# ОТДЕЛЬНЫЕ ТЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Р. Н. КАРАСЁВ

Версия обновляется по адресу rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf.

В первом разделе обсуждаются базовые сведения про множества, операции с множествами, отношения эквивалентности и порядка, отображения между множествами и мощность множества. В свете понятия множества обсуждаются свойства натуральных чисел, определение и свойства рациональных чисел. С помощью фундаментальных последовательностей рациональных чисел даётся определение действительного числа. Проверяется свойство полноты действительных чисел, изучаются пределы последовательностей и топология на действительной прямой, определяются экспонента, логарифм и тригонометрические функции действительного числа.

Второй раздел содержит стандартные сведения про функции одной переменной: непрерывность функций и свойства непрерывных функций, разрывы функций и пределы, производная функции, теоремы о среднем для производных, изучение функции на монотонность, экстремумы и выпуклость с помощью производных, правило Лопиталя и формула Тейлора.

В третьем разделе обсуждается понятие метрического пространства, в качестве основного примера используется евклидово пространство. Обсуждается топология в метрических пространствах, компактность и связность, непрерывные и равномерно непрерывные отображения, полунепрерывные функции. Изучаются кривые в метрическом пространстве, линейная связность, длина кривой и внутренняя метрика метрического пространства.

Четвёртый раздел содержит стандартный материал про комплексные числа и многочлены, доказывается существование комплексного корня у многочлена с комплексными коэффициентами и выводятся алгебраические следствия этого. Изучается абсолютное и условное суммирование числовых и функциональных рядов и интеграл Римана для функции одной переменной. Эти темы изложены сравнительно стандартным образом, но также рассмотрены более продвинутые вопросы про приближение непрерывных функций алгебраическими и тригонометрическими многочленами вплоть до общей теоремы Стоуна–Вейерштрасса.

В пятом разделе, после быстрого знакомства с мерой элементарных множеств и мерой Жордана в евклидовом пространстве, излагаются основы меры и интеграла Лебега вплоть до теоремы Фубини и линейной замены переменных в интеграле Лебега. Делаются вычисления объёма шара и интеграла Пуассона, изучаются гамма и бета-функции. С помощью одномерной леммы Безиковича изучается вопрос о справедливости формулы Ньютона–Лейбница в общем виде, в частности дифференцирование интеграла Лебега функции одной переменной по пределу интегрирования.

Шестой раздел содержит основы дифференциальной геометрии: дифференцирование функций нескольких переменных и гладкие отображения, примеры бесконечно гладких функций и сглаживание с помощью свёртки, теорема об обратном отображении и криволинейные системы координат, экстремумы функций нескольких переменных, касательные векторы и дифференциальные формы, понятие вложенного в евклидово пространство и абстрактного гладкого многообразия, интегрирование дифференциальных форм и замена переменных в интеграле для евклидова пространства и для многообразия, формула Стокса.

В седьмом разделе обзорно представлены дальнейшие сведения про гладкие многообразия. Рассматриваются первообразные дифференциальных форм и определение когомологий де Рама, цепная гомотопия для когомологий де Рама, лемма Сарда о регулярных значениях и геометрическое определение степени отображения. Напоминаются основные сведения из теории дифференциальных уравнений и обсуждаются понятия интегрирования векторных полей, производная Ли и скобка Ли. Приводятся основы римановой геометрии вплоть до определения и основных свойств ковариантной производной и тензора кривизны Римана, рассматриваются свойства геодезических в римановых многообразиях и примеры пространств общей теории относительности. Изложение в этом разделе не претендует на полноту и интересующийся читатель может продолжить изучение это темы с помощью учебников по дифференциальной геометрии, группам Ли, римановой геометрии и симплектической геометрии.

Восьмой раздел посвящён гармоническому анализу, изучению рядов и интегралов Фурье и смежным вопросам. Использование ранее изложенных сведений про интеграл Лебега позволяет навести некоторую строгость по сравнению со стандартными учебниками, работать сразу с полными пространствами $L_p$, дифференцировать абсолютно непрерывные функции в обобщённом смысле, уверенно работать с интегралом Фурье и свёрткой.

В девятом разделе приводятся базовые сведения из функционального анализа, изучается гильбертово пространство и банаховы пространства. Вводится понятие двойственного пространства, изучаются общие факты о нём и рассматриваются конкретные примеры. Изучаются общие свойства рядов Фурье, его сходимость в гильбертовых пространствах и отсутствие сходимости для непрерывных функций в общем случае. Изучаются свойства компактности в двойственном пространстве, приводятся некоторые сведения об ультрафильтрах и мере Хаара. Определяются разные классы распределений (обобщённых функций), изучаются операции с ними и их базовые свойства. В конце изложение становится обзорным и интересующийся читатель может продолжить изучение темы с помощью учебника по функциональному анализу.

Десятый раздел содержит базовые сведения по комплексному анализу, вплоть до доказательства теоремы Римана об отображении для областей на комплексной плоскости, обсуждения универсальных накрытий многообразий и формулировки общей теоремы Римана для односвязных многообразий. Более продвинутые вопросы, связанный с понятием субгармонических функций или оператором Лапласа на комплексных поверхностях в этом разделе не рассматриваются, при необходимости читатель может продолжить их изучение по соответствующим учебникам.

## 1. Свойства действительных чисел

1.1. **Множества и отображения.** Мы будем считать известными из школьного курса натуральные $\mathbb{N}$, целые $\mathbb{Z}$, и рациональные числа $\mathbb{Q}$. Мы в целом будем предполагать известными их свойства относительно арифметических операций сложения, вычитания, умножение и деления, а также свойства их сравнения друг с другом. Тем не менее, некоторые аспекты эти известных понятий мы обсудим в этом разделе.

Следует отметить, что рациональные числа образуют *множество*, то есть некий объект $X$, такой что для любого другого объекта $Y$ мы можем узнать, является ли $Y$ элементом $X$ ($Y \in X$) или не является ($Y \notin X$). Множество у нас определено как способ понять, является ли объект его элементом. В общем случае понять это может быть непросто, но самый простой способ задать множество — задать его явным перечислением, например множество цифр

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

тогда не составит труда для любого объекта определить, является ли он элементом этого множества. Хотя конечно могут остаться философские вопросы, например, является ли цифра, набранная другим шрифтом, 9, элементом множества $D$, или не является; но в целом уже ясно, о чём идёт речь.

Для множеств определены операции объединения, пересечения и разности по формулам

$$\begin{aligned} x \in X \cup Y \quad &\Leftrightarrow \quad x \in X \text{ или } x \in Y \\ x \in X \cap Y \quad &\Leftrightarrow \quad x \in X \text{ и } x \in Y \\ x \in X \setminus Y \quad &\Leftrightarrow \quad x \in X \text{ и } x \notin Y. \end{aligned}$$

Здесь $\Leftrightarrow$ читается как «тогда и только тогда, когда» или «равносильно».

Множество $Y$ называется *подмножеством* множества $X$, $Y \subseteq X$, если любой элемент $Y$ является элементом $X$. Считается, что для любого множества $X$ все его подмножества сами по себе образуют множество.

Мы считаем, что допустимо строить подмножество множества $X$ с помощью выражений типа

$$Y = \{x \in X \mid P(x)\} \Leftrightarrow (x \in Y \Leftrightarrow x \in X \text{ и } P(x)),$$

где $P(x)$ — некоторое логическое условие на элемент $x$, которое может выполняться или нет. Мы не конкретизируем, какие именно условия допустимы, а какие нет, просто будем постепенно изучать примеры таких выражений.

Если у множества нет элементов, оно называется пустым, $\emptyset$, оно является подмножеством любого другого множества. Множество *состоит из одного элемента*, если оно не пусто и любые два его элемента совпадают.

*Задача* 1.1. Подумайте на тем, что означает в предыдущей фразе слово «совпадают».

[[ Попробуйте определить $x = y$ через условия $x \in \dots$ и $y \in \dots$. ]]

Множество *состоит из двух элементов*, если у него найдутся два несовпадающих элемента и любой другой его элемент совпадает с одним из этих двух. Подумайте над тем, можно ли использовать в этой фразе слово «два», если мы ещё не добрались до понятия натурального числа.

Более интересная операция — декартово произведение двух множеств $X \times Y$. Это множество упорядоченных пар $(x, y)$, таких что $x \in X$ и $y \in Y$. Расшифровывая понятие «упорядоченная пара», можно сказать, что если $X$ и $Y$ не пересекаются, то $X \times Y$ — это просто множество двухэлементных подмножеств $P \subseteq X \cup Y$, таких что $X \cap P$ и $Y \cap P$ состоят ровно из одного элемента. Если множества пересекаются, то может понадобиться конструкция похитрее, над которой читателю предлагается подумать самостоятельно.

Работа с множествами достаточно очевидна интуитивно, но в некоторых ситуациях можно довольно быстро получить что-то непонятное. Как например, следующий *парадокс Бертрана Рассела*: Рассмотрим множество $Z$ таких множеств, которые не имеют самого себя как элемент, или в более формальной записи

$$Z = \{X \mid X \notin X\}.$$

Можно ли тогда утверждать, что $Z \in Z$? На самом деле нет, так как по определению из этого следует $Z \notin Z$. Можно ли утверждать, что $Z \notin Z$? Тоже нет, так как тогда по определению $Z \in Z$. В общем, с множеством $Z$ явно что-то не так. Мы пока не будем глубоко исследовать этот вопрос, отметим лишь, что выражения «множество всех множеств» или «множество всех множеств таких что …» использовать нельзя. Обычно для надёжности также запрещают множеству быть элементом самого себя.

**Определение 1.2.** *Отображением* между двумя множествами $f : X \to Y$ называется подмножество $X \times Y$, такое что для любого $x \in X$ найдётся ровно один $y \in Y$ такой что $(x, y) \in f$. Последнюю формулу часто пишут в виде $y = f(x)$ и говорят, что $y$ — образ $x$ при отображении $f$. Мы говорим, что $X$ — *область определения*, $Y$ — *область значений*.

В некоторых случаях мы можем задать отображение достаточно явно. Например, мы будем использовать обозначение $n \mapsto n + 1$ для отображения натуральных чисел в себя, $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, которое ставит в соответствие числу следующее число. Обозначение вида $x \mapsto \dots$ в функциональном программировании называется *лямбда-выражением* и позволяет коротко представить отображение, заданное явной формулой.

Однако определение отображения не требует, чтобы оно было задано в каком-либо смысле «явно» и в дальнейшем знакомство с понятием мощности множества позволит нам понять, что отображения, которые можно задать явно (в очень широком смысле этого слова) встречаются крайне редко (в определённом смысле этого слова).

**Определение 1.3.** *Композиция* отображений $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — это отображение $h : X \to Z$ такое что

$$z = h(x) \Leftrightarrow \exists y \in Y : f(x) = y \text{ и } g(y) = z.$$

Пишут $h = g \circ f$.

Здесь $\exists \dots : \dots$ читается как «существует …такое что …». Можно проверить, что построенное в этом определении $h \subseteq X \times Z$ действительно является отображением.

*Задача* 1.4. Зададим отображение $\pi_1 : X \times Y \to X$ как $\pi_1(x, y) = x$ и отображение $\pi_2 : X \times Y \to Y$ как $\pi_2(x, y) = y$. Докажите, что отображения $f : Z \to X \times Y$ однозначно определяются парами своих «координат» $(\pi_1 \circ f : Z \to X, \pi_2 \circ f : Z \to Y)$.

**Определение 1.5.** *Образ* $X$ при отображении $f : X \to Y$ определяется как

$$f(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X,\ y = f(x)\}.$$

Для любого подмножества $Z \subseteq Y$ определим *прообраз* при отображении $f$,

$$f^{-1}(Z) = \{x \in X \mid f(x) \in Z\}.$$

**Определение 1.6.** *Тождественное отображение* $\mathrm{id}_X : X \to X$ состоит из всех пар вида $(x, x)$, где $x \in X$, то есть всегда $\mathrm{id}_X(x) = x$.

**Определение 1.7.** Отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ *взаимно обратны*, если $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ и $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Отображение, у которого существует обратное, называется *обратимым* или *биекцией*.

*Задача* 1.8. Как связаны графики взаимно обратных отображений $f$ и $g$ как подмножества $X \times Y$ и $Y \times X$?

*Задача* 1.9. Выясните, что означает существование у отображения $f : X \to Y$ *правого обратного* $g$, для которого $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Аналогично для *левого обратного*, для которого $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

Говоря о множестве $X$, мы также можем говорить о множестве подмножеств $X$. Собственно, мы уже имели в виду множество подмножеств $X \times Y$, когда определяли множество отображений $X \to Y$ как его подмножество. В обратную сторону, можно описать множество подмножеств $X$ как множество всевозможных отображений $\chi : X \to \{0, 1\}$. Более подробно, для подмножества $Y \subseteq X$ мы можем определить отображение

$$\chi_Y : X \to \{0,1\}, \quad \chi_Y(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in Y; \\ 0, & \text{если } x \notin Y. \end{cases}$$

Это называется *характеристическая функция* множества $Y$. Обратно, зная характеристическую функцию $\chi : X \to \{0, 1\}$, мы можем восстановить подмножество как

$$Y = \chi^{-1}(1) = \{x \in X \mid \chi(x) = 1\}.$$

Для любых множеств $A$ и $B$ множество всевозможных отображений $A \to B$ часто обозначают $B^A$, а с учётом приведённого выше описания множество подмножеств $X$ можно обозначить как $\{0, 1\}^X$, или несколько неформально $2^X$.

Интересующийся читатель может ознакомиться со списком интуитивно верных утверждений (аксиом) теории множеств, в котором на данный момент не найдено внутренних противоречий, на соответствующей странице Википедии.

### 1.2. Отношения эквивалентности и порядка.

Работая с декартовым произведением множества на себя, аналогично отображениям мы можем определить отношение эквивалентности и отношение порядка.

**Определение 1.10.** *Отношением эквивалентности* на множестве $X$ называется

$$\sim \subseteq X \times X,$$

удовлетворяющее следующим свойствам (вместо $(x, y) \in \sim$ мы будем писать $x \sim y$):

(рефлексивность) $\forall x \in X, x \sim x$ (для любого $x \in X$ имеем $x \sim x$);

(симметричность) $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$ ($x \sim y$ тогда и только тогда, когда $y \sim x$);

(транзитивность) $x \sim y$ и $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (из $x \sim y$ и $y \sim z$ следует $x \sim z$).

При наличии на $X$ отношения эквивалентности, для любого $x \in X$ можно определить

$$C_x = \{y \in X \mid y \sim x\},$$

это *класс эквивалентности*. Тогда легко проверить, что $C_x = C_y \Leftrightarrow x \sim y$ и $C_x \cap C_y = \emptyset \Leftrightarrow x \not\sim y$. Таким образом всё множество $X$ разбивается на непустые классы эквивалентности, множество которых обозначается $X/\sim$, это *фактормножество по отношению эквивалентности*. Отображение, сопоставляющее $x$ его класс эквивалентности $C_x$ ($x \mapsto C_x$) называется *проекцией на фактормножество* $X \to X/\sim$.

Можно заметить, что любое отображение $f : X \to Y$ даёт отношение эквивалентности на множестве $X$. Для $x, y \in X$ пусть $x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, можно без труда проверить, что это в самом деле отношение эквивалентности. Также можно заметить, что с помощью этой конструкции отношение эквивалентности $\sim$ восстанавливается из соответствующей ему проекции $X \to X/\sim$.

*Задача* 1.11. Пусть на множестве $X$ задано отношение эквивалентности $\sim$ и рассматривается проекция на фактормножество $P : X \to X/\sim$. Докажите, что отображение $f : X \to Y$ представляется в виде $f = g \circ P$, для некоторого $g : X/\sim \to Y$ тогда и только тогда, когда для любых $x' \sim x''$ оказывается $f(x') = f(x'')$.

В качестве простого примера отношения эквивалентности можно привести *сравнимость целых чисел по модулю натурального числа* $m$. По определению,

$$x \equiv y \mod m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = km.$$

Соответствующее отображение на фактормножество $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(m)$ называется «взятие остатка по модулю $m$».

*Задача* 1.12. Проверьте, что множество остатков $\mathbb{Z}/(m)$ корректно наследует от $\mathbb{Z}$ операции сложения, вычитания и умножения.

Более важный для нас пример — множество рациональных чисел. Оно определяется как фактормножество множества дробей

$$F = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

по отношению эквивалентности

$$\frac{p}{q} \sim \frac{p'}{q'} \Leftrightarrow pq' = p'q.$$

*Задача* 1.13. Определите на множестве дробей $\frac{p}{q}$ операции сложения, вычитания, умножения и деления. Проверьте, что при замене аргумента такой операции на эквивалентный ему результат операции тоже заменяется на эквивалентный.

Помимо отношений эквивалентности нас также будут интересовать отношения порядка:

**Определение 1.14.** *Отношением порядка* на множестве $X$ называется

$$\preccurlyeq \subseteq X \times X,$$

удовлетворяющее следующим свойствам (вместо $(x, y) \in \preccurlyeq$ мы будем писать $x \preccurlyeq y$):

(рефлексивность) $\forall x \in X, x \preccurlyeq x$;

(антисимметричность) $x \preccurlyeq y$ и $y \preccurlyeq x$ влечёт $x = y$;

(транзитивность) $x \preccurlyeq y$ и $y \preccurlyeq z \Rightarrow x \preccurlyeq z$.

**Определение 1.15.** Отношение порядка $\preccurlyeq \subseteq X \times X$ называется *линейным порядком*, если для любых двух $x, y \in X$ выполняется $x \preccurlyeq y$ или $y \preccurlyeq x$. Иногда не обязательно линейный порядок называют *частичным порядком*.

В качестве примера отношения порядка можно рассмотреть стандартный порядок на множестве целых чисел:

$$n \leqslant m \Leftrightarrow m - n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

и на множестве рациональных чисел:

$$\frac{p}{q} \leqslant \frac{p'}{q'} \Leftrightarrow q'p \leqslant p'q.$$

Читателю предлагается в качестве упражнения проверить выполнение свойств отношения порядка.

*Задача* 1.16. Проверьте, что отношение на парах целых чисел

$$(n, m) \preccurlyeq (n', m') \Leftrightarrow n \leqslant n' \text{ и } m \leqslant m'$$

является отношением порядка, но не является линейный порядком.

*Задача* 1.17. Проверьте, что на множестве подмножеств некоторого множества $Z$ отношение $X \subseteq Y$ является отношением порядка. В каких случаях это будет отношение линейного порядка?

Далее (см. задачу 7.180) мы убедимся, что в специальной теории относительности имеется естественное отношение «до/после», которое является отношением частичного порядка, а в общей теории относительности может и не быть такого отношения, см. примеры в разделе 7.21. Поэтому понятие «отношение порядка» имеет прямые физические применения.

**Определение 1.18.** Если множество $X$ имеет отношение порядка, то элемент $x \in X$ называется *минимальным*, если не существует элементов $y \in X$ таких, что $y \preccurlyeq x$ и $y \neq x$. Аналогично можно определить *максимальный* элемент.

В случае линейно упорядоченного множества, минимальность элемента $x \in X$ можно сформулировать проще, как выполнение неравенства $x \preccurlyeq y$ для любого $y \in X$. Однако для частично упорядоченного множества такой вариант определения отличается от определения выше.

*Задача* 1.19. Докажите, что в линейно упорядоченном множестве минимальный элемент единственный.

*Задача* 1.20. Приведите пример, когда в частично упорядоченном множестве минимальный элемент не единственный.

**Определение 1.21.** Подмножество $X \subseteq \mathbb{N}$ называется *конечным*, если оно либо пустое, либо имеет максимальный элемент.

Более подробно понятия конечного и бесконечного будут рассматриваться в разделе 1.14. Пока же при работе с натуральными числами полезно иметь в виду характеристическое свойство натуральных чисел, *аксиому математической индукции*: Если подмножество $X \subseteq \mathbb{N}$ содержит число $1$ и из того, что $n \in X$ следует, что $n + 1 \in X$, то обязательно $X = \mathbb{N}$.

*Задача* 1.22. Выведите из аксиомы математической индукции свойство «полной индукции»: Если подмножество $X \subseteq \mathbb{N}$ обладает свойством

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\forall m < n, m \in X) \Rightarrow n \in X,$$

то $X = \mathbb{N}$.

[[ Рассмотрите множество $Y = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m < n, m \in X\}$. ]]

*Задача* 1.23. Докажите, что если множество $X \subseteq \mathbb{N}$ конечно, то его дополнение

$$\mathbb{N} \setminus X = \{y \in \mathbb{N} \mid y \notin X\}$$

бесконечно.

[[ Постройте противоречие, предположив конечность $\mathbb{N} \setminus X$. ]]

*Задача* 1.24. Докажите, что в любом непустом множестве натуральных чисел существует минимальный элемент.

[[ Предположив противное, докажите по (полной) индукции, что ни одно натуральное число в данном множестве не содержится. ]]

*Задача* 1.25. Докажите, что в любом конечном частично упорядоченном множестве есть минимальный относительно его частичного порядка элемент.

[[ Считайте множество подмножеством натуральных чисел. Используйте индукцию по его максимальному в смысле порядка натуральных чисел элементу, не забывая, что его частичный порядок может быть другим. ]]

*Задача* 1.26. Докажите, что любой частичный порядок на конечном множестве можно расширить до линейного порядка.

[[ Считайте множество подмножеством натуральных чисел и используйте индукцию по его максимальному в смысле порядка натуральных чисел элементу. ]]

Далее мы будем работать с понятием последовательности и предела, поэтому даём соответствующее определение:

**Определение 1.27.** *Последовательность элементов множества* $X$ — это отображение $s : \mathbb{N} \to X$. Для последовательностей часто пишут $s_n$ вместо $s(n)$.

Имея в виду всю последовательность, часто пишут $(s_n)$. Говоря «элемент последовательности» мы будем иметь в виду пару $(n, s_n)$ из номера $n \in \mathbb{N}$ и значения $s_n$, то есть элемент графика этой последовательности. Таким образом, последовательность может иметь одно значение, но последовательность всегда имеет бесконечно много элементов. Указанное соглашение будет важно, когда мы будем употреблять фразы «конечное число элементов последовательности» или «бесконечное число элементов последовательности». Так как элементы последовательности занумерованы натуральными числами, то мы понимаем, что означают в данном случае слова «конечное» и «бесконечное».

1.3. **Пределы и фундаментальные последовательности, определение действительных чисел.** Обсудив базовые свойства множеств, мы собираемся более детально изучить множество рациональных чисел и понять, почему его надо расширять до множества действительных чисел. Сделаем несколько определений:

**Определение 1.28.** Если $a < x < b \in \mathbb{Q}$, то мы будем говорить, что интервал $(a, b)$ (от $a$ до $b$ не включая концы) является *окрестностью* числа $x$.

**Определение 1.29.** Число $a_0 \in \mathbb{Q}$ является *пределом последовательности* $(a_n)$ рациональных чисел, если для любой окрестности $U(a_0)$ найдётся номер $N$, такой что при $n \geqslant N$ выполняется $a_n \in U(a_0)$. Тогда пишут

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$$

или $a_n \to a_0$ при $n \to \infty$; и говорят, что $a_n$ стремится к $a_0$ при $n$ стремящемся к бесконечности.

Определение предела последовательности удобно понимать так, что в любой окрестности $U(a_0)$ лежат все члены последовательности кроме конечного их числа (напомним, что подмножество $\mathbb{N}$ называется *конечным*, если у него есть максимальный элемент). Например, по определению легко проверить, что $1/n \to 0$ при $n \to \infty$. С другой стороны, легко проверить, что последовательность $(-1)^n$ не имеет предела.

**Определение 1.30.** Последовательность $(a_n)$ рациональных чисел называется *фундаментальной* или *последовательностью Коши*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n, m \geqslant N(\varepsilon)\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

*Задача* 1.31. Произнесите логическую формулу в определении фундаментальной последовательности.

В этом определении логическая формула посложнее. Словами можно передать её так: при достаточно больших $n$ и $m$ разность $|a_n - a_m|$ будет меньше любого наперёд заданного положительного $\varepsilon$. Примером нефундаментальной последовательности является последовательность $(-1)^n$, или даже последовательность с $a_n = n$.

**Лемма 1.32.** *Если последовательность имеет предел, то она фундаментальна.*

*Доказательство.* Возьмём в определении предела окрестность $U(a_0)$, длина которой $\leqslant \varepsilon$, например $(a_0 - \varepsilon/2, a_0 + \varepsilon/2)$. Взяв в определении предела соответствующее этой окрестности $N$, получаем, что при $n, m \geqslant N$ числа $a_n, a_m$ будут лежать в $U(a_0)$ и значит тогда будет выполняться $|a_n - a_m| < \varepsilon$. ☐

Неформально говоря, проблема с рациональными числами состоит в том, что в них «нет» некоторых чисел, например $\sqrt{2}$, то есть числа, дающего в квадрате 2. Однако нам нетрудно построить фундаментальную последовательность $c_n$ по такому принципу (это на самом деле конечные десятичные дроби):

$$c_n = \max\{m10^{-n} \mid m \in \mathbb{Z}, (m10^{-n})^2 \leqslant 2\}.$$

У нас всегда будет выполняться неравенство $c_n^2 < 2 < (c_n + 10^{-n})^2$ и если бы у этой последовательности был предел $c_0 \in \mathbb{Q}$, то по его определению можно было бы установить (далее это будет исследовано в более общем виде как «существование обратной функции»), что $c_0^2 = 2$.

*Задача* 1.33. Проверьте фундаментальность построенной последовательности десятичных приближений $\sqrt{2}$.

Таким образом мы заключаем, что отсутствие пределов некоторых фундаментальных последовательностей рациональных чисел в множестве рациональных чисел является практически важной проблемой, которую хочется решить. Существует несколько способов расширить множество рациональных чисел так, чтобы фундаментальные последовательности имели пределы и выполнялись другие полезные свойства. Мы воспользуемся самой прямолинейной процедурой — «пополнением», тем более, что она имеет дальнейшее развитие при пополнении метрических пространств, нормированных пространств и т.п.

**Определение 1.34.** На множестве фундаментальных последовательностей рациональных чисел $c(\mathbb{Q})$ введём отношение эквивалентности

$$(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n \geqslant N(\varepsilon), |a_n - b_n| < \varepsilon.$$

Фактормножество по этому отношению эквивалентности обозначим $\mathbb{R} = c(\mathbb{Q})/{\sim}$.

Проверим транзитивность этого отношения эквивалентности (остальные свойства очевидны):

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0\ \exists N'(\varepsilon)\ \forall n \geqslant N'(\varepsilon), |a_n - b_n| < \varepsilon \text{ и } \forall \varepsilon > 0\ \exists N''(\varepsilon)\ \forall n \geqslant N''(\varepsilon), |b_n - c_n| < \varepsilon\\ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) = \max\{N'(\varepsilon/2), N''(\varepsilon/2)\}\ \forall n \geqslant N(\varepsilon),\\ |a_n - c_n| \leqslant |a_n - b_n| + |b_n - c_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Значит, действительно можно говорить о фактормножестве.

Заметим, что любому рациональному числу $x \in \mathbb{Q}$ соответствует фундаментальная последовательность $(x)$, в которой все члены равны $x$. Нетрудно убедиться по определению, что при разных $x \neq y \in \mathbb{Q}$ такие последовательности не эквивалентны. Это даёт вложение $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то есть мы действительно расширили множество рациональных чисел.

1.4. **Арифметические операции и сравнение действительных чисел.** Теперь нам нужно определить понятия арифметических операций и работу с неравенствами для действительных чисел. Определим сумму действительных чисел.

**Определение 1.35.** *Суммой последовательностей* $(a_n)$ и $(b_n)$ называется последовательность с членами $c_n = a_n + b_n$.

**Лемма 1.36.** *Сумма фундаментальных последовательностей фундаментальна. При замене последовательностей эквивалентными класс эквивалентности суммы не меняется.*

*Доказательство.* Первое утверждение верно, потому что (для достаточно больших $m$ и $n$)

$$|a_n - a_m| < \varepsilon/2 \text{ и } |b_n - b_m| < \varepsilon/2 \Rightarrow |(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| < \varepsilon.$$

Второе верно потому что если $(a_n) \sim (a'_n)$, то для достаточно больших $n$

$$|a_n - a'_n| < \varepsilon \Rightarrow |(a_n + b_n) - (a'_n + b_n)| < \varepsilon.$$

Аналогично происходит при замене $b_n$ на $b'_n$. □

Так как класс эквивалентности суммы последовательностей не меняется при замене любого из слагаемых на эквивалентное, то таким образом определена операция на классах эквивалентности $+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, аналогично определяется операция $- : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Коммутативность и ассоциативность сложения, нейтральность нуля и существование противоположного элемента следуют из того, что это всё выполняется на уровне последовательностей. Перед изучением произведения действительных чисел нам понадобится лемма.

**Лемма 1.37.** *Любая фундаментальная последовательность* $(a_n)$ *ограничена, то есть существует* $M$ *такое что* $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant M$.

*Доказательство.* Положим $\varepsilon = 1$ в определении фундаментальной последовательности. Тогда с номера $N = N(1)$ последовательность ограничена числом $|a_N|+1$. До этого были ещё некоторые члены последовательности, но в целом она ограничена максимальным из конечного набора чисел

$$\max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}.$$

□

*Задача* 1.38. Для прояснения написанной формулы докажите по индукции, что в конечной последовательности $b_1, \dots, b_n$ рациональных чисел есть максимальный элемент.

**Определение 1.39.** *Произведением последовательностей* $(a_n)$ и $(b_n)$ называется последовательность с членами $c_n = a_n b_n$.

**Лемма 1.40.** *Произведение фундаментальных последовательностей фундаментально. При замене последовательностей эквивалентными класс эквивалентности произведения не меняется.*

*Доказательство.* По предыдущей лемме выберем число $M$, которое ограничивает все фигурирующие в утверждениях последовательности.

Тогда первое утверждение верно, потому что (для достаточно больших $m$ и $n$)

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ и } |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2M} \Rightarrow$$
$$|a_n b_n - a_m b_m| = |a_n b_n - a_n b_m + a_n b_m - a_m b_m| \leqslant M|b_n - b_m| + M|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Второе верно потому что если $(a_n) \sim (a'_n)$, то для достаточно больших $n$

$$|a_n - a'_n| < \varepsilon/M \Rightarrow |a_n b_n - a'_n b_n| \leqslant M|a_n - a'_n| < \varepsilon.$$

Аналогично происходит при замене $b_n$ на $b'_n$. ☐

Таким образом определена операция умножения $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Свойства ассоциативности, дистрибутивности и нейтральности единицы проверяются на уровне последовательностей.

Определим теперь знак действительного числа и следующий из этого определения линейный порядок действительных чисел. Заметим, что если $(a_n) \sim 0$, то это просто означает, что последовательность $(a_n)$ стремится к нулю.

**Лемма 1.41.** *Если действительное число представлено фундаментальной последовательностью $(a_n) \not\sim 0$, то для некоторого рационального $\varepsilon > 0$ найдётся $N(\varepsilon)$, удовлетворяющее одному из свойств:*

*для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ выполняется $a_n \geqslant \varepsilon$ (тогда $(a_n)$ называется* положительной*);*

*для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ выполняется $a_n \leqslant -\varepsilon$ (тогда $(a_n)$ называется* отрицательной*).*

*Доказательство.* Если предел $(a_n)$ не равен нулю, то найдётся маленькая окрестность $(-2\varepsilon, 2\varepsilon) \ni 0$, такая что бесконечно много членов последовательности не попадает в неё. Без ограничения общности пусть бесконечно много раз $a_n \geqslant 2\varepsilon$ (случай когда бесконечно много раз $a_n \leqslant -2\varepsilon$ рассматривается аналогично и приводит к случаю отрицательной последовательности). Возьмём $\varepsilon > 0$ и $N(\varepsilon)$ в определении фундаментальности $(a_n)$ и для любого $m \geqslant N(\varepsilon)$ возьмём какое-нибудь $n \geqslant N(\varepsilon)$ так, чтобы $a_n \geqslant 2\varepsilon$ (таких $n$ бесконечное число и среди них есть не меньшие $N(\varepsilon)$). Тогда

$$|a_m - a_n| < \varepsilon, a_n \geqslant 2\varepsilon \Rightarrow a_m > \varepsilon.$$

Это уже выполняется для всех $m \geqslant N(\varepsilon)$, что и требовалось доказать. ☐

Заметим, что определение положительности и отрицательности не зависит от класса эквивалентности, так как если начиная с некоторого момента $a_n > \varepsilon$ и начиная с некоторого момента $|a_n - b_n| < \varepsilon/2$, то начиная с некоторого (возможно более позднего) момента $b_n > \varepsilon/2$. Таким образом, знак ненулевого действительного числа определён корректно. Сумма положительных чисел тогда оказывается положительной, сумма отрицательных — отрицательной. Произведение чисел одного знака будет положительным, а произведение чисел разных знаков — отрицательным.

Сравнение действительных чисел происходит по правилу $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$. Транзитивность

$$a < b \text{ и } b < c \Rightarrow a < c$$

следует из того, что сумма положительных чисел положительна и $c - a = (c - b) + (b - a)$. Остальные стандартные свойства неравенств проверяются аналогично.

Теперь разберёмся с делением действительных чисел.

**Лемма 1.42.** *Если $(a_n) \not\sim 0$ и последовательность $(a_n)$ фундаментальна, то последовательность $b_n$, заданная для достаточно больших $n$ формулой $b_n = 1/a_n$, а для остальных заданная произвольно, тоже фундаментальна.*

*Доказательство.* По предыдущей лемме найдётся положительное $\delta$, такое что $|a_n| > \delta$ для достаточно больших $n$. Тогда для достаточно больших $n$ и $m$ можно написать

$$|b_n - b_m| = \frac{|a_n - a_m|}{|a_n a_m|} \leqslant \frac{1}{\delta^2}|a_n - a_m|,$$

так как при достаточно больших $n$ и $m$ мы можем гарантировать $|a_n|, |a_m| > \delta$. Из определения фундаментальности, для достаточно больших $n$ и $m$ мы также имеем $|a_n - a_m| < \varepsilon\delta^2$. Тогда для достаточно больших $n$ и $m$ будет выполняться $|b_n - b_m| < \varepsilon$. ☐

Заметим, что работая с понятием предела последовательности и фундаментальной последовательности, мы всегда можем изменить последовательность в конечном числе позиций (для конечного числа индексов), не меняя предела, не меняя её фундаментальности и не меняя её класс эквивалентности в множестве фундаментальных последовательностей. Действительно, взяв какое-либо конкретное $M \in \mathbb{N}$ мы можем заменить все $N(\varepsilon)$ в определениях на $N'(\varepsilon) = \max\{N(\varepsilon), M\}$, тогда утверждение из определения продолжает быть верным и в нём перестают участвовать члены последовательности с индексами $n < M$. В частности, последовательность можно считать неопределённой для конечного числа индексов, если нас интересует только её предел или её фундаментальность.

Лемма 1.42 фактически устанавливает существование обратного по умножению $b$ для любого ненулевого действительного числа $a$. Обратное единственно, так как если есть другое обратное $b'$, то

$$b = b(ab') = (ba)b' = b'.$$

Докажем следующее полезное свойство («архимедовость») действительных чисел:

**Теорема 1.43.** *Для любого действительного числа $\alpha$ найдётся большее его целое и меньшее его целое.*

*Доказательство.* Представим $\alpha$ последовательностью $(a_n)$. По лемме 1.37 эта последовательность ограничена по модулю некоторым рациональным числом $p/q > 0$, а значит она ограничена по модулю и целым числом $p$. Тогда последовательность $(p - a_n)$ состоит из неотрицательных чисел и представляет неотрицательное действительное число. Это означает, что $\alpha \leqslant p$ по определению. Аналогично доказывается, что $\alpha \geqslant -p$. ☐

**Следствие 1.44.** *Для любого положительного действительного числа $\alpha$ найдётся натуральное $n$, такое что $\alpha > 1/n$.*

*Доказательство.* Найдётся целое $n > 1/\alpha$, которое очевидно должно быть натуральным. Домножив это неравенство на положительное $\alpha$ и поделив на положительное $n$, получим $\alpha > 1/n$. ☐

*Задача* 1.45. Докажите, что обратного по умножению действительного числа к числу 0 не существует.

1.5. **Полнота множества действительных чисел.** Заметим теперь, что определение предела и фундаментальной последовательности действительных чисел такое же, как в случае рациональных. Однако нам удобно будет дать эквивалентное определение предела с $\varepsilon$-окрестностью $(a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$ в качестве окрестности точки $a_0$, тогда условие $x \in (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$ переписывается как $|x - a_0| < \varepsilon$.

**Определение 1.46.** Число $a_0 \in \mathbb{R}$ является *пределом последовательности* $(a_n)$ действительных чисел, если для любого действительного $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N$, такой что при $n \geqslant N$ выполняется $|a_n - a_0| < \varepsilon$. Тогда пишут

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$$

или $a_n \to a_0$ и говорят, что $a_n$ стремится к $a_0$ при $n \to \infty$.

Например, следствие 1.44 теперь может быть сформулировано так: «последовательность действительных чисел $(1/n)$ стремится к нулю». Это важно, так как вследствие этого факта определение предела последовательности действительных чисел нам достаточно проверить для рациональных $\varepsilon > 0$. А именно, если нам дано положительное $\varepsilon \in \mathbb{R}$, то мы найдём $k$ такое, что $0 < 1/k < \varepsilon$. Подставив $1/k$ вместо $\varepsilon$ в определение и получив некоторое $N$, мы обнаружим, что это $N$ годится и для исходного $\varepsilon$. Аналогичное верно для определения фундаментальности последовательности действительных чисел, $\varepsilon$ в нём достаточно рассматривать только рациональные.

**Лемма 1.47.** *Если число $\alpha \in \mathbb{R}$ представлено фундаментальной последовательностью рациональных $(a_n)$, то в смысле определения предела последовательности действительных чисел*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

*Доказательство.* По определению предела мы должны доказать, что при любом $\varepsilon > 0$ для достаточно больших $n$ выполняется неравенство действительных чисел

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon,$$

причём по замечанию перед формулировкой леммы можно считать $\varepsilon > 0$ рациональным. Это неравенство равносильно выполнению двух неравенств действительных чисел

$$a_n - \alpha - \varepsilon < 0, \quad a_n - \alpha + \varepsilon > 0.$$

Лемма 1.41 определяет знак действительного числа и мы будем её использовать для интерпретации этих неравенств. Для установления первого неравенства мы должны проверить, что представляющая действительное число $a_n - \alpha - \varepsilon$ последовательность рациональных чисел $(a_n - a_m - \varepsilon)_m$ ($n$ фиксировано, а последовательность индексируется $m \in \mathbb{N}$) при достаточно больших $m$ состоит из рациональных чисел, меньших некоторого фиксированного отрицательного рационального числа. Во втором неравенстве нам надо проверить, что последовательность $(a_n - a_m + \varepsilon)_m$ при достаточно больших $m$ состоит из рациональных чисел, больших некоторого фиксированного положительного рационального числа.

По определению фундаментальности $(a_n)$ при достаточно большом $n$ и всех $m \geqslant n$ будет выполняться неравенство для рациональных чисел $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$. Тогда при достаточно больших $n$ и всех $m \geqslant n$ будут выполняться неравенства

$$a_n - a_m - \varepsilon < -\varepsilon/2, \quad a_n - a_m + \varepsilon > \varepsilon/2.$$

Это как раз означает, что при достаточно больших $n$ выполняются неравенства для действительных чисел

$$a_n - \alpha - \varepsilon < 0, \quad a_n - \alpha + \varepsilon > 0.$$

□

**Лемма 1.48.** *Между любыми двумя разными действительными числами есть рациональное.*

*Доказательство.* Пусть $a < b \in \mathbb{R}$, а $c = (a+b)/2$ лежит между ними. Возьмём $\varepsilon = c - a = b - c > 0$, тогда

$$(a, b) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon).$$

Возьмём теперь фундаментальную последовательность рациональных чисел $(c_n)$, представляющую $c$. Она стремится к $c$ по предыдущей лемме, следовательно рациональные числа $c_n$ для достаточно больших $n$ попадают в $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) = (a, b)$, что означает по определению интервала $a < c_n < b$. □

*Задача* 1.49. Докажите, что между любыми двумя разными действительными числами есть иррациональное.

[[ Используйте, например, иррациональность $\sqrt{2}$. ]]

**Теорема 1.50** (Полнота множества действительных чисел, критерий Коши). *Последовательность действительных чисел имеет предел в $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

*Доказательство.* Из сходимости последовательности к числу следует её фундаментальность, аналогично доказанному для рациональных чисел. Обратно, пусть у нас есть фундаментальная последовательность действительных чисел $(a_n)$, представим каждое $a_n$ как предел последовательности рациональных чисел $(a_{n,k})_k$ (последовательность индексируется числом $k$).

Так как

$$\lim_{k\to\infty} a_{n,k} = a_n,$$

то из элементов $a_{n,k}$ можно выбрать рациональное $b_n$, такое что $|a_n - b_n| < 1/n$. Тогда последовательность $(b_n)$ является последовательностью рациональных чисел, эквивалентной $(a_n)$ в смысле, аналогичном эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Фундаментальность $(b_n)$ проверяется с помощью неравенства

$$|b_n - b_m| \leqslant |a_n - a_m| + \frac{1}{n} + \frac{1}{m},$$

в котором при достаточно больших $n$ и $m$ будет выполняться $|a_n - a_m| < \varepsilon/3$, и будет выполняться $1/n, 1/m < \varepsilon/3$ по следствию 1.44.

Фундаментальная последовательность рациональных чисел $(b_n)$ представляет некоторое число $b \in \mathbb{R}$ и стремится к нему. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ при $n \geqslant N(\varepsilon/2)$ будет выполняться $|b_n - b| < \varepsilon/2$. Тогда будет выполняться и $|a_n - b| < \varepsilon/2 + 1/n$, что при достаточно большом $n$ с учётом следствия 1.44 даст $|a_n - b| < \varepsilon$. То есть $b$ — это предел $(a_n)$ по определению. ☐

Иногда, кроме конечных действительных пределов нам надо будет рассматривать бесконечные пределы. Дадим соответствующие определения:

**Определение 1.51.** Для последовательности действительных чисел $(a_n)$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ \exists N(x)\ \forall n \geqslant N(x), a_n > x;$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ \exists N(x)\ \forall n \geqslant N(x), a_n < x.$$

Условимся говорить, что *последовательность имеет предел*, если она имеет конечный предел или предел равный $+\infty$ или $-\infty$, будем говорить, что *последовательность сходится*, если она имеет конечный предел в $\mathbb{R}$. Также введём обозначение для *расширенной числовой прямой*, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. При этом мы считаем, что $-\infty$ меньше любого числа, а $+\infty$ больше любого числа, а обычные действительные числа сравниваются стандартно. Получается, что на расширенной числовой прямой имеется линейный порядок.

**Определение 1.52.** Последовательность действительных чисел $(a_n)$
*ограничена сверху*, если найдётся $M \in \mathbb{R}$, такое что $a_n \leqslant M$ для всех $n$;
*ограничена снизу*, если найдётся $M \in \mathbb{R}$, такое что $a_n \geqslant M$ для всех $n$;
*ограничена*, если найдётся $M \in \mathbb{R}$, такое что $|a_n| \leqslant M$ для всех $n$.

*Задача* 1.53. Докажите, что последовательность действительных чисел, имеющая предел в расширенной числовой прямой, ограничена либо снизу, либо сверху.

[[ Рассмотрите отдельно случаи конечного предела и предела $\pm\infty$. ]]

**Определение 1.54.** Последовательность действительных чисел $(a_n)$
*монотонно возрастает*, если для любого $n$ выполняется $a_n \leqslant a_{n+1}$;
*монотонно убывает*, если для любого $n$ выполняется $a_n \geqslant a_{n+1}$.

Если неравенства строгие, то говорят, что последовательность *строго возрастает* и *строго убывает* соответственно.

*Задача* 1.55. Докажите, что последовательность $(a_n)$ не является монотонной тогда и только тогда, когда найдутся номера $n < m < k$ такие что $(a_n - a_m)(a_m - a_k) < 0$.

**Теорема 1.56.** *Монотонная последовательность действительных чисел имеет предел. Если при этом последовательность ограничена, то её предел конечен.*

*Доказательство.* Пусть последовательность $(a_n)$ возрастает, без ограничения общности. Если она не ограничена сверху, то запишем отрицание определения ограниченности: для любого $M \in \mathbb{R}$, найдётся $n = N(M)$, такое что $a_n > M$. Так как последовательность монотонно возрастает, то отсюда следует, что $a_n > M$ при $n \geqslant N(M)$. А это есть определение стремления последовательности к $+\infty$.

Так что остаётся показать, что возрастающая и ограниченная сверху (а значит и снизу) последовательность имеет конечный предел. Нам надо доказать, что последовательность фундаментальна и использовать теорему 1.50. Предположим противное и выпишем отрицание фундаментальности

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall N \, \exists n, m \geqslant N, \ |a_n - a_m| \geqslant \varepsilon.$$

Без ограничения общности можно считать $n < m$ и $a_m - a_n \geqslant \varepsilon$. Найдём одну пару таких чисел $a_{n_1}, a_{m_1}$, чтобы $a_{m_1} \geqslant a_{n_1} + \varepsilon$. Положим в отрицании $N = m_1 + 1$ и найдём ещё одну пару $a_{n_2}, a_{m_2}$, чтобы $a_{m_2} \geqslant a_{n_2} + \varepsilon$ и $n_2 > m_1$. Продолжая так далее, будем находить пары $a_{n_k}, a_{m_k}$, чтобы $a_{m_k} \geqslant a_{n_k} + \varepsilon$ и $n_k > m_{k-1}$. Из монотонности последовательности также последует, что $a_{n_k} \geqslant a_{n_{k-1}} + \varepsilon$, то есть в итоге

$$a_{n_k} \geqslant a_{n_1} + (k-1)\varepsilon.$$

Из ограниченности последовательности сверху мы получаем неравенство

$$a_{n-1} + (k-1)\varepsilon \leqslant M \Leftrightarrow k \leqslant \frac{M - a_{n-1}}{\varepsilon} + 1,$$

которое не может быть верно при любом натуральном $k$. □

1.6. **Переход к пределу в неравенствах, единственность предела, вложенные отрезки.** Перепишем определение предела с помощью понятия окрестности для точки расширенной действительной прямой.

**Определение 1.57.** *Окрестность конечной точки $x$ действительной прямой* — это любой содержащий эту точку интервал $(a, b) \ni x$. *Окрестность точки $+\infty$* — это любой непустой интервал вида $(a, +\infty)$, а *окрестность точки $-\infty$* — любой непустой интервал вида $(-\infty, b)$.

**Лемма 1.58.** *Элемент расширенной числовой прямой $a_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом последовательности $(a_n)$ действительных чисел тогда и только тогда, когда для любой окрестности $U(a_0)$ найдётся номер $N$, такой что при $n \geqslant N$ выполняется $a_n \in U(a_0)$.*

*Доказательство.* Эквивалентность этого определения предела данным ранее определениям бесконечных пределов проверяется просто. Например, включение $a_n \in (a, +\infty)$ равносильно неравенству $a_n > a$.

Эквивалентность в случае конечного предела $a_0 \in \mathbb{R}$ следует из того, что

$$|a_n - a_0| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$$

и любая $\varepsilon$-окрестность $(a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$ является окрестностью точки $a_0$ в смысле данного выше определения, а любая окрестность вида $(a, b) \ni a_0$ содержит в себе $\varepsilon$-окрестность, если $\varepsilon = \min\{a_0 - a, b - a_0\}$. ☐

Терминология из доказанной леммы позволяет единообразно говорить о конечных и бесконечных пределах. Докажем утверждения, связанные с пределами и неравенствами.

**Лемма 1.59.** *Если последовательности $(a_n)$ и $(b_n)$ имеют пределы $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$, то для достаточно больших $n$ будет выполняться $a_n < b_n$.*

*Доказательство.* Найдём число $c$ строго между $a$ и $b$. Для конечных $a$ и $b$ можно взять полусумму, а если, к примеру, $a \in \mathbb{R}, b = +\infty$, то можно положить $c = a + 1$. Тогда применим определение предела к окрестностям $U(a) = (-\infty, c)$ и $U(b) = (c, +\infty)$. Для достаточно больших $n$ (в смысле обоих определений) мы будем иметь $a_n < c < b_n$. ☐

Взяв в предыдущей лемме одну и ту же последовательность, мы получим:

**Следствие 1.60.** *Любая последовательность имеет единственный предел.*

А переформулировав лемму в обратную сторону, мы получим:

**Теорема 1.61** (Предельный переход в неравенстве). *Если неравенство $a_n \leqslant b_n$ выполняется для бесконечного множества индексов $n$, и последовательности $(a_n)$ и $(b_n)$ имеют пределы, то*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n.$$

*Задача* 1.62. Верно ли, что если $a_n < b_n$ для всех $n$ и последовательности $(a_n)$ и $(b_n)$ имеют пределы, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n?$$

Следующая теорема бывает очень полезна при доказательстве того, что предел последовательности равен данному числу. Она позволяет доказать это, оценив последовательность сверху и снизу двумя другими последовательностями, у которых пределы известны и равны искомому числу.

**Теорема 1.63** (Теорема о двух милиционерах). *Если $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ для достаточно больших $n$, и $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = x$, то $\lim_{n\to\infty} b_n = x$.*

*Доказательство.* Возьмём окрестность $U(x) \ni x$. Для достаточно больших $n$ оказывается $a_n, c_n \in U(x)$ по определению предела. Тогда и $b_n$ тоже будет в $U(x)$. ☐

**Определение 1.64.** Последовательность отрезков $([a_n, b_n])_n$ называется *последовательностью вложенных отрезков*, если выполняются включения $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$ для любого $n$.

**Определение 1.65.** Последовательность вложенных отрезков $([a_n, b_n])_n$ называется *стягивающейся*, если длины отрезков стремятся к нулю, $b_n - a_n \to 0$.

**Теорема 1.66.** *Последовательность вложенных отрезков имеет непустое пересечение. Если последовательность стягивающаяся, то пересечение состоит из одной точки.*

*Доказательство.* Последовательность $(a_n)$ возрастает и ограничена сверху любым $b_k$. Последовательность $(b_k)$ убывает и ограничена снизу любым $a_n$. Значит обе последовательности имеют конечные пределы, $a$ и $b$. Переходя два раза к пределу в неравенстве $a_n \leqslant b_k$, мы получим $a \leqslant b$. Переходя к пределу $k \to \infty$ в неравенстве $a_n \leqslant a_k$, мы получим $a_n \leqslant a$ для любого $n$. аналогично $b \leqslant b_k$. Выходит, что отрезок $[a, b]$ лежит в пересечении нашей системы отрезков. На самом деле он совпадает с пересечением, так как, к примеру, если $x < a$, то для достаточно больших $n$ будет верно $a_n > x$, аналогично, если $x > b$, то для достаточно большого $n$ будет верно $b_n < x$, то есть такие $x$ выйдут из пересечения в некоторый момент.

Для стягивающейся последовательности очевидно, что $0 \leqslant b - a \leqslant b_n - a_n \to 0$, что неизбежно влечёт $b = a$. ☐

*Задача* 1.67. Приведите пример, когда последовательность вложенных интервалов $(a_n, b_n)$ не имеет общей точки. Сформулируйте достаточные условия того, чтобы последовательность вложенных интервалов всё же имела общую точку.

[[ Следите за концами интервалов. ]]

1.7. **Точные грани числовых множеств.** В конечном и непустом множестве действительных чисел всегда можно найти максимальный и минимальный элемент, для натуральных чисел это следует из определения конечного множества и из задачи 1.24, а для действительных чисел надо ещё определить понятие «конечного множества действительных чисел». Более развёрнуто конечное и бесконечно будет обсуждаться в разделе 1.14, сейчас же мы будем называть множество действительных чисел конечным, если они занумерованы натуральными числами от $1$ до некоторого $n$ как $a_1, \ldots, a_n$, тогда существование максимума конечного множества действительных чисел следует из задачи 1.38.

Однако, в бесконечном множестве действительных чисел может и не быть максимума или минимума, например, не существует минимального положительного числа. Но можно ввести понятия, заменяющие максимум и минимум множеств действительных чисел в тех случаях, когда максимума или минимума нет.

**Определение 1.68.** Для непустого $X \subseteq \mathbb{R}$ будем говорить, что $M \in \overline{\mathbb{R}}$ является его *верхней гранью*, если для любого $x \in X$ выполняется $x \leqslant M$. В качестве верхней грани всегда сгодится $+\infty$, а если у $X$ есть конечные верхние грани, то оно называется *ограниченным сверху*.

**Определение 1.69.** Для непустого $X \subseteq \mathbb{R}$ будем говорить, что $M \in \overline{\mathbb{R}}$ является его *нижней гранью*, если для любого $x \in X$ выполняется $x \geqslant M$. В качестве нижней грани всегда сгодится $-\infty$, а если у $X$ есть конечные нижние грани, то оно называется *ограниченным снизу*.

*Задача* 1.70. Докажите, что множество $X \subseteq \mathbb{R}$ ограничено сверху и снизу тогда и только тогда, когда множество $X' = \{|x| \mid x \in X\}$ ограничено сверху.

**Теорема 1.71.** *Среди всех верхних граней непустого $X \subseteq \mathbb{R}$ есть минимальная, которую мы будем обозначать $\sup X$ и называть «точная верхняя грань». Среди всех нижних граней непустого $X \subseteq \mathbb{R}$ есть максимальная, которую мы будем обозначать $\inf X$ и называть «точная нижняя грань».*

*Доказательство.* Докажем для верхних граней, рассуждения для нижних граней аналогичны. Если множество $X$ не ограничено сверху, то очевидно $\sup X = +\infty$. Иначе пусть $a \in X$, а $b$ — какая-то конечная верхняя грань $X$. Пусть $[a, b]$ — первый отрезок в последовательности вложенных отрезков, которую мы будем строить следующим образом. Возьмём середину отрезка $c = 1/2(a + b)$ если середина является верхней гранью, то следующий отрезок в последовательности будет $[a, c]$, иначе — $[c, b]$.

Делая так произвольное число раз, переходя к левой или правой половине отрезка, мы получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, которая будет стягивающейся, так как длина $(b_n - a_n) \leqslant (b - a)2^{-n+1} \leqslant (b - a)/n \to 0$. Также каждый отрезок в последовательности пересекается с $X$ по построению и не имеет элементов $X$ справа от себя (то есть больших $b_n$), значит его правый конец $b_n$ является верхней гранью $X$. Пусть $c$ — точка пересечения всех таких отрезков, докажем, что она является верхней гранью $X$ и меньших верхних граней нет.

Для любой $x \in X$ переходя к пределу в неравенстве $x \leqslant b_n$ мы получим $x \leqslant c$, то есть $c$ является верхней гранью. Если была бы меньшая верхняя грань $c' < c$, то при достаточно больших $n$ мы бы имели $c' < a_n$, из чего следует существование $x \in X$, такого что $c' < x$. □

Определение точной верхней грани можно расписать в кванторах так:

$$c = \sup X \Leftrightarrow (\forall x \in X, x \leqslant c) \text{ и } (\forall c' < c\, \exists x \in X,\ c' < x).$$

*Задача* 1.72. Запишите в кванторах как можно короче утверждение про два непустых множества $X, Y \subseteq \mathbb{R}$: $\sup X < \inf Y$.

*Задача* 1.73. Докажите, что при работе только с рациональными числами мы не всегда сможем найти верхнюю грань ограниченного множества рациональных чисел среди рациональных чисел.

[[ Можно рассмотреть стандартный пример $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$. ]]

1.8. **Другие определения действительных чисел.** Можно заметить, что любое действительное число $x \in \mathbb{R}$ однозначно определяется множествами

$$L_x = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\},\ R_x = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geqslant x\},$$

достаточно понять, что $x = \sup L_x$. Действительно, если мы берём $x' < x$, то между $x'$ и $x$ найдётся рациональное $r \in (x', x)$, а значит $x$ — это точная верхняя грань $L_x$ и точная нижняя грань $R_x$.

Альтернативный подход к определению действительного числа — это определение действительного числа как разбиения множества $\mathbb{Q}$ на два непустых подмножества $L, R$, так что $\forall \ell \in L, \forall r \in R, \ell < r$, причём множеству $R$ разрешается иметь минимальный элемент, а множеству $L$ не разрешается иметь максимальный элемент. Такое разбиение $\mathbb{Q} = L \cup R$ называется *сечением*. Для сечений можно определить сравнение $(L, R) \leqslant (L', R')$ как включения $L \subseteq L'$ и $R \supseteq R'$, любые два сечения оказываются сравнимыми и

$$(L, R) \leqslant (L', R') \text{ и } (L, R) \geqslant (L', R') \Rightarrow (L, R) = (L', R').$$

Для сечений достаточно легко доказывается теорема о существовании предела возрастающей ограниченной последовательности действительных чисел (то есть сечений) $(L_n, R_n)$. Ограниченность означает наличие непустого пересечения $R = \bigcap_n R_n$, монотонность означает монотонность по включению $L_1 \subseteq L_2 \subseteq \dots$, и если положить $L = \bigcup_n L_n$, то пара $(L, R)$ оказывается сечением, представляющим предел.

Также мы можем придумать канонический способ приближения действительных чисел снизу и сверху конечной десятичной дробью

$$\underline{d}_n(x) = \max\{m10^{-n} \mid m \in \mathbb{Z}, m10^{-n} \leqslant x\}, \quad \overline{d}_n(x) = \min\{m10^{-n} \mid m \in \mathbb{Z}, m10^{-n} \geqslant x\},$$

существование максимума и минимума гарантируется тем, что есть целые числа как большие $10^n x$, так и меньшие его. Очевидно, что $\underline{d}_n(x) \leqslant x \leqslant \overline{d}_n(x)$ и последовательность отрезков $[\underline{d}_n(x), \overline{d}_n(x)]$ стягивается. При этом десятичные записи $\underline{d}_n(x)$ и $\overline{d}_n(x)$ стабилизируются в каждой цифре и в пределе $n \to \infty$ могут рассматриваться как *бесконечная десятичная дробь*, причём можно проверить, что из $\underline{d}_n(x)$ и $\overline{d}_n(x)$ получается одна и та же бесконечная десятичная дробь. Если два числа $x, y$ различны, то при достаточно большом $n$ между $10^n x$ и $10^n y$ поместятся два целых числа, что доказывает однозначность представления числа десятичной записью.

*Задача* 1.74. Докажите, что между двумя различными действительными числами $x < y$ найдётся конечная десятичная дробь, $x < d < y$.

[[ Умножьте $x$ и $y$ на число вида $10^n$ так, чтобы их разность стала достаточно большой. ]]

Соответственно, ещё один подход к определению целых чисел — ввести бесконечные десятичные дроби, их сравнение и арифметические операции между ними. Теорема о существовании предела ограниченной возрастающей последовательности тогда выводится из рассмотрения конечных отрезков десятичных дробей (с фиксированным числом знаков после запятой) и сводится к теореме о существовании максимума в ограниченном множестве целых чисел.

Для увязывания других определений действительных чисел с определением через фундаментальные последовательности докажем:

**Утверждение 1.75.** *Свойство полноты $\mathbb{R}$ выводится из существования предела ограниченной монотонной последовательности.*

*Доказательство.* Из существования предела ограниченной монотонной последовательности выводится существование общей точки у последовательности вложенных отрезков. Пусть у нас есть фундаментальная последовательность $(x_n)$. Она ограничена, следовательно все её члены лежат в некотором отрезке $[a_1, b_1]$. В частности верно, что на этом отрезке лежит бесконечно много членов последовательности.

Пусть мы имеем аналогичное на $k$-м шаге, с отрезком $[a_k, b_k]$. Разобьём отрезок $[a_k, b_k]$ в середине на два и выберем в качестве $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ тот из них, который содержит бесконечно много элементов последовательности $(x_n)$ (см. замечание после определения 1.27). Такой найдётся, иначе и в $[a_k, b_k]$ было бы конечное число элементов последовательности. В итоге мы получим последовательность стягивающихся отрезков, которая имеет единственную общую точку $c$.

Применим определение фундаментальности, возьмём $\varepsilon > 0$ и найдём соответствующее $N(\varepsilon)$. Рассмотрим также отрезок $[a_k, b_k] \ni c$ из нашей последовательности, который имеет длину меньше $\varepsilon$. Среди членов последовательности с номерами $n \geqslant N(\varepsilon)$ найдётся лежащий на отрезке $[a_k, b_k]$. Обозначим его $x_n$, тогда $|x_n - c| < \varepsilon$. Так как при любом $m \geqslant N(\varepsilon)$ по определению фундаментальности $|x_n - x_m| < \varepsilon$, мы получаем

$$|x_m - c| < 2\varepsilon,$$

и это уже выполняется для любого $m \geqslant N(\varepsilon)$, то есть по определению получается $x_n \to c$. ☐

*Задача* 1.76. * Докажите, что все способы построения действительных чисел приводят к одному и тому же результату. Точнее, что любое упорядоченное поле $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$ (то есть поле, в котором арифметические операции связаны с неравенствами стандартным образом и содержащее в себе $\mathbb{Q}$ как упорядоченое подполе), обладающее «свойством Архимеда»

$$\mathbb{K} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n],$$

однозначно вкладывается в $\mathbb{R}$, если потребовать сохранение порядка при вложении и тождественность вложения на $\mathbb{Q}$, рассматриваемом как подполе $\mathbb{R}$.

[[ Для элемента $x \in \mathbb{K}$ постройте стягивающуюся последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, таких что $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ и $a_n \leqslant x \leqslant b_n$. В качестве образа $x$ в $\mathbb{R}$ возьмите пересечение соответствующей стягивающейся последовательности вложенных отрезков в $\mathbb{R}$. Проверьте совместимость такого вложения с арифметическими операциями. ]]

1.9. **Арифметические операции с пределами.** Закончив построение поля действительных чисел, мы можем продолжить изучать свойства пределов последовательностей. Для начала посмотрим, как понятие предела согласовано с арифметическими операциями.

**Теорема 1.77.** *Если последовательности* $(a_n)$ *и* $(b_n)$ *сходятся, то их сумма и разность тоже сходятся к сумме или разности пределов,*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n.$$

*Доказательство.* Пусть $a_n \to a, b_n \to b$. Утверждение следует из неравенства

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b|.$$

При достаточно больших $n$ выполняются неравенства

$$|a_n - a| < \varepsilon/2 \quad \text{и} \quad |b_n - b| < \varepsilon/2 \Rightarrow |(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| < \varepsilon.$$

□

**Определение 1.78.** Если $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то последовательность $(a_n)$ называется *бесконечно малой*.

**Определение 1.79.** Если $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, то последовательность $(a_n)$ называется *бесконечно большой* и пишут $a_n \to \infty$.

**Лемма 1.80.** *Последовательность ненулевых чисел* $(a_n)$ *бесконечно малая тогда и только тогда, когда последовательность* $(1/a_n)$ *бесконечно большая.*

*Доказательство.* По определению получается, что для любого $x > 0$ ($1/x > 0$) выполняется $|a_n| < x \Leftrightarrow |1/a_n| > 1/x$ для достаточно больших $n$. □

**Лемма 1.81.** *Сумма и разность бесконечно малых последовательностей бесконечно малая, произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей является бесконечно малой.*

*Доказательство.* Первое утверждение следует из того, что предел суммы равен сумме пределов. Для доказательства второго предположим $a_n \to 0$, $|b_n| \leqslant M$. Тогда выбрав $\varepsilon/M$ в качестве $\varepsilon$ в определении предела, мы будем иметь $|a_n| < \varepsilon/M$ для достаточно больших $n$. Но тогда $|a_n b_n| < \varepsilon$ для достаточно больших $n$, то есть $a_n b_n \to 0$. □

**Теорема 1.82.** *Если последовательности* $(a_n)$ *и* $(b_n)$ *сходятся, то их произведение тоже сходится к произведению пределов,*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

*Доказательство.* Мы используем лемму 1.37 о том, что фундаментальная (т.е. сходящаяся) последовательность ограничена. Пусть $a_n \to a, b_n \to b$, тогда утверждение следует из неравенства

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leqslant |a_n - a| \cdot \sup\{|b_n| \mid n \in \mathbb{N}\} + |b_n - b| \cdot |a|,$$

к правой части мы применяем утверждение о произведении бесконечно малой и ограниченной последовательностей. □

**Лемма 1.83.** *Если* $b_n \to b \in \mathbb{R}$ *и* $b \neq 0$, *то последовательность* $(1/b_n)$ *определена для всех* $n$, *кроме конечного числа, и ограничена.*

*Доказательство.* Положим $\varepsilon = |b|/2$ в определении предела. Тогда

$$|b_n - b| < |b|/2 \Rightarrow |b_n| > |b|/2$$

для достаточно больших $n$. Следовательно, $|1/b_n| < 2/|b|$ для достаточно больших $n$, что означает ограниченность. ☐

**Теорема 1.84.** *Если последовательности* $(a_n)$ *и* $(b_n)$ *сходятся и* $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

*Доказательство.* Пусть $a_n \to a, b_n \to b$. По предыдущей лемме $b_n$ не равно нулю для достаточно больших $n$ и $1/b_n$ ограничено, поэтому можно говорить о пределе частного даже если оно не всегда определено. Запишем

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bb_n}(a_n b - ab_n).$$

Последовательность $\left(\frac{1}{bb_n}\right)$ ограничена, а последовательность $(a_n b - ab_n)$ бесконечно малая по произведению пределов, так что разность оказывается бесконечно малой, что означает $a_n/b_n \to a/b$. ☐

*Задача* 1.85. Проверьте, что для бесконечных пределов выполняются символические тождества:

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, (-\infty) + (-\infty) = -\infty, \infty \cdot \infty = \infty.$$

*Задача* 1.86. Приведите примеры, показывающие, что для $(+\infty) + (-\infty)$ и $\infty \cdot 0$ может получиться что угодно на расширенной числовой прямой.

1.10. **Неравенство Бернулли, экспонента и логарифм.** Помимо арифметических операций с действительными числами мы определим тоже полезные операции экспоненты и логарифма.

**Теорема 1.87** (Неравенство Бернулли). *Для* $x \geqslant -1$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *выполняется*

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

*Доказательство.* Для $n = 1$ неравенство обращается в равенство. Воспользуемся математической индукцией. Пусть верно для $n - 1$:

$$(1+x)^{n-1} \geqslant 1 + (n-1)x.$$

Домножим на $(1 + x)$:

$$(1+x)^n \geqslant (1 + (n-1)x)(1+x) = 1 + nx + (n-1)x^2 \geqslant 1 + nx,$$

то есть неравенство верно и для $n$. По принципу математической индукции это означает, что неравенство верно для всех натуральных $n$. ☐

**Лемма 1.88.** *Если последовательность* $(a_n)$ *бесконечно малая, то*

$$\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \to 1.$$

Выражение в скобках очевидно положительно для достаточно больших $n$.

*Доказательство.* Мы предполагаем, что выполняется $|a_n| < 1$, что действительно верно для достаточно больших $n$. Тогда по неравенству Бернулли

$$\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \geqslant 1 + a_n.$$

Для отрицательного $a_n$ эта оценка уже годится для доказательства стремления к 1. Запишем также неравенство

$$\left(1+\frac{a_n}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{a_n}{n}\right)=1-\frac{a_n^2}{n^2}\leqslant 1,$$

из которого с помощью неравенства Бернулли следует

$$1+a_n\leqslant\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n\leqslant\frac{1}{\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n}\leqslant\frac{1}{1-a_n}.$$

Теперь теорема о двух милиционерах доказывает требуемое, так как самое левое и самое правое выражения в цепочке неравенств стремятся к 1. □

**Лемма 1.89.** *При фиксированном* $x\in\mathbb{R}$ *последовательность* $e_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ *положительна и возрастает при достаточно больших* $n$.

*Доказательство.* Ясно, что при достаточно больших $n$ эта величина будет положительна. Тогда нам достаточно доказать, что при достаточно больших $n$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n}\geqslant 1.$$

Запишем

$$\frac{e_{n+1}}{e_n}=\frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{x}{n}\right)=\left(1+\frac{\frac{x}{n+1}-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{x}{n}\right)=$$

$$=\left(1-\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{x}{n}\right)\geqslant\left(1-\frac{\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)=1,$$

используя неравенство Бернулли.

□

**Определение 1.90.** Определим *экспоненту* действительного числа

$$\exp x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Определение корректно, так как по предыдущим леммам последовательность в определении при фиксированном $x$ и достаточно больших $n$ положительна и возрастает. Следовательно, $\exp x>0$, но пока не исключено, что при некоторых положительных $x$ окажется, что $\exp x=+\infty$. Эту возможность исключает следующая лемма.

**Лемма 1.91.** *Для любого* $x\in\mathbb{R}$

$$\exp x\exp(-x)=1.$$

*В частности, значения экспоненты конечны.*

*Доказательство.* Запишем

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{x}{n}\right)^n=\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\to 1,$$

по лемме 1.88, так как $\frac{x^2}{n}\to 0$. Переходя к пределу, получаем требуемое. Бесконечность $\exp x$ при положительной $\exp(-x)$ сделала бы это выражение бесконечным, что неверно. □

Докажем теперь главное свойство экспоненты — что она переводит сложение в умножение.

**Лемма 1.92.** *Для любых* $x, y \in \mathbb{R}$

$$\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y.$$

*Доказательство.* Запишем, используя предыдущую лемму:

$$\frac{\exp(x+y)}{\exp x \cdot \exp y} = \exp(x+y)\exp(-x)\exp(-y) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{y}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{(x+y)^2}{n^2}+\frac{xy}{n^2}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)\right)^n \to 1,$$

по лемме 1.88, так как $-\frac{(x+y)^2}{n}+\frac{xy}{n}\left(1+\frac{x+y}{n}\right) \to 0.$ ☐

**Лемма 1.93.** *При любом* $x$

$$\exp x \geqslant 1+x.$$

*и при любом* $x < 1$

$$\exp x \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

*Доказательство.* Первое неравенство следует из неравенства Бернулли, второе следует из первого заменой $x \mapsto -x$. ☐

**Лемма 1.94** (Монотонность экспоненты)**.** *Если* $x < y$, *то* $\exp x < \exp y$.

*Доказательство.*

$$\exp y - \exp x = \exp x \cdot (\exp(y-x)-1) \geqslant \exp x \cdot (y-x) > 0.$$

☐

**Лемма 1.95** (Непрерывность экспоненты)**.** *Если* $x_n \to x_0$, *то* $\exp x_n \to \exp x_0$.

*Доказательство.* Используя уже установленные свойства экспоненты, запишем

$$\exp x_n - \exp x_0 = \exp x_0 \cdot (\exp(x_n - x_0) - 1).$$

Отбросив константу $\exp x_0$, можем оценить при $|x_n - x_0| < 1$, что выполняется при достаточно больших $n$,

$$x_n - x_0 \leqslant \exp(x_n - x_0) - 1 \leqslant \frac{x_n - x_0}{1 - x_n + x_0}.$$

В пределе слева и справа получается нуль, поэтому по теореме о двух милиционерах посередине в пределе тоже будет нуль. ☐

**Теорема 1.96** (Замечательный предел с экспонентой)**.** *Если* $x_n \to 0$ *и* $x_n \neq 0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\exp x_n - 1}{x_n} = 1.$$

*Доказательство.* В доказательстве предыдущей леммы уже установлены неравенства для $x_n \in (0,1)$

$$1 \leqslant \frac{\exp x_n - 1}{x_n} \leqslant \frac{1}{1-x_n},$$

и для $x_n \in (-1, 0)$

$$\frac{1}{1-x_n} \leqslant \frac{\exp x_n - 1}{x_n} \leqslant 1,$$

из которых следует требуемое в пределе по теореме о двух милиционерах. ☐

Теперь мы определим обратную функцию к экспоненте. На самом деле она существует по общей теореме об обратной функции, однако можно привести и прямую конструкцию. Для положительных $x$ мы знаем, что $\exp x \geqslant 1 + x$ и эта величина растёт неограниченно при росте $x$. Для отрицательных $x$ мы знаем, что $\exp x \leqslant \frac{1}{1-x}$ и эта величина может стать сколь угодно близкой к нулю при больших по модулю $x$. Тогда уравнение

$$\exp x = y$$

относительно $x$ для положительного $y$ можно решать *методом половинного деления*. Из предыдущих замечаний следует, что найдутся $a, b \in \mathbb{R}$, такие что $\exp a < y < \exp b$. Далее можно делить отрезок пополам и выбирать одну из половин так, чтобы всегда выполнялось неравенство

$$\exp a_n \leqslant y \leqslant \exp b_n.$$

В пределе $a_n, b_n \to x$ и используя свойство непрерывности экспоненты, мы получаем в пределе

$$\exp x \leqslant y \leqslant \exp x,$$

то есть $\exp x = y$. В дальнейшем это будет обобщено в виде «теоремы о промежуточном значении непрерывных функций», но мы приводим это рассуждение на случай, если читателю хочется как можно быстрее начать работать с экспонентой и логарифмом.

**Определение 1.97.** Для положительного $y$ единственное $x$, такое что $\exp x = y$ называется *натуральным логарифмом* $y$ и обозначается $\ln y$.

Из свойств экспоненты следуют свойства натурального логарифма:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \ln\frac{1}{x} = -\ln x, \quad \frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x, \quad 0 < x < y \Rightarrow \ln x < \ln y.$$

**Лемма 1.98** (Непрерывность логарифма). *Если* $x_n \to x_0 > 0$, *то* $\ln x_n \to \ln x_0$.

*Доказательство.* Используя уже установленные свойства логарифма, запишем

$$\ln x_n - \ln x_0 = \ln\frac{x_n}{x_0}.$$

Мы знаем, что $q_n = \frac{x_n}{x_0}$ стремится к 1, тогда по неравенствам для логарифма мы получим

$$\frac{q_n - 1}{q_n} \leqslant \ln q_n \leqslant q_n - 1.$$

В пределе слева и справа при $q_n \to 1$ получается нуль, поэтому по теореме о двух милиционерах посередине в пределе тоже будет нуль. ☐

**Определение 1.99.** Определим для $a > 0$ и $x \in \mathbb{R}$

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

Можно проверить, что $a^1 = a$ и тогда из свойств экспоненты следует, что $a^n$ в смысле нового определения равно $a^n$ в смысле школьного определения. Число

$$\exp 1 = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

обычно обозначается $e$ (число Эйлера) и тогда можно написать покороче

$$\exp x = e^x.$$

*Задача* 1.100. Проверьте тождество $a^{xy} = (a^x)^y$.

1.11. **Тригонометрические функции.** Определение тригонометрических функций фактически сводится к определению понятия «угол поворота», которое мы будем определять через понятие «длина дуги окружности». Длина кривой в полной общности будет определена в разделе 3.12 и из доказываемых там свойств этого понятия можно вывести тригонометрические функции и их свойства достаточно быстро. Однако в этом разделе мы приводим частный случай этой конструкции для читателей, которые хотят приступить к работе с тригонометрическими функциями побыстрее.

Рассмотрим координатную плоскость $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, на которой расстояние между двумя точками определено формулой:

$$\rho((x', y'), (x'', y'')) = \left((x' - x'')^2 + (y' - y'')^2\right)^{1/2}.$$

Позже будет дано более общее определение евклидова пространства и расстояния в нём с доказательством его свойств, однако нужные в этом разделе свойства расстояния можно проверить напрямую. Расстояние между точками $A$ и $B$ плоскости мы будем более коротко обозначать как $|AB|$.

*Задача* 1.101. Проверьте, что для точек на плоскости выполняется неравенство треугольника в виде $|AC| \leqslant |AB| + |BC|$.

На плоскости рассмотрим окружность

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Можно заметить исходя из свойств возведения в степень, что для любого $x \in (-1, 1)$ найдётся два $y = \pm(1 - x^2)^{1/2}$, удовлетворяющих уравнению окружности, а для $x \in \{-1, 1\}$ найдётся только один $y = 0$. Аналогично будет, если мы поменяем местами $x$ и $y$.

Можно убедиться, что при условии $a^2 + b^2 = 1$ линейное преобразование $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} x' &= ax - by \\ y' &= bx + ay \end{aligned}$$

не меняет расстояние между точками на плоскости и переводит окружность $\mathbb{S}$ в себя. Назовём это преобразование *вращением*.

*Задача* 1.102. Проверьте, что указанное вращение $R$ действительно не меняет расстояния между любыми двумя парами точек.

[[ Выпишите квадрат расстояния между двумя точками $(x', y')$ и $(z', t')$, полученными из точек $(x, y)$ и $(z, t)$ соответственно. ]]

Выделив на окружности точку $E = (1, 0)$, мы можем заметить, что она при вращении $R$ переходит в точку $(a, b)$. Таким образом, вращениями типа $R$ можно перевести любую точку окружности в любую другую и такое вращение полностью определяется значением $R(E)$. Иначе говоря, множество всех вращений находится во взаимно однозначном соответствии с самой окружностью $\mathbb{S}$, что мы и будем далее подразумевать.

Для двух разных точек на окружности $A, B \in \mathbb{S}$ рассмотрим уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\Delta y \cdot x - \Delta x \cdot y = d,$$

где $\Delta x = x(B) - x(A), \Delta y = y(B) - y(A)$, а $d$ подбирается из условия, что $A$ и $B$ лежат на прямой. Условия

$$\Delta y \cdot x - \Delta x \cdot y \geqslant d, x^2 + y^2 = 1$$

тогда будут определять *ориентированную дугу окружности* $\widehat{AB}$ с концами $A$ и $B$. Неформально говоря, эта дуга идёт «против часовой стрелки» по окружности от $A$ до $B$. Если $A = B$, то мы считаем дугу $\widehat{AB}$ *вырожденной* и состоящей из одной точки.

*Задача* 1.103. Обоснуйте, почему прямая пересекает окружность не более чем в двух точках.

Мы хотим определить *длину дуги окружности*. Рассмотрим несколько точек

$$A = C_1, \dots, C_N = B \in \widehat{AB},$$

идущих «против часовой стрелки» в том смысле, что дуги $\widehat{C_1C_2}, \widehat{C_2C_3}, \dots, \widehat{C_{N-1}C_N}$ лежат в $\widehat{AB}$ и пересекаются только по своим концам. Тогда отрезки $C_1C_2, C_2C_3, \dots, C_{N-1}C_N$ составляют ломаную $P$, *вписанную в дугу*. Эта ломаная лежит (нестрого) с одной стороны от любой прямой $C_iC_{i+1}$, являющейся продолжением одного из её отрезков, то есть является *выпуклой*. Действительно, прямая $C_iC_{i+1}$ пересекает окружность в двух точках $C_i$ и $C_{i+1}$, дуга $\widehat{C_iC_{i+1}}$ лежит по одну сторону от прямой, а другие вершины ломаной — по другую сторону от прямой.

**Определение 1.104.** Длина $\ell(P)$ для ломаной $P = C_1C_2 \dots C_N$ — это сумма расстояний $|C_1C_2| + |C_2C_3| + \dots + |C_{N-1}C_N|$.

**Определение 1.105.** Длина дуги $\widehat{AB}$ — это точная верхняя грань по всем ломаным

$$\ell(\widehat{AB}) = \sup\{\ell(P) \mid P \text{ вписана в } \widehat{AB}\}.$$

**Лемма 1.106** (Аддитивность длины дуги окружности)**.** *Если дуги $\widehat{AB}$ и $\widehat{BC}$ пересекаются только в точке $B$, то*

$$\ell(\widehat{AC}) = \ell(\widehat{AB}) + \ell(\widehat{BC}).$$

*Доказательство.* Рассматривая ломаные, вписанные в большую дугу $\widehat{AC}$, мы всегда можем добавить к их вершинам точку $B$ в подходящем по порядку месте, длина ломаной при этом может только увеличиться по неравенству треугольника. Такие ломаные $P$ разбиваются на две ломаные: $P'$ вписанная в $\widehat{AB}$ и $P''$ вписанная в $\widehat{BC}$, причём

$$\ell(P) = \ell(P') + \ell(P'').$$

Выполняющиеся по определению длины дуги неравенства

$$\ell(P') \leqslant \ell(\widehat{AB}), \quad \ell(P'') \leqslant \ell(\widehat{BC})$$

тогда дают неравенство

$$\ell(P) \leqslant \ell(\widehat{AB}) + \ell(\widehat{BC}).$$

Так как это выполняется для всех вписанных в $\widehat{AB}$ ломаных, то оказывается

$$\ell(\widehat{AC}) \leqslant \ell(\widehat{AB}) + \ell(\widehat{BC}).$$

В обратную сторону, из двух ломаных $P'$ и $P''$, вписанных в $\widehat{AB}$ и $\widehat{BC}$, мы можем собрать в правильном порядке вершин одну ломаную $P$, вписанную в $\widehat{AC}$. Возьмём $\varepsilon > 0$ и такие ломаные $P'$ и $P''$, что

$$\ell(P') > \ell(\widehat{AB}) - \varepsilon, \quad \ell(P'') > \ell(\widehat{BC}) - \varepsilon.$$

Тогда из равенства $\ell(P) = \ell(P') + \ell(P'')$ мы получим неравенство

$$\ell(\widehat{AC}) \geqslant \ell(P) > \ell(\widehat{AB}) + \ell(\widehat{BC}) - 2\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ здесь любое, то на самом деле

$$\ell(\widehat{AC}) \geqslant \ell(\widehat{AB}) + \ell(\widehat{BC}).$$

□

Длина дуги у нас корректно определена, аддитивна, и по определению инвариантна относительно вращений окружности. Но нам нужно установить её конечность, ведь точная верхняя грань в определении могла оказаться равной $+\infty$.

**Лемма 1.107.** *Если выпуклая ломаная $P$ содержится в треугольнике $\triangle ABC$ и идёт из вершины $A$ в вершину $B$, то $\ell(P) \leqslant |AC| + |BC|$*

*Доказательство.* Пусть первый из отрезков ломаной — $AC_2$. Если он лежит на стороне $AC$, то замена $A$ на $C_2$ уменьшает $\ell(P)$ и $|AC|$ на одну и ту же величину $|AC_2|$ и сводит задачу к рассмотрению ломаной с меньшим количеством отрезков, что мы можем считать верным по индукции.

Иначе пусть луч $AC_2$ пересекает сторону $CB$ в точке $C'$. Для той же ломаной $P$ и треугольника $AC'B$ мы находимся в условиях уже рассмотренной ситуации из предыдущего абзаца и можем уменьшить число отрезков ломаной, поэтому считаем по предположению индукции

$$\ell(P) \leqslant |AC'| + |C'B| \leqslant |AC| + |CC'| + |C'B| = |AC| + |BC|,$$

где мы использовали неравенство треугольника и аддитивность длины отрезка. □

**Лемма 1.108.** *Если касательные к окружности в точках $A \neq B$ пересекаются в точке $C$, которая лежит с той же стороны от прямой $AB$, что и дуга $\widehat{AB}$, то*

$$|AB| < \ell(\widehat{AB}) < |AC| + |CB|.$$

*Доказательство.* Нестрогие неравенства получаются предельным переходом из предыдущей леммы. На самом деле они строгие, так как мы можем разбить дугу на две части, сделать такую же оценку для каждой части и итоговые оценки немного улучшатся. □

*Задача* 1.109. Докажите подразумеваемое в предыдущей лемме утверждение, что через каждую точку окружности проходит ровно одна касательная, то есть прямая, пересекающая окружность в одной точке.

Теперь определим $\pi$ как длину верхней полуокружности $\{(x, y) \in \mathbb{S} \mid y \geqslant 0\}$, длина нижней полуокружности $\{(x, y) \in \mathbb{S} \mid y \leqslant 0\}$ будет такой же, так как поворот $(x, y) \to (-x, -y)$ переводит одну половину в другую, не меняя расстояния. Вписывание в окружность правильного шестиугольника со сторонами $1$ и описывание вокруг неё квадрата со стороной $2$ позволяют заключить (с использованием аддитивности длины дуги и леммы 1.108), что $3 < \pi < 4$. Далее мы часто будем использовать обозначение для $x \in \mathbb{R}$

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \mid n \in \mathbb{Z}, n \leqslant x\}.$$

**Лемма 1.110.** *Длины дуг на окружности принимают все значения $t \in [0, 2\pi)$.*

*Доказательство.* Ясно, что половина окружности имеет длину $\pi$. Далее любую дугу мы можем поделить (срединным перпендикуляром к её концам) на две части, переводящиеся друг в друга вращением и, значит, имеющим равные длины. Поэтому найдутся дуги длин $2^{-k}\pi$ для любого $k \in \mathbb{Z}^+$. Из таких дуг, подкручивая их на окружности так, чтобы они оказались в условиях леммы об аддитивности, мы можем составить дугу любой длины вида $m2^{-k}\pi$.

Теперь зафиксируем число $t \in [0, 2\pi)$. Рассмотрим последовательность вложенных отрезков $[a_k, b_k] \ni t$, концы которых имеют вид $m2^{-k}\pi$, для этого достаточно для каждого $k$ брать $m = \lfloor 2^k t/\pi \rfloor$ и $m = \lfloor 2^k t/\pi \rfloor + 1$ соответственно.

На окружности зафиксируем точку $E = (1, 0)$ и отложим от неё дуги $\widehat{EA_k}$ и $\widehat{EB_k}$ с длинами $a_k$ и $b_k$ соответственно, это можно сделать по доказанному выше. Мы знаем, что $\ell(\widehat{A_kB_k}) = 2^{-k}\pi \to 0$ при $k \to \infty$. Кроме того, при $n > k$ мы будем иметь неравенства

$$\ell(\widehat{A_kA_n}), \ell(\widehat{B_kB_n}) \leqslant 2^{-k}\pi.$$

Лемма 1.108 тогда даёт неравенства

$$|A_kB_k|, |A_kA_n|, |B_kB_n| < 2^{-k}\pi$$

при $n > k$. Тогда проекции точек $A_k$ и $B_k$ на ось $x$ образуют фундаментальную последовательность, аналогично и с их проекциями на ось $y$. Беря соответствующие пределы координат, мы получим точку $C$, которая лежит на окружности (из-за перехода к пределу в равенствах типа $x_k^2 + y_k^2 = 1$) и содержится во всех дугах $\widehat{A_kB_k}$. По аддитивности длина дуги $\widehat{EC}$ обязана быть заключена между длинами дуг $\widehat{EA_k}$ и $\widehat{EB_k}$ для любого $k$, следовательно она должна быть равна $t$.

□

Предыдущая лемма оправдывает следующее определение.

**Определение 1.111.** Для любого $t \in [0, 2\pi)$ определим $R_t$ как вращение, переводящее $E$ в точку $R_t(E)$, такую что $\ell(\widehat{ER_t(E)}) = t$. Для остальных $t$ определим $R_t$ как $R_s$ при $s = t - 2\pi \left\lfloor \frac{t}{2\pi} \right\rfloor$.

$R_t$ определено единственным образом, так как при наличии двух равных по длине дуг $\widehat{ER_t(E)}$ и $\widehat{ER'_t(E)}$ их концы $R_t(E)$ и $R'_t(E)$ обязаны совпасть, иначе это противоречило бы аддитивности длины дуги.

Из аддитивности и инвариантности относительно вращений длины дуги следуют равенства $R_t \circ R_{-t} = \mathrm{id}$, $R_{t+s} = R_t \circ R_s$.

*Задача* 1.112. Докажите равенства $R_t \circ R_{-t} = \mathrm{id}$, $R_{t+s} = R_t \circ R_s$, аккуратно рассмотрев все случаи.

**Определение 1.113.** Определим $\cos t$ и $\sin t$ как коэффициенты линейного преобразования $R_t$:

$$\begin{aligned} x' &= \cos t \cdot x - \sin t \cdot y \\ y' &= \sin t \cdot x + \cos t \cdot y. \end{aligned}$$

Из равенств $R_t \circ R_{-t} = \mathrm{id}$, $R_{t+s} = R_t \circ R_s$ соответственно выводятся формулы:

$$\begin{aligned} \cos(-t) &= \cos t, \\ \sin(-t) &= -\sin t, \\ \cos(t+s) &= \cos t \cdot \cos s - \sin t \cdot \sin s, \\ \sin(t+s) &= \sin t \cdot \cos s + \cos t \cdot \sin s. \end{aligned}$$

Определим стандартно $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$ и $\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$.

**Лемма 1.114.** *Для любого $x$ выполняется*

$$|\sin x| \leqslant |x|$$

*с равенством только при $x = 0$. Для любого $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ выполняется*

$$|\operatorname{tg} x| \geqslant |x|$$

*с равенством только при $x = 0$.*

*Доказательство.* При $t \in (0, \pi/2)$ применим лемму 1.108 к точкам $A = (\cos t, -\sin t)$ и $B = (\cos t, \sin t)$ и получим неравенства между положительными числами

$$2\sin x < 2x < 2\operatorname{tg} x,$$

то есть

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|.$$

Из нечётности синуса и тангенса они продолжаются на $(-\pi/2, \pi/2)$ с равенством только в нуле. Неравенство для синуса за пределами интервала $(-\pi/2, \pi/2)$ следует из того, что $\pi/2 > 1$. ☐

**Теорема 1.115** (Липшицевость и непрерывность синуса и косинуса). *Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполняются неравенства*

$$|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|, \quad |\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|.$$

*Кроме того, если $x_n \to x_0$, то*

$$\sin x_n \to \sin x_0, \quad \cos x_n \to \cos x_0.$$

*Доказательство.* Для синуса получаем по формуле разности синусов (которая следует из описанных выше формул) и оценки из леммы 1.114

$$|\sin x - \sin y| = 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x-y|.$$

Утверждение про предел верно, так как если $x_n - x_0 \to 0$, то получается $\sin x_n - \sin x_0 \to 0$. Для косинуса все рассуждения аналогичны. ☐

**Теорема 1.116** (Замечательный предел с синусом). *Если $x_n \to 0$ и $x_n \neq 0$, то*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n} = 1.$$

*Доказательство.* Неравенства из леммы 1.114, с учётом знаков выражений, на интервале $x_n \in (-\pi/2, \pi/2)$ могут быть переписаны как

$$\cos x_n \leqslant \frac{\sin x_n}{x_n} \leqslant 1.$$

из которых следует требуемое в пределе по теореме о двух милиционерах. ☐

Обратные тригонометрические функции определить ещё проще:

**Определение 1.117.** Для $x \in [-1, 1]$ рассмотрим точку окружности $C_x = (x, (1-x^2)^{1/2})$. Положим $\arccos x = \ell(\overset{\frown}{EC_x})$.

**Определение 1.118.** Для $y \in [-1, 1]$ рассмотрим точку окружности $S_y = ((1-y^2)^{1/2}, y)$. Положим $\arcsin y = \ell(\overset{\frown}{ES_y})$ при неотрицательном $y$ и $\arcsin y = -\ell(\overset{\frown}{S_yE})$ для отрицательных $y$.

**Определение 1.119.** Для $t \in \mathbb{R}$ рассмотрим точку окружности

$$T_t = \left(\frac{1}{(1+t^2)^{1/2}}, \frac{t}{(1+t^2)^{1/2}}\right)$$

Положим $\operatorname{arctg} t = \ell(\overset{\frown}{ET_t})$ при неотрицательном $t$ и $\operatorname{arctg} t = -\ell(\overset{\frown}{T_tE})$ для отрицательных $t$.

**Определение 1.120.** Для $t \in \mathbb{R}$ рассмотрим точку окружности

$$T_t = \left(\frac{t}{(1+t^2)^{1/2}}, \frac{1}{(1+t^2)^{1/2}}\right)$$

Положим $\operatorname{arcctg} t = \ell(\widehat{ET_t})$.

По определению легко видеть, что

- при $t \in [0, \pi]$ выполняется $\arccos(\cos t) = t$;
- при $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ выполняется $\arcsin(\sin t) = t$;
- при $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ выполняется $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t) = t$;
- при $t \in (0, \pi)$ выполняется $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} t) = t$.

Таким образом, мы определили все операции с действительными числами, которые использовались в школе без определения.

1.12. **Частичные пределы.** В этом разделе мы возвращаемся к пределам последовательностей и изучим их более продвинутые свойства. Сделаем некоторые определения.

**Определение 1.121.** Последовательность $(b_k)$ называется *подпоследовательностью* числовой последовательности $(a_n)$, если выполняется $b_k = a_{n_k}$ для некоторой строго возрастающей последовательности $(n_k)$ натуральных чисел.

Иначе можно сказать, что подпоследовательность, как отображение $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ есть композиция исходной последовательности $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ и строго возрастающей последовательности натуральных чисел $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $b = a \circ \nu$.

**Определение 1.122.** Значение $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *частичным пределом* числовой последовательности $(a_n)$, если $a$ является пределом некоторой подпоследовательности последовательности $(a_n)$.

**Определение 1.123.** Значение $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *точкой сгущения* числовой последовательности $(a_n)$, если в любой окрестности $a$ найдётся бесконечно много элементов последовательности $(a_n)$.

Напомним, что говоря «найдётся бесконечно много элементов» мы подразумеваем, что найдётся бесконечно много номеров $n \in \mathbb{N}$, таких что значение $a_n$ попадает в данную окрестность (см. также замечание после определения 1.27).

**Лемма 1.124.** *Значение $a \in \overline{\mathbb{R}}$ является частичным пределом последовательности чисел $(a_n)$ тогда и только тогда, когда оно является точкой сгущения этой последовательности.*

*Доказательство.* Если $a$ — частичный предел, то очевидно в любой окрестности $a$ лежит бесконечно много членов соответствующей подпоследовательности $a_{n_k}$.

Докажем в обратную сторону. Взяв окрестность $U_{1/k}(a)$, можно найти в ней $a_{n_k}$ из нашей последовательности так, что (если $k > 1$) номер $n_k$ будет больше ранее использованных номеров, $n_k > n_{k-1}$. Так можно сделать, так как в окрестности $U_{1/k}(a)$ у нас бесконечно много вариантов выбора. В итоге получится подпоследовательность $(a_{n_k})_k$, для которой $|a_{n_k} - a| < 1/k \to 0$ и которая поэтому стремится к $a$. □

В нашей ситуации определения частичного предела и точки сгущения оказались эквивалентны. Они также останутся эквивалентными для метрических пространств, см. лемму 3.36. Но для общих топологических пространств (см. задачу 9.209) это может оказаться не так. Поэтому с самого начала полезно эти понятия различать.

**Теорема 1.125** (Теорема Больцано–Вейерштрасса). *У любой последовательности действительных чисел есть частичный предел на расширенной числовой прямой.*

*Доказательство.* Если последовательность не ограничена сверху, то в любой окрестности $+\infty$, то есть в интервале вида $(m, +\infty)$, есть бесконечно много элементов последовательности, иначе максимальный из них ограничивал бы всю последовательность сверху, а при отсутствии элементов последовательности в $(m, +\infty)$ вся последовательность была бы ограничена сверху числом $m$. Значит в этом случае $+\infty$ является частичным пределом.

Аналогично, если последовательность не ограничена снизу, то $-\infty$ будет частичным пределом.

Пусть теперь последовательность $(x_n)$ ограничена. Значит, все её значения лежат на отрезке $[a, b]$. Поделим отрезок посередине точкой $c$ на два отрезка. На одном из отрезков будет находится бесконечное число элементов последовательности, обозначим его $[a_2, b_2]$. Далее будем продолжать делить отрезок пополам и выберем стягивающуюся последовательность отрезков $([a_k, b_k])$, в каждом из которых лежит бесконечно много элементов последовательности $(x_n)$.

Как мы знаем, существует единственная общая точка $x_0$ всех отрезков и $a_k, b_k \to x_0$ при $k \to \infty$. Ясно, что в любой окрестности $x_0$ оказывается некоторый отрезок $[a_k, b_k]$ целиком, и значит в ней оказывается бесконечно много элементов последовательности. Следовательно, $x_0$ оказывается точкой сгущения и частичным пределом $(x_n)$. ☐

**Теорема 1.126.** *В множестве частичных пределов любой числовой последовательности есть максимальный и минимальный элемент, они обозначаются*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

*Доказательство.* Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$ — это точная верхняя грань множества частичных пределов последовательности $(a_n)$. Если $a = -\infty$, то $-\infty$ должно быть частичным пределом, иначе бы частичных пределов вообще не было в противоречии с теоремой Больцано–Вейерштрасса. Так что далее рассматриваем случай $a \neq -\infty$.

Если последовательность не ограничена сверху, то в доказательстве теоремы Больцано–Вейерштрасса показано, что $+\infty$ является её частичным пределом и очевидно является верхним пределом. Поэтому далее считаем, что последовательность также ограничена сверху и $a \neq +\infty$.

В оставшихся случаях в любой окрестности $U(a)$ найдётся частичный предел $a'$, иначе $a$ не было бы точной верхней гранью множества частичных пределов. Но $U(a)$ является и окрестностью $a'$, следовательно в $U(a)$ есть бесконечно много точек последовательности. Это верно для любой окрестности $a$, значит $a$ является точкой сгущения и частичным пределом.

Для точной нижней грани доказательство аналогично. ☐

**Теорема 1.127** (Теорема о единственном частичном пределе)**.** *Если для числовой последовательности $(a_n)$ выполняется*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = a,$$

*то* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

*Доказательство.* Предположим противное определению предела: тогда вне некоторой окрестности $U(a)$ лежит бесконечно много элементов последовательности $a_n$. Тогда из них мы составим подпоследовательность последовательности $(a_n)$ и выберем её частичный предел $b$, он очевидно не равен $a$. Но тогда $b$ будет частичным пределом и для исходной последовательности — противоречие с единственностью частичного предела последовательности $(a_n)$. ☐

*Задача* 1.128. Для числовой последовательности $(a_n)$ обозначим

$$b_k = \sup\{a_n \mid n \geqslant k\}.$$

Докажите, что

$$\inf\{b_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \lim_{k\to\infty} b_k = \varlimsup_{n\to\infty} a_n.$$

*Задача* 1.129. Проверьте, что равенство $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$ может быть неверно даже для ограниченных последовательностей. Какой верный знак неравенства можно поставить здесь на место равенства?

[[ Может помочь результат предыдущей задачи. ]]

*Задача* 1.130. Пусть $\alpha$ — иррациональное число. Докажите, что последовательности $(\cos\pi\alpha n)$ и $(\sin\pi\alpha n)$ имеют множеством частичных пределов весь отрезок $[-1, 1]$.

[[ Рассмотрите точки $P_n = (\cos\pi\alpha n, \sin\pi\alpha n)$. Докажите, что какие-то две из них $P_n$ и $P_m$ могут оказаться на окружности сколь угодно близко друг от друга. Далее воспользуйтесь тем, что дуга $\overset{\frown}{P_nP_m}$ отличается от дуги $\overset{\frown}{P_{n-k}P_{m-k}}$ только вращением. ]]

*Задача* 1.131. Докажите, что у любой последовательности есть монотонная подпоследовательность.

[[ Можно рассуждать чисто комбинаторно, используя лишь порядок действительных чисел, а можно задействовать понятие частичного предела. ]]

*Задача* 1.132. Постройте какую-нибудь последовательность, частичными пределами которой являются все действительные числа и значки $+\infty$, $-\infty$.

1.13. **Топология на множестве действительных чисел.** В этом разделе мы изучим базовые понятия топологии на примере действительной прямой. Топология — это в первую очередь определение открытых и замкнутых множеств, дадим соответствующие определения на прямой.

**Определение 1.133.** Множество $U \subseteq \mathbb{R}$ называется *открытым*, если у каждой точки $x \in U$ есть окрестность $(a, b) \ni x$, которая полностью содержится в $U$.

*Задача* 1.134. Проверьте по определению, что любой интервал $(a, b)$ является открытым множеством. Является ли открытым множеством отрезок $[a, b]$?

**Лемма 1.135** (Свойства открытых множеств). *Пустое множество открыто, всё $\mathbb{R}$ открыто. Пересечение конечного числа открытых множество открыто, объединение произвольного семейства открытых множеств открыто.*

*Доказательство.* Первые два свойства очевидны по определению. Рассмотрим конечное пересечение $\bigcap_{k=1}^{n} U_k$ открытых множеств. Если точка $x$ содержится в пересечении, то есть содержится в каждом из множеств, то она содержится в $U_k$ вместе со своей окрестностью вида $(x - \varepsilon_k, x + \varepsilon_k)$. Положим $\varepsilon = \min_{1\leqslant k\leqslant n} \varepsilon_k > 0$, тогда $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ содержится во всех $U_k$, а значит и содержится в их пересечении.

Для объединения доказательство проще: $x \in \bigcup_\alpha U_\alpha$ тогда и только тогда, когда $x$ содержится хотя бы в одном из $U_\alpha$. Но если $x$ содержится в $U_\alpha$, то для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U_\alpha$, а значит

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha.$$

$\square$

Нетрудно привести пример бесконечного семейства открытых множеств

$$\{(-1/n, 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\},$$

пересечение которых состоит из одной точки и не является открытым. В целом, введение на некотором множестве $X$ системы «открытых множеств», удовлетворяющих свойствам из леммы, называется *топологией* на множестве $X$. Сделаем на всякий случай формальное определение:

**Определение 1.136.** Множество $X$ называется *топологическим пространством*, если на нём введена *топология* $\mathcal{O} \subset 2^X$, элементы которой называются *открытыми множествами*, и выполняются свойства:

1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$;

2) Для всех семейств открытых множеств $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$, объединение $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{O}$.

3) Для всех конечных семейств $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{O}$, пересечение $U_1 \cap \dots \cap U_k \in \mathcal{O}$.

Конечно, даже на множестве $\mathbb{R}$ можно ввести и другие топологии, например, *топология Зарисского* на $\mathbb{R}$ объявляет «открытыми» пустое множество, а также все множества $U$, дополнения к которым $\mathbb{R} \setminus U$ конечны.

*Задача* 1.137. Проверьте свойства топологии для топологии Зарисского на $\mathbb{R}$.

Далее мы продолжаем рассматривать стандартную топологию на $\mathbb{R}$.

**Определение 1.138.** Множество $F \subseteq \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если его дополнение $\mathbb{R} \setminus F$ открыто.

Иначе можно сказать, что $F$ замкнуто, если любая точка $x \notin F$ имеет не пересекающуюся с $F$ окрестность.

**Лемма 1.139** (Свойства замкнутых множеств). *Пустое множество замкнуто, всё $\mathbb{R}$ замкнуто. Объединение конечного числа замкнутых множество замкнуто, пересечение произвольного семейства замкнутых множеств замкнуто.*

*Доказательство.* Сводится к свойствам открытых множеств с помощью формул

$$\mathbb{R} \setminus \left(\bigcap_\alpha U_\alpha\right) = \bigcup_\alpha (\mathbb{R} \setminus U_\alpha), \quad \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right) = \bigcap_\alpha (\mathbb{R} \setminus U_\alpha).$$

☐

Изучим более детально структуру произвольного множества действительных чисел, которое не обязано быть открытым или замкнутым.

**Определение 1.140.** Для любого $X \subseteq \mathbb{R}$ и числа $y \in \mathbb{R}$ возможны три варианта:

Некоторая окрестность $U(y) \ni y$ полностью содержится в $X$, тогда $y$ — *внутренняя точка* $X$.

Некоторая окрестность $U(y) \ni y$ не пересекается с $X$, тогда $y$ — *внешняя точка* $X$.

Любая окрестность $U(y) \ni y$ содержит точки как из $X$, так и не из $X$, тогда $y$ — граничная точка $X$.

**Определение 1.141.** Множество внутренних точек $X$ обозначается $\operatorname{int} X$, множество граничных точек $X$ обозначается $\partial X$. Множество $X \cup \partial X$ называется *замыканием* $X$, $\operatorname{cl} X$.

**Лемма 1.142.** *Для любого $X \subseteq \mathbb{R}$ множество $\operatorname{int} X$ открыто, множества $\partial X$ и $\operatorname{cl} X$ замкнуты.*

*Доказательство.* Если $U(y) \subseteq X$, то для любой точки $y' \in U(y)$ множество $U(y)$ является её окрестностью, которая содержится в $X$. Это доказывает открытость $\operatorname{int} U$. Множество внешних точек можно описать как $\operatorname{int}(\mathbb{R} \setminus X)$ и оно тоже открыто.

Замыкание $\operatorname{cl} X$ является дополнением к множеству внешних точек и поэтому оно замкнуто. Граница $\partial X$ является дополнением к объединению двух открытых множеств, поэтому она замкнута. □

В качестве типичного примера можно рассмотреть полуинтервал $[a, b)$ при $a < b$. Его внутренность — это интервал $(a, b)$, его замыкание — отрезок $[a, b]$, его граница — множество из двух точек $a$ и $b$.

*Задача* 1.143. Проверьте, что $X \subseteq \mathbb{R}$ открыто тогда и только тогда, когда $\operatorname{int} X = X$.

*Задача* 1.144. Проверьте, что $X \subseteq \mathbb{R}$ замкнуто тогда и только тогда, когда $\operatorname{cl} X = X$.

Определим несколько более сложное, но очень важное, понятие:

**Определение 1.145.** Множество $X \subseteq \mathbb{R}$ называется *компактным*, если из любого покрытия открытыми множествами

$$X \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$$

можно выбрать конечное подсемейство $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$, которое всё ещё покрывает $X$, $X \subseteq U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$.

Неформально определение компактности часто произносят как «из любого открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие». Также компактное подмножество прямой или другого пространства коротко называют *компакт*.

**Теорема 1.146** (Критерий компактности). *Множество $X \subseteq \mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.*

*Доказательство.* Докажем сначала лёгкую часть — компактное множество ограничено и замкнуто. Семейство интервалов $(-n, n)$ покрывает всё $\mathbb{R}$ и множество $X$ тоже. Если из него можно оставить конечную подсистему (то есть на самом деле один интервал), то $X$ окажется ограниченным. Пусть теперь $x \notin X$, тогда семейство открытых множеств

$$U_n = (-\infty, x - 1/n) \cup (x + 1/n, +\infty)$$

покроет всё $X$. Если его конечное подсемейство покроет $X$, то на самом деле будет выполняться

$$X \subset (-\infty, x - 1/n) \cup (x + 1/n, +\infty)$$

для некоторого натурального $n$. Это будет значить, что $X$ не пересекается с $(x - 1/n, x + 1/n)$, то есть $x$ на самом деле внешняя точка $X$. Это верно для любой $x \notin X$, а значит по определению $\mathbb{R} \setminus X$ открыто, а $X$ замкнуто.

В обратную сторону будем доказывать от противного. Предположим, что из системы $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ нельзя выбрать конечное покрытие для $X$, которое ограниченно и замкнуто. Фиксируем систему открытых множеств $\mathcal{U}$ и будем менять множество $X$ на определённым образом выбранные его подмножества. Так как $X$ ограничено, то оно содержится в отрезке $[a_1, b_1]$. Разобьём $[a_1, b_1]$ на два равных отрезка и выберем тот из них в качестве $[a_2, b_2]$, для которого множество $X \cap [a_2, b_2]$ нельзя покрыть конечным подсемейством $\mathcal{U}$. Так сделать можно, ибо если покрыть конечным подсемейством можно пересечение $X$ с каждым из двух отрезков разбиения, то покрыть конечным подсемейством $\mathcal{U}$ можно и пересечение $X$ с исходным отрезком.

Повторяя эту конструкцию, мы получаем семейство стягивающихся отрезков $[a_n, b_n]$ с общей точкой $x$ и свойством, что пересечение $X \cap [a_n, b_n]$ нельзя покрыть конечным подсемейством семейства открытых множеств $\mathcal{U}$. Но тогда в любой окрестности $x$ есть точки из $X$. Следовательно $x$ не является внешней точкой $X$, и из замкнутости получаем $x \in X$. Значит $x \in U$ для некоторого $U \in \mathcal{U}$. Из того, что $a_n, b_n \to x$ следует, что $[a_n, b_n] \subseteq U$ для достаточно больших $n$, то есть пересечение $X \cap [a_n, b_n]$ можно покрыть одним элементом семейства $\mathcal{U}$. Полученное противоречие доказывает утверждение. □

*Задача* 1.147. Докажите, что $X \subseteq \mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда любая последовательность чисел из $X$ имеет частичный предел в $X$.

[[ Это нетрудно сделать, используя критерий компактности и теорему Больцано–Вейерштрасса. Поучительно также вывести это свойство из компактности напрямую, не используя критерия. ]]

Есть ещё один полезный пример компактности.

**Определение 1.148.** На расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$ определим топологию аналогично определению топологии на $\mathbb{R}$, считая её подмножество открытым, если оно вместе с любой своей точкой содержит некоторую её окрестность. При этом будем считать окрестностями точки $-\infty$ полуинтервалы вида $[-\infty, x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$, окрестностями $+\infty$ — полуинтервалы вида $(x, +\infty]$, а окрестностями конечных точек — содержащие их интервалы.

**Теорема 1.149.** *Расширенная числовая прямая с определённой выше топологией компактна.*

*Доказательство.* Если $-\infty$ и $+\infty$ покрыты открытыми множествами $U_-$ и $U_+$ из некоторого покрывающего расширенную числовую прямую семейства открытых множеств $\mathcal{U}$, то $[-\infty, a) \subseteq U_-$ и $(b, +\infty] \subseteq U_+$ для некоторых $a, b \in \mathbb{R}$.

Отрезок $[a, b]$ тоже покрыт системой $\mathcal{U}$, и значит конечное подсемейство $\{U_1, \ldots, U_N\} \subseteq \mathcal{U}$ покрывает его из его компактности. Тогда конечное подсемейство

$$\{U_-, U_1, \ldots, U_N, U_+\} \subseteq \mathcal{U}$$

покрывает всю расширенную числовую прямую. □

*Задача* 1.150. Постройте *гомеоморфизм* $\overline{\mathbb{R}}$ на отрезок $[-1, 1]$, то есть обратимое отображение, которое сохраняет систему открытых множеств (топологию).

При обсуждении непрерывности функции, определённой на некотором подмножестве действительных чисел, будет важно следующее понятие:

**Определение 1.151.** Пусть $X$ — фиксированное подмножество $\mathbb{R}$. Множество $U' \subseteq X$ называется *открытым относительно* $X$, если для некоторого открытого $U \subseteq \mathbb{R}$ выполняется $U' = U \cap X$. Все открытые относительно $X$ множества задают на множестве $X$ *индуцированную топологию*.

Например, множество $[0, 1)$ не открыто, как подмножество прямой, но открыто относительно отрезка $[0, 2]$.

*Задача* 1.152. Докажите, что если множества $Z, Y \subseteq X$ открыты относительно $X$ и не пересекаются, то найдутся непересекающиеся открытые $U, V \subseteq \mathbb{R}$, такие что $Z = X \cap U$ и $Y = X \cap V$.

[[ У любой точки $y \in Y$ найдите окрестность $U(y) = (y - \varepsilon_y, y + \varepsilon_y)$, не пересекающуюся с $Z$, аналогично для $z \in Z$ найдите $U(z) = (z - \varepsilon_z, z + \varepsilon_z)$, не пересекающуюся с $Y$. Потом уменьшите размеры каждой из этих окрестностей в два раза и рассмотрите их объединения. ]]

**Определение 1.153.** Множество $X \subseteq \mathbb{R}$ называется *плотным* в $\mathbb{R}$, если $\operatorname{cl} X = \mathbb{R}$. Множество $Y \subseteq \mathbb{R}$ называется *неплотным* в $\mathbb{R}$, если его дополнение $\mathbb{R} \setminus Y$ плотно в $\mathbb{R}$.

*Задача* 1.154. Проверьте, что $X \subseteq \mathbb{R}$ плотно тогда и только тогда, когда оно пересекает любое непустое открытое множество.

*Задача* 1.155. Проверьте, что $X \subseteq \mathbb{R}$ неплотно, если $\operatorname{int} X = \emptyset$.

Например, множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является плотным (мы уже доказали, что на любом интервале есть рациональное число), а также является неплотным (так как на любом интервале есть иррациональные числа, например вида $r\sqrt{2}$ с $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$). В математической литературе также встречается понятие *нигде не плотного множества* — множества, внутренность замыкания которого пуста. Мы этот термин использовать не будем во избежание путаницы.

**Теорема 1.156** (Теорема Бэра на прямой). *Последовательность плотных открытых множеств в* $\mathbb{R}$ *имеет плотное пересечение.*

*Доказательство.* Рассмотрим последовательность открытых плотных множеств $(U_k)$. Чтобы доказать, что пересечение $\bigcap_k U_k$ плотно по определению, мы должны доказать, что любой интервал $(a_1, b_1)$ имеет непустое пересечение с пересечением всей последовательности, $\bigcap_k U_k$. Множество $U_1$ имеет непустое пересечение с $(a_1, b_1)$, к тому же $U_1 \cap (a_1, b_1)$ открыто и в нём можно выбрать отрезок ненулевой длины $[a_2, b_2]$. Переходя к интервалу $(a_2, b_2)$ и продолжая так же далее, мы в пересечении $U_k \cap (a_k, b_k)$ всегда будем выбирать отрезок ненулевой длины $[a_{k+1}, b_{k+1}]$.

Получается последовательность вложенных отрезков, у которой есть общая точка $x$. По построению она принадлежит всем множествам $U_k$ и начальному интервалу $(a_1, b_1)$. ☐

Переходя к дополнениям, мы получим такую формулировку:

**Теорема 1.157** (Теорема Бэра на прямой для замкнутых множеств). *Последовательность неплотных замкнутых множеств в* $\mathbb{R}$ *имеет неплотное объединение.*

Заметим, что множество из одной точки является замкнутым и неплотным. Значит мы доказали

**Следствие 1.158** (Несчётность множества действительных чисел). *Множество* $\mathbb{R}$ *не является множеством значений никакой последовательности действительных чисел.*

Более формальная работа с понятиями «счётное» и «несчётное» будет происходить в следующем разделе.

1.14. **Мощность множества, счётные и несчётные множества чисел.** В этом разделе мы порассуждаем о том, насколько велики бывают бесконечные множества.

**Определение 1.159.** Множества $X$ и $Y$ называются *равномощными*, если существует обратимое отображение $f : X \to Y$. Будем обозначать это как $|X| = |Y|$.

Можно проверить, что равномощность — это «отношение эквивалентности». Мы ставим здесь кавычки, потому что отношения эквивалентности определяются на множествах, а «множество всех множеств» не является множеством. Тем не менее, если $f : X \to Y$ обратимо и $g : Y \to Z$ обратимо, то $g \circ f$ обратимо и его обратное — это $f^{-1} \circ g^{-1}$, то есть имеет место транзитивность. Остальные два свойства отношений эквивалентности очевидны.

Напомним, что конечным множеством натуральных чисел мы называли множество натуральных чисел, либо пустое, либо имеющее максимальный элемент.

**Определение 1.160.** Произвольное множество называется конечным, если оно пустое или равномощно некоторому множеству $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. При этом $n$ называется *мощностью конечного множества*, а мощностью пустого множества называется нуль. Мощность конечного множества $X$ обозначается $|X|$ или $\#X$.

*Задача* 1.161. Докажите, что любое непустое конечное множество натуральных чисел равномощно начальному отрезку натуральных чисел вида $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

[[ Используйте полную индукцию по максимальному элементу множества. ]]

*Задача* 1.162. Докажите, что мощность конечного множества определена корректно, то есть множества $[n]$ и $[m]$ не могут быть равномощными при $n \neq m$.

[[ Используйте математическую индукцию; предположив противное, постарайтесь уменьшить $n$ и $m$ на единицу. ]]

*Задача* 1.163. Докажите, что для мощности конечных множеств выполняются свойства:

$$|X \cup Y| + |X \cap Y| = |X| + |Y|, \quad |X \times Y| = |X| \cdot |Y|.$$

[[ Используйте математическую индукцию, считая $X = [n]$, $Y = [m]$. ]]

*Задача* 1.164. Докажите, что множество $\mathbb{N}$ не конечно, то есть не равномощно никакому своему начальному отрезку $[n] \subseteq \mathbb{N}$.

[[ Используйте математическую индукцию; предположив противное, постарайтесь уменьшить $n$ на единицу. ]]

Все бесконечные множества на первый взгляд выглядят одинаково, хотя мы уже доказали в следствии 1.158, что множество действительных чисел на самом деле больше, чем множество натуральных чисел. Это наблюдение мотивирует следующее определение.

**Определение 1.165.** Множество называется *счётным*, если оно равномощно $\mathbb{N}$.

**Лемма 1.166.** *Подмножество счётного множества либо конечно, либо счётно.*

*Доказательство.* Можно считать с помощью определения счётного множества, что наше счётное множество — это $\mathbb{N}$. Рассмотрим подмножество $X \subseteq \mathbb{N}$. Если оно пусто, то оно конечно по определению.

Иначе определим $x_1$ как минимальный элемент $X$, $x_2$ — как минимальный из оставшихся и так далее по индукции (используя результат задачи 1.24)

$$x_{n+1} = \min X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Если на некотором этапе мы не сможем назначить значение $x_{n+1} \in X$, то множество $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ будет поставлено в соответствие отрезку $[n] \subset \mathbb{N}$. Иначе получится отображение $\mathbb{N} \to X$, которое на самом деле обратимо, так как любой $x \in X$ окажется в образе этого отображения, $x = x_n$, для некоторого $n \leqslant x$. Последнее верно, так как для любого $n$ выполняется неравенство $x_n \geqslant n$, что в свою очередь верно по индукции. ☐

**Теорема 1.167.** *Множество $\mathbb{Z}$ счётно.*

*Доказательство.* Можно обратимо отобразить $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ как $f(0) = 1$, и для $n \in \mathbb{N}$ положить $f(n) = 2n$, $f(-n) = 2n + 1$. ☐

Операция декартова произведения делает конечные множества больше (если они состоят из более чем одного элемента). Однако у счётных множеств операция декартова произведения мощность не увеличивает:

**Лемма 1.168.** *Произведение $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ равномощно $\mathbb{N}$.*

*Доказательство.* Выпишем явные отображения: при $\frac{k(k-1)}{2} < n \leqslant \frac{k(k+1)}{2}$ $(k, n \in \mathbb{N})$ мы положим

$$f(n) = \left(n - \frac{k(k-1)}{2}, \frac{k(k+1)}{2} + 1 - n\right)$$

и в обратную сторону положим

$$f^{-1}(\ell, m) = \frac{(\ell + m - 1)(\ell + m - 2)}{2} + \ell.$$

☐

*Задача* 1.169. Проверьте, что выписанные в предыдущем доказательстве отображения $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и $f^{-1} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ взаимно обратны.

**Теорема 1.170.** *Множество* $\mathbb{Q}$ *счётно.*

*Доказательство.* Любой элемент $r \in \mathbb{Q}$ представляется в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$ с $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$. Таким образом $\mathbb{Q}$ равномощно подмножеству $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, то есть по лемме 1.168 равномощно подмножеству $\mathbb{N}$. Так как $\mathbb{Q}$ не является конечным, то по лемме 1.166 оно должно оказаться счётным. ☐

*Задача* 1.171. Докажите, что множество всех подмножеств $X$, $2^X$, не равномощно $X$.

[[ Предположите наличие отображения $f : X \to 2^X$ и подумайте, может ли в его образе лежать множество $Y = \{x \mid x \in X, x \notin f(x)\}$ (то есть используйте парадокс Бертрана Рассела). ]]

**Определение 1.172.** Отображение $f : X \to Y$ называется *инъективным*, если из $f(x) = f(x')$ следует $x = x'$.

**Определение 1.173.** Отображение $f : X \to Y$ называется *сюръективным*, если $f(X) = Y$.

Обратите внимание, что инъективное и одновременно сюръективное отображение является *биективным*, то есть обратимым.

**Определение 1.174.** Будем говорить, что множество $X$ *не мощнее* множества $Y$, если существует инъективное отображение $f : X \to Y$. Будем обозначать это как $|X| \leqslant |Y|$.

Для непустого $X$ можно определить отношение $|X| \leqslant |Y|$ через существование сюръективного отображения в обратную сторону, $g : Y \to X$. А для пустого $X$ считать, что $|X| \leqslant |Y|$ по определению. Сравним эти два варианта определения. Перейти от инъективного $f$ к сюръективному $g$ можно, отобразив каждый элемент $y \in Y$ вида $y = f(x)$ в $x$, а остальные элементы $Y$ отобразив в $X$ как-нибудь (если $X$ не пусто).

Перейти от сюръективного $g$ к инъективному $f$ можно, выбрав по одному $f(x)$ в каждом прообразе $g^{-1}(x)$ (прообраз не пуст из сюръективности $g$). Это кажется достаточно безобидным, но на самом деле в этом процессе используется *аксиома выбора*: *Имея семейство непустых множеств* $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *(формально рассматриваемое как отображение из множества* $A$ *в* $2^U$*, где* $U = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$*), можно выбрать по одному элементу* $f(\alpha) \in X_\alpha$ *для каждого* $\alpha$ *(то есть найти подходящее отображение* $f : A \to U$*).* Аксиому выбора также можно сформулировать как утверждение, что *(возможно) бесконечное декартово произведение*

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \left\{ f : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \;\middle|\; \forall \alpha \in A, f(\alpha) \in X_\alpha \right\}$$

непустых множеств само не пусто.

Обратите внимание, что определение (возможно) бесконечного декартова произведения зависит от определения отображения, которое в свою очередь зависит от определения декартова произведения двух множеств. Поэтому (возможно) бесконечное декартово произведение нужно определять отдельно от декартова произведения двух множеств. Мы иногда будем содержательно применять аксиому выбора (например, в задаче 5.33), а более систематическое обсуждение её следствий мы откладываем до раздела 9.9.

*Задача* 1.175. $^*$ Докажите, что если $|X| \leqslant |Y|$ и $|Y| \leqslant |X|$, то $|X| = |Y|$.

[[ Возьмите существующие по определению инъективные $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$. На множестве $X \cup Y$ введите отношение эквивалетности, $a \sim b$, если $b$ можно получить из $a$ повторением операций $f, g, f^{-1}, g^{-1}$. Разбейте $X \cup Y$ на классы эквивалентности по этому отношению, изучите структуру этих классов и задайте в каждом классе биекцию между элементами $X$ и элементами $Y$. Подумайте, используется ли при этом аксиома выбора. ]]

*Задача* 1.176. $^*$ Докажите, что множество $\mathbb{R}$ равномощно $2^{\mathbb{N}}$.

[[ Поработайте с представлением действительного числа двоичной записью и используйте результат задачи 1.175. ]]

*Задача* 1.177. $^*$ Докажите, что множество $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ равномощно $\mathbb{R}$.

[[ Используйте результат задачи 1.176 и обоснуйте символическую формулу $2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} = 2^{\mathbb{N}+\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}}$. ]]

## 2. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

**2.1. Непрерывность функций.** В этом разделе функцией мы будем называть отображение из некоторого множества действительных чисел в действительные числа, более точно такие отображения называют «функции одной переменной». Далее мы считаем функции определёнными на некотором подмножестве $X \subseteq \mathbb{R}$.

**Определение 2.1** (Определение непрерывности по Коши)**.** Функция $f : X \to \mathbb{R}$ *непрерывна* в точке $x_0 \in X$, если для любой окрестности $V \ni f(x_0)$ найдётся окрестность $U \ni x_0$, такая что
$$f(U \cap X) \subseteq V.$$

**Определение 2.2** (Определение непрерывности по Гейне)**.** Функция $f : X \to \mathbb{R}$ *непрерывна* в точке $x_0 \in X$, если для любой последовательности $(x_n) \subseteq X$ из $x_n \to x_0$ следует, что $f(x_n) \to f(x_0)$ при $n \to \infty$.

**Лемма 2.3.** *Эти два определения предела эквивалентны.*

*Доказательство.* (Коши)⇒(Гейне): Пусть $x_n \to x_0$ в множестве $X$. Для любой окрестности $V \ni f(x_0)$ мы возьмём соответствующую $U \ni x_0$. По определению предела последовательности найдётся $N$, такое что при любом $n \geqslant N$ будет выполняться $x_n \in U$, а значит $f(x_n) \in V$. Это означает по определению, что $f(x_n) \to f(x_0)$.

(Гейне)⇒(Коши): Пусть это не так, для некоторой $V \ni f(x_0)$ не нашлось окрестности $U \ni x_0$, у которой $U \cap X$ полностью переходит в $V$. Это значит, что для любого $n \in \mathbb{N}$ на интервале $(x_0 - 1/n, x_0 + 1/n)$ есть точка $x_n \in X$, для которой $f(x_n) \notin V$. Но тогда $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$, а $f(x_n) \not\to f(x_0)$ при $n \to \infty$, что противоречит определению по Гейне. □

Определение предела по Гейне очень удобно, так как позволяет сводить многие вопросы о непрерывности функции к свойствам пределов последовательностей. Неформально говоря, по Гейне функция непрерывна в $x_0$, если её можно переставить с операцией взятия предела:
$$f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$
если все $x_n$ и их предел $x_0$ лежат в области определения $f$.

*Задача* 2.4. Пусть непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обладает свойством $f(x) > x$ для любого $x$. Докажите, что для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ последовательность, определённая как
$$x_n = f(x_{n-1}),$$
стремится к $+\infty$.

[[ Используйте монотонность последовательности и непрерывность $f$ по Гейне. ]]

Сформулируем свойства арифметических операций над непрерывными функциями.

**Теорема 2.5.** *Если функции $f, g : X \to \mathbb{R}$ непрерывны в $x_0 \in X$, то непрерывны в той же точке и функции $f+g$, $f-g$ и $f\cdot g$. При условии $g(x_0) \neq 0$ будет непрерывной в точке $x_0 \in X$ и функция $f/g$.*

*Доказательство.* Утверждение про сумму, разность и произведение очевидно следует из возможности переставить предел последовательности (в определении непрерывности по Гейне) и арифметические операции.

Что касается частного функций, заметим, что если $|g(x_0)| = \varepsilon > 0$, то можно применить определение непрерывности по Коши для $V = (-\infty, -\varepsilon/2)$ или $V = (\varepsilon/2, +\infty)$

в зависимости от знака $g(x_0)$. Тогда получается, что хотя частное $f/g$ может быть не определено на всём множестве $X$, в некоторой относительной окрестности $U \ni x_0$ выполняется $|g(x_0)| > \varepsilon/2$. Значит, в этой окрестности на функцию $g$ можно делить и применять предел частного последовательностей в определении по Гейне. □

**Определение 2.6.** Будем говорить, что функция *непрерывна*, если она непрерывна в любой точке своей области определения.

**Теорема 2.7.** *Если функции $f : X \to \mathbb{R}$ и $g : Y \to \mathbb{R}$ непрерывны, то их композиция $g \circ f$ непрерывна в любой точке своей естественной области определения*

$$Z = f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}.$$

*Доказательство.* Если $x_n \to x_0$ в $Z$, то $f(x_n) \to f(x_0)$ по непрерывности $f$ и далее $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$ по непрерывности $g$, что и означает непрерывность $g \circ f$ по Гейне. □

*Задача* 2.8. Докажите непрерывность композиции другим способом — с помощью определения непрерывности по Коши.

*Задача* 2.9. Докажите, что функцию $f(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$, естественно определённую на $(0, +\infty)$, можно при $\alpha > 0$ доопределить как $f(0) = 0$ и она будет непрерывной.

[[ В любой точке множества $(0, +\infty)$ можно применить теорему о непрерывности композиции. В точке $x_0 = 0$ непрерывность можно проверить по Коши. ]]

2.2. **Обратные функции и промежуточные значения.** Для установления непрерывности обратных функций введём понятие *промежуток*: это отрезок $[a, b]$, интервал $(a, b)$ с возможно бесконечными $a$ или $b$, полуинтервал $[a, b)$ или $(a, b]$. Можно также указать характеристическое свойство промежутков:

**Лемма 2.10.** *Множество $X \subseteq \mathbb{R}$ тогда и только тогда является промежутком, если для любых $x < y \in X$ отрезок $[x, y]$ полностью лежит в $X$.*

*Доказательство.* Очевидно, что все промежутки обладают этим свойством. Пусть теперь $X \subseteq \mathbb{R}$ обладает указанным свойством, положим

$$a = \inf X, \quad b = \sup X.$$

Если $a = b$, то $X$ будет одной точкой, которую можно считать отрезком $[a, a]$. Для любого числа $c \in (a, b)$ по определению точной грани найдётся элементы $X$ как в $(a, c)$, так и в $(c, b)$. Следовательно и $c \in X$, то есть $X$ содержит весь интервал $(a, b)$. Далее $X$ является отрезком, полуинтервалом или интервалом в зависимости от того, содержит ли оно свои точные верхние/нижние грани. □

**Определение 2.11.** Функция $f : X \to \mathbb{R}$ *возрастает*, если для любых $x < y \in X$ оказывается $f(x) \leqslant f(y)$. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ *строго возрастает*, если для любых $x < y \in X$ оказывается $f(x) < f(y)$. Аналогично определение *убывания* и *строгого убывания* с неравенствами $f(x) \geqslant f(y)$ и $f(x) > f(y)$ соответственно.

**Определение 2.12.** Функция $f : X \to \mathbb{R}$ *монотонна*, если она возрастает на всём $X$ или убывает на всём $X$. Функция *строго монотонна*, если она строго возрастает или строго убывает.

**Теорема 2.13.** *Если $f : X \to \mathbb{R}$ переводит промежуток $X$ в промежуток $f(X)$ и монотонна, то она непрерывна.*

*Доказательство.* Пусть без ограничения общности $f$ возрастает. Если $f(X)$ пусто или состоит из одной точки, доказывать нечего.

Иначе используем определение по Коши. Если $f(x_0)$ не является концом промежутка $f(X)$, тогда для любой окрестности $V \ni f(x_0)$ найдутся значения $A < f(x_0) < B$, лежащие в $f(X) \cap V$. Возьмём $a$ и $b$ такие, что $f(a) = A$ и $f(b) = B$. Тогда из монотонности для любого $x \in (a, b)$ будет выполняться

$$A \leqslant f(x) \leqslant B \Rightarrow f(x) \in V.$$

Если $f(x_0)$ является, к примеру, правым концом $f(X)$, то мы просто для любой окрестности $V \ni f(x_0)$ найдём $A < f(x_0)$ в $f(X) \cap V$, возьмём $a$ такое, что $f(a) = A$ и из монотонности заключим, что для любого $x \in (a, +\infty) \cap X$ будет выполняться

$$A \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) \Rightarrow f(x) \in V.$$

Аналогично рассматривается случай левого конца $f(X)$. □

**Следствие 2.14.** *Тригонометрические функции и обратные тригонометрические функции непрерывны на своих областях определения.*

*Доказательство.* Пары взаимно обратных монотонных отображений промежутков

$$\begin{aligned} \cos : [0, \pi] \to [-1, 1] \quad &\text{и} \quad \arccos : [-1, 1] \to [0, \pi], \\ \sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1] \quad &\text{и} \quad \arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2], \\ \operatorname{tg} : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R} \quad &\text{и} \quad \operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2), \\ \operatorname{ctg} : (0, \pi) \to \mathbb{R} \quad &\text{и} \quad \operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi), \end{aligned}$$

устанавливают требуемую непрерывность. Непрерывность тригонометрических функций на всей области определения следует из формул типа $\sin(x+\pi/2) = \cos x$ и т.п., позволяющих распространять область непрерывности сдвигами на всю прямую с учётом непрерывности композиции. □

Функции, которые получаются из экспоненты, логарифма, тригонометрических и обратных тригонометрических функций арифметическими операциями и композициями, обычно называются *элементарными*. Это понятие весьма условно, так как за базу мы могли бы взять и какие-то другие функции. В итоге мы получаем, что все элементарные функции непрерывны на своих естественных областях определения.

Заметим, что ранее для экспоненты мы действовали в обратную сторону и выводили существование и единственность логарифма из непрерывности и монотонности экспоненты. Сейчас мы обобщим это рассуждение.

**Теорема 2.15** (Теорема о промежуточном значении). *Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна и $X$ — промежуток, то $f(X)$ — тоже промежуток.*

*Доказательство.* Надо доказать, что если $f(a) = A < B = f(b)$, то весь отрезок $[A, B]$ лежит в области значений $f$. Без ограничения общности будем считать $a < b$ и для любого $C \in (A, B)$ найдём $c \in [a, b]$, для которого $f(c) = C$.

Если середина $m \in [a, b]$ не подходит в качестве $c$, то какой-то из отрезков $[a, m]$ или $[m, b]$ можно взять в качестве $[a_2, b_2]$, для которого $f(a_2) < C < f(b_2)$. Далее продолжаем так же делить отрезки пополам и либо найдём $f(c) = C$ где-то посередине, либо получим стягивающуюся к точке $c$ последовательность отрезков $[a_k, b_k]$, для которых выполняется

$$f(a_k) < C < f(b_k) \Rightarrow f(c) \leqslant C \leqslant f(c) \Rightarrow f(c) = C.$$

□

Из теорем 2.13 и 2.15 мы выводим:

**Следствие 2.16.** *Если $f : X \to \mathbb{R}$ строго монотонна и непрерывна на промежутке $X$, то $f(X)$ — промежуток и обратная функция $f^{-1}$ тоже непрерывна и строго монотонна на промежутке $f(X)$.*

Это следствие может несколько упростить данное ранее определение тригонометрических функций. А именно, можно определить $\arccos x$ как длину дуги от $(1, 0)$ до $(x, \sqrt{1-x^2})$ на единичной окружности. Непрерывность арккосинуса можно доказать, оценивая длину дуги от $(x, \sqrt{1-x^2})$ до $(x', \sqrt{1-x'^2})$ суммой длин пары касательных с помощью леммы 1.108 и используя аддитивность длины дуги из леммы 1.106. Аналогично устанавливается строгая монотонность арккосинуса. Тогда следствие 2.16 показывает определённость, непрерывность и строгую монотонность косинуса на отрезке $[0, \arccos(-1)] = [0, \pi]$. На всю прямую косинус можно продолжить с помощью соотношения $\cos(x + \pi) = -\cos x$.

Остальные тригонометрические функции можно аналогично определить через их обратные. Лемма 1.110 при таком подходе не будет нужна для их определения, так как она следует из приведённого выше рассуждения.

*Задача* 2.17. Докажите, что если функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна и инъективна на промежутке $X$, то она монотонна.

[[ Поймите, в чём заключается отрицание монотонности функции $f$. ]]

*Задача* 2.18. Пусть непрерывная функция $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ имеет равные значения на концах отрезка $f(0) = f(1)$. Докажите, что для любого $\alpha$ вида $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, уравнение (относительно $x$)

$$f(x + \alpha) = f(x)$$

имеет решение.

[[ Докажите, что выражение $f(x+\alpha) - f(x)$ не может иметь один и тот же знак на всём отрезке $[0, 1 - \alpha]$. ]]

*Задача* 2.19. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ не равно никакому $1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Для данного $\alpha$ приведите пример непрерывной функции $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, которая имеет равные значения на концах отрезка $f(0) = f(1)$ и такой, что уравнение (относительно $x$)

$$f(x + \alpha) = f(x)$$

не имеет решений.

[[ Начните с построения подходящей непрерывной функции $g$, такой что $g(x + \alpha) = g(x)$, но $g(0) \neq g(1)$, а потом модифицируйте её. ]]

2.3. **Топологическое определение непрерывности и непрерывные на компактах функции.** Мы изучили поведение непрерывных функций на промежутках, а для изучения поведения непрерывных на компактах функций нам понадобится третье определение непрерывности:

**Определение 2.20** (Топологическое определение непрерывности). Функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна, если для любого открытого $V \subseteq \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ открыт относительно $X$.

**Лемма 2.21.** *Топологическое определение непрерывности эквивалентно определению непрерывности по Коши.*

*Доказательство.* В одну сторону, если выполняется топологическая непрерывность, то $f^{-1}(V) = U \cap X$, то есть в качестве $U$ в определении по Коши можно брать $U \ni x_0$ или точнее какой-то интервал $U' \subseteq U$, содержащий $x_0$.

Обратно, если выполняется определение по Коши, то для любой точки $x_0 \in f^{-1}(V)$ мы имеем окрестность $U \ni x_0$, для которой $U \cap X \subseteq f^{-1}(V)$. Объединяя все такие окрестности всех $x_0 \in f^{-1}(V)$ мы получим открытое множество, пересечение которого с $X$ очевидно совпадает с $f^{-1}(V)$. □

Из топологического определения непрерывности удобно выводить такое свойство:

**Теорема 2.22.** *Если $X \subset \mathbb{R}$ — компакт, а функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна, то $f(X)$ — тоже компакт.*

*Доказательство.* Проверим компактность $f(X)$ по определению. Для открытого покрытия $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ множества $f(X)$ по топологическому определению непрерывности функции $f$ можно подобрать открытые множества $\{U_\alpha\}$, такие что для любого $\alpha \in A$

$$U_\alpha \cap X = f^{-1}(V_\alpha).$$

Тогда открытые множества $\{U_\alpha\}$ составляют открытое покрытие $X$, у которого есть конечное подпокрытие $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N}$. Соответствующие множества $V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_N}$ тогда дадут конечное покрытие множества $f(X)$, требуемое в определении компактности. □

**Следствие 2.23.** *Непрерывная на непустом компакте функция $f : X \to \mathbb{R}$ принимает минимальное и максимальное значения.*

*Доказательство.* Множество $f(X)$ также является компактом, а значит оно ограничено и замкнуто. Следовательно его точные нижняя и верхняя грани конечны (из ограниченности) и лежат в нём (из замкнутости). □

*Задача* 2.24. Пусть непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет период $T > 0$, то есть

$$f(x+T) = f(x)$$

для любого $x$. Докажите, что для любого $\alpha$ уравнение

$$f(x+\alpha) = f(x)$$

имеет решение.

[[ Докажите, что выражение $f(x+\alpha) - f(x)$ не может иметь один и тот же знак, рассмотрев минимальное значение $f$. Объясните, почему $f$ принимает минимальное значение. ]]

Множество одновременно является компактом и промежутком тогда и только тогда, когда оно является отрезком. Поэтому верно следующее:

**Следствие 2.25.** *Непрерывная $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ отображает отрезок в отрезок.*

*Задача* 2.26. Придумайте разрывную $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая отображает любой отрезок в отрезок.

[[ Используйте главный источник контрпримеров, выражение $\sin \frac{1}{x}$. ]]

### 2.4. **Пределы и разрывы функций.**

Некоторой модификацией определения непрерывности можно получить определение предела функции в $a \in \overline{\mathbb{R}}$:

**Определение 2.27.** $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *предельной точкой* множества $X$ если для любой окрестности $a$, $U(a)$, пересечение $U(a) \cap (X \setminus \{a\})$ не пусто. Равносильно, в множестве $X \setminus \{a\}$ можно выбрать последовательность, стремящуюся к $a$.

**Определение 2.28** (Определение предела функции по Коши)**.** Пусть точка $a$ является предельной точкой $X$ и $f : X \to \mathbb{R}$, тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}},$$

если для любой окрестности $A$, $V(A)$, найдётся окрестность $a$, $U(a)$, такая что

$$f\left(U(a) \cap (X \setminus \{a\})\right) \subseteq V(A).$$

**Определение 2.29** (Определение предела функции по Гейне)**.** Пусть точка $a$ является предельной точкой $X$ и $f : X \to \mathbb{R}$, тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}},$$

если для любой последовательности $(x_n) \subseteq X \setminus \{a\}$ из $x_n \to a$ следует, что $f(x_n) \to A$ при $n \to \infty$.

Доказательство эквивалентности этих определений предела в точности повторяет доказательство эквивалентности определений непрерывности функции по Коши и по Гейне.

*Задача* 2.30. Проверьте с помощью определения по Гейне совместимость предела функции с арифметическими операциями (предел суммы, разности, произведения и частного), аналогично свойствам непрерывности. Проверьте утверждения о переходе к пределу в неравенствах, аналогичные таковым для последовательностей.

*Задача* 2.31. Сформулируйте правильный вариант утверждения о пределе композиции функций. Обратите внимание, что в определении предела в точке $a$ в функцию нельзя подставлять само $a$.

**Теорема 2.32** (Критерий Коши существования конечного предела функции)**.** *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет конечный предел в $a$ тогда и только тогда, когда $a$ является предельной точкой $X$ и*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists U(a)\ \forall x', x'' \in U(a) \cap (X \setminus \{a\}),\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

*Доказательство.* Из существования конечного предела по Коши легко следует свойство из этой теоремы. Докажем в обратную сторону существование предела по Гейне. Для любой последовательности $x_n \to a$ из $X \setminus \{a\}$ мы видим, что для достаточно больших $n$ она попадёт в $U(a)$ из утверждения и тогда будет выполняться $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Следовательно, последовательность $(f(x_n))$ фундаментальна и имеет конечный предел.

Может ли оказаться, что для разных последовательностей эти пределы разные? Предположим, для $x'_n \to a$ и $x''_n \to a$ пределы последовательностей $f(x'_n)$ и $f(x''_n)$ различны. Составим одну последовательность $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots$ и обозначим её $(x_n)$. Тогда $x_n \to a$, но $f(x_n)$ будет иметь два частичных предела — противоречие с уже доказанным. ☐

Для функции $f : X \to \mathbb{R}$ и $Y \subseteq X$ будем называть *сужением* $f$ на $Y$, $f|_Y$, функцию $f|_Y : Y \to \mathbb{R}$, принимающую на $Y$ те же значения, что $f$. На самом деле выражения типа «функция непрерывна на $Y$», «функция монотонна на $Y$» и т.п. у нас будут означать, что сужение функции на множество $Y$ непрерывно, монотонно и т.п. Эта терминология имеет тонкости. Например, *функция Дирихле*

$$D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}; \end{cases}$$

разрывна в каждой точке своей области определения (докажите это в качестве упражнения), но непрерывна на множестве $\mathbb{Q}$, так как постоянна на нём. Также $D$ непрерывна на множестве иррациональных чисел $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Получается, что функция непрерывна на двух множествах, но разрывна на их объединении.

Определим односторонние пределы:

**Определение 2.33.** *Левый и правый пределы функции* $f : X \to \mathbb{R}$ в точке $a \in \mathbb{R}$ определим как

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a} f|_{X\cap(-\infty,a)}(x), \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a} f|_{X\cap(a,+\infty)}(x).$$

Иногда их также неформально обозначают $f(a-0)$ и $f(a+0)$.

**Определение 2.34.** Точка $a$ называется *точкой устранимого разрыва* функции, если в ней существует конечный предел $f$, но $f(a)$ не определено или не равно этому пределу. Точка $a$ называется *точкой разрыва первого рода* функции, если в ней существуют не равные друг другу пределы слева и справа. Иначе предельная точка области определения функции, в которой функция не является непрерывной, называется *точкой разрыва второго рода.*

*Задача* 2.35. Определите тип разрывов в нуле у функций $\sin\frac{1}{x}$, $e^{-1/x^2}$, $\frac{1}{1+e^{1/x}}$.

**Теорема 2.36.** *Если* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *возрастает, то все её разрывы первого рода и в каждой точке* $x_0 \in (a,b)$ *выполняется*

$$f(x_0-0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0+0).$$

*Если функция* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *убывает, то верно то же утверждение с неравенствами в другую сторону.*

*Доказательство.* Без ограничения общности пусть $f$ возрастает. Возьмём некоторую $x_0 \in (a,b)$ и положим $A = \sup\{f(x) \mid x \in (a,x_0)\}$, из возрастания очевидно следует $A \leqslant f(x_0)$. Докажем, что $A$ является левым пределом $f$ в точке $x_0$. Для любой окрестности $V \ni A$ найдём $A' \in V$, $A' < A$. По определению точной верхней грани найдётся $\xi < x_0$, такое что

$$A' < f(\xi) \leqslant A.$$

Тогда из возрастания для любого $x \in (\xi, x_0)$ будет выполняться

$$A' < f(\xi) \leqslant f(x) \leqslant A \Rightarrow f(x) \in V.$$

Аналогично доказывается, что $B = \inf\{f(x) \mid x \in (x_0,b)\}$ является правым пределом в точке $x_0$. ☐

*Задача* 2.37. Докажите, что если функция монотонна на отрезке, то у неё не более чем счётное количество точек разрыва.

[[ Используйте тот факт, что интервалы разрыва $(f(x-0), f(x+0))$, соответствующие разным $x$, не пересекаются. ]]

*Задача* 2.38. Пусть функции $f$ и $g$ возрастают на всей прямой $\mathbb{R}$ и оказалось, что их сумма $f+g$ непрерывна. Докажите, что обе функции $f$ и $g$ тоже непрерывны.

[[ Рассмотрите поведение в предполагаемых точках разрыва. ]]

2.5. **Сравнение асимптотического поведения функций, символы $O$ и $o$.** Предположим у нас есть две функции, определённые на одном и том же множестве $X$ и мы рассматриваем их пределы в предельной точке $a$ этого множества. Обе функции могут стремиться к нулю, то есть быть бесконечно малыми, но иногда полезно знать, какая из них существенно меньше, или как говорят, какая быстрее стремится к нулю. Аналогичный вопрос, «кто быстрее», может возникнуть в случае, когда обе функции стремятся к бесконечности.

Мы также будем считать, что последовательность и её предел — это частный случай функции на множестве $\mathbb{N}$ и её предела в точке $+\infty$. Поэтому далее мы рассуждаем о функциях, но к последовательностям всё применимо в полной мере.

**Определение 2.39.** Если для $f, g : X \to \mathbb{R}$ найдётся такая функция $\alpha$, что

$$f(x) = \alpha(x)g(x)$$

по крайней мере в некоторой $U(a) \setminus \{a\}$ в пересечении с $X$, и $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, то пишут

$$f(x) = o(g(x)).$$

Это определение — это более аккуратный способ сказать, что $f/g \to 0$ при $x \to a$, принимающий во внимание то, что $g$ может обращаться в нуль. Если $g$ не обращается в нуль в некоторой $U(a) \setminus \{a\}$, то это значит в точности $f/g \to 0$. Обратим внимание, что данная запись $\ldots = o(\ldots)$ достаточно условна, знак равенства в ней не является на самом деле равенством, а значок $o$ пишется только справа от знака равенства. В частности, выражение $o(f(x)) = g(x)$ невозможно интерпретировать в соответствии с этим определением.

**Определение 2.40.** Если для $f, g : X \to \mathbb{R}$ найдётся такая константа $C$, что

$$|f(x)| \leqslant C|g(x)|$$

по крайней мере в некоторой $U(a) \setminus \{a\}$ в пересечении с $X$, то пишут

$$f(x) = O(g(x)).$$

Опять, это определение — это более аккуратный способ сказать, что $f/g$ ограничена при $x \to a$, и в случае, когда $g$ не обращается в нуль, ровно это и означающий.

*Задача* 2.41. Проверьте символические равенства

$$o(f) \pm o(f) = o(f), o(f)O(g) = o(fg), o(O(f)) = o(f), O(O(f)) = O(f).$$

**Определение 2.42.** Для функций $f, g : X \to \mathbb{R}$ и предельной точки $a$ множества $X$ будем говорить, что $f$ и $g$ *одного порядка*, $f \asymp g$, при $x \to a$, если

$$f(x) = O(g(x)), \text{ и } g(x) = O(f(x)).$$

Симметричность этого отношения ясна по определению, транзитивность следует из предыдущей задачи. Например, легко заметить, что любой многочлен степени $n$ одного порядка с $x^n$ при $x \to \infty$. Действительно, из равенства

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{x^n} = a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n} \to a_n \neq 0$$

следует, что отношение многочлена и $x^n$ ограничено в некоторой окрестности $\infty$, и отношение в другую сторону тоже ограничено в некоторой окрестности $\infty$.

Более сильное отношение эквивалентности определяется так:

**Определение 2.43.** Для функций $f, g : X \to \mathbb{R}$ и предельной точки $a$ множества $X$ будем говорить, что $f$ и $g$ *асимптотически эквивалентны*, $f \sim g$, при $x \to a$, если

$$f(x) = g(x) + o(g(x)) = g(x)(1 + o(1))$$

при $x \to a$.

Симметричность этого отношения нужно проверить. Выражение из определения означает, что

$$f(x) = g(x)(1 + \alpha(x)),\ \alpha(x) \to 0,$$

то есть эквивалентно

$$f(x) = g(x)\beta(x),\ \beta(x) \to 1.$$

В такой формулировке получается

$$g(x) = f(x)\frac{1}{\beta(x)},\ \frac{1}{\beta(x)} \to 1$$

и симметричность уже очевидна.

Транзитивность проверяется так:

$$f(x) = g(x)\beta(x), g(x) = h(x)\gamma(x) \Rightarrow f(x) = h(x)\beta(x)\gamma(x),$$

и ясно, что $\beta(x)\gamma(x) \to 1$ при $x \to a$, если $\beta(x) \to 1$ и $\gamma(x) \to 1$.

В примере с многочленом степени $n$ мы понимаем, что при $x \to \infty$ он асимптотически эквивалентен выражению $a_n x^n$ по уже выписанной формуле. Собственно, когда функция $g(x)$ не равна нулю в некоторой $U(a) \setminus \{a\}$, утверждение $f \sim g$ означает просто, что отношение $f/g$ стремится к единице при $x \to a$.

*Задача* 2.44. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{Z}$

$$x^n = o(e^x) \text{ при } x \to +\infty \text{ и } e^x = o(x^n) \text{ при } x \to -\infty.$$

[[ Вспомните, что экспонента определялась как предел возрастающей (по крайней мере при $x > 0$) последовательности многочленов. ]]

*Задача* 2.45. Докажите, что для любого $\alpha > 0$

$$\ln x = o(x^\alpha) \text{ при } x \to +\infty.$$

[[ Сделайте замену $x^\alpha = t$ и покажите, что верность утверждения не зависит от выбора $\alpha > 0$. Далее положите $\alpha = 2$ и оцените логарифм линейной функцией. ]]

### 2.6. **Производная и дифференцируемость функции.**

**Определение 2.46.** Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ и $x_0$ является предельной точкой $X$. Тогда *производная $f$ в точке $x_0$* определяется как

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Это определение можно интерпретировать геометрически как проведение прямой (*секущей*) через две точки графика $(x_0, f(x_0))$ и $(x, f(x))$, нахождение тангенса угла между осью $x$ и этой прямой, и переход к пределу $x \to x_0$, предельную прямую естественно называть *касательной* к графику в точке $(x_0, f(x_0))$, а производная — это тангенс угла наклона касательной.

Производная по определению может оказаться бесконечной ($-\infty$, $+\infty$ или просто $\infty$), но мы по умолчанию всегда будем считать производную конечной, а о возможности рассматривать бесконечную производную в данном конкретном случае будем упоминать явно. Ещё один формальный момент — при работе с производной удобно наложить разумные требования на область определения, переходя к следующему:

**Определение 2.47.** Функция $f$ *дифференцируема* в точке $x_0$, если она определена в некоторой окрестности $x_0$ и имеет конечную $f'(x_0)$.

**Определение 2.48.** Если $f$ определена в некоторой левой окрестности $x_0$, $(a, x_0]$, то

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

называется её *левой производной*, а если $f$ определена в правой окрестности $x_0$, $[x_0, b)$, то

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

называется её *правой производной*.

По определению предела ясно, что умножение на константу, сложение и вычитание сохраняют дифференцируемость и имеет место линейность

$$(Af(x) + Bf(x))' = Af'(x) + Bg'(x).$$

Для установления других свойств производной нам удобно будет переформулировать дифференцируемость:

**Лемма 2.49.** *Функция $f$ дифференцируема в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда она определена в окрестности $x_0$ и*

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$$

*при $x \to x_0$. Тогда $A = f'(x_0)$.*

*Доказательство.* Из наличия такой формулы легко следует $f'(x_0) = A$. Наоборот, если

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A,$$

то иначе можно сказать

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A + \alpha(x), \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to x_0$$

и искомая формула получается домножением на $x - x_0$. ☐

Обратите внимание, что в отличие от определения предела в точке, в эту формулу законно ставить $x = x_0$. В частности, в этой формуле мы будем считать, что $o(0) = 0$. Для некоторых целей также полезно писать это определение в виде

$$f(x) = f(x_0) + (f'(x_0) + o(1))(x - x_0),$$

считая возможным подставлять в эту формулу $x = x_0$. Из такой записи дифференцируемости сразу следует:

**Следствие 2.50.** *Дифференцируемая в $x_0$ функция непрерывна в $x_0$.*

Теперь мы можем доказать теоремы о взаимодействии производной с умножением, делением и композицией функций:

**Теорема 2.51.** *Если $f$ и $g$ дифференцируемы в $x_0$, то их произведение дифференцируемо и*

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

*Доказательство.* Воспользуемся формулами

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

и получим при перемножении

$$f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + (f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0))(x - x_0) + o(x - x_0),$$

так как из непрерывности $f$ и $g$ ограничены в окрестности $x_0$ и при домножении их на $o(x - x_0)$ опять получается $o(x - x_0)$. ☐

**Теорема 2.52.** *Если $f$ и $g$ дифференцируемы в $x_0$ и $g(x_0) \neq 0$, то их частное дифференцируемо и*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

*Доказательство.* Запишем

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x)g(x_0)}(x - x_0) + o(x - x_0) =$$
$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}(x - x_0) + o(x - x_0)$$

так как $o(x - x_0)$ из определения дифференцируемости $f$ и $g$ домножаются на ограниченные величины, а из непрерывности $g$ в точке $x_0$

$$\frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x)g(x_0)} - \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} = o(1).$$

☐

**Теорема 2.53.** *Если $f$ дифференцируема в $x_0$, и $g$ дифференцируема в $y_0 = f(x_0)$, то композиция $g \circ f$ дифференцируема в $x_0$ и*

$$(g \circ f)' = g'(y_0)f'(x_0).$$

*Доказательство.* Во-первых заметим, что из непрерывности $f$ следует, что некоторая окрестность $U \ni x_0$ при $f$ переходит в $V \ni y_0$, на которой определена $g$. Следовательно, композиция $g \circ f$ определена в некоторой окрестности $x_0$. Запишем

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),\ g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0)$$

и подставим одно в другое

$$g(f(x)) = g(y_0) + g'(y_0)(f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) =$$
$$= g(y_0) + g'(y_0)f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

☐

**Теорема 2.54.** *Если $f$ непрерывна и строго монотонна в окрестности $x_0$ и дифференцируема в $x_0$, то для обратной функции $g$ в точке $y_0 = f(x_0)$ имеет место*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)},$$

*в том числе в смысле $\frac{1}{0} = \infty$.*

*Доказательство.* Заметим, что обратная функция в данной ситуации оказывается непрерывной. В частности, при $y \to y_0$ оказывается $g(y) \to g(y_0)$. Это позволяет записать

$$g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

☐

Теперь у нас есть все инструменты для установления дифференцируемости элементарных функций во всех точках их естественных областей определения. Например для экспоненты из замечательного предела $\frac{e^t-1}{t} \to 1$ (теорема 1.96) при $t \to 0$ следует

$$\lim_{x\to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \cdot \left( \lim_{x-x_0\to 0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} \right) = e^{x_0},$$

то есть $(e^x)' = e^x$. Для логарифма можно применить теорему о производной обратной функции

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Для синуса можно записать используя непрерывность косинуса и замечательный предел с синусом (теорема 1.116)

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \cos\frac{x + x_0}{2} \frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}}{x - x_0} \to \cos x_0.$$

Аналогично для косинуса

$$\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\sin\frac{x + x_0}{2} \frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}}{x - x_0} \to -\sin x_0.$$

Для тангенса и котангенса получим по производной частного

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \ (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Для обратных тригонометрических функций по теореме о производной обратной функции выйдет

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \ (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

*Задача* 2.55. Найдите производные гиперболических функций $\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ и их обратных функций.

В целом мы будем говорить, что функция $f : X \to \mathbb{R}$ *дифференцируема на открытом множестве* $X$, если она дифференцируема в любой точке $x_0 \in X$. Тогда $f'$ на самом деле тоже является функцией $f' : X \to \mathbb{R}$. Приведённые выше конкретные вычисления производных, с учётом правил вычисления производной от арифметических операций и производной композиции функций, показывают, что производные элементарных функций как правило можно найти явно. Однако нельзя сказать, что элементарные функции дифференцируемы на всей своей области определения или даже на внутренности своей области определения. Например, функция

$$f(x) = |x| = \left(x^2\right)^{1/2}$$

непрерывна на всей прямой, но не дифференцируема в нуле. Она является композицией элементарных, однако этот пример показывает, что для более корректной работы с элементарными функциями степенную функцию $f(x) = x^\alpha$ следует считать определённой в нуле только при целых положительных $\alpha$, хотя при нецелых положительных $\alpha$ она продолжается до непрерывной (но не всегда дифференцируемой) функции на $[0, +\infty)$.

Иначе говоря, чтобы утверждать о дифференцируемости всех элементарных функций, надо рассматривать их только на открытых областях определения ещё до взятия композиции. Для функции $f(x) = |x|$ тогда областью определения будет прямая без точки 0, и на такой области определения она окажется дифференцируемой.

*Задача* 2.56. Исследуйте дифференцируемость справа в нуле функции $f(x) = x^\alpha$ в зависимости от параметра $\alpha > 0$, считая $f(0) = 0$.

*Задача* 2.57. Существует ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая принимает ненулевые значения в рациональных точках, нулевые значения в иррациональных точках, и дифференцируема в иррациональных точках?

[[ Может помочь теорема Бэра или соображения о приближении иррационального числа рациональными. ]]

2.7. **Теорема о среднем Лагранжа, исследование функции на монотонность, экстремум и выпуклость.** В этом разделе мы покажем, как знание производной функции позволяет исследовать функцию на экстремум, возрастание и убывание, а также считать пределы.

**Определение 2.58.** Точка $x_0$ называется *локальным минимумом* функции $f$, если значение $f(x_0)$ минимально среди всех значений $f(U(x_0))$ в некоторой окрестности $U(x_0) \ni x_0$. Аналогично определяется *локальный максимум*. Если нам не важно, максимум или минимум в точке, то мы говорим *локальный экстремум*. Если в некоторой окрестности $x_0$ оказывается, что минимальное/максимальное значение принимается только в точке $x_0$, то локальный экстремум называется *строгим*.

Докажем простую, но очень полезную теорему:

**Теорема 2.59** (Теорема Ферма — необходимое условие экстремума). *Если $f$ определена в окрестности $x_0$, имеет локальный экстремум в $x_0$ и имеет $f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$, то $f'(x_0) = 0$.*

*Доказательство.* По определению производной в точке минимума и предельному переходу в неравенстве для односторонних производных окажется

$$f'_-(x_0) \leqslant 0, f'_+(x_0) \geqslant 0,$$

то есть при наличии производной в обычном смысле верны неравенства

$$f'(x_0) \leqslant 0, f'(x_0) \geqslant 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Аналогично для максимума. ☐

**Теорема 2.60** (Теорема Ролля). *Если функция $f$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на непустом интервале $(a, b)$, а также $f(a) = f(b)$, то найдётся $\xi \in (a, b)$, такая что $f'(\xi) = 0$.*

*Доказательство.* Непрерывная на отрезке функция достигает на нём максимума и минимума. Если она равна константе, то любое $\xi$ подойдёт. Иначе из условия $f(a) = f(b)$ следует, что хотя бы один из экстремумов находится строго внутри, в точке $\xi \in (a, b)$. Тогда $f'(\xi) = 0$ по предыдущей теореме. ☐

*Задача* 2.61. Докажите, что если дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет $n$ корней (решений уравнения $f(x) = 0$), то её производная имеет как минимум $n - 1$ корень.

*Задача* 2.62. Докажите, что если квазимногочлен $P(x)e^{ax}$ (где $P$ — обычный многочлен и $a \neq 0$) имеет $n$ различных корней, то его производная тоже имеет $n$ различных корней.

[[ Как минимум $n - 1$ корень производной легко найти по теореме Ролля, остаётся найти ещё один. ]]

**Теорема 2.63** (Теорема о среднем Лагранжа). *Если функция $f$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на непустом интервале $(a, b)$, то найдётся $\xi \in (a, b)$, такая что*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*Доказательство.* Положим $A = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Тогда $g(x) = f(x) - Ax$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля (проверьте равенство $g(a) = g(b)$ самостоятельно) и мы находим $\xi \in (a, b)$, такое что

$$g'(\xi) = f'(\xi) - A = 0 \Rightarrow f'(\xi) = A.$$

☐

Иначе теорему Лагранжа можно записать как

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a),$$

в такой записи безопасно рассматривать и случай $b = a$, считая произведение неопределённого выражения на нуль равным нулю. Ещё более безопасный вариант, в котором допустимо и $b = a$, такой:

$$f(b) - f(a) = f'(a + t(b - a))(b - a), \quad t \in (0, 1),$$

тогда нам не надо беспокоиться о том, чему равно $\xi$ в случае $a = b$.

**Теорема 2.64** (Связь монотонности с производной). *Пусть функция $f$ определена и непрерывна на интервале $(a, b)$ и возможно на его концах, а также дифференцируема на интервале $(a, b)$. Тогда $f$ возрастает тогда и только тогда, когда $f'(x) \geqslant 0$ на всём $(a, b)$. Если $f'(x) > 0$ на всём $(a, b)$, то $f$ строго возрастает. Для убывания верно то же со сменой знака производной на обратный.*

*Доказательство.* В одну сторону утверждение (доказательство возрастания и строгого возрастания) следует из равенства

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$$

для любых двух точек $x < y$ в области определения и некоторой точки $\xi$ между ними. В обратную сторону, если $f$ возрастает, то в определении производной рассматривается предел неотрицательных выражений, который должен быть неотрицательным. ☐

Пример $f(x) = x^3$ показывает, что функция может строго возрастать, но её производная при этом может обратиться в нуль, так что из строгого возрастания не следует строгая положительность производной.

Признак монотонности позволяет доказывать неравенства по следующей схеме:

**Следствие 2.65** (Интегрирование неравенств). *Если две функции $f$ и $g$ непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на интервале $(a, b)$, на левом конце отрезка выполняется $f(a) \geqslant g(a)$, и на интервале $(a, b)$ выполняется $f'(x) \geqslant g'(x)$, то на отрезке $[a, b]$ также выполняется $f(x) \geqslant g(x)$.*

*Доказательство.* Из условия и предыдущей теоремы следует, что разность $f(x) - g(x)$ возрастает на $[a, b]$, а так как она неотрицательна на левом конце, то она неотрицательна на всём $[a, b]$. ☐

*Задача* 2.66. Докажите, что при натуральном $n$ и $x \geqslant 0$ верно неравенство

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Какое неравенство будет верно при $x < 0$?

[[ Используйте интегрирование неравенств и индукцию по $n$. ]]

*Задача* 2.67. Сравните, что больше, $e^\pi$ или $\pi^e$.

[[ Замените $\pi$ на произвольное $x > e$, перенесите всё в левую часть и дифференцируйте, перед дифференцированием удобно взять логарифм. ]]

Так как функция постоянна тогда и только тогда, когда она (не обязательно строго) возрастает и убывает одновременно, то мы получаем:

**Следствие 2.68** (Критерий постоянства функции). *Пусть функция $f$ определена и непрерывна на интервале $(a, b)$ и возможно на его концах, а также дифференцируема на интервале $(a, b)$. Тогда $f$ постоянна тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ на всём $(a, b)$.*

Помимо необходимого условия экстремума, который даёт теорема Ферма, можно сформулировать и практически полезное достаточное условие:

**Теорема 2.69** (Достаточные условия экстремума через первую производную). *Если $f$ непрерывна в $x_0$ и дифференцируема на некоторых интервалах $(a, x_0)$, $(x_0, b)$, причём $f'(x) < 0$ на $(a, x_0)$ и $f'(x) > 0$ на $(x_0, b)$, то $f$ имеет строгий локальный минимум в $x_0$. Если неравенства на производную нестрогие, то $f$ имеет не обязательно строгий минимум. Если оба неравенства в обратную сторону, то речь идёт о строгом или нестрогом максимуме.*

*Доказательство.* Из условий следует, что $f$ (строго) убывает на $(a, x_0]$ и (строго) возрастает на $[x_0, b)$. □

Введём теперь понятие выпуклой и вогнутой функции, которое полезно при исследовании функций на экстремум и работе с неравенствами, оно играет важную роль в вычислительной математике и математической экономике.

**Определение 2.70.** Функция $f : X \to \mathbb{R}$, определённая на промежутке $X$, называется *выпуклой*, если для любых $x \neq y \in X$ и любого $t \in (0, 1)$

$$f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y).$$

Если все такие неравенства строгие, то функция называется *строго выпуклой*. Для неравенств в обратную сторону функция называется *вогнутой* или *строго вогнутой*.

**Теорема 2.71** (Достаточное условие выпуклости). *Непрерывная на промежутке и дифференцируемая на его внутренности функция выпукла, если её производная возрастает. Она строго выпукла, если её производная строго возрастает. Для вогнутости утверждения аналогичны с заменой возрастания производной на убывание.*

*Доказательство.* Заметим, что вычитание из функции линейной функции не меняет ни её выпуклости, ни возрастания производной. Вычитая из $f$ линейную функцию, принимающую те же значения в точках $x$ и $y$, мы придём к случаю $f(x) = f(y) = 0$. Тогда для установления неравенства выпуклости при данных $x, y$ и любом $t \in (0, 1)$ нужно доказать, что для любого $z \in (x, y)$ выполняется $f(z) \leqslant 0$ (или $f(z) < 0$ для строгой выпуклости). Но если $f(z) > 0$, то по теореме о среднем Лагранжа найдутся $\xi \in (x, z)$ и $\eta \in (z, y)$, такие что

$$f'(\xi) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \frac{f(z)}{z - x} > 0, \quad f'(\eta) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z} = \frac{-f(z)}{y - z} < 0.$$

Но при этом $\xi < \eta$, то есть производная оказалась не возрастающей.

Для строгой выпуклости предположение $f(z) \geqslant 0$ также влечёт $f'(\xi) \geqslant 0 \geqslant f'(\eta)$, что даёт противоречие со строгим возрастанием производной. □

Используя критерий монотонности для производной можно заметить, что выпуклость гарантируется неотрицательностью второй производной (при её наличии) $f''(x) = (f'(x))' \geqslant 0$, а вогнутость — неположительностью второй производной.

*Задача* 2.72. Докажите, что если непрерывная на промежутке и дифференцируемая на его внутренности функция выпукла, то её производная возрастает. Докажите, что если функция строго выпукла, то её производная строго возрастает.

[[ Предположите $f'(x) > f'(y)$ при $x < y$. Сведите к случаю $f(x) = f(y) = 0$ как в предыдущем доказательстве и обратите внимание, что по выпуклости функция должна быть неположительной на $(x, y)$ (отрицательной при строгой выпуклости). Посмотрите, что происходит с функцией в окрестности точек $x$ и $y$ и найдите противоречие. ]]

*Задача* 2.73. На каких промежутках функция $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ выпукла, а на каких — вогнута?

*Задача* 2.74. Докажите, что выпуклая на интервале функция непрерывна. Приведите пример функции на отрезке, которая разрывна, но выпукла.

[[ Обратите внимание, что если через две точки графика выпуклой функции провести секущую, то между этими двумя точками она будет лежать (нестрого) над графиком, а слева и справа от этой пары точек — под графиком. ]]

*Задача* 2.75. Докажите, что если $f$ определена и непрерывна на интервале $(a, b)$, и в каждой точке $x \in (a, b)$ выполняется

$$\varlimsup_{\delta\to+0} \frac{f(x+\delta) + f(x-\delta) - 2f(x)}{\delta^2} \geqslant 0,$$

то $f$ выпукла.

[[ Покажите, что выпуклость $f$ следует из выпуклости $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon x^2$ при любом положительном $\varepsilon$. Заметьте, что

$$\varlimsup_{\delta\to+0} \frac{f_\varepsilon(x+\delta) + f_\varepsilon(x-\delta) - 2f_\varepsilon(x)}{\delta^2} \geqslant 2\varepsilon,$$

и далее действуйте аналогично доказательству теоремы 2.71. ]]

2.8. **Теорема о среднем Коши и правило Лопиталя.** В этом разделе мы докажем ещё одну теорему о среднем и посмотрим, как она помогает в вычислении пределов отношений двух функций.

**Теорема 2.76** (Теорема о среднем Коши). *Если функции $f$ и $g$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на непустом интервале $(a, b)$, а также $g'$ не равно нулю ни в одной точке $(a, b)$, то найдётся $\xi \in (a, b)$, такая что*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

*Доказательство.* По теореме Ролля оказывается $g(b) - g(a) \neq 0$, и мы можем написать

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Нетрудно проверить, что функция

$$h(x) = f(x) - Ag(x) = \frac{f(x)g(b) - f(x)g(a) - g(x)f(b) + g(x)f(a)}{g(b) - g(a)}$$

принимает равные значения на концах отрезка. Применяя к $h$ теорему Ролля, получаем точку $\xi \in (a, b)$, такую что

$$h'(\xi) = f'(\xi) - Ag'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A.$$

□

Из этой теоремы выводятся очень полезные способы находить пределы отношения функций в тех случаях, когда теорема о пределе частного не работает.

**Теорема 2.77** (Правило Лопиталя для неопределённости $\frac{0}{0}$). *Пусть $f$ и $g$ определены и дифференцируемы на интервале с левым или правым концом $a$, $g'$ не обращается на этом интервале в нуль, $f(x), g(x) \to 0$ при $x \to a$ и существует предел*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

*тогда существует и предел*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*Доказательство.* Пусть точка $a$ конечна. Тогда доопределим $f(a) = g(a) = 0$, сделав эти функции непрерывными в точке $a$, и напишем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

для некоторой $\xi$ между $x$ и $a$ по теореме о среднем Коши. При $x \to a$ мы будем иметь $\xi \to a$, значит выражение справа будем иметь предел, а значит и выражение слева тоже.

Если же $a$ бесконечна, то замена $t = 1/x$ сводит задачу к $a = 0$, так как

$$\frac{(f(1/t))'_t}{(g(1/t))'_t} = \frac{f'(1/t)\frac{-1}{t^2}}{g'(1/t)\frac{-1}{t^2}} = \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}$$

тоже имеет предел при $t \to 0$ по условию, из чего следует существование предела отношения функций. ☐

**Теорема 2.78** (Правило Лопиталя для неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$). *Пусть $f$ и $g$ определены и дифференцируемы на интервале с левым или правым концом $a$, $g'$ не обращается на этом интервале в нуль, $f(x), g(x) \to \infty$ при $x \to a$ и существует предел*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

*тогда существует и предел*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*Доказательство.* Воспользуемся определением предела по Коши. Для любой окрестности $V$ точки расширенной прямой $A = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ мы найдём интервал с концом в $a$, $U$, такой что при $x \in U$ из области определения $f$ и $g$ выполняется

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in V.$$

Теперь в пределе отношения функций воспользуемся определением по Гейне. Последовательность $x_n \to a$ для достаточно больших $n \geqslant N$ окажется в $U$. Тогда по теореме о среднем Коши

$$\frac{f(x_n) - f(x_N)}{g(x_n) - g(x_N)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in V,$$

так как $\xi$ тоже будет в $U$. Фиксируя $N$ и рассматривая $n \to \infty$, мы получим из стремления $f(x_n), g(x_n) \to \infty$, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_N)}{g(x_n) - g(x_N)} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{f(x_n)\left(1 - \frac{f(x_N)}{f(x_n)}\right)}{g(x_n)\left(1 - \frac{g(x_N)}{g(x_n)}\right)} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \in \operatorname{cl} V,$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_N)}{g(x_n) - g(x_N)} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{f(x_n)\left(1 - \frac{f(x_N)}{f(x_n)}\right)}{g(x_n)\left(1 - \frac{g(x_N)}{g(x_n)}\right)} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \in \operatorname{cl} V.$$

Здесь при переходе к верхнему и нижнему пределу в неравенстве нам пришлось перейти к замыканию $\operatorname{cl} V$, но это мало на что повлияет. Так как окрестность $V$ можно было брать произвольно, то из предыдущих формул и теоремы о единственном частичном пределе следует, что на самом деле

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = A.$$

☐

*Задача* 2.79. Найдите по правилу Лопиталя пределы на бесконечности в зависимости от натуральных $n$ и $k$ для выражений

$$\frac{x^n}{e^x} \text{ и } \frac{\ln^n x}{x^k}.$$

*Задача* 2.80. Найдите по правилу Лопиталя предел в нуле в зависимости от целых $n$ и $k$ для выражения

$$x^n \ln^k x.$$

2.9. **Производные высших порядков, формула Тейлора.** Если функция $f$ определена на некотором интервале $(a, b)$ и имеет производную в каждой точке интервала, то возникает новая функция $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$. К этой функции можно также применить взятие производной, получая вторую, $f''$, третью, $f'''$, и т.д. производные исходной функции. Для $k$-й производной применяют такие обозначения:

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k f}{dx^k}.$$

**Определение 2.81.** Функция $f$ *дифференцируема $n$ раз в точке* $x_0$, если сама функция $f$ и её производные вплоть до $f^{(n-1)}$ определены в некоторой окрестности $x_0$, а $f^{(n)}$ определена как минимум в точке $x_0$.

Обсудим общие свойства $k$-й производной. Ясно, что из линейности одной производной следует линейность операции взятия $k$-й производной

$$(Af + Bg)^{(k)} = Af^{(k)} + Bg^{(k)}.$$

Получить формулу для $k$-й производной произведения уже посложнее. Вспомним определение биномиальных коэффициентов для $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Используя очевидное тождество

$$(x + y)^{n+1} = (x + y)(x + y)^n$$

получаем

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^ky^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n+1-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^ky^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n+1-k}.$$

Отсюда следует формула

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

при $1 \leqslant k \leqslant n$. Если для целых $n \geqslant 0$ считать $\binom{n}{k}$ равным при $k < 0$ или $k > n$, то эта формула будет верна почти всегда, кроме случая $n + 1 = k = 0$.

Теперь мы готовы разобраться с производной произведения:

**Теорема 2.82** (Формула Лейбница). *Если $f$ и $g$ имеют $n$-ю производную на некотором интервале, то выполняется*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}.$$

*Доказательство.* Для $n = 1$ мы эту формулу $(fg)' = fg' + f'g$ уже установили. Теперь воспользуемся индукцией и покажем переход от $n$ к $n + 1$:

$$(fg)^{(n+1)} = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(k)}g^{(n-k)}\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k+1)}g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)} = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}f^{(k)}g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)f^{(k)}g^{(n+1-k)} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}.$$

□

Для $n$-й производной частного общей формулы нет. Поэтому, например, мы можем выписать общую формулу

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),\ (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),$$

но не можем выписать общую формулу для $n$-й производной $\operatorname{tg} x$.

Следующий вопрос, который нас интересует — это приближение функции многочленом в некотором смысле. Заметим, что у многочлена $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ производные в нуле выражаются как

$$P^{(k)}(0) = k!a_k,$$

где $k! = 1\cdot 2\cdot\dots\cdot k$, мы также считаем $0! = 1$. Если теперь нам дана функция $f$, у которой есть $n$ производных в точке $x_0$, то многочлен (считаем $f^{(0)} \equiv f$)

$$P_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

имеет в точке $x_0$ такие же значения производных до $n$-го порядка включительно, как и функция $f$. Этот многочлен называется *многочлен Тейлора порядка $n$ для $f$ в точке $x_0$*. В этой формуле и других формулах с многочленами мы считаем, что $(x - x_0)^0 \equiv 1$, в том числе $0^0 = 1$, тогда сумма действительно представляет собой многочлен.

Рассмотрим разность между функцией и её многочленом Тейлора, *остаточный член формулы Тейлора,*

$$r_{n,f,x_0}(x) = f(x) - P_{n,f,x_0}(x).$$

Это будет функция, все производные которой до $n$-й включительно в точке $x_0$ равны нулю. Мы хотим показать, что этот остаточный член мал, или как-либо явно выражается.

**Теорема 2.83** (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Если $f$ дифференцируема $n$ раз в точке $x_0$, $n \in \mathbb{N}$, то*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

*Доказательство.* Мы хотим показать, что $r_{n,f,x_0}(x) = o((x-x_0)^n)$. Обозначим для краткости $r(x) = r_{n,f,x_0}(x)$, мы знаем, что производные $r(x)$ до $n$-й включительно обращаются в нуль в $x_0$. Заметим, что из дифференцируемости $n$ раз следует наличие производных до $(n - 1)$-го порядка включительно в окрестности $x_0$. Применим правило Лопиталя (пока мы имеем дело с неопределённостями $0/0$)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{r'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \to x_0} \frac{r^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)},$$

теперь вспомним, что $r^{(n-1)}(x_0) = 0$ и продолжим

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{r^{(n-1)}(x) - r^{(n-1)}(x_0)}{n!(x - x_0)} = \frac{1}{n!} r^{(n)}(x_0) = 0,$$

где предпоследнее равенство — это определение $n$-й производной в точке $x_0$. □

**Теорема 2.84** (Достаточные условия экстремума в терминах высших производных). *Предположим, что функция $f$ дифференцируема в точке $x_0$ как минимум $n \geqslant 2$ раз, её производные порядков $k = 1, \dots, n - 1$ равны нулю, а $n$-я производная не равна нулю. Тогда при чётном $n$ функция имеет строгий экстремум в $x_0$, а при нечётном $n$ — не имеет экстремума в $x_0$.*

*Доказательство.* Запишем по формуле Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) = f(x_0) + \left( \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \right) (x - x_0)^n.$$

В некоторой окрестности $x_0$ будет выполняться $|o(1)| < \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right|$ (так как производная не равна нулю). Следовательно, знак $f(x) - f(x_0)$ определяется знаком производной $f^{(n)}(x_0)$ и знаком выражения $(x - x_0)^n$. Из рассмотрения разных случаев этих знаков получается утверждение теоремы. □

**Теорема 2.85** (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). *Если $f$ имеет производные до $n$-й включительно на интервале $U \ni x_0$, $n \in \mathbb{N}$, то для любого $x \in U$*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n,$$

*где $\xi$ — некоторое число между $x_0$ и $x$.*

*Доказательство.* Нам опять надо получить формулу для остаточного члена $r(x) = r_{n-1}(x)$ при условии, что производные $r(x)$ до $(n-1)$-й включительно обращаются в нуль в $x_0$ и производные до $n$-й включительно существуют в $U$. Применим теорему о среднем Коши $n$ раз

$$\frac{r(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{r(x)-r(x_0)}{(x-x_0)^n} = \frac{r'(\xi_1)}{n(\xi_1-x_0)^{n-1}} = \frac{r'(\xi_1)-r'(x_0)}{n(\xi_1-x_0)^{n-1}} = \frac{r''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_2-x_0)^{n-2}} =$$
$$\dots = \frac{r^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - r^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi_{n-1}-x_0)} = \frac{r^{(n)}(\xi_n)}{n!}.$$

Положим $\xi = \xi_n$. Так как $r(x)$ отличается от $f(x)$ многочленом степени не более $n-1$, то их $n$-е производные совпадают, то есть

$$\frac{r(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \Rightarrow r(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n.$$

□

*Задача* 2.86. Выпишите формулы Тейлора с разными остаточными членами при $x_0 = 0$ для функций

$$e^x, \sin x, \cos x, (1+x)^\alpha, \ln(1+x), \operatorname{arctg} x.$$

*Задача* 2.87. Выпишите формулу Тейлора при $x_0 = 0$ для $\operatorname{tg} x$ до остаточного члена $o(x^6)$.

По аналогии с формулами Тейлора можно говорить об *асимптотических разложениях* функции $f$ при $x \to x_0$ по степеням $(x - x_0)$, как о последовательностях коэффициентов $a_N, a_{N+1}, \dots$, начиная с некоторого целого $N$, для которых при любом $n \geqslant N$ выполняется равенство

$$f(x) = a_N(x-x_0)^N + a_{N+1}(x-x_0)^{N+1} + \dots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

При $x \to \infty$ асимптотическое разложение по степеням начинается с некоторой $x^N$ и идёт с убыванием, а не с возрастанием степеней,

$$f(x) = a_N x^N + a_{N-1}x^{N-1} + \dots + a_n x^n + o(x^n).$$

Свойства этого понятия устанавливаются в серии упражнений:

*Задача* 2.88. Докажите, что коэффициенты асимптотического разложения по степеням $(x - x_0)$ определены единственным образом.

[[ Начните с $n = N$, а потом проведите индукцию по $n$. ]]

*Задача* 2.89. Приведите пример функции, которая положительна при $x \neq 0$, но её асимптотическое разложение в нуле имеет все коэффициенты равными нулю.

[[ Доопределите $e^{-1/x^2}$ в нуле как 0 и считайте её производные в нуле по определению и правилу Лопиталя. ]]

*Задача* 2.90. * Покажите, что для любого $N$ и любого набора коэффициентов $a_N, a_{N+1}, \dots$ найдётся бесконечно дифференцируемая $f$ с заданными коэффициентами асимптотического разложения по степеням $x$ в нуле.

[[ При решении этой задачи может понадобиться аккуратная работа с функциональными рядами и бесконечно гладкими функциями, отличными от нуля в маленькой окрестности нуля, что объясняется в разделе 6.1. ]]

## 3. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ТОПОЛОГИЯ

3.1. **Определение и примеры.** В математике (и за её пределами) часто встречается концепция метрического пространства, как множества, в котором про любые два элемента можно количественно сказать, насколько далеко они находятся друг от друга. Более формально определение выглядит следующим образом (здесь $\mathbb{R}^+$ — множество неотрицательных действительных чисел).

**Определение 3.1.** *Метрическое пространство* состоит из множества $M$ и функции расстояния $\rho : M \times M \to \mathbb{R}^+$ со следующими свойствами:

$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (невырожденность);
$\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность);
$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника).

В качестве очень простого примера можно рассмотреть множество действительных чисел с расстоянием $\rho(x, y) = |x - y|$. Менее тривиальный пример — *евклидово пространство* $\mathbb{R}^n$ с метрикой

$$\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2}.$$

Чтобы проверить свойства метрики, нетривиально лишь установить неравенство треугольника, которое в таком определении после введения обозначений $v = y - x$ и $w = z - y$ сводится к

$$|v + w| \leqslant |v| + |w|.$$

Чтобы его установить (и для многих других целей), полезно ввести понятие скалярного произведения векторов

$$v \cdot w = \sum_{k=1}^{n} v_k w_k,$$

тогда длина вектора выражается как $|v| = \sqrt{v \cdot v}$. Установим сначала полезное неравенство:

**Теорема 3.2** (Неравенство Коши–Буняковского для векторов). *Для любых* $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$(v \cdot w)^2 \leqslant (v \cdot v) \cdot (w \cdot w) \Leftrightarrow |(v \cdot w)| \leqslant |v| \cdot |w|.$$

*Доказательство.* Если $|w| = 0$, то обе части неравенства равны нулю. Иначе рассмотрим квадратный трёхчлен

$$|v + tw|^2 = |v|^2 + 2t(v \cdot w) + t^2|w|^2 \geqslant 0$$

Из его неотрицательности следует, что его дискриминант не положителен. Это и означает первый вариант неравенства Коши–Буняковского. ☐

Теперь неравенство треугольника выводится так:

$$|v + w|^2 = |v|^2 + 2(v \cdot w) + |w|^2 \leqslant |v|^2 + 2|v| \cdot |w| + |w|^2 = (|v| + |w|)^2.$$

Отметим, что евклидово пространство является частным случаем декартова произведения метрических пространств. В общем случае для произведения $M \times M''$ можно аналогично евклидову случаю положить:

$$\rho_2\left((x', x''), (y', y'')\right) = \sqrt{\rho(x', y')^2 + \rho(x'', y'')^2}.$$

Неравенство треугольника в данном случае следует из того, что мы установили для евклидова пространства. Однако формула с квадратами и квадратным корнями несколько неудобна в работе, например, было бы гораздо проще положить

$$\rho_\infty\left((x', x''), (y', y'')\right) = \max\{\rho(x', y'), \rho(x'', y'')\}.$$

Свойства метрики в данном случае проверяются очень просто, невырожденность и симметричность очевидны, неравенство треугольника тоже не требует усилий. Такой вариант определения метрики в декартовом произведении отлично работает даже для произведения бесконечного числа евклидовых пространств, с заменой максимума на точную верхнюю грань.

Конкретно в случае $\mathbb{R}^n$ из конструкции с максимумом мы получим расстояние

$$\rho_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}.$$

*Задача* 3.3. Проверьте непосредственно, что $\rho_\infty$ является метрикой на евклидовом пространстве.

*Задача* 3.4. Пусть на множестве $M$ есть *полурасстояние* $\rho : M \times M \to \mathbb{R}^+$, имеющее все свойства метрики, кроме свойства невырожденности, заменённого на более слабое свойство $\rho(x, x) \equiv 0$. Докажите, что отношение, определённое как

$$x \sim y \Leftrightarrow \rho(x, y) = 0,$$

является отношением эквивалентности, а на множестве $M/\sim$ функция $\rho$ корректно задаёт невырожденную метрику.

[[ Надо проверить транзитивность и равенство $\rho(x, y) = \rho(x', y)$ при $x \sim x'$. ]]

3.2. **Пределы последовательностей, фундаментальные последовательности и полные метрические пространства.** На метрическое пространство легко переносится определение предела и фундаментальной последовательности:

**Определение 3.5.** Последовательность элементов $(x_k)$ метрического пространства $M$ *стремится к элементу* $x_0 \in M$, если $\rho(x_k, x_0) \to 0$ при $k \to \infty$.

*Задача* 3.6. Докажите единственность предела последовательности точек метрического пространства.

[[ Вспомните, что если расстояние между точками равно нулю, то сами точки равны. ]]

**Определение 3.7.** Последовательность элементов $(x_k)$ метрического пространства называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall k, m \geqslant N(\varepsilon),\ \rho(x_k, x_m) < \varepsilon.$$

Посмотрим, что это означает в случае $\mathbb{R}^n$. Используем очевидные неравенства для координат вектора $v = (v_1, \dots, v_n)$

$$\forall i, |v_i| \leqslant |v| \text{ и } |v| \leqslant |v_1| + |v_2| + \dots + |v_n|.$$

Определение предела в координатах можно декодировать так: для каждого номера координаты $i$, координаты $x_{k,i}$ стремятся к $x_{0,i}$ при $k \to \infty$. Определение фундаментальной последовательности в координатах декодируется так: для каждого номера координаты $i$, координаты $(x_{k,i})_k$ образуют фундаментальную последовательность. Сделаем определение:

**Определение 3.8.** Метрическое пространство *полное*, если любая фундаментальная последовательность в нём имеет предел.

Из предыдущих наблюдений вытекает, что $\mathbb{R}^n$ — полное метрическое пространство. Действительно, если последовательность его точек $(x_k)$ фундаментальна, то для любого номера $i = 1, \dots, n$ последовательность координат $(x_{k,i})_k$ фундаментальна и сходится, то есть $x_{k,i} \to x_{0,i}$ при $k \to \infty$. Тогда точка $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$ является пределом последовательности $(x_k)$, так как

$$\rho(x_k, x_0) = |x_k - x_0| \leqslant |x_{k,1} - x_{0,1}| + \dots + |x_{k,n} - x_{0,n}| \to 0.$$

Конечно, нетрудно придумать неполные метрические пространства, особенно в этом помогает понятие *индуцированной метрики*: для любого подмножества $X \subseteq M$ метрического пространства $M$ ограничение $\rho|_{X \times X}$ даёт метрику на $X$. В таком смысле индуцированная с $\mathbb{R}$ метрика на $\mathbb{Q}$ не полна. Аналогично метрика на $\mathbb{Q}^n$, индуцированная с $\mathbb{R}^n$, тоже не полна.

Аналогично процедуре пополнения $\mathbb{Q}$ можно сделать процедуру *пополнения* с произвольным метрическим пространством $M$. Сначала рассматривается множество $c(M)$ фундаментальных последовательностей точек $M$, определяется полурасстояние между последовательностями

$$\overline{\rho}((p_k), (q_k)) = \lim_{k \to \infty} \rho(p_k, q_k),$$

предел существует, так как по неравенству треугольника

$$|\rho(p_k, q_k) - \rho(p_m, q_m)| \leqslant \rho(p_k, p_m) + \rho(q_k, q_m).$$

Неравенство треугольника для полурасстояния является пределом неравенств треугольника в исходном пространстве. После этого вводится отношение эквивалентности

$$(p_k) \sim (q_k) \Leftrightarrow \overline{\rho}((p_k), (q_k)) = 0$$

и берётся фактормножество по нему, которое и будет пополнением $\overline{M}$; на нём $\rho$ даст уже невырожденную метрику $\overline{\rho}$.

Пространство $M$ оказывается вложено в $\overline{M}$ с помощью отображения $i : M \to \overline{M}$, которое сопоставляет точке $p \in M$ постоянную последовательность $p_k \equiv p$, метрика $\rho$ на $M$ при этом будет индуцирована метрикой $\overline{\rho}$ на $\overline{M}$. Аналогично полноте действительных чисел мы можем установить полноту любого пополнения. Рассуждения будут попроще, так как мы уже знаем о существовании действительных чисел и можем пользоваться их свойствами.

**Лемма 3.9.** *Пополнение метрического пространства является полным метрическим пространством.*

*Доказательство.* Рассмотрим фундаментальную последовательность $(x_k)$ в пополнении $\overline{M}$. Представим каждое $x_k$ как класс эквивалентности некоторой фундаментальной последовательности $(x_{k,n})_n$ точек из $M$. Из определения фундаментальности $(x_{k,n})_n$ найдётся $N_k \in \mathbb{N}$, такое что для любых $n, m \geqslant N_k$ выполняется

$$\rho(x_{k,n}, x_{k,m}) \leqslant \frac{1}{k}.$$

Пусть $y_k = x_{k,N_k} \in M$. Мы видим, что

$$\overline{\rho}(x_k, i(y_k)) \leqslant \frac{1}{k}.$$

Из определения фундаментальности $(x_k)$ и неравенства

$$\rho(y_k, y_m) \leqslant \overline{\rho}(x_k, x_m) + \frac{1}{k} + \frac{1}{m}$$

следует, что последовательность $(y_k)$ фундаментальна в $M$. Следовательно, она по определению представляет некоторый элемент $y \in \overline{M}$, и как последовательность элементов

$\overline{M}$ сходится к нему. Последнее утверждение следует из того, что для $k \geqslant N_\varepsilon$ из определения фундаментальности последовательности $(y_k)$ расстояние от $y$ до $i(y_k)$ (последовательности повторов $y_k$ в $\overline{M}$) не более $\varepsilon$, и это работает для любого $\varepsilon > 0$.

Из неравенства

$$\overline{\rho}(x_k, y) \leqslant \overline{\rho}(i(y_k), y) + \frac{1}{k}$$

тогда следует, что последовательность $(x_k)$ тоже сходится к $y$. ☐

*Задача* 3.10. Проверьте, что для полного метрического пространства $M$ отображение $i : M \to \overline{M}$ его в пополнение есть биекция.

[[ Рассмотрите отображение $j : c(M) \to M$, ставящее в соответствие фундаментальной последовательности её предел. Разложите его в композицию $c(M) \to \overline{M} \to M$. ]]

*Задача* 3.11. Докажите, что любое сохраняющее расстояния отображение метрических пространств $f : M \to N$ продолжается до сохраняющего расстояния отображения пополнений $\overline{f} : \overline{M} \to \overline{N}$.

[[ Продолжите сначала $f$ до сохраняющего расстояния отображения $c(M) \to c(N)$. ]]

3.3. **Шары, ограниченность, радиус и диаметр.** В любом метрическом пространстве можно определить понятие метрического шара

$$B_x(r) = \{y \in M \mid \rho(x, y) \leqslant r\}.$$

Это замкнутый шар, а открытый шар мы определим как

$$D_x(r) = \{y \in M \mid \rho(x, y) < r\}.$$

В пространстве $\mathbb{R}^2$ это будут круги, в $\mathbb{R}^3$ — привычные нам шары. В других метрических пространствах шары могут выглядеть менее привычно. В следующем разделе будут даны определения, оправдывающие использование терминов «открытый» и «замкнутый» в этих определениях.

Сделаем также важное определение, обобщающее понятие ограниченности числового множества:

**Определение 3.12.** Множество $X \subseteq M$ в метрическом пространстве $M$ называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре, $X \subseteq B_x(r)$.

Заметим, что если $X \subseteq B_x(r)$ и $y \in M$ — какая-то точка, то неравенство треугольника даёт включение $X \subseteq B_y(r + \rho(x, y))$. Таким образом ограниченность шаром с одним центром влечёт ограниченность возможно бо́льшим шаром с другим центром. В частности, в ограниченность $X \subseteq \mathbb{R}^n$ часто понимают как ограниченность множества $\{|x| \mid x \in X\}$.

В следующих задачах читателю предлагается проверить утверждения, являющиеся аналогом теоремы о вложенных отрезках на действительной прямой (более правильное обобщение теоремы Кантора для метрических пространств дано ниже в теореме 3.24).

*Задача* 3.13. Докажите, что последовательность вложенных замкнутых шаров $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$ полного метрического пространства со стремящимися к нулю радиусами имеет единственную общую точку.

[[ Докажите, что последовательность центров шаров будет фундаментальной. ]]

*Задача* 3.14. Докажите, что последовательность вложенных замкнутых шаров $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$ евклидова пространства имеет общую точку, даже если радиусы шаров не стремятся к нулю.

[[ Докажите, что последовательность центров шаров будет фундаментальной. ]]

*Задача* 3.15. * Приведите пример полного метрического пространства, в котором утверждение предыдущей задачи неверно.

[[ Введите метрику на $\mathbb{N}$ так, чтобы всегда выполнялось $\rho(n, m) > 1$ для $n \neq m$, докажите, что это гарантирует полноту такого метрического пространства. При подходящем введении метрики, радиусов и центров шаров можно добиться того, чтобы шары в последовательности выглядели как $B_k = \{n \mid n \geqslant k\}$. ]]

Для описания того, какое множество в метрическом пространстве маленькое, а какое большое, сделаем определение:

**Определение 3.16.** Для множества $X \subseteq M$ определим *диаметр* как

$$\operatorname{diam} X = \sup\{\rho(x, y) \mid x, y \in X\}.$$

Из неравенства треугольника следует, что диаметр шара не более двух его радиусов. В евклидовом пространстве диаметр шара в точности равен двум его радиусам.

*Задача* 3.17. Докажите, что подмножество метрического пространства ограничено тогда и только тогда, когда оно имеет конечный диаметр.

*Задача* 3.18. Докажите, что если два множества $X$ и $Y$ в метрическом пространстве $M$ пересекаются, то

$$\operatorname{diam} X \cup Y \leqslant \operatorname{diam} X + \operatorname{diam} Y.$$

Приведите пример, когда неравенство нарушается для непересекающихся множеств.

3.4. **Топология в метрическом пространстве.** Определим $\varepsilon$-окрестность точки $x$ в метрическом пространстве $M$ как открытый шар $D_x(\varepsilon)$ и будем обозначать тем же обозначением $U_\varepsilon(x)$, которое мы использовали на прямой.

**Определение 3.19.** Подмножество $U \subseteq M$ называется *открытым*, если вместе с каждой точкой оно содержит некоторую $\varepsilon$-окрестность этой точки.

Точно так же, как в случае $\mathbb{R}$, доказываются основные свойства: пустое множество и всё пространство $M$ открыты, пересечение конечного числа открытых множеств открыто, объединения любого семейства открытых множеств открыто.

**Определение 3.20.** Подмножество $F \subseteq M$ называется *замкнутым*, если его дополнение $M \setminus F$ открыто.

Естественно получается, что пустое множество и всё пространство $M$ замкнуты, объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто, пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.

Проверим, что «открытый шар» $D_x(r)$ открыт. Действительно, если $y \in D_x(r)$, то $r > \rho(x, y)$ и по неравенству треугольника

$$D_y(r - \rho(x, y)) \subseteq D_x(r),$$

что доказывает открытость. Проверим, что «замкнутый шар» $B_x(r)$ замкнут. Действительно, если $y \notin B_x(r)$, то шар $D_y(\rho(x, y) - r)$ не пересекает $B_x(r)$ по неравенству треугольника.

*Задача* 3.21. Проверьте, что стандартная метрика евклидова пространства и метрика $\rho_\infty$ (максимум модуля разности координат) из задачи 3.3 определяют одну и ту же топологию в $\mathbb{R}^n$.

[[ Поместите куб в больший шар, а шар в больший куб. ]]

Далее для любого подмножества $X \subseteq M$ точки $M$ разбиваются на внутренние точки $X$, граничные точки $X$, и внешние точки $X$. Определяется внутренность $\operatorname{int} X$, граница $\partial X$ и замыкание $\operatorname{cl} X$, как делалось в случае $\mathbb{R}$. Так же проверяется, что внутренность является открытым множеством, а граница и замыкание — замкнутыми.

Для любого подмножества $X \subseteq M$ определяются множества, *открытые относительно* $X$, как пересечения $X \cap U$ с открытыми подмножествами $U \subseteq M$. Это определяет *индуцированную топологию* на $X$.

*Задача* 3.22. Проверьте, что индуцированная топология соответствует индуцированной метрике.

*Задача* 3.23. Покажите, что метрика, индуцированная на $X \subseteq M$ с полного метрического пространства $M$ полна тогда и только тогда, когда $X$ замкнуто в $M$.

Теперь мы можем сформулировать правильное обобщение теоремы Кантора о вложенных отрезках.

**Теорема 3.24.** *Убывающая по включению последовательность замкнутых непустых множеств*

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots \supseteq X_k \supseteq \dots$$

*полного метрического пространства, диаметры которых стремятся к нулю, имеет единственную общую точку.*

*Доказательство.* Выберем по одной точке из каждого множества $x_k \in X_k$. Из вложенности множеств (их убывания по включению) следует, что $x_m \in X_k$ при $m > k$ и $\rho(x_k, x_m) \leqslant \operatorname{diam} X_k$. А так как диаметры стремятся к нулю, то последовательность $(x_k)$ оказывается фундаментальной. Из полноты метрического пространства следует, что у неё есть предел $x_0$.

Если оказалось, что $x_0 \notin X_k$, то $x_0$ имеет окрестность $U_\varepsilon(x_0)$, не пересекающуюся с $X_k$. Но тогда точки $x_m$ при $m > k$ тоже содержатся в $X_k$, не лежат в $U_\varepsilon(x_0)$ и не могут стремиться к $x_0$. Полученное противоречие показывает, что $x_0 \in X_k$ для любого $k$, то есть это общая точка.

Общая точка должна быть единственной, так как для любых двух таких общих точек $x_0$ и $x_0'$ и любого $k$ выполняется

$$x_0, x_0' \in X_k \Rightarrow \rho(x_0, x_0') \leqslant \operatorname{diam} X_k \to 0.$$

Это может быть верно только при $\rho(x_0, x_0') = 0$, что означает $x_0 = x_0'$. ☐

Введём определение, которое годится для любого топологического пространства (то есть использует только понятие открытости множества):

**Определение 3.25.** Множество $X$ называется *связным*, если его нельзя разбить на два непустых открытых относительно $X$ множества.

**Теорема 3.26.** *Связные множества на прямой* $\mathbb{R}$ *— это промежутки.*

*Доказательство.* Докажем, что если множество $X \subseteq \mathbb{R}$ не является промежутком, то оно несвязно. Если в $X$ лежат точки $a$ и $b$, но не лежит некоторая точка $c \in (a, b)$, то множества $X \cap (-\infty, c)$ и $X \cap (c, +\infty)$ дают разбиение $X$ на два непустых и открытых относительно $X$ множества. Это показывает несвязность $X$.

В обратную сторону, если промежуток $X \subseteq \mathbb{R}$ несвязен, то по определению он разбит на две непустые открытые относительно $X$ части $Y$ и $Z$. Определим функцию $f : X \to \mathbb{R}$, которая на $Y$ принимает значение $0$, а на $Z$ принимает значение $1$. По топологическому определению непрерывности эта функция непрерывна на промежутке $X$. Но по теореме о промежуточном значении непрерывной на промежутке функции она не может принимать только два значения. □

3.5. **Компактность в метрическом пространстве.** Определение компактности с $\mathbb{R}$ переносится на подмножества произвольного метрического пространства и даже на подмножества произвольного топологического пространства, так как не использует ничего, кроме понятия «открытое множество».

**Определение 3.27.** Множество $X \subseteq M$ называется *компактным*, если из любого покрытия открытыми множествами

$$X \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$$

можно выбрать конечное подсемейство $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_N}$, которое всё ещё покрывает $X$.

*Задача* 3.28. Проверьте, что $X$ компактно как подмножество $M$ тогда и только тогда, когда оно компактно как подмножество самого себя в индуцированной с $M$ метрике (или топологии).

**Лемма 3.29.** *Если $X$ компактно, а $Y \subset X$ — замкнуто, то $Y$ тоже компактно.*

*Доказательство.* Так как $Y$ замкнуто, то его дополнение $V$ открыто. К любому покрытию $Y \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$ добавим открытое множество $V$, это уже будет покрытие для $X$. Если из нового семейства можно выбрать конечное подсемейство, покрывающее $X$, то это конечное подсемейство без $V$ будет покрывать $Y$. □

*Задача* 3.30. Докажите, что объединение конечного числа компактных подмножеств пространства $M$ тоже компактно.

[[ Примените определение компактности. ]]

Обратите внимание, что для общего метрического пространства ограниченность и замкнутость не означает компактность. Одна из причин может заключаться в том, что метрическое пространство не полное. Например интервал $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ с индуцированной метрикой является ограниченным и замкнутым (в индуцированной топологии), но его покрытие интервалами

$$U_n = \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right)$$

нельзя уменьшить до конечного подпокрытия. Но даже для полных метрических пространств ограниченность и замкнутость может не давать компактность, более детальное обсуждение этого мы откладываем до работы с бесконечномерными банаховыми пространствами и теоремы 9.76.

*Задача* 3.31. * Приведите пример полного метрического пространства, которое имеет конечный диаметр, но не компактно.

[[ Может сработать конструкция из задачи 3.15. ]]

Лемма о компактности замкнутых подмножеств компактов показывает, что компактность ограниченных множеств следует из компактности всех замкнутых шаров. Далее мы докажем утверждение о связи компактности с ограниченностью и замкнутостью в произвольных метрических пространствах и в евклидовом пространстве.

**Теорема 3.32.** *Если множество $X \subseteq M$ в метрическом пространстве $M$ компактно, то оно ограничено и замкнуто.*

*Доказательство.* Возьмём любую точку $x \in M$. Возрастающая по включению последовательность открытых шаров $\{D_x(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ покрывает всё пространство $M$ и множество $X$ тоже. Если применить компактность $X$, то из этой последовательности шаров можно оставить конечную подсистему (то есть на самом деле один шар из возрастания по включению), покрывающую $X$. Следовательно, $X$ оказывается ограниченным.

Пусть теперь $x \notin X$, тогда возрастающая по включению последовательность открытых множеств

$$U_n = M \setminus B_x(1/n)$$

покроет всё множество $X$. Если её конечное подсемейство покроет множество $X$, то из возрастания по включению одно из этих множество покроет $X$, то есть

$$X \subseteq M \setminus B_x(1/n)$$

для некоторого натурального $n$. Это будет значить, что $X$ не пересекается с $D_x(1/n)$, то есть $x$ — внешняя точка $X$. Это верно для любой точки $x \in M \setminus X$, и следовательно, дополнение к $X$ открыто, а само $X$ — замкнуто. □

**Теорема 3.33** (Критерий компактности в евклидовых пространствах)**.** *Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.*

*Доказательство.* В одну сторону утверждение доказано в предыдущей теореме. Докажем компактность для ограниченного и замкнутого $X \subset \mathbb{R}^n$. Ограниченное $X$ содержится в некотором кубе $Q_1 = [-m, m]^n$, и по лемме 3.29 достаточно доказать компактность куба $Q_1$.

Фиксируем семейство открытых множеств $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ и предположим противное, что никакое его конечное подсемейство на покрывает $Q_1$. Разобьём $Q_1$ на $2^n$ равных куба, разрезав его по середине вдоль каждой координаты. Выберем тот из них в качестве $Q_2$, для которого $Q_2$ нельзя покрыть конечным подсемейством $\mathcal{U}$. Так сделать можно, ибо если покрыть конечным подсемейством можно каждый из меньших кубов, то покрыть конечным подсемейством $\mathcal{U}$ можно и исходный куб.

Повторяя эту конструкцию, мы получаем семейство стягивающихся кубов $(Q_k)$, в том смысле, что семейство упорядочено по включению и диаметры $Q_k$ стремятся к нулю. Эта последовательность является убывающей по включению последовательностью непустых замкнутых множеств со стремящимся к нулю диаметром. По теореме 3.24, существует общая точка, $x \in Q_k$ при любом $k$. Значит $x \in U$ для некоторого $U \in \mathcal{U}$. Из того, что $\operatorname{diam} Q_k \to 0$ следует, что $Q_k \subseteq U$ для достаточно больших $k$, то есть $Q_k$ можно покрыть одним элементом семейства $\mathcal{U}$. Противоречие. □

Установим также свойство *секвенциальной компактности* метрических компактов. Сначала по сути повторим определение *частичного предела* и *точки сгущения* последовательности $(x_n) \subseteq M$, которые были даны для действительных чисел.

**Определение 3.34.** *Частичный предел последовательности* $(x_n)$ — это предел некоторой её подпоследовательности.

**Определение 3.35.** *Точка сгущения последовательности* $(x_n)$ — это такая точка $x \in M$, что в любой окрестности $x$ содержится бесконечно много элементов последовательности $(x_n)$.

Аналог леммы 1.124 верен в метрических пространствах.

**Лемма 3.36.** *Точка $x \in M$ является частичным пределом последовательности $(x_n)$ точек метрического пространства $M$ тогда и только тогда, когда она является точкой сгущения этой последовательности.*

*Доказательство.* Если $x$ — частичный предел, то, очевидно, в любой окрестности $x$ лежит бесконечно много членов соответствующей подпоследовательности $(x_{n_k})$.

В обратную сторону, для каждого натурального $k$ можно взять окрестность $U_{1/k}(x)$ и найти в ней точку $x_{n_k}$ из нашей последовательности так, что номер $n_k$ будет больше ранее использованных номеров, $n_k > n_{k-1}$. Это возможно, так как у нас бесконечно много вариантов выбора в данной окрестности. Так получится подпоследовательность $(x_{n_k})_k$, которая стремится к $x$ по определению, $\rho(x, x_{n_k}) < 1/k \to 0$. □

**Теорема 3.37.** *Если подмножество $X$ метрического пространства компактно, то любая последовательность $(x_k)$ элементов $X$ имеет частичный предел в $X$.*

*Доказательство.* Предположим, что частичных пределов некоторой последовательности $(x_k)$ нет в $X$, значит нет и точек сгущения.

Тогда для любой точки $x \in X$ есть окрестность $U(x)$, в которой последовательность бывает только конечное число раз. Эти окрестности покрывают $X$. Выбрав конечное подпокрытие, мы получаем, что в последовательности $(x_k)$ в целом было конечное число элементов, противоречие. □

*Задача* 3.38. $^*$ Докажите, что из секвенциальной компактности метрического пространства $X$ следует его компактность.

[[ Это можно вывести из свойства вполне ограниченности, см. теорему 9.76, но можно придумать и какое-нибудь другое рассуждение. ]]

Заметим, что декартово произведение секвенциально компактных метрических пространств $X$ и $Y$, $X \times Y$, является очевидно секвенциально компактным, так как каждую «координату» в последовательности пар $((x_k, y_k))_k$ можно заставить сходиться переходом к подпоследовательности. Из предыдущей задачи последует, что $X \times Y$ будет и просто компактным. Компактность произведения компактов (в топологическом смысле) в максимальной общности устанавливает теорема Тихонова (теорема 9.100), которую мы в полной мере будем использовать позже.

Докажем также утверждение о том, что полнота метрического пространства следует из компактности его шаров.

**Теорема 3.39.** *Если в метрическом пространстве $M$ все замкнутые шары компактны, то $M$ — полное.*

*Доказательство.* Рассмотрим фундаментальную последовательность $(x_k)$ в $M$. Для начала заметим, что в любом метрическом пространстве любая фундаментальная последовательность ограничена. Доказательство аналогично доказательству леммы 1.37: по определению фундаментальности (если положить $\varepsilon = 1$), после отбрасывания некоторого количества начальных членов последовательность $(x_k)$ будет содержаться в некотором шаре единичного радиуса; увеличивая радиус этого шара, можно поместить в него и отброшенные члены последовательности.

Теперь мы считаем, что последовательность $(x_k)$ содержится в некотором шаре $B$. По предположению теоремы шар $B$ компактен и по теореме 3.37 у последовательности $(x_k)$ будет частичный предел $x_0 \in B$. Но для фундаментальной последовательности частичный предел должен быть просто пределом, так как в любой окрестности $U_\varepsilon(x_0)$ лежит бесконечно много членов последовательности и поставив $\varepsilon$ в определение фундаментальности мы увидим, что для достаточно больших $k$ будет выполняться $x_k \in U_{2\varepsilon}(x_0)$, что и означает сходимость. □

*Задача* 3.40. Приведите пример метрического пространства, в котором для каждой точки найдётся компактный шар положительного радиуса с центром в данной точке, но само пространство не полное.

[[ Найдите пример в виде подмножества прямой. ]]

*Задача* 3.41 (Аналог теоремы Кантора о вложенных отрезках). Пусть в метрическом пространстве $M$ есть убывающая по включению последовательность непустых компактных подмножеств

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_k \supseteq \dots.$$

Докажите, что пересечение $\bigcap_{k=1}^{\infty} K_k$ не пусто.

[[ Попробуйте покрыть $K_1$ открытыми множествами $U_K = M \setminus K_k$. ]]

*Задача* 3.42 (Лемма Лебега). Докажите, что если компактное метрическое пространство $X$ покрыто открытыми множествами $\{U_\alpha\}$, то найдётся $\delta > 0$, такое, что любое подмножество $Y \subseteq X$ диаметра не более $\delta$ содержится в каком-то одном из множеств $U_\alpha$ полностью.

[[ Предположите противное, взяв $\delta = 1/k$ и соответствующее $Y_k$ с $\operatorname{diam} Y_k \leqslant 1/k$, которое не лежит в одном множестве покрытия. Выберите $y_k \in Y_k$ и рассмотрите предельную точку последовательности $(y_k)$ в $X$. ]]

3.6. **Непрерывные отображения метрических пространств.** Для отображения между метрическими пространствами $f : M \to N$, как и для функции действительных чисел, можно ввести несколько эквивалентных определений непрерывности:

**Определение 3.43** (Непрерывность по Коши в точке). Для любой $U_\varepsilon(f(x_0))$ найдётся $U_\delta(x_0)$, такая что $f(U_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0))$.

**Определение 3.44** (Непрерывность по Гейне в точке). Если $x_k \to x_0$ в $M$, то $f(x_k) \to f(x_0)$ в $N$.

**Определение 3.45** (Топологическое определение непрерывности). Для любого открытого $U \subseteq N$ прообраз $f^{-1}(U)$ открыт в $M$.

Следующая лемма по сути воспроизводит факты, которые мы уже установили для числовых функций.

**Лемма 3.46.** *Определения непрерывности в точке по Коши и Гейне эквивалентны. Выполнение непрерывности по Коши или Гейне во всех точках $M$ эквивалентно топологическому определению непрерывности.*

*Доказательство.* (Коши)⇒(Гейне): Пусть $x_k \to x_0$. Возьмём $U_\varepsilon(f(x_0))$ и соответствующую $U_\delta(x_0)$. При достаточно большом $k$ окажется $x_k \in U_\delta(x_0)$. Тогда $f(x_k) \in U_\varepsilon(f(x_0))$, то есть $\rho(f(x_k), f(x_0)) < \varepsilon$. Значит $f(x_k) \to f(x_0)$ по определению.

(Гейне)⇒(Коши): Предположим противное в определении Коши: для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ (пусть $\delta = 1/k$) мы найдём точку $x_k \in U_{1/k}(x_0)$, такую что $\rho(f(x_k), f(x_0)) \geqslant \varepsilon$. Тогда выйдет, что $x_k \to x_0$ и $f(x_k) \not\to f(x_0)$.

(топологическое определение)⇒(Коши во всех точках): Окрестность $U_\varepsilon(f(x_0))$ открыта и $V = f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0)))$ является открытым множеством, содержащим $x_0$. Тогда по определению открытости найдётся $U_\delta(x_0) \subseteq V$ и тогда $f(U_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0))$.

(Коши во всех точках)⇒(топологическое определение): Пусть $U$ открыто и мы рассматриваем $V = f^{-1}(U)$. Если $x_0 \in V$, то $f(x_0) \in U$ и по определению открытости $U$ найдётся $U_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq U$. Рассмотрим соответствующую $U_\delta(x_0)$ из определения Коши.

$$f(U_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq U,$$

следовательно $U_\delta(x_0) \subseteq V$ по определению прообраза. Это означает, что любая точка $x_0 \in V$ лежит в $V$ вместе со своей окрестностью, то есть $V$ открыто. □

При рассмотрении непрерывного отображения $f : X \to N$, определённого на подмножестве $X \subseteq M$, мы всегда будем иметь в виду $X$ как метрическое пространство с индуцированной метрикой и топологией. В частности, в топологическом определении прообразы открытых множество $f^{-1}(U)$ должны быть открыты относительно $X$.

*Задача* 3.47. Докажите, что ограничение непрерывного отображения $f : M \to N$ на подмножество $X \subseteq M$ даёт непрерывное отображение $f|_X : X \to N$.

[[ Используйте топологическое определение непрерывности. ]]

**Теорема 3.48.** *Композиция непрерывных отображений непрерывна.*

*Доказательство.* Пусть $f : M \to N$ и $g : N \to L$ непрерывны. Для $h = g \circ f$ и открытого $U \subseteq L$ очевидно, что прообраз $h^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ является открытым. □

Можно определить и операцию *декартова произведения отображений*: если $f : M \to N$ и $g : M' \to N'$, то $f \times g : M \times M' \to N \times N'$ действует по формуле

$$(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y)).$$

Определение непрерывности по Гейне легко показывает, что декартово произведение непрерывных отображений (метрических пространств) непрерывно. Для работы с топологическими пространствами и топологическим определением непрерывности важно понимать, что топология в декартовом произведении $M \times M'$ состоит из всевозможных объединений множеств вида $U \times U'$, где $U \subseteq M$ и $U' \subseteq M'$ — открыты. Тогда утверждение про декартово произведение непрерывных отображений будет верным и для непрерывных отображений топологических пространств.

Можно проверить, что операции сложения векторов, умножения вектора на число, деления числа на число непрерывны как отображения $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$ (проще всего это проверить по Гейне). Если учесть непрерывность простых, но полезных, операций диагонали (повторения)

$$\Delta_M : M \to M \times M, \quad \Delta_M(x) = (x, x),$$

добавления к вектору постоянных координат, перестановки координат, забывания координат вектора, то мы можем сказать, что все операции, которые мы можем построить явно с использованием указанных действий над векторами, арифметических операций над числами и элементарных функций, будут непрерывными на своей естественной области определения. В частности, композиции элементарных функций от разных переменных дадут нам непрерывные функции нескольких переменных на их естественных областях определения в $\mathbb{R}^n$.

*Задача* 3.49. Пусть функция одной переменной $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема. Докажите, что функцию двух переменных

$$g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

можно доопределить до непрерывной функции $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

[[ Используйте теорему о среднем Лагранжа. ]]

Аналогично определению непрерывности можно ввести определение предела отображения в точке

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

по Коши или по Гейне, которое по сути будет означать возможность доопределить или переопределить $f(x_0) = A \in N$ и получить отображение, непрерывное в точке $x_0$. В частном случае отображения $f : M \to \mathbb{R}^n$ мы будем писать

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,$$

если $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$.

При непрерывном отображении прообраз любого открытого множества открыт, а значит, и прообраз любого замкнутого множества замкнут. В частности, прообраз любой точки при непрерывном отображении метрических пространств замкнут. Ещё более частным случаем этого утверждения является замкнутость множества решений уравнения

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

при условии, что функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна.

*Задача* 3.50. Докажите, что множество решений неравенства

$$f(x_1, \dots, x_n) > 0$$

открыто, если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна.

*Задача* 3.51. Докажите, что график непрерывной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ замкнут.

*Задача* 3.52. Верно ли, что если график функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ замкнут, то $f$ непрерывна?

3.7. **Непрерывные отображения компактов и связных множеств.** Связь компактности с непрерывностью отображений даёт следующая теорема:

**Теорема 3.53.** *Образ компактного множества при непрерывном отображении является компактным.*

*Доказательство.* Это утверждение верно вообще для любых топологических пространств, необязательно метрических. Пусть $f : X \to N$ непрерывно и $X$ компактно. Заметим, что компактность $X$ как подмножества большего пространства $M$ эквивалентна его компактности в индуцированной с $M$ топологии, поэтому мы работаем только с $X$ как со всем пространством.

Допустим мы покрыли $f(X)$ открытыми множествами $\{U_\alpha\}$. Положим $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$, эти множества открыты по топологическому определению непрерывности и покрывают $X$. Значит из них можно выбрать конечное подсемейство, покрывающее $X$. Соответствующее подсемейство $\{U_\alpha\}$ покроет $f(X)$. ☐

*Задача* 3.54. Докажите, что непрерывное отображение метрических пространств переводит секвенциальные компакты в секвенциальные компакты.

[[ Используйте определение непрерывности по Гейне. ]]

Аналогичное утверждение верно для непрерывных отображений и связности:

**Теорема 3.55.** *Образ связного множества при непрерывном отображении является связным.*

*Доказательство.* Аналогично предыдущему, это утверждение верно для любых топологических пространств. Пусть $f : X \to N$ непрерывно и $X$ связно. Заметим, что связность $X$ как подмножества большего пространства $M$ эквивалентна его связности в индуцированной с $M$ топологии, поэтому мы работаем только с $X$ как со всем пространством.

Предположим противное: мы разбили $f(X)$ на два непустых множества, открытых относительно $f(X)$, пусть эти множества $U \cap f(X)$ и $V \cap f(X)$ для открытых $U, V \subseteq N$. Тогда $U' = f^{-1}(U)$ и $V' = f^{-1}(V)$ не пересекаются, непустые, открытые относительно $X$ и покрывают всё $X$. Получаем противоречие со связностью $X$. ☐

Из предыдущей теоремы и леммы 3.26 сразу получается:

**Следствие 3.56** (Общая теорема о промежуточном значении). *Непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$ на связном множестве $X$ отображает его в промежуток.*

Далее мы приведём некоторый достаточно общий вариант теоремы о непрерывности обратного отображения.

**Определение 3.57.** Отображение $f : M \to N$ называется *гомеоморфизмом*, если оно непрерывно, биективно и обратное к нему непрерывно.

**Теорема 3.58.** *Если метрическое пространство $M$ компактно, то любое непрерывное и биективное отображение $f : M \to N$ будет гомеоморфизмом.*

*Доказательство.* Заметим, что все замкнутые подмножества $M$ компактны, следовательно $f$ переводит любое замкнутое множество в $M$ в замкнутое множество в $N$ по теореме 3.53 с учётом того, что любое компактное множество в метрическом пространстве замкнуто. Переходя к дополнению, мы увидим, что $f$ переводит открытые множества в открытые. Следовательно, $f^{-1}$ непрерывно по топологическому определению непрерывности. ☐

Заметим, что для некомпактных пространств утверждение предыдущей теоремы может и не быть верным. Рассмотрим к примеру отображение полуинтервала $[0, 2\pi)$ в окружность по очевидной формуле $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Оно очевидно непрерывно и обратимо, но обратное не является непрерывным.

*Задача* 3.59. Докажите, что отображение $f : X \to \mathbb{R}^m$ для некоторого $X \subseteq \mathbb{R}^n$ переводит любую фундаментальную последовательность в фундаментальную тогда и только тогда, когда оно продолжается до непрерывного $\overline{f} : \operatorname{cl} X \to \mathbb{R}^m$.

*Задача* 3.60. Докажите, что для любого метрического пространства $M$ его функция расстояния $\rho : M \times M \to \mathbb{R}^+$ непрерывна.

[[ Используйте неравенство треугольника. ]]

3.8. **Расстояние между множествами и нормальность.** В метрическом пространстве бывает полезно рассматривать не только расстояния между точками, но и расстояние от точки до множества или расстояние между двумя множествами.

**Определение 3.61.** *Расстояние от точки $x$ до множества $Y$* в метрическом пространстве $M$ — это

$$\operatorname{dist}(x, Y) = \inf\{\rho(x, y) \mid y \in Y\}.$$

Естественно поставить вопрос, когда точная нижняя грань в определении расстояния от точки до множества достигается. Точки $y \in Y$, на которых точная нижняя грань достигается, называются *метрическими проекциями* точки $x$ на множество $Y$. Для этого есть простые достаточные условия, первое работает в произвольном метрическом пространстве, а второе — только в $\mathbb{R}^n$, или в аналогичном пространстве с компактными шарами.

**Теорема 3.62.** *Если $Y$ компактно и не пусто, то $\operatorname{dist}(x, Y)$ достигается.*

*Доказательство.* В силу неравенства треугольника имеем

$$|\rho(x, y') - \rho(x, y'')| \leqslant \rho(y', y''),$$

следовательно $\rho(x, y)$ при фиксированном $x$ является непрерывной функцией от $y$. Следовательно, на компактном $Y$ минимум $\min\{\rho(x, y) \mid y \in Y\}$ достигается. □

**Теорема 3.63.** *Если $x \in \mathbb{R}^n$ и $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ замкнуто и не пусто, то $\operatorname{dist}(x, Y)$ достигается.*

*Доказательство.* Пусть $d = \operatorname{dist}(x, Y)$. Множество $B_x(d + 1) \cap Y$ является замкнутым подмножеством компактного $B_x(d + 1)$, а значит оно само компактно. Кроме того, оно непусто, иначе бы выполнялось $\operatorname{dist}(x, Y) \geqslant d + 1$. Значит $\operatorname{dist}(x, B_x(d + 1) \cap Y)$ достигается, но на самом деле это будет $\operatorname{dist}(x, Y)$, так как точки $Y$ на расстоянии более $d + 1$ от $x$ в определении $\operatorname{dist}(x, Y)$ «не участвуют». □

**Теорема 3.64.** *Для произвольного непустого подмножества $Y$ метрического пространства $M$ функция от $x \in M$, заданная формулой $\operatorname{dist}(x, Y)$, непрерывна.*

*Доказательство.* По неравенству треугольника запишем

$$\rho(x', y) \leqslant \rho(x'', y) + \rho(x', x''),$$

и следовательно для любого $y \in Y$

$$\operatorname{dist}(x', Y) \leqslant \rho(x', y) \leqslant \rho(x'', y) + \rho(x', x'').$$

Взяв последовательность точек $y_n \in Y$, такую что $\rho(x'', y_n) \to \operatorname{dist}(x'', Y)$, переходим к пределу и получаем

$$\operatorname{dist}(x', Y) \leqslant \operatorname{dist}(x'', Y) + \rho(x', x'').$$

Учитывая возможность переставить $x'$ и $x''$, получаем

$$|\operatorname{dist}(x', Y) - \operatorname{dist}(x'', Y)| \leqslant \rho(x', x''),$$

что доказывает непрерывную зависимость от $x$. □

**Определение 3.65.** Расстояние между множествами $X$ и $Y$ в метрическом пространстве $M$ — это

$$\operatorname{dist}(X, Y) = \inf\{\rho(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

*Задача* 3.66. Докажите, что $\operatorname{dist}(X, Y) = \inf\{\operatorname{dist}(x, Y) \mid x \in X\} = \inf\{\operatorname{dist}(X, y) \mid y \in Y\}$.

**Теорема 3.67.** *Если $X$ и $Y$ — непустые компактные подмножества метрического пространства $M$, то $\operatorname{dist}(X, Y)$ достигается.*

*Доказательство.* Функция $\operatorname{dist}(x, Y)$ достигает минимума на $X$ в точке $x_0$ как непрерывная функция на компакте. Далее, $\rho(x_0, y)$ тоже достигает минимума при $y_0 \in Y$ по тем же причинам. Следовательно

$$\operatorname{dist}(X, Y) = \inf\{\operatorname{dist}(x, Y) \mid x \in X\} = \operatorname{dist}(x_0, Y) = \rho(x_0, y_0).$$

□

В евклидовом пространстве и в любом пространстве с компактными шарами верно более сильное свойство:

**Теорема 3.68.** *Если* $X \subset \mathbb{R}^n$ *компактно и не пусто, а* $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ *замкнуто и не пусто, то* $\operatorname{dist}(X, Y)$ *достигается.*

*Доказательство.* Аналогично предыдущей теореме, функция $\operatorname{dist}(x, Y)$ достигает минимума на $X$ в точке $x_0$ как непрерывная функция на компакте, а $\rho(x_0, y)$ достигает минимума при $y_0 \in Y$ из замкнутости $Y \subseteq \mathbb{R}^n$. ☐

Аналогичные рассуждения доказывают следующий полезный факт:

**Теорема 3.69.** *Для двух непустых подмножеств* $X$ *и* $Y$ *метрического пространства* $M$*, если* $X$ *компактно,* $Y$ *замкнуто и* $X \cap Y = \emptyset$*, то* $\operatorname{dist}(X, Y) > 0$.

*Доказательство.* Функция $\operatorname{dist}(x, Y)$ непрерывна как функция переменной $x$ по теореме 3.64. Также из замкнутости $Y$ следует, что $\operatorname{dist}(x, Y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in Y$. Отсюда следует, что $\operatorname{dist}(x, Y)$ непрерывна и положительна на компакте $X$, а следовательно достигает на нём положительного минимума $\varepsilon > 0$. Из этого следует, что $\operatorname{dist}(X, Y) = \varepsilon > 0$. ☐

Далее мы используем понятие расстояния между множествами, чтобы поработать с окрестностями множеств.

**Определение 3.70.** Определим $\varepsilon$-окрестность множества $X$ в метрическом пространстве $M$, при $\varepsilon > 0$, как

$$U_\varepsilon(X) = \{y \in M \mid \operatorname{dist}(y, X) < \varepsilon\}.$$

*Задача* 3.71. Докажите, что $\varepsilon$-окрестность любого множества открыта.

[[ Используйте непрерывность функции расстояния до множества. ]]

*Задача* 3.72. Докажите, что если компактное подмножество $K$ некоторого метрического пространства $M$ содержится в открытом подмножестве $U$, то $K$ содержится в $U$ вместе с некоторой своей $\varepsilon$-окрестностью.

[[ Рассмотрите расстояние от $K$ до $M \setminus U$. ]]

Теорема 3.69 означает, что у непересекающихся компактного $X$ и замкнутого $Y$ существуют непересекающиеся $\varepsilon$-окрестности, достаточно взять $\varepsilon$ меньше половины расстояния между $X$ и $Y$. Для не обязательно компактных замкнутых множеств можно доказать следующее:

**Теорема 3.73** (Нормальность метрических пространств). *Если замкнутые подмножества* $X, Y$ *в метрическом пространстве* $M$ *не пересекаются, то найдутся непересекающиеся открытые* $U \supseteq X$ *и* $V \supseteq Y$.

*Доказательство.* Для любой точки $x \in X$ найдём окрестность $D_x(\varepsilon_x)$, которая не пересекается с $Y$, это можно сделать по замкнутости $Y$. Для любой точки $y \in Y$ аналогично найдём $D_y(\varepsilon_y)$, которая не пересекается с $X$. Положим теперь

$$U = \bigcup_{x \in X} D_x(\varepsilon_x/2), \quad V = \bigcup_{y \in Y} D_y(\varepsilon_y/2).$$

Эти множества очевидно открыты и содержат $X$ и $Y$ соответственно. Они не могут пересечься, так как если бы какие-то два открытых шара $D_x(\varepsilon_x/2)$ и $D_y(\varepsilon_y/2)$ пересеклись, то при $\varepsilon_x \geqslant \varepsilon_y$ (без ограничения общности) выполнялось бы $D_x(\varepsilon_x) \ni y$, что противоречит определению $D_x(\varepsilon_x)$. В случае $\varepsilon_x \leqslant \varepsilon_y$ аналогично получилось бы противоречие в виде $x \in D_y(\varepsilon_y)$. ☐

*Задача* 3.74. Приведите пример замкнутых непересекающихся множеств $X$ и $Y$ в евклидовом пространстве, у которых $\varepsilon$-окрестности пересекаются при любом положительном $\varepsilon$.

*Задача* 3.75. Докажите, что если множество $X$ в некотором метрическом пространстве компактно, то в определении $\operatorname{diam} X$ точная верхняя грань достигается.

*Задача* 3.76. Докажите, что расстояние между подмножествами $\operatorname{dist}(X, Y)$ евклидова пространства не всегда удовлетворяет неравенству треугольника

$$\operatorname{dist}(X, Z) \leqslant \operatorname{dist}(X, Y) + \operatorname{dist}(Y, Z).$$

3.9. **Кривые и линейная связность.** В некоторых метрических пространствах, и особенно в евклидовом пространстве, бывает полезно рассматривать параметризованные действительными числами кривые.

**Определение 3.77.** *Кривой* в метрическом пространстве $M$ называется непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \to M$. Точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ называются *начало и конец кривой*.

Обычно кривая рассматривается с точностью до допустимой замены параметра, то есть взяв гомеоморфизм $\sigma : [c, d] \to [a, b]$ и взяв композицию $\gamma \circ \sigma : [c, d] \to M$, мы получаем эквивалентную кривую и вообще считаем кривой класс эквивалентности отображений $\gamma$ с точностью до умножения справа на гомеоморфизм отрезка на отрезок. Если класс эквивалентности определить иначе, разрешив только возрастающие гомеоморфизмы отрезка на отрезок, то получится понятие класса эквивалентности, который называется *ориентированная кривая*.

**Определение 3.78.** Если конец ориентированной кривой $\gamma_1$ совпадает с началом ориентированной кривой $\gamma_2$ и множества параметров кривых подобраны так, чтобы $\gamma_1 : [a, b] \to M, \gamma_2 : [b, c] \to M$, то ориентированная кривая

$$\gamma : [a, c] \to M, \quad \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{если } t \in [a, b]; \\ \gamma_2(t), & \text{если } t \in [b, c]; \end{cases}$$

называется *конкатенацией кривых* $\gamma_1$ и $\gamma_2$. Будем писать $\gamma = \gamma_1 \diamond \gamma_2$.

Условие того, чтобы параметр конца $\gamma_1$ был равен параметру начала $\gamma_2$ на самом деле не важно, его выполнения можно добиться сдвигом параметризации одной из кривых. Условие же, что конец одной кривой совпадает с началом другой, важно; оно не зависит от параметризации (ориентированной кривой) и если оно не выполняется, то конкатенация просто не определена. Так или иначе, класс эквивалентности конкатенации кривых не меняется, если исходные кривые меняются в пределах класса эквивалентности ориентированных кривых.

*Задача* 3.79. Докажите, что конкатенация двух кривых является непрерывным отображением.

Ориентированные кривые на метрическом (или топологическом) пространстве $M$ дают пример *категории*. *Объектами* этой категории являются точки пространства, любой кривой соответствует два объекта — начало кривой и конец кривой. Конкатенация кривых определена тогда и только тогда, когда конец первой совпадает с началом второй; обычно в определении категории порядок другой, но это не важно, так как мы можем поменять местами понятия «начало» и «конец» или, как говорят в теории категорий, «перевернуть стрелки».

Для каждой точки $p \in M$ есть кривая, состоящая из одной точки $p$, понимаемой как отображение вырожденного отрезка $[a, a] \to M$. Её можно назвать $\mathrm{id}_p$ и проверить, что выполняется требуемое свойство категории

$$\mathrm{id}_p \diamond \gamma = \gamma, \quad \gamma \diamond \mathrm{id}_p = \gamma,$$

в тех случаях, когда конкатенация определена. Другое свойство категории сформулировано в следующей задаче:

*Задача* 3.80. Докажите ассоциативность конкатенации ориентированных кривых, то есть выполнение формулы

$$(\gamma_1 \diamond \gamma_2) \diamond \gamma_3 = \gamma_1 \diamond (\gamma_2 \diamond \gamma_3)$$

в случае, если левая часть или правая часть определена.

**Определение 3.81.** Кривая в $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, параметризованная как $\gamma(t) = (1 - t)p + tq$, называется *отрезком*, соединяющим $p$ и $q$. Конкатенация конечного числа отрезков называется *ломаной*.

*Задача* 3.82. *(Кривая Пеано) Придумайте кривую $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, образ которой равен квадрату $[0, 1]^2$.

[[ Нарисуйте в квадрате диагональ. Потом разбейте квадрат на $9$ маленьких квадратов и замените диагональ на ломаную, составленную непрерывным образом из девяти диагоналей маленьких квадратов. Потом к каждому из $9$ отрезков ломаной примените ту же операцию, получив ломаную из $81$ отрезка, потом получите ломаную из $729$ отрезков и продолжайте делать так же. Пусть на $n$-м этапе этой процедуры ломаная параметризована с постоянной скоростью как $\gamma_n : [0, 1] \to [0, 1]^2$. Докажите, что предел $\gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \gamma_n(t)$ существует, непрерывно зависит от $t$ и оказывается во всех точках квадрата. ]]

*Задача* 3.83. Докажите, что ломаная не может заполнить весь квадрат.

[[ Можно доказывать по разному. Один из вариантов: заметить, что на плоскости верна теорема Бэра 9.7 об объединении счётного числа замкнутых неплотных множеств. ]]

*Задача* 3.84. * Докажите, что функции $x(t)$ и $y(t)$, получающиеся по приведённому выше рецепту построения кривой Пеано, будут непрерывными, но ни в одной точке не дифференцируемыми.

[[ Опишите $x(t)$ как предел последовательности $(x_n(t))$, обратите внимание, что функции $x_n$ кусочно-линейные, $|\frac{dx_n}{dt}| = 3^{n-1}$ там, где производная существует, и что для любого $t_0 \in [0, 1]$ при любом $n$ найдутся $t' \leqslant t \leqslant t''$, такие что

$$t'' - t' \leqslant 3^{1-n}, \quad x_n(t') = x(t'), \quad x_n(t'') = x(t''), \quad \left|\frac{x(t'') - x(t')}{t'' - t'}\right| = 3^{n-1}.$$

Докажите, что это противоречит дифференцируемости $x(t)$ в $t_0$. ]]

Топологическое понятие связности имеет достаточно сложное для практической проверки определение, поэтому иногда удобно использовать понятие линейной связности.

**Определение 3.85.** Множество $X$ в метрическом пространстве $M$ *линейно связно*, если для любых двух точек $x, y \in X$ найдётся кривая $\gamma : [a, b] \to X$, такая что $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$.

**Теорема 3.86.** *Линейно связное множество связно.*

*Доказательство.* Предположим противное, линейно связное множество $X$ разбилось на непустые относительно открытые $U$ и $V$. Возьмём точки $u \in U$ и $v \in V$, по линейной связности найдём кривую $\gamma : [a, b] \to X$, такую что $f(a) = u, f(b) = v$. Множества $U' = \gamma^{-1}(U)$ и $V' = \gamma^{-1}(V)$ тогда дают разбиение $[a, b]$ на непустые (относительно) открытые множества, что противоречит связности отрезка из леммы 3.26. □

Иногда верно и обратное утверждение:

**Теорема 3.87.** *Связное открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ линейно связно.*

*Доказательство.* Пусть наше множество $U$. Выберем в нём точку $p$ и рассмотрим множество $U'$, образованное точками $U$, до которых можно дойти по кривым в $U$ из $p$. Докажем, что оно открыто. Действительно, если $q \in U'$, то у него есть окрестность $U_\delta(q) \subseteq U$. Мы можем дойти из $q$ в любую точку $U_\delta(q)$ по отрезку. Делая конкатенацию кривой из $p$ в $q$ и этого отрезка, мы получаем кривую из $p$ до любой точки $U_\delta(q)$. Следовательно, $U_\delta(q) \subseteq U'$ и вообще $U'$ открыто.

Рассмотрим теперь множество $U'' = U \setminus U'$. Любая точка $q \in U''$ имеет окрестность $U_\delta(q) \subseteq U$. Если бы какая-то точка $U_\delta(q)$ была концом кривой с началом в $p$, то можно было бы взять конкатенацию этой кривой с отрезком до $q$ и получить, что $q \in U', q \notin U''$. Но это не так, значит $U_\delta(q)$ не пересекается с $U'$ и полностью содержится в $U''$.

Итак, $U$ разбилось на два открытых множества. Одно из них, $U'$, содержит $p$ и поэтому не пусто. Из определения связности, другому, $U''$, придётся быть пустым. Следовательно, $U' = U$ и до любой точки $U$ можно дойти по кривой из $p$. □

Если множество не открыто, то связность может не означать линейной связности. Рассмотрим на плоскости множество $X$, являющееся графиком $y = \sin \frac{1}{x}$ при $x > 0$. Оно само линейно связно. Возьмём его замыкание $Y = \operatorname{cl} X$, нетрудно догадаться, что $Y$ отличается от $X$ добавлением отрезка $S = \{x = 0, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$. Тогда $Y$ не является линейно связным, так как любая кривая, соединяющая часть $X$ с отрезком $S$ должна следовать графику функции и иметь разрыв в первой точке, в которой её координата $x$ станет равна нулю (проверьте это аккуратно самостоятельно). С другой стороны, $Y$ остаётся связным в силу следующей задачи:

*Задача* 3.88. Докажите, что замыкание связного множества $X \subseteq M$ в метрическом пространстве $M$ тоже связно.

[[ Предположите, что $\operatorname{cl} X$ разбилось на два относительно открытых $Y$ и $Z$. Докажите, что $X \cap Y$ и $X \cap Z$ будут непустые. ]]

Аналогично связности, линейная связность сохраняется при непрерывных отображениях:

**Теорема 3.89.** *Образ линейно связного множества при непрерывном отображении является линейно связным.*

*Доказательство.* Пусть $f : X \to f(X)$ — непрерывное отображение и $X$ линейно связно. Для любых точек $p', q' \in f(X)$ найдём их прообразы $p, q \in X$. Их соединяет кривая $\gamma$ в $X$. Тогда $f \circ \gamma$ соединяет $p'$ и $q'$. □

Ещё более сильным условием, чем линейная связность, является выпуклость:

**Определение 3.90.** Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (или в любом векторном пространстве) называется *выпуклым*, если для любых $x, y \in X$ отрезок

$$[x, y] = \{(1 - t)x + ty \mid t \in [0, 1]\}$$

полностью лежит в $X$.

*Задача* 3.91. Докажите, что пересечение выпуклых множеств выпукло. Приведите пример, когда пересечение линейно связных множеств может не быть линейно связным.

*Задача* 3.92. Докажите, что объединение пересекающихся линейно связных множеств линейно связно. Приведите пример, когда объединение пересекающихся выпуклых множеств не является выпуклым.

*Задача* 3.93. Докажите, что решение любой (в том числе бесконечной) системы линейных неравенств вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leqslant b$$

в $\mathbb{R}^n$ выпукло.

*Задача* 3.94. *(Теорема Хелли на плоскости) Докажите, что если в конечном наборе выпуклых множеств на плоскости $\mathbb{R}^2$ любые три множества имеют непустое пересечение, то все множества набора имеют непустое пересечение.

[[ Используйте индукцию по количеству множеств, ключевой случай — когда в наборе четыре множества. ]]

*Задача* 3.95. * Покажите, что для бесконечных наборов выпуклых множеств теорема Хелли уже неверна.

[[ Контрпример можно построить уже на прямой. ]]

3.10. **Равномерная непрерывность.** В этом разделе мы рассмотрим некоторое усиление понятия непрерывности для отображения метрических пространств.

**Определение 3.96.** Отображение $F : M \to N$ между метрическими пространствами является *равномерно непрерывным*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in M,\ (\rho(x, y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon)\,.$$

Удобно также работать с понятием *модуль непрерывности отображения*:

$$\omega_f(\delta) = \sup\left\{\rho(f(x), f(y)) \mid x, y \in M \text{ и } \rho(x, y) < \delta\right\}.$$

Тогда определение равномерной непрерывности означает, что $\omega_f(\delta) \to +0$ при $\delta \to +0$.

Нетрудно привести пример равномерно непрерывного отображения. Например функция $f(x) = \sin x$ равномерно непрерывна, так как

$$|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|.$$

Чуть сложнее доказывается равномерная непрерывность для $f(x) = \sqrt{x}$:

*Задача* 3.97. Проверьте, что для положительных $x$ и $y$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x - y|}.$$

Следующая теорема позволяет получить равномерную непрерывность, не обращаясь к её определению.

**Теорема 3.98.** *Непрерывное отображение $f : M \to N$ метрических пространств при компактном $M$ является равномерно непрерывным.*

*Доказательство.* Применим определение непрерывности для любой точки $x \in M$. Тогда при $y \in U_\delta(x)$ мы будем иметь неравенство

$$\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Уменьшим все эти окрестности в два раза, то есть рассмотрим семейство $\{U_{\delta(x)/2}(x)\}$. Они покрывают $M$ и в силу его компактности в этом покрытии можно оставить конечное число

$$U_{\delta_1/2}(x_1), \dots, U_{\delta_N/2}(x_N).$$

Теперь положим

$$\delta = \min\{\delta_1/2, \dots, \delta_N/2\}.$$

Для любых точек $x$ и $y$ на расстоянии не более $\delta$ ясно, что $x \in U_{\delta_k/2}(x_k)$ для некоторого $k$. Тогда из неравенства треугольника $y \in U_{\delta_k}(x_k)$. А значит

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \rho(f(x), f(x_k)) + \rho(f(y), f(x_k)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Мы получили равномерную непрерывность по определению. ☐

Частный случай равномерно непрерывного отображения описывается так:

**Определение 3.99.** Отображение $f : M \to N$ метрических пространств *липшицево*, если существует константа $L$, такая что для любых $x, y \in M$

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant L\rho(x, y).$$

*Задача* 3.100. Докажите, что если производная функции $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ограничена, то функция липшицева.

[[ Используйте теорему о среднем Лагранжа. ]]

*Задача* 3.101. Докажите, что если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, то существуют константы $L, C > 0$, такие что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y| + C.$$

[[ Фиксируйте некоторые $\varepsilon$ и $\delta$ в определении равномерной непрерывности. Любой отрезок $[x, y]$ разбейте на части длиной не более $\delta$ и оцените сумму приращений $f$ на этих частях. ]]

*Задача* 3.102. * Как естественно определить расстояние в произведении $M \times M$ метрического пространства на себя (то есть $\rho_2 : (M \times M) \times (M \times M) \to \mathbb{R}^+$), чтобы исходная функция расстояния $\rho : M \times M \to \mathbb{R}^+$ оказалась относительно этого расстояния липшицевой с константой 1?

[[ Поищите в классе функций вида $\rho_2((x, y), (x', y')) = f(\rho(x, x'), \rho(y, y'))$. ]]

*Задача* 3.103. Докажите, что если функция $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, равномерно непрерывна, то она продолжается до непрерывной функции на замыкании множества $X$.

[[ Заметьте, что $f$ переводит фундаментальные последовательности в фундаментальные. ]]

3.11. **Разрывные и полунепрерывные функции.** Будем работать на метрическом пространстве $M$ и рассмотрим функцию $f : M \to \mathbb{R}$, про которую мы не предполагаем непрерывности. Наша цель заключается в том, чтобы изучить отклонения $f$ от непрерывности и некоторые ослабленные варианты непрерывности, достаточные, например, для задач поиска экстремума.

**Определение 3.104.** Для любой точки $x_0 \in M$ число или бесконечность со знаком $A \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *частичным пределом* $f$ в точке $x_0$, если можно найти последовательность $(x_n) \subseteq M$, такую что $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ для любого $n$ и $f(x_n) \to A$.

Аналогично утверждениям о частичных пределах последовательности доказывается, что множество частичных пределов функции $f$ в точке $x_0$ замкнуто, и что среди частичных пределов $f$ в $x_0$ есть минимальный и максимальный, которые называются *нижний и верхний пределы* $f$ в точке $x_0$,

$$\varliminf_{x\to x_0} f(x),\ \varlimsup_{x\to x_0} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Теорема о единственном частичном пределе последовательности тогда превращается в утверждение, что $f$ непрерывна в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда

$$f(x_0) = \varliminf_{x\to x_0} f(x) = \varlimsup_{x\to x_0} f(x).$$

*Задача* 3.105. Проверьте утверждения о том, что множество частичных пределов функции при $x \to x_0$ непусто, замкнуто в $\overline{\mathbb{R}}$ и состоит из одной точки тогда и только тогда, когда у функции есть предел при $x \to x_0$.

*Задача* 3.106. Докажите, что если функция $f$ непрерывна в проколотой окрестности $U(x_0)\setminus\{x_0\}$ точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 2$, то множество её частичных пределов в $x_0$ является промежутком.

[[ Используйте связность проколотых окрестностей при $n \geqslant 2$. ]]

**Определение 3.107.** Функция $f : M \to \mathbb{R}$ называется *полунепрерывной снизу*, если в любой точке $x_0 \in M$ выполняется

$$f(x_0) \leqslant \varliminf_{x\to x_0} f(x).$$

Эквивалентно, $f$ полунепрерывна снизу, если для всех $y \in \mathbb{R}$ множества

$$\{x \in M \mid f(x) > y\}$$

открыты.

Второе определение полунепрерывности уместно назвать «топологическим», собственно, оно может применяться не только для метрических пространств, но и для топологических пространств, так как использует только понятие открытости множества.

**Лемма 3.108.** *Два определения полунепрерывности снизу эквивалентны.*

*Доказательство.* Докажем, что из первого следует второе. Предположим противное — множество $\{x \in M \mid f(x) > y\}$ при некотором $y$ не открыто. Это означает существование $x_0$, такого что $f(x_0) > y$, но в любой окрестности $x_0$ найдётся $x$, такое что $f(x) \leqslant y$. Из таких $x$ можно построить сходящуюся к $x_0$ последовательность, которая покажет, что

$$\varliminf_{x\to x_0} f(x) \leqslant y,$$

но тогда должно быть $f(x_0) \leqslant y$ — противоречие.

В обратную сторону. Пусть $f(x_0) = y_0$, для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{x \in M \mid f(x) > y_0 - \varepsilon\}$ открыто, то есть в некоторой окрестности $x_0$ выполняется неравенство $f(x) > y_0 - \varepsilon$. Следовательно должно выполняться

$$\varliminf_{x\to x_0} f(x) \geqslant y_0 - \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ здесь произвольно, то на самом деле должно выполняться

$$\varliminf_{x\to x_0} f(x) \geqslant y_0 = f(x_0).$$

□

Оказывается, полунепрерывности снизу достаточно для существования минимума на компактном множестве:

**Теорема 3.109.** *Если функция $f : M \to \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу, $M$ компактно и не пусто, то $f$ принимает минимальное значение в некоторой точке $M$.*

*Доказательство.* Пусть $m = \inf\{f(x) \mid x \in M\}$, мы пока не исключаем, что $m = -\infty$. Выберем последовательность $y_n$, строго убывающую и стремящуюся к $m$. Множества

$$U_n = \{x \mid f(x) > y_n\}$$

открыты по определению полунепрерывности снизу. Предположим противное — $f(x)$ никогда не равно $m$. Тогда для любого $x$ найдётся $n$, такое что $f(x) > y_n$. Следовательно, множества $U_n$ покрывают всё $M$.

Так как $M$ компактно, то оно покрывается конечным набором таких множеств, а так как они упорядочены по включению, то на самом деле покрывается одним из них, $U_N = M$. Но это означает, что для всех $x \in M$ выполняется $f(x) > y_N > m$, то есть $m$ не является точной нижней гранью значений $f$. Противоречие. ☐

*Задача* 3.110. Приведите пример полунепрерывной снизу функции на отрезке, не имеющей максимального значения.

*Задача* 3.111. Докажите, что сумма полунепрерывных снизу функций полунепрерывна снизу.

[[ Заметьте, что

$$f(x) + g(x) > y \Leftrightarrow \exists z, t \in \mathbb{R},\ z + t > y,\ f(x) > z,\ g(x) > t.$$

]]

Определение полунепрерывности сверху аналогично полунепрерывности снизу:

**Определение 3.112.** Функция $f : M \to \mathbb{R}$ называется *полунепрерывной сверху*, если в любой точке $x_0 \in M$ выполняется

$$f(x_0) \geqslant \varlimsup_{x \to x_0} f(x).$$

Эквивалентно, $f$ полунепрерывна сверху, если для всех $y \in \mathbb{R}$ множества

$$\{x \in M \mid f(x) < y\}$$

открыты.

Рассмотрим другой способ описать отклонение функции от непрерывности, на этот раз количественно.

**Определение 3.113.** *Колебание функции $f$ в точке $x_0$* — это точная нижняя грань по открытым множествам, содержащим $x$:

$$\omega(f, x_0) = \inf\left\{\sup\{f(x) \mid x \in U\} - \inf\{f(x) \mid x \in U\} \mid U \ni x_0\right\}.$$

Для отображений между метрическими пространствами $f : M \to N$ можно обобщить это определение как точную нижнюю грань по открытым множествам

$$\omega(f, x_0) = \inf\{\operatorname{diam} f(U) \mid U \ni x_0\}.$$

Нижнюю грань в определении можно брать по открытым множествам, а можно только по $\varepsilon$-окрестностям, результат не изменится, так как любая $\varepsilon$-окрестность является открытым множеством, и любое открытое множество вместе с $x$ содержит и некоторую $\varepsilon$-окрестность $x$.

**Теорема 3.114.** *Непрерывность отображения между метрическими пространствами* $f : M \to N$ *в точке* $x_0$ *равносильна тому, что* $\omega(f, x_0) = 0$.

*Доказательство.* Если $\omega(f, x_0) = 0$, то для любого положительного $\varepsilon$ найдётся окрестность $U \ni x_0$, для которой

$$\operatorname{diam} f(U) < \varepsilon.$$

В частности, это означает, что $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всех $x \in U$. Это даёт непрерывность $f$ в точке $x_0$.

В обратную сторону, если $f$ непрерывно в точке $x_0$, то для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ выполняется в некоторой окрестности $U \ni x_0$, следовательно, выполняется

$$\forall x, x' \in U,\ \rho(f(x), f(x')) \leqslant 2\varepsilon \Rightarrow \operatorname{diam} f(U) \leqslant 2\varepsilon,$$

что означает $\omega(f, x_0) = 0$ в силу произвольности $\varepsilon > 0$. ☐

*Задача* 3.115. Докажите, что для любого отображения $f : M \to N$ между метрическими пространствами функция $\omega(f, x)$ является полунепрерывной сверху.

[[ Используйте определение полунепрерывности с использованием неравенства $\omega(f, x_0) < \varepsilon$ и заметьте, что окрестность $U \ni x_0$ также годится в определение $\omega(f, x)$ для любой точки $x \in U$. ]]

*Задача* 3.116. Докажите, что для любой функции $f : M \to \mathbb{R}$ на метрическом пространстве функция (точные грани берутся по открытым $U$)

$$\overline{f}(x_0) = \inf \left\{ \sup\{f(x) \mid x \in U\} \mid U \ni x_0 \right\}$$

полунепрерывна сверху, а функция

$$\underline{f}(x_0) = \sup \left\{ \inf\{f(x) \mid x \in U\} \mid U \ni x_0 \right\}$$

полунепрерывна снизу.

[[ Используйте определение полунепрерывности с использованием неравенств $\overline{f}(x) < c$ и $\underline{f}(x) > c$. ]]

*Задача* 3.117. $^*$ Докажите, что не существует функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непрерывной в рациональных точках, и разрывной в иррациональных точках.

[[ Рассмотрите замкнутые множества $\{x \mid \omega(f, x) \geqslant 1/n\}$ и аккуратно примените теорему Бэра. ]]

### 3.12. **Длина кривой в метрическом пространстве.**

Мы уже использовали длины дуг окружности для определения косинуса и синуса, а теперь изучим понятие длины произвольной кривой в метрическом пространстве.

**Определение 3.118.** *Длина кривой* $\gamma : [a, b] \to M$ в метрическом пространстве $M$ — это

$$\ell(\gamma) = \sup \left\{ \rho(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) + \dots + \rho(\gamma(t_{N-1}), \gamma(t_N)) \mid a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = b \right\}.$$

Говоря неформально, мы помещаем на кривую конечное количество точек в согласованном с кривой порядке и суммируем расстояния между одной точкой и следующей. В случае евклидова пространства мы бы сказали, что *в кривую вписана ломаная* и мы берём точную верхнюю грань длин ломаных. Следующее утверждение мы будем использовать далее, а в разделе 8.4 оно будет нужно нам без требования непрерывности кривой, что отражено в формулировке.

**Лемма 3.119** (Аддитивность длины кривой). *Если одна кривая является конкатенацией двух других, $\gamma = \gamma' \diamond \gamma''$, то*

$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma') + \ell(\gamma'').$$

*Это утверждение верно и в случае, когда от кривых не требуется непрерывность, нужно лишь, чтобы конец $\gamma'$ совпадал с началом $\gamma''$.*

*Доказательство.* По сути доказательство уже было приведено для случая дуг окружности в лемме 1.106, оно работает и в более общей постановке. В силу неравенства треугольника в определении $\ell(\gamma)$ можно рассматривать только такие наборы параметров, в которых в качестве одной из точек $\gamma(t_i)$ фигурирует конец $\gamma'$, равный началу $\gamma''$; его добавление в список точек не уменьшает сумму расстояний в силу неравенства треугольника. С учётом этого рассматриваемая сумма (длина ломаной) для $\gamma$ разбивается на две аналогичные суммы, участвующие в определении длины для $\gamma'$ и $\gamma''$.

Наоборот, из любых двух сумм (ломаных) для $\gamma'$ и $\gamma''$ можно собрать сумму (ломаную) для $\gamma$. Далее остаётся использовать тождество для непустых $X$ и $Y$:

$$\sup(X+Y) = \sup X + \sup Y,$$

где

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Оставлось заметить, что в этом доказательстве непрерывность кривых не используется. □

*Задача* 3.120. Докажите тождество $\sup(X+Y) = \sup X + \sup Y$ для непустых $X$ и $Y$, не забывая рассмотреть случай бесконечной точной верхней грани и принимая соглашение $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

**Лемма 3.121.** *Для любой кривой $\gamma : [a, b] \to M$*

$$\ell(\gamma) \geqslant \rho(\gamma(a), \gamma(b)).$$

*Доказательство.* В определении длины привой достаточно положить $t_0 = a$ и $t_1 = b$. □

Конечно, для любой конкретной кривой длина может оказаться бесконечной, кривая конечной длины называется *спрямляемой*. Приведём достаточное условие спрямляемости:

**Лемма 3.122.** *Если кривая имеет липшицеву параметризацию,*

$$\rho(\gamma(t), \gamma(s)) \leqslant L|t - s|,$$

*то она спрямляема.*

*Доказательство.* Очевидно, если $\gamma : [a, b] \to M$ липшицева с константой $L$, то все суммы «длин ломаных» в определении длины не более

$$\sum_{i=1}^{N} L|t_i - t_{i-1}| = L|b - a|$$

и после перехода к точной верхней грани получаем

$$\ell(\gamma) \leqslant L|b - a|.$$

□

Далее мы будем доказывать в некотором смысле обратное утверждение. Следующая теорема показывает, что на спрямляемой кривой $\gamma : [a, b] \to M$ можно корректно ввести натуральную параметризацию.

**Теорема 3.123.** *Пусть дана спрямляемая кривая $\gamma : [a, b] \to M$, обозначим её ограничение на $[a, t] \subseteq [a, b]$ как $\gamma_t$, тогда $\ell(\gamma_t)$ непрерывно зависит от $t$.*

*Доказательство.* Функция $s(t) = \ell(\gamma_t)$, *натуральный параметр*, возрастает из аддитивности длины. Обозначив ограничение кривой на отрезок $[t, t']$ как $\gamma_{t,t'}$, можно заметить, что при $t \leqslant t'$ выполняется

$$s(t') = \ell(\gamma_{t'}) = \ell(\gamma_t \diamond \gamma_{t,t'}) = \ell(\gamma_t) + \ell(\gamma_{t,t'}) \geqslant \ell(\gamma_t).$$

Следовательно, в теореме достаточно доказать, что

$$\lim_{\tau \to t-0} s(\tau) = s(t) = \lim_{\tau \to t+0} s(\tau).$$

Достаточно доказать равенство слева, равенство справа тогда последует из переворота ориентации кривой и аддитивности длины, так как натуральная параметризация перевёрнутой кривой будет даваться выражением $s(b) - s(-t')$, $t' \in [-b, -a]$.

Впишем в кривую $\gamma_t$ ломаную $P$, длина которой не менее $\ell(\gamma_t) - \varepsilon/2$. Правый конец $P$ будет находиться в точке $\gamma(t)$, из непрерывности кривой найдётся $t' < t$, такое что $\rho(\gamma(t'), \gamma(t)) < \varepsilon/2$, и $\gamma(t')$ находится на кривой дальше, чем предпоследняя точка ломаной $P$. Заменив в ломаной $P$ последнюю точку на $\gamma(t')$, мы получим ломаную $P'$, у которой длина (по неравенству треугольника) отличается от длины $P$ менее, чем на $\varepsilon/2$, то есть выполняется неравенство

$$\ell(P') > \ell(\gamma_t) - \varepsilon.$$

Существование ломаной $P'$, вписанной в $\gamma_{t'}$, показывает, что $\ell(\gamma_{t'}) \geqslant \ell(\gamma_t) - \varepsilon$. Так как $\varepsilon$ в последнем неравенстве произвольное (при $t'$ зависящем от него), то этого достаточно, чтобы исключить разрыв слева у возрастающей функции $s(t) = \ell(\gamma_t)$. □

*Задача* 3.124. Проверьте, что если $\gamma : [a, b] \to M$ не обязательно спрямляема, то $\ell(\gamma_t)$, рассматриваемая как функция $[a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$, всё равно непрерывно зависит от $t$ в смысле стандартной топологии на расширенной числовой прямой.

Взяв на спрямляемой кривой $\gamma : [a, b] \to M$ *натуральный параметр* $s = \ell(\gamma_t)$ мы видим, что значение $t$ по $s$ восстанавливается не обязательно однозначно, но точка на кривой восстанавливается однозначно. Действительно, если $\ell(\gamma_{t'}) = \ell(\gamma_{t''})$ при $t' < t''$, то по аддитивности длина части кривой при $t \in [t', t'']$, $\gamma_{t',t''}$, оказывается нулевой; лемма 3.121 тогда показывает, что кривая при параметрах $t \in [t', t'']$ на самом деле стоит в одной точке.

Также из леммы 3.121 и аддитивности длины следует, что натуральная параметризация является 1-липшицевой,

$$\rho(\gamma(s), \gamma(s')) \leqslant \ell(\gamma_{s,s'}) = |s - s'|.$$

Лемма 3.122 и теорема 3.123 тогда вместе утверждают, что кривая спрямляема тогда и только тогда, когда среди её параметризаций есть липшицева параметризация.

*Задача* 3.125. Определение длины кривой можно дословно использовать и для разрывных кривых. Докажите, что если разрывная кривая $\gamma : [a, b] \to M$ в полном метрическом пространстве имеет конечную длину, то в любой соответствующей параметру $t_0 \in [a, b]$ точке кривая имеет левый и правый пределы $\gamma(t_0 - 0)$ и $\gamma(t_0 + 0)$, и случаев их несовпадения счётное количество.

[[ В силу полноты пространства примените критерий Коши существования, скажем правого, предела и заметьте, что при его отсутствии в кривую можно будет «вписать ломаную» произвольно большой длины. ]]

3.13. **Дифференцируемые кривые в евклидовом пространстве.** Если мы рассматриваем кривые в евклидовом пространстве, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, то можно привести простые достаточные условия её спрямляемости и привести способ вычисления длины. Мы воспользуемся понятием производной (скорости) кривой.

**Определение 3.126.** Кривая $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ называется дифференцируемой, если у неё есть производная

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

в каждой $t_0 \in [a,b]$, на концах отрезка — правая и левая. Она называется *непрерывно дифференцируемой*, если производная сама по себе непрерывная.

Нетрудно проверить, что дифференцируемость кривой в $\mathbb{R}^n$ эквивалентна дифференцируемости её координатных компонент.

**Лемма 3.127** (Теорема о среднем для кривых). *Если кривая $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ дифференцируема на $(a,b)$, то для некоторого $\xi \in (a,b)$*

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| \leqslant |\gamma'(\xi)| \cdot |b - a|.$$

*Доказательство.* Пусть $e$ — единичный вектор в направлении $\gamma(b) - \gamma(a)$. Тогда

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| = e \cdot (\gamma(b) - \gamma(a)) = f(b) - f(a),$$

если положить $f(t) = e \cdot \gamma(t)$. Применяя теорему о среднем Лагранжа к $f$, получим $\xi \in (a,b)$, для которого

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| = f'(\xi)(b-a) = e \cdot \gamma'(\xi)(b-a) \leqslant |\gamma'(\xi)| \cdot |b - a|.$$

Здесь мы применили формулу Лейбница для скалярного произведения

$$(x \cdot y)' = x' \cdot y + x \cdot y',$$

которая проверяется в координатах. □

*Задача* 3.128. Приведите пример ситуации, когда в теореме о среднем для кривой нельзя добиться равенства ни при каком $\xi$.

Мы фактически установили липшицевость диффенцируемой кривой с ограниченной производной и получаем:

**Следствие 3.129.** *Для дифференцируемой кривой $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$*

$$\ell(\gamma) \leqslant |b - a| \cdot \sup\{|\gamma'(t)| \mid t \in (a,b)\}.$$

Следующая теорема поясняет, что в школьном курсе физики подразумевалось под утверждением о том, что «путевая скорость равна длине векторной скорости».

**Теорема 3.130.** *Пусть кривая $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемая, обозначим её ограничение на $[a,t] \subseteq [a,b]$ как $\gamma_t$, тогда натуральный параметр кривой*

$$s(t) = \ell(\gamma_t)$$

*является непрерывно дифференцируемым и*

$$s'(t) = |\gamma'(t)|.$$

*Доказательство.* Будем изучать правую производную $s(t)$, для левой производной можно доказать утверждение, перевернув параметризацию кривой и воспользовавшись аддитивностью длины. Для $t > t_0$, по аддитивности длины кривой

$$s(t) - s(t_0) = \ell(\gamma_{t_0,t}).$$

Значит мы должны оценить длину куска кривой $\gamma_{t_0,t}$ от параметра $t_0$ до параметра $t$. Оценка сверху даётся предыдущим следствием

$$s(t) - s(t_0) \leqslant |t - t_0| \cdot |\gamma'(\xi)|, \quad \xi \in (t_0, t).$$

Оценка снизу даётся исходя из равенства $\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$ и того, что длина кривой не меньше расстояния от её начала до её конца (лемма 3.121):

$$s(t) - s(t_0) \geqslant |(\gamma'(t_0) + o(1))(t - t_0)| \,.$$

Итого

$$|\gamma'(t_0) + o(1)| \leqslant \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \leqslant |\gamma'(\xi)|, \quad \xi \in (t_0, t).$$

Переходя к пределу $t \to t_0$, замечаем, что $\xi \to t_0$, из непрерывности $\gamma'$, $\gamma'(\xi) \to \gamma'(t_0)$. В итоге получаем требуемое по теореме о двух милиционерах, так как левая и правая части неравенства стремятся к $|\gamma'(t_0)|$. ☐

По предыдущей теореме натуральный параметр $s$ является допустимым параметром непрерывно дифференцируемой кривой с всюду ненулевой скоростью $\gamma'$, и в натуральной параметризации кривая тоже непрерывно дифференцируема. Вектор

$$\tau = \frac{d\gamma}{ds}$$

тогда является единичным. Если кривую можно дифференцировать далее, то дифференцируем далее по натуральному параметру

$$\tau \cdot \tau = 1 \Rightarrow \tau' \cdot \tau = 0,$$

то есть вектор $\tau' = \gamma''$ перпендикулярен $\tau$. Если он имеет ненулевую длину, то его направление называется *главной нормалью* $\nu$, а его длина — *кривизной*, то есть выполняется

$$\frac{d\tau}{ds} = k\nu.$$

Сравнивая произвольную кривую с натурально параметризованной окружностью

$$\begin{aligned} x &= R\cos\frac{s}{R}, \\ y &= R\sin\frac{s}{R}, \end{aligned}$$

можно заметить, что кривизна окружности равна $\frac{1}{R}$, поэтому величина $R = \frac{1}{k}$ для произвольной кривой называется её радиусом кривизны, а точка

$$\rho = \gamma + R\nu$$

называется *центром кривизны*. Множество всех центров кривизны даёт новую кривую, которая называется *эволютой* исходной кривой.

На плоскости мы можем продифференцировать условия $\tau \cdot \nu = 0$ и $\nu \cdot \nu = 1$ и получить

$$\tau' \cdot \nu = -\tau \cdot \nu', \nu' \cdot \nu = 0,$$

Получив таким образом *формулы Френе для плоской кривой*:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{ds} &= k\nu, \\ \frac{d\nu}{ds} &= -k\tau. \end{aligned}$$

*Задача* 3.131. Выпишите формулу кривизны дважды дифференцируемой кривой в евклидовом пространстве, заданной в произвольной параметризации. Выпишите параметрическое уравнение эволюты плоской кривой, заданной в произвольной параметризации.

[[ Воспользуйтесь тем, что $\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'_t}{|\gamma'_t|}$ и продифференцируйте это равенство по $s$ ещё раз. В левой части получится вектор, длина которого равна кривизне, а производную по $s$ справа найдите как производную по $t$, делённую на $|\gamma'_t|$. Проверьте, что в трёхмерном случае у вас получилась формула ($u \times v$ означает векторное произведение векторов $u, v \in \mathbb{R}^3$)

$$k = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3}.$$

При выписывании уравнения эволюты заметьте, что на плоскости $\mathbb{R}^2$ удобнее считать кривизну плоской кривой величиной со знаком (векторное произведение в формуле выше рассматривать без модуля и считать числом), если требовать, чтобы в формулах Френе $(\tau, \nu)$ всегда была правой парой векторов. ]]

*Задача* 3.132. Докажите, что для центра кривизны на плоскости выполняется $\frac{d\rho}{ds} = \frac{dR}{ds}\nu$ и объясните, как восстановить кривую $\gamma$ по её эволюте $\rho$.

Для кривой в $\mathbb{R}^3$ мы можем добавить ещё один вектор $\beta$, чтобы тройка $(\tau, \nu, \beta)$ стала правой, тогда $\beta$ называется *бинормалью*. Дифференцируя соотношения

$$\tau \cdot \tau = \nu \cdot \nu = \beta \cdot \beta = 1, \quad \tau \cdot \nu = \nu \cdot \beta = \beta \cdot \tau = 0,$$

мы получим соотношения

$$\tau' \cdot \tau = \nu' \cdot \nu = \beta' \cdot \beta = 0,$$

$$\tau' \cdot \nu = -\nu' \cdot \tau, \nu' \cdot \beta = -\beta' \cdot \nu, \beta' \cdot \tau = -\tau' \cdot \beta = 0,$$

в последнем получается нуль, так как $\tau' \parallel \nu$ по определению и следовательно $\tau' \cdot \beta = 0$. Из этих соотношений следует существование ещё одного коэффициента $\varkappa$, для которого верны *формулы Френе для трёхмерной кривой*:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{ds} &= k\nu, \\ \frac{d\nu}{ds} &= -k\tau + \varkappa\beta, \\ \frac{d\beta}{ds} &= -\varkappa\nu. \end{aligned}$$

Коэффициент $\varkappa$ называется *кручением* кривой.

*Задача* 3.133. Выведите формулу для кручения трижды дифференцируемой кривой в произвольной, не обязательно натуральной, параметризации.

[[ Сначала посмотрите на смешанное произведение $(\gamma', \gamma'', \gamma''')$ в натуральной параметризации, а потом изучите, как оно поменяется при замене параметризации на произвольную. Убедитесь, что полученное вами выражение эквивалентно следующему ($u \times v$ означает векторное произведение векторов $u, v \in \mathbb{R}^3$)

$$\varkappa = \frac{(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{|\gamma' \times \gamma''|^2}.$$

]]

*Задача* 3.134. Опишите кривые в $\mathbb{R}^3$ с постоянной ненулевой кривизной и постоянным ненулевым кручением.

[[ Подберите какие-то кривые из известных вам или решите систему линейных дифференциальных уравнений, которую дают формулы Френе. Отсутствие других примеров обоснуйте теоремой существования и единственности решений для линейных дифференциальных уравнений 7.74. ]]

## 3.14. **Внутренняя метрика метрического пространства.**

Понятие длины кривой позволяет ввести на любом метрическом пространстве новую метрику:

**Определение 3.135.** На линейно связном метрическом пространстве $(M, \rho)$ можно ввести *внутреннюю метрику*

$$\rho_\ell(x, y) = \inf \{\ell(\gamma) \mid \gamma \text{ идёт из } x \text{ в } y\}.$$

Из леммы 3.121 следует, что $\rho_\ell(x, y) \geqslant \rho(x, y)$ для любой пары точек.

*Задача* 3.136. Объясните, почему для внутренней метрики выполняется неравенство треугольника.

[[ Используйте конкатенацию. ]]

Конечно, может оказаться, что все кривые из $x$ в $y$ не спрямляемы, например, если метрическое пространство $M$ является неспрямляемой кривой без самопересечений в $\mathbb{R}^n$ с индуцированной метрикой. Получается, что внутренняя метрика является конечной тогда, когда любые две точки $M$ можно соединить спрямляемой кривой; это некоторое усиление линейной связности $M$.

**Лемма 3.137.** *Длины кривых в исходной метрике $\rho$ и во внутренней метрике $\rho_\ell$ равны.*

*Доказательство.* Как уже было отмечено, из леммы 3.121 следует $\rho \leqslant \rho_\ell$. Значит длины кривых во внутренней метрике не менее длин кривых в исходной метрике. Докажем обратное неравенство. Пусть кривая $\gamma : [a, b] \to M$ имеет длину $L$ в исходной метрике. Рассмотрим набор значений параметров $a = t_0 < \dots < t_n = b$, они разбивают $\gamma$ на $n$ кусков $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. По аддитивности длины кривой

$$\ell_\rho(\gamma_1) + \dots + \ell_\rho(\gamma_n) = L.$$

Любая кривая $\gamma_i$ идёт из $\gamma(t_{i-1})$ в $\gamma(t_i)$, следовательно установленное равенство свидетельствует, что расстояния во внутренней метрике удовлетворяют неравенству

$$\rho_\ell(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) + \dots + \rho_\ell(\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)) \leqslant L.$$

Так как это верно для любого набора значений параметров $a = t_0 < \dots < t_n = b$, то длина кривой $\gamma$ во внутренней метрике по определению оказывается не более $L$. ☐

*Задача* 3.138. Докажите, что если метрика $\rho$ в $M$ уже была внутренняя, то операция взятия внутренней метрики, $\rho_\ell$, даст ту же самую метрику $\rho_\ell \equiv \rho$.

[[ Заметьте, что из предыдущей леммы следует, что в рассматриваемом случае две точки на расстоянии $d$ можно соединить кривой длины, сколь угодно близкой к $d$. ]]

В евклидовом пространстве очевидно выполняется равенство $\rho_\ell(x, y) = \rho(x, y)$, так как для любых двух точек длина отрезка между ними в точности равна расстоянию между ними. Следующий, уже не такой тривиальный пример — стандартная единичная сфера $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. На ней есть метрика, индуцированная с $\mathbb{R}^{n+1}$, в ней расстояние между $x, y \in \mathbb{S}^n$ равно $|x - y|$. Однако, если мы будем рассматривать кривые на сфере от точки $x$ до точки $y$, то их длины будут больше $|x-y|$ и внутренняя метрика окажется строго больше индуцированной.

**Теорема 3.139.** *Внутренняя метрика на сфере $\mathbb{S}^n$, соответствующая индуцированной с $\mathbb{R}^{n+1}$ метрике, равна*

$$\rho_\ell(x, y) = \arccos(x \cdot y).$$

*Доказательство.* Вместо того, чтобы доказывать формулу по определению, мы проверим, что $\rho'(x, y) = \arccos(x \cdot y)$ является метрикой, что расстояние в ней равно длине некоторой кривой между $x$ и $y$ на сфере и что длина любой кривой в этой метрике равна длине кривой в исходной метрике.

Чтобы $\rho'$ была метрикой, по сути надо проверить неравенство треугольника

$$\arccos(x \cdot z) \leqslant \arccos(x \cdot y) + \arccos(y \cdot z).$$

Предположим противное, пусть тогда $\arccos(x \cdot z) = \alpha$, $\arccos(x \cdot y) = \beta$, $\arccos(y \cdot z) = \gamma$ и $\alpha > \beta + \gamma$. Вектор $y$ удовлетворяет неравенствам

$$y \cdot x \geqslant \cos\beta,\ y \cdot z \geqslant \cos\gamma, \tag{3.1}$$

тем же неравенствам будет удовлетворять его проекция на плоскость $\langle x, z\rangle$ (так как проекция не меняет значения скалярных произведений с $x$ и $z$), причём проекция будет длины не более единицы. Неравенства (3.1) на плоскости определяют выпуклое (а значит связное) множество на плоскости, которое (проверьте это разбором случаев) не является ограниченным. Следовательно, если эти неравенства выполняются для $y$ не более чем единичной длины, то они выполняются и для некоторого $y \in \langle x, z\rangle$ единичной длины.

Теперь мы работаем с ситуацией на окружности $\mathbb{S}^1$ и (3.1) просто означает, что угол $|\widehat{yx}| \leqslant \beta$, $|\widehat{yz}| \leqslant \gamma$, тогда как $|\widehat{yz}| = \alpha > \beta + \gamma$. Так быть не может по аддитивности длины дуги (для уточнения этого утверждения разберите самостоятельно разные расположения трёх точек на окружности).

Теперь напишем оценки индуцированной метрики на сфере и $\rho'$ друг через друга, которые очевидны после перехода в плоскость $\langle x, y\rangle$:

$$\rho(x, y) \leqslant \rho'(x, y) \leqslant 2\arcsin \rho(x, y)/2 \Rightarrow 1 \leqslant \frac{\rho'(x, y)}{\rho(x, y)} \leqslant \frac{2\arcsin\rho(x, y)/2}{\rho(x, y)}.$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и заметим, что в определении длины кривой можно разбить кривую сколь угодно мелко, лишь увеличив при этом число под точной верхней гранью. Используя равномерную непрерывность $\gamma$ и мелко разбивая отрезок параметризации $[a, b]$, мы будем иметь $\rho(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) < \varepsilon$ для всех частей кривой. Тогда можно будет написать

$$\ell_\rho(\gamma) \leqslant \ell_{\rho'}(\gamma) \leqslant \ell_\rho(\gamma)\frac{2\arcsin\varepsilon/2}{\varepsilon},$$

так как $\frac{2\arcsin\varepsilon/2}{\varepsilon}$ возрастает. Так как $\frac{2\arcsin\varepsilon/2}{\varepsilon}$ стремится к $1$ при $\varepsilon \to +0$, то в пределе мы получим равенство длин кривых в обеих метриках. Таким образом для внутренних метрик имеет место равенство $\rho_\ell = \rho'_\ell$.

Очевидно, дуга в плоскости $\langle x, y\rangle$, соединяющая $x$ и $y$, будет иметь длину в $\rho$ и $\rho'$ именно $\arccos(x \cdot y)$. Это значит, что в метрике $\rho'$ мы можем соединить любую пару точек кривой, длина которой равна расстоянию между ними. Следовательно, $\rho' = \rho'_\ell = \rho_\ell$, что и требовалось доказать. ☐

*Задача* 3.140. $^*$ Докажите, что в метрическом пространстве с компактными шарами минимум в определении внутренней метрики, если он конечный, достигается на некоторой (возможно не единственной) кривой, называемой *кратчайшей*.

[[ Рассмотрите последовательность кривых, стремящихся к точной нижней грани. Параметризуйте кривые почти натурально липшицевым образом и используйте рассуждения типа теоремы Арцела–Асколи 9.78, выбирая из последовательности кривых равномерно сходящуюся подпоследовательность (см. раздел 4.3), с учётом теоремы 3.39. ]]

## 4. Ряды, приближения функций и первообразные

**4.1. Комплексные числа и многочлены.** Определим комплексные числа, как пары действительных чисел $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, записываемые обычно в виде $a + ib$, складываемые покомпонентно и перемножаемые с использованием правила $i^2 = -1$, то есть как

$$(a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc).$$

При этом $a$ называется *действительной частью*, а $b$ — *мнимой частью* комплексного числа $a+ib$. Действительные числа вкладываются в комплексные с помощью отображения $x \mapsto x + i0$.

Удобно для комплексного числа $z = a + ib$ определить *сопряжённое* $\overline{z} = a - ib$, тогда выполняется равенство

$$z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

После этого можно заметить, что при $z \neq 0$ число (деление на действительное число происходит покомпонентно)

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$$

является обратным по умножению числу $z$. Множество комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$, так как на самом деле это то же самое $\mathbb{R}^2$ в смысле метрики

$$\rho(z, z') = \sqrt{(z - z')\overline{(z - z')}},$$

то мы будем применять к множеству комплексных чисел все топологические понятия, которые мы имеем для евклидовых пространств — открытые и замкнутые множества, $\varepsilon$-окрестности и т.п.

*Задача* 4.1. На множестве четвёрок действительных чисел, записываемых в виде $a + ib + jc + kd$ введём умножение по правилам

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j,$$

это называется *кватернионы*. Докажите, что у любого ненулевого кватерниона есть обратный относительно умножения.

[[ Определите сопряжение и действуйте как с комплексными числами. ]]

Важное отличие комплексных чисел от действительных — отсутствие линейной упорядоченности. С другой стороны, у комплексных чисел есть и преимущества по сравнению с действительными. Запишем два комплексных числа в тригонометрической форме

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

при этом $r_i$ и $\varphi_i$ называются *модуль* и *аргумент* комплексного числа; аргумент определён с точностью до прибавления числа вида $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а для нуля аргумент не определён. С помощью тригонометрических формул легко проверить, что при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются, это объясняет полезность такой записи.

Часто выражение $\cos\varphi + i\sin\varphi$ записывают в виде $e^{i\varphi}$. Это оправданно, так как при таком обозначении выходит $e^{i(\varphi+\psi)} = e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi}$. После разложения экспоненты и тригонометрических функций в ряды Тейлора мы увидим ещё более убедительные причины для таких обозначений. В более общем виде можно определить *экспоненту комплексного числа* как

$$e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a(\cos b + i\sin b).$$

После этого можно заметить, что уравнение

$$z^n = 1$$

в комплексных числах имеет $n$ корней, которые можно записать в виде

$$w_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

это легко проверяется возведением в степень в тригонометрической записи. Более того, для ненулевого $v = re^{i\varphi}$ уравнение

$$z^n = v$$

имеет $n$ корней

$$w_k = r^{1/n} e^{i\frac{2\pi k + \varphi}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Это свойство можно обобщить, рассмотрев произвольный многочлен с комплексными коэффициентами

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n, c_n \neq 0,$$

число $n$ называется его *степенью*. В окрестности любой точки $z_0$ можно подставить в многочлен выражение $z_0 + t$ и заметить, что

$$P(z_0 + t) = P(z_0) + P'(z_0)t + r(z_0, t),$$

где

$$P'(z) = c_1 + 2c_2 z + \dots + nc_n z^{n-1},$$

а остаток $r(z_0, t)$ при фиксированном $z_0$ оценивается по модулю как $C|t|^2$ в малой окрестности $z_0$. Это означает, что многочлен является непрерывной функцией комплексного переменного, которая также *дифференцируема в комплексном смысле*, то есть записывается в виде

$$P(z) = P(z_0) + P'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|), \quad z \to z_0.$$

Докажем следующую важную теорему:

**Теорема 4.2** (Алгебраическая замкнутость комплексных чисел). *Любой многочлен $P$ с комплексными коэффициентами положительной степени имеет хотя бы один комплексный корень, то есть число $z \in \mathbb{C}$, такое что $P(z) = 0$.*

*Доказательство.* Без ограничения общности можно считать старший коэффициент многочлена $c_n$ равным 1. Тогда можно записать

$$P(z) = z^n \left(1 + \frac{c_{n-1}}{z} + \dots + \frac{c_0}{z^n}\right).$$

При $|z| \geqslant R$ модуль выражения в скобках оценивается как

$$\left|1 - \frac{|c_{n-1}|}{R} - \dots - \frac{|c_0|}{R^n}\right| \leqslant \left|1 + \frac{c_{n-1}}{z} + \dots + \frac{c_0}{z^n}\right| \leqslant \left|1 + \frac{|c_{n-1}|}{R} + \dots + \frac{|c_0|}{R^n}\right|$$

и стремится к единице при $R \to +\infty$. Так как $|z^n| \geqslant R^n \to +\infty$ при $R \to +\infty$, мы делаем вывод, что $|P(z)|$ стремится к $+\infty$ при $|z| \to +\infty$.

Если $P(0) = c_0$, то мы можем выбрать $R$ таким, что $|P(z)| \geqslant |c_0| + 1$ при $|z| \geqslant R$. Тогда минимальное по модулю значение $|P(z)|$ на круге $|z| \leqslant R$ существует как минимум непрерывной на компакте функции, и на самом деле является глобальным минимумом $|P(z)|$ на всём $\mathbb{C}$.

Пусть точка минимума — это $z_0$. Тогда выражение

$$Q(t) = P(z_0 + t)$$

тоже является многочленом от $t$ степени $n$ (проверьте это явно). Распишем его в виде

$$Q(t) = d_0 + d_1 t + \dots + d_n t^n.$$

Мы хотим доказать, что $d_0 = 0$, тогда окажется $Q(0) = P(z_0) = 0$ и мы найдём корень. Предположим противное, что $d_0 \neq 0$. Пусть за коэффициентом $d_0$ идёт некоторое количество нулевых коэффициентов, а на $k$-м месте оказался $d_k \neq 0$, тогда можно записать

$$Q(t) = d_0 + d_k t^k + o(|t|^k) = d_0 + d_k t^k(1 + o(1))$$

при $t \to 0$. Найдём (по замечаниям перед формулировкой теоремы) число $w$, такое что

$$d_k w^k = -d_0,$$

тогда подставив $t = ws$, мы получим

$$Q(ws) = d_0 - d_0 s^k(1 + o(1)) = d_0(1 - s^k(1 + o(1))).$$

при $s \to 0$. Это выражение показывает, что если $s$ будет стремиться к нулю по действительным положительным числам, то мы обнаружим значения $|Q(ws)|$, строго меньшие $|Q(0)|$. Получаем противоречие с выбором минимума модуля. □

В случае, если нам не важно, используем мы рациональные $\mathbb{Q}$, действительные $\mathbb{R}$ или комплексные $\mathbb{C}$ числа, мы будем говорить о поле чисел $\mathbb{F}$. Множество многочленов с коэффициентами в этом поле будем обозначать $\mathbb{F}[x]$. Степень многочлена $P$ будем обозначать $\deg P$, на самом деле для комплексных многочленов она равна степени отображения $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, как будет ясно из раздела 7.4. Далее в качестве задач приводятся основные факты, которые можно найти в любом учебнике по алгебре.

*Задача* 4.3 (Деление многочленов с остатком). Докажите, что для $P, D \in \mathbb{F}[x]$, при $\deg D > 0$, найдётся единственный *остаток* $R \in \mathbb{F}[x]$ с $\deg R < \deg D$ и единственное *частное* $Q \in \mathbb{F}$, такие что

$$P = QD + R.$$

[[ Можно использовать индукцию по степени $P$. ]]

*Задача* 4.4. Докажите, что любой многочлен $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots c_n z^n \in \mathbb{C}[z]$ степени $n$ раскладывается в произведение

$$P(z) = c_n(z - z_0)\dots(z - z_n).$$

[[ Поделите многочлен с остатком на многочлен $z - z_0$ и посмотрите, что будет, если $z_0$ был его корнем. ]]

*Задача* 4.5. Докажите, что любой многочлен $P \in \mathbb{R}[x]$ представляется в виде произведения константы, линейных многочленов вида $x - x_i$ и квадратных трёхчленов вида $x^2 + p_i x + q_i$ с отрицательными дискриминантами.

[[ Примените комплексное утверждение и заметьте, что у действительного многочлена корни идут парами комплексно сопряжённых. ]]

*Задача* 4.6 (Алгоритм Евклида для многочленов). Докажите, что для любой пары многочленов $P, Q \in \mathbb{F}[x]$ найдутся $S, T \in \mathbb{F}[x]$, такие что $\deg S < \deg Q$, $\deg T < \deg P$, а многочлен

$$D = SP + TQ$$

является делителем $P$ и $Q$. Этот *наибольший общий делитель* $D$ определён однозначно с точностью умножения на константу.

[[ Поделите $P$ на $Q$ с остатком и примените предположение индукции к $Q$ и остатку $R$. ]]

*Задача* 4.7. Докажите, что любой общий делитель многочленов $P$ и $Q$ из предыдущей задачи является также делителем многочлена $D$ из предыдущей задачи.

[[ Используйте установленную формулу наибольшего общего делителя. ]]

*Задача* 4.8. Многочлен из $\mathbb{F}[x]$ положительной степени называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде произведения многочленов меньшей степени. Докажите, что любой многочлен из $\mathbb{F}[x]$ можно разложить в произведение *неприводимых* многочленов единственным образом, с точностью до перестановки сомножителей и домножения их на ненулевые числа (элементы $\mathbb{F}$).

[[ Вспомните, как в школе доказывалась единственность разложения натурального числа в произведение простых. ]]

*Задача* 4.9. Два многочлена с наибольшим общем делителем степени 0 (то есть константой) назовём *взаимно простыми*. Докажите, что многочлены $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ взаимно просты тогда и только тогда, когда они не имеют общих корней.

[[ Используйте установленную формулу наибольшего общего делителя и алгебраическую замкнутость $\mathbb{C}$. ]]

Определим *рациональные функции*, $\mathbb{F}(x)$, как отношения $\frac{P}{Q}$ с $P, Q \in \mathbb{F}[x]$ и $Q \neq 0$, с точностью до стандартного отношения эквивалентности

$$\frac{P}{Q} = \frac{S}{T} \Leftrightarrow PT = QS.$$

Рациональная функция $\frac{P}{Q}$ называется *правильной дробью*, если $\deg P < \deg Q$.

*Задача* 4.10. Докажите, что если две рациональные дроби из $\mathbb{R}(x)$ принимают одинаковые значения при подстановке в них любого $x \in \mathbb{R}$, для которого они одновременно могут быть вычислены, то они равны в смысле предыдущего определения.

[[ Сведите к равенству двух многочленов, значения которых совпадают на бесконечном множестве значений переменной. ]]

*Задача* 4.11. Докажите, что если $\frac{P}{Q_1Q_2}$ — правильная дробь, а $Q_1$ и $Q_2$ взаимно просты, то дробь можно представить в виде суммы правильных дробей

$$\frac{P}{Q_1Q_2} = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}.$$

[[ Домножьте требуемое равенство на $Q_1Q_2$ и вспомните про выражение для наибольшего общего делителя. ]]

Из последней задачи следует (проверьте это), что любая правильная дробь из многочленов с комплексными коэффициентами представляется в виде суммы *элементарных дробей* вида $\frac{a}{(z-z_0)^k}$. Это очень помогает при нахождении *первообразных* рациональной функции, то есть функции, производная которой равна данной. Любую неправильную дробь с помощью деления с остатком можно превратить в сумму многочлена и правильной дроби. Первообразная многочлена

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

находится с точностью до прибавления константы явно как

$$a_0 z + a_1 \frac{z^2}{2} + \dots + a_n \frac{z^{n+1}}{n+1},$$

а первообразные элементарных дробей имеют вид

$$(\operatorname{Ln}(z - z_0))' = \frac{1}{z - z_0}, \quad \left(\frac{-1}{(k+1)(z - z_0)^{k+1}}\right)' = \frac{1}{(z - z_0)^{k+2}}.$$

Производная здесь понимается в комплексном смысле,

$$f'(z) = \lim_{\zeta\to z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z},$$

логарифм ненулевого комплексного числа определяется как обратная функция к экспоненте комплексного числа с точностью до прибавления $2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$. Подробности работы с функциями комплексного переменного читатель может найти в разделе 10.

*Задача* 4.12. Проверьте по определению, что производная экспоненты комплексного числа в комплексном смысле равна той же экспоненте.

[[ Из свойств экспоненты достаточно посчитать производную в нуле. Разложите экспоненту, косинус и синус в выражении для $e^{a+ib}$ по формуле Тейлора до $o(a)$ и $o(b)$. ]]

*Задача* 4.13. Для квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$, не имеющего действительных корней, найдите первообразную правильной дроби

$$\frac{ax + b}{x^2 + px + q}$$

в виде, использующем только действительные числа и функции.

[[ Посмотрите, как записать отдельно действительную и мнимую часть логарифма комплексного числа. ]]

4.2. **Суммирование абсолютно сходящихся рядов.** Обсудим понятие суммы бесконечного количества чисел, которое будет играть центральную роль в интегрировании и в каком-то смысле является простейшим случаем интеграла. Один из способов суммирования такой:

**Определение 4.14.** Если дана последовательность $(a_n)$ действительных или комплексных чисел, то *суммой ряда* называется

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Выражения под знаком предела называются *частичными суммами ряда*. Ряд называется *сходящимся*, если его сумма конечна.

Заметим, что для комплексных чисел суммирование ряда по сути сводится к суммированию действительных и мнимых частей по отдельности. Для такого способа суммирования выполняются *линейность*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(Aa_n + Bb_n) = A\sum_{n=1}^{\infty} a_n + B\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

и *монотонность*

$$a_n \leqslant b_n\ (\forall n) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Можно рассматривать суммы, индексы которых начинаются не с единицы, а с другого натурального числа, и доказать свойство (проделайте это в качестве упражнения)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \sum_{n=k}^{\infty} a_n,$$

которое понимается так, что из сходимости ряда в правой части следует сходимость ряда в левой части и наоборот. Полезно понимать, что для сходящегося ряда должно выполняться *необходимое условие сходимости*:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} a_k = 0.$$

*Задача* 4.15. Докажите по определению, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty.$$

[[ Используйте неравенство $1/n \geqslant \ln(1+1/n)$. ]]

Стандартное определение суммы ряда приемлемо во многих ситуациях, но у него есть один недостаток: сумма ряда может зависеть от порядка суммирования, то есть не выполняется свойство «от перемены мест слагаемых сумма не меняется».

Для дальнейшей работы со степенными функциональными рядами и с интегралом Лебега нам будет нужно и удобно переставлять слагаемые в суммах и производить другие естественные операции, которые возможны только тогда, когда мы можем по отдельности суммировать положительные и отрицательные слагаемые ряда. Для этого мы начнём с утверждения про сумму ряда неотрицательных чисел, из которого будет ясна независимость этой суммы от перестановок.

**Лемма 4.16.** *Сумма ряда из неотрицательных чисел равна точной верхней грани сумм конечного числа элементов ряда, сумма ряда из неположительных чисел равна точной нижней грани сумм конечного числа элементов ряда.*

*Доказательство.* Без ограничения общности рассмотрим ряд из неотрицательных чисел $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. По нашему определению суммы ряда она равна пределу частичных сумм $\sum_{k=1}^{n} a_k$, то есть пределу сумм начальных отрезков ряда. Так как члены ряда неотрицательны, то частичные суммы ряда возрастают и предел на самом деле равен точной верхней грани сумм начальных отрезков ряда.

Если мы рассмотрим теперь сумму конечного числа элементов ряда, взятых из ряда в произвольных местах и не обязательно подряд, то пусть максимальный номер элемента в этой сумме равен $n$. Тогда эта конечная сумма не больше частичной суммы ряда $\sum_{k=1}^{n} a_k$, так как все члены ряда неотрицательны. Следовательно, точная верхняя грань по всевозможным конечным подсуммам ряда не более точной верхней грани по начальным отрезкам ряда. Обратное неравенство тривиально, так как любая частичная сумма ряда — это частный случай суммы конечного числа элементов ряда. В итоге получаем требуемое равенство. ☐

Утверждение предыдущей леммы по сути можно считать определением суммы ряда действительных чисел одного и того же знака. Так как это определение не зависит от перестановки элементов ряда, то мы получаем:

**Следствие 4.17.** *Сумма ряда из чисел одного знака не меняется при перестановке её элементов.*

Для суммы ряда из неотрицательных элементов возможен случай, когда сумма равна $+\infty$, приведённые выше утверждения работают в этом случае. Из предыдущих наблюдений логично сделать вывод, что правильный способ суммирования — это рассматривать отдельно сумму положительных и отдельно — сумму отрицательных элементов ряда. После некоторого размышления, это приводит к следующему определению:

**Определение 4.18.** Сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится*, если сходится сумма модулей $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Нам надо обосновать это определение, показав, что абсолютно сходящийся ряд сходится. Ясно, что если сумма модулей ряда комплексных чисел сходится, то сходятся и суммы модулей действительных и мнимых частей элементов ряда. Перейдя к абсолютному суммированию действительных чисел, мы замечаем, что конечны оказываются по отдельности суммы положительных и суммы отрицательных элементов ряда.

Обратно, если для ряда действительных чисел суммы положительных элементов и суммы отрицательных элементов конечны, то сумма модулей элементов ряда будет просто суммой модулей этих двух сумм. Более аккуратно, любую последовательность $(a_n)$ действительных чисел мы можем представить в виде

$$a_n = a_n^+ + a_n^-, \quad a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2}, \quad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2},$$

по сути $(a_n^+)$ получается из $(a_n)$ заменой отрицательных чисел на нули, а $(a_n^-)$ — заменой положительных чисел на нули. Абсолютная сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ означает сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, а линейность суммы ряда показывает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

**Лемма 4.19.** *Сумма абсолютно сходящегося ряда не зависит от перестановки слагаемых.*

*Доказательство.* Для рядов с действительными элементами $(a_n)$ отдельно сумма положительных $(a_n^+)$ и сумма отрицательных элементов $(a_n^-)$ не зависят от перестановок по следствию 4.17. Для комплексных рядов абсолютно сходятся суммы отдельно действительных и мнимых частей, которые можно переставлять по доказанному для действительных сумм. ☐

*Задача* 4.20. Докажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно* (то есть сходится, но не абсолютно), то переставляя его слагаемые, можно получить любое число, а также $-\infty$ и $+\infty$.

[[ Заметьте, что сумма положительных членов ряда $+\infty$, а сумма отрицательных членов $-\infty$. Для действительного $A$ выписывайте члены ряда так: если частичная сумма меньше $A$, то добавляйте к ней следующий положительный член, если больше или равна $A$ — то добавляйте следующий неположительный член. Для $A = \pm\infty$ поправьте эту конструкцию соответственно. ]]

Мы по возможности будем избегать условной сходимости, хотя в разделах 4.3 и 4.6 мы не будем исключать условную сходимость для функциональных рядов.

Далее мы будем проводить рассуждения для рядов действительных чисел, имея в виду, что для рядов комплексных чисел достаточно отдельно рассмотреть действительные и мнимые части. Нам понадобится свойство повторного суммирования. Понятие абсолютного суммирования позволяет говорить о суммах любого счётного набора действительных чисел, не обязательно индексированного натуральными числами, так как порядок элементов в сумме не важен.

**Лемма 4.21** (Теорема Фубини для рядов). *Пусть сумма* $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$ *(индексированная счётным множеством* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$*) сходится абсолютно. Тогда*

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \right).$$

*Если все числа $a_{nm}$ неотрицательны то равенство выполняется даже тогда, когда левая и правая части равны $+\infty$, при этом считаем, что если мы суммируем неотрицательные числа и среди них встретилась $+\infty$, то общая сумма равна $+\infty$.*

*Доказательство.* Из абсолютной сходимости суммы $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$ и рассуждений перед формулировкой теоремы последует, что эту сумму можно разложить в разность двух сходящихся сумм по индексам $n$ и $m$, каждая из которых состоит из неотрицательных чисел. Поэтому доказательство первого утверждения теоремы сводится к случаю $a_{nm} \geqslant 0$, что мы и будем предполагать. Тогда мы заодно будем доказывать и второе утверждение теоремы, если опустим предположение о том, что сумма неотрицательных чисел $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$ сходится.

Выражение слева является супремумом конечных сумм некоторых чисел из $a_{nm}$. Но каждая конечная сумма (для конечного $X \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$)

$$\sum_{(n,m)\in X} a_{nm}$$

разбивается на наборы сумм с разными $n$ (в конечном числе), что даёт оценки снизу на внутренние суммы в правой части

$$\forall n \quad \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \geqslant \sum_{m \mid (n,m)\in X} a_{nm},$$

которые в свою очередь суммируются в оценки снизу для полной суммы в правой части

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\right) \geqslant \sum_{(n,m)\in X} a_{nm}.$$

Это доказывает, что правая часть равенства в условии теоремы не менее левой части.

Обратное неравенство докажем от противного: пусть правая часть больше $S$, а левая меньше $S$. Тогда мы найдём $N$, такое что в правой части можно оставить конечную сумму, так что

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\right) > S$$

и даже

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\right) > S + \delta$$

для некоторого $\delta > 0$. После этого мы можем найти конечное $M$, такое что для любого $n \leqslant N$

$$\sum_{m=1}^{M} a_{nm} > \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} - \delta/(2N),$$

если сумма справа в этом неравенстве конечна, либо

$$\sum_{m=1}^{M} a_{nm} > S,$$

если правая сумма бесконечна. Складывая такие неравенства, получим

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{m=1}^{M} a_{nm}\right) = \sum_{n\leqslant N,\ m\leqslant M} a_{n,m} > S.$$

А это означает, что левая часть тоже больше $S$ как супремум всех конечных сумм — противоречие. ☐

**Теорема 4.22** (Перемножение абсолютно сходящихся рядов). *Если суммы* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *и* $\sum_{n=1}^\infty b_n$ *абсолютно сходятся, то*

$$\left(\sum_{n=1}^\infty a_n\right)\cdot\left(\sum_{m=1}^\infty b_m\right) = \sum_{n,m=1}^\infty a_nb_m = \sum_{s=2}^\infty\left(\sum_{n=1}^{s-1} a_nb_{s-n}\right).$$

*Доказательство.* Напишем по определению суммы и пределу произведения:

$$\left(\sum_{n=1}^\infty |a_n|\right)\cdot\left(\sum_{m=1}^\infty |b_m|\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^N |a_n|\right)\cdot\left(\sum_{m=1}^N |b_m|\right) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N\sum_{m=1}^N |a_nb_m| = \sum_{n,m=1}^\infty |a_nb_m| < +\infty.$$

Значит в следующем выражении суммирование будет абсолютным

$$\left(\sum_{n=1}^\infty a_n\right)\cdot\left(\sum_{m=1}^\infty b_m\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^N a_n\right)\cdot\left(\sum_{m=1}^N b_m\right) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N\sum_{m=1}^N a_nb_m = \sum_{n,m=1}^\infty a_nb_m.$$

В последнем равенстве мы просуммировали бесконечную сумму с двумя индексами «по квадратам» $N\times N$, используя её абсолютную сходимость. Также мы можем суммировать в любом порядке, например сначала выписать члены с $s = n + m = 2$, потом с $s = n + m = 3$ и т.д. Тогда получается запись

$$\sum_{n,m=1}^\infty a_nb_m = \sum_{s=2}^\infty\left(\sum_{n=1}^{s-1} a_nb_{s-n}\right),$$

которую мы потом будем использовать для степенных рядов. ☐

В следующих задачах приводятся полезные примеры абсолютно сходящихся рядов.

*Задача* 4.23 (Геометрическая прогрессия). Докажите, что для $|z| < 1$

$$\sum_{n=0}^\infty z^n = \frac{1}{1-z}.$$

[[ Запишите частичную сумму в явном виде. ]]

*Задача* 4.24 (Почти геометрическая прогрессия). Докажите, что для $|z| < 1$

$$\sum_{n=1}^\infty nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

[[ Начните с произведения геометрических прогрессий

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\sum_{k=0}^\infty z^k\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^\infty z^n\right) = \sum_{k,n\geqslant 0} z^{n+k}$$

и сгруппируйте в нём слагаемые с одинаковой степенью $z$. ]]

**Теорема 4.25** (Сравнение абсолютно сходящихся рядов). *Если* $a_n = O(b_n)$ *при* $n \to \infty$, *то из абсолютной сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует абсолютная сходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

*Доказательство.* Сходимость и абсолютная сходимость ряда не меняется при отбрасывании конечного числа членов в начале ряда (проверьте это по определению). По определению символа $O$, после отбрасывания конечного числа слагаемых будет выполняться оценка $|a_n| \leqslant C|b_n|$ с некоторой константой $C$. Следовательно, для рядов с отброшенными начальными членами в пределе получится

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \leqslant C \cdot \sum_{n=N}^{\infty} |b_n| < +\infty.$$

☐

**Теорема 4.26** (Признак Коши абсолютной сходимости ряда). *Рассмотрим для последовательности чисел* $(a_n)$ *верхний предел*

$$\varlimsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = q \in [0, +\infty].$$

*Тогда при* $q > 1$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится, а при* $q < 1$ *— сходится абсолютно.*

*Доказательство.* Если $q > 1$, то по определению верхнего предела неравенство

$$|a_n|^{1/n} > 1 \Leftrightarrow |a_n| > 1$$

выполняется бесконечно много раз. Следовательно, не выполняется необходимое условие сходимости $a_n \to 0$ и ряд расходится.

Если $q < 1$, то возьмём какое-то $Q \in (q, 1)$. Тогда неравенство $|a_n|^{1/n} < Q$ выполняется для достаточно больших $n$, иначе можно было бы найти частичный предел, больший $q$. То есть выполняется неравенство $|a_n| < Q^n$, и наша сумма сходится из сравнения с геометрической прогрессией. ☐

*Задача* 4.27 (Признак Даламбера абсолютной сходимости ряда). Пусть для последовательности положительных чисел $(a_n)$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in [0, +\infty].$$

Тогда при $q > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, а при $q < 1$ — сходится.

[[ Аналогично признаку Коши, сравните с геометрической прогрессией. ]]

*Задача* 4.28. Пусть последовательность положительных чисел $(a_n)$ убывает. Докажите, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} < +\infty.$$

[[ Оцените одно через другое и наоборот, используя очевидное неравенство $a_{2^{k-1}} \geqslant a_n \geqslant a_{2^k}$ при условии $2^{k-1} \leqslant n \leqslant 2^k$. ]]

*Задача* 4.29. Докажите, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < +\infty \Leftrightarrow s > 1.$$

[[ Используйте две предыдущие задачи. ]]

*Задача* 4.30. Сходится ли ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}?$$

[[ Аналогично предыдущей задаче. ]]

Заметим, что для анализа сходимости ряда в предыдущей задаче и некоторых других можно использовать сравнения ряда с интегралом, см. задачу 5.117 в разделе про интегрирование.

*Задача* 4.31. $^*$ Докажите, что при $s > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-s}},$$

где произведение берётся по простым числам и бесконечное произведение понимается как предел частичных произведений.

[[ В конечном произведении раскройте скобки и перейдите к пределу по количеству скобок. ]]

*Задача* 4.32. $^*$ Докажите, что сумма

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$$

расходится.

[[ Возьмите логарифм в предыдущей формуле, чтобы сделать из произведения сумму. ]]

4.3. **Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов.** Теперь мы изучим последовательности и ряды, состоящие из функций, определённых на одном и том же множестве. Конечно, фиксируя элемент этого множества, мы получаем последовательность или ряд, состоящий уже не из функций, а из чисел. Например, если при каждом фиксированном аргументе последовательность значений сходится к некоторому числу (зависящему от аргумента функции),

$$f_0(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

то мы будем говорить, что имеет место *поточечная сходимость*. Но иногда хочется иметь более сильное свойство сходимости:

**Определение 4.33.** Последовательность функций $f_n : X \to \mathbb{R}$ *сходится равномерно* на множестве $X$ к функции $f_0$, если

$$\sup\{|f_n(x) - f_0(x)| \mid x \in X\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Равномерную сходимость на множестве $X$ часто обозначают $f_n \rightrightarrows_X f_0$. В определении равномерной сходимости множество $X$ может быть произвольной природы. В случае, когда мы захотим говорить о непрерывности функций, мы будем считать $X$ метрическим пространством, или в более общем виде, топологическим пространством. Если $X$ состоит из одной точки, то мы возвращаемся к случаю ряда из чисел.

*Задача* 4.34. Верно ли, что $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \rightrightarrows_{\mathbb{R}} e^x$?

[[ Сравните поведение экспоненты и её приближений на бесконечности. ]]

*Задача* 4.35. Верно ли, что $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \rightrightarrows_{[a,b]} e^x$, если $[a, b]$ — некоторый отрезок?

[[ Возьмите логарифм, воспользуйтесь липшицевостью экспоненты на отрезке и, например, разложением логарифма по формуле Тейлора с явным видом остаточного члена. ]]

**Определение 4.36.** Ряд из функций $u_n : X \to \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

*сходится равномерно* на множестве $X$, если последовательность его частичных сумм

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

сходится равномерно на $X$ к некоторой функции $S : X \to \mathbb{R}$.

Мы конечно будем стараться работать с абсолютно сходящимися рядами, но не исключаем в дальнейшем и условной сходимости, как следует из определения.

Работая с последовательностями функций, про которые неясно, к чему они сходятся, полезно иметь критерий равномерной сходимости, не включающий в себя предельную функцию. Как и в случае последовательностей чисел, нужно использовать фундаментальность в некотором смысле:

**Теорема 4.37** (Критерий Коши равномерной сходимости последовательности функций). *Для последовательности функций $f_n : X \to \mathbb{R}$ выполняется*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n, m \geqslant N(\varepsilon),\ \sup\{|f_n(x) - f_m(x)| \mid x \in X\} < \varepsilon$$

*тогда и только тогда, когда последовательность равномерно на $X$ сходится к некоторой функции.*

*Доказательство.* В одну сторону доказательство очевидно следует из неравенства

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f_0(x)| + |f_m(x) - f_0(x)|,$$

у которого супремум правой части по $x$ стремится к нулю при $n, m \to \infty$.

В обратную сторону, при каждом фиксированном $x \in X$ мы имеем фундаментальную последовательность $(f_n(x))$ и у неё есть предел $f_0(x)$. Теперь в формулировке критерия Коши мы можем фиксировать $n$ и устремить $m \to \infty$. Неравенство в формулировке становится верным при $m \geqslant N(\varepsilon)$, и переходя в нём к пределу, мы получаем:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n \geqslant N(\varepsilon),\ \sup\{|f_n(x) - f_0(x)| \mid x \in X\} \leqslant \varepsilon,$$

что фактически означает $f_n \rightrightarrows_X f_0$ при $n \to \infty$. ☐

Для рядов критерий Коши намного более актуален, так как сумму ряда обычно в явном виде найти сложно или вообще невозможно. В этом случае можно переформулировать критерий Коши в виде:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n, m \geqslant N(\varepsilon),\ \sup\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)\right| \,\middle|\, x \in X\right\} < \varepsilon,$$

и из неё выводится следующее:

**Следствие 4.38** (Необходимое условие сходимости функционального ряда). *Для равномерной сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве $X$ необходимо, чтобы $u_n \rightrightarrows_X 0$ при $n \to \infty$.*

*Доказательство.* Поставим в критерий Коши $n + 1 = m$ и получим

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall m > N(\varepsilon),\ \sup\{|u_m(x)| \mid x \in X\} < \varepsilon,$$

что означает равномерную сходимость $u_n$ к нулю. ☐

*Задача* 4.39. При каких значениях коэффициентов $a_n$ функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сходится равномерно на всей прямой $\mathbb{R}$?

[[ Начните с применения необходимого условия равномерной сходимости ряда. ]]

Для рядов нам также будет полезен следующий простой признак сходимости:

**Теорема 4.40** (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов). *Если ряд из функций* $u_n : X \to \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, мажорируется *на множестве* $X$ *сходящимся рядом из неотрицательных чисел, то есть*

$$\forall x \in X\ \forall n \in \mathbb{N}, |u_n(x)| \leqslant a_n \quad и \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty,$$

*то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно и абсолютно на* $X$.

*Доказательство.* Воспользуемся критерием Коши и заметим, что всегда выполняется

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)\right| \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{m} |u_k(x)|\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} a_k,$$

а для ряда из чисел $a_n$ выполняется критерий Коши сходимости ряда с некоторой $N(\varepsilon)$. В утверждении критерия Коши для $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мы просто можем заменить $a_n$ на $u_n(x)$ и получить утверждение о сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ по критерию Коши. ☐

Следующая теорема крайне полезна для анализа непрерывности функций, заданных в виде равномерного предела последовательности или в виде суммы равномерно сходящегося ряда:

**Теорема 4.41** (Непрерывность равномерного предела непрерывных функций). *Пусть последовательность* $f_n : X \to \mathbb{R}$ *сходится равномерно на* $X$ *к функции* $f$ *и все функции* $f_n$ *непрерывны. Тогда* $f$ *тоже непрерывна.*

*Доказательство.* Возьмём точку $x_0 \in X$ и $\varepsilon > 0$. Для любого положительного $\varepsilon$ мы можем найти $f_n$, которая отклоняется от $f$ не более чем на $\varepsilon$ на всём $X$. В силу непрерывности $f_n$ в некоторой окрестности $U(x_0) \ni x_0$ выполняется

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon,$$

а значит в той же окрестности выполняется

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon,$$

что и означает непрерывность $f$ по определению. ☐

Также полезно иметь возможность переставлять местами операцию дифференцирования (или взятия первообразной) и бесконечного суммирования (или перехода к пределу) функций, что нам даст следующая теорема (в которой производную на концах отрезка будем брать одностороннюю):

**Теорема 4.42.** *Пусть последовательность дифференцируемых функций* $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ *сходится в точке* $x_0$, *а последовательность производных* $f_n'$ *сходится равномерно на* $[a, b]$ *к функции* $g$. *Тогда* $(f_n)$ *равномерно сходится к некоторой* $f$ *и* $f' = g$ *на всём отрезке* $[a, b]$.

*Доказательство.* Рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0}, & \text{если } x \neq x_0; \\ f'_n(x_0), & \text{если } x = x_0. \end{cases}$$

Все эти функции непрерывны в силу явной формулы и определения производной в точке $x_0$. В точке $x_0$ мы имеем $\varphi_n(x_0) \to g(x_0)$ при $n \to \infty$. Посмотрим на критерий Коши в других точках:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0} \right| =$$
$$= \left| \frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))}{x - x_0} \right| = |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)|$$

для некоторого $\xi$ между $x_0$ и $x$ по теореме о среднем Лагранжа для функции $f_n(x) - f_m(x)$. Следовательно, из выполнения критерия Коши для равномерной сходимости $f'_n$ на всём отрезке следует выполнение критерия Коши для $\varphi_n$ на всём отрезке с той же $N(\varepsilon)$.

Тогда мы знаем, что $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ равномерно на отрезке и $\varphi$ непрерывна. Но тогда, учитывая ограниченность $x - x_0$ на отрезке, мы можем перейти к равномерному на отрезке пределу в равенстве

$$f_n(x) = f_n(x_0) + (x - x_0)\varphi_n(x),$$

и получить

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\varphi(x),$$

откуда также следует тот факт, что $f'(x_0) = \varphi(x_0) = g(x_0)$. Перенося точку $x_0$ в другую точку отрезка и повторяя рассуждения, получаем равенство $f' = g$ в любой точке отрезка. ☐

*Задача* 4.43. Проверьте, что если в теореме о дифференцировании последовательности функций отрезок $[a, b]$ заменить на неограниченный промежуток, то сходимость $(f_n(x))$ может и не быть равномерной.

[[ Достаточно рассмотреть случай, когда $f'_n$ являются константами, сходящимися к какой-то константе. ]]

**Следствие 4.44.** *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится равномерно на отрезке, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке отрезка, то на самом деле $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на отрезке и выполняется*

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

*Задача* 4.45 (Пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции, см. также задачу 3.84). Пусть функция $\varphi(x)$ равна $0$ в чётных целых числах, $1$ в нечётных целых числах, непрерывна и линейна между целыми числами (её график выглядит как пила). Докажите, что сумма ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} \varphi(4^n x)$$

непрерывна, но нигде не дифференцируема.

[[ Непрерывность следует из признака Вейерштрасса и непрерывности равномерного предела. Для анализа дифференцируемости в точке $x_0$, для $n \in \mathbb{Z}^+$ рассмотрите приближения

$$a_n = m4^{-n} \leqslant x_0 \leqslant (m+1)4^{-n} = b_n$$

и изучите приращение $f(b_n) - f(a_n)$. ]]

4.4. **Степенные ряды и радиус сходимости.** В этом разделе мы возвращаемся к формуле Тейлора, которая приближает данную функцию многочленом. Мы будем пытаться усилить эту формулу до такой степени, чтобы функция не просто приближалась, а была точно равна «бесконечному многочлену», а точнее, сумме ряда типа $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Это будет верно не для всех функций и не для всех значений $z$, но в тех случаях, когда такое представление возможно, оно оказывается очень полезным.

**Определение 4.46.** Ряд из функций $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ называется *степенным рядом*.

Степенные ряды можно рассматривать с комплексными коэффициентами и подставлять в них комплексные значения $z$. Поэтому в утверждениях о степенных рядах числа считаем комплексными, если не указано обратное. В разделе 10 мы увидим фундаментальные причины, по которым правильно рассматривать степенные ряды именно в комплексном виде.

**Теорема 4.47.** *Для любого степенного ряда существует* радиус сходимости $R \in [0, +\infty]$, *такой что ряд расходится при* $|z-z_0| > R$ *и равномерно и абсолютно сходится при* $|z-z_0| \leqslant r$ *при любом фиксированном* $0 < r < R$.

*Доказательство.* Положим $z_0 = 0$, это не уменьшает общности. Если имеется сходимость ряда в точке $z$, то $a_n z^n \to 0$ по необходимому условию сходимости ряда, а значит последовательность $a_n z^n$ ограничена некоторым числом $M$. Тогда взяв число $r < |z|$, мы для любого $|x| \leqslant r$ получим оценку

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n| r^n \leqslant \frac{r^n}{|z|^n} M.$$

При этом по формуле суммы геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{|z|^n} M = M \frac{1}{1 - \frac{r}{|z|}} < +\infty.$$

Следовательно, имеется равномерная сходимость степенного ряда при $|x| \leqslant r$ по признаку Вейерштрасса. Теперь понятно, что для радиуса, определённого как

$$R = \sup \left\{ |z| \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ сходится} \right\},$$

утверждение теоремы о расходимости выполняется по определению $R$. Утверждение о (равномерной) сходимости для данного $r < R$ следует из возможности найти точку $z$ с $|z| > r$, в которой ряд сходится. ☐

*Задача* 4.48. Верно ли, что любой степенной ряд с бесконечным радиусом сходимости сходится равномерно на $\mathbb{C}$?

Мы доказали существование радиуса сходимости степенного ряда, но для его явного нахождения полезно иметь какие-то формулы. Один из вариантов даётся в следующей теореме, а другой — в виде задачи после неё.

**Теорема 4.49** (Формула Коши–Адамара для радиуса сходимости). *Для степенного ряда* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *радиус сходимости можно найти как*

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n},$$

*считая* $\frac{1}{0} = +\infty$ *и* $\frac{1}{+\infty} = 0$.

*Доказательство.* По теореме 4.26 степенной ряд расходится при

$$\varlimsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}|z-z_0| > 1$$

и сходится абсолютно при

$$\varlimsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}|z-z_0| < 1.$$

Для определённого в условии теоремы числа $R$ эти два неравенства эквиваленты соответственно

$$|z-z_0| > R \quad \text{и} \quad |z-z_0| < R.$$

□

*Задача* 4.50 (Формула Даламбера для радиуса сходимости). Докажите, что для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ радиус сходимости можно найти как

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

если предел существует.

[[ Сравните сумму ряда из модулей с геометрической прогрессией. ]]

На границе круга сходимости степенной ряд может вести себя как угодно, читателю предлагается проверить это, решив следующую задачу.

*Задача* 4.51. Приведите пример степенного ряда, который расходится в любой граничной точке круга сходимости и пример степенного ряда, который сходится равномерно на замыкании круга сходимости.

[[ Используйте формулу Коши–Адамара и наблюдение, что $\sqrt[n]{n} \to 1$ при $n \to \infty$. ]]

Сложение и умножение степенных рядов можно применять в тех случаях, когда они сходятся абсолютно. Если мы хотим ещё и дифференцировать степенные ряды, то нам понадобится следующая теорема.

**Теорема 4.52.** *Радиус сходимости не меняется при взятии поэлементной производной и в степенных рядах можно переставлять суммирование и дифференцирование внутри круга сходимости.*

*Доказательство.* Проверим равенство радиусов сходимости исходного и продифференцированного ряда. Чтобы установить равенство радиусов сходимости рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1},$$

сначала умножим второй ряд на $z-z_0$ и получим степенной ряд $\sum_{n=0} na_n(z-z_0)^n$ с тем же радиусом сходимости. Действительно, радиус сходимости при умножении на $z-z_0$ не меняется потому, что сходимость и расходимость обоих рядов эквивалентны при условии $z \neq z_0$. Теперь для умноженного ряда применим формулу Коши–Адамара, с учётом предела $n^{1/n} \to 1$ эта формула будет давать тот же радиус сходимости, что и для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

Утверждение теоремы для действительных рядов теперь следует из общих сведений о дифференцировании функциональных рядов (следствие 4.44), применённых в некотором круге радиуса меньшего, чем радиус сходимости.

Для комплексных рядов мы можем заметить, что ряды состоят из многочленов, которые имеют производную в комплексном смысле. Теорема 4.42 верна в этом случае, так как в её доказательстве теорема о среднем Лагранжа (равенство) может быть заменена на теорему о среднем для кривых с неравенством $\leqslant |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)|$ для некоторого $\xi$ на отрезке кривой между $z_0$ и $z$.

□

**Следствие 4.53.** *Если $f(z)$ представлена в окрестности $z_0$ степенным рядом с положительным радиусом сходимости, то*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n,$$

*это называется* ряд Тейлора.

*Доказательство.* Если

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

то очевидно $f(z_0) = a_0$. Равенства $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ получаются почленным дифференцированием ряда и подстановкой $z = z_0$ после дифференцирования. □

Предыдущее следствие означает, что если функция представляется каким-то степенным рядом с центром в $z_0$, то этот ряд на самом деле является её рядом Тейлора. В следующем разделе мы выясняем, к каким конкретным функциям это применимо.

4.5. **Ряды Тейлора для элементарных функций.** Заметим, что из правил дифференцирования степенного ряда следует, что у степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ с радиусом сходимости $R > 0$ есть первообразная

$$F(x) = \mathrm{const} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z - z_0)^{n+1}}{n+1}$$

с тем же радиусом сходимости. Далее мы увидим, что все элементарные функции представляются степенными рядами в окрестности точек из внутренности своей области определения, а значит имеют первообразные.

**Теорема 4.54.** *Для всех $x \in \mathbb{R}$*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

*Доказательство.* Это следует из теоремы 4.59, но можно рассуждать иначе. При $n \geqslant 2|x|$ следующее слагаемое как минимум в два раза меньше предыдущего и сумма остатка ряда оценивается суммой геометрической прогрессии, так что радиус сходимости бесконечен. Продифференцировав этот степенной ряд $f(x)$ мы получим то же самое, то есть

$$f'(x) = f(x) \Rightarrow (\ln f)' = \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow \ln f = x + \mathrm{const} \Rightarrow f(x) = Ae^x.$$

Подставив $x = 0$ мы найдём, что $A = 1$ и $f(x) = e^x$.

Деление на $f$ очевидно возможно при $x > 0$, так как тогда $f(x) > 0$. Для анализа корректности рассуждений для отрицательных значений $x$ предположим противное, что рассуждения некорректны и $f(-a) = 0$, причём $a$ выбрано минимальным (из замкнутости множества нулей непрерывной функции). Тогда функция $x \in [0, a)$, заданная как $g(x) = 1/f(-x)$ удовлетворяет тому же уравнению $g'(x) = g(x)$. Следовательно, $g(x) = e^x$ на $[0, a)$. Но тогда $f(-x) = e^{-x}$ на этом полуинтервале и по непрерывности $f(-a) = e^{-a} \neq 0$, противоречие. □

На самом деле степенной ряд в предыдущей теореме можно просто считать определением экспоненты. Оперируя абсолютно сходящимися рядами, можно вывести формулу

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^k y^\ell}{k!\ell!} =$$
$$= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \cdot \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{y^\ell}{\ell!} \right) = \exp(x)\exp(y),$$

а из дифференцирования рядов получить $\exp(x)' = \exp(x)$. Этих свойств вполне достаточно, чтобы работать с экспонентой так, как мы уже работали.

*Задача* 4.55. Определите косинус и синус через подстановку комплексного числа в экспоненту

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

проверьте их основные свойства, исходя из такого определения. Выпишите их ряды Тейлора.

**Теорема 4.56.** *Для* $|x| < 1$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

*Доказательство.* Формула для суммы геометрической прогрессии показывает, что

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

с радиусом сходимости 1. Так как $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$, мы получаем формулу для логарифма из теоремы о дифференцировании степенных рядов. □

*Задача* 4.57. * Используя ряды для $e^z$ и $\ln(1+z)$ как определения этих функций, докажите формулу $\ln e^z = z$ для достаточно близких к нулю комплексных $z$.

[[ Сначала напишите

$$(e^z - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} e^{kz} = \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{k^m z^m}{m!},$$

а потом

$$\ln e^z = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n \leqslant m} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{n} \frac{k^m z^m}{m!} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n \leqslant m} \binom{n-1}{k-1} (-1)^{k+1} \frac{k^{m-1} z^m}{m!},$$

просуммируйте сначала по $n$, потом по $k$. ]]

Определим *биномиальный коэффициент* для не обязательно целой степени $\alpha \in \mathbb{R}$ формулой:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

**Теорема 4.58.** *Для* $|x| < 1$ *и* $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

*с радиусом сходимости не менее* 1.

*Доказательство.* По определению мы знаем, что

$$(1+x)^\alpha = \exp(\alpha \ln(1+x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (\ln(1+x))^n.$$

Если $|x| \leqslant r < 1$, то мы знаем, что сумма модулей в ряде для $\ln(1+x)$ будет не более $|\ln(1-r)|$ (если все знаки поменять на плюс, так и получится). Это означает, что воспользовавшись возможностью перемножения и повторного суммирования абсолютно сходящихся рядов, мы получим для $(1+x)^\alpha$ до приведения подобных слагаемых выражение в виде некоего ряда с суммой модулей слагаемых не более

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^n}{n!} |\ln(1-r)|^n = e^{|\alpha||\ln(1-r)|} < +\infty.$$

Приведя в этом выражении подобные слагаемые с одной и той же степенью $x$ (на самом деле при каждой степени будет лишь конечное число слагаемых), мы получим степенной ряд, сходящийся при $|x| < 1$. Таким способом трудно узнать его коэффициенты, но их можно узнать из формулы для ряда Тейлора, дифференцируя $(1+x)^\alpha$ несколько раз и подставляя $x = 0$. ☐

В предыдущей теореме $z$ и $\alpha$ можно было брать и комплексными. Сейчас мы не акцентируем на этом внимания, и оставляем работу с функциями комплексного переменного до раздела 10. Сформулируем общее достаточное условие сходимости ряда Тейлора к функции действительного аргумента.

**Теорема 4.59.** *Пусть на интервале* $(a, b) \ni x_0$ *функция* $f$ *действительного аргумента бесконечно дифференцируема,* $C > 0$ *и производные оцениваются как* $|f^{(n)}(x)| \leqslant C^n$ *для любого* $x \in (a, b)$ *и любого* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда ряд Тейлора* $f$ *по степеням* $x - x_0$ *сходится к* $f$ *на интервале* $(a, b)$.

*Доказательство.* Воспользуемся формой Лагранжа остаточного члена формулы Тейлора для $x \in (a, b)$

$$|r_{n-1}(x)| = \left| \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!} (x-x_0)^n \right| \leqslant \frac{C^n |x-x_0|^n}{n!} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Это означает сходимость частичных сумм ряда Тейлора к $f(x)$. ☐

Радиус сходимости (по определению) в предыдущей теореме оказывается не менее $\max\{|x_0 - a|, |x_0 - b|\}$. Из этой теоремы следует, что ряды Тейлора для синуса и косинуса имеют бесконечный радиус сходимости и сходятся к своим функциям. Выпишем их явно

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},$$

и будем считать их определениями синуса и косинуса и для комплексного аргумента $z$. Формула $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ теперь может быть проверена как равенство рядов Тейлора.

*Задача* 4.60. Установите разложение функции $f(x) = (1+x)^\alpha$ в ряд Тейлора при $|x| < 1$, положив $g(x) = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n$ и установив формулу $g'(x) = \frac{\alpha}{1+x} g(x)$ при $|x| < 1$.

*Задача* 4.61. Проверьте, что теорема 4.59 не позволяет установить разложимость в ряд Тейлора $(1+x)^\alpha$ и $\ln(1+x)$ при $|x| < 1$.

*Задача* 4.62. Приведите пример бесконечно дифференцируемой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ряд Тейлора которой сходится, но не к $f$.

[[ Используйте функцию из задачи 2.89. ]]

Следует отметить, что правильный подход к рядам Тейлора связан с понятием аналитичности (голоморфности) функции. На самом деле для сходимости ряда Тейлора функции $f$ в круге $|z - z_0| < R$ на комплексной плоскости достаточно, чтобы эта функция была дифференцируема в этом круге в комплексном смысле, то есть выполнялось бы

$$f(z+t) = f(z) + f'(z)t + o(|t|)$$

для любого фиксированного $z$ из открытого круга и комплексных $t \to 0$. Для функции, которая аналитически продолжена на круг с центром в $z_0$ с особенностями, радиус сходимости просто равен расстоянию до ближайшей особенности; это наблюдение очень помогает при нахождении радиуса сходимости степенного ряда без выписывания формул. Более подробно методы комплексного анализа освещаются в разделе 10.

Пока же мы будем называть функцию действительного переменного *аналитической на интервале* $(a, b)$, если для любой точки $x_0 \in (a, b)$ она раскладывается в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)^n$, сходящийся в некоторой окрестности $U(x_0) \ni x_0$.

### 4.6. **Условная сходимость рядов, признаки Абеля и Дирихле.**

Если мы хотим установить формулы с условной сходимостью

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1},$$

то нам нужно знать о применимости ряда Тейлора на конце интервала сходимости. Эти формулы последуют из непрерывности логарифма и арктангенса и следующей теоремы.

**Теорема 4.63.** *Если $x_0 > 0$ и ряд $\sum_{n=0}^\infty a_n x_0^n$ сходится (не обязательно абсолютно), то функция*

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$$

*непрерывна на отрезке* $[0, x_0]$.

*Доказательство.* Замена $a_n$ и $x$ на $a_n x_0^n$ и $x/x_0$ сводит утверждение к случаю $x_0 = 1$. После замены мы знаем, что ряд $\sum_{n=0}^\infty a_n$ сходится не обязательно абсолютно.

Положим $R_n = \sum_{k=n}^\infty a_k$, тогда $R_n \to 0$ и $a_n = R_n - R_{n+1}$. Тогда посмотрим на отрезок ряда для $f$ и сделаем *преобразование Абеля*

$$\sum_{k=n}^m (R_k - R_{k+1})x^k = R_n x^n - R_{m+1}x^m + \sum_{k=n+1}^m R_k(x^k - x^{k-1}).$$

Мы можем выбрать такое $N$, что при $k \geqslant N$ будет $|R_k| < \varepsilon$; взяв также $m \geqslant n \geqslant N$, мы получим

$$\left|R_n x^n - R_{m+1}x^m + \sum_{k=n+1}^{m} R_k(x^k - x^{k-1})\right| \leqslant \varepsilon x^n + \varepsilon x^m + \varepsilon \sum_{k=n+1}^{m} |x^k - x^{k-1}| =$$
$$= \varepsilon(x^n + x^m + x^n - x^m) \leqslant 2\varepsilon.$$

Значит по критерию Коши равномерной сходимости ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно на $[0, 1]$ и его предельная функция непрерывна. ☐

В духе предыдущей теоремы можно изучать и не обязательно абсолютную сходимость более общих функциональных и числовых последовательностей и рядов. Для начала сделаем определение.

**Определение 4.64.** Последовательность функций $(f_n)$ на множестве $X$ *равномерно ограничена*, если существует такое число $M$, что для любых $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется $|f_n(x)| \leqslant M$.

*Задача* 4.65 (Признак Абеля равномерной сходимости ряда). Докажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно по $x \in X$ сходится, а последовательность $(g_n(x))$ монотонна по $n$ и равномерно ограничена, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$$

тоже равномерно сходится. Все функции считаем определёнными на некотором множестве $X$.

[[ Доказательство предыдущей теоремы работает после замены $a_n$ на $f_n(x)$ и $x^n$ на $g_n(x)$. Заметьте, что $\sum_{n=N}^{\infty} |g_n(x) - g_{n+1}(x)| \leqslant 2M$ при условии, что $|g_n(x)| \leqslant M$ и выражение $g_n(x)$ монотонно по $n$. ]]

**Теорема 4.66** (Признак Дирихле равномерной сходимости ряда)**.** *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ имеет равномерно ограниченные частичные суммы, а последовательность $(g_n(x))$ монотонна по $n$ и равномерно по $x \in X$ стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$$

*тоже равномерно сходится. Все функции считаем определёнными на $X$.*

*Доказательство.* Обозначим $F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, тогда $f_n(x) = F_n(x) - F_{n-1}(x)$. Равномерная ограниченность означает оценку $|F_n(x)| \leqslant M$, не зависящую от $n$ и $x$.

Посмотрим на отрезок суммы ряда и сделаем преобразование Абеля

$$\sum_{k=n}^{m} (F_k(x) - F_{k-1}(x)) g_k(x) = F_m(x) g_m(x) - F_{n-1}(x) g_n(x) + \sum_{k=n}^{m-1} F_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)).$$

С учётом постоянства знака разностей $(g_k(x) - g_{k+1}(x))$ выполняется равенство

$$\sum_{k=n}^{m-1} |g_k(x) - g_{k+1}(x)| = |g_m(x) - g_n(x)|.$$

и можно оценить модуль интересующего нас выражения как

$$\left|\sum_{k=n}^{m} (F_k(x) - F_{k-1}(x)) g_k(x)\right| \leqslant M|g_m(x)| + M|g_n(x)| + M|g_m(x) - g_n(x)|.$$

Из равномерной сходимости $g \to 0$ следует, что при достаточно больших $n$ будет выполняться $|g_n(x)| < \varepsilon$ независимо от $x \in X$, а значит

$$\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x) g_k(x)\right| < 4M\varepsilon,$$

что доказывает равномерную сходимость ряда из сумм по критерию Коши. □

**Следствие 4.67** (Признак Лейбница равномерной сходимости ряда)**.** *Если* $a_n(x) \to 0$ *равномерно на* $X$ *и монотонно по* $n$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n(x)$ *сходится равномерно.*

Обратите внимание, что это следствие устанавливает сходимость сумм

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1},$$

которую требуется обосновать перед применением теоремы 4.63 для вычисления значений этих сумм.

*Задача* 4.68. Докажите, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$$

сходятся при $\alpha > 0$ равномерно на любом отрезке $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, но при $\alpha \in (0, 1]$ сходимость будет условной и не равномерной на $(0, 2\pi)$.

[[ Примените признак Дирихле, посчитав суммы $\sum_{k=1}^{n} \sin kx$ и $\sum_{k=1}^{n} \cos kx$, которые являются мнимой и действительной частью геометрической прогрессии $\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}$. Для доказательства отсутствия абсолютной сходимости оцените $|\sin x| \geqslant \sin^2 x$ и $|\cos x| \geqslant \cos^2 x$. Для доказательства отсутствия равномерной сходимости в окрестности нуля примените критерий Коши равномерной сходимости. ]]

Как мы уже обратили внимание, суммирование условно сходящихся рядов ведёт себя менее предсказуемо по сравнению с суммированием абсолютно сходящихся рядов. Более того, суммирование условно сходящихся рядов может быть определено разными способами. Например, пытаясь просуммировать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мы могли бы рассмотреть функциональный ряд

$$S(q) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$$

для $q \in (0, 1)$, который имеет больше шансов сойтись абсолютно, а потом перейти к пределу $q \to 1 - 0$. Теорема 4.63 показывает, что для сходящегося в обычном смысле ряда мы этим способом получим то же значение суммы. Рассмотрим в задачах ещё один вариант суммирования не обязательно сходящихся рядов, который потом будет применяться в суммировании тригонометрических рядов по Фейеру.

*Задача* 4.69. Последовательность $a_n$ *сходится в среднем* к числу $a$, если последовательность

$$\overline{a}_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

сходится к $a$ в обычном смысле. Докажите, что если $a_n \to a$, то $\overline{a}_n \to a$.

[[ Сначала рассмотрите сходимость к нулю, в общем случае представьте последовательность как сумму постоянной и бесконечно малой. ]]

*Задача* 4.70. Опишите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, «непрерывные в среднем», то есть такие, для которых сходимость в среднем $x_n$ к $x_0$ влечёт сходимость в среднем $f(x_n)$ к $f(x_0)$.

[[ Обратите внимание, что последовательность $(x_n)$, принимающая только два значения $a$ и $b$, может сойтись в среднем к любой точке между $a$ и $b$. ]]

*Задача* 4.71. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с частичными суммами

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

*сходится в среднем* (или *сходится по Чезаро*) к числу $S$, если последовательность $(S_n)$ сходится в среднем к $S$. Найдите, куда в среднем сходятся ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx.$$

[[ Для вычислений удобно воспользоваться $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ и суммировать геометрические прогрессии. ]]

4.7. **Приближение кусочно линейными функциями и многочленами.** Достижением математического анализа было понимание того, что существуют функции достаточно общего вида, не заданные явной формулой. К примеру, просто непрерывные (и необязательно дифференцируемые) функции. Однако для практических нужд и для внутренних нужд математического анализа требуется понимать что, скажем, общие непрерывные функции можно равномерно приблизить какими-то явными функциями, например многочленами.

Мы уже представили некоторые хорошие функции в виде равномерно сходящихся степенных рядов, что означает их равномерное приближение многочленами на отрезке $|x - x_0| \leqslant r$, для любого $r$, меньшего радиуса сходимости. Однако, как мы доказали, суммы степенных рядов являются бесконечно дифференцируемыми функциями. Поэтому, для приближения многочленами функции, которая всего лишь непрерывна, такой подход совершенно не годится, и нужно что-то другое.

Начнём с использования равномерной непрерывности и утверждения про непрерывные функции на прямой с *компактным носителем*, то есть равные нулю за пределами некоторого отрезка. Вообще по определению *носитель функции* — это дополнение к объединению всех открытых множеств, на которых функция равна нулю. Иначе говоря, носитель — это замыкание множества точек, в которых функция не равна нулю. Носитель функции всегда замкнут и поэтому для функций на $\mathbb{R}^n$ компактность носителя означает его ограниченность.

**Лемма 4.72.** *Функцию $\sqrt{x}$ можно равномерно сколь угодно близко приблизить многочленами на любом фиксированном отрезке $[0, a]$.*

*Доказательство.* Равномерную непрерывность функции $\sqrt{x}$ из задачи 3.97 можно переписать в виде

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall t, (0 \leqslant t < \delta \Rightarrow |\sqrt{x+t} - \sqrt{x})| < \varepsilon).$$

Эта же формула означает равномерную сходимость функций $f_t(x) = \sqrt{x+t}$ к $\sqrt{x}$ на полупрямой $[0, +\infty)$ при $t \to +0$.

Будем считать, что $\sqrt{x+t}$ приближает $\sqrt{x}$ с точностью не более $\varepsilon > 0$. Заменив переменную $x = a - y$, рассмотрим функцию

$$g(y) = \sqrt{a+t-y} = \sqrt{a+t}\sqrt{1 - \frac{y}{a+t}}.$$

Она раскладывается в степенной ряд при $|y| \leqslant a + t$ (теорема 4.58), причём если $|y| \leqslant a$, то этот степенной ряд сходится равномерно. Значит $g(y)$ приближается с точностью $\varepsilon$ на отрезке $[0, a]$ многочленом $P_\varepsilon(y)$. Следовательно, $\sqrt{x}$ приближается многочленом $P_\varepsilon(a - x)$ с точностью не более $2\varepsilon$. ☐

*Задача* 4.73. Докажите, что если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и имеет компактный носитель, а $t_n \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательность функций

$$f_n(x) = f(x - t_n)$$

равномерно стремится к $f$.

[[ Докажите, что непрерывная функция с компактным носителем равномерно непрерывна. ]]

**Лемма 4.74.** *Функцию $|x|$ можно равномерно сколь угодно близко приблизить многочленами на любом отрезке $[-a, a]$.*

*Доказательство.* Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ на отрезке $[0, a^2]$ мы приближаем $\sqrt{t}$ многочленом

$$|\sqrt{t} - P(t)| < \varepsilon.$$

Подставим $x = \sqrt{t}$, тогда при $x \in [0, a]$ у нас будет неравенство

$$|x - P(x^2)| < \varepsilon.$$

Его можно продолжить на $[-a, a]$, если мы продолжим $x$ чётным образом как $|x|$, получив

$$\big||x| - P(x^2)\big| < \varepsilon.$$

☐

**Теорема 4.75.** *Любую непрерывную кусочно-линейную на отрезке $[a, b]$ функцию можно равномерно сколь угодно близко приблизить многочленом.*

*Доказательство.* Пусть наша функция $f$ в точке $x_i$ имеет скачок производной на $\Delta$. Тогда функция $f(x) - \Delta/2|x - x_i|$ уже не будет иметь скачка производной в $x_i$. Сделав так несколько раз, мы представим кусочно-линейную на отрезке функцию в виде

$$f(x) = \sum_i c_i|x - x_i| + kx + d.$$

Так как по предыдущей лемме мы каждое слагаемое можем приблизить многочленом равномерно сколь угодно близко и количество слагаемых конечно, то и всю функцию мы можем приблизить многочленом сколь угодно близко. ☐

Теперь мы умеем приближать многочленами кусочно-линейные функции и, если мы хотим приближать произвольные непрерывные функции, нам осталось показать, как равномерно приближать непрерывные на отрезке функции кусочно-линейными.

Определим функции для положительных $\delta$

$$\varphi_\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -\delta; \\ 1 - |x|/\delta, & \text{если } |x| \leqslant \delta; \\ 0, & \text{если } x > \delta. \end{cases}$$

Такая функция кусочно линейная, непрерывная, и её носитель — это отрезок $[-\delta, \delta]$. Такие функции на конечном отрезке мы уже умеем приближать многочленами. Докажем, что линейными комбинациями этих функций (то есть кусочно-линейными функциями) можно приблизить любую непрерывную функцию на отрезке. В качестве отрезка будем рассматривать $[0, 1]$, другие отрезки можно перевести в него линейной заменой переменной.

**Лемма 4.76.** *Пусть дана непрерывная функция* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. *Последовательность функций*

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{m} f(k/m)\varphi_{1/m}(x - k/m)$$

*равномерно стремится к* $f$.

*Доказательство.* Воспользуемся тождеством для $x \in [0,1]$

$$\sum_{k=0}^{m} \varphi_{1/m}(x - k/m) = 1,$$

это на самом деле частный случай *разбиения единицы*. Для его доказательства достаточно заметить, что сумма кусочно линейна и имеет скачки производной только в точках вида $k/m$, $k = 0, \dots, m$ причём во всех таких точках её значения равны $1$.

Умножим тождество разбиения единицы на $f(x)$ и вычтем из него определение $f_m(x)$:

$$f(x) - f_m(x) = \sum_{k=0}^{m} (f(x) - f(k/m))\varphi_{1/m}(x - k/m).$$

В правой части этого выражения, из определения $\varphi_{1/m}$, слагаемые будут ненулевыми, только если $|x - k/m| < 1/m$. Тогда правую часть можно оценить через модуль непрерывности с использованием тождества разбиения единицы

$$\left| \sum_{k=0}^{m} (f(x) - f(k/m))\varphi_{1/m}(x - k/m) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{m} \omega_f(1/m)\varphi_{1/m}(x - k/m) = \omega_f(1/m).$$

Этот модуль непрерывности при $m \to \infty$ стремится к нулю по свойству равномерной непрерывности $f$, что и доказывает требуемое. ☐

Соответствующее утверждение для функции нескольких переменных оставляем в качестве задачи:

*Задача* 4.77. Пусть дана непрерывная функция $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}$. Докажите, что последовательность функций

$$f_m(x) = \sum_{0 \leqslant k_1, \dots, k_n \leqslant m} f(k_1/m, \dots, k_n/m)\varphi_{1/m}(x_1 - k_1/m)\varphi_{1/m}(x_2 - k_2/m)\dots\varphi_{1/m}(x_n - k_n/m)$$

равномерно стремится к $f$.

[[ Аналогично предыдущей задаче, сначала заметьте, что для равной единице функции $f$ в правой части тоже получится единица. ]]

Суммируя сведения из предыдущих утверждений и задачи, мы получаем следующее утверждение:

**Теорема 4.78.** *Любую непрерывную* $f : [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \to \mathbb{R}$ *можно равномерно сколь угодно близко приблизить многочленом.*

*Доказательство.* Сначала можно масштабировать параллелепипед $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ в единичный куб, это не влияет на непрерывность и оставляет многочлен многочленом. Потом можно равномерно приблизить непрерывную функцию комбинацией произведений кусочно-линейных функций отдельных переменных, как в задаче 4.77. А потом все эти кусочно-линейные функции одной переменной можно равномерно приблизить многочленами. ☐

*Задача* 4.79. Пусть $n$ — натуральное число, $[a, b]$ — отрезок, $M \in \mathbb{R}$, и последовательность многочленов $(P_k)$ степени не более $n$ равномерно ограничена на $[a, b]$ числом $M$, то есть $|P_k(x)| \leqslant M$ для любых $x \in [a, b]$ и $k$. Докажите, что из последовательности $(P_k)$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность, которая сходится к многочлену степени не более $n$.

[[ Переходом к подпоследовательности добейтесь того, чтобы последовательность $(P_k)$ сходилась в $n + 1$ разной точке отрезка. Потом примените какую-нибудь формулу, выражающую многочлен не более чем $n$-й степени через его значения в $n + 1$ разной точке. ]]

*Задача* 4.80 (Теорема Чебышёва). Докажите, что для всякой непрерывной $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и натурального $n$, существует многочлен $P$ степени $n$, который приближает $f$ равномерно точнее всех. Пусть $d = \max \{|f(x) - P(x)| \mid x \in [a, b]\}$. Докажите, что существуют $n + 2$ точки

$$a \leqslant x_1 < \dots < x_{n+2} \leqslant b,$$

такие, что $|f(x_i) - P(x_i)| = d$ для любого $i$ и знаки отклонений

$$f(x_1) - P(x_1),\ f(x_2) - P(x_2),\ \dots, f(x_{n+2}) - P(x_{n+2})$$

чередуются.

[[ Существование наилучшего приближения выведите из результата предыдущей задачи. Для доказательства свойства перемен знаков, рассмотрите замкнутое множество

$$S = \{x \in [a, b] \mid |f(x) - P(x)| = d\}.$$

Если перемен знаков выражения $f(x) - P(x)$ на множестве $S$ оказалось не более $n$, то постройте многочлен $Q$ степени не более $n$, такой что $P + tQ$ приближает $f$ лучше, чем $P$, при достаточно малых положительных $t$. ]]

*Задача* 4.81 (Многочлен Чебышёва). Найдите многочлен степени не более $n - 1$, лучше всего приближающий функцию $x^n$ на отрезке $[-1, 1]$. Какова точность этого приближения?

[[ Придумайте многочлен степени $n$, который $n + 1$ раз на данном отрезке принимает своё наибольшее по модулю значение. Используйте тригонометрические функции. ]]

4.8. **Приближение тригонометрическими многочленами и общая теорема Стоуна–Вейерштрасса.** При изучении рядов Фурье нам будет полезно знать следующее утверждение:

**Теорема 4.82** (Теорема Вейерштрасса для тригонометрических многочленов). *Любую непрерывную на $[-\pi, \pi]$ функцию $f$, для которой $f(-\pi) = f(\pi)$, можно равномерно сколь угодно близко приблизить тригонометрическими многочленами вида*

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

*Доказательство.* Заметим, что из тригонометрических формул следует, что произведение тригонометрических многочленов является тригонометрическим многочленом. Отсюда следует, что если мы можем равномерно приближать тригонометрическими многочленами функции $f$ и $g$, то мы можем равномерно приближать и их произведение $fg$.

Более того, если мы можем равномерно приближать $f$, то мы можем равномерно приближать $g(f)$ при любой непрерывной $g$. Действительно, область значений $f$ на компакте лежит в некотором отрезке $[A, B]$ и нам достаточно приблизить $g$ на этом отрезке алгебраическим многочленом $P$, тогда $g(f)$ будет приближена $P(f)$. Выражение же $P(f)$, в свою очередь, получается перемножением $f$ на себя и линейным комбинированием результатов, а значит, может быть равномерно приближено тригонометрическими многочленами, если $f$ может быть равномерно приближена тригонометрическими многочленами.

Из сказанного следует, что мы уже умеем равномерно приближать тригонометрическими многочленами из косинусов любую функцию вида $g(\cos x)$ с непрерывной $g$. В частности, мы можем равномерно приблизить $2\pi$-периодическую функцию ($\varphi_\delta$ — кусочно-линейная функция с носителем на $[-\delta, \delta]$ из предыдущего раздела)

$$\psi_\delta(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_\delta(x - 2\pi k),$$

так как она чётна и $2\pi$-периодична, а значит зависит только от $\cos x$ непрерывно (можно в качестве упражнения выписать явную формулу этой зависимости). Далее мы равномерно приближаем любую непрерывную $2\pi$-периодическую $f$ суммами

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{m} f(2\pi k/m)\psi_{2\pi/m}\left(x - 2\pi k/m\right),$$

как в лемме 4.76. А слагаемые этой суммы равномерно приближаем тригонометрическими многочленами, так как сдвиг $\cos kx$ является линейной комбинацией $\cos kx$ и $\sin kx$, то есть остаётся тригонометрическим многочленом. ☐

У уже доказанных теорем об алгебраических и тригонометрических многочленах есть далеко идущее обобщение, которое мы сейчас сформулируем и докажем.

**Теорема 4.83** (Теорема Стоуна–Вейерштрасса). *Пусть $K$ — компакт, $\mathcal{A}$ — алгебра непрерывных функций на $K$, которая разделяет точки. Тогда любую непрерывную на $K$ функцию можно сколь угодно близко равномерно приблизить функциями из $\mathcal{A}$.*

Здесь *алгеброй функций* называется множество функций $K \to \mathbb{R}$, содержащее все постоянные функции и замкнутое относительно операций сложения и умножения, очевидно, эти операции сохраняют непрерывность. Свойство *разделения точек* в этом случае означает, что для любой пары точек $x \neq y \in K$ и пары чисел $a, b \in \mathbb{R}$ найдётся функция $f \in \mathcal{A}$, такая что $f(x) = a$ и $f(y) = b$. Под *компактом* в этой теореме подразумевается любое компактное топологическое пространство, однако читатель может считать $K$ компактным метрическим пространством.

*Доказательство теоремы Стоуна–Вейерштрасса.* Мы будем действовать как в задаче 4.77, пытаясь строить произвольно мелкое разбиение единицы из функций, которые мы уже умеем приближать. Но сначала сделаем общие замечания.

Функции, которые можно сколь угодно хорошо приблизить элементами $\mathcal{A}$, образуют алгебру непрерывных функций $\mathcal{B}$. Действительно, если $f, g \in \mathcal{B}$ можно с точностью $\varepsilon$ приблизить соответственно $f_\varepsilon, g_\varepsilon \in \mathcal{A}$, то $f+g$ приближается $f_\varepsilon+g_\varepsilon$ с точностью не более $2\varepsilon$. А $fg$ приближается $f_\varepsilon g_\varepsilon$ следующим образом

$$|fg - f_\varepsilon g_\varepsilon| = |fg - fg_\varepsilon + fg_\varepsilon - f_\varepsilon g_\varepsilon| \leqslant \varepsilon \sup|f| + (\sup|g| + \varepsilon)\varepsilon.$$

Так как $K$ — компакт, то $f$ и $g$ ограничены, и правая часть неравенства стремится к нулю при $\varepsilon \to +0$.

Более того, $\mathcal{B}$ уже замкнута относительно операции перехода к равномерному пределу. Действительно, если данную функцию $f$ можно с точностью $\varepsilon$ приблизить функцией $g \in \mathcal{B}$, которую можно с точностью $\varepsilon$ приблизить функцией из $\mathcal{A}$, то значит саму $f$ можно с точностью $2\varepsilon$ приблизить функцией из $\mathcal{A}$. Если это верно для всех положительных $\varepsilon$, то оказывается $f \in \mathcal{B}$.

Если $f \in \mathcal{B}$, а $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна, то $g(f) \in \mathcal{B}$, так как $g(f)$ можно равномерно (на ограниченной области значений $f$) приближать выражениями $P(f)$, где $P$ — многочлен, и $P(f) \in \mathcal{B}$, так как в алгебре можно складывать и умножать. Теперь заметим, что если $f \in \mathcal{B}$, то обрезанная функция

$$f^{[0,1]}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) < 0; \\ f(x), & \text{если } f(x) \in [0,1]; \\ 1, & \text{если } f(x) > 1; \end{cases}$$

тоже лежит в $\mathcal{B}$, так как представляется в виде $f^{[0,1]} = h(f)$ с непрерывной (и даже кусочно-линейной) $h$, заданной формулой

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ x, & \text{если } x \in [0,1]; \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Возьмём теперь некоторую точку $x \in K$ и её окрестность $U(x)$. Для любой точки $y \notin U(x)$ найдём по свойству разделения точек $f_y \in \mathcal{B}$ такую, что $f_y(x) > 1$, а $f_y(y) < 0$. Обрежем её и получим $g_y(x) \in \mathcal{B}$, она тождественно равна $1$ в некоторой окрестности $x$ и тождественно равна $0$ в некоторой окрестности $V(y) \ni y$.

Такие окрестности $V(y)$ покрывают компакт $K \setminus U(x)$, и мы можем оставить из них конечное число покрывающих, обозначим соответствующие функции $g_1, \dots, g_N$. Тогда произведение

$$g = g_1 \dots g_N \in \mathcal{B}$$

тождественно равно $1$ в некоторой окрестности $W(x) \subset U(x)$ и тождественно равно $0$ в $K \setminus U(x)$. В остальных местах её значение между 0 и 1.

Итак, мы научились для любой точки $x \in K$ и её окрестности $U(x) \ni x$ строить функцию $g_x : K \to [0,1]$, $g_x \in \mathcal{B}$, которая тождественно равна $1$ в некоторой меньшей окрестности $W(x) \ni x$ и равна нулю за пределами $U(x)$.

Для завершения доказательства рассмотрим непрерывную $f : K \to \mathbb{R}$ и положительное $\varepsilon$, для любой точки $x \in K$ пусть $U(x)$ — её окрестность, в которой выполняется $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ при $y \in U(x)$ из определения непрерывности. Применим конструкцию для получения функций $g_x \in \mathcal{B}$ и окрестностей $W(x) \subset U(x)$, так что $g_x(W(x)) = 1$ и $g_x = 0$ за пределами $U(x)$. Воспользуемся компактностью $K$ и оставим конечное число точек $x_1, \dots, x_N$, их окрестностей $W_1, \dots, W_N$, покрывающих $K$, и непрерывных $g_1, \dots, g_N : K \to [0,1]$, отличных от нуля только в соответствующих $U(x_i) = U_i$ и лежащих в $\mathcal{B}$. Каждая функция $g_i$ равна единице в своём $W_i$, следовательно

$$(1 - g_1(x))(1 - g_2(x)) \dots (1 - g_N(x)) = 0$$

при всех $x \in K$. Отсюда следует, что если положить

$$h_1 = g_1, h_2 = g_2(1 - g_1), \dots, h_N = g_N(1 - g_1) \dots (1 - g_{N-1}),$$

то эти функции непрерывны, лежат в $\mathcal{B}$, неотрицательны, и в сумме дают $1$ в любой точке $K$. Кроме того, каждая функция $h_i$ равна нулю за пределами своей $U_i$. Можно сказать, что из функций в $\mathcal{B}$ мы построили *разбиение единицы, подчинённое покрытию* $\{U(x)\}$.

Положим теперь

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i) h_i(x)$$

и оценим разность

$$f_\varepsilon(x) - f(x) = \sum_{i=1}^{N} (f(x_i) - f(x))h_i(x).$$

Для каждой точки $x \in K$ слагаемые разности отличны от нуля лишь при условии $x \in U_i$. По выбору $U_i$, в этих слагаемых $|f(x_i) - f(x)| < \varepsilon$, а сумма всех $h_i$ всегда равна 1. Следовательно

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon$$

для любого $x \in K$. Очевидно, $f_\varepsilon \in \mathcal{B}$, то есть мы приближаем $f$ с любой точностью равномерно функциями из $\mathcal{B}$, а значит и из $\mathcal{A}$. ☐

**Следствие 4.84.** *Если $X \subset \mathbb{R}^n$ компактно, то любая непрерывная функция на $X$ может быть сколь угодно близко равномерно приближена многочленом от $n$ переменных.*

*Задача* 4.85. Какие функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ можно равномерно на всей прямой сколь угодно близко приблизить многочленами?

[[ Убедитесь, что степени равномерно приближающих $f$ многочленов ограничены. ]]

*Задача* 4.86. Докажите, что если метрическое пространство $X$ компактно, то любая полунепрерывная снизу $f : X \to \mathbb{R}$ является поточечным пределом возрастающей последовательности непрерывным функций.

[[ Для любого натурального $n$ найдите по определению полунепрерывности у каждой точки $x \in X$ окрестность $U(x) \ni x$ диаметра менее $1/n$, такую что $f(x) > f(x) - 1/n$ для любой $y \in U(x)$. Пользуясь компактностью $X$, покройте его конечным числом таких окрестностей $U(x_i)$. С помощью разбиения единицы $(h_i)$, подчинённого этому покрытию, постройте $f_n = -1/n + \sum_i f(x_i)h_i(x)$ и докажите, что $f_n \leqslant f$ и $f_n \to f$ поточечно при $n \to \infty$. Чтобы сделать последовательность возрастающей, перейдите к новой последовательности $\overline{f}_n = \max\{f_1, \dots, f_n\}$. ]]

В следующих задачах мы проверяем, насколько теорема Стоуна–Вейерштрасса применима к функциям с комплексными значениями.

*Задача* 4.87. Верно ли, что любую непрерывную функцию $f : S \to \mathbb{C}$, где $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ можно сколь угодно близко приблизить многочленом Лорана из $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$?

[[ Докажите, что действительная часть многочлена Лорана на окружности сама выражается как многочлен Лорана. ]]

*Задача* 4.88. Верно ли, что любую непрерывную функцию $f : S \to \mathbb{C}$, где $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ можно сколь угодно близко приблизить обычным многочленом из $\mathbb{C}[z]$?

[[ Полезно посмотреть на интеграл $\int_S f(z)\,dz$ или использовать какие-то другие инструменты из главы 10. ]]

В следующих задачах мы выясним некоторые алгебраические свойства алгебры $C(X)$ непрерывных функций на компактном пространстве $X$.

*Задача* 4.89. Докажите, что если непрерывные функции $f_1, \dots, f_n \in C(X)$ не имеют общих нулей на $X$, то найдутся $g_1, \dots, g_n \in C(X)$, такие что

$$g_1 f_1 + \dots + g_n f_n = 1.$$

[[ Достаточно положить $g_i = f_i/(f_1^2 + \dots + f_n^2)$. ]]

*Задача* 4.90. Для компактного $X$ докажите, что для любого гомоморфизма алгебр $P : C(X) \to \mathbb{R}$, то есть линейного отображения, совместимого с умножением по формулам $P(fg) = P(f)P(g)$ и $P(1) = 1$, найдётся точка $x \in X$ такая, что для любой $f \in C(X)$ оказывается

$$P(f) = f(x).$$

[[ Рассмотрите множество функций $\mathfrak{m} = \{f \in C(X) \mid P(f) = 0\}$. Выведите из предыдущей задачи, что любой конечный набор $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{m}$ имеет общий нуль. Заключите из компактности, что все функции из $\mathfrak{m}$ имеют общий нуль $x \in X$, а потом установите действие отображения $P$ на функции, не содержащиеся в $\mathfrak{m}$. ]]

*Задача* 4.91. ** Докажите утверждение предыдущей задачи для необязательно компактного метрического пространства $X$.

[[ Рассматривая лишь ограниченные непрерывные функции, можно описать гомоморфизмы в духе задачи 9.211 (модифицировав понятие ультрафильтра до элемента *компактификации Стоуна–Чеха* топологического пространства). Потом можно выяснить, что расширение гомоморфизма на неограниченные функции возможно только если гомоморфизм соответствует элементу $X$. ]]

Закончим этот раздел упражнением, близким по духу к рассматриваемым здесь вопросам:

*Задача* 4.92 (Частный случай теоремы Урысона). Докажите, что для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ найдётся непрерывная функция $f : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, которая равна единице на $K$ и равна нулю за пределами наперёд заданной окрестности $U_\varepsilon(K)$.

[[ Посмотрите сначала на функцию расстояния $\operatorname{dist}(x, K)$. ]]

*Задача* 4.93. *(Частный случай теоремы Титце) Докажите, что непрерывную на компакте $K \subset \mathbb{R}^n$ функцию можно продолжить непрерывно на всё $\mathbb{R}^n$ так, что она будет равна нулю за пределами наперёд заданной окрестности $U_\varepsilon(K)$.

[[ Один из вариантов решения: положить $L = \mathbb{R}^n \setminus U_\varepsilon(K)$, $V = \mathbb{R}^n \setminus (K \cup L)$ и продолжить $f$ на $L$ нулём. Потом сделать разбиение единицы $1 = \sum_n \rho_n(x)$ на $V$ так, чтобы диаметр носителя $\rho_n$ был не более его расстояния до $K \cup L$. Потом домножить $\rho_n$ на значение в ближайшей к носителю $\rho_n$ точке $K \cup L$ и сложить результаты. Другой вариант: вывести эту теорему из теоремы Урысона и непрерывности равномерного предела последовательности непрерывных функций, таким образом доказав полный вариант теоремы Титце для нормальных топологических пространств. ]]

*Задача* 4.94. * Докажите, что функцию на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, которая является 1-липшицевой ($|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$), можно продолжить на всё $\mathbb{R}^n$ так, что она останется 1-липшицевой.

[[ Докажите, что можно продолжить 1-липшицевым образом на ещё одну точку $x \notin X$. Потом продолжайте по одной точке на счётное плотное в $\mathbb{R}^n \setminus X$ подмножество, а на всё $\mathbb{R}^n$ продолжите по непрерывности ]]

*Задача* 4.95 (Теорема Киршбрауна). ** Докажите, что отображение $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$, которое является 1-липшицевым ($|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$ для любых $x, y \in X$), можно продолжить до $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ так, что оно останется 1-липшицевым.

[[ Аналогично, достаточно продолжить на одну точку, но в этой теореме это посложнее. ]]

4.9. **Интегрирование непрерывных функций через приближения.** В этом разделе представлен один способ определить интеграл от непрерывных функций. Далее будет дано определение интеграла Римана на отрезке и более общего интеграла Лебега, не зависящие от материала этого раздела, но кажется полезным сначала изучить такой упрощённый способ.

**Теорема 4.96.** *У любой непрерывной на отрезке функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ есть первообразная, то есть непрерывная функция $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, такая что $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in (a,b)$.*

*Доказательство.* Можно сдвинуть отрезок так, чтобы $a = 0$. У многочлена $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ есть первообразная

$$P(x) = a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \dots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

По теореме 4.78 можно найти последовательность многочленов $(p_n)$, равномерно сходящуюся к $f$ на отрезке $[a,b]$. Выберем первообразные, чтобы выполнялось $P_n'(x) = p_n(x)$, также мы будем знать, что $P_n(0) \equiv 0$. По теореме 4.42 последовательность $P_n$ будет равномерно сходиться к некоторой $F$, и будет выполняться $F'(x) = f(x)$ на интервале $(a,b)$ и даже на концах отрезка для односторонних производных. ☐

**Определение 4.97.** Определим интеграл непрерывной функции одного аргумента $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ по *формуле Ньютона–Лейбница*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F$ — любая первообразная $f$ на отрезке.

Определение не зависит от выбора первообразной, так как любые две первообразные $F_1$ и $F_2$ будут обладать свойством $F_1' - F_2' = (F_1 - F_2)' = 0$. Откуда по теореме о среднем Лагранжа следует, что $G = F_1 - F_2$ постоянна на отрезке, а значит в формуле Ньютона–Лейбница ничего не поменяется от замены $F_1$ на $F_2$.

**Лемма 4.98.** *Этот интеграл линейный*

$$\int_a^b Af(x) + Bg(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx,$$

*монотонный*

$$f(x) \geqslant g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

*и аддитивный по отрезкам*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

*Доказательство.* Взяв первообразные $F' = f$ и $G' = g$, мы видим, что $AF(x) + BG(x)$ будет первообразной для $Af(x)+Bg(x)$, так что линейность очевидна. Для доказательства монотонности достаточно заметить, что если $h = f - g \geqslant 0$, то

$$\int_a^b h(x)\,dx = H(b) - H(a) = h(\xi)(b-a) \geqslant 0$$

по теореме о среднем Лагранжа. Аддитивность по отрезкам проверяется тривиально:

$$F(c) - F(a) = F(c) - F(b) + F(b) - F(a).$$

☐

Из линейности и аддитивности по отрезкам следует, что для непрерывной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с компактным носителем, то есть отличной от нуля только на некотором отрезке $[a, b]$, можно определить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

и он не зависит от выбора конечного отрезка $[a, b]$, содержащего носитель функции.

Это позволяет сделать определение

**Определение 4.99.** Для непрерывной функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с компактным носителем (отличной от нуля только на некотором кубе) определим с помощью повторного интегрирования по всем переменным

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_n \dots dx_1.$$

Здесь происходит интегрирование по одной переменной, тогда как другие выступают как параметры. Если носитель $f$ содержится в кубе с ребром $D$, то из равномерной непрерывности $f$ можно заметить, что самый внутренний интеграл меняется не более чем на $D\omega_f(\delta)$ при изменении параметров на $\delta$, то есть даёт непрерывную функцию параметров с компактным носителем. Это оправдывает возможность продолжать интегрирование по другой переменной и т.д.

**Теорема 4.100.** *Определение интеграла непрерывной функции нескольких переменных с компактным носителем не зависит от порядка интегрирования, является линейной и монотонной операцией.*

*Доказательство.* Линейность и монотонность очевидны по индукции, посмотрим на зависимость от порядка интегрирования. Рассмотрим $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и предположим, что она тождественно равна нулю за пределами куба $[-D, D]^n$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int_{-D}^{D} \dots \int_{-D}^{D} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_n \dots dx_1.$$

По теореме 4.78 мы можем приблизить $f$ многочленом нескольких переменных с точностью $\varepsilon$, тогда интеграл будет приближен с точностью $(2D)^n\varepsilon$ (здесь используется интегрирование неравенств, то есть монотонность). Значит достаточно доказать независимость от порядка интегрирования для многочленов нескольких переменных. По линейности это достаточно доказать для мономов

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}.$$

Нетрудно убедиться, интегрируя только многочлены, что интеграл от такого монома по рассматриваемому кубу в любом порядке равен одному и тому же числу

$$\left(\frac{D^{k_1+1}}{k_1+1} - \frac{(-D)^{k_1+1}}{k_1+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{D^{k_n+1}}{k_n+1} - \frac{(-D)^{k_n+1}}{k_n+1}\right).$$

□

Определим для функции нескольких переменных *частную производную* как

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{t},$$

то есть как производную по одной переменной при фиксированных остальных.

**Следствие 4.101.** *Для любой непрерывной* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *с компактным носителем с непрерывной частной производной* $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ *будет выполняться*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = 0.$$

*Доказательство.* Если начать интегрировать по $x_i$, то по формуле Ньютона–Лейбница сразу получится ноль. ☐

На самом деле следствие 6.115 (формулировка которого на данном этапе изложения может быть не вполне ясна) показывает, что определённое в этом разделе понятие интеграла, исходя из его установленных свойств, обязано совпадать (с точностью до умножения на константу) с любым другим разумным понятием интеграла от непрерывной функции с компактным носителем.

4.10. **Разбиения отрезка, суммы Дарбу и интеграл Римана.** В этом разделе мы приведём элементарное описание интеграла Римана на отрезке. Далее оно будет перекрыто определением интеграла Лебега, но уже этот раздел содержит некоторые полезные конструкции, которые работают и в более общей постановке.

Определим *разбиение отрезка* $[a, b]$ как представление его в виде объединения попарно не пересекающихся промежутков

$$[a, b] = \Delta_1 \sqcup \Delta_2 \sqcup \dots \sqcup \Delta_N.$$

Для того факта, что набор $\tau = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N\}$ является разбиением отрезка $[a, b]$, будем писать

$$\tau \vdash [a, b].$$

Будем также говорить, что разбиение $\tau$ *мельче* разбиения того же отрезка $\sigma$, $\tau \preccurlyeq \sigma$, если любой промежуток $\tau$ содержится в некотором промежутке $\sigma$. Для двух разбиений $\tau, \sigma \vdash [a, b]$ определим их *общее измельчение*

$$\tau \wedge \sigma = \{\Delta' \cap \Delta'' \mid \Delta' \in \tau, \Delta'' \in \sigma, \Delta' \cap \Delta'' \neq \emptyset\}.$$

Очевидно, что

$$\tau \wedge \sigma \preccurlyeq \tau, \quad \tau \wedge \sigma \preccurlyeq \sigma.$$

*Задача* 4.102. Проверьте, что общее измельчение двух разбиений действительной является разбиением того же отрезка.

*Задача* 4.103. Докажите, что если $\tau$ состоит из $n$ промежутков, а $\sigma$ — из $m$ промежутков, то в $\tau \wedge \sigma$ не более $n + m - 1$ промежутка.

**Определение 4.104.** Для функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и разбиения $\tau \vdash [a, b]$ определим *суммы Дарбу*

$$s(f, \tau) = \sum_{\Delta \in \tau} \inf\{f(x) \mid x \in \Delta\} \cdot |\Delta|,$$

$$S(f, \tau) = \sum_{\Delta \in \tau} \sup\{f(x) \mid x \in \Delta\} \cdot |\Delta|,$$

где $|\Delta|$ обозначает длину промежутка.

Проверим следующие свойства сумм Дарбу:

**Лемма 4.105.** *Если* $\tau \preccurlyeq \sigma$, *то*

$$s(f, \tau) \geqslant s(f, \sigma), \quad S(f, \tau) \leqslant S(f, \sigma).$$

*Доказательство.* Если одно разбиение мельче другого, то его можно получить последовательным разбиением одного промежутка на два, $\Delta = \Delta' \sqcup \Delta''$. Тогда утверждение об изменении суммы Дарбу при такой операции следует из неравенств

$$\inf\{f(x) \mid x \in \Delta'\} \geqslant \inf\{f(x) \mid x \in \Delta\}, \quad \inf\{f(x) \mid x \in \Delta''\} \geqslant \inf\{f(x) \mid x \in \Delta\},$$
$$\sup\{f(x) \mid x \in \Delta'\} \leqslant \sup\{f(x) \mid x \in \Delta\}, \quad \sup\{f(x) \mid x \in \Delta''\} \leqslant \sup\{f(x) \mid x \in \Delta\}$$

и очевидного равенства $|\Delta| = |\Delta'| + |\Delta''|$. ☐

**Лемма 4.106.** *Для двух разбиений* $\tau, \sigma \vdash [a, b]$ *имеет место*

$$s(f, \tau) \leqslant S(f, \sigma).$$

*Доказательство.* Из предыдущей леммы получаем

$$s(f, \tau) \leqslant s(f, \tau \wedge \sigma) \leqslant S(f, \tau \wedge \sigma) \leqslant S(f, \sigma),$$

где неравенство посередине тривиально следует из определения. ☐

**Определение 4.107.** Определим *верхний и нижний интегралы Римана*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\ dx = \inf\{S(f, \tau) \mid \tau \vdash [a, b]\},$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)\ dx = \sup\{s(f, \tau) \mid \tau \vdash [a, b]\}.$$

По предыдущей лемме

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\ dx$$

и если они оба равны одному числу, то их общее значение называется просто *интеграл Римана*

$$\int_a^b f(x)\ dx.$$

Анализируя определение, можно сказать, что для неограниченной сверху функции верхний интеграл равен $+\infty$. Аналогично для неограниченной снизу функции нижний интеграл равен $-\infty$. Поэтому интегрируемой по Риману может быть только ограниченная на отрезке функция.

4.11. **Интеграл Римана через ступенчатые функции.** Для понимания развиваемого далее понятия интеграла Лебега нам будет полезно переформулировать определение интеграла Римана. Начнём с определения интеграла самых удобных для интегрирования функций.

**Определение 4.108.** Функция $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется *элементарно ступенчатой*, если для некоторого разбиения $\tau \vdash [a, b]$ она является постоянной со значением $h(\Delta)$ на любом промежутке $\Delta \in \tau$.

В этом параграфе мы будем называть такие функции просто ступенчатыми, в определении интеграла Лебега будет намного более общее понятие ступенчатых функций, но приёмы работы с ними будут похожи.

**Определение 4.109.** *Интегралом ступенчатой функции* называется

$$\int_a^b h(x)\ dx = \sum_{\Delta \in \tau} h(\Delta)|\Delta|.$$

Теперь можно переписать определение верхнего и нижнего интеграла Римана.

**Определение 4.110.**

$$\overline{\int_a^b} f(x)\ dx = \inf \left\{ \int_a^b h(x)\ dx \,\middle|\, \text{по ступенчатым } h \geqslant f \right\}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ dx = \sup \left\{ \int_a^b h(x)\ dx \,\middle|\, \text{по ступенчатым } h \leqslant f \right\},$$

где неравенство между функциями понимается как неравенство, выполняющееся в каждой точке. Если определённые так верхний и нижний интегралы Римана совпадают, то их общее значение называется просто *интегралом Римана* функции $f$ по отрезку $[a, b]$.

Сравним это с определением через суммы Дарбу. Например, нижняя сумма Дарбу для фиксированного разбиения $\tau$ является ни чем иным, как максимально возможным интегралом от ступенчатой $h \leqslant f$, построенной на данном разбиении $\tau$, что доказывает совпадение двух определений нижнего интеграла Римана. Аналогично доказывается совпадение двух определений верхнего интеграла Римана.

Полезные свойства интеграла мы сначала установим для интеграла ступенчатых функций, а потом перейдём к случаю интегрируемых по Риману функций.

**Лемма 4.111** (Монотонность интеграла ступенчатой функции). *Если $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ступенчатые и $f \leqslant g$, то*

$$\int_a^b f(x)\ dx \leqslant \int_a^b g(x)\ dx.$$

*Доказательство.* Пусть $f$ и $g$ являются ступенчатыми на разбиениях $\tau$ и $\sigma$ соответственно. Тогда их можно также считать ступенчатыми на разбиении $\varphi = \tau \wedge \sigma$, причём из аддитивности длины промежутка следует, что значение интеграла не изменится при замене разбиения на его измельчение. А для двух ступенчатых функций на одном и том же разбиении $\varphi$ утверждение очевидно. ☐

В частности, из предыдущей леммы также следует корректность определения интеграла ступенчатой функции, то есть его независимость от выбора разбиения на ступеньки для одной и той же функции.

**Лемма 4.112** (Линейность интеграла ступенчатой функции). *Если $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ступенчатые, то $Af + Bg$ тоже ступенчатая и*

$$\int_a^b (Af(x) + Bg(x))\ dx = A\int_a^b f(x)\ dx + B\int_a^b g(x)\ dx.$$

*Доказательство.* Аналогично предыдущей лемме, пусть $f$ и $g$ являются ступенчатыми на разбиениях $\tau$ и $\sigma$. Тогда их можно также считать ступенчатыми на разбиении $\varphi = \tau \wedge \sigma$. Для ступенчатых функций на одном и том же разбиении линейность очевидна. ☐

*Задача* 4.113. Докажите, что если $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ступенчатые, то

$$M(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

тоже ступенчатые.

Теперь проверим свойства интеграла Римана для интегрируемых по Риману функций.

**Теорема 4.114** (Монотонность интеграла Римана). *Если $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируемы по Риману и $f \leqslant g$, то*

$$\int_a^b f(x)\ dx \leqslant \int_a^b g(x)\ dx.$$

*Доказательство.* Достаточно доказать это равенство для нижнего интеграла. Тогда можно заметить, что в определении нижнего интеграла в правой части стоит супремум по множеству $\{h \mid h \leqslant g\}$, содержащему множество $\{h \mid h \leqslant f\}$, по которому берётся супремум в левой части. □

**Теорема 4.115** (Линейность интеграла Римана). *Если $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируемы по Риману, то $Af + Bg$ тоже интегрируема по Риману и*

$$\int_a^b (Af(x) + Bg(x))\ dx = A\int_a^b f(x)\ dx + B\int_a^b g(x)\ dx.$$

*Доказательство.* Докажем утверждение при $A, B \geqslant 0$, общий случай сводится к этому заменой знаков у функций $f$ и $g$, при которых знак интеграла тоже меняется. Пусть мы оценили $f$ и $g$ снизу и сверху ступенчатыми функциями

$$h_f \leqslant f \leqslant H_f, \quad h_g \leqslant g \leqslant H_g,$$

причём по определению интегрируемости $f$ и $g$ (как равенства верхнего и нижнего интегралов) мы можем считать

$$\int_a^b (H_f - h_f)\ dx < \varepsilon, \quad \int_a^b (H_g - h_g)\ dx < \varepsilon.$$

Тогда линейная комбинация тоже оценивается сверху и снизу

$$Ah_f + Bh_g \leqslant Af + Bg \leqslant AH_f + BH_g$$

и

$$\int_a^b ((AH_f + BH_g) - (Ah_f + Bh_g)\ )\, dx \leqslant (A + B)\varepsilon,$$

что доказывает интегрируемость линейной комбинации. А из линейности интеграла для ступенчатых функций следуют неравенства

$$A\int_a^b h_f\, dx + B\int_a^b h_g\, dx \leqslant \int_a^b (Af + Bg)\ dx \leqslant A\int_a^b H_f\, dx + B\int_a^b H_g\, dx.$$

Так как левая и правая часть могут быть сделаны сколь угодно близкими к

$$A\int_a^b f(x)\ dx + B\int_a^b g(x)\ dx,$$

то находящееся посередине в предыдущей формуле выражение обязано быть равным последнему. □

**Теорема 4.116** (Аддитивность интеграла Римана по отрезкам). *Если функция $f$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ и на отрезке $[b, c]$, то она интегрируема по Риману на отрезке $[a, c]$ и выполняется формула*

$$\int_a^c f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx.$$

*Доказательство.* Для ступенчатой функции аддитивность проверяется переходом к разбиению, которое мельче разбиения $\{[a,b),\{b\},(b,c]\}$. Для такого разбиения сумма, дающая интеграл ступенчатой функции по $[a,c]$ определению, распадается на две части, равные интегралу той же функции по $[a,b]$ и $[b,c]$ соответственно.

Пусть функция $f$ оценена на отрезке $[a,b]$ снизу и сверху ступенчатыми $g_1 \leqslant f \leqslant h_1$ так что

$$\int_a^b (h_1(x) - g_1(x))\ dx < \varepsilon,$$

а на отрезке $[b,c]$ оценена снизу и сверху ступенчатыми $g_2 \leqslant f \leqslant h_2$ так что

$$\int_b^c (h_2(x) - g_2(x))\ dx < \varepsilon.$$

Тогда из ступенчатых $h_1$ и $h_2$ составим ступенчатую $h : [a,c] \to \mathbb{R}$, а из $g_1$ и $g_2$ составим ступенчатую $g : [a,c] \to \mathbb{R}$. Тогда на отрезке $[a,c]$ будет иметь место оценка $g \leqslant f \leqslant h$, а из доказанного про ступенчатые функции следует, что

$$\int_a^c (h(x) - g(x))\ dx < 2\varepsilon.$$

Чтобы установить требуемое равенство для $f$, достаточно перейти к пределу в неравенствах

$$\int_a^b g(x)\ dx + \int_b^c g(x)\ dx = \int_a^c g(x)\ dx \leqslant \int_a^c f(x)\ dx \leqslant \int_a^c h(x)\ dx = \int_a^b h(x)\ dx + \int_b^c h(x)\ dx$$

при условии $g \leqslant f \leqslant h$ и $\int_a^c (h(x) - g(x))\ dx \to 0$. ☐

**Теорема 4.117.** *Если функция интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема по Риману на любом отрезке $[c,d] \subseteq [a,b]$.*

*Доказательство.* По определению интеграла Римана, для любого $\varepsilon > 0$ функция $f$ может быть оценена на $[a,b]$ сверху и снизу ступенчатыми $g \leqslant f \leqslant h$ так, что

$$\int_a^b (h(x) - g(x))\ dx < \varepsilon.$$

Но тогда на отрезке $[c,d]$ те же ступенчатые функции оценивают $f$ и по определению интеграла ступенчатой функции выполняется

$$\int_c^d (h(x) - g(x))\ dx < \varepsilon.$$

☐

4.12. **Интегрируемость по Риману разных функций.** Для анализа интегрируемости по Риману конкретных функций полезно сформулировать простой критерий интегрируемости, непосредственно следующий из определения интеграла Римана.

**Определение 4.118.** Если $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, а $\tau$ — разбиение $[a,b]$, то *взвешенная сумма колебаний* определяется как

$$\Omega(f,\tau) = \sum_{\Delta\in\tau} \omega(f,\Delta)|\Delta|,$$

где

$$\omega(f,X) = \sup f(X) - \inf f(X)$$

— *колебание функции на множестве $X$.*

**Лемма 4.119.** *Функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \tau \vdash [a,b],\ \Omega(f,\tau) < \varepsilon.$$

*Доказательство.* Пусть функция $f$ оценивается снизу и сверху ступенчатыми $g \leqslant f \leqslant h$, так что

$$\int_a^b (h(x) - g(x))\ dx < \varepsilon.$$

Перейдя к разбиению $\tau$, относительно которого $g$ и $h$ ступенчатые, можно заметить, что

$$\Omega(f,\tau) = \sum_{\Delta\in\tau} \omega(f,\Delta)|\Delta| \leqslant \sum_{\Delta\in\tau} (h(\Delta) - g(\Delta))|\Delta| = \int_a^b (h(x) - g(x))\ dx < \varepsilon.$$

В обратную сторону, если $\Omega(f,\tau) < \varepsilon$, то положив для любого промежутка $\Delta \in \tau$

$$g(\Delta) = \inf f(\Delta), \quad h(\Delta) = \sup f(\Delta),$$

мы получим оценку снизу и сверху ступенчатыми $g \leqslant f \leqslant h$, причём

$$\int_a^b (h(x) - g(x))\ dx = \Omega(f,\tau) < \varepsilon.$$

□

Теперь мы готовы установить некоторые свойства интегрируемых по Риману функций.

**Теорема 4.120.** *Если функции $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируемы по Риману, то их модули интегрируемы, а также их произведение интегрируемо.*

*Доказательство.* Пусть для некоторого $\tau \vdash [a,b]$

$$\Omega(f,\tau) < \varepsilon.$$

Если колебание на промежутке разбиения записать как

$$\omega(f,\Delta) = \sup\{|f(x') - f(x'')| \mid x', x'' \in \Delta\},$$

то из очевидного неравенства $||A| - |B|| \leqslant |A - B|$ получается

$$\omega(|f|,\Delta) \leqslant \omega(f,\Delta),$$

а во взвешенной сумме по всем промежуткам выходит

$$\Omega(|f|,\tau) \leqslant \Omega(f,\tau) < \varepsilon.$$

Это доказывает утверждение про модуль. Далее, пусть $f$ и $g$ ограничены константой $M$. Возьмём $\varepsilon > 0$ и заметим, что для некоторых двух разбиений $\sigma, \varphi \vdash [a,b]$ выполняется

$$\Omega(f,\sigma) < \varepsilon,\ \Omega(g,\varphi) < \varepsilon.$$

Для разбиения $\tau = \sigma \wedge \varphi$ выполняется

$$\Omega(f,\tau) < \varepsilon,\ \Omega(g,\tau) < \varepsilon,$$

так как при измельчении некоторого разбиения взвешенная сумма колебаний может только уменьшиться.

Тогда неравенства $|AB - CD| \leqslant |B| \cdot |A - C| + |C| \cdot |B - D|$ для четырёх действительных числе $A, B, C, D$ следует

$$\Omega(fg,\tau) \leqslant M\Omega(f,\tau) + M\Omega(g,\tau) \leqslant 2M\varepsilon,$$

что фактически нужно было доказать. □

Заметим, что для интеграла Лебега в разделе 5 будет установлено, что из интерируемости функции следует интегрируемость её модуля. Но из интегрируемости функций по Лебегу не следует интегрируемость их произведения по Лебегу.

Нам также будет полезно знать, что при взятии достаточно мелких разбиений суммы Дарбу будут достаточно близки к интегралу Римана. Для этого введём определения.

**Определение 4.121.** *Мелкостью разбиения* $\tau \vdash [a, b]$ называется

$$|\tau| = \max_{\Delta\in\tau} |\Delta|.$$

**Определение 4.122.** *Суммой Римана* для функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, разбиения $\tau \vdash [a, b]$ и системы представителей $\{\xi(\Delta) \in \Delta\}_{\Delta\in\tau}$ называется

$$\sigma(f, \tau, \xi) = \sum_{\Delta\in\tau} f(\xi(\Delta))|\Delta|.$$

Следующее утверждение можно неформально описать так: *Если мелкость разбиения стремится к нулю, то суммы Римана стремятся к значению интеграла.*

**Теорема 4.123.** *Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что если $|\tau| < \delta$, то для любой системы представителей*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \sigma(f, \tau, \xi) \right| < \varepsilon.$$

*Доказательство.* Сначала докажем утверждение для ступенчатых функций. Пусть $h$ ступенчатая, ограниченная по модулю числом $M$ и имеющая $N$ разрывов на отрезке $[a, b]$. Заметим, что по аддитивности интеграла для любого разбиения $\tau$ выполняется

$$\int_a^b h(x)\, dx = \sum_{\Delta\in\tau} \int_\Delta h(x)\, dx,$$

где интеграл по промежутку — это интеграл по его замыканию с произвольным доопределением функции на концах. Разность между интегралом и суммой Римана можно переписать в виде

$$\int_a^b h(x)\, dx - \sigma(h, \tau, \xi) = \sum_{\Delta\in\tau} \int_\Delta (h(x) - h(\xi(\Delta)))\ dx.$$

Если на промежутке $\Delta$ функция $h$ постоянна, то соответствующее слагаемое суммы в правой части оказывается равным нулю. Значит количество ненулевых слагаемых в сумме не больше числа разрывов функции $h$. Если $\tau$ имеет мелкость $|\tau| < \delta$, то любое ненулевое слагаемое в сумме по модулю не более $2M\delta$, как величина не большая $2M$, проинтегрированная по промежутку длиной не более $\delta$. Следовательно,

$$\left| \int_a^b h(x)\, dx - \sigma(h, \tau, \xi) \right| \leqslant 2MN\delta.$$

Так как число $NM$ зависит только от функции $h$ и не зависит от разбиения, то утверждение для ступенчатой функции доказано.

Пусть теперь $f$ приближена ступенчатой $g$ снизу $g \leqslant f$, и

$$\int_a^b g(x)\, dx \geqslant \int_a^b f(x)\, dx - \varepsilon/2.$$

Пусть $g$ ограничена по модулю числом $M_g$ и имеет $N_g$ разрывов. Тогда при $|\tau| < \frac{\varepsilon}{4M_gN_g}$ в силу монотонной зависимости суммы Римана от функции будем иметь

$$\sigma(f,\tau,\xi) \geqslant \sigma(g,\tau,\xi) > \int_a^b g(x)\ dx - \varepsilon/2 \geqslant \int_a^b f(x)\ dx - \varepsilon.$$

Аналогично для приближения сверху ступенчатой $h \geqslant f$, интеграл которой отличается от интеграла $f$ не более чем на $\varepsilon/2$, при $|\tau| < \frac{\varepsilon}{4M_hN_h}$ будем иметь

$$\sigma(f,\tau,\xi) < \int_a^b f(x)\ dx + \varepsilon.$$

□

*Задача* 4.124. Докажите утверждение в обратную сторону: Если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что если $|\tau| < \delta$, то для любой системы представителей

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx - \sigma(f,\tau,\xi)\right| < \varepsilon,$$

то функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману.

В предыдущем разделе мы показывали, что формулу Ньютона–Лейбница можно считать определением интеграла непрерывной функции. Теперь же у нас другое определение интеграла и её надо будет доказать.

**Теорема 4.125** (Формула Ньютона–Лейбница для интеграла Римана). *Если $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману и имеет первообразную $F$ на интервале $(a,b)$, непрерывную на концах отрезка $[a,b]$, то*

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

*Доказательство.* Рассмотрим разбиение, заданное концами промежутков разбиения $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, и запишем по теореме о среднем Лагранжа

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{N} F(x_k) - F(x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)|\Delta_k|.$$

Но справа стоит некоторая сумма Римана для функции $f$ и данного разбиения, которая будет стремиться к интегралу $f$ при мелкости разбиения, стремящейся к нулю. □

**Определение 4.126.** Если $b < a$ и функция $f : [b,a] \to \mathbb{R}$ интегрируема, то будем писать

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx.$$

Аддитивность интеграла Римана по отрезкам тогда может быть обобщена до формулы

$$\int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx,$$

при условии, что $f$ интегрируема на некотором отрезке, содержащем все три числа $a, b, c$ в некотором порядке.

**Теорема 4.127** (Интегрируемость по Риману и существование первообразной у непрерывной функции). *Если $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, то она интегрируема по Риману. Кроме того, функция*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

*является первообразной для $f$.*

*Доказательство.* Для непрерывной функции легко выписать оценку через модуль непрерывности

$$\Omega(f,\tau)=\sum_{\Delta\in\tau}\omega(f,\Delta)|\Delta|\leqslant\omega_f(|\tau|)\sum_{\Delta\in\tau}|\Delta|=\omega_f(|\tau|)(b-a),$$

что стремится к нулю при $|\tau|\to 0$ по равномерной непрерывности $f$ на отрезке. Таким образом непрерывная функция интегрируема. Далее, можно записать по аддитивности и линейности

$$F(x+u)-F(x)=\int_x^{x+u} f(t)\,dt=f(x)u+\int_x^{x+u}(f(t)-f(x))\,dt.$$

Второе слагаемое можно оценить с использованием $|f(t)-f(x)|\leqslant\omega_f(|u|)$ как

$$\left|\int_x^{x+u}(f(t)-f(x))\,dt\right|\leqslant\left|\int_x^{x+u}\omega_f(|u|)\,dt\right|\leqslant\omega_f(|u|)|u|=o(|u|),$$

в конце мы используем равномерную непрерывность функции $f$ в виде $\omega_f(|u|)\to 0$ при $u\to 0$. Это даёт дифференцируемость функции $F$ и равенство её производной $f$ по определению. ☐

*Задача* 4.128. Докажите, что $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ найдутся непрерывные $g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$, такие что $g\leqslant f\leqslant h$ и $\int_a^b h(x)-g(x)\,dx<\varepsilon$.

[[ Проверьте, что из приближения $f$ снизу и сверху элементарно ступенчатыми можно получить не сильно отличающееся в среднем приближение снизу и сверху непрерывными. В обратную сторону, начав с приближения снизу и сверху непрерывными, приблизьте непрерывные функции снизу и сверху элементарно ступенчатыми, используя их интегрируемость по Риману. ]]

**Теорема 4.129** (Интегрируемость по Риману монотонной функции)**.** *Если $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ монотонна, то она интегрируема.*

*Доказательство.* Заметим, что монотонная на отрезке функция ограничена (её значениями на концах), а также сумма колебаний функции по промежуткам разбиения не более колебания на всём отрезке:

$$\sum_{\Delta\in\tau}\omega(f,\Delta)\leqslant\omega(f,[a,b])=|f(b)-f(a)|.$$

Тогда

$$\Omega(f,\tau)=\sum_{\Delta\in\tau}\omega(f,\Delta)|\Delta|\leqslant|\tau|\sum_{\Delta\in\tau}\omega(f,\Delta)\leqslant|\tau||f(b)-f(a)|,$$

что стремится к нулю при $|\tau|\to +0$. ☐

*Задача* 4.130 (Функция Дирихле). Докажите, что функция, принимающая значение 1 на рациональных числах и 0 на иррациональных, не интегрируема по Риману ни на одном отрезке положительной длины.

[[ Заметьте, что её колебание на промежутке положительной длины равно 1. ]]

*Задача* 4.131. Пусть последовательность интегрируемых по Риману функций $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ сходится равномерно к функции $f_0$. Докажите, что $f_0$ интегрируема по Риману и

$$\int_a^b f_0(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

[[ Используйте, что $f_n$ равномерно приближает $f_0$ и само может быть приближено снизу и сверху ступенчатыми функциями с небольшой разностью между их интегралами. ]]

*Задача* 4.132. Докажите, что предыдущее утверждение не верно для поточечной сходимости функций, даже если все эти функции равномерно ограничены.

[[ Можно использовать функцию Дирихле. ]]

*Задача* 4.133. Докажите, что если функция ограничена на $[a, b]$ и интегрируема на отрезке $[\alpha, \beta]$ при любых $a < \alpha \leqslant \beta < b$, то она интегрируема и на $[a, b]$.

[[ Дополните разбиение $[\alpha, \beta]$ до разбиения $[a, b]$ и оцените добавку к взвешенной сумме колебаний. ]]

4.13. **Приёмы интегрирования.** В этом разделе мы будем считать, что мы рассматриваем только случай, когда выполняется формула Ньютона–Лейбница, самые общие условия выполнения которой обсуждаются в разделе 8.5. В этом предположении мы можем сформулировать основные приёмы интегрирования.

**Теорема 4.134** (Интегрирование по частям). *Если $f, g$ непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на $(a, b)$, а их производные интегрируемы по Риману на $[a, b]$ (неважно как определённые на концах), то*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx,$$

*где $F(x)|_a^b$ обозначает $F(b) - F(a)$.*

*Доказательство.* Функция $F(x) = f(x)g(x)$ является непрерывной на $[a, b]$ и дифференцируемой на $(a, b)$. Её производная

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

является интегрируемой по интегрируемости произведения, поэтому остаётся применить формулу Ньютона–Лейбница к $F$. ☐

**Теорема 4.135** (Замена переменной в интеграле). *Пусть функция $\varphi : [a, b] \to [\varphi(a), \varphi(b)]$ непрерывно дифференцируема, а $f$ непрерывна на $[\varphi(a), \varphi(b)]$. Тогда*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

*Доказательство.* Если функция $F$ является первообразной для $f$, то функция $G(x) = F(\varphi(x))$ является первообразной для непрерывной функции $f(\varphi(x))\varphi'(x)$. Композиция определена, так как по условию $\varphi$ принимает значения на отрезке $[\varphi(a), \varphi(b)]$. Теперь достаточно применить к $G(x)$ и $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ формулу Ньютона–Лейбница, которая в этой ситуации применима, так как рассматриваемые функции непрерывны. ☐

На самом деле предыдущая теорема верна без предположения непрерывности $f$, достаточно лишь её интегрируемости. В качестве упражнения читатель может доказать усиленный вариант самостоятельно. Мы не будем такой вариант обсуждать, потому что после развития понимания интеграла Лебега и приближения функций в среднем непрерывными становится ясно, что доказывать теорему о замене переменных в интеграле для непрерывных функций вполне достаточно, а потом останется воспользоваться тем, что отображение $\varphi$ искажает меру (длины отрезков) не более чем в константу раз. Более подробно эти рассуждения будут изложены в разделе 6.18 при доказательстве общей формулы замены переменных в интеграле функции нескольких переменных.

Докажем также полезный вариант формулы Тейлора:

**Теорема 4.136** (Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме)**.** *Если $f$ имеет $n$ производных в окрестности $U \ni x_0$ и $n$-я производная интегрируема по Риману, то для любого $x \in U$*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\, dt.$$

*Доказательство.* Заметим, что для $n = 1$ это формула Ньютона–Лейбница на отрезке $[x, x_0]$ или $[x_0, x]$:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt.$$

Далее будем интегрировать остаточный член по частям:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\, dt = -\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} d\frac{(x-t)^n}{n} =$$
$$= -\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n)}(t)}{n!} d(x-t)^n = -\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\, dt =$$
$$= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\, dt,$$

что и означает возможность сделать шаг индукции. ☐

*Задача* 4.137. Докажите, что число $e$ иррационально.

[[ Предположите $e = p/q$ и умножьте на $q!$ формулу

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

]]

*Задача* 4.138. Докажите, что число $\pi$ иррационально.

[[ Предположите $\pi = p/q$ и рассмотрите последовательность

$$a_n = \int_0^{\pi} \frac{x^n(p-qx)^n}{n!} \sin x\, dx.$$

Она состоит из положительных чисел, но стремится к нулю. Заметьте, что выражение $\frac{x^n(p-qx)^n}{n!}$ не меняется при замене $x \mapsto \pi - x$, его производные до $(n-1)$-го порядка на концах отрезка равны нулю, а производные порядка $n$ и более на концах отрезка являются целыми числами. Используя эти свойства, установите интегрированием по частям, что $a_n$ является целым числом. ]]

*Задача* 4.139. * Существует ли бесконечно дифференцируемая функция на отрезке $[0, 1]$, у которой все производные на отрезке $[0, 1]$ неотрицательные, любая производная в нуле и значение функции в нуле равны нулю, и $f(1) = 1$?

[[ Сравните формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме для $f(1)$ и $f(a)$ при фиксированном $a < 1$ и стремящихся с бесконечности $n$. ]]

## 5. Мера и интеграл Лебега

**5.1. Элементарные множества и мера Жордана.** Мера Лебега допускает много разнообразных определений. Мы начнём с построения меры элементарных множеств, потом определим меру Жордана, а потом уже перейдём к определению меры Лебега.

Назовём *параллелепипедом* $P \subseteq \mathbb{R}^n$ произведение ограниченных промежутков $\Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$ (которые могут быть точками), наши параллелепипеды всегда будут «параллельны координатным осям» и мера будет определена с использованием выделенной системы координат, хотя и заведомо инвариантна относительно сдвигов координат. Замен координат мы до некоторых пор делать не будем, поведение меры при линейных заменах координат будет установлено в теореме 5.127, а при криволинейных заменах — в теореме 6.126.

*Мера параллелепипеда* (открытого, замкнутого или промежуточного между ними) определяется как произведение длин его проекций на координатные оси. Если параллелепипед явно имеет вид

$$P = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$$

или

$$P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

или что-то между ними, то мера будет равна $mP = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$.

Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ назовём *элементарным*, если оно является объединением конечного числа попарно не пересекающихся параллелепипедов. Для произвольного элементарного множества мера $mS$ определяется как сумма мер в его разбиении на параллелепипеды, мера пустого множества полагается равной нулю. Следующее утверждение показывает, что это определение достаточно корректно.

**Теорема 5.1** (Корректность определения меры элементарных множеств)**.** *Мера элементарного множества не зависит от его представления в виде объединения параллелепипедов.*

*Доказательство.* Для двух разбиений $S = \bigsqcup_i P'_i$ и $S = \bigsqcup_j P''_j$ сделаем их общее измельчение как разбиение на параллелепипеды $P'_i \cap P''_j$ (отбросив пустые), тогда проверка корректности сведётся к проверке того, что при измельчении разбиения на параллелепипеды сумма мер параллелепипедов не меняется. Последнее утверждение достаточно проверить для одного параллелепипеда — если он разбит на меньшие параллелепипеды, то сумма мер меньших будет равна мере исходного, это простейший случай *аддитивности меры*.

Аддитивность для одного параллелепипеда относительно разбиения $P = P_1 \sqcup \dots \sqcup P_N$ можно проверять так. Сделаем все параллелепипеды замкнутыми, тогда они могут пересекаться, но только по границам, такая ситуация будет называться *попарно не перекрываются*. Если параллелепипед разрезан на два перпендикулярно одной из координат, то есть разрезан гиперплоскостью $\{x_i = c\}$ на части $\{x_i < c\}$ и $\{x_i > c\}$, то аддитивность объёма следует из дистрибутивности умножения

$$(b_1 - a_1) \dots (b_i - a_i) \dots (b_n - a_n) =$$
$$= (b_1 - a_1) \dots (b_i - c) \dots (b_n - a_n) + (b_1 - a_1) \dots (c - a_i) \dots (b_n - a_n).$$

В общем случае для разбиения $P = P_1 \cup \dots \cup P_N$, найдём некоторую координату $x_i$ и число $c$, так что гиперплоскость $H = \{x_i = c\}$ имеет один из $P_k$ (нестрого) с одной стороны от себя, и ещё один $P_\ell$ (нестрого) с другой стороны от себя. Покажем, что такую гиперплоскость действительно можно найти. Если для $x_i$ такого $c$ нет, то это означает наличие такого значения $d_i$, что оно лежит строго внутри всех проекций $P_j$ на ось $x_i$ (проверьте это!); повторяя это для всех координат находим точку $(d_1, \dots, d_n) \in$

$\mathbb{R}^n$, которая лежит строго внутри всех $P_j$, что противоречит требованию отсутствия перекрытий между параллелепипедами $P_j$.

Итак, мы можем найти гиперплоскость $H = \{x_i = c\}$ и разрезать $P$ и каждый $P_j$ гиперплоскостью $H$ на две части, тогда $P$ разобьётся на две части $P = P' \cup P''$, и каждый $P_j$ тоже может быть разобьётся на две части $P_j = P'_j \cup P''_j$, одна из которых может быть пустой. Если $H$ пересекает $P_j$ по границе, но не по внутренности, то будем считать, что от $P_j$ осталась только одна часть при разрезании. Из условия выбора гиперплоскости $H$ в обоих разбиениях

$$P' = P'_1 \cup \dots \cup P'_N, \quad P'' = P''_1 \cup \dots \cup P''_N$$

хотя бы один параллелепипед $P'_{j'}$ и $P''_{j''}$ пуст. Значит на самом деле в каждом из этих разбиений строго меньше $N$ частей, так что мы можем применить индукцию по $N$ и заключить, что

$$mP' = mP'_1 + \dots + mP'_N, \quad mP'' = mP''_1 + \dots + mP''_N,$$

а потом воспользоваться уже установленным случаем разрезания одного параллелепипеда на два гиперплоскостью и сделать вывод, что

$$mP = mP' + mP'' = \sum_{j=1}^{N} mP'_j + mP''_j = \sum_{k=1}^{N} mP_j.$$

☐

**Теорема 5.2** (Аддитивность меры элементарных множеств). *Для любых двух элементарных множеств $S$ и $T$ множества $S \cap T$ и $S \cup T$ тоже элементарны и выполняется равенство*

$$mS + mT = m(S \cup T) + m(S \cap T),$$

*а разность множеств $S \setminus T$ тоже является элементарным множеством.*

*Доказательство.* Из наблюдения про инвариантность меры относительно измельчений следует, что для доказательства достаточно всю картину разрезать на маленькие параллелепипеды так, чтобы $S, T$, а следовательно $S \cap T$, $S \cup T$, и $S \setminus T$ были объединениями некоторых наборов из этих маленьких параллелепипедов. После этого останется проверить, что каждый маленький параллелепипед $P$ вносит одинаковый вклад в левую и правую часть формулы в зависимости от выполнения включений $P \subseteq S$ и $P \subseteq T$.

Требуемое разрезание на маленькие параллелепипеды можно получить, вложив $S$ и $T$ в большой параллелепипед $Q$, и порезав $Q$ всевозможными гиперплоскостями вида $x_i = c$, которые встречаются как определяющие гиперплоскости в каком-либо параллелепипеде, составляющем $S$ или $T$. Тогда маленькие открытые параллелепипеды, полученные в результате такого разрезания, либо полностью содержатся в $S$, либо не пересекают его, аналогично и с $T$. Остальные, лежащие в разрезающих гиперплоскостях, параллелепипеды в меру $S$, $T$, $S \cup T$ и $S \cap T$ вклада не внесут. ☐

С учётом того, что разность элементарных множеств $S$ и $T$ тоже элементарна, получаем:

**Следствие 5.3.** *Для двух элементарных множеств выполняется*

$$mT \leqslant mS$$

*при условии $T \subseteq S$, а также для $k$ элементарных множеств выполняется*

$$m(S_1 \cup \dots \cup S_k) \leqslant mS_1 + \dots + mS_k.$$

*Задача* 5.4. Проверьте неравенство из предыдущего следствия $m(S_1 \cup \dots \cup S_k) \leqslant mS_1 + \dots + mS_k$ для элементарных множеств индукцией по $k$.

Разобравшись с мерой элементарных множеств и её аддитивностью, мы переходим к определению меры Жордана произвольного множества с помощью приближения его элементарными.

**Определение 5.5.** *Нижняя мера Жордана* $X$ — это точная верхняя грань меры элементарного множества $s \subseteq X$; *верхняя мера Жордана* $X$ — это точная нижняя грань меры элементарного множества $S \supseteq X$.

Если верхняя мера Жордана равна нижней мере Жордана $X$, то будем говорить, что они равны мере Жордана $X$ и $X$ *измеримо по Жордану*. Очевидно по определению, что измеримое по Жордану множество ограничено, иначе бы оно не поместилось ни в какое элементарное множество. Мы не будем использовать меру Жордана, поэтому её стандартные свойства мы оставляем в виде набора задач.

*Задача* 5.6 (Аддитивность меры Жордана). Докажите, что если $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ измеримы по Жордану, то измеримы $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$ и выполняется

$$mX + mY = m(X \cup Y) + m(X \cap Y).$$

[[ Если приблизить элементарными $s \subseteq X \subseteq S$ и $t \subseteq Y \subseteq T$ так что

$$mS - ms < \varepsilon, \quad mT - mt < \varepsilon,$$

то $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$ тоже можно будет очевидным образом приблизить снизу и сверху элементарными с точностью не более $2\varepsilon$. Сравните с аналогичным утверждением для меры Лебега, теоремой 5.23. ]]

*Задача* 5.7 (Критерий измеримости множества по Жордану). Докажите, что множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда оно ограничено и мера Жордана границы $\partial X$ равна нулю.

[[ Поместите $X$ в большой параллелепипед $P$. Имея элементарные $s \subseteq X \subseteq S$, разбейте $P$ на маленькие параллелепипеды так, чтобы $s$, $S$ и $S \setminus s$ были составлены из некоторых маленьких параллелепипедов разбиения и получите покрытие границы набором маленьких параллелепипедов, являющихся замыканиями параллелепипедов, составляющих $S \setminus s$. Имея элементарное $\sigma \supseteq \partial X$, разбейте весь $P$ на маленькие параллелепипеды так, чтобы $\sigma$ было составлено из некоторых маленьких параллелепипедов разбиения, соберите соответствующие $s$ и $S$ из маленьких параллелепипедов этого разбиения, которые полностью содержатся в $X$ или которые составляют $\sigma$. ]]

*Задача* 5.8. Докажите, что график непрерывной функции $f : K \to \mathbb{R}$ на компактном $K \subseteq \mathbb{R}^n$ является подмножеством $\mathbb{R}^{n+1}$ нулевой меры Жордана.

[[ Используйте равномерную непрерывность и определение верхней меры Жордана. ]]

*Задача* 5.9. * Докажите, что ограниченные выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$ измеримы по Жордану.

[[ Изучите строение границы ограниченного выпуклого множества в $\mathbb{R}^n$. ]]

5.2. **Внешняя мера Лебега и её свойства.** Прежде чем определять измеримые по Лебегу множества и их меру Лебега, определим внешнюю меру Лебега, которая есть у каждого множества:

**Определение 5.10.** *Внешняя мера Лебега* множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — это точная нижняя грань по всем счётным покрытиям $X$ элементарными множествами

$$\mu^*(X) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} m(S_k) \;\middle|\; X \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \right\}.$$

Как следует из определения, внешняя мера Лебега обладает свойством *монотонности*, $\mu^*(X) \leqslant \mu^*(Y)$ при $X \subseteq Y$. Она может быть конечным числом или бесконечностью $+\infty$. Для начала нам надо понять, почему точная нижняя грань в определении не равна нулю. Следующая лемма устанавливает, что для элементарных множеств это определение не даёт ничего нового.

**Лемма 5.11.** *Для элементарного $S \subset \mathbb{R}^n$ выполняется $\mu^*(S) = m(S)$.*

*Доказательство.* Так как $S$ покрывает само себя, то неравенство $\mu^*(S) \leqslant m(S)$ очевидно. Для доказательства обратного неравенства предположим противное: $\mu^*(S) < m(S)$. Это означает наличие счётного покрытия $S \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ с суммой мер

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(S_k) < m(S). \tag{5.1}$$

Пусть зазор в этом неравенстве равен $3\varepsilon > 0$. Заменим $S$ на содержащееся в нём компактное элементарное множество, изменив его меру не более, чем на $\varepsilon$. Это можно сделать, заменив каждый параллелепипед $S$ чуть меньшим замкнутым параллелепипедом.

Аналогично, заменим каждое $S_k$ на содержащее его открытое элементарное множество, изменив его меру не более, чем на $\varepsilon/2^k$. В итоге и левая и правая часть неравенства (5.1) изменятся не более, чем на $\varepsilon$, и неравенство останется в силе.

Но так как теперь $S$ компактно, а все $S_k$ открыты, то мы можем выбрать конечное подпокрытие $S \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} S_k$ и тогда неравенство (5.1) будет просто противоречить следствию 5.3 аддитивности меры элементарных множеств. ☐

Другое свойство внешней меры Лебега является ещё более важным:

**Лемма 5.12** (Счётная субаддитивность внешней меры Лебега)**.** *Для любого счётного семейства множеств $X_k \subseteq \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, выполняется*

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(X_k).$$

*Доказательство.* Неравенство содержательно, только если в правой части стоит конечное число и все меры $\mu^*(X_k)$ конечны, далее предполагаем такой случай. Возьмём $\varepsilon > 0$. По определению внешних мер в правой части поместим каждое $X_k$ в объединение $\bigcup_{m=1}^{\infty} S_{k,m}$, так что

$$\sum_{m=1}^{\infty} m(S_{k,m}) \leqslant \mu^*(X_k) + \varepsilon/2^k.$$

Тогда $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ покрывается счётным семейством множеств $\{S_{k,m} \mid k, m \in \mathbb{N}\}$ и с помощью леммы 4.21 о повторном суммировании мы получаем неравенство

$$\mu^*(X) \leqslant \sum_{k,m=1}^{\infty} m(S_{k,m}) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(X_k) + \varepsilon.$$

Из произвольности $\varepsilon > 0$ следует требуемое утверждение. ☐

В силу установленных свойств мы уже можем говорить о *множествах лебеговой меры нуль*, для которых $\mu^*(X) = 0$, и утверждать, что объединение счётного семейства множеств лебеговой меры нуль даёт множество лебеговой меры нуль. Также мы уже понимаем, что элементарные множества положительной меры не могут быть накрыты множеством лебеговой меры нуль.

*Задача* 5.13. Докажите, что горизонтальная или вертикальная прямая на плоскости имеет меру нуль.

*Задача* 5.14. Докажите, что наклонная прямая на плоскости имеет меру нуль. Обратите внимание, что элементарные множества на плоскости состоят из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат.

*Задача* 5.15. Докажите, что образ любой спрямляемой кривой $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ имеет меру нуль.

[[ Используя счётную аддитивность, достаточно доказать утверждение для кривой, параметризованной отрезком $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Далее можно считать параметризацию кривой натуральной и оценить её меру Лебега как $\mu(\gamma) \leqslant \ell(\gamma)^2$, а потом пытаться применить эту оценку после разбиения кривой на $N$ кусков равной длины. ]]

5.3. **Множества конечной меры Лебега и их свойства.** Введём операцию симметрической разности множеств

$$X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X).$$

Эта операция очевидно коммутативна и даже ассоциативна:

$$(X \triangle Y) \triangle Z = X \triangle (Y \triangle Z),$$

потому что она соответствует сложению характеристических функций данных множеств по модулю 2, то есть это просто сложение векторов в векторном пространстве над полем из двух элементов. Напомним, что для $X \subset \mathbb{R}^n$ *характеристическая функция множества* $X$, $\chi_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определена как $\chi_X(X) = 1$ и $\chi_X(\mathbb{R}^n \setminus X) = 0$.

Определим теперь некоторое «расстояние» между множествами

$$\rho(X, Y) = \mu^*(X \triangle Y).$$

Неравенство треугольника для этого расстояния следует из включения

$$X \triangle Z \subseteq (X \triangle Y) \cup (Y \triangle Z)$$

и субаддитивности внешней меры Лебега. Это «расстояние» вырождено, так как между разными множествами может оказаться нулевое расстояние; это происходит ровно тогда, когда множества $X$ и $Y$ отличаются на множество лебеговой меры нуль. Также это «расстояние» может принимать значение $+\infty$, а внешняя мера $\mu^*(X)$ может быть выражена, как расстояние до пустого множества

$$\mu^*(X) = \rho(X, \emptyset).$$

Из неравенства треугольника для $\rho$ тогда следует, что два множества с конечной внешней мерой имеют конечное расстояние между собой. Также из неравенства треугольника для $\rho$ следует

$$|\mu^*(X) - \mu^*(Y)| \leqslant \rho(X, Y), \tag{5.2}$$

то есть функция $\mu^*$ непрерывна (в смысле введённого «расстояния») на множестве тех подмножеств $\mathbb{R}^n$, которые имеют конечную внешнюю меру Лебега.

Обозначив множество всех элементарных множеств $S(\mathbb{R}^n) \subset 2^{\mathbb{R}^n}$, мы можем заключить, что по лемме 5.11 функции $m$ и $\mu^*$ совпадают на $S(\mathbb{R}^n)$, а вторая из них ещё и непрерывна на замыкании $S(\mathbb{R}^n)$ в $2^{\mathbb{R}^n}$ относительно метрики $\rho$. Множества из замыкания $S(\mathbb{R}^n)$ относительно метрики $\rho$ и будут измеримыми по Лебегу с конечной мерой, давайте раскроем это определение.

**Определение 5.16.** Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *измеримым по Лебегу с конечной мерой*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся элементарное $S$, такое что $\mu^*(X \triangle S) < \varepsilon$. *Мерой Лебега* $X$ тогда называется

$$\mu(X) = \mu^*(X) = \lim_{S \to X} \mu^*(S) = \lim_{S \to X} m(S).$$

**Теорема 5.17.** *Для измеримых по Лебегу с конечной мерой $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ множества $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$, $Y \setminus X$ оказываются измеримыми с конечной мерой Лебега и выполняется аддитивность меры*

$$\mu(X) + \mu(Y) = \mu(X \cup Y) + \mu(X \cap Y).$$

*Доказательство.* Если мы имеем приближения элементарными $S_k \to X$ и $T_k \to Y$ в смысле «расстояния» $\rho$, то

$$S_k \cup T_k \to X \cup Y, \quad S_k \cap T_k \to X \cap Y$$

в смысле «расстояния» $\rho$ в силу включений

$$(S_k \cup T_k) \triangle (X \cup Y) \subseteq (S_k \triangle X) \cup (T_k \triangle Y), \quad (S_k \cap T_k) \triangle (X \cap Y) \subseteq (S_k \triangle X) \cup (T_k \triangle Y).$$

Аналогично имеет место сходимость в смысле «расстояния» $\rho$

$$S_k \setminus T_k \to X \setminus Y, \quad T_k \setminus S_k \to Y \setminus X.$$

Поэтому множества $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$, $Y \setminus X$ оказываются измеримыми по Лебегу с конечной мерой, а равенство аддитивности получается предельным переходом из равенства аддитивности для элементарных множеств. ☐

Аналогично случаю элементарных множеств, из измеримости разности, а также аддитивности и неотрицательности меры мы автоматически получаем *монотонность* меры Лебега, для измеримых $X \subseteq Y$:

$$\mu(Y) = \mu(X) + \mu(Y \setminus X) \geqslant \mu(X).$$

Также мы имеем счётную субаддитивность (уже установленную для внешней меры Лебега), которую мы сейчас уточним.

**Теорема 5.18** (Счётная аддитивность меры Лебега в случае конечной меры)**.** *Если множества $X_k$, $k \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются, измеримы по Лебегу с конечной мерой и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k) < +\infty,$$

*то их объединение измеримо и*

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k).$$

*Доказательство.* Докажем, что множество $X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k$ измеримо по Лебегу с конечной мерой. Из сходимости суммы мер следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\ell$, такое что (с учётом счётной субаддитивности внешней меры)

$$\mu^*\left(\bigsqcup_{k=\ell+1}^{\infty} X_k\right) \leqslant \sum_{k=\ell+1}^{\infty} \mu(X_k) < \varepsilon.$$

Следовательно, $X$ приближается измеримым по Лебегу с конечной мерой множеством $\bigsqcup_{k=1}^{\ell} X_k$ с точностью $\varepsilon$, а последнее по конечной аддитивности меры можно приблизить и элементарным с точностью $\varepsilon$. Следовательно, множество $X$ оказалось измеримым с конечной мерой и $\mu(X) = \mu^*(X)$. Неравенство

$$\mu(X) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k)$$

выполняется по счётной субаддитивности внешней меры. Неравенство в обратную сторону получается предельным переходом из неравенств для натуральных $\ell$

$$\mu(X) \geqslant \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\ell} X_k\right) = \sum_{k=1}^{\ell} \mu(X_k),$$

которые верны из монотонности и конечной аддитивности меры. □

*Задача* 5.19. Докажите, что измеримое по Жордану множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ является измеримым по Лебегу с той же мерой.

[[ Это легко проверить непосредственно по определению. ]]

*Задача* 5.20. * Докажите, что множество измеримых по Лебегу с конечной мерой множеств в $\mathbb{R}^n$ относительно «расстояния» $\rho(X, Y) = \mu^*(X \triangle Y)$ является полным (но вырожденным) метрическим пространством.

[[ Имея фундаментальную последовательность измеримых по Лебегу множеств, перейдите к её подпоследовательности $(X_k)$, для которой выполняется $\rho(X_k, X_m) \leqslant 2^{-k}$ при $k \leqslant m$. В качестве (не единственного) предела этой последовательности можно взять, например, $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=k}^{\infty} X_k$. ]]

5.4. **Измеримые по Лебегу множества с бесконечной мерой.** Нам также будет удобно использовать множества, мера Лебега которых достаточно корректно определена как $+\infty$. Для этого сделаем определение:

**Определение 5.21.** Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *измеримым по Лебегу с бесконечной мерой*, если его можно представить в виде счётного объединения попарно не пересекающихся множеств

$$X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k,$$

каждое из которых измеримо по Лебегу с конечной мерой и $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k) = +\infty$.

Покажем корректность этого определения. Если мы разложили $X$ в другое объединение попарно не пересекающихся множеств

$$X = \bigsqcup_{\ell=1}^{\infty} Y_\ell$$

с конечной мерой Лебега, то будет выполняться и счётное разложение

$$X = \bigsqcup_{k,\ell=1}^{\infty} X_k \cap Y_\ell.$$

С помощью счётной аддитивности для конечных мер и возможности переставлять суммирование неотрицательных чисел мы тогда получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \mu(X_k \cap Y_\ell) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k \cap Y_\ell) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mu(Y_\ell).$$

Следовательно, множество не может быть одновременно измеримым с конечной мерой и с бесконечной мерой.

**Определение 5.22.** Множество называется *измеримым по Лебегу*, если оно измеримо по Лебегу с конечной мерой или с бесконечной мерой.

**Теорема 5.23.** *Измеримость множества по Лебегу сохраняется при взятии конечных объединений, пересечений и разности множеств.*

*Доказательство.* Заметим для единообразия, что если множество измеримо по Лебегу с конечной мерой, то его тоже можно представить в виде счётного объединения попарно не пересекающихся множеств с конечной мерой Лебега, взяв само это множество в качестве первого из них и взяв остальные пустыми. Поэтому мы будем каждое измеримое по Лебегу множество представлять в виде объединения попарно не пересекающихся множеств конечной меры Лебега.

Пусть теперь

$$X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k, \quad Y = \bigsqcup_{\ell=1}^{\infty} Y_\ell.$$

Тогда формула

$$X \cap Y = \bigsqcup_{k,\ell=1}^{\infty} X_k \cap Y_\ell$$

очевидна и доказывает измеримость пересечения. Для доказательства измеримости объединения запишем

$$X \cup Y = \bigcup_{m=1}^{\infty} Z_m, \quad Z_m = \bigsqcup_{k=1}^{m} X_k \cup \bigsqcup_{\ell=1}^{m} Y_\ell,$$

это пока ещё объединение возможно пересекающихся множеств с конечной мерой Лебега, но можно превратить его в объединение попарно не пересекающихся по формуле

$$X \cup Y = \bigsqcup_{m=1}^{\infty} Z_m \setminus Z_{m-1},$$

считая $Z_0 = \emptyset$.

Для разности множеств мы можем записать

$$X \setminus Y = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \left( X_k \setminus \bigsqcup_{\ell=1}^{\infty} (Y_\ell \cap X_k) \right),$$

множества в больших скобках измеримы по Лебегу с конечной мерой как разности измеримых множеств с конечной мерой. Объясним это подробнее. Множество $\bigsqcup_{\ell=1}^{\infty}(Y_\ell \cap X_k)$ имеет конечную меру, так как для любого натурального $m$

$$\bigsqcup_{\ell=1}^{m}(Y_\ell \cap X_k) \subseteq X_k,$$

по монотонности и аддитивности получается

$$\sum_{\ell=1}^{m} \mu(Y_\ell \cap X_k) \leqslant \mu(X_k) < +\infty,$$

и переходя к пределу $m \to \infty$ мы получим

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \mu(Y_\ell \cap X_k) \leqslant \mu(X_k) < +\infty.$$

☐

*Задача* 5.24. Докажите, что всё пространство $\mathbb{R}^n$ (как подмножество самого себя) измеримо по Лебегу с бесконечной мерой.

Теперь мы обобщим счётную аддитивность на случай, когда какие-то из множеств могут иметь бесконечную меру, и какие-то суммы могут быть бесконечными.

**Теорема 5.25** (Счётная аддитивность меры Лебега в общем случае). *Если множества $X_k$, $k \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются и измеримы по Лебегу, то их объединение измеримо по Лебегу и выполняется*

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k),$$

*где считаем, что наличие в сумме хотя бы одного бесконечного слагаемого делает сумму бесконечной.*

*Доказательство.* Представим каждое $X_k$ как объединение попарно не пересекающихся множеств конечной меры,

$$X_k = \bigsqcup_{\ell=1}^{\infty} X_{k,\ell},$$

Тогда множество

$$X = \bigsqcup_{\ell,k=1}^{\infty} X_{k,\ell}$$

измеримо с конечной или бесконечной мерой Лебега и выполняется равенство

$$\mu(X) = \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \mu(X_{k,\ell}) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty} \mu(X_{k,\ell}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k).$$

Здесь первое равенство в случае конечной $\mu(X)$ выполняется по счётной аддитивности, а в случае бесконечной $\mu(X)$ выполняется по определению бесконечной меры. Последнее равенство объясняется аналогично в зависимости от конечности или бесконечности $\mu(X_k)$ ☐

Счётная аддитивность меры Лебега резко отличает её от меры Жордана. Например, каждая точка имеет меру Лебега нуль, поэтому по счётной аддитивности каждое счётное множество измеримо и имеет меру нуль. В частности, рациональные числа $\mathbb{Q}$ имеют меру нуль. Для ясности можно доказать это и по определению. Если мы занумеруем все рациональные числа как $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ и рассмотрим объединение интервалов

$$U = \bigcup_k \left(r_k - 2^{-k-1}\varepsilon, r_k + 2^{-k-1}\varepsilon\right)$$

длины $2^{-k}\varepsilon$ каждый, то мы увидим, что сумма длин этих интервалов равна $\varepsilon$ и их объединение $U$ накрывает все рациональные числа. Таким образом, внешняя мера Лебега рациональных чисел равна нулю по определению. А с точки зрения меры Жордана, нижняя мера $\mathbb{Q}$ равна нулю, а верхняя мера равна $+\infty$.

*Задача* 5.26. Докажите, что множество на плоскости $\mathbb{R}^2$, заданное неравенством $|xy| \leqslant 1$, является измеримым по Лебегу. Чему равна его мера?

[[ Измеримость можно доказать по определению, разрезав это множество на ограниченные куски, которые хорошо приближаются элементарными. Далее можно попробовать поместить в это множество элементарные множества большой меры. ]]

5.5. **Измеримость счётных объединений и пересечений, непрерывность меры Лебега.** В этом разделе мы выведем формальные следствия из сохранения свойства измеримости при теоретико-множественных операциях и из счётной аддитивности для объединения попарно не пересекающихся измеримых множеств. Они будут верны для любой счётно-аддитивной меры с подходящим понятием измеримого множества.

**Теорема 5.27.** *Объединение счётного числа измеримых по Лебегу множеств измеримо.*

*Доказательство.* Предположим, речь идёт о счётном объединении $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ измеримых множеств. Обозначим конечные объединения

$$Y_k = \bigcup_{i=1}^{k} X_i,$$

они измеримы по теореме 5.23. Мы получили возрастающую последовательности измеримых множеств $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq Y_3 \subseteq \dots$, причём положив $Y_0 = \emptyset$, мы получаем

$$\bigsqcup_{k=1}^{\infty} (Y_k \setminus Y_{k-1}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i.$$

Остаётся заметить, что измеримые множества $Y_1 \setminus Y_0, Y_2 \setminus Y_1, Y_3 \setminus Y_2, \dots$ попарно не пересекаются и интересующее нас объединение измеримо по теореме 5.25. ☐

Аналогичное утверждение верно и для пересечений:

**Теорема 5.28.** *Пересечение счётного числа измеримых по Лебегу множеств измеримо.*

*Доказательство.* Рассмотрим пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ и обозначим конечные пересечения

$$Y_k = \bigcap_{i=1}^{k} X_i.$$

Мы получили убывающую последовательность измеримых множеств $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq Y_3 \supseteq \dots$, причём

$$I = \bigcap_{k=1}^{\infty} Y_k = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i.$$

Тогда множество $X_1 = Y_1$ представляется в виде объединения множества $I$ и счётного объединения разностей $Y_k \setminus Y_{k+1}$. Так как счётное объединение разностей, обозначим его $D$, измеримо, то $I = X_1 \setminus D$ тоже измеримо по теореме 5.23. ☐

В случае объединения возрастающей последовательности измеримых множеств можно сделать утверждение о мере объединения.

**Теорема 5.29** (Непрерывность меры Лебега). *Если множество $X$ является объединением возрастающей последовательности измеримых множеств*

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X_k \subseteq \dots,$$

*то $\lim_{k\to\infty} \mu(X_k) = \mu(X)$, где предел понимается в топологии расширенной числовой прямой.*

*Доказательство.* Как мы уже не раз замечали выше, можно представить $X$ в виде объединения попарно не пересекающихся множеств

$$X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k \setminus X_{k-1},$$

считая $X_0 = \emptyset$. Тогда по счётной аддитивности и определению суммы ряда получаем

$$\mu(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k \setminus X_{k-1}) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu(X_k \setminus X_{k-1}).$$

Конечные суммы под знаком предела по конечной аддитивности преобразуются как

$$\sum_{k=1}^{m} \mu(X_k \setminus X_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m} (\mu X_k - \mu X_{k-1}) = \mu X_m,$$

и мы получаем требуемое утверждение $\mu(X) = \lim_{m\to\infty} \mu X_m$. ☐

*Задача* 5.30. Докажите, что если множество $X$ является объединением возрастающей последовательности не обязательно измеримых множеств

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X_k \subseteq \dots,$$

то $\lim_{k\to\infty} \mu^*(X_k) = \mu^*(X)$.

[[ Для начала полезно доказать, что $X_k$ можно поместить в измеримое $Y_k$, такое что $\mu(Y_k) = \mu^*(X_k)$. ]]

Некоторые полезные сведения о мере Лебега даны в виде следующих задач.

*Задача* 5.31. Докажите, что если множество $X$ является пересечением убывающей последовательности измеримых множеств

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots \supseteq X_k \supseteq \dots$$

и мера какого-то из $X_k$ конечна, то $\lim_{k\to\infty} \mu(X_k) = \mu(X)$. Приведите пример, когда все меры $X_k$ бесконечны, а мера $X$ всё же конечна.

[[ Примените аддитивность к пересечению $I = \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k$ и разностям $X_k \setminus X_{k+1}$. ]]

*Задача* 5.32 (Непрерывность сдвига относительно меры Лебега). Докажите, что если $X \subset \mathbb{R}$ измеримо по Лебегу с конечной мерой, то мера

$$\mu(X \setminus (X + t))$$

стремится к нулю при $t \to 0$. Здесь $X + t$ — это сдвиг множества $X$ на $t$.

[[ Воспользуйтесь приближением $X$ элементарным множеством. ]]

*Задача* 5.33. * Докажите, что существует подмножество отрезка, неизмеримое по Лебегу. Можно использовать аксиому выбора.

[[ Вместо отрезка удобнее рассматривать окружность, взять поворот $R$ на угол $t\pi$ с $t \notin \mathbb{Q}$, и придумать множество $X$, повороты которого $\{R^n X\}_{n\in\mathbb{Z}}$ попарно не пересекаются и покрывают всю окружность. Покажите, что такое $X$ не может быть измеримым по Лебегу. ]]

5.6. **Измеримость открытых и замкнутых множеств, регулярность меры Лебега.** В этом разделе мы изучим, как связана мера Лебега в $\mathbb{R}^n$ с топологическими понятиями открытого и замкнутого множества.

**Теорема 5.34.** *Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$ измеримы по Лебегу.*

*Доказательство.* Рассмотрим всевозможные содержащиеся в открытом $U$ параллелепипеды с рациональными координатами углов. Таких параллелепипедов счётное количество. Кроме того, любая точка $x \in U$ содержится в каком-то таком параллелепипеде. Следовательно, мы представили $U$ в виде объединения последовательности элементарных множеств, значит его измеримость следует из теоремы 5.27. Для замкнутых множеств мы просто используем измеримость по Лебегу разности множеств, с учётом того, что всё пространство $\mathbb{R}^n$ открыто, а значит, измеримо. ☐

**Теорема 5.35** (Внешняя и внутренняя регулярность меры Лебега)**.** *Измеримое по Лебегу множество $X$ можно сколь угодно точно по мере приблизить содержащим его открытым множеством. Если $X$ имеет конечную меру, то его можно сколь угодно точно по мере приблизить содержащимся в нём компактным множеством.*

*Доказательство.* Для $X$ конечной меры и заданного $\varepsilon$ рассмотрим его приближение элементарным $S$ с точностью менее $\varepsilon > 0$, что означает покрытие $X \triangle S$ счётным объединением элементарных множеств $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ с мерой $\mu(D) < \varepsilon$. Каждое множество $S_k$ можно немного увеличить, так чтобы оно стало открытым элементарным и мера $S_k$ выросла менее чем на $\varepsilon/2^k$, тогда $D$ станет открытым и по субаддитивности будет верно неравенство $\mu(D) < 2\varepsilon$. Если $S$ также немного увеличить и сделать открытым, изменив его меру не более чем на $\varepsilon$, то мы получим открытое $U = S \cup D \supseteq X$ и $\mu(U \setminus X)$ будет не более $3\varepsilon$. Таким образом, любое множество $X$ конечной меры помещается в открытое множество $U$, так что $\mu(U \setminus X)$ сколь угодно мала.

Если же $S$ в предыдущем рассуждении немного уменьшить и сделать компактным элементарным, изменив его меру не более, чем на $\varepsilon$, то мы получим (при том же открытом $D$) компактное $F = S \setminus D \subseteq X$, такое что $\mu(X \setminus F) < 3\varepsilon$.

Далее, если $X$ имеет бесконечную меру, то по определению представим его как объединение $X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k$ множеств с конечной мерой, если каждое $X_k$ мы поместим в открытое $U_k$ так что $\mu(U_k \setminus X_k) < \varepsilon/2^k$, то $X$ будет помещено в открытое $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ так что $\mu(U \setminus X) < \varepsilon$ из счётной субаддитивности, так как

$$U \setminus X \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (U_k \setminus X_k).$$

☐

*Задача* 5.36. Докажите, что мера Лебега открытого множества совпадает с его нижней мерой Жордана.

[[ Разрежьте открытое множество на счётное семейство параллелепипедов. ]]

*Задача* 5.37. Докажите, что мера Лебега компактного множества совпадает с его верхней мерой Жордана.

[[ Можно вывести это утверждение из предыдущей задачи. Или можно действовать по определению, аналогично доказательству регулярности, заменив счётное объединение элементарных множеств на конечное объединение. ]]

*Задача* 5.38. Постройте примеры компактных неплотных подмножеств отрезка $[0, 1]$, имеющих произвольную меру в диапазоне $[0, 1)$.

[[ Сделайте обобщённое канторово множество: выкиньте из отрезка $[0, 1]$ интервал длины $\varepsilon_1$ в середине, у каждого из получившихся отрезков выкиньте интервалы посередине, длины которых относятся к длинам отрезков как $\varepsilon_2$ и так далее счётное количество раз. Проверьте, что мера получившегося множества равна $\prod_{k=1}^{\infty}(1 - \varepsilon_k)$. ]]

*Задача* 5.39. Покажите, что не каждое измеримое множество можно приблизить содержащимися в нём открытыми множествами сколь угодно точно в смысле меры их разности. Покажите, что не каждое измеримое множество можно приблизить содержащими его замкнутыми множествами сколь угодно точно в смысле меры их разности.

[[ Используйте множества, полученные в предыдущей задаче. ]]

*Задача* 5.40. Докажите, что если множество $F$ компактно, то для мер его $\varepsilon$-окрестностей выполняется

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \mu(U_\varepsilon(F)) = \mu(F).$$

Покажите, что это может быть неверно для некомпактных множеств.

[[ Используйте внешнюю регулярность и найдите $\varepsilon$-окрестность в просто окрестности множества. ]]

Приведённые выше определения меры Лебега не являются единственно возможными, следующие задачи намечают альтернативные варианты, стартующие с определения меры открытого множества.

*Задача* 5.41. Докажите, что с помощью теоремы 4.100 можно определить меру Лебега открытого $U \subset \mathbb{R}^n$ как

$$\mu U = \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f\ dx_1 \dots dx_n \,\middle|\, \text{по непрерывным } f : \mathbb{R}^n \to [0,1] \text{ с носителем в } U \right\}.$$

Докажите, что эта величина счётно субаддитивна на открытых множествах, то есть

$$\mu\left(\bigcup_n U_n\right) \leqslant \sum_n \mu U_n.$$

[[ Используйте компактность носителя, сведя счётную аддитивность к конечной. ]]

*Задача* 5.42. Докажите, что если меру открытого множества определить как его нижнюю меру Жордана, то это будет совпадать с определением из предыдущей задачи.

[[ Используйте построение непрерывной функции, равной единице на данном компакте и нулю за пределами его окрестности. ]]

*Задача* 5.43. Докажите, что внешняя мера, определённая как $\mu^*(X) = \inf\{\mu(U) \mid U \supseteq X\}$ (по открытым множествам с использованием определения из предыдущих задач) обладает свойством счётной субаддитивности.

Другой, более абстрактный вариант определения меры Лебега можно посмотреть в разделе 9.22, или можно применить теорему 9.231 из того раздела к результату предыдущих задач.

5.7. **Измеримые по Лебегу функции.** Мы определили меру Лебега и проверили её свойства в предыдущих разделах. Теперь мы подготовимся к рассмотрению функций и определению интеграла Лебега для функций. Но для начала нам надо определить класс функций, которые в принципе имеет смысл интегрировать по Лебегу, и проверить их полезные свойства.

**Определение 5.44.** Функция $f : X \to \mathbb{R}$ ($X \subseteq \mathbb{R}^n$) называется *измеримой по Лебегу*, если для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x \mid f(x) < c\}$ измеримо по Лебегу.

Из определения следует, что само $X$ тоже обязано быть измеримым по Лебегу.

**Лемма 5.45.** *Определение измеримой функции со строгим неравенством эквивалентно определению с нестрогим неравенством* $\{x \mid f(x) \leqslant c\}$.

*Доказательство.* Заметим, что

$$\{x \mid f(x) \leqslant c\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \mid f(x) < c + 1/k\}$$

и

$$\{x \mid f(x) < c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \mid f(x) \leqslant c - 1/k\}\,.$$

Нужное утверждение следует из измеримости счётных объединений и пересечений измеримых множеств. □

*Задача* 5.46. Докажите, что сужение измеримой на $X$ функции на измеримое $Y \subseteq X$ тоже будет измеримой функцией.

Можно доказать, что арифметические операции не выводят нас за класс измеримых по Лебегу функций. К примеру, выражение со счётным объединением

$$\{f(x) + g(x) < c\} = \bigcup_{s,t\in\mathbb{Q}, s+t<c} \{f(x) < s\} \cap \{g(x) < t\}$$

доказывает это для суммы, остальные доказательства аналогичны (сделайте их в качестве упражнения).

Для функций, которые принимают значения в расширенной числовой прямой, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, определение измеримости применимо как есть. В частности, множества $\{x \in X \mid f(x) = -\infty\}$ и $\{x \in X \mid f(x) = +\infty\}$ оказываются в этом случае измеримыми. С учётом этого понятие измеримости функции оказывается устойчивым ко многим операциям.

**Теорема 5.47.** *Поточечное взятие точной верхней или нижней грани последовательности функций не выводит за класс измеримых функций с возможно бесконечными значениями.*

*Доказательство.* Для точной нижней грани можно написать

$$\{x \mid \inf\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} < c\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \mid f_n(x) < c\}.$$

Для точной верхней грани можно перейти к функциям $-f_n$, которые тоже будут измеримы, и применить формулу

$$\sup\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} = -\inf\{-f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

□

**Теорема 5.48.** *Поточечный переход к (верхнему или нижнему) пределу также не выводит за класс измеримых функций с возможно бесконечными значениями.*

*Доказательство.* Для верхнего предела можно написать

$$\left\{\varlimsup_{n\to\infty} f_n(x) < c\right\} = \bigcup_{s\in\mathbb{Q}, s>0} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant N} \{f_n(x) < c - s\}$$

и воспользоваться измеримостью счётных объединений и пересечений. Доказательство для нижнего предела, аналогично предыдущей теореме, следует из формулы

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x) = -\varlimsup_{n\to\infty} (-f_n(x)).$$

□

*Задача* 5.49. Докажите, что непрерывные функции на измеримом множестве $X$ измеримы.

[[ Действуйте по определению измеримой функции и используйте измеримость открытых множеств. ]]

*Задача* 5.50. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ везде имеет конечную производную. Докажите, что её производная $f'$ измерима.

[[ Представьте производную в виде поточечного предела. ]]

*Задача* 5.51 (Существенный супремум). Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима по Лебегу, а множество

$$S = \{M \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant M \text{ почти всюду}\}$$

непусто (здесь *почти всюду* означает что множество тех $x$, для которых утверждение не выполняется, имеет меру нуль). Докажите, что $S$ имеет минимальный элемент.

[[ Используйте непрерывность меры Лебега. ]]

5.8. **Борелевские множества и функции.** Иногда вместо измеримых множеств и функций удобно рассматривать более узкий класс множеств и функций:

**Определение 5.52.** *Борелевским множеством* в $\mathbb{R}^n$ называется множество, которое можно получить из открытых множеств операциями разности множеств, счётного объединения и счётного пересечения, а также повторениями этих операций несколько раз.

**Определение 5.53.** *Борелевской функцией* называется функция $f : X \to \mathbb{R}$ или $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, у которой для любого $c$ множество $\{x \in X \mid f(x) < c\}$ борелевское.

Сказанное выше об измеримых по Лебегу функциях относится и к борелевским, их класс замкнут относительно арифметических операций, перехода к точной грани счётного семейства функций или к поточечному пределу.

Говоря несколько неформально, все сравнительно явно заданные функции будут не просто измеримыми по Лебегу, а даже борелевскими. Но на самом деле измеримых по Лебегу множеств намного больше, чем борелевских. Например, канторово множество имеет меру Лебега нуль и мощность континуума $\aleph_1 = |2^{\mathbb{N}}|$, значит все его подмножества измеримы и имеют меру нуль (это называется *полнота меры Лебега*), а их количество $2^{\aleph_1} > \aleph_1$ (в силу задачи 1.171). Но при этом читатель в качестве (не очень простого) упражнения может доказать, что количество открытых множеств в евклидовом пространстве — континуум, и количество борелевских — тоже континуум.

Хотя борелевских множеств оказывается меньше, чем измеримых по Лебегу, всё же можно утверждать, что любое измеримое по Лебегу множество «почти борелевское» в следующем смысле:

**Теорема 5.54.** *Любое измеримое $X \subset \mathbb{R}^n$ можно представить в виде объединения борелевского множества и множества меры нуль. К любому измеримому множеству $X \subset \mathbb{R}^n$ можно добавить множество меры нуль так, что в объединении получится борелевское множество.*

*Доказательство.* Докажем второе утверждение, первое утверждение следует из второго переходом к дополнению $\mathbb{R}^n \setminus X$. По свойству регулярности (теорема 5.35) множество $X$ содержится в открытом $U_n \supseteq X$, так что $\mu(U_n \setminus X) < 1/n$. Тогда пересечение всех $U_n$ будет борелевским множеством $Z \supseteq X$ и мера $\mu(Z \setminus X)$ будет меньше $1/n$ для любого $n$, то есть будет равна нулю.

∎

**Следствие 5.55.** *Любую измеримую функцию $f : X \to \mathbb{R}$ можно переопределить на множестве меры нуль (возможно изменив область определения на меру нуль) так, что она станет борелевской.*

*Доказательство.* Для каждого рационального $r$ рассмотрим множество

$$X_r = \{x \in X \mid f(x) < r\}.$$

Функция $f$ тогда восстанавливается по набору этих множеств как

$$f(x) = \inf\{r \in \mathbb{Q} \mid x \in X_r\} = \inf\{r \in \mathbb{Q} \mid f(x) < r\}.$$

Заменим теперь каждое $X_r$ на борелевское $Y_r \subseteq X_r$ с нулевой мерой разности $X_r \setminus Y_r$. Тогда функция

$$g(x) = \inf\{r \in \mathbb{Q} \mid x \in Y_r\}$$

определена на множестве $Y = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} Y_r \subset X$ и может отличаться от $f$ лишь на множестве $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(X_r \setminus Y_r)$ меры нуль. Функция $g : Y \to \mathbb{R}$ уже является борелевской, так как

$$\{x \in Y \mid g(x) < c\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q},\ r<c} Y_r.$$

☐

В следствии 5.55, если область определения $X$ изначально была борелевским множеством, то у новой функции $g$ область определения можно не сужать, определив её на борелевском множестве $X \setminus Y$ нулём.

*Задача* 5.56. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — некоторое множество. Докажите, что его характеристическая функция $\chi_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in X; \\ 0, & \text{если } x \notin X; \end{cases}$$

будет измеримой по Лебегу тогда и только тогда, когда $X$ измеримо по Лебегу. Докажите, что характеристическая функция будет борелевской тогда и только тогда, когда множество $X$ будет борелевским.

[[ Примените определение и опишите, какие множества имеют вид $\{x \mid \chi_X(x) < c\}$. ]]

**Теорема 5.57.** *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ борелевская тогда и только тогда, когда прообраз любого борелевского множества $Y \subseteq \mathbb{R}$ тоже является борелевским.*

*Доказательство.* Определение борелевской функции требует борелевости множества $f^{-1}(-\infty, c)$. Из неё будет следовать борелевость $f^{-1}(-\infty, c]$ (как мы уже делали для измеримости), а также борелевость прообразов интервалов и отрезков. Любое открытое множество $U \subseteq \mathbb{R}$ можно представить в виде объединения счётного количества попарно не пересекающихся интервалов. Например, для любого рационального $r \in U$ рассмотрим максимальный содержащий $r$ интервал $I_r \ni r$, содержащийся в $U$, и объединим все такие интервалы. Следовательно для любого открытого $U$ прообраз $f^{-1}(U)$ тоже борелевский.

Далее, если мы будет делать с открытыми подмножествами прямой операции объединения, пересечения и разности, а также счётные объединения и пересечения, то те же операции будут делаться с прообразами, следовательно в прообразе всегда будет получаться борелевское множество для любого борелевского множества на прямой. ☐

Предыдущая теорема позволяет расширить определение борелевских функций на отображения между метрическими или топологическими пространствами. Если какие-то множества объявлены открытыми, то борелевским множеством в том же пространстве называется множество, которое можно получить из открытых множеств операциями разности множеств, счётного объединения и счётного пересечения.

**Определение 5.58.** Отображение $f : X \to Y$ метрических или топологических пространств называется *борелевским*, если прообраз любого борелевского множества борелевский.

В нашем частном случае $X \subseteq \mathbb{R}^n$ мы требуем также, чтобы $X$ само было борелевским, хотя формально из приведённого выше определения это не следует (в нём у неборелевского $X$ могут быть «относительно борелевские» подмножества в индуцированной топологии).

**Теорема 5.59.** *Композиция борелевских отображений тоже будет борелевской.*

*Доказательство.* Доказывается так же, как непрерывность композиции через топологическое определение непрерывности, так как прообраз при композиции — это прообраз прообраза. ☐

Из этой теоремы и предыдущих наблюдений про борелевость сумм, разностей, произведений, частных, непрерывных функций, точных граней и поточечных пределов следует, что любая сравнительно явно описанная функция нескольких переменных будет борелевской, а значит и измеримой по Лебегу. Построение неизмеримой по Лебегу функции возможно лишь весьма неявно, например на основе результата задачи 5.33.

*Задача* 5.60. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измеримая, а $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — борелевская. Докажите, что композиция $g \circ f$ измеримая.

[[ Заметьте, что если функция измерима, то прообраз любого борелевского множества относительно неё измерим по Лебегу. ]]

*Задача* 5.61. Приведите пример, показывающий, что композиция измеримых по Лебегу функций одной переменной не обязательно измерима по Лебегу.

[[ Постройте сначала инъективную и монотонную функцию $f$, отображающую прямую в множество меры нуль, из монотонности она будет измерима по Лебегу. А функцию $g$ тогда можно определять на образе $f$ как угодно, если за его пределами она равна нулю, в любом случае она будет измерима по Лебегу. Это позволяет сделать функцию $g \circ f$ любой. ]]

*Задача* 5.62. Докажите, что если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является поточечным пределом последовательности непрерывных функций, то для любого числа $c \in \mathbb{R}$ множества $\{f(x) \leqslant c\}$ и $\{f(x) \geqslant c\}$ являются счётными объединениями замкнутых множеств.

[[ Выразите множество $\{f(x) \leqslant c\}$ через множества $\{f_n(x) \leqslant c\}$, где $f_n \to f$ и $f_n$ непрерывны. ]]

*Задача* 5.63. Докажите, что любая полунепрерывная снизу (см. определение 3.107) функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ борелевская.

[[ Используйте «топологическое» определение полунепрерывности. ]]

*Задача* 5.64. Докажите, что если все функции в последовательности $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ полунепрерывны снизу, то функция, определённая по формуле

$$\bar{f}(x) = \sup\{f_k(x) \mid k \in \mathbb{N}\},$$

тоже полунепрерывна снизу.

[[ Аналогично предыдущей задаче. ]]

5.9. **Интеграл Лебега для ступенчатых функций.** Интеграл Лебега мы определим, в общем следуя схеме определения интеграла Римана через нижние и верхние суммы Дарбу. Иначе это можно понимать как приближение функции снизу и сверху ступенчатыми функциями. Для интеграла Лебега мы тоже введём понятие ступенчатой функции, только основаниями ступенек мы разрешим быть любым измеримым по Лебегу множествам, а количество ступенек, имея в виду счётную аддитивность меры Лебега, может быть и счётным.

**Определение 5.65.** Функция $f : X \to \mathbb{R}$ ($X \subseteq \mathbb{R}^n$) называется *счётно ступенчатой*, если $X$ разбивается в счётное объединение измеримых множеств $X = \bigsqcup_i X_i$ и на каждом $X_i$ функция равна константе $c_i$.

Для краткости в этом разделе мы будем называть счётно ступенчатые функции просто *ступенчатыми*. В данном определении удобно термином «счётное» обозначать любое не более чем счётное множество. Формально, если разбиение было конечным, то к нему можно дописать счётное количество пустых множеств и получить счётное разбиение. Из счётной аддитивности меры Лебега следует, что область определения функции, множество $X$, в этом определении оказывается измеримой по Лебегу.

*Задача* 5.66. Проверьте, что любая ступенчатая функция измерима по Лебегу.

[[ Заметьте, что $\{x \mid f(x) < c\} = \bigcup_{c_i<c} X_i$. ]]

**Определение 5.67.** Для ступенчатой функции из предыдущего определения положим

$$\int_X f(x)\,dx = \sum_i c_i\mu(X_i),$$

считая $0 \cdot (+\infty) = 0$. В этом определении мы требуем, чтобы сумма не зависела от порядка суммирования.

В этом определении можно также разрешить ступенчатым функциям значения $\pm\infty$, считая, что $\pm\infty \cdot 0 = 0$ и $\pm\infty \cdot M = \pm\infty$ при положительных $M$.

Заметим, что сумма не зависит от порядка суммирования, если она абсолютно сходится. Также сумма не будет зависеть от порядка суммирования в случае, если все её слагаемые одного знака, тогда она может оказаться равной $+\infty$ или $-\infty$. В более общем случае, мы можем отдельно просуммировать положительные слагаемые и отдельно просуммировать отрицательные слагаемые, а потом сложить результаты. Это не сработает только если сумма положительных слагаемых равна $+\infty$, а сумма отрицательных слагаемых равна $-\infty$. В остальных случаях интегралу можно корректно приписать некоторое значение на расширенной числовой прямой, которое мы и будем использовать далее.

**Лемма 5.68.** *Определение интеграла от ступенчатой функции корректно, а именно, если функция является ступенчатой относительно двух разных разбиений области определения на основания ступенек, $X = \bigsqcup_i X'_i$ и $X = \bigsqcup_j X''_j$, то значение интеграла будет одним и тем же для обоих разбиений.*

*Доказательство.* Множества $X'_i \cap X''_j$, индексируемые счётным семейством пар $(i, j)$, тоже образуют счётное измеримое разбиение $X$, которое является *измельчением* каждого из исходных разбиений. В том смысле, что множество $X'_i$, например, при «измельчении» заменяется на счётное объединение $X'_i = \bigsqcup_j X'_i \cap X''_j$.

При переходе от одного разбиения к его измельчению счётная аддитивность меры Лебега позволяет нам установить, что интеграл ступенчатой функции от измельчения её множества ступенек не меняется. Более явно это можно записать как, считая $f(X'_i) = c'_i$ и $f(X''_j) = c''_j$,

$$\sum_i c'_i\mu(X'_i) = \sum_i\sum_j c'_i\mu(X'_i \cap X''_j) = \sum_j\sum_i c''_j\mu(X'_i \cap X''_j) = \sum_j c''_j\mu(X''_j),$$

так как на каждом непустом пересечении $X'_i \cap X''_j$ функция должна принимать одно и то же значение $c'_i = c''_j$, а пустые пересечения не вносят вклада в сумму.

Обосновать перестановку повторных сумм в написанных равенствах можно, разбив все суммы на две части, соответствующие случаям $f(x) \geqslant 0$ и $f(x) < 0$, и используя повторное суммирование чисел одного и того же знака. Для сумм одного знака порядок повторного суммирования можно менять даже при наличии бесконечных значений в процессе суммирования.

Если в сумме $\sum_i c'_i\mu(X'_i)$ есть слагаемые разных знаков, но интеграл этой суммой определён, то без ограничения общности можно считать, что сумма отрицательных слагаемых в этой сумме конечна. Тогда сумма отрицательных слагаемых в сумме

$$\sum_i\sum_j c'_i\mu(X'_i \cap X''_j)$$

тоже конечна и эту повторную сумму можно поменять на

$$\sum_j\sum_i c''_j\mu(X'_i \cap X''_j).$$

Линейность при сборке суммы из положительной и отрицательной части будет обеспечена тем, что в этом случае значение $-\infty$ не появится, а сумма, содержащая $+\infty$, будет считаться равной $+\infty$. ☐

После доказательства корректности уже нетрудно доказать стандартные свойства интеграла ступенчатых функций. Для доказательства линейности,

$$\int_X (af(x) + bg(x))\ dx = a\int_X f(x)\ dx + b\int_X g(x)\ dx$$

нам достаточно перейти к разбиению (типа рассмотренного выше разбиения на множества $X'_i \cap X''_j$), на котором обе функции $f$ и $g$ будут ступенчатыми одновременно и просто сложить абсолютно сходящиеся ряды. Для доказательства монотонности

$$\forall x\ f(x) \geqslant g(x) \Rightarrow \int_X f(x)\ dx \geqslant \int_X g(x)\ dx$$

нам тоже достаточно рассмотреть подходящее для обеих функций разбиение на ступеньки и применить монотонность суммирования (или просто воспользоваться линейностью и рассмотреть разность интегралов). Докажем теперь менее тривиальное свойство интеграла ступенчатой функции.

**Лемма 5.69** (Счётная аддитивность интеграла Лебега ступенчатой функции по множествам). *Пусть ступенчатая функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет конечный или корректно определённый бесконечный интеграл Лебега на множестве $X$, которое представляется в виде объединения попарно не пересекающихся измеримых по Лебегу множеств как $X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Y_k$. Тогда*

$$\int_X f(x)\ dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{Y_k} f(x)\ dx.$$

*Доказательство.* Пусть $f$ ступенчатая на измеримых ступеньках $\{X_i\}$, $f(X_i) = c_i$. Просуммируем равенства

$$\mu(X_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_i \cap Y_k),$$

верные в силу счётной аддитивности меры Лебега, с коэффициентами $c_i$. Тогда получится

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu(X_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_i \mu(X_i \cap Y_k).$$

Если во втором выражении можно суммировать повторно в другом порядке, то по определению интеграла Лебега как раз получается требуемое равенство с возможно бесконечными интегралами. Заметим, что если мы разобьём сумму (интеграл $f$ по $X$) в левой части на две части, с положительными $c_i$ и отрицательными $c_i$, то для каждой из этих частей по отдельности замена порядка повторного суммирования будет корректной.

Если интеграл $f$ корректно определён, то в его определении либо сумма отрицательных слагаемых конечна, либо сумма положительных слагаемых конечна. Рассмотрим без ограничения общности первый случай. В нём получается, что в суммах

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu(X_i \cap Y_k) = \int_{Y_k} f(x)\, dx$$

сумма отрицательных слагаемых конечна и все эти суммы (интегралы) корректно определены как числа или $+\infty$. Линейность при сборке доказываемого равенства из положительной и отрицательной части будет обеспечена тем, что в этом случае значение $-\infty$ не появится, а сумма, содержащая $+\infty$, будет считаться равной $+\infty$. □

Чтобы определить интеграл Лебега произвольной функции, мы хотим приближать её ступенчатыми снизу и сверху и смотреть, можно ли сделать зазор между интегралами от этих приближений произвольно малым. Следующее утверждение показывает, что для измеримых функций в некотором смысле это возможно с произвольно малым в смысле интеграла зазором.

**Лемма 5.70.** *Для любой измеримой по Лебегу функции $f : X \to \mathbb{R}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся две ступенчатые функции $g, h : X \to \mathbb{R}$, такие что $g \leqslant f \leqslant h$ и*

$$\int_X (h(x) - g(x))\, dx < \varepsilon.$$

*Доказательство.* Рассмотрим сначала случай, когда $X$ имеет конечную меру. Положим

$$X_i = \{x \in X \mid \varepsilon i \leqslant f(x) < \varepsilon(i+1)\}$$

при $i \in \mathbb{Z}$, это счётное разбиение $X$ на измеримые ступеньки. Определим ступенчатые функции

$$g(X_i) = \varepsilon i, h(X_i) = \varepsilon(i+1),$$

очевидно, что $g \leqslant f \leqslant h$ и $\int_X (h(x) - g(x))\, dx = \varepsilon\mu(X)$.

Множество $X$ с бесконечной мерой можно разбить на счётное количество множеств $Y_i$ с конечной мерой, на $Y_i$ приблизить функцию ступенчатыми с точностью $2^{-i}\varepsilon$, и собрать общее приближение с точностью $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\varepsilon = \varepsilon$, используя лемму 5.69 для интеграла от $\int_X (h(x) - g(x))\, dx$. □

Предыдущая лемма не утверждает, что ступенчатые $g$ и $h$ имеют интеграл Лебега, так как мы ничего не знаем об абсолютной сходимости определяющих их интегралы рядов. Однако уже можно утверждать, что построенные в доказательстве теоремы $g$ и $h$ имеют или не имеют сходящийся интеграл Лебега одновременно, так как у их разности интеграл Лебега конечен. Лемму можно считать работающей и в случае наличия у $f$ значений $\pm\infty$, в этом случае достаточно положить $g = f = h$ на тех (измеримых) множествах, где $f$ принимает бесконечные значения, и считать, что там $h - g = 0$.

*Задача* 5.71. Докажите формулу включений-исключений для множеств $X_1, \dots, X_N \subseteq \mathbb{R}^n$ конечной меры

$$\mu\left(X_1 \cup \dots \cup X_N\right) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \mu\left(X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_K}\right).$$

[[ Проинтегрируйте выражение $1-(1-\chi_{X_1})\dots(1-\chi_{X_N})$, где $\chi_{X_i}$ — характеристическая функция $X_i$. ]]

*Задача* 5.72 (Теорема Лузина). Докажите, что если $f : X \to \mathbb{R}$ измерима по Лебегу, то для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $Y \subseteq X$, такое что $\mu(X \setminus Y) < \varepsilon$ и сужение $f|_Y$ непрерывно.

[[ Сведите к случаю $X$ конечной меры и докажите утверждение для ступенчатых функций, применив к основанию каждой ступеньки теорему 5.35. Потом представьте исходную измеримую $f$ в виде равномерного предела ступенчатых и используйте теорему 4.41. ]]

5.10. **Интеграл Лебега для произвольных функций.** Определение интеграла Лебега произвольной функции мы дадим через её приближение ступенчатыми снизу и сверху.

**Определение 5.73.** Для функции $f : X \to \mathbb{R}$ на измеримом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$ определим *нижний интеграл Лебега* как

$$\underline{\int_X} f(x)\,dx = \sup \int_X g(x)\,dx$$

по интегрируемым ступенчатым $g \leqslant f$. Определим *верхний интеграл Лебега* как

$$\overline{\int_X} f(x)\,dx = \inf \int_X h(x)\,dx$$

по интегрируемым ступенчатым $h \geqslant f$.

Если не находится ступенчатой функции $g \leqslant f$ с конечным интегралом, то нижний интеграл $f$ можно считать равным $-\infty$, а если не находится ступенчатой $h \geqslant f$ с конечным интегралом, то верхний интеграл можно считать равным $+\infty$. Из монотонности интеграла ступенчатой функции также следует, что нижний интеграл Лебега $f$ не более верхнего интеграла Лебега $f$.

**Определение 5.74.** Будем говорить, что функция $f : X \to \mathbb{R}$ на измеримом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *интегрируема по Лебегу с конечным интегралом*, если её нижний и верхний интегралы Лебега конечны и равны между собой.

Имеет смысл пытаться интегрировать по Лебегу только измеримые по Лебегу функции, теорема 5.84 далее объяснит, что интегрируемая по Лебегу с конечным интегралом функция обязана быть измеримой по Лебегу. С другой стороны, для измеримой функции либо верхний интеграл равен нижнему, либо нижний равен $-\infty$, а верхний равен $+\infty$ (когда функцию нельзя приблизить ступенчатой с конечным интегралом ни снизу, ни сверху). Это обосновывается в следующей лемме.

**Лемма 5.75.** *Если измеримая функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *может быть оценена снизу* $g_0 \leqslant f$ *ступенчатой функцией с конечным интегралом, то она сама имеет конечный интеграл Лебега или её нижний интеграл Лебега равен* $+\infty$*. Если измеримая функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *может быть оценена сверху* $h_0 \geqslant f$ *ступенчатой функцией с конечным интегралом, то она сама имеет конечный интеграл Лебега или её верхний интеграл Лебега равен* $-\infty$*.*

*Доказательство.* Достаточно доказать утверждение для оценки снизу $g_0 \leqslant f$. Для любого $\varepsilon > 0$ применим лемму 5.70 и найдём ступенчатые функции, $g \leqslant f \leqslant h$, такие что

$$\int_X (h(x) - g(x))\,dx < \varepsilon.$$

Определим новую ступенчатую функцию по формуле

$$g^*(x) = \max\{g_0(x), g(x)\}.$$

Выполняются неравенства

$$\int_X g^*(x)\,dx \geqslant \int_X g(x)\,dx, \quad \text{и} \quad \int_X g^*(x)\,dx \geqslant \int_X g_0(x)\,dx,$$

из которых следует, что интеграл ступенчатой функции $g^*$ либо конечен, либо корректно определён как $+\infty$. Также из неравенства $g \leqslant g^* \leqslant h$ следует, что

$$\int_X (h(x) - g^*(x))\,dx < \varepsilon.$$

Далее рассмотрим два случая.

Интеграл $g^*$ конечен. Тогда по линейности интеграла ступенчатых функций (для формулы $h = g^* + (h - g^*)$) следует, что $\int_X h(x)\ dx$ существует, конечен, и отличается от интеграла $\int_X g^*\ dx$ не более, чем на $\varepsilon$. Такая оценка $g^* \leqslant f \leqslant h$ получается для любого $\varepsilon$, и это означает, что верхний и нижний интегралы $f$ конечны и равны.

Интеграл $g^*$ равен $+\infty$. Тогда и нижний, и верхний интегралы $f$ равны $+\infty$ по определению. ☐

**Следствие 5.76.** *Измеримая функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *может быть оценена снизу и сверху ступенчатыми функциями с конечным интегралом тогда и только тогда, когда она сама имеет конечный интеграл Лебега.*

*Задача* 5.77. Докажите, что если $f : X \to \mathbb{R}$ имеет конечный интеграл, то её сужение на измеримое $Y \subseteq X$ тоже будет иметь конечный интеграл.

[[ Проверьте это утверждение для ступенчатых функций, а потом докажите в общем случае. ]]

Неотрицательную измеримую функцию можно приблизить снизу нулём, поэтому по лемме 5.75 она имеет либо конечный интеграл, либо нижний и верхний интегралы, равный $+\infty$. Аналогично для неположительной измеримой функции. Следовательно, если $f : X \to \mathbb{R}$ измерима, неотрицательна и не имеет конечного интеграла, то её интеграл Лебега по оказывается равным $+\infty$. Если $f : X \to \mathbb{R}$ измерима, неположительна и не имеет конечного интеграла, то её интеграл Лебега оказывается равным $-\infty$.

Заметим, что ступенчатым функциям мы разрешали принимать значения $+\infty$ и $-\infty$, с определёнными соглашениями о вычислении сумм в определении их интеграла. Для произвольной измеримой функции мы также можем разрешить значения $+\infty$ и $-\infty$ на измеримых множествах.

Если значение $+\infty$ принимается на множестве положительной меры и $-\infty$ принимается на множестве положительной меры, то определить интеграл функции не удастся.

Если же значение $+\infty$ принимается на множестве положительной меры, а $-\infty$ принимается на множестве меры нуль, то остаётся возможность, что интеграл можно будет определить как $+\infty$. Также очевидно, что если значения $\pm\infty$ принимаются на множестве меры нуль, то на определение интеграла они не влияют.

Для знакопеременной ступенчатой функции в определении конечного интеграла Лебега требуется абсолютная сходимость. Следующая теорема обобщает это на произвольные функции с конечным интегралом, и обобщает свойство суммирования абсолютно сходящихся рядов отдельно по положительной и отрицательной части:

**Теорема 5.78.** *Для функции $f : X \to \mathbb{R}$ положим*

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0; \\ 0, & \text{если } f(x) \leqslant 0; \end{cases}$$

*и*

$$f_-(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \leqslant 0; \\ 0, & \text{если } f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

*Интеграл $\int_X f(x)\ dx$ определён и конечен тогда и только тогда, когда интегралы $\int_X f_+(x)\ dx$ и $\int_X f_-(x)\ dx$ определены и конечны.*

*Доказательство.* Если интеграл $f$ конечен, то приблизим $f$ ступенчатыми функциями $g \leqslant f \leqslant h$ с конечными интегралами, тогда для любого $x \in X$ выполняется

$$f_+(x) \leqslant h_+(x), \quad f_-(x) \geqslant g_-(x).$$

Для ступенчатых функций утверждение теоремы очевидно из соответствующего свойства абсолютно сходящихся рядов, следовательно для положительной части мы имеем оценку

$$\int_X f_+(x)\ dx \leqslant \int_X h_+(x)\ dx < +\infty$$

и для отрицательной части

$$\int_X f_-(x)\ dx \geqslant \int_X g_-(x)\ dx > -\infty.$$

В обратную сторону, из приближений положительной и отрицательной части ступенчатыми с конечным интегралом можно сделать и приближение исходной функции ступенчатыми с конечным интегралом, просто сложив их и воспользовавшись линейностью интеграла ступенчатой функции. ☐

В частности, сходимость конечного интеграла Лебега всегда абсолютная в следующем смысле:

**Следствие 5.79** (Абсолютная сходимость интеграла Лебега). *Если интеграл $\int_X f(x)\ dx$ определён и конечен, то интеграл $\int_X |f(x)|\ dx$ тоже конечен.*

В следующем разделе мы установим линейность интеграла Лебега, которая в рассматриваемой ситуации влечёт выполнение равенства

$$\int_X f(x)\ dx = \int_X f_+(x)\ dx + \int_X f_-(x)\ dx.$$

Иногда его используют для определения интеграла Лебега произвольной измеримой функции через интеграл Лебега знакопостоянной измеримой функции. Слагаемые в правой части равенства лежат в промежутках $[0, +\infty]$ и $[-\infty, 0]$ соответственно и их сумме можно придать определённое значение в $[-\infty, +\infty]$ в почти всех случаях, кроме случая, когда они оба бесконечны с разными знаками (аналогично определению интеграла ступенчатой функции).

Тонкий момент заключается в том, что в соответствии с нашим определением интеграла Лебега через приближения ступенчатыми функциями сверху и снизу неизмеримая по Лебегу функция может иметь интеграл $-\infty$ или $+\infty$. Однако, мы будем рассматривать интеграл Лебега только для измеримых по Лебегу функций.

*Задача* 5.80. Докажите, что интегрируемая по Риману на отрезке функция интегрируема и по Лебегу с тем же интегралом.

[[ Заметьте, что класс ступенчатых по Лебегу функций содержит в себе класс элементарно ступенчатых (с конечным числом элементарных ступенек), который используется в определении интеграла Римана. ]]

## 5.11. Линейность и монотонность интеграла Лебега.

Линейность и монотонность интеграла Лебега выводится из соответствующих свойств интеграла ступенчатых функций.

**Теорема 5.81** (Линейность интеграла Лебега). *Если интегралы $\int_X f_1(x)\,dx$ и $\int_X f_2(x)\,dx$ определены и конечны, а $A, B \in \mathbb{R}$, то интеграл от $Af_1 + Bf_2$ определён и выполняется равенство*

$$\int_X (Af_1 + Bf_2)\,dx = A\int_X f_1\,dx + B\int_X f_2\,dx.$$

*Доказательство.* Имея два приближения

$$g_1 \leqslant f_1 \leqslant h_1, \quad g_2 \leqslant f_2 \leqslant h_2,$$

в случае $A, B \geqslant 0$ (другие случаи делаются аналогично с переменой мест $g_i$ и $h_i$) мы получаем приближение

$$Ag_1 + Bg_2 \leqslant Af_1 + Bf_2 \leqslant Ah_1 + Bh_2.$$

Для интеграла с учётом установленной линейности для ступенчатых функций мы знаем

$$A\int_X g_1\,dx + B\int_X g_2\,dx \leqslant \underline{\int_X}(Af_1 + Bf_2)\,dx \leqslant \overline{\int_X}(Af_1 + Bf_2)\,dx \leqslant A\int_X h_1\,dx + B\int_X h_2\,dx$$

и

$$A\int_X g_1\,dx + B\int_X g_2\,dx \leqslant A\int_X f_1\,dx + B\int_X f_2\,dx \leqslant A\int_X h_1\,dx + B\int_X h_2\,dx.$$

Зазор между левой и правой частью в этих цепочках неравенств может быть сделан произвольно малым, из чего и следует равенство средних частей цепочек и существование интеграла линейной комбинации

$$\int_X (Af_1 + Bf_2)\,dx = A\int_X f_1\,dx + B\int_X f_2\,dx.$$

□

**Теорема 5.82** (Монотонность интеграла Лебега). *Если интегралы $\int_X f_1(x)\,dx$ и $\int_X f_2(x)\,dx$ определены и $f_1 \leqslant f_2$ на множестве $X$, то*

$$\int_X f_1(x)\,dx \leqslant \int_X f_2(x)\,dx.$$

*Доказательство.* Любое приближение снизу ступенчатой функцией $g \leqslant f_1$ является также приближением снизу для $f_2$. Следовательно, требуемое неравенство верно для нижних интегралов Лебега, так как точная верхняя грань не может уменьшиться при переходе к большему множеству. В рассматриваемом случае интегралы Лебега определены и равны нижним интегралом Лебега. ☐

Заметим, что для функций с конечным интегралом монотонность, с учётом линейности, легко сводится к доказательству того, что интеграл неотрицательной функции неотрицателен. Это рассуждение можно усилить до следующего.

**Теорема 5.83** (Строгая монотонность интеграла Лебега). *Если функция $f \geqslant 0$ измерима по Лебегу на множестве $X$, то*

$$\int_X f(x)\,dx \geqslant 0.$$

*При этом*

$$\int_X f(x)\,dx = 0$$

*тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$ на всём $X$, кроме множества лебеговой меры нуль.*

*Доказательство.* Первое утверждение следует из приближения $f$ снизу нулём, как объяснено до формулировки теоремы.

Для доказательства второго утверждения предположим противное: множество $X_+ = \{x \in X \mid f(x) > 0\}$ имеет положительную меру. Оно является объединением счётной последовательности множеств

$$X_n = \{x \mid f(x) > 1/n\},$$

значит какое-то $X_n$ должно иметь положительную меру по свойству непрерывности меры Лебега. Но тогда по определению интеграл Лебега $f$ можно оценить снизу интегралом ступенчатой функции со ступенькой на множестве $X_n$ высоты $1/n$:

$$\int_X f(x)\,dx \geqslant \int_X \frac{1}{n}\chi_{X_n}(x)\,dx = \frac{\mu(X_n)}{n} > 0.$$

☐

Следующая теорема дополнительно проясняет определение интеграла Лебега:

**Теорема 5.84.** *Интегрируемая по Лебегу функция с конечным интегралом обязана быть измеримой по Лебегу.*

*Доказательство.* Если $f$ можно заключить между двумя ступенчатыми $g \leqslant f \leqslant h$ так, что разность их интегралов произвольно мала, то можно и выбрать последовательность ступенчатых $g_n \leqslant f$ и последовательность ступенчатых $h_n \geqslant f$ так, что

$$\int_X h_n\,dx \to \int_X f\,dx, \quad \text{и} \quad \int_X g_n\,dx \to \int_X f\,dx.$$

Положим

$$g(x) = \sup\{g_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad h(x) = \inf\{h_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\},$$

эти функции будут измеримыми по Лебегу. Из неравенств $g_n \leqslant g \leqslant f \leqslant h \leqslant h_n$ для функций следуют соответствующие неравенства для их интегралов,

$$\int_X g_n\,dx \leqslant \int_X g\,dx \leqslant \int_X f\,dx \leqslant \int_X h\,dx \leqslant \int_X h_n\,dx,$$

и следует существование конечных интегралов $g$ и $h$. А после перехода к пределу $n \to \infty$ будет следовать, что интегралы $g$ и $h$ равны между собой и равны интегралу $f$. Следовательно

$$\int_X (h - g)\, dx = 0,$$

и по предыдущей теореме $h = g$ на множестве $Y \subset X$, таком что $\mu(X \setminus Y) = 0$. Тогда на $Y$ также выполняется $g = f = h$, а следовательно $f$ совпадает с измеримой функцией везде, кроме множества $X \setminus Y$ меры нуль, а значит сама $f$ тоже измерима. ☐

Как было упомянуто выше, когда мы говорим о бесконечном интеграле Лебега некоторой функции, то мы предполагаем её измеримость по определению.

*Задача* 5.85. Докажите, что любая функция $f : X \to \mathbb{R}$ с конечным интегралом Лебега совпадает с некоторой борелевской функцией $g : Y \to \mathbb{R}$ за исключением множества меры нуль (в частности $\mu(X \triangle Y) = 0$) и их интегралы совпадают.

[[ Используйте следствие 5.55 и проверьте, что происходит с интегралом. ]]

5.12. **Приближение интегрируемых функций в среднем.** Определение интеграла Лебега подразумевает приближение функции ступенчатыми в некотором смысле. В общем случае *сколь угодно точное приближение в среднем* функции $f : X \to \mathbb{R}$ функциями из некоторого класса $\mathcal{G}$ (то есть просто из некоторого множества функций) — это выполнение условия

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists g \in \mathcal{G}\ \int_X |f(x) - g(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Получающееся интегрированием неравенства треугольника для чисел неравенство треугольника для соответствующего «расстояния в среднем»,

$$\int_X |f - h|\, dx \leqslant \int_X |f - g|\, dx + \int_X |g - h|\, dx,$$

позволяет рассуждать о приближениях в среднем как о приближениях в метрическом пространстве. Правда метрика вырождена, так как почти всюду совпадающие функции $f$ и $g$ будут иметь нулевое расстояние $\int_X |f - g|\, dx$.

Если функция $f$ приближена в среднем функцией $g$ с точностью $\varepsilon$, то интегрируя неравенство $-|f - g| \leqslant f - g \leqslant |f - g|$, получаем, что

$$-\varepsilon < -\int_X |f - g|\, dx \leqslant \int_X (f - g)\, dx \leqslant \int_X |f - g|\, dx < \varepsilon.$$

Следовательно, интегралы $f$ и $g$ отличаются не более чем на $\varepsilon$, если хотя бы один из интегралов конечен.

Определение интеграла Лебега означает, что любую функцию с конечным интегралом Лебега можно сколь угодно близко приблизить в среднем ступенчатой функцией, причём можно приближать и сверху, и снизу. Оказывается, приближать можно даже более простыми функциями (отбросив требование приближения сверху или снизу).

**Определение 5.86.** Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *элементарно ступенчатой*, если она является ступенчатой с конечным числом ступенек, каждая из которых либо элементарна, либо функция на этой ступеньке равна нулю.

**Теорема 5.87.** *Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу с конечным интегралом. Тогда $f$ можно сколь угодно близко приблизить в среднем элементарно ступенчатой функцией.*

*Доказательство.* Возьмём $\varepsilon > 0$. Из определения интеграла непосредственно следует, что можно в среднем с точностью $\varepsilon$ приблизить функцию $f$ ступенчатой функцией $g$ из счётного числа измеримых по Лебегу ступенек. Если основание какой-то ступеньки имеет бесконечную меру Лебега, то разобьём её на счётное количество ступенек с конечными мерами основания и будем считать, что основания всех ступенек имеют конечные меры Лебега.

Далее из определения интеграла $g$ следует, что можно оставить в этой функции конечное число ступенек с ненулевыми значениями функции и получить функцию $h$ так, что разность между $g$ и $h$ будет иметь меньший $\varepsilon$ интеграл модуля. Тогда из неравенства треугольника получается

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - h(x)|\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |g(x) - h(x)|\, dx < 2\varepsilon.$$

Теперь $h$ состоит из конечного числа ступенек, основания которых имеют конечные меры Лебега, что можно выразить через характеристические функции ступенек

$$h(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{X_k}(x).$$

Пусть $M = \sum_{k=1}^{N} |a_k|$. Основание каждой ступеньки $X_k$ можно приблизить элементарным множеством по определению конечной меры Лебега, у нас получаются элементарные множества $S_k$, такие что

$$\mu(S_k \triangle X_k) = \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{X_k}(x) - \chi_{S_k}(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{MN}.$$

Тогда положив

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{S_k}(x),$$

мы будем иметь неравенство (из неравенства треугольника для приближения в среднем)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x) - \varphi(x)|\, dx < \sum_{k=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^n} |a_k| \cdot |\chi_{X_k}(x) - \chi_{S_k}(x)|\, dx < \varepsilon.$$

В итоге наша исходная функция $f$ оказывается приближена в среднем элементарно ступенчатой $\varphi$ с точностью $3\varepsilon$, где $\varepsilon$ — любое положительное число. ☐

Предыдущая теорема показывает, что функция на всём евклидовом пространстве с конечным интегралом Лебега сколь угодно близко приближается элементарно ступенчатой и, в частности, приближается ограниченной. Иногда полезно приближать функцию ограниченной более контролируемым образом и на произвольном измеримом множестве, как в следующей теореме.

**Теорема 5.88.** *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу с конечным интегралом. Положим для $M > 0$*

$$f_M(x) = \begin{cases} M, & \text{если } f(x) \geqslant M; \\ f(x), & \text{если } |f(x)| \leqslant M; \\ -M, & \text{если } f(x) \leqslant -M. \end{cases}$$

*Тогда*

$$\lim_{M \to +\infty} \int_X f_M(x)\, dx = \int_X f(x)\, dx \quad \text{и} \quad \lim_{M \to +\infty} \int_X |f(x) - f_M(x)|\, dx = 0.$$

*Доказательство.* Рассуждая аналогично началу доказательства предыдущей теоремы, приблизим $f$ конечно ступенчатой $g$ в среднем с точностью $\varepsilon$ на $X$. Так как $g$ имеет конечное число ступенек, то она ограничена и при $M > \sup\{|g(x)| \mid x \in X\}$ выполняется $g_M = g$; далее будем рассматривать именно такие $M$. Так как $f_M$ получается из $f$ композицией слева с 1-липшицевой функцией и аналогично $g_M$ получается из $g$, то можно написать

$$|f_M - g| = |f_M - g_M| \leqslant |f - g|.$$

Тогда в каждой точке выполняется неравенство

$$|f_M - f| \leqslant |f_M - g| + |g - f| = |f_M - g_M| + |g - f| \leqslant 2|f - g|,$$

а после интегрирования получается

$$\int_X |f_M - f|\, dx \leqslant 2 \int_X |f - g|\, dx < 2\varepsilon.$$

Разница между интегралами $f$ и $f_M$ при этом тоже будет меньше $2\varepsilon$. ☐

Дальнейшее изложение приближения функций разными способами мы откладываем до разделов 6.3 и 8.3.

*Задача* 5.89. Докажите, что если функцию $f$ на отрезке можно приблизить функциями из некоторого класса $\mathcal{G}$ равномерно, то её можно приблизить функциями $\mathcal{G}$ и в среднем. Докажите, что на прямой (или в $\mathbb{R}^n$) из возможности приблизить равномерно возможность приблизить в среднем не следует.

[[ Проверьте, когда ограниченность функции позволяет ограничить её интеграл. ]]

5.13. **Счётная аддитивность и непрерывность интеграла Лебега по множествам.** Установим некоторые свойства интеграла Лебега, которые аналогичны соответствующим свойствам меры Лебега.

**Теорема 5.90** (Счётная аддитивность интеграла Лебега по множествам)**.** *Если измеримая функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет конечный или корректно определённый бесконечный интеграл на множестве $X$, которое представляется в виде объединения попарно не пересекающихся измеримых по Лебегу множеств как $X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Y_k$, то*

$$\int_X f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Y_k} f(x)\, dx.$$

*Доказательство.* Для ступенчатой функции это утверждение леммы 5.69. Для произвольной интегрируемой функции (в том числе с определённым бесконечным интегралом) утверждение следует из её приближения ступенчатыми сверху и снизу, $g \leqslant f \leqslant h$. Из неравенств

$$\int_X g\, dx \leqslant \int_X f\, dx \leqslant \int_X h\, dx$$

и

$$\int_X g\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Y_k} g(x)\, dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \underline{\int_{Y_k}} f(x)\, dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\int_{Y_k}} f(x)\, dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Y_k} h(x)\, dx = \int_X h\, dx$$

в пределе $\int_X (h(x) - g(x))\, dx \to 0$ получается интегрируемость $f$ на каждом $Y_k$ и равенство из условия теоремы. ☐

*Задача* 5.91. Приведите пример измеримой на $X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Y_k$ функции $f$, которая имеет на каждом $Y_k$ конечный интеграл, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{Y_k} f(x)\ dx$$

абсолютно сходится, но $f$ не имеет интеграла на всём $X$.

[[ Добейтесь, чтобы интегралы от положительной части $f$ и отрицательной части $f$ были бесконечны при выполнении условий задачи. ]]

Далее из счётной аддитивности интеграла мы получаем следствия примерно так же, как мы получали следствия из счётной аддитивности меры.

**Теорема 5.92** (Непрерывность интеграла Лебега по множествам)**.** *Пусть множества $X_k \subseteq \mathbb{R}^n$ измеримы по Лебегу и возрастают по включению*

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \dots \subseteq X_k \subseteq X_{k+1} \subseteq \dots.$$

*Пусть также $X = \bigcup_k X_k$ и интеграл Лебега $\int_X f(x)\ dx$ конечный или корректно определённый бесконечный. Тогда*

$$\int_X f(x)\ dx = \lim_{k\to\infty} \int_{X_k} f(x)\ dx.$$

*Доказательство.* Аналогично доказательству теоремы 5.29 утверждение сводится к счётной аддитивности интеграла Лебега, если положить $Y_1 = X_1$, $Y_2 = X_2 \setminus X_1$, ..., $Y_k = X_k \setminus X_{k-1}, \dots$ Тогда

$$\int_{X_k} f(x)\ dx = \sum_{\ell=1}^{k} \int_{Y_\ell} f(x)\ dx,$$

и в пределе $k \to \infty$ в правой части получается интеграл $f$ по $X$. ☐

В предыдущих теоремах существование интеграла $f$ достаточно в любом виде: как конечного интеграла, как бесконечного интеграла знакопостоянной функции, или даже как бесконечного интеграла знакопеременной функции (например, если интеграл её положительной части бесконечен, о отрицательной — конечен). В следующей же теореме будет требоваться конечный интеграл.

**Теорема 5.93** (Непрерывность интеграла Лебега по убыванию множеств)**.** *Пусть множества $X_k \subseteq \mathbb{R}^n$ измеримы по Лебегу и убывают по включению*

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq X_3 \supseteq \dots \supseteq X_k \supseteq X_{k+1} \supseteq \dots.$$

*Пусть также $X = \bigcap_k X_k$ и интеграл Лебега $\int_{X_1} f(x)\ dx$ конечен. Тогда*

$$\int_X f(x)\ dx = \lim_{k\to\infty} \int_{X_k} f(x)\ dx.$$

*Доказательство.* Сводится к предыдущей теореме, если положить $X'_k = X_1 \setminus X_k$ и воспользоваться аддитивностью

$$\int_{X_1} f(x)\ dx = \int_{X_1\setminus X} f(x)\ dx + \int_X f(x)\ dx.$$

☐

Обратите внимание, что, например, в случае бесконечных интегралов неотрицательных функций предыдущая теорема может быть неверна и приведите соответствующие примеры (аналогично задаче 5.31). Для функции одной переменной полезен следующий вариант непрерывности интеграла по отрезку интегрирования.

**Теорема 5.94** (Непрерывность интеграла Лебега по верхнему пределу). *Если $f$ интегрируема по Лебегу на отрезке $[a,b]$ с конечным интегралом, то выражение*

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

*непрерывно зависит от $x \in [a,b]$.*

*Доказательство.* По теореме 5.88 приблизим $f$ на отрезке в среднем ограниченными функциями $f_n$. Пусть

$$\int_a^b |f(x) - f_n(x)|\, dx < \frac{1}{n}$$

и $|f_n|$ ограничен числом $M_n$. Положим

$$g_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt.$$

Очевидно

$$|g_n(x) - g(x)| \leqslant \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\, dt < \frac{1}{n},$$

то есть $g_n$ равномерно стремятся к $g$ на отрезке $[a,b]$. Кроме того, для любых $x, y \in [a,b]$

$$|g_n(x) - g_n(y)| \leqslant \left| \int_x^y |f_n(t)|\, dt \right| \leqslant M_n |x - y|.$$

Следовательно, функции $g_n$ непрерывны и их равномерный предел $g$ тоже непрерывен.

□

Функция $g$ из предыдущего утверждения на самом деле обладает более сильным свойством, чем непрерывность. Это будет обсуждаться в разделе 8.5, а пока одно из нужных для понимания этого вопроса утверждений предлагается для самостоятельного решения.

*Задача* 5.95 (Абсолютная непрерывность интеграла Лебега). Пусть $f$ интегрируема по Лебегу на отрезке $[a,b]$ с конечным интегралом. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое, что если $X \subset [a,b]$ измеримо и $\mu(X) < \delta$, то

$$\int_X |f(x)|\, dx < \varepsilon.$$

[[ Приближайте $f$ ограниченными функциями, как в доказательстве теоремы 5.94 или посмотрите на доказательство теоремы 8.31. ]]

*Задача* 5.96. Найдите интеграл Лебега $\int_1^{+\infty} x^s\, dx$ в зависимости от $s \in \mathbb{R}$.

[[ Обоснуйте существование интеграла Лебега. Посчитайте интеграл на конечном отрезке $[1,n]$ по Риману с помощью формулы Ньютона–Лейбница и перейдите к пределу $n \to +\infty$. ]]

*Задача* 5.97. Найдите интеграл Лебега $\int_0^1 x^s\, dx$ в зависимости от $s \in \mathbb{R}$.

[[ Аналогично предыдущей задаче. ]]

5.14. **Предельный переход в интеграле Лебега по функциям.** Далее мы будем изучать, насколько переход к пределу функций соответствует переходу к пределу для их интегралов. Важным свойством интеграла Лебега оказывается, что не обязательно требовать равномерной сходимости для последовательности функций, в некоторых случаях поточечной сходимости будет достаточно.

**Теорема 5.98** (Теорема о монотонной сходимости). *Пусть функции $f_k$ $(k \in \mathbb{N})$ на измеримом $X$ неотрицательны и измеримы по Лебегу, при этом при любом $x \in X$ последовательность $f_k(x)$ возрастает и стремится к $f(x)$ (значения $+\infty$ разрешены). Тогда*

$$\int_X f_k\, dx \to \int_X f\, dx, \quad k \to \infty.$$

*Доказательство.* Напомним, что по теореме 5.48 поточечные пределы измеримых функций измеримы, так что $f$ будет измеримой с конечным или бесконечным интегралом. Из монотонности интеграла сразу следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k\, dx \leqslant \int_X f\, dx.$$

Остаётся доказать, что левая часть не менее правой. Можно выбросить из $X$ те точки, где $f(x)$ равна нулю, так как остальные $f_k$ в этих точках тоже обязаны быть равны нулю. В итоге, мы считаем все функции неотрицательными, а $f$ считаем положительной.

Сначала рассмотрим случай, когда $f(x) = +\infty$ на множестве меры нуль. Тогда можно выбросить это множество. Возьмём теперь $\varepsilon > 0$. Положим

$$X_k = \{x \in X \mid f_k(x) \geqslant (1-\varepsilon) f(x)\},$$

это измеримые множества, заданные неравенствами с измеримыми функциями. Из поточечной и монотонной сходимости следует, что $X = \bigcup_k X_k$ и эти множества упорядочены по включению. Это значит, что при достаточно большом $k$ будет выполняться

$$\int_{X_k} f(x)\, dx \geqslant \int_X f(x)\, dx - \varepsilon$$

для конечного интеграла $\int_X f(x)\, dx$ или

$$\int_{X_k} f(x)\, dx \geqslant 1/\varepsilon$$

в случае бесконечного интеграла. С учётом определения $X_k$ получаем неравенства

$$\int_X f_k(x)\, dx \geqslant \int_{X_k} f_k(x)\, dx \geqslant (1-\varepsilon) \int_{X_k} f(x)\, dx \geqslant (1-\varepsilon) \left( \int_X f(x)\, dx - \varepsilon \right),$$

или в случае $\int_X f\, dx = +\infty$

$$\int_X f_k(x)\, dx \geqslant \int_{X_k} f_k(x)\, dx \geqslant (1-\varepsilon) \int_{X_k} f(x)\, dx \geqslant \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon},$$

Рассматривая $\varepsilon \to +0$ мы видим, что в обоих случаях предел интегралов от $f_k$ оказывается не менее интеграла $f$.

Осталось рассмотреть случай, когда $f(x) = +\infty$ на множестве положительной меры. Будем рассматривать только это множество в качестве $X$, если $X$ оказалось бесконечной меры, то заменим его на подмножество конечной положительной меры. Такая замена может только уменьшить интегралы от $f_k$, и переходя обратно к исходному $X$ мы получим только более сильные неравенства, доказывая, что интегралы $\int_X f_k\, dx$ стремятся к $+\infty$ при $k \to \infty$. Аналогично предыдущему случаю, можно положить

$$X_k = \{x \in X \mid f_k(x) \geqslant 1/\varepsilon\}.$$

При достаточно больших $k$ будет выполняться

$$\mu(X_k) \geqslant 1/2\mu(X)$$

и

$$\int_X f_k(x)\,dx \geqslant \int_{X_k} f_k(x)\,dx \geqslant 1/\varepsilon\mu(X_k) \geqslant \frac{1}{2\varepsilon}\mu(X),$$

что и означает стремление к бесконечности последовательности интегралов. ☐

Теорему о монотонной сходимости можно переформулировать иначе, сделав более отчётливой её аналогию со счётной аддитивностью меры Лебега.

**Теорема 5.99** (Счётная аддитивность интеграла Лебега по функциям). *Пусть функции $u_k$, $k \in \mathbb{N}$, на измеримом $X$ неотрицательны и измеримы по Лебегу. Тогда*

$$\int_X \sum_{k=1}^{\infty} u_k\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X u_k\,dx.$$

*Доказательство.* Сводится к теореме о монотонной сходимости рассмотрением частичных сумм $f_k = \sum_{\ell=1}^{k} u_\ell$. ☐

Можно сказать, что предыдущая теорема позволяет переставлять счётное суммирование и интегрирование, если речь идёт о неотрицательных выражениях. Она естественно обобщает утверждение о перестановке двойных сумм для неотрицательных выражений и, в свою очередь, будет обобщена теоремой Фубини (теорема 5.123) о перестановке интегралов по разным переменным. Переставлять интегрирование и суммирование также можно и в случае функций произвольного знака при выполнении условия

$$\int_X \sum_k |u_k|\,dx = \sum_k \int_X |u_k|\,dx < +\infty.$$

Действительно, тогда можно разложить каждую $u_k$ на неотрицательную и неположительную части, $u_k = u_{k,+} + u_{k,-}$, и интегрировать их и их суммы по отдельности.

*Задача* 5.100 (Лемма Фату). Докажите, что для любой последовательности неотрицательных измеримых функций $f_k : X \to \mathbb{R}$ выполняется

$$\varliminf_{k\to\infty} \int_X f_k\,dx \geqslant \int_X \varliminf_{k\to\infty} f_k\,dx.$$

[[ Рассмотрите возрастающую последовательность функций $g_k = \inf\{f_m \mid m \geqslant k\}$, поймите, к чему она сходится, и примените теорему о монотонной сходимости. ]]

Следующая теорема позволяет переходить к поточечному пределу под знаком интеграла без монотонности.

**Теорема 5.101** (Теорема об ограниченной сходимости). *Пусть неотрицательная функция $g$ на измеримом $X$ имеет конечный интеграл. Пусть $f_k$ измеримы на $X$, $|f_k| \leqslant g$ для всех $k$ и $f_k \to f$ поточечно на $X$. Тогда*

$$\int_X f_k\,dx \to \int_X f\,dx, \quad k \to \infty.$$

*Доказательство.* Можно выкинуть из рассмотрения измеримое множество точек, где $g$ равна нулю, так как там все $f_k$ и $f$ равны нулю. Также выкинем точки, где $g$ равна $+\infty$, при конечном интеграле $g$ их мера тоже нуль. Так как в пределе выполняется $|f| \leqslant g$ и $f$ измерима по теореме 5.48, то можно говорить об интеграле $f$ и её интеграл конечен.

Возьмём $\varepsilon > 0$ и положим

$$X_k = \{x \in X \mid \forall \ell \geqslant k, |f_\ell(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon g(x)\},$$

из поточечной сходимости получается, что $X = \bigcup_k X_k$. Множества $X_k$ измеримы, так как они получаются из решений неравенств на измеримые функции операцией счётного пересечения. Также из их определения видно, что они возрастают по включению. Применим к ним непрерывность интеграла от $g$ при $k \to \infty$ (теорема 5.92) и получим при достаточно больших $k$

$$\int_{X_k} g(x)\, dx \geqslant \int_X g(x)\, dx - \varepsilon \Rightarrow \int_{X \setminus X_k} g(x)\, dx \leqslant \varepsilon.$$

Тогда при достаточно больших $k$ мы можем оценить разность $|f_k(x) - f(x)|$ либо как $\varepsilon g(x)$ при $x \in X_k$, либо грубо как $2g(x)$ в противном случае и после интегрирования получить

$$\int_X |f_k(x) - f(x)|\, dx \leqslant \int_{X_k} \varepsilon g(x)\, dx + \int_{X \setminus X_k} 2g(x)\, dx \leqslant \varepsilon \int_X g(x)\, dx + 2\varepsilon.$$

При $\varepsilon \to +0$ мы получаем, что $f_k$ сходятся к $f$ в среднем и имеет место требуемая сходимость интегралов. ☐

Теоремы о монотонной сходимости и об ограниченной сходимости сильны, но их надо использовать аккуратно. При нарушении их условий поточечная сходимость может не давать сходимость интегралов. Рассмотрев функции типа (убегающие вправо ступеньки)

$$f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x)$$

мы получаем пример, когда поточечный предел равен $0$, но интегралы от функций не стремятся к нулю. Так что дополнительные требования, монотонности или ограниченность функцией с конечным интегралом, и в самом деле нужны.

*Задача* 5.102. Докажите, что если функция $F$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале $(a, b)$ с ограниченной производной $f = F'$, то

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

[[ Используйте определение производной и проинтегрируйте его. ]]

*Задача* 5.103. Пусть последовательность непрерывных функций $f_n : [a, b] \to [0, +\infty)$ убывает по $n$ и стремится к нулю в среднем. Докажите, что эта последовательность функций стремится к нулю почти всюду.

[[ Рассмотрите предельную функцию $f_n \to f$ и примените предельный переход под знаком интеграла. ]]

*Задача* 5.104. $^*$(Критерий Лебега интегрируемости по Риману) Докажите, что $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда она ограничена и множество её точек разрыва имеет меру Лебега нуль.

[[ Предположив интегрируемость $f$ по Риману, приблизьте $f$ снизу и сверху непрерывными, $g_n \leqslant f \leqslant h_n$ в среднем с точностью $1/n$ по результату задачи 4.128. Сделайте последовательность $(g_n)$ возрастающей, а последовательность $(h_n)$ — убывающей. Примените задачу 5.103 к разности $h_n - g_n$ и заметьте, что если $h_n(x) - g_n(x) \to 0$ в некоторой точке $x$, то $f$ непрерывна в точке $x$.

Для доказательства в обратную сторону заметьте, что равенство нулю меры множества точек разрыва $f$ равносильно равенству интеграла от функции $\omega(f,x) = \overline{f} - \underline{f}$ в обозначениях задачи 3.116. Используя результат задачи 4.86, найдите возрастающую последовательность непрерывных $g_n$, такую что $g_n \to \underline{f}$, и убывающую последовательность непрерывных $h_n$, такую что $h_n \to \overline{f}$. Примените к разности $h_n - g_n \to \overline{f} - \underline{f}$ теорему об ограниченной сходимости. ]]

5.15. **Примеры применения интеграла Лебега.** В этом разделе мы приведём некоторые полезные утверждения, связанные с интегралами.

**Теорема 5.105** (Неравенство Коши–Буняковского). *Если функции $f, g : X \to \mathbb{R}$ измеримы по Лебегу, то*

$$\left(\int_X |f(x)g(x)|\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_X |f(x)|^2\,dx\right)\cdot\left(\int_X |g(x)|^2\,dx\right).$$

*Если интегралы в правой части неравенства конечные, то в левой части можно интегрировать и без модуля*

$$\left(\int_X f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_X |f(x)|^2\,dx\right)\cdot\left(\int_X |g(x)|^2\,dx\right).$$

*Доказательство.* Если один из интегралов квадрата равен нулю, например $\int_X |f(x)|^2\,dx = 0$, то по теореме 5.83 функция $f$ равна нулю почти всюду (кроме множества меры нуль). Тогда и интеграл $\int_X f(x)g(x)\,dx$ равен нулю.

Если оба интеграла в правой части положительны и один из них равен $+\infty$, то неравенство тривиально.

Осталось рассмотреть случай, когда оба интеграла квадрата функции равны конечным положительным числам. Домножив функции на положительные константы, мы можем считать, что

$$\int_X |f(x)|^2\,dx = \int_X |g(x)|^2\,dx = 1,$$

а в требуемом неравенстве левая и правая часть домножатся на одну и ту же положительную константу, причём правая часть станет равна 1. Тогда интегрируя тривиальное неравенство $|fg| \leqslant |f|^2/2 + |g|^2/2$, мы получим

$$\int_X |fg|\,dx \leqslant 1 \Rightarrow \left|\int_X fg\,dx\right| \leqslant 1.$$

□

Следующая теорема позволит нам дифференцировать интеграл по параметру при выполнении некоторых разумных предположений. Производные функций нескольких переменных будут систематически изучаться далее в разделе 6.1, здесь нам будет достаточно определения *частной производной* функции $f : X \times (a,b) \to \mathbb{R}$ в виде

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = \lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}.$$

По сути это производная функции одной переменной $y \in (a,b)$ при каждом фиксированном $x \in X$.

**Теорема 5.106** (Дифференцирование под знаком интеграла). *Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема по переменной $x \in X$ с конечным интегралом при любом $y \in (a,b)$, дифференцируема по $y$, и для любых $x \in X$ и $y \in (a,b)$ выполняется*

$$|f'_y(x,y)| \leqslant g(x),$$

*где функция* $g : X \to \mathbb{R}^+$ *имеет конечный интеграл* $\int_X g(x)\ dx$. *Тогда*

$$\frac{d}{dy}\int_X f(x,y)\ dx = \int_X f'_y(x,y)\ dx.$$

*Доказательство.* Посчитаем производную интеграла как предел с использованием линейности

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_X f(x,y+h)\ dx - \int_X f(x,y)\ dx}{h} = \lim_{h\to 0}\int_X \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\ dx.$$

Поточечный переход к пределу под знаком интеграла даёт требуемую формулу. Этот переход обоснован теоремой об ограниченной сходимости, так как по теореме о среднем Лагранжа

$$\left|\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\right| = |f'_y(x,y+\vartheta(x)h)| \leqslant g(x), \quad 0<\vartheta(x)<1.$$

□

**Теорема 5.107** (Теорема о среднем для интеграла). *Пусть функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *непрерывна и ограничена на связном* $X$, *а неотрицательная функция* $g : X \to \mathbb{R}^+$ *имеет конечный интеграл на* $X$. *Тогда для некоторого* $\xi \in X$ *выполняется*

$$\int_X f(x)g(x)\ dx = f(\xi)\int_X g(x)\ dx.$$

*Доказательство.* Будем считать интеграл $g$ положительным, иначе $g = 0$ почти всюду и в обеих частях равенства стоят нули. Пусть

$$m = \inf\{f(x) \mid x \in X\}, \quad M = \sup\{f(x) \mid x \in X\}.$$

Тогда интегрируя неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$, мы получим

$$m\int_X g(x)\ dx \leqslant \int_X f(x)g(x)\ dx \leqslant M\int_X g(x)\ dx.$$

Так как $f$ непрерывна на связном $X$, то её область значений как минимум содержит интервал $(m, M)$. Следовательно, при выполнении строгого неравенства

$$m\int_X g(x)\ dx < \int_X f(x)g(x)\ dx < M\int_X g(x)\ dx$$

мы подберём такое $\xi$, чтобы $f(\xi)\int_X g(x)\ \ dx$ оказалось равно интегралу посередине. Остаётся рассмотреть крайние случаи. Пусть, например,

$$m\int_X g(x)\ dx = \int_X f(x)g(x)\ dx \Rightarrow \int_X (f(x)-m)g(x)\ dx = 0.$$

По теореме 5.83 в этом случае $f(x) = m$ выполняется для почти всех (кроме множества меры нуль) точек множества $\{x \in X \mid g(x) > 0\}$. Последнее множество имеет положительную меру из положительности интеграла функции $g$, а значит в нём найдётся $\xi$, для которого $f(\xi) = m$, и это $\xi$ подходит для доказываемой формулы. □

Можно заметить, что теорема верна и для неположительной $g$, для этого достаточно изменить её знак, тогда в обеих частях требуемого равенства поменяются знаки. Ещё один вариант теоремы о среднем будет играть принципиальную роль при изучении условно сходящихся интегралов и далее в гармоническом анализе.

**Теорема 5.108** (Вторая теорема о среднем). *Если $f$ интегрируема по Лебегу с конечным интегралом, а $g$ монотонна и ограничена на отрезке $[a, b]$. Тогда найдётся $\vartheta \in [a, b]$, такое что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a+0)\int_a^{\vartheta} f(x)\,dx + g(b-0)\int_{\vartheta}^b f(x)\,dx.$$

*Доказательство.* Переопределим $g$ на концах, чтобы было $g(a+0) = g(a)$ и $g(b-0) = g(b)$. Функцию $f$ можно приблизить в среднем непрерывно дифференцируемой $f_n$. Сначала можно приблизить элементарно-ступенчатой по теореме 5.87, а потом и сгладить ступеньки, более подробно про это написано в теореме 8.19. Пусть для приближения в среднем выполняется

$$\int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx < \frac{1}{n}.$$

Считая доказанной формулу для непрерывно дифференцируемых $f_n$ вместо $f$, из ограниченности $g$ некоторой константой $M$, интеграл в левой части при замене $f_n$ на $f$ изменится не более чем на $M/n$, а в правой части будут получаться разные $\vartheta_n$ и при замене $f_n$ на $f$ интегралы тоже изменятся не более чем на $M/n$. Значит для $f$ мы будем иметь неравенство

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx - g(a)\int_a^{\vartheta_n} f(x)\,dx - g(b)\int_{\vartheta_n}^b f(x)\,dx\right| < \frac{3M}{n}.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве $n \to \infty$, мы можем считать по теореме Больцано–Вейерштрасса, что $\vartheta_n \to \vartheta$ и воспользоваться непрерывностью интеграла по пределу интегрирования для получения требуемого равенства в пределе.

Выведем формулу для непрерывно дифференцируемой $f$, считая её верной для случая, когда и $f$, и $g$ непрерывно дифференцируемы. Для этого можно приблизить исходную $g$ в среднем монотонной и непрерывно дифференцируемой $g_n$. Теорема 4.129 фактически даёт приближение $g$ монотонной элементарной ступенчатой, которую потом можно сгладить. Будем считать, что

$$\int_a^b |g(x) - g_n(x)|\,dx < \frac{1}{n}.$$

Дополнительно можно считать, что $g_n(a) \to g(a)$ и $g_n(b) \to g(b)$ при $n \to \infty$, используя непрерывность $g$ в концах отрезка. Теперь уже ограниченность $f$ некоторой константой $M$ позволит нам перейти к пределу в обеих частях равенства при $g_n \to g$ аналогично проделанному выше. В итоге мы свели доказательство формулы к случаю непрерывно дифференцируемых функций.

Для непрерывно дифференцируемых функций равенство теоремы можно доказать, интегрируя по частям, причём удобно начать со случая $g(b) = 0$. Тогда нам надо получить формулу

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\vartheta} f(x)\,dx.$$

Положим $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ и проинтегрируем по частям

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)F(b) - g(a)F(a) - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx = -\int_a^b F(x)g'(x)\,dx,$$

так как $F(a) = 0$ и $g(b) = 0$. Пусть без ограничения общности $g$ убывает, тогда из $-g'(x) \geqslant 0$ и по теореме 5.107 для $F$ найдётся $\vartheta$, такое что

$$\int_a^b F(x)(-g'(x))\,dx = F(\vartheta)\int_a^b (-g'(x))\,dx = F(\vartheta)g(a),$$

что и доказывает равенство в случае $g(b) = 0$. В общем случае применим доказанный частный случай к функции $g(x) - g(b)$ вместо $g(x)$:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)(g(x) - g(b))\,dx + \int_a^b f(x)g(b)\,dx =$$
$$= (g(a) - g(b))\int_a^\vartheta f(x)\,dx + g(b)\int_a^b f(x)\,dx = g(a)\int_a^\vartheta f(x)\,dx + g(b)\int_\vartheta^b f(x)\,dx.$$

☐

*Задача* 5.109. Докажите, что если $f$ интегрируема по Лебегу с конечным интегралом, а $g$ убывает и неотрицательна на $[a, b]$, то при некотором $\vartheta \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a+0)\int_a^\vartheta f(x)\,dx.$$

[[ Постройте последовательность убывающих функций $g_n$, сходящуюся в среднем к $g$ и таких, что $g_n(a) = g(a+0)$ и $g_n(b) = 0$ при любом $n$. Дальше используйте вторую теорему о среднем для $\int_a^b fg_n\,dx$ и перейдите к пределу в интегралах, как в предыдущем доказательстве. ]]

*Задача* 5.110. Докажите неравенство для $0 < a < b$

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqslant \frac{2}{a}.$$

[[ Примените вторую теорему о среднем или результат предыдущей задачи. ]]

5.16. **Несобственный интеграл функции одной переменной.** Во многих ситуациях интеграл Лебега оказывается достаточным, но аналогично ситуации с рядами, иногда хочется проинтегрировать то, что заведомо не является абсолютно интегрируемым. По аналогии с суммами ряда сделаем определение.

**Определение 5.111.** *Несобственным интегралом* на интервале $(a, b)$ с особенностью в $b$ называется предел

$$\int_a^{*b} f(x)\,dx = \lim_{\beta\to b-0}\int_a^\beta f(x)\,dx$$

в предположении, что все интегралы $\int_a^\beta f(x)\,dx$ конечны.

**Лемма 5.112.** *Если существует интеграл Лебега $\int_a^b f(x)\,dx$, то он равен несобственному интегралу $\int_a^{*b} f(x)\,dx$.*

*Доказательство.* В определении предела по Гейне достаточно рассматривать возрастающие последовательности $\beta_k \to b - 0$. Тогда отрезки $[a, \beta_k]$ возрастают по включению и предел в определении несобственного интеграла равен интегралу Лебега в силу непрерывности интеграла Лебега по множествам. ☐

Заметим, что в силу свойства абсолютной сходимости интеграла Лебега, содержательный случай конечного несобственного интеграла — это *условная сходимость*, когда

$$\int_a^b |f(x)|\, dx = +\infty$$

и интеграл без модуля может оказаться конечным только в несобственном смысле. Напомним, что слово *сходится* в этом разделе будет означать наличие конечного несобственного интеграла.

**Теорема 5.113** (Критерий Коши сходимости несобственного интеграла). *Несобственный интеграл* $\int_a^{*b} f(x)\, dx$ *сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \beta(\varepsilon)\ \forall \xi, \eta \in [\beta(\varepsilon), b), \quad \left| \int_\xi^\eta f(x)\, dx \right| < \varepsilon.$$

*Доказательство.* Следует из критерия Коши существования предела функции. ☐

Аналогично случаю возможно условно сходящихся рядов, есть два полезных признака сходимости несобственного интеграла.

**Теорема 5.114** (Признак Дирихле сходимости несобственного интеграла). *Пусть найдётся константа* $M$*, такая что при любом* $\beta \in (a, b)$

$$\left| \int_a^\beta f(x)\, dx \right| \leqslant M,$$

*а функция* $g$ *монотонна и стремится к нулю при* $x \to b - 0$*. Тогда*

$$\int_a^{*b} f(x) g(x)\, dx$$

*сходится.*

*Доказательство.* В выражении из критерия Коши используем вторую теорему о среднем:

$$\left| \int_\xi^\eta f(x) g(x)\, dx \right| \leqslant |g(\xi{+}0)| \left| \int_\xi^\vartheta f(x)\, dx \right| + |g(\eta{-}0)| \left| \int_\vartheta^\eta f(x)\, dx \right| \leqslant 2M(|g(\xi{+}0)| + |g(\eta{-}0)|).$$

Заметим, что при $\xi, \eta \to b - 0$ выражения $g(\xi + 0)$ и $g(\eta - 0)$ стремятся к нулю, и всё выражение тоже стремится к нулю. ☐

**Теорема 5.115** (Признак Абеля сходимости несобственного интеграла). *Пусть интеграл*

$$\int_a^{*b} f(x)\, dx$$

*сходится, а функция* $g$ *монотонна и ограничена. Тогда*

$$\int_a^{*b} f(x) g(x)\, dx$$

*сходится.*

*Доказательство.* Пусть $|g(x)| \leqslant M$. В выражении из критерия Коши используем вторую теорему о среднем:

$$\left|\int_\xi^\eta f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant |g(\xi+0)|\left|\int_\xi^\vartheta f(x)\,dx\right| + |g(\eta-0)|\left|\int_\vartheta^\eta f(x)\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant M\left|\int_\xi^\vartheta f(x)\,dx\right| + M\left|\int_\vartheta^\eta f(x)\,dx\right|.$$

Заметим, что при что при $\xi, \eta \to b-0$ оказывается, что $\vartheta \to b-0$ тоже. Тогда из критерия Коши сходимости $\int_a^{*b} f(x)\,dx$ следует, что интегралы от $f$ в формуле стремятся к нулю, и всё выражение стремится к нулю. ☐

*Задача* 5.116. Докажите, что интегралы

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$$

сходятся абсолютно только при $\alpha > 1$, но сходятся условно в несобственном смысле при $\alpha > 0$.

[[ Используйте признак Дирихле для доказательства сходимости, критерий Коши для доказательства расходимости, и оценку $|\sin x| \geqslant \sin^2 x$ для доказательства отсутствия абсолютной сходимости. ]]

*Задача* 5.117 (Интегральный признак сходимости числового ряда). Пусть $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ убывает. Докажите, что

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) < +\infty \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty.$$

[[ Докажите неравенства

$$\sum_{n=2}^\infty f(n) \leqslant \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=1}^\infty f(n),$$

заключив $f$ между подходящей парой ступенчатых функций. ]]

*Задача* 5.118. Пусть функция $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ убывает и стремится к нулю на бесконечности. Докажите, что

$$\int_0^{+\infty} f(x)\sin x\,dx \geqslant 0.$$

[[ Примените вторую теорему о среднем. ]]

*Задача* 5.119. Пусть функция $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ выпукла и стремится к нулю на бесконечности. Докажите, что

$$\int_0^{+\infty} f(x)\cos x\,dx \geqslant 0.$$

[[ Докажите, что можно интегрировать по частям. При возникновении затруднений с существованием производной можно посмотреть раздел 5.19. ]]

5.17. **Теорема Фубини и линейная замена переменных в интеграле.** Мы приближаемся к доказательству важной теоремы, которая позволяет сводить вычисление интеграла функции нескольких переменных к последовательным вычислениям интеграла по одной переменной. Сначала установим вспомогательные леммы.

**Лемма 5.120.** *Любая измеримая неотрицательная $f : X \to \mathbb{R}$ является счётной суммой характеристических функций измеримых по Лебегу множеств с неотрицательными коэффициентами. Если $f$ при этом борелевская, то и характеристические функции получатся борелевскими.*

*Доказательство.* Конструкция из доказательства леммы 5.70 позволяет приблизить $f$ снизу неотрицательной ступенчатой $u_1(x) = \lfloor f(x) \rfloor$ так, что $f - u_1 < 1$. Потом можно приблизить разность $f - u_1$ снизу ступенчатой

$$u_2(x) = \frac{1}{2} \lfloor 2(f(x) - u_1(x)) \rfloor ,$$

так что $f - u_1 - u_2 < 1/2$. Продолжая в том же духе,

$$u_{k+1}(x) = \frac{1}{2^k} \left\lfloor 2^k(f(x) - u_1(x) - \dots - u_k(x)) \right\rfloor ,$$

мы просто разложим $f$ в сумму $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, в которой все функции ступенчатые и неотрицательные, причём начиная с $k \geqslant 2$ функция $u_k$ принимает лишь два значения: $0$ и $1/2^{k-1}$. Если $f$ была борелевская, то функции $u_k$ будут ещё и борелевскими. Чтобы получить требуемое в формулировке леммы разложение, остаётся разложить каждую ступенчатую функцию в этой сумме в сумму характеристических функций оснований ступенек с неотрицательными коэффициентами. ☐

Счётная аддитивность интеграла Лебега по функциям позволяет заключить, что интеграл функции из леммы будет равен сумме интегралов тех функций, на которую её разложили в лемме.

**Лемма 5.121.** *Если множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ измеримо и множество $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ измеримо, то $X \times Y \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ тоже измеримо и*

$$\mu(X \times Y) = \mu(X) \cdot \mu(Y).$$

*Доказательство.* Заметим, что если $X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k$ и $Y = \bigsqcup_{m=1}^{\infty} Y_m$, то

$$X \times Y = \bigsqcup_{k,m=1}^{\infty} X_k \times Y_m.$$

Это позволяет переходить к счётным разбиениям на части для доказательства измеримости и формулы меры произведения. В частности, достаточно доказывать измеримость только для множеств конечной меры.

Посмотрим на определение внешней меры Лебега $X$ и $Y$. Если $X \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ и $Y \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} T_m$ с элементарными $S_k$ и $T_m$, то

$$X \times Y \subseteq \bigcup_{k,m=1}^{\infty} S_k \times T_m.$$

Для параллелепипедов формула произведения мер тривиально верна. Раскладывая элементарные множества на параллелепипеды, заметим, что формула верна и для них. Тогда верны равенства

$$\sum_{k,m=1}^{\infty} \mu(S_k \times T_m) = \sum_{k,m=1}^{\infty} \mu(S_k) \cdot \mu(T_m) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \mu S_k \right) \cdot \left( \sum_{m=1}^{\infty} \mu T_m \right).$$

Следовательно, для произвольных множеств $X$ и $Y$ по определению внешней меры верно неравенство

$$\mu^*(X \times Y) \leqslant \mu^*(X) \cdot \mu^*(Y).$$

Приблизив $X$ элементарным $S$, а $Y$ элементарным $T$ с точностью $\varepsilon > 0$ в смысле внешней меры, мы получим приближение $X \times Y$ множеством $S \times T$ меры $\mu(S) \cdot \mu(T)$ с точностью $\varepsilon(\mu X + \mu Y)$, так как

$$(X \times Y)\triangle(S \times T) \subseteq (X \times (Y\triangle T)) \cup ((X\triangle S) \times Y) \cup (S \times (Y\triangle T)) \cup ((X\triangle S) \times T)$$

и

$$\mu^*\left((X \times Y)\triangle(S \times T)\right) \leqslant \mu(X)\varepsilon + \mu(Y)\varepsilon + \mu(S)\varepsilon + \mu(T)\varepsilon \leqslant \varepsilon(2\mu(X) + 2\mu(Y) + 2\varepsilon).$$

Последнее выражение стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Это доказывает измеримость $X \times Y$ и равенство его меры $\mu(X) \cdot \mu(Y)$. ☐

*Задача* 5.122. Пусть функции $f : X \to \mathbb{R}$ и $g : Y \to \mathbb{R}$ измеримы. Докажите, что выражение $f(x)g(y)$ задаёт измеримую функцию на $X \times Y$.

[[ Сведите к измеримости декартова произведения множеств. ]]

Теперь мы можем доказать главное утверждение про интегрирование функции по произведению множеств.

**Теорема 5.123** (Теорема Фубини). *Пусть функция $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу на произведении измеримых множеств. Тогда*

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,dxdy = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,dy\right) dx$$

*и в частности интеграл в скобках справа существует при почти всех $x \in X$ и является интегрируемой функцией от $x \in X$.*

*Сведение теоремы Фубини к характеристическим функциям.* Продолжив данную в условии функцию нулём (и учитывая лемму 5.121), будем считать $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, тогда в выражении справа функция тоже продолжается нулём и ничего не меняется. Но обозначать множества интегрирования для краткости всё ещё будем $X$ и $Y$. Если функция не постоянного знака, то разложение её на положительную и отрицательную часть позволяет свести утверждение к знакопостоянному случаю. Поэтому далее мы предполагаем, что функция неотрицательна.

Заметим, что для борелевских неотрицательных функций левая часть и внутренний интеграл в правой части определены. Это следует из того, что сужение борелевской функции на аффинное подпространство, заданное условием $x = \mathrm{const}$, остаётся борелевской функцией. Для интегрируемых по Лебегу функций такое утверждение не обязательно верно, но далее будет доказано, что внутренний интеграл справа будет определён для почти всех $x$.

Интеграл слева в формуле и повторный интеграл справа обладают свойством счётной аддитивности, причём если выражение под внешним интегралом справа представляется в виде счётной суммы измеримых неотрицательных функций переменной $x$, то оно само оказывается измеримым как супремум измеримых функций. Таким образом, применение счётной аддитивности, линейности и леммы 5.120 сводят доказательство формулы для борелевской функции к рассмотрению характеристической функции борелевского множества.

Аналогично, доказательство для измеримой функции сводится к рассмотрению характеристической функции измеримого множества, если в последнем случае будет обосновано существование внутреннего интеграла справа для почти всех $x$. ☐

*Доказательство теоремы Фубини для характеристических функций борелевских множеств.* Посмотрим, что можно сказать о характеристической функции борелевского множества. Для характеристических функций параллелепипедов формула верна, как уже было упомянуто в доказательстве леммы 5.121. Для характеристических функций элементарных множеств формула будет верна по аддитивности.

Если множество открытое, то аналогично доказательству теоремы 5.34 его можно представить в виде объединения счётного числа параллелепипедов $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_k$. С учётом выражения

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} (P_1 \cup \dots \cup P_k) \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_{k-1})$$

формула для характеристической функции $U$ оказывается верна в силу линейности (для рассмотрения разности множеств) и счётной аддитивности (для рассмотрения счётного объединения попарно не пересекающихся множеств). Здесь важно, что объединение конечного числа параллелепипедов имеет конечную меру, и в формуле для меры разности вычитание возможно.

Компактное множество $K$ можно представить как разность открытых $U \setminus V$, таких что $V \subseteq U$ и их меры конечны. Тогда случай характеристической функции компактного множества последует из равенства $\chi_K = \chi_U - \chi_V$ и применённой к нему линейности левой и правой части формулы. Точно так же формула верна для разности компактных множеств, если одно из них содержится в другом.

Аналогично представлению открытого множества как объединения параллелепипедов, для характеристических функций любых счётных объединений компактных множеств формула верна по тем же причинам. В частности, она верна для характеристических функций замкнутых множеств.

С помощью теоремы о монотонной сходимости, формула доказывается для объединения возрастающей последовательности замкнутых множеств любой меры и для пересечения убывающей последовательности открытых множеств конечной меры.

Перейдём к случаю произвольного борелевского множества $B$ и его характеристической функции. Применим рассуждение из доказательства теоремы 5.54, которое в частности показывает, что любое борелевское множество $B$ можно заключить между счётным объединением замкнутых множеств и счётным пересечением открытых множеств, $C \subseteq B \subseteq D$, так что $\mu(D \setminus C) = 0$.

Если мера множества $B$ (а значит $C$ и $D$) конечна, то для характеристических функций $C$ и $D$ формула уже доказана, обе её части дают одно и то же число, а значит по монотонности обе части формулы дадут то же самое значение для характеристической функции $B$.

Если мера множества $B$ бесконечна, то мера $C$ тоже бесконечна, обе части формулы дают $+\infty$ для характеристической функции $C$, а значит, по монотонности, и для характеристической функции $B$. Это завершает доказательство формулы для характеристических функций борелевских множеств и вообще для борелевских функций. ☐

*Доказательство теоремы Фубини для характеристических функций измеримых множеств.* В этом случае при интерпретации правой части доказываемой формулы надо допустить, что для некоторых $x \in X$, составляющих множество меры нуль, интеграл в скобках справа может не быть определён.

По теореме 5.54 после вычитания из измеримого по Лебегу множества борелевского множества доказательство сведётся к разбору случая характеристической функции множества меры нуль. Пусть $f(x, y)$ — характеристическая функция множества $Z$ меры нуль. По теореме 5.54 это множество можно поместить в борелевское $Z'$ тоже меры нуль. В терминах характеристических функций пусть это означает $0 \leqslant f(x,y) \leqslant g(x,y)$ для борелевской $g$ с нулевым интегралом. Для $g$ формула уже доказана и мы получаем

$$\int_X \left(\int_Y g(x,y)\ dy\right) dx = \int_{X\times Y} g(x,y)\ dxdy = 0.$$

Выходит, что у нас есть неотрицательная функция

$$G(x) = \int_Y g(x,y)\ dy$$

и её интеграл равен нулю. По теореме 5.83 это означает, что $G$ отличается от нуля только на множестве меры нуль $\Sigma \subset X$. На множестве $X \setminus \Sigma$ она равна нулю, а из неравенства $0 \leqslant f(x,y) \leqslant g(x,y)$ следует, что для фиксированного $x \in X \setminus \Sigma$ функция $f(x,y)$ интегрируема по $y$ и

$$F(x) = \int_Y f(x,y)\ dy \leqslant G(x) = 0 \Rightarrow F(x) = 0.$$

Это верно для почти всех $x$, следовательно, правая часть в доказываемой нами формуле, $\int_X F(x)\ dx$ тоже равна нулю, что и требовалось доказать в рассматриваемом случае. ☐

Случай характеристической функции в теореме Фубини даёт способ найти меру измеримого множества $Z \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$, если мы знаем меры его сечений

$$Z_x = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x,y) \in Z\}.$$

Тогда теорема Фубини, утверждает, что при почти всех $x$ множество $Z_x$ измеримо и

$$\mu Z = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \chi_Z(x,y)\ dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_Z(x,y)\ dy\right)\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mu Z_x\ dx.$$

На практике теорема Фубини применяется для вычисления интеграла по следующей схеме. Если мы рассматриваем измеримую функцию $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ и хотим понять применимость к ней теоремы Фубини, то сначала мы применяем теорему Фубини к функции $|f|$ и вычисляем (или оцениваем) значение повторного интеграла, для него по теореме Фубини (в случае неотрицательных функций) выполняется

$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\ dy\right) dx = \int_{X\times Y} |f(x,y)|\ dxdy$$

даже при бесконечных значениях интеграла. Если этот интеграл, вычисленный с помощью повторного интегрирования, оказался конечен, то значит теорема Фубини применима и к функции без модуля, и значит и её интеграл можно считать как повторный в любом порядке.

*Задача* 5.124. Приведите пример, когда повторные интегралы функции двух переменных в обоих порядках $x, y$ и $y, x$ существуют, но интеграл функции двух переменных не существует.

[[ Вспомните, что интеграл Лебега от функции $f$ абсолютный, то есть подразумевает существование интеграла от $|f|$, пример можно построить даже не для интеграла, а для повторного суммирования ряда $\sum_{n,m\in\mathbb{N}} a_{nm}$. ]]

Докажем одно полезное следствие теоремы Фубини, которое в некотором смысле сводит интеграл от любой функции к интегралу от функции одной переменной.

**Теорема 5.125.** *Пусть функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *неотрицательна и измерима. Обозначим*

$$g(y) = \mu\{x \in X \mid f(x) \geqslant y\}.$$

*Тогда оказывается*

$$\int_X f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} g(y)\,dy.$$

*Доказательство.* Рассмотрим множество $S_f \subset X \times [0, +\infty)$, состоящее из пар $(x, y)$, таких что $0 \leqslant y \leqslant f(x)$. Если функция ступенчатая, $f(X_i) = c_i$, то её множество $S_f$ представляется в виде

$$S_f = \bigcup_i X_i \times [0, c_i].$$

По лемме 5.121 множество $S_f$ в этом случае измеримо и его мера как раз равна интегралу $f$. Произвольную измеримую $f$ можно (аналогично доказательству леммы 5.120) представить в виде поточечного предела (и предела в среднем) убывающей последовательности ступенчатых, $f_k \to f$, и тогда

$$S_f = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{f_k}$$

окажется измеримым.

Применяя теорему Фубини в порядке $(x, y)$ и в порядке $(y, x)$ к характеристической функции множества $S_f$, получаем равенство двух выражений из формулировки теоремы. ☐

Обратите внимание, что множество $S_f$ в доказательстве теоремы измеримо и его мера равна интегралу функции. Это объясняет интерпретацию интеграла, как «меры под графиком».

*Задача* 5.126. Докажите, что график любой измеримой функции $f : X \to \mathbb{R}$ измерим и имеет меру нуль.

[[ Вспомните доказательство леммы 5.70. ]]

Теорема Фубини также позволяет ответить на вопрос, как меняется интеграл при линейных заменах переменной в $\mathbb{R}^n$.

**Теорема 5.127** (Теорема о линейной замене переменных в интеграле Лебега)**.** *Для интегрируемой по Лебегу* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *и линейного преобразования* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,dy = |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax)\,dx.$$

*Доказательство.* Рассмотрим для начала элементарную замену $y = Ax$, при которой $(j \neq k)$

$$\forall i \neq j, y_i = x_i \text{ и } y_j = x_j + a_{jk}x_k.$$

Без ограничения общности, пусть $j = 1$ (меняется только первая переменная), тогда по теореме Фубини

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(y_1, y_2, \dots, y_n)\,dy_1 \right) dy_2 \dots dy_n =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1 + a_{1k}x_k, x_2, \dots, x_n)\,dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} f(y(x))\,dx,$$

При переходе от переменной $y_1$ к переменной $x_1$ в интеграле мы использовали только то, что при фиксированных остальных переменных (а во внутренних скобках они фиксированы) эти две переменные отличаются сдвигом, а мера и интеграл Лебега очевидно инвариантны относительно сдвига.

Для обоснования существования интеграла $f(Ax)$ можно действовать тем же способом, как в доказательстве теоремы Фубини. Сначала надо свести вопрос к неотрицательной функции $f$, потом заметить, что формула установлена для борелевской неотрицательной функции, так как в этом случае $f(Ax)$ тоже борелевская. Для перехода от борелевской функции к измеримой, с учётом Следствия 5.55 и аддитивности интеграла, остаётся рассмотреть случай неотрицательной измеримой функции $f$ с нулевым интегралом, которую можно оценить, $0 \leqslant f \leqslant g$, некоторой борелевской функцией $g$ с нулевым интегралом. Так как интеграл $g(Ax)$ в этом случае оказывается равен нулю, то $g(Ax)$ равна нулю почти всюду, и $f(Ax) \leqslant g(Ax)$ равна нулю почти всюду, то есть измерима.

Мы доказали утверждение для элементарных отображений, при них интеграл не меняется и их детерминант равен единице. Воспользуемся фактом из линейной алгебры, что любое линейное преобразование является композицией элементарных преобразований, перестановок координат и диагонального преобразования. Это следует из того, что имея невырожденную матрицу отображения, можно сделать её единичной с помощью перестановок строк, умножения строк на ненулевые числа, и прибавления к одной строки другой, умноженной на число (метод Гаусса). Все эти операции можно понимать как умножение исходной матрицы слева на матрицы перестановки, диагональные матрицы или элементарные матрицы, поэтому в итоге (так как обратные к элементарным тоже элементарные) исходная матрица будет представлена в виде произведения таких матриц.

В курсе линейной алгебры изучается, что детерминант произведения равен произведению детерминантов (некоторые сведения про это имеются в разделе 6.11), а значит утверждение теоремы достаточно доказывать для тех отображений, в произведение которых разложено исходное. Тогда появляющиеся в правой части при последовательном применении отображений детерминанты перемножатся и дадут детерминант композиции отображений.

В итоге нам остаётся проверить формулу для перестановок координат и диагональных преобразований. Перестановки координат очевидно не меняют меру Лебега и интеграл, а их детерминант равен $\pm 1$. Для диагонального преобразования $y_i = a_i x_i$ меры элементарных параллелепипедов умножаются на $|\det A| = |a_1 \dots a_n|$, а значит и на всех этапах определения меры Лебега все меры умножаются на $|\det A|$, и интеграл Лебега умножается на $|\det A|$. □

Заметим, что в этом рассуждении можно было делать и замены переменных вида $y_1 = x_1 + f(x_2, \dots, x_n)$ для некоторой непрерывной (или даже борелевской) функции $f$ от $n-1$ переменной. Развитие этой идеи приводит к одному из возможных доказательств теоремы о произвольной гладкой замене переменных в интеграле, теоремы 6.126. Впрочем, в соответствующем разделе мы приведём другие варианты доказательства теоремы о криволинейной замене переменных в интеграле.

5.18. **Объём шара, интеграл Пуассона, гамма и бета функции.** Мы продолжаем изучать приложения интеграла Лебега, на этот раз мы можем посчитать конкретные полезные интегралы с помощью теоремы Фубини.

**Теорема 5.128** (Объём шара и интеграл Пуассона)**.** *Рассмотрим единичный шар*

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 \leqslant 1\}.$$

*Тогда*

$$\pi^{n/2} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\,dx = \mu B_n \cdot \Gamma(n/2+1),$$

*где*

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}\,dt.$$

*Доказательство.* Рассмотрим функцию $f_n(x) = e^{-|x|^2} = e^{-x_1^2-x_2^2-\dots-x_n^2}$. По теореме Фубини

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\,dx_1\dots dx_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2}\,dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_n^2}\,dx_n = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\right)^n.$$

Можно сказать, что интеграл от $f_n$ равен $I^n$, где $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$. С другой стороны, по теореме 5.125

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx_1\dots dx_n = \int_0^1 \mu\{|x|^2 \leqslant -\ln y\}\,dy.$$

Множество $\{|x|^2 \leqslant -\ln y\}$ является шаром радиуса $r = \sqrt{-\ln y}$, его мера равна $r^n\mu B^n$ по теореме о линейной замене переменных. Значит

$$I^n = \mu B^n \int_0^1 (-\ln y)^{n/2}\,dy.$$

В интеграле по одной переменной можно сделать замену $-\ln y = t$, в этом случае на ограниченных отрезках функция непрерывна, интеграл Лебега совпадает с интегралом Римана и замена разрешена, потом можно перейти от интегралов по отрезкам к интегралу по полупрямой с помощью непрерывности интеграла Лебега. Тогда мы получаем

$$I^n = \mu B^n \int_0^{+\infty} t^{n/2}e^{-t}\,dt = \mu B^n\Gamma(n/2+1).$$

Осталось найти $\mu B^n$ хотя бы в одной размерности. При $n = 2$ у нас $\Gamma(2) = 1$ (это можно посчитать явно или опереться на приводимые ниже свойства функции $\Gamma(p)$) и мы можем найти напрямую по теореме Фубини

$$\mu B^2 = 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi,$$

следовательно $I = \sqrt{\pi}$ и $\mu B^n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$. ☐

В формуле для объёма шара возникла *гамма-функция* $\Gamma(p)$. Установим некоторые её полезные свойства. Найдём её значение при $p = 1$, здесь интеграл можно посчитать явно

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{u\to+\infty}\int_0^u e^{-t}\,dt = \lim_{u\to+\infty}\left(1-e^{-u}\right) = 1.$$

Это вычисление, в частности, показывает, что, ограничив выражение в определении $\Gamma(p)$ экспонентой $e^{-t/2}$ при достаточно больших $t$, мы при интегрировании получаем конечное число.

**Теорема 5.129** (Формула понижения). *Для $p > 0$ верно тождество*

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

*Доказательство.* Напишем с использованием теоремы Фубини для функции, определённой при $0 \leqslant u \leqslant t$ как $u^{p-1}e^{-t}$, а на остальных точках плоскости определённой нулём:

$$\frac{1}{p}\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{p} e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t u^{p-1}\, du\right) e^{-t}\, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} u^{p-1} \left(\int_u^{+\infty} e^{-t}\, dt\right)\, du = \int_0^{+\infty} u^{p-1}e^{-u}\, du = \Gamma(p).$$

☐

Применяя формулу для объёма шара в размерности 1, мы получим равенство

$$\mu B^1 = 2 = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(3/2)} \Rightarrow \Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

С помощью формулы понижения тогда можно найти

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

*Задача* 5.130. Докажите, что для $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^n},$$

где $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)$ и считаем $(-1)!! = 1$.

[[ Примените известные значения $\Gamma(1) = 1$ и $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, а потом примените формулу понижения. ]]

Введём также *бета-функцию* при $p, q > 0$ как интеграл от неотрицательного выражения

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt.$$

*Задача* 5.131. Проверьте по определению, что $B(p,q)$ конечна при $p, q > 0$.

**Теорема 5.132.** *Для $p, q > 0$ верна формула*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

*Доказательство.* Напишем (используя теорему Фубини)

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_{x,y\geqslant 0} x^{p-1}y^{q-1}e^{-x-y}\, dxdy.$$

Сделаем линейную замену координат $(x,y)$ на $(x, s = x+y)$, её определитель равен единице и поэтому можно написать

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^s x^{p-1}(s-x)^{q-1}\, dx\right) e^{-s}\, ds.$$

Далее во внутреннем интеграле удобно линейно заменить $x = ts$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ и получить

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, s^{p+q-1} dt\right) e^{-s}\, ds =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt\right) s^{p+q-1}e^{-s}\, ds = B(p,q)\Gamma(p+q).$$

☐

*Задача* 5.133. Найдите при $u, v > -1$ интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \sin^u x \cos^v y \, dx.$$

[[ Сведите к бета-функции. ]]

Формула для интеграла Пуассона позволяет выяснить асимптотику гамма-функции и получить асимптотическую формулу Стирлинга для гамма-функции.

**Теорема 5.134** (Формула Стирлинга). *Для $x \to +\infty$ имеет место асимптотическая формула*

$$x! = \Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} \, dt = \sqrt{2\pi x} \cdot x^x e^{-x}(1 + o(1)).)$$

*Доказательство.* Сделаем замену $t = sx$, тогда можно записать интеграл в виде

$$x! = x^{x+1} \int_0^{+\infty} e^{-x(s - \ln s)} \, ds.$$

Функция $s - \ln s$ имеет минимум в точке 1, равный 1, то есть представляется в виде

$$s - \ln s = 1 + \varphi(s),$$

где $\varphi(x) \geqslant 0$. Тогда

$$x! = x^{x+1} e^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-x\varphi(s)} \, ds,$$

и нам надо выяснить асимптотику интеграла

$$I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x\varphi(s)} \, ds$$

при $x \to +\infty$. Посчитаем вторую производную $\varphi$ в точке 1, она равна 1. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ мы сможем найти интервал $(a, b) \ni 1$, такой что на нём

$$(1/2 - \varepsilon)(s-1)^2 \leqslant \varphi(s) \leqslant (1/2 + \varepsilon)(s-1)^2.$$

На отрезках $[0, a]$ и $[b, 2]$ функция $\varphi$ не менее некоторой положительной константы, так что соответствующие части $I(x)$ убывают экспоненциально с ростом $x$. На промежутке $[2, +\infty)$ имеем неравенство $\varphi(s) \geqslant 1 - \ln 2 + (s-2)/2$, что также даёт экспоненциальное убывание соответствующей части $I(x)$. Тогда нам остаётся оценить часть на отрезке $[a, b]$, выпишем её

$$\int_a^b e^{-x(1/2+\varepsilon)(s-1)^2} \, ds \leqslant I_{[a,b]}(s) \leqslant \int_a^b e^{-x(1/2-\varepsilon)(s-1)^2} \, ds.$$

Оценивающие интегралы также можно продолжить на всю прямую, при этом они изменятся на экспоненциально убывающий с ростом $x$ множитель. Но тогда они превращаются в интегралы Пуассона, и с точность до экспоненциально убывающих множителей наш интеграл $I(x)$ лежит в отрезке $\left[\sqrt{\frac{2\pi}{x(1+2\varepsilon)}}, \sqrt{\frac{2\pi}{x(1-2\varepsilon)}}\right]$. Получается, что

$$x! = x^{x+1} e^{-x} \sqrt{\frac{2\pi}{x}}(1 + o(1)) = \sqrt{2\pi x} \cdot x^x e^{-x}(1 + o(1)).$$

☐

*Задача* 5.135 (Объём тела вращения). Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ измерима, а множество $X \subset \mathbb{R}^3$ задано условиями

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad y^2 + z^2 \leqslant f(x)^2.$$

Докажите, что

$$\mu(X) = \int_a^b \pi f(x)^2\, dx.$$

[[ Используйте теорему Фубини, проинтегрировав сначала по переменным $(y, z)$. ]]

*Задача* 5.136. Пусть $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — положительно определённая квадратичная форма. Докажите формулу

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(x)}\, dx_1 \dots dx_n = \pi^{n/2} \cdot (\det Q)^{-1/2}.$$

[[ Линейной ортогональной заменой переменных сделайте $Q$ диагональной. ]]

*Задача* 5.137. Пусть $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — положительно определённая квадратичная форма, а $E_C$ — эллипсоид $\{x \mid Q(x) \leqslant C\}$. Докажите формулу

$$\mu E_C = \frac{\pi^{n/2} C^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)(\det Q)^{1/2}}.$$

[[ Выведите из предыдущей задачи аналогично формуле для объёма шара. ]]

*Задача* 5.138. Посчитайте интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 e^{-|x|^2}\, dx_1 \dots dx_n.$$

[[ Используйте теорему Фубини и интегрирование по частям для функций одной переменной. ]]

5.19. **Лемма Безиковича и дифференцируемость почти всюду.** В этом разделе мы изучим некоторые полезные свойства интеграла Лебега, установим дифференцируемость почти всюду интеграла с переменным верхним пределом и установим формулу Ньютона–Лейбница в большей общности. Мы рассматриваем только одномерный вариант, хотя у первых двух теорем есть и многомерные аналоги.

Для начала нам надо будет доказать одну важную техническую лемму.

**Теорема 5.139** (Лемма Безиковича о покрытии на прямой). *Пусть в каждой точке $x$ измеримого $X \subset \mathbb{R}$ дан набор отрезков $\{I_{x,k}\}_k$, каждый из которых содержит $x$ строго внутри и длины которых стремятся к нулю при $k \to \infty$. Тогда из всех этих отрезков можно выбрать счётную систему попарно не пересекающихся отрезков $\mathcal{C}$, которая покрывает почти всё $X$, то есть $\mu\left(X \setminus \bigcup \mathcal{C}\right) = 0$.*

*Доказательство.* Если мера $X$ равна нулю, то доказывать нечего. Если мера $X$ бесконечна, то задача сводится к конечной мере выкидыванием из $X$ целых точек и разрезанием оставшегося на части $X \cap (n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$. При этом отрезки $I_{x,k}$ надо будет оставить только те, которые не содержат целых точек.

По свойству регулярности (теорема 5.35) возьмём компактное $F \subset X$, у которого $\mu F \geqslant 1/2\mu(X)$. Оно покрыто внутренностями таких отрезков, следовательно оно покрыто некоторой конечной системой таких отрезков. Выберем в этой системе минимальную подсистему, покрывающую $F$. В минимальной подсистеме ни один отрезок не содержится внутри другого, поэтому можно занумеровать их слева направо так, что их левые концы и их правые концы будут идти в соответствии с данным порядком. Заметим, что если отрезок номер $i$ пересекает отрезок номер $j > i$, то отрезки с номерами между ними можно было бы выкинуть, не уменьшая их объединения. Следовательно, пересекаются только отрезки с соседними номерами. Тогда разобьём нашу систему на чётные и нечётные по нумерации отрезки, какая-то из них, $\mathcal{C}_1$, покрывает не менее половины меры $\mu F$, следовательно она же покрывает не менее четверти меры $X$.

Теперь выбросим из $X$ объединение $\bigcup \mathcal{C}_1$, получив $X_2 = X \setminus \bigcup \mathcal{C}_1$ с $\mu(X_2) \leqslant 3/4\mu(X)$. В соответствующих системах отрезков с центрами в $X_2$ выбросим те, которые пересекаются с $\bigcup \mathcal{C}_1$. Тогда всё ещё верны условия теоремы для $X_2$, так как мы выкинули замкнутое множество и в каждой системе $\{I_{x,k}\}_k$ длины отрезков стремились к нулю и при $x \in X_2$ в системе $\{I_{x,k}\}_k$ осталось бесконечно много отрезков. Продолжая таким образом, мы будем каждый раз выбрасывать конечное число отрезков $\mathcal{C}_k$, не пересекающихся между собой и не пересекающихся с предыдущими, и уменьшать меру остатка $X_{k+1}$ множества $X$ как минимум на четверть. Сделав такое счётное количество раз, мы получим счётную систему отрезков, которые попарно не пересекаются и покрывают всё $X$ с точностью до множества меры нуль. ☐

*Задача* 5.140 (Лемма Безиковича о покрытии в $\mathbb{R}^n$). * Пусть в каждой точке $x$ измеримого $X \subset \mathbb{R}^n$ дан набор шаров $\{B_{x,k}\}_k$ с центрами в $x$, радиусы которых стремятся к нулю при $k \to \infty$. Тогда из всех этих шаров можно выбрать счётную систему попарно не пересекающихся шаров $\mathcal{C}$, которая покрывает почти всё $X$, то есть $\mu(X) \setminus \bigcup \mathcal{C} = 0$.

[[ Аналогично одномерному случаю, надо вначале покрыть конечной системой непересекающихся шаров какую-то фиксированную долю $X$. Для этого надо покрыть $X$ некоторой подсистемой из этих шаров $\mathcal{D}$, которую можно раскрасить в конечное число $M(n)$ цветов так, что шары одного цвета из $\mathcal{D}$ попарно не пересекаются. Тогда один из цветов будет покрывать не менее $1/M(n)$ от меры $X$. Для построения $\mathcal{D}$ можно использовать жадный алгоритм, который сводится к выбору на каждом шаге самого большого шара (точнее, близкого к супремуму) из тех шаров системы, центры которых не покрыты ранее выбранными шарами. Далее надо доказать, что в результате работы жадного алгоритма выбранный на некотором шаге шар пересекает не более $M(n) - 1$ предыдущих, для подходящей константы $M(n)$, зависящей только от размерности. ]]

Из леммы Безиковича следует важное утверждение о структуре измеримых множеств:

**Теорема 5.141** (Плотность измеримого множества). *Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$ измеримо. Тогда для почти всех $x \in X$*

$$\lim_{t \to +0} \frac{\mu(X \cap [x-t, x+t])}{2t} = 1$$

*и для почти всех $x \notin X$*

$$\lim_{t \to +0} \frac{\mu(X \cap [x-t, x+t])}{2t} = 0.$$

*Доказательство.* Предположим противное первому утверждению (второе делается аналогично). Отклонение от утверждения возможно, только если при некотором $\varepsilon > 0$

$$\varliminf_{t \to +0} \frac{\mu(X \cap [x-t, x+t])}{2t} < 1 - \varepsilon$$

в некоторых точках множества $X$. Множество $X_\varepsilon$, определяемое таким неравенством, измеримо, так как до взятия предела выражение непрерывно зависит от $t$, что позволяет в логической формуле нижнего предела использовать только рациональные положительные $t$ в счётном количестве (аналогично доказательству теоремы 5.48), получая в итоге борелевское множество.

При достаточно малом $\varepsilon$ мера $X_\varepsilon$ должна быть положительной, иначе по счётной аддитивности по рациональным положительным $\varepsilon$ отклонение от равенства

$$\lim_{t \to +0} \frac{\mu(X \cap [x-t, x+t])}{2t} = 1$$

было бы только на множестве меры нуль, а мы предполагаем противное.

Пусть теперь при некотором положительном $\varepsilon$ множество $Y = X_\varepsilon$ имеет положительную меру. По теореме 5.35 найдём открытое $V \supseteq Y$ меры не более $(1+\varepsilon)\mu Y$ и раскроем определение нижнего предела. Для любой точки $x \in Y$ у нас найдутся сколь угодно короткие отрезки $[x-t, x+t] \subset V$, для которых

$$\mu(Y \cap [x-t, x+t]) \leqslant \mu(X \cap [x-t, x+t]) < (1-\varepsilon)\mu[x-t, x+t]$$

Применим лемму Безиковича к множеству $Y$ и таким отрезкам, в результате $Y$ почти полностью покроется ими. Так как они все лежат в $V$, то суммируя неравенства по полученной системе попарно не пересекающихся отрезков мы узнаем, что

$$\mu Y \leqslant (1-\varepsilon)\mu V \leqslant (1-\varepsilon^2)\mu Y,$$

противоречие. □

В доказательстве использовался переход к нижнему и верхнему пределу функции двух переменных по одной из переменных с сохранением измеримости по другой переменной. Читателю предлагается проработать детали этого рассуждения в следующей задаче.

*Задача* 5.142. Пусть функция двух переменных $f(x,t)$ непрерывна по $t > 0$ при фиксированном $x$ (в некотором измеримом $X$) и измерима по $x$ при фиксированном $t > 0$. Докажите, что верхний предел

$$g(x) = \varlimsup_{t\to+0} f(x,t), \quad g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

тоже измерим.

[[ Проверьте, что непрерывность по $t$ позволяет написать логическую формулу с использованием только рациональных чисел

$$g(x) < c \Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{Q},\ s > 0, \exists \delta \in \mathbb{Q},\ \delta > 0, \forall t \in \mathbb{Q} \cap (0,\delta)\ f(x,t) < c - s.$$

Далее можно превратить эту логическую формулу в выражение множества $\{x \in X \mid g(x) < c\}$ через множества $\{x \in X \mid f(x,t) < c - s\}$ с помощью счётных операций пересечения и объединения. ]]

Аналогично доказывается более общий факт про функции вместо множеств. Будем называть функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *локально абсолютно интегрируемой*, если $f$ измерима и у любой точки прямой существует окрестность, в которой интеграл $f$ конечен. Из компактности отрезка тогда последует, что интеграл $f$ по любому отрезку конечен, а значит и конечен интеграл по любому ограниченному множеству.

**Теорема 5.143** (Усреднение интегрируемой функции). *Если $f$ локально абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то для почти всех $x \in \mathbb{R}$*

$$f(x) = \lim_{t\to+0} \frac{\int_{x-t}^{x+t} f(\xi)\,d\xi}{2t} = \lim_{t\to+0} \frac{\int_{x}^{x+t} f(\xi)\,d\xi}{t} = \lim_{t\to+0} \frac{\int_{x-t}^{x} f(\xi)\,d\xi}{t}.$$

*Доказательство.* Докажем сначала для симметричного усреднения и посмотрим, как может нарушаться требуемое равенство. Докажем, что неравенство

$$f(x) < \varlimsup_{t\to+0} \frac{\int_{x-t}^{x+t} f(\xi)\,d\xi}{2t} \tag{5.3}$$

может выполняться только на множестве меры нуль. Для этого достаточно доказать (из счётной аддитивности), что для любых двух рациональных $a < b$ условия

$$f(x) < a < b < \varlimsup_{t\to+0} \frac{\int_{x-t}^{x+t} f(\xi)\,d\xi}{2t} \tag{5.4}$$

могут выполняться только на множестве меры нуль. Действительно, множество, на котором выполняется (5.3) является объединением счётного числа (по рациональным $a < b$) множеств, на которых выполняется (5.4).

Верхний предел в формуле измерим по следующим причинам. Выражение под знаком предела непрерывно по $x$ и $t$, так как интеграл зависит непрерывно от верхнего и нижнего предела. В силу непрерывности, неравенства в определении верхнего предела

$$\overline{\lim_{t\to+0}} \frac{\int_{x-t}^{x+t} f(\xi)\,d\xi}{2t} > b \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall \tau > 0\ \exists t \in (0,\tau)\quad \frac{\int_{x-t}^{x+t} f(\xi)\,d\xi}{2t} > b + \varepsilon$$

достаточно проверять только для рациональных $\varepsilon, \tau, t$. Следовательно, условие того, что верхний предел больше $b$, может быть выписано с использованием только счётных переменных, и таким образом задаёт измеримое множество значений переменной $x$, аналогично рассуждениям в доказательстве теоремы 5.48.

Предположим, что заданное условием (5.4) на переменную $x$ множество $Y$ для некоторых рациональных $a < b$ имеет положительную меру. Если множество $Y$ не ограничено, то мы разобьём его на ограниченные части и одна из них будет иметь положительную меру; далее будем работать с ограниченной частью как $Y$. Тогда по строгой монотонности интеграла Лебега

$$\int_Y f(x)\,dx < a\mu Y.$$

По свойству внешней регулярности меры Лебега (теорема 5.35) найдём убывающую последовательность открытых множеств $V_n \supseteq Y$, такую что $\mu(V_n \setminus Y) \to 0$.

По непрерывности интеграла Лебега (теорема 5.93) для одного из $V_n$, назовём его просто $V \supseteq Y$, будет выполняться

$$\int_{V\setminus Y} |f(x)|\,dx < (b-a)\mu Y.$$

Теперь из определения верхнего предела в каждой точке $x \in Y$ мы найдём стягивающуюся последовательность отрезков $[x-t, x+t] \subset V$, в которой выполняется

$$\int_{x-t}^{x+t} f(\xi)\,d\xi > b\mu[x-t, x+t].$$

Применяя к множеству $Y$ и этой системе лемму Безиковича, мы получим некоторое объединение счётной системы отрезков $Y'$, такое что $Y' \subseteq V$, $\mu(Y \setminus Y') = 0$ и в сумме по счётной аддитивности интеграла Лебега

$$\int_{Y'} f(\xi)\,d\xi \geqslant b\mu Y' \geqslant b\mu Y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_Y f(\xi)\,d\xi > \int_{Y'} f(\xi)\,d\xi - \int_{Y'\setminus Y} |f(\xi)|\,d\xi > b\mu Y - (b-a)\mu Y = a\mu Y,$$

противоречие.

Мы доказали, что почти всюду выполняется обратное к (5.3), то есть выполняется

$$f(x) \geqslant \overline{\lim_{t\to+0}} \frac{\int_{x-t}^{x+t} f(\xi)\,d\xi}{2t}.$$

Аналогично, меняя $f$ на $-f$, доказывается, что почти всюду выполняется

$$f(x) \leqslant \underline{\lim_{t\to+0}} \frac{\int_{x-t}^{x+t} f(\xi)\,d\xi}{2t}.$$

В итоге, почти всюду выполняется цепочка неравенств

$$\varlimsup_{t\to+0} \frac{\int_{x-t}^{x+t} f(\xi)\,d\xi}{2t} \leqslant f(x) \leqslant \varliminf_{t\to+0} \frac{\int_{x-t}^{x+t} f(\xi)\,d\xi}{2t}.$$

Но так как верхний предел не менее нижнего, то на самом деле это всё равенства почти всюду, то есть почти всюду выполняется

$$f(x) = \lim_{t\to+0} \frac{\int_{x-t}^{x+t} f(\xi)\,d\xi}{2t}.$$

Для усреднения слева и справа лемма Безиковича так сразу не работает. Однако можно заметить, что, например, при каждом нарушении типа

$$f(x) < a < b < \varlimsup_{t\to+0} \frac{\int_{x}^{x+t} f(\xi)\,d\xi}{t}$$

мы сможем найти сколь угодно короткие отрезки $[x, x+t]$, на которых

$$\int_x^{x+t} f(\xi)\,d\xi > b\mu[x, x+t].$$

А потом из непрерывности интеграла по нижнему пределу для каждого такого отрезка можно найти произвольно малое $t' > 0$, такое что

$$\int_{x-t'}^{x+t} f(\xi)\,d\xi > b\mu[x-t', x+t].$$

Таким образом точка $x$ войдёт внутрь модифицированного отрезка и получатся неравенства, из которых мы уже выводили противоречие. □

Теперь мы в состоянии изучить вопрос о существовании почти всюду первообразной у интегрируемой функции и выполнении формулы Ньютона–Лейбница в более общей ситуации.

**Теорема 5.144** (Дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом). *Если $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема с конечным интегралом, то функция*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

*почти всюду дифференцируема и $F'(x) = f(x)$ почти всюду.*

*Доказательство.* Так как

$$F(x+t) - F(x) = \int_x^{x+t} f(\xi)\,d\xi,$$

то это утверждение эквивалентно одному из утверждений предыдущей теоремы. □

*Задача* 5.145. Докажите что если у измеримой функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интеграл по любому отрезку $[a,x] \subseteq [a,b]$ равен нулю, то она равна нулю почти всюду.

[[ Примените предыдущую теорему. ]]

В ситуации предыдущей теоремы мы будем говорить, что $F$ является *обобщённой первообразной* интегрируемой $f$, для нахождения обобщённой первообразной функции $f$ достаточно быть интегрируемой по Лебегу хотя бы локально.

В теореме 5.144 мы шли от некоторой функции к первообразной, но иногда полезно идти от функции к её производной почти всюду. Мы установим одно из достаточных условий на функцию, позволяющее ей фигурировать в качестве обобщённой первообразной в формуле Ньютона–Лейбница.

**Теорема 5.146.** *Если $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица*

$$\forall x, y \in [a, b], \quad |F(x) - F(y)| \leqslant L|x - y|,$$

*то она почти всюду имеет производную и её приращение на отрезке равно интегралу производной,*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\, dx.$$

*Доказательство.* Рассмотрим верхнюю правую производную $F$, обозначим её $\varphi(x)$. В силу непрерывности $F$ в определяющем $\varphi$ верхнем пределе

$$\varphi(x) = \varlimsup_{t \to +0} \frac{F(x + t) - F(x)}{t}$$

можно рассматривать только рациональные $t$, тогда с помощью задачи 5.142 устанавливается измеримость $\varphi$. Также $\varphi$ ограничена из липшицевости $F$. Следовательно, $\varphi$ интегрируема. По теореме 5.144 функция

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)\, dt$$

почти всюду имеет производную, равную $\varphi(x)$.

Посмотрим теперь на разность $G(x) = F(x) - \Phi(x)$, она почти всюду имеет верхнюю правую производную, равную нулю. Мы хотим доказать, что $G(b) \geqslant G(a)$, отсюда будет следовать, что приращение $F(b) - F(a)$ не менее интеграла правой верхней производной $F$. Доказав аналогичным образом, что приращение не более интеграла от правой нижней производной, мы получим, что на самом деле правая нижняя и правая верхняя производные $F$ совпадают почти всюду и приращение $F(b) - F(a)$ равно интегралу любой из них. Меняя $b$ на $x$ в этом рассуждении, мы найдём, что

$$F(x) = F(a) + \Phi(x) = F(a) + \int_a^x \varphi(t)\, dt$$

на всём отрезке. После этого теорема 5.144 показывает, что $F$ на самом деле почти всюду дифференцируема и её производная почти всюду равна $\varphi$.

Итак, нам осталось доказать неравенство $G(b) \geqslant G(a)$. Функция $G$ имеет почти всюду нулевую верхнюю правую производную и является липшицевой с некоторой константой (так как $F$ и $\Phi$ липшицевы). Предположим противное тому, что мы хотим доказать: $G(b) < G(a)$. Рассмотрев $H(x) = G(x) + 2\varepsilon x$, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ мы оставим в силе неравенство

$$H(b) < H(a) - \varepsilon, \tag{5.5}$$

а верхняя правая производная $H$ почти всюду будет больше $\varepsilon$, пусть последнее выполняется на множестве $X \subseteq [a, b]$, $\mu(X) = \mu[a, b]$. Также функция $H$ остаётся липшицевой и мы обозначим её константу липшицевости той же буквой $L$. Будем считать, что концы отрезка не входят в $X$. По определению верхней правой производной, для любого

$x \in X$ найдётся произвольно маленькое $t$, такое что

$$H(x+t) - H(x) > \varepsilon t.$$

Тогда по непрерывности можно найти достаточно маленькое $t' < t$, так что будет выполняться

$$H(x+t) - H(x-t') > 0.$$

По лемме Безиковича покроем такими попарно не пересекающимися отрезками $[x-t', x+t]$ почти всё $X$, а значит и весь отрезок $[a, b]$ кроме множества меры нуль. Оставим лишь конечное число попарно не пересекающихся отрезков $[x-t', x+t]$ из этого покрытия так, чтобы суммарная длина дополнительных к их объединению промежутков отрезка $[a, b]$ была менее $\varepsilon/L$. Тогда на оставленных отрезках $H$ имеет положительное приращение по их выбору, а на дополнительных интервалах она из-за условия Липшица убывает менее чем на $\varepsilon$ в сумме. Но это противоречит предположению (5.5). □

Далее в разделе про гармонический анализ будут доказаны теоремы 8.31 и 8.33, которые полностью ответят на вопрос, когда можно писать формулу Ньютона–Лейбница для приращения некоторой функции. На самом деле в доказательствах предыдущих двух теорем уже содержатся почти все нужные рассуждения, только не хватает определения *абсолютной непрерывности* функции.

*Задача* 5.147. Приведите пример непрерывной и непостоянной на отрезке функции, у которой производная почти всюду (по мере Лебега) существует и почти всюду равна нулю.

[[ Вспомните про канторово множество, пусть функция возрастает только на нём, а на его дополнении кусочно постоянна. ]]

*Задача* 5.148. ** Докажите, что монотонная на отрезке функция почти всюду имеет производную.

[[ Действуйте аналогично доказательству дифференцируемости почти всюду липшицевой функции, но более аккуратно. ]]

*Задача* 5.149. * Докажите, что 1-липшицево отображение $f : X \to \mathbb{R}^n$ для $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (то есть отображение со свойством $|f(x) - f(x)| \leqslant |x-y|$) не увеличивает внешнюю меру Лебега множества и переводит измеримые множества в измеримые.

[[ Используйте многомерный вариант леммы Безиковича. ]]

*Задача* 5.150. *(Теорема Радемахера) Докажите, что липшицева функция на области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ почти всюду дифференцируема (в смысле определения из раздела 6.1).

[[ Проверьте наличие частных производных почти всюду по одномерному случаю, потом для значений этих производных используйте многомерный вариант теоремы о плотности. ]]

# 6. ГЛАДКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, МНОГООБРАЗИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

**6.1. Дифференцируемые отображения открытых подмножеств $\mathbb{R}^n$.** Определим понятие дифференцируемости отображений, аналогичное дифференцируемости функций одной переменной.

**Определение 6.1.** Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$ называется *дифференцируемым* в точке $x_0 \in U$, если

$$f(x) = f(x_0) + Df_{x_0}(x - x_0) + o(|x - x_0|), \quad x \to x_0,$$

где $Df_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ является линейным отображением и называется *производной* $f$ в точке $x_0$.

По сравнению с определением производной функции одной переменной здесь производная — это не число, а линейное отображение. Впрочем, старому определению это не противоречит, так как линейное отображение $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является умножением на некоторое действительное число, которое и есть производная в старом смысле.

**Определение 6.2.** В условиях предыдущего определения $f$ называется *непрерывно дифференцируемым* на $U$ если оно дифференцируемо в каждой точке и $Df_x$ непрерывно зависит от $x$.

Чтобы работать с определением дифференцируемого отображения, нам надо установить некоторые полезные факты про линейные отображения.

**Лемма 6.3.** *Для любого линейного отображения $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ найдётся число $\|A\|$ такое что для всех $x \in \mathbb{R}^n$*

$$|Ax| \leqslant \|A\| \cdot |x|.$$

*Доказательство.* Заметим, что сумму модулей координат $Ax$ можно оценить как сумму модулей матричных элементов $A$, умноженную на максимальный модуль координаты $x$. Так как длина вектора не больше суммы модулей его координат и не меньше максимального модуля координаты, то сумма модулей матричных элементов $A$ сгодится в качестве $\|A\|$ в требуемом неравенстве. ☐

Обычно за *норму линейного отображения* $\|A\|$ берётся минимальное число, которое гарантирует неравенство

$$|Ax| \leqslant \|A\| \cdot |x|$$

для всех $x$. Заметим, что обе части неравенства умножаются на $|\lambda|$ при умножении $x$ на число $\lambda$, поэтому это неравенство достаточно проверить, например, на единичной сфере $\{x \mid |x| = 1\}$. Тогда функция $|Ax|$ непрерывна как композиция непрерывных, а значит оптимальное значение $\|A\| = \max\{|Ax| \mid |x| = 1\}$ на сфере достигается из компактности сферы.

*Задача* 6.4. Опишите $\|A\|$ для самосопряжённого оператора $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ в терминах его собственных значений и докажите, что для любого линейного отображения $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ выполняется

$$\|A\|^2 = \|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A^*\|^2.$$

[[ Приведите в некотором ортонормированном базисе самосопряжённый оператор $A$ к диагональному виду, изучите также максимум выражения $(x, Ax)$ по единичным векторам $x$ для самосопряжённого $A$. ]]

*Задача* 6.5. Приведите пример, показывающий, что линейный оператор с нулевыми собственными значениями может иметь сколь угодно большую норму, если мы не предполагаем его самосопряжённости.

Из леммы 6.3 мы получаем, что для дифференцируемого в точке $x_0$ отображения верна оценка

$$|f(x) - f(x_0)| = O(|x - x_0|)$$

при $x \to x_0$. В частности, получается:

**Следствие 6.6.** *Если отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке $x_0 \in U$, то оно непрерывно в точке $x_0$.*

Следующее свойство является главным инструментом практического вычисления производных отображений:

**Теорема 6.7** (Дифференцирование композиции). *Если $f$ дифференцируемо в точке $x_0$, а $g$ дифференцируемо в точке $y_0 = f(x_0)$, то композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке $x_0$ и $D(g \circ f)_{x_0} = Dg_{y_0} \circ Df_{x_0}$.*

*Доказательство.* Запишем

$$\begin{aligned} g(f(x)) = g(y_0) + Dg_{y_0}(f(x) - f(x_0)) + o(|f(x) - f(x_0)|) = \\ = g(y_0) + Dg_{y_0} \circ Df_{x_0}(x - x_0) + Dg_{y_0} o(|x - x_0|) + o(O(|x - x_0|)) = \\ = g(y_0) + Dg_{y_0} \circ Df_{x_0}(x - x_0) + o(|x - x_0|), \end{aligned}$$

используя оценки из леммы 6.3 $|Ax| = O(|x|)$ и из её следствия $f(x) - f(x_0) = O(x - x_0)$, вместе с символическими равенствами $o(O(\cdot)) = O(o(\cdot)) = o(\cdot)$. ☐

Для функций $f : U \to \mathbb{R}$ мы будем обозначать $Df_x = df_x$ и называть это *дифференциал функции*. По определению это линейная форма $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

**Определение 6.8.** *Производной функции $f$ по направлению $v \in \mathbb{R}^n$* в точке $x$ называется

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}.$$

**Лемма 6.9.** *Если функция дифференцируема в точке $x$, то в этой точке*

$$\frac{\partial f}{\partial v} = df_x(v).$$

*Доказательство.* Подставим $x + tv$ в определение дифференциала

$$f(x + tv) - f(x) = df_x(tv) + o(|t||v|) = t\left(df_x(v) + o(1)\right).$$

Поделив на $t$ и перейдя к пределу, мы получим требуемое. ☐

Эту лемму можно доказать и без формул, заметив, что производная по направлению — это производная композиции нашей функции и параметризации куска прямой (с производной $v$). Собственно, вместо функции можно рассматривать и отображение в евклидово пространство большей размерности, заменив $df$ на $Df$.

Предыдущая лемма, в частности, даёт выражение *частных производных*, то есть производных по направлениям базисных векторов $e_1, \dots, e_n$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t}$$

через дифференциал функции. Получается, что

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = df_x(e_i),$$

то есть частные производные оказываются равными координатам дифференциала, как линейного отображения. В итоге, дифференциал функции в точке можно выразить как

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

где $dx_1, \dots, dx_n$ — дифференциалы координатных функций. Здесь $x_1, \dots, x_n$ мы рассматриваем как функции точки, их дифференциалы $dx_1, \dots, dx_n$ тогда будут линейными функциями вектора, эти дифференциалы в каждой точке образуют двойственный базис к базису векторов $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$.

Координатную запись дифференциала можно распространить с функций на отображения в другое евклидово пространство. Для отображений $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (или определённых на открытом подмножестве $\mathbb{R}^n$) дифференцируемость на самом деле означает дифференцируемость каждой из его координат $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$. Здесь координата отображения $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — это композиция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ с $i$-й координатной функцией $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Производная $Df$ как линейное отображение тогда представляется матрицей из частных производных $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$.

В обратную сторону, наличие частных производных может и не означать дифференцируемости. Просто потому, что частные производные говорят только об изменении $f(x)$ при движении $x$ вдоль координатных осей и ничего не сообщают о значениях $f$ за пределами координатных осей. Тем не менее, можно дать достаточные условия для практической проверки дифференцируемости отображения в терминах частных производных, если использовать значения частных производных не только в точке, но и в её окрестности.

**Теорема 6.10.** *Если отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$ из открытого $U \subseteq \mathbb{R}^n$ задано в координатах как*

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n),\ i = 1, \dots, m$$

*и функции $f_i$ имеют непрерывные частные производные на $U$, то $f$ непрерывно дифференцируемо на $U$.*

*Доказательство.* Достаточно доказать для $m = 1$, то есть для одной функции $f$. Фиксируем точку $x \in U$ и рассмотрим другую точку $\xi$ в некоторой окрестности $U_\delta(x) \subseteq U$. Тогда от $x$ до $\xi$ можно дойти, двигаясь вдоль координатных осей, что даёт формулу

$$\begin{aligned} f(\xi) - f(x) = f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) - f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x_n) + \\ + f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x_n) - f(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, x_{n-1}, x_n) + \\ + \dots + \\ + f(\xi_1, x_2 \dots, x_n) - f(x_1, x_2 \dots, x_n). \end{aligned}$$

Применим теорему о среднем Лагранжа в каждой строке

$$\begin{aligned} f(\xi) - f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \eta_n)(\xi_n - x_n) + \\ + \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(\xi_1, \dots, \eta_{n-1}, x_n)(\xi_{n-1} - x_{n-1}) + \\ + \dots + \\ + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\eta_1, x_2 \dots, x_n)(\xi_1 - x_1), \end{aligned}$$

для некоторых $\eta_i$ между $x_i$ и $\xi_i$. Каждая частная производная берётся в некоторой точке той же окрестности $U_\delta(x)$, поэтому при $\delta \to 0$ из непрерывности частных производных можно записать

$$f(\xi) - f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) + o(1)\right)(\xi_n - x_n) + \\ + \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(x) + o(1)\right)(\xi_{n-1} - x_{n-1}) + \\ + \dots + \\ + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + o(1)\right)(\xi_1 - x_1),$$

что уже означает дифференцируемость по определению,

$$f(\xi) - f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)(\xi_k - x_k) + \sum_{k=1}^{n} o(1)(\xi_k - x_k),$$

так как выражения $o(1)(\xi_k - x_k)$ в сумме дадут $o(|\xi - x|)$.

В этой теореме отображение получается непрерывно дифференцируемым в том смысле, что производная $Df_x$, явно представленная матрицей с компонентами $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$, непрерывно зависит от $x$. ☐

*Задача* 6.11. Приведите пример, показывающий, что существование частных производных первого порядка в окрестности нуля для функции двух переменных не гарантирует её дифференцируемости в нуле.

*Задача* 6.12. Приведите пример функции двух переменных, определённой в окрестности нуля и имеющей производные по всем направлениям в нуле, но не являющейся дифференцируемой в нуле.

[[ На самом деле такая функция даже не обязана быть непрерывной в нуле. ]]

6.2. **Формула Тейлора для функции нескольких переменных.** Если координатные функции отображения $U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, можно дифференцировать по произвольным $x_i$ не менее $k$ раз и производные до $k$-го порядка включительно оказываются непрерывными, то отображение будет называться *$k$ раз непрерывно дифференцируемым*, или *класса $C^k$*. Если $k$ может быть произвольно большим, то есть существуют частные производные любого порядка по любым переменным, то отображение будет называться *бесконечно гладким* или *класса $C^\infty$*.

Рассматриваемые нами отображения задаются своими координатными функциями, поэтому далее мы сосредоточимся на свойствах производных высшего порядка для одной функции нескольких переменных. Сначала установим, что при некоторых разумных условиях операции взятия частной производной по разным переменным коммутируют друг с другом. Это достаточно установить для функции двух переменных, что и делается в следующей лемме.

**Лемма 6.13.** *Если функция $f(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $(x_0, y_0)$, то для вторых производных выполняется*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

*Доказательство.* Выражение $g(x, y) = f(x, y) - f(x, y_0) - f(x_0, y) + f(x_0, y_0)$ можно двумя применениями теоремы о среднем Лагранжа (проделайте это аккуратно) привести к виду

$$g(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi', \eta')(x - x_0)(y - y_0)$$

для некоторых $\xi'$ между $x$ и $x_0$ и $\eta'$ между $y$ и $y_0$. Делая то же самое в другом порядке, можно получить аналогичное выражение

$$g(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi'', \eta'')(x - x_0)(y - y_0).$$

При $x \neq x_0$ и $y \neq y_0$ получается равенство

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi', \eta') = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi'', \eta'')$$

и в нём достаточно перейти к пределу $(x, y) \to (x_0, y_0)$ (а значит $(\xi', \eta') \to (x_0, y_0)$ и $(\xi'', \eta'') \to (x_0, y_0)$), используя непрерывность. ☐

Теперь мы можем установить аналог формулы Тейлора для функций нескольких переменных.

**Теорема 6.14** (Формула Тейлора для функций нескольких переменных). *Если функция $f$ непрерывно дифференцируема $m$ раз в окрестности $U_\varepsilon(x)$ некоторой точки $x \in \mathbb{R}^n$, то для любого $\xi \in U_\varepsilon(x)$ выполняется (суммирование по неотрицательным целым $k_i$)*

$$\begin{aligned} f(\xi) = &\sum_{k_1+\dots+k_n<m} \frac{1}{k_1!\dots k_n!} \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}(x) \cdot (\xi_1 - x_1)^{k_1}\dots(\xi_n - x_n)^{k_n} + \\ &+ \sum_{k_1+\dots+k_n=m} \frac{1}{k_1!\dots k_n!} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}(x + t(\xi - x)) \cdot (\xi_1 - x_1)^{k_1}\dots(\xi_n - x_n)^{k_n} = \\ &= \sum_{k_1+\dots+k_n\leqslant m} \frac{1}{k_1!\dots k_n!} \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}(x) \cdot (\xi_1 - x_1)^{k_1}\dots(\xi_n - x_n)^{k_n} + o(|\xi - x|^m). \end{aligned}$$

*для некоторого $t \in (0, 1)$.*

*Доказательство.* Достаточно рассмотреть функцию одной переменной $f(x + t(\xi - x))$ и выписать для неё формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для значений $t = 0$ и $t = 1$. Конкретнее, если мы продифференцируем выражение $f(x + t(\xi - x))$ по переменной $t$, то мы получим по формуле для производной по направлению (или производной композиции)

$$\frac{d}{dt} f(x + t(\xi - x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + t(\xi - x))(\xi_i - x_i).$$

При дифференцировании в следующий раз и далее мы применяем эту формулу и подставляем её в саму себя, получая

$$\frac{d^k}{dt^k} f(x + t(\xi - x)) = \sum_{1\leqslant i_1,\dots,i_k\leqslant n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}(x + t(\xi - x))(\xi_{i_1} - x_{i_1})\dots(\xi_{i_k} - x_{i_k}).$$

Эту формулу можно переписать иначе, учитывая установленный факт, что частные дифференцирования коммутируют друг с другом. Считая суммы не по порядку дифференцирования, а по тому, сколько раз дифференцировали по каждой переменной, по $x_1$ — $k_1$ раз, …, по $x_n$ — $k_n$ раз, мы можем написать выражение в виде суммы по неотрицательным $k_1, \dots, k_n$

$$\frac{d^k}{dt^k} f(x+t(\xi-x)) = \sum_{k_1+\dots+k_n=k} \binom{k}{k_1 \dots k_n} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} (x+t(\xi-x))(\xi_1-x_1)^{k_1} \dots (\xi_n-x_n)^{k_n}.$$

В этой формуле через

$$\binom{k}{k_1 \dots k_n} = \frac{k!}{k_1! \dots k_n!}$$

обозначен мультиномиальный коэффициент, показывающий, сколькими способами мы можем переставить $k_1$ единиц, $k_2$ двоек, …, $k_n$ чисел $n$ в последовательности, что соответствует порядку дифференцирований по соответствующим переменным. Выражение через факториалы получается из того факта, что всю последовательность можно переставить $k!$ способами, но при этом $k_1!$ способов переставить единицы её не меняют, $k_2!$ способов переставить двойки тоже её не меняют и т.д.

Таким образом мы доказали первый вариант формулы, который получается подстановкой полученных равенств в формулу Тейлора для одной переменной с остаточным членом в форме Лагранжа. Второй вариант формулы (с остаточным членом в форме Пеано) следует из условия непрерывности $m$-й производной:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} (x+t(\xi-x)) = \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} (x) + o(1).$$

□

*Задача* 6.15. Докажите соотношение для целых $(k_1, \dots, k_n) \neq (0, \dots, 0)$

$$\binom{k}{k_1 \dots k_n} = \sum_{i=1}^n \binom{k-1}{k_1 \dots (k_i-1) \dots k_n},$$

считая, что если какая-то из координат отрицательна, $k_i < 0$, то мультиномиальный коэффициент равен нулю.

[[ Удобно использовать выражение

$$(x_1+\dots+x_n)^k = \sum_{k_1+\dots+k_n=k} \binom{k}{k_1 \dots k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n},$$

которое можно считать определением мультиномиальных коэффициентов. ]]

Для формулы Тейлора и производных высших порядков придуманы обозначения $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ для вектора из неотрицательных целых чисел, $|\mathbf{k}| = k_1 + \dots + k_n$ для суммы его координат, $\mathbf{k}! = k_1! \dots k_n!$, а также для вектора $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ из действительных чисел, его возведения в степень и производной

$$\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \quad \frac{\partial^{|\mathbf{k}|} f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{k}}} = \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}.$$

Тогда формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано начинает выглядеть так:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}| \leqslant m} \frac{1}{\mathbf{k}!} \frac{\partial^{|\mathbf{k}|} f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{k}}} (\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^{\mathbf{k}} + o(|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^m).$$

Эти обозначения удобно использовать при работе с частными производными высших порядков, но для первой и второй производных мы не будем ими злоупотреблять.

Можно заметить, что формула Тейлора начинается с

$$f(\xi) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)(\xi_1 - x_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)(\xi_n - x_n) + o(|\xi - x|),$$

то есть с постоянного члена и линейной части — первого дифференциала. Следующие слагаемые можно (с точностью до множителя) называть вторым дифференциалом и т.п. Второй дифференциал, например, является квадратичной формой от $\xi - x$, то есть можно написать

$$f(\xi) = f(x) + df_x(\xi - x) + \frac{1}{2} d_2 f_x(\xi - x) + o(|\xi - x|^2)$$

при условии дважды непрерывной дифференцируемости. Мы будем писать $d_2$ вместо $d^2$, так как в дальнейшем мы расширим определение $d$ так, что всегда будет выполняться $d^2 = 0$.

В дальнейшем нас будут интересовать вопросы преобразования разных выражений при криволинейной замене координат и в частности, преобразование формулы Тейлора. Если мы делаем гладкую подстановку $x = \varphi(t)$ и её производная в точке есть $D\varphi$, то при замене координат по теореме о дифференцировании композиции $df$ заменится на $df \circ D\varphi$. Это означает, что первый дифференциал меняется как и положено меняться линейной форме при линейной замене координат отображением $D\varphi$. Иногда это называют *инвариантность формы первого дифференциала*.

Для второго дифференциала всё не так просто. Уже в одномерном случае можно убедиться, что

$$(f \circ \varphi)'' = f''(\varphi')^2 + f'\varphi'' \Leftrightarrow d_2(f \circ \varphi) = \left(f''(\varphi')^2 + f'\varphi''\right) dt^2,$$

то есть вторая производная в новых координатах зависит и от первой производной в старых. Однако в одном важном для нас случае второй дифференциал ведёт себя при замене координат как квадратичная форма (см. также задачу 7.152 про *гессиан* в (полу)римановой геометрии):

**Лемма 6.16.** *Если $df_{x_0} = 0$, то при любой замене координат $x = \varphi(t)$ второй дифференциал в точке $x_0 = \varphi(t_0)$ меняется так:*

$$d_2(f \circ \varphi)_{t_0}(\Delta t) = d_2 f_{x_0}(D\varphi_{t_0}(\Delta t)).$$

*Доказательство.* Для нахождения элементов второго дифференциала (как матрицы) надо дифференцировать композицию один раз, а потом ещё один раз. Помимо выписанных слагаемых со вторыми производными $f$ и первыми производными $\varphi$ могли бы появиться слагаемые с первыми производными $f$ и вторыми производными $\varphi$. Но по условию в точке $x_0$ первые производные $f$ равны нулю, а значит выражение содержит только вторые производные $f$. Явно это выглядит как

$$\frac{\partial^2 (f \circ \varphi)}{\partial t_i \partial t_j} = \sum_{k,m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial x_k}{\partial t_i} \frac{\partial x_m}{\partial t_j},$$

что соответствуют равенству квадратичных форм в формулировке леммы. □

6.3. **Свёртки и приближение функций бесконечно гладкими.** Помимо приближения функций с помощью теоремы Стоуна–Вейерштрасса 4.83 или приближения в среднем элементарными по теореме 5.87 иногда бывает полезно иметь более контролируемое приближение функций и отображений. В этом разделе мы рассмотрим соответствующие полезные приёмы приближения функций.

Определим понятие *свёртки функций*:

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t)\,dt,$$

тогда пишут $h = f * g$. Конечно, в определении свёртки остаётся вопрос о существовании интеграла. Можно заметить, что если одна функция ограничена, а другая имеет конечный интеграл, то свёртка также ограничена, кроме того:

**Теорема 6.17.** *Если функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеют конечные интегралы, то $f * g$ определена почти всюду и выполняется неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g|\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f|\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |g|\,dx$$

*и равенство*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f * g\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g\,dx.$$

*Доказательство.* Функция $f(y)g(x)$ измерима по Лебегу (см. задачу 5.122) и интеграл её модуля равен произведению интегралов модулей $f$ и $g$ по теореме Фубини. Тогда выражение

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |f(x-t)g(t)|\,dtdx$$

также равно произведению интегралов модулей $f$ и $g$, так как отличается от $|f(y)g(x)|$ линейной заменой переменных с единичным детерминантом. Тогда очевидно, что интегралы в неравенстве

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)\,dt\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)g(t)|\,dt$$

определены для почти всех $x$ и требуемое неравенство получается интегрированием этого неравенства по $x$. Последнее равенство в теореме просто следует из теоремы Фубини и линейной замены $x - t = y$. ☐

*Задача* 6.18. Докажите ассоциативность свёртки

$$f * (g * h) = (f * g) * h,$$

для функций с конечным интегралом.

[[ Выпишите интеграл, который повторным интегрированием сводится к двум разным порядкам свёртки. ]]

Предположим, что в свёртке функция $g$ интегрируема с конечным интегралом, а $f$ ограничена, так же, как и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Тогда возможно дифференцирование под знаком интеграла (теорема 5.106) и мы получаем

$$\frac{\partial(f*g)}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f(x-t)}{\partial x_i} g(t)\,dt = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g,$$

то есть при дифференцировании свёртки надо дифференцировать одну из функций, и мы будем часто этим пользоваться.

Для содержательного применения свёртки (и для построения *гладких разбиений единицы* далее) нам потребуются специфические бесконечно гладкие функции. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0; \\ e^{-1/x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Она бесконечно дифференцируема везде, кроме быть может точки $0$. Каждая её производная справа от нуля имеет вид $P(1/x)e^{-1/x}$, где $P$ — многочлен. Отсюда следует, что предел любой её производной в нуле равен нулю. Тогда любая её производная в нуле равна нулю по индукции, так как по правилу Лопиталя

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n+1)}(x)}{1} = 0.$$

В итоге, $f$ оказывается бесконечно гладкой на всей прямой. Тогда функция

$$\varphi(x) = f(x+1)f(1-x)$$

будет бесконечно гладкой, и будет отличной от нуля только на интервале $(-1,1)$, на котором она положительна.

**Лемма 6.19.** *Для любого $\varepsilon > 0$ существует бесконечно гладкая функция $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, отличная от нуля только в $U_\varepsilon(0)$ и такая, что*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\, dx = 1.$$

*Для любых $\varepsilon > \delta > 0$ существует бесконечно гладкая функция $\psi_{\varepsilon,\delta} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, отличная от нуля только в $U_\varepsilon(0)$ тождественно равная $1$ в $U_\delta(0)$.*

*Доказательство.* В первом случае сгодится функция вида

$$\varphi_\varepsilon(x_1,\dots,x_n) = A\varphi\left(\frac{\sqrt{n}x_1}{\varepsilon}\right)\dots\varphi\left(\frac{\sqrt{n}x_n}{\varepsilon}\right)$$

для ранее построенной функции одной переменной $\varphi$ и некоторой константы $A$, которая обеспечит равенство интеграла единице.

Во втором случае рассмотрим сначала функцию одной переменной

$$\psi(x) = B\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt,$$

где константу выберем так, чтобы $\psi(x) \equiv 0$ при $x \leqslant -1$ и $\psi(x) \equiv 1$ при $x \geqslant 1$. Тогда достаточно положить

$$\psi_{\varepsilon,\delta}(x) = \psi\left(\frac{\delta+\varepsilon-2|x|}{\varepsilon-\delta}\right).$$

☐

Сворачивая с такими функциями, мы можем приближать непрерывную функцию бесконечно гладкими:

**Теорема 6.20.** *Пусть $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — неотрицательная бесконечно гладкая функция, отличная от нуля только при $|x| \leqslant 1$ и пусть $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1$. Положим*

$$\varphi_k(x) = k^n\varphi(kx),$$

*эти функции тоже имеют единичные интегралы, и $\varphi_k$ отлична от нуля только при $|x| \leqslant 1/k$. Теперь для непрерывной $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определим свёртки*

$$f_k(x) = (f * \varphi_k)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\varphi_k(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\varphi_k(x-t)\, dt.$$

*Функции $f_k$ бесконечно дифференцируемые и $f_k \to f$ равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{R}^n$.*

*Доказательство.* С помощью свойства $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k\, dx = 1$ преобразуем разность

$$f_k(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-t) - f(x))\varphi_k(t)\, dt.$$

Пусть $f$ равномерно непрерывна в $\delta$ окрестности компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ и пусть $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ при $|x - y| < \delta$ в этой окрестности. Выберем $k$ настолько большим, чтобы $1/k < \delta$. Тогда при любом $x \in K$ под интегралом функция $\varphi_k(t)$ отлична от нуля только при $|t| < \delta$, и в этом случае оказывается $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$. Тогда при $x \in K$ верна оценка

$$|f_k(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)\, dx = \varepsilon.$$

Это доказывает равномерную сходимость на компактах.

Дифференцируемость можно доказать, используя дифференцирование интеграла

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\varphi_k(x-t)\, dt.$$

по параметру и теорему 5.106. Заметим, что выражение под интегралом обращается в нуль за пределами шара $B_x(1/k)$, а при его дифференцировании в в точке $x = x_0$ можно считать $|x - x_0| < 2/k$ и ограничить интегрирование шаром $B_{x_0}(2/k)$. Тогда теорема 5.106 применима, потому что до и после дифференцирования интегрируются ограниченные функции по ограниченному множеству. ☐

**Теорема 6.21.** *В условиях предыдущей теоремы, если исходная функция $f$ имеет непрерывные производные до $m$-го порядка, то производные $f_k$ до $m$-го порядка равномерно на компактах сходятся к соответствующим производным $f$.*

*Доказательство.* Можно продифференцировать выражение

$$f * \varphi_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\varphi_k(t)\, dt.$$

по нескольким $x_i$, используя каждый раз дифференцирование под знаком интеграла с помощью теоремы 5.106, перейдя к интегрированию ограниченных выражений по шару $B_0(1/k)$. Тогда мы получим

$$\frac{\partial^m (f * \varphi_k)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} = \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} * \varphi_k.$$

Таким образом, последовательность производных свёртки является последовательностью свёрток соответствующей производной $f$ с теми же функциями $\varphi_k$. А значит для последовательности производных свёртки тоже имеет место верна равномерная сходимость к этой производной $f$. ☐

При практическом применении вышеуказанных теорем полезно заметить, что на самом деле для равномерной сходимости на конкретном компакте $K \subset \mathbb{R}^n$ достаточно определённости $f$ и её производных (если мы их используем) на некоторой окрестности $K$. Тогда, в силу размера носителя $\varphi_k$, значения свёртки $f * \varphi_k$ на $K$ будут зависеть только от значений $f$ в $1/k$-окрестности компакта $K$.

Следующая теорема показывает, что свёртки также дают приближение в среднем функции с конечным интегралом Лебега бесконечно гладкими функциями.

**Теорема 6.22.** *Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет конечный интеграл Лебега. Тогда свёртки $f * \varphi_k$ с функциями из теоремы 6.20 стремятся к $f$ в среднем.*

*Доказательство.* Возьмём $\varepsilon > 0$ и представим по теореме 5.87

$$f = g + h,$$

где $g$ — элементарно ступенчатая и

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Тогда по теореме 6.17

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h * \varphi_k|\, dx < \varepsilon.$$

Это значит, что если окажется

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g - g * \varphi_k|\, dx < \varepsilon,$$

то будет выполняться

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f - f * \varphi_k|\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |g - g * \varphi_k|\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |h|\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |h * \varphi_k|\, dx < 3\varepsilon.$$

Таким образом, достаточно доказать утверждение для элементарно ступенчатой $g$.

Раскладывая $g$ в сумму характеристических функций параллелепипеда с некоторыми коэффициентами, заметим, что достаточно доказать утверждение для одной характеристической функции параллелепипеда $\chi_P$. Но разность $\chi_P - \chi_P * \varphi_k$ будет отлична от нуля только в $1/k$-окрестности $\partial P$ и будет там по модулю не более $1$, то есть после интегрирования модуля разности мы получим не более $\mu\big(U_{1/k}(\partial P)\big)$. Прямым вычислением можно убедиться, что эта мера стремится к нулю при $k \to \infty$. ☐

*Задача* 6.23. * Докажите, что в условиях теоремы 6.22 оказывается, что $f * \varphi_k \to f$ поточечно почти всюду.

[[ Используйте теорему об усреднении 5.143 в одномерном случае или докажите и используйте её многомерный аналог. ]]

6.4. **Непрерывно дифференцируемые отображения и их обратные.** Смысл дифференциальной геометрии (а также общей теории относительности в физике) заключается в изучении объектов, определённых на открытых подмножествах $U \subseteq \mathbb{R}^n$ инвариантно относительно *криволинейных замен координат*, то есть таких бесконечно гладких отображений $\varphi : U \to V$, что обратное $\varphi^{-1}$ определено и тоже бесконечно гладко. Математически правильно такие отображения называть *диффеоморфизмами открытых подмножеств* $\mathbb{R}^n$, но мы часто будем называть их менее формально криволинейными заменами координат.

На практике обычно не требуется бесконечная гладкость, а требуется только конечное число производных координатных функций отображения, которое можно определить в каждом конкретном случае. Когда мы будем говорить о бесконечной гладкости, мы будем называть её просто *гладкость*.

Мы сейчас установим стандартные инструменты, необходимые для работы с криволинейными заменами координат. Для начала установим лемму, которая записывает приращение непрерывно дифференцируемого отображения как переменный линейный оператор от приращения аргумента, она обобщает задачу 3.49 и понадобится нам в этом разделе и далее.

**Лемма 6.24.** *Пусть открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$ выпукло. Для непрерывно дифференцируемого отображения $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ найдётся непрерывное отображение $A : U \times U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, такое что для любых $x', x'' \in U$*

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = A(x', x'')(x'' - x')$$

*и $A(x, x) = D\varphi_x$. Здесь $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ — линейные отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ с топологией пространства матриц $\mathbb{R}^{nm}$.*

*Доказательство.* Запишем формулу Ньютона–Лейбница (интеграл от векторнозначной функции можно понимать поэлементно)

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = \int_0^1 \frac{\partial\varphi((1-s)x' + sx'')}{\partial s}\, ds = \int_0^1 D\varphi_{(1-s)x'+sx''}(x'' - x')\, ds,$$

так что достаточно положить (интеграл от матричнозначной функции можно понимать поэлементно)

$$A(x', x'') = \int_0^1 D\varphi_{(1-s)x'+sx''}\, ds.$$

Непрерывность $A$ следует из равномерной непрерывности подынтегрального выражения по переменным $x'$ и $x''$, рассматриваемым как параметры, меняющиеся в рамках некоторого компакта $K \subset U \times U$, содержащего маленькую окрестность данной пары $(x', x'')$. При изменении $x'$ и $x''$ не более чем на $\delta > 0$ из равномерной непрерывности значение под интегралом будет меняться не более чем на $\varepsilon > 0$, а значит и сам интеграл будет меняться не более чем на $\varepsilon$.

При $x' = x'' = x$ из явной формулы мы будем иметь

$$A(x, x) = D\varphi_x.$$

☐

*Задача* 6.25. Докажите, что если у непрерывно дифференцируемого отображения $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ выпуклой области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ производная $D\varphi$ в каждой точке удовлетворяет неравенству $v \cdot D\varphi(v) > 0$ для любого ненулевого вектора $v$, то $\varphi$ инъективно.

[[ Посмотрите на определение $A(x', x'')$ в доказательстве леммы 6.24. ]]

**Теорема 6.26** (Теорема об обратном отображении). *Если отображение $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо в окрестности точки $x$ и его дифференциал $D\varphi_x$ является невырожденным линейным преобразованием, то это отображение взаимно однозначно отображает некоторую окрестность $V \ni x$ на окрестность $W \ni y$, где $y = \varphi(x)$, и обратное отображение $\varphi^{-1} : W \to V$ тоже непрерывно дифференцируемо.*

*Доказательство.* После сдвига координат будем считать, что мы работаем в окрестности точки $x = 0$ и $y = \varphi(x) = 0$. Заменив $\varphi$ на его композицию с линейным отображением $D\varphi_0^{-1}$, будем считать, что $D\varphi$ в нуле является единичным линейным преобразованием, запишем тогда

$$\varphi(x) = x + \alpha(x).$$

Тогда $D\alpha = D\varphi - \mathrm{id}$ в нуле является нулевым линейным оператором, а в некоторой $\delta$-окрестности нуля настолько мал, что

$$|D\alpha(v)| \leqslant \|D\alpha\| \cdot |v| \leqslant 1/2|v|.$$

Тогда в этой $\delta$-окрестности нуля у нас окажется выполненным (с формулой из леммы 6.24)

$$|\alpha(x'') - \alpha(x')| = \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}\alpha((1-t)x' + tx'')\, dt\right| = \left|\int_0^1 D\alpha_{(1-t)x'+tx''}(x'' - x')\, dt\right| \leqslant 1/2|x'' - x'|.$$

Нам надо решить уравнение $\varphi(x) = x + \alpha(x) = y$, которое удобно переписать как

$$x = y - \alpha(x).$$

Положим по определению $f(x, y) = y - \alpha(x)$ и таким образом будем решать уравнение

$$x = f(x, y).$$

При $|y| \leqslant \delta/2$ и $|x| \leqslant \delta$ из неравенства для $\alpha$ получаются свойства $f$:

$$|f(x, y)| \leqslant \delta. \tag{6.1}$$

и (*сжимающее отображение*)

$$|f(x'', y) - f(x', y)| \leqslant 1/2|x'' - x'|. \tag{6.2}$$

Для начала заметим, что при условиях $|y| < \delta/2$ и $|x| \leqslant \delta$ решение единственное. Если таких $x$ нашлось бы два, $x'$ и $x''$, то получилось бы

$$|f(x'', y) - f(x', y)| = |x'' - x'|,$$

что совместимо со свойством сжатия только если $|x' - x''| = 0$ и $x' = x''$.

Будем действовать методом последовательных приближений. Положим $\psi_1(y) = 0$, и далее определим по индукции

$$\psi_k : U_{\delta/2}(0) \to \mathbb{R}^n, \quad \psi_k(y) = f(\psi_{k-1}(y), y).$$

В силу свойства (6.1) образ $\psi_k$ всегда в $\delta$-окрестности нуля, а свойство (6.2) гарантирует, что

$$|\psi_{k+1}(y) - \psi_k(y)| = |f(\psi_k(y), y) - f(\psi_{k-1}(y), y)| \leqslant 1/2\, |\psi_k(y) - \psi_{k-1}(y)|\,,$$

откуда по индукции можно заключить, что

$$|\psi_{k+1}(y) - \psi_k(y)| \leqslant \delta 2^{2-k}.$$

Значит, $\psi_k$ сходятся к непрерывному отображению $\psi : U_{\delta/2}(0) \to \mathbb{R}^n$ равномерно по признаку Вейерштрасса. Переходя к пределу $k \to \infty$ в определении $\psi_k$, получим равенство

$$\psi(y) = f(\psi(y), y) = y - \alpha(\psi(y)) = y - \varphi(\psi(y)) + \psi(y),$$

то есть $y = \varphi(\psi(y))$. Для каждого числа $y$ с $|y| < \delta/2$ мы нашли $x = \psi(y)$, такой что $\varphi(x) = y$ и $|x| \leqslant \delta$. Заметим, что на самом деле $|x| < \delta$, так как $x = y - \alpha(x)$, $|y| < \delta/2$ и $|\alpha(x)| \leqslant \delta/2$.

Взяв окрестность $W = U_{\delta/2}(0)$ и взяв открытое $V = \varphi^{-1}(W) \cap U_\delta(0) \ni 0$ мы видим, что $\varphi$ и $\psi$ являются взаимно обратными на этих окрестностях нуля.

Установим дифференцируемость $\psi$. По лемме 6.24 можно написать

$$\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(0) = A(x)x,$$

где линейный оператор $A(x)$ непрерывно зависит от $x$ и равен тождественному при $x = 0$. Подставим в эту формулу $x = \psi(y)$ и получим

$$y = A(\psi(y))\psi(y) \Rightarrow \psi(y) = A(\psi(y))^{-1}y,$$

где линейный оператор $B(y) = A(\psi(y))^{-1}$ непрерывен по $y$ и равен тождественному при $y = 0$. Из выражения

$$\psi(y) = B(y)y = y + o(y)$$

тогда следует дифференцируемость $\psi$ в нуле с дифференциалом $B(0)$. Дифференцируемость в остальных точках проверяется после сдвига начала координат в соответствующую точку повторением тех же рассуждений. □

В теореме об обратном отображении оказалась важна невырожденность $D\varphi$, которую на практике можно проверить как $\det D\varphi \neq 0$ (см. также раздел 6.11). Поэтому определитель $J\varphi = \det D\varphi$ имеет специальное обозначение и называется *якобианом* отображения, в координатах он равен $\det\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)$. В дальнейшем якобиан будет играть роль в понятии ориентации и в теореме о замене переменных в интеграле.

*Задача* 6.27. Докажите, что непрерывно дифференцируемое отображение $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, у которого якобиан ни в одной точке не равен нулю, переводит открытые множества в открытые.

*Задача* 6.28. Отображение метрического пространства в себя $f : M \to M$ называется *сжимающим*, если оно липшицево с меньшей единицы константой, то есть если существует константа $0 \leqslant c < 1$, такая что

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant c\rho(x, y), \quad \forall x, y \in M.$$

Докажите, что любое сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет единственную неподвижную точку, такую что $x = f(x)$.

[[ Примените рассуждения из доказательства теоремы об обратном отображении. ]]

*Задача* 6.29. Для полного метрического пространства $M$ и ещё одного метрического пространства $P$ непрерывное отображение $f : M \times P \to M$ можно рассматривать как семейство отображений $\{f_p : M \to M \mid p \in P\}$. Докажите, что если все $f_p$ сжимающие с одной и той же константой Липшица, то $x_p$, неподвижная точка $f_p$, непрерывно зависит от $p \in P$.

На практике, помимо предложенного в доказательстве теоремы об обратном отображении метода решения уравнения $\varphi(x) = y$, часто используют итерации по *методу Ньютона*:

$$x_{k+1} = x_k + D\varphi_{x_k}^{-1}(y - \varphi(x_k)).$$

Записав с помощью леммы 6.24

$$\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k) = A(x_k, x_{k+1})(x_{k+1} - x_k) = A(x_k, x_{k+1}) \circ D\varphi_{x_k}^{-1}(y - \varphi(x_k)),$$

можно заметить, что при небольшом отклонении $A(x_k, x_{k+1}) \circ D\varphi_{x_k}^{-1}$ от тождественного оператора (что выполняется, если $x_k$ и $x_{k+1}$ достаточно близки) отклонение $\varphi(x_{k+1})$ от $y$ будет меньше, чем отклонение $\varphi(x_k)$ от $y$. Аккуратный анализ эффективности этого метода можно найти в курсах вычислительной математики.

6.5. **Криволинейные системы координат.** Теорема об обратном отображении позволяет корректно рассуждать о системах координат, составленных из гладких функций. Нас в основном будет интересовать корректность системы координат в достаточно малой окрестности наперёд заданной точки.

**Определение 6.30.** *Криволинейной системой координат* в окрестности точки $p \in \mathbb{R}^n$ мы будем называть набор таких функций, которые являются координатами гладкого отображения окрестности $p$ на некоторое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ с гладким обратным отображением.

По теореме об обратном отображении для того, чтобы гладкие $y_1, \dots, y_n$ в некоторой окрестности $p$ давали криволинейную систему координат, достаточно проверить невырожденность матрицы $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ в точке $p$, или иначе говоря, проверить линейную независимость дифференциалов $dy_1, \dots, dy_n$ в точке $p$.

Также важно иметь в виду, что неполный набор функций с линейно независимыми в данной точке дифференциалами можно дополнить до криволинейной системы координат в некоторой окрестности данной точки. В частности, можно доказать следующее полезное утверждение.

**Теорема 6.31** (Теорема о неявной функции). *Пусть функции* $f_1, \dots, f_k$ *непрерывно дифференцируемы в окрестности* $p \in \mathbb{R}^n$ *и определитель*

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{k}$$

*не равен нулю в этой окрестности, пусть также* $f_i(p) = y_i$. *Тогда найдётся окрестность точки* $p$ *вида* $U \times V$, $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^{n-k}$, *такая что в этой окрестности множество решений системы уравнений*

$$f_1(x) = y_1, \dots, f_k(x) = y_k,$$

*совпадает с графиком непрерывно дифференцируемого отображения* $\varphi : V \to U$, *заданного в координатах как*

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ &\dots \\ x_k &= \varphi_k(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

*Доказательство.* Условия теоремы означают, что дифференциалы

$$df_1, \dots, df_k, dx_{k+1}, \dots, dx_n$$

являются линейно независимыми, и из функций $f_1, \dots, f_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ можно составить отображение, локально имеющее непрерывно дифференцируемое обратное, то есть они дают криволинейную систему координат в окрестности $p$. Следовательно, в этой окрестности старые координаты $x_1, \dots, x_k$ можно непрерывно дифференцируемо выразить через новые координаты

$$x_i = \varphi_i(f_1, \dots, f_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

и поставить в этом выражении вместо $f_i$ константы $y_i$.

Это рассуждение доказывает, что множество решений системы уравнений в произведении $U \times V$ содержится в графике отображения $\varphi : V \to U$ при достаточно малых $V$ и $U$, таких что $\varphi(V) \subseteq U$. Но и обратное верно, так как значения $f_1, \dots, f_k$ на точке вида

$$(\varphi_1(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_k(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n), x_{k+1}, \dots, x_n)$$

обязаны совпадать с $y_1, \dots, y_k$, так как $\varphi_i$ были выбраны как компоненты отображения, обратного к отображению с компонентами

$$(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n), x_{k+1}, \dots, x_n)\,.$$

☐

Следующая теорема даёт криволинейный аналог разложения линейного отображения в композицию элементарных, перестановки и диагонального отображения.

**Теорема 6.32** (Теорема о расщеплении отображения на элементарные). *Если отображение* $\varphi$ *непрерывно дифференцируемо в окрестности точки* $p \in \mathbb{R}^n$ *и имеет обратимый* $D\varphi_x$, *то его можно представить в виде композиции перестановки координат, отражений координат и элементарных отображений, непрерывно дифференцируемо и возрастающим образом меняющих только одну координату* $y_i = \psi_i(x_1, \dots, x_n)$.

*Доказательство.* Доказательство этой теоремы имитирует приведение матрицы к гауссовому виду, то есть разложение матрицы в произведение матрицы перестановки, матриц умножений координаты на число, и элементарных матриц.

Пусть компоненты $\varphi$ являются функциями $y_1, \ldots, y_n$ в окрестности точки $p$. Некоторая $y_i$ имеет ненулевую производную $\frac{\partial y_i}{\partial x_1}$. Переставив $y$ (и запомнив эту перестановку) мы можем считать, что это $y_1$. Поменяв при необходимости знак $y_1$, можно считать эту производную положительной. Тогда $y_1, x_2, \ldots, x_n$ (в силу нетривиальности якобиана) дают криволинейную систему координат в некоторой окрестности $p$ и эта система отличается от исходной возрастающей заменой первой координаты.

Далее какая-то из оставшихся $y_2, \ldots, y_n$ уже в новой системе координат $y_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет ненулевую $\frac{\partial y_i}{\partial x_2}$, иначе $dy_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ не были бы линейно независимыми. Переставив $y$ (и запомнив и эту перестановку), можно считать, что это $y_2$. Также можно считать эту производную положительной, поменяв при необходимости знак $y_2$. Тогда можно заменить $y_1, x_2, \ldots, x_n$ на систему координат $y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n$. Делая в том же духе $n$ раз, мы сделаем $n$ замен координат (отображений), меняющих возрастающим образом только одну координату, а в конце нам останется поменять знаки у некоторых $y_i$ и переставить их. □

Так как нас часто интересуют не просто непрерывно дифференцируемые отображения, а несколько раз непрерывно дифференцируемые или даже бесконечно гладкие, то нам понадобится такое утверждение:

**Теорема 6.33.** *Теоремы об обратном отображении, о неявной функции и о расщеплении отображения дают отображения класса $C^k$ при $k \geqslant 1$, если исходные отображения или функции были класса $C^k$.*

*Доказательство.* Так как все утверждения основаны на теореме об обратном отображении, то достаточно рассмотреть лишь её. В ней при $k \geqslant 1$ мы для взаимно обратных $\varphi$ и $\psi$ имеем

$$D\psi_y = (D\varphi_{\psi(y)})^{-1},$$

то есть фактически это композиция отображения $\psi$, отображения $x \mapsto D\varphi_x$ и отображения взятия обратной матрицы. Знания из линейной алгебры показывают, что взятие обратной к невырожденной матрице является бесконечно гладким отображением. Тогда при наличии у $D\varphi$ и $\psi$ непрерывных частных производных до $\ell$-го порядка мы можем утверждать, что у левой части тоже есть непрерывные частные производные до $\ell$-го порядка. Последнее будет означать, что у $\psi$ есть все частные производные $(\ell + 1)$-го порядка. Индукция по $\ell$ тогда позволяет заключить, что если $\varphi$ будет класса $C^k$, а значит $D\varphi$ класса $C^{k-1}$, то $\psi$ тоже будет класса $C^k$. □

*Задача* 6.34. Докажите, что гладкое отображение $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ имеет гладкое обратное $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to U$ тогда и только тогда, когда якобиан $\varphi$ нигде не равен нулю и $\varphi$ инъективно.

*Задача* 6.35. Докажите, что если дифференциалы гладких функций $f_1, \ldots, f_k$ линейно зависимы в окрестности точки $p$, а дифференциалы функций $f_2, \ldots, f_k$ линейно независимы в $p$, то в некоторой окрестности точки $p$ функция $f_1$ выражается через остальные.

[[ Считайте функции $f_2, \ldots, f_k$ частью системы координат в точке $p$. ]]

6.6. **Исследование функций нескольких переменных на экстремум.** С помощью разложения функций нескольких переменных по формуле Тейлора мы можем рассмотреть вопрос о необходимых или достаточных условиях локального экстремума функции нескольких переменных.

**Определение 6.36.** Точка $p$ называется локальным экстремумом функции $f$, если она является точкой экстремума (максимума или минимума) ограничения $f$ на некоторую окрестность $p$.

С помощью формулы Тейлора мы можем установить некоторые необходимые условия экстремума:

**Теорема 6.37** (Необходимые условия экстремума). *Если $f$ дифференцируема в точке $p$ и имеет локальный экстремум в $p$, то $df_p = 0$. Если $f$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности $p$, то $d_2 f_p \geqslant 0$ для минимума и $d_2 f_p \leqslant 0$ для максимума.*

Здесь неравенство $\geqslant$ означает, что квадратичная форма второго дифференциала принимает неотрицательные значения на всех векторах, то есть *положительно полуопределена*, аналогично интерпретируется знак $\leqslant$.

*Доказательство.* Утверждение для первой производной следует, например, из варьирования одной координаты при фиксированных остальных, тогда по свойствам экстремума функции одной переменной мы получим равенство нулю всех частных производных, то есть всего первого дифференциала.

Для исследования второй производной (при равной нулю первой) мы запишем для $\xi = p + tv$

$$f(p+tv) = f(p) + \frac{1}{2}d_2 f_p(tv) + o(t^2|v|^2) = f(x) + t^2\left(\frac{1}{2}d_2 f_p(v) + o(1)\right).$$

Переход к пределу $t \to 0$ при фиксированном $v$ показывает, что $d_2 f_p(v) \geqslant 0$ для минимума и $d_2 f_p(v) \leqslant 0$ для максимума. ☐

Для установления достаточных условий экстремума нам понадобится вспомогательное утверждение. Напомним, что квадратичная форма $Q$ *положительно определена*, если $Q(v) > 0$ при ненулевых $v$. Аналогично для *отрицательно определённой* формы должно быть $Q(v) < 0$ при $v \neq 0$.

**Лемма 6.38.** *Если квадратичная форма $Q$ положительно определена, то найдётся $\varepsilon > 0$, такой что*

$$Q(v) \geqslant \varepsilon |v|^2$$

*для любого $v$.*

*Доказательство.* Положим $\varepsilon$ равным минимуму $Q$ на единичной сфере. Так как единичная сфера является компактом, а квадратичная форма является непрерывной функцией, то этот минимум достигается и положителен. Тогда неравенство верно для единичной сферы. Из этого следует неравенство для всех векторов, так как при умножении вектора на $t$ обе части неравенства умножаются на $t^2$. ☐

**Теорема 6.39** (Достаточные условия экстремума). *Если $f$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности $p$, $df_p = 0$ и $d_2 f_p > 0$, то $p$ — точка строгого локального минимума. Если неравенство в другую сторону, $d_2 f_p < 0$, то $p$ — точка строгого локального максимума.*

*Доказательство.* Докажем без ограничения общности для минимума. Для $\xi = p + v$ запишем по формуле Тейлора с использованием предыдущей леммы:

$$f(p+v) = f(p) + \frac{1}{2}d_2 f_p(v) + o(|v|^2) \geqslant f(p) + \left(\frac{\varepsilon}{2} + o(1)\right)|v|^2.$$

По определению $o(1)$ при достаточно малом $|v|$ (независимо от направления $v$) выражение в скобках будет положительным. ☐

*Задача* 6.40. Докажите, что для наличия локального минимума непрерывно дифференцируемой функции $f$ в точке $x_0$ достаточно, чтобы для любого $x$ из некоторой окрестности $x_0$ выполнялось неравенство $df_x(x - x_0) \geqslant 0$.

[[ Используйте лемму 6.24. ]]

Также часто рассматривают случай *условного экстремума* функции нескольких переменных, то есть экстремума ограничения функции $f$ на множество $S$, задаваемое системой непрерывно дифференцируемых (как минимум) уравнений

$$\varphi_1(x) = \dots = \varphi_m(x) = 0. \tag{6.3}$$

После изучения сведений о криволинейных системах координат можно догадаться, что для обеспечения понятной структуры множества $S$ мы будем требовать условие линейной независимости дифференциалов

$$\dim\langle d\varphi_1, \dots, d\varphi_m\rangle = m \tag{6.4}$$

в некоторой окрестности точки $p$. Это условие гарантирует, что функции $\varphi_i$ просто являются частью некоторой криволинейной системы координат и множество решений (6.3) может быть легко параметризовано $n - m$ оставшимися координатами этой криволинейной системы.

**Теорема 6.41** (Необходимые условия условного экстремума в терминах первых производных)**.** *Если $f$ и $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ непрерывно дифференцируемы в окрестности $p$, выполняется* (6.4) *и $f$ имеет условный экстремум в $p$ при условии* (6.3)*, то в точке $p$ выполняется*

$$df_p = \lambda_1 d\varphi_{1,p} + \dots + \lambda_m d\varphi_{m,p}$$

*для некоторых чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.*

*Доказательство.* Заметим, что нахождение $df$ в линейной оболочке $d\varphi_i$ инвариантно относительно криволинейных замен координат по формуле дифференциала композиции. Согласно этой формуле, при замене координат строка чисел $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ получается из строки чисел $\frac{\partial f}{\partial y_j}$ умножением справа на матрицу с элементами $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$.

Тогда мы можем считать $\varphi_1 = y_1, \dots, \varphi_m = y_m$ в системе координат $y_1, \dots, y_n$. В этом случае мы имеем экстремум функции по остальным переменным при условии $y_1 = \dots = y_m = 0$, что даёт равенства $\frac{\partial f}{\partial y_i} = 0$ при $i > m$. Тогда можно составить линейную комбинацию

$$df_p = \lambda_1 dy_1 + \dots + \lambda_m dy_m$$

по явному выражению для дифференциала в координатах. ☐

При выполнении необходимого условия условного экстремума удобно положить

$$L(x) = f(x) - \lambda_1\varphi_1(x) - \dots - \lambda_m\varphi_m(x).$$

Это называется *функция Лагранжа*, а $\lambda_i$ называются *множители Лагранжа*. Предыдущая теорема гарантирует обращение в нуль дифференциала $dL_p$ в точке экстремума. Это используется при более детальном изучении условного экстремума в следующих теоремах.

**Теорема 6.42** (Необходимые условия условного экстремума в терминах вторых производных)**.** *Если $f$ и $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности $p$, выполняется* (6.4) *и $f$ имеет условный экстремум в $p$ при условии* (6.3)*, то*

$$df_p = \lambda_1 d\varphi_{1,p} + \dots + \lambda_m d\varphi_{m,p}$$

*и второй дифференциал функции Лагранжа положительно полуопределён (для минимума) или отрицательно полуопределён (для максимума) на векторах $v$, удовлетворяющих линейным уравнениям*

$$d\varphi_{1,p}(v) = \dots = d\varphi_{m,p}(v) = 0.$$

*Доказательство.* Заметим, что при выполнении условий (6.3) функции $f$ и $L$ равны. Но функция Лагранжа удобнее тем, что $dL_p = 0$. Лемма 6.16 позволяет в этом случае считать $d_2L_p$ корректно определённой квадратичной формой и сделать замену координат так, чтобы $\varphi_1 = y_1, \dots, \varphi_m = y_m$, при этом $d_2L_p$ преобразуется так, как положено преобразовываться квадратичной форме при линейном преобразовании, которое является производной замены координат.

После замены координат мы фактически рассматриваем функцию $L$ при фиксированных первых $m$ переменных. Допустимые приращения соответствуют векторам $v$, первые $m$ координат которых равны нулю, то есть

$$dy_1(v) = \dots = dy_m(v) = 0.$$

Но тогда теорема о необходимом условии экстремума без условий показывает, что $d_2L_p$ должна быть полуопределена на допустимых приращениях $v$, что после обратной замены координат превращается в утверждение теоремы. ☐

В конце доказательства этой теоремы мы принимаем, что при замене координат вектор умножается (слева как столбец) на производную этой замены, делая таким образом произведение вектора на дифференциал функции инвариантно определённым. Более содержательное обсуждение понятия «вектор» мы проведём в следующем разделе.

**Теорема 6.43** (Достаточные условия условного экстремума в терминах вторых производных)**.** *Если $f$ и $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности $p$, выполняется* (6.4),

$$df_p = \lambda_1 d\varphi_{1,p} + \dots + \lambda_m d\varphi_{m,p} \Leftrightarrow dL_p = 0$$

*и второй дифференциал функции Лагранжа положителен (для минимума) или отрицателен (для максимума) на ненулевых векторах $v$, удовлетворяющих линейным уравнениям*

$$d\varphi_{1,p}(v) = \dots = d\varphi_{m,p}(v) = 0,$$

*то $f$ имеет строгий условный экстремум в $p$ при условии* (6.3).

*Доказательство.* Аналогично предыдущей теореме, взяв $\varphi_i$ за первые $m$ координат и воспользовавшись леммой 6.16, мы сводим задачу к случаю экстремума без условий. ☐

Пространство векторов $v$, удовлетворяющих линейной системе

$$d\varphi_{1,p}(v) = \dots = d\varphi_{m,p}(v) = 0,$$

логично назвать *касательным пространством* к *многообразию* $S$ решений системы (6.3) в точке $p$. В следующих разделах мы развиваем идею касательного вектора, касательного пространства и многообразия на более абстрактном уровне. Связь с данным выше простым определением будет прояснена в лемме 6.133.

## 6.7. **Определение касательного вектора.**

Нашей целью будет определить объекты и операции, с которыми можно одинаково легко работать в любой криволинейной системе координат. Первые объекты, с которым можно корректно работать в любой системе координат — это гладкие функции $U \to \mathbb{R}$, их множество обозначим $C^\infty(U)$. Для функции $f$ в координатах $y = (y_1, \dots, y_n)$ переход к координатам $x = (x_1, \dots, x_n)$ заключается в подстановке (композиции) $g(x) = f(\varphi(x))$, если замена координат имела вид $y = \varphi(x)$. Это естественное преобразование подразумевалось уже в предыдущих разделах.

Разобравшись с преобразованием функций при замене криволинейных координат, другие объекты дифференциальной геометрии мы будем определять в терминах гладких функций. Нам понадобится следующая лемма о структуре гладкой функции в окрестности точки.

**Лемма 6.44.** *Любую гладкую функцию, определённую в некоторой окрестности $x_0 \in \mathbb{R}^n$, в возможно меньшей окрестности $x_0$ можно представить в виде*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{0,k})\, g_k(x)$$

*с гладкими $g_i$, значение $g_i(x_0)$ равно $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$.*

*Доказательство.* Это следует из леммы 6.24 и её доказательства. Бесконечная дифференцируемость функций $g_k$ (которые в той лемме были компонентами отображения $A$) следует из возможности бесконечно дифференцировать определяющий их интеграл по параметрам. ☐

Для функций, у которых первый дифференциал в точке равен нулю, а второй невырожден, существует аналогичное утверждение, которое мы оставляем в качестве упражнения:

*Задача* 6.45. *(Лемма Морса) Докажите, что любую гладкую функцию, у которой первый дифференциал в нуле равен нулю, а второй дифференциал невырожден (то есть матрица вторых производных $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ невырождена), можно криволинейной заменой координат привести к виду

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2$$

в некоторой окрестности нуля, где $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

[[ Дважды используйте лемму 6.44, а потом вспомните процедуру приведения квадратичной формы к каноническому виду. ]]

Теперь мы готовы определить касательный вектор в точке $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$. Идея этого определения следующая. Для любого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ мы можем определить производную по направлению вектора

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t},$$

проверить её линейность по $f$ и формулу Лейбница для производной произведения,

$$\frac{\partial fg}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v} g + f \frac{\partial g}{\partial v}.$$

Некоторая проблема заключается в том, что формула производной по направлению не инвариантна относительно криволинейной замены координат, в частности сложение $p + tv$ не определено инвариантно. С другой стороны, мы можем подействовать в обратном порядке и определить вектор как дифференцирование алгебры гладких функций в точке, удовлетворяющее формуле Лейбница.

**Определение 6.46.** Определим *касательный вектор* в точке $p \in U$ открытого множества $U \subseteq \mathbb{R}^n$ как $\mathbb{R}$-линейное отображение $X : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее

$$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g).$$

*Касательное пространство* к $U$ в точке $p$ состоит из всех касательных векторов в точке $p$ и обозначается $T_pU$.

Работая в некоторой системе координат мы понимаем, что любой касательный вектор в координатном смысле даёт некоторое дифференцирование, и все они различны. Так что некоторые касательные векторы в смысле инвариантного определения мы можем предъявить. Остаётся выяснить, что других на самом деле нет. Для начала установим свойство локальности.

**Лемма 6.47.** *Если $X$ — касательный вектор в точке $p \in U$, то для любой окрестности $V \ni p$, $V \subseteq U$, выражение $X(f)$ может зависеть только от значений $f$ в $V$, а не на всём $U$.*

*Доказательство.* По лемме 6.19, найдём гладкую функцию $\psi : U \to [0,1]$, равную нулю за пределами $V$ и равную единице в точке $p$. Пусть есть функция $g \in C^\infty(U)$, такая что её ограничение на $V$ такое же, как и $f$, $f|_V = g|_V$. Тогда на всём $U$ выполняется

$$(f-g)\psi = 0.$$

Следовательно, по свойству линейности и правилу Лейбница для $X$,

$$0 = X(0) = X((f-g)\psi) = X(f-g)\psi(p) + (f(p)-g(p))X(\psi) = X(f-g) = X(f) - X(g),$$

что означает $X(f) = X(g)$. ☐

**Лемма 6.48.** *Если $X : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ — касательный вектор в точке $p \in U$, то для любой окрестности $V \ni p$, $X$ корректно задаёт касательный вектор $C^\infty(V) \to \mathbb{R}$ в точке $p$.*

*Доказательство.* Рассмотрим функцию $f \in C^\infty(V)$. По лемме 6.19 возьмём $\psi : U \to [0,1]$ с носителем в $V$, которая равна единице в некоторой меньшей окрестности $W \ni p$. Произведение $f\psi$ равно $f$ в $W$ и гладко продолжается нулём на всё $U$, и его уже можно дифференцировать вектором $X$.

По лемме 6.47 такой способ дифференцировать $f$ не зависит от того, как менялась $f$ за пределами некоторой окрестности $p$ и как она продолжалась после этого на $U$. ☐

Теперь мы готовы описать все касательные векторы в точке.

**Лемма 6.49.** *Если $X$ — касательный вектор в точке $p \in U$, то он явно задаётся как*

$$X(f) = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f(p)}{\partial x_i},$$

*где $X_i \in \mathbb{R}$ — его координаты.*

*Доказательство.* Мы можем перейти в окрестность, даваемую леммой 6.44, и дифференцировать определённые в этой меньшей окрестности функции в силу лемм 6.47 и 6.48. Тогда

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n g_i(x)(x_i - x_i(p))$$

и

$$X(f) = X(f(p)) + \sum_{i=1}^n X(x_i - x_i(p))g_i(p) + \sum_{i=1}^n (x_i(p) - x_i(p))X(g_i) = \sum_{i=1}^n X(x_i)g_i(p). \tag{6.5}$$

Здесь мы использовали, что дифференцирование константы даёт нуль, так как $X(1) = X(1^2) = X(1) + X(1)$ по правилу Лейбница, то есть $X(1) = 0$. Оказывается, что значение $X(f)$ зависит только от значений $g_i(p)$, которые в свою очередь равны частным производным $f$ в точке $p$, то есть

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} X(x_i)\frac{\partial f(p)}{\partial x_i}.$$

☐

Числа $X_i = X(x_i)$ называются координатами касательного вектора в данной криволинейной системе координат, тогда весь вектор в точке $p$ записывается как оператор дифференцирования в точке

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Полученное выражение $\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ является просто дифференцированием по направлению $(X_1, \ldots, X_n)$ в координатной системе (см. лемму 6.9), то есть все касательные векторы в точке в смысле инвариантного определения являются касательными векторами в точке в смысле производной по направлению.

6.8. **Векторные поля и прямой образ вектора.** Для наших целей (и особенно для целей изучения дифференциальных уравнений) полезно также рассмотреть ситуацию, когда касательный вектор задан в каждой точке некоторого открытого множества.

**Определение 6.50.** *Векторным полем* на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^n$ называется выбор касательного вектора $X(p) \in T_pU$ для каждой точки $p \in U$, гладко зависящий от $p$. Гладкая зависимость понимается в смысле гладкой зависимости координат векторного поля $X_i(p)$ от точки $p$.

Обобщая определение одиночного вектора как дифференцирования на векторные поля, мы можем сформулировать:

**Лемма 6.51.** *Для открытого $U \subseteq \mathbb{R}^n$ любое $\mathbb{R}$-линейное отображение $X : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$, удовлетворяющее правилу Лейбница*

$$X(fg) = X(f)g + fX(g),$$

*задаётся* векторным полем *на $U$.*

*Доказательство.* Подействуем векторным полем на координатные функции и рассмотрим получающиеся гладкие функции $X_i = X(x_i)$. Так как композиция дифференцирования $X$ и взятия значения в точке является дифференцированием в точке, то по формуле (6.5) мы получим, что в любой точке выполняется равенство

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{6.6}$$

Значит операция $X(f)$ задаётся применением дифференцирования по направлению вектора с координатами $X_1(p), \ldots, X_n(p)$ в каждой точке $p \in U$.

С другой стороны, при любом выборе гладких функций $X_i : U \to \mathbb{R}$, выражение (6.6) даёт линейную операцию $X : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$, удовлетворяющую правилу Лейбница.

☐

*Задача* 6.52. Проверьте по определению векторного поля как отображения $X : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$, что произведение векторного поля $X$ на функцию $g \in C^\infty(U)$, определённое как $(g \cdot X)(f) = g \cdot X(f)$, тоже является векторным полем.

[[ Проверьте $\mathbb{R}$-линейность и правило Лейбница. ]]

Можно также корректно определить образ касательного вектора при произвольном гладком отображении $\varphi : U \to V$, не обязательно обратимом, следующим образом. Пусть у нас есть вектор $X \in T_pU$, $q = \varphi(p)$, тогда *прямой образ вектора*, $\varphi_*(X)$, определяется по формуле

$$\varphi_*(X)f = X(f \circ \varphi). \tag{6.7}$$

Построенная так операция $\varphi_*(X)$ тоже является дифференцированием $C^\infty(V)$ в точке $q$. Действительно, отображение $\varphi : U \to V$ определяет *гомоморфизм алгебр* (то есть операцию, сохраняющую умножение и сложение, а также переводящую постоянные функции в постоянные с теми же значениями) $\varphi^* : C^\infty(V) \to C^\infty(U)$ по формуле

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi,$$

вектор даёт нам дифференцирование алгебры $X : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ и тогда $\varphi_*X = X \circ \varphi^*$ тоже будет дифференцированием алгебры $C^\infty(V)$. Возвращаясь к более явным выражениям, исходя из определения (6.7) по формуле дифференцирования композиции в координатах можно выписать координаты $Y = \varphi_*(X)$ как

$$Y_i = \sum_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} X_j.$$

Таким образом мы можем бескоординатно определить производную отображения $\varphi$ в точке $p$ как линейное отображение $\varphi_* : T_pU \to T_qV$ при $q = \varphi(p)$. Его также можно обозначать как $D\varphi_p$, так как в силу своего выражения в координатах оно на самом деле совпадает с введённый ранее производной в смысле линейного приближения отображения, что проясняет геометрический смысл конструкции прямого образа вектора.

*Задача* 6.53. Проверьте, что для функции $f : U \to \mathbb{R}$ отображение $f_*$ действительно совпадает с её дифференциалом $df$.

*Задача* 6.54. Проверьте свойство композиции гладких отображений и прямого образа вектора в виде $(\varphi \circ \psi)_*X = \varphi_*(\psi_*X)$.

[[ Можно сослаться на формулу производной композиции, а можно вывести это из определения (6.7). ]]

Эти наблюдения могут показаться бессмысленной переформулировкой и так понятных вещей, но в дальнейшем мы будем уделять внимание преобразованиям разных объектов при заменах координат и гладких отображениях, поэтому нам надо начать со сравнительно простых примеров и посмотреть на ситуацию с разных точек зрения.

Заметим, что если гладкое отображение $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ является диффеоморфизмом на свой образ, то тогда на образе $\varphi(U)$ корректно определён и прямой образ всего векторного поля $X$ на $U$ (а не только отдельных векторов) при данном отображении. В таком случае каждая $q \in \varphi(U)$ является образом единственной точки $p \in U$, в качестве вектора в $q$ мы однозначно выбираем $Y(q) = \varphi_*(X(p))$. Гладкая зависимость $Y$ от $q$ гарантируется гладкой зависимостью $p$ от $q$, так как по определению диффеоморфизма обратное отображение $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to U$ тоже гладкое.

Если же отображение $\varphi$ не является инъективным, то прямой образ векторного поля при таком отображении невозможно определить, так как в одну точку могут придти два разных вектора.

*Задача* 6.55. Приведите пример гладкого отображения $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которое является инъективным, но переводит гладкие векторные поля в негладкие.

[[ Сделайте так, чтобы производная $\varphi$ обращалась в нуль. ]]

6.9. **Факторпространство и конечная порождённость векторного пространства.** Этот и два следующих раздела позволят читателю вспомнить понятия линейной алгебры, которые понадобятся в дифференциальной геометрии и прочих областях математики. Обзор этих понятий будет неполным и при возникновении затруднений читателю рекомендуется перейти к систематическому изучению соответствующих учебников, например [1, 2].

Будем рассматривать векторные пространства над полем $\mathbb{K}$, которое читатель для простоты может считать полем действительных чисел. Определение *векторного пространства* мы напоминать не будем, но напомним сначала определение факторпространства векторного пространства:

**Определение 6.56.** Пусть $W \subseteq V$ — векторные пространства. Тогда *факторпространством* $V/W$ называется фактормножество $V$ по отношению эквивалентности

$$v \sim v' \Leftrightarrow v - v' \in W.$$

*Задача* 6.57. Проверьте, что сложение и умножение на скаляр в пространстве $V$ корректно индуцирует структуру векторного пространства в $V/W$.

С понятием факторпространства связана естественная проекция на фактормножество $\pi : V \to V/W$, которая сопоставляет вектору $v \in V$ его класс эквивалентности в пространстве $V/W$. По определению это отображение является сюръективным и его ядро (обращающиеся в нуль векторы) — это в точности подпространство $W$. Более того, как нетрудно проверить по определению, любое линейное отображение $f : V \to U$ порождает последовательность отображений

$$\ker f \longrightarrow V \xrightarrow{\pi_f} V/\ker V \xrightarrow{s_f} \operatorname{Im} f \xrightarrow{i_f} U \longrightarrow U/\operatorname{Im} f,$$

в которой $\pi_f$ — естественная проекция на факторпространство, $i_f$ — естественное вложение подпространства, а $s_f$ является изоморфизмом векторных пространств; $f$ при этом равно композиции $f = i_f \circ s_f \circ \pi_f$.

*Задача* 6.58. Докажите, что линейный оператор $f : V \to V$, такой что $f(W) \subseteq W$, корректно определяет линейный оператор $\bar{f} : V/W \to V/W$.

Сформулируем понятие, отличающее «сравнительно маленькие» векторные пространства от произвольных.

**Определение 6.59.** Векторное пространство $V$ над полем $\mathbb{K}$ называется *конечно-порождённым*, если оно изоморфно факторпространству пространства $\mathbb{K}^N$ (прямая сумма $N$ экземпляров $\mathbb{K}$) при некотором $N \in \mathbb{Z}^+$.

Конечно, это понятие можно объяснить попроще. Рассмотрев сюръекцию $\pi : \mathbb{K}^N \to V$ и обозначив

$$v_i = \pi(\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-i-1}),$$

мы получаем, что конечно порождённое пространство $V$ должно совпадать с пространством линейных комбинаций своих векторов $v_1, \dots, v_N$,

$$V = \langle v_1, \dots, v_N \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{N} x_i v_i \;\middle|\; x_i \in \mathbb{K} \right\}.$$

Из определения пока не ясно, является ли подпространство конечно-порождённого пространства конечно-порождённым, но в следующем разделе мы найдём подход к этому вопросу. Для векторных пространств это понятие просто будет означать конечномерность, хотя его аналог для *модулей над кольцом* (когда в определении поля $\mathbb{K}$ убирается операция деления и возможно опускается требование коммутативности умножения) имеет собственный смысл.

*Задача* 6.60. Докажите, что факторпространство конечно-порождённого векторного пространства является конечно-порождённым.

[[ Примените композицию сюръективных отображений. ]]

*Задача* 6.61. Пусть дана пара векторных пространств $W \subset V$, причём $W$ и $V/W$ оказались конечно-порождёнными. Докажите, что $V$ тоже является конечно-порождённым.

[[ Используйте описание конечной порождённости через системы векторов, или дождитесь описания через флаги в следующем разделе. ]]

6.10. **Размерность векторного пространства.** В этом разделе мы обсудим понятие размерности векторного пространство. Скорее всего оно уже известно читателю, но перед изучением более сложных вопросов хотелось бы освежить понимание уже известных идей, и заодно более геометрически взглянуть на понятие размерности векторного пространства над полем $\mathbb{K}$.

**Определение 6.62.** Последовательность нетривиальных возрастающих по включению векторных пространств

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = V$$

называется *флагом* в пространстве $V$ длины $n$. Флаг называется *полным*, если в него нельзя добавить ни одного подпространства, то есть $V_k/V_{k-1} \cong \mathbb{K}$ для всех $k$.

Поясним полноту флага. Если факторпространство $V_k/V_{k-1}$ имеет не более одного линейно независимого вектора, то возьмём один его вектор $v$ и выразим любой другой как $\alpha v$ с $\alpha \in \mathbb{K}$. Это означает, что $V_k/V_{k-1}$ изоморфно $\mathbb{K}$. Если же в $V_k/V_{k-1}$ есть вектор $v$ и он не порождает всё $V_k$, то это означает по определению факторпространства, что $V_{k-1} \neq V_{k-1} + \langle v \rangle \neq V_k$, то есть $V_{k-1} + \langle v \rangle$ можно было бы добавить в флаг между $V_{k-1}$ и $V_k$.

**Лемма 6.63.** *Для векторного пространства $V$ максимальная длина флага в нём равна максимальному количеству линейно независимых векторов в нём. Если длина флага неограничена, то и количество линейно независимых векторов тоже неограничено.*

*Доказательство.* Докажем в одну сторону. Пусть есть система линейно независимых векторов $v_1, \dots, v_n$, положим

$$V_k = \langle v_1, \dots, v_k \rangle.$$

Эта последовательность нетривиальных подпространств $V$ строго возрастает по включению и $V_k \neq V_{k-1}$, так как иначе $v_k$ выражался бы через $v_1, \dots, v_{k-1}$ по определению линейной оболочки.

В другую сторону, если есть флаг

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = V,$$

то положим $v_k \in V_k \setminus V_{k-1}$ (так обозначено не факторпространство, а разность множеств). Если между векторами $v_1, \dots, v_n$ была бы линейная зависимость, то какой-то из них, например $v_k$, выражался бы через предыдущие. Но тогда выполнялось бы $v_k \in V_{k-1}$, что мы запретили. □

После этой леммы уместно сделать определение:

**Определение 6.64.** *Размерностью* векторного пространства $V$, $\dim V$, называется максимальная длина флага в нём, или эквивалентно, максимальный размер системы линейно независимых векторов в нём.

Система линейно независимых векторов, порождающая $V$, называется *базисом* в $V$. Определение размерности можно интерпретировать как максимальный размер базиса векторного пространства (под размером мы упрощённо будем понимать натуральное число или $\infty$, чтобы не вдаваться в теоретико-множественные проблемы). Из определения не следует, что размеры всех базисов одного и того же пространства одинаковые, но это мы сейчас будем доказывать в следующем виде (в силу леммы 6.63):

**Лемма 6.65.** *У конечно-порождённого векторного пространства все полные флаги имеют одинаковую длину.*

*Доказательство.* Заметим, что у конечно порождённого пространства есть какая-то конечная система линейно независимых векторов. Выбрасывая из неё векторы, которые выражаются через оставшиеся, можно добиться её линейной независимости и оставить её порождающей всё пространство, то есть сделать её базисом. В силу леммы 6.63 (точнее её доказательства) это означает, что в конечно-порождённом $V$ есть хотя бы один полный флаг.

Давайте теперь переопределим размерность конечно-порождённого пространства $V$ как *минимальную длину* полного флага в нём. Если мы докажем утверждение леммы (все полные флаги имеют одинаковую длину), то это определение будет совпадать с исходным.

Будем вести индукцию по размерности $V$. При размерности 1 по определению $V \cong \mathbb{K}$ и утверждение очевидно (если нет, проверьте его внимательно). Рассмотрим полный флаг минимальной длины

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = V$$

и какой-то другой полный флаг

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_m = V.$$

Пусть $V' = V_{n-1} \cap W_{m-1}$.

Рассмотрим случай $V' = V_{n-1}$: из полноты флагов следует, что тогда $W_{m-1} = V'$. В пространстве $V'$ есть флаг $\{V_k\}_{k=1}^{n-1}$ длины $n-1$, а также есть флаг $\{W_k\}_{k=1}^{m-1}$ длины $m-1$. По предположению индукции $n-1 = m-1$ и следовательно $n = m$.

Случай $V' = W_{m-1}$ даёт ту же самую ситуацию, осталось разобраться со случаем, когда включения $V' \subset V_{n-1} \subset V$ и $V' \subset W_{m-1} \subset V$ строгие. Тогда естественные отображения (из задачи 6.58) $V_{n-1}/V' \to V/W_{m-1}$ и $W_{m-1}/V' \to V/V_{n-1}$ являются сюръективными и инъективными (проверьте это в качестве упражнения), то есть все эти факторы изоморфны $\mathbb{K}$. Последовательность подпространств $V'$ вида $V_1 \cap V', \dots, V_{n-2} \cap V', V_{n-1} \cap V' = V'$ имеет последовательные факторпространства либо изоморфные $\mathbb{K}$, либо нулевые, так как естественные отображения

$$(V_k \cap V')/(V_{k-1} \cap V') \to (V_k)/(V_{k-1})$$

инъективны (если $v \in V_k \cap V'$ оказался в $V_{k-1}$, то он оказался в $V_{k-1} \cap V'$). Убирая из последовательности $\{V_k \cap V'\}$ повторы, мы получим полный флаг

$$0 = V'_0 \subset V'_1 \subset \dots \subset V'_\ell = V'$$

длины $\ell \leqslant n-1$. Сравнивая флаги пространства $V_{n-1}$ (второй записан в обратном порядке)

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{n-1} \supset V_{n-1} \supset V'_\ell \supset \dots \supset V'_1 \supset V'_0 = 0$$

и применяя предположение индукции мы получаем, что $\ell = n - 2$. Теперь сравнивая флаги в пространстве $W_{m-1}$

$$0 = V_0' \subset V_1' \subset \dots \subset V_\ell' \subset W_{m-1} \supset W_{m-2} \supset \dots \supset W_1 \supset W_0 = 0$$

и используя предположение индукции, получаем $m - 1 = \ell + 1$, то есть $m = n$, что и требовалось доказать. ☐

Теперь конечно-порождённые векторные пространства можно называть *конечномерными*, так как случай наличия конечных базисов в одном и том же пространстве, размеры которых неограничены, исключён предыдущей леммой.

**Следствие 6.66.** *Если $W \subseteq V$, $\dim W$ и $\dim V/W$ конечны, то $\dim V = \dim W + \dim V/W$.*

*Доказательство.* Взяв полные флаги

$$0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_k = W, \quad 0 \subset V_1' \subset \dots \subset V_\ell' = V/W,$$

мы можем построить полный флаг (здесь $\pi : V \to V/W$ — естественная проекция)

$$0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_k \subset \pi^{-1}(V_1') \subset \dots \subset \pi^{-1}(V_\ell') = V$$

длины $k + \ell$. ☐

*Задача* 6.67. Докажите, что пары векторных подпространств $U, W \subseteq V$ классифицируются числами $\dim U \cap W, \dim U, \dim W, \dim V$, и что выполняется соотношение

$$\dim U + \dim W = \dim U \cap W + \dim(U + W).$$

[[ Докажите и используйте изоморфизмы $(U + W)/U \cong W/(W \cap U)$, $(U + W)/W \cong U/(U \cap W)$. ]]

*Задача* 6.68. Докажите, что если поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто (например, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$), $V$ — конечномерное пространство над этим полем, $A : V \to V$ — линейный оператор, то существует полный флаг в $V$, инвариантный относительно $A$ (в том смысле, что все составляющие флаг подпространства инварианты относительно $A$).

[[ Найдите одномерное инвариантное подпространство для $A$ и перейдите к фактору по нему, применив индукцию. ]]

*Задача* 6.69. Приведите примеры линейных операторов $A : V \to V$, не имеющих инвариантных полных флагов для поля, не являющегося алгебраически замкнутым (например, поле действительных чисел $\mathbb{R}$).

*Задача* 6.70. Пусть $V$ — векторное пространство размерности $n$, $\mathcal{F}$ — семейство его векторных подпространств. Докажите, что найдутся не более $n$ представителей $L_1, \dots, L_m \in \mathcal{F}$ $(m \leqslant n)$ такие, что

$$\bigcap_{i=1}^m L_i = \bigcap_{L \in \mathcal{F}} L := \bigcap \mathcal{F}.$$

Понятие размерности векторного пространства позволяет говорить о ранге линейного отображения.

**Определение 6.71.** Рангом линейного отображения $f : V \to U$, $\operatorname{rk} f$, называется размерность пространства $V/\ker f \cong \operatorname{Im} f$, для простоты считаем ранг либо неотрицательным целым числом, либо $\infty$.

Напомним, что *двойственное пространство* $V^*$ — это пространство линейных форм (отображений) $\lambda : V \to \mathbb{K}$. Любое линейное отображение $f : V \to U$ порождает *сопряжённое отображение* $f^* : U^* \to V^*$ по формуле

$$f^*(\lambda) = \lambda \circ f.$$

Для композиции линейных отображений $f = g \circ h$ по определению верна формула $f^* = h^* \circ g^*$ (проверьте её в качестве упражнения).

Так как любая линейная форма $\lambda : V \to \mathbb{K}$ для конечномерного пространства $V$ с базисом $e_1, \dots, e_n$ задаётся как

$$\lambda(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = \lambda_1x_1 + \dots + \lambda_nx_n,$$

то мы получаем (неестественные изоморфизмы) $V \cong V^* \cong \mathbb{K}^n$, то есть размерности $V$ и $V^*$ в конечномерном случае равны.

*Задача* 6.72. $^*$ Проверьте, что в бесконечномерном случае размерности $V$ и $V^*$ (определённые как мощности базисов) не обязаны быть равны.

[[ Проще всего рассмотреть случай счётной прямой суммы с самим собой одномерных векторных пространств над конечным полем $\mathbb{K}$. ]]

Следовательно, естественное вложение $s : V \mapsto V^{**}$, действующее по формуле

$$s(v)(\lambda) = \lambda(v),$$

является изоморфизмом в конечномерном случае из совпадения размерностей (и следствия 6.66).

*Задача* 6.73. $^*$ Проверьте, что в бесконечномерном случае $s : V \to V^{**}$ не является изоморфизмом. Попробуйте придумать элемент $V^{**}$, не лежащий в $V$.

**Лемма 6.74.** *Для отображения конечного ранга* $f : V \to U$ *оказывается* $\operatorname{rk} f^* \leqslant \operatorname{rk} f$.

*Доказательство.* Посмотрим на разложение $f = i_f \circ s_f \circ \pi_f$ из диаграммы

$$\begin{tikzcd} \ker f \arrow[r] & V \arrow[r, "\pi_f"] & V/\ker f \arrow[r, "s_f"] & \operatorname{Im} f \arrow[r, "i_f"] & U \arrow[r] & U/\operatorname{Im} f. \end{tikzcd}$$

И неё ясно, что $\operatorname{rk} f = \operatorname{rk} s_f$. Из формулы для сопряжения произведения получается $f^* = \pi_f^* \circ s_f^* \circ i_f^*$, тогда из определения ранга следует, что

$$\operatorname{rk} f^* \leqslant \min\{\operatorname{rk} \pi_f^*, \operatorname{rk} s_f^*, \operatorname{rk} i_f^*\} \leqslant \operatorname{rk} s_f^* \leqslant \operatorname{rk} s_f = \operatorname{rk} f,$$

так как $s_f$ и $s_f^*$ — изоморфизмы и их ранг равен (конечной по предположению) размерности пространств, на которых они действуют. ☐

**Следствие 6.75.** *Для отображения конечномерных пространств* $f : V \to U$ *оказывается* $\operatorname{rk} f^* = \operatorname{rk} f$.

*Доказательство.* В этом случае можно интерпретировать $f^{**} : V^{**} \to U^{**}$ как отображение $V \to U$, равное $f$. Тогда по доказанному в предыдущей лемме

$$\operatorname{rk} f = \operatorname{rk} f^{**} \leqslant \operatorname{rk} f^* \leqslant \operatorname{rk} f.$$

☐

*Задача* 6.76. $^{**}$ Проверьте, что для установления равенства $\operatorname{rk} f = \operatorname{rk} f^*$ достаточно конечности ранга, а конечномерность пространств на самом деле не нужна.

[[ Докажите для начала, что любое линейное отображение $\lambda : \operatorname{Im} f \to \mathbb{K}$ продолжается до линейного отображения $\bar\lambda : U \to \mathbb{K}$. Для этого может понадобиться лемма Цорна (теорема 9.90). ]]

6.11. **Полилинейные формы и детерминант.** Часто понятия размерности и линейной зависимости объясняются с помощью понятия «детерминант», поэтому имеет смысл пояснить значение детерминанта в терминах линейной алгебры. В этом разделе мы не предполагаем знакомство с матрицами и комбинаторным определением детерминанта, мы определим детерминант в терминах линейной алгебры и установим его стандартные свойства методами линейной алгебры.

**Определение 6.77.** Для векторного пространства $V$ над полем $\mathbb{K}$ отображение

$$p : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k} \to \mathbb{K}$$

называется *полилинейной формой степени* $k$ на $V$, если оно линейно по каждому аргументу при фиксированных остальных.

Заметим, что если в пространстве $V$ задан базис $v_1, \dots, v_n$, то полилинейная форма с помощью свойства полилинейности определяется своими координатами

$$p_{i_1,\dots,i_k} = p(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).$$

Более того, эти координаты независимы, так как для каждого набора координат $p_{\dots}$ выражение

$$p\left(\sum_{i_1=1}^{n} x_{1,i_1} v_{i_1}, \dots, \sum_{i_k=1}^{n} x_{k,i_1} v_{i_1}\right) = \sum_{1 \leqslant i_1,\dots,i_k \leqslant n} p_{i_1,\dots,i_k} x_{1,i_1} \dots x_{k,i_k}$$

корректно определяет полилинейную форму на $V$.

**Определение 6.78.** Полилинейная форма

$$p : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k} \to \mathbb{K}$$

называется *кососимметричной*, если при перестановке любых двух своих аргументов она меняет знак.

Заметим, что если в кососимметричной форме встречается один и тот же вектор в разных позициях, то с помощью перестановки мы получим

$$p(\dots, v, \dots, v, \dots) = -p(\dots, v, \dots, v, \dots).$$

Если в поле $\mathbb{K}$ имеет место $2 \neq 0$ (*характеристика поля не равна* 2), то отсюда следует

$$p(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0.$$

Далее можно предполагать, что либо $2 \neq 0$ в поле $\mathbb{K}$, либо в определении кососимметричности мы явно требуем обнуления формы при подстановке в неё двух одинаковых векторов в разные позиции.

Можно заметить, что любая перестановка двух аргументов полилинейной формы (*транспозиция*) может быть получена как результат нескольких перестановок соседних пар.

**Лемма 6.79.** *Транспозиция двух элементов* $\{1, \dots, n\}$ *может быть представлена как композиция нечётного числа транспозиций соседних элементов.*

*Доказательство.* Остаётся в качестве упражнения. ☐

Как результат предыдущей леммы отметим, что свойство кососимметричности полилинейной формы достаточно проверять именно на транспозициях соседних аргументов полилинейной формы.

Векторное пространство кососимметричных форм на $V$ степени $k$ обозначается $\wedge^k(V^*)$, при этом оказывается $\wedge^1(V^*) = V^*$, $\wedge^0(V^*) = \mathbb{K}$ (последнее можно считать определением).

**Лемма 6.80.** *Для векторного пространства $V$ размерности $n$, $\wedge^m(V^*) = 0$ при $m > n$ и $\wedge^n(V^*)$ одномерно.*

*Доказательство.* Сначала разберём случай степени $m$, большей размерности $n$. Форма $p$ тогда определяется своими значениями на последовательностях базисных векторов. Но базисных векторов всего $n$, и в последовательности длины $m$ какие-то два из них повторятся, но тогда $p$ должна обнулиться по свойству кососимметричности.

Если же степень равна в точности $n$, то значение полилинейной формы $p$ определяется числами

$$p_\sigma = p\left(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}\right),$$

где $\sigma$ пробегает все перестановки чисел $\{1, \dots, n\}$ из-за запрета повторов базисных векторов. На самом деле достаточно знать одно из этих чисел, так как каждую перестановку можно получить из любой другой последовательностью транспозиций, каждая из которых обязана менять знак $p_\sigma$. Это означает, что пространство кососимметричных форм степени $n$ не более чем одномерно и для доказательства одномерности достаточно предъявить хотя бы одну нетривиальную такую форму.

Будем доказывать существование ненулевой формы в $\wedge^n(V^*)$ индукцией по размерности $V$. В случае $\dim V = 1$ утверждение очевидно. Пусть $W \subset V$ такое, что $V/W$ одномерно, пусть $\lambda : V \to \mathbb{K}$ — соответствующая линейная форма с ядром $W$. На $W$, по предположению индукции, существует нетривиальная кососимметричная форма от $(n-1)$-аргумента, обозначим её $q$. Рассмотрим также проекцию $\pi : V \to W$ вдоль какого-то вектора из $V \setminus W$. Положим

$$\widetilde{q}(v_1, \dots, v_{n-1}) = q(\pi(v_1), \dots, \pi(v_{n-1})),$$

это кососимметричная форма от $n-1$ вектора из $V$. Теперь положим

$$p(v_1, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \lambda(v_i) \widetilde{q}(v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n),$$

где шапочка $\widehat{\ }$ означает пропуск элемента последовательности.

Форма $p$ является кососимметричной. Действительно, по лемме 6.79 это достаточно проверить для транспозиции $v_i$ и $v_{i+1}$. Тогда слагаемые суммы с номерами $j \neq i, i+1$ меняют знак из предполагаемого свойства $q$ и $\widetilde{q}$, а два оставшихся слагаемых с точностью до знака выглядят как

$$\lambda(v_i)\widetilde{q}(v_1, \dots, \widehat{v_i}, v_{i+1}, \dots, v_n) - \lambda(v_{i+1})\widetilde{q}(v_1, \dots, v_i, \widehat{v_{i+1}}, \dots, v_n),$$

что тоже меняет знак при транспозиции $v_i$ и $v_{i+1}$.

Остаётся проверить, что $p$ нетривиальна. Из нетривиальности $q$, существуют $v_2, \dots, v_n \in W$, такие что

$$q(v_2, \dots, v_n) = \widetilde{q}(v_2, \dots, v_n) \neq 0.$$

Тогда для любого $v_1 \in V \setminus W$, применив равенство $\lambda(v_i) = 0$ для $i > 1$, получим

$$p(v_1, \dots, v_n) = \lambda(v_1)\widetilde{q}(v_2, \dots, v_n) \neq 0.$$

□

*Задача* 6.81. Докажите, что если $\dim V = n$, то $\dim \wedge^k(V^*) = \binom{n}{k}$.

[[ Рассмотрите значения формы на наборах базисных векторов. ]]

Теперь для любого линейного отображения $f : V \to U$ можно рассмотреть отображение $\Lambda^n f^* : \Lambda^n(U^*) \to \Lambda^n(V^*)$, действующее по формуле:

$$(\Lambda^n f^*(p))\,(v_1, \dots, v_n) = p(fv_1, \dots, fv_n).$$

Из леммы 6.80 следует, что при $\dim V = n$ отображение $\Lambda^n f^* : \Lambda^n(V^*) \to \Lambda^n(V^*)$ является отображением одномерного векторного пространства в себя, то есть умножением на число, которое называется *детерминант* $f$ и обозначается $\det f$.

Из нашего определения детерминанта тривиально следуют его важные свойства:

**Лемма 6.82.** *Если $f : V \to V$ и $g : V \to V$ — два линейных оператора на конечномерном пространстве, то $\det(f \circ g) = \det f \cdot \det g$.*

*Доказательство.* Следует из того, что $\Lambda^n(f \circ g)^* = \Lambda^n g^* \circ \Lambda^n f^*$. □

Для линейных отображений $f : V \to V$, соответствующих перестановкам векторов некоторого фиксированного базиса, $\det f$ называется *знак перестановки*. В силу свойства кососимметричности какой-то ненулевой формы $p \in \Lambda^n(V^*)$ (при $\dim V = n$), детерминант любой транспозиции равен $-1$, то есть знак перестановки оказывается нетривиальным гомоморфизмом (в силу леммы 6.82) групп $\mathrm{sgn} : \mathfrak{S}_n \to \{-1, 1\}$, где $\mathfrak{S}_n$ — это перестановки множества $\{1, \dots, n\}$, а множество $\{-1, 1\}$ рассматривается как группа по умножению.

*Задача* 6.83. Докажите, что если оператор задан в координатно-матричном представлении как

$$f\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f_{ij} x_j v_i,$$

то

$$\det f = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}\,\sigma \cdot f_{1,\sigma(1)} \dots f_{n,\sigma(n)}.$$

[[ Подставьте явно $f(v_1), \dots, f(v_n)$ в какую-то ненулевую $p \in \Lambda^n(V^*)$ и воспользуйтесь данным выше определением знака перестановки. ]]

**Лемма 6.84.** *Линейный оператор на конечномерном пространстве $f : V \to V$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\det f \neq 0$.*

*Доказательство.* Если $f$ является изоморфизмом, то он имеет обратный $f^{-1}$ и нетривиальность детерминанта следует из леммы 6.82

$$\det f \cdot \det f^{-1} = \det \mathrm{id}_V = 1.$$

По следствию 6.66

$$\dim \ker f + \dim \mathrm{Im}\, f = \dim V$$

и если $f$ не является изоморфизмом, то у него нетривиальное ядро и образ имеет размерность меньше $\dim V$. Следовательно $f$ записывается как композиция отображений в диаграмме

$$V \xrightarrow{g} W \xrightarrow{h} V,$$

для $W = \mathrm{Im}\, f$ с $\dim V = n$ и $\dim W < n$. По лемме 6.80 $\Lambda^n(W^*) = 0$. Следовательно отображения $\Lambda^n h^*$ и $\Lambda^n g^*$ нулевые, как и

$$\Lambda^n f^* = \Lambda^n g^* \circ \Lambda^n h^* = 0.$$

□

*Задача* 6.85. Проверьте, что для линейного оператора в конечномерном пространстве $f : V \to V$ выполняется $\det f = \det f^*$.

[[ Можно установить равенство $\operatorname{sgn}\sigma^{-1} = \operatorname{sgn}\sigma$ и использовать явную формулу из задачи 6.83, а можно заметить, что $\wedge^n f^* = (\wedge^n f)^*$. ]]

*Задача* 6.86. Проверьте, что если $W \subset V$ и линейный оператор $f : V \to V$ обладает свойством $f(W) \subseteq W$, то

$$\det f = \det f|_W \cdot \det \bar{f},$$

где $\bar{f} : V/W \to V/W$ индуцирован $f$.

[[ Можно использовать формулу $\wedge^{\dim V}(V^*) = \wedge^{\dim W}(W^*) \otimes \wedge^{\dim V - \dim W}(V/W)^*$ или сделать это через подходящий базис и матричное представление $f$. ]]

*Задача* 6.87. Интерпретируйте матричные элементы линейного отображения $\wedge^k f^* : \wedge^k(U^*) \to \wedge^k(V^*)$ в терминах матричных элементов отображения $f : V \to U$.

[[ Должно получиться понятие, известное из матрично-ориентированных учебников по линейной алгебре как «минор». ]]

*Задача* 6.88. Опишите собственные значения оператора $\wedge^k f^* : \wedge^k(V^*) \to \wedge^k(V^*)$ в терминах собственных значений исходного оператора $f : V \to V$.

[[ Приведите $f$ к верхнетреугольному виду. ]]

6.12. **Тензорное произведение векторных пространств.** Описанные в предыдущем разделе полилинейные формы являются частным случаем тензоров, то есть элементов тензорного произведения $V^*$ с самим собой, где $V$ — некоторое конечномерное векторное пространство. В этом разделе мы поясним, что такое тензорное произведение векторных пространств (над одним и тем же полем $\mathbb{K}$).

**Определение 6.89.** Пусть $V, W, U$ — векторные пространства. Отображение $F : V \times W \to U$ называется *билинейным*, если для любых $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ и скаляров $a, b$ выполняется

$$F(av + bv', w) = aF(v, w) + bF(v', w), \quad F(v, aw + bw') = aF(v, w) + bF(v, w').$$

**Определение 6.90.** *Тензорным произведением* векторных пространств $V$ и $W$ называется билинейное отображение

$$F : V \times W \to U,$$

обладающее следующим свойством: для любого другого билинейного отображения

$$F' : V \times W \to U'$$

существует единственное линейное отображение $G : U \to U'$, такое что $F' = G \circ F$.

Билинейные и линейные отображения в определении тензорного произведения удобно изобразить диаграммой:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "G"] & U' \\ V \times W \arrow[u, "F"] \arrow[r, equal] & V \times W \arrow[u, "F'"'] \end{tikzcd}$$

Ясно, что такое определение тензорного произведения требует ещё доказательства его существования. Но мы для начала поймём, что тензорное произведение в определённом смысле единственное. Применим определение к $F' = F$, тогда $F = G \circ F$. Очевидно, что в качестве $G$ в этом равенстве можно взять $\mathrm{id}_U$, а так как по определению $G$ должно быть единственным, то из равенства $F = G \circ F$ должно следовать $G = \mathrm{id}_U$.

Далее, пусть есть ещё одно тензорное произведение $F' : V \times W \to U'$. Тогда по определению тензорного произведения $F$ находим $G : U \to U'$, а по определению тензорного произведения $F'$ находим $G' : U' \to U$. По их свойствам получается

$$F' = G \circ F, \quad F = G' \circ F' \Rightarrow F = G' \circ G \circ F, \quad F' = G \circ G' \circ F'.$$

Из предыдущего установленного факта и этих тождеств мы получаем, что

$$G \circ G' = \mathrm{id}_{U'}, \quad G' \circ G = \mathrm{id}_U .$$

То есть между двумя тензорными произведениями установлен изоморфизм, совместимый с их отображениями $F$ и $F'$. В этом смысле любые два тензорных произведения $V$ и $W$ изоморфны. Выбирая какой-то элемент из класса изоморфных тензорных произведений, мы обозначаем его

$$V \times W \to V \otimes W, \quad (v, w) \mapsto v \otimes w.$$

Причём менее формально мы будем называть *тензорным произведением* не только это отображение, но и его образ $V \otimes W$.

**Лемма 6.91.** *Тензорное произведение векторных пространств $V$ и $W$ существует.*

*Доказательство.* Определим векторное пространство $\widetilde{U}$ как (скорее всего бесконечномерное) пространство конечных линейных комбинаций формальных выражений $\widetilde{F}(v, w)$, для всех пар $(v, w) \in V \times W$. Определим подпространство $R \subseteq \widetilde{U}$ как подпространство, порождённое линейными комбинациями

$$\widetilde{F}(av + bv', w) - a\widetilde{F}(v, w) - b\widetilde{F}(v', w), \quad \widetilde{F}(v, aw + bw') - a\widetilde{F}(v, w) - b\widetilde{F}(v, w'),$$

для всевозможных $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ и скаляров $a, b$. Обозначим $U = \widetilde{U}/R$.

Отображение $\widetilde{F} : V \times W \to \widetilde{U}$, определённое как $F(v, w) = v \otimes w$, в композиции с проекцией $P : \widetilde{U} \to U$ даёт уже билинейное отображение $F = P \circ \widetilde{F}$. Его билинейность следует из вида определяющих $R$ элементов.

Покажем, что $F : V \times W \to U$ обладает свойствами тензорного произведения. Если есть билинейное отображение $F' : V \times W \to U'$, то определим линейное отображение

$$\widetilde{G} : \widetilde{U} \to U', \quad \widetilde{G}(\widetilde{F}(v, w)) = F'(v, w).$$

Из билинейности $F'$ следует, что $\widetilde{G}(R) = 0$, следовательно, отображение $\widetilde{G}$ представляется как $G \circ P$ для линейного отображения $G : U \to U'$. По определению $\widetilde{G}$ выполняется

$$\widetilde{G} \circ \widetilde{F} = F' \Rightarrow G \circ P \circ \widetilde{F} = F' \Rightarrow G \circ F = F'.$$

Такое $G$ единственно, так как $\widetilde{G} = G \circ P$ обязано быть определённым на базисных элементах $\widetilde{U}$ именно таким способом для выполнения равенства $G \circ F = F'$. ☐

Начиная с трилинейных (или более полилинейных) отображений $V, W, T \to U$ вместо билинейных, можно аналогично определить *тройное тензорное произведение* как трилинейное отображение

$$V \times W \times T \to V \otimes W \otimes T$$

с соответствующим свойством относительно построения линейного отображения в любое другое трилинейное отображение $V \times W \times T \to U'$.

После этого можно показать, что имеются естественные изоморфизмы между этим тройным произведением и $(V \otimes W) \otimes T$, а также $V \otimes (W \otimes T)$, что позволит говорить об *ассоциативности* тензорного произведения векторных пространств. Действительно, всякое билинейное отображение $F' : (V \otimes W) \times T \to U'$ порождает трилинейное отображение

$$H' : V \times W \times T \to U', \quad H'(v, w, t) = F'(v \otimes w, t),$$

которое (по подразумеваемому определению тройного тензорного произведения $H : V \times W \times T \to V \otimes W \otimes T$) представляется в виде $H' = G \circ H$, где $G : V \otimes W \otimes T \to U'$ — некоторое линейное отображение. Следовательно, отображение тензорного произведения $F : (V \otimes W) \times T \to V \otimes W \otimes T$ удовлетворяет тому свойству, которому должно удовлетворять тензорное произведение $(V \otimes W) \otimes T$ по определению.

Заметим, что если есть два линейных отображения $f : V \to V'$ и $g : W \to W'$, то возникает их *тензорное произведение*

$$f \otimes g : V \otimes W \to V \otimes W',$$

как порождаемое билинейным отображением $V \times W \to V' \otimes W'$, $(v, w) \mapsto f(v) \otimes g(w)$.

*Задача* 6.92. Проверьте, что для любых $f : V \to V'$, $f' : V' \to V''$, $g : W \to W'$, $g' : W' \to W''$ выполняется

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g).$$

[[ Проверьте действие левой и правой части равенства на парах $v \otimes w$. ]]

Приведённая выше конструкция тензорного произведения достаточно абстрактна. Дадим ей более конкретное описание.

**Лемма 6.93.** *Пусть $S$ и $T$ — не обязательно конечные базисы в векторных пространствах $V$ и $W$. Тогда множество*

$$\{s \otimes t \mid s \in S,\ t \in T\}$$

*образует базис в $V \otimes W$.*

*Доказательство.* По нашей конструкции $V \otimes W$, тензорное произведение порождено векторами $v \otimes w$, где $v \in V$, $w \in W$. Взяв разложения по базису

$$v = \sum_{s \in S} v_s s, \quad w = \sum_{t \in T} w_t t,$$

мы из билинейности тензорного произведения получим представление (все суммы на самом деле имеют лишь конечное число ненулевых слагаемых)

$$v \otimes w = \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} v_s w_t s \otimes t.$$

Значит, $V \otimes W$ порождено векторами $s \otimes t$.

Проверим отсутствие линейных зависимостей. Зафиксируем какие-то $s \in S$ и $t \in T$. Отображения коэффициента разложения по базису, $v \mapsto v_s$ и $w \mapsto w_t$ обозначим как $\lambda : V \to \mathbb{K}$ и $\mu : W \to \mathbb{K}$. Они порождают билинейное отображение $(v, w) \mapsto \lambda(v)\mu(w)$, а значит и отображение

$$\lambda \otimes \mu : V \otimes W \to \mathbb{K}.$$

Последнее обладает тем свойством, что

$$(\lambda \otimes \mu)(s, t) = \lambda(s)\mu(t) = 1,$$

но при $(s', t') \neq (s, t) \in S \times T$ оказывается

$$(\lambda \otimes \mu)(s', t') = \lambda(s')\mu(t') = 0.$$

Это означает, что элемент $s \otimes t$ нашей системы не выражается линейно через другие элементы системы, то есть система действительно является базисом. ☐

*Задача* 6.94. Проверьте, что если $\dim V, \dim W \geqslant 2$, то образ отображения тензорного произведения $V \times W \to V \otimes W$ не является линейным подпространством.

*Задача* 6.95. Покажите, что имеет место естественный изоморфизм $V \otimes W \to W \otimes V$.

[[ Начните с билинейного отображения $V \times W \to W \otimes V$, $F(v, w) = w \otimes v$. ]]

6.13. **Тензорное произведение и двойственность.** Для простоты в этом разделе мы будем предполагать векторные пространства конечномерными (над одним и тем же полем $\mathbb{K}$) и пользоваться естественным изоморфизмом $(V^*)^* = V$ для них. Построим билинейное отображение

$$V^* \times V \to \mathbb{K}, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda(v),$$

оно порождает векторное отображение *свёртки* $V^* \otimes V \to \mathbb{K}$.

*Задача* 6.96. Выразите явно эту операцию для базиса в $V$, двойственного ему базиса в $V^*$, и соответствующего им по лемме 6.93 базиса в $V^* \otimes V$.

Рассмотрим также пространство линейных отображений $V \to W$, обозначаемое как $\mathcal{L}(V, W)$. Определим билинейное отображение

$$E : V^* \otimes W \to \mathcal{L}(V, W), \quad (\lambda, w) \mapsto (v \mapsto \lambda(v)w).$$

Матричное представление линейного отображения $f : V \to W$ между конечномерными пространствами можно интерпретировать как его представление в виде $f = \sum_{t \in T} E(\lambda_t, t)$, где $T$ — некоторый базис в $W$, а $\lambda_t \in V^*$. Отсюда следует, что отображение $E$ оказывается сюръективным. Кроме того, матричное представление вместе с леммой 6.93 и равенством $\dim V = \dim V^*$ показывают, что $E$ оказывается изоморфизмом.

*Задача* 6.97. Проверьте, что с точки зрения изоморфизма $V^* \otimes V \cong \mathcal{L}(V, V)$ свёртка является взятием следа линейного оператора.

[[ Проще всего это проверить, разложив всё по базису. ]]

Формула

$$(\lambda, \mu) \mapsto ((v, w) \mapsto \lambda(v)\mu(w))$$

сопоставляет всякой паре $(\lambda, \mu) \in V^* \times W^*$ билинейное отображение $V \times W \to \mathbb{K}$. Последнее отображение по свойству тензорного произведения продолжается до линейного отображения $V \otimes W \to \mathbb{K}$. Легко проверить по определению, что зависимость результата в $(V \otimes W)^*$ от $\lambda$ и $\mu$ получается линейная. Тогда по свойству тензорного произведения возникает и отображение

$$V^* \otimes W^* \to (V \otimes W)^*.$$

Можно проверить (что фактически было сделано в доказательстве леммы 6.93), что это отображение сюръективно. А из равенства (конечных) размерностей можно заключить, что это отображение является изоморфизмом.

Начиная с одного конечномерного векторного пространства, мы с помощью операций тензорного умножения и сопряжения можем определить его тензорные степени

$$T^{p,q}(V) = \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{q} \otimes \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{p}.$$

В таких выражениях мы сначала пишем тензорные сомножители $V^*$, а потом — сомножители $V$, так как произведения в другом порядке будут (может быть неединственным образом) изоморфны выписанным. Также для определённости положим $T^{0,0}(V) = \mathbb{K}$.

С учётом установленных ранее изоморфизмов, можно утверждать, что существует естественный изоморфизм

$$T^{p,q}(V) \cong \mathcal{L}(\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{q}, \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{p}).$$

В частности, тензорная степень

$$T^{0,q} \cong \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{q} \cong \mathcal{L}(\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{q}, \mathbb{K})$$

естественно изоморфна пространству $q$-линейных форм на пространстве $V$.

Ранее определённое пространство кососимметричных форм $\wedge^q(V^*)$ можно считать естественно вложенным в $T^{0,q}(V)$ как подпространство тензоров, на которых любое отображение

$$\underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{q} \to \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{q},$$

соответствующее перестановке сомножителей $\sigma$, действует умножением на знак $\sigma$. Без перехода к двойственному можно определить *внешнюю степень* векторного пространства $V$, $\wedge^k(V) \subseteq T^{k,0}(V)$ как линейное подпространство тензоров, действие перестановок тензорных сомножителей на которые домножает тензор на знак перестановки. Лемма 6.80 тогда показывает, что при $k > \dim V$ это пространство нулевое, а при $k = \dim V$ одномерное.

Аналогично можно определить *симметричные тензоры* $S^p(V) \subset T^{p,0}(V)$ как линейное подпространство тензоров, которые инвариантны относительно всех перестановок тензорных сомножителей. Читателю предлагается проверить некоторые их свойства самостоятельно.

*Задача* 6.98. Найдите размерность $S^p(V)$ в зависимости от размерности $V$ и числа $p$.

[[ Возьмите базис в $T^{p,0}(V)$ и посмотрите, какие его элементы эквивалентны в том смысле, что получаются один из другого какой-то перестановкой. Посчитайте количество таких классов эквивалентности (*орбит*) элементов базиса. Покажите, что орбиты соответствуют элементам некоторого базиса $S^p(V)$. ]]

*Задача* 6.99. Докажите, что $S^p(V)$ линейно порождено тензорами вида $\underbrace{v \otimes \dots \otimes v}_{p}$, $v \in V$.

[[ Обобщите формулу

$$v \otimes w = \frac{(v+w) \otimes (v+w) - v \otimes v - w \otimes w}{2}$$

на значения $p > 2$. ]]

Конструкции взятия обратного и двойственного к линейному оператору и тензорного произведения линейных отображений между собой позволяют естественно сопоставить обратимому линейному оператору $f : V \to V$ линейный оператор

$$T^{p,q}(f) : T^{p,q}(V) \to T^{p,q}(V),$$

так что $T^{p,q}(f \circ g) = T^{p,q}(f) \circ T^{p,q}(g)$.

*Задача* 6.100. Установите изоморфизмы

$$S^p(V \oplus W) \cong \bigoplus_{k=0}^{p} S^k(V) \otimes S^{p-k}(W), \quad \wedge^p(V \oplus W) \cong \bigoplus_{k=0}^{p} \wedge^k(V) \otimes \wedge^{p-k}(W).$$

[[ Для этого удобно использовать симметризованный или кососимметризованный (как в формуле (6.8)) вариант тензорного умножения. Изоморфность можно проверить на уровне базисов в соответствующих пространствах. Для обоснования независимости разложения от выбора базиса полезно посмотреть, как на тензор из $T^{p,0}(V \oplus W)$ действует линейное преобразование, которое является тензорной степенью прямой суммы умножения на скаляр $a$ в пространстве $V$ и умножения на скаляр $b$ в пространстве $W$. ]]

С помощью конструкции тензорного произведения отображений свёртка даёт и более общую свёртку вида $V^* \otimes V \otimes W \to W$, здесь мы тензорно перемножаем свёртку с тождественным отображением $W \to W$ для некоторого векторного пространства $W$. В частности, при $p, q \geqslant 1$ свёртка может быть тензорно домножена до отображения

$$T^{p,q}(V) \to T^{p-1,q-1}(V).$$

Это продолжение зависит от того, какой из сомножителей $V^*$ с каким сомножителем $V$ в тензорном произведении мы сворачиваем, и в общем случае не единственно.

*Задача* 6.101. Проверьте, что двойственное к свёртке отображение

$$\mathbb{K} \to (V^* \otimes V)^* \cong V \otimes V^* \cong V^* \otimes V \cong \mathcal{L}(V, V)$$

можно интерпретировать так, что скаляр $a \in \mathbb{K}$ переходит в скалярный оператор умножения на $a$.

6.14. **Дифференциальные формы и внешнее дифференцирование.** После определения векторных полей уместно определить дифференциальные формы. Дифференциальная форма первой степени в точке $p \in U$ — это просто элемент двойственного пространства $(T_pU)^*$, которое обычно обозначается как $T_p^*U$, то есть линейная форма на касательном пространстве. Следующее упражнение даёт более прямое (но и более абстрактное) описание $T_p^*U$.

*Задача* 6.102. Обозначим $\mathfrak{m}_p(U)$ гладкие функции на $U$, которые обращаются в нуль в точке $p$. Обозначим $\mathfrak{m}_p^2(U)$ те гладкие функции, которые представляются в виде

$$f_1g_1 + f_2g_2 + \dots + f_kg_k, \quad \forall i\ f_i, g_i \in \mathfrak{m}_p(U).$$

Установите изоморфизм $T_p^*U = \mathfrak{m}_p(U)/\mathfrak{m}_p^2(U)$.

[[ Работая в системе координат, по существу надо доказать, что функции с нулевым значением и нулевыми производными в $p$ лежат в $\mathfrak{m}_p^2(U)$. ]]

Как и в случае векторных полей, от формы первой степени в точке можно перейти к форме первой степени, определённой в каждой точке и гладко зависящей от точки. Нетрудно проверить (например, в координатах), что любая форма первой степени $\alpha$, определённая на $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — это сопоставление каждому векторному полю $X$ на $U$ гладкой функции $\alpha(X)$, линейное относительно умножения на гладкие функции, то есть $\alpha(fX) = f\alpha(X)$ для любых $f$ и $X$. В таком духе мы определим дифференциальные формы высших степеней на открытом множестве.

**Определение 6.103.** Определим *дифференциальную форму степени* $k$ на открытом $U \subseteq \mathbb{R}^n$ как отображение наборов из $k$ гладких векторных полей $X_1, \dots, X_k$ на $U$ в бесконечно гладкие функции на $U$, $(X_1, \dots, X_k) \to \alpha(X_1, \dots, X_k)$, линейное по каждому аргументу

$$\alpha(X_1, \dots, X_i + Y_i, \dots, X_k) = \alpha(X_1, \dots, X_i, \dots, X_k) + \alpha(X_1, \dots, Y_i, \dots, X_k)$$

и относительно умножения на бесконечно гладкие функции

$$\alpha(f_1X_1, \dots, f_kX_k) = f_1 \dots f_k\alpha(X_1, \dots, X_k),$$

и кососимметричное, то есть меняющее знак при перестановке любых двух своих аргументов.

Кососимметричность в этом определении пока не выглядит естественно, но она будет играть ключевую роль в определении внешнего дифференциала дифференциальной формы, а далее и при интегрировании дифференциальных форм.

**Лемма 6.104.** *Значение выражения $\alpha(X_1, \ldots, X_k)$ в точке $p$ зависит только от значений векторных полей $X_i$ в точке $p$.*

*Доказательство.* Представим каждое поле $X_i$ в виде $\sum_j X_i^j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Применив линейность $\alpha$, разложим выражение на слагаемые, в каждом из которых $\alpha$ применяется к векторным полям $\frac{\partial}{\partial x_i}$ (это будет не зависящая от векторных полей часть), а множители $X_i^j$ вынесены из $\alpha$ как функции. Значение этого выражения в точке $p$ будет зависеть только от значений $X_i^j$ в точке $p$. ☐

Предыдущая лемма позволяет переформулировать определение дифференциальной формы иначе, как выбор кососимметричной полилинейной формы степени $k$ на касательном пространстве $T_pU$ в каждой точке $p \in U$ так, чтобы выбранная форма гладко зависела от точки $p$. Такое определение более геометрическое, в отличие от первого, более алгебраического.

Пространство дифференциальных форм степени $k$ на $U \subseteq \mathbb{R}^n$ обозначим $\Omega^k(U)$. Из леммы 6.80 следует, что $\Omega^k(U) = 0$ при $k > n$, а при $k = n$ дифференциальная форма степени $n$ в точке определяется одним числом (которое однако меняется при криволинейной замене координат!). То есть $\Omega^n(U)$ в фиксированной системе координат выглядит как $C^\infty(U)$, но при замене координат ведёт себя иначе.

Посмотрим теперь подробнее на формы небольшой степени. Формы нулевой степени по определению производят функцию из ничего, то есть они оказываются гладкими функциями, $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$.

Для любой функции $f \in C^\infty(U)$ её дифференциал как отображения $U \to \mathbb{R}$ можно считать формой первой степени в соответствии с формулой

$$df(X) = X(f),$$

действительно, это выражение линейно относительно умножения $X$ на бесконечно гладкие функции и в координатах компоненты $df$ оказываются равны $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, то есть это уже известный нам дифференциал функции, но определённый по-новому.

Дифференциалы координатных функций $dx_1, \ldots, dx_n$ в любой точке дают базис пространства $T_p^*U$, двойственный к базису $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ в смысле

$$dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}.$$

По этому базису можно разложить любую форму в точке, а применяя это во всех точках области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ обнаруживаем, что любая дифференциальная форма на $U$ первой степени выражается как

$$\alpha_1 dx_1 + \cdots + \alpha_n dx_n,$$

где $\alpha_i \in C^\infty(U)$. При замене координат компоненты дифференциальной формы первой степени ведут себя так же, как компоненты дифференциала функции, то есть преобразование от новой к старой системе координат выглядит как

$$\alpha_j = \sum_i \widetilde{\alpha}_i \frac{\partial y_i}{\partial x_j}.$$

По сути это означает, что преобразование выражения в новых координатах

$$\sum_i \widetilde{\alpha}_i dy_i$$

в выражение в старых координатах

$$\sum_j \alpha_i dx_i$$

производится чисто формально, рассматривая $y_i$ как функции от $x_j$ и беря их дифференциалы, а также подставляя в $\widetilde{\alpha}_i$ выражения $y_i$ через $x_1, \dots, x_n$.

Существует (известное из линейной алгебры) *внешнее умножение* $\Omega^k(U) \times \Omega^\ell(U) \to \Omega^{k+\ell}(U)$, которое можно определить по формуле, суммируя по всем перестановкам из $k + \ell$ элементов:

$$(6.8) \quad (\alpha \wedge \beta)(X_1, \dots, X_{k+\ell}) = c_{k,\ell} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} (\operatorname{sgn} \sigma) \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \beta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+\ell)}).$$

Коэффициент $c_{k,\ell}$ можно выбрать так, чтобы выполнялась ассоциативность умножения и условие нормировки (в некоторых учебниках условие нормировки может быть другим!)

$$(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \left( \frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \right) = \operatorname{sgn} \tau,$$

если $i_1, \dots, i_k$ различны и $j_1, \dots, j_k$ получаются из них перестановкой $\tau \in \mathfrak{S}_k$, и

$$(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \left( \frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \right) = 0$$

иначе. Напомним также свойство *суперкоммутативности* внешнего умножения, которое помогает работать с ним на практике

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg \alpha \cdot \deg \beta} \beta \wedge \alpha.$$

Здесь $\deg \alpha$ обозначает степень формы $\alpha$, и аналогично для $\deg \beta$.

*Задача* 6.105. Найдите коэффициенты $c_{k,\ell}$, совместимые с ассоциативностью внешнего умножения и условием нормировки.

*Задача* 6.106. Проверьте, что умножение формы $\alpha \in \Omega^k(U)$ на функцию $f \in C^\infty(U)$ по формуле

$$(f\alpha)(X_1, \dots, X_k) = f \cdot \alpha(X_1, \dots, X_k)$$

совпадает со внешним умножением $f \wedge \alpha$ при интерпретации функции как формы из $\Omega^0(U)$.

С помощью внешнего умножения любую дифференциальную форму степени $k$ в координатах можно единственным образом записать в виде:

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

где $\alpha_{i_1 \dots i_k}$ — гладкие функции. Это следует из того, что в каждой точке кососимметричные формы $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, составленные из дифференциалов координатных функций, дают базис пространства $k$-линейных кососимметричных форм на $T_pU$. Это означает, что дифференциальные формы на области $U$ порождаются с помощью операций сложения и внешнего умножения функциями (как элементами $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$) и их дифференциалами (как элементами $\Omega^1(U)$). Это наблюдение позволит нам определить операцию *внешнего дифференцирования* $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$.

**Лемма 6.107.** *На гладких дифференциальных формах на $U$ существует единственный $\mathbb{R}$-линейный оператор $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$, удовлетворяющий условиям: а) для функций $df$ является её дифференциалом; б) $d^2 = 0$; в) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta$ (правило Лейбница).*

*Доказательство.* Так как внешние формы порождаются функциями и их дифференциалами, то (с учётом вытекающего из свойства (б) равенства $d^2x_i = 0$) дифференциал формы $\alpha$ в координатах обязан находиться по формуле

$$d\left(\sum_{i_1<\dots<i_k} \alpha_{i_1\dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\right) = \sum_{i_1<\dots<i_k} d\alpha_{i_1\dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} =$$

$$= \sum_{i_1<\dots<i_k,\ j\notin\{i_1,\dots,i_k\}} \frac{\partial \alpha_{i_1\dots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Это доказывает единственность.

Чтобы доказать существование, можно просто использовать эту формулу как определение в некоторой системе координат и проверить свойства. Свойство (а) будет очевидно; свойство (б) достаточно проверять для монома вида $f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ и оно будет следовать из независимости второй производной от порядка дифференцирования и вытекающего из него тождества

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_\ell} dx_j \wedge dx_\ell + \frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_j} dx_\ell \wedge dx_j = 0;$$

свойство (в), в силу билинейности умножения, достаточно будет проверить на мономах вида $f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ и $g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}$, что сводится к формуле Лейбница для дифференциала произведения двух функций. Читателю предлагается самостоятельно проверить, что знаки $\pm$ в выражениях будут именно такими, как написано в условии. $\square$

Доказанная единственность показывает, что операция внешнего дифференцирования совместима с заменами координат, то есть по сути определена независимо от выбора криволинейной системы координат. Помимо обратимой замены координат полезно рассмотреть и произвольные гладкие отображения, определив *обратный образ дифференциальной формы* при гладком отображении, который в частном случае диффеоморфизма даёт правило замены координат в дифференциальной форме.

**Определение 6.108.** Для любого гладкого отображения $\varphi : U \to V$ между открытыми подмножествами евклидовых пространств определено отображение пространств дифференциальных форм $\varphi^* : \Omega^k(V) \to \Omega^k(U)$, действующее по формуле (для некоторых векторов $X_1, \dots, X_k$ в одной и той же точке $p \in U$)

$$\varphi^*\alpha(X_1, \dots, X_k) = \alpha(\varphi_* X_1, \dots, \varphi_* X_k).$$

В этом определении следует понимать, что когда левая часть вычисляется в точке $p \in U$, то правая вычисляется в точке $\varphi(p)$. Тогда становится понятным, что для функции $f \in C^\infty(V) = \Omega^0(V)$ оказывается

$$\varphi^* f = f \circ \varphi,$$

что совпадает с понятием замены переменных в функции. Для форм первой степени это отображение является сопряжённым к $\varphi_*$ в каждой точке, оно задаётся композицией $\alpha \circ \varphi_*$, где $\alpha$ находится в точке $f(p)$, а $\varphi_*$ — в точке $p$.

Важно понимать, что в отличие от векторных полей, для дифференциальных форм любое гладкое отображение порождает отображение пространства дифференциальных форм в обратную сторону. Иначе говоря, форма, заданная в новых переменных, преобразуется в форму той же степени, заданную в старых переменных. Следующая лемма даёт понять, как это преобразование делается на практике, и заодно показывает независимость оператора внешнего дифференцирования $d$ от системы координат.

**Лемма 6.109.** *Взятие обратного образа дифференциальных форм коммутирует с внешним умножением и внешним дифференцированием*

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta, \quad \varphi^*(d\alpha) = d(\varphi^*\alpha).$$

*Доказательство.* Для внешнего умножения утверждение проверяется подстановкой формулы для обратного образа в формулу для внешнего умножения.

Для дифференцирования, с учётом уже установленной совместимости с внешним перемножением и правила Лейбница для дифференцирования, достаточно проверить утверждение на функциях и их дифференциалах, через которые выражается произвольная дифференциальная форма в координатах. Это сводится к формуле для производной композиции и сопряжённости $\varphi_*$ и $\varphi^*$, а именно

$$d(\varphi^* f) = d(f \circ \varphi) = df \circ D\varphi = df \circ \varphi_* = \varphi^*(df).$$

□

Предыдущая лемма означает, что нахождение обратного образа явно заданной дифференциальной формы происходит формально, подстановкой выражений новых переменных через старые в коэффициенты формы и в дифференциалы новых переменных. Следующая задача позволяет увидеть такую замену в действии.

*Задача* 6.110. Выпишите в явном виде действие $\varphi^*$ на $\Omega^n$ в областях $\mathbb{R}^n$.

[[ В выражение $dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$ подставьте $dy_i$ как дифференциалы новых функций в старых координатах $dy_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n} dx_n$ и перемножьте по правилам внешнего умножения. ]]

*Задача* 6.111. Докажите, что для двух гладких отображений открытых подмножеств евклидова пространства, $\varphi : U \to V$ и $\psi : V \to W$, имеет место соотношение

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

[[ Начните с соотношения для прямого образа вектора $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ из задачи 6.54. ]]

6.15. **Интеграл дифференциальной формы с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$.** В этом разделе мы изучим определение интеграла от дифференциальной формы. Неформально говоря, дифференциальная форма (максимальной степени) — это именно тот объект, для которого можно определить интеграл, почти не зависящий от выбора криволинейной системы координат. Причём в слове «почти» тоже скрывается глубокое понятие ориентации системы координат.

В целях интегрирования мы будем рассматривать дифференциальные формы *с компактным носителем* на $\mathbb{R}^n$, то есть определённые на всём $\mathbb{R}^n$ и равные нулю за пределами некоторого компакта. В более общем виде можно рассматривать формы с компактным носителем на открытом $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Формы с компактным носителем на открытом $U \subseteq \mathbb{R}^n$ обозначаются $\Omega^k_c(U)$ и нетрудно понять (проверьте это самостоятельно), что продолжение формы нулём за пределы $U$ даёт включение $\Omega^k_c(U) \subseteq \Omega^k_c(\mathbb{R}^n)$.

**Определение 6.112.** Для гладкой формы с компактным носителем $\nu = a(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega^n_c(U)$ определим в какой-то фиксированной системе координат

$$\int_U \nu := \int_U a(x)\ dx_1 \dots dx_n.$$

Так как функция $a(x)$ гладкая с компактным носителем, то этот интеграл существует и является числом в любом смысле, как повторный интеграл Римана или как интеграл Лебега. Чтобы исследовать зависимость этого определения от выбора криволинейной системы координат (в окрестности носителя формы), нам надо установить одно свойство, связывающее интеграл и внешнее дифференцирование.

**Лемма 6.113.** *Если* $\lambda \in \Omega_c^{n-1}(U)$, *то*

$$\int_U d\lambda = 0.$$

*Доказательство.* Так как $\lambda$ имеет компактный носитель в $U$, то её можно продолжить нулём за пределы $U$ и считать интеграл по всему $\mathbb{R}^n$. Форма $\lambda$ представляется в виде суммы выражений $\lambda_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$, где шапочка $\widehat{\ }$ означает пропуск множителя под шапочкой. В силу линейности достаточно доказать утверждение для одного множителя, без ограничения общности пусть это $\lambda_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$. Тогда

$$d(\lambda_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n) = \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

С учётом компактности носителя $\lambda_1$, при интегрировании такого выражения по $x_1$ уже получается нуль. Значит, по теореме Фубини, и общий интеграл будет равен нулю. ☐

Таким образом интеграл оказывается определён как линейный функционал на факторпространстве $\Omega_c^n(U)/d\Omega_c^{n-1}(U)$. Следующая лемма показывает, что соответствующее факторпространство для некоторых $U$ одномерно.

**Лемма 6.114.** *Пусть* $P = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$ *— это произведение содержащих начало координат интервалов. Пусть* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *— гладкая функция с компактным носителем, содержащимся в каждом* $(a_i, b_i)$, *и с единичным интегралом. Для любой формы* $\nu \in \Omega_c^n(P)$ *найдётся число* $I$ *и форма* $\lambda \in \Omega_c^{n-1}(P)$, *такие что*

$$\nu = I\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n + d\lambda.$$

*Доказательство.* Начнём со случая размерности 1, пусть у нас форма $\nu = f dx$, тогда положим

$$I(\nu) = \int_{x=a}^{x=b} f\ dx, \quad g(x) = \int_{t=a}^{x} (f(t) - I(\nu)\varphi(t))\ dt.$$

Вычисляя производную $g(x)$, находим

$$\nu = I(\nu)\varphi(x)dx + dg.$$

Носитель $g$ компактен, так как полный интеграл по $(a, b)$ в определении $g$ равен нулю, поэтому это одномерный случай требуемой формулы.

Для размерности два и выше мы будем применять индукцию по количеству координат. Для удобства обозначим $\alpha_i = \varphi(x_i)dx_i$, для всех $\alpha_i$ выполняется $d\alpha_i = 0$.

Применив одномерную конструкцию для переменной $x_1$, считая остальные переменные параметрами, мы представим форму в виде

$$\begin{aligned}(6.9)\quad \nu = \varphi(x_1)J(x_2, \dots, x_n)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n + d(g dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n) = \\ = \alpha_1 \wedge J(x_2, \dots, x_n)dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n + d(g dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n)\end{aligned}$$

с гладкими функциями $J(x_2, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_n)$, которые будут иметь компактные носители, если $\nu$ имело компактный носитель. Утверждение про носители очевидно, если заметить, что изначально носители $\nu$ и $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ лежали в некотором замкнутом параллелепипеде $Q \subset P$, и носители получившихся из них выражений остаются в $Q$.

Заметим, что в выражении $d(g dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n)$ функция $g$ дифференцируется только по переменной $x_1$ и (6.9) действительно следует из одномерной конструкции.

По предположению индукции

$$(6.10)\qquad J(x_2, \dots, x_n)dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = I\alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n + d\mu,$$

где форма $\mu$ степени $n-2$ не зависит от переменной $x_1$ и не содержит дифференциала $dx_1$. Заметим, что дифференциал $\mu$ как формы от переменных $x_1, \dots, x_n$ равен её дифференциалу как формы переменных $x_2, \dots, x_n$, так как её производная по $x_1$ равна нулю. Также заметим, что

$$-d(\alpha_1 \wedge \mu) = \alpha_1 \wedge d\mu.$$

Подставляя (6.10) в (6.9), с учётом предыдущей формулы получим

$$\nu = I\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n - d(\alpha_1 \wedge \mu) + d(g dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n).$$

Осталось положить $\lambda = -\alpha_1 \wedge \mu + g dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ и завершить шаг индукции. □

**Следствие 6.115.** *Пусть* $P = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$ *— это произведение интервалов. Факторпространство* $\Omega_c^n(P)/d\Omega_c^{n-1}(P)$ *одномерно, то есть всевозможные способы определить интеграл формы* $\nu \in \Omega_c^n(P)$ *так, чтобы интеграл от* $d\lambda$, $\lambda \in \Omega_c^{n-1}(P)$, *равнялся нулю, могут отличаться только умножением на константу.*

*Доказательство.* Предыдущая лемма показывает, что пространство $\Omega_c^n(P)/d\Omega_c^{n-1}(P)$ не более чем одномерно. С другой стороны, на этом пространстве уже определён интеграл, который очевидно иногда принимает ненулевые значения, значит оно не нульмерно. □

Это утверждение показывает, что определение интеграла формы по произведению интервалов (в частности, по всему $\mathbb{R}^n$) не сильно зависит от выбора системы координат, если в этом определении интеграл обнуляется на полных дифференциалах форм с компактным носителем. В частности всё, что может произойти при замене координат в $\mathbb{R}^n$ — это умножение всех таких интегралов на одну и ту же константу. Характер этой зависимости мы установим более точно после некоторой подготовки.

6.16. **Разбиение единицы в окрестности компакта в $\mathbb{R}^n$.** Для более удобной работы с интегралом нам будет удобно разбивать интегрируемое выражение в сумму выражений с маленькими носителями. Это будет возможно в силу следующего полезного утверждения.

**Лемма 6.116** (Разбиение единицы в окрестности компакта в $\mathbb{R}^n$). *Для любого открытого покрытия* $\{U_\alpha\}_\alpha$ *компакта* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *найдётся набор неотрицательных гладких функций* $\{\rho_\alpha\}_\alpha : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ *с компактными носителями* $\operatorname{supp} \rho_\alpha$ *таких, что*

$$\forall \alpha \ \operatorname{supp} \rho_\alpha \subset U_\alpha,$$

*только конечное число из них не равно нулю и*

$$\sum_\alpha \rho_\alpha(x) = 1$$

*в некоторой окрестности* $K$.

Набор функций $\{\rho_\alpha\}$ из леммы называется *разбиение единицы, подчинённое покрытию* $\{U_\alpha\}$.

*Доказательство.* Для каждой точки $x \in K$ найдём по лемме 6.19 гладкую функцию $\psi_x$, которая принимает значения в $[0,1]$, равна 1 в окрестности $V_x \ni x$ и имеет носитель в одном из $U_\alpha$. Из открытых $V_x$ можно выбрать конечное подпокрытие компакта $K$. Соответственно, мы оставим конечное число функций $\psi_i = \psi_{x_i}$, $i = 1, \dots, N$, так, чтобы в каждой точке $y \in K$ одна из выбранных $\psi_i$ была равна единице. Тогда в окрестности $K$ верно тождество

$$(1 - \psi_1)(1 - \psi_2) \dots (1 - \psi_N) = 0. \tag{6.11}$$

Аналогично процедуре из доказательства теоремы 4.83 заменим $\psi_i$ на гладкие функции $h_i$ по формуле

$$h_i = \psi_i(1 - \psi_1) \dots (1 - \psi_{i-1}).$$

Легко проверить, что (6.11) принимает вид (в некоторой окрестности $K$)

$$\sum_{i=1}^{N} h_i(x) = 1.$$

Из определения видно, что каждая $h_i$ имеет носитель, содержащийся в одном из $U_\alpha$. Далее в качестве искомой функции $\rho_\alpha$ можно положить сумму тех $h_i$, которые имеют носитель в $U_\alpha$ и приписаны к $U_\alpha$, или нуль, если таких нет. ☐

**Лемма 6.117.** *Для любых открытого $U \subseteq \mathbb{R}^n$ и компактного $K \subset U$ найдётся гладкая функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ с компактным носителем в $U$, тождественно равная $1$ на $K$.*

*Доказательство.* Для каждой точки $x \in K$ найдём окрестность $V_x \ni x$, замыкание которой компактно и содержится в $U$. Построим подчинённое покрытию $\{V_x\}$ разбиение единицы $\{\rho_x\}$ и возьмём сумму $f = \sum_{x\in K} \rho_x$ в качестве искомой функции. Она равна единице в некоторой окрестности $K$, а носитель $f$ содержится в объединении конечного числа компактных множеств из семейства $\{\operatorname{cl} V_x\}$, поэтому он сам является компактным (см. задачу 3.30). ☐

Решение следующей задачи обобщит следствие 6.115 и поможет понять происходящее в доказательстве теоремы 6.121 далее.

*Задача* 6.118. Докажите, что для связной области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ пространство $\Omega^n_c(U)/d\Omega^{n-1}_c(U)$ одномерно.

[[ У произвольной формы $\nu$ с компактным носителем в $U$ можно покрыть носитель параллелепипедами, каждый из которых содержится в $U$. Разбиение единицы, подчинённое такому покрытию, позволит доказать, что $\nu$ представляется в виде суммы единообразно устроенных форм $I_i\varphi(k_i(x - x_i))dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ с центрами $x_i$ и носителями в соответствующих параллелепипедах при достаточно большом числе $k_i > 0$. Далее остаётся использовать (линейную) связность и от суммы перейти к одной такой форме. ]]

6.17. **Замена координат в интеграле от формы.** Для начала рассмотрим линейную замену координат и её влияние на интеграл дифференциальной формы.

**Лемма 6.119** (Поведение интеграла формы при линейной замене координат). *Интеграл дифференциальной формы $\nu \in \Omega^n_c(\mathbb{R}^n)$ при отображении $A^*$, соответствующем линейному преобразованию $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ меняет или не меняет знак в зависимости от знака определителя* $\det A$, *то есть*

$$\int_{\mathbb{R}^n} A^*\nu = (\operatorname{sgn}\det A) \int_{\mathbb{R}^n} \nu.$$

*Доказательство.* Выписав форму в координатах как $\nu = f(y)dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$ мы замечаем, что при замене координат в форме (то есть при применении $A^*$) мы получим $f(Ax)\det A \; dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Далее можно заметить, что в теореме 5.127 о линейной замене переменных в интеграле от функции, с помощью которого определяется интеграл формы, возникает аналогичное выражение с $|\det A|$ вместо $\det A$. Следовательно, два интеграла отличаются только знаком $\operatorname{sgn}\det A$. ☐

Теперь мы можем понять поведение интеграла от формы при замене переменных в некотором частном случае.

**Лемма 6.120** (Поведение интеграла от формы при замене координат в параллелепипеде). *Пусть открытый параллелепипед $P$ содержится в образе диффеоморфизма $\varphi : U \to V$*

*между областями в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда для любой дифференциальной формы* $\nu \in \Omega_c^n(P)$ *выполняется формула*

$$\int_U \varphi^*\nu = (\operatorname{sgn} J\varphi)\int_V \nu.$$

Заметим, что так как $U$ связна по определению области, то знак якобиана один и тот же во всех точках области.

*Доказательство.* Заметим, что если форму $\nu \in \Omega_c^n(P)$ продолжить нулём на $V$, то $\varphi^*\nu$ корректно определена и имеет носитель в $U$. Поэтому левая часть равенства определена. Форму $\varphi^*\nu$ нам также будет удобно продолжать нулём и считать формой из $\Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$. Покажем, что выполняется формула

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^*\nu = C\int_P \nu, \tag{6.12}$$

с некоторой константой $C$, которая зависит только от $\varphi$ и не зависит от $\nu \in \Omega_c^n(P)$. Выражение в левой части формулы линейно по $\nu$ и если $\nu = d\alpha$ для $\alpha \in \Omega_c^{n-1}(P)$, то по лемме 6.109

$$\varphi^*\nu = \varphi^* d\alpha = d\varphi^*\alpha,$$

причём $\varphi^*\alpha$ продолжается нулём за пределы $\varphi^{-1}(P)$ и может рассматриваться как элемент $\Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$.

По лемме 6.114 линейное пространство $\Omega_c^n(P)/d\Omega_c^{n-1}(P)$ одномерно и все линейные функционалы на нём могут отличаться лишь умножением на константу. Значит, левая часть (6.12) должна быть пропорциональна интегралу формы по $P$ с независящей от формы константой.

Далее мы используем «трюк Александера», чтобы гладко деформировать наше нелинейное отображение $\varphi$ в линейное. После сдвига координат будем считать, что $0 \in U$, $\varphi(0) = 0 \in P$. Определим для $\varepsilon \in (0,1]$ отображение

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi(\varepsilon x).$$

По этой формуле $\varphi_\varepsilon$ действует как отображение

$$\varphi_\varepsilon : \frac{1}{\varepsilon}U \to \frac{1}{\varepsilon}\varphi(U) \supseteq \frac{1}{\varepsilon}P.$$

При $\varepsilon \leqslant 1$ мы получаем

$$\varphi_\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon}U\right) \supseteq \frac{1}{\varepsilon}P \supseteq P,$$

и тогда отображение $\varphi_\varepsilon^*$ определено как отображение из $\Omega_c^n(P)$ в $\Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$, если на всё пространство $\mathbb{R}^n$ мы продолжаем форму нулём.

Лемма 6.119 даёт нам информацию о поведении интеграла при линейной замене, и из неё мы заключаем, что $\varphi_\varepsilon$, как композиция $\varphi$ с двумя линейными заменами слева и справа, удовлетворяет соотношению

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon^*\nu = C\int_P \nu, \tag{6.13}$$

для любых $\nu \in \Omega_c^n(P)$ с одной и той же константой $C$ из соотношения (6.12).

В некоторой выпуклой окрестности нуля $U_0$ к отображению $\varphi$ можно применить лемму 6.24 и получить выражение

$$\varphi(x) = A(x)x \Rightarrow \varphi_\varepsilon(x) = A(\varepsilon x)x, \tag{6.14}$$

где линейное отображение $A(x)$ гладко зависит от $x$, эта формула работает для $\varepsilon \in [-1,1]$ (в том числе при $\varepsilon = 0$). Получается, что при $\varepsilon \to +0$ отображения $\varphi_\varepsilon$ равномерно на $U_0$ стремятся к линейному отображению $\varphi_0 = A(0) = D\varphi_0$. Производные $D\varphi_\varepsilon$ при этом равномерно стремятся к $D\varphi_0$, так как правая часть формулы 6.14 гладко зависит от пары $(x, \varepsilon)$ вплоть до $\varepsilon = 0$.

Применяя теорему об обратной функции к гладкому отображению $(x, \varepsilon) \mapsto (\varphi_\varepsilon(x), \varepsilon)$ в окрестности $(0, 0)$, получим, что что образ $\varphi_\varepsilon(U_0)$ будет содержать некоторую окрестность нуля $P_0 \subset P$ при всех достаточно малых $\varepsilon$. Подставим в формулу (6.13) любую форму $\nu$ с носителем в $P_0$ и будем переходить к пределу $\varepsilon \to +0$ под знаком интеграла. Обратный образ $\varphi_\varepsilon^*\nu$ тогда будет иметь компактный носитель в $U_0$ для любого достаточно малого $\varepsilon$.

Левая часть формулы (6.13) зависит от $\varphi_\varepsilon$ следующим образом: она содержит $\varphi_\varepsilon$ как подстановку в функцию и содержит $\det D\varphi_\varepsilon$ как множитель, так что сходимость под знаком интеграла при переходе $\varepsilon \to 0$ будет равномерной. Тогда в пределе получаем, что для линейного отображения $\varphi_0 = A(0)$ вместо $\varphi$ равенство (6.12) также верно с той же константой $C$ для любой $\nu \in \Omega_c^n(P_0) \subseteq \Omega_c^n(P)$. По лемме 6.119 для линейного $\varphi_0$ мы знаем эту константу, $C = \operatorname{sgn}\det\varphi_0 = \operatorname{sgn}\det\varphi$, что доказывает утверждение. ☐

**Теорема 6.121** (Общий случай замены координат в интеграле от формы). *Интеграл дифференциальной формы $\nu \in \Omega_c^n(V)$ при отображении $\varphi^*$, соответствующем диффеоморфизму $\varphi : U \to V$ между областями в $\mathbb{R}^n$ меняет или не меняет знак в зависимости от знака якобиана $J\varphi$, то есть*

$$\int_U \varphi^*\nu = (\operatorname{sgn} J\varphi)\int_V \nu.$$

*Доказательство.* Для любой точки $x \in V$ по лемме 6.120 формула верна при условии, что носитель $\nu$ содержится в маленькой прямоугольной окрестности $P_x \ni x$. Для произвольной $\nu \in \Omega_c^n(V)$ мы покроем её компактный носитель конечным числом таких параллелепипедов $P_i$ и найдём подчинённое этому покрытию носителя $\nu$ разбиение единицы $\sum_i \rho_i = 1$.

Тогда формула для суммы $\nu = \sum_i \rho_i\nu$ следует из верных формул для её слагаемых $\rho_i\nu \in \Omega_c^n(P_i)$.

☐

В следующих задачах исследуется поведение интеграла от формы при отображениях, не обязательно являющихся диффеоморфизмами. При этом мы рассматриваем *собственные отображения*, то есть отображения, для которых прообраз любого компакта является компактом.

*Задача* 6.122 (Замена координат в интеграле для где-то однозначных собственных отображений). Пусть гладкое отображение $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является собственным (прообраз любого компактного множества компактен), и для некоторого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ отображение $\varphi$ тождественно на $U$ и $\varphi^{-1}(U) = U$. Докажите, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^*\nu = \int_{\mathbb{R}^n} \nu.$$

[[ Проверьте, что из собственности $\varphi$ и компактности носителя $\nu$ следует компактность носителя $\varphi^*\nu$. Заметьте, что выражение слева обнуляется при подстановке $\nu = d\lambda$ для любого $\lambda \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$. Выведите, что выражения слева и справа отличаются друг от друга только умножением на константу, и найдите её. ]]

*Задача* 6.123. Докажите, что отображение $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ из условия предыдущей задачи сюръективно.

[[ Примените результат предыдущей задачи к форме $\nu$ с носителем, сосредоточенным в малой окрестности некоторой точки $p \in \mathbb{R}^n$. ]]

*Задача* 6.124 (Замена координат в интеграле для собственных отображений вообще). Пусть гладкое отображение $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является собственным. Докажите, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^* \nu = C_\varphi \int_{\mathbb{R}^n} \nu,$$

где константа $C_\varphi$ является целым числом. Докажите, что число $C_\varphi$ может оказаться любым целым числом для подходящего собственного $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

[[ Из предыдущих рассуждений понятно, что $C_\varphi$ существует как действительное число. Для понимания, почему оно на самом деле целое, могут понадобиться сведения из раздела 7.3. Кроме того, в разделе 7.4 будут рассматриваться более общие утверждения. ]]

### 6.18. Замена координат в интеграле от функции.

Теперь от интеграла дифференциальной формы мы можем вернуться к интегралу от функции в смысле Лебега и получить формулу для криволинейной замены переменных в интеграле, действуя в обратную сторону по сравнению с доказательством леммы 6.119. Нам понадобится лемма, связывающая меру открытого множества и интегралы гладких функций с компактным носителем.

**Лемма 6.125.** *Для любого открытого $U \subseteq \mathbb{R}^n$ его мера равна точной верхней грани интегралов*

$$\int_U f(x)\, dx$$

*по всем гладким $f : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ с носителями в $U$. Более того, найдётся последовательность гладких $f_k : U \to [0, 1]$ с компактными носителями в $U$, которая возрастает и поточечно на $U$ стремится к единице.*

*Доказательство.* Каждый такой интеграл от $f \leqslant 1$ не более интеграла 1 по $U$, то есть не более меры $U$.

Построим теперь описанную в условии леммы последовательность $f_k : U \to [0, 1]$. Сначала выберем возрастающую последовательность компактов $K_k \subset U$, объединение которой совпадает с $U$. В качестве $K_k$ можно взять объединение замкнутых кубов в разбиении пространства $\mathbb{R}^n$ на кубы размера $2^{-k}$, которые содержатся в $U$ и в большом кубе $[-k, k]$.

По лемме 6.117 найдём $f_k$ как гладкую функцию с компактным носителем в $U$, равную единице на объединении $\operatorname{supp} f_{k-1}$ и $K_k$ (на первом шаге носитель считаем пустым). По построению, эта последовательность функций возрастает и стремится к единице на $U$. Тогда интегралы этих функций по теореме о монотонной сходимости стремятся к интегралу единицы по $U$, то есть к мере $U$. ☐

**Следствие 6.126** (Криволинейная замена переменных в кратном интеграле). *При диффеоморфизме $\varphi : U \to V$ для любой интегрируемой по Лебегу на $V$ функции $f$ имеет место формула*

$$\int_V f(y)\, dy = \int_U f(\varphi(x))|J\varphi|\, dx.$$

*Доказательство.* Теорема 6.121 может быть интерпретирована как доказательство утверждения для гладких функций с компактным носителем, так как координатное представление дифференциальной формы степени $n$ при замене координат умножается на якобиан замены, см. задачу 6.110. Введение модуля якобиана позволяет не беспокоиться о смене знака.

Рассмотрим теперь любое открытое $W \subseteq U$. По лемме 6.125 выберем последовательность гладких функций $f_n : \varphi(W) \to [0, 1]$ к компактным носителем в $\varphi(W)$ так, чтобы эта последовательность возрастала и стремилась к единице. Переходя к поточечному пределу (по теореме о монотонной сходимости) в формуле

$$\int_{\varphi(W)} f_n(y)\, dy = \int_W f_n(\varphi(x))|J\varphi|\, dx$$

мы получаем формулу

$$\mu(\varphi(W)) = \int_{\varphi(W)} 1\, dy = \int_W |J\varphi|\, dx.$$

Эта же формула верна для компактных множеств, так как их можно представить в виде разности двух открытых.

Если мы рассмотрим открытое $W \subseteq U$ с компактным замыканием в $U$, то на нём $\sup |J\varphi| = C_W < +\infty$. Тогда любое измеримое по Лебегу множество $X \subseteq W$ мы в силу регулярности меры Лебега (теорема 5.35) будем приближать снизу компактным, а сверху открытым, $F \subseteq X \subseteq O$, так чтобы $\mu(O \setminus F) \to 0$. Ограниченность якобиана позволяет оценить меру открытых множеств

$$\mu(\varphi(O \setminus F)) \leqslant C_W \mu(O \setminus F).$$

Получается, что множество $\varphi(X)$ также будет по мере Лебега приближаться $\varphi(F)$ и $\varphi(O)$. Переходя к пределу в интеграле, мы получим формулу

$$\mu(\varphi(X)) = \int_X |J\varphi|\, dx \tag{6.15}$$

для любого измеримого $X$ с компактным замыканием в $U$. От условия компактности замыкания в $U$ можно избавиться с помощью счётной аддитивности, разбив $X$ на счётное количество частей, каждая из которых имеет компактное замыкание в $U$.

Таким образом мы показали, что образ любого измеримого подмножества $X \subseteq U$ измерим и его мера находится по формуле (6.15). Применяя предыдущие рассуждения к $\varphi^{-1}$, мы устанавливаем, что прообраз любого измеримого $Y \subseteq V$ тоже измерим. Формула (6.15) тогда есть частный случай замены переменных в интеграле от характеристической функции множества $Y = \varphi(X)$. По счётной аддитивности отсюда следует формула замены переменных для счётно-ступенчатых функций на $V$, а потом и для произвольных измеримых функций с конечным интегралом или с бесконечным интегралом определённого знака с помощью приближения их ступенчатыми стандартным способом. ☐

*Задача* 6.127. В теореме о замене переменных в кратном интеграле ослабьте условие бесконечной гладкости отображения $\varphi$ до его непрерывной дифференцируемости.

[[ Начните с интегрирования бесконечно гладких функций с компактным носителем. Для них можно равномерно приближать непрерывно дифференцируемое отображение $\varphi$ вместе с производными последовательностью бесконечно гладких $\varphi_k$ и переходить к равномерному пределу в обеих частях равенства. При этом надо аккуратно обосновать инъективность $\varphi_k$ при достаточно больших $k$, в этом может помочь задача 6.25. Переход к интегрируемым функциям сделайте как в доказательстве теоремы 6.126 для гладких $\varphi$. ]]

Можно доказать формулу замены переменных для непрерывно дифференцируемых отображений иначе, в духе теории меры, а не дифференциальной геометрии и гомологической алгебры.

*Набросок доказательства теоремы 6.126 без дифференциальных форм.* Аналогично написанному выше, в силу стандартных сведений о мере и интеграле достаточно доказать

$$\mu(\varphi(X)) = \int_X |J\varphi|\, dx$$

при условии, что $X$ компактно, а $\varphi$ биективно и непрерывно дифференцируемо в окрестности $X$. Предположим противное, что для некоторого положительного $\varepsilon$ (случай неравенства в другую сторону аналогичен)

$$\mu(\varphi(X)) > (1+\varepsilon)\int_X |J\varphi|\,dx. \tag{6.16}$$

Мы можем поделить $X$ (например, гиперплоскостью) на две части положительной меры, для одной из которых такое неравенство продолжает выполняться. Потом можно делить дальше и продолжить переходить от $X_k$ к его части $X_{k+1}$ так, что последовательность компактов $(X_k)$, для которых выполняется «плохое неравенство» (6.16), будет стремиться к точке $x_0 \in X$. В этой точке отображение $\varphi$ приближается линейным и домножив его на линейное отображение $D\varphi_{x_0}^{-1}$, мы сделаем его дифференциал единичным в $x_0$. Теорема 5.127 (о линейной замене переменных в интеграле) показывает, что после такой замены у нас всё ещё будет выполняться неравенство (6.16) для всех $X_k$.

После этого лемма 6.24 показывает, что для любого $\delta > 0$ в достаточно малой окрестности $x_0$ будет выполняться

$$(1-\delta)|x'-x''| \leqslant |\varphi(x')-\varphi(x'')| \leqslant (1+\delta)|x'-x''|, \tag{6.17}$$

а также в достаточно малой окрестности из непрерывности $J\varphi$ и равенства $J\varphi_{x_0} = 1$ будет выполняться

$$\mu(\varphi(X_k)) > (1+\varepsilon/2)\int_{X_k} dx = (1+\varepsilon/2)\,\mu(X_k). \tag{6.18}$$

После этого остаётся заметить, что условие (6.17) гарантирует, что мера множества при отображении $\varphi$ меняется не менее чем в $(1-\delta)^n$ и не более чем в $(1+\delta)^n$ раз ($n$ — это размерность). Последнее утверждение можно доказать, покрывая компактное множество системой шаров в духе леммы Безиковича (задача 5.140) так, чтобы суммарная мера шаров была сколь угодно близка к мере множества. Иначе можно сравнительно элементарно доказать более слабую оценку на искажение меры, начав с рассмотрения искажения меры кубов и покрывая произвольное элементарное множество объединением открытых кубов.

Так или иначе, при достаточно малом $\delta$ получится противоречие оценки на искажение меры с неравенством (6.18). ☐

*Задача* 6.128. Доделайте последнюю часть предыдущего наброска доказательства, доказав подходящую оценку искажения меры при условии искажения расстояния отображением $\varphi$ не менее чем в $(1-\delta)$ и не более чем в $(1+\delta)$ раз.

[[ В некоторых вариантах рассуждения полезно будет свести вопрос к доказательству того, что 1-липшицево отображение не увеличивает меру. ]]

6.19. **Вложенные многообразия в $\mathbb{R}^N$.** Работа с векторными полями и дифференциальными формами на открытых подмножествах $\mathbb{R}^n$ бескоординатным образом может показаться не очень осмысленным упражнением, ведь координаты в $\mathbb{R}^n$ определены глобально. Бескоординатный способ начинает выглядеть логично, если мы переходим к изучению подмножеств $\mathbb{R}^N$ которые локально выглядят как открытые подмножества $\mathbb{R}^n$, но глобально могут и не иметь системы из $n$ координатных функций.

**Определение 6.129.** Замкнутое подмножество $M \subseteq \mathbb{R}^N$ называется *вложенным многообразием размерности* $n$, если для каждой $p \in M$ найдётся окрестность и криволинейная система координат в ней, в которой включение $M \subset \mathbb{R}^N$ превращается в стандартное вложение $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^N$ в пересечении с некоторой окрестностью нуля.

Напомним, что задать *криволинейную систему координат* в окрестности точки $p \in \mathbb{R}^N$ — это значит найти набор гладких функций $y_1, \dots, y_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, у которых линейно независимы дифференциалы в точке $p$ и которые по теореме об обратном отображении дают диффеоморфизм некоторой окрестности $U \ni p$ на открытое множество $V \subseteq \mathbb{R}^N$. Отображение $\varphi$, заданное такой системой координат, должно точку $p$ отправлять в $0$, а часть многообразия $M \cap U$ превращать в $\mathbb{R}^n \cap V$.

Примеры этого понятия мы неявно встречали в работе с условными экстремумами. Если $M$ задаётся гладкими уравнениями

$$f_1 = \dots = f_{N-n} = 0$$

и дифференциалы этих уравнений линейно независимы в каждой точке $M$, то $M$ будет вложенным многообразием размерности $n$, так как определяющие его функции можно считать частью системы координат

$$y_{n+1} = f_1, \dots, y_N = f_{N-n}$$

в окрестности $U$ данной точки $p \in M$, многообразие $M$ в такой окрестности $U$ выглядит в точности как $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^N$ в окрестности нуля, а функции $y_1, \dots, y_n$ задают систему координат в $M \cap U$.

*Задача* 6.130. Проверьте, что любая сфера в $\mathbb{R}^n$ является вложенным многообразием размерности $n - 1$.

Нам надо будет немного расширить определение многообразия до понятия многообразия с краем.

**Определение 6.131.** Замкнутое подмножество $M \subseteq \mathbb{R}^N$ называется *вложенным многообразием с краем размерности $n$*, если для каждой $p \in M$ найдётся окрестность и криволинейная система координат в ней, в которой включение $M \subseteq \mathbb{R}^N$

либо превращается в стандартное вложение $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^N$, пересечённое с окрестностью нуля;

либо превращается в стандартное вложение $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^N$, пересечённое с окрестностью нуля.

В последнем случае, если первая координата точки $p$ равна нулю, мы говорим, что точка $p$ лежит на краю $\partial M$ многообразия.

*Задача* 6.132. Проверьте, что край $\partial M$ многообразия с краем $M$ сам по себе является $(n-1)$-мерным многообразием без края.

Определение многообразия, в частности, показывает, что у любой точки $p \in M$ есть окрестность в многообразии $M \cap U$ (относительно открытое подмножество многообразия) и отображение $\varphi : M \cap U \to \mathbb{R}^n$, являющееся диффеоморфизмом между $M \cap U$ и $\varphi(M \cap U)$. Такие отображения (диффеоморфизмы относительно открытых подмножеств $M$ на открытые подмножества $\mathbb{R}^n$) называются *координатными картами* многообразия $M$. Иногда мы неформально будем называть картой само множество $M \cap U$, однако на самом деле оно всегда идёт в комплекте со своими координатами, компонентами отображения $\varphi : M \cap U \to \mathbb{R}^n$.

Наши определения векторов, векторных полей и дифференциальных форм специально выбирались таким образом, чтобы они не зависели от криволинейной замены координат, то есть в новой терминологии — от выбора карты. Это позволяет корректно распространить их на произвольное многообразие. Например, функция $f : M \to \mathbb{R}$ называется *гладкой функцией на многообразии*, $f \in C^\infty(M)$, если в каждой координатной карте $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ (здесь уже $U$ является относительно открытым подмножеством $M$) эта функция (то есть композиция $f \circ \varphi^{-1}$) является гладкой функцией на образе $\varphi(U)$.

Приведём более общее и более концептуальное определение: *дифференциальной формой* $\alpha \in \Omega^k(M)$ *на многообразии* мы будем называть набор дифференциальных форм $\alpha_i$ на образах карт $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$, которые обладают свойством

$$(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})^* \alpha_i = \alpha_j \tag{6.19}$$

на естественной области определения замены координат $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ в $\mathbb{R}^n$, для любых двух карт $\varphi_i, \varphi_j$. Можно неформально сказать, что глобальная форма собирается из локальных форм, если одна локальная форма переходит в другую при замене одной карты на другую, причём делает это именно так, как это происходит в ранее изученном случае, когда многообразие является областью $\mathbb{R}^n$.

В определении дифференциальной формы на многообразии достаточно рассматривать не все возможные карты многообразия $M$, а лишь некоторый набор карт, покрывающих $M$. Тогда в любой другой координатной карте $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ соответствующее координатное представление $\alpha \in \Omega^k(\varphi(U))$ будет выглядеть как

$$\alpha = (\varphi_i \circ \varphi^{-1})^* \alpha_i$$

на множестве $\varphi(U \cap U_i)$. По свойству (6.19) и результату задачи 6.111 оказывается

$$(\varphi_j \circ \varphi^{-1})^* \alpha_j = (\varphi_j \circ \varphi^{-1})^* (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})^* \alpha_i = (\varphi_i \circ \varphi^{-1})^* \alpha_i$$

на $\varphi(U \cap U_i \cap U_j)$, то есть определение не меняется при замене $i$ на $j$ в тех точках, где это имеет смысл. В силу установленной ранее независимости от выбора криволинейных координат (например, в силу леммы 6.109) операции внешнего умножения и внешнего дифференцирования оказываются корректно определены для форм на многообразиях.

Есть простой и естественный способ получить дифференциальную форму на $M \subset \mathbb{R}^N$ — это ограничить на $M$ какую-то дифференциальную форму из евклидова пространства, или из окрестности $M$. В вышеописанных терминах это означает положить в каждой карте $\alpha_i = (\varphi_i^{-1})^*\alpha$ для $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^N)$.

Определение касательного вектора $X$ в точке $p \in M$ даётся аналогично. Это набор касательных векторов $X_i$ в точках $\varphi_i(p)$ для тех карт, области определения которых содержат $p$, которые связаны соотношениями

$$(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_* X_j = X_i.$$

Касательный вектор к вложенному многообразию $M \subset \mathbb{R}^N$ также можно рассматривать как касательный вектор к $\mathbb{R}^N$, определив касательный вектор $X$ к $\mathbb{R}^N$ в точке $p$ по формуле

$$X = (\varphi_i^{-1})_* X_i$$

и заметив, что это определение не зависит от $i$. Следующая лемма показывает, что абстрактное определение касательного вектора к подмногообразию совпадает с тем, что мы использовали при анализе условных экстремумов.

**Лемма 6.133.** *Пусть многообразие $M \subseteq \mathbb{R}^N$ в окрестности точки $p \in M$ задано системой уравнений $g_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, m$, с линейно независимыми дифференциалами. Тогда касательные векторы $X$ к $M$ в точке $p$ соответствуют векторам в $\mathbb{R}^N$, удовлетворяющим системе уравнений $dg_i(X) = 0$.*

*Доказательство.* Касательный вектор $X$ в точке $p$ к многообразию $M$ корректно дифференцирует функции $M$, определённые в какой-то окрестности точки $p$. Любая функция $f$, определённая в некоторой окрестности $p$ в $\mathbb{R}^N$ может быть ограничена на $M$ и потом продифференцирована вектором $X$. Это по сути раскрытие определения $\varphi_*^{-1}$ для параметризации окрестности точки $p$ в многообразии $M$ отображением $\varphi^{-1} : \varphi(M \cap$

$U) \to \mathbb{R}^N$ (для окрестности $U \subset \mathbb{R}^N$ точки $p$). Для краткости обозначим $\psi = \varphi^{-1}$, а касательный вектор в точке $\varphi(p)$, соответствующий касательному вектору в $p$, обозначим $X'$.

Так как каждая из определяющих многообразие функций $g_i$ обнуляется на $M$, то

$$dg_i(X) = dg_i(\psi_* X') = (\psi_* X')(g_i) = X'(g_i \circ \psi) = X'(0) = 0.$$

Значит, векторы вида $X = \psi_* X'$ (образы касательных к $M$ векторов в карте $\varphi$) удовлетворяют системе линейный уравнений из формулировки леммы.

Наоборот, любой касательный вектор $X$ к $\mathbb{R}^N$ в точке $p$, удовлетворяющий системе линейных уравнений $dg_i(X) = 0$, оказывается равен $\psi_* X'$ для некоторого касательного к $M$ вектора $X'$в карте $\varphi$. Это следует из того, что $\psi_*$ инъективно и размерность касательного пространства к $M$ (то есть $N - m$) равна размерности множества решений системы линейных уравнений $dg_i(X) = 0$ ($N - m$ в силу линейной независимости дифференциалов).

□

В случае многообразий с краем мы будем требовать, чтобы в координатном представлении диффеоморфизмы замены координат, векторные поля и дифференциальные формы гладко продолжались на окрестность края, это избавит нас от многих технических проблем. На самом деле при этом важна будет возможность гладкого продолжения, а не выбор конкретного продолжения. Некоторые технические подробности мы опускаем, но заинтересованный читатель может приобщиться к ним, решая такую задачу.

*Задача* 6.134. $^*$ Пусть функция $f : (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ непрерывна и все её частные производные определены при $x_1 < 0$ и непрерывно продолжаются до $x_1 = 0$. Докажите, что функцию можно продолжить до гладкой функции на всём $\mathbb{R}^n$.

[[ Для решения этой задачи полезно решить задачу 2.90 так, чтобы её решение гладко зависело от возможных параметров. ]]

6.20. **Абстрактное определение многообразия.** Работа со вложенным многообразием через локальные карты показывает, что само вложение и то, что находится в $\mathbb{R}^N$ за пределами вложенного многообразия, играют мало роли. Можно пытаться представить себе абстрактное многообразие, которое вообще никуда не вложено. Приведём стандартное определение абстрактного многообразия (с краем), которое конечно базируется на определении 1.136 топологического пространства.

**Определение 6.135** (Абстрактное определение многообразия)**.** *Гладкое $n$-мерное многообразие $M$* — это отделимое топологическое пространство со счётной базой, покрытое открытыми $U_\alpha \subseteq M$ так, что для каждого $U_\alpha$ задано отображение $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ являющееся гомеоморфизмом на открытое подмножество $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$, и для пары таких отображений $\varphi_\alpha$ и $\varphi_\beta$ композиция $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ является диффеоморфизмом на своей естественной области определения.

Отображения $\varphi_\alpha$ называются *картами*, а их совокупность — *атласом* многообразия $M$.

*Гладкое $n$-мерное многообразие с краем $M$* отличается тем, что некоторые из карт являются не такими, как описано выше, а являются гомеоморфизмами на относительно открытое подмножество полупространства $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$, в котором точки из $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ образуют *край* в этой карте, а замены координат $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ переводят край в одной карте в край в другой карте.

В этом определении индекс $\alpha$ пробегает множество, которое не обязано быть счётным.

*Отделимость или хаусдорфовость* топологического пространства — это существование у любых двух точек непересекающихся открытых окрестностей. В качестве упражнения читателю предлагается придумать топологическое пространство, в котором выполняются все свойства одномерного многообразия, кроме отделимости.

*Счётность базы топологии* означает наличие счётной системы (базы) открытых подмножеств $M$ (см. также определение 9.105), так что любое открытое множество в $M$ можно представить в виде объединения некоторого количества открытых множеств базы.

*Задача* 6.136. Постройте счётную базу топологии в $\mathbb{R}^n$.

[[ Используйте счётность множества рациональных чисел. ]]

Объекты на гладком многообразии задаются по уже описанной выше схеме. Например, векторное поле на многообразии задаётся как набор векторных полей $X_\alpha$ на образах карт $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$, которые обладают свойством $(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})_* X_\beta = X_\alpha$ на естественной области определения отображения $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ в $\mathbb{R}^n$, для любых двух карт $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$. Аналогично определяются дифференциальные формы. Утверждения о независимости основных операций с рассматриваемыми объектами от криволинейной замены координат, типа леммы 6.109, гарантируют нам, что операции дифференцирования функции векторным полем, внешнего умножения дифференциальных форм и внешнего дифференцирования на самом деле определены корректно для дифференциальных форм на многообразиях.

*Задача* 6.137. Проверьте, что край $\partial M$ абстрактного многообразия с краем $M$ естественным образом является $(n-1)$-мерным абстрактным многообразием без края.

Абстрактное определение многообразия требует некоторого понимания топологии, и для понимания дальнейшего в основном достаточно представлять многообразие вложенным в евклидово пространство; хотя в разделе 10.12 будет существенно использоваться именно абстрактное определение. Локальные вопросы в гладких многообразиях решаются в координатных картах, а глобальные вопросы решаются с помощью построения глобальных не более чем счётных и локально конечных разбиений единицы (в разделе 6.22 далее), для этого и требуются условия «отделимое топологическое пространство со счётной базой» в определении.

На самом деле далее мы будем в большинстве случаев использовать только разбиения единицы в окрестностях компактов (лемма 6.159), для которых не нужна счётность базы топологии. Но она нужна для существования счётных и локально конечных разбиений единицы на всём многообразии и, например, для следующего утверждения (теорема Уитни о вложении): *Любое $n$-мерное абстрактное многообразие вкладывается в $\mathbb{R}^{2n+1}$ без труда, а с некоторым трудом вкладывается и в $\mathbb{R}^{2n}$.* Собственно, теорема Уитни о вложении (доказательство которой читатель может найти в учебниках по дифференциальной геометрии) показывает, что рассмотрение вложенных в евклидово пространство многообразий на самом деле не уменьшает общности.

Для абстрактного многообразия $M$ любое его открытое подмножество $U \subseteq M$ тоже является абстрактным многообразием по определению, достаточно ограничить карты $M$ на множество $U$. Для вложенного $M \subseteq \mathbb{R}^N$ его относительно открытое подмножество $U \subseteq M$ уже может не быть вложенным многообразием в нашем определении, так как от вложенного многообразия по определению мы требуем замкнутость. Этот вопрос можно решить формально, рассматривая многообразия $M$, вложенные не только в $\mathbb{R}^n$, но и в открытые подмножества $U \subseteq \mathbb{R}^N$, требуя их замкнутости относительно $U$.

А в рамках нашего определения можно построить диффеоморфизм между открытым подмножеством $U$ вложенного в $\mathbb{R}^N$ многообразия $M$ и некоторым многообразием, вложенным в $\mathbb{R}^{N+1}$. Возьмём любую гладкую функцию $f : U \to \mathbb{R}^+$, для которой любое множество $\{x \in U \mid f(x) \leqslant M\}$ будет компактным. Тогда отображение $U \to \mathbb{R}^{N+1}$, у которого первые $N$ координат взяты с $\mathbb{R}^N$, а последняя даётся нашей функцией $f$, уже будет представлять $U$ в виде замкнутого вложенного многообразия в $\mathbb{R}^{N+1}$.

*Задача* 6.138. $^*$ Постройте такую $f : U \to \mathbb{R}^+$.

[[ Представьте $U$ в виде объединения последовательности компактных подмножеств $K_1 \subset K_2 \subset \dots$, так чтобы внутренность $K_{n+1}$ содержала $K_n$. Далее стройте функцию по индукции, добиваясь того, чтобы $f(K_{n+1} \setminus K_n) \subseteq (n-1, n+1)$. Можно пользоваться результатом задачи 4.92 для получения непрерывных функций, а потом их сглаживать, или сразу решить задачу 4.92 для гладких функций. ]]

*Задача* 6.139. Рассмотрите на $\mathbb{R}^1$ две карты $\varphi_A : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $\varphi_A(x) = x$ и $\varphi_B : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $\varphi_B(x) = x^3$. Проверьте, что они не могут одновременно состоять в атласе одного и того же гладкого многообразия.

[[ Рассмотрите выражение $\varphi_A \circ \varphi_B^{-1}$. ]]

Предыдущая задача показывает, что когда мы говорим «гладкое многообразие», мы имеем в виду не только $M$ как топологическое пространство, но и идущий в комплекте с ним атлас из координатных карт, покрывающих $M$ и имеющих гладкие функции перехода между картами в обе стороны.

**Определение 6.140.** *Гладкой структурой* на топологическом пространстве называется максимальный по включению атлас, с которым пространство становится многообразием.

Можно показать (аналогично тому, что мы будем далее доказывать про ориентацию многообразия), что начиная с любого покрывающего многообразие атласа и добавляя к нему одновременно все карты $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq M$, которые совместимы с картами атласа в смысле гладкости композиций $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ и $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$, мы как раз получаем максимальный по включению атлас.

*Задача* 6.141. Проверьте, что если добавить к атласу две карты $\varphi$ и $\psi$ с гладкими заменами координат между новыми картами и картами атласа, то замена координат между $\varphi$ и $\psi$ тоже будет гладкой.

Следующие задачи показывают, что топология на абстрактном многообразии фактически определяется его картами.

*Задача* 6.142. Пусть $X$ — множество, покрытое своими подмножествами $\{U_\alpha\}$, отображения $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ инъективны и имеют открытые образы $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$, и каждое $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ на своей естественной области определения является диффеоморфизмом между открытыми подмножествами $\mathbb{R}^n$. Определим топологию на $X$, объявив множество $U$ открытым, если $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ открыто для любого $\alpha$. Проверьте, что это определение задаёт топологию на $X$.

*Задача* 6.143. В условиях предыдущей задачи проверьте, что если $V \subset U_\alpha$ и $\varphi_\alpha(V)$ открыто, то $V$ открыто в определённой выше топологии.

[[ Используйте результат задачи 6.27. ]]

*Задача* 6.144. В условиях предыдущих задач проверьте, что если из покрытия $\{U_\alpha\}$ можно выбрать счётное подпокрытие, то определённая в предыдущей задаче топология имеет счётную базу.

[[ Используйте результат задачи 6.136. ]]

*Задача* 6.145. В условиях предыдущих задач проверьте, что отделимость построенной в них топологии гарантируется выполнением следующего условия. Для любых точек $x \neq y \in X$ либо существуют карты $U_\alpha \ni x$ и $U_\beta \ni y$ с пустым пересечением, либо существует карта $U_\alpha \ni x, y$.

*Задача* 6.146. Докажите, что многообразие является связным топологическим пространством тогда и только тогда, когда оно линейно связно.

[[ Заметьте, что доказательство теоремы 3.87 работает с минимальными модификациями. ]]

*Задача* 6.147. $^*$ Опишите все компактные одномерные гладкие многообразия (возможно с краем) с точностью до диффеоморфизма.

[[ Компактность позволяет оставить лишь конечное число карт в атласе, карты при этом можно считать связными. Покажите, что многообразие распадается на компоненты (линейной) связности, которых оказывается конечное число. Далее изучите связные компактные многообразия. ]]

*Задача* 6.148. $^*$ Опишите все не обязательно компактные одномерные гладкие многообразия (возможно с краем) с точностью до диффеоморфизма.

[[ Действуйте аналогично предыдущей задаче. В данном случае не обязательно есть конечное покрытие координатными картами, но по определению многообразия есть счётное покрытие, с которым надо аккуратно поработать. ]]

## 6.21. **Гладкие отображения между многообразиями.**

**Определение 6.149.** *Гладким отображением* между многообразиями $f : M \to N$ размерностей $m$ и $n$ называется непрерывное отображение, которое в окрестности каждой точки, в достаточно малых координатных картах, выглядит как гладкое отображение области из $\mathbb{R}^m$ в область в $\mathbb{R}^n$.

Непрерывность в этом определении позволяет найти координатные окрестности $p \in U \subset M$ и $f(p) \in V \subset N$, такие что $f(U) \subseteq V$. После этого можно рассматривать отображение в координатах, то есть рассматривать композиции

$$\varphi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1} : \varphi_U(U) \to \varphi_V(V)$$

как отображение между открытыми подмножествами в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$, и можно судить о гладкости $f$ в окрестности $p$.

**Определение 6.150.** Гладкое обратимое отображение $f : M \to N$ с обратным гладким назовём *диффеоморфизмом многообразий*.

Для гладкого отображения многообразий, с помощью локального рассмотрения (или с помощью формулы (6.7)), корректно определена производная $Df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ в каждой точке $p \in M$, которую мы также называли прямым образом вектора $\varphi_*$. Это линейное отображение касательных пространств в точке.

С помощью прямого образа вектора определяется отображение обратного образа дифференциальных форм $f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ как

$$f^*\alpha(X_1, \dots, X_k) = \alpha(f_*X_1, \dots, f_*X_k)$$

где в левой части формулы вычисление значения $f^*\alpha$ происходит в точке $p$, а в правой части вычисление значения $\alpha$ происходит в точке $f(p)$. В частности, для функций, отображение $f^* : \Omega^0(N) \to \Omega^0(M)$, то есть $f^* : C^\infty(N) \to C^\infty(M)$, переводит любую функцию $g : N \to \mathbb{R}$ в $f^*(g) = g \circ f$.

В случае диффеоморфизма также определено отображение $f_*$ на уровне векторных полей (используя единственность прообраза точки и его гладкую зависимость от образа) и дифференциальных форм (просто как $f_* = (f^{-1})^*$). Как было замечено ранее, при отсутствии биективности или гладкости обратного отображения прямой образ векторного поля или дифференциальной формы определить затруднительно.

Для приложений важно понятие кривой или поверхности, *заданной параметрически*. В общей терминологии многообразий это означает, что берётся некоторое гладкое многообразие $M$ (область определения параметров) и гладкое отображение $f : M \to \mathbb{R}^n$, от которого требуется, чтобы ранг $Df_p$ был равен $m = \dim M$ во всех точках. Само по себе это не гарантирует, что образ $f(M)$ будет вложенным многообразием, даже если отображение $f$ инъективно (приведите соответствующие примеры для $m = 1$ самостоятельно). Однако верно такое утверждение:

**Лемма 6.151.** *Для гладкого отображения $f : M \to \mathbb{R}^n$ с $\operatorname{rk} Df \equiv m = \dim M$, для любой точки $p \in M$ найдётся окрестность $U \ni p$ такая, что $f(U)$ в некоторой криволинейной системе координат в окрестности $f(p)$ является открытым подмножеством стандартно вложенного $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$.*

*Доказательство.* Пусть $k = n - m$ и рассмотрим произведение $M \times \mathbb{R}^k$. Это тоже гладкое многообразие по любому из определений. Мы знаем, что касательное пространство $T_pM$ вкладывается в $T_{f(p)}\mathbb{R}^n$. Тогда можно выбрать векторы $v_1, \dots, v_k$, которые дают разложение в прямую сумму

$$Df_p(T_pM) \oplus \langle v_1, \dots, v_k \rangle = T_{f(p)}\mathbb{R}^n.$$

Продолжим теперь отображение $f$ на $M \times \mathbb{R}^k$ по формуле

$$g(q, t_1, \dots, t_k) = f(q) + v_1t_1 + \dots v_kt_k.$$

легко проверить, что $Dg$ в точке $(p, 0)$ является изоморфизмом линейных пространств. Тогда по теореме об обратном отображении в окрестности $p$ координаты многообразия $M$ плюс координаты $t_1, \dots, t_k$ могут считаться локальной системой координат в окрестности $f(p)$, образ $f(U)$ удовлетворяет уравнениям $t_1 = \dots = t_k = 0$, что и означает требуемое. □

*Задача* 6.152. Докажите, что если отображение $f : M \to \mathbb{R}^n$ гладких многообразий инъективно, $\operatorname{rk} Df \equiv \dim M$ всюду и $M$ компактно, то его образ $f(M)$ является вложенным в $\mathbb{R}^n$ многообразием.

[[ Надо проверить, что в достаточно малой окрестности $V \ni f(p)$ ничего кроме $f(U)$ не будет. ]]

*Задача* 6.153. Докажите, что диффеоморфизм гладких многообразий с краем $f : M \to N$ переводит край в край.

[[ Если какая-то точка $p \in M$ не из края идёт в край, то рассматривая ситуацию в локальных координатах можно получить противоречие с теоремой об обратном отображении. ]]

*Задача* 6.154. * Докажите, что гомеоморфизм (не обязательно гладкое непрерывное отображение с непрерывным обратным) гладких многообразий с краем $f : M \to N$ переводит край в край.

[[ Если какая-то точка $p \in M$ не из края идёт в край, то можно рассмотреть ситуацию в локальных координатах. С помощью содержимого раздела 7.4 докажите, что маленькую сферу $S_r(p)$ с центром в $p$ нельзя непрерывно деформировать в точку, не задевая $p$. Однако её образ $f(S_r(p))$ в окрестности $f(p)$ непрерывно деформировать в точку, не задевая $f(p)$, можно. ]]

Следующие задачи дают алгебраическую интерпретацию гладких отображений между многообразиями и точек многообразия.

*Задача* 6.155. $^*$ Докажите, что гладкие отображения между многообразиями $M \to N$ находятся в однозначном соответствии с *гомоморфизмами алгебр* $C^\infty(N) \to C^\infty(M)$, то есть отображениями колец функций, сохраняющих сложение, умножение, и переводящих константу в ту же константу.

[[ В одну сторону очевидно. Обратно, если есть гомоморфизм колец $\varphi^*$ и если без ограничения общности $N$ вложено $\mathbb{R}^\nu$, то посмотрите на образы координатных функций в $\mathbb{R}^\nu$ при отображении $\varphi^*$, они являются координатами некоторого отображения $M \to \mathbb{R}^\nu$. Докажите с помощью леммы 6.44, что гомоморфизм колец задаётся композицией функции с этим отображением. ]]

*Задача* 6.156. $^*$ Каким геометрическим объектам соответствуют гомоморфизмы алгебр $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$?

*Задача* 6.157. $^*$ Докажите, что любой $\mathbb{R}$-линейный гомоморфизм колец $C^\infty(M) \to \mathbb{C}$ на самом деле имеет образ в $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

[[ Продолжите гомоморфизм $e : C^\infty(M) \to \mathbb{C}$ до $\mathbb{C}$-линейного гомоморфизма кольца комплекснозначных функций $e : C^\infty(M, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. Докажите, что для любой комплекснозначной $f$ число $e(f) \in \mathbb{C}$ является значением $f$, приведя к противоречию предположение о том, что $f - e(f)$ обратима в $C^\infty(M, \mathbb{C})$. ]]

*Задача* 6.158. $^*$ Если вы знакомы с алгеброй, опишите все максимальные идеалы в кольце $C^\infty(M)$ для компактного гладкого многообразия $M$.

[[ Проверьте, что решение задачи 4.90 проходит при замене непрерывных функций на гладкие. ]]

### 6.22. **Разбиение единицы на многообразии.**

Для работы с объектами на многообразии полезно применять разбиение единицы, частный случай которого в $\mathbb{R}^n$ был установлен в лемме 6.116. Собственно, теперь мы обобщим ту лемму на случай компактного подмножества многообразия.

**Лемма 6.159** (Разбиение единицы в окрестности компакта на многообразии)**.** *Пусть $M$ — гладкое многообразие, а $K \subseteq M$ — его компактное подмножество. Для любого покрытия $\{U_\alpha\}_\alpha$ компакта $K$ открытыми множествами найдётся набор неотрицательных гладких функций $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ с компактными носителями $\operatorname{supp} \rho_\alpha$ таких, что*

$$\forall \alpha \ \operatorname{supp} \rho_\alpha \subset U_\alpha,$$

*только конечное число из них отлично от нуля и*

$$\sum_\alpha \rho_\alpha(x) \equiv 1$$

*в некоторой окрестности $K$.*

В ситуации, когда $\operatorname{supp} \rho_\alpha \subset U_\alpha$ для любого $\alpha$, мы будем говорить, что *разбиение единицы $\{\rho_\alpha\}$ подчинено покрытию $\{U_\alpha\}$.*

*Доказательство.* Рассуждение аналогично доказательству леммы 6.116. Для любой точки $p \in K$ в некоторой координатной окрестности $W_p$ мы найдём функцию $\psi_p$, компактный носитель которой содержится в каком-то из пересечений $U_\alpha \cap W_p$, и которая тождественно равна единице в некоторой окрестности $V_p \ni p$. Если эту функцию продолжить нулём за пределы $W_p$, то она окажется гладкой функцией на $M$.

В последнем утверждении неявно используется, что компактное подмножество многообразия (образ компактного носителя $\psi_p$ в карте как подмножество всего многообразия $M$) замкнуто в многообразии $M$. Это очевидно для вложенных в евклидово пространство многообразий, а случай абстрактного многообразия разбирается в задаче 6.160 ниже.

В силу компактности $K$ мы можем оставить лишь конечное число таких функций $\psi_p$, обладающих свойством, что в каждой точке некоторой окрестности $K$ хотя бы одна из них обращается в единицу, получив конечное семейство $\{\psi_i\}$. Далее, действуя аналогично доказательству теоремы 4.83 или леммы 6.116, мы сделаем из $\{\psi_i\}$ конечное разбиение единицы $\{h_i\}$ в окрестности $K$, не увеличивая носителей этих функций. Заметим, что в итоге каждому $U_\alpha$ может быть сопоставлено несколько функций разбиения единицы $h_i$ с носителем в нём, но их всех мы можем сгруппировать в одно $\rho_\alpha$ и получить то, что требуется в лемме. ☐

*Задача* 6.160. Докажите, что компактное подмножество абстрактного гладкого многообразия является замкнутым.

[[ Используйте свойство отделимости и топологическое определение компактности. Покажите, что если точка не лежит в заданном компактном подмножестве, то заданное компактное подмножество и точка имеют непересекающиеся окрестности. ]]

Разбиение единицы мы будем применять, например, для представления дифференциальной формы $\alpha$ с компактным носителем в $M$ в виде суммы дифференциальных форм с носителями в координатных окрестностях $U_i \subset M$,

$$\alpha = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \alpha.$$

Аналогично можно поступать и с векторными полями или другими аналогичными объектами. Условие компактности в теореме о разбиении единицы можно убрать, но тогда результат будет немного другим.

**Лемма 6.161** (Разбиение единицы на многообразии без предположений компактности). *Пусть $M$ — гладкое многообразие. Для любого покрытия $\{U_\alpha\}_\alpha$ многообразия $M$ открытыми множествами найдётся набор неотрицательных гладких функций $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ с носителями* $\operatorname{supp}\rho_\alpha$ *таких, что*

$$\forall \alpha\ \operatorname{supp}\rho_\alpha \subset U_\alpha$$

*и*

$$\sum_\alpha \rho_\alpha(x) \equiv 1.$$

*В последнем равенстве сумма локально конечна, то есть у каждой точки $p \in M$ есть окрестность $V \ni p$, в которой отлично от нуля лишь конечное число слагаемых в этой сумме.*

*Доказательство.* Доказательство следует доказательству леммы 6.159 с некоторыми модификациями. Для любой точки $p \in M$ в некоторой координатной окрестности $W_p$ мы найдём функцию $\psi_p$, носитель которой содержится в каком-то из пересечений $U_\alpha \cap W_p$, и которая тождественно равна единице в некоторой окрестности $V_p \ni p$. Если эту функцию продолжить нулём за пределы $W_p$, то она окажется гладкой функцией на $M$.

Окрестности $V_p$ в этой конструкции можно уменьшить до окрестностей, принадлежащих некоторой счётной базе топологии $M$. После этого их можно занумеровать натуральными числами как $V_i$, а соответствующие им гладкие функции как $\psi_i$, $\psi_i \equiv 1$ на $V_i$. Положим тогда

$$h_i = (1 - \psi_1) \dots (1 - \psi_{i-1})\psi_i.$$

Тогда сумма

$$\sum_i h_i$$

локально конечна. Действительно, любая точка $p \in M$ содержится в некотором множестве $V_i$, на нём $\psi_i = 1$ и $(1 - \psi_i) = 0$. Следовательно, на $V_i$ получается $h_k = 0$ при $k > i$, то есть в окрестности $V_i \ni p$ сумма конечна. Аналогично предыдущим леммам про разбиение единицы, эта сумма оказывается равной единице.

Доказательство завершается аналогично лемме 6.159. Заметим лишь, что при группировке $h_i$ в $\rho_\alpha$ по принадлежности носителя $U_\alpha$ группируемая сумма может быть бесконечной (но локально конечной). Поэтому итоговая функция $\rho_\alpha$ не обязана иметь компактный носитель, что подтверждается примером, когда $M = \mathbb{R}$ и покрытие состоит из одного множества $U_\alpha = \mathbb{R}$. ☐

*Задача* 6.162. Пусть многообразие $M$ вложено в $\mathbb{R}^N$. Докажите, что любая гладкая функция $f : M \to \mathbb{R}$ является сужением на $M$ некоторой гладкой функции $\tilde{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

[[ Домножьте $f$ на разбиение единицы и сведите утверждение к продолжению функции в координатной окрестности, когда её носитель был и остаётся в координатной окрестности. ]]

*Задача* 6.163. Проверьте, что векторное поле на многообразии $M$ можно определить как дифференцирование $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, $\mathbb{R}$-линейное и удовлетворяющее правилу Лейбница $X(fg) = gX(f) + fX(g)$.

[[ Начните со значения дифференцирования в точке, постройте функцию, отличную от нуля только в заданной координатной карте в окрестности $U$ этой точки и равную единице в меньшей окрестности точки. С помощью такой функции докажите локальность дифференцирования, то есть однозначную определённость дифференцирования в точке как отображения $C^\infty(U) \to \mathbb{R}$, после этого утверждение сведётся к случая открытого подмножества $\mathbb{R}^n$. ]]

6.23. **Ориентация многообразия.** При рассмотрении зависимости интеграла дифференциальной формы в $\mathbb{R}^n$ от замены координат мы столкнулись с тем, что при замене координат интеграл может остаться тем же, а может поменять знак. Это как бы разбивает все возможные системы координат на $\mathbb{R}^n$ (или даже на его связных открытых подмножествах) на два класса — «ориентированные так» и «ориентированные иначе», при этом переход между представителями разных классов имеет отрицательный якобиан. Для определения интеграла формы по многообразию нам надо будет детально разобраться с понятием ориентации произвольного многообразия.

**Определение 6.164.** Гладкое многообразие $M$ называется *ориентируемым*, если можно выбрать покрывающий его атлас так, что якобианы замен координат между любыми двумя картами атласа будут положительными.

После этого определения надо сделать важное замечание по определению многообразия. Может оказаться так, что в нашем атласе на многообразии было слишком много карт или они были каким-то неудачными, и только поэтому мы не смогли выбрать на нём ориентацию.

*Задача* 6.165. Придумайте атлас на $\mathbb{R}^1$, из которого нельзя выбрать покрывающий $\mathbb{R}^1$ податлас с положительными якобианами перехода, даже если разрешить переворачивать координаты ($x \mapsto -x$) в картах.

[[ Покройте $\mathbb{R}^1$ двумя картами, область определения одной из которых состоит из двух интервалов, а знак производной отображения $\varphi$ карты меняется. ]]

В свете предыдущей задачи и задачи 6.141 мы будем придерживаться соглашения, что помимо исходного атласа на любом многообразии мы считаем допустимыми любые другие координатные карты $\psi : U \to \mathbb{R}^n$ с открытым $U \subseteq M$, у которых замены координат в исходный атлас и обратно гладкие, то есть которые задают гладкое отображение $U \to \mathbb{R}^n$, являющееся диффеоморфизмом на свой образ. Добавление таких карт к исходному атласу создаёт гладкую структуру на многообразии в смысле определения 6.140.

Если в исходном атласе был задан некоторый объект, например векторное поле $X$, то в каждой новой карте $\psi$ мы тоже будем иметь векторное поле, собранное из прямых образов $(\psi \circ \varphi^{-1})_* X_\varphi$, полученных с имеющихся карт $\varphi$ и образов $X_\varphi$ в них. Для наведения строгости читатель может проверить, что эти прямые образы действительно согласованы и образуют одно векторное поле на новой карте.

В частности, наш максимальный по включению атлас (гладкая структура), для каждой его карты $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ также будет содержать её сужения на всевозможные открытые $V \subseteq U$. Следовательно, для любой точки многообразия найдётся накрывающая её карта, область определения которой связна, это будет удобно при работе с ориентацией.

При выборе ориентации конструкцию гладкой структуры можно повторить с некоторыми модификациями: начав с покрывающего многообразие (по определению ориентируемости) набора «положительных» карт с положительными якобианами замен координат между картами, мы будем далее записывать в «положительные» карты все карты гладкой структуры, у которых якобианы перехода с начальным набором «положительных» карт положительные. Это можно сформулировать в виде определения:

**Определение 6.166.** *Ориентацией гладкого многообразия $M$* называется атлас с положительными якобианами перехода между картами, максимальный по включению среди всех таких атласов.

В этом определении есть тонкий момент. Наше соглашение о крае многообразия не позволяет ввести ориентацию на отрезке $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, так как в картах у края отрезка, если они принадлежат одному и тому же атласу с положительными якобианами перехода (то есть строго возрастающими заменами координат в одномерном случае), у одного края многообразие будет задаваться неравенством $x \leqslant 0$, а у другого — неравенством $y \geqslant 0$. Для исправления этого в определении *многообразия с краем* надо разрешить неравенства в обе стороны, во всяком случае в размерности один.

*Задача* 6.167. Докажите, что на связном ориентируемом многообразии существует ровно две ориентации. Сколько ориентаций может быть на несвязном многообразии?

[[ Ещё одну ориентацию из первой можно получить, назначив положительными все карты, для которых якобиан перехода из карт первой ориентации всюду отрицателен. То, что других ориентаций на связном многообразии не будет, проще вывести из следующей ниже леммы. ]]

В итоге строгое определение ориентации многообразия получилось несколько громоздким и может быть излишне абстрактным. Следующая лемма позволяет ориентировать многообразие на практике с помощью ненулевой формы максимальной степени.

**Лемма 6.168.** *Многообразие $M$ размерности $n$ ориентируемо тогда и только тогда, когда существует дифференциальная форма $\nu \in \Omega^n(M)$, которая ни в одной точке не равна нулю.*

*Доказательство.* Действительно, при наличии ненулевой формы $\nu$ положительность карты (назовём её *$\nu$-положительность*) можно определить условием $\nu\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) >$

0. Всё многообразие можно покрыть связными картами (по замечанию выше), а в связной карте знак этого выражения либо только положителен, либо только отрицателен. Если карта оказалась $\nu$-положительна, мы её оставляем в списке, если нет, то меняем в ней какую-либо координату $x_i \mapsto -x_i$ и она становится $\nu$-положительной и добавляется в список, таким образом всё многообразие оказывается покрыто выбранными так связными картами. Якобианы переходов между ними должны быть положительными, так как иначе неравенство $\nu\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) > 0$ поменяет знак.

Назначенные нами $\nu$-положительные карты задают ориентацию многообразия, так как если мы изначально имели максимальный по включению атлас, то каждая его карта с положительными якобианами замены со всеми $\nu$-положительными картами сама будет $\nu$-положительной.

Если же у нас есть покрытие многообразия некоторыми картами с положительными якобианами переходов между ними, то в каждой карте $U_i$ (в силу счётности базы топологии мы оставим только счётное их число и будем нумеровать их) мы построим согласованную с ориентацией $n$-форму $\nu_i$, заданную в координатах просто как $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Потом возьмём подчинённое покрытию $\{U_i\}$ локально конечное разбиение единицы $\{\rho_i\}$ из леммы 6.161 и определим

$$\nu = \sum_i \rho_i \nu_i,$$

где $\rho_i \nu_i$ понимается как форма с замкнутым носителем в $U_i$, продолженная за пределы $U_i$ нулём. Это выражение корректно, так как оно локально конечно, то есть у каждой точки есть окрестность, в которой сумма справа выглядит как конечная сумма.

Рассматривая эту сумму локально в какой-либо из положительных карт, мы видим, что она везде положительна как сумма неотрицательных слагаемых, по крайней мере одно из которых не равно нулю. Следовательно, $\nu$ нигде не обращается нуль. Кроме того, положительность какой-либо карты в исходном смысле и положительность $\nu\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ на ней равносильны. ☐

С учётом предыдущей леммы можно задавать ориентацию $n$-мерного многообразия $M$ с помощью нигде не обращающейся в нуль формы $\nu \in \Omega^n(M)$. Тогда положительность или отрицательность системы координат $x_1, \dots, x_n$ будет определяться знаком функции $a$ в выражении $\nu = a\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ в этих координатах.

*Задача* 6.169. Докажите, что ориентации многообразия $M^n$ соответствуют нигде не нулевым формам $\nu \in \Omega^n(M)$ с точностью до умножения формы на положительную функцию.

[[ Поясните, что умножение формы на положительную функцию не меняет построенную в доказательстве предыдущей леммы ориентацию, а умножение на ненулевую не везде положительную функцию — меняет. ]]

*Задача* 6.170. Определите ориентацию на единичной сфере $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ с помощью какой-нибудь формы второй степени, не обращающейся в нуль при ограничении на сферу.

[[ Например, посмотрите на смешанное произведение в $\mathbb{R}^3$ и подставьте в него одним из аргументов вектор $(x, y, z)$. ]]

Для следующего определения нам также надо понимать ориентацию 0-мерного многообразия. Нульмерное многообразие является несвязным набором из не более чем счётного числа отдельных точек, а ориентацию мы будем понимать как задание на этом множестве точек нигде не обращающейся в нуль функции. Так как в ориентирующей функции важен только знак, то можно считать, что каждой точке сопоставляется знак $+1$ или $-1$.

**Определение 6.171.** Для $n$-мерного ориентированного многообразия с краем $M$ введём ориентацию на его крае $\partial M$ следующим образом. Пусть карта $M$ с координатами $x_1, \dots, x_n$ соответствует ориентации $M$, причём образ отображения карты удовлетворяет неравенству $x_1 \leqslant 0$, а образ края соответствует равенству $x_1 = 0$. Тогда карта на соответствующей части $\partial M$ из координат $x_2, \dots, x_n$ по определению объявляется положительной. Если же многообразие в этой карте задано неравенством в другую сторону, $x_1 \geqslant 0$, то карта $x_2, \dots, x_n$ на его краю по определению объявляется отрицательной.

**Лемма 6.172.** *Предыдущее определение корректно задаёт ориентацию на* $\partial M$.

*Доказательство.* По определению края всё многообразие $\partial M$ можно покрыть картами вида $x_2, \dots, x_n$ из предыдущего определения. Рассмотрим замену координат $x_1, \dots, x_n$ на $y_1, \dots, y_n$ между двумя координатными картами $M$ из определения, которые обе соответствуют ориентации $M$ и $M$ в них удовлетворяет неравенствам $x_1 \geqslant 0$ и $y_1 \geqslant 0$ (остальные варианты рассматриваются аналогично). При этой замене образ края многообразия в одной карте должен переходить в образ края многообразия в другой карте. Это означает, что на краю должно выполняться $\frac{\partial y_1}{\partial x_j} = 0$ при $j > 1$, а также $\frac{\partial y_1}{\partial x_1} > 0$.

Это означает, что знак определителя матрицы $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ совпадает со знаком её главного минора без первых строки и столбца. Это замена координат между двумя картами $M$, соответствующими его ориентации, что по определению означает, что якобиан всей матрицы положителен. Значит и в ограничении на $\partial M$ такая замена координат (всех координат, кроме $x_1$ и $y_1$) тоже имеет положительный якобиан. Следовательно, описанное в определение назначение знаков картам задаёт атлас на крае $\partial M$ с положительными заменами координат между картами, и в итоге даёт ориентацию края. ☐

В качестве важного примера рассмотрим связное одномерное многообразие с краем, например отрезок $[0, 1]$ с координатой $t$ и ориентацией, заданной формой $dt$. Тогда можно проверить по определению, что на его крае, множестве из двух точек $0$ и $1$, задана ориентация, приписывающая точке $0$ знак $-1$, а точке $1$ — знак $+1$.

*Задача* 6.173. Предположим, что многообразие $M \subset \mathbb{R}^N$ размерности $n$ определяется системой гладких уравнений

$$f_1(x) = 0, \quad \dots, \quad f_{N-n}(x) = 0,$$

и дифференциалы этой системы уравнений линейно независимы в каждой точке $M$. Докажите, что $M$ ориентируемо.

[[ Для выяснения ориентации карты из координат $t_1, \dots, t_n$ на $M$ дополните её функциями $f_1, \dots, f_{N-n}$ до системы координат в области $\mathbb{R}^N$. ]]

6.24. **Интеграл формы по ориентированному многообразию и формула Стокса.** После сделанных в предыдущих разделах приготовлений мы готовы определить интеграл дифференциальной формы по ориентированному многообразию.

**Определение 6.174.** Интеграл дифференциальной формы $\nu \in \Omega^n_c(M)$ с компактным носителем по ориентированному $n$-мерному многообразию $M$ определяется с помощью разбиения единицы в окрестности носителя $\nu$

$$\rho_1 + \dots + \rho_m = 1,$$

подчинённого некоторому набору положительно ориентированных карт как

$$\int_M \nu = \sum_i \int_M \rho_i \nu,$$

где интегралы справа рассматриваются в координатных картах, содержащих носители соответствующих $\rho_i$.

**Лемма 6.175.** *Определение интеграла не зависит от выбора системы положительных карт в данной ориентации и подчинённого им разбиения единицы.*

*Доказательство.* Пусть у нас были карты $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ с подчинённым разбиением единицы $\rho_i : M \to \mathbb{R}^+$ и новые карты $\psi_j : V_j \to \mathbb{R}^n$ с подчинённым разбиением единицы $\sigma_j : M \to \mathbb{R}^+$. Если мы выбрали другую систему с той же ориентацией, то якобианы переходов от старых к новым должны быть положительными.

Выпишем формулу

$$\sum_i \rho_i \left(\sum_j \sigma_j\right) = \sum_{i,j} \rho_i \sigma_j = \sum_j \sigma_j \left(\sum_i \rho_i\right),$$

которая позволяет от двух разбиений единицы перейти к их общему «подразбиению» $\{\rho_i\sigma_j\}_{i,j}$, и умножим её на $\nu$. Тогда мы можем написать

$$\sum_i \int_M \rho_i \nu = \sum_i \int_M \rho_i \left(\sum_j \sigma_j\right) \nu = \sum_i \sum_j \int_M \rho_i \sigma_j \nu = \sum_j \int_M \left(\sum_i \rho_i\right) \sigma_j \nu = \sum_j \int_M \sigma_j \nu.$$

Внутренние знаки равенства интерпретируются как уже известная нам аддитивность интеграла в пределах координатной карты. Выражение посередине подразумевает, что при сравнении интегралов каждого слагаемого $\rho_i\sigma_j\nu$ в карте $U_i$ и в карте $V_j$ мы используем независимость интеграла от замены одних координат на другие (отображением $\psi_j \circ \varphi_i^{-1}$) с положительным якобианом, таким образом подтверждая корректность выражения. ☐

Правила замены переменных в интеграле от формы говорят, что если мы хотим проинтегрировать форму в карте, отрицательной относительно данной ориентации многообразия, то мы можем это сделать, но нам нужно будет поменять знак получившегося выражения. Также уточним, что такое интеграл формы нулевой степени с компактным носителем, то есть на самом деле функции с конечным носителем, по $0$-мерному многообразию. Это просто сумма значений этой функции в точках $0$-мерного многообразия, взятых со знаками, происходящими из ориентации точек данного многообразия.

На практике форму по многообразию можно интегрировать без разбиения единицы, если интегрировать её в карте, которая покрывает всё многообразие кроме множества меры нуль (определение множества меры нуль на многообразии будет объяснено в разделе 7.3). Например, сферу радиуса $R$ в $\mathbb{R}^3$ можно параметризовать почти всю как

$$x = R\cos\varphi \sin\vartheta, \quad y = R\sin\varphi\sin\vartheta, \quad z = R\cos\vartheta$$

при $0 < \varphi < 2\pi, 0 < \vartheta < \pi$ и интегрировать в указанном диапазоне.

С учётом определения интеграла формы по многообразию и сделанных замечаний мы готовы доказать основную формулу про интегрирование дифференциальных форм.

**Теорема 6.176** (Формула Стокса). *Для ориентированного многообразия с краем $(M, \partial M)$ (край рассматривается с согласованной ориентацией) размерности $n$ и формы $\alpha \in \Omega_c^{n-1}(M)$*

*выполняется*

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha.$$

В этой формуле мы рассматриваем естественное гладкое вложение многообразий $i : \partial M \to M$ (см. также задачу 6.137) и, строго говоря, в правой части равенства интегрируем $i^*\alpha$ по краю $\partial M$. Напомним, что в координатном представлении мы просто требуем продолжимости $\alpha$ на окрестность края и таким образом $i^*\alpha$ корректно определена.

Такое же соглашение применяется всякий раз, когда мы хотим интегрировать дифференциальную форму, заданную на одном многообразии, по его *подмногообразию*, то есть рассматривать образ некоторого гладкого инъективного (или даже необязательно инъективного) отображения $i : N \to M$ одного многообразия в другое и брать форму $i^*\alpha$ на $N$.

*Доказательство формулы Стокса.* Будем использовать аддитивность обеих частей равенства по $\alpha$ и разбиение единицы в окрестности носителя $\alpha$ по лемме 6.159, подчинённое покрытию носителя $\alpha$ координатными окрестностями. Так мы сведём задачу к вопросу в координатах, то есть по сути к случаю $M = (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$ и $\partial M = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Рассмотрим случай $\alpha = f dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ и $d\alpha = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$. Начав интегрировать по $x_1$, мы получим по теореме Фубини и формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_M \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{\partial M} f(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

что доказывает теорему в этом случае. Мы можем считать, что мы рассматривали связные координатные карты некоторого знака. Отрицательность координатной карты могла внести знак «$-$» в левую часть формулы, но по определению ориентации на краю в правой части тоже появится «$-$», так что формула в любом случае остаётся верной.

Если же $\alpha = f dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$ при $i > 1$, то уже интегрирование по $x_i$ обнуляет левую часть (по формуле Ньютона–Лейбница), а в правой части будет стоять нуль по определению, так как ограничение формы $\alpha$ на $\partial M$ окажется нулевым в силу того, что $dx_1 \equiv 0$ на краю.

Также заметим, что в координатной окрестности, в которой края не видно, левая часть равенства обращается в нуль, как мы уже видели в доказательстве независимости определения интеграла дифференциальной формы от замены координат с положительным якобианом. Правая часть в таких координатных окрестностях очевидно нулевая. ☐

В следующей задаче мы изучаем полезные случаи формулы Стокса *многообразий с углами*:

*Задача* 6.177. Распространите формулу Стокса на замкнутый параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ и на симплекс

$$\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \geqslant 0, x_1 + \dots + x_n \leqslant 1\},$$

считая интеграл по краю как сумму интегралов по граням с правильной ориентацией.

[[ Можно обобщить рассуждение в основном доказательстве на случай, когда множество, по которому интегрируют $d\alpha$, устроено как отделимое топологическое пространство, координатные карты которого дают гомеоморфизмы его открытых подмножеств с относительно открытыми подмножествами $(-\infty, 0]^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ при $k = 0, \dots, n$. ]]

6.25. **Частные случаи формулы Стокса и её применения.** Обсудим интеграл по многообразию и формулу Стокса в малых размерностях. Одномерное компактное многообразие с краем (см. задачу 6.147) — это просто набор кривых, диффеоморфных отрезкам или окружностям. Для определённости мы будем рассматривать кривую, параметризованную отрезком. Формула Стокса для ориентированной кривой с началом в точке $p$ и концом в точке $q$ сводится к утверждению

$$\int_\gamma df = f(q) - f(p),$$

которое конечно можно было бы доказать и непосредственно, рассмотрев интеграл в параметризации кривой и применив формулу Ньютона–Лейбница.

*Задача* 6.178. Проверьте, что ориентация кривой, которую мы определяли при изучении кривых, и ориентация вложенной кривой как одномерного многообразия дают по сути одно и то же понятие.

Отметим, что формально кривая не должна иметь самопересечений, чтобы считаться вложенным многообразием в евклидовом пространстве. Однако, выписанная формула очевидно верна без этого предположения, если в качестве интеграла формы первой степени по кривой, $\int_\gamma \alpha$, мы используем интеграл обратного образа $\gamma^*\alpha$ по отрезку в параметризации кривой $\gamma$. Также кривую можно считать не бесконечно гладкой, а всего лишь кусочно непрерывно дифференцируемой, формула всё равно остаётся верной.

Перейдём к менее тривиальному случаю. Для компактного множества $G \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей (то есть $G$ — вложенное двумерное многообразие с одномерным краем/границей $\partial G$), ориентированного так, что при движении по $\partial G$ множество $G$ оказывается слева (это и есть правильная ориентация края многообразия $G$ в двумерном случае), верна *формула Грина*

$$\int_{\partial G} P\,dx + Q\,dy = \int_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

С помощью аккуратного предельного перехода можно обобщить это утверждение на множества с кусочно-гладкой (или даже кусочно один раз непрерывно дифференцируемой) границей, многие полезные для практики обобщения можно получить в духе задачи 6.177.

Для компактного множества $G \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей (то есть представляющего из себя вложенное трёхмерное гладкое многообразие с краем в $\mathbb{R}^3$) верна *формула Гаусса–Остроградского*

$$\int_{\partial G} P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy = \int_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

*Задача* 6.179. Проверьте, что ориентация $\partial G$ в формуле Гаусса–Остроградского должна быть такая, что в положительной карте на $\partial G$ с координатами $(u, v)$ вектор $[r'_u \times r'_v]$ торчит вовне $G$.

Для компактной двумерной поверхности с краем (то есть вложенного двумерного многообразия с краем) $S \subset \mathbb{R}^3$ верна *формула Стокса в узком смысле*

$$\int_{\partial S} P\,dx{+}Q\,dy{+}R\,dz = \int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy{\wedge}dz{+}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz{\wedge}dx{+}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx{\wedge}dy.$$

Ориентация в данном случае в простых терминах может быть описана аналогично предыдущему случаю:

*Задача* 6.180. Проверьте, что при согласованной ориентации поверхности и её края в трёхмерной формуле Стокса ориентирующий касательный вектор $\partial S$, ориентирующая нормаль $S$ (вида $[r'_u \times r'_v]$ для некоторых положительных координат $(u, v)$), и касательный вектор к $S$, направленный перпендикулярно $\partial S$ в направлении от $S$, должны образовывать правую тройку.

Заметим, что формула Стокса в $\mathbb{R}^3$ (а на самом деле и в больших размерностях) верна не только для вложенных двумерных многообразий, но и вообще для образа гладкого отображения $f : D \to \mathbb{R}^3$ области $D \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно гладкой границей (даже не инъективного), если интегралы мы понимаем как интегралы обратных образов $f^*(\alpha)$ и $f^*(d\alpha)$ по $\partial D$ и $D$ соответственно. Собственно, в такой формулировке вопрос сводится к формуле Грина на плоскости. Для практических применений полезно ослабить условия гладкости $f$ до непрерывной дифференцируемости, тогда $f$ надо равномерно приближать вместе с его первыми производными последовательностью гладких отображений $(f_k)$ по теореме 6.21 и переходить к пределу в интеграле, замечая, что в его координатном представлении используются производные $f$ не более чем первого порядка.

Поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ в формуле Стокса в узком смысле может быть кусочно-гладкой, то есть «склеенной» из ориентированных кусков $S_i$ с кусочно гладкими краями так, что все линии склейки участвуют в двух из частей $\partial S_i$ с разными ориентациями. Краем склеенной поверхности тогда считаются те части из $\partial S_i$, которые не участвовали в склейке. При таком определении при сложении формул Стокса будут складываться и правые части, и левые части, с сокращением интегралов по линиям склейки.

Формула Гаусса–Остроградского тоже может быть с некоторыми усилиями обобщена на случай, когда $\partial G$ является кусочно-гладкой поверхностью в описанном смысле, читатель может поразмышлять над этим самостоятельно, а также проверить, что у поверхности $\partial G$ не будет края в описанном выше кусочно-гладком смысле и убедиться, что бесконечную гладкость поверхности можно заменить на её однократную непрерывную дифференцируемость в параметрическом представлении.

При определении дифференциальных форм на многообразии с краем мы требовали, чтобы в координатных картах дифференциальная форма «чуть-чуть» продолжалась за край. Иногда это ограничение может быть чрезмерным, в следующей задаче мы намечаем способ ослабить такое ограничение.

*Задача* 6.181. Распространите формулу Стокса на случай, когда $\alpha$ непрерывна на всём многообразии, дифференцируема на его внутренности $M \setminus \partial M$ с локально ограниченными производными, а $d\alpha$ глобально абсолютно интегрируема по Лебегу на его внутренности.

[[ Приведённое доказательство формулы Стокса проходит, если его правильно понимать и если при локальном рассмотрении сначала доказать формулу для области $x_1 \leqslant -\varepsilon < 0$ и потом устремить $\varepsilon \to +0$, используя непрерывность интеграла Лебега и непрерывность $\alpha$ вплоть до границы. ]]

Следующие задачи демонстрируют полезные способы вычисления площадей и объёмов с помощью формул Грина и Гаусса–Остроградского.

*Задача* 6.182. Докажите, что площадь области, ограниченной замкнутой гладкой кривой без самопересечений $C \subset \mathbb{R}^2$, можно посчитать по формуле:

$$A = \pm \int_C x\,dy,$$

где знак выбирается в зависимости от ориентации кривой.

*Задача* 6.183. $^*$ Четыре замкнутые кривые на плоскости

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$$

не имеют самопересечений и ограничивают области площадей $S_\alpha, S_\beta, S_\gamma, S_\delta$. Также оказалось, что в любой момент времени точки $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \delta(t)$ образуют квадрат в указанном порядке, ориентированный по часовой стрелке. Как найти площадь одной из этих областей, зная площади трёх других?

[[ Выпишите площади по формуле Грина. ]]

*Задача* 6.184. Докажите, что объём области в $\mathbb{R}^3$, ограниченной связной вложенной компактной поверхностью без края $S \subset \mathbb{R}^3$, можно посчитать по формуле:

$$A = \pm \int_S x dy \wedge dz,$$

где знак выбирается в зависимости от ориентации поверхности, не забывая про положительность объёма.

Обратите внимание, что решение задачи 7.53 покажет, что любая связная вложенная компактная поверхность без края $S \subset \mathbb{R}^3$ и в самом деле ограничивает некоторое вложенное трёхмерное многообразие с краем.

## 7. ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ, ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ И РИМАНОВЫ СТРУКТУРЫ

7.1. **Потенциалы дифференциальных форм первой степени.** В физике существует понятие потенциала силового поля, которое в математических терминах означает поиск функции $u \in C^\infty(M)$ такой, что $du = \alpha$ для некоторой заданной «силы» $\alpha \in \Omega^1(M)$. При наличии потенциала «работа силы» вдоль гладкой кривой $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ (то есть интеграл формы по кривой в наших терминах) выражается как

$$\int_\gamma \alpha = u(\gamma(t_1)) - u(\gamma(t_0)),$$

конечно же, это просто одномерная формула Стокса.

Далее мы будем рассматривать интегралы $\int_\gamma \alpha$ для кусочно-гладких кривых, определив интеграл как сумму интегралов по кускам. Более того, на самом деле для корректной работы с такими интегралами достаточно считать кривую (кусочно) один раз непрерывно дифференцируемой, так как выражение

$$\int_\gamma \alpha = \int_{t_0}^{t_1} \gamma^*\alpha = \int_{t_0}^{t_1} \alpha(\gamma'(t))\, dt$$

корректно определено и в этом случае. Более того, интегрируемую форму $\alpha$ здесь вполне достаточно считать всего лишь непрерывно зависящей от точки, а не бесконечно гладкой.

**Теорема 7.1.** *Необходимым и достаточным условием наличия потенциала у непрерывной $\alpha \in \Omega^1(M)$, для гладкого многообразия $M$, является независимость интеграла $\int_\gamma \alpha$ от выбора кусочно-гладкой кривой $\gamma$, соединяющей две фиксированные точки. Эквивалентно, необходимым и достаточным условием наличия потенциала является равенство нулю интегралов $\int_\gamma \alpha$ по всем замкнутым кусочно-гладким кривым.*

*Доказательство.* Необходимость обоих условий очевидна, так как при наличии потенциала интеграл по кривой должен зависеть только от значений потенциала на концах.

Первое условие следует из второго. Действительно, рассмотрим две кривые $\gamma_1$ и $\gamma_2$, у которых совпадают начало и конец. Определим замкнутую кривую $\gamma_1 \diamond (-\gamma_2)$ (у $\gamma_2$ взята противоположная ориентация), тогда

$$\int_{\gamma_1 \diamond (-\gamma_2)} \alpha = 0$$

означает, что

$$\int_{\gamma_1} \alpha - \int_{\gamma_2} \alpha = 0.$$

Покажем достаточность первого условия. Достаточно рассматривать каждую компоненту связности $M$ по отдельности, так что далее мы считаем $M$ связным. В связном $M$ фиксируем одну точку $p$, выберем значение $u(p)$ произвольно и положим по определению

$$u(q) = u(p) + \int_p^q \alpha,$$

используя то, что интеграл в правой части не зависит от выбора кривой в $M$ из $p$ в $q$. Такие кривые существуют в силу связности $M$.

Тогда в локальных координатах, в которых

$$\alpha = \alpha_1 dx_1 + \dots + \alpha_n dx_n,$$

для нахождения производной $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ нам надо изучить приращение $u$ при замене точки $q = (q_1, \dots, q_i, \dots q_n)$ на $q' = (q_1, \dots, q_i', \dots q_n)$. Будем считать, что путь из $p$ в $q'$ идёт сначала из $p$ в $q$, а потом из $q$ в $q'$ по отрезку. Но тогда, находя интеграл по отрезку вдоль $i$-й координатной оси мы получим

$$u(q') - u(q) = \int_q^{q'} \alpha = \int_0^1 \alpha_i(q + (q' - q)t)(q'_i - q_i)\, dt = (q'_i - q_i) \int_0^1 \alpha_i(q + (q' - q)t)\, dt,$$

откуда в пределе $q'_i \to q_i$ получается, что $\frac{\partial u}{\partial x_i}(q) = \alpha_i(q)$. Иначе говоря, $du = \alpha$. ☐

Условия существования потенциала в предыдущей теореме не являются практически проверяемыми. Практически проверяемым необходимым условием существования потенциала у $\alpha \in \Omega^1(M)$ является $d\alpha = 0$, так как это просто $d(du) = 0$. Можно привести пример, когда условие $d\alpha = 0$ не является достаточным. Например, в открытой области $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ положим

$$\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Легко проверить, что $d\alpha = 0$, но интеграл $\alpha$ по стандартной единичной окружности равен $2\pi$, что противоречит наличию потенциала. Этот пример неприятен с точки зрения нахождения потенциала дифференциальной формы, но из него есть позитивные следствия, которые приведены в виде задач.

*Задача* 7.2 (Порядок точки относительно кривой). Для замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, не проходящей через начало координат, обозначим *порядок начала координат относительно кривой* $\gamma$

$$w(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Докажите, что это число не меняется при непрерывных деформациях кривой, при которых она не проходит через начало координат. Докажите, что это число корректно определено и для непрерывных замкнутых кривых, которые не проходят через начало координат.

[[ Выражение под интегралом локально является полным дифференциалом (используйте арктангенс), что позволяет доказать инвариантность при непрерывных деформациях и определить число для непрерывных кривых. ]]

*Задача* 7.3. Докажите, что порядок точки относительно кривой является целым.

[[ Если кривая не приближается к началу координат ближе чем на $\varepsilon$, то её равномерное приближение ломаной с точностью $\varepsilon/2$ не меняет порядка точки относительно кривой. Для ломаной же можно с помощью локальной первообразной интерпретировать вклад каждого её отрезка в порядок точки и смысл суммы этих вкладов. ]]

*Задача* 7.4. Докажите, что порядок начала координат относительно не проходящей через него нечётной (как отображение $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ со свойством $\gamma(-u) = -\gamma(u)$) кривой является нечётным целым числом.

[[ Посмотрите на определяющий порядок интеграл по половине нечётной кривой. ]]

*Задача* 7.5. Пусть гладкая кривая на плоскости замкнута и имеет всюду ненулевую скорость. Докажите, что интеграл кривизны (взятой со знаком)

$$\int_\gamma k(s)\, ds$$

по натуральному параметру является целым числом, умноженным на $2\pi$.

[[ Посмотрите на скорость этой кривой и порядок нуля относительно скорости. ]]

*Задача* 7.6 (Лемма Жордана для кусочно-гладких кривых). * Докажите, что замкнутая кусочно-гладкая кривая $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ без самопересечений делит плоскость на две связные части, внутреннюю и внешнюю.

[[ Зафиксируем кривую и будем менять точку $p$, для которой мы смотрим её порядок относительно кривой. Проверьте, что порядок не меняется, если точка $p$ движется, не пересекая кривую и меняется на $\pm 1$, когда точка $p$ пересекает кривую в её гладкой точке. На основе этого поймите, как определить внутреннюю и внешнюю части плоскости относительно кривой. ]]

*Задача* 7.7 (Лемма Жордана для непрерывных кривых). ** Докажите, что замкнутая непрерывная кривая $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ без самопересечений делит плоскость на две связные части, внутреннюю и внешнюю.

[[ В этой задаче надо очень аккуратно приближать непрерывную кривую ломаными. ]]

Вернёмся к вопросу нахождения потенциала дифференциальной формы первой степени. Формула Стокса вместе с теоремой 7.1 показывают, что достаточным условием для нахождения потенциала $\alpha \in \Omega^1(M)$, у которой $d\alpha = 0$, является возможность на любую замкнутую гладкую кривую $\gamma$ натянуть кусочно-гладкую компактную двумерную поверхность $S \subset M$ так, чтобы $\gamma$ оказалась её краем, то есть $\gamma = \partial S$. В этом случае мы получаем

$$\int_\gamma \alpha = \int_S d\alpha = 0$$

и наличие потенциала по теореме 7.1. На самом деле достаточно не находить поверхность $S$ в многообразии $M$, а (кусочно) гладко отобразить $\varphi : S \to M$ так, чтобы кривая $\gamma$ оказалась образом края $\varphi(\partial S)$. Тогда выписанная формула применяется для $\varphi^*\alpha$ на поверхности $S$ и даёт тот же результат.

Описанное выше условие натягивания поверхности на замкнутую кривую как на край обычно называется *поверхностная односвязность* многообразия. Можно убедиться, что поверхностная односвязность следует из обычной *односвязности*, которая означает возможность стянуть любую замкнутую кривую непрерывно в точку (то есть устроить непрерывную гомотопию между параметризацией кривой и постоянным отображением). Понятие гомотопии поясняется в следующем разделе, а следующая задача даст начальное представление об этих вопросах.

*Задача* 7.8. Докажите, что если на гладком многообразии $M$ любая замкнутая гладкая кривая $\gamma : \mathbb{S}^1 \to M$ может быть гладко стянута в точку, то условие $d\alpha = 0$ для $\alpha \in \Omega^1(M)$ является достаточным для существования $f \in C^\infty(M)$, такой что $\alpha = df$.

[[ Достаточно доказать, что $\int_\gamma \alpha = 0$ для всех замкнутых кусочно-гладких кривых $\gamma$ и данного $\alpha$. Сначала полезно приблизить кусочно-гладкую кривую гладкой и проверить, что условие $d\alpha = 0$ гарантирует равенство интегралов по исходной кривой и приближенной.

Стягивание $\gamma$ в точку $p \in M$ можно понимать как отображение $h : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to M$ с $h(t,0) \equiv \gamma(t)$ и $h(t,1) \equiv p$. Для доказательства $\int_\gamma \alpha = 0$ перейдите к рассмотрению $h^*\alpha$ с $dh^*\alpha = 0$ на цилиндре $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ и примените формулу Стокса не цилиндре. ]]

7.2. **Первообразные дифференциальных форм и когомологии де Рама.** Приведённые выше примеры наводят на мысль, что вопрос о нахождении $\beta$, такой что $d\beta = \alpha$, для некоторой $\alpha \in \Omega^k(M)$, при выполнении условия $d\alpha = 0$, имеет топологический характер. Например, для дифференциальных форм на таком «топологически простом» пространстве, как $\mathbb{R}^n$, мы ожидаем, что задача нахождения «первообразной» дифференциальной формы любой положительной степени всегда имеет решение, если конечно $d\alpha = 0$.

Для лучшего понимания этих вопросов читателю будет полезно изучить стандартные учебники по топологии типа [13], а в этом разделе мы продемонстрируем некоторые базовые инструменты и понятия. Введём некоторую терминологию:

**Определение 7.9.** Дифференциальная форма $\alpha \in \Omega^k(M)$ называется *замкнутой*, если $d\alpha = 0$. Она называется *точной*, если для некоторой $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$ оказывается $d\beta = \alpha$.

*Задача* 7.10. Докажите, что внешнее произведение замкнутой формы на точную форму — точная форма.

[[ Используйте правило Лейбница для внешнего произведения. ]]

*Задача* 7.11. Пусть $M$ — многообразие, а $N \subset M$ — некоторое его подмногообразие. Верно ли, что ограничение замкнутой $\alpha \in \Omega^*(M)$ на $N$ является замкнутой формой? Верно ли, что ограничение точной формы $\alpha \in \Omega^*(M)$ на $N$ является точной формой?

[[ Используйте тот факт, что ограничение формы на подмногообразие коммутирует с внешним дифференцированием. ]]

Далее мы построим некоторую теорию, позволяющую устанавливать точность замкнутой формы в некоторых случаях. Начнём с важного отношения эквивалентности для гладких отображений:

**Определение 7.12.** Два отображения $h_0, h_1 : M \to N$ *гладко гомотопны*, если существует гладкое отображение цилиндра

$$h : M \times [0,1] \to N,$$

такое что $h_0(x) = h(x,0)$ и $h_1(x) = h(x,1)$.

Цилиндр, декартово произведение многообразия $M$ на отрезок, является топологическим пространством, которое локально устроено как произведение открытого подмножества $U \subseteq \mathbb{R}^n$ на отрезок. Можно проверить, что если $M$ было многообразием без края, то $M \times [0,1]$ будет многообразием с краем $M \times \{0,1\}$.

Неформально говорят, что в определении гомотопии отображение $h_0$ гладко деформируется в отображение $h_1$ с помощью семейства отображений $h_t = h(\cdot, t)$, гладко зависящего от $t$. Гомотопия между отображениями — это наиболее грубое отношение эквивалентности между ними.

Обычно рассматриваются непрерывные гомотопии, но мы работаем с гладкими многообразиями и будем использовать гладкие гомотопии. С помощью техники сглаживания отображений в евклидово пространство и существования трубчатой окрестности вложенного многообразия (см. задачу 7.161) можно показать, что если два гладких отображения между многообразиями непрерывно гомотопны, то они и гладко гомотопны.

Для превращения непрерывной гомотопии в гладкую, и во многих других рассуждениях, полезно свести вопрос к случаю, когда для некоторого $\varepsilon > 0$ в гомотопии выполняется $h(x,t) = h(x,0)$ при $t < \varepsilon$ и $h(x,t) = h(x,1)$ при $t > 1-\varepsilon$. Чтобы добиться этого, достаточно по имеющейся гомотопии $h$ определить новую гомотопию как $h'(x,t) = h(x, \varphi(t))$, где бесконечно гладкая функция $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$ равна $0$ при $t \leqslant \varepsilon$ и равна $1$ при $t \geqslant 1-\varepsilon$.

*Задача* 7.13. Докажите, что гладкая гомотопность является отношением эквивалентности между гладкими отображениями многообразий.

[[ Проверьте транзитивность, определив для данных гомотопий $h_1(x,t)$ и $h_2(x,t)$ при условии $h_1(x,1) \equiv h_2(x,0)$ новую гомотопию $h_3(x,t)$, равную $h_1(x,2t)$ при $t \leqslant 1/2$ и $h_2(2t-1)$ при $t \geqslant 1/2$. Обоснуйте её гладкость. ]]

*Задача* 7.14. Постройте гомотопию между тождественным отображением $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ и отображением $x \mapsto -x$ на той же сфере.

[[ Используйте отождествление $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$. ]]

Следующее утверждение показывает, как отличаются обратные образы дифференциальной формы при двух гомотопных друг другу отображениях.

**Теорема 7.15** (Цепная гомотопия для гладких отображений и дифференциальных форм). *Если два отображения $f_0, f_1 : M \to N$ гладко гомотопны, то для любой дифференциальной формы $\alpha \in \Omega^k(N)$ выполняется*

$$f_1^*\alpha - f_0^*\alpha = H(d\alpha) + d(H(\alpha))$$

*для некоторой линейной операции $H : \Omega^k(N) \to \Omega^{k-1}(M)$.*

*Доказательство.* Рассмотрим форму $h^*\alpha$ на цилиндре $M \times [0,1]$, на самом деле операция $H$ будет по сути происходить на цилиндре и заключаться в некотором интегрировании $h^*\alpha$ или $h^*d\alpha = dh^*\alpha$ по переменной $t$.

Для дифференциальных форм на цилиндре, делящихся на $dt$, положим

$$I(dt \wedge \beta(x,t)) = \int_0^1 \beta(x,t)\ dt,$$

а для дифференциальных форм, не делящихся на $dt$, положим $I(\beta(x,t)) = 0$. Получается операция $I : \Omega^k(M \times [0,1]) \to \Omega^{k-1}(M)$, так как результат интегрирования уже не будет зависеть от $t$ и не будет делиться на $dt$.

Посмотрим, как действует $Id + dI$ на формы, делящиеся на $dt$

$$dI(dt \wedge \beta(x,t)) = d\int_0^1 \beta(x,t)\ dt = d_x \int_0^1 \beta(x,t)\ dt = \int_0^1 d_x\beta(x,t)\ dt,$$

где через $d_x$ обозначен модифицированный дифференциал, который дифференцирует только по координатам $M$, но не дифференцирует по переменной $t$. Мы воспользовались здесь дифференцированием под знаком интеграла. Далее,

$$I(d(dt \wedge \beta(x,t))) = -\int_0^1 d_x\beta(x,t)\ dt = -\int_0^1 d_x\beta(x,t)\ dt.$$

То есть $Id + dI$ даёт нуль на формах, делящихся на $dt$. Посмотрим теперь, как $Id + dI$ действует на форму $\beta(x,t)$, не делящуюся на $dt$:

$$dI(\beta) = 0,$$

$$I(d\beta) = I\left(dt \wedge \frac{\partial\beta(x,t)}{\partial t}\right) + I(d_x\beta(x,t)) = \int_0^1 \frac{\partial\beta(x,t)}{\partial t}\ dt = \beta(x,1) - \beta(x,0).$$

В итоге только для формы $\beta$, не делящейся на $dt$, мы имеем ненулевое значение

$$I(d\beta(x,t)) + d(I(\beta(x,t))) = \beta(x,1) - \beta(x,0),$$

равенство понимается в том смысле, что в левой части стоят формы, не зависящие от $t$ и не делящиеся на $dt$, которые можно считать дифференциальными формами на $M$.

Полученные формулы можно переформулировать следующим образом. Операция $Id+dI$ из любой формы $\alpha \in \Omega^k(M \times [0,1])$ делает форму на $M$, являющуюся разностью $i_1^*\alpha - i_0^*\alpha$, где $i_0, i_1 : M \to M \times [0,1]$ — это вложения нижнего и верхнего края цилиндра в цилиндр.

Утверждение теоремы теперь следует, если заметить, что

$$f_0 = h \circ i_0, \quad f_1 = h \circ i_1,$$

и положить $H = I \circ h^*$. ☐

*Задача* 7.16. Проверьте, что разложение формы $\alpha$ на $M\times[0,1]$ в сумму форм, одна из которых делится на $dt$, а другая — нет, не зависит от замены координат на многогобразии $M$.

[[ Можно проверить действие замены координат непосредственно. Также можно воспользоваться внутренним умножением, определяемым далее в разделе 7.6, проверить формулу $\alpha = dt\wedge i_{\frac{\partial}{\partial t}}\alpha + i_{\frac{\partial}{\partial t}}(dt\wedge\alpha)$ и проверить, что она даёт нужное разложение. ]]

**Определение 7.17.** Если две дифференциальные формы $\alpha_1,\alpha_2$ отличаются на $d\beta$ (точную форму), то говорят, что $\alpha_1$ и $\alpha_2$ *гомологичны*.

Напомним, что при определении интеграла формы с компактным носителем (и в формуле Стокса) мы обнаружили, что для гомологичных форм интегралы совпадают (но правда тогда гомологичность тоже была с компактным носителем). Замкнутые формы с точностью до гомологичности дают полезные векторные пространства:

**Определение 7.18.** *Когомологии де Рама* гладкого многообразия $M$ — это факторпространства

$$H^k_{DR}(M)=\left(\ker d:\Omega^k(M)\to\Omega^{k+1}(M)\right)/\left(\operatorname{Im} d:\Omega^{k-1}(M)\to\Omega^k(M)\right).$$

В степени $k=0$ в этом определении мы считаем

$$d:\Omega^{-1}(M)=0\to\Omega^0(M)=C^\infty(M)$$

нулевым отображением, и тогда $H^0_{DR}(M)$ состоит из функций $f\in C^\infty(M)$, таких что $df=0$ — то есть локально постоянных функций. Отсюда следует, что $H^0_{DR}(M)$ — это векторное пространство той размерности, сколько компонент связности у многообразия $M$, при конечном количестве компонент, а при бесконечном количестве компонент — двойственное к векторному пространству размерности, равной числу компонент.

Менее формально можно сказать, что когомологии де Рама измеряют, насколько задача нахождения первообразной замкнутой формы может оказаться нерешаемой. Если $H^k_{DR}(M)=0$, то для всех замкнутых форм степени $k$ на $M$ найдутся первообразные, то есть все они будут точными.

Для гладкого отображения $f:M\to N$ и некоторой формы $\alpha\in\Omega^k(N)$ при условии $d\alpha=0$ оказывается верным $df^*\alpha=0$. При условии $\alpha=d\beta$ для некоторой $\beta\in\Omega^{k-1}(N)$ оказывается верно $f^*\alpha=df^*\beta$. Иначе говоря, замкнутые формы переходят в замкнутые, а точные переходят в точные. Следовательно, любое гладкое отображение $f$ порождает отображение $f^*:H^k_{DR}(N)\to H^k_{DR}(M)$. Из теоремы о цепной гомотопии выводится важное свойство этого отображения:

**Следствие 7.19.** *Если два отображения $f_0,f_1:M\to N$ гладко гомотопны и для некоторой $\alpha\in\Omega^k(N)$ оказалось, что $d\alpha=0$, то найдётся $\beta\in\Omega^{k-1}(M)$, такая что $f_1^*\alpha-f_0^*\alpha=d\beta$. Следовательно $f_1^*\alpha$ и $f_2^*\alpha$ гомологичны, иначе говоря, отображения $f_0^*,f_1^*:H^k_{DR}(N)\to H^k_{DR}(M)$ совпадают.*

*Доказательство.* Достаточно взять соответствующую цепную гомотопию $H$ и положить $\beta=H(\alpha)$. ☐

Полученная гомотопическая инвариантность когомологий де Рама позволяет их посчитать в некоторых ситуациях, которые не сложны, но полезны на практике.

**Теорема 7.20** (Лемма Пуанкаре). *$H^k_{DR}(\mathbb{R}^n)=0$ при $k\neq 0$ и $H^0_{DR}(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}$.*

*Доказательство.* Легко построить гомотопию между тождественным отображением $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ и постоянным отображением $g$ всего $\mathbb{R}^n$ в начало координат. При этом $f^*$ даёт тождественное отображение когомологий де Рама на себя, а $g^*$ отображает функции в константы (их значение в нуле), обнуляя дифференциальные формы положительных степеней. Так как оба отображения в когомологиях действуют одинаково, то когомологии $\mathbb{R}^n$ положительной степени должны быть равны нулю, а нулевой степени — совпадать с одномерным пространством констант. ☐

Лемма Пункаре с тем же доказательством верна для любой выпуклой области $U \subseteq \mathbb{R}^n$, то есть по сути она означает, что задача поиска первообразной для замкнутой формы всегда имеет решение локально. Глобальная ситуация может отличаться, как например в рассмотренном выше примере с формами первой степени на плоскости с выброшенным началом координат.

Название «когомологии» возникло из того, что когомологии (например, де Рама) являются двойственными к *гомологиям* $H_*(M;\mathbb{R})$. В первом (и не вполне корректном) приближении $k$-мерные гомологии $M$ можно рассматривать как вложенные компактные ориентированные $k$-мерные подмногообразия $M$ без края. Отношение гомологичности двух таких подмногообразий $Z_0, Z_1$ (снова лишь в первном приближении) можно рассматривать как возможность найти $(k+1)$-мерное вложенное ориентированное компактное подмногообразие с краем $W$, для которого $\partial W$ является объединением $Z_0$ и $Z_1$, причём $\partial W$ даёт на $Z_1$ правильную ориентацию, а на $Z_0$ — обратную. При этом двойственность между гомологиями и когомологиями даёт интегрирование формы по подмногообразию с учётом формулы Стокса.

Настоящее определение гомологий отличается от приведённого выше наброска следующими моментами: а) рассматриваются не только подмногообразия, но и их формальные комбинации с действительными (или целыми) коэффициентами; б) вместо вложений подмногообразий рассматриваются произвольные отображения компактных ориентированных многообразий в данное многообразие; в) у отображаемых многообразий приходится разрешить некоторую негладкость (иначе мы определим не гомологии, а *бордизмы*) — это самый существенный момент, который мы не будем далее обсуждать и отсылаем читателя к любому учебнику по алгебраической топологии, например [13].

Важный факт (который можно найти в соответствующих учебниках) заключается в том, что гомологии (и когомологии) компактного многообразия (возможно с краем) оказываются конечномерными векторными пространствами (или конечно порождёнными группами), и таким образом представляют некоторую полезную информацию о его топологии в конечном и обычно явно вычислимом виде.

*Задача* 7.21. Придумайте форму $\alpha \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, у которой $d\alpha = 0$ и для которой не существует $\beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, такой что $d\beta = \alpha$.

[[ Постарайтесь придумать замкнутую $\alpha$ так, чтобы её интеграл по единичной сфере был ненулевым. Тогда отсутствие «первообразной» будет следовать из формулы Стокса. ]]

*Задача* 7.22. Докажите, что при условии $d\alpha = 0$ для $\alpha \in \Omega^1(M)$ интеграл по кривой $\int_\gamma \alpha$ можно определить для непрерывных кривых без требования дифференцируемости.

[[ Утверждение станет локальным, если определённая нами величина будет аддитивна по кривым. Поэтому сначала можно работать в $U \subseteq \mathbb{R}^n$ и считать, что $\alpha = du$. Тогда интеграл можно определить как разность потенциалов в конце и в начале. ]]

*Задача* 7.23. * Докажите, что для произвольной $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ можно корректно определить интеграл по не обязательно дифференцируемой кривой $\gamma$ в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условию Гёльдера

$$|\gamma(t') - \gamma(t'')| \leqslant C|t' - t''|^\alpha$$

с показателем $\alpha > 1/2$.

[[ Приближайте кривую всё более мелко вписанными в неё ломаными и докажите, что интегралы по ломаным составляют фундаментальную последовательность. ]]

*Задача* 7.24. * Для не обязательно компактного многообразия без края $M$ рассмотрим дифференциальные формы с компактным носителем $\Omega^*_c(M)$ и определим *когомологии де Рама с компактным носителем*

$$H^k_c(M) = \left(\ker d : \Omega^k_c(M) \to \Omega^{k+1}_c(M)\right) / \left(\operatorname{Im} d : \Omega^{k-1}_c(M) \to \Omega^k_c(M)\right).$$

Докажите, что если $n = \dim M$, $M$ ориентируемо и связно, то $H^n_c(M)$ одномерно. Что будет, если $M$ связно, но не ориентируемо?

[[ Лемма 6.114 доказывает это для $\mathbb{R}^n$, модифицируйте доказательство для произвольного связного $M$. ]]

*Задача* 7.25. ** Докажите, что $H^k_c(\mathbb{R}^n) = 0$ при $k \neq n$ и $H^n_c(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$.

[[ Для случая $k = 0$ утверждение делается вручную. В остальных случаях заметьте, что цепная гомотопия с сохранением компактности носителя возможна для *собственных* отображений и гомотопий, то есть отображений и гомотопий с компактными прообразами компактов. Отсюда следует, что $\alpha \in \Omega^k_c(\mathbb{R}^n)$ гомологична с компактным носителем форме $f^*\alpha$, где $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — любое гладкое собственное отображение, гомотопное тождественному с помощью гладкой собственной гомотопии.

Один из вариантов дальнейшего рассуждения: вывести гомологичность $\alpha$ с компактным носителем её усреднению по всевозможным вращениям $\mathbb{R}^n$ вокруг начала координат и изучить формы степени $k$, инвариантные относительно вращений. ]]

7.3. **Критические и регулярные значения, теорема Сарда.** Рассматривая некоторую гладкую функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, мы можем поинтересоваться, для каких значений $y \in \mathbb{R}$ уравнение $f(x) = y$ определяет вложенное многообразие. Теоремы об обратном отображении или о неявной функции гарантируют, что это выполняется в том случае, если во всех точках этого множества дифференциал $df$ не равен нулю. В более общей формулировке, для $m$ функций, то есть для отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, множество решений системы уравнений $\{f(x) = y\}$ гарантированно будет вложенным $(n-m)$-мерным многообразием, если в каждой его точке дифференциалы $df_1, \dots, df_m$ будут линейно независимы, или эквивалентно, производная отображения $Df$ будет иметь ранг $m$. Именно такие ограничения мы уже накладывали в ситуации поиска условного экстремума.

Мы собираемся установить замечательное свойство — в приведённых примерах при почти всех $y$ выполняется ровно то, что нам нужно, и множество $\{f(x) = y\}$ является вложенным многообразием. Перейдём к рассуждениям в терминах отображений между многообразиями, так как это не вносит никаких усложнений, но позволяет рассмотреть много разных случаев единообразно. А именно, будем рассматривать гладкое отображение $f : N \to M$ между гладкими многообразиями и сделаем определение.

**Определение 7.26.** Точка $p \in N$ называется *критической точкой* гладкого отображения $f : N \to M$, если $Df_p$ не является сюръективным. Если для точки $q \in M$ найдётся критическая $p \in N$, такая что $q = f(p)$, то $q$ называется *критическим значением* отображения $f$. Не критическое значение $q \in M$ называется *регулярным значением*.

В некоторой окрестности $U$ регулярного значения $q \in M$ отображения $f : N \to M$ есть локальная система координат $y_1, \dots, y_m$. Если координаты сдвинуты так, что $y_i(q) = 0$ для любого $i$, то прообраз точки $Z = f^{-1}(q)$ в многообразии $N$ выделяется уравнениями $\{y_i \circ f = 0\}_{i=1}^m$ в своей окрестности $f^{-1}(U)$. Сюръективность $f_*$ в точках $Z$ означает инъективность $f^* : \Omega^1(M) \to \Omega^1(N)$ там же, следовательно дифференциалы

$$d(y_i \circ f) = dy_i \circ Df = f^*(dy_i)$$

линейно независимы и $Z$ является вложенным подмногообразием $N$ (определение подмногообразия, вложенного в другое многообразие, аналогично определению вложенного подмногообразия в евклидовом пространстве).

Посмотрим на некоторые частные случаи этих понятий. Если размерность $N$ равна нулю, а размерность $M$ положительна, то любая точка $N$ по этому определению оказывается критической. Если же обе размерности нулевые, то любая точка отображения будет считаться регулярной. Также ясно, что при $\dim N < \dim M$ все точки $N$ критические для любого $f : N \to M$, а всё множество $f(N) \subset M$ состоит из критических значений, регулярны только значения из $M \setminus f(N)$. Для функции $f : N \to \mathbb{R}$ критическая точка — это точка, в которой её дифференциал обращается в нуль, именно такие точки мы считаем подозрительными на экстремум.

*Задача* 7.27. Опишите критические и регулярные значения функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.

Также нам понадобится определение множества лебеговой меры нуль в произвольном многообразии. Конечно, формула замены переменных в кратном интеграле показывает, что лебегова мера в общем не инвариантна относительно замены переменных. Поэтому мы будем говорит только о нулевой мере подмножества.

**Определение 7.28.** *Множество лебеговой меры нуль* в многообразии $M$ — это множество, пересечение которого с областью определения любой координатной карты $M$ в образе карты имеет меру нуль.

Формула меры образа (6.15) при гладкой замене координат тогда показывает, что множество меры нуль (в евклидовом пространстве) переходит в множество меры нуль при гладкой замене координат. Значит, свойство подмножества $X$ многообразия $M$ иметь лебегову меру нуль достаточно проверить не во всех возможных картах, а лишь в любом атласе, который покрывает многообразие $M$. Такой атлас можно считать счётным в силу счётности базы топологии $M$. В других картах многообразия $M$ образ $X$ будет иметь меру нуль в силу формулы меры образа и счётной аддитивности меры Лебега. Заметим также, что по определению объединение счётного количества множеств лебеговой меры нуль будет само иметь лебегову меру нуль.

В нульмерном многообразии будем считать по определению множеством лебеговой меры нуль пустое множество. Теперь мы готовы сделать важное утверждение про регулярные точки отображения.

**Теорема 7.29** (Теорема Сарда). *Для бесконечно гладкого отображения $f : N \to M$ между многообразиями множество критических значений $f$ имеет меру нуль в $M$, то есть почти все точки $M$ являются регулярными значениями $f$.*

*Доказательство.* Пусть $\dim N = n, \dim M = m$, мы будем применять индукцию по обоим размерностям (иначе говоря, по их сумме), читатель может проверить базу индукции в случае $n = 0$ самостоятельно исходя из приведённых выше комментариев про нульмерный случай.

Мы в основном будем действовать локально. А именно, для любой точки $x \in N$ мы хотели бы доказать, что у неё есть окрестность $U \ni x$ такая, что образ множества критических точек из этой окрестности имеет меру нуль в $M$. Тогда такие окрестности покрывают всё многообразие $N$, из этого покрытия можно выбрать счётное подпокрытие (проверьте это с использованием счётной базы топологии $M$) и утверждение для всего многообразия следует из счётной аддитивности меры Лебега. На самом деле далее в процессе доказательства мы будем применять рассуждение со счётностью базы не только к $N$, но и к его подмножествам.

Множество критических точек $C \subset N$ снабдим системой убывающих замкнутых подмножеств $C \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$, где множество $C_k$ состоит из тех точек $x \in N$, в которых у компонент отображения $f$ обнуляются все частные производные порядка до $k$ включительно (проверьте, что это определение не зависит от системы координат).

Шаг 0: Если $x \notin C$, то у неё есть окрестность $U \ni x$, состоящая полностью из регулярных точек, тогда требуемое утверждение очевидно.

Шаг 1: Если $x \in C \backslash C_1$. Работая локально мы можем предположить, что одна из производных координатного представления $f$ всё же не обратилась в нуль в точке $x$, которая нас интересует. Пусть без ограничения общности компонента отображения $f_1$ имеет ненулевой дифференциал. Тогда в некоторой окрестности $U \ni x$ можно сделать замену переменных в $N$ так, чтобы $f_1$ стала просто одной из координат, тогда отображение будет удовлетворять равенству $y_1 = x_1$. В таком случае окрестность $x$ отображается с сохранением первой координаты и в каждом слое $x_1 = c$ у нас возникает отдельное гладкое отображение $f_c$ в слой $y_1 = c$. Посмотрев на матрицу производных мы можем заключить, что критические точки $f$ содержатся в объединении критических точек $f_c$ во всех слоях. Применяя предположение индукции мы видим, что критические значения отображения $f_c$ в каждом слое дают множество меры нуль. Используя теорему Фубини мы заключаем, что критические значения $f(C \cap U)$ тоже имеют меру нуль.

После первого шага с учётом рассуждения со счётной базой многообразия $N \setminus C_1$ мы уже доказали, что $f(C \setminus C_1)$ имеет меру нуль.

Шаг 2 (на самом деле несколько шагов): Если $x \in C_k \setminus C_{k+1}$. Пусть в точке $x$ обнулились все $k$-е производные компонент отображения $f$, но какая-то $(k+1)$-я производная не обнулилась. Тогда без ограничения общности пусть $w$ — какая-то из $k$-х производных компонент $f$ и её дифференциал не нулевой. Сделав в некоторой окрестности $U \ni x$ замену координат, можно считать $w = x_1$. Множество $C_k$ в пересечении с $U$ полностью лежит в гиперплоскости $x_1 = 0$, ведь $w$ там должна обращаться в нуль. Пусть $f_0$ — ограничение $f$ на гиперплоскость $\{x_1 = 0\}$. Тогда тривиально, что $C_k \cap U$ содержится в множестве критических точек $f_0$, а образ $f(C_k \cap U)$ — в множестве критических значений $f_0$. По предположению индукции мера критических значений $f_0$ нулевая, значит мера $f(C_k \cap U)$ — тоже нулевая. По результатам шага 1 или шага 2 с меньшим значением $k$, а также с учётом рассуждения со счётной базой многообразия $N \setminus C_k$, мы на самом деле имеем, что образ $f(C \setminus C_k)$ имеет меру нуль и выводим, что образ $f(C \setminus C_{k+1})$ тоже имеет меру нуль.

Теперь после нескольких описанных выше шагов мы уже доказали, что при любом натуральном $k$ образ множества

$$C \setminus C_k = (C \setminus C_1) \cup \dots \cup (C_{k-1} \setminus C_k)$$

имеет меру нуль. Докажем теперь, что при $k > n/m - 1$ мера множества $f(C_k)$ равна нулю. Как и ранее, нам достаточно доказать для любой точки $x \in C_k$ найдётся окрестность $U \ni x$ с нулевой мерой $f(C_k \cap U)$. В качестве $U$ в какой-то координатной карте возьмём окрестность $x$ с компактным замыканием, на которой $(k+1)$-е производные $f$ ограничены. Порежем $U$ на не более $A\varepsilon^{-n}$ кубиков диаметра не более $\varepsilon$ ($A$ — некоторая зависящая только от $U$ константа). Те из них, что пересекаются с $C_k$, будут иметь образы диаметра не более $B\varepsilon^{k+1}$ (из разложения по формуле Тейлора координат отображения, $B$ — некоторая другая константа, зависящая от $U$ и $f$). Следовательно, суммарная мера образа объединения тех кубиков, которые покрывают $C_k$, будет не более

$$A\varepsilon^{-n}B^m\varepsilon^{m(k+1)} = AB^m\varepsilon^{m(k+1)-n}.$$

Так как $m(k+1) - n > 0$, то при уменьшении $\varepsilon$ мы оцениваем меру $f(C_k \cap U)$ сверху сколь угодно малым числом. Следовательно, $f(C_k \cap U)$ имеет меру нуль, и в целом $f(C_k)$ имеет меру нуль.

В итоге доказано, что мера множества критических значений $f$ равна нулю. ☐

*Задача* 7.30. В теореме Сарда сначала следовало бы проверить, что множество критических значений измеримо. Докажите, что оно является объединением счётного числа замкнутых множеств.

[[ Представьте $N$ в виде объединения счётной последовательности компактных многообразий (с краем), и покажите, что для каждого из них множество критических точек замкнуто, а значит и множество соответствующих критических значений в $M$ — тоже. ]]

Как уже было отмечено в начале раздела, из теоремы Сарда следуют важные факты. При $\dim N < \dim M$ образ $f(N)$ по определению состоит только из критических значений и имеет меру нуль в $M$. В случае $\dim N \geqslant \dim M$ для почти всех точек $y \in M$ множество $f^{-1}(y)$, *слой отображения*, является вложенным подмногообразием в $N$ размерности $n - m$ (возможно пустым).

Важный вопрос: как меняется слой при изменении точки $y$ в связном $M$? В следующем разделе мы изучаем случай $n = m$, когда слой отображения над регулярным значением является нульмерным многообразием, то есть дискретным набором точек. А пока предлагаем задачи, которые можно решить без теоремы Сарда, но с её помощью они решаются намного проще.

*Задача* 7.31. Докажите, что множество матриц с единичным детерминантом $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ является гладким подмногообразием в пространстве матриц $n \times n$, рассматриваемом как $\mathbb{R}^{n^2}$.

[[ Рассмотрите положительное регулярное значение функции детерминанта матрицы, масштабируйте множество соответствующих ему матриц. ]]

*Задача* 7.32. Докажите, что множество ортогональных матриц $\mathrm{O}(n)$ является гладким подмногообразием в пространстве матриц $n \times n$, рассматриваемом как $\mathbb{R}^{n^2}$.

[[ Рассмотрите отображение $X \mapsto X^T X$ пространства всех матриц в пространство симметричных положительно полуопределённых матриц и его положительно определённое регулярное значение. Покажите, что слой над каким-то регулярным значением диффеоморфен слою над единичной матрицей. ]]

7.4. **Степень гладкого отображения.** В этом разделе мы определим гомотопический инвариант отображений между многообразиями равных размерностей (с некоторыми дополнительными ограничениями). Как станет ясно чуть позже, это понятие даёт геометрический взгляд на величины, которые можно (в некоторых случаях) иначе определить с помощью когомологий де Рама.

**Определение 7.33.** Если $f : N \to M$ — гладкое отображение ориентированных многообразий одной и той же размерности, многообразие $N$ компактно, и $y$ — регулярное значение $f$, *степенью отображения в точке* $y$ называется число точек в прообразе $f^{-1}(y)$, для которых якобиан $Jf_x$ положителен минус число точек в прообразе $f^{-1}(y)$, у которых якобиан отрицателен. В случае отсутствия ориентации хотя бы одного многообразия степень определена по модулю 2 как чётность количества точек в прообразе $f^{-1}(y)$.

Из условия того, что $y$ — регулярное значение, следует, что множество $f^{-1}(y)$ состоит из изолированных точек (то есть это *дискретное множество*). В случае компактного

$N$ число точек в $f^{-1}(y)$ должно оказаться конечным, так как дискретное компактное множество конечно. Также множество $f^{-1}(y)$ окажется конечным в случае *собственного отображения* $f$, то есть отображения, для которого прообраз любого компакта является компактом. Далее мы рассматриваем случай компактного $N$, но утверждения про степень отображения остаются верными для некомпактных $N$, собственных отображений и собственных гомотопий между отображениями.

**Лемма 7.34.** *Если $f : N \to M$ — гладкое отображение ориентированных многообразий без края одной и той же размерности, многообразие $N$ компактно, и $y$ — регулярное значение $f$, то найдётся окрестность $U \ni y$, такая что все $y' \in U$ регулярны и степени $f$ во всех $y' \in U$ равны его степени в $y$. В случае отсутствия ориентации в $N$ мы просто утверждаем независимость количества точек в $f^{-1}(y')$ от $y'$ при $y' \in U$.*

*Доказательство.* Пусть $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_N\}$, это конечное множество, так как оно дискретно и компактно, в том числе оно может быть пустым. По теореме об обратном отображении у каждого $x_i$ есть окрестность $V_i$, такая что $f$ в сужении на неё является диффеоморфизмом на $U_i \ni y$. Возьмём в качестве $U$ пересечение всех $U_i$ и обозначим $W_i = f^{-1}(U) \cap V_i$. Тогда $f$ даёт диффеоморфизмы каждого $W_i$ на $U$.

Предположим, что прообраз $f^{-1}(U)$ содержит что-то, не входящее в объединение множеств $W_i$. Если это так, попытаемся уменьшить $U$ так, чтобы прообраз $f^{-1}(U)$ содержался в объединении $\bigcup_i W_i$. Если так не получается, то мы получим последовательность точек $(y_k) \subset M$ и $(\xi_k) \subset N$, так что $f(\xi_k) = y_k$, $y_k \to y$, но $\xi_k \notin \bigcup_i W_i$. Переходя к подпоследовательности, мы можем считать, что $\xi_k \to \xi \in N$ из компактности. Но тогда получается, что $\xi \notin \bigcup_i W_i$, и значит $\xi$ не равно ни одному из $x_1, \dots, x_N$, однако же по непрерывности $f(\xi) = y$ — противоречие.

Полученное противоречие показывает, что после уменьшения $U$ и соответственного уменьшения каждого $W_i$ прообраз $U$ будет равен несвязному объединению открытых множеств $\bigcup_i W_i$, для каждого $W_i$ отображение $f$ будет устанавливать его диффеоморфизм на $U$. Следовательно, структура прообраза точки $y' \in U$ не зависит от $y'$, все такие $y'$ регулярны, знаки якобианов в прообразе $y'$ не меняются по непрерывности, если мы выбрали $U$ связной, и степень отображения во всех $y' \in U$ тоже одна и та же. ☐

*Задача* 7.35. Докажите, что без предположения о компактности $N$ или собственности отображения $f$ предыдущая лемма неверна.

[[ Постройте контрпример из одномерных многообразий и отображений между ними. ]]

**Теорема 7.36** (Гомотопическая инвариантность степени отображения)**.** *Пусть многообразие $N$ компактное без края, $M$ — не обязательно компактное без края, $h : N \times [0,1] \to M$ — гладкая гомотопия, а точка $y \in M$ такова, что она является регулярным значением для $h_0$ и $h_1$. Тогда степени отображений $h_0$ и $h_1$ в точке $y$ равны. Если оба многообразия ориентированы, то степень считается со знаком, иначе она считается как чётность.*

*Доказательство.* По лемме точку $y$ можно шевелить в рамках какой-то её окрестности, оставляя её регулярной для $h_0$ и $h_1$ и не меняя структуру прообразов $h_0^{-1}(y)$ и $h_1^{-1}(y)$, в частности не меняя степени. Тогда, используя теорему Сарда, сдвинем точку $y$ в точку, являющуюся регулярным значением для $h$ как отображения $N \times [0,1] \to M$, не меняя степеней $h_0$ и $h_1$ в точке.

Следуя замечанию после определения 7.12, нам будет удобно считать гомотопию гладко определённой при всех $t$, но не зависящей от $t$ в диапазоне $t \leqslant 0$ и в диапазоне $t \geqslant 1$. Тогда мы сможем считать $y$ также регулярным значением для расширенной гомотопии $h : N \times \mathbb{R} \to M$. Прообраз $h^{-1}(y)$ в $N \times \mathbb{R}$ будет одномерным многообразием, а его пересечение с $N\times[0,1]$ тогда будет одномерным компактным многообразием с краем (край возникнет на пересечении с $t=0$ и $t=1$), к тому же несущим соответствующую ориентацию, если у нас были ориентации на $N$ и на $M$. В локальных координатах $x_1,\dots,x_n,t$, где $x_1,\dots,x_n$ подняты с $N$, одномерное многообразие $h^{-1}(y)$ будет перпендикулярно $N\times\{0\}$ и $N\times\{1\}$ в тех его точках, где $t$ равно 0 или 1, так как гомотопия не зависит от $t$ при $t\leqslant 0$ или $t\geqslant 1$.

Одномерное компактное многообразие является набором отрезков и окружностей (см. задачу 6.147), то есть кривых в $N\times[0,1]$. Окружности не пересекают край $N\times[0,1]$ и не вносят вклада в определение степени. Концы отрезков (концов всего чётное число) в точности дают все точки в $h_0^{-1}(y)$ и $h_1^{-1}(y)$. Это уже доказывает равенство степени по модулю два. При наличии ориентации можно взять параметр $s\in[0,1]$ на отрезке $S\subseteq f^{-1}(y)$ за одну координату и продолжить её гладко на окрестность $S$ (читатель может аккуратно обосновать продолжение через разбиение единицы). Другие $n$ координат $y_1,\dots,y_n$ вокруг $S$ поднимем с координатной окрестности $y$ в $M$ с помощью отображения $h$. Так как отрезок $S$ связен, то либо в любой его точке система координат $s,y_1,\dots,y_n$ является положительной относительно ориентации $N\times[0,1]$, либо в любой его точке она является отрицательной. Рассмотрим первый случай без ограничения общности.

По нашему выбору, на конце отрезка, для которого $t=0$ или $t=1$, знак якобиана замены $t,x_1,\dots,x_n$ на $s,y_1,\dots,y_n$ положителен, если $x_1,\dots,x_n$ — положительная система координат на $N$ в окрестности этой точки. Так как производные координат на $M$ по $t$ в этой точке равны нулю (так как у нас гомотопия продолжалась гладко в области $t<0$ и $t>1$ и не зависела там от $t$), то знак якобиана замены $x_1,\dots,x_n$ на $y_1,\dots,y_n$ будет равен знаку $\frac{\partial s}{\partial t}$. То есть вклад в определение степени $h_0$ или $h_1$ в этой точке равен знаку $\frac{\partial s}{\partial t}$. Следовательно, $S$ либо соединяет точку $h_0^{-1}(y)$ с точкой $h_1^{-1}(y)$ с одинаковым знаком якобиана отображений $h_0$ и $h_1$ на концах, либо соединяет пару точек в $h_0^{-1}(y)$ с разными знаками $Jh_0$, либо соединяет пару точек в $h_1^{-1}(y)$ с разными знаками якобиана $Jh_1$. Таким образом, подсчёт в ориентированном случае тоже даёт равенство степеней. ☐

Для доказательства независимости степени от выбора точки $y\in M$ нам понадобится доказать, что «все точки связного многообразия равноправны». Более формально, нам потребуется следующее определение и лемма.

**Определение 7.37.** Семейство диффеоморфизмов $h_t : N\to M$ назовём *изотопией*, если оно гладко зависит и от параметра $t$, то есть даёт гладкое отображение

$$h : N\times[0,1]\to M.$$

Как и в определении 7.12, мы опять будем делать техническое предположение, что $h_t$ гладко продолжается на все значения $t$ по формуле $h_t=h_0$ при $t<0$ и $h_t=h_1$ при $t>1$. Иначе можно сказать, что изотопия — это гладкая гомотопия (определение 7.12) между диффеоморфизмами в классе диффеоморфизмов.

**Лемма 7.38.** *Если многообразие $M$ связное, без края и $x,y\in M$, то существует изотопия $h_t : M\to M$ такая, что $h_0$ является тождественным отображением и $h_1(x)=y$.*

*Доказательство.* Достаточно работать в окрестности и показать возможность «сдвинуть» изотопно $x$ в любую близкую точку так, чтобы носитель изотопии (множество точек где $h_t(x)\neq x$) остался в этой окрестности. Действительно, если изотопия $h'$ сдвигает $x$ в $x'$, а изотопия $h''$ сдвигает $x'$ в $x''$, то изотопия

$$h_t=h''_t\circ h'_t$$

равна тождественному отображению при $t = 0$ и сдвигает $x$ в $x''$ при $t = 1$. Кроме того, если изотопия $h_t$ сдвигает $x$ в $x'$, то изотопия

$$h'_t = (h_t)^{-1}$$

равна тождественному отображению при $t = 0$ и сдвигает $x'$ в $x$ при $t = 1$. Тогда при возможности сдвинуть изотопией любую точку $x' \in N$ в любую точку $x''$ в некоторой окрестности $U_{x'} \ni x'$, множество точек, в которые можно сдвинуть изотопией данную $x \in M$, открыто. Множество точек, в которую $x$ нельзя сдвинуть изотопией, тоже открыто. Из связности $M$ будет следовать, что $x \in M$ можно сдвинуть в любую другую точку $M$.

В одномерном случае требуемую локальную изотопию можно построить «на картинке» или с помощью явной формулы типа

$$g_t(x) = x + t\varphi(x),$$

где $\varphi$ имеет маленький носитель около нуля, положительное значение в нуле и производную $|\varphi'(x)| < 1$; пусть $g_1(0) = a \neq 0$. Для размерности $n$ в окрестности нуля положим

$$h_t(x_1, \dots, x_n) = (g_{t\psi(x_2,\dots,x_n)}(x_1), x_2, \dots, x_n),$$

где $\psi(x_2, \dots, x_n)$ равна единице в нуле и равна нулю за пределами малой окрестности нуля. Можно проверить, что построенная изотопия сдвигает начало координат в точку $(a, 0, \dots, 0)$, диффеоморфно двигая при этом её окрестность. Так можно сдвигать начало координат изотопией на немного в любом направлении и окрестность нуля будет таким образом достижима композицией не более $n$ таких изотопий. ☐

**Теорема 7.39** (Корректность определения степени отображения). *Степень отображения $f : N \to M$ для связного многообразия без края $M$ и компактного многообразия без края $N$ не зависит от выбора регулярного значения в $M$. Если оба многообразия ориентированы, то степень считается со знаком, иначе она считается как чётность.*

*Доказательство.* Возьмём две регулярные точки $y', y'' \in M$ для отображения $f$. Рассмотрим, например, изотопию $h_t$ из леммы 7.38 с $h_0(y') = y'$ и $h_1(y'') = y'$. Построим гомотопию $g_t(x) = h_t \circ f$ и применим теорему 7.36 к $g_t$ и точке $y'$. Заметим, что при $t = 0$ мы получаем степень $g_0 = f$ в точке $y'$, а при $t = 1$ мы получаем степень $h_1 \circ f$ в точке $y'$, равную степени $f$ в точке $(h_1)^{-1}(y') = y''$. Последнее верно, так как диффеоморфизм $h_t$ при всех $t$ имеет положительные якобианы во всех точках (при наличии ориентации $M$), поэтому умножение слева на него не меняет знак степени, а количество точек в прообразе тем более не меняется. Следовательно, степени $f$ в $y'$ и $y''$ равны. ☐

Другой способ определить степень отображения (в случае наличия ориентаций) даёт следующая задача:

*Задача* 7.40. Пусть $f : N \to M$ — гладкое собственное отображение ориентированных многообразий без края одной и той же размерности $n$, причём $M$ связно. Докажите, что для любой формы $\omega \in \Omega^n_c(M)$ выполняется

$$\int_N f^*\omega = \deg f \cdot \int_M \omega.$$

[[ Посмотрите на $\omega$ с носителем в окрестности регулярного значения. Произвольную $\omega$ разбейте в сумму форм с маленькими носителями и с помощью леммы 6.114 сдвиньте их с критических значений на регулярные. ]]

*Задача* 7.41. Пусть $f : N \to M$ — гладкое отображение компактных ориентированных многообразий с краем одной и той же размерности, причём $f(\partial N) \subseteq \partial M$ и $M$ связно. Докажите, что в этом случае степень $f$ корректно определена и $\deg f = \deg f|_{\partial N}$.

[[ Можно рассуждать геометрически (заодно доказав вариант утверждения для чётностей при отсутствии ориентации), а можно использовать предыдущую задачу и формулу Стокса, модифицировав рассуждения для многообразий с краем. ]]

7.5. **Применения степени отображения.** Из доказанной в предыдущем разделе корректности определения степени отображения и её гомотопической инвариантности следуют разные полезные факты. Например, следующее утверждение:

**Следствие 7.42.** *Пусть $M$ — компактное многообразие без края положительной размерности. Тогда тождественное отображение* $\mathrm{id} : M \to M$ *не гомотопно постоянному отображению $M \to M$ в одну точку.*

*Доказательство.* Степень тождественного отображения равна единице, или единице по модулю два. Степень постоянного отображения многообразия положительной размерности равна нулю. ☐

*Задача* 7.43. Приведите пример компактного многообразия с краем положительной размерности, у которого тождественное отображение гомотопно постоянному.

С помощью понятия степени отображения мы докажем ещё один результат о неподвижных точках.

**Теорема 7.44** (Теорема Брауэра о неподвижной точке)**.** *Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ — некоторый замкнутый шар. Любое непрерывное отображение шара в себя $f : B \to B$ имеет неподвижную точку, то есть точку, в которой $f(x) = x$.*

*Доказательство.* Без ограничения общности будем считать шар единичным с центром в начале координат. Сначала сделаем технические процедуры, которые сведут вопрос к вопросу о гладких отображениях. Предположим противное, тогда $|f(x) - x| \geqslant 2\varepsilon > 0$ для любого $x \in B$ из компактности. Заменив $f(x)$ на $(1-\varepsilon)f(x)$ мы всё ещё будем иметь $|f(x)-x| \geqslant \varepsilon$ и образ $f$ будет содержаться в шаре радиуса $1-\varepsilon$. Теперь приблизим наше отображение гладким с точностью $\varepsilon/2$ (например, по теореме Стоуна–Вейерштрасса), образ шара $B$ всё ещё будет строго внутри шара и у нас всё ещё останется оценка $|f(x) - x| \geqslant \varepsilon/2$.

Теперь рассмотрим отображение сферы $S = \partial B$ в себя, заданное по формуле

$$g(x) = \frac{x - f(x)}{|x - f(x)|}.$$

Это гладкое отображение гомотопно тождественному через гомотопию (так как образ $f$ не пересекает сферу)

$$h_t(x) = \frac{x - tf(x)}{|x - tf(x)|}.$$

Также оно гомотопно постоянному отображению через гомотопию (так как $f(x) \neq x$ для любого $x$)

$$\tilde{h}_t(x) = \frac{tx - f(tx)}{|tx - f(tx)|}.$$

По теоремам 7.36 и 7.39 отображение $g$ имеет одновременно степень $0$ и $1$, что невозможно. ☐

Приведённое доказательство теоремы Брауэра демонстирует возможности понятия степени отображения, но есть способы доказать её чуть более элементарными способами. Например, доказательство теоремы Брауэра можно вывести из следующего утверждения:

**Теорема 7.45** (Отсутствие ретракции шара на его границу)**.** *Пусть сфера* $S^{n-1}$ *рассматривается как край шара* $B^n$*. Не существует непрерывного отображения* $f : B^n \to S^{n-1}$*, такого что* $f|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$.

*Доказательство.* Продолжим $f$ за пределы шара как тождественное отображение, тогда оно окажется непрерывным отображением $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Сгладим его свёрткой с функцией $\varphi$, имеющей носитель в шаре радиуса $1/2$, чтобы $f$ было приближено свёрткой $g = f * \varphi$ с точностью $1/2$. Тогда $g$ будет тождественным за пределами шара радиуса $3/2$ и его образ не будет пересекать открытого шара радиуса $1/2$.

Лемма 6.114 показывает, что $\dim H^n_c(\mathbb{R}^n) = 1$ и для любой формы $\nu \in \Omega^n_c(\mathbb{R}^n)$ выполняется

$$\int_{\mathbb{R}^n} g^*\nu = C_g \int_{\mathbb{R}^n} \nu$$

с некоторой константой $C_g$, зависящей только от $g$. Это верно, потому что левая часть является линейным функционалом на $H^n_c(\mathbb{R}^n)$ и должна быть пропорциональна интегралу $\nu$.

Взяв $\nu$ с носителем за пределами образа шара радиуса $3/2$, мы получим, что эта константа равна 1. Взяв $\nu$ с носителем в шаре радиуса $1/2$ мы получим, что интеграл слева равен нулю и константа равна нулю. Противоречие. ☐

Конечно, $C_f$ из предыдущего доказательства — это степень отображения $f$, как показывает задача 7.40. Но формально приведённое доказательство не опирается на понятие степени отображения.

*Задача* 7.46. Выведите теорему Брауэра из теоремы 7.45.

[[ Сделайте так, чтобы отображение $f : B^n \to B^n$ шло строго внутрь шара и постройте рektракцию, рассматривая прямые $[x, f(x)]$, которые все невырождены при условии отсутствия неподвижных точек. ]]

Некоторое развитие темы степени отображения и теоремы Брауэра содержится в следующих задачах.

*Задача* 7.47. Докажите, что любое выпуклое компактное множество $K \subset \mathbb{R}^n$ гомеоморфно шару некоторой размерности и для непрерывных отображений $f : K \to K$ тоже верна теорема Брауэра.

[[ Перейдите из $\mathbb{R}^n$ в аффинную оболочку $K$ (наименьшее аффинное подпространство, содержащее $K$). Заметьте, что в этой аффинной оболочке $K$ имеет непустую внутренность, поместите во внутренность начало координат, докажите, что для лучей из начала координат расстояние от начала координат до пересечения луча с $\partial K$ будет непрерывно зависеть от луча. После этого выпишете гомеоморфизм явно. ]]

*Задача* 7.48. Докажите, что для непрерывного отображения сферы в себя $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ либо найдётся $x$, такая что $f(x) = -x$, либо $f$ сюръективно.

[[ Попробуйте сделать гомотопию между $f$ и тождественным отображением кратчайшим поворотом от $f(x)$ к $x$. Используйте тот факт, что степень корректно определена для всего лишь непрерывных отображений. ]]

*Задача* 7.49. Докажите, что если степень непрерывного отображения $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ не равна $(-1)^{n-1}$, то $f$ имеет неподвижную точку $f(x) = x$.

[[ Рассмотрите отображение, действующее по формуле $g(x) = -f(x)$, и примените предыдущую задачу. ]]

*Задача* 7.50. Докажите, что если на сфере $\mathbb{S}^n$ есть всюду ненулевое касательное векторное поле, то $n$ должно быть нечётным.

[[ Один способ: построить из ненулевого векторного поля отображение сферы в себя без неподвижных точек, гомотопное тождественному. Другой способ: построить из ненулевого векторного поля гомотопию между тождественным отображением сферы и отображением $x \mapsto -x$. ]]

*Задача* 7.51. Приведите пример всюду ненулевого касательного векторного поля на сфере нечётной размерности.

[[ Рассмотрите сферу в $\mathbb{R}^{2n}$ как сферу в $\mathbb{C}^n$. ]]

*Задача* 7.52. Классифицируйте непрерывные отображения окружности в себя $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ с точностью до гомотопии.

[[ Рассмотрите стандартную параметризацию $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ и найдите непрерывное $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такое что $\tau \circ g = f \circ \tau$, изучите свойства таких $g$. ]]

*Задача* 7.53. * Докажите, что любое вложенное в $\mathbb{R}^3$ компактное двумерное многообразие без края $S$ ориентируемо.

[[ Попробуйте построить ориентацию с помощью непрерывного выбора нормали к данной поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$. Заметьте, что если это не получится, то дополнение $\mathbb{R}^3 \setminus S$ связно. Для любой точки $p \notin S$ рассмотрите отображение $g_p : S \to S^2$, заданное как $g_p(x) = (x-p)/|x-p|$. Докажите, что его степень (как остаток по модулю два) не меняется при небольших изменениях $p$. Рассмотрев близкие к $S$ точки докажите, что степень $g_p$ принимает оба значения остатков по модулю два и получите противоречие. ]]

*Задача* 7.54. * Проверьте возможность приблизить непрерывное отображение между многообразиями $f : N \to M$ гладкими. Говорить о равномерном приближении поможет гладкое вложение $M \to \mathbb{R}^D$, а $N$ для простоты считайте компактным.

[[ Сначала сгладьте $f$ как отображение $N \to \mathbb{R}^D$, сведя вопрос к локальному с помощью разбиения единицы и используя свёртку. Далее верните это гладкое отображение на $M$, например, с помощью результата задачи 7.161 (которая для евклидовой метрики в $\mathbb{R}^D$ сравнительно элементарна). ]]

7.6. **Внутреннее умножение и производная Ли.** В этом разделе мы вернёмся от глобальных вопросов к локальным и более внимательно изучим векторные поля и их связь с дифференциальными формами. Мы начнём с операции, которая является чисто линейно-алгебраической и не содержит производных.

**Определение 7.55.** Определим операцию *внутреннего умножения* векторного поля на форму как

$$i_X\alpha(X_2, \dots, X_k) = \alpha(X, X_2, \dots, X_k).$$

Эта операция поточечная, то есть значение результата в точке зависит только от вектора в точке и дифференциальной формы в точке. Иначе можно сказать, что при умножении $X$ или $\alpha$ на функцию $f$ выражение $i_X\alpha$ просто умножается на функцию

$f$. Также внутреннее умножение по определению аддитивно по вектору и по форме. Взаимодействие внутреннего умножения с внешним описывается правилом Лейбница:

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha}\alpha \wedge i_X\beta,$$

которое означает, что внутреннее умножение на векторное поле является дифференцированием алгебры дифференциальных форм. Поясним, почему правило Лейбница верно. Из определения внутреннего умножения и внешнего умножения форм следует, что должна выполняться какая-то такая формула с точностью до знаков и множителей. Проверить знаки и множители по линейности достаточно на базисных элементах. Для этого заметим, что

$$i_{\frac{\partial}{\partial x_j}} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = (-1)^{\ell-1} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\ell}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \tag{7.1}$$

если $j = i_\ell$ и равно нулю, если $j$ не встречается среди $i_\ell$. После этого проверка правила Лейбница становится понятной, неформально говоря, внутреннему умножению на $\frac{\partial}{\partial x_j}$ (дифференцированию) «надо добраться» до своего $dx_j$, причём при «перепрыгивании» через неподходящие $dx_i$ знак выражения меняется.

При внутреннем умножении на $\frac{\partial}{\partial x_j}$ произведения базисных форм будут возможны четыре варианта: $dx_j$ найдётся в обоих сомножителях; $dx_j$ найдётся в первом сомножителе; $dx_j$ найдётся во втором сомножителе; или вообще нигде не найдётся. В первом случае в левой части формулы стоит ноль, а в правом — два слагаемых, отличающихся только знаком. В остальных случаях проверка формулы Лейбница ещё проще.

*Задача* 7.56. Проведите выкладки для проверки формулы Лейбница для внутреннего умножения на базисных формах с помощью формулы (7.1).

В следующих двух задачах мы рассматриваем линейно-алгебраическую ситуацию или работаем над одной точкой какого-то гладкого многообразия.

*Задача* 7.57. Пусть $i_X$ — внутреннее умножение на вектор $X$, а $e_\alpha$ — внешнее умножение на линейную форму $\alpha$. Найдите собственные значения оператора $i_X e_\alpha + e_\alpha i_X$ на кососимметричных формах.

*Задача* 7.58. Пусть $i_X$ — внутреннее умножение на вектор $X$, а $e_\alpha$ — внешнее умножение на линейную форму $\alpha$. Определим линейный оператор $A_{X,\alpha}$ как сумму $i_X + e_\alpha$. Найдите его собственные значения на кососимметричных формах и их кратность.

[[ Заметьте, что его след равен нулю и изучите его квадрат. ]]

*Задача* 7.59. * Пусть в булевом кубе $\{0,1\}^n$ отмечена $2^{n-1}+1$ вершина. Докажите, что найдётся отмеченная вершина, у которой не менее $\sqrt{n}$ отмеченных соседей (вершины считаются соседними, если они отличаются только в одной координате).

[[ Отождествите базис во внешней алгебре с вершинами булева куба. Рассмотрите оператор из предыдущей задачи с вектором $X$ и формой $\alpha$, имеющими все координаты 1. Обратите внимание, что матричные элементы этого оператора соответствуют только соседним вершинам куба. Найдите собственный вектор $A_{X,\alpha}$, у которого отличны от нуля только координаты, соответствующие отмеченным вершинам, и используйте знания о собственном значении. ]]

В итоге для любого векторного поля $X$ на многообразии $M$ у нас получается операция $i_X : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$, которую мы по определению считаем нулевой на $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$. Определим ещё более важную в дифференциальной геометрии операцию дифференцирования, которая не является поточечной (так как содержит производные в координатном представлении):

**Определение 7.60.** Определим *производную Ли вдоль векторного поля* $X$ на дифференциальных формах как

$$L_X = i_X d + d\, i_X.$$

Эта операция линейна относительно сложения и умножения на константы, но при умножении $X$ или формы на функцию эта функция не выносится за скобки, а в выражении возникает её дифференциал.

*Задача* 7.61. Пусть $f$ — гладкая функция, а $X$ — векторное поле. Выразите действие $L_{fX}$ на дифференциальную форму через действие $L_X$ на ту же форму.

Правило Лейбница для производной Ли следует из правила Лейбница для внешнего дифференцирования и правила Лейбница для внутреннего дифференцирования. В итоге получается выражение без знаков:

$$L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge L_X\beta.$$

*Задача* 7.62. Выведите правило Лейбница для производной Ли из правила Лейбница для внутреннего умножения и правила Лейбница для внешней производной.

Проверим, что такое производная Ли функции (формы нулевой степени) по определению

$$L_X f = i_X df + d(i_X f) = i_X df = df(X) = X(f),$$

то есть на функциях у нас получается уже известная нам естественная операция дифференцирования функции по векторному полю. Полезно также посмотреть, что получается на линейных формах, равных дифференциалам функции

$$L_X df = i_X d(df) + d(i_X df) = d(X(f)),$$

это можно описать как коммутирование операции $L_X$ с внешним дифференциалом $d$ для функций. С учётом формулы Лейбница для $L_X$, действие $L_X$ на функциях и их дифференциалах полностью определяет его действие на формах произвольной степени.

*Задача* 7.63. Докажите, что производная Ли вдоль векторного поля $L_X$ коммутирует с внешним дифференцированием $d$ для форм любой степени.

[[ Проще всего это вывести непосредственно из определения. ]]

На самом деле производная Ли имеет важный смысл с точки зрения дифференциальных уравнений, см. обсуждение в следующих разделах и теорему 7.83. Но мы её пока определяем иначе, чтобы формально не опираться на дифференциальные уравнения до их более внимательного изучения.

Определение производной Ли одного векторного поля вдоль другого векторного поля на одном и том же многообразии $M$ наиболее естественно сделать через решения дифференциальных уравнений (по формуле из теоремы 7.83), но мы сейчас определим его иначе. Мы воспользуемся двойственностью между касательным и кокасательным пространством в точке и определим векторное поле $L_X Y$ (*производная Ли* $Y$ *по* $X$) через его каноническое произведение (в смысле двойственных линейных пространств в каждой точке) на некоторую линейную форму $\alpha \in \Omega^1(M)$. По сути мы потребуем выполнения формулы Лейбница для производной Ли вдоль $X$ значения $\alpha(Y) = i_Y\alpha$:

$$X(\alpha(Y)) = L_X(\alpha)(Y) + \alpha(L_X Y).$$

Распишем эту формулу подробнее через определение $L_X(\alpha)$:

$$\alpha(L_X Y) = i_X d(i_Y\alpha) - i_Y d(i_X\alpha) - i_Y i_X d\alpha \tag{7.2}$$

и покажем, что это можно считать определением $L_X Y$. Можно проверить, что правая часть умножается на функцию $f$, если $\alpha$ умножается на $f$.

*Задача* 7.64. Проверьте, что выражение $i_X d(i_Y \alpha) - i_Y d(i_X \alpha) - i_Y i_X d\alpha$ умножается на гладкую функцию $f$, если $\alpha$ умножается на $f$.

Следовательно, зная выражение $\alpha(L_X Y)$ для базисных форм, $dx_i(L_X Y)$, мы для произвольной формы $\alpha = \sum_i a_i dx_i$ сможем выписать его в виде

$$\alpha(L_X Y) = \sum_i a_i dx_i(L_X Y).$$

В итоге, (7.2) на самом деле корректно определяет векторное поле $L_X Y$ в каждой точке $p$ как линейный функционал на $T_p^* M$, а координаты $L_X Y$ в данной системе координат равны

$$(L_X Y)_i = dx_i(L_X Y) = i_X d(i_Y dx_i) - i_Y d(i_X dx_i). \tag{7.3}$$

Если мы применим векторное поле $L_X Y$ как дифференцирование функции $f$, то прямо из определения $L_X Y$ мы получим выражение

$$(L_X Y) f = df(L_X Y) = i_X d(i_Y df) - i_Y d(i_X df) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Поэтому с точки зрения дифференциальных операторов на функциях производная Ли $L_X Y$ — это коммутатор векторных полей $[X, Y]$ (то есть коммутатор соответствующих им дифференциальных операторов) с очевидным свойством $[X, Y] = -[Y, X]$. Важное следствие предыдущих рассуждений — тот факт, что коммутатор сам по себе является векторным полем, то есть однородным дифференциальным оператором первой степени. Соответствие $L_X Y = [X, Y]$ очень полезно, например из него следует *тождество Якоби*:

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0,$$

которое проще всего проверить по его действию на функции. Раскрытие коммутаторов даст нам 12 выражений, в которых 6 перестановок векторных полей действуют на функцию и каждая из них встречается два раза с разными знаками.

*Задача* 7.65. Выпишите явное выражение для $L_X Y = [X, Y]$ через координаты векторных полей $X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ и $Y = \sum_i Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

[[ Можно довести до явного вида формулу (7.3) или подействовать коммутатором на координатные функции. В итоге должно получиться

$$\left[\sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_j Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = \sum_{i,j} X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{i,j} Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

]]

*Задача* 7.66. Пусть векторное поле $X$ в $\mathbb{R}^n$ задано так, что в точке $p$ находится вектор $Ap$, где $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, аналогично пусть есть векторное поле $Y$, заданное аналогично как $p \mapsto Bp$. Посчитайте коммутатор $X$ и $Y$.

[[ Можно воспользоваться координатной формулой. ]]

*Задача* 7.67. Докажите формулу для векторных полей $X, Y$ и дифференциальной формы $\alpha$

$$i_{[X,Y]}\alpha = di_X i_Y \alpha + i_X di_Y \alpha - i_Y di_X \alpha - i_Y i_X d\alpha.$$

[[ Начните с формулы Лейбница $L_X(i_Y \alpha) = i_{L_X Y}\alpha + i_Y L_X \alpha$, которую наверное проще всего объяснить с помощью теоремы 7.83. ]]

*Задача* 7.68. Проверьте, что для двух неоднородных линейных дифференциальных операторов первого порядка, которые в координатах имеют вид

$$f \mapsto X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + X_0 f$$

коммутатор будет иметь такой же вид.

[[ Проверьте, что после коммутирования производных второго порядка не будет. ]]

Следующая задача показывает один из способов обобщения формулы Гаусса–Остроградского на случай произвольного многообразия.

*Задача* 7.69 (Теорема о дивергенции). Пусть на многообразии $M$ фиксирована нигде не нулевая форма $\nu \in \Omega^n(M)$ при $n = \dim M$. Интегрирование этой формы задаёт некоторое понятие объёма (меры) на многообразии. Тогда дивергенцию векторного поля $X$ относительно этого объёма можно определить как

$$L_X \nu = (\operatorname{div}_\nu X)\nu.$$

Как написать интеграл по многообразию с краем

$$\int_M (\operatorname{div}_\nu X)\nu$$

через интеграл по краю $\partial M$?

[[ Вспомните формулу для производной Ли дифференциальной формы и примените формулу Стокса. ]]

Следующие задачи дают вводные сведения про гамильтоновы векторные поля на *симплектических многообразиях*, которые являются одним из основных объектов изучения классической механики. Симплектическое многообразие — это многообразие $M$ с формой $\omega \in \Omega^2(M)$, которая замкнута ($d\omega = 0$) и невырожденна как билинейная форма, то есть если для некоторого вектора $X \in T_pM$ оказывается $\omega(X, Y) = 0$ для всех $Y \in T_pM$, то обязательно должно быть $X = 0$.

*Задача* 7.70. Докажите, что для любой гладкой функции $H : M \to \mathbb{R}$ (*гамильтониана*) на симплектическом многообразии найдётся единственное *гамильтоново векторное поле* $X_H$ со свойством

$$i_{X_H}\omega = -dH.$$

[[ Обратите внимание, что невырожденная билинейная форма устанавливает изоморфизм между векторным пространством и его двойственным. ]]

*Задача* 7.71. Докажите, что в условия предыдущей задачи

$$X_H(H) = 0, \quad L_{X_H}\omega = 0.$$

[[ Проверьте всё это по определению. ]]

*Задача* 7.72. Докажите, что на симплектическом многообразии операция скобки Ли векторных полей может быть поднята (в смысле сопоставления функции её гамильтонова векторного поля) до операции *скобки Пуассона* функций со свойствами

$$\{f, g\} = -\{g, f\}, \quad \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0, \quad [X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}.$$

[[ Посмотрите на выражение $\omega(X_f, X_g) = X_f g = -X_g f$ и проверьте равенства

$$d(X_f g) = L_{X_f} dg = -L_{X_f} i_{X_g}\omega = -i_{L_{X_f} X_g}\omega - i_{X_g} L_{X_f}\omega = -i_{[X_f, X_g]}\omega,$$

возможно, эти равенства проще понять из геометрического смысла производной Ли в смысле теоремы 7.83. ]]

**7.7. Интегрирование векторных полей и дифференциальные уравнения.** В этом разделе мы начнём рассматривать «интегрирование» векторных полей, на самом деле это предмет изучения науки о дифференциальных уравнениях. Дифференциальное уравнение на многообразии — это, при наличии векторного поля $X$ на многообразии $M$ и точки $p \in M$, нахождение такой *интегральной кривой* $\gamma : (a, b) \to M$, для которой

$$\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$$

и $\gamma(t_0) = p$ при данном $t_0 \in (a, b)$. Здесь производную (скорость) кривой $\gamma'(t)$ можно определить как прямой образ вектора $\frac{\partial}{\partial t}$ в точке $\gamma(t)$, или как дифференцирование функций на $M$ в точке $\gamma(t)$ по формуле

$$f \mapsto \frac{d}{dt} f(\gamma(t)).$$

На самом деле нетрудно выписать всё это в координатах и убедиться, что локально это и есть нахождение решения автономного дифференциального уравнения. Если же векторному полю $X$ разрешить зависеть от времени $t$, то это будет нахождение решения неавтономного дифференциального уравнения.

Для полноты изложения мы приведём стандартные теоремы, описывающие локальную структуру решения дифференциального уравнения. Будем работать в области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ и запишем уравнение в виде

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x(t), t),$$

где $f : U \times (t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^n$ ($U \subseteq \mathbb{R}^n$) — некоторое отображение (вектор-функция) на открытом множестве, в терминах дифференциальной геометрии это на самом деле зависящее от времени векторное поле. Переменную $t$ будем называть «время», а производную кривой $x : (t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0) \to U$ по времени будем назвать «скорость» и обозначать $\dot{x}$. Будем решать для дифференциального уравнения задачу Коши с начальным условием

$$x(t_0) = a \in U,$$

в некоторый момент времени, который в конкретных рассуждениях без ограничения общности можно считать нулевым, и будем пытаться найти решение хотя бы для времени $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ при каком-то маленьком $\varepsilon > 0$. Наличие решений гарантирует:

**Теорема 7.73** (Существование и единственность решений дифференциальных уравнений). *Если $f$ непрерывно по всем аргументам и удовлетворяет условию Липшица по $x$ в окрестности $a$, то решение с данным начальным условием существует и единственно в некотором диапазоне $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$.*

*Доказательство.* Без ограничения общности будем считать $t_0 = 0$ и перепишем уравнение в интегральном виде

$$x(t) = a + \int_0^t f(x(s), s)\, ds,$$

для непрерывных $x(t)$ очевидно, что оно эквивалентно исходному дифференциальному уравнению. Удобно ввести обозначение для рассматриваемого интегрального оператора, действующего на кривую $y : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ ($\varepsilon$ будет подобрано позднее),

$$I[y](t) = a + \int_0^t f(y(s), s)\, ds.$$

Из условия Липшица

$$|f(x', t) - f(x'', t)| \leqslant L|x' - x''|$$

мы можем получить свойство «сжатия» интегрального оператора. Если положить для отображений $y', y'' : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$

$$\|y' - y''\|_C = \sup\{|y'(t) - y''(t)| \mid |t| < \varepsilon\},$$

то

$$\|I[y'] - I[y'']\|_C \leqslant \int_0^t |f(y'(s), s) - f(y''(s), s)|\, ds \leqslant L\varepsilon\|y'' - y'\|_C.$$

Мы выберем $\varepsilon$ настолько малым, чтобы $L\varepsilon < 1/2$ в $\delta$-окрестности $a$, которая лежит в области определения $U$, и на которой действует константа Липшица $L$. Это гарантирует сжатие для $y', y''$ со значениями в этой $\delta$-окрестности,

$$\|I[y'] - I[y'']\|_C \leqslant 1/2\|y'' - y'\|_C.$$

Для сохранения образа оператора $I$ в той же окрестности также введём «ограничение скорости», чтобы в рассматриваемой области при $|t| < \varepsilon$ выполнялось $|f(x, t)| \leqslant M$ и уменьшим $\varepsilon$, чтобы выполнялось $M\varepsilon < \delta/2$.

Будем решать методом последовательных приближений, как в доказательстве теоремы об обратной функции 6.26, начнём с

$$x_1(t) \equiv a$$

и будем брать

$$x_k = I[x_{k-1}].$$

Из ограничения скорости следует

$$\|x_2 - x_1\|_C \leqslant \delta/2,$$

тогда далее по свойству сжатия мы будем иметь по индукции

$$\|x_{k+1} - x_k\|_C \leqslant 1/2\|x_k - x_{k-1}\|_C \leqslant \delta 2^{-k}.$$

Это означает, что все значения $x_k(t)$ будут оставаться в $\delta$-окрестности $a$, свойство сжатия будет оставаться применимым и будет иметь место равномерная по $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ сходимость $x_k(t) \to x(t)$. Равномерный предел непрерывных отображений будет непрерывным, и переходя к равномерному пределу в рекуррентной формуле, мы получим

$$x = I[x].$$

Это означает, что мы нашли решение. Единственность решения также следует из свойства сжатия. Если у нас есть два решения

$$x' = I[x'], \quad x'' = I[x''],$$

то по ограничению скорости они не выходят за $\delta$-окрестность $a$ (рассмотрение первого момента выхода даёт противоречие с ограничением скорости). Тогда по свойству сжатия

$$\|x' - x''\|_C = \|I[x]' - I[x'']\|_C \leqslant 1/2\|x' - x''\|_C,$$

что влечёт $\|x' - x''\|_C = 0$ и гарантирует равенство двух решений. ☐

Аналогично доказывается усиленный вариант для линейных уравнений:

**Теорема 7.74** (Существование и единственность решений линейного уравнения). *Решение линейного уравнения*

$$\dot{x} = A(t)x(t) + b(t)$$

*с непрерывно зависящими от времени линейным оператором $A(t)$ и вектором $b(t)$, при любом начальном условии $x(t_0) = a$ существует и единственно на любом промежутке времени, на котором $A$ и $b$ непрерывны.*

Здесь непрерывная зависимость оператора понимается в том смысле, что коэффициенты его матричного представления непрерывно зависят от $t$. В случаях операторов в бесконечномерных банаховых пространствах непрерывность будет пониматься в смысле нормы оператора, но сейчас это не важно.

*Доказательство.* Существование и единственность для $\varepsilon$-окрестности некоторого момента времени $t_0$ можно доказать по основной теореме. Приведём похожее на предыдущее рассуждение, работающее для немаленьких промежутков времени. Рассмотрим без ограничения общности отрезок $[0, T]$, на котором из компактности отрезка $\|A(t)\| \leqslant L$ и $|b(t)| \leqslant M$, и будем искать решение с начальным условием $x(0) = a$. Возьмём те же приближения

$$x_1(t) \equiv a, \quad x_{k+1}(t) = a + \int_0^t (A(s)x_k(s) + b(s))\ ds.$$

Тогда индукцией по $k$ доказывается оценка

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leqslant L^{k-1}(L|a| + M)\frac{t^k}{k!}$$

и следующая из неё

$$|x_k(t)| \leqslant |a|e^{Lt} + \frac{M}{L}(e^{Lt} - 1).$$

Из этих оценок следует, что на $[0, T]$ последовательность приближений равномерно и быстрее геометрической прогрессии сходится к решению уравнения.

Для доказательства единственности можно заметить, что из условия

$$|x'(t) - x''(t)| \leqslant \int_0^t L|x'(s) - x''(s)|\ ds$$

по индукции выводятся оценки

$$|x'(t) - x''(t)| \leqslant \|x' - x''\|_C \frac{L^n t^n}{n!},$$

которые при $n \to \infty$ и фиксированном $t$ стремятся к нулю. ☐

Изучим теперь зависимость решения от параметров и начальных условий, а именно сформулируем задачу

$$\dot{x} = f(x(t), t, p), \quad x(0) = a \in U,$$

где $p$ пробегает некоторое метрическое пространство параметров $P$ и правая часть $f(x, t, p)$ непрерывна и по $p$ тоже.

**Теорема 7.75** (Непрерывная зависимость решений дифференциальных уравнений от параметров и начальных условий). *Если $f(x, t, p)$ непрерывна по всем аргументам, удовлетворяет условию Липшица по $x$ в окрестности $a_0$ равномерно по $t \in (t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0)$ и $p \in P$, равномерно ограничена при всех значениях параметра $p \in P$, то решение существует и единственно в некотором диапазоне $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, при значениях $a$ в некоторой окрестности $U(a_0)$ и любом $p \in P$. Оно непрерывно зависит от $a \in U(a_0)$ и $p \in P$.*

*Доказательство.* Опираясь на рассуждения в доказательстве теоремы существования и единственности, мы применим ту же процедуру с

$$x_1(t, a, p) \equiv a$$

и

$$x_{k+1}(t, a, p) = a + \int_0^t f(x_k(s, a, p), s, p)\ ds,$$

Условия теоремы позволяют нам выбрать константы $M$ и $L$ в некоторой окрестности $U_{2\delta}(a_0)$ при всех $p \in P$ и иметь равномерное по параметру ограничение скорости и равномерное по параметру свойство сжатия. Оценки на отклонение итераций от $a$ (не более чем на $\delta$) позволят нам работать с любым начальным условием $a \in U_\delta(a_0)$, исключить выход итераций из $U_{2\delta}(a_0)$ и иметь равномерную зависимость от $a$. Тогда все $x_k(t, a, p)$ будут непрерывно зависеть от $a$ и $p$ и сходиться как минимум со скоростью геометрической прогрессии при $k \to \infty$, а значит в равномерном пределе эта непрерывная зависимость сохранится. ☐

Мы доказали непрерывную зависимость решения дифференциального уравнения от начальных условий и параметров; но на практике часто требуется непрерывно дифференцируемая несколько раз зависимость, при соответствующих ограничениях на правую часть дифференциального уравнения $f$, и мы собираемся её установить. В качестве области определения $f$ будем рассматривать некоторый шар $U$, чтобы вместе с любыми двумя точками он содержал отрезок, соединяющий их (свойство выпуклости), это будет нужно для свободного применения леммы 6.24 о выражении приращения непрерывно дифференцируемого отображения.

**Теорема 7.76** (Дифференцируемая зависимость решений дифференциальных уравнений от параметров и начальных условий). *Пусть правая часть дифференциального уравнения $f(x, t, p)$ непрерывна по времени в диапазоне $(t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0)$, а её производные по $x \in U$ и параметру $p$ непрерывно зависят от $x, t, p$ в некотором открытом множестве $U \times (t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0) \times P$. Тогда решение задачи Коши непрерывно дифференцируемым образом зависит от начальных условий $x_0$ и параметра $p$ при значениях времени в некотором диапазоне $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.*

*Доказательство.* В этом случае каждый параметр $p$ можно считать дополнительной координатой решения, дифференциальное уравнение для которой имеет вид $\dot{p} = 0$. Непрерывная дифференцируемость правой части по $x$ и $p$ тогда гарантирует локальную липшицевость по этим переменным (например, в силу леммы 6.24) и рассмотрение зависимости от параметров сводится к рассмотрению зависимости от начального условия. Так что мы опять рассматриваем уравнение

$$x(t) = a + \int_0^t f(x(s), s)\, ds$$

и изучаем зависимость решения от $a$. После сдвига координат мы можем считать, что мы начинаем с $a = 0$ и сравниваем соответствующее решение $x_0(t)$ с решением $x_h(t)$ для $a = hv$, где $v$ будет фиксированным вектором, а $h$ — переменным параметром. Тогда по теореме 7.75 $x_h(t)$ непрерывно зависит от $h$ и

$$x_h(t) = hv + \int_0^t f(x_h(s), s)\, ds, \quad x_0(t) = \int_0^t f(x_0(s), s)\, ds.$$

введя обозначение $y_h(t) = \frac{x_h(t) - x_0(t)}{h}$, по лемме 6.24 для приращения $f$ от $x' = x_0(t)$ до $x'' = x_h(t)$ получим

$$y_h(t) = \frac{x_h(t) - x_0(t)}{h} = v + \int_0^t \frac{f(x_h(s), s) - f(x_0(s), s)}{h}\, ds =$$
$$= v + \int_0^t G(x_0(s), x_h(s), s) \left(\frac{x_h(s) - x_0(s)}{h}\right) ds = v + \int_0^t G(x_0(s), x_h(s), s)(y_h(s))\, ds$$

с некоторыми $G(x', x'', t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, непрерывно зависящими от $x', x'', t$. Заметим, что зависимость от любого параметра ($t$ в данном случае) в лемме 6.24 будет непрерывной в силу явной формулы в её доказательстве. Полученное интегральное соотношение можно понимать как линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{y}_h = H(t,h)y_h \tag{7.4}$$

с начальным условием $y_h(0) = v$ и линейным оператором

$$H(t,h) = G(x_0(t), x_h(t), t),$$

$H(t,h)$ тогда непрерывно зависит от времени и от $h$. При этом лемма 6.24 показывает, что $H(t,h)$ непрерывен и определён и при $h = 0$, а также

$$H(t,0) = D_x f(x_0(t), t),$$

где $D_x f$ обозначает производную отображения $f$ по первому аргументу. По теоремам 7.73 и 7.75 решения уравнения (7.4) непрерывно зависят от параметра $h$ вплоть до $h = 0$, и предельное значение

$$y_0(t) = \lim_{h\to 0} y_h(t) = \frac{\partial x_h(t)}{\partial h}\bigg|_{h=0}$$

удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\dot{y}_0 = D_x f(x_0(t), t)y_0.$$

Таким образом производная решения по начальному условию существует, а так как она сама является решением явного линейного дифференциального уравнения, правая часть которого непрерывно зависит от $x_0(t)$, в свою очередь непрерывно зависящего от начальных условий, то от начальных условий производная тоже зависит непрерывно по теореме 7.75. ☐

Так как рассуждения в предыдущей лемме заканчиваются явным уравнением для производной по начальному условию, то при наличии более чем однократной дифференцируемости правой части уравнения мы получаем соответствующую дифференцируемость решений, что можно сформулировать как

**Следствие 7.77.** *Если правая часть дифференциального уравнения непрерывна по времени и $m$ раз непрерывно дифференцируемо зависит от $x$ и параметров, а также её производные порядка не более $m$ по $x$ и параметрам непрерывно зависят от времени, то и решение уравнения $m$ раз непрерывно дифференцируемо зависит от параметров и начальных условий.*

7.8. **Интегрирование векторных полей на многообразии, геометрический смысл производной Ли.** На этом стандартный материал про дифференциальные уравнения заканчивается и мы продолжаем рассуждать в терминах гладких многообразий и гладких векторных полей.

**Теорема 7.78** (Выпрямление векторного поля)**.** *Если векторное поле $X$ в точке $p \in M$ не равно нулю, то в некоторой криволинейной системе координат $x_1, \dots, x_n$ в окрестности точки $p$ оно может быть приведено к виду $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$.*

*Доказательство.* Рассмотрим гладкую функцию $y$ в некоторой окрестности $p$, для которой $X(y) \neq 0$ в $p$ и $y(p) = 0$, условие $X(y) \neq 0$ будет сохраняться в некоторой окрестности $p$. Дополним $y$ до системы координат в $y, x_2, \dots, x_n$ и пока будем работать в некоторой окрестности $p$ в этих координатах. Рассмотрим решения дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = X_{x(t)}$$

с начальным условием $x(0) = (0, x_2, \dots, x_n)$, обозначим также гиперплоскость $Z = \{y = 0\}$. В итоге решение этого уравнения гладко зависит от начальных условий $x_2, \dots, x_n$ и времени $t$, которое мы возьмём за координату $x_1$ вместо $y$. Это действительно координаты в достаточно малой окрестности $p$, так как отображение, порождаемое решениями дифференциального уравнения,

$$(t, x_2, \dots, x_n) \mapsto x(t, (0, x_2, \dots, x_n))$$

имеет невырожденный дифференциал в нуле; его частные производные по $x_2, \dots, x_n$ дают базис к $T_pZ$, а частная производная по $x_1 = t$ равна $X(p) \notin T_pZ$ (так как $X(y) \neq 0$).

В построенной системе координат $(x_1, \dots, x_n)$, очевидно, решения уравнения

$$\dot{x}(t) = X(x(t)) \Leftrightarrow \dot{x}_1 = 1, \dot{x}_2 = 0, \dots, \dot{x}_n = 0$$

с произвольными начальными условиями (когда уже не обязательно $x_1 \equiv t$) имеют вид

$$x_1 = t + \mathrm{const}, x_2 = \mathrm{const}, \dots x_n = \mathrm{const},$$

а само векторное поле равно $\frac{\partial}{\partial x_1}$. ☐

Возвращаясь к глобальному интегрированию векторных полей на многообразиях, можно изучить продолжение интегральной кривой векторного поля. Следующая лемма конструирует максимальную интегральную кривую векторного поля (непродолжаемое решение дифференциального уравнения).

**Лемма 7.79.** *Пусть $X$ — возможно зависящее от времени векторное поле на многообразии без края $M$. Тогда для любого момента времени $t_0$ и точки $p \in M$ существует интегральная кривая $\gamma$, определённая на некотором (не обязательно конечном) интервале $(T_1, T_2) \ni t_0$ и удовлетворяющая условию $\gamma(t_0) = p$, максимальная в том смысле, что любая другая интегральная кривая $\widetilde{\gamma}$ векторного поля $X$, удовлетворяющая тому же условию $\widetilde{\gamma}(t_0) = p$, является ограничением $\gamma$ на некоторый интервал $(\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2) \subseteq (T_1, T_2)$.*

*Доказательство.* Положим без ограничения общности $t_0 = 0$ и рассмотрим поведение решений задачи Коши $\gamma(0) = p$ для неотрицательных значений времени. Пусть $\gamma_1 : [0, t_1) \to M$ и $\gamma_2 : [0, t_2) \to M$ — два таких решения, определённые на разных полуинтервалах. Покажем, что $\gamma_1$ и $\gamma_2$ будут устроены так, что $\gamma_2$ будет продолжением $\gamma_1$ при $t_1 < t_2$. Действительно, если это не так, то достаточно рассмотреть $t^* \in [0, t_1)$ как точную нижнюю грань моментов времени, где решения различаются. Из открытости множества моментов времени, на котором решения различаются, мы делаем вывод, что в $t^*$ решения ещё не различались, $\gamma_1(t^*) = \gamma_2(t^*) = p^*$. Тогда можно использовать теорему существования и единственности для задачи Коши с начальным условием $\gamma(t^*) = p^*$ и заметить, что $\gamma_1$ и $\gamma_2$ на самом деле не должны различаться ещё некоторое время после $t^*$, приведя таким образом к противоречию с выбором $t^*$.

Для построения максимального решения (при $t \geqslant 0$) рассмотрим объединение всех промежутков $[0, \tau)$, для которых существует интегральная кривая $\gamma_\tau : [0, \tau) \to M$ с заданным начальным условием $\gamma_\tau(0) = p$, это будет некоторый промежуток $[0, T)$, где $T$ — это точная верхняя грань всевозможных $\tau$. Определим $\gamma : [0, T) \to M$ следующим образом. Для любого $t \in [0, T)$ рассмотрим в силу определения $T$ как точной верхней грани число $\tau \in (t, T)$ и соответствующую интегральную кривую $\gamma_\tau : [0, \tau) \to M$. Последняя определена в $t$ и мы полагаем $\gamma(t) = \gamma_\tau(t)$. В силу показанного в предыдущем абзаце это определение не зависит от выбора $\tau \in (t, T)$. Построенная кривая $\gamma$ удовлетворяет начальному условию $\gamma(0) = p$ и является интегральной кривой, так как в окрестности каждой своей точки она совпадает с одной из $\gamma_\tau$.

По построению $\gamma$, любое решение задачи Коши с начальным условием $\gamma(0) = p$ для неотрицательных $t$ является ограничением $\gamma$ некоторый полуинтервал $[0, \widetilde{T}) \subseteq [0, T)$. Аналогично можно максимально продолжить решение в область отрицательных $t$ и собрать из двух максимальное непродолжаемое решение для $t < 0$ и $t > 0$ одновременно. □

Из предыдущей леммы получается, что любая интегральная кривая продолжается до максимальной интегральной кривой для моментов времени в интервале $(T_1, T_2)$, которую нельзя продолжить на $t \leqslant T_1$ и на $t \geqslant T_2$. При этом может оказаться, что $T_1 = -\infty$, и также может оказаться, что $T_2 = +\infty$. В этих случаях говорят, что интегральная кривая бесконечно продолжается в прошлое или в будущее. Следующая теорема проясняет, почему максимальное решение нельзя продолжить дальше в прошлое или дальше в будущее.

**Теорема 7.80.** *Пусть $X$ — возможно зависящее от времени векторное поле на многообразии без края $M$, а $\gamma : (T_1, T_2) \to M$ — его максимальная интегральная кривая, не продолжающаяся за пределы интервала $(T_1, T_2)$. Если $T_2$ конечно, то кривая $\gamma$ покидает любой компакт при $t \to T_2 - 0$ в следующем смысле: для любого компактного множества $K \subseteq M$ найдётся $T_K \in (T_1, T_2)$, такое что $\gamma(t) \notin K$ при $t > T_K$. Аналогично, если $T_1$ конечно, то кривая $\gamma$ покидает любой компакт при $t \to T_1 + 0$.*

*Доказательство.* Без ограничения общности рассмотрим поведение $\gamma$ при $t \to T_2 - 0$ по отношению к компактному $K \subseteq M$ при конечном $T_2$. Предполагая противное, что кривая $\gamma$ бывает в $K$ при $t$, сколь угодно близких к $T_2$, мы должны обнаружить её предельную точку $p' \in K$, так что для любой окрестности $U(p') \ni p'$ оказывается $\gamma(t) \in U(p')$ при $t$, сколь угодно близких к $T_2$. Существование $p'$ обосновывается стандартно: если для любой точки $p'$ выполняется отрицание предыдущего утверждения с некоторой окрестностью $U(p')$, то покрыв $K$ конечным числом таких окрестностей мы убедимся, что при $t$, достаточно близком к $T_2$, $\gamma(t)$ не лежит ни в одной из таких окрестностей, а значит кривая покинула $K$.

Теперь перейдём в некоторую окрестность $W(p')$ предельной точки $p'$, которая является координатной картой. Теорема о непрерывной зависимости решения от параметра показывает, что найдутся окрестности $U(p') \subset V(p') \subset W(p')$ и числа $0 < \delta < \varepsilon$, такие что при попадании интегральной кривой в $U(p')$ в момент времени в пределах $(T_2 - \delta, T_2 + \delta)$, гарантируется, что в моменты времени, отличающиеся от момента попадания не более чем на $\varepsilon$, интегральная кривая будет продолжаться в $V(p')$. Но так как $p'$ — предельная точка и кривая действительно попадает в $U(p')$ в моменты времени, сколь угодно близкие к $T_2$, то оказывается, что она будет продолжаться и за момент времени $T_2$ как минимум на величину $\varepsilon - \delta > 0$, что противоречит выбору $T_2$. □

В некоторых случаях, предыдущая теорема сразу позволяет заключить, что интегральная кривая бесконечно продолжается и в прошлое, и в будущее.

**Следствие 7.81.** *Для возможно зависящего от времени векторного поля $X$ с компактным носителем на многообразии без края $M$ все интегральные кривые продолжаются по времени неограниченно в обе стороны. Под компактным носителем имеется в виду, что $X$ равно нулю за пределами некоторого компакта $K \subseteq M$ во все моменты времени.*

*Доказательство.* Рассмотрим максимальную интегральную кривую $\gamma$, определённую на интервале $(T_1, T_2)$. Пусть значение $T_2$ конечно, тогда по предыдущей теореме кривая должна покинуть компактный носитель векторного поля $X$ при $t > T_K$, для некоторого $T_K \in (T_1, T_2)$. Но тогда кривая должна быть постоянной на $(T_K, T_2)$, так как она лежит в той области, где векторное поле, а значит и её скорость, нулевые. Но тогда эту кривую можно продолжить постоянно (в той же точке) и на весь полуинтервал $[T_2, +\infty)$.

Аналогично строится и продолжение на $(-\infty, T_1]$ в предположении конечности $T_1$. В итоге получается, что предположение о конечности $T_1$ неверно и неверно предположение о конечности $T_2$. □

Конечно, векторные поля с компактным носителем редко встречаются в реальной жизни, но нам пока хватит и такого случая. Более реалистическую ситуацию бесконечного продолжения решений дифференциального уравнения можно найти в задаче 7.157, а также в многообразии $\mathbb{R}^n$ для определённого на всём многообразии и липшицева (в зависимости от точки) векторного поля (доказательство теоремы 7.74 в этом случае проходит).

По следствию 7.81, решая задачу Коши, можно сопоставить векторному полю с компактным носителем семейство диффеоморфизмов $\varphi_{t,t_0} : M \to M$, удовлетворяющее соотношению

$$\frac{d}{dt}\varphi_{t,t_0}(x) = X_{\varphi_{t,t_0}(x),t}, \varphi_{t_0,t_0} = \mathrm{id}_M\,.$$

Если векторное поле зависит от времени гладко, то и $\varphi_{t,t_0}$ будет зависеть от времени гладко. Смысл $\varphi_{t,t_0}(x)$ можно иначе объяснить как нахождение интегральной кривой $\gamma(t)$ векторного поля $X$ с начальным условием $\gamma(t_0) = x$ и определение $\varphi_{t,t_0}(x) = \gamma(t)$.

**Теорема 7.82.** *Для возможно зависящего от времени векторного поля $X$ на многообразии без края $M$ и соответствующих ему диффеоморфизмов $\varphi_{t,t_0}$ выполняется*

$$\varphi_{t_2,t_1} \circ \varphi_{t_1,t_0} = \varphi_{t_2,t_0}.$$

*Доказательство.* Посмотрим на действия левой и правой части на точку $x_0 \in M$. Точка $x_1 = \varphi_{t_1,t_0}(x_0)$ — это положение решения дифференциального уравнения в момент времени $t_1$ при условии, что в момент времени $t_0$ оно находилось в точке $x_0$. Точка $x_2 = \varphi_{t_2,t_1}(x_1)$ тогда соответствует положению того же решения дифференциального уравнения в момент времени $t_2$. Но тогда $x_2 = \varphi_{t_2,t_0}(x_0)$ по определению и формула верна в $x_0$. ☐

В частности, выполняется

$$\varphi_{t_0,t_1} \circ \varphi_{t_1,t_0} = \varphi_{t_0,t_0} = \mathrm{id}_M, \quad \varphi_{t_1,t_0} \circ \varphi_{t_0,t_1} = \varphi_{t_1,t_1} = \mathrm{id}_M,$$

и это показывает, что $\varphi_{t_1,t_0}$ имеет гладкое обратное отображение и действительно является диффеоморфизмом.

В случае не зависящего от времени векторного поля, если $\gamma(t)$ является решением уравнения, то $\gamma(t+s)$ тоже является решением как функция от $t$. Следовательно,

$$\varphi_{t_1,t_0} = \varphi_{t_1+s,t_0+s}$$

при любом $s$, то есть диффеоморфизм зависит только от разности $t_1 - t_0$. Тогда удобно положить

$$\varphi_t = \varphi_{t,0}$$

и утверждение Теоремы 7.82 тогда переписывается как

$$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}.$$

В таком случае (не зависящее от времени векторное поле) говорят, что векторное поле порождает *однопараметрическую группу диффеоморфизмов*.

С понятием однопараметрической группы диффеоморфизмов связана геометрическая интерпретация производной Ли векторного поля, которую достаточно удобно считать определением производной Ли.

**Теорема 7.83.** *Производная Ли может быть определена с помощью соответствующей полю $X$ однопараметрической группы $\{\varphi_t\}$ диффеоморфизмов для дифференциальной формы $\alpha$ или другого векторного поля $Y$ как поточечный предел*

$$L_X\alpha = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t^*\alpha - \alpha}{t} = \left.\frac{d}{dt}\varphi_t^*\alpha\right|_{t=0}, \quad L_XY = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t^*Y - Y}{t} = \left.\frac{d}{dt}\varphi_t^*Y\right|_{t=0},$$

*где обратный образ векторного поля при диффеоморфизме определяется как обратное отображение к прямому образу.*

Конечно, в формулировке теоремы возникает вопрос определённости $\varphi_t$. Если нас интересует выражение в окрестности точки $p \in M$, то мы можем домножить $X$ на гладкую функцию $\psi$ с компактным носителем (из леммы 6.19), которая в этой окрестности равна $1$, превратив $X$ в поле с компактным носителем и не изменив его значения в окрестности $p$. Тогда порождённая полем однопараметрическая группа диффеоморфизмов будет корректно определена и выражения можно понимать именно в таком смысле. Так как в выражениях используется переход к пределу $t \to 0$, то они на самом деле не будут зависеть от конкретного выбора $\psi$.

*Доказательство теоремы 7.83.* Сначала сравним новое определение производной Ли для дифференциальных форм со старым. Будем сначала считать поле $X$ спрямлённым до $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$, а диффеоморфизм $\varphi_t$ соответственно считать сдвигом на $t$ координаты $x_1$. Заметим, что по новому определению выполняется правило Лейбница для внешнего произведения форм. Также заметим, что

$$L_X(d\alpha) = \frac{d}{dt}\varphi_t^* d\alpha\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}d\varphi_t^*\alpha\bigg|_{t=0} = d\left(\frac{d}{dt}\varphi_t^*\alpha\bigg|_{t=0}\right).$$

Здесь $d$ можно переставить с $\varphi_t^*$ по лемме 6.109, а с дифференцированием по $t$ можно переставить, так как для выпрямленного векторного поля $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$ дифференцирование по $t$ — это просто покомпонентное дифференцирование по $x_1$.

Новое определение $L_X$ на дифференциальных формах ведёт себя по отношению к внешнему произведению и внешнему дифференцированию точно так же, как старое, и оба они аддитивны. Следовательно, достаточно проверить совпадение двух определений на функциях, а на функциях мы получаем $L_X(f) = X(f)$ по любому из определений.

Действие производной Ли на векторных полях достаточно проверить явно для случая $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$ или сослаться на формулу Лейбница

$$L_X(\alpha(Y)) = L_X(\alpha)(Y) + \alpha(L_X Y),$$

которая для нового определения в случае $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$ очевидна, а ранее использовалась как определение $L_X Y$.

Посмотрим теперь на точки, где $X$ равно нулю. Правая часть формулы (записанная в виде производной) гладко зависит от точки многообразия в силу гладкой зависимости решения дифференциального уравнения от параметров, начальных условий и времени. Поэтому на точки, в любой окрестности которых поле не является тождественно нулевым, равенства продолжаются по непрерывности. Для прочих точек, в некоторой окрестности которых поле тождественно равно нулю, оба определения производной Ли дают нуль. ☐

Геометрический смысл производной Ли позволяет также прояснить геометрический смысл дивергенции векторного поля относительно формы объёма. При наличии на многообразии $M$ размерности $n$ нигде не нулевой формы $\nu \in \Omega^n(M)$ будем измерять объёмы компактных множеств (это техническое ограничение, чтобы объёмы были конечными) как

$$\operatorname{vol}_\nu K = \int_K \nu.$$

Напомним также, что дивергенция определяется как $L_X\nu = (\operatorname{div}_\nu X)\nu$.

**Теорема 7.84** (Геометрический смысл дивергенции)**.** *Пусть на ориентированном многообразии $M$ мера определена как интеграл от некоторой всюду ненулевой соответствующей ориентации формы $\nu \in \Omega^n(M)$. Тогда для дивергенции векторного поля $X$ относительно объёма $\nu$ и любого компактного множества $K \subseteq M$ имеет место формула*

$$\int_K (\operatorname{div}_\nu X)\nu = \frac{d}{dt} \operatorname{vol}_\nu \varphi_t(K)\Big|_{t=0},$$

*где $\varphi_t$ — соответствующая однопараметрическая группа диффеоморфизмов.*

Заметим, что из теоремы о непрерывной зависимости от параметра следует, что $\varphi_t(K)$ действительно определено при достаточно малых $t$.

*Доказательство.* Напишем по определению дивергенции и с переменой порядка интегрирования и дифференцирования

$$\int_K (\operatorname{div}_\nu X)\nu = \int_K L_X\nu = \int_K \frac{d}{dt}\varphi_t^*\nu\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_K \varphi_t^*\nu\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_{\varphi_t(K)} \nu\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \operatorname{vol}_\nu \varphi_t(K)\Big|_{t=0}.$$

☐

*Задача* 7.85 (Формула Лиувилля–Остроградского). Пусть линейное дифференциальное уравнение $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ порождает семейство аффинных диффеоморфизмов $\varphi_{t_1,t_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Проверьте, что для аффинного отображения корректно определён детерминант и докажите, что выполняется формула

$$\frac{d}{dt_1} \det \varphi_{t_1,t_0} = \operatorname{tr} A(t_1) \det \varphi_{t_1,t_0}.$$

[[ Убедитесь, что доказательство теоремы 7.84 работает и для векторных полей, зависящих от времени. ]]

Далее мы приводим факты об интегрировании нескольких векторных полей одновременно в виде задач, подробности по этим вопросам можно найти в стандартных учебниках дифференциальной геометрии.

*Задача* 7.86. Докажите, что скобка Ли векторных полей $X, Y$ с соответствующими группами диффеоморфизмов $\varphi_t, \psi_t$ является производной при $t = 0$ семейства диффеоморфизмов $\psi_{-\sqrt{t}}\varphi_{-\sqrt{t}}\psi_{\sqrt{t}}\varphi_{\sqrt{t}}$.

[[ Можно выпрямить одно из векторных полей и проверить тождество в координатах. ]]

*Задача* 7.87. Пусть векторные поля $X_1, \dots, X_k$ линейно независимы в точке $p$ многообразия $M$. Докажите, что если какая-то скобка $[X_i, X_j]$ в точке $p$ не является линейной комбинацией $X_1, \dots, X_k$ в какой-то точке, то не может быть $k$-мерных подмногообразий $N \subset M$, $N \ni p$, у которых $TN = \langle X_1, \dots, X_k\rangle$ в окрестности $p$.

[[ Проверьте, что если два векторных поля касаются $N$ в некоторой окрестности $p$, то их коммутатор тоже касается $N$. ]]

7.9. **Интегрирование системы векторных полей.** Мы поняли, что с векторными полями на многообразиях можно делать операцию скобки Ли $[X, Y] = L_XY = -L_YX$. Операция скобки Ли важна в тех ситуациях, когда мы хотим «проинтегрировать» систему векторных полей $X_1, \dots, X_k$ на многообразии $M$. Интегрирование одного векторного поля (локально) при фиксированных начальных условиях — это просто решение дифференциального уравнения, которое даёт кривую в этом многообразии. Интегрирование $k$ векторных полей тогда должно дать (локально) $k$-мерное подмногообразие. Для этого нужны некоторые дополнительные условия на систему векторных полей, самое важное их которых выражается через скобку Ли.

**Теорема 7.88** (Теорема Фробениуса). *Пусть векторные поля $X_1, \dots, X_k$ линейно независимы в окрестности точки $p$ многообразия $M$ и любая скобка $[X_i, X_j]$ линейно выражается через $X_1, \dots, X_k$ в этой окрестности с коэффициентами-функциями. Тогда в некоторой меньшей окрестности $U \ni p$ найдётся такая система координат, что в любой её точке выполняется равенство линейных оболочек*

$$\langle X_1, \dots, X_k \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle.$$

*Доказательство.* Так как поля линейно независимы точке $p$ и в некоторой её окрестности, ни одно из них не равно нулю в этой окрестности. Тогда по теореме 7.78 можно считать $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, а точку $p$ будем считать началом координат.

В остальных векторных полях можно убрать компоненту $\frac{\partial}{\partial x_1}$, вычитая из них $X_1$ с коэффициентами-функциями. Скобка Ли новых векторных полей будет такой:

$$[X_i', X_j'] = [X_i - f_i X_1, X_j - f_j X_1] =$$
$$= [X_i, X_j] - X_i(f_j)X_1 - f_j[X_i, X_1] + X_j(f_i)X_1 - f_i[X_1, X_j] + f_i X_1(f_j)X_1 - f_j X_1(f_i)X_1.$$

То есть в новой системе скобка Ли также даёт линейные комбинации (линейные комбинации в этом доказательстве всегда будут с коэффициентами-функциями) исходных векторных полей. Более того, если мы берём скобку Ли полей $X_2', \dots, X_k'$, то в ней уже не будет участвовать $X_1$, так как в их координатной записи уже нет $\frac{\partial}{\partial x_1}$.

Заметим также, что $[X_1, X_i']$ по аналогичной приведённой выше формуле есть линейная комбинация полей $X_2', \dots, X_k'$. Пусть $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ порождает (локальную) однопараметрическую группу диффеоморфизмов $\varphi_t$, тогда для любого $i = 2, \dots, k$

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^* X_i' = \sum_{j=2}^{k} c_{ij}(t)\varphi_t^* X_j',$$

где коэффициенты $c_{ij}$ зависят от $t$ и от точки $x$, зависимость от $x$ мы явно не пишем. Отсюда следует, что каждое векторное поле $\varphi_t^* X_i'$, $i = 2, \dots, k$, есть линейная комбинация векторных полей $X_2', \dots, X_k'$ с коэффициентами-функциями при любом $t$ в некоторой окрестности нуля. Чтобы это понять, можно записать требуемый нам результат с неопределёнными коэффициентами (зависящими также от точки, как и $c_{ij}$)

$$\varphi_t^* X_i' = \sum_{m=2}^{k} a_{im}(t) X_m'$$

и подставить его в предыдущее уравнение, получив систему линейных уравнений на неопределённые коэффициенты в виде

$$\frac{da_{im}}{dt} = \sum_{j=2}^{k} c_{ij} a_{jm}, \quad m = 2, \dots, k.$$

Последняя система является стандартной системой однородных линейных уравнений с переменными коэффициентами и, очевидно, имеет решение с начальным условием $a_{im}(0) = \delta_{im}$.

Теперь применим предположение индукции (по размерности) к гиперплоскости $x_1 = 0$. В этой гиперплоскости найдутся координаты $x_2, \dots, x_n$, такие что

$$\langle X_2', \dots, X_k' \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle.$$

Продолжим эту систему координат с гиперплоскости в окрестность $p$ с помощью сдвигов $\varphi_t$. Установленное выше свойство $\varphi_t$-сдвигов векторных полей $X_2', \dots, X_k'$ показывает, что

$$\langle X_2', \dots, X_k' \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle .$$

выполняется во всей окрестности $p$, а не только на гиперплоскости. А так как $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, то выполняется и

$$\langle X_1, X_2, \dots, X_k \rangle = \langle X_1, X_2', \dots, X_k' \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle .$$

☐

В частности, теорема Фробениуса доказывает существование $k$-мерного вложенного подмногообразия $N$ окрестности $p$ (*интегрального подмногообразия системы* $X_1, \dots, X_k$), касательное пространство которого порождено векторными полями $X_1, \dots, X_k$. В терминах теоремы, $N$ задаётся уравнениями $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$ в окрестности $p$. Следующая задача показывает, что условие на скобку Ли критически важно для существования такого многообразия.

*Задача* 7.89. Пусть векторные поля $X_1, \dots, X_k$ линейно независимы в точке $p$ многообразия $M$. Докажите, что если какая-то скобка $[X_i, X_j]$ в точке $p$ не является линейной комбинацией $X_1, \dots, X_k$ в сколь угодно близких к $p$ точках, то не может быть $k$-мерных подмногообразий $N \subset M$, $N \ni p$, у которых $TN = \langle X_1, \dots, X_k \rangle$ в окрестности $p$.

[[ Проверьте, что если два векторных поля касаются $N$ в некоторой окрестности $p$, то их коммутатор тоже касается $N$. ]]

В теореме Фробениуса интегральное подмногообразие строится лишь локально. Аналогично построению продолжения решения дифференциального уравнения, можно пытаться продолжать вложенное подмногообразие, рассматривая точку в замыкании построенного подмногообразия и «выпрямляя» систему векторных полей в окрестности точки. В какой-то степени это работает, но построенный объект может уже не быть вложенным многообразием.

Проблема отсутствия вложенного подмногообразия возникает уже при $k = 1$ для векторного поля $\frac{\partial}{\partial \varphi} + a\frac{\partial}{\partial \psi}$ на произведении окружностей (торе) $M = S^1 \times S^1$ с угловыми координатами $\varphi, \psi$ и иррациональным числом $a$. В это примере глобальная интегральная кривая не является вложенным многообразием, но является образом гладкого отображения одномерного многообразия в $M$ с рангом производной, всюду равным 1.

*Задача* 7.90. В условиях теоремы Фробениуса рассмотрите объединение $N$ всех гладких кривых в $M$ с началом в $p$, касательные векторы которых лежат в линейной оболочке $\langle X_1, \dots, X_k \rangle$. Введите на нём структуру (связного) гладкого многообразия и покажите, что отображение $N \to M$ гладкое и его производная имеет всюду ранг $k$.

[[ Обратите внимание, что топология $N$ не обязана быть индуцирована с $M$. Определите окрестность $p \in N$ как окрестность $p$ в некотором локальном интегральном подмногообразии, проходящем через $p$. Возьмите координатные карты для $N$ из теоремы Фробениуса. ]]

*Задача* 7.91. Пусть в каждой точке $p$ многобразия $M$ дан флаг $0 \subset F_{1,p} \subset \dots \subset F_{k,p} \subset T_pM$, который гладко зависит от точки $p$. Пусть также для любых двух векторных полей из включения $X, Y \in F_i$ во всех точках многообразия следует, что скобка Ли оказывается тоже в $F_i$. Докажите, что у каждой точки $M$ есть координатная окрестность, в любой точке которой для любого $i = 1, \dots, k$ выполняется

$$F_i = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{\dim F_i}} \right\rangle.$$

[[ Действуйте как в доказательстве теоремы Фробениуса, взяв векторное поле в $F_1$ и выпрямив его до $\frac{\partial}{\partial x_1}$. ]]

7.10. **Группы Ли, левоинвариантные векторные поля и однопараметрические подгруппы.** Скобка Ли векторных полей оказывается важна в изучении *групп Ли*, то есть таких групп $G$, которые одновременно являются гладкими многообразиями, а операции умножения $G \times G \to G$ и взятия обратного $G \to G$ у которых являются гладкими отображениями.

Из определения легко следует, что отображение левого сдвига

$$L_g : G \to G, \quad L_g(h) = gh$$

и правого сдвига

$$R_g : G \to G, \quad R_g(h) = hg$$

являются диффеоморфизмами $G$, так как имеют обратные $L_{g^{-1}}$ и $R_{g^{-1}}$ соответственно.

Также полезно заметить, что компонента связности единицы $G_0 \subseteq G$ является нормальной подгруппой. Действительно, для любого $g \in G$ сопряжённая подгруппа $gG_0g^{-1} = L_g(R_{g^{-1}}G_0)$ является также подмногообразием и компонентой связности $G$. А так как $gG_0g^{-1}$ содержит единицу $e = geg^{-1}$, то на самом деле она совпадает с $G_0$. Собственно, вся «гладкая информация» о группе $G$ содержится в связной подгруппе $G_0$, а фактор-группа $G/G_0$ будет дискретной, то есть прообраз в $G$ любого её подмножества будет открытым (объединением компонент связности $G$).

Также практически важен вопрос о том, является ли связная группа Ли $G$ односвязной. В разделе 10.12 обсуждается понятие односвязности и понятие односвязного универсального накрытия $\widetilde{G} \to G$, которое тоже оказывается группой Ли (теорема 10.79). Пока что мы обсудим, что можно делать с группой Ли без использования понятия односвязности.

**Определение 7.92.** Векторное поле $X$ на группе Ли $G$ называется *левоинвариантным*, если для любого $g \in G$ $L_{g*}X = X$.

Заметим, что левый сдвиг $L_g$ переводит единицу группы $e \in G$ в $g$, и левый сдвиг с таким свойством только один. Отсюда следует, что взяв вектор $X_e \in T_eG$ мы можем определить вектор $X_g \in T_gG$ как

$$X_g = L_{g*}X_e.$$

В этой формуле правая часть гладко зависит от $g$, и таким образом оказывается определено векторное поле $X$ на всей группе $G$. Оно будет левоинвариантным, так как для любых $g, h \in G$ выполняется

$$L_gX_h = L_gL_hX_e = L_{gh}X_e = X_{gh}.$$

В обратную сторону понятно, что любое левоинвариантное векторное поле на $G$ полностью определяется своим векторов в единице группы. В итоге мы получаем, что левоинвариантные векторные поля на $G$ составляют векторное пространство $L(G)$ размерности, равной $\dim G$.

Более важно, что $L(G)$ является также алгеброй Ли. Действительно, операция левого сдвига на $g$, как и всякий диффеоморфизм, переставляется со скобкой Ли. Следовательно, скобка Ли левоинвариантых векторных полей тоже является левоинвариантным векторным полем. Этот факт мотивирует изучение абстрактных алгебр Ли, то есть векторных пространств, на которых есть билинейная операция скобки со свойствами

$$[X, Y] = -[Y, X] \quad [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Основным фактом этой теории является утверждение о том, что всякая конечномерная абстрактная алгебра Ли является алгеброй левоинвариантных векторных полей некоторой группы Ли, а при условии связности и односвязности эта группа Ли будет определена однозначно. Мы не претендуем на доказательство этого факта, но рассмотрим какие-то полезные утверждения, которые последуют из определений.

**Теорема 7.93.** *Интегральные кривые левоинвариантного векторного поля $X \in L(G)$ представляются в виде $gh(t)$, где $g \in G$, а $h : \mathbb{R} \to G$ — однопараметрическая подгруппа, то есть гладкая кривая, удовлетворяющая условию*

$$h(s + t) = h(s)h(t)$$

*для любых $s, t \in \mathbb{R}$.*

*Доказательство.* Достаточно доказать утверждение для интегральной кривой $h(t)$, с начальным условием $h(0) = e$, а потом сделать левый сдвиг на $g$. Теорема существования и единственности решений показывает, что такая кривая определена по крайней мере при $|t| < \varepsilon$ для некоторого положительного $\varepsilon$.

Посмотрим на кривую, заданную формулой $h(s)h(t)$ с переменной $t$ и некоторым фиксированным $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Это левый сдвиг исходной кривой, следовательно это тоже интегральная кривая левоинвариантного $X$. При $t = 0$ эта кривая пересекает исходную, следовательно (в силу автономности дифференциального уравнения) одна кривая отличается от другой лишь на сдвиг параметра, причём сдвиг на $s$. Это и означает, что формула

$$h(s + t) = h(s)h(t)$$

выполняется для достаточно малых $s$ и $t$. Но эта формула позволяет продолжать решение с любого интервала $(a, b)$ на интервал $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ так, что в итоге решение оказывается определённым для любых $s$ и $t$. Свойство однопараметрической подгруппы будет верным для любых $s$ и $t$ по тем же причинам, по которым оно оказалось верным для малых значений этих параметров. ☐

*Задача* 7.94. Выпишите явный вид однопараметрических подгрупп группы обратимых матриц $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$.

[[ Используйте матричную экспоненту

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

]]

Аналогично можно сопоставлять подгруппы $G$ всякой подалгебре $A \subseteq L(G)$, читателю предлагается разобраться с этим, решая следующую задачу.

*Задача* 7.95. Пусть $A \subseteq L(G)$ — подалгебра Ли (то есть векторное пространство, замкнутое относительно операции скобки Ли). Докажите, что существует инъективный гомоморфизм $I : H \to G$ групп Ли, такой что группа $H$ связна, а $DI_e : L(H) \to L(G)$ (производная $I$ в единице группы $H$) есть инъекция с образом $I(L(H)) = A$.

[[ Выбрав базис $X_1, \dots, X_k$ в $A$, мы можем применить к этой системе левоинвариантных векторных полей на $G$ теорему Фробениуса. Используя результат теоремы Фробениуса и задачи 7.90, мы получим инъективное гладкое отображение многообразий $I : H \to G$, производная которого всюду имеет ранг $k$. Сравнивая образ $I(H)$ с его левыми сдвигами на элементы из самого образа и используя его связность, можно понять, что образ $I(H)$ инвариантен относительно левых сдвигов на его элементы. Это означает, что образ $I(H)$ является подгруппой $G$, а на $H$ можно ввести структуру связной группы Ли. ]]

Пример иррациональной обмотки тора из предыдущего раздела показывает, что подгруппа $I(H)$ в $G$ может и не быть замкнутой. В общем случае вопрос о замкнутости соответствующей $A \subseteq L(G)$ подгруппы непрост, хотя некоторые сведения про это устанавливаются в теории групп и алгебр Ли.

*Задача* 7.96. Установите изоморфизм алгебр Ли между $L(\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n))$ и алгеброй матриц $n \times n$ с операцией

$$[A, B] = AB - BA.$$

[[ Выведите описание левоинвариантных векторных полей на группе $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ из описания её однопараметрических подгрупп. Примените геометрическое определение производной Ли. ]]

*Задача* 7.97. Определите, какой подалгебре $L(\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n))$ соответствует алгебра Ли $L(\mathrm{O}(n))$ ортогональной группы.

[[ Аналогично предыдущей задаче. ]]

*Задача* 7.98. Определите, какой подалгебре $L(\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n))$ соответствует алгебра Ли $L(\mathrm{U}(n))$ унитарной группы.

[[ Аналогично предыдущей задаче. ]]

*Задача* 7.99. *Дифференцированием* алгебры матриц $M_n$ размера $n \times n$ называется любое линейное отображение $D : M_n \to M_n$, удовлетворяющее правилу Лейбница

$$D(AB) = D(A)B + AD(B), \quad \forall A, B \in M_n.$$

Докажите, что операция $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ задаёт на векторном пространстве дифференцирований алгебры матриц структуру алгебры Ли.

*Задача* 7.100. * Опишите все дифференцирования алгебры матриц $M_n$.

[[ Рассмотрите матричную экспоненту дифференцирования $\varphi = e^D$ и докажите, что она является *автоморфизмом* алгебры матриц, то есть линейным изоморфизмом, удовлетворяющим равенству

$$\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B), \quad \forall A, B \in M_n.$$

Для установления структуры автоморфизма $\varphi$ рассмотрите матрицы $e_{ij}$ с единицей в позиции $(i, j)$ и с нулями в остальных местах. Разложите единичную матрицу $I_n$ в виде суммы проекторов $I_n = e_{11} + \dots + e_{nn}$, проверьте соотношения $e_{ii}e_{jj} = \delta_{ij}e_{ij}$ и посмотрите, что произойдёт с этим разложением после применения автоморфизма $\varphi$. С помощью соотношений $e_{ij}e_{k\ell} = \delta_{jk}e_{i\ell}$ разберитесь, чему должны быть равны $\varphi(e_{ij})$. ]]

7.11. **Римановы многообразия и риманов объём.** В предыдущих разделах мы убедились, что на произвольном гладком многообразии, не фиксируя локальные системы координат, можно делать много замечательных вещей, работать с векторными полями и дифференциальными формами, интегрировать их (в разных смыслах этого слова) и т.п. Для внутренних нужд геометрии и для нужд физики иногда бывает полезно добавить многообразию дополнительную структуру, и пожалуй наиболее естественная структура, которую имеет смысл рассматривать — это (полу)риманова структура, то есть симметричная билинейная форма на касательных векторах.

**Определение 7.101.** *Римановой структурой* на гладком многообразии $M$ называется задание положительно определённой квадратичной формы $g_p$ на касательном пространстве $T_pM$ в каждой точке $M$, гладко зависящее от точки $p$. *Полуриманова структура* — это задание невырожденной, но не обязательно положительно определённой квадратичной формы.

Как и в линейной алгебре, мы будем отождествлять квадратичную форму с симметричным скалярным произведением. В координатной карте это скалярное произведение выглядит как

$$g(X, Y) = \sum_{i,j} g_{ij} X_i Y_j,$$

где функции $g_{ij}$ гладкие и в любой точке составляют симметричную невырожденную (и положительно определённую в римановом случае) матрицу, которая в линейной алгебре называлась *матрица Грама*. Иначе это можно выразить формулами

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right), \quad g = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i \otimes dx_j.$$

На самом деле на любом гладком многообразии существует риманова структура. Для этого достаточно взять локально конечное разбиение единицы $\{\rho_i\}$, подчинённое картам $\{U_i\}$, в каждой карте построить риманову структуру $g_i$ (например, $\sum_i dx_i \otimes dx_i$ в данных координатах) и положить

$$g = \sum_i \rho_i g_i.$$

Эта сумма будет локально конечна и в любой точке будет давать положительно определённую квадратичную форму, так как сумма неотрицательно определённых квадратичных форм, хотя бы одна из которых положительно определена, будет положительно определена. Следующая задача показывает, что римановы структуры образуют непустое выпуклое множество:

*Задача* 7.102. Докажите, что для любых двух римановых структур $g$ и $g'$ на одном и том же многообразии $M$ и $t \in [0, 1]$ билинейная форма $(1 - t)g + tg'$ тоже будет римановой структурой.

[[ Проверьте положительную определённость. ]]

Естественный способ получить риманову структуру на вложенном многообразии $M \subset \mathbb{R}^N$ — это просто ограничить стандартную квадратичную форму на $\mathbb{R}^N$ на каждое касательной пространство $T_pM$. Говоря более абстрактно, мы ограничиваем стандартную (она называется *евклидовой*) риманову структуру

$$\sum_{i=1}^{N} dx_i \otimes dx_i$$

с евклидова пространства на его подмногообразие $M$. В таком случае, если локальные координаты на $M$ — это $u_1, \ldots, u_n$, то риманова структура задаётся в координатах как

$$g_{ij} = \frac{\partial r}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial r}{\partial u_j},$$

где точка означает евклидово скалярное произведение.

Вместе с (полу)римановой структурой появляется и согласованный с ней способ измерять объёмы. Для начала введём понятие *плотность меры* — это функция в каждых локальных координатах, которая при заменах координат преобразуется почти как дифференциальная форма высшего ранга, но умножается при замене координат на модуль якобиана обратной замены, а не на якобиан без модуля. Интеграл такой величины определяется аналогично интегралу от дифференциальной формы, но он уже вовсе не зависит от ориентации и корректно определён даже на неориентируемом многообразии.

**Лемма 7.103** (Формула риманова объёма). *Для (полу)римановой структуры $g$ формула*

$$\mathrm{vol}_g = \sqrt{|\det g|}\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

*где $\det g$ подразумевает детерминант матрицы $(g_{ij})$, корректно определяет плотность меры.*

*Доказательство.* Как известно из линейной алгебры, при замене переменных с некоторой матрицей производных $S$ старая квадратичная форма $G$ выражается через новую $G'$ в матричном виде как $G = S^T G' S$. Взяв детерминант, получаем

$$\det G = (\det S)^2 \det G' \Rightarrow \sqrt{|\det G|} = |\det S| \cdot \sqrt{|\det G'|},$$

что соответствует определению плотности меры на многообразии. □

В случае ориентированного многообразия мы можем также считать $\mathrm{vol}_g$ формой высшей степени, положительной относительно выбранной ориентации.

Рассмотрим частный случай риманова объёма — *площадь двумерной поверхности в евклидовом пространстве*, то есть интеграл от $\mathrm{vol}_g$ по этой поверхности. Заметим, что если поверхность задана параметрически и положительно ориентированные параметры на поверхности — $(u, v)$, то для индуцированной с $\mathbb{R}^n$ римановой структуры

$$\mathrm{vol}_g = \sqrt{|r'_u|^2|r'_v|^2 - (r'_u \cdot r'_v)^2}\, du \wedge dv.$$

В трёхмерном случае эту формулу можно продолжить как

$$\mathrm{vol}_g = \sqrt{|r'_u|^2|r'_v|^2 - (r'_u \cdot r'_v)^2}\, du \wedge dv = |[r'_u \times r'_v]|\, du \wedge dv.$$

Это та формула, которая обычно используется в учебниках по математическому анализу для определения площади поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве.

*Задача* 7.104. Докажите, что для гиперповерхности $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$, являющейся графиком гладкой функции $f : U \to \mathbb{R}$,

$$H = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n),\ (x_1, \dots, x_n) \in U\},$$

риманов объём в индуцированной с $\mathbb{R}^{n+1}$ римановой структуре находится по формуле

$$\mathrm{vol}\, H = \int_U \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2}\, dx_1 \dots dx_n.$$

[[ Установите сначала формулу для детерминанта квадратичной формы $g_0 + \alpha \otimes \alpha$, где $g_0$ — положительно определённая квадратичная форма, а $\alpha$ — линейная форма. ]]

Для двух римановых многообразий $M$ и $N$ их произведение $M \times N$ можно тоже считать римановым многообразием по формуле

$$g_{M\times N}(X, Y) = g_M(p_*X, p_*Y) + g_N(q_*X, q_*Y),$$

где $p : M \times N \to M$ и $q : M \times N \to N$ — естественные проекции. В матричном виде на произведении координатных карт $g_{M\times N}$ будет просто прямой суммой матриц $g_M$ и $g_N$, то есть блочной матрицей из двух соответствующих квадратных блоков на диагонали.

Так как детерминант прямой суммы матриц равен произведению детерминантов исходных матриц, то для риманова объёма произведения (например, борелевских) подмножеств $X \subseteq M$, $Y \subseteq N$ выполняется формула:

$$\mathrm{vol}_{M\times N}(X \times Y) = \mathrm{vol}_M X \cdot \mathrm{vol}_N Y, \tag{7.5}$$

это по сути утверждение о детерминанте прямой суммы квадратичных форм (с учётом теоремы Фубини). Свойство произведения в некотором смысле обосновывает естественность выбора риманова объёма, ещё одно обоснование естественности (связь объёма на подмногообразии и на исходном многообразии) будет дано в разделе 7.22.

*Задача* 7.105. Проверьте, что евклидова структура на $\mathbb{R}^n$ является произведением $n$ римановых структур на прямой $\mathbb{R}^1$.

*Задача* 7.106. Посчитайте площадь поверхности (риманов объём) единичной сферы в $\mathbb{R}^3$.

[[ Параметризуйте её каким-либо образом. ]]

*Задача* 7.107. Посчитайте площадь поверхности тора в $\mathbb{R}^4$, заданного уравнениями

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

[[ Можно посчитать в лоб, а можно проверить, является ли этот тор произведением римановых многообразий. ]]

*Задача* 7.108. У выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^3$ взяли нормали к граням $\{n_i\}$ и площади этих граней $\{A_i\}$. Докажите, что

$$\sum_i A_i n_i = 0$$

[[ Поинтегрируйте по поверхности многогранника формы типа $dx \wedge dy$ и свяжите это выражение с площадями граней. ]]

*Задача* 7.109. * Рассмотрим отображение единичной сферы $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ в $(n-1)$-мерный симплекс $\Delta^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ по формуле

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto \left(|z_1|^2, \dots, |z_n|^2\right).$$

Докажите, что риманов объём на сфере при этом переходит, с точностью до умножения на константу, в риманов объём на симплексе.

[[ Риманов объём на сфере определён инвариантно относительно вращений и эта инвариантность характеризует его однозначно с точностью до константы. Значит существует константа $c_n$, такая, что для любого измеримого множества $X \subseteq S^{2n-1}$ его мера относительно риманова объёма равна гауссовой мере с плотностью $e^{-\pi|\bar z|^2}$ конуса над множеством $X$, $\{tx \mid t \geqslant 0,\ x \in X\}$. Далее уже нетрудно понять, во что переходит гауссова мера при рассматриваемом в задаче отображении. ]]

*Задача* 7.110. * Докажите, что для двумерной компактной поверхности с краем $S \subset \mathbb{R}^4$ и индуцированной с $\mathbb{R}^4$ евклидовой структуры выполняется

$$\mathrm{vol}_g S \geqslant \int_S dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4.$$

Когда выполняется равенство?

[[ Это на самом деле локальный вопрос, который в каждой точке сводится к рассмотрению двумерных линейных подпространств $\mathbb{R}^4$. Его удобно решать, введя комплексную структуру на $\mathbb{R}^4$, то есть считая пары $(x_1, x_2)$ и $(x_3, x_4)$ двумя комплексными координатами в $\mathbb{C}^2$. ]]

7.12. **Звёздочка Ходжа, градиент, ротор, дивергенция.** Заметим, что наличие римановой или полуримановой структуры позволяет преобразовать вектор в дифференциальную форму первой степени по формуле

$$X^\flat(Y) = g(X, Y),\ \forall Y.$$

Возможна и обратная операция, делающая из формы первой степени вектор в соответствии с формулой

$$g(\alpha^\sharp, Y) = \alpha(Y),\ \forall Y.$$

В теоретической физике эти операции называются «опускание индекса» и «поднятие индекса», что связано со специфическими обозначениями координат векторов и линейных форм. Например, для вектора с координатами $X^i$ (написанными сверху) получается форма с координатами написанными снизу

$$X^\flat_i = \sum_j g_{ij} X^j,$$

как принято в теоретической физике (там даже не пишут знак суммы и знак $\flat$). Если речь идёт о стандартной евклидовой структуре в $\mathbb{R}^3$ и работе в ортонормированной системе координат, то эти операции оставляют те же самые координаты векторов и форм, поэтому в этом случае их можно не заметить.

Также наличие (полу)римановой структуры порождает билинейные симметрические формы на всех связанных с касательным пространством в точке пространствах, например на пространстве полилинейных кососимметричных форм в точке. Для знакомых с понятием тензорного произведения и изоморфизмом $V^*\otimes U \cong \mathcal{L}(V, U)$ (или хотя бы для прочитавших разделы 6.12 и 6.13) можно сказать, что форма (полу)римановой структуры $g$ может рассматриваться как отображение

$$T_pM \otimes T_pM \to \mathbb{R},$$

а также как элемент $T_p^*M \otimes T_p^*M$, или как отображение $T_pM \to T_p^*M$ (опускание индексов) с обратным $T_p^*M \to T_pM$ (поднятие индексов). Композиция $g$ и двух поднятий индексов на её аргументах даёт билинейное отображение

$$\widetilde{g} : T_p^*M \otimes T_p^*M \to \mathbb{R},$$

то есть симметричную билинейную форму на кокасательном пространстве.

*Задача* 7.111. Объясните, как связаны матрицы $g_{ij}$ и $\widetilde{g}_{ij}$ (последнюю в теоретической физике пишут как $g^{ij}$), представляющие (полу)риманову структуру на исходном касательном пространстве и соответствующую билинейную форму на двойственном к нему кокасательном пространстве.

*Задача* 7.112. Докажите неравенство для римановой структуры $g$, вектора $X$ и формы первой степени $\alpha$ в той же точке

$$\alpha(X)^2 \leqslant g(X, X) \cdot \widetilde{g}(\alpha, \alpha).$$

[[ При правильном выборе системы координат должно получиться неравенство Коши–Буняковского. ]]

Тензорно перемножая $\widetilde{g}$ на себя (и сортируя тензорные множители), можно расширить её до отображения

$$\widetilde{g} : \underbrace{T_p^*M \otimes \dots \otimes T_p^*M}_{k} \otimes \underbrace{T_p^*M \otimes \dots \otimes T_p^*M}_{k} \to \mathbb{R}.$$

Более конкретно, $\widetilde{g}$ будет определяться равенством на тензорных произведениях линейных форм

$$\widetilde{g}(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_k, \beta_1 \otimes \dots \otimes \beta_k) = \widetilde{g}(\alpha_1, \beta_1) \dots \widetilde{g}(\alpha_k, \beta_k).$$

Вкладывая пространство $\Omega_p^k(M)$ (дифференциальных форм степени $k$ в точке $p$) в тензорное произведение

$$\Omega_p^k(M) \subseteq \underbrace{T_p^*M \otimes \dots \otimes T_p^*M}_{k}$$

мы таким образом можем рассмотреть $\widetilde{g}$ как билинейную форму на $\Omega_p^k(M)$ с явной формулой для внешних произведений линейных форм

$$\widetilde{g}(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k, \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_k) = C_k \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \widetilde{g}(\alpha_1, \beta_{\sigma(1)}) \dots \widetilde{g}(\alpha_k, \beta_{\sigma(k)}) \tag{7.6}$$

с некоторой константой $C_k$, зависящей от нормировки вложения кососимметричных форм в полилинейные формы (которая в разных учебниках разная). Чтобы внести определённость, мы нормируем возникающее в этой конструкции произведение следующим образом: если линейные формы $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Omega^1(M)$ образуют (почти) ортонормированный базис в точке $p$, то есть

$$\widetilde{g}_p(\alpha_i, \alpha_j) = \pm\delta_{ij},$$

то формы $\alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k}$ будут образовывать (почти) ортонормированный базис относительно $\widetilde{g}_p$. Ортогональность будет иметь место по (7.6) в любом случае, а нормирование соответствует выбору $C_k = 1$ в (7.6).

Будем теперь рассматривать многообразие $M^n$ размерности $n$. Заметим, что внешнее умножение между $\Omega^k(M)$ и $\Omega^{n-k}(M)$ в точке $p$ является *невырожденным спариванием*, то есть для любой ненулевой формы $\alpha \in \Omega^k(M)$ можно найти форму $\beta \in \Omega^{n-k}(M)$ так, что $\alpha \wedge \beta$ не будет равна нулю в точке $p$.

*Задача* 7.113. Проверьте невырожденность внешнего умножения в координатах в качестве упражнения.

Спаривание $\beta : V \otimes W \to \mathbb{R}$ между векторными пространствами задаёт отображения $V \mapsto W^*$,

$$X \mapsto (Y \mapsto \beta(X, Y))$$

и $W \to V^*$, невырожденность же означает, что оба этих отображения имеют нулевое ядро. В конечномерном случае, когда размерность двойственного пространства равна размерности исходного, невырожденности достаточно для установления изоморфизмов $V \cong W^*$ и $W \cong V^*$.

Вспомнив также, что $\widetilde{g}$ даёт изоморфизм между $\Omega^{n-k}$ в точке и его двойственным, мы можем обосновать корректность следующего определения.

**Определение 7.114.** В присутствии (полу)римановой структуры $g$ на ориентированном многообразии $M^n$ (чтобы $\operatorname{vol}_g$ можно было считать элементом $\Omega^n(M)$) для любой формы $\beta \in \Omega^k(M)$ формула

$$\alpha \wedge *\beta = \widetilde{g}(\alpha, \beta) \operatorname{vol}_g, \ \forall \alpha \in \Omega^k(M),$$

определяет форму $*\beta \in \Omega^{n-k}(M)$ и определяет линейное преобразование $* : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$, *звёздочку Ходжа*.

Точнее можно сказать, что $*$ определяется как композиция изоморфизмов в каждой точке

$$\Omega^k_p(M) \longrightarrow (\Omega^k_p(M))^* \longrightarrow \Omega^{n-k}_p(M),$$

в которой первый возникает из невырожденного спаривания $\widetilde{g}$ между формами степени $k$, а второй — из спаривания, заданного внешним умножением с делением на $\mathrm{vol}_g$.

Оператор звёздочки является поточечным, то есть линейным относительно умножения на функцию, $*(f\alpha) = f(*\alpha)$. Например, для $\mathbb{R}^3$ со стандартной евклидовой структурой и координатами $x, y, z$ мы получим

$$*1 = dx \wedge dy \wedge dz,$$
$$*dx = dy \wedge dz, *dy = dz \wedge dx, *dz = dx \wedge dy,$$
$$*(dx \wedge dy) = dz, *(dy \wedge dz) = dx, *(dz \wedge dx) = dy,$$
$$*(dx \wedge dy \wedge dz) = 1.$$

*Задача* 7.115. Докажите, что на $n$-мерном (полу)римановом многообразии для звёздочки $* : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ выполняется

$$* * \alpha = (-1)^{k(n-k)} \operatorname{sgn} \det g \cdot \alpha.$$

[[ Проверьте в координатах, в которых $g$ имеет диагональный вид с $\pm 1$ на диагонали. ]]

*Задача* 7.116. Докажите, что для положительно определённой $g$ звёздочка Ходжа является изометрией для скалярного произведения $\widetilde{g}$ на внешних формах касательного пространства в точке.

[[ Проверьте в координатах, в которых $g$ имеет диагональный вид с $1$ на диагонали. ]]

С помощью операций $\flat, \sharp, *$ мы можем выразить такие понятия, как *ротор и дивергенция* векторного поля в $\mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{rot} X = (*d(X^\flat))^\sharp, \quad \operatorname{div} X = *d(*X^\flat), \tag{7.7}$$

градиент функции как $\operatorname{grad} f = (df)^\sharp$. Градиент тогда можно геометрически описать как вектор с максимальным значением $X(f)$ в точке при фиксированной длине $\sqrt{g(X, X)}$ и такой что $g(X, X) = X(f)$. Геометрический смысл дивергенции, в силу задачи 7.69 и того, что $*1$ является формой риманова объёма, соответствует изменению риманова объёма при действии диффеоморфизмов, получающихся интегрированием данного векторного поля. Над геометрическим смыслом ротора читатель может поразмышлять самостоятельно.

*Задача* 7.117. Докажите, что определение дивергенции для риманова многообразия согласовано с определением дивергенции относительно формы объёма как $\operatorname{div} X \,\mathrm{vol}_g = L_X (\mathrm{vol}_g)$.

[[ Используйте формулу Картана $L_X = i_X d + d i_X$ и формулу $*1 = \mathrm{vol}_g$. ]]

*Задача* 7.118. Докажите что $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$ и $\operatorname{div} \operatorname{rot} X = 0$.

[[ Вспомните свойство $d^2 = 0$. ]]

*Задача* 7.119. Докажите для гладкого векторного поля на $\mathbb{R}^3$, что если $\operatorname{rot} X = 0$ на всём $\mathbb{R}^3$, то $X = \operatorname{grad} f$, для некоторой функции $f$. А если $\operatorname{div} X = 0$ на всём $\mathbb{R}^3$, то $X = \operatorname{rot} Y$, для некоторого векторного поля $Y$ (последнее физики называют «векторный потенциал»).

[[ Сведите к теореме 7.20 про обращение операции $d$. ]]

Из приведённых формул для градиента, дивергенции и ротора видно, что они на самом деле зависят от римановой структуры в $\mathbb{R}^3$ и их можно считать корректно определёнными только до тех пор, пока мы не меняем её. Говоря проще, можно сказать, что координатные формулы для них остаются теми же самыми при замене ортонормированной системы координат на другую ортонормированную систему координат.

Определения градиента, дивергенции и ротора по формулам (7.7) позволяют записать эти операции в любых криволинейных координатах, так как внешнее дифференцирование во всех системах координат записывается одинаково, а оператор $*$ является линейным относительно умножения на функции (то есть не содержит производных) и может быть выписан в координатах с помощью своего определения.

Следующие задачи посвящены использованию римановой структуры и связанных с ней операций.

*Задача* 7.120. Выпишите оператор Лапласа для функций в сферических координатах $x = r\cos\varphi\sin\vartheta$, $y = r\sin\varphi\sin\vartheta$, $z = r\cos\vartheta$.

[[ Используйте выражение $\Delta f = *d{*}df$ и тот факт, что векторные поля $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\vartheta}$ ортогональны (но не ортонормированы). Начните с доказательства формул

$$g = dr\otimes dr + r^2\, d\vartheta\otimes d\vartheta + r^2\sin^2\vartheta\, d\varphi\otimes d\varphi,$$

$$\tilde g\,(dr, dr) = 1,\ \tilde g\,(d\vartheta, d\vartheta) = \frac{1}{r^2},\ \tilde g\,(d\varphi, d\varphi) = \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta},$$

$$*dr = r^2\sin\vartheta\, d\vartheta\wedge d\varphi,\ *d\vartheta = \sin\vartheta\, d\varphi\wedge dr,\ *d\varphi = \frac{1}{\sin\vartheta}dr\wedge d\vartheta.$$

]]

*Задача* 7.121. $^*$ Функция $f$ на римановом многообразии называется *гармонической*, если $\Delta f = *d*df = 0$. Докажите, что у гармонической на $\mathbb{R}^n$ функции все средние значения на сферах с центрами в нуле равны её значению $f(0)$.

[[ Заметьте, что оператор Лапласа линеен и инвариантен относительно вращений, следовательно функция, получающаяся из $f$ усреднением относительно всех вращений $\mathrm{SO}(n)$ тоже гармоническая и зависит только от расстояния до начала координат. Найдите общий вид гармонических функций в $\mathbb{R}^n$, зависящих только от расстояния до начала координат. ]]

*Задача* 7.122. Докажите, что непостоянная гармоническая функция на многообразии без края не может иметь компактный носитель.

[[ Выразите интеграл $\int_M |df|^2\,\mathrm{vol}_g = \int_M df\wedge *df$ через лапласиан $\Delta f$. ]]

*Задача* 7.123. В ортогональной матрице $A$ с положительным детерминантом размера $n\times n$ взяли левую верхнюю подматрицу $B$ размера $k\times k$ и правую нижнюю подматрицу $C$ размера $(n-k)\times(n-k)$. Докажите, что $\det B = \det C$.

[[ Действие ортогонального оператора $A$ можно распространить на $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)$, назовём этот оператор $\Lambda A$, его матричные элементы являются минорами исходной матрицы $A$. Заметьте, что $\Lambda A$ коммутирует с действием звёздочки Ходжа на $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)$ и звёздочка Ходжа сама ортогональна. ]]

*Задача* 7.124. Проверьте, что можно подобрать понижающий степень формы на единицу дифференциальный оператор $d^* : \Omega^*(M)\to\Omega^{*-1}(M)$, такой что для форм с компактным носителем на многообразии без края будет выполняться

$$\int_M \widetilde g(d\alpha,\beta)\,\mathrm{vol}_g = \int_M \widetilde g(\alpha, d^*\beta)\,\mathrm{vol}_g\,.$$

[[ Попробуйте выражение $d^* = \pm * d*$ и подберите в нём знак. ]]

*Задача* 7.125. Оператор Лапласа на дифференциальных формах (с точностью до знака) определяется как $\Delta = (d + d^*)^2$, *гармонические формы* определяются как решения уравнения $\Delta\alpha = 0$. Докажите, что на многообразии без края форма с компактным носителем $\alpha$ гармоническая тогда и только тогда, когда $d\alpha = 0$ и $d^*\alpha = 0$.

[[ Рассмотрите выражение $\int_M g(\alpha, \Delta\alpha)\operatorname{vol}_g$. ]]

*Задача* 7.126. * Работая с линейным пространством $V$ с симметричной билинейной формой $g$ зададим для любого вектора $X \in V$ оператор на кососимметричных формах пространства $V$ как $e(X) : \wedge^*(V) \to \wedge^*(V)$ как

$$e(X) : \alpha \mapsto X^\flat \wedge \alpha + i_X\alpha,$$

где операция $\flat$ определена через $g$. Докажите, что эти операции удовлетворяют соотношению

$$e(X)e(Y) + e(Y)e(X) = 2g(X, Y).$$

Докажите, что они порождают (в смысле линейных комбинаций и умножения) *алгебру Клиффорда* размерности $2^{\dim V}$.

[[ Выпишите выражение $e(X)e(Y) + e(Y)e(X)$ по определению, используйте что $X^\flat \wedge Y^\flat + Y^\flat \wedge X^\flat = 0$, $i_Xi_Y + i_Yi_X = 0$ и правило Лейбница для $i_X$ и $i_Y$. Для вычисления размерности докажите, что если фиксировать базис $X_1, \dots, X_n$ в $V$, то алгебра Клиффорда порождена мономами $e(X_{i_1})e(X_{i_2})\dots e(X_{i_k})$ для всевозможных наборов $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n$ (это оценивает размерность сверху) и при этом любой элемент $\wedge^*(V)$ можно получить, умножая образующую $\wedge^n(V)$ на подходящий элемент алгебры Клиффорда (это оценивает размерность снизу). ]]

7.13. **Ковариантная производная.** Мы продолжаем рассматривать многообразие $(M, g)$ с (полу)римановой структурой $g$ (невырожденной, но необязательно положительно определённой). Мы хотим установить существование операции *ковариантного дифференцирования векторных полей* и, аналогично внешнему дифференцированию, мы сначала перечислим требуемые свойства этой операции $\nabla_XY$, которая из двух векторных полей делает третье (в этих формулах $f$ — любая гладкая функция):

- $\nabla_{fX}Y = f\nabla_XY$ (линейность по первому аргументу);
- $\nabla_XfY = X(f)Y + f\nabla_XY$ (правило Лейбница для второго аргумента);
- $\nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y]$ (отсутствие кручения);
- $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_XY, Z) + g(Y, \nabla_XZ)$ (совместимость с (полу)римановой структурой $g$).

Существование и единственность ковариантной производной для данной (полу)римановой структуры устанавливает следующая теорема.

**Теорема 7.127** (Формула Козюля и существование ковариантной производной). *Из условий на ковариантное дифференцирование следует формула*

$$\begin{aligned} &2g(\nabla_XY, Z) = \\ &\quad = X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) + g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y). \end{aligned}$$

*Если считать правую часть формулы определением левой части, то построенное так ковариантное дифференцирование будет иметь требуемые свойства.*

*Доказательство.* Применим совместимость с $g$ к циклическим перестановкам тройки векторов:

$$\begin{aligned} X(g(Y, Z)) &= g(\nabla_XY, Z) + g(Y, \nabla_XZ), \\ Y(g(Z, X)) &= g(\nabla_YZ, X) + g(Z, \nabla_YX), \\ Z(g(X, Y)) &= g(\nabla_ZX, Y) + g(X, \nabla_ZY). \end{aligned}$$

Сложим первые два равенства и вычтем из них третье, тогда получится

$$\begin{aligned}X(g(Y,Z))+Y(g(Z,X))-Z(g(X,Y)&=\\ &=g(\nabla_XY+\nabla_YX,Z)+g(\nabla_YZ-\nabla_ZY,X)-g(\nabla_ZX-\nabla_XZ,Y)=\\ &=2g(\nabla_XY,Z)-g([X,Y],Z)+g([Y,Z],X)-g([Z,X],Y),\end{aligned}$$

где в последней строчке применено отсутствие кручения. Дальше остаётся перенести $2g(\nabla_XY,Z)$ влево, а всё остальное — вправо.

Чтобы использовать эту формулу для определения $\nabla_XY$, надо проверить, что правая часть не зависит от производных $Z$, то есть при умножении $Z$ на функцию $f$ функция выносится из правой части. Проверим это (не выписывая явно слагаемые, где $f$ не дифференцируется)

$$\begin{aligned}X(g(Y,fZ))+Y(g(fZ,X))-fZ(g(X,Y))+g([X,Y],fZ)-g([Y,fZ],X)+g([fZ,X],Y)=\\ =f\cdot(\ldots)+X(f)g(Y,Z)+Y(f)g(Z,X)-g(Y(f)Z,X)-g(X(f)Z,Y)=f\cdot(\ldots).\end{aligned}$$

Здесь использовались формулы типа $[X,Y]=L_XY=-L_YX$ и правило Лейбница для производной Ли произведения функции на векторное поле. Проверим также, что происходит при умножении $X$ на $f$

$$\begin{aligned}fX(g(Y,Z))+Y(g(Z,fX))-Z(g(fX,Y))+g([fX,Y],Z)-g([Y,Z],fX)+g([Z,fX],Y)=\\ =f\cdot(\ldots)+Y(f)g(Z,X)-Z(f)g(X,Y)-g(Y(f),X,Z)+g(Z(f)X,Y)=f\cdot(\ldots)\end{aligned}$$

и при умножении $Y$ на $f$

$$\begin{aligned}X(g(fY,Z))+fY(g(Z,X))-Z(g(X,fY))+g([X,fY],Z)-g([fY,Z],X)+g([Z,X],fY)=\\ =f\cdot(\ldots)+X(f)g(Y,Z)-Z(f)g(X,Y)+g(X(f)Y,Z)+g(Z(f)Y,X)=\\ =f\cdot(\ldots)+2X(f)g(Y,Z).\end{aligned}$$

Таким образом установлена линейность ковариантной производной по первому аргументу и правило Лейбница для второго аргумента.

Сравним исходную формулу и формулу с переставленными $X$ и $Y$:

$$\begin{aligned}2g(\nabla_XY,Z)&=\\ &=X(g(Y,Z))+Y(g(Z,X))-Z(g(X,Y))+g([X,Y],Z)-g([Y,Z],X)+g([Z,X],Y)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}2g(\nabla_YX,Z)&=\\ &=Y(g(X,Z))+X(g(Z,Y))-Z(g(Y,X))+g([Y,X],Z)-g([X,Z],Y)+g([Z,Y],X).\end{aligned}$$

Первые два слагаемых и последние два слагаемых (с учётом кососимметричности скобки Ли) меняются местами, третье не меняется, и только четвёртое слагаемое $g([X,Y],Z)$ поменяет знак. Это показывает отсутствие кручения, $\nabla_XY-\nabla_YX=[X,Y]$, для так определённой ковариантной производной.

Для доказательства совместимости с $g$ нам надо сложить две формулы Козюля

$$\begin{aligned}2g(\nabla_XY,Z)&=\\ &=X(g(Y,Z))+Y(g(Z,X))-Z(g(X,Y))+g([X,Y],Z)-g([Y,Z],X)+g([Z,X],Y)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}2g(\nabla_XZ,Y)&=\\ &=X(g(Z,Y))+Z(g(Y,X))-Y(g(X,Z))+g([X,Z],Y)-g([Z,Y],X)+g([Y,X],Z).\end{aligned}$$

При этом первое слагаемое даст нам нужный результат, второе и третье поменяются местами и поменяют знак, то есть сократятся в сумме, четвёртое и последнее тоже поменяются местами и поменяют знак, а предпоследнее слагаемое просто поменяет знак и в сумме сократится. ☐

Отличие ковариантной производной $\nabla_X Y$ от производной Ли $L_X Y$ заключается в том, что ковариантная производна $C^\infty$-линейна по вектору $X$,

$$\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y,$$

иначе говоря значение $\nabla_X Y$ в точке зависит только от значения $X$ в той же точке, но не от производных $X$. Свойство отсутствия кручения при этом показывает, что некоторая связь с производной Ли у ковариантной производной всё же имеется.

Зависимость ковариантной производной от векторного поля $Y$ включает в себя и его производные, что ясно из формулы Козюля или из приведённого ниже координатного выражения. Такой характер зависимости $\nabla_X Y$ от $X$ и $Y$ позволяет определить «перенос вектора вдоль кривой», см. далее формулу (7.10).

Можно определить ковариантную производную не только для векторных полей. Действие ковариантной производной $\nabla_X$ на функции определяется просто как $X(f)$, а на формах первой степени определяется из требования выполнения правила Лейбница для канонического умножения векторных форм первой степени на векторные поля:

$$(\nabla_X \alpha)(Y) = \nabla_X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y).$$

На формы высшей степени ковариантную производную тоже можно распространить, потребовав выполнения правила Лейбница для внешнего произведения форм. Также можно распространить определение ковариантной производной по правилу Лейбница (для тензорного произведения) на симметричные формы от двух векторов и убедиться, что условие совместимости ковариантного дифференцирования с $g$ будет выглядеть как $\nabla g = 0$.

*Задача* 7.128. Докажите, что условие отсутствия кручения эквивалентно тому, что для форм первой степени выполняется

$$(\nabla_X \alpha)(Y) - (\nabla_Y \alpha)(X) = d\alpha(X, Y).$$

[[ Вспомните, что $d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])$. ]]

*Задача* 7.129. Получите выражение в координатах (здесь индексы у векторов пишем сверху, как в теоретической физике) для

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i},\ Y = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x_i},\ Z = \sum_i Z^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

при условии $\nabla_X Y = Z$ как

$$Z^k = \sum_i X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x_i} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} X^i Y^j.$$

Проверьте, что *символы Кристоффеля*

$$\Gamma_{\ell ij} = \sum_k g_{\ell k} \Gamma^k_{ij}$$

можно в координатах найти как

$$\Gamma_{\ell ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\ell i}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{\ell j}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\ell}\right).$$

[[ Примените линейность по первому аргументу и правило Лейбница по второму. Последняя формула — это по сути формула Козюля для попарно коммутирующих векторных полей $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_\ell}$. ]]

*Задача* 7.130. Пусть $N$ является вложенным подмногообразием в римановом многообразии $M$, а риманова структура на $N$ индуцирована римановой структурой на $M$. Обозначим ковариантные производные на $N$ и $M$ как $\nabla^N$ и $\nabla^M$ соответственно. Докажите, что для векторных полей $X$ и $Y$, касательных к $N$, ковариантная производная $\nabla^N_X Y$ равна ортогональной проекции ковариантной производной $\nabla^M_X Y$ на касательное пространство $TN$.

[[ Проверьте, что проекция $\nabla^M_X Y$ на касательное пространство к $N$ удовлетворяет всем свойствам ковариантной производной на $N$ и равна $\nabla^N_X Y$ в силу единственности. ]]

*Задача* 7.131 (Вторая фундаментальная форма подмногообразия). Пусть $N$ является вложенным подмногообразием в римановом многообразии $M$, а риманова структура на $N$ индуцирована римановой структурой на $M$, как в предыдущей задаче. Докажите, что для векторных полей $X$ и $Y$, касательных к $N$, ортогональная к $TN$ (по результату предыдущей задачи) компонента

$$\mathrm{II}_N(X,Y) = \nabla^M_X Y - \nabla^N_X Y$$

является симметричным тензором от $X$ и $Y$.

[[ Проверьте, как поменяется нормальная компонента, если $X$ умножится на функцию $f$, с помощью правила Лейбница для ковариантной производной $\nabla^M_X Y$. Проверьте, как поменяется нормальная компонента при перестановке $X$ и $Y$ с помощью отсутствия кручения. ]]

*Задача* 7.132 (Вторая фундаментальная форма двумерной поверхности в евклидовом пространстве). Пусть $N$ является вложенной ориентированной двумерной поверхностью в $\mathbb{R}^3$ с римановой структурой, индуцированной обычным скалярным произведением. Тогда можно считать, что её вторая фундаментальная форма принимает скалярные значения после скалярного умножения на согласованный с ориентацией вектор нормали $\nu$. Докажите, что если поверхность параметризована как $r = r(u,v)$, то вторая фундаментальная форма в этих координатах имеет вид

$$\mathrm{II}_N = L du \otimes du + M du \otimes dv + M dv \otimes du + N dv \otimes dv,$$

где

$$L = r''_{uu} \cdot \nu, \quad M = r''_{uv} \cdot \nu, \quad N = r''_{vv} \cdot \nu.$$

[[ Заметьте, что в евклидовом пространстве ковариантная производная $\nabla_X Y$ просто дифференцирует координаты $Y$ в направлении $X$ (символы Кристоффеля равны нулю). В качестве $X$ и $Y$ возьмите разные комбинации из векторов $r'_u$ и $r'_v$, продолжив параметризацию поверхности $(u,v)$ до параметризации её окрестности $(u,v,w) \mapsto r(u,v) + w\nu$. ]]

7.14. **Длина кривой и уравнение геодезической.** Римановы многообразия доступны для геометрической интуиции, потому что на них определено понятие расстояния. Для начала определим длину кривой $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ в римановом многообразии

$$\ell(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g(\dot\gamma, \dot\gamma)}\, dt,$$

эта формула мотивирована формулой длины кусочно непрерывно дифференцируемой кривой в $\mathbb{R}^n$, а также является частным случаем риманова объёма, если рассматривать кривую как вложенное в $M$ одномерное многообразие с индуцированной римановой структурой.

*Задача* 7.133. Проверьте явно, что длина кривой не зависит от выбора её параметризации.

Заметим, что ранее, говоря о метрических пространствах, мы определяли длину кривой с помощью метрики пространства. Для римановой структуры определение длины кривой другое, и есть смысл действовать в обратном направлении — определять метрику через длину кривых.

**Определение 7.134.** Расстояние между точками $p$ и $q$ риманова многообразия $M$ определяется как точная нижняя грань длин кривых, соединяющих $p$ и $q$.

Для связного риманова многообразия расстояние определяет метрику на $M$ и превращает его в метрическое пространство.

*Задача* 7.135. Проверьте аксиомы метрического пространства для метрики связного риманова многообразия.

[[ Наименее тривиально проверить невырожденность метрики, что между двумя разными точками оказывается положительное расстояние. Заметьте, что оценить снизу расстояние можно, если в каких-то координатах около точки $p$ заметить, что любая кривая из точки $p$ в точку $q$ должна пересечь некоторую маленькую сферу $S$ вокруг $p$, а далее оценить метрику в этой координатной окрестности снизу метрикой, пропорциональной евклидовой и оценить длину части кривой от $p$ до $S$. Можно также использовать менее элементарную лемму 7.146, доказываемую далее. ]]

Это оправдывает использование термина *риманова метрика* как взаимозаменяемого с термином *риманова структура*, хотя на самом деле риманова структура $g$, строго говоря, не является метрикой, а лишь порождает метрику на римановом многообразии, причём только на связном. Если же речь идёт о полуримановой структуре $g$, то никакой метрики на своём многообразии она не порождает, но иногда и в этом случае $g$ называют *полуримановой метрикой*; такая терминология используется в физике.

Изучение локального строения риманова многообразия (см. пояснения у неравенства (7.12) ниже) может прояснить, что его риманова структура в точке $p$ может быть получена как второй дифференциал выражения $\rho^2(p, x)$ (как функции от $x$), то есть восстановить обратно квадратичную форму $g$ по этой внутренней метрике тоже можно.

Проблема с выписыванием дифференциального уравнения для минимизирующей длину кривой заключается в том, что одна и та же кривая с разными параметризациями даёт одну и ту же длину, и это вырождение надо как-то снимать. Параметризация будет фиксирована, если вместо длины мы рассмотрим функционал «энергии» или, как его называют в физике, «действия»

$$A(\gamma) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} g(\dot\gamma, \dot\gamma)\, dt.$$

Этот функционал на полуримановых многообразиях, очевидно, удобнее длины, потому что не требует извлечения корня из отрицательного числа. На римановых многообразиях он тоже полезен, как мы скоро увидим.

**Теорема 7.136.** *На римановом многообразии, среди всех параметризаций одной и той же кривой отрезком $[t_0, t_1]$ минимальное действие достигается на параметризации с постоянной скоростью и в этом случае выполняется равенство*

$$A(\gamma) = \frac{1}{2(t_1 - t_0)}\ell(\gamma)^2.$$

*Доказательство.* Напишем неравенство Коши–Буняковского (теорема 5.105):

$$\left(\int_{t_0}^{t_1} g(\dot\gamma,\dot\gamma)\;dt\right)\cdot\left(\int_{t_0}^{t_1} dt\right) \geqslant \left(\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g(\dot\gamma,\dot\gamma)}\;dt\right)^2,$$

или

$$\int_{t_0}^{t_1} g(\dot\gamma,\dot\gamma)\;dt \geqslant \frac{1}{t_1-t_0}\left(\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g(\dot\gamma,\dot\gamma)}\;dt\right)^2.$$

При пропорциональных друг другу функциях в неравенстве Коши–Буняковского имеет место равенство. В данном случае это означает, что равенство будет при постоянной скорости кривой. ☐

В науке о дифференциальных уравнениях изучаются такого рода *вариационные задачи* и выводятся дифференциальные уравнения, которым удовлетворяет любая гладкая кривая, для которой этот функционал является локальным экстремумом (и возможно, некоторые другие). Мы могли бы воспользоваться готовыми фактами из вариационного исчисления, но лучше проведём соответствующие рассуждения с помощью ковариантного дифференцирования.

Рассмотрим отрезок кривой $\gamma([t_0,t_1])$, который является вложенным одномерным многообразием. Деформируем отрезок кривой семейством диффеоморфизмов $\varphi_s$, порождённым векторным полем $X$. При действии любого гладкого отображения $\varphi : M \to M$ *обратный образ римановой структуры* определяется аналогично обратному образу дифференциальной формы:

$$(\varphi^* g)(X,Y) = g(\varphi_* X, \varphi_* Y).$$

Тогда для действия деформированной $\varphi$ кривой мы получим

$$A(\varphi\circ\gamma) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} g(\varphi_*\dot\gamma,\varphi_*\dot\gamma)dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (\varphi^* g)(\dot\gamma,\dot\gamma)dt,$$

то есть это то же самое, что действие исходной кривой в римановой структуре $\varphi^* g$. Теперь мы готовы изучать необходимые условия экстремальности кривой для функционала действия.

**Теорема 7.137.** *Производная действия вложенной кривой $\gamma : [t_0,t_1]\to M$, деформированной порождённой векторным полем $X$ группой диффеоморфизмов $\varphi_s$, равна*

$$\frac{d}{ds}A(\varphi_s\circ\gamma)\bigg|_{s=0} = g(X,\dot\gamma)|_{\gamma(t_1)} - g(X,\dot\gamma)|_{\gamma(t_0)} - \int_{t_0}^{t_1} g(X,\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma)\;dt. \tag{7.8}$$

*Доказательство.* Касательный вектор кривой $V=\dot\gamma$ определён на рассматриваемом отрезке кривой и (с помощью разбиения единицы) его можно считать продолженным до векторного поля в окрестности вложенного отрезка кривой. Как мы выяснили до формулировки теоремы, действие искажённой диффеоморфизмом $\varphi_s$ кривой $\varphi_s\circ\gamma$ — это то же самое, что действие исходной кривой $\gamma$ в римановой структуре $\varphi_s^*(g)$. Значит, надо брать производную $\varphi_s^* g$ по $s$, то есть производную Ли $g$ по $X$, и тогда получается

$$\frac{d}{ds}A(\varphi_s\circ\gamma)\Big|_{s=0} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(L_X g)(V,V)\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(X(g(V,V)) - 2g(L_X V, V))\,dt = \int_{t_0}^{t_1}(g(\nabla_X V, V) - g([X,V],V))\,dt =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} g(\nabla_V X, V)\,dt = \int_{t_0}^{t_1}(V(g(X,V)) - g(X,\nabla_V V))\,dt =$$
$$= g(X,V)|_{\gamma(t_1)} - g(X,V)|_{\gamma(t_0)} - \int_{t_0}^{t_1} g(X,\nabla_V V)\,dt.$$

Здесь использовано правило Лейбница для производной Ли произведения билинейной формы $g$ на векторные поля $V$ и $V$, совместимость ковариантной производной с $g$, отсутствие кручения, ещё раз совместимость с $g$, и тот факт, что производная скаляра по $V$ есть его производная по параметру $t$ на кривой.

Правило Лейбница здесь применяется в том смысле, что выражение $g(V,W)$ зависит от билинейной формы $g$, векторного поля $V$ и векторного поля $W$ линейно. Тогда производная этого выражения (в смысле Ли или просто по какой-то координате после выпрямления векторного поля) должна вычисляться следующим образом

$$X(g(V,W)) = (L_X g)(V,W) + g(L_X V, W) + g(V, L_X W).$$

В частности, из симметричности $g$ последует использованное выше тождество

$$X(g(V,V)) = (L_X g)(V,V) + g(L_X V, V) + g(V, L_X V) = (L_X g)(V,V) + 2g(L_X V, V)$$

□

**Следствие 7.138.** *Для кривых, дающих экстремум функционала действия, выполняется* уравнение геодезической

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0. \tag{7.9}$$

*Доказательство.* Если выражение $\nabla_V V$ не равно в какой-то точке $p$ кривой $\gamma$, не совпадающей с его концами, то подберём вектор $X_0$ в точке $p$ так, чтобы $g(X_0, \nabla_V V) > 0$ в этой точке. В координатной окрестности $p$, считая $X_0$ вектором с постоянными координатами, мы будем иметь неравенство $g(X_0, \nabla_V V) > 0$ в некоторой окрестности $U \ni p$. Уменьшив $U$, мы можем считать, что она не содержит концов кривой $\gamma$. Рассмотрим функцию $\rho : M \to [0, +\infty)$ с носителем в $U$, положительную в точке $p$. Положим $X = \rho X_0$, это векторное поле уже можно продолжить нулём на всё многообразие $M$. Оно удовлетворяет неравенствам $g(X, \nabla_V V) > 0$ в точке $p$ и $g(X_0, \nabla_V V) \geqslant 0$ во всех точках многообразия.

Для такого векторного поля $X$ первые два слагаемых в (7.8) равны нулю, так как $X$ нулевое на концах кривой. В третьем слагаемом выражение под интегралом неположительно, и как минимум в одной точке кривой отрицательно. Следовательно, в силу непрерывности выражения под интегралом, третье слагаемое отрицательно. Тогда для порождённой полем $X$ группы диффеоморфизмов $\varphi_s$, мы получаем

$$\frac{d}{ds}A(\varphi_s\circ\gamma) < 0$$

при $s = 0$, что противоречит экстремальности действия кривой.

Возвращаясь к более общим, не обязательно вложенным кривым, можно заметить следующее. При условии экстремальности всей кривой любой её отрезок должен быть экстремальным относительно деформаций, тождественных в окрестности концов (именно такие мы рассматривали выше). Так как любая точка кривой с ненулевой скоростью лежит внутри какого-то вложенного отрезка кривой, то для таких точек уравнение доказано. Для точек с нулевой скоростью оно верно непосредственно. ☐

Величину в левой части также (7.9) называют *ускорение* и обозначают $\ddot\gamma = \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$. Далее мы поясним, почему это выражение можно интерпретировать именно как вторую производную. Уравнение геодезической, помимо всего прочего, означает постоянство квадрата скорости $g(\dot\gamma, \dot\gamma)$, в частности, если кривая, дающая экстремум функционала действия, хоть где-то имеет ненулевую скорость, то эта скорость остаётся постоянной. Из этого следует, что при наличии нулевой скорости хоть в одной точки она должна оставаться нулевой везде.

В выписанной форме уравнения геодезической важно, что для любого векторного поля $X$ выражение

$$\nabla_{\dot\gamma}X$$

зависит только от значений векторного поля $X$ на образе кривой и не зависит от его гладкого продолжения за пределы кривой. Например в координатах (задача 7.129) можно проверить, что в выражении будут фигурировать производные координат $X$ по направлению вектора $\dot\gamma$ и комбинации этих же координат с символами Кристоффеля. Производную по направлению $\dot\gamma$ можно интерпретировать как производную по параметру кривой $\gamma$, и тогда мы получаем уравнение (здесь опять индексы векторов пишем сверху для соответствия формулам, изучаемым в теоретической физике)

$$\nabla_{\dot\gamma}X = 0 \Leftrightarrow \sum_i \dot\gamma^i \frac{\partial X^k}{\partial x_i} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij}\dot\gamma^i X^j = 0 \Leftrightarrow \frac{dX^k}{dt} + \sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}\dot\gamma^i X^j = 0. \tag{7.10}$$

Это называется уравнением *параллельного переноса* векторного поля $X$ вдоль кривой $\gamma$. Если считать кривую $\gamma$ известной, то это дифференциальное уравнение первого порядка на вектор $X$, определённый в точках кривой. Теорема существования и единственности для линейных уравнений 7.74 в этом случае действительно позволяет перенести данный вектор из одной точки кривой в любую другую точку кривой.

*Задача* 7.139. Проверьте, что параллельный перенос векторов из начала кривой в конец является ортогональным (относительно $g$) оператором.

[[ Используйте совместимость $\nabla$ с метрикой и ковариантно продифференцируйте $g(X, X)$ по скорости кривой. ]]

Возвращаясь к уравнению геодезической, мы замечаем, что его можно переписать в координатах следующим образом.

$$\ddot\gamma^k = \frac{d^2\gamma^k}{dt^2} + \sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} = 0. \tag{7.11}$$

Здесь мы опять подразумеваем раскрытие выражения $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$, используя соотношение (частные производные в левой части понимаются как частные производные $\dot\gamma$, продолженной до векторного поля $V$)

$$\sum_i \dot\gamma^i \frac{\partial\dot\gamma^k}{\partial x_i} = \frac{d^2\gamma^k}{dt^2}.$$

Уравнение геодезической в координатах можно получить напрямую стандартными методами вариационного исчисления (см. какой-нибудь учебник по дифференциальным уравнениям или книгу [5, гл. IV, §2]), выписав явно уравнение Эйлера–Лагранжа в координатах,

$$\frac{\partial \sum_{ij} g_{ij}\dot\gamma^i\dot\gamma^j}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \sum_{ij} g_{ij}\dot\gamma^i\dot\gamma^j}{\partial \dot\gamma^k} = 0.$$

*Задача* 7.140. Проверьте, что уравнение Эйлера–Лагранжа действительно даёт то же уравнение геодезической в координатах.

[[ В процессе преобразований может понадобиться свойство отсутствия кручения, в координатах выраженное как $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$. ]]

*Задача* 7.141. Докажите, что если риманово многообразие $N$ вложено в риманово многообразие $M$ и на $N$ рассматривается индуцированная риманова структура, уравнение геодезической на $N$ в терминах ускорения и ковариантной производной на $M$ имеет вид

$$\ddot\gamma = \nabla^M_{\dot\gamma}\dot\gamma \perp N.$$

[[ Примените результат задачи 7.130. ]]

*Задача* 7.142. Докажите, что если риманово многообразие $N$ вложено в риманово многообразие $M$ и на $N$ рассматривается индуцированная риманова структура, то любая геодезическая многообразия $M$, полностью лежащая на $N$, является геодезической $N$.

[[ Используйте результат предыдущей задачи или вариационное описание геодезической. ]]

7.15. **Экспоненциальное отображение и локальное существование кратчайших.** Положительная определённость римановой структуры, как уже было замечено, позволяет определить метрику (расстояние между парами точек) и рассуждать в метрических терминах. В этом разделе мы рассмотрим римановы многообразия и свойства их метрики.

Мы уже установили, что геодезическая описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка (7.11), в качестве начальных условий для такого уравнения можно выбирать значения $\gamma(t_0)$ и $\dot\gamma(t_0)$ в некоторый момент времени. Более точно, по теореме о существовании и единственности решений дифференциального уравнения, для любой точки $p \in M$ и любого вектора $V \in T_pM$ найдётся геодезическая $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, определённая в некоторой окрестности нуля, для которой $\gamma(0) = p, \dot\gamma(0) = V$.

**Определение 7.143.** Если любая геодезическая в $M$ продолжается до отображения $\gamma : \mathbb{R} \to M$, то $M$ называется *геодезически полным*.

В геодезически полном многообразии, по его определению, для любой фиксированной точки $p$ определено экспоненциальное отображение:

$$\exp_p : T_pM \to M, \quad \exp_p(V) = \gamma(1) \text{ для геодезической, такой что } \gamma(0) = p, \dot\gamma(0) = V.$$

Если же многообразие не геодезически полно, то заметим, что любая геодезическая сохраняет скорость и за время 1 не может пройти расстояние более модуля своей скорости. Рассмотрим систему координат в окрестности точки $p$, которая содержит шар $B_\varepsilon = \{x_1^2 + \dots + x_n^2 \leqslant \varepsilon^2\}$ так, что в этом шаре $g$ оценивается как квадратичная форма

$$g \geqslant \delta^2 \left(dx_1^2 + \dots + dx_n^2\right).$$

Тогда понятно, что при начальной скорости $\sqrt{g(\dot\gamma,\dot\gamma)} < \varepsilon\delta$ скорость геодезической в обычном евклидовом смысле в этих координатах будет не более $\varepsilon$ и геодезическая не сможет покинуть $B_\varepsilon$ за единичное время. Следовательно, по теореме 7.80 экспоненциальной отображение в этом случае будет определено на $\varepsilon\delta$-окрестности нуля пространства $T_pM$.

Далее, если использовать отождествление $T_pM$ с $T_0\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ в некоторой системе координат в окрестности $p$, то дифференцирование геодезической по начальной скорости показывает, что производная экспоненциального отображения в нуле в таких координатах равна единичной матрице. Это можно установить, не выписывая формул. Достаточно заметить, что дифференцирование отображения $\exp_p$ по направлению $v \in T_pM$ задействует одну и ту же геодезическую с начальной скоростью $v$ и её перепараметризации с начальными скоростями $tv$, $t \in \mathbb{R}$, которые геометрически с ней совпадают. Следовательно производная $\exp_p$ по направлению $v$ в нуле просто равна $v$. В итоге, из невырожденности производной экспоненциального отображения в нуле и теоремы об обратном отображении следует, что экспоненциальное отображение устанавливает диффеоморфизм некоторой окрестности $0 \in T_pM$ и окрестности $p \in M$.

*Задача* 7.144. Если рассмотреть $(\exp_p)^{-1}$ в достаточно малой окрестности $p$, то получаются *геодезические координаты* в окрестности точки. Докажите, что в этих координатах символы Кристоффеля обращаются в нуль в точке $p$.

[[ Из уравнения геодезической в координатах и того, что все прямые через начало координат в геодезической системе координат являются геодезическими следует, что для любого $k$ и любого вектора $v$ в начале координат выполняется $\sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} v^i v^j = 0$. Далее воспользуйтесь свойством отсутствия кручения в виде $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$. ]]

Экспоненциальное отображение позволяет изучать локальное поведение функции расстояния в римановом многообразии $M$. Рассмотрим случай положительно определённой метрики, то есть риманова многообразия, а не полуриманова.

**Лемма 7.145.** *Пусть геодезическая в римановом многообразии $M$ изменяется, сохраняя свою скорость, то есть имеется семейство геодезических $\gamma_s : [a, b] \to M$, параметризованных с одной и той же постоянной скоростью. Тогда для векторного поля $J = \frac{\partial\gamma}{\partial s}$ выражение*

$$g(J, \dot\gamma_s)$$

*постоянно вдоль геодезической $\gamma_s$ при любом фиксированном $s$.*

*Доказательство.* Если отрезок геодезической деформируется, не меняя скорость и оставаясь отрезком геодезической, то его действие не меняется. Следовательно, по формуле (7.8) получаем, что значения $g(J, \dot\gamma_s)$ на концах отрезка равны. Так как это верно для любого отрезка геодезической $\gamma_s$, то величина $g(J, \dot\gamma_s)$ постоянна вдоль геодезической $\gamma_s$. □

В частности, если мы рассматриваем экспоненциальное отображение из касательного пространства одной и той же точки, меняем направление начального вектора скорости, но не его длину, то образ экспоненциального отображения — конец геодезической одной и той же длины — движется ортогонально самой геодезической, так как на всей геодезической должно выполняться $g(J, \dot\gamma) = 0$. С помощью этого наблюдения мы начнём изучать существование кратчайших.

**Лемма 7.146.** *У любой точки $p$ риманова многообразия $M$ есть окрестность $U$, в которой любая другая точка $q \in U$ соединена с $p$ отрезком геодезической, который является единственной кратчайшей кусочно непрерывно дифференцируемой кривой между $p$ и $q$.*

*Доказательство.* Рассмотрим экспоненциальное отображение в окрестности нуля $T_pM$. По теореме об обратном отображении при некотором положительном $r_0$ образ шара в $T_pM$ с центром в нуле и радиусом $r_0$ будет экспоненциальным отображением диффеоморфно переводиться в некоторую окрестность $U \ni p$. Для касательного вектора

$V \in T_pM$ его длина $|V| = \sqrt{g(V, V)}$ даёт функцию на $T_pM$, а экспоненциальное отображение $\exp_p$ делает из неё функцию $r : U \to \mathbb{R}^+$ по формуле $r(q) = |\exp_p^{-1}(q)|$. Получается, что окрестность $U$ задана условием $r(x) < r_0$.

Из замеченного перед формулировкой леммы свойства ортогональности следует, что поверхности уровня функции $r(x) = \mathrm{const}$ (образованные концами геодезических из точки $p$ данной длины) ортогональны геодезическим из точки $p$ в точку $x$. Кроме того, в ограничении на геодезические из точки $p$ в $U$ функция $r$ даёт натуральный параметр геодезической. Из этого следует, что дифференциал функции $r$ в отличных от $p$ точках имеет единичную норму в смысле метрики $g$, а соответствующее ему поле единичных векторов

$$R = \operatorname{grad} r = dr^\flat$$

в $U \setminus \{p\}$ направлено вдоль геодезических из $p$.

После введения такой функции $r : U \to \mathbb{R}^+$ мы рассмотрим некоторую не обязательно геодезическую кривую $\gamma$ с началом в $p$, лежащую в $U$. Тогда можем написать по неравенству Коши–Буняковского

(7.12)

$$\ell(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g(\dot\gamma, \dot\gamma)}\, dt \geqslant \int_{t_0}^{t_1} g(\dot\gamma, R)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} dr(\dot\gamma)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} d(r(\gamma)) = r(\gamma(t_1)) - r(\gamma(t_0)).$$

Для любой точки $q \in U \setminus \{p\}$ по определению этой окрестности $U$ существует геодезическая из $p$ в $q$ длины $r(q)$. Неравенство (7.12) показывает что любая другая кривая от $p$ до $q$ имеет длину не менее $r(q)$. Значит, отрезки геодезических от $p$ до $q$ являются *кратчайшими* кривыми, то есть реализующими минимум расстояния. Также ясно, что равенство в (7.12) выполняется тогда и только тогда, когда кривая всё время направлена вдоль $R$ и, следовательно, является геодезической из точки $p$. ☐

**Следствие 7.147.** *На римановом многообразии топология метрического пространства и топология риманова многообразия совпадают.*

*Доказательство.* Лемма даёт описание достаточно малых метрических окрестностей $U$ заданной точки $p$, из которого видно, что они открыты в топологии многообразия и что в любой окрестности $V \ni p$ в топологии многообразия одна из таких окрестностей $U$ содержится. Из этого следует, что любое открытое множество одной топологии является объединением открытых множеств другой топологии, а значит просто является открытым множеством другой топологии. ☐

**Лемма 7.148.** *У любой точки $p$ риманова многообразия $M$ есть окрестность $U$, любые две точки которой $q', q'' \in U$ можно соединить в $M$ отрезком геодезической, который является единственной кратчайшей кривой между $q'$ и $q''$.*

*Доказательство.* Будем действовать аналогично доказательству леммы 7.146, имея в виду, что геодезическая $\gamma_{p',V}$ из $p'$ с начальной скоростью $V$ гладко зависит от $(p', V)$. Можно проверить, что отображение $\varphi : (p', V) \mapsto (p', \gamma_{p',V}(1))$ имеет невырожденную производную в $(p, 0)$ и по теореме об обратном отображении устанавливает диффеоморфизм окрестности $(p, 0)$ и окрестности $(p, p)$.

Тогда можно выбрать радиус $r_0$ так, чтобы $\varphi$ давало диффеоморфизм на парах $(p', V)$ с $p' \in U_{r_0/2}(p)$ и $|V| < r_0$. Получается, что в окрестности $U_{r_0/2}(p)$ (диаметра не более $r_0$) лемма 7.146 применима к любой начальной точке и даёт возможность соединить любые две её точки кратчайшей. ☐

*Задача* 7.149. Докажите, что для любой натурально параметризованной отрезком геодезической существует $\delta > 0$ такое, что любой её кусок длины не более $\delta$ является кратчайшим.

[[ Используйте предыдущую лемму и компактность отрезка. ]]

**Следствие 7.150.** *Если две точки риманова многообразия соединены кратчайшей кусочно непрерывно дифференцируемой кривой, то это кривая — геодезическая.*

*Доказательство.* Заметим, что любой отрезок кратчайшей сам должен быть кратчайшей. Рассмотрим ситуацию в некоторой точке $p = \gamma(t)$ этой кривой, не совпадающей с началом или концом. Взяв окрестность $U \ni p$ из леммы 7.148 и использовав единственность кратчайших в ней (которые являются геодезическими), мы обнаружим, что для некоторых $a < t < b$ отрезок кривой $\gamma_{a,b}$ должен быть геодезической. Для начала или конца $\gamma$ рассуждения аналогичны, но $t$ будет равно одному из концов отрезка $[a, b]$. Так как $\gamma$ локально оказывается геодезической (решением соответствующего дифференциального уравнения), то и глобально она геодезическая. ☐

*Задача* 7.151. Докажите, что если две точки риманова многообразия соединены кратчайшей спрямляемой кривой, то это кривая — геодезическая.

[[ Параметризуйте спрямляемую кривую натуральным параметром, тогда она станет липшицевой в смысле римановой метрики. Заметьте, что в координатных картах координаты кривой тоже будут зависеть от натурального параметра локально липшицевым образом. Тогда теорема 5.146 покажет, что у кривой существует скорость почти всюду и её координаты интегрируемы. Объясните, что неравенство с интегралом в доказательстве леммы 7.148 проходит и проходит доказательство следствия 7.150. ]]

Отметим, что в лемме 7.148 мы не утверждаем, что кратчайшая $[q', q'']$ лежит в $U$. Более внимательное изучение геодезических позволяет доказать и более сильный вариант утверждения, в котором $[q', q''] \subset U$ для любых $q', q'' \in U$, тогда множество $U$ называется *геодезически выпуклым*. В следующих задачах читателю предлагается убедиться в этом.

*Задача* 7.152. Докажите, что на (полу)римановом многообразии $M$ для любой гладкой функции $f$ выражение $\operatorname{hess} f = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f$ (*гессиан* функции $f$) линейно относительно умножения векторных полей $X$ и $Y$ на гладкие функции и симметрично относительно перестановки $X$ и $Y$.

[[ $C^\infty$-линейность по $X$ очевидна. Симметричность последует из отсутствия кручения для ковариантной производной. Линейность по $Y$ тогда последует из возможности переставить $X$ и $Y$. ]]

*Задача* 7.153. Докажите, что на (полу)римановом многообразии $M$ для любой гладкой функции $f$ и геодезической $\gamma$ вторая производная композиции $f \circ \gamma$ равна $\operatorname{hess} f(\dot\gamma, \dot\gamma)$.

[[ Примените определение гессиана и уравнение геодезической. ]]

*Задача* 7.154. Докажите, что любая точка риманова многообразия имеет геодезически выпуклую окрестность.

[[ Возьмите любую функцию $f$ с минимумом $f(p) = 0$ в данной точке $p \in M$ и положительно определённым гессианом в этой точке, а значит, и в некоторой её окрестности. Рассмотрите окрестности $U \ni p$, заданные неравенством $f(q) \leqslant \varepsilon$ для достаточно малых положительных $\varepsilon$, чтобы утверждение леммы 7.148 выполнялось в несколько большей окрестности $p$. ]]

*Задача* 7.155. На полуримановом многообразии нет понятия кратчайшей, поэтому утверждение предыдущей задачи не имеет смысла. Сформулируйте правильный аналог этого утверждения в полуримановом случае.

7.16. **Полнота и геодезическая полнота, глобальное существование кратчайших.** Разобравшись с локальными кратчайшими, мы может изучить существование глобальных кратчайших, а также необходимые и достаточные условия полноты риманова многообразия как метрического пространства.

**Теорема 7.156.** *Если риманово многообразие полно в своей внутренней метрике, то оно геодезически полно.*

*Доказательство.* Рассмотрим некоторую точку $p \in M$ и начальный вектор скорости $V \in T_pM$. Решая уравнение геодезической с этими начальными условиями, мы получим максимальную в смысле продолжаемости геодезическую $\gamma : [0, T) \to M$.

Предположим, что $T < +\infty$. Тогда мы можем рассмотреть возрастающую последовательность чисел $t_n \to T - 0$ и фундаментальную (в силу липшицевости геодезической) последовательность точек $(\gamma(t_n))$. Если $M$ полно как метрическое пространство, то $\gamma(t_n) \to q \in M$. При достаточно большом $n$ эти точки попадают в окрестность $q$ из леммы 7.148. Отрезки геодезической между $\gamma(t_{n-1})$ и $\gamma(t_n)$ стремятся к точке $q$ полностью, так как и их длины стремятся к нулю. Получается, что $\gamma(t) \to q$ при $t \to T - 0$.

Дальнейшее рассуждение является модификацией доказательства теоремы 7.80 для уравнения второго порядка — уравнения геодезической. Важное свойство уравнения геодезической — это постоянство скорости у любого его решения, которое исключает стремление к бесконечности скорости у непродолжаемого решения.

Теорема существования и единственности геодезической выполняется в точке $q$ и гарантирует продолжимость любой геодезической из $q$ до длины $\varepsilon > 0$. Её равномерный вариант (как в теореме о непрерывной зависимости от начальных условий) гарантирует аналогичное свойство в некоторой окрестности $U \ni q$ с единой константой $\varepsilon$. Для достаточно больших $n$ точка $\gamma(t_n)$ попадёт в $U$ и тогда отрезок геодезической $\gamma_{t_n}$ будет продолжен на $\varepsilon$ по времени, то есть вся геодезическая будет продолжена до времени $t_n + \varepsilon$. Это противоречит максимальности $\gamma$ при $T - t_n < \varepsilon$. Следовательно, на самом деле $T = +\infty$. ☐

*Задача* 7.157. Докажите, что если риманово многообразие полно в своей внутренней метрике, то любое равномерно ограниченное векторное поле $X$ (в смысле ограниченности $g(X, X)$) на нём имеет интегральные кривые, определённые для всех $t \in (-\infty, +\infty)$.

[[ Рассуждайте аналогично доказательству предыдущей теоремы. ]]

**Теорема 7.158** (Теорема Хопфа–Ринова). *В геодезически полном и связном римановом многообразии любые две точки можно соединить кратчайшей геодезической.*

*Доказательство.* Рассмотрим точки $p$ и $q$ и начнём строить геодезическую «в направлении» от $p$ к $q$. Начнём с окрестности $U \ni p$, которая гарантируется леммой 7.148, рассмотрим в этой окрестности замкнутый шар $B_r(p)$. По лемме он является образом компактного шара в касательном пространстве при экспоненциальном отображении, и следовательно компактен. Найдём точку $p'$ на этом шаре, в которой $\rho(p', q)$ достигает минимума (тут используется совпадение метрической топологии и топологии многообразия и непрерывность $\rho$ в обоих топологиях), из связности многообразия все расстояния в нём конечны. Заметим, что тогда

$$\rho(p, p') + \rho(p', q) = \rho(p, q).$$

Действительно, строгое неравенство в этом неравенстве треугольника означает, что $p$ и $q$ можно соединить кривой $\beta$ длины строго меньше, чем $\rho(p, p') + \rho(p', q) \leqslant r + \rho(p', q)$. Эта кривая покидает $B_r(p)$ после точки $p'' = \beta(t) \in B_r(p)$, и тогда её кусок от $p$ до $p''$ можно заменить отрезком кратчайшей $[p, p'']$, не увеличив её длину по лемме 7.146. По той же лемме $\rho(p, p'') = r$, а часть кривой $\beta$ от $p''$ до $q$ тогда должна иметь длину строго меньше $\rho(p', q)$, что противоречит выбору $p'$.

Теперь рассмотрим бесконечно продолжаемую по условию теоремы геодезическую $\gamma$ с начальным отрезком $[p, p']$. Рассмотрим максимальное $t$, такое что для $e = \gamma(t)$ выполняется равенство

$$\ell(\gamma_t) + \rho(e, q) = \rho(p, q).$$

Оно не может выполняться бесконечно, так как правая часть фиксирована, и $t > 0$ по предыдущим рассуждениям. Если точка $e$ совпадает с $q$, то это равенство показывает, что $\gamma_t$ является кратчайшей между $p$ и $q$. Иначе применим рассуждение из начала доказательства о построении геодезической «в направлении» от $e$ к $q$ и найдём точку $e' \neq e$, такую что

$$\rho(e, e') + \rho(e', q) = \rho(e, q)$$

и между $e$ и $e'$ существует кратчайшая геодезическая $\alpha$. Тогда

$$\ell(\gamma_t) + \ell(\alpha) + \rho(e', q) = \rho(p, q).$$

Строгое неравенство треугольника $\rho(p, e') < \ell(\gamma_t) + \ell(\alpha)$ с учётом предыдущего равенства означало бы

$$\rho(p, e') + \rho(e', q) < \rho(p, q),$$

что противоречит неравенству треугольника для $p, e', q$. Следовательно, выполняется равенство

$$\rho(p, e') = \ell(\gamma_t) + \ell(\alpha).$$

Это означает, что конкатенация $\gamma_t \diamond \alpha$ является кратчайшей между $p$ и $e'$ и является гладкой геодезической по следствию 7.150. Следовательно, $\gamma_t \diamond \alpha$ является начальным отрезком $\gamma$, $\gamma_{t'}$, для которого выполняется

$$\ell(\gamma_{t'}) + \rho(e', q) = \rho(p, q),$$

что противоречит выбору $e$. Таким образом, возможен только случай $e = q$ и теорема доказана. ☐

**Следствие 7.159.** *Если риманово многообразие геодезически полно, то оно полно в своей внутренней метрике.*

*Доказательство.* По теореме Хопфа–Ринова экспоненциальное отображение сюръективно и любой замкнутый метрический шар радиуса $R$ с центром в точке $p \in M$ является образом при экспоненциальном отображении шара радиуса $R$ в касательном пространстве $T_pM$. Эти метрические шары компактны как образы компактов при экспоненциальном отображении, и остаётся применить теорему 3.39. ☐

*Задача* 7.160. * Докажите, что на каждом многообразии без края можно ввести полную риманову метрику.

[[ Попробуйте использовать разбиение единицы, позаботившись о достаточно быстром росте метрики «на бесконечности»; или используйте теорему Уитни о вложении. ]]

*Задача* 7.161. * Докажите, что любое компактное подмногообразие $S$, вложенное в многообразие $M$, имеет *трубчатую окрестность* $U$ и гладкое отображение (*ретракцию*) $r : U \to S$, для которого $r|_S = \mathrm{id}_S$.

[[ Возьмите многообразие $N_M S$, составленное из пар $(p, v)$, где $p \in S$, а вектор $v$ в точке $p$ касательный к $M$ и перпендикулярный $S$. Экспоненциальное отображение можно рассматривать как гладкое отображение $\exp : N_S M \to M$. Проверьте, что оно является диффеоморфизмом в окрестности $S$, то есть для достаточно малых $v$. Ретракцию получите как композицию обратного к этому отображению и естественной проекции $N_M S \to S$. Заметьте, что $r$ будет также *метрической проекцией* на $S$, сопоставляющей каждой точке $U$ единственную ближайшую к ней точку $S$. ]]

7.17. **Кривизна римановых многообразий.** Исследование вариации геодезических, то есть производных семейств геодезических по параметру, естественным образом приводит к понятию *кривизны Римана*. Уравнение в вариациях для геодезической оставляем в виде задачи 7.172, а кривизну просто определим через ковариантную производную и изучим её свойства.

**Определение 7.162.** Выражение (делающее из трёх векторных полей одно векторное поле)

$$R_{X,Y}Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

называется *тензор кривизны Римана*.

**Теорема 7.163.** *Выражение тензора кривизны Римана является тензором в том смысле, что оно линейно по $X$, $Y$, и $Z$ и при умножении на функцию $f$ векторного поля $X$, $Y$, или $Z$ всё выражение просто умножается на $f$.*

*Доказательство.* $\mathbb{R}$-линейность по всем аргументам ясна из формулы. Проверим, что происходит при умножении на функцию, не выписывая слагаемые, в которых функция просто выносится за скобки:

$$R_{fX,Y}Z = f(\dots) - Y(f)\nabla_X Z + \nabla_{L_Y fX} Z = f(\dots) - Y(f)\nabla_X Z + Y(f)\nabla_X Z = f(\dots).$$

Аналогично для умножения $Y$ на функцию, так как выражение кососимметрично по перестановке $X$ и $Y$. Попробуем умножить $Z$ на функцию:

$$\begin{aligned}R_{X,Y}fZ = f(\dots) + \nabla_X(Y(f)Z + f\nabla_Y Z) - \nabla_Y(X(f)Z + f\nabla_X Z) - [X,Y](f)Z = f(\dots)+\\ + X(Y(f))Z + Y(f)\nabla_X Z + X(f)\nabla_Y Z - Y(X(f))Z - X(f)\nabla_Y Z - Y(f)\nabla_X Z - [X,Y](f)Z =\\ = f(\dots) + X(Y(f))Z - Y(X(f))Z - [X,Y](f)Z = 0,\end{aligned}$$

где в конце использована интерпретация скобки Ли как коммутатора при действии на функции. ☐

Доказанное утверждение означает, что мы можем выписать $R_{X,Y}Z$, зная лишь величины $R^\ell_{ijk}$, такие что

$$R_{\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_\ell R^\ell_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_\ell},$$

получив выражение для координат

$$(R_{X,Y}Z)^\ell = \sum_{i,j,k} R^\ell_{ijk}X^iY^jZ^k,$$

не содержащее производных. То есть тензор кривизны на самом деле является поточечной трилинейной операцией $T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$, гладко зависящей от точки $p$. Из этого, в частности, следует, что если тензор кривизны в какой-то системе координат ненулевой, то и в любой другой криволинейной системе координат он будет ненулевой. В частности, это показывает, что не все римановы многообразия изометричны между собой, даже локально.

*Задача* 7.164. Проверьте, что выражение $\nabla_X Y$ не является тензором по $Y$. Приведите пример, когда в одной системе координат все символы Кристоффеля обращаются в нуль, а в другой — нет.

*Задача* 7.165 (Вторая ковариантная производная). Проверьте, что выражение $\nabla^2_{X,Y}Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y}Z$ (аналогичное гессиану из задачи 7.152) является «тензором по $X$ и $Y$», то есть умножается на функцию, при умножении на эту функцию одного из векторных полей $X$ или $Y$. Проверьте, что оно не симметрично по $X, Y$ и что $R_{X,Y}Z = \nabla^2_{X,Y}Z - \nabla^2_{Y,X}Z$.

[[ Используйте правило Лейбница для ковариантной производной и отсутствие кручения. ]]

Тензорный характер кривизны Римана, то есть независимость от производных участвующих векторных полей, позволяет для вычисления его значения в точке продолжать векторы из точки произвольно. Например, удобно продолжать векторы из точки до векторных полей так, чтобы векторные поля коммутировали, тогда слагаемое $\nabla_{[X,Y]}Z$ в определении тензора кривизны обнулится.

Геометрический смысл тензора кривизны исходя из определения можно понимать так: если два векторных поля $X$ и $Y$ коммутируют, то ковариантная производная третьего векторного поля по этим двум зависит от порядка дифференцирования (сравните с леммой 6.13), и эта зависимость как раз выражается тензором кривизны Римана.

Также мы можем связать тензор кривизны римана с понятием переноса вектора вдоль кривой. Пусть у нас есть замкнутая кривая $\gamma$, являющаяся краем двумерной поверхности $S$ в многообразии $M$ с координатами $u, v$. Тогда мы можем написать с помощью формулы Грина, обозначив для краткости $X = \frac{\partial}{\partial u}, Y = \frac{\partial}{\partial v}$:

$$\int_\gamma g(\nabla_{\dot\gamma}Z, T)\;dt = \int_\gamma g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}Z, T)du + g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}Z, T)dv =$$

$$= \int_S \left(\frac{\partial}{\partial u}g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}Z, T) - \frac{\partial}{\partial v}g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}Z, T)\right) du{\wedge}dv = \int_S \left(X\left(g(\nabla_Y Z, T)\right) - Y\left(g(\nabla_X Z, T)\right)\right) du{\wedge}dv =$$

$$= \int_S \left(g(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z, T)\right) du\wedge dv + \int_S \left(g(\nabla_Y Z, \nabla_X T) - g(\nabla_X Z, \nabla_Y T)\right) du\wedge dv =$$

$$= \int_S g(R_{X,Y}Z, T)du\wedge dv + \int_S \left(g(\nabla_Y Z, \nabla_X T) - g(\nabla_X Z, \nabla_Y T)\right) du\wedge dv.$$

Выражение

$$R(X, Y, Z, T) = g(R_{X,Y}Z, T)$$

мы будем называть *формой кривизны Римана*. Следствия полученной формулы представлены в задачах:

*Задача* 7.166. Пусть векторы $X$ и $Y$ непараллельны в точке $p$ и продолжены до коммутирующих векторных полей в окрестности $p$. Докажите что при переносе вектора $Z$ по контуру маленького параллелограмма около точки $p$ с направлениями сторон $X$ и $Y$ он меняется на

$$\frac{-R_{X,Y}Z}{\sqrt{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}}A + o(A),$$

где $A$ — площадь параллелограмма.

[[ Продолжите вектор $Z$ с помощью связности по левой стороне параллелограмма, а потом с помощью связности продолжите его слева направо. Продолжите вектор $T$ с помощью связности по правой стороне параллелограмма, а потом продолжите его справа налево. Заметьте, что при этом в правой части формулы для $\int_\gamma g(\nabla_{\dot\gamma}Z, T)\;dt$ останется только интеграл от формы кривизны. ]]

*Задача* 7.167. Докажите, что при тождественном равенстве нулю тензора кривизны (полу)риманова многообразия результат переноса вектора вдоль кривой не меняется при гомотопиях кривой и в окрестности каждой точки многообразия существует система координат, в которой компоненты $g$ постоянны.

[[ Рассмотрите гомотопию между кривыми как поверхность с координатами $u, v$ из некоторого прямоугольника, продолжения векторов до векторных полей сделайте как в предыдущей задаче. Перенося независимо от пути векторы из данной точки в её односвязную окрестность, получите базис векторных полей $X_1, \ldots, X_n$ в этой окрестности, которые $\pm$-ортонормированы в любой точке и ковариантная производная любого из них по любому вектору равна нулю. Докажите, что векторные поля $X_1, \ldots, X_n$ попарно коммутируют, и найдите в некоторой окрестности данной точки систему координат, в которой эти векторные поля равны $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. ]]

У формы кривизны Римана есть некоторые симметрии. Очевидно, что она меняет знак при перестановке $X$ и $Y$, но есть и другие свойства, которые описаны в следующих задачах.

*Задача* 7.168. Докажите первое тождество Бьянки:

$$R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}Y = 0.$$

[[ Можно продолжить векторы до попарно коммутирующих векторных полей и применить отсутствие кручения для коммутирующих векторных полей в виде $\nabla_X Y = \nabla_Y X$. ]]

*Задача* 7.169. Докажите, что форма кривизны Римана

$$R(X,Y,Z,T) = g(R_{X,Y}Z,T)$$

меняет знак при перестановке $X$ и $Y$, меняет знак при перестановке $Z$ и $T$ и не меняется при обмене пар $X, Y$ и $Z, T$.

[[ Считая векторные поля попарно коммутирующими, можно из совместимости $\nabla$ с метрикой и формулы Козюля получить выражение

$$\begin{aligned} &R(X,Y,Z,T) = \\ &\quad = \frac{1}{2}X(Z(g(Y,T))) + \frac{1}{2}Y(T(g(X,Z))) - \frac{1}{2}X(T(g(Y,Z))) - \frac{1}{2}Y(Z(g(X,T))) + \\ &\qquad\qquad + g(\nabla_X Z, \nabla_Y T) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X T), \end{aligned}$$

которое имеет требуемые свойства симметрии с учётом коммутирования векторных полей. ]]

*Задача* 7.170. Получите выражения для координат формы кривизны Римана

$$R(X,Y,Z,T) = g(R_{X,Y}Z,T)$$

через координаты $g$.

[[ Подставьте базисные векторные поля $\frac{\partial}{\partial x_i}$ в формулу из предыдущей задачи. ]]

*Задача* 7.171. * Докажите, что форма кривизны Римана полностью определяется значениями $R(X,Y,X,Y)$ на всевозможных парах векторов $X, Y$.

[[ Пусть $V$ — касательное пространство в какой-то точке, так как в форму кривизны подставляется не более четырёх векторов, достаточно рассмотреть не более чем четырёхмерный случай. Исходя из свойств симметрии форма кривизны может считаться симметричной билинейной формой $\widetilde{R}$ на $\wedge^2(V)$, которая в силу известных свойств билинейных форм определяется своими значениями на парах $\xi, \xi$ для всевозможных $\xi \in \wedge^2(V)$. Проверьте, что при $\dim V \leqslant 3$ все $\xi$ имеют вид $X \wedge Y$ и тогда утверждение доказано. Проверьте, что при $\dim V = 4$ в виде $X \wedge Y$ представляются те и только те $\xi$, которые удовлетворяют квадратичному соотношению $\xi \wedge \xi = 0$. Это означает, что $R$ определяется своими значениями на наборах вида $X, Y, X, Y$ с точностью до выражения, пропорционального $\det(X,Y,Z,T)$. Далее можно использовать тождество Бьянки, чтобы показать, что пропорциональные $\det(X,Y,Z,T)$ выражения можно исключить. ]]

Риманова кривизна также необходима для понимания того, как меняются геодезические в зависимости от начального параметра или какого-то ещё параметра. Тогда производная по параметру задаёт векторное поле вдоль геодезической и для него можно написать дифференциальное уравнение. Подробности этого читатель может проверить при решении следующей задачи.

*Задача* 7.172 (Уравнение Якоби). Докажите, что если имеется гладкое семейство геодезических $\{\gamma_s\}$, то производная $J = (\gamma_s)'_s$ является при данном значении $s$ векторным полем $J$ вдоль $\gamma = \gamma_s$, удовлетворяющим линейному дифференциальному уравнению (со второй производной в смысле ковариантного дифференцирования по кривой)

$$\ddot{J} = -R_{J,\dot\gamma}\dot\gamma.$$

[[ Поясните возможность сделать предположение $[J, V] = 0$ для векторного поля $V$, равного $\dot\gamma_s$ на геодезических, и написать формулы

$$0 = \nabla_J 0 = \nabla_J \nabla_V V = R_{J,V}V + \nabla_V \nabla_J V = R_{J,V}V + \nabla_V \nabla_V J = R_{J,V}V + \ddot{J}.$$

]]

Для читателей, знакомых с понятием тензора и тензорного произведения из линейной алгебры можно сделать такие пояснения. Понятие *тензора* или *тензорного поля* в дифференциальной геометрии означает выбор элемента некоторого тензорного произведения

$$\underbrace{T_pM \otimes \dots \otimes T_pM}_{k} \otimes \underbrace{T^*_pM \otimes \dots \otimes T^*_pM}_{\ell},$$

гладко зависящий от точки $p$. Более конкретно при данных значениях $k$ и $\ell$ говорят о тензоре ранга $(k, \ell)$. Из изученного ранее мы видим, что векторное поле — это тензор ранга $(1, 0)$, дифференциальная форма степени $\ell$ — это тензор ранга $(0, \ell)$, антисимметричный относительно действия группы перестановок $\mathfrak{S}_\ell$ на множителях тензорного произведения. Риманова или полуриманова структура — это тензор ранга $(0, 2)$, симметричный относительно перестановок двух множителей тензорного произведения. Тензор кривизны Римана в таких терминах имеет ранг $(1, 3)$, так как он из трёх векторов делает один полилинейным способом. Форма кривизны $R(X, Y, Z, T) = g(R_{X,Y}Z, T)$ при этом имеет ранг $(0, 4)$.

Для геометрии и физики важна также билинейная форма (или тензор ранга $(0, 2)$), которая получается в качестве свёртки тензора кривизны по паре переменных. Выбрав взаимные базисы в касательном пространстве $\{e_i\}$ и $\{f_i\}$, так что $g(e_i, f_j) = \delta_{ij}$, мы можем рассмотреть *тензор кривизны Риччи*

$$Ric(Y, Z) = \sum_{i=1}^n R(e_i, Y, Z, f_i) = \sum_{i=1}^n g(R_{e_i,Y}Z, f_i).$$

*Задача* 7.173. Объясните, почему определение тензора кривизны Риччи на зависит от выбора взаимных базисов $\{e_i\}$ и $\{f_i\}$.

Геометрический смысл этого тензора (симметричной билинейной формы) в том, что отношение риманова объёма в окрестности точки $p$ к объёму, пришедшему из экспоненциального отображения с касательного пространства, в квадратичном приближении в точке $x \in U(p)$ равно

$$1 - \frac{1}{6} Ric(\exp_p^{-1} x, \exp_p^{-1} x) + o(\rho(x, p)^2).$$

Эта формула получается из уравнения Якоби, так как изменение объёма можно связать со следом оператора, стоящего в правой части этого уравнения. Читатель может попробовать восстановить детали этого рассуждения самостоятельно.

*Задача* 7.174. $^*$ Докажите, что в трёхмерном случае риманову кривизну можно восстановить по тензору Риччи.

[[ Можно проделать манипуляции в явном виде, а можно воспользоваться задачей 7.171. ]]

*Задача* 7.175. Для метрики на области $D \subset \mathbb{R}^2$ вида

$$g(X, Y) = e^{2U}(X, Y),$$

где $U : D \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, а $(X, Y)$ — евклидово скалярное произведение, найдите тензор кривизны Римана.

[[ Для упрощения вычислений все векторные поля можно считать имеющими постоянные коэффициенты в данной системе координат, и в частности коммутирующими друг с другом. В таких предположениях формула Козюля сокращается до

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)),$$

а постоянство векторных полей позволяет её расписать как (скобки обозначают евклидово скалярное произведение)

$$2e^{2U}(\nabla_X Y, Z) = 2X(U)e^{2U}(Y, Z) + 2Y(U)e^{2U}(Z, X) - 2Z(U)e^{2U}(X, Y),$$

что упрощается до

$$(\nabla_X Y, Z) = X(U)(Y, Z) + Y(U)(Z, X) - Z(U)(X, Y),$$

или эквивалентно (с градиентом в евклидовом смысле)

$$\nabla_X Y = X(U)Y + Y(U)X - (X, Y)\operatorname{grad} U.$$

Рассмотрев поля $X = \frac{\partial}{\partial x}$ и $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ тогда можно получить

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X = U'_x Y + U'_y X, \quad \nabla_X X = U'_x X - U'_y Y, \quad \nabla_Y Y = -U'_x X + U'_y Y$$

и в итоге

$$\begin{aligned} R_{X,Y}X = \nabla_X\nabla_Y X - \nabla_Y\nabla_X X = U''_{xx}Y + U''_{yx}X - U''_{xy}X + U''_{yy}Y + \\ + U'_x(U'_x X + U'_y Y) + U'_y(U'_x X - U'_y Y) - U'_x(U'_x X + U'_y Y) + U'_y(-U'_x X + U'_y Y) = \\ = U''_{xx}Y + U''_{yy}Y + 0 = \Delta U \cdot Y, \end{aligned}$$

что с учётом симметрий тензора Римана даёт для произвольных векторов

$$R(X, Y, Z, T) = g(R_{X,Y}Z, T) = \Delta U e^{-2U}\left(g(X, Z)g(Y, T) - g(X, T)g(Y, Z)\right).$$

]]

*Задача* 7.176 (Формула Гаусса для кривизны подмногообразия). Пусть $N$ является вложенным подмногообразием в римановом многообразии $M$, а риманова структура на $N$ индуцирована римановой структурой на $M$, как в задаче 7.131. Докажите, для векторных полей $X, Y, Z, T$, касательных к $N$, форма кривизны $R^N$ многообразия $N$ выражается через форму кривизны $R^M$ многообразия $M$ и вторую фундаментальную форму $\mathrm{II}_N$ подмногообразия как

$$R^N(X, Y, Z, T) = R^M(X, Y, Z, T) - g(\mathrm{II}_N(X, Z), \mathrm{II}_N(Y, T)) + g(\mathrm{II}_N(Y, Z), \mathrm{II}_N(X, T)).$$

[[ Предположите, что векторные поля коммутируют на $N$ и продолжены до коммутирующих полей на окрестности $N$ в $M$. Первое слагаемое в выражении $R(X, Y, Z, T)$ перепишите как

$$g(\nabla_X\nabla_Y Z, T) = X(g(\nabla_Y Z, T)) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X T)$$

и посмотрите, что в нём меняется при замене $\nabla^M$ на $\nabla^N$, с учётом ортогональности $X, Y, Z, T$ любому вектору вида $\mathrm{II}_N(\cdot, \cdot)$. Сделайте то же самое со вторым слагаемым. ]]

*Задача* 7.177 (Формула Гаусса для кривизны двумерной поверхности в евклидовом пространстве). Докажите, что все компоненты формы кривизны двумерного вложенного подмногообразия $N \subset \mathbb{R}^3$ с индуцированной стандартным скалярным произведением римановой структурой равны плюс или минус детерминанту её второй фундаментальной формы, который называется *гауссова кривизна*. Проверьте, что в терминах задачи 7.132 гауссова кривизна поверхности $N$ равна

$$G = (r''_{uu} \cdot \nu)(r''_{vv} \cdot \nu) - (r''_{uv} \cdot \nu)^2.$$

[[ Используйте симметрии формы кривизны, чтобы показать, что все её компоненты выражаются через одно число. Потом используйте предыдущую задачу и задачу 7.132. ]]

7.18. **Пространство-время специальной теории относительности.** Внимательное изучение показывает, что на самом деле многие нужные в физике вещи естественней записывать в терминах дифференциальной геометрии. Например, работа силы вдоль траектории естественно определяется как интеграл дифференциальной формы первой степени по ориентированной кривой, необходимые и достаточные условия наличия потенциала у силы формулируются в терминах внешней производной и т.п.

Мы рассмотрим ещё один содержательный пример, когда в дело вступает полуриманова структура: пространство-время специальной теории относительности $\mathbb{R}^{1+3}$ с координатами $t, x, y, z$ и полуримановой структурой (иногда выбирается противоположный знак)

$$g = -dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz.$$

Это пространство является плоским приближением к реальной ситуации, но мы по возможности будем рассуждать в таких терминах, которые будут применимы к случаю, когда $g$ будет произвольной полуримановой метрикой с той же сигнатурой $1 + 3$. Это пространство $\mathbb{R}^{1+3}$ является минимальной модификацией евклидова пространства в сторону замены положительно определённой метрики на просто невырожденную.

В пространстве $\mathbb{R}^{1+3}$ векторы $v$ с условием $g(v, v) = 0$ соответствуют движению световых лучей (по прямым данного направления), векторы с условием $g(v, v) > 0$ называются *пространственно-подобными*, а $g(v, v) < 0$ — *времениподобными*. С точки зрения физики, времениподобные векторы соответствую возможным движениям частиц положительной массы.

*Задача* 7.178. Докажите, что множество времениподобных векторов распадается на две компоненты связности, их можно назвать направленными в будущее и в прошлое.

*Задача* 7.179 (Обратное неравенство Коши–Буняковского). Докажите, что в $\mathbb{R}^{1+3}$ для двух времениподобных векторов $X, Y$ выполняется

$$g(X, Y)^2 \geqslant g(X, X) \cdot g(Y, Y).$$

[[ Вспомните доказательство неравенства Коши–Буняковского и инвариантности сигнатуры квадратичной формы. ]]

*Задача* 7.180. Докажите, что отношение между точками $x$ и $y$ «$x - y$ является направленным в будущее вектором» порождает отношение частичного порядка.

Подмногообразия в $\mathbb{R}^{1+3}$ будем называть *времениподобными*, если все их касательные векторы времениподобны, и *пространственноподобными*, если все их касательные векторы пространственноподобны.

*Задача* 7.181. Докажите, что времениподобные многообразия в $\mathbb{R}^{1+3}$ имеют размерность не более 1, а пространственноподобные — не более 3.

[[ Вспомните про инвариантность индекса квадратичной формы. ]]

*Задача* 7.182. Докажите, что времениподобное многообразие в $\mathbb{R}^{1+3}$ не может быть диффеоморфно окружности.

*Задача* 7.183. Докажите, что времениподобные прямые максимизируют $\int_\gamma \sqrt{|g(\dot\gamma, \dot\gamma)|}\ dt$ (*собственное время частицы*) среди всех времениподобных кривых, соединяющих две данные точки.

[[ Выведите обратное неравенство треугольника из обратного неравенства Коши–Буняковского. ]]

Докажем следующее утверждение, которое с точки зрения физики говорит о движении частиц, на которые не действуют никакие силы, кроме гравитации.

**Лемма 7.184.** *Геодезические в пространстве-времени $\mathbb{R}^{1+3}$ — это прямые линии, параметризованные с постоянной скоростью в данной системе координат.*

*Доказательство.* В рассматриваемой системе координат компоненты $g$ как матрицы постоянны. Следовательно, обнуляются все символы Кристоффеля, так как они выражаются только через производные компонент $g$. Поэтому уравнение геодезической выглядит как $\frac{d^2\gamma^k}{ds^2} = 0$, а его решения выглядят как параметризованные с постоянной скоростью прямые. ☐

Аналогично ортогональным преобразованиям евклидова пространства можно рассмотреть преобразования $\mathbb{R}^{1+3}$, которые сохраняют полуриманову структуру (то есть являются *изометриями*). Так как геодезические при таких преобразованиях должны переходить в геодезические, то любое изометричное преобразование переводит равномерно параметризованные прямые в равномерно параметризованные прямые. Поэтому оно является аффинным преобразованием — композицией линейного преобразования и сдвига координат.

*Задача* 7.185. Докажите аккуратно, что сохранение прямых и их равномерной параметризации влечёт аффинность изометрий $\mathbb{R}^{1+3}$.

*Задача* 7.186. Напишите параметрическое уравнение движения в двумерной плоскости $\mathbb{R}^{1+1}$ с постоянной скоростью и постоянным ускорением.

[[ Заметьте, что символы Кристоффеля равны нулю и ускорение считается в координатах как вторая производная по параметру $s$. Обратите внимание, что постоянство скорости и ускорения понимается в смысле квадратичной формы $g = -dt \otimes dt + dx \otimes dx$. Сначала найдите зависимость скорости от параметра $s$, а потом проинтегрируйте её. ]]

Если рассмотреть аффинные преобразования по модулю сдвигов (очевидно являющихся изометриями), то есть рассмотреть линейные преобразования, сохраняющие $g$ как квадратичную форму, то получится *группа Лоренца*, обозначаемая $\mathrm{O}(1,3)$, последнее обозначение можно распространить и на группу изометрий невырожденной квадратичной формы произвольной сигнатуры.

*Задача* 7.187. Докажите, что группа Лоренца может перевести любой направленный в будущее единичный вектор в любой другой направленный в будущее единичный вектор.

[[ В силу наличия композиции и взятия обратного в группе достаточно доказать, что вектор $(1,0,0,0)$ можно перевести в любой направленный в будущее единичный вектор. Полезно выписать координаты такого линейного преобразования из $\mathrm{O}(1,3)$ явно. ]]

*Задача* 7.188. Докажите, что любой «почти ортонормированный» базис, в котором $g(e_i, e_j) = \pm\delta_{ij}$, можно группой Лоренца перевести в любой другой такой же базис.

[[ Заметьте, что при переводе вектора с данными координатами в одном базисе в вектор с теми же координатами в другом базисе получается изометрия. ]]

*Задача* 7.189. Докажите, что группа Лоренца имеет четыре компоненты связности.

[[ Рассмотрите детерминант преобразования и возможную смену прошлого на будущее. Докажите также, что преобразования единичного детерминанта, не меняющие местами прошлое и будущее, составляют связную подгруппу. ]]

*Задача* 7.190. * Заметьте, что множество всевозможных направлений световых лучей из начала координат в $\mathbb{R}^{1+3}$ диффеоморфно двумерной сфере. Проверьте, что при введении на ней римановой структуры из представления её в виде решения системы уравнений

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, t = 1,$$

преобразования группы Лоренца оказываются *конформными*, то есть сохраняют риманову структуру с точностью до умножения на функцию.

[[ Заметьте, что на световом конусе $\{t^2 = x^2 + y^2 + z^2\}$ возникает вырожденная риманова структура, вырожденная вдоль световых лучей, проходящих через нуль. При этом на любой двумерной поверхности в этом конусе, которая пересекает каждый световой луч ровно один раз и не касается световых лучей, эта риманова структура уже не является вырожденной. Докажите, что центральная проекция одной такой поверхности на другую конформна относительно их римановых структур. ]]

*Задача* 7.191. Найдите сигнатуру квадратичной формы $Q(A) = \det A$ на пространстве $V$ эрмитовых матриц $2 \times 2$. Выпишите какой-нибудь ортогональный базис в $V$ относительно квадратичной формы $Q$.

*Задача* 7.192. В условиях предыдущей задачи проверьте, что формула $A \mapsto T^*AT$ даёт изометрии $Q$ для любой комплексной матрицы $T$ размера $2 \times 2$ с единичным детерминантом. У построенного таким образом гомоморфизма групп $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{O}(1, 3)$ опишите ядро и образ.

## 7.19. Движение в электромагнитном поле, уравнения Максвелла, уравнение Эйнштейна.

В этом разделе мы посмотрим геометрическую интерпретацию классической электродинамики. Дело может происходить в рассмотренном выше плоском пространстве-времени, или в полуримановом многообразии более общего вида, с сигнатурой $1{+}3$. В добавок к (полу)римановой структуре зададим ещё дифференциальную форму $\alpha \in \Omega^1(M)$ и рассмотрим вопрос поиска экстремальных кривых достаточно естественного функционала

$$A(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} g(\dot\gamma, \dot\gamma) \ + \alpha(\dot\gamma)\right) dt.$$

Здесь к уже рассмотренному действию для свободной частицы добавлено максимально простое слагаемое — интеграл некоторой дифференциальной формы по кривой.

Можно проверить, что уравнение предположительно экстремальной кривой будет отличаться от уравнения геодезической слагаемым, зависящим от $\alpha$ следующим образом (ускорение понимается как $\ddot\gamma = \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$):

$$\ddot\gamma = (i_{\dot\gamma} d\alpha)^\sharp,$$

то есть для любого векторного поля $X$ в окрестности кривой $\gamma$ мы должны иметь $g(\ddot\gamma, X) = d\alpha(\dot\gamma, X)$.

*Задача* 7.193. Проверьте эту формулу по аналогии с рассуждением для уравнения геодезической.

[[ Слагаемое уравнения движения в виде $g(\ddot\gamma, X)$ мы уже получали из первой части действия в теореме 7.137. Второе слагаемое получится из производной Ли формы $\alpha$ и формулы Картана. ]]

Такое уравнение (после добавления констант массы в $g$ и заряда в $\alpha$) в полуримановой метрике теории относительности соответствует движению заряженной частицы в электромагнитном поле $F = d\alpha$. Тот факт, что в уравнение $\alpha$ входит только в виде своего дифференциала можно объяснить тем, что замена $\alpha$ на $\alpha'$ с равенством $d\alpha = d\alpha'$ не меняет значение $A(\gamma)$ (если ещё дополнительно предположить, например, поверхностную односвязность многообразия). При некотором желании можно даже определить $A(\gamma)$ в некотором локальном смысле, имея лишь замкнутую форму $F$ без глобального потенциала.

Само по себе электромагнитное поле $F$ удовлетворяет достаточно простой (в изученных нами терминах) системе уравнений. Если добавить понятие электрического тока как формы $j \in \Omega^3(M)$, описывающее усреднённое движение большого количества заряженных частиц, то можно написать уравнения

$$dF = 0, \quad d(*F) = j.$$

Первое из них выражает уже замеченную замкнутость $F$, второе выражает связь $F$ с током. Расписав эти уравнения в координатах с помощью выражения (знаки могут быть разными при разном выборе знаков в $g$)

$$F = (E_x dx + E_y dy + E_z dz) \wedge dt + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy,$$

можно убедиться, что это на самом деле классические уравнения Максвелла в вакууме с точностью до констант.

Форму тока $j$ при этом можно интегрировать по трёхмерным гиперповерхностям, находя полный заряд (если гиперповерхность пространственноподобна) или интерпретируя интеграл как поток заряда через двумерную пространственноподобную поверхность за заданное время. Условие $j = d(*F)$ и формула Стокса гарантируют, что интеграл тока по компактным трёхмерным многообразиям без края равен нулю, это называется «сохранение заряда». Ток также можно считать вектором $J$, имея в виду формулу $j = i_J \operatorname{vol}_g$, но выписанные ранее формулы показывают, что удобнее считать ток формой степени три.

Форму $*F$ при этом можно интегрировать по двумерным пространственноподобным поверхностям, находя в силу уравнения Максвелла количество заряда, ограниченного такой поверхностью в некоторой трёхмерной пространственноподобной области, краем которой является данная двумерная поверхность.

*Задача* 7.194. Найдите действие звёздочки Ходжа на формах $dx \wedge dt$, $dy \wedge dt$, $dz \wedge dt$, $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$, $dx \wedge dy$ в $\mathbb{R}^{1+3}$.

*Задача* 7.195. Выпишите уравнения для градиента и дивергенции векторного поля в стандартных координатах $\mathbb{R}^{1+3}$. Проверьте, есть ли отличия от случая евклидова пространства $\mathbb{R}^4$.

*Задача* 7.196. Выразите уравнение $d(*F) = j$ через дивергенцию и ротор (по пространственным координатам) в $\mathbb{R}^{1+3}$.

Продолжая тему физических уравнений, выпишем уравнение Эйнштейна для гравитационного поля (полуримановой структуры), которое с точностью до физических констант в четырёхмерном пространстве-времени выглядит как

$$Ric - 1/2Sg + \Lambda g = T,$$

где $S = \sum_{i=1}^4 Ric(e_i, f_i)$ — свёртка (след) тензора Риччи ($g(e_i, f_j) = \delta_{ij}$), *скалярная кривизна*, отвечающая за искажение объёма окрестности точки по сравнению с объёмом из экспоненциального отображения, $\Lambda$ — космологическая постоянная, также известная как «тёмная энергия», а $T$ — *тензор энергии-импульса*, который зависит от находящегося в пространстве вещества и излучения.

Уравнение Эйнштейна получается варьированием функционала действия, в котором часть, отвечающая за собственно гравитационное поле имеет вид интеграла скалярной кривизны по риманову объёму многообразия. Читатель, знакомый с методами вариационного исчисления, может проверить, что так получается уравнение без $\Lambda$ и $T$. Константу $\Lambda$ в уравнении можно получить, если добавить в действие риманов объём многообразия.

Тензор энергии-импульса в таком подходе возникает при добавлении в действие части, зависящей от вещества и излучения. Часть, порождающая уравнения Максвелла и взаимодействие электромагнитного поля с веществом, включает интегралы от $F \wedge *F$ и $\alpha \wedge j$ по многообразию (последнее выражение заменяет интегралы от $\alpha$ по кривым для системы частиц, описываемой током), что читатель может проверить в качестве упражнения.

7.20. **Модельные пространства римановой геометрии.** После уже рассмотренных плоских (то есть нулевой кривизны) многообразий $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{1+3}$, мы рассмотрим чуть менее тривиальные римановы многообразия. Самое понятное из них — это круглая сфера $\mathbb{S}^n$, которую можно задать уравнением

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ со стандартной римановой (евклидовой) метрикой

$$g = dx_0 \otimes dx_0 + dx_1 \otimes dx_1 + \dots + dx_n \otimes dx_n.$$

Можно посчитать ковариантную производную и кривизну на сфере вручную, но кое-что можно узнать и из общих соображений. Группа вращений, сохраняющих $g$, является ортогональной группой $\mathrm{O}(n+1)$. Если в касательном пространстве сферы, в некоторой точке $p$, задан ортонормированный базис $e_1, \dots, e_n$, то эта группа может перевести $p$ в любую другую точку и преобразовать базис в любой другой базис.

Допустим, нам надо посчитать значение $R_{e_i,e_j}e_k$ для любого выбора трёх базисных векторов. Можно считать $i \neq j$ из свойства антисимметричности $R_{X,Y}Z$ по $X$ и $Y$. Для касательных векторов $e_i$ и $e_j$ найдётся изометрическая копия двумерной сферы $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^n$, которая содержит точку $p$ и касается векторов $e_i, e_j$.

Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^{n-3}$, дополнительную к $\mathbb{S}^2$. Иначе говоря, мы рассматриваем ортогональное разложение $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^{n-2}$ и пересекаем его со сферой. Заметим, что мы можем вращать второе слагаемое $\mathbb{R}^{n-2}$, оставляя на месте первое, при этом сфера будет вращаться изометриями, сохраняющими её метрику $g$. Такими вращениями мы можем сделать любое ортогональное преобразование на нормальных к $\mathbb{S}^2$ векторах. При фиксированных $e_i, e_j$ из свойств симметрии формы кривизны Римана выражение $g(R_{e_1,e_j}Z, T)$ является кососимметричной формой от $Z$ и $T$. Эта кососимметричная форма инвариантна относительно вращений ортогонального к $\mathbb{S}^2$ пространства, в частности должна сохраняться при перемене мест $Z$ на $T$, то есть она равна нулю при любых $Z, T \perp e_1, e_2$.

Следующим этапом надо выяснить значения $R_{e_i,e_j}Z$ при $Z \perp \langle e_i, e_j \rangle$, всё ещё возможно, что это значение является линейной комбинацией $e_i$ и $e_j$. Но тогда, аналогично предыдущим рассуждениям, линейные по $Z$ выражения $g(R_{e_i,e_j}Z, e_i)$ и $g(R_{e_i,e_j}Z, e_j)$ инвариантны относительно любых вращений $Z$ в ортогональном дополнении к $\langle e_1, e_2 \rangle$, то есть обязаны быть равными нулю. Следовательно $R_{e_i,e_j}e_k$ будет равно нулю для случаев, когда $e_k$ не совпадает с $e_i$ или $e_j$.

Остаётся понять, чему равны $R_{e_i,e_j}e_i$ и $R_{e_i,e_j}e_j$, которые по доказанному должны лежать в линейной оболочке $e_1$ и $e_2$. Для выяснения этого вопроса нам достаточно работать на двумерной сфере. Для нахождения кривизны можно использовать формулу из задачи 7.175 для *стереографической* системы координат на сфере

$$x = \frac{2u}{1+u^2+v^2}, \quad y = \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \quad z = \frac{1-u^2-v^2}{1+v^2+u^2}.$$

*Задача* 7.197 (Стереографическая проекция). Докажите, что центральная проекция из полюса (точки $(1, 0, \dots, 0)$) сферы $\mathbb{S}^n$ на гиперплоскость $\{x_0 = 0\}$ задаёт систему координат на сфере без одной точки, в которой её риманова структура имеет вид

$$g = \frac{4dx_1 \otimes dx_1 + 4dx_2 \otimes dx_2 + \dots + 4dx_n \otimes dx_n}{(1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^2}.$$

[[ Заметьте, что стереографическая проекция сохраняет углы между касательными векторами, то есть должна переводить метрику на сфере с метрику евклидова пространства с точностью до умножения на функцию. Найдите эту функцию, рассмотрев одномерную подсферу, проходящую через полюс. ]]

Можно также рассуждать о кривизне двумерной сферы геометрически, заодно посмотрев на связь кривизны и углов многоугольника из геодезических. Заметим, что на двумерной сфере при движении вдоль геодезической $\gamma$ условие $\nabla_{\dot\gamma} Z = 0$ означает, что угол между $\dot\gamma$ и $Z$ сохраняется. При переносе по четырёхугольнику из геодезических вектор $Z$ окажется повёрнут на сумму углов, дополнительных к углам этого четырёхугольника. Эта сумма (из школьной стереометрии, см. также пояснения далее) равна площади четырёхугольника плюс $2\pi$. Так как поворот на $2\pi$ не меняет вектор, то поворот просто пропорционален площади четырёхугольника и направлен против часовой стрелки, отсюда с учётом результата задачи 7.166 следует:

**Теорема 7.198.** *В любой точке сферы $\mathbb{S}^n$ для ортогонального базиса касательных векторов выполняется*

$$R_{e_i,e_j}e_k = -e_\ell, R_{e_i,e_j}e_\ell = e_k$$

*при условии, что $i = k, j = \ell$, в остальных случаях компоненты римановой кривизны равны нулю. Это означает, что сфера* имеет постоянную кривизну 1.

Можно записать значения формы кривизны сферы на произвольных векторах с помощью формулы

$$R(X, Y, Z, T) = g(R_{X,Y}Z, T) = g(X, T)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, T),$$

на векторах ортонормированного базиса она выполняется, на остальные она продолжается по полилинейности.

В следующих задачах обозначено элементарное объяснение использованного факта про суммы углов сферических двуугольников и треугольников, из которых следует использованный выше факт про углы четырёхугольника.

*Задача* 7.199. Докажите, что на единичной двумерной сфере сферический двуугольник, образованный двумя половинами больших окружностей с углом $\varphi$ между ними, имеет площадь $2\varphi$.

[[ Используйте вращение вокруг ребра двуугольника, которое сохраняет площадь поверхности сферы. Это даёт доказательство для рациональных $\varphi/\pi$, остальные случаи получаются предельным переходом. ]]

*Задача* 7.200. Докажите, что на единичной двумерной сфере сферический треугольник с внутренними углами $\alpha, \beta, \gamma$ имеет площадь

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

[[ Продолжите стороны треугольника до больших окружностей, которые разобьют сферу на восемь треугольников, которые разбиваются на центрально-симметричные пары. Запишите уравнения на общую площадь сферы и на площади возникающих на картинке двуугольников. ]]

*Задача* 7.201. Выведите определение тензора кривизны сферы произвольной размерности из задачи 7.171 и информации о кривизне двумерной сферы.

Можно развить пример со сферой менее тривиальным образом. Рассмотрим полуриманову метрику

$$g = -dx_0 \otimes dx_0 + dx_1 \otimes dx_1 + \dots + dx_n \otimes dx_n.$$

в $\mathbb{R}^{1+n}$, и зададим гиперповерхность $\mathbb{H}^n$ (*гиперболическое пространство*) условиями

$$-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = -1, \ x_0 > 0.$$

Рассмотрев группу линейных изометрий $\mathbb{R}^{1+n}$, $\mathrm{O}(1, n)$, можно заметить, что она может перевести любую точку $\mathbb{H}^n$ в любую другую и любой ортогональный базис касательных векторов в любой другой, см. задачу 7.188. Ситуация аналогична случаю сферы, и это на самом деле максимально возможный набор симметрий для риманова многообразия, как показывает следующая задача:

*Задача* 7.202. Докажите, что если изометрия связного риманова многообразия $M$ оставляет на месте одну точку $p$ и действует на касательном пространстве $T_pM$ тождественно, то она сама является тождественным отображением.

[[ Используйте экспоненциальное отображение для доказательства локальной тождественности, далее используйте связность. ]]

*Задача* 7.203. Докажите, что группа $\mathrm{O}(n+1)$ даёт все изометрии $\mathbb{S}^n$, а группа $\mathrm{O}^+(1, n)$ — подгруппа $\mathrm{O}(1, n)$, не меняющая местами связные компоненты гиперболоида — даёт все изометрии $\mathbb{H}^n$.

[[ Сделайте композицию какой-то изометрии $\varphi$ с линейной изометрией $\varphi$ так, чтобы эта композиция $\varphi \circ \psi$ оставляла не месте некоторую точку сферы/гиперболического пространства и не меняла касательные векторы в этой точке. Примените результат предыдущей задачи. ]]

Также можно построить изометричные вложения $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^n$ через любую точку и пару непараллельных касательных векторов в ней и убедиться, что $\mathbb{H}^n$ можно произвольно вращать, оставляя на месте $\mathbb{H}^2$, как и было в случае сферы. Читатель может проверить технические детали и сделать явное вычисление на $\mathbb{H}^2$ (например, в приведённых ниже координатах Пуанкаре), чтобы установить:

**Теорема 7.204.** *В любой точке гиперболического пространства* $\mathbb{H}^n$ *для ортогонального базиса касательных векторов выполняется*

$$R_{e_i,e_j} e_k = e_\ell, R_{e_i,e_j} e_\ell = -e_k$$

*при условии, что* $i = k, j = \ell$, *в остальных случаях компоненты римановой кривизны равны нулю. Это означает, что гиперболическое пространство* имеет постоянную кривизну $-1$.

Аналогично случаю сферы, можно записать значения формы кривизны гиперболического пространства на произвольных векторах с помощью формулы

$$R(X, Y, Z, T) = g(R_{X,Y}Z, T) = -g(X, T)g(Y, Z) + g(X, Z)g(Y, T).$$

*Задача* 7.205 (Координаты Пуанкаре). Докажите, что центральная проекция из точки $(-1, 0, \ldots, 0)$ на гиперплоскость $\{x_0 = 0\}$ задаёт систему координат на гиперболическом пространстве (со значениями в единичном открытом шаре), в которой риманова структура имеет вид

$$g = \frac{4dx_1 \otimes dx_1 + 4dx_2 \otimes dx_2 + \cdots + 4dx_n \otimes dx_n}{(1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2)^2}.$$

[[ Как и в задаче про стереографическую проекцию сферы, удобно сначала доказать сохранение углов, то есть *конформность* данного отображения. ]]

*Задача* 7.206. Выпишите явный вид геодезических в натуральной параметризации на сфере и в гиперболическом пространстве (как в гиперповерхностях в $\mathbb{R}^{n+1}$).

[[ Используя симметрии сферы и гиперболического пространства, покажите, что геодезическая обязана лежать в том же двумерном линейном подпространстве объемлющего $\mathbb{R}^{n+1}$, где лежат её начальная точка и начальная скорость. Для сферы после этого нетрудно выписать явную формулу, а для гиперболического пространства надо понять, зачем нужны функции $\operatorname{ch} t$ и $\operatorname{sh} t$ вместо обычных косинуса и синуса. ]]

*Задача* 7.207. $^*$ Проверьте, что в гиперболическом пространстве любой отрезок геодезической является кратчайшей.

[[ Убедитесь, что гиперболическое пространство геодезически полно и его экспоненциальное отображение является диффеоморфизмом всего касательного пространства в точке на всё $\mathbb{H}^n$. Проверьте, что рассуждения из доказательства леммы 7.146 тогда работают не только для малой окрестности точки, но и для всего пространства. ]]

7.21. **Пространства де Ситтера и метрика Шварцшильда.** В этом разделе мы рассмотрим некоторые несложные полуримановы многообразия. Конструкцию гиперболического пространства можно далее модифицировать. В той же метрике специальной теории относительности

$$g = -dx_0 \otimes dx_0 + dx_1 \otimes dx_1 + \cdots + dx_n \otimes dx_n.$$

в $\mathbb{R}^{n+1}$ можно задать гиперповерхность (*пространство де Ситтера*) $\mathrm{d}\mathbb{S}^n$ условием

$$-x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1.$$

Если $n = 2$, то это получится однополостный гиперболоид в $\mathbb{R}^3$, на примере которого удобно проверить основные свойства такого пространства.

Полуриманова структура $g$ ограничивается на пространство де Ситтера до полуримановой метрики с сигнатурой $1, n-1$. Направления кривых, таких что $g(\dot\gamma, \dot\gamma) = 0$ и $\ddot\gamma = 0$ (*световые лучи*), даются прямыми, лежащими на гиперболоиде (см. задачу 7.142). При $n = 2$ через каждую точку проходит пара таких прямых, в больших размерностях их будет бесконечное количество. Достаточно познавательно, что в пространстве де Ситтера есть такие пары точек, идущие из которых световые лучи никогда не встретятся друг с другом.

Группа симметрий формы $g$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathrm{O}(1, n)$, может перевести любую точку $\mathrm{d}\mathbb{S}^n$ в любую другую, и даже перевести любой вектор с условием $g(X, X) = -1$ (*времениподобный единичный вектор*) в любой аналогичный вектор в другой точке, см задачу 7.188. Это означает, что с точки зрения любого наблюдателя это «пространство-время» выглядит одинаково, хотя и представление его в виде гиперболоида создаёт ощущение, что оно «расширяется», когда время $x_0$ положительно и возрастает. Пространственная часть (например, при $x_0 = 0$) пространства де Ситтера выглядит как сфера постоянной положительной кривизны.

В общей теории относительности такое пространство-время является одним из решений уравнений Эйнштейна с положительной космологической постоянной (за счёт того, что оно в определённом смысле является пространством постоянной кривизны) и нулевым тензором энергии-импульса.

*Задача* 7.208. Докажите, что в части пространства де Ситтера $\mathrm{d}\mathbb{S}^4$, выделенной условием $x_4 > 0$, в системе координат $x_0/x_4, x_1/x_4, x_2/x_4, x_3/x_4$ все геодезические этого пространства являются прямыми линиями. По Ньютону такая система координат должна называться *инерциальной*, так как частицы, взаимодействующие только с гравитационным полем, движутся в ней равномерно и прямолинейно.

[[ Докажите, что любое двумерное линейное подпространство $P \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в пересечении с $\mathrm{d}\mathbb{S}^4$ даёт геодезическую или пару геодезических. ]]

Аналогично можно определить анти-пространство де Ситтера $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^{n+1}$ как гиперповерхность, заданную уравнением

$$-u^2 - v^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = -1,$$

с метрикой, которая получена на гиперповерхность ограничением плоской метрики

$$g = -du \otimes du - dv \otimes dv + dx_1 \otimes dx_1 + \dots + dx_n \otimes dx_n.$$

После ограничения полуриманова структура будет иметь сигнатуру $1 + n$. Световые лучи в этой метрике также даются прямыми, лежащими на соответствующем гиперболоиде (при $n = 1$ это будет однополостный гиперболоид), однако кривые движения частиц положительной массы (то есть кривые с условием $g(\dot\gamma, \dot\gamma) < 0$) могут, например, иметь вид

$$u = \cos t, \quad v = \sin t,$$

то есть частицы могут пройти по некоторому маршруту и вернуться в ту же точку этого пространства-времени. Если нам не нравятся такие путешествия во времени, то введя в анти-пространстве де Ситтера координату $t$ так, чтобы

$$u = \sqrt{1 + x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \cos t, \quad v = \sqrt{1 + x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sin t,$$

можно перейти к его универсальному накрытию $\widetilde{\mathrm{Ad}\mathbb{S}}^{n+1}$ (см. раздел 10.12) с координатами $t, x_1, \dots, x_n$, в котором $t$ уже рассматривается как произвольное действительное число, а не с точностью до прибавления $2\pi k$.

Для сравнения, пространство де Ситтера $\mathrm{d}\mathbb{S}^2$ не имеет проблем с замкнутыми времениподобными траекториями, но тоже имеет нетривиальное универсальное накрытие $\widetilde{\mathrm{d}\mathbb{S}}^2$, так как оно совпадает с $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^2$ с точностью до смены знака метрики.

*Задача* 7.209. Напишите выражение для метрики $\widetilde{\mathrm{Ad}\mathbb{S}}^{n+1}$ в координатах $(t, x_1, \dots, x_n)$.

Анти-пространство де Ситтера имеет группу симметрий $\mathrm{O}(2, n)$ и точно так же, как в случае с пространством де Ситтера, с точки зрения любого наблюдателя, движущегося во времениподобном направлении, оно выглядит одинаково. То же верно и для его универсального накрытия. Пространственная часть анти-пространства де Ситтера (при $t = 0$) выглядит как гиперболическое пространство постоянной отрицательной кривизны. В общей теории относительности такое анти-пространство де Ситтера является одним из решений уравнений Эйнштейна с отрицательной космологической постоянной и нулевым тензором энергии-импульса.

*Задача* 7.210. Докажите, что в части анти-пространства де Ситтера $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^4$, выделенной условием $u > 0$, в системе координат $v/u, x_1/u, x_2/u, x_3/u$ все геодезические являются прямыми линиями.

[[ Аналогично задаче про пространство де Ситтера. ]]

Выпишем намного менее симметричную, но имеющую полезный физический смысл *метрику Шварцшильда*:

$$g = -\frac{r-\rho}{r}dt \otimes dt + \frac{r}{r-\rho}dr \otimes dr + r^2(\sin^2\vartheta d\varphi \otimes d\varphi + d\vartheta \otimes d\vartheta).$$

В этой метрике $t$ играет роль времени, хотя собственное время находящихся в фиксированном пространственном положении объектов идёт медленнее из-за множителя $\frac{r-\rho}{r}$, $\rho > 0$ — это некоторая константа. Переменная $r > \rho$ играет роль радиальной координаты, но не равна расстоянию, радиальное расстояние можно найти как интеграл

$$\int \sqrt{\frac{r}{r-\rho}}\, dr.$$

Переменные $\varphi$ и $\vartheta$ играют роль углов сферических координат. В принципе, эту формулу можно написать с заменой $r, \varphi, \vartheta$ на $x, y, z$, но она тогда будет намного длиннее.

*Задача* 7.211. Возьмите интеграл и посчитайте радиальное расстояние в метрике Шварцшильда.

В целом метрика (полуриманова структура) Шварцшильда симметрична относительно трёхмерных вращений, не меняющих время, а также инвариантна при сдвиге времени. Это позволяет при анализе движения объекта в этой метрике выбрать координаты так, что $\vartheta = \pi/2$ и упростить вычисления.

*Задача* 7.212. Определите в метрике Шварцшильда поведение световых лучей, идущих в радиальном направлении.

[[ Положите $\vartheta = \pi/2$, $\varphi = 0$ и решите уравнение

$$-\frac{r-\rho}{r}dt^2 + \frac{r}{r-\rho}dr^2 = 0.$$

]]

*Задача* 7.213. Множитель $1 - \rho/r$ в формуле метрики Шварцшильда соответствует, после извлечения из него квадратного корня, замедлению собственного времени для наблюдателя, находящего на поверхности Земли, по сравнению с наблюдателем, находящимся дальше от Земли. Оцените, сильнее ли этот эффект эффекта замедления собственного времени от движения спутника на круговой орбите для низкой околоземной орбиты и для геостационарной орбиты.

[[ Учтите, что $\rho = 2GM/c^2$ в реальных единицах, а замедление собственного времени при движении со скоростью $v$ описывается формулой $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. ]]

*Задача* 7.214. * Определите радиальное движение объектов положительной массы (то есть геодезические с $g(\dot\gamma, \dot\gamma) < 0$) в метрике Шварцшильда. Покажите, что за конечное собственное время движущийся к центру объект уходит в зону $t = +\infty$. Это говорит о том, что метрика Шварцшильда требует какого-то продолжения за пределы координатной карты, в которой она определена.

[[ Варьируйте функционал действия $\int_\gamma g(\dot\gamma, \dot\gamma)\, ds$ (здесь $\dot\gamma$ обозначает производную по параметру $s$, не путать с производной по «времени» в координатах Шварцшильда $t$). Инвариантность относительно сдвига $t$ даст закон сохранения энергии. ]]

*Задача* 7.215. ** Изучите движение объектов положительной массы в метрике Шварцшильда, если они движутся в плоскости $\vartheta = \pi/2$. Посчитайте величину эффектов отклонения световых лучей и смещения перигелия орбиты.

[[ Можно напрямую варьировать функционал действия $\int_\gamma g(\dot\gamma, \dot\gamma)\, ds$. Его варьирование по времени $t$ и углу поворота $\varphi$ даст законы сохранения энергии и углового момента:

$$\frac{r-\rho}{r}\frac{dt}{ds} = \mathrm{const}, \quad r^2\frac{d\varphi}{ds} = \mathrm{const}.$$

Варьирование по координате $r$ даст уравнение второго порядка, которое надо будет изучать. ]]

7.22. **Площадь поверхности по Минковскому.** Рассмотрим риманово многообразие $(M, g)$ размерности $n$ и гиперповерхность $H \subset M$, то есть вложенное в $M$ многообразие без края размерности $n-1$. Риманова структура $g$ индуцирует на $H$ метрику $\bar g$ и мы хотим интерпретировать риманов объём $H$ в терминах риманова объёма в $M$. Частным случаем этой ситуации будет компактная ориентированная гиперповерхность без края $H \subset \mathbb{R}^n$ с индуцированной метрикой. Возьмём $\varepsilon > 0$ и рассмотрим метрическую $\varepsilon$-окрестность $H$, обозначив её для краткости $H_\varepsilon$.

**Теорема 7.216** (Формула Минковского для объёма гиперповерхности). *Для компактной гладкой гиперповерхности $H \subset M$ и её риманова объёма относительно и римановой метрики $g$ на $M$ имеет место формула*

$$\mathrm{vol}_{\bar g} H = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\mathrm{vol}_g H_\varepsilon}{2\varepsilon}.$$

*Доказательство.* Для любой точки $p \notin H$ расстояние $\mathrm{dist}(p, H)$ достигается на некоторой точке $x \in H$ (возможно, не одной). При достаточно малом расстоянии $\mathrm{dist}(p, x)$ это означает в силу формулы (7.12), что существует геодезическая $\gamma$ между $p$ и $x$ длины $\mathrm{dist}(p, x)$. Из компактности $H$ следует, что «достаточно малое расстояние» можно выбрать одинаковым в этом рассуждении независимо от $x$. Так как $\gamma$ реализует минимальное расстояние от $p$ до $H$, она должна быть перпендикулярна $H$ в точке $x$.

Предположим, что мы можем непрерывно выбрать нормаль $n(x)$ к $H$ в каждой точке $x \in H$, этот выбор будет тогда гладко зависеть от $x$. Если этого сделать нельзя, то это можно будет сделать после перехода к двукратному накрытию $\widetilde M \to M$ и $\widetilde H \to H$ (см. раздел 10.12), которое просто удвоит все рассматриваемые объёмы. Пока же мы просто предполагаем, что выбрать нормаль возможно.

Построим отображение $f : H \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ следующим образом. Для пары $x \in H$ и $|t| < \varepsilon$ возьмём геодезическую $\gamma_x$ с началом в $x$ и касательной в $x$ равной $n(x)$ и положим

$$f(x, t) = \gamma_x(t).$$

При достаточно малом $\varepsilon$ отображение будет определено и будет гладко зависеть от $x$ и $t$ по теореме о гладкой зависимости решений дифференциального уравнения от начальных данных. Рассуждения из начала доказательства показывают, что, по крайней мере при достаточно малом $\varepsilon$, это отображение является сюръекцией на окрестность $H_\varepsilon$. Более того, из компактности $H$ и теоремы об обратном отображении следует, что при достаточно малом $\varepsilon$ отображение $f$ является диффеоморфизмом. Читателю предлагается проверить это, накрыв $H \times \{0\}$ конечным числом открытых множеств вида $U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, на которых $f$ является диффеоморфизмом, и выбрав $\varepsilon$ настолько малым, что $2\varepsilon$-окрестность любой точки $H \times \{0\}$ полностью содержится в одном из множеств покрытия.

Дифференциал $f$ в любой точке $(x, 0)$ тождественно действует на $T_xH$ и переводит единичный ортогональный вектор к $T_xH$ в цилиндре $H \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ в единичный ортогональный вектор к $T_xH$ в $M$. Если мы обозначим метрику произведения на $H \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ за $g^\times$, то можно будет сказать, что $f^*g$ совпадает с $g^\times$ над $H$. Из непрерывности метрик это означает, что для любого $\delta > 0$ при достаточно малом $\varepsilon$ метрики $g^\times$ и $f^*g$ будут отличаться не более чем в $1+\delta$ раз на цилиндре $H \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, а соответствующие им римановы объёмы — соответственно не более чем в $(1+\delta)^{n/2}$ раз. Оценки

$$(1+\delta)^{-n/2} \operatorname{vol}_{g^\times} \leqslant \operatorname{vol}_{f^*g} \leqslant (1+\delta)^{n/2} \operatorname{vol}_{g^\times}$$

и формулы (7.5) достаточно, чтобы сделать вывод, что

$$\operatorname{vol}_{\bar{g}} H = \frac{\operatorname{vol}_{g^\times} H \times (-\varepsilon, \varepsilon)}{2\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\operatorname{vol}_{f^*g} H \times (-\varepsilon, \varepsilon)}{2\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\operatorname{vol}_g H_\varepsilon}{2\varepsilon}.$$

□

Аналогичная формула верна и для $k$-мерных подмногообразий в $n$-мерных многообразиях, надо только поставить в знаменатель $v_{n-k}\varepsilon^{n-k}$, где $v_{n-k}$ — объём евклидова единичного $(n-k)$-мерного шара, читатель может поразмышлять об этом самостоятельно и подумать, на что надо заменить цилиндр $H \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ в этом случае.

Можно пойти в обратном направлении и считать формулу Минковского определением. Для простоты вернёмся в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и для произвольного множества $G \subseteq \mathbb{R}^n$ выражение

$$\mathfrak{M}(G) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\mu G_\varepsilon - \mu G}{\varepsilon}. \tag{7.13}$$

будем называть *площадь поверхности по Минковскому* множества $G$. Если предел не существует, то можно взять нижний предел и обозначить его $\underline{\mathfrak{M}}(G)$. Аналогично приведённым выше рассуждениям устанавливается, что если граница $G$ является гладкой гиперповерхностью, то эта формула даёт $(n-1)$-мерный риманов объём этой гиперповерхности.

*Задача* 7.217. Найдите риманов объём единичной сферы $\mathbb{S}^n$.

[[ Наверное проще всего будет это сделать, рассмотрев $\varepsilon$-окрестность единичного шара в $\mathbb{R}^{n+1}$, которая сама является шаром радиуса $1+\varepsilon$, и применив формулу (7.13). ]]

*Задача* 7.218. * Посчитайте риманов объём $\varepsilon$-окрестности точки (метрического шара радиуса $\varepsilon$) во внутренней метрике сферы и во внутренней метрике гиперболического пространства.

[[ Заметьте, что можно представить $n$-мерный объём как интеграл $(n-1)$-мерных объёмов $\operatorname{vol}_n U_\varepsilon = \int_0^\varepsilon \operatorname{vol}_{n-1} \partial U_t \, dt$ по соображениям, аналогичным формуле Минковского. Из симметричности сферы и гиперболического пространства следует, что $\partial U(t)$ изометрично стандартной $(n-1)$-мерной сфере некоторого радиуса, который остаётся выразить через $t$. ]]

*Задача* 7.219. Для ориентированной компактной гладкой поверхности $N$ в $\mathbb{R}^3$ рассмотрим её сдвиг $N_t$, в котором каждая точка $r \in N$ заменяется на $r + t\nu$, где $\nu$ является ориентирующей нормалью в точке $r$. Докажите, что для производной риманова объёма $N_t$ при достаточно малых $t$ выполняется формула

$$\frac{d}{dt} \operatorname{vol} N_t = -\int_{N_t} \operatorname{tr} \mathrm{II}_{N_t} \, d \operatorname{vol} N_t.$$

[[ Формулу достаточно доказать при $t = 0$. Также полезно связать производные $\frac{d\nu}{du}$ и $\frac{d\nu}{dv}$ с $\mathrm{II}_N$ в явном виде, или вспомнив формулы из задачи 7.132. ]]

7.23. **Неравенство Брунна–Минковского и изопериметрическое неравенство.** Классическая изопериметрическая задача заключается в том, чтобы найти множество $G \subset \mathbb{R}^n$, имеющее минимальную площадь поверхности (например, понимаемую как $\underline{\mathfrak{M}}(G)$ по Минковскому) при фиксированном объёме $\mu G$. Естественно предположить, что экстремум достигается на шаре, однако доказательство этого утверждения не столь тривиально. Мы приведём один из вариантов рассуждения.

Определим понятие *суммы Минковского* для двух множеств $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ как

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Множество $X+Y$ можно представить как линейную проекцию произведения $X \times Y \subset \mathbb{R}^{2n}$, поэтому достаточно очевидно, что оно будет компактным в случае, если множества $X$ и $Y$ компактны. Также нетрудно заметить, что $X + Y$ будет открыто, если хотя бы одно из исходных множеств открыто. Однако, существуют примеры, когда $X$ и $Y$ измеримы по Лебегу, но их сумма Минковского $X + Y$ неизмерима по Лебегу.

Для целей дальнейшего изложения, когда мы хотим оценить меру Лебега множества $X + Y$ снизу, можно считать, что по теореме 5.35 мы приблизили $X$ и $Y$ по мере содержащимися в них компактными $X' \subseteq X$ и $Y' \subseteq Y$, оценили снизу меру Лебега $X' + Y'$, и таким образом оценили снизу нижнюю меру Лебега множества $X + Y$.

Положим для числа $t \in \mathbb{R}$, $tX = \{tx \mid x \in X\}$. Пусть $B$ — единичный шар с центром в нуле. Тогда замыкание $t$-окрестности $G$ можно выразить в этих терминах как $G + tB$, оценка площади поверхности $G$ снизу будет следовать из оценки объёма $G + tB$ снизу, в силу определения площади поверхности по Минковскому. Ключевым фактом в этой оценке будет *неравенство Брунна–Минковского*

$$\mu(X + Y)^{1/n} \geqslant \mu(X)^{1/n} + \mu(Y)^{1/n}$$

для измеримых $X, Y, X + Y \subseteq \mathbb{R}^n$ (если $X + Y$ неизмеримо, то берём его нижнюю меру Лебега). Предполагая выполнение этого неравенства, мы получаем

$$\mu(G + tB) \geqslant \left(\mu(G)^{1/n} + t\mu(B)^{1/n}\right)^n.$$

Переходя к пределу при $t \to +0$, получаем

$$\underline{\mathfrak{M}}(G) \geqslant n\mu(G)^{\frac{n-1}{n}}\mu(B)^{1/n}$$

с равенством, выполняющимся для любого шара. Например, для единичного шара по итогам задачи 7.217

$$\underline{\mathfrak{M}}(B) = n\mu B = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}$$

и это есть равенство, а для произвольного шара при увеличении его радиуса до $R$ обе части равенства умножаются на $R^{n-1}$ и равенство остаётся в силе. Значит шар действительно даёт оптимальное множество $G$ в изопериметрическом неравенстве.

Сначала мы докажем простой вариант неравенства Брунна–Минковского, а потом дадим более длинное доказательство более сильных утверждений.

**Теорема 7.220** (Неравенство Брунна–Минковского). *Для открытых множеств $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство*

$$\mu(X + Y)^{1/n} \geqslant \mu(X)^{1/n} + \mu(Y)^{1/n}.$$

*Доказательство.* Открытые множества можно приближать изнутри по мере не просто компактными множествами, а элементарными компактными, то есть состоящими из конечного числа параллелепипедов. Так что далее будем считать $X$ и $Y$ объединениями параллелепипедов. Для такого $X$ (или $Y$) определим *сложность* как сумму по всем

$i = 1, \ldots, n$ количества таких чисел $c$, что $x_i = c$ является крайним значением одного или более чем одного параллелепипеда из $X$.

Покажем, что либо $X$ можно разрезать какой-то координатной гиперплоскостью $\{x_i = c\}$ на два множества меньшей сложности, либо оно является параллелепипедом. Попробуем сделать разрезание вдоль координаты $x_i$. Это не приведёт к уменьшению сложности только если есть ровно два крайних значения $x_i$ на составляющих $X$ параллелепипедах. Если это верно для любого $i$, то само $X$ является параллелепипедом.

Теперь будем использовать индукцию по сумме сложностей $X$ и $Y$. База индукции — это когда оба множества являются параллелепипедами и нам надо доказать неравенство

$$((a_1 + b_1) \cdots (a_n + b_n))^{1/n} \geqslant (a_1 \cdots a_n)^{1/n} + (b_1 \cdots b_n)^{1/n}$$

для неотрицательных $a_i$ и $b_i$. Его можно доказать школьными методами или проверить однородность степени 1 и вогнутость функции $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1 \cdots x_n)^{1/n}$ на положительных $x_i$, проверив отрицательную полуопределённость её гессиана.

Шаг индукции сделаем так. Без ограничения общности разрежем $X$ гиперплоскостью $\{x_1 = 0\}$ на части $X_-$ и $X_+$ меньшей сложности, чем $X$. Из соображений непрерывности $Y$ можно разрезать на две части $Y_-$ и $Y_+$ некоторой гиперплоскостью $\{x_1 = c\}$ так, чтобы пропорция $\mu Y_- : \mu Y_+$ была равна пропорции $\mu X_- : \mu X_+$. Сдвиг $Y$ не меняет обе части доказываемого неравенства, поэтому можно считать, что разрезающая $Y$ гиперплоскость тоже оказалась $\{x_i = 0\}$.

В парах $(X_-, Y_-)$ и $(X_+, Y_+)$ суммарная сложность меньше суммарной сложности $(X, Y)$, поэтому для них верны неравенства Брунна–Минковского, которые мы запишем в виде

$$\mu(X_- + Y_-) \geqslant \left(\mu(X_-)^{1/n} + \mu(Y_-)^{1/n}\right)^n$$

$$\mu(X_+ + Y_+) \geqslant \left(\mu(X_+)^{1/n} + \mu(Y_+)^{1/n}\right)^n.$$

Заметим, что множество $X_- + X_- \subset X + Y$ имеет неположительную координату $x_1$, а множество $X_+ + Y_+ \subset X + Y$ — неотрицательную. Следовательно, они пересекаются по множеству меры нуль и

$$\mu(X + Y) \geqslant \mu(X_- + Y_-) + \mu(X_+ + Y_+) \geqslant \\ \geqslant \left(\mu(X_-)^{1/n} + \mu(Y_-)^{1/n}\right)^n + \left(\mu(X_+)^{1/n} + \mu(Y_+)^{1/n}\right)^n.$$

Заметим, что по условию пропорциональности вектор $(\mu(X_-), \mu(Y_-))$ пропорционален вектору $(\mu(X_+), \mu(Y_+))$, а функция $(x, y) \mapsto \left(x^{1/n} + y^{1/n}\right)^n$ однородна степени 1. Следовательно, эта функция от суммы пропорциональных векторов равна сумме функций от каждого из векторов. Тогда с учётом $\mu(X) = \mu(X_-) + \mu(X_+)$ и $\mu(Y) = \mu(Y_-) + \mu(Y_+)$ получаем

$$\mu(X + Y) \geqslant \left(\mu(X_-)^{1/n} + \mu(Y_-)^{1/n}\right)^n + \left(\mu(X_+)^{1/n} + \mu(Y_+)^{1/n}\right)^n = \left(\mu(X)^{1/n} + \mu(Y)^{1/n}\right)^n,$$

что равносильно неравенству Брунна–Минковского для $X$ и $Y$. ☐

*Задача* 7.221. Докажите, что функция $A \mapsto (\det A)^{1/n}$ вогнута на положительно определённых симметричных матрицах размера $n \times n$.

[[ Вогнутость функции по определению означает вогнутость её ограничения на любую прямую. Для состоящей из симметричных матриц прямой сделайте ортогональную замену координат, чтобы все матрицы на этой прямой стали одновременно диагональными. ]]

*Задача* 7.222 (Изодиаметрическое неравенство). Докажите, что максимум объёма множества в $\mathbb{R}^n$ данного диаметра достигается на шаре.

[[ Сведите вопрос к открытым множествам. Возьмите множество $X$ и сложите по Минковскому с множеством $-X$, переформулируйте неравенство $\operatorname{diam} X \leqslant d$ в терминах $X - X$. ]]

*Задача* 7.223. Назовём *выпуклым полиэдром* множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, заданное системой линейных неравенств

$$x \cdot \nu_1 \leqslant c_1, \dots, x \cdot \nu_m \leqslant c_m.$$

Для определённости будем считать векторы $\nu_i$ единичными. Докажите, что среди ограниченных выпуклых полиэдров с фиксированными векторами $\nu_i$ и фиксированным объёмом минимальную площадь поверхности имеют те, у которых $c_1 = \dots = c_m$, и их сдвиги.

[[ Действуйте как в доказательстве изопериметрического неравенства, но сумму Минковского берите не с шаром радиуса $r$, а с выпуклым полиэдром, заданном неравенствами

$$x \cdot \nu_1 \leqslant r, \dots, x \cdot \nu_m \leqslant r.$$

]]

Далее мы приводим другое доказательство неравенства Брунна–Минковского через его логарифмический и функциональный вариант.

**Теорема 7.224** (Логарифмическое неравенство Брунна–Минковского). *Для компактных множеств $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ и любого $t \in [0,1]$ выполняются неравенства*

$$\mu((1-t)X + tY) \geqslant \mu(X)^{1-t}\mu(Y)^t \Rightarrow \mu(X+Y)^{1/n} \geqslant \mu(X)^{1/n} + \mu(Y)^{1/n}.$$

*Доказательство.* Для начала объясним, почему из неравенства слева следует классический вариант неравенства справа. Запишем логарифмическую форму неравенства для других компактов

$$\mu((1-t)X' + tY') \geqslant \mu(X')^{1-t}\mu(Y')^t,$$

и положим в этом неравенстве $X' = \frac{1}{1-t}X$, $Y' = \frac{1}{t}Y$. Тогда неравенство переписывается в виде

$$\mu(X+Y) \geqslant \frac{1}{(1-t)^{n(1-t)}}\mu(X)^{(1-t)} \cdot \frac{1}{t^{nt}}\mu(Y)^t. \tag{7.14}$$

Дальше надо оптимизировать правую часть неравенства по параметру $t \in [0,1]$. Взяв логарифм правой части, получим

$$n(1-t)\ln(1-t) + (1-t)\ln\mu(X) + nt\ln t + t\ln\mu(Y).$$

Приравняв нулю производную этого выражения,

$$-n\ln(1-t) - \ln\mu(X) + n\ln t + \ln\mu(Y) = 0,$$

найдём оптимальное значение

$$t = \frac{\mu(Y)^{1/n}}{\mu(X)^{1/n} + \mu(Y)^{1/n}}.$$

Подставив $t$ в (7.14), но не до конца, получим

$$\mu(X+Y) \geqslant \frac{(\mu(X)^{1/n} + \mu(Y)^{1/n})^{n(1-t)}}{\mu(X)^{1-t}}\mu(X)^{(1-t)} \cdot \frac{(\mu(X)^{1/n} + \mu(Y)^{1/n})^{nt}}{\mu(Y)^t}\mu(Y)^t = \\ = (\mu(X)^{1/n} + \mu(Y)^{1/n})^n,$$

что эквивалентно неравенству Брунна–Минковского.

Теперь мы ещё усилим логарифмический вариант неравенства Брунна–Минковского и выпишем *функциональное неравенство Брунна–Минковского*:

$$\int_{\mathbb{R}^n} h\,dx \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx\right)^{1-t} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\,dx\right)^{t} \tag{7.15}$$

для неотрицательных измеримых $h, f, g$, удовлетворяющих условию

$$h((1-t)x+ty) \geqslant f(x)^{1-t}g(y)^t \tag{7.16}$$

при любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ и фиксированном $t \in [0,1]$. Для вывода логарифмического варианта из функционального достаточно взять в качестве $f, g, h$ характеристические функции $X, Y, X+Y$ соответственно.

Теперь мы будем доказывать функциональный вариант по индукции, начиная с одномерного случая. Если интеграл $f$ или $g$ нулевой, то доказывать нечего, иначе нормируем интегралы от $f$ и $g$ на единицу. Тогда правые части в (7.16) и (7.15) умножатся на одно и то же число, так что для сохранения верности обоих надо будет умножить $h$ на это же число.

В случае, если одна из функций $f$ или $g$ не ограничена, например, $g$, условие (7.16) оценивает $h$ снизу как сдвиг функции $f(x/(1-t))^{1-t}$, умноженный на произвольно большое число. Это оценивает интеграл $h$ как (положительный в силу строгой монотонности интеграла Лебега) интеграл этого сдвига, умноженный на произвольно большое число, то есть $\int_{\mathbb{R}^n} h\,dx = +\infty$ и требуемое неравенство верно.

Если $f$ и $g$ ограничены, то заменами функции $f$ на $kf(kx)$ и аналогично для $g$ (эти замены не меняют интеграл) можно добиться того, чтобы $\sup f = \sup g = M < +\infty$, при этом возможно число $t$ в доказываемом утверждении придётся поменять на другое. Теперь доказательство неравенства

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\,dx \geqslant 1$$

после введения множеств для $0 \leqslant y < M$

$$A_y = \{x \mid f(x) \geqslant y\}, \quad B_y = \{x \mid g(x) \geqslant y\}, \quad C_y = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \geqslant y\},$$

по теореме 5.125 сводится к проверке неравенства

$$\mu(C_y) \geqslant (1-t)\mu(A_y) + t\mu(B_y)$$

для всех для $0 \leqslant y < M$ (тогда эти множества непусты) и интегрированию его по $y$ до неравенства

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\,dx \geqslant (1-t)\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx + t\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = 1.$$

Условие (7.16) означает, в частности, включение $C_y \supseteq (1-t)A_y + tB_y$, то есть нам надо проверить одномерный вариант неравенства Брунна–Минковского. Одномерный вариант проверяется просто, по теореме 5.35 он сводится к случая компактных $A_y$ и $B_y$, после сдвига можно считать, что $\max A_y = 0 = \min B_y$, но тогда $C_y$ содержит пересекающиеся только в начале координат множества $(1-t)A_y$ и $tB_y$, что доказывает требуемое неравенство $\mu(C_y) \geqslant (1-t)\mu(A_y) + t\mu(B_y)$.

Сделаем теперь шаг индукции по размерности в функциональном неравенстве Брунна–Минковского. Введём функции на единицу меньшего количества переменных:

$$\begin{aligned}\bar{f}(x_1,\dots,x_{n-1}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)\,dx_n,\\ \bar{g}(x_1,\dots,x_{n-1}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)\,dx_n,\\ \bar{h}(x_1,\dots,x_{n-1}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)\,dx_n.\end{aligned}$$

Фиксируя $x_1,\dots,x_{n-1}$, $y_1,\dots,y_{n-1}$ рассмотрим функции переменной $u$

$$\begin{aligned}f_1(u) &= f(x_1,\dots,x_{n-1},u),\\ g_1(u) &= g(y_1,\dots,y_{n-1},u),\\ h_1(u) &= h((1-t)x_1+ty_1,\dots,(1-t)x_{n-1}+ty_{n-1},u).\end{aligned}$$

Условие (7.16) для исходных функций даёт выполнение того же условия для функций одной переменной $f_1, g_1, h_1$, а функциональное неравенство Брунна–Минковского для интегралов от $f_1, g_1, h_1$ можно переписать в виде

$$\bar{h}((1-t)x+ty) \geqslant \bar{f}(x)^{1-t}\bar{g}(y)^t.$$

Это условие (7.16) для $\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}$, которое по предположению индукции даёт неравенство (7.15) для них, которое есть то же самое, что неравенство (7.15) для $f, g, h$. ☐

*Задача* 7.225 (Логарифмическая вогнутость). Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ называется *логарифмически вогнутой*, если для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $0 < t < 1$ выполняется

$$f((1-t)x+ty) \geqslant f(x)^{1-t}f(y)^t.$$

Докажите, что если логарифмически вогнутую функцию $n$ переменных проинтегрировать по одной переменной, то получится логарифмически вогнутая функция $(n-1)$ переменной (или $+\infty$).

[[ Воспользуйтесь рассуждениями из доказательства функционального неравенства Брунна–Минковского. ]]

## 8. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

**8.1. Пространства $L_p$, неравенства Гёльдера и Минковского.** Для начала напомним некоторые сведения про интегрируемые по Лебегу функции и зафиксируем терминологию. Для некоторого измеримого множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ рассмотрим измеримые по Лебегу функции $f : X \to \mathbb{R}$ с конечным интегралом $\int_X |f(x)|\ dx$, будем назвать их *абсолютно интегрируемыми* на $X$. Для таких функций интеграл без модуля $\int_X f(x)\ dx$ тоже существует и является конечным. Расстояние между абсолютно интегрируемыми функциями удобно измерять как $\int_X |f(x) - g(x)|\ dx$, для любых двух абсолютно интегрируемых функций расстояние между ними конечно.

*Задача* 8.1. Докажите, что расстояние между двумя абсолютно интегрируемыми функциями конечно.

[[ Проинтегрируйте неравенство $|f(x) - g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)|$. ]]

Нам будет удобно считать интегрируемые функции, находящиеся в таком смысле на нулевом расстоянии друг от друга (то есть равные друг другу почти всюду по теореме 5.83), равными; то есть формально говоря, взять факторпространство линейного пространства абсолютно интегрируемых функций по его линейному подпространству почти всюду равных нулю функций. Это факторпространство обозначается как $L_1(X)$ и его *нормой* называется величина

$$\|f\|_1 = \int_X |f(x)|\ dx,$$

которая не зависит от того, какую конкретно функцию $f$ из её класса эквивалентности мы взяли.

*Задача* 8.2. Докажите, что норма в $L_1(X)$ не зависит от выбора класса эквивалентности.

[[ Примените неравенство треугольника $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$ или разбейте интеграл на два: по множеству, где функции отличаются и по множеству, где они не отличаются. ]]

Величина $\|f\|$ называется нормой на векторном пространстве $L_1(X)$, так как по определению $L_1(X)$ она обращается в нуль тогда и только тогда, когда $f = 0$ как элемент этого пространства. Если бы мы не брали факторпространство, а рассматривали бы абсолютно интегрируемые функции как есть, то эту величину следовало бы называть *полунормой*, допускающей равенство нулю на ненулевых элементах векторного пространства. Далее мы иногда будем говорить об элементах пространства $L_1(X)$ как о функциях, если это не приводит к неверным утверждениям. Более абстрактное изучение нормированных векторных пространств мы оставляем до раздела 9.1, а до тех пор будем изучать лишь конкретные примеры норм и полунорм.

Мы собираемся несколько обобщить понятие абсолютно интегрируемой функции. Для измеримого по Лебегу $X \subset \mathbb{R}^n$ и числа $p \geqslant 1$ пусть $L_p(X)$ — это пространство измеримых по Лебегу функций на $X$ с конечной полунормой

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p\ dx\right)^{1/p},$$

а точнее $L_p(X)$ — это факторпространство таких функций по модулю функций, равных нулю почти всюду. Опять-таки, мы иногда будем считать элементы $L_p(X)$ (как факторпространства) функциями, если это не приводит к недоразумениям.

Чтобы иметь право называть $\|f\|_p$ (полу)нормой, нам надо проверить некоторые свойства. Во-первых, очевидное свойство 1-однородности: $\|cf\|_p = |c|\|f\|_p$ для любой константы $c$. Другое свойство (полу)нормы — неравенство треугольника — не так очевидно при $p > 1$, и мы постепенно будем его устанавливать. Собственно, до доказательства неравенства треугольника (неравенство Минковского в теореме 8.8) мы не можем быть уверены в том, что $L_p$ является линейным пространством.

**Теорема 8.3** (Неравенство Гёльдера). *Возьмём $p, q > 1$ такие, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Пусть $f \in L_p(X)$ и $g \in L_q(X)$. Тогда*

$$\int_X |fg|\, dx \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

*Доказательство.* Если одна из норм справа равна нулю, то соответствующая функция равна нулю почти всюду и интеграл слева тоже равен нулю. Иначе мы можем домножить функции на константы так, чтобы оказалось $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$, обе части неравенства при этом домножатся на произведение констант. В этом случае мы можем получить искомое неравенство $\int_X |fg|\, dx \leqslant 1$, интегрируя неравенство

$$|f(x)g(x)| \leqslant \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q},$$

последнее неравенство для двух неотрицательных чисел $|f(x)|, |g(x)|$ остаётся в качестве упражнения. □

**Следствие 8.4.** *Для измеримых функций и чисел $p, q > 0$, таких что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, имеет место формула*

$$\|f\|_p = \sup \left\{ \int_X |fh|\, dx \;\middle|\; \|h\|_q \leqslant 1 \right\}, \tag{8.1}$$

*Доказательство.* Действительно, норма $f$ не менее супремума в правой части по неравенству Гёльдера, причём равенство достигается при выборе

$$h(x) = \frac{|f(x)|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}}.$$

□

Следующее определение обобщает понятие выпуклости функции, которое мы изучали для функции одной переменной, на функции нескольких переменных.

**Определение 8.5.** Функция $f : V \to \mathbb{R}$ на векторном пространстве называется *выпуклой*, если для любых $x, y \in V$ и любого $t \in (0, 1)$ имеет место неравенство

$$f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y).$$

Функция называется *строго выпуклой*, если неравенство строгое для всех $x \neq y$ и $t \in (0, 1)$.

Выпуклость можно определить не только для функции на всём векторном пространстве, но и для функции на его *выпуклом* подмножестве $C \subseteq V$, то есть на множестве $C$, которое вместе с любой парой точек $x, y \in C$ содержит и соединяющий их отрезок $\{(1-t)x + ty \mid t \in [0, 1]\}$.

Удобно также разрешить выпуклым функциям принимать значение $+\infty$, понимая их определение так, что при наличии бесконечного значения в правой части неравенства в определении ограничений на левую часть неравенства не возникает.

*Задача* 8.6. Проверьте, что если выпуклая функция принимает значение $+\infty$, то множество точек, на котором значения этой функции конечны, является выпуклым.

Докажем полезное утверждение про выпуклые функции.

**Лемма 8.7.** *Если в семействе функций $f_\alpha : V \to \mathbb{R}$, $\alpha \in A$, все функции выпуклые, то*

$$f(x) = \sup\{f_\alpha(x) \mid \alpha \in A\}$$

*тоже выпуклая, если разрешить в определении выпуклости значение $+\infty$.*

*Доказательство.* Утверждение следует из того, что супремум суммы не превосходит суммы супремумов. Заметим на будущее, что выпуклость функции нескольких переменных по определению означает выпуклость всех её ограничений на прямые, а значит утверждения типа этой леммы достаточно проверить для функций одной переменной, например, нарисовав для себя убедительный рисунок. ☐

Наконец, теперь мы можем установить неравенство треугольника в пространстве $L_p$, если расстояние понимать как $\rho(f,g) = \|f-g\|_p$.

**Теорема 8.8** (Неравенство Минковского). *Для функций $f, g \in L_p$ при $p \geqslant 1$*

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

*Доказательство.* При $p = 1$ это неравенство очевидно. В остальных случаях выражение

$$\int_X |fh|\, dx$$

из формулы (8.1) является выпуклой функцией измеримой $f$ при фиксированной $h \in L_q$ в силу неравенства

$$|((1-t)f + tg)h| \leqslant (1-t)|fh| + t|gh| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_X |((1-t)f + tg)h|\, dx \leqslant (1-t)\int_X |fh|\, dx + t\int_X |gh|\, dx.$$

Из формулы (8.1) следует, что норма $\|\cdot\|_p$ является выпуклой функцией на множестве измеримых функций, как супремум множества выпуклых функций. Причём по определению пространства $L_p$ эта норма принимает конечные значения именно на пространстве $L_p$, иначе она принимает значение $+\infty$.

Отсюда следует, что $L_p$ является выпуклым подмножеством пространства измеримых функций, а в силу однородности нормы — линейным подпространством пространства измеримых функций. Кроме того, если $f, g \in L_p$, то

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p \leqslant \frac{1}{2}\left(\|f\|_p + \|g\|_p\right).$$

С помощью 1-однородности нормы мы можем вынести множитель $1/2$ и получить неравенство из формулировки теоремы. ☐

Таким образом мы корректно определили норму в пространстве $L_p(X)$ при $p \geqslant 1$. Можно проверить, что при $p < 1$ неравенство треугольника (Минковского) просто неверно.

На следующих задачах читатель может проработать своё понимание понятия выпуклой функции.

*Задача* 8.9. Сформулируйте достаточное условие выпуклости дважды непрерывно дифференцируемой функции нескольких переменных.

[[ Вспомните про ограничение функции на прямые. ]]

*Задача* 8.10. Пусть $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — возрастающая выпуклая функция. Докажите, что функция $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, заданная формулой $f_n(x) = f(|x|)$, тоже выпуклая.

[[ Начните с выпуклости функции $|x|$ на $\mathbb{R}^n$. ]]

*Задача* 8.11 (Неравенство Йенсена для конечных сумм). Докажите, что если функция $f : V \to \mathbb{R}$ выпуклая, то для любого набора $v_1, \dots, v_N \in V$ и неотрицательных коэффициентов $t_1, \dots, t_N$, таких что $t_1 + t_2 + \dots + t_N = 1$, выполняется

$$f(t_1v_1 + \dots + t_Nv_N) \leqslant t_1f(v_1) + \dots + t_Nf(v_N).$$

[[ Используйте индукцию по $N$. ]]

*Задача* 8.12. Положительная функция на выпуклом множестве $C$ называется *логарифмически выпуклой*, если её логарифм выпуклый, то есть

$$f((1-t)x + ty) \leqslant f(x)^{1-t} \cdot f(y)^t$$

при любых $x, y \in C$, $t \in (0, 1)$. Докажите, что сумма логарифмически выпуклых функций логарифмически выпукла и что по сути это утверждение эквивалентно неравенству Гёльдера.

[[ Заметьте, что достаточно рассматривать функции одной переменной на промежутке. Проверьте, что функция логарифмически выпукла тогда и только тогда, когда она является супремумом семейства функций вида $ab^x$. Для сумм функций такого вида неравенство логарифмической выпуклости является неравенством Гёльдера. ]]

*Задача* 8.13. Докажите, что функция $\operatorname{tr} e^A$ логарифмически выпукла на множестве симметричных линейных операторов $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

[[ Можно заметить, что при прибавлении к $A$ скалярного оператора $\lambda I_n$ рассматриваемая функция умножается на константу. Это позволяет свести вопрос к положительно определённым $A$, после этого логарифмическую выпуклость можно проверять на прямой $(1-t)A + tB$ с положительно определёнными $A$ и $B$, приведя их одновременно к диагональному виду. ]]

8.2. **Полнота пространств $L_p$.** Векторное пространство с нормой $\|\cdot\|$ (сейчас мы рассматриваем нормы на конкретных примерах, а абстрактное определение будет дано в разделе 9.1) всегда является метрическим пространством с расстоянием $\rho(x, y) = \|x-y\|$ и мы можем использовать соответствующую терминологию. В частности мы хотим доказать, что пространство $L_p(X)$ *полное*, то есть любая фундаментальная последовательность в нём имеет предел. Заметим, что единственность предела обеспечивается факторизацией пространства $L_p(X)$ по почти всюду нулевым функциям и следующей из этого невырожденностью метрики.

**Лемма 8.14.** *Пусть у последовательности функций $(u_k)$ из $L_p(X)$ сумма*

$$\Sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_p$$

*оказалась конечной. Тогда $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ определена для почти всех $x$ и*

$$\|S\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_p.$$

*Доказательство.* Определим возрастающую последовательность неотрицательных функций по формуле

$$\rho_N(x) = \left( \sum_{k=1}^{N} |u_k(x)| \right)^p.$$

По неравенству Минковского (возведённому в степень $p$)

$$\int_X \rho_N(x)\,dx \leqslant \left(\sum_{k=1}^N \|u_k\|_p\right)^p \leqslant \Sigma^p,$$

а по теореме о монотонной сходимости функция

$$\rho(x) = \lim_{N\to\infty} \rho_N(x)$$

почти всюду конечна и имеет конечный интеграл. Это означает, что ряд $\sum_{k=1}^\infty u_k(x)$ почти всюду абсолютно сходится к некоторой функции $S(x)$.

Кроме того, последовательность $\sigma_N(x) = \left|\sum_{k=1}^N u_k(x)\right|^p$ почти всюду сходится к $|S(x)|^p$ и ограничена функцией $\rho(x)$. По теореме об ограниченной сходимости интегралы от $\sigma_N$ стремятся к интегралу от $|S|^p$, что можно переписать как

$$\left\|\sum_{k=1}^N u_k(x)\right\|_p^p \to \|S\|_p^p.$$

Тогда неравенство

$$\|S\|_p \leqslant \sum_{k=1}^\infty \|u_k\|_p$$

получается из неравенства Минковского предельным переходом. ☐

**Лемма 8.15.** *Пусть у последовательности функций $(u_k)$ из $L_p(X)$ сумма*

$$\Sigma = \sum_{k=1}^\infty \|u_k\|_p$$

*оказалась конечной. Тогда $S(x) = \sum_{k=1}^\infty u_k(x)$ определена для почти всех $x$ и*

$$S = \sum_{k=1}^\infty u_k$$

*в смысле сходимости в пространстве $L_p(X)$.*

*Доказательство.* Применим предыдущую лемму к остатку суммы $r_N(x) = \sum_{k=N+1}^\infty u_k(x)$. Тогда мы имеем сходимость остатка почти всюду и имеем неравенство

$$\|r_N\|_p \leqslant \sum_{k=N+1}^\infty \|u_k\|_p \to 0, \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Оно означает, что последовательность частичных сумм сходится к $S$ в смысле сходимости пространства $L_p(X)$. ☐

**Теорема 8.16.** *Пространство $L_p(X)$ полно.*

*Доказательство.* Рассмотрим фундаментальную последовательность $(f_k)$ в $L_p(X)$. Как в доказательстве теоремы 1.125, достаточно доказать сходимость какой-то её подпоследовательности. Можно выбрать подпоследовательность так, чтобы после перехода к подпоследовательности выполнялось неравенство $\|f_k - f_\ell\|_p \leqslant 2^{-k-1}$ при всех $\ell > k$.

Положим $u_1 = f_1, u_k = f_k - f_{k-1}$ для $k \geqslant 2$. Вопрос сводится к изучению суммы ряда $\sum_{k=1}^\infty u_k(x)$. Нам известно, что $\|u_k\|_p \leqslant 2^{-k}$. Предыдущие леммы показывают, что сумма ряда почти всюду сходится к функции $S \in L_p(X)$, а последовательность $(f_k)$ сходится к $S$ по норме $L_p(X)$, то есть $\|f_k - S\|_p \to 0$ при $k \to \infty$. ☐

Фактически в предыдущих рассуждениях мы использовали такое общее наблюдение: в нормированном пространстве вопрос полноты сводится к вопросу сходимости рядов, у которых сходятся суммы норм.

*Задача* 8.17. Покажите на примере, что сходимость в $L_p(X)$ может не означать поточечной сходимости ни в одной точке.

[[ Рассмотрите последовательность ступенек высоты 1, у которых мера основания стремится к нулю, но при этом ступеньки бесконечно много раз пробегают по множеству $X$. ]]

Заметим, что определение пространств $L_p(X)$ легко распространяется на случай, когда на некоторой сигма-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств фиксированного множества $X$ задана счётно аддитивная мера и мы рассматриваем *измеримые относительно сигма-алгебры* $\mathcal{A}$ функции $f$, то есть функции, для которых $\{f(x) \leqslant c\} \in \mathcal{A}$ при любом $c$. *Сигма-алгебра* — это семейство подмножеств, включающее пустое множество, замкнутое относительно взятия дополнения и не более чем счётных объединений и пересечений. Такие абстрактные пространства с сигма-алгеброй и с мерой на сигма-алгебре важны для теории вероятностей, в теории вероятностей также используется условие нормировки $\mu(X) = 1$, при выполнении которого мера называется *вероятностной*.

В качестве важного частного случая общей конструкции рассмотрим $\mathbb{N}$ со считающей мерой, ставящей в соответствие подмножеству $X \subset \mathbb{N}$ количество его элементов. В этой мере измеримы все подмножества $\mathbb{N}$ и она счётно-аддитивна (проверьте это). Пространства $L_p(\mathbb{N})$ обычно обозначаются более коротко как $\ell_p$. Говоря более простым языком, $\ell_p$ — это пространство числовых последовательностей $(c_k)$, у которых норма, определённая как

$$\|(c_k)\|_p = \left(\sum_k |c_k|^p\right)^{1/p},$$

конечна. Для последовательностей точно так же доказываются неравенства Гёльдера и Минковского, и вообще пространства $\ell_p$ мы далее рассматриваем как частный случай пространств $L_p(X)$.

8.3. **Приближения функций в $L_p$ ступенчатыми и бесконечно гладкими.** Мы хотим приблизить функцию из $L_p(\mathbb{R}^n)$ в смысле нормы $L_p$ достаточно приличными функциями. На этот раз мы рассмотрим функции с конечным числом ступенек, в основании которых лежат элементарные множества, назовём их *элементарно ступенчатые*. В случае функции одного аргумента из $L_p(\mathbb{R})$ это будут функции, которые являются ступенчатыми на некотором разбиении $\mathbb{R}$ на конечное число промежутков, как в определении сумм Дарбу и интеграла Римана.

**Теорема 8.18.** *Любую функцию $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить элементарно ступенчатой.*

*Доказательство.* Для комплекснозначной функции достаточно отдельно приближать действительную и мнимую часть, поэтому далее считаем $f$ принимающей действительные значения.

Сначала можно приблизить любую функцию $f$ функцией $f_M$, обрезанной по значениям некоторой константой $M$. Точнее, чтобы получить приближение в норме $L_p$, нам надо обрезать функцию $|f|^p$ константой $M^p$ с помощью теоремы 5.88, мало меняя интеграл $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx$, тогда интеграл от разности между $f$ и её обрезанным вариантом $f_M$ оценивается исходя из интегрирования неравенств

$$|f(x) - M|^p \leqslant |f(x)|^p - M^p, \quad \text{при} \quad f(x) > M$$

и

$$|f(x) + M|^p \leqslant |f(x)|^p - M^p, \quad \text{при} \quad f(x) < -M,$$

которые следуют из выпуклости функции $|x|^p$. Выполнение неравенства

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|f|^p - |f_M|^p)\, dx < \varepsilon^p$$

тогда влечёт неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f - f_M|^p\, dx < \varepsilon^p.$$

Теперь мы переходим к ограниченной функции $g = f_M$ и пытаемся приблизить её. Теорема 5.92 показывает, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p\, dx = \lim_{a\to+\infty} \int_{[-a,a]^n} |g(x)|^p\, dx,$$

поэтому обнулив $g$ за пределами некоторого достаточно большого куба $Q = [-a, a]^n$, мы приблизим её в норме $L_p$ с точностью $\varepsilon$ функцией $h$, которая ограничена числом $M$ и имеет носитель в кубе $Q$. Так как $h$ ещё и измерима по Лебегу, то она оказывается просто интегрируемой, то есть лежит в $L_1(\mathbb{R}^n)$.

Теперь приблизим $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$ по теореме 5.87 элементарно ступенчатой функцией $s$ в норме $L_1$. Заметим, что значения функции $s$ также можно обрезать по отрезку $[-M, M]$, интеграл $\int_{\mathbb{R}^n} |h - s|\, dx$ при этом не увеличится, так как нигде не увеличится выражение под интегралом.

Пусть мы подобрали элементарно ступенчатую $s$ так, что выполняется

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x) - s(x)|\, dx < \varepsilon'.$$

Тогда, имея в виду $|h(x) - s(x)|^p = |h(x) - s(x)|^{p-1} \cdot |h(x) - s(x)|$, можно записать

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x) - s(x)|^p\, dx \leqslant (2M)^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |h(x) - s(x)|\, dx < (2M)^{p-1}\varepsilon'.$$

Так как $\varepsilon'$ мы выбирали после $M$, то в правой части мы можем получить снова $\varepsilon$. В итоге, по неравенству Минковского,

$$\|f - s\|_p < \|f - g\|_p + \|g - h\|_p + \|h - s\|_p < 3\varepsilon,$$

про подходящем, зависящем от $\varepsilon$, выборе $s$, что нам и требовалось. ☐

**Теорема 8.19.** *Любую функцию $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить бесконечно дифференцируемой функцией с компактным носителем.*

*Доказательство.* Надо воспользоваться предыдущей теоремой и потом приблизить каждую ступеньку над элементарным множеством. Точнее, достаточно приблизить в норме $L_p$ ступеньку над параллелепипедом $P$, то есть приблизить характеристическую функцию $\chi_P$ в данной норме бесконечно гладкой функцией. Нетрудно построить (начав с одномерного случая, а потом перемножив такие функции от разных координат) бесконечно гладкую функцию $g$, которая равна $1$ на $P$, равна нулю за пределами $\varepsilon$-окрестности $U_\varepsilon(P)$ и вообще принимает значения в $[0, 1]$. Тогда очевидно ($U_\varepsilon$ обозначает $\varepsilon$-окрестность)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_P(x) - g(x)|^p\, dx \leqslant \mu U_\varepsilon(P) - \mu P,$$

что стремится к нулю при $\varepsilon \to +0$. ☐

*Задача* 8.20. Докажите, что если измеримое множество $X \subset \mathbb{R}^n$ ограничено, то любую $f \in L_p(X)$ можно сколь угодно близко по норме $\| \cdot \|_p$ приблизить ограниченным на $X$ многочленом.

[[ Используйте теорему Стоуна–Вейерштрасса. ]]

*Задача* 8.21 (Непрерывность сдвига в пространстве $L_p$). Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Докажите, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)|^p \, dx \to 0 \text{ при } |t| \to 0.$$

[[ Сначала докажите утверждение для непрерывной функции с компактным носителем, используя её равномерную непрерывность. Потом приблизьте произвольную функцию $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ непрерывной с компактным носителем и воспользуйтесь неравенством Минковского. ]]

8.4. **Ограниченная вариация.** Нам нужно ввести некоторые классы функций одной переменной, с которыми будет удобно работать при рассмотрении рядов и интегралов Фурье.

**Определение 8.22.** Функция $f$ на промежутке $I$ имеет *ограниченную вариацию*, если для любых $x_0 < x_1 < \dots < x_N \in I$ (в любом количестве)

$$|f(x_0) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \dots + |f(x_{N-1}) - f(x_N)| \leqslant M,$$

для некоторой константы $M$. Наименьшую константу $M$ в этом неравенстве назовём *вариацией функции* $f$, $\|f\|_B$.

Можно проверить, что величина $\|f\|_B$ является *полунормой* («полу» здесь существенно, так как у постоянной функции вариация нулевая). Внимательный читатель может заметить, что вариация — это на самом деле длина кривой в одномерном варианте, в частности кривая в $\mathbb{R}^n$ спрямляема тогда и только тогда, когда все её координаты имеют ограниченную вариацию. Заметим также, что в отличие от случая кривых мы не требуем от функции ограниченной вариации непрерывности, последствия этого обсуждались в задаче 3.125.

Для монотонной на отрезке функции вариация равна модулю её приращения на отрезке (проверьте это), а в общем случае ограниченность вариации можно свести к монотонности следующей теоремой:

**Лемма 8.23.** *Функцию ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$ можно представить в виде суммы двух функций $f = u + d$, одна из которых возрастает, а другая убывает. При этом $\|f\|_B = \|u\|_B + \|d\|_B$ и если $f$ была непрерывна, то $u$ и $d$ тоже будут непрерывны.*

В этом утверждении $[a, b]$ можно взять равным равным $[-\infty, +\infty]$, так как функция ограниченной вариации, по критерию Коши, обязательно имеет пределы в $-\infty$ и в $+\infty$.

*Доказательство.* Будем считать $f(a) = 0$, этого можно добиться прибавлением константы к функции, что не влияет на утверждения леммы. Для фиксированного $x \in [a, b]$ изучим вариацию $f$ на отрезке $[a, x]$. Любой набор точек в определении вариации можно продолжить до набора, содержащего концы отрезка, сумма модулей приращений при этом не уменьшится, поэтому можно считать, что в определении вариации участвуют только наборы чисел, содержащие концы отрезка. Тогда рассмотрим всевозможные наборы

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = x$$

и определим *вариацию вверх* на этом отрезке $u(x)$ как точную верхнюю грань сумм тех приращений $f(x_k) - f(x_{k-1})$, которые положительны. Определим *вариацию вниз* на этом отрезке $d(x)$ как точную нижнюю грань сумм тех приращений $f(x_k) - f(x_{k-1})$, которые отрицательны. Любой набор приращений $f$ (без модулей) в сумме даёт $f(x)$ и его можно разбить на две части, одна из которых участвует в определении $u(x)$, а другая — в определении $d(x)$. Из этого получается, что

$$f(x) = u(x) + d(x), \quad \|f|_{[a,x]}\|_B = u(x) - d(x).$$

Также очевидно по определению, что $u(x)$ возрастает, $d(x)$ убывает, $u(a) = d(a) = 0$. Так как вариация монотонной функции равна модулю её приращения и $f(a) = 0$, то выполняется $\|f\|_B = \|u\|_B + \|d\|_B$.

Докажем непрерывность $u$ и $d$, предположив, что $f$ непрерывна. Функции $u$ и $-d$ в любом случае не убывают и для доказательства их непрерывности нам надо доказать, что у них нет скачков. Их сумма $u(x) - d(x)$ равна вариации $f$ на отрезке $[a, x]$, и нам тогда достаточно доказать, что у неё, как у неубывающей функции от $x$, нет скачков. Для завершения доказательства достаточно заметить, что требуемое утверждение является частным случаем теоремы 3.123, так как одномерная длина кривой и есть вариация. ☐

*Задача* 8.24. Докажите, что если функция ограниченной вариации непрерывна в точке $x_0$ (а в других точках необязательно непрерывна), то функции $u$ и $d$ из приведённого выше доказательства тоже непрерывны в точке $x_0$.

[[ Посмотрите внимательно на доказательство теоремы 3.123. ]]

*Задача* 8.25. Докажите, что если функция имеет ограниченную вариацию на интервале $(a, b)$, то она имеет конечные пределы $f(a+0)$ и $f(b-0)$, и после доопределения на концах интервала по непрерывности будет иметь ту же вариацию на $[a, b]$.

[[ Используйте критерий Коши. ]]

*Задача* 8.26. Докажите, что если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию на всей прямой, то для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)|\, dx \leqslant \|f\|_B \cdot |t|.$$

[[ Сведите задачу к случаю монотонной функции, обобщив рассуждения из доказательства леммы 8.23 с отрезка на прямую. ]]

*Задача* 8.27. Докажите, что если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ является равномерным пределом последовательности функций $(f_n)$, то $\|f\|_B \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|f_n\|_B$. Приведите пример, когда неравенство строгое.

[[ Используйте определение вариации для доказательства неравенства. Для построения примера строгого неравества используйте приближение слабо колеблющейся функции сильно колеблющимися. ]]

Функции ограниченной вариации хороши тем, что допускают оценку интеграла своего произведения с другой функцией. Это основывается на оценке интеграла произведения монотонной функции и интегрируемой по второй теореме о среднем 5.108, напомним соответствующую формулу (в которой $g$ монотонна):

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = g(a+0)\int_a^{\vartheta} f(x)\, dx + g(b-0)\int_{\vartheta}^b f(x)\, dx.$$

С учётом леммы 8.23, для любой, не обязательно монотонной, функции ограниченной вариации $g$ из второй теоремы о среднем следует оценка

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\, dx\right| \leqslant (|g(a+0)| + \|g\|_B) \cdot \sup\left\{\left|\int_{\vartheta}^b f(x)\, dx\right| \;\middle|\; \vartheta \in [a, b]\right\}.$$

*Задача* 8.28. Докажите предыдущую формулу для оценки интеграла $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

[[ Вычтите из $g$ значение $g(a+0)$, оставшееся разложите на возрастающую и убывающую части. ]]

8.5. **Абсолютная непрерывность, обобщённая формула Ньютона–Лейбница и обобщённое интегрирование по частям.** В этом разделе мы ещё раз вернёмся к формуле Ньютона–Лейбница, в виде выражения приращения функции на отрезке как интеграла от её производной. Теорема 5.144 говорит, что эта формула верна, если сама функция $F$ является интегралом с переменным верхним пределом от некоторой интегрируемой по Лебегу функции $f$, тогда почти всюду $F' = f$. Но такое утверждение слишком неявно и не позволяет понять, верна или нет формула для данной функции $F$. Более явное утверждение содержится в теореме 5.146, которая говорит, что формула работает для липшицевой функции $F$. Оказывается, условие липшицевости можно ослабить до следующего:

**Определение 8.29.** Функция $F$ на промежутке $I$ *абсолютно непрерывна*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что любых $x_1 \leqslant y_1 \leqslant x_2 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant x_N \leqslant y_N \in I$ из неравенства

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_N - y_N| \leqslant \delta$$

следует

$$|F(x_1) - F(y_1)| + |F(x_2) - F(y_2)| + \dots + |F(x_N) - F(y_N)| \leqslant \varepsilon.$$

Говоря неформально, сумма модулей приращений функции на системе непересекающихся отрезков должна стремиться к нулю при суммарной длине системы, стремящейся к нулю.

*Задача* 8.30. Докажите, что абсолютно непрерывная на отрезке функция имеет на нём ограниченную вариацию.

[[ Проверьте, что на любом отрезке длины $\delta$ вариация функции будет не более $\varepsilon$ ($\delta$ и $\varepsilon$ взяты из определения), потом вспомните про аддитивность вариации (лемма 3.119). ]]

Далее мы ограничимся функциями на конечных отрезках и установим необходимые и достаточные условия абсолютной непрерывности в этом случае.

**Теорема 8.31.** *Любая обобщённая первообразная*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

*для некоторой $f \in L_1[a,b]$, является абсолютно непрерывной и её производная почти всюду существует и совпадает с $f$.*

*Доказательство.* Из теоремы 5.144 следует, что производная $F$ почти всюду равна $f$. Докажем абсолютную непрерывность $F$. По теореме 5.88 приблизим $f$ ограниченной $g$, так что $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. Пусть $|g(x)| \leqslant M$. Если у нас есть объединение конечного набора отрезков $S$ суммарной длины $< \delta$, то мы имеем

$$\int_S |g(x)|\,dx \leqslant M\delta,\ \int_S |f(x) - g(x)|\ < \varepsilon \Rightarrow \int_S |f(x)|\,dx \leqslant M\delta + \varepsilon.$$

Выбирая $\delta < \varepsilon/M$ (выбор не зависит от $S$), получаем

$$\int_S |f(x)|\,dx \leqslant 2\varepsilon.$$

но это означает, что сумма приращений $F$ на отрезках множества $S$ не более $2\varepsilon$ при условии $\mu S < \delta$, что и означает абсолютную непрерывность по определению. □

**Лемма 8.32.** *Абсолютно непрерывная на отрезке функция раскладывается в сумму двух монотонных абсолютно непрерывных функций.*

*Доказательство.* Для данной абсолютно непрерывной $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ возьмём разложение $f = u + d$ из леммы 8.23. В процессе доказательства было установлено разложение вариации в сумму возрастающих функций

$$u(x) + (-d(x)) = \|f|_{[a,x]}\|_B.$$

Поэтому для доказательства абсолютной непрерывности $u$ и $d$ нам достаточно доказать абсолютную непрерывность возрастающей функции $v(x) = \|f|_{[a,x]}\|_B$, так как сумма приращений $u$ или $d$ на некоторой системе отрезков не более суммы приращений $v$ на той же системе отрезков.

Предположив противное абсолютной непрерывности $v$, мы находим такое $\varepsilon > 0$, что существуют наборы попарно не пересекающихся отрезков $[x_1, y_1], \dots, [x_N, y_N]$ сколь угодно малой суммарной длины, такие что сумма приращений $v$ на этих отрезках не менее $\varepsilon$. По аддитивности вариации (лемма 3.119) приращение записывается как

$$v(y_i) - v(x_i) = \|f|_{[x_i,y_i]}\|.$$

По определению правой части это, в частности, означает существование попарно не пересекающихся отрезков

$$[x_{i1}, y_{i1}], \dots, [x_{iN_i}, y_{iN_i}] \subset [x_i, y_i],$$

таких что

$$|f(x_{i1}) - f(y_{i1})| + \dots + |f(x_{iN_i}) - f(y_{iN_i})| \geqslant \frac{1}{2}(v(y_i) - v(x_i)).$$

Суммируя такие неравенства по всем $i = 1, \dots, N$, мы получим, что сумма модулей приращений $f$ на попарно не пересекающихся отрезках $[x_{ij}, y_{ij}]$ не менее $\varepsilon/2$. Суммарная длина этих отрезков не более суммарной длины отрезков $[x_i, y_i]$ и по нашему предположению может быть произвольно мала, что противоречит абсолютной непрерывности $f$. ☐

**Теорема 8.33.** *Абсолютно непрерывная функция $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ почти всюду имеет производную и является обобщённой первообразной своей производной с выполнением формулы Ньютона–Лейбница*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\, dt.$$

*Доказательство.* По лемме 8.32 можно считать $F$ возрастающей. Рассмотрим верхнюю правую производную $F$, обозначим её $\varphi(x)$. В силу непрерывности $F$ в определяющем $\varphi$ верхнем пределе

$$\varphi(x) = \overline{\lim_{t\to+0}} \frac{F(x+t) - F(x)}{t}$$

можно рассматривать только рациональные $t$, тогда с помощью задачи 5.142 устанавливается измеримость $\varphi$ (как функции, которая на некотором измеримом множестве может принимать значения $+\infty$). Если $\varphi$ имеет конечный интеграл, то рассуждения аналогичны доказательству теоремы 5.146, но мы для удобства читателя приведём их полностью. По теореме 5.144 функция

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)\, dt$$

почти всюду имеет производную, равную $\varphi(x)$. По теореме 8.31 функция $\Phi$ абсолютно непрерывна.

Посмотрим теперь на разность $G(x) = F(x) - \Phi(x)$, она почти всюду имеет верхнюю правую производную, равную нулю, и абсолютно непрерывна как разность абсолютно непрерывных функций. Докажем, что $G(b) \geqslant G(a)$. Предположим противное тому: $G(b) < G(a)$. Положим $H(x) = G(x) + 2\varepsilon x$, при выборе достаточно малого $\varepsilon > 0$ мы оставим в силе неравенство

$$H(b) < H(a) - \varepsilon, \tag{8.2}$$

а верхняя правая производная $H$ почти всюду будет больше $\varepsilon$, пусть последнее выполняется на множестве $X \subseteq [a, b]$, $\mu(X) = \mu[a, b]$. Функция $H$ абсолютно непрерывна как сумма абсолютно непрерывных функций. Будем считать, что концы отрезка не входят в $X$. По определению верхней правой производной, для любого $x \in X$ найдётся произвольно маленькое $t$, такое что

$$H(x + t) - H(x) > \varepsilon t.$$

Тогда по непрерывности можно найти достаточно маленькое $t' < t$, так что будет выполняться

$$H(x + t) - H(x - t') > 0.$$

По лемме Безиковича покроем такими попарно не пересекающимися отрезками $[x - t', x + t]$ почти всё $X$, а значит и весь отрезок $[a, b]$ кроме множества меры нуль. Оставим лишь конечное число попарно не пересекающихся отрезков $[x - t', x + t]$ из этого покрытия так, чтобы суммарная длина дополнительных к их объединению промежутков отрезка $[a, b]$ была менее $\delta$ из определения абсолютной непрерывности функции $H$. Тогда на оставленных отрезках $H$ имеет положительное приращение по их выбору, а на дополнительных интервалах она из-за абсолютной непрерывности убывает менее чем на $\varepsilon$ в сумме. Но это противоречит предположению (8.2).

Осталось рассмотреть случай, которого не было в теореме 5.146. Если интеграл от $\varphi$ оказался бесконечен, то обрежем функцию $\varphi$ значением $M > 0$ до $\varphi_M$, определим $\Phi_M$ как интеграл от обрезанной $\varphi_M$. Для функции $G = F - \Phi_M$, у которой верхняя правая производная почти всюду неотрицательна, мы тем же способом докажем, что её приращение на отрезке неотрицательно. В силу произвольности $M > 0$ и стремления к бесконечности приращения $\Phi_M$ на отрезке (из-за бесконечности интеграла $\varphi$), отсюда последует, что приращение $F$ на отрезке бесконечно, то есть такого случая на самом деле быть не может.

Из доказанного неравенства $G(b) \geqslant G(a)$ следует, что приращение $F(b) - F(a)$ не менее интеграла правой верхней производной $F$. Аналогично доказывается, что приращение $F$ не более интеграла от её правой нижней производной. Следовательно, правая нижняя и правая верхняя производные $F$ совпадают почти всюду и приращение $F(b) - F(a)$ равно интегралу любой из них. Меняя $b$ на $x$ в этом рассуждении, мы найдём, что

$$F(x) = F(a) + \Phi(x) = F(a) + \int_a^x \varphi(t)\, dt$$

для любого $x \in [a, b]$. После этого теорема 5.144 показывает, что $F$ на самом деле почти всюду дифференцируема и её производная почти всюду равна $\varphi$. □

Таким образом мы получили достаточно полное описание ситуаций, в которых верна формула Ньютона–Лейбница. Далее мы можем понять, в каких ситуациях верна формула интегрирования по частям:

**Следствие 8.34.** *Если $f \in L_1[a, b]$, а $g$ абсолютно непрерывна, то верна формула интегрирования по частям*

$$\int_a^b fg\,dx = F(x)g(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx,$$

*где $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.*

*Доказательство.* Действительно, производная $g'$ при этих условиях существует почти всюду, функция $F$ абсолютно непрерывна по теореме 8.31. Тогда функция $Fg$ тоже абсолютно непрерывна на отрезке $[a, b]$, это легко вывести из формулы

$$F(y)g(y) - F(x)g(x) = (F(y) - F(x))g(y) + (g(y) - g(x))F(x),$$

учитывая абсолютную непрерывность и ограниченность обеих функций на отрезке. Производная $Fg$ почти всюду равна $fg + Fg'$, к её приращению применима формула Ньютона–Лейбница, перенося слагаемые в ней, мы получим формулу интегрирования по частям. ☐

*Задача* 8.35. Докажите, что функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна тогда и только тогда, когда она может быть сколь угодно близко в $B$-норме приближена кусочно-линейными функциями.

[[ Переформулируйте это в терминах производных. ]]

*Задача* 8.36. * Докажите, что если определённая на отрезке непрерывная функция $f$ почти всюду имеет неотрицательную производную, а в оставшемся множестве меры нуль имеет конечную нижнюю производную, то она возрастает.

[[ Действуя аналогично доказательству теоремы 5.146 с помощью леммы Безиковича, для любого натурального $n$ на любом отрезке $[a, b]$, на котором $f(b) < f(a)$, найдите подотрезок $[c, d] \subseteq [a, b]$, такой что $f(d) - f(c) < -n(d - c)$. Предположив отсутствие возрастания $f$, сконструируйте последовательность вложенных отрезков $[c_n, d_n]$ с растущими числами $n$ в предыдущем неравенстве. Покажите, что тогда в общей точке этих отрезков нижняя производная функции $f$ равна $-\infty$. ]]

*Задача* 8.37. * Докажите, что если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ имеет производную в каждой точке (в обычном смысле) и $f' \in L_1[a, b]$, то $f$ абсолютно непрерывна и выполняется формула Ньютона–Лейбница $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$.

[[ Достаточно доказать неравенство $f(b) - f(a) \geqslant \int_a^b f'(x)\,dx$ и применить его к $-f(x)$ тоже. Для этого можно функцию $g(x) = f'(x)$ обрезать сверху по числу $M$, получив $g_M$, доказать неравенство $f(b) - f(a) \geqslant \int_a^b g_M(x)\,dx$, и перейти к пределу $M \to +\infty$ по теореме о монотонной сходимости. Для доказательства последнего неравенства попробуйте применить результат предыдущей задачи к функции $f(x) - \int_a^x g_M(t)\,dt$. ]]

8.6. **Борелевские меры на отрезках, интеграл Лебега–Стилтьеса.** Приведём конструкцию, которая даёт понимание структуры *конечной борелевской меры* на отрезке, то есть счётно аддитивной меры, определённой и конечной на всех борелевских подмножествах отрезка.

Рассмотрим для начала возрастающую и ограниченную функцию $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ и определим меры промежутков как

$$\mu_g[x, y] = g(y + 0) - g(x - 0),\ \mu_g(x, y) = g(y - 0) - g(x + 0),$$
$$\mu_g[x, y) = g(y - 0) - g(x - 0),\ \mu_g(x, y] = g(y + 0) - g(x + 0).$$

Такое определение продолжается до всевозможных элементарных множеств, состоящих из конечного числа промежутков на $[a, b]$. Заметим, что в отличие от стандартной меры Лебега, эта мера может давать ненулевое значение множеству, состоящему из одной точки, если $g$ в этой точке имеет скачок. Но при этом определение меры не зависит от значений $g$ в точках разрыва, а зависит лишь от значения скачка.

*Задача* 8.38. Проверьте, что определение меры $\mu_g$ с промежутков корректно распространяется до конечно-аддитивной меры на всех элементарных подмножествах отрезка.

[[ Проверьте, что происходит с этой мерой при разбиении одного промежутка на несколько. ]]

Аналогично мере Лебега, определяется внешняя мера через счётные покрытия элементарными множествами, для внешней меры доказывается счётная субаддитивность. Мера элементарных множеств с помощью приближений по внешней мере продолжается на некоторый класс подмножеств отрезка, замкнутый относительно конечных объединений, пересечений и разности, и относительно взятия счётных объединений. Так как этот класс множеств содержит промежутки, то он содержит и открытые множества. Следовательно, он содержит и борелевские множества.

Обратно, если у нас есть борелевская мера $\nu$ на отрезке, то мы можем определить *функцию распределения* этой меры как

$$g(x) = \nu[a, x)$$

и заметить, что мера $\nu$ восстанавливается из функции $g$ по описанной выше процедуре. Изменение функции на константу не меняет меру, также нам не важно, какое именно значение функция распределения принимает в точке разрыва, важны лишь её левый и правый пределы.

Обратите внимание, что понятие измеримости подмножества отрезка относительно стандартной меры Лебега и введённой меры $\mu_g$ могут отличаться. Например в стандартной мере Лебега канторово множество $K \subset [0, 1]$ (состоящее из чисел, которые в троичной записи можно записать цифрами 0 и 2) имеет меру нуль и любое его подмножество имеет меру нуль. Однако, описав $K$ как множество чисел из цифр $0, 2$ и заменив 2 на 1 и считая число представленным уже в двоичной системе счисления, мы получим отображение $f : K \to [0, 1]$, которое биективно кроме счётного множества исключений. Тогда стандартная мера на отрезке даст нам с помощью $f$ единичную меру на $K$. Рассматривая теперь $K$ как подмножество отрезка $[0, 1]$, мы продолжим эту меру нулём на $[0, 1] \setminus K$. А так как на отрезке есть множества, неизмеримые относительно стандартной меры Лебега, то и относительно этой меры не все подмножества канторова множества будут измеримы.

*Задача* 8.39. Докажите, что описанной мере, сосредоточенной на канторовом множестве, соответствует функция распределения, решающая задачу 5.147.

Далее, аналогично стандартному интегралу Лебега, определяется *интеграл Лебега–Стилтьеса*

$$\int_a^b f(x)d\mu_g = \int_a^b f(x)dg(x),$$

в определении которого мера Лебега будет заменена на меру $\mu_g$. Функция $f$ при этом должна быть измерима относительно меры $\mu_g$ (достаточно, чтобы $f$ была борелевской) и либо неотрицательной (тогда интегралу разрешается принимать значение $+\infty$), либо абсолютно интегрируемой относительно $\mu_g$ (тогда интеграл конечен).

Основные свойства такого интеграла (линейность, монотонность, счётная аддитивность) аналогичны свойствам обычного интеграла Лебега, нет только непрерывности интеграла по верхнему пределу интегрирования, так как сама функция распределения

$g$ (то есть интеграл характеристической функции полуинтервала) уже может иметь скачки.

Дальнейшее обобщение интеграла Лебега–Стилтьеса — это рассмотрение функций $g$ ограниченной вариации вместо монотонных. По лемме 8.23 имеет место разложение $g = g_\uparrow + g_\downarrow$ в сумму возрастающей и убывающей функции с выполнением $\|g\|_B = \|g_\uparrow\|_B + \|g_\downarrow\|_B$, и мы можем положить

$$\int_a^b f(x)\ dg(x) = \int_a^b f(x)\ dg_\uparrow(x) - \int_a^b f(x)\ d(-g_\downarrow)(x),$$

где выражения в правой части понимаются как интегралы по соответствующим мерам. Тогда это выражение будет линейно не только по $f$, но и по $g$.

*Задача* 8.40. $^*$ Докажите, что для $g$ ограниченной вариации

$$\left|\int_a^b f(x) dg(x)\right| \leqslant \|g\|_B \cdot \|f\|_C.$$

В принципе, можно было бы работать и на всей прямой $\mathbb{R}$ вместо отрезка $[a, b]$, при этом ничего принципиально не меняется для $g$, вариация которых на прямой конечна, или хотя бы конечна на любом отрезке. Этот случай важен в теории вероятностей, когда рассматриваются функции распределения действительных случайных величин.

*Задача* 8.41. Докажите, что последовательность функций $g_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, которые равномерно ограничены и имеют равномерно ограниченную вариацию, имеет поточечно сходящуюся подпоследовательность.

[[ По лемме 8.23 достаточно рассматривать монотонные функции $g_n$. Переходом к подпоследовательности нетрудно добиться сходимости в одной точке, с помощью достаточно аккуратных рассуждений можно добиться сходимости в счётном множестве точек, например во всех рациональных точках отрезка. Это позволяет идентифицировать предельную функцию с точностью до значений в счётном множестве точек, далее надо ещё раз сделать переход к подпоследовательности. ]]

*Задача* 8.42. $^*$ Докажите, что в условиях предыдущей задачи невозможно утверждать, что переход к некоторой подпоследовательности $(g_{n_k})$ позволит добиться сходимости последовательности интегралов

$$\int_a^b f dg_{n_k}$$

для любой ограниченной борелевской $f$.

[[ Контрпример можно построить на возрастающих функциях распределения $g_n$, принимающих только значения 0 и 1. ]]

8.7. **Осцилляция и убывание коэффициентов Фурье.** В этом разделе мы возвращаемся к более простым вещам. Мы установим лемму Римана об осцилляции для функций из $L_1(\mathbb{R})$ и аналогичные оценки для скорости убывания коэффициентов Фурье.

Мы будем рассматривать интеграл от комплекснозначной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, который понимается как интеграл от действительной части плюс умноженный на $i$ интеграл от мнимой части. Работа с интегралом комплекснозначной функции аналогична работе и интегралом действительной функции, можно даже определить соответствующие пространства $L_p$ и убедиться, что их ранее установленные свойства переносятся на комплексный случай. Также отметим, что и в действительном, и в комплексном случае норма $L_2$ порождена скалярным произведением (черта сверху означает комплексное сопряжение)

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

как

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}.$$

Запишем выражение (коэффициент Фурье с точностью до умножения на константу)

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\, dx,$$

и сформулируем его очевидные свойства:

**Теорема 8.43.** *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то $|c_f(y)| \leqslant \|f\|_1$ и $c_f(y)$ непрерывно зависит от $y$.*

*Доказательство.* Оценка $|c_f(y)|$ очевидна, а теорема об ограниченной сходимости 5.101 (по модулю всё ограничено $|f(x)|$) разрешает предельный переход под знаком интеграла, значит $c_f(y)$ непрерывно зависит от $y$. ☐

**Теорема 8.44** (Лемма об осцилляции). *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то выражение*

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\, dx$$

*стремится к нулю при $y \to \infty$.*

*Доказательство.* При наличии достаточной гладкости функции $f$ с компактным носителем можно получить оценки на порядок убывания $c_f(y)$ при $y \to \infty$. Например, если производная $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и производные до $k$-й включительно находятся в $L_1(\mathbb{R})$, то интегрируя по частям (дифференцируя функцию и интегрируя экспоненту), мы получаем

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d\frac{e^{-ixy}}{-iy} = f(x)\frac{e^{-ixy}}{-iy}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\frac{e^{-ixy}}{iy}\, dx =$$
$$= \frac{1}{iy}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ixy}\, dx = \frac{c_{f'}(y)}{iy} = \dots = \frac{c_{f^{(k)}}(y)}{(iy)^k} = O(1/y^k), \quad y \to \infty,$$

При интегрировании по частям возникающие слагаемые вида $f^{(\ell)}(x)e^{-ixy}\big|_{-\infty}^{+\infty}$ будут равны нулю в силу компактности носителя функции и её производных.

Теперь вернёмся к произвольной $f \in L_1(\mathbb{R})$. По теореме 8.19 найдём бесконечно гладкую $g$ с компактным носителем, такую что $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Тогда очевидно, что для любого $y \in \mathbb{R}$

$$|c_f(y) - c_g(y)| = |c_{f-g}(y)| \leqslant \varepsilon.$$

При этом для бесконечно гладкой функции с компактным носителем $c_g(y) \to 0$ по замеченному в начале доказательства. Отсюда следует, что верхний предел $|c_f(y)|$ не более $\varepsilon$. А так как $\varepsilon > 0$ в этом рассуждении любое, то на самом деле предел $c_f(y)$ просто равен нулю. ☐

*Задача* 8.45. Можно было доказать лемму об осцилляции другим способом, с помощью приближения функции элементарно ступенчатой. Проверьте, что для элементарно ступенчатой функции $g$ выполняется $c_g(y) = O(1/y)$.

[[ Проверьте это для одной ступеньки. ]]

Интегрирование по частям позволяет уточнить порядок убывания $c_f(y)$ для дифференцируемых несколько раз функций:

**Лемма 8.46.** *Если производная $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и производные до $k$-й включительно находятся в $L_1(\mathbb{R})$ (для $k$-й производной достаточно существования почти всюду), то*

$$c_f(y) = o\left(\frac{1}{y^k}\right), \quad y \to \infty.$$

*Доказательство.* Рассуждения аналогичны предыдущему доказательству. Формула интегрирования по частям на бесконечном интервале является пределом формулы интегрирования по частям на конечном отрезке с помощью непрерывности интеграла Лебега, так как интегрируются только выражения с конечным интегралом Лебега. Но равенство нулю слагаемых вида $f^{(\ell)}(x)e^{-ixy}\big|_{-\infty}^{+\infty}$ в формуле интегрирования по частям надо проверить более аккуратно. Так как $f^{(\ell+1)} \in L_1(\mathbb{R})$, то по формуле Ньютона–Лейбница предыдущая производная, $f^{(\ell)}$, имеет конечные пределы в $-\infty$ и $+\infty$. Однако, эти пределы должны быть равны нулю, так как сама $f^{(\ell)}$ иначе не имела бы конечного интеграла, в противоречии с формулировкой. Отсюда следует, что

$$f^{(\ell)}(x)e^{-ixy}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

□

Полезно также получить оценку для коэффициента Фурье функции ограниченной вариации.

**Теорема 8.47.** *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, то выражение*

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx$$

*оказывается $O(1/y)$ при $y \to \infty$.*

*Доказательство.* Получим сначала оценку для интеграла по отрезку $[a, b]$. По лемме 8.23 можно разложить $f$ на возрастающую и убывающую, $f(x) = u(x) + d(x)$, тогда по второй теореме о среднем

$$c_{[a,b]}(y) = \int_a^b f(x)e^{-ixy}\,dx = u(a+0)\int_a^{\vartheta} e^{-ixy}\,dx + u(b-0)\int_{\vartheta}^b e^{-ixy}\,dx+$$
$$+\,d(a+0)\int_a^{\psi} e^{-ixy}\,dx + d(b-0)\int_{\psi}^b e^{-ixy}\,dx.$$

Функция ограниченной вариации $f$ имеет пределы на бесконечности, а из её интегрируемости следует, что эти пределы равны нулю. Следовательно, значения $u(a+0)$, $u(b-0)$, $d(a+0)$, $d(b-0)$ в формуле оцениваются полной вариацией $\|f\|_B$ (по всей прямой), а интегралы в формуле оцениваются по модулю в явном виде как $\frac{2}{|y|}$. Так как итоговая оценка левой части формулы $\frac{8\|f\|_B}{|y|}$ не зависит от выбора отрезка $[a, b]$, то она верна и для интеграла по всей прямой из непрерывности интеграла Лебега. □

*Задача* 8.48. Проверьте, что функция ограниченной вариации на всей прямой $\mathbb{R}$ имеет конечные пределы на бесконечности.

[[ Используйте аддитивность вариации и критерий Коши существования конечного предела. ]]

Интегрирование по частям, аналогично лемме 8.46, позволяет обобщить предыдущую теорему до следующего утверждения:

**Следствие 8.49.** *Пусть функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *имеет абсолютно непрерывную* $f^{(k-1)}$, *производные до* $k$*-й включительно находятся в* $L_1(\mathbb{R})$, *а* $f^{(k)}$ *(возможно, после изменения на множестве меры нуль) имеет ограниченную вариацию на* $\mathbb{R}$, *тогда*

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx = O\left(\frac{1}{y^{k+1}}\right), \quad y \to \infty.$$

Следующее обобщение леммы об осцилляции будет важно при анализе (равномерной) сходимости рядов и интегралов Фурье:

**Теорема 8.50** (Лемма о равномерной осцилляции). *Если* $f \in L_1(\mathbb{R})$, *то выражение*

$$c(y, \xi, \eta) = \int_{\xi}^{\eta} f(x)e^{-ixy}\,dx$$

*стремится к нулю при* $y \to \infty$ *равномерно по* $\xi, \eta$.

*Доказательство.* Разобьём $\mathbb{R}$ на конечное число промежутков числами $x_1 < \dots < x_N$ так, чтобы на каждом промежутке разбиения интеграл $|f|$ был меньше $\varepsilon$. Для $\xi$ и $\eta$ найдём ближайшие к ним $x_i$ и $x_j$, тогда

$$\left|\int_{\xi}^{\eta} f(x)e^{-ixy}\,dx\right| \leqslant \left|\int_{x_i}^{x_j} f(x)e^{-ixy}\,dx\right| + 2\varepsilon$$

и при достаточно большом $y$ интеграл в правой части тоже меньше $\varepsilon$ по уже доказанному неравномерному варианту утверждения, применяемого к ограничению $f$ на отрезки вида $[x_i, x_j]$. Это доказывает равномерную оценку, не зависящую от выбора $\xi$ и $\eta$. ☐

Для работы с рядами Фурье (в следующем разделе и далее) мы рассматриваем $2\pi$-периодические функции, $f(x + 2\pi) \equiv f(x)$, и их коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{(f, e^{inx})}{\|e^{inx}\|_2^2},$$

последнее выражение понимается в смысле скалярного произведения и нормы в $L_2[-\pi, \pi]$. Для этого случая доказанные выше утверждения остаются в силе, например:

**Теорема 8.51.** *Пусть функция* $f$ *имеет период* $2\pi$ *и абсолютно непрерывную* $f^{(k-1)}$, *причём* $f^{(k)}$ *(возможно, после изменения на множестве меры нуль) имеет ограниченную вариацию на* $[-\pi, \pi]$, *тогда*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \quad n \to \infty.$$

*Доказательство.* При работе с $2\pi$-периодической абсолютно непрерывной функцией и интегрировании по частям

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx = f(x)e^{-inx}|_{-\pi}^{\pi} + in\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

слагаемое $f(x)e^{-inx}|_{-\pi}^{\pi}$ обращается в нуль в силу $2\pi$-периодичности, поэтому можно несколько раз продифференцировать и применить теорему 8.47. ☐

*Задача* 8.52. Докажите, что если у $2\pi$-периодической функции ограниченной вариации есть ненулевое конечное число разрывов и она кусочно абсолютно непрерывна, то оценка $O(1/n)$ для её коэффициентов Фурье неулучшаема.

[[ Интегрированием по частям получите формулу (с суммой по точкам разрыва $f$)

$$c_n(f) = \frac{1}{in}\left(c_n(f') + \sum_{x_i}(f(x_i+0) - f(x_i-0))e^{-inx_i}\right)$$

и докажите, что сумма в скобках не стремится к нулю при $n \to \infty$. Последнее удобнее доказывать, сведя к случаю, когда один из $x_i$ равен нулю. ]]

*Задача* 8.53. $^*$ Постройте пример непрерывной $2\pi$-периодической функции ограниченной вариации, у которой оценка $O(1/n)$ на коэффициенты Фурье неулучшаема.

[[ Модифицируйте подходящим образом функцию распределения меры из задачи 8.39. В выражении для коэффициента Фурье перейдите к интегрированию $e^{-inx}$ по соответствующей борелевской мере на отрезке и, используя самоподобие меры, докажите, что некоторое ненулевое значение коэффициента Фурье этой меры (интеграла от $e^{-inx}$ по мере) повторяется бесконечно много раз. ]]

Для коэффициентов Фурье любой непрерывной $2\pi$-периодической функции можно получить и такую оценку:

**Теорема 8.54.** *Пусть функция $f$ непрерывная и $2\pi$-периодическая, тогда для коэффициента Фурье имеется оценка*

$$c_n = O(\omega_f(\pi/n)),$$

*где $\omega_f$ — модуль непрерывности $f$.*

*Доказательство.* Запишем

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

Заменим в этом выражении переменную $x = x' + \pi/n$ и воспользуемся тем, что интеграл по периоду можно начинать с любого места, тогда

$$c_n = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x'+\pi/n)e^{-inx'}\,dx'.$$

Возьмём полусумму этих выражений

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+\pi/n)-f(x)}{2}e^{-inx}\,dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\omega_f(\pi/n).$$

□

Предыдущая теорема не очень точна, хотя и полезна в случаях, когда непрерывная функция имеет неограниченную вариацию, примерно как $\sqrt{|x|}\sin 1/x$. Для понимания её неточности полезно разобрать следующий пример:

*Задача* 8.55. Найдите порядок убывания коэффициентов Фурье функции $f(x) = \sqrt{|x|}$ на $[-\pi, \pi]$.

[[ Запишите выражения для коэффициента Фурье в явном виде и замените $nx$ на новую переменную, потом проинтегрируйте по частям. ]]

8.8. **Сходимость ряда Фурье в среднеквадратичном.** Заметим, что по теореме 8.19 любую (возможно, комплекснозначную) функцию $f \in L_2[-\pi, \pi]$ можно сколь угодно близко в норме $\|\cdot\|_2$ приблизить бесконечно гладкой функцией с носителем строго в $(-\pi, \pi)$. Такая функция продолжается до бесконечно гладкой $2\pi$-периодической функции на всей прямой и её по теореме 4.82 можно равномерно приблизить *тригонометрическим многочленом* с комплексными коэффициентами, записанным в комплексной форме как

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Равномерное приближение также является приближением по норме $L_2$, так как на отрезке $[-\pi, \pi]$ имеется неравенство $\|f\|_2 \leqslant \sqrt{2\pi}\|f\|_C$. Далее нам надо изучить, каким именно тригонометрическим многочленом надо приближать функцию. Ответ на этот вопрос зависит от того, в какой норме мы собираемся приближать, самый простой случай даёт норма $L_2$ и следующая теорема.

**Теорема 8.56** (Оптимальность коэффициентов Фурье). *Для любой функции $f \in L_2[-\pi, \pi]$ и данного числа $n$ лучшее по норме $L_2$ приближение $f$ тригонометрическим многочленом*

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

*дают коэффициенты Фурье*

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx.$$

*Доказательство.* Воспользуемся скалярным произведением в $L_2[-\pi, \pi]$

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx,$$

для которого $\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}$. Занумеруем наши функции $e^{ikx}$ в некотором порядке как $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, в наших рассуждениях будет важна лишь ортогональность этих функций относительно введённого скалярного произведения и больше ничего (проверьте ортогональность функций $e^{ikx}$ в $L_2[-\pi, \pi]$ самостоятельно).

Пусть мы приближаем нашу $f$ выражением $\sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k$ и оптимизируем коэффициенты $a_k$, рассмотрим квадрат разности

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{N} \bar{a}_k(f, \varphi_k) - \sum_{k=1}^{N} a_k(\varphi_k, f) + \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2\|\varphi_k\|_2^2.$$

Используя определение коэффициентов Фурье в виде $(f, \varphi_k) = c_k\|\varphi_k\|_2^2$, получим

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{N} \left(\bar{a}_k c_k + a_k\bar{c}_k - |a_k|^2\right)\|\varphi_k\|_2^2 =$$

$$= \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2\|\varphi_k\|_2^2 + \sum_{k=1}^{N} |c_k - a_k|^2\|\varphi_k\|_2^2.$$

Отсюда ясно, что для приближения оптимально положить $a_k = c_k$. ☐

Последняя формула предыдущего доказательства в оптимальном случае имеет вид

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2,$$

что доказывает также *неравенство Бесселя*

$$\|f\|_2^2 \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2,$$

которое для тригонометрической системы записывается в виде:

$$\|f\|_2^2 \geqslant 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2.$$

Если нас интересует представление действительнозначной функции в виде ряда Фурье, то ряд Фурье можно переписать в виде (проверьте это)

$$a_0 + \sum_{k=0}^{n} \left( a_k \cos kx + b_k \sin kx \right),$$

в котором коэффициенты также действительные,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx, \quad k \geqslant 1.$$

Неравенство Бесселя тогда записывается так:

$$\|f\|_2^2 \geqslant 2\pi |a_0|^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left( |a_k|^2 + |b_k|^2 \right).$$

**Теорема 8.57** (Сходимость ряда Фурье в среднеквадратичном). *Для любой комплекснозначной функции $f \in L_2[-\pi, \pi]$*

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

*в смысле сходимости суммы в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$, а также выполняется равенство Парсеваля*

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

*Доказательство.* Из замечания в начале раздела следует, что функцию $f$ можно сколь угодно точно по норме $\| \cdot \|_2$ приблизить тригонометрическим многочленом. Из оптимальности коэффициентов Фурье можно предполагать, что это приближение дано конечным отрезком ряда Фурье. Формула для квадрата точности приближения

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2\pi \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 < \varepsilon.$$

показывает, что следующие приближения (при увеличении количества слагаемых в ряде Фурье) будут не хуже данного, это означает сходимость ряда Фурье по норме $\| \cdot \|_2$ по определению. Также эта формула показывает, что в пределе в неравенстве Бесселя будет равенство (Парсеваля). □

В этой теореме мы просуммировали, как положено в теории рядов Фурье, «симметрично»

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

иначе это называется *сумма в смысле главного значения* и обозначается

$$v.p.\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}.$$

Хотя на самом деле конкретно в данной теореме любой порядок суммирования даёт тот же результат, для поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье суммирование в смысле главного значения будет важно.

Заметим, что для доказательства неравенства Бесселя от тригонометрической системы требовалась только её ортогональность, тогда как для сходимости и равенства Парсеваля потребовалось нетривиальное свойство этой системы, *полнота*, как возможность приблизить любую функцию в пространстве $L_2$ линейной комбинацией функций нашей системы сколь угодно точно.

Другое замечание относится к тому, как надо понимать эту формулу. Из сходимости ряда в среднеквадратичном в принципе может и не следовать его сходимость хотя бы в одной точке (см. задачу 8.17), то есть мы не доказали, что в эту формулу можно подставить хоть одно конкретное значение $x$. Тот факт, что ряд Фурье функции из $L_2[-\pi,\pi]$ на самом деле сходится к этой функции почти всюду, был доказан Л. Карлесоном (1966), а до этого был известен как гипотеза Лузина.

8.9. **Равномерная и поточечная сходимость тригонометрического ряда Фурье.** Мы заметили, что сходимость ряда Фурье в среднеквадратичном устанавливается легко, а теперь разовьём более сложную технику для анализа сходимости в точке или равномерной сходимости на отрезке. Обозначим частичную сумму тригонометрического ряда Фурье для $2\pi$-периодической функции $f$ как

$$T_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}.$$

Сейчас мы получим полезное выражение для этой суммы:

**Лемма 8.58.** *Для $n$-й частичной суммы ряда Фурье $2\pi$-периодической функции имеет место формула в виде свёртки*

$$T_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,dt,$$

*с ядром Дирихле*

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2}.$$

*Доказательство.* Подставим определение коэффициентов Фурье в формулу

$$T_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

и получим

$$T_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)e^{ikx-ik\xi}\,d\xi.$$

Сделаем замену $\xi = x + t$ и заметим, что все функции $2\pi$-периодические и поэтому интегралы по любому отрезку $[a, a + 2\pi]$ не будут зависеть от $a$. Тогда

$$T_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left( \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt} \right) dt.$$

Сумму в скобках можно найти как сумму геометрической прогрессии

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt} = \frac{e^{i(n+1/2)t} - e^{-i(n+1/2)t}}{2\pi(e^{it/2} - e^{-it/2})} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2}.$$

☐

Изучим некоторые свойства ядра Дирихле.

**Лемма 8.59** (Равномерная ограниченность интегралов от ядра Дирихле)**.** *Существует такая константа $C$, что*

$$\left| \int_a^b D_n(t)\, dt \right| \leqslant C$$

*для любых $a, b \in [-\pi, \pi]$, $n \in \mathbb{N}$.*

*Доказательство.* Вынесем из-под интеграла монотонное и ограниченное на $[-\pi, 0]$ и $[0, \pi]$ выражение $\frac{t}{\sin t/2}$ по второй теореме о среднем, сведя таким образом утверждение к оценке интеграла Дирихле

$$\left| \int_a^b \frac{\sin(n+1/2)x}{x}\, dx \right| \leqslant C.$$

После замены $t = (n + 1/2)x$ мы должны оценить интегралы

$$\left| \int_a^b \frac{\sin t}{t}\, dt \right|$$

независимо от $a$ и $b$. Существование такой оценки следует из сходимости несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ по признаку Дирихле. ☐

Из формулы

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt}$$

следует формула для интеграла от ядра Дирихле

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\, dt = 1.$$

Она позволяет записать отклонение частичной суммы ряда Фурье от функции как

$$T_n(f, x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) D_n(t)\, dt.$$

Главный инструмент исследования этого выражения даёт:

**Теорема 8.60** (Равномерный принцип локализации). *Запишем для $\delta \in (0, \pi)$*

$$T_n(f, x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) D_n(t)\, dt =$$
$$= \int_{-\delta}^{\delta} (f(x+t) - f(x)) D_n(t)\, dt + \int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} (f(x+t) - f(x)) D_n(t)\, dt.$$

*Если $f \in L_1[-\pi, \pi]$ и продолжена на всю прямую $2\pi$-периодически, то для любого $x$*

$$\int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} (f(x+t) - f(x)) D_n(t)\, dt \to 0$$

*при $n \to \infty$. Если $f$ ограничена на отрезке $[a, b]$, то это выражение стремится к нулю равномерно по $x \in [a, b]$.*

*Доказательство.* С помощью второй теоремы о среднем вынесем монотонный множитель $\frac{1}{2\pi \sin t/2}$ из интеграла (он ограничен при $\delta \leqslant |t| \leqslant \pi$). Второе слагаемое в оставшемся выражении, имеющее вид

$$-\int_c^d f(x) \sin(n + 1/2)t\, dt,$$

стремится к нулю из предполагаемой ограниченности $f(x)$ и, например, явного выражения для интеграла от синуса.

В слагаемом с $f(x+t)$ можно вернуться к комплексной записи

$$\int_c^d f(x+t) \sin(n+1/2)t\, dt = \frac{1}{2i}\left(\int_c^d f(x+t) e^{i(n+1/2)t}\, dt - \int_c^d f(x+t) e^{-i(n+1/2)t}\, dt\right)$$

и далее переписать на примере одного из двух слагаемых

$$\left|\int_{x+c}^{x+d} f(\xi) e^{i(n+1/2)\xi - i(n+1/2)x}\, d\xi\right| = \left|e^{-i(n+1/2)x} \int_{x+c}^{x+d} f(\xi) e^{i(n+1/2)\xi}\, d\xi\right| = \left|\int_{x+c}^{x+d} f(\xi) e^{i(n+1/2)\xi}\, d\xi\right|.$$

В последнем выражении пределы интегрирования заведомо лежат в диапазоне $[-2\pi, 2\pi]$, на котором $|f|$ имеет конечный интеграл, поэтому лемма о равномерной осцилляции применима и даёт равномерное стремление к нулю.

Первое утверждение теоремы, о стремлении к нулю в точке $x$, получается рассмотрением отрезка из одной точки $[a, b] = [x, x]$. ☐

Теперь мы готовы доказать (равномерную) сходимость ряда Фурье к достаточно хорошим функциям.

**Определение 8.61.** Функция $f$ называется *гёльдеровой степени* $\alpha > 0$, если для любых $x, y$ из области определения

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^\alpha$$

с некоторой константой $C$.

**Теорема 8.62** (Признак Липшица сходимости ряда Фурье). *Для абсолютно интегрируемой $2\pi$-периодической функции, которая является гёльдеровой с некоторыми $C, \alpha > 0$ на интервале $(A, B) \supset [a, b]$*

$$T_n(f, x) \to f(x)$$

*равномерно по $x \in [a, b]$ при $n \to \infty$.*

*Доказательство.* Взяв $\delta$ так, чтобы выполнялось

$$0 < \delta < \min\{A - a, B - b\},$$

оценим локальную часть интегрального выражения для $T_n(f, x) - f(x)$ как

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} (f(x+t) - f(x)) D_n(t)\, dt \right| \leqslant C \int_{-\delta}^{\delta} |t|^\alpha \frac{1}{2\pi\, |\sin t/2|}\, dt \leqslant C \int_{-\delta}^{\delta} |t|^\alpha \frac{1}{2|t|}\, dt = \frac{C}{\alpha} |\delta|^\alpha.$$

Здесь было использовано неравенство $\pi\, |\sin t/2| \geqslant |t|$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Докажем теперь равномерную сходимость. Для любого $\varepsilon > 0$ подберём достаточно маленькое положительное $\delta$ так, чтобы локальная часть интеграла оценивалась как

$$\frac{C}{\alpha} |\delta|^\alpha < \varepsilon.$$

Из равномерного принципа локализации следует, что найдётся также $N \in \mathbb{N}$, такое что при $n \geqslant N$ нелокальная часть интеграла при том же $\delta$ строго меньше $\varepsilon$. Тогда при таких $n$ оказывается, что

$$|T_n(f, x) - f(x)| < 2\varepsilon$$

для любого $x \in [a, b]$. То есть имеет место равномерная сходимость $T_n(f)$ к $f$ на отрезке $[a, b]$ по определению. □

**Теорема 8.63** (Признак Дирихле сходимости ряда Фурье). *Для абсолютно интегрируемой $2\pi$-периодической функции, которая является непрерывной с ограниченной вариацией на интервале $(A, B) \supset [a, b]$*

$$T_n(f, x) \to f(x)$$

*равномерно по $x \in [a, b]$ при $n \to \infty$.*

*Доказательство.* По лемме 8.23 представим $f$ на интервале на $(A, B)$ как сумму монотонных и непрерывных функций, $f = u + d$. С учётом результата задачи 8.25 лемму 8.23 можно применить не только к отрезку, но и к интервалу. Или можно просто немного уменьшить интервал $(A, B)$, чтобы он всё ещё содержал $[a, b]$.

За пределами интервала $(A, B)$ и его сдвигов на кратные $2\pi$ числа положим $u(x) = f(x)$ и $d(x) = 0$, тогда разложение $f = u + d$ определено везде. Воспользуемся линейностью выражения $T_n(f, x)$ по $f$ и будем доказывать утверждение о сходимости для $u$ и $d$ по отдельности. Иначе говоря, взяв в качестве $f$ функцию $u$ или $d$, будем считать $f$ монотонной и непрерывной на $(A, B)$.

В равномерном принципе локализации будем считать, что

$$0 < \delta < \min\{A - a, B - b\},$$

тогда при $x \in [a, b]$ на отрезке $[x - \delta, x + \delta]$ функция $f$ монотонна. По второй теореме о среднем и лемме 8.59 для локальной части $T_n(f, x) - f(x)$ можно написать

$$\left| \int_{0}^{\delta} (f(x+t) - f(x)) D_n(t)\, dt \right| = \left| (f(x+\delta) - f(x)) \int_{\vartheta}^{\delta} D_n(t)\, dt \right| \leqslant C |f(x+\delta) - f(x)|$$

и аналогично для интеграла от $-\delta$ до $0$. Полученная оценка равномерно стремится к нулю при $\delta \to +0$ из равномерной непрерывности $f$ в некоторой окрестности отрезка $[a, b]$. Завершение доказательства идентично завершению доказательства признака Липшица. □

Признаки сходимости ряда Фурье в точке можно получить из приведённых выше теорем, взяв в них отрезок, состоящий из одной точки. Но эти формулировки можно уточнить, мы оставляем эти уточнения в виде следующих задач.

*Задача* 8.64 (Признак Дирихле сходимости ряда Фурье в точке). Докажите, что если абсолютно интегрируемая $2\pi$-периодическая функция непрерывна в точке $x$ и имеет ограниченную вариацию в окрестности $x$, то её ряд Фурье сходится к её значению в $x$.

[[ Заметьте, что при представлении функции в виде суммы монотонных полученные монотонные функции тоже будут непрерывны в точке $x$. Далее заметьте, что непрерывности в одной точке достаточно для анализа сходимости ряда Фурье именно в этой точке. ]]

*Задача* 8.65 (Признак Липшица сходимости ряда Фурье в точке). Докажите, что если абсолютно интегрируемая $2\pi$-периодическая функция $f$ удовлетворяет условию Гёльдера в точке $x$, то есть выполняется $|f(x+t) - f(x)| \leqslant C|t|^\alpha$ для достаточно малых $t$ и фиксированных положительных $C$ и $\alpha$, то её ряд Фурье сходится к её значению в $x$.

[[ Заметьте, что приведённое выше доказательство равномерного варианта работает. ]]

*Задача* 8.66 (Признак Дини сходимости ряда Фурье в точке). Докажите сходимость ряда Фурье к значению функции в точке $x$, если интеграл

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| \, dt$$

сходится.

[[ Замените $\sin t/2$ на $t$ в знаменателе интеграла в свёртке с ядром Дирихле с помощью второй теоремы о среднем. ]]

Обобщения утверждений о сходимости ряда Фурье в точке на функции с разрывом в этой точке будут даны в разделе 8.17.

8.10. **Интегрирование ряда Фурье, разложение котангенса и косеканса на элементарные дроби и формула дополнения для бета-функции.** Докажем возможность почленно интегрировать ряд Фурье. Собственно, следующая теорема показывает, что ряд Фурье можно почленно интегрировать и получать равномерно сходящийся ряд.

**Теорема 8.67** (Почленное интегрирование ряда Фурье). *Пусть $f \in L_1[-\pi, \pi]$ соответствует не обязательно сходящийся ряд Фурье, записанный в действительном виде как*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

*Тогда ряд Фурье можно почленно интегрировать, то есть выполняется формула*

$$\int_a^b f(x)\, dx = a_0(b-a) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n \sin nx}{n} - \frac{b_n \cos nx}{n} \right) \Bigg|_a^b .$$

Заметим, что мы здесь несколько неформально «почленно интегрируем» бесконечную сумму (ряд Фурье для функции $f$), которая может не сходиться к $f$ и вообще ни к чему не сходиться. Тем не менее, обе части равенства в этой теореме определены.

*Доказательство.* Можно вычесть из функции константу, тогда из ряда Фурье вычтется та же константа и равенство не потеряется, поэтому считаем, что $a_0 = 0$ и интеграл $f$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ равен нулю. Также по аддитивности интеграла достаточно доказать утверждение для интеграла от $-\pi$ до любого числа $\xi$, поэтому положим

$$F(\xi) = \int_{-\pi}^{\xi} f(x)\, dx.$$

Эта функция абсолютно непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, имеет ограниченную вариацию (равную $L_1$ норме $f$) и равные значения на концах (так как $a_0 = 0$), поэтому её ряд Фурье сходится к ней равномерно. С помощью интегрирования по частям (для абсолютно непрерывных функций) её коэффициенты Фурье выражаются через коэффициенты Фурье $f$ при $n \neq 0$, напишем эти формулы в комплексной форме:

$$2\pi c_n(F) = \int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{in}\left(-F(x)e^{-inx}|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx\right) = \frac{2\pi c_n(f)}{in}.$$

Ряд Фурье $F$ сходится к ней равномерно, и значит равномерно по $\xi$ выполняется равенство

$$F(\xi) = c_0(F) + \sum_{n=-\infty,\ n\neq 0}^{+\infty} \frac{c_n(f)}{in} e^{in\xi},$$

в котором мы не находили постоянный коэффициент. Иначе говоря, выполняется (переходя от комплексной к действительной форме)

$$F(\xi) = F(\xi) - F(-\pi) = \sum_{n=-\infty,\ n\neq 0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\xi} c_n(f)e^{inx}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n \sin nx}{n} - \frac{b_n \cos nx}{n}\right)\Big|_{-\pi}^{\xi},$$

это и есть требуемое равенство. □

*Задача* 8.68. Докажите, что если две функции $f, g \in L_1[-\pi, \pi]$ имеют одинаковые коэффициенты Фурье по тригонометрической системе, то они почти всюду равны.

[[ Попробуйте интегрировать разность $f - g$. ]]

*Задача* 8.69. Предположим, что последовательность $(a_n)$ убывает и стремится к нулю. Докажите, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

равномерно сходится на отрезке $[\delta, 2\pi - \delta]$ для любого положительного $\delta$. Приведите пример, когда нет равномерной сходимости на всём периоде $[-\pi, \pi]$.

[[ Напишите $\cos nx = \frac{\sin(n+1/2)x - \sin(n-1/2)x}{2\sin x/2}$ и примените признак Дирихле равномерной сходимости ряда 4.66. Пример достаточно привести с расходимостью в нуле. ]]

*Задача* 8.70. Предположим, что последовательность $(b_n)$ убывает и стремится к нулю. Докажите, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

равномерно сходится на отрезке $[\delta, 2\pi - \delta]$ для любого положительного $\delta$. Приведите пример, когда нет равномерной сходимости на $[-\pi, \pi]$.

[[ Напишите $\sin nx = \frac{\cos(n-1/2)x - \cos(n+1/2)x}{2\sin x/2}$ и примените признак Дирихле равномерной сходимости ряда 4.66. При построении примера неравномерной сходимости примените критерий Коши равномерной сходимости ряда. ]]

*Задача* 8.71. Докажите, что выражение

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

не является рядом Фурье никакой абсолютно интегрируемой функции.

[[ Что будет, если мы его проинтегрируем? ]]

В следующей задаче получаются формулы, которые можно интерпретировать как разложение некоторых тригонометрических функций в (бесконечную) сумму элементарных дробей, или как разложение в бесконечное произведение линейных функций. Так как суммы бесконечны, то эти утверждения далеко не так очевидны, как их конечные аналоги для рациональных функций и многочленов. Напомним, что мы используем обозначение

$$v.p. \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dots = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \dots .$$

*Задача* 8.72. Разложите функцию, заданную формулой $\cos ax$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ при $a \notin \mathbb{Z}$, в ряд Фурье. Выведите из полученного выражения формулы:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} x &= v.p. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x-\pi k} \\ \frac{1}{\sin x} &= v.p. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x-\pi k} \\ \sin x &= x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right), \end{aligned}$$

где $v.p. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} a_k$.

*Задача* 8.73. Докажите *формулу дополнения* для бета-функции при $p \in (0,1)$:

$$B(p, 1-p) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{-p}\, dt = \frac{\pi}{\sin \pi p}.$$

[[ С помощью замены переменной напишите

$$B(p,1-p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx = \int_0^1 \frac{x^{p-1}+x^{-p}}{1+x}\, dx.$$

Разложите в сумму $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ и переставьте сумму с интегралом по теореме о монотонной сходимости (это можно, если считать бесконечную сумму пределом частичных сумм с чётным количеством слагаемых). Потом воспользуйтесь одним из равенств в предыдущей задаче. Другое доказательство этой формулы см. в разделе 10.6. ]]

*Задача* 8.74. Докажите формулу для $0 < |x| < \pi$

$$\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x = \sum_{n,k\geqslant 1} \frac{2x^{2k-1}}{\pi^{2k} n^{2k}},$$

выведите из неё значения сумм $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

[[ Используйте разложение котангенса на элементарные дроби из задачи 8.72. ]]

*Задача* 8.75. Найдите интеграл

$$\int_0^1 \ln \Gamma(p)\, dp.$$

[[ Используйте формулу дополнения. ]]

8.11. **Суммирование тригонометрических рядов по Фейеру.** Существует явный способ приблизить любую непрерывную $2\pi$-периодическую функцию тригонометрическими рядами, которые будут сходится к ней равномерно. Как показывает теорема 9.16, частичные суммы ряда Фурье для этого не годятся и надо действовать хитрее. Мы будем отталкиваться от ядра Дирихле для частичной суммы ряда Фурье и определим *ядро Фейера* через усреднение ядер Дирихле:

$$\Phi_n(t) = \frac{D_0(t) + D_1(t) + \dots + D_n(t)}{n+1} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \frac{n+1-|k|}{n+1} e^{ikx}.$$

Соответствующая *сумма Фейера* будет соответствовать усреднению первых $n+1$ частичных сумм ряда Фурье,

$$S_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\xi)\Phi_n(\xi)\, d\xi = \frac{T_0(f,x) + \dots + T_n(f,x)}{n+1}.$$

Записав

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+1/2)t}{2\pi \sin t/2} = \frac{\cos nt - \cos(n+1)t}{4\pi \sin^2 t/2}$$

и суммируя, мы легко получим формулу

$$\Phi_n(t) = \frac{1-\cos(n+1)t}{4\pi(n+1)\sin^2 t/2} = \frac{\sin^2 \frac{(n+1)t}{2}}{2\pi(n+1)\sin^2 t/2}.$$

С помощью этой формулы доказывается полезное свойство сумм Фейера:

**Теорема 8.76.** *Для непрерывной $2\pi$-периодической $f$*

$$S_n(f,x) \to f(x)$$

*равномерно.*

*Доказательство.* Так как ядра Фейера являются усреднением ядер Дирихле, то мы получаем нормировку

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\, dt = 1.$$

Также мы будем использовать оценки из явной формулы для ядра Фейера

$$0 \leqslant \Phi_n(t) \leqslant \frac{1}{2\pi(n+1)\sin^2 t/2}.$$

Запишем аналогично формуле с ядром Дирихле:

$$S_n(f,x) - f(x) = \int_{-\delta}^{\delta} (f(x+t) - f(x))\Phi_n(t)\, dt + \int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} (f(x+t) - f(x))\Phi_n(t)\, dt.$$

В первом интеграле воспользуемся модулем непрерывности $\omega_f(\delta)$ функции $f$, а во втором просто ограничим разность значений функции выражением $2\|f\|_C$, тогда

$$|S_n(f,x) - f(x)| \leqslant \omega_f(\delta) \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)\, dt + 4\|f\|_C \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \omega_f(\delta) + 4\|f\|_C \int_{\delta}^{\pi} \frac{dt}{2\pi(n+1)\sin^2 t/2} = \omega_f(\delta) + 4\|f\|_C \frac{1}{\pi(n+1)} \operatorname{ctg} \delta/2.$$

Ясно, что при фиксированном $\delta$ в (частичном) пределе $n \to \infty$ получится не более $\omega_f(\delta)$. Из равномерной непрерывности $f$ следует, что эта оценка произвольно мала при достаточно малом $\delta$, то есть на самом деле оценка стремится к нулю при $n \to \infty$. ☐

Далее мы приводим задачи для самостоятельного решения на суммы Фейера, ядро Фейера и близкие вопросы.

*Задача* 8.77. $^*$ Докажите, что для $f \in L_1[-\pi, \pi]$
$$S_n(f, x) \to f(x)$$
в смысле сходимости в $L_1[-\pi, \pi]$ (то есть в смысле сходимости в среднем).

[[ Запишите интеграл от $|S_n(f, x) - f|$ и оцените его с помощью непрерывности сдвига в $L_1$-норме. Или заметьте, что $L_1$-норма суммы Фейера $S_n(f, x)$ не более $L_1$-нормы самой $f$, и это позволяет использовать приближения $f$ в среднем непрерывными функциями. ]]

*Задача* 8.78. Посчитайте сумму для $r \in [0, 1)$
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}e^{ikx}.$$

[[ Вспомните про сумму геометрической прогрессии. ]]

*Задача* 8.79. $^*$ Пусть последовательность $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ положительных чисел убывает, стремится к нулю и выпукла (в смысле $a_{n-1} - 2a_n + a_{n+1} \geqslant 0$ при $n \geqslant 1$). Докажите, что сумма
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$
неотрицательна (в некоторых точках может быть $+\infty$).

[[ Воспользуйтесь преобразованием Абеля для рядов и обнаружьте ядро Фейера. ]]

8.12. **Интеграл Фурье и вычисление интеграла Дирихле.** Представление функции интегралом Фурье — это формула вида
$$f(x) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} c(y)e^{ixy}\, dy,$$
где *интеграл в смысле главного значения* — это по определению
$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx = \lim_{h\to+\infty} \int_{-h}^{h} g(x)\, dx.$$
По аналогии с коэффициентами ряда Фурье, коэффициент $c(y)$ находится как
$$c(y) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\, dx,$$
пока мы пишем эту формулу без обоснования, но потом мы её обоснуем сходимостью получающегося интеграла Фурье для достаточно приличной функции к этой функции. Мы обычно будем рассматривать $f \in L_1(\mathbb{R})$, в этом случае интеграл можно брать и по Лебегу, а не только в смысле главного значения. Собственно, выражения такого вида без константы мы уже изучали в разделе 8.7.

Как и в случае с рядами, подставив определение $c(y)$ в формулу интеграла Фурье до перехода к пределу $h \to +\infty$ в определении интеграла в смысле главного значения, мы получим *частичный интеграл Фурье*:
$$T_h(f, x) = \int_{-h}^{h} c(y)e^{ixy}\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-h}^{h} \left( v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i(\xi-x)y}\, d\xi \right) dy.$$
При условии $f \in L_1(\mathbb{R})$ (что мы и будем далее предполагать) выражение под интегралом становится измеримой функцией от $\xi$ и $y$ с конечным интегралом модуля. Значит,

в этом случае во внутреннем интеграле можно опустить $v.p.$, сделать замену переменной $t = \xi - x$ и после применения теоремы Фубини получить

$$T_h(f, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) D_h(t)\, dt,$$

где

$$D_h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-h}^{h} e^{-ity}\, dy = \frac{\sin ht}{\pi t}$$

уместно назвать *ядром Дирихле для интеграла Фурье*. Его свойства аналогичны свойствам ядра Дирихле для ряда Фурье, однако условие нормировки проверить чуть сложнее:

**Лемма 8.80** (Нормировка интеграла Дирихле)**.** *Выполняется*

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} D_h(t)\, dt = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ht}{\pi t}\, dt = 1.$$

*Доказательство.* Замена $ht$ на новую переменную показывает, что это достаточно доказать для $h = 1$, а с учётом чётности функции достаточно доказать для условно сходящегося интеграла

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}. \tag{8.3}$$

Этот интеграл условно сходится по признаку Дирихле 5.114, но не сходится абсолютно. Поэтому нам надо работать с ним достаточно аккуратно. Сходимость означает, что для $\varepsilon > 0$ найдётся $\beta(\varepsilon)$, такое что при любых $a, b \geqslant \beta(\varepsilon)$

$$\left| \int_{a}^{b} \frac{\sin t}{t}\, dt \right| < \varepsilon.$$

Посмотрим теперь на интеграл с параметром $y \in [0, +\infty)$

$$I(y) = \int_{0}^{+\infty} e^{-yt} \frac{\sin t}{t}\, dt,$$

он уже сходится абсолютно при $y > 0$. Разложим интеграл на два и проанализируем отдельно

$$I(y) = \int_{0}^{a} e^{-yt} \frac{\sin t}{t}\, dt + \int_{a}^{+\infty} e^{-yt} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Во второй его части мы можем вынести по второй теореме о среднем экспоненту за знак интеграла (при $y = 0$ формула будет верна с $\vartheta = +\infty$)

$$\int_{a}^{+\infty} e^{-yt} \frac{\sin t}{t}\, dt = e^{-ya} \int_{a}^{\vartheta} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

и обнаружить, что эта часть по модулю меньше $\varepsilon$, если $a \geqslant \beta(\varepsilon)$. Первая часть же при $y \to +0$ стремится по теореме об ограниченной сходимости к

$$\int_{0}^{a} \frac{\sin t}{t}\, dt,$$

что отличается от $I(0)$ не более чем на $\varepsilon$. Таким образом мы доказали, что $I(y)$ непрерывно зависит от $y$ даже при $y \to +0$.

Дифференцируя под знаком интеграла по $y$ по теореме 5.106 при $y > 0$ (когда производную можно оценить абсолютно интегрируемым выражением с экспонентой), мы получим по формуле Ньютона–Лейбница

$$I'(y) = -\int_0^{+\infty} e^{-yt}\sin t\, dt = \frac{e^{-yt}\cos t + ye^{-yt}\sin t}{1+y^2}\Big|_{t=0}^{+\infty} = \frac{-1}{1+y^2},$$

а из граничного условия

$$|I(y)| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-yt}\, dt = \frac{1}{y} \to 0, \quad y \to +\infty$$

мы найдём константу в решении дифференциального уравнения:

$$I(y) = \pi/2 - \operatorname{arctg} y,$$

что даёт требуемое равенство $I(0) = \pi/2$. ☐

*Задача* 8.81. Выведите формулу для интеграла Дирихле из того, что для ядра Дирихле ряда Фурье $D_n(x)$ при любом $\delta > 0$ выполняется (частный случай принципа локализации)

$$\int_{-\delta}^{\delta} D_n(x)\, dx \to 1, \quad n \to \infty.$$

[[ Вынесите из интеграла близкое к единице выражение $\frac{x}{2\sin x/2}$ по второй теореме о среднем и замените переменную $y = (n+1/2)x$. ]]

Свойство равномерной ограниченности интегралов от ядра Дирихле,

$$\left|\int_a^b D_h(t)\, dt\right| \leqslant C,$$

проверяется совсем просто, и мы на самом деле его уже проверяли, когда выясняли аналогичное свойство ядра Дирихле для рядов. Замена $ht$ на новую переменную показывает, что его достаточно проверить при $h = 1$, а в этом случае оно верно, так как по уже доказанному выражение под интегралом имеет ограниченную первообразную.

8.13. **Равномерная сходимость несобственного интеграла.** Мы посчитали интеграл Дирихле с помощью дифференцирования по параметру. В этом и в других случаях для изучения условно сходящихся интегралов, зависящих от параметра, может быть применено понятие *равномерной сходимости несобственного интеграла*. Мы приведём стандартные сведения об этом понятии в виде упражнений, но использовать его в дальнейшем мы не будем.

По определению равномерная сходимость означает, что сходимость несобственного интеграла

$$\int_a^{\beta} f(x,y)\, dx \to \int_a^{*b} f(x,y)\, dx$$

при $\beta \to b-0$ является равномерной по $y \in Y$, где $Y$ — некоторое множество параметров. Иначе это можно сформулировать как

$$\sup\left\{\left|\int_{\beta}^{*b} f(x,y)\, dx\right| \;\middle|\; y \in Y\right\} \to 0, \quad \beta \to b-0$$

или в виде *критерия Коши*

$$\sup\left\{\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\, dx\right| \;\middle|\; y \in Y\right\} \to 0, \quad \alpha,\beta \to b-0.$$

Простейшая ситуация, которая обычно называется *признак Вейерштрасса*, когда при $x \in [a, b)$ и $y \in Y$ выполняется неравенство $|f(x, y)| \leqslant g(x)$ и интеграл

$$\int_a^b g(x)\, dx$$

конечен. В этом случае по определению интеграл

$$I(y) = \int_a^{*b} f(x, y)\, dx \tag{8.4}$$

сходится равномерно. На самом деле последний интеграл в этом случае сходится по Лебегу без необходимости применять определение несобственного интеграла, а полезное свойство непрерывности $I(y)$ будет гарантировано теоремой об ограниченной сходимости при условии непрерывности $f(x, y)$ по переменной $y$ (непрерывность на $x$ не требуется). Иначе говоря, при применимости признака Вейерштрасса понятие равномерной сходимости интеграла не даёт ничего нового по сравнению с понятием интеграла Лебега.

Решая следующие задачи, читатель может установить достаточные условия непрерывности и дифференцируемости интеграла по параметру, связанные с понятием равномерной сходимости несобственного интеграла.

*Задача* 8.82 (Непрерывность равномерно сходящегося интеграла по параметру). Докажите, что равномерно сходящийся несобственный интеграл (8.4) непрерывен по параметру $y$, если подынтегральная функция $f(x, y)$ непрерывна по переменной $y$ и ограничена функцией не зависящей от $y$ функцией $g(x)$, $|f(x, y)| \leqslant g(x)$, имеющей конечные интегралы на всех отрезках $[a, \beta] \subset [a, b)$.

[[ До перехода к пределу в определении несобственного интеграла примените теорему об ограниченной сходимости, во время перехода к пределу $\beta \to b - 0$ примените теорему 4.41. ]]

*Задача* 8.83 (Дифференцирование равномерно сходящегося интеграла по параметру). Пусть интеграл

$$I(y) = \int_a^{*b} f(x, y)\, dx$$

сходится хотя бы в одной точке $y \in (c, d)$, а интеграл

$$J(y) = \int_a^{*b} f'_y(x, y)\, dx$$

сходится равномерно по $y \in (c, d)$. Предположим также, что выполняется неравенство $|f'_y(x, y)| \leqslant g(x)$ для некоторой функции $g$, имеющей конечные интегралы на всех отрезках $[a, \beta] \subset [a, b)$. Докажите, что тогда $I(y)$ сходится равномерно по $y \in (c, d)$ и $I'(y) = J(y)$.

[[ Выберите последовательность $\beta_n \to b - 0$, рассмотрите соответствующие собственные интегралы $I_n(y)$ и $J_n(y)$, примените к ним дифференцирование интеграла Лебега и теорему 4.42 при $n \to \infty$. ]]

Аналогично ситуации (функциональных) рядов и интеграла без параметра, для интеграла с параметром есть свои варианты признаков Дирихле и Абеля.

*Задача* 8.84 (Признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла). Пусть найдётся константа $M$, такая что при любом $\beta \in (a, b)$ и $y \in Y$

$$\left| \int_a^{\beta} f(x, y)\, dx \right| \leqslant M,$$

а функция $g$ монотонно стремится к нулю при $x \to b - 0$ равномерно по $y \in Y$. Докажите, что

$$\int_a^{*b} f(x,y)g(x,y)\,dx$$

сходится равномерно по $y \in Y$.

[[ Проверьте, что доказательство «неравномерного» варианта 5.114 через вторую теорему о среднем работает и в этом случае. ]]

*Задача* 8.85 (Признак Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла). Пусть интеграл

$$\int_a^{*b} f(x,y)\,dx$$

сходится равномерно по $y \in Y$, а функция $g$ монотонна по $x$ и ограничена некоторой константой, $|g(x,y)| \leqslant M$, для любых $x \in (a,b)$ и $y \in Y$. Докажите, что

$$\int_a^{*b} f(x,y)g(x,y)\,dx$$

сходится равномерно по $y \in Y$.

[[ Проверьте, что доказательство «неравномерного» варианта 5.115 через вторую теорему о среднем работает и в этом случае. ]]

*Задача* 8.86. Сведите вычисление интеграла Дирихле через интеграл

$$I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-yx}\sin x}{x}\,dx$$

к результатам предыдущих задач.

8.14. **Сходимость интеграла Фурье, преобразование Фурье и его свойства.** Дальнейший анализ сходимости $T_h(f,x)$ к функции $f$ при $f \in L_1(\mathbb{R})$ производится точно так же, как и анализ сходимости ряда Фурье; на самом деле рассуждения даже проще, так как нам не придётся заменять $\sin t/2$ на $t$ в знаменателе. Для примера покажем аналог принципа локализации для интеграла Фурье.

**Теорема 8.87.** *Предположим функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ ограничена на $[a,b]$ тогда в выражении*

$$T_h(f,x) - f(x) = \int_{-\delta}^{\delta} (f(x+t) - f(x))D_h(t)\,dt + v.p. \int_{|t|\geqslant\delta} (f(x+t) - f(x))D_h(t)\,dt$$

*при фиксированном $\delta > 0$ второй интеграл стремится к нулю равномерно по $x \in [a,b]$ при $h \to +\infty$.*

*Доказательство.* Половину второго интеграла можно оценить через вторую теорему о среднем (в качестве монотонной функции выносим $1/t$)

$$\int_\delta^{+\infty} (f(x+t) - f(x))D_h(t)\,dt = \frac{1}{\delta}\int_\delta^{\vartheta} f(x+t)\frac{\sin ht}{\pi}\,dt - f(x)\int_\delta^{+\infty} D_h(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\delta}\int_\delta^{\vartheta} f(x+t)\frac{\sin ht}{\pi}\,dt - f(x)\int_{h\delta}^{+\infty} D_1(\xi)\,d\xi.$$

После этого в итоговом выражении первая часть стремится к нулю при $h \to +\infty$ по лемме о (равномерной) осцилляции (после представления синуса в виде экспоненты и замены $x + t$ на новую переменную), а вторая часть стремится к нулю при $h \to +\infty$ из сходимости интеграла от ядра Дирихле на бесконечности. ☐

Из этого утверждения следуют признаки сходимости и равномерной сходимости Липшица и Дирихле, признак Дини сходимости в точке, формулируемые аналогично их вариантам для рядов Фурье. Например, если $f \in L_1(\mathbb{R})$ непрерывна с ограниченной вариацией на интервале $(A, B) \supset [a, b]$ (или удовлетворяет условию Гёльдера на $(A, B)$), то $T_h(f, x) \to f(x)$ равномерно на $[a, b]$. Сформулируем достаточно удобное общее следствие из этих утверждений:

**Следствие 8.88.** *Интеграл Фурье сходится поточечно к $f \in L_1(\mathbb{R})$, если $f$ непрерывна и в каждой точке удовлетворяет условию Гёльдера, Дини или Дирихле; и сходится равномерно на отрезках, если $f$ непрерывна и на каждом отрезке либо имеет ограниченную вариацию, либо удовлетворяет условию Гёльдера.*

Заметим, что переход от $f(x)$ к $c(y)$ и обратно в интеграле Фурье выглядит достаточно симметрично, в отличие от ситуации с рядом Фурье. Его можно сделать ещё более симметричным, изменив константы в выражениях (хотя в литературе часто встречаются обозначения с константой $\frac{1}{2\pi}$ туда и 1 обратно):

**Определение 8.89.** Преобразование Фурье задаётся по формуле

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx}\, dx,$$

обратное преобразование Фурье задаётся по формуле

$$\tilde{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iyx}\, dx.$$

Будем обозначать их как операторы $F$ и $F^{-1}$, $\hat{f} = F[f], \tilde{f} = F^{-1}[f]$.

В терминах преобразования Фурье мы можем переформулировать следствие 8.88.

**Следствие 8.90.** *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$ непрерывна и в каждой точке удовлетворяет условию Гёльдера, Дини или Дирихле, то выполняется формула обращения для преобразования Фурье*

$$f = F^{-1}[F[f]], \quad f = F[F^{-1}[f]].$$

*Задача* 8.91. Приведите пример функции $f \in L_1(\mathbb{R})$, у которой преобразование Фурье $\hat{f}$ не лежит в $L_1(\mathbb{R})$.

[[ Попробуйте характеристическую функцию отрезка. ]]

Нам понадобятся следующие простые утверждения:

**Теорема 8.92** (Производная преобразования Фурье). *Если $f, xf \in L_1(\mathbb{R})$, то*

$$\frac{d}{dy} F[f] = -iF[xf].$$

*Доказательство.* Достаточно продифференцировать под знаком интеграла и ограничить получившееся выражение независимо от параметра $y$ функцией $|xf|$ с конечным интегралом, тогда утверждение получается из теоремы 5.106. □

**Теорема 8.93** (Преобразование Фурье производной). *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$, является абсолютно непрерывной, и её определённая почти всюду производная $f'$ тоже лежит в $L_1(\mathbb{R})$. Тогда*

$$F[f'] = iyF[f].$$

*Доказательство.* Распишем по определению (преобразование Фурье будем писать без коэффициента):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ixy}\,dx = f(x)e^{-ixy}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + iy\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx.$$

Осталось заметить (как мы уже замечали в доказательстве леммы 8.46), что $f(x)$ должна иметь нулевые пределы на бесконечности. Так как $f$ представляется интегралом от своей абсолютно интегрируемой производной, то у неё есть конечные пределы на бесконечности. Эти пределы не могут быть ненулевыми, так как тогда $f$ не могла бы быть абсолютно интегрируемой. ☐

В качестве полезного примера рассмотрим преобразование Фурье гауссовой плотности.

**Лемма 8.94** (Преобразование Фурье для гауссовой плотности). *Выполняется формула*

$$F[e^{-x^2/2}] = e^{-y^2/2}.$$

*Доказательство.* Пусть $f(x) = e^{-x^2/2}$ и $F[e^{-x^2/2}] = g(y)$. По формуле для производной преобразования Фурье и преобразования Фурье производной получим

$$g'(y) = -iF[xf] = iF[f'] = -yg(y).$$

Решая получившееся дифференциальное уравнение, получаем

$$\ln g(y) = -\int y\,dy = -\frac{y^2}{2} + \mathrm{const},$$

то есть $g(y) = Ae^{-y^2/2}$. Константу $A$ можно найти, заметив, что $f$ чётная, а значит обратное преобразование Фурье действует на неё так же, как и прямое. Но так как обратное преобразование Фурье должно вернуть её обратно, то $A^2 = 1$. Из этого следует, что $A = 1$, так как случай $A = -1$ исключается тем, что очевидно $g(0) > 0$. ☐

Можно заметить, что предыдущее доказательство даёт ещё один способ вычисления интеграла Пуассона. В принципе, считая известным интеграл Пуассона из теоремы 5.128, можно действовать в обратную сторону и обосновать таким образом нахождение интеграла Дирихле, который нормирует формулы в определении преобразования Фурье.

*Задача* 8.95. Установите, как преобразуется $\hat{f}$, если $f$ преобразуется сдвигом

$$(T_t^* f)(x) = f(x+t).$$

*Задача* 8.96. Установите, как преобразуется $\hat{f}$, если $f$ преобразуется гомотетией

$$(H_k^* f)(x) = f(kx).$$

*Задача* 8.97. Как отличить преобразование Фурье $\hat{f}$ действительнозначной функции $f$ от преобразований Фурье комплекснозначных функций, при условии выполнения формулы обращения для преобразования Фурье?

*Задача* 8.98. Докажите, что функция вида $P(x)e^{-x^2/2}$, где $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, при преобразовании Фурье переходит в функцию того же вида, причём степень многочлена не повышается.

[[ Используйте производную преобразования Фурье. ]]

8.15. **Пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ и преобразование Фурье.** Далее мы переходим к вопросу о том, какие пространства функций переводятся преобразованием Фурье в себя.

**Определение 8.99.** Пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ — это пространство бесконечно дифференцируемых функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, у которых конечны все полунормы ($k, n \geqslant 0$)

$$\|f\|_{n,k} = \sup \left\{ \left| x^n f^{(k)}(x) \right| \,\Big|\, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

*Задача* 8.100. Проверьте, что функция $e^{-x^2/2}$ лежит в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

*Задача* 8.101. Проверьте, что указанные полунормы $\|\cdot\|_{n,k}$ в ограничении на пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ являются нормами, то есть из равенства нулю одной такой нормы для некоторой функции следует равенство нулю функции.

**Определение 8.102.** Последовательность $(f_m)$ функций из $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *стремится* к $f_0$, если для любых $n, k \geqslant 0$

$$\|f_m - f_0\|_{n,k} \to 0, \quad m \to \infty.$$

Можно определить и топологию на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, объявив предбазовыми открытыми окрестностями функции $f_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ множества

$$U_{n,k,\varepsilon}(f_0) = \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mid \|f - f_0\|_{n,k} < \varepsilon\},$$

объявив базовыми открытыми окрестностями $f_0$ любые конечные пересечения предбазовых окрестностей $f_0$ и объявив открытыми те множества, которые содержат каждый свой элемент вместе со своей базовой открытой окрестностью. Объяснения этой топологической терминологии можно найти в разделе 9.10.

*Задача* 8.103. Проверьте по определению, что пересечение конечного числа открытых подмножеств $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ является открытым.

*Задача* 8.104. Проверьте, что любая базовая открытая окрестность $f_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ является открытым множеством по определению.

[[ Обоснуйте и используйте неравенство треугольника для полунорм. Полезно также с помощью результата предыдущей задачи свести вопрос к предбазовой окрестности. ]]

**Теорема 8.105.** *Преобразование Фурье $F$ непрерывно переводит $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ и имеет непрерывное обратное $F^{-1}$.*

*Доказательство.* Заметим, что функции из $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ убывают на бесконечности быстрее любой степени $x$, и поэтому имеют конечный интеграл. Кроме того, $\sup |F[f]|$ ограничен $L_1$-нормой $\|f\|_1$ с точностью до константы. Также заметим, что

$$\|f\|_1 \leqslant \pi(\|f\|_{0,0} + \|f\|_{2,0}),$$

так как если $|f| \leqslant M$ и $|x^2 f| \leqslant N$ всюду, то $(1+x^2)|f| \leqslant M+N$ и интеграл от $|f|$ не более $M+N$, умноженного на интеграл от $\frac{1}{1+x^2}$, который равен $\pi$.

Таким образом мы можем ограничить $\|F[f]\|_{0,0}$ в терминах полунорм исходной функции $f$. Если же нас интересует супремум выражения вида

$$y^n \frac{d^k}{dy^k} F[f],$$

то по теоремам о производной преобразования Фурье и преобразовании Фурье производной, это выражение с точностью до константы является преобразованием Фурье от

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^k f(x)).$$

Заметим, что по формуле Лейбница имеет место выражение

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^k f(x)) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (n-m)! \binom{k}{n-m} x^{k-n+m} \frac{d^m f}{dx^m},$$

конкретные константы в котором нас не очень интересуют. Все слагаемые в правой части ограничены нормами $\|f\|_{k-n+m,m}$ и даже ограничены после умножения на $x^2$, следовательно их интегралы тоже ограничены $\mathcal{S}$-нормами функции $f$. В итоге мы будем иметь оценку типа (с какими-то коэффициентами)

$$\|F[f]\|_{n,k} \leqslant \sum_{k' \leqslant k+2,\ n' \leqslant n} C_{k',n',k,n} \|f\|_{k',n'}, \tag{8.5}$$

которая доказывает определённость преобразования Фурье как линейного отображения $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Отсюда следует и непрерывность преобразования Фурье по Гейне, так как если $\|f_m - f_0\|_{n,k} \to 0$ при $m \to \infty$ и любых $n$ и $k$, то также $\|F[f_m] - F[f_0]\|_{n,k} \to 0$ при $m \to \infty$ и любых $n$ и $k$ по неравенству (8.5).

Для обратного преобразования Фурье $F^{-1}$ те же рассуждения показывают, что оно тоже переводит $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ непрерывно. Так как функции из $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ дифференцируемы, то для них выполняются условия следствия 8.90 и отображения $F$ и $F^{-1}$ являются взаимно обратными. ☐

*Задача* 8.106. Проверьте непрерывность преобразования Фурье на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ по Коши — что для любой базовой окрестности $U \ni F[f_0]$ найдётся базовая окрестность $V \ni f_0$, такая что $F(V) \subseteq U$.

[[ Сначала убедитесь, что достаточно доказать непрерывность для случая, когда $U$ — предбазовая окрестность. ]]

*Задача* 8.107 (Формула суммирования Пуассона). Докажите для функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ формулу

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

[[ Рассмотрите $2\pi$-периодическую функцию

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n),$$

разложите её в ряд Фурье, обоснуйте его сходимость к $g$ и примените соответствующее равенство. ]]

8.16. **Унитарность преобразования Фурье.** В этом разделе мы установим свойство сохранения скалярного произведения и $L_2$-нормы преобразованием Фурье. Сначала мы установим его для пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, для которого с интегралами в определении преобразования Фурье можно работать напрямую.

**Теорема 8.108.** *Для функций $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ имеет место унитарность преобразования Фурье (равенство Парсеваля):*

$$(\hat{f}, \hat{g}) = (f, g),$$

*где скалярное произведение (для комплекснозначных функций) определено стандартно:*

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

*Доказательство.* Запишем по определению скалярного произведения и преобразования Фурье функции $f$

$$(\hat{f}, \hat{g}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\overline{\hat{g}(y)}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\widetilde{\overline{g(y)}}\, dxdy.$$

Модуль выражения под повторным интегралом равен $|f(x)\widetilde{\overline{g(y)}}|$ и имеет конечный интеграл по двум переменным в силу того, что $f, \widetilde{\overline{g}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L_1(\mathbb{R})$. Поэтому можно применить теорему Фубини и интегрировать в другом порядке. Проинтегрировав то же выражение по $y$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\widetilde{\overline{g(y)}}\, dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx = (f, g).$$

☐

Теперь мы несколько абстрактно определим преобразование Фурье для всех функций из $L_2(\mathbb{R})$.

**Следствие 8.109.** *Преобразование Фурье продолжается до унитарного (сохраняющего скалярное умножение) оператора* $F : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$.

*Доказательство.* Действительно, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ плотно в $L_2(\mathbb{R})$ (так как в $L_2$ любую функцию можно сколь угодно хорошо приблизить гладкими с компактными носителями). Следовательно, для любой $f \in L_2(\mathbb{R})$ можно найти последовательность функций $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, которая сходится к $f$ в смысле нормы $L_2$.

Последовательность $(\hat{f}_n)$ тогда тоже фундаментальна в норме $L_2$ по теореме 8.108. Поэтому, в силу полноты $L_2(\mathbb{R})$, последовательность $(\hat{f}_n)$ имеет предел, который можно считать преобразованием Фурье $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R})$. Если взять другую последовательность $(g_n)$ функций из $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ с тем же пределом $f$ в смысле нормы $L_2$, то «перемешав» её с последовательностью $(f_n)$ (то есть составив новую последовательность из двух, беря их элементы по очереди) мы получим тоже фундаментальную последовательность. А соответствующее перемешивание $(\hat{f}_n)$ и $(\hat{g}_n)$ по теореме 8.108 тоже будет фундаментальной последовательностью в норме $L_2$, то есть пределы $(\hat{f}_n)$ и $(\hat{g}_n)$ в $L_2(\mathbb{R})$ совпадают.

Приведённая конструкция корректно определяет преобразование Фурье как отображение $F : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$. Его унитарность, $(f, g) = (F(f), F(g))$, следует из предельного перехода в равенстве $(f_n, g_n) = (F(f_n), F(g_n))$ из теоремы 8.108, когда $f_n, g_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ и $f_n \to f$, $g_n \to g$ в смысле $L_2$-нормы. ☐

Заметим, что преобразование Фурье функций из $L_2$ построено весьма неявно и совершенно неочевидно, что его вообще можно задать явно. Вообще $L_2(\mathbb{R}) \not\subseteq L_1(\mathbb{R})$ и поэтому даже сходимость интеграла в определении преобразования Фурье находится под вопросом. Однако, как уже было упомянуто в связи с рядами Фурье, Л. Карлесон (1966) доказал, что явные формулы преобразования Фурье работают для функций из $L_2(\mathbb{R})$ для почти всех значений аргумента.

Хотя явные формулы и не всегда работают, для преобразования Фурье имеет место сходимость в $L_2$-норме частичных интегралов, аналогичная сходимости в $L_2$-норме частичных сумм ряда Фурье. Следующие лемма и теорема устанавливают этот факт.

**Лемма 8.110.** *Если функция $f \in L_2(\mathbb{R})$ имеет компактный носитель, то её определённое явной формулой преобразование Фурье почти всюду совпадает с её преобразованием Фурье, определённым неявно в следствии 8.109.*

*Доказательство.* Пусть носитель $f$ содержится в отрезке $[a,b]$. В силу неравенства Коши–Буняковского выполняется оценка $\|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\cdot\|f\|_2$. Следовательно, $\hat{f}$ определена явно и

$$\|\hat{f}\|_C \leqslant \|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\cdot\|f\|_2. \tag{8.6}$$

Применим теперь неявное определение из следствия 8.109. Приблизим $f$ в норме $L_2$ последовательностью бесконечно гладких функций $s_n$ с носителями в $[a,b]$, заметив, что доказательство теоремы 8.19 на самом деле не увеличивает носитель функции. Тогда по следствию 8.109 имеет место сходимость $\hat{s}_n \to g$ в $L_2$-норме и нам надо показать, что $g(y) = \hat{f}(y)$ почти всюду. Оценка (8.6) применима для $s_n$ и их линейных комбинаций с $f$, поэтому

$$\|\hat{s}_n - \hat{f}\|_C \leqslant \|s_n - f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\cdot\|s_n - f\|_2 \to 0,$$

то есть имеет место равномерная сходимость $\hat{s}_n \to \hat{f}$.

Предположим теперь, что $g(y) \neq \hat{f}(y)$ на множестве положительной меры. Тогда из непрерывности меры Лебега для достаточно малого $\varepsilon > 0$ неравенство $|g(y) - \hat{f}(y)| \geqslant 2\varepsilon$ выполняется на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$ положительной меры. В силу равномерной сходимости неравенство $|\hat{s}_n(y) - \hat{f}(y)| \leqslant \varepsilon$ выполняется на $X$ для достаточно больших $n$. Но тогда для тех же $n$ выполняется $|\hat{s}_n(y) - g(y)| \geqslant \varepsilon$. Возводя в квадрат и интегрируя это неравенство, мы получим $\|\hat{s}_n - g\|_2 \geqslant \varepsilon\sqrt{\mu(X)}$, что противоречит сходимости в $L_2$. Следовательно, $g$ и $\hat{f}$ совпадают почти всюду. ☐

**Теорема 8.111.** *Для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ её определённое в следствии 8.109 преобразование Фурье $\hat{f}$ является пределом в $L_2$-норме её частичных преобразований Фурье*

$$\left\| \hat{f} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-h}^{h} f(x)e^{-ixy}\,dx \right\|_2 \to 0, \quad h \to +\infty.$$

*То же верно для обратного преобразования Фурье.*

*Доказательство.* При фиксированном $h$ выражение $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-h}^{h} f(x)e^{-ixy}\,dx$ есть преобразование Фурье функции $f_h$, которая равна $f$ на отрезке $[-h,h]$ и равна нулю за его пределами. По лемме 8.110 эти явные преобразования Фурье $\hat{f}_h$ совпадают с абстрактными преобразованиями Фурье, определёнными в следствии 8.109.

В силу непрерывности интеграла Фурье в смысле

$$\int_{-h}^{h} |f(x)|^2\,dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx, \quad h \to +\infty,$$

функции $f_h$ стремятся к $f$ в $L_2$-норме при $h \to +\infty$. По следствию 8.109 тогда получается, что $\hat{f}_h \to \hat{f}$ в $L_2$-норме, что и есть утверждение теоремы для преобразования Фурье. Для обратного преобразования Фурье рассуждения полностью аналогичны. ☐

*Задача* 8.112. Посчитайте следующие интегралы с помощью унитарности преобразования Фурье:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

*Задача* 8.113 (Соотношение неопределённостей для преобразования Фурье). Докажите, что для любой функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ и любых двух чисел $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\|(x - x_0)f(x)\|_2 \cdot \|(y - y_0)\hat{f}(y)\|_2 \geqslant \frac{1}{2}\|f\|_2^2.$$

Выясните, в каком случае выполняется равенство.

[[ Сдвигом функции на $-x_0$ сведите к случаю $x_0 = 0$, проверив, что происходит при сдвиге $f$ с её преобразованием Фурье. Сдвигом $\hat{f}(y)$ на $-y_0$ сведите к случаю $y_0 = 0$. В этом частном случае с помощью теоремы 8.108 перепишите неравенство в виде

$$\|xf(x)\|_2 \cdot \|f'\|_2 \geqslant \frac{1}{2}\|f\|_2^2$$

и докажите его с помощью неравенства Коши–Буняковского. Для анализа случая равенства вспомните условия равенства в неравенстве Коши–Буняковского. ]]

8.17. **Ряд и интеграл Фурье в точках разрыва 1-го рода и явление Гиббса.** Для функции $f$ одной переменной с разрывом первого рода в точке $x_0$ остаётся возможность, что ряд Фурье или интеграл Фурье будут сходиться к среднему значению между пределами

$$M_f(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}.$$

Действительно, нетрудно преобразовать выражение свёртки с ядром Дирихле для частичной суммы ряда Фурье в (суммы идут по двум вариантам выбора знака)

$$\begin{aligned}
T_n(f, x_0) - M_f(x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)D_n(t)\,dt - M_f(x_0) =\\
= \sum_{\pm} \int_0^{\pi} f(x_0 \pm t)D_n(t)\,dt - \sum_{\pm} 1/2 f(x_0 \pm 0) =\\
= \sum_{\pm} \int_0^{\pi} f(x_0 \pm t)D_n(t)\,dt - \sum_{\pm} f(x_0 \pm 0) \int_0^{\pi} D_n(t)\,dt =\\
= \sum_{\pm} \int_0^{\pi} (f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0))D_n(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Далее это выражение можно анализировать так же, как в случае сходимости к значению функции. Например выполнение условия Гёльдера для разрывной функции в окрестности точки разрыва $x_0$ в виде

$$|f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)| \leqslant C|t|^{\alpha},$$

с положительными $C$ и $\alpha$, гарантирует сходимость ряда Фурье к $M_f(x_0)$ в точке $x_0$.

Ещё проще анализировать сходимость для функций, имеющих ограниченную вариацию в окрестности точки $x_0$. Разложение функции ограниченной вариации в сумму монотонных показывает, что разрыв у такой функции будет не более чем первого рода, а далее все рассуждения из доказательства теоремы 8.63 проходят.

*Задача* 8.114. Сформулируйте утверждения и проделайте подробно доказательства признаков сходимости ряда Фурье и интеграла Фурье в точке $x_0$ для функций с разрывом первого рода в точке $x_0$ к значению $M_f(x_0)$.

[[ В признаке Липшица условие Гёльдера применяется точно так же, как в непрерывном случае. В признаке Дирихле достаточно по отдельности разложить выражения $f(x_0+t) - f(x_0+0)$ и $f(x_0-t) - f(x_0-0)$ в суммы монотонных функций, стремящихся к нулю при $t \to +0$, а потом вынести монотонные функции за интеграл с помощью второй теоремы о среднем и воспользоваться равномерной ограниченностью интегралов от ядер Дирихле. В признаке Дини интегрируемость выражений $\int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)|}{|t|}\,dt$ вместе с леммой об осцилляции сразу даёт результат. ]]

Помимо указанных выше и в подсказке способов, есть и другой подход к решению предыдущей задачи. Пусть функция $s(t)$ равна $\operatorname{sgn} t$ на интервале $(-\pi, \pi)$, при рассмотрении интеграла Фурье равна нулю за пределами этого интервала, а при рассмотрении ряда Фурье — продолжена $2\pi$-периодически. Если мы интересуемся разложением Фурье функции $f$, в точке $x_0$ функция $f$ имеет разрыв первого рода и $2C = f(x_0+0) - f(x_0-0)$, то функция

$$g(x) = f(x) - cs(x - x_0)$$

может считаться непрерывной в $x_0$ при доопределении $g(x_0) = M_f(x_0)$. Для функции $s(t)$ мы знаем, что она нечётная, что автоматически гарантирует сходимость её ряда или интеграла Фурье в $t = 0$ к нулю, что остаётся верным для её сдвига и точки $x_0$. Следовательно, утверждения о сходимости ряду или интеграла Фурье функции $f$ к $M_f(x_0)$ следуют из утверждений о сходимости ряда или интеграла Фурье функции $g$ к $g(x_0)$.

Очевидно, что сходимость к разрывной функции не может быть равномерной. На самом деле мы можем более детально изучить характер этой неравномерности. Для простоты рассмотрим случай интеграла Фурье, точку $x_0 = 0$ и разложение $g(x) = f(x) - cs(x)$. Если функция $g$ достаточно хорошая, чтобы её интеграл Фурье сходился к ней равномерно в окрестности точки $0$, то остаётся изучить сходимость интеграла Фурье к функции в окрестности нуля, которую будем считать определённой формулами

$$s(x) = \operatorname{sgn}(x) - 1/2 \operatorname{sgn}(x-\pi) - 1/2 \operatorname{sgn}(x+\pi).$$

Хотя функция $\operatorname{sgn} x$ не абсолютна интегрируема, она легко представляется интегралом Фурье

$$\operatorname{sgn} x = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin xy}{y}\, dy = \lim_{h\to+\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^h \frac{\sin xy}{y}\, dy.$$

Обозначим

$$S(\eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\eta \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Эта функция стремится к $1$ при $\eta \to +\infty$ (так как это интеграл Дирихле), но её максимум должен достигаться в одной из точек, где её производная равна нулю — это точки $\pi k$ при $k \in \mathbb{N}$. Так как интегралы

$$\int_{\pi(k-1)}^{\pi k} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

меняют знак и по модулю убывают с ростом $k$, то на самом деле максимум достигается при $k = 1$ и он больше всего несобственного интеграла от $0$ до $+\infty$. Это означает, что $S(\pi) = 1 + G$ при некотором $G > 0$ (в качестве упражнения можно оценить эту величину).

Теперь запишем

$$\operatorname{sgn} x = \lim_{h\to+\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^h \frac{\sin xy}{y}\, dy = \lim_{h\to+\infty} S(hx).$$

Отсюда следует, что «частичный интеграл Фурье» в для $\operatorname{sgn} x$ точках $\pi/h$ принимает значение $1+G$, то есть вылезает за область значений $\operatorname{sgn} x$ на $G$ при всех значениях $h$, это называется *явление Гиббса*. В определении функции $s(x)$ есть ещё слагаемые, которые аналогично выражаются в виде интеграла Фурье как

$$\operatorname{sgn}(x \pm \pi) = \lim_{h\to+\infty} S(h(x \pm \pi)).$$

Предел в этом выражении равномерно стремится к нулю по $x$ в окрестности нуля $(\pi/2, \pi/2)$, так как в этой окрестности $|h(x \pm \pi)| \geqslant \pi h/2$, а функция $S$ имеет конечные пределы на бесконечности, в сумме дающие нуль. На явление Гиббса такие слагаемые не влияют, и оно имеет место в окрестности нуля и для функции $s$.

С помощью более сложных выкладок можно обнаружить такое же явление Гиббса для частичных сумм ряда Фурье функции $s$, продолженной $2\pi$-периодически.

*Задача* 8.115. Докажите, что при суммировании ряда Фурье по Фейеру явление Гиббса отсутствует, то есть при нахождении значений функции в выпуклом компакте $Y \subset \mathbb{C}$ значения её сумм Фейера не выходят за пределы $Y$.

[[ Используйте неотрицательность ядра Фейера. ]]

8.18. **Многомерный интеграл Фурье и гауссовы плотности.** Для интеграла Фурье можно определить его многомерный вариант по формулам ($\cdot$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$):

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} c(y)e^{ix\cdot y}\,dy,$$

где

$$c(y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot y}\,dx.$$

В этом разделе мы дадим некоторые достаточные условия на функцию $f$, чтобы она представлялась интегралом Фурье по приведённой формуле.

Сравнивая эту формулу с одномерным вариантом, следует отметить, что интеграл в смысле главного значения тоже можно было бы определить и использовать в многомерном случае. Однако уже не вполне ясно, следует ли брать интеграл по шарам и устремлять их радиус к бесконечности, или по кубам с центром в начале координат и устремлять их размер к бесконечности. Кубы привели бы к формуле многомерного ядра Дирихле как произведения одномерных, поведение которых нам понятно; но при этом определение с помощью кубов не инвариантно относительно вращений и поэтому неестественно.

Пока мы просто будем предполагать, что обе функции $f$ и $c$ являются абсолютно интегрируемыми, чтобы избавиться от этих трудностей. В задаче 8.120 будет показано, как это можно гарантировать в терминах одной только функции $f$.

Начнём изучение сходимости многомерного интеграла Фурье с примера, который на самом деле будет инструментом для разбора более общего случая.

**Лемма 8.116** (Интеграл Фурье для многомерной гауссовой плотности). *При любом* $\alpha > 0$ *имеет место формула*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\alpha|x|^2}{2} - ix\cdot y}\,dx = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\alpha^{n/2}}e^{-\frac{|y|^2}{2\alpha}}.$$

*Доказательство.* Одномерный вариант этого утверждения при $\alpha = 1$ доказан в лемме 8.94, случай произвольного положительного $\alpha$ следует из замены переменных $u = \sqrt{\alpha}x$. В $n$-мерном случае мы воспользуемся теоремой Фубини и тем фактом, что

$$e^{-\frac{\alpha|x|^2}{2} - ix\cdot y} = \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{\alpha x_k^2}{2} - ix_k y_k},$$

что сводит $n$-мерный интеграл к произведению одномерных. ☐

**Теорема 8.117** (Достаточное условие сходимости многомерного интеграла Фурье)**.** *Пусть функция $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ непрерывна в точке $x$, а функция переменной $y \in \mathbb{R}^n$,*

$$c(y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot y}\, dx,$$

*тоже оказалась в $L_1(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} c(y) e^{ix\cdot y}\, dy.$$

*Доказательство.* Рассмотрим выражение

$$f_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}^n} c(y) e^{ix\cdot y - \frac{\alpha|y|^2}{2}}\, dy$$

По теореме об ограниченной сходимости 5.101, так как $c(y)$ в $L_1(\mathbb{R}^n)$, это выражение стремится к

$$f_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} c(y) e^{ix\cdot y}\, dy$$

при $\alpha \to +0$. В этих терминах мы должны доказать, что на самом деле $f_0(x) = f(x)$. Подставим в формулу для $f_\alpha(x)$ определение $c(y)$:

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{-i\xi\cdot y} e^{ix\cdot y - \frac{\alpha|y|^2}{2}}\, d\xi dy = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{-i(\xi - x)\cdot y - \frac{\alpha|y|^2}{2}}\, d\xi dy.$$

Модуль подынтегрального выражения оценивается $|f(\xi)|e^{-\frac{\alpha|y|^2}{2}}$, значит оно интегрируемо и можно менять порядок интегрирования. Тогда по лемме 8.116 после интегрирования по $y$ получим

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi\alpha)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{-\frac{|\xi - x|^2}{2\alpha}}\, d\xi.$$

Это значит, что $f_\alpha(x)$ является свёрткой функции $f$ с гауссовой плотностью

$$\varphi_\alpha(t) = \frac{1}{(2\pi\alpha)^{n/2}} e^{-\frac{|t|^2}{2\alpha}}.$$

Нетрудно проверить (через интеграл Пуассона и замену переменных), что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\alpha(t)\, dt = 1,$$

а при любом $\delta > 0$

$$\int_{|t|\geqslant\delta} \varphi_\alpha(t)\, dt = \int_{|x|\geqslant \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}} \varphi_1(x)\, dx \to 0 \text{ при } \alpha \to +0$$

и

$$\sup\{\varphi_\alpha(t) \mid |t| \geqslant \delta\} = \frac{e^{-\frac{\delta^2}{2\alpha}}}{(2\pi\alpha)^{n/2}} \to 0 \text{ при } \alpha \to +0.$$

Из непрерывности $f$ в точке $x$ мы, для любого $\varepsilon > 0$, можем найти $\delta > 0$, такое что $|f(x+t) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ при $|t| \leqslant \delta$. Тогда мы можем оценить свёртку стандартным способом, начав с записи

$$f_\alpha(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x+t) - f(x))\varphi_\alpha(t)\, dt =$$
$$= \int_{|t|\leqslant\delta} (f(x+t) - f(x))\varphi_\alpha(t)\, dt + \int_{|t|\geqslant\delta} f(x+t)\varphi_\alpha(t)\, dt - \int_{|t|\geqslant\delta} f(x)\varphi_\alpha(t)\, dt.$$

Первый интеграл по модулю оценивается как $\varepsilon$, второй как

$$\|f\|_1 \cdot \sup\{\varphi_\alpha(t) \mid |t| \geqslant \delta\},$$

а третий как

$$|f(x)| \cdot \int_{|t|\geqslant\delta} \varphi_\alpha(t)\, dt.$$

Последние две оценки при $\alpha \to +0$ стремятся к нулю, а в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и вся разность $f_\alpha(x) - f(x)$ стремится к нулю при $\alpha \to +0$. ☐

Дальнейшее изучение свойств многомерного преобразования Фурье предлагается читателю в виде задач.

*Задача* 8.118 (Многомерная лемма Римана об осцилляции). Докажите, что если $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то интегралы

$$c(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot y}\, dx$$

стремятся к нулю при $|y| \to +\infty$.

[[ Аналогично одномерному случаю, приблизьте функцию в среднем гладкой функцией с компактным носителем. Для гладкой функции с компактным носителем воспользуйтесь формулой

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot y}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} df_x(y)\frac{e^{-ix\cdot y}}{i|y|^2}\, dx.$$

]]

*Задача* 8.119. Докажите, что если $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ имеет частную производную $g = \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то для коэффициентов Фурье этих двух функций выполняется соотношение

$$c_g(y) = iy_i c_f(y).$$

[[ Для начала заметьте, что по теореме Фубини у любой функции из $L_1(\mathbb{R}^n)$ ограничения на почти каждую прямую, параллельную оси $0x_i$, лежат в $L_1(\mathbb{R})$. Применив это наблюдение к $f$ и $g$ одновременно, можно с помощью результата задачи 8.37 интегрировать по частям выражение для коэффициента Фурье $g$ по переменной $x_i$ для почти всех значений оставшихся переменных, а потом интегрировать результат по оставшимся переменным. ]]

*Задача* 8.120. Докажите, что существование у $f$ частных производных до $n+1$ порядка включительно, лежащих в $L_1(\mathbb{R}^n)$, достаточно для абсолютной интегрируемости её коэффициента Фурье.

[[ Используя результат предыдущей задачи, выведите из существования $(n+1)$-ых производных у $f$ тот факт, что $P(y)c(y)$ стремится к нулю на бесконечности для любого многочлена $P(y)$ степени не более $n+1$. Выведите отсюда оценку вида

$$|c(y)| \leqslant \frac{C}{1 + (|x_1| + \dots + |x_n|)^{n+1}}$$

и конечность интеграла от $|c(y)|$. ]]

*Задача* 8.121. Найдите преобразование Фурье функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f = e^{-Q(x)}$, где $Q(x)$ — положительно определённая квадратичная форма.

[[ Аккуратно сделайте замену переменных $x = S'x$ и вспомните, какая замена переменной $y$ будет ей соответствовать. ]]

*Задача* 8.122. * Найдите преобразование Фурье функции $e^{-|x|}$ на $\mathbb{R}^n$.

[[ Рассмотрите меры с плотностями $\rho_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\rho_n(x) = \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}$. Заметьте, что при проекции мер $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ (то есть при интегрировании плотностей по одной координате) плотность $\rho_n$ преобразуется в $B(1/2, n/2)\rho_{n-1} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\rho_{n-1}$. Это позволит заключить, что преобразование Фурье $\rho_n$ с точностью до некоторой явной константы можно выразить через одномерное преобразование Фурье функции $\rho_1 = \frac{1}{1+x^2}$. Найдите это одномерное преобразование Фурье и используйте многомерную формулу обращения Фурье. ]]

8.19. **Пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и преобразование Фурье.** Сделав коэффициенты в формулах для коэффициента Фурье и интеграла Фурье одинаковыми, мы получим более симметричный вариант преобразования Фурье.

**Определение 8.123.** Преобразование Фурье функций $n$ переменных задаётся по формуле

$$\hat{f}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-iy\cdot x}\, dx,$$

обратное преобразование Фурье функций $n$ переменных задаётся по формуле

$$\tilde{f}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{iy\cdot x}\, dx.$$

Будем обозначать их как операторы $F$ и $F^{-1}$.

Надо заметить, что иногда в литературе несимметрично определяют преобразование Фурье с коэффициентом $(2\pi)^{-n}$, а обратное преобразование Фурье — с коэффициентом 1. Далее, как и в одномерном случае, удобно определить пространство функций, которое переводится преобразованием Фурье в себя.

**Определение 8.124.** Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ состоит из функций в $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, для которых конечны следующие полунормы. Для всех неотрицательных целых векторов $\mathbf{k}, \mathbf{n}$ длины $n$ определим полунормы $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ как

$$\|f\|_{\mathbf{n},\mathbf{k}} = \sup\left\{\left|\mathbf{x}^{\mathbf{n}}\frac{\partial^{|\mathbf{k}|}f}{\partial\mathbf{x}^{\mathbf{k}}}\right| \,\middle|\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

Здесь для точки $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и вектора неотрицательных целых чисел $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ используется обозначение

$$\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$$

и аналогичное обозначение для частных производных. Из определения ясно, что операции взятия частной производной и умножения на координатную функцию $x_i$ переводят $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в себя. Полезные свойства пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ устанавливаются аналогично одномерному случаю и представлены в виде задач.

*Задача* 8.125. Докажите, что преобразование Фурье функции из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ можно представить как композицию преобразований Фурье по каждой переменной.

[[ Заметьте, что быстрое убывание функций из $\mathcal{S}$ гарантирует их абсолютную интергрируемость по любому набору переменных. Интегрируйте в определении преобразования Фурье последовательно по переменным $x_i$. ]]

*Задача* 8.126. Докажите, что преобразование Фурье переводит $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в себя.

[[ Заметьте, что быстрое убывание функций из $\mathcal{S}$ гарантирует их абсолютную интегрируемость по любому набору переменных. Посчитайте производную преобразования Фурье в многомерном случае и используйте утверждение задачи 8.119 о преобразовании Фурье производной. Используйте эти формулы аналогично доказательству теоремы 8.105. ]]

*Задача* 8.127. Докажите, что преобразование Фурье $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ продолжается до унитарного оператора $F : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$.

[[ Установите унитарность на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ как в одномерном случае. Заметьте, что $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L_2(\mathbb{R}^n)$ и продолжите операцию $F$ с помощью фундаментальных в норме $\|\cdot\|_2$ последовательностей элементов $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. ]]

*Задача* 8.128. Докажите, что при подходящем определении «частичного преобразования Фурье» частичные преобразования Фурье функции $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ сходятся в $L_2$-норме к её преобразованию Фурье, определённому в предыдущей задаче.

[[ Проверьте работу рассуждений в доказательстве теоремы 8.111 в случае функций нескольких переменных. ]]

8.20. **Свёртка и преобразование Фурье.** Следующая теорема связывает свёртку с преобразованием Фурье и даёт крайне полезный на практике способ вычисления свёртки (с помощью *быстрого дискретного преобразования Фурье*). Доказательство без труда проводится для произвольной размерности, хотя и её одномерный случай очень полезен.

**Теорема 8.129.** *Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, рассмотрим их свёртку $h = f * g$, определённую как*

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)\,dt.$$

*Тогда*

$$\hat{h}(y) = (2\pi)^{n/2}\hat{f}(y)\hat{g}(y).$$

*Доказательство.* Заметим, что по теореме 6.17 интеграл в определении $h$ почти всюду существует и $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Запишем определение преобразования Фурье $h$ и подставим в него определение свёртки:

$$\hat{h}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)e^{-ix\cdot y}\,dtdx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(u)g(t)e^{-iu\cdot y - it\cdot y}\,dudt,$$

где сделана замена переменных $(x,t) \to (x-t,t) = (u,t)$ с единичным детерминантом. К полученному выражению применима теорема Фубини и оно представляется в виде

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(u)g(t)e^{-iu\cdot y - it\cdot y}\,dudt =$$
$$= (2\pi)^{n/2}\left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{-iu\cdot y}\,du\right)\cdot\left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} g(t)e^{-it\cdot y}\,dt\right) = (2\pi)^{n/2}\hat{f}(y)\hat{g}(y).$$

☐

*Задача* 8.130. Найдите преобразование Фурье функции одной переменной

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1+x, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 0; \\ 0, & \text{если } |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

[[ Заметьте, что $f = g * g$, где

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| \leqslant 1/2; \\ 0, & \text{если } |x| > 1/2. \end{cases}$$

]]

*Задача* 8.131. Докажите, что если преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ равно нулю, то $f$ равна нулю почти всюду.

[[ Заметьте, что для гладких функций утверждение следует из обращения преобразования Фурье $f = F^{-1}(F(f))$. Далее с помощью теоремы 6.22 приближайте произвольную $f \in L_1(\mathbb{R})$ гладкими $f * \varphi_k$ в среднем, проверив с помощью теоремы 8.129, что $F(f * \varphi_k) = 0$. ]]

*Задача* 8.132. Докажите, что для двух функций $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ свёртка $h = f * g$ определена, и $h(x)$ стремится к нулю при $x \to \infty$.

[[ Используйте неравенство Коши–Буняковского и приближение функций в $L_2(\mathbb{R})$ бесконечно гладкими с компактными носителями. ]]

*Задача* 8.133. Пусть функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на всей прямой. Докажите, что свёртка $\underbrace{f * \dots * f}_{k+2}$ будет $k$ раз непрерывно дифференцируема.

[[ Посмотрите на порядок убывания коэффициентов Фурье свёртки. ]]

*Задача* 8.134 (Теорема Бохнера в одну сторону). Пусть преобразование Фурье функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ действительно и неотрицательно. Докажите, что для любого набора точек $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ матрица с элементами $a_{ij} = f(p_i - p_j)$ эрмитова и неотрицательно определена.

[[ Заметьте, про преобразование Фурье $\hat{f}$ неотрицательно тогда и только тогда, когда оно является квадратом некоторой неотрицательной функции, и проверьте неотрицательную определённость $a_{ij}$ по определению. ]]

*Задача* 8.135. $^*$(Теорема Бохнера в другую сторону) Докажите в обратную сторону, что если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ такова, что для любого набора точек $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ матрица с элементами $a_{ij} = f(p_i - p_j)$ эрмитова и неотрицательно определена, то преобразование Фурье $\hat{f}$ действительно и неотрицательно.

[[ Переформулируйте свойство $f$ в терминах её преобразования Фурье, потом используйте приближение функций тригонометрическими многочленами. ]]

Мы оставляем для самостоятельного решения задачи про асимптотику конечномерных вариантов «интеграла Фейнмана», которая анализируется аналогично асимптотике коэффициентов Фурье.

*Задача* 8.136. Пусть $M$ — ориентированное многообразие, $\nu \in \Omega^n_c(M)$ — некоторая форма с компактным носителем, а $\varphi \in C^\infty(M)$ — фазовая функция. Докажите, что интеграл с параметром

$$\int_M e^{it\varphi(x)}\nu$$

при $t \to +\infty$ с точностью до быстро убывающих (быстрее любой степени $t$) слагаемых определяется значениями подинтегрального выражения в произвольно малой окрестности множества критических точек $\varphi$, то есть точек, где $d\varphi_x = 0$.

[[ Для окрестности $V$ множества критических точек $\varphi$ рассмотрите компакт и сделайте разбиение единицы для $\operatorname{supp} \nu \setminus V$, $\rho_1 + \dots + \rho_N \equiv 1$ так, чтобы в окрестности носителя каждой $\rho_i$ функцию $\varphi$ можно было бы выбрать за одну из координат. Потом по теореме Фубини начните интегрирование слагаемого $\rho_i e^{it\varphi}\nu$ с этой координаты и в интеграле по этой координате сделайте преобразования типа:

$$\int a(\varphi)e^{it\varphi}\,d\varphi = \frac{i}{t}\int a'(\varphi)e^{it\varphi}\,d\varphi = \frac{i^2}{t^2}\int a''(\varphi)e^{it\varphi}\,d\varphi = \dots.$$

]]

*Задача* 8.137. ** В том же интеграле с параметром

$$\int_M e^{it\varphi(x)}\nu$$

получите выражение для вклада невырожденной критической точки $\varphi$ с точностью до быстро убывающих слагаемых при $t \to +\infty$.

[[ Примените лемму Морса 6.45 к $\varphi$, потом в соответствующих координатах рассмотрите $e^{it\varphi}$ как элемент $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, примените к нему преобразование Фурье и разложите по степеням $\frac{1}{t}$. ]]

## 9. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

9.1. **Банаховы пространства и теорема Бэра.** Рассмотрим нормированные (и не только) векторные пространства в абстрактной постановке, но имея в виду, что содержательные применения будут происходить для пространств функций, которые мы уже изучали или планируем изучить.

**Определение 9.1.** Векторное пространство $E$ *нормировано*, если для любого вектора $v \in E$ имеется неотрицательное число $\|v\|$, удовлетворяющее свойствам:

а) $\|av\| = |a|\|v\|$ (однородность при умножении на константу);

б) $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$ (неравенство треугольника);

в) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (невырожденность).

Константы в этом определении можно считать действительными или комплексными. Для простоты мы будем в основном подразумевать действительные константы. Если свойство невырожденности нормы ослабляется до неравенства $\|v\| \geqslant 0$, то мы будем говорить (и на самом деле уже говорили), что задана не норма, а *полунорма*.

Любое нормированное пространство является метрическим с расстоянием $\rho(x, y) = \|x-y\|$, поэтому применимы соответствующие понятия, связанные с метрикой. Например, шаром с центром $c$ и радиусом $r$ в нормированном пространстве $E$ называется множество

$$B_c(r) = \{x \in E \mid \|x - c\| \leqslant r\}.$$

Можно заметить, что норма полностью определяется единичным шаром с центром в нуле $B_0(1)$, а именно

$$\|x\| = \inf\{|1/t| \mid tx \in B_0(1)\},$$

и любой другой шар отличается от единичного с геометрической точки зрения лишь сдвигом и гомотетией.

*Задача* 9.2. Докажите, что свойства нормированного пространства (над полем $\mathbb{R}$) можно переформулировать в терминах единичного шара $B_0(1)$ так: единичный шар является центрально симметричным выпуклым множеством и пересекает любую проходящую через начало координат прямую по невырожденному отрезку.

*Задача* 9.3. Докажите, что свойства нормированного пространства (над полем $\mathbb{C}$) можно переформулировать в терминах единичного шара $B_0(1)$ так: единичный шар является центрально симметричным выпуклым множеством и пересекает любую проходящую через начало координат комплексную прямую по невырожденному кругу.

Как мы знаем из примера евклидова пространства, удобно работать в ситуации, когда пространство *полное*, то есть любая фундаментальная последовательность в нём имеет предел. В бесконечномерных функциональных пространствах это свойство не обязательно выполняется, поэтому имеет смысл сделать определение:

**Определение 9.4.** Полное нормированное пространство (в котором любая фундаментальная последовательность имеет предел) называется *банаховым пространством*.

Примерами банахова пространства являются $C[a, b]$ (по критерию Коши для равномерной сходимости и непрерывности равномерного предела непрерывных функций), $L_p(X)$ (его полноту мы уже доказали), причём во втором случае в определении принимаются специальные меры для того, чтобы избежать вырождения нормы на функциях, почти всюду равных нулю — такие функции надо считать равными нулю по определению, то есть брать факторпространство по ним.

*Задача* 9.5. Докажите, что простраство $C[a, b]$ с нормой $\|\cdot\|_2$ не является полным.

[[ Вспомните о приближениях любой функции в $L_2[a, b]$ по норме $\|\cdot\|_2$ непрерывными. ]]

Несложно установить следующее важное свойство банаховых пространств, на самом деле верное для всех полных метрических пространств (и установленное для прямой $\mathbb{R}$ в теореме 1.156):

**Теорема 9.6** (Теорема Бэра для открытых множеств). *Счётное семейство открытых плотных подмножеств банахова пространства $E$ имеет непустое пересечение.*

*Доказательство.* Пусть $\{U_n\}$ — эти открытые множества. В первом их них можно выбрать шар $B_1$ радиуса не более $1/2$. Так как второе множество открыто и плотно, то можно выбрать $B_2 \subset U_2 \cap \operatorname{int} B_1$ радиуса не более $1/4$, и так далее можно выбирать $B_k \subset U_k \cap \operatorname{int} B_{k-1}$ радиуса не более $1/2^k$. Это будет последовательность вложенных замкнутых шаров стремящегося к нулю радиуса, значит все эти шары имеют общую точку по теореме 3.24. Следовательно, множества $U_k \supset B_k$, тоже имеют общую точку. ☐

Заметим, что полученное в теореме пересечение в свою очередь пересекает любое открытое множество (первый шар можно было выбрать в нём), то есть пересечение $\bigcap_k U_k$ на самом деле плотно в $E$ (то есть его замыкание совпадает с $E$). Есть также формулировка этой теоремы для замкнутых множеств, которая получается переходом к дополнениям:

**Следствие 9.7** (Теорема Бэра для замкнутых множеств). *Если банахово пространство $E$ покрыто счётным семейством замкнутых множеств, то одно из них имеет непустую внутренность.*

Следующее утверждение о неподвижной точке бывает полезно в разных ситуациях, например, наши доказательства теоремы об обратном отображении 6.26 и теоремы существования и единственности решений дифференциальных уравнений 7.73 можно было переформулировать в таких терминах:

**Теорема 9.8** (Неподвижные точки сжимающих отображений). *Пусть $E$ — банахово пространство. Пусть $X \subset E$ — замкнутое подмножество и $f : X \to X$ является* сжимающим, *то есть*

$$\exists C < 1 \quad \textit{такое что} \quad \forall x, y \in X \ \|f(x) - f(y)\| \leqslant C\|x - y\|.$$

*Тогда $f$ имеет* неподвижную точку *$x \in X$, такую что $f(x) = x$.*

*Доказательство.* Применим $f$ много раз к одной точке $x_0 \in X$,

$$x_n = f(x_{n-1}),$$

полученная последовательность будет фундаментальной, так как разности $\|x_n - x_{n-1}\|$ оцениваются геометрической прогрессией по свойству сжатия. По свойству полноты существует предел $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ и по непрерывности $f$ для него будет выполняться $f(x) = x$. Так как $X$ замкнуто, то $x \in X$ как предел точек из $X$. ☐

Следующие задачи полезно порешать, чтобы лучше познакомиться с банаховыми пространствами.

*Задача* 9.9. Докажите, что в конечномерном нормированном пространстве все нормы определяют одну и ту же топологию.

[[ Докажите для двух норм $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ в конечномерном пространстве $V$ неравенства

$$c\|v\|' \leqslant \|v\|'' \leqslant C\|v\|'$$

для любого $v \in V$ и фиксированных констант $c, C > 0$. ]]

*Задача* 9.10. Докажите, что в любом бесконечномерном банаховом пространстве $E$ найдётся последовательность $(v_k)$, такая что $\|v_k\| = 1$ для любого $k$ и $\|v_i - v_j\| \geqslant 1$ для любых $i \neq j$.

[[ Возьмите флаг конечномерных подпространств $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots$ и ищите $v_k \in V_k$ в параллельном $V_{k-1}$ аффинном подространстве на единичном расстоянии от $V_{k-1}$. ]]

*Задача* 9.11. Докажите, что пространство функций ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$ с нормой $|f(a)| + \|f\|_B$ банахово.

[[ Для начала обоснуйте, почему $|f(a)| + \|f\|_B$ является нормой. Далее проверьте наличие равномерного предела у любой фундаментальной в этой норме последовательности, проверьте что равномерный предел является пределом в данной норме, и что этот предел сам имеет ограниченную вариацию. ]]

9.2. **Двойственное пространство, его норма и принцип равномерной ограниченности.** Определение двойственного пространства из линейной алгебры можно модифицировать для векторных пространств с топологией, рассматривая только непрерывные линейные функционалы. Как мы увидим далее, это гораздо более разумный вариант двойственности при работе с функциональными пространствами.

**Определение 9.12.** Для нормированного пространства $E$ введём *двойственное пространство* $E'$ — пространство непрерывных линейных отображений $\lambda : E \to \mathbb{R}$ (или $\lambda : E \to \mathbb{C}$ для комплексных коэффициентов). Норму в $E'$ определим как

$$\|\lambda\| = \sup\{|\lambda(x)| \mid \|x\| \leqslant 1\}.$$

**Лемма 9.13.** *Линейный функционал $\lambda \in E'$ непрерывен тогда и только тогда, когда его норма конечна.*

*Доказательство.* Линейность позволяет использовать формулу

$$\lambda(x_0 + \Delta x) = \lambda(x_0) + \lambda(\Delta x)$$

и проверять, что $\lambda(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Иначе говоря, непрерывность линейного функционала достаточно проверять в нуле.

Теперь посмотрим на определение непрерывности в нуле по Коши: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что

$$\lambda(U_\delta(0)) \subseteq U_\varepsilon(0).$$

В силу линейности это равносильно тому, что

$$\lambda(U_1(0)) \subseteq U_{\varepsilon/\delta}(0) \quad \text{или даже} \quad \lambda(U_2(0)) \subseteq U_{2\varepsilon/\delta}.(0).$$

Из этого следует включение для замкнутых шаров

$$\lambda(B_0(1)) \subseteq B_0(2\varepsilon/\delta) \Rightarrow \|\lambda\| \leqslant 2\varepsilon/\delta.$$

В обратную сторону конечность нормы $\|\lambda\|$ и следующее из определения нормы неравенство

$$|\lambda(x)| \leqslant \|\lambda\| \cdot \|x\|$$

очевидно дают непрерывность $\lambda$ в нуле. ☐

Замечательным фактом является то, что переходя к двойственному от некоторого нормированного пространства мы автоматически получаем банахово пространство:

**Теорема 9.14.** *Двойственное $E'$ к нормированному пространству $E$ полно в своей норме.*

*Доказательство.* Пусть последовательность линейных функционалов $(\lambda_n)$ фундаментальна. Для любого $x \in E$ имеем

$$\|\lambda_n - \lambda_m\| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \forall x \in E,\ |\lambda_n(x) - \lambda_m(x)| \leqslant \varepsilon \|x\|,$$

следовательно, при любом фиксированном $x$, последовательность чисел $(\lambda_n(x))$ фундаментальна и сходится к некоторому значению $\lambda_0(x)$. Предельный переход в тождестве

$$\lambda_n(ax + by) = a\lambda_n(x) + b\lambda_n(y)$$

показывает, что $\lambda_0(x)$ линейно зависит от $x$. Так как фундаментальная последовательность функционалов была ограничена в $E'$, то мы имели по определению при любом $n$

$$|\lambda_n(x)| \leqslant M\|x\|$$

и в пределе тоже будем иметь

$$|\lambda_0(x)| \leqslant M\|x\|,$$

то есть $\lambda_0$ оказывается непрерывным. Переходя к пределу $m \to \infty$ в верном для достаточно больших $n$ и $m$ неравенстве

$$|\lambda_n(x) - \lambda_m(x)| \leqslant \varepsilon \|x\|,$$

мы получим

$$\forall x \in E,\ |\lambda_n(x) - \lambda_0(x)| \leqslant \varepsilon \|x\| \Leftrightarrow \|\lambda_n - \lambda_0\| \leqslant \varepsilon.$$

Это означает, что $\lambda_n \to \lambda_0$ в смысле нормы в $E'$. ☐

Следующая теорема поможет нам разобраться со сходимостью рядов Фурье непрерывных $2\pi$-периодических функций, точнее поможет понять, почему этой сходимости может и не быть.

**Теорема 9.15** (Теорема Банаха–Штейнгауза для линейных функционалов). *Пусть семейство линейных функционалов $Y \subset E'$ ограничено в любой точке банахова пространства $E$, то есть для любого $x \in E$ множество чисел*

$$\{\lambda(x) \mid \lambda \in Y\}$$

*ограничено. Тогда $Y$ ограничено в смысле нормы в $E'$.*

*Доказательство.* Рассмотрим множество $F = \{x \in E \mid \forall \lambda \in Y\ |\lambda(x)| \leqslant 1\}$, оно замкнуто как пересечение замкнутых множеств, заданных нестрогими неравенствами для непрерывных выражений. Условие теоремы означает, что любой $x \in E$ лежит в некотором

$$nF = \{x \in E \mid \forall \lambda \in Y\ |\lambda(x)| \leqslant n\}.$$

Иначе говоря, $E$ покрыто гомотетичными копиями $nF$, $n \in \mathbb{N}$. По теореме Бэра одно из множеств покрытия должно иметь непустую внутренность. Так как они гомеоморфны друг другу с помощью гомотетий, то исходное $F$ тоже должно иметь непустую внутренность, то есть содержать некоторый шар $B_c(r)$. Так как $F$ центрально симметрично, то оно содержит и шар $B_{-c}(r)$, а из выпуклости $F$ (как решения системы линейных неравенств) оно содержит и центрированный шар $B_0(r)$.

Мы видим по определению множества $F$, что на шаре $B_0(r)$ все функционалы из $Y$ ограничены единицей. Значит в силу их однородности на единичном шаре $B_0(1)$ они все ограничены величиной $1/r$, то $Y$ ограничено как подмножество $E'$. ☐

**Теорема 9.16** (Расходимость ряда Фурье в точке). *Существует непрерывная $2\pi$-периодическая функция, ряд Фурье которой расходится в точке $0$.*

*Доказательство.* На пространстве $\dot{C}[-\pi,\pi]$ непрерывных $2\pi$-периодических функций (с нормой $\|\cdot\|_C$) определим линейный функционал

$$\lambda_n(f)=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)\;dt,$$

это значение $n$-й частичной суммы ряда Фурье в точке $0$, $T_n(f,0)$. Можно заметить по определению нормы, что его норма равна

$$\|\lambda_n\|=\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\;dt.$$

Действительно, норма не более этого интеграла прямо по определению нормы, так как

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)\;dt\right|\leqslant \|f\|_C\cdot\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\;dt,$$

и в этом неравенстве можно сколь угодно приблизиться к равенству, рассматривая в качестве $f$ непрерывные приближения к $\operatorname{sgn} D_n(x)$ в среднем. Оценим интеграл модуля ядра Дирихле стандартным способом:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin(n+1/2)x|}{2\pi\,|\sin x/2|}\;dx\geqslant\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin(n+1/2)x|}{\pi|x|}\;dx=\int_{-\pi(n+1/2)}^{\pi(n+1/2)}\frac{|\sin u|}{\pi|u|}\;du\geqslant$$
$$\geqslant\int_{-\pi(n+1/2)}^{\pi(n+1/2)}\frac{\sin^2 u}{\pi|u|}\;du=\int_{-\pi(n+1/2)}^{\pi(n+1/2)}\frac{1-\cos 2u}{2\pi|u|}\;du\to\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos 2u}{2\pi|u|}\;du=+\infty,\quad n\to\infty,$$

где в конце имеется в виду несобственный интеграл на прямой. Получается, что нормы функционалов $\lambda_n$ при $n\to\infty$ не являются ограниченными. Следовательно, по теореме Банаха–Штейнгауза, применённой в обратную сторону, для некоторой функции $f\in\dot{C}[-\pi,\pi]$ значения $\lambda_n(f)=T_n(f,0)$ не будут ограничены и, следовательно, расходятся при $n\to\infty$. □

*Задача* 9.17 (Явный пример расходимости ряда Фурье в точке). Докажите, что ряд Фурье непрерывной $2\pi$-периодической функции

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin|2^{k^3}x|$$

расходится в нуле.

[[ Выпишите коэффициенты Фурье по косинусам (в силу чётности функции надо рассматривать только их) и оцените их сумму, то есть значение суммы ряда Фурье в нуле. Обоснуйте и используйте то, что для функции вида $\sin m|x|$ значение суммы Фурье в нуле неотрицательно. ]]

*Задача* 9.18. Существует ли непрерывная $2\pi$-периодическая функция, суммы Фурье которой в точке $0$ стремятся к $\infty$?

[[ В случае бесконечности со знаком, вспомните про суммы Фейера. Для случая бесконечности со знаком ограничьте слагаемые в ряде Фурье. ]]

9.3. **Линейные отображения между банаховыми пространствами.** По аналогии с непрерывными линейными отображениями $E \to \mathbb{R}$ ($E \to \mathbb{C}$) и их нормой, можно рассмотреть непрерывные линейные отображения между двумя банаховыми пространствами

$$A : E \to F.$$

Для линейных отображений между банаховыми (или даже просто нормированными) пространствами верен аналог леммы 9.13 с дословно тем же доказательством, который устанавливает, что непрерывность линейного отображения равносильна ограниченности его нормы, определённой так:

**Определение 9.19.** *Нормой* линейного отображения $A : E \to F$ между банаховыми пространствами называется

$$\|A\| = \sup\{\|A(x)\| \mid x \in E, \|x\| \leqslant 1\}.$$

При этом также полезно понимать, что норма является оптимальной константой в неравенстве (которое получается из определения продолжением по однородности)

$$\forall x \in E, \|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|.$$

*Задача* 9.20. Докажите, что для двух линейных отображений нормированных векторных пространств $f : E \to F$ и $g : F \to G$ и их композиции верно

$$\|g \circ f\| \leqslant \|g\| \cdot \|f\|.$$

[[ Действуйте по определению нормы линейного отображения. ]]

Как и в случае отображения между конечномерными линейными пространствами, мы можем говорить о ядре и образе непрерывного линейного отображения. Ядро

$$\ker A = \{x \in E \mid Ax = 0\}$$

по определению замкнуто (как прообраз нуля при непрерывном отображении). Важно понимать, что образ $A(E)$ в общем случае не обязан быть замкнутым, естественные примеры рассматриваются в следующих задачах.

*Задача* 9.21. Докажите, что естественные вложения $C[a, b] \to L_2[a, b]$ и $L_2[a, b] \to L_1[a, b]$ непрерывны.

[[ Установите соответствующие неравенства между нормами. ]]

*Задача* 9.22. Докажите, что образ вложения $C[a, b] \to L_2[a, b]$ не замкнут.

[[ Проверьте, что образ плотен в $L_2[a, b]$. Приведите пример функции в $L_2[a, b]$, которая не равна почти всюду никакой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции. ]]

Полезно понимать, что любое замкнутое подпространство $G \subset E$ является ядром некоторого непрерывного отображения банаховых пространств. Для этого нам надо превратить факторпространство $E/G$ в банахово пространство так, чтобы естественное отображение $E \to E/G$ стало непрерывным.

**Определение 9.23.** Если $G \subset E$ является замкнутым подпространством банахова пространства $E$, то на факторпространстве $E/G$ определим норму как

$$\|x + G\| = \inf\{\|x + y\| \mid y \in G\} = \inf\{\|x - y\| \mid y \in G\} = \operatorname{dist}(x, G) = \operatorname{dist}(0, x + G).$$

**Лемма 9.24.** *Определённая выше функция* $\|\cdot\| : E/G \to \mathbb{R}$ *для замкнутого* $G \subset E$ *в банаховом пространстве* $E$ *является нормой.*

*Доказательство.* Невырожденность нормы следует из того, что для замкнутого $G \subset E$

$$\operatorname{dist}(x, G) = 0 \Leftrightarrow x \in G.$$

Однородность для $a \neq 0$ последует из того, что $aG = G$ и

$$\inf\{\|ax - y\| \mid y \in G\} = \inf\{\|ax - ay\| \mid y \in G\} = |a| \cdot \inf\{\|x - y\| \mid y \in G\},$$

а для $a = 0$ из того, что $\|0 + G\| = 0$.

Для доказательства неравенства треугольника заметим, что $G + G = G$ и

$$\|x + y + G\| = \inf\{\|x + y + z\| \mid z \in G\} = \inf\{\|x + y + z + t\| \mid z, t \in G\} \leqslant$$
$$\leqslant \inf\{\|x+z\|+\|y+t\| \mid z, t \in G\} = \inf\{\|x+z\| \mid z \in G\}+\inf\{\|y+t\| \mid t \in G\} = \|x+G\|+\|y+G\|.$$

□

**Лемма 9.25.** *Естественная проекция $\pi : E \to E/G$ банахова пространства на его фактор-пространство $E/G$ по замкнутому подпространству $G \subset E$ имеет единичную норму.*

*Доказательство.* Так как по определению $\|\pi(x)\| = \|x + G\| \leqslant \|x\|$, то норма проекции $\pi$ не более 1. По тому же определению для любого $x \in E$ найдётся последовательность $y_n \in G$, такая что

$$\|\pi(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|x + y_n\|.$$

Заметив, что $\pi(x) = \pi(x + y_n)$, мы видим, что неравенство $\|\pi(x)\| \leqslant \|x\|$ в общем случае не улучшается (при $G \neq E$) и норма $\pi$ в точности равна 1. □

**Лемма 9.26.** *Факторпространство банахова пространства по замкнутому подпространству полно.*

*Доказательство.* Пусть последовательность $(y_n)$ в $E/G$ фундаментальна. Нам достаточно доказать сходимость какой-нибудь её подпоследовательности. Аналогично доказательству полноты $L_p$ в теореме 8.16, мы можем выбрать подпоследовательность, которую для краткости обозначим так же, $(y_n)$, для которой будет выполняться

$$\forall n \geqslant 2, \|y_n - y_{n-1}\| \leqslant 2^{-n}.$$

Тогда вопрос сведётся к существованию суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_1 = y_1$, а $u_n = y_n - y_{n-1}$ и $\|u_n\| \leqslant 2^{-n}$ начиная со второго элемента.

По определению нормы в $E/G$ мы можем выбрать прообраз $v_n \in \pi^{-1}(u_n)$ так, чтобы $\|v_n\| \leqslant 2\|u_n\|$. Но тогда при $n \geqslant 2$ будет выполняться $\|v_n\| \leqslant 2^{1-n}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ будет сходиться в $E$ по фундаментальности к некоторому $x$. Если $x_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$, то $y_n$ соответствует классу эквивалентности $x_n + G$. Если $x_n \to x$ в $E$, то $y = \pi(x) \in E/G$ окажется пределом $y_n$, так как по лемме 9.25 проекция $\pi$ непрерывна. □

**Лемма 9.27.** *Если отображение банаховых пространств $A : E \to F$ непрерывно, то соответствующее ему отображение $\overline{A} : E/\ker A \to F$ тоже непрерывно и $\|\overline{A}\| = \|A\|$.*

*Доказательство.* Возьмём $\varepsilon > 0$ и положим $G = \ker A$. Для элемента $y \in E/G$ выберем его представителя $x \in E$ так что $\|x\| \leqslant (1+\varepsilon)\|y\|$, это возможно по определению нормы факторпространства (для $y = 0$ можно просто взять $x = 0$). Тогда $\overline{A}(y) = A(x)$ и

$$\|\overline{A}(y)\| = \|A(x)\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\| \leqslant \|A\|(1 + \varepsilon)\|y\|.$$

Это означает, что при любом $\varepsilon > 0$ верно $\|\overline{A}\| \leqslant (1 + \varepsilon)\|A\|$, то есть просто $\|\overline{A}\| \leqslant \|A\|$. Тогда непрерывность отображения $\overline{A}$ следует из его ограниченности.

Обратное неравенство $\|A\| \leqslant \|\overline{A}\|$ следует из результата задачи 9.20, потому что $A$ является композицией проекции $\pi : E \to E/G$ с нормой 1 (по лемме 9.25) и отображения $\overline{A}$,

$$\|A\| \leqslant \|\overline{A}\| \cdot \|\pi\| = \|\overline{A}\|.$$

□

Сформулируем теперь теорему об изоморфизме банаховых пространств с учётом того, что без требования замкнутости образа ничего хорошего у нас не получится, так как незамкнутый образ не будет полным пространством.

**Определение 9.28.** Линейное отображение банаховых пространств $A : E \to F$ называется *изоморфизмом*, если оно непрерывно, обратимо и обратное к нему тоже непрерывно.

**Теорема 9.29** (Теорема об изоморфизме для банаховых пространств). *Если линейное непрерывное отображение банаховых пространств $A : E \to F$ имеет замкнутый образ $A(E)$, то оно порождает изоморфизм $E/\ker A \to A(E)$.*

*Доказательство.* По предыдущей лемме, $A$ порождает непрерывное инъективное отображение

$$\bar{A} : E/\ker A \to F.$$

Также можно заменить $F$ на его замкнутое подмножество $A(E)$ и считать, что $A(E) = F$. В итоге нам остаётся доказать такое утверждение: *если отображение между банаховыми пространствами является непрерывной биекцией, то обратное к нему тоже непрерывно.*

Заметим, что непрерывность (то есть ограниченность) обратного к $A$ линейного отображения в такой ситуации равносильна тому, что образ единичного шара $A(B_E)$ содержит некоторый шар $tB_F$ пространства $F$ с центром в нуле и радиусом $t > 0$.

Рассмотрим последовательность шаров натуральных радиусов в $E$, $(nB_E)$. Их образы $A(nB_E)$ образуют возрастающую последовательность подмножеств $F$ и из биективности $A$ покрывают всё $F$. Применим теорему Бэра в варианте с замкнутыми множествами, она утверждает, что замыкание одного из этих множеств должно иметь непустую внутренность. В силу выпуклости $\operatorname{cl} A(mB_E)$, непустая внутренность означает существование $t > 0$, такого что

$$\operatorname{cl} A(mB_E) \supseteq tB_F.$$

Это почти то, что нам нужно, остаётся только избавиться от операции замыкания в левой части включения. Положив $M = m/t$, получим с помощью гомотетии (которая является гомеоморфизмом $F$)

$$\operatorname{cl} A(MB_E) \supseteq B_F.$$

Применив ещё раз гомотетию с коэффициентом $\alpha$, мы получим включение

$$\operatorname{cl} A(\alpha MB_E) \supseteq \alpha B_F$$

для фиксированного $M > 0$ и произвольного $\alpha > 0$. Смысл этого включения в том, что для любого $y \in F$ ($\alpha = \|y\|$) и любого $\varepsilon > 0$ мы можем найти $x \in E$, так что

$$\|x\| \leqslant M\|y\| \quad \text{и} \quad \|y - Ax\| < \varepsilon. \tag{9.1}$$

Теперь попробуем накрыть образом какого-то шара при отображении $A$ шар $B_F$. Возьмём любой вектор $y \in B_F$. По (9.1) можно найти $v_1 \in E$, такой что

$$\|v_1\| \leqslant M \text{ и } \|y - Av_1\| \leqslant 1/2.$$

Далее, применяя (9.1) к $y - Av_1$, найдём $v_2$, такой что

$$\|v_2\| \leqslant M/2 \text{ и } \|y - Av_1 - Av_2\| \leqslant 1/4.$$

Продолжая в том же духе, будем иметь равенства

$$\|v_k\| \leqslant M2^{1-k} \text{ и } \|y - Av_1 - Av_2 - \cdots - Av_k\| \leqslant 2^{-k}.$$

Если мы теперь обозначим $x_k = v_1 + \cdots + v_k$, то последовательность $x_k$ фундаментальна в $E$ и сходится в $E$ к некоторому $x$ с нормой не более $2M$. Так как

$$\|y - Ax_k\| \leqslant 2^{-k},$$

то $Ax_k$ сходится к $y$, который по непрерывности отображения $A$ оказывается равным $Ax$. Таким образом мы доказали

$$A(2MB_E) \supseteq B_F,$$

что означает $\|A^{-1}\| \leqslant 2M$, то есть непрерывность $A^{-1}$. ☐

*Задача* 9.30. Докажите использованное неявно в доказательстве теоремы об изоморфизме утверждение о том, что замыкание выпуклого подмножества банахова пространства выпукло.

**Определение 9.31.** *Сопряжённое* к непрерывному линейному отображению банаховых пространств $A : E \to F$ — это отображение $A^* : F' \to E'$, заданное формулой

$$A^*(\lambda) = \lambda \circ A.$$

Так как $\lambda$ и $A$ в определении непрерывны, то $A^*(\lambda)$ является непрерывным линейным функционалом и, следовательно, отображение $A^* : F' \to E'$ корректно определено. В силу неравенства для нормы композиции из задачи 9.20, имеется неравенство

$$\|A^*\lambda\| \leqslant \|A\| \cdot \|\lambda\|,$$

то есть $A^*$ оказывается непрерывным отображением банаховых пространств. Из определения легко следует, что для двух непрерывных линейных отображений банаховых пространств $A : E \to F$ и $B : F \to G$ оказывается

$$(B \circ A)^* = A^* \circ B^*.$$

У этого утверждения имеется полезное для понимания изоморфности банаховых пространств следствие:

**Лемма 9.32.** *Если $A : E \to F$ — изоморфизм банаховых пространств, то сопряжённое отображение $A^* : F' \to E'$ — тоже изоморфизм.*

*Доказательство.* По определению изоморфизма обратное отображение $A^{-1} : F \to E$ тоже непрерывно. Тогда $A^* : F' \to E'$ и $(A^{-1})^* : E' \to F'$ являются непрерывным отображениями, и кроме того, по формуле сопряжения композиции оказывается

$$\mathrm{id}_{F'} = (\mathrm{id}_F)^* = (A \circ A^{-1})^* = (A^{-1})^* \circ A^* \quad \mathrm{id}_{E'} = (\mathrm{id}_E)^* = (A^{-1} \circ A)^* = A^* \circ (A^{-1})^*.$$

То есть $A^*$ и $(A^{-1})^*$ взаимно обратны и $A$ — изоморфизм. ☐

*Задача* 9.33. Докажите, что пространство непрерывных линейных отображений $E \to F$ (обозначаемое $\mathcal{L}(E, F)$) является банаховым пространством с введённой здесь нормой. Проверьте, что для этого нужна полнота $F$, но не нужна полнота $E$.

[[ Рассуждения аналогичны доказательству теоремы 9.14. ]]

*Задача* 9.34. Докажите, что изоморфизмы образуют открытое подмножество в $\mathcal{L}(E, F)$.

[[ Заметьте, что умножение элементов $\mathcal{L}(E, F)$ на изоморфизмы $A : D \to E$ слева или $B : F \to G$ справа даёт изоморфизмы $L_A : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{L}(D, F)$ и $R_B : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{L}(E, G)$. Если множество изоморфизмов в $\mathcal{L}(E, F)$ не пусто, то сведите с помощью умножений задачу к утверждению, что окрестность тождественного изоморфизма $\mathrm{id}_E : E \to E$ состоит из изоморфизмов. Для элементов окрестности $\mathrm{id}_E$ вида $\mathrm{id}_E + B$ постройте обратные с помощью степенного ряда — геометрической прогрессии. ]]

*Задача* 9.35 (Теорема Банаха–Штейнгауза для линейных отображений). Пусть семейство линейных отображений $Y \subset \mathcal{L}(E, F)$ между банаховыми пространствами ограничено в любой точке банахова пространства $E$, то есть для любого $x \in E$ множество чисел

$$\{\|A(x)\| \mid A \in Y\}$$

ограничено. Докажите, что тогда $Y$ ограничено в смысле нормы в $\mathcal{L}(E, F)$.

[[ Проверьте, что доказательство (теоремы 9.15) для $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ проходит и в этом случае с небольшими изменениями. ]]

*Задача* 9.36 (Расходимость ряда Фурье в среднем). Докажите, что существует функция $f \in L_1[-\pi, \pi]$, ряд Фурье которой расходится в норме $L_1$.

[[ Докажите, что норма линейного отображения $L_1[-\pi, \pi] \to L_1[-\pi, \pi]$, заданного как $f \mapsto T_n(f, x)$, равна $\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt$. Далее примените теорему Банаха–Штейнгауза для линейных отображений. ]]

9.4. **Гильбертовы пространства и их базисы.** Изучим важный частный случай банахова пространства, являющийся абстрактным аналогом пространства $L_2$ и, в частности, евклидова пространства.

**Определение 9.37.** Если норма в банаховом пространстве $E$ порождается положительно определённым скалярным произведением

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)},$$

то $E$ называется *гильбертовым пространством*.

Если поле констант комплексное, то скалярное произведение будет комплексно-линейным по первому аргументу и комплексно-антилинейным по второму, а также $(x, y) = \overline{(y, x)}$. При доказательстве теорем обычно достаточно рассматривать действительный случай, так как на самом деле любое комплексное гильбертово пространство является действительным гильбертовым пространством со скалярным произведением $\mathrm{Re}(x, y)$ и той же самой нормой, отличие будет только в присутствии ортогонального (в данном случае под ортогональностью подразумевается сохранение скалярного произведения и обратимость) оператора $J : H \to H$, у которого $J^2 = -1$ (такой оператор называется *комплексной структурой* на векторном пространстве).

Рассмотрим неравенство (в комплексном варианте)

$$(ax + by, ax + by) \geqslant 0 \Leftrightarrow |a|^2\|x\|^2 + a\bar{b}(x, y) + b\bar{a}\overline{(x, y)} + |b|^2\|y\|^2 \geqslant 0.$$

Используя условия неотрицательной определённости эрмитовой формы двух переменных $a, b$ мы получим неравенство Коши–Буняковского

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|,$$

из которого, как и в конечномерном случае, следует неравенство треугольника для нормы.

*Задача* 9.38. Докажите что вещественное банахово пространство $E$ является гильбертовым тогда и только тогда, когда для любых двух $x, y \in E$ выполняется тождество

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

[[ Для гильбертова пространства тождество проверяется непосредственно. Для доказательства в другую сторону для начала объясните, почему утверждение достаточно доказать для двумерных банаховых пространств. ]]

Конечномерное гильбертово пространство изометрично евклидову $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$, в случае комплексного поля скаляров), как известно из курса линейной алгебры. Структуру бесконечномерных гильбертовых пространств мы тоже постараемся описать. Для начала сделаем определения последовательностей векторов, которые будут некоторыми приближениями к понятию «базиса» в банаховом или гильбертовом пространстве.

**Определение 9.39.** Последовательность векторов $(\varphi_k)$ является *полной системой векторов* в банаховом пространстве $E$, если замыкание её линейной оболочки совпадает с $E$, то есть для любого $x \in E$ и $\varepsilon > 0$ найдется конечная линейная комбинация $a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n$, такая что

$$\|x - a_1\varphi_1 - \dots - a_n\varphi_n\| < \varepsilon.$$

**Определение 9.40.** Последовательность векторов $(\varphi_k)$ является *замкнутой системой векторов* в гильбертовом пространстве $H$, если в $H$ нет векторов, ортогональных всем $\varphi_k$, то есть из равенств $(x, \varphi_k)$ для всех $k$ следует $x = 0$.

В гильбертовом пространстве естественно рассматривать ортогональные или даже ортонормированные системы векторов, то есть предполагать $(\varphi_k, \varphi_\ell) = 0$ при $k \neq \ell$ или $(\varphi_k, \varphi_\ell) = \delta_{k\ell}$. Метод Грама–Шмидта из линейной алгебры работает и для счётных систем и делает из данной системы (последовательности) векторов ортонормированную систему, не меняя её линейной оболочки.

*Задача* 9.41. Проверьте, что ортогонализация Грама–Шмидта не меняет полноту и замкнутость системы векторов.

Гильбертово пространство имеет много полезных свойств, например, в нём можно развивать абстрактную теорию рядов Фурье точно так же, как она идёт в $L_2[-\pi, \pi]$, с минимальным свойством коэффициентов Фурье и неравенством Бесселя. Сделанные определения позволяют резюмировать результаты этой теории в следующей теореме:

**Теорема 9.42.** *Для любой ортогональной системы векторов $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в гильбертовом пространстве $H$ следующие свойства эквивалентны:*

*а) полнота системы;*

*б) замкнутость системы;*

*в) сходимость ряда Фурье любого $x \in H$ по системе $(\varphi_k)$ к $x$;*

*г) равенство Парсеваля для коэффициентов Фурье любого $x \in H$ по данной системе.*

*Доказательство.* Пусть для упрощения формул система ортонормирована, $(\varphi_k, \varphi_m) = \delta_{km}$. Докажем по шагам:

(а)⇒(б): Пусть найдётся $x$, ортогональный всем $\varphi_k$, и пусть $\|x\| = 2\varepsilon > 0$. Приблизим $x$ линейной комбинацией $y = \sum_{k=1}^n a_k\varphi_k$ с точностью $\varepsilon$, тогда $x$ ортогонален $y$, но

$$0 = (x, y) = (x, y - x) + (x, x), \text{ хотя } |(x, x)| = 4\varepsilon^2, |(x, y - x)| \leqslant 2\varepsilon^2,$$

противоречие.

(б)⇒(в): Для любого $x$ можно аналогично случаю $L_2$ установить минимальное свойство коэффициентов Фурье $c_k = (x, \varphi_k)$

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n a_k\varphi_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 + \sum_{k=1}^n |a_k - c_k|^2$$

и соответствующее неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 \leqslant \|x\|^2,$$

тогда независимо от полноты или замкнутости системы $(\varphi_k)$ ряд Фурье $\sum_{k=1}^\infty c_k\varphi_k$ в $H$ сходится по фундаментальности, так как

$$\left\|\sum_{k=n}^m c_k\varphi_k\right\| = \sqrt{\sum_{k=n}^m |c_k|^2} \to 0 \quad (n, m \to \infty).$$

Пусть тогда $y = \sum_{k=1}^\infty c_k\varphi_k$. Из непрерывности скалярного произведения в $H$ следует возможность переставить скалярное произведение и суммирование в формуле

$$(x - y, \varphi_k) = (x, \varphi_k) - (y, \varphi_k) = c_k - \sum_{m=1}^\infty c_m(\varphi_m, \varphi_k) = c_k - \sum_{m=1}^\infty c_m\delta_{mk} = 0,$$

то есть $x - y$ ортогонален всем $\varphi_k$, и из предположения замкнутости должен равняться нулю. Следовательно, ряд Фурье сходится именно к $x = y$.

(в)⇔(г): Из равенства

$$\left\|x - \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2$$

в пределе следует эквивалентность сходимости ряда Фурье к $x$ и равенства Парсеваля.

(в)⇒(а): Очевидно. ☐

Приведённая теорема показывает, что можно строить много ортогональных систем в пространствах $L_2$, по которым можно раскладывать в ряд Фурье, сходящийся по норме $L_2$. Например, можно взять систему $\{1, x, x^2, \dots, \}$ на отрезке $[-1, 1]$, она полна, так как любую функцию на отрезке можно приблизить многочленом в норме $L_2$ (сначала приблизить бесконечно гладкой в норме $L_2$, а потом равномерно приблизить бесконечно гладкую многочленом по теореме Вейерштрасса). Значит, если ортогонализовать эту систему по методу Грама–Шмидта, то можно получить полную и замкнутую ортогональную систему многочленов $(P_n)$ на отрезке $[-1, 1]$, причём многочлен номер $n$ будет иметь степень $n$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

*Задача* 9.43 (Многочлены Лежандра с точностью до константы). Проверьте, что многочлены

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n,$$

$n \in \mathbb{Z}^+$, составляют ортогональную систему в $L_2[-1, 1]$. Докажите, что это система полна в $L_2[-1, 1]$.

[[ Проинтегрируйте произведение двух таких многочленов по частям для доказательства ортогональности. Для доказательства полноты объясните, почему любой другой многочлен можно выразить как линейную комбинацию многочленов Лежандра. ]]

*Задача* 9.44. Докажите, что система функций $x^n e^{-x^2/2}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, полна в $L_2(\mathbb{R})$.

[[ Достаточно проверить замкнутость системы и рассмотреть ситуацию, когда для некоторой $f \in L_2(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)x^n e^{-x^2/2}\,dx = 0$$

при всех $n$. Проверьте, что равенство

$$e^{iyx - x^2/2} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(iy)^n}{n!} x^n e^{-x^2/2}$$

можно рассматривать как верное в $L_2(\mathbb{R})$ для функций от $x$. Выведите отсюда, что преобразование Фурье функции $g(x) = f(x)e^{-x^2/2}$ всюду равно нулю, и что $f$ и $g$ почти всюду равны нулю, используя результат задачи 8.131. ]]

Результат ортогонализации системы $x^n e^{-x^2/2}$ — это функции вида $H_n(x)e^{-x^2/2}$, где $H_n$ — это многочлен степени $n$, который (при некоторой нормализации, не совпадающей с нормированием в $L_2(\mathbb{R})$) называется *многочленом Эрмита*.

*Задача* 9.45 (Многочлены Эрмита с точностью до константы). Проверьте, что если определить многочлены по формуле

$$H_n(x) = e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2},$$

то функции $H_n e^{-x^2/2}$ будут составлять ортогональную систему в $L_2(\mathbb{R})$.

[[ Используйте интегрирование по частям для доказательства ортогональности. ]]

*Задача* 9.46. Существует ли бесконечно дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такая что для любого многочлена $P \in \mathbb{R}[x]$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)f(x)\,dx$$

конечен и равен нулю.

[[ Посмотрите на преобразование Фурье функции $f$. ]]

В следующих задачах рассматривается разные виды сходимости ряда из элементов банахова пространства.

*Задача* 9.47. *(Безусловная сходимость) Докажите, что сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ элементов банахова пространства $v_k \in E$ существует и не зависит от порядка суммирования тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\varepsilon_k$ из $\pm 1$ сумма $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k v_k$ сходится в $E$.

[[ Аккуратно используйте критерий Коши для сходимости переставленных вариантов исходного ряда и ряда со знаками $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k v_k$. ]]

*Задача* 9.48. Докажите, что ряды Фурье по ортогональным системам в гильбертовом пространстве сходятся безусловно в смысле предыдущей задачи.

[[ Проверьте явно, меняются ли условия в теореме 9.42 при перестановке элементов ортогональной системы. Или используйте результат предыдущей задачи, если вы её решили. ]]

*Задача* 9.49. Приведите пример, когда безусловная сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ элементов банахова пространства $v_k \in E$ не означает абсолютной сходимости, то есть $\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\| = +\infty$.

[[ Может помочь результат предыдущей задачи. ]]

Для ортогональной системы в гильбертовом пространстве полнота эквивалентна замкнутости. Следовательно, если из полной ортогональной системы убрать одну функцию, то она теряет замкнутость и становится неполной. Однако следующие задачи показывают, что для неортогональной системы в гильбертовом пространстве или для полной системы в негильбертовом банаховом пространстве может наблюдаться совершенно другое явление, когда после выбрасывания даже бесконечного количества функций из полной системы она остаётся полной.

*Задача* 9.50. *(Теорема Мюнца для $L_2$) Пусть $(n_k)$ — строго возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел. Докажите, что система функций $\{x^{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ полна в $L_2[0,1]$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n_k} = +\infty$.

[[ Выпишите расстояние от не входящей в систему функции $x^n$ до линейной оболочки векторов $\langle x^{n_1}, \dots, x^{n_k}\rangle$ через определители матриц Грама систем $(x^{n_1}, \dots, x^{n_k})$ и $(x^n, x^{n_1}, \dots, x^{n_k})$. Получите формулу

$$\det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{i,j=1}^{n} = \frac{\prod_{i<j}(a_i-a_j)(b_i-b_j)}{\prod_{i,j}(a_i+b_j)}$$

через делимость многочленов от нескольких переменных или посчитав определитель по индукции. Применив выписанную формулу для определителя, убедитесь, что стремление расстояния от $x^n$ до линейной оболочки $\langle x^{n_1}, \dots, x^{n_k}\rangle$ к нулю при $k \to \infty$ эквивалентно приведённой в условии задачи расходимости суммы. ]]

*Задача* 9.51 (Теорема Мюнца для $C$). Пусть $(n_k)$ — строго возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел. Докажите, что система функций $\{x^{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ полна в $C[0,1]$ тогда и только тогда, когда $n_1 = 0$ и $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n_k} = +\infty$.

[[ Сведите к предыдущей задаче. Полнота в $C$ очевидно влечёт полноту в $L_2$. Из полноты в $L_2$ данной системы функций выведите полноту системы первообразных данных функций в подпространстве $C[0,1]$, заданном условием $f(0) = 0$. ]]

*Задача* 9.52. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие полноты системы функций вида $\{x^{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ в $C[-1,1]$, где $(n_k)$ — возрастающая последовательность целых неотрицательных чисел.

[[ Разложите функцию в сумму чётной и нечётной и приближайте их по отдельности. ]]

9.5. **Изометричность гильбертовых пространств.** Для банаховых пространств мы изучили понятие изоморфизма и *изоморфности* (то есть наличия между двумя пространствами изоморфизма). В общем случае можно определить более сильное понятие изометричности банаховых пространств, которое будет особенно актуально для гильбертовых пространств.

**Определение 9.53.** Линейное отображение банаховых пространств $A : E \to F$ называется *изометрией*, если оно биективно и сохраняет норму, то есть $\|A\| = \|A^{-1}\| = 1$.

**Лемма 9.54.** *Изометрия гильбертовых пространств сохраняет скалярное произведение.*

*Доказательство.* Для гильбертова пространства над действительными числами скалярное произведение можно выразить через норму с помощью формулы

$$(x,y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}.$$

В комплексном случае та же формула выражает действительную часть скалярного произведения $\mathrm{Re}(x,y)$, по которой можно восстановить и мнимую часть как $\mathrm{Im}(x,y) = \mathrm{Re}(ix,y)$. Остаётся заметить, что определение изометрии гарантирует комплексную линейность отображения $A$, то есть его коммутирование с умножением на мнимую единицу $i$, а значит со всеми операциями в формуле

$$\mathrm{Im}(x,y) = \frac{\|ix+y\|^2 - \|ix-y\|^2}{4}.$$

□

В качестве следствия из свойств абстрактных рядов Фурье мы можем описать «сравнительно небольшие» гильбертовы пространства с точностью до изометрии:

**Теорема 9.55** (Теорема Рисса–Фишера). *Любое гильбертово пространство $H$, в котором нашлась счётная полная система элементов, изометрично некоторому $\mathbb{C}^n$ в случае комплексного поля скаляров, $\mathbb{R}^n$ в случае действительного поля скаляров, или комплексному или действительному варианту бесконечномерного пространства последовательностей с конечной суммой квадратов модулей $\ell_2 = L_2(\mathbb{N})$.*

*Доказательство.* Счётную полную систему элементов можно сделать ортонормированной по методу Грама–Шмидта. Если она оказалась конечной, то у нас получилось евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$. Иначе счётная полная ортонормированная система $(\varphi_k)$ позволяет сопоставить каждому элементу $x \in H$ последовательность его коэффициентов Фурье

$$c_k(x) = (x, \varphi_k)$$

с выполнением сходимости суммы Фурье

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$$

и равенства Парсеваля

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2.$$

Наоборот, любая последовательность $(c_k)$ с конечной суммой квадратов модулей даёт в $H$ сумму $x = \sum_k c_k \varphi_k$, сходящуюся в силу фундаментальности последовательности

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} c_k \varphi_k \right\| = \sqrt{\sum_{k=n}^{m} |c_k|^2} \to 0 \quad (n, m \to \infty).$$

При этом в силу непрерывности скалярного произведения в $H$

$$(x, \varphi_k) = \left( \sum_m c_m \varphi_m, \varphi_k \right) = \sum c_m (\varphi_m, \varphi_k) = \sum c_m \delta_{mk} = c_k,$$

то есть построенное отображение $\ell_2 \to H$ обратно сопоставлению $H \to \ell_2$ элементу $x \in H$ его ряда Фурье по системе $(\varphi_k)$.

В силу равенства Парсеваля эти отображения сохраняют квадрат нормы и являются изометриями. ☐

*Задача* 9.56. Рассмотрим линейные операторы $A : H \to H$ в гильбертовом пространстве, которые сохраняют скалярное произведение, то есть для любых $x, y \in H$ оказывается $(Ax, Ay) = (x, y)$. Приведите пример, показывающий, что такой оператор не обязан быть обратимым.

[[ Удобно построить такой оператор в пространстве $\ell_2$. ]]

9.6. **Метрическая проекция и двойственное к гильбертову пространству.** С точки зрения двойственности гильбертово пространство отличается тем, что его двойственное совпадает с ним самим в случае действительных коэффициентов и не слишком отличается в случае комплексных коэффициентов. Доказательство этого произведём в два шага, начав с полезного понятия *метрической проекции*.

**Теорема 9.57** (Метрическая проекция в гильбертовом пространстве). *Пусть $H$ — гильбертово пространство, $V \subset H$ — его замкнутое линейное (или аффинное) подпространство. Для любого $x \in H$ существует единственный $P_V(x) \in V$, ближайший к $x$, то есть*

$$\|x - P_V(x)\| = \operatorname{dist}(x, V).$$

*Доказательство.* Пусть $\operatorname{dist}(x, V) = d$, мы хотим доказать, что это значение достигается для некоторой точки $y \in V$. Нам понадобится следующее утверждение: *если для $y', y'' \in V$ оказалось, что $\|x - y'\|, \|x - y''\| < \sqrt{d^2 + t^2}$, то $\|y' - y''\| < 2t$.*

Доказательство утверждения по сути школьное, мы переходим в двумерную аффинную плоскость $P$, натянутую на $x, y', y''$, замечаем, что прямая $\ell$ через точки $y', y''$ содержится в $V \cap P$, а значит должно выполняться $\operatorname{dist}(x, \ell) \geqslant d$. По теореме Пифагора точки $y', y''$ находятся не далее $t$ от основания перпендикуляра из $x$ на $\ell$, что доказывает утверждение.

Из утверждения следует, что любая последовательность точек $y_k \in V$, для которой $\|x - y_k\| \to d$, является фундаментальной, из полноты гильбертова пространства она имеет предел, а из замкнутости $V$ следует, что этот предел лежит в $V$. Единственность проекции можно обосновать тем, что если $\|x - y\| = \|x - y'\| = d$, $y \neq y' \in A$, то для точки $\frac{y+y'}{2} \in A$ в противоречие с определением расстояния от $x$ до $A$ получим

$$\left\| x - \frac{y + y'}{2} \right\| < d,$$

что очевидно геометрически в аффинной плоскости, содержащей $x, y, y'$. ☐

**Теорема 9.58.** *Если $V$ — замкнутое линейной подпространство гильбертова пространства $H$, то метрическая проекция $P_V : H \to V$ линейна, $\|P_V\| = 1$ при $V \neq 0$, и имеет место ортогональное разложение в прямую сумму замкнутых подпространств $H = V \oplus \ker P_V$.*

*Доказательство.* Пусть $x \in H$, $y \in V$. Тогда выражение

$$\|x - P_V(x) + ty\|^2 = \|y\|^2 t^2 + 2\operatorname{Re}(x - P_V(X), y)t + \|x - P_V(x)\|^2$$

является квадратным трёхчленом и по определению метрической проекции имеет минимум в нуле. Следовательно $\operatorname{Re}(x - P_V(x), y) = 0$ для любого $y \in V$, применяя это для $iy$ в комплексном случае, получим и равенство нулю мнимой части. Отсюда следует, что вектор $x - P_V(x)$ ортогонален подпространству $V$.

В обратную сторону, если для некоторых $x \in H$, $z \in V$ разность $x - z$ ортогональна $V$, то $z = P_V(x)$, так как в этом случае

$$\|x - y\|^2 = \|x - z\|^2 + \|z - y\|^2$$

для любого $y \in V$.

Проверим теперь линейность проекции относительно умножения на константу

$$(x - P_V(x), V) = 0 \Rightarrow (ax - aP_V(x), V) = 0 \Rightarrow P_V(ax) = aP_V(x)$$

и относительно сложения векторов

$$(x - P_V(x), V) = 0 \quad \text{и} \quad (y - P_V(y), V) = 0 \Rightarrow (x + y - P_V(x) - P_V(y), V) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P_V(x + y) = P_V(x) + P_V(y).$$

Что касается нормы проекции, то из соотношения $(x - P_V(x), P_V(x)) = 0$ следует

$$\|x\|^2 = \|x - P_V(x)\|^2 + \|P_V(x)\|^2 \Rightarrow \|P_V(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Равенство достигается для $x \in V$ и поэтому при $V \neq 0$ норма проекции в точности равна 1.

Подпространство $\ker P_V \subseteq H$ замкнуто и по выведенному выше критерию проекции через равенство $(x - P_V(x), V) = 0$ состоит в точности из векторов, перпендикулярных $V$. Каждый вектор $x \in H$ раскладывается в сумму $x = y + z$ с $y \in V$ и $z \in \ker P_V$ однозначно, так как из такого разложения следует $y = P_V(x)$. Поэтому сумма $H = V \oplus \ker P_V$ прямая. ☐

*Задача* 9.59. Приведите пример, когда метрическая проекция на замкнутое линейное подпространство банахова пространства определена однозначно, но не является линейной.

[[ Пример можно построить уже для проекции на прямую в трёхмерном банаховом пространстве. ]]

*Задача* 9.60. Приведите пример, когда метрическая проекция на замкнутое линейное подпространство банахова пространства определена однозначно, линейна, но её норма больше единицы

[[ Пример можно построить уже для проекции на прямую в двумерном банаховом пространстве. ]]

*Задача* 9.61. Пусть непрерывное линейное отображение $P : E \to E$ банахова пространства в себя обладает свойством $P^2 = P$. Докажите, что его образ замкнут.

[[ Проверьте, что образ $P$ совпадает с ядром $\mathrm{id}_E - P$. ]]

*Задача* 9.62. Проверьте, что факторпространство гильбертова пространства $H$ по его замкнутому подпространству $G \subset H$ является гильбертовым.

[[ Докажите, что ограничение проекции $\pi : H \to H/G$ на ортогональное дополнение к $G$ является изометрией. ]]

**Теорема 9.63** (Двойственное к гильбертову пространству). *Для любого $y$ в гильбертовом пространстве $H$ положим*

$$\lambda_y(x) = (x, y).$$

*Тогда $\lambda_y \in H'$, $\|\lambda_y\| = \|y\|$ и все элементы двойственного пространства $H'$ имеют такой вид.*

*Доказательство.* Нетривиально доказать только последнее утверждение. Пусть у нас есть какой-то непрерывный линейный функционал $\lambda : H \to \mathbb{R}$. Можно считать $\lambda \neq 0$, иначе утверждение очевидно для $y = 0$. В комплексном случае нам достаточно изучить действительную часть комплексно-линейного функционала и действительную часть скалярного произведения на $H$, поэтому мы будем рассматривать далее $\mathbb{R}$-линейный функционал.

Рассмотрим замкнутое аффинное подпространство $A = \{x \in H \mid \lambda(x) = 1\}$. Спроецируем метрически 0 на $A$, получим точку $y \in A$ (ближайшую к 0 точку $A$). Рассмотрим элемент $y + x \in A$, тогда вся прямая $y + tx$ лежит в $A$. Из минимальности выражения

$$\|y + tx\|^2 = \|y\|^2 + 2(x, y)t + \|x\|^2 t^2$$

при $t = 0$ следует $(x, y) = 0$. Из этого следует, что все элементы $A$ имеют одинаковое скалярное произведение с $y$, равное $\|y\|^2$. Следовательно, функционал

$$\lambda_y(\cdot) = \left(\cdot, \frac{y}{\|y\|^2}\right)$$

совпадает с $\lambda$ на множестве $A$, по однородности и непрерывности равенство $\lambda = \lambda_y$ распространяется на всё $H$. ☐

*Задача* 9.64. Проверьте, что построенное отождествление $C : H \to H'$ для гильбертова пространства с комплексным полем скаляров будет комплексно-антилинейным, то есть $H' \cong \bar{H}$, если $\bar{H}$ обозначает то же пространство $H$, но с изменённым способом умножения вектора на комплексное число. А именно, если умножение на комплексное число в $H$ обозначать символом $\cdot$, а в $\bar{H}$ — символом $\bar{\cdot}$, то верно соотношение

$$a \,\bar{\cdot}\, x = \bar{a} \cdot x.$$

Описание более общей двойственности $L'_p = L_q$ при $1/p + 1/q = 1$ также следует из существования метрической проекции на замкнутое аффинное подпространство, которое в свою очередь следует из *равномерной выпуклости нормы* этих пространств, определяемой как

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \|x\| = \|y\| = 1 \text{ и } \|x - y\| \geqslant \varepsilon \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant 1 - \delta.$$

Подробности читатель может восстановить, решая следующие задачи.

*Задача* 9.65. Выведите существование и единственность метрической проекции в банаховом пространстве с равномерно выпуклой нормой.

[[ Докажите фундаментальность последовательности, возникающей в определении расстояния. Содержательная часть рассуждения фактически будет происходить в двумерном банаховом пространстве. ]]

*Задача* 9.66. *(Неравенство Ханнера) Если $p > 2$, $f, g \in L_p(X)$, то

$$\|f + g\|_p^p + \|f - g\|_p^p \geqslant 2\|f\|_p^p + 2\|g\|_p^p.$$

[[ Проверьте, что для чисел выполняется $|a + b|^p + |a - b|^p \geqslant 2|a|^p + 2|b|^p$ и проинтегрируйте. ]]

*Задача* 9.67. Если $p > 2$, $f, g \in L_p(X)$, то

$$2^{p-1}\|f\|_p^p + 2^{p-1}\|g\|_p^p \geqslant \|f - g\|_p^p + \|f + g\|_p^p.$$

[[ Подставьте в предыдущее неравенство $f - g$ и $f + g$ вместо $f$ и $g$. ]]

*Задача* 9.68. *(Неравенство Ханнера) Если $1 < p < 2$, $f, g \in L_p(X)$, то

$$\|f + g\|_p^p + \|f - g\|_p^p \geqslant (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\|f\|_p - \|g\|_p|^p.$$

[[ Проверьте, что функция $\zeta(a, b) = (a^{1/p} + b^{1/p})^p + |a^{1/p} - b^{1/p}|^p$ является выпуклой 1-однородной функцией от неотрицательных чисел, то есть для любых двух точек $A, B \in [0, +\infty)^2$ и положительных коэффициентов $u, v$ получается $\zeta(uA + vB) \leqslant u\zeta(A) + v\zeta(B)$. Выведите отсюда по индукции неравенство Йенсена для положительных комбинаций точек

$$\zeta(u_1A_1 + \dots + u_NA_N) \leqslant u_1\zeta(A_1) + \dots + u_N\zeta(A_N),$$

а предельным переходом получите неравенство Йенсена для интегралов от функций $A : X \to [0, +\infty)^2$

$$\zeta\left(\int_X A(x)\,dx\right) \leqslant \int_X \zeta(A(x))\,dx.$$

Распишите последнее неравенство покоординатно

$$\zeta\left(\int_X a(x)\,dx, \int_X b(x)\,dx\right) \leqslant \int_X \zeta(a(x), b(x))\,dx$$

и подставьте в него $a(x) = |f(x)|^p, b(x) = |g(x)|^p$. ]]

*Задача* 9.69. Если $1 < p < 2$, $f, g \in L_p(X)$, то

$$2^p\|f\|_p^p + 2^p\|g\|_p^p \geqslant (\|f - g\|_p + \|f + g\|_p)^p + |\|f - g\|_p - \|f + g\|_p|^p.$$

[[ Подставьте в предыдущее неравенство $f - g$ и $f + g$ вместо $f$ и $g$. ]]

*Задача* 9.70. Докажите существование и единственность метрической проекции на замкнутое подпространство в пространствах $L_p$ при $1 < p < +\infty$.

[[ Заметьте, что доказанные в предыдущих задачах неравенства дают равеномерную выпуклость $L_p$. ]]

*Задача* 9.71. Выясните устройство непрерывных линейных функционалов в $L_p$ при $1 < p < +\infty$.

[[ Действуйте аналогично доказательству для гильбертова пространства, найдя среди

$$\{f \mid \lambda(f) = 1\}$$

элемент минимальной нормы, проверьте, что $g(x) = |f(x)|^{p-1} \operatorname{sgn} f(x)$ обладает свойством

$$\forall h \in L_p(X), \int_X h(x)g(x)\,dx = \lambda(h)\|f\|_p^p$$

и лежит в $L_q$, $1/p + 1/q = 1$, так что с точностью до константы $g$ реализует функционал $\lambda$. ]]

9.7. **Компактные подмножества в банаховых пространствах.** В этом разделе мы рассмотрим, как обстоят дела с компактностью в банаховых пространствах. Сначала напомним, что подмножество $K$ топологического пространства называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подсемейство, которое всё ещё покрывает $K$. Неформально говорят, что из открытого покрытия выбирается конечное подпокрытие.

**Определение 9.72.** Подмножество $X$ топологического пространства $M$ называется *предкомпактным*, если его замыкание компактно.

**Определение 9.73.** Подмножество $X$ метрического пространства $M$ называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ в нём можно выбрать конечную *$\varepsilon$-сеть* $N \subseteq X$, то есть множество, у которого $X$ лежит в $\varepsilon$-окрестности, $X \subseteq U_\varepsilon(N)$. Говоря проще, для любого $\varepsilon > 0$, $X$ покрывается конечным набором открытых шаров с центрами в $X$ и радиусами $\varepsilon$.

*Задача* 9.74. Докажите, что в определении вполне ограниченности не обязательно требовать включения $N \subseteq X$, вариант определения без этого требования равносилен исходному.

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ мы знаем, что множество предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено. Также нетрудно убедиться, что в евклидовом пространстве понятие ограниченности совпадает с понятием вполне ограниченности.

*Задача* 9.75. Докажите, что в бесконечномерном банаховом пространстве $E$ единичный шар не является вполне ограниченным.

[[ Можно использовать множество векторов из задачи 9.10. ]]

**Теорема 9.76.** *Подмножество $X$ полного метрического пространства $M$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограниченно.*

*Доказательство.* Пусть множество $X$ предкомпактно. Для любого $\varepsilon > 0$ выполняется включение $\operatorname{cl} X \subset U_\varepsilon(X)$, то есть $\operatorname{cl} X$ покрывается набором всевозможных $\varepsilon$-шаров с центрами в $X$. Из этого набора по компактности $\operatorname{cl} X$ можно оставить только конечное число шаров, которые всё ещё будут покрывать $\operatorname{cl} X$, а значит и $X$.

В обратную сторону рассуждение не сильно отличается от доказательства критерия компактности в евклидовом пространстве. Пусть $X$ вполне ограничено и $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ — открытое покрытие его замыкания $Y = \operatorname{cl} X$. Предполагаем противное: $\mathcal{U}$ нельзя уменьшить до конечного покрытия $Y$.

Построим убывающую по включению последовательность замкнутых подмножеств $Y_k \subset Y$, каждое из которых не покрывается конечным подсемейством семейства $\mathcal{U}$. На $k$-м шаге возьмём $\varepsilon = 2^{-k}$ и по вполне ограниченности покроем $X$ конечным набором

$\varepsilon$-шаров $B_{x_1}(2^{-k}), \ldots, B_{x_N}(2^{-k})$. Здесь нам удобнее использовать замкнутые шары, потому что их объединение будет замкнутым и покроет также $Y$, а значит покроет и множество $Y_k \subseteq Y$. Для одного из множеств $Y_k \cap B_{x_i}(2^{-k})$ мы тоже не сможем выбрать из $\mathcal{U}$ конечное покрытие (иначе смогли бы выбрать конечное подпокрытие для множества $Y_k$). Положим тогда $Y_{k+1} = Y_k \cap B_{x_i}(2^{-k})$.

Построенные множества $Y_k$ не пусты, замкнуты, образуют убывающую по включению последовательность, и их диаметры стремятся к нулю. Значит, они имеют общую точку по теореме 3.24. Эта точка лежит в одном из открытых множеств $U_\alpha \in \mathcal{U}$ вместе со своей окрестностью, в которую при достаточно большом $k$ попадает и всё множество $Y_k$ — противоречие с выбором $Y_k$. ☐

Полезно явно описать предкомпактные множества в одном из используемых нами банаховых пространств. Следующие результаты будут содержательными уже для пространства непрерывных функций на отрезке, но мы их сформулируем в несколько более общем виде.

Пусть $M$ — метрическое пространство, $C(M)$ — пространство непрерывных функций на нём с нормой

$$\|f\|_C = \sup\{|f(x)| \mid x \in M\}.$$

Полнота этого пространства следует из того, что равномерный предел последовательности непрерывных функций $f_k : M \to \mathbb{R}$ тоже будет непрерывной функцией, в соответствии с очевидным обобщением теоремы 4.41.

**Определение 9.77.** Множество функций $X \subset C(M)$ *равностепенно непрерывно*, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\ : \forall f \in X\ \forall x, y \in M, \operatorname{dist}(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

**Теорема 9.78** (Теорема Арцела–Асколи). *Пусть $M$ — компактное метрическое пространство. Множество $X \subset C(M)$ предкомпактно тогда и только тогда, когда $X$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

*Доказательство.* Определим общий модуль непрерывности множества функций $X$:

$$\omega_X(\delta) = \sup\left\{|f(x) - f(y)| \mid f \in X,\ x, y \in M,\ \operatorname{dist}(x, y) < \delta\right\},$$

он неотрицателен и может принимать значение $+\infty$. Равностепенная непрерывность означает, что $\omega_X(\delta) \to 0$ когда $\delta \to +0$.

Мы будем понимать предкомпактность как вполне ограниченность в силу предыдущей теоремы. Предположим, что множество функций $X$ ограничено и равностепенно непрерывно, докажем его вполне ограниченность. Пусть $\varepsilon > 0$ и пусть $\omega_X(\delta) < \varepsilon$. Выберем $\delta$-сеть $N_\delta \subset M$ из компактности $M$. Ограничение функций $R : C(M) \to C(N_\delta)$ имеет областью значений конечномерное пространство $C(N_\delta) = \mathbb{R}^{N_\delta}$, значит в $R(X)$ есть $\varepsilon$-сеть $R(X_\varepsilon) \subseteq R(X)$. Это означает, что любая функция $f \in X$ может быть с точностью $\varepsilon$ приближена на конечном множестве $N_\delta$ некоторой функцией $g \in X_\varepsilon$.

Но так как $N_\delta$ является $\delta$-сетью в $M$ и $\omega_X(\delta) < \varepsilon$, то при переходе от $N_\delta$ ко всему $M$ точность приближения $f \in X$ функцией $g \in X_\varepsilon$ может упасть максимум до $3\varepsilon$, то есть $X_\varepsilon$ является $3\varepsilon$-сетью для $X$ в норме $C(M)$.

Обратно, пусть $X$ предкомпактно, то есть вполне ограниченно в $C(M)$. Возьмём для него $\varepsilon$-сеть $X_\varepsilon \subseteq X$. Приближая функцию любую $f \in X$ функциями $g \in X_\varepsilon$, мы получим неравенство

$$\omega_X(\delta) \leqslant \omega_{X_\varepsilon}(\delta) + 2\varepsilon.$$

Применяя теорему 3.98 к каждой функции из $X_\varepsilon$, замечаем, что модуль непрерывности конечного семейства функций $X_\varepsilon$ конечен и стремится к нулю при $\delta \to +0$. А значит при достаточно малом $\delta$ мы сможем утверждать, что $\omega_X(\delta) < 3\varepsilon$. Это означает равностепенную непрерывность $X$, ограниченность $X$ очевидно следует из его вполне ограниченности. □

*Задача* 9.79. Докажите, для никакое бесконечномерное банахово пространство $E$ не является образом непрерывной кривой $\gamma : \mathbb{R} \to E$.

[[ Используйте некомпактность шаров в $E$ и теорему Бэра. ]]

*Задача* 9.80. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, а функция $K : X \times X \to \mathbb{R}$ непрерывна. Докажите, что интегральный оператор $I : C(X) \to C(X)$, заданный по формуле

$$I[f](x) = \int_X K(x, y) f(y)\, dy$$

отображает единичный шар $C(X)$ в предкомпактное множество в $C(X)$.

[[ Докажите равностепенную непрерывность образа единичного шара при этом операторе через равномерную непрерывность $K$. ]]

*Задача* 9.81. Докажите, что любое компактное метрическое пространство $M$ можно изометрично (с сохранением расстояний) вложить в банахово пространство $C(M)$.

[[ Используйте функцию расстояния и неравенство треугольника. ]]

9.8. **Теорема Хана–Банаха.** Мы уже выяснили, что двойственное (определение 9.12) к гильбертову пространству устроено довольно простым образом. В этом разделе мы начнём изучение более общего случая двойственных пространств к банаховым пространствам. Следующая теорема устанавливает существование достаточно большого количества элементов двойственного банахова пространства $E'$.

**Теорема 9.82** (Теорема Хана–Банаха). *Пусть $E$ — банахово пространство, $F \subset E$ — его линейное подпространство. Тогда любой ограниченный линейный функционал $\lambda \in F'$ продолжается до линейного функционала на всём $E$ без увеличения его нормы.*

*Доказательство.* Будем рассматривать банахово пространство над полем действительных чисел, так как в комплексном случае будет достаточно продолжать действительную часть функционала, которая однозначно определяет комплексный функционал по формуле $\lambda_{\mathbb{C}}(x) = \lambda_{\mathbb{R}}(x) + i\lambda_{\mathbb{R}}(-ix)$.

Пусть для определённости $\|\lambda\| = 1$ на $F$ и мы будем продолжать $\lambda$, не увеличивая единичную норму. Задача продолжения с $F$ на $G \supseteq F$ достаточно легко решается в случае, если $F \subset G$ имеет коразмерность 1, тогда изоморфизм $\mu : G/F \to \mathbb{R}$ и функционал $\lambda$ (продолженный как-нибудь), как пара координат, дают двумерную картинку, на которой образ единичного шара $G$ является центрально-симметричным выпуклым множеством, не пересекающим множество $\{\mu = 0, |\lambda| > 1\}$. В двумерном случае достаточно очевидно, что замена $\lambda$ на $\lambda + t\mu$ при некотором действительном $t$ позволит значениям $\lambda$ быть не более 1 на единичном шаре нормы этого двумерного банахова пространства, тогда $\lambda$ продолжится без увеличения нормы.

Конечно, продолжения функционала по шагам коразмерности 1 не доведут нас за конечное количество шагов до всего $E$, и даже не доведут до $E$ за счётное количество шагов, так как $E$ скорее всего имеет более чем счётную размерность (в смысле определения 9.96 ниже). Но тут на помощь приходит *лемма Цорна* (теорема 9.90 ниже) из теории множеств, которая обсуждается подробно в следующем разделе.

Для применения леммы Цорна, мы рассмотрим все пары $(G, \lambda_G)$, состоящие из подпространства $G \subset E$, $G \supseteq F$, и продолженного на него с $F$ функционала $\lambda_G$ с нормой $\|\lambda_G\| = \|\lambda_F\|$. Введём на парах отношение частичного порядка

$$(G, \lambda_G) \leqslant (H, \lambda_H) \Leftrightarrow G \subseteq H \quad \text{и} \quad \lambda_H|_G = \lambda_G,$$

которое неформально говоря означает, что один способ продолжения является продолжением другого способа продолжения линейного функционала. Тогда для любой *цепи* этого частичного порядка, то есть множества пар

$$\mathcal{C} = \{F_\alpha, \lambda_\alpha\}_\alpha,$$

в котором любые два элемента сравнимы этим частичным порядком, мы имеем пару, состоящую из объединения $G = \bigcup_\alpha F_\alpha$ и заданного на нём линейного функционала $\lambda_G$, такого что для любого $\alpha$ имеем $\lambda_G|_{F_\alpha} = \lambda_\alpha$. В этом определении нет противоречия, так как $\lambda_\alpha|_{F_\beta} = \lambda_\beta$ при $F_\beta \subseteq F_\alpha$ и поэтому определение значения $\lambda_G$ на элементе $x \in G$ не зависит от того, какое содержащее его $F_\alpha$ вы выбираем. Норма построенного $\lambda_G$ тоже не больше нормы $\lambda_F$, так как это было верно для всех $\lambda_\alpha$. Построенная в результате объединения пара $(G, \lambda_G)$ обладает тем свойством, что она «не меньше» любого элемента цепи $\mathcal{C}$.

В таких условиях (существование верхней грани любой цепи) лемма Цорна утверждает, что найдётся пара $(G, \lambda_G)$, для которой не существует строго большей пары в нашей системе. Так как мы умеем продолжать линейный функционал на $H \supset G$ при $\dim H/G = 1$, то получается, что у максимального подпространства $G \subseteq E$ нет содержащих его подпространств «на единицу большей размерности». Но если $G \neq E$, то для любого вектора $y \notin G$ линейная оболочка $H = \langle G, y \rangle$ как раз обладала бы свойством $\dim H/G = 1$ и мы могли бы на неё продолжить линейный функционал без увеличения нормы. Следовательно, в максимальной паре $(G, \lambda_G)$ обязательно выполняется равенство $G = E$ и мы на самом деле продолжили линейный функционал, не увеличивая его норму, на всё $E$. ☐

*Задача* 9.83. Доделайте использованный в доказательстве двумерный случай теоремы Хана–Банаха.

[[ Рассмотрите образ единичного шара $B$ на плоскости и его замыкание $\bar{B}$. Докажите, что $\bar{B}$ — выпуклое множество, и что точки множества $L = \{\mu = 0, |\lambda| > 1\}$ не могут лежать в $\bar{B}$. Для точки $p \in L$ найдите ближайшую $\pi(p)$ в $\bar{B}$ и прямую $s_p$, которая проходит через $\pi(p)$ перпендикулярно $\pi(p) - p$. Из выпуклости $\bar{B}$ заключите, что $s_p$ отделяет $p$ от $\bar{B}$, потом рассмотрите предел таких $s_p$ при $p \to (0, 1)$. ]]

**Следствие 9.84.** *Для любого банахова пространства $E$ и его ненулевого элемента $x \in E$ найдётся $\lambda \in E'$, такой, что $\|\lambda\| = 1$ и $\lambda(x) = \|x\|$.*

*Доказательство.* Такое $\lambda$ легко определить на одномерной линейной оболочке $\langle x \rangle$, а далее его надо продолжить. ☐

**Следствие 9.85.** *Естественное отображение банахова пространства в двойственное к его двойственному* (второе двойственное)

$$E \to E'', \ x \mapsto (\lambda \mapsto \lambda(x))$$

*является вложением, сохраняющим норму.*

*Доказательство.* Для любого ненулевого $x \in E$ по следствию 9.84 найдём $\lambda_0 \in E'$, такой что выполняется равенство положительных чисел $|\lambda_0(x)| = \|\lambda_0\| \cdot \|x\|$. Это означает, что образ $x$ при рассматриваемом отображении $i : E \to E''$ обладает свойством

$$|i(x)(\lambda_0)| = |\lambda_0(x)| = \|\lambda_0\| \cdot \|x\|.$$

Так как для любых $x \in E$ и $\lambda \in E'$ выполняется неравенство

$$|i(x)(\lambda)| = |\lambda(x)| \leqslant \|\lambda\| \cdot \|x\|,$$

то по определению нормы $i(x)$ получается, что $\|i(x)\| = \|x\|$. ☐

*Задача* 9.86. Докажите, что для гильбертова пространства $H$ отображение $H \to H''$ является биекцией (то есть изометрией).

[[ Используйте теорему 9.63. ]]

В случае произвольного банахова пространства отображение $E \to E''$ может и не быть биекцией. Некоторые любопытные сведения о случае $E = \ell_1$ будут приведены в разделе 9.21.

В следующих упражнениях читателю предлагается установить свойства конечномерных подпространств банахова пространства, замкнутых подпространств конечной коразмерности и фредгольмовых операторов.

*Задача* 9.87. Докажите, что конечномерное подпространство $V$ в банаховом пространстве $E$ замкнуто и имеет замкнутое дополнение $W \subseteq E$, такое что $E = V \oplus W$.

[[ Выведите полноту и замкнутость $V$ из результата задачи 9.9. С помощью теоремы Хана–Банаха продолжите изоморфизм $V \to \mathbb{R}^k$ до непрерывного отображения $E \to \mathbb{R}^k$ и рассмотрите его ядро. ]]

*Задача* 9.88. Непрерывное линейное отображение банаховых пространств $A : E \to F$ называется *фредгольмовым*, если $\ker A$ и $F/A(E)$ конечномерны и $A(E)$ замкнуто. Пространство фредгольмовых отображений обозначим $\mathcal{F}(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$. Докажите, что оно открыто в $\mathcal{L}(E, F)$

[[ Разложите $E = \ker A \oplus W$ и докажите, что для близких к $A$ операторов $A'$ образ $A'(W)$ всё ещё будет замкнутым и $F/A'(W)$ останется конечномерным. Применяйте теорему об изоморфизме 9.29 и решение задачи 9.34. ]]

*Задача* 9.89. Для $A \in \mathcal{F}(E, F)$ положим

$$\operatorname{ind} A = \dim F/A(E) - \dim \ker A.$$

Докажите, что этот *индекс* локально постоянен на $\mathcal{F}(E, F)$.

[[ Более внимательно проанализируйте рассуждения в решении предыдущей задачи. ]]

9.9. **Лемма Цорна и трансфинитная индукция.** Доказательство теоремы Хана–Банаха подсказывает, что нам потребуется познакомиться поближе с некоторыми фактами и приёмами теории множеств. Сформулируем явно использованную выше в доказательстве лемму Цорна.

**Теорема 9.90** (Лемма Цорна). *Пусть $X$ — частично упорядоченное множество, у которого любая цепь (линейно упорядоченное подмножество) $\mathcal{C} \subseteq X$ имеет* верхнюю грань, *то есть элемент $s \in X$ такой что для любого $x \in \mathcal{C}$ выполняется $x \preccurlyeq s$. Тогда в $X$ есть максимальный элемент $m$, то есть элемент, для которого нет большего в этом множестве.*

Часто лемма Цорна применяется в своём частном случае, когда $X$ является подмножеством некоторого $2^Y$ (множества подмножеств $Y$), и элементы $X$ упорядочены по включению как подмножества $Y$. В таком случае предположение леммы Цорна означает, что объединение элементов любой цепи из $X$ должно лежать в некотором множестве из $X$. Вывод леммы в этом случае означает, что в $X$ есть множество, не содержащееся в строго большем множестве из $X$.

Чтобы убедиться в верности леммы Цорна, сформулируем сначала *аксиому выбора*, в которую поверить легче: *У любого семейства непустых множеств $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (индексированного некоторым множеством $A$) декартово произведение $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ не пусто, иначе говоря, мы можем выбрать по одному $x_\alpha \in X_\alpha$ для любого $\alpha \in A$.* Эта аксиома звучит как некоторое очевидное утверждение, но на самом деле оказывается, что при бесконечном $A$ она не следует из других аксиом теории множеств и должна быть постулирована отдельно, если мы хотим иметь возможность содержательно работать с бесконечными множествами.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится некоторое усиление понятия линейного порядка:

**Определение 9.91.** Множество $X$ называется *вполне упорядоченным*, если на нём введён линейный порядок, в котором любое непустое подмножество $Y \subseteq X$ имеет минимальный элемент.

*Задача* 9.92. Проверьте, что множество $\mathbb{N}$ вполне упорядоченно своим естественным порядком, а $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ не являются вполне упорядоченными своим естественным порядком.

**Теорема 9.93** (Теорема Цермело). *Любое множество можно вполне упорядочить.*

*Набросок доказательства.* Пусть наше множество — $X$. Используя аксиому выбора, выберем элемент $f(Y) \in X \setminus Y$ для любого подмножества $Y \subset X$, $Y \neq X$, включая пустое $Y$. Будем рассматривать вполне упорядоченные подмножества $S \subseteq X$ (с порядком $<_S$), такие что

$$\forall x \in S,\ x = f\left(\{y \in S \mid y <_S x\}\right).$$

Неформально говоря, $f$ предписывает выбор следующего элемента в $X$ при наличии некоторого множества уже выбранных элементов, в качестве $S$ мы рассматриваем множества, выбранные в соответствии с $f$.

Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательству леммы о продолжении решения дифференциального уравнения 7.79. Аккуратно используя вполне упорядоченность, можно показать, что любые два таких вполне упорядоченных $S$ и $T$ устроены так, что либо они совпадают и порядки на них одинаковые, либо одно является подмножеством другого и начальным интервалом другого в смысле порядка.

Потом можно заметить, что объединение $U$ всех таких множеств $S$ несёт порядок, согласованный с порядком на всех $S$, и является вполне упорядоченным. После этого остаётся заметить, что $U = X$, так как иначе множество $U \cup \{f(U)\}$ будет множеством типа $S$, которое по построению уже должно содержаться в $U$. □

*Задача* 9.94. Доделайте доказательство теоремы Цермело, объяснив, почему для любых двух множеств $S$ и $T$, упорядоченных в соответствии с $f$, либо они совпадают и порядки на них одинаковые, либо одно является подмножеством другого и начальным интервалом другого в смысле порядка.

[[ Рассмотрите минимальный $x \in S$, такой что начальный интервал $\{y \in S \mid y <_S x\}$ не является начальным интервалом $T$. Заметьте, что начальный интервал вполне упорядоченного множества является объединением строго меньших начальных интервалов, кроме случая, когда он содержит максимальный элемент. ]]

С понятием вполне упорядоченности связан *принцип трансфинитной индукции*: если для любого элемента $x \in S$ вполне упорядоченного множества $S$ можно определить значение $f(x)$ при условии, что $f(y)$ определено при всех $y < x$, то $f$ (функция, отображение или что-то ещё) определено на всём $S$. Неформально говоря, достаточно рассмотреть минимальный из тех $x \in S$, для которых $f$ определить нельзя, и получить противоречие.

*Задача* 9.95. Обоснуйте возможность трансфинитной индукции, рассмотрев частичные определения $f$ на начальных отрезках $T \subseteq S$.

[[ Докажите, что любые два частичных определения устроены так, что одно из них является продолжением другого. Потом объедините все частичные определения $f$ и объясните, что получилось объединение $f$ на всём $S$. ]]

*Вывод леммы Цорна из теоремы Цермело.* Помимо частичного порядка $\preccurlyeq$ на $X$ рассмотрим (не обязательно связанное с ним) отношение полного порядка $\leqslant$ на $X$, существующее по теореме Цермело.

Сделаем разбиение $X$ на два множества $A$ и $B$ по трансфинитной индукции. Если для данного $x \in X$ все $y < x$ уже приписаны к одному из двух типов, то припишем $x$ к типу по следующему правилу: $x \in A$, если $x$ вместе с уже приписанными в $A$ элементами образует $\preccurlyeq$-цепь. Иначе $x \in B$, тогда $x$ не будет $\preccurlyeq$-сравним с одним из элементов $A$.

После применения трансфинитной индукции $A$ является $\preccurlyeq$-цепью, с учётом того, что объединение цепей является цепью, если эти цепи сами по себе образуют цепь в смысле отношения включения одной цепи в другую. А также, любой элемент из $B$ не $\preccurlyeq$-сравним с одним из элементов $A$. Существующая по условию леммы верхняя грань $A$, $m \in X$, должна лежать в самом $A$, так как она $\preccurlyeq$-сравнима со всеми элементами $A$ и на этапе её добавления она была бы добавлена в $A$.

Если $x \in A$, то $x \preccurlyeq m$, а если $x \in B$, то $m \preccurlyeq x$ не может выполняться, так как тогда выполнялось бы $y \preccurlyeq m \preccurlyeq x$ для любого $y \in A$, что противоречило бы нахождению $x$ в $B$. Следовательно, $m$ не имеет $\preccurlyeq$-большего в $X$ и является максимальным элементом частично упорядоченного множества $X$. ☐

Доказательство теоремы Хана–Банаха также можно провести с помощью трансфинитной индукции и понятия *алгебраического базиса* (*базиса Гамеля*) пространства $E$, далее идёт набросок таких рассуждений.

**Определение 9.96.** *Алгебраическим базисом* векторного пространства $V$ называется подмножество $B \subset V$, в котором нет линейных зависимостей между конечным числом векторов, и которое порождает пространство $V$ своими конечными линейными комбинациями.

Название «алгебраический» мы используем, чтобы не путать это понятие, например, с ортогональными системами в гильбертовых пространствах, по которым каждый элемент раскладывается в (бесконечную) сумму. В алгебраическом смысле суммы рассматриваются только конечные.

**Лемма 9.97.** *В любом векторном пространстве есть алгебраический базис.*

*Доказательство.* Рассмотрим всевозможные линейно независимые системы $I \subset V$. Если есть цепь $\mathcal{C}$ из таких систем, то объединение цепи $\bigcup \mathcal{C}$ тоже будет линейно независимой системой. От противного, при наличии линейной зависимости между $v_1, \dots, v_N \in \bigcup \mathcal{C}$, заметим, что $v_i \in I_i \in \mathcal{C}$ и из свойства цепи после некоторой перестановки окажется

$$I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_N.$$

Тогда $v_i \in I_i \subseteq I_N$ и на самом деле линейная зависимость имеется уже в $I_N$ — противоречие. Мы доказали наличие верхней грани любой цепи линейно независимых систем. По лемме Цорна существует максимальная линейно независимая система $B$. Она уже должна быть базисом, так как для любого $x \in V \setminus B$ в системе $\{x\} \cup B$ должна быть линейная зависимость и она даёт выражение $x$ через $B$, а если $x \in B$, то он и так выражен через $B$.

☐

При наличии вполне упорядоченного алгебраического базиса $V$ теорема Хана–Банаха может быть доказана трансфинитной индукцией. Действительно, либо шаг трансфинитной индукции заключается в рассмотрении объединения подпространств, на которые линейный функционал уже согласованно продолжен, либо мы добавляем один вектор и расширяем линейную оболочку начального интервала базиса так, что факторпространство новой линейной оболочки по старой будет иметь размерность 1. В последнем случае вопрос опять сводится к рассуждениям на плоскости.

За подробностями предыдущих набросков и строгим изложением нужных фактов теории множеств читатель может обратиться к любой книге по теории множеств, хотя, пожалуй, злоупотреблять этим не стоит. Если слишком сжатое изложение в этом разделе было не совсем понятно, можно просто принять лемму Цорна как аксиому.

*Задача* 9.98. Докажите, что общий вариант леммы Цорна следует из варианта для систем подмножеств.

[[ Любому $x \in X$ сопоставьте $I_x = \{y \in X \mid y \preccurlyeq x\}$ и заметьте, что $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow I_x \subseteq I_y$. Переведите условия леммы Цорна для $X$ в термины системы подмножеств $\{I_x\}$. ]]

9.10. **Теорема Тихонова.** Далее нам придётся изучать топологии, которые не всегда будут сводиться к топологии метрического пространства. Топологии мы будем понимать в смысле определения 1.136. Сделаем определение топологии на (не обязательно конечном) декартовом произведении топологических пространств.

**Определение 9.99.** Пусть $A$ — некоторое множество, а $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — семейство топологических пространств, индексированное этим множеством. Базой топологии в декартовом произведении

$$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$$

являются всевозможные произведения $\prod_{\alpha\in A} U_\alpha$ открытых $U_\alpha \subseteq X_\alpha$, у которых только для конечного числа нарушается равенство $U_\alpha = X_\alpha$. Вся топология состоит из всевозможных объединений множеств её базы.

Легко видеть, что пересечение любых двух (и конечного числа) множеств базы топологии произведения тоже является множеством базы топологии произведения. Следующая теорема устанавливает свойство компактности декартова произведения независимо от того, сколько топологических пространств перемножается.

**Теорема 9.100** (Теорема Тихонова). *Пусть $A$ — некоторое множество, а $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — семейство компактных топологических пространств, индексированное этим множеством. Тогда будет компактным и декартово произведение*

$$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha.$$

В следующей задаче даётся набросок элементарных рассуждений, доказывающих ослабленную версию теоремы Тихонова, а потом идёт довольно длинное доказательство теоремы Тихонова в полном виде.

*Задача* 9.101. Докажите секвенциальную компактность декартова произведения отрезка с самим собой в счётном количестве, $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Проверьте, что топологии произведения будет соответствовать покоординатная сходимость последовательностей чисел — элементов этого произведения.

[[ Примените теорему Больцано–Вейерштрасса по очереди ко всех координатам, получив последовательность вложенных подпоследовательностей $(S_n)$ исходной последовательности точек $(p_k)$. Потом выберите подпоследовательность $(p_{k_\ell})$, у которой для любого фиксированного $n$ при достаточно больших $\ell$ номер $k_\ell$ попадает в список номеров $S_n$. ]]

Теперь перейдём к доказательству теоремы Тихонова в полной общности. Сначала заметим, что для доказательства компактности некоторого топологического пространства $X$ нам нужно доказать, что любое его открытое покрытие имеет конечное подпокрытие. Рассуждая от противного, мы начнём с некоторого открытого покрытия $\mathcal{U} \subseteq 2^X$ без конечных подпокрытий и поместим его в некоторое максимальное по включению открытое покрытие $\mathcal{I} \subseteq 2^X, \mathcal{U} \subseteq \mathcal{I}$, из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие.

**Лемма 9.102.** *Для любого открытого покрытия $\mathcal{U} \subseteq 2^X$, не имеющего конечного подпокрытия, найдётся некоторое открытое покрытие $\mathcal{I} \supseteq \mathcal{U}, \mathcal{I} \subseteq 2^X$, максимальное по включению среди тех, которые не имеют конечного подпокрытия.*

*Доказательство.* Рассмотрим всевозможные открытые покрытия $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{U}$, из которых нельзя выбрать конечное подпокрытие. Докажем, что к ним применима лемма Цорна (теорема 9.90), а именно, докажем, что любая линейно упорядоченная цепь $\mathcal{C}$ таких покрытий в объединении даёт покрытие такого же вида. Частичный порядок на семействах подмножеств здесь задан отношением включения одного семейства в другое, в этом смысле мы и применяем лемму Цорна.

В качестве кандидата на верхнюю грань цепи семейств $\mathcal{C}$ возьмём объединение элементов этой цепи. Предположим, что оно нам не годится, то есть в объединении элементов цепи $\mathcal{C}$ есть конечное подпокрытие $U_1, \dots, U_N$ пространства $X$. Тогда открытое множество $U_i$ принадлежит некоторому элементу цепи $\mathcal{U}_i \in \mathcal{C}$ и из определения цепи следует, что после подходящей перенумерации выполняются включения

$$\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{U}_N.$$

Следовательно, $U_1, \dots, U_N \in \mathcal{U}_N \in \mathcal{C}$ и мы выбрали из покрытия $\mathcal{U}_N$ конечное подпокрытие — это противоречие, так как цепь составлена из покрытий без конечных подпокрытий. Следовательно, наше предположение неверно, условия леммы Цорна выполнены и она даёт существование максимального по включению содержащего $\mathcal{U}$ открытого покрытия, не имеющего конечного подпокрытия. ☐

Изучим теперь более внимательно строение максимального по включению открытого покрытия, полученного в предыдущей лемме.

**Лемма 9.103.** *Если открытое покрытие $\mathcal{I}$ топологического пространства $X$ максимально по включению среди открытых покрытий, не имеющих конечного подпокрытия, то выполняются свойства*

1) *для любого открытого множества $U \in \mathcal{I}$ и открытого $V \subseteq U$ оказывается $V \in \mathcal{I}$;*
2) *для любых открытых множеств $U, V \notin \mathcal{I}$ оказывается $U \cap V \notin \mathcal{I}$.*

*Доказательство.* Докажем первое свойство: если к семейству $\mathcal{I}$ добавить $V$, то конечных подпокрытий не появится, так как любое конечное подпокрытие с участием $V$ можно было бы заменить на конечное подпокрытие с заменой $V$ на $U$. Так как семейство $\mathcal{I}$ максимально среди покрытий без конечного подпокрытия, то добавить $V$ к нему на самом деле нельзя, а это означает $V \in \mathcal{I}$.

Для доказательства второго свойства заметим, что отсутствие $U$ в $\mathcal{I}$ означает, что найдётся набор $U_1, \dots, U_N \in \mathcal{I}$, такой что

$$X = U \cup U_1 \cup \dots \cup U_N.$$

Аналогично

$$X = V \cup V_1 \cup \dots \cup V_M$$

для некоторого конечного набора $V_1, \dots, V_M \in \mathcal{I}$. Тогда

$$X = (U \cap V) \cup U_1 \cup \dots \cup U_N \cup V_1 \cup \dots \cup V_M,$$

что означает отсутствие $U \cap V$ в $\mathcal{I}$. □

В разделе 9.21 мы ещё более абстрактно изучим свойства систем типа построенного в предыдущих леммах покрытия $\mathcal{I}$, а сейчас мы готовы доказывать теорему Тихонова.

*Доказательство теоремы 9.100.* Рассмотрим произведение компактов

$$X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha.$$

Если оно не компактно, то с помощью предыдущих лемм мы можем рассматривать максимальное по включению открытое покрытие $\mathcal{I}$ пространства $X$, которое не имеет конечного подпокрытия. Рассмотрим некоторую точку $x \in X$ и содержащее его открытое $U \in \mathcal{I}$. По определению топологии на $X$ открытость $U$ означает, что оно содержит множество вида

$$\prod_{\alpha \in A} U_\alpha \ni x,$$

где $U_\alpha \subseteq X_\alpha$ открыты и только для конечного числа индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ оказывается $U_\alpha \neq X_\alpha$.

Рассмотрим координатные проекции $p_\alpha : X \to X_\alpha$ и для этого конечного набора индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ положим

$$\widetilde{U}_{\alpha_i} = p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}),$$

это открытое подмножество $X$ и у нас получается, что

$$\prod_{\alpha \in A} U_\alpha = \widetilde{U}_{\alpha_1} \cap \dots \cap \widetilde{U}_{\alpha_N}.$$

По свойству 1 покрытия $\mathcal{I}$ (из леммы 9.103) мы имеем

$$\widetilde{U}_{\alpha_1} \cap \dots \cap \widetilde{U}_{\alpha_N} \in \mathcal{I},$$

а по свойству 2 (применённому наоборот) оказывается, что для некоторого индекса $i$ должно выполняться

$$\widetilde{U}_{\alpha_i} \in \mathcal{I}.$$

В итоге мы доказали, что в $\mathcal{I}$ содержатся открытые множества вида

$$\widetilde{U}_\alpha = p_\alpha^{-1}(U_\alpha),$$

которые покрывают всё пространство $X$, так как в предыдущих рассуждениях мы можем начать с любой точки $x \in X$. Докажем, что уже из таких множеств можно выбрать конечное покрытие для $X$. Заметим, что любому индексу $\alpha \in A$ может соответствовать не одно открытое $U_\alpha \subset X_\alpha$ с $\widetilde{U}_\alpha \in \mathcal{I}$, обозначим их все как $\{U_{\alpha,\xi}\}_{\xi \in \Xi_\alpha}$. Рассмотрим два случая:

1) для любого $\alpha$ оказывается $X_\alpha \neq \bigcup_{\xi \in \Xi_\alpha} U_{\alpha,\xi}$. Тогда мы выберем (по аксиоме выбора)

$$x_\alpha \in X_\alpha \setminus \bigcup_{\xi \in \Xi_\alpha} U_{\alpha,\xi}$$

как координаты некоторого $x \in X$. Тогда окажется, что $x$ не принадлежит никакому $\widetilde{U}_{\alpha,\xi}$. Однако мы доказали, что последние множества покрывают всё $X$ — противоречие.

2) для некоторого $\alpha$ оказывается $X_\alpha = \bigcup_{\xi\in\Xi_\alpha} U_{\alpha,\xi}$. Тогда из компактности $X_\alpha$ оно покроется конечным набором $U_{\alpha,\xi_1},\dots,U_{\alpha,\xi_N}$, а всё произведение $X$ тогда покроется соответствующими $\widetilde{U}_{\alpha,\xi_1},\dots,\widetilde{U}_{\alpha,\xi_N}$. Это и есть выбор конечного подпокрытия из $\mathcal{I}$. ☐

Для понимания топологии произведения также полезно решить следующую задачу.

*Задача* 9.104. Проверьте по определению топологии произведения и определению непрерывности отображения (*прообраз любого открытого множества открыт*), что отображение топологических пространств $f : Y \to \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все композиции $p_\beta \circ f : Y \to X_\beta$ с координатными проекциями $p_\beta : \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta$.

В схеме доказательства теоремы Тихонова важно отметить, что *проверка компактности топологического пространства $X$ для его открытых покрытий сводится к проверке его компактности для покрытий его множествами некоторой предбазы его топологии.* Это работает во всех топологических пространствах. Объясним используемую терминологию, частично она использовалась и ранее, начиная с раздела 6.20.

**Определение 9.105.** Пусть на пространстве $X$ топология состоит из всевозможных объединений множеств семейства $\mathcal{B} \subseteq 2^X$, покрывающего $X$. Тогда $\mathcal{B}$ называется *базой* этой топологии.

Заметим, что чтобы корректно определить топологию на $X$ по базе $\mathcal{B} \subset 2^X$, надо проверить, что пересечение любых двух множеств базы является объединим множеств базы и что множества базы покрывают $X$.

**Определение 9.106.** *Предбазой* топологического пространства $X$ называется такой набор открытых множеств $\mathcal{P} \subseteq 2^X$, что всевозможные конечные пересечения $U_1\cap\dots\cap U_N$ элементов $U_1,\dots,U_N \in \mathcal{P}$ составляют базу его топологии, иначе говоря, топология $X$ задаётся произвольными объединениями конечных пересечений множеств из $\mathcal{P}$.

Аналогично замечанию про базу можно заметить, что из любой предбазы $\mathcal{P} \subseteq 2^X$, покрывающей всё множество $X$, получается топология, состоящая из всевозможных объединений конечных пересечений множеств предбазы.

**Определение 9.107.** *Окрестностью точки* $x \in X$ в топологическом пространстве называют любое открытое множество $U$ в этой топологии, содержащее $x$.

Если у топологии есть база, то любая окрестность точки $x$ по определению содержит в себе одно из множеств базы, содержащее $x$. Это позволяет в рассуждениях с окрестностями, например, при определении предела последовательности точек, рассматривать только базовые окрестности. Например, в метрическом пространстве в качестве базовых окрестностей можно рассматривать только $\varepsilon$-окрестности данной точки, причём можно ограничиться только рациональными $\varepsilon$, или даже $\varepsilon = 1/n$ для $n \in \mathbb{N}$. Следующее утверждение несложно, но полезно при сравнении разных топологий на одном и том же множестве.

**Лемма 9.108.** *Чтобы доказать, что две базы $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subseteq 2^X$ соответствуют одной и той же топологии на $X$, достаточно проверить, что для любой точки $x \in X$ любая его базовая окрестность $U \in \mathcal{B}$, $x \in U$, содержит некоторую базовую окрестность $V \in \mathcal{B}'$, $x \in V$, и наоборот.*

*Доказательство.* Рассмотрим базовое множество $U \in \mathcal{B}$. Любая его точка $x \in U$ по условию содержится в некотором базовом множестве $V_x \in \mathcal{B}'$, которое содержится в $U$. Тогда объединение $\bigcup_{x\in U} V_x$ является открытым множеством второй топологии и совпадает с $U$. Таким образом любое базовое множество первой топологии открыто во второй, а значит и вообще любое открытое множество первой топологии открыто во второй. Если выполняется и обратное, то топологии просто совпадают. □

В дальнейших задачах читателю предлагается изучить топологические пространства вида $[0,1]^A$ (декартово произведение отрезка на себя — обобщённый куб) в разных аспектах.

*Задача* 9.109. Докажите, что на счётномерном кубе $[0,1]^{\mathbb{Z}}$ сдвиг координат на единицу, $x'_n = x_{n+1}$, является гомеоморфизмом куба.

[[ Проверьте, что любое открытое множество при сдвиге переходит в открытое множество. ]]

*Задача* 9.110. Докажите, что счётномерный *булев куб* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (произведение множества из двух элементов на себя) гомеоморфен канторову множеству $K \subset [0,1]$. Опишите сдвиг из предыдущей задачи как гомеоморфизм канторова множества.

[[ Вспомните про троичное разложение точек $K$ и проверьте совпадение топологий. ]]

*Задача* 9.111. * Докажите, что на счётномерном кубе $[0,1]^{\mathbb{N}}$ можно ввести метрику, задающую топологию декартова произведения.

[[ Рассмотрите прямоугольный параллелепипед в гильбертовом пространстве, выбрав подходящие длины его сторон. Аккуратно проверьте совпадение топологии декартова произведения и топологии метрики в гильбертовом пространстве. ]]

*Задача* 9.112. Докажите, что если множество $A$ несчётно, то на кубе $[0,1]^A$ не может быть метрики, задающей его топологию декартова произведения.

[[ Обратите внимание, что в топологии, порождённой метрикой, у каждой точки $x \in X$ должна найтись счётная система окрестностей $\mathcal{U}_x$, такая что любая окрестность $V \ni x$ содержит некоторую $U \in \mathcal{U}_x$. Проверьте это свойство для топологии прямого произведения. ]]

*Задача* 9.113. * Функции на множестве $[0,1]^A$ можно рассматривать, как функции бесконечного числа действительных переменных $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, $x_\alpha \in [0,1]$. Докажите, что такая функция непрерывна в топологии декартова произведения тогда и только тогда, когда её можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленами от конечного числа из данного набора переменных.

[[ Надо проверить, что для компактного топологического пространства работают теоремы, которые мы доказывали для компактных метрических пространств, непрерывность равномерного предела непрерывных функций и теорема Стоуна–Вейерштрасса, и применить их. ]]

*Задача* 9.114. * Назовём *элементарным множеством* в $[0,1]^A$ произведение промежутков $\prod_{\alpha\in A} \Delta_\alpha \subset [0,1]^A$, из которых все, кроме конечного числа, совпадают с $[0,1]$. Введём меру элементарного множества как (на самом деле конечное) произведение чисел $\prod_{\alpha\in A} |\Delta_\alpha|$. Докажите, что для такой меры элементарных множеств выполняется лемма 5.11, а значит она продолжается до счётно-аддитивной меры на борелевских подмножествах $[0,1]^A$.

[[ Проверьте, что аддитивность такой меры по сути надо проверить в конечномерном случае, что уже было сделано. Также проверьте, что компактность, нужная в доказательстве леммы 5.11, обеспечена теоремой Тихонова. Проследите остальные шаги построения внешней меры Лебега и собственно меры Лебега для этого случая. ]]

9.11. **$*$-слабая топология и компактность в двойственном пространстве.** Изучив понятия общей топологии из предыдущего раздела, мы готовы рассмотреть топологию на двойственном пространстве банахова пространства, которая отличается от топологии, определяемой его нормой.

**Определение 9.115.** На пространстве $E'$ определяется *$*$-слабая топология* как топология, порождённая предбазой открытых множеств

$$U_{x,a,b} = \{\lambda \in E' \mid a < \lambda(x) < b\}$$

для любых $x \in E$ и $a < b \in \mathbb{R}$. Остальные открытые множества получаются из таких с помощью операций взятия конечного пересечения и произвольного объединения.

Можно проверить, что соответствующее $*$-слабой топологии понятие сходимости соответствует поточечной сходимости линейных функционалов как функций на $E$. При этом топология, связанная с нормой в пространстве $E'$ (определение 9.12), называется *сильной*. Следующая задача немного проясняет эту терминологию.

*Задача* 9.116. Проверьте, что любое открытое множество $*$-слабой топологии $E'$ является открытым и в сильной. Проверьте, что для бесконечномерного $E$ некоторые открытые множества сильной топологии не являются открытыми в $*$-слабой топологии.

[[ Первое утверждение достаточно проверить для множеств предбазы $*$-сильной топологии. Для примера в другую сторону рассмотрите открытый метрический шар в $E'$. ]]

Оказывается, у $*$-слабой топологии есть некоторое свойство компактности, которое иногда может заменить отсутствие компактности в топологии его нормы.

**Теорема 9.117** (Теорема Банаха–Алаоглу). *Любой шар пространства $E'$ компактен в $*$-слабой топологии.*

*Доказательство.* Пусть $B \subset E$ и $B' \subset E'$ — единичные шары. Утверждение достаточно доказать для шара $B'$, так как другие шары получаются из единичного шара с центром в нуле параллельными переносами и гомотетиями, которые непрерывны в $*$-слабой топологии (проверьте это по определению).

Любой линейный функционал $\lambda \in B'$ при сужении на $B$ даёт функцию $f : B \to [-1, 1]$, по которой он однозначно восстанавливается в силу условия однородности $\lambda(ax) = a\lambda(x)$. Такие функции $B \to [-1, 1]$ удобно считать элементами бесконечного декартова произведения

$$[-1, 1]^B = \prod_{x\in B} [-1, 1].$$

Топология декартова произведения порождена множествами $\prod_{x\in B} U_x$, такими что все $U_x$ являются открытыми подмножествами $[-1, 1]$ и все кроме конечного числа совпадают с $[-1, 1]$. В качестве базы топологии декартова произведения отрезков можно выбрать подмножества $[-1, 1]^B$, заданные конечными системами неравенств

$$a_1 < \lambda(x_1) < b_1,\ a_2 < \lambda(x_2) < b_2, \dots, a_N < \lambda(x_N) < b_N.$$

А это уже совпадает с определением базы $*$-слабой топологии на $B'$, с учётом возможности масштабировать $x_i$ и поэтому считать $x_i \in B$ для линейных $\lambda$.

Шар $B'$ линейных функционалов соответствует замкнутому подмножеству $[-1, 1]^B$, так как выполнение любого соотношения линейности

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y)$$

при фиксированных $a, b, x, y$ задействует только три точки $x$, $y$, $ax + by$. Причём в силу однородности $\lambda$ для продолжимости $f$ с шара $B$ до линейного функционала $\lambda$ на всём

$E$ достаточно проверить такие соотношения линейности только для точек $x, y, ax+by \in B$. Следовательно, левая и правая части соотношения линейности для $f$ непрерывно зависят от $f$ в топологии прямого произведения и любое такое соотношение задаёт замкнутое подмножество $[-1,1]^B$, а пересечение всех таких замкнутых подмножеств тоже замкнуто. В итоге возникает гомеоморфизм шара $B'$ со $*$-слабой топологией на замкнутое подмножество

$$\left\{f \in [-1,1]^B \;\middle|\; \forall a, b \in \mathbb{R}\, \forall x, y \in B\; (ax+by \in B) \Rightarrow (f(ax+by) = af(x) + bf(y))\right\}$$

Теперь остаётся применить теорему Тихонова, которая устанавливает компактность $[-1,1]^B$, а $B'$ оказывается компактным как замкнутое подмножество компакта $[-1,1]^B$. $\square$

*Задача* 9.118. Проверьте последнее утверждение в доказательстве теоремы Банаха–Алаоглу: что в любом компактном топологическом пространстве $X$ любое замкнутое подмножество $Y \subset X$ тоже компактно.

[[ От открытого покрытия $Y \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ перейдите к открытому покрытию $\mathcal{U} \cup \{X \setminus Y\}$ для всего $X$. ]]

Следующая задача намечает более элементарное доказательство частного случая теоремы Банаха–Алаоглу.

*Задача* 9.119. Докажите, что если в единичном шаре $E$ есть счётное плотное множество, то секвенциальная компактность единичного шара $E'$ в $*$-слабой топологии следует из решения задачи 9.101.

[[ Добейтесь сходимости подпоследовательности $(\lambda_n)$ в точках плотного $X \subset B$, потом докажите сходимость во всех точках, используя липшицевость всех $\lambda_n \in B'$. ]]

В следующих задачах мы продолжаем сравнение $*$-слабой топологии и сильной топологии в $E'$.

*Задача* 9.120. Докажите, что если банахово пространство $E$ бесконечномерно, то $E'$ не будет локально компактным в $*$-слабой топологии. Топологическое пространство (см. также раздел 9.22) называется *локально компактным*, если у любой его точки есть предкомпактная окрестность.

[[ Заметьте, что любая окрестность нуля содержит бесконечномерное линейное подпространство $E'$. ]]

*Задача* 9.121. Докажите, что в двойственном к некоторому банахову пространству $E'$ норма $\|\cdot\|$ полунепрерывна снизу в $*$-слабой топологии.

[[ Надо доказать замкнутость множеств $\{\lambda \in E' \mid \|\lambda\| \leqslant c\}$ в слабой топологии, проверив, что в этой топологии компактность влечёт замкнутость. ]]

*Задача* 9.122. Докажите, что $*$-слабо сходящаяся последовательность в $E'$ является ограниченной (в смысле нормы $E'$).

[[ Используйте принцип равномерной ограниченности (теорему 9.15). ]]

*Задача* 9.123. $^*$ Докажите, что при условии $E = E''$ замкнутое в топологии нормы выпуклое множество $K \subseteq E'$ является замкнутым и в $*$-слабой топологии.

[[ Пусть $x_0 \notin K$ и без ограничения общности $x_0 = 0$. Тогда по замкнутости $K$ относительно нормы некоторый шар $B_0(r)$ положительного радиуса не пересекается с $K$. Рассуждая аналогично доказательству теорему Хана–Банаха по трансфинитной индукции, найдите линейный функционал, который не более 1 на $B_r(0)$ и не менее 1 на $K$ и получите $*$-слабую окрестность нуля, не пересекающую $K$. ]]

*Задача* 9.124. Докажите, что при условии $E = E''$ расстояние между точкой $x \in E'$ и выпуклым замкнутым в топологии нормы $K \subset E'$ достигается на некотором $y \in K$, то есть $\rho(x, y) = \operatorname{dist}(x, K)$.

[[ Можно пересечь $K$ с шаром, использовать компактность в $*$-слабой топологии и полунепрерывность снизу функции расстояния. ]]

9.12. **Борелевские меры со знаком на $\mathbb{R}^n$ и плотность меры.** Для понимания некоторых двойственных пространств к пространствам функций нам надо будет рассматривать борелевские меры в $\mathbb{R}^n$ или на борелевских подмножествах $\mathbb{R}^n$. Борелевская мера назначает каждому борелевскому множеству неотрицательное число, возможно $+\infty$, с выполнением свойств конечной и счётной аддитивности.

Для упрощения рассуждений мы будем рассматривать только меры, принимающие конечные значения, называя их *конечные меры*. Рассуждения про конечные меры обычно можно обобщить на меры, которые дают конечные значения ограниченным подмножествам $\mathbb{R}^n$, как это делает мера Лебега. Сведение более общей ситуации к конечной обычно достигается разбиением $\mathbb{R}^n$ на кубы, являющиеся сдвигами $[0, 1)^n$, рассмотрением ситуации в каждом кубе (где мера принимает лишь конечные значения), и использованием счётной аддитивности для нахождения меры борелевского множества, не содержащегося в одном кубе.

Также нам нужно определить *борелевскую меру со знаком* как обобщение борелевской меры, которой разрешено принимать и отрицательные значения на борелевских множествах. Так как неясно, как складывать $+\infty$ и $-\infty$, то на меру со знаком надо наложить какие-то ограничения. Для этого определяется *вариация меры со знаком* $\mu$, как мера без знака, по формуле

$$|\mu|(X) = \sup\left\{ \sum_i |\mu(X_i)| \;\middle|\; \text{по счётным разбиениям на измеримые } X = \bigsqcup_i X_i \right\}.$$

Это определение в некотором смысле обобщает определение вариации для функции распределения и позволяет корректно говорить о счётной аддитивности меры со знаком. Следующая теорема является аналогом лемм 8.23 и 8.32.

**Теорема 9.125** (Теорема Хана о разложении меры со знаком). *Борелевская мера со знаком $\mu$ конечной вариации на топологическом пространстве $X$ даёт разложение $X = P \sqcup N$ на борелевские множества так, что для любого борелевского $Y \subseteq P$ оказывается $\mu(Y) \geqslant 0$, а для любого борелевского $Y \subseteq N$ оказывается $\mu(Y) \leqslant 0$. Таким образом $\mu$ раскладывается в разность неотрицательных борелевских мер $\mu_P$ и $\mu_N$, таких что $\mu_P(N) = \mu_N(P) = 0$ и $|\mu| = \mu_P + \mu_N$.*

*Доказательство.* Будем рассматривать только борелевские подмножества $X$. Для любого множества $Y \subseteq X$ положим

$$\mu_+(Y) = \sup\{\mu(Z) \mid Z \subseteq Y\}, \quad \mu_-(Y) = \inf\{\mu(Z) \mid Z \subseteq Y\}.$$

Идея доказательства заключается в том, что верхняя и нижняя грань на самом деле достигаются.

Мы предположили, что вариация $\mu$ ограничена, значит эти величины тоже ограничены. Возьмём $A < \mu_+(X)$ и множество $X_1$, такое что $\mu(X_1) \geqslant A$. Если $\mu_-(X_1) = 0$, то на этом остановимся, иначе найдём $Y_1 \subseteq X_1$, такое что

$$\mu(Y_1) \leqslant \mu_-(X_1)/2 < 0.$$

Тогда у нового множества $X_2 = X_1 \setminus Y_1$ окажется $\mu(X_2) \geqslant \mu(X_1)$ и $\mu_-(X_2) \geqslant 1/2\mu_-(X_1)$. Построим так убывающую по включению последовательность $X_k$ с возрастающими

$\mu(X_k)$ и стремящимися к нулю $\mu_-(X_k)$. Возможно, эта последовательность будет конечной, если на каком-то шаге окажется $\mu_-(X_k) = 0$.

Пусть теперь $Z = \bigcap_k X_k$. У этого множества $\mu(Z) \geqslant \mu(X_1) \geqslant A$ и $\mu_-(Z) = 0$, так как при наличии подмножества $Z$ отрицательной меры $-\delta$ мы бы имели $\mu_-(X_k) \leqslant -\delta$ на всех шагах, что противоречит построению.

В итоге, мы умеем строит «положительное» (то есть не содержащее подмножеств отрицательной меры) множество $Z_1$, мера которого не менее чем, скажем, $\mu_+(X)/2$. Потом в дополнении $X \setminus Z_1$ мы найдём положительное $Z_2$, у которого $\mu(Z_2) \geqslant \mu_+(X \setminus Z_1)/2$, и продолжаем далее, имея последовательность непересекающихся положительных множеств со свойством

$$\mu(Z_k) \geqslant \mu_+(X \setminus (Z_1 \cup \dots \cup Z_{k-1}))/2.$$

Их объединение $P = \bigcup_k Z_k$ будет положительным и в $N = X \setminus P$ уже не будет подмножеств положительной меры, так как на каждом шаге построения $\mu_+(X \setminus (Z_1 \cup \dots \cup Z_{k-1}))$ убывало как минимум в два раза и в итоге

$$N = \bigcap_k X \setminus (Z_1 \cup \dots \cup Z_{k-1})$$

уже не может содержать подмножеств положительной меры.

Определим $\mu_P(Y) = \mu(P \cap Y) \geqslant 0$, $\mu_N(Y) = -\mu(N \cap Y) \geqslant 0$. Тогда

$$\mu(Y) = \mu(Y \cap P) + \mu(Y \cap N) = \mu_P(Y) - \mu_N(Y),$$

откуда уже тривиально следуют указанные в формулировке свойства, в частности

$$|\mu|(Y) = |\mu(Y \cap P)| + |\mu(Y \cap N)| = \mu_P(Y) + \mu_N(Y).$$

□

Произвольную борелевскую меру можно представлять себе как некоторое распределение массы. А борелевскую меру со знаком — как распределение заряда, если говорить в физических терминах. В принципе, масса может быть сосредоточена в одной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, тогда соответствующую борелевскую меру (*дельта-меру*) можно определить очень просто: $\delta(X) = 1$, если $X \ni x_0$ и $\delta(X) = 0$, если $X \not\ni x_0$.

*Задача* 9.126. Представьте дельта-меру, сосредоточенную в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ с помощью функции распределения, как в разделе 8.6.

Другая ситуация — когда мера ведёт себя в некотором смысле противоположно распределению в одной точке. А именно, борелевская мера $\nu$ *имеет плотность*, если она может быть задана формулой

$$\nu(X) = \int_X f(x)\, dx$$

для некоторой борелевской функции $f$ и любого борелевского $X$, интеграл берётся по обычной мере Лебега. Критерий наличия плотности даётся в следующем определении и теореме:

**Определение 9.127.** Борелевская мера $\nu$ на $\mathbb{R}^n$ *абсолютно непрерывна* относительно стандартной меры Лебега $\mu$, если для любого борелевского множества $X$, у которого мера Лебега $\mu(X) = 0$, оказывается также $\nu(X) = 0$.

**Теорема 9.128** (Теорема Радона–Никодима в $\mathbb{R}^n$). *Пусть неотрицательная конечная борелевская мера $\nu$ на $\mathbb{R}^n$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. Тогда у меры $\nu$*

*есть* плотность, *то есть борелевская* $f \geqslant 0$, *такая что для любого борелевского* $X$

$$\nu(X) = \int_X f(x)\,dx.$$

*Доказательство.* Будем рассматривать только борелевские множества и борелевские функции, в частности любой элемент $L_1(\mathbb{R}^n)$ по следствию 5.55 можно представить борелевской функцией. Положим

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in L_1(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; f \geqslant 0, \forall X, \nu(X) \geqslant \int_X f(x)\,dx \right\}.$$

Заметим, что если $f, g \in \mathcal{F}$, то $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ тоже лежит в $\mathcal{F}$. Действительно, пусть

$$A = \{x \mid f(x) \leqslant g(x)\},\ B = \{x \mid f(x) > g(x)\},$$

тогда

$$\nu(X) = \nu(X \cap A) + \nu(X \cap B) \geqslant \int_{X\cap A} g(x)\,dx + \int_{X\cap B} f(x)\,dx = \int_X h(x)\,dx.$$

Рассмотрим последовательность функций $f_n \in \mathcal{F}$, такую что

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\,dx \to \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \;\middle|\; f \in \mathcal{F} \right\}, \quad n \to \infty.$$

По предыдущему замечанию, заменяя $f_k$ на $\max\{f_1, \dots, f_k\}$, можно считать эту последовательность поточечно возрастающей к некоторой $f$, а по теореме о монотонной сходимости получается, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx \;\middle|\; g \in \mathcal{F} \right\}.$$

Мы хотим доказать, что $f$ является искомой плотностью. Рассмотрим теперь меру, заданную по формуле

$$\lambda(X) = \nu(X) - \int_X f(x)\,dx,$$

которая по определению $\mathcal{F}$ неотрицательна и даёт нуль множествам лебеговой меры нуль. Для завершения доказательства теоремы достаточно доказать, что $\lambda$ нулевая.

Предположим противное, что $\lambda(\mathbb{R}^n) = 2\varepsilon > 0$. Тогда для некоторого ограниченного $Y$ будет по непрерывности (которая следует из счётной аддитивности) $\lambda(Y) > \varepsilon$. Мера Лебега $\mu(Y)$ конечна, поэтому возьмём $\delta > 0$ так, чтобы $\delta\mu Y < \varepsilon$, и рассмотрим меру со знаком $\varkappa = (\lambda - \delta\mu)|_Y$. Здесь *ограничение меры* $\rho$ на множество $Y$ определяется по формуле $\rho|_Y(X) = \rho(X \cap Y)$, и мы ограничиваем меры на множество $Y$ с конечной мерой $\mu$, чтобы мера со знаком $\varkappa$ оказалась с конечной вариацией.

По нашему выбору $\varkappa(Y) > 0$, и теорема о разложении меры со знаком даст борелевское $P \subseteq Y$, для всех подмножеств которого $\varkappa \geqslant 0$ и $\varkappa(P) > 0$. Это означает, что $\mu(P) > 0$ по абсолютной непрерывности и для любого борелевского множества $X \subseteq P$ выполняется неравенство

$$\lambda(X) \geqslant \delta\mu(X).$$

Если мы положим $g(x) = \delta\chi_P(x)$, то оказывается, что для любого борелевского множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ выполняется

$$\lambda(X) \geqslant \lambda(X \cap P) \geqslant \delta\mu(X \cap P) = \int_{X\cap P} \delta\,dx = \int_X g(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\lambda(X) \geqslant \int_X g(x)\,dx \Rightarrow \nu(X) \geqslant \int_X f(x) + g(x)\,dx,$$

то есть $f + g \in \mathcal{F}$ по определению $\mathcal{F}$. Кроме того,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx = \delta\mu P > 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} (f+g)\,dx > \int_{\mathbb{R}^n} f\,dx,$$

что противоречит построению $f$ как элемента $\mathcal{F}$ с максимальным интегралом. $\square$

В свете теоремы Радона–Никодима можно интерпретировать формулу замены переменных в интеграле 6.126 как сравнение меры Лебега на открытом множестве и *прямого образа* меры Лебега относительно данного отображения, определённого по формуле $\varphi_*\mu(X) = \mu(\varphi^{-1}(X))$. Локально можно установить, что эти меры отличаются не более чем на константу, хотя бы потому, что расстояние увеличивается не более чем в константу раз. Значит они абсолютно непрерывны одна относительно другой, а соответствующая функция плотности может быть найдена из локального линейного приближения отображения.

Возвращаясь к более элементарным вопросам, можно заметить, что теорема Радона–Никодима на самом деле обобщает утверждение (теоремы 8.33 и 8.31) о том, что абсолютно непрерывная на отрезке функция представляется как интеграл с переменным верхним пределом, просто потому что такая функция есть функция распределения меры (со знаком), абсолютно непрерывной относительно стандартной меры Лебега.

Нам также потребуется некоторое свойство регулярности произвольной борелевской меры на $\mathbb{R}^n$.

**Теорема 9.129.** *Пусть $\nu$ — конечная борелевская мера на $\mathbb{R}^n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любого борелевского $X \subseteq \mathbb{R}^n$ найдутся замкнутое $F$ и открытое $U$, такие что $F \subseteq X \subseteq U$ и $\nu(U) - \nu(F) < \varepsilon$.*

*Доказательство.* Докажем это свойство сначала для замкнутых и открытых множеств $X$. Если $X$ замкнуто, то положим $F = X$ и представим $X$ в виде пересечения убывающей по включению последовательности открытых множеств $X = \bigcap_k U_k$, здесь можно взять $1/k$-окрестности $X$. Для $\nu$ свойство непрерывности для убывающих последовательностей следует из её конечности и счётной аддитивности, см. задачу 5.31 и теорему 5.29 на примере меры Лебега. Тогда

$$\nu(X) = \lim_{k\to\infty} \nu(U_k)$$

и мы можем приблизить $X$ снизу замкнутым, а сверху открытым с любой точностью по мере $\nu$. Для открытого $X$ достаточно приблизить нужным образом его дополнение и перейти к дополнениям для приближения $X$. Вообще заметим, что если мы можем приблизить нужным образом дополнение $X$, $F \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X \subseteq U$, то приближение $X$, $\mathbb{R}^n \setminus U \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^n \setminus F$, тоже имеется.

Далее проверим другие операции, порождающие борелевские множества. Если борелевские $X$ и $Y$ приближены с точностью $\varepsilon$, $F \subseteq X \subseteq U$, $G \subseteq Y \subseteq V$, то получаются приближения

$$F \cap G \subseteq X \cap Y \subseteq U \cap V, \quad F \cup G \subseteq X \cup Y \subseteq U \cup V$$

с точностью не более $2\varepsilon$.

Осталось проверить счётные объединения $X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k$ борелевских множеств. Если есть приближение $F_k \subseteq X_k \subseteq U_k$ с точностью $\varepsilon/2^k$, то для достаточно большого $N$ приближение

$$\bigcap_{k=1}^{N} F_k \subseteq X \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$$

будет иметь точность не более $2\varepsilon$.

Так как любое борелевское множество получается из открытых применением операций дополнения, пересечения, объединения и счётного объединения, то таким образом утверждение доказано для всех борелевских множеств $X$. ☐

*Задача* 9.130. Проверьте утверждение о том, что абсолютно непрерывная функция является функцией распределения меры со знаком, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега.

[[ В рассуждении удобно будет использовать свойство регулярности из теоремы 9.129. ]]

*Задача* 9.131 (Теорема Лебега о разложении). Докажите, что неотрицательная конечная борелевская мера $\nu$ на $\mathbb{R}^n$ раскладывается в сумму абсолютно непрерывной (относительно меры Лебега $\mu$) меры $\nu_c$ и *сингулярной относительно меры Лебега* меры $\nu_s$. Последнее означает, что существует множество $X \subseteq \mathbb{R}$, такое что $\nu_s(\mathbb{R}^n \backslash X) = 0$ и $\mu(X) = 0$.

[[ Заметьте, что в доказательстве теоремы Радона–Никодима абсолютная непрерывность была нужна лишь на последнем шаге, который надо модифицировать для изучения сингулярной части меры. ]]

## 9.13. **Двойственное к пространству непрерывных функций на отрезке.**

Чтобы понять, что двойственные пространства бывают на практике достаточно нетривиальными и содержательными, попытаемся дать описание пространства, двойственного к хорошо известному нам $C[a, b]$, пространству непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. Вместо отрезка подойдёт любое компактное подмножество $\mathbb{R}^n$, но мы для наглядности рассмотрим именно случай отрезка. Для определённости, будем рассматривать функции с действительными значениями.

**Теорема 9.132** (Теорема Рисса). *Любой непрерывный линейный функционал $\lambda : C[a, b] \to \mathbb{R}$ соответствует интегрированию по борелевской мере со знаком на $[a, b]$, имеющей ограниченную вариацию, и наоборот. При этом норма функционала равна полной вариации меры.*

*Доказательство в одну сторону.* Любая борелевская мера со знаком ограниченной вариации даёт линейный функционал интеграла по этой мере

$$f \mapsto \int_a^b f(x) d\mu(x)$$

и содержательным моментом остаётся проверка, что его норма как линейного функционала равна вариации $\mu$. Неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) d\mu(x) \right| \leqslant \int_a^b |f(x)| d|\mu(x)| \leqslant \|f\|_C \cdot |\mu|$$

очевидно для ступенчатых функций, и для произвольных борелевских с помощью предельного перехода. Покажем, что это неравенство не может быть улучшено.

По теореме Хана разложим отрезок в объединение борелевских множеств $[a, b] = P \sqcup N$, так что выполняется $\mu = \mu_P - \mu_N$ для неотрицательных мер, сосредоточенных на $P$ и $N$. По свойству регулярности (теорема 9.129) найдём компактные $F \subseteq P$ и $G \subseteq N$ такие что $\mu_P(P \setminus F), \mu_N(N \setminus G) < \varepsilon$. Введём функцию на отрезке по формуле

$$f(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, G) - \operatorname{dist}(x, F)}{\operatorname{dist}(x, F) + \operatorname{dist}(x, G)}.$$

Она корректно определена, так как знаменатель не обращается в нуль, её значения лежат на отрезке $[-1,1]$, и кроме того $f(F)=1$, $f(G)=-1$. Тогда

$$\int_a^b f(x)d\mu(x) \geqslant \int_{F\cup G} f(x)d\mu(x) - 2\varepsilon = \int_F f(x)d\mu_P(x) - \int_G f(x)d\mu_N(x) - 2\varepsilon =$$
$$= \mu_P(F)+\mu_N(G)-2\varepsilon > \mu_P(P)+\mu_N(N)-4\varepsilon = |\mu|-4\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon>0$ произвольно, то мы видим, что для $\|f\|_C \leqslant 1$ интеграл может быть сколь угодно близок к вариации меры $\mu$. ☐

В обратную сторону доказательство теоремы Рисса более технично. Первым шагом будет ввести понятие *неотрицательного непрерывного линейного функционала* $\lambda^+ : C[a,b]\to\mathbb{R}$, то есть такого функционала, который принимает неотрицательные значения на функциях, неотрицательных на всём отрезке $[a,b]$. Неотрицательный функционал также обладает свойством монотонности: $\lambda(f)\geqslant\lambda(g)$, если $f\geqslant g$ на всём отрезке, так как $f-g\geqslant 0$ влечёт $\lambda(f-g)\geqslant 0$.

Далее нужно сформулировать аналог леммы 8.23 и теоремы Хана о разложении 9.125 в данной ситуации.

**Лемма 9.133.** *Любой непрерывный линейный функционал $\lambda : C[a,b]\to\mathbb{R}$ раскладывается в разность неотрицательных*

$$\lambda=\lambda^+-\lambda^-,\quad \textit{причём}\quad \|\lambda\|=\|\lambda^+\|+\|\lambda^-\|=\lambda^+(1)+\lambda^-(1).$$

*Доказательство.* Для неотрицательных непрерывных функций $f$ определим (супремум берётся по непрерывным функциям и далее рассматриваем только непрерывные функции)

$$\lambda^+(f)=\sup\{\lambda(\varphi)\mid 0\leqslant\varphi\leqslant f\}.$$

Неравенство $\lambda^+(f)+\lambda^+(g)\leqslant\lambda^+(f+g)$ следует из того, что при $0\leqslant\varphi\leqslant f$ и $0\leqslant\psi\leqslant g$ оказывается $0\leqslant\varphi+\psi\leqslant f+g$. Обратное неравенство $\lambda^+(f)+\lambda^+(g)\geqslant\lambda^+(f+g)$ следует из того, что любую непрерывную функцию $\xi$, такую что $0\leqslant\xi\leqslant f+g$, можно разложить в сумму $\xi=\varphi+\psi$, так что $0\leqslant\varphi\leqslant f$ и $0\leqslant\psi\leqslant g$, для этого достаточно положить $\varphi=\min\{\xi,f\}$ (минимум берётся поточечно).

Также из определения ясно, что $\lambda^+(cf)=c\lambda^+(f)$ при $c\geqslant 0$. Этого и равенства $\lambda^+(f+g)=\lambda^+(f)+\lambda^+(g)$ для неотрицательных функций достаточно, чтобы продолжить $\lambda^+$ до линейного функционала на всём $C[a,b]$ по формуле

$$\lambda^+(f)=\lambda^+(g)-\lambda^+(h),\quad f=g-h,\quad g,h\geqslant 0.$$

Это определение не зависит от выбора неотрицательных $g$ и $h$, так как при другом разложении $f=u-v$, мы имеем равенство сумм неотрицательных функций $g+v=h+u$, из которого следует

$$\lambda^+(g)+\lambda^+(v)=\lambda^+(g+v)=\lambda^+(h+u)=\lambda^+(h)+\lambda^+(u),$$

то есть

$$\lambda^+(g)-\lambda^+(h)=\lambda^+(u)-\lambda^+(v).$$

Подставляя $\varphi=f$ в определение $\lambda^+(f)$ мы убеждаемся, что $\lambda^+(f)\geqslant\lambda(f)$ для любых неотрицательных $f\in C[a,b]$. Следовательно разность

$$\lambda^-=\lambda^+-\lambda$$

является неотрицательным линейным функционалом.

Посмотрим теперь на нормы функционалов. Из монотонности $\lambda^+$ и $\lambda^-$ следует, что

$$\|\lambda^+\|=\lambda^+(1),\quad \|\lambda^-\|=\lambda^-(1).$$

Очевидно, что $\|\lambda\| \leqslant \|\lambda^+\| + \|\lambda^-\|$, и нам надо доказать равенство. Для любой непрерывной функции $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ оказывается $\|2\varphi - 1\| \leqslant 1$, и следовательно

$$\lambda(\varphi) = \frac{\lambda(2\varphi - 1) + \lambda(1)}{2} \leqslant \frac{\|\lambda\| + \lambda(1)}{2} = \frac{\|\lambda\| + \lambda^+(1) - \lambda^-(1)}{2}.$$

Переходя к супремуму по $\varphi$, получаем из определения $\lambda^+$:

$$\lambda^+(1) \leqslant \frac{\|\lambda\| + \lambda^+(1) - \lambda^-(1)}{2} \Rightarrow \lambda^+(1) + \lambda^-(1) \leqslant \|\lambda\|,$$

что и требовалось. ☐

Далее в доказательстве теоремы Рисса нужно работать с неотрицательным непрерывным линейным функционалом $\lambda : C[a,b] \to \mathbb{R}$ и определить меру (без знака) открытых подмножеств $U \subseteq [a,b]$

$$\mu(U) = \sup\{\lambda(f) \mid 0 \leqslant f \leqslant 1,\ \operatorname{supp} f \subseteq U\}.$$

Эта мера продолжается до борелевской меры на всех подмножествах отрезка. Шаги соответствующего рассуждения представлены в виде задач для самостоятельного решения.

*Задача* 9.134. Докажите счётную субаддитивность такой меры $\mu(U)$ на открытых множествах.

[[ Используйте компактность носителя в определении $\mu(U)$ и разбиение единицы. ]]

После этого можно определить внешнюю меру произвольного множества как

$$\mu^*(X) = \inf\{\mu(U) \mid U \supseteq X\} \quad \text{(по открытым } U\text{)}, \tag{9.2}$$

с помощью её счётной субаддитивности проверить её аддитивность на элементарных подмножествах отрезка, и продолжить $\mu$ до счётно-аддитивной борелевской меры на отрезке.

*Задача* 9.135. Докажите, что для любого открытого множества $U$ и положительного $\varepsilon$ найдётся компактное множество $F \subseteq U$, такое что $\mu^*(F) > \mu(U) - \varepsilon$.

[[ Найдите $f$ из определения $\mu(U)$, для которой $\lambda(f) > \mu(U) - \varepsilon$, и положите $F = \operatorname{supp} f$. Для открытых $V \supseteq F$ подставьте $f$ в определение $\mu(V)$, чтобы установить $\mu(V) \geqslant \lambda(f) > \mu(U) - \varepsilon$. ]]

*Задача* 9.136. Докажите аддитивность $\mu^*$ на элементарных множествах отрезка.

[[ С учётом очевидной субаддитивности достаточно доказать $\mu^*(I \cup J) \geqslant \mu^*(I) + \mu^*(J)$ для двух непересекающихся промежутков. Это нетривиально только для случая, когда границы промежутков имеют общую точку $c \in [a,b]$, тогда один из них можно накрыть открытым множеством $U$, не пересекающим другой промежуток, и применить результат предыдущей задачи, чтобы свести к случаю промежутков с непересекающимися окрестностями. ]]

*Завершение доказательства теоремы Рисса.* Считаем, что мера из определения (9.2) продолжена до конечной борелевской меры на отрезке и по ней можно интегрировать. Требуемое равенство

$$\lambda(f) = \int_a^b f(x)\, d\mu$$

достаточно проверить на непрерывных функциях со значениями в $[0,1]$, в силу линейности обеих частей и выполнения равенства при $f\equiv 1$, что позволяет сдвигать и масштабировать значения функции. Возьмём натуральное $m$ и представим $f$ в виде суммы

$$f=\sum_{k=1}^{m} f_k,$$

где непрерывные функции $f_k : [a,b]\to[0,1/m]$ определены как

$$f_k(x)=\begin{cases}1/m, & \text{если } f(x)\geqslant k/m;\\ f(x)-(k-1)/m, & \text{если } (k-1)/m\leqslant f(x)\leqslant k/m;\\ 0, & \text{если } f(x)\leqslant (k-1)/m.\end{cases}$$

Такое разложение можно представить себе как нарезание подграфика $f$ горизонтальными прямыми $y=k/m$, $k=0,1,\dots,m$ на $m$ частей, сдвиг части номер $k$ на $(k-1)/m$ вниз и рассмотрение этой части как подграфик $f_k$.

Вложив носитель каждой $f_k$ в открытое множество $U_k=\{x\in[a,b]\mid f(x)>(k-2)/m\}$, мы получим по определению $\mu$ неравенство

$$\lambda(mf_k)\leqslant\mu(U_k)\Rightarrow\lambda(f_k)\leqslant\frac{1}{m}\mu(U_k),$$

что после суммирования даст

$$\lambda(f)\leqslant\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\mu(U_k)=\int_a^b\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\chi_{U_k}(x)\,d\mu.$$

Так как $U_1\subseteq U_2\subseteq\dots\subseteq U_m$ и $x\in U_k$ означает $f(x)>(k-2)/m$, то выполняется неравенство

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\chi_{U_k}(x)<f(x)+\frac{2}{m}.$$

Следовательно, в силу монотонности интеграла

$$\lambda(f)\leqslant\int_a^b f(x)\,d\mu+\frac{2}{m}\mu[a,b].$$

При стремлении $m\to\infty$ получаем неравенство

$$\lambda(f)\leqslant\int_a^b f(x)\,d\mu.$$

Неравенство в другую сторону получается заменой в доказанном равенстве $f$ на $1-f$, так как для $f\equiv 1$ выполняется равенство

$$\lambda(1)=\int_a^b d\mu=\mu[a,b]$$

по определению $\mu[a,b]$ и монотонности $\lambda$.

Утверждение в теореме про равенство норм, в силу леммы 9.133, достаточно проверить для неотрицательного линейного функционала и соответствующей ему меры, но тогда в силу монотонности и неотрицательности

$$\|\lambda\|=\lambda(1)=\int_a^b d\mu=\mu[a,b]=|\mu|[a,b].$$

□

Один из непрерывных линейных функционалов на $C[a,b]$ очень легко определить. Для точки $x \in [a,b]$ положим

$$\delta_x : C[a,b] \to \mathbb{R} \quad \delta_x(f) = f(x).$$

С точки зрения теоремы Рисса этот функционал («дельта-функция») соответствует определённой ранее $\delta$-мере мере, сосредоточенной в одной точке $x$. Норма дельта-функции как линейного функционала на $C[a,b]$ равна 1.

*Задача* 9.137. Докажите, что двойственное к двойственному к $C[a,b]$ не совпадает с $C[a,b]$.

[[ Заметьте, что интегрировать по борелевской мере можно не только непрерывные функции. ]]

*Задача* 9.138. Докажите, что $L_1[a,b]$ вкладывается в двойственное к $C[a,b]$ по формуле

$$g \mapsto \left(f \mapsto \int_a^b fg\, dx\right)$$

с сохранением нормы.

[[ Оценка интеграла через произведение $\|f\|_C \cdot \|g\|_1$ очевидна, надо только доказать, что она почти достигается на некоторых $f$ с любой точностью, для этого приблизьте $\operatorname{sgn} g$ непрерывными функциями в среднем (см. также доказательство леммы 9.156). ]]

Теорема Рисса и теорема Банаха–Алаоглу показывают, что борелевские меры со знаком или без знака на отрезке обладают некоторым свойством слабой компактности: множество мер $M$ предкомпактно в $*$-слабой топологии, если вариация всех $\nu \in M$ ограничена одним и тем же числом. В следующих задачах обсуждается слабая топология в терминах мер.

*Задача* 9.139. Докажите, что слабая сходимость $\delta_{x_n} \to \delta_{x_0}$ эквивалентна обычной сходимости $x_n \to x_0$.

[[ Примените определение слабой сходимости. ]]

*Задача* 9.140. $^*$(Описание слабой топологии без функций) Докажите, что на множестве вероятностных борелевских мер (неотрицательных с полной мерой 1) на отрезке $[a,b]$, $*$-слабая топология порождается открытыми множествами, соответствующими открытым $V \subseteq [a,b]$

$$U_{V,a} = \{\nu \mid \nu(V) > a\}.$$

[[ В одну сторону, при условии $\nu(V) > a$ найдите непрерывную $f : [a,b] \to [0,1]$, у которой $\operatorname{supp} f \subseteq V$ и

$$\int_a^b f(x) d\nu(x) > a.$$

В обратную сторону докажите, что последнее неравенство для фиксированной непрерывной функции гарантируется принадлежностью $\nu$ пересечению конечного набора множеств $U_{V_i,a_i}$. ]]

*Задача* 9.141. Докажите, что множества вероятностных борелевских мер на отрезке вида $\{\nu \mid \nu(V) < a\}$ не открыты в слабой топологии для некоторых открытых $V$.

[[ Сделайте контрпример из дельта-функций. ]]

Также читателю предлагается самостоятельно изучить ряд Фурье меры, см. также более общее определение преобразования Фурье в разделе 9.19.

*Задача* 9.142. $^*$ Рассмотрим борелевскую меру со знаком $\mu$ ограниченной вариации на $(-\pi, \pi]$, которую можно рассмотреть как $2\pi$-периодическую меру на прямой (с не обязательно ограниченной вариацией). Для неё можно определить коэффициенты Фурье

$$c_n(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{(-\pi,\pi]} e^{-ixn}\, d\mu,$$

соответствующие суммы Фурье и Фейера, рассматриваемые как плотности меры (со знаком). Докажите, что суммы Фейера меры сходятся к ней в $*$-слабой топологии. Обязаны ли слабо сходиться к мере её суммы Фурье?

[[ Утверждение про суммы Фейера можно доказывать по определению слабой сходимости неотрицательных мер, используя неотрицательность ядра Фейера и регулярность меры из теоремы 9.129. Иначе, можно использовать описание меры из варианта теоремы Рисса для $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ и интерпретировать сумму Фейера $S_n(\mu)$ как функционал

$$S_n(\mu)(f) = \mu\left(S_n(f)\right).$$

При рассмотрении сумм Фурье можно написать аналогичные формулы, подставить $\mu = \delta_0$ и посмотреть, что получится. ]]

В этом разделе наше изложение было довольно схематичным, более подробные сведения по изложенной в этом разделе теме можно найти, например, в книге [10].

9.14. **Распределения (обобщённые функции) из $W^{-\infty,2}$ и $\mathcal{E}'$.** Будем рассматривать функции на действительной прямой. Обобщения конструкций на функции нескольких переменных достаточно прямолинейны, но техничны, см. обсуждение в разделе 9.20.

Для пространства $L_2(\mathbb{R})$ мы уже установили, что двойственное ему пространство можно идентифицировать с ним самим, сопоставляя функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ линейный функционал

$$\lambda_g(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Пример с двойственным пространством к $C[a, b]$ и теоремой Рисса намекает на то, что для расширения двойственного пространства мы можем рассмотреть какое-либо «меньшее» функциональное пространство $\mathcal{F}$, с более жёсткими ограничениями на функции, для которого вложение $I : \mathcal{F} \to L_2(\mathbb{R})$ непрерывно с точки зрения топологии $\mathcal{F}$ и $L_2(\mathbb{R})$. Тогда возникает сопряжённое отображение (см. определение 9.31) двойственных пространств $I^* : L_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}'$, $I^*(\lambda) = \lambda \circ I$, и получается, что мы не только вложили $\mathcal{F}$ в $L_2(\mathbb{R})$, но и расширили пространство $L_2(\mathbb{R})$ до пространства $\mathcal{F}'$. Инъективность $I^*$ будет обеспечена плотностью $\mathcal{F}$ в $L_2(\mathbb{R})$ в топологии $L_2$.

Достаточно удобно выбрать пространство $\mathcal{F}$ нормированным или даже гильбертовым. Например, гильбертовым пространством будет *пространство Соболева* $W^{k,2}(\mathbb{R})$, состоящие из функций с $k$-й обобщённой производной (при локально абсолютно непрерывной $(k-1)$-й производной) и с конечной нормой

$$\|f\| = \left(\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2 + \dots + \|f^{(k)}\|_2^2\right)^{1/2}.$$

Можно проверить (проверьте полноту в качестве упражнения), что эти пространства на самом деле гильбертовы. Определяя

$$W^{-k,2} = \left(W^{k,2}\right)'$$

мы получим целую последовательность пространств, связанных непрерывными инъективными отображениями (слева идут естественные вложения, а справа — их сопряжения)

$$\dots \to W^{k,p} \to W^{k-1,p} \to \dots \to W^{1,2} \to W^{0,2} = L_2 \to W^{-1,2} \to \dots W^{-k+1,2} \to W^{-k,2} \to \dots$$

В итоге можно будет определить пространство $W^{\infty,2}$ как пересечение всех пространств Соболева с топологией, заданной счётным семейством соболевских норм, все эти функции уже будут бесконечно гладкие. Также можно определить $W^{-\infty,2}$ как объединение всех пространств Соболева, на самом деле окажется, что

$$W^{-\infty,2} = \left(W^{\infty,2}\right)'.$$

Доказательство этого равенства (структура двойственного пространства к пространству с бесконечным семейством норм) аналогично приведённым ниже рассуждениям про пространство $\mathcal{E}'$.

*Задача* 9.143. * Опишите преобразования Фурье функций из $W^{k,2}$.

[[ Используйте преобразование Фурье производной, но действуйте аккуратно, так как $L_1(\mathbb{R}) \neq L_2(\mathbb{R})$. ]]

Другие варианты введения обобщённых функций — использовать в качестве базового пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (этот вариант мы рассмотрим в разделе 9.19) или $\mathcal{E}(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R})$. В первом случае топология пространства задаётся ранее определённым счётным семейством полунорм, а в пространстве $\mathcal{E}(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R})$ топология определяется семейством полунорм

$$\|f\|_{K,k} = \sup\{|f^{(k)}(x)| \mid x \in K\}$$

по всем компактам $K \subset \mathbb{R}$ и неотрицательным целым $k$. Топология задаётся семейством полунорм в том же смысле, как это было в пространстве $\mathcal{S}$, предбазу топологии составляют множества вида

$$U_{K,k,\varepsilon}(f_0) = \{f \mid \|f - f_0\|_{K,k} < \varepsilon\}.$$

На самом деле для определения топологии в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ не нужно рассматривать все компакты, а достаточно рассмотреть только отрезки $[-m, m]$ с $m \in \mathbb{N}$, получив таким образом счётное семейство полунорм, определяющее ту же топологию в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.

Аналогично банаховым пространствам, в пространствах с топологией, порождённой счётным семейством полунорм, можно указать критерий непрерывности функционала через его ограниченность. Приведём соответствующее утверждение для $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.

**Теорема 9.144.** *Для любого непрерывного линейного функционала $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ найдутся константа $C > 0$, неотрицательное целое $k$ и отрезок $K = [-m, m]$, такие что*

$$(9.3)\qquad |\lambda(\varphi)| \leqslant C \max\{\|\varphi\|_{K,\ell} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant k\} = C \sup\{|\varphi^{(\ell)}(x)| \mid x \in [-m, m],\ 0 \leqslant \ell \leqslant k\}.$$

*Доказательство.* Определение непрерывности $\lambda$ заключается в том, что прообраз интервала $\lambda^{-1}(-1, 1)$ является открытым множеством, и в частности содержит открытую окрестность нуля. Открытая окрестность нуля содержит базовую окрестность нуля $U$, которая в пространстве со счётным семейством полунорм задаётся конечным числом условий вида $\|x\|_{L,\ell} < \varepsilon_\ell$ (с разными $\ell$, $L$ и $\varepsilon_\ell > 0$).

Объединив все фигурирующие в условиях компакты $L$, можно считать, что они содержатся в одном отрезке $K = [-m, m]$, базовая окрестность нуля $U$ при этом только уменьшится. Максимальное фигурирующее в условиях целое число $\ell$ обозначим $k$, а в качестве $C$ выберем $\frac{2}{\min\{\varepsilon_\ell \mid 0 \leqslant \ell \leqslant k\}}$. Тогда при условии

$$(9.4)\qquad \max\{\|\varphi\|_{K,\ell} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant k\} \leqslant 1/C$$

окажется, что $\varphi \in U$ и $|\lambda(\varphi)| \leqslant 1$. А при выполнении условия

$$\max\{\|\varphi\|_{K,\ell} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant k\} = 0 \tag{9.5}$$

должно выполняться $\lambda(\varphi) = 0$, так как иначе после умножения $\varphi$ на достаточно большое число $a$ нарушится условие $|\lambda(a\varphi)| < 1$ при сохранении условия $a\varphi \in U$.

Так как левая и правая части неравенства (9.3) однородны относительно умножения на число, и любая функция $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ после умножения на ненулевое число удовлетворяет либо (9.4), либо (9.5), то неравенство (9.3) верно для всех $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$. ☐

Это рассуждение можно расширить до обобщённой теоремы Банаха–Штейнгауза, см. задачу 9.153. Базируясь на предыдущей теореме, можно указать некоторый явный вид распределения из $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

**Теорема 9.145.** *Любое распределение $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ задаётся интегрированием производных $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ по борелевским мерам со знаком конечной вариации на некотором отрезке:*

$$\lambda(\varphi) = \int_{-m}^{m} \varphi\, d\mu_0 + \int_{-m}^{m} \varphi'\, d\mu_1 + \dots + \int_{-m}^{m} \varphi^{(k)}\, d\mu_k. \tag{9.6}$$

*Доказательство.* Применим теорему 9.144 и получим некоторый отрезок $[-m, m]$ и номер производной $k$. Из неравенства (9.3) следует, что $\lambda(\varphi)$ обнуляется на всех функциях $\varphi$, которые равны нулю на отрезке $[-m, m]$, то есть значение $\lambda(\varphi)$ зависит только от поведения $\varphi$ на этом отрезке. Поэтому далее мы будем смотреть на гладкие функции на отрезке $[-m, m]$.

Посмотрим на ограничение $\lambda$ на пространство многочленов $\mathcal{P}_{k-1}$ степени не более $k-1$ на отрезке $[-m, m]$. Подберём функционал $\lambda_0$ вида $a_0\delta_0(\varphi) + \dots + a_{k-1}\delta_0(\varphi^{(k-1)})$ (это частный случай вида (9.6)), который совпадает с $\lambda$ на $\mathcal{P}_{k-1}$. С учётом того, что $\mathcal{P}_{k-1} \subset \mathcal{E}[-m, m]$ является ядром оператора взятия $k$-й производной $\mathcal{E}[-m, m] \to \mathcal{E}[-m, m]$ и операция взятия $k$-й производной сюръективна на $\mathcal{E}[-m, m]$, получается, что $\lambda - \lambda_0$ можно представить как $\lambda_1(\varphi^{(k)})$, с некоторым линейным функционалом $\lambda_1$.

Проверим непрерывность $\lambda_1$. Любой гладкой функции $\psi$ на отрезке $[-m, m]$ можно сопоставить $k$-кратным определённым интегралом от $0$ до $x$ функцию $I(\psi) = \varphi$, такую что $\varphi^{(k)} = \psi$. Нормы $\|I(\psi)\|_{[-m,m],\ell}$ с $0 \leqslant \ell \leqslant k$ будут очевидно ограничены $m^k\|\psi\|_C$, следовательно, выражение

$$\lambda_1(\psi) = \lambda(I(\psi)) - \lambda_0(I(\psi))$$

будет ограничено $C$-нормой $\psi$ в силу ограниченности $\lambda$ и $\lambda_0$ в смысле (9.3).

Ограниченность $\lambda_1(\psi)$ через $C$-норму $\psi$ означает возможность непрерывного продолжения $\lambda_1 : C[-m, m] \to \mathbb{R}$ в силу плотности множества гладких функций в $C[-m, m]$. По теореме Рисса (теорема 9.132) $\lambda_1$ представляется в виде

$$\lambda_1(\psi) = \int_{-m}^{m} \psi\, d\mu_k,$$

что устанавливает требуемый вид (во всех слагаемых, кроме последнего, интегрирование по дельта-мерам с коэффициентами)

$$\lambda(\varphi) = \int_{-m}^{m} \varphi\, da_0\delta_0 + \int_{-m}^{m} \varphi'\, da_1\delta_0 + \dots + \int_{-m}^{m} \varphi^{(k-1)}\, da_{k-1}\delta_0 + \int_{-m}^{m} \varphi^{(k)}\, d\mu_k.$$

☐

*Задача* 9.146. Проверьте в обратную сторону, что формула (9.6) действительно задаёт распределение из $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

[[ Докажите непрерывность данного линейного функционала с помощью неравенства типа (9.3). ]]

Равенство типа (9.6) можно установить и без теоремы Рисса. В следующей задаче получается выражение типа (9.6), в котором (не совсем оптимально) число $k$ увеличено на единицу, но зато все меры имеют плотность.

*Задача* 9.147. С помощью вложения $W^{k+1,2}[-m,m] \to C^k[-m,m]$ докажите, что линейный функционал, удовлетворяющий условиям (9.3), оказывается также непрерывным линейным функционалом на $W^{k+1,2}[-m,m]$, и представляется в виде

$$\lambda(\varphi) = \int_{-m}^{m} \left(\varphi(x)\bar{f}(x) + \varphi'(x)\bar{f}'(x) + \dots + \varphi^{(k+1)}(x)\bar{f}^{(k+1)}(x)\right)\, dx$$

с некоторой $f \in W^{k+1,2}[-m,m]$.

[[ Докажите непрерывность вложения $W^{k+1,2}[-m,m] \to C^k[-m,m]$, оценив $C$-нормы производных порядка $0, 1, \dots, k$ функции $f \in W^{k+1,2}[-m,m]$ через её норму в этом $W^{k+1,2}[-m,m]$. Докажите гильбертовость пространства Соболева $W^{k+1,2}[-m,m]$, применив полноту $L_2[-m,m]$ к (обобщённым) производным функций из некоторой фундаментальной последовательности в $W^{k+1,2}[-m,m]$. Имея в виду, что скалярное произведение в этом пространстве имеет вид

$$(f,g) = \int_{-m}^{m} \left(f\bar{g} + f'\bar{g}' + \dots + f^{(k+1)}\bar{g}^{(k+1)}\right)\, dx,$$

примените теорему 9.63. ]]

Посмотрим на другие полезные свойства пространства $\mathcal{E}(\mathbb{R})$. Для начала заметим, что определить фундаментальную последовательность можно в любом топологическом векторном пространстве.

**Определение 9.148.** *Топологическое векторное пространство* — это векторное пространство с некоторой топологией, в котором операции сложения и умножения на число непрерывны.

В качестве примеров топологических векторных пространств мы видели разные функциональные пространства с нормой, а также пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, в которых топология определяется счётным семейством норм, то есть предбаза топологии состоит из метрических окрестностей точек во всевозможных нормах.

**Определение 9.149.** Последовательность элементов $(x_n)$ топологического векторного пространства $\mathcal{T}$ является *фундаментальной*, если $x_n - x_m \to 0$ при $n, m \to \infty$. Более подробно: если для любой окрестности нуля $U \subseteq \mathcal{T}$ найдётся натуральное $N$, такое что $x_n - x_m \in U$ при $n, m \geqslant N$.

**Определение 9.150.** Топологическое векторное пространство называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность в нём имеет предел.

**Лемма 9.151.** *Пространство $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ полно.*

*Доказательство.* Фундаментальная последовательность $(\varphi_n)$ элементов $\mathcal{E}$ сходится равномерно на любом отрезке $[-m,m]$ к непрерывной функции $\psi_{[-m,m]}$ по свойству полноты $C[-m,m]$. Аналогично, последовательность производных $\varphi^{(k)} \to \psi_k$ сходится равномерно на $[-m,m]$, причём по теореме 4.42 она сходится к $\varphi^{(k)}_{[-m,m]}$.

При замене отрезка $[-m,m]$ на больший отрезок $[-m',m']$ получается другая функция $\varphi_{[-m',m']}$, но первая очевидно является ограничением второй,

$$\psi_{[-m,m]} = \psi_{[-m',m']}|_{[-m,m]}.$$

Это означает, что $\psi_{[-m,m]}$, для любого отрезка $[-m,m]$, является ограничением одной и той же бесконечно гладкой функции $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая и является пределом последовательности $(\varphi_n)$ в смысле сходимости в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$. ☐

Проверка остальных полезных свойств $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ предлагается читателю в виде следующих задач.

*Задача* 9.152. ${}^*$(Теорема Бэра в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$) Докажите, что $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ нельзя представить в виде объединения счётного числа замкнутых подмножеств с пустыми внутренностями.

[[ Для начала найдите в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ убывающую по включению последовательность выпуклых окрестностей нуля $(U_n)$, такую что любое открытое множество $U \ni 0$ содержит некоторое $U_n$; для этого достаточно взять окрестности $\|\cdot\|_{K,k} \leqslant 1/m$ для всех норм $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ и натуральных $m$, занумеровать их как $(V_n)$, а потом положить $U_n = V_1 \cap \dots \cap V_n$. Потом повторите доказательство теоремы Бэра для открытых множеств, используя вместо стягивающейся последовательности шаров убывающую по включению последовательность множеств вида $t_nU_n + c_n$ с $t_n \leqslant 1$ и доказав фундаментальность $(c_n)$. ]]

*Задача* 9.153. ${}^*$(Теорема Банаха–Штейнгауза в $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$) Предположим, что множество $Y \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ такое, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ множество чисел $\{\lambda(\varphi) \mid \lambda \in Y\}$ ограничено. Докажите, что существует константа $C$ и конечный набор норм $\|\cdot\|_{K,0}, \dots, \|\cdot\|_{K,k}$ пространства $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, так что для любой функции $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ и любого $\lambda \in Y$ выполняется

$$|\lambda(\varphi)| \leqslant C \sup\{\|\varphi\|_{K,\ell} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant k\}.$$

[[ Проверьте, что доказательство теоремы Банаха–Штейнгауза для банаховых пространств проходит и здесь, только окрестности нуля надо задавать не одной нормой, а несколькими. ]]

9.15. **Распределения из $\mathcal{D}'$, регулярные и нерегулярные обобщённые функции.** Самое ходовое пространство распределений имеет более сложное определение по сравнению с двумя уже рассмотренными примерами. Сначала мы рассмотрим пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, которое как векторное пространство есть пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем на прямой. В нём мы не будем вводить нормы и топологию, а определим только понятие сходимости следующим образом:

**Определение 9.154.** Последовательность $(\varphi_k) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ сходится к $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, если носители всех этих функций содержатся в одном отрезке $[-m, m]$ и на нём, для любого $\ell \in \mathbb{Z}^+$, $\varphi_k^{(\ell)} \to \varphi_0^{(\ell)}$ равномерно.

Используя понятие сходимости в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, мы можем определить непрерывные (по Гейне) линейные функционал. Они образуют пространство $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Если не оговорено противное, именно его мы будем называть *пространством распределений* или *пространством обобщённых функций* на $\mathbb{R}$. Чтобы прояснить термин «обобщённая функция», надо сделать определение:

**Определение 9.155.** Любая локально интегрируемая (по Лебегу) функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задаёт элемент $\lambda_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ по формуле

$$\lambda_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Такие элементы $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ называются *регулярными функциями*.

Под *локальной интегрируемостью* здесь подразумевается существование конечных интегралов $f$ по любому отрезку. Регулярные функции действительно задают непрерывные функционалы на $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, так как по определению сходимости $\varphi_k \to \varphi_0$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ интегралы можно сократить до интегралов по отрезку и применить на отрезке теорему об ограниченной сходимости в силу локальной интегрируемости $f$.

Заметим, что если изменить функцию $f$ на множестве меры нуль, то соответствующая ей регулярная функция в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ не изменится. Это утверждение можно уточнить.

**Лемма 9.156.** *Локально интегрируемые $f$ и $g$ задают одинаковые элементы $\lambda_f$ и $\lambda_g$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда они отличаются на множестве меры нуль.*

*Доказательство.* Нетривиально только доказать, что из $\lambda_f = \lambda_g$ следует равенство $f = g$ почти всюду. Положим $h = f - g$ и тогда нам надо будет доказать, что из равенства $\lambda_h = 0$ следует $h = 0$ почти всюду.

Предположим противное. Если $h$ не равна нулю почти всюду, то из строгой монотонности интеграла Лебега следует, что $\int_{\mathbb{R}} |h|\ dx > 0$. Перейдя к рассмотрению некоторого отрезка, можно считать, что

$$0 < \varepsilon = \int_a^b |h|\ dx < +\infty.$$

Приблизим $h$ функцией $u$, так что $\|h - u\|_1 < \frac{\varepsilon}{4}$ и $\|u\|_C \leqslant M$ для некоторого $M > 0$. Приблизим после этого $\operatorname{sgn} u$ гладкой с носителем в $(a, b)$ функцией $\varphi$, так что

$$\|\operatorname{sgn} u - \varphi\|_1 < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

При этом можно считать, что $|\varphi(x)| \leqslant 1$ для всех $x$. Тогда

$$\int_a^b h\varphi\ dx = \int_a^b u \operatorname{sgn} u\ dx + \int_a^b u(\varphi - \operatorname{sgn} u)\ dx + \int_a^b (h-u)\varphi\ dx.$$

В выражении справа первый интеграл $\int_a^b |u|\ dx > 3/4\varepsilon$, второй по модулю меньше $\varepsilon/4$, а третий тоже по модулю меньше $\varepsilon/4$, следовательно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h\varphi\ dx = \int_a^b h\varphi\ dx \neq 0,$$

то есть $\lambda_h$ не нуль и получено противоречие. □

Определим самую знаменитую обобщённую функцию, которую мы уже рассматривали в качестве борелевской меры:

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0).$$

Иногда пишут $\delta(x - x_0)$, но это выражение не имеет прямого смысла, так как $\delta_{x_0}$ не является функцией, его можно понимать лишь так, что мы взяли дельта-функцию в нуле и сдвинули её на $x_0$. Заметим, что $\delta_{x_0}$ лежит не только в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, но и в $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ и в $W^{-\infty,2}$.

Можно заметить, что дельта-функция не является регулярной. Как в доказательстве леммы 9.156, можно доказать, что при условии $\lambda_f = \delta_{x_0}$ функция $f$ должна быть равна нулю почти всюду при $x > x_0$ и почти всюду при $x < x_0$, то есть просто почти всюду. Но можно привести и прямое рассуждение. Пусть $x_0 = 0$ без ограничения общности. Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ имеет значения в $[0, 1]$, носитель в $[-1, 1]$ и $\varphi(0) = 1$. Тогда для любой локально интегрируемой функции $f$ оказывается

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(kx)\ dx \right| \leqslant \left| \int_{-1/k}^{+1/k} |f(x)|\ dx \right| \to 0$$

из непрерывности интеграла Лебега, тогда как

$$\delta_0(\varphi(kx)) \equiv 1 \not\to 0.$$

*Задача* 9.157. При каком минимальном $k$ можно утверждать, что $\delta_{x_0} \in W^{-k,2}$?

[[ Проверьте определённость элемента $W^{k,2}$ в точке при разных $k$, потом аккуратно проверьте непрерывность (ограниченность) взятия значения в точке. ]]

*Задача* 9.158. * Определим с помощью интегрирования в смысле главного значения

$$\lambda(\varphi) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \lim_{\delta\to+0} \left( \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right).$$

Докажите, что это выражение всегда конечно и непрерывно зависит от $\varphi$ в смысле сходимости в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Докажите, что определённый так функционал $\lambda = v.p.\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ не регулярный.

[[ Для доказательства корректности определения удобно представить $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ на некотором конечном отрезке. Для доказательства нерегулярности проверьте, что при условии $\lambda_f = v.p.\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ равенство $f = \frac{1}{x}$ должно выполняться почти всюду. Для этого удобно применить рассуждения из доказательства леммы 9.156 на отрезках, не содержащих 0. ]]

*Задача* 9.159. * Определим пространство $\mathcal{D}_m(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ как пространство бесконечно гладких функций с компактным носителем на отрезке $[-m, m]$. Топологию на $\mathcal{D}_m(\mathbb{R})$ зададим как индуцированную включением $\mathcal{D}_m(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R})$. В объединении

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{D}_m(\mathbb{R})$$

открытыми множествами объявим такие $U \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R})$, что пересечение $U \cap \mathcal{D}_m(\mathbb{R})$ открыто в $\mathcal{D}_m(\mathbb{R})$ для любого $m$. Докажите, что сходимость в этой топологии именно та, которая приведена выше как сходимость в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ по определению.

[[ Проверьте что содержательная часть утверждения — это доказательство того, что сходящаяся в указанной топологии последовательность содержится полностью в некотором $\mathcal{D}_m(\mathbb{R})$. Так как сдвиг является гомеоморфизмом этой топологии, достаточно рассмотреть сходимость к нулю и предположить противное — что последовательность функций $(\varphi_n)$ стремится к нулю, но объединение носителей этих функций неограничено. Обоснуйте, что перейдя к подпоследовательности, можно считать $\varphi_n(x_n) \neq 0$ для некоторой последовательности чисел $x_n \to \infty$. Проверьте по определению, что множество функций $\varphi$, заданное условием

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(x_n)}{|\varphi_n(x_n)|} < \varepsilon,$$

открыто в топологии $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ для любого $\varepsilon > 0$. Поставьте это множество в определение стремления к нулю последовательности $(\varphi_n)$ в этой топологии. ]]

9.16. **Производная распределения и топология в пространстве $\mathcal{D}'$.** С помощью сопряжения и сравнения с регулярными функциями можно определить разнообразные операции с распределениями. Будем для удобства записывать применение распределения к функции в более симметричном виде, $\lambda(\varphi) = \langle \lambda, \varphi \rangle$. Тогда мы можем определить производную распределения $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ как

$$\langle \lambda', \varphi \rangle = -\langle \lambda, \varphi' \rangle.$$

Это определение обобщает производную для регулярных распределений, соответствующих локально абсолютно непрерывным функциям (то есть функциям, абсолютно непрерывном на конечных отрезках). Действительно, если $f$ — такая функция, а $\lambda_f$ — соответствующее распределение, то исходя из интегрирования по частям и компактности носителя $\varphi$ получается

$$\langle \lambda_f', \varphi \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f\varphi'\, dx = -\,f\varphi|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f'\varphi\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f'\varphi\, dx = \langle \lambda_{f'}, \varphi \rangle.$$

Так как взятие производной — очевидно непрерывный линейный оператор в пространствах $\mathcal{D}(\mathbb{R}), \mathcal{E}(\mathbb{R}), \mathcal{S}(\mathbb{R}), W^{+\infty,2}$, то сопряжённая ему операция корректно определена не только для $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, но и для всех разумных пространств распределений.

Поясним, что имеется в виду под сопряжением в более общем виде. Для любого непрерывного линейного отображения $A : \mathcal{T} \to \mathcal{Q}$ топологических векторных пространств *сопряжённое* линейное отображение $A^* : \mathcal{Q}' \to \mathcal{T}'$ действует по формуле

$$(A^*\lambda)(x) = \lambda(A(x)) \Leftrightarrow \langle A^*\lambda, x\rangle = \langle \lambda, Ax\rangle.$$

Определение корректно, так как выписанное выражение $\lambda \circ A$ непрерывно и линейно как композиция непрерывных и линейных отображений. Наше определение производной для распределения в этом смысле является сопряжением производной для функции, но со знаком минус. Знак минус выбирается, чтобы на абсолютно непрерывных регулярных распределениях производная совпадала с (обобщённой) производной функции.

*Задача* 9.160. Найдите по определению производную регулярного распределения $\ln|x|$. Будет ли эта производная регулярной?

[[ С помощью непрерывности интеграла Лебега рассмотрите интеграл от $-\ln|x|\varphi'(x)$ как предел интегралов по $\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)$ при $\delta \to +0$. ]]

*Задача* 9.161. Докажите, что любое распределение $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ имеет первообразную, то есть такую $\mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, что

$$\mu' = \lambda$$

в смысле дифференцирования распределений. Докажите, что любые две первообразные одного и того же распределения отличаются на константу.

[[ Обратите внимание, что взятие первообразной в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ определено не для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и опишите, для каких $\varphi$ оно определено и как. Потом примените сопряжение для получения операции взятия первообразной распределения. ]]

Зависит ли производная $\lambda'$ непрерывно от распределения $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$? Чтобы сделать этот вопрос корректным, нужно ввести какую-то топологию на $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Мы будем использовать $*$-слабую топологию в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, которую мы уже изучали в случае банахова пространства.

**Определение 9.162.** В пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ используется $*$-слабая топология, соответствующая поточечной сходимости. Предбазой топологии являются множества

$$U_{\varphi,a,b} = \{\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \mid a < \lambda(\varphi) < b\}$$

для всевозможных $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $a < b \in \mathbb{R}$. Сходимость в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\lambda_n \to \lambda_0$, означает тогда, что для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ имеет место

$$\lambda_n(\varphi) \to \lambda_0(\varphi).$$

Проверим по определению, что производная $\lambda'$ непрерывно зависит от $\lambda$ в смысле топологии в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Действительно,

$$\lambda' \in U_{\varphi,a,b} \Leftrightarrow a < \lambda'(\varphi) < b \Leftrightarrow a < -\lambda(\varphi') < b \Leftrightarrow \lambda \in U_{-\varphi',a,b},$$

что доказывает непрерывность в топологическом смысле. Здесь важно заметить, что определение непрерывности любого отображения топологических пространств $f : X \to Y$ достаточно проверить на множествах предбазы топологии $Y$. Для остальных открытых подмножеств пространства $Y$ непрерывность тогда последует из сохранения открытости множества при взятии конечных пересечений и любых объединений.

*Задача* 9.163. Аналогично рассуждению для операции взятия производной в $\mathcal{D}'$ докажите, что сопряжённое $A^* : \mathcal{Q}' \to \mathcal{T}'$ к любому непрерывному линейному отображению $A : \mathcal{T} \to \mathcal{Q}$ топологических векторных пространств непрерывно в $*$-слабой топологии.

[[ Рассмотрите прообразы множества предбазы топологии $\{\lambda \in \mathcal{T}' \mid a < \lambda(\varphi) < b\}$ относительно $A^*$, равные $\{\lambda \in \mathcal{Q}' \mid a < \lambda(A(\varphi)) < b\}$ ]]

*Задача* 9.164. $^*$ Докажите, что если $A : E \to F$ является непрерывным линейным отображением банаховых пространств, то норма сопряжённого отображения $A^*$ равна норме отображения $A$.

[[ Неравенство $\|A^*\| \leqslant \|A\|$ следует из определения $A^*\lambda$ как композиции $\lambda$ и $A$. Неравенство в обратную сторону потребует применения теоремы Хана–Банаха для ненулевого вектора $\|Ax\|$, для которого $\|Ax\| \geqslant (1-\varepsilon)\|A\| \cdot \|x\|$. ]]

Понятие топологии и сходимости в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ позволит нам рассмотреть практические вопросы, например обсудить приближение дельта-функции последовательностью регулярных функций в смысле этой топологии. Сформулируем некоторое утверждение, которое поможет понять, какие последовательности регулярных функций сходятся к дельта-функции.

**Теорема 9.165.** *Пусть последовательность регулярных (локально интегрируемых) функций* $(f_n)$ *обладает свойствами*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = 1$$

*возможно в несобственном смысле, интегралы* $\left|\int_a^b f_n(x)\,dx\right|$ *ограничены некоторой константой* $C$ *независимо от* $a, b, n$ *и для любого* $\delta > 0$ *(интегралы возможно в несобственном смысле)*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{-\delta} f_n(x)\,dx = 0.$$

*Тогда* $\lambda_{f_n} \to \delta_0$ *в смысле* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

*Доказательство.* Положим

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,dt.$$

Условия на функции $f_n$ можно переформулировать в терминах функций $F_n$ так: $F_n(-\infty) = 0, F_n(+\infty) = 1$, $F_n$ равномерно ограничены константой $C$ и поточечно (кроме может быть точки 0)

$$F_n(x) \to \vartheta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Преобразуем тогда выражение, используя интегрирование по частям:

$$\langle \lambda_{f_n}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\,dx = F_n(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(x)\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} F_n(x)\varphi'(x)\,dx.$$

Так как $\varphi'(x)$ ограничена и отлична от нуля только на некотором отрезке, а $F_n$ ограничена константой $C$, то по теореме об ограниченной сходимости 5.101 можно перейти к пределу под знаком интеграла и получить

$$\lim_{n\to\infty} \langle \lambda_{f_n}, \varphi \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) - \varphi(+\infty) = \varphi(0).$$

то есть в смысле сходимости в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ получается, что $\lambda_{f_n} \to \delta_0$. ☐

Идея доказательства теоремы кратко может быть сформулирована так: если $F_n \to \vartheta$ поточечно и все $F_n$ равномерно ограничены, то $F_n \to \vartheta$ и в смысле $*$-слабой сходимости пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, и тогда $f_n = F_n' \to \delta_0 = \vartheta'$ в силу непрерывности взятия производной в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

В качестве следствия этой теоремы и известных нам свойств интеграла Дирихле получается, что

$$\frac{\sin \lambda x}{\pi x} \to \delta_0 \quad (\lambda \to \infty)$$

в смысле сходимости в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

*Задача* 9.166. К чему в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ сходится последовательность регулярных функций

$$D_n(x) = \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin x/2}$$

при $n \to \infty$?

9.17. **Умножение распределения на функцию.** Умножение распределения $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ на функцию $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ определяется как сопряжённое умножению на $f$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle \lambda f, \varphi \rangle = \langle \lambda, f\varphi \rangle.$$

*Задача* 9.167. Проверьте выполнение правила Лейбница для производной произведения $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$:

$$(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'.$$

[[ Подействуйте распределением на $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и примените определение умножения и производной распределения. ]]

**Лемма 9.168.** *Определение умножения $\lambda f$ корректно, то есть $\lambda f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.*

*Доказательство.* Линейность $\lambda f$ очевидна, а для доказательства непрерывности $\lambda f$ остаётся проверить, что умножение на бесконечно гладкую $f$ является непрерывной операцией в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Пусть имеет место сходимость $\varphi_n \to \varphi_0$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Тогда носители всех $\varphi_i$ лежат на некотором отрезке $[-m, m]$. Проверим, что для всех производных порядка $k \in \mathbb{Z}^+$ выполняется

$$(f\varphi_n)^{(k)} \to (f\varphi_0)^{(k)}$$

равномерно на $[-m, m]$. По формуле Лейбница разность между левой и правой частью расписывается как

$$\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} f^{(k-\ell)} \left( \varphi_n^{(\ell)} - \varphi_0^{(\ell)} \right),$$

это выражение равномерно на $[-m, m]$ стремится к нулю из ограниченности производных $f$ на $[-m, m]$ и стремления $\varphi_n \to \varphi_0$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. ☐

*Задача* 9.169. Проверьте, что для умножения распределения $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ на две бесконечно гладкие функции $f$ и $g$ выполняется $\lambda \cdot (fg) = (\lambda f)g$.

**Лемма 9.170.** *Произведение $\lambda f$ непрерывно зависит от $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.*

*Доказательство.* Зафиксируем $f$ и проверим непрерывность умножения на $f$ как отображения $\mathcal{D}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$\lambda f \in U_{\varphi,a,b} \Leftrightarrow a < (\lambda f)(\varphi) < b \Leftrightarrow a < \lambda(f\varphi) < b \Leftrightarrow \lambda \in U_{f\varphi,a,b}.$$

☐

Для лучшего понимания непрерывной зависимости произведения $\lambda f$ от $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ нам понадобится:

**Лемма 9.171.** *Непрерывность линейного функционала $\lambda : \mathcal{E}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ по Коши и его непрерывность по Гейне эквивалентны.*

*Доказательство.* Непрерывность по Гейне следует из непрерывности по Коши, как и для функций действительного переменного. Пусть теперь у нас есть непрерывность по Гейне, но нет непрерывности по Коши, покажем, что это приводит к противоречию.

В силу непрерывности сдвигов в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ и $\mathbb{R}$, для линейного функционала достаточно проверить непрерывность в нуле, что упростит дальнейшие формулы. Так как топология $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ определяется счётным семейством норм, то мы можем занумеровать все $\delta$-окрестности нуля (с рациональными $\delta > 0$) во всех этих нормах как последовательность открытых $V_n \ni 0$. Положим для натуральных $n$

$$U_n = V_1 \cap \dots \cap V_n.$$

Пусть непрерывность по Коши в нуле нарушается для некоторого $\varepsilon > 0$, то есть $\lambda^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon)$ не содержит открытой окрестности нуля. Тогда для любого $n$ найдётся $v_n \in U_n$, такой что $|\lambda(v_n)| \geqslant \varepsilon$, то есть последовательность $\lambda(v_n)$ не стремится к нулю.

Покажем, что $v_n$ стремится к нулю и имеется противоречие с непрерывностью по Гейне. Для любой окрестности $U \ni 0$, по определению предбазы топологии в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, найдётся пересечение предбазовых окрестностей $V_{i_1} \cap \dots \cap V_{i_m}$, содержащееся в $U$. Тогда для любого $n \geqslant \max\{i_1, \dots, i_m\}$, мы обнаружим, что

$$U_n \subseteq V_{i_1} \cap \dots \cap V_{i_m} \subseteq U \Rightarrow v_n \in U.$$

Это означает $v_n \to 0$ по определению стремления последовательности к точке в топологическом пространстве. ☐

*Задача* 9.172. $^*$ Приведите пример топологического пространства $X$, в котором непрерывность функции $f : X \to \mathbb{R}$ по Гейне не влечёт непрерывность по Коши.

[[ В качестве $X$ удобно взять подпространство несчётного произведения $\{0,1\}^A$, состоящее из отображений $x : A \to \{0,1\}$, у которых либо $x^{-1}(0)$ не более чем счётно, либо $x^{-1}(1)$ не более чем счётно. В качестве функции можно взять функцию, принимающую значения 0 и 1 в зависимости от выполнения одной из альтернатив в определении множества $X$. ]]

**Лемма 9.173.** *Произведение $\lambda f$ непрерывно зависит от $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$.*

*Доказательство.* Изучим прообраз предбазового множества топологии $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, считая теперь $\lambda$ фиксированным, а $f$ — переменной:

$$\lambda f \in U_{\varphi,a,b} \Leftrightarrow a < (\lambda f)(\varphi) < b \Leftrightarrow a < \lambda(f\varphi) < b.$$

Надо доказать, что последнее неравенство в цепочке, как неравенство на функцию $f$, определяет открытое подмножество в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.

Покажем непрерывную зависимость $\lambda(f\varphi)$ от $f$ по Гейне. Если $f_n \to f$ в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, то на отрезке $[-m, m]$, содержащем носитель $\varphi$, имеет место равномерная вместе со всеми производными сходимость $f_n \to f$. Применяя формулу Лейбница как в доказательстве леммы 9.168, мы получим сходимость $f_n\varphi \to f\varphi$ вместе со всеми производными с сохранением носителя в $[-m, m]$, то есть сходимость в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Далее применяем непрерывность $\lambda$ по Гейне и получаем непрерывность выражения $\lambda(f\varphi)$ по Гейне как функции от $f$.

Непрерывность $\lambda(f\varphi)$ по Коши следует из леммы 9.171, а из неё следует и открытость определяемого неравенством множества. ☐

Аналогично умножению на функцию элементов $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ определяется умножение на бесконечно гладкую функцию в $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, а в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (см. раздел 9.19 про такие распределения) это сделать посложнее, придётся позаботиться о не слишком быстром росте $f$ и её производных.

*Задача* 9.174. Проверьте, что для корректности определения умножения $f\varphi$ для $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ и $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ со значением в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ достаточно, чтобы любая производная $f$ росла не быстрее некоторой степени $x$ при $x \to \infty$.

9.18. **Носитель распределения и $\mathcal{E}'$ как распределения с компактным носителем.** Заметим, что утверждение леммы 9.173 допускает следующую интерпретацию (если поменять местами $f$ и $\varphi$): *Если $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, а $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, то произведение $\lambda f$ оказывается элементом $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.*

Это наблюдение позволяет изучать распределения из $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ локально, сводя вопросы к изучению распределений из $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ после умножения на гладкую функцию с компактным носителем и использовать явное представление (9.6). Далее мы обсудим понятие *носителя распределения* из $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, чтобы описать $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ как подмножество $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Для $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и открытого $U \subseteq \mathbb{R}$ будем говорить, что $\lambda|_U = 0$ (*ограничение $\lambda$ на $U$ равно нулю*), если $\lambda(\varphi) = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ с носителем в $U$. Ограничение распределения на открытое множество будет определено в рамках понятия распределения на многообразии из раздела 9.20, здесь же мы говорим лишь о нулевом ограничении. Следующая лемма позволяет рассуждать о нулевом ограничении достаточно корректно.

**Лемма 9.175.** *Пусть для распределения $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ нашлось семейство открытых множеств $\{U_\alpha\}$, такое что $\lambda|_{U_\alpha} = 0$ для любого $\alpha$. Тогда для объединения $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ окажется $\lambda|_U = 0$.*

*Доказательство.* Пусть $\operatorname{supp}\varphi \subset U$, посмотрим, чему может быть равно $\lambda(\varphi)$. Из множеств $\{U_\alpha\}$, покрывающих $\operatorname{supp}\varphi$, достаточно оставить конечное число по компактности. Выберем разбиение единицы, то есть неотрицательные функции $\psi_\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, такие что

$$\operatorname{supp}\psi_\alpha \subset U_\alpha,\ \sum_\alpha \psi_\alpha \equiv 1 \text{ в окрестности } \operatorname{supp}\varphi.$$

Тогда

$$\lambda(\varphi) = \lambda\left(\sum_\alpha \varphi\psi_\alpha\right) = \sum_\alpha \lambda(\varphi\psi_\alpha) = 0,$$

в последнем равенстве использовалось условие $\lambda|_{U_\alpha} = 0$ и тот факт, что $\operatorname{supp}\varphi\psi_\alpha \subset U_\alpha$. ☐

**Определение 9.176.** Для $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ положим

$$Z_\lambda = \bigcup\{U \mid \lambda|_U = 0\}$$

и введём *носитель* $\lambda$ как

$$\operatorname{supp}\lambda = \mathbb{R} \setminus Z_\lambda.$$

Из леммы 9.175 следует, что $\lambda|_{Z_\lambda} = 0$, $Z_\lambda$ является максимальным открытым множеством, в ограничении на которое $\lambda$ равно нулю, и если $\lambda|_U = 0$, то $U \subseteq Z_\lambda$. Теперь мы можем рассуждать о распределениях с компактным носителем и их свойствах.

**Лемма 9.177.** *Любому распределению $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ с компактным носителем можно однозначно сопоставить элемент $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ с помощью умножения $\lambda$ на функцию с компактным носителем, равную единице в окрестности носителя $\lambda$.*

*Доказательство.* Возьмём отрезок функцию $f$, тождественно равную $1$ в окрестности носителя $\lambda$ и имеющую компактный носитель. Тогда выражение

$$\bar{\lambda}(\varphi) = \lambda(f\varphi)$$

корректно определено для любой $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, так как $f\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Лемма 9.173 показывает, что это выражение непрерывно зависит от $\varphi$, а значит определяет $\bar{\lambda}$ как элемент $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

Проверим, что распределение $\bar{\lambda}$ не зависит от выбора функции $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, тождественно равной единице в окрестности носителя $\lambda$. При замене $f$ на $g$ оказывается, что $\lambda f - \lambda g = \lambda(f - g)$ обнуляется в силу того, что носитель $f - g$ (и носитель $(f - g)\varphi$ для любой $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$) не пересекает носитель $\lambda$. ☐

**Лемма 9.178.** *Пусть $\mu$ — борелевская мера со знаком ограниченной вариации на $\mathbb{R}$, рассматриваемая как элемент $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ по формуле*

$$\mu(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \, d\mu.$$

*Тогда её функция распределения, определённая как $F(x) = \mu(-\infty, x)$, является её регулярной первообразной в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.*

*Доказательство.* По определению производной распределения, для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ надо проверить формулу

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)F(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \, d\mu.$$

По теореме Хана о разложении (теорема 9.125) достаточно рассматривать неотрицательную конечную борелевскую меру $\mu$ и, следовательно, возрастающую функцию $F$. Разобьём прямую точками $-\infty = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = +\infty$ на промежутки, так чтобы $\mu\{x_k\} = 0$ при любом $k$. Последнее условие можно выполнить, так как точек с ненулевой мерой $\mu$ на прямой не более чем счётное число.

Применим вторую теорему о среднем на каждом отрезке, получив $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, и с учётом $\varphi(-\infty) = \varphi(+\infty) = 0$ напишем

$$\begin{aligned}
-\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)F(x)\, dx &= -\sum_{k=1}^{N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi'(x)F(x)\, dx = \\
&= -\sum_{k=1}^{N} \left( F(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{\xi_k} \varphi'(x)\, dx + F(x_k) \int_{\xi_k}^{x_k} \varphi'(x)\, dx \right) = \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left( F(x_{k-1})\varphi(x_{k-1}) - F(x_{k-1})\varphi(\xi_k) + F(x_k)\varphi(\xi_k) - F(x_k)\varphi(x_k) \right) = \\
&= \sum_{k=1}^{N} \varphi(\xi_k)(F(x_k) - F(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^{N} \varphi(\xi_k)\mu[x_{k-1}, x_k).
\end{aligned}$$

Получается, что левая часть равенства есть некоторая сумма Римана для интеграла в правой части. Разность между интегралом и суммой Римана с учётом $\mu\{x_k\} = 0$ теперь можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \, d\mu - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)F(x)\, dx = \sum_{k=1}^{N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (\varphi(x) - \varphi(\xi_k))\, d\mu.$$

Используя равномерную непрерывность $\varphi$ и тот факт, что интеграл на самом деле берётся по отрезку (содержащему носитель $\varphi$), можно для любого $\varepsilon > 0$ брать такие разбиения, для которых колебание $\varphi$ на каждом отрезке разбиения не более $\varepsilon$, тогда разность по модулю оценивается как $\varepsilon\mu(\mathbb{R})$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, а $\mu$ конечна, то на самом деле рассматриваемая разность равна нулю. ☐

**Теорема 9.179.** *Любое распределение $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ с компактным носителем является производной некоторого порядка от некоторого регулярного распределения.*

*Доказательство.* По теореме 9.145 и лемме 9.177 достаточно рассматривать распределения вида

$$\lambda(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(k)}\, d\mu,$$

где $\mu$ — борелевская мера со знаком конечной вариации с носителем на некотором отрезке. Это выражение по определению производной распределения с точностью до знака равно $k$-й производной распределения, определённого как

$$\varkappa(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\, d\mu.$$

Для нахождения регулярной первообразной такого распределения достаточно применить лемму 9.178. ☐

В доказательстве предыдущей теоремы можно было избежать применения леммы 9.178 и применить результат задачи 9.147, который в данной ситуации сразу означает, что распределение является $(k+1)$-й производной регулярного распределения. Однако мы приводим именно такое рассуждения, так как лемма 9.178 сама по себе полезна для понимания связи между регулярными функциями, мерами и распределениями.

*Задача* 9.180. Приведите пример распределения из $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, не являющегося производной (какого-то порядка) регулярного определения.

[[ Теорема 9.179 намекает, что такое распределение не может иметь компактный носитель. ]]

*Задача* 9.181. Докажите, что любое распределение $\lambda$ с носителем в одной точке $x_0$ представляется в виде

$$\lambda = a_0\delta_{x_0} + a_1\delta'_{x_0} + \dots + a_n\delta^{(n)}_{x_0}$$

с некоторым $n \in \mathbb{Z}^+$.

[[ Посмотрите, как теорема 9.179 работает в этом случае. ]]

В следующих задачах читателю предлагается проверить другие полезные факты про распределения.

*Задача* 9.182. $^*$ Докажите, что если последовательность распределений $\lambda_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ стремится к $\lambda$, а последовательность $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ стремится к $\varphi$, то $\lambda_n(\varphi_n) \to \lambda(\varphi)$.

[[ Сведите к случаю $\lambda = 0$ и $\varphi = 0$. Домножьте $\lambda_n$ на функцию $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, тождественно равную единице в окрестности носителей всех $\varphi_n$, не меняя значения $\lambda_n(\varphi_n)$ и сведя таким образом вопрос к $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Примените после этого теорему Банаха–Штейнгауза для $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ (задачу 9.153) и оцените $\lambda_n(\varphi_n)$. ]]

*Задача* 9.183. $^*$ Докажите, что если последовательность распределений $\lambda_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ такова, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ существует конечный предел $\lambda(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(\varphi)$, то $\lambda$ является элементом $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

[[ Надо доказать непрерывность $\lambda$, то есть доказать, что из сходимости $\varphi_n \to \varphi_0$ в $\mathcal{D}$ следует сходимость чисел $\lambda(\varphi_n) \to \lambda(\varphi_0)$; из очевидной линейности $\lambda$ достаточно рассмотреть случай $\varphi_0 = 0$. Заметьте, что носители $\varphi_n$ по определению сходимости $\mathcal{D}$ лежат на одном и том же отрезке; тогда домножив $\lambda_n$ на некоторую $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, равную единице в окрестности этого отрезка, можно перейти к рассуждениям в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$. После этого можно применить теорему Банаха–Штейнгауза для $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ (задачу 9.153). ]]

*Задача* 9.184. $^*$ Пусть $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неотрицательная бесконечно гладкая функция, отличная от нуля только при $|x| \leqslant 1$ и пусть $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 1$. Положим

$$\varphi_k(x) = k\varphi(kx),$$

эти функции тоже имеют единичные интегралы и $\varphi_k$ отлична от нуля только при $|x| \leqslant 1/k$. Для любого распределения $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ определим свёртку $\lambda * \varphi_k$ как регулярное распределение, соответствующее функции

$$f_k(x) = \langle \lambda, \varphi_k(y - x)\rangle,$$

где в правой части мы применяем $\lambda$ к функции от $y$. Докажите, что функции $f_k$ гладкие и $f_k \to \lambda$ в смысле сходимости в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

[[ Докажите, что $\langle f_k, \psi\rangle = \langle \lambda, \varphi_k * \psi\rangle$ для любой функции $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, если для функций свёртка определена стандартным образом $(\varphi_k * \psi)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(y - x)\psi(x)\, dx$. Для этого заметьте, что последняя свёртка является пределом в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ линейных комбинаций сдвигов $\varphi_k$, соответствующих суммам Римана для интеграла в определении свёртки. Потом вспомните теоремы 6.20 и 6.21. ]]

*Задача* 9.185. $^*$ Докажите, что любое распределение $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ можно приблизить линейными комбинациями дельта-функций в смысле сходимости $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

[[ Вспомните, что интеграл непрерывной функции на отрезке можно приблизить суммами Римана и покажите, что производную дельта-функции можно приблизить линейными комбинациями дельта-функций. ]]

*Задача* 9.186. $^*$ Докажите, что любое линейное отображение $\xi : \mathcal{E}'(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, непрерывное в смысле топологии $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, представляется в виде $\xi(\lambda) = \lambda(\varphi)$ для некоторой $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$.

[[ Определите $\varphi(x) = \xi(\delta_x)$ и продолжите формулу $\lambda(\varphi) = \xi(\lambda)$ с дельта-функций на все $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. ]]

*Задача* 9.187. $^*$ Распределение $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ называется *неотрицательным*, если $\lambda(\varphi) \geqslant 0$ для любой всюду неотрицательной $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Докажите, что у неотрицательного распределения есть регулярная первообразная.

[[ Можно действовать аналогично доказательству теоремы Рисса для неотрицательного функционала, строя меру, соответствующую данному распределению, но используя только гладкие функции. ]]

9.19. **Распределения из $\mathcal{S}'$ и преобразование Фурье.** Если мы хотим определять и изучать преобразование Фурье распределений, то нам стоит заметить, что $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ для этого не подходит. Одна из причин этого описана в следующем упражнении:

*Задача* 9.188. Докажите, что если $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и преобразование Фурье $F[f] \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, то $f \equiv 0$.

[[ Установите, что преобразование Фурье функции с компактным носителем раскладывается в ряд Тейлора с бесконечным радиусом сходимости. ]]

Пространство $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ тем более не переходит в себя при преобразовании Фурье, для него даже неясно, как преобразование Фурье определить. А пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ имеет замечательное свойство — по теореме 8.105 оно переходит в себя непрерывно в своей топологии при преобразовании Фурье.

Следовательно, можно определить по сопряжению для $\lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$\langle F[\lambda], \varphi\rangle = \langle \lambda, F[\varphi]\rangle.$$

Читатель может проверить, что даёт это определение в случае регулярного распределения, имея в виду, что в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ можно аналогично $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ввести понятие регулярного распределения $\lambda_f$, соответствующего достаточно приличной функции $f$. В следующих задачах изучаются некоторые свойства регулярных распределений из $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

*Задача* 9.189. Докажите, что $\lambda_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ корректно определено, если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ локально интегрируема и функция $F(x) = \int_0^x |f(t)|\, dt$ ограничена некоторым многочленом.

[[ Проинтегрируйте выражение $\lambda_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\varphi\, dx$ по частям. ]]

*Задача* 9.190. Проверьте, что для любой $f \in L_2(\mathbb{R})$ распределение $\lambda_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ корректно определено.

[[ Используйте предыдущую задачу. ]]

*Задача* 9.191. Проверьте, что на регулярных $\lambda_f$, соответствующих $f \in L_2(\mathbb{R})$, преобразование Фурье $\lambda_f$ соответствует преобразованию Фурье $f$.

[[ Используйте теорему 8.108 и следствие 8.109. ]]

Проверим определение преобразования Фурье распределения на дельта-функции:

$$\langle F[\delta_0], \varphi\rangle = \langle \delta_0, F[\varphi]\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx,$$

то есть преобразование Фурье дельта-функции оказалось регулярной функцией, равной константе $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. В обратную сторону, с помощью сопряжения равенства

$$F^{-1} \circ F = F^{-1} \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R})},$$

преобразование Фурье константы $f(x) \equiv 1$ как элемента $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ окажется равным $\sqrt{2\pi}\delta_0$.

*Задача* 9.192. Найдите преобразование Фурье функции $\cos x$ как элемента $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

[[ Обратите внимание, что при попытке найти такое преобразование Фурье как преобразование Фурье функции получатся расходящиеся интегралы. Поэтому надо работать с $\cos x$ сразу как с распределением. ]]

Аналогично действиям с пространством $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ можно заметить, что операция взятия производной непрерывна как отображение $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ и следовательно определяет по сопряжению производную распределений из $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Это верно, так как любая $\mathcal{S}$-норма производной функции является одной из $\mathcal{S}$-норм самой функции.

*Задача* 9.193. Найдите преобразование Фурье функции

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0; \\ 1, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

как элемента $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

[[ Представьте $\vartheta$ как предел в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ характеристических функций отрезка $[0, m]$ или как предел функций

$$\vartheta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0; \\ e^{-\varepsilon x}, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

при $\varepsilon \to +0$. ]]

Что касается умножения распределения из $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ на функцию $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, то оно определено не для всех $f$. В следующей задаче даны некоторые достаточные условия для корректности такого умножения.

*Задача* 9.194. Докажите, что если у функции $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ производная любого порядка ограничена по модулю некоторым многочленом на всей прямой, то умножение на $f$ является непрерывным отображением $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

[[ Примените формулу Лейбница в определении $\mathcal{S}$-норм. ]]

Можно проверить, что преобразование Фурье комбинации от производных дельта-функции в нуле (из задачи 9.181 при $x_0 = 0$) является многочленом, что позволяет изучать комбинации производных дельта-функции как обычные функции после преобразования Фурье. Это следует из того, что преобразование Фурье в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ делает из оператора умножения на $x$ оператор $\pm i\frac{\partial}{\partial y}$, что читатель может проверить самостоятельно в следующем упражнении.

*Задача* 9.195. Проверьте равенство $F[\lambda x] = \pm i\frac{\partial \hat\lambda}{\partial y}$ для $\lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ и определите знак в этом выражении.

[[ Заметьте, что преобразование Фурье, умножение на $x$ и взятие производной определены (почти что) как сопряжённые к соответствующим операциям с функциями $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. ]]

Дальше идут разные упражнения на преобразование Фурье распределений.

*Задача* 9.196. Докажите, что преобразование Фурье в $\mathcal{S}'$ переводит распределение

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{2\pi n} \quad \text{в распределение} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n.$$

[[ Вспомните формулу суммирования Пуассона из задачи 8.107. ]]

*Задача* 9.197. Докажите, что преобразования Фурье элементов $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ являются аналитическими функциями.

[[ Заметьте, что для $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ оказывается $\hat\lambda(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda(e^{-iyx})$, а $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ должно переводить сходящиеся в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ ряды функций в сходящиеся ряды чисел. ]]

*Задача* 9.198. Пусть для функции $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ можно указать такое целое $N$, что для любого целого $k \geqslant 0$

$$f^{(k)}(x) = O(|x|^{N-k}), \quad x \to \infty.$$

Докажите, что $f$ можно считать элементом из $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, а преобразование Фурье $\hat f(y)$ при $y \neq 0$ тоже можно считать регулярной функцией от $y$ при $y \neq 0$, и при любом $M \geqslant 0$

$$\hat f(y) = o(|y|^{-M}), \quad y \to \infty.$$

[[ Заметьте, что $f^{(k)}$ при достаточно большом $k$ оказывается обычной функцией, для которой преобразование Фурье определено стандартно. ]]

9.20. **Многомерные распределения и распределения на многообразиях.** Большинство предыдущих рассуждений про распределения проходят и для функций нескольких переменных, а те что не проходят — проходят после небольшой доработки. Таким образом определяются пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Первые два можно определять не только для всего $\mathbb{R}^n$, но и для любого открытого множества $U \subseteq \mathbb{R}^n$ и делать в $U$ произвольные гладкие замены координат. Для $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ замены координат можно делать далеко не все, лучше ограничиться линейными заменами из-за наличия умножения на многочлены в определении $\mathcal{S}$-норм.

В определении $\mathcal{D}'(U)$ можно начать с пространства $\mathcal{D}(U)$ гладких функций с компактными носителями в $U$, сходимость последовательности которых $(\varphi_n)$ к $\varphi_0$ определена требованием, чтобы носители всех функций содержались в одном и том же компакте $K$ и для любого неотрицательного целого вектора $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ имела место равномерная на $K$ сходимость

$$\frac{\partial^{|\mathbf{k}|}\varphi_n}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{k}}} \to \frac{\partial^{|\mathbf{k}|}\varphi_0}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{k}}}.$$

Аналогично задаче 9.159, на пространстве $\mathcal{D}(U)$ можно определить и топологию, рассматривая его как объединение пространств функций с носителями в предписанных компактных подмножествах $K \subset U$.

В определении $\mathcal{E}(U)$ можно начать с пространства $\mathcal{E}(U)$ гладких функций с полунормами, равными

$$\|\varphi\|_{K,\mathbf{k}} = \sup\left\{\left|\frac{\partial^{|\mathbf{k}|}\varphi(x)}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{k}}}\right| \;\middle|\; x \in K\right\}$$

для компактов $K \subset U$. Далее определить пространство распределений как пространство двойственных линейных функционалов. Можно показать, что эти два определения не зависят от выбора криволинейной системы координат в $U$, так как при замене координат производная данного порядка выражается через производные такого же и меньшего порядков с ограниченными на любом компакте коэффициентами.

*Задача* 9.199. Докажите, что любой элемент $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ определяет непрерывное линейное отображение $f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

[[ Используйте формулу $f(\varphi)(\psi) = \Lambda(\varphi \otimes \psi)$, где функция двух переменных $\varphi \otimes \psi$ определена на паре $(x, y)$ как $\varphi(x)\psi(y)$. Докажите непрерывность определённого так отображения $f$. ]]

*Задача* 9.200. Для любого включения открытых множеств $U \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$ имеют место включение $\mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}(V)$ (с помощью продолжения нулём) и отображение ограничения $\mathcal{E}(V) \to \mathcal{E}(U)$. Определите по сопряжению соответствующие отображения

$$\mathcal{D}'(V) \to \mathcal{D}'(U), \quad \mathcal{E}'(U) \to \mathcal{E}'(V).$$

Проверьте, что есть проблемы с определением отображений в другую сторону

$$\mathcal{D}'(V) \leftarrow \mathcal{D}'(U), \quad \mathcal{E}'(U) \leftarrow \mathcal{E}'(V).$$

Для любого гладкого многообразия можно определить пространства $\mathcal{D}(M)$ и $\mathcal{E}(M)$ и двойственные к ним $\mathcal{D}'(M)$ и $\mathcal{E}'(M)$. При этом надо действовать аккуратно, так как понятие частной производной сильно зависит от координат. Однако это определение можно сделать инвариантным, взяв вместо частных производных гладкой функции $\varphi$ порядка не более $k$ выражения вида

$$X_1(X_2(\dots X_k(\varphi)\dots)),$$

где $X_1, \ldots, X_k$ — произвольные гладкие векторные поля на $M$. В определениях $\mathcal{D}(M)$ и $\mathcal{E}(M)$ супремум модуля таких выражений будет браться по компакту, поэтому в координатной записи стремление к нулю всех таких выражений будет эквивалентно стремлению к нулю частных производных. Но запись с векторными полями удобнее.

Пытаясь обобщить понятие регулярного распределения на случай $\mathcal{D}'(M)$, мы должны придать какой-то смысл интегралу

$$\lambda_f(\varphi) = \int_M f\varphi.$$

Пусть для определённости многообразие $M$ ориентируемо и имеет размерность $n$. Тогда интеграл с функцией $\varphi$ будет иметь смысл, если $f \in \Omega^n(M)$, или даже если $f$ является не обязательно гладкой, но локально абсолютно интегрируемой формой $n$-й степени. Это наводит на мысль, что распределения на многообразии можно определить в зависимости от целого числа $k = 0, \ldots, n$ как

$$\mathcal{D}'_k(M) = \left(\Omega^{n-k}_c(M)\right)',$$

где сходимость в $\Omega^{n-k}_c(M)$ определяется в духе $\mathcal{D}$. Также можно определить

$$\mathcal{E}'_k(M) = \left(\Omega^{n-k}(M)\right)',$$

где топология в $\Omega^{n-k}$ определена в духе $\mathcal{E}$. Таким образом получается целая серия пространств распределений с $k = 0, \ldots, n$, причём с помощью формул вида $\lambda_f(\varphi) = \int_M f\varphi$ окажется, что $\mathcal{D}'_0(M)$ будет содержать в себе локально абсолютно интегрируемые функции, а $\mathcal{D}'_n(M)$ — локально абсолютно интегрируемые дифференциальные формы высшей степени.

Результат задачи 9.200 можно интерпретировать так, что на любом многообразии можно корректно говорить об ограничении распределения из $\mathcal{D}'_k(M)$ на координатную карту $U$, но работать с элементами пространства $\mathcal{E}'_k(M)$ через координатные карты как с элементами из $\mathcal{E}'_k(U)$ не получится, разве что можно элемент из $\mathcal{E}'_k(M)$ ограничить до элемента $\mathcal{D}'_k(U)$ карты $U$.

Следующие две задачи показывают, что распределения на многообразии ведут себя аналогично функциям с точки зрения возможности изучать их локально. В математике про такое говорят, что распределения $\mathcal{D}'$ образуют *пучок* на $M$.

*Задача* 9.201. Пусть $M$ покрыто своими координатными картами $\{U_\alpha\}$. Докажите, что $\lambda \in \mathcal{D}'_k(M)$ однозначно определяется ограничениями $\lambda|_{U_\alpha}$.

[[ Если нет, и у $\mu \in \mathcal{D}'_k(M)$ все ограничения те же, то у разности $\lambda - \mu$ все ограничения нулевые. Далее используйте рассуждения из леммы 9.175. ]]

*Задача* 9.202. Пусть $M$ покрыто своими координатными картами $\{U_\alpha\}$. Докажите, что набор $\lambda_\alpha \in \mathcal{D}'_k(U_\alpha)$, такой что на любом пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$ ограничения $\lambda_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ и $\lambda_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ совпадают, определяет однозначно некоторый элемент $\lambda \in \mathcal{D}'_k(M)$.

[[ Единственность доказана в предыдущей задаче. Рассмотрите разбиение единицы $\sum_\alpha \rho_\alpha \equiv 1$, подчинённое покрытию $\{U_\alpha\}$, и докажите, что $\sum_\alpha \lambda_\alpha \rho_\alpha$ (если эту формулу правильно понимать), даст элемент $\mathcal{D}'_k(M)$, ограничение которого на каждую $U_\alpha$ даст соответствующий $\lambda_\alpha$. ]]

9.21. **Конечно-аддитивные меры и ультрафильтры.** В этом разделе мы рассмотрим ещё один пример, имеющий отношение к двойственности банаховых пространств, но также интересный как модификация понятия меры.

Начнём с вопроса про банаховы пространства и их двойственные. Можно проверить, что для пространств последовательностей выполняется $(\ell_1)' = \ell_\infty$, но изучение структуры $(\ell_\infty)'$ оказывается не таким уж простым.

*Задача* 9.203. Проверьте, что $(\ell_1)' = \ell_\infty$.

[[ Содержательная часть утверждения — доказать, что если последовательность $(b_n)$ неограничена, то для какой-то $(a_n) \in \ell_1$ сумма $\sum_n a_n b_n$ расходится. Это можно доказать вручную, а можно применить принцип равномерной ограниченности. ]]

Говоря про $(\ell_\infty)'$ в более элементарных терминах, мы хотим изучить способы линейно и непрерывно сопоставить ограниченным последовательностям действительных чисел действительное число. Оказывается, удобно рассуждать о таких сопоставлениях в терминах интегрирования, чем мы и займёмся. Рассмотрим бесконечное множество $S$ (в интересующем нас частном случае это будет $\mathbb{N}$), чтобы интегрировать по нему функции, нам надо сначала ввести на нём меру. Оказывается, если отказаться от условия счётной аддитивности и ограничиться *конечной аддитивностью*,

$$m(X \cup Y) + m(X \cap Y) = mX + mY,$$

то можно будет придумать такие ненулевые меры, относительно которых будут измеримы *все подмножества* $S$. Далее в этом разделе, говоря о конечно-аддитивных мерах на $S$, мы будем подразумевать измеримость любого подмножества $S$. Кроме того, мы будем подразумевать конечность $mS$, считая всю меру $mS$ положительным действительным числом.

Конструирование конечно-аддитивных мер мы начнём с мер, которые принимают на всевозможных подмножествах лишь два значения: $0$ и $1$, причём $mS = 1$. Такую меру можно задать, задав семейство подмножеств $\mathcal{F} = \{X \subseteq S \mid mX = 0\}$. Конечная аддитивность меры и равенство $mS = 1$ тогда могут быть переформулированы как следующие свойства семейства $\mathcal{F}$:

(1) $\mathcal{F}$ замкнуто относительно объединения пары множеств;

(2) $\mathcal{F}$ замкнуто относительно перехода к подмножеству;

(3) $\mathcal{F}$ не содержит $S$;

(4) для любого $X \subseteq S$ ровно одно из множеств $X$ и $S \setminus X$ принадлежит $\mathcal{F}$.

Семейства $\mathcal{F} \subset 2^S$, удовлетворяющие первым трём свойствам, будем называть *фильтрами*, а всем четырём свойствам — *ультрафильтрами*. Прежде чем описывать нетривиальные ультрафильтры, опишем тривиальные: для любого $x \in S$ множество

$$\mathcal{F}_x = \{X \subseteq S \mid x \notin X\}$$

называется *главным ультрафильтром*. Соответствующая мера $mX$ равна единице тогда и только тогда, когда $x \in X$, иначе она равна нулю. Понятно, что это действительно конечно-аддитивная мера (даже счётно-аддитивная на самом деле). Например, в рассматриваемом нами примере $(\ell_\infty)'$ она соответствует «базисным» элементам $\ell_1$, то есть последовательностям, в которых один элемент равен единице, а остальные равны нулю.

*Задача* 9.204. Докажите, что на конечном множестве $S$ все ультрафильтры главные.

[[ Можно рассуждать непосредственно комбинаторно, а можно использовать развиваемую далее небольшую теорию. ]]

Если бы все ультрафильтры (на бесконечном множестве) были главными, то это было бы не очень интересно. Сейчас мы установим существование менее тривиальных объектов — неглавных ультрафильтров. Рассуждение будет похоже на рассуждения в доказательстве теоремы Тихонова 9.100 с использованием леммы Цорна.

**Лемма 9.205.** *Фильтр на множестве $S$ является ультрафильтром тогда и только тогда, когда он максимален по включению среди фильтров.*

*Доказательство.* Докажем, что максимальный по включению фильтр $\mathcal{F}$ является ультрафильтром, для этого надо проверить свойство (4) для $\mathcal{F}$.

Пусть $X \subseteq S$. Если $X \in \mathcal{F}$ и $S \setminus X \in \mathcal{F}$, то $S \in \mathcal{F}$ как объединение по свойству (1), что исключено свойством (3). Тогда мы можем предположить (при необходимости меняя местами $X$ и $S \setminus X$), что $X \notin \mathcal{F}$. Предположение максимальности означает, что $X$, вместе со всеми множествами вида

$$Y \cup Z \quad \forall Y \subseteq X \text{ и } Z \in \mathcal{F},$$

нельзя добавить в $\mathcal{F}$ с сохранением свойства фильтра.

Свойства (1) и (2) при таком добавлении сохраняются, нарушиться может только свойство (3) фильтра. Это значит, что

$$Y \cup Z = S \Rightarrow X \cup Z = S \Rightarrow S \setminus X \subseteq Z \Rightarrow S \setminus X \in \mathcal{F}.$$

то есть свойство (4) для $\mathcal{F}$ выполнено.

Любой ультрафильтр $\mathcal{F}$ является максимальным по включению фильтром, так как для любого фильтра $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ и множества $X \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$ по свойству (4) сразу влечёт равенство

$$S \setminus X \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow X \cup (S \setminus X) = S \in \mathcal{G}.$$

То есть $\mathcal{G}$ — не фильтр по свойству (3). ☐

**Лемма 9.206.** *Объединение всякой цепи фильтров на множестве $S$ есть фильтр.*

*Доказательство.* Посмотрим теперь на цепь фильтров $\mathcal{C}$ и её объединение

$$\bigcup \mathcal{C} = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{C}} \mathcal{F}.$$

Рассмотрим объединение нескольких множеств $X, Y \in \bigcup \mathcal{C}$, каждое содержалось в каком-то фильтре цепи, $X \in \mathcal{F}$ и $Y \in \mathcal{G}$. По свойству цепи, либо $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, либо наоборот. В первом случае

$$X, Y \in \mathcal{G} \Rightarrow X \cup Y \in \mathcal{G} \Rightarrow X \cup Y \in \bigcup \mathcal{C},$$

во втором случае аналогично. Следовательно, объединение цепи фильтров $\bigcup \mathcal{C}$ удовлетворяет свойству (1) фильтра. Также оно тривиально удовлетворяет свойствам (2) и (3) фильтра. ☐

**Теорема 9.207.** *Каждый фильтр на множестве $S$ содержится в некотором ультрафильтре. Если $S$ бесконечно, но на нём существуют неглавные ультрафильтры.*

*Доказательство.* Исходя из лемм 9.205, 9.206 и леммы Цорна мы можем заключить, что любой фильтр на $S$ содержится в ультрафильтре.

Для доказательства существования неглавных ультрафильтров на бесконечном $S$ мы рассмотрим фильтр $\mathcal{F}$, состоящий из всех конечных подмножеств $S$. Если $S$ бесконечно, то $\mathcal{F}$ действительно является фильтром, свойства (1) и (2) очевидны, свойство (3) для такого фильтра как раз означает бесконечность $S$. Погрузив фильтр $\mathcal{F}$ с помощью леммы Цорна в некоторый ультрафильтр $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ мы можем заметить, что $\mathcal{G}$ не главный, так как объединение его элементов равно $S$. ☐

*Задача* 9.208. Зафиксируем некоторый ультрафильтр на $\mathbb{N}$. Рассмотрим последовательности действительных чисел и определим для них отношение эквивалентности $(a_n) \sim (b_n)$, если $a_n = b_n$ для множества натуральных чисел $n$ меры 1 относительно выбранного ультрафильтра. Проверьте, что в фактормножестве ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\sim$ корректно определены сложение, умножение, деление на ненулевой элемент и отношение порядка.

[[ Удобно переформулировать $(a_n) \sim (b_n)$ как «$a_n \neq b_n$ на множестве меры нуль». Для определения сравнения заметьте, что либо $a_n < b_n$ на множестве меры 1, либо $a_n > b_n$ на множестве меры 1, либо $a_n = b_n$ на множестве меры 1. ]]

*Задача* 9.209. * Постройте пример топологического пространства, в котором не эквивалентны следующие определения: 1) частичный предел — некоторая подпоследовательность $(x_n)$ стремится к $x_\infty$; 2) точка сгущения — в каждой окрестности $x_\infty$ лежит бесконечно много элементов последовательности $(x_n)$. Сравните с леммами 1.124 и 3.36.

[[ Достаточно в качестве топологического пространства рассматривать $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, где $\mathbb{N}$ представляет из себя последовательность, а $\infty$ — её предполагаемую предельную точку. Возьмите меру $m$, соответствующую неглавному ультрафильтру, и определите окрестности $\infty$ как $U\cup\{\infty\}$ для всех $U \subseteq \mathbb{N}$ с $mU = 1$. Тогда любая окрестность $\infty$ бесконечна и выполняется определение (2). Проверьте с помощью свойств меры $m$, что для любой подпоследовательности (то есть бесконечного подмножества) $X \subseteq \mathbb{N}$ найдётся окрестность $U$, такая что множество $X \setminus U$ бесконечно. Выведите из этого, что $\infty$ не является пределом подпоследовательности $X$. ]]

Имея в своём распоряжении неглавный ультрафильтр $\mathcal{F} \subset 2^S$ и соответствующую меру $m$, или любую другую конечную и конечно-аддитивную меру для всех подмножеств $S$, мы можем определить интеграл конечно-ступенчатой функции $f : S \to \mathbb{R}$ очевидным образом, с выполнением свойств линейности и монотонности. Для произвольной ограниченной $f$ мы можем рассмотреть её приближения ступенчатыми, более конкретно, если $f$ ограничена и $f(S)$ содержится в конечном промежутке $\Delta$, то разбив

$$\Delta = \Delta_1 \sqcup \dots \sqcup \Delta_N$$

с мелкостью не более $\varepsilon > 0$, мы можем рассмотреть разбиение $X$ на множества $X_i = f^{-1}(\Delta_i)$ и оценить $f$ снизу и сверху конечно-ступенчатыми функциями, определёнными как

$$g(X_i) = \inf \Delta_i, \quad h(X_i) = \sup \Delta_i.$$

Разность между ними не более $\varepsilon$, следовательно

$$\int_S h\, dm - \int_S g\, dm = \int_S (h - g)\, dm < \varepsilon \cdot mS,$$

что означает возможность приблизить $f$ конечно-ступенчатыми функциями сколь угодно близко с точки зрения интеграла и определить таким образом её интеграл.

В случае, если конечно-аддитивная мера $m$ соответствует ультрафильтру, это определение интерпретируется следующим образом. Из множеств $X_i$ в данной конструкции ровно одно будет иметь меру 1, а остальные будут иметь меру 0. Значение интеграла при этом будет лежать в соответствующем $\Delta_i$. Разбивая это $\Delta_i$ на ещё более мелкие части и рассматривая их прообразы, мы опять увидим, что только один прообраз имеет меру 1 и только на соответствующем ему промежутке лежит значение интеграла.

В ещё более частном случае, когда $S = \mathbb{N}$, мы видим, что интеграл по мере $m$, соответствующей ультрафильтру $\mathcal{F}$, выбирает один из частичных пределов ограниченной последовательности $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. В таком случае интеграл уместно назвать *пределом последовательности по ультрафильтру*. Предел последовательности по ультрафильтру, таким образом, даёт способ выбрать один из частичных пределов последовательности в линейной и монотонной зависимости от последовательности $f$. Говоря неформально, в процедуре половинного деления при доказательстве теоремы Больцано–Вейерштрасса 1.125 ультрафильтр выбирает одну из половин исходя из номеров элементов, попадающих в ту или иную половину, предпочитая множество номеров, имеющее меру 1. Такое «волшебное свойство» показывает, что несмотря на доказанное уже существование ультрафильтра описать хотя бы один из них сравнительно явно не получается.

*Задача* 9.210. Докажите, что если мера $m$ на $S$ соответствует ультрафильтру, то интеграл ограниченных функций $f, g : S \to \mathbb{R}$ по ней обладает не только свойством аддитивности, но и свойством мультипликативности:

$$\int_S fg\, dm = \left(\int_S f\, dm\right) \cdot \left(\int_S g\, dm\right).$$

[[ Интерпретируйте неравенство $a < \int_S f\, dm < b$ как $m\{x \in S \mid a < f(x) < b\} = 1$. И заметьте, что в данных условиях пересечение множеств меры 1 обязательно имеет меру 1. ]]

*Задача* 9.211. $^*$ Опишите все гомоморфизмы алгебры ограниченных функций на множестве $S$ (с поточечным умножением) в $\mathbb{R}$.

[[ Заметьте, что если функция принимает значения в $\{0, 1\}$, то гомоморфизм отправляет её в $0$ или $1$. Считая такие функции характеристическими функциями подмножеств $S$ сравните это с определением ультрафильтра. Для рассмотрения произвольных функций обратите внимание, что неотрицательная функция является квадратом другой функции и следовательно при гомоморфизме в $\mathbb{R}$ переходит в неотрицательное число; это устанавливает монотонность любого такого гомоморфизма. ]]

*Задача* 9.212. Продемонстрируйте, что предел по ультрафильтру может поменяться, если у последовательности отбросить первый элемент, сдвинув нумерацию на единицу.

[[ Посмотрите, какие числа предпочитает ультрафильтр — чётные или нечётные. ]]

*Задача* 9.213. $^*$ Верно ли, что поточечный предел равномерно ограниченной последовательности измеримых по Лебегу функций на $\mathbb{R}$ по некоторому ультрафильтру обязан быть измеримым по Лебегу?

[[ Рассмотрите в качестве последовательности функций $(f_n)$ как-то занумерованные все многочлены с рациональными коэффициентами, значения которых обрезаны отрезком $[-1, 1]$. Докажите, что замыкание множества $\{f_n\}$ в топологии декартова произведения $[-1, 1]^{\mathbb{R}}$ совпадает со всем $[-1, 1]^{\mathbb{R}}$, и в частности содержит какую-то неизмеримую по Лебегу функцию $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$. Рассматривая всевозможные окрестности $U \ni f$ в топологии декартова произведения, покажите, что множества $X_U = \{n \in \mathbb{N} \mid f_n \notin U\}$ образуют фильтр и погрузите его в некоторый ультрафильтр. Проверьте, чему равен предел $f_n$ по этому ультрафильтру. ]]

*Задача* 9.214. $^*$ Докажите, что ультрафильтров на $\mathbb{N}$ столько же, сколько элементов в множестве $2^{2^{\mathbb{N}}}$.

[[ Любой ультрафильтр — это элемент $2^{2^{\mathbb{N}}}$ по определению. В силу результата задачи 1.175, остаётся оценить мощность множества ультрафильтров снизу. В этом помогает рассуждение из доказательства предыдущей задачи, сопоставляющее ультрафильтру на $\mathbb{N}$ функцию $\mathbb{R} \to [-1, 1]$. ]]

Задача 9.212 намекает, что ультрафильтры не могут быть инварианты относительно сдвига индексов. Чтобы говорить о сдвиге корректно, давайте рассмотрим для примера множество целых чисел $\mathbb{Z}$ в качестве $S$, и покажем, что можно придумать полезные конечно-аддитивные меры на $\mathbb{Z}$, которые будут инвариантны относительно сдвигов. Например, можно положить

$$\rho X = \lim \frac{|X \cap [-n, n]|}{2n + 1},$$

где предел по $n$ будет пониматься в смысле какого-то фиксированного ультрафильтра. При сдвиге $X$ на $k$ элементов выражение под знаком предела меняется не более чем на $2k/(2n + 1)$, что стремится к нулю при $n \to \infty$; таким образом устанавливается инвариантность такой меры относительно сдвигов.

*Задача* 9.215. Проверьте конечную аддитивность построенной так меры.

Построенная нами мера принимает значения в диапазоне $[0, 1]$, неформально говоря, это один из способов определить «плотность» подмножества целых чисел. Соответствующий этой мере интеграл «усредняет» ограниченную функцию $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ инвариантным относительно сдвигов образом, её «среднее значение» будет лежать между её точной нижней и точной верхней гранью.

*Задача* 9.216. Постройте единичную конечно-аддитивную и инвариантную относительно сдвигов меру на группе целочисленных векторов $\mathbb{Z}^n$.

[[ Модифицируйте описанную выше конструкцию. ]]

*Задача* 9.217. Постройте единичную конечно-аддитивную и инвариантную относительно сдвигов меру на рациональных числах $\mathbb{Q}$.

[[ Представьте группу $\mathbb{Q}$ по сложению в виде объединения групп, изоморфных $\mathbb{Z}$, переходя к пределу по ультрафильтру. ]]

*Задача* 9.218. * Постройте единичную конечно-аддитивную и инвариантную относительно сдвигов меру на действительных числах $\mathbb{R}$.

[[ Рассматривайте $\mathbb{R}$ как $\mathbb{Q}$-векторное пространство со вполне упорядоченным базисом. Докажите утверждение для его подпространств, соответствующих начальным интервалам базиса, с помощью трансфинитной индукции. Шаг индукции выполняется либо с помощью предела мер по ультрафильтру на вполне упорядоченном множестве, содержащему все его собственные начальные интервалы, либо с помощью прямого умножения $\mathbb{Q}$-векторного пространства на $\mathbb{Q}$, что можно свести к умножению на $\mathbb{Z}$ и переходу к пределу по ультрафильтрам, как в предыдущих задачах. ]]

*Задача* 9.219. * Докажите, что $\mathbb{R}^2$ нельзя разрезать на конечное число частей и сдвинуть их параллельными переносами так, чтобы каждая точка покрывалась сдвинутыми частями не менее двух раз.

[[ Используйте утверждение, аналогичное утверждению предыдущей задачи, для плоскости вместо прямой. ]]

*Задача* 9.220. ** Докажите, что сферу $\mathbb{S}^2$ можно разрезать на конечное число частей и повернуть их так, чтобы каждая точка покрывалась повёрнутыми частями не менее двух раз.

[[ Используйте результат задачи 10.93, представляя себе свободную группу из двух элементов в виде бесконечного дерева. ]]

9.22. **Мера Хаара.** В этом разделе мы вернёмся к рассмотрению счётно-аддитивных мер и продолжим обсуждение инвариантных мер на группе. На этот раз мы будем рассматривать более общие понятия и поэтому нам понадобятся некоторые определения.

**Определение 9.221.** Группа $G$ называется *топологической группой*, если она является топологическим пространством, а операции умножения $G \times G \to G$ и взятия обратного $G \to G$ являются непрерывными.

Конечно, топологической группой являются действительные числа по сложению, ненулевые действительные числа по умножению, разные группы, возникающие в линейной алгебре: $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$ для действительных векторных пространств или $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{U}(n)$ для комплексных векторных пространств.

В дальнейшем мы будем рассматривать *хаусдорфовы* топологические группы, у которых любые две точки имеют непересекающиеся открытые окрестности.

*Задача* 9.222. Докажите, что в хаусдорфовой топологической группе $G$ для любых двух $g \neq h \in G$ найдётся окрестность нуля $U$, такая что $gU \cap hU = \emptyset$.

[[ Рассмотрите непересекающиеся окрестности $g$ и $h$ в силу хаусдорфовости, левым сдвигом на $g$ и $h$ сделайте их окрестностями нуля, возьмите их пересечение. ]]

В предыдущей задаче мы использовали обозначение $gX = \{gx \mid x \in X\}$ для левого сдвига множества $X \subset G$ элементом группы $g \in G$. Левый сдвиг на $g$ является композицией непрерывного вложения $h \mapsto (g, h)$ и непрерывного в топологической группе умножения $(g, h) \mapsto gh$, а значит является непрерывным отображением группы $G$ в себя. Также у левого сдвига на $g$ есть обратное непрерывное преобразование — левый сдвиг на $g^{-1}$, то есть левые сдвиги являются гомеоморфизмами. Отсюда следует, что если у нас есть базовая система окрестностей единицы $e \in G$, то база всей топологии на $G$ образована всевозможными левыми сдвигами этих базовых окрестностей единицы.

Следующее нужное нам понятие — локальная компактность топологической группы. Вообще, топологическое пространство называется *локально компактным*, если у каждой его точки $x$ есть окрестность $U \ni x$, которая содержится в некотором компактном множестве $K \supseteq U$, то есть $U$ предкомпактна. В случае топологической группы для установления её локальной компактности нам достаточно найти окрестность единицы $U \ni e$, такую что она содержится в некотором компактном $K \supseteq U$.

*Задача* 9.223. Является ли локально компактной группой группа действительных чисел по сложению? Группа рациональных чисел по сложению? Группа векторов гильбертова пространства по сложению?

Докажем несколько вспомогательных утверждений про локально компактные хаусдорфовы пространства вообще и топологические группы в частности. Следующее утверждение уже формулировалось для компактных подмножеств гладких многообразий, напомним его в общем случае.

**Лемма 9.224.** *Компактное подмножество хаусдорфова топологического пространства замкнуто.*

*Доказательство.* Пусть $x \notin K$ для некоторого компактного $K$. Для любой точки $y \in K$ рассмотрим непересекающиеся окрестности $U_y \ni x$ и $V_y \ni y$, существующие по определению хаусдорфовости. Из компактности $K$ следует, что оно содержится в конечном объединении

$$K \subseteq V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_N} = V.$$

Тогда соответствующее пересечение $U = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_N}$ является окрестностью $x$, не пересекающейся с $V$, а значит и с $K$. ☐

**Лемма 9.225.** *В локально компактном хаусдорфовом пространстве $X$ для любой окрестности $U$ точки $x$ найдётся её меньшая окрестность $V \ni x$, такая что её замыкание $\operatorname{cl} V$ компактно и содержится в $U$.*

*Доказательство.* Используя локальную компактность, можно уменьшить окрестность $U$ (пересекая её с предкомпактной окрестностью) так, чтобы её замыкание было компактным. Рассуждения в доказательстве предыдущей леммы для точки $x$ и компактного $\partial U$ дают открытые $V' \ni x$ и $W \supseteq \partial U$, которые не пересекаются, положим $V = V' \cap U$. Тогда множество

$$K = X \setminus ((X \setminus \operatorname{cl} U) \cup W)$$

замкнуто, содержится в $U$ и следовательно компактно, а также содержит $V$. То есть $V$ является нужной нам окрестностью точки $x$ с компактным $\operatorname{cl} V \subseteq K \subset U$. ☐

Следующая лемма является аналогом достижимости расстояния от компактного множества до замкнутого в метрических пространствах.

**Лемма 9.226.** *В локально компактной хаусдорфовой топологической группе $G$ для любого компактного множества $K$ и замкнутого $F$, которые не пересекаются, найдётся окрестность единицы $U \ni e$, такая что $KU = \{gh \mid g \in K,\ h \in U\}$ не пересекается с $FU = \{gh \mid g \in F,\ h \in U\}$.*

*Доказательство.* Возьмём предкомпактную окрестность единицы $W$ с компактным замыканием $\operatorname{cl} W$. По непрерывности умножения в группе множество

$$L = K \operatorname{cl} W = \{gh \mid g \in K,\ h \in \operatorname{cl} W\}$$

компактно и множество $M = L \cap F$ тоже компактно.

По непрерывности взятия обратного и умножения в группе множество $K^{-1}M = \{g^{-1}h \mid g \in K,\ h \in M\}$ является компактным. Так как $K$ и $M$ не пересекаются, то $K^{-1}M$ не содержит единицу. А значит существует окрестность единицы $V$, которая с ним не пересекается,

$$V \cap K^{-1}M = \emptyset \Rightarrow KV \cap M = \emptyset.$$

Мы также можем считать, что $V \subseteq W$, взяв при необходимости пересечение. Следовательно, $KV$ содержится в $L$, не пересекается с $M$, а значит не пересекается с $F$. Теперь из непрерывности взятия обратного и умножения найдём окрестность $U \ni e$, такую что $UU^{-1} = \{gh^{-1} \mid g, h \in U\} \subseteq V$. Тогда

$$KUU^{-1} \cap F = \emptyset \Rightarrow KU \cap FU = \emptyset.$$

□

Теперь мы готовы заняться основной теоремой этого раздела.

**Теорема 9.227** (Существование меры Хаара)**.** *На любой локально компактной хаусдорфовой топологической группе $G$ существует ненулевая борелевская мера, инвариантная относительно левых сдвигов и конечная на компактных подмножествах $G$.*

*Доказательство.* Выберем какую-нибудь окрестность единицы $U \ni e$. Для любого компактного множества $K$ мы можем определить число $[K : U]$ как минимальное количество левых сдвигов $U$, покрывающих $K$; это неотрицательное целое число в силу компактности $K$. Оно инвариантно относительно левых сдвигов $K$, так как соответствующие покрытия просто сдвигаются,

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} g_i U \Rightarrow gK \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (gg_i)U.$$

Проверим, насколько эта величина аддитивна по множествам $K$. Очевидно, всегда выполняется $[K \cup L : U] \leqslant [K : U] + [L : U]$. Пусть два компактных подмножества $K, L \subseteq G$ имеют пустое пересечение. По лемме 9.226 найдётся предкомпактная окрестность единицы $U$, такая что $KU \cap LU = \emptyset$. Тогда левый сдвиг $gU$ не может одновременно пересекать $K$ и $L$, так как иначе для некоторых $u, v \in U$ получится

$$gu = x \in K,\ gv = y \in L \Rightarrow g = xu^{-1} = yv^{-1} \in KU \cap LU,$$

противоречие. При выбранной так $U \ni e$, зависящей от компактных $K$ и $L$ с пустым пересечением, мы получаем равенство

$$[K \cup L : U] = [K : U] + [L : U],$$

так как покрывающие $K \cup L$ левые сдвиги $U$ разбиваются на два типа — покрывающие только $K$ и покрывающие только $L$.

Теперь выберем некоторое компактное $K_0$ с непустой внутренностью, и рассмотрим предел

$$\varkappa K = \lim_U \frac{[K : U]}{[K_0 : U]}.$$

В силу неравенства $[K : U] \leqslant [K : K_0] \cdot [K_0 : U]$ (проверьте его самостоятельно, сдвигая несколько покрытий $K_0$ левыми сдвигами $U$) и конечности величины $[K : K_0]$ (в силу наличия непустой внутренности $K_0$) выражение под пределом ограничено при фиксированном $K$ и имеет смысл брать его предел по некоторому ультрафильтру на множестве окрестностей единицы.

Поясним, какой ультрафильтр нам подойдёт. Возьмём сначала фильтр на множестве окрестностей единицы, состоящий из множеств

$$I_U = \{V \ni e \mid V \not\subseteq U\}$$

при некоторой фиксированной окрестности $U \ni e$, добавим к фильтру также всевозможные подмножества таких $I_U$. Свойство (1) фильтра выполняется, так как $I_U \cup I_V \subseteq I_{U \cap V}$, свойство (2) выполняется по определению, свойство (3) выполняется, так как $U \notin I_U$. Далее мы стандартным образом помещаем этот фильтр в ультрафильтр и берём предел по нему.

Итак, величина $\varkappa K$ определена и теперь уже аддитивна для любых двух компактных и непересекающихся $K$ и $L$. Действительно, если для некоторого $U$ выполняется $KU \cap LU = \emptyset$, то то же самое выполняется для любого открытого $V \notin I_U$ (то есть $V \subseteq U$), а значит нарушение аддитивности $[K \cup L : V] = [K : V] + [L : V]$ может произойти только при $V \in I_U$, что не влияет на предел по ультрафильтру. Для выбранного изначально $K_0$ будет $\varkappa K_0 = 1$, а значит $\varkappa$ иногда бывает положительным. Для пересекающихся компактных $K$ и $L$ мы имеем неравенство $\varkappa(K \cup L) \leqslant \varkappa K + \varkappa L$ ещё до взятия предела, а также имеем монотонность $\varkappa K \leqslant \varkappa L$ для компактных $K \subseteq L$.

Остаток доказательства заключается в в построении борелевской меры из величины $\varkappa$ для компактных множеств. Для открытого $U \subseteq G$ в качестве меры можно взять точную верхнюю грань по компактным множествам:

$$\mu U = \sup\{\varkappa K \mid K \subseteq U\}.$$

Если $U$ предкомпактно, то из $K \subseteq \operatorname{cl} U$ следует $\varkappa K \leqslant \varkappa \operatorname{cl} U$, и значит для таких $U$ мера конечна. Нам надо проверить счётную субаддитивность меры открытых множеств, то есть неравенство

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu U_n.$$

Предположим противное, что левая часть больше правой и по определению меры открытого множества найдём накрытый семейством $\{U_n\}$ компакт $K$, для которого $\varkappa K$ больше правой части формулы. Этот компакт $K$ накрыт лишь конечным набором множеств $U_n$, а значит субаддитивность достаточно проверить лишь в конечном случае, а с помощью индукции всё сводится к доказательству того, что если $K \subset U \cup V$, то $\varkappa K \leqslant \mu U + \mu V$.

Для установления субаддитивности для $K \subset U \cup V$ достаточно поместить $K$ в объединение компактов $L$ и $M$, так что $L \subset U$ и $M \subset V$, тогда мы будем иметь

$$\varkappa K \leqslant \varkappa(L \cup M) \leqslant \varkappa L + \varkappa M \leqslant \mu U + \mu V.$$

Для любой точки $x \in K$, используя лемму 9.225, выберем окрестность $U_x$ с компактным замыканием $K_x$, содержащимся полностью либо в $U$, либо в $V$. Компакт $K$ покрыт конечным семейством $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_N}\}$, тогда мы можем взять за $L$ объединение тех $K_{x_i}$, которые лежат в $U$, а за $M$ — объединение тех $K_{x_i}$, которые лежат в $V$.

Субаддитивность $\mu$ для открытых множеств позволяет определить монотонную и счётно субаддитивную внешнюю меру произвольного множества $X \subset G$ как точную нижнюю грань по открытым множествам

$$\mu^*(X) = \inf\{\mu U \mid U \supseteq X\}.$$

Заметим, что для компактных $K$ при некоторой предкомпактной окрестности $U \ni e$ множество $KU \supseteq K$ открыто и предкомпактно, а значит $\mu^* K \leqslant \mu KU < +\infty$.

Дальнейшая конструкция использует построение меры по Каратеодори (теорема 9.231 далее). Чтобы проверить, что полученная мера определена на борелевских множествах, нам достаточно проверить, что открытые множества измеримы по Каратеодори относительно $\mu^*$ по определению 9.229 ниже.

Проверим это, возьмём произвольное $A \subseteq G$ и открытое $U \subseteq G$, также возьмём $\varepsilon > 0$. Выберем открытое $V \supseteq A$, такое что $\mu V \leqslant \mu^* A + \varepsilon$. Выберем компактное $K \subseteq U \cap V$, такое что $\varkappa K \geqslant \mu(U \cap V) - \varepsilon$. Также в открытом $V \setminus K$ выберем компактное $L$, такое что $\varkappa L \geqslant \mu(V \setminus K) - \varepsilon$. Из последнего неравенства и из включения $V \setminus U \subseteq V \setminus K$ следует, что

$$\mu^*(V \setminus U) \leqslant \mu(V \setminus K) \leqslant \varkappa L + \varepsilon.$$

Осталось написать цепочку неравенств в силу того, что $K \cap L = \emptyset$ и $K \cup L \subseteq V$:

$$\mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \setminus U) \leqslant \mu(V \cap U) + \mu^*(V \setminus U) \leqslant$$
$$\leqslant \varkappa K + \varepsilon + \varkappa L + \varepsilon \leqslant \mu V + 2\varepsilon \leqslant \mu^* A + 3\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то получается $\mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \setminus U) \leqslant \mu^* A$. В силу произвольности $A$ получаем, что $U$ измеримо по Каратеодори относительно $\mu^*$. ☐

Для наведения ясности в доказательстве существования меры Хаара нам надо разобраться с конструкцией меры по Каратеодори.

**Определение 9.228.** Функция $\mu^* : 2^S \to [0, +\infty]$ называется *внешней мерой* на множестве $S$, если она монотонна, $\mu^* X \leqslant \mu^* Y$ при $X \subseteq Y$, счётно субаддитивна,

$$\mu^* \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k \right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k),$$

и $\mu^*(\emptyset) = 0$.

**Определение 9.229.** При наличии внешней меры $\mu^*$ на множестве $S$ подмножество $E \subseteq S$ называется *измеримым по Каратеодори относительно* $\mu^*$, если для любого $A \subseteq S$ выполняется $\mu^* A = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$.

В этом определении неравенство $\mu^* A \leqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$ следует из субаддитивности, поэтому на самом деле достаточно проверять неравенство $\mu^* A \geqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$, что мы делали выше и будем делать далее.

*Задача* 9.230. Проверьте, что множество $E \subset S$ с $\mu^* E = 0$ измеримо по Каратеодори.

**Теорема 9.231** (Построение меры по Каратеодори). *Предположим, на множестве $S$ задана внешняя мера $\mu^*$, тогда $\mu^*$ ограничивается до счётно-аддитивной меры на множествах, измеримых по Каратеодори относительно $\mu^*$.*

*Доказательство.* По определению очевидно, что пустое множество измеримо по Каратеодори и дополнение к измеримому множеству измеримо (слова «по Каратеодори» мы далее в этом доказательстве будет опускать).

Докажем, что пересечение и объединение измеримых множеств измеримо. Возьмём два таких множества $E$ и $F$ и произвольное $A \subseteq S$. Разобьём $A$ на четыре части

$$A_{11} = A \cap E \cap F,\ A_{01} = (A \setminus E) \cap F,\ A_{10} = (A \cap E) \setminus F,\ A_{00} = (A \setminus E) \setminus F.$$

Из измеримости $E$ (для $A$) следует равенство

$$\mu^* A = \mu^*(A_{00} \sqcup A_{01}) + \mu^*(A_{10} \sqcup A_{11}).$$

Из измеримости $F$ (для $A \cap E = A_{10} \sqcup A_{11}$) следует равенство

$$\mu^*(A_{10} \sqcup A_{11}) = \mu^* A_{10} + \mu^* A_{11} \Rightarrow \mu^* A = \mu^*(A_{00} \sqcup A_{01}) + \mu^* A_{10} + \mu^* A_{11}.$$

Из измеримости $E$ (для $A_{00} \sqcup A_{01} \sqcup A_{10}$) следует равенство

$$\mu^*(A_{00} \sqcup A_{01} \sqcup A_{10}) = \mu^*(A_{00} \sqcup A_{01}) + \mu^* A_{10},$$

из которого с учётом предыдущего равенства следует

$$\mu^* A = \mu^*(A_{00} \sqcup A_{01} \sqcup A_{10}) + \mu^* A_{11} = \mu^*(A \setminus (E \cap F)) + \mu^*(A \cap E \cap F).$$

В силу произвольности $A$ это означает измеримость $E \cap F$, измеримость объединения следует из того, что объединение — это дополнение к пересечению дополнений.

Для измеримых множеств имеет место аддитивность $\mu^*$, её достаточно проверить для непересекающихся измеримых $E$ и $F$ в виде

$$\mu^*(E \cup F) = \mu^* E + \mu^* F,$$

что следует из определения измеримости для $A = E \cup F$.

Нам осталось проверить, что счётное объединение $E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k$ попарно не пересекающихся измеримых $E_k$ является измеримым и его мера является суммой мер $E_k$. Сначала проверим измеримость, возьмём произвольное $A \subseteq S$ и обозначим $A_k = A \cap E_k$. Заметим, что из измеримости всех $E_k$ следует, что величина $\mu^*$ аддитивна на конечных объединениях некоторых из $A_k$. Обозначим также $A' = A \setminus \bigsqcup_k A_k$. Нам достаточно доказать, что

$$\mu^* A \geqslant \mu^* \left( \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) + \mu^* A'.$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ по измеримости $E_1, \dots, E_n$ и их объединения выполняется

$$\mu^* A = \mu^* \left( \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \right) + \mu^* \left( A \setminus \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \right) \geqslant \mu^* \left( \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \right) + \mu A' = \sum_{k=1}^{n} \mu^* A_k + \mu A'.$$

Переходя к пределу $n \to \infty$ и используя счётную субаддитивность, получаем

$$\mu^* A \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^* A_k + \mu A' \geqslant \mu^* \left( \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) + \mu^* A',$$

что доказывает измеримость $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

Положив в предыдущих рассуждениях $A = E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $A' = \emptyset$, мы обнаружим, что на самом деле уже доказали, что в неравенстве счётной субаддитивности выполняется равенство

$$\mu^* E = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^* E_k,$$

так как цепочка неравенств в рассуждениях замкнулась в равенство. ☐

Перейдём теперь к единственности меры Хаара. Определим *левоинвариантную меру Хаара* на локально компактной хаусдорфовой группе $G$ как борелевскую меру на $G$, которая инвариантна относительно левых сдвигов и конечна на компактах. Тогда оказывается, что любые две левоинвариантные меры Хаара на $G$ отличаются только умножением на константу.

Доказательство единственности с точностью до умножения на константу левоинвариантной меры Хаара в общем случае достаточно технично. Одна из идей сводится к сравнению интеграла непрерывной функции с компактным носителем $f : G \to \mathbb{R}$ по одной мере и по другой, для этого нужно обобщение теоремы Фубини для произведения мер $\mu$ и $\nu$ на $G \times G$ (которое доказывается соответствующей модификацией доказательства теоремы 5.123) и некоторые технические леммы. Другой подход заключается в применении соответствующего обобщения теоремы Радона–Никодима (соответствующая модификация доказательства теоремы 9.128 работает на каждом компакте $K \subseteq G$) к паре мер $\nu$ и $\lambda = \mu + \nu$, в которой очевидно есть свойство абсолютной непрерывности $\nu$ относительно $\lambda$,

$$\lambda(X) = \mu(X) + \nu(X) = 0 \Rightarrow \nu(X) = 0.$$

Утверждение, которое остаётся доказать после применения обобщения теоремы Радона–Никодима, сформулировано в следующей задаче.

*Задача* 9.232. Пусть $f : G \to \mathbb{R}$ — борелевская функция на локально компактной хаусдорфовой топологической группе $G$. Пусть для любого $g \in G$ для почти всех (относительно меры Хаара $\lambda$) $h \in G$ выполняется $f(gh) = f(h)$. Докажите, что $f$ равна константе почти всюду.

[[ Рассмотрите множество пар $(g, h)$, для которых не выполняется $f(gh) = f(h)$ в произведении $G \times G$. Обоснуйте его борелевость и примените теорему Фубини. ]]

В полезном на практике случае компактной группы $G$ можно утверждать даже больше, чем просто единственность с точностью до умножения на константу. Пусть $\mu$ является левоинвариантной нормированной ($\mu(G) = 1$) мерой Хаара на $G$, а $\nu$ является правоинвариантной (определение то же, но с заменой левых сдвигов на правые, то есть заданные умножением справа) нормированной мерой Хаара на $G$. Нормирование возможно в силу компактности $G$ и конечности её меры по определению меры Хаара. Тогда на $G \times G$ возникает мера $\nu \times \mu$, которая на борелевских множествах вида $X \times Y$ равна $\nu(X)\mu(Y)$ и может быть продолжена счётно-аддитивным образом на все борелевские множества. Её прямой образ при отображении умножения $G \times G \to G$ даёт борелевскую меру $\lambda$ на $G$, более конкретно

$$\lambda(X) = (\nu \times \mu)\{(g, h) \mid gh \in X\}.$$

Тогда по обобщённой теореме Фубини и правой инвариантности меры $\nu$

$$\lambda(X) = \int_G \nu(Xh^{-1})d\mu(h) = \int_G \nu(X)d\mu(h) = \nu(X),$$

а по обобщённой теореме Фубини в другом порядке и левой инвариантности меры $\mu$

$$\lambda(X) = \int_G \mu(g^{-1}X)d\nu(g) = \int_G \mu(X)d\nu(g) = \mu(X).$$

Это показывает, что $\mu = \lambda = \nu$, то есть нормированная мера Хаара единственна и при этом является инвариантной относительно и правых, и левых сдвигов.

Следующая задача показывает, что на «понятных» группах мера Хаара может быть задана сравнительно явно.

*Задача* 9.233. Постройте меру Хаара иначе на топологических группах $G$, являющихся гладкими многообразиями с гладкими операциями умножения и взятия обратного, выбрав ненулевой левоинвариантный элемент $\nu \in \Omega^{\dim G}(G)$.

[[ Достаточно определить $\nu$ на касательном пространстве $T_eG$, а далее распространить на остальные точки по левоинвариантности. ]]

*Задача* 9.234. Пусть $G$ — компактная группа с мерой Хаара $\mu$, а $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ — измеримый гомоморфизм в группу комплексных чисел по умножению. Докажите, что либо $\chi \equiv 1$, либо $\int_G \chi(g) d\mu(g) = 0$.

[[ Используйте инвариантность интеграла относительно сдвигов. ]]

*Задача* 9.235. Докажите, что для элемента $\varphi \in L_1(G)$ левый сдвиг на $g \in G$, $\varphi \circ g$, непрерывно зависит от $g$ как элемент $L_1(G)$.

[[ Аналогично случаю $G = \mathbb{R}^n$ сведите вопрос к характеристической функции открытого множества $U$ конечной меры Хаара. Найдите компактное $K \subset U$, так что $\mu U - \mu K \leqslant \mu U - \varkappa K < \varepsilon$ и сведите к доказательству утверждения для характеристической функции $K$. После этого примените лемму 9.226. ]]

Конечно, основная теорема позволяет рассматривать гораздо менее понятные группы, такие как бесконечные произведения «понятных» компактных групп и их замкнутые подгруппы. Приведём один классический пример. Пусть $p$ — некоторое простое число. Рассмотрим группы остатков по модулю $p^k$ по сложению, $\mathbb{Z}/p^k$, и их бесконечное произведение $P = \prod_{k \geqslant 1} \mathbb{Z}/p^k$. Это компактная группа по теореме Тихонова, также легко проверить её хаусдорфовость. В ней можно ввести соотношения на координаты элемента: для координат $a_k \in \mathbb{Z}/p^k$ и $a_{k+1} \in \mathbb{Z}/p^{k+1}$ можно потребовать $a_{k+1} \equiv a_k \mod p^k$. Эти соотношения определяют замкнутую подгруппу $\mathbb{Z}_p \subset P$, которая называется *группой p-адических чисел по сложению*.

*Задача* 9.236. Проверьте, что для $p$-адических чисел определено (и непрерывно) также умножение, превращающее их в кольцо.

[[ Используйте умножение в $\mathbb{Z}/p^k$. ]]

*Задача* 9.237. Для элемента $x \in \mathbb{Z}_p$ опишите множество $\langle x \rangle$ элементов $\mathbb{Z}_p$, делящихся на $x$. Найдите его меру Хаара.

[[ Представьте $\mathbb{Z}_p$ в виде объединения сдвигов $\langle x \rangle$. ]]

*Задача* 9.238. Постройте естественное вложение колец $\iota_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$. Взяв их произведение по всем простым числам, получим вложение

$$\iota : \mathbb{Z} \to \prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_p.$$

Докажите, что замыкание образа $\iota(\mathbb{Z})$ совпадает со всем кольцом $\prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_p$.

[[ Вспомните китайскую теорему об остатках. ]]

## 10. Комплексный анализ

10.1. **Дифференцируемость в комплексном смысле.** Мы будем рассматривать *функции комплексного переменного*, то есть отображения $f : U \to \mathbb{C}$ для открытых $U \subseteq \mathbb{C}$. При естественном отождествлении комплексного числа $z = x + iy$ с парой действительных чисел $(x, y)$ возникает отождествление $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, так что пока функция комплексного переменного выглядит просто как отображение открытого множества на плоскости в плоскость.

Чтобы придать смысл этому понятию, мы будем задействовать комплексную структуру и будем рассматривать только функции, *дифференцируемые в каждой* $z_0 \in U$ *в комплексном смысле*, то есть такие что

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|), \quad z \to z_0,$$

где умножение $f'(z_0)$ на $z - z_0$ понимается как умножение комплексных чисел.

Понятие комплексной дифференцируемости можно переписать разными способами. Например, записав всё через действительную и мнимую часть, $f(z) = u(x, y) + iv(x, u)$, мы можем заметить, что дифференциал в точке

$$df = du + idv = u'_x dx + u'_y dy + iv'_x dx + iv'_y dy = \partial f dz + \bar\partial f d\bar z,$$

где

$$dz = dx + idy, d\bar z = dx - idy, \partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \bar\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Тогда, при наличии дифференцируемости $f$ как отображения на вещественной плоскости, условие комплексной дифференцируемости записывается как

$$\bar\partial f = 0,$$

или в чисто действительном виде (*условия Коши–Римана*)

$$u'_x = v'_y, \quad u'_y = -v'_x.$$

**Теорема 10.1.** *Дифференцируемость в комплексном смысле сохраняется при сложении, вычитании, умножении, делении (не на нуль) и композиции.*

*Доказательство.* Доказательства аналогичны доказательствам для функции действительного переменного. ☐

С геометрической точки зрения дифференцируемость в комплексном смысле и условия Коши–Римана означают, что дифференциал отображения $Df$ является $\mathbb{R}$-линейным оператором, коммутирующим с умножением на мнимую единицу. Такой оператор является *поворотной гомотетией*, то есть композицией поворота и гомотетии с некоторым коэффициентом. В частности, если $Df$ не нулевой, то он сохраняет углы между касательными векторами, то есть является *конформным*. Собственно, любой конформный линейный оператор на плоскости либо является поворотной гомотетией, либо является композицией комплексного сопряжения и поворотной гомотетии. Говоря о комплексной плоскости, мы будем называть первый случай конформным, а второй — *антиконформным*.

*Задача* 10.2. Считая $fdz$ комплекснозначной дифференциальной формой на $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, докажите, что из условия Коши–Римана $\bar\partial f = 0$ следует $d(fdz) = 0$.

*Задача* 10.3. Проверьте, что $\mathbb{C}$-линейный оператор $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ уже не обязательно сохраняет углы между векторами, определённые по отождествлению $\mathbb{C}^2$ с евклидовым пространством $\mathbb{R}^4$.

10.2. **Криволинейный интеграл функции комплексного переменного и интегральная теорема Коши.** Пусть $f : U \to \mathbb{R}$ — функция комплексного переменного и пусть $\gamma : [t_0, t_1] \to U$ — кусочно-гладкая ориентированная кривая. Тогда интеграл

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma (u + iv)(dx + idy) = \int_\gamma (udx - vdy) + i \int_\gamma (vdx + udy)$$

определён как интеграл от дифференциальной формы по кривой. Мы собираемся установить *интегральную теорему Коши*, у нас это будет несколько утверждений, связывающие понятие дифференцируемости в комплексном смысле с поведением этого интеграла. Начнём с рассмотрения интеграла по треугольнику:

**Лемма 10.4.** *Если треугольник $T$ содержится в $U$, а $f$ дифференцируема в комплексном смысле в $U$, то*

$$\int_{\partial T} f\, dz = 0.$$

*Доказательство.* Заметим, что на самом деле это утверждение последует из условий Коши–Римана и формулы Грина, если $f$ является непрерывно дифференцируемой. Смысл этой леммы в том, что мы не требуем непрерывности производной $f'$.

Предположим противное,

$$\left| \int_{\partial T} f\, dz \right| \geqslant Cp(T)^2,$$

где $C$ — некоторая положительная константа, а $p(T)$ означает периметр треугольника $T$. Далее мы будем уменьшать треугольник так, чтобы это условие сохранялось. Действительно, разрежем $T$ на четыре подобных ему треугольника его средними линиями. Интеграл по границе $T$ равен сумме интегралов по границам каждого из треугольников, значит один из меньших треугольников, $T_1$, обладает свойством

$$\left| \int_{\partial T_1} f\, dz \right| \geqslant \frac{1}{4} \left| \int_{\partial T} f\, dz \right| \geqslant \frac{C}{4} p(T) = Cp(T_1)^2.$$

Продолжая такое деление на четыре треугольника, мы получим последовательность вложенных треугольников $(T_k)$, для которых

$$\left| \int_{\partial T_k} f\, dz \right| \geqslant Cp(T_k)^2.$$

Эта последовательность имеет общую точку $z_0$, из определения комплексной дифференцируемости мы знаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что в $\delta$-окрестности $z_0$ имеет место

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leqslant \varepsilon |z - z_0|.$$

Пусть теперь $k$ достаточно большое, чтобы $T_k$ содержался в $U_\delta(z_0)$. Легко проверить вручную (или по формуле Грина, что интеграл комплексно-линейной функции $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ по $\partial T_k$ будет равен нулю. Следовательно, по сути мы должны интегрировать лишь $o(z - z_0)$ для получения значения интеграла, то есть

$$\left| \int_{\partial T_k} f\, dz \right| \leqslant \left| \int_{\partial T_k} \varepsilon |z - z_0|\, |dz| \right| \leqslant \varepsilon p(T_k)^2.$$

Очевидно, что при выборе $\varepsilon < C$ мы получим противоречие. □

Используя уже замеченное в доказательстве свойство аддитивности интеграла по границе области относительно разбиения области на части кусочно-гладкими кривыми, можно заметить, что для любого не обязательно выпуклого многоугольника $P \subset U$ интеграл

$$\int_{\partial P} f(z)\,dz = 0.$$

Действительно, многоугольник можно разбить на треугольники, читатель может убедиться в этом самостоятельно, решая следующие задачи (может понадобиться лемма Жордана о замкнутых кривых на плоскости 7.6). Собственно, не обязательно выпуклый многоугольник определяется с помощью замкнутой ломаной $P$ без самопересечений как объединение $P$ и ограниченной части плоскости из двух компонент связности $\mathbb{R}^2 \setminus P$.

*Задача* 10.5. Докажите, что в необязательно выпуклом многоугольнике $P$, если он не треугольник, можно провести диагональ, которая соединяет две его вершины, находится в его внутренности вся, кроме своих концов.

[[ Попробуйте провести из одной вершины и посмотрите, что может этому помешать. ]]

*Задача* 10.6. Докажите, что необязательно выпуклый многоугольник $P$ можно разрезать на треугольники.

[[ Проводите диагонали до тех пор, пока это возможно. ]]

Теперь мы докажем ещё более содержательное утверждение:

**Теорема 10.7.** *Если кусочно-линейная кривая $\gamma_0$ гомотопна внутри $U$ кусочно-линейной кривой $\gamma_1$ с сохранением концов, а $f$ дифференцируема в $U$ в комплексном смысле, то*

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

*Доказательство.* В этой теореме гомотопия — это такое непрерывное отображение

$$h : [t_0, t_1] \times [0, 1] \to U,$$

что $h(t, 0) \equiv \gamma_0(t)$, $h(t, 1) \equiv \gamma_1(t)$, $h(t_0, s) \equiv z_0$, $h(t_1, s) \equiv z_1$. Образ $h$ компактен и содержится в $U$ вместе со своей $\varepsilon$-окрестностью. Используя равномерную непрерывность $h$ разобъём $[t_0, t_1] \times [0, 1]$ на прямоугольники настолько мелко, чтобы образ каждого прямоугольника был диаметра не более $\varepsilon$. Будем также считать, что образы вершин прямоугольников разбиения содержат все вершины $\gamma_0$ и $\gamma_1$.

Для каждого прямоугольника разбиения $R_k \subseteq [t_0, t_1] \times [0, 1]$ рассмотрим четырёхугольник $Q_k$ (возможно с самопересечениями), образованный образами вершин $R_k$ при отображении $h$; из-за выбранной мелкости $Q_k \subset U$. Тогда разность интегралов

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz - \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

выразится как сумма интегралов по границам четырёхугольников $Q_k$. Но любой четырёхугольник можно ещё разбить на два треугольника в $U$ и после применения леммы 10.4 получить, что интеграл по границе $Q_k$ равен нулю, а значит и искомая разность интегралов равна нулю. ☐

Предыдущая теорема позволяет, при условии комплексной дифференцируемости $f : U \to \mathbb{C}$, определить интеграл

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz$$

по любой непрерывной кривой $\gamma : [t_0, t_1] \to U$. Действительно, из равномерной непрерывности кривая содержится в $U$ вместе со своей $\varepsilon$-окрестностью. Тогда достаточно мелко вписанные в неё ломаные тоже содержатся в $U$ и гомотопны друг другу, следовательно интеграл по любой из них можно считать интегралом по $\gamma$ по определению. Понимая интеграл по непрерывной кривой в таком смысле, мы можем сформулировать:

**Следствие 10.8** (Интегральная теорема Коши). *Если $f$ дифференцируема в комплексном смысле в $U \subseteq C$, а кривая $\gamma \subset U$ замкнута и стягиваема (гомотопна тождественной) в $U$, то*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

*Задача* 10.9 (Лемма Жордана в общем случае). ** Докажите, что замкнутая кривая $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ без самопересечений делит плоскость на две части, внутреннюю и внешнюю.

[[ Нужно приближать $\gamma$ ломаной всё ближе и ближе и при этом очень аккуратно обходить технические сложности. ]]

10.3. **Первообразная функции комплексного переменного и универсальное накрытие области.** Продолжим рассматривать дифференцируемую в комплексном смысле $f : U \to \mathbb{C}$ и дополнительно предположим, что $U$ связно, то есть является областью. Тогда мы можем фиксировать $p \in U$ и для любой точки $z \in U$ определить

$$F(z) = \int_p^z f(\zeta)\,d\zeta,$$

где интеграл берётся по некоторой кривой от $p$ до $z$. Конечно не все такие кривые гомотопны друг другу и определение может не быть корректным. Первый случай, когда определение корректно, соответствует случаю *односвязной* области $U$, в которой любая замкнутая кривая гомотопна постоянной. Тогда для любых двух кривых $\gamma_0$ и $\gamma_1$ от $p$ до $z$ конкатенация $\gamma_0 \diamond \gamma_1^{-1}$ (возведение в степень $-1$ означает обращение ориентации) будет замкнутой, гомотопной постоянной, и интегральная теорема Коши даст нам равенство

$$\int_{\gamma_0 \diamond \gamma_1^{-1}} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma_0} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{\gamma_1} f(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Пусть теперь $U_\delta(z) \subseteq U$ и $z' \in U_\delta(z)$. Рассмотрев кривую $\gamma$ из $p$ в $z$ и дополнив её до кривой из $p$ в $z'$ отрезком $z' - z$, мы получим равенство

$$F(z') - F(z) = \int_{[z_0, z_1]} f(\zeta)\,d\zeta = f(z)(z' - z) + o(|z' - z|).$$

Следовательно, $F$ является первообразной $f$ в комплексном смысле. Эти наблюдения можно сформулировать так:

**Теорема 10.10.** *Если $f : U \to \mathbb{C}$ дифференцируема в комплексном смысле в односвязной $U$, то у неё существует первообразная в комплексном смысле $F : U \to \mathbb{C}$ и*

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0)$$

*для любых двух $z_0, z_1 \in U$ для интеграла по любой соединяющей их в $U$ кривой.*

Что делать, если область $U$ не является односвязной? Тогда можно зафиксировать точку $p \in U$ и рассмотреть её *универсальное накрытие*

$$\widetilde{U} = \{\gamma \mid \gamma \subset U \text{ выходит из } p\}/{\sim},$$

где $\sim$ — отношение гомотопии с сохранением концов. Это определение подобрано так, чтобы первообразная $F$ оказалась корректно определённой на $\widetilde{U}$ по теореме 10.7.

Чтобы понять структуру универсального накрытия $\widetilde{U}$, надо определить естественную проекцию

$$\pi : \widetilde{U} \to U, \quad p(\gamma) = \text{конец}\ \gamma.$$

Тогда прообраз $z \in U$ состоит из классов гомотопии кривых, соединяющих $p$ и $z$. Более того, рассмотрев некоторую окрестность $U_\delta(z) \subseteq U$, можно заметить, что для любой $z' \in U_\delta(z)$ и $\gamma \in \pi^{-1}(z)$ кривая $\gamma \diamond [z, z']$ даёт элемент $\pi^{-1}(z')$ и на самом деле таким образом строится взаимно однозначное соответствие между $\pi^{-1}(z)$ и $\pi^{-1}(z')$ (докажите это в качестве упражнения). Отсюда следует, что прообраз $\pi^{-1}(U_\delta(z))$ состоит из объединения некоторого количества копий $U_\delta(z)$, соответствующих разным классам гомотопии путей из $p$ в $z$. Это позволяет ввести на $\widetilde{U}$ структуру гладкого двумерного многообразия, более того, это будет *одномерное комплексное многообразие*, то есть двумерное в действительном смысле многообразие с некоторой системой координатных карт, функции перехода между которыми, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$, будут дифференцируемыми в комплексном смысле функциями одной комплексной переменной.

Полезно рассмотреть следующий пример, который немного проясняет приведённые выше абстрактные определения. Пусть $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и функция задана по формуле

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

Эта функция дифференцируема в комплексном смысле как частное $1$ и $z$, которые очевидно дифференцируемы в комплексном смысле. Посчитаем её интеграл по единичной окружности, обходящей начало координат против часовой стрелки, параметризуя её как $\{e^{it}\}_{[0,2\pi]}$,

$$\int_S f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} de^{it} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Это уже показывает, что область $U$ не является односвязной. Найти первообразную можно по аналогии с действительным случаем, она должна соответствовать логарифму комплексного числа. Вспомним определение комплексной экспоненты:

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

её дифференцируемость в комплексном смысле можно проверить по определению или воспользовавшись её разложением в сходящийся степенной ряд. Тогда логарифм комплексного числа можно определить примерно как

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z,$$

где действительная часть определена однозначно, а мнимая часть $\operatorname{Arg} z$ (аргумент комплексного числа) определена только с точностью до прибавления числа кратного $2\pi$. В данном случае универсальное накрытие $\widetilde{U}$ оказывается равным $\mathbb{C}$, а отображение $\pi : \widetilde{U} \to U$ соответствует экспоненте $\mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. В частности, это означает, что число

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z} \in \mathbb{Z}$$

полностью описывает класс гомотопии замкнутой кривой $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Более глубокое изучение универсальных накрытий произвольных многообразий мы откладываем до раздела 10.12.

*Задача* 10.11. Докажите, что если для области $U \subset \mathbb{C}$ любая функция $\operatorname{Ln}(z - a)$ при $a \notin U$ допускает однозначное определение на $U$, то область $U$ односвязна.

[[ Предполагая неодносвязность, найдите в $U$ простую замкнутую ломаную, которая не стягивается в $U$ в точку, используйте лемму Жордана. ]]

10.4. **Интегральная формула Коши и аналитичность.** Сейчас мы обнаружим свойства дифференцируемой в комплексном смысле функции, которые радикально отличают её от дифференцируемой функции действительного переменного. Первое свойство, неформально говоря, позволяет найти её значение в точки только по её значениям на окружающей эту точку кривой.

**Теорема 10.12** (Интегральная формула Коши). *Пусть замкнутая простая кривая $\gamma$ лежит в области определения $U$ дифференцируемой в комплексном смысле функции $f$, область $V$, ограниченная $\gamma$, лежит слева от $\gamma$ в смысле ориентации $\gamma$, $V \subseteq U$ и $z \in V$. Тогда*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

*Доказательство.* Рассмотрим также кривую $\gamma_r \subset V$, которая является окружностью радиуса $r$ вокруг точки $z$, ориентированная против часовой стрелки. Рассмотрим пару точек $a \in \gamma_r$ и $b \in \gamma$, которая реализует расстояние между $\gamma_r$ и $\gamma$. Из условия минимальности отрезок $[a, b]$ полностью лежит в $V$, кроме его конца $b$. Тогда мы можем сделать кривую $\Gamma$, которая является конкатенацией отрезка $[a, b]$, одного обхода кривой $\gamma$, отрезка $[b, a]$, и одного обхода $\gamma_r$ против часовой стрелки.

Можно доказать, что такая кривая $\Gamma$ стягивается в $U \setminus U_r(z)$. Мы оставляет полное рассуждение читателю и заметим, что в установлении аналитичности $f$ это утверждение будет использоваться только в тех случаях, когда оно непосредственно очевидно; а после установления аналитичности мы сформулируем теоремы 10.15 и 10.16, которые уже не будут требовать проверки стягиваемости.

Теперь, функция $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ переменной $\zeta$ определена и дифференцируема в комплексном смысле в $U \setminus \{z\}$, а значит, по интегральной теореме Коши,

$$\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0.$$

Отрезок $[a, b]$ в интеграле проходится туда и обратно и сокращается; следовательно мы получаем равенство

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

При стремлении $r \to +0$ правый интеграл можно записать как

$$(f(z) + o(1)) \int_{\gamma_r} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i (f(z) + o(1))$$

по уже найденному нами интегралу от $\frac{1}{z}$, в пределе $r \to +0$ мы получим требуемую формулу. ☐

**Теорема 10.13** (Ряд Тейлора аналитической в круге функции). *Если функция $f$ дифференцируема в комплексном смысле в открытом круге $U_R(z_0)$, то она раскладывается в нём в степенной ряд*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

*причём*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta$$

*для любой окружности $\gamma$ с центром в $z_0$ радиуса менее $R$, ориентированной против часовой стрелки.*

*Доказательство.* Пусть $\gamma$ — некоторая окружность с центром $z_0$, лежащая в области определения $f$ и ориентированная против часовой стрелки. Рассмотрим также точку $z$, лежащую внутри неё. Тогда в подынтегральном выражении формулы Коши для $z$ мы можем написать по формуле геометрической прогрессии

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

причём ряд будет сходится равномерно по $\zeta$. Переставляя интеграл с суммой ряда, получим требуемое представление

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \right) (z - z_0)^n.$$

Далее по известным свойствам степенных рядов мы утверждаем, что $f$ имеет производные в комплексном смысле любого порядка в $U_R(z_0)$, их степенные ряды получаются почленным дифференцированием её степенного ряда, и после этого коэффициенты её степенного ряда находятся через значения её производных. ☐

*Задача* 10.14. Докажите, что формула бинома Ньютона

$$(1 + z)^{\alpha} = e^{\alpha \ln(1+z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

выполняется с радиусом сходимости не менее 1. Здесь для логарифма выбирается значение аргумента в пределах $(-\pi/2, \pi/2)$.

[[ Это утверждение было тяжело доказать средствами действительного анализа, а в комплексном анализе достаточно проверить аналитичность левой части в круге радиуса 1. ]]

Теорема о разложении функции комплексного переменного в ряд Тейлора показывает, что из условия наличия производной в комплексном смысле на самом деле следует существование любых производных и даже аналитичность. Поэтому с этого момента мы вместо «дифференцируемая в комплексном смысле» будем говорить «аналитическая». Также это знание позволяет нам уточнить интегральную теорему Коши и формулу Коши.

**Теорема 10.15** (Общая интегральная теорема Коши). *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область с кусочно гладкой границей, ориентированной так, что $U$ при обходе остаётся слева. Если $f : U \to \mathbb{C}$ аналитическая и непрерывно продолжается на границу $U$, то*

$$\int_{\partial U} f(z)\, dz = 0.$$

*Доказательство.* Исходя из кусочной гладкости границы $\partial U$ и непрерывности $f$, мы можем немного сдвинуть $\partial U$ (как набор замкнутых кривых) внутрь $U$ так, что интеграл изменится не более чем на наперёд заданное $\varepsilon > 0$. После этого мы имеем бесконечную гладкость $f$ и получаем нуль в интеграле по формуле Грина, так как при $\bar{\partial} f = 0$

$$d(f\, dz) = \partial f dz \wedge dz = 0.$$

Далее можно перейти к пределу $\varepsilon \to +0$. ☐

**Теорема 10.16** (Общая интегральная формула Коши). *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область с кусочно гладкой границей, ориентированной так, что $U$ при обходе остаётся слева. Если $f : U \to \mathbb{C}$ аналитическая и непрерывно продолжается на границу $U$, то для любой $z \in U$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

*Доказательство.* Рассмотрим окрестность $U_r(z) \subset U$. Применив общую интегральную формулу Коши к области $U \setminus \operatorname{cl} U_r(z)$, мы сведём утверждение к случаю, когда интеграл справа берётся по $\gamma_r = \partial U_r(z)$. Далее как и в доказательстве уже имеющегося случая интегральной формулы Коши мы получаем требуемое в пределе $r \to +0$. ☐

*Задача* 10.17. Пусть аналитическая функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ такова, что $|f(z)| = O(|z|^N)$ при $|z| \to \infty$. Докажите, что она является многочленом от $z$ степени не более $N$. В частности, ограниченная аналитическая на $\mathbb{C}$ функция является константой.

[[ Посчитайте коэффициенты её ряд по степеням $z$ по интегральной формуле, взяв интеграл по окружностям всё большего и большего радиуса. ]]

*Задача* 10.18. Найдите значение условно сходящегося интеграла $\int_0^{+\infty} e^{iz^2}\, dz$.

[[ Сначала докажите, что этот интеграл является пределом интегралов $e^{iz^2}$ по лучам $\{re^{i\varphi} \mid r \geqslant 0\}$ при $\varphi \to +0$, используйте для этого признак равномерной сходимости Абеля. Потом докажите, что интеграл по лучу не зависит от выбора луча с $0 < \varphi < \pi/2$, используя интегральную теорему Коши для области, ограниченной двумя отрезками и дугой. Потом рассмотрите луч с $\varphi = \pi/4$. ]]

*Задача* 10.19. Докажите, что если $f = u + iv$ аналитическая, то $u$ и $v$ являются *гармоническими*, то есть для оператора Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ выполняется

$$\Delta u = \Delta v = 0.$$

[[ Используйте условия Коши–Римана. ]]

*Задача* 10.20. Докажите, что любая дважды непрерывно дифференцируемая гармоническая функция $u : U \to \mathbb{R}$ в односвязном $U$ является действительной частью некоторой аналитической в $U$ функции.

[[ Используйте условия Коши–Римана и достаточные условия наличия потенциала в односвязной области для нахождения подходящей $v$. ]]

10.5. **Ряд Лорана и особенности функции в точке.** Для функций комплексного переменного есть обобщение ряда Тейлора на случай, когда функция аналитична в *кольце* между двумя окружностями вида

$$A_{r,R}(z_0) = \{z \mid r < |z - z_0| < R\}.$$

**Теорема 10.21** (Ряд Лорана). *Если $f$ аналитическая в кольце $A_{r,R}(z_0)$, то в нём она представляется в виде абсолютно сходящегося ряда*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

*где*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

*Доказательство.* Рассмотрим некоторую точку $z \in A_{r,R}(z_0)$. Возьмём две окружности с центрами в $z_0$ в этом кольце, $\gamma$ и $\Gamma$, так чтобы $z$ лежала вне $\gamma$ и внутри $\Gamma$. Между этими окружностями заключено меньшее кольцо и они составляют его границу. Считая ориентацию обеих окружностей против часовой стрелки, получим по обобщённой интегральной формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Первое слагаемое превращается в ряд Тейлора, давая компоненты $c_n(z-z_0)^n$ с $n \geqslant 0$. Второе преобразуем, помня что в нём $|z-z_0| > |\zeta - z_0|$,

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(\zeta - z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

С учётом того, что интегралы любой аналитической в $A_{r,R}(z_0)$ функции по $\gamma$ и $\Gamma$ совпадают (обобщённая интегральная теорема Коши), мы приходим в точности к требуемому разложения и требуемым формулам. □

Заметим, что ряд Фурье выглядит похоже на ряд Лорана. Если мы рассмотрим $2\pi$-периодическую функцию действительной переменной $t$, то её также можно считать функцией на единичной окружности $\{z = e^{it}\}$. В этом случае её ряд Фурье в точности имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n.$$

Конечно, он не обязан абсолютно сходится, так как $f$ может и не продолжаться до аналитической функции на каком-либо кольце. Даже гладкость функции $f$ на окружности гарантирует лишь оценки её коэффициентов Фурье вида

$$c_n = O\left(\frac{1}{n^s}\right),$$

тогда как её аналитичность в некотором кольце давала бы (например, по формуле Коши–Адамара для радиуса сходимости степенного ряда) более сильную оценку вида

$$c_n = O(\rho^{|n|}),$$

где $r, 1/R < \rho < 1$. Эти оценки можно рассматривать как количественные способы различить гладкость и аналитичность.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда функция аналитическая в окрестности точки $z_0$, но не в самой точке $z_0$, это будет называться *изолированная особенность*. Будем говорить, что $f$ определена в *проколотой окрестности* точки $z_0$. Рассмотрим следующие случаи:

**Теорема 10.22** (Устранимая особенность). *Если $f$ аналитическая и ограничена в проколотой окрестности $z_0$, то её особенность в $z_0$ устранима и она на продолжается до аналитической функции в окрестности $z_0$.*

*Доказательство.* Из формулы для коэффициентов Лорана

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1}\,d\zeta$$

с интегралом по окружности радиуса $\rho$ мы получаем оценку

$$|c_{-n}| \leqslant |\rho|^n \cdot \sup\{|f(z)| \mid z \in \gamma\},$$

которая стремится к нулю при $\rho \to +0$, если $n \geqslant 1$. Это означает, что ряд Лорана на самом деле является рядом Тейлора и функция может считаться аналитической в $z_0$. ☐

**Теорема 10.23** (Полюс). *Если $f$ аналитическая в проколотой окрестности $z_0$ и $|f(z)| \to \infty$ при $z \to z_0$, то в этом кольце $f$ имеет вид*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$$

*для некоторого $k \geqslant 1$ и аналитической $g$ с $g(z_0) \neq 0$, натуральное число $k$ называется* порядком полюса.

*Доказательство.* В этой ситуации $h(z) = \frac{1}{f(z)}$ ограничена в проколотой окрестности $z_0$, а значит является аналитической в $z_0$. Рассмотрев первый ненулевой коэффициент разложения $h$ в ряд Тейлора, мы получим

$$h(z) = (z-z_0)^k s(z),$$

где $s(z_0) \neq 0$. Тогда требуемая формула выполняется для $g(z) = 1/s(z)$. ☐

**Теорема 10.24** (Существенная особенность). *Если $f$ аналитическая в проколотой окрестности $z_0$ и её особенность в $z_0$ не устранима и не является полюсом, то любое число $a \in \mathbb{C}$ является её частичным пределом при $z \to z_0$.*

*Доказательство.* Предположим противное, что число $a \in \mathbb{C}$ не является частичным пределом $f$ в $z_0$. Тогда функция

$$h(z) = \frac{1}{f(z) - a}$$

ограничена в некоторой проколотой окрестности $z_0$, следовательно она аналитическая в этой окрестности. Тогда

$$f(z) = a + \frac{1}{h(z)} = \frac{1 + ah(z)}{h(z)}$$

и из этой формулы видно, что особенность $f$ либо устранима (если $h(z_0) \neq 0$), либо является полюсом. ☐

Иначе можно описать существенную особенность как такую, в которой ряд Лорана по степеням $z - z_0$ содержит бесконечно много ненулевых слагаемых с отрицательными степенями, полюс — как ситуацию, когда имеется конечное число ненулевых слагаемых с отрицательными степенями, устранимую особенность — как отсутствие слагаемых с отрицательными степенями.

Если функция определена в окрестности $\infty$, то есть определена для достаточно больших $|z|$, то мы можем говорить о её особенности в бесконечности. По сути, изучение особенности в бесконечности сводится к изучению особенности в нуле после замены $z = 1/\zeta$.

*Задача* 10.25. Пусть функция $f$ имеет лишь изолированные особенности и все они — полюса, в том числе и в бесконечности. Докажите, что $f$ — рациональная функция.

[[ Из компактности особенностей конечное число. Умножив $f$ на многочлен, можно добиться исчезновения полюсов в конечных точках. Далее используйте задачу 10.17. ]]

10.6. **Контурные интегралы и вычеты.** Как мы уже заметили, интеграл аналитической функции по некоторому контуру равен нулю, если внутри этого контура функция является аналитической. Если же внутри этого контура есть особенности, то мы можем выразить интеграл через некоторые числа, соответствующие этим особенностям.

**Определение 10.26.** *Вычетом* в изолированной особой точке $z_0$ аналитической функции $f$ называется интеграл

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta$$

по достаточно маленькой окружности с центром в $z_0$, ориентированной против часовой стрелки. Иначе говоря, вычет равен коэффициенту $c_{-1}$ в разложении $f$ в ряд Лорана по $z - z_0$ в проколотой окрестности $z_0$.

Для нахождения вычета в полюсе первого порядка достаточно посчитать предел

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Для полюсов большего порядка вычисления могут быть посложнее, один из вариантов — написать для полюса $k$-го порядка

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left( (z - z_0)^k f(z) \right).$$

В точках существенной особенности вычисление вычета может оказаться весьма трудной задачей.

**Определение 10.27.** *Вычетом в бесконечности* называется

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta$$

по достаточно большой окружности с центром в нуле, ориентированной против часовой стрелки. Иначе говоря, вычет равен $-c_{-1}$ в разложении $f$ в ряд Лорана по степеням $z$ в окрестности бесконечности.

**Теорема 10.28** (Формула вычетов). *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область с кусочно гладкой границей, ориентированной так, что $U$ при обходе остаётся слева. Если $f : U \to \mathbb{C}$ аналитическая в $U$ кроме конечного числа изолированных особых точек и непрерывно продолжается на границу $U$, то*

$$\int_{\partial U} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z_k} \operatorname*{res}_{z_k} f(z),$$

*где сумма берётся по изолированным особым точкам в $U$.*

*Доказательство.* Выкинем из области $U$ объединение маленьких кругов с центрами в $z_k$ и применим интегральную формулу Коши, должен получиться нулевой интеграл. Это означает, что интеграл по границе $U$ равен сумме интегралов по маленьким окружностям вокруг особых точек, то есть равен $2\pi i$ умножить на сумму вычетов, по определению вычетов. ☐

В этой теореме можно рассматривать и неограниченные области, содержащие окрестность бесконечности, тогда в формулу надо будет добавить вычет в бесконечности.

*Задача* 10.29. Пусть многочлены $P$ и $Q$ таковы, что $\deg P + 2 \leqslant \deg Q = n$, а многочлен $Q$ имеет $n$ различных корней $z_1, \dots, z_n$. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} = 0.$$

[[ Используйте формулу вычетов. ]]

Иногда в интегральных формулах возникает ситуация, когда например часть границы области $U$ имеет вид отрезка $I$, окружённого этой областью. Тогда может оказаться, что продолжение по непрерывности на $I$ будет разным с одной стороны отрезка и с другой стороны. Так как доказательство интегральной теоремы Коши у нас опирается на сдвиг контура интегрирования с границы внутрь области, то становится ясно, как рассматривать такой случай: интеграл по отрезку $I$, как по части границы $\partial U$, надо брать отдельно по двум его «сторонам» и значения $f$ на каждой стороне брать соответственно.

В качестве примера можно рассмотреть функцию

$$f(z) = z^{p-1}(1-z)^{-p}$$

при действительном $p \in (0, 1)$. Будем считать, что по этой формуле функция определена на верхней стороне отрезка $[0, 1] \subset \mathbb{C}$. Имея в виду формулу

$$z^{p-1} = e^{(p-1)\operatorname{Ln} z}$$

мы можем понять, как выражение $z^{p-1}$ меняется при обходе нуля с верхней стороны отрезка до нижней, оно при этом умножится на $e^{2\pi(p-1)i} = e^{2\pi pi}$ и не изменяется по модулю. Аналогично, при обходе 1 с верхней стороны отрезка до нижней выражение $(1-z)^{-p}$ по модулю не поменяется, но умножится на $e^{2\pi pi}$. Это позволяет заключить, что вся функция $f$ аналитически продолжается на $\mathbb{C} \setminus I$. Тогда формула вычетов даёт:

$$\int_0^1 z^{p-1}(1-z)^{-p}\,dz - e^{2\pi pi} \int_0^1 z^{p-1}(1-z)^{-p}\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{\infty} f(z).$$

Значение действительного интеграла — это $B(p, 1-p)$, а вычет в бесконечности находится из того, что при выбранном нами продолжении с верхней части отрезка $f(z) \sim e^{\pi pi}/z$ при $z \to \infty$, то есть

$$B(p, 1-p)(1 - e^{2\pi pi}) = -2\pi i e^{\pi pi},$$

что после тривиального преобразования даёт нам *формулу дополнения*:

$$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}.$$

Формула вычетов также позволяет узнать количество нулей аналитической функции внутри данного контура (с учётом кратности).

**Теорема 10.30** (Принцип аргумента). *Пусть $f$ аналитическая в области $U$ кроме может быть конечного количества полюсов и непрерывно продолжается на её кусочно-гладкую границу так, что на границе $f$ не обращается в нуль. Тогда (ориентация границы стандартная)*

$$\int_{\partial U} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left( \sum_{f(z')=0} k_{z'} - \sum_{f(z'')=\infty} k_{z''} \right),$$

*где $k_{z'}$ — это кратность нуля в $z'$, а $k_{z''}$ — порядок полюса в $z''$.*

*Доказательство.* Всё сводится к вычислению вычета логарифмической производной $\frac{f'(z)}{f(z)}$ в нуле или полюсе $f$. Например, если $z'$ является нулём кратности $k$, тогда в окрестности $z'$

$$f(z) = (z - z')^k g(z),$$

где $g(z)$ аналитическая и $g(z') \neq 0$, тогда

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z'} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

у первого слагаемого вычет $k$, а второе аналитическое в точке $z'$ и не имеет вычета. □

В принципе, достаточно корректно в этой формуле писать $\frac{f'(z)}{f(z)}dz = d\operatorname{Ln} f(z)$. Вспоминая определение логарифма и его неоднозначность, мы могли бы даже без формулы вычетов заметить, что интеграл этого выражения по замкнутому контуру должен быть кратен $2\pi i$, так как неоднозначность в логарифме может быть только такой. Говоря неформально, количество нулей и полюсов внутри контура с учётом кратности и порядка равно *числу вращения* вектора $f(z)$ при обходе $z$ по данному контуру.

Принцип аргумента даёт ясное представление о том, почему любой комплексный многочлен степени $n$ должен иметь $n$ корней с учётом кратности. Действительно, при большом $|z|$ мы имеем выражение

$$P(z) = az^n(1 + o(1)),$$

которое показывает, что $P(z)$ при движении $z$ по окружности достаточно большого радиуса делает ровно $n$ оборотов вокруг начала координат.

*Задача* 10.31. Пусть аналитическая функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ не имеет нулей. Докажите, что тогда она представляется в виде $f(z) = e^{g(z)}$ для некоторой аналитической $g(z)$.

[[ Заметьте, что интеграл $d\operatorname{Ln} f(z)$ по любому контуру равен нулю. ]]

*Задача* 10.32. Пусть $f$ аналитическая в области $U$ кроме может быть конечного количества полюсов и непрерывно продолжается на её кусочно-гладкую границу так, что на границе $f$ не обращается в нуль. Докажите, что сумма $k$-х степеней корней уравнения $f(z) = 0$ с учётом кратностей будет равна

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} z^k d\operatorname{Ln} f(z).$$

[[ Рассуждайте так же, как при доказательстве принципа аргумента. ]]

10.7. **Аналитические продолжения функций.** Явные формулы для рядов Тейлора дают нам возможность продолжить элементарные функции до аналитических функций на $\mathbb{C}$ или его подмножество, например, так можно продолжить синус, косинус, тангенс и т.п. Собственно, тригонометрические функции на самом деле определяются через уже изученную нами экспоненту, например

$$\operatorname{tg} z = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}.$$

Первый вопрос, который при этом возникает — это единственность такого продолжения, и на него отвечает теорема:

**Теорема 10.33** (Единственность аналитического продолжения). *Если две аналитические функции $f, g : U \to \mathbb{C}$ на области $U$ совпадают на множестве, имеющем бесконечное пересечение с каким-то компактом $K \subset U$, то они совпадают на всей $U$.*

*Доказательство.* В условиях теоремы функция $h = f - g$ аналитическая. Из представления непостоянной аналитической функции в окрестности её нуля $h(z_0) = 0$

$$h(z) = (z - z_0)^k m(z)$$

с $m(z_0) \neq 0$ следует, что её нуль изолирован, так как $m(z)$ также будет ненулевой в некоторой окрестности $z_0$.

По предположению противного, множество нулей $h$ имеет предельную точку $z_0 \in K \subset U$, а значит, по замечанию об изолированности нуля, обращается в нуль в некоторой её окрестности. Обозначим $V \subseteq U$ внутренность множества нулей $h$, по нашим предположениям $V$ не пусто. Если $h$ не везде равна нулю, то из связности $U$ найдётся точка $z \in \partial V \cap U$. По непрерывности $h$ мы имеем $h(z) = 0$, причём по выбору $z$ этот нуль не изолирован, следовательно, $h$ обращается в нуль в окрестности $z$ и на самом деле $z \in V$, противоречие с выбором $z$. ☐

Доказанная теорема показывает, что с интервала в $\mathbb{R}$ функция аналитически продолжается однозначно. Но могут быть некоторые нюансы. Мы уже видели примеры аналитического продолжения функции действительного аргумента на $\mathbb{C}$ или его открытое подмножество. В случае логарифма нам приходилось рассматривать «многозначную функцию», точнее говоря функцию на универсальном накрытии $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, которая уже оказывается единственным продолжением логарифма. Аналогично, для функции

$$f(z) = z^{1/n} = e^{\frac{\operatorname{Ln} z}{n}}$$

аналитическое продолжение возможно в универсальное накрытие $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (и по непрерывности в $0$). Если $n$ — натуральное число, то для такой функции не обязательно брать универсальное накрытие, а достаточно рассмотреть $n$-кратное накрытие

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z \mapsto z^n.$$

Заметим, что для разложения аналитической функции по формуле Тейлора с центром в $z_0$ достаточно проверить её аналитичность в круге $|z - z_0| < R$. Если же функция продолжена на круг с некоторыми особыми точками (полюсами, существенными особенностями или даже точками, при обходе вокруг которых аналитическое продолжение меняется), то радиус сходимости будет в точности равен расстоянию от $z_0$ до ближайшей существенной особенности $r$. Действительно, по теореме 10.13 он не менее $r$, а по теореме о единственности продолжения он и не более $r$. Это позволяет находить радиус сходимости без использования формул типа Коши–Адамара и вообще без особых вычислений.

*Задача* 10.34. Найдите радиус сходимости ряда для $\operatorname{tg} z$ с центром в нуле.

[[ Найдите ближайшую особенность. ]]

В общем случае нет какого-то однозначного рецепта продолжения аналитической функции с одной области на большую область, в каждом конкретном случае используются разные методы. При этом, и при рассмотрении конформных отображений, иногда бывает полезно следующее утверждение.

**Теорема 10.35** (Склеивание аналитических функций). *Если функция $f : U \to \mathbb{C}$ непрерывна на области $U$ и аналитична на $U$, кроме быть может множества $X \subset U$, состоящего из конечного объединения гладких кривых, пересекающихся в конечном числе точек, то $f$ на самом деле аналитична на всей $U$.*

*Доказательство.* Потеря аналитичности на конечном множестве гладких кривых не влияет на действительность интегральной теоремы Коши и интегральной формулы

Коши, так как контур интегрирования можно сдвинуть так, чтобы он пересекал $X$ лишь конечное число раз. Непрерывность $f$ при этом позволяет заключить, что интеграл измениться на произвольно малое число и утверждения теорем будут получатся предельным переходом.

При этом, например, для доказательства интегральной теоремы Коши можно разрезать область, ограниченную контуром интегрирования, на конечное число частей кривыми из $X$, применить теорему для каждой части и собрать нуль на исходном контуре, используя сокращение значений интегралов на разрезах. □

В следующих задачах мы обсудим некоторые конкретные аналитические продолжения.

*Задача* 10.36. Проверьте, что

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}\,dx$$

корректно определяет гамма-функцию при $\operatorname{Re} z > 0$ как аналитическую функцию, если мы считаем $x^{z-1} = e^{(z-1)\ln x}$. Докажите, что она продолжается до аналитической функции, определённой для всех комплексных чисел, кроме полюсов в неположительных целых числах.

[[ Используйте верную при $\operatorname{Re} z > 0$ формулу $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$, чтобы последовательно строить продолжение на области $\operatorname{Re} z > -n$; или используйте формулу дополнения $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$. ]]

*Задача* 10.37. Проверьте, что

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

корректно определяет дзета-функцию при $\operatorname{Re} z > 1$ как аналитическую функцию, если мы считаем $n^z = e^{z\ln n}$. Докажите, что её можно продолжить на область $\operatorname{Re} z > 0$ так, что у неё будет только один полюс в $z = 1$.

[[ Рассмотрите разность $\zeta(z) - \int_1^{+\infty} x^{-z}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{-z} - \int_n^{n+1} x^{-z}\,dx\right)$ и докажите, что она сходится к аналитической при $\operatorname{Re} z > 0$ функции. ]]

Знаменитая *гипотеза Римана* предполагает, что продолженная на полосу $0 < \operatorname{Re} z < 1$ дзета-функция имеет нули только с $\operatorname{Re} z = 1/2$; но у нас сейчас нет возможности обсуждать её важность и правдоподобность.

*Задача* 10.38. Докажите, что если $f \in L_1(\mathbb{R})$ имеет компактный носитель, то её преобразование Фурье аналитически продолжается на $\mathbb{C}$.

[[ Проверьте абсолютную сходимость и комплексную дифференцируемость для интеграла в определении преобразования Фурье. ]]

*Задача* 10.39. Докажите, что если $f \in L_1(\mathbb{R})$ обращается в нуль при $x > 0$, то её преобразование Фурье даёт аналитическую в верхней полуплоскости $H = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ функцию, которая непрерывно продолжается до $\partial H = \mathbb{R}$ и стремится к нулю, когда $z \to \infty$.

[[ Проверьте абсолютную сходимость и комплексную дифференцируемость для интеграла в определении преобразования Фурье, также вспомните лемму Римана об осцилляции. ]]

### 10.8. **Открытость и принцип максимума.**

**Теорема 10.40** (Локальная структура аналитического отображения). *Если у аналитической в окрестности* $z_0$ *функции производные* $f'(z_0), \dots, f^{(k-1)}(z_0)$ *равны нулю, а* $f^{(k)}(z_0) \neq 0$, *то ограничение* $f$ *на некоторую окрестность* $V \ni z_0$ *образует накрытие* $V \setminus \{z_0\} \to f(V) \setminus f(z_0)$ *кратности* $k$.

*Доказательство.* Условия теоремы означают, что первый после $f(z_0)$ ненулевой коэффициент ряда Тейлора $f$ стоит при $(z - z_0)^k$, то есть в окрестности $z_0$ имеет место представление

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^k g(z),$$

где $g$ аналитическая и $g(z_0) \neq 0$. После сдвига будем считать, что $z_0 = f(z_0) = 0$, это упростит формулы. Так как $g(0) \neq 0$, то в некоторой окрестности нуля однозначно определена

$$h(z) = g(z)^{1/k} = e^{\frac{\operatorname{Ln} g(z)}{k}},$$

тогда мы можем написать

$$f(z) = z^k g(z) = z^k h(z)^k = (zh(z))^k.$$

Так как $h(0) \neq 0$, то $\varphi(z) = zh(z)$ имеет ненулевую производную в нуле и по теореме об обратном отображении взаимно однозначно отображает некоторую $V \ni 0$ на $V' \ni 0$, при этом $f$ является композицией $\psi \circ \varphi$, где $\psi : z \mapsto z^k$. Очевидно, $\psi$ на любом проколотом круге с центром в нуле даёт накрытие другого проколотого круга с центром в нуле кратности $k$. Если мы сузим $V'$ до открытого круга с центром в нуле и соответственно изменим $V = \varphi^{-1}(V')$, то мы поймём, что на $V \setminus \{0\}$ и $f = \psi \circ \varphi$ даёт накрытие кратности $k$. ☐

Заметим, что теорема о структуре аналитических отображений может быть обобщена на случай, когда $f$ имеет в $z_0$ полюс порядка $k$. Тогда применение уже доказанного варианта к функции $1/f(z)$ показывает, что образ некоторой проколотой окрестности $z_0$ покрывает некоторую проколотую окрестность $\infty$ (то есть множество вида $|z| > R$) с кратностью $k$.

**Теорема 10.41** (Принцип сохранения области). *Непостоянная аналитическая функция переводит область в область.*

*Доказательство.* Теорема о локальной структуре показывает, что непостоянная аналитическая функция переводит открытое множество в открытое. Также любое непрерывное отображение переводит связное множество в связное, в итоге получаем утверждение. ☐

**Теорема 10.42** (Принцип максимума). *Для аналитической функции* $f$ *на области* $U$ *локальный максимум* $|f|$ *может находиться в* $U$ *только если* $f$ *постоянна. Аналогично с заменой* $|f|$ *на* $\operatorname{Re} f$ *или* $\operatorname{Im} f$.

*Доказательство.* Предположим противное, что $f$ непостоянна и $z_0 \in U$ даёт локальный максимум $|f|$. Пусть $f(z_0) = a$; из открытости $f$ мы знаем, что для любой окрестности $U_\delta(z_0)$ найдётся

$$U_\sigma(a) \subseteq f(U_\delta(z_0)).$$

Это значит, что в произвольно малой окрестности $z_0$ функция принимает, в частности, значения с $|f(z)| > |a| = |f(z_0)|$. Доказательство для мнимой и вещественной частей $f$ аналогично. ☐

*Задача* 10.43. Докажите, что для аналитической $f : U \to \mathbb{C}$ локальный минимум $|f(z)|$ может достигаться только при $f(z) = 0$.

[[ Действуйте аналогично доказательству принципа максимума. ]]

*Задача* 10.44. Докажите, что для аналитической $f : U \to \mathbb{C}$ функция $|f(z)|$ *субгармоническая*, то есть для оператора Лапласа выполняется

$$\Delta|f(z)| \geqslant 0.$$

[[ Можно заметить для начала, что $\ln|f(z)|$ является гармонической. ]]

*Задача* 10.45. Пусть $f(z)$ аналитична в кольце $r < |z| < R$. Докажите, что функция действительного аргумента

$$g(x) = \ln \sup\{|f(z)| \mid |z| = e^x\}$$

выпукла на $(\ln r, \ln R)$.

[[ Заметьте, что функция $\ln|z|^\alpha|f(z)|$ гармоническая и примените для неё принцип максимума при подходящих $\alpha \in \mathbb{R}$. ]]

### 10.9. **Свойство компактности для аналитических функций.**

Докажем, что оценка на модуль аналитической функции влечёт оценку на модуль её производной.

**Теорема 10.46** (Лемма Шварца). *Если аналитическая функция ограничена в круге $U_R(z_0)$ по модулю числом $M$ и $f(z_0) = 0$, то выполняется*

$$|f'(z_0)| \leqslant \frac{M}{R}$$

*с равенством только в случае, если $f(z) = a(z - z_0)$ с $|a| = M/R$.*

*Доказательство.* Заметим, что

$$f(z) = (z - z_0)g(z),$$

где $g(z)$ аналитическая и удовлетворяет неравенству

$$|g(z)| \leqslant \frac{M}{|z - z_0|}.$$

Значит верхний предел $|g(z)|$ при $|z - z_0| \to R$ равен $M$ и на самом деле по принципу максимума $|g|$ не может быть больше $M/R$ в $U_R(z_0)$, так как иначе $|g|$ имел бы локальный максимум в этом круге. Тогда мы получаем

$$|f'(z_0)| = |g(z_0)| \leqslant \frac{M}{R}.$$

В случае равенства $|g(z_0)| = M/R$ является локальным максимумом и $g$ должна быть постоянной, то есть $f$ должна быть линейной указанного в формулировке теоремы вида. □

*Задача* 10.47. Докажите, что условие $f(z_0) = 0$ в формулировке теоремы не требуется.

[[ Можно взять композицию $f$ с конформным преобразованием круга $U_M(0)$, переводящим $f(z_0)$ в 0, см. раздел 10.10. ]]

**Теорема 10.48** (Компактность в пространстве аналитических функций). *Пусть последовательность* $(f_n)$ *аналитических на области* $U$ *функций равномерно ограничена, то есть выполняется* $|f_n(z)| \leqslant M$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$ *и* $z \in U$. *Тогда можно выбрать подпоследовательность* $(f_{n_k})$, *которая сходится к аналитической* $f_0 : U \to \mathbb{C}$ *равномерно на любом компакте* $K \subset U$ *и для любого* $m \in \mathbb{Z}^+$ *последовательность производных* $\left(f_{n_k}^{(m)}\right)$ *тоже сходится к* $f_0^{(m)}$ *равномерно на любом компакте* $K \subset U$.

Из доказательства будет ясно, что вместо равномерной ограниченности достаточно требовать равномерной ограниченности на каждом компакте $K \subset U$ (константой $M_K$, зависящей только от $K$), мы не пишем это в формулировке теоремы, так как она и так получилась достаточно тяжеловесной.

*Доказательство.* Представим $U$ в виде объединения счётной последовательности компактов $(K_m)$, в которой каждый следующий компакт содержит предыдущий в своей внутренности. Рассмотрим один из них. Так как расстояние от $K_m$ до дополнения $\mathbb{C} \setminus U$ положительно, то $K_m$ лежит в $U$ вместе со своей $\varepsilon$-окрестностью. Тогда по лемме Шварца производные всех $f \in X$ на $K_m$ ограничены по модулю числом $M/\varepsilon$. Значит ограничения $f_n$ на $K_m$ равностепенно непрерывны и по теореме Арцела–Асколи 9.78 мы можем выбрать подпоследовательность функций, сходящуюся равномерно на $K_m$.

Таким образом для $K_1$ мы можем найти последовательность $\sigma_1$, равномерно сходящуюся на $K_1$. Переходя к $K_2$, мы найдём в ней подпоследовательность $\sigma_2$, сходящуюся и на $K_2$. Далее, мы получим последовательность вложенных подпоследовательностей

$$\sigma_1 \supseteq \sigma_2 \supseteq \sigma_3 \supseteq \dots$$

такую что подпоследовательность $\sigma_m$ равномерно сходится на $K_m$.

Теперь сделаем «диагональную процедуру», выберем $f_{n_k}$ в подпоследовательности $\sigma_k$ так, чтобы номера $n_k$ возрастали. Получим подпоследовательность исходной последовательности $(f_n)$, обладающую тем свойством, что для достаточно больших $k'$(а именно $k' \geqslant k$) её элементы $f_{n_{k'}}$ являются элементами подпоследовательности $\sigma_k$. Следовательно, эта подпоследовательность сходится к некоторой непрерывной $f_0$ равномерно на каждом из $K_m$. Обозначим эту подпоследовательность опять $(f_n)$ для простоты.

Любой другой компакт $K \subset U$ покрыт внутренностями $\operatorname{int} K_m$, а значит содержится полностью внутри одного из $K_m$, следовательно, построенная последовательность сходится равномерно на любом компакте в $U$.

В формуле Коши

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

для любого контура $\gamma \subset U$ можно перейти к равномерному пределу и убедиться, что для предельной функции $f_0$ эта формула также верна. Следовательно $f_0$ является аналитической функцией. Рассматривая формулы

$$f_n^{(m)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}}\, d\zeta$$

и переходя к равномерному пределу в правой части мы увидим, что и $m$-е производные $f_n^{(m)}$ тоже стремятся к некоторому значению равномерно на компактах, и оно обязано оказаться равным $f_0^{(m)}$. ☐

10.10. **Конформные отображения.** Будем рассматривать *конформные отображения* между областями $f : U \to V$, то есть аналитические биективные отображения $U$ на $V$. Необходимо пояснить обратимость таких отображений:

**Теорема 10.49.** *Обратная для аналитической инъективной функции тоже аналитическая.*

*Доказательство.* Если в какой-то точке производная $f'$ обращается в нуль, то теорема о локальной структуре 10.40 показывает, что в окрестности этой точки отображение не инъективно. Тогда по теореме об обратном отображении обратная функция является бесконечно гладкой, а рассмотрение его производной показывает, что обратное отображение дифференцируемо в комплексном смысле и следовательно аналитично. ☐

Также иногда полезно знать, что происходит с границей области при конформном отображении, если оно непрерывно и инъективно продолжается на границу.

**Теорема 10.50.** *Если область $U$ ограничена простой кусочно гладкой кривой и конформное отображение $f : U \to V$ непрерывно продолжается до инъективного $f : \partial U \to \mathbb{C}$, то $V = f(U)$ является областью, ограниченной кривой $f(\partial U)$.*

*Доказательство.* Для $a \notin f(\partial U)$ можно найти количество решений уравнения $f(z) = a$ из принципа аргумента

$$n_a = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - a}\, dz.$$

Правая часть этого выражения непрерывно зависит от $a \in \mathbb{C} \setminus f(\partial U)$, а так как это всегда целое число, то оно локально постоянно зависит от $a$. По теореме Жордана (мы её не доказывали, но в конкретных случаях её всегда можно проверить непосредственно), множество $\mathbb{C} \setminus f(\partial U)$ имеет неограниченную компоненту связности, на которой рассмотрение очень больших $a$ и компактность $f(U \cup \partial U)$ гарантирует $n_a \equiv 0$, а также имеет одну ограниченную компоненту связности, для которой остаётся вариант $n_a \equiv 1$. ☐

*Задача* 10.51. Докажите, что если аналитическая функция $f : U \to V$ биективна, то можно взять замкнутый контур $\gamma \subset V$ и на внутренности $f(\gamma)$ будет верна формула

$$f^{-1}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{zf'(z)}{f(z) - \zeta}\, dz,$$

[[ Это на самом деле обобщение принципа аргумента для решения уравнений $f(z) = \zeta$; иначе эту формулу можно рассматривать как формулу Коши для $f^{-1}$ с заменённой переменной. ]]

Теперь мы займёмся описанием конкретных конформных отображений. Для начала опишем конформные преобразования $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Из их обратимости и биективности следует, что при $z \to \infty$ должно выполняться $f(z) \to \infty$. Следовательно, особенность такого $f$ в бесконечности является не более чем полюсом, а значит его ряд Тейлора (Лорана) является конечной суммой, то есть $f$ — это многочлен. По принципу аргумента (или по «основной теореме алгебры») только многочлен первой степени может быть биективным, то есть остаются только варианты

$$f(z) = az + b, \quad a \neq 0.$$

У комплексной плоскости оказалось не слишком много конформных преобразований. Часто комплексную плоскость расширяют до *сферы Римана* $S$, добавляя бесконечно удалённую точку $\infty$. Для функций без существенных особенностей (в том числе на бесконечности) можно корректно говорить о случаях $f(z) = \infty$ (полюс) и о значении $f(\infty)$. Можно построить дробно-линейные конформные преобразования $S \to S$

по формулам

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\quad a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0,$$

и доказать, что других на самом деле нет. Действительно, для любого конформного преобразования $f : S \to S$ можно взять его композицию с дробно-линейным

$$g(z) = \varphi(f(z))$$

так, что $g(\infty) = \infty$. После этого $g$ даёт конформное преобразование $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, и значит является линейным. Явная подстановка показывает, что

$$f(z) = \varphi^{-1}(g(z))$$

тоже оказывается дробно-линейным.

**Определение 10.52.** Группа конформных преобразований $S$ называется *группой Мёбиуса*.

Полезно рассмотреть антиконформные отображения сферы Римана, заданные по формуле

$$f(z) = z_0 + \frac{R^2}{\overline{z - z_0}}.$$

При таком отображении любая точка окружности $|z - z_0| = R$ остаётся на месте и в целом отображение выглядит как «отражение» относительно окружности. Такое отображение называется *инверсия относительно окружности*. Инверсия является антиконформным отображением, но композиция двух инверсий уже будет сохранять ориентацию, то есть будет конформным отображением.

*Задача* 10.53. Докажите, что конформные преобразования $f : S \to S$ могут перевести любую упорядоченную тройку попарно различных точек $\{a, b, c\} \subset S$ в любую другую упорядоченную тройку попарно различных точек $\{a', b', c'\} \subset S$, и что конформное преобразование $f : S \to S$ однозначно определяется упорядоченным набором

$$\{\{a, b, c\}, \{f(a), f(b), f(c)\}\}.$$

[[ Переведите одну точку в нуль, другую в бесконечность, и посмотрите, что делать с оставшейся точкой, если нуль и бесконечность уже нельзя двигать. ]]

*Задача* 10.54. Докажите, что конформные преобразования $f : S \to S$ сохраняют *двойное отношение* (*ангармоническое отношение*) упорядоченной четвёрки попарно различных точек

$$D(a, b, c, d) = \frac{(d-a)(b-c)}{(b-a)(d-c)}.$$

[[ Заметьте, что это достаточно доказать для преобразований вида $z \mapsto az + b$ (выражение очевидно сохраняется) и отображения $z \mapsto 1/z$. Заметьте также, что $D(a, b, c, d) \in S$ по непрерывности можно определить для случаев $d = a$, $d = b$, $d = c$, если $a, b, c$ остаются попарно различными. ]]

*Задача* 10.55. Докажите, что при фиксированных попарно различных $a, b, c \in S$ условие

$$D(a, b, c, z) \in \mathbb{R}$$

определяет прямую или окружность, проходящую через $a, b, c$. Выведите, что конформные преобразования $S$ переводят прямую или окружность в прямую или окружность.

[[ Можно посчитать в координатах, а можно для начала перевести $a, b, c$ на действительную прямую. ]]

*Задача* 10.56. Пусть конформное отображение переводит кольцо $r < |z| < R$ в другое кольцо на комплексной плоскости и продолжается до непрерывного отображения границы кольца в границу нового кольца. Докажите, что отношение $R/r$ при таком отображении сохраняется.

[[ С помощью инверсий и теоремы о склеивании продолжите $f$ на всю сферу Римана $S$. ]]

Введём ещё одну интересную для нас область — открытый единичный круг $D$. Рассмотрение сферы Римана уже даёт соображения о том, как построить конформные преобразования $f : D \to D$. Надо рассмотреть дробно-линейные отображения, оставляющие на месте окружность $\partial D$, то есть

$$f(z) = b\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad |a| < 1, |b| = 1.$$

Как видно из формулы, такое отображение переводит точку $a \in D$ в нуль, а значит может перевести любую точку $D$ в любую другую (так как композиция двух отображений такого вида является отображением такого же вида).

Покажем, что все конформные преобразования $f : D \to D$ имеют такой вид. Действительно, взяв композицию $f$ с подходящим дробно-линейным $\varphi$ можно считать, что

$$g(z) = \varphi(f(z))$$

переводит нуль в нуль. Тогда по лемме Шварца для $g$ и $g^{-1}$

$$|g'(0)| \leqslant 1, \quad \left|(g^{-1}(0))'\right| \leqslant 1.$$

Так как левые части этих неравенств взаимно обратны, то на самом деле выполняется равенство и по описанию случая равенства в лемме Шварца мы получаем

$$g(z) = az, \quad |a| = 1.$$

Значит исходное $f$ тоже было дробно-линейным.

*Задача* 10.57. Докажите, что найденные конформные отображения $D \to D$ сохраняют риманову метрику

$$g(X, Y) = \frac{(X, Y)}{(1-|z|^2)^2},$$

если вектора $X, Y$ находятся в точке $z$.

[[ Выпишите производную дробно-линейного $f$ и найдите её детерминант как действительно-двумерного линейного оператора. ]]

*Задача* 10.58. * Пусть при конформном отображении $f : Q \to \mathbb{C}$ образ единичного квадрата $Q$ (мы считаем отображение непрерывно продолженным на границу) имеет площадь $S$, и пусть $I$ и $J$ — две его противоположные стороны. Докажите, что $\operatorname{dist}(f(I), f(J)) \leqslant \sqrt{S}$

[[ Заметьте, что за изменение длины кривой при конформном отображении отвечает $|f'(z)|$, а за изменение площади — $|f'(z)|^2$. ]]

*Задача* 10.59. * Пусть $f$ — аналитическая функция на единичном круге. Докажите, что длина кривой $\Gamma_r = \{f(re^{i\varphi})\}_{\varphi=0}^{2\pi}$ монотонно возрастает с ростом $r \in [0, 1)$.

[[ Выпишете явную формулу для длины и заметьте, что $|f'(z)|$ является субгармонической. ]]

10.11. **Теорема Римана об отображении.** В этом разделе мы коснёмся вопроса об униформизации областей $U \subseteq \mathbb{C}$, то есть о нахождении некоторого канонического конформного образа данной области. Вопрос об униформизации неодносвязных областей достаточно сложен, тем более что у неодносвязной области может быть как счётное, так и несчётное количество «дырок» (если, например, выкинуть из $\mathbb{C}$ канторово множество). К тому же задача 10.56 показывает, что у неодносвязных областей есть некоторые численные конформные инварианты.

Далее мы рассматриваем односвязные области. Заметим, что $\mathbb{C}$ и $D$ не являются конформно эквивалентными хотя бы потому, что на $\mathbb{C}$ любая ограниченная аналитическая функция является постоянной, а на $D$ существует огромное количество ограниченных аналитических функций. Оказывается, других примеров конформно неэквивалентных односвязных областей в $\mathbb{C}$ нет:

**Теорема 10.60** (Теорема Римана об отображении). *Для любой односвязной $U \subset \mathbb{C}$ не равной $\mathbb{C}$ существует конформное отображение $U$ на $D$.*

*Доказательство.* Построим сначала хотя бы инъективное отображение $f : U \to D$. По предположению существует точка $\mathbb{C}$, не принадлежащая $U$, без ограничения общности пусть это $0$. Тогда $\operatorname{Ln} z$ в силу односвязности может быть однозначно определён на $U$, иначе говоря, найдётся $U' \subset \mathbb{C}$ такое, что экспонента $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ даёт биективное отображение $U' \to U$.

Если $a$ лежит в $U'$ вместе со своей $\delta$-окрестностью, то из инъективности экспоненты на $U'$ следует, что $b = a + 2\pi i$ и её $\delta$-окрестность не пересекаются с $U'$. Тогда функция

$$g(z) = \frac{\delta}{z - b}$$

даёт инъективное отображение $U'$ в $D$, а

$$f(z) = g(\operatorname{Ln} z)$$

даёт инъективное отображение $U \to D$.

С помощью конформного преобразования $D$ можно добиться, что найдётся $p \in U$, такая что $f(p) = 0$. Теперь зафиксируем точку $p \in U$ и рассмотрим супремум $\sup\{|f'(p)|\}$ по всем инъективным аналитическим $f : U \to D$, таким что $f(p) = 0$. По неравенству Шварца для некоторой окрестности $p$ этот супремум конечен.

По свойству компактности мы можем выбрать последовательность $(f_n)$ таких инъективных отображений, которая будет сходиться к некоторой аналитической $f_0 : U \to D$ и при этом будет выполняться

$$|f_0'(p)| = \sup\{|f'(p)|\}.$$

Докажем, что $f_0$ на самом деле тоже инъективна, будем обозначать её просто $f$. Если это не так и имеет место $f(z') = f(z'') = a$, то для количества решений уравнения $f(z) = a$ в некотором контуре $\gamma \subset U$ мы будем иметь

$$n_a = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - a}\, dz \geqslant 2.$$

Так как правая часть этого равенства является пределом соответствующих выражений для $f_n$, то и для какой-то из $f_n$ мы будем иметь $n_a > 1$, что противоречит её инъективности; значит $f$ инъективна.

Итак, теперь у нас есть инъективное аналитическое отображение $f : U \to D$ с максимально возможным $|f'(p)|$ и $f(p) = 0$. Используем свойство максимальности чтобы доказать, что оно должно быть сюръективным. Предположим $a \notin f(U)$, но $a \in D$. Рассмотрим дробно-линейное

$$\varphi(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

которое переводит $a$ в нуль. Область $\varphi(f(U))$ односвязна и не содержит начала координат. На ней можно некоторым образом однозначно определить $\operatorname{Ln} z$, а значит и один из вариантов квадратного корня

$$\sigma(z) = e^{\frac{\operatorname{Ln} z}{2}}.$$

Найдём дополнительно дробно-линейное $\psi : D \to D$ так, чтобы композиция $\varkappa = \psi \circ \sigma \circ \varphi$ переводила нуль в нуль. Эта композиция определена и инъективна на образе $f(U)$, а вот обратное к ней отображение

$$\varkappa^{-1} = \varphi^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ \psi^{-1}$$

определено на всём $D$, аналитически переводит его в себя и не является инъективным, так как $\sigma^{-1}$ — это просто возведение в квадрат. По лемме Шварца для $\varkappa^{-1}$ имеет место строгое неравенство

$$\left|(\varkappa^{-1}(0))'\right| < 1 \Rightarrow |\varkappa'(0)| > 1.$$

Следовательно, композиция $\varkappa \circ f$ имеет большую производную в точке $p$, чем $f$, продолжая при этом инъективно отображать $U$ в $D$ и отображать $p$ в нуль. Противоречие доказывает, что $f(U) = D$. ☐

*Задача* 10.61. Найдите какое-нибудь конформное отображение $H \to D$, где $H$ — верхняя полуплоскость $H = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.

[[ Поищите среди дробно-линейных. ]]

*Задача* 10.62. Найдите какое-нибудь конформное отображение для полукруга, $H \cap D \to D$.

[[ Дробно-линейным образом превратите полукруг в квадрант $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0\}$. Примените $\sqrt{z}$ и далее действуйте дробно-линейно. ]]

*Задача* 10.63. Докажите, что конформные преобразования верхней полуплоскости $H$ имеют вид

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0.$$

[[ Можно воспользоваться тем, что $H$ конформно эквивалентна $D$. ]]

10.12. **Накрытия многообразий и универсальное накрытие.** Давайте более систематически изучим накрытия многообразий вообще. На самом деле накрытия можно изучать не только для многообразий, но и дли многообразий с краем или даже более общих (локально стягиваемых) топологических пространств. Однако уже для областей в $\mathbb{C}$ эти утверждения нетривиальны, поэтому читатель может представлять себе такие области и их накрытия.

**Определение 10.64.** Гладкое отображение непустых многообразий $\pi : M \to N$ называется *накрытием*, если у любой точки $p \in N$ есть окрестность $V \ni p$, прообраз которой $\pi^{-1}(V)$ является несвязным объединением открытых множеств $\{U_\alpha\}$, каждое из которых диффеоморфно $N$ с помощью $\pi|_{U_\alpha} : U_\alpha \to V$. В комплексном случае мы будем требовать, чтобы диффеоморфизмы были аналитическими.

**Определение 10.65.** *Универсальным накрытием* связного многообразия $N$ с выделенной точкой $p \in N$ называется множество кривых $\gamma \subset N$ с началом в $p$, с точностью до сохраняющей концы гомотопии. Отображение $\pi : \widetilde{N} \to N$ ставит в соответствие кривой её конец.

**Теорема 10.66.** *Универсальное накрытие многообразия является многообразием той же размерности и отображение $\pi : \widetilde{N} \to N$ является накрытием. Комплексно-аналитическая структура также наследуется накрытием.*

*Доказательство.* Действительно, для точки $p' \in N$ можно рассмотреть координатную окрестность $V \subset N$, которая вместе с каждой $y \in V$ содержит и отрезок $[p', y]$. Тогда для каждой $\gamma \in \pi^{-1}(p')$ можно построить гомеоморфную $V$ окрестность как

$$U_\gamma = \{\gamma \diamond [p', y] \mid y \in V\}.$$

Две такие окрестности не пересекаются, так как из гомотопности кривых $\gamma \diamond [p', y]$ и $\gamma' \diamond [p', y]$ следует гомотопность

$$\gamma \diamond [p', y] \diamond [y, p'] \sim \gamma' \diamond [p', y] \diamond [y, p'],$$

но легко доказать, что также имеет место гомотопность

$$\gamma \sim \gamma \diamond [p', y] \diamond [y, p'], \quad \gamma' \sim \gamma' \diamond [p', y] \diamond [y, p'],$$

так как кривая $[p'y] \diamond [y, p']$ легко стягивается в точку (проверьте самостоятельно). Построенные окрестности $U_\gamma$ на самом деле дают гладкую (или даже комплексную) структуру на $M$, так как функции перехода между окрестностями такого вида те же, что и между исходными $V \subset N$; и $\pi$ тогда даёт диффеоморфизмы $U_\gamma \to V$, которые при наличии комплексной структуры будут аналитическими. ☐

*Задача* 10.67. В доказательстве предыдущей теоремы проверьте счётность базы топологии универсального накрытия, чтобы можно было считать его абстрактным многообразием.

[[ С помощью какой-то римановой метрики покройте $N$ счётным числом геодезически выпуклых открытых $\{U_i\}$. Заметьте, что их попарные пересечения тоже геодезически выпуклы или пусты. Потом аккуратно объясните, что всякий путь в $N$ гомотопен конечной конкатенации геодезических (*ломаной*) в $N$, точки конкатенации (излома) при этом лежат в предписанном не более чем счётном множестве точек $P \subset N$, которые выбраны по одной в каждом $U_i$ и в каждом непустом пересечении $U_i \cap U_j$. ]]

**Теорема 10.68.** *Для любого накрытия $\pi : M \to N$ и любой кривой $\gamma$ в $N$ с началом $p$ и данной точкой $\widetilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ однозначно определено* поднятие *кривой $\gamma$ в $M$ как кривая $\widetilde{\gamma}$ в $M$, такая что её начало в $\widetilde{p}$ и $\gamma = \pi \circ \widetilde{\gamma}$.*

*Доказательство.* Если кривая не выходит из небольшой окрестности $V \ni p$, взятой из определения накрытия, то существование и единственность поднятия очевидны. Произвольную кривую можно поднимать за несколько шагов, покрыв её (из компактности) конечным числом таких окрестностей. ☐

*Задача* 10.69. Докажите, что для накрытия $\pi : M \to N$ при связном $N$ кратность накрытия над всеми точками $N$ одна и та же.

[[ Постройте биекцию между $\pi^{-1}(p)$ и $\pi^{-1}(p')$ с помощью поднятия какого-то пути $\gamma$ из $p$ в $p'$. ]]

**Теорема 10.70.** *Универсальное накрытие $\widetilde{N}$ односвязно.*

*Доказательство.* Рассмотрим замкнутую кривую $\beta$ в $\widetilde{N}$ с началом и концом точке $\widetilde{p} \in \widetilde{N}$, соответствующей постоянной кривой $\gamma_0 \equiv p$. Пусть она параметризована параметром $s$ на отрезке $[0, 1]$. Рассмотрим проекцию $\gamma = \pi \circ \beta$, это кривая в $N$. Определим $\beta'(s) \in \widetilde{N}$ как гомотопический класс кривой $\gamma|_{[0,s]}$ в $N$. Очевидно, что $\beta'$ — это кривая в $\widetilde{N}$, являющаяся поднятием $\gamma$. Так как $\beta$ — тоже поднятие $\gamma$ с тем же началом, то по предыдущей теореме они совпадают. В частности, совпадают их концы, то есть вся кривая $\gamma$ представляет элемент $\widetilde{p} \in \widetilde{N}$. Иначе говоря, $\gamma$ стягиваема в точку $p$.

Стягивание кривой $\gamma$ в точку задаётся непрерывным отображением

$$\lambda : [0, 1] \times [0, 1] \to N,$$

таким что $\lambda(0, s) \equiv p$, $\lambda(t, 0) \equiv p$, $\lambda(t, 1) \equiv p$ и $\lambda(1, s) = \gamma(s)$. Аналогично рассуждениям про $\beta$ и $\beta'$, при каждом фиксированном $s$ кривая $t \mapsto \lambda(t, s)$ представляет класс $\beta(s)$.

Тогда для каждого $u \in [0, 1]$ отображение

$$\lambda_u : [0, 1] \times [0, 1] \to N, \quad \lambda_u(t, s) = \lambda(ut, s)$$

можно считать зависящим от $s$ семейством кривых (параметризованных $t$), то есть считать петлёй в $\widetilde{N}$. Эта петля непрерывно зависит от $u$, при $u = 1$ равна $\beta$, а при $u = 0$ даёт тождественную петлю в точке $\widetilde{p} \in \widetilde{N}$. Таким образом петля $\beta$ в $\widetilde{N}$ стянута в одну точку. ☐

**Теорема 10.71.** *Пусть $\pi : \widetilde{N} \to N$ — универсальное накрытие связного многообразия $N$, а $\tau : M \to N$ — какое-то накрытие $N$ связным $M$. Тогда существует накрытие $\sigma : \widetilde{N} \to M$, такое что $\pi = \tau \circ \sigma$.*

*Доказательство.* Зафиксируем $p \in N$ и возьмём $p' \in \tau^{-1}(p) \in M$. Поднятие кривых с началом в $p$ до кривых с началом $p'$ в $M$ и взятие их конца даёт отображение $\sigma : \widetilde{N} \to M$, так как гомотопные кривые будут подниматься в кривые с тем же концом.

Отображение $\sigma$ само по себе является накрытием. Действительно, если $q' \in M$ имеет окрестность $U$ из определения накрытия и $V = \tau(U)$ является соответствующей окрестностью $\tau(q') = q$, то мы можем уменьшить $V$ до того, чтобы в некоторой координатной карте она стала содержать вместе с любой точкой $y \in V$ и отрезок $[q, y]$. Тогда $\sigma^{-1}(U)$ состоит из объединения некоторого количества соответствующих окрестностей в $\widetilde{N}$, как мы проверяли при построении $\widetilde{N}$. ☐

**Теорема 10.72.** *Если отображение связных многообразий $\tau : M \to N$ является накрытием и $N$ односвязно, то это накрытие имеет кратность 1, то есть является гомеоморфизмом.*

*Доказательство.* В условиях предыдущей теоремы $N = \widetilde{N}$, то есть $\sigma$ является накрытием $N \to M$. Из определения накрытия легко понять, что образ $\sigma(N)$ должен оказаться связной компонентой $M$. Так как $M$ связно, то $\sigma(N) = M$, а так как по построению $\tau \circ \sigma = \mathrm{id}_N$, то $\tau$ и $\sigma$ оба имеют кратность 1, а значит, являются гомеоморфизмами. ☐

**Теорема 10.73.** *Если отображение связных многообразий $\tau : M \to N$ является накрытием и $M$ односвязно, то оно гомеоморфно универсальному накрытию $\widetilde{N}$.*

*Доказательство.* Опять возьмём накрытие $\sigma : \widetilde{N} \to M$, из теоремы 10.75. Так как $M$ односвязно, то предыдущая теорема говорит о том, что $\sigma$ является диффеоморфизмом. ☐

10.13. **Фундаментальная группа многообразия.** Для понимания дальнейшего материала от читателя будет требоваться знакомство с алгебраическим понятием «группа».

**Определение 10.74.** *Фундаментальной группой* $\pi_1(M)$ связного многообразия $M$ с выделенной точкой $p$ называется группа петель $\gamma \subset M$ с началом и концом в точке $p$, с точностью до гомотопии с фиксированными концами. Групповое произведение петель $\gamma_1$ и $\gamma_2$ определяется как их конкатенация $\gamma_1 \diamond \gamma_2$, единица группы определяется как постоянная петля, а групповое обратное — с помощью прохода той же петли в обратном порядке.

Можно проверить, что определения групповых операций согласованы с отношением гомотопности петель, то есть при деформации $\gamma_1$ и $\gamma_2$ из конкатенация $\gamma_1 \diamond \gamma_2$ тоже непрерывно деформируется, то же для обратного $\gamma^{-1}$.

**Теорема 10.75.** *Пусть $M$ — связное многообразие с выделенной точкой $p$ и $q \in M$ — ещё одна его точка. Прообразы $\pi^{-1}(q)$ точки $q$ при универсальном накрытии $\pi : \widetilde{M} \to M$ находятся во взаимно однозначном соответствии с $\pi_1(M)$. Более того, $\pi_1(M)$ вполне разрывно действует на $\widetilde{M}$ диффеоморфизмами и $M$ является фактором $\widetilde{M}$ по этому действию. Если $M$ является областью в $\mathbb{C}$, то эти диффеоморфизмы аналитические.*

Напомним, что действие группы является свободным, если $gx \neq x$ при условии $g \neq e$ ($e$ — единица группы). Иначе говоря, действие свободно, если любая орбита $\{gx \mid g \in G\}$ этого действия находится (не канонически) во взаимно однозначном соответствии с $G$; также можно сказать, что любой нетривиальный элемент группы действует без неподвижных точек.

В сформулированной теореме мы требуем ещё более сильное свойство, чем свободное действие, сформулируем соответствующее определение:

**Определение 10.76.** $G = \pi_1(M)$ действует на $\widetilde{M}$ *вполне разрывно*, если у любой точки $\tilde{q} \in \widetilde{M}$ есть окрестность $U$, образы которой при действии $G$, $\{gU\}_{g\in G}$, попарно не пересекаются.

*Набросок доказательства теоремы 10.75.* Теорема является стандартным фактом алгебраической топологии и заинтересованный читатель может более глубоко изучить соответствующие понятия, например, по книге [13], мы же приводим краткое изложение.

Действие $\pi_1(M)$ на $\widetilde{M}$ определим так. Для представителя $\lambda$ (петли с началом и концом в $p$) и представителя $\gamma$ (кривой с началом в $p$) определим действие одного на другое как конкатенацию $\lambda \diamond \gamma$. Читатель может проверить, что это определение совместимо с отношением гомотопности в определениях $\pi_1(M)$ и $\widetilde{M}$.

Для двух кривых с одним и тем же концом $\gamma_1$ и $\gamma_2$ рассмотрим петлю $\lambda = \gamma_2 \diamond \gamma_1^{-1}$. Можно заметить, что

$$\lambda \diamond \gamma_1 = \gamma_2 \diamond \gamma_1^{-1} \diamond \gamma_1 \sim \gamma_2,$$

так как $\gamma_1^{-1} \diamond \gamma_1$ является стягиваемой петлёй. Следовательно, $\pi_1(M)$ действует транзитивно на множестве $\pi^{-1}(q)$.

Рассмотрим координатную окрестность $V \ni q$, такую что при $y \in V$ отрезок $[q, y]$ тоже лежит в $V$. Для любого пути $\gamma$ из $p$ в $q$ окрестность поднимается до окрестности $\gamma$ в $\widetilde{M}$,

$$U(\gamma) = \{\gamma \diamond [q, y] \mid y \in V\}/\sim.$$

Можно заметить, что при замене $\gamma$ на $\lambda \diamond \gamma$ с $\lambda \neq e \in \pi_1(M)$ мы получим другую окрестность $U(\lambda \diamond \gamma)$, не пересекающуюся с исходной, так как наличие пересечения означало бы, что

$$\lambda \diamond \gamma \diamond [q, y] \sim \gamma \diamond [q, y] \Rightarrow \lambda \diamond \gamma \sim \gamma \Rightarrow \lambda \sim e.$$

Приведённые построения означают вполне разрывное действие $\pi_1(M)$ на $\widetilde{M}$ и тот факт, что $M$ является фактормножеством $\widetilde{M}$ по отношению эквивалентности, заданному действием группы $\pi_1(M)$ как

$$\tilde{q} \sim g\tilde{q}, \quad \tilde{q} \in \widetilde{M}, g \in \pi_1(M).$$

Что касается аналитичности действия $G$ при наличии комплексной структуры у $M$, то отождествления $\pi : U(\gamma) \to V$ задают карты на $U$ с аналитическими функциями перехода между картами, а действие $\pi_1(M)$ этим карты просто переставляет. ☐

Изложенные выше факты позволяют свести нахождение фундаментальной группы многообразия к нахождению его односвязного накрытия. В следующих задачах читателю предлагается это проделать.

*Задача* 10.77. Докажите, что сфера $\mathbb{S}^n$ односвязна при $n \geqslant 2$. Что происходит при $n = 1$?

[[ Приблизьте произвольную петлю гладкой, или даже ломаной, а потом стяните её. ]]

*Задача* 10.78. Найдите фундаментальную группу проективного пространства $\mathbb{R}P^n$ при $n \geqslant 2$.

[[ Вспомните его определение и накройте его сферой. ]]

В развитие понятий, введённых в разделе 7.10, можно доказать такое утверждение.

**Теорема 10.79.** *Если $G$ — связная группа Ли, то её универсальное накрытие $\widetilde{G}$ — тоже группа Ли и отображение накрытия $\widetilde{G} \to G$ является гомоморфизмом групп.*

*Доказательство.* Пусть пути в конструкции $\widetilde{G}$ из определения 10.65 начинаются в единице $e$ и параметризованы отрезком $[0, 1]$. Для любых двух таких путей $\alpha, \beta : [0, 1] \to G$ определим произведение как

$$\gamma : [0, 1] \to G, \quad \gamma(t) = \alpha(t)\beta(t).$$

Сравнительно очевидно, что при непрерывной деформации $\alpha$ или $\beta$ их произведение тоже непрерывно деформируется, следовательно получается операция умножения, определённая на $\widetilde{G}$. Эта операция очевидно ассоциативна, единица представлена постоянным путём, а обратный элемент на уровне путей определяется как

$$(\alpha)^{-1}(t) = (\alpha(t))^{-1}.$$

При подстановке $t = 1$ в определение произведения получается, что $\pi : \widetilde{G} \to G$ есть гомоморфизм групп.

Гладкость операции умножения $a$ на $b$ в $\widetilde{G}$ можно проверить, взяв карты в окрестности $\pi(ab)$, $\pi(a)$ и $\pi(b)$ в $G$ так, что из области определения диффеоморфны окрестностям $ab, a, b$ соответственно. В этих картах умножение близких к $a$ и $b$ элементов $\widetilde{G}$ выглядит так же, как умножение близких к $\pi(a)$ и $\pi(b)$ элементов $G$, то есть гладко. Гладкость взятия обратного доказывается аналогично. ☐

В следующих задачах читателю предлагается проверить некоторые общие факты о накрытиях групп Ли, а потом построить универсальные накрытия конкретных групп Ли явно.

*Задача* 10.80. Пусть отображение групп Ли $\tau : H \to G$ имеет дискретное ядро $K$, $G = H/K$ и группа $H$ односвязна. Пусть $\pi : \widetilde{G} \to G$ — универсальное накрытие. Докажите, что существует изоморфизм групп Ли $f : \widetilde{G} \to H$, такой что $\tau \circ f = \pi$.

[[ Проверьте, что $\tau$ является накрытием, тогда гомеоморфизм (и диффеоморфизм) $f$ даётся теоремой 10.73. Остаётся проверить, что это будет гомоморфизм групп Ли. Полезно посмотреть на отображение $(g, h) \mapsto f(g)f(h)f(gh)^{-1}$ и его композицию с $\tau$. ]]

*Задача* 10.81. Докажите, что определённая выше групповая операция на ядре универсального накрытия $\widetilde{G} \to G$ связной группы Ли совпадает с групповой операцией на фундаментальной группе $\pi_1(G)$.

[[ С помощью перепараметризации заметьте, что всякая петля $\gamma : [0,1] \to G$ гомотопна петле $\gamma_0 : [0,1] \to G$, такой что $\gamma_0 \equiv e$ на отрезке $[0,1/2]$. И гомотопна петле $\gamma_1 : [0,1] \to G$, такой что $\gamma_1 \equiv e$ на отрезке $[1/2,1]$. ]]

*Задача* 10.82. Докажите, что дискретная нормальная подгруппа $K$ связной группы Ли $G$ (в частности, ядро универсального накрытия $\widetilde{G} \to G$) лежит в центре $G$.

[[ Попробуйте сопрягать $K$ элементами группы $G$. ]]

*Задача* 10.83. Найдите фундаментальную группу тора $T^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}_{n}$.

[[ Придумайте универсальное накрытие для тора. ]]

*Задача* 10.84. * Докажите, что группа собственных вращений трёхмерного евклидова пространства $\mathrm{SO}(3)$ имеет фундаментальную группу $\pi_1(\mathrm{SO}(3))$ из двух элементов.

[[ Рассмотрите группу единичных кватернионов

$$\mathrm{Sp}(1) = \{a + bi + cj + dk \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\},$$

умножение в которой определяется с помощью продолженных по линейности формул

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = k,\ jk = i,\ ki = j,\ ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j.$$

Заметьте, что $\mathrm{Sp}(1)$ односвязна и для $q \in \mathrm{Sp}(1)$ отображение $v \mapsto qvq^{-1}$ является собственным ортогональным вращением пространства мнимых кватернионов $\{xi + yj + zk\}$. ]]

*Задача* 10.85. * Докажите, что группа собственных вращений четырёхмерного евклидова пространства $\mathrm{SO}(4)$ тоже имеет фундаментальную группу $\pi_1(\mathrm{SO}(4))$ из двух элементов.

[[ Определите действие $\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)$ на всех кватернионах как $v \mapsto q_1 v q_2^{-1}$ и докажите, что так получаются все собственные четырёхмерные вращения. Определите неоднозначность такого представления вращений. ]]

10.14. **Общая теорема Римана и теорема Пикара.** В этом разделе мы схематично обсудим некоторые методы, которые имеют развитие в теории комплексных кривых (многообразий, локально диффеоморфных $\mathbb{C}$ с аналитическими функциями перехода между картами) и не только. Мы возвращаемся к работе с областью $U \subseteq \mathbb{C}$ и рассматриваем её универсальное накрытие. Про универсальное накрытие $\widetilde{U}$ известно, что оно является односвязным одномерным (в комплексном смысле) комплексным многообразием. Общая теорема Римана об отображении классифицирует такие многообразия:

**Теорема 10.86** (Общая теорема Римана). *Односвязные одномерные комплексные многообразия аналитически диффеоморфны одному из трёх вариантов: $\mathbb{C}$, $S$ и $D$.*

Доказательство общей теоремы Римана находится за пределами наших возможностей, так как оно довольно длинное и использует разнообразные свойства оператора Лапласа и гармонических функций. Трудность заключается в том, что рассматриваемое в ней многообразие не лежит в $\mathbb{C}$ и строить на нём аналитические функции явно не получается. Один из вариантов доказательства этой теоремы содержится в [12, глава 10].

Принимая общую теорему Римана без доказательства, мы можем в каждом конкретном случае понять, к какому из трёх типов относится универсальное накрытие нашей области. Для этого надо описать группу $\pi_1(U)$ и посмотреть, может ли эта группа вполне разрывно действовать на $S$ и $\mathbb{C}$, если нет, то тогда для универсального накрытия останется только вариант $D$.

Если мы выбросили из $\mathbb{C}$ одну точку, получив $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то универсальное накрытие задаётся экспонентой $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Теорема 10.75 тогда показывает, что $\pi_1(U) = \mathbb{Z}$, и образующая $\pi_1(U)$ — это любая окружность с центром в нуле.

Если мы выбросили две точки, $U = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, то ситуация становится интереснее. Ясно, что $\pi_1(U)$ содержит два экземпляра $\mathbb{Z}$, $C'$ и $C''$, соответствующих обходам вокруг нуля и вокруг единицы. Оказывается, $\pi_1(U)$ является *свободным произведением*, $\pi_1(U) = C' * C''$, то есть группой, состоящей из всех строк (пустая строка даёт единичный элемент)

$$a_1b_1 \dots a_nb_n,\ a_1b_1 \dots b_{n-1}a_n,\ b_1a_2 \dots a_nb_n,\ b_1a_2 \dots a_n, \quad a_i \in C' \setminus \{e\}, b_i \in C'' \setminus \{e\}, \tag{10.1}$$

которые перемножаются так: сначала берётся конкатенация строк, потом делаются замены стоящих рядом элементов одной и той же группы на их групповое произведение $aa' \mapsto (aa')$ или $bb' \mapsto (bb')$ и удаления получающихся единичных элементов, пока это возможно. Более подробные сведения о свободных произведениях и свободных группах читатель может найти в учебниках по алгебре или алгебраической топологии, или может поразмышлять самостоятельно в рамках следующей задачи:

*Задача* 10.87. $^*$ Докажите, что $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ можно непрерывно деформировать в «восьмёрку» $E$, которая является парой окружностей, склеенных по одной точке. Фундаментальная группа, являющаяся гомотопическим инвариантом, при этом не изменится, проверьте явно, что $\pi_1(E)$ описывается так, как мы описали свободную группу $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

[[ Для описания $\pi_1(E)$ посмотрите, в каком порядке петля идёт по двум окружностям восьмёрки $E$, получив запись в виде строки типа (10.1). Проверьте, как может меняться этот порядок при гомотопии петли, получив из этого описанные выше преобразования строк и обратные к ним. ]]

Можно резюмировать, что $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$ является *свободной группой на двух элементах* $F_2$. На самом деле нам от группы $\pi_1(U) = F_2$ потребуется только отсутствие коммутативности умножения, которое проверить несколько проще, чем свободность этой группы.

**Теорема 10.88.** *Некоммутативная группа $G$ не может вполне разрывно и конформно действовать на $\mathbb{C}$; и следовательно универсальное накрытие $\widetilde{\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}}$ аналитически диффеоморфно $D$.*

*Доказательство.* Заметим, что для $U = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ универсальное накрытие $\widetilde{U}$ содержит бесконечное замкнутое множество $\pi^{-1}(z)$, в котором в силу вполне разрывности каждая точка покрыта своей индивидуальной окрестностью и из этого покрытия очевидно нельзя оставить конечное подпокрытие. Следовательно $\pi^{-1}(z)$ не компактно и всё $\widetilde{U}$ тоже. Это исключает случай $S$ в общей теореме Римана и остаётся исключить случай $\mathbb{C}$.

Используем классификацию аналитических диффеоморфизмов (конформных преобразований) $\mathbb{C}$ как $z \mapsto az + b$. Можно заметить, что те из них, которые не имеют неподвижных точек, являются сдвигами. Так как вполне разрывное действие исключает неподвижные точки, то $G$ должна действовать сдвигами, но любые два сдвига коммутируют между собой. □

**Теорема 10.89** (Теорема Пикара). *Непостоянная аналитическая функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ является сюръекцией кроме может быть одной точки.*

*Доказательство.* Если $f$ не принимает какие-то два значения, то взяв её композицию с линейной функцией мы добьёмся того, что эти значения — $0$ и $1$, и

$$f : \mathbb{C} \to U = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

Рассмотрев для любой точки $z \in \mathbb{C}$ отрезок $[0, z]$, мы получим для неё элемент $f([0, z]) \in \widetilde{U}$, то есть отображение $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \widetilde{U}$, такое что $f = \pi \circ \tilde{f}$. Отображение $\tilde{f}$ тоже аналитическое, а так как существует аналитический диффеоморфизм $u : \widetilde{U} \to D$, то мы получаем аналитическое отображение $u \circ \tilde{f} : \mathbb{C} \to D$.

Но ограниченная и определённая на всём $\mathbb{C}$ аналитическая функция $u \circ \tilde{f}$ должна быть константой, следовательно $\tilde{f}$ константа и сама $f$ тоже константа. □

Существует другой подход к доказательству теорему Пикара, с помощью сравнительно явного построения функции $\pi : D \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, которая является является универсальным накрытием. Рассуждения с использованием общей теоремы Римана показывают, что такая функция должна быть инвариантна относительно некоторого вполне разрывного действия свободной группы $F_2$ на $D$. Конформно заменив $D$ на верхнюю полуплоскость $H$, мы можем отождествить группу всех конформных преобразований $H$ с

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0 \right\}.$$

*Задача* 10.90. * Докажите, что $z \mapsto z + 2$ и $z \mapsto \frac{z}{2z+1}$ порождают свободную группу из двух элементов.

[[ Для этого достаточно описать какую-нибудь орбиту действия порождённой этими элементами группы. ]]

Далее возникает вопрос о построении *мероморфных функций* (аналитических кроме дискретного множества точек, в котором они имеют полюса), инвариантных относительно действия $F_2$ на $H$. На самом деле обычно рассматривают группу

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc \neq 0 \right\}.$$

и её подгруппы и изучают мероморфные функции на $H$, инвариантные относительно её действия или действия её подгрупп, они называются *модулярные функции*. При этом возникают интересные идеи и методы, которые уже не влезают в этот раздел, но читатель может прочитать про это и многое другое, например, в книге [11]. Мы оставляем пару задач для развития интуиции по рассмотренному в этом разделе кругу вопросов.

*Задача* 10.91. * Докажите, что группа $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ не может вполне разрывно конформно действовать на $D$ или $H$.

[[ Классифицируйте конформные преобразования $H \to H$, которые не имеют неподвижных точек, потом опишите пары коммутирующих преобразований. ]]

*Задача* 10.92. * Докажите, что любая комплексная структура на торе $T^2$ (декартовом произведении двух окружностей) происходит из комплексной структуры $\mathbb{C}$ после взятия фактора по некоторой решётке $L \subset \mathbb{C}$, то есть дискретной подгруппы, изоморфной $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

[[ Заметьте, что $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ и выведите утверждение из общей теоремы Римана об отображении и предыдущей задачи. ]]

*Задача* 10.93. ** Докажите, что группа $\mathrm{SO}(3)$ содержит свободную группу $F_2$.

[[ Можно строить такую $F_2$ вручную, можно использовать рациональные кватернионы, можно заметить, что комплексификации $\mathrm{SO}(3)$ и $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ совпадают и поэтому в обеих группах нет нетривиальных соотношений на пару элементов. ]]

## УЧЕБНИКИ ДЛЯ БОЛЕЕ ГЛУБОКОГО ИЗУЧЕНИЯ ЗАТРОНУТЫХ В ЭТОМ ТЕКСТЕ ТЕМ

[1] С. Ленг. *Алгебра.* Мир, 1968.
[2] А.И. Кострикин, Ю.И. Манин. *Линейная алгебра и геометрия.* Наука, 1986.
[3] Д. Ю. Бураго, Ю. Д. Бураго, С. В. Иванов. *Курс метрической геометрии.* Институт компьютерных исследований, 2004.
[4] T. Tao. *An Introduction to Measure Theory.* American Mathematical Society, 2011.
[5] Ш. Стернберг. *Лекции по дифференциальной геометрии.* Мир, 1970.
[6] Ф. Уорнер. *Основы теории гладких многообразий и групп Ли.* Мир, 1987.
[7] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. *Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии.* Физматлит, 2004.
[8] S. Sternberg. *Curvature in Mathematics and Physics.* Dover Publications, 2012.
[9] Г. Х. Харди, В. В. Рогозинский. *Ряды Фурье.* Москва, 1959.
[10] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа.* Физматлит, 2006.
[11] Г. Клеменс. *Мозаика теории комплексных кривых.* М.: Мир, 1984.
[12] S. Donaldson. *Riemann Surfaces.* Oxford University Press, 2011.
[13] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. *Курс гомотопической топологии.* М.: Наука, 1989.

*Email address*: `r_n_karasev@mail.ru`