$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(n+1)(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!\,(2n)!!}{(n+1)(2n)!!(2n+1)!!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(1)_n}{(\frac{3}{2})_n}=$$

$$=\int\limits_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n(1)_n}{(\frac{3}{2})_n(1)_n}y^n\,dy=\int\limits_0^1 {}_2F_1(1,1;\frac{3}{2};y)\,dy$$

$${}_2F_1(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-1}\,dt$$

$$S=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})}\int\limits_0^1\int\limits_0^1(1-t)^{-\frac{1}{2}}(1-tz)^{-1}\,dt\,dz=\frac{1}{2}\int\limits_0^1(1-t)^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^1(1-tz)^{-1}\,dz\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1(1-t)^{-\frac{1}{2}}\left[-\frac{1}{t}\ln(\frac{1}{t}-z)\Bigg|_{z=0}^{z=1}\right]dt==-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{-1}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\ln(1-t)\,dt=-\frac{1}{2}I$$

$$I=\int\limits_0^1\frac{\ln(1-t)}{t\sqrt{1-t}}\,dt=\begin{bmatrix}\ln\sqrt{1-t}=u\\ t=1-e^{2u}\\ dt=-2e^{2u}du\end{bmatrix}=\int\limits_0^{-\infty}\frac{2u}{(1-e^{2u})e^u}(-2e^{2u}du)=$$

$$=4\int\limits_0^{-\infty}\frac{u}{e^u-e^{-u}}du=-2\int\limits_{-\infty}^0\frac{u}{\sinh u}du=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{u}{\sinh u}du$$

Пусть C - верхняя полуокружность с радиусом R. Тогда

$$I=\lim_{R\to\infty}\oint_C\frac{z}{\sinh z}dz$$

Особые точки: $i\pi k, k\in\mathbb{Z}$
Это всё полюса I порядка.

$$\lim_{u\to i\pi n}\frac{u(u-i\pi n)}{\sinh u}=\begin{bmatrix}u=i\pi n+x\\ x\to 0\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{i\pi n x}{x\cosh(i\pi n)}=i\pi n(-1)^n$$

$$I=-2i\pi\sum_{n=1}^{\infty}i\pi n(-1)^n=-2\pi^2\eta(-1)=-\frac{\pi^2}{2}$$

$$S=-\frac{1}{2}I=\frac{\pi^2}{4}$$