1 Zeta

Теперь рассмотрим аналогичную сумму, только будем повышать степень. Да, в последующих редах мы подобные суммы и будем рассматривать

$$\frac{4}{5}\sum_{0<m<n}\frac{1}{mn^3}$$

Вспомним некоторые определения

$$\int_0^1\frac{1-x^n}{1-x}dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 x^k dx=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=H_n;\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}=\zeta(x);\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^k}=\mathrm{Li}_k(x)$$

$$S=\frac{4}{5}\sum_{0<m<n}\frac{1}{mn^3}=\frac{4}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kn^3}=\frac{4}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3}=$$

$$=\frac{4}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\int_0^1\frac{1-x^n}{1-x}dx=\frac{4}{5}\int_0^1\frac{\zeta(3)-\mathrm{Li}_3(x)}{1-x}dx=$$

$$=\frac{4}{5}\left(\lim_{x\to 0}\left(\zeta(3)-\mathrm{Li}_3(x)\right)\ln(1-x)-\lim_{x\to 1}\left(\zeta(3)-\mathrm{Li}_3(x)\right)\ln(1-x)-\right.$$

$$\left.-\int_0^1\ln(1-x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{Li}_3(x)\right)dx\right)$$

$$S=-\frac{4}{5}\left(\lim_{x\to 1}\left(\zeta(3)-\mathrm{Li}_3(x)\right)\ln(1-x)+\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{Li}_2(x)dx\right)=$$

$$=-\frac{4}{5}\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{Li}_2(x)dx=\frac{4}{5}\int_0^1\mathrm{Li}_2(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{Li}_2(x)\right)dx=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2^2(1)=\frac{2}{5}\zeta^2(2)=\zeta(4)$$

Аналогично можно доказать и это представление

$$\frac{4}{5}\sum_{0<m<m<r}\frac{1}{mnr(r-m)}=\zeta(3)$$

$$\zeta(3)=8\sum_{0<m<n<r\leq 2n}\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}mnr}$$

2 Series

2.1 1

Доказать, что

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3+\ldots=\frac{\pi}{\Gamma^4\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$\text{LHS}=\frac{1}{\Gamma^3\left(\frac{1}{2}\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+n)n!}={}_3F_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2};1,1;1\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\mathcal{K}^2\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\frac{\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)}{4\pi^3}=\frac{\pi}{\Gamma^4\left(\frac{3}{4}\right)}$$

2.2 Ramanujan1

Подсказка была в самом начале поста, когда я говорил про эллиптические функции!

$$\mathcal{S}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2+\ldots$$

Задание заключается в том, чтобы посчитать сумму $\mathcal{S}$, которая написана выше. Давайте сделаем переход "вжух"

$$\mathcal{S}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2+\cdots=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$$

Какой-то резкий переход я сделал, не больно то очевидный, но сумму мы уже посчитали! Хорошо, давайте начнём с самого начала, именно с определения эллиптической функции:

$$\mathcal{K}(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$$

Представим в виде ряда, ведь задание у нас не интеграл найти!

$$\mathcal{K}(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left\{\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{1-k^2\sin^2 x\sin^2\psi}\right\}dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left\{\int_0^{\pi/2}\sum_{n=0}^{\infty}k^{2n}\sin^{2n}x\sin^{2n}\psi\right\}dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}k^{2n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\psi d\psi\int_0^{\pi/2}\sin^{2nx}dx=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2k^{2n}$$

Кто видел письма Рамануджана Харди или хотя бы знаком с некоторыми его работами, тот сразу понял бы: Рамануджан всегда раскладывал ряд на слагаемые!

$$\mathcal{K}(k)=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2k^6+\dots\right]$$

Какое совпадение! Оказывается, наше задание является частным случаем суммы, которую вы получили. Мы уже можем заметим, что для чередования знаков достаточно взять $k=i$

На этом моменте многие бы остановились... Стало непонятно, как всё же посчитать сумму? Думаю, некоторые из вас забыли с чего мы начинали!

$$\mathcal{S}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2+\dots=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

Теперь мы поняли, что за переход был такой "вжух"и смело можем в дальнейшем использовать инструмент "Очевидно"Осталось посчитать интеграл и получить результат! Пусть $\sin x=y$,а после $y^4=t$, тогда

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^1 t^{-3/4}(1-t)^{-1/2}dt=\frac{1}{2\pi}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$$

Уж определение Бета-функции мы знаем! Осталось Бета-функцию выразить через Гамму-функцию, а после посмотрим, можно ли дальше преобразовать. На всякий случай напишу и представление

$$\frac{1}{2\pi}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)};\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Я не стал выводить представление Бета-функцию через Гамму и дальнешие преобразования. Кажется, это всё выводится за раз, думаю, неплохое домашнее задание будет!

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\sin\pi n}\overset{n=1/4}{\Rightarrow}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\sqrt{2}\pi$$
$$\mathcal{S}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2+\dots=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}$$

2.3 Ramanujan1. Hometask

Вычислить сумму $\frac{\ln 2}{2}-\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}-\frac{\ln 5}{5}+\dots$ Это задание встречалось в одном из писем Рамануджана к Харди! Задание на подумать и не факт, что следует сразу применять эллиптические функции

2.4 Ramanujan2

Вычислить сумму

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\dots$$

Для начала преобразуем сумму в удобный вид

$$\begin{aligned} S=&\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^3\sum_{n=1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!(2n-2)!!}{(2n)!!(2n-2)!!}\right]^3 H_{2n}=\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}\right]^3 H_{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\Gamma(2n)}{2^{2n-1}\Gamma^2(n)}\right]^3 H_{2n}=\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}\right]^3 H_{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(1)_n}\right]^3 H_{2n}\\ \Gamma(2n)=&\frac{\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2^{1-2n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}, H_{2n}=\sum_{n=1}^{2n}\frac{1}{k}-\text{ гармонический ряд}\end{aligned}$$

Рассмотрим гипергеометрический ряд, в частности тождество Диксона

$$\begin{aligned}&{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c\\1+a-b,1+a-c\end{matrix}\;1\right]=\\ &=\frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b-c\right)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-c\right)\Gamma(1+a-b-c)}\end{aligned}$$

Гармоничный ряд можно представить как:

$$\begin{aligned}H_{2n}&=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k-1}=\\ &=\frac{1}{2}H_n+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1/2}=\frac{1}{2}H_n+\frac{1}{2}H_n\left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

В тождестве Диксона положим $a=b=1/2$, взяв производную по параметру $c=1/2$

$$\frac{\partial}{\partial c}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1/2, & 1/2, & c\\ & 1{,}3/2-c & ;1\end{matrix}\right]\Bigg|_{c=\frac{1}{2}}=\frac{\partial}{\partial c}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(1)_n}\right]^2\frac{(c)_n}{\left(\frac{3}{2}-c\right)_n}\right\}\Bigg|_{c=\frac{1}{2}}$$

Несложно заметить, что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)_n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = (x)_n H_n(x) = \left\{ \begin{array}{c} (1/2)_n H_n(1/2) \\ (1)_n H_n \end{array} \right.$$

Тогда

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(1)_n} \right]^3 2H_{2n}$$

Промежуточные вычисления:

$$\frac{1}{(x)_n}\frac{\mathrm{d}(x)_n}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x)_n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left\{\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)\right\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{n-1}\ln(x+k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x+k} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)_n = (x)_n H_n(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}H_n(x)\bigg|_{x=1} = n!H_n$$

Наша производная при $c = 1/2$ равна

$$\frac{\partial}{\partial c}{}_3F_2\left[\begin{array}{ccc} 1/2, & 1/2, & c \\ 1{,}3/2-c & ;1 & \end{array}\right]\Bigg|_{c=\frac{1}{2}} =$$

$$= {}_3F_2\left[\begin{array}{cc} 1/2{,}1/2{,}1/2 & \\ 1{,}1 & 1 \end{array}\right]\left[\frac{\partial}{\partial c}\left\{\ln\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-c\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-c\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}-c\right)\Gamma(1-c)}\right\}\right|_{c=\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{\Gamma^4\left(\frac{3}{4}\right)}\left\{-\psi\left(\frac{3}{2}-c\right) - \psi\left(\frac{3}{4}-c\right) + \psi\left(\frac{5}{4}-c\right) + \psi(1-c)\right\}\Bigg|_{c=\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{\Gamma^4\left(\frac{3}{4}\right)}\left\{\psi(1) - \psi\left(\frac{1}{4}\right) + \psi\left(\frac{3}{4}\right) + \psi(1)\right\} = \frac{\pi}{\Gamma^4\left(\frac{3}{4}\right)}(\pi - 2\ln 2)$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(1)_n}\right]^3 H_{2n} = \frac{\pi}{2\Gamma^4\left(\frac{3}{4}\right)}(\pi - 2\ln 2)$$

2.5 Ramanujan3

Вычислить сумму

$$5\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1+\frac{1}{2}\right) - 9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \ldots$$

С помощью некоторых преобразований:

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{\Gamma(2n)}{2^{2n-1}n\Gamma^2(n)} = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{(1/2)_n}{(1)_n}$$

$$4n+1 = \frac{(1+1/4)_n}{(1/4)_n} = \frac{(5/4)_n}{(1/4)_n} = \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{4}+n\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+n\right)} = 4n+1$$

Сумму можно представить как

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}(4n+1)\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^3 H_{2n}(-1)^{n-1} =$$
$$= -\sum_{n=1}^{\infty}(4n+1)(-1)^n\left[\frac{(1/2)_n}{(1)_n}\right]^3 H_{2n} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(1/2)_n}{(1)_n}\right]^3\frac{(5/4)_n}{(1/4)_n}H_{2n}$$

Теперь рассмотрим гипергеометрический ряд с параматром c : Теперь продифференцируем по параметру c :

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(1/2)_n}{(1)_n}\right]^3\frac{(5/4)_n}{(1/4)_n}(-1)^n\underbrace{\left\{H_n\left(\frac{1}{2}\right)+H_n(1)\right\}}_{2H_{2n}}$$

Где

$$H_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} = \frac{1}{2}H_n + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}H_n(1) + \frac{1}{2}H_n\left(\frac{1}{2}\right)$$

Также стоит доказать, что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)_n = (x)_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x)_n = (x)_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{n-1}\ln(x+k) =$$
$$= (x)_n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x+k} = (x)_n H_n(x)$$

Используя Тождество Уиппла: Применяю для нашего случая $a = b = 1/2$, мы получаем

$$2S = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-c\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(1-c)}\right\}\Bigg|_{c=\frac{1}{2}} =$$
$$= -\frac{2}{\pi}\left(-\psi(1)+\psi\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{2}{\pi}\ln 4 \Rightarrow S = \frac{2}{\pi}\ln 2$$

2.6 Ramanujan4

Вычислить сумму

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{9^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{13^2}+\dots$$

Преобразуем сумму в более удобный вид:

$$S=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!(4k+1)^2}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(2k+1)}{2^{2k-1}\cdot 2k\Gamma(k)\Gamma(k+1)}\frac{1}{(4k+1)^2}=$$

$$=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}\cdot 2k\ \mathrm{B}(k+1,k)(4k+1)^2}$$

$$(2k-1)!!=\frac{(2k-1)!}{2^{k-1}(k-1)!}=\frac{\Gamma(2k)}{2^{k-1}\Gamma(k)}=\frac{\Gamma(2k+1)}{2^{k-1}\cdot 2k\Gamma(2k)}$$

$$(2k)!!=2^k k!=2^k\Gamma(k+1)$$

Бета-функция имеет интгреальное предствление:

$$\frac{1}{2^{p+q-1}(p+q-1)\mathrm{B}(p,q)}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\cos\theta)^{p+q-2}\cos(p-q)\theta d\theta$$

Применяя данное представление к нашему случаю и подставляя $p=k+1,q=k,p+q-1=2k,p+q-2=2k-1$, мы получаем:

$$S=1+2\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^{2k}\theta}{(4k+1)^2}d\theta=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(\cos^2\theta\right)^k}{16\left(k+\frac{1}{4}\right)^2}d\theta=$$

$$=\textstyle\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\cos^2\theta\right)^k}{16\left(k+\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\Phi\left(\cos^2\theta,2,\frac{1}{4}\right)$$

$$\textstyle\Phi(z,s,a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+a)^s}-\ \text{Дзета-функция Лерха}$$

Мы так же воспользуемся интегральным представлением дзета функции Лерха:

$$\Phi(z,s,a)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{t^{s-1}e^{-at}}{1-ze^{-t}}dt,\Re(a)>0$$

Для нашего случая $z=\cos^2\theta,s=2,a=1/4$ мы получаем:

$$\Phi\left(\cos^2\theta,2,\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{\Gamma(2)}\int_0^{\infty}\frac{te^{-t/4}}{1-e^{-t}\cos^2\theta}dt$$

Следовательно сумма принимает вид:

$$S = \frac{1}{8\pi}\int_0^\infty dtte^{-t/4}\int_0^\infty \frac{d\theta}{1-e^{-t}\cos^2\theta} \overset{e^{-t}=\varepsilon}{=} \frac{1}{8\pi}dtte^{-t/4}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{1-\varepsilon\cos^2\theta} =$$
$$= \frac{1}{8\pi}\int_0^\infty dtte^{-t}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{(1-\varepsilon)\cos^2\theta+\sin^2\theta} =$$
$$= \frac{1}{8\pi}\int_0^\infty dtte^{-t}\int_0^\infty \frac{d\,\mathrm{tg}\,\theta}{(1-\varepsilon)+\mathrm{tg}^2\,\theta} = \frac{1}{8\pi}\int_0^\infty dt\frac{te^{-t/4}}{(1-\varepsilon)^{1/2}}\cdot\frac{\pi}{2} \overset{e^{-t}=x}{=}$$
$$= \frac{1}{16}\int_0^1 dx(-\ln x)(1-x)^{-1/2}x^{1/4-1} = -\frac{1}{16}\int_0^1 dx\ln x(1-x)^{q-1}x^{p-1}$$

Где $p = 1/4, q = 1/2$ и $\frac{\partial}{\partial p}x^{p-1} = x^{p-1}\ln x$. Тогда

$$S = -\frac{1}{16}\frac{\partial}{\partial p}\left\{\int_0^1 dxx^{p-1}(1-x)^{q-1}\right\}\Bigg|_{p=\frac{1}{4},q=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{16}\frac{\partial}{\partial p}\,\mathrm{B}(p,q)\Bigg|_{p=\frac{1}{4},q=\frac{1}{2}} =$$
$$= -\frac{1}{16}\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\right]\Bigg|_{p=\frac{1}{4},q=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{16}\frac{\partial}{\partial p}[\psi(p)-\psi(p+q)]\Bigg|_{p=\frac{1}{4},q=\frac{1}{2}} =$$
$$= -\frac{1}{16}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\left(\psi\left(\frac{1}{4}\right)-\psi\left(\frac{3}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{32}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$$

2.7 Ramanujan4.1

Вычислить сумму

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{9^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{13^2}+\dots$$

Преобразуем сумму в более удобный вид:

$$S = 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{9^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{13^2}+\dots = S = \sum_{n=0}^\infty \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(4n+1)^2}$$

Заметим, что разложение функции $(1-x)^{-1/2}$ в ряд при $x=1$ даёт почти нашу сумму:

$$(1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(2n-1)!!}{2^n}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$$

Так же

$$-\int_0^1 \ln xx^{4n}dx = \frac{1}{(4n+1)^2}$$

Следовательно, мы можем записать нашу сумму как

$$S = -\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^4}}dx = -\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\ln\left(x^4\right)}{\sqrt{1-x^4}}\frac{x^3dx}{x^3} = -\frac{1}{16}\int_0^1 \frac{t^{-3/4}\ln t}{\sqrt{1-t}}dt =$$

$$= -\frac{1}{16}\frac{\partial}{\partial s}\int_0^1 \frac{t^{s-3/4}\ln t}{\sqrt{1-t}}dt\bigg|_{s=0} = -\frac{1}{16}\frac{\partial}{\partial s}B(s+1/4;1/2)\bigg|_{s=0} =$$
$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{16}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\Gamma(s+1/4)}{\Gamma(s+3/4)}\bigg|_{s=0} = -\frac{\sqrt{\pi}}{16}\frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}\left(\psi\left(\frac{1}{4}\right)-\psi\left(\frac{3}{4}\right)\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{32}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$$

2.8 Ramanujan4. Hometask

Вычислить сумму

$$\frac{1}{1!!}+\frac{1}{3!!}+\frac{1}{5!!}+\frac{1}{7!!}+\dots$$

2.9 Ramanujan5. Fractions

$$\frac{e+1}{e-1} = 2+\frac{1}{6+\frac{1}{10+\frac{1}{14+\cdots}}}$$

Для начала напомним представление цепной дроби для соотношений сходящихся гипергеометрических функций типа ${}_0F_1(c,z)$. Пусть (a_n) - последовательность комплексных чисел, определяемая

$$a_n = \frac{1}{(c+n-1)(c+n)},$$

где c - комплексное число такое, что $c \notin \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$. Тогда

$$1+\mathcal{K}_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n z}{1}\right) = \frac{{}_0F_1(c,z)}{{}_0F_1(c+1,z)}$$

Освежили память, теперь возвращаемся нашей задаче

$$\frac{e^z+1}{e^z-1} = \mathrm{ctgh}\left(\frac{z}{2}\right) = i\,\mathrm{ctg}\left(\frac{iz}{2}\right)$$

Мы можем легко вывести

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots} = \frac{x_0F_1\left(\frac{3}{2}, -\frac{x^2}{4}\right)}{{}_0F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{x^2}{4}\right)} = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \cdots}}}}$$

$$x = \frac{iz}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{iz}{2}\right) = \frac{iz^2}{2 - \frac{-z^2}{6 - \frac{-z^2}{10 - \frac{-z^2}{14 - \cdots}}}} = \frac{iz}{2 + \frac{z^2}{6 + \frac{z^2}{10 + \frac{z^2}{14 - \cdots}}}}$$

$$\operatorname{ctgh}\left(\frac{z}{2}\right) z = \operatorname{ctg}\left(\frac{iz}{2}\right) iz = 2 + \frac{z^2}{6 + \frac{z^2}{10 + \frac{z^2}{14 + \cdots}}}$$

$$z = 1 \Rightarrow \frac{e+1}{e-1} = \coth\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \cdots}}}$$

2.10 Product

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} e\left(1 - \frac{1}{9n^2}\right)^{9n^2} = \exp\left\{\ln \prod_{n=1}^{\infty} e\left(1 - \frac{1}{9n^2}\right)^{9n^2}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} 1 + 9n^2 \ln\left(1 - \frac{1}{9n^2}\right)\right\} = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - 9n^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{1}{9n^2}\right)^k\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3n)^{2-2k}}{k}\right)\right\} = \exp\left\{-\sum_{K=1}^{\infty} 3^{-2k} \int_0^1 x^k dx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right)^{2k} \zeta(2k) dx\right\} = \exp\left\{-\int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{x}}{6} \operatorname{ctg} \frac{\pi\sqrt{x}}{6}\right) dx\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{9}{\pi^2} \int_0^{\pi/3} x^2 \operatorname{ctg} x dx - \frac{1}{2}\right\} = \exp\left\{\ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{18}{\pi^2} \int_0^{\pi/3} x \ln \sin x dx - \frac{1}{2}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\ln \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{18}{\pi^2} \int_0^{\pi/3} x \left(-\ln 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{k}\right) dx - \frac{1}{2}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\ln\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{18}{\pi^2}\ln\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\right) + \frac{18}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{2\pi k\sin(2\pi k/3)+3\cos(2\pi k/3)-3}{12k^2} - \frac{1}{2}\right.$$

$$= \exp\left\{\ln\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi}{k^2}\sin\frac{2\pi k}{3} + \frac{3}{k^2}\cos\frac{2\pi k}{3} - \frac{3}{k^2}\right) - \frac{1}{2}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\ln\sqrt{3} + \frac{3}{2\pi^2}\left(2\pi\mathrm{Cl}_2\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 3\,\mathrm{Cl}_3\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) - \frac{9}{2\pi^2}\zeta(3) - \frac{1}{2}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\ln\sqrt{3} + \frac{3}{2\pi^2}\left(2\pi\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\psi_1\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{9\sqrt{3}}\pi^2\right) + 3\left(-\frac{4}{9}\zeta(3)\right)\right) - \frac{9}{2\pi^2}\zeta(3) - \frac{1}{2}\right\}$$

$$= \exp\left\{\ln\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}\pi}\psi_1\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{13}{2\pi^2}\zeta(3) - \frac{1}{2}\right\}$$

2.11 Product1

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} e\left(1 - \frac{1}{9n^2}\right)^{9n^2} \Rightarrow \ln P = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + 9n^2\ln\left(1 - \frac{1}{9n^2}\right)\right)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(x^2 + 9n^2\ln\left(1 - \frac{x^2}{9n^2}\right)\right) \Rightarrow f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2x + 9n^2\left(\frac{-\frac{2x}{9n^2}}{1 - \frac{x^2}{9n^2}}\right)\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2x^3}{9n^2 - x^2} = -3\left(\frac{x}{9}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(\frac{x}{9}\right)}{n^2 - \left(\frac{x}{3}\right)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{n^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-x}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(\frac{x}{3}\right)}{n^2 - \left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{\Gamma'\left(1+\frac{x}{3}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{x}{3}\right)} - \frac{\Gamma'\left(1-\frac{x}{3}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{x}{3}\right)}$$

$$f'(x) = 3\left(\frac{x}{3}\right)^2\left(\frac{\Gamma'\left(1-\frac{x}{3}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{x}{3}\right)} - \frac{\Gamma'\left(1+\frac{x}{3}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{x}{3}\right)}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln P = \int_0^1 3\left(\frac{x}{3}\right)^2\left(\frac{\Gamma'\left(1-\frac{x}{3}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{x}{3}\right)} - \frac{\Gamma'\left(1+\frac{x}{3}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{x}{3}\right)}\right)dx \stackrel{x=3y}{=}$$

$$= \int_0^{1/3} 9x^2\left(\frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)} - \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)}\right)dx =$$

$$= 9x^2(-\ln(\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)))\Big|_0^{1/3} + \int_0^{1/3} 18x\ln(x\Gamma(x)\Gamma(1-x))dx =$$

$$= -\,9x^2(\ln x + \ln\pi - \ln\sin\pi x)\Big|_0^{1/3} + \int_0^{1/3} 18x(\ln x + \ln\pi 0\ln\sin\pi x)dx =$$

$$= -1\left(-\ln 3 + \ln\pi - \frac{1}{3}\ln 3 + \ln 2\right) + 18\int_0^{1/3} x\ln x dx + 18\ln 2\pi\int_0^{1/3} x dx -$$

$$-\,18\int_0^{1/3} x\ln 2\sin\pi x dx$$

$$\ln P = \frac{3}{2}\ln 3 - \ln 2\pi + 9\ln 2\pi x^2\Big|_0^{1/3} + 9\left(x\ln x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1/3} + 18\int_0^{1/3} x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nx}{n}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\ln 3 - \ln 3 - \frac{1}{2} + 18\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{1/3} x\cos 2\pi nx dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2} + 18\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{x\sin 2\pi nx}{2\pi n}\Bigg|_0^{1/3} - \frac{1}{2\pi n}\int_0^{1/3}\sin 2\pi nx dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2} + \frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{3\pi n}{3}}{n^2} + \frac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2\pi n}{3} - 1}{n^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2\pi n}{3}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi n}{(3n)^2} - \sin\frac{2\pi}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)^2} - \sin\frac{4\pi}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)^2} =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2\pi n}{3}}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n}{(3n)^3}+\left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)^3}+\left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)^2}=$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n)^3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)^2}\right)+\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n)^3}=$$
$$=-\frac{1}{2}\zeta(3)+\frac{1}{18}\zeta(3)=-\frac{4}{9}\zeta(3)$$
$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{8}{9}\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)^2}=\frac{8}{9}\zeta(2)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2\pi n}{3}}{n^2}=-\frac{8}{9}\zeta(2)+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)^2}=$$

$$=-\frac{8}{9}\zeta(2)+\frac{2}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-2/3)^2}=\frac{2}{9}\psi'\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{8}{9}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{2}{9}\psi'\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{4}{27}$$
$$\ln P=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}-\frac{9\zeta(3)}{2\pi^2}+\frac{3}{\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\psi'\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{2\sqrt{3}\pi^2}{27}\right)+\frac{9}{2\pi^2}\left(-\frac{4}{9}\zeta(3)\right)=$$
$$=\ln\sqrt{3}-\frac{1}{2}-\frac{13\zeta(3)}{2\pi^2}-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}\pi}\psi'\left(\frac{1}{3}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow P=\exp\left\{\ln\sqrt{3}-\frac{1}{2}-\frac{13\zeta(3)}{2\pi^2}-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}\pi}\psi'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$$

2.12 Product. Hometask

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!e^n}{\sqrt{2\pi n}n^n}\right)^{(-1)^{n-1}},\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\Gamma\left(2^n+\frac{1}{2}\right)}{a^2\Gamma\left(2^n\right)}\right)^{1/2^n},\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)e^{-\frac{1}{2k}}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-jx/n}}{n^2}-\frac{e^{-nx/j}}{j^2}\right),x>0$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{nj}}\left(\frac{e^{-j/n}}{n}-\frac{e^{-n/j}}{j}\right)\right)$$

$$\lim_{p\to 0^+}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1+x)^p}-\frac{1}{(n-x)^p}\right),1>p>0,1>x>0$$

2.13 Limit

Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\tan\arcsin x-\tan\sin\arctan x}{\tan\arcsin\arctan x-\sin\arctan\arcsin x}$$

Пусть даны функции

$$f(x)=x+ax^n+\mathcal{O}\left(x^{n+1}\right),g(x)=x+bx^n+\mathcal{O}\left(x^{n+1}\right),a\neq b$$

Тогда

$$f^{-1}(x)=x-ax^n+\mathcal{O}\left(x^{n+1}\right),g^{-1}(x)=x-bx^n+\mathcal{O}\left(x^{n+1}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{-1}(x)-g^{-1}(x)}{f(x)-g(x)}=\frac{(-a)-(-b)}{a-b}=-1$$

Интересное наблюдение

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^m(x)-g^m(x)}{f(x)-g(x)}=\frac{ma-mb}{a-b}=m,f^m,m\in\mathbb{Z}$$

2.14 Integral

Пусть $(m,n)\in\mathbb{N}^2$. Докажите, что интеграл существует и вычислите его

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin((2m+1)t/2)}{\sin t/2}\frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin t/2}dt$$

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((2m+1)t/2)\sin((2n+1)t/2)}{\sin^2 t/2} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((m-n)t) - \cos((m+n+1)t)}{1-\cos t} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{1}{2-(z+1/2)} \left(z^{m-n} + \frac{1}{z^{m-n}} - \left(z^{m+n+1} + \frac{1}{z^{m+n+1}} \right) \right) \frac{dz}{z} =$$

$$P(z) = \frac{1}{z^{2(m+n+1)} - z^{2m+1} - z^{2n+1} + 1} \oint_{z\to 1} \frac{P(z)}{z^{m+n+1}} dz$$

$$(z-1)^2$$

$$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{P(z)}{z^{m+n+1}} dz = \frac{1}{(m+n)!} \frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}z^{m+n}} P(z) \Big|_{z=0}$$

$$P(z) = \sum_{k=0}^{2m+2n} z^k + \sum_{k=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2m} z^{j+k-1}$$

$$I = \frac{1}{(m+n)!}\frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}z^{m+n}} \left[\sum_{k=0}^{2m+2n} z^k + \sum_{k=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2m} z^{j+k-1} \right] \Bigg|_{z=0} =$$

$$= \frac{1}{(m+n)!}\frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}z^{m+n}} \left[z^{m+n} + \sum_{k=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2m} \sum_{j+k=m+n+1} z^{j+k-1} \right] \Bigg|_{z=0} =$$

$$= \left[1 + \sum_{k=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2m} \sum_{j+k=m+n+1} 1 \right] \frac{1}{(m+n)!}\frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}z^{m+n}} z^{m+n} \Bigg|_{z=0} = 1 + \sum_{k=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2m} \sum_{j+k=m+n+1} 1$$

$$m \le n \Rightarrow I = 1 + \sum_{j=1}^{2m} \sum_{k=m+n+1-j} 1 = 1 + 2m$$

$$n \le m \Rightarrow I = 1 + \sum_{k=1}^{2n} \sum_{j=m+n+1-k} 1 = 1 + 2n$$

2.15 Integral. Hometask

Для целого числа $b > 1$ вычислите интеграл

$$I = \int_0^\infty \left\lfloor \log_b \left\lfloor \frac{\lceil x \rceil}{x} \right\rfloor \right\rfloor dx,$$

где $\lfloor x \rfloor$– пол x и $\lceil x \rceil$– потолок x

2.16 Integral. Hometask1

В квантовой статистической механике матрица плотности для квантового гармонического осциллятора имеет огромное значение. Диагональные элементы $p(x)$ матрицы плотности в координатном представлении имеют вид

$$p(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}\mathcal{Z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{H}_n^2(x)}{2^n n!} e^{-\beta(n+1/2)},$$

где β– константа. $\mathcal{Z}$ и $\mathrm{H}_n(x)$– полиномы Эрмита, определяемые следующим образом

$$\mathcal{Z} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(n+1/2)}, \quad \mathrm{H}_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2}$$

Докажите, что

$$p(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi} \operatorname{th} \frac{\beta}{2}} \exp\left\{-x^2 \operatorname{th} \frac{\beta}{2}\right\}$$

2.17 Hypergeometry. Dikson

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{n!} \left(\frac{(b)_n (c)_n}{(1+a-b)_n (1+a-c)_n} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{n!} \left(\frac{(c)_n (b)_n (-1)^n}{(1+a-b)_n (1+a-c)_n (-1)^n} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{n!} \left(\frac{(c)_n (1-b-n)_n}{(1+a-b)_n (c-a-n)_n} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{n!} \left({}_3F_2 \left(\begin{array}{c} 1+a-b-c, a+n, -n \\ 1+a-b, 1+a-c \end{array} \right) \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(1+a-b-c)_k (a+n)_k (-n)_k}{(1+a-b)_k (1+a-c)_k} \frac{1}{k!} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(1+a-b-c)_k (a)_{n+k} (-1)^k n!}{(1+a-b)_k (1+a-c)_k (n-k)! (a)_n} \frac{1}{k!} \right) =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(1+a-b-c)_k (a)_{n+k} (-1)^k}{(1+a-b)_k (1+a-c)_k (n-k)!} \frac{1}{k!} \right) =$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(1+a-b-c)_k (-1)^k}{(1+a-b)_k (1+a-c)_k k!} \left(\frac{(a)_{n+k} z^n}{(n-k)!} \right) =$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+a-b-c)_k (-1)^k}{(1+a-b)_k (1+a-c)_k k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(a)_{n+k} z^n}{(n-k)!} =$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+a-b-c)_k (-1)^k}{(1+a-b)_k (1+a-c)_k k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{n+2k} z^{n+k}}{n!} =$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+a-b-c)_k (-z)^k}{(1+a-b)_k (1+a-c)_k k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{n+2k} z^{n+k}}{n!} =$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+a-b-c)_k (-z)^k}{(1+a-b)_k (1+a-c)_k k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{2k} (a+2k)_n z^{n+k}}{n!} =$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+a-b-c)_k (a)_{2k} (-z)^k}{(1+a-b)_k (1+a-c)_k k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+2k)_n z^{n+k}}{n!} =$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+a-b-c)_k (a)_{2k} (-z)^k}{(1+a-b)_k (1+a-c)_k k!} (1-z)^{-a-2k} =$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+a-b-c)_k (a)_{2k} (-z)^k}{(1+a-b)_k (1+a-c)_k k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+2k)_n z^{n+k}}{n!} =$$

$$=(1-z)^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+a-b-c)_k 2^{2k} \left(\frac{a}{2}\right)_k \left(\frac{a+1}{2}\right)_k}{(1+a-b)_k (1+a-c)_k k!} \left(-\frac{z}{(1-z)^2} \right)^k =$$

$$=(1-z)^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+a-b-c)_k \left(\frac{a}{2}\right)_k \left(\frac{a+1}{2}\right)_k}{(1+a-b)_k (1+a-c)_k k!} \left(-\frac{4z}{(1-z)^2} \right)^k =$$

$$=(1-z)^{-a} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} 1+a-b-c, \frac{a}{2}, \frac{a+1}{2} \\ 1+a-b, 1+a-c \end{matrix} \mid -\frac{4z}{(1-z)^2} \right)$$

2.18 Cool series

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{2}\pi n+\sin\sqrt{2}\pi n}{\operatorname{ch}\sqrt{2}\pi n-\cos\sqrt{2}\pi n}=\Re\lim_{z_0\to e^{i\pi/4}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7}\left(\operatorname{ctgh}\pi n z_0-z_0^2\operatorname{ctgh}\frac{\pi n}{z_0}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\Re\lim_{z_0\to e^{i\pi/4}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{nz_0}{m^2+(nz_0)^2}-z_0^2\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{n/z_0}{m^2+(n/z_0)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\Re\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}ne^{i\pi/4}\left(\frac{1}{m^2+in^2}-\frac{1}{m^2-in^2}\right)\right)=\frac{1}{\pi}\Re\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{-2in^3e^{i\pi/4}}{m^4+n^4}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\Re\left\{-2ie^{i\pi/4}\right\}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{m^4+n^4}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\left(\frac{1}{n^4}+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4+n^4}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}+2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{n^4\left(m^4+n^4\right)}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}+2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^4\left(m^4+n^4\right)}\right]=\right.$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\left[\zeta(8)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^4}+\frac{1}{m^4}\right)\frac{1}{m^4+n^4}\right]=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left\lceil\zeta(8)+\zeta^2(4)\right\rceil=\frac{13\sqrt{2}}{56700}\pi^7$$

2.19 Cool integral1

$$I=\int_0^1\ln^2\Gamma(x)dx=\frac{\ln 2\pi}{2}\int_0^1\ln\Gamma(x)dx+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\int_0^1\ln\Gamma(x)\cos 2\pi kxdx+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma+\ln 2\pi+\ln k}{\pi k}\int_0^1\ln\Gamma(x)\sin 2\pi kxdx=$$

$$=\frac{\ln^2 2\pi}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{1}{4k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma+\ln 2\pi+\ln k}{\pi k}\cdot\frac{\gamma+\ln 2\pi+\ln k}{2\pi k}=$$

$$=\frac{\ln^2 2\pi}{4}+\frac{1}{8}\zeta(2)+\frac{(\gamma+\ln 2\pi)^2}{2\pi^2}\zeta(2)+\frac{\gamma+\ln 2\pi}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k^2}+$$

$$+\frac{\gamma+\ln 2\pi}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k^2}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln^2 k}{k^2}=$$

$$=\frac{\gamma^2}{12}+\frac{\pi^2}{48}+\frac{\gamma\ln 2\pi}{6}+\frac{\ln^2 2\pi}{3}-\frac{\gamma+\ln 2\pi}{\pi^2}\zeta'(2)+\frac{\zeta''(2)}{2\pi^2}$$

2.20 Cool integral2

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx\overset{x=\frac{1-t}{=}}{=}\int_0^1 t^{-11/6}(1-t)^{-1/2}\left[1-(1-t)^{1/3}\right]dt=$$

$$= B(-\frac{5}{6};\frac{1}{2}) - B(-\frac{5}{6};\frac{5}{6}) = B(-\frac{5}{6};\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(-\frac{5}{6})}{\Gamma(-\frac{1}{3})} = \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{5\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$$

2.21 Cool integral3

$$I = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdydz}{1+x^4+y^4+z^4} = \int_0^\infty \iiint_0^1 e^{-\left(x^4+y^4+z^4+1v\right)}dxdydzdv =$$
$$= \int_0^\infty e^{-v}\left\{\int_0^1 e^{-x^4v}dx\right\}dv = \int_0^\infty e^{-v}\left\{\frac{v^{-1/4}}{4}\int_0^v x^{-3/4}e^{-x}dx\right\}dv =$$
$$= \frac{1}{4^4}\int_0^\infty 4v^{-3/4}e^{-v}\left\{\int_0^v x^{-3/4}e^{-x}dx\right\}dv = \frac{1}{4^4}\int_0^\infty d\int_0^v x^{-3/4}e^{-x}dx\Big]^4 = \frac{\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)}{4^4}$$

2.22 Cool integral4

$$I = \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{x^4+1}{2ax^2}\right\}\frac{x^4+3ax^2-1}{x^6}\ln x dx \overset{x=e^\theta}{=}$$
$$= \int_{=\infty}^\infty e^{-\operatorname{ch}(2\theta)/a}\left(e^{-2\theta}+3ae^{-4\theta}-e^{-6\theta}\right)^\theta d\theta =$$
$$= 2\int_0^\infty e^{-\operatorname{ch}(2\theta)/a}(\operatorname{sh}\theta - 3a\operatorname{sh}3\theta + \operatorname{sh}5\theta)\theta = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[-ae^{-\operatorname{ch}(2\theta)/a}\operatorname{ch}3\theta\right]\theta d\theta =$$
$$= 2a\int_0^\infty e^{-\operatorname{ch}(2\theta)/a}\operatorname{ch}3\theta d\theta = 2a\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{2\operatorname{sh}^2\theta+1}{a}\right\}\left(-3\operatorname{ch}\theta + 4\operatorname{ch}^3\theta\right)d\theta =$$
$$= 2ae^{-1/a}\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{2\operatorname{sh}^2\theta+1}{a}\right\}\left(1+4\operatorname{sh}^2\theta\right)\operatorname{ch}\theta d\theta =$$
$$= 2ae^{-1/a}\int_0^\infty e^{-2t^2/a}\left(1+4t^2\right)dt = 2ae^{-1/a}\left(1-4\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\int_0^\infty dt\Big|_{\beta=2/a} =$$
$$= 2ae^{-1/a}\left(1-4\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\beta^{-1/2}\right)\Big|_{\beta=2/a} =$$
$$= \sqrt{\pi}ae^{-1/a}\left(\beta^{-1/2}+2\beta^{-3/2}\right)\Big|_{\beta=2a} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+a)a^{3/2}e^{-1/a}.$$

2.23 Seria1.1

Вычислить сумму

$$1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\frac{1}{4^2}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)\frac{1}{4^3}+\dots$$

$$S=1+\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}\right)\frac{1}{4^k}=1+\sum_{k\geq 1}\left\{\int_0^1\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}+\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\right]dx\right\}=$$

$$=1+\int_0^1\left[\frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}+\sum_{k\geq 1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\right]dx=1+\int_0^1\left(\frac{x/2}{2\left(1-x^2/4\right)}+\frac{x^2/4}{1-x^2/4}\right)dx=$$

$$=1+\int_0^1\left(\frac{1}{2(x+2)}-\frac{3}{2(x-2)}-1\right)dx=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\ln 2=\ln 2\sqrt{3}$$

2.24 Seria1.2

Вычислить сумму

$$1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\frac{1}{4^2}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)\frac{1}{4^3}+\dots$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\Rightarrow\ln\left(1-\frac{1}{4}\right)=\ln\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot 4^2}+\frac{1}{3\cdot 4^3}+\ldots=\ln\frac{1}{3}$$

$$\operatorname{ath}x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\Rightarrow 2\operatorname{ath}\frac{1}{2}=1+\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 2^4}+\dots$$

$$S=1+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2i}+\frac{1}{2i+1}\right)\frac{1}{4^i}=1+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i\cdot 4^i}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2i+1}\cdot\frac{1}{4^i}=$$

$$=1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot 4^2}+\frac{1}{3\cdot 4^3}+\dots\right]+\left[\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 4^2}+\frac{1}{7\cdot 4^3}+\dots\right]=$$

2.25 Seria1.3

Вычислить сумму

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)\frac{1}{4^n} = 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{-n}}{2n}}_{S_1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{-n}}{2n+1}}_{S_2}$$

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-2n}}{n} = -\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} = \ln\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4}\cdot\frac{4^{-n}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{1-n}}{8(n+1/2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(n+3/2)}{8\left(n+\frac{1}{4}\right.} =$$

$$S = 1 + \ln\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{8}\Phi\left(\frac{1}{4},1,\frac{3}{2}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{-2n}}{n+3/2} = \frac{1}{8}\Phi\left(\frac{1}{4},1,\frac{3}{2}\right)$$

2.26 Seria2

Вычислить сумму

$$\operatorname{cth}\pi + \frac{\operatorname{cth}2\pi}{2^7} + \frac{\operatorname{cth}3\pi}{3^7} + \frac{\operatorname{cth}4\pi}{4^7} + \ldots$$

$$\operatorname{cth}\pi t = \frac{1}{\pi t} + \frac{2t}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+t^2} \Rightarrow \frac{\pi cth\pi t}{t^7} = \frac{1}{t^8} + 2t^6\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+t^2}$$

$$S = \sum_{t=1}^{\infty}\frac{\pi cth\pi t}{t^7} = \sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{t^8} + 2\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{t^6\left(l^2+t^2\right)} =$$

$$= \zeta(8) + \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{t^6\left(t^2+k^2\right)} + \frac{1}{k^6\left(k^2+t^2\right)}\right) = \zeta(8) + \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^6+n^6}{t^6k^6\left(t^2+k^2\right)} =$$

$$= \zeta(8) + \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^4+t^4-t^2k^2}{t^6k^6} = \zeta(8) + \sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{t^6}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{t^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} + \sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6} =$$

2.27 Identity

$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{2^n}\left(1-\cos\frac{\pi}{2^n}\right)$$

$$\pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty}4^n\sin^4\frac{\pi}{2^n}$$

$$\pi = \int_0^{\pi} \cos(a\cos x)\operatorname{ch}(a\sin x)dx$$

$$\pi = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin 2\pi x}{x} \right)^2 \frac{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x\Gamma(x+1)} dx \right\}^{2/5}$$

2.28 Seria3

$$S = \sum_{n\geq 1} 4^n \sin^4 \frac{\pi}{2^n} = \sum_{n\geq 1} 4^n \left[\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^{n-1}} + \frac{1}{8}\cos\frac{\pi}{2^{n-2}} \right] =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left[\frac{3}{8}\sum_{n=1}^{m} 4^n - 2\sum_{n=1}^{m} 2^{2(n-1)}\cos\frac{\pi}{2^{n-1}} + 2\sum_{n=1}^{m} 2^{2(n-2)}\cos\frac{\pi}{2^{n-2}} \right] =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left[\frac{3}{8}\cdot\frac{4^m-1}{4-1} - 2\sum_{n=2}^{m+1} 2^{2(n-2)}\cos\frac{\pi}{2^{n-2}} + 2\sum_{n=1}^{m} 2^{2(n-2)}\cos\frac{\pi}{2^{n-2}} \right] =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left[\frac{4^m-1}{2} - 2\left[\sum_{n=2}^{m} 2^{2(n-2)}\cos\frac{\pi}{2^{n-2}} + 2^{2(m-1)}\cos\frac{\pi}{2^{m-1}} \right] + 2\left[2^{-2}\cos 2\pi \sum_{n=2}^{m} 2^{2(n-2)} \mathrm{c} \right.\right.$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left[2^{2m-1} - \frac{1}{2} - 2^{2m-1}\cos\frac{\pi}{2^{m-1}} + \frac{1}{2}\cos 2\pi \right] = \lim_{m\to\infty} \left[2^{2m-1} - 2^{m-1}\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{2^{2m-2}} \right) \right.$$

2.29 Seria4.1

Вычислить сумму

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^2-i^2}{\left(j^2+i^2\right)^2} &= \lim_{\alpha\to 0}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^2-i^2(1+\alpha)^2}{\left(j^2+i^2(1+\alpha)^2\right)^2}\frac{n^2-m^2}{\left(n^2+m^2\right)^2}(1+\alpha) \\
&= \lim_{\alpha\to 0}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{j^2-i^2(1+\alpha)^2}{\left(j^2+i^2(1+\alpha)^2\right)^2}(1+\alpha) \\
&= \lim_{\alpha\to 0}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\left(\frac{j}{n}\right)^2 - \left(\frac{i(1+\alpha)}{n}\right)^2}{\left(\left(\frac{j}{n}\right)^2 + \left(\frac{i(1+\alpha)}{n}\right)^2 \right)^2} \left(\frac{1+\alpha}{n}\right)\frac{1}{n} \\
&= \lim_{\alpha\to 0}\int_0^1\int_0^{1+\alpha} \frac{1}{\left(y^2+x^2\right)^2}dxdy = \int_0^2 \frac{y^2-x^2}{\left(y^2+x^2\right)^2}dxdy
\end{aligned}$$

$$S=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-m^2}{\left(n^2+m^2\right)^2}=\int_0^1\int_0^1\frac{y^2-x^2}{\left(y^2+x^2\right)^2}dxdy=\int_0^1\int_0^{1/y}\frac{y^2\left(1-z^2\right)}{y^4\left(1+z^2\right)^2}ydzdy$$

$$=\int_0^1\int_0^{1/y}\frac{1-z^2}{\left(1+z^2\right)^2}dzd(\ln y)=\ln y\int_0^{1/y}\frac{1-z^2}{\left(1+z^2\right)^2}dz\Bigg|_0^1+\int_0^1\frac{\left(1-\frac{1}{y^2}\right)\ln y}{\left(1+\frac{1}{y^2}\right)^2}\frac{dy}{y^2}$$

$$=\int_0^1\frac{\left(y^2-1\right)\ln y}{\left(y^2+1\right)^2}dy=\int_0^1\frac{y^2\ln y}{\left(y^2+1\right)^2}dy-\int_0^1\frac{\ln y}{\left(y^2+1\right)^2}dy$$

$$=-\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}dx-\int_0^1\frac{\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=-\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{y^{-1/2}\ln y}{(y+1)^2}dy=-\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^{\infty}\frac{y^{s-1}}{(y+1)^2}dy\Bigg|_{s=1/2}=-\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\Gamma(s)\Gamma(2-s)}{\Gamma(2)}\Bigg|_{s=1/2}$$

$$=-\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{(1-s)\pi}{\sin\pi s}\Bigg|_{s=1/2}=\frac{\pi}{4}$$

2.30 Seria4.2

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n^2-m^2}{\left(n^2+m^2\right)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{Re}\,\frac{1}{(n+im)^2}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(n/N)^2-(m/n)^2}{\left((n/N)^2+(m/n)^2\right)^2}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\mathrm{Re}\,\frac{1}{(n/N+im/N)^2}=\int_0^1\int_0^1\mathrm{Re}\,\frac{1}{(x+iy)^2}dydx=\int_0^1\mathrm{Re}\,\frac{i}{x+iy}\Bigg|_0^1 d$$

$$=\mathrm{Re}\int_0^1\frac{i}{x+i}dx=\mathrm{Re}\{i\ln(x+i)\}|_0^1=-\mathrm{Im}\ln\left(\frac{1+i}{i}\right)=-\mathrm{Im}\ln\left(\sqrt{\pi}e^{-i\pi/4}\right)=\frac{\pi}{4}$$

2.31 Cool integral5

$$I = \int_0^\infty \sin x \cdot \ln x \cdot e^{-x} dx$$

$$\int_0^\infty \ln x \cdot e^{-px} dx = \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=1} \int_0^\infty x^{s-1} e^{-px} dx = \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=1} \frac{\Gamma(s)}{p^s} =$$

$$= \left[\frac{\Gamma(s)}{p^s}(\psi(s) - \ln p)\right]_{s=1}^\infty = -\frac{\gamma + \ln p}{p}$$

$$= \operatorname{Im} \int_0^\infty \ln x \cdot e^{-x(1-i)} dx = -\operatorname{Im}\left\{\frac{\gamma + \ln(1-i)}{1-i}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2} \operatorname{Im}\left\{(1+i)\left(\gamma + \ln \sqrt{2} e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)\right\} = -\frac{1}{2} \operatorname{Im}\left\{(1+i)\left(\gamma + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{i\pi}{4}\right)\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{8}(\pi - \ln 4 - 4\gamma)$$