

В.В.Киселев, Д.Л.Осипов

Генераторы симметрии, алгебры Ли и квантовая динамика

ASPIRA AD OPTIMUM

ББК В314
ISBN

Киселев В.В., Осипов Д.Л. Генераторы симметрии, алгебры Ли и квантовая динамика.
(Учебное пособие). — XXX, 20XX. — 184 с., библиогр.: 12.

Излагаются вопросы классификации простых компактных алгебр Ли по Дынкину с использованием языка и терминологии квантовой механики при введении генераторов бесконечно малых непрерывных преобразований квантовых состояний. Подробно рассмотрены алгебры $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{su}(3)$. После построения общего формализма для неприводимых конечномерных представлений со старшим вектором состояния дано конструктивное описание мультиплетов базисных состояний векторных пространств неприводимых представлений алгебр $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{su}(3)$, а также применение теории представлений для описания симметрий ароматов кварков и модели великого объединения с группой $SU(5)$.

Рассмотрено построение схем Юнга для разложения тензорного произведения неприводимых представлений группы $SU(3)$ в прямую сумму по мультиплетам неприводимых представлений этой группы. Детально изложено квантование спектров связанных состояний в кулоновском поле притяжения и трехмерного изотропного осциллятора с описанием пространств квантовых состояний в представлениях групп симметрий этих физических систем.

Групповые построения применяются для решения задачи о сумме двух моментов количества движения, которая рассматривается в рамках разложения тензорного произведения в прямую сумму неприводимых представлений и схем Юнга группы $SU(2)$. Показано, как составная кварковая модель адронов предсказывает магнитные моменты протона и нейтрона в хорошем согласии с экспериментом, чего не скажешь о представлении протонов и нейронов в качестве точечных частиц, описываемых уравнением Дирака.

Пособие рассчитано на изучающих теоретическую физику студентов младших, старших курсов и аспирантов физических специальностей университетов, а также на преподавателей и научных работников.

Рецензент —

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ГЛАВА 1. КОММУТАТОР И АЛГЕБРА ЛИ	5
§1. Группа Ли и ее алгебра	5
§2. Представление группы Ли и генераторы	15
2.1. Присоединенное представление	16
2.2. Метрика Киллинга и критерий Картана	19
2.3. Операторы Казимира	25
§3. Базис Картана–Вейля	29
3.1. Ранг алгебры Ли и веса базиса собственных состояний	29
3.2. Веса и система корней алгебры Ли	34
3.3. Корневое дополнение генераторов подалгебры Картана	36
3.4. Набор генераторов Картана–Вейля	41
§4. Корневые векторы и диаграммы Дынкина	45
4.1. Экспоненциальное представление и глобальная структура группы	46
4.2. Ранг группы и число простых положительных корней	47
4.3. Последовательности корней и дискретный спектр скалярных произведений корней	50
4.4. Соотношения Серра	54
4.5. Связные диаграммы	55
§5. Классификация простых компактных алгебр Ли	62
ГЛАВА 2. АЛГЕБРЫ ЛИ И НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ	65
§1. Алгебры $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{su}(3)$	65
1.1. $\mathfrak{su}(2)$	65
1.2. Масштаб и конформный фактор	67
1.3. $\mathfrak{su}(3)$	67
1.4. Физическая традиция для генераторов $\mathfrak{su}(3)$	71
§2. Неприводимые представления	75
2.1. Допустимые значения старшего веса и фундаментальные представления	79
2.2. Представление как тензорное произведение фундаментальных представлений	81
2.3. Операция отражения	82
2.4. Веса присоединенного представления	87
§3. Представления $\mathfrak{su}(2)$	92
3.1. Фундаментальное представление	92
3.2. Матрицы Паули	94
3.3. Представление с моментом j	94
3.4. Изотопическая инвариантность (спектроскопия)	96
3.5. Слабый изоспин	99
§4. Представления $\mathfrak{su}(3)$	102
4.1. Фундаментальные представления	102
4.2. Сильные взаимодействия夸арков	105
4.3. Матрицы Гелл-Манна	108
4.4. Представления $T^{(p_1, p_2)}$	114
4.5. Симметрия ароматов夸арков	122
4.6. Тензорный метод и схемы Юнга	129
§5. Генераторы, токи, составные состояния и калибровочная гипотеза	143
5.1. Взаимодействия как преобразования состояний	144
5.2. Великое объединение $SU(5)$, векторные лептокварки и распад протона	145
ГЛАВА 3. СИММЕТРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОРБИТ	148
§1. Симметрия в атоме водорода	148
1.1. Вектор Рунге–Ленца–Лапласа	148
1.2. Скобки Пуассона и симметрия $SO(4)$	150
1.3. Представления алгебры $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ и уровни атома водорода	152
§2. Изотропный гармонический осциллятор в 3D	155
2.1. Комплексная амплитуда колебаний и группа $SU(3)$	155

2.2. Тензор Фрадкина	157
2.3. Представления $\mathfrak{su}(3)$ для 3D-осциллятора	159
4. МАГНИТНЫЕ МОМЕНТЫ БАРИОНОВ В СОСТАВНОЙ КВАРКОВОЙ МОДЕЛИ	162
§1. Тензорное произведение двух неприводимых представлений группы поворотов	162
1.1. Сложение двух моментов количества движения	162
1.2. Неприводимые тензорные операторы и теорема Вигнера–Эккарта	166
§2. Магнитные моменты системы трех夸克ов	168
2.1. Спиновая функция барионов в основном состоянии	168
2.2. Магнитные дипольные моменты протона, нейтрона и странных гиперонов	168
ПРИЛОЖЕНИЕ.	171
§1. Квантовые понятия и обозначения	171
1.1. Наблюдаемые и состояния	171
1.2. Эрмитово сопряжение состояний и операторов наблюдаемых	173
1.3. Коммутатор и совместный базис собственных состояний наблюдаемых	175
1.4. Среднее значение, дисперсия и критерий вырождения	177
1.5. Каноническое квантование	179
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	180
ЛИТЕРАТУРА	184

Предисловие

Материал данного учебного пособия представляет собой вариант конспекта лекций, предлагаемых авторами в бакалавриате студентам младших курсов Московского физико-технического института (Национального исследовательского университета) в весенном семестре в качестве дополнительной дисциплины, которую они могут включить в свой индивидуальный учебный план в виде полусеместрового модуля. Пререквизитом к этому спецкурсу подразумевается читаемый осенью семестровый курс по теоретической физике, в котором излагаются единые основы механики частиц и полей в фейнмановской формулировке. Именно в этом курсе осеннего семестра студенты изучают научные основы как классической, так и квантовой механики в формализме действия для элементарных систем, допускающих полное описание своей динамики, и сталкиваются с современным языком исследования симметрий такими инструментами как векторный анализ, дифференциальная геометрия в криволинейных координатах и теория непрерывных групп для нерелятивистских частиц и полей со спином. Но тогда же встает задача системного знания по вопросам использования в физике языка теории представлений простых компактных алгебр Ли. Эту задачу решает данная книга.

Попытки ввести в начале этого пособия повторение материала, связанного с введением в физику понятий групп Ли в связи с трансляциями и поворотами в евклидовом пространстве, квантованием спина нерелятивистского поля и описания векторного поля спина 1 и спиноров со спином $s = 1/2$ показали, что краткое резюме полугодового курса–пререквизита (см. пособие [1]) не оправдывает вложенных усилий и не является эффективным: слишком много понятий и операций с ними было изложено в осеннем семестре первого курса. Поэтому было решено исключить это повторение, отсылая читателя–новичка непосредственно к источнику «Нерелятивистская механика частиц и полей: векторный анализ и симметрии» и стартовать непосредственно с изложения основ групп и алгебр Ли.

Мы излагаем классификацию простых компактных групп Ли по Дынкину с использованием языка квантовой механики для полного набора наблюдаемых в гильбертовом пространстве и связи этих терминов со стандартными математическими обозначениями. Детально рассматриваются алгебры $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{su}(3)$. После этого излагается теория неприводимых представлений простых компактных алгебр Ли и описываются представления $\mathfrak{su}(2)$ с применением к изотопической инвариантности при классификации адронов, а потом и представления $\mathfrak{su}(3)$ с примером симметрии ароматов夸克ов. В этом случае мы выводим также свойства схем Юнга для вычисления разложения тензорного произведения представлений в прямую сумму неприводимых представлений. А затем демонстрируем применение теории представлений для классификации фермионов первого поколения Стандартной модели калибровочных взаимодействий по мультиплетам фундаментальных представлений группы Великого объединения $SU(5)$ с обоснованием распада протона.

Далее в качестве иллюстрации мощи синтеза механики и теории представлений мы устанавливаем симметрии финитного движения частицы в кулоновском поле притяжения и в поле трехмерного гармонического осциллятора и проводим квантование спектра, а также выводим его свойства в отношении типа неприводимых представлений алгебры Ли для этих систем и набора допустимых значений орбитального момента при заданном неприводимом представлении. Для решения этих вопросов нет надобности решать уравнение Шрёдингера, коль скоро мы не ставим задачу описания волновых функций: вполне достаточно использовать теорию представлений, применяя установленную Дираком связь скобок Пуассона в классической механике с коммутаторами наблюдаемых величин в квантовой механике.

В последней главе рассмотрено описание магнитных моментов протона и нейтрона в рамках простой составной夸克овой модели адронов. Этот вопрос требует комплексных знаний как математического, так и физического характера. Мы проводим параллель между задачей разложения тензорного произведения на прямую сумму неприводимых представлений группы поворотов с полуцелыми значениями момента количества движения $SU(2)$ и задачей сложения моментов двух подсистем с использованием схем Юнга. Определяем коэффициенты Клебша–Гордона и вычисляем их в простых случаях, которые имеют прямое отношение к спиновому состоянию трех夸克ов в барионе. Затем предсказания составной夸克овой модели для магнитных моментов барионов сравниваются с экспериментом, что убедительно свидетельствует о том, что эти барионы являются составными, а не элементарными, поскольку дираковские значения для магнитных моментов протона и нейтрона оказываются несовместимыми с наблюдаемыми на опыте величинами.

Таким образом, итогом изложения становится готовность студентов приступить к изучению релятивистской теории как частиц в пространстве–времени Минковского, так и полей, базис которых строится в теории представлений алгебры группы Пуанкаре. Более того, есть надежда, что основы этого курса позволят студентам свободно войти в круг вопросов, связанный с математикой алгебр Ли и их представлений в более изощренных случаях, которые актуальны в современной физике, например, алгебра Вирасоро с центральными зарядами, алгебры Каца–Муди и проч.

Авторы выражают признательность своим коллегам и студентам В. Шмидту, Т. Гладыш, А. Бернавич.

Просим читателей направлять свои замечания и отзывы о книге по электронному адресу

kiselev.vv@phystech.edu

с пометкой «Спецкурс LieGen».

Наконец, авторы рекомендуют при чтении этой книги держать в уме простую мысль: стройность идеи выхолащивается, если с самого начала излагать эту идею скрупулезно и безукоризненно точно, так что капризы придирчивого читателя по поводу строгости текста — это верный симптом того, что идея, описанная в книге, понята правильно.

Глава 1

Коммутатор и алгебра Ли

В основе описания физической системы лежит понятие суперпозиции¹ квантовых состояний, составляющих базис векторного пространства этих суперпозиций из набора собственных состояний, на каждом из которых наблюдаемые величины системы, определенные как операторы, равны собственным значениям соответствующих операторов. В пререквизитах к данному курсу [1] читатель уже познакомился с понятиями эрмитово самосопряженных операторов, которые соответствуют наблюдаемым величинам, и уравнениями на собственные значения таких операторов, а также узнал, что совместные собственные квантовые состояния могут быть построены только для наблюдаемых, операторы которых коммутируют. При этом только совместные собственные квантовые состояния образуют базис пространства их суперпозиций. Вместе с тем, в приложении к основному тексту (см. Приложение на стр. 171, §1) мы кратко описываем квантовые понятия и их обозначения, а также порядок оперирования с ними для того, чтобы освежить у читателя в памяти эти вопросы.

Особый интерес представляют физические системы, в которых можно выделить подмножества, образованные частью собственных состояний, а значит, и подпространства, построенные из суперпозиций этих собственных состояний, которые характеризуются одними и теми же значениями инвариантов, т.е. собственными значениями части наблюдаемых, таким образом, что собственные состояния с одними и теми же значениями инвариантов образуют мультиплеты, а переходы от одного состояния мультиплета к другому описывают преобразования симметрии, так как инварианты остаются неизменными. Например, базисные состояния частицы со спином $s = 1$ — это триплет с разными значениями проекции спина на ось z , $m_s = \{+1, 0, -1\}$, а преобразования симметрии — это группа поворотов трехмерного пространства.

В физике наблюдаемые величины имеют единицы измерения. Поэтому симметрия мультиплетов базисных квантовых состояний описывает, во-первых, дискретность значений наблюдаемых величин в мультиплете, т.е., как говорят, квантование этих величин, а во-вторых, дискретность собственных значений инвариантов для разных мультиплетов. Поэтому важным становится вопрос о том, как изучать симметрии квантовых состояний. С математической точки зрения актуальным оказался формализм групп Ли, когда свойства физической системы связаны с зависящими от непрерывных параметров обратимыми преобразованиями наблюдаемых и элементов пространства, на котором наблюдаются действуют как операторы. Элементы этого пространства мы будем называть квантовыми состояниями, а элементы групп и алгебр Ли мы вводим как операторы, действующие на пространстве квантовых состояний. Наряду с этими понятиями квантовой физики мы используем и традиционную математическую терминологию в области теории групп и алгебр Ли и периодически обращаемся к ней для того, чтобы опираться на классические результаты теории групп и алгебр Ли, и чтобы читателю было проще интегрировать получаемые знания с парадигмой чисто математического взгляда на предмет.

§1. Группа Ли и ее алгебра

Непрерывная группа как гладкое многообразие, инвариантные подгруппы, простые и полупростые группы, закон композиции и производная Ли, структурные константы, скобка Ли и тождество Якоби, определение алгебры Ли.

Из рассмотрения физических систем мы понимаем, что система характеризуется наблюдаемыми величинами, например, импульсами частиц. Нас может интересовать вопрос преобразования этих величин, например, при трансляциях и поворотах, причем в этом вопросе особо выделяют обратимые преобразования, в число которых входит и тождественное преобразование наблюдаемых величин. Абстрактным обобщением понятия таких преобразований является концепция группы. Более того, сами преобразования могут зависеть от непрерывных параметров, и в этом случае понятие, адекватно описывающее непрерывные преобразования, — это гладкое многообразие. С этого мы и начинаем изучение теории непрерывных групп.

Описание физической системы, как мы знаем из курса [1], требует введения пространства квантовых состояний, среди которых роль опорного примера для наших рассуждений играет рассмотрение векторных пространств полей спина s размерности $\mathcal{D} = 2s + 1$ в теории группы поворотов²: в пространстве квантовых состояний существует такой ортонормированный базис, что каждое базисное состояние

¹Под суперпозицией мы понимаем линейную комбинацию элементов множества.

²См. также учебник Эллиота и Добера по теории групп в применении к физике [2], а также классическую книгу Петрашень и Трифонова [3].

является собственным для оператора проекции спина на ось z , а значит, на каждом состоянии из базиса проекция спина на ось z имеет точное значение, равное собственному значению. Коэффициенты разложения по такому базису имеют вполне определенный физический смысл, а именно, эти коэффициенты задают амплитуду вероятности обнаружить при измерении проекции спина ее собственное значение. Поскольку вероятность нормируется на единицу, поскольку пространство квантовых состояний снабжено евклидовой нормой и является *гильбертовым пространством*³. В такой картине встает вопрос о том, как преобразуются векторы квантовых состояний при групповых преобразованиях наблюдаемых, а отвечает на этот вопрос теория представлений, т.е. описание действия операторов, отвечающих элементам группы, на векторы гильбертова пространства.

Мы предполагаем, что читатель знаком с классической теорией групп в том объеме, который предложен в блестательном учебнике ван дер Вардена “Алгебра” [5]. Тем не менее, для полноты и целостности восприятия в ходе изложения, ориентированного на физика-теоретика, мы будем приводить определения тех математических понятий, которые используются в нашем изложении⁴.

В качестве обобщения преобразований физических величин, которые оставляют неизменными законы природы, т.е. являются симметриями, в математике вводится понятие группы:

Определение. Группой называется множество элементов \mathfrak{G} , в котором

1. задана композиция любых двух элементов, принадлежащая группе: $\forall g_{1,2} \in \mathfrak{G} \quad \exists g_1 \cdot g_2 \in \mathfrak{G}$,
2. имеет место ассоциативность композиции,

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 \equiv g_1 \cdot g_2 \cdot g_3,$$
3. существует единичный элемент, $\exists e \in \mathfrak{G} : \quad \forall g \in \mathfrak{G}, \quad e \cdot g = g \cdot e = g$,
4. для каждого элемента группы существует обратный,

$$\forall g \in \mathfrak{G} \quad \exists g^{-1} \in \mathfrak{G} : \quad g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e.$$

Группу называют абелевой, если ее композиция перестановочна, т.е. имеет место тождество

$$g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$$

для любых двух элементов.

Задача 1. Рассмотрите 2×2 -матрицы поворотов на плоскости. Покажите, что они образуют абелеву группу.

Группа Ли — это группа в приведенном выше стандартном понимании, элемент которой определён значениями конечного числа непрерывных параметров, т.е. на которой можно вблизи любого элемента ввести взимнооднозначное соответствие между элементами группы и координатами в области конечномерного линейного пространства параметров, т.е. определить координатную сетку, причем эти координатные сетки для разных подмножеств группы согласованы в том смысле, что в области их перекрытия координаты элемента группы в одной сетке взаимнооднозначно связаны с координатами того же элемента в другой сетке. Это отвечает математическому понятию многообразия. Значит, группа Ли — это множество, которое снабжено структурами группы и многообразия. Область с координатной сеткой (открытое подмножество) называют картой, набор координатных сеток — это атлас карт многообразия. По определению взаимной однозначности преобразования от координат одной карты к координатам другой карты в области их перекрытия разные атласы дают эквивалентное описание многообразия. Открытую координатную область мы будем отождествлять с областью конечномерного (евклидова) пространства⁵.

³По умолчанию, мы в предлагаемом читателю изложении рассматриваем исключительно конечномерные гильбертовы пространства. В общем же случае, когда базис квантовых состояний бесконечно счетный, необходимо вводить понятия сходимости по норме и сепарабельности базиса, и читателю стоит обратиться к учебникам по квантовой механике, например, к [10], где, кстати, вводится и понятие оснащенного гильбертова пространства, когда спектр собственных значений наблюдаемой может быть непрерывным.

⁴Строгое математическое изложение можно найти в книге В.Арнольда [4] по математическим методам классической механики и в курсе [6, 9] о современных геометрических структурах, а также в учебнике [7, 8] по теории групп и алгебре Ли.

⁵На самом деле координатные сетки на картах могут быть криволинейными, так что касательные векторы к координатным линиям в каждой точке многообразия образуют базис векторного пространства, которое называется касательным пространством в данной точке многообразия, а в криволинейных координатах базисы в разных точках многообразия могут быть разными. При этом в понятие многообразия, вообще говоря, не входит понятие метрики в касательном пространстве, хотя для простоты можно считать, что открытые множества возле точки многообразия задаются строгим условием ограничения на евклидово расстояние от исходной точки до точки в открытой окрестности.

Определение. Число непрерывных параметров группы N_G называют размерностью группы.

Итак, мы полагаем, что координатные сетки во всех точках многообразия имеют одну и ту же размерность. Минимальное число координатных сеток, покрывающих всю группу, мы будем полагать конечным. Более того, мы будем считать, что функции перехода от одних координат к другим дифференцируемы необходимое число раз, а двум различным элементам многообразия могут быть сопоставлены непересекающиеся области координатных сеток⁶ (условие Хаусдорфа).

Задача 2. Рассмотрите нехаусдорфово многообразие «окружность на прямой»: как ввести координаты на этом многообразии, и где расположены точки, окрестности которых неизбежно пересекаются?

Задача 3. Плоскость может быть описана атласом с одной единственной картой: необходимо задать базис из двух независимых векторов ϵ_1 и ϵ_2 , так что любая точка плоскости взаимооднозначно описывается координатами $(a^{(1)}, a^{(2)})$, а разные базисы — разные атласы. С помощью стереографической проекции из полюса сферы на плоскость, касательную к противоположному полюсу, покажите, что для описания многообразия сферы необходимо задать атлас как минимум из двух карт. Подчеркните роль условия взаимооднозначности соответствия координатной области точки на карте и области элемента на сфере.

В физике элементы группы Ли — это обратимые параметрические преобразования, которые действуют как функции на физические величины $f[x]$. При этом ассоциативность есть прямое следствие определения сложной функции⁷, для которой расставление скобок представляется излишним: $f_1(f_2(f_3[x])) \equiv f_1 \cdot (f_2 \cdot f_3)[x] \equiv (f_1 \cdot f_2) \cdot f_3[x]$.

Наличие групповой структуры означает, что элементу g_a с координатами⁸ $\{a^{(1)}, \dots, a^{(n)}\} \leftrightarrow a^\alpha \leftrightarrow \mathbf{a}$ и элементу g_b с координатами $\{b^{(1)}, \dots, b^{(n)}\} \leftrightarrow b^\beta \leftrightarrow \mathbf{b}$ сопоставляется элемент $g_c = g_a \cdot g_b$ с координатами $c^\gamma = c^\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, где операция отображения прямого произведения двух координатных карт группы в координатную карту этой же группы $c^\gamma(\bullet, \diamond)$ математически выражает закон композиции в группе (со всеми вытекающими отсюда последствиями на языке компонентных функций⁹ от двух элементов: существования в группе обратных элементов, единицы и т.п.). Определенное таким образом отображение в карту группы как результат групповой композиции мы будем называть бинарной операцией. Подчеркнем, например, что бинарная операция симметрична по перестановке двух своих координатных аргументов¹⁰, если групповая композиция абелева, а в общем случае такой перестановочной симметрии нет.

В принятых нами сейчас обозначениях элемент группы Ли \mathfrak{G} обозначается буквой g с индексом a , который указывает координаты этого элемента, g_a .

Наличие же структуры дифференцируемого многообразия, т.е. зависимость элементов группы от непрерывных параметров, позволяет определять производные по направлению. В этом отношении особую роль играют элементы группы вблизи единицы, так как в этом случае групповые законы преобразования записываются в наиболее интуитивно простом виде, хотя ясно, что все устанавливаемые вблизи единицы групповые закономерности эквивалентным образом переносятся в окрестность любого другого элемента группы. В самом деле, на карте в окрестности элемента группы¹¹ g_0 рассмотрим координаты \mathbf{a}_0 и \mathbf{b}_0 элементов g_{a_0} и g_{b_0} . Произведение этих элементов группы $g_{a_0} \cdot g_{b_0} = g_{c_0}$ описывается компонентными функциями $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}_0(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0)$ бинарной операции на координатах элементов \mathbf{a}_0 и \mathbf{b}_0 со значением набора координат элемента \mathbf{c}_0 . Построим элементы группы $g_a = g_{a_0} \cdot g_0^{-1}$ и $g_b = g_{b_0} \cdot g_0^{-1}$, которые в результате действия g_0^{-1} находятся вблизи единицы e и имеют на карте в окрестности единицы координаты $\mathbf{a} = \phi_0^-(\mathbf{a}_0)$ и $\mathbf{b} = \phi_0^-(\mathbf{b}_0)$, соответственно, где ϕ_0^- — это взаимнооднозначное гладкое преобразование

⁶Стандартный пример нехаусдорфова многообразия — три луча Оа, Об, Ос, в которых точка О не принадлежит лучу Ос (“выколота”) и считается разной для лучей Оа и Об (точки О и О’, соответственно). В этом случае любые непустые малые окрестности различных точек О и О’ всегда пересекаются на луче Ос, где точка О выколота.

⁷Простой пример неассоциативности можно легко построить, если рассмотреть множество обратимых матриц 2×2 , например, и дополнить его новым элементом $\mathbb{I}_{\text{пр}}$, а композицию элементов задать так: для двух матриц A и B ввести упорядоченную композицию — матричное умножение $A \cdot B$ с единицей $\mathbb{1}$, для двух элементов $\mathbb{I}_{\text{пр}}$ и $\mathbb{I}_{\text{пр}}$ композиция равна $\mathbb{I}_{\text{пр}} \cdot \mathbb{I}_{\text{пр}} = \mathbb{1}$, для матрицы A и $\mathbb{I}_{\text{пр}}$ неупорядоченная композиция равна обратной матрице $\mathbb{I}_{\text{пр}} \cdot A = (A \cdot \mathbb{I}_{\text{пр}}) = A^{-1}$. Для такой композиции удовлетворяются почти все пункты для определения группы: есть единица и обратный элементы. Но теперь расставление скобок становится существенным, так как при $A \neq \mathbb{1}$, $B \neq \mathbb{1}$ замечаем, что $\mathbb{I}_{\text{пр}} \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot A^{-1} \neq (\mathbb{I}_{\text{пр}} \cdot A) \cdot B = A^{-1} \cdot B$.

⁸Двусторонними стрелками мы связываем эквивалентные обозначения.

⁹Здесь мы имеем в виду, что задаются многокомпонентные функции по числу координат на карте многообразия от двух наборов координат.

¹⁰Важно отметить, что набор координат допускает отождествление с элементами векторного пространства в случае криволинейных координатных сеток, только если провести переход к касательному пространству в фиксированной точке координатной сетки, т.е. при разложении по базису векторов, которые являются касательными к линиям координатной сетки в заданной точке.

¹¹Центр координат $\mathbf{0}$ на карте возле g_0 отвечает элементу g_0 .

координат из окрестности элемента группы g_0 в координаты вблизи единицы, где закон группового преобразования координат описывается бинарной операцией $\mathbf{c} = \mathbf{c}(a, b)$. Подействуем на элементы группы в окрестности единицы g_a и g_b элементом g_0 слева и построим $\tilde{g}_a = g_0 \cdot g_a$ и $\tilde{g}_b = g_0 \cdot g_b$, которые находятся в окрестности g_0 и имеют координаты $\tilde{a} = \phi_0(a)$ и $\tilde{b} = \phi_0(b)$ на той же карте, что и изначальные координаты a_0 и b_0 . Значит, с одной стороны мы установили взаимнооднозначное преобразование координат a_0 и b_0 в координаты \tilde{a} и \tilde{b} в окрестности g_0 , а с другой стороны, — взаимнооднозначные соответствия как координат a_0 и b_0 , так и координат \tilde{a} и \tilde{b} в окрестности g_0 координатам a и b в окрестности единицы. Другими словами, использование любой пары координат (\tilde{a}, \tilde{b}) , (a_0, b_0) и (a, b) эквивалентно в смысле изоморфизма, а значит, и записи закона композиции элементов как бинарных операций на координатах в виде $\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{a}, \tilde{b})$ и $\mathbf{c}(a, b)$, например, или $c_0(a_0, b_0)$ и $\mathbf{c}(a, b)$ также связаны этим изоморфизмом. Итак, бинарная операция на координатах $c_0 = c_0(a_0, b_0)$, соответствующая групповой композиции элементов из окрестности g_0 может быть описана на языке бинарной операции на координатах двух элементов группы из окрестности единицы $\mathbf{c}(a, b)$.

Более формальное описание эквивалентности закона группового преобразования возле различных точек группы строится с использованием специального отображения на основе понятия гомоморфизма. Напомним, что гомоморфизмом групп \mathfrak{G} и \mathfrak{G}' называют отображение ϕ элементов группы \mathfrak{G} в подмножество элементов группы \mathfrak{G}' ,

$$g \xrightarrow{\phi} g' = \phi(g), \quad \forall g \in \mathfrak{G},$$

которое сохраняет групповые свойства:

$$g_1 \cdot g_2 \xrightarrow{\phi} g'_1 \cdot g'_2, \quad g \cdot e \xrightarrow{\phi} g' \cdot e', \quad g^{-1} \cdot g \xrightarrow{\phi} (g')^{-1} \cdot g'.$$

Взаимнооднозначный гомоморфизм элементов

$$g \leftrightarrow \text{Aut}_0(g) \stackrel{\text{def}}{=} g_0 \cdot g \cdot g_0^{-1}, \quad (\text{I.1.1})$$

называют внутренним автоморфизмом. При этом внутреннем автоморфизме

$$\begin{aligned} \text{Aut}_0(e) &= e, \\ \text{Aut}_0(g^{-1} \cdot g) &= \text{Aut}_0(g^{-1}) \cdot \text{Aut}_0(g) = e \quad \Rightarrow \quad \text{Aut}_0(g^{-1}) = (\text{Aut}_0(g))^{-1}, \\ \text{Aut}_0(g_1 \cdot g_2) &= \text{Aut}_0(g_1) \cdot \text{Aut}_0(g_2), \end{aligned}$$

а значит, образ этого внутреннего автоморфизма группы $\tilde{\mathfrak{G}} = \text{Aut}_0(\mathfrak{G})$ — группа. В силу взаимной однозначности соответствия элементов $g \leftrightarrow \text{Aut}_0(g)$ имеет место взаимнооднозначное соответствие исходных координат \mathfrak{G} и координат $\tilde{\mathfrak{G}} = \text{Aut}_0(\mathfrak{G})$. Поэтому есть также и взаимнооднозначное соответствие групповой структуры \mathfrak{G} и $\tilde{\mathfrak{G}} = \text{Aut}_0(\mathfrak{G})$, т.е. законов композиции: компонентные функции \mathbf{c} имеют взаимнооднозначное соответствие с компонентными функциями $\tilde{\mathbf{c}}$. Именно это взаимнооднозначное соответствие как между координатами, так и между явными выражениями бинарной операции на координатах, соответствующей композиции элементов группы, называют *эквивалентностью групповой структуры*. Мы убедились, что координатную сетку из окрестности единицы можно перенести в окрестность любого другого элемента группы так, чтобы закон группового умножения, как в окрестности единицы, так и в окрестности любого элемента выражался в терминах координат возле единицы, т.е. функционально в одном и том же виде. Таким образом, координатная структура групповой композиции элементов, т.е. бинарная операция на координатах двух элементов группы, соответствующая групповому умножению, в окрестности любой точки в группе путем изоморфизма всегда сводится к бинарной операции на координатах возле единицы.

По построению в самом общем случае гомоморфный образ группы \mathfrak{G} в \mathfrak{G}' является подгруппой в \mathfrak{G}' . При гомоморфизме, вообще говоря, прообразом единицы e' может служить подгруппа элементов $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$: действительно, композиция элементов из \mathfrak{H} переходит в единицу \mathfrak{G}' , $h_1 \cdot h_2 \mapsto e' \cdot e' = e'$, т.е. $h_1 \cdot h_2$ принадлежит опять же множеству \mathfrak{H} , а значит, имеют место все свойства, необходимые для определения группы. При этом элементы вида $g \cdot h \cdot g^{-1}$ преобразуются при гомоморфизме согласно $g \cdot h \cdot g^{-1} \mapsto g' \cdot e' \cdot (g')^{-1} = e'$, т.е. также являются элементами подгруппы \mathfrak{H} , $\forall h \in \mathfrak{H}, g \in \mathfrak{G}$.

В общем случае говорят, что подгруппа $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ является инвариантной относительно *внутренних автоморфизмов*^a, т.е. гомоморфизмов вида $g \cdot h \cdot g^{-1}$, $\forall g \in \mathfrak{G}$, или нормальной подгруппой, если $\forall h \in \mathfrak{H}$ все образы внутренних автоморфизмов $g \cdot h \cdot g^{-1} \in \mathfrak{H}$. (I.1.2)

^aПроизвольный автоморфизм — гомоморфизм группы в свое подмножество, т.е. подгруппу.

Определение нормальной подгруппы относится к внутренним автоморфизмам в группе \mathfrak{G} , когда $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}$. Вместе с тем, теперь мы можем заметить, что прообраз единицы, который называют также ядром гомоморфизма группы \mathfrak{G} в \mathfrak{G}' , — это нормальная подгруппа¹² в группе \mathfrak{G} . Примерами нормальной подгруппы могут служить, во-первых, единица группы e , которая составляет подгруппу \mathfrak{E} из одного элемента, а во-вторых, сама группа \mathfrak{G} , все внутренние автоморфизмы которой, естественно, принадлежат ей самой по построению группы.

Группа называется *простой*, если она не содержит нормальных подгрупп, отличных от единичной и себя самой. Группа называется *полупростой*, если она не содержит абелевых нормальных подгрупп, но в полупростой группе может быть неабелева инвариантная подгруппа, которая не совпадает с самой группой. При рассмотрении групп Ли мы будем полагать, что и нормальная подгруппа, отличная от единицы, также является группой Ли¹³.

Задача 4. Рассмотрите трансляции на плоскости. Покажите, что они образуют абелеву группу. Найдите все нормальные подгруппы этой группы.

Взаимнооднозначный гомоморфизм называют изоморфизмом. В случае изоморфизма прообраз единицы содержит единственный элемент — единицу, а значит, все групповые свойства образа и прообраза изоморфизма абсолютно эквивалентны.

Итак, мы установили, что структура группы Ли, т.е. свойства композиции, вблизи единицы изоморфна ее структуре в окрестности любого другого элемента группы.

Остановимся теперь подробнее на свойствах группы Ли в окрестности единицы, т.е. на свойствах бинарной операции, задающей композицию в терминах координат элементов группы. Итак, по определению для элементов группы, бесконечно мало отличающихся от единицы¹⁴, имеет место описание композиции двух элементов компонентными функциями бинарной операции

$$g_x \cdot g_a \mapsto c^\gamma(x, a) \leftrightarrow c(x, a), \quad (\text{I.1.3})$$

причем композиция с единичным элементом, имеющим координату $\mathbf{0}$, означает

$$g_x \cdot e = g_x \mapsto c(x, \mathbf{0}) = x, \quad e \cdot g_a = g_a \mapsto c(\mathbf{0}, a) = a, \quad (\text{I.1.4})$$

откуда

$$c(x, a) = x + a + c_{\alpha\beta} x^\alpha a^\beta (1 + \mathcal{O}(a, x)). \quad (\text{I.1.5})$$

Задача 5. Объясните, почему в законе группового преобразования координат возле единичного элемента $c(x, a)$ нет вкладов, квадратичных только по x и квадратичных только по a .

Согласно (I.1.5) введем векторное поле $\mathbf{a}(x)$,

$$\mathbf{a}(x) = c(x, \mathbf{0}) - x, \quad (\text{I.1.6})$$

которое по построению удовлетворяет условию

$$\mathbf{a}(\mathbf{0}) = \mathbf{a}. \quad (\text{I.1.7})$$

Говорят, что *векторное поле $\mathbf{a}(x)$ лежит в касательном пространстве группового элемента с координатами x* . В частности, вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{0})$ лежит в касательном пространстве единичного элемента группы, так как единица имеет координату, равную нулю.

Напомним, что, для того чтобы компоненты координат трактовать как векторы, необходимо

- перейти в бесконечно малую окрестность возле точки, где определены базисные векторы как касательные к линиям координатной сетки в этой точке,

¹²Теория групп достаточно полно излагается в учебнике ван дер Вардена [5], к которому и следует обратиться заинтересованному читателю, так что мы не будем здесь углубляться в детали, вводя понятия смежных классов, факторгрупп и т.п.

¹³Инвариантная подгруппа может, вообще говоря, оказаться не группой Ли, а дискретной группой, на которой невозможно ввести взаимнооднозначное соответствие между открытой областью в группе и открытой областью координат, т.е. такая группа будет включать в себя счетное (часто конечно счетное) число изолированных элементов. Например, в группе с матричным умножением элементы $\mathbb{1}$ и $-\mathbb{1}$ образуют инвариантную подгруппу из 2-х элементов, и эта дискретная подгруппа не является группой Ли.

¹⁴Термин «бесконечно малый» в научной литературе также используется в варианте «инфinitезимальный». При описании окрестности единицы группы Ли как гладкого многообразия это понятие подразумевает, что координатная карта, которая содержит единичный элемент группы, во-первых, может быть сколь угодно малой в смысле открытой области евклидова пространства, а во-вторых, координата единицы соответствует началу отсчета координат на этой карте, т.е. векторному нулю пространства параметров $\mathbf{0}$.

ii. а затем рассматривать координаты точек как коэффициенты разложения вектора по такому базису.

В рамках подобной конструкции в каждой точке координатной сетки определен, вообще говоря, свой базис векторного пространства, которое называется касательным в этой точке, а координаты элемента группы отвечают вектору в касательном пространстве. Важно, что при замене базиса, которая возникает при переходе от одной координатной сетки к другой возле рассматриваемой точки, индуцируется замена базиса в касательном пространстве к этой точке, что определяет и замену компонент векторов при переходе от одного базиса к другому, т.е. закон преобразования векторов.

Тогда в *касательном пространстве* векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ определяется как линейное преобразование вектора в касательном пространстве возле единицы группы e в вектор касательного пространства возле элемента g_x ,

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) - \mathbf{x} \xrightarrow{\text{tangent}} \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \mathbf{c}_{\alpha\beta} x^\alpha a^\beta, \quad (\text{I.1.8})$$

где по построению касательного векторного пространства в законе группового преобразования нет нелинейных членов по координатным векторам элементов группы, а также исключен «аффинный сдвиг» (на вектор \mathbf{x}). Как следует из приведенных нами формул (I.1.5)–(I.1.8), это вычитание аффинного сдвига позволяет началу касательного пространства возле нуля сопоставить в соответствие начало касательного пространства возле точки, которая в исходном касательном пространстве возле нуля имеет координату, заданную вектором \mathbf{x} , т.е. векторное поле $\mathbf{0}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$. В итоге, переход к касательному пространству, который мы помечаем в равенствах маркером *tangent*, как в формуле (I.1.8), т.е. процедура тангенциального подхода в исследовании групп Ли задает линейные преобразования из одного векторного пространства в другое. Свойства этого линейного преобразования задаются групповой композицией в группе Ли. Именно эти свойства — предмет нашего исследования. Они важны, так как мы можем говорить и об инверсии исследования: изучив все допустимые свойства линейных преобразований касательных пространств, мы сможем говорить о всех допустимых свойствах групп Ли.

Идея исследования билинейных преобразований в касательном пространстве является центральной: это основа концепции построения алгебры Ли для группы Ли.

Терминология векторных полей в касательном пространстве становится более развернутой и понятной, если рассмотреть производную по направлению.

Однако прежде, чем давать определение производной по направлению векторного поля, напомним, как это понятие строилось для скалярной функции $f(\mathbf{x})$. Скаляр или, как говорят, скалярное поле при замене координат $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$ преобразуется как инвариант: значение нового скалярного поля (со штрихом) при штрихованных значениях аргумента совпадает со значением исходного скалярного при исходных значениях аргумента,

$$f'(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x}). \quad (\text{I.1.9})$$

Такое преобразование (I.1.9) называют также параллельным переносом скаляра:

$$f_{\parallel}(\mathbf{x}') \stackrel{\text{def}}{=} f(\mathbf{x}).$$

Поэтому при малом сдвиге координатной сетки в направлении векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{x})$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x}) dt \quad (\text{I.1.10})$$

производная по направлению задается величиной

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_a f(\mathbf{x}) &\equiv \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}') - f_{\parallel}(\mathbf{x}')}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}') - f'(\mathbf{x}')}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x})}{dt} = \\ &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x}) dt) - f(\mathbf{x})}{dt} = a^\alpha \partial_\alpha f(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (\text{I.1.11})$$

где мы сначала провели вычитание значений двух скалярных функций при одном и том же значении аргумента (со штрихом), а затем воспользовались тем, что значение новой скалярной функции, полученной при параллельном переносе при сдвинутом значении аргумента, согласно (I.1.10) равно значению исходной скалярной функции при исходном значении аргумента (без штриха), а затем ввели символ частной производной функции ∂_α по одной из компонент вектора в аргументе этой функции, пометив её ковариантным (нижним) индексом,

$$\partial_\alpha f(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} f(\mathbf{x}).$$

Саму компоненту вектора координат мы помечаем контравариантным (верхним) индексом, так как закон преобразования компонент контравариантной величины отличен от закона преобразования компонент ковариантной величины, и мы специально указываем это в стандартных индексных обозначениях.

Важно подчеркнуть, что при вычислении производной по направлению мы рассматриваем разность значений двух полей в одной и той же точке касательного векторного пространства координат (со штрихом), которая получается при бесконечно малом сдвиге исходной точки координатного пространства по направлению векторного поля $a(\mathbf{x})$, но при $dt \rightarrow 0$ результат вычисления производной по направлению относится к исходному набору координат \mathbf{x} и точке, на которую он указывает в касательном пространстве.

Закон преобразования векторной величины — это закон преобразования компонент дифференциалов координат вектора в касательном пространстве при переходе от одного базиса к другому,

$$dx'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta,$$

так что для компонент векторного поля при переходе от базиса касательного пространства в исходной точке к базису касательного пространства в штрихованной точке запишем

$$b'^\alpha(\mathbf{x}') = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} b^\beta(\mathbf{x}) = b^\beta(\mathbf{x}) \partial_\beta x'^\alpha. \quad (\text{I.1.12})$$

В частности, в случае сдвига по направлению a согласно (I.1.10) матрица преобразований компонент вектора равна

$$\partial_\beta x'^\alpha = \delta_\beta^\alpha + dt \partial_\beta a^\alpha(\mathbf{x}),$$

и в линейном приближении по dt мы получаем выражение

$$b'^\alpha(\mathbf{x}') = b^\alpha(\mathbf{x}) + b^\beta(\mathbf{x}) dt \partial_\beta a^\alpha(\mathbf{x}).$$

Закон преобразования вектора $b^\beta(\mathbf{x}) \rightarrow b'^\alpha(\mathbf{x}')$ формулируется в случае замены базиса как преобразование компонент вектора от исходного базиса к штрихованному: замена базиса индуцирует замену компонент вектора. Но такое преобразование можно рассматривать и как переход из исходной точки к штрихованной так, что результат такого перехода задает параллельный перенос вектора из исходной точки в штрихованную,

$$b_\parallel^\alpha(\mathbf{x}') \equiv b'^\alpha(\mathbf{x}') = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} b^\beta(\mathbf{x}).$$

По сути мы трактуем параллельный перенос так, чтобы инвариант составленный из свертки произвольного вектора и произвольного ковектора, т.е. скаляр, при параллельном переносе в другую точку не менял своего значения, а значит, свертка параллельно перенесенного вектора и параллельно перенесенного ковектора не изменялась. Это всегда имеет место, если вектор и ковектор соответственно преобразуются по законам преобразования вектора и ковектора при смене базиса.

Можно рассмотреть параллельный перенос в более привычном геометрическом стиле: пусть \mathbf{e}_α образуют базис в исходной точке, построенный как набор касательных векторов к линиям координатной сетки в этой исходной точке, а \mathbf{e}'_β — такой же базис в другой точке (штрихованной), так что вектор \mathbf{b} раскладывается в исходной точке по базису $\mathbf{b} = b^\alpha \mathbf{e}_\alpha$, а параллельно перенесенный вектор \mathbf{b}_\parallel раскладывается по штрихованному базису $\mathbf{b}_\parallel = b_\parallel^\beta \mathbf{e}'_\beta$, но параллельный перенос означает, что это тот же самый вектор, т.е. $\mathbf{b}_\parallel = \mathbf{b}$. В компонентах

$$b_\parallel^\beta \mathbf{e}'_\beta = b^\alpha \mathbf{e}_\alpha = b^\alpha \Lambda_{\bullet\alpha}^\beta \mathbf{e}'_\beta \Rightarrow b_\parallel^\beta(\mathbf{x}') = b^\beta(\mathbf{x}) + b^\alpha(\mathbf{x}) dt \partial_\alpha a^\beta(\mathbf{x}),$$

где матричное преобразование базиса

$$\mathbf{e}_\alpha = \Lambda_{\bullet\alpha}^\beta \mathbf{e}'_\beta$$

задает матричное преобразование компонент вектора при параллельном переносе

$$b_\parallel^\beta = \Lambda_{\bullet\alpha}^\beta b^\alpha,$$

а сама матрица преобразования базиса определяется частными производными

$$\Lambda_{\bullet\alpha}^\beta = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha},$$

как это и должно быть при сдвиге координатной сетки, который является частным случаем параллельного переноса бесконечно малых элементов координат:

$$dx = dx' \Rightarrow dx^\alpha \epsilon_\alpha = dx'^\beta \epsilon'_\beta \Rightarrow dx^\alpha \epsilon_\alpha = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \epsilon'_\beta = dx^\alpha \Lambda_{\alpha}^{\beta} \epsilon'_\beta.$$

Ясно, что параллельный перенос за счет преобразования координат задает поле, которое может и отличаться от поля, которое задано композицией в группе Ли и построено в терминах констант $c_{\alpha\beta}^\gamma$ в формуле (I.1.6). Тогда производная вектора по направлению (I.1.10) сводится к выражению

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_a b^\alpha(\mathbf{x}) \equiv \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left\{ b^\alpha(\mathbf{x}') - b_{\parallel}^\alpha(\mathbf{x}') \right\} &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left\{ b^\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x}) dt) - b_{\parallel}^\alpha(\mathbf{x}') \right\} = \\ &= a^\beta(\mathbf{x}) \partial_\beta b^\alpha(\mathbf{x}) - b^\beta(\mathbf{x}) \partial_\beta a^\alpha(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (\text{I.1.13})$$

где сначала производится вычитание компонент двух векторных полей при одном и том же значении аргументов (со штрихом). Так как вычитание компонент вектора производится в одной и той же точке векторного пространства координат, т.е. в одном и том же базисе, то такая разность — тензорная величина, которая имеет закон преобразования вектора при сдвигу согласно (I.1.10) значении аргумента (в заданной точке векторного пространства координат со штрихом).

Подчеркнем, что разность векторов, которые относятся к двум разным точкам координатного пространства, т.е. лежат в разных касательных пространствах, не является тензорной величиной, так как каждый из таких векторов преобразуется, вообще говоря, разными матрицами, которые относятся к разным точкам координатного пространства: базисы в различных векторных пространствах, касающихся рассматриваемого многообразия в разных точках, могут преобразовываться по разным линейным законам, зависящим от точки касания. Поэтому при определении производной вектора \mathbf{b} по направлению \mathbf{a} мы брали разность векторов \mathbf{b} и \mathbf{b}_{\parallel} , заданных в одной и той же точке \mathbf{x}' , т.е. величин, которые преобразуются по одному и тому же закону при произвольных обратимых заменах базиса в касательном пространстве, которое относится к точке \mathbf{x}' , а значит, результирующая производная также является вектором в том же касательном пространстве, так как при $dt \rightarrow 0$ результат вычисления производной по направлению относится к исходной точке \mathbf{x} . Эта векторная величина называется производной Ли и часто обозначается в виде скобки Ли

$$\mathcal{L}_a \mathbf{b} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]. \quad (\text{I.1.14})$$

Найдем скобку Ли для введенных по закону групповой композиции (I.1.6) векторных полей $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} = 0$, т.е. бесконечно близко к единице, когда согласно (I.1.5) и (I.1.6) при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$

$$a^\alpha \partial_\alpha b^\gamma(\mathbf{x}) = a^\alpha \partial_\alpha (b^\gamma + c_{\alpha'\beta}^\gamma x^{\alpha'} b^\beta) = a^\alpha c_{\alpha\beta}^\gamma b^\beta, \quad b^\alpha \partial_\alpha a^\gamma(\mathbf{x}) = b^\alpha c_{\alpha\beta}^\gamma a^\beta,$$

а значит, в касательном пространстве

$$\mathcal{L}_a \mathbf{b} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = c_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta - c_{\alpha\beta} a^\beta b^\alpha = f_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta, \quad (\text{I.1.15})$$

где мы ввели структурные константы

$$f_{\alpha\beta}^\gamma = c_{\alpha\beta}^\gamma - c_{\beta\alpha}^\gamma, \quad f_{\alpha\beta}^\gamma = -f_{\beta\alpha}^\gamma, \quad (\text{I.1.16})$$

которые задаются законом композиции в группе Ли и являются антисимметричными по перестановке ковариантных (нижних) индексов, а следовательно,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}], \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_a \mathbf{b} = -\mathcal{L}_b \mathbf{a}, \quad (\text{I.1.17})$$

т.е. скобка Ли антисимметрична по перестановке своих аргументов. Очевидно также, что скобка Ли по построению линейна по каждому из своих аргументов.

Итак, производная Ли (I.1.14) в касательном пространстве группы Ли — это скобка Ли (I.1.15), которая задает линейно зависящее от направления \mathbf{a} линейное преобразование векторов касательного пространства \mathbf{b} через структурные константы группы Ли (I.1.16). Как мы уже говорили чуть выше, исследование свойств этого линейного преобразования позволяет классифицировать свойства структурных констант группы Ли. В этом смысле нам необходимо установить свойства скобки Ли.

Задача 6. Найдите групповые константы для группы поворотов 3-мерного евклидова пространства $SO(3)$.

С той же точностью линейных преобразований в касательном пространстве возле координаты единичного элемента, которая полагается равной нулю, т.е. во втором порядке малости отклонения от

координат единичного элемента, но в линейном приближении по каждому из векторов в касательном пространстве находим

$$\mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \mathbf{c}(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \stackrel{\text{tangent}}{=} \mathbf{f}_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta = [\mathbf{a}, \mathbf{b}], \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{0}. \quad (\text{I.1.18})$$

Это соотношение допускает элементарную аналитическую интерпретацию. Сначала установим, что при бесконечно малых преобразованиях координаты обратного элемента g_u^{-1} в касательном пространстве даются просто компонентами вектора $-\mathbf{u}$, т.е.

$$g_u^{-1} \equiv g_{\tilde{u}} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{-\mathbf{u}}.$$

В самом деле, так как $g_u \cdot g_u^{-1} \equiv g_u \cdot g_{\tilde{u}} = g_{\tilde{u}} \cdot g_u = e$, следовательно, $\mathbf{c}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{c}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$, в то время как с точностью до второго порядка малости по \mathbf{u}

$$\mathbf{c}(\mathbf{u}, -\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \mathbf{u} + \mathcal{O}(u^2) = \mathbf{0} + \mathcal{O}(u^2),$$

а поскольку в касательном пространстве рассматриваются только линейные преобразования, то

$$\mathbf{c}(\mathbf{u}, -\mathbf{u}) \stackrel{\text{tangent}}{=} \mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Условие инфинитезимальности координат элементов группы соответствует понятию касательного пространства к точке многообразия, в данном случае это касательное пространство возле единичного элемента группы. Тогда в касательном пространстве единичного элемента группы Ли с заданной точностью второго порядка малости по координатам элементов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{0}$

$$g_a \cdot g_b = g_{c(a,b)} \mapsto \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad (g_b \cdot g_a)^{-1} = g_{c(b,a)}^{-1} = g_{-c(b,a)+\mathcal{O}(c^2(b,a))} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{-c(b,a)} \mapsto -\mathbf{c}(\mathbf{b}, \mathbf{a}), \quad (\text{I.1.19})$$

а соотношение (I.1.18) отвечает композиции

$$(g_b \cdot g_a)^{-1} \cdot g_a \cdot g_b = g_{c(b,a)}^{-1} \cdot g_{c(a,b)} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{-c(b,a)} \cdot g_{c(a,b)} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{-c(b,a)+c(a,b)} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{[a,b]} \text{ или} \\ g_a \cdot g_b \cdot (g_b \cdot g_a)^{-1} = g_{c(a,b)} \cdot g_{c(b,a)}^{-1} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{c(a,b)} \cdot g_{-c(b,a)} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{c(a,b)-c(b,a)} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{[a,b]}, \quad (\text{I.1.20})$$

где отличие между двумя выражениями может возникнуть только в третьем порядке по малости координат, или с той же точностью второго порядка при $\mathbf{a}, \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{0}$, но в любом случае только при нелинейных преобразованиях, т.е. вне рамок тангенциального подхода. В итоге в касательном пространстве имеет место равенство

$$g_a \cdot g_b \stackrel{\text{tangent}}{=} g_b \cdot g_a \cdot g_{[a,b]}. \quad (\text{I.1.21})$$

В итоге, соотношение (I.1.18) определяет разность касательных векторов, которая задает элемент группы, построенный в виде композиции двух элементов группы в прямом и в обратном порядке в окрестности единицы,

$$g_{[a,b]} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_b^{-1} \cdot g_a^{-1} \cdot g_b \cdot g_a.$$

Отметим, что точное соотношение имеет вид

$$g_a \cdot g_b = g_b \cdot g_a \cdot g_{[a,b]+\mathcal{O}(3_{ab})}, \quad (\text{I.1.22})$$

где $\mathcal{O}(3_{ab})$ обозначает векторную функцию третьего или более высокого порядка малости по векторам касательного пространства, которая нелинейна хотя бы одному из аргументов, так что в тангенциальном подходе этот вклад не имеет значения.

Итак, мы показали, что интерпретация соотношений (I.1.15)–(I.1.18) для производной и скобки Ли может быть сформулирована в терминах групповой композиции двух элементов группы вблизи единицы: групповое произведение двух элементов группы выражается через групповое произведение тех же элементов в обратном порядке, умноженное на групповой элемент, координаты которого в касательном пространстве групповой единицы задаются скобкой Ли векторов координат двух рассматриваемых элементов группы.

Таким образом, скобка Ли (I.1.15) задается законом композиции в группе Ли (I.1.5), и она представляет из себя билинейное векторное преобразование двух векторов в касательном пространстве возле единичного элемента группы. Результат этого билинейного преобразования, рассматриваемого как действие линейного преобразования, линейно зависящего от первого вектора в билинейной форме, на

второй вектор в билинейной форме, принадлежит тому же касательному пространству, которое обозначают малой готической буквой, одноименной с обозначением группы Ли, т.е., например, группе \mathfrak{G} отвечает касательное пространство \mathfrak{g} .

Наряду с антисимметрией скобки Ли, которая следует из построения производной по направлению и того факта, что произведения двух элементов группы в прямом и обратном порядке отличаются на элемент группы, определяемый, как мы установили в (I.1.21), скобкой Ли, другое важнейшее свойство скобки Ли устанавливается из факта ассоциативности композиции в группе. Действительно, воспользуемся (I.1.21) в произведении $(g_a \cdot g_b) \cdot g_c$, последовательно меняя порядок следования элементов на обратный с точностью до линейных преобразований в касательном пространстве возле единицы в группе Ли

$$\begin{aligned} (g_a \cdot g_b) \cdot g_c &\stackrel{\text{tangent}}{=} (g_b \cdot g_a) \cdot (g_{[a,b]} \cdot g_c) \stackrel{\text{tangent}}{=} g_b \cdot (g_a \cdot g_c) \cdot g_{[a,b]} \cdot g_{[[a,b],c]} \stackrel{\text{tangent}}{=} \\ &\stackrel{\text{tangent}}{=} (g_b \cdot g_c) \cdot g_a \cdot g_{[a,c]} \cdot g_{[a,b]} \cdot g_{[[a,b],c]} \stackrel{\text{tangent}}{=} \\ &\stackrel{\text{tangent}}{=} g_c \cdot g_b \cdot (g_{[b,c]} \cdot g_a) \cdot g_{[a,c]} \cdot g_{[a,b]} \cdot g_{[[a,b],c]} \stackrel{\text{tangent}}{=} \\ &\stackrel{\text{tangent}}{=} g_c \cdot g_b \cdot g_a \cdot g_{[b,c]} \cdot g_{[[b,c],a]} \cdot g_{[a,c]} \cdot g_{[a,b]} \cdot g_{[[a,b],c]}. \end{aligned} \quad (\text{I.1.23})$$

Аналогично

$$\begin{aligned} g_a \cdot (g_b \cdot g_c) &\stackrel{\text{tangent}}{=} (g_a \cdot g_c) \cdot g_b \cdot g_{[b,c]} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_c \cdot g_a \cdot (g_{[a,c]} \cdot g_b) \cdot g_{[b,c]} \stackrel{\text{tangent}}{=} \\ &\stackrel{\text{tangent}}{=} g_c \cdot (g_a \cdot g_b) \cdot g_{[a,c]} \cdot g_{[[a,c],b]} \cdot g_{[b,c]} \stackrel{\text{tangent}}{=} \\ &\stackrel{\text{tangent}}{=} g_c \cdot g_b \cdot g_a \cdot g_{[a,b]} \cdot g_{[a,c]} \cdot g_{[[a,c],b]} \cdot g_{[b,c]}. \end{aligned} \quad (\text{I.1.24})$$

Отсюда в силу ассоциативности из равенства (I.1.23) и (I.1.24) после сокращения на $g_c \cdot g_b \cdot g_a$ заключаем, что

$$g_{[b,c]} \cdot g_{[[b,c],a]} \cdot g_{[a,c]} \cdot g_{[a,b]} \cdot g_{[[a,b],c]} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{[a,b]} \cdot g_{[a,c]} \cdot g_{[[a,c],b]} \cdot g_{[b,c]}.$$

В этом равенстве имеются члены второго и третьего порядка малости по параметрам в касательном пространстве a, b, c , а точнее билинейные и трилинейные векторные функции на касательном пространстве. Дальнейшие перестановки множителей приведут лишь к появлению элементов в высших степенях малости, а именно, к *нелинейным* функциям высшего порядка на касательном пространстве, которые не дают вклада в тангенциальном подходе, а значит, координаты записанных групповых элементов в касательном пространстве задаются выражениями

$$g_{[b,c]} + [[b,c],a] + [a,c] + [a,b] + [[a,b],c] \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{[a,b]} + [a,c] + [[a,c],b] + [b,c],$$

откуда

$$[b, c] + [a, c] + [a, b] + [[b, c], a] + [[a, b], c] = [a, b] + [a, c] + [b, c] + [[a, c], b].$$

Но для билинейных векторных функций находим

$$[b, c] + [a, c] + [a, b] = [a, b] + [a, c] + [b, c], \quad (\text{I.1.25})$$

т.е. тривиальное тождество. Для трилинейных векторных функций устанавливаем тождество

$$[[b, c], a] + [[a, b], c] = [[a, c], b], \quad (\text{I.1.26})$$

так что, воспользовавшись антисимметрией скобки Ли $[a, c] = -[c, a]$, окончательно запишем

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0, \quad \begin{array}{l} \text{циклическая перестановка порядка} \\ \text{следования элементов в двойной скобке Ли.} \end{array} \quad (\text{I.1.27})$$

Это тождество Якоби для скобки Ли в касательном пространстве единичного элемента группы Ли — следствие ассоциативности группы, зависящей от непрерывных параметров.

Элементарное, но важное замечание состоит в том, что в касательном пространстве выбор координатной сетки, естественно, не однозначен, а следовательно, возможны замены переменных, при которых построенные нами векторные поля преобразуются как векторы, а структурные константы как тензор третьего ранга смешанного типа: дважды ковариантный по паре нижних индексов и контравариантный по верхнему. Другими словами, структурные константы группы Ли зависят от выбора координат вблизи единичного элемента, но эта зависимость определяется линейными преобразованиями в касательном векторном пространстве. При этом остаются инвариантными свойства скобки Ли, что позволяет нам сделать определение.

Определение. Векторное пространство \mathfrak{g} называется алгеброй Ли, если в нем

- задана скобка Ли (антисимметричная билинейная композиция элементов),
- для двойных скобок Ли удовлетворяются тождества Якоби.

Итак, мы установили, что группе Ли соответствует ее алгебра Ли, в которой скобка Ли определяется структурными константами группы, т.е. законом групповой композиции¹⁵.

§2. Представление группы Ли и генераторы

Квантовомеханическая формулировка понятия представления алгебры Ли, алгебра генераторов, присоединенное представление и метрика Киллинга, полупростые компактные группы Ли, след генератора, инварианты Казимира как однородные полиномы генераторов, индекс Дынкина.

В квантовой механике преобразования симметрии отвечают операторам, действующим на гильбертовом пространстве квантовых состояний¹⁶. Гомоморфизм группы на группу операторов, которые действуют на пространстве квантовых состояний, называется ее представлением. В случае изоморфизма говорят о точном представлении группы, с которым мы в дальнейшем и будем иметь дело.

В отличие от самой группы ее представление в виде операторов обладает важным отличием: для операторов имеет место не только умножение, определяемое как последовательное действие операторов на квантовые состояния, но и сложение с произвольными комплексными множителями, поскольку в базисе конечномерного гильбертова пространства, которым мы ограничиваем свое рассмотрение, операторы являются матрицами, для которых определены и матричное умножение, и матричное сложение. Поэтому возможно прямое введение производной оператора по параметру, которое отвечает рассмотренному нами выше понятию производной по направлению в касательном пространстве группы Ли.

Пусть $T(\mathfrak{G}) = G$ — представление группы Ли:

$$g_a \xrightarrow{T} G_a,$$

где индекс a указывает на координату элемента в группе Ли, а G_a соответствующий оператор с той же координатой, который действует в пространстве квантовых состояний. Точное представление означает, что единица группы взаимнооднозначно переходит в единичный оператор

$$e \xleftrightarrow{T} \mathbb{1}.$$

Последнее взаимнооднозначное соответствие означает, что начало координат в касательном пространстве возле единицы переходит в начало координат, отвечающее тождественному оператору.

Определим генератор как производную оператора,

$$\Gamma_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} i \frac{\partial G_a}{\partial a^\alpha} \Big|_{a \rightarrow 0}. \quad (\text{I.2.1})$$

Значит, для бесконечно малых преобразований

$$g_a \xrightarrow{T} G_a \xrightarrow{\text{tangent}} \mathbb{1} - i \Gamma_a, \quad (\text{I.2.2})$$

и, как обычно, $\Gamma_\alpha a^\alpha = \Gamma \cdot a = \Gamma_a$. Это фактически означает, что генератор определяется с точностью до фактора $-i$ как элемент касательного пространства для оператора преобразований квантовых состояний. Тогда с тангенциальной точностью, т.е. если пренебречь нелинейными по векторам касательного пространства параметров группы вкладами $\Gamma_{aa} = \mathcal{O}(a^2)$ и $\Gamma_{bb} = \mathcal{O}(b^2)$ в разложении матриц групповых преобразований по координатам в окрестности единичной матрицы, найдем, что

$$g_a \cdot g_b \xrightarrow{T} G_a \cdot G_b \xrightarrow{\text{tangent}} (\mathbb{1} - i \Gamma_a)(\mathbb{1} - i \Gamma_b) = \mathbb{1} - i \Gamma_a - i \Gamma_b - \Gamma_a \Gamma_b,$$

¹⁵Скобку Ли группы Ли часто называют скобкой Ли алгебры Ли.

¹⁶Здесь мы предполагаем, что читатель освоил описание группы поворотов и квантование спина, так что, опираясь на этот опыт рассмотрения группы поворотов, под гильбертовым пространством мы понимаем конечномерное векторное пространство с евклидовой нормой. Базис этого пространства состоит из общих собственных векторов нескольких эрмитово самопроязженных операторов, которые взаимно коммутируют и составляют полный набор наблюдаемых величин физической системы, а размерность гильбертова пространства \mathcal{D} определяется свойствами старшего вектора состояния — собственными значениями для наблюдаемых из полного набора наблюдаемых. В случае группы поворотов гильбертово пространство квантовых состояний со спином s имеет размерность $\mathcal{D} = 2s+1$, а полный набор наблюдаемых — это квадрат спина $s(s+1)$ и проекция спина на ось z , т.е. m_s .

и записанное в предыдущем параграфе равенство (I.1.21) в операторном представлении с линейной точностью по векторам касательного пространства сводится к виду

$$\begin{aligned} g_a \cdot g_b &\stackrel{\text{tangent}}{=} g_b \cdot g_a \cdot g_{[a,b]}, \quad \stackrel{T}{\mapsto} G_a \cdot G_b \stackrel{\text{tangent}}{=} G_b \cdot G_a \cdot G_{[a,b]} \mapsto \\ &\mapsto \mathbb{1} - i\Gamma_a - i\Gamma_b - \Gamma_a \Gamma_b \stackrel{\text{tangent}}{=} (\mathbb{1} - i\Gamma_a - i\Gamma_b - \Gamma_b \Gamma_a)(\mathbb{1} - i\Gamma_{[a,b]}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbb{1} - i\Gamma_a - i\Gamma_b - \Gamma_a \Gamma_b = \mathbb{1} - i\Gamma_a - i\Gamma_b - \Gamma_b \Gamma_a - i\Gamma_{[a,b]} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbb{1} - (\Gamma_a \Gamma_b - \Gamma_b \Gamma_a) = \mathbb{1} - i\Gamma_{[a,b]} \Rightarrow i\Gamma_{[a,b]} = [\Gamma_a, \Gamma_b]. \quad (\text{I.2.3}) \end{aligned}$$

В конце этой формулы мы ввели стандартное обозначение для коммутатора двух операторов,

$$[\Gamma_a, \Gamma_b] \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_a \Gamma_b - \Gamma_b \Gamma_a. \quad (\text{I.2.4})$$

Для представления группы

$$\Gamma_{[a,b]} = \Gamma_\gamma [a, b]^\gamma = \Gamma_\gamma f_{\alpha\beta}^\gamma a^\alpha b^\beta, \quad [\Gamma_a, \Gamma_b] = a^\alpha b^\beta [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta], \quad (\text{I.2.5})$$

так что тождество (I.2.3) при произвольных малых параметрах $a, b \rightarrow 0$, т.е. в логике касательного пространства сводится к следующему выражению для коммутатора генераторов преобразований

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = i f_{\alpha\beta}^\gamma \Gamma_\gamma. \quad (\text{I.2.6})$$

Итак, мы установили связь коммутатора генераторов групповых преобразований в пространстве квантовых состояний со структурными константами группы Ли (I.1.15), (I.1.16), которые возникли при введении скобки Ли.

Справедливость тождества Якоби для генераторов,

$$[\Gamma_a, [\Gamma_b, \Gamma_c]] + [\Gamma_b, [\Gamma_c, \Gamma_a]] + [\Gamma_c, [\Gamma_a, \Gamma_b]] = 0, \quad \begin{array}{l} \text{циклическая перестановка порядка} \\ \text{следования элементов в двойных} \\ \text{коммутаторах,} \end{array} \quad (\text{I.2.7})$$

элементарно следует из ассоциативности умножения операторов (матриц) при раскрытии входящих в это равенство коммутаторов¹⁷.

Следовательно, генераторы, которые образуют векторное пространство, в силу того, что их можно складывать с произвольными комплексными коэффициентами, согласно (I.2.6) наделены скобкой Ли (коммутатор антисимметричен, а его результат принадлежит линейной оболочке генераторов), и эта скобка удовлетворяет тождеству Якоби. Поэтому они реализуют представление алгебры Ли.

2.1 Присоединенное представление

В квантовой механике размерность матрицы, отвечающей генератору Γ_α , зависит от числа базисных квантовых состояний, которое в свою очередь тоже не может быть произвольным, а зависит от структуры группы, т.е. коммутационных соотношений для генераторов. Мы это знаем на примере группы поворотов, генераторы которой — компоненты векторного оператора момента импульса j . При заданном значении $j^2 = j(j+1)$ базис образуют $2j+1$ состояний с различными проекциями момента. Выяснение вопроса о числе базисных состояний для заданной группы — одна из целей проводимого изучения свойств алгебр Ли. Однако всегда можно указать представление, существование которого предопределено самим коммутатором, а значит, алгеброй Ли самой по себе. А именно, коммутатор

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = i f_{\alpha\beta}^\gamma \Gamma_\gamma \quad (\text{I.2.6})$$

есть линейное преобразование в векторном пространстве размерности N_G , которое образовано самими генераторами¹⁸: Γ_α — генератор по имени α переводит Γ_β — генератор по имени β в суперпозицию

¹⁷Запись коммутатора в виде

$$\Gamma_\alpha \cdot \Gamma_\beta = i f_{\alpha\beta}^\gamma \Gamma_\gamma + \Gamma_\beta \cdot \Gamma_\alpha$$

задает правило вычисления произведения генераторов, указанного в левой части равенства. В таком случае говорят, что заданы образующие элементы абстрактной ассоциативной алгебры (векторного пространства с умножением элементов), так что $\Gamma_\alpha \cdot \Gamma_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}$, а

$$\Gamma_{\alpha\beta} = i f_{\alpha\beta}^\gamma \Gamma_\gamma + \Gamma_{\beta\alpha},$$

и эта алгебра отвечает группе, которая называется универсальной обертывающей группой для исходной группы Ли с теми же структурными константами. Не углубляясь в эти построения, скажем только, что алгебры Ли исходной группы Ли и универсальной обертывающей группы по построению изоморфны.

¹⁸ N_G — число параметров группы Ли, равное числу генераторов и размерности пространства координат в группе.

генераторов $i f_{\alpha\beta}^\gamma \Gamma_\gamma$, что и является линейным преобразованием. Иными словами, коммутатор генераторов мы трактуем как действие генератора алгебры, стоящего на первой позиции в коммутаторе, на генератор, записанный на второй позиции. Так как пространство генераторов есть линейная оболочка, построенная на независимых N_G генераторах, то коммутатор (I.2.6) мы рассматриваем как действие оператора Γ_α на базисный вектор Γ_β пространства присоединенного представления, а результат действия — правая часть выражения для коммутатора (I.2.6), которая также является вектором пространства присоединенного представления. А если мы знаем, как действует оператор на любом базисном векторе, то мы можем написать результат действия этого оператора на любой вектор пространства представления. И в силу того, что мы имеем дело с алгеброй, для которой определена операция сложения и умножения на комплексные числа, мы знаем, как действует любой оператор, являющийся элементом линейной оболочки на операторах Γ_α .

При этом $N_G \times N_G$ -матрица такого линейного преобразования задается структурными константами группы, что определяет *присоединенное* (adjoint) или регулярное представление алгебры Ли¹⁹:

$$\Gamma_\alpha \xrightarrow{\text{ad}} (\text{ad } \Gamma_\alpha)_{\bullet\beta}^\gamma = i f_{\alpha\beta}^\gamma. \quad (\text{I.2.8})$$

Здесь мы специально подчеркнули, что в матричной записи линейного преобразования в ковариантном пространстве генераторов (обратите внимание на то, что «имя» генератора α — это нижний индекс, который связан с преобразованиями координат группы в касательном пространстве²⁰) порядок следования матричных индексов β и γ обозначен с помощью символа \bullet , так как этот порядок становится существенным при вычислении композиции двух линейных преобразований как произведения матриц. В этих обозначениях α — это тензорный индекс, который отвечает ковариантному индексу ковектора при преобразованиях координат в касательном пространстве алгебры Ли размерности N_G , а β и γ — это матричные индексы в присоединенном представлении той же размерности N_G . Матричные индексы преобразуются при замене базиса в присоединенном представлении, и эта замена базиса представления никак не связана с преобразованиями координат группы возле единицы. Это отличие матричных индексов генератора и его индексного имени необходимо специально подчеркнуть, так как размерности этих индексов в присоединенном представлении совпадают, и может возникнуть недопонимание того, как и какие преобразования изменяют величины с такими разными индексами. Более формально этот вопрос мы детализируем ниже на стр. 42, где перечислены все векторные пространства, которые задействованы в описании представления группы Ли в дополнение к касательному пространству координат возле единичного элемента группы.

Итак, запомним наши «убеждения». Спросим себя: на векторы какого пространства действуют матрицы-операторы присоединенного представления? И как устроен базис пространства, в котором эти матрицы имеют вид, зафиксированный в формуле (I.2.8)? Базис составляют N_G генераторов Γ_α . Соответственно, компоненты элемента в этом векторном пространстве можно записать как a^ν , которые задают разложение по базису так, что $\Gamma_a = \Gamma_\nu a^\nu$ в инвариантной записи (без индексов). Матрица-оператор $\text{ad } \Gamma_\alpha$, являющийся элементом алгебры Ли, чье присоединенное представление мы строим, есть матрица размера $N_G \times N_G$ с первым верхним и вторым нижним индексом, $(\text{ad } \Gamma_\alpha)_{\bullet\mu}^\nu$, так что линейное преобразование компонент a^ν в записи с использованием матричного умножения имеет вид

$$a'^\nu = (\text{ad } \Gamma_\alpha)_{\bullet\mu}^\nu a^\mu.$$

Тогда элемент пространства

$$\Gamma_{a'} = \Gamma_\nu a'^\nu = \Gamma_\nu (\text{ad } \Gamma_\alpha)_{\bullet\mu}^\nu a^\mu = \Gamma'_a,$$

что и является линейным преобразованием генераторов в присоединенном представлении,

$$\Gamma_\nu (\text{ad } \Gamma_\alpha)_{\bullet\mu}^\nu = [\Gamma_\alpha, \Gamma_\mu] = \text{ad } \Gamma_\alpha \cdot \Gamma_\mu \Leftrightarrow \Gamma'_a = [\Gamma_\alpha, \Gamma_a] = (\text{ad } \Gamma_\alpha) \cdot \Gamma_a. \quad (\text{I.2.9})$$

¹⁹ В математике записывают определение $\text{ad } \mathbf{a}(\mathbf{b}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, которое читается следующим образом: действие векторного поля \mathbf{a} в присоединенном представлении на поле \mathbf{b} определяется как скобка Ли этих векторов в касательном пространстве. Но поскольку скобка Ли — это линейное преобразование, т.е. матрица в касательном пространстве, мы фактически приводим это определение в явном виде с учетом введенного фактора $-i$ при определении генератора как элемента касательного пространства операторов преобразования (см. (I.2.2)): в индексах

$$\{\text{ad } \mathbf{a}(\mathbf{b})\}^\gamma = \{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\}^\gamma = f_{\alpha\beta}^\gamma a^\alpha b^\beta = -i(f_{\alpha\beta}^\gamma a^\alpha)b^\beta = -i(\text{ad } \Gamma_\alpha)_{\bullet\beta}^\gamma a^\alpha b^\beta = -i(\text{ad } \Gamma_a)_{\bullet\beta}^\gamma b^\beta.$$

²⁰ Для более детального понимания того, как ставятся матричные индексы в формуле (I.2.8), где они согласованы с (I.2.6), напомним, что, если a^α — это контравектор в касательном пространстве координат группового элемента возле единицы, то закон его линейного преобразования можно записать в матричном виде как $a'^\gamma = \Lambda_{\bullet\beta}^\gamma a^\beta$, где $\Lambda_{\bullet\beta}^\gamma$ — это матрица линейного преобразований координат группы, обратная матрице линейного преобразования базиса в координатном пространстве, а закон линейного преобразования ковектора Γ_β как $\Gamma'_\beta = (\Lambda^{-1})_{\bullet\beta}^\gamma \Gamma_\gamma$. Поэтому, если в качестве линейного преобразования матрицей Λ^{-1} в этих формулах преобразования ковектора подставить линейное преобразование, которое возникает в присоединенном представлении при вычислении коммутатора, т.е. $\Lambda^{-1} \mapsto \text{ad } \Gamma_\alpha$, то запись (I.2.8) становится естественной: она повторяет общее правило записи линейного преобразования координат ковектора в частном случае, когда линейное преобразование — это действие коммутатора.

Ясно, что по определению присоединенного представления произведение матриц как преобразования в пространстве генераторов сводится к виду

$$(\text{ad}\Gamma_\alpha \cdot \text{ad}\Gamma_\beta)_{\bullet\gamma}^\nu \Gamma_\nu = (\text{ad}\Gamma_\alpha)_{\bullet\mu}^\nu (\text{ad}\Gamma_\beta)_{\bullet\gamma}^\mu \Gamma_\nu = -f_{\alpha\mu}^\nu f_{\beta\gamma}^\mu \Gamma_\nu,$$

и с учетом

$$[\Gamma_\beta, \Gamma_\gamma] = i f_{\beta\gamma}^\mu \Gamma_\mu, \quad [\Gamma_\alpha, \Gamma_\mu] = i f_{\alpha\mu}^\nu \Gamma_\nu$$

находим, что

$$(\text{ad}\Gamma_\alpha \cdot \text{ad}\Gamma_\beta)_{\bullet\gamma}^\nu \Gamma_\nu = [\Gamma_\alpha, [\Gamma_\beta, \Gamma_\gamma]]. \quad (\text{I.2.10})$$

Точно также, переобозначая индексы $\alpha \leftrightarrow \beta$, получаем

$$(\text{ad}\Gamma_\beta \cdot \text{ad}\Gamma_\alpha)_{\bullet\gamma}^\nu \Gamma_\nu = [\Gamma_\beta, [\Gamma_\alpha, \Gamma_\gamma]] = -[\Gamma_\beta, [\Gamma_\gamma, \Gamma_\alpha]],$$

где мы учли, что коммутатор антисимметричен относительно перестановки матриц. Тогда найдем действие коммутатора двух линейных преобразований в присоединенном представлении

$$(\text{ad}\Gamma_\alpha \cdot \text{ad}\Gamma_\beta)_{\bullet\gamma}^\nu \Gamma_\nu - (\text{ad}\Gamma_\beta \cdot \text{ad}\Gamma_\alpha)_{\bullet\gamma}^\nu \Gamma_\nu = [\Gamma_\alpha, [\Gamma_\beta, \Gamma_\gamma]] + [\Gamma_\beta, [\Gamma_\gamma, \Gamma_\alpha]],$$

что в силу тождеств Якоби

$$[\Gamma_\alpha, [\Gamma_\beta, \Gamma_\gamma]] + [\Gamma_\beta, [\Gamma_\gamma, \Gamma_\alpha]] + [\Gamma_\gamma, [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]] = 0,$$

сводится к

$$-[\Gamma_\gamma, [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]] = [[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta], \Gamma_\gamma] = i f_{\alpha\beta}^\mu [\Gamma_\mu, \Gamma_\gamma] = i f_{\alpha\beta}^\mu (i f_{\mu\gamma}^\nu) \Gamma_\nu = i f_{\alpha\beta}^\mu (\text{ad}\Gamma_\mu)_{\bullet\gamma}^\nu \Gamma_\nu.$$

Значит, мы установили, что

$$(\text{ad}\Gamma_\alpha \cdot \text{ad}\Gamma_\beta)_{\bullet\gamma}^\nu \Gamma_\nu - (\text{ad}\Gamma_\beta \cdot \text{ad}\Gamma_\alpha)_{\bullet\gamma}^\nu \Gamma_\nu = i f_{\alpha\beta}^\mu (\text{ad}\Gamma_\mu)_{\bullet\gamma}^\nu \Gamma_\nu,$$

и в присоединенном представлении действительно имеет место необходимое выражение для коммутатора матриц генераторов

$$[\text{ad}\Gamma_\alpha, \text{ad}\Gamma_\beta] = i f_{\alpha\beta}^\mu \text{ad}\Gamma_\mu. \quad (\text{I.2.11})$$

Это соотношение — квадратичное условие на структурные константы группы, так как его матричная запись дает

$$i f_{\alpha\mu}^\nu i f_{\beta\lambda}^\mu - i f_{\beta\mu}^\nu i f_{\alpha\lambda}^\mu = i f_{\alpha\beta}^\mu i f_{\mu\lambda}^\nu. \quad (\text{I.2.12})$$

Свернув (I.2.12) с Γ_ν , перепишем это тождество в терминах коммутаторов,

$$[\Gamma_\alpha, [\Gamma_\beta, \Gamma_\lambda]] - [\Gamma_\beta, [\Gamma_\alpha, \Gamma_\lambda]] = [[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta], \Gamma_\lambda],$$

что, пользуясь антисимметрией коммутатора, можно привести к тождеству Якоби (I.2.7),

$$[\Gamma_\alpha, [\Gamma_\beta, \Gamma_\lambda]] + [\Gamma_\beta, [\Gamma_\lambda, \Gamma_\alpha]] + [\Gamma_\lambda, [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]] = 0.$$

Напомним (см. Главу 1, § 1, стр. 14), что тождество Якоби является следствием ассоциативности групповой композиции. Кроме того, тождеством Якоби мы пользовались, когда выводили матричную форму коммутатора генераторов алгебры Ли в присоединенном представлении (I.2.11).

Задача 7. Вычислите размерность присоединенного представления специальной ортогональной группы $SO(N)$.

Решение. Количество углов поворота задается числом плоскостей, в которых эти повороты осуществляются, т.е. неупорядоченной выборкой двух элементов из N ,

$$N_G = \dim SO(N) = C_N^2 = \frac{1}{2} N(N-1).$$

Задача 8. Вычислите размерность присоединенного представления специальной унитарной группы $SU(N)$.

Решение. Квадратные $N \times N$ -матрицы имеют N^2 комплекснозначных элементов, т.е. $2N^2$ вещественных параметров. Унитарные матрицы U удовлетворяют условию

$$U^\dagger U = \mathbb{1},$$

откуда сразу заключаем, что $\det U^\dagger \cdot \det U = 1$, а так как

$$\det U^\dagger = (\det U^T)^* = (\det U)^*,$$

то $|\det U| = 1$. Специальное условие

$$\det U = 1$$

фиксирует фазу комплекснозначного детерминанта, т.е. уменьшает число независимых параметров на 1.

Оператор $U^\dagger U$ является эрмитово самосопряженным,

$$(U^\dagger U)^\dagger = U^\dagger U,$$

и следовательно, у этой матрицы на диагонали могут быть только вещественные числа, в данном случае равные 1 в силу унитарности матриц, что накладывает еще N вещественных условий на параметры унитарной матрицы U . Недиагональные элементы произведения $U^\dagger U$ могут быть комплексными, но в силу эрмитовости $U^\dagger U$ элементы этого произведения ниже диагонали комплексно сопряжены элементам выше диагонали: $(U^\dagger U)_{mn} = (U^\dagger U)_{nm}^*$. Число элементов выше диагонали равно сумме арифметической прогрессии

$$\sum_{k=1}^N (N - k) = \frac{1}{2} N(N - 1).$$

По условию унитарности эти комплексные числа равны нулю, что задает еще $N(N - 1)$ вещественных условий. В итоге, число независимых вещественных параметров в группе $SU(N)$

$$N_G = \dim SU(N) = 2N^2 - 1 - N - N(N - 1) = N^2 - 1.$$

2.2 Метрика Киллинга и критерий Картана

Разделение преобразований базиса в пространстве состояний присоединенного представления и преобразований генераторов под воздействием преобразований параметров группы Ли, след произведения двух генераторов.

Матрицы генераторов в присоединенном представлении позволяют определить инвариант — метрику Киллинга, симметричный по индексам след произведения матриц, который не меняется при линейных обратимых преобразованиях базиса векторного пространства генераторов²¹,

$$g_{\alpha\beta} \equiv \text{tr}(\text{ad}\Gamma_\alpha \cdot \text{ad}\Gamma_\beta) = (\text{ad}\Gamma_\alpha)_\bullet^\gamma (\text{ad}\Gamma_\beta)_\bullet^\mu = -f_{\alpha\mu}^\gamma f_{\beta\gamma}^\mu. \quad (\text{I.2.14})$$

В самом деле, в векторном пространстве представления, которое мы в дальнейшем часто называем пространством состояний, отождествляя его с пространством квантовых состояний, возникающим при описании реальных систем в физике, можно преобразовывать базис, не меняя координаты в группе, т.е. оставляя прежний базис в касательном пространстве. Например, в группе поворотов 3-мерных векторов евклидова пространства r три угла поворота вокруг трех ортогональных декартовых осей задают 3 генератора — матрицы s_x , s_y и s_z , которые являются матрицами 3×3 , имеющими вполне определенный вид в случае преобразований векторов координат r , так что этот вид матриц однозначно задан структурными константами группы поворотов, когда выбраны декартовы координаты. Однако при рассмотрении представлений со спином $s = 1$, отличных от векторного пространства декартовых координат, выбор базиса представления может быть разным: стандартный ортонормированный базис состояний $|s, m_s\rangle$, который характеризуется заданным значением проекции спина на ось z , равным m_s , для $s = 1$ это базис $|1, m_s\rangle$, где $m_s \in \{+1, 0, 1\}$. Указанный базис отличается от декартова базиса и задается собственными векторами эрмитово самосопряженной матрицы s_z . Однако допустим и такой базис квантовых состояний, который задается собственными векторами эрмитово самосопряженной матрицы s_x , например.

²¹При дальнейшем рассмотрении представлений алгебры Ли станет ясно, что векторное пространство представления — это конечномерное пространство состояний с ортонормированным базисом, который задается общими собственными векторами попарно коммутирующих операторов из набора наблюдаемых, включающих в себя эрмитово генераторы. Размерность пространства присоединенного представления задается числом непрерывных параметров (координат) группы Ли. В пространстве представления можно совершать обратимые преобразования базиса, и именно относительно таких замен базиса в пространстве представления метрика Киллинга инвариантна. Другой вопрос — обратимые преобразования координат в группе, например, в окрестности единицы: это преобразования векторов координат в касательном пространстве. Относительно обратимых преобразований векторов координат метрика Киллинга — ковариантный тензор второго ранга. К примеру, если в координатах возле единицы в присоединенном представлении ввести $\Gamma_a = (\text{ad}\Gamma_\alpha)a^\alpha$ и $\Gamma_b = (\text{ad}\Gamma_\beta)b^\beta$, то можно рассмотреть величину

$$\text{tr}(\Gamma_a \Gamma_b) = a^\alpha b^\beta \text{tr}(\text{ad}\Gamma_\alpha \cdot \text{ad}\Gamma_\beta) = a^\alpha b^\beta g_{\alpha\beta}, \quad (\text{I.2.13})$$

которая инвариантна относительно замены базиса координат, а значит, $g_{\alpha\beta}$ — это ковариантный тензор второго ранга на векторах координат в касательном пространстве. Согласно (I.2.13) метрика Киллинга задает скалярное произведение векторов в касательном пространстве.

Поэтому ясно, что при заданных параметрах группы – углах поворотов в декартовых координатах – преобразования базиса в представлении изменяет вид матриц генераторов, не меняя их определения как производных операторов поворота по одному из углов.

Итак, возвращаясь от примера с группой поворотов к общему изложению, констатируем, что при рассмотрении векторов в пространстве присоединенного представления

$$\mathbf{B} = B_\nu \mathbf{h}^\nu,$$

где \mathbf{h}^ν – это N_G базисных векторов, а B_ν – компоненты вектора в этом базисе, и при введении преобразования базиса обратимой матрицей S

$$\mathbf{h}'^\mu = S_{\bullet\nu}^\mu \mathbf{h}^\nu \Leftrightarrow \mathbf{h} \mapsto S \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h}',$$

имеют место обратимые преобразования как компонент вектора

$$B_\nu \mapsto B'_\mu = (S^{-1})_{\bullet\mu}^\nu B_\nu,$$

так и матриц линейных преобразований компонент векторов присоединенного представления,

$$\text{ad}\Gamma_\alpha \mapsto S \cdot \text{ad}\Gamma_\alpha \cdot S^{-1} \Leftrightarrow (\text{ad}\Gamma_\alpha)_{\bullet\nu}^\mu \mapsto S_{\bullet\mu'}^\mu \cdot (\text{ad}\Gamma_\alpha)_{\bullet\nu'}^{\mu'} \cdot (S^{-1})_{\bullet\nu'}^\nu \quad (\text{I.2.15})$$

где $S = N_G \times N_G$ -матрица преобразования базиса в пространстве состояний. Ясно, что такие преобразования оставляют инвариантным значение следа в (I.2.14), и поэтому величина (I.2.14) называется *инвариантной метрикой Киллинга*, играющей важнейшую роль в теории групп Ли, поскольку она, с одной стороны, определяет объект, инвариантный относительно преобразований базиса в пространстве представления, а с другой стороны, является тензором по отношению к обратимым преобразованиям координат группы в касательном пространстве. Метрика Киллинга задает геометрическую структуру, позволяющую оперировать с индексами тензоров в касательном пространстве, а значит, и с индексами именами генераторов преобразований в пространстве состояний. Для того, чтобы подчеркнуть эти свойства, повторим, что след произведения матриц является числом, на которое можно умножать матрицы генераторы по стандартным правилам умножения матриц на числа: коммутаторы матриц-генераторов $\text{ad}\Gamma_\alpha$ с произвольными числами b равны нулю,

$$[b, \text{ad}\Gamma_\alpha] \equiv b \cdot \text{ad}\Gamma_\alpha - \text{ad}\Gamma_\alpha \cdot b = 0,$$

так как результаты умножения матрицы на число справа и слева совпадают

$$\text{ad}\Gamma_\alpha \cdot b = b \cdot \text{ad}\Gamma_\alpha.$$

Поэтому и коммутатор матриц-генераторов с каждым элементом метрики Киллинга, который задан как число, равное следу двух матриц-генераторов, тождественно равен нулю,

$$[g_{\alpha\beta}, \text{ad}\Gamma_\gamma] = 0,$$

так как индексы элементов матрицы Киллинга суть имена чисел, а не матричные индексы на пространстве представления, являющегося линейной оболочкой базиса нормированных состояний. При этом, если метрика Киллинга, которая есть тензор с двумя ковариантными индексами относительно преобразований параметров группы Ли (а не базиса пространства представления!), невырождена, можно было бы определить обратную метрику $g^{\alpha\gamma}$, для которой $g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha$.

Мы будем полагать, во-первых, что метрика Киллинга как симметричная квадратная матрица $N_G \times N_G$ невырождена, а значит, имеет обратную, а во-вторых, положительно определена, т.е. все ее собственные значения положительны. Первое из условий отвечает *критерию Кардана полупростоты группы Ли*, а второе – *компактности группы*. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением алгебр Ли для полупростых компактных групп Ли.

■ **Критерий Кардана** о полупростых группах: если группа имеет инвариантную абелеву подгруппу, то метрика Киллинга вырождена, т.е. детерминант матрицы $g_{\alpha\beta}$ равен нулю, $\det \|g_{\alpha\beta}\| = 0$. И обратно, если метрика Киллинга вырождена, то группа имеет инвариантную абелеву подгруппу Ли, т.е. подгруппу, элементы которой задаются непрерывным подпространством координат группы Ли. Значит, для того, чтобы группа Ли была полупростой, необходимо и достаточно, чтобы метрика Киллинга была невырожденной.

Покажем, что наличие инвариантной абелевой подгруппы приводит к вырождению метрики Киллинга. Действительно, пусть \mathfrak{G}' абелева подгруппа. Значит, для ее элементов, координаты которых мы обозначаем символами со штрихом вблизи единицы (при $a', b' \rightarrow 0$), групповое умножение перестановочно и для билинейного преобразования в касательном пространстве $c(a', b')$ приводит к следующему соотношению:

$$g_{a'} \cdot g_{b'} = g_{b'} \cdot g_{a'} \Rightarrow c(a', b') = c(b', a') \Rightarrow c(a', b') - c(b', a') = 0 \Rightarrow [a', b'] = 0,$$

а значит, алгебра абелевой подгруппы коммутативна: ее генераторы коммутируют, так как они реализуют точное представление алгебры Ли,

$$[\Gamma_{\alpha'}, \Gamma_{\beta'}] = 0,$$

т.е. для представления группы $T(\mathfrak{G}) = G$ согласно (I.2.5)

$$[a', b'] = 0 \xrightarrow{T} \Gamma_{[a', b']} = \Gamma_\mu [a', b']^\mu = \Gamma_\mu f_{\alpha'\beta'}^\mu (a')^{\alpha'} (b')^{\beta'} = -i \Gamma_\mu (if_{\alpha'\beta'}^\mu) (a')^{\alpha'} (b')^{\beta'} = -i [\Gamma_{\alpha'}, \Gamma_{\beta'}] (a')^{\alpha'} (b')^{\beta'} = 0.$$

Следовательно, структурные константы с двумя нижними индексами, которые относятся к касательному пространству абелевой подгруппы, обращаются в нуль, как для координат в подгруппе (индексы со штрихом, например, γ'), так и для координат вне этой подгруппы (индексы с двумя штрихами, например, γ'')

$$f_{\alpha'\beta'}^\mu = 0 \Rightarrow f_{\alpha'\beta'}^{\gamma'} = 0, \quad f_{\alpha'\beta'}^{\gamma''} = 0. \quad (\text{I.2.16})$$

Пусть теперь \mathfrak{G}' — *инвариантная* подгруппа: см. определение в (I.1.2). Тогда внутренний автоморфизм ее элементов в окрестности единицы, когда элемент g_a лежит вне подгруппы²²,

$$g_a^{-1} \cdot (g_{c'} \cdot g_a) \stackrel{\text{tangent}}{=} g_a^{-1} \cdot g_a \cdot g_{c'} \cdot g_{[c', a]} = g_{c'} \cdot g_{[c', a]}$$

также принадлежит этой абелевой подгруппе, т.е. с учетом перехода от элементов группы Ли к элементам алгебры Ли

$$g_{c'} \cdot g_{[c', a]} = g_{b'} \Rightarrow g_{[c', a]} = g_{c'}^{-1} \cdot g_{b'} = g_{b'} \Rightarrow \tilde{b}' = [c', a] = f_{\alpha'\nu} (c')^{\alpha'} a^\nu. \quad (\text{I.2.17})$$

Подчеркнем, что в последнем выражении индекс ν может относиться как к касательному пространству инвариантной подгруппы, так и к касательному пространству вне этой подгруппы, что согласуется с проведенным выше рассмотрением абелевой подгруппы в (I.2.16), когда еще и $f_{\alpha'\beta'}^\mu = 0$.

В математической литературе алгебры и группы рассматриваются по отдельности, так что аналогом инвариантной подгруппы Ли является понятие инвариантной подалгебры Ли \mathfrak{A}' в алгебре \mathfrak{A} , которое также соответствует понятию идеала \mathfrak{A}' , а именно, \mathfrak{A}' — идеал, если $\forall c' \in \mathfrak{A}', a \in \mathfrak{A}$ скобка Ли $[c', a] = -[a, c'] = b' \in \mathfrak{A}'$.

Итак, инвариантность подгруппы согласно (I.2.17) означает, что подалгебра инвариантной подгруппы является идеалом в алгебре Ли, и

$$f_{\alpha'\nu}^{\gamma''} = 0. \quad (\text{I.2.18})$$

Тогда в метрике Киллинга блок с индексами абелевой инвариантной подгруппы обращается в нуль $g_{\alpha'\beta'} = 0$, так как согласно определению элементов метрики Киллинга (I.2.14)

$$g_{\alpha'\beta'} = -f_{\alpha'\mu}^\nu f_{\beta'\nu}^\mu,$$

но индекс ν в константах $f_{\alpha'\mu}^\nu$, если эти константы отличны от нуля, согласно (I.2.18) может принимать только штрихованные значения γ' , а индекс μ в константах $f_{\beta'\nu}^\mu$ точно также только штрихованные значения ι' , а значит,

$$g_{\alpha'\beta'} = -f_{\alpha'\mu}^\nu f_{\beta'\nu}^\mu = -f_{\alpha'\iota'}^{\gamma'} f_{\beta'\gamma'}^{\iota'},$$

но $f_{\alpha'\iota'}^{\gamma'} = 0$ и $f_{\beta'\gamma'}^{\iota'} = 0$ в силу того, что подгруппа абелева и имеет место (I.2.16). То же верно и для недиагональных элементов со смешанными индексами, $g_{\alpha'\beta''} = 0$, так как согласно определению элементов метрики Киллинга (I.2.14)

$$g_{\alpha'\beta''} = -f_{\alpha'\mu}^\nu f_{\beta''\nu}^\mu,$$

но индекс ν в константах $f_{\alpha'\mu}^\nu$, если эти константы отличны от нуля, согласно (I.2.18) может принимать только штрихованные значения γ' , а отсюда следует, что индекс μ в константах $f_{\beta''\nu}^\mu$ принимает только штрихованные значения ι' , а значит,

$$g_{\alpha'\beta''} = -f_{\alpha'\mu}^\nu f_{\beta''\nu}^\mu = -f_{\alpha'\iota'}^{\gamma'} f_{\beta''\gamma'}^{\iota'},$$

но $f_{\beta''\gamma'}^{\iota'} = 0$ в силу абелевости подгруппы. Итак, в матрице метрики есть хотя бы один нулевой столбец или строка $g_{\alpha'\mu} = 0$ в силу симметричности метрики по перестановке индексов. Это значит, что ее детерминант обращается в нуль.

Верно и обратное утверждение²³, которое дает необходимое условие полупростоты группы: если детерминант $\det \|g_{\alpha\beta}\| = 0$ обращается в нуль, то алгебра содержит нетривиальный абелев идеал, а значит, группа не является полупростой, т.е. невырожденность метрики Киллинга является необходимой для полупростоты группы. В этом случае ранг матрицы Киллинга $r < N_G$, и после линейных преобразований можно обратить в нуль $N_G - r$

²²Если элемент внутреннего автоморфизма g_a принадлежит подгруппе, то образ автоморфизма принадлежит подгруппе в силу самого понятия подгруппы, и утверждение об образе такого автоморфизма становится элементарным, и мы этот случай уже рассмотрели чуть выше.

²³Читатель может самостоятельно разобрать доказательство этого неочевидного факта с помощью математической литературы, ссылки на которую имеются в [5, 8].

столбцов и симметричных им строк²⁴ в метрике Киллинга. Отсюда можно показать, что имеются $N_G - r$ генераторов, которые образуют подалгебру инвариантной подгруппы²⁵, т.е. идеал, с нулевой метрикой Киллинга. Факт нулевой метрики Киллинга в идеале \mathfrak{A}' позволяет установить так называемую разрешимость этой инвариантной подалгебры: образ скобки Ли двух произвольных элементов подалгебры сам является подалгеброй меньшей размерности \mathfrak{A}'' или, как пишут $[\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'] = \mathfrak{A}''$, причем эту редукцию подалгебр в силу нулевой метрики Киллинга в подалгебре \mathfrak{A}' можно продолжить до тех пор, пока не будет достигнут последний шаг, при котором $[\mathfrak{A}'^{\dots}, \mathfrak{A}'^{\dots}] = 0$, а значит, на этом шаге редукции алгебр²⁶ возникает как раз абелева подалгебра \mathfrak{A}'^{\dots} , т.е. в терминах элементов группы имеется абелева инвариантная подгруппа.

Алгебра вложений $\mathfrak{A}' \supset \mathfrak{A}'' = [\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'] \supset \dots \supset \mathfrak{A}'^{\dots}$ с $[\mathfrak{A}'^{\dots}, \mathfrak{A}'^{\dots}] = 0$ называется нильпотентной, так как элементы этих алгебр реализуются в виде верхнетреугольных матриц. Нильпотентность идеала \mathfrak{A}' в случае нулевой метрики Киллинга доказывается в математических курсах. При этом, более общий взгляд на алгебры Ли, чем рассмотрение алгебр с обратимой метрикой Киллинга, которому мы следуем в этой книге, предполагает введение разбиения Фиттинга всех генераторов алгебры Ли \mathfrak{A} на два класса: нильпотентные генераторы и их корневое дополнение, понятие о котором будет введено нами позже. Заинтересованного читателя мы отсылаем к разделу 2.4 Главы 2, §2, где мы сделали специальный комментарий по вопросу о разложении Фиттинга после описания корней присоединенного представления простой компактной группы Ли. ■

За счет линейных преобразований в касательном пространстве координат группы Ли, относительно которых метрика — это ковариантный тензор второго ранга, можно сначала преобразовать положительно определенную квадратичную форму Киллинга²⁷ к диагональному виду с положительными матричными элементами, а потом за счет смены масштаба групповых координат добиться того, чтобы метрика Киллинга оказалась бы пропорциональной единичной матрице²⁸, $g_{\alpha\beta} = \Omega^2 \delta_{\alpha\beta}$, $\Omega^2 > 0$.

Например, для группы поворотов структурные константы задаются тензором Леви-Чивиты,

$$f_{\alpha\beta}^\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma'} \delta^{\gamma'\gamma}, \quad (\text{I.2.19})$$

так что

$$(\text{ad } \Gamma_\alpha)^\gamma_\mu = i \epsilon_{\alpha\mu\gamma'} \delta^{\gamma'\gamma}, \quad (\text{I.2.20})$$

а метрика Киллинга согласно (I.2.14)

$$g_{\alpha\beta} = -f_{\alpha\mu}^\gamma f_{\beta\gamma}^\mu = -\epsilon_{\alpha\mu\gamma'} \delta^{\gamma'\gamma} \epsilon_{\beta\gamma\mu'} \delta^{\mu'\mu} = -\epsilon_{\alpha\mu\gamma} \epsilon_{\beta\gamma\mu} = \epsilon_{\alpha\mu\gamma} \epsilon_{\beta\mu\gamma} = 2\delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{I.2.21})$$

Метрика Киллинга позволяет опускать индексы, а обратная к ней поднимать их (если метрика — единичная матрица, которая совпадает со своей обратной матрицей, то нет отличия между верхними и нижними индексами). Вычислим, например,

$$\text{tr}([\text{ad } \Gamma_\alpha, \text{ad } \Gamma_\beta] \text{ad } \Gamma_\gamma) = i f_{\alpha\beta}^\mu \text{tr}(\text{ad } \Gamma_\mu \text{ad } \Gamma_\gamma) = i f_{\alpha\beta}^\mu g_{\mu\gamma} \equiv i f_{\alpha\beta\gamma}. \quad (\text{I.2.22})$$

Подчеркнем, что по договоренности в (I.2.22) опущенный с помощью метрики $g_{\mu\gamma}$ индекс μ структурных констант $f_{\alpha\beta}^\mu$ располагается последним среди нижних индексов, $f_{\alpha\beta\gamma}$. С другой стороны, пользуясь равенством

$$\text{ad } \Gamma_\alpha \text{ad } \Gamma_\beta \text{ad } \Gamma_\gamma = \text{ad } \Gamma_\alpha \text{ad } \Gamma_\gamma \text{ad } \Gamma_\beta + \text{ad } \Gamma_\alpha [\text{ad } \Gamma_\beta, \text{ad } \Gamma_\gamma],$$

выражением для коммутатора

$$[\text{ad } \Gamma_\beta, \text{ad } \Gamma_\gamma] = i f_{\beta\gamma}^\mu \text{ad } \Gamma_\mu$$

²⁴Столбец и строка симметричны, когда они пересекаются на диагонали матрицы.

²⁵Скалярное произведение любого элемента алгебры \mathfrak{A} на элемент подалгебры \mathfrak{A}' , образованной $n' = N_G - r$ генераторами, которые отвечают нулевым строкам и столбцам метрики Киллинга, равно нулю. В частности, и для любого коммутатора элементов алгебры

$$\text{tr}([\text{ad } \mathbf{x}, \text{ad } \mathbf{y}] \cdot \text{ad } \mathbf{a}') = 0, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{A}, \forall \mathbf{a}' \in \mathfrak{A}',$$

а так как справедливо равенство следов

$$\text{tr}([\text{ad } \mathbf{x}, \text{ad } \mathbf{y}] \cdot \text{ad } \mathbf{a}') = \text{tr}(\text{ad } \mathbf{x} \cdot [\text{ad } \mathbf{y}, \text{ad } \mathbf{a}']) = 0,$$

мы заключаем, что элемент алгебры $[\text{ad } \mathbf{y}, \text{ad } \mathbf{a}'] \in \mathfrak{A}'$, поскольку он ортогонален любому элементу алгебры Ли, а именно так и определялась подалгебра \mathfrak{A}' . Следовательно, \mathfrak{A}' — идеал. А идеал — это подалгебра инвариантной подгруппы Ли.

²⁶Этот шаг редукции может оказаться и первым, если $[\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'] = 0$, т.е., если исходный идеал абелев.

²⁷В математике формой Киллинга называют инвариант, построенный из метрики и двух контрант-векторов, $g_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta$.

²⁸Величину $\Omega \in \mathbb{R}$ называют масштабным или конформным фактором, а саму метрику конформно эквивалентной евклидовой метрике или просто конформно евклидовой метрикой.

и аналогичными преобразованиями для произведения $\text{ad}\Gamma_\alpha \text{ad}\Gamma_\gamma$, с учетом определения метрики Киллинга как следа произведения генераторов в присоединенном представлении (I.2.14), получим

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{ad}\Gamma_\alpha \text{ad}\Gamma_\beta \text{ad}\Gamma_\gamma) &= \text{tr}(\text{ad}\Gamma_\alpha \text{ad}\Gamma_\gamma \text{ad}\Gamma_\beta) + \text{tr}(\text{ad}\Gamma_\alpha [\text{ad}\Gamma_\beta, \text{ad}\Gamma_\gamma]) = \\ &= \text{tr}(\text{ad}\Gamma_\alpha \text{ad}\Gamma_\gamma \text{ad}\Gamma_\beta) + i f_{\beta\gamma}^\mu \text{tr}(\text{ad}\Gamma_\alpha \text{ad}\Gamma_\mu) = \\ &= \text{tr}(\text{ad}\Gamma_\gamma \text{ad}\Gamma_\alpha \text{ad}\Gamma_\beta) + i f_{\alpha\gamma}^\mu \text{tr}(\text{ad}\Gamma_\mu \text{ad}\Gamma_\beta) + i f_{\beta\gamma}^\mu g_{\alpha\mu} = \\ &= \text{tr}(\text{ad}\Gamma_\gamma \text{ad}\Gamma_\alpha \text{ad}\Gamma_\beta) + i f_{\alpha\gamma}^\mu g_{\mu\beta} + i f_{\beta\gamma}^\mu g_{\alpha\mu}. \end{aligned}$$

Учитывая равенство двух следов в начале и в конце цепочки этих равенств (порядок следования матриц в их произведении при взятии следа можно изменять циклически, откуда следует также симметричность метрики Киллинга)

$$\text{tr}(\text{ad}\Gamma_\alpha \text{ad}\Gamma_\beta \text{ad}\Gamma_\gamma) = \text{tr}(\text{ad}\Gamma_\gamma \text{ad}\Gamma_\alpha \text{ad}\Gamma_\beta),$$

находим соотношение на структурные константы

$$f_{\alpha\gamma}^\mu g_{\mu\beta} + f_{\beta\gamma}^\mu g_{\mu\alpha} = 0 \Rightarrow f_{\alpha\gamma\beta} + f_{\beta\gamma\alpha} = 0, \quad f_{\alpha\gamma\beta} = -f_{\beta\gamma\alpha}, \quad -f_{\gamma\alpha\beta} = f_{\gamma\beta\alpha}.$$

В итоге, структурные константы с индексами одного типа, только всеми нижними или только всеми верхними, являются полностью антисимметричными: они меняют знак при перестановке любой пары индексов. Если метрика Киллинга группы невырождена и положительно определена, а параметры группы выбраны так, что метрика Киллинга диагональна, а еще лучше, пропорциональна символу Кронекера, то полностью антисимметричны и структурные константы сами по себе (имеются в виду $f_{\alpha\beta}^\gamma$ с одним верхним индексом, например, $f_{(12)}^{(3)} = -f_{(13)}^{(2)}$), как мы видели это на примере структурных констант группы поворотов.

Подчеркнем теперь, что при выборе параметров группы такими, что метрика Киллинга становится единичной матрицей отличие между нижними и верхними индексами исчезает, а в общем случае с помощью метрики можно провести операцию опускания индексов, т.е. переход от контравекторных величин к ковекторным, чтобы определить матрицы генераторов в присоединенном представлении с нижними индексами

$$(\text{ad}\Gamma_\alpha)_\bullet^\mu g_{\mu\gamma} \equiv (\text{ad}\Gamma_\alpha)_{\gamma\beta} = i f_{\alpha\beta}^\mu g_{\mu\gamma} = i f_{\gamma\alpha\beta}.$$

Отметим, что в последней формуле при опускании верхнего индекса матрицы в присоединенном представлении мы записали опущенный матричный индекс первым, чтобы сохранить порядок следования номеров в столбцах μ и в строках β , но в силу антисимметричности структурных констант с индексами одного типа по перестановке любой пары индексов две последовательных перестановки не изменяют значения структурных констант,

$$f_{\gamma\alpha\beta} = f_{\alpha\beta\gamma},$$

а значит, опущенный индекс можно записать последним, а не первым, как мы это делали в своих построениях согласно (I.2.22).

Для нас существенным результатом является тот факт, что структурные константы $f_{\alpha\beta\gamma}$ являются эрмитово самосопряженными относительно любой пары матричных индексов: транспонирование — перестановка порядка следования матричных индексов — дает знак минус, а комплексное сопряжение переводит мнимую единицу в $i^* = -i$. Заметим при этом, что структурные константы группы Ли являются вещественными, потому что они построены из преобразований вещественных координат в вещественные координаты, так что

$$\{(\text{ad}\Gamma_\alpha)_{\beta\gamma}\}^\dagger = i^* f_{\gamma\alpha\beta} = i f_{\beta\alpha\gamma} = (\text{ad}\Gamma_\alpha)_{\beta\gamma}. \quad (\text{I.2.23})$$

Можно убедиться, что для метрики Киллинга, пропорциональной евклидовой метрике, генераторы алгебры Ли в присоединенном представлении являются эрмитово самосопряженными.

Задача 9. Покажите, что для метрики, которая является конформно евклидовой (см. определение в сноске 28 на стр. 22), $g_{\mu\gamma} = \Omega^2 \delta_{\mu\gamma}$, эрмитовость матриц-генераторов имеет стандартный вид равенства с учетом действия на матрицу композиции транспонирования и комплексного сопряжения,

$$(\text{ad}\Gamma_\alpha)_\bullet^\mu = \left((\text{ad}\Gamma_\alpha)_\bullet^\beta \right)^*.$$

Так как мы рассматриваем точные представления алгебры Ли, то изоморфизм матриц генераторов в присоединенном представлении на матрицы генераторов в другом представлении означает, что и в любом другом точном представлении матрицы генераторов полуупростой компактной алгебры Ли тоже эрмитовы.

Антисимметричность структурных констант гарантирует, что след генератора полупростой группы Ли обращается в нуль,

$$\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\Gamma_\alpha) = i f_{\alpha\mu}^\mu = i f_{\alpha\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{I.2.24})$$

где мы учли, что свертка антисимметричного по перестановкам немых индексов $\mu \leftrightarrow \nu$ символа $f_{\alpha\mu\nu} = -f_{\alpha\nu\mu}$ с симметричным тензором обратной метрики $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$ тождественно равна нулю. Таким образом, сумма вещественных собственных значений эрмитова самосопряженного генератора с учетом вырождения каждого собственного значения²⁹ равна нулю. В самом деле, так как генератор — это эрмитова матрица, можно в пространстве состояний (представления) перейти к базису собственных векторов этой матрицы. Тогда в базисе своих собственных векторов матрица диагональна, и на диагонали стоят её собственные значения, причем, каждое собственное значение встречается столько раз, сколько собственных векторов соответствует этому собственному значению (число этих собственных векторов называется кратностью вырождения собственного значения). Тогда сумма собственных значений для каждого квантового базисного состояния в пространстве представления есть след матрицы генератора.

С другой стороны, след матрицы, действующей на пространстве состояний, инвариантен относительно замены базиса состояний (I.2.15), так что вычисление следа в любом базисе как раз и дает сумму собственных значений.

Утверждение о равенстве нулю следа генератора справедливо в любом точном представлении, а не только в присоединенном. Для доказательства рассмотрим след произведения матриц в неприводимом представлении $T_R(\mathfrak{G})$, которое может отличаться от присоединенного представления ad ,

$$\mathrm{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta)_R = \mathrm{tr}(\Gamma_\beta \Gamma_\alpha)_R \Rightarrow \mathrm{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta - \Gamma_\beta \Gamma_\alpha)_R = 0,$$

откуда

$$\mathrm{tr}([\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta])_R = 0 \Rightarrow i f_{\alpha\beta}^\gamma \mathrm{tr}(\Gamma_\gamma)_R = 0, \quad \forall \alpha, \beta.$$

Пусть существует отличный от нуля ковектор $b_\gamma = \mathrm{tr}(\Gamma_\gamma)$, который в силу своего определения не меняется при замене базиса векторного пространства представления, аналогичной описанной в формулах (I.2.15). Это значит, что этот вектор инвариантен относительно замен базиса в пространстве состояний, в котором действуют матрицы генераторов, так как при такой замене базиса с помощью обратимой матрицы S след остается неизменным: $\mathrm{tr}(S \Gamma S^{-1})_R = \mathrm{tr}(\Gamma)_R$. Выведенное нами выше условие равенства нулю следа коммутатора генераторов в любом точном представлении записывается в виде

$$i f_{\alpha\beta}^\gamma \mathrm{tr}(\Gamma_\gamma)_R = 0, \quad \forall \alpha, \beta \Rightarrow f_{\alpha\beta}^\gamma b_\gamma = 0, \quad \forall \alpha, \beta.$$

Значит, при выборе параметров (координат) группы для простоты записи таким образом, чтобы метрика Киллинга была равной символу Кронекера, когда верхние и нижние индексы по своим свойствам идентичны, генератор $\Gamma_b = \Gamma_\gamma b_\gamma$ коммутирует с любым генератором алгебры Ли,

$$[\Gamma_b, \Gamma_\alpha] = i f_{\gamma\alpha\beta} \Gamma_\beta b_\gamma = 0, \quad \forall \alpha. \quad (\text{I.2.25})$$

Отсюда заключаем, что Γ_b — это генератор в инвариантной абелевой подгруппе, так как он коммутирует со всеми другими генераторами группы, что не может иметь места в полупростой компактной группе, где метрика Киллинга может быть преобразована к евклидовой. Поэтому

$$\mathrm{tr}(\Gamma_\gamma)_R = 0. \quad (\text{I.2.26})$$

Итак, сумма собственных значений генератора полупростой компактной группы Ли равна нулю в любом представлении. С точки зрения физики собственные значения такого генератора — это значения наблюдаемой физической величины в ее собственных квантовых состояниях для системы, которая описывается представлением R группы Ли. Раз эти собственные значения принадлежат вполне определенному дискретному множеству как для заданного представления, так и для других представлений, говорят, что наблюдаемая величина квантуется, а сумма квантов наблюдаемой величины в каждом представлении физической системы равна нулю. Это свойство нетривиально и очень важно в физических моделях и теориях. Например, система может допускать описание своих свойств как симметрии в рамках полупростой компактной группы, только если сумма зарядов различных состояний системы равна нулю, когда эти заряды трактуются как собственные значения некоторой наблюдаемой³⁰.

Соотношение (I.2.25) можно сформулировать и в терминах группового умножения: композиция элементов группы в координатах касательного пространства с одним из элементов с координатой

$$b^\gamma = g^{\gamma\gamma'} \mathrm{tr}(\Gamma_{\gamma'})_R \quad (\text{I.2.27})$$

²⁹Суммирование ведется по базису состояний представления.

³⁰Пример подобной гипотезы мы рассмотрим при изучении спинорных частиц первого поколения Стандартной модели в Главе 2, §5.

выражается через композицию трех элементов, координата одно из которых задается как раз скобкой Ли с выделенным особым вектором \mathbf{b} так, что

$$\begin{aligned} g_b \cdot g_a & \stackrel{\text{tangent}}{=} g_a \cdot g_b \cdot g_{[b,a]}, \\ [\mathbf{b}, \mathbf{a}] &= b^\gamma a^\alpha f_{\gamma\alpha} = -i b^\gamma a^\alpha i f_{\gamma\alpha} = -i b^\gamma a^\alpha [\Gamma_\gamma, \Gamma_\alpha] = -i a^\alpha [\Gamma_b, \Gamma_\alpha] = 0 \Rightarrow \\ g_{[b,a]} &= e \Rightarrow g_b \cdot g_a = g_a \cdot g_b, \end{aligned}$$

т.е. все элементы группы перестановочны с g_b , а значит, и со всеми элементами с координатами вдоль направления \mathbf{b} , что и определяет инвариантную абелеву подгруппу Ли с координатами $\mathbf{b}(c) = c \cdot \mathbf{b}$, что недопустимо для полупростых компактных групп Ли.

В этих построениях мы опирались на равенства в окрестности групповой единицы, т.е. для касательного пространства координат. Для того, чтобы делать точные утверждения для элементов вне рамок бесконечно малых преобразований, необходимо ввести экспоненциальное представление групповых элементов, построенное по представлению алгебры Ли. Эта конструкция подробно описывается на стр. 46. В итоге, в полупростой компактной группе инвариантный относительно замены базиса в представлении вектор (согласно связи (I.2.27) этот вектор взаимнооднозначно связан со следом генератора³¹) всегда равен нулю в любом точном представлении. Заметим, что след любой линейной суперпозиции генераторов также обращается в нуль.

Другими словами, в полупростой алгебре Ли нет инвариантных не равных нулю векторов в касательном пространстве: вектор \mathbf{b} касательного пространства возле единицы группы является инвариантным, если для любого ненулевого вектора \mathbf{a} из касательного пространства скобка Ли $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \equiv 0$, т.е. действие внутреннего автоморфизма $g_a \cdot g \cdot g_a^{-1}$ на элемент группы g_b с координатами, равными инвариантному вектору, оставляет g_b неизменным. Отсюда сразу следовало бы, что в группе существует однопараметрическая абелева инвариантная подгруппа, что противоречит условию рассмотрения полупростых групп.

2.3 Операторы Казимира

Роль метрики Киллинга является важной и при построении однородного по генераторам квадратичного оператора Казимира. Операторы Казимира степени k мы определяем как однородные полиномы по генераторам алгебры Ли со степенью однородности k и с такими коэффициентами, что оператор Казимира коммутирует с любым из генераторов алгебры Ли. Такие операторы, отличные от нуля, существуют для полупростых компактных групп Ли: они могут быть явно построены по схеме, схожей с той, что мы сейчас опишем на примере квадратичного оператора Казимира. В силу коммутативности со всеми генераторами и эрмитовости квадратичный оператор Казимира — физическая величина из полного набора наблюдаемых квантовой системы. Итак, покажем, что однородный оператор³² второй степени

$$\hat{C}_2 = g^{\alpha\beta} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta = g_{\alpha'\beta'} g^{\alpha\alpha'} g^{\beta\beta'} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta = g_{\alpha'\beta'} \Gamma^{\alpha'} \Gamma^{\beta'} \quad (\text{I.2.28})$$

коммутирует с любым из генераторов групповых преобразований, т.е.

$$[\Gamma_\gamma, \hat{C}_2] = 0. \quad (\text{I.2.29})$$

Задача 10. Докажите, что коммутатор

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]. \quad (\text{I.2.30})$$

Решение. Раскроем определение коммутатора

$$[A, BC] = ABC - BCA$$

и добавим справа специально подобранный нуль

$$0 = -BAC + BAC,$$

так что

$$[A, BC] = ABC - BCA - BAC + BAC = (AB - BA)C + B(AC - CA) = [A, B]C + B[A, C].$$

³¹ Если метрика не является конформно евклидовой или вырождена, то контравариантный вектор b^γ может оказаться либо равным нулю, либо вообще неопределен, даже если след генератора отличен от нуля, и нет взаимной однозначности соответствия между ковектором и контревектором в терминах операции подникания и опускания индексов метрикой.

³² Генераторы с верхними координатными индексами получаются с помощью обратной метрики: $\Gamma^\alpha = g^{\alpha\alpha'} \Gamma_{\alpha'}$.

Пользуясь формулой (I.2.30), вычислим коммутатор генератора с квадратичным оператором Казимира и воспользуемся метрикой для опускания индексов, а также обратной метрикой для поднимания индексов так, что

$$\begin{aligned} [\Gamma_\gamma, \hat{C}_2] &= g^{\alpha\beta} [\Gamma_\gamma, \Gamma_\alpha \Gamma_\beta] = g^{\alpha\beta} ([\Gamma_\gamma, \Gamma_\alpha] \Gamma_\beta + \Gamma_\alpha [\Gamma_\gamma, \Gamma_\beta]) = g^{\alpha\beta} (if_{\gamma\alpha}^\mu \Gamma_\mu \Gamma_\beta + if_{\gamma\beta}^\mu \Gamma_\alpha \Gamma_\mu) = \\ &= g^{\alpha\beta} (if_{\gamma\alpha\mu} \Gamma^\mu \Gamma_\beta + if_{\gamma\beta\mu} \Gamma_\alpha \Gamma^\mu) = if_{\gamma\alpha\mu} \Gamma^\mu \Gamma^\alpha + if_{\gamma\beta\mu} \Gamma^\beta \Gamma^\mu = if_{\gamma\alpha\mu} (\Gamma^\mu \Gamma^\alpha + \Gamma^\alpha \Gamma^\mu), \end{aligned} \quad (\text{I.2.31})$$

где в последнем равенстве мы заменили немой индекс β на немой индекс α . В итоге, получилась свертка симметричного по перестановкам немых индексов μ и α выражения $\Gamma^\mu \Gamma^\alpha + \Gamma^\alpha \Gamma^\mu$ с антисимметричными по перестановкам тех же немых индексов структурными константами $f_{\gamma\alpha\mu}$. Такая свертка тождественно равна нулю, и значит, построенный с помощью метрики Киллинга квадратичный оператор коммутирует с генераторами полупростой компактной группы Ли (I.2.29) и является, таким образом, оператором Казимира второй степени.

Для примера в группе поворотов $g_{\alpha\beta} = 2\delta_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta}$, и

$$\hat{C}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{j}^2,$$

т.е. с точностью до двойки квадратичный оператор Казимира — квадрат момента импульса.

Другие инвариантные величины — операторы Казимира высших степеней могут быть сконструированы аналогичным образом: необходимо построить с помощью следа k матриц генераторов в присоединенном представлении симметризованный³³ многокомпонентный следовый тензор³⁴ ранга k в присоединенном представлении

$$g_{\alpha_l \dots \alpha_k} = \mathcal{S}_{\text{sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \text{tr}(\text{ad}\Gamma_{\alpha_1} \dots \text{ad}\Gamma_{\alpha_k}) \quad (\text{I.2.32})$$

и соответствующий ему однородный по генераторам многочлен степени k

$$\hat{C}_k = g_{\alpha_l \dots \alpha_k} \Gamma^{\alpha_1} \dots \Gamma^{\alpha_k}. \quad (\text{I.2.33})$$

Так же, как и в случае квадратичного оператора, построенного с метрикой Киллинга, все операторы k -того порядка, построенные как однородные по генераторам алгебры Ли полиномы с помощью симметрических следовых тензоров ранга k , также коммутируют со всеми генераторами алгебры Ли³⁵, и, следовательно, они являются операторами Казимира. Более того, операторы Казимира коммутируют и между собой, поскольку составлены из генераторов, а любой из генераторов перестановчен с операторами Казимира. Тогда говорят, что линейные комбинации инвариантов Казимира составляют центр алгебры Ли³⁶. В центре алгебры Ли произвольный оператор Казимира, как станет понятно при дальнейшем изложении, выражается в виде полинома от ограниченного набора операторов Казимира. Этот ограниченный набор может включать в себя минимальное количество операторов Казимира, которые называются образующими центра алгебры Ли. Выбор образующих неоднозначен, но число образующих центра алгебры операторов Казимира оказывается равным рангу группы Ли. При таком видении центра алгебры Ли имеет смысл говорить о том, что образующие центра алгебры Ли — это независимые операторы Казимира, а операторы Казимира вне множества образующих центра алгебры Ли являются зависимыми инвариантами³⁷.

Например, в группе поворотов подстановка матриц генераторов в присоединенном представлении (I.2.20) в формулу для симметрического следового тензора ранга 3 согласно (I.2.32) приводит к выра-

³³Антисимметричный по какой-либо паре вклад тут же сводится к коммутатору, который выражается через линейную комбинацию генераторов, а значит, этот член выражается через величину g с меньшим числом индексов и не является независимым.

³⁴Операция $\mathcal{S}_{\text{sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}$ означает, что мы берем сумму следов от матричного произведения генераторов в присоединенном представлении при всех перестановках индексов генераторов, а затем делим эту сумму на число перестановок.

³⁵Мы не проводим доказательство этого утверждения, оставляя его читателю в качестве упражнения для самостоятельной работы.

³⁶Ясно, что чисто математически любой из генераторов алгебры можно переопределить, добавляя к нему произвольную линейную комбинацию операторов из центра алгебры. Это приведет к тому, что при вычислении коммутаторов подобных переопределенных генераторов в правой части наряду с суммой генераторов со структурными константами возникнут новые вклады с суммой по операторам центра алгебры, т.е. новый тип алгебры. Мы не углубляемся в подобные вопросы, потому что в физике генераторы построены из размерных величин в вполне определенным физическим смыслом, а их переопределение через величины другой размерности требует обоснования причин подобных преобразований. Например, в группе поворотов генераторы момента количества движения имеют вполне определенную размерность действия, а квадрат момента — квадрат действия, так что образование линейной комбинации генератора проекции момента с его квадратом, скорее всего, не имеет физического смысла.

³⁷Естественным обобщением описанных полиномиальных инвариантов в центре алгебры Ли являются функции от образующих центра алгебры, если эти функции рассматривать как сходящиеся ряды Тейлора по степеням образующих, причем эти ряды для представлений, пространства которых образованы линейными оболочками собственных состояний операторов Казимира, сводятся к числовым рядам Тейлора по степеням собственных значений операторов Казимира.

жению для следа трех генераторов

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{ad}\Gamma_{\alpha_1}\text{ad}\Gamma_{\alpha_2}\text{ad}\Gamma_{\alpha_3}) &= (\text{ad}\Gamma_{\alpha_1})_{\bullet\nu}^{\mu}(\text{ad}\Gamma_{\alpha_2})_{\bullet\lambda}^{\nu}(\text{ad}\Gamma_{\alpha_3})_{\bullet\mu}^{\lambda} = \\ &= i^3 (\epsilon_{\alpha_1\nu\mu'}\delta^{\mu'\mu})(\epsilon_{\alpha_2\lambda\nu'}\delta^{\nu'\nu})(\epsilon_{\alpha_3\mu\lambda'}\delta^{\lambda'\lambda}) = -i(\epsilon_{\alpha_1\nu\mu'}\delta^{\nu'\nu}\epsilon_{\alpha_2\lambda\nu'})(\delta^{\mu'\mu}\epsilon_{\alpha_3\mu\lambda'}\delta^{\lambda'\lambda}) = \\ &= i(\delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\mu'\lambda}-\delta_{\alpha_1\lambda}\delta_{\alpha_2\mu'})\delta^{\mu'\mu}\delta^{\lambda'\lambda}\epsilon_{\alpha_3\lambda\mu} = -i\epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \end{aligned}$$

так что симметризация полностью антисимметричного тензора Леви-Чивиты дает тождественный нуль, и кубический оператор Казимира равен нулю в отличие от квадратичного оператора Казимира, который задает квадрат момента количества движения.

Образующие центра алгебры Ли независимые операторы Казимира важны при изучении представлений алгебры Ли: собственные значения независимых операторов Казимира однозначно задают неприводимые представления, которые мы определим позже на стр. 75 как нетривиальные классы эквивалентности элементов пространства представления по отношению к групповым преобразованиям.

Ответ на вопрос о числе независимых инвариантов мы получим в ходе построения представлений групп Ли.

Задача 11. Докажите, что отличный от нуля след симметризованного произведения генераторов в точном неприводимом представлении $T_R(\mathfrak{G})$ пропорционален следу произведения тех же генераторов в присоединенном представлении полупростой алгебры Ли,

$$\mathcal{S}_{\text{Sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \text{tr}(\Gamma_{\alpha_1} \cdots \Gamma_{\alpha_k})_R = K_{\text{ad}}^R[k] \mathcal{S}_{\text{Sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \text{tr}(\text{ad}\Gamma_{\alpha_1} \cdots \text{ad}\Gamma_{\alpha_k}), \quad (\text{I.2.34})$$

где $K_{\text{ad}}^R[k]$ — постоянная, которая не зависит от ни от выбора координат в группе, ни от базиса состояний в представлении.

Решение. В точном представлении $T_R(\mathfrak{G})$ прообраз $\mathbb{1}_R$ — это единственный элемент группы \mathfrak{G} , равный единице \mathbf{e} , а отображение генераторов в генераторы присоединенного представления является изоморфизмом,

$$\Gamma_{\alpha_m} \leftrightarrow \text{ad}\Gamma_{\alpha_m}, \quad (\text{I.2.35})$$

так что все свойства произведения матриц генераторов и преобразования этого произведения при замене координат группы в двух представлениях совпадают. Отличаются только размерности представлений: \mathcal{D}_R и $\mathcal{D}_{\text{ad}} = N_G$.

По условию, отличный от нуля симметричный ковариантный тензор k -того ранга относительно преобразований координат группы в касательном пространстве

$$\mathcal{S}_{\text{Sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \text{tr}(\text{ad}\Gamma_{\alpha_1} \cdots \text{ad}\Gamma_{\alpha_k}) = g_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \quad (\text{I.2.36})$$

является инвариантным относительно замены базиса в векторном пространстве представления, и с его помощью задается инвариантный оператор Казимира k -того порядка, собственное значение которого, вообще говоря, зависит от представления,

$$\hat{C}_k^R = g_{\alpha_1 \dots \alpha_k} (\Gamma^{\alpha_1} \cdots \Gamma^{\alpha_k})_R, \quad C_k^{\text{ad}} = g_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \text{ad}\Gamma^{\alpha_1} \cdots \text{ad}\Gamma^{\alpha_k}. \quad (\text{I.2.37})$$

Для неприводимого представления оператор Казимира — это диагональная матрица в этом представлении, каждый элемент которой — собственное значение этого оператора в данном представлении:

$$\hat{C}_k^R = C_k^R \cdot \mathbb{1}_R, \quad \hat{C}_k^{\text{ad}} = C_k^{\text{ad}} \cdot \mathbb{1}_{\text{ad}}.$$

Мы рассматриваем случай, когда $C_k^{\text{ad}} \neq 0$.

Матрица

$$\mathcal{S}_{\text{Sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}(\Gamma_{\alpha_1} \cdots \Gamma_{\alpha_k})_R \quad (\text{I.2.38})$$

построена из эрмитовых матриц генераторов, а симметризация приводит к тому, что симметризованное произведение является эрмитовой матрицей: для композиции двух эрмитовых матриц это утверждение элементарно, и тогда по индукции умножение симметризованного эрмитова произведения матриц еще на одну эрмитову матрицу с учетом симметрии этого произведения по перестановке матриц опять дает эрмитову матрицу. Следовательно, эрмитова матрица (I.2.38) может быть разложена по базису из единичной матрицы и бесследовых эрмитовых матриц Λ^m с вещественными коэффициентами A_m^R ,

$$\mathcal{S}_{\text{Sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}(\Gamma_{\alpha_1} \cdots \Gamma_{\alpha_k})_R = Q_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^R \cdot \mathbb{1}_R + \sum (A_m^R)_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \Lambda^m.$$

И точно также для присоединенного представления

$$\mathcal{S}_{\text{Sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \text{ad}\Gamma_{\alpha_1} \cdots \text{ad}\Gamma_{\alpha_k} = \frac{1}{\mathcal{D}_{\text{ad}}} g_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \cdot \mathbb{1}_{\text{ad}} + \sum (A_m^{\text{ad}})_{\alpha_1 \dots \alpha_k} (\Lambda_{\text{ad}})^m.$$

При взятии следа в разложении останется только вклад от единичной матрицы, например,

$$\mathrm{tr}(\mathcal{S}_{\mathrm{sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \mathrm{ad} \Gamma_{\alpha_1} \cdots \mathrm{ad} \Gamma_{\alpha_k}) = \frac{1}{\mathcal{D}_{\mathrm{ad}}} g_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \cdot \mathrm{tr} \mathbb{1}_{\mathrm{ad}} = g_{\alpha_1 \dots \alpha_k}.$$

В силу изоморфизма неприводимых представлений тензоры над касательным пространством группы, $Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}^R$ и $g_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}$, которые возникают при разложении произведений генераторов

$$\mathcal{S}_{\mathrm{sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}(\Gamma_{\alpha_1} \cdots \Gamma_{\alpha_k})_R \longleftrightarrow \mathcal{S}_{\mathrm{sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \mathrm{ad} \Gamma_{\alpha_1} \cdots \mathrm{ad} \Gamma_{\alpha_k}$$

также изоморфны, так как

$$\mathbb{1}_R \leftrightarrow \mathbb{1}_{\mathrm{ad}}, \quad Q_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^R \leftrightarrow g_{\alpha_1 \dots \alpha_k}.$$

Изоморфизм означает, что тензоры отличаются разве что на скалярный множитель,

$$Q_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^R = K^R g_{\alpha_1 \dots \alpha_k},$$

который легко найти, так как

$$g^{\alpha_1 \dots \alpha_k} \mathcal{S}_{\mathrm{sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}(\Gamma_{\alpha_1} \cdots \Gamma_{\alpha_k})_R = C_k^R \cdot \mathbb{1}_R,$$

т.е.

$$g^{\alpha_1 \dots \alpha_k} Q_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^R = C_k^R,$$

откуда

$$C_k^R = K^R g_{\alpha_1 \dots \alpha_k} g^{\alpha_1 \dots \alpha_k} = K^R C_k^{\mathrm{ad}} \mathcal{D}_{\mathrm{ad}},$$

где мы воспользовались определением симметричного ковариантного тензора k -того ранга (I.2.36) и операторов Казимира (I.2.37) в случае присоединенного представления.

Значит,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathrm{sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \mathrm{tr}(\Gamma_{\alpha_1} \cdots \Gamma_{\alpha_k})_R &= Q_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^R \mathrm{tr} \mathbb{1}_R = K^R g_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \cdot \mathcal{D}_R = \frac{C_k^R \mathcal{D}_R}{C_k^{\mathrm{ad}} \mathcal{D}_{\mathrm{ad}}} \cdot g_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \\ &= K_{\mathrm{ad}}^R [k] g_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = K_{\mathrm{ad}}^R [k] \mathcal{S}_{\mathrm{sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \mathrm{tr}(\mathrm{ad} \Gamma_{\alpha_1} \cdots \mathrm{ad} \Gamma_{\alpha_k}). \end{aligned}$$

В итоге,

$$K_{\mathrm{ad}}^R [k] = \frac{C_k^R \mathcal{D}_R}{C_k^{\mathrm{ad}} \mathcal{D}_{\mathrm{ad}}}, \quad C_k^{\mathrm{ad}} \neq 0,$$

и мы показали, что искомый коэффициент $K_{\mathrm{ad}}^R [k]$ действительно определяется собственными значениями операторов Казимира k -того порядка и размерностями представлений.

В частности, в принятой нормировке квадратичный оператор Казимира в присоединенном представлении имеет собственное значение, равное единице, так как

$$\hat{C}_2^{\mathrm{ad}} = g^{\alpha_1 \alpha_2} \frac{1}{2} (\mathrm{ad} \Gamma_{\alpha_1} \mathrm{ad} \Gamma_{\alpha_2} + \mathrm{ad} \Gamma_{\alpha_2} \mathrm{ad} \Gamma_{\alpha_1}) = g^{\alpha_1 \alpha_2} \frac{1}{\mathcal{D}_{\mathrm{ad}}} g_{\alpha_1 \alpha_2} \cdot \mathbb{1}_{\mathrm{ad}} = \frac{1}{\mathcal{D}_{\mathrm{ad}}} g^{\alpha_1 \alpha_2} g_{\alpha_1 \alpha_2} \cdot \mathbb{1}_{\mathrm{ad}} = \frac{1}{\mathcal{D}_{\mathrm{ad}}} \mathcal{D}_{\mathrm{ad}} \cdot \mathbb{1}_{\mathrm{ad}} = \mathbb{1}_{\mathrm{ad}}.$$

Поэтому след произведения двух генераторов в неприводимом представлении пропорционален метрике Киллинга, которая задает след в присоединенном представлении,

$$\mathrm{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta)_R = C_2^R \frac{\mathcal{D}_R}{\mathcal{D}_{\mathrm{ad}}} g_{\alpha \beta} \equiv T_R \delta_{\alpha \beta}, \quad (\text{I.2.39})$$

где введено общепринятое обозначение для постоянной T_R , которая задает коэффициент пропорциональности следа единичной евклидовой метрике и называется индексом Дынкина.

Другое стандартное обозначение $C_A \equiv T_{\mathrm{ad}}$, и, следовательно, метрика Киллинга простой компактной группы Ли в этих терминах

$$g_{\alpha \beta} = C_A \delta_{\alpha \beta}, \quad C_A > 0. \quad (\text{I.2.40})$$

Тогда обратная метрика

$$g^{\alpha \beta} = \frac{1}{C_A} \delta^{\alpha \beta}.$$

Однако в литературе для определения квадратичного оператора Казимира принято использовать оператор, пропорциональный стандартному, когда вместо обратной метрики для свертки генераторов используется символ Кронекера. Мы установили, что

$$\delta^{\alpha \beta} = C_A g^{\alpha \beta}.$$

Тогда, например, квадратичный оператор Казимира (с тильдой) переопределены как

$$\tilde{C}_2 \equiv \delta^{\alpha \beta} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta = \Gamma_\alpha \Gamma_\alpha = C_A \hat{C}_2. \quad (\text{I.2.41})$$

В частности, для присоединенного представления $\tilde{C}_2^{\mathrm{ad}} = C_A$, но при этом выражение для индекса Дынкина остается в силе

$$T_R = \tilde{C}_2^R \frac{\mathcal{D}_R}{\mathcal{D}_{\mathrm{ad}}}. \quad (\text{I.2.42})$$

§3. Базис Картана–Вейля

Подалгебра Картана — генераторы из полного набора наблюдаемых в гильбертовом пространстве состояний, ранг группы — размерность подалгебры Картана, весовые векторы в присоединенном представлении и система корней, коммутатор генератора с оператором из полного набора наблюдаемых и корневой вектор, эрмитово сопряженный генератор, конформный фактор в метрике Киллинга и коммутаторы генераторов.

Если задана группа Ли, т.е. групповые координаты, структурные константы и, следовательно, алгебра Ли и коммутаторы генераторов группы, то можно поставить задачу о том, как классифицировать и систематизировать эти коммутаторы. Для этого надо перейти от исходного базиса генераторов к специальному набору, который носит название базиса Картана–Вейля. В этом базисе выделяются два типа генераторов. Что это за типы, нам и предстоит выяснить.

Введенные выше геометрические и алгебраические понятия, такие как метрика Киллинга и коммутаторы, приобретают более наглядный смысл, если провести рассмотрение представления генераторов преобразований в терминах пространства состояний, взятого из квантовой механики. Для этого мы в данном параграфе рассмотрим присоединенное представление, в котором генераторы — это матрицы линейных преобразований в пространстве генераторов, т.е. в пространстве размерности N_G . Сами эти матрицы, согласно определению присоединенного представления в (I.2.8), построены из структурных констант алгебры Ли. Это значит, что все характеристики, которые будут получены в данном параграфе, зависят исключительно от структурных констант группы. Мы будем это периодически подчеркивать. В частности, коммутационные соотношения в алгебре Ли, которые выводятся с использованием присоединенного представления, будут справедливы и в любом другом представлении, так как эти соотношения зависят только от структурных констант алгебры Ли и не зависят от представления. Для сокращения обозначений в этом параграфе мы специально опускаем знак присоединенного представления «ad».

3.1 Ранг алгебры Ли и веса базиса собственных состояний

Пусть задана некоторая полуправильная компактная алгебра Ли с эрмитовыми генераторами (см. (I.2.23) и объяснение на стр. 23), преобразующими квантовые состояния. Выделим среди генераторов набор взаимно коммутирующих Γ_l , который уже не может быть дополнен каким-либо другим независимым генератором, коммутирующим с каждым генератором из этого набора. Так выбранные генераторы Γ_l входят в состав полного набора наблюдаемых. Возьмем базис, состоящий из собственных состояний этого набора коммутирующих генераторов³⁸. По определению, эти попарно коммутирующие генераторы образуют подалгебру Картана \mathfrak{H} ,

$$[\Gamma_l, \Gamma_{l'}] = 0, \quad l = \{\overline{1, n}\}, \quad \Gamma_l \in \mathfrak{H}, \quad (\text{I.3.1})$$

где размерность пространства линейной оболочки генераторов Γ_l из полного набора наблюдаемых, т.е. $\dim \mathfrak{H} = n$ называют рангом алгебры Ли. Размерность подалгебры Картана меньше размерности пространства параметров группы $n < N_G$ вследствие полуправильности: иначе все генераторы коммутировали бы, и группа представляла бы из себя произведение инвариантных абелевых подгрупп, образованных элементами с координатами вдоль каждой из осей координатной сетки.

Конечномерный ортонормированный базис пространства состояний $|\mu\rangle$, т.е. пространства представления³⁹, в котором действуют матрицы генераторов алгебры, задается как набор собственных векторов с вещественными собственными значениями⁴⁰,

$$\Gamma_l |\mu\rangle = \mu_l |\mu\rangle, \quad \mu_l \in \mathbb{R}. \quad (\text{I.3.2})$$

Набор собственных значений μ состоит из компонент ковектора размерности n , которые преобразуются по тому же закону, что и генераторы алгебры при замене непрерывных групповых параметров. Если

³⁸Из линейной алгебры нам известно, что, если для эрмитово самосопряженных матриц существует базис совместных собственных векторов, то эти матрицы коммутируют, а также верно обратное: для попарно коммутирующих эрмитово самосопряженных матриц можно построить совместный базис собственных векторов, существование которого неочевидно для бесконечномерных матриц и эрмитово самосопряженных операторов общего вида. Это вынуждает нас апеллировать к математическому обоснованию квантовой механики, в которой вводится постулат о полноте набора собственных векторов эрмитово самосопряженного оператора на гильбертовом пространстве квантовых состояний любой рассматриваемой физической системы. Математическое рассмотрение задачи позволяет сформулировать условия, налагаемые на пространство представления, обеспечивающие полноту общей системы собственных векторов, что составляет содержание спектральной теоремы функционального анализа. Для физических приложений важно наличие такого базиса, а не математически строгое описание условий его существования, поскольку физика не рассматривает системы, в которых построение базиса собственных состояний эрмитово самосопряженных операторов невозможно.

³⁹Практически на протяжении всего изложения в книге мы могли подразумеваем, что обозначение состояния типа $|\mu\rangle$ относится к представлению с заданными значениями инвариантов Казимира, которые не указываются в явном виде.

⁴⁰Для присоединенного представления этот набор состоит из N_G векторов. Для других представлений размерность пространства собственных векторов D , вообще говоря, может быть другой.

ввести линейное обратимое преобразование той части координат в касательном пространстве, которая отвечает генераторам подалгебры Картана,

$$(a')^l = S_{\bullet l}^l a^l, \quad (\text{I.3.3})$$

то для генераторов подалгебры Картана такая замена переменных индуцирует линейное преобразование

$$\Gamma'_{l'} = \Gamma_l (S^{-1})_{\bullet l'}^l, \quad (\text{I.3.4})$$

откуда можно найти действие генераторов со штрихом на базисные векторы состояний,

$$\Gamma'_{l'} |\mu\rangle = (S^{-1})_{\bullet l'}^l \Gamma_l |\mu\rangle = (\mu_l (S^{-1})_{\bullet l'}^l) |\mu\rangle = \mu'_{l'} |\mu\rangle, \quad (\text{I.3.5})$$

т.е. состояние остается собственным для штрихованного генератора из подалгебры Картана, и имеет место закон преобразования ковектора μ ,

$$\mu'_{l'} = \mu_l (S^{-1})_{\bullet l'}^l. \quad (\text{I.3.6})$$

Эти ковекторы в математике принято называть весами, или весовыми векторами. Заметим, что преобразования в касательном пространстве координат отличаются от преобразований базиса в пространстве квантовых состояний $|\mu\rangle$: эти два сорта преобразований никак не связаны, они могут проводиться независимо друг от друга. Для того, чтобы подчеркнуть это различие между ковекторным пространством, в котором заданы наборы собственных значений генераторов подалгебры Картана, и векторным пространством представления группы, мы систематически используем для элементов пространства весов термин «вектор» или «ковектор», а для элементов пространства представления группы термин «состояние» (или «квантовое состояние»).

Важно подчеркнуть, что преобразования с заменой базиса в касательном пространстве координат группы возле единицы (I.3.3)–(I.3.6) при наличии нескольких весовых ковекторов $\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(k)}$ переводят каждый весовой вектор из этого набора $\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(k)}$ в вектор из набора $\mu'^{(1)}, \dots, \mu'^{(k)}$, в котором преобразуются компоненты весовых векторов, но не меняются их номер в наборе. Поэтому более логично ввести для собственных нормируемых на единицу состояний у генераторов подалгебры Картана обозначения

$$|k\rangle \quad \text{вместо} \quad |\mu^{(k)}\rangle,$$

поскольку вне зависимости от выбора базиса в касательном пространстве справедливы уравнения на собственные значения

$$\Gamma_l |k\rangle = (\mu^{(k)})_l |k\rangle, \quad \Gamma'_{l'} |k\rangle = (\mu'^{(k)})_{l'} |k\rangle. \quad (\text{I.3.7})$$

Эти соотношения важны с точки зрения физической интерпретации: два набора физических наблюдаемых из числа генераторов подалгебры Картана обладают одним и тем же базисом состояний, причем эти собственные состояния для разных наборов генераторов подалгебры Картана имеют разные наборы собственных значений, которые мы называем весовыми векторами (а точнее ковекторами), и которые как компоненты ковекторов связаны между собой стандартными преобразованиями при замене наборов генераторов из подалгебры Картана согласно (I.3.4) и (I.3.6).

В этих обозначениях также становится более наглядным утверждение о различии двух типов преобразований. Первый тип возникает при фиксированном выборе подпространства координат группы возле единицы, которому отвечают генераторы подалгебры Картана, так что переход от одних координат этого n -мерного подпространства к другим приводит к преобразованию для генераторов подалгебры Картана, которое описывается обратимой матрицей S размером $n \times n$ в виде (I.3.4):

$$\Gamma'_{l'} = \Gamma_l (S^{-1})_{\bullet l'}^l.$$

Второй тип преобразований возникает, если в алгебре Ли от одной подалгебры Картана перейти к другой подалгебре Картана, т.е. если выбрать другое подпространство координат группы возле единицы, которому отвечают генераторы подалгебры Картана, что приведет в пространстве представления к переходу от исходного \mathcal{D} -мерного базиса собственных состояний исходного набора генераторов подалгебры Картана, вообще говоря, к новому \mathcal{D} -мерному базису собственных векторов нового набора генераторов подалгебры Картана с помощью унитарной матрицы Σ размером $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ в виде

$$|k'\rangle = (\Sigma)_{\bullet k}^{k'} |k\rangle.$$

Матрица Σ будет отлична от единичной, если среди нового набора генераторов подалгебры Карата есть хотя бы один, который не коммутирует с каким-либо генератором из исходного набора генераторов

подалгебры Картана, так как в этом случае у такой пары генераторов не может существовать совместный базис собственных состояний. Итак, матрицы S и Σ отличаются своими размерами, действуют в пространствах разной природы, имеют разный физический смысл, а значит, и сами эти два типа преобразований независимы. Для примера, в группе поворотов ранга один в трехмерном пространстве присоединенного представления со спином $s = 1$ с исходным базисом состояний $|s, m_s\rangle$, собственным для проекции спина s_z с собственными значениями m_s , можно перейти к новому базису состояний, собственных для оператора проекции спина s_y , например. Компоненты спина s_z и s_y не коммутируют, так что преобразование второго типа, переход к новому базису состояний будет описываться унитарной матрицей 3×3 , отличной от единичной, в то время как преобразование первого типа, т.е. преобразование генераторов подалгебры Картана в данном случае — это просто умножение генератора s_z на число, отличное от нуля.

Если зафиксировать набор генераторов подалгебры Картана и пронумеровать их индексом $l \in \{\overline{1, n}\}$, то можно распределить конечное множество весов в представлении на две группы по знаку первой по порядку, отличной от нуля компоненты μ_l : у положительного веса первая по счету отличная от нуля компонента больше нуля, а у отрицательного меньше нуля. Более того, можно ввести понятие старшего веса представления (highest weight): старший — это вес, который выбран из конечного множества положительных весовых векторов согласно процедуре последовательного отсева так, чтобы значение первой по счету компоненты μ_1 было максимально, затем при выбранном максимальном значении μ_1 значение второй по счету компоненты μ_2 было максимально и точно также далее для всех последующих значений компонент по порядку.

Выбор генераторов подалгебры Картана фиксирует и набор весов $\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(k)}$, так что бывает удобней использовать обозначение

$$|\mu^{(k)}\rangle \quad \text{вместо} \quad |k\rangle$$

для базиса состояний, но надо понимать, что двум разным $k \neq k'$ может соответствовать один и тот же набор собственных значений $\mu^{(k)} = \mu^{(k')} \mu$, а сами собственные состояния $|\mu^{(k)}\rangle$ и $|\mu^{(k')}\rangle$, т.е. $|k\rangle$ и $|k'\rangle$ при этом должны быть линейно независимыми в векторном подпространстве состояний с фиксированным набором компонент μ .

Ясно, что понятия положительных и отрицательных весов, а также и старшего веса зависят как от выбора генераторов в подалгебре Картана, так и от замены параметров в касательном подпространстве координат, отвечающих одному конкретному выбору подпространства подалгебры Картана. В частности, мы встретимся с ситуацией, когда по отношению к выбору положительных и отрицательных корней удобно задать один набор генераторов в касательном пространстве, а по отношению к перечислению физических характеристик базисных состояний, т.е. собственных значений μ_l , — другой.

Размерность векторов собственных значений $\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(k)}$ для квантовых состояний $|\mu^{(k)}\rangle$ равна n , но само число разных собственных состояний $|\mu^{(k)}\rangle$ зависит от размерности пространства представления⁴¹, которое мы обозначим символом \mathcal{D} . В присоединенном представлении, которое мы рассматриваем в этом параграфе, число базисных состояний равно размерности пространства параметров группы N_G , т.е. $\mathcal{D} = N_G$. В общем случае эрмитовы матрицы генераторов подалгебры Картана — это матрицы $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$, а значит, у них есть \mathcal{D} общих для генераторов из подалгебры Картана собственных квантовых состояний, которые образуют базис пространства представления, причем мы знаем, что этот базис всегда можно выбрать ортонормированным.

И здесь наступает удобный момент сделать небольшое отступление, чтобы подчеркнуть и тезисно обсудить такое характерное для курсов квантовой механики понятие, как полная система коммутирующих наблюдаемых. Для систематического изложения этого вопроса мы отсылаем читателя к любому современному учебнику по квантовой механике, например, к [10], а здесь же лишь кратко резюмируем результаты этого рассмотрения. В нашем контексте это просто набор попарно коммутирующих операторов на пространстве состояний. Часть их является генераторами подалгебры Картана. В квантовой механике показано, что у набора попарно коммутирующих операторов существует общий базис из собственных векторов, причем векторы, отличающиеся хотя бы на одно собственное значение из набора, автоматически ортогональны (см. также курс [1], который мы указали в качестве пререквизита к данному учебному пособию). Но если существует собственное подпространство с одним и тем же набором собственных значений, которое более чем одномерно, то такая система коммутирующих наблюдаемых называется неполной. И нужно искать дополнительные операторы, для которых это подпространство будет разбито на одномерные собственные подпространства с разными собственными значениями этих других операторов, тоже эрмитовых, как и генераторы подалгебры Картана. В нашем рассмотрении это будут операторы Казимира подгрупп рассматриваемой группы Ли. И собственные состояния внутри этих более чем одномерных подпространств тоже автоматически станут ортогональными друг другу и всем ранее определенным. Нормировка такого ортогонального базиса до ортонормированного уже вопросов не вызывает.

⁴¹В представлении группы поворотов, ранг которой равен 1, при $s = 1$ базис состояний включает в себя $\mathcal{D} = 2s + 1 = 3$ вектора $|s, m_s\rangle$: $|1, +1\rangle$, $|1, 0\rangle$, $|1, -1\rangle$.

Итак, продолжая основную канву исследования пространства представления алгебры Ли, заметим, что каждый генератор из подалгебры Картана при действии на базисное состояние дает то же состояние, умноженное на действительное число — собственное значение генератора на этом состоянии. Поскольку полный набор наблюдаемых часто не исчерпывается только генераторами подалгебры Картана и групповыми инвариантами Казимира, как мы увидим на примере группы $SU(3)$, а система коммутирующих эрмитово самосопряженных операторов называется полной, если каждому набору собственных значений этих операторов соответствует только одно собственное состояние, то в дальнейшем изложении мы будем разбирать, какие операторы нужно добавить к генераторам подалгебры Картана и независимым групповым операторам Казимира, чтобы сделать систему коммутирующих наблюдаемых полной.

Инварианты Казимира необходимы для того, чтобы отличать одно неприводимое представление от другого. Состояния с разными собственными значениями этих инвариантов ортогональны, но, что более важно, при действии групповых операций состояния с одними значениями инвариантов не могут преобразовываться в состояния с другими значениями инвариантов, т.е. подпространства с фиксированным набором собственных значений инвариантов Казимира являются инвариантными при действии на них группы. Следовательно, определенные собственные значения операторов Казимира являются необходимым признаком неприводимости представления. В наших построениях мы исследуем именно неприводимые представления.

Еще раз повторим, что в общем случае указать вес квантового состояния может быть недостаточно для того, чтобы однозначно задать квантовое состояние. Важно подчеркнуть, что в случае вырождения веса, когда ему отвечают более одного базисного состояния представления и количество различных наборов собственных значений — весов меньше \mathcal{D} , количество ортонормированных базисных квантовых состояний по-прежнему равно размерности представления \mathcal{D} .

Итак, базисные состояния пространства представления можно пронумеровать, указывая в их аргументе в явном виде как

весовой вектор $\mu^{(k)}$, так и собственные значения $\tau_1^{(k)}, \dots, \tau_q^{(k)}$

для других q операторов из полного набора наблюдаемых, в формате

$$|\mu^{(k)}, \tau_1^{(k)}, \dots, \tau_q^{(k)}\rangle, \text{ где } k \in \{\overline{1, \mathcal{D}}\}.$$

Индексы собственных значений операторов полной системы коммутирующих наблюдаемых называются квантовыми числами: в данном случае k — это тоже квантовое число⁴². В силу полноты системы наблюдаемых соответствие квантового числа k и набора собственных значений $\mu^{(k)}, \tau_1^{(k)}, \dots, \tau_q^{(k)}$ взаимнооднозначно, так что

$$|k\rangle \Leftrightarrow |\mu^{(k)}, \tau_1^{(k)}, \dots, \tau_q^{(k)}\rangle.$$

Квантовыми числами можно считать сам набор собственных значений

$$\mu^{(k)}, \tau_1^{(k)}, \dots, \tau_q^{(k)}.$$

Подобный вариант записи допустим и удобен, поскольку безликий номер состояния расшифровывается в явном виде с указанием физических характеристик, т.е. собственных значений наблюдаемых величин в квантовом состоянии. Однако, во-первых, подобная запись зависит от выбора координат в группе Ли, а, во-вторых, использование такого наименования предполагает более аккуратное описание соответствия состояния и собственных значений генераторов из подалгебры Картана: необходимо указать операторы в полном наборе наблюдаемых, собственные значения которых различают разные состояния с одним и тем же значением весового вектора⁴³, причем, эти операторы наряду с независимыми групповыми инвариантами Казимира не могут быть линейными комбинациями групповых инвариантов и генераторов подалгебры Картана, так как вырождение как раз относится к одинаковым собственным значениям генераторов из подалгебры Картана и групповых инвариантов в совместном базисе, т.е. отличия между базисными состояниями отвечают разным собственным значениям других операторов, построенных из генераторов алгебры Ли⁴⁴.

⁴² В традиции теоретической физики принято ставить в соответствие каждой наблюдаемой из полного набора свое квантовое число. Например, оператор квадрата спина имеет собственное значение $s(s+1)$, а квантовым числом выбирают s . С точки зрения комбинаторики любой набор дискретных индексов можно свести к одному индексу, которым и является в нашем случае номер k у состояния из базиса пространства представления.

⁴³ Напомним, что вырождением по какой-либо величине в квантовой механике называется ситуация, когда одному собственному значению этой величины соответствует более чем одномерное собственное подпространство.

⁴⁴ В действительности в группе могут быть подгруппы со своими операторами Казимира — инвариантами подгруппы, но в случае простой группы эти подгрупповые инварианты не могут быть инвариантами всей группы, и именно различные собственные значения таких подгрупповых инвариантов отвечают за разные собственные состояния с одним и тем же весовым вектором, т.е. отвечают за вырождение веса при заданных собственных значениях независимых инвариантов Казимира самой группы, причем, количество состояний с одним и тем же весом называют кратностью вырождения весового вектора.

Еще один пример использования понятия квантового числа — представление группы поворотов со спином s . Стандартное обозначение базисного состояния $|s, m_s\rangle$ использует 2 квантовых числа, но, если m_s — это собственное значение проекции спина на ось z , то s — это квантовое число, которое задает собственное значение квадрата спина, т.е. s — это индекс собственного значения квадрата спина,

$$s^2|s, m_s\rangle = s(s+1)|s, m_s\rangle.$$

Указание собственного значения оператора Казимира важно не только физически, но и математически: тензорное произведение двух неприводимых представлений приводимо и раскладывается в прямую сумму по неприводимым представлениям с разными значениями операторов Казимира⁴⁵. Эта сумма — одно из проявлений принципа суперпозиции состояний в квантовой механике, когда возможные квантовые состояния записываются в виде линейной суммы других состояний с коэффициентами, которые ограничены только условие конечной нормы суммы. Этот же принцип проявляется при построении состояний представления как суперпозиции базисных состояний этого представления группы.

В дальнейшем изложении мы в основном будем пользоваться сокращенным обозначением для нормированного на единицу базисного состояния

$$|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle \text{ вместо полной записи в виде } |\boldsymbol{\mu}^{(k)}, \tau_1^{(k)}, \dots, \tau_q^{(k)}\rangle,$$

так как в фокусе нашего внимания будут именно весовые векторы. Кроме того, если вес невырожден, то его указание в качестве аргумента базисного состояния при заданных значениях инвариантов Казимира однозначно характеризует это квантовое состояние.

Введем обозначение: пусть вектор \mathbf{l} — это элемент ортонормированного базиса $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{n}\}$ в пространстве весов, т.е. \mathbf{l} имеет единственную отличную от нуля и равную единице координату на l -том месте,

$$(\mathbf{l})_m = \delta_{lm}, \quad l, m \in \{\overline{1, n}\}. \quad (\text{I.3.8})$$

Тогда собственное значение $\boldsymbol{\mu}_l^{(k)}$ выражается в виде скалярного произведения векторов в евклидовом пространстве $\boldsymbol{\mu}_l^{(k)} = (\mathbf{l}, \boldsymbol{\mu}^{(k)})$, и

$$\Gamma_l |\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle = (\mathbf{l}, \boldsymbol{\mu}^{(k)}) |\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle. \quad (\text{I.3.9})$$

Это выражение позволит нам вычислить часть элементов метрики Киллинга, которые были определены как след произведения генераторов. В заданном базисе состояний $|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle$ (в векторном пространстве представления размерности \mathcal{D}) след оператора, т.е. след матрицы или произведения матриц — это сумма диагональных матричных элементов оператора по всем базисным состояниям гильбертова пространства. В частности, для произведения генераторов подалгебры Картана находим, что

$$\text{tr}(\Gamma_l \Gamma_{l'}) = \sum_{k=1}^{\mathcal{D}} \langle \boldsymbol{\mu}^{(k)} | \Gamma_l \Gamma_{l'} | \boldsymbol{\mu}^{(k)} \rangle = \sum_{k=1}^{\mathcal{D}} \langle \boldsymbol{\mu}^{(k)} | \boldsymbol{\mu}^{(k)} \rangle (\mathbf{l}', \boldsymbol{\mu}^{(k)}) (\mathbf{l}, \boldsymbol{\mu}^{(k)}). \quad (\text{I.3.10})$$

Однако, поскольку симметричная квадратичная вещественная форма Киллинга на подпространстве подалгебры Картана⁴⁶, которая задается элементами метрики

$$g_{ll'} = \text{tr}(\Gamma_l \Gamma_{l'}) = \text{tr}(\Gamma_{l'} \Gamma_l),$$

является положительно определенной, так как алгебра, которую мы рассматриваем, компактная и полуправильная, матрицу $g_{ll'}$ можно привести к диагональному виду посредством обратимых линейных вещественных преобразований генераторов Γ_l , т.е. преобразованием генераторов из полного набора наблюдаемых, так что в новом базисе $g_{ll'} = b_l \delta_{ll'}$, где $b_l > 0$. После этого можно перемасштабировать определение генераторов подалгебры Картана, положив $b_l = 1$. Это и есть метрика Киллинга для генераторов, входящих в полный набор наблюдаемых, т.е. в подалгебру Картана: $g_{ll'} = \delta_{ll'}$,

$$g_{ll'} = \text{tr}(\Gamma_l \Gamma_{l'}) = \delta_{ll'}. \quad (\text{I.3.11})$$

⁴⁵ См. Главу 4 о сложении моментов количества движения, раздел 1.1, §1.

⁴⁶ Во всем этом разделе мы вычисляем следы матриц в присоединенном представлении, которое определяет метрику Киллинга, но, поскольку наша цель состоит в том, чтобы вычислять коммутаторы генераторов, то значение этих коммутаторов не зависит от того, в каком представлении мы их получаем, так как для точных представлений алгебры Ли имеет место изоморфизм, сохраняющий один и тот же вид коммутаторов независимо от представления. Для краткости записи мы опускаем знак ad в выражениях, где вычисляются следы матриц. Вместе с тем, напомним, что согласно задаче 11 на стр. 27 след симметризованного произведения матриц генераторов в одном представлении пропорционален следу тех же матриц в другом представлении, а коэффициент пропорциональности — это скаляр по отношению к преобразованиям координат группы.

Если состояния нормированы на единицу, а мы по умолчанию на протяжении всего изложения считаем все базисные состояния нормированными на единицу,

$$\langle \boldsymbol{\mu}^{(k_1)} | \boldsymbol{\mu}^{(k_2)} \rangle = \delta^{k_1 k_2},$$

то в новом, диагонализированном базисе, в котором $g_{ll'} = \delta_{ll'}$, соотношение (I.3.10) в силу определения компонент вектора \mathbf{l} (I.3.8) дает

$$\delta_{ll'} = \sum_{k=1}^{\mathcal{D}} (\mathbf{l}', \boldsymbol{\mu}^{(k)}) (\boldsymbol{\mu}^{(k)}, \mathbf{l}) = (\mathbf{l}', \mathbf{l}), \quad (\text{I.3.12})$$

или

$$\sum_{k=1}^{\mathcal{D}} \boldsymbol{\mu}_l^{(k)} \boldsymbol{\mu}_{l'}^{(k)} = \delta_{ll'} \quad (\text{I.3.13})$$

так, как если бы n -мерные евклидовы векторы $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$, отвечающие базису квантовых состояний $|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle$, образовывали бы ортонормированный базис⁴⁷ в n -мерном евклидовом пространстве! Отличие заключается в том, что суммирование в (I.3.13) идет в пределах от 1 до $\mathcal{D} > n$, а не от 1 до n .

3.2 Веса и система корней алгебры Ли

Мы установили, что в присоединенном представлении есть $\mathcal{D} = N_G$ весовых векторов⁴⁸ $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$ в евклидовом пространстве размерности ранга группы n . Эти веса или весовые векторы являются характеристиками⁴⁹ N_G базисных состояний $|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle$ в пространстве представления, т.е. базиса гильбертова пространства состояний⁵⁰. Действие генератора из подалгебры Картана не меняет базисное состояние пространства представления, но его норму умножает на одно из собственных значений генератора. Остальные генераторы приводят к тому, что базисные состояния под действием этих генераторов переходят в суперпозиции базисных состояний, т.к. генераторы — это матрицы линейных преобразований в пространстве представления. Поэтому все эти линейные преобразования можно характеризовать набором, построенным из разностей весовых векторов, т.е. из разностей собственных значений — весов, которыми характеризуется базис состояний в пространстве представления,

$$\boldsymbol{\alpha}^{(k_1 k_2)} = \boldsymbol{\mu}^{(k_1)} - \boldsymbol{\mu}^{(k_2)}. \quad (\text{I.3.14})$$

Эти векторы $\boldsymbol{\alpha}^{(k_1 k_2)}$ так же, как и векторы $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$ с компонентами — собственными значениями матриц подалгебры Картана, являются n -мерными векторами, которые называются корнями алгебры Ли или корневыми векторами. Напомним, что собственные векторы $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$ матриц (I.2.8), составленных из структурных констант алгебры Ли $f_{\alpha\beta}^\gamma$,

$$(\text{ad } \Gamma_\alpha)_{\bullet\beta}^\gamma = i f_{\alpha\beta}^\gamma, \quad (\text{I.2.8})$$

определяются этими структурными константами, что и придает особую роль рассуждениям в присоединенном представлении. А именно, присоединенное представление и все групповые операции в нем взаимнооднозначно соответствуют пространству касательных векторов в единице группы Ли и преобразованиям алгебры Ли в этом касательном пространстве, т.е. это представление является не только точным в смысле групповых преобразований, но и в смысле всех свойств касательного пространства,

⁴⁷Соотношение полноты ортонормированного базиса e_k в n -мерном векторном пространстве с евклидовой метрикой

$$\mathbf{a} = \sum_{k=1}^n e_k (e_k, \mathbf{a}),$$

имеет очевидный геометрический смысл: любой вектор \mathbf{a} в пространстве можно разложить по базису в виде суммы проекций на базисные векторы e_k . Умножив вектор \mathbf{a} в его разложении по базису на вектор \mathbf{b} скалярно, получим формулу

$$(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n (\mathbf{b}, e_k) (e_k, \mathbf{a}),$$

которое выглядит как (I.3.12), а роль ортонормированного базиса выполняют весовые векторы.

⁴⁸При нумерации весов мы учтем, что часть из них может повторяться, т.е. подпространство собственных векторов с заданным набором собственных значений генераторов подалгебры Картана — весом может иметь размерность больше единицы, и тогда один и тот же вес считается столько раз, сколько равна степень его вырождения, а соответствующее базисное состояние в подпространстве с заданным весом кроме собственно веса также характеризуется дополнительным квантовым числом, которое, например, отвечает собственному значению оператора из полного набора наблюдаемых в дополнение к генераторам из подалгебры Картана.

⁴⁹Веса — это просто набор собственных значений генераторов из подалгебры Картана.

⁵⁰Поскольку мы ведем изложение в терминах фиксированного набора генераторов подалгебры Картана, мы предпочитаем использовать сокращенное обозначение для базисных состояний $|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle$ вместо $|k\rangle$.

включая его размерность. Отсюда следует, что все коммутационные соотношения, выведенные в терминах весовых и корневых векторов в присоединенном представлении, взаимнооднозначно переходят в коммутационные соотношения в терминах тех же самых весовых и корневых векторов в любом точном представлении. Как мы увидим при дальнейшем изучении присоединенного представления в коммутаторы алгебры Ли явно входят только корневые векторы этой алгебры Ли. Поэтому система корневых векторов — это характеристика алгебры Ли, введенная в присоединенном представлении неявно в терминах структурных констант алгебры через весовые векторы, а значит, корни как векторы, которые входят в коммутационные соотношения алгебры Ли, являются универсальной системой корневых векторов для любого точного представления алгебры Ли.

Подчеркнем, что, вообще говоря, не все линейные преобразования, которые отвечают связи корня с разностью весов (I.3.14), являются линейными преобразованиями за счет действия линейной комбинации генераторов алгебры Ли на базисные состояния, т.е. *не все корни в (I.3.14) являются корнями алгебры Ли*.

Ясно, во-первых, что линейное преобразование — переход от базисного состояния с одним весом $\mu^{(k_2)}$ к другому базисному состоянию с другим весом $\mu^{(k_1)}$ можно осуществить не только в результате единственного преобразования за счет действия линейной комбинации генераторов алгебры Ли, которое описывается корнем $\alpha^{(k_1 k_2)}$, но и построить как последовательность из нескольких преобразований в алгебре Ли, каждое из которых характеризуется своим корнем $\alpha^{(k'_1 k'_2)}$. Это значит, что итог такой последовательности преобразований даст тот же корень,

$$\alpha^{(k_1 k_2)} = \alpha^{(k_1 k'_2)} + \alpha^{(k'_2 k'_3)} + \dots + \alpha^{(k'_{(n-1)} k'_n)} + \alpha^{(k'_n k_2)}, \quad (\text{I.3.15})$$

и, следовательно, если мы условимся считать корневыми только отличные от нуля векторы, которые изменяют хотя бы одну компоненту веса, то корень алгебры Ли может выражаться в виде суммы других корней алгебры Ли с целыми коэффициентами. Это так просто в силу того, что корни алгебры Ли — лишь некоторые из всех возможных разностей весов, коих не так много. В формуле (I.3.15) мы записали последовательность корней от одного веса к другому, соблюдая нумерацию весов по порядку, так что корневые векторы складываются, но в этом же равенстве можно перенести все векторы с правой части в левую за исключением одного, и тогда вместо сложения получится вычитание корневых векторов. Подобная специфическая линейная зависимость корней алгебры Ли исключительно с целыми коэффициентами возникает из за того, что веса образуют конечное дискретное множество в n -мерном векторном пространстве, построенном в виде линейной оболочки весовых векторов.

Во-вторых, у каждого корня есть противоположный, так как наряду с линейным преобразованием — переходом от базисного состояния с одним весом $\mu^{(k_2)}$ к другому базисному состоянию с другим весом $\mu^{(k_1)}$ существует и обратное линейное преобразование — переход от базисного состояния с весом $\mu^{(k_1)}$ к базисному состоянию с весом $\mu^{(k_2)}$, а значит,

$$\alpha^{(k_2 k_1)} = \mu^{(k_2)} - \mu^{(k_1)} = -\alpha^{(k_1 k_2)}. \quad (\text{I.3.16})$$

Чуть ниже это элементарное равенство для корневых векторов мы используем для того, чтобы установить его связь с коммутаторами генераторов алгебры Ли и покажем, что, если $\alpha^{(k_1 k_1)}$ — это корень алгебры Ли, связанный с определенным генератором алгебры Ли и с коммутаторами этого генератора с другими генераторами алгебры Ли, то и противоположный корень $\alpha^{(k_2 k_1)} = -\alpha^{(k_1 k_2)}$ тоже является корнем алгебры Ли, связанный с определенным генератором алгебры Ли и с коммутаторами этого генератора с другими генераторами алгебры Ли (см. формулу (I.3.26) и ее вывод на стр. 39).

Для дальнейших построений удобно ввести понятие положительного корня так же, как и для весовых векторов: согласно зафиксированному порядку счета генераторов подалгебры Картана у положительного корневого вектора первая отличная от нуля компонента по определению положительна. Тогда пары $k_1 k_2$, которые задают положительные корни $\alpha^{(k_1 k_2)}$, можно пронумеровать в каком-либо порядке натуральным индексом m , т.е. сопоставить множеству положительных корней $\alpha^{(k_1 k_2)}$ упорядоченное множество α_m тех же положительных корней.

Более того, теперь специфическая линейная зависимость корней (I.3.15) перепишется в виде

$$\alpha_m = \sum_{m'} c_{mm'} \alpha_{m'}, \quad c_{mm'} \in \mathbb{Z}, \quad (\text{I.3.17})$$

и с ее помощью мы можем ввести определение простого положительного корня: *простой положительный корень* не может быть представлен в виде суперпозиции положительных корней (I.3.17) с натуральными (положительными целыми) коэффициентами $c_{mm'}$. Ясно, что не являющиеся простыми положительные корни выражаются через простые положительные корневые векторы в виде (I.3.17) с натуральными коэффициентами.

3.3 Корневое дополнение генераторов подалгебры Картана

Поскольку число положительных корней алгебры Ли α_m равно числу противоположных им отрицательных корней $-\alpha_m$, которые, как мы покажем, отвечают корням той же алгебры Ли, то их общее количество — это четное число. Мы утверждаем, что число всех этих корней алгебры Ли равно числу генераторов вне подалгебры Картана, которые, таким образом, образуют базис дополнения подалгебры Картана до всей алгебры Ли, и такой базис дополнения мы будем называть генераторами корневого дополнения, т.е. в алгебре Ли всего $N_G - n$ корней. Рассмотрим более детально описание корневых векторов.

Прежде всего, общее число базисных линейных преобразований, из которых в виде линейных комбинаций можно построить все линейные преобразования между базисными состояниями присоединенного представления с изменением веса в начальном и конечном состоянии, равно количеству недиагональных элементов в линейных преобразованиях N_G -мерного пространства, $N_G \times N_G - N_G$. Их количество не меньше числа генераторов вне подалгебры Картана $N_G - n$, так как в противном случае, когда число недиагональных генераторов алгебры Ли, изменяющих состояния базиса, меньше, чем $N_G - n$, необходимо было бы добавить несколько генераторов до полного числа генераторов, равного N_G в группе Ли размерности N_G , и эти добавочные генераторы были бы уже диагональными, никак не изменяли бы базисные состояния и входили бы в число генераторов подалгебры Картана, что противоречит самому определению этой подалгебры: она уже не может быть расширена дополнительными коммутирующими генераторами. Значит, число линейных преобразований с изменением веса базисного состояния (лестничные преобразования) превышает число или равно количеству генераторов корневого дополнения подалгебры Картана, так что в общем случае не все линейные преобразования, которые изменяют веса базисных состояний и могут быть помечены соответствующим корневым вектором, являются генераторами алгебры Ли (!). Выше мы пронумеровали корни, которые маркируют генераторы алгебры Ли, индексом m .

Далее, вообще говоря, могло бы оказаться, во-первых, что одному и тому же корню алгебры Ли соответствует несколько линейных преобразований от одного базисного состояния к другому, если разность весов для базисных состояний в начале и в конце линейного преобразования совпадает. С помощью коммутационных соотношений мы покажем, что в этом случае речь идет об одном и том же линейном преобразовании в алгебре Ли, которое реализуется на разных базисных состояниях. Во-вторых, линейные преобразования между базисными состояниями присоединенного представления включают в себя не только линейные преобразования, которые реализуют действие матрицы $\text{ad } \Gamma_m$ на векторном пространстве генераторов, но и многократные композиции линейных преобразований $\text{ad } \Gamma_m$ на состояния в присоединенном представлении. Это значит, что после отсева всех линейных преобразований, которые не могут быть описаны как однократное действие матрицы $\text{ad } \Gamma_m$ с номером, отвечающим корню алгебры Ли, остаются только лестничные линейные преобразования алгебры Ли, каждое из которых соответствует своему корневому вектору алгебры Ли, и это соответствие взаимнооднозначно вследствие того, что генератор из корневого дополнения подалгебры Картана с заданным значением корня алгебры Ли, как мы указали выше, единственный (он может действовать на разные базисные состояния представления).

Итак, все линейные преобразования алгебры Ли в пространстве присоединенного представления суть либо линейные комбинации $N_G - n$ обратимых линейных преобразований⁵¹ одного базисного состояния в другое с изменением весов этих базисных состояний, либо n преобразований, которые оставляют неизменным вес состояния и сохраняют само базисное состояние, домножая это состояние на собственное значение соответствующего генератора.

Можно развернуть проведенные рассуждения в виде формул. Итак, матрицы линейных преобразований размерности $N_G \times N_G$, которые действуют на пространстве состояний присоединенного представления (к этим линейным преобразованиям относятся и генераторы алгебры Ли), можно записать в виде суммы матриц размера $N_G \times N_G$ как лестничного типа, так и диагональных, используя обозначения квантовой механики через бра- и кет-векторы⁵²

$$\Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}} = |\boldsymbol{\mu}^{(k_1)}\rangle\langle\boldsymbol{\mu}^{(k_2)}|. \quad (\text{I.3.18})$$

⁵¹Если одно базисное состояние линейно преобразуется в другое, т.е. в отличный от нуля образ, который является базисным состоянием с точностью до неравного нулю множителя, то существует и линейное преобразование этого образа в исходное состояние: и эту пару линейных преобразований мы называем взаимно обратимыми, так как их последовательное действие на исходное базисное состояние оставляет это состояние неизменным.

⁵²Выражение (I.3.18) можно записать в более общем виде, если ввести в него комплексную фазу

$$\Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}} = |\boldsymbol{\mu}^{(k_1)}\rangle e^{i\phi^{(k_1 k_2)}} \langle\boldsymbol{\mu}^{(k_2)}|,$$

что практически никак не изменит дальнейшее рассмотрение, за исключением вывода о том, что эту свободу с выбором фазы можно использовать, удобным образом устранив другие фазы, например, когда линейное преобразование переводит одно нормированное на единицу состояние в другое нормированное на единицу состояние с некоторым коэффициентом, так, чтобы коэффициент при нормированном базисном состоянии был бы положительным. Напомним, что линейное преобразование можно умножить на произвольное число, так как умножение на число оставляет преобразование линейным. Чуть ниже мы еще раз подчеркнем этот факт при вычислении коммутаторов.

Эрмитово сопряженный вектор состояния (комплексно сопряженная строка, построенная из столбца вектора состояния) [10, 11]

$$\langle \boldsymbol{\mu}^{(k_2)} | = (|\boldsymbol{\mu}^{(k_2)})\rangle^\dagger$$

также является собственным для эрмитово самосопряженного генератора подалгебры Картана с вещественным собственным значением, которое указано как маркер состояния,

$$\langle \boldsymbol{\mu}^{(k_2)} | \Gamma_l = \mu_l^{(k_2)} \langle \boldsymbol{\mu}^{(k_2)} |. \quad (\text{I.3.19})$$

Так как согласно уравнению на собственные векторы (I.3.2) столбец базисного кет-вектора и строка базисного бра-вектора являются собственными при умножении на эрмитово самосопряженную матрицу генератора подалгебры Картана Γ_l ,

$$\Gamma_l |\boldsymbol{\mu}\rangle = \mu_l |\boldsymbol{\mu}\rangle, \quad \mu_l \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad (\Gamma_l |\boldsymbol{\mu}\rangle)^\dagger = (\mu_l |\boldsymbol{\mu}\rangle)^\dagger \quad \Leftrightarrow \quad \langle \boldsymbol{\mu} | \Gamma_l = \langle \boldsymbol{\mu} | \mu_l,$$

умножение матрицы $\Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}} = |\boldsymbol{\mu}^{(k_1)}\rangle \langle \boldsymbol{\mu}^{(k_2)}|$ слева и справа на матрицу генератора подалгебры Картана приводит к

$$\Gamma_l \Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}} = \mu_l^{(k_1)} \Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}}, \quad \Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}} \Gamma_l = \mu_l^{(k_2)} \Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}}.$$

Коммутатор генератора из подалгебры Картана Γ_l с введенными матрицами линейных преобразований $\Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}}$ равен

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}}] = (\mu_l^{(k_1)} - \mu_l^{(k_2)}) \Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}} = \alpha_l^{(k_1 k_2)} \Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}}. \quad (\text{I.3.20})$$

Подчеркнем важный факт: при вычислении коммутатора (I.3.20), имеющего основополагающее значение при рассмотрении линейных преобразований, генератор $\Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}}$ можно умножить на не равное нулю число $\Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}} \mapsto C_{12} \Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}}, C_{12} \neq 0$, после чего коммутатор не изменяется, поскольку операция вычисления коммутатора является линейной по каждому из своих операторных или матричных аргументов. Это замечание справедливо и в случае, если $\alpha^{(k_1 k_2)}$ — это корень алгебры Ли, а значит, и линейное преобразование $\Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}}$ относится к тем, что возникают при вычислении коммутаторов в присоединенном представлении этой алгебры Ли.

В тех же терминах кет- и бра-векторов матрицы генераторов из подалгебры Картана диагональны в базисе своих собственных векторов, так что они коммутируют со всеми диагональными матрицами ($k_1 = k_2$). Точнее,

$$\Gamma_l = \sum_{k=1}^{N_G} \mu_l^{(k)} |\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle \langle \boldsymbol{\mu}^{(k)}|, \quad (\text{I.3.21})$$

что также можно записать в стандартных матричных обозначениях⁵³. Для этого напомним, что линейные преобразования генераторов в присоединенном представлении мы записывали как матричное умножение строки на матрицу справа,

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\mu] = \Gamma_\nu (\text{ad } \Gamma_\alpha)^\nu_{\bullet \mu} \equiv \Gamma_\mu \cdot (\text{ad } \Gamma_\alpha)$$

где Γ_ν выступали в качестве базисных элементов ковекторного пространства генераторов алгебры Ли, т.е. пространства, изоморфного пространству присоединенного представления. Тогда и для матричных преобразований в пространстве базисных элементов бра-векторов, соответствующих ковекторам,

$$\langle k | = \langle \boldsymbol{\mu}^{(k)} |,$$

мы постулируем тот же порядок следования матричных индексов, что и у матриц присоединенного представления при вычислении коммутаторов как линейных преобразований, с очевидной подстановкой обозначений:

для базиса $\Gamma_\mu \mapsto \langle k | = \langle \boldsymbol{\mu}^{(k)} |$, и аналогично $\Gamma_\nu \mapsto \langle k'' | = \langle \boldsymbol{\mu}^{(k')} |$,

а также

$$\text{для матриц } (\text{ad } \Gamma_\alpha)^\nu_{\bullet \mu} \mapsto (\Gamma_l)^{k''}_{\bullet k},$$

так что

$$\langle \boldsymbol{\mu}^{(k)} | \Gamma_l \equiv \langle \boldsymbol{\mu}^{(k'')} | (\Gamma_l)^{k''}_{\bullet k},$$

⁵³ Вид этих матриц записан в базисе ортонормированных состояний, которые являются собственными для генераторов подалгебры Картана, так что прямое отождествление этого вида с определением матриц генераторов присоединенного представления (I.2.8) не является очевидным. Тем не менее, после проведения более детального изложения свойств базиса Картана–Вейля и неприводимых представлений читатель сможет рассмотреть и этот вопрос сравнения двух записей генераторов в разных базисах пространства состояний в разделе 2.4 Главы 2, §2.

и с учетом ортонормированности базисных состояний

$$\langle \boldsymbol{\mu}^{(k'')} | \boldsymbol{\mu}^{(k')} \rangle = \delta_{k''}^{k'}$$

получаем

$$\langle \boldsymbol{\mu}^{(k)} | \Gamma_l | \boldsymbol{\mu}^{(k')} \rangle = \langle \boldsymbol{\mu}^{(k'')} | (\Gamma_l)_{\bullet k}^{k''} | \boldsymbol{\mu}^{(k')} \rangle = (\Gamma_l)_{\bullet k}^{k'}.$$

Но

$$\langle \boldsymbol{\mu}^{(k)} | \Gamma_l | \boldsymbol{\mu}^{(k')} \rangle = \mu_l^{(k)} \delta_k^{k'}.$$

В итоге, матричная запись генератора подалгебры Картана имеет вид

$$(\Gamma_l)_{\bullet k}^{k'} = \mu_l^{(k)} \delta_k^{k'}.$$

Это выражение показывает, что в пространстве линейных преобразований генераторов присоединенного представления можно определить N_G линейных преобразований ϵ_d в виде диагональных матриц $N_G \times N_G$, в которых на d -том месте на главной диагонали стоит 1, а остальные матричные элементы равны 0:

$$(\epsilon_d)_{\bullet k}^{k'} = \delta_k^{k'} \delta_d^{k'}, \quad d \in \{\overline{1, D}\}, \quad (I.3.22)$$

и матрицы-генераторы подалгебры Картана разлагаются по этому базису

$$\Gamma_l = \sum_{d=1}^D \mu_l^{(d)} \epsilon_d \Rightarrow (\Gamma_l)_{\bullet k}^{k'} = \sum_{d=1}^D \mu_l^{(d)} (\epsilon_d)_{\bullet k}^{k'} = \sum_{d=1}^D \mu_l^{(d)} \delta_k^{k'} \delta_d^{k'} = \mu_l^{(k')} \delta_k^{k'} = \mu_l^{(k)} \delta_k^{k'}.$$

Отсюда заключаем, что в число n генераторов подалгебры Картана входят только n вполне определенных эрмитовых суперпозиций из $D = N_G > n$ диагональных матриц ϵ_d в присоединенном представлении. Метрика Киллинга в секторе генераторов подалгебры Картана

$$g_{ll'} = \text{tr}(\Gamma_l \Gamma_{l'}) = \sum_{k,k'} \mu_l^{(k)} \delta_k^{k'} \mu_{l'}^{(k')} \delta_{k'}^{k} = \sum_k \mu_l^{(k)} \mu_{l'}^{(k)}.$$

Линейной заменой координат группы можно сделать картановский блок метрики Киллинга компактной полупростой группы равным $g_{ll'} = b_l \delta_{ll'}$, $b_l > 0$, т.е. диагональным, положительно определенным, а затем за счет изменения шкалы определения параметров группы, этот блок метрики Киллинга для генераторов подалгебры Картана можно преобразовать и к виду единичной матрицы.

Матричные обозначения для линейных преобразований $\Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}}$ с постулированным нами порядком следования матричных индексов у матриц генераторов записутся согласно (I.3.18) в виде

$$(\Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}})_{\bullet k}^{k'} = \langle \boldsymbol{\mu}^{(k)} | \Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}} | \boldsymbol{\mu}^{(k')} \rangle = \langle \boldsymbol{\mu}^{(k)} | \boldsymbol{\mu}^{(k_1)} \rangle \langle \boldsymbol{\mu}^{(k_2)} | \boldsymbol{\mu}^{(k')} \rangle = \delta_k^{k_1} \delta_{k_2}^{k'}.$$

Среди матриц-генераторов алгебры Ли корневого дополнения подалгебры Картана не могут быть матрицы с отличными от нуля диагональными элементами, так как все допустимые для заданной компактной полупростой алгебры Ли диагональные матрицы — это генераторы подалгебры Картана: все диагональные матрицы присоединенного представления алгебры Ли разлагаются в суперпозицию по базису матриц-генераторов подалгебры Картана, другие диагональные матрицы, которые разлагаются по базису ϵ_d (I.3.22), коммутируют с матрицами-генераторами подалгебры Картана, но не имеют отношения к алгебре Ли, так как в противном случае они пополняли бы множество генераторов из подалгебры Картана, которое уже исчерпано по построению: в корневом дополнении подалгебры Картана есть только матрицы генераторов с нулевыми диагональными элементами. При $k_1 \neq k_2$

$$\text{tr}(\Gamma_l \Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}}) = \sum_{k,k'} \mu_l^{(k)} \delta_k^{k'} \delta_{k'}^{k_1} \delta_{k_2}^k = \mu_l^{(k_1)} \delta_{k_2}^{k_1} = 0.$$

Таким образом, метрика Киллинга имеет блочный вид: один блок для подалгебры Картана (генераторы пронумерованы индексом типа l), другой для генераторов, не входящих в подалгебру Картана (генераторы пронумерованы индексом типа m), т.е. в матричном виде метрика Киллинга выглядит как

$$\left(\begin{array}{c|c} g_{ll'} & g_{lm'} \\ \hline g_{ml'} & g_{mm'} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} g_{ll'} & 0 \\ \hline 0 & g_{mm'} \end{array} \right).$$

Из явной записи линейных преобразований с изменением веса состояния в матричных обозначениях (I.3.23) получаем

$$\mathrm{tr}(\Gamma_{\alpha^{(k_1 k'_1)}} \Gamma_{\alpha^{(k_2 k'_2)}}) = \sum_{k, k'} \delta_k^{k_1} \delta_{k'_1}^{k'} \delta_{k'}^{k_2} \delta_{k'_2}^k = \delta_{k'_2}^{k_1} \delta_{k'_1}^{k_2}, \quad (\text{I.3.26})$$

и, следовательно, отличны от нуля только элементы метрики для матриц с противоположными значениями корневых векторов, так как в силу (I.3.14) при $k'_1 = k_2$ и $k'_2 = k_1$

$$\alpha^{(k_1 k_2)} = -\alpha^{(k_2 k_1)}.$$

При этом

$$\Gamma_{\alpha^{(k_1 k'_1)}}^\dagger = (|\mu^{(k_1)}\rangle\langle\mu^{(k_2)}|)^\dagger = |\mu^{(k_2)}\rangle\langle\mu^{(k_1)}| = \Gamma_{\alpha^{(k'_1 k_1)}} = \Gamma_{-\alpha^{(k_1 k'_1)}}.$$

Поскольку групповые преобразования — это обратимые преобразования, а преобразования группы Ли возле единицы в присоединенном представлении — это линейные преобразования, которые выражаются в виде суммы тождественного преобразования и генератора, умноженного на малый параметр, то и эти линейные преобразования должны быть обратимыми в присоединенном представлении. В частности, если такое линейное преобразование за счет действия генератора переводит базисное состояние в другое базисное состояние, то обратное линейное преобразование должно содержать генератор, который переводит образ линейного преобразования исходного базисного состояния обратно в это же исходное состояние. Мы только что показали, что генератор такого обратного линейного преобразования — это генератор с противоположным значением корня, т.е. эрмитово сопряженный генератор для исходного генератора с заданным значением корня. Этот факт позволяет, как мы уже указывали это чуть выше на стр. 35, для каждого положительного корневого вектора $\alpha^{(k_1 k'_1)}$ и матрицы $\Gamma_{\alpha^{(k_1 k'_1)}}$ алгебры Ли ввести следующие обозначения: корневой вектор α_m из упорядоченного множества тех же положительных корней и соответствующая этому корню матрица Γ_{α_m} , а также ввести эрмитово сопряженную матрицу $\Gamma_{\alpha_m}^\dagger = \Gamma_{-\alpha_m}$, которая определяет линейное преобразование от одного базисного состояния с определенным весом к другому, так что разность весов исходного и состояния и его образа равна противоположному, отрицательному корню.

Не все линейные преобразования, построенные в виде суперпозиций лестничных матриц могут входить в состав линейных преобразований в алгебре Ли, т.е. не все корни $\alpha^{(k_1 k'_1)}$, построенные как разности весов в присоединенном представлении, являются корнями алгебры Ли. В итоге, среди матриц Γ_{α_m} , которые являются линейными комбинациями генераторов корневого дополнения подалгебры Картана алгебры Ли в присоединенном представлении, корневой блок метрики Киллинга с точностью до множителя, который зависит от выбора масштаба координат в группе Ли (масштабное преобразование $\Gamma_{\alpha_m} \mapsto \Omega_m \Gamma_{\alpha_m}$), задается следом, который вычислен в явном виде чуть выше в (I.3.26), и после замены двойного индекса корня $(k_1 k_2)$ на индекс m упорядоченного множества положительных корней алгебры Ли этот блок принимает вид⁵⁴

$$g_{mm'} = \Omega_m^2 \mathrm{tr}(\Gamma_{\alpha_m} \Gamma_{-\alpha_{m'}}) = \Omega_m^2 \delta_{mm'}. \quad (\text{I.3.27})$$

Важно, что коммутатор лестничного генератора с генератором подалгебры Картана, установленный нами для матриц в присоединенном представлении, в силу гомоморфизма алгебры Ли и коммутаторов генераторов в любом точном представлении, никак не изменяют своего вида при переходе от присоединенного представления к другому точному представлению.

Покажем, что можно построить эрмитово самосопряженные матрицы

$$\Gamma_m^R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_{\alpha_m} + \Gamma_{-\alpha_m}), \quad \Gamma_m^I = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\Gamma_{\alpha_m} - \Gamma_{-\alpha_m}), \quad (\text{I.3.28})$$

для которых вычисление следов, например,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\Gamma_m^R \Gamma_{m'}^R) &= \mathrm{tr}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_{\alpha_m} + \Gamma_{-\alpha_m}) \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_{\alpha_{m'}} + \Gamma_{-\alpha_{m'}})\right) = \\ &= \frac{1}{2} \mathrm{tr}(\Gamma_{\alpha_m} \Gamma_{\alpha_{m'}}) + \frac{1}{2} \mathrm{tr}(\Gamma_{-\alpha_m} \Gamma_{\alpha_{m'}}) + \frac{1}{2} \mathrm{tr}(\Gamma_{\alpha_m} \Gamma_{-\alpha_{m'}}) + \frac{1}{2} \mathrm{tr}(\Gamma_{-\alpha_m} \Gamma_{-\alpha_{m'}}) = \\ &= 0 + \frac{1}{2} \delta_{mm'} + \frac{1}{2} \delta_{mm'} + 0 = \delta_{mm'}, \end{aligned}$$

⁵⁴Если лестничный генератор преобразует не одно, а несколько базисных состояний с одним и тем же значением корневого вектора, то в след войдет число таких базисных состояний, и мы можем включить этот множитель в Ω_m^2 .

и

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\Gamma_m^L \Gamma_{m'}^L) &= \mathrm{tr}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}(\Gamma_{\alpha_m} - \Gamma_{-\alpha_m}) \frac{i}{\sqrt{2}}(\Gamma_{\alpha_{m'}} - \Gamma_{-\alpha_{m'}})\right) = \\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Gamma_{\alpha_m} \Gamma_{\alpha_{m'}}) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Gamma_{-\alpha_m} \Gamma_{\alpha_{m'}}) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Gamma_{\alpha_m} \Gamma_{-\alpha_{m'}}) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Gamma_{-\alpha_m} \Gamma_{-\alpha_{m'}}) = \\ &= 0 + \frac{1}{2}\delta_{mm'} + \frac{1}{2}\delta_{mm'} + 0 = \delta_{mm'},\end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\Gamma_m^R \Gamma_{m'}^L) &= -\mathrm{tr}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_{\alpha_m} + \Gamma_{-\alpha_m}) \frac{i}{\sqrt{2}}(\Gamma_{\alpha_{m'}} - \Gamma_{-\alpha_{m'}})\right) = \\ &= -i\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Gamma_{\alpha_m} \Gamma_{\alpha_{m'}}) - i\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Gamma_{-\alpha_m} \Gamma_{\alpha_{m'}}) + i\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Gamma_{\alpha_m} \Gamma_{-\alpha_{m'}}) + i\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Gamma_{-\alpha_m} \Gamma_{-\alpha_{m'}}) = \\ &= 0 - i\frac{1}{2}\delta_{mm'} + i\frac{1}{2}\delta_{mm'} + 0 = 0,\end{aligned}$$

в итоге дает

$$\mathrm{tr}(\Gamma_m^R \Gamma_{m'}^R) = \mathrm{tr}(\Gamma_m^I \Gamma_{m'}^I) = \delta_{mm'}, \quad \mathrm{tr}(\Gamma_m^R \Gamma_{m'}^I) = 0. \quad (\text{I.3.29})$$

Еще раз напомним, что не все недиагональные матрицы (I.3.18) соответствуют генераторам алгебры Ли, а только те из них, которые являются линейными суммами генераторов, не входящих в подалгебру Картана.

В полупростой компактной алгебре Ли можно перейти к координатам, в которых метрика Киллинга единичная. При этом, среди линейных преобразований в присоединенном представлении с базисом состояний, составленным из совместных собственных состояний генераторов подалгебры Картана, выделяют матрицы-генераторы подалгебры Картана — n диагональных матриц с вещественными диагональными элементами — весами, и $N_G - n$ недиагональных лестничных матриц, отвечающих положительным и противоположным им, отрицательным корням, для которых строятся эрмитовы матрицы-генераторы $\Gamma_m^{R,I}$, так что эти эрмитовы матрицы Γ_l и $\Gamma_m^{R,I}$ составляют весь набор генераторов алгебры Ли с единичной метрикой Киллинга.

Итак, все генераторы алгебры Ли разбились на две группы:

- первая группа — попарно коммутирующие эрмитовы генераторы подалгебры Картана Γ_l ,

$$[\Gamma_l, \Gamma_{l'}] = 0, \quad l, l' \in \{\overline{1, n}\}, \quad (\text{I.3.30})$$

- вторая группа — лестничные генераторы корневого дополнения подалгебры Картана, Γ_{α_m} , каждый из которых изменяет вес базисного состояния так, что получается состояние с другим весом, и каждому из этих генераторов отвечает свое значение корня алгебры Ли α , в то время как коммутатор с генератором подалгебры Картана задается выражением

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\alpha_m}] = (l, \alpha_m) \Gamma_{\alpha_m}. \quad (\text{I.3.31})$$

Из (I.3.31) следует, что каждый из лестничных генераторов, которые действуют на разные базисные состояния с одним и тем же значением корня, удовлетворяет одному и тому же коммутационному соотношению с генераторами подалгебры Картана. Но это значит, что все лестничные преобразования с одним и тем же корнем алгебры Ли — это действие одного и того же лестничного генератора на разные базисные состояния присоединенного представления! Таким образом, *соответствие лестничных генераторов и корней алгебры Ли является взаимнооднозначным*.

Это разбиение генераторов алгебры Ли на подалгебру Картана и лестничные генераторы Γ_{α_m} , в основе которого лежат коммутационные соотношения (I.3.30) и (I.3.31), а также взаимнооднозначное соответствие корней алгебры Ли и лестничных генераторов, составляет концепцию построения базиса Картана–Вейля в алгебре Ли: вместо структурных констант, отвечающих выбору некоторого базиса в касательном пространстве группы, и соответствующих генераторов в описанной схеме построения базиса Картана–Вейля осуществляют переход к генераторам подалгебры Картана и лестничным генераторам, а коммутаторы и структурные константы переформулируются в терминах корней алгебры Ли. Полнота коммутационных соотношений в базисе Картана–Вейля будет достигнута, если рассмотреть и коммутатор двух лестничных генераторов, что мы проделаем чуть ниже.

Итак, в терминах базиса Картана–Вейля групповая структура компактной полупростой алгебры Ли размерности N_G определяется её рангом n и системой из $(N_G - n)/2$ положительных n -мерных корней. Можно ставить прямую задачу: если заданы структурные константы группы, то следует определить набор генераторов в подалгебре Картана, совместный базис из собственных состояний этих генераторов

в присоединенном представлении, набор весов — собственных значений генераторов из подалгебры Картана на базисных состояниях и затем найти среди матриц линейных преобразований на пространстве присоединенного представления те генераторы, которые переводят одно базисное состояние в другое для заданной группы Ли. Но можно исследовать и обратную задачу: определить полный допустимый для алгебр Ли набор свойств корней, которым соответствуют линейные преобразования одного базисного состояния в другое в присоединенном представлении, и, уже исходя из этих свойств, перечислить все возможные наборы структурных констант алгебр Ли, например, полупростых и компактных, включая значения весов и прочее. Именно на обратной задаче описания алгебр Ли мы фокусируем все наше изложение: перечень допустимых положительных корней полупростой компактной алгебры Ли и их свойств как раз и есть *классификация* этих алгебр Ли.

3.4 Набор генераторов Картана–Вейля

После этих замечаний перейдем к конструктивным утверждениям. В неком базисе касательного пространства эрмитово самосопряженные генераторы $\Gamma_{\alpha'}$, действуя на базисные состояния $|\mu^{(k)}\rangle$, дают какую-то суперпозицию $|\mu^{(k')}\rangle$ с различными весовыми векторами $\mu^{(k')}$ собственных значений генераторов подалгебры Картана

$$\Gamma_{\alpha'} |\mu^{(k)}\rangle = \sum_{k' \neq k} c_{kk'} |\mu^{(k')}\rangle.$$

Согласно нашим построениям в предыдущем разделе все такие линейные преобразования можно представить в виде суммы диагональных преобразований из подалгебры Картана и недиагональных преобразований из корневого дополнения подалгебры Картана. Причем в этой сумме коэффициенты разложения по подалгебре Картана должны быть вещественными, а коэффициенты у генераторов с отрицательными корнями комплексно сопряженными коэффициентам с такими же положительными корнями, так как только в этом случае генератор в алгебре Ли полупростой компактной группы будет эрмитово самосопряженным. Значит, любой генератор алгебры Ли задан разложением по генераторам подалгебры Картана и ее корневого дополнения. Поэтому и сама алгебра Ли определяется набором генераторов в базисе Картана–Вейля, так как, установив коммутаторы в этом базисе, мы получим все возможные выражения для линейных комбинаций коммутаторов в алгебре Ли. В таком подходе мы постулируем, что алгебра генераторов в базисе Картана–Вейля, т.е. коммутаторы генераторов этого базиса однозначно определяют алгебру полупростой компактной группы Ли: это принцип классификации этих алгебр Ли. Итак, в целях такой классификации необходимо установить все коммутаторы генераторов в базисе Картана–Вейля.

Если коммутатор генераторов в подалгебре Картана равен нулю по построению самой этой подалгебры, то для вывода коммутационных соотношений генераторов из корневого дополнения используем то, что действие лестничного генератора Γ_{α_m} на базисные состояния $|\mu^{(k)}\rangle$ будет давать с точностью до масштабного множителя базисное состояние представления, отвечающее весу $\mu^{(k)} + \alpha_m$, т.е.

$$\Gamma_{\alpha_m} |\mu^{(k)}\rangle \sim |\mu^{(k)} + \alpha_m\rangle, \quad \alpha_m \neq 0, \quad \alpha_m \in \{\text{множество корней алгебры Ли}\}.$$

Таким образом мы сводим действие линейных преобразований в пространстве представления к переходам между базисными состояниями, и тогда можно установить, что

$$\begin{aligned} \Gamma_l \Gamma_{\alpha_m} |\mu^{(k)}\rangle &= (l, \mu^{(k)} + \alpha_m) \Gamma_{\alpha_m} |\mu^{(k)}\rangle, \\ \Gamma_{\alpha_m} \Gamma_l |\mu^{(k)}\rangle &= (l, \mu^{(k)}) \Gamma_{\alpha_m} |\mu^{(k)}\rangle. \end{aligned}$$

Имея в виду, что полученные равенства справедливы для любого базисного состояния в пространстве представления $|\mu^{(k)}\rangle$, легко найти следующее коммутационное соотношение

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\alpha}] = (l, \alpha) \Gamma_{\alpha}, \tag{I.3.32}$$

где мы опустили номер корневого вектора m , так как коммутатор имеет такой вид на любом базисном состоянии. Генераторы Γ_{α} , как мы видели, не являются в общем случае эрмитово самосопряженными: $\Gamma_{\alpha}^{\dagger} \neq \Gamma_{\alpha}$. Действительно, эрмитово сопряжение коммутатора (I.3.32) дает

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\alpha}^{\dagger}] = -(l, \alpha) \Gamma_{\alpha}^{\dagger}, \tag{I.3.33}$$

т.е. генератор $\Gamma_{\alpha}^{\dagger}$ имеет такое же коммутационное соотношение с генераторами из подалгебры Картана, что и Γ_{α} , но с учетом смены знака корня, т.е. с подстановкой $\alpha \mapsto -\alpha$. Поэтому

$$\Gamma_{\alpha}^{\dagger} = \Gamma_{-\alpha}. \tag{I.3.34}$$

Следовательно,

$$[\Gamma_l, \Gamma_{-\alpha}] = (l, -\alpha) \Gamma_{-\alpha} = -(l, \alpha) \Gamma_{-\alpha}. \quad (\text{I.3.35})$$

Физический смысл лестничных генераторов $\Gamma_{\pm\alpha}$ состоит в том, что они производят сдвиг собственных значений генераторов из полного набора наблюдаемых на величину $\pm\alpha$. Если корень α положительный, то генераторы Γ_α называют повышающими, а $\Gamma_{-\alpha}$ — понижающими. То, что такие генераторы всегда можно построить, следует из двух фактов, которые мы установили в присоединенном представлении, изоморфном касательному пространству алгебры Ли:

1. генераторы алгебры Ли представляют собой линейные преобразования в векторном пространстве генераторов;
2. эрмитовы генераторы подалгебры Картана как линейные операторы (матрицы) на векторном пространстве генераторов, т.е. на пространстве присоединенного представления, можно диагонализовать совместно и построить их общий для всех базис собственных состояний в пространстве присоединенного представления.

Итак, в теории представлений групп Ли мы имеем дело с тремя векторными пространствами:

- первое — касательное пространство координат группы размерности N_G ;
 - второе — пространство состояний представления с базисом из собственных кет-векторов подалгебры Картана $|\mu^{(k)}\rangle$; размерность этого гильбертова пространства \mathcal{D} , равная числу векторов этого базиса, определяется представлением алгебры генераторов Ли, в частности, для присоединенного представления $\mathcal{D} = N_G$;
 - третье — n -мерное пространство, элементами которого, во-первых, являются векторы собственных значений μ для генераторов из подалгебры Картана; размерность $\dim(\mu) = n$ — ранг алгебры Ли; векторы μ называют *весами* (или весовыми векторами), и они образуют конечный дискретный набор векторов в n -мерном пространстве. Во-вторых, векторы α_m , которые при действии соответствующих им генераторов из корневого дополнения алгебры Картана Γ_{α_m} на базисные состояния $|\mu^{(k)}\rangle$ переводят их в суперпозицию других базисных состояний с весовым вектором $\mu^{(k)} + \alpha_m$, также являются элементами n -мерного векторного пространства и образуют конечный дискретный набор векторов $\{\alpha\}$, которые называются *корневыми* (или просто корнями) той же размерности n , что и веса.
- (I.3.36)

Выясним, какое значение принимает элемент метрики Киллинга для двух генераторов, отвечающих разным корневым векторам. Для этого запишем для генераторов с разными значениями сдвигов след, используя значение коммутатора генератора из алгебры Картана с повышающим генератором (I.3.32),

$$\text{tr}([\Gamma_l, \Gamma_\alpha] \Gamma_\beta) = \text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta)(l, \alpha).$$

Затем раскроем коммутатор по определению и воспользуемся тем, что первую матрицу в произведении матриц под знаком следа можно переместить на последнее место в произведении, так что

$$\text{tr}([\Gamma_l, \Gamma_\alpha] \Gamma_\beta) = \text{tr}(\Gamma_l \Gamma_\alpha \Gamma_\beta - \Gamma_\alpha \Gamma_l \Gamma_\beta) = \text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta \Gamma_l - \Gamma_\alpha \Gamma_l \Gamma_\beta) = \text{tr}(\Gamma_\alpha [\Gamma_\beta, \Gamma_l]) = -(l, \beta) \text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta),$$

т.е.

$$(l, \alpha) \text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta) = -(l, \beta) \text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta).$$

Поскольку l — это любой вектор из ортонормированного базиса в n -мерном пространстве, либо

$$\text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta) \neq 0 \Rightarrow \beta = -\alpha, \quad \text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_{-\alpha}) \neq 0,$$

либо

$$\beta \neq -\alpha, \Rightarrow \text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta) = 0.$$

В базисе нормированных на единицу собственных состояний подалгебры Картана⁵⁵ след вычисляется как сумма диагональных матричных элементов по всем элементам базиса, и подобные соотношения становятся очевидными, так как

$$\text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta) = \sum_{k=1}^{\mathcal{D}} \langle \mu^{(k)} | \Gamma_\alpha \Gamma_\beta | \mu^{(k)} \rangle,$$

⁵⁵Мы иллюстрируем геометрические аргументы рассуждениями в терминах, которые применяются в квантовой механике.

а

$$\Gamma_\alpha \Gamma_\beta |\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle \sim |\boldsymbol{\mu}^{(k)} + \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\rangle,$$

и

$$\langle \boldsymbol{\mu}^{(k)} | \boldsymbol{\mu}^{(k)} + \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \rangle \neq 0, \quad \text{если } \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = 0.$$

Поэтому нормировку генераторов $\Gamma_{\pm\alpha}$ можно сделать такой, что⁵⁶

$$g_{\alpha\beta} = \text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta) = \delta_{\alpha,-\beta}, \quad (\text{I.3.37})$$

что устанавливает вид элементов метрики Киллинга как следа двух генераторов, отвечающих корневым векторам. Очевидно также, что

$$\text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_l) = \sum_{k=1}^D \langle \boldsymbol{\mu}^{(k)} | \Gamma_\alpha \Gamma_l | \boldsymbol{\mu}^{(k)} \rangle = \sum_{k=1}^D \langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{\mu}^{(k)} \rangle \langle \boldsymbol{\mu}^{(k)} | \Gamma_\alpha | \boldsymbol{\mu}^{(k)} \rangle \sim \sum_{k=1}^D \langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{\mu}^{(k)} \rangle \langle \boldsymbol{\mu}^{(k)} | \boldsymbol{\mu}^{(k)} + \boldsymbol{\alpha} \rangle = 0,$$

так как $\langle \boldsymbol{\mu}^{(k)} | \boldsymbol{\mu}^{(k)} + \boldsymbol{\alpha} \rangle = 0$, т.е.

$$g_{\alpha l} = \text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_l) = 0. \quad (\text{I.3.38})$$

Таким образом, в обозначениях кет- и бра-векторов мы наглядно показали, что метрика Киллинга имеет блочный вид при разбиении генераторов на два блока: подалгебры Картана и корневого дополнения. Метрика Киллинга полностью определена для всех пар генераторов из базиса Картана–Вейля в соотношениях (I.3.11), (I.3.37) и (I.3.38).

Задача 12. Докажите, что $\text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_l) = 0$, используя то, что

$$\langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha} \rangle \text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_l) = \text{tr}([\Gamma_l, \Gamma_\alpha] \Gamma_l).$$

Установим теперь значение коммутатора генераторов для противоположных корневых векторов $[\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]$. Для этого запишем тождество Якоби

$$[\Gamma_l, [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]] + [\Gamma_\alpha, [\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_l]] + [\Gamma_{-\alpha}, [\Gamma_l, \Gamma_\alpha]] = 0,$$

и воспользуемся известными коммутаторами (I.3.32), так что

$$\begin{aligned} & [\Gamma_l, [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]] + \langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha} \rangle [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}] + \langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha} \rangle [\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_\alpha] = 0 \Rightarrow \\ & [\Gamma_l, [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]] = 0, \end{aligned} \quad (\text{I.3.39})$$

а значит, коммутатор $[\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]$, значение которого принадлежит множеству линейных комбинаций из генераторов алгебры Ли, является элементом подалгебры Картана, т.е. выражается в виде линейной комбинации генераторов из полного набора наблюдаемых Γ_l . Поэтому $[\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]$ можно записать в виде суперпозиции генераторов подалгебры Картана

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}] = B_{l'} \Gamma_{l'},$$

где в последнем равенстве мы использовали соглашение Эйнштейна о суммировании по паре повторяющихся («немых») индексов: знак суммы по таким индексам опущен. Коэффициенты $B_{l'}$ легко найти, сначала записав

$$\text{tr}(\Gamma_l [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]) = \text{tr}(\Gamma_\alpha [\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_l]) = \langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha} \rangle \text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_{-\alpha}) = \langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = \alpha_l,$$

так как в случае евклидовой метрики Киллинга⁵⁷ (I.3.37) $\text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_{-\alpha}) = 1$. С другой стороны,

$$\text{tr}(\Gamma_l [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]) = B_{l'} \text{tr}(\Gamma_l \Gamma_{l'}) = B_{l'} \delta_{ll'} = B_l.$$

⁵⁶По построению генераторов Γ_α и $\Gamma_{-\alpha}$ как эрмитово сопряженных друг к другу, $\Gamma_\alpha^\dagger = \Gamma_{-\alpha}$, их линейные комбинации, которые можно ввести по аналогии со случаем момента количества движения в виде $\Gamma_x = (\Gamma_\alpha + \Gamma_{-\alpha})/\sqrt{2}$ и $\Gamma_y = -i(\Gamma_\alpha - \Gamma_{-\alpha})/\sqrt{2}$, являются эрмитовыми, а соответствующие элементы метрики Киллинга имеют евклидов вид: $g_{xx} = g_{yy} = 1$, $g_{xy} = g_{yx} = 0$, так как в явном виде, например,

$$\text{tr}(\Gamma_x \Gamma_x) = \frac{1}{2} \text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_{-\alpha} + \Gamma_{-\alpha} \Gamma_\alpha) = 1, \quad \text{tr}(\Gamma_x \Gamma_y) = i \frac{1}{2} \text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_{-\alpha} - \Gamma_{-\alpha} \Gamma_\alpha) = 0.$$

⁵⁷Обобщение вывода в случае конформно плоской метрики Киллинга проведено чуть ниже при выводе формулы (I.3.43). Здесь же мы специально упрощаем рассмотрение, чтобы рассуждения стали более наглядными.

В итоге, $B_l = \alpha_l$, т.е. коэффициенты разложения⁵⁸ B_l — это компоненты корневого вектора, т.е. проекции корневого вектора α на орты базиса единичных векторов l , и

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}] = \sum_l (\mathbf{l}, \alpha) \Gamma_l = \alpha_l \Gamma_l, \quad (I.3.40)$$

где в последнем равенстве мы опять использовали соглашение Эйнштейна о суммировании по немым индексам, причем вид этого коммутатора, который мы сейчас вывели в случае евклидовой метрики Киллинга, не изменится, если метрика конформно плоская (см. изложение ниже и вывод формулы (I.3.43)).

Наконец, в случае $\alpha + \beta \neq 0$ тождества Якоби и коммутаторы (I.3.32) дают

$$\begin{aligned} [\Gamma_l, [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]] + [\Gamma_\alpha, [\Gamma_\beta, \Gamma_l]] + [\Gamma_\beta, [\Gamma_l, \Gamma_\alpha]] &= 0 \quad \Rightarrow \\ [\Gamma_l, [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]] - (\mathbf{l}, \beta) [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] + (\mathbf{l}, \alpha) [\Gamma_\beta, \Gamma_\alpha] &= 0 \quad \Rightarrow \\ [\Gamma_l, [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]] &= (\mathbf{l}, \alpha + \beta) [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta], \end{aligned}$$

а значит, коммутатор $\Gamma_{\alpha+\beta} \equiv [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]$ удовлетворяет такому же коммутационному соотношению

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\alpha+\beta}] = [\Gamma_l, [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]] = (\mathbf{l}, \alpha + \beta) \Gamma_{\alpha+\beta},$$

что и генератор с корневым вектором $\alpha + \beta \neq 0$,

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\alpha+\beta}] = (\mathbf{l}, \alpha + \beta) \Gamma_{\alpha+\beta}.$$

Но в силу того, что каждому корню алгебры Ли поставлен в соответствие единственный генартор алгебры Ли, это значит, что генераторы $\Gamma_{\alpha+\beta} \equiv [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]$ и $\Gamma_{\alpha+\beta}$ пропорциональны. Следовательно,

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = N_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha+\beta}. \quad (I.3.41)$$

При этом, если сумма $\alpha + \beta = \gamma$ не является корневым вектором алгебры Ли, то $N_{\alpha, \beta} = 0$ (предлагаем читателю поразмыслить об этом самостоятельно).

В итоге, с помощью построений в присоединенном представлении алгебры Ли мы показали, что коммутационные соотношения для исходных эрмитово самосопряженных генераторов полупростой компактной алгебры Ли можно эквивалентным образом сформулировать путем перехода к генераторам двух типов и введения подалгебры Картана $\{\Gamma_l\}$ размерностью ранга алгебры Ли $\dim \{\Gamma_l\} = n$ и лестничных генераторов $\{\Gamma_\alpha\}$, которые взаимнооднозначно связаны с корнями алгебры Ли $\{\alpha\}$, причем система корневых векторов алгебры Ли включает в себя положительные корни $\{\alpha_m\}$ и противоположные им отрицательные корни, а метрика Киллинга за счет масштабных преобразований координат группы возле единицы может быть сведена к конформно евклидовой форме (см. определение в сноске 28 на стр. 22)

$$\begin{aligned} g_{ll'} &= \text{tr}(\text{ad}\Gamma_l \cdot \text{ad}\Gamma_{l'}) = \Omega^2 \delta_{ll'}, \\ g_{mm'} &= \text{tr}(\text{ad}\Gamma_{\alpha_m} \cdot \text{ad}\Gamma_{-\alpha_{m'}}) = \Omega^2 \delta_{mm'}, \\ g_{lm} &= \text{tr}(\text{ad}\Gamma_l \cdot \text{ad}\Gamma_{\alpha_m}) = 0. \end{aligned} \quad (I.3.42)$$

Независимо от вида метрики коммутатор

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\alpha_m}] = (\mathbf{l}, \alpha_m) \Gamma_{\alpha_m}.$$

Ковариантное вычисление коэффициентов $B^{l'}$ в разложении коммутатора

$$\delta_{mm'} [\Gamma_{\alpha_m}, \Gamma_{-\alpha_{m'}}] = B^{l'} \Gamma_{l'} \delta_{mm'} \quad (\text{нет суммирования по } m, m'!)$$

по генераторам подалгебры Картана в конформно евклидовой метрике дает

$$\delta_{mm'} \text{tr}(\text{ad}\Gamma_l \cdot [\text{ad}\Gamma_{\alpha_m}, \text{ad}\Gamma_{-\alpha_{m'}}]) = B^{l'} \delta_{mm'} \text{tr}(\text{ad}\Gamma_l \cdot \text{ad}\Gamma_{l'}) = B^{l'} g_{ll'} \delta_{mm'} = B^{l'} \Omega^2 \delta_{ll'} \delta_{mm'},$$

что, с другой стороны, равно

$$\begin{aligned} \delta_{mm'} \text{tr}(\text{ad}\Gamma_l \cdot [\text{ad}\Gamma_{\alpha_m}, \text{ad}\Gamma_{-\alpha_{m'}}]) &= \delta_{mm'} \text{tr}(\text{ad}\Gamma_{\alpha_m} \cdot [\text{ad}\Gamma_{-\alpha_{m'}}, \text{ad}\Gamma_l]) = (\text{нет суммирования по } m, m'!) \\ &= \delta_{mm'} (\mathbf{l}, \alpha_m) \text{tr}(\text{ad}\Gamma_{\alpha_m} \cdot \text{ad}\Gamma_{-\alpha_{m'}}) = \delta_{mm'} (\mathbf{l}, \alpha_m) g_{mm'} = (\alpha_m)_l \Omega^2 \delta_{mm'}. \end{aligned}$$

⁵⁸Подчеркнем, что этот вывод справедлив и в случае, когда $\text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_{-\alpha}) = g_{\alpha, -\alpha} = \Omega^2$, $g_{ll'} = \Omega^2 \delta_{ll'}$, т.е. если метрика положительно определена и пропорциональна единичной, а не только тогда, когда она равна единичной. См. вывод формулы (I.3.43).

Поэтому $B^{ll'}\delta_{ll'} = (\alpha_m)_l$. В ковариантных обозначениях запись коммутатора сопряженных лестничных генераторов примет вид

$$[\Gamma_{\alpha_m}, \Gamma_{-\alpha_{m'}}] = (\alpha_m, l) g^{ll'} \Gamma_{l'} g_{mm'} = (\alpha_m)_l g^{ll'} \Gamma_{l'} g_{mm'} = \alpha_m^l \Gamma_l g_{mm'}. \quad (\text{I.3.43})$$

Описанная нами система генераторов подалгебры Картана и их лестничного дополнения алгебры Ли и есть базис Картана–Вейля полуупростой компактной алгебры Ли. Ясно, что запись коммутаторов в базисе Картана–Вейля имеет вид, инвариантный относительно конформно ортогональных преобразований координат в касательном пространстве группы возле единицы: эти преобразования сохраняют конформно евклидов вид метрики Киллинга.

Резюмируя, запишем установленный набор коммутационных соотношений в базисе Картана–Вейля с конформно евклидовой метрикой Киллинга

$$\begin{aligned} [\Gamma_l, \Gamma_{l'}] &= 0, & g_{ll'} = \text{tr}(\text{ad}\Gamma_l \cdot \text{ad}\Gamma_{l'}) &= \Omega^2 \delta_{ll'}, \\ [\Gamma_l, \Gamma_\alpha] &= \alpha_l \Gamma_\alpha, & \alpha_l &= (l, \alpha), \\ [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}] &= \alpha_l \Gamma_l, & g_{\alpha, -\alpha} = \text{tr}(\text{ad}\Gamma_\alpha \cdot \text{ad}\Gamma_{-\alpha}) &= \Omega^2, \\ [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] &= N_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha+\beta}, & g_{\alpha, \beta} = \text{tr}(\text{ad}\Gamma_\alpha \cdot \text{ad}\Gamma_\beta) &= 0, \quad \alpha + \beta \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{I.3.44})$$

Теперь, когда самый общий вид коммутаторов генераторов в базисе Картана–Вейля установлен, для классификации полуупростых компактных алгебр Ли необходимо определить, какими могут быть корневые векторы и их скалярные произведения в произвольной полуупростой компактной алгебре Ли, а также вычислить значения коэффициентов $N_{\alpha, \beta}$, если корневые векторы алгебры Ли заданы.

§4. Корневые векторы и диаграммы Дынкина

Лестничные операторы, простые положительные корни, экспоненциальное представление элементов группы, коммутационные соотношения и скалярные произведения корневых векторов, базис в пространстве корневых векторов, повышающие последовательности простых положительных корней и число шагов повышения, дочерние корневые последовательности, диаграммы Дынкина, переход от базиса Картана–Вейля к генераторам Шевалле, классификация допустимых связных диаграмм, двойные и тройные линии, ветвления.

При построении базиса Картана–Вейля мы пронумеровали генераторы подалгебры Картана с помощью индекса l . Тогда стало возможно ввести понятие положительных и отрицательных корневых векторов α (см. определение весов и корней в (I.3.36)), разделяя их по знаку первой ненулевой компоненты α_l . При этом, однако, положительные корни могут выражаться в виде линейной комбинации простых положительных корней с натуральными коэффициентами в суперпозиции, как мы это описали на стр. 35 в формуле (I.3.17)⁵⁹.

Докажем, что число простых положительных корней не может быть меньше размерности векторного пространства корней и весов, т.е. ранга группы n . В самом деле, предположим противное: пусть число простых положительных корневых векторов меньше ранга алгебры Ли, — и покажем, что в этом случае алгебра не является полуупростой. Итак, если число лестничных генераторов, которые соответствуют простым положительным корням, меньше числа генераторов в подалгебре Картана, то линейная оболочка, которая образована всевозможными суперпозициями простых положительных корневых векторов с вещественными коэффициентами, образует векторное пространство, которое обозначается как $\text{Span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \equiv \text{Span}(\alpha)$, размерности $\tilde{n} < n$. В этой линейной оболочке в качестве конечного подмножества содержится набор всех положительных и отрицательных корневых векторов алгебры Ли. Пространство $\text{Span}(\alpha)$ по смыслу лестничных генераторов и соответствующих им корневых векторов является подпространством в n -мерном пространстве $\text{Span}(\mu)$, образованном линейной оболочкой из весов μ — векторов собственных значений для собственных состояний матриц генераторов из подалгебры Картана. В этом случае в n -мерном пространстве можно выделить подпространство $\text{Span}(\mu_\perp)$ размерности $\tilde{n}' = n - \tilde{n} > 0$, ортогональное подпространству $\text{Span}(\alpha) = \text{Span}(\mu_\parallel)$ линейной оболочки простых положительных корней. Веса в ортогональном подпространстве $\text{Span}(\mu_\perp)$ инвариантны относительно действия повышающих и поникающих генераторов. Значит, в пространстве весов $\text{Span}(\mu)$ можно произвести разбиение на два ортогональных подпространства — «корневое» $\text{Span}(\alpha) = \text{Span}(\mu_\parallel)$ и

⁵⁹Если α и β — простые положительные корневые векторы, т.е. они задают действие генераторов Γ_α и Γ_β на элементы базиса из собственных состояний генераторов подалгебры Картана $|\mu\rangle$ и отображают один элемент базиса на другой, сдвигая вес состояния на соответствующий корень (с возможным изменением нормировки собственного состояния), то может оказаться, что существует и генератор $\Gamma_{\alpha+\beta}$, который отвечает сдвигу весового вектора на $\gamma = \alpha + \beta$, и этот собственного тоже будет положительным, но уже не будет простым, так как он равен сумме двух положительных корней.

«инвариантное» $\text{Span}(\mu_{\perp})$, и, следовательно, такое разбиение соответствует переходу к таким координатам группы, в которых сама подалгебра Картана составлена из генераторов $\{\Gamma_{\perp}\}$ и $\{\Gamma_{\parallel}\}$, собственные векторы которых в присоединенном представлении⁶⁰ имеют веса в линейных оболочках $\text{Span}(\mu_{\perp})$ и $\text{Span}(\mu_{\parallel}) = \text{Span}(\alpha)$, соответственно. При этом согласно такому построению

$$[\Gamma_{l\perp}, \Gamma_{\alpha}] = (\alpha)_{l\perp} \Gamma_{\alpha} = 0,$$

т.е. генераторы $\Gamma_{l\perp}$ подалгебры Картана из подмножества $\{\Gamma_{\perp}\}$ коммутируют со всеми генераторами вне подалгебры Картана, поскольку, напомним, по построению базиса Картана–Вейля генераторы, соответствующие корням алгебры, изменяют собственные значения генераторов подалгебры Картана, а мы установили, что для генераторов подалгебры Картана из «инвариантного» подпространства $\{\Gamma_{\perp}\}$ собственные значения не меняются. Поэтому наличие подпространства инвариантных весов указывает на то, что действие всех генераторов алгебры оставляет его инвариантным, а значит, подгруппа \mathcal{G}_{\perp} , генераторами которой являются операторы из подалгебры $\{\Gamma_{\perp}\}$, — это инвариантная абелева подгруппа⁶¹. Наличие такой нормальной подгруппы противоречит условию о том, что мы изучаем полупростые группы.

4.1 Экспоненциальное представление и глобальная структура группы

Для более точного вывода о том, что элементы группы коммутируют, если генераторы коммутируют, необходимо перейти от приближенных равенств в окрестности единицы, которые отвечают коммутаторам генераторов, к точным равенствам для элементов группы. Для этого можно использовать изоморфизм групповой структуры возле единицы групповой структуре возле любого другого элемента группы. В самом деле, определение генератора группы возле единицы в некотором представлении $T(\mathfrak{G}) = G$

$$\Gamma_{\alpha} = i \lim_{\mathbf{a} \rightarrow 0} \frac{\partial G_a}{\partial a^{\alpha}} \quad (\text{I.4.1})$$

можно сначала переписать в виде дифференцирования вдоль направления \mathbf{a} , сделав подстановку малого параметра в виде поля⁶² $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}(u) = u \mathbf{a}$ при $u \rightarrow 0$,

$$G_{a(du)} - 1 \equiv dG_{a(du)} = -i\Gamma_{\alpha} du, \quad du \rightarrow 0, \quad \Gamma_{\alpha} = \Gamma_{\alpha} a^{\alpha}. \quad (\text{I.4.2})$$

После умножения справа на $G_{a(u)}$ можно воспользоваться при $u \rightarrow 0$ равенством, справедливым в первом приближении,

$$G_{a(du)} \cdot G_{a(u)} = (1 - i\Gamma_{\alpha} du) \cdot (1 - i\Gamma_{\alpha} u) \approx 1 - i\Gamma_{\alpha} (u + du) = G_{a(u+du)}.$$

С учетом элементарного равенства $1 \cdot G_{a(u)} = G_{a(u)}$ найдем

$$G_{a(u+du)} - G_{a(u)} \equiv dG_{a(u)} = -i\Gamma_{\alpha} du G_{a(u)}, \quad u \rightarrow 0, \quad du \rightarrow 0, \quad \Gamma_{\alpha} = \Gamma_{\alpha} a^{\alpha}, \quad (\text{I.4.3})$$

что эквивалентно

$$dG_{a(u)} \cdot G_{a(u)}^{-1} = -i\Gamma_{\alpha} du, \quad u \rightarrow 0, \quad du \rightarrow 0. \quad (\text{I.4.4})$$

Изоморфизм групповой структуры в разных точках, т.е. при любом значении u , означает, что дифференциальное уравнение (I.4.4) можно записать и в любой другой точке при $u \neq 0$,

$$dG_{a(u)} \cdot G_{a(u)}^{-1} = -i\Gamma_{\alpha} du, \quad (\text{I.4.5})$$

где матрица генератора Γ_a не зависит от точки, которая описывается координатой $u \neq 0$. Это происходит за счет выбора координат, который делает касательное пространство в единице группы тождественным касательному пространству в другой точке группы, т.е. матрица генератора Γ_a остается одной и той же и при $u \neq 0$. Таким образом уравнение на матричную экспоненту,

$$\frac{dG_{a(u)}}{du} = -i\Gamma_{\alpha} \cdot G_{a(u)}, \quad (\text{I.4.6})$$

⁶⁰ Для наглядности рассуждений о генераторах и пространствах линейных оболочек корней и весов мы проводим изложение в присоединенном представлении, чтобы не отвлекаться на обобщения и специфику других представлений группы Ли.

⁶¹ Произведение элементов $g_{\perp} \cdot g_{\parallel} \approx g_{\parallel} \cdot g_{\perp} \cdot g_{[\perp, \parallel]}$ в силу $[\perp, \parallel] = 0$ и $g_{[\perp, \parallel]} = e$, в итоге сводится к коммутативности и инвариантности: $g_{\perp} \cdot g_{\parallel} = g_{\parallel} \cdot g_{\perp}$.

⁶² В математической литературе подобное построение обычно используют в формате, который называют однопараметрической абелевой группой преобразований (параметр u) по фиксированному направлению \mathbf{a} .

имеет решение

$$G_{a(u)} = G_0 \exp\{-i\Gamma_a u\},$$

где $G_0 = 1$, и можно положить $u = 1$ так, чтобы

$$G_a = \exp\{-i\Gamma_a\} = \exp\{-i\Gamma_\alpha a^\alpha\}. \quad (\text{I.4.7})$$

Это — экспоненциальное представление элементов группы, которое возникает при описанном выборе координат в группе: такой выбор координат как раз означает, что генераторы по заданному направлению возле любой точки группы одни и те же, что и возле единицы.

Из экспоненциального представления следует, что, если в пространстве генераторов выделены два подпространства взаимно коммутирующих генераторов $\{\Gamma_\perp\}$ и $\{\Gamma_\parallel\}$, то и элементы подгрупп

$$G_\perp = e^{-i\Gamma_\perp}, \quad G_\parallel = e^{-i\Gamma_\parallel}$$

коммутируют.

Заметим теперь, что введение глобальных координат в экспоненциальном представлении гарантирует только то, что локальная групповая структура возле любой точки в точности совпадает (изоморфна) групповой структуре возле единицы, т.е. отвечает одному и тому же представлению алгебры Ли. Но исследование глобальной структуры экспоненциального представления группы, построенного по представлению алгебры, требует дополнительного инструмента, который в математике называют гомотопией.

Введем траекторию координат \mathbf{a} на отрезке «времени» $t \in [0; 1]$: $\mathbf{a}(t)$. Гомотопией двух путей $\mathbf{a}_0(t)$ и $\mathbf{a}_1(t)$ назовем непрерывное преобразование, зависящее от параметра $\xi \in [0; 1]$, $\mathbf{a}(\xi, t)$ такое, что $\mathbf{a}(0, t) = \mathbf{a}_0(t)$, а $\mathbf{a}(1, t) = \mathbf{a}_1(t)$, т.е. это непрерывное перемещение одного пути в другой. Среди всех путей рассматривают множество циклов: $\mathbf{a}(0) = \mathbf{a}(1)$. Тогда среди циклов можно ввести классы эквивалентности: гомотопные циклы эквивалентны. Всё множество координат глобально можно характеризовать его гомотопическими классами: классами эквивалентности циклов. Например, один класс — это все циклы, которые могут быть стянуты в одну точку, т.е. элемент класса — это тривиальный цикл $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_*$. Если в пространстве есть выколотая точка, то цикл вокруг такой точки (охватывающий ее) не стягивается в точку, и это элемент другого гомотопического класса. Множества с единственным гомотопическим классом — тривиальным — называют односвязными («без дыр»).

■ Можно наряду с гомотопическими классами пространства координат рассматривать отображение циклов во множество чисел, например. Название такого отображения по аналогии с отображением векторов во множество чисел (ковекторы) — коциклы. Но поскольку путь характеризуется касательным ковектором к точке на пути, циклы можно рассматривать как 1-формы ω , а интеграл по циклу как коцикл. Для замкнутого пути по теореме Стокса можно перейти от интеграла 1-формы к интегралу от 2-формы по поверхности с границей на цикле,

$$\oint_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega,$$

и тогда говорят о 2-коцикле. Мы не станем вдаваться в эти построения в рамках данного курса, но на известном нам примере спина укажем, что экспоненциальное представление алгебры со спином $1/2$ при полном обороте вокруг оси давало не тождественное преобразование 1 , как это должно быть в группе поворотов, а -1 . В таком случае говорят, что экспоненциальное представление группы, построенное по представлению алгебры Ли, дает представление универсальной обертывающей группы Ли. В примере, группа $SU(2)$ — универсальная накрывающая (обертывающая) группы $SO(3)$, а отличие в глобальной структуре этих групп описывается наличием ядра отображения $SU(2)$ на $SO(3)$, состоящее из дискретной группы $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$: при гомоморфизме групп праобраз тождественного преобразования называется ядром, и в случае отображения группы $SU(2)$ на группу $SO(3)$ говорят, имеет место изоморфизм $SU(2)/\mathbb{Z}_2 \cong SO(3)$, т.е. $SU(2)$ дважды накрывает $SO(3)$.

Развернутое изложение подобных вопросов пытливый читатель может найти в книге Уорнера [7]. ■

4.2 Ранг группы и число простых положительных корней

Мы доказали, что число простых положительных n -мерных корневых векторов равно или превышает ранг алгебры Ли n . Напомним: *простой положительный корневой вектор не представим в виде суммы двух других положительных корней*.

Докажем теперь, что *число простых положительных корней равно рангу группы n* .

- (1) Для этого сначала покажем, что разность простых положительных корней не может быть корнем.
- (2) Затем установим, что скалярное произведение двух простых положительных корневых векторов отрицательно или равно нулю.

- (3) После этого докажем, что базис n -мерного пространства, построенный из n простых положительных корневых векторов, не допускает существования дополнительного $(n+1)$ -ого простого положительного корня.

Разность различных простых положительных корневых векторов не может быть положительным корнем, так как из $\alpha - \beta = \gamma$ следует, что $\alpha = \beta + \gamma$, т.е. α не есть простой положительный корень, что противоречит исходному положению. Эта разность не может быть и отрицательным корнем: $\alpha - \beta = -\gamma \Rightarrow \beta = \alpha + \gamma$, что недопустимо. В итоге, разность различных простых положительных корней, вообще, не может быть корневым вектором. На языке коммутационных соотношений в базисе Картана–Вейля это утверждение записывается в виде

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\beta}] = 0, \quad N_{\alpha, -\beta} = 0, \quad \text{для простых положительных корней } \alpha \neq \beta. \quad (\text{I.4.8})$$

Далее, используя установленное ранее значение коммутатора для генераторов с противоположными значениями корней и коммутатора лестничного генератора с генератором подалгебры Картана, находим

$$[\Gamma_\beta, [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]] = [\Gamma_\beta, \alpha_l \Gamma_l] = \alpha_l [\Gamma_\beta, \Gamma_l] = \alpha_l (-\beta_l \Gamma_\beta) = -(\alpha, \beta) \Gamma_\beta.$$

Запишем тождество Якоби

$$[\Gamma_\beta, [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]] + [\Gamma_\alpha, [\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_\beta]] + [\Gamma_{-\alpha}, [\Gamma_\beta, \Gamma_\alpha]] = 0.$$

Из него следует, что в базисе Картана–Вейля (I.3.44)

$$[\Gamma_\beta, [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]] = -[\Gamma_\alpha, [\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_\beta]] - [\Gamma_{-\alpha}, [\Gamma_\beta, \Gamma_\alpha]] = -N_{-\alpha, \beta} [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha+\beta}] - N_{\beta, \alpha} [\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_{\beta+\alpha}],$$

где в случае простых положительных корней $\alpha \neq \beta$ следует положить $N_{-\alpha, \beta} \equiv 0$, так как корень из разности двух простых положительных корней запрещен (см. (I.4.8)), в то время как коммутатор в конце формулы согласно соотношениям в базисе Картана–Вейля записывается в виде

$$[\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_{\beta+\alpha}] = N_{-\alpha, \beta+\alpha} \Gamma_\beta.$$

Итак, для двойного коммутатора устанавливаем тождество

$$[\Gamma_\beta, [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]] = -(\alpha, \beta) \Gamma_\beta = -N_{\beta, \alpha} N_{-\alpha, \beta+\alpha} \Gamma_\beta.$$

Следовательно, мы установили связь скалярного произведение двух простых положительных корней с коэффициентами в коммутаторах для генераторов базиса Картана–Вейля,

$$-(\alpha, \beta) = -N_{\beta, \alpha} N_{-\alpha, \beta+\alpha}. \quad (\text{I.4.9})$$

Далее из антисимметрии коммутатора двух разных лестничных генераторов в базисе Картана–Вейля (I.3.44) установим, что

$$N_{\beta, \alpha} = -N_{\alpha, \beta}, \quad (\text{I.4.10})$$

так как

$$[\Gamma_\beta, \Gamma_\alpha] = N_{\beta, \alpha} \Gamma_{\beta+\alpha} = -[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = -N_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha+\beta}.$$

Наконец, пользуясь метрикой Киллинга для $\text{tr}(\Gamma_\beta \Gamma_{-\beta}) = g_{\beta, -\beta} = \Omega^2 > 0$ (см. (I.3.42)) и стандартные коммутационные соотношения в базисе Картана–Вейля (I.3.44), легко записать

$$\text{tr}([\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_{\beta+\alpha}] \Gamma_{-\beta}) = N_{-\alpha, \beta+\alpha} \text{tr}(\Gamma_\beta \Gamma_{-\beta}) = N_{-\alpha, \beta+\alpha} g_{\beta, -\beta} = N_{-\alpha, \beta+\alpha} \Omega^2.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \text{tr}([\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_{\beta+\alpha}] \Gamma_{-\beta}) &= \text{tr}(\Gamma_{-\alpha} \Gamma_{\beta+\alpha} \Gamma_{-\beta} - \Gamma_{\beta+\alpha} \Gamma_{-\alpha} \Gamma_{-\beta}) = \\ &= \text{tr}(\Gamma_{\beta+\alpha} \Gamma_{-\beta} \Gamma_{-\alpha} - \Gamma_{-\beta} \Gamma_{\beta+\alpha} \Gamma_{-\alpha}) = \\ &= \text{tr}([\Gamma_{\beta+\alpha}, \Gamma_{-\beta}] \Gamma_{-\alpha}) = N_{\beta+\alpha, -\beta} g_{\alpha, -\alpha} = N_{\beta+\alpha, -\beta} \Omega^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tr}([\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_{\beta+\alpha}] \Gamma_{-\beta}) &= \text{tr}(\Gamma_{-\alpha} \Gamma_{\beta+\alpha} \Gamma_{-\beta} - \Gamma_{\beta+\alpha} \Gamma_{-\alpha} \Gamma_{-\beta}) = \\ &= \text{tr}(\Gamma_{-\beta} \Gamma_{-\alpha} \Gamma_{\beta+\alpha} - \Gamma_{-\alpha} \Gamma_{-\beta} \Gamma_{\beta+\alpha}) = \\ &= \text{tr}([\Gamma_{-\beta}, \Gamma_{-\alpha}] \Gamma_{\beta+\alpha}) = N_{-\beta, -\alpha} g_{-\alpha-\beta, \alpha+\beta} = N_{-\beta, -\alpha} \Omega^2, \end{aligned}$$

а значит,

$$N_{-\alpha, \beta+\alpha} = N_{\beta+\alpha, -\beta} = N_{-\beta, -\alpha}. \quad (\text{I.4.11})$$

Так как комплексные фазы лестничных генераторов можно всегда выбрать так, чтобы коэффициенты $N_{\alpha, \beta}$ в определении базиса Картана–Вейля (I.3.44) были вещественными⁶³, эрмитово сопряжение коммутатора $[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]$ с учетом тождества $\Gamma_\alpha^\dagger = \Gamma_{-\alpha}$ дает

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]^\dagger = N_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha+\beta}^\dagger \Leftrightarrow [\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_{-\beta}] = -N_{\alpha, \beta} \Gamma_{-\alpha-\beta} = N_{-\alpha, -\beta} \Gamma_{-\alpha-\beta}.$$

Поэтому

$$N_{-\alpha, -\beta} = -N_{\alpha, \beta}, \quad (\text{I.4.12})$$

а из тождества (I.4.11) устанавливаем

$$N_{-\alpha, \beta+\alpha} = N_{-\beta, -\alpha} = -N_{\beta, \alpha} = N_{\alpha, \beta}. \quad (\text{I.4.13})$$

Знак скалярного произведения двух простых положительных корней. Согласно последовательности формул (I.4.9), (I.4.10) и (I.4.13) окончательно устанавливаем, что скалярное произведение двух простых положительных корней в случае, если их сумма также является корнем, отрицательно

$$-(\alpha, \beta) = N_{\alpha, \beta}^2, \quad (\text{I.4.14})$$

а в случае, если их сумма не является корнем, равно нулю, так как $N_{\alpha, \beta} = 0$.

Задача 13. Покажите, что для положительного корня $\gamma = \alpha + \beta$, где α, β — это простые положительные корни,

$$g_{\gamma, -\gamma} = \text{tr}(\text{ad} \Gamma_\gamma \cdot \text{ad} \Gamma_{-\gamma}) = g_{\alpha, -\alpha} = g_{\beta, -\beta}.$$

Примечание. Используйте коммутатор $[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = N_{\alpha, \beta} \Gamma_\gamma$ из соотношений для базиса Картана–Вейля (I.3.44), тождество Якоби и формулу (I.4.14): $N_{\alpha, \beta}^2 = -(\alpha, \beta)$.

Теперь приступим к доказательству того, что n простых положительных корней образуют базис в n -мерном пространстве векторов, а значит, и любые $k \leq n$ простых положительных корней образуют базис своей k -мерной линейной оболочки: число простых положительных корней задает размерность векторного пространства своей линейной оболочки.

Пусть число простых положительных корневых векторов больше размерности векторного пространства, построенного как линейная оболочка этих корней, $\dim \text{Span}(\alpha) = n$. Но тогда среди этих простых положительных корневых векторов найдутся ровно n корней $\{\alpha_m\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, линейная оболочка которых имеет размерность, равную рангу алгебры $\dim \text{Span}(\alpha_m) = n$, так как в противном случае любые n простых положительных корней были бы линейно зависимы, и $\dim \text{Span}(\alpha_m) = \tilde{n} < n$, а значит, часть из них, а именно, $n - \tilde{n}$ можно было бы выразить через суперпозицию оставшихся \tilde{n} векторов, образующих базис в $\text{Span}(\alpha_m)$ и исключить из построения линейной оболочки $\text{Span}(\alpha_m)$. Если добавление других положительных корней, в конце концов, не позволило бы получить из n простых положительных корней базис в $\text{Span}(\alpha)$, то и само пространство $\text{Span}(\alpha)$ имело бы размерность меньше, чем ранг алгебры, что, как мы уже показали, недопустимо. Резюмируя, повторим, что n простых положительных корней $\{\alpha_m\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ образуют базис n -мерной линейной оболочки всех положительных корней, и, значит, оставшиеся вне этого базиса простые положительные корни $\{\gamma\}$ разлагаются по базису $\{\alpha_m\}$,

$$\gamma = \sum_i c_i^{(+)} \alpha_i - \sum_{i'} c_{i'}^{(+)} \alpha_{i'}, \quad c_i^{(+)} > 0, -c_{i'}^{(+)} < 0,$$

где мы выделили множества простых положительных векторов базиса $\{\alpha_m\}$ по знаку коэффициентов, которые обозначили индексами i и i' . Сгруппируем вклады так, чтобы коэффициенты разложения были исключительно положительными,

$$\epsilon = \sum_i c_i^{(+)} \alpha_i = \gamma + \sum_{i'} c_{i'}^{(+)} \alpha_{i'},$$

⁶³В базисе Картана–Вейля (I.3.44) можно сделать подстановку $\Gamma_{\alpha_m} \mapsto e^{i\phi_m} \Gamma_{\alpha_m}$, где $\phi_m \in \mathbb{R}$ — фаза преобразования, и такое преобразование никак не изменит коммутатор генератора из подалгебры Картана Γ_l с повышающим или поникающим генераторами, т.е. не изменит корневой вектор α_m ,

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\alpha_m}] = (\alpha_m)_l \Gamma_{\alpha_m},$$

но при этом фаза константы $N_{m, m'}$ в коммутаторе лестничных операторов

$$[\Gamma_{\alpha_m}, \Gamma_{\alpha_{m'}}] = N_{m, m'} \Gamma_{\alpha_m + \alpha_{m'}},$$

изменится.

и вычислим квадрат этого вектора, пользуясь его записью двумя способами,

$$\epsilon^2 = \left(\left(\sum_i c_i^{(+)} \alpha_i \right), \left(\gamma + \sum_{i'} c_{i'}^{(+)} \alpha_{i'} \right) \right) = \sum_i c_i^{(+)} (\alpha_i, \gamma) + \sum_{i, i'} c_i^{(+)} c_{i'}^{(+)} (\alpha_i, \alpha_{i'}) \leq 0,$$

где неравенство возникает из-за того, что $c_i^{(+)} > 0$, $c_{i'}^{(+)} > 0$, и из-за условия на скалярное произведение любой пары простых положительных корней

$$(\alpha, \beta) = -N_{\alpha, \beta}^2 \leq 0. \quad (\text{I.4.14})$$

Однако квадрат вектора не может быть меньше нуля, и следовательно, $\epsilon^2 = 0$, а сам вектор может быть равен только нулю $\epsilon = 0$, откуда

$$\gamma = - \sum_{i'} c_{i'}^{(+)} \alpha_{i'}, \quad c_{i'}^{(+)} > 0.$$

Таким образом, любой простой положительный корневой вектор, не вошедший в базис, разлагается по базису простых положительных корней $\{\alpha_m\}$ исключительно с отрицательными коэффициентами $-c_{i'}^{(+)} < 0$. Но это значит, что первая по порядку отличная от нуля компонента корневого вектора $(\gamma)_l$ выражается в виде

$$(\gamma)_l = - \sum_{i'} c_{i'}^{(+)} (\alpha_{i'})_l,$$

где среди компонент $(\alpha_{i'})_l$ могут быть только неотрицательные первые по порядку отличные от нуля или нули, причем, хотя бы одна из этих компонент должна быть положительной, а значит, $\gamma_l < 0$. Стало быть, γ — это отрицательный корневой вектор, а значит, предположение о том, что кроме базиса из n простых положительных корней могут существовать другие простые положительные корни было неверно.

Это доказательство справедливо и для любой выборки из k простых положительных корней: размерность их линейной оболочки не может превышать числа этих корней, и, как мы только что показали, размерность их линейной оболочки не может быть и меньше числа простых положительных корней в выборке, так как в противном случае «лишние корни» оказались бы не положительными, а отрицательными.

В итоге, доказательство всех трех положений, сформулированных в начале раздела 4.2 Главы 1, §4 на стр. 47, завершено, и число простых положительных корней равно рангу группы n .

По сути проведенного построения мы имеем возможность осуществить в n -мерном пространстве, построенном как линейная оболочка ортонормированных базисных векторов $\{l\}$, переход к базису простых положительных корневых векторов $\{\alpha\}_+$.

4.3 Последовательности корней и дискретный спектр скалярных произведений корней

Рассмотрим теперь α -последовательность⁶⁴ для корня β в виде сумм, построенных из двух различных простых положительных корней с равным нулю или натуральным коэффициентом \varkappa :

$$\beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \dots, \beta + \varkappa\alpha, \dots, \beta + \varkappa_{\alpha, \beta}^{\max} \alpha,$$

которая может быть только конечной, так как в базисе представления $|\mu^{(k)}\rangle$ конечное число состояний⁶⁵, и следовательно, имеется конечное число сдвигов между ними $\varkappa_{\alpha, \beta}^{\max}$, т.е. $0 \leq \varkappa \leq \varkappa_{\alpha, \beta}^{\max}$. В силу тождества Якоби

$$[\Gamma_{\beta+\varkappa\alpha}, [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]] = [\Gamma_\alpha, [\Gamma_{\beta+\varkappa\alpha}, \Gamma_{-\alpha}]] + [\Gamma_{-\alpha}, [\Gamma_\alpha, \Gamma_{\beta+\varkappa\alpha}]].$$

Далее, пользуясь стандартными коммутационными соотношениями в базисе Картана–Вейля (I.3.44), получаем в левой части тождества

$$[\Gamma_{\beta+\varkappa\alpha}, [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]] = [\Gamma_{\beta+\varkappa\alpha}, \alpha_l \Gamma_l] = \alpha_l [\Gamma_{\beta+\varkappa\alpha}, \Gamma_l] = -\alpha_l (\beta_l + \varkappa \alpha_l) \Gamma_{\beta+\varkappa\alpha} = -(\alpha, \beta + \varkappa\alpha) \Gamma_{\beta+\varkappa\alpha},$$

⁶⁴В приводимом построении последовательности мы полагаем, что простые положительные корни различны, $\alpha \neq \beta$. В дальнейшем мы покажем, что построение последовательности кратных корней $\alpha, 2\alpha, \dots$ ограничена единственным, первым членом. Если же корни не являются простыми, то нужно проводить специальное исследование соответствующих последовательностей.

⁶⁵Напомним, что мы рассматриваем только конечномерные представления алгебр Ли.

в то время как справа

$$\begin{aligned} [\Gamma_\alpha, [\Gamma_{\beta+\kappa\alpha}, \Gamma_{-\alpha}]] &= N_{\beta+\kappa\alpha, -\alpha} [\Gamma_\alpha, \Gamma_{\beta+(\kappa-1)\alpha}] = \\ &= N_{\beta+\kappa\alpha, -\alpha} N_{\alpha, \beta+(\kappa-1)\alpha} \Gamma_{\beta+\kappa\alpha}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} [\Gamma_{-\alpha}, [\Gamma_\alpha, \Gamma_{\beta+\kappa\alpha}]] &= -[\Gamma_{-\alpha}, [\Gamma_{\beta+\kappa\alpha}, \Gamma_\alpha]] = -N_{\beta+\kappa\alpha, \alpha} [\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_{\beta+(\kappa+1)\alpha}] = \\ &= -N_{\beta+\kappa\alpha, \alpha} N_{-\alpha, \beta+(\kappa+1)\alpha} \Gamma_{\beta+\kappa\alpha}. \end{aligned}$$

Если для произведения коэффициентов в конце этой формулы ввести обозначение

$$\mathcal{A}_\kappa \stackrel{\text{def}}{=} N_{\beta+\kappa\alpha, \alpha} N_{-\alpha, \beta+(\kappa+1)\alpha},$$

то с учетом антисимметрии символов $N_{\alpha, \beta} = -N_{\beta, \alpha}$, которая следует из антисимметричности скобки Ли, для произведения коэффициентов

$$N_{\beta+\kappa\alpha, -\alpha} N_{\alpha, \beta+(\kappa-1)\alpha} = N_{\alpha, \beta+(\kappa-1)\alpha} N_{\beta+\kappa\alpha, -\alpha} = (-N_{\beta+(\kappa-1)\alpha, \alpha})(-N_{-\alpha, \beta+\kappa\alpha}) = \mathcal{A}_{\kappa-1}.$$

Тогда для тождества Якоби наши выкладки дают

$$\begin{aligned} [\Gamma_{\beta+\kappa\alpha}, [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]] &= [\Gamma_\alpha, [\Gamma_{\beta+\kappa\alpha}, \Gamma_{-\alpha}]] + [\Gamma_{-\alpha}, [\Gamma_\alpha, \Gamma_{\beta+\kappa\alpha}]] \Leftrightarrow \\ -(\alpha, \beta + \kappa\alpha) \Gamma_{\beta+\kappa\alpha} &= \left(N_{\beta+(\kappa-1)\alpha, \alpha} N_{-\alpha, \beta+\kappa\alpha} - N_{\beta+\kappa\alpha, \alpha} N_{-\alpha, \beta+(\kappa+1)\alpha} \right) \Gamma_{\beta+\kappa\alpha} \Leftrightarrow \\ -((\alpha, \beta) + \kappa(\alpha, \alpha)) \Gamma_{\beta+\kappa\alpha} &= (\mathcal{A}_{\kappa-1} - \mathcal{A}_\kappa) \Gamma_{\beta+\kappa\alpha}. \end{aligned}$$

В итоге, при условии, что генератор $\Gamma_{\beta+\kappa\alpha}$ существует, находим рекуррентную формулу

$$(\alpha, \beta) + \kappa(\alpha, \alpha) = \mathcal{A}_\kappa - \mathcal{A}_{\kappa-1}. \quad (\text{I.4.15})$$

Но

$$\mathcal{A}_{-1} = N_{\beta-\alpha, \alpha} N_{-\alpha, \beta} = 0,$$

поскольку для простых положительных корневых векторов $N_{-\alpha, \beta} = 0$, так как разность двух простых положительных корней не может быть корнем (см. коммутатор в последней строке (I.3.44) при введении базиса Картана–Вейля). Значит,

$$\mathcal{A}_\kappa = \sum_{q=0}^{\kappa} (\alpha, \beta) + \sum_{q=0}^{\kappa} q(\alpha, \alpha) = (\kappa+1)(\alpha, \beta) + \frac{1}{2}\kappa(\kappa+1)(\alpha, \alpha). \quad (\text{I.4.16})$$

Пусть $\kappa_{\alpha, \beta}^{\max}$ — максимальное допустимое число шагов в последовательности. Тогда коэффициент $N_{\beta+\kappa_{\alpha, \beta}^{\max}\alpha, \alpha}$, который входит в коммутатор $[\Gamma_{\beta+\kappa_{\alpha, \beta}^{\max}\alpha}, \Gamma_\alpha] = N_{\beta+\kappa_{\alpha, \beta}^{\max}\alpha, \alpha} \Gamma_{\beta+(\kappa_{\alpha, \beta}^{\max}+1)\alpha}$, равен нулю: генератор $\Gamma_{\beta+(\kappa_{\alpha, \beta}^{\max}+1)\alpha}$ не существует. Поскольку цепочка в последовательности генераторов по определению обрывается на шаге с номером $\kappa_{\alpha, \beta}^{\max}$, заключаем, что $\mathcal{A}_{\kappa_{\alpha, \beta}^{\max}}$ в рекуррентции (I.4.16) обращается в нуль, и

$$\kappa_{\alpha, \beta}^{\max} = -2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \geq 0. \quad (\text{I.4.17})$$

Совершенно аналогично в β -последовательности $\alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \dots, \alpha + \kappa_{\beta, \alpha}^{\max}\beta$ максимально допустимое число членов

$$\kappa_{\beta, \alpha}^{\max} = -2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\beta, \beta)} \geq 0. \quad (\text{I.4.18})$$

Таким образом, лестничные генераторы, отвечающие простым положительным корневым векторам, — это повышающие операторы, из коммутаторов которых однозначно строятся все повышающие операторы в заданной алгебре группы Ли⁶⁶.

Мы рассмотрели цепочки корневых векторов в случае двух простых положительных корней. Для обобщения этих выводов на случай, когда простых положительных корней больше двух, воспользуемся

⁶⁶Подчеркнем, что для построения всех повышающих генераторов необходимо также исследовать цепочки, не только построенные из простых положительных корней, но и цепочки, возникающие из всех положительных корней, которые появляются в последовательностях цепочек из простых положительных корней.

упорядоченным множеством простых положительных корней $\{\alpha_m\}$, $m \in \{\overline{1, n}\}$ и сопоставим $\alpha \mapsto \alpha_i$, $\beta \mapsto \alpha_j$, так что элементарно в этих обозначениях

$$\varkappa_{ij}^{\max} = -2 \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \equiv -a_{ij}, \quad \varkappa_{ji}^{\max} = -2 \frac{(\alpha_j, \alpha_i)}{(\alpha_j, \alpha_j)} \equiv -a_{ji}, \quad (\text{I.4.19})$$

где a_{ij} называют матрицей Картана, причем, очевидно, что диагональный член матрицы Картана $a_{ii} = 2$ (нет суммирования по i).

Натуральные или нулевые значения $\varkappa_{\alpha, \beta}^{\max}$ и $\varkappa_{\beta, \alpha}^{\max}$ в (I.4.17) и (I.4.18) накладывают ограничения на сами корневые векторы. Более того, поскольку скалярное произведение корневых векторов евклидово,

$$(\alpha, \beta) = \cos \phi \sqrt{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)},$$

имеет место неравенство Шварца

$$(\alpha, \beta)^2 \leq (\alpha, \alpha)(\beta, \beta),$$

имеет место неравенство

$$l_{\alpha, \beta} \equiv \varkappa_{\alpha, \beta}^{\max} \varkappa_{\beta, \alpha}^{\max} = \left(-2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \right) \left(-2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\beta, \beta)} \right) = 4 \frac{(\alpha, \beta)^2}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)} \leq 4, \quad (\text{I.4.20})$$

а равенство имеет место, только если корневые векторы параллельны. Однако, так как $\varkappa_{\alpha, \beta}^{\max}$ и $\varkappa_{\beta, \alpha}^{\max}$ не отрицательны, указанное равенство достигается только при $\beta \sim -\alpha$, что недопустимо для двух положительных корневых векторов. Поэтому допустимая область значений произведения числа шагов в последовательностях двух простых положительных корней задается в виде

$$l_{\alpha, \beta} = \varkappa_{\alpha, \beta}^{\max} \varkappa_{\beta, \alpha}^{\max} = \{0, 1, 2, 3\}. \quad (\text{I.4.21})$$

При этом равенство $l_{\alpha, \beta} = \varkappa_{\alpha, \beta}^{\max} \varkappa_{\beta, \alpha}^{\max} = 0$ имеет место, только если корни ортогональны, т.е. когда $\varkappa_{\alpha, \beta}^{\max} = \varkappa_{\beta, \alpha}^{\max} = 0$.

Так как $\varkappa_{\alpha, \beta}^{\max}$ и $\varkappa_{\beta, \alpha}^{\max}$ неотрицательны, из равенств (I.4.17) и (I.4.18) следует, что скалярное произведение двух простых положительных корней отрицательно или равно нулю, а из

$$l_{\alpha, \beta} = \varkappa_{\alpha, \beta}^{\max} \varkappa_{\beta, \alpha}^{\max} = 4 \frac{(\alpha, \beta)^2}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)}$$

сразу следует, что

$$\frac{(\alpha, \beta)}{\sqrt{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\varkappa_{\alpha, \beta}^{\max} \varkappa_{\beta, \alpha}^{\max}}, \quad \text{или} \quad \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{\sqrt{(\alpha_i, \alpha_i)(\alpha_j, \alpha_j)}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\varkappa_{ij}^{\max} \varkappa_{ji}^{\max}}. \quad (\text{I.4.22})$$

Если $l_{\alpha, \beta} = \varkappa_{\alpha, \beta}^{\max} \varkappa_{\beta, \alpha}^{\max} \neq 0$, то

$$\frac{\varkappa_{\alpha, \beta}^{\max}}{\varkappa_{\beta, \alpha}^{\max}} = \frac{(\beta, \beta)}{(\alpha, \alpha)}, \quad \text{или} \quad \frac{\varkappa_{ij}^{\max}}{\varkappa_{ji}^{\max}} = \frac{(\alpha_j, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}, \quad (\text{I.4.23})$$

и отношение числа шагов задает пропорцию квадратов длин двух простых положительных корневых векторов.

При выводе значения коммутатора двух генераторов, соответствующих двум простым положительным корням,

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = N_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha+\beta},$$

мы вывели

$$N_{\alpha, \beta}^2 = -(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \varkappa_{\alpha, \beta}^{\max} (\alpha, \alpha) = \frac{1}{2} \varkappa_{\beta, \alpha}^{\max} (\beta, \beta). \quad (\text{I.4.24})$$

В аналогичной манере можно вывести коммутаторы для произвольных, необязательно простых корневых векторов, и таким образом полностью восстановить *все коммутационные соотношения* для генераторов группы Ли⁶⁷.

⁶⁷Буквальное применение соотношения (I.4.24) в случае замены простого положительного корня β на простой отрицательный корень $-\beta$ дало бы $N_{\alpha, -\beta}^2 = (\alpha, \beta) < 0$, что невозможно. Но это значит, что сделанное при выводе формулы предположение о том, что коммутатор $[\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\beta}]$ отличен от нуля неверно, так что мы получаем дополнительное доказательство факта $N_{\alpha, -\beta} = 0$ для двух простых положительных корней.

Заметим, что корневые векторы, возникшие в ходе построения последовательностей из простых корней, можно затем также рассмотреть на предмет построения последовательностей уже и с их участием.

Задача 14. Покажите, что в α -последовательности $\alpha + \alpha, 3\alpha, \dots, (\varkappa_{\alpha}^{\max} + 1)\alpha$ для простого положительного корня α максимальное допустимое число шагов $\varkappa_{\alpha}^{\max} = 0$, т.е. не существует корневых векторов, кратных простому положительному корню.

Решение. Поскольку лестничный генератор коммутирует сам с собой

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\alpha] = N_{\alpha, \alpha} \Gamma_{2\alpha} \equiv 0 \Rightarrow N_{\alpha, \alpha} \equiv 0.$$

Поэтому цепочка в последовательности, построенной в виде сумм одного и того же корня, обрывается при первом же шаге, и лестничные генераторы с кратными простыми положительными или отрицательными корнями не существуют. Заметим, что тождество $N_{\alpha, \alpha} \equiv 0$ верно в случае любого корневого вектора, т.е. *любые кратные корневому вектору не являются корнями алгебры Ли*.

Задача 15. Определите допустимое число шагов в дочерней α -последовательности $q\beta + \alpha, q\beta + 2\alpha, \dots, q\beta + \varkappa_{\alpha, \beta}^{\max} \alpha$, которая может возникнуть после построения родительской β -последовательности $\alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \dots, \alpha + \varkappa_{\beta, \alpha}^{\max} \beta$ на q -том шаге при $q \geq 2$.

Решение. Воспользуемся проведенным исследованием для последовательности $\beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \dots, \beta + \varkappa \alpha$, сделав подстановку $\beta \mapsto q\beta + \alpha$. Тогда в согласии с построениями на стр. 51 для величин

$$\mathcal{A}_{\varkappa}^{(q)} = N_{q\beta + (\varkappa+1)\alpha, \alpha} N_{-\alpha, q\beta + (\varkappa+2)\alpha},$$

имеет место рекуррентное соотношение

$$\mathcal{A}_{\varkappa}^{(q)} = \mathcal{A}_{\varkappa-1}^{(q)} + q(\alpha, \beta) + (\varkappa+1)(\alpha, \alpha). \quad (\text{I.4.25})$$

Но

$$\mathcal{A}_{-1}^{(q)} = N_{q\beta, \alpha} N_{-\alpha, q\beta + \alpha} = 0,$$

так как $N_{-\alpha, q\beta + \alpha} = 0$, поскольку эта величина входит в коммутатор

$$[\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_{q\beta + \alpha}] = N_{-\alpha, q\beta + \alpha} \Gamma_{q\beta},$$

а у вектора, кратного корню β , который не может быть корнем алгебры Ли, не существует соответствующего генератора. Значит,

$$\mathcal{A}_{\varkappa}^{(q)} = \sum_{r=0}^{\varkappa} (q(\alpha, \beta) + (r+1)(\alpha, \alpha)) = q(\alpha, \beta)(\varkappa+1) + \frac{1}{2}(\varkappa+2)(\varkappa+1)(\alpha, \alpha).$$

Максимальное число шагов определяется из условия $\mathcal{A}_{\varkappa_{(q)}^{\max}}^{(q)} = 0$,

$$\varkappa_{(q)}^{\max} = q\varkappa_{\alpha, \beta}^{\max} - 2,$$

где, как и прежде,

$$\varkappa_{\alpha, \beta}^{\max} = -2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \geq 0. \quad (\text{I.4.17})$$

На самом деле, построение корней алгебры Ли по системе ее простых положительных корней в случае, когда простых положительных корней более двух, можно провести с помощью группы отражений Вейля, которую мы рассмотрим в разделе 2.3 Главы 2, §2.



Рис. 1.1: Возможные типы соединений двух простых положительных корневых векторов на диаграмме Дынкина, если скалярное произведение этих корневых векторов отлично от нуля.

Элементы схемы Дынкина. На схемах Дынкина изображают простые положительные корневые векторы α_i и α_j в виде пары точек, которые соединяются $l_{ij} = \kappa_{ij}^{\max} \kappa_{ji}^{\max}$ числом прямых линий, характеризующих эти корни. Несложно перечислить типы возможных соединений:

- при $\kappa_{ij}^{\max} \kappa_{ji}^{\max} = 1 = l_{ij}$ единственная линия соединяет корневые векторы одинаковой длины (напоминаем, что согласно (I.4.23) отличное от нуля число линий равно отношению квадратов длин простых положительных корней);
- при $\kappa_{ij}^{\max} \kappa_{ji}^{\max} = 2 = l_{ij}$ две линии соединяют корни, один из которых в $\sqrt{2}$ раз длинней;
- при $\kappa_{ij}^{\max} \kappa_{ji}^{\max} = 3 = l_{ij}$ три линии соединяют корни, один из которых в $\sqrt{3}$ раз длинней (см. диаграммы на рис. 1.1);
- на двойных и тройных линиях стрелка указывает направление от большего корня к меньшему.

Если корни ортогональны, то они не соединяются линией. Для ортогональных простых положительных корней коммутатор равен нулю (см. (I.4.24)), и нет построенных по ним последовательностей, а поэтому групповые структурные константы с индексами этих корней обращаются в нуль. Здесь надо иметь в виду, что переход от эрмитовых генераторов алгебры Ли к базису Картана–Вейля означает, что и структурные константы группы записываются в этом базисе, т.е. это константы $N_{\alpha,\beta}$ — численные коэффициенты в выражении для коммутаторов двух генераторов $[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]$, задающих билинейный автоморфизм этих генераторов со всеми свойствами скобки Ли.

Перепишем для дальнейших построений важную формулу (I.4.22) в виде

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= -\frac{1}{2} \sqrt{l_{\alpha, \beta}} \|\alpha\| \cdot \|\beta\|, \quad \|\alpha\|^2 = (\alpha, \alpha), \quad \|\beta\|^2 = (\beta, \beta), \quad \text{или} \\ (\alpha_i, \alpha_j) &= -\frac{1}{2} \sqrt{l_{ij}} \|\alpha_i\| \cdot \|\alpha_j\|, \quad \|\alpha_i\|^2 = (\alpha_i, \alpha_i), \quad \|\alpha_j\|^2 = (\alpha_j, \alpha_j), \quad l_{ij} = \kappa_{ij}^{\max} \kappa_{ji}^{\max}. \end{aligned} \quad (\text{I.4.26})$$

4.4 Соотношения Серра

Для полноты общей картины по алгебрам Ли отметим, что в математической литературе вместо базиса Картана–Вейля (Cartan, Weyl) принято вводить генераторы Шевалле (Chevalley)

$$\begin{aligned} h_i &= \kappa_i(\alpha_i)_l \Gamma_l, \quad \text{суммирование по } l, \quad \alpha_i \text{ — простой положительный корень,} \\ e_i &= \sqrt{\kappa_i} \Gamma_{\alpha_i}, \quad f_i = \sqrt{\kappa_i} \Gamma_{-\alpha_i}, \quad i \in \{\overline{1, n}\}, \quad \text{нет суммирования по } i, \end{aligned} \quad (\text{I.4.27})$$

с нормировочным множителем

$$\kappa_i = \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)}. \quad (\text{I.4.28})$$

В обозначениях (I.4.27), (I.4.28) алгебра генераторов подалгебры Картана h_i и повышающих и понижающих генераторов e_i и f_j , которые соответствуют простым положительным корням, сводится к следующим соотношениям Серра (Serre):

для подалгебры Картана

$$[h_i, h_j] = \kappa_i \kappa_j (\alpha_i)_l (\alpha_j)_l [\Gamma_l, \Gamma_l] = 0,$$

для простых корней

$$[e_i, f_i] = \kappa_i [\Gamma_{\alpha_i}, \Gamma_{-\alpha_i}] = \kappa_i (\alpha_i)_l \Gamma_l = h_i, \quad [e_i, f_j] = \sqrt{\kappa_i \kappa_j} [\Gamma_{\alpha_i}, \Gamma_{-\alpha_j}] = 0, \quad \text{при } i \neq j,$$

для коммутатора генератора из подалгебры Картана с повышающими генераторами

$$[h_i, e_j] = \kappa_i \sqrt{\kappa_i} (\alpha_i)_l [\Gamma_l, \Gamma_{\alpha_j}] = \kappa_i \sqrt{\kappa_i} (\alpha_i)_l (\alpha_j)_l \Gamma_{\alpha_j} = \kappa_i \sqrt{\kappa_i} (\alpha_i, \alpha_j) \Gamma_{\alpha_j} = a_{ij} e_j,$$

где нет суммирования по индексу j , а с принятой нормировкой κ_i (I.4.28) матрица Картана a_{ij} согласно определению (I.4.19) на стр. 52 выражается через максимальное число шагов κ_{ij}^{\max} , которое ограничивает серию положительных корней $\alpha_j + \kappa \alpha_i$, см. (I.4.17) на стр. 51,

$$a_{ij} = \kappa_i (\alpha_i, \alpha_j) = 2 \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = -\kappa_{ij}^{\max}. \quad (\text{I.4.29})$$

Согласно этому определению $a_{ii} = 2$, и, следовательно, матрица Картана представляет из себя алгебраический код для диаграмм Дынкина: недиагональный элемент $-a_{ij}$, отличный от нуля, указывает на то, что простые положительные корни α_i и α_j не ортогональны, и задает число шагов при построении положительных корней в α_i -цепочки, произведение $a_{ij} a_{ji}$ — это число линий, которые соединяют эти два простых положительных корня на диаграмме Дынкина, и если $a_{ij} > a_{ji}$, то на соединительной линии указывается направление от α_i к α_j .

Коммутатор генератора из подалгебры Картана с понижающим генератором

$$[h_i, f_j] = \kappa_i \sqrt{\kappa_i} (\alpha_i)_l [\Gamma_l, \Gamma_{-\alpha_j}] = -\kappa_i \sqrt{\kappa_i} (\alpha_i)_l (\alpha_j)_l \Gamma_{-\alpha_j} = -\kappa_i \sqrt{\kappa_i} (\alpha_i, \alpha_j) \Gamma_{-\alpha_j} = -a_{ij} f_j.$$

Условие максимального числа шагов в серии из простых положительных и отрицательных корней⁶⁸ записывают в виде действия присоединенного представления на вектор

$$\text{ad}(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = \text{ad}(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) = 0,$$

так как по построению присоединенного представления (см. сноска к формуле (I.2.8))

$$\text{ad}(e_i)^1(e_j) \equiv [e_i, e_j] = n_{ij} e_{i+j} \Leftrightarrow [\Gamma_{\alpha_i}, \Gamma_{\alpha_j}] = N_{ij} \Gamma_{\alpha_i + \alpha_j}, \quad \alpha_j \xrightarrow{[\Gamma_{\alpha_i}, \Gamma_{\alpha_j}]} \alpha_j + \alpha_i,$$

где согласно (I.4.14) $N_{ij}^2 = -(\alpha_i, \alpha_j)$, откуда $n_{ij} = N_{ij} \sqrt{\kappa_i \kappa_j / \kappa_{i,j}}$ при $\kappa_{i,j} = 2(\alpha_i + \alpha_j, \alpha_i + \alpha_j)^{-1}$. Поэтому

$$\text{ad}(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) \Leftrightarrow \alpha_j \xrightarrow{[\Gamma_{\alpha_i}, [\Gamma_{\alpha_i}, \dots, [\Gamma_{\alpha_i}, \Gamma_{\alpha_j}] \dots]]} \alpha_j + (1 - a_{ij}) \alpha_i \Leftrightarrow \alpha_j \xrightarrow{[\Gamma_{\alpha_i}, [\Gamma_{\alpha_i}, \dots, [\Gamma_{\alpha_i}, \Gamma_{\alpha_j}] \dots]]} \alpha_j + (1 + \varkappa_{ij}^{\max}) \alpha_i.$$

По определению максимального числа шагов в этой цепочке \varkappa_{ij}^{\max} корневого вектора $\alpha_j + (1 + \varkappa_{ij}^{\max}) \alpha_i$ не существует, так что

$$\text{ad}(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = 0.$$

Точно так же для цепочки из простых отрицательных корней $-(\alpha_j + \varkappa \alpha_i)$ получается, что

$$\text{ad}(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) = 0.$$

4.5 Связные диаграммы

Диаграмма Дынкина — это изображение всех простых положительных корней алгебры Ли в виде точек с линиями, которые могут соединять эти корни по правилам, которые мы описали в §4 Главы 1. На такой диаграмме можно ввести классы эквивалентности, которые называются компонентами связности: класс эквивалентности простого положительного корневого вектора, который изображается точкой на диаграмме Дынкина, образован всеми корнями, с которыми исходный корень последовательно соединен линиями. Попросту говоря, компонента связности — это все корни, которые принадлежат непрерывной цепочке из точек и звеньев-линий. Число компонент связности полупростой компактной алгебры Ли не обязательно равно единице. Диаграмма называется связной, если у нее одна компонента связности.

В связной диаграмме Дынкина заданы не равные нулю скалярные произведения простых положительных корней и определенные по этим скалярным произведениям согласно (I.4.14) коэффициенты $N_{ij} = \sqrt{-(\alpha_i, \alpha_j)}$, которые входят в коммутационные соотношения для генераторов, соответствующих простым положительным корням диаграммы, так что $[\Gamma_{\alpha_i}, \Gamma_{\alpha_j}] = N_{ij} \Gamma_{\alpha_i + \alpha_j}$, а также косвенно определены и коммутаторы генераторов для построенных по простым корням цепочек последовательностей корней (см. задачу и построение дочерних последовательностей корней на стр. 53).

Если в диаграмме Дынкина есть, например, две компоненты связности, т.е. простые положительные корни образуют базис двух ортогональных пространств $\{\alpha\}$ и $\{\alpha'\}$ размерности \tilde{n} и \tilde{n}' , где ранг алгебры равен $n = \tilde{n} + \tilde{n}'$,

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_{\alpha'}] = N_{\alpha, \alpha'} \Gamma_{\alpha + \alpha'} = \sqrt{-(\alpha, \alpha')} \Gamma_{\alpha + \alpha'} \equiv 0,$$

то подалгебра Картана также состоит из двух подпространств генераторов с размерностями \tilde{n} и \tilde{n}' , так что генераторы из этих подалгебр Картана имеют коммутаторы

$$[\Gamma_l, \Gamma_\alpha] = (l, \alpha) \Gamma_\alpha, \quad [\Gamma_{l'}, \Gamma_{\alpha'}] = (l', \alpha') \Gamma_{\alpha'}, \quad [\Gamma_l, \Gamma_{\alpha'}] = (l, \alpha') \Gamma_{\alpha'} = 0, \quad [\Gamma_{l'}, \Gamma_\alpha] = (l', \alpha) \Gamma_\alpha = 0,$$

и, стало быть, генераторы, относящиеся к двум различным связанным диаграммам, имеют перекрестные коммутаторы, которые обращаются в нуль. Поэтому говорят, что алгебра генераторов для несвязных диаграмм Дынкина является прямой суммой алгебр, отвечающих связанным диаграммам: $\Gamma \oplus \Gamma'$. Подобные коммутационные соотношения означают, что вблизи единицы элементы группы Ли, координаты которых задаются векторами касательного пространства, соответствующими этим алгебрам, с точностью выше второго порядка по координатам коммутируют

$$g_a \cdot g'_b \approx g'_b \cdot g_a \cdot g_{[a,b]} = g'_b \cdot g_a, \quad \text{так как } g_{[a,b]} = e.$$

⁶⁸На стр. 51) мы описали повышающие последовательности для простых положительных корней $\alpha_j + \varkappa \alpha_i$, что в обозначениях Шевалье соответствует действию генераторов e_i на генераторы e_j в присоединенном представлении. В отношении простых отрицательных корневых векторов и генераторов f_i строятся понижающие последовательности корней $-(\alpha_j - \varkappa \alpha_i)$ с такими же свойствами: максимальное число понижений задается все тем же числом \varkappa_{ij}^{\max} .

В таком случае⁶⁹ говорят, что группа Ли является прямым произведением подгрупп: $\mathfrak{G} \otimes \mathfrak{G}'$. При этом каждая из подгрупп является инвариантной, т.е. сама группа не является простой. С другой стороны, это значит, что *простым компактным группам Ли отвечают связные диаграммы Дынкина*.

Типы диаграмм Дынкина существенно ограничены следующими правилами, которые следуют из линейной независимости простых положительных корневых векторов, составляющих базис n -мерного корневого пространства (см. стр. 48 в §4 Главы 1), а также из евклидовой сигнатуры метрики скалярного произведения.

Запрещены замкнутые петли. В самом деле, допустим противное: пусть k простых корней $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ образуют цикл, в котором последовательно соединены корни α_{p-1} с α_p и первый с k -тым, и естественно $k \geq 3$. Для простого положительного корня алгебры Ли ведем вектор единичной длины, направленный по корню,

$$\tilde{\alpha}_p = \frac{1}{\sqrt{(\alpha_p, \alpha_p)}} \alpha_p,$$

и назовем его вектором корневого «луча» (или корневым направлением). Тогда на диаграмме Дынкина в петле из корней, где линиями последовательно соединены корни по порядку их нумерации индексом p , согласно (I.4.22) отличны от нуля только скалярные произведения векторов корневых «лучей» с последовательными номерами,

$$(\tilde{\alpha}_p, \tilde{\alpha}_{p+1}) = -\frac{1}{2} \sqrt{\varkappa_{p,p+1}^{\max} \varkappa_{p+1,p}^{\max}},$$

где стандартно $\varkappa_{p,p+1}^{\max} \varkappa_{p+1,p}^{\max} \equiv \ell_p \geq 1$ — число линий, соединяющих p -й корень с $p+1$ -м. Тогда сумма векторов корневых направлений в замкнутой петле имеет норму

$$\left(\sum_{p=1}^k \tilde{\alpha}_p \right) \left(\sum_{p'=1}^k \tilde{\alpha}_{p'} \right) = k + 2 \sum_{p < p'} (\tilde{\alpha}_p, \tilde{\alpha}'_{p'}).$$

Но в петле из корней соединены линиями только следующие друг за другом корни, так что

$$(\tilde{\alpha}_p, \tilde{\alpha}_{p'}) = \begin{cases} (\tilde{\alpha}_p, \tilde{\alpha}_{p+1}), & \text{при } p' = p+1, \\ 0 & \text{при } p' \neq p+1, \end{cases}$$

и в этой формуле мы полагаем, что $\tilde{\alpha}_{k+1} \equiv \tilde{\alpha}_1$: петля замкнулась. Поэтому

$$\left(\sum_{p=1}^k \tilde{\alpha}_p \right) \left(\sum_{p'=1}^k \tilde{\alpha}_{p'} \right) = k + 2 \sum_p (\tilde{\alpha}_p, \tilde{\alpha}_{p+1}) = k - \sum_{p=1}^k \sqrt{l_p} \leq k - \sum_{p=1}^k 1 = 0,$$

так что при равенстве нулю, когда все корни последовательно соединены одной линией, получаем систему линейно зависимых векторов корневых «лучей», что противоречит исходному положению о простоте корней, а при отрицательном значении, когда имеется хотя бы одна кратная линия, — противоречие с определением нормы вектора в евклидовом пространстве.

Из корня исходят не более трех линий. Пусть $k \geq 2$ простых корней⁷⁰ соединены линиями с корнем α_0 . Тогда все корни $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ попарно ортогональны, так как иначе какая-либо пара из них соединялась бы линией, и возникла бы замкнутая петля из трех корней, что противоречит предыдущему правилу запрета циклов. Итак, $(\alpha_p, \alpha_{p'}) = 0$ при $p \neq 0$ и $p' \neq 0$. Обозначим тильдой в полной аналогии с предыдущим параграфом нормированные на единицу корневые направления, так что

$$(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_p) = -\frac{1}{2} \sqrt{l_p}, \quad l_p = \{1, 2, 3\}.$$

Тогда проекция вектора в центре «звездочки» на подпространство, образованное векторами «лучей»

$$\sum_{p=1}^k (\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_p) \tilde{\alpha}_p = -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^k \tilde{\alpha}_p \sqrt{l_p},$$

⁶⁹На стр. 47 мы показали, что не приближенные, а точные утверждения о коммутативности элементов подгрупп можно сделать, используя экспоненциальное по координатам и генераторам представление для элементов группы (I.4.7).

⁷⁰Случай $k = 1$ отвечает соединениям между двумя корнями, который нами уже изучен.

а ортогональная к подпространству компонента имеет норму

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\alpha}_0 - \sum_{p=1}^k (\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_p) \tilde{\alpha}_p \right)^2 &= \tilde{\alpha}_0^2 + \left(\sum_{p=1}^k (\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_p) \tilde{\alpha}_p \right)^2 - 2 \left(\tilde{\alpha}_0, \left(\sum_{p=1}^k (\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_p) \tilde{\alpha}_p \right) \right) = \\ &= 1 + \frac{1}{4} \sum_{p=1}^k l_p - 2 \sum_{p=1}^k (\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_p)^2 = 1 + \frac{1}{4} \sum_{p=1}^k l_p - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^k l_p = 1 - \frac{1}{4} \sum_{p=1}^k l_p \leqslant 1 - \frac{k}{4}. \end{aligned}$$

Эта норма может быть только положительной: при равенстве нулю получаем линейную зависимость простых положительных корневых векторов, что неверно. Отсюда $k \leqslant 3$. Следовательно, разрешены только:

- $k = 3, l_1 = l_2 = l_3 = 1$ — тройные звездочки с одинарными линиями,
- $k = 2, l_1 = 2, l_2 = 1$ — двойное соединение и одинарное,
- $k = 2, l_1 = 1, l_2 = 1$ — два одинарных соединения,

но запрещены любые четыре линии, включая следующие варианты (см. рис. 1.2):

- $k = 2, l_1 = l_2 = 2$ или
- $k = 2, l_1 = 3, l_2 = 1$,
- $k = 3, l_1 = 2, l_2 = l_3 = 1$.

В случае $k = 1$ из точного выражения для вычисленной нами выше нормы следует, что возможна единственная связная диаграмма Дынкина с тройным соединением: на ней есть только два корня, которые и соединены тройной линией.



Рис. 1.2: Запрещенные соединения центрального корневого вектора на диаграмме Дынкина.

Итак, диаграмма с множественными соединениями при наличии трех корней может включать в себя только звездочки или двойные соединения. Поэтому встает вопрос о том, сколько таких множественных соединений может быть на одной диаграмме. Следовательно, необходимо рассмотреть варианты наличия на диаграмме двух звездочек, двух двойных соединений и варианта со звездочкой и двойным соединением на одной связной диаграмме Дынкина.

На диаграмме может быть только одно двойное соединение. Пусть пара ближайших корней с двойными соединениями имеет несколько вставок одинарных линий (тройные запрещены), где также могут быть и ветвления на корнях внутри цепочки. Фрагмент подобной схемы без изображения ветвлений показан на рис. 1.3.

Тогда на концах линии $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = (\tilde{\alpha}_{k-1}, \tilde{\alpha}_k) = -\sqrt{2}/2$, в то время как в середине $(\tilde{\alpha}_{p-1}, \tilde{\alpha}_p) = -1/2$, а вектор

$$v = \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_k + \sqrt{2} \sum_{p=2}^{k-1} \tilde{\alpha}_p,$$

очевидно, имеет норму

$$\begin{aligned} v^2 &= \tilde{\alpha}_1^2 + \tilde{\alpha}_k^2 + 2 \sum_{p=2}^{k-1} \tilde{\alpha}_p^2 + 2\sqrt{2}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) + 2\sqrt{2}(\tilde{\alpha}_{k-1}, \tilde{\alpha}_k) + 2(\sqrt{2})^2 \sum_{p=2}^{k-2} (\tilde{\alpha}_p, \tilde{\alpha}_{p+1}) = \\ &= 1 + 1 + 2(k-2) - 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} 2 - 2(\sqrt{2})^2 \frac{1}{2}(k-3) = 2 + 2k - 4 - 4 - 2k + 6 = 0, \end{aligned}$$

т.е. простые положительные корневые векторы линейно зависимы, чего не может быть по построению.

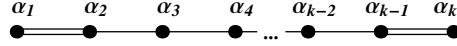


Рис. 1.3: Линия с двумя парными соединениями.

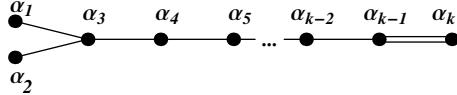


Рис. 1.4: Линия с парным соединением и тройной «звездочкой» ветвления.

На диаграмме не могут быть одновременно звездочка и двойное соединение. Пусть ближайшие тройное ветвление и двойное соединение имеют несколько вставок одинарных линий, как показано на рис. 1.4, где мы опять опускаем изображения возможных ветвлений на внутренних корнях с номерами от 4-го до $k - 2$ -го.

Тогда вектор

$$\mathbf{w} = \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 + 2 \sum_{p=3}^{k-1} \tilde{\alpha}_p + \sqrt{2} \tilde{\alpha}_k,$$

где для корней звездочки в случае однократных соединений, включая внутренние корни при $3 \leq p \leq k - 2$,

$$(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_3) = (\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3) = (\tilde{\alpha}_p, \tilde{\alpha}_{p+1}) = -\frac{1}{2},$$

а для двойной линии на конце

$$(\tilde{\alpha}_{k-1}, \tilde{\alpha}_k) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

очевидно, имеет норму

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^2 &= \tilde{\alpha}_1^2 + \tilde{\alpha}_2^2 + 4 \sum_{p=3}^{k-1} \tilde{\alpha}_p^2 + 2\tilde{\alpha}_k^2 + 4(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_3) + 4(\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3) + 2 \cdot 4 \sum_{p=3}^{k-2} (\tilde{\alpha}_p, \tilde{\alpha}_{p+1}) + 4\sqrt{2}(\tilde{\alpha}_{k-1}, \tilde{\alpha}_k) = \\ &= 1 + 1 + 4(k - 3) + 2 - 2 - 2 - 4(k - 4) - 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \end{aligned}$$

т.е. простые положительные корневые векторы линейно зависимы, чего не может быть по построению.

На диаграмме может быть только одна звездочка. Пусть пара близлежащих ветвлений соединена одинарной линией, как на рис. 1.5, где уже не может быть ветвлений на внутренних корнях. Для

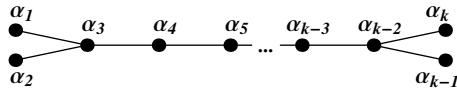


Рис. 1.5: Линия с двумя ветвлениями.

единичных векторов корневых «личей» (символ тильда), соединенных единственной линией согласно диаграмме

$$(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_3) = (\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3) = (\tilde{\alpha}_k, \tilde{\alpha}_{k-2}) = (\tilde{\alpha}_{k-1}, \tilde{\alpha}_{k-2}) = -\frac{1}{2},$$

а для $3 \leq p \leq k - 3$ также

$$(\tilde{\alpha}_p, \tilde{\alpha}_{p+1}) = -\frac{1}{2}$$

Тогда вектор

$$\mathbf{u} = \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 + 2 \sum_{p=3}^{k-2} \tilde{\alpha}_p + \tilde{\alpha}_{k-1} + \tilde{\alpha}_k,$$

очевидно, имеет норму

$$\begin{aligned} u^2 &= \tilde{\alpha}_1^2 + \tilde{\alpha}_2^2 + \tilde{\alpha}_{k-1}^2 + \tilde{\alpha}_k^2 + 4 \sum_{p=3}^{k-2} \tilde{\alpha}_p^2 + \\ &+ 4(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_3) + 4(\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3) + 4(\tilde{\alpha}_k, \tilde{\alpha}_{k-2}) + 4(\tilde{\alpha}_{k-1}, \tilde{\alpha}_{k-2}) + 2 \cdot 4 \sum_{p=3}^{k-3} (\tilde{\alpha}_p, \tilde{\alpha}_{p+1}) = \\ &= 4 + 4(k-4) - 2 \cdot 4 - 4(k-4) = -4 < 0, \end{aligned}$$

чего не может быть по определению нормы вектора в евклидовом пространстве.

Ограничение на диаграмму с двойной линией. Мы установили, что если на диаграмме есть пара корней с двойным соединением, то на ней все остальные корни могут соединяться только одинарными линиями (см. рис. 1.6). Установим ограничения на число точек в ветвях одинарных линий.

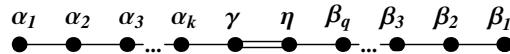


Рис. 1.6: Схема Дынкина с двойной линией.

Выделим проекцию корневого вектора γ в подпространство, натянутое на векторы $\{\alpha_m\}$, и компоненту ν_a , ортогональную этому подпространству,

$$\tilde{\gamma} = \sum_{m=1}^k a_m \tilde{\alpha}_m + \nu_a,$$

где в силу линейной независимости простых положительных корневых векторов γ и α_m ортогональный к подпространству вектор ν_a : $(\nu_a, \alpha_m) = 0$, — не равен нулю⁷¹. При $m < k$ корень γ не соединен с α_m , откуда

$$(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}_m) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_m - \frac{1}{2}(a_{m+1} + a_{m-1}) = 0,$$

так как

$$(\tilde{\alpha}_m, \tilde{\alpha}_{m\pm 1}) = -\frac{1}{2}.$$

Значит, последовательно

$$a_2 = 2a_1, \quad a_3 = 2a_2 - a_1 = 3a_1, \dots$$

и рекуррентное соотношение удовлетворяется при

$$a_m = ma_1.$$

Кроме того можно считать, что вектор $\tilde{\gamma}$ отвечает $k+1$ члену этой последовательности, $\tilde{\gamma} \mapsto \tilde{\alpha}_{k+1}$, и после переноса этого вектора из правой части разложения в подпространстве в левую

$$\mathbf{0} = \sum_{m=1}^k a_m \tilde{\alpha}_m - \tilde{\gamma} + \nu_a = \sum_{m=1}^{k+1} a_m \tilde{\alpha}_m + \nu_a \quad \Rightarrow \quad -\nu_a = \sum_{m=1}^{k+1} a_m \tilde{\alpha}_m,$$

учесть, что $(\nu_a, \alpha_k) = 0$, так что

$$-\frac{1}{2}a_{k-1} + a_k - \frac{1}{2}a_{k+1} = 0,$$

и по построению положить $a_{k+1} = -1$, откуда сразу

$$a_1 = -\frac{1}{k+1}, \quad a_m = -\frac{m}{k+1}.$$

Совершенно аналогично используя проекцию корневого вектора η в подпространство, натянутое на векторы $\{\beta_n\}$, запишем

$$\tilde{\eta} = \sum_{n=1}^q b_n \tilde{\beta}_n + \nu_b,$$

⁷¹Если $\nu_a = 0$, то простой положительный корень γ выражался бы через суперпозицию α_m .

где уже

$$b_1 = -\frac{1}{q+1}, \quad b_n = -\frac{n}{q+1}.$$

В силу попарной ортогональности γ с $\{\beta_n\}$ и η с $\{\alpha_m\}$ теперь легко построить разложение

$$\tilde{\gamma} = \sum_{m=1}^k a_m \tilde{\alpha}_m + c \sum_{n=1}^{q+1} b_n \tilde{\beta}_n + \epsilon,$$

где $\tilde{\beta}_{q+1} \equiv \tilde{\eta}$, и согласно условию построения диаграммы Дынкина

$$(\tilde{\gamma}, \tilde{\eta}) = -\frac{1}{2} \sqrt{2} \Rightarrow c \left(b_{q+1} - \frac{1}{2} b_q \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда с учетом $b_{q+1} = -1$

$$c \left(1 - \frac{q}{2(q+1)} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow c = \sqrt{2} \frac{q+1}{q+2}.$$

Ортогональный к подпространству, натянутому на векторы корневых «лучей» $\{\tilde{\alpha}_m, \tilde{\beta}_n\}$, вектор ϵ не может быть равен нулю, так как вектор $\tilde{\gamma}$ линейно независим от других простых положительных корней в разложении. Следовательно, строго

$$(\epsilon, \epsilon) = (\tilde{\gamma}, \epsilon) > 0,$$

а значит,

$$(\tilde{\gamma}, \epsilon) = (\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma} - \sum_{m=1}^k a_m \tilde{\alpha}_m - c \sum_{n=1}^{q+1} b_n \tilde{\beta}_n) = 1 + \frac{1}{2} a_k + c b_{q+1} \frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$$

Подставляя выражения для коэффициентов, элементарное сложение дробей дает

$$1 - \frac{1}{2} \frac{k}{k+1} - \frac{q+1}{q+2} = \frac{1}{2(k+1)(q+2)} (2 - kq) > 0 \Rightarrow kq < 2.$$

Это условие удовлетворяется либо при $k = q = 1$, либо при произвольном k и $q = 0$, либо при произвольном q и $k = 0$ (визуально эти два случая не отличаются, так как один сводится к другому просто сменой обозначений $\tilde{\gamma} \leftrightarrow \tilde{\eta}$).

Таким образом, при наличии двойного соединения допустимы диаграммы Дынкина, показанные на рис. 1.7.

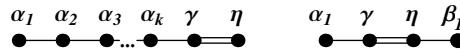


Рис. 1.7: Допустимые схемы Дынкина с двойной линией.

Ограничение на диаграмму с ветвлением. Разложим центр ветвления η (см. рис. 1.8) по проекциям в подпространство остальных корней в виде

$$\tilde{\eta} = \sum_{m=1}^k a_m \tilde{\alpha}_m + \sum_{n=1}^q b_n \tilde{\beta}_n + \sum_{j=1}^r c_j \tilde{\gamma}_j + \epsilon,$$

где коэффициенты разложения фактически уже были установлены нами чуть выше

$$a_m = -\frac{m}{k+1}, \quad b_n = -\frac{n}{q+1}, \quad c_j = -\frac{j}{r+1}.$$

Линейная независимость простых корневых векторов означает, что ортогональный вектор ϵ имеет положительную норму, откуда в силу ортогональности вектора ϵ подпространству линейной оболочки корней α_m, β_n и γ_j

$$(\epsilon, \epsilon) = (\tilde{\eta}, \epsilon) = (\tilde{\eta}, \tilde{\eta} - \sum_{m=1}^k a_m \tilde{\alpha}_m - \sum_{n=1}^q b_n \tilde{\beta}_n - \sum_{j=1}^r c_j \tilde{\gamma}_j) = 1 + \frac{1}{2} (a_k + b_q + c_r) > 0.$$

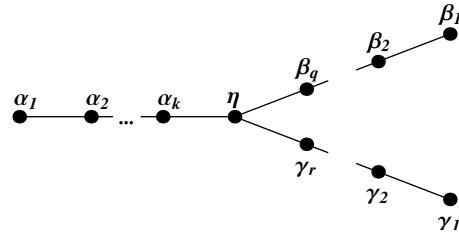


Рис. 1.8: Диаграмма Дынкина с ветвлением.

В итоге,

$$\frac{k}{k+1} + \frac{q}{q+1} + \frac{r}{r+1} < 2. \quad (\text{I.4.30})$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$k \geq q \geq r \geq 1.$$

Легко перечислить все допустимые комбинации $\{k, q, r\}$, удовлетворяющие неравенству (I.4.30):

- при $r = q = 1$ находим $k < k + 1$, что справедливо при любых натуральных k ;
- при $r = 1, q = 2, k \geq 2$ получаем $k/(k+1) < 5/6$, что имеет место при $k = \{2, 3, 4\}$;
- при $r = 1, q \geq 3$ и $k \geq 3$ находим $k/(k+1) < 3/4$, так что решений нет;
- при $q \geq r \geq 2$ и $k \geq 2$ имеем $k/(k+1) < 2/3$, и решений нет.

В итоге, мы провели рассмотрение всех возможных диаграмм Дынкина для простых положительных корневых векторов, задающих алгебру простой компактной группы Ли.

§5. Классификация простых компактных алгебр Ли

Группы бесконечных последовательностей простых компактных групп Ли и их матричная интерпретация, исключительные группы и особые группы, соотношения эквивалентности алгебр Ли.

Допустимые связные диаграммы Дынкина для простых компактных групп с учетом вариации направления на двойной и тройной линиях от большего корня к меньшему сводятся к следующим семи типам.

- Последовательность A_n .



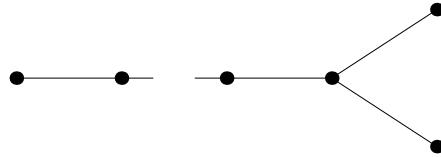
- Последовательность B_n .



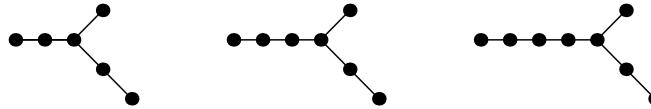
- Последовательность C_n .



- Последовательность D_n .



- Три исключительные алгебры группы E_6 , E_7 , E_8 .



- Особая алгебра группы F_4 .



- Особая алгебра группы G_2 .



Индекс обозначает ранг группы — число наблюдаемых, характеризующих базис квантовых состояний, которое равно размерности подгруппы Картана и размерности векторного пространства корней.

Для последовательностей A_n , B_n , C_n , D_n ранг n ничем не ограничен, т.е. эти последовательности являются бесконечными: они отвечают классическим алгебрам Ли. Эти алгебры соответствуют группам Ли, которые возникают при рассмотрении линейных преобразований векторных пространств, т.е. они реализуются в некотором матричном виде, определяющем тип группы. Другими словами, у каждой классической алгебры Ли есть свое имя.

- Унитарные (U) квадратные матрицы $k \times k$ с единичным детерминантом (специальные (S)): $A^\dagger A = \mathbb{1}$, $\det A = 1$, — определяют группу преобразований векторов в комплексном евклидовом пространстве, сохраняющих норму. Группа таких преобразований обозначается $SU(k)$, а соответствующая алгебра $\mathfrak{su}(k)$. Эта алгебра совпадает с алгеброй типа A_n при $k = n + 1$.
- Специальные ортогональные преобразования квадратными матрицами $k \times k$: $A^T A = \mathbb{1}$, $\det A = 1$, — определяют группу поворотов вещественных векторов в евклидовом пространстве, сохраняющих их норму, $SO(k)$ и ее алгебру генераторов $\mathfrak{so}(k)$, которая изоморфна алгебре B_n при нечетном числе размерности пространства $k = 2n + 1$ или алгебре D_n при четном числе измерений евклидова пространства $k = 2n$.

- В фазовом пространстве классической механики с n обобщенными координатами и отвечающим им канонически сопряженными импульсами $\{q_\alpha, p_\beta\}$ размерности $n + n = 2n$ скобка Пуассона

$$\{q_\alpha; p_\beta\}_{\mathbb{P}} = -\{p_\beta; q_\alpha\}_{\mathbb{P}} = \delta_{\alpha\beta}$$

не изменяется при канонических линейных преобразованиях векторов $\mathbf{x} = \{q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n\}$:

$$\mathbf{x} = C \mathbf{x}' \Leftrightarrow x_\mu = C_\mu^\nu x'_\nu.$$

В терминах компонент \mathbf{x} скобка Пуассона принимает вид

$$\{x_\mu; x_\lambda\}_{\mathbb{P}} = \Omega_{\mu\lambda},$$

где матрица Ω размером $(2n) \times (2n)$ имеет блочный вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix},$$

и в штрихованных координатах фазового пространства по-прежнему

$$\{x'_\nu; x'_\rho\}_{\mathbb{P}} = \Omega_{\nu\rho},$$

так что

$$\{x_\mu; x_\lambda\}_{\mathbb{P}} = C_\mu^{\bullet\nu} C_\lambda^{\bullet\rho} \{x'_\nu; x'_\rho\}_{\mathbb{P}} = \Omega_{\nu\rho} C_\mu^{\bullet\nu} C_\lambda^{\bullet\rho} = \Omega_{\nu\rho} C_\mu^\nu (C^T)^\rho_{\bullet\lambda} = \Omega_{\mu\lambda},$$

и значит, в матричном виде имеется тождество

$$C \Omega C^T = \Omega,$$

которое определяет симплектическую группу преобразований $\text{Sp}(n)$ и ее алгебру $\mathfrak{sp}(n)$, которая совпадает с алгеброй типа C_n .

Таким образом, каждая классическая простая компактная алгебра соответствует вполне определенной матричной группе Ли.

В проведенной классификации алгебр Ли имеется ряд вырождений. Именно, тождественные диаграммы Дынкина возникают для алгебр A_1 , B_1 и C_1 , когда они сводятся к единственной точке. Следовательно, возникающие для этих алгебр коммутационные соотношения для генераторов совпадают, что устанавливает изоморфизм соответствующих алгебр Ли

$$\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{sp}(1).$$

Первый из этих изоморфизмов хорошо знаком: коммутационные соотношения для орбитального момента группы поворотов $\text{SO}(3)$, принимающего целые значения, совпадают с коммутационными соотношениями для группы поворотов спина $\text{SU}(2)$, который может принимать и полуцелые значения. Второй изоморфизм отвечает инвариантности спинорной метрики

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

относительно группы поворотов спина. Эта метрика совпадает с симплектической матрицей в фазовом пространстве классической механики частицы с одной степенью свободы.

Тождественны и диаграммы для алгебр B_2 и C_2 : они сводятся к двум точкам, соединенным двойной линией, и следовательно, имеет место изоморфизм

$$\mathfrak{so}(5) \cong \mathfrak{sp}(2).$$

При $n = 3$ ветвление на схеме D_3 вырождается: из точки ветвления не исходит третья линия, — и диаграмма сводится к типу A_3 , что ведет к одинаковым коммутационным соотношениям в алгебрах

$$\mathfrak{so}(6) \cong \mathfrak{su}(4).$$

Обычно особо указывают на случай D_2 , когда на диаграмме Дынкина остаются только две крайних точки разветвления, а собственно точка ветвления просто отсутствует, что приводит не к связной диаграмме, а к двум отдельным точкам, каждая из которых отвечает алгебре группы поворотов трехмерного пространства, а значит,

$$\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3),$$

т.е. алгебра группы поворотов четырехмерного евклидова пространства не является простой, а представляется в виде прямой суммы алгебры генераторов группы поворотов в трехмерном пространстве.

Указанные нами выше изоморфизмы позволяют уточнить классификацию простых компактных алгебр групп Ли путем перечисления только независимых классических алгебр:

$$A_n \text{ при } n \geq 1; \quad B_n \text{ при } n \geq 2; \quad C_n \text{ при } n \geq 3; \quad D_n \text{ при } n \geq 4.$$

Схема Дынкина позволяет путем последовательных построений от простых положительных корней ко всем корням простой компактной группы Ли записать весь набор коммутаторов для генераторов алгебры Ли.

Глава 2

Алгебры Ли и неприводимые представления

В этой Главе мы изучим простейшие примеры алгебр Ли, общую схему построения неприводимых представлений старшего веса и ее применение к группам $SU(2)$ и $SU(3)$, схемы Юнга для неприводимых представлений группы $SU(3)$ и для разложения тензорного произведения неприводимых представлений в прямую сумму неприводимых представлений, а также физически содержательные примеры применения теории представлений к описанию реальных свойств при классификации элементарных частиц, а также симметрии сильного и слабого взаимодействий. Мы также рассмотрим групповое содержание калибровочной гипотезы и некоторые задачи в теории великого объединения калибровочных взаимодействий.

§1. Алгебры $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{su}(3)$

От общего формализма к генераторам и операторам Казимира алгебр $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{su}(3)$, повышающие и поникающие операторы, масштаб и конформный множитель в евклидовой метрике и метрика Киллинга, выбор осей подалгебры Картана в алгебре $\mathfrak{su}(3)$, структурные константы.

1.1 $\mathfrak{su}(2)$

Алгебре группы поворотов спиноров $\mathfrak{su}(2)$ отвечает элементарная схема Дынкина — точка. Следовательно, ранг группы равен единице, и это число генераторов в подалгебре Картана и число простых положительных корней. Обозначим генератор, составляющий подалгебру Картана в $\mathfrak{su}(2)$, который в физической терминологии можно назвать наблюдаемой величиной, символом Γ_z , а повышающий из корневого дополнения — символом Γ_+ . Эрмитово сопряженный ему поникающий оператор — символом Γ_- . Это единственный простой положительный корень, и ему соответствуют два лестничных оператора: повышающий, соответствующий собственно положительному корню $\alpha_z > 0$, и поникающий, соответствующий этому же корню со знаком минус $-(\alpha_z)$. Весовые векторы и два корневых вектора — одномерные, поэтому для $\mathfrak{su}(2)$, будем называть их весами и корнями.

В базисе Картана–Вейля коммутационные соотношения имеют вид

$$[\Gamma_z, \Gamma_{\pm}] = \pm \alpha_z \Gamma_{\pm}, \quad [\Gamma_+, \Gamma_-] = \alpha_z \Gamma_z, \quad \alpha_z > 0. \quad (\text{II.1.1})$$

Введем эрмитовы операторы

$$\Gamma_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_+ + \Gamma_-), \quad \Gamma_y = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\Gamma_+ - \Gamma_-),$$

для которых коммутационные соотношения примут вид

$$[\Gamma_x, \Gamma_y] = i \alpha_z \Gamma_z, \quad [\Gamma_y, \Gamma_z] = i \alpha_z \Gamma_x, \quad [\Gamma_z, \Gamma_x] = i \alpha_z \Gamma_y,$$

которые с помощью полностью антисимметричного тензора Леви–Чивиты можно переписать в виде

$$[\Gamma_a, \Gamma_b] = i \alpha_z \epsilon_{abc'} \delta^{c'}{}^c \Gamma_c, \quad a, b, c \in \{x, y, z\}.$$

Если положить¹

$$\alpha_z = 1,$$

то мы придем к стандартному выбору нормировки повышающего оператора в теории момента количества движения $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, когда $\mathbf{L} = \hbar \mathbf{l}$, а алгебра \mathbf{l} отождествляется с алгеброй \mathbf{j} ,²

$$\Gamma_z \equiv j_z, \quad \Gamma_x \equiv j_x, \quad \Gamma_y \equiv j_y, \quad \Gamma_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_x \pm i \Gamma_y) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}j_{\pm}. \quad (\text{II.1.2})$$

¹Можно ввести и размерную величину $\alpha_z = \hbar$, которая возникает при введении коммутаторов компонент момента количества движения из скобок Пуассона в процедуре канонического квантования путем введения операторов наблюдаемых величин так, что $\hat{\mathbf{J}} = \hbar \mathbf{j}$. Тогда $\mathbf{j} \equiv \Gamma/\alpha_z$, что верно не только при $\alpha_z = \hbar$, но и при любых ненулевых $\alpha_z \neq 0$.

²Мы следуем терминологии, принятой в англоязычной литературе, согласно которой импульс отождествляется с количеством движения. Отметим ее отличие от русской научной традиционной терминологии, принятой в теоретической механике: строго говоря, количество движения определяется в лагранжевой механике как производная лагранжиана L по скорости $\dot{\mathbf{r}}$, $\mathbf{p} = \partial L / \partial \dot{\mathbf{r}}$, а импульс как определенный интеграл от силы $\mathbf{F} = -\partial L / \partial \mathbf{r}$ на некотором интервале времени. Согласно уравнениям Эйлера–Лагранжа $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$, так что количество движения, которое приобретает материальная точка за счет действия силы равно импульсу $\mathbf{p} = \int \mathbf{F} dt$. Поэтому момент количества движения \mathbf{L} мы будем также называть моментом импульса.

Определение метрики Киллинга в общем случае (I.2.14) для алгебры $\mathfrak{su}(2)$ дает

$$g_{ab} = -\alpha_z^2 \epsilon_{aa_2a_3} \epsilon_{ba_3a_2} = 2\alpha_z^2 \delta_{ab}. \quad (\text{II.1.3})$$

Нам достаточно, чтобы эта метрика была пропорциональна единичной матрице: тогда структурные константы полностью антисимметричны по перестановкам любой пары из трех индексов.

Квадратичный оператор Казимира — единственный независимый инвариант группы поворотов в том смысле, что все иные инварианты этой группы являются функциями этого инварианта, — задается выражением $C_2 = g^{ab} \Gamma_a \Gamma_b$. Заметим, что это выражение для инварианта написано для случая, когда все генераторы алгебры эрмитовы, т.е. не в базисе Кардана–Вейля. Обратная метрика $g^{ab} = \delta^{ab}/(2\alpha_z^2)$ вычисляется как матрица обратная (II.1.3), так что для повышающих и поникающих операторов в базисе Кардана–Вейля (I.3.44) элементы метрики имеют те же значения, что и для генератора подалгебры Кардана, $g_{+-} = g_{-+} = g_{zz} = 2\alpha_z^2$, откуда

$$\begin{aligned} C_2 &= g^{ab} \Gamma_a \Gamma_b = \frac{1}{2\alpha_z^2} (\Gamma_z^2 + \Gamma_+ \Gamma_- + \Gamma_- \Gamma_+) = \\ &= \frac{1}{2\alpha_z^2} \mathbf{j}^2 = \frac{1}{2\alpha_z^2} \left\{ j_z^2 + \frac{1}{2} (j_+ j_- + j_- j_+) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II.1.4})$$

Обычно множитель $1/2\alpha_z^2$ исключают из определения квадратичного оператора Казимира³, так как сам смысл введения этого инварианта заключается не в том, что он задает собственное значение на состояниях неприводимого представления алгебры поворотов, а в том, что это собственное значение имеет вполне определенный физический смысл — квадрат момента количества движения в случае алгебры $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ для группы поворотов в трехмерном пространстве, и это собственное значение не зависит от преобразований базиса представления матрицами групповых преобразований. Выберем $\tilde{C}_2 \equiv \mathbf{j}^2$ (см. сноску 3 внизу этой страницы),

$$\mathbf{j}^2 = j_z^2 + \frac{1}{2} (j_+ j_- + j_- j_+) = \Gamma_z^2 + \Gamma_+ \Gamma_- + \Gamma_- \Gamma_+. \quad (\text{II.1.5})$$

Выражения (II.1.4) и (II.1.5) специально были записаны через повышающие и поникающие операторы для того, чтобы, во-первых, еще раз подчеркнуть, что в базисе Кардана–Вейля диагональность и положительная определенность метрики Кардана для простой компактной группы поворотов означает, что берется сумма квадратов генераторов из подалгебры Кардана, а повышающий оператор умножается на эрмитово сопряженный к нему поникающий в прямом и обратном порядке, так как $g_{+-} = g_{-+} = g_{ll'}$ (конформный фактор Ω^2 : $g_{ab} = \Omega^2 \delta_{ab}$, — здесь не важен). Во-вторых, для квадратичного оператора Казимира все состояния неприводимого представления являются собственными с одним и тем же собственным значением (другим словами, размерность пространства неприводимого представления \mathcal{D} равна кратности вырождения собственного значения этого оператора в данном неприводимом представлении). Это значит, что в неприводимом представлении оператор Казимира сводится к единичной матрице $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ с численным коэффициентом, равным собственному значению оператора Казимира на любом из векторов состояния неприводимого представления. Мы же по опыту рассмотрения группы поворотов знаем, что в конечномерном неприводимом представлении всегда можно выделить старший вектор состояния $|\mu_S\rangle$, действие повышающего оператора на который равно нулю по определению старшего вектора состояния, $j_+ |\mu_S\rangle = 0$. Поэтому удобно вычислять собственное значение оператора Казимира действием на старший вектор состояния, а для этого можно привести C_2 к виду, где повышающий оператор расположен правее поникающего, с помощью коммутационных соотношений (II.1.1), которые при $\alpha_z = 1$ дают

$$[j_+, j_-] = 2j_z \Rightarrow j_+ j_- = j_- j_+ + 2j_z, \quad (\text{II.1.6})$$

так что

$$\begin{aligned} \tilde{C}_2 \equiv \mathbf{j}^2 &= j_z^2 + j_x^2 + j_y^2 = j_z^2 + \frac{1}{2} (j_+ j_- + j_- j_+) = j_z^2 + \frac{1}{2} (2j_- j_+ + 2j_z) = j_z^2 + j_- j_+ + j_z = \\ &= \Gamma_z^2 + \Gamma_+ \Gamma_- + \Gamma_- \Gamma_+ = \Gamma_z^2 + 2\Gamma_+ \Gamma_- + \Gamma_z. \end{aligned} \quad (\text{II.1.7})$$

Отсюда

$$\tilde{C}_2 |\mu_S\rangle = (j_z^2 + j_z) |\mu_S\rangle, \quad (\text{II.1.8})$$

где $|\mu_S\rangle$ является собственным вектором для генератора подалгебры Кардана $j_z = \Gamma_z$.

В итоге, схема Дынкина алгебры $\mathfrak{su}(2)$ привела нас к стандартным коммутационным соотношениям для операторов момента импульса, которые являются генераторами группы поворотов для частиц, обладающих спином.

³По сути речь идет о введении инварианта \tilde{C}_2 , который был определен в (I.2.41) на стр. 28, когда в случае $g_{ab} = \Omega^2 \delta_{ab}$ вместо обратной метрики используется символ Кронекера.

1.2 Масштаб и конформный фактор

На примере алгебры $\mathfrak{su}(2)$ мы увидели, что вид коммутаторов генераторов алгебры Ли в базисе Картана–Вейля зависит от выбора масштаба единиц, в которых выражаются корни, а их единицы измерения совпадают с единицами измерения весов – собственных значений генераторов подалгебры Картана, поскольку по построению сдвиги этих собственных значений и являются корнями α в тех же единицах, что и единицы измерения весов. В алгебре $\mathfrak{su}(2)$ это выбор величины α_z , нормировки одномерного корневого вектора. Фиксация определенного выбора нормировки корней и весов также приводит к тому, что в метрику Киллинга входит конформный фактор, связывающий ее с единичной матрицей (см. (II.1.3)).

С другой стороны, мы можем по-разному выбирать масштаб координат в группе

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}/\tilde{\Omega},$$

что приведет к метрике Киллинга с дополнительным конформным фактором

$$g'_{\alpha\beta} = \tilde{\Omega}^2 g_{\alpha\beta}.$$

Ясно, что эти две процедуры: выбор масштаба собственных значений и масштаба параметров координат групповых элементов, – связаны. Поэтому важно подчеркнуть, что выбор масштаба приводит к определенной связи генераторов и координат с физическими величинами. Например, в алгебре $\mathfrak{su}(2)$ фиксация⁴ $\alpha_z = 1$ и $g_{ab} = 2\delta_{ab}$ означает, что координаты группы совпадают с углами поворотов в при соединенном представлении, а $\hbar j$ – это момент импульса. Только в этом случае поворот на угол 2π приводит к тождественному преобразованию для любого отличного от нуля вектора и, в частности, для декартовых координат евклидова пространства. Из этого примера ясно, что выявление физического смысла выбранной нормировки зависит от глобальных свойств групповых преобразований (поворот на конечный угол 2π является глобальной характеристикой, в отличие от локального поворота на бесконечно малый угол, что рассматривается при изучении алгебры Ли вблизи единицы группы).

В других случаях, когда группа преобразований не связана со свойствами пространства-времени, выбор нормировки может задавать, например, единицу заряда – одного из генераторов подалгебры Картана, а групповые преобразования с изменением собственных значений заряда будут тогда отвечать изменениям дискретных значений заряда в относительных единицах для разных собственных состояний оператора заряда в пространстве представления, что называют термином «квантование заряда».

Отметим также, что все полученные нами коммутационные соотношения генераторов в базисе Картана–Вейля зависят от выбора нормировки корней и весов, но не зависят от конформного фактора в конформно евклидовой метрике Киллинга: коммутаторы получены при условии, что метрика положительно определена и пропорциональна единичной матрице.

1.3 $\mathfrak{su}(3)$

Согласно классификации простых компактных алгебр Ли (см. §5 Главы 1), алгебра второго ранга $\mathfrak{su}(3)$ обозначается как A_2 . Схема Дынкина для простых положительных корней алгебры $\mathfrak{su}(3)$ – две точки, соединенные одинарной линией. Значит, имеются два генератора подалгебры Картана, а их собственные числа можно изображать в виде точек на плоскости⁵, и два простых положительных корневых вектора $\alpha_1 \equiv \alpha$ и $\alpha_2 \equiv \beta$. Из диаграммы Дынкина для $\mathfrak{su}(3)$ следует, что простые положительные корни имеют одинаковую длину, и эти корневые векторы образуют угол $\frac{2}{3}\pi$, так как их скалярное произведение согласно (I.4.26) равно

$$(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2} \sqrt{\varkappa_{\alpha,\beta}^{\max} \varkappa_{\beta,\alpha}^{\max}} \sqrt{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)},$$

где $l_{\alpha,\beta} = \varkappa_{\alpha,\beta}^{\max} \varkappa_{\beta,\alpha}^{\max} = 1$ – число линий между корнями на схеме Дынкина для $SU(3)$. В соответствии с диаграммой алгебры (две точки, соединенные одной линией) простые положительные корни имеют одинаковую длину, которую мы полагаем равной единице, т.е. $(\alpha, \alpha) = (\beta, \beta) = 1$, так что

$$(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}. \tag{II.1.9}$$

Простые положительные корневые векторы образуют базис в пространстве размерности, равной рангу алгебры, в данном случае в двумерном пространстве.

⁴Напомним, что при выводе соотношения (I.2.40) для связи метрики Киллинга с единичным символом Кронекера при рассмотрении задачи о следе генераторов алгебры в произвольном представлении на стр. 28 мы ввели постоянную C_A : $g_{ab} = C_A \delta_{ab}$, и для группы $SU(2)$ мы нашли, что $C_A = 2$. В дальнейшем мы установим, что $C_A = N$ в случае группы $SU(N)$.

⁵Точки собственных чисел генераторов подалгебры Картана в пространстве размерности, равной рангу группы, называют весовой диаграммой представления.

Соединенные одинарной линией корни определяют число шагов в последовательности простых положительных корней: это число равно единице, так что существует только один положительный корень⁶ $\gamma \equiv \alpha + \beta$ и соответствующий ему повышающий оператор. В итоге мы имеем три повышающих генератора алгебры $\mathfrak{su}(3)$, связанные с положительными корнями α, β, γ , плюс три эрмитово сопряженных к ним поникающих генератора, которые соответствуют отрицательным корням $-\alpha, -\beta, -\gamma$, и два генератора подалгебры Картана. Других корневых векторов, кроме перечисленных шести, больше нет, так как все возможные для $SU(3)$ последовательности положительных корней уже построены. (В этом можно будет убедиться, если провести всевозможные отражения Вейля (описание группы Вейля будет в разделе 2.3 Главы 2, §2) шести корней относительно самих этих корней и в явном виде показать, что новые корневые векторы при действии отражений не возникают.) Диаграмма Дынкина для двух простых положительных корней, соединенных одинарной линией, означает, что есть только один шаг в каждой из последовательностей простых корневых векторов алгебры $\mathfrak{su}(3)$, т.е. положительных корней только 3. Значит, алгебра имеет восемь перечисленных нами генераторов преобразований. Этот вывод согласуется с общим утверждением о размерности группы $SU(N)$,

$$N_G = \dim SU(N) = N^2 - 1,$$

который мы получили в **задаче 8** на стр. 18.

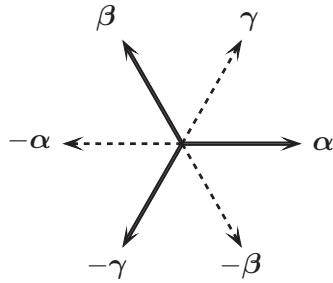


Рис. 2.1: Корни алгебры $\mathfrak{su}(3)$.

Итак, корневая система алгебры $\mathfrak{su}(3)$ определена в том смысле, что это — двумерные векторы, относительное расположение которых на плоскости такое, как это показано на рис. 2.1.

Из рис. 2.1 ясно, что до выбора ортогональных осей, вдоль которых откладываются веса в той же плоскости, что и корни алгебры $\mathfrak{su}(3)$, неважно, какая тройка из шести корней станет считаться положительными корнями. Между простыми корнями должен быть угол в 120 градусов. Поэтому два простых положительных корня можно выбрать либо из тройки $\{\alpha, \beta, -\gamma\}$, либо из тройки $\{-\alpha, -\beta, \gamma\}$. Из них надо выбрать два, сложив которые мы получим третий положительный корень. Этим выбором мы фиксируем также, какие три генератора корневого дополнения станут повышающими, а какие — поникающими. Примеры пар простых положительных корней:

$$\{\alpha, \beta\}, \{-\gamma, \alpha\}, \{-\beta, \gamma\}, \dots$$

В этом смысле разумно решить задачу определения всех коммутационных соотношений алгебры $\mathfrak{su}(3)$ сначала математически, в общем виде без фиксации генераторов подалгебры Картана, а потом физически, зафиксировав выбор генераторов подалгебры Картана, т.е. ортогональных осей собственных значений наблюдаемых (генераторов подалгебры Картана) на плоскости корней, с которым координаты векторов приобретают вполне определенный физический смысл в схеме, традиционно применяемойся в задачах физики кварков.

Корневое дополнение алгебры $\mathfrak{su}(3)$ и коммутаторы. Обозначим пару простых положительных корней $\{\alpha, \beta\}$. Тогда третий положительный корень — это γ . Этим корням соответствуют лестничные генераторы: три повышающих $\{\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta, \Gamma_\gamma\}$ и три поникающих $\{\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_{-\beta}, \Gamma_{-\gamma}\}$, которые обладают заданными в базисе Картана–Вейля (I.3.44) коммутационными соотношениями. Установим сначала коммутаторы для генераторов из этого корневого дополнения алгебры $\mathfrak{su}(3)$.

⁶Напомним, что число линий, соединяющих 2 простых положительных корня, $l = \varkappa_{\alpha, \beta}^{\max} \varkappa_{\beta, \alpha}^{\max}$, где $\varkappa_{\alpha, \beta}^{\max}$ и $\varkappa_{\beta, \alpha}^{\max}$ задают число шагов при построении положительных корней для α - и β -последовательностей, и в данном случае $\varkappa_{\alpha, \beta}^{\max} = \varkappa_{\beta, \alpha}^{\max} = 1$, так что в этих последовательностях только 2 положительных корня: исходный простой и полученный при первом и последнем шаге суммированием исходного простого положительного корневого вектора со вторым простым положительным корневым вектором.

Структурные константы $N_{\alpha,\beta}$ в базисе Картана–Вейля (I.3.44) в коммутационном соотношении для простых положительных корней

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = N_{\alpha,\beta} \Gamma_{\alpha+\beta} \quad (\text{II.1.10})$$

принимают значения (см. (I.4.14))

$$N_{\alpha,\beta}^2 = -(\alpha, \beta). \quad (\text{I.4.14})$$

Для $\mathfrak{su}(3)$, как мы положили в (II.1.9)

$$(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}.$$

Значит, с учетом эрмитова сопряжения повышающих генераторов, когда они переходят в понижающие,

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_\gamma, \quad [\Gamma_{-\beta}, \Gamma_{-\alpha}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_{-\gamma}. \quad (\text{II.1.11})$$

Мы установили ранее (см. стр. 49) соотношения для структурных констант в базисе Картана–Вейля

$$N_{-\alpha,\beta+\alpha} = N_{\beta+\alpha,-\beta} = N_{-\beta,-\alpha} = N_{\alpha,\beta}, \quad (\text{I.4.11})$$

что можно в случае $\mathfrak{su}(3)$ переписать как

$$N_{-\alpha,\gamma} = N_{\gamma,-\beta} = N_{-\beta,-\alpha} = N_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Следовательно, с учетом элементарного сложения корневых векторов согласно рис. 2.1

$$\begin{aligned} [\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_\gamma] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_\beta, & [\Gamma_{-\gamma}, \Gamma_\alpha] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_{-\beta}, \\ [\Gamma_\gamma, \Gamma_{-\beta}] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_\alpha, & [\Gamma_\beta, \Gamma_{-\gamma}] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_{-\alpha}, \end{aligned} \quad (\text{II.1.12})$$

Поскольку векторы $\alpha + \gamma$ и $\beta + \gamma$ не являются корнями алгебры $\mathfrak{su}(3)$, то

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\gamma] = [\Gamma_\beta, \Gamma_\gamma] = 0, \quad (\text{II.1.13})$$

а эрмитово сопряжение этих соотношений дает

$$[\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_{-\gamma}] = [\Gamma_{-\beta}, \Gamma_{-\gamma}] = 0. \quad (\text{II.1.14})$$

Коммутаторы лестничных генераторов с генераторами из подалгебры Картана, для которых $[\Gamma_l, \Gamma_{l'}] = 0$,

$$\begin{aligned} [\Gamma_l, \Gamma_\alpha] &= \alpha_l \Gamma_\alpha, & [\Gamma_l, \Gamma_\beta] &= \beta_l \Gamma_\beta, & [\Gamma_l, \Gamma_\gamma] &= \gamma_l \Gamma_\gamma, \\ [\Gamma_l, \Gamma_{-\alpha}] &= -\alpha_l \Gamma_{-\alpha}, & [\Gamma_l, \Gamma_{-\beta}] &= -\beta_l \Gamma_{-\beta}, & [\Gamma_l, \Gamma_{-\gamma}] &= -\gamma_l \Gamma_{-\gamma}, \end{aligned} \quad (\text{II.1.15})$$

и

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}] = \alpha_l \Gamma_l, \quad [\Gamma_\beta, \Gamma_{-\beta}] = \beta_l \Gamma_l, \quad [\Gamma_\gamma, \Gamma_{-\gamma}] = \gamma_l \Gamma_l, \quad (\text{II.1.16})$$

вместе с соотношениями (II.1.11)–(II.1.14) полностью задают алгебру $\mathfrak{su}(3)$. Однако ясно, что в (II.1.15) и (II.1.16) необходимо указать конкретный выбор генераторов подалгебры Картана, чтобы все компоненты корневых векторов приняли определенные значения. Это достигается выбором ортогональных осей на плоскости рис. 2.1.

Пример выбора осей показан на рис. 2.2. В ортонормированном базисе \mathbf{l} (обратите внимание на жирный шрифт, который мы используем для обозначения векторов!): $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}\} \equiv \{\epsilon'_1, \epsilon'_2\}$, — обозначим генераторы подалгебры Картана как Γ'_1 и Γ'_2 , соответственно (штрих введен для того, чтобы избежать путаницы с похожими символами в этом и в следующем разделах). В таких координатах, простые положительные корни $\alpha_1 \equiv \alpha$ и $\alpha_2 \equiv \beta$ имеют координаты

$$\alpha = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad \beta = (0, 1),$$

а их сумма

$$\gamma = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

что полностью определяет численные коэффициенты в (II.1.15) и (II.1.16). При таком выборе расположения осей, вдоль которых откладываются собственные значения генераторов подалгебры Картана, ясно, что Γ'_2 описывает величину, которая является полным аналогом проекции момента количества движения в алгебре $\mathfrak{su}(2)$, так как простой положительный корень α_2 ориентирован вдоль оси ϵ'_2 точно так же, как это было при рассмотрении момента количества движения. В случае алгебры $\mathfrak{su}(3)$ для

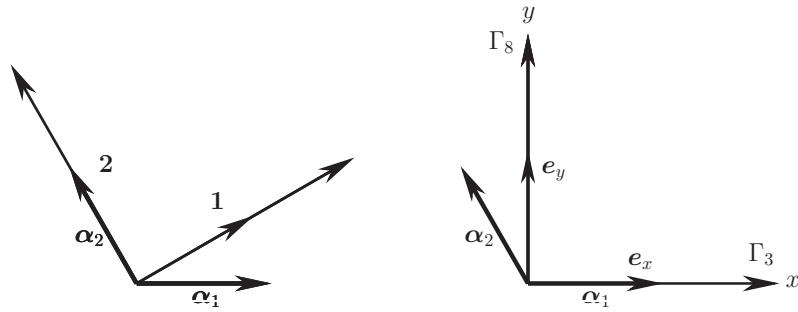


Рис. 2.2: Простые положительные корни алгебры $\mathfrak{su}(3)$ в ортонормированном базисе \mathbf{l} : $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}\} \equiv \{\epsilon'_1, \epsilon'_2\}$ (слева) и в координатном базисе плоскости (x, y) (справа) после поворота исходного базиса \mathbf{l} так, чтобы совместить ось x с первым простым положительным корнем, т.е. на $\frac{\pi}{6}$ по часовой стрелке.

обозначения наблюдаемой величины, подобной Γ'_2 , используют термин «изоспин». Рассмотренный нами ортонормированный базис \mathbf{l} задает наблюдаемые величины $\{\Gamma'_1, \Gamma'_2\}$, которые в физической традиции называются электрическим зарядом и U-изоспином. Мы изучим эти традиционные обозначения более детально в следующем разделе.

Сейчас же введем базис эрмитово самосопряженных генераторов Γ_a , для которых метрика Киллинга принимает, как говорят, конформно плоский вид

$$g_{ab} = C_A \delta_{ab}, \quad a, b \in \{\overline{1, 8}\}, \quad C_A = 3. \quad (\text{II.1.17})$$

Эти генераторы

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma_\alpha + \Gamma_{-\alpha}), & \Gamma_2 &= -\frac{i}{\sqrt{2}} (\Gamma_\alpha - \Gamma_{-\alpha}), \\ \Gamma_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma_\gamma + \Gamma_{-\gamma}), & \Gamma_5 &= -\frac{i}{\sqrt{2}} (\Gamma_\gamma - \Gamma_{-\gamma}), \\ \Gamma_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma_\beta + \Gamma_{-\beta}), & \Gamma_7 &= -\frac{i}{\sqrt{2}} (\Gamma_\beta - \Gamma_{-\beta}), \\ \Gamma_3 &= \frac{1}{2} (\sqrt{3} \Gamma'_1 - \Gamma'_2), & \Gamma_8 &= \frac{1}{2} (\Gamma'_1 + \sqrt{3} \Gamma'_2), \end{aligned} \quad (\text{II.1.18})$$

где поворот осей на плоскости генераторов подалгебры Картана $\{\Gamma'_1, \Gamma'_2\}$ введен, исходя из принятой в физической литературе традиции. При этом генераторы Γ_3 и Γ_8 — это генераторы подалгебры Картана, а собственные значения Γ_3 на рис. 2.2 откладываются вдоль оси x , а Γ_8 — вдоль оси y . Запишем коммутационные соотношения группы $SU(3)$ для этих генераторов

$$[\Gamma_a, \Gamma_b] = i f_{ab}^c \Gamma_c, \quad a, b, c \in \{\overline{1, 8}\}. \quad (\text{II.1.19})$$

Для данного фиксированного набора генераторов вводят полностью антисимметричные структурные константы⁷ $f_{abc} \equiv f_{ab}^{c'} \delta_{c'c}$ так, как это следует из выведенных нами выше из схемы Дынкина алгебры $\mathfrak{su}(3)$ коммутаторов. В итоге, для ненулевых постоянных мы получаем таблицу значений⁸:

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1, & f_{458} = f_{678} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ f_{147} = f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} &= \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (\text{II.1.20})$$

а другие константы получаются при перестановке их индексов с учетом четности такой перестановки. Структурные константы по определению задают метрику Киллинга (I.2.14)

$$g_{ab} = -f_{ac'}^c f_{bc'}^{c'} = -f_{ac'c} f_{bcc'} = f_{acc'} f_{bcc'} = 3 \delta_{ab}, \quad (\text{II.1.21})$$

где $C_A = 3$ получается усердным суммированием по немым индексам⁹.

⁷Согласно решению задачи 11 в разделе 2.3 Главы 1, §2 на стр. 28 для опускания и поднимания тензорных индексов в касательном пространстве группы используют символ Кронекера вместо метрики и обратной метрики Киллинга. Эта договоренность в сообществе физиков не меняет тензорных свойств объектов, так как $g_{ab} = C_A \delta_{ab}$, где C_A — скаляр, и этот факт затем учитывается во всех определениях и формулах, что делает формулы компактней.

⁸Эти структурные константы записаны в осиях, где явно выделена подалгебра $\mathfrak{su}(2)$, образованная изоспином, проекцию которого задает Γ_3 .

⁹Суммирование можно провести в уме, положив в (II.1.21) $a = b = 1$ и глядя в таблицу (II.1.20).

1.4 Физическая традиция для генераторов $\mathfrak{su}(3)$

На рис. 2.2 мы изобразили пару простых положительных корней с разным выбором ортонормированных осей на плоскости. Выбор осей, вдоль которых откладываются значения компонент корневых векторов, имеет произвол, обусловленный ортогональными преобразованиями в подпространстве генераторов подалгебры Картана, как мы это описали при введении базиса Картана–Вейля и весовых векторов в формулах (I.3.3)–(I.3.6) на стр. 30, поскольку ортогональные преобразования сохраняют как конформно плоский вид метрики (II.1.17), так и конформный фактор C_A , что важно для однозначного выбора генераторов алгебры Ли.

Элементы ортонормированного базиса двумерного пространства корней и весов, для которых мы ввели обозначения на стр. 33 в виде номеров \mathbf{l} , допускают преобразования за счет следующей степени свободы в своем определении: проекции простых положительных корней должны удовлетворять условиям (обратите внимание на номера простых положительных корней в скалярных произведениях!)

$$(\alpha_1, \mathbf{1}) > 0, \quad (\alpha_2, \mathbf{1}) \geq 0 \cup \{(\alpha_2, \mathbf{2}) > 0, \text{ если } (\alpha_2, \mathbf{1}) = 0\}.$$

Простейший выбор осей на плоскости $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$ получается, если первая орта $\mathbf{1}$ ортогональна второму простому положительному корню $(\mathbf{1}, \alpha_2) = 0$, а вторая орта $\mathbf{2}$ совпадает с α_2 , в то время как проекция первого положительного корня на первую орту положительна, что в случае $\mathfrak{su}(3)$ (см. рис. 2.2) означает

$$(\alpha_1, \mathbf{1}) = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0, \quad (\alpha_2, \mathbf{1}) = 0, \quad (\alpha_1, \mathbf{2}) = -\frac{1}{2}, \quad (\alpha_2, \mathbf{2}) = 1.$$

После того, как система простых положительных корней задана в исходном базисе $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$, имеет смысл провести замену групповых координат, которая преобразует базис $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$ в базис осей (x, y) так, как это обычно принято в физических приложениях. Напомним, что такое преобразование просто означает переход от одного набора генераторов подалгебры Картана к другому, в котором формулируются свойства базисных состояний неприводимых представлений, т.е. описываются собственные значения физических величин, соответствующих выбору набора генераторов подалгебры Картана. Так как выбор системы простых положительных корней алгебры уже полностью определен, становится неважно, в каком базисе на двумерной плоскости проводится описание компонент корневой системы алгебры $\mathfrak{su}(3)$. Преимуществом проведенных построений является тот простой факт, что веса и, как следствие, корни — это векторы, компоненты которых преобразуются по закону векторного анализа вместе с преобразованием набора генераторов подалгебры Картана, связанного с преобразованием групповых координат (см. описание на стр. 29 после формулы (I.3.2)). Поэтому перейдем к базису, который получается из $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$ поворотом на 30° по часовой стрелке, как это показано на рис. 2.2, чтобы направить ось x вдоль $\alpha_1 \equiv \alpha$, первого из простых положительных корней в базисе \mathbf{l} . Тогда координаты простых положительных корней в базисе (e_x, e_y)

$$\alpha_1 = \alpha = (1, 0), \quad \alpha_2 = \beta = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad (\text{II.1.22})$$

Коммутирующие генераторы подалгебры Картана в физической традиции обозначают парой

$$\hat{\Gamma}_3 = \hat{T}_3, \quad \hat{\Gamma}_8 = \hat{Y} \frac{\sqrt{3}}{2},$$

которые известны по исторически сложившимся в кварковой теории адронов именами «проекция изоспина» и «гиперзаряд Y », соответственно.

Так как группа $SU(2)$, очевидно, является подгруппой $SU(3)$, мы согласуем наш выбор нормировки простых положительных весов и метрики Киллинга с проведенным ранее на стр. 65 рассмотрением алгебры $\mathfrak{su}(2)$.

Отличные от нуля компоненты метрики Киллинга в базисе Картана–Вейля (I.3.44) для генераторов подалгебры Картана равны $g_{ll'} = \Omega^2 \delta_{ll'}$, а для простых положительных корней — $g_{\alpha\beta} = \Omega^2 \delta_{\alpha,-\beta}$. В терминах эрмитово самосопряженных генераторов мы полагаем равной

$$g_{ab} = C_A \delta_{ab}, \quad a, b \in \{\overline{1, 8}\}, \quad C_A = \Omega^2 > 0. \quad (\text{II.1.17})$$

Для того, чтобы освежить в изложении вопросы с введением конформно плоской метрики Киллинга, отошлем читателя к **задаче 11** в разделе 2.3 Главы 1, §2 на стр. 27, где дано также определение индекса Дынкина (I.2.39) и обсуждается введение формулы (I.2.40), идентичной (II.1.17). Вычисление C_A мы отложим до момента, когда будут описаны неприводимые представления (см. §2 Главы 2), к которым относится и присоединенное представление группы $SU(N)$ (см. раздел 2.4 Главы 2, §2). Авансом заметим,

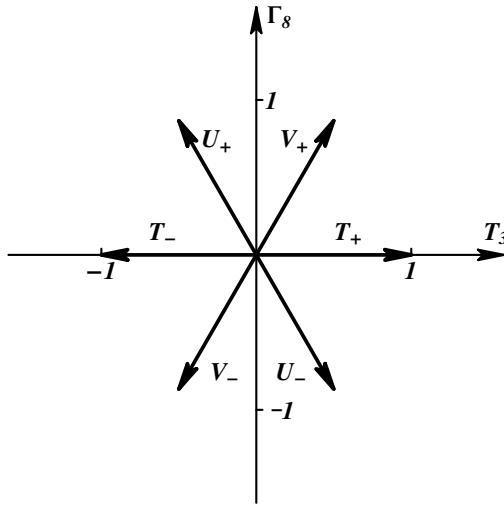


Рис. 2.3: Корневые векторы алгебры $\mathfrak{su}(3)$ на плоскости $\{T_3, \Gamma_8\}$.

что конформный фактор Ω^2 для конформно плоской метрики зависит от группы и для $SU(N)$ равен $C_A = N$.

Для повышающих генераторов введем обозначения, аналогичные введенному для $\mathfrak{su}(2)$ символу повышающего оператора момента j_+ (см. соотношения (II.1.2)),

$$\frac{\hat{T}_+}{\sqrt{2}} = \Gamma_\alpha, \quad \frac{\hat{U}_+}{\sqrt{2}} = \Gamma_\beta. \quad (\text{II.1.23})$$

Корни лестничных операторов – двумерные векторы – принято обозначать на диаграммах так же, как и отвечающие им генераторы, символами жирного шрифта без шляпки, которая относится к операторам, $\alpha \mapsto \mathbf{T}_+$ и $\beta \mapsto \mathbf{U}_+$ (см. рис. 2.2 и 2.3).

В принятых координатах на плоскости $\{\hat{T}_3, \hat{\Gamma}_8\}$ (см. рис. 2.3) простые положительные корневые векторы

$$\mathbf{T}_+ = (1, 0), \quad \mathbf{U}_+ = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (\text{II.1.24})$$

а их сумма задает положительный корень $\alpha + \beta = \gamma \equiv \mathbf{V}_+$

$$\mathbf{V}_+ = \mathbf{T}_+ + \mathbf{U}_+ = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad (\text{II.1.25})$$

и отвечающий этому корню генератор, который обозначается тем же символом со шляпкой,

$$\hat{V}_+ = \sqrt{2} \Gamma_{\alpha+\beta} = \sqrt{2} \Gamma_\gamma.$$

Заметим, что умножение генераторов из корневого дополнения алгебры на любой множитель не меняет их основного свойства — преобразования базисного состояния, которое является собственным для генераторов подалгебры Картана, с одним весовым вектором в другое состояние, тоже собственное и отличающееся весовым вектором от начального на величину корневого вектора, который в рамках физической традиции обозначен так же, как и генератор. Поэтому лестничные генераторы в физической традиции умножены на $\sqrt{2}$, и это изменит коэффициенты в коммутационных соотношениях, а вот длины корней как разностей весов, т.е. собственных значений, останутся единичными по длине (в уже заданной системе единиц измерения).

Поникающие генераторы с корнями противоположного знака, также как и повышающие генераторы, определяют коммутационные соотношения с генераторами наблюдаемых величин согласно построению базиса Картана–Вейля (I.3.44),

$$[\Gamma_l, \Gamma_\alpha] = \alpha_l \Gamma_\alpha, \quad [\Gamma_l, \Gamma_{-\alpha}] = -\alpha_l \Gamma_{-\alpha}.$$

Эти коммутаторы не зависят от нормировки повышающих операторов, в то время как компоненты корневых векторов α_l просто определяются выбранным ортонормированным базисом в векторном пространстве весов, так что, подставляя численные значения координат из (II.1.24) и (II.1.25), найдем

$$\begin{aligned} [\hat{T}_3, \hat{T}_\pm] &= (\mathbf{T}_\pm)_x \hat{T}_\pm = \pm \hat{T}_\pm, \quad [\hat{T}_3, \hat{U}_\pm] = (\mathbf{U}_\pm)_x \hat{U}_\pm = \mp \frac{1}{2} \hat{U}_\pm, \quad [\hat{T}_3, \hat{V}_\pm] = (\mathbf{T}_\pm)_x \hat{V}_\pm = \pm \frac{1}{2} \hat{V}_\pm, \\ [\hat{\Gamma}_8, \hat{T}_\pm] &= (\mathbf{T}_\pm)_y \hat{T}_\pm = 0, \quad [\hat{\Gamma}_8, \hat{U}_\pm] = (\mathbf{U}_\pm)_y \hat{U}_\pm = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{U}_\pm, \quad [\hat{\Gamma}_8, \hat{V}_\pm] = (\mathbf{V}_\pm)_y \hat{V}_\pm = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{V}_\pm. \end{aligned} \quad (\text{II.1.26})$$

Коммутаторы повышающих операторов с соответствующими им понижающими

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}] = \alpha_l \Gamma_l,$$

с учетом перенасштабирования (II.1.23) примут вид

$$\begin{aligned} [\hat{T}_+, \hat{T}_-] &= [\sqrt{2}\Gamma_\alpha, \sqrt{2}\Gamma_{-\alpha}] = 2\alpha_l \Gamma_l, \\ [\hat{U}_+, \hat{U}_-] &= [\sqrt{2}\Gamma_\beta, \sqrt{2}\Gamma_{-\beta}] = 2\beta_l \Gamma_l, \\ [\hat{V}_+, \hat{V}_-] &= [\sqrt{2}\Gamma_\gamma, \sqrt{2}\Gamma_{-\gamma}] = 2\gamma_l \Gamma_l, \end{aligned}$$

т.е. при подстановке в правую часть коммутатора численных значений координат из (II.1.24) и (II.1.25), примут вид

$$\begin{aligned} [\hat{T}_+, \hat{T}_-] &= 2(\mathbf{T}_+)_x \hat{T}_3 + 2(\mathbf{T}_+)_y \hat{\Gamma}_8 = 2\hat{T}_3, \\ [\hat{U}_+, \hat{U}_-] &= 2(\mathbf{U}_+)_x \hat{T}_3 + 2(\mathbf{U}_+)_y \hat{\Gamma}_8 = -\hat{T}_3 + \sqrt{3} \hat{\Gamma}_8, \\ [\hat{V}_+, \hat{V}_-] &= 2(\mathbf{V}_+)_x \hat{T}_3 + 2(\mathbf{V}_+)_y \hat{\Gamma}_8 = \hat{T}_3 + \sqrt{3} \hat{\Gamma}_8. \end{aligned} \quad (\text{II.1.27})$$

Здесь стоит подчеркнуть, что генераторы «изоспина» \hat{T}_3 и \hat{T}_\pm в точности воспроизводят коммутационные соотношения для момента импульса, что вполне оправдывает принятое для них название.

По виду коммутаторов (II.1.27) вводят наблюдаемые величины

$$\hat{U}_3 = \frac{1}{2} \left(-\hat{T}_3 + \frac{3}{2} \hat{Y} \right), \quad \hat{V}_3 = \frac{1}{2} \left(\hat{T}_3 + \frac{3}{2} \hat{Y} \right), \quad (\text{II.1.28})$$

в терминах которых коммутаторы повышающих генераторов с понижающими сводятся к стандартным соотношениям в алгебре изоспина ($\mathfrak{su}(2)$ в математической терминологии)

$$[\hat{T}_+, \hat{T}_-] = 2\hat{T}_3, \quad [\hat{U}_+, \hat{U}_-] = 2\hat{U}_3, \quad [\hat{V}_+, \hat{V}_-] = 2\hat{V}_3, \quad (\text{II.1.29})$$

что позволяет говорить не только о T -изоспине, но и о U - и V -изоспине в алгебре $\mathfrak{su}(3)$. Каждый такой изоспин связан с одной из трех осей трех пар корневых векторов на рис. 2.1.

Для замкнутости изложения повторим некоторые выводы «математизированного» изложения предыдущего раздела в физических терминах, которые мы используем в этом разделе: структурные константы $N_{\alpha,\beta}$ в базисе Картана–Вейля в коммутационном соотношении для простых положительных корней типа

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = N_{\alpha,\beta} \Gamma_{\alpha+\beta}, \quad (\text{II.1.10})$$

как мы установили в (I.4.24), принимают значения

$$N_{\alpha,\beta}^2 = -(\alpha, \beta), \quad (\text{I.4.24})$$

что в случае $\mathfrak{su}(3)$ дает для нормированных на единицу корневых векторов

$$(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}.$$

Тогда с учетом перенасштабирования повышающих генераторов (II.1.23) и определения

$$\Gamma_\gamma \equiv \Gamma_{\alpha+\beta} = \frac{\hat{V}_+}{\sqrt{2}}$$

из

$$[\sqrt{2}\Gamma_\alpha, \sqrt{2}\Gamma_\beta] = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^2 \Gamma_{\alpha+\beta},$$

находим

$$[\hat{T}_+, \hat{U}_+] = \hat{V}_+, \quad (\text{II.1.30})$$

что после эрмитова сопряжения¹⁰ дает также

$$[\hat{T}_-, \hat{U}_-] = -\hat{V}_-. \quad (\text{II.1.31})$$

Наконец, мы установили ранее (см. стр. 49)

$$N_{-\alpha, \beta+\alpha} = N_{\beta+\alpha, -\beta} = N_{-\beta, -\alpha} = N_{\alpha, \beta}, \quad (\text{I.4.11})$$

откуда согласно (II.1.30) и (II.1.31) сразу получаем

$$[\hat{T}_-, \hat{V}_+] = \hat{U}_+, \quad [\hat{V}_+, \hat{U}_-] = \hat{T}_+, \quad (\text{II.1.32})$$

и для эрмитово сопряженных к ним коммутаторов

$$[\hat{T}_+, \hat{V}_-] = -\hat{U}_-, \quad [\hat{V}_-, \hat{U}_+] = -\hat{T}_-. \quad (\text{II.1.33})$$

Отсутствие корней вида $\alpha + \gamma = 2\alpha + \beta$ и $\beta + \gamma = 2\beta + \alpha$ приводит согласно (II.1.10) к коммутаторам

$$[\hat{T}_+, \hat{V}_+] = [\hat{U}_+, \hat{V}_+] = 0, \quad (\text{II.1.34})$$

а их эрмитово сопряжение дает

$$[\hat{T}_-, \hat{V}_-] = [\hat{V}_-, U_-] = 0. \quad (\text{II.1.35})$$

Формулы (II.1.26)–(II.1.35) перечисляют все варианты коммутаторов генераторов алгебры $\mathfrak{su}(3)$, и из них можно восстановить структурные константы группы $SU(3)$ в базисе эрмитово самосопряженных генераторов, если перейти к операторам Γ_a , для которых метрика Киллинга принимает конформно плоский вид (II.1.17), так что в полном соответствии с определениями предыдущего раздела

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{1}{2}(\hat{T}_+ + \hat{T}_-), & \Gamma_2 &= -\frac{i}{2}(\hat{T}_+ - \hat{T}_-), \\ \Gamma_4 &= \frac{1}{2}(\hat{V}_+ + \hat{V}_-), & \Gamma_5 &= -\frac{i}{2}(\hat{V}_+ - \hat{V}_-), \\ \Gamma_6 &= \frac{1}{2}(\hat{U}_+ + \hat{U}_-), & \Gamma_7 &= -\frac{i}{2}(\hat{U}_+ - \hat{U}_-), \\ \Gamma_3 &= \hat{T}_3, & \Gamma_8 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{Y}. \end{aligned} \quad (\text{II.1.36})$$

и

$$[\Gamma_a, \Gamma_b] = i f_{ab}^c \Gamma_c, \quad a, b, c \in \{\overline{1, 8}\}, \quad (\text{II.1.37})$$

причем антисимметричные структурные константы f_{abc} уже приведены нами¹¹ в (II.1.20).

Квадратичный оператор Казимира согласно формуле (I.2.41) на стр. 28 в случае метрики Киллинга, пропорциональной символу Кронекера, —

$$C_2 = \sum_{a=1}^8 \Gamma_a \Gamma_a$$

в силу (II.1.18) можно выразить через повышающие и пониждающие операторы

$$C_2 = \hat{T}_3^2 + \hat{\Gamma}_8^2 + \frac{1}{2}(\hat{T}_+ \hat{T}_- + \hat{T}_- \hat{T}_+ + \hat{V}_+ \hat{V}_- + \hat{V}_- \hat{V}_+ + \hat{U}_+ \hat{U}_- + \hat{U}_- \hat{U}_+). \quad (\text{II.1.38})$$

С помощью коммутационных соотношений (II.1.27) легко преобразовать к виду, где все повышающие операторы стоят справа,

$$\begin{aligned} C_2 &= \hat{T}_3^2 + \hat{\Gamma}_8^2 + \hat{T}_- \hat{T}_+ + \hat{T}_3 + \hat{V}_- \hat{V}_+ - \frac{1}{2} \hat{T}_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{\Gamma}_8 + \hat{U}_- \hat{U}_+ + \frac{1}{2} \hat{T}_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{\Gamma}_8 = \\ &= \hat{T}_3^2 + \hat{\Gamma}_8^2 + \hat{T}_- \hat{T}_+ + \hat{V}_- \hat{V}_+ + \hat{U}_- \hat{U}_+ + \hat{T}_3 + \sqrt{3} \hat{\Gamma}_8. \end{aligned} \quad (\text{II.1.39})$$

Подчеркнем, что, во-первых, в теории неприводимых представлений вводится состояние со старшим весом $|\mu_S\rangle$, так что действие всех повышающих операторов на состояние старшего веса дает нуль,

$$\hat{T}_+ |\mu_S\rangle = \hat{U}_+ |\mu_S\rangle = \hat{V}_+ |\mu_S\rangle = 0.$$

¹⁰Вместо эрмитова сопряжения коммутаторов можно напрямую использовать то, что $N_{\alpha, \beta} = N_{-\beta, -\alpha} = -N_{-\alpha, -\beta}$.

¹¹Эти структурные константы записаны в осиях, где явно выделена подалгебра $\mathfrak{su}(2)$, образованная T -изоспином. Ясно, что повороты осей отсчета собственных значений генераторов подалгебры Картана — проекций весов позволяют также выделять подалгебры $\mathfrak{su}(2)$, образованные U - и V -изоспинами.

Во-вторых, собственное значение оператора Казимира для всех состояний неприводимого представления является одним и тем же, так что вычисление значения квадратичного инварианта может быть сведено к суммированию вкладов от действия на состояние старшего веса тех членов в (II.1.39), которые выражены через генераторы подалгебры Картана,

$$C_2|\mu_S\rangle = (\hat{T}_3^2 + \hat{\Gamma}_8^2 + \hat{T}_3 + \sqrt{3}\hat{\Gamma}_8)|\mu_S\rangle,$$

и, следовательно, собственное значение C_2 дается в виде алгебраического полинома второй степени от собственных чисел генераторов подалгебры Картана.

Примеры вычисления квадратичного оператора Казимира для разных неприводимых представлений приводятся при рассмотрении задач для группы $SU(N)$ в конце раздела 4.6 Главы 2, §4. Общее же выражение в терминах индекса Дынкина T_R (I.2.39) для неприводимого представления R размерности \mathcal{D}_R (см. стр. 28) имеет вид

$$C_2^R = T_R \frac{\mathcal{D}_{\text{ad}}}{\mathcal{D}_R}.$$

§2. Неприводимые представления

Базисное состояние старшего веса неприводимого представления и квантовые числа базисных состояний, единственность состояния старшего веса неприводимого представления, ранг простой компактной группы и число независимых инвариантов Казимира, рекуррентное соотношение нормировок состояний при действии понижающего оператора, фундаментальные векторы алгебры Ли и формула для старшего веса произвольного неприводимого представления, фундаментальные представления, действие генераторов алгебры в пространстве тензорного произведения состояний неприводимых представлений, зеркальная симметрия состояний неприводимого представления, корневые векторы как веса состояний присоединенного представления и группа Вейля.

Пусть генераторы группы Ли действуют в некотором пространстве состояний. При этом может оказаться, что всякое действие группы преобразований в некотором подпространстве переводит его состояния в суперпозиции этого же подпространства квантовых состояний. Такое подпространство называется инвариантным относительно действия группы. Очевидно, что для описания действия группы в пространстве состояний достаточно рассмотреть преобразования в инвариантных подпространствах, которые уже не содержат в себе инвариантных подпространств, кроме его самого или нуля. В таком случае говорят, что имеет место неприводимое представление группы преобразований состояний.

Опишем, как строится неприводимое представление *простой компактной группы Ли*, которой отвечает связная диаграмма Дынкина. Для этого необходимо взять какое-либо допустимое ненулевое базисное собственное состояние с квантовыми числами, под которыми мы понимаем маркер собственных значений полного набора наблюдаемых. Этот набор квантовых чисел включает в себя независимые инварианты – собственные значения независимых операторов Казимира – и собственные значения генераторов из подалгебры Картана, а, в случае неполноты уже перечисленных наблюдаемых, еще и эрмитовы операторы, которые делают набор наблюдаемых полным, т.е. описывают вырождение, или число базисных состояний, соответствующих одному и тому же набору части квантовых чисел, заданных собственными значениями операторов Казимира и генераторов подалгебры Картана. Нетривиальный термин «вырождение» введен физиками, которые при исследовании физических состояний материи обнаружили, что в ряде систем введенному набору квантовых чисел соответствует более одного состояния. На языке набора наблюдаемых это означает, что набор наблюдаемых и квантовых чисел оказывается неполным, и нужно искать дополнительные физические характеристики, чтобы отличать эти состояния¹². Затем необходимо подействовать на это базисное состояние произвольными элементами группы, получая таким образом другие квантовые состояния, так как повышающие и понижающие, т.е. лестничные операторы просто изменяют собственные значения тех наблюдаемых, которые не являются инвариантами группы, а затем взять линейную оболочку найденных таким способом состояний, т.е. всех образов многократного действия элементов группы на исходный базисный вектор состояния. Можно сказать, что такая линейная оболочка образов многократного действия на исходное квантовое состояние генераторами алгебры Ли образует класс эквивалентности исходного базисного элемента. Для введения класса эквивалентности необходимо установить справедливость двух постулатов: взаимности и транзитивности. Постулат взаимности утверждает, что любой элемент из класса эквивалентности исходного элемента определяет свое множество эквивалентных элементов, которому принадлежит исходный элемент: если $a \cong b$, то $b \cong a$. Постулат транзитивности утверждает, что, если первый и второй элементы множества принадлежат

¹²Мы увидим, что вырождение весового вектора неприводимого представления возникает тогда, когда, например, в компактной простой группе есть компактные простые подгруппы меньшей размерности, которые не могут быть инвариантными подгруппами по условию простоты группы, но определяют свои внутренние инварианты относительно преобразований подгруппы, так что один и тот же весовой вектор может отвечать состояниям с разными значениями этих подгрупповых инвариантов, а это и означает описание вырождения с помощью этих инвариантов подгрупп.

одному классу эквивалентности, а второй и третий элементы также принадлежат одному классу эквивалентности, то первый и третий элементы принадлежат одному классу эквивалентности: если $a \cong b$, $b \cong c$, то $a \cong c$. Класс эквивалентности по построению образует инвариантное подпространство состояний: всякий отличный от нулевого элемент класса эквивалентности может быть преобразован при действии группы с точностью до множителя в любой другой элемент класса. В таком инвариантном подпространстве нет других инвариантных подпространств, т.е. других классов эквивалентности исходных состояний¹³. Для решения задачи о построении неприводимого представления необходимо установить ограничения на выбор исходного состояния и результаты действия на него элементов группы.

Прежде всего, исходное состояние характеризуется некоторыми собственными значениями инвариантов группы — операторов Казимира, которые не изменяются при действии группы, следовательно, исходное состояние неприводимого представления не может быть суперпозицией состояний с разными значениями одного и того же оператора Казимира, так как тогда действие преобразований группы привело бы к нескольким инвариантным подпространствам взаимно ортогональных состояний с разными значениями одного и того же оператора Казимира. В этой ситуации нарушалось бы условие взаимности элементов одно класса эквивалентности: элемент с одним собственным значением оператора Казимира не может быть преобразован в элемент с другим собственным значением этого же оператора Казимира, хотя в линейной оболочке образов действия группы на суперпозицию элементов с двумя разными собственными значениями оператора Казимира содержит элемент с определенным собственным значением этого оператора Казимира. Итак, мы устанавливаем *признак неприводимости*: исходный элемент класса эквивалентности неприводимого представления с необходимостью должен быть собственным состоянием всех независимых инвариантов Казимира.

Мы рассматриваем только пространства состояний с конечномерным базисом: для этого достаточно, чтобы ранг группы был конечен, а значит, конечно число независимых инвариантов. Тогда среди базиса неприводимого представления группы удобно выбрать такое состояние, действие на которое всех повышающих операторов алгебры группы дает нуль. Подобное состояние $|\mu_S\rangle$, как мы знаем по опыту квантования момента импульса, называется старшим (в физической литературе — «старший вектор состояния», в нашем изложении мы предпочтительно используем термин «состояние старшего веса» в целях более ясного разграничения понятий элементов в различных векторных пространствах: весовые и корневые векторы, базисные векторы неприводимого представления, — в согласии с замечанием после формулы (I.3.6) на стр. 30): значения собственных чисел μ из полного набора наблюдаемых у такого состояния не могут быть повышенны,

$$\Gamma_\alpha |\mu_S\rangle = 0. \quad (\text{II.2.1})$$

Существование старшего вектора состояния в неприводимом представлении конечной размерности можно установить, пользуясь определением старшего веса, которое мы дали на стр. 31: это положительный вес, у которого значение первой ненулевой компоненты μ_l максимально среди всего множества весов неприводимого представления, и после такого выбора множества весов с максимальной первой компонентой такая же процедура отбора повторяется затем в этом множестве по второй компоненте веса, затем аналогично по третьей и так далее, так что максимальны и все последующие значения компонент веса по порядку при условии фиксированных согласно процедуре отбора значений предыдущих компонент. Отсюда сразу следует, что действие генератора любого положительного корня на состояние со старшим весом $|\mu_S\rangle$ в данном неприводимом представлении приводило бы к состоянию с весом, старше, чем μ_S , что противоречит самому определению старшего веса.

Вследствие положительной определенности квадратичного оператора Казимира C_2 для компактной простой алгебры Ли групповой инвариант C_2 можно представить как сумму квадратичных эрмитовых выражений, которая берется по генераторам в подалгебре Картана Γ_l и по генераторам $\Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}}$ корневого дополнения подалгебры Картана. Здесь $\gamma_{\tilde{m}}$ — это *все положительные корни*, а

$$\tilde{m} \in \left\{ 1, \frac{1}{2}(N_g - n) \right\}.$$

В базисе Картана–Вейля (I.3.44), в котором метрика Киллинга диагональна и пропорциональна символу Кронекера $g_{ab} = \Omega^2 \delta_{ab}$ с конформным фактором $\Omega^2 > 0$, в обратной метрике $g^{ab} = \delta^{ab}/\Omega^2$ обычно опускают конформный фактор и определяют квадратичный оператор Казимира (с тильдой) $\tilde{C}_2 = \delta^{ab} \Gamma_a \Gamma_b = \Gamma_a \Gamma_a$ (см. стр. 28 и формулу (I.2.41)),

$$\tilde{C}_2 = \Gamma_a \Gamma_a = \Gamma_l \Gamma_l + \sum_{\tilde{m}} (\Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} \Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} + \Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}}). \quad (\text{II.2.2})$$

Отсюда находим, что каждый вклад в среднее значение C_2 неотрицателен, так как для эрмитово само-сопряженных генераторов подалгебры Картана

$$\langle \mu | \Gamma_l \Gamma_l | \mu \rangle = \langle \mu | \Gamma_l \mu_l | \mu \rangle = \mu_l \mu_l \langle \mu | \mu \rangle = (\mu, \mu) \langle \mu | \mu \rangle > 0,$$

¹³Этого не может произойти, если выполнены постулаты взаимности и транзитивности в определении соотношения эквивалентности.

а для лестничных генераторов имеет место связь генераторов

$$\Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} = \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}}^\dagger,$$

откуда среднее произведения генераторов выражается через норму состояния

$$|\psi\rangle = \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} |\mu\rangle,$$

поскольку

$$\langle\psi|\psi\rangle = (\Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} |\mu\rangle)^\dagger \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} |\mu\rangle = \langle\mu| \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}}^\dagger \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} |\mu\rangle = \langle\mu| \Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} |\mu\rangle \geq 0.$$

Значит, среднее значение квадратичного оператора Казимира по состоянию представления

$$\langle \tilde{C}_2 \rangle \equiv \langle \mu | C_2 | \mu \rangle = (\mu, \mu) + \langle \mu | \sum_{\tilde{m}} (\Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} \Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} + \Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}}) | \mu \rangle \geq (\mu, \mu).$$

Если в этом среднем использовать старший вектор состояния, то, во-первых, действие любого повышающего генератора на вектор старшего веса равно нулю, и вклад вида

$$\langle \mu_S | \sum_{\tilde{m}} \Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} | \mu_S \rangle = 0,$$

а во-вторых, с помощью выражения для коммутатора двух генераторов с противоположными значениями корней

$$[\Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}}, \Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}}] = (\gamma_{\tilde{m}})_l \Gamma_l \Rightarrow \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} \Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} = \Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} + (\gamma_{\tilde{m}})_l \Gamma_l,$$

можно вычислить вклад

$$\begin{aligned} \langle \mu_S | \sum_{\tilde{m}} \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} \Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} | \mu_S \rangle &= \langle \mu_S | \sum_{\tilde{m}} (\Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} + (\gamma_{\tilde{m}})_l \Gamma_l) | \mu_S \rangle = 0 + \sum_{\tilde{m}} (\gamma_{\tilde{m}})_l \langle \mu_S | \Gamma_l | \mu_S \rangle = \\ &= \sum_{\tilde{m}} (\gamma_{\tilde{m}})_l (\mu_S)_l \langle \mu_S | \mu_S \rangle = \sum_{\tilde{m}} (\gamma_{\tilde{m}}, \mu_S) \langle \mu_S | \mu_S \rangle = \sum_{\tilde{m}} (\gamma_{\tilde{m}}, \mu_S), \end{aligned}$$

где мы приняли, что вектор состояния нормирован на единицу,

$$\langle \mu_S | \mu_S \rangle = 1.$$

В дальнейшем изложении мы всегда полагаем, что *все базисные состояния пространства представления с определенным весом являются нормированными на единицу*.

В итоге, среднее значение квадратичного оператора Казимира в состоянии старшего веса совпадает с его собственным значением в неприводимом представлении и выражается через положительные корни и старший вес¹⁴

$$\langle \tilde{C}_2 \rangle = (\mu_S, \mu_S) + \sum_{\tilde{m}} (\gamma_{\tilde{m}}, \mu_S). \quad (\text{II.2.3})$$

В определении состояния старшего веса $|\mu_S\rangle$ (в англоязычной литературе — *highest weight*, мы же используем индекс S от слова *senior*) участвуют не только простые положительные корни, но и восстановленные по ним согласно схеме Дынкина все другие положительные корни, представимые как целочисленные суперпозиции простых¹⁵. Следовательно, все остальные состояния неприводимого представления получаются действием на состояние старшего веса только поникающих операторов, так как иначе при наличии хотя бы одного повышающего оператора можно было бы его переставлять с поникающими, пользуясь коммутационными соотношениями, до тех пор, пока повышающий оператор не подействует на состояние старшего веса и даст тем самым нулевой результат.

В самом деле, так как базис состояний неприводимого представления конечен, всякое базисное состояние этого представления, отличное от состояние старшего веса, можно представить как результат действия суперпозиции произведений генераторов конечной степени однородности на состояние старшего веса, что и определяет класс эквивалентности для состояния старшего веса, которому принадлежит всякое базисное состояние в неприводимом представлении,

$$|\nu\rangle = \sum_{k < k_{\max}} c'_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} \Gamma_{\alpha_1} \cdots \Gamma_{\alpha_k} |\mu_S\rangle, \quad \nu \neq \mu_S.$$

¹⁴ В математической литературе принято указывать имя автора формулы (II.2.3) — Г. Рака.

¹⁵ Достаточно, чтобы действие генераторов для простых положительных корней на состояние старшего веса давало нуль, так как отсюда следует, что и все другие генераторы положительных корней обращают состояние старшего веса состояния в нуль. Доказательство этого утверждения мы предлагаем читателю провести самостоятельно.

В рамках метода математической индукции предположим, что при действии на базисное состояние старшего веса при получении базисного состояния с весом $\nu \neq \mu_S$ произведение k генераторов из алгебры Ли сводится к линейной комбинации только понижающих генераторов степени не выше k

$$\Gamma_{\alpha_k} \cdots \Gamma_{\alpha_1} |\mu_S\rangle = \sum_{p \leq k} c_{1,\dots,p} \Gamma_{-\alpha_1} \cdots \Gamma_{-\alpha_p} |\mu_S\rangle,$$

что, очевидно, справедливо при $k = 1$, поскольку любой повышающий оператор по определению старшего вектора дает нулевой результат, а генератор из подалгебры Картана не меняет вес¹⁶. Тогда по индукции для $k + 1$ степени произведения генераторов

$$\Gamma_{\alpha_{k+1}} \Gamma_{\alpha_k} \cdots \Gamma_{\alpha_1} |\mu_S\rangle = \Gamma_{\alpha_{k+1}} \sum_{p \leq k} c_{1,\dots,p} \Gamma_{-\alpha_1} \cdots \Gamma_{-\alpha_p} |\mu_S\rangle.$$

Но при коммутации генераторов получим

$$\Gamma_{\alpha_{k+1}} \Gamma_{-\alpha_1} = \Gamma_{-\alpha_1} \Gamma_{\alpha_{k+1}} + N_{\alpha_{k+1}, -\alpha_1} \Gamma_{\alpha_{k+1} - \alpha_1},$$

где второе слагаемое сводит рассмотрение к произведению генераторов степени k , т.е. приводит к суперпозиции произведений понижающих генераторов степени не выше k , а для первого имеется вклад вида

$$\Gamma_{-\alpha_1} \sum_{p \leq k} c_{1,\dots,p} \Gamma_{\alpha_{k+1}} \Gamma_{-\alpha_2} \cdots \Gamma_{-\alpha_p} |\mu_S\rangle = \Gamma_{-\alpha_1} \sum_{p \leq k} \tilde{c}_{1,\dots,p} \Gamma_{-\alpha_1} \Gamma_{-\alpha_2} \cdots \Gamma_{-\alpha_p} |\mu_S\rangle,$$

где мы опять воспользовались условием индукции. В итоге, случай степени $k + 1$ сводится к суперпозиции лишь понижающих операторов степени не выше $k + 1$, т.е. действительно все состояния базиса суть результаты действия понижающих генераторов на состояние старшего веса. Отсюда вытекает, что все другие базисные состояния неприводимого представления имеют координаты (веса)

$$\nu = \mu_S - \sum_m k_m \alpha_m, \quad (\text{II.2.4})$$

где $k_m \in \{0, \mathbb{N}\}$, т.е. неотрицательные целые числа, а α_m — простые положительные корневые векторы алгебры Ли. Это позволяет заключить также, что *состояние старшего веса — единственное для данного неприводимого представления*. Во-первых, старший вес определен однозначно, и другого старшего веса в неприводимом представлении нет. Во-вторых, состояние со старшим весом невырождено. В самом деле, если есть два разных состояния с одним старшим весом $|\mu_S\rangle_1$ и $|\mu_S\rangle_2$, то среди состояний неприводимого представления, построенного по $|\mu_S\rangle_1$ есть только состояния, которые получаются действием понижающих операторов, с весами, отличными от μ_S . Поэтому среди них нет $|\mu_S\rangle_2$. Значит, $|\mu_S\rangle_2$ не принадлежит неприводимому представлению состояния $|\mu_S\rangle_1$. Другими словами, каждое состояние старшего веса порождает свое отдельное пространство неприводимого представления (один класс эквивалентности, который инвариантен относительно действия генераторов алгебры Ли и не содержит в себе инвариантных подпространств).

Этот вывод единственности состояния старшего веса неприводимого представления чрезвычайно важен, так как из него следуют следующие положения:

- поскольку состояние старшего веса однозначно характеризуется набором n собственных значений наблюдаемых из подалгебры Картана, т.е. компонентами старшего веса, число которых равно рангу группы n , неприводимое представление однозначно задается набором из n собственных значений наблюдаемых из подалгебры Картана,
- количество независимых инвариантов — операторов Казимира, т.е. количество образующих в центре алгебры Ли (см. обсуждение при введении операторов Казимира степени k сразу после определений (I.2.32) и (I.2.33)) равно рангу группы n , так как всякое неприводимое представление однозначно задается набором из n независимых чисел: либо значениями независимых инвариантов, либо значениями координат старшего веса, а значит, это соответствие между n компонентами старшего веса неприводимого представления и значениями независимых инвариантов для того же неприводимого представления может быть только взаимно однозначным.

¹⁶Из этого замечания почти очевидно, что результат действия однородного полинома генераторов алгебры, *сохраняющей состояние старшего веса*, совпадает с действием полинома, составленного из генераторов подалгебры Картана. Коэффициенты этого полинома могут зависеть от структурных констант алгебры Ли, которые возникают при коммутации генераторов, но результат действия зависит от неприводимого представления исключительно в виде полинома от компонент старшего веса этого представления.

2.1 Допустимые значения старшего веса и фундаментальные представления

Установим допустимые значения старшего веса в неприводимом представлении просто компактной группы Ли. Для этого вычислим норму состояния, полученного многократным действием понижающего оператора на состояние старшего веса

$$\Gamma_{-\alpha}^p |\mu_S\rangle \mapsto \langle \mu_S | \Gamma_{\alpha}^p \Gamma_{-\alpha}^p |\mu_S\rangle = \mathcal{K}_p, \quad (\text{II.2.5})$$

где \mathcal{K}_p — положительная величина, равная квадрату нормы состояния. Стандартный коммутатор повышающего оператора с понижающим выражается через генераторы подалгебры Картана

$$\Gamma_{\alpha} \Gamma_{-\alpha} = \Gamma_{-\alpha} \Gamma_{\alpha} + \alpha_l \Gamma_l,$$

так что

$$\mathcal{K}_p = \langle \mu_S | \Gamma_{\alpha}^{p-1} \Gamma_{-\alpha} \Gamma_{\alpha} \Gamma_{-\alpha}^{p-1} |\mu_S\rangle + \langle \mu_S | \Gamma_{\alpha}^{p-1} \alpha_l \Gamma_l \Gamma_{-\alpha}^{p-1} |\mu_S\rangle.$$

Но

$$\Gamma_{-\alpha}^{p-1} |\mu_S\rangle \sim |\mu_S - (p-1)\alpha\rangle,$$

а

$$\Gamma_l |\mu_S - (p-1)\alpha\rangle = \{(\mu_S)_l - (p-1)\alpha_l\} |\mu_S - (p-1)\alpha\rangle$$

и, следовательно,

$$\alpha_l \Gamma_l \Gamma_{-\alpha}^{p-1} |\mu_S\rangle = \{(\alpha, \mu_S) - (p-1)(\alpha, \alpha)\} \Gamma_{-\alpha}^{p-1} |\mu_S\rangle.$$

Значит,

$$\mathcal{K}_p = \langle \mu_S | \Gamma_{\alpha}^{p-1} \Gamma_{-\alpha} \Gamma_{\alpha} \Gamma_{-\alpha}^{p-1} |\mu_S\rangle + \{(\alpha, \mu_S) - (p-1)(\alpha, \alpha)\} \mathcal{K}_{p-1}.$$

Переставляя повышающий оператор дальше вправо по той же схеме, найдем

$$\begin{aligned} \langle \mu_S | \Gamma_{\alpha}^{p-1} \Gamma_{-\alpha} \Gamma_{\alpha} \Gamma_{-\alpha}^{p-1} |\mu_S\rangle &= \langle \mu_S | \Gamma_{\alpha}^{p-1} \Gamma_{-\alpha}^2 \Gamma_{\alpha} \Gamma_{-\alpha}^{p-2} |\mu_S\rangle + \langle \mu_S | \Gamma_{\alpha}^{p-1} \Gamma_{-\alpha} \alpha_l \Gamma_l \Gamma_{-\alpha}^{p-2} |\mu_S\rangle = \\ &= \langle \mu_S | \Gamma_{\alpha}^{p-1} \Gamma_{-\alpha}^2 \Gamma_{\alpha} \Gamma_{-\alpha}^{p-2} |\mu_S\rangle + \{(\alpha, \mu_S) - (p-2)(\alpha, \alpha)\} \langle \mu_S | \Gamma_{\alpha}^{p-1} \Gamma_{-\alpha} \Gamma_{-\alpha}^{p-2} |\mu_S\rangle = \\ &= \langle \mu_S | \Gamma_{\alpha}^{p-1} \Gamma_{-\alpha}^2 \Gamma_{\alpha} \Gamma_{-\alpha}^{p-2} |\mu_S\rangle + \{(\alpha, \mu_S) - (p-2)(\alpha, \alpha)\} \mathcal{K}_{p-1}. \end{aligned}$$

Повторяя эти шаги ровно p раз до тех пор, пока повышающий оператор не окажется первым справа и, действуя на состояние старшего веса, не преобразует его в вектор с нулевой нормой,

$$\langle \mu_S | \Gamma_{\alpha}^{p-1} \Gamma_{-\alpha}^p \Gamma_{\alpha} |\mu_S\rangle = 0,$$

получим, что

$$\mathcal{K}_p = \mathcal{K}_{p-1} \sum_{k=1}^p \{(\alpha, \mu_S) - (p-k)(\alpha, \alpha)\}.$$

Тогда из сумм для арифметических прогрессий

$$\sum_{k=1}^p (p-k) = \frac{1}{2} p(p-1), \quad \sum_{k=1}^p 1 = p,$$

установим рекуррентное соотношение

$$\mathcal{K}_p = \mathcal{K}_{p-1} \left\{ p(\alpha, \mu_S) - \frac{1}{2} p(p-1)(\alpha, \alpha) \right\} \quad (\text{II.2.6})$$

при очевидном условии нормировки в определении (II.2.5)

$$\mathcal{K}_0 = \langle \mu_S | \mu_S \rangle = 1. \quad (\text{II.2.7})$$

Однако, так как базис пространства состояний представления конечен, рекуррентция (II.2.6) должна оборваться на некотором $p_m + 1$ шаге, т.е. норма состояния, полученная действием $p_m + 1$ понижающих генераторов $\Gamma_{-\alpha_m}$, по необходимости обращается в нуль, что согласно (II.2.6) возможно, только если для всех простых положительных корней простой компактной алгебры Ли, у которой диаграмма Дынкина является связной, числа

$$p_m = 2 \frac{(\mu_S, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} \in \{0, \mathbb{N}\}, \quad (\text{II.2.8})$$

являются неотрицательными целыми и имеют смысл числа шагов понижения старшего веса в каждом из заданных простыми корнями направлений, после которых следующее понижение дает нулевое состояние. В этой связи удобно ввести фундаментальные векторы λ_j , каждый из которых ортогонален всем простым положительным корневым векторам кроме одного и имеет на него фиксированную проекцию, а именно

$$2 \frac{(\lambda_j, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} = \delta_{jm}. \quad (\text{II.2.9})$$

Для примера, если старший вес равен λ_m (мы покажем чуть ниже, что это возможно), то из сравнения (II.2.8) с (II.2.9) получим, что отличный от нуля результат при действии понижающими операторами, отвечающими простым отрицательным корням, на состояние такого старшего веса получится только для $\Gamma_{-\alpha_m}$, причем только однократно. Остальные понижающие генераторы дадут нуль пространства состояний при действии на такое состояние старшего веса в силу ортогональности других корней выбранному фундаментальному вектору.

Перепишем формулу (II.2.8) в случае, когда $j = m$, $\mu_S = \lambda_m$, а корень α_m имеет единичную длину,

$$(\lambda_m, \alpha_m) = \frac{1}{2}.$$

Ортогональным преобразованием генераторов подалгебры Картана всегда можно сделать корневой вектор α_m равным $(1, 0, 0, \dots, 0)$. При таком выборе подалгебры Картана мы получаем, что m -тый фундаментальный вектор, который в нашем примере совпадает со старшим весом представления, равен $(\frac{1}{2}, (\lambda_m)_2, \dots)$. Тогда

$$p_m = 2(\lambda_m, \alpha_m) = 1,$$

и, следовательно, следующее, второе по счёту действие понижающего генератора $\Gamma_{-\alpha_m}$ превратит состояние в нулевое. Однократное действие даст

$$\Gamma_{-\alpha_m} |\mu_S\rangle = \Gamma_{-\alpha_m} |\lambda_m\rangle \sim |\lambda_m - \alpha_m\rangle = | -\frac{1}{2}, (\lambda_m)_2, \dots \rangle.$$

Таким образом при этом выборе базиса на диаграмме весов мы получаем, что набор собственных значений первого оператора подалгебры Картана Γ'_1 сводится к множеству $\mu_1 = \{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}$. Это означает, что Γ'_1 и $\Gamma_{\pm \alpha_m}$ образуют на первой компоненте пространства весов двумерное представление алгебры $\mathfrak{su}(2)$, так как $\Gamma_{\alpha_m} |(-\frac{1}{2}, (\lambda_m)_2, \dots)\rangle \sim |(\frac{1}{2}, (\lambda_m)_2, \dots)\rangle$.

Продолжая совместное рассмотрение свойств старшего веса и фундаментальных векторов, разложим старший вес по базису фундаментальных векторов

$$\mu_S = \sum_{j=1}^n f_j \lambda_j,$$

и найдем коэффициенты f_j , вычисляя скалярное произведение

$$(\alpha_m, \mu_S) = \sum_{j=1}^n f_j (\alpha_m, \lambda_j) = \sum_{j=1}^n f_j \delta_{jm} \frac{1}{2} (\alpha_m, \alpha_m) = f_m \frac{1}{2} (\alpha_m, \alpha_m).$$

Отсюда

$$\mu_S = \sum_{m=1}^n \lambda_m 2 \frac{(\mu_S, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)}.$$

После подстановки выражения для p_m (II.2.8) имеет место следующее разложение по базису фундаментальных векторов

$$\mu_S = \sum_{m=1}^n p_m \lambda_m, \quad (\text{II.2.10})$$

где неотрицательные целые коэффициенты p_m равны максимальному числу последовательных шагов понижения старшего веса заданного неприводимого представления в направлениях, которые соответственно заданы простыми положительными корнями α_m простой компактной алгебры Ли ранга n . Мы получили интересный результат: компоненты весового вектора состояния старшего веса таковы, что состояние старшего веса имеет вес, который является линейной комбинацией фундаментальных векторов с целочисленными неотрицательными коэффициентами.

Выражение (II.2.10) по сути определяет классификацию всех неприводимых представлений алгебры Ли: неприводимое представление полностью задается своим старшим весом μ_S , а старший вес полностью определяется набором чисел p_m , которые, таким образом, однозначно характеризуют неприводимое представление, и никаких других старших весов быть не может.

Другими словами, какое бы неприводимое представление мы не исследовали, мы получим набор неотрицательных целых чисел p_m . Но для нас более важным утверждением является условно обратное. Любому набору из n неотрицательных целых чисел p_m соответствует неприводимое представление рассматриваемой алгебры Ли.

С этим утверждением связано важное определение. Наборы $\{p_k\}$, состоящие из единственной единицы на k -той позиции и $n - 1$ нулей, назовем фундаментальными. Каждому такому набору соответствует представление, которое называется фундаментальным. Соответственно, у каждой алгебры Ли ранга n есть n фундаментальных представлений. В рамках каждого m -того фундаментального представления введем обозначение

$$|\boldsymbol{\mu}_S\rangle \equiv |\boldsymbol{\lambda}_m\rangle, \quad \text{при } p_k = \delta_{km}.$$

Число фундаментальных векторов по построению равно рангу группы Ли n . Набор фундаментальных векторов образует альтернативный базис¹⁷ в векторном пространстве корневых векторов наряду с базисом простых положительных корневых векторов. Каждому фундаментальному вектору отвечает фундаментальное представление со старшим вектором представления во множестве

$$|\boldsymbol{\mu}_S\rangle \in \{|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle, \dots, |\boldsymbol{\lambda}_n\rangle\}.$$

Значит, число различных фундаментальных представлений также равно рангу группы Ли.

2.2 Представление как тензорное произведение фундаментальных представлений

Важно подчеркнуть роль фундаментальных представлений, поскольку старший вес какого-либо неприводимого представления равен сумме фундаментальных векторов с неотрицательными целочисленными коэффициентами. Это значит, само представление можно построить, взяв состояние старшего веса в виде произведения состояний старших весов фундаментальных представлений¹⁸

$$\boldsymbol{\mu}_S = \sum_m p_m \boldsymbol{\lambda}_m \mapsto |\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \prod_m |\boldsymbol{\lambda}_m\rangle^{p_m}, \quad (\text{II.2.11})$$

или

$$|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = |\boldsymbol{\lambda}_1\rangle^{p_1} \otimes \dots \otimes |\boldsymbol{\lambda}_n\rangle^{p_n}, \quad |\boldsymbol{\lambda}_k\rangle^{p_k} = \underbrace{|\boldsymbol{\lambda}_k\rangle \otimes \dots \otimes |\boldsymbol{\lambda}_k\rangle}_{p_k}, \quad (\text{II.2.12})$$

и действуя на такое состояние понижающими операторами, которые переопределены для действия на тензорном произведении пространств фундаментальных представлений как действие прямой суммы изоморфных образов этих генераторов в соответствующих подпространствах тензорного произведения. Например, действие повышающего генератора в тензорном произведении $\Gamma_{\alpha_k}^{\otimes}$ в случае двух множителей в этой схеме задается в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha_k}^{\otimes} (|\boldsymbol{\lambda}_m\rangle \otimes |\boldsymbol{\lambda}_{m'}\rangle) &\equiv \{(\Gamma_{\alpha_k} \otimes \mathbb{1}) + (\mathbb{1} \otimes \Gamma_{\alpha_k})\} |\boldsymbol{\lambda}_m\rangle \otimes |\boldsymbol{\lambda}_{m'}\rangle = \\ &= \Gamma_{\alpha_k} |\boldsymbol{\lambda}_m\rangle \otimes |\boldsymbol{\lambda}_{m'}\rangle + |\boldsymbol{\lambda}_m\rangle \otimes \Gamma_{\alpha_k} |\boldsymbol{\lambda}_{m'}\rangle = \mathbf{0} \otimes |\boldsymbol{\lambda}_{m'}\rangle + |\boldsymbol{\lambda}_m\rangle \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (\text{II.2.13})$$

Мы видим, что состояние (II.2.12) действительно является состоянием старшего веса. Убедимся, что это состояние имеет вес старшего вектора представления с выбранными ранее неотрицательными целыми коэффициентами p_m ,

$$\Gamma_l^{\otimes} |\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \Gamma_l^{\otimes} \prod_m^{\otimes} |\boldsymbol{\lambda}_m\rangle^{p_m} = \left\{ \sum_m p_m (\boldsymbol{\lambda}_m)_l \right\} \prod_m^{\otimes} |\boldsymbol{\lambda}_m\rangle^{p_m} = (\boldsymbol{\mu}_S)_l |\boldsymbol{\mu}_S\rangle, \quad (\text{II.2.14})$$

¹⁷Напомним, что в векторном анализе, если задан базис векторного пространства e_a , по которому разлагаются все элементы v этого пространства V : $v = v^a e_a$, то базис линейных функций $f(v) \in \mathbb{R}$, которые переводят элементы V в вещественные числа, — это набор $h^b(e_a) = \delta_a^b$. Тогда говорят, что векторы h^b — это базис ковариантного векторного пространства, так как введенные связи можно записать в виде скалярных произведений

$$(h^b, e_a) = \delta_a^b, \quad f = f_b h^b, \quad f(v) = (f, v) = (f_b h^b, v^a e_a) = f_b v^a \delta_a^b = f_b v^a,$$

где $f(e_a) = f_a$. Поэтому можно говорить, что введенное определение фундаментальных векторов (II.2.9) с точностью до коэффициента повторяет определение базиса в ковариантном пространстве, сопряженном контравариантному пространству с базисом, заданным простыми положительными корнями.

¹⁸В этом тензорном произведении обычно подразумевается симметризованная по перестановкам любых фундаментальных векторов сумма. В нашем случае действие генератора алгебры Ли задается как действие симметризованной прямой суммы изоморфных образов генератора в соответствующих подпространствах, так что симметризация тензорного произведения по перестановке егоомножителей неважна. Но в случае, когда на состояния тензорного произведения могут действовать операторы иной, отличной от генераторов алгебры Ли природы, симметризация тензорного произведения может оказаться физически значимой.

где действие генератора из подалгебры Картана на тензорное произведение векторов определяется опять же как действие прямой суммы изоморфных образов этого генератора в соответствующих подпространствах тензорного произведения. Например,

$$\Gamma_l^\otimes(|\lambda_m\rangle \otimes |\lambda_{m'}\rangle) \equiv \{(\Gamma_l \otimes \mathbb{1}) + (\mathbb{1} \otimes \Gamma_l)\}|\lambda_m\rangle \otimes |\lambda_{m'}\rangle = \{(\lambda_m)_l + (\lambda_{m'})_l\}|\lambda_m\rangle \otimes |\lambda_{m'}\rangle. \quad (\text{II.2.15})$$

С точки зрения физики построение неприводимого представления с помощью состояния старшего веса, которое выражается через состояния старших весов фундаментальных представлений, называется составной моделью: состояния такого неприводимого представления выражаются через произведение состояний фундаментальных представлений, так что можно говорить о том, что квантовые числа состояний неприводимого представления составлены из квантовых чисел состояний фундаментальных представлений: в этом смысле формулы типа (II.2.14) или (II.2.15) играют важную роль, так как собственное значение генератора подалгебры Картана для базисного состояния в тензорном произведении равно сумме собственных значений этого же генератора для базисных состояний в подпространствах тензорного произведения, что и составляет суть утверждения о квантовых числах в составной модели. Например, мы увидим, что из кварков и антикварков, образующих два фундаментальных представления группы ароматов, можно составить состояния барионов (3 кварка) и мезонов (кварк-антикварк). Вместе с тем, состояния неприводимого представления могут трактоваться и не как составные, а самостоятельные, отдельные исходные блоки построения квантовых состояний физической системы. Нет никакого различия между такими толкованиями в рамках чисто математической конструкции, но в физике оно может быть описано с помощью характеристик, которые возникают в процессах преобразования одних физических систем в другие.

Здесь важно подчеркнуть, что описанное нами тензорное произведение состояний со старшими весами фундаментальных представлений относится только к состоянию старшего веса неприводимого представления, а при рассмотрении всего неприводимого представления нужно быть внимательным, так как тензорное произведение пространств даже двух неприводимых представлений может оказаться приводимым: линейная оболочка, построенная из образов состояния старшего веса при действии на него матриц групповых преобразований, вообще говоря, уже, чем пространство тензорного произведения неприводимых представлений. Этот вопрос мы рассмотрим более детально при изучении тензорных произведений неприводимых представлений в группе $SU(3)$ с помощью схем Юнга.

2.3 Операция отражения

Запишем вес $\nu_{S,m}$ для последнего, отличного от нуля состояния $|\nu_{S,m}\rangle$, которое получается в цепочке понижения состояния старшего веса $|\mu_S\rangle$, с помощью выражения для максимального числа шагов p_m в направлении $-\alpha_m$ согласно (II.2.8),

$$\nu_{S,m} \equiv \mu_S - p_m \alpha_m = \mu_S - 2 \frac{(\mu_S, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} \alpha_m. \quad (\text{II.2.16})$$

Геометрический смысл этой формулы достаточно ясен: вес состояния $|\nu_{S,m}\rangle$, последнего в цепочке состояний с понижением веса, является отражением старшего веса неприводимого представления относительно гиперплоскости с нормалью, заданной повышающим вектором α_m , поскольку вычисляется проекция на этот повышающий вектор, а затем эта проекция вычитается дважды с учетом нормировки нормали на единицу (см. рис. 2.4). Таким образом, проекция весового вектора $\nu_{S,m}$ на эту нормаль у состояния $|\nu_{S,m}\rangle$ в цепочке понижения от состояния старшего веса $|\mu_S\rangle$ равна проекции старшего весового вектора со знаком минус.

Напомним, что базисное состояние старшего веса является единственным для данного веса в неприводимом представлении группы, т.е. кратность вырождения старшего веса равна единице, а значит, мы можем ввести операцию отражения состояния старшего веса как преобразования в другое базисное состояние этого же представления

$$\mathfrak{s}_m |\mu_S\rangle = |\nu_{S,m}\rangle,$$

где, как мы показали, состояние $|\nu_{S,m}\rangle$ является базисным состоянием того же неприводимого представления и однозначно задается p_m -кратным действием понижающего генератора $\Gamma_{-\alpha_m}$ на состояние старшего веса, а действие этой операции отражения на состояние $|\nu_{S,m}\rangle$ совпадает с обратным преобразованием:

$$\mathfrak{s}_m |\nu_{S,m}\rangle = |\mu_S\rangle.$$

В самом деле, обозначим тем же символом и операцию отражения во множестве весовых векторов неприводимого представления:

$$\mathfrak{s}_m \mu_S = \nu_{S,m},$$

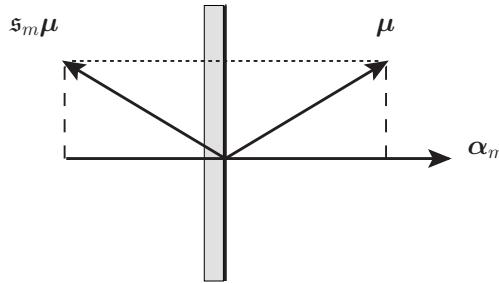


Рис. 2.4: Вейлевское отражение веса μ относительно плоскости с нормалью, которая задана корневым вектором α_m .

и тогда в полной аналогии с (II.2.16)

$$\begin{aligned} s_m \nu_{S,m} &= \nu_{S,m} - 2 \frac{(\nu_{S,m}, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} \alpha_m = \\ &= \mu_S - 2 \frac{(\mu_S, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} \alpha_m - 2 \frac{1}{(\alpha_m, \alpha_m)} \alpha_m \left(\mu_S - 2 \frac{(\mu_S, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} \alpha_m, \alpha_m \right) = \\ &= \mu_S - 4 \frac{(\mu_S, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} \alpha_m + 4 \frac{(\mu_S, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} \alpha_m = \mu_S. \end{aligned}$$

Но это значит, что, если существует другое состояние $|\nu_{S,m}\rangle'$ с тем же весом $\nu_{S,m}$, то в этом дополнительном состоянии можно исключить вклад, пропорциональный ортонормированному состоянию $|\nu_{S,m}\rangle$,

$$|\nu_{S,m}\rangle' \mapsto |\nu_{S,m}\rangle' - |\nu_{S,m}\rangle \langle \nu_{S,m}| \nu_{S,m}\rangle',$$

так что после этой замены получим, что дополнительное состояние $|\nu_{S,m}\rangle'$ ортогонально состоянию $|\nu_{S,m}\rangle$, которое получается последовательным p_m -кратным действием понижающих операторов на состояние старшего веса. В самом деле, операция отражения дополнительного состояния $|\nu_{S,m}\rangle'$ приведет к состоянию $|\mu_S\rangle'$ со старшим весом μ_S , и это состояние ортогонально исходному состоянию старшего веса, так как для отражений базисных состояний мы постулируем, что операция отражения является эрмитово самосопряженной $s_m^\dagger = s_m$, и с учетом того, что квадрат операции отражений состояний является тождественной операцией, находим, что

$$\begin{aligned} (s_m |\nu_{S,m}\rangle)^\dagger (s_m |\nu_{S,m}\rangle') &= \langle |\nu_{S,m}| s_m s_m |\nu_{S,m}\rangle' = \langle \nu_{S,m} | \nu_{S,m}\rangle' = 0 \Rightarrow \\ (s_m |\nu_{S,m}\rangle)^\dagger (s_m |\nu_{S,m}\rangle') &= \langle \mu_S | \mu_S\rangle' = 0. \end{aligned}$$

Но состояние старшего веса неприводимого представления является уникальным в этом представлении, а значит, состояния $|\mu_S\rangle'$ и его прообраз $|\nu_{S,m}\rangle'$ не могут принадлежать неприводимому представлению с состоянием старшего веса $|\mu_S\rangle$, т.е. эти состояния со штрихом принадлежат другому неприводимому представлению. Поэтому образ состояния старшего веса неприводимого представления $|\nu_{S,m}\rangle$ — это единственное состояние с весом $\nu_{S,m}$ в том же неприводимом представлении с состоянием старшего веса $|\mu_S\rangle$. При отражениях состояния невырожденного старшего веса неприводимого представления получаются состояния с невырожденными весами, полученными при действии операций отражения во множестве весов.

■ В проведенных построениях с состоянием старшего веса мы использовали действие понижающего оператора на это состояние, так что каждый шаг понижения состояния приводил к однозначно определенному состоянию с пониженным значением веса, но при этом не ставили вопрос о том, сколько может быть состояний, отвечающих каждому из пониженных весов: вообще говоря, состояние с пониженным весом может получаться не только многократным действием одного и того же понижающего оператора на состояние старшего веса, а комбинацией действия разных понижающих операторов, так что в каждой из таких комбинаций может возникнуть свое, отличное от состояний в других комбинациях состояния с некоторым пониженным значением веса, и пониженный вес может быть, вообще говоря, вырожденным. Покажем, что в линии состояний, образованных многократным действием одного и того же понижающего оператора $\Gamma_{-\alpha_m}$, отвечающего простому положительному корню α_m , на состояние старшего веса, все пониженные веса невырожденные. После первого шага понижения получится состояние с весом $\mu_S - \alpha_m$,

$$\Gamma_{-\alpha_m} |\mu_S\rangle \sim |\mu_S - \alpha_m\rangle.$$

В этом соотношении коэффициент пропорциональности отличен от нуля, если коэффициент p_m в разложении старшего веса по фундаментальным больше нуля. Согласно (II.2.8) это значит, что скалярное произведение (α_m, μ_S) отлично от нуля, а значит, и сама цепочка состояний с понижением содержит состояния, отличные от состояния со старшим весом. Допустим, что существует другое состояние с тем же пониженным значением веса $|\mu_S - \alpha_M\rangle'$, в котором мы исключим вклад пропорциональный состоянию $|\mu_S - \alpha_M\rangle$, так что

$$\langle \mu_S - \alpha_m | \mu_S - \alpha_M \rangle' = 0.$$

Действие повышающего оператора с тем же значением корня на эти два состояния с пониженным весом должно быть разным, так как для состояния, полученного понижением имеет место восстановление состояния старшего веса:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha_m} |\mu_S - \alpha_m\rangle &\sim \Gamma_{\alpha_m} (\Gamma_{-\alpha_m} |\mu_S\rangle) = \left(\Gamma_{-\alpha_m} \Gamma_{\alpha_m} + (\alpha_m)_l \Gamma_l \right) |\mu_S\rangle = \\ &= \Gamma_{-\alpha_m} (\Gamma_{\alpha_m} |\mu_S\rangle) + (\alpha_m)_l (\mu_S)_l |\mu_S\rangle = (\alpha_m, \mu_S) |\mu_S\rangle, \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем, что состояние отвечает старшем весу и повышающий оператор, действуя на это состояние, дает нуль, а скалярное произведение в конце формулы также отлично от нуля в случае нетривиальной цепочки понижения состояния старшего веса. Действие же повышающего оператора на другое состояние с пониженным весом $|\mu_S - \alpha_M\rangle'$ может дать только состояние, пропорциональное состоянию старшего веса, так как состояние старшего веса в неприводимом представлении единственное. Вычислим скалярное произведение

$$\langle \mu_S | \left(\Gamma_{\alpha_m} |\mu_S - \alpha_m\rangle' \right) = \left(\Gamma_{-\alpha_m} |\mu_S\rangle \right)^\dagger |\mu_S - \alpha_m\rangle' \sim (|\mu_S - \alpha_m\rangle)^\dagger |\mu_S - \alpha_m\rangle' = \langle \mu_S - \alpha_m | \mu_S - \alpha_m \rangle' = 0.$$

Но это значит, что

$$\Gamma_{\alpha_m} |\mu_S - \alpha_m\rangle' = 0,$$

т.е., если это состояние отлично от нуля, то оно не может быть повышенено оператором Γ_{α_m} . Но состояния с таким весом не может быть повышенено и любым другим оператором с простым положительным корнем α_m' , так как

$$\Gamma_{\alpha_m'} |\mu_S - \alpha_m\rangle = N' |\mu_S - \alpha_m + \alpha_{m'}\rangle,$$

а значит, вес состояния при таком действии изменяется на величину $\alpha_{m'} - \alpha_m$. Но вес состояния представления группы может измениться только на корень, неважно, положительный или отрицательный, простой или нет, а разность простых положительных корней, как мы подчеркивали, не может быть корнем, вообще. Значит, нет и состояния, которое указано в формуле выше, т.е. необходимо положить в этой формуле постоянную $N' = 0$.

Резюмируя, укажем, что действие всех повышающих генераторов с простыми положительными корнями на дополнительное состояние $|\mu_S - \alpha_m\rangle'$ дает нуль, т.е. это состояние старшего веса для другого неприводимого представления той же простой компактной группы Ли, и оно не принадлежит неприводимому представлению со старшим весом μ_S . Итак, при первом шаге понижения состояния старшего веса получается состояние $|\mu_S - \alpha_m\rangle$ с невырожденным весом. Однако, подобное рассмотрение не обобщается на случай, когда повышающий генератор изменяет вес на положительный корень, который не является простым. Поэтому вырожденность веса, который не является старшим, требует специального рассмотрения. Особый случай — присоединенное представление, и оно будет рассмотрено нами ниже в отдельном разделе. ■

Сейчас же вернемся к общему изложению и исследуем вопрос о том, как действует операция отражения \mathfrak{s}_m на другие базисные состояния неприводимого представления $|\nu, a\rangle$, где ν — весовой вектор, а индекс a нумерует базисные состояния с данным весом, так что $a \in \overline{\{1, K\}}$, и K — это кратность вырождения веса ν в заданном неприводимом представлении.

Итак, для весового вектора ν как набора собственных значений генераторов подалгебры Картана на базисных состояниях неприводимого представления формально определим операцию отражения \mathfrak{s}_m относительно повышающего вектора α_m как

$$\mathfrak{s}_m \nu \stackrel{\text{def}}{=} \nu - 2 \frac{(\nu, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} \alpha_m \equiv \nu_m. \quad (\text{II.2.17})$$

Все такие отражения $\nu_{S,m}$ старшего веса μ_S базисного состояния неприводимого представления группы Ли относительно различных корней алгебры Ли этой группы, как мы видели, по построению принадлежат множеству невырожденных весов базисных состояний этого же неприводимого представления, которое задается базисным состоянием с этим старшим весом. Покажем теперь, что и все отражения любого веса базисного состояния неприводимого представления тоже принадлежат множеству весов базисных состояний этого же неприводимого представления. Более того, с учетом возможного вырождения веса в неприводимом представлении получим, что

$$\mathfrak{s}_m |\nu, a\rangle = |\mathfrak{s}_m \nu, a\rangle \equiv |\nu_m, a\rangle, \quad (\text{II.2.18})$$

а значит, отражение весов индуцировано соответствующим отражением базисных состояний неприводимого представления.

Пусть базисное состояние $|\nu, a\rangle$, имеющее вес ν , принадлежит неприводимому представлению. Поскольку представление имеет конечный базис из собственных векторов подалгебры Картана, для заданного повышающего оператора Γ_{α_m} всегда существует такое отличное от нулевого вектора состояние $|\tilde{\nu}_{m,a}\rangle$, которое получено q_a -кратным повышением исходного состояния $|\nu, a\rangle$,

$$|\tilde{\nu}_{m,a}\rangle = \Gamma_{\alpha_m}^{q_a} |\nu, a\rangle, \quad (\text{II.2.19})$$

действие на которое тем же повышающим оператором даст нуль,

$$\Gamma_{\alpha_m} |\tilde{\nu}_{m,a}\rangle = 0.$$

Для этого состояния $|\tilde{\nu}_{m,a}\rangle$ можно повторить проведенные выше на стр. 79 после формулы (II.2.5) рассуждения для аналога состояния со старшим весом, когда состояние $\Gamma_{\alpha_m} |\tilde{\nu}_{m,a}\rangle$ обращается в нуль при действии на $|\tilde{\nu}_{m,a}\rangle$ не какого-либо произвольного повышающего оператора, а только вполне определенного) повышающего оператора Γ_{α_m} , заданного в (II.2.19) и отвечающего корню α_m . Тогда нормировка состояния с пониженным на α_m весом изменяется на множитель $\sqrt{\mathcal{K}_1} = \sqrt{(\alpha_m, \tilde{\nu}_{m,a})}$ согласно (II.2.6) и (II.2.7), так что

$$\Gamma_{-\alpha_m} |\tilde{\nu}_{m,a}\rangle = \sqrt{(\alpha_m, \tilde{\nu}_{m,a})} |\tilde{\nu}_{m,a} - \alpha_m, a\rangle \quad \text{при} \quad \Gamma_{\alpha_m} |\tilde{\nu}_{m,a}\rangle = 0, \quad 2 \frac{(\tilde{\nu}_{m,a}, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} = \tilde{p}_{m,a} \in \{0, \mathbb{N}\}. \quad (\text{II.2.20})$$

Неотрицательное целое число $\tilde{p}_{m,a}$ опять имеет смысл числа понижающих шагов, после которых действие генератора понижения $\Gamma_{-\alpha_m}$ на вектор состояния $\Gamma_{-\alpha_m}^{\tilde{p}_{m,a}} |\tilde{\nu}_{m,a}\rangle$ даст нуль.

Итак, для базисного состояния неприводимого представления $|\nu, a\rangle$ с весом ν мы сначала построили аналог старшего вектора $|\tilde{\nu}_{m,a}\rangle$ с весом $\tilde{\nu}_{m,a}$, повышая состояние $|\nu, a\rangle$ в направлении α_m максимально допустимое число раз q_a , как это записано в (II.2.19). Затем мы вычислили допустимое число шагов $\tilde{p}_{m,a}$ при понижении состояния $|\tilde{\nu}_{m,a}\rangle$ по направлению $-\alpha_m$. По построению число понижающих шагов от $\tilde{\nu}_{m,a}$ в обратную сторону в направлении $-\alpha_m$, т.е. от $\tilde{\nu}_{m,a}$ до ν или дальше, не меньше, чем число шагов от ν к $\tilde{\nu}_{m,a}$, т.е. $\tilde{p}_{m,a} \geq q_a$. Согласно (II.2.19) и

$$\tilde{\nu}_{m,a} = \nu + q_a \alpha_m \quad \Rightarrow \quad \nu = \tilde{\nu}_{m,a} - q_a \alpha_m$$

получаем

$$2 \frac{(\nu, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} = \tilde{p}_{m,a} - 2q_a \in \{\mathbb{Z}\}, \quad (\text{II.2.21})$$

где по построению целое неотрицательное число шагов q_a лежит в интервале $0 \leq q_a \leq \tilde{p}_{m,a}$. Значит, отражение весового вектора ν приводит к

$$\nu_m \equiv s_m \nu = \nu - 2 \frac{(\nu, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} \alpha_m = \nu - (\tilde{p}_{m,a} - 2q_a) \alpha_m. \quad (\text{II.2.22})$$

Из этой формулы следует, что, так как весовой вектор ν_m определяется только весом ν и корнями α_m (см. второе равенство в (II.2.22)), а также их скалярными произведениями, и не зависит от индекса a , который нумерует базисные состояния неприводимого представления с заданным весом, комбинация неотрицательных целых чисел $\tilde{p}_{m,a} - 2q_a$ (см. третье равенство в (II.2.22)) не зависит от индекса a несмотря на то, что каждое из этих чисел, вообще говоря, зависит от a .

Ввиду того, что

$$\nu = \tilde{\nu}_{m,a} - q_a \alpha_m,$$

выразим ν_m через $\tilde{\nu}_{m,a}$

$$\nu_m \equiv s_m \nu = \tilde{\nu}_{m,a} - (\tilde{p}_{m,a} - q_a) \alpha_m, \quad 0 \leq (\tilde{p}_{m,a} - q_a) \leq \tilde{p}_{m,a}. \quad (\text{II.2.23})$$

Отсюда следует, что базисное состояние с весом $\nu_m \equiv s_m \nu$ принадлежит «линии» базисных состояний неприводимого представления и находится между $|\tilde{\nu}_{m,a}\rangle$ и $|\tilde{\nu}_{m,a} - \tilde{p}_{m,a} \alpha_m, a\rangle$, которая получается многократным действием понижающего генератора $\Gamma_{-\alpha_m}$ на состояние $|\tilde{\nu}_{m,a}\rangle$. При этом каждое базисное состояние $|\nu, a\rangle$ переходит в базисное состояние $|\nu_m, a\rangle$ с одним и тем же весом ν_m , но сами состояния по построению нумеруются тем же индексом a , что и исходное базисное состояние $|\nu, a\rangle$.

В итоге заключаем, что *отражение всякого базисного состояния неприводимого представления с заданным весом принадлежит тому же неприводимому представлению и является базисным состоянием с весом, равным образу исходного веса при отражении:*

$$\mathfrak{s}_m |\nu, a\rangle = |\mathfrak{s}_m \nu, a\rangle.$$

Ясно, что если операцию отражения на состояниях базиса неприводимого представления задать как линейную, то и суперпозиция базисных состояний неприводимого представления при отражении переходит в суперпозицию образов отражения этих базисных состояний, а значит, отражение любого состояния неприводимого представления — это состояние, которое принадлежит этому же неприводимому представлению. Этот факт, как мы увидим ниже на примерах, существенно упрощает процедуру построения неприводимых представлений.

Подчеркнем, что в проведенном нами выше построении операции отражения базисных состояний неприводимого представления с простыми положительными корнями условие простоты положительного корня никак не использовалось. Это значит, все выводы сохраняют свою силу для всех положительных корней алгебры Ли, т.е. *операция отражения базисных состояний неприводимого представления и индуцированное этой операцией отражение весов базисных состояний определены для каждого положительного корня алгебры Ли.*

Очевидно, что в случае, когда вес ортогонален корню, отражение веса относительно этого корня сводится к тождественному преобразованию. Отметим также, что отражение состояния с нулевым весом относительно любого из корней алгебры — это тождественное преобразование. Поэтому множество базисных состояний неприводимого представления алгебры Ли, которые характеризуются своими весами, включая нулевой весовой вектор, при отражении переходит во множество базисных состояний этого же неприводимого представления алгебры Ли, которые характеризуются образами исходных весов при отражении. Подчеркнем, что отражение Вейля не равно кратному действию поникающего генератора на базисное состояние, так как генератор может менять норму получающегося состояния, а отражение сохраняет норму результирующего состояния равной единице.

Композиция двух одинаковых отражений весов, т.е. двукратное действие операции отражения относительно одного и того же корня алгебры Ли, — это тождественное преобразование для любого веса состояния неприводимого представления, так как

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_m(\mathfrak{s}_m \nu) &= \mathfrak{s}_m \left(\nu - 2 \frac{(\nu, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} \alpha_m \right) = \\ &= \nu - 2 \frac{(\nu, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} \alpha_m - 2 \frac{\alpha_m}{(\alpha_m, \alpha_m)} \left(\nu - 2 \frac{(\nu, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} \alpha_m, \alpha_m \right) = \\ &= \nu - 4 \frac{(\nu, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} \alpha_m + 4 \frac{(\nu, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} \alpha_m = \nu. \end{aligned} \quad (\text{II.2.24})$$

Это значит, что у каждой операции отражения есть обратная операция отражения — само это отражение. Операция отражения весов базисных состояний неприводимого представления индуцирована операцией отражения самого базисного состояния как линейного преобразования в базисное состояние того же неприводимого представления с сохранением единичной нормировки, а значит, отражение базисного состояния можно представить как комбинацию дискретных групповых преобразований в представлении и умножения на отличное от нуля число, для того чтобы получить единичную нормировку базисного состояния—образа операции отражения. Но все эти операции: групповая и умножение на отличное от нуля число, — сами образуют группу в пространстве неприводимого представления со всеми свойствами, которым с необходимостью должна удовлетворять группа: композиция с ассоциативностью, единица и обратный элемент. Таким образом, отражения весов неприводимого представления относительно корней группы индуцированы отражениями базисных состояний неприводимого представления и образуют дискретную группу.

В математике говорят, что преобразования отражений относительно всех корней алгебры Ли на пространстве состояний неприводимого представления образуют группу Вейля, а пространство неприводимого представления инвариантно относительно группы Вейля, т.е. суперпозиция базисных состояний неприводимого представления переходит при действии отражений Вейля в суперпозицию базисных состояний того же неприводимого представления, а образ всех состояний неприводимого представления простой компактной группы Ли по отношению к действию группы Вейля совпадает с самим пространством этого неприводимого представления. Предположим обратное. Если T — это пространство неприводимого представления, а $\mathcal{W}(T)$ — это образ пространства T относительно действия группы Вейля¹⁹, то

¹⁹При действии отражений из группы Вейля на элемент пространства представления в образ включаются не только результаты однократных отражений этого элемента, но и результаты всевозможных многократных отражений: на образ однократного отражения также можно подействовать операциями отражения и т.д. Кроме того, состояния с весом, компоненты которого тождественно равны нулю, переходят при отражениях сами в себя, так что образ $\mathcal{W}(T)$ включает в себя такие состояния с нулевым весом.

$\mathcal{W}(T) \subset T$. Тогда, если дополнение $\mathcal{W}(T)$ до T непусто, т.е.²⁰ $T \setminus \mathcal{W}(T) \neq \emptyset$, то это возможно, только если базис ортонормированных состояний в подпространстве $\mathcal{W}(T)$, который задается как базис собственных состояний генераторов подалгебры Картана (каждое базисное состояние имеет вполне определенный весовой вектор), ортогонален базису состояний, линейная оболочка которых L позволяет построить пространство представления как прямое декартово произведение $T = \mathcal{W}(T) \times L$. В подпространстве $T \setminus \mathcal{W}(T)$ содержится линейная оболочка L . Только в случае ортогональности весов базиса в $\mathcal{W}(T)$ и весов базиса L любой отличный от нуля вес из множества весов состояний $\mathcal{W}(T)$ при отражениях Вейля не попадет во множество весов состояний L . Но тогда из этой ортогональности двух множеств весовых векторов следует, что и любой весовой вектор состояний L при отражениях Вейля не попадет в пространство весов состояний $\mathcal{W}(T)$, что противоречит определению $\mathcal{W}(T)$, а значит, предположение о том, что дополнение $T \setminus \mathcal{W}(T)$ непусто было неверно, и группа Вейля действительно переводит пространство неприводимого представления в себя.

Важно подчеркнуть, что операция отражения переводит все подпространство состояний с ортонормированным базисом²¹ $|\nu, a\rangle$, размерность которого равна кратности вырождения весового вектора ν , в подпространство *той же размерности* с базисом, который образован ортонормированными состояниями $|\xi_m \nu, a\rangle$ с весом $\xi_m \nu$, так как, несмотря на то, что число шагов $\tilde{p}_{m,a}$ и q_a зависят от индекса a , нумерующего собственные состояния с одним и тем же весом, скалярное произведение (ν, α_m) , которое определяет вес образа вектора ν при отражении (см. формулу (II.2.22)), не зависит от a , т.е. комбинация $\tilde{p}_{m,a} - 2q_a$ есть инвариант этого подпространства.

Отметим в этой связи еще раз, что старшему весовому вектору неприводимого представления соответствует только одно нормированное на единицу базисное состояние. Договоримся, что если какой-либо весовой вектор соответствует единственному собственному состоянию генераторов подалгебры Картана, то мы будем говорить, что вес этого состояния *невырожден* или *кратность вырождения весового вектора равна единице*, $K = 1$. Тогда проведенное рассмотрение операции отражения базисных состояний позволяет утверждать, что состояние невырожденного веса переходит при отражениях в состояние невырожденного образа веса.

2.4 Веса присоединенного представления

Покажем, что присоединенное представление компактной простой алгебры Ли определяется старшим весом μ_S , который задается старшим положительным корнем α_S . Старший положительный корень имеет в порядке следования номеров своих компонент максимальные неотрицательные компоненты среди всех корней алгебры Ли: сначала максимальное значение первой компоненты, потом при условии максимального значения первой компоненты максимальное для второй и т.д. Это, в частности, значит, что старший корень не обязательно является простым, он может выражаться через простые положительные корни алгебры Ли.

Для доказательства утверждения о старшем весе в присоединенном представлении запишем сначала один из коммутаторов в базисе Картана–Вейля (I.3.44)

$$[\Gamma_l, \Gamma_\alpha] = \alpha_l \Gamma_\alpha. \quad (\text{II.2.25})$$

В присоединенном представлении лестничные генераторы из корневого дополнения алгебры Ли, наряду с генераторами подалгебры Картана, образуют базис в пространстве представления по построению. Покажем, что это базис из собственных состояний генераторов подалгебры Картана. Корневые генераторы Γ_α как базисные элементы пространства состояний присоединенного представления в рамках дираковских обозначений можно обозначить как $\Gamma_\alpha \mapsto |\alpha\rangle$, причем, напомним, что коммутатор генератора из подалгебры Картана с лестничным генератором имеет один и тот же вид (II.2.25) вне зависимости от нормировки лестничного генератора, так что в качестве базисного состояния можно выбрать нормированное на единицу $|\alpha\rangle$. Тогда запись коммутатора как действия линейного преобразования в присоединенном представлении в дираковских обозначениях примет вид²²

$$[\Gamma_l, \Gamma_\alpha] \equiv (\text{ad } \Gamma_l) \Gamma_\alpha = \alpha_l \Gamma_\alpha \Rightarrow \widehat{(\text{ad } \Gamma_l)} |\alpha\rangle = \alpha_l |\alpha\rangle,$$

²⁰Если A — это подмножество B , $A \subset B$, то множество C всех элементов c таких, что $c \in B$, $c \notin A$ называется дополнением A до B и символично обозначается как $C = B \setminus A$.

²¹Это происходит, когда в полный набор наблюдаемых кроме независимых инвариантов — операторов Казимира и генераторов из подалгебры Картана входят еще и операторы Казимира подалгебры Ли в простой компактной алгебре Ли. Эти операторы Казимира подалгебры не являются инвариантами группы Ли, и поэтому они могут принимать разные значения на базисных состояниях неприводимого представления при одних и тех же собственных значениях инвариантов Казимира алгебры Ли и компонент весов вырожденных состояний. Например, в алгебре $\mathfrak{su}(3)$, как и в любой другой компактной простой алгебре Ли, очевидно, есть подалгебра $\mathfrak{su}(2)$, что ясно уже из самого вида диаграммы Дынкина для $\mathfrak{su}(3)$: две точки, соединенные линией, содержат одну точку, которая отвечает алгебре $\mathfrak{su}(2)$.

²²Сравните эту запись с формулой (I.2.9) на стр. 17, где мы описывали общие свойства присоединенного представления и линейные преобразования в этом представлении, возникающие при действии генераторов на векторы пространства.

а значит, корни алгебры Ли — это весовые векторы базисных состояний присоединенного представления. Вследствие вида коммутатора для генераторов подалгебры Картана

$$[\Gamma_l, \Gamma_{l'}] = 0 \quad (\text{II.2.26})$$

введем аналогичные дираковские обозначения для элементов базиса присоединенного представления $\Gamma_l \mapsto |\mathbf{0}, l\rangle$ и запишем

$$[\Gamma_l, \Gamma_{l'}] \equiv (\text{ad } \Gamma_l) \Gamma_{l'} = \hat{0} \cdot \Gamma_{l'} = \mathbf{0} \Rightarrow \widehat{(\text{ad } \Gamma_l)} |\mathbf{0}, l'\rangle = \hat{0} \cdot |\mathbf{0}, l'\rangle = \mathbf{0}.$$

Значит, генераторы подалгебры Картана, записанные как базисные состояния присоединенного представления, образуют базис подпространства размерности, равной рангу группы n по числу состояний $|\mathbf{0}, l'\rangle$ с нулевыми собственными значениями для всех генераторов подалгебры Картана как операторов присоединенного представления с единственным весовым вектором, все компоненты которого тождественно равны нулю.

Далее, если α_S — старший из всех положительных корней алгебры Ли, то он является старшим весом для присоединенного представления, поскольку для всех лестничных генераторов, соответствующих простым положительным корням,

$$(\text{ad } \Gamma_{\alpha_m}) \Gamma_{\alpha_S} \equiv [\Gamma_{\alpha_m}, \Gamma_{\alpha_S}] = N_{\alpha_m, \alpha_S} \Gamma_{\alpha_m + \alpha_S} = 0,$$

так как по определению старшего положительного корня он не может быть повышен, и $\Gamma_{\alpha_m + \alpha_S}$ не существует, т.е. $N_{\alpha_m, \alpha_S} = 0$, и поэтому в дираковской записи

$$\widehat{(\text{ad } \Gamma_{\alpha_m})} |\alpha_S\rangle = 0.$$

Итак, пространство присоединенного представления — это линейная оболочка $\mathcal{D} = N_G$ ортонормированных базисных состояний: n собственных состояний генераторов подалгебры Картана с весовым вектором, все компоненты которого равны нулю,

$$|\mathbf{0}, l\rangle, \quad l \in \{\overline{0, n}\},$$

$N_G - n$ состояний, которые имеют веса, равные всем, положительным и отрицательным, корням алгебры Ли,

$$|\alpha_k\rangle.$$

Покажем, что набору собственных значений, т.е. весу, который равен корню, соответствует единственное состояние, которое мы обозначаем как $|\alpha_k\rangle$. Для этого обратимся к преобразованиям группы Вейля.

Действие операции отражения из группы Вейля переводит базисное состояние старшего веса в базисное состояние с весом того же неприводимого представления. В случае присоединенного представления это означает, что состояние с весом, равным старшему корню алгебры Ли, при отражении переводится в базисное состояние в весом, равным корню этой же алгебры Ли. А так как старший вес для базисных состояний в пространстве неприводимого представления невырожден, т.е. существует единственное базисное состояние, которое является собственным для генераторов подалгебры Картана с собственными значениями, равными компонентам старшего веса, то в согласии с установленными свойствами отражений Вейля все многократные отражения состояния старшего веса образуют состояния с невырожденными весами. Значит, образы базисного состояния со старшим весом при действии группы Вейля образуют подпространство неприводимого представления с весами, которые получаются при всевозможной многократном действии отражений Вейля на старший вес²³.

Теперь докажем, что особенность присоединенного представления простой компактной алгебры Ли заключается в том, что множество образов старшего корня при действии группы Вейля — это все корни этой алгебры Ли. Построим множество всех образов действия группы Вейля на старший корень $\mathcal{W}(\alpha_S)$ и предположим противное: пусть существует положительный корневой вектор²⁴ рассматриваемой простой

²³Подчеркнем, что под отражениями Вейля мы понимаем, во-первых, операции, которые вполне определено преобразуют один вес базисного состояния в пространстве неприводимого представления в вес того же базиса состояний, включая тождественное преобразование. Таким образом, речь идет о вполне определенном базисе состояний, когда каждое базисное состояние $|\nu, a\rangle$ является собственным для генераторов подалгебры Картана Γ_l с собственными значениями $(\nu)_l$. Во-вторых, под группой отражений Вейля мы понимаем и дискретную группу преобразований указанных базисных состояний в пространстве неприводимого представления, а именно, преобразования базисного состояния индуцируют отражения веса ν , в то время как индекс базисного состояния a задает кратность вырождения веса и он не изменяется при действии отражения Вейля на базисное состояние.

²⁴Образ отражения положительного корня относительно самого себя, как следует из определения операции отражения весов, — это противоположный этому корню, отрицательный корень. Поэтому во множестве образов отражения корня всегда входит как сам корень, так и противоположный ему корень.

компактной алгебры Ли α' , который не принадлежит $\mathcal{W}(\alpha_S)$, а значит, и все множество его образов при действии группы отражений Вейля не пересекается с множеством образов старшего корня,

$$\mathcal{W}(\alpha_S) \cap \mathcal{W}(\alpha') = \emptyset.$$

Это возможно, только если любые элементы из этих двух множеств ортогональны,

$$\mathcal{W}(\alpha_S) \perp \mathcal{W}(\alpha'),$$

так как для любого корня $\alpha_m \in \mathcal{W}(\alpha_S)$ отражение корня α' — это корень этой же подалгебры Ли, который выражается через корни из множеств $\mathcal{W}(\alpha')$ и $\mathcal{W}(\alpha_S)$,

$$\mathfrak{s}_m \alpha' = \alpha' - \alpha_m 2 \frac{(\alpha', \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)}.$$

Следовательно

$$\mathcal{W}(\mathfrak{s}_m \alpha') = \mathcal{W}(\alpha') + \mathcal{W}(\alpha_S),$$

что противоречит предположению об изолированности $\mathcal{W}(\alpha')$ от $\mathcal{W}(\alpha_S)$, если корни в этих множествах не ортогональны друг другу. Однако ортогональность означает, что для любого положительного корня $\alpha'_{m'}$ из $\mathcal{W}(\alpha')$ и любого положительного корня α_m из $\mathcal{W}(\alpha_S)$

$$(\alpha'_{m'}, \alpha_m) = 0.$$

Если во множестве $\mathcal{W}(\alpha')$ нет простого положительного корня, то все простые положительные корни тогда содержатся во множестве $\mathcal{W}(\alpha_S)$, корни в $\mathcal{W}(\alpha')$ выражаются через простые положительные корни и ортогональны простым положительным корням алгебры Ли, которые образуют базис в пространстве корней. Это возможно, только если все корни в $\mathcal{W}(\alpha')$ равны нулю, т.е. $\mathcal{W}(\alpha')$ — пустое пространство. Итак, нетривиальное множество $\mathcal{W}(\alpha')$ содержит простые положительные корни.

Но тогда из ортогональности двух множеств следует, что простые положительные корни в $\mathcal{W}(\alpha')$ и простые положительные корни в $\mathcal{W}(\alpha_S)$ по правилам построения диаграмм Дынкина для простых положительных корней не соединены линиями между простыми положительными корнями этих двух подсистем корней. Поэтому заключаем, что простые положительные корни двух рассматриваемых подсистем простых положительных корней образуют диаграмму Дынкина, как минимум, с двумя компонентами связности, по одной или более в каждой из подсистем, если каждую из подсистем не считать пустой. Это вступает в противоречие с критерием простой компактной алгебры Ли²⁵. Значит, сделанное предположение о неполноте образов старшего корня при отражениях Вейля было неверно, и во множестве образов старшего корня присоединенного представления при действии отражений Вейля входят все корневые векторы простой компактной алгебры Ли. Все эти образы имеют ту же кратность вырождения, что и старший вес присоединенного представления, т.е. кратность вырождения равна единице. Каждому корню алгебры Ли α_k в присоединенном представлении отвечает единственное базисное состояние $|\alpha_k\rangle$, которое является собственным для всех генераторов подалгебры Картана Γ_l с собственными значениями, равными компонентам $(\alpha_k)_l$.

Мы показали, что в присоединенном представлении ненулевые веса собственных состояний подалгебры Картана являются корнями алгебры Ли. Поэтому для простых компактных алгебр Ли задача построения всей системы корневых векторов алгебры Ли при заданной системе простых положительных корней этой алгебры наиболее эффективно решается при помощи вейлевских отражений в присоединенном представлении. Сначала, исходя из диаграммы Дынкина строится система простых положительных корней и сопряженных им отрицательных корней. Затем строятся последовательности из простых положительных корней так, как это следует из диаграммы Дынкина, и отрицательные корни, сопряженные к положительным корням последовательностей. После этого строятся образы всех найденных корней при действии отражений Вейля до тех пор, пока действие всех отражений не станет переводить множество найденных корней в себя, так что вся система корней становится замкнутой относительно группы Вейля. Способ отражений по своей наглядности и эффективности превосходит алгебраический метод

²⁵Заметим, что для других представлений, отличных от присоединенного, ни старший вес представления, ни множество его образов при действии отражений Вейля, вообще говоря, не являются корневыми векторами алгебры. Поэтому вывод о том, что образы старшего веса покрывают все отличные от нулевого весовые векторы представления, как мы это показали для присоединенного представления, может быть неверен для произвольного неприводимого представления. Наиболее очевидный пример — представление группы поворотов со спином s : в одномерном пространстве весов, т.е. во множестве проекций спина на ось z , которую обозначают символом m_s , старший вес равен $m_s = s$, а его отражение в группе Вейля, включающей в себя только два элемента, тождественное преобразование веса и инверсию знака веса, дает сам вес $m_s = s$ и противоположный вес $m_s = -s$, а все промежуточные отличные от нуля значения проекций спина на ось z не могут быть получены отражениями старшего веса, если $s > 1$. В дальнейшем изложении на примере группы $SU(3)$ мы построим несколько вполне определенных неприводимых представлений, для которых задача об образах старшего веса также решается в явном виде.

поиска дочерних последовательностей корневых векторов, которые описаны в **задаче 15** на стр. 53. Пример такой процедуры применения группы Вейля приведен в **задаче 16**.

Задача 16. Постройте на плоскости все корневые векторы в алгебре особой группы G_2 .

Примечание. Построив последовательности из двух простых положительных корней, используйте группу отражений Вейля, чтобы найти корневые векторы, которые существуют вне этих последовательностей, т.е. возникают в «дочерних» последовательностях.

■ После описания матриц присоединенного представления для простой компактной группы Ли уместно сдвинуть отступление и сформулировать концепцию **разложения Фиттинга** в алгебре Ли произвольного вида. Дело в том, что в теории матриц доказано, что совместным базисом собственных векторов могут обладать не только попарно коммутирующие эрмитово самосопряженные матрицы, с которыми мы имели дело в случае простых компактных групп Ли, но и верхнетреугольные матрицы над полем комплексных чисел: такие матрицы образуют нильпотентную подалгебру относительно коммутатора, который задается с помощью матричного умножения. При этом базис собственных состояний генераторов нильпотентной подалгебры является и базисом пространства присоединенного представления, если число элементов нильпотентной подалгебры является максимально достижимым по своему количеству для заданной алгебры Ли. Таким образом нильпотентная подалгебра является полным аналогом подалгебры Картана с точки зрения базиса собственных состояний. Но собственные значения элементов максимальной нильпотентной подалгебры $\Gamma^{(0)}$, которые по прежнему называются весами, уже не являются вещественными, как для генераторов подалгебры Картана. Вместе с тем, схема построения лестничных генераторов алгебры Ли и их коммутаторов, приведенная нами в случае компактной простой алгебры Ли, остается в силе и для алгебры Ли общего вида, так что генераторы алгебры Ли разбиваются на два класса: на максимальную нильпотентную подалгебру $\Gamma^{(0)}$ и на корневое дополнение Γ_a . В итоге, вместо базиса Картана–Вейля в алгебре Ли произвольного вида имеет место разложение Фиттинга,

$$\Gamma = \Gamma^{(0)} \oplus \sum_{a \neq 0} \Gamma_a,$$

причем каждому корню a соответствует, во-первых, единственный генератор и, во-вторых, противоположный корень $-a$ со своим генератором. Поскольку в нильпотентной алгебре всегда есть абелева подалгебра, которая возникает на последнем шаге вложенных друг в друга подалгебр коммутаторов, как мы это описали на стр. 21 в разделе 2.2 Главы 1, §2 для разрешимых алгебр Ли, то эта абелева подалгебра является прямым аналогом подалгебры Картана.

Тогда в присоединенном представлении, как было показано в этом разделе, на весовой диаграмме веса базисных состояний равны корням, причем базисные векторы с нулевыми корнями являются вырожденными, и кратность вырождения равна размерности подалгебры $\Gamma^{(0)}$.

В полной аналогии с обозначениями данного раздела перепишем в присоединенном представлении коммутаторы генераторов нильпотентной подалгебры в виде действия на состояния с весами, равными корням алгебры α , с учетом линейности коммутатора по своим аргументам в виде уравнений на собственные состояния:

$$[\Gamma_l^{(0)}, \Gamma_\alpha] = \alpha_l \Gamma_\alpha, \quad \text{или} \quad [\Gamma^{(0)}, \Gamma_\alpha] = \text{ad} \Gamma^{(0)} \cdot \Gamma_\alpha = \alpha(\Gamma^{(0)}) \Gamma_\alpha \Rightarrow \Gamma^{(0)} |\alpha\rangle = \alpha(\Gamma^{(0)}) |\alpha\rangle,$$

где $\Gamma^{(0)}$ — это любая суперпозиция генераторов нильпотентной подалгебры. Для коммутаторов в нильпотентной подалгебре точно также

$$[\Gamma_l^{(0)}, \Gamma^{(0)}] = \lambda_l^{(0)} \Gamma^{(0)}, \quad \text{или} \quad [\Gamma_x^{(0)}, \Gamma^{(0)}] = \text{ad} \Gamma_x^{(0)} \cdot \Gamma^{(0)} = \lambda^{(0)}(x) \Gamma^{(0)} \Rightarrow \Gamma_x^{(0)} |\lambda^{(0)}\rangle = \lambda^{(0)}(x) |\lambda^{(0)}\rangle,$$

где состояния $\lambda^{(0)}$ могут быть вырождены. Например, для абелевой подалгебры в нильпотентной подалгебре всегда имеется корень $\lambda^{(0)} = 0$, а кратность его вырождения равна размерности абелевой подалгебры. Верхний индекс у корней $\lambda^{(0)}$ введен, чтобы не путать эти векторы с фундаментальными векторами простой компактной алгебры Ли.

Теперь мы можем завершить **доказательство критерия Картана**, начатое на стр. 21, а именно его достаточное условие: если метрика Киллинга вырождена, то алгебра Ли содержит абелев идеал, а значит, в группе есть инвариантная абелева подгруппа, и группа не является полупростой. Итак, нами было установлено, что в алгебре Ли с вырожденной метрикой Киллинга есть подалгебра инвариантной подгруппы Ли с нулевой метрикой Киллинга в этом идеале. Рассмотрим более детально подалгебру этого идеала, а именно воспользуемся разложением Фиттинга и построим специальные элементы нильпотентной части этой подалгебры Ли

$$\Gamma_z^{(0)} = [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}] \subset \Gamma^{(0)},$$

для которого определены корни

$$\Gamma_z^{(0)} |\lambda^{(0)}\rangle = \lambda^{(0)}(z) |\lambda^{(0)}\rangle.$$

Установим, что корни $\lambda^{(0)}$ связаны с корнями корневого дополнения α . Многократными коммутаторами построим генераторы

$$\Gamma_{\lambda(z)+\alpha(z)} \sim [\Gamma_z^{(0)}, \Gamma_\alpha] \mapsto \Gamma_{\lambda(z)+2\alpha(z)} \sim [\Gamma_{\lambda(z)+\alpha(z)}, \Gamma_\alpha] \mapsto \dots \mapsto \Gamma_{\lambda(z)+k\alpha(z)},$$

и генератор

$$\Gamma_Y = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Gamma_{\lambda(z)+k\alpha(z)},$$

которому отвечают состояния в присоединенном представлении с весами, равными корням, указанным в сумме. Поскольку след генератора $\Gamma_z^{(0)}$ равен нулю, как и след всякого коммутатора, вычисление следа по указанным состояниям в генераторе Γ_Y тоже равен нулю,

$$\mathrm{tr}_Y(\Gamma_z^{(0)}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle \lambda^{(0)} + k\alpha | \Gamma_z^{(0)} | \lambda^{(0)} + k\alpha \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (n_k (\lambda^{(0)}(z) + k\alpha(z))) = 0,$$

где n_k — это кратность вырождения корня $\lambda^{(0)} + k\alpha$, так что записанное выражение учитывает и случай, когда кратность вырождения равна нулю, т.е. корню не отвечает какое-либо состояние в присоединенном представлении, а значит, и в алгебре Ли нет соответствующего генератора. Поэтому мы полагаем, что суммы оказываются конечными. В итоге,

$$\lambda^{(0)}(z) = -r_\lambda \alpha(z)$$

с рациональным коэффициентом

$$r_\lambda = \left(\sum n_k k \right) \left(\sum n_k \right)^{-1}.$$

Найдем теперь след квадрата генератора $\Gamma_z^{(0)}$, суммируя по всем корням $\lambda(z)$,

$$\mathrm{tr}(\Gamma_z^{(0)} \Gamma_z^{(0)}) = \sum_{\lambda} \langle \lambda^{(0)} | \Gamma_z^{(0)} \Gamma_z^{(0)} | \lambda^{(0)} \rangle = \sum_{\lambda} (\lambda^{(0)}(z))^2 = \left(\sum_{\lambda} r_{\lambda}^2 \right) \cdot (\alpha(z))^2.$$

Если в алгебре есть хотя бы один корень из корневого дополнения, отличный от нуля, то

$$\mathrm{tr}(\Gamma_z^{(0)} \Gamma_z^{(0)}) \neq 0,$$

так как, во-первых, среди корней $\lambda(z)$ есть корень, равный нулю, который отвечает абелевой подалгебре в нильпотентной подалгебре. Во-вторых, серия с нулевого корня обрывается на первом шаге в обе стороны, поскольку кратные корни не существуют в алгебре (коммутатор генератора с собой равен нулю), т.е.

$$r_{\lambda=0} = \frac{n_1 - n_{-1}}{n_0 + n_1 + n_{-1}}.$$

Но в алгебре есть и корень $\lambda = \mathbf{0} + \alpha$, для которого допустимы лишь 2 шага в отрицательную сторону,

$$r_\lambda = \frac{-n_0 - 2n_{-1}}{n_1 + n_0 + n_{-1}}.$$

Значит, с учетом $n_{-1} = n_1$ найдем, что

$$r_\lambda - r_{\lambda=0} = -\frac{n_0 + 2n_1}{n_0 + 2n_1} = -1.$$

это означает, что оба эти рациональные множители не могут обратиться в нуль совместно, а

$$\sum_{\lambda} r_{\lambda}^2 > 0.$$

Итак, если в идеале есть корневое дополнение, то элемент метрики Киллинга, отвечающий следу квадрата генератора $\Gamma_z^{(0)}$, отличен от нуля. Если теперь метрика Киллинга в идеале тождественно равна нулю, то это значит, что предположение о наличии в идеале корневого дополнения неверно, и весь идеал — это нильпотентная подалгебра, что и требовалось для того, чтобы в идеале существовала абелева подалгебра, задающая инвариантную абелеву подгруппу Ли. Поэтому алгебра с вырожденной метрикой Киллинга не является полупростой.

Подчеркнем, что компактные простые группы и их представления в физике описывают квантовые состояния, которые являются собственными для наблюдаемых физических величин, и сами эти физические величины задаются эрмитово самосопряженными генераторами подалгебры Картана, а групповые преобразования квантовых состояний происходят в результате воздействия на эти состояния операторов физических величин — воздействия эрмитово самосопряженных генераторов группы Ли. Ясно, что для физики состояния представления интересны только в том случае, если это квантовые состояния физической системы, которые характеризуются собственными значениями наблюдаемых.

Вместе с тем, возможны ситуации, когда преобразования квантовых состояний возникают не только под воздействием операторов физических величин, но и в рамках групповых преобразований, которые могут отвечать некомпактным группам Ли. Пример — группа Лоренца, в которой лоренцевы бусты — это элементы симметрии физической системы, но они не вызваны воздействием на систему операторов физических величин, как это

имеет место в группе поворотов, где генераторы поворотов — это операторы момента количества движения. Что же касается случая, когда базис состояний представления связан не с подалгеброй Картана, а с максимальной нильпотентной подалгеброй общего вида, то его вряд ли можно отнести к ситуации, применимой в физике квантовых состояний. Тем не менее, в квантовой физике кроме состояний и наблюдаемых величин рассматриваются матричные элементы произведений нескольких операторов наблюдаемых по начальному и конечному состояниям — так называемые корреляторы, например, двухточечные корреляторы координат или петлевые интегралы от полей, упорядоченные по направлению перемещения по петле. Эти матричные элементы сами по себе могут обладать свойствами симметрии, т.е. среди характеристик таких корреляторов могут быть построены такие, которые имеют вполне определенные трансформационные свойства относительно некоторых групповых преобразований. В таких случаях уже нет ограничений, связанных с необходимостью компактности и простоты группы преобразований квантовых состояний и наблюдаемых величин, а также нет необходимости ограничивать число генераторов конечным набором, так что становится актуальным и рассмотрение бесконечномерных алгебр вне критерия полупростоты группы по Картану. ■

Итак, мы описали общую процедуру построения конечномерных неприводимых представлений простых компактных алгебр Ли, которую проиллюстрируем далее на примерах алгебр $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{su}(3)$.

§3. Представления $\mathfrak{su}(2)$

Спинор как фундаментальное представление, матрицы Паули, матрицы операторов момента импульса j , приближенная симметрия ядерных сил — изотопический спин и кварки, слабое взаимодействие и дублеты кварков и лептонов, тензор поворотов Эли Картана, разложение алгебры $\mathfrak{so}(4)$ в прямую сумму $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$.

При описании конкретных примеров изложении мы следуем общим результатам о неприводимых представлениях в Главе 2, §2, где на стр. 80 были определены фундаментальные представления. Каждому фундаментальному вектору (II.2.9) соответствует фундаментальное представление, в котором этот вектор является весовым вектором состояния старшего веса. Напомним, что количество фундаментальных векторов равно рангу группы. Ранг алгебры $\mathfrak{su}(2)$ равен единице (одна точка на диаграмме Дынкина — один корень).

3.1 Фундаментальное представление

Единственный фундаментальный одномерный вектор λ_z алгебры $\mathfrak{su}(2)$ по определению

$$2 \frac{(\boldsymbol{\lambda}_j, \boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m)} = \delta_{jm} \quad (\text{II.2.9})$$

удовлетворяет равенству

$$2 \frac{\lambda_z \cdot \alpha_z}{\alpha_z^2} = 1.$$

При $\alpha_z = 1$ находим²⁶

$$\lambda_z = \frac{1}{2}.$$

В фундаментальном представлении, где вес старшего вектора имеет координату $\mu_S = \lambda_z = \frac{1}{2}$, допустимое однократное понижение этого веса дает вес младшего вектора

$$\mathfrak{s}_m \boldsymbol{\lambda}_j = \boldsymbol{\lambda}_j - 2 \frac{(\boldsymbol{\lambda}_j, \boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m)} \boldsymbol{\alpha}_m \quad \mapsto \quad \mathfrak{s}_z \lambda_z = \lambda_z - \alpha_z = -\frac{1}{2}.$$

Состояние с таким весом — результат действия понижающего оператора Γ_- на старший вектор фундаментального представления, $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = |\lambda_z\rangle$. В физических приложениях принято определять оператор

$$j_- \equiv \sqrt{2} \Gamma_- \quad \text{и} \quad j_z \equiv \Gamma_z, \quad (\text{II.3.1})$$

где Γ_z — генератор подалгебры Картана в $\mathfrak{su}(2)$.

По определению фундаментального представления число шагов понижения равно единице²⁷, так что других состояний, кроме двух, что имеют веса $\mu \mapsto \mu_S = \lambda_z = \frac{1}{2}$ и $\mu \mapsto \mu_S - \alpha_z = \lambda_z - \alpha_z = -\mu_S = -\frac{1}{2}$, в

²⁶Выбор $\alpha_z = 1$ соответствует, например, тому, что генераторы преобразований — это компоненты момента импульса $\mathbf{j} = \mathbf{J}/\hbar$.

²⁷Напомним, что коэффициенты разложения старшего веса неприводимого представления p_m по фундаментальным векторам $\boldsymbol{\lambda}_m$ — это максимальное число понижения веса генератором $\Gamma_{-\alpha_m}$. В фундаментальном представлении только один коэффициент равен единице, $p_m = \delta_{mk}$, и старший вес $\boldsymbol{\lambda}_k$ можно понизить только один раз до веса $\boldsymbol{\lambda}_k - \boldsymbol{\alpha}_k$.

фундаментальном представлении нет. Итак, запишем действие оператора проекции момента импульса на ось z на пару базисных состояния фундаментального представления

$$\Gamma_z |\mu\rangle = \mu_z |\mu\rangle \quad \Rightarrow \quad \Gamma_z |\pm\frac{1}{2}\rangle = \pm\frac{1}{2} |\pm\frac{1}{2}\rangle, \quad |\pm\rangle \equiv |\pm\frac{1}{2}\rangle, \quad \text{т.е. } j_z |\pm\rangle = \pm\frac{1}{2} |\pm\rangle.$$

В базисе $|\pm\rangle$ двумерного пространства фундаментального представления алгебры $\mathfrak{su}(2)$ все операторы линейных преобразований Γ — это матрицы размера 2×2 ,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{++} & \Gamma_{+-} \\ \Gamma_{-+} & \Gamma_{--} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \Gamma_{++} &= \langle +|\Gamma|+\rangle, & \Gamma_{+-} &= \langle +|\Gamma|- \rangle, \\ \Gamma_{-+} &= \langle -|\Gamma|+\rangle, & \Gamma_{--} &= \langle -|\Gamma|- \rangle. \end{aligned}$$

Согласно общей формуле для квадратичного оператора Казимира (II.2.2), который мы обозначим с использованием определения (II.3.1) в группе $SU(2)$ как $C_2 = \Gamma_a \Gamma_a \equiv j^2$, запишем действие j^2 на состояние старшего веса фундаментального представления, что даст значение этого инварианта для всех векторов состояния рассматриваемого неприводимого представления,

$$j^2 |+\rangle = \{j_z^2 + \frac{1}{2}(j_+ j_- + j_- j_+)\} |+\rangle. \quad (\text{II.3.2})$$

Согласно важному общему соотношению (II.2.20)

$$\Gamma_{\alpha_m} |\tilde{\nu}\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{-\alpha_m} |\tilde{\nu}\rangle = \sqrt{(\alpha_m, \tilde{\nu})} |\tilde{\nu} - \alpha_m\rangle, \quad 2 \frac{(\tilde{\nu}, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} = \tilde{p}_m \in \{0, \mathbb{N}\} \quad (\text{II.2.20})$$

при подстановках

$$|\tilde{\nu}\rangle \mapsto |+\frac{1}{2}\rangle, \quad \tilde{\nu} \mapsto \lambda_z = \frac{1}{2}, \quad \alpha_m \mapsto \alpha_z, \quad \tilde{\nu} - \alpha_m \mapsto -\lambda_z = -\frac{1}{2}, \quad \Gamma_{-\alpha_m} \mapsto \Gamma_- = \frac{1}{\sqrt{2}} j_-$$

и при $\alpha_z = 1$ находим результат действия понижающего генератора на состояние старшего веса и норму получающегося состояния

$$\Gamma_- |+\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |-\frac{1}{2}\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle +\frac{1}{2} | \Gamma_+ \Gamma_- | +\frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{2}, \quad (\text{II.3.3})$$

или

$$\Gamma_- |+\rangle = |-\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle + | j_+ j_- | + \rangle = 1. \quad (\text{II.3.4})$$

Численный коэффициент $(\Gamma_+)_{+-}$, который получается при действии повышающего генератора на состояние с младшим весом,

$$\Gamma_+ |-\frac{1}{2}\rangle = (\Gamma_+)_{+-} |+\frac{1}{2}\rangle,$$

легко найти, используя (II.3.3),

$$\Gamma_+ |-\frac{1}{2}\rangle = \Gamma_+ \left(\sqrt{2} \Gamma_- |+\frac{1}{2}\rangle \right)$$

а так как в базисе Картана–Вейля для группы $SU(2)$

$$[\Gamma_+, \Gamma_-] = \alpha_z \Gamma_z, \quad \alpha_z = 1, \quad \Rightarrow \quad \Gamma_+ \Gamma_- = \Gamma_- \Gamma_+ + \Gamma_z,$$

находим, что

$$\begin{aligned} \Gamma_+ |-\frac{1}{2}\rangle &= \Gamma_+ \left(\sqrt{2} \Gamma_- |+\frac{1}{2}\rangle \right) = \sqrt{2} \left(\Gamma_- \Gamma_+ + \Gamma_z \right) |+\frac{1}{2}\rangle = \\ &= \sqrt{2} \left(\Gamma_- \Gamma_+ |+\frac{1}{2}\rangle + \Gamma_z |+\frac{1}{2}\rangle \right) = \sqrt{2} \Gamma_- \mathbf{0} + \sqrt{2} \frac{1}{2} |+\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\frac{1}{2}\rangle, \end{aligned}$$

где мы учли, что повышение состояния старшего веса неприводимого представления дает нулевое состояние $\Gamma_+ |+\frac{1}{2}\rangle = \mathbf{0}$. В итоге, действие повышающего генератора на состояние младшего веса равно

$$\Gamma_+ |-\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\frac{1}{2}\rangle, \quad j_+ |-\rangle = |+\rangle. \quad (\text{II.3.5})$$

С учетом определения старшего вектора состояния $j_+ |+\rangle = 0$ и согласно (II.3.2) вычисляем квадратичный оператор Казимира для фундаментального спинорного представления частицы со спином $j = 1/2$,

$$j^2 |+\rangle = \frac{3}{4} |+\rangle, \quad j(j+1) = \frac{3}{4}.$$

3.2 Матрицы Паули

В фундаментальном представлении алгебры $\mathfrak{su}(2)$ генераторы — это матрицы 2×2 , отличные от нуля матричные элементы которых принимают следующие значения:

$$\langle +|\Gamma_z|+\rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle -|\Gamma_z|- \rangle = -\frac{1}{2}, \quad (\text{II.3.6})$$

так как Γ_z — это диагональный оператор из подалгебры Картана в базисе состояний $|\pm\rangle$, а согласно (II.3.3) и (II.3.5)

$$\langle +|\Gamma_+|- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle -|\Gamma_-|+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (\text{II.3.7})$$

При действии на базисные векторы представления любая матрица может быть представлена через матричные элементы $\Gamma_{mn} = \langle m|\Gamma|n\rangle$ как

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{++} & \Gamma_{+-} \\ \Gamma_{-+} & \Gamma_{--} \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$\Gamma_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.3.8})$$

Введенная нами при рассмотрении фундаментального представления стандартная связь генератора алгебры Γ_- и компоненты момента j_- согласно (II.3.1) задает и связь корневых генераторов с $j_\pm = \sqrt{2}\Gamma_\pm$, а это приводит к явному виду матриц

$$j_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.3.9})$$

Генераторы

$$j_z = \Gamma_z, \quad j_x = \frac{1}{2}(j_+ + j_-), \quad j_y = -\frac{i}{2}(j_+ - j_-),$$

задают $\mathbf{j}^2 = j_x^2 + j_y^2 + j_z^2$ и определяют матрицы Паули $\boldsymbol{\sigma}$,

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \equiv \mathbf{j}, \quad (\text{II.3.10})$$

откуда

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.3.11})$$

Свойства этих матриц подробно изучаются в квантовой механике. Отметим лишь, что

$$\text{tr}(\sigma_a \sigma_b) = 2\delta_{ab}, \quad \text{tr}(j_a j_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}, \quad a, b \in \{x, y, z\}. \quad (\text{II.3.12})$$

3.3 Представление с моментом j

Согласно общей схеме построения неприводимого представления (II.2.11)–(II.2.15) с записью старшего веса в виде разложения по фундаментальным векторам с неотрицательными целыми коэффициентами, старший вектор состояния $|\mu_S\rangle = |\sum p_m \lambda_m\rangle$, который в случае одномерного пространства фундаментальных векторов алгебры $\mathfrak{su}(2)$ имеет вес

$$p_1 \lambda_1 \mapsto p_1 \lambda_z = \mu_S, \quad \text{т.е. } \mu_S = \frac{p_1}{2} = j,$$

часто принято обозначать в математической литературе символом $|j\rangle$. Подчеркнем, что все базисные состояния неприводимого представления мы полагаем нормированными на единицу. При этом напомним, что базисные состояния с разными собственными значениями операторов из полного набора наблюдаемых величин являются еще и ортогональными друг другу.

Минимальное значение проекции момента на ось z — младший вес — получается отражением старшего веса относительно единственного корня алгебры $\mathfrak{su}(2)$,

$$\mathfrak{s}_j(p_j \lambda_j) = p_j \lambda_j - p_j \cdot 2 \frac{(\lambda_j, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} \alpha_j \mapsto \mathfrak{s}_z(p_1 \lambda_z) = p_1(\lambda_z - \alpha_z),$$

откуда

$$\mathfrak{s}_z j = j - p_1 \cdot \alpha_z = \frac{p_1}{2} - p_1 = -j.$$

Значение $\alpha_z = 1$ задает длину шага в изменении веса состояния при действии понижающего оператора. Число базисных состояний равно числу шагов от старшего веса к младшему $p_1 = 2j$ плюс одно исходное состояние со старшим весом, т.е. всего имеется $2j+1$ состояний с проекциями момента на ось z , значение которой равно m :

$$m \in \{j, j-1, \dots, -j+1, -j\}.$$

Инвариант представления – квадрат момента импульса \mathbf{j}^2 – легко вычислить, действуя на состояние старшего веса, если учесть, что, согласно (II.2.20)

$$\langle \mu_S | \Gamma_+ \Gamma_- | \mu_S \rangle = \langle \mu_S | (\boldsymbol{\mu}_S, \boldsymbol{\alpha}_z) | \mu_S \rangle = \langle \mu_S | \mu_S \cdot \boldsymbol{\alpha}_z | \mu_S \rangle \Rightarrow \langle j | \Gamma_+ \Gamma_- | j \rangle = j,$$

можно переписать для операторов $j_{\pm} = \sqrt{2}\Gamma_{\pm}$

$$\langle \mu_S | j_+ j_- | \mu_S \rangle = \langle \mu_S | 2(\boldsymbol{\mu}_S, \boldsymbol{\alpha}_z) | \mu_S \rangle = \langle \mu_S | 2\mu_S \cdot \boldsymbol{\alpha}_z | \mu_S \rangle \Rightarrow \langle j | j_+ j_- | j \rangle = 2j,$$

откуда из

$$\mathbf{j}^2 = j_z^2 + \frac{1}{2}(j_+ j_- + j_- j_+)$$

легко находим стандартный результат

$$\begin{aligned} \langle j | \mathbf{j}^2 | j \rangle &= \langle j | \left(j_z^2 + \frac{1}{2}(j_+ j_- + j_- j_+) \right) | j \rangle = \langle j | j_z^2 | j \rangle + \frac{1}{2} \langle j | j_+ j_- | j \rangle + \frac{1}{2} \langle j | j_- j_+ | j \rangle = \\ &= \langle j | j_z^2 | j \rangle + \frac{1}{2} 2j + \frac{1}{2} \langle j | j_- (j_+ | j \rangle) = j^2 + j + 0 = j(j+1). \end{aligned}$$

В общем формализме квадратичный оператор Казимира (II.1.7)

$$\mathbf{j}^2 = j_z^2 + j_- j_+ + j_z \quad (\text{II.3.13})$$

при действии на старший вектор состояния воспроизводит этот результат, поскольку

$$j_+ | j \rangle = 0, \quad \text{а } j_z | j \rangle = j | j \rangle.$$

Рекуррентное соотношение (II.2.6) для нормировочного коэффициента (II.2.5) позволяет определить нормированное на единицу базисное состояние $|j-m\rangle$ с собственным значением $j_z |j-m\rangle = (j-m) |j-m\rangle$,

$$\frac{1}{\sqrt{\mathcal{K}_m}} \Gamma_-^m |j\rangle \equiv |j-m\rangle = \frac{j_-^m}{\sqrt{2^m \mathcal{K}_m}} |j\rangle,$$

где

$$\mathcal{K}_{m+1} = \mathcal{K}_m \left\{ (m+1)(\boldsymbol{\alpha}_z, \boldsymbol{\mu}_S) - \frac{1}{2} m(m+1)(\boldsymbol{\alpha}_z, \boldsymbol{\alpha}_z) \right\} = \mathcal{K}_m (m+1) \left(\frac{1}{2} p_1 - \frac{1}{2} m \right).$$

С учетом того, что $p_1 = 2j$, значение ненулевого матричного элемента понижающего оператора

$$\langle j-m-1 | (j_- | j-m \rangle) = \sqrt{\frac{2\mathcal{K}_{m+1}}{\mathcal{K}_m}} = \sqrt{(m+1)(2j-m)}.$$

Введение стандартных квантовомеханических обозначений для базисных состояний момента импульса j с его проекцией на ось z , равной m_j :

$$|j-m\rangle \mapsto |j, m_j\rangle, \quad \text{где } m_j = j-m,$$

приводит к общезвестному результату

$$\langle j, m_j-1 | (j_- | j, m_j \rangle) = \sqrt{(j-m_j+1)(j+m_j)} = \sqrt{j(j+1) - m_j(m_j-1)}. \quad (\text{II.3.14})$$

Эту формулу записывают в матричной форме: квадратная матрица j_- размером $(2j+1) \times (2j+1)$ имеет два индекса $(j_-)_{mm'}$, и в данном выражении $m = m_j - 1$, а $m' = m_j$, т.е. отличные от нуля элементы матрицы –

$$(j_-)_{(m_j-1)m_j} = \sqrt{(j-m_j+1)(j+m_j)} = \sqrt{j(j+1) - m_j(m_j-1)}.$$

Эрмитово сопряжение матрицы — это композиция комплексного сопряжения матричных элементов и транспонирования, т.е. смены порядка следования матричных индексов,

$$(j_-^\dagger)_{m'm} = \{(j_-)_{mm'}\}^*.$$

Так как $j_-^\dagger = j_+$, мы устанавливаем, что эрмитово сопряжение дает отличные от нуля матричные элементы повышающего оператора

$$(j_+)_{m_j, (m_j - 1)} = \langle j, m_j | (j_+ | j, m_j - 1 \rangle) = \sqrt{(j - m_j + 1)(j + m_j)} = \sqrt{j(j + 1) - m_j(m_j - 1)},$$

или после элементарного сдвига отсчета индексов на единицу, $m_j \mapsto m_j + 1$,

$$\langle j, m_j + 1 | (j_+ | j, m_j \rangle) = \sqrt{(j - m_j)(j + m_j + 1)} = \sqrt{j(j + 1) - m_j(m_j + 1)}. \quad (\text{II.3.15})$$

Для читателя, знакомого с квантовой механикой, заметим, что в силе остаются известные выражения для коэффициентов Клебша–Гордона и теорема Вигнера–Эккарта для неприводимых тензорных операторов.

Применение общих формул (II.3.14) и (II.3.15) в частном случае, когда $j = \frac{1}{2}$, позволяет воспроизвести генераторы групповых преобразований j_\pm , которые приведены в (II.3.9) и получены нами чуть выше другим способом при описании фундаментального представления $\mathfrak{su}(2)$. Диагональный вид матрицы j_z также легко устанавливается, так как он является следствием выбора базиса собственных состояний этой матрицы в пространстве представления. В итоге,

$$j = \frac{1}{2} \sigma,$$

где σ — матрицы Паули.

Подчеркнем, что и для неприводимого представления с моментом j , указанные формулы позволяют однозначно найти генераторы поворотов в виде матриц размером $(2j + 1) \times (2j + 1)$. Эти матрицы называют стандартным представлением генераторов поворота момента j . Таким образом, стандартное представление определяется в ортонормированном базисе квантовых состояний $|j, m_j\rangle$.

Для сравнения, наряду со стандартным представлением в виде матриц размером $(2j + 1) \times (2j + 1)$, которые определяют линейные преобразования в пространстве состояний размерности $2j + 1$, широко известно тензорное представление генераторов группы поворотов в случае, когда j — это целое положительное число, а значит, представление $\text{SO}(3)$ совпадает с представлением $\text{SU}(2)$. Тогда можно показать, что в декартовых координатах трехмерного пространства симметричный бесследовый по любой паре индексов тензор ранга j также описывает неприводимое представление момента j (см. [1]).

Задача 17. Найдите стандартное представление для генераторов поворотов в случае $j = 1$.

3.4 Изотопическая инвариантность (спектроскопия)

Мы исходим из того, что ядра атомов состоят из связанных ядерными силами нуклонов: положительно заряженных протонов и нейтральных нейтронов, массы которых весьма близки друг к другу. В ведущем приближении при описании спектра масс ядер, составленных из нуклонов, отличием масс протона и нейтрона можно пренебречь, что дает возможность ввести симметрию в спектроскопии ядер, обусловленную инвариантностью массы в ядрах, которые содержат одно и то же количество нуклонов, но могут иметь разный заряд в зависимости от числа протонов в ядре. Говорят, что базис квантовых состояний ядер с одной и той же массой — это мультиплет состояний, в котором одно базисное состояние отличается от другого только за счет преобразований состояний составляющих ядро нуклонов: одно базисное состояние нуклона может быть преобразовано в другое. С математической точки зрения речь идет о том, что мультиплет — это базис в пространстве состояний неприводимого представления группы симметрии в спектроскопии ядер, а массы составных ядер являются инвариантами этой группы, т.е. зависят от операторов Казимира в группе. Рассмотрим эти вопросы более детально.

Гипотезу о существовании нейтрона высказал Дм.Дм.Иваненко и независимо от него — В.Гейзенберг. При этом Гейзенберг сделал еще один важный шаг: ввел понятие зарядовой симметрии ядерных сил или, выражаясь современным языком, изотопической инвариантности сильных взаимодействий. Гейзенберг предположил, что, если пренебречь различием электромагнитного взаимодействия протонов и нейтронов, а также малой разностью их масс $m_n - m_p \approx 2$ МэВ при $m_n \approx 940$ МэВ, то протоны и нейтроны в отношении действия ядерных сил становятся неразличимыми, т.е. эквивалентными, и поэтому

имеет смысл говорить о нуклоне как о квантовом состоянии, представляющем собой суперпозицию двух базисных состояний, состояний протона и нейтрона. Это состояние нуклона называют изоспинором или дублетом,

$$|\text{nucleon}\rangle = C_p |\text{proton}\rangle + C_n |\text{neutron}\rangle \Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} C_p \\ C_n \end{pmatrix}.$$

Физический смысл коэффициентов C_p и C_n — это амплитуды вероятности того, что нуклон находится в состоянии протона и нейтрона, соответственно,

$$w_p = |C_p|^2, \quad w_n = |C_n|^2, \quad w_p + w_n = 1.$$

Суперпозиция двух базисных состояний является двумерным пространством представления, определяющего группу преобразований одной суперпозиции в другую. Эти преобразования определяют группу симметрии двухкомпонентной волновой функции нуклона. В этой группе допускаются преобразования, сохраняющие нормировку изоспинора. Нормировка в общем случае — это число нуклонов в ядре. Преобразования, сохраняющие нормировку двухкомпонентного спинора, — это группа унитарных матричных преобразований двухкомпонентных столбцов,

$$N^u = \begin{pmatrix} C_p^u \\ C_n^u \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} C_p \\ C_n \end{pmatrix} = U \cdot N, \quad U^\dagger U = \mathbb{1}.$$

Из унитарности сразу следует, что $|\det U| = 1$. Если исключить из рассмотрения ненаблюдаемую общую комплексную фазу такого изоспинора, то можно считать, что детерминант матриц преобразования равен единице, $\det U = 1$, и мы приходим к группе $SU(2)$.

В современной трактовке теории сильных взаимодействий в основе изотопической симметрии лежат следующие три факта:

- короткодействие ядерных сил на расстояниях порядка размера ядра $r_0 \sim 10^{-13}$ см, что позволяет оценить характерный импульс из соотношения неопределенности координата–импульс как $p \sim \hbar/r_0$ и масштаб энергий как $E \sim pc$, если имеет место движение с максимально допустимой скоростью распространения частиц и полей c и эта скорость может реализовываться в сильных взаимодействиях, так что характерная энергия сильных взаимодействий $E_0 \sim \hbar c/r_0 \sim 200$ МэВ,
- электромагнитное взаимодействие на расстояниях порядка r_0 дает оценку импульса как $p \sim \hbar/r_0$ и масштаб энергии взаимодействий как $E \sim rv$, где скорость v принимает характерное значение в рамках теории возмущений²⁸ $v \sim c\alpha_{em}$ с постоянной тонкой структурой $\alpha_{em} = e^2/(\hbar c) \sim 1/137$, так что масштаб электромагнитных взаимодействий составляет величину $E_{em} \sim e^2/r_0 \sim \alpha_{em} E_0 \sim 2$ МэВ, т.е. на два порядка меньше характерного масштаба энергий сильного взаимодействия,
- массы夸克ов u и d , составляющих протон и нейtron $p = (uud)$, $n = (udd)$, с электрическими зарядами $Q_u = +2/3$ и $Q_d = -1/3$ в единицах измерения, где заряд электрона равен -1 , имеют величину в несколько МэВ, что пренебрежимо мало по сравнению с масштабом сильных взаимодействий (около 200 МэВ), удерживающих夸克и в нуклоне или в любом другом адроне, составленном из夸克ов и антикварков, причем поскольку комптоновская длина кварка $\lambda_q = \hbar/(m_q c)$ существенно превосходит радиус действия сильных взаимодействий, энергия кваркового состояния в адроне существенно превышает энергию покоя кварка, т.е. кварковое состояние внутри связанного состояния возникает за счет излучения квантов сильного взаимодействия при релятивистском движении кварков, так что итоговое кварковое состояние имеет энергию связи порядка 200 МэВ.

Поэтому при изучении сильных взаимодействий в ведущем приближении можно пренебречь как электромагнитными взаимодействиями кварков, так и различиями в их динамике, вызванными массами этих кварков, потому что динамика кварков является ультрарелятивистской: энергия движения много больше массы покоя.

В подобном подходе базисные квантовые состояния изоспиноров характеризуются единственным квантовым числом — проекцией изоспина T_3 , которая связана с электрическим зарядом компонент спинора соотношением

$$Q = \frac{1}{6} + T_3,$$

²⁸Из формулы для оценки энергии взаимодействий следует, что константа сильного взаимодействия α_s сравнима с единицей, так что имеет место непертурбативный режим, т.е. оценки с использованием теории возмущений неприменимы, а скорость движения частиц (кварков) в ядре за счет сильного взаимодействия может достигать релятивистского предела c .

т.е. $T_3 = \frac{1}{2}$ отвечает u -кварку, а $T_3 = -\frac{1}{2}$ — d -кварку. Обычно эту связь заряда с изоспином записывают с использованием еще одного квантового числа — гиперзаряда Y : для u - и d -кварков его полагают равным

$$Y_u = Y_d = \frac{1}{3},$$

и связывают с барионным числом B : барионное число нуклона $B = 1$, так что кварки несут по трети от барионного числа нуклонов. Формула

$$Q = \frac{1}{2} Y + T_3 \quad (\text{II.3.16})$$

справедлива и для антикварков, которые как античастицы кварков имеют противоположное барионное число $Y_{\bar{u}} = Y_{\bar{d}} = -1/3$, а также противоположные значения проекции изоспина $T_3 \mapsto -T_3$ по отношению к изоспину кварков.

Важно подчеркнуть, что каждое базисное состояние представления является собственным для величин гиперзаряда, барионного числа (барионное число есть гиперзаряд со возможным сдвигом начала отсчета, как это станет ясно при рассмотрении группы симметрии более высокого ранга, а именно, группы $SU(3)$) и проекции изоспина как операторов, а формула (II.3.16) отражает операторный характер этих понятий.

Формула (II.3.16) верна и для нуклонов, которые составлены из кварков так, что и нуклоны являются собственными состояниями для операторов гиперзаряда и изоспина: у протона проекция изоспина²⁹ равна

$$T_3[p] = T_3[uud] = 2T_3[u] + T_3[d] = \frac{1}{2},$$

а гиперзаряд $Y_p = 2Y_u + Y_d = 1$, а у нейтрона

$$T_3[n] = -\frac{1}{2}, \quad Y_n = 1,$$

и мы получаем верные значения для электрических зарядов.

Интересно, что и для мезонов, составленных из кварка и антикварка, $Y = Y_q + Y_{\bar{q}} = 0$, заряд совпадает со значением проекции изоспина. Например, триплет пи-мезонов (π^+, π^0, π^-) имеет изоспин $T = 1$, а массы частиц в триплете отличаются не более, чем на 4 МэВ, что также мало по сравнению с $m_{\pi^+} \approx 140$ МэВ. При этом сразу предполагаем, что $\pi^+(u\bar{d})$, $\pi^- = (\bar{u}d)$, а π^0 — это суперпозиция³⁰ $(\bar{u}u)$ и $(\bar{d}d)$. В итоге, мы видим, что составная кварковая модель описывает мультиплеты адронных состояний, в которых массы приблизительно равны друг другу с высокой точностью, как базисные состояния неприводимых представлений группы изоспина. При этом мультиплет — это неприводимое представление группы, которое характеризуется инвариантом: в группе это квадратичный оператор Казимира, а в физике это масса состояний мультиплета. Другими словами, масса базисных состояний мультиплета, как мы и говорили в начале раздела, является инвариантом, который определяется единственным независимым инвариантом группы $SU(2)$ — собственными значениями квадратичного оператора Казимира, так что неприводимое представление группы, для которого инвариант Казимира зафиксирован, задает массу частиц мультиплета, что и указывает на группу симметрии в спектроскопии адронов, составленных из сильно взаимодействующих кварков.

Формула (II.3.16) применяется и для состояний, синглетных по изоспину: $T = T_3 \equiv 0$. Обобщение (II.3.16) включает в себя странные кварки, изоспин которых равен нулю, но они, кроме барионного числа, несут еще и специальный заряд, который называют странностью $S = -1$, так что гиперзаряд складывается из барионного числа и странности,

$$Y = B + S. \quad (\text{II.3.17})$$

Тогда электрический заряд s -кварка согласно (II.3.16) равен

$$Q_s = -\frac{1}{3}, \quad (\text{II.3.18})$$

что и наблюдается экспериментально.

Итак, кварки — это квантовые состояния, которые принадлежат пространствам неприводимых представлений группы изотопических преобразований $SU(2)$: u - и d -кварки образуют изодублет, а s -кварк — изосинглет. Аромат кварка — это состояние физической системы с определенным набором собственных значений наблюдаемых величин: заряд, изоспин, масса и спин. Конкретный набор этих значений указывает на u -кварк, d -кварк, s -кварк и т.д., т.е. на имя кварка. Поэтому говорят, что имя кварка определяет

²⁹Мы указываем собственное значение проекции изоспина для базисного состояния, символ которого записан в квадратных скобках.

³⁰Для определения коэффициентов суперпозиции необходимо знать, что такое сопряженный спинор и как происходит сложение изоспина двух подсистем, образующих одну систему, а в данном случае, кварк и антикварк образуют мезон. Этот сюжет мы рассмотрим детально в разделе 4.5 Главы 2, §4. Более того, мы изучим вопрос о спине или моменте количества движения составной системы как вопрос о сложении двух спинов или моментов количества движения в Главе 4, раздел 1.1, §1.

его «аромат» (flavour (UK), flavor (US)). Адроны — составные состояния, построенные из кварковых состояний. Адроны делятся на барионы, которые имеют отличное от нуля целое барионное число, и мезоны с барионным числом $B = 0$. Состояния с нецелым барионным числом не наблюдаются как асимптотически свободные состояния, которые могут распространяться в пространстве-времени вне зависимости от других состояний. Состояния с дробным барионным числом наблюдаются только как часть систем с целым барионным числом, т.е. только во взаимодействии с другими подсистемами, а значит, не в асимптотически свободной области. Говорят, что такое правило — это следствие динамики взаимодействий кварков, которое называют конфайнментом. Пример подсистемы — дикварки: uu -дикварк — это часть бариона (uud). Вместе с тем, природа конфайнмента кварков включает в себя не только рассуждение о барионном числе: силы, удерживающие кварки в адронах, описываются симметрией $SU(3)$ в отношении новой характеристики кварков, которую назвали цветом. Физические предпосылки для введения цветовой симметрии мы опишем в специальном параграфе этой главы, посвященном представлениям $SU(3)$, т.е. в §4.

3.5 Слабый изоспин

Группа $SU(2)$ описывает и свойства слабых взаимодействий. Дело в том, что при слабых взаимодействиях в том же бета-распаде нейтрона и во множестве других процессах наблюдаются так называемые заряженные токи: например, d -кварк переходит в u -кварк, электрон в электронное нейтрино $e \rightarrow \nu_e$ так, что испускается W^- -бозон с зарядом -1 , который и обеспечивает сохранение заряда в слабом процессе. Значит, одно базисное кварковое состояние при слабых заряженных токах преобразуется в другое базисное кварковое состояния, $|u\rangle \leftrightarrow |d\rangle$, так что и суперпозиция таких базисных кварковых состояний преобразуется в суперпозицию этих же базисных кварковых состояний, т.е. имеют место преобразования в двумерном пространстве представления, которое называют слабым кварковым изодублетом. То же можно сказать и о преобразованиях базисных лептонных состояний, $|\nu_e\rangle \leftrightarrow |e\rangle$, суперпозиция которых образует двумерное пространство слабого лептонного изодублета. Число кварков и лептонов в подобных процессах слабого взаимодействия остается неизменным, что, как мы видели в предыдущем разделе при рассмотрении группы симметрии для состояний спектроскопии, где также имеет место условие нормировки числа нуклонов, означает введение группы $SU(2)$.

В описанном базисе кварковых и лептонных состояний реализация представления в смысле квантовой механики приводит к функции дискретного аргумента принимающего всего два значения. Отсюда две компоненты — это запись функции двумерного пространства состояний путем перечисления всех ее значений: и их всего два.

Поэтому, если ввести базис в пространстве квантовых состояний кварков с порядком компонент, который определяется в сторону уменьшения электрического заряда на единицу от верхней компоненты к нижней,

$$|u\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{Q}}, \quad |d\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{Q}}, \quad (\text{II.3.19})$$

и лептонов

$$|\nu_e\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{L}}, \quad |e\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{L}}, \quad (\text{II.3.20})$$

то можно ввести дублеты

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \quad (\text{II.3.21})$$

где компоненты — это комплексные числа, которые описывают суперпозицию состояний и называются амплитудами вероятности этих состояний. Например, общепринятым является запись квантового состояния³¹

$$u|u\rangle + d|d\rangle \equiv \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}.$$

Тогда квадраты модулей амплитуд в суперпозиции состояний в логике квантовой механики определяют вероятности наблюдать в системе соответствующие квантовые состояния:

$$w(u) = u^*u \equiv \bar{u}u, \quad w(d) = \bar{d}d, \quad w(\nu_e) = \bar{\nu}_e\nu_e, \quad w(e) = \bar{e}e.$$

³¹Обращаем внимание читателя на то, что $|u\rangle$ или $|d\rangle$ внутри символа кет-вектора — не более чем обозначения для базиса в двумерном пространстве состояний, т.е. для двухкомпонентного объекта гильбертова пространства, который можно называть дублетом (или спинором, если подчеркивать закон его преобразования). А вот тот же значок перед символом кет-вектора — это комплексное число, на которое кет-вектор с той же буквой внутри умножается.

Сохранение числа лептонов и числа夸克ов означает, что в слабых взаимодействиях дублеты сохраняют свою нормировку $Q^\dagger Q$ и $\mathcal{L}^\dagger \mathcal{L}$, а это имеет место при унитарных преобразованиях дублетов 2×2 -матрицами U . При этом, общая фаза дублетов, во-первых, не меняет относительную фазу между базисными состояниями, и следовательно, эта общая фаза не является наблюдаемой величиной в квантовой механике, т.е. физический смысл имеют только преобразования группы $U(2)$, из которых исключили преобразования группы $U(1)$, — это группа $SU(2)$. Во-вторых, дополнительный аргумент: изменение общей фазы дублетов не имеет никакого отношения к преобразованиям за счет слабых взаимодействий, потому что наблюдаемые преобразования за счет слабых взаимодействий либо заменяют одно базисное состояние на другое: $|u\rangle \leftrightarrow |d\rangle$, $|e\rangle \leftrightarrow |\nu_e\rangle$, — либо, как мы увидим дальше, изменяют *относительную фазу базисных состояний в их суперпозиции*, так что группа унитарных преобразований с $|\det U| = 1$ в случае рассмотрения свойств слабых взаимодействий ограничивается специальными преобразованиями, исключающими глобальный сдвиг фазы дублетов за счет действия группы $U(1)$. Это можно получить, зафиксировав комплексную фазу $\det U$. Если потребовать, чтобы преобразования дублетов включали бы в себя тождественное преобразование, для которого $\det U = 1$, то в итоге получается группа $SU(2)$, состояния представлений которой называются слабым изоспином T^W . Формула для связи электрического заряда базисных состояний с проекцией изоспина этих состояний имеет тот же вид, что и (II.3.16), так как разность зарядов верхних и нижних компонент дублетов отличается на единицу, что совпадает с разностью проекций слабого изоспина, откуда

$$Q = \frac{1}{2} Y^W + T_3^W, \quad (\text{II.3.22})$$

где для верхних и нижних компонент дублетов проекция изоспина

$$T_3^W[u] = T_3^W[\nu_e] = \frac{1}{2}, \quad T_3^W[d] = T_3^W[e] = -\frac{1}{2}, \quad (\text{II.3.23})$$

а значение гиперзаряда Y^W является одним и тем же для обоих компонент дублета, но отличается для разных дублетов, т.е. у夸кового и лептонного дублетов значения слабого гиперзаряда разные,

$$Y^W[\mathcal{L}] = -1, \quad Y^W[\mathcal{Q}] = +\frac{1}{3}.$$

Такое отличие можно считать индикатором того, что у лептонов и夸ков в дублете есть специфические заряды или квантовые числа, которые называют лептонным числом и барионным числом. Принято считать, что у лептонов лентонное число $L[\mathcal{L}]$ рано единице, $L[\mathcal{L}] = 1$, а у夸ков — нулю, $L[\mathcal{Q}] = 0$, в то время как барионное число лептонов равно нулю $B[\mathcal{L}] = 0$, а у夸ков оно отлично от нуля, и определяют его так, чтобы у протона инейтрона как у самых известных представителей барионов это число было равно единице $B = 1$. Но, так как барионы состоят из трех夸ков, связанных сильным взаимодействием³², то отсюда вполне естественно предположить, что барионные числа夸ков, как заряды, складываются в составленных из них состояниях, так что $B[\mathcal{Q}] = \frac{1}{3}$. Тогда элементарно можно найти подходящую формулу для слабого гиперзаряда в терминах барионного и лептонного чисел,

$$Y^W = B - L. \quad (\text{II.3.24})$$

Важнейшим свойством слабых взаимодействий, которое было установлено экспериментальным путем, заключается в том, что в этих взаимодействиях участвуют только левые фермионы (проекция спина на ось импульса в безмассовом пределе равна $-\frac{1}{2}$, состояния с левой проекцией спина помечены нижним индексом L в смысле left) и их правые античастицы (проекция спина на ось импульса в безмассовом пределе равна $+\frac{1}{2}$, состояния с правой проекцией спина помечены нижним индексом R в смысле right)³³: замена частиц на античастицы вместе с заменой левого на правое и обратно называется комбинированной СР-четностью, где С указывает на смену знаков зарядов частиц, а Р — на зеркальную инверсию пространства. С учетом этого факта фермионы первого поколения — это дублеты левых лептонов и夸ков (по слабому взаимодействию) и их правых античастиц³⁴

$$\mathcal{Q}_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{Q}}_R = \begin{pmatrix} \bar{d}_R \\ -\bar{u}_R \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_L = \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{L}}_R = \begin{pmatrix} e_R^+ \\ -\bar{\nu}_R^e \end{pmatrix}, \quad (\text{II.3.25})$$

³² В отношении сильных взаимодействий лептоны нейтральны, а夸克 несут цвет и являются триплетами **3** по группе $SU_c(3)$, которую мы обсудим чуть ниже [индекс «c» — это аббревиатура colour (UK), color (US)]. Анти夸克 же — цветовые антитриплеты **3** по группе $SU_c(3)$.

³³ Как следует из самого определения левых и правых фермионов спина $s = 1/2$ как состояний в ультрарелятивистском (безсаммовом) пределе, эти понятия являются сугубо релятивистскими по своей сути. В релятивистской теории эти фермионы описываются биспинорами Дирака (элементами четырехкомпонентного пространства представлений группы Планка), а левые и правые компоненты строятся как специфические суперпозиции компонент биспинора Дирака так, что их физическая интерпретация носит явный характер в терминах проекции спина на вектор импульса частицы только в ультрарелятивистском пределе для так называемых киральных полей.

³⁴ Знак минус в сопряженном дублете введен, чтобы сопряженный дублет преобразовывался той же матрицей, что и дублет, а не комплексно сопряженной матрицей: это свойство выводится при рассмотрении спиноров при квантовании

квантовые числа которых мы уже обсудили выше, а также правые частицы —синглеты по слабому взаимодействию и их СР-сопряженные партнера,

$$u_R, \quad d_R, \quad \bar{u}_L, \quad \bar{d}_L, \quad e_R, \quad e_L^+. \quad (\text{II.3.26})$$

Термин «синглет по слабому изоспину» означает, что слабый изоспин равен нулю, так что гиперзаряд и заряд связаны редуцированной формулой

$$Q = \frac{1}{2} Y_R^W,$$

где известный электрический заряд этих состояний определяет величину гиперзаряда, которая, конечно, получается разной для левых дублетов и правых синглетов, $Y^W \neq Y_R^W$. Объяснение такого неравенства может возникнуть только в модели, в которой и левые, и правые частицы оказываются базисными состояниями одного и того же неприводимого представления некоторой, более широкой компактной простой группы, отличной от $SU(2)$ и имеющей большее значение ранга так, чтобы гиперзаряд или электрический заряд стали бы не . В данном же разделе мы принимаем тот факт, что гиперзаряды левых и правых компонент как состояния одной и той же частицы принимают разные значения как экспериментальную данность.

Таким образом, левые частицы со спином $s = \frac{1}{2}$ участвуют в слабых взаимодействиях, а в силу свойств группы Пуанкаре, которая здесь не рассматривается, отсюда следует, что точно также в слабых взаимодействиях участвуют и СР-сопряженные к частицам античастицы, т.е. правые античастицы. Однако и кварки, и электроны являются частицами, которые обладают как левой проекцией спина на ось импульса, так и правой. Правые частицы, как установил эксперимент, не участвуют в слабых взаимодействиях, т.е. не обладают слабым изоспином, что и называется «синглет по слабому изоспину». Все эти правые частицы перечислены в (II.3.26), но к ним добавлены и СР-сопряженные левые античастицы, которые в силу той же группы Пуанкаре обладают тем же изоспином, т.е. также являются синглетами и не участвуют в слабых взаимодействиях.

Остается еще правое нейтрино ν_R^e , у которого заряд, гиперзаряд и слабый изоспин тождественно равны нулю, так что его еще называют стерильным нейтрино, имея в виду, что по отношению в электромагнитным, слабым и сильным взаимодействиям ν_R^e абсолютно стерильно.

В отличие от изоспина, который связан со спектроскопией адронов за счет введения дублета легких кварков u, d и их антикварков, участвующих в сильных взаимодействиях, слабый изоспин — это инструмент описания динамики слабых взаимодействий. Поэтому и понятие гиперзаряда в этих случаях является совершенно разным. Линейная связь электрического заряда с гиперзарядом и слабым изоспином послужила основой для формулирования Вайнбергом, Глешоу и Саламом электрослабой калибровочной теории на основе группы $U_Y(1) \otimes SU_L(2)$.

Задача 18. В группе поворотов $SO(3)$ перейдите от генераторов поворотов в декартовых координатах вокруг оси s_α на угол ϕ^α к генераторам поворотов в плоскости $\mathfrak{s}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha} s_\alpha$ на угол $\omega^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha} \phi^\alpha$, так что

$$\frac{1}{2} \mathfrak{s}_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} = s_\alpha \phi^\alpha.$$

Например, в плоскости (x, y) поворот по направлению от x к y — это поворот вокруг оси z на угол $\phi^z = \omega^{xy}$, и он описывается введением генератора \mathfrak{s}_{xy} . Тензор $\omega^{\mu\nu}$, введенный Эли Картаном, учитывает направление поворота, так что $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$. Другими словами, угол поворота от y к x — это взятый с минусом угол поворота от x к y . Тензор генераторов поворота в плоскости также является антисимметричным $\mathfrak{s}_{\mu\nu} = -\mathfrak{s}_{\nu\mu}$, а суммирование по двум немым индексам приводит к возникновению множителя $\frac{1}{2}$ для произведения $\mathfrak{s}_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}$, чтобы свести поворот к углу поворота вокруг оси. Докажите, что коммутатор

$$[\mathfrak{s}_{\mu\nu}, \mathfrak{s}_{\lambda\rho}] = i(\delta_{\mu\lambda} \mathfrak{s}_{\nu\rho} - \delta_{\mu\rho} \mathfrak{s}_{\nu\lambda} - \delta_{\nu\lambda} \mathfrak{s}_{\mu\rho} + \delta_{\nu\rho} \mathfrak{s}_{\mu\lambda}),$$

где $\delta_{\mu\lambda}$ — метрика евклидова пространства в декартовых координатах.

Задача 19. Для алгебры группы поворотов в 4-мерном пространстве $SO(4)$ введите генераторы

$$\tilde{s}_\alpha = \mathfrak{s}_{4\alpha}, \quad \alpha = \{\overline{1,3}\}, \quad s_\alpha = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathfrak{s}_{\beta\gamma}.$$

Найдите их коммутационные соотношения и перейдите к генераторам, которые отвечают алгебре $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$.

спина:

$$\psi_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{d}_R \\ -\bar{u}_R \end{pmatrix}, \quad \psi^* = \begin{pmatrix} \bar{u}_R \\ \bar{d}_R \end{pmatrix}.$$

Заметим, что по построению согласно свойствам преобразований верхние компоненты сопряженного дублета ψ_c имеют проекцию изоспина $T_3 = +\frac{1}{2}$, па нижние — $T_3 = -\frac{1}{2}$. Напротив, верхние компоненты дублета ψ^* имеют проекцию изоспина $T_3 = -\frac{1}{2}$, а нижние — $T_3 = +\frac{1}{2}$, что легко установить из явного вида этих компонент, приведенного выше.

§4. Представления $\mathfrak{su}(3)$

Триплет и анитриплет, гиперзаряд и изоспин как генераторы подалгебры Картана, система повышающих и понижающих генераторов и их корней, переход от генераторов к матрицам Гелл-Манна, квадратичный оператор Казимира, антикоммутатор матриц Гелл-Манна и кубический оператор Казимира, тождество Фирца, шестиугольная весовая диаграмма неприводимого представления, физический смысл длин сторон, операторы Казимира подалгебр и вырожденность состояний, размерность мультиплета, классификация адронов по симметрии ароматов кварков, октеты и декуплеты, нейтральные компоненты и их кварковый состав, изоспин как оператор из полного набора наблюдаемых, необходимость введения цвета кварков, симметрия и антисимметрия тензоров неприводимых представлений и схемы Юнга, разложение тензорного произведения неприводимых представлений в прямую сумму неприводимых представлений, фундаментальные представления группы $SU(5)$ и квантовые числа базисных состояний, квадратичный оператор Казимира и индекс Дынкина для определяющего фундаментального представления группы $SU(N)$.

4.1 Фундаментальные представления

Алгебра второго ранга имеет пару фундаментальных векторов, каждый из которых, согласно определению

$$2 \frac{(\lambda_j, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} = \delta_{jm} \quad (\text{II.2.9})$$

имеет проекцию $\frac{1}{2}$ на соответствующий простой положительный корень и ортогонален другому простому положительному корню. Для $\mathfrak{su}(3)$ такие фундаментальные корни изображены на рис. 2.5. Их

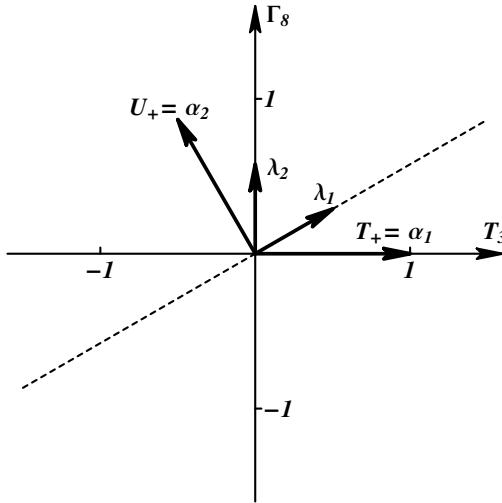


Рис. 2.5: Фундаментальные векторы алгебры $\mathfrak{su}(3)$ на плоскости $\{T_3, \Gamma_8\}$.

координаты в декартовой системе

$$\lambda_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right), \quad \lambda_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad (\text{II.4.1})$$

поскольку соответствующие корневые векторы (см. рис. 2.1 на стр. 68 в Главе 2) —

$$\alpha_1 = (1, 0), \quad \alpha_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \gamma = \alpha_1 + \alpha_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right). \quad (\text{II.4.2})$$

■ Воспользуемся явными значениями координат векторов и заметим, что

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \lambda_1 + \lambda_2. \quad (\text{II.4.3})$$

В правой части этой формулы стоит сумма фундаментальных векторов с положительными коэффициентами так, что эта сумма, записанная в виде $p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2$, задает состояние старшего веса неприводимого представления $T^{(p_1, p_2)}$, а в рассматриваемом варианте это представление $T^{(1,1)}$, которое является присоединенным представлением группы $SU(3)$. И в (II.4.3) мы установили, что старший вес присоединенного представления равен сумме

простых положительных корней группы $SU(3)$, которая задает третий положительный корень этой группы. Тот факт, что этот третий положительный корень существует для $SU(3)$ следует из диаграммы Дынкина для этой группы. ■

Операции вейлевских отражений $\mathfrak{s}_{1,2}$ на весовой диаграмме неприводимого представления задаются зеркальными отражениями относительно осей фундаментальных векторов. Это следует из того, что фундаментальный вектор по определению перпендикулярен всем простым положительным корням, кроме одного, которому он ко-дуален. Для случая алгебры $\mathfrak{su}(3)$ каждый фундаментальный вектор перпендикулярен одному из двух корней, которые мы выбрали в качестве простых положительных из 6 имеющихся корней в алгебре $SU(3)$. Гиперплоскость отражения с номером два, а в случае $SU(3)$ линия отражения показана на рис. 2.5 как штриховая. Она перпендикулярна второму простому положительному корню, а первая — первому, и совпадает с осью ординат.

Напомним общие положения о неприводимом представлении и состоянии старшего веса. Старший вес неприводимого представления равен сумме фундаментальных векторов λ_m с неотрицательными целыми коэффициентами p_m . Эти коэффициенты равны числу шагов понижения состояния старшего веса генераторами $\Gamma_{-\alpha_m}$ для простых положительных корней α_m с номером m соответствующего фундаментального вектора λ_m . Из этого вытекает структура базиса собственных состояний подалгебры Картана первого фундаментального представления со старшим весом

$$\mu_S = \lambda_1. \quad (\text{II.4.4})$$

Допускается только один шаг понижения в направлении α_1 , т.е. под действием $\Gamma_{-\alpha_1}$ или $T_- = \sqrt{2} \Gamma_{-\alpha_1}$, что эквивалентно также действию на вес старшего вектора операции отражения относительно линии нормали к вектору α_1 , т.е. \mathfrak{s}_1 . В самом деле, по общей формуле

$$\mathfrak{s}_m \lambda_j = \lambda_j - 2 \frac{(\lambda_j, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} \alpha_m = \lambda_j - \delta_{jm} \alpha_m \quad (\text{II.4.5})$$

найдем, что

$$\mathfrak{s}_1 \lambda_1 = \lambda_1 - \alpha_1, \quad \mathfrak{s}_1 \lambda_1 = \nu_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right), \quad (\text{II.4.6})$$

как показано на рис. 2.6.

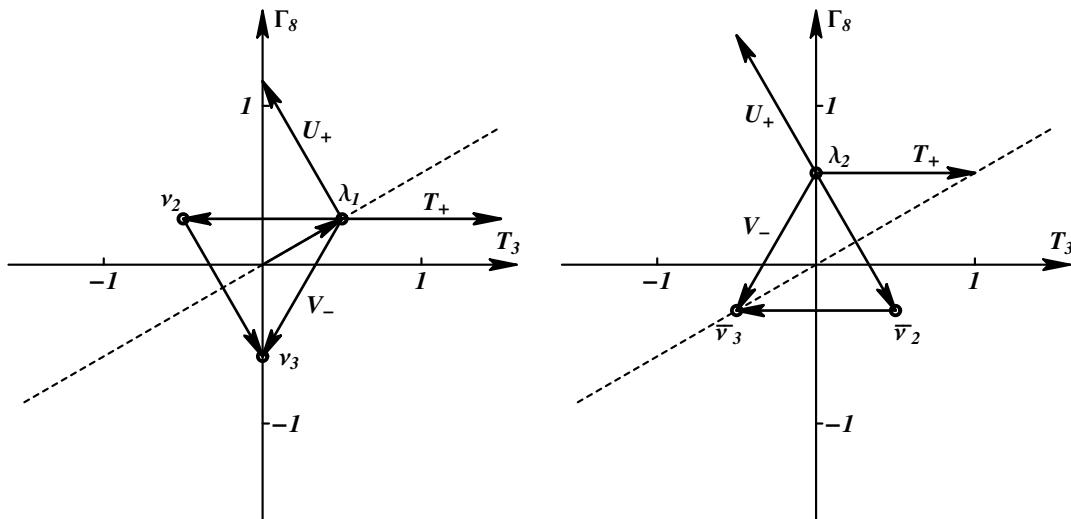


Рис. 2.6: Базис фундаментальных представлений алгебры $\mathfrak{su}(3)$ в виде точек на плоскости $\{T_3, \Gamma_8\}$.

Подчеркнем, что операция отражения весов индуцирована операцией отражения базисных состояний с этими же весами, и в данном случае

$$\mathfrak{s}_1 |\lambda_1\rangle = |\nu_2\rangle,$$

так что рассуждения с отражением невырожденных весов эквивалентны рассуждениям с отражениями Вейля для базисных состояний неприводимого представления. Мы будем следовать этой логике и далее при построении фундаментальных представлений.

Поникающий оператор второго простого положительного корня $\Gamma_{-\alpha_2}$ или $U_- = \sqrt{2}\Gamma_{-\alpha_2}$, действуя на старший вектор, дает нуль, так как коэффициент перед вторым фундаментальным вектором в выражении для старшего вектора (II.4.4) равен нулю, а это значит, что и число шагов по направлению против простого положительного корня α_2 равно нулю. Это также можно получить из общей формулы (II.2.20) в случае, когда вес невырожден

$$\Gamma_{-\alpha_m}|\tilde{\nu}\rangle = \sqrt{(\alpha_m, \tilde{\nu})}|\tilde{\nu} - \alpha_m\rangle \quad \text{при} \quad \Gamma_{\alpha_m}|\tilde{\nu}\rangle = 0, \quad 2 \frac{(\tilde{\nu}, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} = \tilde{p}_m \in \{0, \mathbb{N}\},$$

откуда после подстановок $\tilde{\nu} \mapsto \mu_S$ и $\alpha_m \mapsto \alpha_2$ получаем

$$\Gamma_{-\alpha_2}|\mu_S\rangle = \sqrt{(\alpha_2, \mu_S)}|\mu_S - \alpha_2\rangle = 0 \quad \text{при} \quad \Gamma_{\alpha_2}|\mu_S\rangle = 0, \quad \text{так как} \quad 2 \frac{(\mu_S, \alpha_2)}{(\alpha_2, \alpha_2)} = 2(\lambda_1, \alpha_2) = 0.$$

Наконец, вес третьего состояния может быть получен отражением ν_2 относительно второй оси (оператор s_2) для неприводимого представления с помощью (II.4.5) и (II.4.6)

$$s_2 \nu_2 = s_2 s_1 \lambda_1 = s_2 (\lambda_1 - \alpha_1) = \lambda_1 - \alpha_1 - 2 \frac{(\lambda_1 - \alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_2, \alpha_2)} \alpha_2 = \lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2 = \nu_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad (\text{II.4.7})$$

что также можно найти, действуя поникающим оператором $\Gamma_{-\alpha_1 - \alpha_2}$ или $\hat{V}_- = \sqrt{2}\Gamma_{-\alpha_1 - \alpha_2}$ на состояние старшего веса. Согласно (II.2.20)

$$\begin{aligned} \hat{V}_-|\mu_S\rangle &= \sqrt{2(\alpha_1 + \alpha_2, \mu_S)}|\mu_S - \alpha_1 - \alpha_2\rangle \quad \text{при} \quad \Gamma_{\alpha_1 + \alpha_2}|\mu_S\rangle = 0, \\ 2(\alpha_1 + \alpha_2, \mu_S) &= 2(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda_1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{V}_-|\mu_S\rangle = |\lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2\rangle = |\nu_3\rangle. \end{aligned}$$

Третий положительный корень, который равен сумме двух простых положительных корней $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2$, отвечает повышающему оператору Γ_γ или $\hat{V}_+ = \sqrt{2}\Gamma_\gamma$ и задает третье вейлевское отражение, которое является зеркальным относительно линии, ортогональной вектору V_- на рис. 2.6: эту линию отражения задает как раз вектор ν_2 . Это значит, что и для базисных состояний, и для их весов

$$s_3 \nu_2 = \nu_2, \quad s_3 |\nu_2\rangle = |\nu_2\rangle,$$

a

$$s_3 \lambda_1 = \nu_3, \quad s_3 |\lambda_1\rangle = |\nu_3\rangle.$$

Напомним, что действие группы Вейля переводит неприводимое представление в себя. Выше мы показали для первого фундаментального представления, что все отражения группы Вейля связывают невырожденные веса, изображенные на рис. 2.6. Из этого следует, что других состояний в этом фундаментальном представлении нет, и все базисные состояния, которые получаются при действии на состояние старшего веса многократным действием всех поникающих операторов алгебры, уже исчерпаны полученными базисными состояниями с тремя весами $\mu_S = \lambda_1$, ν_2 и ν_3 . Эти три состояния принято называть триплетом и обозначать **3**.

Рассуждения от противного подтверждают сделанное утверждение о том, что триплет исчерпывает все состояния первого фундаментального представления: если действие поникающих операторов приводило бы к состояниям с весами вне рамок треугольника, образованного триплетом, то применение к этим состояниям операций вейлевских отражений привело бы к состояниям с весами, старше, чем вес первого фундаментального представления, та как эти веса располагались бы и выше и правее, чем вес λ_1 , а это противоречило бы однозначному определению неприводимого представления. Внутри треугольника состояний $|\lambda_1\rangle, |\nu_2\rangle, |\nu_3\rangle$ также не может быть состояний этого представления, так как все веса неприводимого представления получаются действием поникающих операторов на старший вес, и эти веса мы уже перечислили.

Аналогично строится и второе фундаментальное представление со старшим весом $\mu_S = \lambda_2$ (см. рис. 2.6). Этот старший вес можно однократно понизить лишь в обратном направлении простого положительного корня α_2 или вейлевским отражением относительно этого корня, так как простой положительный корень α_1 ортогонален фундаментальному вектору λ_2 . Таким образом находим состояние с весом $\bar{\nu}_2$, на которое можно в свою очередь действовать оператором отражения s_1 , отразив весовой вектор $\bar{\nu}_2$ относительно линии ординат, и заполнить тем самым базис фундаментального представления состоянием с весом $\bar{\nu}_3$.

При рассмотрении операций вейлевских отражений мы установили, что группа Вейля не меняет кратность вырождения веса в неприводимом представлении, а так как старший вес является невырожденным, каждой точке на плоскости весов, полученной при отражении старшего веса, соответствует

только одно состояние. В случае фундаментального представления все веса базисных состояний были получены вейлевскими отражениями, а значит, все базисные состояния фундаментального представления невырождены.

На данный момент мы получили все необходимые математические результаты, чтобы полноценно обсуждать физические аспекты в групповых терминах: структуру, свойства и классификацию сильно-взаимодействующих частиц.

4.2 Сильные взаимодействия кварков

Приведем пример из теории кварковой структуры сильно-взаимодействующих частиц – адронов. К адронам относятся барионы, которые составлены из трех кварков (qqq), и мезоны, состоящие из кварка и антикварка ($q\bar{q}$), а также экзотические состояния, которые получаются добавлением в эти связанные состояния кварков дополнительных кварк-антикварковых пар ($q'q''$): пентакварки – это состояния ($qqqq'\bar{q}''$), тетракварки – $q\bar{q}q'\bar{q}''$ и т.п. Группа преобразований кварка одного аромата на кварк другого аромата в таких адронах возникает аналогично группе $SU(2)$ изотопических преобразований двухкомпонентной нуклонной волновой функции, как это было рассмотрено нами выше при описании масс барионов и мезонов, когда базисные состояния неприводимого представления с заданным изоспином с высокой степенью точности обладают одной и той же массой, которую мы считаем пропорциональной собственному значению квадратичного инварианта Казимира в данном неприводимом представлении. Если теперь к обычным кваркам u и d , из которых состоят нуклоны, добавить нестабильный странный кварк s с зарядом $-\frac{1}{3}$ и массой около сотни МэВ, то можно говорить о приближенной симметрии сильно-взаимодействий относительно матричных преобразований трехкомпонентной кварковой волновой функции, когда вместо базисного состояния с определенным ароматом кварка можно взять линейную комбинацию базисных состояний любых ароматов кварков, так что при этом масса состояния не изменится, если не изменится число кварков. Число кварков в заданном состоянии определяется как сумма квадратов амплитуд вероятности найти каждое из базисных состояний с определенным ароматом кварка в заданном состоянии. Это значит, что матричные преобразования трехкомпонентной волновой функции сохраняют норму этой волновой функции, что, как мы установили на примере изотопических преобразований в Главе 2, раздел 3.4, §3, задает вероятность найти в адроне кварк того или иного аромата (см. также §1 в Приложении, где описаны основные понятия и обозначения квантовой механики). Значит, 3×3 -матрицы являются унитарными. Так же, как и при рассмотрении группы изотопической инвариантности ароматов кварков, исключение ненаблюдаемой общей комплексной фазы трехкомпонентной волновой функции приводит к группе $SU(3)$. Эта инвариантность носит название симметрии кварковых ароматов [flavor (US), flavour (UK)] и поэтому обозначается $SU_f(3)$.

Поскольку масса странного кварка $m_s \sim 150$ МэВ сравнима с масштабом энергии сильных взаимодействий $\Lambda_{QCD} \sim 300$ МэВ, который определяет радиус действия ядерных сил и энергию связи кварков в адронах, вклад массы странного кварка в энергию связанного состояния, образованного кварками, становится заметным по сравнению с пренебрежимо малым вкладом масс легких u - и d -кварков, массы которых существенно меньше масштаба энергий сильных взаимодействий $m_{u,d} \sim 5$ МэВ $\ll 300$ МэВ. Например, для мезонов, образованных легкими кварком и антикварком и имеющими массу $M \sim 2\Lambda_{QCD}$, поправка за счет массы легких кварков находится на уровне $m_{u,d}/M \sim 5/600$, а разница в массах u - и d -кварков, которое составляет $m_d - m_u \sim 2$ МэВ, приводит к еще меньшим поправкам к массе мезона при замене одного легкого кварка другим. Для барионов, составленных из трех легких кварков с массой связанного состояния $M \sim 3\Lambda_{QCD} \sim 900$ МэВ, разница масс легких кварков становится еще менее значимым. Поэтому полагают, что адроны в рамках симметрии ароматов кварков группируются по своим массам согласно неприводимым представлениям группы симметрии ароматов кварков так, что базисные состояния одного и того же неприводимого представления это и есть адроны, которые обладают одной и той же массой. В таком случае говорят, что эти базисные состояния неприводимого представления образуют мультиплет адронов, например, триплет мезонов или дублет барионов по изоспину в случае симметрии $SU_f(2)$. Мультиплеты адронов могут иметь разные массы, что отвечает различным значениям групповых инвариантов Казимира, которые, как полагают, и определяют инвариантное относительно группы симметрии ароматов кварков значение масс базисных состояний мультиплета. Важно, что группа симметрии указывает состав мультиплетов.

Расширение кваркового дублета легких кварков до триплета за счет добавления странного кварка означает, что массы адронов со странным кварком даже в рамках одного неприводимого представления будут отличаться от масс адронов с легкими кварками в том же мультиплете на величину порядка 150 МэВ, т.е. эффекты нарушения $SU_f(3)$ существенно заметнее в различии масс адронов одного неприводимого представления, чем в случае изотопической симметрии. Тем не менее, обычно полагают, что базовые состояния мультиплета с точностью до 150 МэВ обладают практически одинаковыми массами, т.е. масса базисных состояний одного неприводимого представления – это инвариант, а значит, масса состояний мультиплета – это функция собственных значений операторов Казимира для данного пред-

ставления.

Такая инвариантность масс состояний мультиплета неприводимого представления группы относительно преобразований $SU_f(3)$ трактуется как группа симметрии в спектроскопии многоквартовых состояний, а именно, симметрия задает состав мультиплета, что явилось в свое время существенным достижением при классификации растущего числа вновь открытых мезонов, барионов и гиперонов со странными кварками и позволило систематизировать «зоологию» адронов с помощью введения симметрии кварковых ароматов, а также понять, что отличие масс мультиплетов основано на принципе возбуждения связанных мультиквартовых состояний. Равенство масс состояний в мультиплете является приближенным. Поэтому и сама симметрия кварковых ароматов считается приближенной. Говорят, что она нарушена, но степень нарушения определяется поправками, которые считаются малыми, а именно, полагают, что поправки возникают при рассмотрении масс состояний мультиплета в выражениях, которые разлагаются в ряд по малому параметру $\kappa \sim \Delta M/M$, где M — масса состояний мультиплета, инвариантная относительно действия группы преобразования ароматов кварков, причем численно $M \gtrsim 1$ ГэВ, а $\Delta M \lesssim 100$ МэВ, т.е. $\kappa \lesssim 0.1$.

Пара традиционно используемых квантовых чисел, характеризующих базис фундаментального представления $SU_f(3)$, как мы уже упоминали выше, — это проекция изоспина T_3 (горизонтальная ось на весовой диаграмме представления) и гиперзаряд Y , который связан с генератором подалгебры Картана $\Gamma_8 = Y\sqrt{3}/2$ (вертикальная ось на весовой диаграмме представления). При этом, если изоспин позволяет различать друг от друга u - и d -кварки, гиперзаряд вводит в рассмотрение новое квантовое число — странность S :

$$Y = B + S, \quad (\text{II.4.8})$$

где B — «барионный» заряд, который для кварков полагают равным $B = \frac{1}{3}$ так, чтобы барион, составленный из трех кварков имел барионный заряд, равный единице, а странность отлична от нуля только для странного кварка

$$\{u, d\} \mapsto S = 0, \quad s \mapsto S = -1.$$

Поскольку в рамках группы $SU_f(3)$ гиперзаряд Y с точностью до множителя представляет собой один из выбранных в рамках традиции генераторов подалгебры Картана $Y = 2\Gamma_8/\sqrt{3}$, странность с точностью до сдвига на барионное число также указывает на собственные значения этого же генератора подалгебры Картана, а ее значения за счет выбора множителя подобраны так, чтобы у странного кварка странность принимала целое значение -1 .

Более подробно, перепишем связь (II.4.8) в виде

$$S = \Gamma_8 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - B, \quad (\text{II.4.9})$$

а значит, странность — это с точностью до указанного в формуле (II.4.9) масштабного множителя оператор подалгебры Картана Γ_8 со смещением $-B$, которое одинаково для всех базисных состояний представления. Это значит, что изменение странности базисного состояния неприводимого представления определяет смещение расположения точки, которая соответствует весу базисного состояния на весовой диаграмме, по вертикальной оси, которая отвечает шкале собственных значений Γ_8 , с инкрементом, который пропорционален инкременту значения странности. Тогда для странного кварка

$$S = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} = -1, \quad s\text{-кварк},$$

в то время как для u - и d -кварков

$$S = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} = 0, \quad u\text{- и } d\text{-кварки}.$$

Барионное число в мультиплете неприводимого представления — это просто сумма барионных чисел кварков и антикварков, из которых построено многоквартовое состояние. Заметим, что неприводимые представления $\mathfrak{su}(3)$ можно построить в виде тензорных произведений, где множителями являются фундаментальные представления этой алгебры, т.е. в виде произведения волновых функций кварков и антикварков, которые соответствуют двум фундаментальным представлениям группы ароматов легких кварков. Число кварков и антикварков определенного аромата, которое определяет, как говорят, валентный состав многоквартового состояния, фиксировано для заданного неприводимого представления, а значит, фиксировано и барионное число B для этого неприводимого представления группы симметрии. Поэтому изменение гиперзаряда у состояний мультиплета отвечает изменению числа странных кварков в валентном составе многоквартового мультиплета. В итоге, сам валентный состав базисных состояний

определяется валентным составом фундаментальных представлений группы симметрии, тензорные произведения которых образуют неприводимое представление. Это значит, что у базисных состояний, расположенных по горизонтальной оси на весовой диаграмме³⁵, вдоль которой откладываются собственные значения проекции изоспина, т.е. у состояний с одним гиперзарядом меняется только проекция изоспина, а переход от состояний на одной горизонтальной линии к состояниям на другой горизонтальной линии, т.е. переход от состояний с одним гиперзарядом к состояниям с другим гиперзарядом должен сопровождаться изменением числа странных夸克ов. Это следует из того, что по этим осям откладываются собственные значения генераторов подалгебры Картана: изоспина и гиперзаряда.

Электрический заряд так же, как и в случае группы $SU(2)$, выражается через гиперзаряд и изоспин

$$Q = \frac{Y}{2} + T_3. \quad (\text{II.4.10})$$

С точки зрения и логики изложения, и физики нам важно, что оператор, стоящий за этим соотношением, фиксирует некую линейную комбинацию генераторов подалгебры Картана, которая соответствует повороту в плоскости весов от ортогональных осей, отвечающих проекции изоспина и гиперзаряда, к другим ортогональным осям, одной из которых является ось отсчета электрического заряда, что определяет один из возможных вариантов выделения подгруппы $SU(2)$ в $SU(3)$. В самом деле, перепишем связь (II.4.10) в виде

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} \Gamma_8 + T_3, \quad (\text{II.4.11})$$

что можно представить в виде ортогонального преобразования, т.е. поворота, если ввести тангенс угла подобного поворота θ так, что

$$Q = \operatorname{tg} \theta \cdot \Gamma_8 + T_3 = \frac{1}{\cos \theta} (\sin \theta \cdot \Gamma_8 + \cos \theta \cdot T_3),$$

а значит,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \theta = \frac{\pi}{6}.$$

В таком походе поворот осей (T_3, Γ_8) на плоскости весовой диаграммы на угол $\theta = 30^\circ$ против часовой стрелки (см рис. 2.2 на стр. 70 и рис. 2.5 на стр. 102) отвечает переходу к осям $(\tilde{\Gamma}, U_3)$, где $\tilde{\Gamma} = \cos \theta \cdot Q$ — это ось электрического заряда с точностью до указанного множителя $\cos \theta$, а вторая ось просто совпадает с осью, вдоль которой откладываются собственные значения проекции U_3 для U -изоспина:

$$U_3 = \cos \theta \cdot \Gamma_8 - \sin \theta \cdot T_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \Gamma_8 - \frac{1}{2} \cdot T_3. \quad (\text{II.4.12})$$

Итак, в первом фундаментальном представлении веса базисных состояний на двумерной весовой диаграмме с координатами $(T_3, \frac{\sqrt{3}}{2} Y) \equiv (T_3, \Gamma_8)$ в точности соответствуют квантовым числам夸克ов:

$$\begin{aligned} |\lambda_1\rangle &= \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\} \quad \mapsto \quad T_3 = +\frac{1}{2}, \quad Y = +\frac{1}{3}, \quad Q = +\frac{2}{3}, \quad U_3 = 0, \quad \mapsto \quad u, \\ |\nu_2\rangle &= \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\} \quad \mapsto \quad T_3 = -\frac{1}{2}, \quad Y = +\frac{1}{3}, \quad Q = -\frac{1}{3}, \quad U_3 = +\frac{1}{2}, \quad \mapsto \quad d, \\ |\nu_3\rangle &= \left\{ 0, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\} \quad \mapsto \quad T_3 = 0, \quad Y = -\frac{2}{3}, \quad Q = -\frac{1}{3}, \quad U_3 = -\frac{1}{2}, \quad \mapsto \quad s. \end{aligned} \quad (\text{II.4.13})$$

У античастиц меняет знак каждый из зарядов: барионное число $B \rightarrow -B$, странность $S \rightarrow -S$ и электрический заряд $Q \rightarrow -Q$, в согласии с (II.4.10) и проекция изоспина $T_3 \rightarrow -T_3$. Значит, переход от夸克ов к антикваркам отвечает отражению весов квантовых состояний относительно как оси абсцисс, так и оси ординат. Но при таком полном зеркальном отражении весов на весовой диаграмме, как видно из рисунка 2.6, первое фундаментальное представление переходит во второе. Следовательно, базис второго фундаментального представления в точности отвечает антикваркам, в чем можно убедиться прямым сравнением квантовых чисел базисных векторов с их значениями для антикварков.

$$|\bar{\nu}_3\rangle \mapsto \bar{u}, \quad |\bar{\nu}_2\rangle \mapsto \bar{d}, \quad |\lambda_2\rangle \mapsto \bar{s}.$$

³⁵Напомним, что весовой называется диаграмма, на которой в пространстве, размерность которого равна рангу группы, в виде точек с координатами, равными весам базисных состояний неприводимого представления, обозначено расположение этих базисных состояний. Для группы $SU(3)$ с рангом, равным двум, речь идет о плоскости, на которой точками отмечены состояния мультиплета.

Квантовые состояния в гильбертовом пространстве фундаментального представления записываются в виде суперпозиции базисных

$$|\psi\rangle = v^{(1)}|u\rangle + v^{(2)}|d\rangle + v^{(3)}|s\rangle, \quad (\text{II.4.14})$$

так что естественно ввести соответствующий контравариантный столбец v с верхним индексом F для обозначения ароматов кварков

$$|\psi\rangle \mapsto \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \\ v^{(3)} \end{pmatrix} = v^F, \quad F \in \{\overline{1}, \overline{3}\}. \quad (\text{II.4.15})$$

Говорят, что первое фундаментальное представление — это триплет **3** (по размерности базиса пространства неприводимого представления, эту размерность называют также мультиплетностью).

Квантовые состояния в гильбертовом пространстве второго фундаментального представления записываются в виде суперпозиции базисных

$$|\bar{\psi}\rangle = \bar{v}_{(1)}|\bar{u}\rangle + \bar{v}_{(2)}|\bar{d}\rangle + \bar{v}_{(3)}|\bar{s}\rangle, \quad (\text{II.4.16})$$

так что можно ввести соответствующий контравариантный столбец \bar{v} для этого антитриплета **3̄** с нижним индексом с чертой F̄ для антикварков

$$|\bar{\psi}\rangle \mapsto \begin{pmatrix} \bar{v}_{(1)} \\ \bar{v}_{(2)} \\ \bar{v}_{(3)} \end{pmatrix} = \bar{v}_{\bar{F}}, \quad \bar{F} \in \{\overline{1}, \overline{3}\}. \quad (\text{II.4.17})$$

Введение индексов позволяет говорить о тензорных обозначениях.

Для того чтобы показать, как преобразуются при действии элементов группы SU(3) введенные векторы фундаментальных представлений v^F и $\bar{v}_{\bar{F}}$, необходимо построить матрицы генераторов преобразований в этих представлениях.

4.3 Матрицы Гелл-Манна

Воспользуемся общей формулой³⁶ (II.2.20) в случае состояния с невырожденным весом

$$\Gamma_{-\alpha_m}|\tilde{\nu}\rangle = \sqrt{(\alpha_m, \tilde{\nu})}|\tilde{\nu} - \alpha_m\rangle \quad \text{при} \quad \Gamma_{\alpha_m}|\tilde{\nu}\rangle = 0, \quad 2 \frac{(\tilde{\nu}, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} = \tilde{p}_m \in \{0, \mathbb{N}\}, \quad (\text{II.2.20}')$$

для того, чтобы установить значения матричных элементов повышающих и понижающих операторов в фундаментальном представлении.

Для начала согласно (II.2.20') для базисного состояния первого фундаментального представления

$$|\tilde{\nu}\rangle \mapsto |\lambda_1\rangle = |u\rangle, \quad \Gamma_{\alpha_1}|\lambda_1\rangle = 0, \quad \text{так что} \quad \Gamma_{-\alpha_1}|u\rangle = \sqrt{(\alpha_1, \lambda_1)}|d\rangle, \quad 2 \frac{(\lambda_1, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} = 1,$$

устанавливаем, что для $T_- = \sqrt{2}\Gamma_{-\alpha_1}$

$$\langle d|T_-|u\rangle = 1, \quad (\text{II.4.18})$$

а его действие на другие состояния триплета дает нуль пространства состояний (см. рис. 2.6):

$$T_-|d\rangle = T_-|s\rangle = 0.$$

Это значит, что 3×3 -матрица T_-

$$T_- = \begin{pmatrix} T_{uu} & T_{ud} & T_{us} \\ T_{du} & T_{dd} & T_{ds} \\ T_{su} & T_{sd} & T_{ss} \end{pmatrix}$$

³⁶ Для пытливого читателя еще раз подчеркнем, что комплексные фазы коэффициентов в результате действия понижающих генераторов в соотношениях (II.2.20) были подобраны равными нулю, что возможно, так как эти фазы определяются, во-первых, свободой выбора комплексной фазы каждого базисного состояния представления, нормированного на единицу, а во-вторых, свободой выбора общей комплексной фазы каждой повышающей или понижающей матрицы-генератора в представлении: эти переопределения фаз состояний и матриц являются независимыми (см. (I.3.18) и обсуждение в сноске к этой формуле). Поэтому в последующих формулах нормировочные множители при действии понижающих генераторов положительны.

имеет только один отличный от нуля элемент $\langle d | T_- | u \rangle$,

$$T_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.4.19})$$

Аналогично согласно (II.2.20') для

$$|\tilde{\nu}\rangle \mapsto |\nu_2\rangle = |d\rangle, \quad \Gamma_{\alpha_2}|\nu_2\rangle = 0, \quad \text{так что} \quad \Gamma_{-\alpha_2}|d\rangle = \sqrt{(\alpha_2, \nu_2)}|s\rangle, \quad 2 \frac{(\nu_2, \alpha_2)}{(\alpha_2, \alpha_2)} = 1,$$

устанавливаем, что для $U_- = \sqrt{2}\Gamma_{-\alpha_2}$

$$\langle s | U_- | d \rangle = 1, \quad (\text{II.4.20})$$

а его действие на другие состояния триплета дает нуль пространства состояний (см. рис. 2.6):

$$U_-|u\rangle = U_-|s\rangle = 0.$$

Следовательно, 3×3 -матрица U_- имеет только один отличный от нуля элемент $\langle s | U_- | d \rangle$,

$$U_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.4.21})$$

И наконец, согласно (II.2.20) для

$$|\tilde{\nu}\rangle \mapsto |\lambda_1\rangle = |u\rangle, \quad \Gamma_{\alpha_1+\alpha_2}|\lambda_1\rangle = 0, \quad \text{так что} \quad \Gamma_{-\alpha_1-\alpha_2}|u\rangle = \sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda_1)}|s\rangle,$$

учтем, что

$$2 \frac{(\lambda_1, \alpha_1 + \alpha_2)}{(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2)} = 1,$$

и найдем, что для $V_- = \sqrt{2}\Gamma_{-\alpha_1-\alpha_2}$

$$\langle s | V_- | u \rangle = 1, \quad (\text{II.4.22})$$

а его действие на другие состояния триплета дает нуль пространства состояний (см. рис. 2.6):

$$V_-|d\rangle = V_-|s\rangle = 0.$$

В итоге, 3×3 -матрица V_- имеет только один отличный от нуля элемент $\langle s | V_- | u \rangle$,

$$V_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.4.23})$$

Элементы диагональных матриц T_3 и Γ_8 задаются соответствующими координатами весов как собственных значений собственных состояний базиса, в котором мы записываем элементы матриц подалгебры Картана, т.е., соответственно, x - и y -компонентами весов для состояний базиса представления.

Здесь уместно напомнить о том, как устроен стандартный набор генераторов в базисе Картана–Вейля (I.3.44), а именно, что элемент метрики Киллинга g_{ab} , который является частным случаем элемента следовой матрицы двух генераторов в рассматриваемом представлении R — элементом тензора второго ранга

$$g_{ab}^R \equiv \text{tr} (\Gamma_a \Gamma_b)_R.$$

Когда берется присоединенное представление (I.2.14),

$$g_{ab} = g_{ab}^{\text{ad}} \equiv \text{tr} (\Gamma_a \Gamma_b)_{\text{ad}}$$

имеет конформно евклидов вид

$$g_{ab} = \Omega^2 \delta_{ab} \quad \text{при} \quad \Omega^2 = C_A,$$

где $C_A = N$ в случае группы $SU(N)$, когда мы положили длину простых положительных корней группы равной единице (см. описание алгебр $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{su}(3)$ в разделах 1.1 и 1.3 Главы 2, §1, соответственно). В то же время, для генераторов подалгебры Картана фундаментального представления

$$g_{ab}^F = T_F \delta_{ab},$$

где индекс Дынкина (I.2.42) в случае группы $SU(N)$ по общим формулам, которые получены в задаче 25 на стр. 143, оказывается равным

$$T_F = \frac{1}{2}.$$

Для первого фундаментального представления определяют эрмитовы матрицы Гелл-Манна³⁷ λ_a

$$\frac{1}{2} \lambda_a \equiv \Gamma_a, \quad (\text{II.4.24})$$

где, согласно (II.1.18) в матричных обозначениях,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= T_+ + T_-, \quad \lambda_2 = -i(T_+ - T_-), \\ \lambda_4 &= V_+ + V_-, \quad \lambda_5 = -i(V_+ - V_-), \\ \lambda_6 &= U_+ + U_-, \quad \lambda_7 = -i(U_+ - U_-), \\ \lambda_3 &= 2T_3, \quad \lambda_8 = 2\Gamma_8. \end{aligned} \quad (\text{II.4.25})$$

Таким образом, из (II.4.19), (II.4.21) и (II.4.23), с учетом того, что поникающие и повышающие операторы связаны эрмитовым сопряжением, и

$$T_+ = T_-^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_+ = U_-^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_+ = V_-^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.4.26})$$

получаем³⁸

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{II.4.27})$$

Матрицы Гелл-Манна эрмитовы и имеют след, равный нулю, так что любая из эрмитово самосопряженных матриц 3×3 может быть представлены в виде суперпозиции единичной матрицы и восьми матриц Гелл-Манна с вещественными коэффициентами. Именно этот базис генераторов широко известен в физических приложениях группы $SU_f(3)$. Коммутационные соотношения для матриц Гелл-Манна суть следствие их связи с генераторами Γ_a :

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2i f_{abc} \lambda_c, \quad (\text{II.4.28})$$

где f_{abc} — антисимметричные по перестановке любой пары индексов структурные константы алгебры $\mathfrak{su}(3)$, введенные в (II.1.20) (см. также обсуждение перед (II.1.20) и сноски на стр. 70, где указано, что опускание верхнего индекса структурных констант проводится символом Кронекера $f_{abc} = f_{ab}^{c'} \delta_{c'c}$).

Поскольку групповые координаты вблизи произвольного элемента группы можно ввести переносом координатной сетки в окрестности единицы, дифференциал оператора преобразований $g(\mathbf{a})$ выражается через генераторы

$$dg(\mathbf{a}) = -i\Gamma d\mathbf{a} \cdot g(\mathbf{a}). \quad (\text{II.4.29})$$

При интегрировании это дает вид конечного элемента группы как матрицы для первого фундаментального представления

$$g(\mathbf{a}) = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{a} \right\}. \quad (\text{II.4.30})$$

³⁷Подчеркнем, что буквенное обозначение матриц Гелл-Манна является общепринятым, и читателя не должно смущать то, что та же буква λ используется для обозначения фундаментального вектора.

³⁸Методом пристального взгляда читатель может увидеть в явном виде матриц $\lambda_1, \dots, \lambda_7$ обобщение матриц Паули на пространство матриц 3×3 , что не так элементарно в случае λ_8 .

В базисе собственных состояний подалгебры Картана так записывается групповое преобразование в экспоненциальной форме (см. обоснование формул (I.4.2)–(I.4.7) на стр. 46).

Свойства матриц g являются общими для любого представления $SU(3)$: унитарность и унимодулярность,

$$g \cdot g^\dagger = \mathbb{1}, \quad \det g = 1, \quad (\text{II.4.31})$$

что следует из эрмитовости матриц Гелл-Манна и их бесследовости, соответственно.

Искомый закон преобразования квarkовых состояний триплета $\mathbf{3}$ записывается в следующем виде:

$$v^F(\mathbf{a}) = \{g(\mathbf{a})\}_{\bullet F'}^F v^{F'} = \left\{ e^{-\frac{i}{2} \lambda \cdot \mathbf{a}} \right\}_{\bullet F'}^F v^{F'}, \quad (\text{II.4.32})$$

где матрицы Гелл-Манна по построению имеют индексы $\{\lambda_a\}_{\bullet F'}$.

Как мы полагали при построении первого фундаментального представления группы $SU(3)$, элементы v^F принадлежат контравекторному пространству, которое преобразуется матрицами $g(\mathbf{a})$ (II.4.32), а это значит, что согласно общему принципу линейной алгебры ковекторы v_F как элементы сопряженного ковекторного пространства преобразуются обратными матрицами. Поскольку $g^{-1} = g^\dagger$, эрмитово сопряженные элементы v^\dagger принадлежат ковекторному пространству,

$$v^F \mapsto (v^\dagger)_F, \quad (v^\dagger)_F(\mathbf{a}) = (v^\dagger)_{F'} \{g^{-1}(\mathbf{a})\}_{\bullet F'}^{F'}. \quad (\text{II.4.33})$$

Задача 20. Повторите схему, которая была построена для вывода матриц Гелл-Манна λ_a , теперь в случае второго фундаментального представления и выведите аналогичные матрицы $\bar{\lambda}_a$ для антитриплета $\bar{\mathbf{3}}$:

$$\bar{\lambda}_a = -\lambda_a^*.$$

Тем же способом устанавливаем матричные элементы для повышающих операторов по базису состояний второго фундаментального представления — антитриплета $\bar{\mathbf{3}}$ (см. обозначения в (II.4.14)–(II.4.17))

$$\langle \bar{d} | T_+ | \bar{u} \rangle = 1, \quad \langle \bar{s} | V_+ | \bar{u} \rangle = 1, \quad \langle \bar{s} | U_+ | \bar{d} \rangle = 1.$$

Поэтому с учетом координат базиса на плоскости $\{T_3, \Gamma_8\}$ легко находим вид генераторов преобразований для антикварков

$$\bar{\Gamma}_a \mapsto -\frac{1}{2} \lambda_a^*, \quad (\text{II.4.34})$$

т.е. антикварки фундаментального представления $\bar{v}_{\bar{F}}$ преобразуются комплексно сопряженными матрицами

$$g^*(\mathbf{a}) = \exp \left\{ \frac{i}{2} \lambda^* \cdot \mathbf{a} \right\}, \quad \bar{v}_{\bar{F}}(\mathbf{a}) = \{g^*(\mathbf{a})\}_{\bar{F}}^{\bullet \bar{F}'} \bar{v}_{\bar{F}'}. \quad (\text{II.4.35})$$

Последнюю формулу можно переписать, используя транспонированную матрицу,

$$\{g^*(\mathbf{a})\}_{\bar{F}}^{\bullet \bar{F}'} = \{\{g^*(\mathbf{a})\}^T\}_{\bullet \bar{F}}^{\bar{F}'} \equiv \{g^\dagger(\mathbf{a})\}_{\bullet \bar{F}}^{\bar{F}'},$$

так что

$$\bar{v}_{\bar{F}}(\mathbf{a}) = \bar{v}_{\bar{F}'} \{g^\dagger(\mathbf{a})\}_{\bullet \bar{F}}^{\bar{F}'} = \bar{v}_{\bar{F}'} \{g^{-1}(\mathbf{a})\}_{\bullet \bar{F}}^{\bar{F}'}, \quad (\text{II.4.36})$$

что совпадает с законом преобразования ковекторного триплета (II.4.33). Следовательно, во-первых,

$$\bar{v}_{\bar{F}} \delta_{\bar{F}}^{\bar{F}'} v^F \equiv \bar{v} \cdot v = \text{inv.} = (v^{F'})^* \delta_{F' F} v^F \equiv v^\dagger \cdot v,$$

так что в подобных выражениях контравариантные индексы с чертой в пространстве антитриплетного представления группы $SU(3)$ эквивалентны ковариантным индексам без черты в пространстве триплетного представления группы $SU(3)$. Во-вторых, это значит, что в терминах с использованием матричного умножения комплексно сопряженное представление для кварков v^* эквивалентно представлению для антикварков: $(v^*)_{\bar{F}} \cong \bar{v}_{\bar{F}}$ или, что то же, $\mathbf{3}^* \cong \bar{\mathbf{3}}$. В силу унитарности

$$g^\dagger(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}) = \mathbb{1} \Rightarrow (g^*(\mathbf{a}))^T \cdot g(\mathbf{a}) = \mathbb{1},$$

где эрмитово сопряжение матриц — это композиция комплексного сопряжения и транспонирования. Поэтому инвариантные билинейные выражения в терминах квark-антикварковых состояний с учетом группового преобразования

$$v \xrightarrow{g(\mathbf{a})} v(\mathbf{a}) \quad (\text{II.4.32})$$

имеют вид

$$v^\dagger \cdot v = v^\dagger(\mathbf{a}) \cdot v(\mathbf{a}) = \text{inv.} \Leftrightarrow \bar{v} \cdot v = \bar{v}(\mathbf{a}) \cdot v(\mathbf{a}) \equiv \bar{v}_F v^F = \text{inv.} \quad (\text{II.4.37})$$

Это еще раз показывает, что $\bar{v}_F \delta_F^F$ — это уже ковариантный объект в пространстве триплетного представления, который преобразуется обратной матрицей с точки зрения этого пространства состояний первого фундаментального представления.

Итак, мы установили законы групповых преобразований для двух фундаментальных представлений $SU(3)$, триплета **3** и антитриплета **3̄**, а также то, как из состояний этих представлений построить билинейный инвариант.

Свойства матриц Гелл-Манна. Поскольку метрика Киллинга пропорциональна евклидовой, в любом представлении

$$\text{tr}(\Gamma_a \Gamma_b) \sim \delta_{ab},$$

и в частности, в фундаментальном —

$$\text{tr}(\Gamma_a \Gamma_b) = T_F \delta_{ab}. \quad (\text{II.4.38})$$

В наших построениях, например,

$$\begin{aligned} \text{tr}(T_+ T_-) &= \langle u | T_+ T_- | u \rangle = \langle u | T_+ | d \rangle \langle d | T_- | u \rangle = 1 \Rightarrow \\ \text{tr}(\Gamma_1 \Gamma_1) &= \frac{1}{2^2} \text{tr} \{(T_+ + T_-)(T_+ + T_-)\} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Значит,

$$T_F = \frac{1}{2}, \quad (\text{II.4.39})$$

откуда согласно определению индекса Дынкина в фундаментальном представлении через след произведения генераторов Γ_a в (II.4.38) и связи генераторов Γ_a с матрицами Гелл-Манна λ_a в (II.4.24) получим

$$\text{tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}. \quad (\text{II.4.40})$$

Квадратичный оператор Казимира — инвариант

$$\Gamma_a \Gamma_a = \frac{1}{4} \lambda_a \lambda_a = C_F \cdot \mathbb{1}, \quad (\text{II.4.41})$$

где подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу групповых параметров $a \in \{\overline{1, 8}\}$. По построению

$$\frac{1}{4} \lambda_a \lambda_a = T_3^2 + \Gamma_8^2 + \frac{1}{2} (T_+ T_- + T_- T_+ + U_+ U_- + U_- U_+ + V_+ V_- + V_- V_+).$$

Можно взять матричный элемент последнего выражения по любому состоянию представления, например, по $|u\rangle$. Тогда легко найти

$$C_F = \frac{4}{3}. \quad (\text{II.4.42})$$

Произведение матриц Гелл-Манна раскрывается через коммутатор и антикоммутатор,

$$\lambda_a \lambda_b = \frac{1}{2} (\lambda_a \lambda_b - \lambda_b \lambda_a) + \frac{1}{2} (\lambda_a \lambda_b + \lambda_b \lambda_a) = i f_{abc} \lambda_c + \frac{1}{2} (\lambda_a \lambda_b + \lambda_b \lambda_a - \frac{1}{4} \delta_{ab} \lambda_c \lambda_c) + \frac{1}{8} \delta_{ab} \lambda_c \lambda_c.$$

В этом выражении мы выделили бесследовый по свертке индексов a и b вклад. С учетом значения квадратичного оператора Казимира (II.4.41) запишем

$$\lambda_a \lambda_b = \frac{1}{2} C_F \delta_{ab} \mathbb{1} + i f_{abc} \lambda_c + \frac{1}{2} (\lambda_a \lambda_b + \lambda_b \lambda_a - C_F \delta_{ab} \mathbb{1}).$$

Последний вклад

$$u_{ab} = \frac{1}{2} (\lambda_a \lambda_b + \lambda_b \lambda_a - C_F \delta_{ab} \mathbb{1}), \quad \text{где } \delta^{ab} u_{ab} = 0,$$

является эрмитовой 3×3 -матрицей, у которой след равен нулю,

$$\text{tr}(\lambda_a \lambda_b + \lambda_b \lambda_a - C_F \delta_{ab} \mathbb{1}) = 2\delta_{ab} + 2\delta_{ab} - C_F 3\delta_{ab} = 0,$$

а значит, эрмитову бесследовую 3×3 -матрицу u_{ab} можно разложить по базису матриц Гелл-Манна с вещественными коэффициентами

$$u_{ab} = d_{abc} \lambda_c, \quad \delta^{ab} u_{ab} = \delta^{ab} d_{abc} \lambda_c = 0 \Rightarrow \delta^{ab} d_{abc} = 0,$$

так что

$$\lambda_a \lambda_b = \frac{1}{2} C_F \delta_{ab} + i f_{abc} \lambda_c + d_{abc} \lambda_c, \quad (\text{II.4.43})$$

где коэффициенты d_{abc} можно записать, исходя из тождества

$$\begin{aligned} \text{tr}(u_{ab} \lambda_{c'}) &= d_{abc} \text{tr}(\lambda_c \lambda_{c'}) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \text{tr}\left((\lambda_a \lambda_b + \lambda_b \lambda_a - C_F \delta_{ab} \mathbb{1}) \lambda_{c'}\right) = d_{abc} \text{tr}(\lambda_c \lambda_{c'}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \text{tr}\left((\lambda_a \lambda_b + \lambda_b \lambda_a) \lambda_{c'}\right) - C_F \delta_{ab} \text{tr}(\lambda_{c'}) = d_{abc} 2 \delta_{cc'} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \text{tr}\left((\lambda_a \lambda_b + \lambda_b \lambda_a) \lambda_{c'}\right) = d_{abc} 2 \delta_{cc'}, \quad \text{так как } \text{tr}(\lambda_{c'}) = 0, \end{aligned}$$

т.е. учли, что след матриц Гелл-Манна равен нулю. В итоге,

$$d_{abc} = \frac{1}{4} \text{tr}(\{\lambda_a, \lambda_b\} \lambda_c), \quad \text{где } \{\lambda_a, \lambda_b\} \equiv \lambda_a \lambda_b + \lambda_b \lambda_a. \quad (\text{II.4.44})$$

Проверим, что верно равенство $\delta_{ab} d_{abc} = 0$, как это должно следовать из данного нами определения для бесселевого тензора u_{ab} , связанного с d -символами $u_{ab} = d_{abc} \lambda_c$:

$$\delta_{ab} d_{abc} = \delta_{ab} \frac{1}{4} \text{tr}(\{\lambda_a, \lambda_b\} \lambda_c) = \frac{1}{4} \text{tr}(2 \lambda_a \lambda_a \lambda_c) = 2 C_F \text{tr}(\lambda_c) = 0.$$

При этом символы d_{abc} являются симметричными по всем индексам, так как перестановка индексов b и c также приводит к симметричному выражению, если воспользоваться свойством следа и переставить последнюю матрицу в произведении на первое место или первую на последнее:

$$\text{tr}(\{\lambda_a, \lambda_b\} \lambda_c) = \text{tr}((\lambda_a \lambda_b + \lambda_b \lambda_a) \lambda_c) = \text{tr}(\lambda_c \lambda_a \lambda_b + \lambda_a \lambda_c \lambda_b) = \text{tr}(\{\lambda_a, \lambda_c\} \lambda_b),$$

а значит, симметричность имеет место и при перестановке индексов a и c .

После вычисления всех возможных вариантов следа трех матриц неравные нулю значения d -символа оказываются равными величинам

$$\begin{aligned} d_{118} &= d_{228} = d_{338} = -d_{888} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ d_{448} &= d_{558} = d_{668} = d_{778} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \\ d_{146} &= d_{157} = -d_{247} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = -d_{366} = -d_{337} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (\text{II.4.45})$$

Из определения этих величин в виде следа, симметризованного по индексам групповых параметров, ясно, что они задают вид кубического оператора Казимира, который был определен нами ранее на стр. 26 в общем виде как раз через симметричный тензор ранга k в виде следа симметризованного произведения генераторов в присоединенном представлении (переход к фундаментальному представлению для генераторов оказывается только на числовом множителе пропорциональности следов в разных представлениях и не является существенным, см. задачу 11 на стр. 27):

$$C_3 = d_{abc} \Gamma_a \Gamma_b \Gamma_c.$$

Напомним, что для произвольного представления нет необходимости каждый раз вычислять квадратичный и кубический операторы Казимира, которые однозначно характеризуют неприводимое представление $\mathfrak{su}(3)$, достаточно указать координаты старшего вектора состояния в базисе фундаментальных векторов, т.е. задать старший вес представления.

Задача 21. Докажите тождество Фирца, которое используется в вычислительных задачах с матрицами Гелл-Манна,

$$(\lambda_a)^{F_1}_{\bullet F_2} (\lambda_a)^{F_3}_{\bullet F_4} = 2 \delta^{F_1}_{F_4} \delta^{F_3}_{F_2} - \frac{2}{3} \delta^{F_1}_{F_2} \delta^{F_3}_{F_4}. \quad (\text{II.4.46})$$

Решение. Любую эрмитово самосопряженную матрицу Λ размером 3×3 можно представить в виде суммы единичной матрицы и матриц Гелл-Манна с вещественными коэффициентами,

$$\Lambda = C_0 \mathbb{1} + C_a \lambda_a, \quad C_0, C_a \in \mathbb{R}.$$

Коэффициенты разложения находятся при взятии следа произведения матриц,

$$\text{tr} \Lambda = 3C_0, \quad \text{tr}(\lambda_b \Lambda) = C_a 2 \delta_{ab},$$

а значит,

$$\Lambda = \sum_{B=0}^8 \Delta_B \lambda_B \text{tr}(\lambda_B \Lambda), \quad \text{где } \lambda_0 = \mathbb{1}, \quad \Delta_0 = \frac{1}{3}, \quad \Delta_a = \frac{1}{2}, \quad a \in \{\overline{1, 8}\}.$$

Это разложение в матричных индексах имеет вид

$$\Lambda_{\bullet}^{F_1}_{F_2} = \sum_{B=0}^8 \Delta_B(\lambda_B)_{\bullet}^{F_1}_{F_2} (\lambda_B)_{\bullet}^{F_3}_{F_4} \Lambda_{\bullet}^{F_4}_{F_3}$$

и верно, если

$$\sum_{B=0}^8 \Delta_B(\lambda_B)_{\bullet}^{F_1}_{F_2} (\lambda_B)_{\bullet}^{F_3}_{F_4} = \delta_{\bullet}^{F_1}_{F_4} \delta_{\bullet}^{F_3}_{F_2}.$$

Раскрывая сумму через единичные матрицы и матрицы Гелл-Манна, получим

$$\frac{1}{3} \delta_{\bullet}^{F_1}_{F_2} \delta_{\bullet}^{F_3}_{F_4} + \frac{1}{2} (\lambda_a)_{\bullet}^{F_1}_{F_2} (\lambda_a)_{\bullet}^{F_3}_{F_4} = \delta_{\bullet}^{F_1}_{F_4} \delta_{\bullet}^{F_3}_{F_2},$$

и тождество Фирца доказано.

Задача 22. Покажите, что в группе $SU(n+1)$ веса базисных состояний первого фундаментального представления задаются векторами $\nu_1 = \lambda_1 = \mu_S$, $\nu_{k+1} = \nu_k - \alpha_k$, где $k = \{\overline{1, n}\}$, а старшие веса фундаментальных представлений равны

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \nu_1 = \lambda_1, \\ \lambda_2 &= \nu_1 + \nu_2 = 2\lambda_1 - \alpha_1, \\ \lambda_{k+1} &= \sum_{m=1}^{k+1} \nu_m = (k+1)\lambda_1 - k\alpha_1 - (k-1)\alpha_2 - \dots - \alpha_k, \quad k = \{\overline{1, n}\}. \end{aligned}$$

Используйте значения скалярный произведений корневых векторов группы и определение фундаментальных векторов. Убедитесь, что «гипотетический» фундаментальный вектор λ_{n+1} тождественно равен нулю.

Задача 23. Докажите, что в группе $SU(n+1)$ состояния

$$|f_k\rangle = |\nu_1\rangle \wedge |\nu_2\rangle \wedge \dots \wedge |\nu_k\rangle, \quad k = \{\overline{2, n}\},$$

введенные в предыдущей задаче, являются состояниями старшего веса, т.е. для всех повышающих генераторов $\Gamma_+ = \Gamma_{\alpha_m}$

$$\Gamma_+ |f_k\rangle = 0.$$

Таким образом, построенные состояния старшего веса $|f_k\rangle$ совпадают с состояниями старшего веса фундаментальных представлений $|\lambda_k\rangle$.

4.4 Представления $T^{(p_1, p_2)}$

Неприводимое представление алгебры $\mathfrak{su}(3)$ однозначно задается парой целых неотрицательных чисел — координатами веса старшего вектора состояния в базисе фундаментальных векторов λ_1 и λ_2

$$\mu_S = p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2, \tag{II.4.47}$$

так что в декартовых координатах на плоскости $\{T_3, \Gamma_8\}$ фундаментальные векторы (II.4.1) дают

$$\mu_S = \left(\frac{p_1}{2}, \frac{p_1 + 2p_2}{2\sqrt{3}} \right). \tag{II.4.48}$$

Числа p_1 и p_2 указывают максимальное число шагов понижения старшего вектора состояния генераторами, отвечающими простым отрицательным корням $-\alpha_1$ и $-\alpha_2$. Крайние точки такого понижения могут быть получены операциями отражения Вейля относительно всех положительных корней алгебры $\mathfrak{su}(3)$ и, в частности, при зеркальном отражении относительно линий фундаментальных векторов алгебры, которые задают нормали к простым положительным корням алгебры (а в общем многомерном случае лежат в гиперплоскости, перпендикулярной корню).

Последовательное отражение как старшего веса, так и его зеркальных образов относительно линий фундаментальных векторов приводит к диаграмме для базисных состояний неприводимого представления, изображенных в виде точек, координаты которых равны координатам полученных при таких отражениях весовых векторов, отложенных из начала координат. В данном случае эти точки расположены в вершинах шестиугольника. Мы не будем здесь приводить таблицы явных выражений для координат этих точек, а ограничимся рассмотрением примеров на рис. 2.7, где показаны весовые диаграммы базисных состояний представлений $T^{(4,2)}$, $T^{(3,1)}$ и $T^{(4,1)}$ на плоскости изоспина и гиперзаряда.

Длины сторон шестиугольника равны p_1 и p_2 , и если одно из этих чисел равно нулю, шестиугольник вырождается в треугольник.

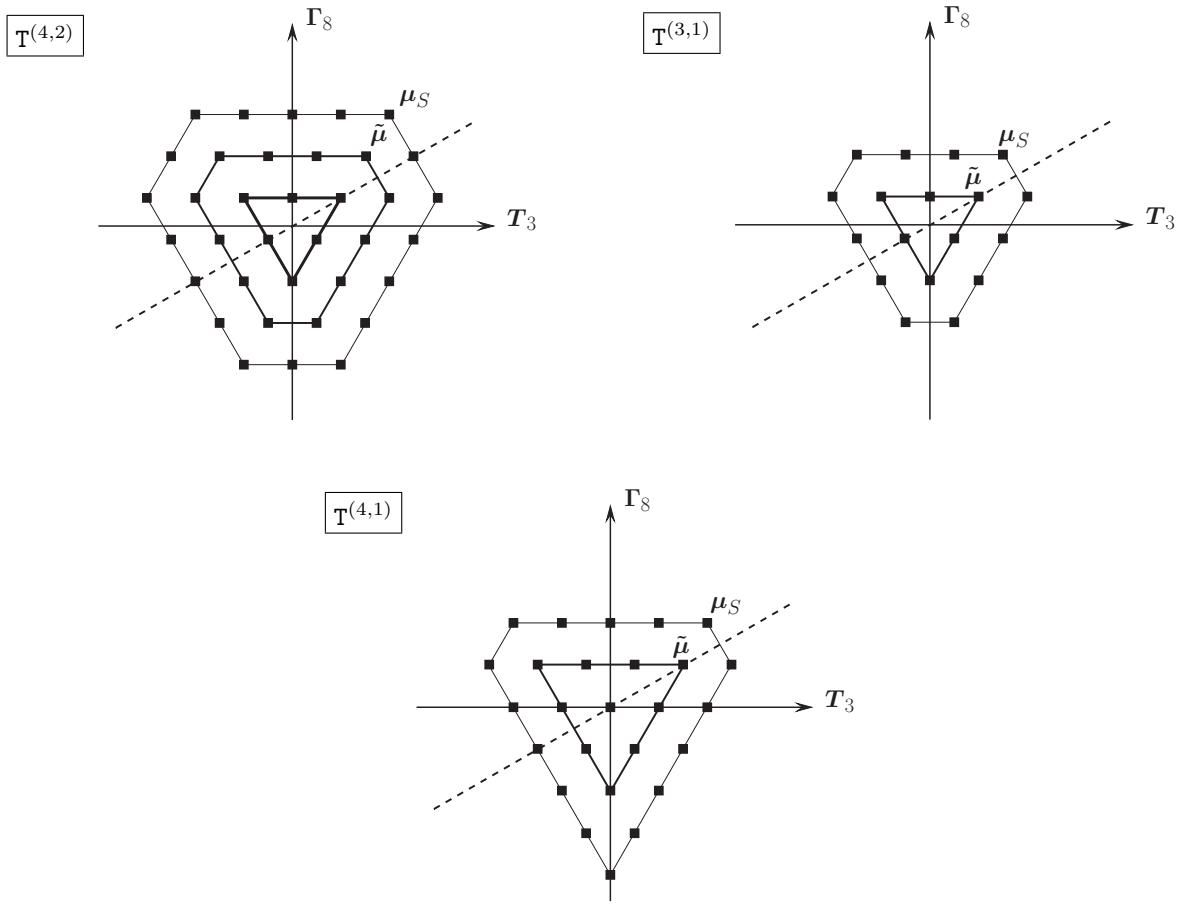


Рис. 2.7: Весовые диаграммы представлений $T^{(4,2)}$, $T^{(3,1)}$ и $T^{(4,1)}$ группы $SU(3)$.

Вне границ шестиугольника нет точек, отвечающих весам базисных состояний этого же неприводимого представления. Действительно, в противном случае, если существует базисное состояние с весом вне шестиугольника, то мы можем воспользоваться теми же операциями отражений Вейля. Одним из образов будет состояние с весом, которое может быть получено из состояния старшего веса, когда на него действуют не только понижающие, но и повышающие генераторы, что невозможно для состояний неприводимого представления с заданным состоянием старшего веса.

Все точки в вершинах внешнего шестиугольника отвечают невырожденным весам базисных состояний, поскольку они получены вейлевскими отражениями состояния невырожденного старшего веса. Точки на сторонах между вершинами описанного шестиугольника, когда координаты одной из вершин заданы координатами старшего веса неприводимого представления, также соответствуют невырожденным весам базисных состояний, поскольку, например, на верхней горизонтальной стороне не может быть весов дополнительных состояний, так как в противном случае такие дополнительные состояния можно было бы либо повысить до старшего вектора, что в противоречии с неприводимостью представления привело бы к вырождению старшего веса, либо одно из них после конечного числа шагов повышения не допускало бы дальнейшего повышения в сторону состояния старшего веса и само бы таким образом было старшим вектором состояния, определяющим другое неприводимое представление, что также противоречит неприводимости исходного представления. Такое же рассуждение справедливо и для второй стороны с вершиной, заданной старшим весом неприводимого представления. Остальные точки на сторонах рассматриваемого шестиугольника получаются отражением уже описанных точек на сторонах с вершиной в старшем весе. Значит, все точки весов на сторонах внешнего шестиугольника невырождены, что мы обозначаем на диаграмме, соединяя эти точки тонкой сплошной линией на рис. 2.7.

Физический смысл рассмотрения внешних сторон шестиугольника неприводимого представления можно описать следующим образом:

старший вектор состояния неприводимого представления алгебры $\mathfrak{su}(3)$ является и старшим вектором для подалгебр $\mathfrak{su}(2)$, которые задаются T - U - и V -изосpinами, так как

$$T_+ |\mu_S\rangle = 0, \quad U_+ |\mu_S\rangle = 0, \quad V_+ |\mu_S\rangle = 0. \quad (\text{II.4.49})$$

Координаты старшего веса определяют проекции старшего веса на соответствующие оси, задаваемые выбором генераторов подалгебры Картана. В $SU(3)$ операторов Картана два, первый из которых мы назвали T -изоспином. Всего в $SU(3)$ удобно выделять три разных генератора типа изоспина с коммутационными соотношениями генераторов группы $SU(2)$, которые мы обозначили буквами T , U и V . Проекции на ось соответствующего изоспина старшего веса равны (в квадратных скобках мы указываем весовой вектор, собственное значение проекции которого вычисляется)³⁹

$$T_3[\mu_S] = \frac{1}{2}p_1, \quad U_3[\mu_S] = \frac{1}{2}p_2, \quad V_3[\mu_S] = T_3[\mu_S] + U_3[\mu_S]. \quad (\text{II.4.50})$$

Проекция старшего вектора состояния на ось каждого изоспина является максимальной, так что, например, собственное значение квадрата T -изоспина⁴⁰, как и в группе $SU(2)$,

$$\mathbf{T}^2 = \frac{1}{2}(T_+T_- + T_-T_+) + T_3^2 = T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 \mapsto T(T+1)$$

задается этой максимальной проекцией

$$T = T_3^{\max},$$

и согласно (II.4.50) мы заключаем, что

$$T = T_3^{\max} = T_3[\mu_S] = \frac{1}{2}p_1, \quad U = U_3^{\max} = U_3[\mu_S] = \frac{1}{2}p_2, \quad V = V_3^{\max} = V_3[\mu_S] = \frac{1}{2}(p_1 + p_2). \quad (\text{II.4.51})$$

Понижение состояния старшего веса неприводимого представления многократным действием понижающего оператора T_- дает состояния с весами, которые расположены на горизонтальной стороне внешнего шестиугольника с вершиной в точке старшего веса. При этом, понижающий оператор T_- не изменяет собственное значение квадратичного инварианта Казимира для T -изоспина, а значит, вся эта сторона — это $2T+1$ состояний с T -изоспином, равным значению, которое указано в (II.4.51). На первой диаграмме рис. 2.7 T -изоспин на верхней стороне внешнего шестиугольника равен $T = 2$ ($2T+1 = 5$ состояний — это состояние старшего веса и базисные состояния, которые получаются за 4 шага действием понижающим оператором T_- , так как $p_1 = 4$ — это и есть число таких шагов в случае представления $T^{(4,2)}$).

Аналогичное рассуждение справедливо и для другой стороны внешнего шестиугольника, которая имеет вершину с координатами старшего веса, с той лишь разницей, что понижение идет оператором U_- , так что p_2+1 состояние на этой стороне — это $2U+1$ состояний с U -изоспином, равным значению, которое указано в (II.4.51): на рис. 2.7 значение U -изоспина на этой стороне равно 1 в случае представления $T^{(4,2)}$.

Ясно, что стороны внешнего шестиугольника с описанными нами направлениями вдоль простых положительных корней, также имеют определенные значения T - и U -изоспина, а стороны вдоль положительного корня V_+ отвечают вполне определенному значению V -изоспина.

В этих рассуждениях видна роль операторов Казимира подгруппы $SU(2)$, которые есть в группе $SU(3)$. С одной стороны, оператор Казимира, определенный в алгебре подгруппы $SU(2)$ и являющийся инвариантом подалгебры $SU(2)$, можно использовать как оператор, который входит в полный набор наблюдаемых, так как оператор Казимира в алгебре подгруппы $SU(2)$ коммутирует и с генераторами подалгебры Картана⁴¹ группы $SU(3)$, и с инвариантами группы $SU(3)$. С другой стороны, собственное значение оператора Казимира подгруппы может быть разным для разных базисных векторов состояния неприводимого представления группы Ли, что мы уже установили для весов на сторонах внешнего шестиугольника неприводимого представления на весовой диаграмме.

Мы видим, что в набор квантовых чисел базисных квантовых состояний неприводимого представления $SU(3)$ для достижения полноты необходимо включить и инвариант подгруппы $SU(2)$ — значение соответствующего квадратичного оператора Казимира этой подгруппы. Именно это позволит нам описать случаи, когда одному и тому же весу отвечают несколько квантовых состояний, так как они отличаются друг от друга собственным значением инварианта Казимира подгруппы $SU(2)$. Несколько состояний

³⁹Напомним, что операторы \hat{U}_3 , \hat{V}_3 являются комбинациями выбранных нами генераторов подалгебры Картана, как это было указано в (II.1.28) при рассмотрении алгебры $\mathfrak{su}(3)$.

⁴⁰Ка и прежде, значение изоспина, равное T , означает, что собственное значение квадратичного оператора Казимира равно $T(T+1)$.

⁴¹Для T -изоспина нулевое значение коммутаторов \mathbf{T}^2 с T_3 и с Γ_8 можно установить, вычислив их в фундаментальном представлении в терминах матриц Гелл-Манна, как это следует из самой схемы построения генераторов подалгебры Картана в этом представлении (см. раздел 4.3 Главы 2, §4). Дело в том, что квадраты матриц $T_x = \frac{1}{2}\lambda_1$, $T_y = \frac{1}{2}\lambda_2$ и $T_z = \frac{1}{2}\lambda_3$ — это диагональные матрицы, которые коммутируют с диагональными матрицами подалгебры Картана $T_3 = T_z$ и $\Gamma_8 = \frac{1}{2}\lambda_8$. Важно, что значения коммутаторов генераторов не зависят от представления, так как коммутаторы в различных представлениях изоморфно отображаются друг на друга. Для U - и V -изоспина в том же фундаментальном представлении компоненты $V_x = \frac{1}{2}\lambda_4$, $V_y = \frac{1}{2}\lambda_5$, а $U_x = \frac{1}{2}\lambda_6$, $U_y = \frac{1}{2}\lambda_7$, и их квадраты опять же являются диагональными матрицами, в то время как z -компоненты U - и V -изоспина составлены из диагональных матриц подалгебры Картана группы $SU(3)$, так что и квадраты U^2 и V^2 тоже коммутируют с диагональными матрицами подалгебры Картана группы $SU(3)$.

с одним весом на весовой диаграмме различаются операторами Казимира подгруппы $SU(2)$, так что мы получаем полную систему коммутирующих наблюдаемых, составленную из генераторов подалгебры Кардана группы $SU(3)$ и квадрата изоспина подгруппы $SU(2)$.

Внутри внешнего шестиугольника находятся внутренние шестиугольники. Число всех шестиугольников равно $k \equiv \min p_{1,2}$. В самом деле, как и в случае внешнего шестиугольника, каждый из этих внутренних шестиугольников образован вершинами в результате отражений одного из состояний на вершине с весом, который мы назовем весом старшей вершины шестиугольника,

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_l = (p_1 - l)\boldsymbol{\lambda}_1 + (p_2 - l)\boldsymbol{\lambda}_2, \quad l \in \{\overline{1, k}\}, \quad (\text{II.4.52})$$

который получается при l -кратном вычитании корневого вектора

$$\mathbf{V}_- = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2\sqrt{3}}\right) \quad (\text{II.4.52}')$$

из исходного старшего веса представления (II.4.48). При $l = k \equiv \min p_{1,2}$ шестиугольник вырождается в треугольник.

Вес (II.4.52) совпадает со старшим весом для неприводимого представления $T^{(p_1-l, p_2-l)}$, так что его зеркальные образы действительно образуют внутренний шестиугольник. Однако действие повышающих операторов на состояния с весом (II.4.52) не равно нулю хотя бы для одного из операторов, так как иначе мы имели бы дело со старшим вектором другого неприводимого представления. По построению неприводимого представления все базисные состояния представляются действием понижающих операторов на состояние старшего веса. Это значит, что веса этих базисных состояний располагаются точно по вершинам и сторонам описанных шестиугольников, а также внутри k -го внутреннего шестиугольника, который, как мы уже отмечали вырождается в треугольник, если $p_1 \neq p_2$, или в точку, если $p_1 = p_2$, так как длина стороны треугольника в этом случае равна нулю (для примера предлагаем читателю посмотреть на весовую диаграмму представления $T^{(1,1)}$).

Покажем, что кратность вырождения весов базисных состояний на l -том внутреннем шестиугольнике равна $l+1$.

При $l = 1$ весовой вектор с координатами (II.4.52) для представления $T^{(4,2)}$ на рис. 2.7 обозначен символом $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$. Для того, чтобы показать, что этому весу отвечают два базисных состояния представления, построим состояния с весом $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$, действуя на старший вектор представления $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle$ понижающими операторами $T_{-}U_{-}$ и $U_{-}T_{-}$. Воспользуемся понятием инварианта подгруппы изоспина и докажем, что из двух разных состояний можно построить пару базисных состояний, которые являются собственными для проекции T_3 изоспина и квадрата T -изоспина, причём оба обладают одной и той же проекцией изоспина, но разными собственными значениями квадрата изоспина. Итак, применим общую формулу (II.2.20) для нормированных на единицу состояний

$$\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m} |\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}\rangle = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_m, \tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a})} |\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a} - \boldsymbol{\alpha}_m, a\rangle \quad \text{при} \quad \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m} |\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}\rangle = 0, \quad 2 \frac{(\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}, \boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m)} = \tilde{p}_{m,a} \in \{0, \mathbb{N}\},$$

для состояния старшего веса $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle$, используя следующие подстановки: корневой вектор $\boldsymbol{\alpha}_m \mapsto \boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{U}_+$, генератор $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m} \mapsto \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_2} = U_+/\sqrt{2}$ и

$$(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\mu}_S) = (\boldsymbol{\alpha}_2, p_1\boldsymbol{\lambda}_1 + p_2\boldsymbol{\lambda}_2) = \frac{1}{2} p_2.$$

Это значит, что состояние

$$U_- |\boldsymbol{\mu}_S\rangle \equiv |U_- \boldsymbol{\mu}_S\rangle$$

имеет вес $\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_2$ и норму

$$\langle U_- \boldsymbol{\mu}_S | U_- \boldsymbol{\mu}_S \rangle = p_2,$$

так как для нормированного на единицу состояния, которое мы обозначим кет-вектором с индексом \mathbb{E} ,

$$|U_- \boldsymbol{\mu}_S\rangle_{\mathbb{E}}$$

имеет место связь

$$U_- |\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \sqrt{2} \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\mu}_S)} |U_- \boldsymbol{\mu}_S\rangle_{\mathbb{E}} = \sqrt{p_2} |U_- \boldsymbol{\mu}_S\rangle_{\mathbb{E}} = |U_- \boldsymbol{\mu}_S\rangle.$$

Вес состояния $U_- |\boldsymbol{\mu}_S\rangle$ лежит на стороне внешнего шестиугольника на весовой диаграмме, и это состояние не может быть повышенено оператором T_+ . Это значит, что проекция T -изоспина равна своему максимальному значению T_3^{\max} . В этом случае собственное значение квадрата T -изоспина равно $\mathbf{T}^2 = T(T+1)$, а $T = T_3^{\max}$. В итоге,

$$T = T_3^{\max} = T_3[\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_2] = \frac{1}{2}(p_1 + 1),$$

где мы указали собственное значение проекции изоспина T_3 , которое определяется весовым вектором, указанным жирным шрифтом в квадратных скобках, т.е. мы записали проекцию указанного в квадратных скобках весового вектора на ось собственных значений T_3 .

Мы установили, что состояние $|U_{-\mu_S}\rangle$ обладает определенным значением T -изоспина⁴², так что действие на это состояние понижающего оператора T_- изменит проекцию изоспина, а именно, уменьшит эту проекцию на единицу, и сохранит неизменным его квадрат $\mathbf{T}^2 = T(T+1)$, где $T = T_3^{\max}$. Согласно общим соотношениям для понижающего оператора в группе $SU(2)$

$$T_-|U_{-\mu_S}\rangle_{\mathbb{E}} = \sqrt{T(T+1) - T(T-1)}|T_{-U_{-\mu_S}}\rangle_{\mathbb{E}} = \sqrt{2T}|T_{-U_{-\mu_S}}\rangle_{\mathbb{E}} = \sqrt{(p_1+1)}|T_{-U_{-\mu_S}}\rangle_{\mathbb{E}},$$

где мы воспользовались введенным чуть выше способом обозначения состояний при действии на них операторов: индекс \mathbb{E} означает, что состояние нормировано на единицу, а символы операторов внутри кет-вектора — результат действия этих операторов на состояние с определенным весом. Это значит, что для состояния $|T_{-U_{-\mu_S}}\rangle_{\mathbb{E}}$ с весом $\tilde{\mu} = \mu_S - \alpha_2 - \alpha_1$

$$T = \frac{1}{2}(p_1+1), \quad T_3[\tilde{\mu}] = \frac{1}{2}(p_1-1).$$

В итоге

$$T_{-U_-}|\mu_S\rangle = \sqrt{p_2}T_-|U_{-\mu_S}\rangle_{\mathbb{E}} = \sqrt{(p_1+1)p_2}|T_{-U_{-\mu_S}}\rangle_{\mathbb{E}}, \quad (\text{II.4.53})$$

где, подчеркнем еще раз, состояние $|T_{-U_{-\mu_S}}\rangle_{\mathbb{E}}$ нормировано на единицу.

По той же схеме установим, что состояние $|T_{-\mu_S}\rangle_{\mathbb{E}}$ имеет вес $\mu_S - \alpha_1$ и

$$T_-|\mu_S\rangle = \sqrt{2}\sqrt{(\alpha_1, \mu_S)}|T_{-\mu_S}\rangle_{\mathbb{E}} = \sqrt{p_1}|T_{-\mu_S}\rangle_{\mathbb{E}}.$$

Это состояние обладает собственным значением U -изоспина, $\mathbf{U}^2 = U(U+1)$,

$$U = U_3^{\max} = U_3[\mu_S - \alpha_1] = \frac{1}{2}(p_2+1),$$

так как $U_+|T_{-\mu_S}\rangle = 0$. Понижение оператором U_- приводит к

$$U_-T_-|\mu_S\rangle = \sqrt{(p_2+1)p_1}|U_{-T_{-\mu_S}}\rangle_{\mathbb{E}}, \quad (\text{II.4.54})$$

причем для этого состояния с весом $\tilde{\mu} = \mu_S - \alpha_2 - \alpha_1$

$$U = \frac{1}{2}(p_2+1), \quad U_3[\tilde{\mu}] = \frac{1}{2}(p_2-1).$$

Вычислим скалярное произведение состояний, полученных при разном порядке действия понижающих операторов на состояние старшего веса, ${}_{\mathbb{E}}\langle U_{-T_{-\mu_S}}|T_{-U_{-\mu_S}}\rangle_{\mathbb{E}}$ и убедимся, что эти нормированные на единицу состояния не совпадают. Действительно, в последующих выкладках учтем, что коммутатор повышающего и понижающего генераторов для двух простых корней равен нулю (см. I.3.43)), и это значит, что $[U_+, T_-] = 0$. В подалгебре $\mathfrak{su}(2)$ имеет место связь вида (II.1.6), которая для компонент U_- и T -изоспина приводит к $U_+U_- = U_-U_+ + 2U_3$, $T_+T_- = T_-T_+ + 2T_3$, а действие повышающего оператора на старший вектор состояния дает нуль. Тогда

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{E}}\langle U_{-T_{-\mu_S}}|T_{-U_{-\mu_S}}\rangle_{\mathbb{E}} &= \frac{\langle \mu_S | T_+ U_+ T_- U_- | \mu_S \rangle}{\sqrt{p_1 p_2 (p_1+1)(p_2+1)}} = \frac{\langle \mu_S | T_+ T_- U_+ U_- | \mu_S \rangle}{\sqrt{p_1 p_2 (p_1+1)(p_2+1)}} = \\ &= \frac{2T_3[\mu_S] 2U_3[\mu_S]}{\sqrt{p_1 p_2 (p_1+1)(p_2+1)}} = \sqrt{\frac{p_1 p_2}{(p_1+1)(p_2+1)}} < 1. \quad (\text{II.4.55}) \end{aligned}$$

Раз модуль скалярного произведения двух нормированных на единицу векторов состояния меньше единицы, значит, эти векторы не могут быть коллинеарны: векторы $|T_{-U_{-\mu_S}}\rangle_{\mathbb{E}}$ и $|U_{-T_{-\mu_S}}\rangle_{\mathbb{E}}$ линейно независимы и образуют базис своей двумерной линейной оболочки.

Вычислим действие повышающего проекцию T -изоспина оператора на оба состояния

$$T_+(T_{-U_-}|\mu_S\rangle) = (T_-T_+ + 2T_3)|U_{-\mu_S}\rangle = (p_1+1)|U_{-\mu_S}\rangle,$$

и

$$T_+(U_{-T_-}|\mu_S\rangle) = U_-T_+T_-|\mu_S\rangle = p_1|U_{-\mu_S}\rangle,$$

⁴²Состояние обладает определенным изоспином — это значит, что оно собственное как для квадрата изоспина, так и для одной из его проекций, в данном случае для T_3 .

где мы воспользовались свойствами старшего вектора состояния $|T_U \mu_S\rangle$. Тогда для суперпозиции состояний

$$|\tilde{\mu}, T'\rangle \equiv p_1|T_U \mu_S\rangle - (p_1 + 1)|U_T \mu_S\rangle,$$

которая обладает весом $\tilde{\mu}$ и меткой T' , действие повышающего оператора изоспина даст нуль

$$T_+|\tilde{\mu}, T'\rangle = 0,$$

а это значит, что значение проекции T_3 для T -изоспина не может быть повышенено, и это значение проекции является максимальным. Максимальное значение проекции изоспина равно значению изоспина, следовательно, состояние $|\tilde{\mu}, T'\rangle$ имеет T -изоспин равный

$$T' = T_3^{\max} = T_3[\tilde{\mu}] = \frac{1}{2}(p_1 - 1),$$

в отличие от состояния $|T_U \mu_S\rangle_{\mathbb{E}}$ с тем же весом и, следовательно, с той же проекцией T_3 , но с изоспином

$$T = \frac{1}{2}(p_1 + 1).$$

Поэтому можно ввести обозначение

$$|\tilde{\mu}, T\rangle_{\mathbb{E}} \equiv |T_U \mu_S\rangle_{\mathbb{E}}.$$

Читатель может самостоятельно убедиться в том, что норма состояния $|\tilde{\mu}, T'\rangle$ отлична от нуля⁴³,

$$\langle \tilde{\mu}, T' | \tilde{\mu}, T' \rangle = p_1(p_1 + 1)(p_1 + p_2 + 1),$$

т.е. можно ввести нормированное на единицу базисное состояние:

$$|\tilde{\mu}, T'\rangle = \sqrt{p_1(p_1 + 1)(p_1 + p_2 + 1)} |\tilde{\mu}, T'\rangle_{\mathbb{E}}.$$

Итак, мы установили, что старший вес внешнего шестиугольника μ_S отвечает единственному базисному состоянию неприводимого представления с T -изоспином

$$T[\mu_S] = \frac{1}{2}p_1,$$

а вес $\tilde{\mu}$ старшей вершины внутри этого внешнего шестиугольника отвечает двум базисным состояниям неприводимого представления $|\tilde{\mu}, T\rangle_{\mathbb{E}}$ и $|\tilde{\mu}, T'\rangle_{\mathbb{E}}$ с T -изоспином

$$T = \frac{1}{2}(p_1 + 1) \quad \text{и} \quad T' = \frac{1}{2}(p_1 - 1).$$

Задача 24. Убедитесь, что состояния $|\tilde{\mu}, T\rangle_{\mathbb{E}}$ и $|\tilde{\mu}, T'\rangle_{\mathbb{E}}$ с одним весом, но с разными значениями T -изоспина ортогональны.

Поэтому в общем случае можно утверждать, что степень вырождения увеличивается на единицу при каждом шаге от старшего веса внешнего шестиугольника к весу старшей вершине внутреннего шестиугольника, если $p_1 \neq 0$ или $p_2 \neq 0$, за счет появления состояния, T - или U -изоспин которого уменьшается на $-\frac{1}{2}$ по сравнению с минимальным значением изоспина состояния со старшим весом внешнего шестиугольника. Если же внешний шестиугольник вырожден в треугольник, а значит, $p_1 = 0$ или $p_2 = 0$, то состояний с дополнительным изоспином больше не возникает: нулевой изоспин не может быть уменьшен на $-\frac{1}{2}$. Это значит, что увеличение вырождения останавливается, когда шестиугольник вырождается в треугольник.

При этом, на всех сторонах шестиугольника или треугольника степень вырождения веса совпадает со степенью вырождения веса старшей вершины шестиугольника по тем же причинам, что и для внешнего шестиугольника. Большая степень вырождения запрещена тем, что она приводит к появлению старшего веса другого неприводимого представления, а меньшая степень не может возникнуть, так как все состояния на сторонах получаются действием понижающих операторов на состояния старшего вектора для $SU(2)$ подгрупп соответствующего изоспина. Состояния на стороне характеризуются проекцией изоспина и разными значениями квадрата изоспина. Число разных значений квадрата изоспина совпадает с вырождением веса старшей вершины шестиугольника. В этой же логике внутри внешнего

⁴³В построениях мы полагали, что $p_1 \neq 0$. Если это не так, т.е. если внешний шестиугольник вырожден и является треугольником с вершиной вверху и основанием внизу, то в приведенных рассуждениях следует поменять местами T - и U -изоспины. Если же $p_1 = p_2 = 0$, то представление является синглетным и содержит только одно состояние, инвариантное относительно действия группы $SU(3)$.

или внутреннего треугольника степень вырождения совпадает со степенью вырождения веса в старшей вершине треугольника.

Итак, вырождение возрастает на единицу при переходе к внутреннему шестиугольнику до тех пор, пока он не становится треугольником. Такая ситуация схематически показана на рис. 2.7 на примере неприводимого представления $T^{(4,2)}$: первый внутренний шестиугольник с двукратно вырожденными весами показан полужирной линией, а треугольник внутри него с трехкратно вырожденными весами — жирной линией.

Таким образом, вырождение весов базисных состояний определяется их положением на весовой диаграмме:

- i) все веса на сторонах внешнего шестиугольника невырождены,
- ii) веса, расположенные на сторонах l -того по счету внутреннего шестиугольника со старшей вершиной, которая получается при l -кратном смещении старшего веса на вектор \mathbf{V}_- (см. формулы (II.4.52) и (II.4.52')), имеют кратность вырождения, равную $l + 1$,
- iii) веса состояний на сторонах треугольника, являющегося k -тым внутренним «вырожденным шестиугольником», и внутри этого треугольника имеют кратность вырождения, равную $k + 1$.

После сказанного легко подсчитать количество базисных квантовых состояний для системы, находящейся в неприводимом представлении группы $SU(3)$:

- каждый l -тый шестиугольник на весовой диаграмме имеет по три стороны с «длинами» (числом точек на весовой диаграмме) $p_1 - l$ и $p_2 - l$, и каждый весовой вектор вырожден $l + 1$ раз, так что на сторонах этих шестиугольников размещено n_1 базисных состояний,

$$n_1 = 3 \sum_{l=0}^k (p_1 + p_2 - 2l)(l + 1),$$

а при $l = k$ шестиугольник вырождается в треугольник,

- внутри треугольника из предыдущего пункта кратность вырождения весов базисных состояний на весовой диаграмме остается равной $k + 1$, а число точек внутри такого треугольника легко сосчитать. А именно, на самой длинной его стороне по вертикали расположено $p_1 + p_2 - 2(k + 1)$ точек. При переходе на один шаг с самой длинной стороны внутрь треугольника по вертикали число точек на вертикальной линии внутри треугольника каждый раз уменьшается на единицу. Поэтому общее количество базисных состояний внутри треугольника равно сумме по числу описанных шагов \tilde{l} вплоть до момента, когда число точек внутри треугольника становится равным нулю,

$$n_2 = (k + 1) \sum_{\tilde{l}=1}^{p_1+p_2-2k-1} (p_1 + p_2 - 2k - 1 - \tilde{l}).$$

Пользуясь стандартными выражениями⁴⁴ для суммы натуральных чисел и их квадратов через комбинаторные факторы $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$,

$$\sum_{l=1}^k l = C_{k+1}^2 = \frac{1}{2} k(k + 1), \quad \sum_{l=1}^k l^2 = C_{k+1}^2 + 2C_{k+1}^3 = \frac{1}{6} k(k + 1)(2k + 1),$$

⁴⁴ Для вывода заметим, что сумма геометрической прогрессии при $a \rightarrow -0$

$$S_k(a) = \sum_{l=0}^k (1 + a)^l = \frac{1 - (1 + a)^{k+1}}{1 - (1 + a)} = C_{k+1}^1 + C_{k+1}^2 a + C_{k+1}^3 a^2 + \dots$$

дает

$$S_k(0) = \sum_{l=0}^k 1 = C_{k+1}^1 = k + 1,$$

и

$$\frac{d}{da} S_k(a) \Big|_{a \rightarrow -0} = \sum_{l=0}^k l = C_{k+1}^2,$$

а также

$$\frac{d}{da} (1 + a) \frac{d}{da} S_k(a) \Big|_{a \rightarrow -0} = \sum_{l=0}^k l^2 = C_{k+1}^2 + 2C_{k+1}^3.$$

находим

$$n_1 = \frac{3}{2} (p_1 + p_2)(k+1)(k+2) - k(k+1)(2k+1) - 3k(k+1),$$

и

$$n_2 = \frac{1}{2} (k+1)(p_1 + p_2 - 2k - 1)(p_1 + p_2 - 2k - 2).$$

Для того, чтобы упростить выкладки по расчету числа базисных состояний в неприводимом представлении, можно, во-первых, положить для определенности $p_1 \geq p_2$ и $k = p_2$, и, во-вторых, заметить, что размерность представления не зависит от перестановки $p_1 \leftrightarrow p_2$, так как это приводит просто к отражению исходного шестиугольника относительно оси абсцисс. Это значит, что все построения для расчета размерности представлений $T^{(p_1, p_2)}$ и $T^{(p_2, p_1)}$ идентичны. Тогда

$$n_1 \mapsto \frac{1}{2} (p_2 + 1) \{3(p_1 + p_2)(p_2 + 2) - 4p_2(p_2 + 2)\}$$

и

$$n_2 \mapsto \frac{1}{2} (p_2 + 1)(p_1 - p_2 - 1)(p_1 - p_2 - 2),$$

и после простого приведения подобных членов число базисных состояний неприводимого представления $T^{(p_1, p_2)}$ группы $SU(3)$, $\dim T^{(p_1, p_2)} = n_1 + n_2$, оказывается равным

$$\dim T^{(p_1, p_2)} = \frac{1}{2} (p_1 + 1)(p_2 + 1)(p_1 + p_2 + 2). \quad (\text{II.4.56})$$

Примеры неприводимых представлений показаны на рис. 2.8.

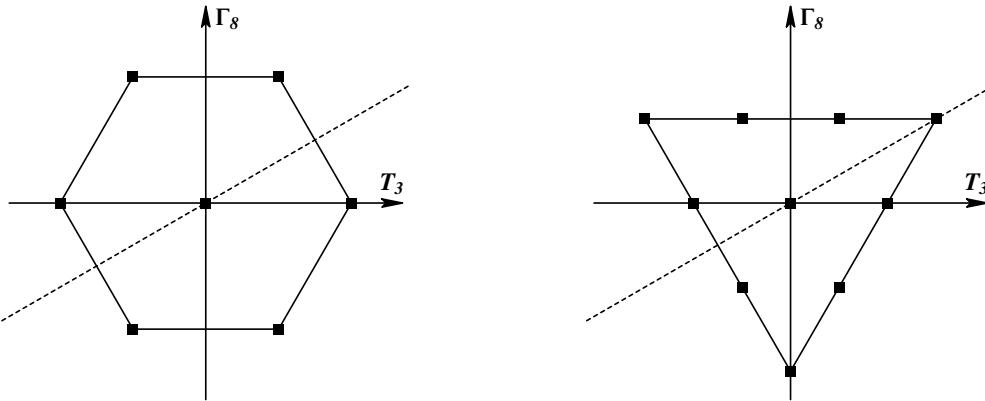


Рис. 2.8: Оккетное (присоединенное) $T^{(1,1)}$ и декуплетное $T^{(3,0)}$ представления группы $SU(3)$.

Присоединенное представление $T^{(1,1)}$ является симметричным при зеркальном отражении относительно оси абсцисс, как и любое представление $T^{(p,p)}$, что ясно из геометрических соображений. Оно включает в себя 8 состояний. При этом старший вес

$$\mu_S = \lambda_1 + \lambda_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

совпадает с повышающим вектором \mathbf{V}_+ , так что расположение шести точек на весовой диаграмме представления $T^{(1,1)}$ совпадает с шестью корнями алгебры $\mathfrak{su}(3)$ (см. Главу 2, §1, раздел 1.3, рис. 2.1 и 2.3), а двукратно вырожденный вес с координатами $(0, 0)$ отвечает двум базисным состояниям с разными собственными значениями оператора Казаимира для подалгебры изоспина $SU(2)$. Заметим, что диаграмма весов находится в полном соответствии с общим описанием весов присоединенного представления в разделе 2.4 Главы 2. §2:

- два собственных вектора с нулевым весом, и их число равно рангу и числу генераторов подалгебры Картана,
- все остальные веса равны корням, а число таких состояний равно числу корней алгебры.

В декуплетном представлении все десять точек на весовой диаграмме являются невырожденными, поскольку исходный внешний многоугольник уже является треугольником, а значит, кратность вырождения всех точек на такой весовой диаграмме совпадает с кратностью вырождения на периметре треугольника, где она в данном случае равна единице.

Значение квадратичного оператора Казимира в заданном неприводимом представлении $T^{(p_1, p_2)}$ легко вычислить действием выражения

$$C_2 = T_3^2 + \Gamma_8^2 + T_- T_+ + V_- V_+ + U_- U_+ + T_3 + \sqrt{3} \Gamma_8, \quad (\text{II.1.39})$$

на состояние старшего веса

$$\mu_S = p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 = \left(\frac{p_1}{2}, \frac{p_1 + 2p_2}{2\sqrt{3}} \right).$$

Учтем, что действие повышающих операторов на состояние старшего веса дает нуль. Тогда в выражении (II.1.39) необходимо учесть только собственные значения генераторов подалгебры Картана для старшего вектора состояний:

$$T_3 |\mu_S\rangle = \frac{p_1}{2} |\mu_S\rangle, \quad \Gamma_8 |\mu_S\rangle = \frac{p_1 + 2p_2}{2\sqrt{3}} |\mu_S\rangle.$$

Поэтому элементарное приведение подобных членов дает собственное значение квадратичного оператора Казимира неприводимого представления $T^{(p_1, p_2)}$:

$$C_2 = \frac{1}{3} (p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2) + p_1 + p_2. \quad (\text{II.4.57})$$

4.5 Симметрия ароматов кварков

Согласно общей интерпретации симметрии в физике соответствие между теоретико-групповыми понятиями и физической терминологией опирается на отождествление базиса неприводимого представления группы с квантовыми состояниями. А физические величины, характеризующие эти квантовые состояния равны собственным значениям генераторов подалгебры Картана группы и инвариантов Казимира из подгрупп, которые составляют полный набор наблюдаемых.

В частности, в кварковой модели адронов $SU_f(3)$ октет представлен, например, в виде наблюдаемых состояний псевдоскалярных мезонов⁴⁵, составленных из кварк-антикварковых пар ($q\bar{q}$), или барионов (qqq) со спином $\frac{1}{2}$ (см. рис. 2.9), а декуплет отвечает барионам со спином $\frac{3}{2}$ (см. рис. 2.10).

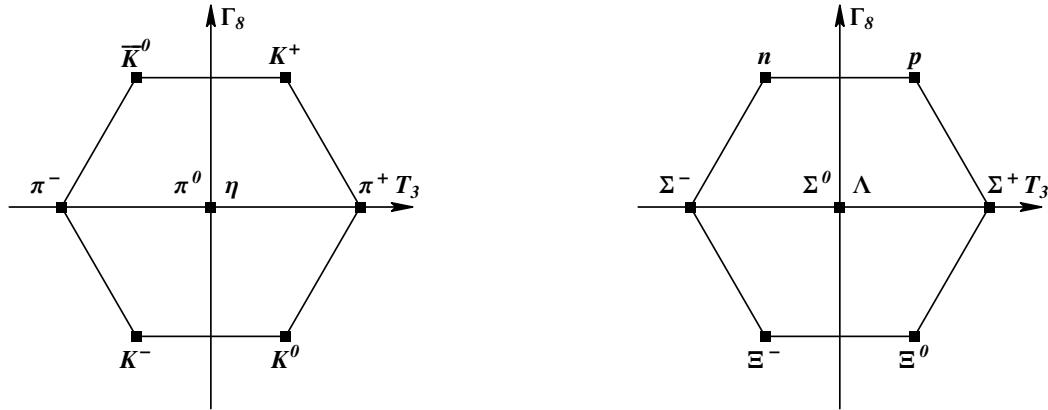


Рис. 2.9: Адронные состояния псевдоскалярных мезонов и барионов со спином $\frac{1}{2}$ в модели $SU_f(3)$ -симметрии сильных взаимодействий ароматов кварков: представление $T^{(1,1)}$.

По построению мультиплета неприводимого представления с координатами проекции изоспина по горизонтальной оси и гиперзаряда по вертикальной оси веса на одной горизонтальной линии отвечают

⁴⁵Основные состояния мезонов образованы кварком и антикварком с суммарным спином, равным нулю, и с орбитальным моментом относительного движения кварка и антикварка, также равным нулю, так что полный момент количества движения кварк-антикварковой пары равен нулю, что отвечает мезонному скалярному полю этой составной системы. В релятивистской теории кварки и антикварки являются квантами спинорного поля, а в теории группы Пуанкаре доказывается, что действие зеркальной инверсии на спинорные поля кварка и антикварка отличается знаком, так что в основном состоянии кварк-антикварковой пары зеркальная инверсия пространства приводит к смене знака мезонного поля, что и соответствует понятию псевдоскаляра.

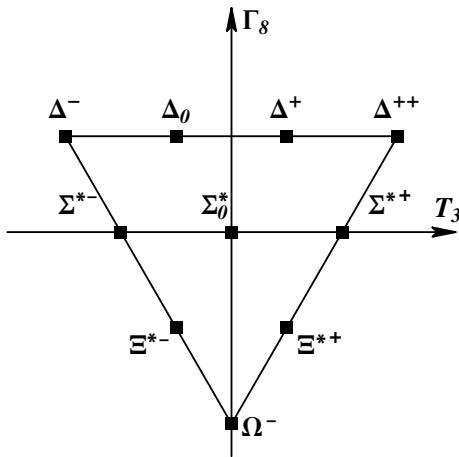


Рис. 2.10: Адронные состояния барионов со спином $\frac{3}{2}$ в модели $SU_f(3)$ –симметрии сильных взаимодействий ароматов кварков: представление $T^{(3,0)}$.

состояниям с неизменным числом странных кварков и гиперзаряда и могут быть сгруппированы по семействам с фиксированным значением изоспина⁴⁶, причем при сдвиге на весовой диаграмме вправо один из d -кварков в адроне заменяется на u -кварк (действие оператора повышения проекции изоспина). Каждый же шаг вниз по вертикали на весовой диаграмме увеличивает на единицу число странных кварков в адроне. Из этих соображений сразу можно однозначно определить кварковый состав большинства из рассматриваемых адронов, как указано в табл. 1.

Таблица 1: Кварковый состав октета псевдоскалярных мезонов и барионов (спин $\frac{1}{2}$) и декуплета барионов (спин $\frac{3}{2}$).

состояние	\bar{K}^0	K^+	π^-	π^+	K^-	K^0
состав	$(d\bar{s})$	$(u\bar{s})$	$(d\bar{u})$	$(u\bar{d})$	$(s\bar{u})$	$(s\bar{d})$
состояние	n	p	Σ^-	Σ^+	Ξ^-	Ξ^0
состав	(ddu)	(uud)	(dds)	(uus)	(ssd)	(ssu)
состояние	Δ^-	Δ^0	Δ^+	Δ^{++}	Σ_0^*	Ω
состав	(ddd)	(ddu)	(duu)	(uuu)	(sdu)	(sss)

Иключение из этого простого правила составляют нейтральные частицы в октетах, весовой вектор которых имеет двукратное вырождение (см. раздел 4.4 Главы 2, §4), т.е. весу внутри внешнего шестиугольника на рис. 2.9 отвечают два различных квантовых состояния. В этом случае следует принять во внимание тот факт, что для двух состояний с координатами $(0, 0)$, т.е. с нулевой проекцией изоспина $T_3 = 0$ и с нулевым гиперзарядом $\Gamma_8 = 0$ одно из состояний может быть ассоциировано с нейтральной компонентой изоспинового триплета ($T = 1, T_3 = 0$), а другое — с состоянием изосинглета ($T = 0$).

Например, пи-мезоны π^\pm с изоспином $T = 1$ и проекциями $T_3 = \pm 1$ составляют изотриплет вместе с нейтральным пионом π^0 с $T_3 = 0$, а η -мезон — изосинглет с нулевыми собственными значениями наблюдаемых \mathbf{T}^2 и T_3 .

Составная модель мезонных состояний присоединенного представления с нулевыми весами. Для точного описания кваркового состава нейтральных мезонных состояний присоединенного представления рассмотрим свойства билинейной формы, составленной из фундаментального представления группы $SU(3)$ v^F с контравариантным индексом F и сопряженного представления v^\dagger , которое

⁴⁶Напомним, что изоспином мы называем максимальное значение проекции $(T_3)_{\max} = T$ в неприводимом представлении группы изоспина, а собственное значение квадратичного оператора Казимира группы изоспина в этом представлении равно $\mathbf{T}^2 = T(T + 1)$.

преобразуется как ковариантный объект $(v^\dagger)_F$ и описывает антикварки (см. (II.4.14) и (II.4.15), а также (II.4.33) и описание преобразований фундаментальных представлений на стр. 111),

$$v = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}, \quad v^\dagger = (\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}).$$

В этой записи мы отождествляем названия кварков с обозначениями базисных состояний в триплете ($u \equiv |u\rangle$ и т.п.), а антикварков — с обозначениями базисных состояний в антитриплете. Из триплета **3** и антитриплета **3̄** можно построить билинейную форму, т. е. рассмотреть тензорное произведение **3** \otimes **3̄**. В этом тензорном произведении можно выделить неприводимые представления, а значит, разложить это тензорное произведение в прямую сумму пространств неприводимых представлений.

Один член такой суммы нам уже известен — это инвариант $v^\dagger v = v^\dagger \cdot \mathbb{1} \cdot v$, где в последнем равенстве мы специально выделили единичную матрицу. Это значит, что одна суперпозиция из исходных девяти элементов базиса в пространстве состояний тензорного произведения триплета и антитриплета группы SU(3) отвечает синглету группы SU(3), т. е. скаляру или инварианту, который не зависит от значения групповых параметров.. Покажем теперь, что остальные восемь базисных состояний в тензорном произведении отвечают октету группы SU(3), используя вместо единичной матрицы в билинейной форме матрицы Гелл-Манна λ_a , несущие индекс групповых параметров.

Триплет v преобразуется матрицей g (II.4.30), а антитриплет v^\dagger — матрицей $g^\dagger = g^{-1}$. Тогда преобразование билинейной формы

$$V_a = v^\dagger \lambda_a v \quad \mapsto \quad V'_a = v^\dagger g^\dagger \lambda_a g v,$$

при бесконечно малых параметрах $u^b \rightarrow 0$, когда

$$g \approx \mathbb{1} - \frac{i}{2} \lambda_b u^b, \quad g^\dagger \approx \mathbb{1} + \frac{i}{2} \lambda_b u^b,$$

сводятся к

$$\begin{aligned} V'_a &\approx v^\dagger \left(\mathbb{1} + \frac{i}{2} \lambda_b u^b \right) \lambda_a \left(\mathbb{1} - \frac{i}{2} \lambda_b u^b \right) v \approx \\ &\approx v^\dagger \lambda_a v + \frac{i}{2} u^b v^\dagger [\lambda_b, \lambda_a] v = V_a + \frac{i}{2} u^b 2i f_{ba}^c v^\dagger \lambda_c v = V_a + f_{ab}^c V_c u^b, \end{aligned}$$

где мы использовали известное выражение для коммутатора матриц Гелл-Манна (II.4.28) и антисимметрию структурных констант $f_{ba}^c = -f_{ab}^c$. С помощью процедуры опускания и поднимания тензорных индексов посредством метрики Киллинга и обратной метрики Киллинга запишем изменение ковектора V_a

$$\delta V_a \equiv V'_a - V_a = f_{ab}^c V_c u^b = f_{abc'} g^{c'c} V_c u^b = f_{abc'} V^{c'} u^b = f_{bca} u^b V^c,$$

где мы воспользовались полной антисимметричностью структурных констант f_{abc} относительно перестановки любой пары индексов и переместили индекс a на 2 позиции вправо. Тогда для изменения контравектора

$$\delta V^a = g^{aa'} \delta V_{a'} = f_{bc}^a u^b V^c = [\mathbf{u}, \mathbf{V}]^a = (\mathcal{L}_{\mathbf{u}} \mathbf{V})^a = (\text{ad}(\mathbf{u}) \mathbf{V})^a, \quad (\text{II.4.58})$$

т.е. мы получили закон группового преобразования векторов присоединенного представления в касательном пространстве согласно (I.1.15) и разделу 2.1 Главы 1, §2. Это значит, что восемь компонент ковектора $V_a = v^\dagger \lambda_a v$ реализуют состояния присоединенного представления.

Суть составной модели — это рассмотрение тензорных произведений фундаментальных представлений группы. В данном случае это произведение кваркового триплета на антикварковый антитриплет. Поскольку октетные компоненты построены из фундаментального представления кварков и антикварков, легко найти собственные значения наблюдаемых величин для этих компонент при действии генераторов из подалгебры Кардана, обобщенных на тензорное произведение представлений (см. обсуждение формул (II.2.14) и (II.2.15)).

Для иллюстрации этих положений и прозрачности формул рассмотрим сначала точно такую же конструкцию в группе SU(2),

$$\frac{1}{2} \mathbf{V} \equiv \mathcal{Q}^\dagger \mathbf{T} \mathcal{Q},$$

где вместо триплета фундаментального представления v группы SU(3) мы подставили изодублет кварков \mathcal{Q} , а вместо v^\dagger — сопряженный изодублет антикварков \mathcal{Q}^\dagger ,

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{Q}^* = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{Q}^\dagger = (\bar{u}, \bar{d}), \quad (\text{II.4.59})$$

а генераторы $\lambda_a = 2\Gamma_a$ мы заменили на генераторы изоспина $2\mathbf{T}$ группы $SU_f(2)$.

Теперь рассмотрим состав триплета \mathbf{V} . Составим

$$\frac{1}{2}V_{\pm} = Q^{\dagger}(T_x \pm iT_y)Q,$$

и с учетом явного вида матриц $\mathbf{T} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ в терминах матриц Паули $\boldsymbol{\sigma}$

$$T_+ = T_x + iT_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_- = T_x - iT_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

найдем

$$\frac{1}{2}V_+ = d\bar{u}, \quad \frac{1}{2}V_- = u\bar{d}.$$

Значит, эти комбинации соответствуют заряженным π -мезонам:

$$\pi^+ \mapsto \frac{1}{2}V_-, \quad \pi^- \mapsto \frac{1}{2}V_+.$$

Для нейтральной компоненты с изоспином T_3 по группе $SU(2)$ введем

$$\pi^0 \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} V_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{Q}^{\dagger} T_3 \mathcal{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{u}, \bar{d}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} - d\bar{d}), \quad (\text{II.4.60})$$

где в суперпозицию квартовых состояний нами был введен нормировочный множитель, который обеспечивает то, что в мезоне находится одна кварт-антиквартовая пара: с вероятностью⁴⁷ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ пара $u\bar{u}$ и с той же вероятностью пара $d\bar{d}$. (Порядок записи кварт-антиквартового состава обычно приводится в упрощенном виде, а именно, в записи указывается только наименование частиц в адроне, так что мы следуем сложившейся традиции чтения, например, $(u\bar{d}) = \pi^+$ читается как «мезон π^+ — кварт u , антикварт \bar{d} ».)

Согласно (II.2.14) и (II.2.15) значение заряда базисного состояния в тензорном произведении задается суммой зарядов квартов и антиквартов, т.е. суммой зарядов состояний в тензорных множителях этого произведения:

$$Q \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (Q_u + Q_{\bar{u}}) u\bar{u} - (Q_d + Q_{\bar{d}}) d\bar{d} \right\} = 0 \cdot \pi^0,$$

и аналогично для проекции изоспина

$$T_3 \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (T_3[u] + T_3[\bar{u}]) u\bar{u} - (T_3[d] + T_3[\bar{d}]) d\bar{d} \right\} = 0 \cdot \pi^0,$$

так как

$$T_3[u] = \frac{1}{2}, \quad T_3[\bar{u}] = -\frac{1}{2}, \quad T_3[d] = -\frac{1}{2}, \quad T_3[\bar{d}] = \frac{1}{2}.$$

Значит, прямым вычислением мы убедились, что состояние π^0 действительно имеет нулевой заряд и нулевую проекцию изоспина. Вместе с тем, по построению π^0 дополняет базис состояний π^{\pm} до триплета группы $SU(2)$.

Для вычисления квадрата изоспина \mathbf{T}^2 , который является квадратичным оператором Казимира группы $SU(2)$ необходимо, во-первых, использовать его выражение через повышающие и понижающие генераторы (II.3.13)

$$\mathbf{T}^2 = T_3^2 + T_3 + T_- T_+, \quad (\text{II.4.61})$$

и, во-вторых, учесть, что для фундаментального представления

$$T_+ u = 0, \quad T_+ d = u, \quad T_- u = d, \quad T_- d = 0, \quad (\text{II.4.62})$$

так как повышающие и понижающие изоспин матрицы алгебры $\mathfrak{su}(2)$ имеют явный вид (II.3.9):

$$T_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично для представления сопряженного спинора \bar{Q} в алгебре $\mathfrak{su}(2)$ (см. [1] и сноски на стр. 100),

$$\bar{Q} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Q^* = \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}$$

⁴⁷Вероятность — квадрат модуля амплитуды, т.е. коэффициента в суперпозиции, если состояние имеет единичную норму (сумма вероятностей равна единице).

сразу видно, что имеют место выражения

$$T_+ \bar{u} = -\bar{d}, \quad T_+ \bar{d} = 0, \quad T_- \bar{u} = 0, \quad T_- \bar{d} = -\bar{u}. \quad (\text{II.4.63})$$

Тогда, используя (II.4.61)–(II.4.63), найдем, что $T_3(u\bar{u}) = (T_3 u)\bar{u} + u(T_3 \bar{u}) = +\frac{1}{2}(u\bar{u}) - \frac{1}{2}(u\bar{u}) = 0$ и

$$\mathbf{T}^2(u\bar{u}) = (T_3^2 + T_3 + T_- T_+)(u\bar{u}) = (T_3 \cdot 0 + 0 + T_- T_+)(u\bar{u}) = -T_-(u\bar{d}) = -d\bar{d} + u\bar{u}$$

и

$$\mathbf{T}^2(d\bar{d}) = (T_3^2 + T_3 + T_- T_+)(d\bar{d}) = (T_3 \cdot 0 + 0 + T_- T_+)(d\bar{d}) = T_-(u\bar{d}) = d\bar{d} - u\bar{u}.$$

Отсюда сразу получаем, что

$$\mathbf{T}^2\pi^0 = 2\pi^0 = T(T+1)\pi^0,$$

и π^0 — это состояние с изоспином $T = 1$ и $T_3 = 0$.

Итак, нейтральные компоненты присоединенного представления отвечают матричному умножению фундаментального и сопряженного ему представлений с диагональными матрицами генераторов из подалгебры Картана соответствующей группы.

В группе $SU(3)$ такое состояние π^0 легко получить с помощью матриц Гелл-Манна и спиноров фундаментального представления v^F и сопряженного к нему \bar{v}_F , а также диагональной матрицы λ_3 из подалгебры Картана:

$$\pi^0 \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{v}_{F'} (\lambda_3)_{\bullet_F}^{F'} v^F = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{v} \lambda_3 v = \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} - d\bar{d}). \quad (\text{II.4.64})$$

Другое нейтральное состояние — изоскаляр — получается при использовании в матричном произведении другой диагональной матрицы из подалгебры Картана, а именно, λ_8 :

$$\eta \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{v}_{F'} (\lambda_8)_{\bullet_F}^{F'} v^F = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{v} \lambda_8 v = \frac{1}{\sqrt{6}} (u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}). \quad (\text{II.4.65})$$

Предлагаем читателю самостоятельно в уме вычислить проекцию и квадрат изоспина для состояния η : $T_3 = 0$, $\mathbf{T}^2 = 0$, — тем более, что все выкладки уже проделаны при выводе значения квадрата изоспина для π^0 .

Подчеркнем: номера матриц Гелл-Манна для нейтральных состояний π^0 и η в точности соответствуют генераторам подалгебры Картана и расположению их собственных значений на весовой диаграмме присоединенного представления. Эту связь мы рассмотрим подробнее ниже при формулировке тензорного способа обозначений для представлений.

Составная модель барионов. Ситуация с барионами требует отдельного обсуждения. Это связано с тем, что барионы построены из кварков, среди которых могут встречаться и кварки одного аромата, так что необходимо внимательно отнести к задаче с тождественными частицами. Кварки несут полуцелый спин $\frac{1}{2}$, т.е. являются фермионами. В этой связи обращает на себя внимание декуплет барионов со спином $\frac{3}{2}$, в котором гипероны Δ^{++} , Δ^- и Ω^- составлены из идентичных кварков (uuu), (ddd) и (sss), спины которых соправлены, и, следовательно, спиновая волновая функция тождественных кварков в этих гиперонах является симметричной относительно перестановок любых пар тождественных частиц⁴⁸.

Далее, эти гипероны являются связанными состояниями с минимальной энергией системы трех кварков, так что орбитальные моменты относительного движения кварков тождественно равны нулю. В этом случае координатные волновые функции кварков симметричны относительно перестановок координат кварков. В итоге, пространственные и спиновые волновые функции тождественных кварков в этих гиперонах являются симметричными по перестановкам как спиновых квантовых чисел кварков, так и координат кварков. Это значит, что и само квантовое состояние, построенное как произведение спиновой волновой функции на координатную волновую функцию при заданной спиновой, при перестановке тождественных кварков переходит само в себя. А это вступает в противоречие с принципом запрета Паули для фермионов, которыми являются кварки, обладающие полуцелым спином. Согласно принципу

⁴⁸При максимальном значении проекции спина на выделенную ось спиновое квантовое состояние гиперонов записывается в виде тензорного произведения спиновых состояний кварков, составляющих адрон, например

$$|\Omega^-\rangle_{\text{spin}} = \sum_{\text{sym}(k_1, k_2, k_3)} |\uparrow, s(k_1)\rangle \otimes |\uparrow, s(k_2)\rangle \otimes |\uparrow, s(k_3)\rangle,$$

где стрелка \uparrow — это символ спинового квантового состояния кварка с проекцией спина, равной $+\frac{1}{2}$, $s(k)$ указывает на квантовое состояние странного кварка с номером k , причем берется симметричная сумма по перестановкам номеров кварков $(k_1, k_2, k_3) = (1, 2, 3)$, которая делится на число слагаемых (см. определение в сноске на стр. 26. В этой записи явно видно, что перестановки номеров странных кварков никак не меняют квантовое состояние гиперона).

запрета Паули вероятность обнаружить два тождественных фермиона в состоянии с тождественными квантовыми числами равна нулю. Это достигается за счет статистики Ферми–Дирака для амплитуды вероятности: перестановка квантовых чисел тождественных фермионов меняет знак амплитуды вероятности квантового состояния, а это значит, что, если квантовые числа двух тождественных фермионов совпадают, то амплитуда до перестановки квантовых чисел буквально совпадает с амплитудой после перестановки. Но по статистике Ферми–Дирака одна амплитуда равны другой со знаком минус, что возможно, только если сама амплитуда равна нулю.

Вместе с тем, согласно статистике Ферми–Дирака волновые функции квантовых состояний фермионов меняют знак при перестановке двух тождественных фермионов, если учитывать все квантовые числа из полного набора наблюдаемых. Из этого следует, что полный набор наблюдаемых у кварков не может быть ограничен их координатами и проекциями спина на выделенную ось, так как существование декуплета барионов со спином $\frac{3}{2}$ в основном состоянии — это экспериментальный факт.

Более того, именно открытие Ω -гиперона как раз и послужило убедительным доказательством в пользу гипотезы о $SU_f(3)$ -симметрии кварковых ароматов в сильных взаимодействиях, предложенной Гелл-Манном. Противоречие же с принципом запрета Паули может быть устранено, если расширить полный набор наблюдаемых для кварков таким образом, чтобы волновая функция с учетом дополнительного квантового числа кварков в состояниях декуплета оказывалась бы антисимметричной по перестановкам тождественных кварков.

Это дополнительное квантовое число было введено Боголюбовым, Струминским и Тавхелидзе, а также независимо от них Намбу, Ханом и Гринбергом и впоследствии называно «цветом».

Поскольку экспериментально установлено, что состояние Ω -гиперона невырождено, т.е. существует только один, единственный сорт таких гиперонов, то необходимо ввести три состояния *s*-кварка, по перестановкам которого цветовая волновая функция (*sss*) должна быть полностью антисимметрична:

$$|\Omega\rangle_{\text{color}} \mapsto |\text{color}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{c_1 c_2 c_3} s_{[1]}^{c_1} s_{[2]}^{c_2} s_{[3]}^{c_3}, \quad (\text{II.4.66})$$

где $\epsilon_{c_1 c_2 c_3}$ — полностью антисимметричный тензор Леви–Чивиты, а c_1, c_2, c_3 — цветовые индексы, пребывающие от 1 до 3, которые принято также называть буквально: синий, красный, желтый (в формуле (II.4.66) индексы в квадратных скобках обозначают другие переменные, от которых зависит волновая функция кварка: проекция спина и координаты). Увеличение числа цветов привело бы к вырождению, т.е. к появлению дополнительных состояний с тем же составом ароматов кварков, к появлению состояний, которые не наблюдаются экспериментально. Другими словами, *адронные состояния*: и мезоны, и барионы, как и указанная нами цветовая волновая функция Ω -гиперона, должны быть *синглетами* как составные объекты, несущие цветовые индексы, т.е. не иметь отличных от немых индексов, заданных цветами кварков. Это свойство можно сформулировать более точно, если ввести групповые преобразования цветовых состояний кварков. Синглетность адронов станет эквивалентна мультиплетности, равной единице. Для этого запишем обратимое преобразование цветовой волновой функции кварка в виде

$$s^{c'_1} = U_{\bullet c_1}^{c'_1} s^{c_1}, \quad (\text{II.4.67})$$

и выражим цветовое состояние бариона как

$$|\text{color}\rangle' = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{c'_1 c'_2 c'_3} s^{c'_1} s^{c'_2} s^{c'_3} = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{c'_1 c'_2 c'_3} U_{\bullet c_1}^{c'_1} U_{\bullet c_2}^{c'_2} U_{\bullet c_3}^{c'_3} s^{c_1} s^{c_2} s^{c_3}. \quad (\text{II.4.68})$$

Учтем, что

$$\epsilon_{c'_1 c'_2 c'_3} U_{\bullet c_1}^{c'_1} U_{\bullet c_2}^{c'_2} U_{\bullet c_3}^{c'_3} = \det U \cdot \epsilon_{c_1 c_2 c_3}.$$

Эту связь легко доказать, замечая, что тензор в левой части равенства является антисимметричным по перестановке каждой пары индексов $c_{1,2,3}$, так как перестановка пары этих индексов у матриц U в рассматриваемом выражении сводится к перестановке немых штрихованных индексов у этих же матриц и перестановке этих же штрихованных индексов у тензора Леви–Чивиты, что приводит к смене знака всего выражения. Значит, рассматриваемый тензор полностью антисимметричен по перестановке каждой пары индексов $c_{1,2,3}$ и, следовательно, он пропорционален тензору Леви–Чивиты, поскольку индексы пробегают только три значения. Коэффициент пропорциональности однозначно устанавливается, если положить $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 3$, так что слева мы получим определение детерминанта матрицы U , а справа единицу $\epsilon_{123} = 1$, умноженную на искомый коэффициент. Тогда

$$|\text{color}\rangle' = \det U |\text{color}\rangle,$$

а значит, нормировка и ненаблюдаемая глобальная фаза остаются неизменными при

$$\det U = 1. \quad (\text{II.4.69})$$

Итак, обратимые преобразования цветовых состояний夸ков (II.4.67) должны быть унимодулярными (II.4.69). Потребуем также, чтобы при преобразовании (II.4.67) сохранялась нормировка цветовых состояний, что означает унитарность матрицы U в (II.4.67).

Для антикварков преобразование удобнее записать в виде (см. законы групповых преобразований для фундаментальных представлений группы $SU(3)$, которые мы описали при выводе (II.4.32)–(II.4.37))

$$\bar{s}_{c'_1} = \bar{s}_{c_1} (U^\dagger)^{c_1}_{\bullet c'_1}, \quad (\text{II.4.70})$$

так что мезонное цветовое состояние типа⁴⁹ $\bar{s}_{c_1} s^{c_1}$ будет инвариантно относительно преобразований, если

$$U^\dagger U = 1. \quad (\text{II.4.71})$$

В итоге, обратимые преобразования цвета кварков образуют группу $SU_c(3)$, а адронные состояния реализуют синглетные⁵⁰ представления этой группы. Этот вывод находится в согласии с экспериментальными фактами.

Обратим теперь внимание на волновую функцию дикварка, составленного из кварков одного аромата, например, (*uu*) в барионе, который находится в основном состоянии. Волновая функция такого дикварка — это амплитуда вероятности обнаружить два тождественных кварка с определенными значениями проекций спинов на выбранную ось, цвета кварков и координат. То есть волновая функция кварков в дикварке — это произведение спиновой волновой функции на цветовую и на координатную. Такое произведение должно быть антисимметрично относительно перестановки тождественных кварков, которые подчиняются статистике Ферми–Дирака. В барионе, где относительный момент количества движения двух тождественных кварков равен нулю, координатная волновая функция тождественных кварков-фермионов симметрична относительно перестановки кварков. В то же время, так как барион — это синглет по цвету, цветовая волновая функция которого строится с помощью полностью антисимметричного тензора Леви–Чивиты, умноженного на цветовые состояния трех кварков, входящих в барион, мы приходим к выводу о том, что цветовая волновая функция дикварка (*uu*) в барионе всегда антисимметрична по перестановке тождественных кварков. В итоге, произведение координатной и цветовой волновой функций дикварка в барионе в основном состоянии обладает антисимметрией по перестановке кварков, поскольку перестановка тождественных кварков в произведении волновых функций приводит к произведению множителей $+1$ и -1 , соответствующих симметрии координатной и цветовой волновых функций. Остается включить в рассмотрение симметрию спиновой волновой функции: согласно статистике Ферми–Дирака спиновая волновая функция такого дикварка может быть только симметричной по перестановке кварков. Это возможно, когда сумма проекций спина принимает максимально возможное значение, равное единице, а это значит, что квадрат суммарного спина равен двум, т.е. суммарный спин равен 1. В курсах квантовой механики при суммировании спинов двух частиц спина $\frac{1}{2}$ показывают, что спиновая волновая функция при всех допустимых значениях суммы проекций спинов для двух кварков действительно симметрична относительно перестановки двух частиц только в случае суммарного спина, равного единице, независимо от того, чему равна проекция суммарного спина на выделенную ось. (При суммарном спине, равном нулю, спиновая волновая функция антисимметрична по перестановке двух тождественных частиц спина $\frac{1}{2}$).⁵¹ Это значит, что дикварк (*uu*) в барионе, который находится в основном состоянии, может иметь только суммарный спин, равный единице, а значение суммарного спина, равное нулю, запрещено из-за принципа запрета Паули для тождественных фермионов. Изоспин такого дикварка (*uu*), естественно, равен единице: у каждого *u*-кварка в паре проекция изоспина $T_3 = +\frac{1}{2}$, так что сумма проекций $T_3 = 1$.

После этих замечаний можно более внимательно рассмотреть октет барионов со спином $\frac{1}{2}$ на рис. 2.9. На верхней линии расположены состояния (*uud*) и (*ddu*) с проекцией суммарного изоспина $T_3 = +\frac{1}{2}$ и $T_3 = -\frac{1}{2}$, соответственно, и со странностью, равной нулю (в составе нет странных кварков), и это — изодублет: протон и нейтрон. На нижней линии расположены гипероны со странностью $S = -2$ (два странных кварка в составе) — $\Xi^0 = (uss)$ и $\Xi^- = (dss)$ с проекцией изоспина $T_3 = +\frac{1}{2}$ и $T_3 = -\frac{1}{2}$, соответственно, и это — изодублет со странностью -2 . На центральной линии расположен изотриплет со странностью⁵² $S = -1$: состав странных гиперонов с проекциями суммарного изоспина $T_3 = +1$ и $T_3 = -1$ определяется однозначно: $\Sigma^+ = (uus)$ и $\Sigma^- = (dds)$. В нейтральных состояниях октета барионов со спином $\frac{1}{2}$ с кварковым составом (*uds*) выделяют два состояния: Σ^0 с изоспином $T = 1$, $T_3 = 0$ и

⁴⁹Например, $\pi^+ \mapsto |\text{color}\rangle = u^{c_1} \bar{d}_{c_1}$.

⁵⁰В синглетном представлении есть только один базисный вектор состояния, который при групповых преобразованиях переходит сам в себя, а значит, реализуется только тождественное преобразование, и все элементы абстрактной группы отображаются в оператор, равный единице. Такое представление не является точным: у точного представления соответствие элементов группы и матриц преобразований в векторном пространстве представления является взаимооднозначным.

⁵¹Суммирование спинов двух частиц мы проводим в Главе 4, § 1, в разделе 1.1.

⁵²Напомним, что с точки зрения алгебраических структур странность есть не что иное, как гиперзаряд со смещением.

изоскаляр Λ с $T = 0$ (см. рис. 2.9): выделение состояний с заданным изоспином на весовой диаграмме в представлении $T^{(1,1)}$ для барионов со спином $\frac{1}{2}$ отличается от случая мезонов со спином, равным нулю, несмотря на то, что эти представления изоморфны. Для мезонов с нулевым спином достаточно было указать на то, что кварк и антикварк имеют противоположные направленные спины (сумма проекций равна нулю, а смена проекций спина кварков на противоположные должна сопровождаться и сменой знака амплитуды вероятности для такого состояния кварка и антикварка, как это устанавливается при рассмотрении разложения тензорных произведений фундаментальных представлений группы $SU(2)$ в сумму на неприводимые, или в рамках квантовой механики при рассмотрении сложения моментов количества движения двух подсистем). С цветовой волновой функцией кварка и антикварка в таких мезонах рассмотрение тоже было элементарным: в синглетном по цвету состоянии цвет кварка компенсировался антицветом антикварка. Для барионов в основном состоянии приходится учитывать как тождественность кварков, так и наличие цвета у кварков, что мы видели на примере дикварка (uu). Подобные вопросы удобнее обсуждать после рассмотрения тензорных произведений неприводимых представлений как в группе симметрии ароматов, так и в группе поворотов, а также в цветовой группе. Инструментом для построения разложения тензорных произведений на неприводимые представления являются схемы Юнга.

4.6 Тензорный метод и схемы Юнга

Рассмотрим частный случай старшего веса неприводимого представления $T^{(p,0)}$

$$\boldsymbol{\mu}_S = p \boldsymbol{\lambda}_1. \quad (\text{II.4.72})$$

Состояние $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle$ можно построить, кратно умножая состояния первого фундаментального представления, которые мы пометим соответствующим номером k как

$$|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle_k, \quad k \in \{\overline{1, p}\},$$

так как этот номер указывает на разные состояния, отличающиеся координатами и проекциями спина (в кварковой модели это соответствует описанию тождественных u -кварков фундаментального представления с разными координатами и спинами),

$$|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \underbrace{|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle_1 \otimes |\boldsymbol{\lambda}_1\rangle_2 \otimes \cdots \otimes |\boldsymbol{\lambda}_1\rangle_p}_{p}, \quad (\text{II.4.73})$$

где мы молча подразумеваем симметризацию тензорного произведения по перестановкам состояний, как мы это описали в (II.2.12) на стр. 81 в Главе 2, §2. При этом действие генераторов на тензорном произведении также определялось симметрично относительно действия на каждый фундаментальный множитель (см.(II.2.13)). Например,

$$\Gamma_l^\otimes |\boldsymbol{\lambda}_m\rangle \otimes |\boldsymbol{\lambda}_{m'}\rangle \equiv \{(\Gamma_l \otimes \mathbb{1}) + (\mathbb{1} \otimes \Gamma_l)\} |\boldsymbol{\lambda}_m\rangle \otimes |\boldsymbol{\lambda}_{m'}\rangle = \{(\boldsymbol{\lambda}_m)_l + (\boldsymbol{\lambda}_{m'})_l\} |\boldsymbol{\lambda}_m\rangle \otimes |\boldsymbol{\lambda}_{m'}\rangle. \quad (\text{II.2.15})$$

Собственные значения генераторов подалгебры Картана состояния (II.4.73), т.е. собственные значения для части наблюдаемых в полном наборе, определяющем квантовые числа базисных состояний, согласно (II.2.15), где было определено действие генератора на тензорное произведение в виде суммы действия генератора на каждый из множителей в тензорном произведении, равны компонентам весового вектора (II.4.72) у заданного состояния старшего веса $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle$ (II.4.73) в согласии с компонентами фундаментального вектора $\boldsymbol{\lambda}_1$ в (II.4.1):

$$T_3 |\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \frac{p}{2} |\boldsymbol{\mu}_S\rangle, \quad \Gamma_8 |\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \frac{p}{2\sqrt{3}} |\boldsymbol{\mu}_S\rangle.$$

Если перейти от дирашовских обозначений для базисных состояний первого фундаментального представления (см. рис. 2.6 в §4 Главы 2)

$$|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle \cong u, \quad |\boldsymbol{\nu}_2\rangle \cong d, \quad |\boldsymbol{\nu}_3\rangle \cong s, \quad \text{на примере кварковой модели,}$$

к базисным векторам триплета **3**

$$|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle \mapsto \boldsymbol{\epsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\boldsymbol{\nu}_2\rangle \mapsto \boldsymbol{\epsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\boldsymbol{\nu}_3\rangle \mapsto \boldsymbol{\epsilon}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.4.74})$$

которые описывают контравариантные векторы

$$\boldsymbol{v} = v^F \boldsymbol{\epsilon}_F, \quad (\text{II.4.75})$$

то в этих тензорных обозначениях $v^1|\lambda_1\rangle_k \mapsto v^{F[k]}$ при $F = 1$ — это компонента вектора $v[k]$, который описывает состояние триплета первого фундаментального представления. В таких компонентных обозначениях связь (II.4.73) между тензорным произведением состояний старшего веса триплетного фундаментального представления и состоянием старшего веса представления $T^{(p,0)}$ можно записать в тензорном виде

$$|\mu_S\rangle \mapsto T^{F_1 \dots F_p} = v^{F_1[1]} \dots v^{F_p[p]} \quad \text{при } F_1 = \dots = F_p = 1. \quad (\text{II.4.76})$$

В этой записи компонента тензора $T^{1\dots 1}$ не равна единице, как для базисного состояния, а сам тензор описывает уже целый класс тензорных произведений векторов триплетного фундаментального представления: все тензоры одного класса пропорциональны друг другу и по построению обладают одними и теми же свойствами при групповых преобразованиях, которые переводят триплетный базис $\epsilon|f\rangle$ в триплетный базис, каждый вектор v сам в себя, а компоненты этого вектора в старом базисе в компоненты вектора в новом базисе. Читатель может освежить свои знания по той теме, обратившись к описанию формул (II.4.14)–(II.4.16) при рассмотрении кварковой модели.

Подчеркнем, что связь (II.4.76) показывает, что старший вектор неприводимого представления $T^{(p,0)}$ по построению в покомпонентной тензорной записи симметричен относительно перестановок порядка индексов, которые нумеруют компоненты векторов фундаментальных представлений, входящих в тензорное произведение (эти индексы указаны в квадратных скобках).

Все базисные состояния неприводимого представления группы и их суперпозиции в общем случае получаются многократным действием понижающих генераторов на старший вектор состояния. В случае первого, т.е. триплетного фундаментального представления это значит, что все состояния этого неприводимого представления отвечают суперпозициям базисных состояний, т.е. различным компонентам вектора v^F , для которых уже индекс, нумерующий компоненты, может принимать любые значения от единицы до трех, в то время как сам вектор v символизирует собой все возможные суперпозиции базисных состояний триплетного фундаментального представления, а не только состояние со старшим весом λ_1 .

Действие тензорного понижающего оператора, определенного на пространстве тензорного произведения фундаментальных представлений, как мы уже указали выше при его введении на стр. 81 в формуле (II.2.13), определяется как сумма действия соответствующего оператора фундаментального представления на каждый из фундаментальных сомножителей в тензорном произведении, т.е. это действие определяется как операция, симметричная по отношению к порядку записи компонент в тензорном произведении состояний фундаментальных представлений. Следовательно, действие тензорных понижающих операторов не изменяет симметричности тензорного произведения относительно перестановок множителей в этом тензорном произведении. Отсюда следует, что, если старший вектор состояния задан в виде симметричного тензорного произведения элементов фундаментального представления, то и все базисные состояния неприводимого представления с этим старшим вектором состояния симметричны относительно перестановок порядка индексов, нумерующих компоненты векторов состояний фундаментальных представлений, из которых набрано тензорное произведение, на котором мы строим неприводимое представление рассматриваемой алгебры $\mathfrak{su}(3)$ с заданным состоянием старшего веса.

Это значит, что все суперпозиции состояний неприводимого представления $T^{(p,0)}$ в тензорной записи эквивалентны симметричным контравариантным тензорам ранга p , т.е. класс симметричных контравариантных тензоров $T^{F_1 \dots F_p}$ символизирует все элементы неприводимого представления $T^{(p,0)}$.

В явном виде, при $p = 2$, например, понижающие операторы в представлении со старшим вектором состояния (II.4.73) выражаются через понижающие операторы фундаментального представления — матрицы Гелл-Манна на каждой из фундаментальных компонент тензорного произведения, которые мы пометили номером в квадратных скобках так же, как контревекторы фундаментальных представлений в этих подпространствах (см. связь генераторов и матриц Гелл-Манна в II.4.25),

$$\begin{aligned} T_- &\mapsto \sqrt{2} \Gamma_{\alpha_1} = \frac{1}{2} \left(\{\lambda_1[1] - i\lambda_2[1]\} \otimes \mathbb{1}[2] + \mathbb{1}[1] \otimes \{\lambda_1[2] - i\lambda_2[2]\} \right), \\ V_- &\mapsto \sqrt{2} \Gamma_\gamma = \frac{1}{2} \left(\{\lambda_4[1] - i\lambda_5[1]\} \otimes \mathbb{1}[2] + \mathbb{1}[1] \otimes \{\lambda_4[2] - i\lambda_5[2]\} \right), \quad \gamma = \alpha_1 + \alpha_2, . \\ U_- &\mapsto \sqrt{2} \Gamma_{\alpha_2} = \frac{1}{2} \left(\{\lambda_6[1] - i\lambda_7[1]\} \otimes \mathbb{1}[2] + \mathbb{1}[1] \otimes \{\lambda_6[2] - i\lambda_7[2]\} \right), \end{aligned} \quad (\text{II.4.77})$$

На самом деле в этой записи номера в квадратных скобках можно считать избыточными, так как порядок действия единичных матриц и матриц Гелл-Манна указан в явном виде тензорного произведения этих матриц. Они становятся необходимыми только при переходе к традиционной «неявной» записи тензорных произведений типа формулы (II.4.76), в которой формальный порядок записи компонент векторов состояний фундаментальных представлений может быть произвольным.

Корневые тензорные операторы симметричны относительно перестановок фундаментальных представлений, пронумерованных и упорядоченных цифрами в квадратных скобках. Поэтому и состояния, полученные операциями понижения из состояния старшего веса, будут симметричны относительно перестановок индексов компонент векторов состояний фундаментальных представлений. Следовательно, все состояния исследуемого неприводимого представления $T^{(p,0)}$ соответствуют симметричному по перестановкам индексов тензору

$$T^{F_1 \dots F_p} = v^{\{F_1[1] \dots F_p\}}_{[p]}, \quad (\text{II.4.78})$$

где *фигурные скобки* означают симметризацию по перестановкам индексов, например, при $p=2$

$$T^{\{F_1 F_2\}} = \frac{1}{2!} (T^{F_1 F_2} + T^{F_2 F_1}), \dots$$

Итак, неприводимое представление $T^{(p,0)}$ с заданным состоянием старшего веса специального вида (II.4.72) по построению описывается симметричным контравариантным тензором ранга p .

Совершенно аналогично неприводимое представление $T^{(0,p)}$ с заданным состоянием старшего веса вида

$$\mu_S = p \lambda_2 \quad (\text{II.4.79})$$

описывается симметричным ковариантным тензором

$$T_{F'_1 \dots F'_p} = \bar{v}_{\{F'_1[1] \dots F'_p\}}_{[p]}, \quad (\text{II.4.80})$$

построенным из ковекторов второго фундаментального представления $\bar{\mathbf{3}}$ со старшим весом λ_2 , причем и для нижних индексов в (II.4.80) *фигурные скобки* означают симметризацию по перестановкам индексов.

По каждому из верхних индексов тензоры (II.4.78) преобразуются так же, как входящие в тензорное произведение контревекторы фундаментального представления, т.е. 3×3 -матрицами представления группы g (умножение слева), а тензоры (II.4.80) по каждому из нижних — 3×3 -матрицами представления группы g^\dagger (умножение справа).

Поскольку матрицы преобразований унимодулярны ($\det g = 1$), особую роль при рассмотрении представлений группы играет тензор Леви-Чивиты. А именно, величина

$$\epsilon_{F_1 F_2 F_3} v^{F_1}_{[1]} v^{F_2}_{[2]} v^{F_3}_{[3]}, \quad (\text{II.4.81})$$

как мы уже видели, является инвариантом, так как при групповых преобразованиях тензор Леви-Чивиты остается инвариантным

$$\epsilon'_{F_1 F_2 F_3} = \det g \cdot \epsilon_{F_1 F_2 F_3} = \epsilon_{F_1 F_2 F_3}. \quad (\text{II.4.82})$$

Величина же

$$\bar{w}_{F_3} = \epsilon_{F_1 F_2 F_3} v^{F_1}_{[1]} v^{F_2}_{[2]} \quad (\text{II.4.83})$$

представляет из себя векторное произведение двух векторов в триплетном представлении и при действии группы преобразуется по сопряженному фундаментальному представлению антитриплета $\bar{\mathbf{3}}$. Покажем это в явном виде. Действительно, так как⁵³

$$\epsilon_{F_1 F_2 F_3} g_{\bullet F'_1}^{F_1} g_{\bullet F'_2}^{F_2} v^{F'_1}_{[1]} v^{F'_2}_{[2]} = \epsilon_{F_1 F_2 F''_3} g_{\bullet F'_1}^{F_1} g_{\bullet F'_2}^{F_2} g_{\bullet F''_3}^{F''_3} (g^\dagger)_{\bullet F_3}^{F'_3} v^{F'_1}_{[1]} v^{F'_2}_{[2]},$$

где мы использовали унитарность $g_{\bullet F''_3}^{F''_3} (g^\dagger)_{\bullet F_3}^{F'_3} = \delta_{F_3}^{F'_3}$, то с учетом

$$\epsilon_{F'_1 F'_2 F'_3} g_{\bullet F'_1}^{F'_1} g_{\bullet F'_2}^{F'_2} g_{\bullet F'_3}^{F'_3} = \det g \cdot \epsilon_{F_1 F_2 F_3}$$

находим закон преобразования антитриплета $\bar{\mathbf{3}}$

$$\bar{w}_{F'} = \bar{w}_F (g^\dagger)^F_{F'}, \quad (\text{II.4.84})$$

что и требовалось показать: ковектор антитриплета по своим трансформационным свойствам относительно действия группы эквивалентным образом может быть представлен как векторное произведение двух контревекторов.

⁵³Если вместо контревекторов v^F использовать два ковектора \bar{v}_F и их свертку с $\epsilon^{FF'F''}$, то мы, естественно, придем к контревектору фундаментального представления $\mathbf{3}$.

Для читателя, знакомого с дифференциальными формами и операцией дуальности по Ходжу⁵⁴, скажем, что можно определить 1-форму

$$\bar{v} \equiv \bar{v}_F h^F,$$

где базис антитриплетного фундаментального представления задается в полной аналогии с базисом в триплетном фундаментальном представлении (см. рис. 2.6 в §4 Главы 2) с помощью эрмитова сопряжения

$$h^F = (\epsilon_F)^\dagger \Rightarrow h^{(1)} = (1, 0, 0), \quad h^{(2)} = (0, 1, 0), \quad h^{(3)} = (0, 0, 1),$$

а на примере кварковой модели

$$|\bar{\nu}_3\rangle \cong \bar{u}, \quad |\bar{\nu}_2\rangle \cong \bar{d}, \quad |\lambda_2\rangle \cong \bar{s}.$$

В такой конструкции компоненты ковектора задаются через компоненты триплета **3** контревектора v с помощью комплексного сопряжения так, что $\bar{v}_F = (v^F)^*$. Далее можно построить внешнее произведение двух антитриплетов — 2-форму

$$w \equiv \bar{v}_{[2]} \wedge \bar{v}_{[3]} \mapsto w_{F_2 F_3} = \frac{1}{2} \left(\{\bar{v}_{[2]}\}_{F_2} \{\bar{v}_{[3]}\}_{F_3} - \{\bar{v}_{[2]}\}_{F_3} \{\bar{v}_{[3]}\}_{F_2} \right)$$

или дуальную по Ходжу к этой 2-форме 1-форму

$$\bar{w} \equiv *w \mapsto \bar{w}_{F_1} = \epsilon_{F_1 F_2 F_3} v_{[2]}^{F_2} v_{[3]}^{F_3},$$

которая по своим групповым свойствам эквивалентна ковектору антитриплета **3̄**, и наконец 3-форму

$$\bar{\sigma} \equiv \bar{v}_{[1]} \wedge \bar{v}_{[2]} \wedge \bar{v}_{[3]},$$

которая по Ходжу эквивалентна синглету

$$s \equiv *\bar{\sigma} \mapsto \epsilon_{F_1 F_2 F_3} v_{[1]}^{F_1} v_{[2]}^{F_2} v_{[3]}^{F_3},$$

и получить таким образом описание триплета, антитриплета и синглета в терминах 1-формы, 2-формы и 3-формы, соответственно.

Задача 25. Сравните квантовые числа (собственные значения проекции изоспина и странность) у базисных состояний антитриплетов, которые отвечают компонентам ковектора \bar{v}_F и ковектора \bar{w}_F .

После сказанного введем первичные обозначения элементов схем Юнга:

- фундаментальное представление, триплет, обозначают квадратом, символизирующими контравариантный вектор v (один индекс),

$$\square \leftrightarrow T^{(1,0)} = \mathbf{3},$$

- антитриплетное фундаментальное представление изображают в виде пары квадратов, расположенных в виде столбца, что символизирует антисимметричность по перестановкам квадратов в столбце, так как контравариантный антисимметричный тензор, построенный в виде тензорного произведения из двух триплетов фундаментального представления эквивалентен, как мы только что выяснили, ковариантному вектору-антитриплету \bar{w} ,

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \leftrightarrow T^{(0,1)} = \bar{\mathbf{3}},$$

- инвариант, построенный операцией антисимметризации из трех фундаментальных представлений, синглет — столбец из трех квадратов, символизирующий контравариантный тензор третьего ранга, который инвариантен относительно действия группы,

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \leftrightarrow T^{(0,0)} = \mathbf{1}.$$

⁵⁴Если в метрическом N -мерном пространстве задана k -форма с компонентами $\omega_{\mu_1 \dots \mu_k}$, то дуальная по Ходжу ($N-k$)-форма $*\omega$ имеет компоненты $*\omega_{\mu_{k+1} \dots \mu_N} = \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_N} \omega^{\mu_1 \dots \mu_k}$, где верхние контравариантные компоненты получены из нижних ковариантных операцией поднимания индекса обратной метрикой: $\omega^{\mu_1 \dots \mu_k} = g^{\mu_1 \mu'_1} \dots g^{\mu_k \mu'_k} \omega_{\mu'_1 \dots \mu'_k}$.

В рамках такого подхода естественно изобразить симметричный контравариантный тензор неприводимого представления $T^{(p,0)}$ в виде строки длиной в p квадратов и при этом постулировать, что в этой схеме симметризация индексов в строке

$$\underbrace{\square \square \cdots \square}_p \leftrightarrow T^{(p,0)}.$$

Ковариантный тензор неприводимого представления $T^{(0,p)}$ изображается в виде пары строк длиной в p квадратов, и при этом место симметризации индексов в каждой строке и антисимметризации в каждом столбце

$$\underbrace{\begin{array}{c|c} \square & \cdots & \square \\ \hline \end{array}}_p \leftrightarrow T^{(0,p)}.$$

Подчеркнем, что в тензорном методе рассмотрения со схемами Юнга представления $T^{(0,p)}$ и $T^{(p,0)}$, очевидно, являются сопряженными друг другу в следующем смысле: если взять схему Юнга, изображающую инвариант, равный произведению p синглетов, в виде трех строк с одной и той же длиной p , и разбить этот инвариант горизонтальной линией на одиночную строку длиной p и двойную строку длиной p , то выше горизонтальной линии получится схема Юнга представления $T^{(p,0)}$, а ниже горизонтальной линии — схема Юнга для $T^{(0,p)}$, соответственно. Это согласуется с тем, что объединение этих двух схем в одну отвечает свертке симметричного контравариантного тензора ранга p с ковариантным симметричным тензором ранга p по каждому из индексов, в результате чего получается скаляр. В дальнейшем станет ясно, что рассечение такой p -кратной синглетной схемы Юнга линией, которая разбивает эту схему инварианта на две схемы Юнга, то эти схемы также будут ковариантно сопряжены друг другу, т.е. их свертка даст скаляр.

Перейдем теперь к вопросу об описании неприводимого представления $T^{(p_1,p_2)}$ со старшим весом состояния

$$\mu_S = p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2.$$

Построим симметризованное произведение p_1 фундаментальных представлений триплетов и симметризованное произведение p_2 сопряженных фундаментальных представлений антитриплетов

$$\mathcal{T}_{F'_1 \dots F'_{p_2}}^{F_1 \dots F_{p_1}} = \prod_{k=1}^{p_1} v^{\{F_k\}}[k] \prod_{m=1}^{p_2} \bar{v}_{\{F'_m\}}[m]. \quad (\text{II.4.85})$$

Этот тензор содержит компоненту $\mathcal{T}_{3 \dots 3}^{1 \dots 1}$, которая описывает состояние старшего веса представления $T^{(p_1,p_2)}$. Однако для того, чтобы тензор содержал только одно неприводимое представление $T^{(p_1,p_2)}$, в этом произведении не должны содержаться неприводимые представления, старшие веса которых отвечают старшим вершинам внутренних шестиугольников, как мы это выяснили в предыдущем разделе. Для этого на тензор необходимо наложить дополнительные условия.

Подобные ограничения легко сформулировать. В самом деле, отметим сначала, что, стартовав со старшего вектора в каждом из фундаментальных триплетов и антитриплетов, действием понижающих генераторов и их суперпозиций можно получить все множество состояний у этих триплетов и антитриплетов, произведение которых и даст записанный выше тензор, симметризированный по контравариантным и ковариантным индексам, так как действие тензорных понижающих операторов по построению симметризовано по перестановкам компонентных множителей тензорного произведения. Однако симметризованный по верхним и нижним индексам тензор того же ранга можно построить и из произведения символа Кронекера на компоненты векторов триплетов и ковекторов антитриплетов, например,

$$(\mathcal{T}')_{F'_1 \dots F'_{p_2}}^{F_1 \dots F_{p_1}} = \delta_{\{F'_1}^{\{F_1} \prod_{k=2}^{p_1} v^{F_k}\}}[k] \prod_{m=2}^{p_2} \bar{v}_{F'_m}[m]. \quad (\text{II.4.86})$$

Если векторы и ковекторы отвечают в этой записи состояниям старшего веса в первом и втором фундаментальных представлениях, то действие понижающих генераторов и их суперпозиций на этот тензор будут отвечать построению симметричного тензора для представления $T^{(p_1-1,p_2-1)}$, а дельта-символ Кронекера — это инвариантный тензор второго ранга смешанного типа, т.е. с верхним и нижним индексом: инвариантность означает, что символ Кронекера реализует синглетное представление группы. Это значит, что не всякий симметризованный тензор $\mathcal{T}_{F'_1 \dots F'_{p_2}}^{F_1 \dots F_{p_1}}$ ранга $p_1 + p_2$ символизирует неприводимое представление $T^{(p_1,p_2)}$, а только тот, что при свертке любой пары из верхнего и нижнего индексов дает тензор ранга $p_1 + p_2 - 2$, тождественно равный нулю. Если подобная свертка отлична от нуля, то

симметризованный тензор ранга $p_1 + p_2 - 2$ содержит в себе как минимум неприводимое представление $T^{(p_1-1, p_2-1)}$, а также, возможно, и представления более низших рангов, если и повторные свертки отличны от нуля.

Например, рассмотрим симметризованный тензор с двумя контравариантными и двумя ковариантными индексами, построенный из триплета, антитриплета и символа Кронекера в виде

$$(\mathcal{T}')_{F'_1 F'_2}^{F_1 F_2} = \frac{1}{4} \left\{ \delta_{F'_1}^{F_1} v^{F_2}[1] \bar{v}_{F'_2}[2] + \delta_{F'_1}^{F_2} v^{F_1}[1] \bar{v}_{F'_2}[2] + \delta_{F'_2}^{F_1} v^{F_1}[1] \bar{v}_{F'_1}[2] + \delta_{F'_2}^{F_2} v^{F_2}[1] \bar{v}_{F'_1}[2] \right\}.$$

Тогда свертка

$$\begin{aligned} \delta_{F'_1}^{F'_1} (\mathcal{T}')_{F'_1 F'_2}^{F_1 F_2} &= \frac{1}{4} \left\{ 3 v^{F_2}[1] \bar{v}_{F'_2}[2] + v^{F_2}[1] \bar{v}_{F'_2}[2] + \delta_{F'_2}^{F_2} v^{F_1}[1] \bar{v}_{F'_1}[2] + v^{F_2}[1] \bar{v}_{F'_2}[2] \right\} = \\ &= \frac{5}{4} \left\{ v^{F_2}[1] \bar{v}_{F'_2}[2] - \frac{1}{3} \delta_{F'_2}^{F_2} v^{F_1}[1] \bar{v}_{F'_1}[2] \right\} + \frac{2}{3} \delta_{F'_2}^{F_2} v^{F_1}[1] \bar{v}_{F'_1}[2], \end{aligned}$$

где первое слагаемое — это бесследовый тензор второго ранга, который отвечает октетному представлению $T^{(1,1)}$, а второй составлен из инвариантного тензора Кронекера с инвариантным множителем скаляром $(\bar{v} \cdot v)$. Как мы и утверждали, след симметризованного тензора может включать в себя вклады не одного неприводимого представления, а нескольких неприводимых представлений меньшего ранга.

Значит, для неприводимости симметризованного тензора необходимо положить, что свертка симметризованного тензора, отвечающего неприводимому представлению группы $SU(3)$, по любой паре индексов обращается в нуль:

$$\delta_{F'_k}^{F'_m} \mathcal{T}_{F'_1 \dots F'_{p_2}}^{F_1 \dots F_{p_1}} = 0, \quad \forall k, m. \quad (\text{II.4.87})$$

Это правило легко понять на примере тензора представления $T^{(1,1)}$: $\mathcal{T}_{F'}^F$. Свертка его индексов привела бы к инварианту \mathcal{T}_F^F , если бы этот инвариант не был положен равным нулю, и тогда этот инвариант — синглет — составлял бы одну из приводимых компонент тензора: при групповых преобразованиях синглет выражался бы только через себя самого, т.е. он описывал бы инвариантное подпространство, отличное от нуль-состояния и от рассматриваемого 9-мерного пространства состояний. Если же след тензора равен нулю, то с помощью матриц Гелл-Манна это тензор можно представить в виде

$$\mathcal{T}_{F'}^F = B (\lambda_a)_{\bullet F'}^F \{ \mathcal{T}_{F_2}^{F_1} (\lambda_a)_{\bullet F_1}^{F_2} \}, \quad (\text{обратите на суммирование по немому индексу } a),$$

где константу B легко определить, умножая равенство на $(\lambda_b)_{\bullet F}^{F'}$. Тогда, поскольку

$$(\lambda_b)_{\bullet F}^{F'} (\lambda_a)_{\bullet F'}^F = \text{tr}(\lambda_b \lambda_a) = 2\delta_{ab},$$

находим

$$B = \frac{1}{2}.$$

В итоге, изучаемый тензор преобразуется как матрицы Гелл-Манна, которые как раз и реализуют представление генераторов группы, т.е. присоединенное представление $T^{(1,1)}$.

Вычислим количество независимых компонент у симметризованного тензора (II.4.85) с нулевым следом по каждой из пар индексов (II.4.87) и убедимся, что размерность этого тензора совпадает с размерностью неприводимого представления $T^{(p_1, p_2)}$, которая приведена в формуле (II.4.56).

У симметричного тензора ранга p , значения индексов которого меняются в пределах от 1 до 3, может быть только три группы индексов, таких, что индексы в группе принимают равные значения, отличные от значений в других группах индексов: либо 1, либо 2, либо 3. Пусть первая группа включает в себя k индексов, а значит, k лежит в пределах $0 \leq k \leq p$. Пусть вторая группа включает в себя j индексов, откуда $0 \leq j \leq p - k$. Остальные индексы принадлежат третьей группе. При заданном k имеется $p + 1 - k$ возможностей для числа индексов во второй группе. В симметричном тензоре порядок индексов неважен. Будем считать, что первая группа из k индексов принимает значение 1, вторая группа, состоящая из $p - k + 1$ индексов, — значение 2, а оставшиеся индексы — значение 3. Тогда для подсчёта вариантов надо просуммировать по числу k в диапазоне его изменения, т.е. от нуля до p . Значит, число возможных различных комбинаций индексов симметричного тензора ранга p , при которых он принимает независимые значения, равно

$$\sum_{k=0}^p (p + 1 - k) = \frac{1}{2} (p + 1)(p + 2). \quad (\text{II.4.88})$$

Смешанный тензор, отвечающий представлению $T^{(p_1, p_2)}$, имеет p_1 симметризованных верхних индексов и p_2 симметризованных нижних индексов. Поэтому число его независимых компонент — произведение возможных комбинаций в (II.4.88):

$$\frac{1}{4} (p_1 + 1)(p_1 + 2)(p_2 + 1)(p_2 + 2), \quad (\text{II.4.89})$$

но при этом необходимо учесть условие бесследовости тензора при его свертке по каждой паре противолежащих индексов [см. (II.4.87)]. Результат свертки (II.4.87) можно рассматривать как равенство нулю тензора, симметризованного отдельно по $p_1 - 1$ верхним и по $p_2 - 1$ нижним индексам. Значит, у симметризованного тензора (II.4.87) все компоненты должны быть равны нулю. Количества таких условий дается той же формулой (II.4.89), при подстановке $p_{1,2} \mapsto p_{1,2} - 1$:

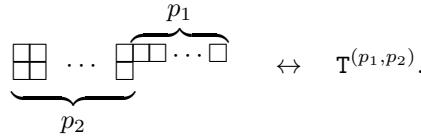
$$\frac{1}{4} p_1(p_1 + 1)p_2(p_2 + 1). \quad (\text{II.4.90})$$

Так как тензор неприводимого представления изначально симметризован, то достаточно рассмотреть его свертку по единственной произвольной паре индексов: все другие свертки по условию симметрии тензора сводятся к выбранной. В итоге, вычитание числа условий нулевой свертки (II.4.90) из количества компонент в симметризованном тензоре (II.4.89) дает число базисных состояний неприводимого представления $T^{(p_1, p_2)}$

$$\dim T^{(p_1, p_2)} = \frac{1}{2} (p_1 + 1)(p_2 + 1)(p_1 + p_2 + 2), \quad (\text{II.4.91})$$

т.е. воспроизводит прежний результат (II.4.56), полученный прямым подсчетом состояний на весовой диаграмме с учетом степени вырождения весов.

Неприводимое представление $T^{(p_1, p_2)}$ изображается на схеме Юнга в виде



Подчеркнем, что первая строка по определению схемы Юнга должна быть не короче второй. Ясно также, что слева к этой схеме можно пририсовать произвольное число трехярусных столбцов, символизирующих синглеты-инварианты, которые в виде множителей в тензорном произведении нисколько не изменяют характеристики неприводимости представления по отношению к групповым преобразованиям.

Формулу для размерности неприводимого представления (II.4.91) можно записать в виде

$$\dim T^{(p_1, p_2)} = \frac{(p_1 + p_2 + 2)!}{2!p_1!(p_1 + p_2 + 1) \cdots (p_1 + 2)} \cdot \frac{(p_2 + 1)!}{p_2!}.$$

Это произведение трактуют по следующей схеме:

- припишем каждой клетке i число шагов D_i от ее положения к «первой», расположенной в левом верхнем углу, считая шаг вверх отрицательным;
- сопоставим этой клетке длину «крюка» k_i — число клеток, расположенных по двум линиям строго ниже ее и правее ее, включая ее саму.

Тогда для верхней строки получаем набор значений (слева направо)

$$\begin{aligned} \{D_i\} &= \{ 0, 1, \dots, p_2 - 1 \mid p_2, p_2 + 1, \dots, p_1 + p_2 - 1 \}, \\ \{k_i\} &= \{ p_1 + p_2 + 1, p_1 + p_2, \dots, p_1 + 2 \mid p_1, p_1 - 1, \dots, 1 \}, \end{aligned} \quad (\text{II.4.92})$$

где вертикальная линия отмечает конец нижней строки. Тогда находим, что первый сомножитель из двух в произведении для размерности неприводимого представления выражается через произведение

$$\frac{(p_1 + p_2 + 2)!}{2!p_1!(p_1 + p_2 + 1) \cdots (p_1 + 2)} = 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (p_1 + p_2 + 2) \cdot \frac{p_1 + 1}{(p_1 + p_2 + 1)!} = \prod_i \frac{3 + D_i}{k_i}.$$

Аналогично для второй строки получаем набор

$$\begin{aligned} \{D_i\} &= \{ -1, 0, \dots, p_2 - 2 \}, \\ \{k_i\} &= \{ p_2, p_2 - 1, \dots, 1 \}, \end{aligned} \quad (\text{II.4.93})$$

так что

$$\prod_i \frac{3 + D_i}{k_i} = \frac{2 \cdot 3 \cdots (p_2 + 1)}{p_2!} = \frac{(p_2 + 1)!}{p_2!}.$$

В итоге, приходим к выражению для размерности неприводимого представления группы $SU(3)$ в терминах шагов D_i и крюков k_i

$$\dim T^{(p_1, p_2)} = \prod_i \frac{3 + D_i}{k_i}. \quad (\text{II.4.94})$$

В случае группы $SU(2)$ аналогичную формулу для размерности неприводимого представления $T^{(j)}$ с моментом j можно получить, если учесть, что для этой группы схема Юнга — это одна строка из $2j$ клеток, так что для этой единственной строки набор шагов и крюков задается в виде

$$\begin{aligned} \{D_i\} &= \{0, 1, \dots, 2j - 1\}, \\ \{k_i\} &= \{2j, 2j - 1, \dots, 1\}. \end{aligned} \quad (\text{II.4.95})$$

Тогда

$$\dim T^{(j)} = \prod_i \frac{2 + D_i}{k_i} = \frac{2 \cdot 3 \cdots (2j + 1)}{(2j)!} = \frac{(2j + 1)!}{(2j)!} = 2j + 1, \quad (\text{II.4.96})$$

что совпадает со стандартным результатом.

Без вывода приведем обобщение для группы $SU(N)$, для которой можно ввести аналогичные схемы Юнга с указанными свойствами симметрии в строках и антисимметрии в столбцах⁵⁵:

$$\dim T^{(p_1, p_2, \dots, p_{N-1})} = \prod_i \frac{N + D_i}{k_i} \quad (\text{II.4.97})$$

Мы построили неприводимое представление и его схему Юнга, исходя из рассмотрения многократного тензорного произведения состояний фундаментального представления триплета и сопряженного к нему антитриплета: это есть частный случай произведения волновых функций двух неприводимых представлений: $T^{(p_1, 0)} \otimes T^{(0, p_2)}$, и выделения в нем неприводимой части $T^{(p_1, p_2)}$, одного из членов в прямой сумме⁵⁶. В терминах схем Юнга

$$\underbrace{\begin{array}{c|c} \square & \dots \\ \hline \square & \end{array}}_{p_2} \otimes \underbrace{\begin{array}{c|c} \square & \dots \\ \hline \square & \end{array}}_{p_1} = \underbrace{\begin{array}{c|c} \square & \dots \\ \hline \square & \end{array}}_{p_2} \underbrace{\begin{array}{c|c} \square & \dots \\ \hline \square & \end{array}}_{p_1} \oplus \dots$$

Несложно догадаться, как выглядят другие члены прямой суммы в этом тензорном произведении: клетки-компоненты тензорного произведения из второй схемы Юнга (контравариантный тензор) можно последовательно присоединять (тензорно умножать) к первой схеме так, чтобы получалась опять же схема Юнга (неприводимое представление), и при этом вычеркивать получающиеся трехярусные столбцы, отвечающие инвариантным множителям в тензорном произведении. В итоге, можно вложить в третью строку l клеток из второй схемы Юнга, причем $l \leq \min(p_1, p_2)$, или добавить k клеток во вторую строку, так чтобы $p_1 - l - k \geq k$, и сумма представлений имеет вид

$$\bigoplus_{l=0}^{\min(p_1, p_2)} \bigoplus_{k=0}^{(p_1-l)/2} \underbrace{\begin{array}{c|c} \square & \dots \\ \hline \square & \end{array}}_{p_2-l+k} \underbrace{\begin{array}{c|c} \square & \dots \\ \hline \square & \end{array}}_{p_1-l-k}.$$

Описанное вычисление есть простейшее применение метода схем Юнга для разложения в прямую сумму произведения неприводимых представлений для группы $SU(3)$.

В общем случае (представления с двумя строками разной длины) сформулируем правила вычисления произведения неприводимых представлений. Пусть первая схема Юнга в произведении будет фиксированной. К ней мы будем присоединять всеми возможными способами клетки второй схемы, ограничивая себя следующими требованиями:

⁵⁵Формула справедлива и для $N = 2$.

⁵⁶Напомним, что прямую сумму образуют векторные подпространства, элементы которых являются инвариантными подпространствами при групповых преобразованиях, т.е. линейная оболочка образов подпространства совпадает с самим подпространством. Мы использовали эти понятия при определении неприводимых представлений: приводимое представление — это прямая сумма неприводимых (инвариантных) подпространств.

1. клетки второй схемы присоединяются к первой последовательно строка за строкой, начиная с верхней («длинной»);
2. присоединение клеток должно давать схему Юнга (длины первой и второй строк упорядочены);
3. максимальное число строк равно трем (столбец из трех клеток вычеркивается из схемы как инвариант);
4. клеткам в строках второй схемы присваивают символические имена: верхняя строка — « a », нижняя — « b », так что после присоединения к фиксированной схеме клетки с одним именем не могут оказаться в одном столбце: действительно, клетки с одним именем изначально симметризованы по перестановкам, а их запись в столбец означала бы антисимметризацию, которая для симметричного тензора дает тождественный нуль;
5. после всевозможных присоединений клеток второй схемы к первой среди результирующих схем Юнга допустимы только те, в которых последовательная запись имен клеток справа налево и сверху вниз упорядочена так, что в любой точке записи число имен « a » не меньше числа имен « b ».

Последнее правило означает, что выше заданной присоединенной клетки число клеток из первой строки второй схемы не меньше числа клеток из второй строки. Этот отражает тот факт, что отдельной клетке с именем « a » отвечает триплет фундаментального представления типа v^a , а клетке с именем « b » сопутствует и клетка с именем « a », так как они образуют двухярусный столбец — антисимметризованное произведение двух триплетов фундаментального представления $v^a \tilde{v}^b - v^b \tilde{v}^a$. Фундаментальные триплеты из первой строки второй схемы могут быть либо симметризованы с триплетами из первой строки фиксированной схемы: операция присоединения клетки « a » к первой строке; либо антисимметризованы: операция присоединения клетки « a » ко второй строке; либо свернуты с сопряженными антитриплетами исходной схемы: операция присоединения клетки « a » в третью строку с образованием инварианта. Рассмотрение тех же операций с клеткой по имени « b » показывает, во-первых, что она не может быть присоединена к первой строке, так как либо в первой строке уже есть антисимметрично сопряженная ей клетка по имени « a », симметризация с которой приводит к нулю, либо в этой строке отсутствуют клетки по имени « a », так что в результате добавления в первую строку клетки « b » возникло бы повторное выделение одного и того же слагаемого: сопряженная клетка « a » уже составила подобную же схему (двойной счет). Запись клетки « b » во вторую строку означает антисимметризацию фундаментального триплета со спинорами исходной схемы, и следовательно, симметризацию с сопряженным антитриплетом « a ». То же самое касается и свертки с клеткой « b ». В итоге, выше клетки « b » должна быть хотя бы одна клетка « a », что и записано в последнем правиле.

Проиллюстрируем действие метода схем Юнга на простейших примерах. Произведение представлений $\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = T^{(0,1)} \otimes T^{(1,0)}$:

$$\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \otimes \square = \begin{array}{c} \square \quad \square \\ \square \end{array} \oplus \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} = T^{(1,1)} \oplus T^{(0,0)} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}.$$

Умножение тех же волновых функций в обратном порядке иллюстрирует пятое правило:

$$\square \otimes \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} = \left(\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \oplus \square \square \right) \otimes \square = \begin{array}{c} \square \quad \square \\ \square \end{array} \oplus \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \oplus \square \square \oplus \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} = \begin{array}{c} \square \quad \square \\ \square \end{array} \oplus \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \oplus \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}.$$

Первое и третье слагаемые в этой сумме недопустимы: первое повторяет четвертое слагаемое, а третье противоречит изначальной антисимметрии по перестановкам « a » и « b » в исходном антитриплете; и поэтому мы приходим к прежнему результату

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}.$$

Заметим, что в кварковой модели адронов симметрия ароматов в кварк-антикварковом секторе, т.е. для мезонов, приводит, согласно последнему примеру, к существованию не только описанного нами псевдоскалярного мезонного октета, но и синглета, η' - мезона, который наблюдается экспериментально.

Произведение $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ вычисляется последовательно:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \square \otimes \square = \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \oplus \square \square = T^{(0,1)} \oplus T^{(2,0)} = \bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6},$$

$$\mathbf{6} \otimes \mathbf{3} = \square \square \otimes \square = \square \square \square \oplus \begin{array}{c} \square \quad \square \\ \square \end{array} = T^{(3,0)} + T^{(1,1)} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8},$$

а произведение $\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$ мы вычислили выше, так что

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10}.$$

Декуплету отвечают волновые функции симметричные по перестановкам ароматов кварков. С учетом антисимметрии цветовой волновой функции и статистики Ферми в основном состоянии с симметричной пространственной волновой функцией допустимы только симметричные спиновые функции и мы приходим к декуплету барионов со спином $\frac{3}{2}$. Синглетное состояние антисимметрично по ароматам кварков и по их цвету, а значит, спиновая функция в основном состоянии могла бы быть только антисимметричной, что невозможно: хотя бы две из трех стрелок спина смотрят в одну сторону, — так что синглет в основном состоянии запрещен. Октетные состояния имеют смешанную симметрию по перестановкам кварковых ароматов и антисимметричны по цвету, так что из них формируется октет барионов со спином $\frac{1}{2}$, в котором произведение волновой функции ароматов на спиновую волновую функцию симметричны по перестановкам.

Итак, метод схем Юнга позволяет вычислять разложение тензорного произведения в прямую сумму, определяя тем самым типы неприводимых представлений. Его обобщение с $SU(3)$ на случай группы $SU(N)$ довольно очевидно, но мы не излагаем его, а отсылаем пытливого читателя к соответствующей физико-математической литературе, где обычно он описан кратко в виде инструкций по применению.

Другой вопрос — вычисление матричных элементов перехода от базиса произведения квантовых состояний неприводимых представлений к базису состояний неприводимого представления в прямой сумме, отвечающей этому произведению. Это — задача расчета коэффициентов Клебша–Гордона, а также ее обобщение на случай матричных элементов неприводимых тензорных операторов, теорема Вигнера–Эккарта. В простейших задачах их решение легко находится, а общие же методы излагаются в справочной литературе.

Задача 26. Пользуясь схемами Юнга для группы $SU(2)$ и формулой для размерности представления, запишите схемы для синглета $s = 0$, дублета $s = \frac{1}{2}$, триплета $s = 1$ и квартета $S = \frac{3}{2}$ и разложите в прямую сумму тензорные произведения $2 \otimes 2$, $3 \otimes 2$ и $3 \otimes 3$.

Задача 27. Используя выражение для размерности неприводимого представления группы $SU(2)$ через шаги D_i и крюки k_i :

$$\dim T^{(p_1)} = \prod_i \frac{N + D_i}{k_i}. \quad (\text{II.4.98})$$

докажите, что размерность представления с моментом $j = p_1/2$ равна $2j + 1$.

Задача 28. С помощью группы отражений Вейля покажите, что фундаментальные представления с весами старших векторов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ алгебры $\mathfrak{su}(N)$, где $N = n + 1$, n — ранг алгебры, а фундаментальные векторы λ_k отвечают нумерации простых положительных корней на диаграмме Дынкина от крайнего первого до крайнего последнего, имеют размерность

$$C_N^k = \frac{N!}{k!(N - k)!}.$$

Решение. Каждый элемент группы отражений Вейля переводит неприводимое представление в себя. Для того чтобы определить число состояний представления, необходимо сосчитать число композиций отражений, которые переводят одно состояние представления во все другие.

Начнем рассмотрение с фундаментального представления с весом λ_1 у старшего вектора состояния, причем простой положительный корень α_1 расположен первым в цепочке корней алгебры $\mathfrak{su}(N)$ на диаграмме Дынкина. Единственное отражение, которое изменяет старший вес этого фундаментального представления, согласно определению

$$\mathfrak{s}_m \nu = \nu - 2 \frac{(\nu, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)},$$

где все простые корни в алгебре $\mathfrak{su}(N)$ имеют одну и ту же длину, $(\alpha_m, \alpha_m) = 1$,

$$\mathfrak{s}_1 \lambda_1 = \lambda_1 - \alpha_1, \quad \mathfrak{s}_1 (\lambda_1 - \alpha_1) = \lambda_1,$$

а так как в алгебре $\mathfrak{su}(N)$ все простые положительные корни соединены последовательно от α_1 к α_2 и так далее, естественно возникает цепочка однократных отражений от старшего веса к младшему,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\xleftarrow{\mathfrak{s}_1} \lambda_1 - \alpha_1 \xleftarrow{\mathfrak{s}_2} \lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2 \xleftarrow{\mathfrak{s}_3} \dots \xleftarrow{\mathfrak{s}_n} \lambda_1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_n \\ &\Downarrow \\ v^{(1)} &\xleftarrow{\mathfrak{s}_1} v^{(2)} \xleftarrow{\mathfrak{s}_2} v^{(3)} \xleftarrow{\mathfrak{s}_3} \dots \xleftarrow{\mathfrak{s}_n} v^{(n+1)}. \end{aligned} \quad (\text{II.4.99})$$

Тем самым мы перечислили все компоненты фундаментального представления v^c со старшим весом λ_1 . Это представление называют определяющим, так как коэффициенты разложения по базису состояний в этом представлении, v^c , отвечают столбцу с $n+1 = N$ компонентами, и именно на этот столбец действуют унитарные унимодулярные⁵⁷ матрицы группы $SU(N)$.

Полученный результат можно сформулировать следующим образом:
если рассмотреть цепочку элементов группы отражений Вейля

$$(1, \mathfrak{s}_1, \dots, \mathfrak{s}_n), \quad (\text{II.4.100})$$

то выборка независимых однократных отражений из этих $n+1$ элементов дает число композиций, равное числу состояний представления со старшим вектором λ_1 , а количество элементов в выборке равно $C_{n+1}^1 = C_N^1 = n+1$.

Ясно, что представление со старшим весом λ_n , который расположен в конце цепочки на диаграмме Дынкина для простых положительней корней группы $SU(N)$, строится из старшего вектора состояния ровно таким же манером, так что возникает сопряженное к v^c представление \bar{v}^c той же размерности $n+1 = N$, как мы это уже описали при построении фундаментальных представлений алгебры $\mathfrak{su}(3)$, для которой есть только два фундаментальных представления.

Описанная картина может теперь применяться и для других фундаментальных представлений. Для примера, в фундаментальном представлении со старшим весом λ_2 для построения из старшего вектора состояния $|\lambda_2\rangle$ других векторов состояния необходимо сначала задействовать вейлевское отражение \mathfrak{s}_2 ,

$$\mathfrak{s}_2\lambda_2 = \lambda_2 - \alpha_2.$$

Затем можно уже действовать отражениями \mathfrak{s}_k , где $2 < k \leq n$, так же, как мы поступали при рассмотрении определяющего представления. Но, поскольку простой положительный корень α_2 расположен на диаграмме Дынкина вторым после корня α_1 , с которым есть одинарное соединение, и

$$\mathfrak{s}_1(-\alpha_2) = -\alpha_2 - \alpha_1,$$

на каждом шаге отражения \mathfrak{s}_k , где $2 < k \leq n$, допустимо разветвление за счет действия \mathfrak{s}_1 . Это значит, что общее число композиций, которые порождают все элементы этого представления равно выборке двукратных отражений из группы Вейля (II.4.100), т.е.

$$C_N^2 = \frac{1}{2}N(N-1).$$

На примере алгебры $\mathfrak{su}(4)$ неупорядоченная выборка двукратных отражений из группы Вейля содержит 6 элементов,

$$(1\mathfrak{s}_1, 1\mathfrak{s}_2, 1\mathfrak{s}_3, \mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2, \mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_3, \mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_3),$$

последовательное действие которых на старший вес порождает все состояния представления, в чем читатель может убедиться самостоятельно, изображая ту же последовательность операций, что была описана нами выше для старшего веса λ_1 , но с поправкой на ветвления. Отметим лишь, что замечание о неупорядоченной выборке говорит о следующем: если, например, указано двойное отражение $\mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_3$, то на практике нужно рассмотреть отражение $A\mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_3 + B\mathfrak{s}_3\mathfrak{s}_2$ с $A \neq 0, B \neq 0$ так как нас интересует число независимых состояний в суперпозиции, а не построение состояний, отвечающих определенным весам. К примеру,

$$\mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_3\lambda_2 = \mathfrak{s}_2\lambda_2 = \lambda_2 - \alpha_2, \quad \mathfrak{s}_3\mathfrak{s}_2\lambda_2 = \mathfrak{s}_3(\lambda_2 - \alpha_2) = \lambda_2 - \alpha_2 - \alpha_3.$$

Первый из этих весов уже получался при действии $1\mathfrak{s}_2\lambda_2$, так что указанная суперпозиция двойного отражения $A\mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_3 + B\mathfrak{s}_3\mathfrak{s}_2$ дает только один новый независимый вектор состояний, как это и должно быть в принятой нами методике построения элементов фундаментального представления со старшим весом λ_2 .

Таким образом, логика проведенного рассмотрения приводит к тому, что размерность фундаментального представления с весом λ_k равна числу выборок k -кратных отражений из элементов группы Вейля (II.4.100)

$$C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}.$$

После этого вывода становится обоснованным изображение фундаментальных представлений алгебры $\mathfrak{su}(N)$ в виде столбца из k клеточек: число независимых выборок в полностью антисимметричном тензоре ранга $N-k$ равно

$$C_N^{N-k} = C_N^k.$$

Поэтому можно утверждать, что, с одной стороны, фундаментальное представление из k клеточек в столбце отвечает неприводимому тензору

$$\epsilon_{c_1 \dots c_k c_{k+1} \dots c_N} v_{[1]}^{c_1} \dots v_{[k]}^{c_k},$$

или, с другой стороны, в евклидовом пространстве это внешнее произведение 1-форм

$$\omega_{[1]} \wedge \dots \wedge \omega_{[k]}, \quad \omega_{[j]} = (v_{[j]})_c da^c, \quad c \in \{\overline{1, N}\}.$$

⁵⁷Условие равенства единице детерминанта матрицы называют унимодулярностью.

Для примера, в алгебре $\mathfrak{su}(3)$ (см. раздел 4.1 Главы 2, §4 на стр. 102) элемент

$$\epsilon_{312} v_{[1]}^1 v_{[2]}^{(2)}$$

отвечает вектору собственных значений

$$\lambda_1 + (\lambda_1 - \alpha_1) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \lambda_2,$$

так как собственные значения генераторов подалгебры Картана каждого вектора состояния — это компоненты весового вектора, а для произведения состояний собственные значения складываются, и

$$v_{[1]}^1 \mapsto \lambda_1, \quad v_{[2]}^{(2)} \mapsto \nu_2 = \lambda_1 - \alpha_1.$$

Это значит, что нумерация состояний в сопряженном представлении в этой схеме с антисимметричными тензорами отвечает тому, что на третьей позиции значится фундаментальный вектор представления⁵⁸. Кроме того, мы убеждаемся, что старший вектор фундаментального представления может быть построен в виде суперпозиции фундаментального вектора и весов определяющего представления.

Задача 29. Рассмотрите фундаментальные представления группы $SU(5)$ и диаграммы Юнга для них, используя выражение для размерности неприводимого представления группы $SU(N)$ через шаги D_i и крюки k_i :

$$\dim T^{(p_1, p_2, \dots, p_{N-1})} = \prod_i \frac{N + D_i}{k_i}. \quad (\text{II.4.101})$$

Используйте схему теории великого объединения (GUT= Great Unified Theory) для фермионов первого поколения: лептонов ν_e , e и кварков u , d — с квантовыми числами: электрический заряд Q , слабый изоспин T_3^W , цвет по группе $SU_c(3)$. Учтите, что в слабых взаимодействиях участвуют только левые фермионы (проекция спина на ось импульса равна $-\frac{1}{2}$) и их СР-сопряженные партнёры — правые античастицы (проекция на ось импульса равна $+\frac{1}{2}$). Распишите состав фундаментальных представлений по фермионам первого поколения. Чему равна сумма зарядов и проекций изоспина компонент фундаментального представления?

Решение. Ранг группы $SU(5)$ равен четырем, а значит, имеется 4 фундаментальных представления и 4 наблюдаемых величины — 4 генератора подалгебры Картана, которые представляют собой диагональные матрицы. На диагоналях расположены вещественные собственные значения наблюдаемой величины, сумма которых равна нулю, так как в простой компактной алгебре Ли след эрмитовой матрицы генератора равен нулю.

Фундаментальные представления отвечают следующим схемам Юнга:

\square — представление $T^{(1,0,0,0)}$, квинтет **5**, так как согласно **задаче 28** его размерность равна $C_5^1 = 5$, а по общей формуле

$$\dim T^{(1,0,0,0)} = \frac{5}{1} = 5,$$

\square — представление $T^{(0,1,0,0)}$, декуплет **10**, так как согласно **задаче 28** его размерность равна $C_5^2 = 10$, а по общей формуле

$$\dim T^{(0,1,0,0)} = \frac{5}{2} \frac{4}{1} = 10,$$

\square — представление $T^{(0,0,1,0)}$, декуплет **10̄**, так как согласно **задаче 28** его размерность равна $C_5^2 = 10$, а по общей формуле

$$\dim T^{(0,0,1,0)} = \frac{5}{3} \frac{4}{2} \frac{3}{1} = 10,$$

\square — представление $T^{(0,0,0,1)}$, сопряженный квинтет **5̄**, так как согласно **задаче 28** его размерность равна $C_5^3 = 5$, а по общей формуле

$$\dim T^{(0,0,0,1)} = \frac{5}{4} \frac{4}{3} \frac{3}{2} \frac{2}{1} = 5.$$

Сопряженность двух представлений является следствием того, что они по своим индексам преобразуются матрицами U и U^\dagger , соответственно, как мы это показали при рассмотрении фундаментальных представлений $SU(3)$.

⁵⁸Этот вывод согласуется с явным построением триплета первого фундаментального представления (u, d, s) и триплета сопряженного представления $(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$, как мы это показали в разделе 4.1 Главы 2, §4. Сопряжение отвечает смене знаков всех собственных значений — весов. При этом мы не изменяем нумерацию сопряженных состояний, т.е. переводим состояние в сопряженное, оставляя его на том же месте в триплете. В данном случае старший вектор первого фундаментального представления, u , занимает первое место, а старший вектор сопряженного фундаментального представления, \bar{s} , последнее, третье.

Далее, по условию задачи задан комплект состояний первого поколения фермионов (см. стр. 100): по слабому взаимодействию выделяют дублеты левых лептонов и кварков и их античастицы⁵⁹

$$\mathcal{Q}_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{Q}}_R = \begin{pmatrix} \bar{d}_R \\ -\bar{u}_R \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_L = \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{L}}_R = \begin{pmatrix} e_R^+ \\ -\bar{\nu}_R^e \end{pmatrix}, \quad (\text{II.3.25})$$

квантовые числа которых задаются электрическими зарядами и слабым изоспином, а также синглеты по слабому взаимодействию (правые частицы и СР-сопряженные им левые античастицы)

$$u_R, \quad d_R, \quad \bar{u}_L, \quad \bar{d}_L, \quad e_R, \quad e_L^+, \quad (\text{II.3.26})$$

у которых слабый изоспин равен нулю. Кроме того, кварки являются триплетами $\mathbf{3}_c$ по цветовой группе $SU_c(3)$, а антикварки — антитриплетами $\bar{\mathbf{3}}_c$. Всего с учетом цвета в первом поколении 30 квантовых состояний, что в точности совпадает с числом состояний в 4-х фундаментальных представлениях группы $SU(5)$.

В группе $SU(5)$ содержится подгруппа $SU_L(2) \times SU_c(3)$, так как в определяющем 5-мерном представлении всегда можно выделить 2 компоненты сверху, которые преобразуются по группе слабого изоспина, и 3 компоненты снизу, которые преобразуются по цвету, причем 2 компоненты сверху не должны нести цвет, а 3 компоненты снизу не должны иметь слабый изоспин. Значит, в определяющем представлении — в квинтете по $SU(5)$ — имеет смысл выбрать в качестве 2 верхних компонент дублет левых лептонов.

Теперь учтем, что ранг группы $SU(5)$ равен 4, и кроме проекции слабого изоспина (1 наблюдаемая) и цвета (2 генератора в подалгебре Картана) компоненты представления обладают еще одним квантовым числом — электрическим зарядом. Поэтому сумма зарядов в определяющем представлении должна обращаться в нуль: заряд 3-х цветных компонент в квинтете должен равняться +1, так как сумма зарядов нейтрино и электрона равна -1. Итак, в квинтете в качестве 3-х нижних компонент входят кварки в зарядом $+\frac{1}{3}$, изосинглетные по слабому взаимодействию, т.е.

$$\mathbf{5} \cong v = \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \\ \bar{d}_L \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \\ \bar{d}_L^{c_1} \\ \bar{d}_L^{c_2} \\ \bar{d}_L^{c_3} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.4.102})$$

Сопряженный квинтет $\bar{\mathbf{5}}$ содержит античастицы с учетом комбинированной СР-четности, которая не только меняет знаки, но спиральность — проекцию спина на ось импульса в безмассовом пределе (это экспериментальный факт исследования слабых взаимодействий). Значит,

$$\bar{\mathbf{5}} \cong \bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{\nu}_R^e \\ e_R^+ \\ d_R \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \bar{\nu}_R^e \\ e_R^+ \\ d_R^{c_1} \\ d_R^{c_2} \\ d_R^{c_3} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.4.103})$$

Фундаментальное определяющее представление $\mathbf{5}$ позволяет вычислить все характеристики компонент декуплетов $\mathbf{10}$ и $\bar{\mathbf{10}}$, так как собственные значения состояний складываются. Поэтому, например, у сопряженного декуплета

$$u_{a_1 a_2} \equiv \epsilon_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} v_{[1]}^{a_3} v_{[2]}^{a_4} v_{[3]}^{a_5}$$

компонент $u_{12} \sim \epsilon_{12345} v_{[1]}^{(3)} v_{[2]}^{(4)} v_{[3]}^{(5)}$ обладает

$$Q = Q[v^{(3)}] + Q[v^{(4)}] + Q[v^{(5)}] = 3Q_{\bar{d}} = +1, \quad T_3 = 3T_3[\bar{d}_R] = 0,$$

и является синглетом по цвету, так как это свертка трех антитриплетов по цвету с тензором Леви-Чивиты. Замечаем, что это характеристики левого позитрона $e_L^+ \equiv u_{12}$.

Аналогично, компоненты u_{13} , u_{14} и u_{15} несут

$$Q = Q_e + 2Q_{\bar{d}} = -\frac{1}{3}, \quad T_3 = T_3[e_L] + 2T_3[\bar{d}_R] = -\frac{1}{2},$$

и это левая частица (обладает изоспином), которая является цветовым триплетом, так как цветных состояний три и они построены из тензорного произведения $\bar{\mathbf{3}}_c \times \bar{\mathbf{3}}_c$, т.е. $d_L \equiv u_{1c}$.

Точно так же $u_{2c} \equiv u_L$,

$$Q = Q_\nu + 2Q_{\bar{d}} = \frac{2}{3}, \quad T_3 = T_3[\nu_L^e] + 2T_3[\bar{d}_R] = \frac{1}{2},$$

⁵⁹Напомним, что сопряженный спинор определяется как

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \psi^*, \quad \psi^* = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 \\ \bar{\psi}_2 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

где ψ^* — это спинор сопряженного представления: отличия между $\bar{\psi}$ и ψ^* сводятся не только к разным выражениям для генераторов преобразований, но и к разным квантовым числам компонент мультиплета, как видим. При этом в математике обычно оперируют сопряженным представлением, а в физике часто используют сопряженный спинор.

и для u_{34} , u_{35} и u_{45}

$$Q = Q_e + Q_\nu + Q_{\bar{d}} = -\frac{2}{3}, \quad T_3 = T_3[e_L] + T_3[\nu_L^e] + T_3[\bar{d}_R] = 0,$$

так что это антитриплет по цвету (один цветовой индекс свободен и совпадает с цветовым зарядом антикварка в определяющем представлении), т.е. \bar{u}_L .

С учетом антисимметрических свойств тензора Леви-Чивиты все эти компоненты сопряженного декуплета приводят в виде антисимметричной матрицы 5×5 ,

$$\overline{\mathbf{10}} \cong \begin{pmatrix} 0 & e_L^+ & -d_L^{c_1} & d_L^{c_2} & -d_L^{c_3} \\ -e_L^+ & 0 & u_L^{c_1} & -u_L^{c_2} & u_L^{c_3} \\ d_L^{c_1} & -u_L^{c_1} & 0 & \bar{u}_L^{c_3} & -\bar{u}_L^{c_2} \\ -d_L^{c_2} & u_L^{c_2} & \bar{u}_L^{c_3} & 0 & \bar{u}_L^{c_1} \\ d_L^{c_3} & -u_L^{c_3} & \bar{u}_L^{c_2} & -\bar{u}_L^{c_1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.4.104})$$

Декуплетное представление **10** записывается в виде аналогичной матрицы, в которой левые частицы заменяются на правые античастицы⁶⁰.

Подчеркнем, что стерильное нейтрино не вошло в состав фундаментальных представлений группы $SU(5)$. Это говорит о том, что нейтрино с массой, существование которой доказано в экспериментах с осцилляциями нейтрино разных поколений, либо возникает без участия стерильного, либо для объяснения массы нейтрино необходимо использовать мультиплеты других групп, имея в виду, что в целом ряде физических явлений достаточно использовать фундаментальные представления группы $SU(5)$. Такое разделение представлений групп, описывающих квантовые состояния, по типу физических явлений называют иерархией: более широкая группа симметрии становится актуальной при превышении значения энергии величины порога, которую называют масштабом смены симметрии.

Задача 30. Какому набору (p_1, \dots, p_n) в разложении старшего веса по фундаментальным векторам отвечает присоединенное представление группы $SU(N)$, где ранг группы $n = N - 1$, а фундаментальные векторы пронумерованы в соответствии с расположением простых положительных корней α_m на диаграмме Дынкина от края $m = 1$ до края $m = n$?

Ответ: представление $T^{(1,0,\dots,0,1)}$.

Задача 31. Найдите все положительные корни $\gamma_{\tilde{m}}$ группы $SU(N)$.

Решение. Каждый простой положительный корень α_m алгебры $\mathfrak{su}(N)$ согласно диаграмме Дынкина соединен одной линией с последующим простым корнем, т.е. при построении положительных корней как последовательностей из простых корней допускается только один шаг сложения двух последовательных простых корней, и этот шаг ограничен только для последнего простого корня α_n . Поэтому перечисление всех положительных корней сводится к следующему:

все простые корни

$$\alpha_m, \quad m \in \{\overline{1, n}\}, \quad n = N - 1$$

все последовательные пары простых корней

$$\alpha_p + \alpha_{p+1}, \quad p \in \{\overline{1, n-1}\},$$

все последовательные тройки простых корней

$$\alpha_p + \alpha_{p+1} + \alpha_{p+2}, \quad p \in \{\overline{1, n-2}\},$$

и так до последнего шага — последовательная сумма всех простых корней

$$\sum_m \alpha_m.$$

Итого: всех положительных корней

$$K = n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 = \frac{1}{2} n(n + 1) = \frac{1}{2} N(N - 1).$$

Общее число генераторов N_G получится, если сложить число генераторов из подалгебры Картана n с числом всех положительных корней K и таким же числом всех отрицательных корней,

$$N_G = n + 2K = N - 1 + N(N - 1) = N^2 - 1.$$

⁶⁰Вообще говоря, для декуплета **10** от стандартного антисимметричного тензора 3-его ранга нужно перейти к дуальному тензору второго ранга.

Задача 32. Покажите, что старший вес присоединенного представления группы $SU(N)$

$$\boldsymbol{\mu}_S = \sum_{m=1}^n \boldsymbol{\alpha}_m,$$

где $\boldsymbol{\alpha}_m$ — простые положительные корни, а длина этого веса $\boldsymbol{\mu}_S^2 = 1$.

Докажите, что сумма скалярных произведений старшего веса с последовательностями всех положительных корней, которые мы нашли в предыдущей задаче, также равна единице,

$$\sum_{p=1}^n (\boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\mu}_S) = 1, \quad \sum_{p=1}^{n-1} ((\boldsymbol{\alpha}_p + \boldsymbol{\alpha}_{p+1}), \boldsymbol{\mu}_S) = 1, \quad \sum_{p=1}^{n-2} ((\boldsymbol{\alpha}_p + \boldsymbol{\alpha}_{p+1} + \boldsymbol{\alpha}_{p+2}), \boldsymbol{\mu}_S) = 1, \dots$$

Пользуясь общей формулой для квадратичного оператора Казимира,

$$\langle C_2 \rangle = (\boldsymbol{\mu}_S, \boldsymbol{\mu}_S) + \sum_{\tilde{m}} (\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{m}}, \boldsymbol{\mu}_S), \quad (\text{II.2.3})$$

найдите

$$C_A = C_2^{\text{ad}} = 1 + \sum_{j=1}^n 1 = 1 + n = N.$$

Задача 33. Для определяющего фундаментального представления с весом $\boldsymbol{\mu}_S = \boldsymbol{\lambda}_1$ докажите, что сумма скалярных произведений старшего веса с последовательностями всех положительных корней равна

$$\sum_{p=1}^n (\boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\mu}_S) = \frac{1}{2}, \quad \sum_{p=1}^{n-1} ((\boldsymbol{\alpha}_p + \boldsymbol{\alpha}_{p+1}), \boldsymbol{\mu}_S) = \frac{1}{2}, \quad \sum_{p=1}^{n-2} ((\boldsymbol{\alpha}_p + \boldsymbol{\alpha}_{p+1} + \boldsymbol{\alpha}_{p+2}), \boldsymbol{\mu}_S) = \frac{1}{2}, \dots$$

Пользуясь общей формулой для квадратичного оператора Казимира (II.2.3), найдите

$$C_F = C_2^F = \boldsymbol{\lambda}_1^2 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} = \boldsymbol{\lambda}_1^2 + \frac{1}{2}(N - 1).$$

Установите, что координаты фундаментального вектора равны

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}}, \dots, -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n(n+1)}} \right)$$

в базисе, где

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 0 \dots, 0), \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \dots, 0 \right), \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0 \dots, 0 \right), \dots$$

Найдите

$$\boldsymbol{\lambda}_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdots 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) = \frac{n}{n+1}.$$

Выполните значение

$$C_F = \frac{N^2 - 1}{2N}. \quad (\text{II.4.105})$$

Используя общее выражение для индекса Дынкина

$$T_R = \tilde{C}_2^R \frac{\mathcal{D}_R}{\mathcal{D}_{\text{ad}}}, \quad (\text{I.2.42})$$

докажите, что $T_F = \frac{1}{2}$.

§5. Генераторы, токи, составные состояния и калибровочная гипотеза

Связь генераторов группы с физическими токами, калибровочная гипотеза, предсказание нейтральных слабых токов, великое объединение и токи лептонварков, иерархия масштабов спонтанного нарушения калибровочной симметрии и вакуум, распад протона.

5.1 Взаимодействия как преобразования состояний

Преобразование базисных состояний в рамках мультиплета в представлении группы Ли в физике называют термином «ток». В математике это соответствует понятию преобразования элемента неприводимого представления при действии генераторов алгебры Ли. В этом смысле наблюдение изменений квантовых состояний называют проявлением взаимодействия, что эквивалентно введению генераторов некоторых групповых преобразований в некотором представлении алгебры Ли. На примере слабого взаимодействия мы видели, что бета-распад нейтрона есть проявление слабого взаимодействия夸арков, которое при более детальном рассмотрении экспериментальных данных соответствует заряженным токам в группе $SU_L(2)$, т.е. преобразованиям при действии на квантовые состояния – компоненты фундаментального представления генераторами алгебры $\mathfrak{su}(2)$. Однако, повышающие и понижающие генераторы не исчерпывают весь набор генераторов алгебры $\mathfrak{su}(2)$, так как в него входят и генераторы из подалгебры Картана, которые не изменяют квантовые числа состояния⁶¹, поскольку базис состояний построен из совместных собственных векторов полного набора наблюдаемых величин, включающего в себя генераторы подалгебры Картана. На примере слабого взаимодействия это значит, что левое нейтрино как верхняя компонента слабого изодублета, т.е. как базисное состояние неприводимого представления для группы слабых взаимодействий при действии понижающего генератора переходит в состояние левого электрона, а при действии генератором подалгебры Картана переходит само в себя, так как генератор подалгебры Картана не изменяет базисное квантовое состояние. По введенной нами терминологии отождествления математического понятия генератора с физическим понятием тока это означает, что имеет место нейтральный слабый ток – ток без изменения квантовых чисел базисного состояния. В самой общей формулировке алгебра Ли с необходимостью приводит к выводу о существовании *нейтральных токов*, в частности, слабого нейтрального тока. Этот ток не может совпадать с нейтральным током электромагнитного взаимодействия, так как электромагнитный ток – это ток отличных от нуля электрических зарядов, а электрический заряд нейтрино равен нулю. Значит, если в природе наблюдаются слабые заряженные токи, то групповой характер описания этих токов предсказывает процессы со слабым нейтральным током, когда, например, слабое взаимодействие нейтрино с веществом приводит не только к появлению в конечном состоянии заряженных лептонов (электронов), но и к регистрации процессов рассеяния, когда в конечном состоянии наблюдаются все те же нейтрино!

После экспериментального открытия слабых нейтральных токов в процессах с рассеянием нейтрино на веществе Вайнберг, Салам и Глэшоу были удостоены Нобелевской премии за предсказание этих токов в модели электрослабого взаимодействия лептонов и夸арков.

Квантовые числа заряженных токов совпадают со значениями корневых векторов алгебры Ли, так как корни по построению представляют из себя разность собственных значений генераторов подалгебры Картана на элементах базиса мультиплета представления алгебры Ли, а нейтральные токи отвечают нулевым изменениям весов и описываются значениями весов, которые и есть собственные значения базисных состояний. Отсюда следует, что слабый заряженный ток несет слабый изоспин $T_3 = \pm 1$, что отвечает разности проекций изоспина, или, попросту, значениям координаты положительного и отрицательного корневых векторов, а $T_3 = 0$ соответствует нейтральному току, причем, верхние и нижние компоненты изодублета имеют противоположные знаки собственных значений T_3 . Это, между прочим, значит, что и сами токи несут слабый заряд, отвечающий изоспину $T = 1$.

Простая картина слабых токов несколько усложнена Природой, так как кроме слабых имеют место и электромагнитные взаимодействия. В частности, правый электрон, например, не обладает слабым взаимодействием, но имеет электрический заряд. Выход из ситуации – это введение группы со слабым гиперзарядом Y^W , так что структура электрослабой теории задается прямым произведением $U_Y \times SU_L(2)$, где имеется 2 типа нейтральных токов.

Преобразования составных квантовых состояний, построенных как тензорные произведения фундаментальных представлений, выводятся из свойств фундаментальных представлений.

Гипотеза калибровочных взаимодействий базируется на предположении, что присоединенному представлению алгебры Ли отвечает не только неприводимое представление в тензорном произведении состояний фундаментального представления, а существование мультиплета новых, не являющихся составными, состояний квантов калибровочного поля, которое по отношению к группе поворотов координат в пространстве-времени Минковского является векторным, и это, в таком случае, не зависит от того, какими по спину состояниями укомплектованы фундаментальные представления алгебры Ли, фермionами или бозонами. Такие новые состояния в присоединенном представлении несут квантовые числа токов в алгебре Ли, и поэтому их называют переносчиками калибровочного взаимодействия или калибровочными бозонами.

Из калибровочной гипотезы следует, что калибровочными бозонами электрослабой теории являются

⁶¹Напомним, что квантовыми числами называются номера базисных квантовых состояний, которые взаимно однозначно связаны с наборами собственных значений операторов их полного набора наблюдаемых. Поэтому часто квантовые числа отождествляют с самим набором собственных значений операторов из полного набора наблюдаемых. Особо выделяют случай, когда базисные состояния маркируются не номером, а непрерывной величиной, например импульсом. Тогда вместо термина «квантовое число» используют термин «спектральный параметр».

заряженные W^\pm -бозоны и пара нейтральных токов: Z -бозоны и A -бозоны (фотоны). Более того, поскольку калибровочные бозоны слабого взаимодействия обладают изоспином $T = 1$, они также взаимодействуют друг с другом за счет слабого взаимодействия: генераторы алгебры Ли изменяют собственные значения генераторов подалгебры Картана на базисе состояний и в присоединенном представлении. Это называют самодействием калибровочных частиц. Пространственно-временную структуру калибровочных взаимодействий рассматривают в рамках группы непрерывных изометрий пространства-времени Минковского.

Группа квантовой хромодинамики $SU_c(3)$ описывает 8 калибровочных векторных частиц, которые называют глюонами. Глюоны также обладают самодействием, что в общем случае обусловлено, как мы теперь понимаем, неабелевым характером группы калибровочной симметрии.

5.2 Великое объединение $SU(5)$, векторные лептоКварки и распад протона

Как мы видели при решении задачи 29 на стр. 140, в квинтет определяющего фундаментального представления $SU(5)$

$$\mathbf{5} \cong v = \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \\ \bar{d}_L \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \\ \bar{d}_L^{c_1} \\ \bar{d}_L^{c_2} \\ \bar{d}_L^{c_3} \end{pmatrix} \quad (\text{II.4.102})$$

входят как левые лептоны, так и левые антикварки. Поэтому преобразования одних состояний квинтета в другие включают в себя изменения собственных значений следующих 4-х эрмитовых операторов:

- электрический заряд, Q ,
- слабый изоспин, T_3 ,
- 2 комбинации цвета, λ_3, λ_8 ,

а токи соответствуют следующему набору:

- 2 заряженных слабых тока, 2 нейтральных тока, которые отвечают калибровочным бозонам электрослабой теории,
- 8 токов изменения цвета, которые отвечают калибровочным бозонам квантовой хромодинамики,
- цветной триплет перехода от нейтрино к \bar{d} -антикварку с зарядом $\frac{1}{3}$ — ток $X_c^{+\frac{1}{3}}$, и в обратном переходе $X_c^{-\frac{1}{3}}$, и это так называемый ток лептоКварков $X_c^{\pm\frac{1}{3}}$ с $T_3 = \pm\frac{1}{2}$,
- цветной триплет перехода от электрона к \bar{d} -антикварку с зарядом $-\frac{4}{3}$ — ток $X_c^{-\frac{4}{3}}$, и в обратном переходе $X_c^{+\frac{4}{3}}$, и это так называемый ток лептоКварков $X_c^{\pm\frac{4}{3}}$ с $T_3 = \mp\frac{1}{2}$.

В сумме получается 24 тока, как это и должно быть, так как размерность координат группы $SU(N)$ равна $N_G = N^2 - 1$, и для $SU(5)$ размерность группового многообразия $N_G = \dim \mathfrak{G} = 24$. Считается, что известные нам экспериментально 12 токов электрослабой теории и квантовой хромодинамики наблюдаются при доступных на данный момент энергиях экспериментов, в том числе в распадах за счет слабого взаимодействия, а оставшиеся экзотические токи подавлены из-за того, что симметрия $SU(5)$ имеет масштаб порядка 10^{16} ГэВ, а значит, вероятности обнаружить ее проявления в распадах при низких энергиях сильно подавлены. Это так называемый эффект иерархии масштабов симметрии:

электромагнитные взаимодействия осуществляются за счет тока фотонов, которые являются безмассовыми, так что силы являются дальнодействующими и регистрируются на любых расстояниях (нет порога включения эффектов взаимодействия);

сильные взаимодействия связывают кварки в адронах, и масштаб энергии связи определяется радиусом конфайнмента, что отвечает масштабу порядка 200-300 МэВ;

слабые взаимодействия переносятся W - и Z -бозонами с массами около 80 и 92 ГэВ, соответственно, так что радиус слабого взаимодействия составляет порядка 10^{-3} Ферми ($\sim 10^{-16}$ см),

переносчики-лептоКварки имеют масштаб масс порядка $M_{\text{GUT}} \sim 10^{16}$ ГэВ, и стало быть, вероятности наблюдать связанные с лептоКварками эффекты за счет $SU(5)$ при энергиях $E \sim 1 - 100$ ГэВ подавлены степенями малого отношения $E/M_{\text{GUT}} < 10^{-14}$.

Первый вопрос: почему возникает иерархия масштабов? Считается, что это обусловлено вакуумом теории — состоянием с минимальной энергией или плотностью энергии, которое является релятивистски

инвариантным решением уравнений движения. Сами уравнения движения являются симметричными относительно группы преобразований состояний $SU(5)$ как следствие того, что и действие тоже является инвариантным относительно группы симметрии. Но вакуумное решение может быть и неинвариантным относительно группы симметрии действия, если возникают нетривиальные вакуумные поля. В этом случае говорят о спонтанном нарушении симметрии и о том, что возникает иерархия масштабов энергии в вакуумных решениях: компонента вакуумного поля с большим масштабом энергии 10^{16} ГэВ нарушает $SU(5)$, но это нарушение может оставлять остаточную симметрию, например, электрослабую, которая нарушается другой компонентой вакуумного поля с масштабом энергии 10^2 ГэВ, так что остается точной только электромагнитная и хромодинамическая симметрия. В итоге, механизм возникновения иерархии масштабов целиком относят к структуре вакуума: именно его свойства и образуют иерархию разных значений пороговых энергий.

Иерархия масштабов оказывается и на зарядах разных взаимодействий: дело в том, что наблюдаемые заряды зависят от того, на каком масштабе мы их измеряем, так как инструментом измерения служит воздействие на систему в процессах с разной длиной волны, а значит, с разной разрешающей способностью у датчика внешнего влияния на систему. В квантовой теории поля такая зависимость описывается в рамках уравнений так называемой ренормгруппы. Важно отметить, что на масштабах измерений выше, чем шкала нарушения симметрии все процессы будут давать единое для всех систем значение зарядов в пропорциях, которые устанавливают исходная симметрия действия, а при меньших масштабах энергии в измерениях заряды в сильных, электромагнитных и слабых взаимодействиях станут зависеть от того, насколько далеко масштабы измерений отстоят от масштаба нарушения симметрий на каждой ступени влияния на характеристики системы разных компонент вакуумных полей.

Второй вопрос: как токи симметрии $SU(5)$ скажутся на свойствах физических систем на масштабах энергий, где лептокварковые калибровочные бозоны выглядят как невероятно тяжелые, а значит, прямое наблюдение этих токов становится катастрофически маловероятным в процессах рассеяния квантовых состояний? Поэтому в ответе на этот вопрос можно так же, как и в случае слабого взаимодействия, исследовать опцию с распадами: распад нейтрона вполне себе происходит, хотя масса нейтрона явно много меньше масштаба масс, которым характеризуется слабое взаимодействие, 10^2 ГэВ, и на котором и рассеяние за счет процессов слабого взаимодействия становится детектируемым, и регистрация калибровочных бозонов может быть осуществлена в явном виде, как частиц, которые возникают и распадаются в процессах рассеяния.

Итак, обратим внимание на декуплет состояний

$$\overline{\mathbf{10}} \cong \begin{pmatrix} 0 & e_L^+ & -d_L^{c_1} & d_L^{c_2} & -d_L^{c_3} \\ -e_L^+ & 0 & u_L^{c_1} & -u_L^{c_2} & u_L^{c_3} \\ d_L^{c_1} & -u_L^{c_1} & 0 & \bar{u}_L^{c_3} & -\bar{u}_L^{c_2} \\ -d_L^{c_2} & u_L^{c_2} & \bar{u}_L^{c_3} & 0 & \bar{u}_L^{c_1} \\ d_L^{c_3} & -u_L^{c_3} & \bar{u}_L^{c_2} & -\bar{u}_L^{c_1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.4.104})$$

Переходы между состояниями этого декуплета происходят под действием тех же генераторов алгебры Ли $\mathfrak{su}(5)$, т.е. за счет тех же токов, что и переходы в квинтете. Стало быть, мы знаем все варианты квантовых переходов.

Сфокусируем свое внимание на том, что в декуплете (II.4.104) входят как кварки, так и антикварки, а значит, может происходить переход кварков в антикварки за счет лептокварковых калибровочных бозонов, чего не могло быть в рамках Стандартной модели взаимодействий, которая включает в себя группу электрослабой симметрии $U_Y(1) \times SU_L(2)$ и цветовую группу $SU_c(3)$. Значит, лептокварки могут инициировать процессы распадов, в которых исчезает адронная материя. Эти редкие процессы исчезновения адронной материи станут заметны, если происходит распад состояния, которое стабильно в рамках Стандартной модели. Обратимся к такому примеру — к протону $p = (uud)$.

Рассмотрим двукратное воздействие лептокварковых токов на исходное состояние с барионным числом $B = 1$ так, чтобы в конечном состоянии $B = 0$. Первый вариант включает ток $u \rightarrow \bar{u}$, так что имеет место пара преобразований

$$u \rightarrow \bar{u} X_c^{+\frac{4}{3}}, \quad X_c^{+\frac{4}{3}} d \rightarrow e^+, \quad (\text{II.5.1})$$

где второй u -кварк в протоне не участвует непосредственно в токах, так что его называют спектатором (spektator), а в итоге имеет место процесс $p(uud) \rightarrow e^+(u\bar{u})$. Нейтральное состояние кварк-антикварковой пары $(u\bar{u})$ может аннигилировать в фотоны и лептоны, так что протон имеет канал распада на позитрон и легкую нейтральную систему с нулевым барионным числом!

Второй вариант — ток $d \rightarrow \bar{u}$, так что имеет место пара преобразований

$$d \rightarrow \bar{u} X_c^{+\frac{1}{3}}, \quad X_c^{+\frac{1}{3}} u \rightarrow e^+, \quad (\text{II.5.2})$$

и, в итоге, происходит процесс $p(uud) \rightarrow e^+(u\bar{u})$.

Наконец, третий независимый вариант — ток $u \rightarrow e^+$, так что имеет место пара преобразований

$$u \rightarrow e^+ X_c^{-\frac{1}{3}}, \quad X_c^{-\frac{1}{3}} u \rightarrow \bar{d}, \quad (\text{II.5.3})$$

и, в итоге, происходит процесс $p(uud) \rightarrow e^+(d\bar{d})$.

Итак, следует ожидать, что в случае SU(5) симметрии протон нестабилен. И этот вариант необходимо изучить экспериментально: в случае удачи установить время жизни протона путем наблюдения его редкого распада в большом объеме детектора или указать нижний предел на время жизни в целом или на относительную вероятность одного из каналов распада. В настоящее время этот предел [12]

$$\tau_p > 3.6 \cdot 10^{29} \text{ лет.} \quad (\text{II.5.4})$$

Впрочем, некоторые модельные оценки, когда вариант моды распада может быть описан теоретически, доводят предел до 10^{32-34} лет.

Глава 3

Симметрии эллиптических орбит

§1. Симметрия в атоме водорода

Сохраняющийся вектор от центра кулоновского потенциала до второго фокуса эллипса финитной орбиты, связь длины вектора с эксцентриситетом. Связь генераторов симметрии со скобками Пуассона на полях амплитуды вероятности траектории, пример скобок Пуассона для момента импульса, скобки Пуассона вектора Рунге–Ленца–Лапласа и $\mathrm{SO}(4)$ симметрия финитных кулоновских орбит. Связь значений инвариантов Казимира из условия плоского движения, вычисление квадратичного оператора Казимира в терминах энергии, импульса, координат и орбитального момента частицы, главное квантовое число, орбитальное квантовое число и степень вырождения уровней энергии атома водорода.

1.1 Вектор Рунге–Ленца–Лапласа

Для кулоновского потенциала притяжения или в задаче Кеплера движение происходит по эллипсу, в одном из фокусов которого находится центр потенциала¹. Орбита замкнута, а значит, эллипс сохраняет свое положение со временем. Это свойство является нетривиальным, поскольку оно позволяет воспользоваться свойствами эллипса и построить дополнительный интеграл движения.

В самом деле, используем тот факт, что любой луч, посланный из фокуса эллипса, после зеркального отражения от кривой эллипса пройдет через второй фокус и сумма длин луча от фокуса до кривой эллипса r до отражения и от кривой до второго фокуса r' после отражения — это постоянная величина $r + r' = 2a$, где a — длина той полуоси эллипса, на линии которого расположены фокусы (см. рис. 3.1, в дальнейшем мы полагаем, что центр потенциала расположен в правом фокусе). Поскольку определяющая линию зеркального отражения касательная к эллипсу в точке траектории параллельна импульсу, разложим радиус-вектор частицы на ортогональную к импульсу часть \mathbf{r}_\perp и параллельный импульсу вклад \mathbf{r}_\parallel :

$$\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{\mathbf{p}^2}, \quad \mathbf{r}_\parallel = \frac{\mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{\mathbf{p}^2}.$$

После зеркального отражения поперечная часть сменит знак, а продольный вклад не изменится, т.е.

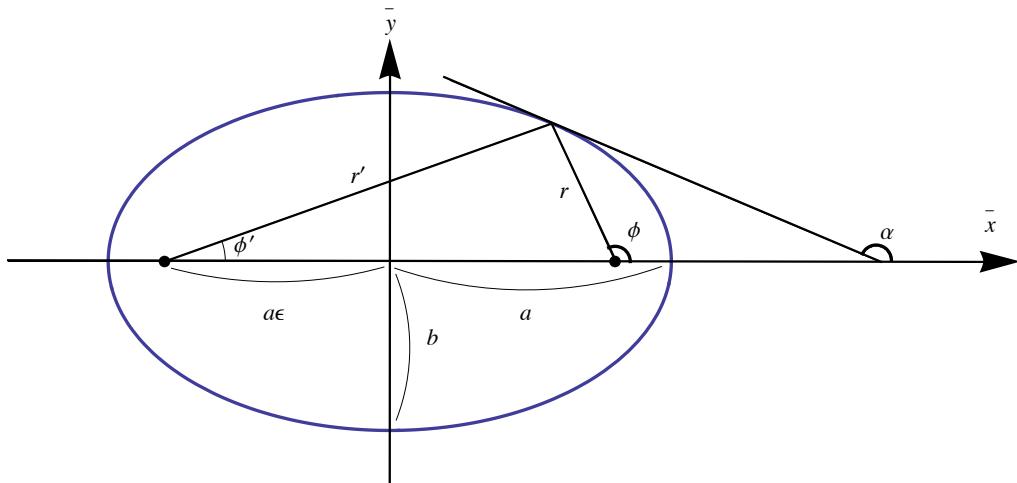


Рис. 3.1: Эллипс: фокусы обозначены точками, показаны касательная под углом α , полуоси a и b , расстояние сдвига фокуса от центра эллипса $a\epsilon$, а также полярные углы в фокусах ϕ и ϕ' .

¹ В данной главе при рассмотрении параметров движения в кулоновском поле притяжения и в потенциале изотропного гармонического осциллятора мы полагаем, что читатель уже довольно подробно изучил траектории в этих двух случаях, например, в объеме, который представлен в книге [1]. Поэтому ли пользуемся такими знаниями, формулируя некоторые положения как известную данность.

мы получим вектор той же длины r

$$\mathbf{r}'' = -\mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel = \mathbf{r} - 2\mathbf{r}_\perp.$$

Значит, согласно свойствам эллипса единичный вектор, полученный при отражении радиус-вектора, исходящего из правого фокуса в точку на траектории,

$$\frac{\mathbf{r}''}{r}$$

направлен от точки на траектории во второй, левый фокус эллипса. Значит, если умножить этот единичный вектор на величину $2a - r$ и получить вектор

$$\mathbf{r}' = (2a - r) \frac{\mathbf{r}''}{r} = \frac{2a - r}{r} (\mathbf{r} - 2\mathbf{r}_\perp),$$

то сумма длин $r + r' = 2a$, как это должно быть для суммы длин от точки на траектории до двух фокусов эллипса, и, следовательно, вектор \mathbf{r}' в точности соединяет точку на траектории со вторым фокусом эллипса. Поэтому суммарный вектор

$$\mathbf{r} + \mathbf{r}' = \mathbf{r} \frac{2a}{r} + 2\mathbf{r}_\perp \left(1 - \frac{2a}{r}\right) \quad (\text{III.1.1})$$

соединяет правый фокус эллипса с левым (см. рис. 3.1) и поэтому имеет длину $2a\epsilon$. Безразмерный вектор

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2a} (\mathbf{r} + \mathbf{r}') = \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\mathbf{r}_\perp}{a} \left(1 - \frac{2a}{r}\right) \quad (\text{III.1.2})$$

называют вектором Рунге–Ленца–Лапласа. Он сохраняется при движении в поле притяжения кулоновского типа.

Покажем, что вектор Рунге–Ленца–Лапласа выражается через переменные фазового пространства задачи. Для этого проведем преобразования, заметив, что

$$\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} = \mathbf{p} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2 \mathbf{r} - \mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{p}^2 \mathbf{r}_\perp.$$

Кроме того, в кулоновском поле притяжения с зарядром $Q = -|Z|e$

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{|Z|e^2}{r} \Rightarrow \mathbf{p}^2 = -2m|E| \left(1 - \frac{|Z|e^2}{|E|r}\right),$$

так как $E = -|E| < 0$, и получось

$$a = \frac{|Z|e^2}{2|E|}.$$

Отсюда

$$\mathbf{r}_\perp = -\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} \frac{a}{|Z|e^2 m} \left(1 - \frac{2a}{r}\right)^{-1}.$$

В итоге, сохраняющийся вектор Рунге–Ленца–Лапласа принимает стандартный вид

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} \frac{1}{|Z|e^2 m}. \quad (\text{III.1.3})$$

Согласно связи параметров эллипса, по которому движется частица в кулоновском поле притяжения (см. рис. 3.1), длина вектора \mathbf{B} задается эксцентриситетом ϵ , поскольку расстояние между фокусами эллипса равно $2a\epsilon$, а $|\mathbf{B}| = |\mathbf{r} + \mathbf{r}'|/(2a) = 2a\epsilon/(2a)$:

$$\mathbf{B}^2 = \epsilon^2 = 1 - \frac{2m|E|}{Z^2 e^4 m^2} \ell^2.$$

В рамках классической механики сохраняющиеся величины являются генераторами канонических преобразований координат и импульсов гамильтоновой системы, при которых действие физической системы остается инвариантом. В свою очередь инвариантность действия физической системы согласно теоремы Нёттер отвечает сохранению наблюдаемых величин, которые совпадают с теми, которые мы определили в качестве генераторов преобразований. Таким образом, имеет место симметрия действия физической системы, при которой экстремуму действия отвечает целое семейство траекторий системы. Важно установить, какая алгебра Ли связана с такими преобразованиями симметрии. Если это удастся сделать, то теория представлений групп Ли позволит определить характеристики физической системы, которые следуют из ее симметрии.

1.2 Скобки Пуассона и симметрия $\text{SO}(4)$

Опишем, как величины классической механики связаны с операторами, которые действуют в пространстве квантовых состояний, а затем покажем, что соотношения гамильтоновой механики для сохраняющихся классических величин связаны с группой симметрии квантовых состояний, а именно, установим алгебру и группу Ли, отвечающую сохранению момента количества движения и вектора Рунге–Ленца–Лапласа в задаче о замкнутых орбитах финитного движения в кулоновской задаче притяжения. Тогда групповые характеристики неприводимых представлений группы позволяют нам вычислить инвариантные Казимира и установить их связь с физической наблюдаемой — энергией движения. Поэтому дискретный спектр собственных значений операторов Казимира определит и дискретный спектр квантовых состояний в задаче об атоме водорода.

Генераторы группы трансляций $\hat{\mathbf{k}} = -i\nabla$ и поворотов $\hat{\mathbf{l}} = -i\mathbf{r} \times \nabla$, действующие на поля и Ψ -функции квантовых состояний, связаны с импульсом и моментом импульса:

$$\hbar \hat{\mathbf{k}} = -i\hbar \nabla \mapsto \hat{\mathbf{p}}, \quad \hbar \hat{\mathbf{l}} = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla \mapsto \hat{\mathbf{l}},$$

с помощью постоянной Планка с чертой (см. изложение фейнмановской формулировки механики в книге [1], которому следуем в этой главе). В частности, действие этих операторов на амплитуду вероятности траектории с заданным импульсом

$$\Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right\}$$

дают как раз значения этих наблюдаемых:

$$-i\hbar \nabla \Psi_{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \Psi_{\mathbf{p}}, \quad -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla \Psi_{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{l}} \Psi_{\mathbf{p}},$$

в силу уравнений Гамильтона–Якоби и связи амплитуды с действием

$$S = -\frac{1}{i\hbar} \ln \Psi.$$

Подчеркнем, что амплитуда вероятности обнаружить частицу с определенным значением импульса \mathbf{p} в точке с координатами \mathbf{r} , т.е. $\Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ — это волна де Броиля, так что собственное значение оператора импульса $\hat{\mathbf{p}}$ и оператора момента количества движения $\hat{\mathbf{l}}$ принимают вещественные значения благодаря тому, что в их определение, как генераторов преобразований, включена мнимая единица.

Дирак обратил внимание на то, что скобки Пуассона физических величин F и G , которые определены в фазовом пространстве гамильтоновой механики² и являются генераторами канонических преобразований, совпадающих с групповыми преобразованиями, действующими в пространстве полей и Ψ -функций, с генераторами \hat{f} и \hat{g} , связанными с коммутаторами соответствующих этим величинам генераторов \hat{f} и \hat{g} простым соотношением

$$i\hbar \{F, G\}_P = [\hat{F}, \hat{G}], \quad \text{если} \quad \hbar \hat{f} \mapsto F, \quad \hbar \hat{g} \mapsto G. \quad (\text{III.1.4})$$

В самом деле, добавляя сюда еще и соответствие для координат $\hat{\mathbf{r}} \mapsto \mathbf{r}$, найдем, что

$$\{r^\alpha, p_\beta\}_P = \delta_\beta^\alpha, \quad [\hat{r}^\alpha, -i\nabla_\beta] \Psi = i\delta_\beta^\alpha \Psi, \quad \forall \Psi \Rightarrow [\hat{r}^\alpha, \hat{p}_\beta] = i\hbar \delta_\beta^\alpha.$$

Пользуясь декартовыми координатами, в которых можно отождествить верхние, контравариантные и нижние, ковариантные индексы тензорных величин, вычислим скобки Пуассона для момента количества движения

$$\begin{aligned} \{\ell_\alpha, \ell_\beta\}_P &= \{\epsilon_{\alpha\mu\nu} r_\mu p_\nu, \epsilon_{\beta\mu'\nu'} r_{\mu'} p_{\nu'}\}_P = \epsilon_{\alpha\mu\nu} \epsilon_{\beta\mu'\nu'} \{r_\mu p_\nu, r_{\mu'} p_{\nu'}\}_P = \\ &= \epsilon_{\alpha\mu\nu} \epsilon_{\beta\mu'\nu'} r_{\mu'} \left\{ \frac{\partial r_\mu p_\nu}{\partial r_\gamma} \frac{\partial r_{\mu'} p_{\nu'}}{\partial p_\gamma} - \frac{\partial r_\mu p_\nu}{\partial p_\gamma} \frac{\partial r_{\mu'} p_{\nu'}}{\partial r_\gamma} \right\} = \\ &= \epsilon_{\alpha\mu\nu} \epsilon_{\beta\mu'\nu'} \{ \delta_{\mu\gamma} p_\nu r_{\mu'} \delta_{\nu'\gamma} - r_\mu \delta_{\nu\gamma} \delta_{\mu'\gamma} p_{\nu'} \} = \\ &= \epsilon_{\alpha\gamma\nu} \epsilon_{\beta\mu'\gamma} p_\nu r_{\mu'} - \epsilon_{\alpha\mu\gamma} \epsilon_{\beta\gamma\nu'} r_\mu p_{\nu'} = \\ &= -\delta_{\alpha\beta} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) + r_\alpha p_\beta + \delta_{\alpha\beta} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - r_\beta p_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\gamma\alpha'\beta'} r_{\alpha'} p_{\beta'} = \\ &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma, \end{aligned} \quad (\text{III.1.5})$$

²В качестве напоминания приведем определение скобки Пуассона для $F = F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ и $G = G(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$:

$$\{F, G\}_P \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial F}{\partial r^\alpha} \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial G}{\partial r^\alpha}.$$

что можно сравнить с коммутатором генераторов группы поворотов

$$[\hat{l}_\alpha, \hat{l}_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{l}_\gamma \quad \text{или} \quad [\ell_\alpha, \ell_\beta] = i\hbar\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma.$$

Другими словами, вычисляя скобки Пуассона физических величин, мы определяем коммутационные соотношения для генераторов преобразований, связанных с этими наблюдаемыми, на полях амплитуд вероятности траекторий, в то время как коммутаторы генераторов задают группу Ли непрерывных преобразований в системе. Более того, если рассматривать сохраняющиеся величины в качестве генераторов бесконечно малых канонических преобразований, то эти преобразования отвечают симметрии физической системы.

Например, в центрально симметричном потенциале сохраняется момент количества движения ℓ , а скобки Пуассона компонент вектора ℓ отвечают коммутаторам группы поворотов, т.е. группа генераторов является группой симметрии системы, если наблюдаемые, отвечающие этим генераторам, сохраняются.

Найдем скобки Пауссона для сохраняющихся векторов в кулоновском поле притяжения, т.е. для момента импульса и вектора Рунге–Ленца–Лапласа. Эти скобки будут определять алгебру генераторов группы симметрии этой системы. Вектор Рунге–Ленца–Лапласа перепишем в виде, симметризованном относительно перестановок местами физических величин, скобки Пуассона которых не равны нулю³:

$$\mathcal{B} = \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{1}{2} (\mathbf{p} \times \ell - \ell \times \mathbf{p}) \frac{1}{|Z|e^2 m}, \quad (\text{III.1.6})$$

поскольку

$$\{p_\alpha, \ell_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} p_\gamma.$$

Тогда

$$\{\mathcal{B}_\alpha, \ell_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{B}_\gamma, \quad (\text{III.1.7})$$

так как \mathcal{B} — вектор, и при поворотах он имеет стандартный коммутатор с генераторами поворотов.

Задача 34. Вычислите скобки Пуассона $\{\mathcal{B}_\alpha, \ell_\beta\}_P$ и $\{\mathcal{B}_\alpha, \mathcal{B}_\beta\}_P$.

Прямые вычисления устанавливают, что

$$\{\mathcal{B}_\alpha, \mathcal{B}_\beta\}_P = -2\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma \frac{E}{|Z|^2 e^4 m}, \quad (\text{III.1.8})$$

где

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{|Z|e^2}{r} = \text{const.}$$

в силу закона сохранения энергии. Значит, если ввести векторы

$$\mathbf{u} = \mathcal{B} \sqrt{ma|Z|e^2}, \quad (\text{III.1.9})$$

то их скобки Пуассона

$$\{u_\alpha, u_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma, \quad \{u_\alpha, \ell_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} u_\gamma. \quad (\text{III.1.10})$$

Введем вектора

$$\mathbf{j}^{(\pm)} = \frac{1}{2}(\ell \pm \mathbf{u}),$$

для которых имеют место скобки Пуассона

$$\{j_\alpha^{(+)}, j_\beta^{(+)}\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} j_\gamma^{(+)}, \quad \{j_\alpha^{(-)}, j_\beta^{(-)}\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} j_\gamma^{(-)}, \quad \{j_\alpha^{(+)}, j_\beta^{(-)}\}_P = 0. \quad (\text{III.1.11})$$

³При переходе от классических величин к операторам необходимо сопоставлять составным физическим величинам операторы с исключительно вещественными собственными значениями, т.е. эрмитово самосопряженные операторы. В данном случае это легко достигается простой перестановкой величин, скобка Пуассона которых отлична от нуля:

$$p_\beta \ell_\gamma \mapsto \frac{1}{2}(p_\beta \ell_\gamma + \ell_\gamma p_\beta),$$

что при свертке с полностью антисимметричным символом Леви–Чивиты и дает выражение

$$(\mathbf{p} \times \ell)_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} p_\beta \ell_\gamma \mapsto \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{2}(p_\beta \ell_\gamma + \ell_\gamma p_\beta) = (\mathbf{p} \times \ell - \ell \times \mathbf{p})_\alpha.$$

Это означает, что соответствующие им генераторы реализуют алгебру симметрии $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$, которая изоморфна алгебре $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$, так как $\mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$.

Покажем, что алгебра генераторов отвечает алгебре группы поворотов 4-мерного евклидова пространства $SO(4)$. В пространстве размерности больше трех естественно описывать поворот не в терминах оси поворота, ортогональной плоскости, в которой происходит поворот, как это наглядно вводится в трехмерном пространстве, а в терминах самой плоскости поворота, когда маркером генератора поворота выступает не индекс оси поворота, а две оси в плоскости, например, повороту от оси x к оси y в плоскости (x, y) соответствует генератор ℓ_{xy} . Итак, сначала обратимся к алгебре поворотов в 3-мерном евклидовом пространстве, которую сформулируем в терминах тензора поворотов

$$l_{\alpha\beta} = r_\alpha p_\beta - r_\beta p_\alpha, \quad l_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\ell_\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \{\overline{1, 3}\},$$

в точном соответствии с описанной процедурой: генератор поворота вокруг оси z — это генератор поворота от оси x к оси y , $\ell_{xy} = \epsilon_{xyz}\ell_z = \ell_z$.

Скобка Пуассона генераторов $l_{\alpha\beta}$ легко вычисляется

$$\{l_{\alpha\beta}, l_{\alpha'\beta'}\}_P = g_{\alpha\alpha'}l_{\beta\beta'} + g_{\beta\beta'}l_{\alpha\alpha'} - g_{\alpha\beta'}l_{\beta\alpha'} - g_{\beta\alpha'}l_{\alpha\beta'}, \quad (\text{III.1.12})$$

где $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ — метрика евклидова пространства в декартовых координатах. Скобки Пуассона в виде (III.1.12) эквивалентны стандартным скобкам Пуассона орбитального момента ℓ [см. (III.1.5)]. Теперь легко записать обобщение генераторов поворотов на случай 4-мерного евклидова пространства:

$$l_{\mu\nu} = r_\mu p_\nu - r_\nu p_\mu, \quad \{\mu, \nu\} \in \{\overline{1, 4}\}, \quad (\text{III.1.13})$$

с такими же выражениями для скобок Пуассона:

$$\{l_{\mu\nu}, l_{\mu'\nu'}\}_P = g_{\mu\mu'}l_{\nu\nu'} + g_{\nu\nu'}l_{\mu\mu'} - g_{\mu\nu'}l_{\nu\mu'} - g_{\nu\mu'}l_{\mu\nu'}. \quad (\text{III.1.14})$$

Если ввести в трехмерном подпространстве те же величины $l_{\alpha\beta}$, что эквивалентно ℓ_γ , и в дополнение к ним трехмерный вектор $u_\alpha = l_{\alpha 4}$, то из (III.1.14) нетрудно получить скобки Пуассона в виде

$$\{u_\alpha, u_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\ell_\gamma, \quad \{\ell_\alpha, u_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}u_\gamma, \quad \{\ell_\alpha, \ell_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\ell_\gamma, \quad (\text{III.1.15})$$

что совпадает с выражениями (III.1.5) и (III.1.10), которые были получены чуть выше для орбитального момента и вектора Рунге–Ленца–Лапласа в задаче финитного движения в кулоновском потенциале, а значит, построенная алгебра генераторов симметрии в задаче о финитных траекториях в кулоновском поле притяжения — это алгебра группы $SO(4)$, группы поворотов в шести плоскостях 4-мерного евклидова пространства.

Итак, вырождение финитного движения в кулоновском потенциале в виде замкнутости любой орбиты отвечает группе симметрии $SO(4)$.

1.3 Представления алгебры $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ и уровни атома водорода

Замкнутые траектории движения в кулоновском поле притяжения, которые отвечают финитному движению, реализуют не все представления этой группы, а только те из них, что отвечают $(\hat{j}^{(+)})^2 = (\hat{j}^{(-)})^2$, поскольку движение — плоское, а значит, $\ell \cdot \mathbf{u} = 0$ и $(\ell \pm \mathbf{u})^2 = \ell^2 + \mathbf{u}^2$. Покажем, что собственные значения операторов Казимира группы симметрии, которые ограничены допустимыми дискретными значениями, задают энергию на траектории, а значит, и энергия принимает дискретный набор значений, который называют спектром энергии.

Переход к представлению алгебры генераторов, т.е. к матрицам в векторном пространстве представления, осуществляется, прежде всего, путем введения операторов, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям, полученным из скобок Пуассона. В случае финитного движения в кулоновском поле притяжения речь идет о (III.1.11) и, следовательно, о коммутаторах

$$[\hat{j}_\alpha^{(+)}, \hat{j}_\beta^{(+)}] = i\hbar \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{j}_\gamma^{(+)}, \quad [\hat{j}_\alpha^{(-)}, \hat{j}_\beta^{(-)}] = i\hbar \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{j}_\gamma^{(-)}, \quad [\hat{j}_\alpha^{(+)}, \hat{j}_\beta^{(-)}] = 0. \quad (\text{III.1.16})$$

Спектр собственных значений для полного набора наблюдаемых $\hat{\mathbf{j}}^2$ и \hat{j}_z в алгебре $\mathfrak{su}(2)$ нам хорошо известен:

$$\hat{\mathbf{j}}^2 = \hbar^2 j(j+1), \quad \hat{j}_z = \hbar m, \quad m \in \{\overline{-j, j}\}.$$

При этом, как мы уже подчеркнули, для нашего случая реализуются только представления

$$(\hat{\mathbf{j}}^{(+)})^2 = (\hat{\mathbf{j}}^{(-)})^2 = \hbar^2 j(j+1), \quad j = \frac{1}{2}k, \quad k \in \{0, \mathbb{N}\}.$$

С другой стороны, эти собственные значения определяются в терминах операторов, в которые входит собственное значение энергии финитного движения, что в квантовой случае отвечает уровням энергии связанных состояний. В самом деле, запишем оператор $\hat{\mathcal{B}}$ в виде

$$\hat{\mathcal{B}} = \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\ell} - \hat{\ell} \times \hat{\mathbf{p}}) \frac{1}{|Z|e^2 m} = \frac{\mathbf{r}}{r} - (\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\ell} - i\hbar \hat{\mathbf{p}}) \frac{1}{|Z|e^2 m}, \quad (\text{III.1.17})$$

где мы воспользовались значением коммутатора импульса с моментом

$$[\hat{p}_\gamma, \hat{\ell}_\beta] = i\hbar \epsilon_{\beta\gamma\alpha_1} \hat{p}_{\alpha_1}$$

и связью

$$(\hat{\ell} \times \hat{\mathbf{p}})_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\ell}_\beta \hat{p}_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (\hat{p}_\gamma \hat{\ell}_\beta + i\hbar \epsilon_{\beta\gamma\alpha_1} \hat{p}_{\alpha_1}) = -(\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\ell})_\alpha + 2i\hbar \hat{\mathbf{p}}_\alpha.$$

При вычислении квадрата оператора $\hat{\mathcal{B}}$ возникнут отличные от классических вклады. Поэтому аккуратно учтем все члены. Например,

$$(\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\ell})^2 = \hat{p}_\alpha \hat{\ell}_\beta \hat{p}_\alpha \hat{\ell}_\beta - \hat{p}_\alpha \hat{\ell}_\beta \hat{p}_\beta \hat{\ell}_\alpha = \hat{p}_\alpha \hat{\ell}_\beta \hat{p}_\alpha \hat{\ell}_\beta,$$

поскольку $\hat{\ell}_\beta \hat{p}_\beta = \hat{\ell} \cdot \hat{\mathbf{p}} = 0$ (движение в плоскости, ортогональной орбитальному моменту). Далее,

$$\hat{p}_\alpha \hat{\ell}_\beta \hat{p}_\alpha \hat{\ell}_\beta = \hat{\mathbf{p}}^2 \hat{\ell}^2 + \hat{p}_\alpha i\hbar \epsilon_{\beta\alpha\gamma} \hat{p}_\gamma \hat{\ell}_\beta = \hat{\mathbf{p}}^2 \hat{\ell}^2,$$

и мы приходим к классическому выражению. Однако, перекрестный член со смешанным произведением

$$(\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\ell}) \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}} \cdot (\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\ell}) = (\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\ell}) \cdot \hat{\mathbf{p}} + (\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{p}}) \cdot \hat{\ell} = (\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\ell}) \cdot \hat{\mathbf{p}}$$

содержит вклады

$$(\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\ell}) \cdot \hat{\mathbf{p}} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{p}_\alpha (\hat{p}_\gamma \hat{\ell}_\beta + i\hbar \epsilon_{\beta\gamma\alpha_1} \hat{p}_{\alpha_1}) = 2i\hbar \hat{\mathbf{p}}^2.$$

Следовательно,

$$(\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\ell} - i\hbar \hat{\mathbf{p}})^2 = \hat{\mathbf{p}}^2 \hat{\ell}^2 + \hbar^2 \hat{\mathbf{p}}^2.$$

Аналогично можно найти, что

$$\frac{1}{r} (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{p}}) + (\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{r}) \frac{1}{r} = \frac{2}{r} (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{p}}) + \frac{1}{r} (-i\hbar)(\nabla \cdot \mathbf{r}) - i\hbar (\mathbf{r} \cdot \nabla) \frac{1}{r} = \frac{2}{r} (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{p}}) - 2i\hbar \frac{1}{r},$$

а

$$\frac{1}{r} \mathbf{r} \cdot (\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\ell}) + (\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\ell}) \cdot \mathbf{r} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}) \cdot \hat{\ell} + \{-\hat{\ell} \times \hat{\mathbf{p}} + 2i\hbar \hat{\mathbf{p}}\} \cdot \mathbf{r} \frac{1}{r} = \frac{2}{r} \hat{\ell}^2 + i\hbar \frac{2}{r} (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{p}}) + \frac{4\hbar^2}{r}.$$

Приводя подобные слагаемые, находим

$$\hat{\mathcal{B}}^2 = 1 + \frac{2}{Z^2 e^4 m} \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{|Z|e^2}{r} \right) \hat{\ell}^2 + \frac{\hbar^2}{Z^2 e^4 m^2} \left(\hat{\mathbf{p}}^2 - \frac{2|Z|e^2 m}{r} \right) = 1 + \frac{2E}{Z^2 e^4 m} \hat{\ell}^2 + \frac{2\hbar^2 E}{Z^2 e^4 m}. \quad (\text{III.1.18})$$

В (III.1.18) можно выделить классический и квантовый вклады в явном виде по наличию фактора \hbar^2 .

В итоге мы вычислили квадрат оператора

$$\hat{\mathbf{u}}^2 = \hat{\mathcal{B}}^2 \frac{Z^2 e^4 m}{2|E|} = \frac{Z^2 e^4 m}{2|E|} - \hat{\ell}^2 - \hbar^2, \quad (\text{III.1.19})$$

а значит,

$$\frac{1}{4} (\hat{\ell}^2 + \hat{\mathbf{u}}^2) = \frac{1}{4} \left(\frac{Z^2 e^4 m}{2|E|} - \hbar^2 \right).$$

Но поскольку

$$\hbar^2 j(j+1) = \frac{1}{4} (\hat{\ell}^2 + \hat{\mathbf{u}}^2),$$

находим, что

$$E = -\frac{Z^2 e^4 m}{2\hbar^2} \frac{1}{(2j+1)^2}. \quad (\text{III.1.20})$$

Введем главное квантовое число $n = 2j + 1$ и постоянную тонкой структуры

$$\alpha_{\text{em}} = \frac{e^2}{\hbar c},$$

где c — скорость света, так что спектр водородоподобного атома с ядром, которое имеет заряд $-Z$ в единицах заряда электрона, задается формулой

$$E = -\frac{Z^2}{2n^2} mc^2 \alpha_{\text{em}}^2. \quad (\text{III.1.21})$$

Выражение (III.1.21) было получено Вольфгангом Паули в рамках матричной квантовой механики и опубликовано за 10 дней до выхода в свет статьи Эрвина Шредингера с тем же результатом, полученным уже в волновой механике из уравнения Шредингера.

Мы показали, что спектр энергии в атоме водорода может быть установлен в результате рассмотрения группы симметрий финитного движения в кулоновском поле притяжения.

Укажем также допустимые значения орбитального момента. Поскольку

$$\hat{\ell} = \hat{j}^{(+)} + \hat{j}^{(-)},$$

орбитальный момент вычисляется как сумма двух моментов. Поэтому орбитальный момент может принимать значения в пределах⁴

$$\ell \in [|j^{(+)} - j^{(-)}|, j^{(+)} + j^{(-)}]$$

с шагом, равным единице, $\Delta\ell/\hbar = 1$. Но так как реализуются только представления с $j^{(+)} = j^{(-)} = \hbar j$, а $2j = n - 1$, находим, что

$$\frac{1}{\hbar} \ell \in [0, n - 1], \quad \frac{1}{\hbar} \Delta\ell = 1.$$

При этом, энергия уровней зависит только от главного квантового числа, и следовательно, можно вычислить вырождение уровня энергии по проекциям орбитального момента как сумму арифметической прогрессии для $2\ell + 1$ возможных проекций при заданном ℓ ,

$$K = \sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell + 1) = \frac{1}{2} n(1 + 2(n - 1) + 1) = n^2.$$

Интересно, что такой групповой вывод спектра атома водорода поднимает вопрос о природе пространства представлений группы симметрии. На этот вопрос дал ответ Э.Шредингер, а именно, он установил соответствие матричной квантовой механики и волновой механики: матричные представления действуют в гильбертовом пространстве квантовых состояний, которые можно описывать и волновыми функциями. До появления волновой механики авторы матричной квантовой механики Вернер Гейзенберг, Макс Борн и Паскуаль Йордан обратились к Давиду Гильберту с вопросом, в каких обстоятельствах могут появляться матрицы операторов, на что Гильберт сказал, что для этого нужно иметь волновое уравнение, имеющее дискретный базис решений, которые и будут определять действие операторов в подобном базисе. Такой ответ однако поставил в тупик создателей матричной механики, поскольку они полагали, что квантовые скачки с уровня на уровень, которые наблюдались экспериментально в виде спектров излучения и поглощения в парах водорода и других газов, никак не могут описываться непрерывным волновым уравнением. Как видим, недоверие к опыту Гильберта лишило их возможности найти решение вопроса о пространстве представлений матричной механики. Подчеркнем, что и сам создатель волновой квантовой механики Э.Шредингер весьма скептически относился к описанию квантовых скачков своим волновым уравнением, в чем находил поддержку у таких титанов квантовой физики как Макс Планк и Альберт Эйнштейн. Только идея Макса Борна о том, что волновое уравнение описывает не материальное поле, а амплитуду вероятности обнаружить физическую систему в квантовом состоянии, позволяет разрешить логические проблемы волнового уравнения в квантовой механике, но именно эту интерпретацию не принимали ни Шредингер, ни Планк, ни Эйнштейн, что весьма удручило Нильса Бора.

⁴Решите эту простую задачу самостоятельно методом построения схем Юнга в группе SU(2).

§2. Изотропный гармонический осциллятор в 3D

Эволюция изотропного гармонического осциллятора в терминах комплексных векторов в фазовом пространстве, группа $SU(3)$ как матричная группа инвариантности эволюции трехмерных фазовых векторов, матрицы Гелл-Манна. Сохранение полуосей эллипса и тензор второго ранга, разложение тензора на синглет, вектор и квинтет по группе поворотов, разложение тензора на синглет и октет по группе $SU(3)$. Переход от скобок Пуассона к коммутаторам наблюдаемых, вычисление квадратичного инварианта Казимира и спектр энергии изотропного осциллятора, число состояний и невырожденность вакуума, действие амплитуды колебаний на состояние с наименьшей энергией, ограничение на неприводимые представления группы симметрии изотропного осциллятора в пространстве, содержащем вакуум, четность главного квантового числа и допустимые значения орбитального момента в неприводимом представлении.

2.1 Комплексная амплитуда колебаний и группа $SU(3)$

При рассмотрении изотропного гармонического осциллятора с собственной частотой ω удобно ввести комплексные векторы (3-столбцы)

$$\mathbf{A} = m\omega \mathbf{r} + i\mathbf{p}. \quad (\text{III.2.1})$$

Уравнения движения для этих векторов с учетом силы $\mathbf{F} = -\nabla(m\omega^2 \mathbf{r}^2/2) = -m\omega^2 \mathbf{r}$ могут быть выведены из уравнений Гамильтона

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}.$$

Они принимают вид

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = m\omega \frac{\mathbf{p}}{m} - i m\omega^2 \mathbf{r} = -i\omega \mathbf{A},$$

и легко интегрируются

$$\mathbf{A}(t) = e^{-i\omega t} \mathbf{A}_0. \quad (\text{III.2.2})$$

При этом введение величины как 3-строки

$$\mathbf{A}^\dagger = m\omega \mathbf{r} - i\mathbf{p}. \quad (\text{III.2.3})$$

позволяет записать гамильтониан в виде

$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{A}, \quad (\text{III.2.4})$$

откуда сразу видно, что он инвариантен относительно матричной группы преобразований трехмерных комплексных векторов-столбцов, которые сохраняют длину вектора:

$$\mathbf{A}' = U \cdot \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A}')^\dagger \cdot \mathbf{A}' = \mathbf{A}^\dagger U^\dagger \cdot U \mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{A}, \quad (\text{III.2.5})$$

откуда

$$U^\dagger \cdot U = \mathbb{1}. \quad (\text{III.2.6})$$

Такие матрицы называются унитарными. Взяв детерминант (III.2.6), найдем, что

$$(\det U)^* \det U = 1.$$

Среди группы преобразований можно выделить элементарный сдвиг фазы всех компонент вектора \mathbf{A} , что, согласно (III.2.2), отвечает просто смене начала отсчета времени, а значит, соответствует сдвигу по времени и закону сохранения энергии. Поэтому, если нас интересует дополнительная симметрия, мы можем исключить изменение этой общей фазы в матрице U , потребовав

$$\det U = 1. \quad (\text{III.2.7})$$

Итак, мы имеем симметрию унитарных преобразований трехмерных комплексных векторов со специальным условием единичного детерминанта матриц, что обозначают символом группы $SU(3)$.

Проиллюстрируем ситуацию на более простом примере группы $SU(2)$. Элементы группы $SU(2)$ при действии в пространстве двумерных спиноров записываются в виде

$$g = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi} \right\},$$

где σ — матрицы Паули, которые являются эрмитовыми и бесследовыми, а ϕ — вещественные параметры группы, углы поворота. Эрмитовость матриц Паули следует из требования унитарности $g^\dagger \cdot g = 1$. Бесследовость матриц Паули является следствием специального условия

$$\det g = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi} \right\} = 1.$$

Число параметров группы $SU(3)$, u^a , в полной аналогии с рассуждениями для группы $SU(2)$ определяется числом эрмитовых, бесследовых матриц 3×3 , которое равно 8. Базис таких матриц можно выбирать в виде матриц Гелл-Манна λ^a , $a \in \{\overline{1, 8}\}$, так что

$$U = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{u} \right\},$$

причем

$$\operatorname{tr} \lambda^a \lambda^b = 2\delta^{ab}, \quad (\text{III.2.8})$$

так же, как у матриц Паули.

В явном виде матрицы Гелл-Манна включают в себя прямые аналоги недиагональных матриц σ_1 и σ_2 по парам индексов 3-мерного вектора A_α (в декартовых координатах евклидова пространства не делаем различия между верхними и нижними индексами):

по индексам 1 и 2

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

по индексам 1 и 3

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

по индексам 2 и 3

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

а также диагональные матрицы:

аналог σ_3 в индексах 1 и 2

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

вместо аналога σ_3 в индексах 2 и 3 необходимо ввести диагональную эрмитову матрицу с нулевым следом, которая удовлетворяет условию ортонормированности (III.2.8), так что единственным решением такой задачи является диагональная матрица

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Как и следовало ожидать, лишь две матрицы являются диагональными, т.е. имеют совместный базис собственных векторов, так что ранг группы $SU(3)$ равен двум, а значит, старший вектор всякого неприводимого представления характеризуется двумя независимыми числами, которые, стало быть, определяют и два независимых оператора Казимира: однородные полиномы по генераторам, коммутирующие со всеми генераторами группы. Собственные значения генераторов подалгебры Картана принимают значения из допустимого дискретного набора вещественных чисел, который фиксирован для каждого неприводимого представления группы. Отметим, что по аналогии с матрицами спина можно построить три повышающих и три эрмитово сопряженных к повышающим поникающих матрицы из недиагональных матриц Гелл-Манна.

Коммутационные соотношения для генераторов группы $SU(3)$ можно получить, вычислив структурные константы в выражениях

$$\left[\frac{1}{2} \lambda^a, \frac{1}{2} \lambda^b \right] = i f^{abc} \frac{1}{2} \lambda^c. \quad (\text{III.2.9})$$

Константы f^{abc} приводятся в справочниках.

Итак, преобразование симметрии изотропного гармонического осциллятора в терминах векторов \mathbf{A} :

$$A'_\beta = U_{\beta\alpha} A_\alpha, \quad U \in \mathrm{SU}(3).$$

Это означает, что A_α — это триплет 3 по $\mathrm{SU}(3)$, а A_α^\dagger — антитриплет $\bar{3}$ по $\mathrm{SU}(3)$, что заметно упрощает понимание последующих построений.

2.2 Тензор Фрадкина

Все финитные траектории изотропного гармонического осциллятора замкнуты. Траектория движения — эллипс, но в отличие от кулоновского случая, центр притяжения находится не в фокусе, а в центре эллипса. Это значит, что с помощью радиус-вектора и импульса невозможно построить характерный для эллипса вектор, например, соединяющий фокус с фокусом, так как положение обоих фокусов от центра зеркально симметрично. Этот эллипс можно описать направлениями и длинами его полуосей. Однако, опять же, направления по отношению к центру притяжения можно менять на противоположные, от этого эллипс не изменится. Итак у нас есть пара характерных векторов полуосей на плоскости, ортогональной моменту импульса, но направления этих векторов можно менять на противоположные по отношению к центру. Такая ситуация с возможностью смены направления векторов имеет место, если эти векторы собственные для некоторой матрицы. Поскольку эти собственные векторы должны сохраняться при движении, должна сохраняться и сама матрица. Значит, необходимо построить не сохраняющийся вектор, а сохраняющийся тензор второго ранга.

Это можно легко сделать в терминах векторов \mathbf{A} : построим величину

$$F_{\alpha\beta} = A_\alpha^\dagger A_\beta$$

которая является тензором как по группе поворотов, так и по группе $\mathrm{SU}(3)$, причем в силу уравнений движения $A_\alpha(t) = e^{-i\omega t} A_\alpha(0)$ и $A_\alpha^\dagger(t) = e^{i\omega t} A_\alpha^\dagger(0)$ значение тензора не зависит от времени, он сохраняется. При этом по построению в виде тензорного произведения триплета на антитриплет в группе $\mathrm{SU}(3)$ $F_{\alpha\beta} \mapsto \bar{3} \otimes 3 = 1 \oplus 8$ по $\mathrm{SU}(3)$. След тензора — синглет, т.е. инвариант группы $\mathrm{SU}(3)$:

$$\mathrm{tr} F = F_{\alpha\alpha} = 2mE.$$

Распишем $F_{\alpha\beta}$, выделив антисимметричный вклад

$$a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}\{F_{\alpha\beta} - F_{\beta\alpha}\} = i m\omega \{r_\alpha p_\beta - r_\beta p_\alpha\} = i m\omega \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma,$$

и симметричный бесследовый вклад — тензор Фрадкина:

$$s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}\{F_{\alpha\beta} + F_{\beta\alpha}\} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} 2mE = p_\alpha p_\beta + m^2 \omega^2 r_\alpha r_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} 2mE,$$

так что

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} 2mE + a_{\alpha\beta} + s_{\alpha\beta},$$

и мы получили разложение тензора по неприводимым представлениям группы поворотов $\mathrm{SO}(3)$:

$$\mathrm{SO}(3) : \quad 3 \otimes 3 = 1 \oplus 3 \oplus 5,$$

где указаны размерности базиса собственных векторов для каждого неприводимого представления. В этом разложении на неприводимые тензоры синглет отвечает сохраняющейся энергии, триплет — сохраняющемуся вектору момента импульса. Для того чтобы прояснить физический смысл квинтета, найдем собственные значения и собственные векторы симметричного тензора Фрадкина

$$S_{\alpha\beta} = p_\alpha p_\beta + m^2 \omega^2 r_\alpha r_\beta.$$

Заметим сначала, что поскольку движение плоское

$$S_{\alpha\beta} \ell_\beta = 0,$$

т.е. тензор является поперечным. Выберем направление момента импульса в качестве оси z : $\ell \parallel z$. Тогда тензор Фрадкина вырождается в тензор на плоскости (x, y) : все его компоненты с индексом z обращаются в нуль,

$$S_{\alpha\beta} \mapsto \Sigma = \begin{pmatrix} p_x p_x + m^2 \omega^2 x^2 & p_y p_x + m^2 \omega^2 x y \\ p_y p_x + m^2 \omega^2 x y & p_y p_y + m^2 \omega^2 y^2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\det(\Sigma - \lambda) = \lambda^2 - \lambda(p^2 + m^2\omega^2 r^2) + m^2\omega^2(xp_y - yp_x)^2 = \lambda^2 - 2mE\lambda + m^2\omega^2\ell^2 = 0,$$

собственные значения этой матрицы

$$\lambda_{\pm} = mE \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\omega^2\ell^2}{E^2}} \right) \Rightarrow \lambda_+ = \frac{\ell^2}{a^2}, \quad \lambda_- = \frac{\ell^2}{b^2},$$

где a и b — полуоси эллипса по направлениям x и y , соответственно. Тогда собственные векторы можно найти, используя сохранение матрицы Σ по времени. А именно, если выбрать момент времени, когда $y = 0$, $p_x = 0$, $p_y = p$, $x = a$, $\ell = ap$, т.е. выбрать эллипс с полуосами по x и y , то

$$\begin{aligned} \Sigma &= \begin{pmatrix} m^2\omega^2a^2 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\ell^2}{b^2} & 0 \\ 0 & \frac{\ell^2}{a^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Sigma - \lambda_+ &= \begin{pmatrix} \frac{\ell^2}{b^2} - \frac{\ell^2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{\ell^2}{a^2} - \frac{\ell^2}{b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\ell^2}{b^2} - \frac{\ell^2}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а также в силу $\ell = abm\omega$

$$\Sigma - \lambda_- = \begin{pmatrix} \frac{\ell^2}{b^2} - \frac{\ell^2}{b^2} & 0 \\ 0 & \frac{\ell^2}{a^2} - \frac{\ell^2}{b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ell^2}{a^2} - \frac{\ell^2}{b^2} \end{pmatrix},$$

откуда

$$\mathbf{e}_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В итоге, собственные векторы тензора Фрадкина направлены по полуосям траектории вращения — эллипса, а их собственные значения задают обратные квадраты длин полуосей.

Теперь рассмотрим тензор F в отношении неприводимых представлений группы $SU(3)$. Вектор A_α реализует 3-мерное неприводимое представление, но, в отличие от группы $SO(3)$ или $SU(2)$, для которых комплексно сопряженные представления эквивалентны: $(2s+1)^* \cong (2s+1)$, — в группе $SU(3)$ комплексно сопряженные представления не всегда эквивалентны исходному, например, $\bar{3}^* = \bar{3} \not\cong 3$, т.е. вектор A_β^\dagger реализует независимое представление⁵. При этом разложение по неприводимым представлениям выглядит следующим образом:

$$SU(3) : \quad \bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8},$$

т.е. тензор F раскладывается на синглет и октет относительно преобразований группы $SU(3)$. Очевидно, что синглет, т.е. инвариант, пропорционален единичной матрице, и это след тензора, т.е. фактически энергия. Что же касается октета, то его можно представить в виде 8-мерного вектора в пространстве параметров группы:

$$F^a = \frac{1}{4m\omega} \lambda_{\alpha\beta}^a F_{\alpha\beta}. \quad (\text{III.2.10})$$

Поскольку матрицы Гелл-Манна бесследовые, след тензора F не дает вклада в вектор F^a . Введенный вектор имеет размерность момента импульса, т.е. действия.

Вычисление скобок Пуассона дает

$$\{F^a, F^b\}_{\text{P}} = f^{abc} F^c, \quad (\text{III.2.11})$$

а значит, сохраняющиеся генераторы, соответствующие F^a , действительно реализуют октетное представление генераторов группы $SU(3)$.

Задача 35. Вычислите скобки Пассона $\{F^a, F^b\}_{\text{P}}$.

Итак, вырождение финитного движения изотропного гармонического осциллятора в виде замкнутости орбиты отвечает группе симметрии $SU(3)$.

⁵Мы знаем, что речь идет о двух фундаментальных представлениях группы $SU(3)$, которые являются комплексно сопряженными, а именно, $T^{(1,0)}$ и $T^{(0,1)}$.

2.3 Представления $\mathfrak{su}(3)$ для 3D-осциллятора

Не все представления группы $SU(3)$ реализуются траекториями движения, поскольку траектория является плоской: $\ell_\alpha s_{\alpha\beta} \equiv 0$. Это условие отвечает старшему вектору, одно из квантовых чисел которого в терминах собственных значений двух диагональных генераторов равно нулю. Итак, докажем, что состояния изотропного гармонического 3-мерного осциллятора принадлежат исключительно представлениям типа $T^{(n,0)}$ или $T^{(0,n)}$.

Перейдем к деталям. Прежде всего вычисленные скобки Пуассона для F^a задают коммутаторы соответствующих операторов

$$[\hat{F}^a, \hat{F}^b] = i\hbar f^{abc} \hat{F}^c,$$

так что введем генераторы $SU(3)$ -симметрии

$$\Gamma_a = \frac{1}{\hbar} \hat{F}^a = \frac{1}{4m\hbar\omega} \hat{A}_\alpha^\dagger \lambda_{\alpha\beta}^a \hat{A}_\beta,$$

которые уже удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям группы $SU(3)$. Здесь мы, конечно, имеем в виду отождествление $\hat{\mathbf{p}}^\dagger = \hat{\mathbf{p}}$.

Затем вычислим квадратичный оператор Казимира — инвариант

$$C_2 = \Gamma_a \Gamma_a,$$

используя коммутационные соотношения для ключевых операторов $\hat{A}_\alpha = m\omega r_\alpha + i\hat{p}_\alpha$, а именно,

$$[\hat{A}_\alpha, \hat{A}_\beta] = [\hat{A}_\alpha^\dagger, \hat{A}_\beta^\dagger] = \pm im\omega([r_\alpha, \hat{p}_\beta] + [\hat{p}_\alpha, r_\beta]) \equiv 0, \quad (\text{III.2.12})$$

в силу $[r_\alpha, \hat{p}_\beta] = i\hbar \delta_{\alpha\beta}$, а также

$$[\hat{A}_\alpha, \hat{A}_\beta^\dagger] = -im\omega([r_\alpha, \hat{p}_\beta] - [\hat{p}_\alpha, r_\beta]) = 2im\hbar\omega \delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{III.2.13})$$

Тогда

$$16m^2\hbar^2\omega^2 C_2 = \hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\beta \hat{A}_{\alpha'}^\dagger \hat{A}_{\beta'} \lambda_{\alpha\beta}^a \lambda_{\alpha'\beta'}^a = \hat{A}_\alpha^\dagger A_\beta \hat{A}_{\alpha'}^\dagger A_{\beta'} \left(2\delta_{\alpha\beta'} \delta_{\beta\alpha'} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha'\beta'} \right),$$

где мы воспользовались тождеством Фирца для матриц Гелл-Манна (II.4.46). Отсюда

$$16m^2\hbar^2\omega^2 C_2 = 2\hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\beta \hat{A}_\beta^\dagger \hat{A}_\alpha - \frac{2}{3} \left(\hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\alpha \right)^2.$$

Далее,

$$\hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\beta \hat{A}_\beta^\dagger \hat{A}_\alpha = \hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\beta (\hat{A}_\alpha \hat{A}_\beta^\dagger - 2im\hbar\omega \delta_{\alpha\beta}) = (\hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\alpha) \hat{A}_\beta \hat{A}_\beta^\dagger - 2im\hbar\omega (\hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\alpha) = (\hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\alpha) (\hat{A}_\beta^\dagger \hat{A}_\beta + 4im\hbar\omega).$$

Суммируя, найдем

$$16m^2\hbar^2\omega^2 C_2 = \frac{4}{3} \left(\hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\alpha \right)^2 + 8im\hbar\omega \left(\hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\alpha \right).$$

Величина $\hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\alpha$ связана с энергией

$$\hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\alpha = m^2\omega^2 r^2 + \hat{p}^2 + im\omega \{ \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{r} \} = 2mE - 3m\hbar\omega.$$

Значит, квадратичный инвариант Казимира принимает значения

$$C_2 = \frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{3} \left(E - \frac{3}{2} \hbar\omega \right)^2 + \frac{1}{\hbar} \left(E - \frac{3}{2} \hbar\omega \right), \quad (\text{III.2.14})$$

что следует сравнить с допустимыми значениями этого инварианта для представления $T^{(\tilde{n},n)}$ согласно (II.4.57)

$$C_2 = \frac{1}{3} (n^2 + \tilde{n}^2 + n\tilde{n}) + n + \tilde{n}.$$

Но это значит, что либо $\tilde{n} = 0$, либо $n = 0$, а спектр является эквидистантным и зависит от единственного квантового числа,

$$E = \hbar\omega \left(n + \frac{3}{2} \right), \quad (\text{III.2.15})$$

так что множество всех состояний с заданной энергией можно обозначить символом $|n\rangle$. Состояние с минимальной энергией — вакуум $|0\rangle$. В вакууме по общей формуле для неприводимых представлений, скажем, $T^{(0,n)}$ группы $SU(3)$ число состояний

$$k = \frac{1}{2}(n+1)(n+2),$$

и, стало быть, вакуум, в котором $n=0$, описывается единственным состоянием $|0\rangle$, и

$$\left(E_{\text{vac}} - \frac{3}{2}\hbar\omega\right)|0\rangle = \hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\alpha |0\rangle = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\langle 0|\hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\alpha|0\rangle = 0,$$

а значит, норма вектора $|\psi_\alpha\rangle \equiv \hat{A}_\alpha|0\rangle$ тождественно равна нулю, что возможно только в случае, если сам вектор равен нулю, поскольку $\langle\psi_\alpha|\psi_\alpha\rangle = \langle 0|\hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\alpha|0\rangle$, откуда

$$\hat{A}_\alpha|0\rangle \equiv 0. \quad (\text{III.2.16})$$

Это нетривиальное (простое и важное) тождество позволяет однозначно определить неприводимые представления в пространстве, содержащем $|0\rangle$, а также допустимые значения орбитального момента в этих представлениях.

В самом деле, в пространстве с вакуумом $|0\rangle$ представления $T^{(n,0)}$ исключены, поскольку они получаются действием на вакуум симметричными по перестановкам индексов произведением коммутирующих друг с другом триплетных операторов \hat{A}_α (см. (III.2.12)), что, конечно, дает тождественный нуль.

Симметризованные бесследовые произведения вида

$$\hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\beta + \hat{A}_\beta \hat{A}_\alpha^\dagger - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}(\hat{A}_\gamma^\dagger \hat{A}_\gamma + \hat{A}_\gamma \hat{A}_\gamma^\dagger),$$

которые могли бы давать вклад в $T^{(1,1)}$ при действии на $|0\rangle$, например, тоже исключены: с помощью коммутационных соотношений триплетные операторы можно разместить справа, что занулит состояние, а разница, которая возникнет при такой коммутации является синглетом, и в силу нулевого следа также не даст вклада.

Значит, остаются только представления $T^{(0,n)}$, которые получаются действием симметризованных по индексам произведений антитриплетных операторов \hat{A}_α^\dagger , что, конечно, согласуется с вычислением квадратичного инварианта Казимира, которое мы провели выше.

В этой же логике становится совершенно ясно, что представления $T^{(n,0)}$ описывают ровно те же состояния в сопряженном пространстве, которое содержит сопряженный вакуум $\langle 0|$.

Условие плоского движения $\hat{\ell}_\alpha \hat{A}_\alpha^\dagger = \hat{A}_\alpha^\dagger \hat{\ell}_\alpha = 0$ выполняется для представлений $T^{(0,n)}$, поскольку антитриплетные операторы коммутируют, так что оператор с нужным индексом может перемещен влево и его свертка с орбитальным моментом даст нуль.

Наконец установим допустимые значения орбитального момента в представлении $T^{(0,n)}$. Для этого подчеркнем, что \hat{A}_α^\dagger — это не только триплет в группе $SU(3)$, но и триплет в группе $SO(3)$. Но тогда симметризованные по индексам произведения этих операторов, что необходимо для неприводимости представления $T^{(0,n)}$, одновременно включают в себя только представления, симметризованные и в группе $SO(3)$, а это означает, что при четном n допустимы только четные значения орбитального момента ℓ от 0 до n , а при нечетном n — только нечетные значения ℓ от 1 до n .

Факт совпадения четности главного квантового числа n с четностью допустимых значений орбитального квантового числа имеет вполне ясный физический смысл: гамильтониан и генераторы группы симметрии $SU(3)$ инвариантны относительно зеркальной инверсии пространства $\mathbf{r} \xrightarrow{\mathbb{P}} -\mathbf{r}$. Отсюда следует, что неприводимое представление группы $SU(3)$ имеет вполне определенное значение P -четности. Операторы \hat{A}_α^\dagger меняют знак при зеркальной инверсии пространства, так что представление $T^{(0,n)}$ имеет P -четность, равную $(-1)^n$, а значит, допустимы только такие значения орбитального момента, P -четность которых также равна $(-1)^n$. Из приведенных выше рассуждений о том, что \hat{A}_α^\dagger — это не только триплет в группе $SU(3)$, но и триплет в группе $SO(3)$, сразу следует, что четность состояний с орбитальным моментом ℓ равна $(-1)^\ell$. А это значит, что четности n и ℓ совпадают.

Для примера, при $n = 2$ представление группы поворотов, симметризованное по индексам двух операторов \hat{A}_α^\dagger отвечает диаграмме Юнга в группе $SU(2)$, алгебра которой изоморфна алгебре $\mathfrak{so}(3)$:

$$SU(2) : \quad \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \square \square \otimes \boxed{a} \boxed{a} = \left(\square \square \boxed{a} \oplus \boxed{\begin{array}{c} a \\ a \end{array}} \right) \otimes \boxed{a} = \square \square \boxed{a} \boxed{a} \oplus \boxed{\begin{array}{c} a \\ a \end{array}} \oplus \boxed{\begin{array}{c} a \\ a \end{array}} \boxed{a}$$

в сумме с переставленными индикаторами a :

$$SU(2) : \quad \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \boxed{a} \boxed{a} \otimes \square \square = \left(\boxed{a} \boxed{a} \square \oplus \boxed{\begin{array}{c} a \\ a \end{array}} \right) \otimes \square = \boxed{a} \boxed{a} \square \oplus \boxed{\begin{array}{c} a \\ a \end{array}} \oplus \boxed{\begin{array}{c} a \\ a \end{array}} \square .$$

В этих выражениях необходимо учесть смену знака у синглета, прежде чем его вычеркнуть:

$$\boxed{\begin{array}{c} a \\ a \end{array}} = - \boxed{\begin{array}{c} a \\ a \end{array}},$$

так что последние члены в точности сокращаются, поскольку для симметризованной строки

$$\boxed{a} \square = \square \boxed{a},$$

и в симметризованном тензорном произведении остаются только первый член — квинтет ($\ell = 2$) и второй член — синглет ($\ell = 0$).

Из этого примера ясно, что парные клетки с индикатором необходимо присоединять только парами в одну из строк! А это и означает, что инкремент по орбитальному моменту равен $\Delta\ell = \pm 2$, а максимальный ℓ всегда совпадает с n .

Наконец вычислим размерность представления $T^{(0,n)}$, суммируя число проекций $2\ell + 1$ для всех допустимых значений ℓ при заданном n . Для четных n сумма членов арифметической прогрессии

$$k = \sum_{\ell=2k, k=0}^{k=n/2} (2\ell + 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) (1 + 2n + 1) = \frac{1}{2} (n+1)(n+2).$$

Для нечетных n получим тот же результат

$$k = \sum_{\ell=2k+1, k=0}^{k=(n-1)/2} (2\ell + 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{2} + 1 \right) (3 + 2n + 1) = \frac{1}{2} (n+1)(n+2).$$

Итак, мы убедились, что из группы симметрии изотропного гармонического осциллятора реализуются не все представления, а только состояния $T^{(0,n)}$, причем в этом представлении присутствуют все состояния с орбитальным моментом $\ell \leq n$ той же четности, что и n .

Глава 4

Магнитные моменты барионов в составной кварковой модели

§1. Тензорное произведение двух неприводимых представлений группы поворотов

Задача сложения моментов двух подсистем как разложение тензорного произведения в сумму по неприводимым представлениям группы $SU(2)$, схемы Юнга и базис представлений суммарного момента, сложение двух моментов $\frac{1}{2}$, коэффициенты Клебша–Гордона и условия отбора по проекции и суммарному моменту, пример сложения моментов триплета и дублета, общая схема построения базиса состояний неприводимого представления суммы двух моментов количества движения. Отличие неприводимого тензорного оператора от квантового состояния неприводимого представления, матричный элемент неприводимого тензорного оператора и приведенный матричный элемент, теорема Вигнера–Эккарта, правила отбора матричных элементов и правило запрета.

1.1 Сложение двух моментов количества движения

Пусть физическая система составлена из подсистем A и B , так что квантовые состояния системы — это произведения квантовых состояний этих подсистем, свойства которых по отношению к преобразованиям группы поворотов заданы так, что квантовые состояния подсистем — это неприводимые представления, которые допускают как целые, так и полуцелые значения момента количества движения. Это значит, что мы имеем дело с неприводимыми представлениями группы $SU(2)$ (см. Главу 2, §3), а квантовые состояния системы — это представления тензорного произведения состояний двух подсистем. Тензорное произведение может быть разложено в прямую сумму подпространств неприводимых представлений группы $SU(2)$. Для записи этих неприводимых представлений и их тензорных произведений мы можем использовать схемы Юнга для группы $SU(2)$, которые в случае неприводимого представления с моментом импульса, равным j , представляют собой линию из клеток длиной $2j$,

$$\underbrace{\square \square \cdots \square}_{2j},$$

а синглент — это столбец из двух клеток

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}.$$

При этом каждая клетка соответствует фундаментальному представлению группы $SU(2)$, т.е. спинору с $j = \frac{1}{2}$, и клетки в линии симметризованы по номеру фундаментального представления, а клетки в столбце в случае синглента — антисимметризованы. Это значит, что ортонормированные базисные состояния фундаментального представления $|+\rangle$ и $|-\rangle$ с проекциями момента на ось z , равными соответственно $+\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$, при антисимметризации по номерам фундаментальных представлений в тензорном произведении для синглента имеют единственную возможную и отличную от нуля комбинацию

$$\begin{array}{|c|} \hline \square = (|+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]} - |-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{array} \quad (\text{IV.1.1})$$

где нормировочный множитель $1/\sqrt{2}$ мы подобрали так, чтобы состояние было нормировано на единицу. Собственное значение оператора из подалгебры Картана, в данном случае это оператор проекции момента j_z^\otimes , который действует на тензорном произведении, задается как сумма собственных значений того же оператора подалгебры Картана на собственных состояниях фундаментальных множителей в тензорном произведении. Поэтому у синглента проекция момента равна нулю, как это и должно быть у состояния с $j = 0$.

Для примера и для понимания общей схемы описания решения задачи о сложении моментов количества движения рассмотрим две подсистемы с моментом $j^A = j^B = \frac{1}{2}$ и разложим на неприводимые представления тензорное произведение двух этих дублетов по группе $SU(2)$:

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \square \otimes \square = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \square \square = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}.$$

Три ортонормированных базисных состояния триплета, построенного из состояний фундаментальных представлений, согласно схеме Юнга (две клетки в одну линию) получаются симметризацией всех возможных произведений исходных базисных состояний:

$$\begin{aligned} |+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]} &= |1, +1\rangle, \\ (|+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]} + |-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} &= |1, 0\rangle, \\ |-\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]} &= |1, -1\rangle. \end{aligned} \quad (\text{IV.1.2})$$

В записи (IV.1.1) и (IV.1.2) мы установили соответствие базисных состояний неприводимых представлений в прямой сумме с суперпозицией произведения исходных базисных состояний в тензорном произведении. Такой переход от исходного базиса тензорного произведения к базису состояний в прямой сумме называют разложением по Клебшу–Гордону, а сами коэффициенты разложения называются коэффициентами Клебша–Гордона. В общем случае эта запись имеет вид

$$|j, m\rangle = \sum_{m^A, m^B} C_{j^A m^A, j^B m^B}^{jm} |j^a, m^a\rangle |j^B, m^B\rangle, \quad (\text{IV.1.3})$$

где коэффициенты Клебша–Гордона $C_{j^A m^A, j^B m^B}^{jm}$ отличны от нуля, только если

$$m = m^A + m^B \quad (\text{IV.1.4})$$

и еще при одном условии на значения j , которое мы установим чуть позже. Ясно также, что число базисных состояний в системе не может измениться и оно равно $(2j^A + 1)(2j^B + 1)$.

Поскольку генератор групповых преобразований, который действует на тензорном произведении неприводимых представлений, в математическом определении — это прямая сумма тензорных произведений единичных операторов с генератором, который действует на один из тензорных множителей, и сумма берется с перестановками действия генератора на множитель по числу множителей в тензорном произведении, в физическом понимании задача о разложении тензорного произведения на сумму неприводимых представлений — это задача сложения моментов количества движения подсистем, в результате чего находится суммарный момент импульса для каждого члена в прямой сумме неприводимых представлений. Решение этой задачи позволяет установить свойства базиса составной системы по отношению к действию группы $SU(2)$: мы выделяем классы базисных состояний, составляющих пространства с определенным суммарным моментом количества движения.

В рассмотренном примере сложения двух моментов, равных $\frac{1}{2}$, суммарный момент триплета равен единице, а синглета — нулю.

Проведем сложение момента $j^A = 1$ и $j^B = \frac{1}{2}$. В методе схем Юнга получим следующую запись тензорного произведения триплета и дублета:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{2} = \square\square \otimes \square = \square\square \oplus \square\square\square = \square \oplus \square\square\square = \mathbf{2} \oplus \mathbf{4}.$$

Значит, суммарный момент принимает значения $j = \frac{1}{2}$ и $j = \frac{3}{2}$. Остается вопрос о вычислении коэффициентов Клебша–Гордона. При $j = \frac{3}{2}$ решение находится просто, так как схема Юнга указывает на симметричность по перестановкам номеров фундаментальных представлений, а состояние старшего веса

$$|\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\rangle = |+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} = |1, +1\rangle|+\rangle_{[3]},$$

где мы учли полученные ранее формулы для состояний $|1, m\rangle$ в виде результата тензорного произведения двух фундаментальных представлений под номерами [1] и [2].

Базисное состояние $|\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\rangle$ можно получить, либо действуя понижающим оператором на состояние старшего веса в виде тензорного произведения с учетом того, что $j_-|+\rangle = |-\rangle$, откуда

$$|\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = (|-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} + |+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} + |+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|-\rangle_{[3]}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = |1, 0\rangle|+\rangle_{[3]} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} + |1, +1\rangle|-\rangle_{[3]} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}},$$

либо симметризуя по перестановкам номеров фундаментальных представлений выражение

$$|-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]}$$

с учетом нормировки получающейся суперпозиции состояний на единицу. Выражения для базисных состояний с отрицательными значениями проекции суммарного момента мы приводить не станем, так как

они получаются сменой знака проекций у всех состояний исходного базиса, через которые выражается базисное состояние суммарного момента.

Базисные состояния суммарного момента $j = \frac{1}{2}$ по схеме Юнга, показанной выше, симметричны по перестановкам первых двух номеров фундаментальных представлений и антисимметричны по перестановкам номера третьего фундаментального представления с первыми двумя номерами. Например, старая с состояния

$$|-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]},$$

при его симметризации найдем

$$|-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} + |+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]},$$

а антисимметризация последней суперпозиции приводит к выражению

$$|-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} + |+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} - |+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|-\rangle_{[3]} - |+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|-\rangle_{[3]},$$

так что учет подобных членов и условие нормировки состояния на единицу дают

$$\begin{aligned} |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle &= (|-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} + |+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} - 2|+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|-\rangle_{[3]}) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \\ &= |1, 0\rangle|+\rangle_{[3]} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - |1, +1\rangle|-\rangle_{[3]} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned} \quad (\text{IV.1.5})$$

После этих примеров сформулируем общие положения для вычисления суммарного момента количества движения составной системы для случая двух подсистем.

С помощью схем Юнга тензорное произведение двух неприводимых представлений с моментами j^A и $j^B \leq j^A$ раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений,

$$\underbrace{\square \cdots \square}_{2j^B} \otimes \underbrace{\square \cdots \square}_{2j^B} = \bigoplus_{p=0}^{2j^B} \underbrace{\square \cdots \square}_p \overbrace{\square \cdots \square}^{2(j^a + j^b) - 2p}.$$

Это значит, что суммарный момент j принимает значения

$$|j^A - j^B| \leq j \leq j^A + j^B, \quad \text{с шагом } \Delta j = 1. \quad (\text{IV.1.6})$$

Шаг между суммарными значениями момента равен единице, так как синглет образован на схеме Юнга двумя клетками в столбце, так что длина строки может уменьшаться и увеличиваться только по две клетки за один шаг.

Условия (IV.1.4) и (IV.1.6) называются правилами отбора: они определяют допустимую область квантовых чисел m и j , в которой коэффициенты Клебша–Гордона могут быть отличны от нуля, а в противном случае эти коэффициенты заведомо обращаются в нуль.

Построение базиса квантовых состояний с заданным суммарным значением момента импульса системы в общем случае проводится по следующей схеме:

- сначала строится состояние старшего веса для максимального суммарного момента

$$j = j_{\max} = j^a + j^B,$$

т.е. $|j_{\max}, j_{\max}\rangle = |j^A, j^A\rangle|j^B, j^B\rangle \equiv |j^A, j^A; j^B, j^B\rangle$, которое имеет максимально допустимые значения проекций моментов подсистем $m^A = j^A$ и $m^B = j^B$, а затем действием тензорного поникающего оператора j_-^\otimes вычисляются все базисные состояния с этим значением суммарного j ;

- состояние $|j_{\max}, j_{\max} - 1\rangle$ с проекцией суммарного момента, равной $m = j^a + j^B - 1$ является суперпозицией двух состояний исходного базиса $|j^A, j^A - 1; j^B, j^B\rangle$ и $|j^A, j^A; j^B, j^B - 1\rangle$, а значит, из этих же исходных базисных состояний необходимо построить ортогональную суперпозицию, которая отвечает базисному состоянию с суммарным моментом $j_{\max} - 1 = j_A + j^B - 1$ и тем же значением проекции, т.е. состояние старшего веса $|j_{\max} - 1, j_{\max} - 1\rangle$, и затем с помощью поникающего оператора j_-^\otimes построить все базисные состояния этого представления;

- конструкцию предыдущего пункта необходимо повторить при уменьшении значения проекции суммарного момента на единицу с той лишь разницей, что с каждым шагом по уменьшению значения проекции размерность подпространства с заданной проекцией суммарного момента возрастает на единицу, пока эта проекция не дойдет до значения $|j^A - j^B| - 1$, так что к построенным на предыдущем шаге состояниям суммарного момента с рассматриваемой на этом шаге проекцией необходимо построить дополнительное состояние старшего веса с суммарным моментом, который равен рассматриваемой проекции момента.

Все шаги этой схемы мы описали выше на конкретных простых примерах сложения двух моментов. Ясно также, что схема является алгоритмической, так что ее можно оформить в виде компьютерной программы для вычисления коэффициентов Клебша–Гордона. Поэтому в справочной литературе можно найти таблицы значений коэффициентов Клебша–Гордона для случаев, когда исходные моменты подсистем j^A и j^B принимают небольшие значения.

1.2 Неприводимые тензорные операторы и теорема Вигнера–Эккарта

Неприводимые тензорные операторы образуют неприводимое представление группы $SU(2)$ и в так называемом стандартном представлении характеризуются базисом, который помечается значением проекции m момента количества движения j , так что при действии элемента группы \hat{R} стандартные компоненты неприводимого тензорного оператора $\hat{T}_m^{(j)}$ преобразуются так же, как и все другие неприводимые представления с тем же значением момента,

$$\hat{R}\left(\hat{T}_m^{(j)}\right) = \mathcal{R}_{mm'}^{(j)}\hat{T}_{m'}^{(j)}, \quad (\text{IV.1.7})$$

где $\mathcal{R}_{mm'}^{(j)}$ — это та же матрица размером $(2j+1) \times (2j+1)$, что и при групповых преобразованиях в пространстве неприводимого представления квантовых состояний:

$$\hat{R}\left(|j, m\rangle\right) = \mathcal{R}_{mm'}^{(j)}|j, m'\rangle.$$

Разница между квантовыми состояниями с определенным значением момента и его проекции $|j, m\rangle$ и неприводимым тензорным оператором $\hat{T}_{m'}^{(j)}$ заключается в том, что действие оператора на квантовое состояние не сводится к тензорному произведению оператора на состояние, а включает в себя еще и преобразование, которое затрагивает квантовые числа, которые не имеют отношения к группе поворотов с полуцелыми спинами, т.е. к группе $SU(2)$. Это значит, что у квантового состояния полный набор наблюдаемых определяет базис $|J, M, A\rangle$, где A маркируют собственные значения наблюдаемых, которые остаются инвариантными при действии группы $SU(2)$. Поэтому допустимые значения A не зависят от проекции момента M , но могут зависеть от инварианта группы $SU(2)$, т.е. от J . Поэтому в тензорном произведении $|J, M, A\rangle \otimes |J', M', A'\rangle$, которое определяет свойства преобразований квантовых состояний составной системы, построенной из подсистем A и A' , разложение в прямую сумму по неприводимым представлениям суммарного момента количества движения не зависит от инвариантов A и A' , как мы это и рассматривали в предыдущем параграфе.

Действие же неприводимого тензорного оператора на состояние с определенным моментом импульса J и проекцией M приводит к суперпозиции состояний, где могут изменяться квантовые числа инвариантов A :

$$\hat{T}_{m'}^{(j)}|J, M, A\rangle = \sum_{J', M', A'}|J', M', A'\rangle.$$

Тем не менее, зададимся вопросом о том, что можно сказать о преобразованиях элементом группы результата действия неприводимого тензорного оператора на квантовое состояние с определенными значениями момента и его проекции, т.е. о

$$\hat{R}\left(\hat{T}_{m'}^{(j)}|J, M, A\rangle\right).$$

Поскольку в пространстве квантовых состояний действуют линейные операторы, которые переводят суперпозицию квантовых состояний в суперпозицию образов квантовых состояний с теми же коэффициентами, а элемент группы имеет обратный, рассматриваемое действие обычно формально записывают в виде

$$\hat{R}\left(\hat{T}_{m'}^{(j)}|J, M, A\rangle\right) = \hat{R}\left(\hat{T}_{m'}^{(j)}\hat{R}^{-1}\hat{R}|J, M, A\rangle\right) = \left(\hat{R}\hat{T}_{m'}^{(j)}\hat{R}^{-1}\right)\left(\hat{R}|J, M, A\rangle\right).$$

Оператор группового преобразования определяют так, чтобы он сохранял номировку квантовых состояний. Это значит, что \hat{R} — это унитарный оператор и $\hat{R}^{-1} = \hat{R}^\dagger$. В итоге, формально записывают, что

$$\hat{R}\left(\hat{T}_{m'}^{(j)}\right) = \mathcal{R}_{mm'}^{(j)}\hat{T}_{m'}^{(j)} \equiv \hat{R}\hat{T}_{m'}^{(j)}\hat{R}^\dagger.$$

Так как неприводимый тензорный оператор может изменять значения инвариантных квантовых чисел A , то результат действия элемента группы

$$\hat{R}\left(\hat{T}_{m'}^{(j)}|J, M, A\rangle\right)$$

обладает ровно теми же свойствами по отношению к группе $SU(2)$, что и тензорное произведение неприводимых представлений с моментами j и J с той лишь разницей, что коэффициенты разложения в прямую сумму неприводимых представлений с суммарным значением момента могут иметь общие множители, которые зависят от инвариантов J и A . Это утверждение можно записать в виде формулы

$$\langle J', M' | \left(\hat{T}_{m'}^{(j)}|J, M, A\rangle\right) = \langle J', M' | j, m; J, M \rangle K(J', j, J, A), \quad (\text{IV.1.8})$$

где

$$\langle J', M' | j, m; J, M \rangle = \left(C_{jm, JM}^{J' M'} \right)^\dagger$$

это коэффициенты Клебша–Гордона при переходе к базису состояний с суммарным моментом J' от базиса в тензорном произведении подсистем с моментами j и J , а инвариантный множитель обычно записывают в виде

$$K(J', j, J, A) = \frac{\langle J' || T^{(j)} || J \rangle}{\sqrt{2J' + 1}}$$

и называют приведенным матричным элементом (квадрат матричного элемента как бы усредняется по числу базисных состояний с суммарным моментом J').

Формула (IV.1.8) называется теоремой Вигнера–Эккарта для матричного элемента неприводимого тензорного оператора.

Правила отбора для этого матричного элемента совпадают с правилами отбора для коэффициентов Клебша–Гордона. Эти правила отбора обычно записывают таким образом:

- *Правила отбора по проекции момента.* Так как $M' = m + M$, и $-j \leq m \leq j$, то

$$\Delta M = |M' - M| \leq j. \quad (\text{IV.1.9})$$

- *Правила отбора по моменту.* Поскольку $|J - j| \leq J' \leq J + j$, то при $J \geq j$ имеет место ограничение $J - j \leq J' \leq J + j$, откуда $J' - J \leq j$ и $J - J' \leq j$, а значит, независимо от знака разности $J' - J$

$$|J' - J| \equiv \Delta J \leq j.$$

- *Правила запрета.* При $J \leq j$ имеет место ограничение $j - J \leq J' \leq J + j$, откуда, во-первых, при $J' \geq J$ получается, что

$$0 \leq J' - J \leq j,$$

а при $J' \leq J$

$$0 \leq J - J' \leq 2J - j \leq j,$$

т.е. правило отбора по моменту импульса не изменяется: $\Delta J \leq j$, а во-вторых, имеет место условие

$$j \leq J + J',$$

очевидно справедливое и при $J \geq j$ тоже, а значит, запрещены отличные от нуля матричные элементы при

$$j > J + J'.$$

В частности, если $J' = J = 0$, то при $j \geq 1$ равны нулю все матричные элементы $\langle 0, 0, A | \hat{T}_{m'}^{(j)} | 0, 0, A' \rangle$, и в этом случае говорят, что запрещены переходы $0 \rightarrow 0'$.

Для примера, как было показано в [1], в декартовых координатах симметричные тензоры ранга l с нулевым следом по любой паре индексов отвечают неприводимым представлениям с моментом $j = l$. В этом же пособии построена схема перехода от декартовых координат к стандартному представлению для неприводимого тензора, которое определяется в виде суперпозиции компонент тензора в декартовых координатах. Так, вектор электрического дипольного момента — это неприводимый тензор с моментом $j = 1$ и тремя независимыми компонентами, а тензор квадрупольного момента — это неприводимый тензор с $j = 2$ и пятью независимыми компонентами.

§2. Магнитные моменты системы трех夸克ов

Проблема магнитных моментов барионов и гиперонов, спиновые состояния дикварков, составленных из тождественных夸克ов, в барионе спина $\frac{1}{2}$ и спиновое состояние бариона. Оператор магнитного момента протона как сумма операторов夸克ов составной модели, действие операторов на спиновые состояния и средние значения, сравнение магнитных моментов протона, нейтрона и Σ^\pm -гиперонов, рассчитанных в составной модели, с экспериментальными данными.

2.1 Спиновая функция барионов в основном состоянии

Вычислим магнитные моменты нескольких барионов в кварковой модели. Дело в том, что магнитные моменты точечных частиц пропорциональны спину частицы и ее заряду, так что, если считать, что барионы со спином $\frac{1}{2}$ — это элементарные частицы, подчиняющиеся уравнению Дирака, то, например, у нейтрона как у частицы Дирака с нулевым электрическим зарядом предсказывается магнитный момент, равный нулю, а у протона ожидалось, что его магнитный момент равен нуклонному магнетону

$$\mu_p \mapsto \frac{e}{2m_p c} g \hbar s_p = \frac{e\hbar}{2m_p c} \equiv \mu_N,$$

где g -фактор очень мало отличается от 2, а $s_p = \frac{1}{2}$ — это спин протона. Эксперимент катастрофически расходится с этими ожиданиями

$$\mu_p \approx 2.79 \mu_N, \quad \mu_n \approx -1.91 \mu_N.$$

Поэтому кварковая модель может быть протестирована на магнитных моментах барионов, которые она довольно надежно предсказывает.

Согласно кварковой модели барионы составлены из трех夸克ов, которые связаны сильным взаимодействием, причем夸克 — это квантовые состояния, которые обладают спином $\frac{1}{2}$ и цветом группы $SU_c(3)$ так, что цветовая волновая функция является антисимметричной по перестановке цветов夸克ов, а в основном состоянии и пространственная волновая функция夸克ов симметрична по перестановке координат夸克ов. Значит, если в барионе присутствуют тождественные夸克и, для которых по принципу запрета Паули имеет место статистика Ферми–Дирака и волновая функция должна быть симметрична по перестановке координат, цвета и спина тождественных夸克ов, то в основном состоянии спиновая волновая функция двух тождественных夸克ов должна быть только симметрична по перестановке их спинов, а это, как мы выяснили с помощью схем Юнга, отвечает суммарному спину, равному единице.

Рассмотрим протон, составленный из夸克ов (uud). Спиновая функция дикварка, составленного из двух тождественных u -夸克ов, (uu) равна единице, а спин протона равен $\frac{1}{2}$. Это значит, что при рассмотрении тензорного произведения триплета группы $SU(2)$, который описывает дикварк (uu), и дублета, который описывает d -夸克, в прямой сумме нужно выделить неприводимое представление со спином $\frac{1}{2}$. Эта задача была полностью рассмотрена нами в этой главе, раздел 1.1, §1.

Итак, состояние протона с проекцией спина $+\frac{1}{2}$ задается базисным состоянием

$$|\text{proton}, +\frac{1}{2}\rangle = |1, 0\rangle_{(uu)} |+\rangle_d \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - |1, +1\rangle_{(uu)} |-\rangle_d \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad (\text{IV.2.1})$$

(см. формулу (IV.1.5)). Здесь согласно (IV.1.2)

$$|1, 0\rangle_{(uu)} = (|+\rangle_{[1]} |-\rangle_{[2]} + |-\rangle_{[1]} |+\rangle_{[2]}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |1, +1\rangle_{(uu)} = |+\rangle_{[1]} |+\rangle_{[2]}.$$

Спиновое состояние протона позволяет теперь вычислить его магнитный момент.

2.2 Магнитные дипольные моменты протона, нейтрона и странных гиперонов

Магнитный момент протона вычисляется как среднее значение суммы операторов магнитных моментов夸克ов, составляющих протон. Рассмотрим спиновое состояние протона

$$|\text{proton}, +\frac{1}{2}\rangle$$

и среднее значение оператора проекции магнитного момента夸克ов на ось z , считая, что кварковые состояния отвечают дираковским частицам с $g = 2$,

$$\hat{\mu}_p = Q_u \frac{e\hbar}{2m_u} g s_z^{[1]} + Q_u \frac{e\hbar}{2m_u} g s_z^{[2]} + Q_d \frac{e\hbar}{2m_d} g s_z^d,$$

причем

$$Q_u = +\frac{2}{3}, \quad Q_d = -\frac{1}{3}.$$

Так как массы u - и d -кварков как квантовых состояний в протоне мало отличаются, $m_u \approx m_d \approx m_q \sim 330$ МэВ, можно ввести магнетон легкого кварка

$$\mu_q = \frac{e\hbar}{2m_q}. \quad (\text{IV.2.2})$$

Тогда вычислим действие оператора магнитного момента протона на спиновые состояния, которые определяют спиновую волновую функцию протона:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_p |1, 0\rangle_{(uu)} |+\rangle_d &= \left\{ Q_u \mu_q g (s_z^{[1]} + s_z^{[1]}) + Q_d \mu_q g s_z^d \right\} (|+\rangle_{[1]} |-\rangle_{[2]} + |-\rangle_{[1]} |+\rangle_{[2]}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |+\rangle_d = \\ &= \left\{ Q_u \mu_q g \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + Q_d \mu_q g \frac{1}{2} \right\} (|+\rangle_{[1]} |-\rangle_{[2]} + |-\rangle_{[1]} |+\rangle_{[2]}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |+\rangle_d = \\ &= Q_d \mu_q |1, 0\rangle_{(uu)} |+\rangle_d, \end{aligned} \quad (\text{IV.2.3})$$

и точно также

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_p |1, +1\rangle_{(uu)} |-\rangle_d &= \left\{ Q_u \mu_q g (s_z^{[1]} + s_z^{[1]}) + Q_d \mu_q g s_z^d \right\} |+\rangle_{[1]} |+\rangle_{[2]} |-\rangle_d = \\ &= \left\{ Q_u \mu_q g \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + Q_d \mu_q g \left(-\frac{1}{2}\right) \right\} |+\rangle_{[1]} |+\rangle_{[2]} |-\rangle_d = \\ &= (2Q_u - Q_d) \mu_q |1, +1\rangle_{(uu)} |-\rangle_d. \end{aligned} \quad (\text{IV.2.4})$$

Значит, среднее значение оператора магнитного момента можно вычислить с помощью выражения (IV.2.1), в котором указаны амплитуды рассмотренных нами в (IV.2.3) и (IV.2.4) ортонормированных спиновых состояний кварков:

$$\mu_p = \langle \text{proton}, +\frac{1}{2} | \hat{\mu}_p | \text{proton}, +\frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{3} \cdot \mu_q Q_d + \frac{2}{3} \cdot \mu_q (2Q_u - Q_d) = \mu_q \left(\frac{4}{3} \cdot Q_u - \frac{1}{3} \cdot Q_d \right) = \mu_q = \mu_N \frac{m_N}{m_q}. \quad (\text{IV.2.5})$$

Если пренебречь энергией связи кварковых состояний в протоне и положить, что масса кварка в 3 раза меньше массы нуклона, то $\mu_p \approx 3\mu_N$. Эта очень грубая оценка уже близка к экспериментальной величине и превышает ее только на величину менее 10 %. Если же считать, что масса кварка $m_q \approx 330$ МэВ и принять массу нуклона равной $m_N \approx 940$ МэВ, то получим оценку

$$\mu_p \approx 2.85 \mu_N,$$

что отличается от эксперимента только на 5%. И такой обнадеживающий результат достигается в довольно простых предположениях о связи кварков в протоне и g -факторе, принятом равным двум!

Аналогичные формулы для нейтрона (ddu) дают

$$\mu_n = \langle \text{neutron}, +\frac{1}{2} | \hat{\mu}_n | \text{neutron}, +\frac{1}{2} \rangle = \mu_q \left(\frac{4}{3} \cdot Q_d - \frac{1}{3} \cdot Q_u \right) = -\frac{2}{3} \cdot \mu_q = -\frac{2}{3} \cdot \mu_N \frac{m_N}{m_q} = -\frac{2}{3} \mu_p. \quad (\text{IV.2.6})$$

При тех же значениях масс кварков и нуклона получаем

$$\mu_n \approx -1.9 \mu_N.$$

Можно сравнить отношение моментов, найденное в эксперименте и в кварковой модели (quark model [QM]):

$$\left. \frac{\mu_n}{\mu_p} \right|_{\text{exp}} \approx 0.68, \quad \left. \frac{\mu_n}{\mu_p} \right|_{\text{QM}} \approx 0.67.$$

Разность этих значений составляет менее 3%.

Прямое обобщение рассмотренного вывода можно провести на случай странных гиперонов $\Sigma^+ = (uus)$ и $\Sigma^- = (dds)$, если учесть еще и то, что масса состояния странного кварка существенно больше масс состояний легких кварков¹, $m_s \approx 480$ МэВ. Тогда

$$\mu_{\Sigma^+} = \langle \Sigma^+, +\frac{1}{2} | \hat{\mu}_{\Sigma^+} | \Sigma^+, +\frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{3} \cdot \mu_s Q_s + \frac{2}{3} \cdot (\mu_q 2Q_u - \mu_s Q_s) = \frac{4}{3} \cdot \mu_q Q_u - \frac{1}{3} \cdot \mu_s Q_s. \quad (\text{IV.2.7})$$

¹ Разность масс легких и странного кварков можно оценить по разности масс протона и странного гиперона, которая составляет приблизительно 150 МэВ. Поскольку странный гиперон тяжелее протона, в численных оценках полагают, что странный кварк тяжелее легких на 150 МэВ.

Численное значение нужно сравнить с экспериментальным:

$$\mu_{\Sigma^+} \Big|_{QM} \approx 2.75 \mu_N, \quad \mu_{\Sigma^+} \Big|_{exp} \approx 2.46 \mu_N.$$

Для $\Sigma^- = (dds)$

$$\mu_{\Sigma^-} = \langle \Sigma^-, +\frac{1}{2} | \hat{\mu}_{\Sigma^-} | \Sigma^+, +\frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{3} \cdot \mu_s Q_s + \frac{2}{3} \cdot (\mu_q 2Q_d - \mu_s Q_s) = \frac{4}{3} \cdot \mu_q Q_d - \frac{1}{3} \cdot \mu_s Q_s. \quad (IV.2.8)$$

Численно

$$\mu_{\Sigma^-} \Big|_{QM} \approx -1.05 \mu_N, \quad \mu_{\Sigma^-} \Big|_{exp} \approx -1.16 \mu_N.$$

Как видим, точность предсказания для странных гиперонов близка к 10%, что указывает на то, что простая кварковая модель дает верные представления об основных состояниях барионов и гиперонов в предположении, что g -факторы кварковых состояний мало отличаются от значения, равного двум.

Рассмотренную кварковую модель принято называть моделью конституентных夸克ов, т.е. кварков в составной модели. Недостатком этой модели является то, что она никак не вникает в динамику образования связанных состояний кварков.

Приложение

§1. Квантовые понятия и обозначения

Бра- и кет-векторы гильбертова пространства квантовых состояний, эрмитово сопряжение, проектор и полнота базиса, запись операторов физических величин в формализме Дирака, коммутатор, полный набор наблюдаемых, каноническое квантование, соотношение неопределенностей.

В этом параграфе мы кратко излагаем тезисы описания физических систем в квантовых обозначениях, отсылая читателя за пониманием и подробностями к полноценному изложению, которое содержится в первой части курса теоретической физики, — к механике в фейнмановской формулировке [1], где заложены основы базисных представлений о квантовых и классических системах. При этом мы не предполагаем, что читатель прежде имел время, чтобы погрузиться в детали квантовой механики, характерные при изучении годового курса в университете. Напротив, наша рекомендация состоит в том, чтобы, опираясь на базис механики в фейнмановской формулировке, сначала пройти через конструкцию исследования групп и алгебр Ли и их неприводимых представлений для квантовых состояний с примерами прямого применения подобных построений для описания квантовых свойств физических систем, а потом с более глубоким пониманием приступить к подробному исследованию богатого культурного слоя квантовой механики и квантовой теории поля в современном видении этих наук.

1.1 Наблюдаемые и состояния

Под частицей мы понимаем квант локального поля. Локальное поле — это физическая система, характеристики которой измеряются приборами, занимающими сколь угодно малый объем, т.е. локально. Характеристики полей, наблюдаемые в точке пространства, могут зависеть друг от друга, и эта зависимость называется взаимодействием. Пример взаимодействия — это измерение характеристик локального поля локальным прибором. Характеристика поля — это наблюдаемая величина физической системы, существующая объективно и проявляющая себя во взаимодействиях, в том числе, при взаимодействии с измерительными приборами. Наблюдаемые величины таким образом доступны для измерений так, что результат измерения показывает значение наблюдаемой величины, т.е. вещественное число. Наблюдаемыми мы полагаем энергию, импульс, координаты и т.п. При этом мы трактуем частицы как порции локального поля, т.е. как материальные точки, обладающие всеми физическими характеристиками поля, квантами которого являются эти частицы, включая координаты, импульс, энергию и т.п. В нерелятивистском описании число квантов поля считается неизменным, а скорости движения частиц v ограничены областью $v/c \ll 1$, где c — максимальная скорость распространения взаимодействий, которая совпадает со скоростью света в вакууме. Под движением мы понимаем изменение наблюдаемых со временем. Уравнения движения — это уравнения лагранжевой или гамильтоновой механики, которые в фейнмановской формулировке в классическом пределе возникают как уравнения на экстремум действия при вариации траектории с фиксированными граничными данными, а само действие описывает функционал на траектории. Под траекторией мы подразумеваем зависимость наблюдаемых от времени. «Прямая» траектория — это экстремальная траектория, на которой действие экстремально. В исходной фейнмановской формулировке действие на траектории S задает амплитуду вероятности на этой траектории Ψ ,

$$\Psi = e^{\frac{i}{\hbar} S} \in \mathbb{C}, \quad S \in \mathbb{R},$$

а амплитуда вероятности движения системы при заданных граничных данных — это сумма амплитуд вероятности по всем возможным траекториям с фиксированными граничными данными. Если действие на экстремальной траектории S_{ext} существенно больше постоянной Планка \hbar , т.е. $S_{\text{ext}} \gg \hbar$, то сумма амплитуд вероятности по траекториям, как говорят, локализуется, т.е. сводится к амплитуде вероятности для экстремальной траектории с точностью до несущественного в этом случае множителя, так как все траектории, которые существенно отличны от экстремальной траектории, дают в сумму вклад, стремящийся к нулю, как это имеет место при усреднении косинуса и синуса по углу в интервале, существенно превышающем период синуса и косинуса [обратите внимание на то, что экспонента в формуле для амплитуды вероятности может быть записана как сумма вещественной части (косинус) и чисто мнимой части (синус)], а исключение составляет именно экстремальная траектория, поскольку вариация $\delta S_{\text{ext}} = 0$, и отклонения от экстремальной траектории не изменяют аргумент косинуса и синуса. Существенным отклонением траектории от экстремальной считаются такие, при которых действие меняется на $\delta S \gg \hbar$. Амплитуда вероятности Ψ задает распределение вероятности W как интенсивность

$$W = |\Psi|^2.$$

Важно, что действие на экстремальной траектории удовлетворяет уравнениям Гамильтона–Якоби,

$$\frac{\partial S}{\partial x} = p_x, \quad -\frac{\partial S}{\partial t} = \mathcal{H}(p_x, x, t), \quad (\text{V.1.1})$$

что эквивалентно уравнению Шрёдингера для амплитуды вероятности на этой траектории,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{H}(\hat{p}_x, x, t)\Psi, \quad \hat{p}_x \Psi = -i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (\text{V.1.2})$$

причем импульс записывается в виде оператора, действующего на амплитуду вероятности с результатом, равным этой же амплитуде, умноженной на значение импульса на траектории в момент времени на траектории, который стоит в аргументе действия.

Если приборные погрешности так велики, что точность определения действия на траектории $\delta S \gg \hbar$, отклонения траектории от экстремальной детектируются с вероятностью, равной нулю, а траектории, близкие к экстремальной, у которых $\delta S \sim \hbar$, неотличимы от экстремальной.

В уравнениях Гамильтона–Якоби дифференцирование производится по координатам и времени на конце траектории, поэтому, если разбить интервал временной эволюции на несколько последовательных интервалов, задать в промежуточных точках какие-либо граничные условия, а потом на каждом из интервалов найти экстремальную для этого интервала и для заданных на нем граничных условий траекторию, то на каждом интервале, и промежуточном, и финальном, амплитуда вероятности будет удовлетворять уравнению Шрёдингера, а произведение амплитуд составит амплитуду вероятности такой траектории последовательных интервалов. В итоге, полученная таким образом амплитуда будет удовлетворять уравнению Шрёдингера, как и амплитуда на экстремальной траектории всего интегрального интервала эволюции, но траектория последовательных интервалов будет отличаться от экстремальной. Для примера у свободной нерелятивистской частицы экстремальная траектория в декартовых координатах — это прямая линия от начальной координаты к конечной, а траектория последовательных двух интервалов — это ломаная из двух звеньев с началом первого звена в исходной и концом второго звена в конечной точке эволюции. Сумма амплитуд вероятности, построенных для таких последовательных траекторий при произвольном разбиении интервала эволюции и произвольных граничных условиях на промежуточных интервалах, удовлетворяет уравнению Шрёдингера в силу его линейности по амплитуде вероятности, называется интегралом Фейнмана по траекториям и по построению интеграла по траекториям представляет из себя принцип суперпозиции Гюйгенса для итоговой, суммарной амплитуды вероятности. Эта сумма имеет физический смысл, если решение уравнения Шрёдингера имеет конечную норму при заданных граничных условиях: квадрат модуля амплитуды задает распределение вероятности детектировать частицу возле конечной точке эволюции, а сумма вероятностей по всем точкам пространства равна единице, так как эта сумма — вероятность того, что физическая система реализуется в природе.

То, что частица на каждом промежуточном интервале времени движется по экстремальной траектории, но на концах каждого интервала может происходить излом траектории, неотъемлемая часть принципа Гюйгенса и квантового описания амплитуды вероятности. Подчеркнем, что фейнмановский интеграл определяет интерференцию амплитуд вероятности на всевозможных траекториях, включая ломаные, а результат интерференции задает распределение вероятностей при многократном повторении событий, представляющих из себя классы объективных данных о наблюдаемых характеристиках физической системы. Возможность реализации ломанных траекторий описывается вероятностным образом. Само наличие траекторий, отличных от экстремальной на всем интервале эволюции, называется квантовыми флюктуациями траекторий. Даже свободная частица имеет квантовые флюктуации траектории. Почему происходят изломы траектории даже у свободной частицы, а описание этих квантовых флюктуаций возможно только вероятностным образом? И сами флюктуации, и их вероятностное описание — это факт квантового устройства природы. Факт, установленный как при объяснении неисчислимого множества физических закономерностей, так и в предсказаниях еще более многочисленных закономерностей. Т.е. этот факт и есть закон природы.

Описанная конструкция — суперпозиция амплитуд вероятности над алгебраическим полем комплексных чисел, обладающая конечной нормой, — это гильбертово пространство квантовых состояний, основное открытие квантового описания физических систем. При этом понятие гильбертова пространства \mathcal{H} включает в себя физическое требование счетности множества независимых реализуемых вероятностных событий, так как только счетное множество классов событий понимается как объективно измеримое. Для таких непрерывных наблюдаемых величин, как координаты, это требование означает, что вся область значений координат может быть покрыта счетным числом детекторов координат, а эти детекторы имеют конечные размеры, которые только математически в пределе мыслятся бесконечно малыми.

Итак, пространство квантовых состояний физической системы — это векторное пространство над алгебраическим полем комплексных чисел со счетным нормированным базисом и элементами конечной

нормы¹. Наблюдаемые величины физической системы измеряются детекторами и, стало быть, имеют прямое отношение к базису квантовых состояний, так как в базисе находятся вероятностно независимые классы событий измерения характеристик системы. А именно, если наблюдаемая величина имеет точно заданное значение в квантовом состоянии, то амплитуда вероятности измерить в этом состоянии другое значение наблюдаемой величины равна нулю, и вероятности двух таких классов событий: с точным значением наблюдаемой в квантовом состоянии и с другим значением наблюдаемой, являются независимыми, что и требуется для классов вероятностных событий. В математическом формализме вводят обозначение квантового состояния в виде кет-вектора $|f\rangle$, где f указывает точное значение наблюдаемой F , а для самой наблюдаемой вводят оператор \hat{F} , обладающий следующим свойством, которое описывает измерение этой наблюдаемой детектором:

$$\hat{F}|f\rangle \stackrel{\text{def}}{=} f|f\rangle, \quad (\text{V.1.3})$$

т.е. действие оператора наблюдаемой величины на квантовое состояние, в котором эта величина имеет точное значение, сводится к тому, что это состояние умножается на точное значение наблюдаемой в этом квантовом состоянии. Уравнение (V.1.3) называется уравнением на собственные значения величины F , а состояние $|f\rangle$ — собственным состоянием величины F с собственным значением f . Определение оператора наблюдаемой \hat{F} в (V.1.3) с одной стороны является объективным и устанавливает свойство квантового состояния, а с другой стороны описывает акт измерения наблюдаемой детектором так, что детектор показывает объективную характеристику квантового состояния. По построению детектор показывает только собственные значения наблюдаемой величины, которыми может обладать физическая система, и эти собственные значения — вещественные числа из области допустимых значений наблюдаемой величины. Множество собственных квантовых состояний наблюдаемой величины может быть только счетным, так как собственные состояния описывают вероятностно независимые классы событий, а число классов вероятностных событий может быть только счетным в гильбертовом пространстве, как мы это уже указывали чуть выше. Поэтому все собственные векторы наблюдаемой можно пронумеровать индексом n ,

$$\hat{F}|n\rangle \stackrel{\text{def}}{=} f_n|n\rangle \quad (\text{V.1.4})$$

а квантовые состояния физической системы строить как нормируемую суперпозицию по базису квантовых состояний $|n\rangle$:

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle. \quad (\text{V.1.5})$$

Маркер n называют квантовым числом, собственное значение f_n также часто называют квантовым числом, но в последнем случае возникает тонкость: у одного и того же собственного значения могут быть несколько собственных состояний, и тогда номер собственного состояния не идентичен собственному значению. Для описания подобной тонкости необходимо развить формализм операторов наблюдаемых величин более детально.

1.2 Эрмитово сопряжение состояний и операторов наблюдаемых

Введем стандартное для векторного пространства обозначение для базисного вектора в виде вектора-столбца v так, что при нумерации базисных состояний наблюдаемой величины натуральными числами состояние $|n\rangle$ — это столбец e_n с единицей на n -ом месте и остальными нулями:

$$|n\rangle \equiv e_n : (e_n)_m = \delta_{nm}, \quad e_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad e_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots \quad (\text{V.1.6})$$

Тогда суперпозиция $|\Psi\rangle$ запишется как вектор-столбец, кет-вектор

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \equiv \sum_n c_n e_n \equiv \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (\text{V.1.7})$$

¹Более формализованное математическое определение свойств гильбертова пространства приводится в учебниках по квантовой механике, см., например, [10]

что позволяет построить эрмитово сопряженный вектор-строку, бра-вектор, как результат транспонирования и комплексного сопряжения кет-вектора:

$$\langle \Psi | \stackrel{\text{def}}{=} (\Psi)^\dagger = \sum_n c_n^* \langle n | \equiv \sum_n c_n^* (e_n)^\dagger \equiv (c_1^*, c_2^*, c_3^*, \dots). \quad (\text{V.1.8})$$

В этих обозначениях скалярное произведение базисных векторов, которое строится как матричное умножение строки бра-вектора на столбец кет-вектора, ортонормировано

$$\langle n | m \rangle \equiv (e_n)^\dagger e_m = \delta_{nm}, \quad (\text{V.1.9})$$

а

$$c_n = \langle n | \Psi \rangle, \quad c_n^* = \langle \Psi | n \rangle,$$

так что

$$(\langle n | \Psi \rangle)^\dagger = \langle \Psi | n \rangle$$

в полном согласии с определением эрмитова сопряжения как композиции транспонирования и комплексного сопряжения в матричных обозначениях.

Тогда разложение кет-вектора по базисным состояниям запишется в виде

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle = \sum_n \langle n | \Psi \rangle |n\rangle, \quad (\text{V.1.10})$$

где число $\langle n | \Psi \rangle$ можно записать справа от базисного кет-вектора и получить операторное выражение

$$|\Psi\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n | \Psi \rangle = \left(\sum_n |n\rangle \langle n| \right) |\Psi\rangle, \quad \forall |\Psi\rangle \in \mathcal{H}. \quad (\text{V.1.11})$$

Это значит, что в гильбертовом пространстве базис квантовых состояний полон: вычисление проекций исходного квантового состояния $|\Psi\rangle$ на единичный базисный вектор, $\langle n | \Psi \rangle$, и суммирование базисных векторов с коэффициентами, равными этим проекциям, дает исходный вектор состояния $|\Psi\rangle$, а

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = \mathbb{1}. \quad (\text{V.1.12})$$

Последнее выражение в терминах умножения кет- и бра-векторов, которые могут быть записаны как столбцы и строки, дает пример записи матрицы через сумму произведений столбцов на строки. В самом деле,

$$|1\rangle \langle 1| \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot (1, 0, 0, \dots) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix} \text{ и т.п.}$$

Заметим, что оператор

$$\hat{P}_n = |n\rangle \langle n| \quad (\text{V.1.13})$$

по своему смыслу является проектором на n -е базисное квантовое состояние и обладает двумя свойствами

$$\hat{P}_n^2 = |n\rangle \langle n | n \rangle \langle n| = |n\rangle \langle n| = \hat{P}_n, \quad (\hat{P}_n)^\dagger = (|n\rangle \langle n|)^\dagger = |n\rangle \langle n| = \hat{P}_n, \quad (\text{V.1.14})$$

т.е. двукратное проецирование дает тот же результат, что и однократное, а матрица проектора является эрмитово самосопряженной: транспонирование и комплексное сопряжение матрицы приводят к той же матрице.

Покажем, что оператор наблюдаемой величины \hat{F} выражается в формализме кет- и бра-состояний в виде матрицы

$$\hat{F} = \sum_m |m\rangle f_m \langle m|, \quad (\text{V.1.15})$$

которая является эрмитово самосопряженной

$$\hat{F}^\dagger = \left(\sum_m |m\rangle f_m \langle m| \right)^\dagger = \sum_m |m\rangle f_m \langle m| = \hat{F},$$

так как использование введенных правил эрмитова сопряжения кет- и бра-векторов и вещественность собственного значения наблюдаемой величины дает

$$(|m\rangle \dots)^\dagger = (\dots)^\dagger \langle m|, \quad (\dots \langle m|)^\dagger = |m\rangle (\dots)^\dagger, \quad (\dots f_m \dots')^\dagger = (\dots')^\dagger f_m^* (\dots)^\dagger = (\dots')^\dagger f_m (\dots)^\dagger,$$

Для доказательства справедливости записи наблюдаемой величины в терминах суммы тензорных произведений кет- и бра-векторов достаточно убедиться в том, что на любом базисном квантовом состоянии гильбертова пространства верно уравнение на собственные значения, которое определяло сам оператор наблюдаемой:

$$\hat{F}|n\rangle = \sum_m |m\rangle f_m \langle m|n\rangle = \sum_m |m\rangle f_m \delta_{mn} = f_n |n\rangle.$$

Итак, по построению оператора наблюдаемой величины этот оператор является эрмитово самосопряженным, и он представим в виде суммы тензорных произведений кет- и бра-векторов (V.1.15), т.е. диагональной матрицы с собственными значениями наблюдаемой на диагонали.

Заметим, что собственные состояния наблюдаемой с разными собственными значениями ортогональны, так как запись оператора наблюдаемой в терминах кет- и бра-состояний дает

$$\hat{F}|n\rangle = f_n |n\rangle, \quad \langle n'|\hat{F} = \langle n'|f_{n'} \Rightarrow \langle n'|\hat{F}|n\rangle = f_n \langle n'|n\rangle, \quad \langle n'|\hat{F}|n\rangle = \langle n'|n\rangle f_{n'},$$

и при $f_n \neq f_{n'}$ равенство возможно, только если

$$\langle n'|n\rangle = 0.$$

Это замечание элементарно, но оно позволяет убедиться в том, что сделанные нами ранее обозначения базисных состояний как столбцов верно, если считать, что все базисные состояния относятся к собственным состояниям некоторого набора наблюдаемых так, что каждое из базисных состояний обладает уникальным набором собственных значений. Такой набор наблюдаемых называется полным: набор собственных значений полного набора наблюдаемых взаимнооднозначно определяет базисное квантовое состояние. Но вопрос об условиях существования совместных собственных состояний для двух наблюдаемых необходимо рассмотреть более детально.

1.3 Коммутатор и совместный базис собственных состояний наблюдаемых

Физическая система может характеризоваться не одной, а несколькими наблюдаемыми величинами и их собственными значениями. При этом действие оператора наблюдаемой на суперпозицию базисных квантовых состояний переводит ее в суперпозицию базисных квантовых состояний с теми же коэффициентами

$$\hat{F}|\Psi\rangle = \hat{F}\left(\sum_n c_n |n\rangle\right) = \sum_n c_n \hat{F}|n\rangle,$$

если исходить из требования, что операторы физических величин сохраняют основное свойство пространства квантовых состояний — свойство суперпозиции. Это значит, что операторы наблюдаемых величин — это линейные операторы: порядок действия линейного оператора на состояние и умножение состояния на число можно поменять местами,

$$\hat{F}c = c\hat{F}.$$

Другими словами, введем коммутатор двух операторов

$$[\hat{F}, \hat{G}] \stackrel{\text{def}}{=} \hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F}. \quad (\text{V.1.16})$$

Тогда можно сказать, что коммутатор линейного оператора \hat{F} с оператором, который задается умножением состояния на число c , равен нулю.

Пусть теперь система характеризуется двумя динамическими (отличными от чисел) наблюдаемыми $\hat{F} = \hat{F}^\dagger$ и $\hat{G} = \hat{G}^\dagger$, которые имеют совместный базис:

$$\hat{F}|n\rangle = f_n |n\rangle, \quad \hat{G}|n\rangle = g_n |n\rangle. \quad (\text{V.1.17})$$

Тогда последовательное действие этих операторов на базисные собственные состояния не зависит от порядка действия операторов

$$\begin{aligned} \hat{G}(\hat{F}|n\rangle) &= \hat{G}(f_n |n\rangle) = f_n \hat{G}|n\rangle = f_n g_n |n\rangle, \\ \hat{F}(\hat{G}|n\rangle) &= \hat{F}(g_n |n\rangle) = g_n \hat{F}|n\rangle = g_n f_n |n\rangle. \end{aligned}$$

Но это значит, что на любом базисном квантовом состоянии коммутатор этих наблюдаемых равен нулю:

$$[\hat{F}, \hat{G}] = 0.$$

В итоге, для того, чтобы у двух наблюдаемых физической системы существовал совместный базис собственных состояний необходимо, чтобы операторы этих наблюдаемых коммутировали.

Верно и обратное, если наблюдаемые коммутируют, что базис квантовых состояний может быть построен из совместных собственных состояний этих наблюдаемых. Докажем это утверждение.

Сначала построим собственные состояния наблюдаемой \hat{F}

$$\hat{F}|n\rangle = f_n|n\rangle$$

и рассмотрим свойства состояния, которое получается действием оператора наблюдаемой \hat{G} на собственные состояния оператора \hat{F} ,

$$|\phi_n\rangle \equiv \hat{G}|n\rangle,$$

а именно, найдем, какими собственными значениями оператора \hat{F} может обладать состояние $|\phi_n\rangle$. Для этого подействуем на состояние $|\phi_n\rangle$ оператором \hat{F} и учтем, что по условию задачи операторы \hat{F} и \hat{G} коммутируют:

$$\hat{F}|\phi_n\rangle = \hat{F}\hat{G}|n\rangle = \hat{G}\hat{F}|n\rangle = \hat{G}f_n|n\rangle = f_n\hat{G}|n\rangle = f_n|\phi_n\rangle.$$

Поэтому заключаем, что, если наблюдаемые \hat{F} и \hat{G} коммутируют, то действие наблюдаемой \hat{G} на собственное состояние наблюдаемой \hat{F} не изменяет собственное значение наблюдаемой \hat{F} .

Возможны два случая. В первом случае собственное значение f_n имеет единственное собственное состояние $|n\rangle$. Тогда состояние $|\phi_n\rangle$ с тем же собственным состоянием пропорционально состоянию $|n\rangle$, так как $|\phi_n\rangle$ имеет то же собственное значение наблюдаемой \hat{F} , а значит,

$$|\phi_n\rangle = g_n|n\rangle \Rightarrow \hat{G}|n\rangle = g_n|n\rangle,$$

где коэффициент пропорциональности g_n оказывается собственным значением эрмитово самосопряженного оператора \hat{G} , т.е. g_n обязан быть вещественным числом. В итоге, в первом случае, когда собственное значение имеет единственное собственное состояние, собственное состояние наблюдаемой \hat{F} является собственным и для наблюдаемой \hat{G} , которая коммутирует с наблюдаемой \hat{F} .

Во втором случае, который называют вырожденным, уравнение на собственное значение f_n наблюдаемой \hat{F} имеет решение для собственных состояний, образующих подпространство квантовых состояний размерности K , которая называется кратностью вырождения собственного значения f_n ,

$$\hat{F}|n, a\rangle = f_n|n, a\rangle, \quad a \in \{\overline{1, K}\}.$$

Будем считать, что состояния $|n, a\rangle$ являются ортонормированными, т.е. эти состояния являются собственными для каких-то наблюдаемых, которые, следовательно коммутируют с величиной \hat{F} , и эти собственные состояния обладают уникальным набором собственных значений, и в этот набор входит собственное значение f_n .

Тогда состояние $|\phi_n\rangle$, которое обладает собственным значением f_n величины \hat{F} , принадлежит подпространству собственных состояний с этим собственным значением,

$$|\phi_n\rangle = \hat{G}|n, a\rangle = \sum_{b=1}^K c_{ab}|n, b\rangle.$$

Здесь c_{ab} — это элемент квадратной матрицы $K \times K$. Покажем, что эта матрица эрмитово самосопряженная, т.е. композиция транспонирования и комплексного сопряжения дает тот же матричный элемент,

$$c_{ba}^* = c_{ab}.$$

Для этого вычислим

$$\langle n, b' | \phi_n \rangle = \langle n, b' | (\hat{G}|n, a\rangle) = \langle n, b' | \left(\sum_{b=1}^K c_{ab}|n, b\rangle \right) = \sum_{b=1}^K c_{ab} \langle n, b' | n, b \rangle = \sum_{b=1}^K c_{ab} \delta_{b'b} = c_{ab},$$

где мы использовали условие ортонормируемости базиса в подпространстве. Затем учтем, что оператор наблюдаемой эрмитово самосопряжен, а значит, в базисе своих собственных состояний

$$\begin{aligned} \langle n, b' | (\hat{G}|n, a\rangle) &= \langle n, b' | \left(\sum_{\mu} |\mu\rangle g_{\mu} \langle \mu | n, a \rangle \right) = \sum_{\mu} \langle n, b' | \mu \rangle g_{\mu} \langle \mu | n, a \rangle = \\ &= \left(\sum_{\mu} \langle n, b' | \mu \rangle g_{\mu} \langle \mu | \right) |n, a\rangle = \left(\sum_{\mu} |\mu\rangle g_{\mu} \langle \mu | n, b' \rangle \right)^{\dagger} |n, a\rangle = (\hat{G}|n, b'\rangle)^{\dagger} |n, a\rangle. \end{aligned} \quad (\text{V.1.18})$$

Эта формула устанавливает, что при вычислении матричных элементов эрмитово самосопряженного оператора действие этого оператора на кет-состояние эквивалентно действию оператора на бра-состояние в матричном элементе:

$$\langle \Phi | (\hat{G}|\Psi\rangle) = (\hat{G}|\Phi\rangle)^{\dagger} |\Psi\rangle, \quad (\text{V.1.19})$$

так что, если ввести обозначение $\hat{G}|\Psi\rangle \equiv |G\Psi\rangle$, то с учетом эрмитова сопряжения предыдущая формула примет вид

$$\langle \Phi | G\Psi \rangle = \langle G\Phi | \Psi \rangle = (\langle \Psi | G\Phi \rangle)^{\dagger} = \langle \Psi | G\Phi \rangle^*. \quad (\text{V.1.20})$$

В исследуемом случае теперь запишем

$$\begin{aligned} \langle n, b' | \phi_n \rangle &= \langle n, b' | (\hat{G}|n, a\rangle) = (\hat{G}|n, b'\rangle)^{\dagger} |n, a\rangle = \left(\sum_{a'=1}^K c_{b'a'} |n, a'\rangle \right)^{\dagger} |n, a\rangle = \\ &= \sum_{a'=1}^K c_{b'a'}^* \langle n, a' | n, a \rangle = \sum_{a'=1}^K c_{b'a'}^* \delta_{a'a} = c_{b'a}^*. \end{aligned}$$

Следовательно, квадратная матрица \hat{C} , которая действует в подпространстве собственных состояний с собственным значением f_n наблюдаемой \hat{F} и составлена из элементов c_{ab} , является эрмитово самосопряженной. Это значит, что от исходного базиса в K -мерном подпространстве $|n, a\rangle$ можно перейти к базису собственных векторов $|\nu_n\rangle$ матрицы \hat{C} , в котором эта матрица диагональна, и тогда

$$\hat{C}|\nu_n\rangle = g_{\nu}|\nu_n\rangle, \quad g_{\nu} \in \mathbb{R}.$$

В итоге, после замены базиса в подпространстве собственных состояний с собственным значением f_n наблюдаемой \hat{F} найдем, что в этом базисе

$$\hat{G}|\nu_n\rangle = g_{\nu}|\nu_n\rangle, \quad \hat{F}|\nu_n\rangle = f_n|\nu_n\rangle.$$

Итак, если две наблюдаемых коммутируют, то можно построить базис их совместных собственных состояний: система уравнений на собственные значения коммутирующих наблюдаемых совместна, она имеет решения, отличные от пустого множества.

Теперь можно описать построение полного набора наблюдаемых физической системы. Наблюдаемые в полном наборе попарно коммутируют. Если собственные значения некоторой наблюдаемой, которая может быть включена в полный набор, являются функцией собственных значений других наблюдаемых, то считают, что эта наблюдаемая не может пополнить набор наблюдаемых. Если базис собственных состояний обладает уникальным набором собственных значений, т.е. у каждого набора собственных значений есть только единственное собственное состояние, то набор наблюдаемых полон.

1.4 Среднее значение, дисперсия и критерий вырождения

Если нормированное на единицу состояние является собственным для наблюдаемой, то среднее значение этой наблюдаемой равно собственному значению, а среднеквадратичное отклонение от среднего, т.е. дисперсия равна нулю,

$$\hat{F}|n\rangle = f_n|n\rangle \Rightarrow \langle F \rangle = \langle n | \hat{F} | n \rangle = f_n, \quad (\Delta F)^2 \stackrel{\text{def}}{=} \langle n | (\hat{F} - \langle F \rangle)^2 | n \rangle = 0.$$

Такое определение среднего значения естественно, так как для произвольного квантового состояния, нормированного на единицу,

$$\langle \Psi | \hat{F} | \Psi \rangle = \sum_{n,n'} c_n^* c_{n'} \langle n' | \hat{F} | n \rangle = \sum_{n,n'} c_n^* c_n f_n \langle n' | n \rangle = \sum_{n,n'} c_n^* c_n f_n \delta_{n'n} = \sum_n w_n f_n = \langle F \rangle,$$

поскольку

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \sum_{n,n'} c_{n'}^* c_n \delta_{n'n} = \sum_n w_n = 1,$$

так что $w_n = |c_n|^2$ — это вероятность базисного квантового состояния $|n\rangle$ с собственным значением f_n в квантовом состоянии $|\Psi\rangle$, которое является нормированной на единицу суперпозицией базисных квантовых состояний с амплитудами вероятности c_n .

Обратное утверждение: если дисперсия равна нулю, то состояние является собственным, — тоже верно. В самом деле, составим состояние

$$|\phi\rangle = (\hat{F} - \langle F \rangle)|\psi\rangle.$$

Норма этого состояния совпадает с дисперсией наблюдаемой в состоянии $|\psi\rangle$

$$\langle \phi | \phi \rangle = \langle \psi | (\hat{F} - \langle F \rangle)^\dagger (\hat{F} - \langle F \rangle) | \psi \rangle = (\Delta F)^2 = 0,$$

но норма обращается в нуль, только если само состояние нулевое:

$$(\hat{F} - \langle F \rangle)|\psi\rangle = 0,$$

т.е. состояние является решением уравнения на собственный значения, оно собственное.

В итоге, значение наблюдаемой в собственном состоянии является точным, его дисперсия равна нулю, и если дисперсия равна нулю, то значение наблюдаемой точное и оно задается собственным значением наблюдаемой.

Пусть теперь наблюдаемые \hat{H} и \hat{F} входят в полный набор наблюдаемых физической системы, т.е. базис собственных состояний — это $|h, f, a\rangle$, где a обозначает собственные значения других наблюдаемых из полного набора, а

$$\hat{H}|h, f, a\rangle = h|h, f, a\rangle, \quad \hat{F}|h, f, a\rangle = f|h, f, a\rangle.$$

Если наблюдаемая \hat{G} коммутирует с \hat{H} , но не коммутирует с \hat{F} , то, во-первых, состояние $\hat{G}|h, f, a\rangle$ является собственным для \hat{H} с тем же собственным значением,

$$\hat{H}\hat{G}|h, f, a\rangle = \hat{G}\hat{H}|h, f, a\rangle = h\hat{G}|h, f, a\rangle,$$

а во-вторых, если предположить, что это состояние является собственным и для \hat{F} с тем же собственным значением, то

$$\hat{F}\hat{G}|h, f, a\rangle = f\hat{G}|h, f, a\rangle = \hat{G}\hat{F}|h, f, a\rangle,$$

а это значит, что коммутатор на базисном состоянии обращается в нуль,

$$[\hat{F}, \hat{G}]|h, f, a\rangle = 0,$$

что противоречит условию, что этот коммутатор отличен от нуля на всех квантовых состояниях. Поэтому заключаем, что действие наблюдаемой \hat{G} на собственное базисное состояние должно включать в себя суперпозицию состояний с тем же собственным значением h , но с разными собственными значениями наблюдаемой \hat{F} :

$$\hat{G}|h, f, a\rangle = c'|h, f, a'\rangle + \sum_{f'} c_{f'}|h, f', a'\rangle.$$

Здесь коэффициент c' может быть равен нулю, но хотя бы один из коэффициентов $c_{f'}$ должен быть отличен от нуля, так как в противном случае состояние $\hat{G}|h, f, a\rangle$ может быть равно нулю и мы опять получим состояние, на котором коммутатор \hat{F} и \hat{G} обращается в нуль. Итак, чтобы исключить противоречия с условиями задачи, необходимо, чтобы имело место вырождение собственного значения наблюдаемой \hat{H} по собственным значениям наблюдаемой \hat{F} : собственному значению величины \hat{H} отвечают несколько собственных состояний, которые отличаются собственными значениями величины \hat{F} . Поэтому говорят, что имеет место критерий вырождения: если наблюдаемая \hat{H} коммутирует с наблюдаемыми \hat{F} и \hat{G} , но наблюдаемые \hat{F} и \hat{G} не коммутируют, то собственные состояния наблюдаемой \hat{H} с собственным значением h имеют несколько собственных значений наблюдаемой \hat{F} .

1.5 Каноническое квантование

Для определения значения коммутаторов наблюдаемых величин вводят правило канонического квантования: для гамильтоновой системы без связей: коммутатор наблюдаемых величин равен скобе Пуассона этих величин, умноженной на $i\hbar$,

$$[\hat{F}, \hat{G}] \stackrel{\text{def}}{=} i\hbar \widehat{\{F, G\}}_P, \quad (\text{V.1.21})$$

где шляпка над скобкой Пуассона означает, что скобка Пуассона сама может быть не просто числом, а динамической переменной на фазовом пространстве гамильтоновой системы, так что эта динамическая переменная также должна трактоваться как оператор в пространстве квантовых состояний.

Правило канонического квантования для гамильтоновых систем установлено Дираком, поскольку в силу уравнений Гамильтона–Якоби в фейнмановской формулировке механики для амплитуды вероятности траекторий оператор импульса действует как

$$\hat{p} e^{\frac{i}{\hbar} S(t, x)} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} e^{\frac{i}{\hbar} S(t, x)} = \frac{\partial S}{\partial x} e^{\frac{i}{\hbar} S(t, x)} = p(t) e^{\frac{i}{\hbar} S(t, x)},$$

а коммутатор координаты и импульса равен

$$[x, \hat{p}] e^{\frac{i}{\hbar} S(t, x)} = x \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) e^{\frac{i}{\hbar} S(t, x)} - \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(x e^{\frac{i}{\hbar} S(t, x)} \right) = (xp - xp + i\hbar) e^{\frac{i}{\hbar} S(t, x)} = i\hbar e^{\frac{i}{\hbar} S(t, x)},$$

что верно и для любой суммы по траекториям, так что

$$[x, \hat{p}] = i\hbar, \quad (\text{V.1.22})$$

а скобка Пуассона канонически сопряженных координаты и импульса равна единице, так что правило канонического квантования для гамильтоновых систем без связей является прямым следствием введения амплитуды вероятности траектории.

В курсах квантовой механики доказывается соотношение неопределенностей для двух наблюдаемых, коммутатор которых отличен от нуля,

$$\Delta F, \Delta G \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle|. \quad (\text{V.1.23})$$

В случае неопределенности координата–импульс эта формула дает

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Соотношения неопределенностей мы приводим здесь лишь для полноты общей квантовой картины, а поскольку при каноническом квантовании коммутатор выражается через классическую скобу Пуассона, в правой части соотношений неопределенностей всегда присутствует постоянная Планка с чертой, конечное значение которой задает пределы применимости классической механики, где полагают, что все наблюдаемые величины системы могут быть известны с абсолютной точностью.

Наконец, приведем общее определение эрмитово сопряженного линейного оператора \hat{A}^\dagger , которое согласуется с матричным определением эрмитова сопряжения как композиции транспонирования и комплексного сопряжения:

$$(\hat{A}^\dagger)_{nm} = \langle n | (\hat{A}^\dagger | m \rangle) = \langle n | A^\dagger m \rangle \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{A} | n \rangle)^\dagger | m \rangle = \langle A n | m \rangle = (\langle m | A n \rangle)^\dagger = (A_{mn})^*. \quad (\text{V.1.24})$$

С этим определением связано и условие, задающее унитарный линейный оператор \hat{U} ,

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = \mathbb{1}. \quad (\text{V.1.25})$$

Унитарные линейные операторы переводят ортонормированный базис в ортонормированный базис, а значит, в силу линейности сохраняют нормировку не только базисного, но и любого квантового состояния.

Постулаты квантовой механики и принципиальные результаты приводятся в учебниках по квантовой механике, например, в [10].

Предметный указатель

- автоморфизм
 - внутренний, 8
- алгебра
 - $\mathfrak{su}(2)$, 65
 - $\mathfrak{su}(3)$, 67
 - Ли, 15
 - простая, компактная, 62
 - абелева, 90
 - ассоциативная, 16
 - нильпотентная, 22, 90
 - разрешимая, 90
 - амплитуда вероятности, 6, 150, 171, 178
 - антисимметрия
 - скобки Ли, 14
 - антитриплет
 - $SU(3)$, 107, 111, 132
 - античастица, 100, 107
 - ассоциативность, 6, 14
 - базис, 5, 17, 19, 29
 - Картана–Вейля, 45
 - квантовых состояний, 174, 178
 - совместный, 177
 - неприводимого представления, 76, 77
 - ортонормированный, 5, 31, 174
 - полнота, 174
 - собственных векторов, 177
 - собственных состояний
 - — совместный, 175
 - счетный, 172
 - барион, 105
 - барионное число, 98, 146
 - бозоны
 - калибровочные, 144
 - вектор, 11
 - Рунге–Ленца–Лапласа, 148
 - бра-, 36, 37, 43, 173, 174
 - весовой, 30, 41, 78, 87
 - кет-, 36, 37, 42, 43, 99, 173, 174
 - корневого луча, 56
 - корневой, 34, 42, 80
 - — $SU(3)$, 72
 - положительный, 67
 - собственный, 15, 29, 37, 177
 - старшего веса, 80, 87
 - старший, 15
 - фундаментальный, 80, 102
 - вероятность, 171, 178
 - распределение, 171, 172
 - вес
 - отрицательный, 31
 - положительный, 31
 - старший, 31
 - взаимодействие, 143, 171
 - сильное, 101, 105
 - слабое, 100
 - электрослабое, 144
 - вырождение, 176, 178
 - кратность, 176
 - гармонический осциллятор, 155
 - $SU(3)$
 - — неприводимое представление, 159
 - вакуум, 159
 - спектр, 159
 - тензор Фрадкина, 157
 - генератор, 15, 16, 23, 46
 - базиса Шевалле, 54
 - канонического преобразования, 150
 - лестничный, 36, 40, 72, 79, 87
 - поворотов
 - — тензор, 101, 152
 - повышающий
 - — $SU(2)$, 95
 - подалгебры Картана, 40
 - эрмитово самосопряженный, 19
 - гиперзаряд, 98, 101, 107
 - слабый, 100
 - гиперон, 126, 169
 - глюон, 145
 - гомоморфизм, 8
 - гомотопический класс, 47
 - гомотопия, 47
 - группа, 5
 - $SO(4)$, 101, 152
 - $SO(N)$, 18, 62
 - $Sp(N)$, 63
 - $SU(3)$
 - — d -симовл, 113
 - — осциллятор 3D, 155
 - — цвет, 128
 - $SU(N)$, 18, 62
 - $SU(n)$, 114
 - Пуанкаре, 101
 - абелева, 6
 - исключительная, 62
 - компактная, 20, 62
 - непрерывная, 5
 - особая, 62, 90
 - отражений Вейля, 86, 88, 105, 138
 - поворотов, 5
 - полуправильная, 9
 - простая, 9, 62
 - универсальная обертывающая, 16
 - групповая композиция, 6
 - действие, 171
 - декуплет
 - $SU(3)$, 121
 - $SU(5)$, 146
 - диаграмма
 - Дынкина, 54, 89
 - — связная, 55, 61
 - весовая, 114
 - дикварк, 128
 - дисперсия, 177
 - дублет, 105
 - — $SU(2)$, 162
 - — сопряженный, 101
 - заряд, 97, 100, 107, 145, 169
 - идеал, 21, 90
 - иерархия пороговых энергий, 146
 - изоморфизм, 9

- изоспин, 70, 73, 97, 107, 115, 125, 145
 — базис, 99
 — слабый, 99
 инвариант, 5, 10
 — Казимира, 32, 75
 инвариантность
 — изотопическая, 96, 105
 индекс
 — Дынкина, 28, 143
 — ковариантный, 11
 — контравариантный, 11
 — немой, 43
 интеграл
 — по траекториям, 172
 — фейнмановский, 172
 интерференция, 172
- калибровочная теория, 101, 144
 — великое объединение, 145
 — электроослабая, 101
 квант, 171
 квантование
 — каноническое, 179
 квантовая хромодинамика, 145
 квантовое число, 32, 75, 144, 173
 кварк, 97
 — аромат, 98, 105
 — спин, 168
 — странный, 98, 105
 — цвет, 127, 145
 кварковая модель, 162
 коммутатор, 16, 150, 175, 179
 — генераторов, 16, 66
 — — $\mathfrak{su}(3)$, 69
 комплексное сопряжение, 174
 компонента связности, 55
 конфайнмент, 99
 конформный фактор, 22, 67
 координатная сетка, 6, 10
 корень
 — алгебры Ли, 35
 — отрицательный, 36
 — положительный, 35
 — простой, 35, 45, 47, 87
 — старший, 87
 корневое дополнение, 36, 90
 — $\mathfrak{su}(3)$, 68
 коцикл, 47
 коэффициенты Клебша–Гордона, 163
 кратность вырождения, 87, 105
 — атом водорода, 154
 — весов представления $SU(3)$, 120
 критерий
 — Картана, 20, 90
 — вырождения, 178
- лептон, 99
 лептонное число, 100
 линейная оболочка, 45
- магнетон, 169
 магнитный момент, 168
 матрица Картана, 52, 54
 матрицы
 — Гелл-Манна, 108, 110, 126, 156
 — — тождество Фирца, 113
 — Паули, 94
 мезон, 105
- метрика
 — Киллинга, 19, 20, 23, 33, 38, 43, 44, 70, 91
 — — $\mathfrak{su}(2)$, 66
 — — $SU(N)$, 70
 — евклидова, 6, 15, 22, 23, 101
 — конформно евклидова, 22, 44
 — конформно плоская, 70
 механика
 — фейнмановская формулировка, 171, 179
 многообразие, 5
 — атлас, 6
 — карта, 6
 момент количества движения, 65
 мультиплет, 5, 96, 105
- наблюдаемая величина, 5, 171, 173
 оператор, 173
 — полный набор, 15, 25, 29, 31–34, 42, 43, 65, 75, 76, 87,
 94, 102, 116, 122, 127, 144, 152, 166, 175, 178
 нейтрон, 96
 норма, 172
 — нулевая, 178
 нуклон, 96
- октет
 — $SU(3)$, 121
 оператор, 5, 15, 172
 — Казимира, 25, 78
 — — высшей степени, 26
 — — квадратичный, 25, 66, 76
 — — кубический $SU(3)$, 113
 — — подгруппы, 116
 — импульса, 172, 179
 — линейный, 175
 — наблюдаемой величины, 173, 174
 — неприводимый тензорный, 166
 — повышающий, 81
 — понижающий, 79, 81
 — эрмитово самосопряженный, 5, 15, 23, 65, 90, 174
 — эрмитово сопряженный, 179
 операция
 — бинарная, 7
 отражение Вейля, 82, 85, 103
 — группа, 86, 88, 105
 — — $SU(N)$, 138
- параллельный перенос, 10, 11
 параметр
 — преобразования, 5
 пентакварк, 105
 подалгебра
 — Картана, 29, 126, 144
 подгруппа
 — абелева, 20
 — инвариантная, 9, 20
 — нормальная, 9
 поле
 — векторное, 9
 — локальное, 171
 — скалярное, 10
 последовательность корней, 50
 постоянная
 — Планка, 171, 179
 — тонкой структуры, 154
 правила отбора, 167
 представление алгебры, 16
 — присоединенное, 17, 23
 представление группы, 6, 15

- неприводимое, 27, 32, 66, 75, 85, 87, 90, 105
- $SU(2)$, 94
- $SU(3)$, 114, 121
- базис, 114
- тензорное произведение, 136
- присоединенное, 16, 36
- $SU(3)$, 124
- $SU(N)$, 143
- точное, 15
- фундаментальное, 81, 129, 144
- $SU(2)$, 92
- $SU(3)$, 102
- $SU(5)$, 140, 145
- $SU(N)$, 114
- экспоненциальное, 47
- преобразование
 - групповое, 9
 - лестничное, 36
 - линейное, 13, 16, 36
- принцип
 - Гюйгенса, 172
 - запрета Паули, 126
- проектор, 174
- производная
 - Ли, 12
 - по направлению, 7, 10, 15
 - частная, 10
- пространство
 - векторное, 5, 173
 - гильбертово, 6, 15, 172
 - евклидово, 6
 - касательное, 9, 13, 15, 42
 - представления, 42
 - присоединенного представления, 20, 88
- протон, 96, 168
- разложение Фиттинга, 22, 90
- размерность
 - группы, 7
 - присоединенного представления, 18
 - пространства, 16
 - пространства представления, 31
- разрешимость алгебры, 22
- ранг
 - группы $SU(2)$, 92
 - группы Ли, 29, 42, 45, 47
- распад протона, 146
- симметрия, 5
 - ароматов, 105, 122
 - мультиплет, 122
 - иерархия масштабов, 145
 - остаточная, 146
 - спектров, 96, 106
- синглет, 127
- скаляр, 10
- скалярное произведение, 19, 174
- скобка
 - Ли, 12
 - Пуассона, 150, 179
- след
 - генератора, 15, 23–25, 27, 33, 39, 91
 - матрицы, 19, 20, 24, 33, 42, 112, 113, 140
 - произведения генераторов, 28, 33, 91, 112
 - тензора, 134, 157, 158
- сложение моментов, 163
- собственное значение, 5, 24, 29, 90, 173, 175
- событие
- вероятностное, 172
- соотношение
 - неопределеностей, 179
- сопряжение
 - CP, 101
- состояние
 - базисное, 173
 - квантовое, 5, 15, 30, 143, 172, 173
 - составное, 144
 - нулевое, 178
 - представления, 30
 - собственное, 5, 90, 173, 175–177
 - старшего веса, 76, 78, 103, 114, 129
 - $SU(3)$, 133
 - $SU(N)$, 143
- спектр атома водорода, 154
- спин, 5
- среднее значение, 177
- страннысть, 98, 106, 169
- структурные константы, 5, 12, 14–19, 21–24, 26, 29, 34, 35, 40, 54, 66, 69, 70, 73, 74
- $SU(3)$, 70, 74, 110
- группы поворотов, 22
- суперпозиция, 5, 172
 - амплитуд вероятности, 172
 - квантовых состояний, 173, 178
- схема Юнга, 129, 132
- $SU(2)$, 162
- крюк, 135
- тензорное произведение, 136
- тангенциальный подход, 10, 13
- тензор поворотов, 101
- теорема Вигнера–Эккарта, 167
- тетракварк, 105
- тождество Якоби, 14, 16
- ток, 143
 - $SU(5)$, 145
 - заряженный, 143
 - нейтральный, 144
- траектория, 171
 - экстремальная, 171
- транспонирование, 174
- триплет
 - $SU(2)$, 163
 - $SU(3)$, 107, 111
 - пи-мезонов, 98, 125
- уравнение
 - Шрёдингера, 172
 - на собственное значение, 173
- уравнения
 - Гамильтона–Якоби, 172, 179
 - условие Хаусдорфа, 7
- фермион, 100, 126
 - левый, 100
 - правый, 100
- флуктуация
 - квантовая, 172
- центр алгебры, 26
 - образующие, 26
- цикл, 47
- частица, 171
 - нерелятивистская, 171
- эволюция

- интервал, 172
 - элемент
 - единичный, 6
 - обратный, 6, 13
 - эрмитово сопряжение, 19, 37, 174, 175, 177, 179
 - матриц, 176
- ядро гомоморфизма, 9

Литература

- [1] В.В. Киселев. «Нерелятивистская механика частиц и полей: векторный анализ и симметрии» — М.: МЦНМО, 20XX.
- [2] Дж. Эллиот, П. Добер. «Симметрия в физике» Т. 1, 2 — М.: Мир, 1983.
- [3] М.И. Петрашень, Е.Д. Трифонов. «Применение теории групп в квантовой механике» — М.: Эдиториал УРСС, 2000.
- [4] В.И. Арнольд. «Математические методы классической механики» УРСС: Москва, 2003.
- [5] Б.Л. ван дер Варден. «Алгебра» — М.: Наука 1979.
- [6] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. «Современная геометрия» — М.: Наука 1986.
- [7] Ф. Уорнер. «Основы гладких многообразий и групп Ли» — М.: Мир, 1987.
- [8] А.П. Исаев, В.А. Рубаков. «Теория групп и симметрий. Книга 1: Конечные группы. Группы и алгебры Ли.» — М.: URSS-Красанд, 2018;
А.П. Исаев, В.А. Рубаков. «Теория групп и симметрий. Книга 2: Представления групп и алгебр Ли. Приложения.» — М.: URSS-Красанд, 2020.
- [9] С.П. Новиков, И.А. Тайманов. «Современные геометрические структуры и поля» — М.: МЦНМО, 2014.
- [10] В.В. Киселев. «Квантовая механика. Курс лекций» — М.: МЦНМО, 2009.
- [11] П.А.М. Дирак. “Принципы квантовой механики.” — М.: Наука, 1979.
- [12] P. A. Zyla *et al.* [Particle Data Group], “Review of Particle Physics,” PTEP **2020** (2020) no.8, 083C01
doi:10.1093/ptep/ptaa104