$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^3}$$

$$\Phi(s, \alpha, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+\alpha)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_0^{\infty} \frac{t^{s-1} e^{(1-\alpha)t}}{e^t - z}\, dt$$

$$S = \frac{1}{8} \Phi(3, \frac{1}{2}, -1) = \frac{1}{16} \int\limits_0^{\infty} \frac{t^2 e^{\frac{t}{2}}}{e^t + 1}\, dt = \frac{1}{32} \int\limits_0^{\infty} \frac{2t^2}{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}}\, dt =$$

$$= \frac{8}{32} \int\limits_0^{\infty} \frac{(\frac{t}{2})^2}{\cosh \frac{t}{2}}\, d\Big(\frac{t}{2}\Big) = \frac{1}{4} \int\limits_0^{\infty} \frac{u^2}{\cosh u}\, du = \frac{1}{8} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2}{\cosh u}\, du = \frac{1}{8} I$$

Пусть C - верхняя полуокружность с радиусом R. Тогда

$$I = \lim_{R\to\infty} \oint_C \frac{z^2}{\cosh z} dz$$

Особые точки: $i(\frac{\pi}{2} + \pi k), k \in \mathbb{Z}$

Это всё полюса I порядка.

$$\lim_{z\to i(\frac{\pi}{2}+\pi k)} \frac{z^2(z - i(\frac{\pi}{2} + \pi k))}{\cosh z} = \lim_{z\to 0} \frac{-(\frac{\pi}{2} + \pi k)^2 z}{0 + z \sinh i(\frac{\pi}{2} + \pi k)} = i\pi^2 \Big(\frac{1}{2} + k\Big)^2 (-1)^k$$

$$I = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} i\pi^2 \Big(\frac{1}{2} + n\Big)^2 (-1)^n = -\frac{\pi^3}{2} + 2\pi^3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \Big(\frac{1}{4} + n + n^2\Big) =$$

$$= -\frac{\pi^3}{2} + 2\pi^3 \Big(\frac{1}{4}\eta(0) + \eta(-1) + \eta(-2)\Big)$$

$$\eta(0) = \frac{1}{2}$$

$$\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$$

$$\eta(-1) = \frac{1}{4}$$

$$\eta(-2) = 0$$

$$I = -\frac{\pi^3}{2} + 2\pi^3(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 0) = \frac{\pi^3}{2}$$

$$S = \frac{1}{8} I = \frac{\pi^3}{32}$$