU'}{U'} = (1 - 3C) \frac{dr}{r},$$

а значит,

$$U' = C_0 r^{1/C-3},$$

так что при  $C = \frac{1}{2}$

$$U(r) = C_l \ln r, \quad C_l > 0, \quad (1.80)$$

а при  $C \neq \frac{1}{2}$

$$U(r) = U_C r^{1/C-2} = U_C r^\varkappa \quad \varkappa \in [-2, +\infty) \cap \varkappa \neq 0. \quad (1.81)$$

Здесь  $U_C > 0$  при  $\varkappa > 0$  и  $U_C < 0$  при  $\varkappa < 0$ . Поэтому к искомым потенциалам относятся только однородные функции радиуса степени  $\varkappa$ , включая нулевую степень однородности,  $\varkappa \rightarrow 0$ , что отвечает логарифмическому потенциалу. Для таких потенциалов

$$\frac{U'(r_0)}{r_0 U''(r_0) + 3U'(r_0)} = \frac{1}{\varkappa + 2},$$

и согласно (1.79),

$$\Delta\phi_{\text{circ}} = \pi \frac{1}{\sqrt{\varkappa + 2}}, \quad (1.82)$$

что уже сильно ограничивает значения степени однородности потенциала,

$$\varkappa = \left(\frac{n}{n'}\right)^2 - 2,$$

в частности, выпадает  $\varkappa = 0$ , т.е. логарифмический потенциал<sup>34</sup>.

При  $\varkappa > 0$  потенциал растет до бесконечности, так что имеет смысл предел  $E \rightarrow \infty$ . Произведем замену переменных

$$\frac{\ell}{r} = y \frac{\ell}{r_-}, \quad y_- = 1, \quad y_+ = \frac{r_-}{r_+} < 1,$$

<sup>33</sup>В этом разделе мы, по сути, следуем изложению в курсе классической механики В.И. Арнольда [3].

<sup>34</sup>Корень из двух  $\sqrt{2}$  — это иррациональное число.

так что, согласно (1.74),

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \int_{y_+}^1 dy \frac{\ell}{r_-} \frac{1}{\sqrt{2m \left( E - U(r) - y^2 \frac{\ell^2}{2mr_-^2} \right)}} = \\ &= \int_{y_+}^1 dy \frac{1}{\sqrt{\left( 2mE \frac{r_-^2}{\ell^2} - 2m \frac{r_-^2}{\ell^2} U(r) - y^2 \right)}} = \int_{y_+}^1 dy \frac{1}{\sqrt{W(1) - W(y)}},\end{aligned}\quad (1.83)$$

где

$$W(y) = y^2 + 2m \frac{r_-^2}{\ell^2} U\left(\frac{r_-}{y}\right), \quad W(1) = 2mE \frac{r_-^2}{\ell^2}.$$

При  $E \rightarrow \infty$  радиус перигентры стремится к нулю,  $r_- \rightarrow 0$ ,  $U(r_-) \rightarrow 0$ , так что

$$W(1) \rightarrow 1, \quad W(y) \rightarrow y^2,$$

и следовательно,

$$\Delta\phi = \lim_{y_+ \rightarrow 0} \int_{y_+}^1 dy \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} = \arcsin y \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Это означает, что среди однородных растущих потенциалов, условию замкнутости всех финитных орбит удовлетворяет только тот, для которого

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa + 2}},$$

т.е. только  $\varkappa = 2$ . Это потенциал гармонического осциллятора.

При  $\varkappa < 0$  замкнутые орбиты возникают только в потенциале притяжения  $U = -|U_C| r^\varkappa$ , для которого реализуются орбиты с  $E \rightarrow 0$  и  $r_+ \rightarrow \infty$ . В этом случае (1.83) при  $r_- \neq 0$  находим

$$2m \frac{r_-^2}{\ell^2} U(r) = -2m \frac{r_-^2}{\ell^2} |U_C| r_-^\varkappa y^{-\varkappa},$$

и

$$2mE \frac{r_-^2}{\ell^2} - 2m \frac{r_-^2}{\ell^2} U(r) - y^2 = -(y^2 - y^{-\varkappa}) - y^{-\varkappa} \left( 1 - 2m \frac{r_-^2}{\ell^2} |U_C| r_-^\varkappa \right) + 2mE \frac{r_-^2}{\ell^2},$$

что при  $E \rightarrow 0$  дает

$$\Delta\phi = \int_0^1 dy \frac{1}{\sqrt{\tilde{W}(1) - \tilde{W}(y)}}, \quad (1.84)$$

где<sup>35</sup>

$$\tilde{W}(1) = 0 = 1 - 2m \frac{r_-^2}{\ell^2} |U_C| r_-^\varkappa \Rightarrow \tilde{W}(y) = y^2 - y^{-\varkappa},$$

так что

$$\Delta\phi = \int_0^1 dy \frac{1}{\sqrt{y^{-\varkappa} - y^2}}. \quad (1.85)$$

При  $\varkappa = -2$  орбита падает на центр. Если же  $-2 < \varkappa < 0$ , то (1.85) дает<sup>36</sup>

$$\Delta\phi = \frac{\pi}{2 + \varkappa},$$

<sup>35</sup>Здесь мы учли, что в точке поворота  $E = \frac{\ell^2}{2mr_-^2} - |U_C| r_-^\varkappa$  и предел  $E \rightarrow 0$ .

<sup>36</sup>Интеграл (1.85) берется с использованием подстановки  $y^{2+\varkappa} = \sin^2 z$ , так что

$$\int_0^1 dy \frac{1}{\sqrt{y^{-\varkappa} - y^2}} = \int_0^1 dy \frac{y^{\varkappa/2}}{\sqrt{1 - y^{2+\varkappa}}} = \left\langle dy = \frac{2}{2 + \varkappa} y^{-\varkappa/2} \cos z dz; dy > 0 \right\rangle = \frac{2}{2 + \varkappa} \int_0^{\pi/2} dz \frac{\cos z}{\sqrt{1 - \sin^2 z}} = \frac{\pi}{2 + \varkappa}.$$

что следует сравнить со значением инкремента угла для орбит, бесконечно близких к круговым:

$$\frac{\pi}{2 + \varkappa} = \frac{\pi}{\sqrt{2 + \varkappa}},$$

откуда  $\varkappa = -1$ , что отвечает притяжению в поле кулоновского типа.

Таким образом, мы установили, что сферически симметричными потенциалами, для которых все финитные орбиты замкнуты, являются только потенциалы гармонического осциллятора и кулоновский или гравитационный потенциал.

**Задача 9.** Покажите, что в потенциале притяжения вида  $U \sim -1/r^2$  частица падает на центр. При каком условии?

## 8. Движение в кулоновском поле

В кулоновском поле заряда  $Ze$  частица с зарядом  $e$  имеет потенциальную энергию

$$U(r) = \frac{Ze^2}{r},$$

так что при ненулевом орбитальном моменте импульса<sup>37</sup>,  $\ell \neq 0$ , общее выражение для связи полярного угла на плоскости с радиусом на траектории принимает вид

$$\phi(r) = \int^r dr \frac{\ell}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m \left( E - \frac{Ze^2}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}}. \quad (1.86)$$

Поскольку

$$\frac{\ell^2}{r} dr = -d\frac{\ell}{r},$$

введем переменную  $u$ ,

$$\frac{\ell}{r} = \frac{u}{A}, \quad A = \text{const.}$$

Тогда

$$\phi(r) = - \int^u du \frac{1}{A} \frac{1}{\sqrt{2m \left( E - \frac{Ze^2}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}} = - \int^u du \frac{1}{\sqrt{2mEA^2 - 2u \frac{Ze^2m}{\ell} A - u^2}},$$

так что выражение под корнем можно преобразовать,

$$u^2 + 2u \frac{Ze^2m}{\ell} A - 2mEA^2 = \left( u + \frac{Ze^2m}{\ell} A \right)^2 - A^2 \left( 2mE + \frac{Z^2e^4m^2}{\ell^2} \right).$$

Зафиксируем постоянную  $A$  так, чтобы получить стандартное выражение для подынтегрального выражения,

$$\left( u + \frac{Ze^2m}{\ell} A \right)^2 - A^2 \left( 2mE + \frac{Z^2e^4m^2}{\ell^2} \right) = (u - u_0)^2 - 1,$$

а значит, положим

$$A^2 \left( 2mE + \frac{Z^2e^4m^2}{\ell^2} \right) = 1.$$

Следовательно, замена переменных

$$u = \frac{\ell}{r} \frac{1}{\sqrt{2mE + Z^2 m^2 e^4 / \ell^2}},$$

<sup>37</sup>При  $\ell = 0$  частица движется только по радиусу.

приводит зависимость угла на траектории к виду

$$\phi(r) = - \int^u du \frac{1}{\sqrt{1 - (u - u_0)^2}} = \arccos(u - u_0), \quad u_0 = -\frac{1}{\epsilon} \text{sign}(Z),$$

где

$$\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1 + \frac{2mE\ell^2}{Z^2 m^2 e^4}} \quad (1.87)$$

называют эксцентриситетом: в поле отталкивания,  $Z > 0$ , энергия на траектории положительна и  $\epsilon > 1$ , а в поле притяжения,  $Z < 0$ , энергия на траектории может принимать и отрицательные значения, но при этом она ограничена снизу

$$E \geq -\frac{Z^2 m^2 e^4}{2m\ell^2},$$

так что минимальное значение отвечает минимуму эффективного потенциала радиального движения с учетом центробежного потенциала с заданным значением  $\ell$ , т.е. круговой орбите.

В итоге, в общем случае как притяжения так и отталкивания найдем

$$\cos \phi = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\ell^2}{r m e^2 |Z|} + \text{sign}(Z) \right). \quad (1.88)$$

Обычно вводят параметр орбиты размерности расстояния

$$p_{\text{orb}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ell^2}{m e^2 |Z|} > 0, \quad (1.89)$$

и траектория записывается как

$$r = \frac{p_{\text{orb}}}{\epsilon \cos \phi - \text{sign}(Z)}, \quad (1.90)$$

откуда сразу видно, что траектория симметрична относительно замены знака угла  $\phi \leftrightarrow -\phi$ , а параметр орбиты имеет смысл расстояния от центра потенциала до частицы, когда  $\phi = \pm\pi/2$ .

С учетом того, что в плоскости траектории  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ , кривую (1.90) можно записать в виде

$$x \frac{\epsilon}{p_{\text{orb}}} - \frac{r}{p_{\text{orb}}} \text{sign } Z = 1 \quad \Rightarrow \quad \left( x \frac{\epsilon}{p_{\text{orb}}} - 1 \right)^2 = \frac{r^2}{p_{\text{orb}}^2} = \frac{x^2 + y^2}{p_{\text{orb}}^2},$$

что сводится к

$$\frac{1 - \epsilon^2}{p_{\text{orb}}^2} \left( x + \frac{\epsilon p_{\text{orb}}}{1 - \epsilon^2} \right)^2 + \frac{y^2}{p_{\text{orb}}^2} - \frac{\epsilon^2}{1 - \epsilon^2} = 1,$$

т.е.

$$\frac{(1 - \epsilon^2)^2}{p_{\text{orb}}^2} \left( x + \frac{\epsilon p_{\text{orb}}}{1 - \epsilon^2} \right)^2 + y^2 \frac{1 - \epsilon^2}{p_{\text{orb}}^2} = 1. \quad (1.91)$$

В итоге, в координатах

$$\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} x + \frac{\epsilon p_{\text{orb}}}{1 - \epsilon^2}, \quad \bar{y} \stackrel{\text{def}}{=} y, \quad (1.92)$$

с центром в точке  $\bar{O}$  с  $\bar{x} = \bar{y} = 0$  траектория лежит на решениях уравнения (1.91), симметричного относительно зеркальных отражений  $\bar{x} \leftrightarrow -\bar{x}$ ,  $\bar{y} \leftrightarrow -\bar{y}$ :

$$\bar{x}^2 \frac{(1 - \epsilon^2)^2}{p_{\text{orb}}^2} + \bar{y}^2 \frac{1 - \epsilon^2}{p_{\text{orb}}^2} = 1. \quad (1.93)$$

Решения квадратичного уравнения (1.91) являются коническими сечениями, т.е. множеством пересечения кругового конуса с плоскостью. Это следует из того, что конус в декартовых координатах представляет собой квадратичную поверхность,

$$\hat{a}^2 \hat{z}^2 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2,$$

где  $\hat{a} = \text{tg} \theta_0$  — тангенс угла раствора конуса с осью вдоль оси  $\hat{z}$ , а плоскость — линейная поверхность. Если плоскость пересекает лишь одну из двух полостей конуса и все ее образующие, то коническое сечение — эллипс ( $\epsilon < 1$ ), если плоскость пересекает одну из полостей параллельно касательной к полости, то сечение — парабола ( $\epsilon = 1$ ), а если плоскость пересекает обе полости, то сечение — гипербола ( $\epsilon > 1$ ). В вырожденных случаях получаются точка, луч и пара прямых.

### 8.1. Финитное движение (задача Кеплера)

В потенциале притяжения  $\text{sign}(Z) = -1$  при  $E < 0$ , а значит, при  $\epsilon < 1$

$$r = \frac{p_{\text{orb}}}{\epsilon \cos \phi + 1}, \quad (1.94)$$

и траектория является финитной.

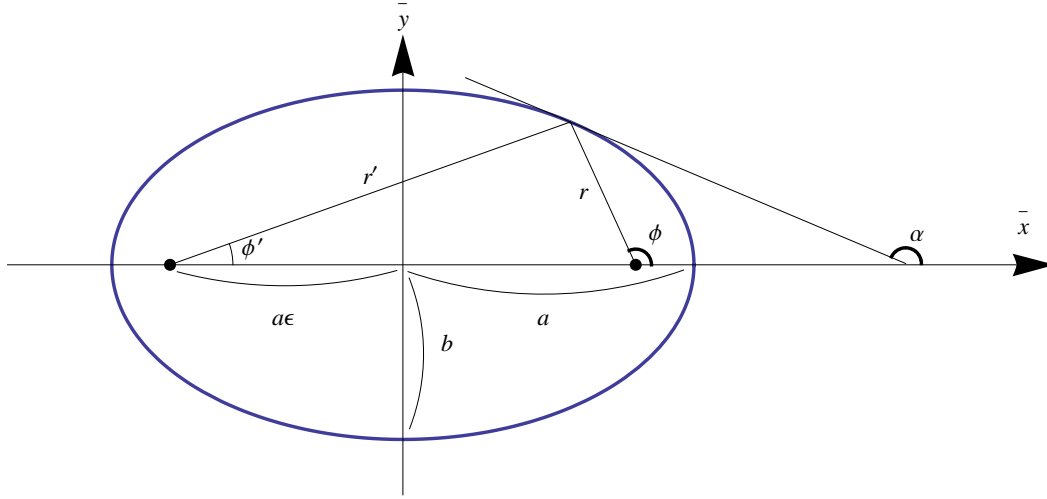


Рис. 1.4: Эллипс: фокусы обозначены точками, показаны касательная под углом  $\alpha$ , полуоси  $a$  и  $b$ , расстояние сдвига фокуса от центра эллипса  $a\epsilon$ , а также полярные углы в фокусах  $\phi$  и  $\phi'$ .

Введем большую полуось как среднее максимального ( $\cos \phi = -1$ ) и минимального ( $\cos \phi = 1$ ) расстояния от центра до частицы

$$a = \frac{1}{2}(r_+ + r_-) = \frac{p_{\text{orb}}}{1 - \epsilon^2},$$

а малую полуось как максимальное удаление по оси  $y = r \sin \phi$  (экстремум достигается при  $\cos \phi = -\epsilon$ )

$$b = r \sin \phi|_{\max} = \frac{p_{\text{orb}}}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}.$$

Центр притяжения  $\mathcal{O}$  находится на плоскости с координатами  $x = y = 0$ . Произведем сдвиг по координате  $x$ , так чтобы новый центр координат  $\tilde{\mathcal{O}}$  находился на одном удалении от точек максимального и минимального удаления от центра притяжения:

$$\bar{x} = x - r_- + a = x + a\epsilon,$$

что в точности совпадает с введением симметричной координаты  $\bar{x}$  в предыдущем разделе. Тогда на плоскости с центром в  $\tilde{\mathcal{O}}$

$$\frac{\bar{x}}{a} = \frac{r \cos \phi}{a} + \epsilon = \frac{\cos \phi + \epsilon}{\epsilon \cos \phi + 1}, \quad \frac{y}{b} = \frac{r \sin \phi}{b} = \frac{\sin \phi}{\epsilon \cos \phi + 1} \sqrt{1 - \epsilon^2},$$

откуда легко находим уравнение эллипса с полуосями  $a$  и  $b$ ,

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1.95)$$

симметричное относительно отражений  $\bar{x} \leftrightarrow -\bar{x}$ ,  $y \leftrightarrow -y$ . Это, между прочим, означает, что наряду с центром притяжения  $\mathcal{O}$  с координатами  $(\bar{x} = a\epsilon, y = 0)$  у эллипса есть второй такой же центр  $\mathcal{O}'$  с координатами  $(\bar{x} = -a\epsilon, y = 0)$ , движение частицы вокруг которого совершенно идентично движению вокруг центра притяжения (см. рис. 1.4). Более того, эти центры притяжения являются фокусами эллипса: любой луч, исходящий из фокуса, после отражения от эллипса проходит через второй фокус<sup>38</sup>.

<sup>38</sup>В этом можно убедиться, если вычислить наклон касательной к эллипсу в точке  $(r \cos \phi, r \sin \phi)$ :

$$\text{tg } \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\phi} \sin \phi + r \cos \phi}{\frac{dr}{d\phi} \cos \phi - r \sin \phi} = -\frac{\cos \phi + \epsilon}{\sin \phi},$$

Кроме того, сумма расстояний от точки на траектории до фокусов эллипса остается постоянной величиной:

$$r = \frac{p_{\text{orb}}}{\epsilon \cos \phi + 1}, \quad r' = \sqrt{(x + 2a\epsilon)^2 + y^2} \Rightarrow r + r' = 2a.$$

Это означает, что эллипс представляет собой фигуру, которая получается, если концы нити длиной  $2a$  зафиксировать на расстоянии  $2a\epsilon$  и объединить положение всех точек единственного излома на этой нити в натянутом состоянии.

**Задача 10.** Докажите, что любой луч, исходящий из фокуса эллипса, после зеркального отражения от эллипса проходит через второй фокус.

**Задача 11.** Докажите, что сумма расстояний от точки на траектории до фокусов эллипса остается постоянной величиной. Чему равна эта величина?

В случае гравитационного притяжения получаем законы Кеплера:

**I.** Планеты движутся вокруг центра притяжения по эллипсам, причем центр притяжения находится в фокусе.

**II.** Радиус траектории планеты «заметает площадь» с постоянной скоростью  $\dot{S} = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$ , что является следствием закона сохранения момента импульса  $\ell = 2m\dot{S}$ .  $\dot{S}$  называют секторальной скоростью.

**III.** Квадраты периодов обращения планет  $T$  соотносятся как кубы больших полуосей орбит  $a$ :  $T^2/a^3 = \text{const}$ .

В самом деле, площадь эллипса  $S = \pi ab$ , что проще всего вывести, взяв интеграл  $S = \int d\bar{x} d\bar{y} = \frac{b}{a} \int d\bar{x} d\frac{a\bar{y}}{b} = \frac{b}{a} \pi a^2$ , поскольку после смены масштаба переменной  $\bar{y} \mapsto \bar{y}b/a$  уравнение для эллипса переходит в уравнение для окружности радиуса  $a$ , внутренняя площадь которого  $\pi a^2$ . С другой стороны, в силу постоянства секторальной скорости  $S = T\dot{S} = T\ell/2m$ . Значит,  $T = 2\pi abm/\ell$ . По построению, в поле гравитации объекта с массой  $M$  параметр потенциала  $Ze^2 = -GMm$ , где  $G$  постоянная Ньютона, и  $a = p_{\text{orb}}/(1 - \epsilon^2) = -GMm/2E$ , откуда  $mb/\ell = \sqrt{a/GM}$ , так что

$$T = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Как видим, в механике достаточно знать первый закон Кеплера, чтобы вывести два других.

В вырожденном случае при  $E \rightarrow 0$  эксцентриситет  $\epsilon = 1$ , и полуоси принимают бесконечные значения, второй фокус также уходит на бесконечность, а исходное выражение для траектории (1.90) принимает вид

$$x - r \text{sign}(Z) = p_{\text{orb}} \Rightarrow (x - p_{\text{orb}})^2 = r^2 = x^2 + y^2,$$

откуда находим уравнение для параболы,

$$y^2 = p_{\text{orb}}^2 - 2p_{\text{orb}} x. \quad (1.96)$$

## 8.2. Резерфордское рассеяние

При положительном значении энергии  $E > 0$  эксцентриситет  $\epsilon > 1$  и общее уравнение для траектории (1.91) преобразуется к виду

$$\frac{(1 - \epsilon^2)^2}{p_{\text{orb}}^2} \left( x + \frac{\epsilon p_{\text{orb}}}{1 - \epsilon^2} \right)^2 - y^2 \left| \frac{\epsilon^2 - 1}{p_{\text{orb}}^2} \right| = 1$$

и имеет решение в виде двух ветвей гиперболы: одна из ветвей отвечает притяжению

$$r = \frac{p_{\text{orb}}}{\epsilon \cos \phi + 1}, \quad \cos \phi \geq -\frac{1}{\epsilon} \quad (1.97)$$

так что отраженный луч составит с осью  $x$  угол  $\phi' = 2\alpha - \phi - \pi$ . Вычисляя тангенс этого угла, убеждаемся, что он совпадает с тангенсом угла луча, который исходит из второго фокуса в ту же точку на эллипсе:

$$\text{tg } \phi' = \frac{y}{x + 2a\epsilon},$$

что и доказывает сделанное утверждение: все лучи из одного фокуса сходятся после зеркального отражения от эллипса во втором фокусе.



и фокусом в точке  $r = r_- = p_{\text{orb}}/(\epsilon + 1)$  при  $\cos \phi = 1$ , а другая ветвь — отталкиванию,

$$r = \frac{p_{\text{orb}}}{\epsilon \cos \phi - 1}, \quad \cos \phi \geq \frac{1}{\epsilon} \quad (1.98)$$

и фокусом в точке  $r = r_+ = p_{\text{orb}}/(\epsilon - 1) > r_-$  при  $\cos \phi = 1$ .

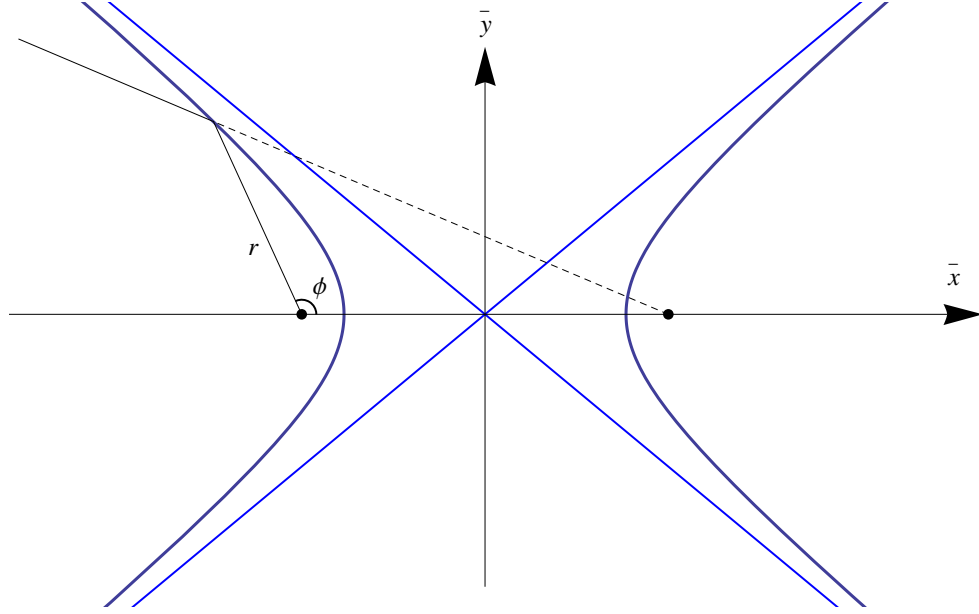


Рис. 1.5: Гиперболы кулоновского рассеяния: фокусы обозначены точками, показаны асимптотики гипербол на бесконечности, полярный угол в фокусе потенциала притяжения  $\phi$  и расстояние до точки на орбите  $r$ , а также отраженный от гиперболы луч, продолжение которого исходит из фокуса отталкивания.

Лучи, исходящие из фокуса, после зеркального отражения от гиперболы расходятся так, как если бы они исходили из второго фокуса, т.е. их продолжения за линию гиперболы сходятся во втором фокусе (см. рис. 1.5).

Частица, рассеивающаяся на кулоновском поле, приходит из бесконечности к центру потенциала под углом

$$\phi_{\text{in}} = \arccos \left( \frac{1}{\epsilon} \text{sign}(Z) \right).$$

Если бы взаимодействия не было, то частицы ушла бы на бесконечность в противоположном направлении, т.е. под углом

$$\phi_{\text{out}}^{(0)} = \pi + \phi_{\text{in}}.$$

Наличие кулоновского потенциала приводит в действительности к уходу частицы на бесконечность под углом

$$\phi_{\text{out}} = -\phi_{\text{in}},$$

так как  $\cos \phi_{\text{in}} = \cos \phi_{\text{out}}$  и при притяжении, и при отталкивании. Значит, угол рассеяния

$$\theta = \phi_{\text{out}}^{(0)} - \phi_{\text{out}} = \pi + 2\phi_{\text{in}}. \quad (1.99)$$

Отсюда

$$\text{tg} \frac{\theta}{2} = -\text{ctg} \phi_{\text{in}} = -\text{sign}(Z) \frac{1}{\epsilon} \left( \sqrt{1 - \frac{1}{\epsilon^2}} \right)^{-1} = -\frac{\text{sign}(Z)}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} = -\frac{Zme^2}{\sqrt{2mE\ell^2}}.$$

Введем импульс  $p$  для энергии частицы на бесконечности  $E = p^2/2m$  и прицельный параметр  $\mathbf{b}$  для орбитального момента на бесконечности  $\ell = p \mathbf{b}$ . Тогда

$$\text{ctg} \frac{\theta}{2} = -\frac{p^2 \mathbf{b}}{Zme^2}. \quad (1.100)$$

Для сферически симметричного потенциала поток  $N$  частиц на кольцо радиуса  $|b|$  и толщиной  $|db|$  составляет

$$j = \frac{N}{2\pi|b||db|}$$

Все эти частицы рассеиваются в телесный угол  $d\Omega = 2\pi d\cos\theta$ , так что дифференциальное сечение рассеяния, определяемое как отношение числа рассеянных частиц в данный телесный угол к падающему на мишень потоку, равно

$$d\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N}{j} = 2\pi|b||db| = \frac{2\pi Zme^2}{p^2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \frac{Zme^2}{2p^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 2\pi d\cos\theta \frac{Z^2 m^2 e^4}{4p^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (1.101)$$

т.е. дифференциальное сечение резерфордского рассеяния равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{16E^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (1.102)$$

Оно расходится при малом угле рассеяния  $\theta \rightarrow 0$ .

Для сравнения рассмотрим упругое рассеяние точечной частицы на нейтральном неподвижном шаре радиуса  $R$ : в этом случае происходит зеркальное отражение то поверхности шара, т.е. угол падения равен углу отражения, если прицельное расстояние меньше радиуса шара  $b \leq R$ , в противном случае частица движется свободно без какого-либо рассеяния (см. рис. 1.6).

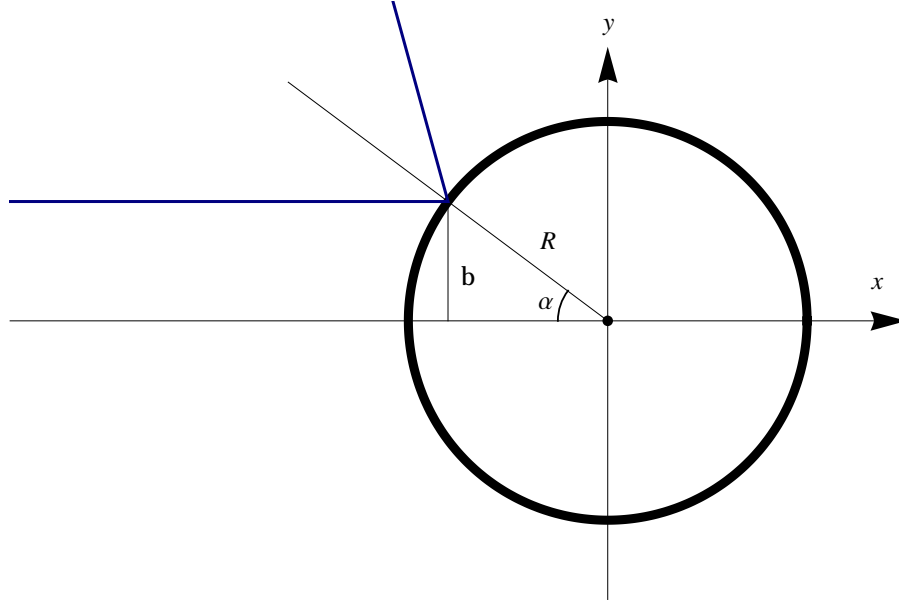


Рис. 1.6: Зеркальное рассеяние на шаре радиуса  $R$ : показаны траектория частицы с прицельным параметром  $b$  и угол в точке отражения от шара  $\alpha$ .

Угол рассеяния при таком упругом отражении

$$\theta_{\text{el}} = \pi - 2\alpha, \quad \sin \alpha = \frac{b}{R} \Rightarrow b = R \cos \frac{\theta}{2},$$

так что дифференциальное сечение

$$d\sigma_{\text{el}} = 2\pi|b||db| = 2\pi \frac{1}{2} R^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta,$$

т.е.

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega} = \frac{1}{4} R^2. \quad (1.103)$$

Итак, дифференциальное сечение упругого рассеяния частицы на шаре является постоянным как функция энергии и изотропным, т.е. не зависит от углов, в отличие от дифференциального сечения кулоновского рассеяния, которое падает с ростом энергии и увеличивается с уменьшением угла рассеяния.

Кроме того, у кулоновского рассеяния имеется квадратичная зависимость от заряда рассеивающего центра  $Z$ .

Для исследования атомарной структуры, т.е. для обнаружения ядра атома, к примеру, в опытах Резерфорда по рассеянию альфа-частиц веществом необходимо иметь малые фокусные расстояния  $r_{\pm}$  при кулоновском рассеянии, но  $r_+r_- = \ell^2/2mE = \ell^2/p^2 = b^2$ , а значит, чтобы иметь возможность проникнуть внутрь атома, необходимо иметь большие энергии и малые прицельные параметры, для которых угол рассеяния становится большим как в случае зеркального рассеяния на шаре, так и в случае кулоновского рассеяния. Однако измерение потока рассеянных частиц под разными большими углами рассеяния, скажем, в один интервал телесного угла возле  $\theta = \pi$  и  $\theta = \pi/2$  в кулоновском случае даст четырехкратный рост детектируемых частиц при таком уменьшении угла рассеяния в отличие от постоянного числа рассеянных частиц в случае нейтрального шара.

При малых углах рассеяния дифференциальное сечение кулоновского рассеяния может быть сравнимо с площадью поперечного сечения атома, так что из данных о рассеянии на малые углы сделать вывод о структуре атома невозможно. Но падение измеренного сечения существенно ниже площади поперечного сечения атома при больших углах рассеяния может свидетельствовать лишь о том, что внутри атома находится заряженный центр, если, при этом, сечение рассеяния назад остается ненулевым.

Опыты Резерфорда показали, что атом имеет заряженное ядро.

**Задача 12.** В гравитационном поле Солнца вычислите малое отклонение луча света, проходящего возле края Солнца (указание: гравитационное ускорение не зависит от массы). Сравните результат с углом отклонения, рассчитанным в общей теории относительности, т.е. с учетом искривления пространства-времени,

$$\delta\phi = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}}.$$

## 9. Изотропный гармонический осциллятор

Потенциал изотропного осциллятора с частотой  $\omega$  имеет сферически симметричный вид

$$U = \frac{m\omega^2}{2} r^2,$$

так что уравнение для орбиты при  $\ell \neq 0$

$$\phi(r) = \int^r dr \frac{\ell}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m \left( E - \frac{m\omega^2}{2} r^2 - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}} \quad (1.104)$$

после замены переменных

$$u = \frac{1}{r^2} \frac{\ell^2}{mE} u_0, \quad u_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 \ell^2}{E^2}}},$$

дает

$$\phi(r) = -\frac{1}{2} \int^u du \frac{1}{\sqrt{1 - (u - u_0)^2}} = \frac{1}{2} \arccos(u - u_0).$$

Значит,

$$\cos 2\phi = \frac{u_0}{r^2} \left( \frac{\ell^2}{mE} - r^2 \right), \quad (1.105)$$

откуда, используя  $r^2 \cos 2\phi = r^2(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) = x^2 - y^2$ , найдем

$$x^2 - y^2 = u_0 \left( \frac{\ell^2}{mE} - x^2 - y^2 \right),$$

а следовательно,

$$x^2 \frac{u_0 + 1}{u_0} + y^2 \frac{u_0 - 1}{u_0} = \frac{\ell^2}{mE}. \quad (1.106)$$

В итоге, мы получили уравнение для эллипса с полуосями  $a$  и  $b$ ,

$$a^2 = \frac{\ell^2}{mE} \frac{u_0}{u_0 + 1}, \quad b^2 = \frac{\ell^2}{mE} \frac{u_0}{u_0 - 1}, \quad (1.107)$$

с эксцентриситетом  $\epsilon$ :

$$1 - \epsilon^2 = \frac{a^2}{b^2} = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} \Rightarrow \epsilon^2 = \frac{2}{u_0 + 1}. \quad (1.108)$$

Центр притяжения находится в центре эллипса.

Круговая орбита отвечает  $\epsilon = 0$  и минимуму потенциала радиального движения при фиксированном моменте импульса

$$V(r) = \frac{m\omega^2}{2} r^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2},$$

так что

$$V'(r) = m\omega^2 r - \frac{\ell^2}{mr^3},$$

и

$$V'(r_0) = 0 \Rightarrow r_0^2 = \frac{\ell}{m\omega},$$

что достигается как раз при  $E = V(r_0) = \omega\ell$ .

При  $\omega\ell < E < \infty$  значение  $1 < u_0 < \infty$ , а значит,  $0 < \epsilon < 1$ .

Как легко убедиться, период обращения  $T$  связан стандартным образом с частотой осциллятора  $\omega$ ,

$$T = 2\pi ab \frac{m}{\ell} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

## 10. Теорема вириала

Для финитных и, в частности, периодических движений имеет смысл рассматривать средние значения наблюдаемых величин за долгий интервал эволюции или за период  $T$ :

$$\int_0^T dt F(t) = T \cdot \langle F \rangle \Rightarrow \langle F \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt F(t). \quad (1.109)$$

Тогда для произвольной наблюдаемой среднее значение ее производной по времени

$$\left\langle \frac{dF}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{dF}{dt} = \frac{1}{T} \{F(T) - F(0)\}.$$

Для периодического движения  $F(T) = F(0)$ , а для финитного движения значения наблюдаемой ограничены в том случае, если она построена как функция координат и импульсов и явно не зависит от времени:  $F = F(p(t), q(t))$ , так что при больших временах  $\{F(T) - F(0)\}/T \rightarrow 0$ , а значит, имеет место утверждение

$$\left\langle \frac{dF(p, q)}{dt} \right\rangle = 0. \quad (1.110)$$

В частности,

$$\left\langle \frac{d}{dt} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \right\rangle = 0. \quad (1.111)$$

Воспользуемся уравнениями Гамильтона (1.49) и найдем

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\partial U \cdot \mathbf{r} + \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{p}}{m} = -\mathbf{r} \cdot \partial U + 2 \frac{\mathbf{p}^2}{2m}.$$

Значит, согласно уравнениям движения из (1.111) следует теорема вириала<sup>39</sup> для финитных движений: удвоенное среднее значение кинетической энергии равно среднему значению скалярного произведения силы на радиус-вектор со знаком минус:

$$2 \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right\rangle = \langle \mathbf{r} \cdot \partial U \rangle, \quad \Leftrightarrow \quad 2 \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right\rangle = -\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{F} \rangle. \quad (1.112)$$

<sup>39</sup>От латинского слова *vires*, означающего «сила», введен термин *virial* в смысле «силовый».

Для сферически симметричных потенциалов<sup>40</sup>

$$\mathbf{r} \cdot \partial U(r) = r \frac{dU(r)}{dr},$$

а для однородных  $U(r) = U_0 r^\kappa$ ,

$$r \frac{dU(r)}{dr} = \kappa U(r),$$

так что по теореме вириала среднее значение кинетической энергии связано со средним значением потенциальной

$$\left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right\rangle = \frac{\kappa}{2} \langle U \rangle. \quad (1.113)$$

Для кулоновского потенциала ( $\kappa = -1$ ) и потенциала гармонического осциллятора ( $\kappa = 2$ ) получаем

$$\left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right\rangle_{\text{Coul}} = -\frac{1}{2} \langle U \rangle_{\text{Coul}}, \quad \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right\rangle_{\text{osc}} = \langle U \rangle_{\text{osc}}.$$

Отсюда, между прочим, для энергии как суммы кинетической и потенциальной энергий находим

$$E_{\text{Coul}} = \frac{1}{2} \langle U \rangle_{\text{Coul}}, \quad E_{\text{osc}} = 2 \langle U \rangle_{\text{osc}}.$$

---

<sup>40</sup> Действительно,

$$r^\alpha \frac{\partial U(r)}{\partial r^\alpha} = r^\alpha \frac{dU(r)}{dr} \frac{dr}{dr^2} \frac{\partial r^2}{\partial r^\alpha} = \frac{dU(r)}{dr} \left( \frac{dr^2}{dr} \right)^{-1} \left( x \frac{\partial r^2}{\partial x} + y \frac{\partial r^2}{\partial y} + z \frac{\partial r^2}{\partial z} \right).$$

Но

$$\frac{dr^2}{dr} = 2r,$$

а, поскольку  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ,

$$x \frac{\partial r^2}{\partial x} + y \frac{\partial r^2}{\partial y} + z \frac{\partial r^2}{\partial z} = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2r^2,$$

так что

$$r^\alpha \frac{\partial U(r)}{\partial r^\alpha} = \frac{dU(r)}{dr} \frac{1}{2r} 2r^2 = r \frac{dU(r)}{dr}.$$

## Тема 2

# Векторный анализ

### Лекция № 4

Длина, однородность и изотропность евклидова пространства, метрика, векторы, базис, декартовы и сферические координаты, инвариантные линейные функции на векторах и ковекторы, инвариантные полилинейные функции на векторах и тензоры, дифференциал инвариантной функции и законы преобразования векторов и ковекторов, символ Кронекера как инвариантный тензор второго ранга, метрика как ковариантный тензор второго ранга, обратная метрика, поднимание и опускание индексов, смешанное произведение трех векторов, ориентированный объем, тензор Леви-Чивиты, векторное произведение в тензорных обозначениях, детерминант, минор, обратная матрица, дифференциал детерминанта, вектор и тензор площади, изометрии евклидова пространства, ортогональные, собственные преобразования, волновое уравнение, условие инвариантной волновой скорости и псевдоевклидова метрика, конформный фактор, изометрия двумерного пространства-времени Минковского, собственные и ортохронные преобразования  $SO(1,1)$ , лоренцев буст, ковектор  $\nabla$ , градиент, производная по направлению, дивергенция, ротор, лапласиан в декартовых и сферических координатах, наглядное вычисление изменения базиса сферических координат при малом смещении.

#### §а. Координатный подход

В векторном анализе мы используем так называемый *координатный подход*, что обусловлено постановкой задач в физике. Для примера, если 3-мерному вектору координат частицы  $\mathbf{r}$  ставится в соответствие вещественное число  $f(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}$ , то в математике говорят, что задана скалярная функция, которую называют также инвариантом. В физике эту функцию называют скалярным полем и ставят вопрос о его измерении. Для этого необходимо, во-первых, задать базис в векторном пространстве для наблюдателя, так что поле становится функцией координат точки в этом базисе  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , а измерения дают  $f(x, y, z) = f(\mathbf{r})$ , и, во-вторых, задать другой, штрихованный базис другого наблюдателя, который получает данные измерения в виде  $f'(x', y', z')$ . Скалярная функция отвечает равенству этих измерений:  $f(x, y, z) = f'(x', y', z')$ . Эту связь мы будем записывать в координатной форме  $f(\mathbf{r}) = f'(\mathbf{r}')$ , хотя в бескоординатном подходе следовало бы писать тавтологию: скалярная функция объекта по имени «вектор» не зависит от выбора базиса вектора  $f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$ , т.е. значение функции не зависит от наблюдателя<sup>1</sup>.

#### 11. Евклидово пространство

##### 11.1. Векторы, ковекторы, тензоры

Механика частиц формулируется в евклидовом пространстве. Инструментом для описания в этом случае является векторный анализ.

Векторное пространство определяется как множество, в котором заданы сложение двух элементов и умножение элементов на число<sup>2</sup> [4]. Числа могут быть вещественными или комплексными, а векторное пространство, соответственно, является тоже вещественным или комплексным. Далее будем строить изложение для вещественного векторного пространства.

Векторное пространство конечной размерности можно представить себе как линейную оболочку, натянутую на конечное число независимых базисных векторов. В трехмерном случае в декартовом базисе произвольный вектор координатного пространства

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z.$$

Поскольку базис в разных точках пространства можно выбирать различным способом, принято записывать разложение векторов в бесконечно малой окрестности точки пространства. Поэтому, согласно

<sup>1</sup>Иными словами, физической реальностью являются показания прибора, которые определяют и положение детектора и реакцию детектора на величину поля. Именно эти показания приборов и соответствуют вектору координат, например, т.е. определяют понятие точки в пространстве. Эта же точка для другого прибора будет отвечать, вообще говоря, другим показаниям компонент вектора координат, но эти показания связаны определенным законом. Эти же рассуждения справедливы и для показаний, которые задают величину поля (функции от точки в пространстве).

<sup>2</sup>Мы полагаем, что читатель знаком со всеми постулатами для операций в векторном пространстве, включая дистрибутивные законы, т.е. обычные правила раскрытия скобок.

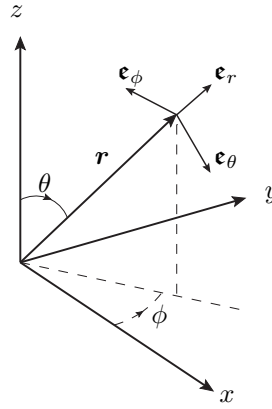


Рис. 2.1: Базис в сферических координатах.

правилу Эйнштейна, запись для бесконечно малых векторов принимает вид

$$d\mathbf{r} = dr^\alpha \mathbf{e}_\alpha,$$

где  $dr^\alpha$ , как и прежде, можно представлять себе как трехмерный столбец:

$$dr^\alpha = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}.$$

В сферических координатах (см. рис. 2.1) базис зависит от точки в пространстве,

$$d\mathbf{r} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{e}_\phi = dC^\alpha \mathbf{e}_\alpha. \quad (2.1)$$

В (2.1) мы разложили вектор по единичным векторам базиса, умноженным на длину бесконечно малого вектора, который получается при малом сдвиге по координатам сферического базиса:

$$\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix}.$$

Безусловно можно построить не только бесконечно малые векторы в локальном базисе  $\mathbf{e}_\alpha$ . Тогда говорят, что такие векторы лежат в касательном пространстве того базиса, который задан в рассматриваемой точке исходного пространства.

**Задача 13.** Запишите элемент объема  $d^3V$  в сферических координатах, пользуясь ортогональностью рёбер кубика, построенного по ортам вектора  $d\mathbf{r}$  в терминах  $dC^\alpha$ .

Векторное пространство называется евклидовым, если

- пространство является *метрическим*, т.е. для него определен квадрат *длины* вектора — инвариантная, т.е. не зависящая от выбора базиса в векторном пространстве, положительно определенная квадратичная функция вектора,
- оно *однородно* и
- *изотропно*
- в *глобальном базисе*, т.е. в одном и том же базисе во всех точках пространства.

Квадрат длины, в частности, в декартовых координатах задается выражением

$$dC^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \mapsto g_{\alpha\beta} dr^\alpha dr^\beta = g(d\mathbf{r}, d\mathbf{r}),$$

где в общем случае положительно определенная симметричная квадратичная форма  $g_{\alpha\beta}$ , которую называют метрикой, может зависеть от положения точки в пространстве, что приведет, вообще говоря, к

метрическому пространству Римана [5]. Однородность и изотропность евклидова пространства глобально означает, что эта квадратичная форма в некотором базисе, который называют декартовым, может быть приведена к главным осям<sup>3</sup>  $||g|| = \text{diag}(1, 1, 1)$  во всем пространстве. А значит, в декартовых координатах метрика — единичная матрица  $3 \times 3$ :

$$g_{\alpha\beta} = \mathbb{1}_{\alpha\beta}.$$

Метрика задает скалярное произведение двух векторов, поскольку по построению квадрат длины — линейная симметричная функция по каждому из аргументов:

$$g(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) = g(\mathbf{a}, \mathbf{a}) + 2g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + g(\mathbf{b}, \mathbf{b}) \quad (2.2)$$

откуда всегда можно найти  $g(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  по заданным длинам векторов.

**Задача 14.** Пользуясь положительной определенностью квадратичной формы метрики  $g(\mathbf{c}, \mathbf{c}) \geq 0$ , введите понятие нормы — длины вектора  $||\mathbf{c}|| = \sqrt{g(\mathbf{c}, \mathbf{c})}$  и сделайте в (2.2) подстановку  $\mathbf{b} \mapsto \xi\mathbf{b}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ , а затем рассмотрите равенство как квадратичный трехчлен по  $\xi$ . Какое условие следует из положительной определенности трехчлена? Докажите неравенство треугольника,

$$||\mathbf{a} + \mathbf{b}|| \leq ||\mathbf{a}|| + ||\mathbf{b}||. \quad (2.3)$$

По построению декартов базис является ортонормированным:

$$g(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) = g_{\alpha\beta} = \mathbb{1}_{\alpha\beta}.$$

В сферических координатах базис также ортогональный, и квадрат длины легко вычисляется в виде

$$d\mathcal{C}^2 = d\mathbf{r}^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.4)$$

т.е. метрика по-прежнему диагональна, как во всяком ортогональном базисе, с ненулевыми элементами<sup>4</sup>

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta.$$

Пусть функция  $f$  в векторном пространстве задает вещественное число  $f(\mathbf{r})$ . Это число зависит от вектора, но не зависит от того, в каком базисе мы запишем сам этот вектор, т.е. значение функции инвариантно относительно замен базиса в векторном пространстве. Такая функция называется скаляром. Примером скаляра служит действие на траектории, которое зависит от конечной точки траектории, но не зависит от того, в какой системе координат описывается эта точка. Время как величина, вообще не зависящая от системы координат в нерелятивистской физике, также является скаляром в евклидовом пространстве.

Среди скаляров выделяют линейные функции:

- $f(c\mathbf{a}) = cf(\mathbf{a})$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,
- $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$ .

Линейная функция полностью задается значениями на базисных векторах векторного пространства

$$f(\mathbf{a}) = f(a^\alpha \mathbf{e}_\alpha) = a^\alpha f(\mathbf{e}_\alpha).$$

Поскольку значение скалярной функции — *инвариант*, а  $a^\alpha$  можно представлять себе как трехмерный столбец, то удобно ввести обозначения для значения линейной функции на базисном векторе  $f(\mathbf{e}_\alpha) = f_\alpha$ , что можно представлять себе как трехмерную строку, так что

$$f_\alpha a^\alpha = f(\mathbf{a}) \quad (2.5)$$

— число, не зависящее от выбора базиса. В формуле (2.5) использованы тензорные обозначения в индексах с правилом суммирования Эйнштейна по неммым индексам. При этом,  $a^\alpha$  — это координаты вектора в заданном базисе, а  $f_\alpha$  — это координаты линейной функции  $f$  на том же базисе векторного пространства. В тензорных обозначениях важно следить за тем, какие индексы являются верхними,

<sup>3</sup>Набор знаков вещественных диагональных элементов метрики в базисе главных осей называют сигнатурой. В частности, сигнатура евклидовой 3-мерной метрики — это  $(+, +, +)$ .

<sup>4</sup>Условие приводимости тензора метрики к единичному сразу во всем пространстве сводится к тождественному нулю тензора Римана, что означает перестановочность дифференцирования по двум направлениям любого вектора, зависящего от точки в пространстве. См. стр. 88 раздел 11.5.§е.



а какие нижними, а представление о том, какой объект является столбцом, а какой строкой в терминах матричного умножения становится вспомогательным и в ряде простых случаев служит лишь для наглядности восприятия формул тензорного анализа. Как мы сейчас увидим, для тензорных обозначений важным становится то, как координаты объектов преобразуются при смене базиса в векторном пространстве.

Сумма линейных функций является линейной функцией, а линейная функция, умноженная на число, также является линейной функцией. Отсюда следует, что линейные функции на векторном пространстве сами образуют векторное пространство: в нем есть сложение и умножение на число. Такое пространство линейных функций на векторном пространстве обычно называют ковариантным или ко-сопряженным (двойственным) к самому векторному пространству, выступающему в качестве аргумента таких функций. Как мы только что видели, размерность ковариантного пространства совпадает с размерностью исходного векторного пространства, которое называют еще контравариантным.

Дифференциал скалярной функции  $df = f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - f(\mathbf{r})$  является линейной скалярной функцией над векторным пространством дифференциалов координат  $d\mathbf{r}$ ,

$$df = \frac{\partial f}{\partial r^\alpha} dr^\alpha = \partial_\alpha f dr^\alpha \Rightarrow df(\mathbf{e}_\alpha) = \partial_\alpha f.$$

При замене координат  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(\mathbf{r})$  имеет место замена базиса в каждой точке пространства, причем дифференциалы  $dr^\alpha$  преобразуются согласно

$$dr'^\alpha = \frac{\partial r'^\alpha}{\partial r^\beta} dr^\beta,$$

т.е. в терминах матричного умножения как столбец матрицей  $3 \times 3$ :  $\Lambda^\alpha_{\beta} = \partial r'^\alpha / \partial r^\beta$ , так что имеет место *закон преобразования векторов*<sup>5</sup>

$$a'^\alpha = \frac{\partial r'^\alpha}{\partial r^\beta} a^\beta. \quad (2.6)$$

А частные производные скалярной функции преобразуются согласно

$$\partial'_\alpha f = \frac{\partial r^\beta}{\partial r'^\alpha} \partial_\beta f, \quad (2.7)$$

т.е. в терминах матричного умножения как строка обратной матрицей  $(\Lambda^{-1})^\beta_\alpha = \partial r^\beta / \partial r'^\alpha$ . Действительно,

$$(\Lambda^{-1} \cdot \Lambda)^\beta_{\alpha} = (\Lambda^{-1})^\beta_{\gamma} \Lambda^\gamma_{\alpha} = \frac{\partial r^\beta}{\partial r'^\gamma} \frac{\partial r'^\gamma}{\partial r^\alpha} = \frac{\partial r^\beta}{\partial r^\alpha}.$$

Производная  $\partial r^\beta / \partial r^\alpha$  называется символом Кронекера

$$\frac{\partial r^\beta}{\partial r^\alpha} = \partial_\alpha r^\beta \stackrel{\text{def}}{=} \delta^\beta_\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (2.8)$$

Это не что иное, как элементы единичной матрицы  $\delta^\beta_\alpha = \mathbb{1}^\beta_\alpha$ , так что  $\Lambda^{-1} \cdot \Lambda = \mathbb{1}$ . У символа Кронекера при использовании матричного умножения обычно опускают указание на порядок следования индексов, так как отличны от нуля только диагональные элементы и

$$\delta^\alpha_{\beta} = \delta^\alpha_{\beta} \equiv \delta^\alpha_{\beta}. \quad (2.9)$$

Итак, частные производные скалярной функции преобразуются при замене координат, т.е. при замене базиса в векторном пространстве, согласно (2.7) или при использовании матричных обозначений как строки, которые умножаются на обратную матрицу преобразования компонент координат векторов. В общем случае говорят, что линейные скалярные функции на векторном пространстве образуют ко-векторное пространство, а их значения на базисных векторах преобразуются по *закону преобразования ко-векторов*,<sup>6</sup> т.е. как частные производные скалярной функции:

$$b'_\alpha = \frac{\partial r^\beta}{\partial r'^\alpha} b_\beta. \quad (2.10)$$

<sup>5</sup>Говорят также о законе преобразования контравариантных векторов.

<sup>6</sup>Говорят также о законе преобразования ковариантных векторов.

Мнемоническое правило для запоминания законов преобразования простое: вектор — верхний индекс, в матрице преобразований штрих у координат сверху, ковектор — нижний индекс, в матрице преобразований штрих у координат снизу.

Ковариантным тензором ранга  $k$  называется инвариантная функция от  $k$  векторов, линейная по каждому из аргументов. Тогда в индексных обозначениях тензор задается своими значениями на базисных векторах:

$$T(\mathbf{e}_{\alpha_1}, \dots, \mathbf{e}_{\alpha_k}) = T_{\alpha_1 \dots \alpha_k},$$

т.е. тензор задается своими проекциями на базисные векторы по каждому аргументу полилинейной функции. Смешанные тензоры ранга  $k_1 + k_2$  определяются как линейные функции на  $k_1$  векторах и  $k_2$  ковекторах и имеют  $k_1$  нижних и  $k_2$  верхних индексов. По каждому нижнему индексу тензор преобразуется по закону ковектора, а по верхнему — по закону вектора. Верхние индексы определяются как проекции тензора на базисные векторы  $\mathbf{h}^\beta$  в ковариантном, дуальном к векторному, пространстве.

Символ Кронекера — смешанный тензор второго ранга. Он является инвариантным тензором, поскольку в любых новых координатах принимает те же значения единичной матрицы.

### §а. Связь координатного и инвариантного подхода

Здесь уместно сделать замечание о соответствии между принятым нами координатным подходом с наглядным представлением базиса в векторном пространстве и инвариантным бескоординатным подходом, который часто используется в научной литературе. В координатном подходе основным объектом являются компоненты тензора. Например, компоненты двухвалентного ковариантного тензора  $T_{\alpha\beta}$  действуют как билинейная функция в пространстве тензорного произведения двух векторных пространств  $V \otimes V$ : элементами тензорного произведения пространств являются классы эквивалентности в прямом произведении этих векторных пространств  $V \times V$ , так что к классу  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$  принадлежат все элементы  $V \times V$ , на которых билинейные инвариантные функции принимают одни и те же значения. Это значит, что эквивалентными являются элементы с одинаковым множителем,  $\lambda \mathbf{v} \times \mathbf{u} \cong \mathbf{v} \times \lambda \mathbf{u}$ , а также элементы, которые отличаются на  $\mathbf{0} \times \mathbf{u}'$  или  $\mathbf{v}' \times \mathbf{0}$ , поскольку билинейные инвариантные функции принимают одни и те же значения на элементах класса.

Компоненты тензоров преобразуются при смене базиса в векторном пространстве, и мы говорим о законе преобразования тензоров. При этом сам тензорный объект записывается в векторном виде в представлении «базиса со стрелками» (жирный шрифт): вектор  $\mathbf{a} = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ , контравариантный тензор второго ранга  $\mathbf{U} = U^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta$ , ковектор  $\mathbf{b} = b_\beta \mathbf{h}^\beta$ , ковариантный тензор второго ранга  $\mathbf{T} = T_{\alpha\beta} \mathbf{h}^\alpha \otimes \mathbf{h}^\beta$  и проч. По построению пространства линейных функций на векторном пространстве, т.е. при построении пространства, двойственного к этому векторному пространству, базис ковекторного пространства задается соотношением  $\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{h}^\beta = \delta_\alpha^\beta$ .

При пассивных преобразованиях векторного пространства происходит одновременный переход от компонент вектора  $a^\alpha$  к штрихованным компонентам вектора  $a'^\alpha = \Lambda^\alpha_{\beta} a^\beta$  и от базиса  $\mathbf{e}_\alpha$  к штрихованному базису  $\mathbf{e}'_\alpha = \mathbf{e}_\beta (\Lambda^{-1})^\beta_{\alpha}$ , где, подчеркнем, действует обратная матрица. Ясно, что вектор  $\mathbf{a} = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha$  остается инвариантным при пассивных преобразованиях. Для ковекторов согласованное с векторами преобразование для базиса —  $\mathbf{h}'^\beta = \Lambda^\beta_{\alpha} \mathbf{h}^\alpha$ , для ковариантных компонент —  $b'_\beta = b_\alpha (\Lambda^{-1})^\alpha_{\beta}$ . Формально закон преобразования базиса векторного пространства  $\mathbf{e}_\alpha$  тождественно совпадает с законом преобразования частных производных  $\partial_\alpha$ , а закон преобразования базиса ковариантного векторного пространства  $\mathbf{h}^\beta$  тождественно совпадает с законом преобразования дифференциалов координат  $dr^\beta$ . Поэтому, если нет необходимости в наглядности, то от базисных векторов со стрелками можно избавиться и использовать вместо базисных векторов объекты с идентичными свойствами преобразования:  $\mathbf{e}_\alpha \mapsto \partial_\alpha$  и  $\mathbf{h}^\beta \mapsto dr^\beta$ . Именно так и поступают в инвариантном подходе. Тогда эквивалентными становятся записи для контравариантного тензора второго ранга, например,

$$\mathbf{U} = U^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta \cong U^{\alpha\beta} \partial_\alpha \otimes \partial_\beta,$$

и для ковариантного тензора второго ранга

$$\mathbf{T} = T_{\alpha\beta} \mathbf{h}^\alpha \otimes \mathbf{h}^\beta \cong T_{\alpha\beta} dr^\alpha \otimes dr^\beta.$$

Если говорят: задан вектор  $\mathbf{a} = \partial_x + 2\partial_y$ , то в координатном подходе это либо отвечает инвариантному контравариантному объекту со значениями на базисе в ковариантном пространстве:  $\mathbf{a}(\mathbf{h}^x) = a^x = 1$ ,  $\mathbf{a}(\mathbf{h}^y) = a^y = 2$ , — либо может трактоваться как инвариантный вектор  $\mathbf{a}$ , который в указанном базисе равен  $\mathbf{a} = \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y$ .

Существует вполне определенная процедура перехода от понятий инвариантного подхода к понятиям координатного подхода. По существу эта процедура повторяет изложенную выше схему построения

тензорного исчисления. Введем понятие подстановки вектора  $\mathbf{a}$  в ковариантный тензор, так что подстановка  $i_{\mathbf{a}}$  переводит тензор ранга  $k$  в тензор ранга  $k - 1$  за счет свертки по первому индексу, и на примере тензора второго ранга в инвариантном подходе запишем

$$i_{\mathbf{a}}\mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} i_{\mathbf{a}}T_{\alpha\beta} dr^{\alpha} \otimes dr^{\beta} = T_{\alpha\beta} a^{\alpha} dr^{\beta}. \quad (2.11)$$

Еще одна подстановка даст

$$i_{\mathbf{b}}(i_{\mathbf{a}}\mathbf{T}) = T_{\alpha\beta} a^{\alpha} b^{\beta},$$

но именно это выражение в координатном подходе мы и обозначали как  $T(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  — значение инвариантной полилинейной функции на векторах! В частности,

$$i_{\mathbf{e}_{\beta}}(i_{\mathbf{e}_{\alpha}}\mathbf{T}) = T_{\alpha\beta} = T(\mathbf{e}_{\alpha}, \mathbf{e}_{\beta}),$$

с учетом того, что компоненты базисных векторов — это дельта-символы Кронекера:  $(\mathbf{e}_{\alpha})^{\alpha'} = \delta_{\alpha}^{\alpha'}$ , так что

$$T_{\alpha'\beta'}(\mathbf{e}_{\alpha})^{\alpha'}(\mathbf{e}_{\beta})^{\beta'} = T_{\alpha\beta}.$$

Если теперь учесть, как базисные вектора преобразуются при пассивных преобразованиях, то мы в точности получим закон преобразования компонент ковариантного тензора. Аналогичные рассуждения можно провести и для тензоров других рангов с различными ковариантными и контвариантными индексами, имея ввиду, что свертка имеет универсальный характер по отношению к векторам и ковекторам.

Таким образом, мы полностью установили эквивалентность описания тензоров в координатном и инвариантном подходах на уровне формул перехода и ясной интерпретации этих формул путем введения свертки-подстановки. Единственный нюанс — подстановка бесконечно малых векторов, которые задают направляющие ориентированных площадей гиперповерхностей: в этом случае надо иметь ввиду, что в координатном подходе дифференциалы координат возникают не как базис в ковариантном пространстве, а как подстановка вполне определенных бесконечно малых элементов ориентированных гиперповерхностей. На этом вопросе мы более детально остановимся при рассмотрении дифференциальных форм в координатном подходе (см. стр. 93 раздела 11.8.).

В координатном подходе не только есть преимущество наглядности: после определения свойств преобразования компонент объекта формально нет никакого различия в покомпонентной записи так называемых активных и пассивных преобразований. При пассивных преобразованиях происходит смена базиса для описания объекта, а при активных сам объект преобразуется в заданном базисе, но в координатном подходе обе эти схемы приводят просто к функциональной зависимости координат образа от координат оригинала, так что схема никак не сказывается на выкладках. В инвариантном подходе активная схема означает переход от одной инвариантной функции к другой, так что скаляр в координатном подходе — это скаляр при любой схеме преобразований, а в инвариантном подходе может возникнуть существенная разница, поскольку инварианты могут переходить в другие инварианты при активной схеме преобразований. К примеру, инвариантные интегралы в координатном подходе — это сумма скаляров, а в инвариантном подходе интегралы могут трактоваться как сумма тензоров.

С точки зрения физики: базис — это наблюдатель со своими линейками (детектором измерения компонент векторов и тензоров), так что пассивные преобразования — это описание одной и той же физической системы в тензорных обозначениях разными наблюдателями (в разных базисах). С другой стороны, переход от одного наблюдателя физической системы к другому можно описать эквивалентным образом: два наблюдателя — это один и тот же наблюдатель за системой, для которого сама система переместилась по отношению к детекторам наблюдателя. Именно поэтому в координатном подходе формулы активных и пассивных преобразований описываются идентичными преобразованиями тензорных величин.

## §b. Метрический тензор

Метрика является ковариантным тензором второго ранга. Она совпадает с единичной матрицей только в декартовых координатах, как мы видели это на примере сравнения сферических и декартовых координат. Это замечание элементарно, поскольку сам декартов базис как раз и определяется как базис, в котором метрика становится единичной во всем евклидовом пространстве.

Для метрики определяют обратную метрику  $g^{-1}$  согласно матричному умножению  $g^{-1} \cdot g = \mathbb{1}$ , записывая индексы обратной матрицы сверху:

$$||g^{-1}||^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}, \quad g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta_{\gamma}^{\alpha}.$$

Из инвариантности единичного тензора Кронекера относительно преобразований координат матрицей  $\Lambda$ , ввиду  $\Lambda \cdot \mathbb{1} \cdot \Lambda^{-1} = \mathbb{1}$ , следует, что обратная метрика действительно является тензором второго ранга: построим

$$\Lambda^{\alpha}_{\alpha'} \Lambda^{\beta}_{\beta'} g^{\alpha'\beta'} = g^{\alpha\beta}, \quad g_{\beta''\gamma''} (\Lambda^{-1})^{\beta''}_{\beta} (\Lambda^{-1})^{\gamma''}_{\gamma} = g_{\beta\gamma},$$

и найдем

$$g'^{\alpha\beta} g'_{\beta\gamma} = \Lambda_{\bullet\alpha'}^{\alpha} \Lambda_{\bullet\beta'}^{\beta} g^{\alpha'\beta'} g_{\beta''\gamma''} (\Lambda^{-1})_{\bullet\beta}^{\beta''} (\Lambda^{-1})_{\bullet\gamma}^{\gamma''},$$

но поскольку  $\Lambda_{\bullet\beta'}^{\beta} (\Lambda^{-1})_{\bullet\beta}^{\beta''} = \delta_{\beta'}^{\beta''}$ , а значит,

$$\Lambda_{\bullet\beta'}^{\beta} g^{\alpha'\beta'} g_{\beta''\gamma''} (\Lambda^{-1})_{\bullet\beta}^{\beta''} = g^{\alpha'\beta'} g_{\beta'\gamma''} = \delta_{\gamma''}^{\alpha'},$$

получим

$$g'^{\alpha\beta} g'_{\beta\gamma} = \Lambda_{\bullet\alpha'}^{\alpha} \delta_{\gamma''}^{\alpha'} (\Lambda^{-1})_{\bullet\gamma}^{\gamma''} = \Lambda_{\bullet\alpha'}^{\alpha} (\Lambda^{-1})_{\bullet\gamma}^{\alpha'} = \delta_{\gamma}^{\alpha},$$

как это и должно быть.

Метрика используется для получения новых тензорных величин путем *поднимания и опускания индексов*: поднимание индекса с помощью обратной метрики переводит ковекторную величину в векторную,  $a_{\alpha} \mapsto a^{\alpha} = g^{\alpha\beta} a_{\beta}$ , а опускание индекса метрикой переводит вектор в ковектор,  $a^{\alpha} \mapsto a_{\alpha} = g_{\alpha\beta} a^{\beta}$ . В силу определения тензора обратной метрики как обратной матрицы для ковариантного тензора метрики последовательное поднимание и опускание индекса не меняет тензорную величину.

В декартовых координатах метрика евклидова пространства — единичная матрица, так что поднимание или опускание индекса тензорной величины не меняет эту тензорную величину. Поэтому в декартовых координатах евклидова пространства не различают верхние и нижние индексы. Однако это различие существенно как в криволинейных координатах евклидова пространства (см. пример сферических координат выше), так и в случае специальной теории относительности (пространство-время Минковского).

## 11.2. Тензор Леви-Чивиты

Рассмотрим ортонормированную правую тройку базисных векторов евклидова пространства, например,  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z \equiv \mathbf{e}_{\alpha}, \alpha = \overline{1, 3}$ . Смешанное произведение  $(\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{e}_z = 1$  — объем единичного куба. Линейная по каждому из аргументов величина

$$(\mathbf{e}_{\alpha} \times \mathbf{e}_{\beta}) \cdot \mathbf{e}_{\gamma} \equiv \epsilon_{\alpha\beta\gamma}$$

задает компоненты тензора третьего ранга — символа Леви-Чивиты<sup>7</sup>, полностью антисимметричного по перестановкам каждого из двух его аргументов. Как следствие, если хотя бы пара векторов в смешанном произведении совпадает, его значение равно нулю. Физический смысл символа Леви-Чивиты — ориентированный объем куба, натянутого на тройку единичных векторов: на правой тройке объем положительный «+1», на левой — отрицательный «−1», а для плоской или линейной фигуры равен нулю.

Разложение векторов по базису задает смешанное произведение в виде

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (a^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} \times b^{\beta} \mathbf{e}_{\beta}) \cdot c^{\gamma} \mathbf{e}_{\gamma} = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} (\mathbf{e}_{\alpha} \times \mathbf{e}_{\beta}) \cdot \mathbf{e}_{\gamma} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}.$$

Аналогично векторное произведение с компонентой  $\gamma$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_{\gamma} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e}_{\gamma} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} a^{\alpha} b^{\beta},$$

откуда заодно заключаем, что компоненты единичного вектора  $(\mathbf{e}_{\gamma})^{\gamma'} = \delta_{\gamma}^{\gamma'}$ , т.е. единственная единица у столбца  $\mathbf{e}_{\gamma}$  находится на месте, номер которого равен  $\gamma$ .

Стандартное определение детерминанта квадратной матрицы  $A$  размерности  $3 \times 3$

$$\det A = \sum (-1)^{\sigma(\alpha\beta\gamma)} A_{1\alpha} A_{2\beta} A_{3\gamma},$$

где  $\sigma(\alpha\beta\gamma)$  — число перестановок отличных друг от друга индексов в упорядоченную последовательность 123, с помощью тензора Леви-Чивиты принимает вид

$$\det A = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_{1\alpha} A_{2\beta} A_{3\gamma}. \quad (2.12)$$

Запишем это же выражение для детерминанта в виде

$$\det A = \epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} A_{1\alpha_1} A_{2\alpha_2} A_{3\alpha_3} = \epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \epsilon_{123} A_{1\alpha_1} A_{2\alpha_2} A_{3\alpha_3} = \frac{1}{3!} \epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \epsilon_{\beta_1\beta_2\beta_3} A_{\beta_1\alpha_1} A_{\beta_2\alpha_2} A_{\beta_3\alpha_3}.$$

<sup>7</sup>Леви-Чивита — любимый аспирант профессора Риччи. Оба являются выдающимися математиками своего времени, внесшими вклад в создание тензорного исчисления.

Здесь мы заметили, что и для первого индекса матрицы в произведении необходимо записать упорядоченную правую тройку, причем, при перестановке порядка любых двух бета-индексов смена знака слагаемого компенсируется сменой знака у бета-символа Леви-Чивиты, а число одинаковых членов равно числу перестановок последовательности 123, т.е. 3!. Из приведенного выше выражения сразу следует, что детерминант квадратной матрицы и транспонированной к ней матрицы совпадают, поскольку перестановка альфа- и бета-символов Леви-Чивиты не изменяет результат и, как раз, отвечает перестановке альфа- и бета-индексов матрицы, т.е. транспонированию,

$$\det A = \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} A_{1\alpha_1} A_{2\alpha_2} A_{3\alpha_3} = \frac{1}{3!} \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \epsilon_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} A_{\beta_1 \alpha_1} A_{\beta_2 \alpha_2} A_{\beta_3 \alpha_3} = \epsilon_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} A_{\beta_1 1} A_{\beta_2 2} A_{\beta_3 3} = \det A^T.$$

Более того, справедливо равенство

$$\epsilon_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} A_{\beta_1 \alpha_1} A_{\beta_2 \alpha_2} A_{\beta_3 \alpha_3} = \det A \cdot \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}, \quad (2.13)$$

поскольку слева в (2.13) стоит тензор антисимметричный по перестановке любых двух альфа-индексов: перестановка двух альфа-индексов и соответствующих бета-индексов даст тождество, а дополнительная перестановка бета-индексов приведет к знаку «минус».

Равенство (2.13) позволяет сразу вычислить детерминант произведения двух матриц,

$$\begin{aligned} \det(A \cdot B) &= \frac{1}{3!} \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \epsilon_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} (A_{\alpha_1 \gamma_1} B_{\gamma_1 \beta_1}) (A_{\alpha_2 \gamma_2} B_{\gamma_2 \beta_2}) (A_{\alpha_3 \gamma_3} B_{\gamma_3 \beta_3}) \\ &= \frac{1}{3!} \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} A_{\alpha_1 \gamma_1} A_{\alpha_2 \gamma_2} A_{\alpha_3 \gamma_3} \epsilon_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} \det B = \\ &= \det A \cdot \det B. \end{aligned}$$

Из (2.12), полагая  $A_{1\alpha} \mapsto a^\alpha$ ,  $A_{2\beta} \mapsto b^\beta$ ,  $A_{3\gamma} \mapsto c^\gamma$ , сразу получаем

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det \begin{pmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & a^{(3)} \\ b^{(1)} & b^{(2)} & b^{(3)} \\ c^{(1)} & c^{(2)} & c^{(3)} \end{pmatrix},$$

и в частности,

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta) \cdot \mathbf{e}_\gamma = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\alpha^{(1)} & \mathbf{e}_\alpha^{(2)} & \mathbf{e}_\alpha^{(3)} \\ \mathbf{e}_\beta^{(1)} & \mathbf{e}_\beta^{(2)} & \mathbf{e}_\beta^{(3)} \\ \mathbf{e}_\gamma^{(1)} & \mathbf{e}_\gamma^{(2)} & \mathbf{e}_\gamma^{(3)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \delta_\alpha^1 & \delta_\alpha^2 & \delta_\alpha^3 \\ \delta_\beta^1 & \delta_\beta^2 & \delta_\beta^3 \\ \delta_\gamma^1 & \delta_\gamma^2 & \delta_\gamma^3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда можно получить, что произведение тензоров Леви-Чивиты сводится к произведению детерминантов

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha'\beta'\gamma'} = \det \begin{pmatrix} \delta_\alpha^1 & \delta_\alpha^2 & \delta_\alpha^3 \\ \delta_\beta^1 & \delta_\beta^2 & \delta_\beta^3 \\ \delta_\gamma^1 & \delta_\gamma^2 & \delta_\gamma^3 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \delta_{\alpha'}^1 & \delta_{\beta'}^1 & \delta_{\gamma'}^1 \\ \delta_{\alpha'}^2 & \delta_{\beta'}^2 & \delta_{\gamma'}^2 \\ \delta_{\alpha'}^3 & \delta_{\beta'}^3 & \delta_{\gamma'}^3 \end{pmatrix},$$

где во втором множителе мы использовали транспонированную матрицу. Легко заметить, что сумма

$$\delta_\alpha^1 \delta_{\alpha'}^1 + \delta_\alpha^2 \delta_{\alpha'}^2 + \delta_\alpha^3 \delta_{\alpha'}^3 = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_{\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'}$$

т.е. отлична от нуля и равна единице, если индексы совпадают. Тогда произведение двух полностью антисимметричных символов сводится к детерминанту

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha'\beta'\gamma'} = \det \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\alpha'} & \delta_{\alpha\beta'} & \delta_{\alpha\gamma'} \\ \delta_{\beta\alpha'} & \delta_{\beta\beta'} & \delta_{\beta\gamma'} \\ \delta_{\gamma\alpha'} & \delta_{\gamma\beta'} & \delta_{\gamma\gamma'} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Из этого выражения в качестве упражнения следует получить формулы свертки произведения символов Леви-Чивиты по одному, двум и трем индексам:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha'\beta'\gamma} &= \det \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\alpha'} & \delta_{\alpha\beta'} \\ \delta_{\beta\alpha'} & \delta_{\beta\beta'} \end{pmatrix} = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'} - \delta_{\alpha\beta'} \delta_{\beta\alpha'}, \\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha'\beta'\gamma} &= 2\delta_{\alpha\alpha'}, \\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} &= 3! = 6. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Для нахождения обратной матрицы  $A^{-1}$ , введем понятие минора

$$M_{\alpha\beta} = \frac{1}{2!} \epsilon_{\alpha\alpha_2\alpha_3} \epsilon_{\beta\beta_2\beta_3} A_{\beta_2\alpha_2} A_{\beta_3\alpha_3}. \quad (2.16)$$

Вычислим

$$M_{\alpha\beta} A_{\beta\alpha'} = \frac{1}{2!} \epsilon_{\alpha\alpha_2\alpha_3} \epsilon_{\beta\beta_2\beta_3} A_{\beta\alpha'} A_{\beta_2\alpha_2} A_{\beta_3\alpha_3} = \frac{1}{2!} \epsilon_{\alpha\alpha_2\alpha_3} \epsilon_{\alpha'\alpha_2\alpha_3} \det A = \frac{1}{2!} 2! \delta_{\alpha\alpha'} \det A.$$

Значит, элементы обратной матрицы<sup>8</sup> —

$$(A^{-1})_{\alpha\beta} = \frac{1}{\det A} M_{\alpha\beta} = \frac{1}{2! \det A} \epsilon_{\alpha\alpha_2\alpha_3} \epsilon_{\beta\beta_2\beta_3} A_{\beta_2\alpha_2} A_{\beta_3\alpha_3}. \quad (2.17)$$

Тогда можно легко записать дифференциал детерминанта

$$d(\det A) = dA_{\beta\alpha} \cdot 3 \frac{1}{3!} \epsilon_{\alpha\alpha_2\alpha_3} \epsilon_{\beta\beta_2\beta_3} A_{\beta_2\alpha_2} A_{\beta_3\alpha_3} = dA_{\beta\alpha} M_{\alpha\beta} = \det A \cdot (A^{-1})_{\alpha\beta} dA_{\beta\alpha}. \quad (2.18)$$

В частности, для тензора метрики

$$d \det g = \det g \cdot g^{\alpha\beta} dg_{\beta\alpha}. \quad (2.19)$$

Элемент площади  $d^2\Sigma$  с образующими  $d\mathbf{a}$  и  $d\mathbf{b}$  — это ковектор, направленный ортогонально плоскости образующих, с длиной, равной площади параллелограмма с образующими ребрами:

$$d^2\Sigma = d\mathbf{a} \times d\mathbf{b}.$$

Наряду с таким вектором площади часто вводят антисимметричный тензор

$$d^2\sigma^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma} d^2\Sigma_\gamma = \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha'\beta'\gamma} da^{\alpha'} db^{\beta'} = da^\alpha db^\beta - da^\beta db^\alpha,$$

для которого используют обозначение с символом внешнего произведения<sup>9</sup>

$$da^\alpha \wedge db^\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (da^\alpha db^\beta - da^\beta db^\alpha),$$

значит,

$$da^\alpha \wedge db^\beta = \frac{1}{2} d^2\sigma^{\alpha\beta}, \quad d^2\Sigma_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} da^\alpha \wedge db^\beta.$$

### §а. Зеркальная инверсия пространства

Рассмотрим пару векторных координатных пространств  $V_\mathbb{E}$  и  $V_\mathbb{F}$ :  $V_\mathbb{E}$  построено как линейная оболочка на правой тройке базисных векторов декартовых координат  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , а  $V_\mathbb{F}$  — на левой тройке базисных векторов декартовых координат  $\{\mathbf{e}_1^\mathbb{F}, \mathbf{e}_2^\mathbb{F}, \mathbf{e}_3^\mathbb{F}\}$ , — и зададим вопрос: как могут быть связаны тензорные величины<sup>10</sup>, определенные на векторах этих пространств? Поскольку законы физики формулируются в терминах тензоров, что называют ковариантным описанием физических систем, ответ на этот вопрос позволяет сравнить  $V_\mathbb{E}$  и  $V_\mathbb{F}$ , зеркально сопряженные друг к другу<sup>11</sup>. Итак, нас интересует, как тензоры  $T_\mathbb{E}$  из  $V_\mathbb{E}$  могут быть связаны с тензорами  $T_\mathbb{F}$  из  $V_\mathbb{F}$ . В основу такого сравнения можно положить 4 постулата.

**Первый постулат:** координаты  $r_\mathbb{F}^\alpha$  в зеркальном мире  $V_\mathbb{F}$  связаны с координатами  $r_\mathbb{E}^\alpha$  в реальном мире  $V_\mathbb{E}$  соотношением

$$r_\mathbb{F}^\alpha = -r_\mathbb{E}^\alpha. \quad (2.20)$$

Смысл этого постулата становится понятным, если рассмотреть преобразование зеркальной инверсии в реальном мире  $V_\mathbb{E}$ , которое определяется заменой исходного базиса на штрихованный

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \xrightarrow{\mathbb{P}} \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\} = \{-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3\}. \quad (2.21)$$

<sup>8</sup>Из проведенных построений видно, что обратная матрица существует, только если  $\det A \neq 0$ .

<sup>9</sup>Символ внешнего произведения  $\wedge$  очень удобно использовать в координатном подходе для обозначения антисимметризации по индексам. В инвариантном подходе и при разложении тензорных величин по базису в координатном подходе символ внешнего произведения определяет антисимметризованное тензорное произведение базисных векторов. При вычислении интегралов по гиперповерхностям различной размерности в координатном подходе необходимо делать подстановку вместо базисных векторов элементов бесконечно малых направляющих на заданной гиперповерхности, сохраняя при этом символ антисимметризации так, как мы это сделали на примере 2-мерной поверхности.

<sup>10</sup>Напомним определение тензора: полилинейная, не зависящая от выбора базиса функция на векторах  $t(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots)$  называется тензором с компонентами  $t_{\alpha,\beta,\dots}$ , так что  $t(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots) = t_{\alpha,\beta,\dots} a^\alpha b^\beta \dots$ , а при смене базиса компоненты тензора преобразуются, поскольку  $t_{\alpha,\beta,\dots} = t(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta, \dots)$ .

<sup>11</sup>Наше рассмотрение этого вопроса опирается на идеи В.Б. Берестецкого.

При этой инверсии штрихованный базис в  $V_{\mathbb{E}}$  становится левым. Ясно, что при операции зеркального отражения пространства  $V_{\mathbb{E}}$ , которую обозначают символом  $\mathbb{P}$ , как мы это сделали в (2.21), матрица преобразований координат совпадает со своей обратной и равна

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}^2 = \mathbb{1}, \quad (2.22)$$

так что в зеркальном, штрихованном базисе пространства  $V_{\mathbb{E}}$  согласно общему закону преобразования тензорных величин компоненты координат равны

$$r'_{\mathbb{E}}{}^{\alpha} = \mathcal{P}_{\beta}^{\alpha} r_{\mathbb{E}}^{\beta} = -r_{\mathbb{E}}^{\alpha}. \quad (2.23)$$

Мы определяем координаты точки  $r_{\mathbb{P}}^{\alpha}$  в зеркальном базисе  $\mathbf{e}_{1,2,3}^{\mathbb{P}}$  зеркального пространства  $V_{\mathbb{P}}$  так, чтобы они совпадали с координатами  $r'_{\mathbb{E}}{}^{\alpha}$ , которые получаются после перехода от правой тройки базисных векторов к левой в исходном пространстве  $V_{\mathbb{E}}$ ,

$$r_{\mathbb{P}}^{\alpha} = r'_{\mathbb{E}}{}^{\alpha} = \mathcal{P}_{\beta}^{\alpha} r_{\mathbb{E}}^{\beta} = -r_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \quad (2.24)$$

что также записывают в виде связи компонент контрвектора координат в зеркальных пространствах  $V_{\mathbb{P}}$  и  $V_{\mathbb{E}}$ ,

$$r_{\mathbb{P}}^{\alpha} = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot \mathcal{P}_{\beta}^{\alpha} r_{\mathbb{E}}^{\beta} = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot (-1) r_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \quad \lambda_{\mathbb{P}} = +1. \quad (2.25)$$

В этом случае говорят, что вектор координат имеет положительную пространственную четность  $\lambda_{\mathbb{P}}$ , и мы видим, что это значение четности задается по построению.

**Второй постулат:** ориентированный объем  $\text{vol}_{\mathbb{P}}$  на базисной тройке в зеркальном мире  $V_{\mathbb{P}}$

$$\text{vol}_{\mathbb{P}}(\mathbf{e}_1^{\mathbb{P}}, \mathbf{e}_2^{\mathbb{P}}, \mathbf{e}_3^{\mathbb{P}}),$$

связан с ориентированным объемом  $\text{vol}_{\mathbb{E}}$  на зеркально отраженной базисной тройке исходного пространства  $V_{\mathbb{E}}$ ,

$$\text{vol}_{\mathbb{E}}(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$$

соотношением

$$\text{vol}_{\mathbb{P}}(\mathbf{e}_1^{\mathbb{P}}, \mathbf{e}_2^{\mathbb{P}}, \mathbf{e}_3^{\mathbb{P}}) = -\text{vol}_{\mathbb{E}}(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3). \quad (2.26)$$

Смысл этого постулата легко объяснить из самого определения ориентированного объема в пространствах  $V_{\mathbb{E}}$  и  $V_{\mathbb{P}}$ . Ориентация в пространстве задается по правилу «буравчика»: при повороте первого базисного вектора ко второму буравчик движется по третьему базисному вектору. Таким образом, ориентация в пространстве определяется выбором порядка базисных векторов, а ориентированный объем на упорядоченной ортонормированной базисной тройке принимается равным  $+1$ ,

$$\text{vol}_{\mathbb{P}}(\mathbf{e}_1^{\mathbb{P}}, \mathbf{e}_2^{\mathbb{P}}, \mathbf{e}_3^{\mathbb{P}}) = \text{vol}_{\mathbb{E}}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = +1. \quad (2.27)$$

Ясно, что после зеркальной инверсии в пространстве  $V_{\mathbb{E}}$ , во-первых,

$$\text{vol}_{\mathbb{E}}(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) = \text{vol}_{\mathbb{E}}(-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3) = -\text{vol}_{\mathbb{E}}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = -1,$$

т.е. на зеркальной ортонормированной тройке векторов в  $V_{\mathbb{E}}$  ориентированный объем равен  $-1$ , а во-вторых, движение буравчика для базиса  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  и базиса  $\{\mathbf{e}_1^{\mathbb{P}}, \mathbf{e}_2^{\mathbb{P}}, \mathbf{e}_3^{\mathbb{P}}\}$  становятся одинаковыми. Поэтому прямое сравнение ориентированных объемов, определенных согласно упорядочению базисов в пространствах  $V_{\mathbb{E}}$  и  $V_{\mathbb{P}}$ , однозначно дает связь (2.26), которую можно переписать в виде

$$\text{vol}_{\mathbb{P}}(\mathbf{e}_1^{\mathbb{P}}, \mathbf{e}_2^{\mathbb{P}}, \mathbf{e}_3^{\mathbb{P}}) = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot \text{vol}_{\mathbb{E}}(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3). \quad \lambda_{\mathbb{P}} = -1. \quad (2.28)$$

В этом случае говорят, что ориентированный объем имеет отрицательную пространственную четность  $\lambda_{\mathbb{P}}$  — четность относительно зеркальной инверсии 3-мерного евклидова пространства. Так как ориентированный объем — это число, инвариантное при замене базиса в пространстве, то он является скаляром с отрицательной пространственной четностью, а такой инвариант называют псевдоскаляром.

**Третий постулат:** полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{P}}$  в зеркальном мире  $V_{\mathbb{P}}$  задается точно так же, как и тензор Леви-Чивиты  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{E}}$  в мире  $V_{\mathbb{E}}$ , т.е. на упорядоченных базисных тройках в обоих пространствах он полагается равным  $+1$ , при смене порядка в тройке он меняет знак на  $-1$ , а при совпадении какой-либо пары из индексов, нумерующих тройку, он равен  $0$ , так что

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{P}} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{E}}. \quad (2.29)$$

Раскроем эту формулировку более подробно.

Данное нами чуть выше определение ориентированного объема можно записать с помощью тензора Леви-Чивиты. В пространстве  $V_{\mathbb{P}}$

$$\text{vol}_{\mathbb{P}}(\mathbf{e}_1^{\mathbb{P}}, \mathbf{e}_2^{\mathbb{P}}, \mathbf{e}_3^{\mathbb{P}}) = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{P}} (\mathbf{e}_1^{\mathbb{P}})^{\alpha} (\mathbf{e}_2^{\mathbb{P}})^{\beta} (\mathbf{e}_3^{\mathbb{P}})^{\gamma} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{P}} \delta_1^{\alpha} \delta_2^{\beta} \delta_3^{\gamma} = \epsilon_{123}^{\mathbb{P}} = +1. \quad (2.30)$$

Точно также в пространстве  $V_{\mathbb{E}}$

$$\text{vol}_{\mathbb{E}}(\mathbf{e}_1^{\mathbb{E}}, \mathbf{e}_2^{\mathbb{E}}, \mathbf{e}_3^{\mathbb{E}}) = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{E}} (\mathbf{e}_1^{\mathbb{E}})^{\alpha} (\mathbf{e}_2^{\mathbb{E}})^{\beta} (\mathbf{e}_3^{\mathbb{E}})^{\gamma} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{E}} \delta_1^{\alpha} \delta_2^{\beta} \delta_3^{\gamma} = \epsilon_{123}^{\mathbb{E}} = +1. \quad (2.31)$$

В итоге, (2.30) и (2.31) означают, что имеет место постулированное нами тождество (2.29).

Тензор Леви-Чивиты в пространстве  $V_{\mathbb{E}}$  при зеркальной инверсии (2.23) преобразуется как

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{E}} = \mathcal{P}_{\alpha}^{\alpha'} \mathcal{P}_{\beta}^{\beta'} \mathcal{P}_{\gamma}^{\gamma'} \epsilon_{\alpha'\beta'\gamma'}^{\mathbb{E}} = (-1)^3 \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{E}}, \quad (2.32)$$

Третий постулат (2.29) означает, что связь тензора Леви-Чивиты  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{P}}$  в зеркальном мире  $V_{\mathbb{P}}$  с тензором Леви-Чивиты  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{E}}$  после зеркальной инверсии в мире  $V_{\mathbb{E}}$  имеет вид

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{P}} = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{E}}, \quad \lambda_{\mathbb{P}} = -1, \quad (2.33)$$

т.е.

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{P}} = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot \mathcal{P}_{\alpha}^{\alpha'} \mathcal{P}_{\beta}^{\beta'} \mathcal{P}_{\gamma}^{\gamma'} \epsilon_{\alpha'\beta'\gamma'}^{\mathbb{E}} = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot (-1)^3 \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{E}}, \quad \lambda_{\mathbb{P}} = -1, \quad (2.34)$$

и мы заключаем, что тензор Леви-Чивиты обладает отрицательной пространственной четностью, или, как говорят, он является псевдотензором 3-его ранга.

Из первых трех постулатов логически следует **четвертый постулат**: из тензоров с определенной пространственной четностью мы можем строить их тензорные произведения, которые также будут обладать определенной пространственной четностью, равной произведению пространственных четностей тензоров в произведении.

**Задача 15.** Покажите, что частные производные  $\partial_{\alpha}$  обладают положительной пространственной четностью.

**Задача 16.** Покажите, что символ Кронекера  $\delta_{\beta}^{\alpha} = \partial_{\beta} r^{\alpha}$  — тензор второго ранга с положительной пространственной четностью.

**Задача 17.** Покажите, что свертка ковариантного индекса тензора с контравариантным индексом этого тензора не меняет пространственную четность.

Например, векторное произведение двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  с положительной пространственной четностью будет обладать отрицательной пространственной четностью, поскольку это тензорное произведение включает в себя еще и тензор Леви-Чивиты с отрицательной пространственной четностью,

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad c_{\gamma}^{\mathbb{E}} = \epsilon_{\gamma\alpha\beta}^{\mathbb{E}} a_{\mathbb{E}}^{\alpha} b_{\mathbb{E}}^{\beta}.$$

Значит,  $\mathbf{c}$  — это псевдовектор,

$$c_{\gamma}^{\mathbb{P}} = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot \mathcal{P}_{\gamma}^{\gamma'} c_{\mathbb{E}}^{\gamma'} = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot (-1) c_{\gamma}^{\mathbb{E}}, \quad \lambda_{\mathbb{P}} = -1.$$

Псевдовектор называют также аксиальным вектором.

Еще пример. Скалярное произведение псевдовектора на вектор — это псевдоскаляр, который в случае, когда он принимает вещественные значения, называют также аксионом.

Приведенное нами наблюдение носит общий характер: если тензор ранга  $k$  в зеркальном пространстве  $V_{\mathbb{P}}$  связан с исходным тензором в пространстве  $V_{\mathbb{E}}$  соотношением

$$T_{\mathbb{P}}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot \mathcal{P}_{\alpha_1}^{\alpha'_1} \dots \mathcal{P}_{\alpha_k}^{\alpha'_k} T_{\mathbb{E}}^{\alpha'_1 \dots \alpha'_k} = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot (-1)^k T_{\mathbb{E}}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}, \quad (2.35)$$

то при  $\lambda_{\mathbb{P}} = -1$  говорят, что это — псевдотензор с отрицательной  $\mathbb{P}$ -четностью, а при  $\lambda_{\mathbb{P}} = +1$ , что тензор имеет положительную  $\mathbb{P}$ -четность. При введении новой физической величины, свойства которой относительно зеркальной инверсии пространства не определены по её построению из величин с известными пространственными четностями, необходимо указывать пространственную четность новой величины в качестве гипотезы модельного рассмотрения. В электродинамике мы согласуем, например, свойства векторов электрического и магнитного полей с эмпирическими данными о свойствах зеркальной симметрии электродинамики. Фактически мы считаем, что электродинамика инвариантна относительно зеркальной инверсии пространства: естествоиспытатель не сможет определить, видит ли он мир  $V_{\mathbb{E}}$  или



только его зеркальное изображение  $V_{\mathbb{P}}$ , так как законы электродинамики не позволяют установить такие различия. В теории слабого взаимодействия токи устроены как разность вектора и псевдовектора, которая в зеркальном мире будет переходить в сумму вектора и псевдовектора. Это значит, что реальный мир и его зеркальное отражение обладают совершенно разными свойствами, или, как говорят, слабое взаимодействие нарушает пространственную четность.

Теперь в качестве примера мы можем сделать ремарки и о физически значимых величинах в евклидовом пространстве в случае нерелятивистской динамики. Мы будем полагать, что в зеркальном мире  $V_{\mathbb{P}}$  время идентично времени в реальном мире  $V_{\mathbb{E}}$ :  $t_{\mathbb{P}} = t$ , — и, стало быть, время имеет положительную пространственную четность, время — скаляр. Отсюда сразу следует, что скорость  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  — вектор с положительной  $P$ -четностью, так как скорость построена из дифференциала вектора координат  $d\mathbf{r}$  и дифференциала времени  $dt$ , каждый из которых обладает положительной четностью относительно зеркальной инверсии пространства. Для определения свойств импульса при переходе в зеркальный мир, постулируем, что масса — это скаляр с положительной четностью. Тогда и импульс  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  — вектор с положительной  $P$ -четностью. Наконец, момент импульса  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  включает в свое определение тензор Леви-Чивиты с отрицательной пространственной четностью, и, следовательно, момент импульса — псевдовектор.

### 11.3. Изометрии евклидовой метрики

Найдем преобразования координат, которые не меняют вид метрики, — изометрии, которые оставляют тензор метрики инвариантным. Для этого сначала запишем закон преобразования метрики при произвольных обратимых заменах координат:

$$dC^2 = g'_{\alpha'\beta'} dr'^{\alpha'} dr'^{\beta'} = g'_{\alpha'\beta'} \Lambda_{\bullet\alpha}^{\alpha'} \Lambda_{\bullet\beta}^{\beta'} dr^{\alpha} dr^{\beta} = g_{\alpha\beta} dr^{\alpha} dr^{\beta},$$

где матрица преобразований координат задается частными производными  $\Lambda_{\bullet\beta}^{\alpha} = \partial_{\beta} r'^{\alpha}$ . В этом выражении тензор смешанного типа  $\Lambda_{\bullet\beta}^{\alpha}$  имеет один контравариантный индекс  $\alpha$ , который в матричной записи мы трактуем как столбцовый, и один ковариантный индекс  $\beta$ , который мы трактуем как строчный, так что  $\Lambda_{\bullet\beta}^{\alpha}$  — это матрица  $3 \times 3$ , для которой можно пользоваться обычной операцией матричного умножения, и, при этом, расположение индексов у  $\Lambda_{\bullet\beta}^{\alpha}$  однозначно задает законы преобразования тензора по каждому из индексов. Тензор метрики  $g_{\alpha\beta}$  имеет 2 ковариантных индекса. Для того, чтобы использовать матричное умножение и при этом однозначно определять закон преобразования при смене базиса в векторном пространстве, введем *операцию транспонирования* так, как мы это уже делали в разделе 3.3. Транспонирование определяется инвариантно в любом базисе как координат, так и представлений группы преобразований и в случае 3-вектора с контравариантным индексом, который в матричных обозначениях нумерует позицию в столбце, переводит его в транспонированный вектор с контравариантным индексом, который нумерует позицию в строке, что мы указываем порядком следования индексов для использования матричного умножения,

$$dx^{\alpha} \equiv dx^{\alpha\bullet} \mapsto (dx^T)^{\bullet\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} dx^{\alpha\bullet}. \quad (2.36)$$

По построению, транспонированный вектор  $(dx^T)^{\bullet\alpha}$  преобразуется транспонированной матрицей  $\Lambda^T$ , если использовать матричные обозначения:

$$dx'^T = dx^T \circ \Lambda^T, \quad (2.37)$$

или в индексах

$$(dx'^T)^{\bullet\alpha} = (dx')^{\alpha\bullet} = \Lambda_{\bullet\beta}^{\alpha} dx^{\beta\bullet} = (dx^T)^{\bullet\beta} (\Lambda^T)_{\beta}^{\alpha} = (dx^T \circ \Lambda^T)^{\bullet\alpha},$$

где мы воспользовались определением транспонирования матрицы (1.35) в разделе 3.3. Из этих выкладок также ясно видно, что переход к матричному умножению с транспонированием абсолютно сочетается с ковариантными свойствами тензорных величин с соблюдением всех свойств преобразования по ковариантным и контравариантным индексам: например, контрвектор преобразуется по закону преобразования контрвекторов. Вместе с тем, говорят, что транспонированные тензорные величины (2.36) преобразуются по транспонированному представлению, поскольку в записи с матричным умножением последовательная композиция двух обратимых преобразований сводится к левому умножению матриц в контравариантном пространстве и к правому множению транспонированных матриц в транспонированном контравариантном пространстве.

После перехода к записи с привычным матричным умножением квадрат длины можно записать в терминах транспонированного контрвектора и матрицы метрики,

$$dC^2 = dx^T \circ \hat{g} \circ dx, \quad \hat{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}, \quad (2.38)$$

а преобразование тензора метрики можно переписать в виде умножения матриц,

$$\hat{g} = \Lambda^T \circ \hat{g}' \circ \Lambda, \quad (2.39)$$

Тогда и закон изотермии, когда  $\hat{g}' = \hat{g}$ ,

$$g_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha\beta} \Lambda_{\bullet\alpha'}^{\alpha} \Lambda_{\bullet\beta'}^{\beta} = (\Lambda^T)_{\alpha'}^{\bullet\alpha} g_{\alpha\beta} \Lambda_{\bullet\beta'}^{\beta} \quad (2.40)$$

согласно (2.39) можно записать с матричным умножением как ортогональные преобразования 3-х пространственных координат пространства<sup>12</sup>,

$$\hat{g} = \Lambda^T \circ \hat{g}' \circ \Lambda, \quad (2.41)$$

откуда сразу следует специальное условие на детерминант матрицы преобразований<sup>13</sup>

$$(\det \Lambda)^2 = 1. \quad (2.42)$$

В декартовых координатах метрика — единичная матрица:  $\hat{g} = \mathbb{1}$ , а изотермия удовлетворяет условию

$$\Lambda^T \circ \Lambda = \mathbb{1}. \quad (2.43)$$

Преобразования, удовлетворяющие условию (2.43) называются ортогональными (символ  $O$ ), а условию  $|\det \Lambda| = 1$  — специальными (символ  $S$ ), а при  $\det \Lambda = 1$  — собственными. Собственные непрерывные изотермии — это повороты пространства, группа поворотов 3-мерного евклидова пространства  $SO(3)$ ,  $r'^{\alpha} = \mathcal{R}_{\bullet\beta}^{\alpha}(\phi) r^{\beta}$ , т.е. в случае бесконечно малого поворота  $\mathbf{r}' \approx \mathbf{r} + \phi \times \mathbf{r}$  при  $\phi \rightarrow 0$ , и пространственные сдвиги  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$ , когда соответственно,  $\Lambda_{\bullet\beta}^{\alpha} = \mathcal{R}_{\bullet\beta}^{\alpha}$  с углом поворота  $\phi$  и  $\Lambda_{\bullet\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha}$  при  $\mathbf{a}$ , которое не зависит от координат. Зеркальное отражение пространства  $\mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$  (символ  $\mathbb{P}$ ) или нечетного числа его осей приводит, очевидно, к  $\det \Lambda = -1$ , а в общем случае подобные (несобственные) преобразования являются комбинацией поворотов с отражением. В итоге, изотермии трехмерного евклидова пространства задаются шестью непрерывными параметрами: три угла поворота вокруг трех независимых осей и три сдвига координат при трансляции вдоль трех независимых осей, неоднородная (inhomogeneous, символ  $I$ ) группа  $ISO(3)$ , — а также дискретным преобразованием зеркального отражения  $\mathbb{P}$ . Преобразования  $SO(3)$  вместе с  $\mathbb{P}$  образуют группу  $O(3)$ .

Поскольку законы механики записываются в евклидовом пространстве во всех декартовых системах отсчета одинаково, преобразование координат при переходе из одной декартовой системы в другую должно быть изотермией евклидовой метрики векторных пространств координат и скоростей, а действие должно быть евклидовым скаляром, т.е. инвариантом, так как иначе по значению действия мы могли бы отличить одну декартову систему от другой, что означало бы нарушение принципов однородности и изотропности евклидова пространства для замкнутой физической системы. При этом время, течение которого не зависит от координат, в такой механике также является скаляром. Отсюда следует, что функции Лагранжа и Гамильтона — скаляры, и следовательно, скорость  $d\mathbf{r}^{\alpha}/dt = v^{\alpha}$  — это вектор, а импульс  $p_{\alpha} = \partial_{\alpha} S$  — евклидов ковектор. При этом скорости и координаты при поворотах, очевидно, преобразуются по одному и тому же закону, только если углы поворотов не зависят от времени и координат. Эта эквивалентность преобразований скоростей и координат нарушалась бы, если бы угол поворота зависел от времени или от координат, т.е. если повороты становились бы локальными или ускоренными.

Что касается трансляций, то зависимость сдвига координат от времени приводит к нарушению эквивалентности преобразований скорости и дифференциалов координат. В частности, специальное преобразование Галилея — это трансляция с параметром сдвига  $\mathbf{a} = \mathbf{v}_a t$ . Допустимость линейной зависимости сдвига координат от времени, как и независимость угла поворота от времени являются, конечно, следствиями галилеевского постулата об инерциальных системах.

В специальной теории относительности, во-первых, зависимость параметра трансляции от времени становится недопустимой, что исключает из числа сдвигов специальные преобразования Галилея, но оставляет в силе, конечно, все другие перечисленные нами изотермии евклидова пространства как преобразования, не изменяющие уравнения движения, а во-вторых, само евклидово пространство становится подмножеством более общей структуры — пространства-времени Минковского с более широкой группой изотермий, включающей в себя преобразования Лоренца, которые не только сохраняют уравнения движения, но оставляют инвариантным действие релятивистских частиц и полей.

<sup>12</sup>Это условие символично обозначают как  $O(3)$ .

<sup>13</sup>В обозначениях для матриц символом  $S$  указывают на то, что матрица преобразований удовлетворяет специальному условию на значения детерминанта  $|\det \Lambda| = 1$ .

#### 11.4. Волновое уравнение, инвариантная скорость и изометрия

Бегущая волна — это измеряемая амплитуда, пространственный профиль которой перемещается во времени в некотором направлении со скоростью  $c$ . Будем считать, что скорость распространения волны не зависит от направления, а, стало быть, волна распространяется изотропно. Для иллюстрации основных идей и понятий остановимся на одномерном пространстве, т.е. двумерном пространстве-времени (2D). Тогда волна с исходным профилем амплитуды  $f(x)$  в момент времени  $t = 0$  в другой момент времени будет иметь тот же профиль  $f_+ = f(x - ct)$  в случае распространения в положительном направлении по оси  $x$  и профиль  $f_- = f(x + ct)$  в случае распространения в отрицательном направлении, как это показано на рис. 2.2.

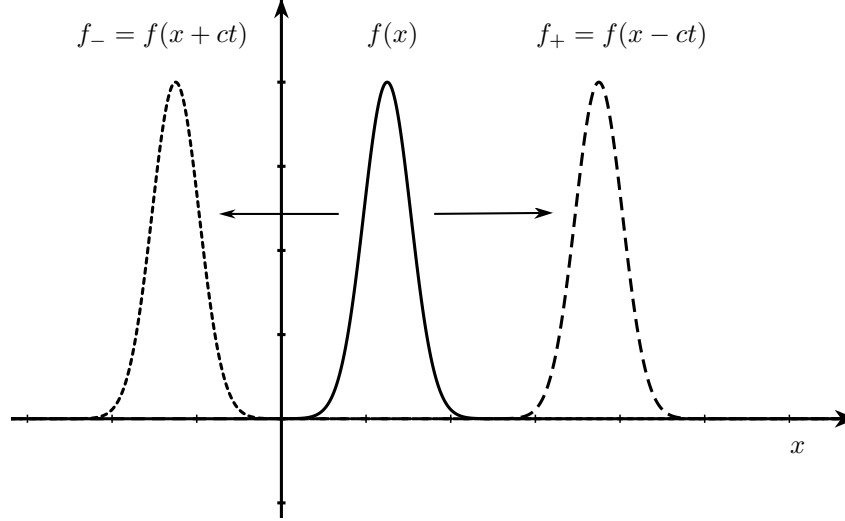


Рис. 2.2: Амплитуда волны: исходный профиль  $f(x)$  в момент времени  $t = 0$  — сплошная линия; профиль волны, бегущей в положительном направлении,  $f_+ = f(x - ct)$  в момент времени  $t \neq 0$  — штриховая линия; профиль волны, бегущей в отрицательном направлении,  $f_- = f(x + ct)$  в момент времени  $t \neq 0$  — пунктирная линия.

Вычислим производные профиля  $f_+ = f(x_-)$  по времени при  $x_- = x - ct$ ,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial f_+}{\partial t} = \frac{\partial f(x_-)}{\partial x_-} \frac{1}{c} \frac{\partial x_-}{\partial t} \Big|_{x_- = x - ct} = -f'(x_-),$$

и по координате

$$\frac{\partial f_+}{\partial x} = \frac{\partial f(x_-)}{\partial x_-} \frac{\partial x_-}{\partial x} \Big|_{x_- = x - ct} = f'(x_-).$$

Значит,

$$\left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) f_+ = 0. \quad (2.44)$$

Аналогично для волны  $f_- = f(x + ct) = f(x_+)$ , бегущей в отрицательном направлении, найдем

$$\left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) f_- = 0. \quad (2.45)$$

Уравнения (2.44) и (2.45) легко записать единообразно, используя произведение дифференциальных операторов так, чтобы обе бегущие волны удовлетворяли одному и тому же уравнению:

$$\left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) f_{\pm} = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f_{\pm} = 0. \quad (2.46)$$

Все решения волнового уравнения (2.46) по построению сводятся к волнам, профиль которых распространяется либо в положительном, либо в отрицательном направлениях со скоростью  $c$ .

Введем нулевую компоненту координат пространства-времени  $x_0 = ct$  в столбце

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix}, \quad \mu = \overline{0, 1},$$

и запишем волновое уравнение в виде

$$(\partial_0^2 - \partial_1^2)f(x) = 0. \quad (2.47)$$

Уравнение (2.47) допускает запись более общего вида с введением *конформного фактора*  $\Omega(x)$ :

$$\Omega^2(x)(\partial_0^2 - \partial_1^2)f(x) = 0. \quad (2.48)$$

Формально, в каждой заданной точке  $x_*$ , т.е. локально, конформный фактор одинаково изменяет масштаб линейки и, соответственно, единицы отсчета времени, оставляя скорость волны неизменной:  $dx^\mu \mapsto dx^\mu / \Omega(x_*)$ .

Используя свойство частной производной, которая в декартовых координатах преобразуется как ковектор, запишем волновое уравнение в ковариантном виде:

$$\Omega^2(x) g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu f(x) = 0, \quad g^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1). \quad (2.49)$$

Рассмотрим теперь переход от одной системы часов и линеек  $K$  к другой системе часов и линеек  $K'$ , причем при условии, что наблюдатели в этих системах используют совершенно идентичные часы и линейки. Спрашивается: какую скорость волны наблюдают в этих двух системах  $K$  и  $K'$ ? Среди систем сразу выделим те, что эквивалентны совершенно элементарно: если есть отличия только в начале отсчета времени и координаты, то, очевидно, дифференциалы координат пространства-времени никак не меняются, т.е. волновое уравнение не изменяет вид, и наблюдатели  $K$  и  $K'$  измеряют одну и ту же скорость волны, раз мы полагали, что волна распространяется изотропно и однородно (скорость не зависит ни от направления, ни от точки в пространстве). Это — глобальная трансляционная инвариантность пространства-времени физической волновой системы.

Что произойдет при других преобразованиях  $K \mapsto K'$ , зависит от природы волны. Это — вопрос эксперимента.

В случае электромагнитной волны эксперимент Майкельсона–Морли с плечевым интерферометром показал, что ориентация интерферометра относительно скорости движения Земли в пространстве никак не влияет на оптическую длину плеч интерферометра<sup>14</sup>, а значит, скорость света является инвариантной<sup>15</sup>: волновое уравнение в  $K$  и  $K'$  имеет инвариантный вид! Это означает, что инвариантом является величина

$$\Omega^2(x) g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \text{inv}. \quad (2.50)$$

Рассмотрим преобразования, при которых используются часы и линейки идентичные во всех точках пространства-времени. Это означает, что конформный фактор, согласно его физическому смыслу, полагается равным единице во всех рассматриваемых системах<sup>16</sup>,  $\Omega \equiv 1$ . Тогда инвариант —

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \text{inv}. \quad (2.51)$$

<sup>14</sup> Оптическая длина плеча интерферометра изменится при наличии внешних гравитационных волн, если чувствительность эксперимента позволяет детектировать столь тонкий эффект.

<sup>15</sup> **Отрицание эфира.** Эксперимент Майкельсона–Морли означал также существенное изменение представлений о физике электромагнитных колебаний. Всякий физик понимал, что колебания происходят в среде, как звук, к примеру, — это колебания воздуха. Поэтому и электромагнитные колебания, существование которых вытекало из уравнений Максвелла и которые были обнаружены экспериментально, предполагали существование специальной материальной среды, которую назвали эфиром. Эфир, как и всякая физическая сущность, должен обладать наблюдаемыми характеристиками, к которым прежде всего относится его движение как целого по аналогии со всякой другой средой — носителем колебаний. В нашем примере, воздух как среда для звука естественно обладает и собственной энергией, и собственным импульсом вне зависимости от звуковых колебаний, но и характеристики самих звуковых колебаний зависят от собственного движения воздуха. В частности, скорость звука относительно наблюдателя зависит от скорости движения воздуха как целого. В полной аналогии со звуковыми колебаниями эксперимент Майкельсона–Морли установил, что никаких собственных физических характеристик у эфира как носителя электромагнитных волн нет! Конечно, электромагнитные волны сами по себе переносят и энергию, и импульс, но теперь электрические и магнитные поля выступают как самостоятельные физические сущности. При этом, согласно принципу относительности совершенно изменяется понятие о пространстве и времени в связи с переходом от одной инерциальной системы к другой. Пытливый читатель может спросить: Но если пространство-время — это физическая сущность, то и оно может обладать собственными наблюдаемыми характеристиками, в частности, энергией и импульсом, которые относятся к движению этой физической сущности? Положительный ответ на этот вопрос — общая теория относительности, в которой пространство-время обладает собственной динамикой, и, в частности, эта динамика отвечает релятивистской теории гравитации Эйнштейна, а также эта динамика выражается в виде обнаруженных экспериментально гравитационных волн, которые возникают в двойных системах, скажем, черных дыр или нейтронных звезд. А детектор регистрации гравитационных волн — всё тот же интерферометр Майкельсона–Морли, только сверхточный и сверхмощный. Значит ли это, что эфир вернулся вместе с открытием гравитационных волн? Нет. Эфир мыслился как среда для электромагнитных волн, а пространство-время — это физическая сущность, универсальная для всех полей, а не только электромагнитных, что мы и видим по тому, что гравитация — сила, которая порождается всеми полями и воздействует на все поля!

<sup>16</sup> Естественно, никто не запрещает изучать более общие физические системы, отвечающие конформным факторам, зависящим от точки пространства-времени. На этом пути формулируются конформно инвариантные теории для специфических волн. Преобразования, оставляющие инвариантным выражение (2.50), называются конформными. Они включают в себя, в частности, локальные дилатации (изменения масштаба) и специальные конформные преобразования, которые в явном виде нарушают условие однородности и изотропности пространства-времени.

Здесь важно подчеркнуть тонкий момент: из эксперимента с волнами следует, что инвариант равен нулю, и возникает вопрос о том, что это ограничивает рассмотрение, как говорят, поверхностью «волнового конуса», а именно, что величина  $g^{\mu\nu}$  имеет не универсальный смысл, а применима только «on shell». В действительности этого ограничения нет, поскольку есть еще одно физическое требование: в волновом уравнении зависимость от частных производных  $\partial_\mu, \partial_\nu$  указана явно, так что величина  $g^{\mu\nu}$  не зависит от частных производных, а стало быть, её трансформационные свойства на самом деле универсальны и имеют место и вне «волнового конуса», «off shell». Отсюда сразу заключаем, что величина  $g^{\mu\nu}$  — контравариантный тензор второго ранга по определению тензора как полилинейной инвариантной функции, в данном случае, на ковекторном пространстве частных производных, так как только в этом случае свертка с двумя ковекторами дает инвариант. Этот тензор остается инвариантным при переходах между системами с идентичными часами и линейками во всех точках пространства-времени, если скорость волны в этих системах также одинакова. Поэтому, когда говорят об инвариантной скорости, имеют ввиду математический факт инвариантности целого тензора  $g^{\mu\nu}$ !

Обычно изложение далее строится для обратного к  $g^{\mu\nu}$  ковариантного тензора  $g_{\mu\nu}$ :

$$g^{\mu\nu'} g_{\nu'\nu} = \delta_\nu^\mu.$$

Этот тензор принято называть метрикой Минковского<sup>17</sup>, поскольку он определяет инвариант

$$ds^2 \stackrel{\text{def}}{=} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \mu, \nu = \overline{0, 3}, \quad (2.52)$$

который называют квадратом интервала или, для краткости, просто интервалом. В декартовых координатах интервал имеет вид, аналогичный квадрату длины<sup>18</sup>,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 - d\ell^2, \quad ds^2(dt = 0) \mapsto -d\ell^2.$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что инвариантное волновое уравнение, т.е. инвариантная скорость волны, означает изометрию метрики Минковского! Следовательно, нам необходимо установить общие свойства преобразований изометрии с постоянной матрицей

$$\Lambda_{\bullet\nu}^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$$

таких, что

$$g_{\mu\nu} = \Lambda_{\bullet\mu}^{\mu'} \Lambda_{\bullet\nu}^{\nu'} g_{\mu'\nu'}. \quad (2.53)$$

В рассматриваемом случае пространства-времени размерности 2D из (2.53) сразу следует, что

$$g_{00} = (\Lambda_{\bullet 0}^0)^2 g_{00} + (\Lambda_{\bullet 0}^1)^2 g_{11} \Rightarrow 1 = (\Lambda_{\bullet 0}^0)^2 - (\Lambda_{\bullet 0}^1)^2,$$

а значит,

$$(\Lambda_{\bullet 0}^0)^2 \geq 1.$$

Преобразования с  $\Lambda_{\bullet 0}^0 \geq 1$  называются ортохронными, поскольку  $\Lambda_{\bullet 0}^0$  определяет относительный знак временных компонент в системах  $K$  и  $K'$ , и при положительном знаке мы можем говорить, что стрела времени в этих системах направлена в одну сторону (нет инверсии стрелы времени). При  $\Lambda_{\bullet 0}^0 \leq -1$  говорят об антиортохронных преобразованиях. Группа специальных (символ  $S$ ,  $|\det \Lambda| = 1$ ) изометрий (символ  $O$  в смысле ортогональных матричных преобразований:  $\hat{g} = \Lambda^T \cdot \hat{g} \cdot \Lambda$ ) с трансляциями (символ  $I = \text{inhomogeneous}$ ) в пространстве-времени Минковского с одной пространственной координатой и одной временной координатой обозначается  $ISO(1,1)$ . Если перейти к ортохронным преобразованиям без трансляций и наложить еще условие, исключающее дискретное преобразование зеркальной инверсии пространственной координаты ( $x \mapsto -x$ ), то говорят о группе  $SO_+^\uparrow(1,1)$ .

В итоге, необходимо рассмотреть постоянную матрицу с детерминантом, равным единице,  $\det \Lambda = 1$ , и  $\Lambda_{\bullet 0}^0 \geq 1$ :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a \geq 1 \quad ad - bc = 1 \Rightarrow abc = a^2 d - a$$

Тогда условие

$$\hat{g} = \Lambda^T \circ \hat{g} \circ \Lambda, \quad (2.41)$$

<sup>17</sup>Подчеркнем, что поднимание и опускание индексов с метрикой Минковского даже в декартовых координатах становится нетривиальным: часть компонент просто меняет знак!

<sup>18</sup>В англоязычной литературе метрикой Минковского называют тензор противоположного знака, так что две одновременные точки пространства-времени, разделенные длиной  $d\ell$ , имеют интервал  $ds^2 \mapsto d\ell^2$ , в точности совпадающий с инвариантом евклидовой метрики.

дает

$$\begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} abc = c^2 d = a^2 d - a, \\ a^2 - c^2 = 1, \\ b^2 - d^2 = -1. \end{cases}$$

Отсюда  $d = a$ ,  $b = c$ . Значит,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a^2 - b^2 = 1.$$

Это однопараметрическое решение можно записать, например, в виде:  $a = \text{ch } \vartheta$ ,  $b = -\text{sh } \vartheta$ , так что

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \text{ch } \vartheta & -\text{sh } \vartheta \\ -\text{sh } \vartheta & \text{ch } \vartheta \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

В координатах это преобразование изометрии запишется как

$$x'_0 = \text{ch } \vartheta (x_0 - \text{th } \vartheta x), \quad (2.55)$$

$$x' = \text{ch } \vartheta (x - \text{th } \vartheta x_0). \quad (2.56)$$

Найдем траекторию центра системы  $K'$  при переходе (2.56):  $x' = 0$ ,

$$x(t) = \text{th } \vartheta ct.$$

Значит, параметр  $\vartheta$  можно переписать в терминах скорости движения инерциальной системы отсчета  $K'$  относительно исходной системы  $K$  согласно замене

$$\text{th } \vartheta = \frac{\mathbf{u}}{c} \equiv \beta, \quad (2.57)$$

где  $\mathbf{u}$  — скорость  $K'$  относительно  $K$  по оси  $x$ . Тогда

$$\text{ch } \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \gamma.$$

В 2D-мерном пространстве-времени это преобразование имеет вид

$$\begin{cases} x'_0 = \gamma(x_0 - \beta x), \\ x' = \gamma(x - \beta x_0), \end{cases} \quad (2.58)$$

и носит название *лоренцева буста*. Параметр  $\vartheta$  называют углом гиперповорота.

В пространстве-времени Минковского в трех пространственными измерениями группа собственных ортохронных преобразований включает в себя бусты по трем пространственным направлениям (3 непрерывных параметра) и обычную группу поворотов в пространстве (3 непрерывных параметра), т.е. группа  $\text{SO}^{\uparrow}_+(3, 1)$  является шестипараметрической.

В этом разделе мы показали насколько мощным является инструмент изометрий в случае инвариантного волнового уравнения: вместо эвристического поиска преобразований лоренцева буста, оставляющих инвариантным волновое уравнение, мы использовали алгоритмическое рассмотрение, автоматически дающее искомый результат.

### §а. Действие свободной релятивистской частицы из теоремы Нётер

Если действие на траектории релятивистской частицы не зависит от выбора системы отсчета, т.е. если оно скаляр, инвариант, то и уравнения движения релятивистской частицы будут иметь ковариантный вид, а значит, уравнения движения будут записываться в терминах тензорных величин одинаково во всех системах отсчета. Итак, положим, что действие на траектории не зависит от скорости движения одной инерциальной системы относительно другой,  $\mathbf{u}$ :

$$d_{\mathbf{u}} S \equiv 0,$$

а значит, лоренцевы бусты являются симметрией физической системы.

Для бесконечно малого буста  $u \rightarrow 0$  преобразования координаты и времени (2.58) примут вид<sup>19</sup>:

$$x_u \approx x - ut, \quad t_u \approx t - \frac{u}{c^2} x.$$

Тогда из теоремы Нётер (1.24) следует сохранение интеграла движения

$$\mathcal{I} = \frac{\partial L}{\partial v} \frac{\partial x_u}{\partial u} - \left( \frac{\partial L}{\partial v} v - L \right) \frac{\partial t_u}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial v} \left( -t + v \frac{x}{c^2} \right) - L \frac{x}{c^2},$$

на траектории движения свободной частицы  $x(t)$ . Свободная частица движется прямолинейно и поступательно:  $x(t) = x_0 + vt$ . Значит, из условия  $\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}(0)$  прямым дифференцированием

$$\frac{d\mathcal{I}}{dt} \equiv 0,$$

находим дифференциальное уравнение для  $L = L(v)$ :

$$\frac{\partial L}{\partial v} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = -L \frac{v}{c^2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dL}{L} = -\frac{v dv}{c^2 - v^2},$$

которое после интегрирования

$$\int_{L_0}^{L(v)} \frac{dL}{L} = - \int_0^v \frac{v dv}{c^2 - v^2}, \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{L(v)}{L_0} = \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right),$$

приводит к

$$L(v) = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (2.59)$$

Физический смысл константы интегрирования  $L_0$  легко установить из нерелятивистского предела  $v \ll c$ :

$$L(v) \approx L_0 - L_0 \frac{v^2}{2c^2} + \dots$$

так что функция Лагранжа при малых скоростях приобретает стандартное выражение при  $L_0 = -mc^2$ . В итоге,

$$S = -mc^2 \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = -mc^2 \int d\tau = -mc \int ds, \quad (2.60)$$

где  $\tau$  — собственное время частицы, т.е. время отсчитываемое часами в системе, где частица покоится, а  $s$  — это интервал на траектории. Отсюда сразу видно, что действие — скаляр<sup>20</sup>.

<sup>19</sup>Здесь мы используем предел  $u \rightarrow 0$ . Читатель может проделать те же, но более громоздкие выкладки при конечном значении скорости буста и убедиться, что окончательный результат, а именно, выражение для функции Лагранжа свободной релятивистской частицы, конечно, никак не изменяется.

<sup>20</sup>Заметим, что требование релятивистской инвариантности уравнений движения частицы, менее строгое по сравнению с требованием релятивистской инвариантности действия частицы, означало бы, что

$$\frac{d\mathcal{I}}{dt} = f(v) = \frac{dF(t, x, v)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} v + \frac{\partial F}{\partial v} \dot{v},$$

так что решения ограничены условиями точно так же, как при рассмотрении лагранжиана свободной нерелятивистской частицы (см. стр. 25)

$$\frac{\partial F}{\partial v} \equiv 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \text{const.}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} \equiv 0,$$

в силу принципов причинности движения и изотропии пространства (в данном случае эквивалентность движения вдоль оси координаты направо и налево). Тогда решение уравнения для функции Лагранжа приводит вместо (2.59) к

$$\tilde{L} = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - E_*,$$

причем физический смысл параметра  $E_*$  сводится к калибровке начала отсчета шкалы энергии, так что эта величина никак не влияет на уравнения движения! Таким образом, можно говорить о перенормируемости теории относительно начала отсчета энергии. Однако введение такой ненулевой величины можно согласовать с принципом относительности только в одном случае, когда действие частицы представимо в виде

$$S = \int dt L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \int dt d^3r \frac{dE_*}{dV},$$

где  $dE_*/dV = \text{const.}$  — это плотность энергии в пространстве, где нет частиц, т.е. в вакууме. Значит, общее решение задачи о функции Лагранжа свободной релятивистской частицы включает в себя, как говорят, космологическую постоянную, т.е. плотность энергии вакуума, от которой не зависят уравнения движения частиц в пространстве-времени Минковского.

Согласно принципу наименьшего действия траектория частицы отвечает максимальному собственному времени между двумя заданными точками.

Пусть концы траектории — это положения покоящейся частицы в два момента времени в некоторой инерциальной системе отсчета. Тогда собственное время этой частицы, которое отвечает экстремальному значению действия для фиксированных граничных точек, больше собственного времени такой же частицы, которая будет двигаться по любой другой траектории от начальной точки к конечной. Итак, мы нашли, что из двух близнецов старше всегда тот, что покоился в исходной точке в инерциальной системе отсчета, а близнец, совершивший космическое путешествие на релятивистской ракете и вернувшийся к брату, окажется младше. Принцип наименьшего действия разрешает парадокс близнецов, который заключается в следующем: для покоящегося близнеца имеет место растяжения времени относительно движущегося близнеца, но каждый из близнецов может утверждать, что именно он покоился и он должен стать старше. Однако действительно покоился в инерциальной системе лишь один из близнецов, второй же, чтобы вернуться в ту же точку пространства к брату совершил пересадку на космический корабль, возвращающийся к брату, а значит, двигался во время пересадки с ускорением, и кажущаяся эквивалентность рассмотрения обоих братьев тем самым была нарушена.

### §b. Энергия, импульс, 4-скорость

Проведенный нами вывод функции Лагранжа релятивистской частицы в пространстве-времени с одним пространственным измерением легко обобщается на случай 3-мерного пространства, если положить, что это пространство изотропно и однородно, а значит, движение по всем осям описывается одинаково, и

$$L(\mathbf{v}) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}. \quad (2.61)$$

Функция Лагранжа задает импульс

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v}\gamma,$$

и энергию

$$E = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = mv^2\gamma + mc^2/\gamma = mc^2\gamma.$$

Эти величины можно связать с компонентами 4-скорости — производной координат по инвариантному собственному времени частицы  $d\tau = dt/\gamma$ :

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad u^\mu u_\mu = \gamma^2 c^2 (1 - v^2/c^2) = c^2.$$

Тогда

$$mu^\mu = \begin{pmatrix} p^{(0)} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad p^{(0)} = \frac{E}{c},$$

т.е. энергия, деленная на скорость света, является временной компонентой вектора 4-импульса, а импульс пространственной компонентой этого контрвектора:

$$p^\mu = mu^\mu.$$

Так как  $u_\mu u^\mu = c^2$ ,

$$p_\mu p^\mu = m^2 u_\mu u^\mu = m^2 c^2.$$

Ковариантный 4-импульс получается операцией опускания с метрикой Минковского

$$p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu, \quad p_0 = p^{(0)} = \frac{E}{c}, \quad p_\alpha = -p^\alpha, \quad p_\mu = (p_0, -\mathbf{p}),$$

а значит, инвариантное произведение 4-импульса на 4-вектор дифференциалов координат имеет вид

$$p_\mu dx^\mu = p_0 dx^{(0)} - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} = E dt - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r}.$$

Тогда в гамильтоновой формулировке механики действие можно записать в виде

$$S = \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} - p_0 dx^{(0)} = - \int p_\mu dx^\mu.$$

Из проведенного исследования в рамках лагранжевой механики сразу видно, что оно применимо только для массивных частиц; использовался нерелятивистский предел, который имеет место только



для массивных частиц. Однако гамильтонова формулировка допускает и описание безмассовых частиц. Для этого необходимо ввести 4-импульс, а траекторию в пространстве времени — рассматривать как параметрическую зависимость  $x^\mu(\lambda)$ , где  $\lambda$  — это параметр эволюции, который может быть выбран почти что произвольным образом, например  $\lambda = t$ , за исключением собственного времени  $\tau$ , так как собственное время неопределено для безмассовой частицы, т.е. для частицы, у которой интервал на траектории равен нулю,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 d\tau^2 = 0.$$

Поскольку для действия релятивистской частицы в гамильтоновой формулировке

$$\partial_\mu S = \frac{\partial S}{\partial x^\mu} = -p_\mu,$$

уравнение массовой поверхности

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = m^2 c^2$$

сводится к уравнению Гамильтона–Якоби

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu S \partial_\nu S = m^2 c^2, \quad (2.62)$$

которое справедливо как для массивных, так и для безмассовых частиц.

### 11.5. Градиент, дивергенция, ротор

Определим ковариантный вектор «набла». Если задан базис разложения бесконечно малой вариации координат, т.е., как говорят, базис в касательном пространстве, так что

$$d\mathbf{r} = dC^\alpha \mathbf{e}_\alpha,$$

то в двойственном векторном пространстве линейных функций на векторах касательного векторного пространства для ковекторов вводится базис  $\mathbf{h}^\alpha$ , который определяется соотношением

$$\mathbf{h}^\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \delta^\alpha_\beta, \quad (2.63)$$

где произведение ковектора с номером «альфа»  $\mathbf{h}^\alpha$  на вектор с номером «бета»  $\mathbf{e}_\beta$  понимается как произведение строки  $(\mathbf{h}^\alpha)_\mu$  на столбец  $(\mathbf{e}_\beta)^\mu$ , как это и должно быть при вычислении значения линейной функции на векторе, в данном случае функции  $\mathbf{h}^\alpha$  на векторе  $\mathbf{e}_\beta$ . По определению ковекторный оператор набла задается как

$$\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{h}^\alpha \frac{\partial}{\partial C^\alpha}. \quad (2.64)$$

В случае, когда исходный базис ортонормирован,

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad (2.65)$$

базис в ковариантном пространстве совпадает с базисом в исходном векторном, контравариантном пространстве:

$$\mathbf{h}^\alpha = \delta^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\beta,$$

и ковариантный оператор принимает вид

$$\nabla = \mathbf{e}_\beta \delta^{\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial C^\alpha} = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial C^\alpha}. \quad (2.66)$$

В нашем изложении понятий ротора, градиента и дивергенции мы далее будем использовать только ортонормированные базисы, так что везде будет подразумеваться именно (2.66).

Для примера, в декартовых координатах  $dC^\alpha = d\mathbf{r}^\alpha = (dx, dy, dz)^\top$  и  $\nabla_\alpha = \partial/\partial r^\alpha$ ,

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

но, скажем, в базисе сферических координат (2.1) инфинитезимальный вектор длины  $dC^\alpha = (dr, r d\theta, r \sin \theta d\phi)^\top$ , так что

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi}.$$

Действие ковектора набла переводит скаляр  $f$  в ковектор, который называют градиентом  $f$ :

$$\nabla f \stackrel{\text{def}}{=} \text{grad} f, \quad (\nabla f)_\alpha = \nabla_\alpha f. \quad (2.67)$$

Градиент связан с производной функции по направлению  $\mathbf{u}$  ( $\mathbf{u}^2 = 1$ )

$$d_{\mathbf{u}} f \stackrel{\text{def}}{=} f(\mathbf{r} + d\mathcal{C} \mathbf{u}) - f(\mathbf{r}) = d\mathcal{C} \mathbf{u} \cdot \nabla f,$$

так что этот дифференциал максимален в некотором направлении  $\mathbf{u}_*$ , и следовательно, градиент указывает направление и скорость максимального роста функции в точке. Направление градиента ортогонально к касательной линии уровня функции  $\mathbf{u}_\parallel$ , т.е. постоянного значения функции, когда  $d_{\mathbf{u}_\parallel} f = 0$ .

Вычислим  $\text{grad } r^2$  в декартовых координатах.

$$\nabla_\alpha r^2 = \partial_\alpha r^\beta r^\beta = 2r^\beta \partial_\alpha r^\beta = 2r^\beta \delta_\alpha^\beta = 2r_\alpha.$$

В векторных обозначениях

$$\text{grad } r^2 = 2\mathbf{r}.$$

Теперь легко вычислить  $\text{grad } r$ , пользуясь дифференцированием сложной функции,

$$\nabla_\alpha r = \frac{dr}{dr^2} \partial_\alpha r^2 = \left( \frac{dr^2}{dr} \right)^{-1} 2r_\alpha = \frac{1}{2r} 2r_\alpha = \frac{r_\alpha}{r} \Rightarrow \text{grad } r = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Скалярное произведение ковектора набла с вектором называется дивергенцией

$$\text{div } \mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \cdot \mathbf{a} = \nabla_\alpha a^\alpha. \quad (2.68)$$

Вычислим  $\text{div } \mathbf{r}$  в декартовых координатах.

$$\text{div } \mathbf{r} = \partial_\alpha r^\alpha = \delta_\alpha^\alpha = 3.$$

В декартовых координатах евклидова пространства (не различаем верхние и нижние индексы) векторное произведение набла с вектором  $\mathbf{a}$  образует вектор ротора<sup>21</sup>

$$\text{rot } \mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \times \mathbf{a}, \quad (\text{rot } \mathbf{a})_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\beta a_\gamma. \quad (2.69)$$

Отсюда, например,

$$\text{div rot } \mathbf{a} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \mathbf{a} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\alpha \nabla_\beta a_\gamma = 0,$$

поскольку свертка антисимметричного тензора с симметричным тождественно равна нулю.

**Задача 18.** Докажите, что свертка симметричного тензора  $s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}$  с антисимметричным  $t^{\alpha\beta} = -t^{\beta\alpha}$  тождественно равна нулю:

$$s_{\alpha\beta} t^{\alpha\beta} \equiv 0.$$

Вычислим  $\text{rot } \mathbf{r}$  в декартовых координатах.

$$(\text{rot } \mathbf{r})_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta r^\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \delta_\beta^\gamma = 0,$$

поскольку в декартовых координатах мы опять имеем свертку антисимметричного и симметричного тензоров по двум немным индексам.

Лапласианом называют скаляр

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \cdot \nabla, \quad (2.70)$$

который в декартовых координатах сводится к  $\Delta = \partial_\alpha \partial_\alpha$ .

**Задача 19.** Вычислите в уме, считая вектор  $\mathbf{k}$  постоянным:

$$\text{grad } (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad \text{div } \{ \mathbf{r} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \}, \quad \text{rot } \{ \mathbf{r} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \}.$$

**Задача 20.** Вычислить:  $\text{rot } (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ , где  $\boldsymbol{\omega}$  — постоянный вектор.

**Задача 21.** Вычислить:  $(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{r}$ ,  $\text{grad } f(r)$ ,  $\text{rot } \mathbf{a}(r)$ , где  $r = |\mathbf{r}|$ .

<sup>21</sup>В общем случае ротор определяется для ковектора как преобразование в контрвектор:  $(\text{rot } \mathbf{a})^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \nabla_\beta a_\gamma$ , — это пример перехода от антисимметричного ковариантного тензора второго ранга  $\frac{1}{2}(\nabla_\beta a_\gamma - \nabla_\gamma a_\beta)$  к контрвектору в 3-мерном пространстве, причем такая операция называется дуальным преобразованием.

### §а. Дифференцирование в сферических координатах при параллельном переносе

В сферических координатах базис зависит от точки пространства, так что необходимо учитывать его изменения, которые легко установить графически, вычисляя проекции вариации базисных векторов на сами базисные орты, что фактически означает параллельный перенос орт в исходную точку:

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\theta d\theta + \mathbf{e}_\phi \sin \theta d\phi, \\ d\mathbf{e}_\theta &= -\mathbf{e}_r d\theta + \mathbf{e}_\phi \cos \theta d\phi, \\ d\mathbf{e}_\phi &= -\mathbf{e}_r \sin \theta d\phi - \mathbf{e}_\theta \cos \theta d\phi. \end{aligned} \quad (2.71)$$

■ В самом деле, при изменении длины радиус вектора  $dr$  тройка базисных векторов остается в той же точке на единичной сфере, а значит, она остается без изменений, так что

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial r} = 0.$$

При изменении угла  $d\theta$  базисный вектор  $\mathbf{e}_r$  описывает на единичной сфере дугу длиной  $d\theta$  в направлении  $\mathbf{e}_\theta$ , т.е.

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta.$$

При изменении угла  $d\theta$  базисный вектор  $\mathbf{e}_\theta$  движется по касательной к единичной сфере, так что его изменение образует дугу  $d\theta$ , но это изменение направлено к центру сферы, т.е. в направлении против  $\mathbf{e}_r$ , поскольку известно, что при движении по окружности скорость направлена по касательной к окружности, а изменение скорости – ускорение – направлено к центру окружности, а значит,

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r.$$

При изменении угла  $d\theta$  базисный вектор  $\mathbf{e}_\phi$  остается в той же точке на плоскости  $(x, y)$  под тем же углом  $\phi$  к оси  $x$ , т.е. этот базисный вектор не изменяется и

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \theta} = 0.$$

При повороте вокруг оси  $z$  на угол  $d\phi$  изменяется проекция вектора  $\mathbf{e}_r$  в плоскости  $(x, y)$ , ортогональной оси поворота. Длина этой проекции равна  $\sin \theta$ , так что изменение  $\mathbf{e}_r$  образует дугу  $\sin \theta d\phi$  в направлении  $\mathbf{e}_\phi$ :

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi} = \sin \theta \mathbf{e}_\phi.$$

Аналогично, при повороте вокруг оси  $z$  на угол  $d\phi$  изменяется проекция вектора  $\mathbf{e}_\theta$  в плоскости  $(x, y)$ , ортогональной оси поворота. Длина этой проекции равна  $\cos \theta$ , так что изменение  $\mathbf{e}_\theta$  образует дугу  $\cos \theta d\phi$  в направлении  $\mathbf{e}_\phi$ :

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \phi} = \cos \theta \mathbf{e}_\phi.$$

Длина дуги, которая очерчена концом единичного вектора  $\mathbf{e}_\phi$  при повороте вокруг оси  $z$  на угол  $d\phi$ , составляет величину  $d\phi$ . Такое изменение вектора  $\mathbf{e}_\phi$  направлено от точки на единичной окружности к её центру в плоскости  $(x, y)$ . В декартовых координатах на плоскости  $(x, y)$  3-мерные компоненты единичного радиус-вектора в этой плоскости  $\mathbf{e}_{xy} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$ , так что направление от точки на окружности к центру задается вектором  $-\mathbf{e}_{xy}$ , а значит,

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi} = -\mathbf{e}_{xy},$$

причем  $\mathbf{e}_{xy} \cdot \mathbf{e}_\phi = 0$ . Очевидно, что скалярные произведения вектора  $\mathbf{e}_{xy}$  с базисными векторами сферических координат, которые в декартовых координатах имеют компоненты

$$\mathbf{e}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad \mathbf{e}_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta), \quad \mathbf{e}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0),$$

легко вычисляются в явном виде,

$$\mathbf{e}_{xy} \cdot \mathbf{e}_r = \sin \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = \sin \theta, \quad \mathbf{e}_{xy} \cdot \mathbf{e}_\theta = \cos \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = \cos \theta, \quad \mathbf{e}_{xy} \cdot \mathbf{e}_\phi = -\cos \phi \sin \phi + \sin \phi \cos \phi = 0.$$

В итоге,

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi} = -\mathbf{e}_{xy} = -\sin \theta \mathbf{e}_r - \cos \theta \mathbf{e}_\theta.$$

■ **Задача 22.** Используя выражения для дифференциалов базисных векторов в (2.71), проверьте, что

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\phi) = \frac{\partial}{\partial \phi} (\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\phi) = 0,$$

как это и должно быть для ортонормированного базиса.

Тогда, оставляя при дифференцировании в уме только вклады с ненулевыми скалярными произведениями ортонормированных базисных векторов, найдем, что

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \nabla &= \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi} \right\} = \mathbf{e}_r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}, \\
 \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} \nabla &= \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} \left\{ \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi} \right\} = \\
 &= \mathbf{e}_\theta^2 \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r \partial \theta^2} \right\} = \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2}, \\
 \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi} \nabla &= \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi} \left\{ \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi} \right\} = \\
 &= \mathbf{e}_\phi^2 \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + \frac{\partial^2}{r \sin \theta \partial \phi^2} \right\} \\
 &= \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{r^2 \partial \theta} + \frac{\partial^2}{r^2 \sin^2 \theta \partial \phi^2},
 \end{aligned}$$

и в итоге,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} \quad (2.72)$$

или

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right\}. \quad (2.73)$$

**Задача 23.** Используя графические построения для изменения базисных векторов в полярных координатах, вычислите оператор Лапласа на плоскости

$$\Delta_{2D} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

Hint: для проверки результата в соотношениях (2.71) зафиксируйте угол  $\theta = \pi/2$ ,  $d\theta = 0$  и сравните с явными построениями в начертательной геометрии.

Вводят также оператор сдвига по модулю радиус-вектора

$$\hat{k}_r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r},$$

для которого

$$\hat{k}_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

а также угловую часть оператора Лапласа

$$\Delta_{\theta, \phi} f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2},$$

так что

$$\Delta f = \hat{k}_r^2 f + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \phi} f. \quad (2.74)$$

Оператор сдвига по радиусу определяется на функциях вида

$$\hat{k}_r \left\{ \frac{1}{r} u(r) \right\} = \frac{1}{r} u'(r).$$

Поэтому, рассматривая экспоненту от оператора как ряд Тейлора<sup>22</sup> по степеням оператора, найдем

$$e^{\hat{k}_r a} \frac{1}{r} u(r) = \sum_n \frac{1}{n!} a^n \frac{1}{r} u^{(n)}(r) = \frac{1}{r} u(r+a).$$

<sup>22</sup>Схема возникновения ряда Тейлора функции в малой окрестности заданной точки описана в Приложении на стр. 170 в разделе 33.§b.

В частности, функции

$$\Phi_k(r) = \frac{1}{r} e^{ikr}$$

являются собственными для генератора сдвига по радиусу  $\hat{p}_r = -i\hat{k}_r$ :

$$\hat{p}_r \Phi_k(r) = k \Phi_k(r).$$

Если собственное значение вещественное,  $k \in \mathbb{R}$ , то собственная функция является ограниченной.

Оператор Лапласа играет важную роль в квантовой механике: как мы знаем, оператор импульса в пространстве амплитуд вероятности  $\Psi$  имеет вид  $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ , так что кинетическая энергия

$$\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi,$$

и в уравнении Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(t, \mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \Psi(t, \mathbf{r})$$

необходимо знать, как лапласиан действует на волновую функцию  $\Psi(t, \mathbf{r})$ .

В сферических координатах тем же способом действия частных производных на базисные векторы можно вычислить

$$\text{grad } r = \nabla r = \mathbf{e}_r \frac{\partial r}{\partial r} = \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r},$$

$$\text{div } \mathbf{r} = \nabla \cdot (r \mathbf{e}_r) = \mathbf{e}_r^2 \frac{\partial r}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta^2 \frac{1}{r} r + \mathbf{e}_\phi^2 \frac{1}{r \sin \theta} r \sin \theta = 3,$$

$$\text{rot } \mathbf{r} = \nabla \times (r \mathbf{e}_r) = \frac{\partial r}{\partial r} \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \times (r \mathbf{e}_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \times (r \sin \theta \mathbf{e}_\phi) = 0.$$

Полезные упражнения по векторному анализу можно найти в сборнике задач по теоретической физике из заданий МФТИ [6].

Кроме того, здесь уместно заметить, что для более глубокого понимания векторного анализа следует ознакомиться с современным языком рассмотрения интегралов по контурам и поверхностям на языке дифференциальных форм (см. §11.8. и [5]).

## Лекция № 5

Аналитический метод дифференцирования в криволинейных координатах, производная Ли и параллельный перенос, коммутатор производных Ли, тождество Якоби и алгебра Ли, связь базисов контр- и ковариантного пространства и производная Ли по направлению базисного вектора, тензор кручения и координатная сетка в пространстве, ковариантная производная с метрической связностью, символы Кристоффеля, ковариантная дивергенция, оператор Бельтрами–Лапласа, коэффициенты Ламе, векторы Киллинга как бесконечно малые сдвиги изометрий, уравнения Эйлера–Лагранжа в ковариантном виде, принцип эквивалентности инерционной и гравитационной массы, гравитационный потенциал как причина зависимости хода времени от точки в пространстве, гравитационное притяжение и псевдоевклидова сигнатура метрики пространства-времени, тензор кривизны Римана, параллельный перенос вектора по бесконечно малому замкнутому контуру, тензор Риччи, скалярная кривизна, ковариантная формулировка принципа относительности Галилея.

## 11.5. Дифференцирование в криволинейных координатах

В криволинейных координатах базисные векторы и метрика зависят от точки пространства. При этом, изменение базисных векторов при бесконечно малом сдвиге для сферических координат мы установили при помощи наглядных геометрических построений в евклидовом пространстве. В общем случае такая наглядность может быть довольно затруднительна, так что имеется необходимость в получении универсального, аналитического инструментария для дифференцирования тензорных величин в криволинейных координатах — дифференциальной геометрии.

Как мы видели на примере преобразования метрики при смене координат, аналитический метод подразумевает введение полилинейных скалярных функций в векторном пространстве, что и позволяет получать величины с тензорными свойствами.

## §а. Производная Ли по направлению

Рассмотрим инфинитезимальный сдвиг координат векторного пространства

$$r'^\alpha = r^\alpha + \xi^\alpha(\mathbf{r}), \quad \xi^\alpha \rightarrow 0. \quad (2.75)$$

Изменение скаляра по направлению  $\xi$  с помощью разложения в ряд Тейлора с точностью до членов первого порядка по  $\xi$  запишется в виде

$$L_\xi f \stackrel{\text{def}}{=} f(\mathbf{r}') - f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r} + \xi) - f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) + \xi^\alpha \partial_\alpha f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = \xi^\alpha \partial_\alpha f(\mathbf{r}). \quad (2.76)$$

В таком случае говорят о производной Ли скаляра по направлению вектора  $\xi$ :  $L_\xi f$ . Для скалярной функции при смене базиса  $f'(\mathbf{r}') = f(\mathbf{r})$ , поэтому можно ввести понятие параллельного переноса скаляра как  $f_{||}(\mathbf{r}') = f'(\mathbf{r}')$ , в то время как при вычислении производной Ли по направлению мы рассматриваем разность значения скаляра в новой точке со штрихом и значением параллельно перенесенного значения скаляра в той же новой точке со штрихом

$$f(\mathbf{r}') - f_{||}(\mathbf{r}') = f(\mathbf{r}') - f(\mathbf{r}).$$

Рассмотрим ковекторное поле  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  и построим инвариант<sup>23</sup> первого порядка малости

$$\delta F(\mathbf{r}') \stackrel{\text{def}}{=} a_\alpha(\mathbf{r}') dr'^\alpha.$$

Используя разложение в ряд Тейлора по  $\xi$  для ковекторного поля  $a_\alpha(\mathbf{r}')$  и преобразование дифференциалов координат согласно (2.75)

$$\frac{\partial r'^\alpha}{\partial r^\beta} = \delta_\beta^\alpha + \partial_\beta \xi^\alpha, \quad (2.77)$$

в первом порядке по  $\xi \rightarrow 0$  найдем

$$\delta F(\mathbf{r}') = (a_\alpha(\mathbf{r}) + \xi^\gamma \partial_\gamma a_\alpha) (\delta_\beta^\alpha + \partial_\beta \xi^\alpha) dr^\beta = a_\alpha(\mathbf{r}) dr^\alpha + dr^\alpha \xi^\gamma \partial_\gamma a_\alpha + dr^\beta a_\alpha(\mathbf{r}) \partial_\beta \xi^\alpha, \quad (2.78)$$

где есть вклад скаляра

$$\delta F(\mathbf{r}) = a_\alpha(\mathbf{r}) dr^\alpha.$$

Разность скаляров

$$\delta F(\mathbf{r}') - \delta F(\mathbf{r}) = (\xi^\gamma \partial_\gamma a_\alpha + a_\gamma \partial_\alpha \xi^\gamma) dr^\alpha$$

<sup>23</sup>Отметим, что построенный инвариант не является, вообще говоря, полной производной: в общем случае ковектор  $a_\alpha$  не является частной производной инварианта по координатам.

является скаляром, а значит, ковектором является величина

$$L_{\xi} a_{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \xi^{\gamma} \partial_{\gamma} a_{\alpha} + a_{\gamma} \partial_{\alpha} \xi^{\gamma}, \quad (2.79)$$

которую называют производной Ли ковектора  $\mathbf{a}$  по направлению  $\xi$ , поскольку

$$a_{\alpha}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'^{\alpha} = a_{\alpha}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}^{\alpha} + L_{\xi} a_{\alpha} d\mathbf{r}^{\alpha}.$$

Совершенно аналогично, производная Ли вектора  $\mathbf{a}$  по направлению  $\xi$  может быть получена при рассмотрении инварианта

$$\delta G(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} a^{\alpha}(\mathbf{r}) \partial_{\alpha},$$

так что

$$a^{\alpha}(\mathbf{r}') \partial'_{\alpha} = a^{\alpha}(\mathbf{r}) \partial_{\alpha} + L_{\xi} a^{\alpha} \partial_{\alpha}, \quad (2.80)$$

где, с учетом преобразования частных производных при  $\xi \rightarrow 0$

$$\partial'_{\beta} = \left( \frac{\partial r^{\alpha}}{\partial r'^{\beta}} \right) \partial_{\alpha} = (\delta_{\beta}^{\alpha} - \partial_{\beta} \xi^{\alpha}) \partial_{\alpha}, \quad (2.81)$$

находим

$$L_{\xi} a^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \xi^{\gamma} \partial_{\gamma} a^{\alpha} - a^{\gamma} \partial_{\gamma} \xi^{\alpha}. \quad (2.82)$$

Заметим, что производная Ли вектора  $\xi$  по направлению  $\xi$  тождественно равна нулю.

Наглядное представление о производной Ли вектора по направлению состоит в следующем: вектор в точке  $\mathbf{r}'$  и в точке  $\mathbf{r}$  записывается в разных базисах, штрихованном и нештрихованном, соответственно, а значит, он в этих точках при замене базиса преобразуется совершенно разными матрицами, заданными в разных точках, т.е. из векторов в штрихованной и нештрихованной точках посредством операции сложения (вычитания) невозможно составить объект, являющийся тензорной величиной с соответствующим законом преобразования в заданной точке, и поэтому для сравнения векторов необходимо разложить штрихованный базис по исходному, нештрихованному и получить таким образом компоненты вектора в нештрихованном базисе. Такое разложение по исходному базису называют параллельным переносом вектора из штрихованной точки в не штрихованную. Тогда перенесенный параллельно в нештрихованную точку вектор преобразуется по закону вектора в этой точке, но, при этом, результат параллельного переноса не совпадает с исходным вектором в этой точке, и различие определяется производной Ли.

В математике говорят, что параллельный перенос векторного поля  $a^{\alpha}(\mathbf{r})$  вдоль направления  $\xi(\mathbf{r})$  в точку  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \xi(\mathbf{r})$  при  $\xi(\mathbf{r}) \rightarrow 0$  дает векторное поле  $a_{\parallel}^{\alpha}(\mathbf{r}')$ , так что по определению  $L_{\xi} a_{\parallel}^{\alpha} = 0$ . Это значит, что

$$a_{\parallel}^{\alpha}(\mathbf{r}') \partial'_{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} a^{\alpha}(\mathbf{r}) \partial_{\alpha}, \quad (2.83)$$

т.е. компоненты параллельно перенесенного поля в штрихованном базисе совпадают с компонентами исходного поля в нештрихованном базисе. Поэтому

$$(a^{\alpha}(\mathbf{r}') - a_{\parallel}^{\alpha}(\mathbf{r}')) \partial'_{\alpha} = L_{\xi} a^{\alpha} \partial_{\alpha}, \quad (2.84)$$

и следовательно, разница между векторным полем и параллельно перенесенным полем задается производной Ли по направлению переноса. Еще раз подчеркнем, что согласно закону преобразования векторов и ковекторов их свертка является инвариантом, так что

$$a^{\alpha}(\mathbf{r}) \partial_{\alpha} = a'^{\alpha}(\mathbf{r}') \partial'_{\alpha},$$

а значит, параллельно перенесенное в точку со штрихом векторное поле совпадает с полем, которое получается согласно закону преобразования векторов,  $a_{\parallel}^{\alpha}(\mathbf{r}') = a'^{\alpha}(\mathbf{r}')$ , так что при вычислении производной Ли векторного поля по направлению мы, по сути, рассматриваем разность между значением поля в точке со штрихом и значением поля, которое получается в этой точке при параллельном переносе, а именно это и записано в соотношении (2.84).

**Задача 24.** Покажите, что коммутатор производных Ли по двум направлениям для скаляра сводится к производной Ли

$$[L_{\xi}, L_{\eta}] f \equiv (L_{\xi} L_{\eta} - L_{\eta} L_{\xi}) f = L_{[\xi, \eta]} f, \quad \text{где} \quad [\xi, \eta] = L_{\xi} \eta.$$

**Задача 25.** Покажите, что коммутатор производных Ли по двум направлениям для вектора сводится к производной Ли

$$[L_{\xi}, L_{\eta}] a^{\gamma} = L_{[\xi, \eta]} a^{\gamma}.$$

Как видно из задач, производная Ли — это композиция на векторах, т.е. операция, которая коммутатору производных Ли ставит в соответствие производную Ли. По построению эта композиция является антисимметричной по перестановке:  $L_\xi \eta = [\xi, \eta] = -[\eta, \xi] = -L_\eta \xi$ , — и линейной по аргументам:  $L_{\xi+\eta} = L_\xi + L_\eta$ ,  $L_{c\xi} = cL_\xi$ . Кроме того,

$$[L_\xi, [L_\eta, L_\chi]] = L_{[\xi, [\eta, \chi]]}.$$

Тогда элементарно находим тождество Якоби для циклической перестановки

$$[L_\xi, [L_\eta, L_\chi]] + [L_\eta, [L_\chi, L_\xi]] + [L_\chi, [L_\xi, L_\eta]] = 0.$$

Налицо алгебра Ли, построенная на производных Ли: векторное пространство с антисимметричной композицией и верным тождеством Якоби.

Для тензоров вычисление производных Ли сводится к правилам (2.79) и (2.82) по каждому индексу. Так, скажем, для ковариантного тензора второго ранга, например, для метрики эта производная имеет вид

$$L_\xi g_{\alpha\beta} = \xi^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + g_{\gamma\beta} \partial_\alpha \xi^\gamma + g_{\alpha\gamma} \partial_\beta \xi^\gamma. \quad (2.85)$$

Другой пример — производная Ли символа Кронекера,

$$L_\xi \delta_\beta^\alpha = \xi^\gamma \partial_\gamma \delta_\beta^\alpha - \delta_\beta^\gamma \partial_\gamma \xi^\alpha + \delta_\gamma^\alpha \partial_\beta \xi^\gamma = 0 - \partial_\beta \xi^\alpha + \partial_\beta (\xi^\gamma \delta_\gamma^\alpha) = 0.$$

Это значит, что инвариантный тензор Кронекера не меняется при сдвиге по любому направлению. Говорят, что тензор Кронекера при параллельном переносе переходит сам в себя.

## §b. Ковариантная производная

Рассмотрим производную Ли вектора  $a^\alpha$  по направлению базисного вектора  $\mathbf{e}_\mu$ , т.е. в выражении (2.82) проведем подстановку<sup>24</sup>  $\xi \mapsto \mathbf{e}_\mu$ :

$$L_\mu a^\alpha = \mathbf{e}_\mu^\gamma \partial_\gamma a^\alpha - a^\beta \partial_\beta \mathbf{e}_\mu^\alpha. \quad (2.86)$$

Как мы видели на примере базиса в сферических координатах, производные базисных векторов при смещении координат  $\partial_\gamma \mathbf{e}_\mu^\alpha$ , вообще говоря, не равны нулю. Для аналитического вычисления таких производных, введем базис в пространстве ковекторов,  $\mathbf{h}^\nu$ , согласно условию ортонормированности<sup>25</sup>

$$\mathbf{e}_\mu^\gamma \mathbf{h}_\gamma^\nu = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{h}^\nu = \delta_\mu^\nu. \quad (2.87)$$

Смысл величин  $\mathbf{e}_\mu^\alpha$  и  $\mathbf{h}_\alpha^\nu$  ясен: это «альфты» координаты «нютого» базисного вектора в самом базисе векторов и «нютого» базисного ковектора в самом базисе ковекторов, соответственно, т.е. это — просто единичные матрицы по указанным индексам.

Компоненты «нютого» базисного вектора преобразуются стандартно согласно закону преобразования векторов

$$\mathbf{e}_\nu^\alpha(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\nu^\beta(\mathbf{r}_0) \frac{\partial r^\alpha}{\partial r_0^\beta}, \quad (2.88)$$

где в исходной фиксированной точке  $\mathbf{r}_0$  компоненты базисного вектора, как мы уже говорили выше,

$$\mathbf{e}_\nu^\beta(\mathbf{r}_0) = \delta_\nu^\beta, \quad (2.89)$$

так что

$$\mathbf{e}_\nu^\alpha(\mathbf{r}) = \frac{\partial r^\alpha}{\partial r_0^\nu}. \quad (2.90)$$

Аналогично

$$\mathbf{h}_\alpha^\nu(\mathbf{r}) = \frac{\partial r_0^\nu}{\partial r^\alpha}. \quad (2.91)$$

<sup>24</sup>Имея ввиду бесконечно малый вектор  $\xi$ , можно делать подстановку  $\xi \mapsto \epsilon \mathbf{e}_\mu$ , где  $\epsilon \rightarrow 0$ . Скалярный параметр  $\epsilon$ , независимый от координат, затем можно сократить во всех выражениях, так что мы его не вводим для упрощения формул дальнейшего изложения.

<sup>25</sup>По сути задаются линейные функции на векторном пространстве путем указания их значений на базисных векторах  $\mathbf{e}_\mu$ . Напомним, что сами эти функции как раз и образуют базис в ковекторном пространстве: число этих, независимых по построению, функций совпадает с размерностью ковекторного пространства, и любая другая линейная функция входит как элемент в состав линейной оболочки функций  $\mathbf{h}^\nu$ .



Выражения для базисных векторов и ковекторов (2.90) и (2.91) можно наглядно интерпретировать в случае, если в пространстве координат вводится координатная сетка. Тогда можно задать касательные векторы к координатным линиям  $n_\nu^\alpha$ , где  $\nu$  — это номер координатной линии, так что бесконечно малое смещение координаты вдоль касательной задается выражением

$$dr^\alpha = n_\nu^\alpha dr_0^\nu,$$

откуда сразу следует, что базисный вектор  $\mathbf{e}_\nu^\alpha(\mathbf{r})$ , записанный в (2.90), совпадает с касательной «нютой» линией координатной сетки. В тех же терминах координатной сетки выражение (2.91) отвечает градиенту «нютой» координаты,

$$\mathbf{h}_\alpha^\nu(\mathbf{r}) = \partial_\alpha r_0^\nu.$$

Из (2.90) и (2.91) следует еще одно тождество:

$$\mathbf{e}_\mu^\alpha \mathbf{h}_\beta^\mu = \delta_\beta^\alpha. \quad (2.92)$$

Итак, с учетом установленных нами связей между базисными векторами и ковекторами производную Ли (2.86) можно записать в виде

$$\mathbf{L}_\mu a^\alpha = \mathbf{e}_\mu^\gamma \partial_\gamma a^\alpha - \mathbf{e}_\mu^\gamma \mathbf{h}_\gamma^\nu a^\beta \partial_\beta \mathbf{e}_\nu^\alpha = \mathbf{e}_\mu^\gamma (\partial_\gamma a^\alpha - \mathbf{h}_\gamma^\nu a^\beta \partial_\beta \mathbf{e}_\nu^\alpha). \quad (2.93)$$

В итоге, мы получили разложение по базису  $\mathbf{e}_\mu$  вектора производной Ли по направлению базисного вектора, и следовательно, можно ввести понятие о тензоре ковариантной производной вектора:

$$\nabla_\gamma a^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\gamma a^\alpha - a^\beta \mathbf{h}_\gamma^\nu \partial_\beta \mathbf{e}_\nu^\alpha. \quad (2.94)$$

Мы определили связь производной Ли и ковариантной производной

$$\mathbf{L}_\mu a^\alpha = \mathbf{e}_\mu^\gamma \nabla_\gamma a^\alpha. \quad (2.95)$$

Поскольку

$$\mathbf{h}_\gamma^\nu \partial_\beta \mathbf{e}_\nu^\alpha = \partial_\beta (\mathbf{h}_\gamma^\nu \mathbf{e}_\nu^\alpha) - \mathbf{e}_\nu^\alpha \partial_\beta \mathbf{h}_\gamma^\nu = \partial_\beta (\delta_\gamma^\alpha) - \mathbf{e}_\nu^\alpha \partial_\beta \mathbf{h}_\gamma^\nu = -\mathbf{e}_\nu^\alpha \partial_\beta \mathbf{h}_\gamma^\nu,$$

можно записать, что

$$-\mathbf{h}_\gamma^\nu \partial_\beta \mathbf{e}_\nu^\alpha = \frac{1}{2} \{ \mathbf{e}_\nu^\alpha \partial_\beta \mathbf{h}_\gamma^\nu + \mathbf{e}_\mu^\alpha \partial_\gamma \mathbf{h}_\beta^\mu \} + \frac{1}{2} \{ \mathbf{e}_\nu^\alpha \partial_\beta \mathbf{h}_\gamma^\nu - \mathbf{e}_\nu^\alpha \partial_\gamma \mathbf{h}_\beta^\nu \} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + T_{\beta\gamma}^\alpha, \quad (2.96)$$

где мы выделили симметричную по перестановкам ковариантных индексов часть  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$  и антисимметричную часть  $T_{\beta\gamma}^\alpha = -T_{\gamma\beta}^\alpha$ , которые называются симметричной связностью и кручением (торсионной связностью), соответственно.

**Задача 26.** Покажите, что

$$\mathbf{L}_\mu \mathbf{e}_\nu^\alpha - \mathbf{L}_\nu \mathbf{e}_\mu^\alpha = (\mathbf{e}_\mu^\gamma \mathbf{e}_\nu^\beta - \mathbf{e}_\mu^\beta \mathbf{e}_\nu^\gamma) (T_{\beta\gamma}^\alpha - T_{\gamma\beta}^\alpha).$$

Наглядный смысл кручения

$$T_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} \{ \mathbf{e}_\nu^\alpha \partial_\beta \mathbf{h}_\gamma^\nu - \mathbf{e}_\nu^\alpha \partial_\gamma \mathbf{h}_\beta^\nu \}. \quad (2.97)$$

можно выяснить, если ввести в пространстве координатную сетку, так что в ковариантном пространстве базис задается градиентами к линиям координатной сетки с постоянной координатой<sup>26</sup>:

$$\mathbf{h}_\beta^\nu = \partial_\beta X^\nu,$$

где  $X^\nu$  — это «нютая» функция линии координатной сетки  $X^\nu = \text{const.}$ , в которой все аргументы, кроме «нютого», принимают значения на поверхности с фиксированным значением «нютой» координаты, а константа может зависеть от точки в пространстве. Величина

$$\epsilon_1 \epsilon_2 \partial_\beta \mathbf{h}_\gamma^\nu$$

<sup>26</sup>Очевидно, что касательная к линии координаты задает направление базисного вектора в векторном пространстве. Линия постоянного значения значения координаты вблизи заданной реперной точки направлена по касательной к линии другой координаты. Следовательно, градиент к линии постоянного значения исходной координаты задает направление максимально быстрого изменения исходной координаты, которое ортогонально касательной к линии постоянного значения исходной координаты, т.е. ортогонально базисному вектору по другой координате.

задает сдвиг координатной сетки сначала по направлению «гамма» базисного вектора с номером «ню» на бесконечно малый шаг  $\epsilon_1$ , а затем сдвиг координатной сетки в направлении «бета» на бесконечно малый шаг  $\epsilon_2$ . Величина

$$\epsilon_1 \epsilon_2 \partial_\gamma \mathfrak{h}_\beta^\nu$$

задает сдвиг координатной сетки сначала по направлению «бета» базисного вектора с номером «ню» на бесконечно малый шаг  $\epsilon_2$ , а затем сдвиг координатной сетки в направлении «гамма» на бесконечно малый шаг  $\epsilon_1$ . Если в пространстве действительно можно ввести не только базис в каждой точке, но и координатную сетку, то разность указанных выше величин, равна

$$\epsilon_1 \epsilon_2 (\partial_\beta \partial_\gamma - \partial_\gamma \partial_\beta) X^\nu \equiv 0,$$

так как частное дифференцирование перестановочно. Таким образом, кручение тождественно равно нулю в пространствах, в которых можно ввести координатную сетку, а базисные векторы ковариантного пространства образованы градиентами к линиям постоянных координат этой сетки. Если кручение не равно нулю, то базисные векторы не являются градиентами линий постоянных координат, т.е. градиентами к линиям координатной сетки, а значит, саму эту координатную сетку невозможно ввести: такие геометрические пространства называются неинтегрируемыми, или неголономными.

**Задача 27.** На евклидовой плоскости найдите базис  $\mathfrak{h}^{1,2}$  ковариантного пространства, выразив его через базис векторного пространства, который задан в виде

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{e}_x + \frac{1}{2} \mathbf{e}_y.$$

Запишите метрику в заданном базисе векторного пространства. Используйте метод определения ковариантного базиса соотношениями ортонормировки и метод градиента к линии постоянной координаты.

Мы будем исследовать голономные пространства, т.е. пространства с координатной сеткой, а значит, с нулевым кручением. Тогда ковариантная производная вектора может быть записана в терминах симметричной связности:

$$\nabla_\gamma a^\alpha = \partial_\gamma a^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha a^\beta, \quad \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \{ \mathbf{e}_\nu^\alpha \partial_\beta \mathfrak{h}_\gamma^\nu + \mathbf{e}_\nu^\alpha \partial_\gamma \mathfrak{h}_\beta^\nu \}. \quad (2.98)$$

Связность можно выразить через метрику пространства. Для этого опустим индекс  $\Gamma_{\alpha|\beta\gamma} = g_{\alpha\alpha'} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha'}$  и запишем тождество

$$\Gamma_{\alpha|\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \mathfrak{h}_\gamma^\nu \partial_\beta (g_{\alpha\alpha'} \mathbf{e}_\nu^{\alpha'}) + \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \mathfrak{h}_\beta^\nu \partial_\gamma (g_{\alpha\alpha'} \mathbf{e}_\nu^{\alpha'}) \right\}, \quad (2.99)$$

поскольку, согласно (2.92),

$$g_{\alpha\alpha'} \mathbf{e}_\mu^{\alpha'} \mathfrak{h}_\beta^\mu = g_{\alpha\alpha'} \delta_\beta^{\alpha'} = g_{\alpha\beta}.$$

Для вычисления производных вида

$$\partial_\gamma (g_{\alpha\alpha'} \mathbf{e}_\nu^{\alpha'}) = \partial_\gamma \mathbf{e}_{\alpha\nu},$$

воспользуемся тем, что базисы в векторном и ковекторном пространствах относятся к одной и той же координатной сетке, а значит,

$$\mathbf{e}_{\alpha\nu}(\mathbf{r}) = g_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}) \mathbf{e}_\nu^{\alpha'}(\mathbf{r}) = g_{\beta\alpha'}(\mathbf{r}) \mathbf{e}_\nu^{\alpha'}(\mathbf{r}) \mathbf{e}_{\nu'}^\beta(\mathbf{r}) \mathfrak{h}_\alpha^{\nu'}(\mathbf{r}). \quad (2.100)$$

Для ковариантного тензора метрики закон преобразования

$$g_{\mu\nu}(\mathbf{r}_0) = g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \frac{\partial r^\alpha}{\partial r_0^\mu} \frac{\partial r^\beta}{\partial r_0^\nu}$$

с помощью связи частных производных с базисным вектором в точке  $\mathbf{r}$ , которую мы установили выше

$$\mathbf{e}_\nu^\alpha(\mathbf{r}) = \frac{\partial r^\alpha}{\partial r_0^\nu} \quad (2.90)$$

может быть записан в виде

$$g_{\mu\nu}^{(0)} \equiv g_{\mu\nu}(\mathbf{r}_0) = g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \mathbf{e}_\mu^\alpha(\mathbf{r}) \mathbf{e}_\nu^\beta(\mathbf{r}).$$

Поэтому цепочка тождеств в (2.100) дает

$$\epsilon_{\alpha\nu}(\mathbf{r}) = g_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}) \epsilon_{\nu'}^{\alpha'}(\mathbf{r}) = g_{\beta\alpha'}(\mathbf{r}) \epsilon_{\nu'}^{\alpha'}(\mathbf{r}) \epsilon_{\nu'}^{\beta}(\mathbf{r}) \mathfrak{h}_{\alpha}^{\nu'}(\mathbf{r}) = g_{\nu\nu'}^{(0)} \mathfrak{h}_{\alpha}^{\nu'}(\mathbf{r}), \quad (2.101)$$

где  $g_{\nu\nu'}^{(0)}$  — метрика в фиксированной точке, рассматриваемого пространства, которую можно считать началом отсчета координатной сетки, в отличие от базисных контр- и ковекторов, которые изменяются при сдвиге координат и имеют ненулевые частные производные, которые мы и хотим найти.

Аналогично, используя базис в ковариантном пространстве, находим, что

$$g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = g_{\mu\nu}(\mathbf{r}_0) \mathfrak{h}_{\alpha}^{\mu}(\mathbf{r}) \mathfrak{h}_{\beta}^{\nu}(\mathbf{r}).$$

Это позволяет констатировать, что для базисов в векторном и ковекторном пространствах индексы типа «альфа» опускаются и поднимаются метрическим тензором в точке  $\mathbf{r}$ , а индексы типа «ню» опускаются и поднимаются метрическим тензором в фиксированной точке  $\mathbf{r}_0$ .

Независимость  $g_{\nu\nu'}^{(0)}$  от сдвигов отвечает тому, что мы разлагаем векторы по фиксированному базису в заданной точке: коэффициенты разложения зависят от сдвига, а базис разложения зафиксирован. Тогда, в силу равенства нулю кручения, можно переставить индексы частной производной и частного дифференцирования:

$$\partial_{\gamma} \epsilon_{\alpha\nu} = \partial_{\gamma} \left\{ g_{\nu\nu'}^{(0)} \mathfrak{h}_{\alpha}^{\nu'}(\mathbf{r}) \right\} = g_{\nu\nu'}^{(0)} \partial_{\gamma} \left\{ \mathfrak{h}_{\alpha}^{\nu'}(\mathbf{r}) \right\} = g_{\nu\nu'}^{(0)} \partial_{\alpha} \left\{ \mathfrak{h}_{\gamma}^{\nu'}(\mathbf{r}) \right\} = \partial_{\alpha} \epsilon_{\gamma\nu},$$

так что кручение обращается в нуль и для базиса  $\epsilon_{\alpha\nu}$ :

$$g_{\nu\nu'}^{(0)} T_{\gamma\alpha}^{\nu'} = \partial_{\gamma} \epsilon_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha} \epsilon_{\gamma\nu} = 0,$$

и связность запишется в виде

$$\Gamma_{\alpha|\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_{\beta} g_{\alpha\gamma} + \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta} - \mathfrak{h}_{\gamma}^{\nu} \partial_{\alpha} \epsilon_{\beta\nu} - \mathfrak{h}_{\beta}^{\nu} \partial_{\alpha} \epsilon_{\gamma\nu} \right\}. \quad (2.102)$$

Поскольку

$$\mathfrak{h}_{\gamma}^{\nu} \epsilon_{\beta\nu} = g_{\gamma\beta},$$

найдем

$$\Gamma_{\alpha|\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_{\beta} g_{\alpha\gamma} + \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha} g_{\beta\gamma} + \epsilon_{\beta\nu} \partial_{\alpha} \mathfrak{h}_{\gamma}^{\nu} - \mathfrak{h}_{\beta}^{\nu} \partial_{\alpha} \epsilon_{\gamma\nu} \right\}. \quad (2.103)$$

Так как базисы связаны согласно (2.100),

$$\epsilon_{\beta\nu} \partial_{\alpha} \mathfrak{h}_{\gamma}^{\nu} - \mathfrak{h}_{\beta}^{\nu} \partial_{\alpha} \epsilon_{\gamma\nu} = g_{\nu\nu'}^{(0)} \left\{ \mathfrak{h}_{\beta}^{\nu'} \partial_{\alpha} \mathfrak{h}_{\gamma}^{\nu} - \mathfrak{h}_{\beta}^{\nu} \partial_{\alpha} \mathfrak{h}_{\gamma}^{\nu'} \right\} \equiv 0,$$

где мы учли, что тензор метрики симметричен по перестановке своих индексов, а кручение равно нулю. Поэтому окончательно в случае нулевого кручения находим симметричную связность, которая задается исключительно метрикой пространства, и поэтому называется метрической связностью или символами Кристоффеля,

$$\Gamma_{\alpha|\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_{\beta} g_{\alpha\gamma} + \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha} g_{\beta\gamma} \right\}, \quad \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha'} \left\{ \partial_{\beta} g_{\alpha'\gamma} + \partial_{\gamma} g_{\alpha'\beta} - \partial_{\alpha'} g_{\beta\gamma} \right\}, \quad (2.104)$$

а ковариантная производная вектора

$$\nabla_{\gamma} a^{\alpha} = \partial_{\gamma} a^{\alpha} + a^{\beta} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}. \quad (2.105)$$

Для ковектора аналогичные выкладки дают ковариантную производную

$$\nabla_{\gamma} a_{\alpha} = \partial_{\gamma} a_{\alpha} - a_{\beta} \Gamma_{\gamma\alpha}^{\beta}. \quad (2.106)$$

Для тензорных величин вычисление ковариантной производной дает тензорную величину на ранг выше, где связность входит в сумму членов по каждому из индексов также, как и для индекса вектора или ковектора. В частности, для метрики

$$\nabla_{\gamma} g_{\mu\nu} = \partial_{\gamma} g_{\mu\nu} - g_{\mu\beta} \Gamma_{\gamma\nu}^{\beta} - g_{\beta\nu} \Gamma_{\gamma\mu}^{\beta}, \quad (2.107)$$

и, подставляя символы Кристоффеля, найдем

$$\nabla_\gamma g_{\mu\nu} = \partial_\gamma g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \{ \partial_\nu g_{\mu\gamma} + \partial_\gamma g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\gamma} \} - \frac{1}{2} \{ \partial_\mu g_{\nu\gamma} + \partial_\gamma g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\mu\gamma} \} \equiv 0,$$

т.е. ковариантная производная метрики с метрической связностью тождественно обращается в нуль.

**Задача 28.** Покажите, что свертка в символе Кристоффеля  $\Gamma_{\beta\gamma}^\gamma$  вычисляется как частная производная вида

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\gamma = \frac{1}{2} \partial_\beta \ln g,$$

где  $g$  — детерминант метрики,  $g = \det \hat{g}$ .

**Задача 29.** Вычислите символы Кристоффеля для евклидовой метрики в сферических координатах.

**Задача 30.** Найти закон преобразования метрической связности при замене координат. Убедитесь, что симметричная связность не является тензором. Докажите, что кручение — это тензор.

**Задача 31.** Докажите тождество для ковариантной дивергенции вектора

$$\nabla_\alpha A^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\alpha \{ \sqrt{g} A^\alpha \}$$

где  $g = \det g_{\alpha\beta}$ , т.е. детерминант метрики, для которого  $\delta g = g g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}$ .

**Задача 32.** С помощью задачи 31 докажите, что квадрат оператора  $\nabla$  сводится к оператору Бельтрами–Лапласа:

$$g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\alpha \{ g^{\alpha\beta} \sqrt{g} \partial_\beta \},$$

по крайней мере, при действии на скаляр.

**Задача 33.** Вычислите оператор Лапласа в сферических координатах из выражения для оператора Бельтрами.

**Задача 34.** В ортогональной системе координат метрика имеет диагональный вид  $g_{\alpha\beta} = \text{diag}(H_1^2, H_2^2, H_3^2)$ , где  $H_k$  называют коэффициентами Ламе. Запишите оператор Бельтрами–Лапласа через коэффициенты Ламе.

Рассмотрим теперь производную Ли вдоль направления

$$\xi = dx^\mu \mathbf{e}_\mu.$$

Здесь  $dx^\mu$  — это коэффициенты разложения вектора  $\xi$  по базисным векторам, так что в силу линейности производной Ли

$$L_\xi a^\alpha = dx^\mu \mathbf{e}_\mu^\gamma \nabla_\gamma a^\alpha = dr^\gamma \nabla_\gamma a^\alpha,$$

где мы воспользовались разложением по базису  $\mathbf{e}_\mu^\gamma$  и ввели естественное обозначение  $dr^\gamma = \xi^\gamma = r'^\gamma - r^\gamma = dx^\mu \mathbf{e}_\mu^\gamma$ . Значит, согласно определению производной Ли (2.80) и связи производной Ли с ковариантной производной (2.95)

$$a^\alpha(\mathbf{r}') \partial'_\alpha = (a^\alpha(\mathbf{r}) + dr^\gamma \nabla_\gamma a^\alpha(\mathbf{r})) \partial_\alpha. \quad (2.108)$$

Это соотношение записывают в упрощенной форме

$$a^\alpha(\mathbf{r}') \mapsto a^\alpha(\mathbf{r}) + dr^\gamma \nabla_\gamma a^\alpha(\mathbf{r}), \quad (2.109)$$

и даже вместо знака перехода от вектора в штрихованном базисе к вектору в исходной базисе « $\mapsto$ » иногда пишут знак равенства « $=$ », что, конечно, является жаргоном. На самом же деле, связь (2.108) по определению параллельного переноса (2.83) означает, что поле  $a^\alpha(\mathbf{r}')$  — это параллельный перенос поля  $a^\alpha(\mathbf{r}) + dr^\gamma \nabla_\gamma a^\alpha(\mathbf{r})$ .

**Задача 35.** Выведите бесконечно малые изменения базисных векторов в сферических координатах, используя выражение для параллельного переноса так, что  $d\mathbf{e}_\mu^\alpha \equiv dr^\gamma \nabla_\gamma \mathbf{e}_\mu^\alpha$ . Здесь  $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta r d\theta + \mathbf{e}_\phi r \sin \theta d\phi$ , причем  $(d\mathbf{r})^r = dr$ ,  $(d\mathbf{r})^\theta = d\theta$ ,  $(d\mathbf{r})^\phi = d\phi$ , откуда отличные от нуля компоненты базисных векторов получаются равными

$$(\mathbf{e}_r)^r = 1, \quad (\mathbf{e}_\theta)^\theta = \frac{1}{r}, \quad (\mathbf{e}_\phi)^\phi = \frac{1}{r \sin \theta}.$$

Используйте выражения для символов Кристоффеля, полученные в задаче 29. Убедитесь, что в итоге получается результат, записанный в (2.71).

### §с. Векторы Киллинга

В выражении для производной Ли метрики по направлению  $\xi$  (см. (2.85)) подставим вместо частных производных вектора выражение через ковариантную производную и связность

$$\partial_\alpha \xi^\gamma = \nabla_\alpha \xi^\gamma - \xi^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\gamma,$$

так что

$$L_\xi g_{\alpha\beta} = \xi^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + g_{\gamma\beta} \partial_\alpha \xi^\gamma + g_{\alpha\gamma} \partial_\beta \xi^\gamma = \xi^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + g_{\gamma\beta} \{ \nabla_\alpha \xi^\gamma - \xi^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\gamma \} + g_{\gamma\alpha} \{ \nabla_\beta \xi^\gamma - \xi^\lambda \Gamma_{\beta\lambda}^\gamma \}. \quad (2.110)$$

Но так как ковариантная производная метрики равна нулю, можно внести метрику под знак ковариантного дифференцирования,

$$g_{\gamma\beta} \nabla_\alpha \xi^\gamma = \nabla_\alpha \{ g_{\gamma\beta} \xi^\gamma \} = \nabla_\alpha \xi_\beta,$$

в то время как

$$-g_{\gamma\beta} \xi^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\gamma - g_{\gamma\alpha} \xi^\lambda \Gamma_{\beta\lambda}^\gamma = -\frac{1}{2} \xi^\lambda \{ \partial_\alpha g_{\beta\lambda} + \partial_\lambda g_{\alpha\beta} - \partial_\beta g_{\alpha\lambda} + \partial_\beta g_{\alpha\lambda} + \partial_\lambda g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\lambda} \} = -\xi^\lambda \partial_\lambda g_{\alpha\beta}.$$

В итоге, тензор производной Ли для метрики выражается через ковариантные производные вектора направления  $\xi$ ,

$$L_\xi g_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha. \quad (2.111)$$

Вектором Киллинга называют вектор сдвига, для которого производная Ли метрики обращается в нуль:

$$L_\xi g_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0. \quad (2.112)$$

Таким образом, вектор Киллинга задает бесконечно малые преобразования координат, относительно которых метрика остается инвариантной, т.е. инфинитезимальные преобразования изометрии. Решения уравнения (2.112) используются для поиска симметрий пространств со сложной метрикой.

**Задача 36.** Найдите векторы Киллинга для евклидовой метрики трехмерного пространства в декартовых координатах.

### §d. Ковариантные уравнения Эйлера–Лагранжа и принцип эквивалентности масс

В криволинейных координатах действие нерелятивистской частицы – скаляр – запишется в виде

$$S = \int dt \left\{ \frac{1}{2} m g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) v^\alpha v^\beta - U(\mathbf{r}) \right\}. \quad (2.113)$$

Из-за того, что метрика теперь зависит от координат, производная функции Лагранжа равна

$$\partial_\gamma L = -\partial_\gamma U + \frac{1}{2} m v^\alpha v^\beta \partial_\gamma g_{\alpha\beta},$$

что приведет к уравнениям Эйлера–Лагранжа,

$$m \frac{d}{dt} g_{\gamma\beta} v^\beta = -\partial_\gamma U + \frac{1}{2} m v^\alpha v^\beta \partial_\gamma g_{\alpha\beta}. \quad (2.114)$$

Рассмотрим метрику как функцию координат на траектории<sup>27</sup>  $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}[\mathbf{r}(t)]$ , а скорость<sup>28</sup> как  $\mathbf{v} = \mathbf{v}[\mathbf{r}(t), t]$ . Тогда

$$\frac{d}{dt} g_{\gamma\beta} v^\beta = \partial_t v_\gamma + \frac{dr^\alpha}{dt} \partial_\alpha \{ g_{\gamma\beta} v^\beta \} = \partial_t v_\gamma + v^\alpha \{ v^\beta \partial_\alpha g_{\gamma\beta} + g_{\gamma\beta} \partial_\alpha v^\beta \}.$$

Так как тензор  $v^\alpha v^\beta$  симметричен по перестановкам индексов, в его свертку с другим тензором даст вклад только симметричная часть тензора:

$$v^\alpha v^\beta \partial_\alpha g_{\gamma\beta} = v^\alpha v^\beta \frac{1}{2} \{ \partial_\alpha g_{\gamma\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} \}.$$

<sup>27</sup>Мы полагаем, что тензор метрики задан как поле, зависящее от координат, но сами координаты рассматриваем как точку на траектории.

<sup>28</sup>Мы считаем, что скорость задана как поле в точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$ , но при этом и сама точка расположена на траектории.

Собирая все члены с массой, найдем

$$m \partial_t v_\gamma + m v^\alpha \left( g_{\gamma\beta} \partial_\alpha v^\beta + v^\beta \frac{1}{2} \{ \partial_\alpha g_{\gamma\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \} \right) = -\partial_\gamma U. \quad (2.115)$$

Здесь легко заметить символы Кристоффеля, так что

$$m \partial_t v_\gamma + m v^\alpha (g_{\gamma\beta} \partial_\alpha v^\beta + v^\beta \Gamma_{\gamma|\alpha\beta}) = -\partial_\gamma U, \quad (2.116)$$

т.е.

$$m \partial_t v_\gamma + m v^\alpha g_{\gamma\beta} \left( \partial_\alpha v^\beta + v^{\beta'} \Gamma_{\alpha\beta'}^\beta \right) = -\partial_\gamma U \quad \Rightarrow \quad m \partial_t v_\gamma + m v^\alpha g_{\gamma\beta} \nabla_\alpha v^\beta = -\partial_\gamma U. \quad (2.117)$$

Поскольку ковариантная производная метрики с метрической связностью равна нулю, а частная производная скаляра совпадает с ковариантной производной скаляра, приходим к ковариантным уравнениям Эйлера–Лагранжа для нерелятивистской частицы в криволинейных координатах:

$$m \partial_t v_\gamma + m v^\alpha \nabla_\alpha v_\gamma = -\nabla_\gamma U. \quad (2.118)$$

Принцип эквивалентности инерционной и гравитационной масс означает, что потенциальная энергия частицы в гравитационном поле задается в виде

$$U_{\text{gr}} = m \phi_{\text{gr}}(\mathbf{r}), \quad (2.119)$$

где  $m$  та же масса, что и в определении кинетического импульса частицы, а  $\phi_{\text{gr}}(\mathbf{r})$  — это гравитационный потенциал в системе. Тогда уравнения Эйлера–Лагранжа в гравитационном поле не содержат массы:

$$\begin{aligned} \partial_t v_\gamma + v^\alpha \nabla_\alpha v_\gamma = -\nabla_\gamma \phi_{\text{gr}}(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \partial_t v_\gamma + v^\alpha \partial_\alpha v_\gamma = -\nabla_\gamma \phi_{\text{gr}}(\mathbf{r}) + v^\alpha v_\lambda \Gamma_{\gamma\alpha}^\lambda = \\ = -\nabla_\gamma \phi_{\text{gr}}(\mathbf{r}) + v^\alpha v^\lambda \Gamma_{\lambda|\gamma\alpha}. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Заметим теперь, что если, как мы уже делали прежде, ввести столбец в 4-мерном пространстве-времени,  $x^\mu = (x^0, \mathbf{r})^T$ , где  $\mu = \{0, \alpha\}$ ,  $\alpha = \overline{1, 3}$ ,  $x^0 = ct$ , то, так как

$$v^0 = \frac{d(ct)}{dt} = c,$$

в левой части (2.120) стоит выражение

$$\partial_t v_\gamma + v^\alpha \partial_\alpha v_\gamma = c \partial_0 v_\gamma + v^\alpha \partial_\alpha v_\gamma = v^\mu \partial_\mu v_\gamma,$$

но однако  $\partial_\mu v_\gamma$  — это не тензор, тензором является  $\nabla_\mu v_\gamma$ , а значит, в правой части (2.120) может возникнуть слагаемое вида

$$v^0 v^0 \Gamma_{0|0\gamma} = c^2 \Gamma_{0|\gamma 0},$$

Подобный член имеет вид, сходный с вкладом гравитационного потенциала. В самом деле, введем метрику в виде двух блоков, временного и пространственного, с временной компонентой  $g_{00}$ :  $g_{\mu\nu} = (g_{00}, g_{\alpha\beta})$ . При этом мы будем считать, что временная компонента, которая задает ход времени, может зависеть от координат, а линейки, которые определяют пространственные компоненты метрики, не зависят от времени, т.е.

$$g_{\mu\nu} = (g_{00}(\mathbf{r}), g_{\alpha\beta}(\mathbf{r})).$$

Зависимость хода времени от координат будем считать бесконечно малой<sup>29</sup>:

$$g_{00} = \pm \left( 1 + \frac{2}{c^2} \phi(\mathbf{r}) \right) \rightarrow \pm 1, \quad \text{при} \quad c^2 \rightarrow \infty, \quad (2.121)$$

а значит, обратная метрика

$$g^{\mu\nu} = (g^{00}, g^{\alpha\beta}), \quad g^{00} \approx \pm \left( 1 - \frac{2}{c^2} \phi(\mathbf{r}) \right) \rightarrow \pm 1. \quad (2.122)$$

<sup>29</sup>При  $g_{00} \equiv \pm 1$  воспроизводятся обычные уравнения движения в криволинейных координатах.

В пределе (2.121) при реализации знака «плюс» говорят о евклидовой геометрии 4-мерного пространства, а при выборе знака «минус» — о псевдоевклидовой геометрии пространства-времени. Обратите внимание на то, что размерность величины искажения хода времени  $\phi(\mathbf{r})$  задана в (2.121) такой же, как и у гравитационного потенциала: это — квадрат скорости,

$$[\phi(\mathbf{r})] = [\phi_{\text{gr}}(\mathbf{r})] = [v]^2.$$

Размерность гравитационного потенциала легко установить, исходя из его связи с потенциальной энергией, так как

$$[E] = [m][\phi_{\text{gr}}] = [m][v]^2.$$

Поэтому предел  $c^2 \rightarrow \infty$  имеет смысл малости безразмерной величины

$$\frac{\phi}{c^2} \rightarrow 0.$$

Вычислим теперь

$$v^\mu \nabla_\mu v_\gamma = v^0 (\partial_0 v_\gamma - v_\nu \Gamma_{0\gamma}^\nu) + v^\alpha (\partial_\alpha v_\gamma - v_\nu \Gamma_{\alpha\gamma}^\nu).$$

В этом выражении

$$v^0 \partial_0 v_\gamma[\mathbf{r}] \equiv \partial_t v_\gamma,$$

а символы Кристоффеля, отличные от нуля, — это, как и прежде, в криволинейных координатах  $\Gamma_{\alpha\gamma}^\beta$  и дополнительно<sup>30</sup>

$$\Gamma_{0\gamma}^0 = \pm \frac{1}{2} \partial_\gamma g_{00} = \frac{1}{c^2} \partial_\gamma \phi.$$

В итоге,

$$v^\mu \nabla_\mu v_\gamma = \partial_t v_\gamma - v^0 v_0 \frac{1}{c^2} \partial_\gamma \phi + v^\alpha \nabla_\alpha v_\gamma = \partial_t v_\gamma \mp \partial_\gamma \phi + v^\alpha \nabla_\alpha v_\gamma. \quad (2.123)$$

Следовательно, уравнение в 4-мерном пространстве-времени вида

$$v^\mu \nabla_\mu v_\gamma = 0, \quad (2.124)$$

с

$$\phi(\mathbf{r}) = \mp \phi_{\text{gr}}(\mathbf{r}),$$

тождественно уравнению движения частицы в гравитационном поле! Введем инвариант — интервал 4-мерного пространства-времени

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\alpha\beta} dr^\alpha r^\beta + g_{00} dx^0 dx^0. \quad (2.125)$$

С учетом закона сохранения энергии при движении в гравитационном поле

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2} v^\alpha v_\alpha + \phi_{\text{gr}}, \quad (2.126)$$

интервал на траектории движения примет вид

$$ds_{\text{traj.}}^2 = dt^2 \left\{ v^\alpha v_\alpha \pm c^2 \left( 1 \mp \frac{2}{c^2} \phi_{\text{gr.}} \right) \right\} = \pm c^2 dt^2 \left\{ 1 \pm 2 \left( \frac{v^2}{c^2} - \frac{E}{mc^2} \right) \right\}. \quad (2.127)$$

Определим инвариантное собственное время

$$d\tau^2 = \pm \frac{1}{c^2} ds^2. \quad (2.128)$$

Собственное время на траектории частицы в гравитационном поле

$$d\tau_{\text{traj.}}^2 = dt^2 \left( 1 \pm 2 \left( \frac{v^2}{c^2} - \frac{E}{mc^2} \right) \right). \quad (2.129)$$

В частности, поскольку

$$\frac{E}{mc^2} \leq \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2},$$

заключаем, что при выборе положительного знака у временной компоненты метрики ход времени у движущегося наблюдателя ускоряется, а при выборе отрицательного знака ход времени замедляется. При этом знак можно зафиксировать из физических соображений:

<sup>30</sup>Самостоятельно покажите, что в сделанных предположениях о статической метрике, имеющей блочный вид: отдельно временные и координатные компоненты, т.е.  $g_{0\alpha} \equiv 0$ , — компоненты связности с одним временным индексом обращаются в нуль,  $\Gamma_{0|\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha|0\beta} \equiv 0$ .

- будем считать, что вдали от центра гравитации поле равно нулю, а значит ход часов совпадает с ходом в пустом пространстве без гравитации,
- гравитация является притяжением, а следовательно, гравитационный потенциал отрицательный и он падает при приближении к центру гравитации, так что при свободном падении скорость частицы возрастает с приближением к центру тяготения.

Сравним собственное время для двух наблюдателей: первый ближе к гравитационному центру, чем второй,  $r_1 < r_2$ . Пусть у обоих наблюдателей есть световые часы с одинаковым периодом  $dt$ . Первый наблюдатель посылает второму свет из своих часов, а второй измеряет период колебаний пришедшего к нему луча света по своим часам. Сравним показания часов:

$$d\tau_1^2 = \left(1 \mp \frac{2\phi_{\text{gr}}(\mathbf{r}_1)}{c^2}\right) dt^2, \quad d\tau_2^2 = \left(1 \mp \frac{2\phi_{\text{gr}}(\mathbf{r}_2)}{c^2}\right) dt^2$$

где  $dt$  – собственное время удаленного наблюдателя, т.е.

$$d\tau_1^2 = d\tau_2^2 \frac{1 \mp \frac{2\phi_{\text{gr}}(\mathbf{r}_1)}{c^2}}{1 \mp \frac{2\phi_{\text{gr}}(\mathbf{r}_2)}{c^2}}.$$

Но, так как луч по пути от первого наблюдателя ко второму потратил энергию на преодоление силы тяжести, его энергия, а значит, и частота уменьшились, а период стал больше:

$$d\tau_2 > d\tau_1, \quad 0 > \phi_{\text{gr}}(\mathbf{r}_2) > \phi_{\text{gr}}(\mathbf{r}_1).$$

В итоге, допустимым является только отрицательный знак:

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2}{c^2} \phi_{\text{gr}}(\mathbf{r})\right). \quad (2.130)$$

Другими словами, если для удаленного от центра тяготения наблюдателя, находящегося в покое, гравитационный потенциал принять равным нулю<sup>31</sup>  $\phi_{\text{gr}}(\infty) = 0$ , то собственное время такого наблюдателя  $d\tau[\infty] \equiv dt$ , а собственное время наблюдателя, покоящегося в гравитационном поле,  $d\tau^2[\mathbf{r}] = (1 \mp 2\phi_{\text{gr}}(\mathbf{r})/c^2) dt^2[\infty]$ , а значит, для потенциала гравитационного притяжения, когда  $\phi_{\text{gr}}(\mathbf{r}) < 0$ , ход времени для наблюдателя в гравитационном поле замедляется только в случае псевдоевклидовой метрики пространства-времени.

Если гравитационное поле отсутствует и частица является свободной, то интервал равен

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\alpha\beta} dr^\alpha dr^\beta - c^2 dt^2. \quad (2.131)$$

Отсюда следует, что на траектории собственное время имеет смысл только для сигналов, скорость движения которых не превышает предельного значения  $c$ :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Rightarrow d\tau^2 = dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \geq 0. \quad (2.132)$$

Исходя из принципа эквивалентности инертной и гравитационной массы, с помощью методов дифференциальной геометрии мы установили, что в заданной точке пространства, вообще говоря, невозможно отличить гравитационное ускорение свободного падения  $-\nabla_\gamma \phi_{\text{gr}}(\mathbf{r})$  от ускорения, которое возникает из-за введения криволинейных координат пространства-времени, т.е. метрики, зависящей от координат, и как следствие, ненулевых символов Кристоффеля. Из того факта, что гравитация является притяжением и кинетическая энергия, а значит, и частота уменьшаются при перемещении частицы в область с большим гравитационным потенциалом, следует, что метрика имеет псевдоевклидову сигнатуру: тензор метрики в 4-мерном пространстве-времени в декартовых координатах и бесконечно малых гравитационных полях становится диагональным<sup>32</sup>,

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1).$$

Для свободной частицы этот принцип приводит к существованию пространства-времени Минковского! Изометрии метрики Минковского образуют группу Пуанкаре, которая включает в себя и преобразования

<sup>31</sup>Если гравитационный потенциал бесконечно далеко от центра гравитации принять равным константе, то можно провести замену единиц времени так, чтобы  $g_{00}(\infty) = 1$ .

<sup>32</sup>Под сигнатурой, вообще говоря, понимают набор знаков собственных значений метрики, скажем  $(-, +, +, +)$ , как это имеет место в случае псевдоевклидовой геометрии.



при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Эти вопросы будут рассматриваться на других спецкурсах.

Отметим, что итоговое выражение для уравнения движения по инерции

$$v^\mu \nabla_\mu v_\nu = 0 \quad (2.133)$$

при заданной метрике в криволинейных голономных координатах, т.е. при  $\nabla_\mu g_{\nu\nu'} = 0$ , может быть записано в виде

$$v^\mu \nabla_\mu v^\nu = v^\mu \nabla_\mu (g_{\nu\nu'} v^{\nu'}) = g_{\nu\nu'} v^\mu \nabla_\mu v_{\nu'} = 0. \quad (2.134)$$

Решения уравнения (2.134) называются *геодезическими*, а само уравнение — уравнением геодезических линий.

**Задача 37.** Рассмотрите нулевую компоненту уравнения геодезических (2.134) при  $\nu = 0$  с блочной статической метрикой (2.125) и покажите, что в нерелятивистском пределе  $1/c \rightarrow 0$

$$v^\mu \nabla_\mu v^0 = \mathcal{O}\left(\frac{v}{c}\right) \rightarrow 0.$$

Таким образом, вполне ясный физический принцип эквивалентности инертной и гравитационной масс означает, что с точки зрения уравнений движения точечной частицы гравитационные силы математически совершенно неотличимы от введения криволинейной метрики пространства-времени. В частности, может случиться так, что существуют такие координаты, в которых в данной точке суммарное ускорение частицы в точности будет равно нулю. Однако следует иметь ввиду, что в евклидовом пространстве метрика всюду приводится в декартовых координатах инерциальной системы отсчета к единичной матрице, так что гравитационное ускорение вполне идентифицируемо. Однако можно поставить вопрос и о введении неевклидова пространства.

## §е. Тензор Римана

Если пространство евклидово, то существует декартов базис, в котором метрическая связность обращается в нуль во всех точках пространства и ковариантная производная сводится к частной производной  $\nabla_\alpha \mapsto \partial_\alpha$ , а значит,

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) a_\gamma \mapsto (\partial_\alpha \partial_\beta - \partial_\beta \partial_\alpha) a_\gamma \equiv 0,$$

поскольку частное дифференцирование перестановочно. Поэтому, для того чтобы узнать, является ли пространство евклидовым в заданных координатах, необходимо просто вычислить действие коммутатора ковариантных производных на вектор, что даст тензор третьего ранга:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] a_\gamma \equiv (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) a_\gamma. \quad (2.135)$$

Буквально

$$\nabla_\beta a_\gamma = \partial_\beta a_\gamma - a_\lambda \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda,$$

и вычисление ковариантной производной ковариантного тензора второго ранга  $t_{\beta\gamma} = \nabla_\beta a_\gamma$

$$\nabla_\alpha t_{\beta\gamma} = \partial_\alpha t_{\beta\gamma} - t_{\lambda'\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda'} - t_{\beta\lambda'} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda'}$$

сводится к

$$\nabla_\alpha (\nabla_\beta a_\gamma) = \partial_\alpha (\nabla_\beta a_\gamma) - (\nabla_{\lambda'} a_\gamma) \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda'} - (\nabla_\beta a_{\lambda'}) \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda'}$$

и дает

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta a_\gamma = \partial_\alpha (\partial_\beta a_\gamma - a_\lambda \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda) - (\partial_{\lambda'} a_\gamma - a_\lambda \Gamma_{\lambda'\gamma}^\lambda) \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda'} - (\partial_\beta a_{\lambda'} - a_\lambda \Gamma_{\beta\lambda'}^\lambda) \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda'},$$

где в первом слагаемом множитель  $\partial_\alpha \partial_\beta a_\gamma$  симметричен по перестановкам индексов  $\alpha \leftrightarrow \beta$ , во втором слагаемом символ Кристоффеля также симметричен, откуда заключаем, что при вычислении антисимметричной величины  $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] a_\gamma = \nabla_\alpha \nabla_\beta a_\gamma - \nabla_\beta \nabla_\alpha a_\gamma$  эти вклады сокращаются, и

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] a_\gamma = -\partial_\alpha (a_\lambda \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda) + \partial_\beta (a_\lambda \Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda) - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda'} \partial_\beta a_{\lambda'} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda'} \partial_\alpha a_{\lambda'} + a_\lambda (\Gamma_{\beta\lambda'}^\lambda \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda'} - \Gamma_{\alpha\lambda'}^\lambda \Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda'}).$$

В итоге, все члены с частными производными ковектора сокращаются, и

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] a_\gamma = a_\lambda (\partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda - \partial_\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda + \Gamma_{\beta\lambda'}^\lambda \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda'} - \Gamma_{\alpha\lambda'}^\lambda \Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda'}). \quad (2.136)$$

Тензор четвертого ранга

$$R^\lambda_{\gamma\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\alpha \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} - \partial_\beta \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} + \Gamma^\lambda_{\alpha\lambda'} \Gamma^{\lambda'}_{\beta\gamma} - \Gamma^\lambda_{\beta\lambda'} \Gamma^{\lambda'}_{\alpha\gamma} \quad (2.137)$$

называют тензором кривизны Римана: в случае метрической связности действие коммутатора ковариантных производных на ковектор выражается через тензор Римана,

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] a_\gamma = -a_\lambda R^\lambda_{\gamma\alpha\beta}. \quad (2.138)$$

Аналогично устанавливаем, что в случае вектора

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] a^\gamma = a^\lambda R^\gamma_{\lambda\alpha\beta}. \quad (2.139)$$

**Задача 38.** При наличии кручения следует заменить симметричную связность на

$$\mathcal{A}^\lambda_{\alpha\beta} = \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} + T^\lambda_{\alpha\beta}.$$

Докажите, что в этом случае коммутатор ковариантных производных включает в себя еще и тензор кручения, так что

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] a_\gamma = -a_\lambda R^\lambda_{\gamma\alpha\beta} - T^\lambda_{\alpha\beta} \nabla_\lambda a_\gamma.$$

Как видим, коммутатор ковариантных производных на векторах выражается через ковариантную производную вектора с кручением, но член с тензором кривизны не включает в себя ковариантную производную вектора, как говорят, этот член представляет собой центральный заряд для коммутатора операторов ковариантной производной.

Обычно тензор Римана записывают в ковариантном виде

$$R_{\gamma\lambda\alpha\beta} = g_{\gamma\gamma'} R^{\gamma'}_{\lambda\alpha\beta}.$$

Этот тензор по построению антисимметричен по перестановкам нижних индексов  $\alpha \leftrightarrow \beta$ . При подстановке метрической связности устанавливается также, что он антисимметричен и относительно перестановки  $\gamma \leftrightarrow \lambda$ , а также симметричен относительно перестановки пар индексов  $\{\gamma\lambda\} \leftrightarrow \{\alpha\beta\}$ .

Тензор Риччи задается сверткой тензора Римана

$$R_{\lambda\beta} = R^\alpha_{\lambda\alpha\beta} = g^{\gamma\alpha} R_{\gamma\lambda\alpha\beta}, \quad (2.140)$$

а скалярная кривизна

$$R = g^{\lambda\beta} R_{\lambda\beta}. \quad (2.141)$$

**Задача 39.** На сфере радиуса  $a$  (метрика:  $dC^2 = a^2 \{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2\}$ ) вычислите тензоры Римана и Риччи, а также скалярную кривизну.

Итак, в евклидовом пространстве тензор Римана обращается в нуль тождественно, во всех точках. В римановом пространстве этот тензор отличен от тождественного нуля.

Наглядный геометрический смысл тензора кривизны становится виден, если вычислить ковектор, который получается при параллельном переносе следующим образом:

- перенос в точку  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}_1$  дает ковектор

$$a_\gamma(\mathbf{r} + d\mathbf{r}_1) \mapsto a_\gamma(\mathbf{r}) + dr_1^\beta \nabla_\beta a_\gamma(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!} dr_1^\beta dr_1^\alpha \nabla_\beta \nabla_\alpha a_\gamma(\mathbf{r}),$$

- последующий перенос в точку  $[\mathbf{r} + d\mathbf{r}_1] + d\mathbf{r}_2$  дает ковектор

$$a_\gamma([\mathbf{r} + d\mathbf{r}_1] + d\mathbf{r}_2) \mapsto a_\gamma(\mathbf{r}) + dr_1^\beta \nabla_\beta a_\gamma(\mathbf{r}) + dr_2^\alpha \nabla_\alpha a_\gamma(\mathbf{r}) + dr_2^\alpha dr_1^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta a_\gamma(\mathbf{r}) + \mathcal{O}(d^2 r),$$

где символом  $\mathcal{O}(d^2 r)$  мы обозначили симметричные квадратичные вклады относительно сдвигов,

- аналогичный двухшаговый параллельный перенос в эту же точку  $[\mathbf{r} + d\mathbf{r}_2] + d\mathbf{r}_1$  дает ковектор

$$a_\gamma([\mathbf{r} + d\mathbf{r}_2] + d\mathbf{r}_1) \mapsto a_\gamma(\mathbf{r}) + dr_1^\beta \nabla_\beta a_\gamma(\mathbf{r}) + dr_2^\alpha \nabla_\alpha a_\gamma(\mathbf{r}) + dr_2^\alpha dr_1^\beta \nabla_\beta \nabla_\alpha a_\gamma(\mathbf{r}) + \mathcal{O}(d^2 r),$$

где симметричный вклад  $\mathcal{O}(d^2 r)$  в точности повторяет слагаемое в выражении с другим порядком параллельного переноса, так что

- разность ковекторов, полученных переносом в одну и ту же точку по разным путям, во втором порядке малости относительно сдвигов равна

$$\begin{aligned} \delta a_\gamma(\mathbf{r} + d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2) &\mapsto dr_2^\alpha dr_1^\beta [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] a_\gamma(\mathbf{r}) = -dr_2^\alpha dr_1^\beta R_{\gamma\alpha\beta}^\lambda a_\lambda(\mathbf{r}) = \\ &= \frac{1}{2} (dr_1^\alpha dr_2^\beta - dr_1^\beta dr_2^\alpha) R_{\gamma\alpha\beta}^\lambda a_\lambda(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

т.е. она пропорциональна тензору кривизны Римана и тензору площади ориентированного параллелограмма с образующими гранями, заданными векторами сдвигов,

$$d^2\sigma^{\alpha\beta} = dr_1^\alpha dr_2^\beta - dr_1^\beta dr_2^\alpha.$$

а значит,

$$\delta a_\gamma = \frac{1}{2} d^2\sigma^{\alpha\beta} R_{\gamma\alpha\beta}^\lambda a_\lambda. \quad (2.142)$$

К тому же результату мы придем, если произвести параллельный перенос вектора вдоль этого же параллелограмма в исходную точку: разность векторов до и после переноса задается (2.142). Таким образом, искривленное пространство означает изменение вектора после переноса по бесконечно малому замкнутому пути, причем результат переноса отличается на величину, пропорциональную тензору кривизны Римана и площади петли.

**Задача 40.** Докажите в общем случае ненулевого кручения, что имеет место следующее равенство для коммутатора производных Ли,

$$\begin{aligned} [L_\mu, L_\nu] a^\alpha &= \frac{1}{2} (\epsilon_\mu^\gamma \epsilon_\nu^\beta - \epsilon_\mu^\beta \epsilon_\nu^\gamma) [\nabla_\gamma, \nabla_\beta] a^\alpha + \nabla_{\alpha'} a^\alpha (L_\mu \epsilon_{\nu'}^{\alpha'} - L_\nu \epsilon_\mu^{\alpha'}) = \\ &= \epsilon_\mu^\gamma \epsilon_\nu^\beta [\nabla_\gamma, \nabla_\beta] a^\alpha + \nabla_{\alpha'} a^\alpha (\epsilon_\mu^\gamma \epsilon_\nu^\beta - \epsilon_\mu^\beta \epsilon_\nu^\gamma) (T_{\beta\gamma}^{\alpha'} - T_{\gamma\beta}^{\alpha'}). \end{aligned}$$

В курсе общей теории относительности свойства тензора кривизны исследуются более детально. В частности, устанавливаются тождества Бьянки для ковариантных производных тензора Римана, а также проводится классификация симметричных римановых пространств по Петрову (см. [7]).

## §f. Принцип относительности Галилея: общековариантная реинкарнация

Принцип эквивалентности законов природы для инерциальных систем теперь может быть сформулирован в наиболее общем виде, независимом от выбора способа измерения расстояний, который на математическом языке выглядит следующим образом:

*Существуют инерциальные системы отсчета с идентичным ходом времени, в которых тензор Римана тождественно равен нулю во всем пространстве; законы природы в таких системах, записанные в ковариантной форме, эквивалентны, если изометрии метрики линейно зависят от времени.*

Ясно, что равенство нулю тензора Римана означает, что существует переход от криволинейных координат к декартовым сразу во всем пространстве. Мы считаем криволинейные координаты не зависящими от времени, т.е. исключаем из рассмотрения неинерциальные системы отсчета. В декартовых координатах изометрии метрики нам известны, так что обратным преобразованием можно построить и изометрии исходной метрики в криволинейных координатах: изометрии никуда не исчезают при переходе к криволинейным координатам, так что и специальные преобразования Галилея по-прежнему существуют в исходных криволинейных координатах в виде изометрий, линейно зависящих от времени, но функционально имеющие иной явный вид. Этот вид можно установить, вычислив векторы Киллинга для заданной метрики с нулевым тензором Римана, и эта аналитическая задача может решаться в исходных координатах.

## Лекция № 6

Интегрирование векторов по замкнутым путям и поверхностям, теоремы Гаусса и Стокса, дифференциальные формы в евклидовом пространстве, внешнее произведение и внешнее дифференцирование, дивергенция и ротор в терминах дифференциальных форм, замкнутые и точные дифференциальные формы, формула Ньютона–Лейбница для дифференциальных форм, инвариантная запись ориентированного объема в криволинейных координатах, закон сохранения тензора энергии-импульса из

вариации действия поля материи по внешнему полю метрики, пример тензора для свободных нерелятивистских частиц, каноническая 4-скорость, координатная 4-скорость, плотность потока энергии. Суперпозиция электрического и магнитного полей, сила Лоренца, закон Кулона для точечного заряда, поток электрического поля через сферу, теорема Гаусса и закон Кулона в дифференциальной форме. Закон сохранения заряда в локальной форме и в 4-компонентных обозначениях, плотность тока, стационарные токи, закон Био-Савара в интегральной и локальной формах, закон индукции, теорема Стокса и локальная форма закона электромагнитной индукции, магнитные заряды в электродинамике Максвелла, ток смещения и система уравнений Максвелла в вакууме.

### 11.6. Теорема Гаусса

Рассмотрим интеграл вектора  $\mathcal{A}$  по замкнутой ориентированной поверхности  $\Sigma = \partial V$ , которая является границей объема  $V$ ,

$$\oint_{\partial V} \mathcal{A} \cdot d^2 \Sigma.$$

Вектор элемента площади  $d^2 \Sigma$  ортогонален поверхности и направлен во вне объема.

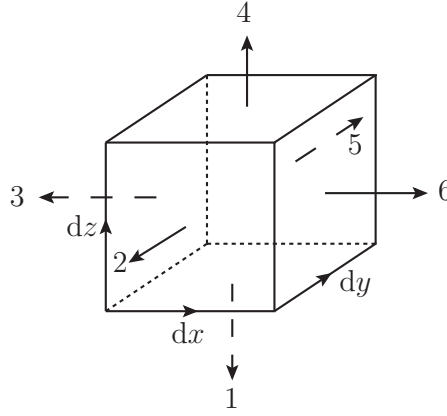


Рис. 2.3: Вычисление интеграла от вектора по поверхности бесконечно малого куба  $V_\square$ . Показаны члены суммирования 1, 2, 3, 4, 5, 6 с направлениями ориентированных площадей.

Этот объем можно заполнить бесконечно малыми кубиками, так что интегралы по соприкасающимся граням кубика будут взаимно сокращаться, поскольку значение вектора на гранях одно и то же, а вектора площади граней направлены в противоположные стороны, и, в итоге, сумма интегралов по поверхности кубиков сведется к сумме по внешним граням, совпадающей с исходным интегралом по поверхности объема. Следовательно, для вычисления всего интеграла достаточно рассмотреть интеграл по поверхности бесконечно малого кубика  $\partial V_\square$ .

В точке  $\mathbf{r}$  поле имеет значение  $\mathcal{A}(\mathbf{r})$ . Тогда интеграл по поверхности кубика есть сумма по шести его граням (см. рис. 2.3, где указан порядок суммирования по граням)

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V_\square} \mathcal{A} \cdot d^2 \Sigma &= -dx dy \mathcal{A}_z(\mathbf{r}) - dx dz \mathcal{A}_y(\mathbf{r}) - dy dz \mathcal{A}_x(\mathbf{r}) \\ &\quad + dx dy \mathcal{A}_z(\mathbf{r} + dz \mathbf{e}_z) + dx dz \mathcal{A}_y(\mathbf{r} + dy \mathbf{e}_y) + dz dy \mathcal{A}_x(\mathbf{r} + dx \mathbf{e}_x) \\ &= dx dy dz \{ \partial_x \mathcal{A}_x(\mathbf{r}) + \partial_y \mathcal{A}_y(\mathbf{r}) + \partial_z \mathcal{A}_z(\mathbf{r}) \} \\ &= dx dy dz \nabla \cdot \mathcal{A}(\mathbf{r}) = \int_{V_\square} d^3 r \nabla \cdot \mathcal{A}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

В итоге, суммирование по бесконечно малым кубикам приводит к общей теореме Гаусса: поток вектора через замкнутую поверхность равен интегралу дивергенции вектора по объему, который охватывает эта поверхность,

$$\oint_{\partial V} \mathcal{A} \cdot d^2 \Sigma = \int_V d^3 r \nabla \cdot \mathcal{A} = \int_V d^3 r \operatorname{div} \mathcal{A}. \quad (2.143)$$

Пример прямого применения теоремы Гаусса мы приводим при рассмотрении уравнений Максвелла в разделе 12.2. С помощью этой теоремы закон Кулона можно записать в интегральной форме.

### 11.7. Теорема Стокса

Рассмотрим интеграл вектора  $\mathcal{A}$  по замкнутому контуру  $C = \partial\Sigma$ , который является границей поверхности  $\Sigma$ ,

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathcal{A} \cdot d\mathbf{C}.$$

Вектор элемента контура  $d\mathbf{C}$  направлен по касательной к контуру.

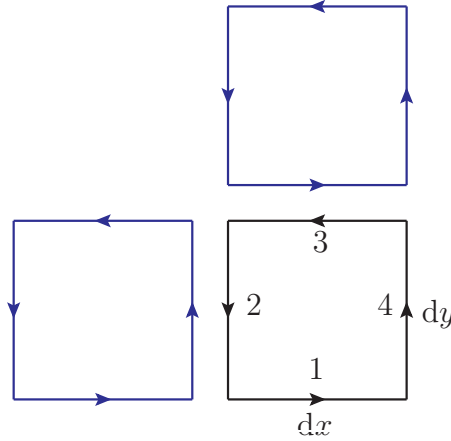


Рис. 2.4: Вычисление интеграла от вектора по контуру бесконечно малого квадрата  $\Sigma_{\square}$ . Показаны члены суммирования 1, 2, 3, 4 и соседние квадраты на поверхности.

Разобьем поверхность  $\Sigma$  на бесконечно малые квадраты. Тогда сумма интегралов вектора по границам этих квадратов сведется к исходному контурному интегралу, поскольку, как и в случае с разбиением объема на кубы в предыдущем разделе, интегралы по соприкасающимся ребрам квадратов дают в сумме нуль, так как значение поля на ребрах одинаково, но касательные взаимно противоположно направлены. Значит, достаточно рассмотреть интеграл от вектора по ребрам бесконечно малого квадрата  $\partial\Sigma_{\square}$  на плоскости  $(x, y)$  с ориентацией контура против часовой стрелки (см. рис. 2.4, где указаны последовательные члены суммы в интеграле):

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Sigma_{\square}} \mathcal{A} \cdot d\mathbf{C} &= +dx \mathcal{A}_x(\mathbf{r}) - dy \mathcal{A}_y(\mathbf{r}) \\ &\quad -dx \mathcal{A}_x(\mathbf{r} + dy\mathbf{e}_y) + dy \mathcal{A}_y(\mathbf{r} + dx\mathbf{e}_x) \\ &= dx dy \{ \partial_x \mathcal{A}_y(\mathbf{r}) - \partial_y \mathcal{A}_x(\mathbf{r}) \} \\ &= d^2 \Sigma_z (\nabla \times \mathcal{A}(\mathbf{r}))_z = \int_{\Sigma_{\square}} d^2 \Sigma \cdot \text{rot} \mathcal{A}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Здесь мы согласовали ориентацию контура и элемента площади поверхности. Ясно, что точно такой же результат получится, если квадрат находится в других плоскостях:  $(y, z)$  или  $(z, x)$ , лишь бы обход по направляющим контура образовывал с вектором ориентированной площади правую тройку, так что рассмотрение становится универсальным.

А значит, имеет место теорема Стокса: интеграл вектора по замкнутому контуру равен потоку ротора этого вектора через поверхность, границей которой служит контур,

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathcal{A} \cdot d\mathbf{C} = \int_{\Sigma} d^2 \Sigma \cdot \text{rot} \mathcal{A}(\mathbf{r}). \quad (2.144)$$

Пример пямого применения теоремы Стокса мы приводим при рассмотрении уравнений Максвелла в разделе 12.5. С помощью этой теоремы закон Фарадея об индукции можно записать в интегральной

форме.

**Задача 41.** Используя теорему Стокса и полагая векторное поле равным  $\mathcal{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{k} f(\mathbf{r})$ , где вектор  $\mathbf{k}$  — постоянный, не равный нулю, преобразуйте интеграл по контуру в интеграл по поверхности

$$\oint_{\partial \Sigma} f(\mathbf{r}) d\mathbf{C} = - \int_{\Sigma} \text{grad } f(\mathbf{r}) \times d^2 \Sigma.$$

**Задача 42.** С помощью теоремы Гаусса покажите, что

$$\int_V \nabla f d^3 r = \oint_{\partial V} f d^2 \Sigma, \quad \int_V \text{rot } \mathcal{A}(\mathbf{r}) d^3 r = - \oint_{\partial V} \mathcal{A}(\mathbf{r}) \times d^2 \Sigma.$$

**Задача 43.** С помощью теоремы Стокса покажите, что

$$\int_S \nabla f \times d^2 \Sigma = - \oint_{\partial S} f d\mathbf{C}, \quad \oint_S (\nabla \times \mathcal{A}(\mathbf{r})) \cdot d^2 \Sigma = 0.$$

### 11.8. Дифференциальные формы в координатном подходе и интегрирование

При рассмотрении теорем Гаусса и Стокса следует подчеркнуть, что интегральное суммирование проводилось по инвариантам. Особенно это становится очевидно при вычислении потока вектора через ориентированную поверхность: скалярное произведение вектора на вектор бесконечно малого элемента ориентированной площади является инвариантом, а значит, и весь интеграл — скаляр. Инвариантное интегрирование играет ключевую роль в физике, а универсальным инструментом для построения таких инвариантов на основе ориентированных гиперповерхностей является формализм дифференциальных форм.

#### §а. Ориентированная площадь и внешнее произведение

Бесконечно малый элемент площади  $d^2 \Sigma$  ориентированной поверхности в 3-мерном евклидовом пространстве задается как векторное произведение образующих параллелограмма  $d\mathbf{a}$  и  $d\mathbf{b}$ ,

$$d^2 \Sigma = d\mathbf{a} \times d\mathbf{b}, \quad (2.145)$$

так как модуль этого вектора равен площади параллелограмма

$$|d^2 \Sigma| = |d\mathbf{a}| |d\mathbf{b}| \sin \theta,$$

где  $\theta$  — угол между образующими, и вектор площади направлен по нормали к поверхности (см. рис. 2.5). В индексных обозначениях

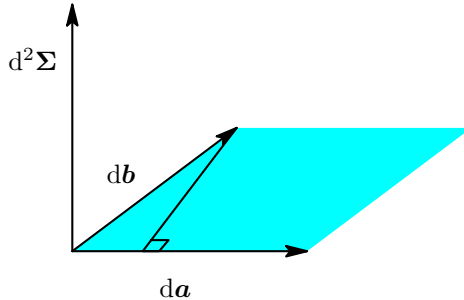


Рис. 2.5: Ориентированная площадь параллелограмма.

$$d^2 \Sigma_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} da^\beta db^\gamma.$$

Составим скалярное произведение

$$\omega = \boldsymbol{\omega} \cdot d^2 \Sigma = \omega^\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma} da^\beta db^\gamma,$$

которое по построению является величиной, инвариантной при замене переменных (оно не зависит от поворотов и т.п.). Это скалярное произведение можно рассматривать как функцию, линейную по двум ее аргументам:

$$\omega = \omega(\mathbf{da}, \mathbf{db}).$$

Значения этой функции определяются тензором

$$\tilde{\omega}_{\beta\gamma} = \omega^\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma},$$

антисимметричным по перестановке своих индексов. Из определения векторного произведения следует, что и  $\omega$  — антисимметричная скалярная функция,

$$\omega(\mathbf{da}, \mathbf{db}) = -\omega(\mathbf{db}, \mathbf{da}).$$

Такую функцию  $\omega(\mathbf{da}, \mathbf{db})$  называют *дифференциальной 2-формой*<sup>33</sup> (по количеству аргументов). Обобщение на случай  $n$ -мерного пространства довольно прозрачно: необходимо построить скалярную полилинейную функцию, антисимметричную по своим аргументам; если аргументов  $k \leq n$ , то эта функция —  $k$ -форма. Смысл такой формы очевиден: она представляет собой ориентированную площадь  $k$ -мерной поверхности в  $n$ -мерном пространстве<sup>34</sup> (объем  $k$ -мерного параллелепипеда), скалярно умноженную на тензор ранга  $n - k$  (у ориентированной площади  $n - k$  индексов, так как она получается при свертке  $n$ -мерного тензора Леви-Чивиты с  $k$  бесконечно малыми векторами образующих на поверхности).

Итак,

$$\omega(\mathbf{da}, \mathbf{db}) = \tilde{\omega}_{\beta\gamma} da^\beta db^\gamma,$$

где в произведение дифференциалов ненулевой вклад дает только антисимметричная часть

$$da^{[\beta} db^{\gamma]} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (da^\beta db^\gamma - da^\gamma db^\beta),$$

для чего вводят *внешнее произведение* векторов:

$$da^{[\beta} db^{\gamma]} \stackrel{\text{def}}{=} da^\beta \wedge db^\gamma, \quad (2.146)$$

так что  $da^\beta \wedge db^\gamma = -db^\beta \wedge da^\gamma$ , и

$$\omega = \omega(\mathbf{da}, \mathbf{db}) = \tilde{\omega}_{\beta\gamma} da^\beta \wedge db^\gamma. \quad (2.147)$$

Интеграл по поверхности  $\Sigma$  от скаляра

$$\int_{\Sigma} \omega \cdot d^2\Sigma$$

в новых обозначениях записывают как

$$\int_{\Sigma} \omega$$

где дифференциалы не указываются в явном виде, так как неявно они стоят в самой дифференциальной форме  $\omega$ . Этот интеграл является суммой инвариантов, значит, и сам он — инвариант, т.е. его значение не изменяется при замене координат векторного пространства. Как видим, дифференциальные формы вводятся в связи с понятием ориентированной поверхности и интегрированием по поверхностям.

Подчеркнем, что в математической литературе часто используют не координатный подход, а инвариантный, в котором дифференциалы координат  $dx^\alpha$  — это базисные векторы ковариантного пространства  $\mathfrak{h}^\alpha$ , так что внешнее произведение определяется как антисимметричная часть тензорного произведения

$$dx^\alpha \wedge dx^\beta = dx^\alpha \otimes dx^\beta - dx^\beta \otimes dx^\alpha, \quad 1 \leq \alpha < \beta \leq 3,$$

и дифференциальная 2-форма записывается в виде упорядоченной суммы

$$\omega = \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 3} \tilde{\omega}_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

Опуская вопрос о согласовании нормировок, укажем, что введенная нами 2-форма в координатном представлении (2.147), где суммируются немые индексы без упорядочивания, представляет собой переход к

<sup>33</sup>По построению значение 2-формы на одинаковых образующих равно нулю  $\omega(\mathbf{da}, \mathbf{da}) = 0$ .

<sup>34</sup>Ориентированная площадь  $k$ -мерной поверхности обращается в нуль, если размерность поверхности меньше  $k$ .

свертке или, как говорят, к подстановке<sup>35</sup> в дифференциальную форму бесконечно малых образующих на гиперплоскости,

$$\omega(\mathbf{da}, \mathbf{db}) = \tilde{\omega}_{\beta\gamma} da^\beta \wedge db^\gamma = i_{\mathbf{db}}(i_{\mathbf{da}} \omega), \quad (2.148)$$

а это скаляр (инвариант обратимых гладких преобразований координат). Ясно также, что интеграл дифференциальной формы по заданной гиперповерхности предполагает подстановку вместо базиса координатного пространства бесконечно малых образующих заданной гиперплощади.

Для полноты картины вводят также понятие 1-формы:

$$\lambda = \boldsymbol{\lambda} \cdot d\mathcal{C},$$

которая представляет собой элемент интеграла вектора по контуру.

*Объем.* Тройка векторов  $\mathbf{da}$ ,  $\mathbf{db}$  и  $\mathbf{dc}$  в 3-мерном пространстве задает ориентированный объем параллелепипеда

$$d^3V = (\mathbf{da} \times \mathbf{db}) \cdot \mathbf{dc} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} da^\alpha db^\beta dc^\gamma.$$

Соответствующую дифференциальную 3-форму можно записать в виде

$$\Omega = \Omega_0 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} da^\alpha \wedge db^\beta \wedge dc^\gamma,$$

где антисимметризованное внешнее произведение получается перестановками

$$da^\alpha \wedge db^\beta \wedge dc^\gamma = \frac{1}{3!} (da^\alpha db^\beta dc^\gamma - da^\beta db^\alpha dc^\gamma - da^\gamma db^\alpha dc^\beta - da^\alpha db^\gamma dc^\beta + da^\beta db^\gamma dc^\alpha + da^\gamma db^\beta dc^\alpha).$$

Интеграл по объему

$$\int \Omega$$

полностью задается скалярной величиной  $\Omega_0$ , что остается в силе и для пространства произвольной размерности.

## §b. Внешнее дифференцирование

Внешнее дифференцирование переводит 2-форму  $\omega$  в 3-форму  $d\omega$ , так что

$$\omega = \tilde{\omega}_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dy^\beta \rightarrow d\omega \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\gamma \tilde{\omega}_{\alpha\beta} \cdot 3 \cdot dz^\gamma \wedge dx^\alpha \wedge dy^\beta = 3 \partial_\gamma \tilde{\omega}_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dy^\beta \wedge dz^\gamma,$$

где фактор 3 учитывает количество возможностей, которыми можно записать дополнительно появившийся внешний дифференциал<sup>36</sup>, и мы дважды переставили дифференциал<sup>37</sup>  $dz^\gamma$ . Отличие от обычного частного дифференцирования состоит в том, что внешнее произведение дифференциалов оставляет при свертке только ненулевой вклад от антисимметризованной части производной от тензора, так что

$$d\omega = (\partial_\gamma \tilde{\omega}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \tilde{\omega}_{\gamma\beta} - \partial_\beta \tilde{\omega}_{\alpha\gamma}) dx^\alpha \wedge dy^\beta \wedge dz^\gamma,$$

и фактор 3 сократился с фактором антисимметризации производной

$$\partial_\gamma \tilde{\omega}_{\alpha\beta} \rightarrow \frac{1}{3} (\partial_\gamma \tilde{\omega}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \tilde{\omega}_{\gamma\beta} - \partial_\beta \tilde{\omega}_{\alpha\gamma}).$$

Если вспомнить, что 2-форму можно задать вектором, так что  $\tilde{\omega}_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma'} \omega^{\gamma'}$ , а также учесть, что

$$dx^\alpha \wedge dy^\beta \wedge dz^\gamma = \frac{1}{3!} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} d^3V,$$

<sup>35</sup> Согласно формальному определению операции *внутреннего дифференцирования*  $i_v$  или подстановка вектора  $v$  в  $k$ -форму  $\omega^{(k)}$  переводит эту форму в  $(k-1)$ -форму:

$$i_v \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^{(k)} h^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge h^{\alpha_k} \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^{(k)} v^{\alpha_1} h^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge h^{\alpha_k}.$$

Чтобы подчеркнуть то, что подстановка сохраняет антисимметричность в свертке в координатном подходе уместно использовать все тот же символ внешнего произведения и после подстановки, что в явном виде указывает на антисимметризацию по индексам свертки:

$$i_v \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^{(k)} h^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge h^{\alpha_k} \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^{(k)} v^{\alpha_1} \wedge h^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge h^{\alpha_k}.$$

<sup>36</sup> Этот фактор введен по договоренности для удобства записи последующих формул, что читатель сможет оценить ниже.

<sup>37</sup> Напомним, что каждая перестановка в силу антисимметрии внешнего произведения дает знак минус.



то внешний дифференциал запишется в виде

$$d\omega = (\partial_\gamma \tilde{\omega}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \tilde{\omega}_{\gamma\beta} - \partial_\beta \tilde{\omega}_{\alpha\gamma}) \frac{1}{3!} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} d^3V = 3\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\gamma \omega^{\alpha\beta} \frac{1}{3!} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} d^3V = \partial_\gamma \omega^\gamma d^3V.$$

Поэтому интеграл 2-формы, т.е., интеграл от вектора  $\omega$  по площади ориентированной поверхности, переходит при действии внешнего дифференцирования в интеграл от дивергенции вектора:

$$\int \omega \xrightarrow{d} \int d\omega \Leftrightarrow \int \omega \cdot d^2\Sigma \xrightarrow{d} \int \operatorname{div} \omega d^3V.$$

Приведенная процедура аналогичным образом справедлива и для форм других рангов. Например, для 1-формы

$$\lambda = \lambda_\alpha dx^\alpha \rightarrow d\lambda = (\partial_\alpha \lambda_\beta - \partial_\beta \lambda_\alpha) dx^\alpha \wedge dy^\beta.$$

Так как

$$dx^\alpha \wedge dy^\beta = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} d^2\Sigma_\gamma,$$

внешний дифференциал 1-формы выражается через ротор вектора, задающего эту 1-форму:

$$d\lambda = \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha \lambda_\beta d^2\Sigma_\gamma = \operatorname{rot} \lambda \cdot d^2\Sigma.$$

Если определить 1-форму внешнего дифференцирования

$$D \stackrel{\text{def}}{=} dz^\gamma \partial_\gamma,$$

то внешний дифференциал задает внешнее произведение этой формы на форму  $\omega$ ,

$$d\omega = D \wedge \omega.$$

Так как процедура антисимметризации не затрагивает свойств производной, внешний дифференциал обладает обычными свойствами дифференцирования, как то

$$d(\omega + \lambda) = d\omega + d\lambda,$$

но имеет место градуированное правило дифференцирования Лейбница,

$$d(\omega \wedge \lambda) = d\omega \wedge \lambda + (-1)^k \omega \wedge d\lambda = d\omega \wedge \lambda + (-1)^{kl} d\lambda \wedge \omega,$$

где внешнее произведение форм ранга  $k$  и  $l$  соответственно в компонентах имеет вид

$$\omega \wedge \lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(k+l)!}{k! l!} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \lambda_{\beta_1 \dots \beta_l} dx_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx_k^{\alpha_k} \wedge dy_1^{\beta_1} \wedge \dots \wedge dy_l^{\beta_l},$$

причем фактор дает число возможных перестановок внешних дифференциалов с учетом симметрии по перестановкам, присутствовавшей в изначальных формах  $\omega$  и  $\lambda$ , а фактор  $(-1)^k$  возникает при перестановках внешних дифференциалов координат. Как и для обычных производных, из-под знака внешнего дифференциала можно выносить постоянный множитель

$$d(c \cdot \omega) = c \cdot d\omega.$$

Если перечисленные выше свойства внешнего дифференциала были очевидными свойствами, присущими производной функции, то антисимметризация приводит и к нетривиальным последствиям.

*Нильпотентность:* квадрат внешнего дифференциала тождественно равен нулю:

$$d^2\omega \equiv 0. \quad (2.149)$$

В самом деле, для  $k$ -формы в компонентах квадрат внешнего дифференциала равен

$$d^2\omega = (k+1)(k+2) \partial_\alpha \partial_\beta \omega_{\gamma_1 \dots \gamma_k} dz^\alpha \wedge dy^\beta \wedge dx_1^{\gamma_1} \wedge \dots \wedge dx_k^{\gamma_k},$$

но частные производные перестановочны

$$\partial_\alpha \partial_\beta - \partial_\beta \partial_\alpha = 0,$$

и значит, антисимметризация приводит к тождественному занулению квадрата дифференциала формы.

*Замкнутые и точные формы.* Дадим также часто используемые определения.

Дифференциальная форма называется замкнутой, если

$$d\omega = 0.$$

Как мы видели, 2-форма является замкнутой, если определяющий ее вектор имеет нулевую дивергенцию (например, это означает, что вектор тока сохраняется).

Среди замкнутых форм выделяют точные, для которых замкнутость является следствием нильпотентности внешнего дифференциала:

$$\omega = d\lambda.$$

В примере с 2-формой определяющий ее вектор задается ротором вектора, так что дивергенция ротора тождественно зануляется.

В анализе на гладких многообразиях вводят класс эквивалентности замкнутых форм: две замкнутых  $k$ -формы принадлежат одному классу, если их разность — точная форма. Классы эквивалентности  $k$ -форм на гладком многообразии  $M$  составляют когомологию де Рама  $H^k(M)$  этого многообразия.

**Задача 44.** Докажите формулу гомотопии (тождество Картана) для производной Ли дифференциальной формы  $\omega$  по направлению  $\xi$

$$L_\xi \omega = i_\xi d\omega + di_\xi \omega$$

на примере 1-формы. Из тождества Картана с учетом нильпотентности внешнего дифференциала следует, что производная Ли по направлению и внешнее дифференцирование перестановочны на дифференциальных формах,

$$L_\xi d\omega = dL_\xi \omega = di_\xi d\omega.$$

### §с. Теоремы

Использование внешнего дифференциала позволяет по-новому записать известные теоремы об интегрировании по замкнутым поверхностям или по кривым. Приведем их в случае 3-мерного пространства, воспользовавшись представлением форм в виде векторов, их роторов и дивергенций, описанным выше.

Теорема Стокса. Интеграл вектора по замкнутому контуру  $C$  равен интегралу от ротора вектора по поверхности  $\Sigma$  с границей, лежащей на этом контуре  $\partial\Sigma = C$  (поток ротора через поверхность):

$$\oint_{C=\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega, \quad (2.150)$$

где  $\omega$  — 1-форма.

Теорема Гаусса–Остроградского. Интеграл вектора по замкнутой поверхности  $\Sigma$  (поток вектора через поверхность) равен интегралу от дивергенции вектора по объему  $V$ , ограниченному этой поверхностью  $\partial V = \Sigma$ :

$$\oint_{\Sigma=\partial V} \omega = \int_V d\omega, \quad (2.151)$$

где  $\omega$  — 2-форма.

Для замкнутых форм правые части в тождествах вышеприведенных теорем равны нулю. Для точных форм интегралы в левых частях берутся от полных дифференциалов, так что они вычисляются тривиальным образом. Например, для 1-формы интеграл по контуру

$$\int_{x_0}^{x_1} d\lambda = \lambda(x_1) - \lambda(x_0),$$

и если контур замкнут (нет границы), то интеграл равен нулю.

Как видим, язык дифференциальных форм позволяет единым образом записывать многомерные теоремы о замкнутых гиперповерхностях, что и является достоинством его универсальности, которая становится необходимой для научных исследований на переднем крае науки, т.е. на острие «высоких технологий».

Отметим также, что на языке дифференциальных форм и внешнего дифференциала теоремы Стокса и Гаусса–Остроградского становятся совершенно прозрачными для их понимания, если их читать справа налево: интеграл от полной производной сводится к значению первообразной на границах интегрирования. По существу все эти теоремы — формула Ньютона–Лейбница для интегрирования полной производной.

### §d. Ориентированный объем в криволинейных координатах

Мы записали ориентированный объем в декартовых координатах, когда метрика является единичной матрицей,

$$d^3V = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} dx^\alpha \wedge dy^\beta \wedge dz^\gamma, \quad g_{\alpha\beta} = \mathbb{1}_{\alpha\beta}.$$

При переходе к криволинейным, штрихованным, координатам необходимо провести замену дифференциалов в том же элементе ориентированного объема,

$$d^3V = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha_1}} \frac{\partial y^\beta}{\partial y'^{\beta_1}} \frac{\partial z^\gamma}{\partial z'^{\gamma_1}} dx'^{\alpha_1} \wedge dy'^{\beta_1} \wedge dz'^{\gamma_1} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \tilde{\Lambda}^\alpha_{\bullet\alpha_1} \tilde{\Lambda}^\beta_{\bullet\beta_1} \tilde{\Lambda}^\gamma_{\bullet\gamma_1} dx'^{\alpha_1} \wedge dy'^{\beta_1} \wedge dz'^{\gamma_1},$$

где матрица преобразований  $\tilde{\Lambda}$ , конечно, одна и та же для всех дифференциалов

$$\tilde{\Lambda}^\alpha_{\bullet\alpha_1} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha_1}}.$$

Пользуясь известным нам свойством детерминанта

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \tilde{\Lambda}^\alpha_{\bullet\alpha_1} \tilde{\Lambda}^\beta_{\bullet\beta_1} \tilde{\Lambda}^\gamma_{\bullet\gamma_1} = \epsilon_{\alpha_1\beta_1\gamma_1} \det \tilde{\Lambda},$$

в криволинейных координатах ориентированный объем запишем в виде

$$d^3V = \det \tilde{\Lambda} \cdot \epsilon_{\alpha_1\beta_1\gamma_1} dx'^{\alpha_1} \wedge dy'^{\beta_1} \wedge dz'^{\gamma_1} = \det \tilde{\Lambda} \cdot d^3V'.$$

Модуль детерминанта  $\det \tilde{\Lambda}$  называют якобианом преобразований координат. При обратимых преобразованиях от декартовых координат к криволинейным якобиан безусловно отличен от нуля. В тех же криволинейных координатах ковариантный тензор метрики, согласно закону преобразований ровно с той же матрицей

$$g'_{\alpha_1\beta_1} = \tilde{\Lambda}^\alpha_{\bullet\alpha_1} \tilde{\Lambda}^\beta_{\bullet\beta_1} g_{\alpha\beta},$$

при переходе от декартовых координат примет вид

$$g'_{\alpha_1\beta_1} = \tilde{\Lambda}^\alpha_{\bullet\alpha_1} \tilde{\Lambda}^\beta_{\bullet\beta_1} \mathbb{1}_{\alpha\beta} = (\tilde{\Lambda}^T)^\alpha_{\alpha_1} \mathbb{1}_{\alpha\beta} \tilde{\Lambda}^\beta_{\bullet\beta_1},$$

а стало быть

$$\det g' = (\det \tilde{\Lambda})^2.$$

В итоге, ориентированный объем в криволинейных координатах запишется как

$$d^3V = \sqrt{\det g'} d^3V'. \quad (2.152)$$

Иногда делают замечание, что вместо метрики можно выбрать произвольный невырожденный симметричный ковариантный тензор  $f_{\alpha\beta}$ , детерминант которого не равен нулю, поскольку любой такой тензор преобразуется по тому же закону как и тензор метрики, так что величина  $\sqrt{\det f'} d^3V'$  будет иметь те же трансформационные свойства, что и полученный нами ориентированный объем в криволинейных координатах с точностью до скалярного множителя  $\Omega(\mathbf{r})$ , зависящего от точки,  $\Omega = \sqrt{\det f'}/\sqrt{\det g'}$ . Но тогда это отвечает случаю, когда подынтегральное выражение просто домножается на скалярное поле  $\Omega$ . С точки зрения физики такое скалярное поле — это дополнительная степень свободы, для которой также необходимо задать динамику. Кроме того, только метрика сводится к диагональной единичной матрице в декартовых координатах<sup>38</sup>, и объем становится действительно объемом. Поэтому интегрирование в криволинейных координатах без введения дополнительных степеней свободы всегда записывают в виде (2.152).

**Задача 45.** Запишите элемент объема в сферических координатах, применяя метод с использованием детерминанта метрики.

<sup>38</sup>Если два ненулевых тензора совпадают в одних координатах, то, как следствие закона преобразования тензоров, они совпадают и во всех других координатах.

### §е. Криволинейная метрика как внешнее поле и закон сохранения энергии-импульса

В теории поля метрика пространства-времени псевдоевклидова,  $\det g < 0$ , так что при переходе от декартовых координат, в которых  $\det g = -1$ , элемент ориентированного 4-объема в криволинейных координатах запишется как

$$d^4V = \sqrt{-\det g'} d^4V'.$$

Опуская штрихи и вводя стандартное обозначение для детерминанта метрики  $\det g \equiv g$ , инвариантное действие для поля  $\Phi(x)$  в криволинейных координатах запишется в виде

$$S = \int \mathcal{L}(\Phi, \nabla\Phi, g_{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4V,$$

причем в силу инвариантности объема лагранжиан, очевидно, является скаляром, а величину  $\mathcal{L} \sqrt{-g}$  называют скалярной плотностью, имея ввиду отличное от тождественного преобразование детерминанта метрики при замене координат.

Обобщая инфинитезимальные сдвиги (2.75)

$$r'^\alpha = r^\alpha + \xi^\alpha(\mathbf{r}), \quad \xi^\alpha \rightarrow 0,$$

на пространство-время Минковского

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x), \quad \xi^\mu \rightarrow 0,$$

используем тот факт, что действие останется инвариантным, т.е.  $\delta S = 0$ . Имея ввиду, что поля представляют собой тензорные величины в пространстве-времени Минковского, сразу получим, что вариация полей сводится к производной Ли,

$$\delta\Phi = L_\xi\Phi, \quad \delta g_{\mu\nu} = \nabla_\mu\xi_\nu + \nabla_\nu\xi_\mu.$$

Подчеркнем, что ни лагранжиан, ни детерминант метрики в явном виде не зависят от координат, т.е.  $\partial_\mu\{\sqrt{-g}\mathcal{L}\} \equiv 0$ , так что их изменение при замене координат сводится именно к вариации за счет изменения полей. Однако элемент объема  $d^4V$  построен из дифференциалов, так что

$$\delta d^4V = \xi^\mu \partial_\mu d^4V.$$

Интегрирование по частям при условии нулевых вкладов на границе приведет к члену

$$- \int d^4V \xi^\mu \partial_\mu \{\sqrt{-g}\mathcal{L}\} = 0,$$

поскольку  $\partial_\mu\{\sqrt{-g}\mathcal{L}\} \equiv 0$ . Важно подчеркнуть, что это условие означает просто, что лагранжиан в явном виде не зависит от координат, и это есть ключевое положение! Конечно, если взять потом решения уравнений движения полей и подставить их в лагранжиан, то лагранжиан станет зависеть от координат неявно, через поля. Поэтому на уравнениях движения производные по координатам вычисляются именно неявно, т.е. сначала берутся производные по полям, а затем производные полей по координатам! Явная и неявная зависимость от координат имеет место при разных условиях, но обозначается одинаково, как вычисление частных производных  $\partial_\mu$ , однако всегда нужно обращать внимание на фразу «на уравнениях движения» или на отсутствие этой фразы, так как от этого зависит смысл самих выражений.

Пусть теперь вариация действия вычисляется на уравнениях движения полей  $\Phi$  при наличии внешнего поля метрики в криволинейных координатах, т.е. метрика рассматривается как заданный источник внешнего воздействия на движение в системе. Это означает, что вариация по полям сводится к тождественно нулю в силу принципа экстремального действия,  $\delta S/\delta\Phi = 0$ , так что

$$\delta S = \int d^4V \delta g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} \{\sqrt{-g}\mathcal{L}(\Phi, \nabla\Phi, g_{\mu\nu})\} + \int d^4V \delta\{\partial_\lambda g_{\mu\nu}\} \frac{\partial}{\partial \partial_\lambda g_{\mu\nu}} \{\sqrt{-g}\mathcal{L}(\Phi, \nabla\Phi, g_{\mu\nu})\}.$$

Во втором слагаемом вариация производной равна производной вариации,

$$\delta\{\partial_\lambda g_{\mu\nu}\} = \partial_\lambda \delta\{g_{\mu\nu}\},$$

так что, проводя интегрирования по частям с учетом того, что граничные вклады равны нулю по условиям вариации полей на уравнениях движения, найдем

$$\delta S = \int d^4V \delta g_{\mu\nu} \left( \frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} \{\sqrt{-g}\mathcal{L}\} - \partial_\lambda \left( \frac{\partial}{\partial \partial_\lambda g_{\mu\nu}} \{\sqrt{-g}\mathcal{L}\} \right) \right).$$

Производная метрики может входить только в ковариантные производные полей, так что детерминант можно вынести из под знака дифференцирования по  $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$ ,

$$\partial_\lambda \left( \frac{\partial}{\partial \partial_\lambda g_{\mu\nu}} \{ \sqrt{-g} \mathcal{L} \} \right) = \sqrt{-g} \left\{ \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\lambda g_{\mu\nu}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\lambda g_{\mu\nu}} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\lambda \sqrt{-g} \right\}.$$

Производная детерминанта метрики нам известна, это — минор матрицы,

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = g g^{\mu\nu},$$

так что, если ввести краткое обозначение

$$\frac{\widehat{\delta \mathcal{L}}}{\delta g_{\mu\nu}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\lambda g_{\mu\nu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\lambda g_{\mu\nu}} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\lambda \sqrt{-g},$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} \{ \sqrt{-g} \mathcal{L} \} - \partial_\lambda \left( \frac{\partial}{\partial \partial_\lambda g_{\mu\nu}} \{ \sqrt{-g} \mathcal{L} \} \right) = \sqrt{-g} \frac{\widehat{\delta \mathcal{L}}}{\delta g_{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} g g^{\mu\nu} \mathcal{L} = \sqrt{-g} \left\{ \frac{\widehat{\delta \mathcal{L}}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right\}$$

Значит, вариация действия при сдвигах в криволинейных координатах на уравнениях движения примет вид

$$\delta S = \int d^4 V (\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu) \cdot \sqrt{-g} \left\{ \frac{\widehat{\delta \mathcal{L}}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right\} = \int d^4 V 2\sqrt{-g} \left\{ \frac{\widehat{\delta \mathcal{L}}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right\} \nabla_\mu \xi_\nu,$$

где мы воспользовались явной симметрией по перестановкам индексов  $\mu$  и  $\nu$ . В силу стандартного правила дифференцирования произведения тензоров запишем

$$\delta S = \int d^4 V 2\sqrt{-g} \nabla_\mu \left[ \left\{ \frac{\widehat{\delta \mathcal{L}}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right\} \xi_\nu \right] - \int d^4 V 2\sqrt{-g} \xi_\nu \nabla_\mu \left\{ \frac{\widehat{\delta \mathcal{L}}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right\}.$$

Воспользуемся установленным нами при рассмотрении ковариантной производной тождеством

$$\nabla_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \{ \sqrt{-g} A^\mu \},$$

положив

$$A^\mu = 2 \left\{ \frac{\widehat{\delta \mathcal{L}}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right\} \xi_\nu,$$

так что

$$\int d^4 V \sqrt{-g} \nabla_\mu A^\mu = \int d^4 V \partial_\mu \{ \sqrt{-g} A^\mu \},$$

и в силу теоремы Гаусса этот интеграл от 4-дивергенции сводится к интегралу по поверхности, где мы считаем, что вариация полей и координат сводится к нулю как условие вычисления вариации действия с фиксированными границами и фиксированными полями на границах. В итоге, равенство нулю вариации действия при сдвигах на уравнениях движения поля при наличии внешнего поля метрики означает, что

$$- \int d^4 V 2\sqrt{-g} \xi_\nu \nabla_\mu \left\{ \frac{\widehat{\delta \mathcal{L}}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right\} = 0,$$

и в силу произвольного выбора  $\xi^\nu$  устанавливаем локальный закон сохранения для контр-вариантного тензора второго ранга

$$\nabla_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0, \quad \mathcal{T}^{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} -2 \frac{\widehat{\delta \mathcal{L}}}{\delta g_{\mu\nu}} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.153)$$

Этот тензор называют симметричным тензором энергии-импульса.

Физическую интерпретацию  $\mathcal{T}^{\mu\nu}$  мы рассмотрим в другом разделе. Сейчас же упростим изложение, ограничившись декартовыми координатами пространства-времени Минковского, в которых

$$\frac{\widehat{\delta\mathcal{L}}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}}.$$

Поскольку в действие входят частные производные поля, так что лагранжиан строится с использованием обратной метрики, обычно переходят от производной лагранжиана полей по метрике к производной по обратной метрике

$$\frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{\partial g^{\mu_1\nu_1}}{\partial g_{\mu\nu}} \frac{\partial}{\partial g^{\mu_1\nu_1}}$$

Для вычисления этой производной воспользуемся определением обратной метрики,

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu_1} = \delta_{\mu}^{\nu_1},$$

откуда вариация элементарно дает

$$g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu_1} = -g^{\mu\nu_1}\delta g_{\mu\nu},$$

и умножение на  $g^{\mu_1\nu}$  приводит в левой части к результату

$$g^{\mu_1\nu}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu_1} = \delta_{\mu}^{\mu_1}\delta g^{\mu\nu_1} = \delta g^{\mu_1\nu_1},$$

и, стало быть,

$$\delta g^{\mu_1\nu_1} = -g^{\mu_1\nu}g^{\mu\nu_1}\delta g_{\mu\nu},$$

откуда

$$-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu_1\nu_1}} g^{\mu_1\nu}g^{\mu\nu_1}.$$

Поэтому закон сохранения запишется в виде

$$\nabla_{\mu} \left\{ 2g^{\mu_1\nu}g^{\mu\nu_1} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu_1\nu_1}} - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \right\} = 0.$$

Домножая на  $g_{\nu\nu'}$ , а также учитывая, что ковариантная производная метрики равна нулю, если связность является метрической, найдем

$$\nabla^{\nu_1} \left\{ 2 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\nu'\nu_1}} - g_{\nu'\nu_1}\mathcal{L} \right\} = 0. \quad (2.154)$$

Окончательно, с учетом симметрии по перестановкам индексов тензора метрики, введем симметричный ковариантный тензор энергии-импульса в декартовом пространстве

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad (2.155)$$

с ковариантным законом сохранения

$$\nabla^{\mu}\mathcal{T}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.156)$$

Мы установили, что закон сохранения  $\mathcal{T}^{\mu\nu}$  является следствием трёх фактов: действие — скаляр, лагранжиан в явном виде не зависит от координат, метрика — ковариантный тензор второго ранга. При этом тензор энергии-импульса  $\mathcal{T}^{\mu\nu}$  автоматически получается симметричным по перестановкам индексов.

В декартовых координатах евклидова пространства ковариантная производная сводится к частным производным, так что

$$\partial_{\mu}\mathcal{T}^{\mu\nu} = 0, \quad (2.157)$$

а метрика становится диагональной и постоянной.

Для примера, чтобы убедиться в том, что сохраняющаяся величина действительно отвечает тензору энергии-импульса, рассмотрим свободную нерелятивистскую частицу с действием

$$S = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} - \int_{t_0}^t H(\mathbf{v}) dt = \int m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} - \int \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 dt,$$

так что согласно уравнениям Гамильтона–Якоби введем 4-ковектор канонической скорости (строку)

$$\mathcal{U}_\mu = \frac{1}{m} \partial_\mu S = \left( -\frac{1}{2c} \mathbf{v}^2, \mathbf{v} \right),$$

а также 4-вектор собственной координатной скорости

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} = \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$v^\mu \mathcal{U}_\mu = -\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2,$$

действие можно переписать в виде

$$S = \int m v^\mu \mathcal{U}_\mu dt \mapsto \frac{1}{c} \int d^4V \rho_{(m)} v^\mu \mathcal{U}_\mu,$$

где мы записали массу в виде выражения через плотность массы  $\rho_{(m)}$ , полагая, конечно, что в системе не точечная масса, а распределение массы,

$$m = \int dm = \int \rho_{(m)} d^3V,$$

а также использовали стандартную связь  $dt = dx^{(0)}/c$ . Подчеркнем, что полученный нами лагранжиан нерелятивистской частицы записан в пространстве-времени так, что нет никакой метрики и не наблюдается никакой симметрии верхних и нижних компонент собственной координатной скорости  $v^\mu$  и скорости, определяющей 4-импульс,  $\mathcal{U}_\mu$ .

Полагая метрику равной  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , найдем

$$\mathcal{U}^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{v}^2}{2c} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad v_\mu = (-c, \mathbf{v}).$$

Тогда с учетом симметричности тензора метрики

$$\mathcal{L} = \frac{1}{c} \rho_{(m)} g_{\mu\nu} \frac{1}{2} \{v^\mu \mathcal{U}^\nu + v^\nu \mathcal{U}^\mu\}$$

и

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2c} \rho_{(m)} \{v^\mu \mathcal{U}^\nu + v^\nu \mathcal{U}^\mu\},$$

а тензор энергии-импульса

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = -\frac{1}{c} \rho_{(m)} \{v^\mu \mathcal{U}^\nu + v^\nu \mathcal{U}^\mu + g^{\mu\nu} v^\lambda \mathcal{U}_\lambda\}.$$

Временная компонента

$$c \mathcal{T}_0^0 = c g_{00} \mathcal{T}^{00} = -c \mathcal{T}^{00} = \frac{1}{2} \rho_{(m)} \mathbf{v}^2$$

представляет собой плотность энергии  $\epsilon$  для свободной частицы,

$$E = \int_V d^3V \epsilon = \int_V d^3V \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \frac{dm}{d^3V}.$$

Энергия в фиксированном объеме  $V$  может изменяться, если через поверхность  $\partial V$ , охватывающую объем, проходит ненулевой поток энергии

$$\mathbf{S} = \mathbf{v} \epsilon = \mathbf{v} \frac{1}{2} \rho_{(m)} \mathbf{v}^2.$$

Согласно закону сохранения тензора  $\mathcal{T}^{\mu\nu}$  при  $\nu = 0$  найдем, что

$$\partial_0 \mathcal{T}^{00} + \partial_\alpha \mathcal{T}^{\alpha 0} = 0,$$

так что при умножении на  $c^2$  и опускании временного индекса находим

$$\partial_t \epsilon + \operatorname{div} \left\{ \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} \rho_{(m)} \mathbf{v}^2 + \rho_{(m)} c^2 \right) \right\} = 0.$$

Как видим, к потоку кинетической энергии в законе сохранения добавился еще и поток энергии покоя! Этот сюрприз — артефакт симметризации тензора энергии-импульса по перестановке индексов. Заодно мы видим, что выражения следует рассматривать в определенном порядке по скорости  $c$ . В этом плане, с одной стороны, можно модифицировать выражение для временной компоненты канонического импульса, введя шляпку над символом,

$$m \mathcal{U}^0 \mapsto m \hat{\mathcal{U}}^0 = m \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + c^2 \right),$$

так что

$$v^\mu \hat{\mathcal{U}}_\mu = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - c^2.$$

С другой стороны, к лагранжиану можно добавить постоянный член, связанный с началом отсчета энергии: в функции Лангранжа и в функции Гамильтона этот член, конечно, имеет противоположные знаки. Если лагранжиан оставить прежним, то его запись с учетом введения энергии покоя во временную компоненту канонической скорости примет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{c} \rho_{(m)} \mathbf{v}^2 = \frac{1}{c} \rho_{(m)} \left\{ v^\mu \hat{\mathcal{U}}_\mu + c^2 \right\} = \frac{1}{c} \rho_{(m)} \left( g_{\mu\nu} \frac{1}{2} \left\{ v^\mu \hat{\mathcal{U}}^\nu + v^\nu \hat{\mathcal{U}}^\mu \right\} + c^2 \right)$$

Тогда

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = -\frac{1}{c} \rho_{(m)} \left\{ v^\mu \hat{\mathcal{U}}^\nu + v^\nu \hat{\mathcal{U}}^\mu + g^{\mu\nu} \left( v^\lambda \hat{\mathcal{U}}_\lambda + c^2 \right) \right\},$$

а для баланса энергии

$$\partial_t \epsilon + \operatorname{div} \{ \mathbf{v} \epsilon \} + 2 \left( \partial_t \rho_{(m)} c^2 + \operatorname{div} \{ \mathbf{v} \rho_{(m)} c^2 \} \right) = 0,$$

где мы отдельно выписали вклады в разном порядке по  $c$ , так что имеет место как баланс кинетической энергии, так и энергии покоя. Странное удвоение плотности энергии покоя связано с тем, что мы слишком вольно обошлись с величиной квадрата скорости, не учитывая, что в неё также входит метрика. Действительно,

$$\mathbf{v}^2 = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu + c^2.$$

Это означает, что

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{U}}^0}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2c} v^\mu v^\nu,$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2c} \rho_{(m)} \left\{ v^\mu \hat{\mathcal{U}}^\nu + v^\nu \hat{\mathcal{U}}^\mu \right\} + \frac{1}{c} \rho_{(m)} g_{00} v^0 \frac{\partial \hat{\mathcal{U}}^0}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2c} \rho_{(m)} \left\{ v^\mu \hat{\mathcal{U}}^\nu + v^\nu \hat{\mathcal{U}}^\mu - v^\mu v^\nu \right\}.$$

Тогда

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = -\frac{1}{c} \rho_{(m)} \left\{ v^\mu \hat{\mathcal{U}}^\nu + v^\nu \hat{\mathcal{U}}^\mu - v^\mu v^\nu + g^{\mu\nu} \left( v^\lambda \hat{\mathcal{U}}_\lambda + c^2 \right) \right\},$$

и уравнение баланса энергии приобретает вид с правильными нормировками вкладов разной степени по скорости  $c$ ,

$$\partial_t \epsilon + \operatorname{div} \{ \mathbf{v} \epsilon \} = 0, \quad \partial_t \rho_{(m)} c^2 + \operatorname{div} \{ \mathbf{v} \rho_{(m)} c^2 \} = 0.$$

Совершенно аналогично, при замене индекса  $\nu$  на  $\alpha$  в ковариантном законе сохранения:  $\partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0 \mapsto \partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\alpha} = 0$ , — получим, что

$$\partial_0 \mathcal{T}^{0\alpha} + \partial_\beta \mathcal{T}^{\beta\alpha} = 0,$$



и после умножения на  $-c$  найдем, что

$$\partial_t \left\{ \rho_{(m)} \mathbf{v} + \rho_{(m)} \mathbf{v} \frac{v^2}{2c^2} \right\}^\alpha + \partial_\beta \left\{ \rho_{(m)} v^\alpha v^\beta + \rho_{(m)} \delta^{\alpha\beta} \frac{1}{2} v^2 \right\} = 0.$$

В нулевом порядке по  $c$  заключаем, что

$$-\mathcal{T}^{0\alpha} = \mathcal{P}^\alpha = \rho_{(m)} \mathbf{v}$$

представляет собой плотность импульса, а уравнение устанавливает баланс импульса с учетом потока сил через поверхность объема. Более подробное рассмотрение приводится при изложении Темы 4, посвященной тензору энергии-импульса. Здесь же отметим, что вклад второго порядка малости по  $1/c$  в плотности импульса представляется как разложение релятивистского выражения

$$\frac{\rho_{(m)} \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx \rho_{(m)} \mathbf{v} + \rho_{(m)} \mathbf{v} \frac{v^2}{2c^2},$$

а дополнительный вклад в поток импульса можно представить в виде

$$\rho_{(m)} \delta^{\alpha\beta} \frac{1}{2} v^2 \approx \rho_{(m)} c^2 \delta^{\alpha\beta} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right\}.$$

Поэтому, скорее всего, этот изотропный вклад возник вследствие превышения точности учета вклада из-за массы покоя, которая в нерелятивистской механике, вообще говоря, не должна давать наблюдаемые вклады. В тоже время, в теории гравитации введение в лагранжиан константы — космологического члена — обуславливает добавление дополнительного источника гравитации, который обладает и плотностью энергии, и давлением. Рудимент этого вклада мы, по-видимому, здесь и обнаруживаем.

## 12. Уравнения Максвелла

### 12.1. Сила Лоренца, суперпозиция полей

Векторы электрического  $\mathcal{E}$  и магнитного  $\mathcal{H}$  полей в вакууме задают силу Лоренца  $\mathcal{F}$ , действующую на частицу с зарядом  $e$  и скоростью  $\mathbf{v}$ , (в Гауссовых единицах):

$$\mathcal{F} = e\mathcal{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathcal{H}. \quad (2.158)$$

Сила Лоренца задает уравнение движения как для импульса частицы в электромагнитном поле

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathcal{F} = e\mathcal{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathcal{H},$$

так и для энергии

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathcal{F} = e\mathcal{E} \cdot \mathbf{v},$$

что задает мощность работы силы Лоренца.

Поля удовлетворяют принципу суперпозиции:

$$\mathcal{E} = \sum_k \mathcal{E}_k, \quad \mathcal{H} = \sum_k \mathcal{H}_k,$$

т.е. поле многих источников получается суммированием полей от каждого из источников. Из этого принципа следует, что законы для электромагнитного поля точечного заряда позволяют записать динамику произвольного распределения зарядов. Таким образом, достаточно изучить эти законы для точечного заряда.

## 12.2. Закон Кулона

Точечный источник, помещенный в центре координат, т.е. заряд  $e$ , создает электрическое поле согласно закону Кулона:

$$\mathcal{E} = \frac{e}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (2.159)$$

Вычислим поток электрического поля через сферу радиуса  $r$  с элементом площади  $d^2\Sigma = r^2 d\Omega \mathbf{r}/r$ , где телесный угол  $d\Omega$  в сферических координатах  $d\Omega = d\phi d\cos\theta$ ,

$$\oint_{\partial V_r} d^2\Sigma \cdot \mathcal{E} = e \int d\Omega = 4\pi e,$$

так что закон Кулона может быть переписан в интегральной форме

$$\oint_{\partial V_r} d^2\Sigma \cdot \mathcal{E} = 4\pi \int_V dV \rho, \quad (2.160)$$

где мы ввели плотность заряда  $\rho$ . Согласно теореме Гаусса поток вектора через замкнутую поверхность  $\partial V$ , являющуюся границей объема  $V$ , равен интегралу дивергенции вектора по этому объему

$$\oint_{\partial V} d^2\Sigma \cdot \mathcal{E} = \int_V dV \operatorname{div} \mathcal{E}, \quad (2.161)$$

откуда

$$\int_V dV \operatorname{div} \mathcal{E} = 4\pi \int_V dV \rho, \quad (2.162)$$

Заметим, что сферу, охватывающую заряд в ее центре, можно «деформировать» в замкнутую фигуру любой формы. В самом деле, если поверхность замкнутая, то интеграл по ее ориентированной поверхности равен нулю<sup>39</sup>. Тогда поток электрического поля по поверхности бесконечно малого объема, внутри которого нет заряда, можно представить как интеграл от постоянного значения электрического поля в точке внутри объема плюс поправки второго порядка малости из-за зависимости поля от точки на поверхности (сингулярность возникает, если только заряд внутри объема), а поток постоянного поля по замкнутой поверхности обращается в нуль. Суммирование по таким бесконечно малым объемам, не содержащим заряд, дает конечный объем, произвольной формы, поток электрического поля через поверхность которого равен нулю. Теперь представим себе, например, куб, содержащий сферу с зарядом. Интеграл по поверхности куба и поверхности сферы, обращенной внутрь, равен нулю, поскольку между кубом и сферой нет заряда, т.е. дополнение сферы до куба имеет поверхность, поток электрического поля через поверхность которого равен нулю. Отсюда сразу следует, что поток поля по поверхности куба равен потоку по поверхности сферы, обращенной наружу. Это рассуждение, очевидно, справедливо для произвольных замкнутых поверхностей.

Поскольку выражение (2.160) справедливо для произвольного распределения зарядов вследствие принципа суперпозиции полей, можно записать его для произвольного объема и плотности,  $\forall V$ , откуда сразу следует, что имеет место локальная форма закона Кулона

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = 4\pi \rho. \quad (2.163)$$

В частности, электрическое поле *единичного* заряда, расположенного в точке  $\mathbf{r}'$ ,

$$\mathcal{E}_{\text{unit}}(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (2.164)$$

имеет плотность заряда, которая равна нулю всюду, кроме точки  $\mathbf{r}'$ , что обозначают дельта-функцией Дирака:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.165)$$

обладающей свойством

$$\int d^3r \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} f(\mathbf{r}'). \quad (2.166)$$

Значит, из (2.163) следует, что

$$\operatorname{div} \mathcal{E}_{\text{unit}}(\mathbf{r}) = \operatorname{div} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.167)$$

<sup>39</sup>Это следует из теоремы Гаусса в случае интеграла по замкнутой поверхности от постоянного ненулевого вектора, имеющего, следовательно, нулевую дивергенцию.

### 12.3. Закон сохранения заряда

Сохранение электрического заряда означает, что изменение заряда  $q = \int dV \rho$  в некотором фиксированном объеме  $V$  обусловлено лишь тем, что через поверхность  $\partial V$  протекают токи, плотностью  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ , где  $\rho$  — плотность заряда, а  $\mathbf{v}$  — скорость зарядов:

$$\partial_t q = - \oint_{\partial V} d^2 \Sigma \cdot \mathbf{j}, \quad \partial_t \int_V dV \rho = - \oint_{\partial V} d^2 \Sigma \cdot \mathbf{j},$$

что представляет собой интегральную форму записи закона сохранения заряда. С помощью теоремы Гаусса и произвольной величины объема находим локальный вид закона сохранения заряда

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (2.168)$$

Используя введенные ранее 4-компонентные обозначения  $\partial_\mu = (\frac{1}{c}\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$  и 4-компонентную плотность тока  $j^\mu = (c\rho, \mathbf{v}\rho)$ , запишем закон сохранения тока в форме<sup>40</sup>

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad j^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt}. \quad (2.169)$$

Поскольку закон сохранения заряда во всех системах отсчета имеет один и тот же вид (2.169), т.е. он является инвариантом при преобразованиях координат и времени, а  $\partial_\mu$  преобразуется как четырехмерный ковариант в пространственно-временном континууме  $x^\mu = (x_0, \mathbf{r})$ , мы заключаем, что инвариантность закона сохранения может иметь место только в случае, если  $j^\mu$  преобразуется как 4-вектор<sup>41</sup>.

### 12.4. Закон Био-Савара

В случае стационарных токов возникает магнитное поле, направление и величина которого были установлены эмпирически. По принципу суперпозиции это поле является суммой полей от каждой из частиц тока. Движущаяся частица, проходя центр координат, создает магнитное поле согласно закону Био-Савара

$$\mathcal{H} = \frac{e}{c} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

что можно записать в более общем виде для малого заряда  $dq = \rho(\mathbf{r}')dV'$  в точке  $\mathbf{r}'$ :

$$d\mathcal{H} = \frac{dV' \rho(\mathbf{r}')}{c} \frac{\mathbf{v}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

и с учетом определения плотности тока  $\mathbf{v}\rho$  поле интегрирования по распределению зарядов, находим магнитное поле *стационарных токов* или интегральную форму записи закона Био-Савара:

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_{V'} dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (2.170)$$

Вычислим ротор магнитного поля стационарных токов, используя равенство для двойного векторного произведения  $\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}(\mathbf{r})) = \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b}(\mathbf{r}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}(\mathbf{r})$ ,

$$\operatorname{rot} \mathcal{H} = \frac{1}{c} \int_{V'} dV' \left( \mathbf{j}(\mathbf{r}') \operatorname{div} \mathcal{E}_{\text{unit}} - (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla) \mathcal{E}_{\text{unit}} \right),$$

где

$$\mathcal{E}_{\text{unit}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

— это поле единичного заряда, помещенного в точку  $\mathbf{r}'$ . Тогда согласно (2.167)

$$\operatorname{div} \mathcal{E}_{\text{unit}} = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

<sup>40</sup> Вообще говоря знаки  $\nabla_\mu$  и  $\partial_\mu$  при действии на тензорные величины не являются тождественными в криволинейных координатах, но мы здесь имеем в виду декартовы координаты.

<sup>41</sup> Для того чтобы сделать такой вывод, нужно, конечно, заметить, что  $\partial_\mu$  и  $j^\nu$  — это независимые друг от друга величины. Только тогда мы имеем дело с линейной инвариантной функцией  $j$  на коекторе  $\partial_\mu$ . Но это условие, естественно, выполнено по самой постановке задачи:  $j^\nu$  никак не зависит от частных производных, поскольку закон сохранения линеен по частным производным.

так что

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}) - \frac{1}{c} \int_{V'} dV' (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\text{unit}},$$

где второе слагаемое можно преобразовать, заметив, что дифференцирование по штрихованным координатам связано с дифференцированием по не штрихованным координатам:  $\nabla_{\alpha} \mathbf{E}_{\text{unit}} = -\nabla'_{\alpha} \mathbf{E}_{\text{unit}}$ , и проведя интегрирование по частям (в случае стационарных токов полагаем, что интеграл по границе объема с замкнутыми токами, т.е. по замкнутой поверхности, по которой токи не текут, равен нулю), так что

$$\int_{V'} dV' (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\text{unit}} = - \int_{V'} dV' (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla') \mathbf{E}_{\text{unit}} = \int_{V'} dV' \mathbf{E}_{\text{unit}} (\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')) = 0,$$

поскольку для стационарных токов  $\partial_t \rho = 0$  и в силу закона сохранения заряда  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ .

В итоге, локальная форма закона Био-Савара для стационарных токов принимает вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (2.171)$$

## 12.5. Индукция

Если поток магнитного поля, проходящий сквозь площадь, ограниченную замкнутым проводником, меняется со временем, то в проводнике возникает электродвижущая сила, т.е. возникает электрическое поле, совершающее работу по закону индукции

$$\oint_{\partial S} d\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S d^2 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{H}, \quad (2.172)$$

что представляет собой интегральную форму записи закона индукции. По теореме Стокса

$$\oint_{\partial S} d\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{E} = \int_S d^2 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}. \quad (2.173)$$

Поскольку контур замкнутого проводника может быть любым, приходим к локальной форме закона индукции

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (2.174)$$

## 12.6. Магнитные заряды

Для магнитного поля стационарных токов можно вычислить дивергенцию

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \int dV' \nabla \cdot (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}_{\text{unit}}) = -\frac{1}{c} \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_{\text{unit}}),$$

где мы поменяли местами векторы в смешанном произведении, причем  $\mathbf{E}_{\text{unit}}$  — это электрическое поле покоящегося единичного заряда. Заметим теперь, что ротор электрического поля стационарного точечного заряда, т.е. заряда, который покоится, тождественно обращается в нуль<sup>42</sup> согласно закону индукции (2.174), поскольку магнитное поле такого заряда тождественно равно нулю:  $\operatorname{rot} \mathbf{E}_{\text{unit}} = 0$ . Значит,

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (2.175)$$

По аналогии с электрическим полем (см. (2.163)), дивергенция магнитного поля могла бы быть пропорциональна плотности магнитных зарядов. Однако, если магнитное поле создается только при движении электрических зарядов, как следует из закона Био-Савара, то плотность магнитных зарядов тождественно равна нулю: магнитных зарядов в электродинамике Максвелла нет.

<sup>42</sup>Это можно получить прямым вычислением ротора.

### 12.7. Ток смещения

Для стационарных токов из (2.171) следует, что дивергенция плотности тока обращается в нуль

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0,$$

что согласуется, конечно, с законом сохранения заряда (2.169) в случае плотности заряда, постоянной во времени

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

В общем, нестационарном случае

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \left\{ \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right\} = 0,$$

где мы использовали дифференциальную форму закона Кулона (2.163). Величина

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$$

имеет смысл плотности тока, названного Максвеллом током смещения, который возникает в нестационарном случае. Сумма тока электрических зарядов и тока смещение обладает нулевой дивергенцией, что является тождеством, если эта сумма — ротор вектора. В стационарном случае этот вектор — магнитное поле с точностью до численного коэффициента, поэтому естественно было предположить, что и в нестационарном случае при наличии тока смещения следует рассматривать тот же вектор магнитного поля, так что

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}. \quad (2.176)$$

В итоге, уравнения Максвелла образуют первую и вторую пары, соответственно, без источников и с источниками:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathcal{E} = 4\pi \rho, \end{cases} \quad (2.177)$$

которые лежат в основе классической электродинамики, включая специальную теорию относительности [7, 8, 9, 10].

## Тема 3

# Группа поворотов и спин

## Лекция № 6

Группа пространственных трансляций, генераторы непрерывных преобразований координат и полей, задача на собственные значения генератора трансляций и волновой вектор плоской волны, коммутатор генераторов, абелевость группы трансляций, повороты и матрицы генераторов поворотов для вектора, некоммутативная алгебра генераторов группы поворотов  $\mathfrak{so}(3)$ , группа  $O(3)$ , генератор орбитального поворота на примере скалярного поля, генератор аповорота для векторного и тензорного полей.

Общий план изложения вопроса о том, что из себя представляет спин, в этом разделе состоит в следующем:

- [1] Сначала рассматриваются непрерывные изометрии пространства и устанавливается их групповой характер, причем вводятся понятия бесконечно малых преобразований, так что определяется алгебра генераторов группы Ли, т. е. коммутаторы генераторов. Эта алгебра становится центральным объектом исследования, поскольку классификация всех полей в пространстве — это определение свойств полей относительно преобразований, составляющих изометрии. Именно, базис полей — это поля, реализующие неприводимые представления алгебры группы Ли. В этом смысле поле в базисе полей — это векторное пространство, которое получается как линейная оболочка всех образов действия группы на ненулевой элемент этого векторного пространства. Размерность пространства представления, конечно, в общем случае вовсе не совпадает с размерностью исходного координатного пространства, а в нашем случае с размерностью трёхмерного евклидова пространства, поскольку размерности неприводимых представлений находятся в области допустимых значений, которую задает алгебра Ли. К примеру, тензорное представление спина 2 — это 5-мерное пространство, т.е. тензорное поле имеет пять компонент, каждая из которых зависит от координат 3-мерного евклидова пространства.
- [2] В этом аспекте важно понимать, что определяющее представление группы, т.е. реализация преобразований изометрии координат пространства, после вывода коммутационных соотношений генераторов инфинитезимальных преобразований допускает обобщения, так как разные группы могут обладать изоморфной алгеброй Ли. К примеру, алгебра генераторов поворотов пространства группы специальных ортогональных преобразований вещественных 3-мерных координат  $SO(3)$  изоморфна алгебре группы специальных унитарных преобразований двумерных комплекснозначных столбцов  $SU(2)$ . Поэтому представления алгебры генераторов могут включать в себя представления более общей группы, чем группа изометрии исходного евклидова пространства. Однако, сама возможность существования представления более общей группы еще не означает, что эта возможность реализуется Природой.
- [3] Алгебра группы поворотов задает неприводимые представления, т.е. многокомпонентные поля, так что генераторы поворотов в неприводимом представлении — это и есть спин поля в заданном неприводимом представлении. Значит, спин задает закон преобразования компонент поля при поворотах, так что, установив все допустимые значения спиновых матриц, мы, тем самым, найдем базис всех полей в 3-мерном евклидовом пространстве и, в частности, опишем поле полуцелого спина.

### 13. Генераторы инфинитезимальных преобразований

Для иллюстрации программы данной главы и введения основных понятий начнем не с поворотов, а с трансляций.

#### 13.1. Сдвиги $\equiv$ трансляции координат

Действие трансляций определяется преобразованием

$$r_T^\alpha = r'^\alpha = r^\alpha + a^\alpha, \quad (3.1)$$

где  $a^\alpha$  — *глобальный* параметр преобразования, т.е. он не зависит от координат в любой точке пространства

$$\frac{\partial}{\partial r^\beta} a^\alpha \equiv \partial_\beta a^\alpha = 0, \quad \forall \mathbf{r}.$$

Это преобразование можно записать как действие оператора трансляций  $\hat{T}(\mathbf{a})$ , зависящего от параметра  $\mathbf{a}$ ,

$$r_T^\alpha = r'^\alpha = \hat{T}(\mathbf{a}) r^\alpha.$$

Очевидны следующие свойства трансляций:

1. Последовательное действие двух трансляций опять является трансляцией. Действительно,

$$\hat{T}(\mathbf{a}) \cdot \hat{T}(\mathbf{b}) r^\alpha = \hat{T}(\mathbf{a}) (r^\alpha + b^\alpha) = r^\alpha + (b + a)^\alpha = \hat{T}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) r^\alpha,$$

или, что то же,

$$\hat{T}(\mathbf{b}) \cdot \hat{T}(\mathbf{a}) = \hat{T}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

Более того, последовательное действие трех трансляций в силу

$$\hat{T}(\mathbf{c}) \cdot (\hat{T}(\mathbf{b}) \cdot \hat{T}(\mathbf{a})) = \hat{T}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\hat{T}(\mathbf{c}) \cdot \hat{T}(\mathbf{b})) \cdot \hat{T}(\mathbf{a}),$$

как видим, не зависит от их группировки посредством скобок.

2. Существует тождественное преобразование  $\mathbb{1} = \hat{T}(0)$ , такое что

$$\hat{T}(0) r^\alpha = r^\alpha,$$

и

$$\hat{T}(\mathbf{a}) \cdot \hat{T}(0) = \hat{T}(0) \cdot \hat{T}(\mathbf{a}) = \hat{T}(\mathbf{a}), \quad \forall \mathbf{a}.$$

3. После любого сдвига можно сделать обратное преобразование, сводящее действие двух трансляций к тождественному преобразованию,

$$\hat{T}(\mathbf{a}) \cdot \hat{T}(-\mathbf{a}) = \hat{T}(0) = \mathbb{1}, \quad \forall \mathbf{a}.$$

Такие свойства операторов преобразований являются общими и представляют собой математическую конструкцию *группы*, понятие которой, как видим, тесно связано с симметриями физических величин (здесь — пространства).

**Определение.** Группой называется множество  $G$ , обладающее следующими свойствами:

- в ней задана операция композиции (обозначаемая  $\circ$ )

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad \exists g_1 \circ g_2 = g_3 \in G,$$

обладающая свойством *ассоциативности*<sup>1</sup>

$$g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3 \equiv g_1 \circ g_2 \circ g_3,$$

- единичный элемент  $\mathbb{1}$

$$\exists \mathbb{1} \in G : \quad \mathbb{1} \circ g = g \circ \mathbb{1} = g, \quad \forall g \in G,$$

- обратный элемент

$$\forall g \in G \quad \exists g^{-1} \in G : \quad g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = \mathbb{1}.$$

<sup>1</sup>В физических задачах свойство ассоциативности обычно выполняется по построению: преобразования физических величин *определяются* как последовательное действие соответствующих сложных функций от этих величин, например,  $f_3[f_2[f_1(x)]] \equiv f_3 \circ f_2 \circ f_1(x) \equiv (f_3 \circ f_2) \circ f_1(x) \equiv f_3 \circ (f_2 \circ f_1)(x)$ . Однако даже для матричного умножения обратимых матриц, которое является ассоциативным, можно ввести операцию инверсии:  $\mathcal{Inv} \circ A = A^{-1}$ , — так что включение этой операции в композицию обратимых матриц тут же приводит к неассоциативности, поскольку  $\mathcal{Inv} \circ (A \circ B) = B^{-1} \circ A^{-1}$ , а  $(\mathcal{Inv} \circ A) \circ B = A^{-1} \circ B \neq B^{-1} \circ A^{-1}$ .

Как видим, преобразования трансляций образуют группу.

Представлениями абстрактной группы называют множества операторов со всеми свойствами группы, действующие на пространстве представления. Мы будем исследовать конечномерные векторные пространства (множества с конечномерным линейно независимым базисом для элементов пространства с операцией суммы элементов и умножения на вещественные (комплексные) числа, т.е. линейные оболочки базисных векторов<sup>2</sup>).

В рассмотренном случае трансляций векторное пространство — декартовы координаты евклидова пространства, а элементы группы —  $\hat{T}(\mathbf{a})$ . В дальнейшем для ясности и простоты изложения мы будем рассматривать именно представления группы на векторных пространствах без особых оговорок, так что наряду с действием группы на элементы пространства в нем также действуют операции сложения и вычитания. Размерность пространства параметров непрерывных преобразований или попросту число независимых параметров, вообще говоря не совпадает с размерностью координатного пространства. Это видно на примере 3-мерного евклидова пространства: 3 параметра трансляций и 3 угла поворотов в этом евклидовом пространстве, как мы увидим, образуют 6-параметрическую группу, так что число параметров 6 не равно числу координат евклидова пространства 3.

Другая особенность трансляций заключается в том, что они зависят от непрерывного параметра. Группы, элементы которых параметризуются непрерывными величинами, в окрестности каждой точки локально эквивалентными конечномерным областям векторных пространств, называются *группами Ли* (в строгой формулировке определяют свойства функций перехода от одной локальной координатной сетки параметров преобразований к другой в области их перекрытия, а также возможность введения непересекающихся локальных координатных областей для двух различных точек (свойство Хаусдорфа)).

Рассмотрим бесконечно малые (инфинитезимальные) трансляции координат вблизи единичного элемента  $\mathbb{1}$ , т.е. в окрестности тождественного преобразования,

$$\hat{T}(\mathbf{a}) \approx \mathbb{1} - i\Gamma_\alpha a^\alpha, \quad \mathbf{a} \rightarrow 0,$$

где мы ввели *генераторы* инфинитезимальных преобразований

$$\Gamma_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} i \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial a^\alpha} \hat{T}(\mathbf{a}). \quad (3.2)$$

Для закона преобразования скалярной, векторной или тензорной функции, т.е. поля  $\Phi(\mathbf{r})$ , важно знать

$$\frac{\partial r'^\alpha}{\partial r^\beta} = \frac{\partial(r^\alpha + a^\alpha)}{\partial r^\beta} = \delta_\beta^\alpha,$$

а значит, в законе преобразования тензорных величин ранга  $n$  в индексных обозначениях

$$\Phi'^{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\mathbf{r}') = \frac{\partial r'^{\alpha_1}}{\partial r^{\beta_1}} \dots \frac{\partial r'^{\alpha_n}}{\partial r^{\beta_n}} \Phi^{\beta_1 \dots \beta_n}(\mathbf{r}),$$

как для контравариантных, так для ковариантных индексов, все индексы умножаются на символ Кронекера, т.е. не меняются, а значит, тензорные индексы у величин можно опустить, что мы и сделаем при рассмотрении трансляций. Преобразование при трансляциях евклидова пространства теперь можно записать в виде  $\hat{T} \circ \Phi(\mathbf{r}) = \Phi_T(\mathbf{r}_T) = \Phi(\mathbf{r})$ , т.е.

$$\Phi_T(\hat{T}(\mathbf{a})\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) \Rightarrow \Phi_T(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \Phi(\mathbf{r}) \Rightarrow \Phi_T(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \Phi(T(-\mathbf{a})\mathbf{r}).$$

Следовательно, преобразованная функция есть сама функция от аргумента, преобразованного обратной трансляцией. Для бесконечно малых преобразований

$$\Phi_T(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \approx \Phi(\mathbf{r}) - a^\alpha \partial_\alpha \Phi(\mathbf{r}), \quad \Phi_T(\mathbf{r}) = (\mathbb{1} - i\Gamma_\alpha a^\alpha) \Phi(\mathbf{r}) \Rightarrow$$

$$\Gamma_\alpha = -i\partial_\alpha \mapsto \hat{k}_\alpha.$$

Физический смысл генератора трансляций  $\hat{k}_\alpha$  становится ясным, если рассмотреть его действие на произвольную функцию  $f(\mathbf{r})$ . Действительно, ряд Тейлора дает разложение

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r} + \mathbf{a}) &= \sum_n \frac{1}{n!} a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_n} \frac{\partial^n f(\mathbf{r})}{\partial r^{\alpha_1} \dots \partial r^{\alpha_n}} = \sum_n \frac{1}{n!} (\mathbf{a} \cdot \nabla)^n f(\mathbf{r}) \\ &= e^{a^\alpha \partial_\alpha} f(\mathbf{r}) = e^{ia^\alpha \hat{k}_\alpha} f(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

<sup>2</sup>В этом случае представления обычно образованы матрицами, действующими на векторы.



и, в частности, для собственной функции генератора с определенной нормировкой

$$f(\mathbf{a}) = e^{i\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}}, \quad \text{если } f(0) = 1, \quad -i\partial_{\alpha}f(\mathbf{r}) = \hat{k}_{\alpha}f(\mathbf{r}) = k_{\alpha}f(\mathbf{r}).$$

Таким образом, генератор  $\hat{k}_{\alpha}$  задает волновой вектор плоской монохроматической волны. Заметим, что последнее условие — это уравнение на вещественные собственные значения и собственные функции генератора пространственных трансляций, откуда становится ясным введение мнимой единицы в определение генератора трансляций: эта мнимая единица связана с ясным физическим смыслом собственных функций генераторов с вещественными собственными значениями, отвечающими наблюдаемым величинам.

Отметим, что плоская монохроматическая волна отвечает амплитуде вероятности достоверности траектории свободной частицы<sup>3</sup> и, согласно гипотезе де Бройля, волновой вектор  $\mathbf{k}$  связан с импульсом:  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ . Таким образом, генератор трансляций после умножения на постоянную Планка с чертой становится оператором импульса, который действует в пространстве амплитуд вероятности  $\Psi$ :  $-i\hbar\partial_{\alpha} = \hat{p}_{\alpha}$ . В пространстве амплитуд вероятности достоверности траекторий оператор импульса имеет вещественные собственные значения. Такие операторы называются эрмитовыми. Теория операторов в пространстве амплитуд траекторий относится не к классической, а к квантовой механике, так что мы здесь не будем развивать эту тему.

Вычислим разность действия двух инфинитезимальных операторов

$$\left(\hat{T}(\mathbf{a}) \cdot \hat{T}(\mathbf{b}) - \hat{T}(\mathbf{b}) \cdot \hat{T}(\mathbf{a})\right) f(\mathbf{r}) = -a^{\alpha}b^{\beta}(\hat{k}_{\alpha}\hat{k}_{\beta} - \hat{k}_{\beta}\hat{k}_{\alpha})f(\mathbf{r}),$$

физический смысл которой заключается в сравнении результатов двух сдвигов в прямом и обратном порядке (см. рис. 3.1).

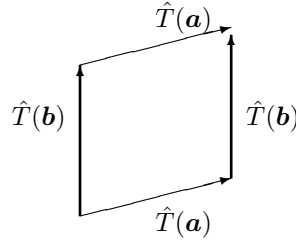


Рис. 3.1: Композиция двух трансляций в прямом и обратном порядке.

В силу группового характера преобразований, произведение операторов в прямом и обратном порядке, вообще говоря, отличается на групповой элемент, т.е., из одной точки пространства можно перейти в другую точку посредством преобразования из группы и  $\hat{T}(\mathbf{a}) \cdot \hat{T}(\mathbf{b}) = \hat{T}(\mathbf{c}) \cdot \left(\hat{T}(\mathbf{b}) \cdot \hat{T}(\mathbf{a})\right)$ , и для бесконечно малых элементов (разлагая по  $a$ ,  $b$  и  $c$ ) отсюда легко получить, что разность  $\hat{T}(\mathbf{a}) \cdot \hat{T}(\mathbf{b}) - \hat{T}(\mathbf{b}) \cdot \hat{T}(\mathbf{a})$  пропорциональна генератору группы  $\Gamma$  с параметром  $c$  второго порядка малости  $c \sim \mathcal{O}(ab)$ ,

$$(-i)^2 a^{\alpha}b^{\beta}(\Gamma_{\alpha}\Gamma_{\beta} - \Gamma_{\beta}\Gamma_{\alpha}) = -ic^{\gamma}\Gamma_{\gamma}.$$

Для генераторов трансляций в силу перестановочности частного дифференцирования по различным переменным в декартовых координатах

$$\partial_{\alpha}\partial_{\beta}f(\mathbf{r}) = \partial_{\beta}\partial_{\alpha}f(\mathbf{r}),$$

следует, что

$$\hat{k}_{\alpha}\hat{k}_{\beta} - \hat{k}_{\beta}\hat{k}_{\alpha} = 0,$$

т.е. результат не зависит от порядка преобразований. В общем случае рассматривают следующую математическую конструкцию для генераторов инфинитезимальных преобразований группы Ли.

**Определение.** Алгеброй Ли  $\Gamma$  называют вещественное векторное пространство  $\Gamma$ , в котором определена скобка Ли:

<sup>3</sup>Амплитуда вероятности достоверности траектории  $\Psi$  определяется через действие  $S$  как  $\Psi = \exp\{iS/\hbar\}$ , где  $S$  удовлетворяет уравнениям Гамильтона–Якоби  $\nabla_{\alpha}S = p_{\alpha}$ ,  $\partial S/\partial t = -E(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ . Отсюда сразу следует утверждение для волны де Бройля, например. При этом для траектории на уравнениях движения вероятность достоверности такой траектории равна  $W = |\Psi|^2 = 1$ .

- линейная композиция

$$\forall \Gamma_1, \Gamma_2 \in \Gamma \quad \exists [\Gamma_1, \Gamma_2] \in \Gamma,$$

- антисимметрия

$$[\Gamma_1, \Gamma_2] = -[\Gamma_2, \Gamma_1],$$

- тождество Якоби<sup>4</sup> (циклическая перестановка элементов в скобке)

$$[[\Gamma_1, \Gamma_2], \Gamma_3] + [[\Gamma_2, \Gamma_3], \Gamma_1] + [[\Gamma_3, \Gamma_1], \Gamma_2] = 0.$$

Первые два свойства определяют коммутатор генераторов<sup>5</sup>. Если

$$\forall \Gamma_1, \Gamma_2 \in \Gamma \quad [\Gamma_1, \Gamma_2] = 0,$$

то алгебра называется коммутативной (или абелевой).

Выше мы показали, что

$$\hat{k}_\alpha \hat{k}_\beta - \hat{k}_\beta \hat{k}_\alpha \equiv [\hat{k}_\alpha, \hat{k}_\beta] = 0,$$

так что алгебра трансляций коммутативна, т.е. контур, показанный на рис. 3.1, замкнут.

Если генераторы представлены матрицами в векторном пространстве, то их коммутатор определяется матричным умножением

$$[A, B] = AB - BA,$$

и, так как не всякие матрицы при умножении в прямом и обратном порядке дают одинаковый результат, становится ясно, что существуют и не коммутативные алгебры. Матричное умножение позволяет определить однородные полиномы по генераторам степени  $k$

$$C_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum h^{i_1 \dots i_k} \Gamma_{i_1} \dots \Gamma_{i_k},$$

среди которых особо выделяют операторы Казимира, которые коммутируют со всеми генераторами

$$[C_k, \Gamma_n] = 0, \quad \forall \Gamma_n \in \Gamma.$$

Число линейно независимых операторов Казимира называется *рангом* алгебры или группы, который равен также числу линейно независимых генераторов группы, образующих коммутативную *подалгебру Картана*  $H$ :

$$\forall h_1, h_2 \in H \quad [h_1, h_2] = 0.$$

В случае группы трансляций евклидова пространства все генераторы по трем осям коммутируют, так что сдвиги по каждой из осей можно производить в произвольном порядке и можно говорить о трех независимых абелевых одномерных группах трансляций, каждая из которых имеет ранг, равный 1. Такая одномерная группа называется  $U(1)$ : собственные функции генераторов группы, как мы видели, сводятся к

$$e^{ika},$$

где  $k$  собственное значение генератора абелевой группы, а  $a$  — параметр группы (сдвига координаты).

Рассмотрим случай некоммутативной алгебры на примере поворотов в 3-мерном пространстве Евклида, которые так же, как и трансляции, оставляют инвариантной длину вектора.

### 13.2. Группа поворотов

Рассмотрим повороты на плоскости, т.е. в 2-мерном евклидовом пространстве (см. рис. 3.2). Для координат вектора

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases}$$

после преобразования получим

$$\begin{cases} x' = r \cos(\theta + \phi) = x \cos \phi - y \sin \phi, \\ y' = r \sin(\theta + \phi) = x \sin \phi + y \cos \phi, \end{cases}$$

<sup>4</sup>Следствие ассоциативности для бесконечно малых преобразований группы Ли.

<sup>5</sup>Введение коммутатора генераторов групповых преобразований со значением в линейной оболочке генераторов определяется простым требованием для инфинитезимальных преобразований: действие двух преобразований в прямом и обратном порядке отличается на преобразование из той же группы.

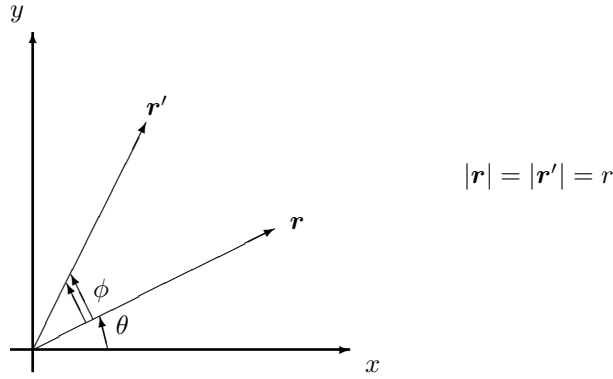


Рис. 3.2: Поворот на плоскости.

где мы использовали обычные тригонометрические равенства:

$$\begin{aligned}\cos(\theta + \phi) &= \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi, \\ \sin(\theta + \phi) &= \cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi.\end{aligned}$$

В матричных обозначениях для векторов-столбцов этот поворот запишется в виде

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_2(\phi) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Вычислим детерминант матрицы 2-мерного поворота

$$\det R_2(\phi) = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1.$$

Очевидно, что поворот на нулевой угол является тождественным преобразованием

$$R_2(0) = \mathbb{1},$$

и после каждого поворота можно совершить обратный поворот

$$R_2(\phi)R_2(-\phi) = \mathbb{1},$$

причем обратная матрица является транспонированной

$$R_2(-\phi) = R_2^T = R_2^{-1}(\phi).$$

После несложных тригонометрических выкладок находим, что два последовательных поворота есть также поворот на угол, равный сумме углов (*правило сложения углов*),

$$R_2(\phi_1)R_2(\phi_2) = R_2(\phi_1 + \phi_2),$$

и, таким образом, матричное умножение определяет композицию элементов *группы поворотов*.

*Генераторы преобразований* определяются дифференцированием по параметрам группы поворотов вблизи тождественного преобразования (см. (3.2)). В частности, изученный нами поворот на плоскости  $\{x, y\}$  с осью поворота, направленной по оси  $z$ , имеет генератор

$$s_z \stackrel{\text{def}}{=} i \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \phi} R_2(\phi) = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В 3-мерном евклидовом пространстве с *правой тройкой базисных векторов* легко получить обобщение матриц поворотов с осями вдоль базисных векторов. При этом для генераторов, пользуясь правилом циклической перестановки индексов: при повороте в плоскости  $\{x, y\}$ , т.е. с осью вдоль  $z$ , ненулевыми значениями в матрице генератора  $s_z$  являются только элементы  $(s_z)_{\bullet y}^x = -i$  и  $(s_z)_{\bullet x}^y = i$  и далее по циклу, — находим выражения

$$s_z = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{— поворот в плоскости } \{x, y\}, \quad (3.3)$$

$$s_y = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{— поворот в плоскости } \{z, x\}, \quad (3.4)$$

$$s_x = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{— поворот в плоскости } \{y, z\}. \quad (3.5)$$

Другими словами матрица генератора  $(s_\alpha)^\beta_\gamma = -i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ , что в матричных обозначениях в точности совпадает с приведенной записью в явном виде.

Рассмотрим, возникает ли различие в преобразовании векторов при смене порядка двух поворотов по разным осям. Для этого вычислим коммутаторы, которые в данном случае определяются умножением матриц (3.3)–(3.5):

$$[s_x, s_y] = i s_z, \quad [s_y, s_z] = i s_x, \quad [s_z, s_x] = i s_y, \quad (3.6)$$

где опять важно заметить циклическую перестановку индексов. Отсюда видим, например, что повороты последовательно сначала вокруг оси  $y$ , а потом вокруг оси  $x$ , и наоборот — сначала вокруг оси  $x$ , а потом вокруг оси  $y$ , в результате не совпадают, а отличаются на поворот вокруг оси  $z$  и т.п. Нетрудно убедиться, что тождества Якоби для генераторов группы поворотов справедливы. В итоге, в 3-мерном евклидовом пространстве *алгебра генераторов группы поворотов некоммутативна*.

С использованием тензора Леви-Чивиты коммутационные соотношения для генераторов группы поворотов (т.е. алгебра генераторов) примут вид

$$[s_\alpha, s_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} s_\gamma. \quad (3.7)$$

Мы видим, что это — некоммутативная алгебра Ли.

В силу свойств матриц поворотов

$$R \cdot R^T = \mathbb{1}, \quad \text{— ортогональность, } O,$$

$$\det R = 1, \quad \text{— специальные преобразования, } S,$$

группа поворотов 3-мерного евклидова пространства обозначается символом  $SO(3)$ , а ее алгебра —  $\mathfrak{so}(3)$ .

Группа  $SO(3)$  имеет единственный оператор Казимира, который на векторах евклидова пространства, т.е. в векторном представлении, принимает значение

$$C_2 = \mathbf{s}^2 = (s_\alpha)^\beta_\gamma (s_\alpha)^\gamma_{\beta'} = (-i)^2 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\gamma\beta'} = 2\delta_{\beta\beta'} = 2 \cdot \mathbb{1}.$$

Таким образом, непрерывные симметрии 3-мерного пространства без смены ориентации базиса с правой на левую образованы группой трансляций и поворотов.

### 13.3. Группа поворотов $O(3)$

Группа поворотов 3-мерного евклидова пространства состоит из двух связанных непрерывными преобразованиями компонент<sup>6</sup> с детерминантом, равным  $\pm 1$  (собственные и несобственные повороты). Переход же от одной связной компоненты к другой осуществляется с помощью дискретных преобразований зеркального отражения по каждой из осей декартова пространства  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_x \mathbb{P}_y \mathbb{P}_z$ . Так что схематически можно записать:

$$\boxed{SO_+(3), \quad \det R = +1}$$

$$\mathbb{P} \uparrow \downarrow \mathbb{P}$$

$$\boxed{SO_-(3), \quad \det R = -1}$$

Полная же группа изометрии евклидова пространства включает в себя наряду с поворотами  $O(3)$  (с учетом отражений) еще и трансляции, так что говорят о неоднородной (inhomogeneous,  $I$ ) группе  $IO(3)$  или, в случае без отражений, о неоднородной группе  $ISO(3)$ .

<sup>6</sup>Здесь термин связности компонент употребляется в “интуитивном” смысле, в то время как строгая математическая теория вводит понятия гомотопий (классов непрерывных однопараметрических траекторий в группе) и гомотопических групп, которые мы не рассматриваем (см. [5]).

### 13.4. Общий вид генераторов поворотов и спин

Помимо приведенного нами вида генераторов группы поворотов в матричной форме, когда они действуют как линейные преобразования на вектор координат в декартовой системе, можно написать и общий вид этих генераторов для произвольной скалярной функции от координат  $\mathbf{r}$ , т.е. для скалярного поля  $\Phi = f(\mathbf{r})$ . По определению, значение скалярной функции  $f$  не зависит от выбора базиса в векторном пространстве координат<sup>7</sup>  $\mathbf{r}$

$$f_G(\mathbf{r}_G) = f(\mathbf{r}), \quad (3.8)$$

где  $G$  — оператор поворотов, который преобразует и координаты, и функции:

$$\mathbf{r}_G = G \cdot \mathbf{r}, \quad G \circ f(\mathbf{r}) = f_G(\mathbf{r}_G).$$

Для бесконечно малых преобразований

$$\mathbf{r}_G = \mathbf{r} + d_G \mathbf{r} = (1 - i s_\alpha \phi_\alpha) \mathbf{r},$$

где дифференциал зависит от параметров поворота  $\phi_\alpha$ , а генераторы представляют собой рассмотренные нами выше матрицы (3.3)–(3.5). Тогда

$$f_G(\mathbf{r}_G) = f_G(\mathbf{r}) + \frac{\partial f_G}{\partial r^\alpha} d_G r^\alpha = f_G(\mathbf{r}) + \frac{\partial f}{\partial r^\alpha} d_G r^\alpha,$$

где во втором слагаемом мы заменили преобразованную функцию на исходную, потому что эта операция приводит в разнице второго порядка малости, не существенной здесь для нашего рассмотрения, так что согласно (3.8) вариация скалярного поля в точке  $\mathbf{r}$

$$\delta_G f(\mathbf{r}) = f_G(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = - \frac{\partial f}{\partial r^\alpha} d_G r^\alpha. \quad (3.9)$$

Тогда по построению

$$(1 + \delta_G) f(\mathbf{r}) \equiv (1 - i \hat{l}_\beta \phi_\beta) f(\mathbf{r}),$$

где уже  $\hat{l}_\beta$  — оператор на функциях, и

$$i \hat{l}_\beta \phi_\beta f(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial r^\alpha} d_G r^\alpha.$$

В случае поворота в 2-мерном пространстве (вокруг оси  $z$ ) на угол  $\phi \rightarrow 0$

$$f_G(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) \approx -i \hat{l}_z \phi f(\mathbf{r}) = - \left( dy \frac{\partial f}{\partial y} + dx \frac{\partial f}{\partial x} \right) = -\phi \left( x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} \right) \Rightarrow$$

$$i \hat{l}_z = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} = x \partial_y - y \partial_x,$$

и в общем случае (в декартовых координатах нижние и верхние индексы не отличают!)

$$\hat{l}_\alpha = -i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} r_\beta \partial_\gamma = -\frac{i}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (r_\beta \partial_\gamma - r_\gamma \partial_\beta) = -i (\mathbf{r} \times \nabla)_\alpha.$$

Поскольку в пространстве амплитуд вероятности достоверности траекторий величина  $\hat{\mathbf{p}} = -i \hbar \nabla$  отвечает оператору импульса, то величина

$$\hat{\ell} = \hbar \hat{l} = -i \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}} \quad (3.10)$$

является орбитальным моментом импульса  $\ell$ .

<sup>7</sup> Проще всего это понять с так называемой пассивной точки зрения: значение функции от точки пространства не зависит от выбора базиса в пространстве, а значит, значение функции от координат в исходном базисе совпадает со значением новой функции в новом базисе. Если же функция определяется в касательном пространстве дифференциалов инвариантной функции, то смена базиса в пространстве, например, поворот базиса сохраняет значение полилинейных функций от векторов в касательном пространстве, поскольку речь идет опять же о функции в касательном пространстве той же точки, но при этом, конечно, в силу инвариантности функции ее компоненты должны удовлетворять закону преобразования тензоров. Если теперь формально посмотреть на запись преобразований компонент координат, то, по сути, не имеет значения, как они были получены: в пассивной трактовке, когда преобразуется базис, а точка пространства остается одной и той же, или в активной трактовке, когда считается, что преобразуются компоненты координат точки в исходном базисе, а все остальные величины имеют тензорный закон преобразования, и, в частности, скалярная функция — это инвариант.

Легко вычислить коммутаторы генераторов поворотов  $\hat{l}_\alpha$  с координатами  $r_\beta$  и с генераторами трансляций  $\hat{k}_\beta = -i\partial_\beta$ ,

$$[\hat{l}_\alpha, r_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} r_\gamma, \quad [\hat{l}_\alpha, \hat{k}_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{k}_\gamma.$$

Отсюда видно, что вектор координат и генератор трансляций поворачиваются по одному и тому же закону, т.е. генераторы трансляций — векторы. Однако напомним, что генераторы трансляций задаются частной производной, т.е. строкой, а не столбцом, как координаты, и соответствующие операторы преобразования являются сопряженными к операторам поворота (простым транспонированием), что при тех же коммутационных соотношениях для  $r_\alpha$  и  $\hat{k}_\alpha$  с  $\hat{l}_\beta$  приводит к обратному повороту  $\hat{k}_\alpha$  по сравнению с  $r_\alpha$ :  $R(\phi) \approx 1 - i s_\alpha \phi_\alpha$ , в то время как  $R^T(\phi) \approx 1 + i s_\alpha \phi_\alpha$ , так как  $s_\alpha^T = -s_\alpha$  (см. (3.3)–(3.5)).

Кроме того, сами генераторы орбитальных поворотов также являются векторами, поскольку

$$[\hat{l}_\alpha, \hat{l}_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{l}_\gamma. \quad (3.11)$$

Итак, мы рассмотрели пример представления группы поворотов в пространстве скалярных функций, т.е. среди однокомпонентных функций, а стало быть, пространство представления имело размерность 1.

Другой пример — векторное поле, у которого 3 компоненты, а значит, представление действия группы поворотов трехмерное. Тогда, если поле — векторная функция,  $\Phi \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{r})$ , то закон преобразования для векторов в общем виде

$$\mathcal{A}'^\alpha(\mathbf{r}') = \frac{\partial r'^\alpha}{\partial r^\beta} \mathcal{A}^\beta(\mathbf{r}),$$

в случае поворотов можно представить в виде действия на нее оператора поворотов

$$G \circ \mathcal{A}(\mathbf{r}) = S(G) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}_G(\mathbf{r}_G) = S(G) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{r}),$$

где  $S_\beta^\alpha(G) = \partial r'^\alpha / \partial r^\beta$  — матрица поворотов векторного пространства, которая для инфинитезимальных поворотов равна

$$S(G) = \mathbb{1} - i s_\gamma \phi_\gamma,$$

где  $\mathbf{s}$  — это, по-прежнему,  $3 \times 3$ -матрицы поворотов (3.3)–(3.5). Учитывая это определение и повторяя выкладки для бесконечно малых преобразований координат в аргументе векторного поля точно также, как и в случае скалярной функции

$$\mathcal{A}_G(\mathbf{r}_G) = \mathcal{A}(\mathbf{r}) + i \hat{l}_\beta \phi_\beta \mathcal{A}(\mathbf{r}),$$

найдем, что

$$\mathcal{A}_G(\mathbf{r}) \approx (1 + \delta_G) \mathcal{A}(\mathbf{r}) = (1 - i \hat{j}_\alpha \phi_\alpha) \mathcal{A}(\mathbf{r}), \quad (3.12)$$

где

$$\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{l}} + \mathbf{s},$$

т.е. полный генератор  $\hat{\mathbf{j}}$  есть сумма дифференциального оператора орбитальных поворотов  $\hat{\mathbf{l}}$  и матрицы *спина* векторного поля  $\mathbf{s}$ . Конечно, после умножения на  $\hbar$  эти величины приобретают смысл операторов полного момента импульса  $\hat{\mathbf{J}} = \hbar \hat{\mathbf{j}}$ , орбитального момента импульса  $\hat{\mathbf{L}} = \hbar \hat{\mathbf{l}}$  и спинного момента собственного вращения  $\mathbf{s} = \hbar \mathbf{s}$  в пространстве амплитуд вероятности траекторий  $\Psi$ .

В случае тензорного поля ранга  $k$  по каждому из индексов тензора  $\alpha_n$ ,  $n = \{1, k\}$ , при поворотах необходимо ввести действие матрицы *спина* векторного поля  $(\mathbf{s}^{(n)})_{\beta_n}^{\alpha_n}$ , в то время как матрица инфинитезимальных поворотов примет вид

$$S(G) \mapsto \mathbb{1} - i \phi_\gamma \sum_{n=1}^k s_\gamma^{(n)},$$

где сумма

$$\mathbf{S} = \sum_{n=1}^k \mathbf{s}^{(n)}$$

называется полным спином тензора.

## Лекция № 7

Транспонирование и эрмитово сопряжение квадратных матриц, бра- и кет-векторы, уравнение на собственные значения, секулярное уравнение, вещественные собственные значения эрмитовых матриц, степень вырождения спектра, ортогональность собственных векторов с разными собственными значениями, собственные вектора и собственные значения матрицы проекция спина на ось  $z$  для  $s = 1$ , сферическая гармоника единичного радиус-вектора, действие повышающих и понижающих матриц для  $s = 1$ , условие полноты базиса собственных векторов эрмитовой матрицы, операторное представление эрмитовой матрицы, понятие о среднем значении, описание измерительного прибора, математическое представление об амплитуде вероятности собственного значения эрмитовой матрицы, нулевой коммутатор эрмитовых матриц и совместный базис собственных векторов, физический смысл коммутаторов генераторов группы поворотов, общий случай «операторного» квантования матриц спина группы поворотов, базис векторов спина  $s$  и действие на него понижающих и повышающих матриц, число компонент в базисе спина  $s$ , тензорные поля как базис полей с целым спином, переход от стандартного представления к индексному в декартовом базисе, спин  $s = 2$ , неприводимые представления для полей спина  $s$  — симметричные бесследовые тензоры ранга  $s$ , нулевой спин символов Кронекера и Леви-Чивиты, сферические гармоники  $\mathcal{Y}_{l,m}$  как симметричные бесследовые тензоры ранга  $l$  в виде тензорного произведения единичных радиус-векторов.

14. Спин  $s = 1$ 

Для исследования свойств матриц спина векторной частицы напомним ряд определений для квадратных матриц  $\hat{A}$  размером  $n \times n$ , которые действуют на  $n$ -мерные столбцы, т.е. в  $n$ -мерном комплексном пространстве.

Транспонированная матрица  $A^T$  имеет элементы

$$(A^T)_{\beta}^{\alpha} = A_{\alpha}^{\beta}. \quad (3.13)$$

Эрмитово сопряженная матрица  $A^{\dagger}$  имеет элементы, комплексно сопряженные элементам транспонированной матрицы:

$$(A^{\dagger})_{\beta}^{\alpha} = (A^*)_{\alpha}^{\beta}. \quad (3.14)$$

Эрмитово самосопряженная матрица или просто эрмитова матрица совпадает со своей эрмитово сопряженной,

$$A^{\dagger} = A \quad \Rightarrow \quad A_{\alpha}^{\beta} = (A^*)_{\beta}^{\alpha}. \quad (3.15)$$

Из определений матриц спина векторной частицы

$$s_x = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_y = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3)-(3.5)$$

следует, что эти матрицы являются эрмитовыми.

Элементы комплексного векторного  $n$ -мерного пространства, т.е. столбцы, будем обозначать символом кет-вектора:

$$|\mathcal{V}\rangle \equiv \mathcal{V} = \sum_{\alpha=1}^n \mathcal{V}^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} = \mathcal{V}^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} \quad \mapsto \begin{pmatrix} \mathcal{V}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathcal{V}^{(n)} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Например, в трехмерном евклидовом пространстве векторы базиса —

$$|\mathbf{e}_x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{e}_y\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{e}_z\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а вектор

$$|\mathcal{V}\rangle = \begin{pmatrix} \mathcal{V}^x \\ \mathcal{V}^y \\ \mathcal{V}^z \end{pmatrix}.$$

Эрмитово сопряженные ковекторы, т.е. строки с комплексно сопряженными элементами столбца, будем обозначать бра-векторами<sup>8</sup>

$$\langle \mathcal{V} | = (\mathcal{V}^{*(1)}, \dots, \mathcal{V}^{*(n)}). \quad (3.17)$$

<sup>8</sup>От английского слова «скобка»: bracket= $\langle$ bra|cket $\rangle$  согласно Дираку.

Для квадратных матриц ставится задача на собственные значения:

$$A|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle, \quad |\lambda\rangle \neq 0. \quad (3.18)$$

Собственный вектор  $|\lambda\rangle$  не равен нулю, что может иметь место лишь, если у матрицы  $A - \lambda \cdot \mathbb{1}$  нет обратной, т.е. при условии

$$\det(A - \lambda \cdot \mathbb{1}) = 0, \quad (3.19)$$

поскольку

$$(A - \lambda \cdot \mathbb{1})|\lambda\rangle = 0,$$

и если матрица  $(A - \lambda \cdot \mathbb{1})$  имеет обратную, то домножение этого уравнения на обратную матрицу приводило бы к  $|\lambda\rangle = 0$ , так что условие отсутствия обратной матрицы в виде (3.19) означает существование ненулевого собственного вектора  $|\lambda\rangle$ . Уравнение (3.19) носит название секулярного уравнения на собственные значения матрицы  $A$ . Эрмитово сопряжение секулярного уравнения показывает, что собственные значения эрмитово сопряженной матрицы  $A^\dagger$  являются комплексно сопряженными значениями  $\lambda^*$  матрицы  $A$ . Отсюда следует, что эрмитовы матрицы,  $A^\dagger = A$ , имеют вещественные собственные значения,  $\lambda^* = \lambda$ , так как

$$A|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \Rightarrow \langle\lambda|A|\lambda\rangle = \lambda\langle\lambda|\lambda\rangle$$

и

$$(A|\lambda\rangle)^\dagger = \lambda^* \langle\lambda| = \langle\lambda|A^\dagger = \langle\lambda|A \Rightarrow \langle\lambda|A|\lambda\rangle = \lambda^* \langle\lambda|\lambda\rangle.$$

Секулярное уравнение является полиномом степени  $n$  по искомому собственному значению, а значит, оно имеет  $n$  решений с учетом степени кратности каждого решения. Спектр собственных значений эрмитовой матрицы может быть невырожден или вырожден, т.е., если одному собственному значению отвечает единственный собственный вектор, то это значение невырождено, если пространство собственных векторов для заданного собственного значения не одномерно, а  $k$ -мерно, то говорят о степени вырождения, равной  $k > 1$ . В базисе собственных векторов эрмитова матрица диагональна: на диагонали стоят собственные значения с учетом кратности их вырождения.

Собственные вектора эрмитовой матрицы с различными собственными значениями ортогональны, поскольку из уравнений

$$A|\lambda_1\rangle = \lambda_1|\lambda_1\rangle, \quad A|\lambda_2\rangle = \lambda_2|\lambda_2\rangle \Rightarrow \langle\lambda_2|A = \langle\lambda_2|\lambda_2,$$

следует, что после умножения слева на строку бра-вектора

$$\langle\lambda_2|A|\lambda_1\rangle = \lambda_1\langle\lambda_2|\lambda_1\rangle, \quad \langle\lambda_1|A|\lambda_2\rangle = \lambda_2\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle \Rightarrow \langle\lambda_2|A|\lambda_1\rangle = \lambda_2\langle\lambda_2|\lambda_1\rangle,$$

что при  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  возможно, только если

$$\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle = 0,$$

Найдем собственные значения эрмитовой матрицы  $s_z$  в (3.3), т.е. проекции спина векторной частицы на ось  $z$ :

$$\det(s_z - \lambda \cdot \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -i & 0 \\ i & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 1) = 0.$$

Итак, проекция спина имеет три собственных значения  $\lambda = \{-1, 0, +1\}$  в трехмерном пространстве, так что спектр собственных значений невырожден. Отнормируем собственные кет-вектора  $|\lambda\rangle$  на единицу, так что с точностью до комплексной фазы найдем

$$|+1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

В тензорных обозначениях, как мы знаем, значения инвариантной линейной функции  $\mathcal{A}$  на базисных векторах пространства  $\mathcal{A}(\mathbf{e}_\alpha)$  образуют *компоненты ковектора*  $\mathcal{A}_\alpha$ . В квантовых обозначениях это эквивалентно записи  $\langle\mathcal{A}|\mathbf{e}_\alpha\rangle = \mathcal{A}_\alpha$ , где, подчеркнем, нет комплексного сопряжения, так чтобы было верно  $\mathcal{A}(\mathcal{V}^\alpha \mathbf{e}_\alpha) = \mathcal{A}_\alpha \mathcal{V}^\alpha = \langle\mathcal{A}|\mathcal{V}\rangle$ . Тогда в терминах компонент декартовых координат собственные состояния задаются полями

$$\mathcal{A}_\pm = \langle\mathcal{A}|\pm 1\rangle = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{A}_x \pm i \mathcal{A}_y), \quad \mathcal{A}_0 = \langle\mathcal{A}|0\rangle = \mathcal{A}_z. \quad (3.21)$$



Например, поле единичного радиус-вектора  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$  в переменных сферических координат

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

имеет компоненты с определенными значениями проекции спина на ось  $z$ :

$$n_{\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (n_x \pm i n_y) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{\pm i \phi}, \quad n_0 = n_z = \cos \theta. \quad (3.22)$$

Наряду с (3.22) вводят сферические гармоники этого вектора  $\mathcal{Y}_{1,\pm 1}$  и  $\mathcal{Y}_{1,0}$ , которые отличаются только нормировкой:

$$\int d\Omega \mathcal{Y}_{1,m}^* \mathcal{Y}_{1,m'} = \delta_{mm'},$$

так что

$$\mathcal{Y}_{1,m} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} n_m, \quad m = \{\pm 1, 0\}.$$

Представление поля в виде сферических гармоник называют стандартным в отличие от покомпонентного представления в декартовых координатах.

Собственные вектора матрицы спина  $s_z$  не являются собственными для матриц  $s_x$  и  $s_y$ . Более того, вводят повышающие и понижающие матрицы

$$s_{\pm} = s_x \pm i s_y, \quad s_+^{\dagger} = s_-, \quad s_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Легко найти, что повышающий оператор увеличивает значение проекции на единицу,

$$s_+ | + 1 \rangle = 0, \quad s_+ | 0 \rangle = \sqrt{2} | + 1 \rangle, \quad s_+ | - 1 \rangle = \sqrt{2} | 0 \rangle,$$

а понижающий уменьшает на единицу,

$$s_- | + 1 \rangle = \sqrt{2} | 0 \rangle, \quad s_- | 0 \rangle = \sqrt{2} | - 1 \rangle, \quad s_- | - 1 \rangle = 0.$$

При этом,  $| + 1 \rangle$  называется старшим вектором: при действии повышающего оператора на старший вектор получается ноль,  $-a | - \rangle$  называется младшим вектором: при действии понижающего оператора на младший вектор получается ноль.

### §а. Полнота базиса и измерение среднего значения

Разложение вектора по базису собственных векторов матрицы проекции спина на ось  $z$  имеет стандартный вид:

$$|\mathcal{A}\rangle = \sum |m\rangle \langle m|\mathcal{A}\rangle, \quad (3.24)$$

где берется сумма по значениям проекции  $m = \{\pm 1, 0\}$ . Смысл этого выражения прост: вычисляется проекция базисного вектора на заданный вектор  $\mathcal{A}$ , в наших обозначениях

$$\langle m|\mathcal{A}\rangle = \mathcal{A}_m^*,$$

а затем суммируются это проекции по базисным векторам. В этой связи полнота базиса отвечает условию

$$\sum |m\rangle \langle m| = \mathbb{1}. \quad (3.25)$$

Заметим теперь, что действие матрицы спина  $s_z$  на условие полноты базиса дает нам, как говорят, операторное представление для этой матрицы, записанное в терминах бра- и кет-векторов:

$$s_z \left( \sum |m\rangle \langle m| \right) = \left( \sum |m\rangle \langle m| \right) s_z = \sum |m\rangle m \langle m|, \quad (3.26)$$

поскольку матрица эрмитова и ее действие на собственные бра- и кет-векторы дает вещественное собственное значение, равное  $m$ .

Если вектор собственный и он имеет единичную нормировку, то

$$\langle m|s_z|m\rangle = m.$$

Если же вектор является суперпозицией

$$|\mathcal{A}\rangle = \sum |m\rangle \mathcal{A}_m^*,$$

то для нормированного на единицу вектора

$$|\mathcal{A}'\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum |m\rangle \mathcal{A}_m^*}{\sqrt{\sum \mathcal{A}_k^* \mathcal{A}_k}},$$

величина

$$\langle \mathcal{A}'|s_z|\mathcal{A}'\rangle = \sum m w_m,$$

где вес собственного значения

$$w_m = \frac{\mathcal{A}_m^* \mathcal{A}_m}{\sum \mathcal{A}_k^* \mathcal{A}_k}, \quad 0 \leq w_m \leq 1,$$

причем сумма весов равна единице

$$\sum w_m = 1.$$

Всем эти построениям следует придать вполне ясный физический смысл:

- соотношение полноты базиса (3.25) описывает идеальный измерительный прибор, который «видит» все компоненты вектора,
- величина

$$\langle s_z \rangle = \langle \mathcal{A}|s_z|\mathcal{A} \rangle \frac{1}{\sum \mathcal{A}_k^* \mathcal{A}_k} \quad (3.27)$$

описывает среднее значение матрицы, в данном случае, проекции спина на ось  $z$ ,

- причем каждое измерение проекции спина прибором дает одно из собственных значений заданной матрицы спина<sup>9</sup>:

$$s_z = \sum |m\rangle m \langle m|, \quad (3.28)$$

- каждое собственное значение имеет вероятность

$$w_m = \mathcal{A}_m'^* \mathcal{A}_m', \quad (3.29)$$

причем для нормированного на единицу вектора  $\mathcal{A}'$  проекцию

$$\mathcal{A}_m' = \langle \mathcal{A}'|m\rangle \quad (3.30)$$

называют амплитудой вероятности для значения проекции спина, равной  $m$ , при усреднении по вектору  $\mathcal{A}'$ .

В случае, когда все эти построения проводятся в базисе, который не является собственным для эрмитовой матрицы, физический смысл проведенных построений не изменяется, хотя операторное представление становится не диагональным. Например, в декартовом базисе

$$\langle \mathbf{e}^\alpha | s_z | \mathbf{e}^\beta \rangle = (s_z)_\beta^\alpha, \quad s_z = \sum |\mathbf{e}^\alpha\rangle (s_z)_\beta^\alpha \langle \mathbf{e}^\beta|.$$

Наконец отметим, что, поскольку для вектора квадрат матрицы спина — это число,  $\mathbf{s}^2 = 2$ , собственные вектора  $s_z$  являются собственными и для квадрата спина векторной частицы.

Здесь логично поставить вопрос о том, в каком случае две эрмитовы матрицы могут иметь совместный базис собственных векторов. Такой базис может служить основой для классификации полей по собственным значениям генераторов группы симметрии, в нашем случае, группы поворотов.

<sup>9</sup>В качестве иллюстрации этого положения сошлемся на опыты Штерна и Герлаха: отклонение частицы при движении сквозь неоднородное аксиально симметричное магнитное поле определяется проекцией магнитного момента на ось, скажем,  $z$ , вдоль которой магнитное поле меняет свое значение, сила  $\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathcal{H} \mapsto \mu_z \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}$  для аксиального случая, когда единственная компонента магнитного поля, производная которой не равна нулю, — это  $\mathcal{H}_z$ . Но проекция магнитного момента  $\boldsymbol{\mu}$  задается проекцией спина частицы на ось магнитного поля, так что подобный прибор регистрирует именно проекцию спина по отклонению частицы на некотором фиксированном расстоянии от области прохождения через поле. Эксперимент указывает, что проекция спина принимает строго дискретные значения, отвечающие собственным значениям матрицы проекции спина на ось  $z$  в данном случае.

### 15. Совместный базис двух эрмитовых матриц

Пусть две эрмитовы матрицы  $A^\dagger = A$ ,  $B^\dagger = B$  имеют совместный базис:

$$A|a, b\rangle = a|a, b\rangle, \quad B|a, b\rangle = b|a, b\rangle.$$

Тогда

$$AB|a, b\rangle = A b|a, b\rangle = b A|a, b\rangle = b a|a, b\rangle, \quad BA|a, b\rangle = B a|a, b\rangle = a B|a, b\rangle = a b|a, b\rangle,$$

а значит,

$$(AB - BA)|a, b\rangle = [A, B]|a, b\rangle = 0,$$

для любых базисных векторов, следовательно, коммутатор таких матриц равен нулю:

$$[A, B] = 0.$$

Справедливо и обратное утверждение: если коммутатор двух эрмитовых матриц равен нулю, то может быть выбран совместный базис их собственных векторов. В самом деле, если спектр матрицы  $A$  невырожден,  $A|a\rangle = a|a\rangle$ , то введем

$$|f\rangle = B|a\rangle.$$

Тогда в силу равенства нулю коммутатора

$$A|f\rangle = AB|a\rangle = BA|a\rangle = B a|a\rangle = a B|a\rangle = a|f\rangle,$$

а значит, вектор  $|f\rangle$  является собственным для матрицы  $A$  со значением  $a$ , т.е. в силу невырожденности собственного значения

$$|f\rangle = f|a\rangle, \quad \Rightarrow \quad B|a\rangle = f|a\rangle,$$

и следовательно,  $f$  — собственное значение для эрмитовой матрицы  $B$ , которое должно быть вещественным, и базисный вектор  $|a\rangle$  общий для обеих матриц.

Если собственное значение  $a$  вырождено,  $A|a, \alpha\rangle = a|a, \alpha\rangle$ , со степенью вырождения  $k$ ,  $\alpha = \{1, k\}$ , то введем

$$|f, \alpha\rangle = B|a, \alpha\rangle,$$

так что

$$A|f, \alpha\rangle = AB|a, \alpha\rangle = BA|a, \alpha\rangle = B a|a, \alpha\rangle = a B|a, \alpha\rangle = a|f, \alpha\rangle,$$

т.е. мы имеем вектор в  $k$ -мерном пространстве собственных векторов с собственным значением  $a$ , а значит, он разлагается по исходному базису  $|a, \alpha\rangle$ , который мы считаем ортонормированным,

$$|f, \alpha\rangle = C_{\bullet\beta}^{\alpha} |a, \beta\rangle = B|a, \alpha\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle a, \beta|B|a, \alpha\rangle = C_{\bullet\beta}^{\alpha}.$$

Здесь квадратная матрица  $C$  размерности  $k \times k$  является эрмитовой как результат действия в  $k$ -мерном пространстве матрицы  $B$  в силу эрмитовости матрицы  $B$ :

$$C_{\bullet\beta}^{\alpha} = \langle a, \beta|B|a, \alpha\rangle = (B|a, \beta\rangle)^\dagger |a, \alpha\rangle = \left(C_{\bullet\alpha'}^{\beta} |a, \alpha'\rangle\right)^\dagger |a, \alpha\rangle = (C^*)_{\alpha'}^{\bullet\beta} \langle a, \alpha'|a, \alpha\rangle = (C^*)_{\alpha}^{\bullet\beta}.$$

Это означает, что можно перейти от базиса  $|a, \alpha\rangle$  к базису собственных векторов матрицы  $C$  с вещественными значениями  $c_{(\gamma)}$ :

$$C|a, \gamma\rangle = c_{(\gamma)} |a, \gamma\rangle, \quad \text{нет суммирования по } \gamma.$$

В этом базисе,

$$B|a, \gamma\rangle = c_{(\gamma)} |a, \gamma\rangle, \quad \text{нет суммирования по } \gamma,$$

а значит,  $c_{(\gamma)}$  — собственное значение матрицы  $B$ , и мы построили совместный базис собственных векторов для двух коммутирующих эрмитовых матриц.

Итак, для классификации полей по собственным значениям эрмитовых генераторов группы симметрии, в частности, группы поворотов, необходимо выбрать максимальный набор попарно коммутирующих генераторов, для которого можно построить совместный базис собственных векторов. К этим генераторам, образующим подалгебру Картана, необходимо добавить независимые операторы Казимира, число которых совпадает с рангом алгебры генераторов, и такой набор называют полным набором наблюдаемых для генераторов симметрии.

Проведенное рассмотрение показало физический смысл коммутатора генераторов группы симметрии: собственное значение одного генератора группы не изменяется при действии бесконечно малого преобразования группы с другим генератором, который коммутирует с первым. Если генераторы не коммутируют, то собственные значения генератора меняются при действии преобразования с другим генератором.

Осуществим такое рассмотрение для генераторов спина тензорных полей.

## 16. Квантование спина

Пусть  $\mathbf{s}$  — эрмитовы матрицы, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям генераторов группы поворотов:

$$[s_\alpha, s_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\gamma. \quad (3.7)$$

Отсюда следует, что в полный набор наблюдаемых можно включить лишь один из генераторов, например,  $s_z$ , так как два других генератора не коммутируют с ним и не могут иметь совместного с ним базиса собственных векторов.

Ясно, что нулевой коммутатор у генератора поворотов может быть только с самим собой или со скалярной величиной, которая не преобразуется при поворотах, поскольку собственное значение скалярной величины до поворота и после поворота не изменяется. Из генераторов группы поворотов можно построить лишь один независимый скаляр<sup>10</sup>,  $\mathbf{s}^2$ . Вычислим коммутатор

$$[\mathbf{s}^2, s_\alpha] = [s_\beta s_\beta, s_\alpha]$$

с помощью тождества

$$[AB, C] = ABC - CAB = ABC - ACB + ACB - CAB = A[B, C] + [A, C]B,$$

откуда

$$[s_\beta s_\beta, s_\alpha] = s_\beta [s_\beta, s_\alpha] + [s_\beta, s_\alpha] s_\beta = i\epsilon_{\beta\alpha\gamma} (s_\beta s_\gamma + s_\gamma s_\beta).$$

Здесь в круглых скобках — симметричный относительно перестановок индексов  $\beta$  и  $\gamma$  тензор второго ранга — сворачивается с тензором  $\epsilon_{\beta\alpha\gamma}$ , антисимметричным по перестановкам тех же индексов  $\beta$  и  $\gamma$ , но такая свертка симметричного тензора с антисимметричным всегда тождественно равна нулю. В итоге,

$$[\mathbf{s}^2, s_\alpha] = 0, \quad (3.31)$$

и полный набор наблюдаемых составляют  $\{\mathbf{s}^2, s_z\}$ .

Базис тензорных полей удовлетворяет уравнениям на собственные значения полного набора наблюдаемых для группы поворотов:

$$\mathbf{s}^2 |\lambda_s, m_s\rangle = \lambda_s |\lambda_s, m_s\rangle, \quad s_z |\lambda_s, m_s\rangle = m_s |\lambda_s, m_s\rangle. \quad (3.32)$$

Будем считать этот базис ортонормированным.

В силу (3.31) повышающий и понижающий генераторы

$$s_\pm = s_x \pm i s_y,$$

коммутируют с квадратом спина:

$$[\mathbf{s}^2, s_\pm] = 0, \quad (3.33)$$

и это означает, что значение  $\lambda_s$  не меняется при действии бесконечно малых преобразований с генераторами  $s_{x,y}$ , но при действии тех же преобразований меняется значение  $m_s$ , так как в противном случае, эти генераторы коммутировали бы с  $s_z$ , что неверно. Такое положение указывает, что одному и тому же значению  $\lambda_s$  отвечают несколько значений  $m_s$ , т.е. имеет место вырождение спектра собственных значений  $\lambda_s$  по значениям  $m_s$ . Между прочим, мы установили общее условие вырожденности спектра эрмитовой матрицы  $A$ : если эрмитова матрица  $A$  коммутирует с эрмитовыми матрицами  $B$  и  $C$ , но сами матрицы  $B$  и  $C$  не коммутируют между собой, то спектр собственных значений матрицы  $A$  вырожден, например, по собственным значениям в совместном базисе с матрицей  $B$ .

Найдем действие повышающего и понижающего генератора на совместный базис  $|\lambda_s, m_s\rangle$ . Для этого сначала вычислим коммутаторы

$$[s_\pm, s_z] = [s_x, s_z] \pm i[s_y, s_z] = -i s_y \pm i i s_x = \mp s_\pm.$$

Тогда

$$s_z s_\pm |\lambda_s, m_s\rangle = (s_\pm s_z \pm s_\pm) |\lambda_s, m_s\rangle = (m_s \pm 1) s_\pm |\lambda_s, m_s\rangle.$$

Значит, вектор  $s_\pm |\lambda_s, m_s\rangle$  имеет собственные значения  $s_z$ , равные  $m_s \pm 1$ :

$$s_\pm |\lambda_s, m_s\rangle = N_\pm(\lambda_s, m_s) |\lambda_s, m_s \pm 1\rangle \Rightarrow (s_\pm |\lambda_s, m_s\rangle)^\dagger = \langle \lambda_s, m_s | s_\mp = N_\pm(\lambda_s, m_s) \langle \lambda_s, m_s |,$$

<sup>10</sup>Другие скаляры будут функциями скаляра  $\mathbf{s}^2$ .

где мы задали комплексную фазу собственного вектора  $|\lambda_s, m_s\rangle$  так, чтобы нормировочный коэффициент был бы вещественным. Найдём нормировочный коэффициент  $N_{\pm}(\lambda_s, m_s)$ . Для этого заметим, что

$$s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = s_+ s_- + i[s_x, s_y] + s_z^2 = s_+ s_- - s_z + s_z^2,$$

и аналогично

$$s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = s_- s_+ - i[s_x, s_y] + s_z^2 = s_- s_+ + s_z + s_z^2.$$

Тогда

$$\langle \lambda_s, m_s | s_{\mp} s_{\pm} | \lambda_s, m_s \rangle = (s_{\pm} | \lambda_s, m_s \rangle)^{\dagger} s_{\pm} | \lambda_s, m_s \rangle = N_{\pm}^2(\lambda_s, m_s),$$

т.е.

$$N_{\pm}^2(\lambda_s, m_s) = \langle \lambda_s, m_s | s_{\mp} s_{\pm} | \lambda_s, m_s \rangle = \langle \lambda_s, m_s | (s^2 - s_z^2 \mp s_z) | \lambda_s, m_s \rangle = \lambda_s - m_s(m_s \pm 1).$$

Поскольку нормировка вектора не может быть отрицательной,  $N_{\pm}^2(\lambda_s, m_s) \geq 0$ . Это условие может быть выполнено, только если в цепочках многократного действия повышающего и понижающего операторов, во-первых, значения  $m_s$  не произвольны, а принимают такие значения, чтобы

$$m_s(m_s \pm 1) \leq \lambda_s,$$

и во-вторых, должны существовать максимальное  $m_s^{\max}$  и минимальное  $m_s^{\min}$  значения, которые дают в точности нулевые значения нормы вектора после повышения и понижения, соответственно, так как в противном случае повышение и понижение приводило бы к возникновению векторов с отрицательной нормой, что недопустимо, т.е.

$$m_s^{\max}(m_s^{\max} + 1) = \lambda_s, \quad m_s^{\min}(m_s^{\min} - 1) = \lambda_s.$$

Вместе с тем, действуя многократно на вектор  $|\lambda_s, m_s^{\max}\rangle$  понижающим оператором  $n$  раз, мы получим  $m_s = m_s^{\max} - n$  и в конце концов вектор, в точности равный  $|\lambda_s, m_s^{\min}\rangle$ , в силу существования минимально допустимого значения  $m_s$ , т.е. для некоторого неотрицательного целого значения  $n$  верно  $m_s^{\min} = m_s^{\max} - n$ . Тогда связь минимального и максимального значений проекции спина на ось  $z$  с собственным значением квадрата спина  $\lambda_s$  приводит к единственному решению в виде

$$m_s^{\max}(m_s^{\max} + 1) - m_s^{\min}(m_s^{\min} - 1) = 0, \quad \Rightarrow \quad m_s^{\max}(m_s^{\max} + 1) - (m_s^{\max} - n)(m_s^{\max} - n - 1) = 0, \quad \Rightarrow$$

$$m_s^{\max} = \frac{n}{2}, \quad m_s^{\min} = -\frac{n}{2}.$$

Максимальное значение проекции спина на ось  $z$  обозначают символом  $s$ , так что

$$s = \frac{n}{2}, \tag{3.34}$$

т.е. допустимые значения проекции спина — это положительные полуцелые и целые значения. Целые значения отвечают полям, которые называют тензорными, а полуцелые — спинорным полям.

Базис полей, таким образом, образуют совместные собственные векторы квадрата спина и его проекции на выбранную ось, так что изменяя обозначения путем подстановки  $\lambda_s = s(s+1) \mapsto s$  запишем его в виде

$$|s, m_s\rangle, \quad m_s \in \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\}. \tag{3.35}$$

Действие повышающей и понижающей матриц спина на базисные вектора строго определено,

$$s_{\pm} |s, m_s\rangle = \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)} |s, m_s \pm 1\rangle. \tag{3.36}$$

В частном случае  $s = 1$ , мы убедились, что соотношения (3.36) являются тождествами согласно проведенной нами процедуре прямого построения матриц спина и собственных векторов для матрицы  $s_z$ .

Размерность пространства собственных векторов квадрата спина и его проекции на выбранную ось равна один старший вектор с максимальным значением проекции и  $n$  шагов от старшего вектора до младшего, т.е. вектора с минимальным значением проекции, а значит,

$$k = 1 + n = 1 + 2s.$$

Это число компонент называют мультиплетностью неприводимого представления группы поворотов для поля. Неприводимым это представление называют потому, что при поворотах, а значит, при многократном действии генераторов спина, вектор с заданной проекцией спина на ось  $z$  перемешивается со всеми другими векторами базиса с тем же значением квадрата спина, т.е. пространство собственных векторов

с заданным квадратом спина не содержит в себе подпространств, вектора которых не смешивались бы друг с другом при действии группы поворотов<sup>11</sup>.

Для скаляра  $s = 0$ , и поле имеет одну единственную компоненту, поэтому скаляр называют синглетом и обозначают символом 1. У вектора  $s = 1$ , и поле имеет три компоненты, это — триплет (символ 3), у спинора  $s = \frac{1}{2}$ , и поле имеет две компоненты, это — дублет (символ 2).

Напомним, что построенный нами базис называют стандартным, он решает задачу классификации полей по базису собственных векторов генераторов спина.

**Задача 46.** Найдите преобразование матриц спина векторного поля, которое переводит эти матрицы из базиса декартовых координат к матрицам в стандартном базисе собственных векторов с заданными значениями проекции спина на ось  $z$ .

## 17. Тензорные поля

Рассмотрим, как стандартное представление тензорного поля связано с его индексным представлением по компонентам в декартовом базисе евклидова пространства.

Для скалярного поля ответ элементарен, поскольку скалярная функция с  $s = 0$  имеет лишь одну единственную компоненту, так что  $\langle \Phi | 0, 0 \rangle = \Phi(\mathbf{r})$ .

Для векторного поля  $s = 1$ , и вопрос был уже рассмотрен нами выше:

$$\mathcal{A}_{\pm} = \langle \mathcal{A} | \pm 1 \rangle = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{A}_x \pm i \mathcal{A}_y), \quad \mathcal{A}_0 = \langle \mathcal{A} | 0 \rangle = \mathcal{A}_z, \quad (3.21)$$

причем было рассмотрено и действие повышающей и понижающей матриц на эти компоненты, которое согласуется с общим выражением (3.36),

$$s_+ \mathcal{A}_+ = 0, \quad s_+ \mathcal{A}_0 = \sqrt{2} \mathcal{A}_+, \quad s_+ \mathcal{A}_- = \sqrt{2} \mathcal{A}_0, \quad (3.37)$$

и

$$s_- \mathcal{A}_+ = \sqrt{2} \mathcal{A}_0, \quad s_- \mathcal{A}_0 = \sqrt{2} \mathcal{A}_-, \quad s_- \mathcal{A}_- = 0. \quad (3.38)$$

Заметим теперь, что любое тензорное поле с заданным значением  $\mathbf{s}^2 = s(s+1)$  легко построить, если начать со старшего собственного вектора, действуя понижающей матрицей.

Например, для поля  $T_{\alpha\beta}$  с  $s = 2$ , матрицы спина являются суммой двух матриц по каждому из индексов,  $\mathbf{S} = \mathbf{s}^{(1)} + \mathbf{s}^{(2)}$ , а значит, старший вектор —

$$T_{(2+)} = \langle T | 2, +2 \rangle = T_{++}, \quad S_+ T_{++} = (s_+^{(1)} + s_+^{(2)}) T_{++} = 0, \quad S_z T_{++} = (s_z^{(1)} + s_z^{(2)}) T_{++} = 2 T_{++},$$

т.е., проводя замену по каждому индексу также, как и для вектора, найдем

$$T_{++} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (T_{x+} + i T_{y+}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} (T_{xx} + i T_{xy}) - \frac{1}{\sqrt{2}} i (T_{yx} + i T_{yy}) \right),$$

и после приведения подобных членов

$$T_{++} = \frac{1}{2} \{ T_{xx} - T_{yy} + i (T_{xy} + T_{yx}) \}. \quad (3.39)$$

Затем, поскольку  $S_- |2, +2\rangle = \sqrt{2 \cdot 3 - 2 \cdot 1} |2, +1\rangle = 2 |2, +1\rangle$ ,

$$T_{(2+1)} = \frac{1}{2} (s_-^{(1)} + s_-^{(2)}) T_{++} = \frac{1}{2} (\sqrt{2} T_{0+} + \sqrt{2} T_{+0}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (T_{z+} + T_{+z}) = -\frac{1}{2} (T_{zx} + i T_{zy} + T_{xz} + i T_{yz}),$$

т.е.

$$T_{(2+1)} = -\frac{1}{2} \{ T_{zx} + T_{xz} + i (T_{zy} + T_{yz}) \}. \quad (3.40)$$

Далее,  $S_- |2, +1\rangle = \sqrt{2 \cdot 3 - 1 \cdot 0} |2, 0\rangle = \sqrt{6} |2, 0\rangle$ , а значит,

$$T_{(20)} = \frac{1}{\sqrt{6}} (s_-^{(1)} + s_-^{(2)}) T_{(2+1)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} (s_-^{(1)} + s_-^{(2)}) (T_{0+} + T_{+0}) = \frac{1}{2\sqrt{3}} (\sqrt{2}(T_{-+} + T_{00}) + \sqrt{2}(T_{00} + T_{+-})),$$

<sup>11</sup>В линейном пространстве полей, на котором действует матричное представление группы Ли, можно ввести нетривиальные классы эквивалентности по отношению к действию группы с точностью до линейных суперпозиций: класс ненулевого элемента пространства (поля) образуется линейной оболочкой элементов поля, которые получаются действием всех элементов группы на выбранный элемент. Тогда представление является неприводимым, если в нем есть только один класс эквивалентности (нетривиальный класс включает в себя хотя бы один ненулевой элемент, сам же нулевой элемент обычно не преобразуется, т.е. является инвариантом).

что после несложных арифметических действий дает

$$T_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \{2T_{zz} - T_{xx} - T_{yy}\}. \quad (3.41)$$

Аналогично найдем, что

$$T_{(-2)} = T_{--} = T_{++}^*, \quad T_{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (T_{z-} + T_{-z}) = -T_{(+1)}^*. \quad (3.42)$$

Итак, тензорное поле с заданным значением спина  $s$  можно построить из старшего вектора путем действия понижающей матрицы и, при этом, это тензорное поле имеет  $2s + 1$  компонент.

Заметим, что тензорное поле с заданным спином  $s = 2$  описывается симметричным вкладом тензора  $T_{\alpha\beta}$ , что ясно уже из того, что старший вектор является симметричным по перестановке индексов, а понижающая матрица также построена симметрично по перестановке индексов. Отсюда следует, что спин  $s = 2$  отвечает симметричным тензорам ранга 2. При этом этот тензор обладает еще и нулевым следом, поскольку след дает нулевой вклад в компоненты стандартного представления для тензорного поля с  $s = 2$ , что следует из явного вида построенных нами компонент (3.39)–(3.42). Кроме того, если посчитать число степеней свободы, симметричный тензор второго ранга имеет 6 независимых компонент, след тензора является инвариантом и не преобразуется при поворотах, так что требование нулевого следа симметричного тензора второго ранга как раз оставляет пять независимых компонент, как это и должно быть у тензорного поля со спином 2.

В частности, инвариантный тензор Кронекера хоть и обладает рангом, равным 2, дает при подстановке в формулы (3.39)–(3.42) тензорное поле спина 2, тождественно равное нулю, так как, в самом деле, тензор Кронекера не преобразуется при поворотах. т.е. ведет себя как инвариант. Иными словами, старший вектор стандартного представления  $\delta_{++} \equiv 0$ , а значит, действием на него понижающей матрицей получаются только нулевые вектора спина 2.

**Задача 47.** Вычислите все компоненты символа Кронекера в базисе  $\{+, -, 0\}$ . Ответ: ненулевые компоненты  $\delta_{00} = -\delta_{+-} = -\delta_{-+} = 1$ .

Теперь, поскольку любой симметричный тензор  $T_{\alpha\beta\gamma\dots}$  можно представить в виде суммы тензора с нулевым следом  $\tilde{T}_{\alpha\beta\gamma\dots} = T_{\alpha\beta\gamma\dots} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}T'_{\gamma\dots}$  и тензора меньшего ранга  $T'_{\gamma\dots} = \delta_{\alpha\beta}T_{\alpha\beta\gamma\dots}$ , умноженного на символ Кронекера:  $\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}T'_{\gamma\dots}$ , можно рассматривать независимо преобразования при поворотах бесследовых тензоров ранга  $s$  и тензоров с рангом на две единицы меньше. При этом, вклад тензора  $\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}T'_{\gamma\dots}$  в старший вектор спина  $s$  равен  $\frac{1}{3}\delta_{++}T'_{++\dots} \equiv 0$ , а значит, он не дает вклада в спин  $s$ . Следовательно, симметричный тензор спина  $s$  — бесследовый.

Рассмотрим число степеней свободы такого симметричного бесследового тензора методом математической индукции:

- вектор, т.е. тензор ранга  $s = 1$ , имеет  $2s + 1 = 3$  независимых компоненты;
- если симметричный бесследовый тензор ранга  $s$  обладает  $2s + 1$  независимой компонентой, то добавление еще одного индекса к нему эквивалентно домножению этого тензора на трехмерный вектор, что делает его тензором ранга  $s + 1$  с числом независимых компонент равным  $(2s + 1) \cdot 3$ , так что у этого тензора можно выделить вклады, антисимметричные по перестановкам «старых» индексов с новым, и каждый такой вклад будет иметь 3 независимых векторных компоненты, как у векторного произведения<sup>12</sup>, а значит, антисимметричная часть тензора будет содержать  $3s$  независимых компонент, к тому же можно взять след, сворачивая новый индекс со «старым», что дает  $s$  независимых степеней свободы — ненулевых значений следа, а следовательно, в итоге, у построенного тензорного произведения с  $(2s + 1) \cdot 3$  компонентами можно выделить симметричную по всем индексам бесследовую часть с числом компонент, равным  $(2s + 1) \cdot 3 - 3s - s = 2(s + 1) + 1$ , что и требовалось;
- по индукции заключаем, что симметричные бесследовые тензоры ранга  $s$  имеют  $2s + 1$  независимых компонент и отвечают тензорным полям спина  $s$ .

Например, если исходный тензор был символом Кронекера, то его бесследовая часть тождественно равна нулю, что отвечает нулевому полю со спином 2 для символа Кронекера. Тензор Леви-Чивиты

<sup>12</sup>Это следует из явного построения антисимметричного тензора  $t_{\alpha\beta} = -t_{\beta\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}v_\gamma$ , где у вектора  $v_\gamma$  три независимых компоненты.

бесследовый и имеет ранг, равный 3, но он антисимметричен, так что его спин равен нулю, и это — инвариантный тензор<sup>13</sup>.

Итак, тензорные поля с определенным значением квадрата спина  $s$  описываются симметричными тензорами ранга  $s$  с нулевым следом по любой паре индексов. Они представляют собой неприводимые представления группы поворотов мультиплетностью  $2s + 1$ .

В качестве примера, рассмотрим симметричный бесследовый тензор второго ранга, составленный из единичных радиус-векторов:

$$T_{\alpha\beta} = n_\alpha n_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta}.$$

Его компоненты

$$T_{(\pm 2)} = \frac{1}{2} \sin^2 \theta e^{\pm i 2\phi}, \quad T_{(\pm 1)} = \mp \sin \theta \cos \theta e^{\pm i \phi}, \quad T_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{6}} (3 \cos^2 \theta - 1),$$

пропорциональны сферическим гармоникам  $\mathcal{Y}_{2,m} \sim T_{(m)}$ ,  $m = \{\pm 2, \pm 1, 0\}$ .

Сферические гармоники  $\mathcal{Y}_{l,m}(\theta, \phi)$  строятся из старшего вектора  $\mathcal{Y}_{l,l} \sim (n_+)^l = \frac{(-1)^l}{\sqrt{2^l l!}} \sin^l \theta e^{i l \phi}$  действием понижающего оператора. При этом  $\mathcal{Y}_{l,-m} = (-1)^m \mathcal{Y}_{l,m}^*$ . Условие нормировки

$$\int d\Omega \mathcal{Y}_{l,m}^*(\theta, \phi) \mathcal{Y}_{l,m'}(\theta, \phi) = \delta_{mm'}$$

приводит к соотношению<sup>14</sup>

$$\mathcal{Y}_{l,l}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{(2l+1)!}{2^l l!}} \frac{1}{l!} (n_+)^l.$$

Мы видим, что при поворотах компоненты тензора с заданным спином преобразуются друг в друга. В этом случае говорят о неприводимом представлении группы поворотов: для таких тензорных полей с определенным значением спина невозможно выделить подпространство, элементы которого не смешиваются с элементами других подпространств.

## Лекция № 8

Разложение тензора второго ранга в прямую сумму неприводимых слагаемых с  $s = 0, 1, 2$ , симметричные и антисимметричные вклады, спинор и матрицы Паули, антикоммутатор, преобразование спинора при поворотах, поворот на угол  $2\pi$ , гомоморфизм  $SU(2) \rightarrow SO(3)$ , представления алгебры и накрывающая группа, эквивалентные представления группы поворотов спиноров  $SU(2)$ , сопряженный спинор, билинейный спинорный инвариант и спинорная метрика, индексы с точками и без точек, проекции спина на ось волнового вектора для свободных поперечных полей спина  $s = 1$  и  $s = 2$ .

### 18. Разложение приводимых тензоров на неприводимые

Рассмотрим тензорное произведение двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , т.е. тензор с компонентами

$$T_{\alpha\beta} = a_\alpha b_\beta.$$

Выделим в этом тензоре симметричный и антисимметричный вклады,

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \{a_\alpha b_\beta + a_\beta b_\alpha\} + \frac{1}{2} \{a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha\},$$

и запишем отдельно бесследовый симметричный тензор и его след:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left\{ a_\alpha b_\beta + a_\beta b_\alpha - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \right\} + \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \frac{1}{2} \{a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha\}.$$

<sup>13</sup>Умножение тензора на инвариантный тензор с соответствующей сверткой индексов для получения составного тензора, конечно, не меняет спин исходного тензора: это произведение будет преобразовываться при поворотах системы отсчета ровно также, как произведение исходного тензора на тот же инвариантный тензор по определению инвариантного тензора, так как он не меняется при поворотах. Скажем, произведению вектора на символ Леви-Чивиты  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\nu}$  соответствует спин  $s = 1$ .

<sup>14</sup>Вычислите нормировочный коэффициент самостоятельно.



Бесследовый симметричный тензор

$$u_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left\{ a_\alpha b_\beta + a_\beta b_\alpha - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \right\}$$

отвечает тензору спина  $s = 2$ , а значит, его компоненты при поворотах преобразуются друг в друга без наличия инвариантных подмножеств, т.е. это неприводимое представление группы поворотов.

Скалярному вкладу спина  $s = 0$  отвечает слагаемое

$$s_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

так как скалярное произведение векторов — это инвариант, также как инвариантом является и символ Кронекера.

Антисимметричный тензор

$$t_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \{ a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha \}$$

как матрица  $3 \times 3$  имеет на диагонали нули, над диагональю 3 независимых элемента, а под диагональю все элементы являются отражением элементов над диагональю с противоположным знаком, так что этот тензор имеет 3 независимых компоненты, причем все они могут быть записаны с помощью символа Леви-Чивиты в виде

$$t_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_\gamma.$$

Здесь символ Леви-Чивиты — инвариантный тензор, а  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  — вектор, т.е. тензорное поле спина  $s = 1$ .

В итоге, составной тензор второго ранга, который представляет собой тензорное произведение двух тензоров со спином  $s = 1$ ,  $T = 3 \otimes 3$ , разложен в прямую сумму тензоров со спином 0, 1 и 2 — синглет, триплет и квинтет:

$$SO(3) : \quad 3 \otimes 3 = 1 \oplus 3 \oplus 5.$$

Каждый член этой суммы — неприводимый тензор группы поворотов. Таким образом, мы описали пример разложения приводимого тензора по неприводимым, так что для тензора второго ранга это разложение имеет вид

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left\{ T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} T_{\gamma\gamma} \right\} + \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} T_{\gamma\gamma} + \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\gamma\alpha'\beta'} T_{\alpha'\beta'}.$$

Изложенная нами в случае прямого произведения векторов схема действий при разложении тензора на неприводимые слагаемые: выделение симметричной бесследовой части, следа и антисимметричной части, — остается в силе и при рассмотрении тензоров высших рангов и при описании прямого произведения неприводимых тензоров, т.е. при произведении тензоров с определенным спином.

**Задача 48.** Постройте в явном виде результат разложения в сумму неприводимых слагаемых тензорного произведения в задаче  $SO(3) : 5 \otimes 3$ .

## 19. Спин $s = \frac{1}{2}$

Рассмотрим поле с полуцелым спином,  $s = \frac{1}{2}$ . В этом случае соответствующая спиновая матрица представляется в виде

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.43)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  — матрицы Паули. Найдем явный вид матриц Паули, используя общие выражения для действия матриц спина на базисные поля. Базис спиновых состояний для краткости обозначений записывают как

$$\left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = |+\rangle, \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = |-\rangle, \quad (3.44)$$

причем это — собственные векторы проекции спина

$$s_z |+\rangle = \frac{1}{2} |+\rangle, \quad s_z |-\rangle = -\frac{1}{2} |-\rangle. \quad (3.45)$$

Следовательно, эта матрица в рассматриваемом базисе имеет диагональный вид

$$s_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Согласно (3.36) ненулевые матричные элементы повышающего и понижающего операторов

$$\langle + | s_+ | - \rangle = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) - (-1) \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} + 1 \right)} = 1, \quad (3.46)$$

$$\langle - | s_- | + \rangle = (\langle + | s_+ | - \rangle)^\dagger = 1, \quad (3.47)$$

откуда

$$s_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Тогда обратное преобразование  $s_\pm \leftrightarrow s_{x,y}$  дает

$$s_x = \frac{1}{2} (s_+ + s_-) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.49)$$

и

$$s_y = \frac{1}{2i} (s_+ - s_-) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Поэтому сигма-матрицы Паули — это

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

Для того чтобы отличать фиксированный набор матриц (3.51) от матриц, которые получаются при проецировании на произвольно заданные оси декартовых координат  $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$  часто для матриц Паули используют обозначения  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ .

Поле со спином  $\frac{1}{2}$ , которое называют *спинором*, обладает двумя поляризациями<sup>15</sup>

$$|\theta^\alpha\rangle, \quad \alpha = \{1, 2\}, \quad |\theta^{(1)}\rangle = |+\rangle, \quad |\theta^{(2)}\rangle = |-\rangle,$$

поле спинора<sup>16</sup>

$$\langle \psi(\mathbf{r}) | \theta^\alpha \rangle = \psi^\alpha(\mathbf{r}) \quad (3.52)$$

— это так называемый *двухкомпонентный спинор Паули*.

Преобразования спинора при поворотах имеют такой же вид, как и для тензоров:

$$R(\phi) \circ \psi(\mathbf{r}) = \hat{R}_S(\phi) \cdot \psi(\mathbf{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \psi_\phi(\mathbf{r}_\phi) = \hat{R}_S(\phi) \cdot \psi(\mathbf{r}),$$

где  $\phi = \phi \mathbf{O}$  — вектор поворота на угол  $\phi$  вокруг оси  $\mathbf{O}$ ,  $R(\phi)$  операция преобразования поля спинора, а  $\hat{R}_S(\phi)$  спиновое преобразование компонент спинора, которое при бесконечно малых углах равно

$$\hat{R}_S(\phi) \approx \mathbb{1} - i s_c \phi_c, \quad \phi \rightarrow 0.$$

Поскольку матрицы спина не зависят от угла поворота, можно записать, что

$$\hat{R}_S(\phi + d\phi) = (\mathbb{1} - i \mathbf{s} \cdot d\phi) \cdot \hat{R}_S(\phi),$$

а значит, имеет место дифференциальное уравнение

$$\frac{d\hat{R}_S(\phi)}{d\phi} = -i \mathbf{s} \cdot \hat{R}_S(\phi), \quad (3.53)$$

которое легко интегрируется

$$\hat{R}_S(\phi) = e^{-i \mathbf{s} \cdot \phi}. \quad (3.54)$$

Итак, при поворотах спинор преобразуется согласно

$$\psi^\alpha_\bullet(\mathbf{r}_\phi) = \{e^{-i \mathbf{s} \cdot \phi}\}^\alpha_{\bullet\beta} \psi^\beta(\mathbf{r}), \quad (3.55)$$

где мы указали матричные индексы в явном виде.

Для вычисления матричной экспоненты установим два факта:

<sup>15</sup> Далее будем использовать для спинорных индексов греческие буквы в начале алфавита:  $\alpha, \beta, \dots$ , — а для векторных индексов латинские буквы:  $a, b, \dots$

<sup>16</sup> В отличие от векторов, для которых в евклидовом пространстве метрика в декартовых координатах — единичная матрица, так что можно не делать различий между верхними и нижними индексами, для спиноров, как будет ясно ниже верхние и нижние индексы несут разную информацию: метрика для спиноров отличается от единичной матрицы.

## 1. коммутационные соотношения

$$[\sigma_a, \sigma_b] = 2i\epsilon_{abc}\sigma_c \quad (3.56)$$

следуют из коммутационных соотношений для момента импульса:  $[\frac{1}{2}\sigma_a, \frac{1}{2}\sigma_b] = i\epsilon_{abc}\frac{1}{2}\sigma_c$ ;

## 2. антикоммутационные соотношения

$$\{\sigma_a, \sigma_b\} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_a = 2\delta_{ab} \quad (3.57)$$

устанавливаются прямыми вычислениями произведений матриц Паули (с использованием повышающей и понижающей матриц с учетом их размера  $2 \times 2$ ).

В самом деле, двукратное повышение приводит к нулю, поскольку при спине  $s = \frac{1}{2}$  допустим только один шаг от младшего вектора к старшему, а последующие шаги уже действуют на нулевой вектор. Значит,

$$\sigma_+^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_x^2 + i(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x) - \sigma_y^2 = 0,$$

Но с учетом того, что, очевидно,  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \mathbb{1}$ , сразу находим антикоммутатор

$$\{\sigma_x, \sigma_y\} = 0.$$

Точно также, вычисляя значение проекции спина на ось  $z$  до и после повышения, устанавливаем, что на базисных векторах

$$\sigma_+\sigma_z + \sigma_z\sigma_+ = 0 \quad \Rightarrow \quad \{\sigma_x, \sigma_z\} + i\{\sigma_y, \sigma_z\} = 0.$$

Но антикоммутатор сигма-матриц Паули — это эрмитово самосопряженная матрица, так что в последнем равенстве антикоммутаторы независимо обращаются в нуль, что, конечно, завершает доказательство (3.57).

Поскольку

$$\sigma_a\sigma_b = \frac{1}{2}[\sigma_a, \sigma_b] + \frac{1}{2}\{\sigma_a, \sigma_b\},$$

находим

$$\sigma_a\sigma_b = i\epsilon_{abc}\sigma_c + \delta_{ab}. \quad (3.58)$$

Домножая это тождество на векторы  $A_a$  и  $B_b$ , получаем

$$(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = i(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad (3.59)$$

где  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  — векторное произведение векторов. В частности,

$$(\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \boldsymbol{\phi}^2.$$

Тогда в экспоненте матрицы конечных поворотов

$$\hat{R}_S = e^{-i\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\phi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{2^n n!} (\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\sigma})^n \quad (3.60)$$

четные степени разложения пропорциональны единичной матрице, а нечетные — оператору

$$(\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi}) = (\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi}),$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  — единичный вектор вдоль оси поворота. Тогда суммирование четных и нечетных степеней дает

$$\hat{R}_S = e^{-i\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\phi}} = \cos\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\sigma})\right) - i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi}) \sin\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\sigma})\right). \quad (3.61)$$

При повороте вокруг оси на угол  $2\pi = (\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\sigma})$  получаем  $\mathbf{r}^\phi = \mathbf{r}$  и

$$e^{-i\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\phi}} \Big|_{2\pi} = -1. \quad (3.62)$$

Значит,

$$\psi^\alpha(\mathbf{r}) \Big|_{2\pi} = -\psi^\alpha(\mathbf{r}), \quad (3.63)$$

т.е. поле спинора меняет знак после поворота на угол  $2\pi$ . Это свойство, очевидно, является общим для всех частиц с полуцелым спином, которых называют *фермионами*.

Напомним теперь, что мы стартовали с алгебры группы поворотов 3-мерного евклидова пространства. Как видим, среди представлений этой алгебры имеются спинорные, причем группа поворотов спиноров не совпадает с группой  $SO(3)$ . В самом деле <sup>17</sup>,

$$\det \hat{R}_S = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \phi \cdot \text{tr } \sigma \right\} = 1,$$

и это специальные преобразования 2-мерных комплексных столбцов, т.е. группа  $SU(2)$ .

Существует гомоморфизм  $SU(2) \mapsto SO(3)$ . Действительно, сигма-матрицы Паули — генераторы группы преобразований спиноров Паули  $\psi^\alpha$ , и, следовательно, они переводят спинор в спинор, а значит, имеют матричные индексы  $\sigma^\beta_\alpha$ , где верхний индекс  $\beta$  относится к столбцам (исходное 2-мерное векторное пространство), которые преобразуются матрицами  $\hat{R}_S$ , а нижний индекс  $\alpha$  относится к строкам (пространство, сопряженное к исходному 2-мерному пространству столбцов, т.е. ковекторное пространство), которые преобразуются, конечно, обратными матрицами  $\hat{R}_S^{-1}$ , а они совпадают с эрмитово сопряженными  $\hat{R}_S^\dagger = \hat{R}_S^{-1}$ . Это значит, что закон преобразования сигма-матриц в группе  $SU(2)$  выглядит следующим образом:

$$\sigma \mapsto \hat{R}_S \sigma \hat{R}_S^\dagger.$$

Рассмотрим теперь  $2 \times 2$ -матрицу

$$\hat{V} = V_a \sigma^a,$$

где  $V_a$  — 3-мерный ковектор. По матрице  $\hat{V}$  можно определить вектор

$$V^b = \frac{1}{2} \text{tr } (\sigma^b \hat{V}),$$

поскольку

$$\text{tr } (\sigma^b \sigma^a) = \text{tr } (\sigma^a \sigma^b) = \frac{1}{2} \text{tr } (\sigma^b \sigma^a + \sigma^a \sigma^b) = \frac{1}{2} 2 \delta^{ab} \text{tr } \mathbb{1} = 2 \delta^{ab}.$$

Детерминант матрицы  $\hat{V}$  является инвариантом,

$$\det(\hat{R}_S \hat{V} \hat{R}_S^\dagger) = \det(\hat{V} \hat{R}_S^\dagger \hat{R}_S) = \det \hat{V}.$$

Этот инвариант легко вычисляется из явного вида сигма-матриц,

$$\det \hat{V} = \det \begin{pmatrix} V_z & V_x - iV_y \\ V_x + iV_y & -V_z \end{pmatrix} = -(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) = -\mathbf{V}^2,$$

и  $(-1) \det \hat{V}$  — это квадрат длины вектора  $\mathbf{V}$ , который не меняется при поворотах.

Разложим преобразованную матрицу по матрицам Паули,

$$\hat{V}' = \hat{R}_S \hat{V} \hat{R}_S^\dagger = V'_a \sigma^a,$$

откуда

$$V'^b = \frac{1}{2} \text{tr } (\sigma^b \hat{V}') = V_a \frac{1}{2} \text{tr } (\sigma^b \hat{R}_S \sigma^a \hat{R}_S^\dagger).$$

<sup>17</sup>Для обратимых матриц вида  $M = e^A$  имеет место тождество

$$\det e^A = e^{\text{tr } A}, \quad (3.64)$$

где  $\text{tr } A$  означает взятие следа матрицы  $A$ . Это утверждение легко доказать, если рассмотреть решение уравнений для матриц  $X(\tau)$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} X(\tau) = A \circ X(\tau)$$

с граничными условиями

$$X(0) = \mathbb{1}, \quad X(1) = M.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \det X(\tau) &= \det X(\tau) (X^{-1}(\tau))^{\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} X(\tau)_{\alpha\beta} = \\ &= \det X(\tau) (X^{-1}(\tau))^{\beta\alpha} (A \circ X(\tau))_{\alpha\beta} = \\ &= \det X(\tau) \text{tr } (X^{-1}(\tau) \circ A \circ X(\tau)) = \det X(\tau) \text{tr } A. \end{aligned}$$

Элементарное интегрирование этого уравнения с учетом граничных условий дает (3.64).

Но это значит, что 3-вектор  $\mathbf{V}$  преобразуется  $3 \times 3$  матрицей

$$V'^b = R_a^b V^a, \quad R_a^b = \frac{1}{2} \text{tr} (\sigma^b \hat{R}_S \sigma_a \hat{R}_S^\dagger).$$

Покажем, что это — матрица поворотов евклидова пространства. Для этого рассмотрим бесконечно малые преобразования

$$\hat{R}_S \approx \mathbb{1} - \frac{i}{2} \phi^c \sigma_c, \quad \hat{R}_S^\dagger \approx \mathbb{1} + \frac{i}{2} \phi^c \sigma_c.$$

Тогда

$$R_a^b \approx \frac{1}{2} \text{tr} (\sigma^b \sigma_a) - \frac{i}{2} \phi^c \text{tr} (\sigma^b \sigma_c \sigma_a - \sigma^b \sigma_a \sigma_c) = \delta_a^b - \frac{i}{2} \phi^c \text{tr} (\sigma^b 2i \epsilon_{caa'} \sigma^{a'}) = \delta_a^b + \epsilon_{ca}^b \phi^c.$$

Значит, инфинитезимальное преобразование вектора имеет вид

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{V},$$

и оно действительно представляет собой поворот на угол  $\boldsymbol{\phi}$ .

В итоге, гомоморфизм  $SU(2)$  на  $SO(3)$  задается формулой преобразования матриц

$$R_a^b = \frac{1}{2} \text{tr} (\sigma^b \hat{R}_S \sigma_a \hat{R}_S^\dagger). \quad (3.65)$$

Отсюда сразу следует, что матрицы  $\hat{R}_S$  и  $-\hat{R}_S$  приводят к одной и той же матрице преобразований  $SO(3)$ , и, в частности, ядро гомоморфизма, т.е. преобраз единицы, нетривиально и это  $\pm \mathbb{1}$ . Ясно, что группа  $SU(2)$  дважды покрывает  $SO(3)$ . Итак, представления алгебры группы  $SO(3)$  дают представления универсальной накрывающей группы  $SU(2)$ . Термин «универсальная накрывающая» относится к гомотопическим свойствам гладких многообразий, которые мы здесь не рассматриваем (см. [5]).

## 20. Спинорная метрика

Введем вещественную матрицу  $\hat{\epsilon}$ ,

$$\hat{\epsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2, \quad \hat{\epsilon}^2 = -\mathbb{1} = \hat{\epsilon}, \quad \hat{\epsilon}^{-1} = \hat{\epsilon}^T = -\hat{\epsilon}, \quad (3.66)$$

и определим сопряженный к спинору  $\psi$  спинор  $\psi_c$  с помощью комплексного сопряжения и матричного умножения,

$$\psi_c \stackrel{\text{def}}{=} -\hat{\epsilon} \psi^* = -i\sigma_2 \psi^*, \quad (3.67)$$

а затем рассмотрим, как он преобразуется при поворотах,

$$\psi_c^\phi = -\hat{\epsilon} (\hat{R}_S \psi)^* = \hat{\epsilon} \hat{R}_S^* \hat{\epsilon}^{-1} (-\hat{\epsilon} \psi^*) = \hat{\epsilon} \hat{R}_S^* \hat{\epsilon}^{-1} \psi_c,$$

Значит, нам необходимо найти матрицу  $\hat{\epsilon} \hat{R}_S^* \hat{\epsilon}^{-1}$ . При этом, матрица поворотов спиноров  $\hat{R}_S$  имеет вид экспоненты (3.60). В общем случае, так как  $\hat{\epsilon} \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \mathbb{1}$ , разложение экспоненты от матрицы в ряд Тейлора приводит к

$$\hat{\epsilon} \circ \exp\{A\} \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \hat{\epsilon} \circ \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \right) \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \{ \hat{\epsilon} \circ A \circ \hat{\epsilon}^{-1} \}^n = \exp\{ \hat{\epsilon} \circ A \circ \hat{\epsilon}^{-1} \}.$$

В случае матрицы поворотов

$$\hat{R}_S = \exp \left( -\frac{i}{2} \phi (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}) \right),$$

так что

$$\hat{R}_S^* = \exp \left( \frac{i}{2} \phi (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}) \right).$$

Для вычисления  $\hat{\epsilon} \circ \boldsymbol{\sigma}^* \circ \hat{\epsilon}^{-1}$  заметим, что матрицы  $\sigma_x, \sigma_z$  симметричные и вещественные, так что

$$\sigma_x^* = \sigma_x^T = \sigma_x, \quad \sigma_z^* = \sigma_z^T = \sigma_z,$$

а матрица  $\sigma_y$  чисто мнимая и антисимметричная, так что

$$\sigma_y^* = \sigma_y^T = -\sigma_y.$$

Поэтому в силу

$$\sigma_x \hat{\epsilon} = -\hat{\epsilon} \sigma_x, \quad \sigma_z \hat{\epsilon} = -\hat{\epsilon} \sigma_z, \quad \sigma_y \hat{\epsilon} = \hat{\epsilon} \sigma_y,$$

получаем

$$\hat{\epsilon} \circ \sigma^* \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \hat{\epsilon} \circ \sigma^T \circ \hat{\epsilon}^{-1} = -\sigma. \quad (3.68)$$

Значит,

$$\hat{\epsilon} \hat{R}_S^* \hat{\epsilon}^{-1} = \hat{\epsilon} \exp \left( \frac{i}{2} \phi(\sigma^* \cdot \mathcal{O}) \right) \hat{\epsilon}^{-1} = \exp \left( \frac{i}{2} \phi(\hat{\epsilon} \sigma^* \hat{\epsilon}^{-1} \cdot \mathcal{O}) \right) = \hat{R}_S, \quad (3.69)$$

и аналогично,

$$\hat{\epsilon} \hat{R}_S^T \hat{\epsilon}^{-1} = \hat{\epsilon} \exp \left( -\frac{i}{2} \phi(\sigma^T \cdot \mathcal{O}) \right) \hat{\epsilon}^{-1} = \exp \left( -\frac{i}{2} \phi(\hat{\epsilon} \sigma^T \hat{\epsilon}^{-1} \cdot \mathcal{O}) \right) = \hat{R}_S^\dagger = \hat{R}_S^{-1}. \quad (3.70)$$

Напомним, что контравариантные спиноры  $\psi^\alpha$ , которые при матричной записи можно по договоренности считать столбцами  $\psi^{\alpha\bullet}$ , преобразуются матрицами  $\hat{R}_S$ , а ковариантные спиноры  $\psi_\alpha$ , которые можно считать строками  $\psi_{\bullet\alpha}$ , преобразуются обратными матрицами  $\hat{R}_S^{-1}$ . При этом,  $R_S$  — это унитарная матрица:

$$R_S \cdot R_S^\dagger = 1, \quad R_S^\dagger = R_S^{-1},$$

и поэтому эрмитово сопряженный спинор преобразуется как ковариантный. Говорят, что соотношение (3.70) устанавливает эквивалентность транспонированного представления группы поворотов спиноров эрмитово сопряженному представлению этой группы или, в данном случае, еще и эквивалентность транспонированного контравариантного представления ковариантному, а соотношение (3.69) — эквивалентность комплексно сопряженного представления контравариантному спинорному представлению.

Итак, при поворотах

$$\psi_c^\phi = \hat{R}_S \psi_c,$$

где мы воспользовались соотношением (3.69). Значит, этот спинор при поворотах преобразуется также, как и сам спинор  $\psi$ . Поэтому произведение двух любых спиноров

$$\psi_c^\dagger \chi = (-\hat{\epsilon} \psi^*)^\dagger \chi = \psi^T (-\hat{\epsilon})^\dagger \chi = \psi^T \hat{\epsilon} \chi = \psi^\alpha \hat{\epsilon}_{\alpha\beta} \chi^\beta$$

является скаляром, т.е. инвариантом группы поворотов спиноров. Значит, формула определяет скалярное произведение двух спиноров. Поэтому согласно общему представлению о метрическом тензоре как о квадратичной инвариантной линейной функции  $\hat{\epsilon}_{\alpha\beta}$  — полностью антисимметричный ковариантный тензор второго ранга в двумерном пространстве:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}, \quad \epsilon_{12} = 1.$$

В терминах метрики скалярное произведение двух произвольных спиноров  $\psi$  и  $\chi$

$$\psi \cdot \chi = \epsilon_{\alpha\beta} \psi^\alpha \chi^\beta. \quad (3.71)$$

Метрика определяет ковариантные спиноры с нижними индексами

$$\chi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \chi^\beta,$$

так что скалярное произведение

$$\psi \cdot \chi = \psi^\alpha \chi_\alpha = -\psi_\beta \chi^\beta. \quad (3.72)$$

Обратная метрика  $\epsilon^{\alpha\beta}$  определяется согласно

$$\epsilon^{\alpha\gamma} \epsilon_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha.$$

Очевидно,

$$\epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\beta\alpha}, \quad \epsilon^{12} = -1.$$

Определенный выше спинор  $\psi_c$  обозначают также спинором с чертой, который имеет верхний индекс с точкой, так как он преобразуется по представлению, эквивалентному представлению, которое действует в комплексно сопряженном спинорном пространстве:

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \stackrel{\text{def}}{=} (-\hat{\epsilon} \psi^*)^{\dot{\alpha}}. \quad (3.73)$$

Как мы показали, этот спинор при поворотах преобразуется также, как и обычный спинор. Поэтому скаляром будет величина (см. знаки в (3.72))

$$-\chi^{\dagger} \cdot \psi_c = -\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}},$$

где мы ввели обозначение для спинора с чертой и с нижним индексом с точкой как эрмитово сопряженного к обычному спинору-столбцу:

$$\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = (\chi^{\dagger})_{\dot{\alpha}}. \quad (3.74)$$

Элементарно

$$\chi^{\dagger} = \{\chi^*\}^T = \{\hat{\epsilon} (-\hat{\epsilon} \chi^*)\}^T = \{\hat{\epsilon} \bar{\chi}\}^T = -\bar{\chi}^T \hat{\epsilon}.$$

Поэтому

$$-\bar{\chi} \cdot \bar{\psi} = \bar{\chi}^T \hat{\epsilon} \bar{\psi} = \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}}, \quad \epsilon_{12} = 1,$$

т.е. метрика  $\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$  в спинорных индексах с точкой совпадает с метрикой  $\epsilon_{\alpha\beta}$  в спинорных индексах без точек.

Метрика остается инвариантной при поворотах спиноров. Действительно, справедливо соотношение изометрии:

$$\hat{R}_S^T \hat{\epsilon} \hat{R}_S = -\hat{R}_S^T \hat{\epsilon}^{-1} \hat{R}_S = \hat{\epsilon} \left( \hat{\epsilon} \hat{R}_S^T \hat{\epsilon}^{-1} \right) \hat{R}_S = \hat{\epsilon} \hat{R}_S^{\dagger} \hat{R}_S = \hat{\epsilon},$$

где мы воспользовались тождеством (3.70). Группа инвариантности спинорной метрики с  $\det \hat{R}_S = 1$  называется специальной унитарной группой на двухкомпонентных спинорах:  $SU(2)$ . Это трехпараметрическая группа.

Мы исследовали алгебру генераторов группы при построении поворотов спиноров. Эта алгебра совпадает с алгеброй генераторов группы поворотов трехмерного евклидова пространства  $SO(3)$ . Тем не менее, сами группы отличаются, так как в  $SU(2)$  допустимы и полуцелые собственные значения генератора  $s_z$ , а в  $SO(3)$  — только целые значения  $s_z$ . Это особенно ярко проявляется при проведенном выше рассмотрении поворота на угол  $2\pi$ : для спиноров этот поворот дает фактор  $-1$ , а для бозонов, полей с целым значением спина, — фактор  $+1$ . Существование полей с полуцелым спином возможно, но оно не следует, вообще говоря, из группы поворотов евклидова пространства. Факт такого существования — экспериментальный.

Подчеркнем, что спинорная метрика задает инвариант

$$\psi \cdot \psi = \psi^{\alpha} \epsilon_{\alpha\beta} \psi^{\beta} = \psi^{(1)} \psi^{(2)} - \psi^{(2)} \psi^{(1)},$$

и это инвариант обратился бы в нуль<sup>18</sup>, если бы спиноры описывались обычными комплексными числами! Этот факт напрямую связан с тем, что спиноры — частный случай фермионов с полуцелым спином, для которых имеет место принцип запрета Паули. Из принципа запрета Паули, как мы знаем (см. стр. 11 раздел 1.1.), следует, что перестановка наблюдаемых параметров тождественных фермионов, в данном случае, перестановка номеров поляризации (проекция спина на ось  $z$ ) в амплитуде вероятности должна сопровождаться сменой знака амплитуды. В частности, следует положить, что

$$\psi^{(1)} \psi^{(2)} = -\psi^{(2)} \psi^{(1)},$$

что в математике называют алгеброй Грассмана, а сами числа с такими свойствами — грассмановыми переменными<sup>19</sup>. Укажем лишь, что в релятивистской теории устанавливается связь спина со статистикой: собственное значение оператора перестановок тождественных частиц равно  $+1$  для частиц с целым спином (бозонов) и  $-1$  для частиц с полуцелым спином (фермионов).

Тогда становится понятным, почему метрика пространства как инвариантная квадратичная форма на вещественных векторах симметрична, а метрика спинорного пространства на грассмановых спинорах антисимметрична.

<sup>18</sup>Здесь рассматривается случай спиноров, не зависящих от времени и координат, — случай глобальных спиноров.

<sup>19</sup>Мы не будем здесь вдаваться в детали описания алгебры Грассмана, включая интегрирование по грассмановым переменным, отсылая читателя к современным курсам квантовой механики, где этот вопрос рассматривается во всех деталях.

## 21. Поперечные векторные и тензорные поля

В релятивистской теории поля могут возникать особые условия, когда не все поляризации спина реализуются в природе.

Например, для свободного электромагнитного поля уравнения Максвелла дают

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathcal{H} = 0,$$

так что для плоской монохроматической волны, скажем, электрического поля с волновым вектором  $\mathbf{k}$ ,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad \omega = c k,$$

найдем, что

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = i \mathbf{k} \cdot \mathcal{E} = 0,$$

т.е. поле является поперечным по отношению к волновому вектору в силу уравнений Максвелла. Значит, если в качестве оси  $z$  выбрать направление волнового вектора, то нулю должна быть равна компонента вектора с нулевой проекцией спина на ось волнового вектора, а отличными от нуля будут лишь две компоненты: с проекцией спина на ось волнового вектора, равной  $+1$  и  $-1$ .

Такая ситуация характерна для теорий с калибровочной инвариантностью, когда, например, электромагнитное поле — это калибровочное поле с массой, равной нулю.

Другой пример — это свободное безмассовое гравитационное поле, которое описывается симметричным бесследовым тензором второго ранга  $h_{\mu\nu}$ . Оно тоже является поперечным по каждому из индексов,

$$\nabla_\mu h^{\mu\nu} = 0.$$

Значит, опять же рассматривая плоскую монохроматическую волну с волновым вектором, направленным вдоль оси  $z$ , мы устанавливаем, что с учетом симметричности тензора

$$h_{zz} = h_{zx} = h_{zy} = h_{xz} = h_{yz} \equiv 0.$$

Кроме того, теперь вследствие бесследовости

$$h_{\gamma\gamma} = h_{xx} + h_{yy} + h_{zz} = 0 \quad \Rightarrow \quad h_{xx} + h_{yy} = 0.$$

Отсюда, согласно общим формулам описания тензора спина  $s = 2$  в разделе **17. Тензорные поля**, следует, что равны нулю все компоненты тензора с проекциями спина на ось волнового вектора, равными  $\pm 1$  и  $0$ :

$$h_{(\pm 1)} = h_{(0)} \equiv 0.$$

Таким образом, поперечное безмассовое свободное гравитационное поле отвечает проекциям спина на ось волнового вектора  $m_s = \pm 2$ .

В релятивистской теории свободных полей доказывается, что безмассовые поля — поперечные, и поэтому для них реализуются только максимальное и минимальное значения проекции спина на ось волнового вектора.



## Тема 4

# Тензор энергии-импульса и ток

### Лекция № 9

Трансляционная инвариантность в пространстве-времени, 4-ковектор скорости, 4-ток плотности массы и закон сохранения массы в дифференциальной форме, сохранение тензора энергии-импульса и физический смысл компонент тензора: плотность энергии, поток энергии, плотность импульса, давление и напряжение, вращательная симметрия и тензор орбитального момента частиц, антисимметричный тензор углов поворотов, сохранение тензора момента импульса как следствие симметричности тензора энергии-импульса, нерелятивистское поле — амплитуда вероятности траектории и уравнения поля из уравнений Гамильтона–Якоби, уравнение Шрёдингера из принципа наименьшего действия для поля  $\Psi$ , тензор энергии-импульса нерелятивистского поля и его компоненты, смысл нормировки поля, глобальная калибровочная инвариантность и электрический 4-ток, закон сохранения вероятности, локальная калибровочная инвариантность и ковариантная производная со связностью, векторный калибровочный бозон, дискретные симметрии зеркальной инверсии пространства и обращения стрелы времени.

После того, как мы решили вопрос о базисе локальных полей в евклидовом 3-мерном пространстве, классифицируя их относительно представлений группы поворотов, возникает вопрос об описании составных полей, построенных из базисных полей. В этом вопросе скрыт явный произвол: любое произведение локальных базисных полей является составным полем. Однако в этом море произвольных конструкций могут возникать пути, которые опираются на вполне конструктивные идеи, основанные на соображениях симметрии действия: интерес представляют составные поля, описывающие сохранение или баланс физических величин, которые относятся к инвариантности действия при непрерывных глобальных параметрических преобразованиях. Существенными примерами таких составных полей являются тензор энергии-импульса и ток.

#### 22. Тензор энергии-импульса нерелятивистских частиц

Согласно теореме Нётер (1.24) дифференциал действия по параметру преобразования экстремальной траектории в экстремальную траекторию с той же функцией Лагранжа равна

$$d_a S = da^n \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \frac{d}{dt_a} \left\{ L \frac{\partial t_a}{\partial a^n} + \sum_q \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \left( \frac{\partial q_a}{\partial a^n} - \dot{q}_a \frac{\partial t_a}{\partial a^n} \right) \right\} dt_a. \quad (1.26)$$

В 4-мерном пространстве,  $x^\mu = \{x_0, \mathbf{r}\}$ , где  $x_0 = ct$ , а  $c$  имеет размерность скорости, инвариантность действия относительно сдвигов начала отсчета времени и координат,

$$x_a^\mu = x^\mu - a^\mu,$$

означает, что  $a^n \mapsto a^\mu$  и  $d_a S = 0$ , откуда

$$\int dt \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^\alpha} \left( \frac{\partial r_a^\alpha}{\partial a^\mu} - \frac{\partial x_a^0}{\partial a^\mu} \partial_0 r^\alpha \right) + L \frac{\partial x_a^0}{c \partial a^\mu} \right\} = 0.$$

Так как  $\partial x_a^\nu / \partial a^\mu = -\delta_\mu^\nu$ , в частности,

$$\frac{\partial r_a^\alpha}{\partial a^\mu} = -\delta_\mu^\alpha, \quad \frac{\partial x_a^0}{\partial a^\mu} = -\delta_\mu^0,$$

а

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^\alpha}, \quad \frac{1}{c} E = \frac{1}{c} \{p_\alpha v^\alpha - L\},$$

найдем, что

$$\int dt \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{c} E \delta_\mu^0 - p_\alpha \delta_\mu^\alpha \right\} = 0.$$

Но согласно уравнениям Гамильтона–Якоби

$$\frac{1}{c} E = -\partial_0 S, \quad p_\alpha = \nabla_\alpha S,$$

а действие — скаляр, так что

$$\partial_\mu S = \left( -\frac{1}{c} E, \mathbf{p} \right)$$

является 4-мерным ковектором, который называют 4-импульсом  $p_\mu$ .

Для свободной нерелятивистской частицы

$$\partial_\mu S = m \left( -\frac{\mathbf{v}^2}{2c}, \mathbf{v} \right),$$

где можно ввести 4-ковектор скорости,

$$\mathcal{U}_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \left( -\frac{\mathbf{v}^2}{2c}, \mathbf{v} \right),$$

так что 4-импульс связан с 4-скоростью  $p_\mu = m\mathcal{U}_\mu$ . Далее,

$$\int dt m \frac{d}{dt} \{-\mathcal{U}_\mu\} = 0.$$

Рассмотрим 4-скорость как функцию времени и координат на траектории:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{U}_\mu = c\partial_0 \mathcal{U}_\mu + \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \cdot \nabla \mathcal{U}_\mu = c\partial_0 \mathcal{U}_\mu + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{U}_\mu.$$

Если в системе много частиц с плотностью массы  $dm/dV = \rho_{(m)}$ , то

$$-\int dt dV \rho_{(m)} (c\partial_0 \mathcal{U}_\mu + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{U}_\mu) = 0.$$

Введем 4-ток плотности массы,

$$\mathcal{J}_{(m)}^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \rho_{(m)} c \\ \rho_{(m)} \mathbf{v} \end{pmatrix},$$

для которого имеет место закон сохранения в полной аналогии с законом сохранения заряда

$$\partial_\mu \mathcal{J}_{(m)}^\mu = 0,$$

в любых декартовых системах отсчета, а значит, произведение 4-ковектора  $\nabla_\mu$  на 4-ток плотности массы  $\mathcal{J}_{(m)}^\mu$  является инвариантом  $\nabla_\mu \mathcal{J}_{(m)}^\mu = \text{inv.}$ , откуда следует, что  $\mathcal{J}_{(m)}^\mu$  является 4-вектором.

Тогда закон сохранения может быть записан в виде<sup>1</sup>

$$-\frac{1}{c} \int d^4x \mathcal{J}_{(m)}^\nu \partial_\nu \mathcal{U}_\mu = 0,$$

но в силу сохранения тока плотности массы, его можно внести под знак производной:

$$\int d^4x \partial_\nu \left\{ -\frac{1}{c} \mathcal{J}_{(m)}^\nu \mathcal{U}_\mu \right\} = 0.$$

Это можно записать, введя тензор энергии-импульса нерелятивистских частиц

$$\mathcal{T}_\mu^\nu(\text{part.}) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{c} \mathcal{J}_{(m)}^\nu \mathcal{U}_\mu, \quad (4.1)$$

так что

$$\int d^4x \partial_\nu \mathcal{T}_\mu^\nu(\text{part.}) = 0. \quad (4.2)$$

Более того, поскольку область интегрирования в пространстве и интервал времени можно считать произвольным, имеет место локальный закон сохранения тензора энергии-импульса:

$$\partial_\nu \mathcal{T}_\mu^\nu(\text{part.}) = 0. \quad (4.3)$$

---

<sup>1</sup>Мы учли, конечно, что  $dt = dx_0/c$ .

### 22.1. Баланс энергии

В (4.2) при  $\mu \mapsto 0$  получаем баланс энергии,

$$\int d^3r \mathcal{T}_0^0 \Big|_{t_0}^t + \int d^4x \nabla_\alpha \mathcal{T}_0^\alpha(\text{part.}) = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt} \int d^3r \mathcal{T}_0^0 + c \int d^3r \nabla_\alpha \mathcal{T}_0^\alpha(\text{part.}) = 0.$$

Здесь

$$c\mathcal{T}_0^0 = \frac{1}{2} \rho_{(m)} \mathbf{v}^2 = \varepsilon$$

является плотностью энергии, а поскольку по теореме Гаусса

$$\int_V d^3r \nabla_\alpha \mathcal{T}_0^\alpha(\text{part.}) = \oint_{\partial V} d^2\sigma_\alpha \mathcal{T}_0^\alpha(\text{part.}),$$

компоненты

$$S^\alpha = c^2 \mathcal{T}_0^\alpha = v^\alpha \frac{1}{2} \rho_{(m)} \mathbf{v}^2$$

представляют собой вектор потока плотности энергии  $\mathbf{S}$ ,

$$\frac{d}{dt} \int d^3r \varepsilon + \oint_{\partial V} d^2\Sigma \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (4.4)$$

что есть, конечно, закон сохранения энергии.

### 22.2. Баланс импульса

В (4.2) при  $\mu \mapsto \alpha = \{1, 3\}$  получаем баланс импульса,

$$\frac{d}{dt} \int d^3r \mathcal{T}_\alpha^0 + c \int d^3r \nabla_\beta \mathcal{T}_\alpha^\beta(\text{part.}) = 0.$$

Введем плотность импульса

$$\mathcal{P}_\alpha = -\mathcal{T}_\alpha^0 = \rho_{(m)} v_\alpha,$$

а поскольку по теореме Гаусса

$$\int_V d^3r \nabla_\beta \mathcal{T}_\alpha^\beta(\text{part.}) = \oint_{\partial V} d^2\sigma_\beta \mathcal{T}_\alpha^\beta(\text{part.}),$$

найдем

$$\frac{d}{dt} \int d^3r \mathcal{P}_\alpha = \oint_{\partial V} d^2\sigma_\beta c \mathcal{T}_\alpha^\beta(\text{part.}),$$

компоненты симметричного тензора

$$c \mathcal{T}_\alpha^\beta(\text{part.}) = -\rho_{(m)} v_\alpha v^\beta$$

представляют собой поверхностную плотность сил, действующих на частицы на границе объема  $V$ . В частности, диагональные элементы — это поверхностная плотность сил, направленных по нормали к ориентированной площади, т.е. давление на частицы на границе объема, а следовательно, поскольку действие равно противодействию, давление самих частиц  $p$  на стенки объема —

$$p_x = -c\mathcal{T}_x^x, \quad p_y = -c\mathcal{T}_y^y, \quad p_z = -c\mathcal{T}_z^z.$$

а значит, вообще говоря, давление в системе частиц не является изотропным. Например, в среднем за интервал времени,

$$p_x = \rho_{(m)} \langle v_x^2 \rangle, \quad p_y = \rho_{(m)} \langle v_y^2 \rangle, \quad p_z = \rho_{(m)} \langle v_z^2 \rangle,$$

и если система большого числа частиц (без структуры, т.е. в случае одноатомных частиц) в среднем изотропна, то давление

$$p = \frac{1}{3} \rho_{(m)} \langle v^2 \rangle.$$

Компоненты  $\mathcal{T}_y^x$  и  $\mathcal{T}_z^x$  создают усилие на площадку с нормалью, направленной по оси  $x$ , в направлении осей  $y$  и  $z$ , соответственно, т.е. по образующим граням площадки. Поэтому  $c\mathcal{T}_\alpha^\beta$  называют тензором напряжений.

Итак, мы установили физический смысл компонент тензора энергии-импульса:

- плотность энергии  $\varepsilon = c\mathcal{T}_0^0$ ,
- плотность импульса  $\mathcal{P}_\alpha = -\mathcal{T}_\alpha^0$ ,
- плотность потока энергии  $S^\alpha = c^2\mathcal{T}_0^\alpha$ ,
- давление в системе  $p$  по осям — это взятые с противоположным знаком диагональные элементы симметричного тензора напряжений  $c\mathcal{T}_\alpha^\beta$ .

Подчеркнем, что для нерелятивистских частиц параметр скорости  $c$  в определении нулевой координаты 4-мерного пространства  $x_0 = ct$  не входит в физические величины тензора энергии-импульса.

### 23. Тензор орбитального момента

При поворотах на бесконечно малый угол  $\phi = \phi \mathbf{O}$  координаты преобразуются по закону

$$\delta \mathbf{r} = \phi \times \mathbf{r}, \quad \delta r_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \phi_\beta r_\gamma.$$

Вместо вектора угла вдоль оси поворота  $\phi_\gamma$  обычно вводят также антисимметричный тензор второго ранга — угол поворота в плоскости  $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ , например, поворот на угол  $\phi_z$  вокруг оси  $z$  есть поворот в плоскости  $(x, y)$  на угол  $\omega_{xy} = \phi_z$ , так что

$$\omega_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \phi_\gamma, \quad \phi_\gamma = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \omega_{\alpha\beta}, \quad \delta r_\alpha = \frac{1}{2} \{\omega_{\beta\alpha} - \omega_{\alpha\beta}\} r_\beta.$$

Поскольку время при поворотах не изменяется теорема Нётер приводит к дифференциалу действия на экстремальных траекториях

$$d_\omega S = d\omega_{\alpha\beta} \int dt \frac{d}{dt} \left\{ p_\gamma \frac{\partial r^\gamma}{\partial \omega_{\alpha\beta}} \right\}.$$

Производная

$$\frac{\partial r^\gamma}{\partial \omega_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_{\alpha\beta}} \{\omega_{\lambda\gamma} - \omega_{\gamma\lambda}\} r_\lambda = \frac{1}{2} \{\delta_{\lambda\alpha} \delta_{\gamma\beta} - \delta_{\lambda\beta} \delta_{\gamma\alpha}\} r_\lambda,$$

где мы аккуратно проследили за тем, чтобы сохранялась антисимметрия по перестановке индексов  $\alpha \leftrightarrow \beta$ . Значит,

$$2d_\omega S = d\omega_{\alpha\beta} \int dt \frac{d}{dt} \{r_\alpha p_\beta - r_\beta p_\alpha\}.$$

При наличии вращательной симметрии, когда производная действия по параметрам  $\omega_{\alpha\beta}$  обращается в нуль, мы получаем тензорный вид закона сохранения орбитального момента:

$$\frac{d}{dt} \{r_\alpha p_\beta - r_\beta p_\alpha\} = 0,$$

так что сохраняется тензор

$$l_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} r_\alpha p_\beta - r_\beta p_\alpha, \tag{4.5}$$

который связан с вектором орбитального момента

$$\ell_\gamma = \frac{1}{2} \epsilon_{\gamma\alpha\beta} l_{\alpha\beta} = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_\gamma.$$

Также, как и в случае рассмотрения тензора энергии-импульса для нерелятивистских частиц с плотностью массы  $\rho_{(m)} = dm/dV$  введем 4-вектор плотности потока массы  $\mathcal{J}_{(m)}^\nu$  и 4-скорость  $\mathcal{U}_\mu$ . Тогда условие инвариантности относительно поворотов примет вид

$$\partial_\nu \{r_\alpha \mathcal{T}_\beta^\nu - r_\beta \mathcal{T}_\alpha^\nu\} = 0, \tag{4.6}$$

т.е. имеет место сохранение тензора орбитального момента

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta}^{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} r_{\alpha} \mathcal{T}_{\beta}^{\nu} - r_{\beta} \mathcal{T}_{\alpha}^{\nu}. \quad (4.7)$$

Для замкнутой системы тензор момента импульса сохраняется:  $\partial_{\nu} \mathcal{T}_{\mu}^{\nu} = 0$ , так что можно расписать закон сохранения тензора орбитального момента следующим образом:

$$\mathcal{T}_{\beta}^{\nu} \partial_{\nu} r_{\alpha} - \mathcal{T}_{\alpha}^{\nu} \partial_{\nu} r_{\beta} = \mathcal{T}_{\beta}^{\nu} \delta_{\nu\alpha} - \mathcal{T}_{\alpha}^{\nu} \delta_{\nu\beta} = \mathcal{T}_{\beta}^{\alpha} - \mathcal{T}_{\alpha}^{\beta} = 0.$$

Таким образом, закон сохранения тензора орбитального момента следует из закона сохранения тензора энергии-импульса в том случае, если пространственная часть тензора энергии-импульса является симметричным тензором. Это условие симметричности выполняется для тензора нерелятивистских частиц.

## 24. Скалярное поле амплитуды вероятности траектории

В теории поля обычно рассматривают только релятивистские поля. Но есть одно исключение.

Действие нерелятивистской частицы является вещественным скаляром, который зависит от координат точки на конце траектории  $S = S(t, \mathbf{r})$ . Это действие экстремально на траектории классической частицы. На всех траекториях в их малых окрестностях действие определяет амплитуду вероятности траектории

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = e^{iS/\hbar},$$

и следовательно, амплитуда является скалярным полем. Уравнения Гамильтона–Якоби для действия

$$\nabla S = \mathbf{p}, \quad -\partial_t S = H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t),$$

для амплитуды вероятности  $\Psi$  запишутся в виде

$$-i\hbar \nabla \Psi = \mathbf{p} \Psi, \quad i\hbar \partial_t \Psi = H(\mathbf{r}, -i\hbar \nabla, t) \Psi. \quad (4.8)$$

Здесь  $\mathbf{p}$  – импульс на экстремальной траектории с действием  $S$ .

Рассмотрим теперь несколько траекторий, которые приводят в одну и ту же точку в заданный момент времени. По самому смыслу построения амплитуды вероятности в этой ситуации следует ввести суперпозицию амплитуд для разных траекторий  $k = \{1, N\}$  с разными комплексными коэффициентами<sup>2</sup>  $A_k$

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N A_k e^{iS_k/\hbar}. \quad (4.9)$$

И тогда уравнения Гамильтона–Якоби запишутся в виде линейных уравнений для функции  $\Psi$  с операторами

$$-i\hbar \nabla \Psi = \sum_{k=1}^N A_k \mathbf{p}_k e^{iS_k/\hbar} = \hat{\mathbf{p}} \Psi, \quad i\hbar \partial_t \Psi = H(\mathbf{r}, -i\hbar \nabla, t) \Psi. \quad (4.10)$$

Эти уравнения: определение оператора импульса  $\hat{\mathbf{p}}$  и уравнение эволюции амплитуды вероятности со временем, — основные уравнения квантовой механики, а уравнение эволюции носит имя Шрёдингера, который сформулировал эти уравнения именно в таком виде. Задача эволюции для поля амплитуды отличается от задачи в классической механике и ставится в следующем виде:

- пусть в момент времени  $t = t_0$  амплитуда задает распределение вероятности найти частицу возле точки  $\mathbf{r}$ :  $dW(t_0, \mathbf{r})/d^3r = |\Psi(t_0, \mathbf{r})|^2$ ,
- решение уравнения эволюции определит амплитуду всех траекторий в момент времени  $t = t'$ , которые зададут распределение вероятности обнаружить частицу вблизи точки  $\mathbf{r}'$ :  $dW(t', \mathbf{r}')/d^3r' = |\Psi(t', \mathbf{r}')|^2$ .

<sup>2</sup>По сути речь идет о переходе от принципа экстремального действия для единственной траектории, который в оптике соответствует принципу наименьшего оптического пути луча или, что эквивалентно, принципу Ферма для эйконала  $\varphi = S/\hbar = \int \mathbf{k} d\mathbf{r} - \int \omega(\mathbf{k}) dt$ , где  $\mathbf{k}$  и  $\omega(\mathbf{k})$  — это волновой вектор и частота, соответственно, к принципу Гюйгенса: амплитуды лучей, пришедших от источников, расположенных в разных точках, складываются в заданной конечной точке эволюции этих лучей при условии когерентности источников. Как мы уже отмечали, условие когерентности означает вполне определенное значение комплексных амплитуд для всех лучей, или траекторий. Без когерентности говорить о суперпозиции вкладов не имеет никакого смысла. В оптике когерентность обеспечивается тем, что фронт волны от единого начального источника является множеством точек, где располагаются когерентные источники для последующей эволюции электромагнитных колебаний согласно принципу Гюйгенса.

Как видим, поле  $\Psi$  здесь представляет собой сумму амплитуд достоверности всех траекторий с заданной конечной точкой траектории, в то время как начальная точка может быть распределена в пространстве с некоторой плотностью вероятности.

■

Замечание о **сущности квантования** на примере квантования энергии с гамильтонианом, не зависящим от времени. Уравнение Шрёдингера, которое описывает сумму амплитуд по траекториям допускает, вообще говоря, решения для произвольных значений энергии. Однако в некотором интервале энергий может оказаться, что все эти решения, скажем, растут на бесконечности так, что невозможна конечная нормировка всех таких решений в указанной области энергий. Физически это означает, что, ограничившись некоторой произвольно выбранной конечной областью пространства, мы найдем, что вероятность нахождения частицы в этой области пространства с заданной энергией равна нулю в пределе, когда нормировка волновой функции стремиться к бесконечности. Это означает, что все траектории с заданной энергией имеют вероятность наблюдения, равную нулю. Так оказывается, что отличная от нуля вероятность наблюдения частицы отвечает лишь ограниченной области значений энергий. Например, для гармонического осциллятора это – дискретный спектр энергий. Повторим, что любая траектория осциллятора с энергией, точное значение которой отлично от значений дискретного спектра, имеет относительную вероятность реализации в природе, равную нулю. Важно, что все случаи квантования физических величин соответствуют этому простому правилу: в спектре физической величины отсутствуют все значения, для которых не может быть нормирована волновая функция, а значит, все вероятности наблюдать такие величины в ограниченной области тождественно равны нулю, т.е. физическая система не может находиться в таких состояниях или на таких траекториях.

Отметим также случай единичного измерения: если, скажем, некоторая траектория имеет энергию, допустимую в спектре квантования энергии, то амплитуда вероятности такой отдельной траектории, конечно, тождественно равна единице, поскольку  $\Psi = \exp\{iS/\hbar\}$ , где действие вещественно, так что вероятность  $W = |\Psi|^2 \equiv 1$ . Значит, каждое отдельное измерение соответствует измерению с вероятностью, равной единице, и не несет за собой никакого изменения волновой функции, которая отвечает заданному действию на траектории<sup>3</sup>. Однако, если ставить вопрос об относительной вероятности наблюдать исходы нескольких измерений, то тогда волновая функция такого ансамбля измерений будет уже отвечать сумме по всем траекториям. Если не различать две эти постановки задачи, то тогда и возникает понятие о «коллапсе волновой функции» ансамбля измерений в волновую функцию единичного измерения. Как видим, понятие об амплитуде вероятности для заданной траектории и об амплитуде вероятности для суммы по траекториям полностью снимает какие-либо противоречия между единичным измерением и измерением в ансамбле.

Важно подчеркнуть, что различные траектории с заданной допустимой энергией из спектра системы, которые возникают за счет флуктуаций сил, например, ограничены условием: допустимы только такие флуктуации, которые не могут вывести траекторию в область значений физических величин, вероятность которых равна нулю! ■

В пределе бесконечно малой квантовой неопределенности, т.е. формально при  $\hbar \rightarrow 0$ , уравнения (4.8) дают классический предел: амплитуда вероятности в точности совпадает с экспонентой от фазы в виде действия классической частицы на экстремальной траектории. Но этот вопрос подробно рассматривается в курсах квантовой механики (см. [2]). Мы же сфокусируем своё внимание на теории скалярного нерелятивистского поля с массой  $m$  без внешних источников, т.е. при

$$H = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta.$$

Уравнение на поле

$$i\hbar\partial_t\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi,$$

может быть получено из вариационного принципа для действия самого поля  $S[\Psi, \Psi^*]$ , т.е. в виде уравнений Эйлера–Лагранжа

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}.$$

В самом деле, запишем действие

$$S[\Psi, \Psi^*] = \frac{1}{c} \int d^4x \Psi^* \left\{ i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right\} \Psi, \quad (4.11)$$

и тогда для поля  $\Psi^*$  найдем

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Psi^*} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^*} = i\hbar\partial_t\Psi + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi,$$

<sup>3</sup>Такое воображаемое изменение волновой функции при единичном измерении называют эпотажным термином «коллапс волновой функции»

и мы приходим к заданному уравнению поля.

Действие (4.11) можно переписать так, чтобы в нем были только производные первого порядка, используя интегрирование по частям:

$$S[\Psi, \Psi^*] = \frac{1}{c} \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\Psi^* i\hbar \partial_t \Psi - i\hbar \Psi \partial_t \Psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \Psi^*) \cdot (\nabla \Psi) \right\}. \quad (4.12)$$

В такой записи при вариации по  $\Psi^*$  воспроизводится то же уравнение для поля  $\Psi$ , а уравнения Эйлера–Лагранжа для поля  $\Psi$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi},$$

дают уравнение для  $\Psi^*$ ,

$$i\hbar \partial_t \Psi^* - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi^* = 0,$$

которое можно, конечно, получить из уравнения движения для  $\Psi$  путем комплексного сопряжения.

#### 24.1. Тензор энергии-импульса

Канонический тензор энергии-импульса поля получается из теоремы Нётер для поля:

$$d_a S = da \cdot \frac{1}{c} \int d^4x \partial_\nu \left\{ \mathcal{L} \frac{\partial x^\nu}{\partial a} + \sum_\Phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \Phi} \left( \frac{\partial \Phi_a}{\partial a} - \frac{\partial x^\lambda}{\partial a} \partial_\lambda \Phi \right) \right\}, \quad (1.28)$$

если считать, что имеются два поля  $\Phi = (\Psi, \Psi^*)$ , и произвести сдвиг в 4-мерном пространстве-времени:

$$x_a^\mu = x^\mu - a^\mu, \quad \frac{\partial x^\lambda}{\partial a^\mu} = -\delta_\mu^\lambda,$$

с учетом, что скалярное поле не меняется при сдвигах:

$$\Phi_a(x_a) = \Phi(x), \quad \frac{\partial \Phi_a}{\partial a^\mu} \equiv 0,$$

так что

$$d_a S = da^\mu \cdot \frac{1}{c} \int d^4x \partial_\nu \left\{ \left( \sum_{\Phi=(\Psi, \Psi^*)} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \Phi} \partial_\mu \Phi \right) - \mathcal{L} \delta_\mu^\nu \right\} = da^\mu \int d^4x \partial_\nu \mathcal{T}_\mu^\nu[\Psi, \Psi^*],$$

откуда тензор энергии-импульса комплексного скалярного нерелятивистского поля

$$\begin{aligned} c\mathcal{T}_\mu^\nu[\Psi, \Psi^*] &= \frac{1}{2} \delta_0^\nu i\hbar c (\Psi^* \partial_\mu \Psi - \Psi \partial_\mu \Psi^*) \\ &\quad - \frac{\hbar^2}{2m} \delta_\alpha^\nu (\nabla_\alpha \Psi^*) (\partial_\mu \Psi) - \frac{\hbar^2}{2m} \delta_\alpha^\nu (\partial_\mu \Psi^*) (\nabla_\alpha \Psi) \\ &\quad - \delta_\mu^\nu \left\{ \frac{1}{2} (\Psi^* i\hbar \partial_t \Psi - i\hbar \Psi \partial_t \Psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \Psi^*) \cdot (\nabla \Psi) \right\}. \end{aligned}$$

Плотность энергии поля —

$$\varepsilon = c\mathcal{T}_0^0 = \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \Psi^*) \cdot (\nabla \Psi),$$

плотность потока энергии поля —

$$S^\alpha = c^2 \mathcal{T}_0^\alpha = -\frac{\hbar^2}{2m} \{ (\nabla_\alpha \Psi^*) (\partial_t \Psi) + (\partial_t \Psi^*) (\nabla_\alpha \Psi) \},$$

плотность импульса поля —

$$P_\alpha = -\mathcal{T}_\alpha^0 = -\frac{i\hbar}{2} (\Psi^* \nabla_\alpha \Psi - \Psi \nabla_\alpha \Psi^*),$$

тензор напряжений

$$c\mathcal{T}_\alpha^\beta = -\frac{\hbar^2}{2m} \{ (\nabla_\alpha \Psi^*) (\nabla_\beta \Psi) + (\nabla_\beta \Psi^*) (\nabla_\alpha \Psi) \} - \delta_\alpha^\beta \left\{ \frac{1}{2} (\Psi^* i\hbar \partial_t \Psi - i\hbar \Psi \partial_t \Psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \Psi^*) \cdot (\nabla \Psi) \right\}$$

является симметричным, и следовательно, он приводит к автоматическому сохранению тензора орбитального момента. Кроме того, давление, например, по оси  $x$

$$p_x = \frac{1}{2} (\Psi^* i \hbar \partial_t \Psi - i \hbar \Psi \partial_t \Psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \Psi^*) \cdot (\nabla \Psi) + \frac{\hbar^2}{m} (\nabla_x \Psi^*) (\nabla_x \Psi).$$

Если в качестве решения уравнения Шрёдингера взять плоскую монохроматическую волну

$$\Psi = \Psi_0 e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})/\hbar}, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad E = \frac{1}{2} m v^2,$$

и отнормировать ее в конечном объеме  $V$

$$\int_V d^3r \Psi^* \Psi = N, \quad |\Psi_0|^2 = \frac{N}{V},$$

то компоненты тензора энергии-импульса примут значения

$$\varepsilon = \frac{mN}{V} \frac{1}{2} v^2, \quad \mathbf{S} = \frac{mN}{V} \frac{1}{2} v^2 \mathbf{v}, \quad \mathbf{P} = \frac{mN}{V} \mathbf{v}, \quad \mathcal{T}_\alpha^\beta = -\frac{mN}{V} v^\beta v_\alpha,$$

откуда видно, что тензор энергии-импульса этого поля в точности совпадает с тензором энергии-импульса нерелятивистских частиц с плотностью массы

$$\rho_{(m)} = m |\Psi_0|^2 = \frac{mN}{V}.$$

Значит,  $N$  — это число частиц в системе.

## 24.2. Глобальная калибровочная инвариантность

Вероятность траектории  $W = |\Psi|^2$  не меняется, если произвести преобразование амплитуды в виде изменения ее комплексной фазы:

$$\Psi_u(t, \mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-i u \frac{e}{\hbar c}} \Psi(t, \mathbf{r}). \quad (4.13)$$

Это калибровочное преобразование называют глобальным, если параметр  $u$  не зависит ни от времени, ни от координат:  $\partial_\mu u \equiv 0$ ,  $\mu = \{0, 3\}$ .

Действие (4.12) инвариантно относительно глобальных калибровочных преобразований, так что по теореме Нётер (1.24) сохраняется ток

$$\frac{1}{c} j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Psi} \frac{\partial \Psi_u}{\partial u} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Psi^*} \frac{\partial \Psi_u^*}{\partial u} \Big|_{u \rightarrow 0}, \quad (4.14)$$

который имеет компоненты

$$j^0 = e c \Psi^* \Psi, \quad \mathbf{j} = -e \frac{i \hbar}{2m} \{ \Psi^* (\nabla \Psi) - \Psi (\nabla \Psi^*) \}. \quad (4.15)$$

Для нормированной в объеме  $V$  монохроматической волны

$$j^0 = e \frac{N}{V} c, \quad \mathbf{j} = e \frac{N}{V} \mathbf{v},$$

что в точности совпадает с электрическим 4-током, если ввести плотность заряда

$$\rho = e |\Psi|^2 = e \frac{N}{V}.$$

Закон сохранения  $\frac{1}{e} \partial_\mu j^\mu = 0$  в виде

$$\partial_t |\Psi|^2 + \text{div } \mathbf{j}_W = 0,$$

называют законом сохранения вероятности с потоком вероятности

$$\mathbf{j}_W = -\frac{i \hbar}{2m} \{ \Psi^* (\nabla \Psi) - \Psi (\nabla \Psi^*) \},$$

поскольку  $|\Psi|^2$  является плотностью вероятности найти частицу в объеме  $V$ , если  $N = 1$ . Заряд полевой конфигурации в общем случае

$$Q = \int d^3r j^0 = e \int d^3r |\Psi|^2.$$



### 24.3. Локальная калибровочная инвариантность и векторный бозон

Если фаза в калибровочном преобразовании (4.13) зависит от времени или координат, то это — локальное преобразование. Действие (4.12) не является калибровочно инвариантным относительно локальных преобразований, так как

$$\partial_\mu \Psi_u = e^{-i u \frac{e}{\hbar c}} \left( \partial_\mu - \frac{ie}{\hbar c} \partial_\mu u \right) \Psi.$$

Значит, частная производная поля становится, как говорят, ковариантной производной<sup>4</sup>

$$\mathcal{D}_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu - \frac{ie}{\hbar c} \mathcal{A}_\mu, \quad (4.16)$$

где 4-векторное поле  $\mathcal{A}_\mu$  называют калибровочным векторным полем или связностью [5], которая зависит от калибровочного параметра  $u$  и преобразуется по закону:

$$\mathcal{A}_\mu^u = \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu u. \quad (4.17)$$

При таком определении

$$\mathcal{D}_\mu^u \Psi_u = e^{-i u \frac{e}{\hbar c}} \mathcal{D}_\mu \Psi,$$

т.е. ковариантная производная преобразуется также, как и поле  $\Psi$ , групповым образом: путем введения множителя комплексной фазы — элемента унитарной однопараметрической группы  $U(1)$ . Отсюда следует, что действие поля, инвариантное относительно глобальных калибровочных преобразований, будет инвариантно и относительно локальных калибровочных преобразований, если в нем частные производные заменить на ковариантные:

$$S[\Psi, \Psi^*, \mathcal{A}_\mu] = \frac{1}{c} \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\Psi^* i \hbar \mathcal{D}_t \Psi - i \hbar \Psi (\mathcal{D}_t \Psi)^*) - \frac{\hbar^2}{2m} (\mathcal{D} \Psi)^* \cdot (\mathcal{D} \Psi) \right\}. \quad (4.18)$$

Это действие можно представить в виде действия свободного поля и действия взаимодействия

$$S[\Psi, \Psi^*, \mathcal{A}_\mu] = S[\Psi, \Psi^*] + S_{\text{int}},$$

где

$$S_{\text{int}} = -\frac{1}{c^2} \int d^4x j^\mu \mathcal{A}_\mu - \frac{e}{2mc^4} \int d^4x j^0 \mathcal{A}^2.$$

Первое слагаемое называют взаимодействием типа «ток-поле», а второе — квадратичный контактный член, который характерен для тензорных полей.

Связность  $\mathcal{A}_\mu$  может быть чистой калибровкой, т.е.  $\mathcal{A}_\mu = \partial_\mu u$ . Тогда с помощью калибровочного преобразования ее можно сделать равной нулю во всех точках пространства-времени. Для определения того, является ли связность тривиальной или нет, необходимо построить тензор

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu,$$

который называют тензором напряженности векторного поля. Если тензор напряженности тождественно обращается в нуль, то связность тривиальна. Если же тензор напряженности не равен нулю, то имеет место взаимодействие заряженного скалярного поля с калибровочным векторным полем  $\mathcal{A}_\mu$ . Это векторное поле может быть внешним, т.е. заданным условием задачи, или динамическим, т.е. само возникать и распространяться вследствие взаимодействия с заряженными источниками. Такая динамическая теория поля — электродинамика [11, 12, 13, 14].

Описанный способ введения взаимодействия с калибровочным полем путем замены частной производной на ковариантную называется минимальным. Неминимальное взаимодействие строится в виде дополнительных, калибровочно инвариантных слагаемых в действии. Например, неминимальным является взаимодействие в виде произведения тензора напряженности поля  $F_{\mu\nu}$  с тензором спина вида  $s_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} s^\gamma$ , оно относится к аномальному магнитному моменту поля.

<sup>4</sup>Напомним, что для амплитуды вероятности траектории  $\Psi = \exp\{iS/\hbar\}$  обобщенный импульс  $p_\mu \Psi = -i\hbar \partial_\mu \Psi$ , так что

$$-i\hbar \mathcal{D}_\mu \Psi = \left( p_\mu - \frac{e}{c} \mathcal{A}_\mu \right) \Psi,$$

а значит,  $-i\hbar \mathcal{D}_\mu$  отвечает кинетическому импульсу  $tu_\mu$ .

#### 24.4. Дискретные симметрии $P$ и $T$

Рассмотрим дискретные преобразования свободного поля.

Преобразование  $t \mapsto t_T = -t$  совместно с преобразованием поля

$$\Psi(t, \mathbf{r}) \mapsto \Psi_T(t_T, \mathbf{r}) = \Psi^*(t, \mathbf{r}) \quad (4.19)$$

сохраняет неизменным действие и приводит к полю, которое удовлетворяет уравнениям движения, а также дает для компонент тензора энергии-импульса

$$\mathcal{T}_0^0 \mapsto \mathcal{T}_0^0, \quad \mathcal{T}_0^\alpha \mapsto -\mathcal{T}_0^\alpha, \quad \mathcal{T}_\alpha^0 \mapsto -\mathcal{T}_\alpha^0, \quad \mathcal{T}_\alpha^\beta \mapsto \mathcal{T}_\alpha^\beta, \quad (4.20)$$

т.е. приводит к движению с той же энергией, но в обратном направлении. При этом,

$$j^0 \mapsto j^0, \quad j^\alpha \mapsto -j^\alpha. \quad (4.21)$$

Это преобразование поля отвечает, таким образом, обращению стрелы времени:  $t \mapsto -t$ .

Преобразование  $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}_P = -\mathbf{r}$  совместно с преобразованием поля

$$\Psi(t, \mathbf{r}) \mapsto \Psi_P(t, \mathbf{r}_P) = \Psi(t, \mathbf{r}) \quad (4.22)$$

сохраняет неизменным действие и приводит к полю, которое удовлетворяет уравнениям движения, а также дает для компонент тензора энергии-импульса

$$\mathcal{T}_0^0 \mapsto \mathcal{T}_0^0, \quad \mathcal{T}_0^\alpha \mapsto -\mathcal{T}_0^\alpha, \quad \mathcal{T}_\alpha^0 \mapsto -\mathcal{T}_\alpha^0, \quad \mathcal{T}_\alpha^\beta \mapsto \mathcal{T}_\alpha^\beta, \quad (4.23)$$

т.е. приводит к движению с той же энергией, но в обратном направлении. При этом,

$$j^0 \mapsto j^0, \quad j^\alpha \mapsto -j^\alpha. \quad (4.24)$$

Это преобразование поля отвечает, таким образом, зеркальной инверсии пространства:  $\mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$ .

## Тема 5

### Симметрии замкнутых орбит

#### Лекция № 10

Сохраняющийся вектор от центра кулоновского потенциала до второго фокуса эллипса финитной орбиты, связь генераторов симметрии со скобками Пуассона физических величин, отвечающих собственным значениям этих генераторов на полях амплитуды вероятности траектории, пример скобок Пуассона для момента импульса, скобки Пуассона вектора Рунге–Ленца–Лапласа и  $SO(4)$  симметрия финитных кулоновских орбит, эволюция изотропного гармонического осциллятора в терминах комплексных векторов в фазовом пространстве, группа  $SU(3)$  как матричная группа инвариантности эволюции трехмерных фазовых векторов, матрицы Гелл-Манна, сохранение полуосей эллипса и тензор второго ранга, разложение тензора на синглет, вектор и квинтет по группе поворотов, разложение тензора на синглет и октет по группе  $SU(3)$ , адиабатический инвариант периодического движения, инвариант для частицы в постоянном магнитном поле, поток магнитного поля в площади замкнутой орбиты, точность сохранения адиабатического инварианта при введении малых поправок, нарушающих периодичность.

К числу систем, обладающих, наряду с физической реалистичностью, дополнительными особыми свойствами, следует отнести движение частиц в потенциалах, для которых *все финитные траектории замкнуты*, а также периодическое или мало отличающееся от периодического движение.

#### 25. Вектор Рунге–Ленца–Лапласа

Для кулоновского потенциала притяжения или в задаче Кеплера движение происходит по эллипсу, в одном из фокусов которого находится центр потенциала. Орбита замкнута, а значит, эллипс сохраняет свое положение со временем. Это свойство является нетривиальным, поскольку оно позволяет воспользоваться свойствами эллипса и построить дополнительный интеграл движения.

В самом деле, используем тот факт, что любой луч, посланный из фокуса эллипса, после зеркального отражения от кривой эллипса пройдет через второй фокус и сумма длин луча от фокуса до кривой эллипса  $r$  до отражения и от кривой до второго фокуса  $r'$  после отражения — это постоянная величина  $r + r' = 2a$ , где  $a$  — длина той полуоси эллипса, на линии которого расположены фокусы (см. §8.1.). Поскольку определяющая линию зеркального отражения касательная к эллипсу в точке траектории параллельна импульсу, разложим радиус-вектор частицы на ортогональную к импульсу часть  $\mathbf{r}_\perp$  и параллельный ему вклад  $\mathbf{r}_\parallel$ :

$$\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{p^2}, \quad \mathbf{r}_\parallel = \mathbf{r} - \mathbf{r}_\perp.$$

После зеркального отражения поперечная часть сменит знак, а продольный вклад не изменится, т.е. мы получим вектор той же длины  $r$

$$\mathbf{r}'' = -\mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel = \mathbf{r} - 2\mathbf{r}_\perp.$$

Значит, согласно упомянутому выше свойству эллипса вектор

$$\mathbf{r}' = \frac{2a - r}{r} (\mathbf{r} - 2\mathbf{r}_\perp)$$

в точности соединяет точку на траектории со вторым фокусом эллипса, и следовательно, вектор

$$\mathbf{r} + \mathbf{r}' = \mathbf{r} \frac{2a}{r} + 2\mathbf{r}_\perp \left(1 - \frac{2a}{r}\right) \quad (5.1)$$

имеет длину  $2a$  и соединяет фокусы эллипса. Безразмерный вектор

$$\mathbf{B} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2a} (\mathbf{r} + \mathbf{r}') = \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\mathbf{r}_\perp}{a} \left(1 - \frac{2a}{r}\right) \quad (5.2)$$

называют вектором Рунге–Ленца–Лапласа. Он сохраняется при движении в поле притяжения кулоновского типа.

Проведем преобразования, заметив, что

$$\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} = \mathbf{p} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2 \mathbf{r} - \mathbf{p} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{p}^2 \mathbf{r}_\perp.$$

Кроме того, в кулоновском поле притяжения с зарядом  $Q = -|Z|e$

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{|Z|e^2}{r} \Rightarrow \mathbf{p}^2 = -2m|E| \left( 1 - \frac{|Z|e^2}{|E|r} \right),$$

так как  $E = -|E| < 0$ , и полуось

$$a = \frac{|Z|e^2}{2|E|}.$$

Отсюда

$$\mathbf{r}_\perp = -\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} \frac{a}{|Z|e^2 m} \left( 1 - \frac{2a}{r} \right)^{-1}.$$

В итоге, сохраняющийся вектор Рунге–Ленца–Лапласа принимает стандартный вид

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} \frac{1}{|Z|e^2 m}. \quad (5.3)$$

### 25.1. Скобки Пуассона и симметрия $SO(4)$

Как было сказано раньше, генераторы группы трансляций  $\hat{\mathbf{k}} = -i\nabla$  и поворотов  $\hat{\mathbf{l}} = -i\mathbf{r} \times \nabla$ , действующие на поля, связаны с импульсом и моментом импульса:

$$\hbar \hat{\mathbf{k}} = -i\hbar \nabla \mapsto \mathbf{p}, \quad \hbar \hat{\mathbf{l}} = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla \mapsto \boldsymbol{\ell},$$

с помощью постоянной Планка с чертой. В частности, действие этих операторов на амплитуду вероятности траектории с заданным импульсом или орбитальным моментом дают как раз значения этих величин:

$$-i\hbar \nabla \Psi_{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \Psi_{\mathbf{p}}, \quad -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla \Psi_{\mathbf{p}} = \boldsymbol{\ell} \Psi_{\mathbf{p}},$$

в силу уравнений Гамильтона–Якоби и связи амплитуды с действием

$$S = -\frac{1}{i\hbar} \ln \Psi.$$

Дирак обратил внимание на то, что скобки Пуассона физических величин  $F, G$  связаны с коммутаторами генераторов  $\hat{f}, \hat{g}$  простым соотношением

$$i\hbar \{F, G\}_{\text{P}} \stackrel{\text{def}}{=} [\hat{F}, \hat{G}], \quad \text{если} \quad \hbar \hat{f} \mapsto F, \quad \hbar \hat{g} \mapsto G. \quad (5.4)$$

В самом деле, добавляя сюда еще и соответствие для координат  $\hat{\mathbf{r}} \mapsto \mathbf{r}$ , найдем, что

$$\{r^\alpha, p_\beta\}_{\text{P}} = \delta_\beta^\alpha, \quad [\hat{r}^\alpha, -i\nabla_\beta] \Psi = i\delta_\beta^\alpha \Psi, \quad \forall \Psi.$$

Для момента импульса скобки Пуассона

$$\begin{aligned} \{\ell_\alpha, \ell_\beta\}_{\text{P}} &= \{\epsilon_{\alpha\mu\nu} r_\mu p_\nu, \epsilon_{\beta\mu'\nu'} r_{\mu'} p_{\nu'}\}_{\text{P}} = \epsilon_{\alpha\mu\nu} \epsilon_{\beta\mu'\nu'} \{r_\mu p_\nu, r_{\mu'} p_{\nu'}\}_{\text{P}} \\ &= \epsilon_{\alpha\mu\nu} \epsilon_{\beta\mu'\nu'} r_{\mu'} \left\{ \frac{\partial r_\mu p_\nu}{\partial r_\gamma} \frac{\partial r_{\mu'} p_{\nu'}}{\partial p_\gamma} - \frac{\partial r_\mu p_\nu}{\partial p_\gamma} \frac{\partial r_{\mu'} p_{\nu'}}{\partial r_\gamma} \right\} \\ &= \epsilon_{\alpha\mu\nu} \epsilon_{\beta\mu'\nu'} \{ \delta_{\mu\gamma} p_\nu r_{\mu'} \delta_{\nu'\gamma} - r_\mu \delta_{\nu\gamma} \delta_{\mu'\gamma} p_{\nu'} \} \\ &= \epsilon_{\alpha\gamma\nu} \epsilon_{\beta\mu'\gamma} p_\nu r_{\mu'} - \epsilon_{\alpha\mu\gamma} \epsilon_{\beta\gamma\nu'} r_\mu \delta_{\nu\gamma} \delta_{\mu'\gamma} p_{\nu'} \\ &= -\delta_{\alpha\beta} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) + r_\alpha p_\beta + \delta_{\alpha\beta} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - r_\beta p_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\gamma\alpha'\beta'} r_{\alpha'} p_{\beta'} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma, \end{aligned} \quad (5.5)$$

что можно сравнить с коммутатором генераторов поворотов на полях

$$[\hat{l}_\alpha, \hat{l}_\beta] = i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{l}_\gamma.$$

Другими словами, вычисляя скобки Пуассона физических величин, мы определяем коммутационные соотношения для генераторов симметрии, связанных с этими наблюдаемыми, на полях амплитуд вероятности траекторий, в то время как коммутаторы генераторов задают группу непрерывных симметрий в системе. С другой стороны, если рассматривать сохраняющиеся величины в качестве генераторов бесконечно малых канонических преобразований, то эти преобразования отвечают симметрии системы (см. раздел 6.5.).

Например, в центрально симметричном потенциале сохраняется момент количества движения  $\ell$ , а скобки Пуассона компонент вектора  $\mathbf{l}$  отвечают коммутаторам группы вращений, т.е. группа генераторов является группой симметрии системы, если наблюдаемые, отвечающие этим генераторам, сохраняются.

Найдем скобки Пуассона для сохраняющихся векторов в кулоновском поле притяжения, т.е. для момента импульса и вектора Рунге–Ленца–Лапласа. Эти скобки будут определять алгебру генераторов группы симметрии этой системы. Вектор Рунге–Ленца–Лапласа перепишем в виде, симметризованном относительно перестановок местами физических величин, скобки Пуассона которых не равны нулю:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{1}{2} (\mathbf{p} \times \ell - \ell \times \mathbf{p}) \frac{1}{|Z|e^2 m}, \quad (5.6)$$

поскольку

$$\{p_\alpha, \ell_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} p_\gamma.$$

Тогда

$$\{\mathcal{B}_\alpha, \ell_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{B}_\gamma, \quad (5.7)$$

так как  $\mathbf{B}$  — вектор, и при поворотах он имеет стандартный коммутатор с генераторами поворотов.

Прямые вычисления устанавливают, что

$$\{\mathcal{B}_\alpha, \mathcal{B}_\beta\}_P = -2\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma \frac{E}{|Z|^2 e^4 m}, \quad (5.8)$$

где

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{|Z|e^2}{r} = \text{const.}$$

в силу закона сохранения энергии. Значит, если ввести векторы

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} \sqrt{ma|Z|e^2}, \quad (5.9)$$

то их скобки Пуассона

$$\{u_\alpha, u_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma, \quad \{u_\alpha, \ell_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} u_\gamma. \quad (5.10)$$

Введем вектора

$$\mathbf{j}^{(\pm)} = \frac{1}{2} (\ell \pm \mathbf{u}),$$

для которых имеют место скобки Пуассона

$$\{j_\alpha^{(+)}, j_\beta^{(+)}\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} j_\gamma^{(+)}, \quad \{j_\alpha^{(-)}, j_\beta^{(-)}\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} j_\gamma^{(-)}, \quad \{j_\alpha^{(+)}, j_\beta^{(-)}\}_P = 0. \quad (5.11)$$

Это означает, что соответствующие им генераторы реализуют алгебру симметрии  $so(3) \oplus so(3)$ .

Покажем, что алгебра генераторов отвечает алгебре группы поворотов 4-мерного евклидова пространства  $SO(4)$ . Для это обратимся к алгебре поворотов в 3-мерном евклидовом пространстве, которую сформулируем в терминах тензора поворотов (см. (4.5) и раздел 23.)

$$l_{\alpha\beta} = r_\alpha p_\beta - r_\beta p_\alpha, \quad l_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma, \quad \{\alpha, \beta, \gamma\} \in \overline{\{1, 3\}}. \quad (4.5)$$

Скобка Пуассона генераторов  $l_{\alpha\beta}$  легко вычисляется

$$\{l_{\alpha\beta}, l_{\alpha'\beta'}\}_P = g_{\alpha\alpha'} l_{\beta\beta'} + g_{\beta\beta'} l_{\alpha\alpha'} - g_{\alpha\beta'} l_{\beta\alpha'} - g_{\beta\alpha'} l_{\alpha\beta}, \quad (5.12)$$

где  $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$  — метрика евклидова пространства в декартовых координатах. Скобки Пуассона в виде (5.12), конечно, абсолютно эквивалентны стандартным скобкам Пуассона орбитального момента  $\ell$  [см. (5.5)]. Теперь легко записать обобщение на случай 4-мерного евклидова пространства:

$$l_{\mu\nu} = r_\mu p_\nu - r_\nu p_\mu, \quad \{\mu, \nu\} \in \overline{\{1, 4\}}, \quad (5.13)$$

с такими же скобками Пуассона:

$$\{l_{\mu\nu}, l_{\mu'\nu'}\}_P = g_{\mu\mu'} l_{\nu\nu'} + g_{\nu\nu'} l_{\mu\mu'} - g_{\mu\nu} l_{\nu\mu'} - g_{\nu\mu'} l_{\mu\nu}. \quad (5.14)$$

Если ввести в трехмерном подпространстве те же величины  $l_{\alpha\beta}$  и  $\ell_\gamma$ , и в дополнение к ним трехмерный вектор  $u_\alpha = l_{\alpha 4}$ , то из (5.14) нетрудно получить скобки Пуассона в виде

$$\{u_\alpha, u_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma, \quad \{\ell_\alpha, u_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} u_\gamma, \quad \{\ell_\alpha, \ell_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma, \quad (5.15)$$

а значит, построенная алгебра генераторов симметрии в задаче о спектре финитных траекторий в кулоновском поле притяжения — это алгебра группы  $SO(4)$ , группы вращений в шести плоскостях 4-мерного евклидова пространства.

При этом, траектории движения реализуют не все представления этой группы, а только те из них, что отвечают  $(\mathbf{j}^{(+)})^2 = (\mathbf{j}^{(-)})^2$ , поскольку движение — плоское, а значит,  $\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{u} = 0$  и  $(\mathbf{l} \pm \mathbf{u})^2 = \mathbf{l}^2 + \mathbf{u}^2$ .

Итак, вырождение финитного движения в кулоновском потенциале в виде замкнутости орбиты отвечает группе симметрии  $SO(4)$ .

## 26. Тензор Фрадкина

### 26.1. Группа $SU(3)$

При рассмотрении изотропного гармонического осциллятора с собственной частотой  $\omega$  удобно ввести комплексные векторы

$$\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} m\omega \mathbf{r} + i\mathbf{p}. \quad (5.16)$$

Уравнения движения для этих векторов с учетом силы  $\mathbf{F} = -\nabla(m\omega^2 \mathbf{r}^2/2)$  принимают вид

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = m\omega \frac{\mathbf{p}}{m} - i m\omega^2 \mathbf{r} = -i\omega \mathbf{A},$$

и легко интегрируются

$$\mathbf{A}(t) = e^{-i\omega t} \mathbf{A}_0. \quad (5.17)$$

При этом гамильтониан записывается в виде

$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{A}, \quad (5.18)$$

откуда сразу видно, что он инвариантен относительно матричной группы преобразований трехмерных комплексных векторов-столбцов, которые сохраняют длину вектора:

$$\mathbf{A}' = U \cdot \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A}')^\dagger \cdot \mathbf{A}' = \mathbf{A}^\dagger U^\dagger \cdot U \mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{A}, \quad (5.19)$$

откуда

$$U^\dagger \cdot U = \mathbb{1}. \quad (5.20)$$

Такие матрицы называются унитарными. Взяв детерминант (5.20), найдем, что

$$(\det U)^* \det U = 1.$$

Среди группы преобразований можно выделить элементарный сдвиг фазы всех компонент вектора  $\mathbf{A}$ , что, согласно (5.17), отвечает просто смене начала отсчета времени, а значит, соответствует сдвигу по времени и закону сохранения энергии. Поэтому, если нас интересует дополнительная симметрия, мы можем исключить изменение этой общей фазы в матрице  $U$ , потребовав

$$\det U = 1. \quad (5.21)$$

Итак, мы имеем симметрию унитарных преобразований трехмерных комплексных векторов со специальным условием единичного детерминанта матрицы, что обозначают символом группы  $SU(3)$ .

Элементы группы  $SU(2)$  при действии в пространстве двумерных спиноров записываются в виде

$$g = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi} \right\},$$

где  $\sigma$  — матрицы Паули, которые являются эрмитовыми и бесследовыми, а  $\phi$  — вещественные параметры группы, углы поворота. Эрмитовость матриц Паули следует из требования унитарности  $g^\dagger \cdot g = \mathbb{1}$ . Бесследовость матриц Паули является следствием специального условия<sup>1</sup>

$$\det g = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \operatorname{tr} \sigma \cdot \phi \right\} = 1.$$

Число параметров группы  $SU(3)$ ,  $u^a$ , в полной аналогии определяется числом эрмитовых, бесследовых матриц  $3 \times 3$ , которое равно 8. Базис таких матриц принято, например, выбирать в виде матриц Гелл-Манна  $\lambda^a$ ,  $a = \{1, 8\}$ , так что

$$U = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \lambda \cdot u \right\},$$

причем

$$\operatorname{tr} \lambda^a \lambda^b = 2\delta^{ab}, \quad (5.23)$$

так же, как у матриц Паули.

В явном виде матрицы Гелл-Манна включают в себя прямые аналоги недиагональных матриц  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  по парам индексов 3-мерного вектора  $A^\alpha$ :

по индексам 1 и 2

$$\lambda_1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

по индексам 1 и 3

$$\lambda_4 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

по индексам 2 и 3

$$\lambda_6 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

а также диагональные матрицы:

аналог  $\sigma_3$  в индексах 1 и 2

$$\lambda_3 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

вместо аналога  $\sigma_3$  в индексах 2 и 3 необходимо ввести диагональную эрмитову матрицу с нулевым следом, которая удовлетворяет условию ортонормированности (5.23), так что единственным решением такой задачи является диагональная матрица

$$\lambda_8 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Как и следовало ожидать, лишь две матрицы являются диагональными, т.е. имеют совместный базис собственных векторов, так что ранг группы  $SU(3)$  равен двум, а значит, старший вектор всякого неприводимого представления характеризуется двумя независимыми числами, которые, стало быть, определяют и два независимых оператора Казимира: однородных полинома по генераторам, эти полиномы коммутируют со всеми генераторами группы. Спектр этих чисел является конечным и дискретным для каждого конечного представления группы, но мы здесь не будем изучать представления этой группы. Отметим лишь, что по аналогии с матрицами спина из недиагональных матриц Гелл-Манна можно построить три повышающих и три эрмитово сопряженных к повышающим понижающих матрицы.

Коммутационные соотношения для генераторов группы  $SU(3)$  можно получить, вычислив структурные константы в выражениях

$$\left[ \frac{1}{2} \lambda^a, \frac{1}{2} \lambda^b \right] = i f^{abc} \frac{1}{2} \lambda^c. \quad (5.24)$$

<sup>1</sup>Напомним, что для обратимых матриц вида  $M = e^A$  имеет место тождество (3.64)

$$\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}, \quad (5.22)$$

где  $\operatorname{tr} A$  означает взятие следа матрицы  $A$ .

Константы  $f^{abc}$  приводятся в справочниках.

Итак, преобразование симметрии изотропного гармонического осциллятора в терминах векторов  $\mathbf{A}$ :

$$A'^\alpha = U^\alpha_\beta A^\beta, \quad U \in SU(3).$$

## 26.2. Дополнительные интегралы движения

Все финитные траектории изотропного гармонического осциллятора замкнуты. Траектория движения — эллипс, но в отличие от кулоновского случая, центр притяжения находится не в фокусе, а в центре эллипса. Это значит, что с помощью радиус-вектора и импульса невозможно построить характерный для эллипса вектор, например, соединяющий фокус с фокусом, так как положение обоих фокусов от центра зеркально симметрично. Этот эллипс можно описать направлениями и длинами его полуосей. Однако, опять же, направления по отношению к центру притяжения можно менять на противоположные, от этого эллипс не изменится. Итак у нас есть пара характерных векторов полуосей на плоскости, ортогональной моменту импульса, но направления этих векторов можно менять на противоположные по отношению к центру. Такая ситуация с возможностью смены направления векторов имеет место, если эти векторы собственные для некоторой матрицы. Поскольку эти собственные векторы должны сохраняться при движении, должна сохраняться и сама матрица. Значит, необходимо построить не сохраняющийся вектор, а сохраняющийся тензор второго ранга.

Это можно легко сделать в терминах векторов  $\mathbf{A}$ :

$$F_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} A_\alpha^* A_\beta$$

является сохраняющимся тензором. След тензора

$$\text{tr } F = F_{\alpha\alpha} = 2mE.$$

Распишем  $F_{\alpha\beta}$ , выделив антисимметричный вклад

$$a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}\{F_{\alpha\beta} - F_{\beta\alpha}\} = i m \omega \{r_\alpha p_\beta - r_\beta p_\alpha\} = i m \omega \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma,$$

и симметричный бесследовый вклад — тензор Фрадкина:

$$s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}\{F_{\alpha\beta} + F_{\beta\alpha}\} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} 2mE = p_\alpha p_\beta + m^2 \omega^2 r_\alpha r_\beta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} 2mE,$$

так что

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} 2mE + a_{\alpha\beta} + s_{\alpha\beta},$$

и мы получили разложение тензора по неприводимым представлениям группы поворотов  $SO(3)$ :

$$SO(3) : \quad 3 \otimes 3 = 1 \oplus 3 \oplus 5,$$

где указаны размерности базиса собственных векторов для каждого неприводимого представления. В этом разложении на неприводимые тензоры синглет отвечает сохраняющейся энергии, триплет — сохраняющемуся вектору момента импульса. Для того чтобы прояснить физический смысл квинтета, найдем собственные значения и собственные векторы симметричного тензора Фрадкина

$$S_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} p_\alpha p_\beta + m^2 \omega^2 r_\alpha r_\beta.$$

Заметим сначала, что поскольку движение плоское

$$S_{\alpha\beta} \ell_\beta = 0,$$

т.е. тензор является поперечным. Выберем направление момента импульса в качестве оси  $z$ :  $\ell \parallel z$ . Тогда тензор Фрадкина вырождается в тензор на плоскости  $(x, y)$ : все его компоненты с индексом  $z$  обращаются в нуль,

$$S_{\alpha\beta} \mapsto \Sigma = \begin{pmatrix} p_x p_x + m^2 \omega^2 x^2 & p_y p_x + m^2 \omega^2 xy \\ p_y p_x + m^2 \omega^2 xy & p_y p_y + m^2 \omega^2 y^2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\det(\Sigma - \lambda) = \lambda^2 - \lambda(\mathbf{p}^2 + m^2 \omega^2 \mathbf{r}^2) + m^2 \omega^2 (x p_y - y p_x)^2 = \lambda^2 - 2mE\lambda + m^2 \omega^2 \ell^2 = 0,$$



собственные значения этой матрицы

$$\lambda_{\pm} = mE \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\omega^2 \ell^2}{E^2}} \right) \Rightarrow \lambda_+ = \frac{\ell^2}{a^2}, \quad \lambda_- = \frac{\ell^2}{b^2},$$

где  $a$  и  $b$  — полуоси эллипса по направлениям  $x$  и  $y$ , соответственно. Тогда собственные векторы можно найти, используя сохранение матрицы  $\Sigma$  по времени. А именно, если выбрать момент времени, когда  $y = 0$ ,  $p_x = 0$ ,  $p_y = p$ ,  $x = a$ ,  $\ell = ap$ , т.е. выбрать эллипс с полуосями по  $x$  и  $y$ , то

$$\Sigma = \begin{pmatrix} m^2 \omega^2 a^2 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\ell^2}{b^2} & 0 \\ 0 & \frac{\ell^2}{a^2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Sigma - \lambda_+ = \begin{pmatrix} \frac{\ell^2}{b^2} - \frac{\ell^2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{\ell^2}{a^2} - \frac{\ell^2}{a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\ell^2}{b^2} - \frac{\ell^2}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а также в силу  $\ell = abm\omega$

$$\Sigma - \lambda_- = \begin{pmatrix} \frac{\ell^2}{b^2} - \frac{\ell^2}{b^2} & 0 \\ 0 & \frac{\ell^2}{a^2} - \frac{\ell^2}{b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ell^2}{a^2} - \frac{\ell^2}{b^2} \end{pmatrix},$$

откуда

$$\mathbf{e}_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В итоге, собственные векторы тензора Фрадкина направлены по полуосям траектории вращения — эллипса, а их собственные значения задают обратные квадраты длин полуосей.

Теперь рассмотрим тензор  $F$  в отношении неприводимых представлений группы  $SU(3)$ . Вектор  $A_\alpha$  реализует 3-мерное неприводимое представление, но, в отличие от группы  $SO(3)$  или  $SU(2)$ , для которых комплексно сопряженные представления эквивалентны:  $(2s+1)^* \cong (2s+1)$ , — в группе  $SU(3)$  комплексно сопряженные представления не всегда эквивалентны исходному, например,  $3^* = \bar{3} \not\cong 3$ , т.е. вектор  $A_\beta^*$  реализует независимое представление. При этом разложение по неприводимым представлениям выглядит следующим образом:

$$SU(3) : \quad \bar{3} \otimes 3 = 1 \oplus 8,$$

т.е. тензор  $F$  раскладывается на синглет и октет относительно преобразований группы  $SU(3)$ . Очевидно, что синглет, т.е. инвариант, пропорционален единичной матрице и это — след тензора, т.е. фактически энергия. Что же касается октета, то его можно представить в виде 8-мерного вектора в пространстве параметров группы:

$$F^a = \frac{1}{4m\omega} \lambda_{\alpha\beta}^a F_{\alpha\beta}. \quad (5.25)$$

Поскольку матрицы Гелл-Манна бесследовые, след тензора  $F$  не дает вклада в вектор  $F^a$ . Введенный вектор имеет размерность момента импульса, т.е. действия.

Вычисление скобок Пуассона дает

$$\{F^a, F^b\}_P = f^{abc} F^c, \quad (5.26)$$

а значит, сохраняющиеся генераторы, соответствующие  $F^a$ , действительно реализуют октетное представление генераторов группы  $SU(3)$ .

Не все представления группы  $SU(3)$  реализуются траекториями движения, поскольку траектория является плоской:  $\ell_\alpha s_{\alpha\beta} \equiv 0$ . Это условие отвечает, как можно показать в теории представлений группы  $SU(3)$ , старшему вектору, одно из квантовых чисел которого в терминах собственных значений двух диагональных генераторов равно нулю.

Итак, вырождение финитного движения изотропного гармонического осциллятора в виде замкнутости орбиты отвечает группе симметрии  $SU(3)$ .

## 27. Квазипериодическое движение в магнитном поле

В однородном магнитном поле движение частицы является периодическим в поперечной плоскости к магнитному полю, так как магнитное поле не совершает работы, а уравнения движения

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}$$

имеют решение в виде  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel$ , где сохраняющаяся продольная компонента скорости  $\mathbf{v}_\parallel = \mathbf{h}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{h})$  направлена вдоль единичного вектора  $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$ , а поперечная компонента  $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel$  получается прямым интегрированием уравнения движения

$$\mathbf{v}_\perp = \omega \mathbf{r}_\perp \times \mathbf{h}, \quad \omega = \frac{eH}{mc}. \quad (5.27)$$

Легко связать радиус орбиты с поперечным импульсом, поскольку период движения

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r_\perp}{v_\perp},$$

так что

$$p_\perp = mv_\perp = \frac{e}{c} H r_\perp. \quad (5.28)$$

В слабонеоднородном поле, например, радиус обращения  $r_\perp$  много меньше характерного расстояния, на котором поле меняется существенно, т.е. на величину, порядка самого поля. Поэтому возникает малый параметр отношения радиуса  $r_\perp$  к длине неоднородности, и траектория может быть рассмотрена сначала в ведущем приближении как периодическая с последующим учетом поправок первого порядка малости. Следовательно, было бы актуально рассмотреть характерные свойства как периодического движения, так и поправок к нему.

### 27.1. Периодическое движение

Рассмотрим периодическое движение механической системы. Пусть  $T$  — период движения, тогда периодичность динамической переменной  $q(t)$  и сопряженного к ней импульса  $p$  означает, что

$$q(t+T) = q(t), \quad p(t+T) = p(t). \quad (5.29)$$

Определим новую переменную, зависящую от параметра  $a$ :

$$q_a(t, a) = q(t + aT).$$

Тогда вариация действия

$$\Delta S = \int_0^1 da \frac{dS}{da} = S(1) - S(0),$$

но в силу периодичности движения (5.29)

$$q_a(t, 0) = q_a(t, 1) = q(t),$$

так что действие при  $a = 1$  и  $a = 0$  вычисляется на одной и той же траектории, и

$$\Delta S \equiv 0.$$

В классической механике согласно теореме Нётер (1.24) дифференциал действия по параметру имеет вид

$$d_a S = da \cdot \int dt \frac{d}{dt} \left( p \frac{\partial q}{\partial a} - H \frac{\partial t}{\partial a} \right),$$

но, поскольку в данном случае время не преобразуется

$$\frac{\partial t_a}{\partial a} = 0,$$

вариация равна

$$\Delta S = \int_0^1 da \frac{d_a S}{da} = \int_0^1 da \int dt \frac{d}{dt} p \frac{\partial q}{\partial a} = \int dt \frac{d}{dt} \int_0^1 p \frac{\partial q}{\partial a} da,$$

в то время как интеграл

$$\mathcal{I} = \int_0^1 p \frac{\partial q}{\partial a} da = \int_0^T p \frac{dq}{d\tau} d\tau, \quad \tau = aT,$$

является интегралом по периоду

$$\mathcal{I} \stackrel{\text{def}}{=} \oint p dq,$$

а нулевое значение изменения действия

$$\Delta S = \int dt \frac{d}{dt} \mathcal{I} = 0$$

означает, что

$$\mathcal{I} = \oint p dq \text{ — инвариант.}$$

Этот инвариант называется *адиабатическим*, так как его сохранение связано с неизменностью фазового объема частицы, определяющего энтропию системы, и коль скоро она сохраняется, то и вариация параметров движения является адиабатической.

В самом деле, рассмотрим случай одномерного движения<sup>2</sup> и введем для переменных фазового объема более привычные обозначения (только в этом разделе!):

$$(p, q) \equiv (x, y),$$

и линейный элемент однопараметрической траектории

$$dC = (dx, dy).$$

Тогда для вектора  $F$  с компонентами

$$F = (F_x, F_y)$$

имеет место теорема Стокса:

$$\oint F dC = \int dx dy \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right), \quad (5.30)$$

где интеграл берется по поверхности, ограниченной замкнутой кривой. В нашем случае, очевидно,

$$F = (F_x, F_y) = (0, p), \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial p} = 1,$$

и

$$\mathcal{I} = \int dp dq,$$

т.е., действительно, инвариант — фазовый объем системы, а его логарифм задает энтропию, и сохранение этого инварианта означает “адиабатичность” процесса.

Вычислим адиабатический инвариант периодического движения частицы в постоянном магнитном поле:

$$\mathcal{I} = \oint \mathcal{P} d\mathbf{r},$$

где  $\mathcal{P}$  — сопряженный к координате импульс, т.е. обобщенный импульс заряженной частицы в поле  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathcal{A},$$

где  $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$  — импульс частицы. Подставляя

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}_\perp dt = \frac{1}{m} \mathbf{p}_\perp dt,$$

<sup>2</sup>Если динамических переменных больше, то решение проблемы формулируется совершенно тем же способом, с той лишь разницей, что можно провести суммирование по всем динамическим переменным и сопряженным к ним импульсам, чтобы получить сумму инвариантов, которая обычно имеет определенный физический смысл. Общий же фазовый объем вычисляется как произведение фазовых объемов, соответствующих каждой динамической переменной.

во-первых, для кинетического вклада с сохраняющимся поперечным импульсом найдем

$$\mathcal{I}_1 = \oint \mathbf{p} d\mathbf{r} = p_{\perp}^2 \frac{T}{m},$$

где период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi mc}{e\mathcal{H}},$$

так что

$$\mathcal{I}_1 = 2\pi \frac{cp_{\perp}^2}{e\mathcal{H}}.$$

Во-вторых, вклад поля

$$\mathcal{I}_2 = \frac{e}{c} \oint \mathcal{A} d\mathbf{r} = \frac{e}{c} \int \text{rot} \mathcal{A} d^2\Sigma,$$

где элемент площади задается площадью треугольника, заматаемого частицей при движении по окружности:

$$d^2\Sigma = \frac{1}{2} \mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{v}_{\perp} dt = -\frac{1}{2} \hbar r_{\perp} v_{\perp} dt,$$

и с учетом

$$\text{rot} \mathcal{A} = \mathcal{H},$$

найдем вклад, обусловленный полем, а именно, *поток магнитного поля через поверхность, ограниченную орбитой частицы,*

$$\mathcal{I}_2 = -\frac{e}{2c} \mathcal{H} r_{\perp} v_{\perp} T,$$

и подставляя

$$r_{\perp} = \frac{cp_{\perp}}{e\mathcal{H}},$$

получаем

$$\mathcal{I}_2 = -\frac{e}{2c} \mathcal{H} \frac{cp_{\perp}}{e\mathcal{H}} \frac{p_{\perp}}{m} \frac{2\pi mc}{e\mathcal{H}} = -\pi \frac{cp_{\perp}^2}{e\mathcal{H}} = -\frac{1}{2} \mathcal{I}_1.$$

Суммируя,

$$\mathcal{I} = \pi \frac{cp_{\perp}^2}{e\mathcal{H}}.$$

Таким образом, адиабатический инвариант периодического движения частицы в плоскости, перпендикулярной постоянному магнитному полю, определяется комбинацией  $p_{\perp}^2/\mathcal{H}$ .

Заметим, что адиабатический инвариант равен взятому с обратным знаком потоку магнитного поля через площадь внутри описываемой зарядом окружности

$$\mathcal{I} = -\frac{e}{c} \int \mathcal{H} d^2\Sigma,$$

так что усиление поля и, следовательно, потока через единичную площадь приводит, в силу сохранения инварианта, к уменьшению площади круга, т.е. к уменьшению радиуса орбиты.

## 27.2. Теорема Адемолло–Гатто

Рассмотрим вопрос о том, что происходит с адиабатическим инвариантом периодического движения, если эта периодичность слабо нарушается малым возмущением параметров системы. Значение термина «слабо» физически определяется приближением, в котором параметр за время периода движения можно считать постоянным, но он все же существенно изменяется за интервал времени, много больший периода.

Ответом на поставленный вопрос служит теорема Адемолло–Гатто, которая применима не только к адиабатическому инварианту периодического движения, но и, вообще, к инвариантам, построенным при вариации действия по параметру исходной симметрии системы, так что проведенное ниже рассмотрение можно дословно повторить и для упомянутых инвариантов, заменяя термин «периодический» на «инвариантный».

**Теорема Адемолло–Гатто.** Если к исходному действию  $S_0$ , приводящему к периодическому движению и, следовательно, к адиабатическому инварианту  $\mathcal{I}$ , добавлено возмущение с малым параметром  $\lambda$ , так что полное действие

$$S = S_0 + \lambda \int V(q, \dot{q}) dt,$$

то инвариант, по-прежнему, сохраняется с точностью до членов второго порядка малости по  $\lambda$ :

$$\frac{dI}{dt} = \mathcal{O}(\lambda^2).$$

■

*Ход мысли.* В самом деле, разложим решение уравнения с возмущением  $\lambda V$  по малому параметру  $\lambda$  с точностью до членов второго порядка малости:

$$q(t, \lambda) \approx q_0(t) + \lambda \delta \bar{q}_0(t) + \mathcal{O}(\lambda^2),$$

где

$$q_0(t) = q(t, 0), \quad \delta \bar{q}_0(t) = \left. \frac{\partial q(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0},$$

и главный вклад  $q_0(t)$  берется при  $\lambda = 0$ , т.е. он является *периодическим*, в отличие от  $\delta \bar{q}_0(t)$ , который уже может нарушать периодичность. Аналогично можно поступить и с возмущением

$$\lambda V = \lambda V_0 + \mathcal{O}(\lambda^2),$$

так что  $V_0$  зависит только от главного вклада  $q_0(t)$ , т.е. является *периодической* функцией. Вводя, как и в предыдущем разделе, параметр  $a$  на периодической траектории  $q_0$  найдем, что с точностью до членов второго порядка малости действие

$$S = S_0 \Big|_{\lambda=0} + \int \frac{\delta S_0}{\delta q} \Big|_{\lambda=0} \lambda \delta \bar{q}_0 dt + \lambda \int V_0 dt + \mathcal{O}(\lambda^2).$$

Первое слагаемое в точности совпадает с выражением для действия без возмущения, и оно зависит только от *периодических функций*. Второе слагаемое равно нулю в силу уравнений движения при  $\lambda = 0$  (вариационный принцип):

$$\left. \frac{\delta S_0}{\delta q} \right|_{\lambda=0} = 0.$$

Третье слагаемое — также *периодическая функция* по  $a$  с периодом 1. Поэтому с точностью до членов второго порядка малости по  $\lambda$

$$\int_0^1 da \frac{dS}{da} = \mathcal{O}(\lambda^2).$$

Повторяя вывод для адиабатического инварианта, теперь заключаем, что он сохраняется с точностью до членов второго порядка малости возмущения. ■

Из приведенного рассуждения ясно, что при введении возмущения, вообще говоря, и динамическая переменная и сопряженный ей импульс становятся функциями, зависящими от параметра возмущения  $\lambda$ , но построенный из них инвариант — фазовый объем — остается сохраняющейся величиной с точностью до членов второго порядка малости.

В качестве примера, в слабонеоднородном магнитном поле при движении частицы вдоль силовой линии, если эти линии сгущаются и, стало быть, поле увеличивается, сохранение инварианта  $p_\perp^2/\mathcal{H}$  означает, что увеличивается поперечный к полю импульс, а радиус орбиты уменьшается, так как сохраняется поток магнитного поля через площадь круга орбиты. При этом импульс частицы в постоянном по времени магнитном поле сохраняется и, следовательно, наступает момент, когда продольная по полю компонента импульса становится равной нулю: частица не проникает в область сильного поля. Более того, в курсах электродинамики показывается, что частица отражается от области сильного магнитного поля, т.е. меняет направление продольной компоненты импульса в этой точке отражения. Этот эффект называется «манитным зеркалом». Наряду с этим, в слабонеоднородном поле частица испытывает дрейф в направлении, ортогональном как к силовой линии, так и к нормали, направленной к центру кривизны силовой линии.

## Тема 6

### Квазиупругий диполь в поле электромагнитной волны

#### Лекция № 11

Уравнения движения нерелятивистского заряда в поле электромагнитной волны, метод преобразования Фурье для решения дифференциальных уравнений, дельта-функция Дирака и обратное преобразование Фурье, заряженный гармонический осциллятор с затуханием, спектр и интенсивность вынужденных колебаний, функция Грина классического осциллятора, обход полюсов в комплексной плоскости частоты.

#### 28. Квазиупругий диполь

Плоская волна электромагнитных колебаний, падая на покоящийся заряд, вызывает его вынужденные колебания, в результате чего он начинает излучать (см. рис. 6.1).

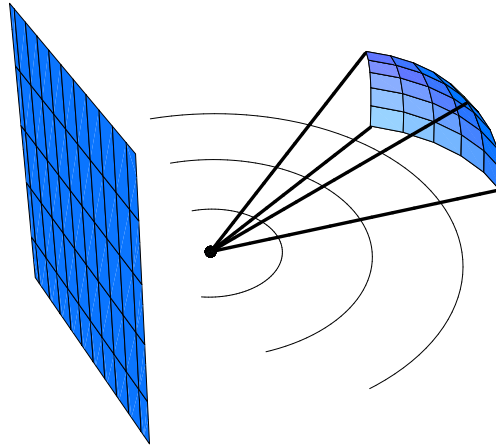


Рис. 6.1: Монохроматическая волна, падающая на мишень, и рассеянная волна из-за вынужденных колебаний зарядов мишени.

Рассмотрим уравнение движения свободного покоящегося заряда под воздействием поля электромагнитной волны

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E}_0 + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0,$$

которое при  $\mathbf{v} \ll c$  сводится к

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_0,$$

так что несмотря на то, что электрическое и магнитное поля в волне одинаковы по модулю, можно пренебречь вкладом магнитного поля и проводить нерелятивистское рассмотрение.

Если заряд закрепить с помощью сил упругости, то в свободном виде он будет совершать колебания с собственной частотой  $\omega_0$ :

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = 0.$$

В самом деле, величина

$$\mathbf{F}_{\text{elastic}} = -m\omega_0^2 \mathbf{r}$$

есть не что иное как сила упругости, пропорциональная смещению.

Если есть диссипация, т.е. сила трения<sup>1</sup>, то скорость частицы будет экспоненциально затухать:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}} = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 e^{-\gamma t},$$

где коэффициент затухания  $\gamma > 0$  имеет размерность обратного времени, т.е. частоты.

В итоге, уравнение движения с учетом силы упругости, силы трения и внешней силы электрического поля примет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathcal{E}_0,$$

что представляет собой уравнение для квазиупругого диполя, если поместить неподвижный заряд  $-e$  в начало координат<sup>2</sup>.

Неоднородное дифференциальное уравнение движения с постоянными коэффициентами при наличии источника просто решается, если использовать метод преобразования Фурье.

### 28.1. Метод преобразования Фурье

Определим Фурье-образ функции  $F(t)$

$$\mathcal{F}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} dt F(t) e^{i\omega t - \alpha^2 t^2}. \quad (6.1)$$

Для сходимости интеграла функция  $F(t)$  не должна расти быстрее, чем

$$e^{+\alpha^2 t^2} \Big|_{\alpha \rightarrow +0} \rightarrow \text{const.}$$

Вычислим Фурье-образ единицы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t - \alpha^2 t^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-\alpha^2 (t - \frac{1}{2}i\omega/\alpha^2)^2 - \frac{1}{4}\omega^2/\alpha^2}.$$

Здесь гауссов интеграл по переменной  $z = t - \frac{1}{2}i\omega/\alpha^2$  может быть вычислен, если сместить контур интегрирования на вещественную ось, что можно сделать, поскольку при смещении пути интегрирования нет пересечений с особенностями и не возникают бесконечные вклады, так что интегралы совпадут, а значит,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-\alpha^2 z^2} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 e^{-\alpha^2 z_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_2 e^{-\alpha^2 z_2^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{+\infty} r dr e^{-\alpha^2 r^2} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где мы перешли к интегрированию на плоскости  $\{z_1, z_2\}$  от декартовых переменных к полярным  $z_1 = r \cos \phi$ ,  $z_2 = r \sin \phi$ , так что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-\alpha^2 z^2} = \left\{ 2\pi \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}.$$

В итоге, Фурье-образ единицы

$$\mathcal{I}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{1}{4}\omega^2/\alpha^2}. \quad (6.2)$$

Это — четная функция от частоты, которая всюду стремится к нулю, кроме точки  $\omega = 0$ , где она стремится к бесконечности. Однако при бесконечно малом  $\alpha \rightarrow +0$  Фурье-образ единицы вполне определен.

Основным свойством Фурье-образа единицы является значение интеграла этого Фурье-образа с функцией от частоты, которая может быть разложена в ряд возле точки  $\omega = 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \mathcal{I}(\omega) f(\omega) &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega) \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{1}{4}\omega^2/\alpha^2} = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \{f(0) + f'(0)\omega + \dots\} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{1}{4}\omega^2/\alpha^2} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(0) e^{-\frac{1}{4}\omega^2/\alpha^2} = f(0) \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \sqrt{4\pi} \alpha = 2\pi f(0). \end{aligned} \quad (6.3)$$

<sup>1</sup>У нас сила трения пропорциональна скорости.

<sup>2</sup>Другими словами  $\mathbf{r}$  — относительное расстояние между зарядами. Однако при этом, мы считаем, что внутри системы движение заряда по-прежнему определяется силой упругости, а сила кулоновского притяжения «компенсируется».

Определим дельта-функцию Дирака через Фурье-образ единицы

$$2\pi \delta(\omega) = \mathcal{I}(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t - \alpha^2 t^2}. \quad (6.4)$$

Мы установили, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \delta(\omega) f(\omega) = f(0), \quad (6.5)$$

для достаточно «хорошей» функции  $f(\omega)$ . В дальнейшем, согласно общей договоренности, принято, что писать всякий раз громоздкое выражение с пределом  $\alpha \rightarrow +0$  в явном виде при использовании дельта-функции Дирака не представляется удобным, но этот предел безусловно необходимо иметь в виду для придания строгости математическому формализму выкладок с символом  $\delta(\omega)$ .

Тогда основная формула метода преобразования Фурье легко доказывается:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \mathcal{F}(\omega) e^{-i\omega t} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathcal{F}(t') e^{i\omega t'} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathcal{F}(t') \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathcal{F}(t') \delta(t-t') = \mathcal{F}(t). \end{aligned}$$

Таким образом, Фурье-образ функции позволяет восстановить саму функцию с помощью обратного преобразования Фурье.

К основным свойствам дельта-функции Дирака относят

- смену масштаба:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x),$$

как следствие четности дельта-функции с учетом элементарной замены переменных в интеграле с дельта-функцией  $dx = \frac{1}{|a|} d(|a|x)$ ,

- вычисление Фурье-образа производной:  $\dot{F}(t) \mapsto -i\omega \mathcal{F}(\omega)$ , — как результата интегрирования по частям (конечные члены на границах интеграла равны нулю из-за наличия  $e^{-\alpha^2 t^2}$ ) или просто из записи производной по времени для обратного преобразования Фурье:

$$\dot{F}(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \mathcal{F}(\omega) e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} (-i\omega) \mathcal{F}(\omega) e^{-i\omega t}.$$

Отсюда следует, что дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами сводятся к алгебре для Фурье-образа этой функции.

В самом деле, применим преобразование Фурье в задаче о квазиупругом диполе в электрическом поле.

$$\mathbf{r}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \mathbf{r}(\omega), \quad \mathbf{r}^*(\omega) = \mathbf{r}(-\omega).$$

Тогда дифференциальное уравнение становится алгебраическим, поскольку

$$\dot{\mathbf{r}}(t) \longrightarrow -i\omega \mathbf{r}(\omega),$$

так что

$$[(-i\omega)^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2] \mathbf{r}(\omega) = \frac{e}{m} \mathcal{E}_0(\omega).$$

Решение

$$\mathbf{r}(\omega) = \frac{e}{m} \mathcal{E}_0(\omega) \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

удовлетворяет условию вещественности. Фурье-образ второй производной по времени дипольного момента равен

$$\ddot{\mathbf{d}}(t) = e \ddot{\mathbf{r}}(t) \longrightarrow \ddot{\mathbf{d}}(\omega) = -\frac{e^2}{m} \mathcal{E}_0(\omega) \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}.$$



## 29. Функция Грина классического осциллятора

Рассмотрим общий метод решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений методом функций Грина на примере осциллятора под воздействием внешней силы в полной аналогии с квазиупругим диполем:

$$(\partial_t^2 + \omega_0^2 + \gamma \partial_t)q(t) = f(t), \quad \gamma \rightarrow +0.$$

Решение представляет собой сумму общего решения однородного уравнения  $q_0(t)$ , свободных колебаний, и частного решения неоднородного уравнения  $\tilde{q}(t)$ , вынужденных колебаний,

$$q(t) = q_0(t) + \tilde{q}(t), \quad (\partial_t^2 + \omega_0^2)q_0(t) = 0,$$

При этом, свобода выбора общего решения однородного уравнения позволяет удовлетворить начальным условиям задачи, ограничив эту свободу наложением подходящих граничных данных в зависимости от определения частного решения неоднородного уравнения.

Используя преобразование Фурье,

$$\mathcal{Q}_0(\omega) = \int dt e^{i\omega t} q_0(t),$$

найдем для свободного решения

$$\mathcal{Q}_0(\omega)(\omega_0^2 - \omega^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Q}_0(\omega) = c_+ 2\pi\delta(\omega - \omega_0) + c_- 2\pi\delta(\omega + \omega_0).$$

Коэффициенты положительно- и отрицательно-частотных мод колебаний  $c_{\pm}$  определяются из граничных условий задачи:

$$q_0(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \mathcal{Q}_0(\omega) = c_+ e^{-i\omega_0 t} + c_- e^{i\omega_0 t}.$$

Аналогично для вынужденных колебаний

$$\tilde{\mathcal{Q}}(\omega) = \frac{\mathcal{F}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}, \quad \gamma \rightarrow +0, \quad (6.6)$$

где  $\mathcal{F}(\omega)$  — Фурье-образ внешней силы  $f(t)$ .

Вычислим в общем виде обратное преобразование Фурье для произведения двух Фурье-образов:

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \mathcal{F}_1(\omega) \mathcal{F}_2(\omega) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int dt_1 e^{i\omega t_1} F_1(t_1) \int dt_2 e^{i\omega t_2} F_2(t_2).$$

Интегрирование по  $\omega$  дает

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} e^{i\omega t_1} e^{i\omega t_2} = \delta(t_1 + t_2 - t),$$

так что интеграл по  $t_1$  приводит к следующему результату:

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \mathcal{F}_1(\omega) \mathcal{F}_2(\omega) = \int dt_2 F_1(t - t_2) F_2(t_2),$$

т.е. обратное преобразование произведения Фурье-образов  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$  дает, как говорят, свертку этих функций.

Отсюда следует, что, согласно (6.6), вынужденное колебание можно представить в виде

$$\tilde{q}(t) = \int dt' \mathcal{G}(t - t') f(t'), \quad (6.7)$$

где функция Грина

$$\mathcal{G}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}, \quad \gamma \rightarrow +0. \quad (6.8)$$

Заметим, что функция Грина — это частное решение уравнения для вынужденных колебаний при  $\mathcal{F}(\omega) \mapsto 1$ , т.е. при  $f(t) \mapsto \delta(t)$ :

$$(\partial_t^2 + \omega_0^2 + \gamma \partial_t) \mathcal{G}(t)(t) = \delta(t), \quad \gamma \rightarrow +0. \quad (6.9)$$

Интеграл в (6.8) легко взять, если разложить дробь

$$\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} = \frac{1}{2\omega_0} \left\{ \frac{1}{\omega_0 - \omega - i0} + \frac{1}{\omega_0 + \omega + i0} \right\}.$$

Тогда интегрирование по частоте вдоль линии от  $-\infty$  до  $+\infty$  можно замкнуть при  $t > 0$  по полуокружности в нижней полуплоскости комплексной переменной  $\omega$  (см. рис. 6.2), поскольку в этой полуплоскости  $\Im \omega < 0$ , а значит, вклад по полуокружности бесконечно мал из-за затухания экспоненты

$$e^{-i\omega t} \mapsto e^{+t\Im \omega} e^{-it\Re \omega} \rightarrow 0, \quad t > 0.$$

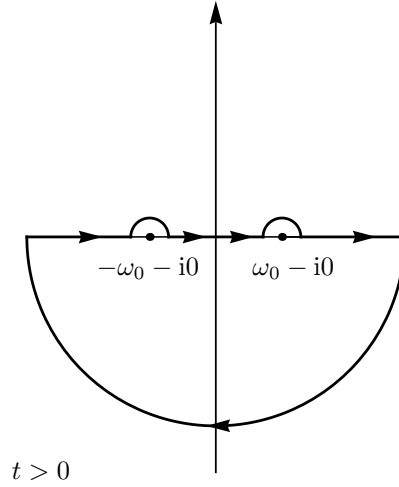


Рис. 6.2: Контур интегрирования по частоте  $\omega$  при положительном времени для вынужденных колебаний с запаздывающими граничными условиями.

При  $t < 0$  контур замыкается в верхней полуплоскости, где нет полюсов подынтегрального выражения, так что по теореме Коши  $\mathcal{G}(t < 0) = 0$ . При положительных интервалах времени та же теорема Коши с учетом интегрирования по часовой стрелке дает

$$\mathcal{G}(t) = -\vartheta(t) \frac{i}{2\omega_0} \{-e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t}\} = \vartheta(t) \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t), \quad (6.10)$$

где  $\vartheta(t)$  — ступенька Хевисайда:

$$\vartheta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ \frac{1}{2}, & t = 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

В самом деле, дифференцирование дает

$$\partial_t \vartheta(t) = \delta(t), \quad \partial_t^2 \vartheta(t) = \delta'(t),$$

где производная четной дельта-функции Дирака дает нечетную функцию, так что вычисление интегралов по частям даёт

$$\int \delta'(t) \sin(\omega_0 t) h(t) dt = - \int \delta(t) \{\sin(\omega_0 t) h'(t) + \omega_0 \cos(\omega_0 t) h(t)\} dt = - \int \delta(t) \omega_0 h(0) dt = - \int \delta(t) \omega_0 h(t) dt,$$

а значит,  $\delta'(t) \sin(\omega_0 t) = -\omega_0 \delta(t)$ , и

$$\partial_t^2 \mathcal{G}(t) = \frac{1}{\omega_0} \{-\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) \vartheta(t) + 2\delta(t) \omega_0 \cos(\omega_0 t) + \delta'(t) \sin(\omega_0 t)\} = -\omega_0^2 \mathcal{G}(t) + \delta(t),$$

как и должно быть для функции Грина.

Выбранный порядок обхода полюсов соответствует определению запаздывающей функции Грина, равной нулю в прошлом. Другие способы обхода полюсов приведут к иным функциям Грина и иным

частным решениям для вынужденных колебаний. Наряду с полученным нами запаздывающим решением вводят причинную функцию Грина<sup>3</sup>, полюса которой расположены в нижней полуплоскости для положительно-частотного решения и в верхней для отрицательно-частотного:

$$\mathcal{G}_c(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i0} = \frac{i}{2\omega_0} e^{-i\omega_0|t|}. \quad (6.11)$$

Тогда разность двух частных решений

$$\tilde{q}(t) - \tilde{q}_c(t) = \int dt' \mathcal{G}(t-t') f(t') - \int dt' \mathcal{G}_c(t-t') f(t'), \quad (6.12)$$

удовлетворяет уравнению для свободных колебаний

$$(\partial_t^2 + \omega_0^2) \{ \tilde{q}(t) - \tilde{q}_c(t) \} = 0,$$

а значит, решения с различными функциями Грина отличаются лишь на решение в виде свободных колебаний, хотя коэффициенты при положительно- и отрицательно-частотных модах могут быть и комплекснозначными. Этот факт несколько не изменит вид решения, удовлетворяющего заданным в задаче граничным условиям: функцию Грина можно выбрать любой, важно подобрать затем подходящее решение свободных колебаний для заданных граничных условий — начальных данных. В квантовой теории поля используют причинную функцию Грина, поскольку она задает вынужденные колебания, инвариантные относительно обращения стрелы времени. В классической теории поля с задачами на излучение, когда в прошлом нет свободных колебаний, более удобно пользоваться запаздывающей функцией Грина, так как тогда дополнительный вклад в решения уравнений движений в виде свободных колебаний тривиален, он равен нулю.

### 30. Ряды Фурье

Из интеграла Фурье можно также прийти к рядам Фурье для периодических функций.

Для начала заметим, что рассмотрение функции на конечном отрезке  $[t_0, t_1]$  можно формально дополнить зеркальным отражением этой функции в точке  $t_1$ , получая уже периодическую функцию на отрезке  $[t_0, t_1 + (t_1 - t_0)]$ . Тогда эту периодическую функцию можно непрерывно продолжить на всю числовую ось, так что, в итоге, достаточно будет рассмотреть эту периодическую функцию на отрезке  $[0, a]$ , где период  $a = 2(t_1 - t_0)$ .

В качестве наводящего соображения рассмотрим следующее свойство фурье-образа функции  $f(x)$  с периодом  $a$ :

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{ikx} = \int_{-\infty}^{+\infty} d(x+a) f(x+a) e^{ik(x+a)} = e^{ika} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{ikx} = e^{ika} \tilde{f}(k).$$

Из соотношения

$$e^{ika} \tilde{f}(k) = \tilde{f}(k)$$

следует, что

$$\begin{aligned} \text{при } ka \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z} &\Rightarrow \tilde{f}(k) = 0, \\ \text{при } \tilde{f}(k) \neq 0 &\Rightarrow ka = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Это значит, что фурье-образ периодической функции весьма сингулярен: он отличен от нуля в счетном числе точек в пространстве дуальной по Фурье переменной  $k$ .

Покажем теперь, что это действительно так и

$$\tilde{f}(k) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{f}_n \delta(ka - 2\pi n)$$

Фурье-образ за счет периодичности сводится к выражению

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{ikx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^a dx f(x) e^{ik(x+na)} = \int_0^a dx f(x) e^{ikx} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (e^{ika})^n.$$

<sup>3</sup>Вычислите самостоятельно.

Обозначим

$$z = e^{ika}.$$

Тогда сумму можно представить как

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (e^{ika})^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} z^{-n} + \left(1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} z^n\right),$$

т.е. в виде двух бесконечных сумм геометрических прогрессий. Для их сходимости введем бесконечно малую добавку, чтобы показатель геометрической прогрессии  $q$  в каждой из сумм был по модулю меньше единицы. Тогда

$$a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \dots = a_0 \frac{1}{1 - q}.$$

В первом случае

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} [z(1 + \epsilon)]^{-n} = [z(1 + \epsilon)]^{-1} \frac{1}{1 - [z(1 + \epsilon)]^{-1}} = \frac{1}{z(1 + \epsilon) - 1},$$

а во втором

$$1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} [z(1 - \epsilon)]^n = \frac{1}{1 - z(1 - \epsilon)}.$$

Оба вклада имеют сингулярность при  $z = 1$ . Тогда подставляя определение  $z = \cos ka + i \sin ka$  и  $ka = 2\pi n + \xi$  при  $\xi \rightarrow 0$  получим цепочку пределов

$$\frac{1}{z(1 + \epsilon) - 1} = \frac{1}{\cos ka - 1 + i \sin ka + \epsilon(\cos ka + i \sin ka)} = \frac{1}{i\xi + \epsilon} = -\frac{i}{\xi - i\epsilon} = -i \left( \text{PV} \frac{1}{\xi} + i\pi \delta(\xi) \right),$$

где мы использовали формулу Сохотского

$$\frac{1}{\xi \pm i0} = \text{PV} \frac{1}{\xi} \mp i\pi \delta(\xi). \quad (6.13)$$

Аналогично

$$-\frac{1}{z(1 - \epsilon) - 1} = -\frac{1}{i\xi - \epsilon} = \frac{i}{\xi + i\epsilon} = i \left( \text{PV} \frac{1}{\xi} - i\pi \delta(\xi) \right),$$

В итоге, вклады в виде главного значения сокращаются, и остается

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (e^{ika})^n = 2\pi \delta(\xi) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(ka - 2\pi n),$$

так что

$$\tilde{f}(k) = \int_0^a dx f(x) e^{ikx} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (e^{ika})^n = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(ka - 2\pi n) \int_0^a dx f(x) e^{i2\pi n x/a}.$$

Обратное преобразование Фурье дает искомую функцию в виде ряда

$$f(x) = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k) e^{-ikx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-i2\pi n x/a} f_n,$$

где

$$f_n = \frac{1}{a} \int_0^a dx f(x) e^{i2\pi n x/a}.$$

В случае вещественной функции,  $f^* = f$ , возникают упрощения:

$$\Re f_n = \frac{1}{a} \int_0^a dx f(x) \cos(2\pi n x/a), \quad \Im f_n = \frac{1}{a} \int_0^a dx f(x) \sin(2\pi n x/a),$$

и

$$f(x) = f_0 + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} (\Re f_n \cos(2\pi n x/a) + \Im f_n \sin(2\pi n x/a)).$$

## Приложение

### Элементарные основы теории вероятностей:

#### ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И СРЕДНИЕ ОТКЛОНЕНИЯ

#### Предисловие к Приложению

*Общаясь с человеком, мы получаем его самого,  
а не только те формулы, которые возникают у него  
на лекции, на семинаре или в докладе.*

Данное Приложение ставит себе целью ввести элементарные понятия теории вероятностей, на которых в физике базируется как эксперимент, так и теория, а также численное сравнение в эмпирике, и служит в качестве дополнения к видео-лекциям, что предлагаются в бакалавриате первокурсникам Московского физико-технического института (Национального исследовательского университета) в рамках ознакомительного курса по обработке данных лабораторных работ по общей физике.

План изложения очень прост. Сначала рассматривается конечная выборка случайного события и устанавливаются свойства распределения вероятности повторения этого события в выборке — биномиальное распределение. Для конечной выборки вводятся понятие среднего, а также линейного и квадратичного отклонения от среднего, что позволяет определить не только дисперсию, но и многоточечные корреляторы случайной величины. Затем в случае фиксированного среднего значения числа повторений случайного события в выборке выводится распределение Пуассона для дискретной величины. Эта случайная дискретная величина меняется от нуля до бесконечности и равна числу повторений события в выборке при числе событий, стремящемся к бесконечности. При этом замкнутость изложения требует введения числа  $e$  как замечательного предела, экспоненты, натурального логарифма и ряда Тейлора как предела в схеме итераций для вычисления приближенного значения функции с помощью формулы Ньютона–Лейбница для интеграла от производной функции.

Наконец, путем линейного преобразования числа событий в выборке в случайную величину с нулевым средним и единичной дисперсией выводится нормальное распределение. Для этого приходится найти выражение для факториала в пределе бесконечно растущего числа — формулу Стирлинга, что требует детального описания вычисления асимптотики интеграла методом сведения его к гауссову возле экстремума подынтегральной функции — методом перевала. Эти упражнения вполне поучительны для первокурсников, как полагает автор.

В итоге, становится понятным и естественным использование элементарных терминов теории вероятностей, таких, как распределение случайной величины по Гауссу, среднее, дисперсия, и прочих терминов при введении в курс обработки данных лабораторных работ.

Автор признателен студентам Физтеха, благодаря которым были исправлены ошибки и опечатки в тексте, а также изменены некоторые формулировки и подходы к изложению материала пособия.

Прошу читателей направлять свои замечания и отзывы об этих лекциях по адресу  
kiselev.vv@phystech.edu  
с пометкой «EProb».

## Лекция П.1

Определение вероятности и понятие случайной величины, конечная выборка, биномиальное распределение вероятности числа событий в выборке, определение средней величины при заданном распределении вероятности, линейное и квадратичное отклонение от среднего, дисперсия, многоточечные корреляторы, вычисление среднего и дисперсии случайной величины для биномиального распределения, вывод распределения Пуассона, «золотой предел», экспонента и натуральный логарифм, ряд Тейлора, дисперсия случайной дискретной величины.

### 31. Случайная величина

#### 31.1. Событие и выборка: биномиальное распределение

Вероятность есть математическая мера, определяющая существование возможного как долю событий, которые происходят от случая к случаю при бесконечном повторении попыток зарегистрировать заданные события. Многократное повторение попыток называют конечной выборкой с числом повторений  $N$ , а число заданных событий  $n$  в конечной выборке  $N$  называют случайной величиной. В литературе по физике выборку часто именуют ансамблем. Ясно, что невозможное событие происходит с вероятностью  $p$ , равной нулю,  $p = 0$ , а событие, которое происходит всякий раз в любой попытке, имеет вероятность, равную единице,  $p = 1$ . В общем же случае, вероятность события лежит на отрезке от нуля до единицы,

$$0 \leq p \leq 1. \quad (\text{П.1})$$

Итак, пусть событие по имени  $A$  имеет вероятность  $p$ . Обычно вводят также вероятность того, что событие по имени  $A$  не произошло  $q = 1 - p$ . Рассмотрим конечную выборку  $N$  и вычислим, сколько раз можно зарегистрировать событие  $A$  в этой конечной выборке. Вероятность того, что событие произошло в каждой попытке

$$w_N = p^N.$$

Вероятность того, что событие не произошло в каждой попытке

$$w_0 = q^N.$$

Вероятность того, что событие произошло ровно  $n$  раз очевидно означает и то, что оно не произошло ровно  $N - n$  раз, при этом число вариантов регистрации события можно легко сосчитать, так как нам неважно, каким по счету произошло событие, первым, последним или в каком порядке среди попыток оно происходило, и аналогично для вариантов, когда событие не происходило в попытке. Значит, с использованием перестановок найдем, что в общем числе перестановок попыток  $N!$  есть  $n!$  вариантов с событием и  $(N - n)!$  вариантов без события<sup>1</sup>, так что искомая вероятность равна

$$w_n = \frac{N!}{n!(N - n)!} p^n q^{N-n} = C_N^n p^n q^{N-n}. \quad (\text{П.2})$$

Если найти сумму вероятностей того, что в выборке событие появилось любое число раз, то мы ожидаем, что эта сумма отвечает доле событий, в которых произошло все, что возможно, и она равна единице,

$$\sum_{n=0}^N w_n = \sum_{n=0}^N C_N^n p^n q^{N-n} = (p + q)^N = (p + (1 - p))^N = 1^N \equiv 1. \quad (\text{П.3})$$

Таким образом, определенная нами случайная величина  $n$  в конечной выборке  $N$  имеет распределение вероятности (П.2), которое называется биномиальным по факту разложения единицы в бином Ньютона

$$1^N = (p + q)^N = \sum_{n=0}^N w_n.$$

На рис. А.1 мы показали пример биномиального распределения.

<sup>1</sup>Для полноты описания мы принимаем  $0! = 1$ .

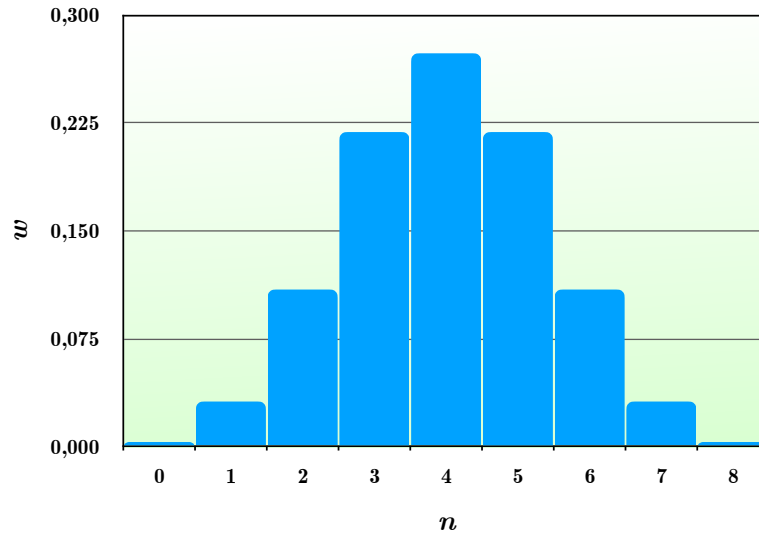


Рис. А.1: Биномиальное распределение вероятности наблюдать событие  $n$  раз для выборки  $N = 8$  при вероятности события  $p = 0.5$ .

### 32. Усреднение

Среднее значение случайной величины определяется через подсчет того, как часто появляется событие с определенным  $n$ , т.е. как

$$\langle n \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^N n w_n. \quad (\text{П.4})$$

Для величины  $n$  с биномиальным распределением вероятности проведем расчет, где мы сначала заметим, что  $n = 0$  дает нулевой вклад в среднее, и перейдем к суммированию от  $n = 1$ , затем введем обозначение  $n' = n - 1$ , так что

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \sum_{n=0}^N n \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} = \sum_{n=0}^N \frac{n}{n!} \frac{N!}{(N-n)!} p^n q^{N-n} = p \sum_{n=1}^N \frac{N!}{(n-1)!(N-n)!} p^{n-1} q^{N-n} = \\ &= p \sum_{n=1}^N \frac{N(N-1)!}{(n-1)!((N-1)-(n-1))!} p^{n-1} q^{(N-1)-(n-1)} = \\ &= pN \sum_{n'=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{(n')!((N-1)-n')!} p^{n'} q^{(N-1)-n'} = pN(p+q)^{N-1} = pN. \end{aligned}$$

В итоге,

$$\langle n \rangle = pN. \quad (\text{П.5})$$

Подчеркнем, что данное нами определение вероятности теперь находит свое подтверждение, так как расчетная доля событий  $A$  в выборке  $N$  в среднем равна вероятности события, в том числе, когда число событий в выборке стремиться к бесконечности, т.е. при  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{\langle n \rangle}{N} = p.$$

Можно определить новую случайную величину  $\delta n_1$  как число отклонений числа событий в выборке от среднего числа событий, т.е. линейное отклонение от среднего

$$\delta n_1 = n - \langle n \rangle, \quad -\langle n \rangle \leq \delta n_1 \leq N - \langle n \rangle. \quad (\text{П.6})$$

Среднее линейного отклонения равно нулю,

$$\langle \delta n_1 \rangle = \sum_{n=0}^N \delta n_1 w_n = \sum_{n=0}^N n w_n - \langle n \rangle \sum_{n=0}^N w_n = \langle n \rangle - \langle n \rangle = 0.$$

По аналогии с отклонением от среднего рассматривают одноточечный коррелятор — отклонение случайной величины от точки  $n_1$ ,

$$\langle n - n_1 \rangle = \langle n \rangle - n_1. \quad (\text{П.7})$$

По той же схеме вводят двухточечный коррелятор

$$D_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \langle (n - n_1)(n - n_2) \rangle = \langle (n^2 - n(n_1 + n_2) + n_1 n_2) \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle(n_1 + n_2) + n_1 n_2. \quad (\text{П.8})$$

В частности, при  $n_1 = n_2 = \langle n \rangle$  двухточечный коррелятор — это среднеквадратичное отклонение от среднего значения, которое называют дисперсией случайной величины

$$D(n) \stackrel{\text{def}}{=} \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2, \quad (\text{П.9})$$

и часто обозначают как

$$\sigma^2 = (\delta n)^2 = D(n). \quad (\text{П.10})$$

Вычислим дисперсию для случайной величины с биномиальным распределением. Для среднего значения квадрата сначала заметим, что  $n = 0$  дает нулевой вклад в среднее, и перейдем к суммированию от  $n = 1$ , затем введем обозначение  $n' = n - 2$  и найдем

$$\begin{aligned} \langle n^2 \rangle &= \sum_{n=0}^N n^2 \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} = \sum_{n=1}^N (n-1+1) \frac{N!}{(n-1)!(N-n)!} p^n q^{N-n} = \\ &= \sum_{n=2}^N \frac{N!}{(n-2)!(N-n)!} p^n q^{N-n} + \sum_{n=1}^N \frac{N!}{(n-1)!(N-n)!} p^n q^{N-n} = \\ &= p^2 N(N-1) \left( \sum_{n'=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{(n')!((N-2)-n')!} p^{n'} q^{(N-2)-n'} \right) + Np = \\ &= p^2 N^2 + Np(1-p) = \langle n \rangle^2 + Npq. \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

Значит, дисперсия случайной величины с биномиальным распределением согласно определению (П.9) и расчету среднего квадрата числа событий (П.11) равна

$$\sigma^2 = Npq. \quad (\text{П.12})$$

Для полноты изложения дадим определение  $k$ -точечного коррелятора

$$D_{1\dots k} \stackrel{\text{def}}{=} \langle (n - n_1) \cdots (n - n_k) \rangle. \quad (\text{П.13})$$

### 33. Распределение Пуассона

Зафиксируем среднее значение  $\langle n \rangle$  случайной величины  $n$  и устремим число попыток в бесконечность,  $N \rightarrow \infty$ . Тогда область изменения случайной величины  $0 \leq n \leq N$  станет равной

$$0 \leq n \leq +\infty,$$

а вероятность найти ровно  $n$  событий во всех попытках при подстановке  $p = \langle n \rangle / N$  примет значение

$$\begin{aligned} w_n(\langle n \rangle) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \Big|_{p=\frac{\langle n \rangle}{N}} = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{(N-n)!} \frac{1}{N^n} \left(1 - \frac{\langle n \rangle}{N}\right)^{N-n} = \\ &= \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(N-1) \cdots (N-n+1)}{N^n} \right\} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\langle n \rangle}{N}\right)^{-n} \right\} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\langle n \rangle}{N}\right)^N \right\} = \\ &= \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdots \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) \right\} \cdot 1 \cdot \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\langle n \rangle}{N}\right)^N \right\} = \\ &= \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \cdot 1 \cdots 1 \cdot \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\langle n \rangle}{N}\right)^N \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$



Следовательно, для вычисления вероятности события  $w_n(\langle n \rangle)$  в бесконечной выборке необходимо вычислить «золотой предел»

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\langle n \rangle}{N}\right)^N = e^{-\langle n \rangle}, \quad (\text{П.15})$$

т.е. фактически ввести основание степени  $e$ .

### §а. Экспонента и натуральный логарифм

Рассмотрим последовательность

$$a_N = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = \frac{9}{4}, \quad a_3 = \frac{64}{27}, \dots \quad (\text{П.16})$$

и вычислим ее предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_N.$$

Для этого покажем сначала, что члены последовательности монотонно растут, а потом, что последовательность ограничена сверху, а значит, предел последовательности существует.

Воспользуемся биномом Ньютона и запишем

$$a_N = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = \sum_{n=0}^N C_N^n \left(\frac{1}{N}\right)^n = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} \frac{1}{N^n}.$$

Поскольку первые три члена последовательности (П.16), известные в явном виде, монотонно растут рассмотрим  $N \geq 3$  и выделим последний член в бинOME,

$$\begin{aligned} a_N &= 1 + 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n!} \frac{N(N-1) \cdots (N-n+1)}{N^n} = \\ &= 1 + 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) = \\ &= 1 + 1 + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) + \frac{1}{N^N}. \end{aligned} \quad (\text{П.17})$$

Но поскольку при замене знаменателя положительной дроби  $N$  на  $N-1$  дробь увеличивается,

$$\left(1 - \frac{1}{N}\right) > \left(1 - \frac{1}{N-1}\right), \quad \dots \quad \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) > \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right),$$

то из (П.17) заключаем, что

$$a_N = 2 + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) + \frac{1}{N^N} > 2 + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{N-1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right).$$

А так как

$$a_{N-1} = 2 + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{N-1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right),$$

находим

$$a_N > a_{N-1}, \quad (\text{П.18})$$

и последовательность действительно монотонно возрастает.

При  $n \geq 1$

$$n! \geq 2^{n-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}},$$

и тогда из выражения (П.17) находим

$$a_N = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) < 1 + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} < 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}. \quad (\text{П.19})$$

Сумма членов геометрической прогрессии с показателем  $0 < q < 1$

$$b_n = b_0 q^n, \quad n \geq 0, \quad S_N = \sum_{n=0}^N b_n,$$

равна

$$S_N = b_0 \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q},$$

откуда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - (\frac{1}{2})^{N+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - (\frac{1}{2})^{N+1}\right) = 2,$$

Из (П.19) следует, что последовательность ограничена сверху

$$a_N < 3. \quad (\text{П.20})$$

Поэтому монотонно растущая последовательность, ограниченная сверху, сходится и имеет предел<sup>2</sup>, который обозначают числом  $e$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = e. \quad (\text{П.21})$$

Выведем теперь простейшие свойства.

Предел<sup>3</sup>

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^{\frac{N}{x}}\right)^x = \left(\lim_{M \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{M}\right)^M\right)^x = e^x. \quad (\text{П.22})$$

Производная

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^x &= \frac{d}{dx} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} \left(1 + \frac{x}{N}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{N}\right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^{N-1} \cdot N \cdot \frac{d}{dx} \left(1 + \frac{x}{N}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^{N-1} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{x}{N}\right)^N\right)^{1 - \frac{1}{N}} = e^x. \end{aligned} \quad (\text{П.23})$$

Мы установили, что производная экспоненты равна самой экспоненте!

Обратная функция называется натуральным логарифмом

$$\ln x : e^{\ln x} = x. \quad (\text{П.24})$$

Поэтому

$$a = e^{\ln a},$$

и показательная функция

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Итак, мы провели вычисления «золотого предела»

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\langle n \rangle}{N}\right)^N = e^{-\langle n \rangle}, \quad (\text{П.15})$$

что позволяет нам продолжить рассмотрение для вероятности наблюдать  $n$  событий для случайной дискретной величины с заданным средним значением (П.14). Эти вероятности образуют распределение Пуассона,

$$w_n(\langle n \rangle) = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}. \quad (\text{П.25})$$

Для того, чтобы убедиться в том, что и сумма предельных значений  $w_n$  при  $N \rightarrow \infty$  равна единице также, как для конечной выборки, необходимо вычислить сумму бесконечного ряда, что легко сделать, если использовать знание ряда Тейлора для экспоненты.

На рис. А.2 мы показали 2 примера распределения по Пуассону.

<sup>2</sup>Критерий Вейерштрасса: у ограниченного сверху множества  $A = \{a_N\}$  есть супремум, т.е. точная верхняя грань  $a = \sup(A)$ , такая что  $\forall a_N \in A, a_N \leq a$  и  $\forall \epsilon > 0 \exists a_k \in A: a_k > a - \epsilon$ . Для ограниченной сверху монотонно растущей последовательности супремум равен пределу.

<sup>3</sup>Любое конечное вещественное число можно ограничить сверху и снизу рациональными числами, а для рациональных чисел предел вычисляется с помощью элементарных замен переменных.

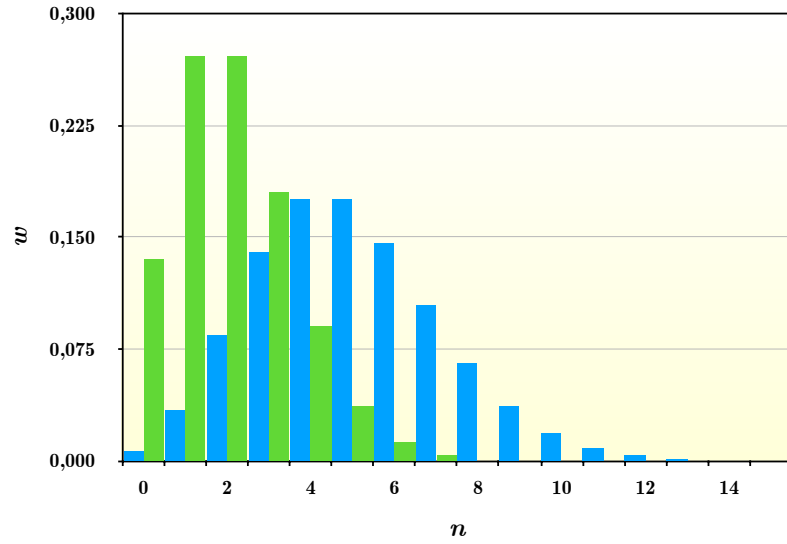


Рис. А.2: Пуассоновское распределение вероятности наблюдать событие  $n$  раз при среднем  $\langle n \rangle = 5$  (синяя гистограмма) и  $\langle n \rangle = 2$  (зеленая гистограмма).

### §b. Ряд Тейлора

Запишем формулу Ньютона–Лейбница<sup>4</sup>

$$\int_a^x d\tilde{x} \frac{df(\tilde{x})}{d\tilde{x}} = f(x) - f(a), \quad (\text{П.26})$$

или, опуская знак тильды под интегралом, в виде

$$f(x) = f(a) + \int_a^x dx \frac{df(x)}{dx}. \quad (\text{П.27})$$

Связь (П.27) в случае, когда  $x \rightarrow a$ , рассмотрим как схему последовательных итераций для вычисления приближенного значения функции. На нулевом шаге итераций

$$f(x) \approx f_{(0)}(x) = f(a).$$

На первом шаге учтем, что производная функции  $f'(x) \approx f'(a)$ , так что из формулы Ньютона–Лейбница

$$f(x) \approx f_{(1)}(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

<sup>4</sup>Напомним, что по определению производной функции в пределе при  $dx \rightarrow 0$

$$f(x + dx) - f(x) = \frac{df(x)}{dx} dx.$$

Разобьем отрезок  $[a; x]$  точками  $x_k$  так, чтобы  $x_1 = a$ ,  $x_N = x$ , с интервалами  $dx_k = x_{k+1} - x_k$ , и составим сумму

$$\sum_{k=1}^{N-1} \{f(x_k + dx_k) - f(x_k)\} = f(x) - f(a),$$

а затем рассмотрим предел при  $N \rightarrow \infty$ ,  $dx_k \rightarrow 0$ . Тогда в левой части формулы для суммы воспользуемся определением производной

$$f(x_k + dx_k) - f(x_k) = \frac{df(x_k)}{dx} dx_k,$$

и получим выражение

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ dx_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{df(x_k)}{dx} dx_k = \int_a^x d\tilde{x} \frac{df(\tilde{x})}{d\tilde{x}}$$

в точном соответствии с определением определенного интеграла в формулировке Римана. В итоге, рассматриваемая сумма дает формулу Ньютона–Лейбница.

На втором шаге итерации используем формулу Ньютона–Лейбница для производной функции

$$f'(x) = f'(a) + \int_a^x dx f''(x)$$

и учтем, что  $f''(x) \approx f''(a)$ , так что

$$f'(x) \approx f'(a) + f''(a)(x - a),$$

откуда, подставляя в формулу Ньютона–Лейбница (П.27) для функции  $f(x)$ , получим приближенное значение на втором шаге итерационной процедуры

$$f(x) \approx f_{(2)}(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x - a)^2.$$

Ясно, что на  $n$ -том шаге итерации необходимо использовать цепочку

$$f^{(n)}(x) \approx f^{(n)}(a), \quad f^{(n-1)}(x) \approx f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)(x - a), \dots$$

В итоге, приближенная оценка для значения функции для  $n$ -той итерации

$$f(x) \approx f_{(n)}(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) (x - a)^k.$$

В математике последовательность из  $n$ -тых итерации значения функции  $f_{(n)}(x)$  рассматривается на предмет сходимости. В случае, когда последовательность сходится в некоторой области возле  $a$ , говорят о разложении функции в ряд Тейлора в этой области сходимости,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (x - a)^n. \quad (\text{П.28})$$

В качестве примера запишем очевидное разложение экспоненты в ряд Тейлора возле  $a = 0$ ,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad (\text{П.29})$$

так как вычисление производных функции  $f(x) = e^x$  дает

$$f^{(1)}(x) = \frac{d}{dx} e^x = e^x, \quad f^{(n)}(x) = e^x,$$

а  $f(0) = e^x|_{x=0} = 1$ .

Для натурального логарифма  $f(x) = \ln x$  как обратной функции экспоненты  $e^{\ln x} = x$  вычисление производной приводит к

$$\frac{d}{dx} e^{f(x)} = \frac{d}{dx} x \Rightarrow e^{f(x)} \frac{d}{dx} f(x) = 1 \Rightarrow x \frac{d}{dx} \ln x = 1,$$

а значит,

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}, \quad f^{(1)}(x) = \frac{1}{x}.$$

Откуда дальнейшее дифференцирование дает

$$f^{(2)} = -\frac{1}{x^2}, \quad f^{(3)} = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(4)} = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}, \quad \dots, \quad f^{(n+1)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Поэтому разложение натурального логарифма в ряд Тейлора возле точки  $a = 1$ , где  $\ln 1 = 0$ , записывается в виде

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} (x - 1)^n,$$

что обычно приводят в несколько иной форме

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n. \quad (\text{П.30})$$

В частности, для первых двух вкладов

$$\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2} x^2 + \dots \quad (\text{П.31})$$

### §с. Дисперсия по Пуассону

Суммирование распределения вероятностей по Пуассону благодаря знанию ряда Тейлора для экспоненты (П.29) элементарно дает

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(\langle n \rangle) = e^{-\langle n \rangle} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle n \rangle^n}{n!} = e^{-\langle n \rangle} e^{\langle n \rangle} = 1. \quad (\text{П.32})$$

Убедимся теперь, что и среднее значение

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} n w_n(\langle n \rangle) = e^{-\langle n \rangle} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\langle n \rangle^n}{n!} = e^{-\langle n \rangle} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle n \rangle^n}{(n-1)!} = \\ &= e^{-\langle n \rangle} \langle n \rangle \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{\langle n \rangle^{n'}}{(n')!} = \langle n \rangle e^{-\langle n \rangle} e^{\langle n \rangle} = \langle n \rangle. \end{aligned}$$

Наконец, для расчета дисперсии найдем

$$\begin{aligned} \langle n^2 \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 w_n(\langle n \rangle) = e^{-\langle n \rangle} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{\langle n \rangle^n}{n!} = e^{-\langle n \rangle} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1+1)\langle n \rangle^n}{(n-1)!} = \\ &= e^{-\langle n \rangle} (\langle n \rangle^2 + \langle n \rangle) \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{\langle n \rangle^{n'}}{(n')!} = \langle n \rangle^2 + \langle n \rangle. \quad (\text{П.33}) \end{aligned}$$

Значит, дисперсия равна

$$\sigma^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle n \rangle, \quad (\text{П.34})$$

т.е. среднеквадратичное отклонение от среднего значение задается

$$\sigma = \sqrt{\langle n \rangle}. \quad (\text{П.35})$$

На рис. А.2 можно визуальнo оценить разность дисперсий в распределении Пуассона при двух значениях среднего.

Распределение по Пуассону встречается в физике, например, как распределение вероятности наблюдать в случайном процессе  $n$  квантов, если известно что система характеризуется заданным средним числом квантов. Распределением Пуассона описываются когерентные состояния гармонического осциллятора и когерентные состояния квантованного электромагнитного поля — лучи лазера. В эксперименте случайные флуктуации числа отсчетов события прибором также распределены по Пуассону.

Подчеркнем, что распределение Пуассона имеет одну независимую характеристику — среднее значение событий, а все остальные полиномиальные отклонения от среднего выражаются через это среднее, как дисперсия, например. Эта особенность распределения Пуассона с одной стороны является универсальной, так как описывает вероятности для случайной дискретной величины. Но не все величины являются дискретными, например, случайная величина может быть вещественной на интервале от  $-\infty$  до  $+\infty$ , так что для неё существует другое универсальное распределение — нормальное распределение по Гауссу. Распределение по Гауссу имеет две независимых характеристики — среднее и дисперсию, а остальные выражаются через них. Рассмотрим этот вопрос более детально.

## Лекция П.2

Переход от дискретной случайной величины к непрерывной, условие нулевого среднего и единичной дисперсии, вывод асимптотической формулы Стирлинга для факториала бесконечно большого числа, интегральное представление факториала и гамма-функция, метод экстремальной точки для вычисления асимптотики интеграла, гауссов интеграл в полярных координатах, предел нормального распределения, вероятности отклонения от среднего на 1-, 2- и 3-сигма, критерий в 5-сигма, распределение случайной величины по Гауссу.

### 34. Непрерывная случайная величина

Определим случайную величину

$$x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n - \langle n \rangle}{\sigma}, \quad \langle n \rangle = Np, \quad \sigma^2 = Npq, \quad (\text{П.36})$$

так что при биномиальном распределении для  $n$  величина  $x$  по построению имеет среднее, равное нулю, и дисперсию, равную единице:  $\langle x \rangle = 0$ ,  $\sigma^2(x) = 1$ . Область изменения  $x$  при конечной выборке —

$$-p \cdot \sqrt{\frac{N}{pq}} \leq x \leq q \cdot \sqrt{\frac{N}{pq}}. \quad (\text{П.37})$$

Шаг между соседними значениями для случайной величины  $n$ , равный  $\Delta n = 1$ , преобразуется в шаг между соседними величинами  $x$

$$\Delta x = \frac{\Delta n}{\sqrt{Npq}},$$

так что в пределе бесконечной выборки  $N \rightarrow \infty$  получается бесконечно малый интервал

$$dx = \frac{1}{\sqrt{Npq}} \rightarrow 0. \quad (\text{П.38})$$

Рассмотрим теперь предел  $N \rightarrow \infty$  для вероятности

$$dw = w_n \Delta n = w(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}, \quad (\text{П.39})$$

откуда плотность вероятности случайной величины  $w(x) = dw/dx$  —

$$w(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \sqrt{Npq}, \quad (\text{П.40})$$

где по построению

$$n = Np + x\sqrt{Npq}, \quad N - n = N(1 - p) - x\sqrt{Npq} = Nq - x\sqrt{Npq}. \quad (\text{П.41})$$

Поэтому для вычисления плотности вероятности случайной величины  $x$ , необходимо получить формулу для факториала при асимптотически больших значениях аргумента.

### §а. Формула Стирлинга

Интегральное представление для факториала

$$N! = \int_0^\infty e^{-t} t^N dt \quad (\text{П.42})$$

выводится путем многократного интегрирования по частям, а именно, на первом шаге

$$\int_0^\infty e^{-t} t^N dt = - \int_0^\infty t^N de^{-t} = - \int_0^\infty d(e^{-t} t^N) + N \int_0^\infty e^{-t} t^{N-1} dt = N \int_0^\infty e^{-t} t^{N-1} dt,$$

так что на последнем  $(N-1)$ -ом шаге остается интеграл

$$N(N-1) \cdots 2 \cdot 1 \int_0^\infty e^{-t} dt = N!.$$

Если  $N$  принимает не только натуральные значения, то интеграл определяет гамма-функцию

$$\Gamma(N+1) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-t} t^N dt. \quad (\text{П.43})$$

В частности  $\Gamma(1) = 0! = 1$ . Важное свойство —

$$\Gamma(N+1) = N \cdot \Gamma(N). \quad (\text{П.44})$$

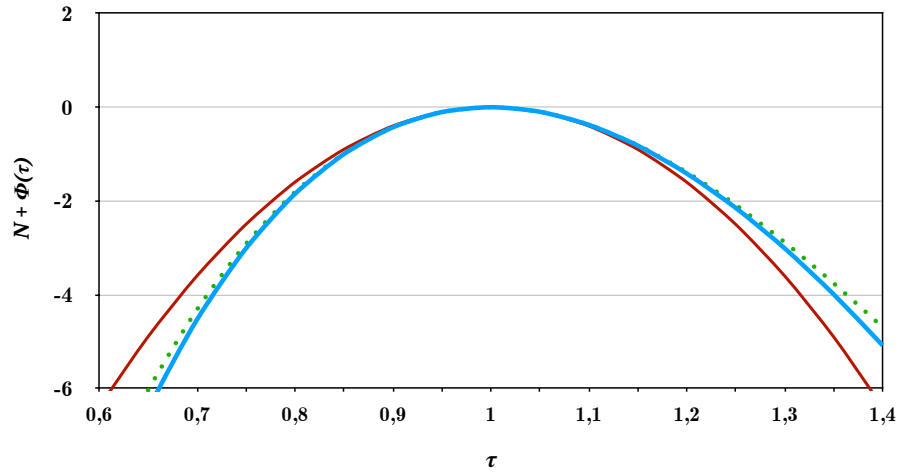


Рис. А.3: График функции  $N + \Phi(\tau)$  при  $N = 80$  (голубая линия) и ее аппроксимации — до второго порядка (красная линия) и кубического (зеленый пунктир).

Теперь в интеграле (П.42) произведем замену переменной интегрирования

$$t = \tau N,$$

а значит,

$$N! = \int_0^{\infty} e^{-t+N \ln t} dt = \int_0^{\infty} e^{-N\tau+N \ln N+N \ln \tau} N d\tau = N \cdot N^N \int_0^{\infty} e^{-N\tau+N \ln \tau} d\tau = N \cdot N^N \int_0^{\infty} e^{\Phi(\tau)} d\tau,$$

где показатель экспоненты  $\Phi(\tau)$  имеет вид

$$\Phi(\tau) = -N\tau + N \ln \tau,$$

так что

$$\Phi' = -N + \frac{N}{\tau}, \quad \Phi'' = -\frac{N}{\tau^2}, \quad \Phi''' = +\frac{2N}{\tau^3}.$$

Первая производная показывает, что при  $\tau = 1$  функция  $\Phi(\tau)$  имеет экстремум, а так как вторая производная всюду отрицательна, этот экстремум — глобальный максимум. Более того, при  $\tau > 1$  функция  $\Phi(\tau)$  монотонно убывает, а при  $0 < \tau < 1$  она монотонно растет. Поэтому разложение в ряд Тейлора до членов второго порядка малости возле точки экстремума  $\tau = 1$ , где  $\Phi'(1) = 0$ , дает

$$\Phi \approx -N - \frac{1}{2!} N(\tau - 1)^2,$$

и, следовательно, подынтегральная функция ведет себя весьма специфичеки

$$e^{\Phi(\tau)} \approx e^{-N} e^{-\frac{1}{2!} N(\tau-1)^2},$$

а значит, при  $N \rightarrow \infty$  аргумент второй экспоненты — это гигантское отрицательное число, стоит только удалиться от экстремальной точки на бесконечно малое расстояние  $(\tau - 1)^2 \sim N^{-3/4} \rightarrow 0$ , например. Поэтому мы можем без ущерба точности вычисления положить нижний предел равным  $-\infty$  вместо 0 и пренебречь вкладами от третьей производной возле точки экстремума,

$$e^{\frac{1}{3!} 2N(\tau-1)^3} \approx 1.$$

Для иллюстрации мы показали поведение функции  $N + \Phi(\tau)$  при  $N = 80$  на рис. А.3, где видно, что область вблизи экстремума при конечном значении  $N$  довольно точно аппроксимируется квадратичным вкладом. Следовательно,

$$N! \approx N \cdot N^N e^{-N} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}N(\tau-1)^2} d\tau.$$

Гауссов интеграл вычисляется следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}N\tau^2} d\tau = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}N\tau^2} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}N\bar{\tau}^2} d\bar{\tau} \right)^{1/2}.$$

На плоскости  $(\tau, \bar{\tau})$  можно перейти от интегрирования в декартовых координатах к интегрированию в полярных координатах,

$$r^2 = \tau^2 + \bar{\tau}^2, \quad \tau = r \cos \phi, \quad \bar{\tau} = r \sin \phi,$$

так что<sup>5</sup>

$$d\tau d\bar{\tau} = \frac{1}{2} d\phi dr^2.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}N\tau^2} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}N\bar{\tau}^2} d\bar{\tau} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \frac{1}{2} dr^2 e^{-\frac{1}{2}Nr^2} = 2\pi \int_0^{\infty} d\left(\frac{1}{2}Nr^2\right) e^{-\frac{1}{2}Nr^2} \frac{1}{N} = \frac{2\pi}{N}.$$

В итоге получаем формулу Стирлинга для факториала больших чисел

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} e^{N \ln N - N}. \quad (\text{П.45})$$

## §b. Нормальное распределение

В пределе  $N \rightarrow \infty$  границы изменения случайной величины (П.37) определяют область

$$-\infty \leq x \leq +\infty. \quad (\text{П.46})$$

Для вычисления предела

$$w(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \sqrt{Npq} \quad (\text{П.40})$$

представим

$$p^n q^{N-n} = e^{n \ln p + (N-n) \ln q} \quad (\text{П.47})$$

и воспользуемся формулой Стирлинга для факториалов (П.45)

$$\begin{aligned} \frac{N!}{n!(N-n)!} \sqrt{Npq} &\approx \frac{\sqrt{Npq} \sqrt{2\pi N}}{\sqrt{2\pi n} \sqrt{2\pi(N-n)}} \exp\{N \ln N - N - n \ln n + n - (N-n) \ln(N-n) + N-n\} \approx \\ &\approx \frac{\sqrt{Npq} \sqrt{2\pi N}}{\sqrt{2\pi N p} \sqrt{2\pi N q}} \exp\{N \ln N - n \ln n - (N-n) \ln(N-n)\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{N \ln N - n \ln n - (N-n) \ln(N-n)\}, \quad (\text{П.48}) \end{aligned}$$

где под корнем мы уже учли, что

$$n = Np + x\sqrt{Npq} \rightarrow Np, \quad N-n = Nq - x\sqrt{Npq} \rightarrow Nq. \quad (\text{П.41}).$$

Собирая вклады (П.47) и (П.48) для аргумента экспоненты, в пределе  $N \rightarrow \infty$  найдем

$$\begin{aligned} n \ln p + (N-n) \ln q + N \ln N - n \ln n - (N-n) \ln(N-n) &= \\ &= \left(Np + x\sqrt{Npq}\right) \ln p + \left(Nq - x\sqrt{Npq}\right) \ln q + N \ln N - \\ &- \left(Np + x\sqrt{Npq}\right) \ln \left(Np + x\sqrt{Npq}\right) - \left(Nq - x\sqrt{Npq}\right) \ln \left(Nq - x\sqrt{Npq}\right) = \\ &= -\left(Np + x\sqrt{Npq}\right) \ln \left(1 + x \frac{\sqrt{Npq}}{Np}\right) - \left(Nq - x\sqrt{Npq}\right) \ln \left(1 - x \frac{\sqrt{Npq}}{Nq}\right). \quad (\text{П.49}) \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Элемент площади в полярных координатах — это площадь сектора круга, ограниченного дугой  $r d\phi$  и изменением радиуса от  $r$  до  $r + dr$ .



Далее необходимо воспользоваться разложением в ряд Тейлора логарифмической функции вплоть до второго порядка малости [см. (П.31)]

$$\ln(1+y) \approx y - \frac{1}{2}y^2.$$

Тогда (П.49) сведется к виду

$$\begin{aligned} - \left( Np + x\sqrt{Npq} \right) \left( x \frac{\sqrt{Npq}}{Np} - \frac{1}{2}x^2 \frac{q}{Np} \right) - \left( Nq - x\sqrt{Npq} \right) \left( -x \frac{\sqrt{Npq}}{Nq} - \frac{1}{2}x^2 \frac{p}{Nq} \right) \approx \\ \approx x \left( -\sqrt{Npq} + \sqrt{Npq} \right) - x^2 \left( q + p - \frac{1}{2}(q+p) \right) = -\frac{1}{2}x^2. \end{aligned} \quad (\text{П.50})$$

Это простое выражение (П.50) остается в аргументе экспоненты при вычислении предела  $N \rightarrow \infty$  в (П.40) и (П.48). В итоге, мы получили так называемое нормальное распределение случайной величины — плотность вероятности

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}. \quad (\text{П.51})$$

Читатель, уже знакомый с вычислением гауссова интеграла, может легко сам убедиться, что нормальное распределение отнормировано на единицу,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x) dx = 1.$$

Полезно знать численные значения вероятностей того, что случайная величина находится в пределах одного среднеквадратичного отклонения от среднего значения с вероятностью «один сигма»

$$\int_{-1}^{+1} w(x) dx \approx 0.682, \quad (\text{П.52})$$

«два сигма» —

$$\int_{-2}^{+2} w(x) dx \approx 0.954, \quad (\text{П.53})$$

«три сигма» —

$$\int_{-3}^{+3} w(x) dx \approx 0.997. \quad (\text{П.54})$$

Случайная величина находится за пределами 5-сигма с вероятностью  $5.7 \cdot 10^{-7}$ . В физике отклонение величины за пределы 5-сигма принято считать порогом точного утверждения о том, что величина не описывается априорной моделью с гауссовым распределением. Говорят, что 5-сигма — критерий общепризнанного открытия, например. Величина в 5-сигма была принята из эмпирического опыта: даже утверждения, которые были установлены с точностью 3-сигма или реже с точностью 4-сигма, при росте объема новых статистических данных иногда оказывались неверными, а точность в 5-сигма оказалась устойчивой к росту статистики.

Ясно, что переход от случайной величины  $x$  с нормальным распределением к случайной величине  $y$  со средним  $\langle y \rangle$ , которое может быть отличным от нуля, и среднеквадратичным отклонением  $\sigma$ , которое может быть отлично от единицы, описывается заменой

$$x = \frac{y - \langle y \rangle}{\sigma}, \quad dx = \frac{1}{\sigma} dy. \quad (\text{П.55})$$

Тогда плотность вероятности имеет вид

$$w(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{(y - \langle y \rangle)^2}{\sigma^2} \right). \quad (\text{П.56})$$

Итак, распределение по Гауссу действительно описывается с помощью двух независимых параметров. Трехточечные и четырехточечные корреляторы, а также все остальные высшие корреляторы определенным образом выражаются через среднее и дисперсию. Это указывает на способ экспериментального

определения того, является ли распределение гауссовым: необходимо определить среднее и дисперсию, а затем измерять многоточечные корреляторы и сравнивать их отклонения от реперных величин, рассчитанных по закону Гаусса по эмпирически измеренным значениям среднего и дисперсии. Статистически значимые отклонения будут сигнализировать, что эмпирически измеряемая величина распределена не по Гауссу.

На этом изложение элементарных основ теории вероятностей заканчивается, а теория с условными вероятностями, ковариациями и прочими содержательными вопросами представлена в курсах высшей математики [15].

## Литература

- [1] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *“Механика”*. «Наука»: Москва, 1988.
- [2] В.В. Киселев. *“Квантовая механика. Курс лекций”*. МЦНМО: Москва, 2009.
- [3] В.И. Арнольд. *“Математические методы классической механики”*. УРСС: Москва, 2003.
- [4] Б.Л. ван дер Варден. *“Алгебра”*. «Наука»: Москва, 1979.
- [5] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. *“Современная геометрия”*. «Наука»: Москва, 1986.
- [6] Ю.М. Белоусов, С.Н. Бурмистров, А.И. Тернов. *“Задачи по теоретической физике”*. «Интеллект»: Долгопрудный, 2013.
- [7] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *“Теория поля”*. «Наука»: Москва, 1976.
- [8] Дж. Джексон. *“Классическая электродинамика”*. «Мир»: Москва, 1965.
- [9] В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин. *“Современная электродинамика. Часть 1. Микроскопическая теория”*. 2-е издание, исправленное. НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”: Ижевск, 2005.
- [10] В.В. Киселев. *“Релятивистская динамика и теория поля. Курс лекций”*, 2013, интернет - ресурс: <https://drive.google.com/file/d/11r6oZdncD1gl1SWDySyYAP4YCbh4Yl7C/view?usp=sharing>
- [11] А.А. Соколов, И.М. Тернов, В.Ч. Жуковский, А.В. Борисов. *“Квантовая электродинамика”*. «Изд-во МГУ»: Москва, 1983.
- [12] А.А. Соколов, И.М. Тернов, В.Ч. Жуковский, А.В. Борисов. *“Калибровочные поля”*. «Изд-во МГУ»: Москва, 1986.
- [13] В.А. Рубаков. *“Классические калибровочные поля: Бозонные теории”*. «КомКнига»: Москва, 2005.
- [14] В.А. Рубаков. *“Классические калибровочные поля: Теории с фермионами. Некоммутативные теории”*. «КомКнига»: Москва, 2005.
- [15] Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: ВШ, 2005.