$\boxed{\text{М. кл. мех. и т. дин. сис.}}$

Лекция 1.

Понятие динамической системы. Одномерные дин. сис.

Опр. Дин. сист. — мат. модель некоторого процесса, для кот. определено понятие состояние и оператор эволюции во времени.

$\vec{x}$ — состояние $\vec{x} \in X$ (пр-во состояний) $\dim X = n$
(фаз. пр-во)

$f: X \xrightarrow{f} X$, t — время $t \in T = \mathbb{R}^1$ или $\{0, 1, 2 \ldots\}$

$t \in \mathbb{R}^1$ $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$	$t \in \{0, 1, 2 \ldots\}$ $\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n)$
непр.	дискретная

Эволюция: $X \times T \to X$

1) точное реш.
2) численное реш.
3) качеств. методы

Д. сист. 1-го порядка. $\dim X = 1$

$\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$

Пример 1. $\dot{x} = x^2 \sin^2 x$, $x(0) = \frac{\pi}{2}$ $x(t)$ — ?

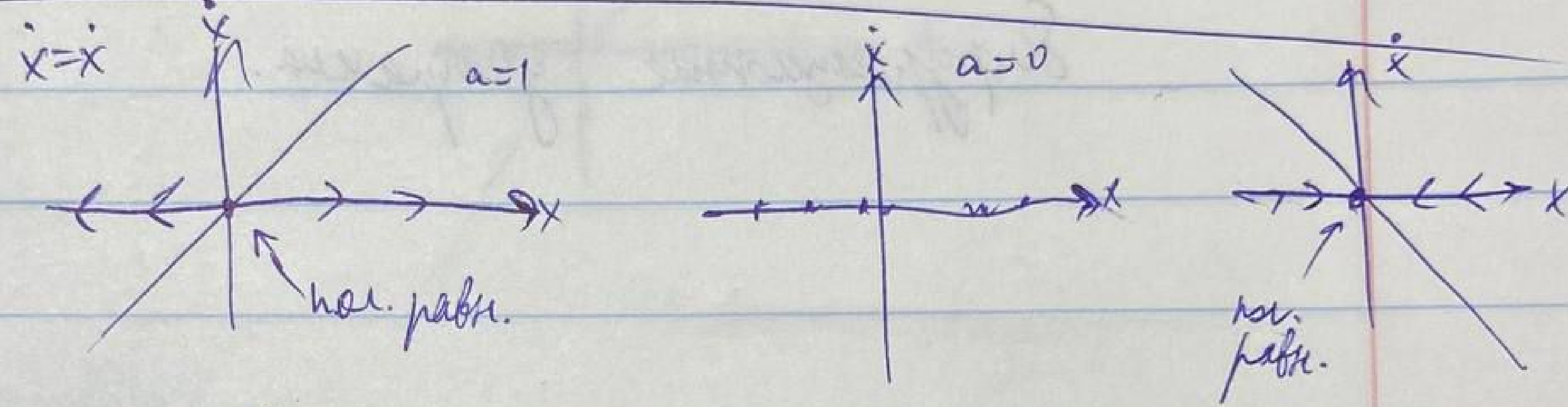
Пример 2. дин. изм. попул.

$$x_{n+1} = \lambda x_n \qquad \lambda > 0 = \text{const}$$

$$\dot{x} = ax \qquad x = Ce^{at}, \quad x(0) = x_0$$

$$x = x_0 e^{at}$$

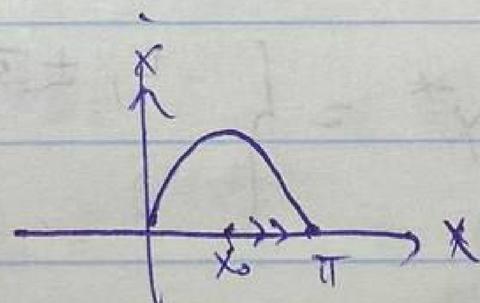
$\dot{x} = ax$



репеллер

$\dot{x} = x^2 \sin x$

$x_0 = \frac{\pi}{2}$



$x(t) \to \pi$

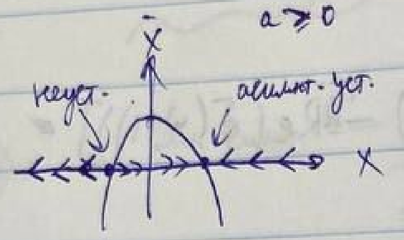
Бифуркация — кач. перестройка ~~системы~~ фазового портрета сист. при малых изм. параметра.

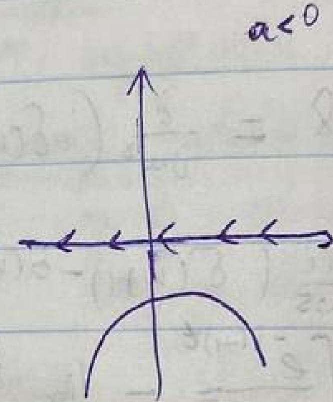
Типичные биф. в одномер. сист.

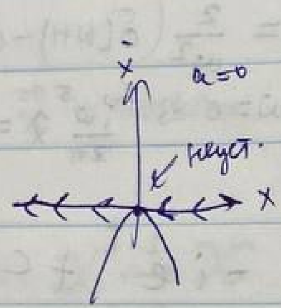
1. Седло-узловая бифуркация. $\dot{x} = a - x^2$ — н.ф.

П.р. $\dot{x} = 0$

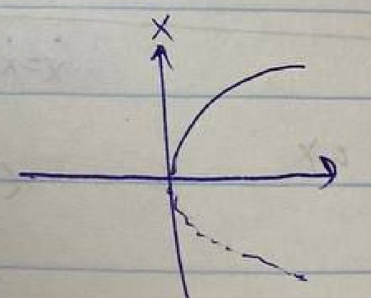
$$x^* = \begin{cases} \pm\sqrt{a}, & a \geq 0 \\ \varnothing, & a < 0 \end{cases}$$







Бифуркационная диаграмма.

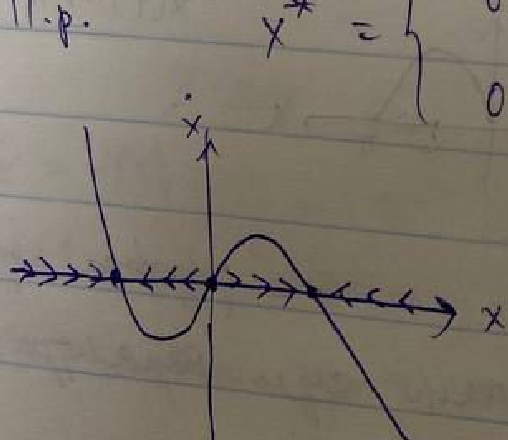


2. Вилообразная бифуркация

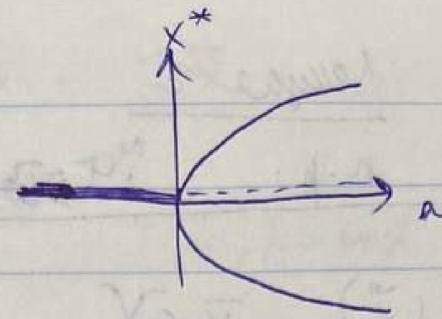
$\dot{x} = ax - x^3$

П.р.

$$x^* = \begin{cases} 0, \pm\sqrt{a}, & a \geq 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}$$

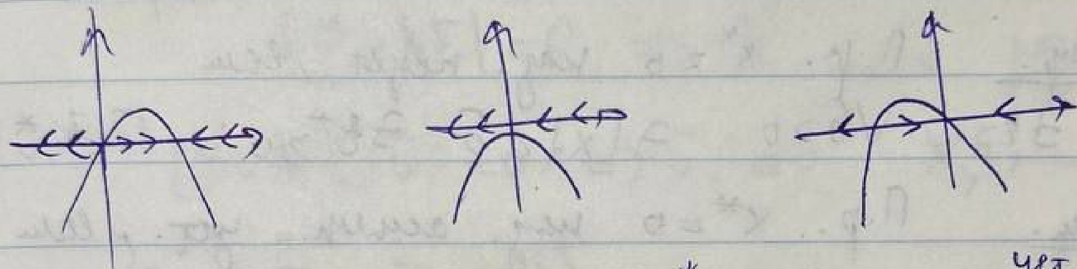


Биф. диагр.

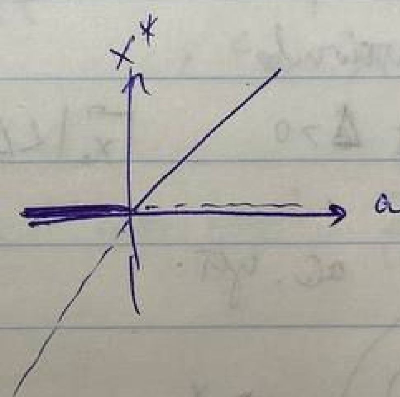


Транскритич. биф.

$$\dot{x} = x(a-x)$$



Биф. диагр.



уст. и неуст. меняются местами

Линейное приближ.

$$x = x^* + \varepsilon$$

$$\dot{x}^* = 0 = f(x^*)$$

$$\dot{x} = \dot{\varepsilon} = f(x^* + \varepsilon) = \varepsilon f'(x^*) + o(\varepsilon)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{f'(x^*)t} = (x_0 - x^*) e^{f'(x^*)t}$$

$$x = x^* + (x_0 - x^*) e^{f'(x^*)t}$$

$f'(x^*) < 0$, то x^* – асимпт. уст.

$f'(x^*) > 0$, x^* – неуст. П.р.

$f'(x^*) = 0$ лин. приближ. не раб.

Лекция 2

Уст-ть н.р. Уст-ть по лин. приближ.

$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \quad \bar{x} \in X \quad \dim X = n$

Опр. $f(x^*) = 0 \Rightarrow x^*$ – н.р. Пусть $x^* = 0$

Опр. П.р. $x^* = 0$ наз. уст. (по Ляпунову)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall |\vec{x}_0| < \delta \hookrightarrow |\bar{x}(\bar{x}_0, t)| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$

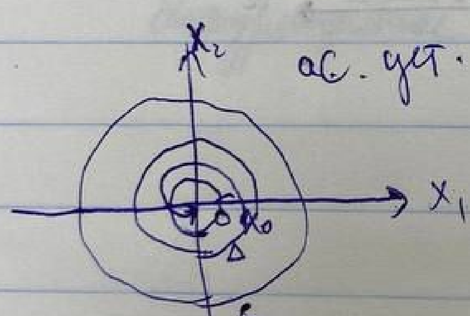
Опр. П.р. $x^* = 0$ наз. неуст., если

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \quad \exists |\bar{x}_0| < \delta \ \exists t^* \geq 0 : \ |\bar{x}(\bar{x}_0, t^*)| \geq \varepsilon$

Опр. П.р. $x^* = 0$ наз. асимп. уст., если

1) устойчиво

2) $\exists \Delta > 0 : |\vec{x}_0| < \Delta \Rightarrow \lim\limits_{t \to \infty} \bar{x}(x_0, t) = 0$



$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\bar{f}(0)} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}^T}\bigg|_0 \bar{x} + \underline{o}(\bar{x})$$

$$J = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}^T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

В лин. прибл. $\dot{\bar{x}} = J\bar{x}$

$$\bar{x} = \bar{u} e^{\lambda t} \qquad \bar{u}, \lambda = const$$

$$\lambda \bar{u} \cancel{e^{\lambda t}} = J \bar{u} \cancel{e^{\lambda t}}$$

$$[J - \lambda E]\bar{u} = 0$$

$\bar{u} = 0$

$$|J - \lambda E| = 0 \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ различны}$$

$$(J - \lambda_i E)\bar{u}_i = 0 \Rightarrow \bar{u}_i \neq 0 \qquad \lambda_1, \bar{u}_1, \dots, \lambda_n, \bar{u}_n$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \bar{u}_i e^{\lambda_i t} \qquad , c_1, \dots, c_n = const$$

<u>Утв. 1</u> $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ — лин. незав. $\sum_{i=1}^{n} c_i \bar{u}_i = 0 \Leftrightarrow c_i = 0 \ \forall i$

$$J \sum_{i=1}^{n} c_i \bar{u}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i J \bar{u}_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i \bar{u}_i = 0$$

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} c_i \bar{u}_i = 0$$

$$\sum_{i=2}^{n} c_i (\lambda_i - \lambda_1) \bar{u}_i = 0$$

$$J \sum \dots = 0 \Rightarrow \sum_{i=2}^{n} c_i (\lambda_i - \lambda_1) \lambda_i \bar{u}_i = 0$$

$$\lambda_2 \sum_{i=2}^{n} c_i(\lambda_i-\lambda_1)\bar{u}_i = 0 \qquad \sum_{i=2}^{n} c_i(\lambda_i-\lambda_1)\lambda_i\bar{u}_i = 0$$

$$\sum_{i=3}^{n} c_i(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)\bar{u}_i = 0$$

$$c_n(\lambda_n-\lambda_1)(\lambda_n-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(\lambda_n-\lambda_{n-1})\bar{u}_n = 0$$

$$c_n = 0$$

т.е. $\sum_{i=1}^{n} c_i\bar{u}_i = 0 \Rightarrow c_i = 0 \ \forall i=\overline{1,n}$ ■

<u>Утв. 2</u> $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i\bar{u}_i e^{\lambda_i t}$ – все возможные реш. сист. $\dot{x} = J\bar{x}$

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0 = \sum c_i\bar{u}_i \Longleftrightarrow \underbrace{[\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n]}_{\text{невыр.}}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \bar{x}_0 \Rightarrow$$

$\exists!$ реш. $c_1,\ldots c_n$ $\forall x_0 \in X$ ■

<u>Замечание.</u> $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i(\bar{u}_i + \bar{\bar{u}}_i t + \ldots)e^{\lambda_i t}$ ← кратные λ.

<u>Утв. 3</u> Если $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$, то н.р. лин. сист. ас. уст.
Если $\exists i : \mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$, то н.р. лин. сист. неуст.
Если все $\mathrm{Re}\,\lambda_i \le 0$, то н.р. уст. (все λ_i различны)

$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = 0 \quad m, c > 0$

Пример

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{-\beta y - cx}{m} \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix}$$

$$|J - \lambda E| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{c}{m} & -\frac{\beta}{m} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{\beta}{m}\lambda + \frac{c}{m} = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(-\frac{\beta}{m} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - 4\frac{c}{m}}\right)$$

$\beta > 0 \quad Re\,\lambda_{1,2} < 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ – ас. уст. п.р.

$\beta < 0 \quad Re\,\lambda_{1,2} > 0 \Rightarrow$ неуст.

$\beta = 0 \quad Re\,\lambda_{1,2} = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{c}{m}}$ – уст.

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}) = J\bar{x} + \ldots$$

Теорема Ляпунова об устойчивости в лин. приближении.

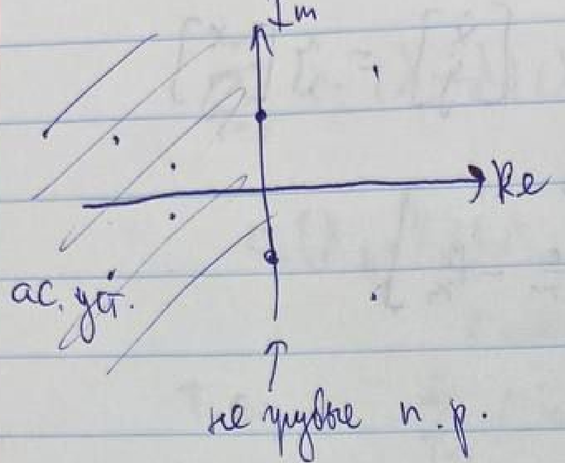
Если все $Re\,\lambda_i < 0$ лин. сист., то ~~нр~~ п.р. мех. сист. ас. уст.

Если $\exists\, \lambda_i$: $Re\,\lambda_i > 0$, то п.р. мех. сист. неуст.

(Гантмахер §38)

Замечание если $\exists\, Re\,\lambda_i = 0$, то по линеаризации судить о хар-ре уст-ти нельзя ($\dot{x} = \underset{0}{\lambda} x \pm x^3$)

Опр. П.р. наз. грубым, если $\forall i \ \mathrm{Re}\,\lambda_i \neq 0$

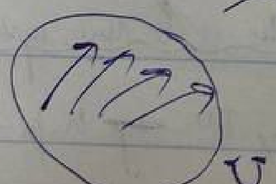


Лекция 3.

Дин. сист. 2-го порядка

$$\begin{cases} \dot x = f(x,y) \\ \dot y = g(x,y) \end{cases} \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

Теорема о выпрямлении век. поля.



$\dot x_1 = 1, \ \dot x_2 = 0, \ \dots, \ \dot x_n = 0$ (нет ПР вокр.)

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \bar{u}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \bar{u}_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$|J - \lambda E| = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} J + \det J = 0$$

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in Re \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$
2. $\lambda_1, \lambda_2 \in Re \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$
3. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \quad Re\lambda_1 = Re\lambda_2 \neq 0$
4. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \quad Re\lambda_1 = Re\lambda_2 = 0$

1. $\lambda_2 < \lambda_1 < 0 \qquad \bar{u}_1, \bar{u}_2$

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} \qquad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = c_1 u_{11} e^{\lambda_1 t} + c_2 u_{21} e^{\lambda_2 t} \\ y = c_1 u_{12} e^{\lambda_1 t} + c_2 u_{22} e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{c_1 u_{12} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 u_{22} \lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 u_{11} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 u_{21} \lambda_2 e^{\lambda_2 t}} =$$

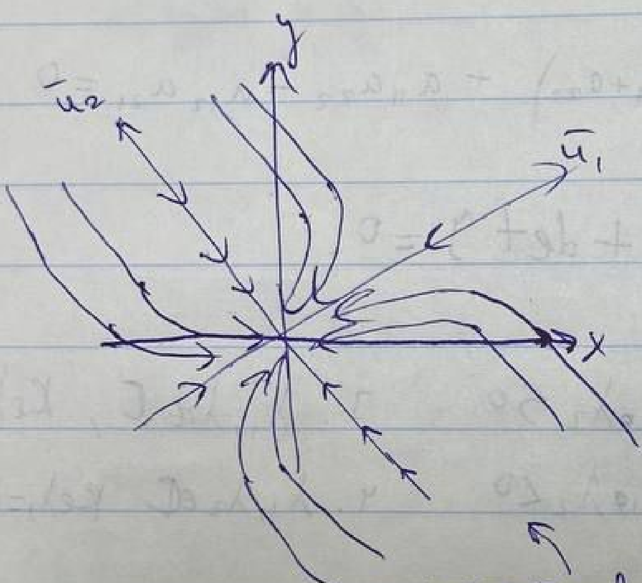
$$\frac{\dot y}{\dot x} = \frac{c_1 u_{12}\lambda_1 + c_2 u_{22}\lambda_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}{c_1 u_{11}\lambda_1 + c_2 u_{21}\lambda_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}$$

$t \to +\infty$ $\quad \frac{\dot y}{\dot x} \to \frac{u_{12}}{u_{11}}$, если $c_1 \neq 0$

если $c_1 = 0$ $\quad \frac{\dot y}{\dot x} = \frac{u_{22}}{u_{21}}$

$\Rightarrow \frac{\dot y}{\dot x} \to \parallel \bar u_1$, $c_1 \neq 0$

$c_1 = 0 \Rightarrow \frac{\dot y}{\dot x} \parallel \bar u_2$



устойчивый узел

$t \to -\infty$ $\quad e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} \to +\infty$

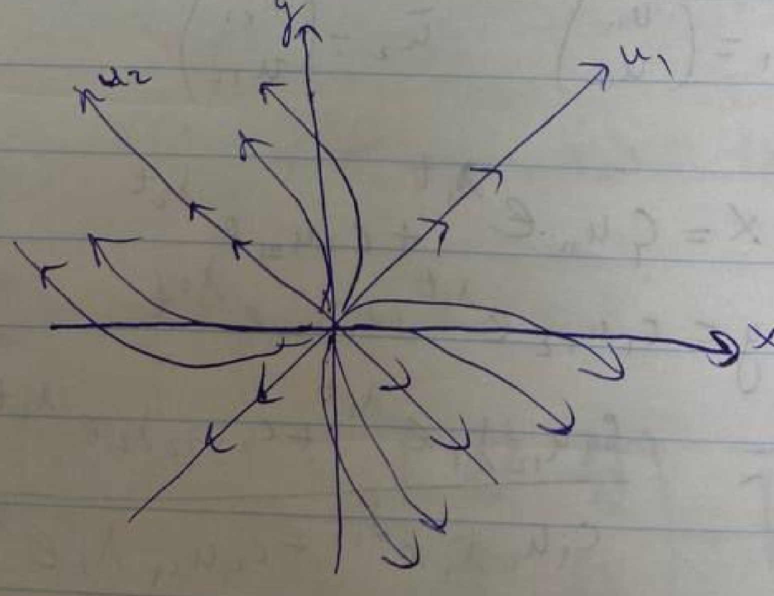
$\frac{\dot y}{\dot x} \to \frac{u_{22}}{u_{21}}$, если $c_2 \neq 0$

если $c_2 = 0$

$\frac{\dot y}{\dot x} = \frac{u_{12}}{u_{11}}$

неуст. узел

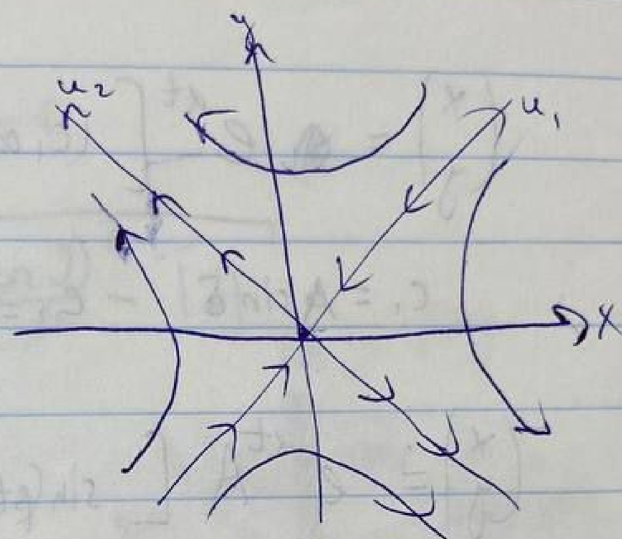
$\lambda_2 > \lambda_1 > 0$



2. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}e$ $\quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$

$$\binom{x}{y} = c_1 \bar{u}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \bar{u}_2 e^{\lambda_2 t}$$

$\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 < 0$



седло

(неуст.)

$\bar{u}_1$ — уст. многообразие

$\bar{u}_2$ — неуст. многообразие

3. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ $\quad \lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

$(\bar{u}_1 + i\bar{u}_2)$ — собств. в-ор λ_1

Част. реш. $(\bar{u}_1 + i\bar{u}_2) e^{\lambda_1 t} = e^{\alpha t} (\bar{u}_1 + i\bar{u}_2)(\cos\beta t + i \sin\beta t) =$

$= e^{\alpha t}(\cos\beta t \, \bar{u}_1 - \sin\beta t \, \bar{u}_2) + i e^{\alpha t}(\cos\beta t \, \bar{u}_2 + \sin\beta t \, \bar{u}_1) =$

$= \bar{q}(t) + i \bar{p}(t)$

$c = \frac{c_1}{2} - i \frac{c_2}{2}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C(\bar{q} + i\bar{p}) + \bar{C}(\bar{q} - i\bar{p}) =$$

$$= c_1 \bar{q} + c_2 \bar{p}$$

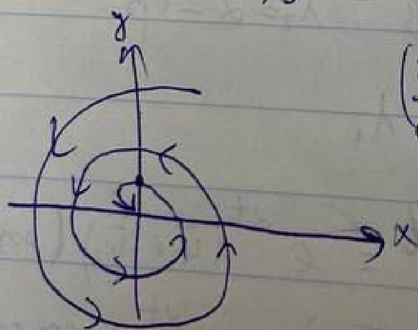
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\alpha t}\left[(c_1 \cos\beta t + c_2 \sin\beta t)\bar{u}_1 + (-c_1 \sin\beta t + c_2 \cos\beta t)\bar{u}_2 \right]$$

$c_1 = A \sin\delta \qquad c_2 = A\cos\delta$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\alpha t} A \left[\sin(\beta t + \delta)\bar{u}_1 + \cos(\beta t + \delta)\bar{u}_2 \right]$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A e^{\alpha t} \left(\sin(\beta t + \delta), \cos(\beta t + \delta) \right) \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix}$$

$\alpha < 0$ устойчивый фокус



$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \quad \dot{y}_{(0,1)} = a_{21}$

$\dot{x}(0,1) = a_{12}$

$a_{12} > 0$ ↷

$a_{12} < 0$ ←

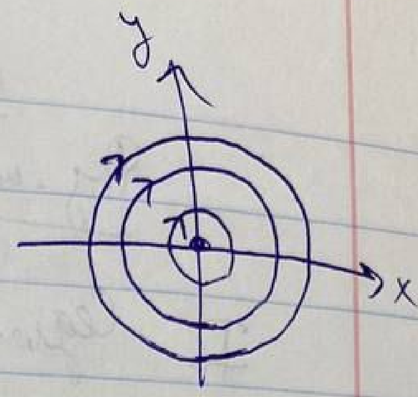
$\alpha > 0$

неуст. фокус

4. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 = 0$

центр $\qquad \alpha = 0$

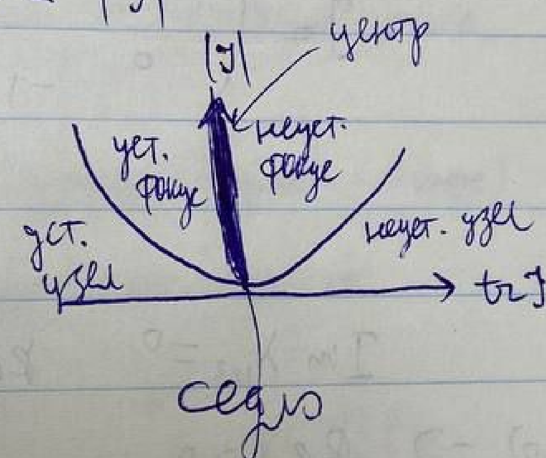
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A(\sin(\ldots), \cos(\ldots)) \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix}$



$\lambda^2 - (\operatorname{tr} J)\lambda + |J| = 0$

$\lambda_{1,2} = +\frac{\operatorname{tr} J}{2} \pm \sqrt{\frac{(\operatorname{tr} J)^2}{4} - |J|}$

$|J| = \frac{(\operatorname{tr} J)^2}{4}$



Лекция 4

Фаз. портр. и бифурк. в двумер. д. с.

I. Седло-узловая бифуркация

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

П. р. $x = \pm\sqrt{\alpha},\ \alpha \geq 0$ $\quad x \in \varnothing,\ \alpha < 0$

$y = 0$

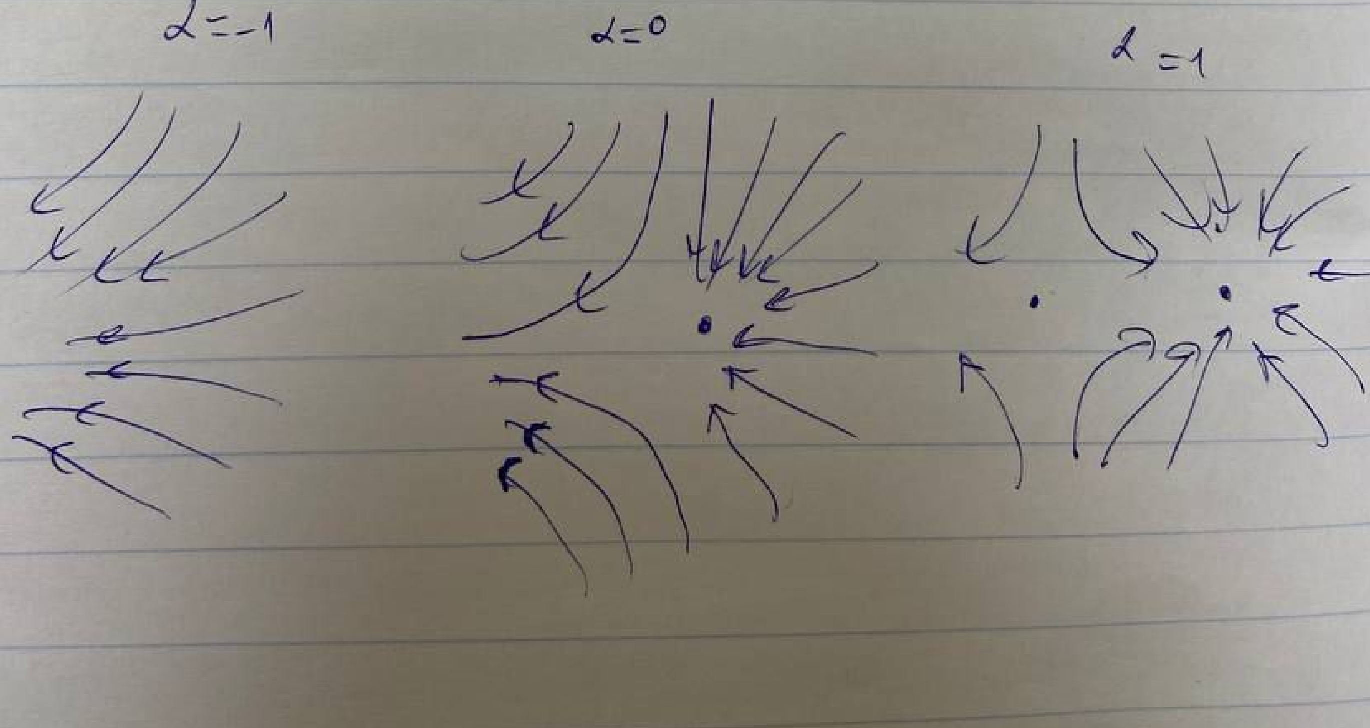
$$J = \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (\sqrt{\alpha}, 0) \Rightarrow J = \begin{bmatrix} -2\sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(-2\sqrt{\alpha} - \lambda)(-1-\lambda) = 0 \Rightarrow \text{узел (уст.)}$$

$\operatorname{Im} \lambda_{1,2} = 0 \quad \operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$

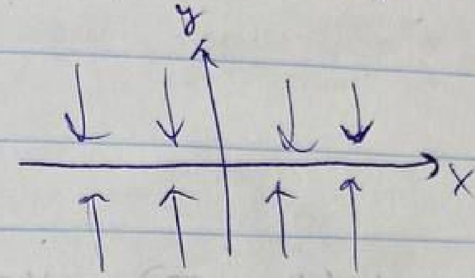
$(-\sqrt{\alpha}, 0) \Rightarrow \operatorname{Re}\lambda_1 > 0$

$\operatorname{Re}\lambda_2 < 0 \Rightarrow$ седло $\quad \operatorname{Im}_{1,2} = 0$



$\alpha = 0 \Rightarrow (0,0)$ — н.р.

$$J = \begin{bmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad -\lambda(1-\lambda) = 0$$

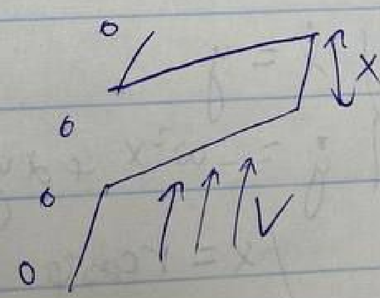


II. Бифуркация рождения предельного цикла.

(б. Пуанкаре – Андронова – Хопфа)

Пример 1. Задача о галопировании крыла.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = V^2\left(a_1\frac{\dot{x}}{V} - a_3\frac{\dot{x}^3}{V^3}\right)$$



$m, b, c, a_1, a_3, V > 0$

уст. п.р. $x^* = 0$?

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\dfrac{by - cx + Va_1 y - \frac{a_3}{V}y^3}{m} \end{cases}$$

$\frac{c}{m} = \omega^2$; $\alpha = \frac{Va_1 - b}{m}$; $\beta = +\frac{a_3}{mV}$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x + \alpha y - \beta y^3 \end{cases}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$-\lambda(\alpha-\lambda)+\omega^2=0$$

$$\lambda^2-\alpha\lambda+\omega^2=0$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-4\omega^2}\right) =$$

$$= \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\omega^2}$$

$\alpha < 0 \Rightarrow x=0$ ас. уст. н.р.

$\omega > \frac{\alpha}{2}$?

$\alpha = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm i\omega$

$\alpha > 0 \Rightarrow x=0$ – неуст. н.р.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x + \alpha y - \beta y^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = \omega r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) & \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi = \omega r\sin\varphi \\ (2) & \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = -\omega r\cos\varphi + \alpha r\sin\varphi - \beta\omega^2 r^3\sin^3\varphi \end{cases}$$

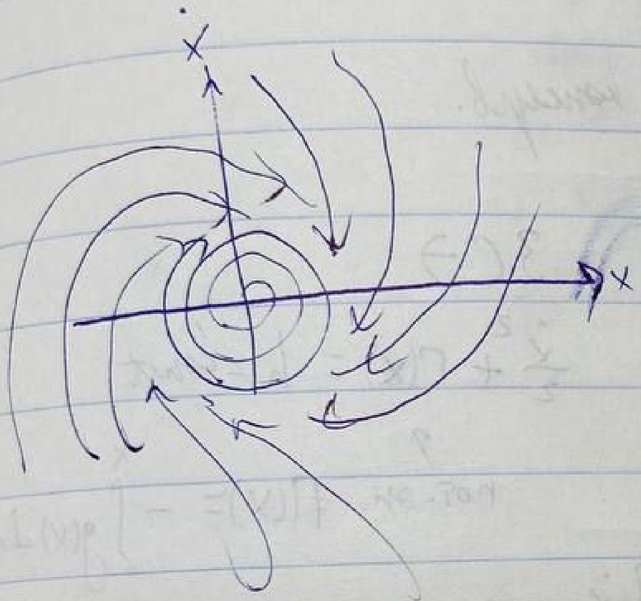
$(1)\cdot\cos\varphi + (2)\cdot\sin\varphi$

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r\sin^2\varphi - \beta\omega^2 r^3\sin^4\varphi \\ \cancel{r}\dot{\varphi} = -\omega\cancel{r} + \alpha\cancel{r}\sin\varphi\cos\varphi - \beta\omega^2 r^3\sin^3\varphi\cos\varphi \end{cases}$$

$\alpha, \beta > 0$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r(\alpha \sin^2\varphi - \beta\omega^2 r^2 \sin^4\varphi)}{-\omega + \sin\varphi\cos\varphi(\alpha - \beta\omega^2 r^2 \sin^2\varphi)}$$

(можно в ряд Фурье и усреднить)



$$\int_0^{2\pi} \frac{dr}{d\varphi} d\varphi$$

$$\alpha \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi = \beta\omega^2 r_0^2 \int_0^{2\pi} \sin^4\varphi \, d\varphi$$

$$\pi \qquad\qquad \frac{3}{4}\pi$$

$$r_0 = \sqrt{\frac{4\alpha}{3\beta\omega^2}}$$

Опр. Предельным циклом наз. замкнутая периодич. траектория, в окр. кот. 1) нет других пер. тр-ий; 2) все траект. из нек. окр. притягиваются к ней при $t \to +\infty$ (уст. пр. цикл) при $t \to -\infty$ (неуст. пр. цикл)

Опр. Аттрактором наз. ~~замкнутое~~ компактное ~~ф~~ подмн-во фазового пр-ва, к кот. ~~прит~~ стремятся все траектории из некот. его окр. при $t \to +\infty$. Область притяж. наз. ~~бас~~ бассейном аттрактора

Опр. Репеллер — — " — при $t \to -\infty$

III. Консерв. сист. в механике

$\ddot{x} = +g(x) \to$ консерв.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = +g(x) \end{cases}$$

ЗСЭ.

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \Pi(x) = h = const$$

пот. эн. $\Pi(x) = -\int\limits_0^x g(x)\,dx$

$$\dot{x}\ddot{x} + \frac{d\Pi}{dx}\dot{x} = 0 \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{d\Pi}{dx} = g(x)$$

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2(h - \Pi(x))}$$

Пример 2 $\quad \ddot{x} + \overset{\omega^2}{\vee}\sin x = 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin x \end{cases}$$

$y = 0$, $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pm\pi$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2\cos x & 0 \end{pmatrix}$$

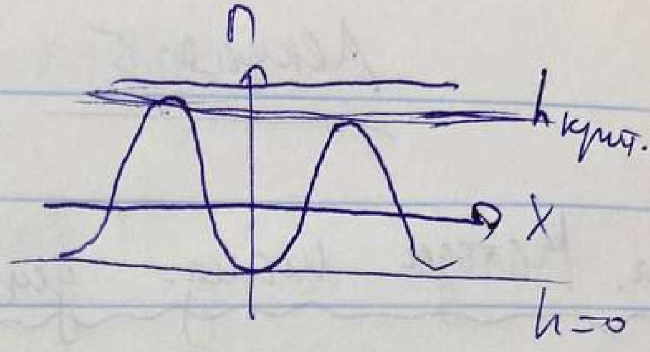
$$J_{x=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{1,2} = \pm i\omega$$

(центр)

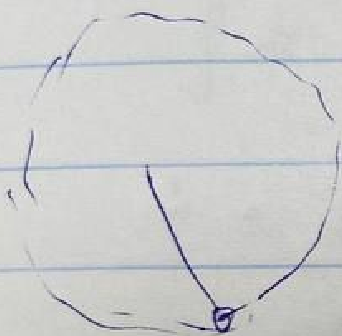
$$J_{x=\pm\pi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{1,2} = \pm\omega$$

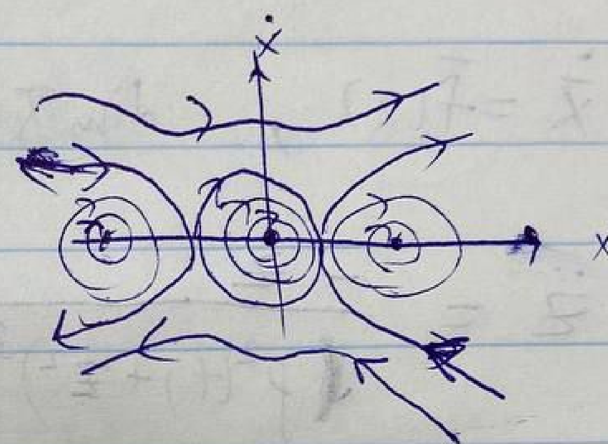
(седло)

$\Pi(x) = -\omega^2 \cos x$



$X = S^1 \times \mathbb{R}^1$





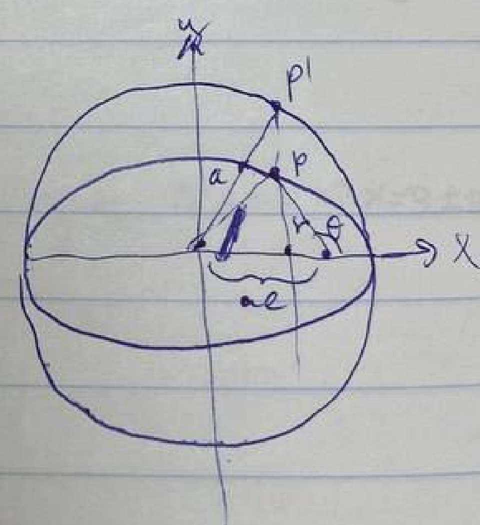
Лекция 5

Кач. методы исслед. дин. систем

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}), \quad \dim X = n$$

$$\ddot{z} = \frac{-z}{(\rho^2(t) + z^2)^{3/2}}$$

$$\begin{cases} \dot{z} = v \\ \dot{v} = \dfrac{-z}{(\rho^2(u) + z^2)^{3/2}} \\ \dot{u} = 1 \end{cases}$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

E – эксцентрич. аномалия

$$\cos E = \frac{x}{a}$$

$$\sin E = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{y}{b}$$

$$\rho^2 = y^2 + (ae - a\cos E)^2 = b^2\sin^2 E + a^2(e - \cos E)^2 =$$

$$= a^2(1-e^2)\sin^2 E + a^2(e - \cos E)^2 =$$

$$= a^2(1 - e^2\sin^2 E + e^2 - 2e\cos E) =$$

$$= a^2 (1 + e^2 \cos^2 E - 2e \cos E) = $$

$$= a^2 (1 - e \cos E)^2$$

$$\rho = a(1 - e \cos E)$$

$$\dot{S} = const$$

$$S = \pi a b = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$$

$$S_{AFP} = \pi a^2 \sqrt{1-e^2} \, \frac{t - t_0}{T}$$

$$S_{P'OA} = \frac{a^2 E}{2}, \quad S_{POA} = \frac{a^2 E}{2} \sqrt{1-e^2}$$

$$S_{OFP} = \frac{1}{2} y a e = \frac{a b e \sin E}{2} = \frac{a^2 e \sin E \sqrt{1-e^2}}{2}$$

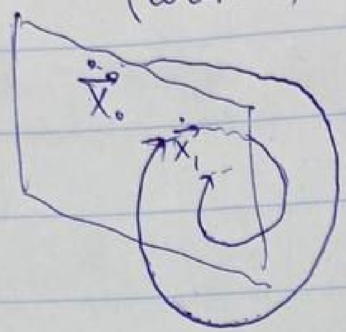
$$S_{AFP} = S_{OPA} - S_{OFP} = \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{2} (E - e \sin E)$$

$$E - e \sin E = 2\pi \frac{(t - t_0)}{T} = M$$ – ср. аномалия

$$T \to 2\pi, \quad t_0 \to 0$$

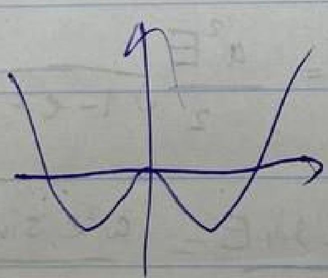
$$\begin{cases} E - e \sin E = t \\ \rho = a(1 - e \cos E) \end{cases}$$ – ур-е Кеплера

Отображение Пуанкаре
(сечение)



Осциллятор Дюффинга

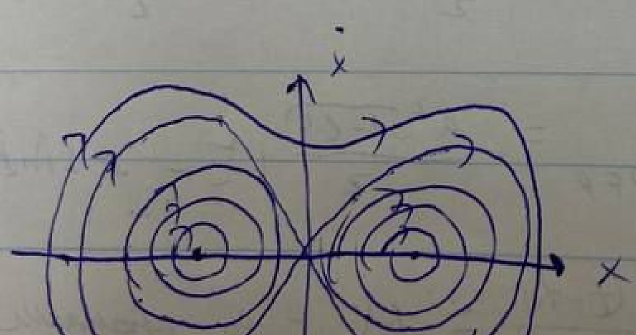
$$\Pi = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \qquad \ddot{x} = -\frac{d\Pi}{dx}$$



$$\ddot{x} + x^3 - x = 0$$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + x^3 - x = \varepsilon\cos t$$

$$t \bmod 2\pi$$



Метод ф-ций Ляпунова.

$\dot{\vec{x}} = \bar{f}(\bar{x})$, $\dim X = n$

$V(\vec{x})$, $\frac{dV_f}{dt}$ - произв. в силу ур-й дв-я

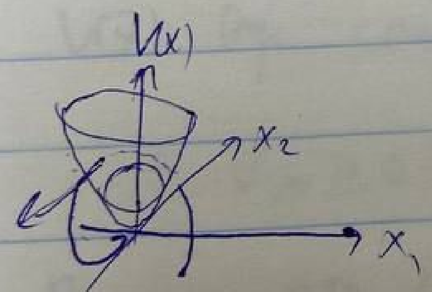
$$\frac{dV_f}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\dot{x}_n = \operatorname{grad} V \cdot \bar{f}(\bar{x}) < 0$$

$\Downarrow$

$\bar{x} = \bar{0}$ – ас. уст. ПР.

$\bar{x} = 0$ - п. р.

$V(0) = 0$ $V(\bar{x}) > 0$ в окр. $\bar{x}_0 = 0$



Лекция 6

Метод ф-ций Ляпунова

Теорема Ляпунова об устойчивости. $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$

$\dim \bar{X} = n$

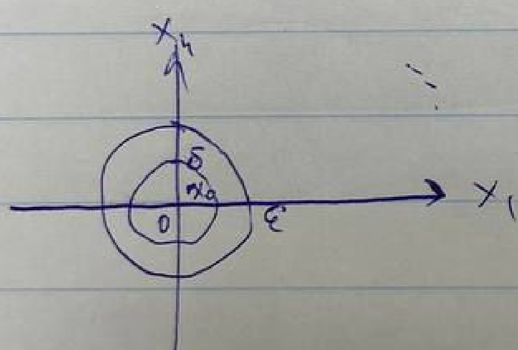
Если $\exists V(\vec{x})$ в ε-окр. п.р. $\vec{x} = 0$:

1) $V(\bar{x}) > 0 \quad \forall\, 0 < |\bar{x}| < \varepsilon$

2) $V(0) = 0$

3) $\dot{V}_f(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall |\bar{x}| < \varepsilon$,

то п.р. $\bar{x} = 0$ – уст.



$V(0)$ – min $\quad V_\varepsilon^{min} > 0$ – min знач. на границе ε-окр.

δ-окр. $\subset \varepsilon$-окр., V_δ^{max} – max. на гран. δ-окр.

$\bar{x}_0 \in \delta$-окр. $\quad V(\bar{x}(x_0, t)) \leq V(\bar{x}_0) \leq V_\delta^{max} < V_\varepsilon^{min}$

Теорема Барбашина – Красовского (об ас. уст.)

— || —

3) $\dot V_f(\bar x) \le 0$ $\forall |\bar x| < \varepsilon$ и подмн-во фазового пр-ва, на кот. вып. $\dot V_f(\bar x) = 0$ не содержит тр-рий кроме $\bar x = 0$, то $\bar x = 0$ – ас. уст. п.р.

Если $\bar x(\bar x_0, t) \not\equiv 0$, то $\exists t^*$ $V(x(\bar x, t^*)) < V(\bar x_0)$

□ $\bar x = 0$ – уст. п.р.

$V(\bar x)$ огр. снизу и мон. убыв. $\Rightarrow \exists \lim\limits_{t\to\infty} V(\bar x(\bar x_0, t)) =$

$= V_\infty \ge 0.$

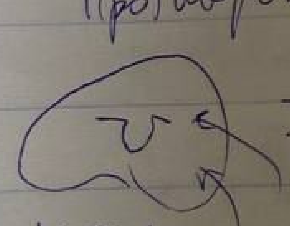
Предпол., что $\bar x(x_0, t) \not\to 0$, тогда $V_\infty > 0$

$\lim\limits_{t\to\infty} \dot V_f(\bar x(x_0, t)) = 0$

$\bar x(\bar x_0, t)$ при $t \to \infty$: $U \Rightarrow V = const$

$\bar x_0 \in U \to$ реш. $\bar x(x_0, t)$ $V = const$

Противоречие. $\Rightarrow V_\infty = 0 \Rightarrow \bar x \to 0$



X $\quad \dot x = 0$

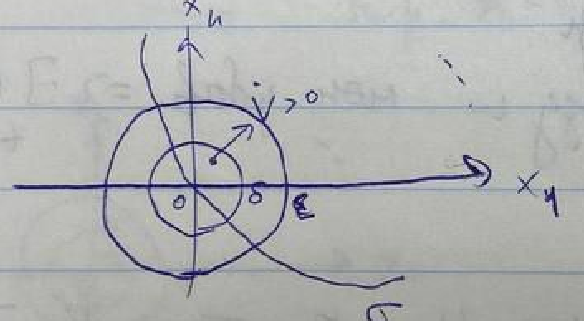
V=const

Теорема Красовского (о неустойчивости)

Если в ε-окр. п.р. $\exists$ область σ и $\exists\ V(\bar{x})$:

1) $V(\bar{x}) > 0$ в обл. σ
2) $V = 0$ на границе σ
3) $\dot{V}_f(\bar{x}) \geq 0$ в σ, причём подмн-во фаз. пр-ва, на кот. вып. $\dot{V}_f(\bar{x}) = 0$ не содержит реш. системы, отличных от $\bar{x} = 0$,

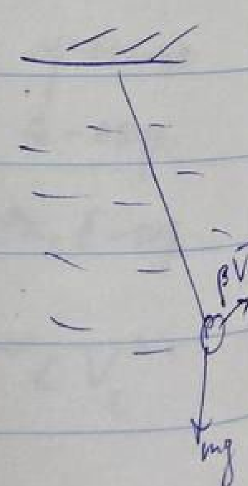
то $\bar{x} = 0$ – неуст. п.р.



Пример 1.

$$\cancel{m\ddot{x} + \beta\dot{x} + \sin x = 0}$$

$$ml^2\ddot{\varphi} + \beta l^2\dot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0$$



$\frac{\beta}{m} = 1 \qquad \frac{g}{l} = 1$

$x = \varphi \qquad y = \dot{\varphi}$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x - y \end{cases}$$

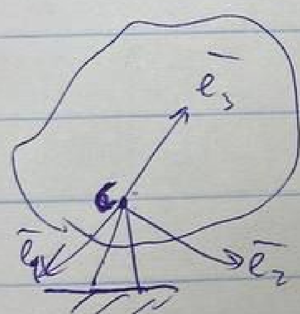
$$V = \frac{y^2}{2} + 1 - \cos x$$

$$\dot V_f = y\dot y + \dot x \sin x = -y^2 - \cancel{y \sin x} + \cancel{y \sin x} = -y^2 \le 0$$

$$y \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ас. уст. п.р.}$$

<u>Пример 2</u> $\quad \dot{\bar e} = \bar\omega \times \bar e$



$$\vec L = L_1 \bar e_1 + L_2 \bar e_2 + L_3 \bar e_3$$

C — ц.м.

$$\frac{d\bar L}{dt} = 0 \quad \text{(в невесомости вращ.)}$$

$$\dot L_1 e_1 + \dot L_2 e_2 + \dot L_3 e_3 + L_1 \dot e_1 + L_2 \dot e_2 + L_3 \dot e_3$$

$$J_z > J_x > J_y$$

$$\bar L = \begin{pmatrix} J_x \omega_x \\ J_y \omega_y \\ J_z \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x & & 0 \\ & J_y & \\ 0 & & J_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\bar L}{dt} = J_\alpha \dot\omega_\alpha \bar e_\alpha + J_\alpha \omega_\alpha [\bar\omega \times \bar e_\alpha], \quad \omega = \omega_\alpha e_\alpha$$

$$\left(\frac{d\bar L}{dt}\right)_\gamma = J_\gamma \dot\omega_\gamma + J_\alpha \omega_\alpha \epsilon_{nm\gamma} \omega_n \underbrace{e_{\alpha m}}_{\delta_{\alpha m}} = J_\gamma \dot\omega_\gamma + J_\alpha \omega_\alpha \epsilon_{n\alpha\gamma} \omega_n$$

$$\begin{cases} J_x \dot\omega_x + (J_z - J_y)\,\omega_y \omega_z = 0 \\ J_y \dot\omega_y + (J_x - J_z)\,\omega_x \omega_z = 0 \\ J_z \dot\omega_z + (J_y - J_x)\,\omega_x \omega_y = 0 \end{cases}$$

$$\bar\omega = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde\omega = \begin{bmatrix} \omega + x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} J_x \dot x + (J_z - J_z)\, yz = 0 \\ J_y \dot y + (J_x - J_z)(\omega + x) z = 0 \\ J_z \dot z + (J_y - J_x)(\omega + x) y = 0 \end{cases}$$

возмущенные ур-я дв-я

$$\Downarrow$$

$$\dot x = \frac{-J_z + J_y}{J_x} yz$$

$$\dot y = \frac{J_z - J_x}{J_y} (\omega + x) z$$

$$\dot z = \frac{J_x - J_y}{J_z} (\omega + x) y$$

$$V = yz$$

$$\dot V_t = \dot y z + y \dot z = (\omega + x) \left[\frac{J_z - J_x}{J_y} z^2 + \frac{J_x - J_y}{J_z} y^2 \right]$$

$$\sigma = \{ y > 0,\ z > 0,\ x > -\omega \} \Rightarrow$$ вращ. вокруг оси

со ср. мом.-ин. неустойчиво

Градиентные системы.

Теорема. Если $\exists\, G(\bar{x})$, что $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) =$

$= -\operatorname{grad} G(\bar{x})$,

то период. решений в системе нет.

$\square$ Предположим обратное. $\exists$ пер. реш.

$G(\bar{x}(T)) = G(\bar{x}(0))$

$G(x(T)) - G(x(0)) =$

$$= \int_0^T \frac{dG}{dt}\, dt = \int_0^T \left(\frac{\partial G}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial G}{\partial x_n} \dot{x}_n \right) dt =$$

$$= \int_0^T \left(-\dot{x}_1^2 - \ldots - \dot{x}_n^2 \right) dt < 0 \quad \blacksquare$$

Противоречие

Пример 3

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos y \\ \dot{y} = -x \sin y \end{cases} \qquad G = -x \cos y$$

Пример 4. $\ddot{x} - x = 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases} \qquad G = -xy$$

Теорема (критерий Дюлака)

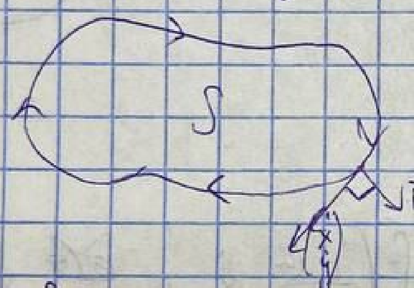
$n=2$ $\quad \dot{x} = f(x,y) \quad \dot{y} = g(x,y)$

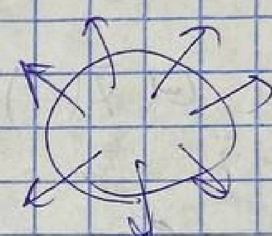
Если в односвязной обл. $\exists\ B(x,y)$,

такая что $\operatorname{div}\left(B\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}\right)$ знакопостоянна,

то периодич. траекторий в этой обл. нет.

$\square$ $\quad \operatorname{div}\left(B\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}\right) > 0$





$$\iint_S \underbrace{\operatorname{div} F}_{>0}\, \underbrace{dS}_{>0} = \oint_\gamma \underbrace{(F\cdot n)}_{=0}\, d\gamma$$

$F = B\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} \qquad F\cdot n = B\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} n = 0$

Противоречие.

$\Rightarrow$ нет период. тр-рий $\blacksquare$

Пример 5 $\qquad \ddot{x} + \dot{x} + \frac{\dot{x}^3}{3} + f(x) = 0$

$B = 1$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x) - y - \frac{y^3}{3} \end{cases}$$

$$\operatorname{div} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = 0 - 1 - y^2 < 0 \Rightarrow$$

пер. реш. нет

Теорема Пуанкаре-Бендиксона

$n = 2 \qquad \dot{x} = f(x,y), \quad \dot{y} = g(x,y)$

Предположим, что в (компактной) обл., не содерж. неподвижных точек $\exists$ тр-рия, целиком лежащая в этой области. Тогда эта тр-рия или пер., или стремится к пер.

Лекция 7

Кватернионы

1. Плоскость 1) $\mathbb{R}$, $\det R = 1$, $\dim R = 2$

2) $re^{i\varphi}$; $e^{i\varphi}$, $|e^{i\varphi}| = 1$

2. 3-х мерное пр-во. 1) R, $\det R = 1$, $\dim R = 3$

2) кватернионы (гиперкомпл.)

V – 4-х мерное лин. пр-во над $\mathbb{R}$

$\lambda_k \in \mathbb{R}$, i_k, $k=\overline{0,3}$

$$\Lambda = \lambda_0 i_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3$$

	i_0	i_1	i_2	i_3
i_0	i_0	i_1	i_2	i_3
i_1	i_1	$-i_0$	i_3	$-i_2$
i_2	i_2	$-i_3$	$-i_0$	i_1
i_3	i_3	i_2	$-i_1$	$-i_0$

$i_0 = 1$

i_1, i_2, i_3 – ОНБ в E^3

$$\bar i_k \circ \bar i_m = -\bar i_k \cdot \bar i_m + \bar i_k \times \bar i_m$$

$\forall k, m = 1, 2, 3$

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \bar i_1 + \lambda_2 \bar i_2 + \lambda_3 \bar i_3 =$$
$$= \lambda_0 + \vec{\lambda}$$

$$M = \mu_0 + \bar\mu$$

$$\Lambda \circ M = \underbrace{\lambda_0 \mu_0 - (\bar\lambda \cdot \bar\mu)}_{\text{скал. часть}} + \underbrace{\lambda_0 \bar\mu + \mu_0 \bar\lambda + \bar\lambda \times \bar\mu}_{\text{вект. часть}}$$

1) ассоц.

2) дистр.

3) билин.

4) некомм.

Опр. Сопряжен. кват. $\bar{\Lambda} = \lambda_0 - \vec{\lambda}$

Норма: $\|\Lambda\| = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \Lambda \circ \bar{\Lambda}$

Модуль: $|\Lambda| = \sqrt{\|\Lambda\|}$

Если $|\Lambda| \neq 0$, то $\exists\, \Lambda^{-1} = \dfrac{\bar{\Lambda}}{\|\Lambda\|}$

$$\Lambda \circ \Lambda^{-1} = 1$$

Св-ва: $\|\Lambda \circ M\| = \|\Lambda\| \cdot \|M\|$

$$\overline{\Lambda \circ M} = \overline{(\lambda_0 + \bar{\lambda}) \circ (\mu_0 + \bar{\mu})} =$$

$$= \lambda_0 \mu_0 - (\bar{\lambda} \cdot \bar{\mu}) - \lambda_0 \bar{\mu} - \bar{\lambda} \mu_0 - \bar{\lambda} \times \bar{\mu} =$$

$$= (\mu_0 - \bar{\mu}) \circ (\lambda_0 - \bar{\lambda}) = \bar{M} \circ \bar{\Lambda}$$

$$(\Lambda \circ M)^{-1} = M^{-1} \circ \Lambda^{-1}$$

$\|\Lambda\| = 1$ – нормир. кват.

Присоединенное отображ.: $R' = \Lambda \circ R \circ \overline{\Lambda}$

$$R \xRightarrow{\Lambda} R'$$

Св-ва: 1. $R = r_0 + \bar{r}$, $R' = r_0' + \bar{r}'$, то

$$r_0 = r_0'$$

$$(\lambda_0 + \bar{\lambda}) \circ (r_0 + \bar{r}) \circ (\lambda_0 - \bar{\lambda}) = \Lambda \circ (r_0 + \bar{r}) \circ \overline{\Lambda} =$$

$$= \Lambda \circ (r_0 \overline{\Lambda}) + \Lambda \circ \bar{r} \circ \overline{\Lambda} = r_0 + \underbrace{\Lambda \circ \bar{r} \circ \overline{\Lambda}}_{\text{нулевая скал. часть?}} =$$

$$= r_0' + \bar{r}$$

$$\overline{\Lambda \circ \bar{r} \circ \overline{\Lambda}} = \overline{\vec{r} \circ \overline{\Lambda}} \circ \overline{\Lambda} =$$

$$= \Lambda \circ \overline{\vec{r}} \circ \overline{\Lambda} = -\Lambda \circ \bar{r} \circ \overline{\Lambda}$$

$\Downarrow$

скал. часть $= 0$.

$$\boxed{r_0 = r_0'}$$

2. $R = r_0 + \bar{r}$, $R' = r_0' + \bar{r}'$, то $|\bar{r}| = |\bar{r}'|$

$$\|R'\| = \underbrace{\|\Lambda\|}_{1} \cdot \|R\| \cdot \underbrace{\|\overline{\Lambda}\|}_{1} = \|R\|, \Rightarrow |\bar{r}| = |\bar{r}'|$$

$\|\Lambda\| = 1$, $\quad \Lambda = \lambda_0 + \bar{\lambda} = \lambda_0 + \lambda \bar{e}$

$$\lambda_0^2 + \lambda^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = \cos\frac{\varphi}{2} \\ \lambda = \sin\frac{\varphi}{2} \end{cases}$$

$\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \bar{e}\sin\frac{\varphi}{2}$ — триг. форма записи кватерниона

<u>Теорема</u> Поворот, определяемый кват. Λ в 3-мерном евкл. пр-ве E^3 — это поворот вокруг $\bar{e}$ на угол φ.

$\square$ $\bar{i}_1 = \bar{e}$ $\qquad \bar{i}_2, \bar{i}_3 \perp \bar{e}$

$$\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \vec{i}_1 \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\vec{i}_1' = \Lambda \circ \bar{i}_1 \circ \bar{\Lambda} = \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \vec{i}_1 \sin\frac{\varphi}{2}\right) \circ \vec{i}_1 \circ \left(\cos\frac{\varphi}{2} - \vec{i}_1 \sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= \left(\cos\frac{\varphi}{2} + i_1 \sin\frac{\varphi}{2}\right) \circ \left(\cos\frac{\varphi}{2} i_1 + \sin\frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + \cancel{\cos} \, i_1 +$$

$$+ \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}(-1) = \cancel{\cos} \, \vec{i}_1$$

$$\vec{i}_2' = \vec{i}_3 \sin\varphi + \vec{i}_2 \cos\varphi$$

$$\vec{i}_3' = -\vec{i}_2 \sin\varphi + \vec{i}_3 \cos\varphi$$

$$\begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \\ i_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{r}\,' = \tilde{\Lambda} \circ \vec{r} \circ \Lambda}$$

поворот в-ра $\vec{r}$ на угол φ вокруг $\vec{e}$

$$\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\,\vec{e}$$

Лекция 8

Кватернионы

1) $i_\alpha \xrightarrow{\Lambda} i'_\alpha \xrightarrow{M} \vec{e}_\alpha$

$N = M \circ \Lambda$

$N = \Lambda_n \circ \dots \circ \Lambda_1$

2) собств. базис

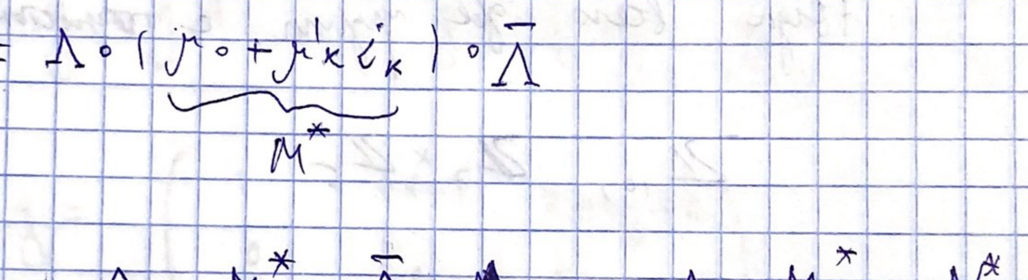
$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_\alpha i_\alpha$, $M = \mu_0 + \mu'_\alpha i'_\alpha$, $N = \eta_0 + \eta_\alpha i'_\alpha$

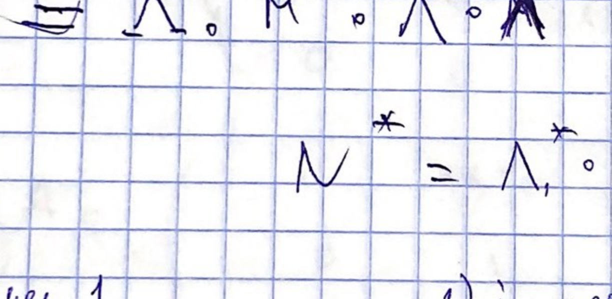
$$M = \Lambda \circ (\underbrace{\mu_0 + \mu'_k i_k}_{M^*}) \circ \bar{\Lambda}$$

$$N = \Lambda \circ M^* \circ \bar{\Lambda} \circ \Lambda = \Lambda \circ M^* \Rightarrow N^* = \Lambda^* \circ M^*$$

$$N^* = \Lambda_1^* \circ \dots \circ \Lambda_n^*$$

Пример 1 1) $i_1, 180^\circ$ 2) $i_2, 90^\circ$





$\Lambda_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i_1 \sin\frac{\pi}{2} = i_1$

$\Lambda_2 = \cos\frac{\pi}{4} + i_2 \sin\frac{\pi}{4} = \frac{i_2\sqrt{2}}{2}$

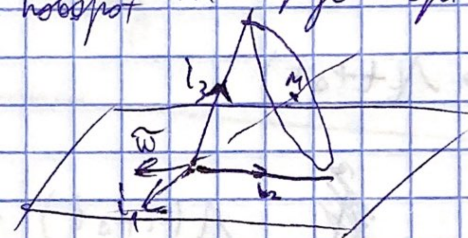
$\Lambda_1' = \Lambda_2$

$\Lambda_2' = \Lambda_1$

$$\Lambda = \bar{\Lambda}_2' \circ \bar{\Lambda}_1' \circ \Lambda_1 \circ \Lambda_2 = \bar{\Lambda}_1 \circ \bar{\Lambda}_2 \circ \Lambda_1 \circ \Lambda_2$$

Пример 2 $\qquad \bar{\Omega}$ – поворот он вокруг вертикали

$\Lambda(t)$



$\bar{v}_0 = 0$, $\bar{V}_A = 0$, $V_A = \bar{V}_0 + \bar{\omega} \times \overline{OA}$

$\bar{\omega} \parallel OA$

$\bar{\omega} = \omega i_2$

$$\omega = \Omega i_3 + \tilde{\omega}\,\frac{i_2 + i_3}{\sqrt{2}} = \omega i_2$$

$$\Omega + \frac{\tilde{\omega}}{2} = 0 \Rightarrow \tilde{\omega} = -\sqrt{2}\,\Omega$$

$\underline{\omega = -\Omega}$

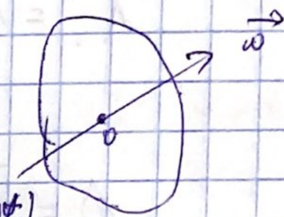
$\Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2$

$$\theta = \int_0^t \Omega(\tau)\, d\tau \qquad \Lambda_1 = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\, i_3$$

$$\Lambda_2 = \cos\frac{-\sqrt{2}\,\theta}{2} + \frac{i_2 + i_3}{\sqrt{2}} \sin\frac{-\sqrt{2}\,\theta}{2}$$

4. Кинематич. ур-ие Пуассона

$$\Lambda(t) = \cos\frac{\varphi(t)}{2} + \vec{e}(t)\sin\frac{\varphi(t)}{2}$$



$$\Lambda(t+\Delta t) = \cos\frac{\varphi(t+\Delta t)}{2} + \vec{e}(t+\Delta t)\sin\frac{\varphi(t+\Delta t)}{2}$$

$$\Delta\Lambda = \cos\frac{\Delta\varphi}{2} + \vec{\varepsilon}\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \simeq 1 + \vec{\varepsilon}\,\frac{\Delta\varphi}{2}$$

$$\Lambda(t) \to \Lambda(t+\Delta t)$$

$$\Lambda(t+\Delta t) = \Delta\Lambda \circ \Lambda(t)$$

$$\dot{\Lambda} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Lambda(t+\Delta t) - \Lambda(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(1+\vec{\varepsilon}\,\frac{\Delta\varphi}{2} - 1\right)\circ\Lambda(t)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\vec{\varepsilon}}_{\vec{\omega}} \circ \Lambda(t) = \frac{1}{2}\vec{\omega}\circ\Lambda$$

2) $\Lambda(t+\Delta t) = \Lambda\circ\Delta\Lambda$

$$\boxed{\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\Lambda\circ\vec{\omega}}$$

<u>Пример 3</u> $\quad \Lambda(t) - ? \quad \psi, \theta, \varphi$

$$\dot\omega_x = \frac{J_y - J_z}{J_x}\omega_y \omega_z$$

$$\dot\omega_y = \frac{J_z - J_x}{J_y}\omega_x \omega_z$$

$$\dot\omega_z = \frac{J_x - J_y}{J_z}\omega_x \omega_y$$

$$\dot\Lambda = \frac{1}{2}\Lambda \circ \vec\omega$$

$\hookrightarrow \Lambda(t) \to \psi, \theta, \varphi$.

$$\theta = -\sin^{-1} C_{31}$$

$$\psi = \tan^{-1}\frac{C_{21}}{C_{11}}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{C_{32}}{C_{33}}$$

$$q \circ p = Q(q)\, p$$

$$Q(q) = \begin{pmatrix} q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 \\ q_2 & q_1 & q_4 & -q_3 \\ q_3 & -q_4 & q_1 & q_2 \\ q_3 & q_3 & -q_2 & q_1 \end{pmatrix}$$

$$Q(\bar q) = Q(q)^T$$

$$\bar Q(\bar q) = \bar Q(q)^T$$