Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
__________А.А. Воронов
♯♯ июня 2023

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Нерелятивистская механика частиц и полей**
по направлению
подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **физики и исследований им. Ландау**
кафедра: **физтех кластер АНК ЛФИ**
курс: 1
семестр: 1

лекции — 45 часов
семинарские занятия — 15 часов
курсовые и контрольные работы — нет

Экзамен — 1 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 60 часов

Программу и задание составил ассистент
В.А. Шмидт

Программа принята на заседании
физтех-кластера АНК ЛФИ
♯♯ апреля 2023

Директор физтех-кластера АНК ЛФИ
д.ф.-м.н., профессор В.В. Киселев

ЗАДАНИЕ I

(срок сдачи 21–27 октября)

I. Интеграл Фурье и дельта-функция

Задача 1. Вычислить гауссов интеграл при $\alpha > 0$:

$$I_{2n}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} dx\, x^{2n} e^{-\alpha x^2}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Задача 2. Найдите Фурье-образ $\mathcal{I}(\omega)$ тождественно единичной функции, и покажите, что

$$\int_{\mathbb{R}} d\omega\, \mathcal{I}(\omega) \tilde{f}(\omega) = 2\pi f(0).$$

Задача 3. Проверить, что ступенька Хевисайда, определяемая по формуле

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

представима в виде следующего интеграла с переменным верхним пределом:

$$\vartheta(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\alpha \to +0} \int_{-\infty}^{x} dy \int_{\mathbb{R}} dz\, e^{\mathrm{i}yz - \alpha^2 z^2}.$$

Найти также выражение для производной от ступеньки Хевисайда $\frac{d}{dx}\vartheta(x)$.

Задача 4*. Вычислить Фурье-образы функции $f(x) = x^2$ и ступеньки Хевисайда, используя при этом аппроксимацию $\vartheta(x)$ непрерывной функцией вида

$$\vartheta(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + e^{-2nx}}.$$

Задача 5. Докажите, что обратное преобразование Фурье от произведения Фурье-образов двух функций дает свертку этих функций, то есть

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{f}(\omega) \tilde{g}(\omega)\, e^{-\mathrm{i}\omega x} = \int_{\mathbb{R}} dz\, f(x-z)\, g(z).$$

Проверьте также симметричность операции свертки относительно перестановки двух функций.

Задача 6. Докажите, что для дельта-функции справедливо тождество

$$\delta[f(x)] = \sum_{x_0} \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|},$$

где x_0 — корни уравнения $f(x) = 0$.

Задача 7. Покажите, что выполняется следующая формула для вычисления n-й производной от дельта-функции:

$$\int_{\mathbb{R}} dx\, \delta^{[n]}(x - x_0) f(x) = (-1)^n \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x_0).$$

Задача 8. Доказать равенство Парсеваля, то есть что преобразование Фурье сохраняет $\mathbb{L}_2$-норму

$$\int_{\mathbb{R}} dx\, |f(x)|^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi}\, |\tilde{f}(\omega)|^2.$$

II. Функциональная производная и вариационный принцип

Задача 9*. Докажите, что для интегрального функционала производная по Гато сводится к выражению

$$\delta F[\phi,\delta\phi] = \int dx\, \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)}\, \delta\phi(x),$$

где вариационная производная по Фреше

$$\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F[\phi(z)+\varepsilon\delta(x-z)] - F[\phi(z)]}{\varepsilon}.$$

Задача 10. Вычислить для некоторой функции $j(x)$ вариационную производную по Фреше от интегрального функционала

$$F_j[\phi] = \exp\left\{\int dx\, j(x)\phi(x)\right\}$$

Задача 11. Информационная энтропия дискретной случайной величины является функционалом функции вероятности

$$H[p(x)] = -\sum_x p(x)\log p(x).$$

Найти вариационную производную и стационарные точки такого функционала.

Задача 12. Рассмотреть множество $\Pi(t_1,x_1^i;t_2,x_2^i)$ гладких траекторий с началом в точке $x_1^i = x^i(t_1)$ и концом в некоторой точке $x_2^i = x^i(t_2)$. Найти стационарные точки интегрального функционала действия $S : \Pi(t_1,x_1^i;t_2,x_2^i) \to \mathbb{R}$:

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(x(t),\dot{x}(t)),$$

если функция Лагранжа имеет вид

$$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Являются ли они экстремалями функционала?

Задача 13*. Покажите, что уравнения Эйлера-Лагранжа для скалярно тензорной теории Хорндески, лагранжиан которой для космологии можно переписать как

$$L(a,\dot{a},\ddot{a},\varphi,\dot{\varphi}) = 12(a^2\ddot{a} + a^3H^2) + 3\beta a^3H^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}a^3\dot{\varphi}^2 - a^3V(\varphi),$$

имеют вид

$$\ddot{\varphi}(1+6\beta H^2) + 3H(1+6\beta H^2)\dot{\varphi} + 12\beta H\dot{H}\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0,$$

$$[2\dot{H}+3H^2](4-\beta\dot{\varphi}^2) - 4\beta H\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi) = 0.$$

Через $H(t)$ в лагранжиане обозначен параметр Хаббла $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$, характеризующий темп расширения Вселенной.

Задача 14. Запишите уравнения движения для механической системы

$$L(x,\dot{x},v,\dot{v}) = m\dot{x}v - \frac{mv^2}{2} - U(x).$$

Покажите, что уравнения Эйлера-Лагранжа для обобщенной координаты v являются алгебраическими, а не дифференциальными. Исключите переменную v из уравнений движения.

Задача 15. Приведите примеры лагранжевых систем, у которых экстремаль, соединяющая две заданные точки, не является локальным минимумом/не единственна/не существует.

Задача 16. Проварьировать действие и найти уравнения движения частицы в электромагнитном поле, функция Лагранжа которой имеет вид

$$L(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t) = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + \frac{e}{c}(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)) - eA_0(\boldsymbol{r},t).$$

Задача 17. Найти уравнение поверхности мыльной пленки, натянутой между двумя соосными кольцами радиуса r, расстояние между которыми равно ℓ.

Задача 18. Рассмотреть теорию с действием

$$S[x(t), \epsilon(t)] = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} dt\, \sqrt{\epsilon}\, [\dot{x}^2/\epsilon(t) - m^2]$$

в пространстве-времени Минковского $\mathbb{R}^{1+3}$. Построить эффективное действие

$$S_{\text{eff}}[x(t)] = S[x(t), \epsilon(x(t))].$$

Какой механической системе отвечает данное эффективное действие?

Задача 19*. Найти вторую вариацию функционала действия лагранжевой системы с функцией Лагранжа $L(x,\dot{x},t)$ и привести к виду

$$\delta^{(2)}S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \delta x(t)\, \Gamma\, \delta x(t)$$

где Γ — дифференциальный оператор Якоби вида

$$\Gamma = A\frac{d^2}{dt^2} + B\frac{d}{dt} + C$$

с некоторыми коэффициентами A, B, C. Применить полученный результат к свободной частице и гармоническому осциллятору.

Задача 20. Запишите функционал длины кривой в евклидовом пространстве в декартовых и полярных координатах. Покажите, что экстремали этого функционала совпадают с экстремалями действия для свободной нерелятивистской частицы.

III. Непрерывные симметрии и теорема Нетер

Задача 21. Пусть действие является инвариантным относительно пространственных и временных трансляций, а также относительно вращений вокруг оси x. Найти соответствующие нетеровские интегралы движения.

Задача 22. Рассмотрим действие

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(x(t), \dot{x}(t)),$$

инвариантное относительно репараметризации времени $t \mapsto s = s(t)$. Показать, что энергия такой механической системы на уравнениях движения равна нулю.

Задача 23. Пусть действие механической системы инвариантно относительно лоренцевых бустов, то есть преобразований Лоренца с параметром $u = \dot{x}$:

$$x \mapsto x_u = \gamma\,(x - ut)\,, \quad t \mapsto t_u = \gamma\,(t - ux)\,, \quad \gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Найти интеграл движения, соответствующий лоренцевым бустам. Считая также, что действие инвариантно относительно пространственно-временных трансляций, показать, что условие сохранения этого интеграла со временем эквивалентно равенству $p = \dot{x}E$, где p и E — канонический импульс и энергия системы.

Задача 24*. Принцип относительности Пуанкаре-Эйнштейна требует инвариантность уравнений движения относительно лоренцевых бустов с параметром u. Покажите, что в пределе $u \to 0$ теорема Нетер дает

$$-pt + xE = f(x,t),$$

где $f(x,t)$ — произвольная функция координат и времени. Найдите лагранжиан свободной массивной релятивистской частицы, ее импульс и энергию, а также докажите справедливость дисперсионного соотноше ее каноническиния

$$E^2 = p^2 + m^2.$$

Задача 25. Рассмотрим плоское движение нерелятивистской частицы массой m в сферически-симметричном потенциале $U = -\frac{\alpha}{r^2}$. Проверить, что функционал действия такой механической системы инвариантен относительно преобразований вида

$$t_u = e^{2u}t, \quad x_u = e^u x, \quad y_u = e^u y.$$

Выписать нетеровский интерал движения, отвечающий данной симметрии.

IV. Сферически-симметричный потенциал

Задача 26. Используя язык лагранжевой механики, решить в квадратурах задачу о движении частицы в сферически-симметричном поле $U(r)$. Рассмотреть отдельно случай потенциала $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$.

Задача 27. При прибавлении к потенциалу $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ малого возмущения $\delta U(r)$ траектории финитного движения перестают быть замкнутыми и при каждом обороте перицентр смещается на малую угловую величину $\delta\varphi$. Определить смещение $\delta\varphi$ для возмущения

$$\delta U(r) = -\frac{\gamma}{r^3}.$$

Задача 28. В условиях предыдущей задачи при $\gamma = \mathrm{const}\cdot \ell^2$ найдите критические точки эффективного потенциала. Определить также радиус r_{ISCO} самой внутренней стабильной круговой орбиты.

Задача 29. Покажите, что в сферически-симметричном потенциале притяжения вида $U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$ частица падает на центр. При каком условии?

Задача 30. В гравитационном поле Солнца вычислите малое отклонение света, проходящего возле края Солнца. Сравните результат с отклонением, рассчитанным в общей теории относительности,

$$\delta\varphi = \frac{4GM}{Rc^2}.$$

Задача 31. Докажите, что любой луч, исходящий из фокуса эллипса, после зеркального отражения от эллипса проходит через второй фокус. Покажите также, что сумма расстояний от точки на траектории до фокусов эллипса остается постоянной величиной. Чему равна эта величина?

Задача 32*. Рассмотреть рассеяние пучка нерелятивистских частиц с зарядами $Z_1 e$ и энергией E на кулоновском центре $Z_2 e$. Показать, что эффективное поперечное сечение рассеяния в телесный угол $d\Omega$ в системе центра инерции определяется формулой Резерфорда

$$d\sigma(\varphi) = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E}\right)^2 \frac{d\Omega(\varphi)}{\sin^4 \frac{\varphi}{2}}.$$

Задача 33. Пусть частица массой m_1 рассеивается на неподвижной частице массой m_2. Найдите угол рассеяния γ первой частицы в лабораторной системе отсчета как функцию угла φ.

Задача 34*. Найти выражение для поперечного дифференциального сечения $d\sigma$ рассеяния частиц со сравнимыми массами в кулоновском потенциале в лабораторной системе отсчета.

V. Уравнения Гамильтона и скобки Пуассона

Задача 35. Доказать, что преобразование Лежандра инволютивно. Рассмотреть пример степенной функции $f(x) = x^n$.

Задача 36. Найти канонический импульс и гамильтониан нерелятивистской частицы в электромагнитном поле. Записать канонические уравнения.

Задача 37. Проварьировать действие, записать уравнения движения, а также найти канонический импульс и гамильтониан механической системы

$$S[\boldsymbol{r}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{\frac{1}{2} m(\boldsymbol{r}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}) - a\cos\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right)\right\}.$$

Задача 38. При помощи скобок Пуассона на фазовой плоскости найти уравнение, определяющее эволюцию величины

$$q = x - \frac{p}{m} t$$

для свободной нерелятивистской частицы. Какой физический смысл имеет этот динамический инвариант?

Задача 39. Рассмотрите нерелятивистскую частицу массой m с орбитальным моментом $\boldsymbol{\ell} = (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})$. Вычислите следующие скобки Пуассона:

$$\{x^i, p_j\}, \quad \{p_i, \ell^j\}, \quad \{\ell^i, \ell^j\}, \quad \{\ell^i, \boldsymbol{\ell}^2\}.$$

Задача 40*. Вектор Рунге-Ленца-Лапласа для частицы массой m в сферически симметричном потенциале $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ определяется выражением

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} - \frac{(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\ell})}{m\alpha}.$$

Показать, что скобки Пуассона $\{A_i, \ell_j\} = \varepsilon_{ijk} A^k$. Доказать, что вектор Рунге-Ленца-Лапласа является интегралом движения.

Задача 41. Частица с электрическим зарядом e движется в фоновом статическом магнитном поле $\boldsymbol{H}$. Покажите, что скобки Пуассона

$$\{p_i, p_j\} = e\,\varepsilon_{ijk} H^k, \quad \{x^i, p_j\} = \delta^i_j.$$

Задача 42. Магнитным монополем называют частицу, создающую радиальное магнитное поле вида

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = g\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Рассмотрим заряженную частицу, движущуюся в фоновом магнитном поле монополя g и определим обобщенный угловой момент $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{\ell} - \frac{eg}{cr}\boldsymbol{r}$. Доказать, что данный вектор $\boldsymbol{j}$ является интегралом движения.

VI. Канонические преобразования и уравнения Гамильтона-Якоби

Задача 43. Доказать, что преобразование вида $p' = \frac{1}{x}$, $x' = px^2$ является каноническим преобразованием. Найти его валентность a.

Задача 44. Рассмотрим производящую функцию унивалентного инфинитезимального канонического преобразования

$$F = x^i p'_i + \lambda\Gamma(x,p',t)$$

с малым параметром $\lambda \to 0$ и генератором $\Gamma(x,p',t)$. Показать, что произвольная функция фазового пространства $f(x,p)$ при бесконечно малых преобразованиях изменяется согласно скобке Пуассона

$$\delta f(x,p) = \lambda\{f,\Gamma\}.$$

Задача 45. Рассмотреть в качестве генератора канонического преобразования проекцию вектора орбитального момента импульса $\boldsymbol{\ell} = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})$, скажем, на ось z и найти вид бесконечно малых канонических преобразований — вращения координат и импульса вокруг оси z на угол λ.

Задача 46*. Рассмотрим последовательные канонические преобразования с генераторами $\Gamma_1(x,p)$ и $\Gamma_2(x,p)$. Вычислить результат последовательного действия этих преобразований на функцию $f = f(x,p)$ в разном порядке ($\Gamma_1 \to \Gamma_2$ и $\Gamma_2 \to \Gamma_1$). Найти разность (т.е. коммутатор) двух функций, преобразованных первым и вторым способом. Показать, что эта разность есть также действие некоторого генератора Γ_3 на функцию f, и найти генератор Γ_3.

Задача 47. Рассмотрим теперь интеграл $\Gamma = \int d\Gamma$, взятый по некоторой области фазового пространства и изображающий собой ее объем:

$$d\Gamma = dx_1 \ldots dx_s\, dp_1 \ldots dp_s.$$

Докажите, что величина Γ обладает свойством инвариантности по отношению к каноническим преобразованиям, то есть если произвести каноническое преобразование, то фазовые объемы соответствующих друг другу областей будут одинаковы.

Задача 48. Движение точечной массы в сильном гравитационном поле черной дыры Шварцшильда в плоскости $\theta = \pi/2$ может быть описано уравнением Гамильтона-Якоби

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}(\partial_t S)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)(\partial_r S)^2 - \frac{1}{r^2}(\partial_\varphi S)^2 = m^2.$$

Здесь (r,θ,φ) — сферические координаты, $r_g = 2GM$ — гравитационный радиус. Используя метод решения уравнений Гамильтона-Якоби, исследовать задачу о движении точечной массы в гравитационном поле черной дыры Шварцшильда.

Задача 49. Используя метод решения уравнений Гамильтона-Якоби, исследовать задачу о движении частицы в потенциале $U(r) = \frac{\alpha}{r^2}$.

VII. Фейнмановский интеграл по траекториям

Задача 50*. Найти выражения для фейнмановских пропагаторов свободной нерелятивистской частицы массы m и одномерного гармонического осциллятора с частотой ω.

Задача 51. Найти вероятность того, что свободная квантовая частица попадет в некоторую точку пространства x_2 за время $T = t_2 - t_1$.

Задача 52. Доказать, что $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) = \frac{\sinh x}{x}$, $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) = \frac{\sin x}{x}$.

Задача 53. Показать, что классическое действие $S_{\rm cl}$ для осциллятора имеет следующий вид

$$S[x_{\rm cl}(t)] = \frac{m\omega}{2\sin\omega T}\left[(x^2 + y^2)\cos\omega T - 2xy\right],$$

а также выписать в явном виде матричный элемент

$$\langle y|U(T)|x\rangle = G^{\omega}_{\rm ret}(x,y,T).$$

Совпадает ли пропагатор гармонического осциллятора с пропагатором свободной частицы в предельном случае $\omega \to 0$?

Задача 54. Если амплитуда вероятности гармонического осциллятора при $t_0 = 0$ имеет вид гауссова распределения

$$\Psi(x,0) = \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-a)^2\right\},$$

то покажите, что

$$\Psi(x,t) = \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}\omega t}{2} - \frac{m\omega}{2\hbar}\left[x^2 - 2axe^{-\mathrm{i}\omega t} + \frac{1}{2}a^2(1 + e^{-2\mathrm{i}\omega t})\right]\right\}$$

и найдите распределение вероятностей $W = |\Psi|^2$.

Задача 55. Доказать, что пропагатор $K(x_2,t_2;x_1,t_1)$ для нерелятивистской частицы во внешнем постоянном поле сил F равен

$$\sqrt{\frac{-\mathrm{i}m}{2\pi\hbar(t_2 - t_1)}}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}m(x_2 - x_1)^2}{2\hbar(t_2 - t_1)} + \frac{\mathrm{i}F}{2\hbar}(x_2 + x_1)(t_2 - t_1) - \frac{\mathrm{i}F}{24\hbar}(t_2 - t_1)^3\right\}.$$

Задача 56*. Взаимодействие простого гармонического осциллятора с внешним источником $j(t)$ описывается лагранжианом

$$L(x,\dot{x},t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} + xj(t).$$

(a) Вывести классические уравнения движения, исходя из принципа Гамильтона экстремального действия. Используя разложение функций $x(t)$ и $j(t)$ в интеграл Фурье, найти общее решение уравнения движения осциллятора с произвольной функцией $j(t)$. Рассмотреть отдельно частный случай $j(t) = j_0\sin(\Omega t)$.

(b) В присутствии источника интеграл по траекториям функционально зависит от $j(t)$:

$$Z[j]=\int_{x(t_1)=x_1}^{x(t_2)=x_2}\mathscr{D}x(t)\,\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2}dt\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}m\omega_0^2x^2+x(t)j(t)\right]\right\}.$$

Используя инвариантность меры интегрирования относительно функциональной замены переменных вида

$$x(t)\mapsto x'(t)=x(t)+\delta x(t),\quad \delta x(t_1)=\delta x(t_2)=0,$$

установить квантовый аналог уравнения Лагранжа-Эйлера для осциллятора:

$$\int_{x(t_1)=x_1}^{x(t_2)=x_2}\mathscr{D}x(t)\,\{m\ddot{x}+m\omega_0^2x-j(t)\}\,e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(t_1,t_2,j)}=0.$$

(c) Используя подстановку $Z[j]=\exp\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}G[j]\}$, получить уравнение Швингера-Дайсона

$$m\frac{d^2}{dt^2}\frac{\delta G[j]}{\delta j(t)}=-m\omega_0^2\frac{\delta G[j]}{\delta j(t)}+j(t).$$

Это функциональное уравнение с источником $j(t)$. Производящий функционал $G[j]$ можно разложить в функциональный ряд

$$G[j]=G_0+\int dt\,G_1(t)\,j(t)+\frac{1}{2!}\int dt'dt''\,G_2(t',t'')\,j(t')j(t'')+\dots$$

(d) Доказать, что производящий функционал для гармонического осциллятора принимает вид

$$G[j]=G_0+\int dt\,G_1(t)\,j(t)+\frac{1}{2!}\int dt'dt''\,G_2(t',t'')\,j(t')j(t''),$$

где $G_1(t)$ — решение однородного уравнения $\Gamma G_1(t)=0$ осциллятора с граничными условиями $x(t_1)=x_1$ и $x(t_2)=x_2$, а

$$\Gamma^{-1}j(t')=-\int dt''\,G_2(t'-t'')\,j(t'').$$

VIII. Локальные поля: динамика и внутренние симметрии

Задача 57. Вывести из вариационного принципа уравнения движения для массивного комплексного скалярного поля $\varphi(x,t)$ в одномерном пространстве:

$$S[\varphi,\varphi^\star]=\int_M d_2x\,(\dot{\varphi}\dot{\varphi}^\star-\partial_x\varphi\,\partial_x\varphi^\star-m^2\varphi\varphi^\star).$$

Покажите, что данное действие инвариантно относительно глобальных преобразований $\mathbb{U}(1)$, то есть преобразований вида $\varphi_g=e^{\mathrm{i}eg}\varphi$, $g\in\mathbb{R}$. Найдите соответствующие нетеровский ток и сохраняющийся заряд.

Задача 58. Доказать, что следующие полевые лагранижаны физически эквивалентны:

$$\mathscr{L}_1=-\frac{1}{2}\varphi[\Box+m^2]\varphi,\quad \mathscr{L}_2=\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi-\frac{1}{2}m^2\varphi^2.$$

Здесь метрический тензор Минковского $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$.

Задача 59*. Запишите уравнения движения для массивного комплексного скалярного поля в импульсном пространстве и найдите их нетривиальное решение в виде разложения поля $\varphi(\boldsymbol{r},t)$ по положительно-частотным и отрицательно-частотным полевым модам.

Задача 60. Рассмотрим теорию вещественного векторного поля в трехмерном пространстве времени Минковского. Действие выберем в виде

$$S[A] = \int_M d_3x \, \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + f\varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda\right), \quad F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Здесь f — некоторый вещественный параметр. Слагаемое $f\varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda$ называют лагранжианом Черна-Саймонса. Найти размерность постоянной f в системе единиц $\hbar = c = 1$. Показать, что действие инвариантно относительно убывающих на бесконечности (функция $g(x)$ достаточно быстро убывает при $x \to \infty$) калибровочных преобразований

$$A^g_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu g(x).$$

Найти также уравнения движения для поля и показать, что они калибровочно инвариантны.

Задача 61. Рассмотрим комплексное скалярное поле Клейна-Гордона в трехмерном евклидовом пространстве

$$\mathscr{L} = \dot\varphi\dot\varphi^\star - \nabla\varphi\nabla\varphi^\star - m^2\varphi\varphi^\star.$$

Найти соответствующие плотности канонического импульса, а также гамильтониан комплексного скалярного поля. Запишите канонические уравнения Гамильтона для полей φ и $\varphi^\star$.

Задача 62. Рассмотрим действие для бесмассового векторного поля

$$S[A] = -\frac{1}{4}\int_M d_4x \, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

Найти соответствующие плотности канонического импульса, а также гамильтониан векторного поля. Запишите уравнения Гамильтона для поля $A_\mu(x)$. Вычислить также скобки Пуассона канонических переменных.

Задача 63*. Рассмотрим теорию вещественного скалярного поля $\varphi(x)$ в пространстве Минковского с метрикой $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(+1, -1, -1, -1)$, описываемую лагранжианом

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \lambda\frac{\varphi^4}{4}.$$

Показать, что функционал действия является инвариантным относительно преобразований дилатации

$$\varphi_g(x) = g\varphi(gx),$$

где g — вещественный параметр. Найти соответствующий сохраняющийся ток.

ЗАДАНИЕ II

(срок сдачи 9–15 декабря)

I. Основы тензорной алгебры

Задача 1. Рассмотрим множество финитных числовых последовательностей

$$\ell_c = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \,|\, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N : x(n) = 0\}.$$

Покажите, что множество ℓ_c является бесконечномерным вещественным векторным пространством. Докажите, что система векторов, таких что $e_k(n) = \delta_{kn}$ составляет базис Гамеля в пространстве ℓ_c.

Задача 2. Рассмотрим векторное пространство $\mathbf{Mat}_n(\mathbb{R})$ квадратных матриц порядка n над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Проверьте, что отображение $f : \mathbf{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ вида

$$f(A) = \operatorname{tr} A = A_{\alpha\alpha}, \quad A = (A_{\alpha\beta}) \in \mathbf{Mat}_n(\mathbb{R})$$

является линейным функционалом на $\mathbf{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Задача 3. Доказать, что любая линейная функция на пространстве $\mathbf{Mat}_n(\mathbb{R})$ имеет вид $f(A) = \operatorname{tr}(\sigma A)$, где $\sigma \in \mathbf{Mat}_n(\mathbb{R})$, причем матрица $\sigma = \sigma_f$ однозначно определяется функцией f.

Задача 4. Найти двойственный базис в пространстве $V = \mathbb{R}[x]_2$ вещественных многочленов степени не выше 2 для базиса $\{h^1, h^2, h^3\}$ в $V^\star$, где

$$h^1(f) = f(0), \quad h^2(f) = f'(0), \quad h^3(f) = f(1).$$

Задача 5. Пусть f_1 и f_2 — линейные функционалы на конечномерном векторном пространстве V. Доказать, что если ядра $\operatorname{Ker} f_1 = \operatorname{Ker} f_2$, то существует $\lambda \in \mathbb{R} : f_1 = \lambda f_2$.

Задача 6. Доказать, что функция $\beta(A, B) = \operatorname{tr}(AB)$ является невырожденной билинейной формой на пространстве $\mathbf{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Задача 7. Пусть $q(x) = q_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$ — положительно определенная квадратичная форма на $\mathbb{R}^n$ с симметричной матрицей $\hat{q}^\alpha{}_\beta$. Доказать равенство:

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx_1 \ldots dx_n \, e^{-q(x)} = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det \hat{q}}}.$$

Задача 8. Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ — базис в $V = \mathbb{R}^3$, а $\{h^1, h^2, h^3\}$ — соответствующий двойственный базис в $V^\star$. Для тензора $\tau = (3h^1 + h^2) \otimes (h^2 - 2h^3) \otimes h^2$ найти его компоненты τ_{122} и τ'_{122} в базисах $\{e_1, e_2, e_3\}$ и $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ в случае, если

$$e'_1 = e_1 - e_2, \quad e'_2 = e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_3 - e_2.$$

Задача 9*. Проверьте, что для любых отображений векторных пространств $f : V \to V'$, $f' : V' \to V''$, $g : W \to W'$, $g' : W' \to W''$ выполняется

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g).$$

Задача 10*. Пусть линейные операторы $f, g : V \to V$ в базисе $\{e_1, e_2\}$ пространства V заданы матрицами

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_g = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу оператора $f \otimes g : V \otimes V \to V \otimes V$ в базисе $\{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}$.

Задача 11. Найти полные свертки тензора $T^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = \delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\nu}_{\alpha}\delta^{\mu}_{\beta}$ при условии $\dim V = n$. Сколько полных сверток существует у данного тензора?

Задача 12. Докажите, что полная свертка тензорного произведения симметричного тензора $\tau_{\mu\nu}$ на антисимметричный тензор $s^{\alpha\beta}$ тождественно равна нулю, то есть $\tau_{\alpha\beta}s^{\alpha\beta} \equiv 0$.

Задача 13. Доказать, что на разложимых тензорах вида $f \otimes v$, где $v \in V, f \in V^{\star}$, свертка совпадает с отображением $f \otimes v \mapsto f(v)$.

II. Векторные поля и дифференциальные формы

Задача 14. Найти формулы, выражающие нормированный локальный базис сферической системы координат через базис декартовой системы координат, а также показать, что локальный базис сферической системы координат ортогонален относительно стандартной евклидовой структуры на $\mathbb{R}^3$.

Задача 15. Найти закон преобразования координат векторного поля и дифференциальной формы первой степени при криволинейной замене координат.

Задача 16. Найти выражение для векторного поля X на плоскости $\mathbb{R}^2$ в полярных координатах, если

$$X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, \quad X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Задача 17. Рассмотрим функцию $f = xyz + x^3y^2$ на $\mathbb{R}^3$. Найти $df(X)$, если

$$X = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X = 3y^2\frac{\partial}{\partial y} - 2xy\frac{\partial}{\partial x}.$$

Задача 18. Покажите, что для всякой гладкой функции f ее дифференциал можно считать формой первой степени в соответствии с формулой

$$df(X) = X(f).$$

Задача 19. Записать внешнее умножение $dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta}$ базисных дифференциальных форм первой степени при помощи операции тензорного произведения.

Задача 20. Докажите следующее свойство операции внешнего умножения дифференциальных форм: $\omega \wedge \lambda = (-1)^{k\cdot m}\lambda \wedge \omega$, $\omega \in \Omega^k(U)$, $\lambda \in \Omega^m(U)$.

Задача 21. Вычислить внешний дифференциал следующей дифференциальной формы на плоскости без точки (0,0):

$$\omega = f(x^2 + y^2)\,(x\,dx + y\,dy)\,.$$

Здесь f — гладкая функция одной переменной.

Задача 22. Докажите, что для внутреннего умножения векторного поля на дифференциальную форму ω выполняется равенство

$$\{\imath_X, \imath_Y\}\omega = \imath_X\imath_Y\omega + \imath_Y\imath_X\omega = 0.$$

Задача 23. Докажите, что результат внешнего произведения замкнутой формы на точную форму есть точная форма.

Задача 24. Придумайте дифференциальную форму $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, для которой $d\omega = 0$ и для которой не существует $\lambda \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, такой что $d\lambda = \omega$.

Задача 25. Рассмотрим замкнутую 2-форму F, называемую тензором электромагнитного поля, определенную на $\mathbb{R}^{1+3}$ с координатами (x,y,z,t), t — время:

$$F = E_x\, dx \wedge dt + E_y\, dy \wedge dt + E_z\, dz \wedge dt + H_x\, dy \wedge dz + H_y\, dz \wedge dx + H_z\, dx \wedge dy.$$

Получите первую пару уравнений Максвелла, используя замкнутость F.

Задача 26*. Многообразие называют гомотопным точке $x_0 \in M$, если существует такое гладкое отображение $h : M \times [0,1] \to M$, что $h(x,0) = x_0$, $h(x,1) = x$. Докажите, что любая замкнутая $(k+1)$-форма, $k \geqslant 0$, на многообразии, гомотопном точке, является точной. Запишите в явном виде отображение гомотопии h для случая евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

III. Интегрирование форм и формула Стокса

Задача 27. Вычислить интеграл от дифференциальной формы:

$$\int_G xy^2\, dx \wedge dy, \quad G = \left\{x^2 + y^2 \leqslant a^2, x \geqslant 0\right\}.$$

Задача 28. Записать формулу Стокса для дифференциальных форм

$$\alpha_E = E_x\, dy \wedge dz + E_y\, dz \wedge dx + E_z\, dx \wedge dy, \quad \beta_H = H_x\, dx + H_y\, dy + H_z\, dz.$$

Задача 29. Вычислить интеграл

$$\int_G (x\, \sin y + y \sin x)\, dx \wedge dy, \quad G = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2].$$

Задача 30. Найти интеграл $\int_G \omega$ от 2-формы $\omega = d\beta$, если

$$\beta = xyz\, dx + x\, dy + x^7 z^4\, dz, \quad G = \left\{4x^2 + y^2 \leqslant 1, z = 0\right\}.$$

Задача 31. Рассмотрим на $\mathbb{R}^3$ дифференциальную форму второй степени

$$\omega = x^3\, dy \wedge dz + y^3\, dz \wedge dx + z^3\, dx \wedge dy.$$

Найти интеграл от формы ω по сфере $\partial G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$.

IV. Производная Ли, прямой и обратный образы

Задача 32. Вычислить производную Ли от дифференциальной формы первой степени вида $\omega = x\, dy + y\, dx$ вдоль векторного поля $X = x\, \partial/\partial x + y\, \partial/\partial y$.

Задача 33. Пусть f — гладкая функция, X — векторное поле. Выразите действие $Ł_{fX}$ на дифференциальную форму через действие $Ł_X$ на ту же форму.

Задача 34. Доказать справедливость правила Лейбница для производной Ли от дифференциальных форм:

$$Ł_X(\omega \wedge \lambda) = Ł_X \omega \wedge \lambda + \omega \wedge Ł_X \lambda.$$

Задача 35. Доказать, что производная Ли $Ł_X$ коммутирует с внешним дифференцированием d и внутренним умножением $\imath_X$ для форм любой степени.

Задача 36. Пусть X и Y — векторные поля, а f и g — гладкие функции на многообразии. Докажите формулу

$$[fX,gY] = fg[X,Y] + fX(g)\, Y - gY(f)\, X.$$

Задача 37. Найти выражение для производной Ли векторного поля и дифференциальной формы первой степени в локальных координатах.

Задача 38. Пусть X и Y — векторные поля, ω — дифферециальная форма на многообразии. Докажите формулу

$$\imath_{[X,Y]}\omega = d\imath_X\imath_Y\omega + \imath_X d\imath_Y\omega - \imath_Y d\imath_X\omega - \imath_Y\imath_X d\omega.$$

Задача 39. Показать, что коммутатор производных Ли векторного поля Z вдоль полей X и Y также является производной Ли вдоль некоторого векторного поля T: $[Ł_X,Ł_Y]Z = Ł_T Z$. Выразить T через X и Y.

Задача 40. Доказать, что для произвольного тензорного поля производная Ли в локальных координатах имеет следующий вид:

$$Ł_X T^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q} = X^\gamma\,\partial_\gamma T^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q} - \partial_{\alpha_1}X^{\mu_1}\,T^{\alpha_1\mu_2\ldots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q} - \cdots -$$
$$\partial_{\alpha_p}X^{\mu_p}\,T^{\mu_1\ldots\mu_{p-1}\alpha_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q} + \partial_{\nu_1}X^{\beta_1}\,T^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\beta_1\nu_2\ldots\nu_q} + \cdots + \partial_{\nu_q}X^{\beta_q}\,T^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_{q-1}\beta_q}.$$

Задача 41. Вариация формы для тензорного поля типа (p,q) определяется

$$\delta_X T^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q}(x) = T'^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q}(x) - T^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q}(x)$$

с точностью до линейных членов по X, а $T'^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q}(x)$ выражается из тензорного закона преобразования координат вида; само преобразование координат имеет следующий вид: $x'^\alpha = x^\alpha + X^\alpha(x)$. Найдите в явном виде выражение для вариации формы $\delta_X T^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q}(x)$ тензорного поля. Как связан данный результат с выражением для производной Ли тензорного поля вдоль X?

Задача 42. Проверьте, что для функции $f : U \to \mathbb{R}$ отображение $f_\star$ действительно совпадает с ее дифференциалом df. Здесь $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество.

Задача 43. Выпишите в явном виде действие $\varphi^\star$ на дифференциальные формы высшей степени в $\mathbb{R}^n$. Здесь φ — криволинейная замена координат.

Задача 44. Доказать, что прямой образ $\varphi_\star$ согласован со структурой алгебры Ли в пространстве векторных полей, то есть

$$\varphi_\star[X,Y] = [\varphi_\star X,\varphi_\star Y].$$

Задача 45. Показать, что взятие обратного образа дифференциальных форм коммутирует с внешним умножением и внешним дифференцированием,

$$\varphi^\star(\omega\wedge\lambda) = \varphi^\star\omega\wedge\varphi^\star\lambda, \qquad \varphi^\star(d\omega) = d(\varphi^\star\omega).$$

Задача 46*. Докажите, что для двух гладких отображений открытых подмножеств евклидова пространства, $\varphi : U \to V$ и $\psi : V \to W$, имеет место соотношение: $(\psi\circ\varphi)^\star = \varphi^\star\circ\psi^\star$.

Задача 47. Доказать что геометрическое определение производной Ли эквивалентно формуле Картана $Ł_X = d\circ\imath_X + \imath_X\circ d$.

V. Полуриманова метрика, форма объема и тензор Леви-Чивита

Задача 48. Доказать, что в некоторой ортогональной системе координат на $\mathbb{R}^3$ риманова метрика имеет диагональный вид $\mathrm{diag}(H_1^2, H_2^2, H_3^2)$ с квадратами коэффициентов Ламе на диагонали.

Задача 49. Рассмотрите эллипсоид $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 = 1$. Покажите, что координаты (x,y,z), определяемые из формул

$$x = 2\sin\theta\cos\varphi, \quad y = 2\sin\theta\sin\varphi, \quad z = \cos\theta,$$

корректно задают систему координат на эллипсоиде. Найдите компоненты римановой метрики $g_{\alpha\beta}$ в терминах координат (θ,φ).

Задача 50. Получите следующую цепочку равенств для тензорных сверток символов Леви-Чивита:

$$\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k\ldots\alpha_n}\varepsilon^{\beta_1\ldots\beta_{k-1}\alpha_k\ldots\alpha_n} = n(n-1)\ldots k\cdot\det\begin{pmatrix} \delta^{\beta_1}_{\alpha_1} & \delta^{\beta_2}_{\alpha_1} & \ldots & \delta^{\beta_{k-1}}_{\alpha_1} \\ \delta^{\beta_1}_{\alpha_2} & \delta^{\beta_2}_{\alpha_2} & \ldots & \delta^{\beta_{k-1}}_{\alpha_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{\beta_1}_{\alpha_{k-1}} & \delta^{\beta_2}_{\alpha_{k-1}} & \ldots & \delta^{\beta_{k-1}}_{\alpha_{k-1}} \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\varepsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_n} = n!$$

Задача 51. Форму риманова объема можно записать в виде

$$\mathrm{vol}_g = \frac{1}{n!}\tau_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\,dx^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\alpha_n}, \quad \tau_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = |\det g|^{1/2}\,\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_n}, \quad \varepsilon_{12\ldots n} = +1.$$

Используя последние соотношения как определение символа Леви-Чивита, докажите справедливость «матричной» реализации формул в простейшем случае трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$.

Задача 52. Найти риманов объем n-мерной единичной сферы $\mathbb{S}^n$, вложенной в $\mathbb{R}^{n+1}$, то есть

$$\int_{\mathbb{S}^n}\mathrm{vol}_g = \int_{\mathbb{S}^n}\sqrt{\det g}\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n.$$

Задача 53. Посчитайте площадь поверхности тора в $\mathbb{R}^4$, заданного следующими уравнениями:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

Задача 54. Рассмотрим в единичном открытом круге $x^2 + y^2 < 1$ на плоскости метрику Пуанкаре

$$g = 4\frac{dx\otimes dx + dy\otimes dy}{(1-x^2-y^2)^2}.$$

Найдите в ней расстояние от точки $(0,0)$ до точки (x,y). Вычислить в данной метрике длину окружности радиуса r с центром в точке $(0,0)$.

Задача 55. Определите поведение радиальных световых лучей $g(X,X) = 0$ в метрике черной дыры Шварцшильда

$$g = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)dt\otimes dt - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr\otimes dr - r^2(d\theta\otimes d\theta + \sin^2\theta\,d\varphi\otimes d\varphi).$$

VI. Векторные поля Киллинга

Задача 56. Найти производную Ли римановой метрики $g = g_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu\otimes dx^\nu$ в локальных координатах.

Задача 57. Найдите все линейно независимые поля Киллинга для стандартной евклидовой структуры на плоскости:

$$g_E = dx\otimes dx + dy\otimes dy$$

Задача 58. Покажите, что коммутатор (скобка Ли) двух векторных полей Киллинга снова дает поле Киллинга, то есть

$$Ł_{[X,Y]}g = 0.$$

Задача 59. Найти все линейно независимые поля Киллинга гиперболического пространства де Ситтера: $x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 1$, погруженного в пространство Минковского с полуримановой структурой

$$g = -dx_0 \otimes dx_0 + dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2.$$

VII. Звездочка Ходжа, градиент, дивергенция, ротор и лапласиан

Задача 60. Докажите неравенство для римановой структуры g, вектора X и формы первой степени ω в той же точке

$$\omega(X)^2 \leqslant g(X,X) \cdot \tilde{g}(\omega,\omega).$$

Задача 61*. Докажите, что на n-мерном римановом многообразии M с полуримановой структурой g для звездочки $\star : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ выполняется

$$\star \star \omega = (-1)^{k(n-k)} \mathrm{sgn}\, \det g \cdot \omega.$$

Задача 62. Выпишите выражения для оператора звездочки Ходжа в декартовых и сферических координатах.

Задача 63. Выписать в явном виде дивергенцию, ротор и градиент в декартовых и сферических координатах.

Задача 64. Докажите, что определение дивергенции для риманова многообразия согласовано с определением дивергенции относительно формы объема

$$\mathrm{div}\, X \cdot \mathrm{vol}_g = Ł_X \mathrm{vol}_g.$$

Задача 65. Докажите что справедливы следующие равенства: $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} f = 0$ и $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, X = 0$, где $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $X \in \mathrm{Vect}(\mathbb{R}^3)$.

Задача 66. Как выражается лапласиан $\Delta = \star d \star d$ через операции дивергенцию и градиент? Выпишите оператор Лапласа в декартовых и сферических координатах.

Задача 67. Функция f на римановом многообразии называется гармонической, если $\Delta f = 0$. Докажите, что у гармонической на $\mathbb{R}^n$ функции все средние значения на сферах с центрами в нуле равны ее значению $f(0)$.

Задача 68*. Докажите, что экстремалями функционала $S[A]$ являются уравнения движения максвелловской электродинамики

$$S[A] = \frac{1}{2}\int_M F \wedge \star F - \int_M A \wedge \star j, \quad F = dA.$$

VIII. Связность Леви-Чивита и ковариантная производная

Задача 69*. Пусть (M,g) — риманово многообразие с полуримановой метрикой g. Докажите, что существует единственная операция ковариантное дифференцирование векторных полей $\nabla_X Y$, удовлетворяющая условиям:

- $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ и $\nabla_X fY = f \nabla_X Y + X(f)\, Y$ для умножения на функцию.
- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$.

• $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y,Z) + g(Y,\nabla_X Z)$.

Задача 70. Докажите, что из приведенных выше свойств ковариантной производной следует формула Козюля

$$2g(\nabla_X Y,Z) = X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) + \\ + g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X).$$

Задача 71. Докажите, что из формулы Козюля, наоборот, следуют свойства ковариантного дифференцирования.

Задача 72. Проверьте в локальных координатах, что ковариантная производная римановой метрики тождественно равна нулю, то есть $\nabla_X g = 0$.

Задача 73. Доказать, что в выражении для производной Ли можно заменить частные производные ковариантными, в частности

$$Ł_X Y^\alpha = X^\beta\, \nabla_\beta Y^\alpha - Y^\beta\, \nabla_\beta X^\alpha.$$

Задача 74. Найти закон преобразования метрической связности $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ при криволинейной замене координат.

Задача 75. Вычислите символы Кристоффеля для стандартной евклидовой метрики в сферических координатах.

Задача 76*. Доказать тождества

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\, \partial_\gamma \sqrt{\det g}, \quad g^{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\sqrt{\det g}}\, \partial_\alpha \left[g^{\alpha\gamma} \sqrt{\det g} \right].$$

Задача 77. Выписать обобщенную формулу Остроградского-Гаусса для ковариантной дивергенции векторного поля $\nabla_\alpha X^\alpha$:

$$\int_M \mathrm{vol}_g\, \nabla_\alpha X^\alpha = \int_{\partial M} d\Sigma_\alpha\, \sqrt{\det g}\, X^\alpha.$$

Задача 78. Докажите тождество для дифференциального оператора Бельтрами Лапласа $\Box_g : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ вида

$$\Box_g = g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\, \partial_\alpha \left(g^{\alpha\beta} \sqrt{\det g}\, \partial_\beta \right).$$

Задача 79. Записать оператор Бельтрами-Лапласа $\Box_g$ в терминах коэффициентов Ламе в некоторой ортогональной системе координат.

IX. Кручение и риманова кривизна

Задача 80. Докажите, что выражения

$$R_{X,Y} Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \quad T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

являются тензорами, то есть при умножении на функцию f векторных полей X, Y или Z эти выражения просто умножаются на f.

Задача 81. Докажите, что условие отсутствия кручения эквивалентно тому, что для форм первой степени выполняется

$$(\nabla_X \omega)(Y) - (\nabla_Y \omega)(X) = d\omega(X,Y).$$

Задача 82*. Докажите первое тождество Бьянки:

$$R_{X,Y} Z + R_{Z,X} Y + R_{Y,Z} X = 0.$$

Задача 83. Покажите, что локально-координатная запись тензора кривизны Римана имеет вид

$$R^{\alpha}_{\ \beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\alpha}_{\ \nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\ \mu\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\ \mu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\ \nu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\ \nu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\ \mu\beta}.$$

Задача 84. Показать, что в присутствии кручения $T^{\alpha}_{\ \mu\nu}$ справедливо следующее тождество

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] f = -T^{\alpha}_{\ \mu\nu}\, \partial_\alpha f,$$

где f — произвольная гладкая функция. Аналогично, в случае, если $A_\alpha(x)$ является ковекторным полем, показать, что

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A_\alpha = -R^{\gamma}_{\ \alpha\mu\nu} A_\gamma - T'^{\gamma}_{\ \mu\nu}\, \partial_\gamma A_\alpha.$$

Сравнить полученный тензор $T'^{\alpha}_{\ \mu\nu}$ с тензором кручения $T^{\alpha}_{\ \mu\nu}$.

Задача 85. Вычислить тензор кривизны Римана, а также тензор Риччи и скалярную кривизну R на двумерной сфере радиуса a:

$$g = a^2 (d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta\, d\varphi \otimes d\varphi).$$

Задача 86. Используя принцип экстремального действия, найти уравнения движения в эйнштейновской гравитации, если действие Эйнштейна-Гильберта

$$S[g] = -\frac{1}{2k^2} \int_M \mathrm{vol}_g\, (R - 2\Lambda).$$

X. Параллельный перенос и геодезические кривые

Задача 87. Рассмотреть двумерную сферу единичного радиуса в трехмерном евклидовом пространстве. Пусть единичный вектор X^μ изначально касается линии $\varphi = 0$ на экваторе (в стандартных сферических координатах). Этот вектор переносят параллельно сперва вдоль экватора до точки $\varphi = \varphi_0$, затем вдоль меридиана, заданного уравнением $\varphi = \varphi_0$ в направлении северного полюса, и затем вдоль меридиана, заданного уравнением $\varphi = 0$, в изначальную точку. Как изменилось направление вектора X^μ по отношению к изначальному? Почему?

Задача 88. Получить форму общей времениподобной геодезической на двумерном полуримановом многообразии с метрикой

$$g = \frac{-dt \otimes dt + dx \otimes dx}{t^2}.$$

Задача 89*. Записать уравнение геодезических для релятивистской частицы на фоне метрики Шварцшильда. Выделите лидирующую поправку к ньютоновским уравнениям движения. К каким физическим эффектам она приводит?

Задача 90*. Для индефинитной метрики вида

$$g = -f^2(r)\, dt \otimes dt + f^{-2}(r)\, dr \otimes dr + r^2 (d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta\, d\varphi \otimes d\varphi)$$

найдите геодезические уравнения, используя действие пробной частицы. Извлеките из полученных уравнений символы Кристоффеля в сферических координатах. Вычислить также компоненты тензора Римана в координатах (t,r,θ,φ).