Московский физико-технический институт
Объединенный институт ядерных исследований

ОТДЕЛЬНЫЕ ТЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Шмидт В.А.

Версия обновляется по адресу
`https://sites.google.com/view/vshmidt/`

Предисловие

«Попытка понять Вселенную является одной из очень немногих вещей, которые чуть приподнимают человеческую жизнь над уровнем фарса и придают ей оттенок высокой трагедии.»

С.Вайнберг

...//

Эта книга была намеренно написана так, чтобы ее мог понять продвинутый студент первого курса. Более конкретно, предполагается, что учебное пособие доступно студентам, знакомым с классической (как нерелятивистской, так и релятивистской) и квантовой механикой в рамках общей физики. Также подразумевается наличие у учащихся знания основ математического анализа, линейной алгебры и геометрии, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и теории групп. Остальной математический аппарат излагается в тексте по мере необходимости.

Автор выражает глубокую благодарность своей жене, ассистенту кафедры высшей математики МФТИ *Шмидт Е.В.*, прочитавшей предварительный вариант текста и сделавшей ряд ценных замечаний и предложений. Практическое использование настоящего учебного пособия при чтении лекций и при ведении семинарских занятий позволило автору внести в пособие исправления и дополнения. Автор выражает благодарность за замечания коллегам и читателям, которые обратили его внимание на ошибки и опечатки, а также за комментарии и вопросы доктору физико-математических наук, профессору кафедры теоретической физики МФТИ, директору физтех-кластера академической и научной карьеры ЛФИ *Киселеву В.В.*; студентам ЛФИ *Еремееву Е.И.*, *Муравьеву М.М.* и *Головневу А.С.*

Прошу читателей направлять свои замечания и отзывы о книге по электронному адресу `shmidt.v@phystech.edu` с пометкой «Лекции по теоретической физике».

В заключение предисловия сделаю замечание для читателя-рецензента. Вы всегда можете критиковать это учебное пособие за отсутствие в нем ваших любимых разделов или методов. Но я ни в коем случае не склонен просить за это прощение, ведь, как известно, невозможно угодить всем. Здесь я решил угодить самому себе.

Часть 1. Нерелятивистская механика

В связи с тем, что в основе построения многих динамических моделей современной теоретической и математической физики лежит принцип экстремального действия, первый раздел этой части пособия посвящен изучению лагранжевой механики. Как мы увидим в тексте, этот принцип требует стационарности некоторого функционала относительно вариаций динамических переменных, описывающих данную физическую модель. В результате мы получаем систему уравнений Эйлера-Лагранжа, которая принимается в качестве уравнений движения данной модели. При этом инвариантность действия относительно некоторой группы преобразований приводит к ковариантным уравнениям движения и, согласно теореме Э.Нетер, к законам сохранения, которые играют важнейшую роль в теоретической физике.

Во втором разделе обсуждается гамильтонов формализм. Роль последнего в классической и квантовой механиках, а также в теории поля трудно переоценить. Канонический формализм предоставляет наиболее мощные методы интегрирования уравнений движения и является основой для канонического квантования. Его, возможно единственным, недостатком является явное нарушение релятивистской инвариантности полевых теорий, поскольку время в гамильтоновом формализме играет выделенную роль. Однако принципиальные вопросы, связанные с физической интерпретацией математических моделей, невозможно решить без обращения к гамильтоновой формулировке механики.

Завершает формулировку классической нерелятивистской механики третий раздел, в котором рассматривается интересный пример т.н. скрытой симметрии гамильтоновой системы, а именно, обсуждается вырождение финитного движения в кулоновском потенциале и отвечающая ему $\mathbb{SO}(4)$-симметрия.

1. Лагранжева механика

В классической механике частица представляет собой т.н. материальную точку, которая движется в трехмерном евклидовом пространстве под воздействием сил. В качестве наблюдаемой величины измеряется положение частицы в пространстве, которое задается, например, декартовыми координатами $q^i = (x,y,z)$, а зависимость от времени — ее траекторией $q^i(t)$. Движение полностью детерминировано, если заданы координаты и скорости частицы в начальный момент времени, а также силы во всех точках пространства на протяжении всего времени их действия. Этот факт, известный также, как *принцип детерминированности в классической механике*, конечно же, нашел свое отражение в уравнениях движения частицы. Так, например, всем известные уравнения Ньютона

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)$$

являются дифференциальными уравнениями второго порядка, а значит, для постановки задачи Коши для них необходимо задать начальные координаты $q^i(t_0) = q^i_0$ и начальные скорости $\dot{q}^i(t_0) = \dot{q}^i_0$. Подобное описание движения частицы под действием сил представляет собой механическую формулировку *принципа причинности*: всякая точка на траектории частицы возникает как следствие воздействия на частицу сил в предыдущие моменты времени при заданных начальных условиях: координатах и скоростях в исходный момент времени.

Здесь сразу же возникает несколько важных вопросов. Во-первых, с чего мы взяли, что движение частицы полностью детерминировано, если в качестве начальных условий заданы только начальные координаты и скорости частицы? На самом деле, это предположение, являющееся обобщением опытных фактов, нетривиально и лежит в основе классической механики. Подробнее об этом мы поговорим чуть позже. Во-вторых, откуда вообще взялись уравнения Ньютона и есть ли регулярный способ получения уравнений движения для механических систем? Конечно, можно было бы просто объявить уравнения движения в форме Ньютона опытным фактом[1], однако, как мы увидим дальше, уравнения движения для частицы могут быть получены из такого фундаментального принципа как *вариационный принцип экстремального действия Гамильтона*. Следствием этого принципа будут *уравнения Эйлера-Лагранжа*, которые имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0,$$

где $L = L(q,\dot{q},t)$ — так называемая *функция Лагранжа*, которая для классической нерелятивистской частицы в потенциальном поле сил $U(\boldsymbol{r},t)$ записывается как

$$L(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t) = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - U(\boldsymbol{r},t).$$

Очевидно, что уравнения Эйлера-Лагранжа в этом случае эквивалентны уравнениям Ньютона. Действительно,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = m\ddot{\boldsymbol{r}}, \quad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t).$$

[1]На самом деле структура уравнений Ньютона напрямую следует из принципа детерминированности в классической механике: начальные координаты и скорости определяют ускорения, т.е. существуют функции $f^i(q,\dot{q},t)$, такие что $\ddot{q}^i = f^i(q,\dot{q},t)$. Тем не менее это не снимает 'с повестки дня' вопрос о существовании регулярных способов получения уравнений движения для разнообразных механических систем.

Казалось бы, действуя таким образом, мы просто заменяем один постулат другим. Это, конечно, так. Однако, в отличие от уравнения Ньютона, принцип экстремального действия является гораздо более фундаментальным, поскольку несет в себе регулярный способ получения уравнений движения для (почти) произвольных механических систем. Постулирование такого принципа даст нам возможность взглянуть на основные механические законы под таким ракурсом, который позволит затем наиболее просто и эффектно их применять для описания как частиц, так и локальных полей в классической нерелятивистской механике, и подготовит методический инструментарий для логически ясного перехода к релятивистской механике частиц и теории поля, а также к квантовой теории.

Задача 1.1. Запишите уравнения Эйлера-Лагранжа для механической системы

$$L(x,\dot{x},v,\dot{v}) = m\dot{x}v - \frac{mv^2}{2} - U(x).$$

Покажите, что уравнения Эйлера-Лагранжа для обобщенной координаты v являются алгебраическими, а не дифференциальными. Исключите переменную v из уравнений движения.

1.1. **Принцип экстремального действия.** Для того, чтобы сформулировать принцип экстремального действия, рассмотрим множество $\Pi(t_1,q_1^i;t_2,q_2^i)$ гладких траекторий с началом в точке $q_1^i = q^i(t_1)$ и концом в точке $q_2^i = q^i(t_2)$. Построим вещественный *функционал действия* $S : \Pi(t_1,q_1^i;t_2,q_2^i) \to \mathbb{R}$ лагранжевой системы как интеграл от функции Лагранжа

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q(t),\dot{q}(t),t).$$

То есть действие представляет собой отображение, сопоставляющее некоторой траектории $q^i(t) \in \Pi(t_1,q_1^i;t_2,q_2^i)$ с фиксированными концами q_1^i, q_2^i число, равное интегралу по времени $t \in [t_1,t_2]$ от функции Лагранжа L механической системы.

Согласно принципу экстремального действия Гамильтона некоторая траектория $q^i(t) \in \Pi(t_1,q_1^i;t_2,q_2^i)$ описывает движение лагранжевой системы между положением $q_1^i = q^i(t_1)$ в момент времени t_1 и положением $q_2^i = q^i(t_2)$ в момент времени $t_2 > t_1$, если и только если она является *экстремалью*[1] функционала действия S, то есть

$$\delta S[q(t), \delta q(t)] := \frac{d}{d\varepsilon}\, S[q(t) + \varepsilon\delta q(t)]\big|_{\varepsilon=0} = 0$$

для всех траекторий с закрепленными (фиксированными) концами:

$$\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0.$$

Заметим, что с точки зрения физики, малую вариацию $q_\varepsilon^i(t) = q^i(t) + \varepsilon\delta q^i(t)$ экстремальной траектории $q^i(t)$ можно рассматривать как результат решения уравнений движения, в которых немного изменили силы: малая флуктуация сил приводит к малому изменению траектории.

Глядя на формулировку принципа экстремального действия, можно увидеть, что функция Лагранжа механической системы определена неоднозначно, а с точностью

[1]Принцип экстремального действия не утверждает, ни что экстремаль, соединяющая точки q_1^i и q_2^i, минимизирует действие (просто часто принцип Гамильтона называют принципом наименьшего действия), ни что такая экстремаль единственна. Не утверждает он и того, что любые две точки можно соединить экстремалью. В качестве упражнения приведите примеры лагранжевых систем, у которых экстремаль, соединяющая две заданные точки, не является локальным минимумом/не единственна/не существует.

до прибавления к ней полной производной по времени от произвольной функции координат и времени. Действительно, если в соответствующий интеграл подставить «новую» функцию Лагранжа

$$L' = L + \frac{d}{dt} f(q(t),t),$$

то получим, что

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L' = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L + f(q(t_2),t_2) - f(q(t_1),t_1).$$

Последние два члена, очевидно, исчезают при варьировании действия, ведь

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial q^i} \delta q^i(t) = 0, \quad \text{if} \;\; t = \{t_1,t_2\}.$$

Следовательно, условия $\delta S' = 0$ и $\delta S = 0$ равенства нулю вариаций действия совпадают и вид уравнений движения остается неизменным.

Задача 1.2. Докажите, что для функционала действия S (на самом деле для всякого интегрального функционала) вариационная производная сводится к выражению

$$\delta S[q(t), \delta q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{\delta S}{\delta q(t)}\, \delta q(t),$$

где *функциональная производная* определяется по формуле

$$\frac{\delta S}{\delta q(t)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{S[q(\tau) + \varepsilon \delta(t-\tau)] - S[q(\tau)]}{\varepsilon}, \quad \delta(t) = \lim_{\alpha \to +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-\mathrm{i}\omega t - \alpha^2 t^2}.$$

1.2. **Уравнения Эйлера-Лагранжа.** Экстремали функционала действия описываются уравнениями движения — системой дифференциальных уравнений второго порядка, записанных, например, в декартовых координатах q^i. Воспользуемся вариационным принципом экстремального действия для получения этих дифференциальных уравнений:

$$0 = \delta S[q(t), \delta q(t)] = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q(t) + \varepsilon \delta q(t), \dot{q}(t) + \varepsilon \delta \dot{q}(t), t)|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt\, \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i(t) \bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt\, \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i(t).$$

Первое слагаемое в последней части равенства обращается в нуль из-за граничных условий: $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$. Второй член равен нулю для любой гладкой функции $\delta q^i(t)$ на отрезке $[t_1,t_2]$, равной нулю в граничных точках. Из этого следует тождественное равенство нулю подынтегрального выражения, что, в свою очередь, приводит нас к искомым уравнениям движения (уравнениям Эйлера-Лагранжа):

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0.$$

Задача 1.3. Проварьировать действие и найти уравнения движения частицы в электромагнитном поле, функция Лагранжа которой имеет вид

$$L(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t) = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + \frac{e}{c}(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)) - eA_0(\boldsymbol{r},t).$$

Задача 1.4. Найти вторую вариационную производную функционала действия лагранжевой системы с функцией Лагранжа $L(q,\dot{q},t)$ и привести к виду

$$\delta^{(2)} S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \delta q(t)\, \Gamma\, \delta q(t)$$

где Γ — дифференциальный оператор вида $\Gamma = A\, d^2/dt^2 + B\, d/dt + C$ с некоторыми коэффициентами A, B, C. Применить полученный результат к свободной частице и гармоническому осциллятору.

Интересно заметить, что если бы для однозначного задания механического состояния лагранжевой системы в каждый момент времени потребовались (помимо координат и скоростей) более высокие производные координат по времени, то уравнения движения были бы иными. Покажем это. Пусть, например, механическое состояние системы определяется однозначно заданием координат q^i, скоростей $\dot{q}^i$ и ускорений $\ddot{q}^i$, то есть $L = L(q,\dot{q},\ddot{q},t)$. В таком случае вариационная производная действия

$$\delta S[q(t), \delta q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i(t) + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^i}\delta \ddot{q}^i(t) \right).$$

Преобразуем немного последнее выражение:

$$\delta S[q(t), \delta q(t)] = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i(t) \right|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt\, \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i(t) + \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^i}\delta \ddot{q}^i(t),$$

обозначая функцию $\partial L/\partial \ddot{q}^i$ через $\xi_i := \partial L/\partial \ddot{q}^i$, получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} \xi_i\, \delta \ddot{q}^i dt = \left. \xi_i\, \delta \dot{q}^i(t) \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{\xi}_i\, \delta \dot{q}^i\, dt = \left. \xi_i\, \delta \dot{q}^i(t) \right|_{t_1}^{t_2} - \left. \dot{\xi}_i\, \delta q^i(t) \right|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\xi}_i\, \delta q^i dt.$$

Требуя обращения в нуль на концах не только вариационных производных от координат, но и вариаций скоростей, имеем

$$\delta S[q(t), \delta q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^i} \right) \delta q^i(t),$$

откуда, в силу вариационного принципа Гамильтона для действия, получаем искомые уравнения эволюции — *уравнения Эйлера-Пуассона*

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^i} = 0.$$

Как мы теперь видим, утверждение о том, что состояние лагранжевой механической системы однозначно определяется координатами и скоростями в каждый момент времени весьма нетривиально и лежит в основе классической механики.

Задача 1.5. Проварьировать действие и записать уравнения движения следующей механической системы:

$$S[\boldsymbol{r}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \left\{ \frac{1}{2}m(\boldsymbol{r}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}) - a\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) \right\}.$$

В заключение параграфа отметим, что уравнения Эйлера-Пуассона бывают весьма полезными при изучении некоторых моделей квантовой теории поля. Так, например, действие *скалярно-тензорной теории Хорндески* вида

$$S[g_{\mu\nu},\varphi] = \int_M d_4x\, |\det g_{\mu\nu}|^{1/2} \left\{ -\frac{2}{\varkappa^2}R + \beta G^{\mu\nu}\nabla_\mu\varphi\nabla_\nu\varphi + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\varphi\nabla_\nu\varphi - V(\varphi) \right\},$$

при должном выборе потенциала скалярного поля $V(\varphi)$ можно использовать для описания *инфляционного расширения Вселенной*, предшествующего горячей стадии ее эволюции. В таком случае скалярное поле (*инфлатон*) можно считать пространственно однородным, т.е. $\varphi(t,\boldsymbol{r}) \mapsto \varphi(t)$, а расширяющуюся Вселенную — пространственно-плоской. Все это означает, что наше действие (с точностью до несущественного множителя) сводится к функционалу

$$S[a(t),\varphi(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(a,\dot{a},\ddot{a},\varphi,\dot{\varphi}),$$

где функция Лагранжа

$$L(a,\dot{a},\ddot{a},\varphi,\dot{\varphi}) = \frac{12}{\varkappa^2}(a^2\ddot{a} + a^3H^2) + 3\beta a^3H^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}a^3\dot{\varphi}^2 - a^3V(\varphi)$$

содержит явно вторую производную от *масштабного фактора* $a(t)$, отвечающего за расширение пространственной координатной сетки; через $H(t)$ в лагранжиане обозначен *параметр Хаббла* $H = \dot{a}/a$, характеризующий темп расширения Вселенной.

Вышесказанное означает, что эволюционными уравнениями такой теории будут уравнения Эйлера-Пуассона.

Задача 1.6. Покажите, что уравнения Эйлера-Пуассона для скалярно-тензорной теории Хорндески можно записать в виде

$$\ddot{\varphi}(1 + 6\beta H^2) + 3H(1 + 6\beta H^2)\dot{\varphi} + 12\beta H\dot{H}\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0,$$

$$[2\dot{H} + 3H^2](4\varkappa^{-2} - \beta\dot{\varphi}^2) - 4\beta H\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi) = 0.$$

При $\beta = 0$ исследовать отдельно случай сильного *хаббловского трения*:

$$\left|\frac{\ddot{\varphi}}{3H\dot{\varphi}}\right| \ll 1$$

в потенциале $V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2$ в режиме *медленного скатывания* $V(\varphi) \gg \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2$.

1.3. **Криволинейные координаты частицы.** До этого момента мы записывали все уравнения в декартовой системе координат. Однако, далеко не всегда ей удобно пользоваться. Многие задачи теоретической физики требуют своевременного перехода к *криволинейным* (или *обобщенным*) координатам x^i. Такой переход осуществляется при помощи формул криволинейной замены переменных вида $x^i = x^i(q)$. Чтобы функции $x^i(q)$ давали в некоторой окрестности точки $p \in \mathbb{R}^3$ криволинейную систему координат, достаточно потребовать невырожденности матрицы Якоби в этой точке:

$$\Lambda^i{}_j = \frac{\partial x^i}{\partial q^j}, \quad \det\Lambda \neq 0.$$

В качестве примера рассмотрим *цилиндрическую систему координат*. Криволинейными координатами в этом случае являются координаты $x^i = (\rho,\varphi,z)$, то есть положение точки $p \in \mathbb{R}^3$ задается координатой z, которая совпадает с соответствующей декартовой координатой, проекцией ρ радиуса-вектора на плоскость xy и полярным углом φ. Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами определяется следующими формулами

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z \equiv z, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}.$$

Область определения цилиндрических координат задается неравенствами

$$0 < \rho < +\infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty,$$

что соответствует трехмерному евклидову пространству с удаленной полуплоскостью $y = 0$, $x \geqslant 0$. Другим распространенным примером является *сферическая система координат*. Здесь положение точки задается следующими криволинейными координатами $x^i = (r,\theta,\varphi)$; связь между декартовыми и сферическими координатами дается формулами

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x},$$

позволяющими легко переходить от декартовых координат к сферическим, и наоборот. Обратные преобразования однозначно определены всюду, кроме оси z. При этом все евклидово пространство, из которого удалена полуплоскость $y = 0$, $x \geqslant 0$, включающая ось z, взаимно однозначно отображается на открытую область $0 < r < +\infty$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$. Если полуплоскость не удалять, то точки с координатами φ и $\varphi + 2\pi$ необходимо отождествить.

Переход от декартовых координат q^i к криволинейным x^i можно трактовать как замену базиса в $\mathbb{R}^3$. Действительно, построим этот *локальный базис*, к которому совершается переход от стандартного базиса декартовой системы координат. Обозначим через p какую-нибудь точку в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, причем, пусть ее криволинейные координаты определены и равны x_0^i. Первой *координатной линией*, проходящей через точку $p \in \mathbb{R}^3$, называется кривая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x^1, x_0^2, x_0^3)$, получающаяся из $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x^1, x^2, x^3)$ при постоянных значениях $x^2 = x_0^2$, $x^3 = x_0^3$ и при изменении x^1 в некоторой ε-окрестности $U_\varepsilon(x_0^1)$. Аналогично можно определить вторую и третью координатные линии; i-й *координатной осью* называется касательная к i-й координатной линии в точке $p \in \mathbb{R}^3$. Единичный направляющий вектор i-й координатной оси, очевидно, записывается следующим образом

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}, \quad H_i = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\right|.$$

Здесь H_i — нормировочный *коэффициент Ламе*. В этой формуле суммирование по немым индексам не производится! Несложно понять, что полученные нормированные на единицу направляющие векторы составляют локальный базис рассматриваемой криволинейной системы координат. Построим его в явном виде на примере уже знакомой нам сферической системы координат. Базисные векторы последней определяются согласно

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}, \quad \boldsymbol{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}, \quad \boldsymbol{e}_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}.$$

Найдем выражения для векторов $\frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{r}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}\boldsymbol{r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}\boldsymbol{r}$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = \boldsymbol{e}_x\frac{\partial x}{\partial r} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial y}{\partial r} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial z}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_z,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = \boldsymbol{e}_x\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial z}{\partial \varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_x + r\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_y,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = \boldsymbol{e}_x\frac{\partial x}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial y}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial z}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x + r\cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y - r\sin\theta\,\boldsymbol{e}_z.$$

Отсюда получаем искомые формулы замены базиса

$$\boldsymbol{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_z,$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = \cos\theta\,\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y - \sin\theta\,\boldsymbol{e}_z, \quad \boldsymbol{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_y.$$

Заметим, что матрица перехода от базиса прямоугольной системы координат к базису сферической системы координат имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

После тривиальных вычислений находим, что она является невырожденной и ортогональной, а значит, по известной теореме из аналитической геометрии, является матрицей перехода от ортонормированного базиса к ортонормированному. Следовательно, локальный базис сферической системы координат является ортонормированным базисом.

Задача 1.7. Переход от декарторых координат (x,y,z) евклидова пространства к параболическим координатам (κ,η,φ) осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = \sqrt{\kappa\eta}\cos\varphi, \\ y = \sqrt{\kappa\eta}\sin\varphi, \\ z = \frac{1}{2}(\kappa-\eta). \end{cases}$$

(a) Найти формулы, выражающие нормированный локальный базис параболической системы координат через базис декартовой системы координат.
(b) Показать, что локальный базис параболической системы координат ортогональный относительно стандартной евклидовой структуры на $\mathbb{R}^3$.
(c) Найти компоненты *метрического тензора* $g_{ij} = H_i H_j(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j)$ в параболических координатах. В этой формуле суммирование по повторяющимся индексам не производится!

Рассмотрим теперь разложение скорости и ускорения частицы в локальном базисе сферической системы координат. По определению вектор скорости представляет собой $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$. Как можно заметить,

$$\boldsymbol{e}_r = (\sin\theta\,\cos\varphi, \sin\theta\,\sin\varphi, \cos\theta).$$

Найдем для начала компоненту скорости v_r, которую называют *радиальной*:

$$v_r = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_r) = \dot{x}\sin\theta\,\cos\varphi + \dot{y}\sin\theta\,\sin\varphi + \dot{z}\cos\theta.$$

Для этого продифференцируем по времени соответствующие формулы перехода от декартовых координат к сферическим:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\sin\theta\,\cos\varphi + r\dot{\theta}\cos\theta\,\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\theta\,\sin\varphi, \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta\,\sin\varphi + r\dot{\theta}\cos\theta\,\sin\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\cos\varphi, \\ \dot{z} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \end{cases}$$

и подставим полученную систему в предыдущее выражение. Имеем $v_r = \dot{r}$. Проделывая похожие действия для других компонент, окончательно находим

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}\sin\theta, \quad v_\theta = r\dot{\theta}.$$

Компоненту v_φ называют *трансверсальной скоростью*. После аналогичных вычислений получаем компоненты ускорения частицы в локальном сферическом базисе:

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta, \quad w_\theta = (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta,$$

$$w_\varphi = (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta.$$

Если в найденном выражении положить угол $\theta = \frac{\pi}{2}$, получим формулы для радиального и трансверсального ускорений в полярной системе координат

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}.$$

Аналогично можно разложить векторы скорости и ускорения в любом базисе.

Задача 1.8. Покажите, что ортогональная проекция w_i ускорения частицы на направление единичного вектора $\boldsymbol{e}_i$ локального базиса записывается как

$$H_i w_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial(v^2/2)}{\partial\dot{x}^i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial x^i},$$

где суммирование по повторяющимся индексам не производится.

1.4. **Общекоординатная инвариантность.** Покажем теперь, что уравнения движения в форме Лагранжа инвариантны относительно произвольных гладких замен координат. Это важное свойство уравнений Эйлера-Лагранжа называют свойством *общекоординатной инвариантности* уравнений движения. Оно лишний раз иллюстрирует преимущество лагранжевой механики над ньютоновской, ведь уравнения Ньютона $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)$ имеют такой вид только в инециальных системах отсчета.

Совершим переход $q^i \mapsto x^i(q,t)$ к обобщенным координатам x^i, где нами, очевидно, предусмотрена возможность использования криволинейной системы координат, меняющейся со временем t. Отсюда, для обобщенных скоростей имеем

$$\dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial t} + \frac{\partial x^i}{\partial q^j}\dot{q}^j, \quad \dot{q}^i = \frac{\partial q^i}{\partial t} + \frac{\partial q^i}{\partial x^j}\dot{x}^j.$$

Соответствующая подстановка в уравнения Эйлера-Лагранжа дает

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{\partial L}{\partial q^j}\frac{\partial q^j}{\partial x^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\left[\frac{\partial^2 q^j}{\partial x^i \partial x^k}\dot{x}^k + \frac{\partial^2 q^j}{\partial t\,\partial x^i}\right], \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial q^j}{\partial x^i},$$

то есть

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial q^j}{\partial x^i}\,\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\left[\frac{\partial^2 q^j}{\partial x^i \partial x^k}\dot{x}^k + \frac{\partial^2 q^j}{\partial t\,\partial x^i}\right],$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j}\right]\frac{\partial q^j}{\partial x^i}.$$

В силу невырожденности криволинейной замены координат детерминант замены

$$\det\left\{\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\right\} \neq 0,$$

откуда получаем требуемое свойство общекоординатной инвариантности уравнений Эйлера-Лагранжа.

В качестве иллюстрации такого важного свойства приведем простейший пример и запишем уравнение движения для нерелятивистской частицы

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - U(\boldsymbol{r})$$

во вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг оси z системе отсчета. Обозначая через $\boldsymbol{r}'$ координаты частицы в неинерциальной системе, получаем

$$x = x'\cos\omega t - y'\sin\omega t, \quad y = x'\sin\omega t + y'\cos\omega t, \quad z = z'.$$

Подстановка данных выражений в исходный лагранжиан дает

$$L = \frac{1}{2}m[(\dot{x}' - \omega y')^2 + (\dot{y}' + \omega x')^2 + \dot{z}'^2] - U(x',y',z'),$$

то есть

$$L = \frac{1}{2}m[\dot{\boldsymbol{r}}' + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')]^2 - U(\boldsymbol{r}').$$

В силу общекоординатной инвариантности для вывода уравнений движения частицы во вращающейся системе отсчета мы можем смело использовать уравнение Эйлера-Лагранжа. Вычисляя соответствующие производные

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}'} = m[(\dot{\boldsymbol{r}}'\times\boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')] - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}'}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}'} = m[\dot{\boldsymbol{r}}' + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')],$$

находим

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}' = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}'} - 2m(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}') - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{F}' + \boldsymbol{F}_{\text{cor}} + \boldsymbol{F}_{\text{cent}}.$$

Второй и третий член в правой части выражения представляют собой хорошо знакомые вам фиктивные *силы инерции*:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{cor}} = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}')$$

называется *кориолисовой силой* и возникает из-за относительного движения точки во вращающейся системе координат, а сила

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{cent}} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') = -\omega^2 \boldsymbol{r}'_{\perp}$$

называется *центробежной* и направлена перпендикулярно к оси вращения системы координат, в сторону от оси к частице.

1.5. **Теорема Э.Нетер.** В предыдущих параграфах мы вывели уравнения движения лагранжевой механики, а также узнали, что они имеют одинаковую форму в произвольных обобщенных координатах x^i. При этом мы еще не понимаем, каким образом можно находить функцию Лагранжа той или иной механической системы. Для того чтобы это понять, необходимо вспомнить, что лагранжиан L, по построению, полностью определяет механическое состояние системы; динамика последней развивается в пространстве и во времени. Стало быть, свойства пространства и времени так или иначе должны влиять на структуру лагранжиана. Важнейшим инструментом здесь является *теорема Нетер*, в которой сформулировано достаточное условие существования законов сохранения.

Рассмотрим лагранжеву механическую систему, описываемую некоторой функцией Лагранжа $L(x,\dot{x},t)$. Пусть траектория $x^i(t)$ является решением уравнений движения для этой системы, которое под действием *однопараметрической группы преобразований* вида

$$x^i(t) \mapsto x^i_g(t_g) = x^i_g(x(t),t,g), \quad t \mapsto t_g = t_g(x(t),t,g),$$

переходит в другое решение уравнений движения с той же функцией Лагранжа. Поскольку в группе существует единичный элемент, то существует такое значение параметра g, при котором преобразование координат и времени тождественно, то есть $t_g = t, x_g = x$. Пусть для определенности такое происходит при $g = 0$.

Посмотрим на изменение экстремума dS/dg действия $S[x(t)]$ в зависимости от параметра преобразования g. Для этого рассмотрим инфинитезимальное преобразование: разложим преобразование по степеням g вблизи нуля $g = 0$ до первого порядка

$$t_g = t + gT(t), \quad x^i_g = x + gX^i(t),$$

где функция

$$T(t) = \frac{\partial}{\partial g} t_g(x(t),t,g)|_{g=0}$$

являет собой *генератор инфинитезимальных преобразований времени*, а функции

$$X^i(t) = \frac{\partial}{\partial g} x^i_g(x(t),t,g)|_{g=0}$$

представляет собой *генераторы инфинитезимальных преобразований координат.* Изменение экстремума действия в зависимости от параметра преобразования дается формулой

$$\frac{dS}{dg} = \lim_{g\to 0} \frac{S[x_g(t_g)] - S[x(t)]}{g},$$

Найдем

$$\delta S = S[x_g(t_g)] - S[x(t)] = \int_{t_{1g}}^{t_{2g}} dt_g\, L(x_g(t_g),\dot{x}_g(t_g),t_g) - \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(x(t),\dot{x}(t),t),$$

где $t_{1g} = t_g(t_1,g)$, $t_{2g} = t_g(t_2,g)$. Переходя в первом интеграле к интегрированию по переменной t, получаем

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\frac{dt_g}{dt}\,L(x+gX,\dot{x}+g(\dot{X}-\dot{x}\dot{T}),t+gT) - \int_{t_1}^{t_2} dt\,L(x,\dot{x},t) =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2}\left\{L\dot{T}+\frac{\partial L}{\partial x^i}X^i+\frac{\partial L}{\partial t}T+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\left(\dot{X}^i-\dot{x}^i\dot{T}\right)\right\}g\,dt.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\frac{dt_g}{dt} = 1+g\dot{T},\quad \frac{d}{dt_g} = \frac{dt}{dt_g}\frac{d}{dt} = \left(1-g\dot{T}\right)\frac{d}{dt},\quad \dot{x}^i_g = \dot{x}^i + g\left(\dot{X}^i-\dot{x}^i\dot{T}\right).$$

Беря в учет уравнения Эйлера-Лагранжа, получаем

$$\delta S = g\int_{t_1}^{t_2} dt\left\{L\dot{T}+\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}X^i+\frac{\partial L}{\partial t}T+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\left(\dot{X}^i-\dot{x}^i\dot{T}\right)\right\},$$

то есть

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left\{\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^i\right)T+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}X^i\right\}g\,dt.$$

Отсюда видно, что изменение экстремума действия в зависимости от параметра g с учетом изменения граничных точек траектории определяется формулой

$$\frac{dS}{dg} = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\frac{d}{dt}\left\{\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^i\right)T+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}X^i\right\}.$$

Последнее выражение и составляет содержание теоремы Нетер. Если экстремум действия не зависит от параметра g, то есть $dS/dg \equiv 0$, то такое непрерывное преобразование называется *симметрией.* Значит, этому экстремуму отвечает целое семейство решений уравнений движения механической системы. Таким образом, при наличии симметрии имеет место сохранение во времени величины

$$\mathcal{I} = \left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^i\right)T+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}X^i,$$

которая называется *интегралом движения.*

Подчеркнем, что физическое содержание теоремы Нетер полностью определяется нетривиальным фактом существования определенных параметрических преобразований в классе решений уравнений движений для заданной системы, то есть при неизменной функции Лагранжа. Именно этот факт является квинтэссенцией комплиментарного ряда эмпирических данных или теоретических идей и моделей, факт, который, на самом деле, многое говорит о физической системе, а значит, и о функции Лагранжа этой системы, как мы это увидим чуть позже. Сама же теорема обладает безусловной математической красотой, присущей безупречному потоку тождественных преобразований.

Задача 1.9. Пусть функционал действия является инвариантным относительно пространственных и временных трансляций, а также относительно вращений вокруг оси x. Найти интегралы движения, соответствующие этим преобразованиям симметрии.

Задача 1.10. Рассмотреть теорию с действием

$$S[x(t),e(t)] = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} dt\,\sqrt{e(t)}\,\left\{\frac{\dot{x}^2}{e(t)}-m^2\right\}$$

в пространстве-времени Минковского (т.е. $\dot{x}^2 < 0$). Здесь $e(t)$ является нигде ненулевой и неотрицательной дифференцируемой функцией на $[t_1,t_2]$. Построить *эффективное действие*

$$S_{\text{eff}}[x(t)] = S[x(t), e(x(t))].$$

Какой механической системе отвечает это эффективное действие? Найти также всевозможные симметрии действия.

1.6. **Симметрии пространства и времени.** По отношению к произвольно движущейся системе отсчета пространство, вообще говоря, не однородно и не изотропно, а время не однородно. Однако в силу простой геометрии пространства и времени существуют такие системы отсчета, в которых пространство и время однородны и изотропны. Такие системы координат называются *инерциальными*. В частности, в таких системах отсчета свободное тело (свободное от действия сил или полей) движется прямолинейно и равномерно. На лицо явные симметрии, которым по теореме Нетер должны соответствовать некоторые сохраняющиеся величины.

Согласно вышесказанному, в инерциальной системе отсчета трансляция начала отсчета координат не влияет на законы движения в физической системе, то есть перенос системы целиком, вместе с источника полей невозможно установить, по движению внутри системы. Выберем некоторое направление, например, ось x, и совершим трансляцию вдоль оси. Преобразование траектории, задающее данную трансляцию, имеет вид: $x_g = x + g, t_g = t$. Согласно теореме Нетер интегралом движения в этом случае будет величина

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}},$$

которая называется *каноническим импульсом* (или *обобщенным импульсом*) частицы. В силу однородности пространства по всем направлениям сохраняется трехмерный канонический импульс

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}.$$

Воспользуемся теперь *трансляционной инвариантностью* (или, проще говоря, однородностью) времени в инерциальных системах отсчета и совершим трансляцию по времени: $t_g = t - g$, $x_g = x$. Тогда, согласно теореме Нетер интегралом движения будет величина

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} - L,$$

которая называется *полной энергией* (или *энергией*) частицы. В трехмерном случае имеем

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\dot{\boldsymbol{r}} - L = \boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{r}} - L.$$

Наконец, воспользуемся изотропией пространства и совершим преобразование поворота пространства на угол φ, например, относительно оси z, т.е. совершим преобразование вида

$$\boldsymbol{r} = (x,y,z) \ \mapsto \ \boldsymbol{r}_\varphi = (x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi, z), \quad t_\varphi = t.$$

Согласно теореме Нетер сохраняется величина

$$\ell_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\frac{\partial x^i_\varphi}{\partial \varphi} = p_y x - p_x y = (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})_z = \text{const}.$$

Векторное произведение вида $\boldsymbol{\ell} = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})$ называется *орбитальным моментом* (или *моментом импульса*) частицы.

Заметим, что вышенаписанные интегралы движения можно получить и иным способом. Поскольку время однородно, а функция Лагранжа описывает механическое состояние и эволюцию системы (в частности, частицы) во времени, то функция Лагранжа не может быть явной функцией времени, то есть $L = L(x,\dot{x})$. Значит,

$$\frac{d}{dt}L = \frac{\partial L}{\partial x^i}\dot{x}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\ddot{x}^i.$$

С учетом уравнений Эйлера-Лагранжа получаем

$$\frac{d}{dt}L = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\dot{x}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\ddot{x}^i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^i\right).$$

Из последнего уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^i - L\right) = 0.$$

Отсюда находим, что функция в скобках остается постоянной во времени, а это и есть энергия. Пусть теперь в некоторый момент времени радиус-вектор частицы равен $\boldsymbol{r}$. В виду трансляционной инвариантности пространства механические свойства системы не изменятся при любом параллельном переносе системы как целого. Совершим трансляцию частицы на бесконечно малое расстояние $\boldsymbol{\varepsilon}$, то есть совершим инфинитезимальное преобразование пространства вида: $\boldsymbol{r} \mapsto \boldsymbol{r}+\boldsymbol{\varepsilon}$. Тогда приращение функции Лагранжа системы равно нулю (состояние не изменилось):

$$\delta L = \boldsymbol{\varepsilon}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = 0.$$

С учетом уравнений Эйлера-Лагранжа получаем

$$\delta L = \boldsymbol{\varepsilon}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right) = 0.$$

Поскольку $\boldsymbol{\varepsilon} \neq 0$, то величина

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right) = 0, \quad \boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = \text{const},$$

что совпадает с выражением для канонического импульса. Наконец, воспользуемся изотропией пространства и совершим поворот пространства на некоторый малый угол. Тогда в силу изотропии пространства состояние системы (в нашем случае, частицы) не должно измениться. Совершим поворот пространства на малый угол $\boldsymbol{\varepsilon}$. Приращение функции Лагранжа

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}\delta \boldsymbol{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\delta \dot{\boldsymbol{r}} = 0.$$

Замечая, что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = \boldsymbol{p}, \quad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{p}}, \quad \delta \boldsymbol{r} = (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}), \quad \delta \dot{\boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{\varepsilon} \times \dot{\boldsymbol{r}}),$$

получаем $\dot{\boldsymbol{p}}\delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{p}\delta\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\varepsilon}\times\dot{\boldsymbol{r}}) = 0$. Произведем циклическую перестановку в векторных произведениях

$$\dot{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\varepsilon}\times\dot{\boldsymbol{r}}) = \boldsymbol{\varepsilon}[(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{p}}) + (\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{p})] = \boldsymbol{\varepsilon}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}) = 0.$$

Из последнего выражения получаем закон сохранения орбитального момента.

Задача 1.11. Пусть действие одномерной механической системы инвариантно относительно *лоренцевых бустов* с параметром u:

$$x \mapsto x_u = \gamma\,(x - ut)\,, \quad t \mapsto t_u = \gamma\,(t - ux)\,, \quad \gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Найти интеграл движения, соответствующий этим преобразованиям. Считая также, что действие инвариантно относительно пространственно-временных трансляций, показать, что условие сохранения этого интеграла со временем эквивалентно равенству $p = \dot{x}E$, где p и E — канонический импульс и энергия системы.

1.7. **Лагранжиан нерелятивистской частицы.** Теперь мы полностью готовы к тому, чтобы построить лагранжиан нерелятивистской частицы. Рассмотрим свободное движение частицы с произвольной, но постоянной, скоростью $\dot{\boldsymbol{r}}$ относительно некоторой инерциальной системы отсчета. Как мы понимаем из предыдущего параграфа, в инерциальных системах отсчета функция Лагранжа свободной частицы не может явно зависеть от $\boldsymbol{r}$ и t в силу трансляционной инвариантности пространства и времени. Также, функция Лагранжа не может зависеть и от вектора скорости $\dot{\boldsymbol{r}}$ в силу изотропии пространства, а может зависеть только от модуля скорости или, что то же самое, от квадрата скорости, то есть $L = L(\dot{\boldsymbol{r}}^2)$.

Кроме того, как было показано ранее, функция Лагранжа определена с точностью до прибавления к ней полной производной от произвольной функции координат и времени. А потому, рассмотрим относительное движение двух инерциальных систем отсчета с бесконечно малой относительной скоростью $\boldsymbol{\varepsilon}$, то есть рассмотрим инфинитезимальное преобразование скорости $\dot{\boldsymbol{r}} \mapsto \dot{\boldsymbol{r}}' = \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\varepsilon}$. Поскольку уравнения движения во всех инерциальных системах отсчета должны иметь одинаковый вид, то функция Лагранжа $L = L(\dot{\boldsymbol{r}}^2)$ при таком преобразовании должна перейти в функцию $L' = L(\dot{\boldsymbol{r}}'^2)$, которая если и отличается от функции $L(\dot{\boldsymbol{r}}^2)$, то максимум на полную производную по времени от произвольной функции координат и времени. Значит, лагранжиан

$$L' = L(\dot{\boldsymbol{r}}'^2) = L(\dot{\boldsymbol{r}}^2 + 2\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^2).$$

Раскладывая данное выражение по степеням $\boldsymbol{\varepsilon}$ до первого порядка, получаем

$$L(\dot{\boldsymbol{r}}'^2) = L(\dot{\boldsymbol{r}}^2) + 2\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{\varepsilon}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}^2},$$

где $2\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{\varepsilon}\,\partial L/\partial\dot{\boldsymbol{r}}^2$ является полной производной по времени, только в том случае, когда $2\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{\varepsilon}\,\partial L/\partial\dot{\boldsymbol{r}}^2$ линейно по скорости. Значит, $\partial L/\partial\dot{\boldsymbol{r}}^2 \neq f(\dot{\boldsymbol{r}})$, а потому,

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2.$$

Коэффициент пропорциональности m называется *инертной массой* частицы.

Заметим, что функция Лагранжа $L = m\dot{\boldsymbol{r}}^2/2$, полученная нами с помощью преобразований Галилея[1] (точнее, с помощью закона сложения скоростей, являющегося

[1]Преобразования Галилея легко выводятся непосредственно из первопринципов классической нерелятивистской механики, а именно, из принципа относительности Галилея и абсолютности времени: $t = t'$. Действительно, рассмотрим две инерциальных системы отсчета K и K'. Пусть K'-система движется относительно K-системы с постоянной скоростью $\boldsymbol{u}$ вдоль оси x таким образом, что в начальный момент времени (по часам обеих систем отсчета, то есть в точках O и O' часы синхронизированы $t_O = t'_{O'} = 0$) начала координат обеих систем совпадают. В силу однородности пространства и времени понятно, что преобразования координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой должны быть линейными. Пусть в некоторый момент времени t (по часам K-системы) произошло некоторое событие $E(t,x,y,z)$ в точке с координатами

следствием преобразований Галилея) не описывает свободное движение безмассовых частиц, например фотонов или гравитонов. Действительно, для безмассовых частиц функция Лагранжа тождественно равна нулю, а значит, равен нулю и канонический импульс частицы $\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{r}} = 0$, и энергия $E = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 = 0$, что приводит, по сути, к полному отсутствию всякого движения. Так же, как показывает опыт, функция Лагранжа вида $L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2$ неправильно описывает релятивистское движение частиц (движение со скоростями, сравнимыми со скоростью света c в вакууме). Все это означает, что такие преобразования пространства и времени, как преобразования Галилея не в состоянии описать релятивистскую динамику массивных и безмассовых частиц и для того, чтобы это сделать, необходимо заменить принцип относительности Галилея другим принципом — *принципом относительности Пуанкаре-Эйнштейна.*

Задача 1.12. Принцип относительности Пуанкаре-Эйнштейна требует инвариантность уравнений движения относительно лоренцевых бустов с параметром u. Покажите, что в пределе $u \to 0$ теорема Нетер дает

$$-pt + xE = f(x,t),$$

где $f(x,t)$ — произвольная функция координат и времени. Найдите лагранжиан свободной массивной релятивистской частицы, ее канонический импульс и энергию, а также докажите справедливость *дисперсионного соотношения*

$$E^2 = p^2 + m^2.$$

---

x,y,z. Наша задача состоит в том, чтобы определить координаты этого события в K'-системе, то есть $E(t',x',y',z')$. Координата $x'_{O'}$ точки O' в системе K', очевидно, постоянна и равна $x'_{O'} = 0$. Координата $x_{O'}$ той же точки в системе K, равна $x_{O'} = ut$. Значит, $x_{O'} - ut = 0$. Понятно, что тогда координаты x и x' события могут быть связаны в общем виде соотношением $x' = \alpha(x - ut)$. Коэффициент α не может зависеть от координаты x в силу однородности пространства. Также, в силу однородности времени, коэффициент α не может явно зависеть и от времени. Наконец, α не может зависеть от вектора скорости в силу изотропии пространства. Но от модуля скорости, вообще говоря, α может и зависеть. Значит, $x' = \alpha(u) \cdot (x - ut)$. Для координат y' и z' с учетом изотропии пространства можно записать $y' = \kappa(u)\, y$, $z' = \kappa(u)\, z$. Преобразования от одной системы отсчета к другой должны составлять группу. Действительно, ведь обратные преобразования от K'-системы к K-системе должны иметь тот же вид что и преобразования от K-системы к K'-системе, только с заменой знака перед скоростью. Значит, преобразования от K-системы к K'-системе имеют вид $x = \alpha(-u) \cdot (x' + ut')$, $y = \kappa(-u)\, y'$, $z = \kappa(-u)\, z'$, $t = t'$. Введем системы отсчета $\tilde{K}$ и $\tilde{K}'$, которые отличаются от систем K и K' лишь тем, что направления осей $\tilde{x}$, $\tilde{x}'$ изменены на противоположные. Тогда $\tilde{K}'$-система движется относительно $\tilde{K}$-системы со скоростью $-u$. Значит, $\tilde{x}' = -x' = \alpha(u) \cdot (\tilde{x} + ut) = \alpha(u) \cdot (-x + ut)$, $y' = \kappa(-u)\, y$, $z' = \kappa(-u)\, z$, $t' = t$. Отсюда $\alpha(-u) = \alpha(u)$, $\kappa(-u) = \kappa(u)$, а потому $x = \alpha(u) \cdot (x' + ut')$, $y = \kappa(u)\, y'$, $z = \kappa(u)\, z'$, $t = t'$. Решая полученную систему уравнений относительно x',y',z', с учетом вышесказанного получаем

$$x' = \frac{x - \alpha ut}{\alpha} = \alpha(x - ut), \quad y' = \kappa y = \kappa^2 y', \quad z' = \kappa^2 z'.$$

Видно, что выполнение тождеств возможно, только если $\alpha = 1$, $\kappa = 1$. Окончательно, прямые и обратные преобразования координат и времени (преобразования Галилея) имеют вид $x = (x' + ut')$, $y = y'$, $z = z'$, $t = t'$; $x' = (x - ut)$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = t$. Найдем наконец преобразования координат и времени в общем случае, когда K'-система движется относительно системы K в произвольном направлении. Для этого произведем некоторое разделение координат на поперечные и продольные по отношению к скорости движения $\boldsymbol{u}$ системы K':

$$\boldsymbol{r}_{\parallel} = (\boldsymbol{u}\boldsymbol{r})\frac{\boldsymbol{u}}{u^2} = r_{\parallel}\frac{\boldsymbol{u}}{u}, \quad \boldsymbol{r}_{\perp} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{\parallel}.$$

Поперечные координаты не преобразуются: $\boldsymbol{r}'_{\perp} = \boldsymbol{r}_{\perp}$, а для продольных координат имеет место формула: $\boldsymbol{r}'_{\parallel} = (r_{\parallel} - ut)\boldsymbol{u}/u$. Учитывая, что $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'_{\parallel} + \boldsymbol{r}'_{\perp}$, получаем $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{u}t$. Обратное преобразование, очевидно, дается заменой знака скорости $\boldsymbol{u} \mapsto -\boldsymbol{u}$: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{u}t$.

При рассмотрении взаимодействия нерелятивистской частицы с внешними полями эквивалентность инерциальных систем отсчета в простейших случаях требует, чтобы к функции Лагранжа свободной частицы добавлялись вклады, зависящие от относительных расстояний и времени в системе, то есть

$$L = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - U(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{ext}}, t - t_{\mathrm{ext}}),$$

где меткой 'ext' помечены параметры источников полей. Скалярная функция U называется *потенциальной энергией* частицы в поле сил. Канонический импульс, энергия и орбитальный момент частицы в поле сил:

$$\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{r}}, \quad E = \boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{r}} - L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + U, \quad \boldsymbol{\ell} = m(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}).$$

Величина $T = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2$ называется *кинетической энергией* частицы, и очевидно, совпадает с функцией Лагранжа свободной частицы, а величину $\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{r}}$ называют *динамическим импульсом* (или *импульсом*) частицы. Динамический импульс, как мы увидим позже, вообще говоря, не совпадает с каноническим импульсом.

Задача 1.13. Рассмотрим плоское движение нерелятивистской частицы массой m в сферически-симметричном потенциале $U = -\frac{\alpha}{r^2}$. Проверить, что функционал действия такой механической системы инвариантен относительно преобразований вида

$$t_u = e^{2u}t, \quad x_u = e^u x, \quad y_u = e^u y.$$

Выписать нетеровский интерал движения, отвечающий данной симметрии.

Задача 1.14. Покажите, что функция Лагранжа для нерелятивистской частицы массой m в гравитационном потенциале $U(x) = m\varphi(x)$ в криволинейных координатах определяется выражением

$$L = \frac{1}{2}mg_{ik}(x)\,\dot{x}^i\dot{x}^k - m\varphi(x), \quad g_{ik}(x) = g_{ki}(x).$$

Найти выражение для метрического тензора g_{ik}. Записать уравнения движения для частицы, используя *символы Кристоффеля*

$$\Gamma^k_{ij} = g^{k\ell}\Gamma_{\ell|ij}, \quad g^{k\ell} = (g_{k\ell})^{-1}, \quad \Gamma_{\ell|ij} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}).$$

1.8. **Многочастичные системы.** Пусть имеется система частиц, которые взаимодействуют только между собой и ни с какими внешними полями не взаимодействуют. Такая система называется *замкнутой*. Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух частей 1 и 2, каждая из которых, будучи замкнутой, в качестве функции Лагранжа имеет соответственно функции L_1 и L_2. Тогда, если мы в пределе разведем части 1 и 2 на бесконечность, где взаимодействием их между собой можно пренебречь, то функция Лагранжа системы будет, очевидно, стремиться к пределу

$$\lim L = L_1 + L_2.$$

Действительно, ведь такая аддитивность функции Лагранжа выражает тот факт, что уравнения движения каждой из невзаимодействующих частей замкнутой системы не содержат величин, относящихся к другой(-им) части(-ям) системы. В связи с вышесказанным получаем, что для замкнутой системы, состоящей из N частиц, функция Лагранжа имеет вид

$$L = \sum_a \frac{1}{2}m_a\dot{\boldsymbol{r}}_a^2 - U(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N).$$

Здесь $\boldsymbol{r}_a$ — вектор a-й частицы, а скалярная функция $U(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_N)$ суть потенциальная энергия взаимодействия частиц системы между собой. Сумма

$$T=\sum_a \frac{1}{2}m_a\dot{\boldsymbol{r}}_a^2$$

называется *кинетической энергией* системы.

Заметим, что такой вид функции Лагранжа для системы частиц полностью согласуется с аксиомами (точнее, следует из аксиом), положенными в основу классической механики. Действительно, ведь тот факт, что потенциальная энергия взаимодействия частиц системы зависит в каждый момент времени только от положения последних, означает, что любое изменение положения какой-либо частицы мгновенно отразится на остальных частицах. Это следует прямо из абсолютности времени и принципа относительности Галилея. Действительно, если бы взаимодействие распространялось не мгновенно, то есть с конечной скоростью, которая была бы различной в разных системах отсчета (в силу абсолютности времени), движущихся относительно друг друга, то законы механики были бы различными в разных (инерциальных) системах отсчета — противоречие с принципом относительности Галилея.

Как видно из функции Лагранжа для системы частиц, в классической механике имеет место так называемая $\mathbb{T}$-*инвариантность* уравнений движения, то есть уравнения движения инвариантны относительно $\mathbb{T}$-преобразования: преобразования обращения стрелы времени, $\mathbb{T}: t\mapsto -t$. Другими словами, если в системе возможно некоторое движение, то всегда возможно и обратное движение, такое, что система проходит все те же состояния в обратном порядке. При этом нетрудно видеть, что функция Лагранжа является $\mathbb{T}$-*четной*.

Для замкнутых механических систем из частиц можно также легко получить те же законы сохранения (интегралы движения) энергии, импульса и орбитального момента системы, как и для одной частицы:

$$\boldsymbol{P}=\sum_a \boldsymbol{p}_a=\sum_a m_a\dot{\boldsymbol{r}}_a,\quad \boldsymbol{\ell}=\sum_a m_a(\boldsymbol{r}_a\times\dot{\boldsymbol{r}}_a),$$

$$E=T+U=\sum_a\frac{1}{2}m_a\dot{\boldsymbol{r}}_a^2+U(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_N).$$

Следует отметить, что энергия может сохраняться не только в замкнутых системах, но и в системах, помещенных в стационарное (не зависящее от времени) внешнее поле. Действительно, ведь и в этом случае лагранжиан не будет зависеть явно от времени. А это и есть условие, из которого был получен закон сохранения энергии. Системы, в которых сохраняется энергия, называются *консервативными*.

Задача 1.15. Исследуйте малые продольные колебания молекулы CO_2 в окрестности положения равновесия. Наиболее общий вид лагранжиана молекулы в случае продольных колебаний:

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}M\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_3^2-V(x_1-x_2)-V(x_2-x_3).$$

Задача 1.16. Исследовать задачу о малых колебаниях двойного плоского маятника в окрестности вертикального положения равновесия.

Из законов сохранения легко получить третий закон Ньютона. Действительно, пусть имеется замкнутая система частиц. Тогда, в силу закона сохранения импульса

$$\sum_a\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a}=0=\sum_a\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_a}=\sum_a m_a\ddot{\boldsymbol{r}}_a=-\sum_a\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}_a}.$$

Отсюда видно, что сумма сил, действующих на систему равна нулю, $\sum_a \partial U/\partial \boldsymbol{x}_a = 0$. В частности, для двух частиц это означает, что силы их взаимодействия равны по величине и противоположно направлены. Однако, это еще не третий закон Ньютона, поскольку в последнем имеется требование, что силы взаимодействия должны быть направлены по прямой, соединяющей эти точки. Данное требование является следствием сохранения полного орбитального момента системы. Действительно, продифференцируем по времени орбитальный момент системы:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\ell} = 0 = \sum_a m_a(\dot{\boldsymbol{r}}_a \times \dot{\boldsymbol{r}}_a) + \sum_a m_a(\boldsymbol{r}_a \times \ddot{\boldsymbol{r}}_a) = -\sum_a \left(\boldsymbol{r}_a \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}\right) = 0.$$

Отсюда, например для двух частиц, получаем

$$\left(\boldsymbol{r}_1 \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_1}\right) + \left(\boldsymbol{r}_2 \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_2}\right) = \left((\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_1}\right) = 0.$$

Данное равенство означает, что $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ и $\partial U/\partial \boldsymbol{r}_1$ коллинеарны, что и требовалось доказать.

При переходах из одной инерциальной системы в другую скорости частиц преобразуются согласно галилеевскому закону сложения скоростей. А поскольку преобразуются скорости, то преобразуются и импульсы. Значит, если имеется система частиц, имеющая полный импульс $\boldsymbol{P} = \sum \boldsymbol{p} = \sum_a m_a \dot{\boldsymbol{r}}_a$, то существует такая инерциальная система, в которой суммарный импульс системы равен нулю. Действительно, для b-й частицы справедливо равенство $m_b \dot{\boldsymbol{r}}'_b = m_b \dot{\boldsymbol{r}}_b - m_b \boldsymbol{V}$. Суммируя последнее выражение, получаем

$$\boldsymbol{P}' = \sum_a m_a \dot{\boldsymbol{r}}'_a = \sum_a m_a \dot{\boldsymbol{r}}_a - M\boldsymbol{V} = 0,$$

откуда находим, что

$$\boldsymbol{V} = \sum_a \frac{m_a \dot{\boldsymbol{r}}_a}{\sum_b m_b} = \frac{\sum_a m_a \dot{\boldsymbol{r}}_a}{M}.$$

Скорость $\boldsymbol{V}$ называется *скоростью центра инерции*, а система отсчета, в которой $\boldsymbol{P}' = 0$, называется *системой центра инерции*. Эта система часто весьма удобна при рассмотрении различных задач, особенно задач на рассеяние частиц, ведь импульс системы как целого равен нулю, а значит, система как целое покоится и можно рассматривать внутренние движения подсистем. В связи с вышесказанным можно ввести положение центра масс $\boldsymbol{R}$ как

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum_a m_a \boldsymbol{r}_a}{M}.$$

В случае непрерывного распределения масс имеем

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{M}\int \boldsymbol{r}\, dm, \quad \boldsymbol{V} = \frac{1}{M}\int \dot{\boldsymbol{r}}\, dm.$$

Поскольку при переходах из одних инерциальных систем в другие преобразуются скорости, то преобразуются и кинетические энергии. Тогда, согласно закону сложения скоростей и определению кинетической энергии,

$$T = \sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{\boldsymbol{r}}_a^2 = \sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{\boldsymbol{r}}_a'^2 + 2\sum_a \frac{m_a}{2} \dot{\boldsymbol{r}}'_a \cdot \boldsymbol{u} + \frac{1}{2} M u^2.$$

Если $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{V}$, то в силу того, что полный импульс в системе центра инерции равен нулю, получаем

$$T = \frac{1}{2}\sum_a m_a \dot{\boldsymbol{r}}_a'^2 + \frac{1}{2} M u^2 = T' + \frac{1}{2} M V^2.$$

В этом выражении по существу написано, что произвольное движение системы частиц можно разбить на движение относительно центра масс (центра инерции) и движение центра масс. Данное утверждение составляет содержание так называемой *теоремы Кенига.*

Как видно из определения орбитального момента, он зависит от выбора *полюса* (начала отсчета). Найдем формулы перехода. Пусть имеются два неподвижных полюса O и O'. Радиус-вектор от полюса O к точке, имеющей импульс $\boldsymbol{p}_a$, равен $\boldsymbol{r}_a$. Аналогично для штрихованного полюса $\boldsymbol{r}'_a$. Радиус-вектор, проведенный от нештрихованного полюса к штрихованному постоянен и равен $\boldsymbol{\rho}$. Тогда орбитальные моменты частицы относительно полюсов соответственно равны

$$\boldsymbol{\ell}_a = (\boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{p}_a), \quad \boldsymbol{\ell}'_a = (\boldsymbol{r}'_a \times \boldsymbol{p}_a).$$

Значит

$$\boldsymbol{\ell}_a - \boldsymbol{\ell}'_a = (\boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{p}_a) - (\boldsymbol{r}'_a \times \boldsymbol{p}_a) = (\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{p}_a).$$

Суммируя по всем частицам системы, получаем

$$\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\ell}' + \sum_a (\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{p}_a) = \boldsymbol{\ell}' + (\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{P}).$$

1.9. **Механическое подобие и теорема вириала.** Заметим, что умножение функции Лагранжа на любую ненулевую константу, очевидно, не меняет вид уравнений движения. Это обстоятельство в некоторых случаях позволяет получить важные сведения о механической системе, не вдаваясь в решение конкретных уравнений движения. В частности, пусть потенциальная энергия системы является однородной функцией степени k, то есть

$$U(\lambda \boldsymbol{r}_1, \ldots, \lambda \boldsymbol{r}_N) = \lambda^k U(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N),$$

где λ — любая вещественная постояннная. Произведем следующее преобразование пространства и времени, при котором все координаты меняются в λ раз, а время — в β раз, то есть $\boldsymbol{r}_a \mapsto \lambda \boldsymbol{r}_a$, $t \mapsto \beta t$. При таком преобразовании все скорости $\boldsymbol{v}_a = d\boldsymbol{r}_a/dt$ изменяются в λ/β раз, а соответствующие кинетические энергии — в λ^2/β^2 раз; причем, как было сказано ранее, умножение функции Лагранжа на любую ненулевую константу не меняет уравнений движения. Поэтому положим

$$\lambda^2 \beta^{-2} = \lambda^k, \quad \beta = \lambda^{1-k/2}.$$

Изменение координат всех частиц в одинаковое число раз, по сути, означает переход от одних траекторий к другим, геометрически подобным первоначальным. Значит, если потенциальная энергия является однородной функцией координат степени k, то уравнения движения механической системы допускают *геометрически подобные траектории*, для которых справедливо следующее соотношение:

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{s'}{s}\right)^{1-k/2},$$

где t'/t — отношение времен, s'/s — отношение линейных размеров двух траекторий. Отсюда, для скоростей, кинетических энергий и орбитального момента получаем

$$\frac{\dot{x}'}{\dot{x}} = \left(\frac{s'}{s}\right)^{k/2}, \quad \frac{T'}{T} = \left(\frac{s'}{s}\right)^{k}, \quad \frac{\ell'}{\ell} = \left(\frac{s'}{s}\right)^{1+k/2}.$$

При финитном движении механической системы, потенциальная энергия которой является однородной функцией координат, существует довольно простое соотношение между средними по времени значениями кинетической и потенциальной энергий —

теорема вириала. Напомним, что среднее по времени от интегрируемой функции $f(t)$ определяется по формуле

$$\langle f\rangle = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(\tau)\,d\tau.$$

В случае, если функция $f(t)$ является производной от ограниченной функции $F(t)$, то есть $f = \dot F$, то ее среднее обращается в нуль. Действительно,

$$\langle f\rangle = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \frac{dF(\tau)}{d\tau}\,d\tau = \lim_{t\to\infty}\frac{F(t)-F(0)}{t} = 0.$$

Этот факт позволяет нам получить выражение для средней кинетической энергии следующим образом:

$$2T = \sum_a (\boldsymbol{p}_a\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_a) = \frac{d}{dt}\sum_a \boldsymbol{p}_a\boldsymbol{r}_a - \sum_a(\dot{\boldsymbol{p}}_a\cdot\boldsymbol{r}_a).$$

В силу уравнений движения $\dot{\boldsymbol{p}}_a = -\partial U/\partial\boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{F}_a$,

$$2T = \frac{d}{dt}\sum_a \boldsymbol{p}_a\boldsymbol{r}_a - \sum_a \boldsymbol{r}_a\boldsymbol{F}_a.$$

Если механическая система совершает финитное движение, то есть движение в конечной области пространства и со скоростями, не обращающимися в бесконечность, то $\sum_a \boldsymbol{r}_a\boldsymbol{p}_a$ ограничена, а значит

$$2\langle T\rangle = -\sum_a\langle \boldsymbol{r}_a\boldsymbol{F}_a\rangle.$$

Данное утверждение и называется теоремой вириала. Для механической системы, потенциальная энергия которой является однородной функцией степени k, теорема вириала согласно *теореме Эйлера об однородных функциях* принимает вид

$$\langle T\rangle = \frac{k}{2}\,\langle U\rangle.$$

Так, например, в случае кулоновского потенциала, $k=-1$, и в случае потенциала гармонического осциллятора, $k=2$, имеем

$$\langle p^2/2m\rangle_{\text{Coul}} = -\frac{1}{2}\langle U\rangle_{\text{Coul}},\quad \langle p^2/2m\rangle_{\text{osc}} = \langle U\rangle_{\text{osc}}.$$

Интересно отметить, что Цвики первым указал на существование *темной материи*, оценив с помощью теоремы вириала массу скопления галактик Комы. Скопление (кластер) содержит около тысячи галактик; обозначим это количество через N, а также положим для простоты, что все галактики имеют одинаковую массу m. Тогда, производя статистическое усреденение, получаем среднюю кинетическую энергию

$$\langle T\rangle = \frac{1}{N}\sum_{a=1}^{N}\frac{m\dot x_a^2}{2} = \frac{m}{2}\langle\dot x^2\rangle.$$

Согласно теореме вириала для кулоновского потенциала притяжения выполняется равенство $2\langle T\rangle = -\langle U\rangle$, а значит

$$2\langle T\rangle = m\langle\dot x^2\rangle = -\langle U\rangle \approx \frac{1}{2}Gm^2N\langle r^{-1}\rangle,$$

где G — гравитационная постоянная, а $\langle 1/r\rangle$ — среднее обратное расстояние между галактиками. Полученное выражение позволяет оценить общую массу кластера как

$$M = Nm \approx \frac{2\langle\dot x^2\rangle}{G\langle r^{-1}\rangle}.$$

Правая часть содержит величины, которые мы можем измерить. Произведя соответствующие вычисления, Цвики пришел к выводу, что полная масса кластера превышает массу входящих в нее галактик, наблюдаемых визуально. Как оказалось, недостаточно было учесть гравитационное взаимодействие только с наблюдаемой материей (видимыми галактиками). Необходимо, чтобы в кластере содержалась еще какая-то невидимая материя, которая гравитационно взаимодействует с видимой материей.

1.10. **Сферически симметричный потенциал.** Рассмотрим важную для теоретической физики *двухчастичную задачу.* Вообще, в классической механике часто приходится говорить о взаимодействии двух частиц. В этом смысле важна именно двухчастичная задача. Задача трех тел уже «неестественна» для механики, в том смысле, что для ее полного решения в общем виде необходимо задать дополнительные условия. Это связано прежде всего с тем, что взаимодействия в природе обычно парные, а иные тела включаются по принципу суперпозиции в эти взаимодействия. Поэтому в классической физике особенно важна именно двухчастичная задача. Последняя, как мы увидим далее, может быть сведена к задаче о движении одной частицы в сферически-симметричном потенциале, которую мы легко решим в квадратурах.

Рассмотрим задачу о взаимодействии[1] двух частиц с массами m_1 и m_2. В нерелятивистской механике такая двухчастичная задача может быть сведена к одночастичной задаче следующим образом: функция Лагранжа для системы двух частиц

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2^2 - U(|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|),$$

где $U(|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|)$ — потенциальная энергия взаимодействия частиц может быть факторизована с помощью замены переменных $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \mapsto (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R})$ вида

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \quad \boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

Действительно, скорости частиц можно переписать как

$$\dot{\boldsymbol{r}}_1 = \dot{\boldsymbol{R}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\dot{\boldsymbol{r}}, \quad \dot{\boldsymbol{r}}_2 = \dot{\boldsymbol{R}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\dot{\boldsymbol{r}}.$$

Отсюда получаем, что

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - U(r).$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа для центра масс $\boldsymbol{R}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{R}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{R}}} = 0$$

дают $\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{V} = \mathrm{const}$, или $\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{V}t$. Значит, система центра масс — инерциальная. Поэтому без ограничения общности перейдем в систему центра масс: $\boldsymbol{R} = 0$,

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - U(r),$$

где введено обозначение

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Величина m называется *приведенной массой.* Легко видеть, что функция Лагранжа формально имеет такой же вид, как и для частицы с массой, равной приведенной

[1] Оно может быть, например, гравитационным или электромагнитным. Для нас сейчас это вообще не существенно.

массе, которая движется во внешнем поле $U(r)$, симметричном относительно начала координат. Таким образом, мы свели двухчастичную задачу к задаче о движении одной частицы во внешнем поле $U(r)$.

Сведя задачу о движении двух частиц к одночастиной, мы пришли к вопросу об определении движения частицы массой m во внешнем сферически-симметричном поле $U(r)$. В случае сферически-симметричного потенциала очевидно, что функция Лагранжа, а значит и действие, обладают симметрией относительно поворотов и сдвигов времени. Сказанное означает, что мы имеем дело с консервативной механической системой, в которой сохраняется орбитальный момент относительно центра поля. Поскольку сохраняется орбитальный момент частицы $\boldsymbol{\ell} = m(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}})$, то, очевидно, движение частицы происходит в плоскости, перпендикулярной орбитальному моменту.

Введем систему координат с началом в источнике поля. Плоскость движения частицы обозначим через xy. Запишем сохраняющиеся энергию и орбитальный момент частицы в полярных координатах

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + U(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r), \quad \ell = \ell_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}.$$

Выражая обобщенную скорость $\dot{\varphi}$ через орбитальный момент ℓ и подставляя в формулу для энергии, получим

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{\ell^2}{2mr^2} + U(r) := \frac{m\dot{r}^2}{2} + V_{\text{eff}}(r).$$

Отсюда

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{2/m\left[E - V_{\text{eff}}(r)\right]}$$

или, разделяя переменные и интегрируя,

$$-t \pm \int dr\, \frac{m}{\sqrt{2m\left[E - V_{\text{eff}}(r)\right]}} = \text{const}.$$

Далее, запишем производную по времени от угла φ в виде

$$\dot{\varphi} = \dot{r}\,\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\ell}{mr^2},$$

откуда находим

$$\varphi(r) \mp \int \frac{\ell}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{2m\left[E - V_{\text{eff}}(r)\right]}} = \text{const}.$$

Полученные формулы решают в общем виде поставленную задачу. Последняя из них определяет связь между r и φ, то есть траекторию движения частицы. Заметим, что угол φ всегда меняется со временем монотонно, ведь $\dot{\varphi}$ никогда не меняет знака.

Выражение для полной энергии в полярных координатах показывает, что радиальную часть движения можно рассматривать как одномерное движение в эффективном (приведенном) потенциале $V_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}$. Величину $\frac{\ell^2}{2mr^2}$ обычно называют *центробежной энергией*. Значения r, при которых

$$E = U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2},$$

определяют границы радиального движения — *точки поворота*. Если область допустимого изменения r ограничена лишь одним условием $r \geqslant r_-$, то движение частицы инфинитно, то есть ее траектория приходит из бесконечности и уходит на бесконечность. Если же область изменения r имеет две границы r_- и r_+ ($r_+ > r_-$, апоцентр орбиты отвечает r_+, а перицентр орбиты отвечает r_-), то движение является финитным и траектория целиком лежит внутри кольца, ограниченного окружностями $r = r_-$ и $r = r_+$. За время движения от одной точки поворота до другой инкремент угла вращения составляет

$$\Delta\varphi = \int_{r_-}^{r_+} \frac{\ell}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2m[E - V_{\text{eff}}(r)]}}.$$

Инкремент угла вращения за время движения между последовательными перицентрами вдвое больше.

Условие замкнутости финитной орбиты заключается в том, чтобы этот угол был соизмерим с 2π, то есть имел вид $2\,\Delta\varphi = 2\pi\, k/n$, где $k,n \in \mathbb{Z}$. В случае выполнения этого условия, через n поворотов от перицентра до перицентра радиус-вектор частицы, сделав k полных оборотов, совпадет со своим первоначальным значением, то есть траектория замкнется. Можно показать, что если угол $\Delta\varphi$ несоизмерим с 2π, то орбита заполняет соответствующее кольцо всюду плотно.

Для круговой орбиты точки поворота становятся идентичными, $r_\pm \to r_0$, где величина r_0 — радиус круговой орбиты, для которого эффективный потенциал $V_{\text{eff}}(r)$, включающий в себя центробежный потенциал, имеет минимум:

$$\begin{cases} \frac{dV_{\text{eff}}}{dr}(r_0) = -\frac{\ell^2}{mr_0^3} + U'(r_0) = 0, \quad U'(r_0) = \frac{\ell^2}{mr_0^3}, \\ \frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2}(r_0) = \frac{3\ell^2}{mr_0^4} + \frac{d^2U}{dr^2}(r_0) = \frac{3}{r_0}U'(r_0) + U''(r_0) > 0. \end{cases}$$

Для орбиты, бесконечно близкой к круговой, движение по радиусу происходит в параболическом потенциале, который получается при разложении эффективного потенциала $V_{\text{eff}}(r)$ в окрестности минимума r_0:

$$V_{\text{eff}}(r) = V_{\text{eff}}(r_0) + \frac{1}{2}V''_{\text{eff}}(r_0)\cdot(r - r_0)^2 + \ldots$$

с точностью до членов второго порядка малости ($E > V_{\text{eff}}(r_0)$):

$$\Delta\varphi_{\text{circ}} = \lim_{r_\pm \to r_0} \int_{r_-}^{r_+} \frac{\ell/r^2\, dr}{\sqrt{2m\left[E - V_{\text{eff}}(r_0) - \frac{1}{2}V''_{\text{eff}}(r_0)\cdot(r - r_0)^2\right]}}.$$

В пределе $r_\pm \to r_0$ можно положить $\ell/r^2 \approx \ell/r_0^2$. В таком случае выражение для $\Delta\varphi_{\text{circ}}$ принимает вид

$$\Delta\varphi_{\text{circ}} = \frac{\ell}{r_0^2}\frac{1}{\sqrt{2m[E - V_{\text{eff}}(r_0)]}} \cdot \lim_{r_\pm \to r_0} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{V''_{\text{eff}}(r_0)}{2[E - V_{\text{eff}}(r_0)]}(r - r_0)^2}}.$$

Вводя замену

$$r - r_0 = \sqrt{\frac{2[E - V_{\text{eff}}(r_0)]}{V''_{\text{eff}}(r_0)}}\,\sin\xi, \qquad \xi \in [0,\pi],$$

получаем

$$\Delta\varphi_{\text{circ}} = \frac{\ell}{r_0^2}\frac{1}{\sqrt{mV''_{\text{eff}}(r_0)}} \int_0^\pi \frac{\cos\xi\, d\xi}{\sqrt{1 - \sin^2\xi}} = \pi\sqrt{\frac{U'(r_0)}{3U'(r_0) + r_0 U''(r_0)}}.$$

Как видно, последнее выражение по итогу не зависит от орбитального момента и полностью определяется видом потенциала $U(r)$.

Перейдем к изучению центральных потенциалов $U(r)$ консервативных систем, в которых существуют финитные орбиты и *все* они замкнуты. В этом случае, в частности, круговая орбита как предел бесконечно близкой к ней орбите тоже замкнута,

так что
$$\Delta\varphi_{\rm circ} = \pi\frac{k}{n} = \text{const},$$
и эта величина не зависит от радиуса, так как в противном случае малое изменение радиуса приводило бы к скачку в значениях чисел n и k, что означало бы наличие *хаоса*: бесконечно малое изменение траектории приводило бы к существенному изменению параметров орбиты.

Найдем все такие потенциалы, для которых $\Delta\varphi_{\rm circ} = \text{const}$. Из вышесказанного следует, что
$$U' = a\left(3U' + rU''\right), \quad a \geqslant 0,$$
откуда
$$a\frac{dU'}{U'} = (1-3a)\frac{dr}{r}, \quad U'(r) = A\, r^{1/a-3}.$$
Интегрируя данное уравнение, при $a = \frac{1}{2}$ получаем
$$U(r) = B\,\ln r, \quad B > 0,$$
а при $a \neq \frac{1}{2}$,
$$U(r) = u_a\, r^{1/a-2} = u_a r^{\kappa}, \quad \kappa \in [-2, +\infty) \cap \kappa \neq 0.$$
Здесь $u_a > 0$ при $\kappa > 0$ и $u_a < 0$ при $\kappa < 0$. Поэтому к искомым потенциалам относятся только однородные функции радиуса степени κ, включая нулевую степень однородности, $\kappa \to 0$, что отвечает логарифмическому потенциалу. Для таких потенциалов
$$\frac{U'(r_0)}{3U'(r_0) + r_0U''(r_0)} = \frac{1}{2+\kappa}, \quad \Delta\varphi_{\rm circ} = \frac{\pi}{\sqrt{2+\kappa}},$$
что уже сильно ограничивает значения степени однородности потенциала, то есть $\kappa = (\frac{n}{k})^2 - 2$, в частности, выпадает $\kappa = 0$, логарифмический потенциал. При $\kappa > 0$ потенциал растет до бесконечности, так что имеет смысл предел $E \to \infty$. Произведем замену переменных вида
$$\frac{\ell}{r} = z\frac{\ell}{r_-}, \quad z_+ = \frac{r_-}{r_+} < 1, \quad z_- = 1.$$
Тогда
$$\Delta\varphi = \int_{z_+}^{1} \frac{\ell}{r_-}\frac{dz}{\sqrt{2m\left[E - U\left(\frac{r_-}{z}\right) - z^2\frac{\ell^2}{2mr_-^2}\right]}} = \int_{z_+}^{1}\frac{dz}{\sqrt{W(1) - W(z)}},$$
где
$$W(z) = z^2 + 2m\frac{r_-^2}{\ell^2}\,U\left(\frac{r_-}{z}\right), \quad W(1) = 2mE\frac{r_-^2}{\ell^2}.$$
В пределе $E \to \infty$ радиус перицентра стремится к нулю, $r_- \to 0$, так что $W(1) \to 1$, $W(z) \to z^2$. Отсюда
$$\Delta\varphi = \lim_{z_+\to 0}\int_{z_+}^{1}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2}.$$
Это означает, что среди однородных растущих потенциалов, условию замкнутости всех финитных орбит удовлетворяет только тот, для которого
$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2+\kappa}}, \quad \kappa = 2.$$

Это потенциал гармонического осциллятора.

При $\kappa < 0$ замкнутые орбиты частицы возникают только в потенциале $U(r) = -|u_a|\, r^\kappa$, для которого реализуются орбиты с $E \to 0$. В этом случае при $r_- \neq 0$ имеем

$$\Delta\varphi = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{W(1) - W(z)}}.$$

Учитывая, что в точке поворота

$$E = \frac{\ell^2}{2mr_-^2} - |u_a|(r_-)^\kappa,$$

в пределе $E \to 0$ получаем

$$W(1) = 0 = 1 - 2m\frac{r_-^2}{\ell^2}|u_a|(r_-)^\kappa, \quad W(z) = z^2 - z^{-\kappa}.$$

Отсюда

$$\Delta\varphi = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z^{-\kappa} - z^2}}.$$

При $\kappa = -2$ орбита падает на центр. Если же $-2 < \kappa < 0$, то

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2+\kappa},$$

что следует сравнить со значением инкремента угла для орбит, бесконечно близких к круговым:

$$\frac{\pi}{2+\kappa} = \frac{\pi}{\sqrt{2+\kappa}},$$

откуда $\kappa = -1$, что отвечает притяжению в поле кулоновского типа.

Таким образом, мы установили, что сферически-симметричными потенциалами, для которых все финитные орбиты замкнуты, являются только потенциалы гармонического осциллятора и кулоновский или гравитационный потенциал. Рассмотрим движение частицы в кулоновском поле притяжения $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$, $\alpha > 0$. Эффективная потенциальная энергия

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

при $r \to 0$, очевидно, обращается в $+\infty$, а при $r \to +\infty$ стремится к нулю со стороны отрицательных значений; при $r = \ell^2/m\alpha$ она имеет минимум, равный

$$V_{\min} = -\frac{m\alpha^2}{2\ell^2}.$$

Кроме того, несложно заметить, что при $E > 0$ движение частицы будет инфинитным, а при $E < 0$ — финитным.

Форма траектории получается с помощью общей формулы, выведенной нами существенно раньше. Подставляя в нее $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$, получаем

$$\varphi(r) = \int \frac{\ell}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2m\left[E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2}\right]}} = -\int \frac{d\left(\frac{\ell}{r} - \frac{m\alpha}{\ell}\right)}{\sqrt{\left(2mE + \frac{m^2\alpha^2}{\ell^2}\right) - \left(\frac{\ell}{r} - \frac{m\alpha}{\ell}\right)^2}} =$$

$$= \arccos \frac{\frac{\ell}{r} - \frac{m\alpha}{\ell}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{\ell^2}}} + \text{const}.$$

Выбирая начало отсчета угла таким образом, чтобы $\mathrm{const} = 0$, и вводя обозначения

$$p_{\mathrm{orb}} = \frac{\ell^2}{m\alpha}, \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m\alpha^2}},$$

получаем уравнение конического сечения с фокусом в начале координат

$$p_{\mathrm{orb}}/r = 1 + e\cos\varphi.$$

p_{orb} и e — так называемые *параметр* и *эксцентриситет* орбиты. Сделанный нами выбор начала отсчета φ, очевидно, заключается в том, что точка с $\varphi = 0$ является ближайшей к центру, то есть является перицентром орбиты.

Несложно заметить, что при $E < 0$ эксцентриситет орбиты $e < 1$, то есть орбита финитна и представляет собой эллипс. Согласно известным формулам аналитической геометрии большая и малая полуоси эллипса

$$a = \frac{p_{\mathrm{orb}}}{1 - e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \qquad b = \frac{p_{\mathrm{orb}}}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{\ell}{\sqrt{2m|E|}}.$$

Заметим, что большая полуось эллипса зависит только от энергии частицы. Значение эксцентриситета $e = 0$ определяет наименьшее допустимое значение энергии, которое, конечно, совпадает с $V_{\min} = \frac{-m\alpha^2}{2\ell^2}$; в этом случае эллипс вырождается в окружность. Определим минимальное и максимальное расстояния r_- и r_+ до центра поля (фокуса эллипса): функция

$$r(\varphi) = \frac{p_{\mathrm{orb}}}{1 + e\cos\varphi}$$

имеет эксремумы в точках $\varphi_0 = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Действительно,

$$\frac{dr}{d\varphi}(\varphi_0) = \frac{p_{\mathrm{orb}} e \sin\varphi_0}{(1 + e\cos\varphi_0)^2} = 0, \quad \varphi_0 = \pi n, \;\; n \in \mathbb{Z}.$$

Причем, $n = 0$ соответствует минимуму функции $r(\varphi)$, а $n = 1$ — ее максимуму. При других $n > 1$ будет происходить чередование минимумов и максимумов в тех же точках. Действительно,

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2} = \frac{p_{\mathrm{orb}} e(2e\sin^2\varphi + e\cos^2\varphi + \cos\varphi)}{(1 + e\cos\varphi)^3},$$

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2}(0) = \frac{p_{\mathrm{orb}} e}{(1 + e)^2} > 0 - \min, \quad \frac{d^2r}{d\varphi^2}(\pi) = -\frac{p_{\mathrm{orb}} e}{(1 - e)^2} < 0 - \max.$$

С учетом вышесказанного получаем

$$r_- = r(0) = \frac{p_{\mathrm{orb}}}{1 + e}, \qquad r_+ = r(\pi) = \frac{p_{\mathrm{orb}}}{1 - e}.$$

Длина большой полуоси a определяется из условия $r_+ + r_- = 2a$, откуда

$$r_- = a(1 - e), \qquad r_+ = a(1 + e).$$

Период обращения T по эллиптической орбите удобно определить из т.н. «закона площадей». Последний является прямым следствием сохранения орбитального момента. Действительно, выражение

$$dA = \frac{1}{2}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}\, d\varphi$$

представляет собой площадь сектора, образованного двумя бесконечно близкими радиусами-векторами и элементом дуги траектории; из сохранения орбитального момента $\ell = mr^2\dot{\varphi}$ получаем закон площадей в форме: $\dot{A} = \mathrm{const}$, то есть за равные промежутки времени радиус-вектор движущейся точки заметает равные площади

— т.н. *второй закон Кеплера.* После интегрирования выражения для секториальной скорости $\dot{A}$ получаем

$$T = \frac{2mA}{\ell} = \frac{2\pi mab}{\ell} = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}} = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}},$$

то есть квадраты периодов обращения планет T соотносятся как кубы больших полуосей орбит a: $T^2/a^3 = \mathrm{const}$ — *третий закон Кеплера.*

При $E \geqslant 0$ движение частицы является инфинитным. Если выполняется строгое неравенство: $E > 0$, то эксцентриситет $e > 1$, то есть траектория является гиперболой, огибающей центр поля. Расстояние от фокуса до перицентра $r_- = \frac{p_{\mathrm{orb}}}{1+e} = a(e-1)$, где $a = \frac{p_{\mathrm{orb}}}{e^2-1} = \frac{\alpha}{2E}$ — полуось гиперболы.

В случае $E = 0$ эксцентриситет $e = 1$, то есть частица движется по параболе; причем $r_- = \frac{p_{\mathrm{orb}}}{2}$. Этот случай осуществляется, если частица начинает свое движение из состояния покоя на бесконечности.

Если к кулоновскому потенциалу $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ добавить малую поправку, скажем, вида $\delta U = \frac{\beta}{r^3}$, то траектории финитного движения частицы перестают быть замкнутыми и при каждом обороте перицентр орбиты смещается на малую угловую величину $\delta\varphi$, которую назовем *аномальным угловым смещением перицентра.* Для того, чтобы определить угловое смещение перицентра $\delta\varphi$ за период, заметим, что

$$\Delta\varphi = -2\frac{\partial}{\partial\ell}\int_{r_-}^{r_+} dr\,\sqrt{2m[E-U(r)] - \frac{\ell^2}{r^2}}.$$

Здесь перед интегралом появился множитель '2'. Он связан с тем, что мы считаем инкремент угла вращения за период, а не как раньше, за половину периода. Полагая потенциальную энергию

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \delta U = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^3},$$

получаем

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi = -2\frac{\partial}{\partial\ell}\int_{r_-}^{r_+} dr\,\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right) - \frac{\ell^2}{r^2} - 2m\delta U} \approx \\
\approx -2\frac{\partial}{\partial\ell}\int_{r_-}^{r_+} dr\,\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right) - \frac{\ell^2}{r^2}} + \frac{\partial}{\partial\ell}\int_{r_-}^{r_+}\frac{2m\delta U\,dr}{\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{\ell^2}{r^2}}} = \\
= 2\pi + \frac{\partial}{\partial\ell}\int_{r_-}^{r_+}\frac{2m\delta U\,dr}{\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{\ell^2}{r^2}}} = 2\pi + \delta\varphi.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial\ell}\int_{r_-}^{r_+}\frac{2m\delta U\,dr}{\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{\ell^2}{r^2}}} = \frac{\partial}{\partial\ell}\left(\frac{2m}{\ell}\int_0^{\pi} r^2\delta U\,d\varphi\right).$$

В нашем случае $r^2\delta U = \frac{\beta}{r}$. Поэтому

$$\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial\ell}\left(\frac{2m\beta}{p_{\mathrm{orb}}\ell}\int_0^{\pi} d\varphi\,(1+e\cos\varphi)\right) = \frac{\partial}{\partial\ell}\left(\frac{2\pi m\beta}{p_{\mathrm{orb}}\ell}\right) = -\frac{6\pi\beta}{\alpha p_{\mathrm{orb}}^2}.$$

Заметим, что на самом деле, по экспериментальным данным как раз имеет место угловое смещение планет в Солнечной системе. Здесь можно было бы предположить, что это происходит из-за влияния остальных планет системы. Это конечно так. Однако, как показывает опыт, даже если учесть влияние остальных планет, то все равно остается аномальное угловое смещение перицентра. Оказывается, оно связано с неточностью классических рассуждений. Необходимо будет учесть эффекты общей теории относительности, после чего получится ответ, хорошо согласующийся с экспериментальными данными.

Задача 1.17. Полагая, что коэффициент β в формуле для возмущения $\delta U(r)$ вида $\delta U(r) = \beta/r^3$ пропорционален квадрату орбитального момента частицы, найти критические точки эффективного потенциала

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} + U(r) + \delta U(r).$$

Определить также радиус самой внутренней стабильной круговой орбиты.

Задача 1.18. Покажите, что в потенциале притяжения вида $U(r) = -\gamma/r^2$ частица падает на центр. При каком условии?

Задача 1.19. В гравитационном поле Солнца вычислите малое отклонение луча света, проходящего возле края Солнца. Сравните результат с углом отклонения, рассчитанным в общей теории относительности, то есть с учетом искривления пространства-времени,

$$\delta\varphi = \frac{4GM}{Rc^2}.$$

Перейдем к рассмотрению задачи рассеяния в потенциале отталкивания кулоновского типа, а конкретно, изучим рассеяние легкой заряженной частицы $Z_1 e$ массой m на тяжелой тоже заряженной частице $Z_2 e$, причем $Z_1 Z_2 > 0$. В этом случае потенциал $U(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$, а значит,

$$\varphi(r) = -\int_\infty^r \frac{\ell}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2m\left(E - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}\right) - \frac{\ell^2}{r^2}}}.$$

При инфинитном движении, с которым мы имеем здесь дело, удобно ввести вместо постоянных E и ℓ другие — *прицельный параметр* (прицельное расстояние) b и скорость легкой частицы v_∞ на бесконечности. Энергия и орбитальный момент частицы выражаются через эти величины согласно

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2}, \quad \ell = mbv_\infty.$$

Отсюда

$$\varphi(x) = -\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+z^2-(x+z)^2}} = \arcsin\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} - \arcsin\frac{x+z}{\sqrt{1+z^2}},$$

где $x = b/r$, $z = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{mbv_\infty^2}$. Найдем теперь угол $\varphi_0 = \varphi(r_{\min})$. Воспользуемся для этого законами сохранения:

$$\frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_{\min}}, \quad mbv_\infty = mvr_{\min},$$

откуда находим, что

$$r_{\min} = b\left(z + \sqrt{1+z^2}\right),$$

а значит,

$$\varphi_0 = \arcsin\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} - \arcsin\frac{z + \frac{1}{z+\sqrt{1+z^2}}}{\sqrt{1+z^2}} = \arcsin\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} - \frac{\pi}{2},$$

$$\varphi_0 = \arccos \frac{\frac{Z_1Z_2e^2}{mbv_\infty^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{Z_1Z_2e^2}{mbv_\infty^2}\right)^2}}.$$

Теперь мы легко можем определить угол рассеяния $\psi = \pi - 2\varphi_0$:

$$\psi = \pi - 2\arccos \frac{\frac{Z_1Z_2e^2}{2Eb}}{\sqrt{1+\left(\frac{Z_1Z_2e^2}{2Eb}\right)^2}}, \quad \tan\frac{\psi}{2} = \frac{Z_1Z_2e^2}{2Eb}.$$

Отсюда

$$b = b(\psi) = \frac{Z_1Z_2e^2}{2E}\cot\frac{\psi}{2} = \frac{Z_1Z_2e^2}{mv_\infty^2}\cot\frac{\psi}{2}.$$

Отметим, что в разных физических задачах, как правило, приходится иметь дело не с индивидуальными актами рассеяния частиц, а, как говорят, с рассеянием пучка одинаковых частиц, падающих рассеивающие центры с одинаковой скоростью v_∞. Рассмотрим процесс рассеяния пучка легких частиц на тяжелом центре (тяжелой частице). Различные частицы пучка обладают различными прицельными параметрами b, а потому рассеиваются под различными углами ψ. Обозначим число частиц, рассеивающихся в единицу времени на углы, лежащие в интервале $(\psi, \psi + d\psi)$ через $dN(\psi)$. Через $n(\psi)$ обозначим число частиц, проходящих за единицу времени через единицу площади поперечного сечения пучка (пучок предполагается однородным во всему сечению). Отношение

$$d\sigma(\psi) = \frac{dN(\psi)}{n(\psi)}$$

называется *эффективным сечением рассеяния*. Оно всецело определяется видом рассеивающего поля и является важнейшей характеристикой процесса, ведь эффективное сечение рассеяния, как мы покажем позже, являет собой вероятность рассеяния в интервал углов $(\psi, \psi+d\psi)$, отнесенную к единичной поверхностной плотности рассеивающих частиц. Связь между ψ и b взаимно однозначна (угол является монотонно убывающей функцией прицельного параметра). В таком случае в заданный интервал углов $(\psi, \psi + d\psi)$ рассеиваются лишь те частицы, прицельные параметры которых лежат в интервале между $(b(\psi), b(\psi) + db(\psi))$. Раз так, значит

$$dN(\psi) = n(\psi)\, 2\pi b(\psi)\, db(\psi).$$

Тогда для эффективного сечения рассеяния получаем

$$d\sigma(\psi) = \frac{dN(\psi)}{n(\psi)} = 2\pi b(\psi)\, db(\psi) = 2\pi b(\psi)\frac{\partial b(\psi)}{\partial\psi}d\psi.$$

Данное выражение можно переписать через бесконечно малый элемент телесного угла $d\Omega = 2\pi\sin\psi\, d\psi$:

$$d\sigma = \frac{b}{\sin\psi}\frac{\partial b}{\partial\psi}\, d\Omega, \quad d\sigma(\psi) = \left(\frac{Z_1Z_2e^2}{2mv_\infty^2}\right)^2 \frac{d\Omega(\psi)}{\sin^4\frac{\psi}{2}}.$$

Полученную формулу называют *формулой Резерфорда.*

Как уже было сказано ранее, эффективное сечение рассеяния являет собой вероятность рассеяния в интервал углов $(\psi, \psi + d\psi)$, отнесенную к единичной поверхностной плотности рассеивающих частиц. Покажем это. Для этого вернемся к опытам Резерфорда: там параллельный пучок α-частиц направлялся на тонкую золотую фольгу и рассеивался ею. Пусть толщина фольги δ, а концентрация рассеивающих центров (ядер-мишеней золота) в ней равна n. Заметим, что толщина δ должна быть настолько малой, чтобы любая частица рассеивалась всего на одном ядре, то есть претерпевала однократное рассеяние. Вероятность рассеяния α-частиц на углы в интервале $(\psi, \psi + d\psi)$:

$$dw(\psi) = \frac{dN(\psi)}{N}.$$

Здесь $dN(\psi)$ — число рассеянных α-частиц на углы $(\psi, \psi + d\psi)$, N — число налетающих частиц. С другой стороны, вероятность $dw(\psi)$ можно определить следующим образом: $dw(\psi) = n\delta\, d\sigma(\psi)$, где $d\sigma(\psi)$ — дифференциальное сечение рассеяния, то есть некоторая доля поперечной площади в окрестности частицы мишени, пройдя которую, бомбардирующая частица рассеивается на угол в интервале $(\psi, \psi + d\psi)$. Из двух вышенаписанных уравнений выразим $d\sigma(\psi)$:

$$d\sigma(\psi) = \frac{dN(\psi)}{Nn\delta}.$$

Все налетающие α-частицы, рассеянные в интервале $(\psi, \psi + d\psi)$ пройдут с прицельными параметрами в интервале $(b(\psi), b(\psi) + db(\psi))$. Если A — площадь поперечного сечения налетающего пучка α-частиц, то количество рассеивающих центров равно $nA\delta$. Каждая частица рассеянная в интервале $d\psi$ пройдет через «колечко», площадью $2\pi b\, db$. Суммарная площадь всех таких «колец» равна

$$A_{\text{tot}} = nA\delta\, 2\pi b\, db.$$

Предполагая пучок, как и раньше, однородным, вероятность рассеяться в интервале углов $(\psi, \psi + d\psi)$:

$$dw(\psi) = \frac{A_{\text{tot}}}{A} = n\delta\, 2\pi b\, db = n\delta\, d\sigma(\psi),$$

то есть $d\sigma(\psi) = 2\pi b(\psi)\, db(\psi)$. Полученное выражение демонстрирует совпадение выражений для дифференциального и эффективного сечений рассеяния; это сечение, как видно из вышеизложенного, является вероятностью рассеяния в соответствующий интервал углов $(\psi, \psi + d\psi)$, отнесенной к единичной поверхностной плотности рассеивающих ядер $n\delta$.

Заметим, что в рассмотренной модели мы считали, что массы налетающих частиц много меньше массы частицы-мишени. А потому, можно было не учитывать кинетическую энергию частицы-мишени (она все равно в такой модели ничтожно мала). Если же сталкиваются частицы сравнимые по массам, то результаты, полученные нами выше, справедливы только в системе центра инерции.

Задача 1.20. Пусть частица массой m_1 рассеивается на другой неподвижной частице массой m_2. Найдите угол рассеяния γ частицы m_1 в лабораторной системе отсчета как функцию угла ψ.

Задача 1.21. Найти выражение для поперечного дифференциального сечения $d\sigma$ рассеяния частиц со сравнимыми массами в кулоновском потенциале в лабораторной системе отсчета.

1.11. **Уравнения Гамильтона-Якоби.** В заключение раздела поговорим немного о квантовой механике, используя при этом изученный нами лагранжев формализм.

Выведем для начала так называемые *уравнения Гамильтона-Якоби*. Для этого рассмотрим экстремальную траекторию $x^i(t)$ частицы, проходящую через точку пространства $\boldsymbol{r}$ в момент времени t. Значение функционала действия на этой траектории, очевидно, можно рассматривать как функцию переменного верхнего предела, то есть

$$S(\boldsymbol{r}(t),t) = \int_{t_0}^{t} d\tau\, L(x(\tau),\dot{x}(\tau),\tau), \quad \boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}_0.$$

Вообще говоря, функция $S(\boldsymbol{r},t)$ зависит также от начальных $\boldsymbol{r}_0$ и t_0. Однако, нас не будет интересовать эта зависимость. Мы хотим найти поведение функции $S(\boldsymbol{r},t)$ при изменении конечной точки траектории и времени, то есть производные $\partial S/\partial \boldsymbol{r}$ и $\partial S/\partial t$. Для этого сдвинем конечную координату $\boldsymbol{r}$ на малую величину $\varepsilon\delta\boldsymbol{r}$. Тогда

$$S(t,\boldsymbol{r}+\varepsilon\delta\boldsymbol{r}) = S[\boldsymbol{r}_\varepsilon(\tau)] = \int_{t_0}^{t} d\tau\, L(x_\varepsilon(\tau),\dot{x}_\varepsilon(\tau),\tau),$$

где $x^i_\varepsilon = x^i_\varepsilon(\tau)$ — экстремальная траектория с новыми граничными условиями: $\boldsymbol{r}_\varepsilon(t_0) = \boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}_\varepsilon(t) = \boldsymbol{r}+\varepsilon\delta\boldsymbol{r}$. В силу малости $\varepsilon\delta\boldsymbol{r}$, экстремаль $x^i(\tau)$ тоже меняется на малую величину в соответствии с равенством

$$\boldsymbol{r}_\varepsilon(\tau) = \boldsymbol{r}(\tau) + \varepsilon\delta\boldsymbol{r}(\tau), \quad \delta\boldsymbol{r}(t_0) = 0.$$

Дифференцируя $S(t,\boldsymbol{r}+\varepsilon\delta\boldsymbol{r})$ по ε, получаем

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{r}(t),t)}{\partial \boldsymbol{r}}\,\delta\boldsymbol{r} = \int_{t_0}^{t} d\tau\, \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}\delta\boldsymbol{r}(\tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\delta\dot{\boldsymbol{r}}(\tau)\right) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} d\tau\, \left(\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\delta\boldsymbol{r}(\tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\delta\dot{\boldsymbol{r}}(\tau)\right) = \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\delta\boldsymbol{r}(\tau)\right|_{t_0}^{t} = \boldsymbol{p}(t)\,\delta\boldsymbol{r}.$$

Ввиду произвольности $\delta\boldsymbol{r}$ имеем

$$\boldsymbol{p}(t) = \nabla S(\boldsymbol{r}(t),t).$$

Проделывая аналогичную процедуру (т.е. заменяя t на $t+\varepsilon\,\delta t$) для поиска производной $\partial S/\partial t$, получаем

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{r}(t),t)}{\partial \boldsymbol{r}}\,\dot{\boldsymbol{r}}(t)\,\delta t + \frac{\partial S(\boldsymbol{r}(t),t)}{\partial t}\,\delta t = L(x(t),\dot{x}(t),t)\,\delta t,$$

откуда, в силу произвольности δt, имеем

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{r}(t),t)}{\partial t} = -\frac{\partial S(\boldsymbol{r}(t),t)}{\partial \boldsymbol{r}}\,\dot{\boldsymbol{r}}(t) + L(\boldsymbol{r}(t),\dot{\boldsymbol{r}}(t),t) = -E(\boldsymbol{r}(t),\nabla S(t),t).$$

Уравнения

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{r}}, \quad E(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t) = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

и называются уравнениями Гамильтона-Якоби. Они будут играть важную роль при построении квантовой механики в терминах траекторий.

1.12. **Поле амплитуды вероятности.** Определим на траектории частицы, проходящей через точку $\boldsymbol{r}$ в момент времени t нерелятивистское комплексное скалярное поле *амплитуды вероятности* $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ траектории согласно

$$\Psi(\boldsymbol{r},t) := \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(\boldsymbol{r},t)\right\}.$$

Квадрат модуля амплитуды вероятности $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ определяет функционал вероятности $W = |\Psi(\boldsymbol{r},t)|^2$ достоверности траектории. В нашем случае классической траектории частицы средняя вероятность наблюдения единственной экстремали $x^i(t)$ равна единице, а средняя вероятность наблюдения неэкстремальных траекторий $\tilde{x}^i(t)$ равна нулю, как и должно быть, то есть

$$W[\boldsymbol{r}(t)] = \begin{cases} 1, & x^i = x^i(t), \\ 0, & x^i = \tilde{x}^i(t). \end{cases}$$

Действительно, рассмотрим пучок из N траекторий в малой окрестности экстремали, то есть траектории, удовлетворяющие уравнениям движения с фиксированными концами, заданными с бесконечно малой погрешностью. Для этого узкого пучка траекторий действие экстремально, а вероятность достоверности для траектории из этого пучка естественно определить, как интенсивность средней амплитуды вероятности:

$$W := \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \Psi_k \right|^2 = \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \exp\left\{ \frac{\mathrm{i}}{\hbar} S_k \right\} \right|^2 .$$

В силу экстремальности действия и бесконечно малой неопределенности пучка траекторий, действие на каждой такой траектории принимает значение в экстремуме, то есть $S_k = S_{\mathrm{ext}}$, а значит,

$$W = \left| \exp\left\{ \frac{\mathrm{i}}{\hbar} S_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r},t) \right\} \right|^2 = 1.$$

Рассмотрим теперь узкий пучок из N траекторий вблизи центральной траектории, которая не удовлетворяет принципу экстремального действия. Это значит, что при усреднении амплитуды вероятности в пучке

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \exp\left\{ \frac{\mathrm{i}}{\hbar} S_k \right\}$$

происходит суммирование комплексных чисел с единичным модулем и хаотически меняющейся фазой, поскольку действие существенно меняется от траектории к траектории в таком пучке, а так как средние значения синуса и косинуса равны нулю, мы найдем, что и средняя амплитуда для такого пучка траекторий обращается в нуль, чего и следовало ожидать. Это утверждение справедливо, конечно, если изменение фазы с необходимостью охватывает хотя бы период в 2π, что заведомо будет иметь место, если

$$\frac{|S_k|}{\hbar} \gg 2\pi,$$

что и составляет критерий применимости классической механики.

Отметим, что в приведенном рассмотрении мы предполагали, что возможно выделение достаточно узких пучков траекторий как возле экстремальной классической траектории, так и возле не экстремальной траектории. Это отвечает предельному случаю описания траекторий в рамках классической механики. В действительности, общим случаем является квантовая траектория в пучке, которая характеризуется флуктуацией сил, причем законы таких флуктуаций описываются амплитудой вероятности в квантовой механике. Стандартный способ сравнения предсказаний квантовой теории с экспериментом обычно использует многократное повторение одной и той же ситуации движения (ансамбль) для вычисления вероятности флуктуаций траектории. Однако, вообще говоря, квантовые флуктуации имеют место и в единичном случае, «без ансамбля». Так, к примеру, у нас нет ансамбля Вселенных, с которыми мы повторяли бы опыты по эволюции, есть только одна Вселенная, а значит, лишь одна реализация флуктуаций ее движения, и, при этом, нам удается верно описать квантовые флуктуации, произошедшие на ранней стадии эволюции Вселенной, которые определили спектр неоднородности распределения вещества, запечетленный в видимой крупномасштабной структуре Вселенной, а также в анизотропии реликтового излучения, дающего «фотоснимок» Вселенной в ее младенческом возрасте около 370 тысяч лет с начала расширения.

Запишем уравнения Гамильтона-Якоби для амплитуды вероятности наблюдения классической траектории $\Psi(\boldsymbol{r},t)$. С учетом данного выше определения, имеем

$$-\mathrm{i}\hbar\nabla\Psi = \boldsymbol{p}\Psi, \qquad \mathrm{i}\hbar\,\partial_t\Psi = E(\boldsymbol{r},-\mathrm{i}\hbar\nabla,t)\Psi.$$

Здесь $\boldsymbol{p}$ — импульс на экстремальной траектории.

Учтем теперь квантовые флуктуации и рассмотрим несколько траекторий, которые приводят в одну и ту же точку $\boldsymbol{r}$ в заданный момент времени t. По самому смыслу построения амплитуды вероятности в этой ситуации следует ввести суперпозицию амплитуд для разных траекторий $k \in \{1,\ldots,N\}$ с разными, вообще говоря, комплексными коэффициентами c_k:

$$\Psi(\boldsymbol{r},t) = \sum_{k=1}^{N} c_k \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S_k(\boldsymbol{r},t)\right\}.$$

Тогда уравнения Гамильтона-Якоби запишутся в виде следующих линейных уравнений для функции Ψ с операторами

$$-\mathrm{i}\hbar\nabla\Psi(\boldsymbol{r},t) = \sum_k c_k\boldsymbol{p}_k \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S_k(\boldsymbol{r},t)\right\} = \boldsymbol{p}\Psi(\boldsymbol{r},t), \quad \mathrm{i}\hbar\,\partial_t\Psi = E(\boldsymbol{r},-\mathrm{i}\hbar\nabla,t)\Psi.$$

Эти уравнения, а именно, определение оператора импульса $\boldsymbol{p}$ и уравнение эволюции амплитуды вероятности со временем, — основные уравнения квантовой механики. Задача эволюции для поля амплитуды Ψ отличается от задачи в классической механике и ставится в следующем виде: амплитуда вероятности в момент времени t_0 задает распределение вероятностей найти частицу в окрестности точки $\boldsymbol{r}_0$:

$$dW(t_0,\boldsymbol{r}_0) = |\Psi(\boldsymbol{r}_0,t_0)|^2\,d\boldsymbol{r}_0.$$

Решение уравнения эволюции, которое называется *уравнением Шредингера*, определит амплитуду всех траекторий в момент времени t, которые зададут распределение вероятности обнаружить частицу в окрестности точки $\boldsymbol{r}$.

Видно, что поле $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ здесь представляет собой сумму амплитуд всех траекторий с заданной конечной точкой траектории, в то время как начальная точка может быть распределена в пространстве с некоторой плотностью вероятности.

Сделаем важное замечание. Если, скажем, некоторая траектория имеет энергию, допустимую в спектре квантования энергии, то амплитуда вероятности такой отдельной траектории, конечно, тождественно равна единице, поскольку $\Psi = e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S}$, где действие вещественно, так что вероятность $W = |\Psi|^2 = 1$. Значит, каждое отдельное измерение соответствует измерению с вероятностью, равной единице, и не несет за собой никакого изменения волновой функции, которая отвечает заданному действию на траектории. Однако, если ставить вопрос об относительной вероятности наблюдать исходы нескольких измерений, то тогда волновая функция такого каскада измерений будет уже отвечать сумме по всем траекториям. Если не различать две эти постановки задачи, то тогда и возникает понятие о т.н. *«коллапсе волновой функции»* каскада измерений в волновую функцию единичного измерения. Как видим, понятие об амплитуде вероятности для заданной траектории и об амплитуде вероятности для суммы по траекториям полностью снимает какие-либо противоречия между единичным измерением и каскадным измерением.

Важно подчеркнуть, что различные траектории с заданной допустимой энергией из спектра системы, которые возникают за счет флуктуаций сил, например, ограничены условием: допустимы только такие флуктуации, которые не могут вывести траекторию в область значений величин, вероятность которых равна нулю.

В пределе бесконечно малой квантовой неопределенности, то есть формально при $\hbar \to 0$, полученные нами уравнения дают классический предел: амплитуда вероятности в точности совпадает с экспонентой от фазы в виде действия классической частицы на экстремальной траектории. В этом пределе фаза $\varphi = S/\hbar$ каждого парциального вклада представляет собой чрезвычайно большой угол. Вещественная (или мнимая) часть амплитуды вероятности равна косинусу (или синусу) этого угла и в равной степени может оказаться как положительной, так и отрицательной. Если сдвинуть некоторую траекторию на малую (в смысле классических масштабов) величину $\delta x(t)$, то изменение действия δS также будет небольшим в классическом смысле, однако отнюдь не малым при сопоставлении с постоянной Планка $\hbar$. Эти небольшие флуктуации траектории будут, вообще говоря, приводить к огромным флуктуациям фазы, так что ее косинус и синус совершают очень быстрые и частые осцилляции между положительными и отрицательными значениями. Таким образом, если одна траектория дает положительный вклад, то другая, бесконечно близкая к ней (в классическом смысле), дает такой же отрицательный вклад, так что в целом не возникает никакого вклада. Поэтому данную траекторию можно фактически не учитывать, если соседние с ней имеют различное действие, поскольку их вклады взаимно уничтожаются. Однако у экстремальной траектории флуктуации δx, по крайней мере в первом приближении, не меняют величины действия. Все вклады от траекторий, находящихся в этой области, близки по фазе и взаимно не уничтожаются. Следовательно, существенный вклад мы можем получить лишь в окрестности экстремальной траектории и в классическом пределе должны рассматривать только эту траекторию как единственно важную. Именно так классическая механика получается из квантовой. Можно также отметить, что траектории, не совпадающие с экстремальной, дают вклад лишь в той области, где действие отличается от классического на величину порядка $\hbar$. Классическая траектория в этой небольшой области остается неопределенной, что и ограничивает точность, с которой она выделяется.

Сейчас, в качестве простейшего примера, рассмотрим амплитуду вероятности для свободной частицы в одномерии, которая за время $t - t_0$ распространяется из точки x_0 в точку x, так что

$$\Psi(x,t) = A \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S(x,t)\right\},$$

где действие определяется экстремалью

$$S(x,t) = \frac{m\dot{x}^2}{2}\int_{t_0}^{t} dt = \frac{m}{2}\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0}, \quad t > t_0,$$

а независящую от координат амплитуду A мы ввели для общности рассмотрения.

Оператор импульса, который действует на амплитуду вероятности, в случае, когда амплитуда представляет собой сумму амплитуд с конечными точками траекторий в x, t, представляет собой сумму импульсов с весами в виде отдельных амплитуд соответствующей траектории. В рассматриваемом простейшем случае естественно определить среднее значение оператора импульса в виде[1]

$$\langle p\rangle = \frac{1}{2\Psi\Psi^\star}\left(\Psi^\star(p\Psi) + (p\Psi)^\star\Psi\right),$$

[1] В формализме квантовой механики, когда амплитуда является суперпозицией для многих траекторий, необходимо более строго подходить как к определению среднего значения физических величин, так и к трактовке амплитуды вероятности найти частицу в заданной точке в заданный момент времени. В частности, на единицу нормируют сумму вероятностей найти частицу в какой-либо точке пространства.

чтобы учесть сокращение произвольной нормировки амплитуды. Элементарная подстановка для свободной частицы дает

$$\langle p\rangle = m\frac{x-x_0}{t-t_0} = m\frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Подчеркнем, что речь идет о траектории с фиксированными концами, а не о траектории с заданным импульсом или энергией. Далее, определим флуктуацию импульса как среднее значение квадратичного отклонения от среднего значения

$$\delta^{(2)}p = \langle [p-\langle p\rangle]^2\rangle.$$

Раскрывая квадрат и учитывая, что среднее значение числа по данному нами определению среднего равно самому числу, найдем

$$\delta^{(2)}p = \langle p^2\rangle - 2\langle p\rangle^2 + \langle p\rangle^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2,$$

а значит, флуктуация определяется разностью среднего значения квадрата импульса и квадрата среднего значения. В случае свободной частицы

$$\frac{1}{\Psi\Psi^\star}\Psi^\star(p^2\Psi) = -\hbar^2\, e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}m}{2\hbar}\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0}\right\} = \left(m\frac{x-x_0}{t-t_0}\right)^2 - \frac{\mathrm{i}m\hbar}{t-t_0}.$$

Чисто мнимый вклад сокращается при вычислении

$$\langle p^2\rangle = \frac{1}{2\Psi\Psi^\star}\left(\Psi^\star(p^2\Psi) + (p^2\Psi)^\star\Psi\right) = \left(m\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2,$$

так что $\delta^{(2)}p = 0$.

Однако в более изощренных случаях флуктуация оказывается отличной от нуля: в рассмотренном случае амплитуда была собственной функцией оператора импульса с вещественным собственным значением, которое равно среднему значению импульса, а стало быть, ясно, что в случае, когда амплитуда не является собственной для оператора импульса, флуктуации импульса становятся ненулевыми.

Вместе с тем, интересно отметить, что, во-первых, чисто мнимый вклад формально стремиться к нулю при $\hbar \to 0$, а во-вторых, если иметь ввиду, что $\hbar$ — это, все-таки, размерная величина, мнимая добавка пренебрежимо мала, когда действие в аргументе экспоненты много больше $\hbar$,

$$S = \frac{m}{2}\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0} = \frac{\langle p\rangle^2}{2m}\Delta t \gg \hbar,$$

а стало быть, аргумент амплитуды вероятности, фаза для чисто мнимого аргумента экспоненты много больше единицы. Это же условие можно переписать как

$$E = \frac{\langle p\rangle^2}{2m} \gg \frac{\hbar}{\Delta t}.$$

В данном выражении значение энергии на классической траектории сравнивается с флуктуацией энергии, которая выражается через время наблюдения Δt, а именно,

$$E \sim \frac{\hbar}{\Delta t}.$$

Смысл этого выражения становится понятней, если вспомнить, что мы рассматриваем траекторию свободной частицы с фиксированными концами, а значит, энергия, в принципе, может в такой постановке задачи, как видим, несколько флуктуировать. При этом всегда можно указать длительность наблюдения за траекторией, когда флуктуации становятся несущественными. С точки зрения уравнений движения энергия свободной частицы связана с импульсом как $E = p^2/2m$; при записи энергии в уравнении Гамильтона-Якоби в виде $E = -\dot{S}$ легко установить и вид оператора, который действует на экспоненту от действия: $\mathrm{i}\hbar\,\partial_t e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S} = E\,e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S}$, так что $E\Psi = \mathrm{i}\hbar\,\partial_t\Psi$. Тогда следует полагать, что должно выполняться операторное уравнение Шредингера. Однако мы выяснили, что действие квадрата импульса приводит к флуктуациям

$$\frac{1}{2m}p^2\Psi = \frac{1}{2m}\left(m\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2\Psi - \frac{\mathrm{i}\hbar}{2\Delta t}\Psi.$$

Эта флуктуация в операторном уравнении в точности сократится, если предэкспоненциальный фактор амплитуды вероятности эктремальной траектории станет вполне определенным образом зависеть от времени

$$\Psi(x,t) = A(t)\,e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(x,t)} = \frac{A_0}{\sqrt{t-t_0}}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}m}{2\hbar}\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0}\right\},$$

так что элементарное дифференцирование произведения экспоненты на амплитуду $A(t)$ дает нам

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \frac{1}{2m}\left(m\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2\Psi - \frac{\mathrm{i}\hbar}{2\Delta t}\Psi.$$

Итак, мы убедились, что действие операторов на амплитуду вероятности траектории может приводить к флуктуациям по сравнению с классическими значениями импульса и энергии. Эти флуктуации скоррелированы так, чтобы в среднем, если траектория единственная, выполнялись уравнения классической механики на экстремальной траектории.

Зависимость предэкспоненциального фактора от времени мы получили здесь из условия согласованности классических и операторных уравнений движения. В квантовой механике этот фактор строго вычисляется, например, методом суммирования по всем траекториям с заданными концами, то есть при расчете *фейнмановского интеграла по траекториям.* Он получается равным

$$\sqrt{\frac{-\mathrm{i}m}{2\pi\hbar T}},\quad T = t - t_0.$$

Задача 1.22. Найти вероятность того, что свободная квантовая частица попадет в некоторую точку пространства x за время T.

Задача 1.23. Доказать следующие тождества:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) = \frac{\sinh x}{x},\quad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) = \frac{\sin x}{x}.$$

1.13. **Фейнмановский интеграл по траекториям.** По самому смыслу амплитуды вероятности $\Psi(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ ее можно представить в виде следующего интеграла по начальным координатам $\boldsymbol{r}_0$:

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1,t_1) = \int d\boldsymbol{r}_0\,K(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_0,t_0)\,\Psi(\boldsymbol{r}_0,t_0),$$

где $K(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_0,t_0)$ представляет собой амплитуду распространения частицы из точки $\boldsymbol{r}_0$ в момент времени t_0 в точку $\boldsymbol{r}_1$ в момент времени t_1, получающуюся суммированием по всем возможным траекториям $\boldsymbol{r}(t)$, ведущим из $\boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}_0$ в $\boldsymbol{r}(t_1) = \boldsymbol{r}_1$. То есть функция

$$K(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_0,t_0) = \sum e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S_k}.$$

Более формально, амплитуду $K(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_0,t_0)$, которую также называют *пропагатором*, можно записать в виде континуального интеграла — так называемого *фейнмановского интеграла по траекториям*

$$K(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_0,t_0) = \int_{x(t_0)=x_0}^{x(t_1)=x_1} \mathscr{D}\boldsymbol{r}(t)\, e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S[x(t)]}.$$

В последнем выражении хорошо бы определить меру интегрирования $\mathscr{D}\boldsymbol{r}(t)$. Для этого поступим следующим образом. Приблизим траектории $\boldsymbol{r}(t)$ кусочно линейными функциями: произведем разбиение отрезка $[t_0, t_1]$ на N равных частей с мелкостью разбиения Δt, то есть

$$\Delta t = \frac{t_1 - t_0}{N} = \frac{T}{N}.$$

На каждом отрезке разбиения Δt функция $\boldsymbol{r}(t)$ аппроксимируется линейной, а значит скорость $\dot{\boldsymbol{r}}$ на k-м участке разбиения аппроксимируется выражением

$$\dot{\boldsymbol{r}}_k = \frac{\boldsymbol{r}_{k+1} - \boldsymbol{r}_k}{\Delta t}.$$

В таком случае функционал действия $S[x(t)]$ для нерелятивистской частицы представится в виде суммы

$$S[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt\left[\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - U(\boldsymbol{r})\right] \;\mapsto\; \Delta t\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{m\dot{\boldsymbol{r}}_k^2}{2} - U\left(\frac{\boldsymbol{r}_{k+1}+\boldsymbol{r}_k}{2}\right)\right].$$

Устремляя мелкость разбиения к нулю, то есть $\Delta t \to 0$, $N \to \infty$, получаем точное выражение для функционала. В пределе $N \to \infty$ и $\Delta t \to 0$, набор $\{\boldsymbol{r}_k\}_{k=0}^{N}$ можно представлять в виде функций уже непрерывного параметра t, так что

$$\boldsymbol{r}(t_k) = \boldsymbol{r}_k.$$

Поскольку $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(t_0)$ и $\boldsymbol{r}_N = \boldsymbol{r}(t_1)$ фиксированы и по ним не происходит интегрирование, то для соответствующих функций это значит, что

$$\boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}_0, \quad \boldsymbol{r}(t_1) = \boldsymbol{r}_1.$$

Континуальный интеграл в таком случае определяется согласно

$$\int_{x(t_0)=x_0}^{x(t_1)=x_1} \mathscr{D}\boldsymbol{r}(t) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\mathcal{C}(\Delta t)}\int\prod_{k=1}^{N-1}\frac{d\boldsymbol{r}_k}{\mathcal{C}(\Delta t)}.$$

В последнем выражении $\mathcal{C}(\Delta t)$ — некоторая нормировочная постоянная (мы включили по одному множителю $\mathcal{C}(\Delta t)$ для каждого из N отрезков разбиения), которая будет определена ниже. В конце вычисления следует перейти к пределу $\Delta t \to 0$.

Рассмотрим добавление самого последнего интервала времени. Согласно вышесказанному для $K(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_0,t_0)$ имеем

$$K(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_0,t_0) = \int\frac{d\boldsymbol{r}'}{\mathcal{C}(\Delta t)}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{m(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}')^2}{2\Delta t} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\Delta t\, U\left(\frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}'}{2}\right)\right]K(\boldsymbol{r}',t_1-\Delta t;\boldsymbol{r}_0,t_0).$$

Интеграл по $\boldsymbol{r}'$ как раз и есть вклад в $\int\mathscr{D}\boldsymbol{r}(t)$ от последнего промежутка времени, а экспоненциальный множитель есть вклад этого промежутка в $e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S}$. Все вклады от предшествующих отрезков времени содержатся в $K(\boldsymbol{r}',t_1-\Delta t;\boldsymbol{r}_0,t_0)$. Как только мы устремляем $\Delta t \to 0$, быстрые осцилляции первого слагаемого в экспоненте ограничивают значения $\boldsymbol{r}'$ теми, которые очень близки к $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}(t_1)$. Следовательно, можно разложить это выражение по степеням $(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_1)$:

$$K(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_0,t_0)=\int\frac{d\boldsymbol{r}'}{\mathcal{C}(\Delta t)}\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{m(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}')^2}{2\Delta t}\right)\left[1-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\Delta t\,U(\boldsymbol{r}_1)+\ldots\right]\times$$
$$\times\left[1+(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_1)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_1}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_1)^i(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_1)^j\frac{\partial^2}{\partial x_1^i\partial x_1^j}+\ldots\right]K(\boldsymbol{r}',t_1-\Delta t;\boldsymbol{r}_0,t_0).$$

Выполним теперь интегрирование по $\boldsymbol{r}'$: это несложно сделать, ведь интеграл имеет гауссов вид. Напомним некоторые формулы для гауссовых интегралов:

$$\int_{\mathbb{R}}dx\,e^{-\alpha x^2}=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},\quad\int_{\mathbb{R}}dx\,x\,e^{-\alpha x^2}=0,\quad\int_{\mathbb{R}}dx\,x^2\,e^{-\alpha x^2}=\frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Для интегрирования часто используют *поворот Вика* контура интегрирования по времени. Формально полагают $\Delta t=-\mathrm{i}\,\Delta t_E$, Δt_E — «евклидово время». Для правомерности такого поворота необходимо, чтобы на пути смещения контура не было особых точек. Обычно полагают, что это условие выполнено. Тогда, как нетрудно заметить, интеграл по $\boldsymbol{r}'$ становится явно гауссовым и легко берется:

$$K(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_0,t_0)\approx\sqrt{\frac{2\pi\mathrm{i}\hbar\Delta t}{m\mathcal{C}^2(\Delta t)}}\left[1-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\Delta t\,U(\boldsymbol{r}_1)+\frac{\mathrm{i}\hbar\Delta t}{2m}\nabla_1^2\right]K(\boldsymbol{r}',t_1-\Delta t;\boldsymbol{r}_0,t_0).$$

Полученное выражение не имеет никакого смысле в пределе $\Delta t\to 0$, если только множитель перед скобками не равен 1. Значит, определяя множитель $\mathcal{C}(\Delta t)$ как

$$\frac{1}{\mathcal{C}(\Delta t)}=\sqrt{\frac{-\mathrm{i}m}{2\pi\hbar\Delta t}},$$

получаем

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial T}K(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_0,t_0)=\left[-\hbar^2/2m\,\nabla_1^2+U(\boldsymbol{r}_1)\right]K(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_0,t_0)=EK(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_0,t_0).$$

Из вышесказанного видно, что, во-первых, нормировочный фактор

$$\sqrt{\frac{-\mathrm{i}m}{2\pi\hbar\,\Delta t}}$$

не зависит от параметров траектории и его можно вынести из-под знака функционального интеграла. Во-вторых, корректное определение континуального предела подразумевает «регуляризацию» этого расходящегося вклада. Таким образом, выражение для пропагатора частицы сводится к следующей формуле:

$$K=\left(\frac{-\mathrm{i}m}{2\pi\hbar\,\Delta t}\right)^{N/2}\int\prod_{k=1}^{N-1}d\boldsymbol{r}_k\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\Delta t\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{m\dot{\boldsymbol{r}}_k^2}{2}-U\left(\frac{\boldsymbol{r}_{k+1}+\boldsymbol{r}_k}{2}\right)\right]\right\}.$$

Сама мера интегрирования $\mathscr{D}\boldsymbol{r}(t)$ модифицируется согласно

$$\mathscr{D}\boldsymbol{r}(t)=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{-\mathrm{i}m}{2\pi\hbar\,\Delta t}\right)^{N/2}\prod_{k=1}^{N-1}d\boldsymbol{r}_k.$$

Ранее для свободной частицы в одномерии мы обнаружили, что пропагатор

$$K^{(0)}(x_1,t_1;x_0,t_0)=\sqrt{\frac{-\mathrm{i}m}{2\pi\hbar(t_1-t_0)}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}m}{2\hbar}\frac{(x_1-x_0)^2}{t_1-t_0}\right].$$

В качестве полезного упражнения можете вывести данную формулу прямыми вычислениями в формализме интеграла по траекториям.

1.14. **Пропагатор гармонического осциллятора.** Используя знания, полученные нами в предыдущих параграфах, найдем в формализме интеграла по траекториям пропагатор для одномерного гармонического осциллятора с энергией

$$E(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Мы не хотим иметь дело с мерой функционального интеграла, которая содержит бесконечную константу, зависящую от дискретизации времени. Стандартный метод, позволяющий избавиться от этой бесконечной константы заключается в том, что можно рассматривать отношение функциональных интегралов, например, пропагатора осциллятора и пропагатора свободной частицы, который нам известен:

$$\frac{K^{(\omega)}(x_1,t_1;x_0,t_0)}{K^{(0)}(x_1,t_1;x_0,t_0)} = \frac{\int\limits_{x(t_0)=x_0}^{x(t_1)=x_1} \mathscr{D}x(t)\, \exp\left(\frac{\mathrm{i}m}{2\hbar}\int_{t_0}^{t_1} dt\,(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)\right)}{\int\limits_{x(t_0)=x_0}^{x(t_1)=x_1} \mathscr{D}x(t)\, \exp\left(\frac{\mathrm{i}m}{2\hbar}\int_{t_0}^{t_1} dt\,\dot{x}^2\right)}.$$

Разложим в последнем выражении функционал действия $S[x(t)]$ для осциллятора в окрестности классической траектории, удовлетворяющей нашим граничным условиям: $x_{\rm cl}(t_0) = x_0$, $x_{\rm cl}(t_1) = x_1$, то есть сделаем в функциональный интеграл подстановку

$$x(t) = x_{\rm cl}(t) + \xi(t).$$

В таком случае мы будем иметь дело с интегралом по всем функциям $\xi(t)$, но которые уже будут удовлетворять нулевым граничным условиям $\xi(t_0) = 0$, $\xi(t_1) = 0$: сдвиг $x_{\rm cl}(t) + \xi(t)$ приводит к добавке к действию:

$$S[x_{\rm cl}(t)+\xi(t)] = S[x_{\rm cl}(t)]+S[\xi(t)]+m\,\dot{x}_{\rm cl}\xi(t)\Big|_{t_0}^{t_1}+m\int_{t_0}^{t_1} dt\,\xi(t)\,\Gamma x_{\rm cl}(t) = S[x_{\rm cl}(t)]+S[\xi(t)].$$

Это верно только потому, что действие квадратично, а траектория $x_{\rm cl}(t)$ удовлетворяет классическим уравнениям движения $\Gamma x_{\rm cl}(t) = 0$, $\Gamma = -d^2/dt^2 - \omega^2$. Из вышенаписанного получаем, что пропагатор осциллятора

$$K^{(\omega)}(x_1;x_0) = \int \mathscr{D}x(t)\, \exp\left(\frac{\mathrm{i}m}{2\hbar}\int_{t_0}^{t_1} dt\,(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)\right) = K^{(\omega)}(0;0)\, e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S[x_{\rm cl}(t)]},$$

где

$$K^{(\omega)}(0,t_1;0,t_0) = \int_{\xi(t_0)=0}^{\xi(t_1)=0} \mathscr{D}\xi(t)\, \exp\left(\frac{\mathrm{i}m}{2\hbar}\int_{t_0}^{t_1} dt\,(\dot{\xi}^2 - \omega^2\xi^2)\right).$$

Остается сделать последний шаг — разложить $\xi(t)$ по базису из собственных функций оператора эволюции классического осциллятора:

$$\xi(t) = \sum_n a_n\,\xi_n(t), \quad \Gamma\xi_n(t) = \lambda_n\,\xi_n(t).$$

Найдем спектр λ_n и собственные функции $\xi_n(t)$ дифференциального оператора Γ:

$$\ddot{\xi}_n + (\omega^2 + \lambda_n)\xi_n(t) = 0.$$

Общее решение последнего уравнения, как известно, имеет вид

$$\xi_n(t) = a\sin\left(\sqrt{\omega^2+\lambda_n}\,t\right) + b\cos\left(\sqrt{\omega^2+\lambda_n}\,t\right).$$

Положим для простоты $t_0 = 0$, $t_1 = T$. Вспоминая про граничные условия для функции $\xi(t)$: $\xi_n(0) = 0$, $\xi_n(T) = 0$, получаем решение в виде

$$\xi_n(t) = a\sin\frac{\pi n t}{T}, \quad \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{T^2} - \omega^2.$$

Ортогональность функций $\xi_n(t)$ очевидна, ведь они являются собственными функциями самосопряженного оператора $\Gamma = \Gamma^\dagger$ (взаимную ортогональность $\xi_n(t)$ можно показать и «в лоб», взяв скалярное произведение $\int_0^T dt\, \xi_n(t)\xi_m(t)$ при $n \neq m$). Отнормируем функции $\xi_n(t)$, чтобы работать с ортонормированным базисом:

$$\int_0^T dt\, \xi_n^2(t) = 1, \quad A = \sqrt{\frac{2}{T}}, \quad \xi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{\pi n t}{T}.$$

В силу ортонормированности набора $\xi_n(t)$ мы немедленно замечаем, что функционал действия факторизуется

$$S[\xi(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{2} \lambda_n a_n^2.$$

Меру функционального интеграла Фейнмана можно в таком случае выбрать в следующем виде:

$$\int_{\xi(0)=0}^{\xi(T)=0} \mathscr{D}\xi(t) = \mathcal{N} \prod_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} da_n$$

с бесконечной константой $\mathcal{N}$, одинаковой для числителя и знаменателя в отношении пропогаторов $K^{(\omega)}(x_1,T;x_0,0)/K^{(0)}(x_1,T;x_0,0)$. Отсюда находим

$$K^{(\omega)}(0,T;0,0) = \mathcal{N} \prod_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} da_n \exp\left(\frac{\mathrm{i}m}{2\hbar}\lambda_n a_n^2\right) = \mathcal{N} \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\,\mathrm{i}}{m(\pi^2 n^2/T^2 - \omega^2)}}.$$

Беря отношение

$$\frac{K^{(\omega)}(0,T;0,0)}{K^{(0)}(0,T;0,0)},$$

получаем

$$\frac{K^{(\omega)}(0,T;0,0)}{K^{(0)}(0,T;0,0)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2 n^2}\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{\omega T}{\sin \omega T}}.$$

Таким образом, учитывая выражение для пропагатора свободной частицы, получаем

$$K^{(\omega)}(x_1,t_1;x_0,t_0) = \sqrt{\frac{-\mathrm{i}m\omega}{2\pi\hbar \sin\left[\omega(t_1 - t_0)\right]}}\, \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S[x_{\mathrm{cl}}(t)]\right\}.$$

В качестве упражнения рассмотрите предельный переход вида: $\omega \to 0$ к пропагатору свободной частицы.

Задача 1.24. Если амплитуда вероятности гармонического осциллятора в начальный момент времени $t_0 = 0$ имеет вид гауссова распределения

$$\Psi(x,0) = \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-a)^2\right\},$$

то покажите, что

$$\Psi(x,t) = \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}\omega t}{2} - \frac{m\omega}{2\hbar}\left[x^2 - 2axe^{-\mathrm{i}\omega t} + \frac{1}{2}a^2(1 + e^{-2\mathrm{i}\omega t})\right]\right\}$$

и найдите распределение вероятностей $W = |\Psi|^2$.

Задача 1.25. Взаимодействие простого гармонического осциллятора с внешним источником $j(t)$ описывается лагранжианом

$$L(x,\dot{x},t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} + xj(t).$$

(a) Вывести классические уравнения движения, исходя из принципа экстремального действия. Используя разложение функций $x(t)$ и $j(t)$ в *интеграл Фурье* (см. подробнее лекции по классической теории поля), найти общее решение уравнения движения осциллятора с произвольной функцией $j(t)$. Рассмотреть отдельно частный случай

$$j(t) = j_0 \sin{(\Omega t)}.$$

(b) В присутствии внешнего источника интеграл по траекториям функционально зависит от $j(t)$:

$$Z[j] = \int_{x(t_0)=x_0}^{x(t_1)=x_1} \mathscr{D}x(t)\, \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 + x(t)j(t)\right]\right\}.$$

Используя инвариантность меры интегрирования относительно функциональной замены переменных вида

$$x(t) \mapsto x'(t) = x(t) + \delta x(t), \quad \delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0,$$

установить квантовый аналог уравнения Лагранжа-Эйлера для осциллятора:

$$\int_{x(t_0)=x_0}^{x(t_1)=x_1} \mathscr{D}x(t)\, \{m\ddot{x} + m\omega_0^2 x - j(t)\}\, e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(t_1,t_2,j)} = 0.$$

(c) Используя подстановку $Z[j] = \exp\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}G[j]\}$, получить *уравнение Швингера-Дайсона*

$$m\frac{d^2}{dt^2}\frac{\delta G[j]}{\delta j(t)} = -m\omega_0^2\frac{\delta G[j]}{\delta j(t)} + j(t).$$

Это функциональное уравнение с источником $j(t)$. Производящий функционал $G[j]$ можно разложить в функциональный ряд

$$G[j] = G_0 + \int dt\, G_1(t)\, j(t) + \frac{1}{2!}\int dt'dt''\, G_2(t',t'')\, j(t')j(t'') + \dots$$

(d) Доказать, что производящий функционал для гармонического осциллятора принимает вид

$$G[j] = G_0 + \int dt\, G_1(t)\, j(t) + \frac{1}{2!}\int dt'dt''\, G_2(t',t'')\, j(t')j(t''),$$

где $G_1(t)$ — решение однородного уравнения $\Gamma G_1(t) = 0$ осциллятора с граничными условиями $x(t_0) = x_0$ и $x(t_1) = x_1$, а

$$\Gamma^{-1} j(t') = -\int dt''\, G_2(t' - t'')\, j(t'').$$

2. Гамильтонова механика

2.1. Канонические уравнения Гамильтона. Как мы хорошо понимаем, лагранжева механика описывает механическое состояние и эволюцию (в частности, равновесие) механической системы с помощью задания функции Лагранжа L, которая является функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и, быть может, времени, то есть $L = L(x,\dot{x},t)$. Переменные $(x,\dot{x})$ называют *переменными Лагранжа*. Как оказалось, переменные Лагранжа не единственные независимые переменные, которыми можно описывать механическое состояние и эволюцию системы. И зачастую удобнее перейти к другим, т.н. *гамильтоновым переменным*: обобщенным координатам и обобщенным импульсам, то есть (x,p). Такой переход (для нас сейчас) обусловлен, прежде всего, желанием получить в качестве уравнений движения уравнения первого порядка[1]. Действительно, уравнения Эйлера-Лагранжа всегда легко разрешаются относительно импульсов:

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial x^i}.$$

Поэтому, следовало бы ожидать, что искомые дифференциальные уравнения первого порядка имеют следующий вид:

$$\dot{p}_i = \mathscr{F}_i(x,p,t), \quad \dot{x}^i = \mathscr{V}^i(x,p,t).$$

Понятно, что не для всякого лагранжиана можно получить однозначное выражение для $\dot{x}^i = \mathscr{V}^i(x,p,t)$. Потребуем, чтобы замена $\dot{x}^i$ на p_i была бы невырожденной,

$$\det\left\{\frac{\partial p_i}{\partial \dot{x}^j}\right\} = \det\left\{\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\right\} \neq 0.$$

Такие лагранжианы называют *невырожденными*. Вообще говоря, во многих реальных физических системах условие невырожденности не выполняется. Примерами таких систем и теорий являются релятивистская частица в ковариантной формулировке, электромагнетизм, общая теория относительности. Для преодоления этой трудности используют аппарат *теории систем со связями* и некоторые другие продвинутые методы, которых мы в данной части книги не будем касаться.

Глядя на уравнения Эйлера-Лагранжа, нетрудно понять, каким образом можно получить нужные нам уравнения: в терминах гамильтоновых переменных было бы естественно использовать производную от функции Лагранжа при постоянном импульсе p, а не при постоянной скорости $\dot{x}$; для этого выразим обобщенные скорости через координаты и импульсы $\dot{x}^i = \mathscr{V}^i(x,p,t)$. Имеем

$$\dot{p}_i = \partial_i L(x,\dot{x},t) = \partial_i L(x,\mathscr{V}(x,p,t),t) - \frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial \dot{x}^j}\partial_i \mathscr{V}^j = \partial_i L(x,\mathscr{V},t) - p_j\,\partial_i \mathscr{V}^j.$$

Поскольку обобщенные координаты и импульсы являются независимыми переменными, то данное уравнение примет вид

$$\dot{p}_i = -\partial_i\{p_j \mathscr{V}^j - L(x,\mathscr{V},t)\} := -\partial_i H(x,p,t),$$

[1] Как известно, уравнения Эйлера-Лагранжа являются, как правило, уравнениями второго порядка и для постановки задачи Коши для них необходимо задать начальные координаты и начальные скорости; таким образом через каждую точку *конфигурационного пространства* (координатного пространства) проходит бесконечное множество траекторий. При переходе к уравнениям первого порядка для постановки задачи Коши достаточно задавать только начальную точку (уже в *фазовом пространстве*); причем, через каждую точку фазового пространства проходит ровно одна траектория.

где функцию $H(x,p,t) = p_i \mathscr{V}^i - L(x,\mathscr{V},t)$ называют *функцией Гамильтона*[1] механической системы. Как видно из определения, гамильтониан — это энергия, выраженная через обобщенные координаты и импульсы.

Задача 2.1. Докажите, что преобразование Лежандра является инволютивным. Рассмотреть пример степенной функции $f(x) = x^n$.

Найдем теперь производную от функции Гамильтона по *канонически сопряженной* переменной — обобщенному импульсу, то есть $\partial H/\partial p_i$:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \mathscr{V}^i + p_j \frac{\partial \mathscr{V}^j}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}\frac{\partial \mathscr{V}^j}{\partial p_i} = \mathscr{V}^i = \dot{x}^i.$$

Легко видеть, что члены от дифференцирования функций $\mathscr{V}$ и $L(x,\mathscr{V},t)$ сократились и мы получили систему уравнений, которые называются *каноническими уравнениями Гамильтона*

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}.$$

Это и есть искомые дифференциальные уравнения первого порядка.

Совокупность обобщенных координат и импульсов задает механическое состояние системы в фазовом пространстве, т.е. в пространстве, локальными координатами на котором являются обобщенные координаты и импульсы. Оно в общем случае имеет структуру дифференцируемого (симплектического) многообразия (M,ω), а потому одна координатная карта может не покрывать все фазовое пространство. В таких случаях необходимо задавать атлас: набор координатных карт между которыми заданы правила склейки. И хотя детальное обсуждение геометрической структуры фазового пространства не входит в наши планы, заметим, что наличие симплектической структуры ω — невырожденной замкнутой ($d\omega = 0$) дифференциальной формы второй степени на M — позволяет сформулировать гамильтонову механику в терминах дифференциальных форм и векторных полей на M. Если вкратце, то необходим механизм, который превращает функцию Гамильтона $H : M \to \mathbb{R}$ в векторное поле v_H; при этом, траекториями частиц в фазовом пространстве M являются интегральные кривые, порожденные векторным полем v_H. Этот механизм на самом деле простой. Дифференциальная форма второй степени ω в фазовом пространстве M дает нам отображение из касательного пространства в кокасательное: $\omega^\flat : T_pM \to T^\star_pM$, которое на самом деле является изоморфизмом (в силу невырожденности симплектической формы). В таком случае для гамильтониана $H : M \to \mathbb{R}$ существует единственное *гамильтоново векторное поле* v_H, определяемое из формулы

$$\imath_{v_H}\omega = -dH, \quad \omega = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu.$$

Данное уравнение может быть переписано в терминах локальных координат x^μ на многообразии M следующим образом: $v^\mu_H \omega_{\mu\nu} = -\partial_\nu H$. Действительно,

$$\imath_{v_H}\omega(e_\gamma) = \frac{1}{2} v^\beta_H \omega_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu(e_\beta, e_\gamma) = \frac{1}{2} v^\beta_H \omega_{\mu\nu}(\delta^\mu_\beta \delta^\nu_\gamma - \delta^\mu_\gamma \delta^\nu_\beta) = v^\beta_H \omega_{\beta\gamma} = -\partial_\gamma H.$$

[1]Преобразования вида

$$F(x,y,t) \mapsto G(x,p,t) = py - F(x,y,t)\big|_{y\,\mapsto\,p}, \qquad p = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

в математике называют *преобразованиями Лежандра.* Полезно отметить, что преобразование Лежандра инволютивно, то есть его квадрат равен тождественному преобразованию: если F при преобразовании Лежандра переходит в G, то преобразование Лежандра от G будет снова F.

Здесь мы воспользовались кососимметричностью компонент $\omega_{\mu\nu}$ симплектической формы. Определяя $\omega^{\mu\nu}$ из равенства $\omega^{\mu\nu}\omega_{\nu\sigma} = \delta^{\mu}_{\sigma}$, получаем, что координаты векторного поля $v^{\mu}_{H} = -\omega^{\nu\mu}\partial_{\nu}H = \omega^{\mu\nu}\partial_{\nu}H$. Интегральные кривые, порожденные векторным полем v_H, по определению, удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{dx^{\mu}}{dt} = v^{\mu}_{H} = \omega^{\mu\nu}\,\partial_{\nu}H.$$

Это равенство представляет собой общую форму канонических уравнений Гамильтона. Они сводятся к привычным нам уравнениям Гамильтона, если записать $x^{\mu} = (x^i, p_j)$, а симплектическую форму $\omega^{\mu\nu}$ как

$$\omega^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2. **Примеры гамильтоновых систем.** Приведем несколько примеров гамильтоновых систем. Начнем с самого простейшего: нерелятивистская частица массой m, движущаяся в потенциале $U(x,t)$. Как мы уже знаем, лагранжиан такой механической системы

$$L(x,\dot{x},t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x,t).$$

Канонический импульс частицы

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x},$$

откуда скорость $\dot{x} = p/m$; гамильтониан частицы определяется посредством преобразования Лежандра:

$$H(x,p,t) = p\dot{x} - L(x,\dot{x},t)\big|_{\dot{x}\mapsto p} = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} + U(x,t) = \frac{p^2}{2m} + U(x,t).$$

Соответствующие канонические уравнения Гамильтона

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \qquad \dot{p} = -\partial_x H = -\partial_x U(x,t).$$

Интегрируя полученные уравнения с учетом конкретного вида потенциала $U(x,t)$ и начальных условий: $x(t_0) = x_0$, $p(t_0) = p_0$, будем находить законы движения частицы, то есть траектории $x = x(t)$. В качестве иллюстрации последнего утверждения рассмотрим гармонический осциллятор: $U(x) = m\omega^2x^2/2$. В этом случае уравнения Гамильтона сводятся к

$$\dot{x} = p/m, \qquad \dot{p} = -m\omega^2 x,$$

то есть к уравнению $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, которое имеет довольно простое решение

$$x(t) = A\cos\left[\omega(t-t_0)\right], \qquad p(t) = -m\omega A\sin\left[\omega(t-t_0)\right].$$

Здесь A и t_0 — произвольные постоянные; выбор конкретных начальных условий: $x(t_0) = x_0$, $p(t_0) = p_0$, фиксирует значения постоянных A и t_0. Несложно заметить, что *фазовые траектории* гармонического осциллятора в координатах (x,p) представлют собой эллипсы:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{p^2}{(m\omega A)^2} = 1.$$

Оказывается, совершая замену переменных: $(x,p) \to (I,\theta)$ вида

$$x = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}}\,\sin\theta, \qquad p = \sqrt{2Im\omega}\,\cos\theta.$$

мы можем «выпрямить» фазовые траектории. Действительно, перепишем гамильтониан осциллятора в терминах новых переменных (I,θ), которые называются переменными *«действие-угол»*:

$$H = \frac{1}{2m}\,2Im\omega\,\sin^2\theta + \frac{1}{2}m\omega^2\,\frac{2I}{m\omega}\cos^2\theta = \omega I.$$

Видно, что гамильтониан H не зависит от переменной θ. Значит, уравнения Гамильтона[1]

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega, \quad \dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial\theta} = 0.$$

Откуда $I = \mathrm{const}$, $\theta = \omega t + \mathrm{const}$.

Завершая рассмотрение данного примера, покажем явно инволютивность преобразования Лежандра функции Лагранжа L. Для этого совершим преобразование Лежандра функции Гамильтона $H = p^2/2m + U(x,t)$: $\dot{x} = \partial H/\partial p = p/m$, значит

$$p\dot{x} - H(x,p,t)\big|_{p\mapsto\dot{x}} = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} - U(x,t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x,t) = L(x,\dot{x},t).$$

В качестве следующего примера докажем следующее важное утверждение. Рассмотрим действие $S[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt\; L(x(t),\dot{x}(t))$, инвариантное относительно *репараметризации* времени (такие механические системы иногда называют *общековариантными*[2]) $t \mapsto s = s(t)$. Покажем, что гамильтониан такой механической системы на уравнениях движения равен нулю.

В инфинитезимальном виде преобразование репараметризации времени может быть записано следующим образом

$$s = t + \tau(t),$$

где $\tau(t)$ — произвольная и, в некотором смысле, малая функция. Преобразование же координат принимает вид: $y(s) = x(t)$. Условие инвариантности действия при таких репараметризациях

$$\delta S = 0 = S[y(s)] - S[x(t)] = \int_{t_0+\tau(t_0)}^{t_1+\tau(t_1)} ds\; L(y(s),\dot{y}(s)) - \int_{t_0}^{t_1} dt\; L(x(t),\dot{x}(t)),$$

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} dt\frac{ds}{dt}\; L(y(s),\dot{y}(s)) - \int_{t_0}^{t_1} dt\; L(x(t),\dot{x}(t)).$$

Воспользуемся некоторыми очевидными тождествами

$$\frac{ds}{dt} = 1 + \dot{\tau}(t), \quad \frac{d}{ds} = [1 - \dot{\tau}(t)]\frac{d}{dt}, \quad \frac{d}{ds}y(s(t)) = \dot{x}(t) - \dot{x}(t)\,\dot{\tau}(t),$$

и запишем

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} dt\left(L + L\dot{\tau} - \frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\dot{x}\dot{\tau}\right) - \int_{t_0}^{t_1} dt\; L = \int_{t_0}^{t_1} dt\left(L - \frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\dot{x}\right)\dot{\tau}.$$

Поскольку последнее равенство должно выполняться для произвольных малых $\tau(t)$, на которое не наложено никаких дополнительных ограничений, то получаем, что[3]

$$L - \frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\dot{x} = 0 = -H.$$

---

[1] Строго говоря, необходимо проверить, что такое преобразование $(x,p) \to (I,\theta)$ координат и импульсов сохраняет форму уравнений Гамильтона, то есть является *каноническим преобразованием*. О последних мы поговорим позже.

[2] Такая инвариантность обычно имеет место в случае релятивистских частиц (в ковариантной формулировке), теории релятивистских струн или общей теории относительности.

[3] Следует, однако, отметить, что в некоторых случаях общековариантных систем из-за наличия связей к лагранжиану необходимо добавить дополнительные слагаемые, которые дают ненулевой вклад в гамильтониан даже на уравнениях движения.

Наконец, рассмотрим последний любопытный пример: заряженная нерелятивистская частица в электромагнитном поле. Лагранжиан частицы в электромагнитном поле можно записать как

$$L(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t) = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + \frac{q}{c}(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)) - q\varphi(\boldsymbol{r},t).$$

Найдем канонический импульс

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = m\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{q}{c}\boldsymbol{A},$$

который, как мы видим, отличается от динамического на слагаемое $\frac{q}{c}\boldsymbol{A}$. Выразим скорость через импульс

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{p}}{m} - \frac{q}{mc}\boldsymbol{A}$$

и подставим в определение гамильтониана

$$H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t) = \boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{r}} - L|_{\dot{x}\mapsto p} = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + q\varphi.$$

Тогда уравнения Гамильтона записываются как

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p^i}{m} - \frac{q}{mc}A^i, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} = \frac{q}{mc}\left(p^j - \frac{q}{c}A^j\right)\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - q\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}.$$

В заключение параграфа вычислим полную производную по времени от функции Гамильтона некоторой механической системы:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x^i}\dot{x}^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i.$$

В силу канонических уравнений Гамильтона

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

То есть полная производная по времени от функции Гамильтона всегда равна частной производной по времени от функции Гамильтона. В частности, если $\dot{H} = 0$, то мы приходим к закону сохранения энергии.

Задача 2.2. Найти гамильтониан и составить канонические уравнения движения механической системы, лагранжиан которой имеет вид

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}a\dot{x}_1^2 t^2 - a\cos x_2.$$

2.3. **Принцип стационарного действия.** Действие для механической системы с функцией Лагранжа $L(x,\dot{x},t)$:

$$S[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt\, L(x,\dot{x},t) = \int_{t_0}^{t_1} dt\, \{p_i(x,\dot{x},t)\,\dot{x}^i - H(x,p(x,\dot{x},t),t)\},$$

$$S[x(t)] = \int p_i\, dx^i - H\, dt.$$

Найдем вариацию этого действия:

$$\delta S[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt\left\{\delta p_i\,\dot{x}^i + p_i\,\delta\dot{x}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i - \partial_i H\,\delta x^i\right\},$$

или

$$\delta S[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt\left\{\delta p_i\left(\dot{x}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) - [\dot{p}_i + \partial_i H]\,\delta x^i\right\}.$$

Далее, следуя лагранжеву формализму, нужно расписать вариацию импульса

$$\delta p_i = \frac{\partial p_i}{\partial x^j}\delta x^j + \frac{\partial p_i}{\partial \dot{x}^j}\delta \dot{x}^j,$$

после чего, проинтегрировав по частям члены, содержащие $\delta\dot{x}$, мы снова получили бы уравнения Эйлера-Лагранжа. В этом смысле мы проделали бы бессмысленные действия, ведь это не дает нам ничего нового. Однако, если посмотреть на выражение для вариации действия, то легко увидеть, что множители при вариациях координат и импульсов совпадают с уравнениями Гамильтона. Это значит, что если определить новое действие

$$S[x(t), p(t)] = \int p_i\, dx^i - H(x,p,t)\, dt,$$

то его вариация по обобщенным координатам и канонически сопряженным импульсам, рассматриваемым как независимые переменные, даст (после применения принципа стационарного действия) уравнения Гамильтона

$$\delta S[x(t), p(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\dot{x}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i - \int_{t_0}^{t_1} dt\, (\dot{p}_i + \partial_i H)\, \delta x^i,$$

$$\frac{\delta S}{\delta p_i(t)} = 0 = \dot{x}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{\delta S}{\delta x^i(t)} = 0 = -\dot{p}_i - \partial_i H.$$

Важно понимать, что $S[x(t), p(t)]$ является новым функционалом, хоть он и получен путем замены переменных в старом действии $S[x(t)]$. Действие $S[x(t)]$ является функционалом в конфигурационном пространстве, в то время как новое действие $S[x(t), p(t)]$ — функционал в фазовом пространстве. Для нового действия экстремум ищется по более широкому классу траекторий, так как канонический импульс задается независимо от скорости. Связь между последними возникает на экстремальных траекториях системы, удовлетворяющих уравнениям Гамильтона.

2.4. **Скобки Пуассона и законы сохранения.** Продолжим рассмотрение гамильтоновой динамики частиц. Обобщенные координаты и обобщенные импульсы — это координаты в фазовом пространстве. Задание точки в фазовом пространстве, как мы уже знаем, полностью определяет состояние механической системы. В заданном состоянии измерение любой физической величины (*наблюдаемой*) F дает в классической механике определенный результат, то есть любая наблюдаемая определяется как функция координат и импульсов в пространстве и времени:

$$F = F(x,p,t).$$

Динамическое уравнение в фазовом пространстве для произвольной наблюдаемой имеет вид

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x^i}\dot{x}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i.$$

На траекториях, удовлетворяющих уравнениям движения,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x^i} := \frac{\partial F}{\partial t} + \{F,H\}\,.$$

Здесь мы ввели *скобки Пуассона*, которые определены для произвольной пары дифференцируемых наблюдаемых, заданных как функции канонических координат (x,p) следующим выражением

$$\{F,G\} = \frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial x^i}.$$

Скобки Пуассона обладают следующими свойствами, которые легко получить непосредственно из определения:

- *кососимметричность*:
$$\{F,G\} = -\{G,F\}\,,$$
- *равенство нулю с константами* $c \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$:
$$\{F,c\} = 0,$$
- *линейность по обоим аргументам*:
$$\{F,G+K\} = \{F,G\} + \{F,K\}\,, \quad \{F+G,K\} = \{F,K\} + \{G,K\}\,,$$
- *правило Лейбница*:
$$\{F_1F_2,G\} = F_1\{F_2,G\} + F_2\{F_1,G\}\,,$$
- *тождество Якоби*:
$$\big\{F,\{G,K\}\big\} + \big\{G,\{K,F\}\big\} + \big\{K,\{F,G\}\big\} = 0.$$

Проверим, для примера, правило Лейбница:
$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x^i}F_2 + \frac{\partial F_2}{\partial x^i}F_1\right)\frac{\partial G}{\partial p_i} - \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_i}F_2 + \frac{\partial F_2}{\partial p_i}F_1\right)\frac{\partial G}{\partial x^i} = F_1\{F_2,G\} + F_2\{F_1,G\}\,.$$
Скобки Пуассона координаты x^i и сопряженного к ней импульса $p_i = \partial L/\partial\dot{x}^i$ как независимых переменных легко вычисляются и дают единицу:
$$\{x^i,p_j\} = \frac{\partial x^i}{\partial x^k}\frac{\partial p_j}{\partial p_i} - \frac{\partial x^i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial x^k} = \delta^i_j,$$
также очевидно, что $\{x^i,x^j\} = 0$, $\{p_i,p_j\} = 0$. Такая пара, как говорят, обладает *каноническими* скобками Пуассона, а саму пару называют *канонически сопряженными переменными*. Для канонических координат выполняются следующие важные свойства
$$\{x^i,F\} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \{p_i,F\} = -\frac{\partial F}{\partial x^i}.$$
Таким образом скобки Пуассона позволяют дифференцировать наблюдаемые не только по времени, но и по координатам и импульсам.

В классической механике любая наблюдаемая задается как некоторая скалярная функция координат в фазовом пространстве и времени. Будем считать, что эти функции являются *гладкими*. Такие функции образуют *алгебру Ли* относительно скобок Пуассона. Действительно, гладкие функции можно складывать друг с другом и умножать на числа; это показывает, что множество наблюдаемых на фазовом пространстве образуют векторное пространство — *пространство наблюдаемых*, а в силу доказанных выше свойств скобок Пуассона получаем, что на пространстве наблюдаемых определена *скобка Ли*, т.е. кососимметричная билинейная операция, удовлетворяющая тождеству Якоби, — скобки Пуассона.

Формально, для любой гамильтоновой системы можно построить сколько угодно законов сохранения. Достаточно доопределить любую наблюдаемую F_0 в момент времени таким образом, чтобы
$$\frac{dF}{dt} = 0 = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F,H\}\,, \quad F(x,p,t_0) = F_0(x,p).$$
Такие наблюдаемые называются *динамическими инвариантами*. В качестве примера, для свободной частицы $H = p^2/2m$ можно построить следующий динамический инвариант
$$\overline{x}(t) = x - \frac{p}{m}t, \quad \overline{x}(0) = x_0.$$

Этот инвариант соответствует начальному значению координаты частицы (в момент времени $t = 0$).

Очевидно, что все обобщенные координаты и импульсы в начальный момент времени t_0 образуют *максимальный набор независимых динамических инвариантов*. Все остальные выражаются через них как функции, то есть количество независимых динамических инвариантов равно размерности фазового пространства.

Особый интерес представляют динамические инварианты, не зависящие от времени явно, то есть

$$\frac{dF}{dt} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad \Rightarrow \quad \{F,H\} = 0.$$

Такие сохраняющиеся величины называют *интегралами движения*. Например, если функция Гамильтона механической системы не зависит явно от времени, то энергия системы является интегралом движения. Другой пример представляют собой системы, гамильтониан которых не зависит явно от одной из канонических координат. Такая координата называется *циклической*. В этом случае канонически сопряженная координата, очевидно, является интегралом движения.

Задача 2.3. Рассмотрите нерелятивистскую частицу массой m с орбитальным моментом $\boldsymbol{\ell} = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})$. Вычислите следующие скобки Пуассона:

$$\{x^i, p_j\}, \quad \{p_i, \ell^j\}, \quad \{\ell^i, \ell^j\}, \quad \{\ell^i, \boldsymbol{\ell}^2\}.$$

Задача 2.4. Вектор *Рунге-Ленца-Лапласа* для частицы массой m в сферически симметричном потенциале $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ определяется выражением

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} - \frac{(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{\ell})}{m\alpha}.$$

Показать, что скобки Пуассона $\{A_i, \ell_j\} = \varepsilon_{ijk} A^k$. Доказать, что вектор Рунге-Ленца-Лапласа является интегралом движения.

Задача 2.5. Частица с электрическим зарядом q движется в фоновом статическом магнитном поле $\boldsymbol{H}$. Покажите, что скобки Пуассона

$$\{p_i, p_j\} = q\varepsilon_{ijk} H^k, \quad \{x^i, p_j\} = \delta^i_j.$$

Задача 2.6. *Магнитным монополем* называют частицу, создающую радиальное магнитное поле вида

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = g\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Рассмотрим заряженную частицу, движущуюся в фоновом магнитном поле монополя g и определим *обобщенный угловой момент*

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{\ell} - \frac{qg}{cr}\boldsymbol{r}.$$

Доказать, что данный вектор $\boldsymbol{j}$ является интегралом движения. Каков физический смысл его сохранения во времени?

В заключение параграфа сформулируем и докажем важное утверждение, которое носит название *теоремы Якоби-Пуассона*: если F и G — динамические инварианты, то составленные из них скобки Пуассона тоже являются таковыми, то есть $\{F,G\} = \mathrm{const}$. Пусть F и G в самом общем случае зависят явно от времени. Тогда

$$\frac{d}{dt}\{F,G\} = \frac{\partial}{\partial t}\{F,G\} + \{\{F,G\}, H\}.$$

Имея ввиду очевидное тождество: $\partial_t \{F,G\} = \{\partial_t F,G\} + \{F, \partial_t G\}$, а также тождество Якоби, получаем

$$\frac{d}{dt}\{F,G\} = \{\partial_t F,G\} + \{F,\partial_t G\} - \big\{\{H,F\},G\big\} + \big\{F,\{G,H\}\big\} =$$
$$= \big\{\partial_t F + \{F,H\},G\big\} + \big\{F,\partial_t G + \{G,H\}\big\} = \left\{\frac{dF}{dt},G\right\} + \left\{F,\frac{dG}{dt}\right\}.$$

Отсюда, очевидно, следует утверждение теоремы Якоби-Пуассона.

2.5. **Канонические преобразования.** Как мы показывали в первом разделе, уравнения Эйлера-Лагранжа инвариантны относительно гладких замен координат вида $x^i \mapsto y^i = y^i(x^j)$. В гамильтоновой механике естественным образом возникает вопрос о том, какие преобразования координат и импульсов $y^i = y^i(x,p,t)$, $q_i = q_i(x,p,t)$ сохраняют форму канонических уравнений Гамильтона и каким будет при этом новый гамильтониан $H'(y,q)$ механической системы? Такие преобразования называются обычно *каноническими преобразованиями*.

Чтобы вариационные задачи для старых и новых координат и импульсов были эквивалентными, «новое» действие S' может отличаться от «старого» S только лишь граничными членами[1], которые не дают вклада в уравнения движения, поскольку вариация действия происходит при фиксированных концах, то есть

$$S[x(t),p(t)] = S'[y(t),q(t)] + \int dt\,\frac{d}{dt}\left[F(x,q,t) - q_i y^i\right].$$

Функцию $F(x,q,t)$ называют *производящей функцией канонического преобразования*. Она, вообще говоря, может зависеть также от y^i и p_i. Однако, ввиду формул преобразований координат и импульсов, только половина переменных из набора (x,y,p,q) являются независимыми. Нам удобнее будет считать независимыми x^i и q_i. Распишем подробнее преобразование действия. Имеем

$$\int dt\,\left\{p_i\,\dot{x}^i - H(x,p,t)\right\} = \int dt\,\left\{q_i\,\dot{y}^i - H'(y,q,t)\right\} + \int dt\,\frac{d}{dt}\left[F(x,q,t) - q_i y^i\right],$$

или

$$\int dt\left[\left(p_i - \frac{\partial F}{\partial x^i}\right)\dot{x}^i + \left(y^i - \frac{\partial F}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i + H'(y,q,t) - H(x,p,t) - \frac{\partial F}{\partial t}\right] = 0.$$

Достаточными условиями выполнения этого тождества будут

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial x^i},\qquad y^i = \frac{\partial F}{\partial q_i},\qquad H'(y,q,t) = H(x,p,t) + \frac{\partial F}{\partial t},$$

которые представляют собой закон преобразования и выражение для «нового» гамильтониана H'. Эти соотношения позволяют неявно исключить «старые» канонически сопряженные переменные (x,p) и перейти к новым переменным (y,q). Действительно, вычислим скобки Пуассона новых переменных в фазовом пространстве

[1] Вообще говоря, $S'[y(t),q(t)]$ и $S[x(t),p(t)]$ могут входить в равенство с разными коэффициентами, то есть

$$S[y(t),q(t)] = aS'[x(t),p(t)] + A.$$

Канонические преобразования со значением параметра $a = 1$ называются *унивалентными*. Далее только их мы и будем рассматривать, поскольку выбор значения $a = 1$ никак не сказывается на содержании преобразования, ведь из определений импульса и функции Гамильтона следует, что выбор значения a, отличного от единицы просто означает переход к другим единицам измерения импульса и энергии, и, соответственно, к другому значению постоянной Планка для новых единиц измерения импульса и энергии при прежних единицах измерения длины и времени.

старых переменных:

$$\{y^i,q_j\} = \frac{\partial y^i}{\partial x^k}\frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial y^i}{\partial p_k}\frac{\partial q_j}{\partial x^k},$$

Из вышенаписанного находим

$$dp_i = \frac{\partial p_i}{\partial q_j}dq_j + \frac{\partial p_i}{\partial x^j}dx^j + \frac{\partial p_i}{\partial t}dt = \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial x^i}dq_j + \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}dx^j + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x^i}dt,$$

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial q_j}dq_j + \frac{\partial y^i}{\partial x^j}dx^j + \frac{\partial y^i}{\partial t}dt = \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j}dq_j + \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial x^j}dx^j + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_i}dt,$$

откуда можно выразить дифференциалы новых переменных через дифференциалы старых переменных

$$dq_j = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial x^n}\right)^{-1} \cdot \left(dp_n - \frac{\partial^2 F}{\partial x^n \partial x^k}dx^k - \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x^n}dt\right),$$

$$dy^i = \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial x^n}\right)^{-1} \cdot \left(dp_n - \frac{\partial^2 F\, dx^k}{\partial x^n \partial x^k} - \frac{\partial^2 F\, dt}{\partial t \partial x^n}\right) + \frac{\partial^2 F\, dx^j}{\partial q_i \partial x^j} + \frac{\partial^2 F\, dt}{\partial t \partial q_i}.$$

Из этих формул легко получить, что

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^\ell} = \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial x^\ell} - \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j}\frac{\partial^2 F}{\partial x^n \partial x^\ell}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial x^n}\right)^{-1}, \quad \frac{\partial q_j}{\partial p_\ell} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial x^\ell}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial y^i}{\partial p_\ell} = \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial x^\ell}\right)^{-1}, \quad \frac{\partial q_j}{\partial x^\ell} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x^n \partial x^\ell}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial x^n}\right)^{-1}.$$

Поставляя найденные нами выражения в скобку Пуассона $\{y,q\}$, имеем

$$\{y^i,q_j\} = \delta^i_j.$$

Мы получили каноническое значение скобок Пуассона для новых переменных (y,q). Таким образом новые переменные являются канонически сопряженными и действительно задают фазовое пространство.

В заключение параграфа приведем несколько простых примеров канонических преобразований. *Тождественное каноническое преобразование* задается следующей производящей функцией: $F(x,q) = x^i q_i$. Хоть данное утверждение и очевидно, покажем его справедливость явно:

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial x^i} = q_i, \quad y^i = \frac{\partial F}{\partial q_i} = x^i, \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} = H.$$

Преобразование поворота системы является каноническим и задается производящей функцией $F(x,q) = q_j R^j{}_i\, x^i$, где $R^j{}_i$ — ортогональная матрица поворота: $R^{\mathrm{T}}R = 1$. Действительно,

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial x^i} = q_j R^j{}_i, \quad y^j = \frac{\partial F}{\partial q_j} = R^j{}_i\, x^i, \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} = H,$$

или $q_i = p_j\,(R^{\mathrm{T}})^j{}_i$, $y^j = R^j{}_i\, x^i$, откуда приходим к выводу, что действительно получаем поворот системы матрицей R.

Задача 2.7. Доказать, что преобразование вида $q = \frac{1}{x}$, $y = px^2$ является каноническим преобразованием. Найти его валентность a.

2.6. **Генераторы бесконечно малых преобразований.** Рассмотрим бесконечно малое каноническое преобразование, близкое к тождественному. Производящая функция такого преобразования дается формулой

$$F = x^i q_i + \lambda\Gamma(x,q,t),$$

с малым параметром λ. Функцию $\Gamma(x,q,t)$ называют *генератором* бесконечно малого канонического преобразования, так как производящая функция отличается от производящей функции тождественного преобразования лишь в линейном приближении по $\lambda \to 0$. В этом же приближении генератор инфинитезимального канонического преобразования можно считать функцией прежних импульсов: $\Gamma \approx \Gamma(x,p,t)$. В линейном приближении по λ можно записать

$$y^i = x^i + \lambda\frac{\partial\Gamma(x,p,t)}{\partial p_i}, \qquad q_i = p_i - \lambda\frac{\partial\Gamma(x,p,t)}{\partial x^i}.$$

Значит, бесконечно малые изменения выражаются в виде скобок Пуассона

$$\delta x = y - x \approx \lambda\left\{x,\Gamma\right\}, \qquad \delta p = q - p \approx \lambda\left\{p,\Gamma\right\}.$$

Отсюда видно, что произвольная функция фазового пространства f при бесконечно малых канонических преобразованиях изменяется согласно скобке Пуассона:

$$f(y,q) = f(x,p) + \lambda\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial\Gamma}{\partial p_i} - \lambda\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial\Gamma}{\partial x^i} = f(x,p) + \lambda\left\{f,\Gamma\right\},$$

то есть $\delta f(x,p) = \lambda\left\{f,\Gamma\right\}$.

2.7. **Интеграл движения как генератор.** Вспомним теорему Э.Нетер. Если действие механической системы инвариантно относительно некоторой группы однопараметрических преобразований (с соответствующими генераторами T и X^i) вида

$$x^i(t) \mapsto x^i_a(t_a) = x^i_a(x(t),t,a), \qquad t \mapsto t_a = t_a(x(t),t,a),$$

то этим преобразованиям соответствует интеграл движения

$$\mathcal{I}(x,\dot{x},t) = \left(L - \frac{\partial L}{\partial\dot{x}^i}\dot{x}^i\right)T + \frac{\partial L}{\partial\dot{x}^i}X^i.$$

Осуществляя переход к фазовому пространству, получаем

$$I(x,p,t) = \mathcal{I}(x,\dot{x},t)\big|_{p(x,\dot{x},t)} = -H(x,p,t)\,T(x,t) + p_j X^j(x,t).$$

Если рассматривать $I(x,p,t)$ как генератор инфинитезимальных канонических преобразований, то этим преобразованием окажется преобразование рассматриваемой однопараметрической группы, то есть $I(x,p,t)$ является генератором тех преобразований, из которых он был получен в теореме Нетер. Для проверки данного утверждения найдем действие канонического преобразование с генератором $I(x,p,t)$ на координаты и импульсы:

$$x^i_a - x^i = a\{x^i,I(x,p,t)\} = -a\dot{x}^i T + aX^i.$$

С учетом того, что $x^i_a(t_a) = x^i_a(t + aT) = x^i_a(t) + a\dot{x}^i T$, получаем

$$x^i_a(t_a) = x^i(t) + aX^i.$$

Для импульсов должно выполняться

$$p^a_i(t) - p_i(t) = a\{p_i,I(x,p,t)\} = -a\dot{p}_i T + aH\,\partial_i T - ap_j\,\partial_i X^j,$$

то есть

$$p^a_i(t_a) = p^a_i(t) + a\dot{p}_i T = p_i(t) + aH\,\partial_i T - ap_j\,\partial_i X^j.$$

Найдем $p_i^a(t_a)$, диктуемое преобразованиями в теореме Нетер и сравним с последней формулой:

$$p_i^a(t_a) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}(x_a,\dot{x}_a,t_a) = p_i(t) + a\frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial \dot{x}^i}X^j + a\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\left[\dot{X}^j - \dot{x}^j\dot{T}\right] + a\frac{\partial^2 L}{\partial t\,\partial \dot{x}^i}T.$$

Преобразуем немного некоторые слагаемые:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial \dot{x}^i}X^j = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}X^j\right] = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\left[\frac{dp_j}{dt}X^j\right],$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\dot{X}^j = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\left(\partial_t X^j + \dot{x}^k\,\partial_k X^j\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}\dot{X}^j\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}\frac{\partial X^j}{\partial x^i} = \frac{\partial (p_j\dot{X}^j)}{\partial \dot{x}^i} - p_j\frac{\partial X^j}{\partial x^i},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t\,\partial \dot{x}^i}T = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\left(\frac{\partial L}{\partial t}T\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\left[\frac{d}{dt}\left(L - p_k\dot{x}^k\right)T\right] =$$
$$= \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\frac{d}{dt}\left[\left(L - p_k\dot{x}^k\right)T\right] - \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\left[\left(L - p_k\dot{x}^k\right)\dot{T}\right] =$$
$$= \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\frac{d}{dt}\left[\left(L - p_j\dot{x}^j\right)T\right] + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\dot{x}^j\dot{T} - \left(L - p_j\dot{x}^j\right)\frac{\partial T}{\partial x^i}.$$

Соответствующая подстановка полученных выражений дает

$$p_i^a(t_a) = p_i(t) - a\left(L - p_j\dot{x}^j\right)\frac{\partial T}{\partial x^i} - ap_j\frac{\partial X^j}{\partial x^i} + a\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\frac{d}{dt}\left[\left(L - p_j\dot{x}^j\right)\hat{T} + p_jX^j\right].$$

В квадратных скобках последнего слагаемого в этой формуле мы узнаем нетеровский интеграл движения, поэтому, последнее слагаемое зануляется. Осуществляя переход в фазовое пространство (заменой обобщенных скоростей на обобщенные импульсы), получаем

$$p_i^a(t_a) = p_i(t) - a\left(L - p_j\dot{x}^j\right)\frac{\partial T}{\partial x^i} - ap_j\frac{\partial X^j}{\partial x^i},$$

или, окончательно,

$$p_i^a(t_a) = p_i(t) + aH\,\partial_i T - ap_j\,\partial_i X^j,$$

что и доказывает утверждение относительно $I(x,p,t)$, сделанное нами выше.

Таким образом, любая функция в фазовом пространстве при нетеровских преобразованиях инвариантности действия изменяется согласно

$$f(y(t),q(t)) = f(x(t),p(t)) + a\{f(x,p), I(x,p,t)\}.$$

Задача 2.8. Рассмотреть в качестве генератора канонического преобразования проекцию вектора орбитального момента $\boldsymbol{\ell} = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})$, скажем, на ось z и найти вид бесконечно малых канонических преобразований — вращения координат и импульса вокруг оси z на угол λ.

Задача 2.9. Рассмотрим два последовательных канонических преобразования с генераторами $\Gamma_1(x,p)$ и $\Gamma_2(x,p)$. Вычислить результат последовательного действия этих преобразований на функцию $f(x,p)$ в разном порядке ($\Gamma_1 \to \Gamma_2$ и $\Gamma_2 \to \Gamma_1$). Найти разность (коммутатор) двух функций, преобразованных первым и вторым способом. Показать, что эта разность есть также действие некоторого генератора Γ_3 на функцию f, и найти генератор Γ_3.

2.8. **Генераторы и коммутаторы.** Как мы недавно увидели, генераторы канонических преобразований могут быть связаны с бесконечно малыми преобразованиями симметрии действия и являться сохраняющимися величинами согласно теореме Нетер. Исследование подобных симметрий в рамках теории групп и алгебр Ли позволяет получать важные физические выводы. Как мы уже подчеркнули, свойства скобок Пуассона соответствуют определению скобки Ли, а для построения алгебр Ли необходимо ввести векторное пространство, в котором эта скобка Ли действует. Для этих целей в физике вводят операторы и их коммутатор, и в этом параграфе мы установим связь скобок Пуассона с операторами и их коммутаторами, то есть сформулируем *принцип канонического квантования*. Это позволит в дальнейшем использовать теорию алгебр Ли и их представлений для описания свойств классических и квантовых физических систем.

На примере генератора сдвигов по координате рассмотрим бесконечно малые преобразование наблюдаемой $f(x)$,

$$\delta f = f(x+\lambda) - f(x) = \lambda\,\{f,p\} = \lambda\,\partial_x f = \lambda\,(\partial_x f + f\partial_x - f\partial_x) = \lambda\,[\partial_x,f].$$

Отсюда заключаем, что $\partial_x f = [\partial_x,f]$. Поскольку дифференцирование — линейная операция, так что константы можно вносить и выносить из под знака коммутатора, запишем каноническое преобразования сдвига координат в виде

$$\delta f = \lambda\{f,p\} = \lambda\,\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[-\mathrm{i}\hbar\partial_x,f] = \lambda\,\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[p,f],$$

где мы ввели факторы, которые отвечают оператору импульса $p = -\mathrm{i}\hbar\partial_x$. Используя антисимметрию скобок Пуассона, устанавливаем связь между скобкой Пуассона и коммутатором, которую называют *соотношением канонического квантования*,

$$[p,f] = \mathrm{i}\hbar\,\{p,f\}.$$

Дирак обобщил эту связь, постулируя, что коммутатору операторных величин f и g в классическом пределе соответствует их скобка Пуассона, то есть

$$[f,g] = \mathrm{i}\hbar\,\{f,g\},$$

причем после вычисления скобки Пуассона необходимо перейти от классических величин к операторным. Подчеркнем, что операторные величины действуют в пространстве амплитуд, которые задают вероятности обнаружить, что частица оказалась в фиксированной конечной точке траекторий при условии, что траектории могли исходить, вообще говоря, из разных начальных точек. В таком подходе переход от классического выражения значения скобки Пуассона к операторам может быть неоднозначным, если итоговое выражение для скобки Пуассона включает в себя величины, коммутаторы которых отличны от нуля. Это называют *проблемой упорядочивания операторов*.

В частности, каноническое квантование при $f \mapsto x$ приводит к коммутатору операторов импульса и координаты, равному

$$[p,x] = \mathrm{i}\hbar\,\{p,x\} = -\mathrm{i}\hbar.$$

Каноническое квантование позволило Дираку получить квантовое *уравнение Гейзенберга* для операторов, действующих на амплитуду вероятности $\Psi(x,t)$, из уравнения для эволюции в механике Гамильтона простым умножением на фактор $\mathrm{i}\hbar$:

$$\dot F = \partial_t F + \{F,H\} \;\longrightarrow\; \mathrm{i}\hbar\dot F = \mathrm{i}\hbar\,\partial_t F + [F,H].$$

2.9. **Теорема Лиувилля.** Напомним, что задание точки в фазовом пространстве полностью определяет состояние гамильтоновой системы. При движении системы изображающая ее фазовая точка описывает в фазовом пространстве соответствующую кривую, называемую фазовой траекторией. Произведение дифференциалов

$$d\Gamma = dx_1 \ldots dx_s \, dp_1 \ldots dp_s = \prod_{k=1}^{s} dx_k \, dp_k.$$

представляет собой элемент *фазового объема*. Рассмотрим теперь интеграл $\int d\Gamma$, взятый по некоторой области фазового пространства и изображающий собой ее объем. Покажем, что эта величина обладает свойством инвариантности по отношению к каноническим преобразованиям, то есть если произвести каноническое преобразование от переменных (x,p) к переменным (y,q), то фазовые объемы соответствующих друг другу областей одинаковы:

$$\int d\Gamma = \int d\Gamma'.$$

Для доказательства этого утверждения перепишем элемент фазового объема

$$d\Gamma' = \prod_{k=1}^{s} dy_k \, dq_k$$

в терминах $d\Gamma$. Как известно, форма объема при замене переменных в кратном интеграле преобразуется согласно

$$\int d\Gamma' = \int \det \mathcal{J} \cdot d\Gamma,$$

где

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} & \frac{\partial y^i}{\partial p_j} \\ \frac{\partial q_i}{\partial x^j} & \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \end{pmatrix}$$

есть так называемая *матрица Якоби*. Вычислим детерминант матрицы Якоби канонического преобразования в простейшем случае[1] $s = 1$:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial x}\right)^{-1} & \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial x}\right)^{-1} \\ -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial x}\right)^{-1} & \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial x}\right)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим детерминант матрицы Якоби

$$\det \mathcal{J} = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial x}\right)^{-1}\right]\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial x}\right)^{-1} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial x}\right)^{-2} = 1.$$

Равенство единице якобиана $\det \mathcal{J}$, очевидно, доказывает сделанное утверждение.

Представим себе теперь, что каждая точка данного участка фазового пространства перемещается со временем согласно уравнениям движения рассматриваемой гамильтоновой системы. Тем самым будет перемещаться и весь участок. При этом его объем остается неизменным:

$$\int d\Gamma = \mathrm{const}.$$

Это утверждение (т.н. *теорема Лиувилля*) непосредственно следует из инвариантности фазового объема при канонических преобразованиях и из того, что самое изменение x и p при движении можно рассматривать как каноническое преобразование[2].

[1] В случае произвольного числа степеней свободы s вычисления абсолютно аналогичны.

[2] Последнее утверждение требует своего обоснования: пусть x_t, p_t — значения канонических переменных в момент времени t, а x_{t+dt}, p_{t+dt} — их значения в другой момент $t + dt$. Переменные

2.10. **Каноническое распределение Гиббса.** Теорема Лиувилля является одним из ключевых утверждений классической статистической физики. Она позволяет доказать, что *функция статистического распределения* ρ является постоянной вдоль фазовых траекторий подсистем некоторой макросистемы. Последнее, в свою очередь, позволяет вывести *каноническое распределение Гиббса*, роль которого в статистистической физике трудно переоценить. Изучим этот вопрос более детально.

Функция статистического распределения ρ рассматриваемой макросистемы (или ее подсистемы) определяет дифференциальную вероятность dw того, что при наблюдении макросистемы (или ее подсистемы) в некоторый произвольный момент времени мы обнаружим ее находящейся в данном участке $d\Gamma$ фазового пространства, то есть вероятность координатам x^i и импульсам p_i иметь значения, лежащие в заданных бесконечно малых интервалах между x^i,p_i и $x^i + dx^i, p_i + dp_i$. Эту вероятность dw можно написать в виде

$$dw = \rho(x,p,t)\, d\Gamma,$$

где $\rho(x,p,t)$ есть функция всех координат, импульсов и, быть может, времени. Функция распределения $\rho(x,p,t)$, очевидно, играет роль плотности распределения вероятности в фазовом пространстве. Она должна удовлетворять условию нормировки

$$\int \rho(x,p,t)\, d\Gamma = 1,$$

(интеграл берется по всему фазовому пространству), выражающему собой просто тот факт, что сумма вероятностей всех возможных состояний должна быть равна единице.

Чрезвычайно существенным для статистики является следующее обстоятельство. Статистическое распределение данной подсистемы не зависит от начального состояния какой-либо другой малой части той же системы, так как влияние этого начального состояния будет в течение достаточно большого промежутка времени совершенно вытеснено влиянием остальных, гораздо более обширных частей системы. Оно не зависит также от начального состояния самой выделенной нами малой части, поскольку она с течением времени проходит через все возможные состояния и каждое из них может быть выбрано в качестве начального. Поэтому статистическое распределение для малых частей системы можно найти, не решая задачи механики для этой системы с учетом начальных условий.

Подсистемы, о которых мы говорили выше, не являются сами по себе замкнутыми. Напротив, они подвергаются непрерывному воздействию со стороны прочих частей системы. Но благодаря тому, что эти части, малые по сравнению со всей большой системой, являются сами по себе тоже макроскопическими телами, мы можем все же считать, что в течение не слишком больших промежутков времени они ведут себя приблизительно как замкнутые системы. В самом деле, во взаимодействии подсистемы с окружающими частями участвуют преимущественно те частицы, которые находятся вблизи ее поверхности. Но относительное число этих частиц по сравнению с полным числом частиц в подсистеме быстро падает при увеличении размеров последней, и при достаточной величине подсистемы энергия ее взаимодействия с

---

x_{t+dt}, p_{t+dt} являются некоторыми функциями от x_t, p_t,t и от величины интервала dt как от параметра: $x_{t+dt} = x(x_t, p_t,t,dt)$, $p_{t+dt} = p(x_t, p_t,t,dt)$. Если рассматривать эти формулы как преобразование от переменных x_t, p_t к переменным x_{t+dt}, p_{t+dt}, то это преобразование будет каноническим. Это очевидно из выражения для дифференциала действия $S(x_{t+dt},x_t,t)$, взятого вдоль экстремальной траектории, проходящей через точки x_t и x_{t+dt} в заданные моменты времени t и $t + dt$: $dS = p_{t+dt}\, dx_{t+dt} - p_t\, dx_t - [H_{t+dt} - H_t]\, dt$.

окружающими частями будет мала по сравнению с ее внутренней энергией. Таким образом, можно сказать, что подсистемы являются *квазизамкнутыми*. Подчеркнем еще раз, что квазизамкнутость подсистем имеет место лишь на протяжении не слишком длительных промежутков времени. В течение же достаточно большого промежутка времени влияние взаимодействия подсистем — сколь бы оно ни было слабым — все равно проявится. Более того, именно это сравнительно слабое взаимодействие и приводит в конце концов к установлению статистического равновесия.

Тот факт, что различные подсистемы можно считать слабо взаимодействующими друг с другом, приводит к тому, что их можно считать независимыми также и в статистическом смысле. Статистическая независимость означает, что состояние, в котором находится одна из подсистем, никак не влияет на вероятности различных состояний других подсистем.

Рассмотрим какие-либо две подсистемы, и пусть $d\Gamma_1$ и $d\Gamma_2$ — элементы объема их фазовых пространств. Если рассматривать совокупность обеих подсистем как одну составную подсистему, то с математической точки зрения статистическая независимость подсистем означает, что вероятность составной подсистеме находиться в элементе ее фазового объема $d\Gamma_{12} = d\Gamma_1 \cdot d\Gamma_2$ разбивается на произведение вероятностей нахождения каждой из подсистем соответственно в $d\Gamma_1$ и $d\Gamma_2$, причем каждая из этих вероятностей зависит только от координат и импульсов данной подсистемы. Таким образом, можно написать: $\rho_{12}\, d\Gamma_{12} = \rho_1\, d\Gamma_1 \cdot \rho_2\, d\Gamma_2$, $\rho_{12} = \rho_1 \cdot \rho_2$, где ρ_{12} — статистическое распределение составной подсистемы, а ρ_1 и ρ_2 — функции распределения отдельных подсистем; аналогичное соотношение можно написать и для совокупности нескольких подсистем. Можно, очевидно, утверждать и обратное: если распределение вероятностей для некоторой сложной системы распадается на произведение множителей, каждый из которых зависит только от величин, описывающих одну из частей системы, то это значит, что эти части статистически независимы, причем каждый из множителей пропорционален вероятности состояний соответствующей части.

Вспомним теперь условие нормировки, которому удовлетворяет функция статистического распределения, а также теорему Лиувилля о сохранении фазового объема $d\Gamma$. После дифференцирования по времени, имеем

$$0 = \int \frac{d\rho}{dt}\, d\Gamma + \int \rho\, d\left(\frac{d\Gamma}{dt}\right) = \int \frac{d\rho}{dt}\, d\Gamma,$$

откуда

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x^i}\dot{x}^i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i}\dot{p}_i = 0.$$

Подставляя в последнее выражение уравнения Гамильтона, получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \{H,\rho\}\,.$$

Это уравнение называется *уравнением Лиувилля*. Равенство нулю производной $\frac{d\rho}{dt}$ говорит нам о том, что функция статистического распределения постоянна вдоль фазовых траекторий подсистем; напомним, что поскольку мы говорим о квазизамкнутых подсистемах, то этот результат справедлив лишь для не слишком больших промежутков времени, в течение которых подсистема с достаточной точностью ведет себя как замкнутая. Из вышесказанного непосредственно следует, что функция распределения должна выражаться лишь через такие комбинации переменных x и p, которые при движении подсистемы как замкнутой остаются постоянными. Это — так называемые механические инварианты или интегралы движения, являющиеся, как известно, первыми интегралами уравнений движения. Можно, следовательно, сказать, что функция распределения, являясь функцией механических инвариантов, сама есть интеграл движения.

Оказывается возможным чрезвычайно сузить число интегралов движения, от которых может зависеть функция распределения. Для этого надо учесть, что распределение ρ_{12} для совокупности двух подсистем равно произведению распределений ρ_1 и ρ_2 этих подсистем в отдельности:

$$\rho_{12} = \rho_1 \rho_2.$$

Поэтому

$$\ln \rho_{12} = \ln \rho_1 + \ln \rho_2.$$

то есть логарифм функции распределения есть величина аддитивная. Мы приходим, следовательно, к заключению, что логарифм функции распределения должен быть не просто интегралом движения, но и аддитивным интегралом движения.

Как известно из лагранжевой механики, существует всего семь независимых аддитивных интегралов движения: энергия, три компоненты вектора импульса и три компоненты вектора орбитального момента. Обозначим эти величины для a-й подсистемы (как функции координат и импульсов ее частиц) соответственно через $\varepsilon_a(x,p)$, $\boldsymbol{p}_a(x,p)$, $\boldsymbol{\ell}_a(x,p)$. Единственная аддитивная же комбинация этих величин есть линейная комбинация вида

$$\ln \rho_a = \alpha_a - \beta \varepsilon_a(x,p) + \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{p}_a(x,p) + \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\ell}_a(x,p)$$

с постоянными коэффициентами $\alpha_a, \beta, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}$, причем $\beta, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}$ должны быть одинаковыми для всех подсистем данной замкнутой системы.

Таким образом, мы приходим к важнейшему для статистики выводу. Значения аддитивных интегралов движения — энергии, импульса и орбитального момента — полностью определяют статистические свойства замкнутой системы, т.е. статистические распределения любых ее подсистем, а с ними и средние значения любых их физических величин. Эти семь аддитивных интегралов движения заменяют собой то невообразимое множество данных (начальных условий), которое требовалось бы при механическом подходе.

Изложенные соображения непосредственно позволяют составить для замкнутой системы простую функцию распределения, пригодную для описания ее статистических свойств. Если рассматривать только такие подсистемы, которые неподвижны $\boldsymbol{p}_a = 0$ и не вращаются $\boldsymbol{\ell}_a = 0$, то

$$\ln \rho_a = \alpha_a - \beta \varepsilon_a(x,p), \qquad \rho_a = e^{\alpha_a - \beta \varepsilon_a}.$$

Имея в виду, что функция распределение всей системы равна произведению функций распределения подсистем: $\rho = \prod \rho_a$, а также, что полная энергия системы $\varepsilon(x,p) = \sum \varepsilon_a(x,p)$, получаем

$$\rho = e^{\alpha - \beta \varepsilon},$$

где $\alpha = \sum_a \alpha_a$. Подставляя полученное выражение в условие нормировки функции распределения, получаем

$$e^{\alpha} \int e^{-\beta \varepsilon} \, d\Gamma = 1.$$

Чтобы этот интеграл сходился при больших энергиях, необходимо, чтобы коэффициент β был положительным, то есть $\beta > 0$. И поскольку, как уже отмечалось ранее, коэффициент β должен быть одинаковым для всех подсистем данной замкнутой системы, находящейся в состоянии статистического равновесия, то определим понятие *статистической температуры* T согласно формуле

$$T = \frac{1}{\beta} > 0.$$

Тогда равновесная функция статистического распределения примет вид

$$\rho(x,p) = A\, e^{-\frac{\varepsilon}{T}},$$

где постоянная A определяется из условия нормировки функции распределения. Полученное распределение называется *распределением Гиббса* или *каноническим распределением.*

2.11. **Метод решения уравнений Гамильтона-Якоби.** В качестве интересного примера применения канонического преобразования приведем *метод решения уравнений Гамильтона-Якоби.* Основной объект уравнений Гамильтона Якоби — действие — зависит от концов траектории: $S = S(t,x;x_0)$. При изменении интервала эволюции, то есть t, и конца траектории x, начальные данные, то есть $x_0 = x(t_0)$ остаются неизменными, а значит, начальное положение траектории эквивалентно набору интегралов движения $\mathcal{I}_0 \leftrightarrow x_0$. Следовательно, решение уравнений Гамильтона-Якоби может быть представлено в виде $S = S_{\mathcal{I}}(t,x;\mathcal{I}_0)$, а значит, по-прежнему

$$p = \frac{\partial S_{\mathcal{I}}}{\partial x}, \qquad H = -\frac{\partial S_{\mathcal{I}}}{\partial t}.$$

Используем $S_{\mathcal{I}}$ в качестве производящей функции канонического преобразования $F(x,\mathcal{I}_0,t)$ от координат x к координатам $\mathcal{I}_0$ (их число заведомо совпадает по построению). Тогда гамильтониан в координатах $\mathcal{I}_0$ и канонически сопряженных к ним импульсах по общей схеме равен

$$H' = H + \frac{\partial S_{\mathcal{I}}}{\partial t} = 0,$$

то есть он тождественно равен нулю. Отсюда следует, что импульсы, канонически сопряженные к $\mathcal{I}_0$, также являются постоянными в силу уравнений Гамильтона,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial \mathcal{I}_0} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \mathcal{I}_0} = \mathrm{const}.$$

В проведенном изложении ясно, что если интеграл движения совпадает с начальным значением одной из координат частиц, то каноническое преобразование становится тривиальным для этой координаты: оно не содержит в себе никакой новой информации. Поэтому сам метод становится эффективным, если известны интегралы движения, отличные от начальных значений координат частиц. Проиллюстрируем этот метод решения уравнений Гамильтона-Якоби на примере движения точечной массы в сферически-симметричном гравитационном поле *черной дыры Шварцшильда.*

Движение точечной массы в сильном гравитационном поле черной дыры в плоскости $\theta = \pi/2$ может быть описано уравнением Гамильтона-Якоби вида

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} (\partial_t S)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (\partial_r S)^2 - \frac{1}{r^2}(\partial_\varphi S)^2 - m^2 = 0.$$

Здесь (r,θ,φ) — сферические координаты, $r_g = 2GM/c^2$ — гравитационный радиус. Уравнения Гамильтона-Якоби дают законы сохранения, то есть интегралы движения:

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \ell_z = \ell, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -E.$$

Поэтому решение уравнения Гамильтона-Якоби будем искать в виде

$$S = -Et + \ell\varphi + \tilde{S}(r),$$

где $p_r = \partial_r S = \partial_r \tilde{S}$. Далее нас интересует случай радиального движения частицы, когда $\ell = 0$. При этом

$$\partial_r \tilde{S} = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \sqrt{E^2 - m^2\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}.$$

Искомая зависимость $r(t)$ согласно методу решения уравнений Гамильтона-Якоби находится из уравнения $\partial S/\partial E = \text{const}$:

$$t - t_0 = -\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{(1 - r_g/r)\sqrt{1 - (1 - r_g/r)\, m^2/E^2}}.$$

Выбор знака перед интегралом соответствует движению частицы к центру, r с ростом t уменьшается. В качестве начального условия при $t = 0$ выберем $r(0) = r_0$, $\dot{r}|_{t=0} = 0$. При этом

$$\frac{m^2}{E^2} = \left(1 - \frac{r_g}{r_0}\right)^{-1}.$$

Для простоты примем еще, что $r_0 \gg r_g$. Тогда получаем

$$t = -\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{(1 - r_g/r)\sqrt{r_g/r}} = -\int_{r_0}^{r} \frac{dr\,\sqrt{r^3/r_g}}{r - r_g}.$$

Отсюда при $r \to r_g$ имеем

$$t \approx -\int^{r} \frac{r_g\, dr}{r - r_g}, \qquad r \approx r_g\, e^{-t/r_g}.$$

Таким образом, с точки зрения удаленного наблюдателя, частица асимтотически приближается к гравитационному радиусу, достигая его только при $t \to \infty$. При этом скорость частицы $\dot{r}$ асимтотически стремится к нулю.

Задача 2.10. Используя метод решения уравнений Гамильтона-Якоби, исследовать задачу о движении нерелятивистской частицы в сферически-симметричном потенциале вида $U(r) = \frac{\alpha}{r^2}$.

2.12. **Каноническое квантование осциллятора.** В заключение раздела проиллюстрируем описанный нами ранее метод канонического квантования на примере гармонического осциллятора. Этот пример является особенно важным ввиду того, что каноническое квантование свободных локальных полей имеет много общих черт с квантованием гармонического осциллятора. По существу, после определения канонических переменных поля в полной аналогии с классическим гармоническим осциллятором, можно увидеть, что гамильтонова функция свободного локального поля представима в виде суммы гамильтонианов гармонических осцилляторов.

Одномерный осциллятор в классической гамильтоновой механике описывается следующим гамильтонианом

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Здесь (x,p) — пара канонических переменных, для которых соответствующие скобки Пуассона: $\{x,p\} = 1$. Соответствующий квантово-механический оператор Гамильтона строится согласно формализму канонического квантования Дирака

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2},$$

где через x и p обозначены уже операторы координаты и импульса, для которых квантовый коммутатор наблюдаемых

$$[x,p] = \mathrm{i}\hbar.$$

Переходя к безразмерным операторам канонических наблюдаемых

$$\mathfrak{Q} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x, \quad \mathfrak{P} = \frac{p}{\sqrt{m\hbar\omega}},$$

для гамильтониана и коммутатора операторов координаты и импульса получаем

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{P}^2\right), \quad [\mathfrak{Q},\mathfrak{P}] = 1.$$

Стационарное уравнение Шредингера (то есть уравнение на собственные значения гамильтониана) для квантового осциллятора имеет вид

$$H\Psi_n = E\Psi_n, \quad \Psi_n := |n\rangle,$$

и представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка. Наиболее эффектный способ решения спектральной задачи для осциллятора основан на введении операторов *уничтожения* и *рождения* квантов

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathfrak{Q} + \mathrm{i}\mathfrak{P}\right), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathfrak{Q} - \mathrm{i}\mathfrak{P}\right),$$

с коммутатором

$$[a, a^\dagger] = -\frac{1}{2}2\mathrm{i}\,[\mathfrak{Q},\mathfrak{P}] = 1.$$

Очевидно, что гамильтониан осциллятора может быть переписан в терминах операторов рождения и уничтожения следующим образом:

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(aa^\dagger + a^\dagger a\right) = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) := \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right).$$

Здесь $N = a^\dagger a$ — самосопряженный оператор числа квантов. Легко видеть, что решение задачи на собственные значения оператора числа квантов: $N\Psi_n = n\Psi_n$ однозначно определяет энергетический спектр и волновые функции стационарных состояний квантового осциллятора. Покажем, что векторы $a\Psi_n$ и $a^\dagger\Psi_n$ являются собственными для оператора N. Действительно,

$$Na\Psi_n = a^\dagger aa\Psi_n = (aa^\dagger - 1)\,a\Psi_n = a(N-1)\Psi_n = (n-1)\,a\Psi_n,$$

$$Na^\dagger\Psi_n = a^\dagger aa^\dagger\Psi_n = a^\dagger(N+1)\Psi_n = (n+1)\,a^\dagger\Psi_n.$$

Отсюда видно, что вектор состояния $a\Psi_n$ является собственным для оператора N с собственным значением $(n-1)$, а вектор состояния $a^\dagger\Psi_n$ — также собственный для оператора числа квантов, но с собственным значением $(n+1)$, то есть

$$a\Psi_n = c_n^{(1)}\,\Psi_{n-1}, \quad a^\dagger\Psi_n = c_n^{(2)}\,\Psi_{n+1}.$$

Определим коэффициенты $c_n^{(1)}$ и $c_n^{(2)}$. Норма вектора состояния $a\Psi_n$:

$$|c_n^{(1)}|^2 = (a\Psi_n)^\dagger\,a\Psi_n = \Psi_n^\dagger a^\dagger a\Psi_n = n\Psi_n^\dagger\Psi_n = n,$$

так что $a\Psi_n = \sqrt{n}\,\Psi_{n-1}$. Аналогично, $a^\dagger\Psi_n = \sqrt{n+1}\,\Psi_{n+1}$. В частности, можно определить *вакуумное состояние* согласно $a\Psi_0 := a|\mathrm{vac.}\rangle = 0$.

Очевидно, что собственные значения оператора числа квантов неотрицательны, а значит, энергия осциллятора положительна. Мы это по существу показали выше, ведь матричный элемент

$$\langle n|N|n\rangle = \Psi_n^\dagger N\Psi_n = (a\Psi_n)^\dagger\,a\Psi_n = n \geqslant 0.$$

Поскольку a является понижающим оператором, то можно построить цепочку собственных векторов состояний

$$\Psi_n \ \xrightarrow{a}\ \Psi_{n-1} \ \xrightarrow{a}\ \Psi_{n-2} \ \xrightarrow{a}\ \ldots \ \xrightarrow{a}\ \Psi_{n-m} \ \xrightarrow{a}\ \ldots$$

со значениями энергии

$$\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right), \quad \hbar\omega\left(n-1+\frac{1}{2}\right), \quad \ldots \quad \hbar\omega\left(n-m+\frac{1}{2}\right), \quad \ldots$$

Чтобы энергия принимала положительные значения, необходимо, чтобы существовало такое положительное целое число m, что

$$a^{m+1}\Psi_n = 0, \quad n-m \geqslant 0.$$

Такое возможно, только если $a^{m+1}\Psi_n \sim a|\text{vac.}\rangle = 0$. А значит, $n = m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Последнее утверждение означает, что энергия гармонического осциллятора принимает дискретные значения

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Волновые функции (амплитуды вероятности) стационарных состояний легко найти, используя свойства операторов рождения и уничтожения, а именно

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|\text{vac.}\rangle,$$

причем $a|\text{vac.}\rangle = 0$, откуда в представлении $\{\mathfrak{Q}\}$ для вакуумного состояния имеем уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathfrak{Q}+\frac{d}{d\mathfrak{Q}}\right)\Psi_0(\mathfrak{Q}) = 0.$$

Преимущество излагаемой процедуры ясно видно из этого уравнения: оно является уравнением первого порядка в отличие от исходного стационарного уравнения Шредингера для осциллятора. Решение имеет вид гауссова распределения

$$\Psi_0(\mathfrak{Q}) = A\exp\left\{-\frac{\mathfrak{Q}^2}{2}\right\} = A\exp\left\{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right\},$$

где постоянная A определяется нормировкой

$$A^2\int_{\mathbb{R}} dx\, \exp\left\{-\frac{m\omega x^2}{\hbar}\right\} = 1, \quad A = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}.$$

Вакуумное состояние, нормированное в пространстве $\{\mathfrak{Q}\}$,

$$\Psi_0(\mathfrak{Q}) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-\frac{\mathfrak{Q}^2}{2}}.$$

Отсюда волновые функции n-го уровня

$$\Psi_n(\mathfrak{Q}) = \frac{1}{\sqrt{2^n\, n!\sqrt{\pi}}}\left(\mathfrak{Q}-\frac{d}{d\mathfrak{Q}}\right)^n e^{-\frac{\mathfrak{Q}^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2^n\, n!\sqrt{\pi}}}\, e^{-\mathfrak{Q}^2/2}\,\mathrm{H}_n(\mathfrak{Q}),$$

где $\mathrm{H}_n(\mathfrak{Q})$ представляют собой *полиномы Эрмита*

$$\mathrm{H}_n(\mathfrak{Q}) = (-1)^n\, e^{\mathfrak{Q}^2}\partial^n_{\mathfrak{Q}}\, e^{-\mathfrak{Q}^2}.$$

В этой формуле опущена временная зависимость волновых функций стационарных состояний. Она стандартная: $e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_n t}$. Интереснее посмотреть на временную зависимость операторов рождения и уничтожения. Согласно уравнению Гейзенберга (с учетом явного вида гамильтониана) для оператора a получаем

$$\mathrm{i}\hbar\dot{a} = [a, H] = \hbar\omega[a, a^\dagger a] = \hbar\omega(aa^\dagger a - a^\dagger aa) = \hbar\omega[a, a^\dagger]a = \hbar\omega\, a.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$a(t) = e^{-\mathrm{i}\omega t}\, a.$$

Аналогично, для оператора рождения квантов имеем $a^\dagger(t) = e^{\mathrm{i}\omega t}\, a^\dagger$.

Задача 2.11. Вычислить квантовые средние $\langle n|x^2|n\rangle$, $\langle n|p^2|n\rangle$ и сравнить с классическим результатом для $\langle x^2\rangle$ и $\langle p^2\rangle$.

Задача 2.12. Найти функцию распределения вероятностей по импульсам для основного (вакуумного) состояния гармонического осциллятора.

3. Симметрия в атоме водорода

Не все интегралы движения механических систем могут быть объяснены явными симметриями задачи. В таких случаях говорят о наличии *скрытой симметрии.* К числу механических систем, обладающих, наряду с физической реалистичностью, дополнительными особыми свойствами, следует отнести движение частиц в потенциалах, для которых все финитные траектории замкнуты. В этом разделе мы обсудим вырождение финитного движения в кулоновском потенциале в виде замкнутости орбиты и отвечающую ему скрытую $\mathbb{SO}(4)$-симметрию.

3.1. **Вектор Рунге-Ленца-Лапласа.** Для кулоновского потенциала притяжения $U(r) = -\alpha/r$ или в задаче Кеплера, как мы хорошо знаем, движение происходит по эллипсу, в одном из фокусов которого находится центр потенциала. Орбита замкнута, а значит, эллипс сохраняет свое положение в пространстве со временем. Это свойство, как оказалось, является нетривиальным, поскольку оно позволяет воспользоваться геометрическими свойствами эллипса и построить дополнительный интеграл движения в задаче.

При построении будем использовать тот факт, что любой луч, посланный из фокуса эллипса, после зеркального отражения от кривой эллипса пройдет через второй фокус и сумма длин луча от фокуса до кривой эллипса r до отражения и от кривой до второго фокуса r' после отражения — это постоянная величина $r+r' = 2a$, точнее, двойная длина большой полуоси эллипса. Поскольку определяющая линию зеркального отражения касательная к эллипсу в точке траектории параллельна импульсу частицы, разложим радиус-вектор частицы на ортогональную к импульсу часть $\boldsymbol{r}_\perp$ и параллельный ему вклад:

$$\boldsymbol{r}_\parallel = \frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{p}^2}\boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{r}_\perp = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_\parallel.$$

После зеркального отражения поперечная часть сменит знак, а продольный вклад не изменится, то есть мы получим вектор той же длины r:

$$\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{r}_\parallel - \boldsymbol{r}_\perp = \boldsymbol{r} - 2\boldsymbol{r}_\perp.$$

Значит, согласно упомянутому выше свойству эллипса вектор

$$\boldsymbol{r}' = \frac{2a-r}{r}(\boldsymbol{r} - 2\boldsymbol{r}_\perp)$$

в точности соединяет точку на траектории частицы со вторым фокусом эллипса, и следовательно, вектор

$$\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}' = \frac{2a}{r}\boldsymbol{r} + 2\boldsymbol{r}_\perp\left(1 - \frac{2a}{r}\right)$$

имеет длину $2ae$ и соединяет фокусы эллипса. Безразмерный вектор

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2a}(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}') = \frac{\boldsymbol{r}}{r} + \frac{\boldsymbol{r}_\perp}{a}\left(1 - \frac{2a}{r}\right)$$

называют *вектором Рунге-Ленца-Лапласа.* Он сохраняется при движении в потенциале притяжения кулоновского типа. Проведем некоторые преобразования, заметив, что векторное произведение

$$(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\ell}) = (\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})) = \boldsymbol{p}^2\,\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{p}^2\,\boldsymbol{r}_\perp.$$

Кроме того, в кулоновском потенциале притяжения с зарядром $-q$, полная энергия частицы равна

$$E = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{q^2}{r}.$$

Следовательно

$$\boldsymbol{p}^2 = -2m|E|\left(1 - \frac{q^2}{|E|r}\right), \quad E < 0.$$

Поскольку большая полуось в нашем случае определяется формулой

$$a = \frac{q^2}{2|E|},$$

то поперечный вклад

$$\boldsymbol{r}_\perp = -(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\ell})\frac{a}{mq^2}\left(1 - \frac{2a}{r}\right)^{-1}.$$

В итоге, вектор Рунге-Ленца-Лапласа принимает стандартный вид

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} - \frac{(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\ell})}{mq^2} = \text{const}.$$

Согласно связи параметров эллипса, по которому движется частица в кулоновском поле притяжения, длина вектора $\boldsymbol{A}$ задается эксцентриситетом e, поскольку расстояние между фокусами эллипса равно $2ae$:

$$\boldsymbol{A}^2 = e^2 = 1 - \frac{2m|E|}{m^2q^4}\,\boldsymbol{\ell}^2.$$

3.2. **Скобки Пуассона и симметрия $\mathbb{SO}(4)$.** В предыдущем разделе мы устанавливали связь между скобками Пуассона физических величин и коммутаторами генераторов симметрии, связанных с этими наблюдаемыми, известную как соотношения канонического квантования. Вычисляя скобки Пуассона, можно определить коммутационные соотношения для генераторов симметрии на полях амплитуд вероятности траекторий, в то время как коммутаторы генераторов задают алгебру непрерывных симметрий в системе. С другой стороны, если рассматривать сохраняющиеся величины в качестве генераторов бесконечно малых канонических преобразований, то эти преобразования отвечают симметрии системы. Например, в центрально-симметричном потенциале сохраняется момент количества движения $\boldsymbol{\ell}$, скобки Пуассона компонент вектора $\boldsymbol{\ell}$ отвечают коммутаторам группы вращений, т.е. группа генераторов является группой симметрии системы, если наблюдаемые, отвечающие этим генераторам, сохраняются. Действительно, для момента импульса скобки Пуассона

$$\begin{aligned}\{\ell_i,\ell_j\} &= \{\varepsilon_{iab}\,x_a p_b, \varepsilon_{jcd}\,x_c p_d\} = \varepsilon_{iab}\,\varepsilon_{jcd}\{x_a p_b, x_c p_d\} = \\ &= \varepsilon_{iab}\,\varepsilon_{jcd}\left(\frac{\partial(x_a p_b)}{\partial x_k}\frac{\partial(x_c p_d)}{\partial p_k} - \frac{\partial(x_c p_d)}{\partial x_k}\frac{\partial(x_a p_b)}{\partial p_k}\right) = \\ &= \varepsilon_{ikb}\,\varepsilon_{jck}\,x_c p_b - \varepsilon_{iak}\,\varepsilon_{jkd}\,x_a p_d = (\delta_{ic}\delta_{jb} - \delta_{ij}\delta_{bc})x_c p_b + (\delta_{ij}\delta_{ad} - \delta_{id}\delta_{ja})x_a p_d = \\ &= x_i p_j - \delta_{ij}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}) + \delta_{ij}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}) - x_j p_i = \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{kab}\,x_a p_b = \varepsilon_{ijk}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})_k = \varepsilon_{ijk}\ell_k,\end{aligned}$$

что можно сравнить с коммутатором генераторов трехмерных поворотов на полях (более подробно о генераторах группы вращений можно почитать в лекциях по классическим релятивистским полям):

$$[\ell_i, \ell_j] = \mathrm{i}\hbar\,\varepsilon_{ijk}\ell_k.$$

Найдем теперь остальные скобки Паууссона для сохраняющихся векторов в кулоновском поле притяжения, то есть для момента импульса и вектора Рунге-Ленца-Лапласа. Эти скобки будут определять алгебру генераторов группы симметрии этой системы. Вектор Рунге-Ленца-Лапласа перепишем в виде, симметризованном относительно перестановок местами физических величин, скобки Пуассона которых не равны нулю:

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} - \frac{(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{p})}{2mq^2}.$$

Тогда

$$\{p_i,\ell_j\} = \varepsilon_{ijk}p_k, \quad \{A_i,\ell_j\} = \varepsilon_{ijk}A_k,$$

ведь $\boldsymbol{A}$ — вектор, и при поворотах он имеет стандартный коммутатор с генераторами поворотов. Прямые вычисления устанавливают (проведите их самостоятельно в качестве полезного упражнения), что

$$\{A_i,A_j\} = -\varepsilon_{ijk}\ell_k\frac{2E}{mq^4}, \quad E = \mathrm{const}.$$

Значит, если ввести вектор

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{A}\sqrt{maq^2} = \boldsymbol{A}\sqrt{-\frac{mq^4}{2E}},$$

то соответствующие скобки Пуассона примут простой вид

$$\{w_i,w_j\} = \varepsilon_{ijk}\ell_k, \quad \{w_i,\ell_j\} = \varepsilon_{ijk}w_k.$$

Совершим линейную замену переменных: определим векторы

$$\boldsymbol{s}^{(\pm)} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\ell}\pm\boldsymbol{w}).$$

Скобки Пуассона только что введенных векторов, очевидно,

$$\{s_a^{(+)}, s_b^{(+)}\} = \varepsilon_{abc}s_c^{(+)}, \quad \{s_a^{(-)}, s_b^{(-)}\} = \varepsilon_{abc}s_c^{(-)}, \quad \{s_a^{(+)}, s_b^{(-)}\} = 0.$$

Это означает, что соответствующие им генераторы реализуют алгебру симметрии $so(3)\oplus so(3)$, которая изоморфна алгебре $su(2)\oplus su(2)$. Если кому-то последнее утверждение непонятно, проверьте его самостоятельно в качестве упражнения.

Покажем, что алгебра генераторов отвечает алгебре группы поворотов $\mathbb{SO}(4)$ четырехмерного евклидова пространства. Для это обратимся к алгебре поворотов в трехмерном евклидовом пространстве, которую сформулируем в терминах тензора поворотов вида $L_{ij} = x_ip_j - x_jp_i = \varepsilon_{ijk}\ell_k$. Скобка Пуассона генераторов L_{ij} достаточно легко вычисляется

$$\{L_{ij},L_{km}\} = \delta_{ik}L_{jm} + \delta_{jm}L_{ik} - \delta_{im}L_{jk} - \delta_{jk}L_{im}.$$

Скобки Пуассона, записанные в таком виде, конечно, абсолютно эквивалентны стандартным скобкам Пуассона орбитального момента $\boldsymbol{\ell}$. Теперь легко записать обобщение на случай четырехмерного евклидова пространства:

$$L_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad \mu,\nu\in\overline{1,4},$$

с такими же скобками Пуассона:

$$\{L_{\mu\nu},L_{\alpha\beta}\} = \delta_{\mu\alpha}L_{\nu\beta} + \delta_{\nu\beta}L_{\mu\alpha} - \delta_{\mu\beta}L_{\nu\alpha} - \delta_{\nu\alpha}L_{\mu\beta}.$$

Если ввести в трехмерном подпространстве те же величины L_{ij}, что эквивалентно ℓ_k, и в дополнение к ним трехмерный вектор $w_i = L_{4i}$, то нетрудно получить скобки Пуассона в виде

$$\{w_i,w_j\} = \varepsilon_{ijk}\ell_k, \quad \{w_i,\ell_j\} = \varepsilon_{ijk}w_k, \quad \{\ell_i,\ell_j\} = \varepsilon_{ijk}\ell_k,$$

а значит, построенная алгебра генераторов симметрии в задаче о спектре финитных траекторий в кулоновском поле притяжения — это алгебра группы $\mathbb{SO}(4)$, группы вращений в шести плоскостях четырехмерного евклидова пространства. Итак, вырождение финитного движения в кулоновском потенциале в виде замкнутости орбиты отвечает группе симметрии $\mathbb{SO}(4)$.

3.3. **Энергетические уровни атома водорода.** Замкнутые траектории движения в кулоновском поле притяжения, которые отвечают финитному движению, реализуют не все представления (неприводимые представления группы трехмерных вращений описываются в лекциях по классическим релятивистским полям; в этом параграфе мы будем использовать некоторые результаты данных вычислений) этой группы, а только те из них, которые отвечают $(\boldsymbol{s}^{(+)})^2 = (\boldsymbol{s}^{(-)})^2$, поскольку движение — плоское, а значит, $(\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{w}) = 0$, а также

$$(\boldsymbol{\ell}\pm\boldsymbol{w})^2 = \boldsymbol{\ell}^2 + \boldsymbol{w}^2.$$

Переход к представлению алгебры генераторов, то есть к матрицам в векторном пространстве представления, осуществляется, прежде всего, путем введения операторов, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям, полученным из скобок Пуассона. В случае финитного движения в кулоновском поле притяжения речь идет о коммутаторах

$$[s_a^{(+)}, s_b^{(+)}] = \mathrm{i}\hbar\,\varepsilon_{abc}s_c^{(+)}, \quad [s_a^{(-)}, s_b^{(-)}] = \mathrm{i}\hbar\,\varepsilon_{abc}s_c^{(-)}, \quad [s_a^{(+)}, s_b^{(-)}] = 0.$$

Спектр собственных значений для полного набора наблюдаемых $\boldsymbol{s}^2$ и s_z в алгебре $su(2)\cong so(3)$, как неявно упоминалось выше, подробно описан в лекциях по классическим релятивистским полям. Результат следующий:

$$\boldsymbol{s}^2 = \hbar^2 s(s+1), \quad s_z = \hbar m_s, \quad m_s \in \overline{-s,s}.$$

При этом, как мы уже подчеркнули, для нашего случая реализуются только представления

$$(\boldsymbol{s}^{(\pm)})^2 = \hbar^2 s(s+1), \quad s = \frac{k}{2}, \quad k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

С другой стороны, эти собственные значения определяются в терминах операторов, в которые входит собственное значение энергии финитного движения, что в квантовой случае отвечает *уровням энергии связанных состояний.* В самом деле, запишем оператор $\boldsymbol{A}$, используя значение коммутатора импульса с моментом $[p_a,\ell_b] = \mathrm{i}\hbar\,\varepsilon_{abc}p_c$:

$$(\boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{p})_k = -\varepsilon_{kab}\ell_b p_a = -\varepsilon_{kab}(p_a\ell_b - \mathrm{i}\hbar\,\varepsilon_{abc}p_c) = -(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\ell})_k + 2\mathrm{i}\hbar\,\boldsymbol{p}_k.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} - \frac{1}{2mq^2}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{p}) = \frac{\boldsymbol{r}}{r} - \frac{1}{mq^2}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\ell} - \mathrm{i}\hbar\,\boldsymbol{p}).$$

При вычислении квадрата оператора $\boldsymbol{A}$ возникнут отличные от классических вклады. Именно, аккуратно учтем все члены. Например,

$$(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\ell})^2 = p_i\ell_k p_i\ell_k - p_i\ell_k p_k\ell_i = p_i\ell_k p_i\ell_k,$$

поскольку $\ell_k p_k = (\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{p}) = 0$. Далее,

$$p_i\ell_k p_i\ell_k = \boldsymbol{p}^2\boldsymbol{\ell}^2 - \mathrm{i}\hbar\,\varepsilon_{ikm}p_i p_m\ell_k = \boldsymbol{p}^2\boldsymbol{\ell}^2,$$

и мы приходим к классическому выражению. Однако, перекрестный член со смешанным произведением

$$(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\ell})\cdot\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\ell}) = (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\ell})\cdot\boldsymbol{p} + (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{\ell} = (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\ell})\cdot\boldsymbol{p}$$

содержит вклады

$$(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\ell})\cdot\boldsymbol{p} = \varepsilon_{ijk}\,p_j\ell_k p_i = \varepsilon_{ijk}\,p_j p_i\ell_k + \mathrm{i}\hbar\,\varepsilon_{ikj}\varepsilon_{ikm}\,p_j p_m = 2\mathrm{i}\hbar\,\boldsymbol{p}^2.$$

Следовательно,

$$(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\ell}-\mathrm{i}\hbar\,\boldsymbol{p})^2=\boldsymbol{p}^2\boldsymbol{\ell}^2+\hbar^2\boldsymbol{p}^2.$$

Аналогично можно найти, что

$$\frac{1}{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})+(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\frac{1}{r}=\frac{2}{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})-\frac{1}{r}\mathrm{i}\hbar(\nabla\cdot\boldsymbol{r})-\mathrm{i}\hbar(\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\frac{1}{r}=\frac{2}{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})-\mathrm{i}\hbar\,\frac{2}{r},$$

а

$$\frac{1}{r}\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\ell})+(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\ell})\cdot\boldsymbol{r}\,\frac{1}{r}=\frac{1}{r}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{\ell}+[2\mathrm{i}\hbar\,\boldsymbol{p}-(\boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{p})]\cdot\boldsymbol{r}\,\frac{1}{r}=$$
$$=\frac{2}{r}\boldsymbol{\ell}^2+\mathrm{i}\hbar\,\frac{2}{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})+\frac{4\hbar^2}{r}.$$

Приводя подобные слагаемые, для скалярного квадрата вектора Рунге-Ленца-Лапласа находим

$$\boldsymbol{A}^2=1+\frac{2}{mq^4}\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}-\frac{q^2}{r}\right)\boldsymbol{\ell}^2+\frac{\hbar^2}{m^2q^4}\left(\boldsymbol{p}^2-\frac{2mq^2}{r}\right),$$

откуда

$$\boldsymbol{A}^2=1+\frac{2E}{mq^4}\boldsymbol{\ell}^2+\frac{2\hbar^2E}{mq^4}.$$

В этом выражении можно выделить классический и квантовый вклады в явном виде по наличию фактора $\hbar^2$. В итоге мы вычислили квадрат оператора

$$\boldsymbol{w}^2=-\frac{mq^4}{2E}\boldsymbol{A}^2=-\frac{mq^4}{2E}-\boldsymbol{\ell}^2-\hbar^2,$$

а значит,

$$\frac{1}{4}(\boldsymbol{\ell}^2+\boldsymbol{w}^2)=-\frac{mq^4}{8E}-\frac{\hbar^2}{4}=\hbar^2 s(s+1),\quad E=-\frac{mq^4}{2\hbar^2}\frac{1}{(2s+1)^2}.$$

Введем *главное квантовое число* $n=2s+1$ и т.н. *постоянную тонкой структуры* $\alpha_{\mathrm{em}}=q^2/\hbar c$, так что энергетический спектр атома водорода задается формулой

$$E_n=-mc^2\frac{\alpha_{\mathrm{em}}^2}{2n^2}.$$

Данное выражение было получено Паули в рамках матричной квантовой механики и опубликовано за 10 дней до выхода в свет статьи Шредингера с тем же результатом, полученным уже в рамках волновой механики из уравнения Шредингера. Интересно, что такой групповой вывод спектра атома водорода поднимает вопрос о природе пространства представлений группы симметрии. На этот вопрос дал ответ Шредингер, а именно, он установил соответствие матричной квантовой механики и волновой механики: матричные представления действуют в гильбертовом пространстве квантовых состояний, которые можно описывать и волновыми функциями.

Список литературы

1. *Киселев В.В.* Нерелятивистская механика частиц и полей: векторный анализ и симметрии. — 2022.
2. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1988.
3. *Tong D.* Classical Dynamics. — Cambridge, CB3 OBA, UK, 2005.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
5. *Катанаев М.О.* Геометрические методы в математической физике. — Казань: КФУ и МИАН, 2016.
6. *Тахтаджян Л.А.* Квантовая механика для математиков. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011.

Часть 2. Геометрические структуры и поля

Основная цель данной части пособия состоит в том, чтобы понять, какие геометрические структуры и поля могут жить в искривленных пространствах и каковы их свойства. Эти знания окажутся весьма полезными как для общей теории относительности, так и для других разделов теоретической физики.

В современной дифференциальной геометрии принят бескоординатный язык описания геометрических структур. Это, в первую очередь, связано с тем, что глобальный бескоординатный подход компактен в обозначениях, а также прозрачен и удобен для определения различных геометрических объектов, которые, по своей природе, являются понятиями, не зависящими (или почти не зависящими) от выбора системы координат. Кроме того, такое бескоординатное описание весьма удобно для формулировки и доказательства многих утверждений дифференциальной геометрии. Вышесказанное не означает, что более громоздкий координатный подход, принятый во многих классических учебниках по теоретической физике, является менее строгим. Работа в координатах необходима в тех геометрических моделях математической физики, где требуется проведение конкретных расчетов.

Краткое описание глав...///

4. Тензорная алгебра

Наш обзор базовых тем дифференциальной геометрии мы начнем с рассмотрения тензорной алгебры. Однако перед тем, как приступить к работе с тензорами, имеет смысл вспомнить некоторые понятия линейной алгебры и геометрии, которые будут активно использоваться в дальнейшем.

4.1. **Векторы и линейные функционалы.** *Векторным пространством* над полем $\mathbb{R}$(или $\mathbb{C}$) называется множество V, на котором определены операция сложения и операция умножения на элементы поля $\mathbb{R}$(или $\mathbb{C}$), удовлетворяющие следующим аксиомам:

- $\forall v,w \in V : v + w = w + v$,
- $\forall v,w,u \in V : v + (w + u) = (v + w) + u$,
- $\exists\, 0 \in V : \forall v \in V : v + 0 = v$,
- $\forall v \in V\, \exists\, x \in V : v + x = 0,\ x := -v$,
- $\forall v, w \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$,
- $\forall v \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$,
- $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$,
- $\forall v \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : (\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$.

Элементы векторного пространства в линейной алгебре называют *векторами*. Непустое подмножество W векторного пространства V называется *подпространством*, если

- $\forall v,w \in W : v + w \in W$,
- $\forall v \in W, \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : \lambda v \in W$.

Далее мы будем в основном рассматривать конечномерные векторные пространства над полем вещественных чисел.

Задача 4.1. Пусть A — некоторое множество индексов. Является ли пересечение подпространств $W = \cap_{a\in A} W_a$, $W_a \subseteq V$ подпространством в векторном пространстве V?

Задача 4.2. Пусть $W_{1,2} \subseteq V$ — некоторые подпространства в V. Докажите, что объединение подпространств $W_1 \cup W_2$ является подпространством тогда и только тогда, когда $W_1 \subset W_2$ или $W_2 \subset W_1$.

Любое векторное пространство V конечной размерности, $\dim V = n$, может быть представлено как линейная оболочка, натянутая на конечное число (равное размерности пространства) линейно независимых базисных векторов $\{e_1, \ldots ,e_n\}$, то есть $V = \langle e_1, \ldots ,e_n \rangle$. При этом говорят, что векторное пространство порождено конечным числом n базисных векторов, а о самих векторах говорят как о *системе порождающих векторов*. Выбирая в V глобальный базис $\{e_1, \ldots ,e_n\}$, любой вектор $v \in V$ можно представить в виде

$$v = v^a e_a.$$

Здесь и далее повсеместно используется *правило суммирования Эйнштейна* по повторяющимся индексам: в выражении может присутствовать пара одинаковых индексов, которые называются *немыми*; тогда подразумевается, что по немому индексу производится суммирование, а знак суммы опускается. Числа v^a называются *координатами вектора* $v \in V$ в разложении по заданному базису $\{e_1, \ldots ,e_n\}$ векторного пространства V.

Задача 4.3. Доказать, что всякую линейно независимую систему векторов конечномерного векторного пространства V можно дополнить до базиса в V.

На понятие размерности вещественного векторного пространства можно взглянуть с более геометрической стороны. Последовательность нетривиальных возрастающих по включению векторных пространств

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V$$

называется *флагом* в пространстве V длины n. Флаг называется *полным*, если в него нельзя добавить ни одного подпространства, то есть $V_k/V_{k-1} \cong \mathbb{R}$, $\forall k = \overline{1,n}$: если факторпространство V_k/V_{k-1} имеет не более одного линейно независимого вектора, то возьмем один его вектор v и выразим любой другой как λv с $\lambda \in \mathbb{R}$. Это означает, что V_k/V_{k-1} изоморфно $\mathbb{R}$. Если же в V_k/V_{k-1} есть вектор v и он не порождает все V_k, то это означает по определению факторпространства, что

$$V_{k-1} \neq V_{k-1} + \langle v \rangle \neq V_k,$$

то есть $V_{k-1} + \langle v \rangle$ можно было бы добавить в флаг между V_{k-1} и V_k. Напомним, что *факторпространством* V/W называется фактормножество V по отношению эквивалентности

$$v \sim v' \quad \Leftrightarrow \quad v - v' \in W \subseteq V.$$

Несложно доказать теорему, согласно которой для векторного пространства V максимальная длина флага в нем равна максимальному количеству линейно независимых векторов в нем; и если длина флага неограничена, то и количество линейно независимых векторов тоже неограничено. Действительно, докажем сначала в одну сторону. Пусть имеется система линейно независимых векторов $\{v_1, \ldots, v_k\}$. Положим $V_k = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$. Эта последовательность нетривиальных подпространств V строго возрастает по включению и $V_k \neq V_{k-1}$, так как иначе v_k выражался бы через $v_1, \ldots, v_{k-1}$ по определению линейной оболочки. В другую сторону, если есть флаг

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V,$$

то положим $v_k \in V_k \setminus V_{k-1}$. Если между векторами $v_1, \ldots, v_n$ была бы линейная зависимость, то какой-то из них, например v_k, выражался бы через предыдущие. Но тогда выполнялось бы $v_k \in V_{k-1}$, что мы запретили.

Эта теорема позволяет дать определение размерности векторного пространства V как максимальной длины флага в нем. Причем, можно показать, что у конечно порожденного векторного пространства все полные флаги имеют одинаковую длину. Это гарантирует, что размеры всех базисов одного и того же векторного пространства одинаковые.

Задача 4.4. Доказать, что у конечно порожденного векторного пространства все полные флаги имеют одинаковую длину.

Задача 4.5. Докажите, что если $W \subseteq V$, а размерности $\dim W$ и $\dim V/W$ конечны, то $\dim V = \dim W + \dim V/W$.

Задача 4.6. Рассмотрим множество ℓ_c *финитных* числовых последовательностей:

$$\ell_c = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \,|\, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N : x(n) = 0\}.$$

Покажите, что ℓ_c является вещественным векторным пространством. Докажите, что система векторов $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, таких что $e_k(n) = \delta_{kn}$ составляет *базис Гамеля* в пространстве ℓ_c.

Пусть V — конечномерное, $\dim V = n$, вещественное векторное пространство. На нем можно определить линейные функционалы $f : V \to \mathbb{R}$. *Линейной формой* или

линейным функционалом на векторном пространстве V называется всякая функция $f : V \to \mathbb{R}$, обладающая свойствами
- $\forall v, w \in V : f(v + w) = f(v) + f(w)$,
- $\forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

Значение $f(v)$ линейного функционала f на элементе $v \in V$ иногда записывают в виде (f,v) или $\langle f,v \rangle$.

Очевидно, что сумма линейных форм является линейной формой, а линейная форма, умноженная на число, также является линейной формой. Отсюда следует, что линейные формы на векторном пространстве V образуют свое векторное пространство $V^\star$. Такое векторное пространство линейных форм $V^\star$ называют *ковариантным* или *сопряженным* (*двойственным, ковекторным*) к V. Элементы ковекторного пространства в тензорной алгебре называют *ковекторами.*

Задача 4.7. Рассмотрим вещественное векторное пространство $\mathbf{Mat}_n(\mathbb{R})$ квадратных матриц порядка n. Проверьте, что отображение $f : \mathbf{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$:

$$f(A) = \operatorname{tr} A := A_{aa}, \quad A = (A_{ab}) \in \mathbf{Mat}_n(\mathbb{R})$$

является линейным функционалом на $\mathbf{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Задача 4.8. Доказать, что произвольная линейная функция на пространстве $\mathbf{Mat}_n(\mathbb{R})$ имеет следующий вид: $f(A) = \operatorname{tr}(\sigma_f A)$. Здесь $\sigma_f \in \mathbf{Mat}_n(\mathbb{R})$, причем матрица σ_f однозначно определяется функцией f.

Задача 4.9. Обозначим через $C[a,b]$ бесконечномерное пространство непрерывных на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$ функций. Определим отображение $\varphi : C[a,b] \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\varphi(f) = \int_a^b f(x)\, dx, \quad \forall f \in C[a,b].$$

Доказать, что φ является линейным функционалом на $C[a,b]$.

Ядром вещественного линейного функционала $f : V \to \mathbb{R}$ на некотором векторном пространстве V называется подпространство

$$\ker f = \{v \in V : f(v) = 0\}.$$

Теорема 4.10. Для любого ненулевого линейного функционала f на конечномерном векторном пространстве V, $\dim V = n$, *коразмерность* ядра отображения f равна единице, то есть

$$\exists u \in V : \forall v \in V\ \exists w \in \ker f, \lambda \in \mathbb{R} : v = w + \lambda u.$$

Доказательство. Если f — ненулевой линейный функционал на векторном пространстве V, то $\ker f \neq V$. Следовательно существует вектор $u \in V \setminus \ker f$, то есть вектор, для которого $\mathbb{R} \ni f(u) \neq 0$. Тогда для любого $v \in V$ вектор

$$w = v - \frac{f(v)}{f(u)} u := v - \lambda u$$

лежит в ядре линейного функционала $f : V \to \mathbb{R}$, то есть $f(w) = 0$, что и требовалось нам доказать. □

Теорема 4.11. Пусть f_1, f_2 — линейные функционалы на конечномерном вещественном векторном пространстве V. Если их ядра совпадают: $\ker f_1 = \ker f_2$, то f_1 и f_2 пропорциональны, то есть существует $\lambda \in \mathbb{R}$, такое что

$$f_2 = \lambda f_1.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольный вектор $u \in V \setminus \ker f_{1,2}$. Тогда для любого $v \in V$ выполняется

$$v = w_1 + \frac{f_1(v)}{f_1(u)}u = w_2 + \frac{f_2(v)}{f_2(u)}u, \quad w_{1,2} \in \operatorname{Ker} f_{1,2},$$

или

$$\ker f_{1,2} \ni w_1 - w_2 = u\left[\frac{f_2(v)}{f_2(u)} - \frac{f_1(v)}{f_1(u)}\right].$$

Отсюда получаем

$$f_2(v) = \frac{f_2(u)}{f_1(u)}f_1(v) := \lambda f_1(v), \quad \forall v \in V,$$

что и требовалось доказать. □

При работе с функциональными пространствами оказывается более разумно определить двойственное пространство (к некоторому топологическому векторному пространству E) как пространство *непрерывных* линейных функционалов. При этом, множество всех линейных функционалов на E, не обязательно непрерывных, обычно называют *алгебраически сопряженным.*

Задача 4.12. Для некоторого нормированного пространства E введем двойственное пространство E' как пространство непрерывных линейных отображений $\lambda : E \to \mathbb{R}$. Норму в E' определим как

$$\|\lambda\| = \sup\{|\lambda(x)| \,:\, \|x\| \leqslant 1\}.$$

Доказать, что линейный функционал $\lambda \in E'$ непрерывен тогда и только тогда, когда его норма конечна.

В случае, если пространство E над полем $\mathbb{R}$ конечномерно, все линейные функционалы автоматически оказываются непрерывными, а сопряженное и алгебраически сопряженное пространства совпадают. Оставляем это утверждение читателю в качестве упражнения. Если же пространство E бесконечномерно, как это обычно бывает в случае функциональных пространств, то двойственное и алгебраически сопряженное пространства, вообще говоря, не совпадают. Поскольку далее мы будем иметь дело в основном с конечномерными векторными пространствами, то мы не будем различать двойственное и алгебраически сопряженное пространства.

Выберем в векторном пространстве V некоторый базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Тогда для произвольного вектора $v \in V$ имеем

$$f(v) = v^a f(e_a) := v^a f_a.$$

Как видно, линейная форма полностью задается значениями на базисных векторах векторного пространства. Линейные функции $h^1, h^2, \ldots, h^n \in V^\star$, определяемые равенствами $h^a(v) = v^a$, называются *координатными функциями* относительно базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Они составляют базис в сопряженном пространстве, который называется *сопряженным базисом* по отношению к $\{e_1, \ldots, e_n\}$:

$$h^a(v) = v^b h^a(e_b) = v^a, \quad h^a(e_b) = \delta^a_b.$$

Задача 4.13. Найти двойственный базис в пространстве $V = \mathbb{R}[x]_2$ вещественных многочленов степени не выше 2 для базиса $\{h^1, h^2, h^3\}$ в $V^\star$, где

$$h^1(f) = f(0), \quad h^2(f) = f'(0), \quad h^3(f) = f(1).$$

Из вышесказанного очевидно, что размерности ковекторного пространства и векторного пространства совпадают, то есть $\dim V = \dim V^\star = n$, а потому, согласно известной теореме из линейной алгебры, векторное и ковекторное пространства изоморфны, хотя между ними и не существует канонического изоморфизма, то есть такого изоморфизма, который может быть определен инвариантно (независимо от какого-либо произвола: выбора базиса и т.п.). *Канонический изоморфизм* существует между пространствами V и $V^{\star\star} = (V^\star)^\star$. Действительно, из определения операций в пространстве $V^\star$ следует, что для любого вектора $v \in V$ функция λ_v на $V^\star$, определенная как

$$\lambda_v(f) = f(v),$$

является линейной. Остается проверить, что отображение $v \mapsto (f \mapsto f(v))$ биективно. Пусть $\{e_1, \dots ,e_n\}$ — базис в пространстве V, а $\{h^1, \dots ,h^n\}$ — сопряженный базис пространства $V^\star$. Тогда $\lambda_{e_b}(h^a) = h^a(e_b) = \delta^a_b$, так что набор функционалов $\{\lambda_{e_1}, \dots ,\lambda_{e_n}\}$ составляет базис пространства $V^{\star\star}$, сопряженный базису $\{h^1, \dots ,h^n\}$. Отображение $v \mapsto (f \mapsto f(v))$ переводит вектор с координатами v^a в базисе $\{e_a\}$ пространства V в вектор с такими же координатами в базисе $\{\lambda_{e_a}\}$ пространства $V^{\star\star}$. Следовательно, оно биективно.

В линейной алгебре отождествляют векторы из V и линейные функционалы на $V^\star$ посредством упомянутого выше канонического изоморфизма. Смысл понятия канонического изоморфизма в полной мере выясняется в теории категорий и сопровождается введением понятия *функтора*.

Ковариантным функтором из *категории* конечномерных векторных пространств в себя называется пара отображений $\psi = (\psi_1,\psi_2)$, где ψ_1 произвольному конечномерному векторному пространству V сопоставляет некоторое новое векторное пространство $\psi_1(V)$, которое ему изоморфно, а отображение ψ_2 сопоставляет линейному отображению $\varphi : V \to W$ линейное отображение

$$\psi_2(\varphi) : \psi_1(V) \to \psi_1(W),$$

причем $\psi_2(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{\psi_1(V)}$ и для линейных отображений $\chi : U \to V$, $\varphi : V \to W$ имеет место равенство

$$\psi_2(\varphi \circ \chi) = \psi_2(\varphi) \circ \psi_2(\chi) : \psi_1(U) \to \psi_1(W).$$

Например, *тождественный функтор* $\mathrm{Id} = (\mathrm{Id}_1, \mathrm{Id}_2)$, $\mathrm{Id}_1(V) = V$, $\mathrm{Id}_2(\varphi) = \varphi$. Для него следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{Id}_1"] \arrow[d, "\varphi"'] & V \arrow[d, "\mathrm{Id}_2(\varphi)"] \\ W \arrow[r, "\mathrm{Id}_1"'] & W \end{tikzcd}$$

Другой пример дает так называемый *функтор двойного сопряжения*

$$\psi_1(V) = V^{\star\star}, \quad \psi_2(\varphi) = \varphi^{\star\star}.$$

Изоморфизмом $\lambda : \mathrm{Id} \Rightarrow \psi$ между тождественным функтором и функтором ψ называется набор изоморфизмов $\lambda_V : V \to \psi_1(V)$, по одному для каждого конечномерного векторного пространства V, таких, что для любого линейного отображения $\varphi : V \to W$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\lambda_V"] \arrow[d, "\varphi"'] & \psi_1(V) \arrow[d, "\psi_2(\varphi)"] \\ W \arrow[r, "\lambda_W"'] & \psi_1(W) \end{tikzcd}$$

Некоторый изоморфизм $\gamma : V \to \psi_1(V)$ векторных пространств называется *каноническим*, если существует изоморфизм функторов

$$\lambda : \mathrm{Id} \Rightarrow \psi, \quad \gamma = \lambda_V.$$

Существование канонического изоморфизма $\gamma : V \to \psi_1(V)$ подразумевает существование конструкции λ, которая для всякого конечномерного векторного пространства W порождает изоморфизм $\lambda_W : W \to \psi_1(W)$, причем $\gamma = \lambda_V$, и для этих изоморфизмов диаграммы в определении выше коммутативны.

Из вышесказанного ясно, что для аккуратного доказательства каноничности изоморфизма $\lambda_V : V \to V^{\star\star}$, определенного по формуле

$$\lambda_V^v(f) = f(v), \quad \forall v \in V, \quad \forall f \in V^\star,$$

необходимо проверить коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\lambda_V"] \arrow[d, "\varphi"'] & V^{\star\star} \arrow[d, "\varphi^{\star\star}"] \\ W \arrow[r, "\lambda_W"'] & W^{\star\star} \end{tikzcd}$$

Введем для удобства следующее обозначение: $\chi := \varphi^\star : W^\star \to V^\star$ и применим к функционалу $\lambda_V^v \in V^{\star\star}$ отображение $\varphi^{\star\star} = \chi^\star$. Имеем

$$\chi^\star(\lambda_V^v) \in W^{\star\star} \ : \ \chi^\star(\lambda_V^v)(g) = \lambda_V^v(\chi(g)), \quad \forall g \in W^\star,$$

причем

$$\lambda_V^v(\chi(g)) = \lambda_V^v(\varphi^\star(g)) = \varphi^\star(g)(v) = g(\varphi(v)).$$

Такой ответ мы получили, двигаясь по диаграмме вправо и вниз, начав с вектора $v \in V$. Путь вниз и вправо дает нам элемент $\lambda_W^{\varphi(v)} \in W^{\star\star}$, который при произвольном $g \in W^\star$ принимает значение $\lambda_W^{\varphi(v)}(g) = g(\varphi(v))$, то есть то же, что и $\varphi^{\star\star}(\lambda_V^v)$, откуда и следует коммутативность диаграммы.

4.2. **Полилинейные формы.** Наряду с векторами и линейными функционалами важными с точки зрения линейной алгебры объектами являются билинейные и квадратичные формы.

Билинейной формой на вещественном векторном пространстве V называется функция $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$, линейная по каждому аргументу. Аналогичным образом можно определить и *полилинейные формы* на векторном пространстве V, как функции $\alpha : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$, линейные по каждому аргументу. Если $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в векторном пространстве V, то для векторов $v = v^a e_a$, $w = w^b e_b$ получаем

$$\beta(v,w) = v^a w^b \beta(e_a,e_b) := v^a w^b \beta_{ab}.$$

Матрицу $(\beta_{ab}) = \hat{\beta}^a_b$ называют *матрицей билинейной формы*. Как видно, билинейная форма полностью определяется своей матрицей.

Ядром билинейной формы β на векторном пространстве V называется следующее подпространство:

$$\ker\beta = \{w \in V : \beta(v,w) = 0, \ \forall v \in V\}.$$

Функция $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ называется *невырожденной*, если

$$\ker\beta = 0.$$

Задача 4.14. Доказать, что функция $\beta(A,B) = \mathrm{tr}\,(AB)$ является невырожденной билинейной формой на пространстве $\mathbf{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Интересно отметить, что множество полилинейных функций на векторном пространстве V образует *градуированную алгебру*

$$\mathbf{T}_\star(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathbf{T}_q(V)$$

относительно операции *тензорного произведения* форм:

$$(\alpha\otimes\beta)(v_1,\dots,v_{q+m}) = \alpha(v_1,\dots,v_q)\,\beta(v_{q+1},\dots,v_{q+m}),\ \alpha\in\mathbf{T}_q(V),\ \beta\in\mathbf{T}_m(V).$$

Здесь через $\mathbf{T}_q(V)$ обозначено векторное пространство полилинейных форм степени q на V, а под прямой суммой векторных пространств понимается внешняя прямая сумма: *внешней прямой суммой* пространств $V_1,\dots,V_k$ называется векторное пространство

$$V_1\oplus\dots\oplus V_k,$$

составленное из всех последовательностей $(x_1,\dots,x_k)$, где $x_i\in V_i$, с покомпонентными операциями сложения и умножения на вещественные числа. Более подробно, операции в $V_1\oplus\dots\oplus V_k$ определяются следующим образом:

$$(x_1,\dots,x_k)+(y_1,\dots,y_k) = (x_1+y_1,\dots,x_k+y_k),$$

$$\lambda(x_1,\dots,x_k) = (\lambda x_1,\dots,\lambda x_k).$$

Напомним, что *алгеброй* над полем вещественных чисел называется множество A с операциями сложения, умножения и умножения на действительные числа $\mathbb{R}$, обладающими следующими свойствами:

• Относительно операций сложения и умножения на вещественные числа A есть векторное пространство;

• Относительно сложения и умножения A есть кольцо;

• $(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab)$, $\forall a,b\in A$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.

Кольцом называется множество K с операциями сложения и умножения, обладающая следующими свойствами:

• Относительно сложения множество K есть абелева группа, называемая *аддитивной группой кольца* K;

• $a(b+c) = ab+ac$ и $(a+b)c = ac+bc$, $\forall a,b,c\in K$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

Особый интерес представляют симметричные и кососимметричные[1] полилинейные (в частности, билинейные) формы. Полилинейная форма называется *симметричной* [*кососимметричной*], если для каждых двух ее аргументов v_i, v_j и для любых значений этих аргументов выполняется соотношение

$$\alpha(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_p) = \alpha(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_p),$$

$$\left[\alpha(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_p) = -\alpha(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_p)\right].$$

В частности, для симметричных билинейных форм нетрудно показать, что соответствующие матрицы этих билинейных форм обладают следующим свойством: $\hat\beta^{\mathrm{T}} = \hat\beta$. Действительно, поскольку по определению $\beta(v,w) = \beta(w,v)$,

$$\beta(v,w) = \beta(w,v) = v^a w^b\beta_{ab} = v^a w^b\beta_{ba},$$

то есть $\beta_{ab} = \beta_{ba}$ $(\hat\beta^a{}_b = \hat\beta^b{}_a)$ $\forall a,b$, что и требовалось доказать.

[1]Более детальное рассмотрение кососимметричных полилинейных форм приведет нас в дальнейшем к нетривиальному понятию *дифференциальных* (*внешних*) *форм*.

Задача 4.15. Доказать, что билинейная форма β является кососимметричной тогда и только тогда, когда для матрицы этой билинейной формы верно тождество: $\hat{\beta}^{\mathrm{T}} = -\hat{\beta}$.

Пусть β — симметричная билинейная форма на некотором векторном пространстве V. Тогда функция $q : V \to \mathbb{R}$, определяемая выражением
$$q(v) = \beta(v,v)$$
называется *квадратичной формой*, ассоциированной с билинейной формой β. В координатах квадратичная форма имеет вид однородного полинома второй степени:
$$q(v) = \beta_{ab}\, v^a v^b.$$
Симмеричная билинейная форма β всегда может быть восстановлена из соответствующей квадратичной формы q. Действительно,
$$q(v+w) = \beta(v+w,v+w) = q(v) + q(w) + 2\beta(v,w),$$
то есть
$$\beta(v,w) = \frac{1}{2}[q(v+w) - q(v) - q(w)].$$
Значит, имеется однозначное соответствие межу симметричными билинейными формами и квадратичными формами.

Как известно из линейной алгебры, билинейные формы позволяют абстрактно ввести понятие ортогональности векторов векторного пространства V: векторы $v, w \in V$ называются *ортогональными* относительно билинейной формы β, если $\beta(v,w) = 0$. *Ортогональным дополнением* к подпространству $W \subseteq V$ относительно формы β называется подпространство
$$W^{\perp} = \{v \in V : \beta(w,v) = 0,\ \forall w \in W\}.$$
В частности, ортогональное дополнение $V^{\perp} = \ker \beta$.

Теорема 4.16. Пусть $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ — невырожденная билинейная функция на V. Тогда выполняется
$$\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W, \qquad (W^{\perp})^{\perp} = W.$$

Доказательство. Если $\{e_1, \ldots, e_k\}$ — базис в W, то
$$W^{\perp} = \{v \in V : \beta(e_i,v) = 0,\ i = 1, \ldots, k\}.$$
Продолжим $\{e_1, \ldots, e_k\}$ до базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ во всем векторном пространстве V, пусть $\hat{\beta}$ — матрица β в этом базисе. Равенство для $W^{\perp}$ теперь означает, что в выбранном базисе в векторном пространстве V условие $v \in W^{\perp}$ равносильно тому, что координаты v удовлетворяют системе линейных однородных уравнений, матрица которой образована первыми k строками матрицы $\hat{\beta}$. Так как β невырождена, то и матрица $\hat{\beta}$ невырождена, в частности, ее строки линейно независимы. Отсюда $\dim W^{\perp} = n - k$, где $n = \dim V$, $k = \dim W$, тем самым доказано первое из соотношений. Дважды применяя доказанное соотношение, имеем $\dim (W^{\perp})^{\perp} = n - \dim W^{\perp} = n - (n-k) = k$. С другой стороны, очевидно, что $W \subset (W^{\perp})^{\perp}$ (действительно, любой $w \in W$ ортогонален любому вектору из ортогонального дополнения к $W^{\perp}$), поэтому $W = (W^{\perp})^{\perp}$. □

Вещественнозначная квадратичная форма $q : V \to \mathbb{R}$ на называется *положительно определенной*, если
$$\forall v \in V\ :\ v \neq 0\ :\ q(v) > 0.$$
Вещественная симметричная билинейная форма называется положительно определенной, если соответствующая ей квадратичная форма положительно определена.

Задача 4.17. Пусть $q(x) = q_{ab}x^a x^b$ — положительно определенная квадратичная форма на $\mathbb{R}^n$ с симметричной матрицей $\hat{q}^a_b$. Доказать равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx\, e^{-q(x)} = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det \hat{q}}},$$

где в левой части равенства стоит кратный интеграл от функции n переменных, причем $dx := dx_1 \dots dx_n$.

На этом, пожалуй, завершим повторение некоторых основных определений и утверждений линейной алгебры. Все остальные необходимые определения и теоремы будут излагаться по мере необходимости.

4.3. **Тензоры: определение и примеры.** При изложении тензорной алгебры можно по-разному определять тензоры. Довольно распространенным является подход, который состоит в том, чтобы постулировать закон преобразования координат тензора при замене базиса. Такой подход, по мнению автора, не развивает геометрическую интуицию. Как следствие, студенты младших курсов обычно испытывают некоторые трудности в восприятии на начальных этапах освоения тензорной алгебры. Однако, это не единственная причина, по которой мы введем тензор не так, как его обычно вводят в курсах теоретической физики. Как было пояснено в предисловии, в дальнейшем мы будем стремиться определять математические объекты и операции над ними инвариантным образом, независимо от выбора базиса или *криволинейных замен координат.* О последних речь пойдет при изучении векторных полей, полей дифференциальных форм и т.п.

Пусть V — конечномерное, $\dim V = n < +\infty$, векторное пространство над полем $\mathbb{R}$(или $\mathbb{C}$). *Тензором типа* (p,q) на V называется полилинейное отображение

$$\alpha : \underbrace{V \times \dots \times V}_{q} \times \underbrace{V^\star \times \dots \times V^\star}_{p} \to \mathbb{R}(\mathbb{C}).$$

Тензоры типа (p,q) можно складывать и умножать на числа как полилинейные отображения:

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(v_1, \dots ,v_q; f_1, \dots ,f_p) = \alpha_1(v_1, \dots ,v_q; f_1, \dots ,f_p) + \alpha_2(v_1, \dots ,v_q; f_1, \dots ,f_p),$$

$$(\lambda\alpha)(v_1, \dots ,v_q; f_1, \dots ,f_p) = \lambda\alpha(v_1, \dots ,v_q; f_1, \dots ,f_p).$$

Здесь все $v_i \in V$, $f_j \in V^\star$, $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Очевидно, что относительно операций сложения и умножения на числа, определенных таким образом, тензоры типа (p,q) образуют векторное пространство. Будем обозначать его через $\mathbf{T}^p_q(V)$.

Посмотрим, что представляют из себя тензоры малых *рангов*, то есть тензоры типа (p,q) при небольших значениях p и q. По определению тензоры типа $(1,0)$ — это линейные функционалы на $V^\star$. Последнее означает, что тензоры типа $(1,0)$ являются элементами дважды двойственного пространства $V^{\star\star}$, то есть $\mathbf{T}^1_0(V) = V^{\star\star}$. Однако, между пространствами V и $V^{\star\star}$, как известно, существует канонический изоморфизм, вследствие чего в линейной алгебре канонически отождествляют векторы из V и линейные функционалы на $V^\star$. Поэтому пространство тензоров $\mathbf{T}^1_0(V)$ можно также канонически отождествить с V:

$$\mathbf{T}^1_0(V) \cong V.$$

Таким образом, тензоры типа $(1,0)$ на векторном пространстве представляют собой векторы этого пространства. Тензор типа $(0,1)$ по определению представляет собой линейный функционал на V (ковектор), то есть $\mathbf{T}^0_1(V) = V^\star$. Тензоры типа $(0,2)$

и (2,0) суть билинейные формы на V и $V^\star$ соответственно, а тензоры типа (0,0) по определению отождествляются со скалярами, то есть $\mathbf{T}^0_0(V) = \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Остался невыясненым вопрос о том, какие объекты линейной алгебры отвечают смешанным тензорам типа (1,1).

Теорема 4.18. Между пространствами $\mathbf{T}^1_1(V)$ и $\mathcal{L}(V)$ существует канонический изоморфизм. Здесь $\mathcal{L}(V)$ — пространство линейных операторов на V.

Доказательство. Во-первых, покажем как по тензору $\alpha \in \mathbf{T}^1_1(V)$ построить линейный оператор на векторном пространстве V. Заметим, что при фиксированном v функция $\alpha(v,f)$ линейна по f и, значит, является линейной формой на $V^\star$. Для любой линейной формы на $V^\star$ существует такой единственный вектор $w \in V$, что она совпадает с формой λ_w. То есть

$$\forall v \in V\, \exists!\, w \equiv \psi_\alpha(v) \in V\, :\, \alpha(v,f) = \lambda_{\psi_\alpha(v)}(f) = f(\psi_\alpha(v)), \quad \forall f \in V^\star.$$

Покажем теперь, что вектор $\psi_\alpha(v) \in V$ линейно зависит от вектора $v \in V$, то есть является линейным оператором на V. Имеем

$$f(\psi_\alpha(v_1 + v_2)) = \alpha(v_1,f) + \alpha(v_2,f) = f(\psi_\alpha(v_1) + \psi_\alpha(v_2)),\ \ \forall f \in V^\star.$$

Отсюда $\psi_\alpha(v_1 + v_2) = \psi_\alpha(v_1) + \psi_\alpha(v_2)$. Аналогично получаем, что $\psi_\alpha(\lambda v) = \lambda\psi_\alpha(v)$. Таким образом, ψ_α в самом деле является линейным оператором на V. Докажем, что отображение $\mathbf{T}^1_1(V) \to \mathcal{L}(V)$, $\alpha \mapsto \psi_\alpha$, является линейным. Действительно, для любых $v \in V$, $f \in V^\star$ выполняется

$$f(\psi_{\alpha_1+\alpha_2}(v)) = \alpha_1(v,f) + \alpha_2(v,f) = f(\psi_{\alpha_1}(v)) + f(\psi_{\alpha_2}(v)) = f(\psi_{\alpha_1}(v) + \psi_{\alpha_2}(v)),$$

откуда $\psi_{\alpha_1+\alpha_2} = \psi_{\alpha_1} + \psi_{\alpha_2}$, и аналогично для умножения на скаляры: $\psi_{\lambda\alpha} = \lambda\psi_\alpha$. В обратную сторону, пусть дан линейный оператор $\psi \in \mathcal{L}(V)$. Тогда отображение $\alpha : V \times V^\star \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, такое что $\alpha(v,f) := f(\psi(v))$ является билинейным отображением, то есть $\alpha \in \mathbf{T}^1_1(V)$. Тем самым мы определили отображение $\mathcal{L}(V) \to \mathbf{T}^1_1(V)$. Легко видеть, что оно является обратным к ранее построенному отображению. $\square$

Задача 4.19. Какому смешанному тензору типа (1,1) отвечает тождественный линейный оператор id_V на векторном пространстве V?

Как видно, тензор — это довольно общее понятие линейной алгебры, частными случаями которого являются скаляры, векторы, линейные формы, билинейные формы, линейные операторы и множество других алгебраических и геометрических объектов. Со всеми вышеперечисленными тензорами малых рангов мы очень хорошо знакомы. С другими, более сложными объектами линейной алгебры, которые повсеместно используются в теоретической физике, нам предстоит познакомиться в дальнейшем.

4.4. **Тензорное произведение.** Основными операциями над тензорами являются их тензорное произведение и свертка. С понятием свертки тензоров мы познакомимся немного позже, потому как ее удобнее всего определять в терминах координат тензора. А сейчас определим первую важную операцию над тензорами, а именно, их *тензорное произведение*, как билинейное отображение

$$\otimes : \mathbf{T}^p_q(V) \times \mathbf{T}^r_m(V) \to \mathbf{T}^{p+r}_{q+m}(V),$$

которое двум тензорам $\alpha \in \mathbf{T}^p_q(V)$ и $\gamma \in \mathbf{T}^r_m(V)$ ставит в соответствие новый тензор $\sigma = \alpha \otimes \gamma \in \mathbf{T}^{p+r}_{q+m}(V)$ по формуле

$$(\alpha \otimes \gamma)(v_1, \dots, v_{q+m}; f_1, \dots, f_{p+r}) = \\ = \alpha(v_1, \dots, v_q; f_1, \dots, f_p) \cdot \gamma(v_{q+1}, \dots, v_{q+m}; f_{p+1}, \dots, f_{p+r}).$$

Здесь $v_i \in V$, $f_j \in V^\star$. Тот факт, что тензорное произведение действительно представляет собой тензор указанного типа (полилинейное отображение), очевиден. Также просто проверяется, что тензорное произведение определяет билинейное отображение, то есть $(\lambda\alpha)\otimes\gamma = \lambda(\alpha\otimes\gamma)$, $(\alpha_1+\alpha_2)\otimes\gamma = \alpha_1\otimes\gamma+\alpha_2\otimes\gamma$, и т.д.

Непосредственно из определения операции тензорного произведения тензоров следует ее ассоциативность, то есть

$$(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma = \alpha\otimes(\beta\otimes\gamma).$$

Однако, тензорное произведение тензоров, вообще говоря, некоммутативно. Действительно, рассмотрим двумерное векторное пространство V. Выберем в нем базис из векторов $e_1,e_2 \in V$. Определим линейные формы α, $\beta \in \mathbf{T}^0_1(V)$ таким образом, чтобы их значения на базисных векторах были равны: $\alpha(e_1) = 1, \alpha(e_2) = \beta(e_1) = 0$, $\beta(e_2) = 1$. Выберем в векторном пространстве V пару векторов v, w так, что $v = e_1$, $w = e_2$. Тогда очевидно, что

$$(\alpha\otimes\beta)(v,w) = \alpha(v)\,\beta(w) = \alpha(e_1)\,\beta(e_2) = 1,$$

$$(\beta\otimes\alpha)(v,w) = \beta(v)\,\alpha(w) = \beta(e_1)\,\alpha(e_2) = 0.$$

4.5. **Тензорный базис и координаты тензора.** Тензоры типа (p,q) как полилинейные отображения однозначно определяются своими значениями на наборах, состоящих из q базисных векторов в V и p базисных векторов из $V^\star$. Если V — конечномерное векторное пространство, то очевидно, что при любых натуральных p и q пространство $\mathbf{T}^p_q(V)$ также будет конечномерным. Ниже, когда мы определим базис в $\mathbf{T}^p_q(V)$, то сразу поймем, какова размерность пространства $\mathbf{T}^p_q(V)$.

Интересно отметить, что множество тензоров произвольного ранга над некоторым векторным пространством V образует градуированную *тензорную алгебру* (относительно операции тензорного произведения):

$$\mathbf{T}(V) = \bigoplus_{p,q=0}^{\infty} \mathbf{T}^p_q(V).$$

Рассмотрим конечномерное векторное пространство V. Выберем в нем некоторый фиксированный базис $\{e_1,\ldots,e_n\}$; $\{h^1,\ldots,h^n\}$ — соответствующий сопряженный базис в $V^\star$. Докажем справедливость следующего утверждения.

Теорема 4.20. Набор, состоящих из n^{p+q} элементов

$$\{e_{a_1}\otimes\cdots\otimes e_{a_p}\otimes h^{b_1}\otimes\cdots\otimes h^{b_q} \;:\; 1 \leqslant a_k,b_\ell \leqslant n\}$$

является базисом в пространстве $\mathbf{T}^p_q(V)$.

Доказательство. Очевидно, что данный набор из n^{p+q} элементов определен в пространстве $\mathbf{T}^p_q(V)$. Причем, по определению

$$e_{a_1}\otimes\cdots\otimes e_{a_p}\otimes h^{b_1}\otimes\cdots\otimes h^{b_q}(f_1,\ldots,f_p;v_1,\ldots,v_q) = \\ = f_1(e_{a_1})\ldots f_p(e_{a_p})h^{b_1}(v_1)\ldots h^{b_q}(v_q),$$

в частности

$$e_{a_1}\otimes\cdots\otimes e_{a_p}\otimes h^{b_1}\otimes\cdots\otimes h^{b_q}(h^{c_1},\ldots,h^{c_p};e_{d_1},\ldots,e_{d_q}) = \delta^{c_1}_{a_1}\ldots\delta^{c_p}_{a_p}\cdot\delta^{b_1}_{d_1}\ldots\delta^{b_q}_{d_q}.$$

Докажем линейную независимость тензоров вида $e_{a_1}\otimes\cdots\otimes e_{a_p}\otimes h^{b_1}\otimes\cdots\otimes h^{b_q}$. Для этого определим полилинейное отображение

$$A := a^{a_1\ldots a_p}{}_{b_1\ldots b_q} e_{a_1}\otimes\cdots\otimes e_{a_p}\otimes h^{b_1}\otimes\cdots\otimes h^{b_q} = 0.$$

Тогда, вычисляя значение отображения A на наборе вида $(h^{c_1},\ldots,h^{c_p};e_{d_1},\ldots,e_{d_q})$, получаем $a^{c_1\ldots c_p}{}_{d_1\ldots d_q}=0$. Последнее означает, что элементы рассматриваемого набора линейно независимы. Покажем теперь, что любой тензор $\tau\in\mathbf{T}^p_q(V)$ можно единственным образом разложить по набору $e_{a_1}\otimes\cdots\otimes e_{a_p}\otimes h^{b_1}\otimes\cdots\otimes h^{b_q}$. Действительно, для любого тензора $\tau\in\mathbf{T}^p_q(V)$ можно определить набор значений $\tau^{a_1\ldots a_p}{}_{b_1\ldots b_q}$ полилинейного отображения τ на всевозможных наборах базисных векторов векторного и ковекторного пространств, то есть

$$\tau^{a_1\ldots a_p}{}_{b_1\ldots b_q}=\tau(h^{a_1},\ldots,h^{a_p};e_{b_1},\ldots,e_{b_q}).$$

Причем, поскольку всякое полилинейное отображение однозначно определяется своими значениями на наборах вида $(h^{a_1},\ldots,h^{a_p};e_{b_1},\ldots,e_{b_q})$, то величины $\tau^{a_1\ldots a_p}{}_{b_1\ldots b_q}$ однозначно определяют полилинейное отображение. Последнее означает, что если значения двух полилинейных отображений совпадают на наборах $(h^{a_1},\ldots,h^{a_p};e_{b_1},\ldots,e_{b_q})$, то и сами полилинейные отображения совпадают, то есть если

$$t=\tau^{a_1\ldots a_p}{}_{b_1\ldots b_q}e_{a_1}\otimes\cdots\otimes e_{a_p}\otimes h^{b_1}\otimes\cdots\otimes h^{b_q},$$

то $t\equiv\tau$. Значит, $e_{a_1}\otimes\cdots\otimes e_{a_p}\otimes h^{b_1}\otimes\cdots\otimes h^{b_q}$ представляет собой базис в пространстве тензоров $\mathbf{T}^p_q(V)$. □

Базис $e_{a_1}\otimes\cdots\otimes e_{a_p}\otimes h^{b_1}\otimes\cdots\otimes h^{b_q}$ в $\mathbf{T}^p_q(V)$ называется *тензорным базисом*, а компоненты $\tau^{a_1\ldots a_p}{}_{b_1\ldots b_q}$ называют *координатами* тензора $\tau\in\mathbf{T}^p_q(V)$ в данном тензорном базисе. Проиллюстрируем на конкретном примере разложение тензора по некоторому тензорному базису. Рассмотрим полилинейное отображение $\tau\in\mathbf{T}^2_2(V)$ вида

$$\tau(v,w;f,g)=\det\begin{pmatrix}f(v) & g(v)\\ f(w) & g(w)\end{pmatrix}.$$

Полилинейность τ следует из линейности определителя по строкам и столбцам. Вычисляя значение отображения τ на базисных векторах, имеем

$$\tau^{ab}{}_{cd}=\tau(e_c,e_d;h^a,h^b)=\det\begin{pmatrix}h^a(e_c) & h^b(e_c)\\ h^a(e_d) & h^b(e_d)\end{pmatrix},$$

то есть

$$\tau^{ab}{}_{cd}=\det\begin{pmatrix}\delta^a_c & \delta^b_c\\ \delta^a_d & \delta^b_d\end{pmatrix}=\delta^a_c\delta^b_d-\delta^a_d\delta^b_c,$$

откуда

$$\tau=(\delta^a_c\delta^b_d-\delta^a_d\delta^b_c)\,e_a\otimes e_b\otimes h^c\otimes h^d=e_a\otimes e_b\otimes h^a\otimes h^b-e_a\otimes e_b\otimes h^b\otimes h^a.$$

Полезно записать операцию тензорного произведения тензоров в терминах координат тензоров. Вычисляя по определению значение тензорного произведения тензоров на базисных векторах, имеем

$$\begin{aligned}(\alpha\otimes\gamma)^{a_1\ldots a_{p+r}}{}_{b_1\ldots b_{q+m}}&=(\alpha\otimes\gamma)(e_{b_1},\ldots,e_{b_{q+m}};h^{a_1},\ldots,h^{a_{p+r}})=\\&=\alpha(e_{b_1},\ldots,e_{b_q};h^{a_1},\ldots,h^{a_p})\cdot\gamma(e_{b_{q+1}},\ldots,e_{b_{q+m}};h^{a_{p+1}},\ldots,h^{a_{p+r}}),\end{aligned}$$

откуда

$$(\alpha\otimes\gamma)^{a_1\ldots a_{p+r}}{}_{b_1\ldots b_{q+m}}=\alpha^{a_1\ldots a_p}{}_{b_1\ldots b_q}\cdot\gamma^{a_{p+1}\ldots a_{p+q}}{}_{b_{q+1}\ldots b_{q+m}}.$$

Задача 4.21. Для тензора $\tau=(3h^x+h^y)\otimes(h^y-2h^z)\otimes h^y$ на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ найти его компоненты τ_{xyy}, τ_{xyz} и τ_{yzy}.

Посмотрим теперь, как преобразуются координаты тензора при замене базиса в некотором конечномерном векторном пространстве V.

Лемма 4.22. Пусть наборы $\{e_1,\dots,e_n\}$ и $\{e'_1,\dots,e'_n\}$ — некоторые базисы в векторном пространстве V, а наборы $\{h^1,\dots,h^n\}$ и $\{h'^1,\dots,h'^n\}$ — соответствующие базисы в ковекторном пространстве $V^\star$. Тогда, если Λ^{-1} — матрица перехода от базиса $\{e_1,\dots,e_n\}$ к базису $\{e'_1,\dots,e'_n\}$, то матрица Λ является матрицей перехода от базиса $\{h^1,\dots,h^n\}$ к базису $\{h'^1,\dots,h'^n\}$.

Доказательство. Заметим, что лемма сформулирована корректно, так как каждому базису в V отвечает единственный сопряженный базис в $V^\star$. Поскольку Λ^{-1} является матрицей перехода от нештрихованного базиса к штрихованному, то

$$e'_a = (\Lambda^{-1})^b_a e_b.$$

Пусть $h'^a = A^a_b h^b$, где A — некоторая квадратная матрица порядка n. Тогда

$$h'^a(e'_b) = \delta^a_b = A^a_c h^c\,(e_d)\,(\Lambda^{-1})^d_b = A^a_c\delta^c_d(\Lambda^{-1})^d_b = A^a_c(\Lambda^{-1})^c_b = (A\Lambda^{-1})^a_b.$$

Из последнего выражения получаем $A\Lambda^{-1} = 1$, $A = \Lambda$. □

Теорема 4.23. Пусть $\tau \in \mathbf{T}^p_q(V)$. Тогда координаты тензора τ при замене базиса в V преобразуются по формуле

$$\tau'^{a_1\dots a_p}{}_{b_1\dots b_q} = \Lambda^{a_1}_{c_1}\dots\Lambda^{a_p}_{c_p}(\Lambda^{-1})^{d_1}_{b_1}\dots(\Lambda^{-1})^{d_q}_{b_q}\,\tau^{c_1\dots c_p}{}_{d_1\dots d_q}$$

то есть, неформально говоря, при замене базисов верхние индексы преобразуются матрицами Λ, а нижние индексы — матрицами Λ^{-1}.

Доказательство. Очевидно из предыдущей леммы и определения координат тензора в тензорном базисе. □

Как уже упоминалось ранее, в теоретической физике зачастую формулу преобразования координат тензора берут за определение тензора, то есть тензором типа (p,q) часто называют отображение τ, ставящее в соответствие каждому базису в пространстве V набор из n^{p+q} компонент $\tau^{a_1\dots a_p}{}_{b_1\dots b_q}$ таким образом, что эти наборы, отвечающие разным базисам, связаны формулой

$$\tau'^{a_1\dots a_p}{}_{b_1\dots b_q} = \Lambda^{a_1}_{c_1}\dots\Lambda^{a_p}_{c_p}(\Lambda^{-1})^{d_1}_{b_1}\dots(\Lambda^{-1})^{d_q}_{b_q}\,\tau^{c_1\dots c_p}{}_{d_1\dots d_q}$$

Эквивалентность двух данных в этом параграфе определений тензора очевидна. Поэтому далее мы часто тензорами будем называть их координаты в некотором тензорном базисе.

Тензор типа (p,q) называется *инвариантным*, если он имеет одинаковые координаты во всех тензорных базисах в пространстве $\mathbf{T}^p_q(V)$.

Задача 4.24. Доказать, что символ Кронекера является инваринатным смешанным тензором второго ранга.

Опишем все инвариантные тензоры второго ранга. Для начала заметим, что если ненулевой тензор $\tau \in \mathbf{T}^p_q(V)$ инвариантен, то $p = q$. Действительно, рассмотрим замену базиса вида $e'_a = \lambda e_a$. Тогда из формулы замены координат тензора следует

$$\tau'^{a_1\dots a_p}{}_{b_1\dots b_q} = \lambda^{q-p}\,\tau^{a_1\dots a_p}{}_{b_1\dots b_q}.$$

Таким образом, достаточно рассмотреть тензоры типа (1,1). В силу существования изоморфизма $\mathcal{L}(V) \cong \mathbf{T}^1_1(V)$, инвариантные тензоры типа (1,1) отвечают линейным операторам, которые имеют одинаковые матрицы во всех базисах, то есть матрицы A, такие что $\Lambda A = A\Lambda$ для любой обратимой матрицы Λ. Легко видеть, что тогда

$A = \lambda \cdot 1$, то есть инвариатные тензоры типа (1,1) — это операторы $\lambda\,\mathrm{id}_V$, кратные тождественному. Значит, инвариантный тензор $\tau \in \mathbf{T}^1_1(V)$ имеет координаты $\lambda\,\delta^a_b$.

Нетрудно показать, что инвариантные тензоры четвертого ранга образуют двухпараметрическое семейство $\tau^{ab}{}_{cd} = \lambda\,\delta^a_c\delta^b_d + \mu\,\delta^a_d\delta^b_c$. Оставляем это утверждение читателю в качестве упраженения.

Тензор называется *изотропным*, если он инвариантен относительно ортогональных преобразований векторного пространства V, то есть имеет одинаковые координаты во всех тензорных базисах, получающихся друг из друга ортогональным преобразованием векторного пространства V. Ясно, что всякий инвариантный тензор изотропен, но, вообще говоря, не наоборот.

Задача 4.25. Найти все изотропные тензоры типа (0,2) на пространстве $\mathbb{R}^n$.

4.6. **Операция свертки.** Определим теперь вторую важную операцию над тензорами, а именно, операцию *свертки*. Под сверткой тензоров типа (p,q) понимают отображение

$$\mathbf{T}^p_q(V) \to \mathbf{T}^{p-1}_{q-1}(V)$$

специального вида. Свертку тензоров удобнее всего определять в терминах координат тензора в некотором тензорном базисе пространства $\mathbf{T}^p_q(V)$.

Пусть тензор $\tau \in \mathbf{T}^p_q(V)$ в некотором тензорном базисе $e_{a_1} \otimes \dots \otimes e_{a_p} \otimes h^{b_1} \otimes \dots \otimes h^{b_q}$ имеет координаты $\tau^{a_1\dots a_p}{}_{b_1\dots b_q}$. Тогда сверткой $\mathrm{tr}^{a_k}_{b_\ell}\tau$ тензора τ по индексам a_k, b_ℓ называют тензор $\mathrm{tr}^{a_k}_{b_\ell}\tau \in \mathbf{T}^{p-1}_{q-1}(V)$ с координатами

$$\mathrm{tr}^{a_k}_{b_\ell}\tau = \tau^{a_1\dots a_{k-1}ca_{k+1}\dots a_p}{}_{b_1\dots b_{\ell-1}cb_{\ell+1}\dots b_q}$$

в базисе $e_{a_1} \otimes \dots \otimes e_{a_{k-1}} \otimes e_{a_{k+1}} \otimes \dots \otimes e_{a_p} \otimes h^{b_1} \otimes \dots \otimes h^{b_{\ell-1}} \otimes h^{b_{\ell+1}} \otimes \dots \otimes h^{b_q}$.

Таким образом введенная операция свертки нуждается в проверке на корректность ее определения. Необходимо проверить, что данное определение свертки не зависит от выбора тензорного базиса в пространстве $\mathbf{T}^p_q(V)$. Мы сделаем это для случая $p = q = 1$. Для общего случая корректность определения свертки проверяется аналогично.

В случае $p = q = 1$ свертка, очевидно, представляет собой линейный функционал на $\mathbf{T}^1_1(V)$. Выберем некоторый базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ в векторном пространстве V. Ему соответствует сопряженный базис $\{h^1, \dots, h^n\}$ в ковекторном пространстве $V^\star$. Пусть набор $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ — другой базис в V, а матрица Λ^{-1} является матрицей перехода от нештрихованного базиса к штрихованному. Тогда для некоторого тензора $\tau \in \mathbf{T}^1_1(V)$ имеем

$$\mathrm{tr}^a_b\tau' = \tau'^a{}_a = \Lambda^a_b(\Lambda^{-1})^c_a\,\tau^b{}_c = \delta^c_b\tau^b{}_c = \tau^c{}_c.$$

Легко видеть, что при отождествлении тензоров типа (1,1) с линейными операторами свертка отождествляется со следом. В частности, только что доказанная корректность определения свертки равносильна инвариантности следа матрицы линейного оператора.

Теорема 4.26. На разложимых тензорах $f \otimes v$, где $v \in V, f \in V^\star$, свертка совпадает с отображением

$$f \otimes v \mapsto f(v).$$

Доказательство. Если $f = 0$, то все очевидно. Иначе пусть $\ker f \subset V$. Выберем базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ в V такой, что $\{e_2, \dots, e_n\}$ — базис в ядре $\ker f$. Тогда

$$f_a v^a = f(e_a)h^a(v) = f(e_1)v^1 = f(v).$$

Так как свертка и значение функции $f(v)$ не зависят от выбора базиса, то теорема доказана. $\square$

Если после свертки у тензора остался хотя бы один верхний и хотя бы один нижний индексы, то можно выбрать пару таких индексов и совершить свертку по ним. Если после таких сверток остались только одни верхние или только одни нижние индексы, то свертка называется *полной*. В частности, полной сверткой тензора типа (p,p) является скаляр.

Операция свертки тензоров является особенно полезной в случае евклидовых пространств или, в более общем случае, римановых многообразий, наделенных полуримановой структурой, служащей для поднятия и опускания индексов.

Задача 4.27. Найти полные свертки тензора $\tau^{ab}_{cd} = \delta^a_c\delta^b_d - \delta^b_c\delta^a_d$ при условии $\dim V = n$. Сколько полных сверток существует у данного тензора?

Задача 4.28. Докажите, что полная свертка тензорного произведения симметричного тензора τ_{ab}, $(\tau_{ab} = \tau_{ba})$ на антисимметричный s^{cd}, $(s^{cd} = -s^{dc})$ тождественно равна нулю, то есть $\tau_{ab}\, s^{ab} = 0$.

4.7. **Тензорное произведение векторных пространств.** В заключение раздела рассмотрим еще один нетривиальный способ определить тензоры. Для этого необходимо выяснить, что такое тензорное произведение векторных пространств над одним и тем же полем $\mathbb{R}(\mathbb{C})$.

Тензорным произведением векторных пространств V и W называется билинейное отображение векторных пространств $F : V \times W \to U$, обладающее следующим свойством: для любого билинейного отображения $F' : V \times W \to U'$, существует единственное линейное отображение векторных пространств $G : U \to U'$, такое что $F' = G \circ F$. Билинейные и линейные отображения в определении тензорного произведения удобно изобразить диаграммой:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "G"] & U' \\ V \times W \arrow[u, "F"] \arrow[r, equal] & V \times W \arrow[u, "F'"'] \end{tikzcd}$$

Данное определение тензорного произведения, очевидно, требует еще доказательства его существования. Но мы для начала поймем, что тензорное произведение в определенном смысле единственное. Применим определение к $F' = F$, тогда $F = G \circ F$. Очевидно, что в качестве G в этом равенстве можно взять id_U, а так как по определению G должно быть единственным, то $G = \mathrm{id}_U$.

Далее, пусть есть еще одно тензорное произведение $F' : V \times W \to U'$. Тогда по определению тензорного произведения F получаем $G : U \to U'$, а по определению тензорного произведения F' находим $G' : U' \to U$. По их свойствам получается

$$F' = G \circ F, \quad F = G' \circ F' \;\Rightarrow\; F = G' \circ G \circ F, \quad F' = G \circ G' \circ F'.$$

Из предыдущего установленного факта и этих тождеств мы находим, что

$$G \circ G' = \mathrm{id}_{U'}, \quad G' \circ G = \mathrm{id}_U.$$

То есть между двумя тензорными произведениями установлен изоморфизм, совместимый с их отображениями F и F'. В этом смысле любые два тензорных произведения V и W изоморфны. Выбирая какой-то элемент из класса изоморфных тензорных произведений, мы обозначаем его

$$V \times W \to V \otimes W, \quad (v,w) \mapsto v \otimes w.$$

Причем менее формально мы будем называть *тензорным произведением* не только это отображение, но и его образ $V \otimes W$.

Теорема 4.29. Тензорное произведение векторных пространств V и W над одним и тем же полем существует.

Доказательство. Определим векторное пространство $\tilde{U}$ как пространство конечных линейных комбинаций формальных выражений $\tilde{F}(v, w)$, $\forall\,(v,w) \in V \times W$, а также определим подпространство $M \subseteq \tilde{U}$ как подпространство, порожденное линейными комбинациями

$$\tilde{F}(\lambda v + \mu v', w) - \lambda \tilde{F}(v, w) - \mu \tilde{F}(v', w),$$

$$\tilde{F}(v, \lambda w + \mu w') - \lambda \tilde{F}(v, w) - \mu \tilde{F}(v, w'),$$

для всевозможных $v,v' \in V$, $w,w' \in W$ и скаляров λ,μ. Обозначим $U = \tilde{U}/M$. Отображение $\tilde{F} : V \times W \to \tilde{U}$, определенное по формуле

$$\tilde{F}(v,w) = v \otimes w,$$

в композиции с проекцией $P : \tilde{U} \to U$ дает уже билинейное отображение $F = P \circ \tilde{F}$. Его билинейность следует из вида определяющих M элементов.

Покажем, что $F : V \times W \to U$ обладает свойствами тензорного произведения. Если есть билинейное отображение $F' : V \times W \to U'$, то определим линейное отображение

$$\tilde{G} : \tilde{U} \to U', \quad \tilde{G}(\tilde{F}(v,w)) = F'(v,w).$$

Из билинейности F' следует, что $\tilde{G}(M) = 0$, а значит, отображение $\tilde{G}$ представляется как $G \circ P$ для линейного отображения $G : U \to U'$. По определению $\tilde{G}$ выполняется

$$\tilde{G} \circ \tilde{F} = F' \;\Rightarrow\; G \circ P \circ \tilde{F} = F' \;\Rightarrow\; G \circ F = F'.$$

Такое G единственно, так как $\tilde{G} = G \circ P$ обязано быть определенным на базисных элементах $\tilde{U}$ именно таким способом для выполнения равенства $G \circ F = F'$. $\square$

Начиная с трилинейных (или полилинейных) отображений векторных пространств $V \times W \times T \to U$ вместо билинейных, можно аналогично определить *тройное тензорное произведение* как трилинейное (или полилинейное) отображение

$$V \times W \times T \to V \otimes W \otimes T$$

с соответствующим свойством относительно построения линейного отображения в любое другое трилинейное (или полилинейное) отображение $V \times W \times T \to U'$. После этого можно показать, что имеются канонические изоморфизмы между этим тройным произведением и $(V \otimes W) \otimes T$, а также $V \otimes (W \otimes T)$, что позволит говорить об ассоциативности тензорного произведения векторных пространств. Действительно, всякое билинейное отображение $F' : (V \otimes W) \times T \to U'$ порождает трилинейное отображение

$$H' : V \times W \times T \to U', \quad H'(v,w,t) = F'(v \otimes w, t),$$

которое представляется в виде $H' = G \circ H$, где $G : V \otimes W \otimes T \to U'$ — некоторое линейное отображение. Следовательно, отображение тензорного произведения

$$F : (V \otimes W) \times T \to V \otimes W \otimes T$$

удовлетворяет тому свойству, которому должно удовлетворять тензорное произведение $(V \otimes W) \otimes T$ по определению.

Заметим, что если есть два линейных отображения векторных пространств $f : V \to V'$ и $g : W \to W'$, то возникает их тензорное произведение

$$f \otimes g : V \otimes W \to V' \otimes W',$$

порождаемое билинейным отображением $V \times W \to V' \otimes W'$, $(v,w) \mapsto f(v) \otimes g(w)$.

Полезно проверить, что для произвольных линейных отображений векторных пространств $f : V \to V'$, $f' : V' \to V''$, $g : W \to W'$, $g' : W' \to W''$ выполняется тождество вида

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g).$$

Для этого запишем действие левой и правой части равенства на $v \otimes w$:

$$((f' \circ f) \otimes (g' \circ g))(v \otimes w) = ((f' \circ f)(v)) \otimes ((g' \circ g)(w)) =$$
$$= (f' \otimes g')((f \otimes g)(v \otimes w)) = ((f' \otimes g') \circ (f \otimes g))(v \otimes w).$$

Приведенная выше конструкция тензорного произведения достаточно абстрактна. Дадим ей более конкретное описание.

Теорема 4.30. Пусть S и T — не обязательно конечные базисы в векторных пространствах V и W. Тогда множество $\{s \otimes t \mid s \in S,\ t \in T\}$ образует базис в $V \otimes W$.

Доказательство. По нашей конструкции $V \otimes W$, тензорное произведение порождено векторами $v \otimes w$, где $v \in V$, $w \in W$. Взяв разложения по базису

$$v = \sum_{s \in S} v_s s, \quad w = \sum_{t \in T} w_t t,$$

мы из билинейности тензорного произведения получим представление

$$v \otimes w = \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} v_s w_t \, s \otimes t.$$

Значит, пространство $V \otimes W$ порождено векторами $s \otimes t$.

Проверим отсутствие линейных зависимостей. Зафиксируем какие-то $s \in S$ и $t \in T$. Отображения коэффициента разложения по базису, $v \mapsto v_s$ и $w \mapsto w_t$ обозначим как

$$\lambda : V \to \mathbb{R}(\mathbb{C}), \quad \mu : W \to \mathbb{R}(\mathbb{C}).$$

Они порождают билинейное отображение $(v,w) \mapsto \lambda(v)\mu(w)$, а значит и отображение

$$\lambda \otimes \mu : V \otimes W \to \mathbb{R}(\mathbb{C}).$$

Последнее обладает тем свойством, что

$$(\lambda \otimes \mu)(s,t) = \lambda(s)\mu(t) = 1,$$

но при $(s',t') \neq (s,t)$ оказывается $(\lambda \otimes \mu)(s',t') = \lambda(s')\mu(t') = 0$. Это означает, что элемент $s \otimes t$ нашей системы не выражается линейно через другие элементы системы, то есть система действительно является базисом. $\square$

Теперь совсем нетрудно показать, что операция тензорного произведения векторных пространств в определенном смысле коммутативна. А именно, для любых векторных проистранств V и W имеет место изоморфизм $V \otimes W \cong W \otimes V$, при котором $v \otimes w$ переходит в $w \otimes v$. В самом деле, искомый изоморфизм определяется условием, что базисные векторы $e_a^V \otimes e_b^W$ пространства $V \otimes W$ переходят в соответствующие базисные векторы $e_b^W \otimes e_a^V$ векторного пространства $W \otimes V$.

Задача 4.31. Пусть линейные операторы $f,g : V \to V$ в базисе $\{e_1,e_2\}$ пространства V заданы матрицами

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_g = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу оператора $f \otimes g : V \otimes V \to V \otimes V$ в базисе $\{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}$.

Из последней теоремы очевидно, что тензорное произведение конечномерных векторных пространств

$$\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^\star \otimes \cdots \otimes V^\star}_{q}$$

порождено базисными векторами $e_{a_1} \otimes \cdots \otimes e_{a_p} \otimes h^{b_1} \otimes \cdots \otimes h^{b_q}$, где набор векторов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в пространстве V, а $\{h^1, \ldots, h^n\}$ — соответствующий ему сопряженный базис в $V^\star$. Теми же базисными векторами, как известно, порождается пространство тензоров $\mathbf{T}^p_q(V)$. Отсюда заключаем, что

$$\mathbf{T}^p_q(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^\star \otimes \cdots \otimes V^\star}_{q}.$$

В связи с вышесказанным в линейной алгебре обычно дают следующее определение тензора. Тензором типа $(p{,}q)$ на векторном пространстве V называется элемент тензорного произведения p векторных пространств V и q ковекторных пространств $V^\star$. Ясно, что все рассмотренные в данной теме определения тензоров эквивалентны.

5. Дифференциальные формы

Мы только что завершили абстрактный разговор о тензорах. Теперь нам предстоит поговорить о *тензорных полях* (в особенности, о *дифференциальных формах*) на *многообразиях*, в частности, на евклидовом пространстве или на его открытых подмножествах.

5.1. **Криволинейные координаты и гладкие функции.**

Смысл математического аппарата общей теории относительности — дифференциальной геометрии, заключается в изучении объектов, определенных на открытых подмножествах $U \subseteq \mathbb{R}^n$ евклидова пространства (или, в более общем случае, на гладких многообразиях) инвариантно относительно *криволинейных замен координат*, то есть таких бесконечно гладких отображений $\varphi : U \to V$, что обратное φ^{-1} определено и тоже бесконечно гладкое. Такие отображения в математике называют *диффеоморфизмами открытых подмножеств* $\mathbb{R}^n$.

На практике обычно не требуется бесконечная дифференцируемость, а требуется только конечное число производных координатных функций отображения, которое можно определить в каждом конкретном случае; когда мы будем говорить о бесконечной гладкости, мы будем называть ее просто гладкость.

Задача 5.1. Доказать, что открытый круг $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ на плоскости диффеоморфен всей плоскости.

Имеет смысл вспомнить, что *гладким n-мерным многообразием* M называется *хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой*, покрытое открытыми *картами* U_a так, что для каждой карты задано отображение $\varphi_a : U_a \to \mathbb{R}^n$, являющееся гомеоморфизмом на открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, и для пары таких отображений φ_a и φ_b композиция $\varphi_a \circ \varphi_b^{-1}$ является диффеоморфизмом на своей естественной области определения.

Гладкое n-мерное многообразие с краем M отличается тем, что некоторые из карт являются не такими, как описано выше, а являются гомеоморфизмами на относительно открытое подмножество $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$, в котором точки из $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ образуют *край*, а замены координат $\varphi_a \circ \varphi_b^{-1}$ переводят край в край. Отображения $\varphi_a : U_a \to \mathbb{R}^n$ называются *координатными картами*, а их совокупность — *атласом* многообразия M.

Напомним, что *топологией* на множестве X называется система τ его подмножеств T_a, удовлетворяющая трем аксиомам:

- Множество X и пустое множество $\varnothing$ принадлежат τ.
- Пересечение $\cap_{a\in A} T_a$ конечного числа множеств принадлежит τ.
- Объединение $\cup_{a\in A} T_a$ произвольного числа множеств принадлежит τ.

Множество X с заданной на нем топологией τ называется *топологическим пространством* и обозначается как пара (X,τ). Множества, принадлежащие системе τ называются *открытыми*. Таким образом, определение системы открытых множеств в X задает на нем структуру топологического пространства.

Когда мы говорим «гладкое многообразие», мы имеем в виду не только M как топологическое пространство, но и идущий в комплекте с ним атлас из координатных карт, покрывающих M и имеющих гладкие функции перехода между картами в обе стороны. Отделимость или хаусдорфовость топологического пространства в определении многообразия — это существование у всяких двух точек непересекающихся открытых окрестностей. Счетность базы топологии означает наличие счетной системы (базы) открытых подмножеств M, так что всякое открытое множество в M

можно представить в виде объединения некоторого количества открытых множеств базы. Важно подчеркнуть, что требование хаусдорфовости в определении многообразия существенно, поскольку существует теорема, согласно которой любая сходящаяся последовательность в хаусдорфовом пространстве имеет не более одного предела. Предположение о счетности базы также существенно, потому что это требование обеспечивает *паракомпактность* многообразия, которая в рассматриваемом случае достаточна для существования *разбиения единицы*. В свою очередь, существование разбиения единицы важно, т.к. позволяет определять геометрические объекты на всем многообразии, исходя из их задания в локальных координатах.

Абстрактное определение многообразия требует некоторого понимания топологии, и для понимания дальнейшего в основном достаточно представлять многообразие *вложенным* в евклидово пространство, то есть таким замкнутым подмножеством $M \subseteq \mathbb{R}^N$, что для каждой $p \in M$ найдется окрестность и криволинейная система координат в ней, в которой включение $M \subseteq \mathbb{R}^N$ превращается либо в стандартное вложение $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^N$, пересеченное с окрестностью нуля, либо превращается в стандартное вложение $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^N$, пересеченное с окрестностью нуля.

Задача 5.2. Проверьте, что край ∂M многообразия с краем M, $\dim M = n$, сам по себе является $(n-1)$-мерным многообразием без края.

Задача 5.3. Постройте счетную базу топологии в $\mathbb{R}^n$.

Задача 5.4. Постройте какой-нибудь координатный атлас на стандартной двумерной сфере

$$\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Задача 5.5. Рассмотрите на отрезке $[-1,1]$ две карты $\varphi_1(x) = x$ и $\varphi_2(x) = x^3$. Проверьте, что они не могут одновременно состоять в атласе одного и того же гладкого многообразия.

В первой части конспекта мы уже смотрели на частные случаи криволинейных систем координат на $\mathbb{R}^3$. Теперь, с учетом вышесказанного, можно абстрактно определить *криволинейную систему координат* в окрестности точки $p \in \mathbb{R}^n$ как набор таких функций, которые являются координатами гладкого отображения окрестности точки p на некоторое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ с гладким обратным отображением.

По известной *теореме об обратном отображении* для того, чтобы бесконечно дифференцируемые функции $y^1, \ldots, y^n$ в некоторой окрестности точки p давали криволинейную систему координат, достаточно проверить невырожденность *матрицы Якоби* (матрицы замены): $\Lambda^a_b(p) = \partial y^a / \partial x^b|_p$. Также важно иметь в виду, что неполный набор функций с линейно независимыми в данной точке дифференциалами можно дополнить до криволинейной системы координат.

Задача 5.6. Докажите, что любое гладкое отображение $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, у которого якобиан ни в одной точке не равен нулю, переводит открытые множества в открытые.

Задача 5.7. Отображение метрического пространства в себя $f : M \to M$ называется *сжимающим*, если оно *липшицево* с меньшей единицы константой, то есть если существует константа $0 < c < 1$, такая что

$$\varrho(f(x), f(y)) \leqslant c\varrho(x, y), \quad \forall x,y \in M.$$

Докажите, что любое сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет единственную неподвижную точку: $x = f(x)$.

Нашей ближайшей целью будет определить объекты и операции, с которыми можно одинаково легко работать в любой криволинейной системе координат. Первые объекты, с которым можно корректно работать в любой системе координат — это гладкие функции на $U \subseteq \mathbb{R}^n$, то есть $f : U \to \mathbb{R}$, их множество обозначим $C^\infty(U)$. Для функции f в координатах $(x'^1, \dots, x'^n)$ переход к координатам $(x^1, \dots, x^n)$ заключается в подстановке, то есть композиции $f' = f(\varphi(x))$, если замена координат имела вид $x'^a = \varphi^a(x^b)$.

Заметим, что на множестве гладких функций $C^\infty(U)$ естественным образом определены две поточечные операции, а именно, сложение и умножение:

$$(f + g)(p) := f(p) + g(p), \quad (fg)(p) := f(p)g(p), \quad \forall p \in U.$$

То есть значения суммы и произведения двух гладких функций в данной точке равно, соответственно, сумме и произведению значений этих функций в той же точке. Очевидно, что сумма и произведение двух гладких функций снова дает гладкую функцию. По отношению к этим операциям функции образуют *коммутативное кольцо*. Кроме этого функции можно умножать на действительные числа. Умножение на числа вместе с операцией сложения превращает множество гладких функций в векторное пространство над полем вещественных чисел. Если на множестве функций рассматривать все три операции (умножение на числа, сложение и умножение функций), то оно образует *коммутативную ассоциативную алгебру* с единицей над полем вещественных чисел, которую так же будем обозначать $C^\infty(U)$. Эта алгебра является бесконечномерной.

Задача 5.8. Докажите, что любую гладкую функцию, у которой первый дифференциал в нуле равен нулю, а второй дифференциал невырожден (то есть матрица вторых производных $\partial^2 f/\partial x^a \partial x^b$ невырождена), можно криволинейной заменой координат привести к виду

$$f(x) = f(0) + \sum_{a=1}^{n} \varepsilon_a x_a^2$$

в некоторой окрестности нуля, где $\varepsilon_a \in \{-1{,}1\}$. Данное утверждение в геометрии называют *леммой Морса*.

5.2. **Касательные векторные поля.** Зная, как ведут себя гладкие функции при криволинейных заменах координат, мы можем теперь определить другие объекты дифференциальной геометрии в терминах гладких функций. Начнем с векторных полей. Для любого вектора $X \in \mathbb{R}^n$ можно определить производную от функции по направлению вектора как

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(p + \varepsilon X) - f(p)}{\varepsilon}$$

и проверить ее линейность по f и формулу Лейбница для производной произведения

$$\frac{\partial (fg)}{\partial X} = \frac{\partial f}{\partial X} g + f \frac{\partial g}{\partial X}.$$

Найдем выражение для производной по направлению вектора $X = X^a e_a$ в координатах:

$$X(f) := \frac{\partial f}{\partial X} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(p + \varepsilon X^a e_a) - f(p)}{\varepsilon},$$

$$X(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(p) + \varepsilon X^a \frac{\partial f}{\partial x^a} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) - f(p)}{\varepsilon} = X^a \frac{\partial f}{\partial x^a}.$$

Таким образом, каждому вектору $X \in \mathbb{R}^n$ однозначно сопоставляется $\mathbb{R}$-линейный оператор $X = \frac{\partial}{\partial X}$ на гладких функциях, который мы и будем называть *касательным вектором* в точке $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Касательное пространство к U в точке p состоит из всех касательных векторов в точке p и обозначается T_pU. *Векторным полем* на $U \subseteq \mathbb{R}^n$ называется выбор касательного вектора $X(p) \in T_pU$ для каждой точки $p \in U$, гладко зависящего от точки. Гладкая зависимость понимается в смысле гладкой зависимости координат векторного поля $X^a(p)$ от точки $p \in U$.

Рассмотрим теперь объединение всех касательных пространств к пространству U в разных точках

$$TU = \bigcup_{p \in U} T_pU.$$

Оно называется *касательным расслоением* с *базой расслоения* U. Элемент пространства TU — это вектор X, касающийся U в какой-нибудь точке $p \in U$. Координаты на TU строятся следующим образом. Пусть x^a — локальные координаты на U, X^a — компоненты касательного вектора в этой системе координат. Тогда $2n$ чисел (x^a, X^b) задают на расслоении TU систему координат. Таким образом, касательное расслоение TU имеет размерность, вдвое большую размерности U.

Отображение $\pi : TU \to U$, сопоставляющее каждому касательному вектору X ту точку $p \in U$, в которой вектор $X \in T_pU$ касается U, называется *естественной проекцией*. Прообраз точки $p \in M$ при естественной проекции, $\pi^{-1}(p)$, есть касательное пространство T_pU. Это пространство называется *слоем расслоения* над точкой $p \in U$.

При помощи введенных выше понятий можно переформулировать определение векторного поля следующим образом. Векторным полем $X(p)$ на U называется *сечение касательного расслоения* TU, т.е. гладкое отображение

$$X : p \mapsto X(p), \quad p \in U, \quad X(p) \in TU \, : \, \pi(X(p)) = p.$$

Множество всех гладких векторных полей на многообразии U (или проще, на открытом подмножестве $U \subseteq \mathbb{R}^n$) обозначают через $\mathrm{Vect}(U)$. Это множество, так же как и множество всех векторов в фиксированной точке T_pU, обладает структурой вещественного векторного пространства с поточечным определением сложения и умножения на числа. Более того, вместо умножения на числа можно рассматривать умножение на гладкие функции $f \in C^\infty(U)$. Легко проверить, что если $X(p)$ — векторное поле, то $fX(p)$ также является векторным полем. Таким образом, множество векторных полей $\mathrm{Vect}(U)$ является *модулем* над алгеброй гладких функций $C^\infty(U)$. Как векторное пространство множество векторных полей является бесконечномерным.

Задача 5.9. Найти выражение для векторного поля X на плоскости $\mathbb{R}^2$ в полярных координатах, если

$$X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, \quad X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Задача 5.10. Покажите, что произвольное векторное поле $X \in \mathrm{Vect}(U)$ представляет собой дифференцирование в алгебре гладких функций $C^\infty(U)$, то есть непрерывный линейный *эндоморфизм* в алгебре $C^\infty(U)$, удовлетворяющий правилу Лейбница.

Интересно посмотреть на то, как изменяются координаты векторного поля $X^a(x)$ при криволинейных заменах координат. Вектор X, определенный нами как дифференцирование по направлению, сам по себе, не зависит от выбора криволинейной системы координат. Поэтому, с одной стороны касательный вектор

$$X = X^b(x)\,\frac{\partial}{\partial x^b},$$

а с другой стороны, в новых координатах вектор

$$X = X'^a(x')\,\frac{\partial}{\partial x'^a}.$$

Выражая старые базисные векторы через новые посредством матрицы замены, получаем

$$X'^a(x')\,\frac{\partial}{\partial x'^a} = X^b(x)\,\frac{\partial}{\partial x^b} = X^b(x)\,\frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\frac{\partial}{\partial x'^a}.$$

Отсюда

$$X'^a(x') = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\,X^b(x) = \Lambda^a_{\ b}\,X^b(x).$$

Рассмотрим на примере вращений в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ преобразование компонент векторного поля. Вращения на угол $\boldsymbol{\phi}$ относительно некоторой оси в $\mathbb{R}^3$ задаются матрицей $\Lambda(\boldsymbol{\phi})$, то есть $x'^a = \Lambda^a_{\ b}\,x^b$. Та же Λ-матрица преобразует компоненты векторного поля при вращениях. Найдем вариацию формы $\delta X^a = X'^a(\boldsymbol{r}) - X^a(\boldsymbol{r})$ при инфинитезимальных поворотах ($\boldsymbol{\phi} \to 0$). В этом случае Λ-матрицу можно представить в виде

$$\Lambda(\boldsymbol{\phi}) = 1 - \mathrm{i}\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\phi} + \mathcal{O}(\boldsymbol{\phi}^2), \quad \boldsymbol{\phi} \to 0,$$

где

$$\boldsymbol{s}^a = \mathrm{i}\cdot\lim_{\phi\to 0}\frac{\partial\Lambda(\boldsymbol{\phi})}{\partial\phi_a}$$

называют *генераторами вращений*. Произведем в формуле преобразования компонент векторного поля формальную замену $\boldsymbol{r}' \mapsto \boldsymbol{r}$. Тогда

$$X'^a(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial x^a}{\partial x'^b}\,X^b(\boldsymbol{r}') \approx [\delta^a_b + \mathrm{i}(\boldsymbol{s}^c)^a_{\ b}\,\phi_c][X^b(\boldsymbol{r}) + \partial_d X^b\,\delta x^d],$$

где приращение $\delta x^a = (\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{r})^a$. Последнее равенство можно формально записать через полностью антисимметричный *тензор Леви-Чивита* следующим образом: $\delta x_a = \varepsilon_{abc}\,\phi^b x^c$, то есть δx^a пропорционально углам ϕ_b. Определим оператор *орбитальных вращений*

$$(\hat{\boldsymbol{\ell}}_c)^a_{\ b} = -\mathrm{i}\delta^a_b\,\varepsilon_{cde}\,x^d\frac{\partial}{\partial x^e}.$$

С учетом данного определения, выражение для вариации формы векторного поля принимает вид

$$X'^a(\boldsymbol{r}) = X^a(\boldsymbol{r}) + \mathrm{i}(\hat{\boldsymbol{\ell}}^c + \boldsymbol{s}^c)^a_{\ b}\,\phi_c X^b(\boldsymbol{r}), \quad \delta X^a = \mathrm{i}(\hat{\boldsymbol{j}}^c)^a_{\ b}\,\phi_c X^b(\boldsymbol{r}),$$

где

$$\hat{\boldsymbol{j}} = \hat{\boldsymbol{\ell}}\otimes 1 + 1\otimes\boldsymbol{s}.$$

В операторе $\hat{\boldsymbol{\ell}}\otimes 1$ первый множитель в тензорном произведении действует на функциях от координат, а второй — в пространстве векторного представления; в операторе $1\otimes\boldsymbol{s}$ первый множитель действует как тождественное преобразование на функции от координат, а второй — матрица в пространстве векторного представления. Неформально говоря, полный генератор $\hat{\boldsymbol{j}}$ представляет собой сумму дифференциального оператора орбитальных вращений $\hat{\boldsymbol{\ell}}$ и матрицы *спина* векторного поля $\boldsymbol{s}$.

5.3. **Дифференциальные формы.** Мы только что изучили векторные поля. Теперь уместно определить дифференциальные формы. Дифференциальная форма первой степени (или 1-форма, или *форма Пфаффа*) в точке $p \in U$ — это просто элемент двойственного (или, как его называют, *кокасательного*) пространства $(T_pU)^\star$, которое обычно обозначают через $T_p^\star U$. Следующее упражнение дает более прямое (но и более абстрактное) описание кокасательного пространства $T_p^\star U$.

Задача 5.11. Обозначим $\mathfrak{m}_p(U)$ гладкие функции на U, которые обращаются в нуль в точке p. Обозначим $\mathfrak{m}_p^2(U)$ те гладкие функции, которые представляются в виде $f_1g_1 + f_2g_2 + ... + f_kg_k$, $\forall i : f_i,g_i \in \mathfrak{m}_p(U)$. Установите изоморфизм

$$T_p^\star U \cong \mathfrak{m}_p(U)/\mathfrak{m}_p^2(U).$$

Как и в случае векторных полей, от формы первой степени в некоторой точке $p \in U$ можно перейти к 1-форме, определенной в каждой точке и гладко зависящей от точки. Нетрудно проверить, что любая форма первой степени ω, определенная на $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — это f-линейное сопоставление каждому векторному полю X на U гладкой функции $\omega(X)$; $\omega(fX) = f \cdot \omega(X)$, $\forall f \in C^\infty(U), \forall X \in \mathrm{Vect}(U)$.

Рассмотрим объединение всех кокасательных пространств к пространству U в разных точках

$$T^\star U = \bigcup_{p\in U} T_p^\star U.$$

Оно называется *кокасательным расслоением* с базой расслоения U и естественной проекцией $\pi : T^\star U \to U$. Слоем кокасательного расслоения в точке $p \in U$ является кокасательное пространство $\pi^{-1}(p) = T_p^\star U$. При помощи введенных понятий можно переформулировать определение поля дифференциальных форм первой степени следующим образом. *Кокасательным векторным полем* или 1-формой на U называется сечение кокасательного расслоения $T^\star U$, то есть гладкое отображение

$$\omega : p \mapsto \omega(p), \quad p \in U, \quad \omega(p) \in T^\star U \, : \, \pi(\omega(p)) = p,$$

или, как уже говорилось ранее, линейное отображение множества векторных полей

$$\omega : X \mapsto \omega(X), \quad X \in \mathrm{Vect}(U), \quad \omega(X) \in C^\infty(U).$$

Кокасательное пространство $T_p^\star U$ в точке $p \in U$ снабжается естественной структурой векторного пространства $\mathbb{R}^n$ и евклидовой топологией. Множество всех кокасательных векторных полей, которое обозначим через $\Omega^1(U)$, так же как и множество векторных полей $\mathrm{Vect}(U)$, образует модуль над алгеброй гладких функций $C^\infty(U)$.

В качестве тривиального примера дифференциальной формы первой степени рассмотрим дифференциал гладкой функции $f \in C^\infty(U)$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^a}\, dx^a.$$

Здесь $\partial f/\partial x^a$ — компоненты дифференциала, записанные в некоторой системе координат, а dx^a составляют базис в кокасательном пространстве. Действие дифференциала df как 1-формы на вектор X в точке p определяется выражением

$$df(X) = X^b\, df\left(\frac{\partial}{\partial x^b}\right) = X^b \frac{\partial f}{\partial x^a}\, dx^a \left(\frac{\partial}{\partial x^b}\right).$$

Поскольку dx^a составляют базис в кокасательном пространстве, то

$$dx^a \left(\frac{\partial}{\partial x^b}\right) = \delta^a_b,$$

а потому,

$$df(X) = X^a \frac{\partial f}{\partial x^a}.$$

Очевидно, что это выражение линейно относительно умножения X на бесконечно гладкие функции. Причем, как можно заметить, формула для действия дифференциала на вектор в координатах совпадает с дифференцированием функции f вектором X в точке p, то есть

$$df(X) = X(f).$$

Задача 5.12. Рассмотрим функцию $f = xyz + x^3y^2$ на $\mathbb{R}^3$. Найти $df(X)$, если

$$X = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X = 3y^2\frac{\partial}{\partial y} - 2xy\frac{\partial}{\partial x}.$$

Как уже было сказано выше, дифференциалы $dx^1, \dots ,dx^n$ координатных функций в любой точке дают базис пространства $T_p^\star U$. По этому базису можно разложить любую 1-форму в точке, а применяя это во всех точках области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ получаем, что всякая дифференциальная форма первой степени на U выражается как

$$\omega = \omega_1\, dx^1 + \dots + \omega_n\, dx^n = \omega_a\, dx^a,$$

где ω_a — гладкие функции, то есть $\omega_a \in C^\infty(U)$.

При криволинейной замене координат компоненты дифференциальной формы первой степени ведут себя также, как компоненты дифференциала функции:

$$\omega = \omega_a(x)\, dx^a = \omega'_b(x')\, dx'^b = \omega'_b(x')\, \frac{\partial x'^b}{\partial x^a}\, dx^a,$$

то есть

$$\omega_a(x) = \omega'_b(x')\, \frac{\partial x'^b}{\partial x^a}, \quad \omega'_a(x') = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a}\, \omega_b(x).$$

Определим дифференциальную форму степени $k \geqslant 0$ на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^n$ как отображение

$$(X_1, \dots ,X_k) \to \omega(X_1, \dots ,X_k)$$

наборов из k гладких векторных полей $X_1, \dots ,X_k$ на U в бесконечно гладкие функции на U, линейное по каждому аргументу

$$\omega(X_1, \dots ,X_i + Y_i, \dots ,X_k) = \omega(X_1, \dots ,X_i, \dots ,X_k) + \omega(X_1, \dots ,Y_i, \dots ,X_k)$$

и относительно умножения на бесконечно гладкие функции

$$\omega(f_1X_1, \dots ,f_kX_k) = f_1 \dots f_k\, \omega(X_1, \dots ,X_k),$$

и кососимметричное, то есть меняющее знак при перестановке любых двух своих аргументов. Кососимметричность в этом определении пока не выглядит естественно, но она будет играть ключевую роль в определении *внешнего дифференциала* дифференциальной формы, а далее и при интегрировании дифференциальных форм.

Нетрудно доказать *лемму о локальности*, согласно которой значение выражения $\omega(X_1, \dots ,X_k)$ в точке p зависит только от значений векторных полей X_i в этой точке. Проделайте это самостоятельно в качестве упражнения. Данная лемма позволяет переформулировать определение дифференциальной формы иначе, как выбор кососимметричной полилинейной формы степени k на касательном пространстве T_pU в каждой точке $p \in U$ так, чтобы выбранная форма гладко зависела от точки p. Такое определение более геометрическое, в отличие от изначального, более алгебраического. Пространство дифференциальных форм степени k на $U \subseteq \mathbb{R}^n$ обозначим через $\Omega^k(U)$.

5.4. **Внешнее умножение.** Определим полезную операцию, которая двум дифференциальным формам $\omega \in \Omega^k(U)$, $\lambda \in \Omega^m(U)$ ставит в соответствие $(k+m)$-форму $\nu \in \Omega^{k+m}(U)$. Она должна быть, очевидно, кососимметрической, поскольку дает отображение из пространств кососимметричных форм в кососимметричные. Для двух дифференциальных форм первой степени α и β ее совсем несложно построить. Достаточно просто антисимметризовать тензорное произведение:

$$(\alpha \wedge \beta)(X,Y) = \alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X),$$

что для базисных форм первой степени означает,

$$dx^a \wedge dx^b = dx^a \otimes dx^b - dx^b \otimes dx^a.$$

В общем случае эта операция $\wedge : \Omega^k(U) \times \Omega^m(U) \to \Omega^{k+m}(U)$ хорошо известна в линейной алгебре как *внешнее умножение* дифференциальных форм и определяется по формуле

$$(\omega \wedge \lambda)(X_1, \dots, X_{k+m}) = \\ = \frac{1}{k!m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+m}} (\operatorname{sgn} \sigma)\, \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)})\, \lambda(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+m)}).$$

Задача 5.13. Проверьте, что умножение формы $\omega \in \Omega^k(U)$ на функцию f по формуле $(f\omega)(X_1, \dots, X_k) = f \cdot \omega(X_1, \dots, X_k)$ совпадает со внешним умножением $f \wedge \omega$ при интерпретации функции как формы из $\Omega^0(U)$.

С помощью внешнего умножения всякую дифференциальную форму степени k в координатах можно единственным образом записать в виде:

$$\omega = \sum_{a_1 < \dots < a_k} \omega_{a_1 \dots a_k}\, dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_k},$$

где $\omega_{a_1 \dots a_k}$ — гладкие функции. Это следует из того, что в каждой точке кососимметричные формы $dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_k}$, составленные из дифференциалов координатных функций, дают базис в пространстве k-линейных кососимметричных форм на T_pU. Значит, дифференциальные формы на области U порождаются с помощью операций сложения и внешнего умножения функциями и их дифференциалами.

Множество дифференциальных форм фиксированной степени с поточечным сложением и умножением на числа образует бесконечномерное векторное пространство. Прямая сумма множества всех дифференциальных форм

$$\Omega(U) = \bigoplus_{k \geqslant 0} \Omega^k(U), \quad n = \dim U$$

даст конечномерную внешнюю алгебру (так называемую *алгебру Грассмана*) дифференциальных форм $\Omega(U)$ на U, в которой все операции (умножение на числа, сложение и внешнее умножение) определены поточечно. Алгебра Грассмана ассоциативна и обладает единицей, но не коммутативна. Однако в ней выполняется следующее свойство, заменяющее коммутативность:

$$\omega \wedge \lambda = (-1)^{k \cdot m} \lambda \wedge \omega, \quad \omega \in \Omega^k(U), \quad \lambda \in \Omega^m(U).$$

Градуированные алгебры, обладающие этим свойством, называют *суперкоммутативными* алгебрами.

Задача 5.14. Доказать, что размерность алгебры Грассмана $\dim \Omega(U) = 2^n$.

Задача 5.15. Докажите следующее свойство операции внешнего умножения дифференциальных форм: $\omega \wedge \lambda = (-1)^{k \cdot m} \lambda \wedge \omega$, где $\omega \in \Omega^k(U)$, $\lambda \in \Omega^m(U)$. В частности, если степень дифференциальной формы ω нечетна, то $\omega \wedge \omega = 0$.

В качестве примера рассмотрим внешнее умножение двух дифференциальных форм первой степени на $\mathbb{R}^3$: $\nu = \omega \wedge \lambda$, где $\omega = \omega_a\, dx^a$, $\lambda = \lambda_b\, dx^b$.

$$\nu = (\omega_1\, dx^1 + \omega_2\, dx^2 + \omega_3\, dx^3) \wedge (\lambda_1\, dx^1 + \lambda_2\, dx^2 + \lambda_3\, dx^3) =$$
$$= (\omega_1\lambda_2 - \omega_2\lambda_1)\, dx^1 \wedge dx^2 + (\omega_3\lambda_1 - \omega_1\lambda_3)\, dx^3 \wedge dx^1 + (\omega_2\lambda_3 - \omega_3\lambda_2)\, dx^2 \wedge dx^3.$$

5.5. **Внешнее дифференцирование.** Определим еще одну важную операцию над дифференциальными формами — *внешнее дифференцирование*[1] $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$, которая однозначно определяется следующими свойствами:

- Для функций df является просто дифференциалом.
- *Нильпотентность*: $d^2 = 0$.
- *Правило Лейбница*: $d(\omega \wedge \lambda) = d\omega \wedge \lambda + (-1)^{\deg \omega}\, \omega \wedge d\lambda$.

Найдем явную формулу для внешнего дифференциала k-формы ω:

$$d\omega = \sum d\omega_{a_1\ldots a_k} \wedge dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_k} + \sum \omega_{a_1\ldots a_k}\, d^2x^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_k} + \ldots$$

Здесь мы воспользовались правилом Лейбница. Из свойства нильпотентности, очевидно, получаем

$$d\omega = \sum_{a_1<\cdots<a_k} d\omega_{a_1\ldots a_k} \wedge dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_k}.$$

Наконец, используя первое свойство оператора d, имеем

$$d\omega = \sum_{a_1<\cdots<a_k,\, b\neq\{a_1,\ldots,a_k\}} \frac{\partial \omega_{a_1\ldots a_k}}{\partial x^b} dx^b \wedge dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_k}.$$

Это общая формула для вычисления дифференциала $d\omega$. Покажем, что свойство нильпотентности является вполне естественным требованием для дифференциала от формы. Действительно,

$$d^2\omega = \sum_{a_1<\cdots<a_k,\, a\neq b} \frac{\partial^2 \omega_{a_1\ldots a_k}}{\partial x^a \partial x^b}\, dx^a \wedge dx^b \wedge dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_k} =$$
$$= \sum_{a_1<\cdots<a_k,\, a<b} \left[\frac{\partial^2 \omega_{a_1\ldots a_k}}{\partial x^a \partial x^b}\, dx^a \wedge dx^b + \frac{\partial^2 \omega_{a_1\ldots a_k}}{\partial x^b \partial x^a}\, dx^b \wedge dx^a \right] \wedge dx^{a_1} \wedge \cdots \wedge dx^{a_k}.$$

Поскольку координатные функции $\omega_{a_1\ldots a_k}$ являются гладкими, то

$$\frac{\partial^2 \omega_{a_1\ldots a_k}}{\partial x^a \partial x^b} = \frac{\partial^2 \omega_{a_1\ldots a_k}}{\partial x^b \partial x^a}.$$

Кроме того, $dx^a \wedge dx^b = -dx^b \wedge dx^a$, откуда окончательно получаем $d^2\omega = 0$, что и требовалось. Построенная нами таким образом операция внешнего дифференцирования совместима с заменами координат, то есть по сути определена независимо от выбора криволинейной системы координат.

В качестве простого но важного для теоретической физики примера рассмотрим пару дифференциальных форм на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$\omega_E = E_x(x,y,z)\, dy \wedge dz + E_y(x,y,z)\, dz \wedge dx + E_z(x,y,z)\, dx \wedge dy,$$

$$\lambda_H = H_x(x,y,z)\, dx + H_y(x,y,z)\, dy + H_z(x,y,z)\, dz,$$

и найдем их внешний дифференциал. Начнем с формы ω_E:

$$d\omega_E = \frac{\partial E_x}{\partial x}\, dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial E_y}{\partial y}\, dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial E_z}{\partial z}\, dz \wedge dx \wedge dy,$$

[1]Несложно показать, что оператор внешнего дифференцирования d представляет собой градуированное дифференцирование на алгебре $\Omega(U)$ степени 1.

или, окончательно,
$$d\omega_E = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) dx\wedge dy\wedge dz.$$
Для формы λ_H имеем
$$d\lambda_H = \frac{\partial H_x}{\partial y}\, dy\wedge dx + \frac{\partial H_x}{\partial z}\, dz\wedge dx + \frac{\partial H_y}{\partial x}\, dx\wedge dy + \\ + \frac{\partial H_y}{\partial z}\, dz\wedge dy + \frac{\partial H_z}{\partial x}\, dx\wedge dz + \frac{\partial H_z}{\partial y}\, dy\wedge dz,$$
$$d\lambda_H = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) dz\wedge dx + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) dx\wedge dy.$$
Задача 5.16. Вычислить внешний дифференциал следующей дифференциальной формы на плоскости без точки (0,0):
$$\omega = f(x^2+y^2)\cdot(x\,dx + y\,dy)\,,$$
где f — гладкая функция одной переменной.

5.6. **Внутреннее умножение.** Рассмотрим теперь одну важную операцию, связывающую векторные поля и дифференциальные формы на одном и том же многообразии M (или проще, на одном и том же открытом множестве $U\subseteq\mathbb{R}^n$) — *внутреннее умножение*[1] (или *внутреннее дифференцирование*) на вектор X. Оно определяется как отображение $\imath : \mathrm{Vect}(M)\times\Omega^k(M)\to\Omega^{k-1}(M)$, $\imath(X,\omega) := \imath_X\omega$, по формуле
$$\imath_X\omega(X_2,\ldots,X_k) = \omega(X,X_2,\ldots,X_k).$$
Эта операция поточечная, то есть значение результата в точке зависит только от вектора в точке и дифференциальной формы в точке. Иначе можно сказать, что при умножении X или ω на функцию f выражение $\imath_X\omega$ просто умножается на функцию f. Также внутреннее умножение по определению линейно по вектору и по форме.

Справедлива следующая формула Лейбница для внутреннего умножения
$$\imath_X(\omega\wedge\lambda) = \imath_X\omega\wedge\lambda + (-1)^{\deg\omega}\,\omega\wedge\imath_X\lambda.$$
Действительно, из определения внутреннего умножения и внешнего умножения форм следует, что должна выполняться какая-то такая формула с точностью до знаков и множителей. Проверить знаки и множители по линейности достаточно на базисных элементах.
$$\imath_{\partial_b}\, dx^{a_1}\wedge\cdots\wedge dx^{a_k} = (-1)^{\ell-1} dx^{a_1}\wedge\cdots\wedge dx^{a_{\ell-1}}\wedge dx^{a_{\ell+1}}\wedge\cdots\wedge dx^{a_k},\ \ b=a_\ell$$
и
$$\imath_{\partial_b}\, dx^{a_1}\wedge\cdots\wedge dx^{a_k} = 0,$$
если b не встречается среди a_ℓ. После этого проверка правила Лейбница становится понятной: внутреннему умножению на ∂_b необходимо «добраться» до своего dx^b, причем при «перепрыгивании» через неподходящие dx^b знак выражения меняется.

Покажем, что для внутреннего умножения верно тождество
$$\{\imath_X,\imath_Y\}\omega = \imath_X\imath_Y\omega + \imath_Y\imath_X\omega = 0.$$
Действительно, по определению имеем
$$\{\imath_X,\imath_Y\}\omega = \omega(X,Y) + \omega(Y,X) = 0.$$

[1]Несложно показать, что оператор внутреннего дифференцирования $\imath_X$ представляет собой дифференцирование на алгебре $\Omega(U)$ степени -1.

Задача 5.17. Пусть $\imath_X$ — внутреннее умножение на вектор X, а e_α — внешнее умножение на линейную форму α. Найдите собственные значения оператора $\imath_X e_\alpha + e_\alpha \imath_X$ на кососимметричных формах.

5.7. **Дивергенция относительно объема.** При помощи операций внутреннего умножения и внешнего дифференцирования мы можем корректно определить *дивергенцию* векторного поля на $\mathbb{R}^3$. Действительно, на $\mathbb{R}^3$ определена нигде не нулевая форма высшей степени — *форма объема*

$$\tau = dx \wedge dy \wedge dz.$$

Пусть на $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле

$$X = X_x \frac{\partial}{\partial x} + X_y \frac{\partial}{\partial y} + X_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

По некоторму векторному полю $X \in \mathrm{Vect}(\mathbb{R}^3)$ можно построить 2-форму посредством применения внутреннего умножения к форме объема: $\imath_X \tau$. Из нее мы получим 3-форму (форму высшей степени на $\mathbb{R}^3$) путем взятия внешнего дифференциала d. Но, пространство дифференциальных форм третьей степени на пространстве $\mathbb{R}^3$ имеет единственный базисный вектор — форму объема τ. Значит, полученная нами 3-форма $d\imath_X\tau$ есть некоторая гладкая функция, помноженная на форму объема. Эту гладкую функцию и назовем дивергенцией $\operatorname{div} X$ векторного поля X, то есть

$$d\imath_X\tau = (\operatorname{div} X) \cdot \tau.$$

Найдем выражение для дивергенции векторного поля X в координатах:

$$\begin{aligned}\imath_X\tau = \tau(X) = dx \wedge dy \wedge dz(X_x\,\partial_x + X_y\,\partial_y + X_z\,\partial_z) = \\ = X_x\, dx \wedge dy \wedge dz(\partial_x) + X_y\, dx \wedge dy \wedge dz(\partial_y) + X_z\, dx \wedge dy \wedge dz(\partial_z) = \\ = X_x\, dy \wedge dz + X_y\, dz \wedge dx + X_z\, dx \wedge dy.\end{aligned}$$

Дифференциал получившейся дифференциальной формы второй степени мы уже находили. Значит

$$d\imath_X\tau = \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right)\tau, \quad \operatorname{div} X = \partial_x X_x + \partial_y X_y + \partial_z X_z = \partial_a X^a.$$

В итоге мы получили ту самую, знакомую нам дивергенцию, только теперь мы лучше понимаем, что это за объект. Заметим, что внутреннее произведение и дифференциал по построению никак не зависят от выбора системы координат. Значит, в выражении $d\imath_X\tau = (\operatorname{div} X)\cdot\tau$ от выбора системы координат зависит только форма объема. Выясним, при каких заменах координат дивергенция не меняется.

Как мы покажем в позднее, форма высшей степени на $\mathbb{R}^n$ при криволинейной замене координат преобразуется согласно

$$\tau' = \det\left(\frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \equiv (\det\Lambda)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

где $\tau = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, $\det\Lambda = \mathcal{J}_\varphi$ — якобиан замены. Поэтому

$$d\imath_X\tau' = d(\mathcal{J}_\varphi\, \imath_X\tau) = d\mathcal{J}_\varphi \wedge \imath_X\tau + \mathcal{J}_\varphi\, d\imath_X\tau.$$

В силу произвольности векторного поля X получаем, что дивергенция не меняется лишь при таких заменах координат, для которых

$$d\mathcal{J}_\varphi = 0, \quad \mathcal{J}_\varphi = \mathrm{const}.$$

Задача 5.18. Покажите в явном виде, что при преобразовании инверсии координатных осей: $x^a \mapsto x'^a = -x^a$, дивергенция векторного поля X не изменяется.

5.8. **Когомологии де Рама.** Важным свойством внешнего дифференциала d является его нильпотентность: $d^2 = 0$. Поработаем с ним чуть-чуть подробнее, а именно, поговорим немного о *замкнутых* и *точных* дифференциальных формах. Рассмотрим дифференциальную форму $\omega \in \Omega^k(M)$ на некотором многообразии M. Форма ω называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$. Если для дифференциальной формы $\omega \in \Omega^k(M)$ найдется форма $\lambda \in \Omega^{k-1}(M)$, для которой $d\lambda = \omega$, то говорят, что форма ω *точна.*

Задача 5.19. Докажите, что внешнее произведение замкнутой формы на точную форму есть точная форма.

Очевидно, что всякая точная форма является замкнутой: это мгновенно следует из свойства нильпотентности оператора внешнего дифференцирования. Однако, встает вопрос, верно ли обратное утверждение, то есть всякая ли замкнутая на M форма точна? Вообще говоря, ответ отрицательный. Для того, чтобы понять это, рассмотрим 1-форму

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

на ее естественной области определения: $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. Покажем, что ω замкнута:

$$d\omega = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx \wedge dy - \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy \wedge dx = 0.$$

Если бы 1-форма ω была точна, то существовала бы функция f, такая что $\omega = df$. В этом случае интеграл от df по любой замкнутой кривой γ, лежащей в $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ согласно формуле Ньютона-Лейбница равнялся бы нулю:

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma df = 0.$$

Возьмем в качестве замкнутой кривой положительно ориентированную единичную окружность $\gamma = \mathbb{S}^1$ с центром в начале координат и найдем интеграл от дифференциальной 1-формы ω. Ограничение формы ω на $\mathbb{S}^1$, очевидно, равно

$$\omega\,|_{\mathbb{S}^1} = x\,dy - y\,dx.$$

Перепишем последнюю формулу в полярных координатах:

$$\omega\,|_{\mathbb{S}^1} = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,d\varphi = d\varphi.$$

Тогда интеграл

$$\int_{\mathbb{S}^1} \omega = \int_{\mathbb{S}^1} d\varphi = 2\pi \neq 0 = \int_{\mathbb{S}^1} df.$$

То есть, мы пришли к противоречию. Значит, 1-форма ω не является точной на своей естественной области определения: $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

Этот пример показывает нам, что не всякая замкнутая форма является точной на многообразии M. Причем, все зависит не только от самой формы, но и от топологии многообразия. Если многообразие M представляет собой просто евклидово пространство $M = \mathbb{R}^n$, то согласно *лемме Пуанкаре* любая замкнутая форма на $\mathbb{R}^n$ будет обязательно точной. Если же топология многообразия более интересная и сложная, то такого однозначного утверждения (типа леммы Пуанкаре) сделать уже нельзя.

Задача 5.20. Придумайте форму $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, у которой $d\omega = 0$ и для которой не существует $\lambda \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, такой что

$$d\lambda = \omega.$$

Задача 5.21. Многообразие M называют *гомотопным точке* $x_0 \in M$, если существует такое гладкое отображение $h : M \times [0,1] \to M$, что $h(x,0) = x_0$, $h(x,1) = x$. Докажите, что любая замкнутая $(k+1)$-форма, $k \geqslant 0$, на многообразии, гомотопном точке, является точной. Запишите в явном виде отображение гомотопии h для случая евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим гладкое многообразие M. Множество замкнутых дифференциальных форм степени k на M обозначим через $\mathrm{Z}^k(M)$. Формально можно записать, что

$$\mathrm{Z}^k(M) = \ker d, \quad d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M).$$

Множество точных форм обозначим через $\mathrm{B}^k(M)$:

$$\mathrm{B}^k(M) = \operatorname{Im} d, \quad d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M).$$

Отклассифицируем замкнутые формы на многообразии M следующим образом: две замкнутые формы ω, $\omega' \in \mathrm{Z}^k(M)$ называются *гомологичными*, если они отличаются на точную форму, то есть их разность $\omega - \omega' \in \mathrm{B}^k(M)$. Это определение порождает отношение эквивалентности на множестве замкнутых форм в $\Omega^k(M)$:

$$\omega \sim \omega' \;\; \Leftrightarrow \;\; \omega = \omega' + \lambda, \quad \lambda \in \mathrm{B}^k(M).$$

Когомологичным классом $[\omega]$ формы ω называется множество всех замкнутых форм, отличающихся от ω на точную форму.

В связи с вышесказанным, естественно дать следующее определение. *Когомологии де Рама* H^k_{dR} гладкого многообразия M — это факторпространства

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) = \Big(\ker d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)\Big) \,/ d\Omega^{k-1}(M).$$

При $k = 0$ в этом определении мы считаем $d\Omega^{-1}(M)$ нулевым пространством и на самом деле рассматриваем функции $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$, такие что $df = 0$ — то есть локально постоянные функции.

Когомологии де Рама градуированны, то есть распадаются в прямую сумму k-мерных когомологий

$$H^\star(M) = \bigoplus_{k \geqslant 0} H^k_{\mathrm{dR}}(M).$$

Кроме того, пространство когомологий является абелевой группой с законом сложения вида

$$[\omega_1] + [\omega_2] = [\omega_1 + \omega_2],$$

причем k-мерные когомологии де Рама образуют подгруппу $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$, а операция внешнего умножения дифференциальных форм порождает умножение на группе когомологий:

$$[\omega_1] \smile [\omega_2] = [\omega_1 \wedge \omega_2],$$

которое ассоциативно и обладает следующими свойствами:

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) \smile H^m_{\mathrm{dR}}(M) \subset H^{k+m}_{\mathrm{dR}}(M),$$

$$a \smile b = (-1)^{km} b \smile a, \quad a \in H^k_{\mathrm{dR}}(M), \quad b \in H^m_{\mathrm{dR}}(M).$$

Действительно, докажем корректность определенной таким образом операции умножения (алгебраические свойства автоматически вытекают из свойств внешнего умножения дифференциальных форм). Для этого необходимо показать, что класс эквивалентности $[\omega_1] \smile [\omega_2]$ не зависит от выбора замкнутых дифференциальных форм

ω_1 и ω_2.

$$(\omega_1 + d\alpha_1) \wedge (\omega_2 + d\alpha_2) = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge d\alpha_2 + d\alpha_1 \wedge \omega_2 + d\alpha_1 \wedge d\alpha_2 =$$
$$= \omega_1 \wedge \omega_2 + d((-1)^k \omega_1 \wedge \alpha_2 + \alpha_1 \wedge \omega_2 + \alpha_1 \wedge d\alpha_2) := \omega_1 \wedge \omega_2 + d\lambda.$$

Отсюда получаем требуемое, то есть

$$[(\omega_1 + d\alpha_1) \wedge (\omega_2 + d\alpha_2)] = [\omega_1 \wedge \omega_2] = [\omega_1] \smile [\omega_2].$$

В терминах когомологий де Рама лемму Пуанкаре можно сформулировать следующим образом:

$$H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} 0, & \text{if } k \neq 0, \\ \mathbb{R}, & \text{if } k = 0. \end{cases}$$

Числа Бетти многообразия M определяются по формуле

$$B_k = \dim H^k_{\mathrm{dR}}(M).$$

Число Бетти может принимать неотрицательные целые значения или бесконечность. Для разумно устроенного конечномерного пространства все числа Бетти конечны и, начиная с некоторого номера, равны нулю. Нетрудно заметить, что нулевое число Бетти

$$B_0 = \dim H^0_{\mathrm{dR}}(M)$$

совпадает с числом компонент связности многообразия M. Так, для любого связного многообразия $B_0 = 1$.

Наконец, удобно ввести *эйлерову характеристику* многообразия M, которая является *гомотопическим инвариантом* и определяется как знакопеременная (альтернированная) сумма чисел Бетти, то есть

$$\chi(M) = \sum_k (-1)^k B_k.$$

Задача 5.22. Найти эйлерову характеристику $\chi(M)$ стандартной единичной окружности $M = \mathbb{S}^1$.

6. Производная Ли

При помощи введенных в предыдущем разделе операций внешнего дифференцирования и внутреннего умножения можно определить так называемую *производную Ли* $Ł_X$ вдоль векторного поля $X \in \mathrm{Vect}(M)$ от дифференциальной формы произвольной степени. Такая производная, как будет показано позже, измеряет скорость изменения диффренциальной формы при деформации пространства, заданной однопараметрической группой диффеоморфизмов φ_t; последняя, в свою очередь, порождается векторным полем.

6.1. **Производная Ли: формула Картана.** Определим *производную Ли* $Ł_X$ *вдоль векторного поля* X на дифференциальных формах как *суперкоммутатор*[1]

$$Ł_X := \{\imath_X, d\} = \imath_X \circ d + d \circ \imath_X.$$

Эта операция, очевидно, $\mathbb{R}$-линейна по обоим аргументам (по векторным полям и дифференциальным формам), то есть

$$Ł_X(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = \lambda_1 Ł_X\omega_1 + \lambda_2 Ł_X\omega_2, \quad \lambda_{1,2} \in \mathbb{R},\ \omega_{1,2} \in \Omega^k(M),$$

$$Ł_{(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)}\omega = \lambda_1 Ł_{X_1}\omega + \lambda_2 Ł_{X_2}\omega, \quad \lambda_{1,2} \in \mathbb{R},\ X_{1,2} \in \mathrm{Vect}(M),$$

однако, она не f-линейна: при умножении векторного поля X или формы ω на гладкую функцию f эта функция не выносится за скобки, а в выражении возникает ее дифференциал. Действительно,

$$\begin{aligned} Ł_{fX}\omega = \imath_{fX}\, d\omega + d\,\imath_{fX}\omega = d\omega(fX) + d(\omega(fX)) = \\ = f\, d\omega(X) + d(f\omega(X)) = f\, d\,\imath_X\omega + df \wedge \omega(X) + f\, d\imath_X\omega, \end{aligned}$$

$$Ł_{fX}\omega = f\, Ł_X\omega + df \wedge \imath_X\omega.$$

$$\begin{aligned} Ł_X(f\omega) = \imath_X\, d(f\omega) + d\,\imath_X(f\omega) = \imath_X\,(df \wedge \omega + f\, d\omega) + d(f\,\imath_X\omega) = \\ = df(X)\cdot\omega - df \wedge \imath_X\,\omega + f\cdot\imath_X\, d\omega + df \wedge \imath_X\,\omega + f\, d\,\imath_X\omega = f \cdot Ł_X\omega + X(f)\cdot\omega, \end{aligned}$$

то есть

$$Ł_X(f\omega) = f\, Ł_X\omega + \omega \cdot X(f).$$

Эта формула выражает частный случай формулы Лейбница для производной Ли вдоль векторного поля X от внешнего умножения дифференциальных форм (здесь, 0-формы f и дифференциальной формы ω). Действительно, производная Ли гладкой функции по определению

$$Ł_X f = \imath_X\, df + d\,\imath_X f = \imath_X\, df = df(X) = X(f),$$

поэтому

$$Ł_X(f \wedge \omega) = f \wedge Ł_X\omega + Ł_X f \wedge \omega.$$

В общем случае правило Лейбница для дифференциальных форм следует из соответствующих правил для внутреннего умножения и внешнего дифференцирования:

$$\imath_X(\omega \wedge \lambda) = \imath_X\omega \wedge \lambda + (-1)^{\deg\omega}\,\omega \wedge \imath_X\lambda, \quad d(\omega \wedge \lambda) = d\omega \wedge \lambda + (-1)^{\deg\omega}\,\omega \wedge d\lambda,$$

$$Ł_X(\omega \wedge \lambda) = Ł_X\omega \wedge \lambda + \omega \wedge Ł_X\lambda.$$

[1]Можно показать, что на *супералгебре* внешних форм производная Ли является дифференцированием и однородным оператором степени 0.

Полезно также посмотреть действие производной Ли на дифференциал df:

$$Ł_X\, df = \imath_X\, d^2 f + d\,\imath_X df = d\,\imath_X df = d(df(X)) = d\, Ł_X f.$$

Данное равенство можно описать как коммутирование операции $Ł_X$ с внешним дифференцированием d для функции, то есть

$$[Ł_X, d]\, f = Ł_X\, df - d\, Ł_X f = 0.$$

Нетрудно показать равенство нулю коммутатора $[Ł_X, d]$ для форм любой степени. Действительно,

$$[Ł_X, d]\,\omega = Ł_X\, d\omega - d\, Ł_X\omega = \imath_X\, d^2\omega + d\,\imath_X d\omega - d\,\imath_X d\omega - d^2\imath_X\omega = 0.$$

Аналогично покажем, что производная Ли $Ł_X$ коммутирует с операцией внутреннего умножения $\imath_X$ для форм любой степени

$$[Ł_X, \imath_X]\,\omega = Ł_X\, \imath_X\omega - \imath_X\, Ł_X\omega = \imath_X\, d\,\imath_X\omega + d\,\imath_X\imath_\xi\omega - \imath_X\imath_X\, d\omega - \imath_X\, d\,\imath_X\omega = 0.$$

Найдем выражение для производной Ли дифференциальной формы первой степени $\lambda = \lambda_a\, dx^a$ вдоль векторного поля $X = X^a\partial_a$ в координатах:

$$Ł_X\, \lambda = Ł_{X^b\partial_b}\, (\lambda_a\, dx^a).$$

Из вышенаписанного получаем

$$Ł_X\, \lambda = \lambda_a\, Ł_X\, dx^a + X(\lambda_a)\, dx^a = \lambda_a X^b\, Ł_{\partial_b}\, dx^a + \lambda_a\, dX^b \wedge dx^a\, (\partial_b) + \\ + X^b\partial_b\lambda_a\, dx^a = (\lambda_b\, \partial_a X^b + X^b\, \partial_b\lambda_a)\, dx^a = Ł_X\lambda_a\, dx^a,$$

$$Ł_X\lambda_a = \lambda_b\, \partial_a X^b + X^b\, \partial_b\lambda_a.$$

Задача 6.1. Вычислить производную Ли от дифференциальной формы первой степени $\omega = x\, dy + y\, dx$ вдоль векторного поля $X = x\,\partial/\partial x + y\,\partial/\partial y$.

Задача 6.2. Вычислить производную Ли от дифференциальной формы второй степени $\omega = z\, dx\wedge dy + y\, dz\wedge dx + x\, dy\wedge dz$ вдоль векторного поля $X = x\,\partial/\partial x + y\,\partial/\partial y + z\,\partial/\partial z$.

6.2. **Производная Ли векторного поля.** Определим теперь *производную Ли одного векторного поля вдоль другого векторного поля.* Для этого воспользуемся двойственностью между касательным и кокасательным пространствами в точке и определим векторное поле $Ł_X Y$ (производная Ли Y по X) через его каноническое произведение на некоторую линейную форму первой степени ω: по сути потребуем выполнения формулы Лейбница

$$Ł_X(\omega(Y)) = X(\omega(Y)) = (Ł_X\omega)(Y) + \omega(Ł_X Y).$$

Из этой формулы получаем

$$\omega(Ł_X Y) = \imath_X\, d\,\imath_Y\omega - \imath_Y\, d\,\imath_X\omega - \imath_Y\imath_X\, d\omega.$$

Важно отметить, что при умножении формы первой степени ω на функцию f в последнем выражении правая часть равенства также умножается на функцию f. Для того, чтобы проверить данное утверждение, совершим в формуле замену $\omega \mapsto f\omega$:

$$f\,\omega(Ł_X Y) = \imath_X\, d\,\imath_Y(f\omega) - \imath_Y\, d\,\imath_X(f\omega) - \imath_Y\imath_X\, d(f\omega) = \\ = f\imath_X\, d\,\imath_Y\omega - f\imath_Y\, d\,\imath_X\omega - f\imath_Y\imath_X\, d\omega + (\imath_X(df))(\imath_Y\omega) - (\imath_Y(df))(\imath_X\omega) - \\ - \imath_Y\imath_X(df\wedge\omega) = f\imath_X\, d\,\imath_Y\omega - f\imath_Y\, d\,\imath_X\omega - f\imath_Y\imath_X\, d\omega + (\imath_X(df))(\imath_Y\omega) - \\ - (\imath_Y(df))(\imath_X\omega) - (\imath_Y\omega)(\imath_X(df)) + (\imath_Y(df))(\imath_X\omega),$$

откуда, очевидно, получаем, что и требовалось. Значит, зная выражение в правой части равенства $\omega(Ł_X Y) = \imath_X\, d\,\imath_Y\omega - \imath_Y\, d\,\imath_X\omega - \imath_Y\imath_X\, d\omega$ для базисных форм $dx^a(Ł_X Y)$, мы для произвольной 1-формы $\omega = \omega_a\, dx^a$ запишем его как

$$\omega(Ł_X Y) = \omega_a\, dx^a(Ł_X Y).$$

Это означает, что последняя формула корректно определяет производную Ли $Ł_X Y$ в каждой точке $p \in M$ многообразия M как линейный функционал на $T_p^\star M$. Координаты векторного поля $Ł_X Y$ в данной системе координат равны

$$(Ł_X Y)^a := Ł_X Y^a = dx^a(Ł_X Y) = \imath_X\, d(dx^a(Y)) - \imath_Y\, d(dx^a(X)).$$

Если $Y = Y^b\partial_b$, $X = X^b\partial_b$, то

$$Ł_X Y^a = \imath_X\, dY^a - \imath_Y\, dX^a = \partial_b Y^a\, dx^b(X) - \partial_b X^a\, dx^b(Y) = X^b\, \partial_b Y^a - Y^b\, \partial_b X^a,$$

или, окончательно,

$$Ł_X Y^a = X^b\, \partial_b Y^a - Y^b\, \partial_b X^a.$$

Если применить векторное поле $Ł_X Y$ как дифференцирование гладкой функции f, то получим

$$(Ł_X Y)f = df(Ł_X Y) = \imath_X\, d(\imath_Y\, df) - \imath_Y\, d(\imath_X\, df) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Видно, что с точки зрения дифференциальных операторов на функциях, производная Ли $Ł_X Y$ — это коммутатор векторных полей $[X,Y]$, то есть коммутатор соответствующих им дифференциальных операторов. Несложно проверить справедливость следующих свойств производной Ли $[X,Y]$:

- Кососимметричность: $[X,Y] = -[Y,X]$.
- Тождество Якоби: $[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0$.

Это показывает, что векторные поля образуют *алгебру Ли*[1] относительно коммутатора (*скобки Ли*):

$$Ł_X Y = [X,Y].$$

Посмотрим теперь как ведет себя скобка Ли векторных полей $[X,Y]$ при умножении их на функции f и g, то есть исследуем выражение $[fX,gY]$. Для этого подействуем этой скобкой Ли на пробную функцию φ:

$$\begin{aligned}[fX,gY](\varphi) &= fX(gY(\varphi)) - gY(fX(\varphi)) = f\,X(g)\,Y(\varphi) + fg\,X(Y(\varphi)) - \\ &- g\,Y(f)\,X(\varphi) - gf\,Y(X(\varphi)) = fg[X,Y](\varphi) - g\,Y(f)\,X(\varphi) + f\,X(g)\,Y(\varphi),\end{aligned}$$

откуда находим, что

$$[fX,gY] = fg[X,Y] + f\,X(g)\,Y - g\,Y(f)\,X.$$

Заметим, что до этого момента в качестве базисных векторных полей в некоторой системе координат мы выбирали векторы $\partial/\partial x^a$. Однако в качестве базиса, очевидно, можно выбрать любое линейно независимое семейство векторных полей: нетрудно понять, что не все они происходят из каких-либо систем координат. Дело в том, что векторы $\partial/\partial x^a$ и $\partial/\partial x^b$ коммутируют при всех a, b, а скобка Ли двух произвольных векторных полей: $[X,Y] = Ł_X Y$, вообще говоря, не равна нулю и представляет собой нетривиальное векторное поле. Значит, если X и Y служат элементами некоторого базиса, то их нельзя представить в виде дифференцирований по каким-либо координатам. Такой базис называется *некоординатным* или *неголономным*.

[1]Отметим, что в теоретической физике важны не только алгебры Ли векторных полей, но и их так называемые *центральные расширения*. Наиболее известным из них является *алгебра Вирасоро*; последняя широко используется в двумерной конформной теории поля и в теории струн.

Важно понимать, что различие между координатным и некоординатным базисами проявляется, лишь если рассматривать некоторую область многообразия, а не одну отдельную точку. Оно определяется производными от компонент векторов, а не только значениями в данной точке.

Рассмотрим два векторных поля X и Y на двумерном многообразии M; предположим, что X и Y линейно независимы в каждой точки открытого множества U из M, так что они образуют там базис векторных полей. В каком случае можно быть уверенным, что этот базис является *голономным*, или, другими словами, что X и Y определяют локальные координаты на U? Очевидно, необходимо, чтобы наши поля коммутировали: $[X,Y]=0$. Можно показать, что это условие является также и достаточным. Читателю предлагается доказать это самостоятельно.

Задача 6.3. Пусть X и Y — векторные поля, ω — диффереציальная форма. Докажите формулу

$$\imath_{[X,Y]}\omega = d\imath_X\imath_Y\omega + \imath_X d\imath_Y\omega - \imath_Y d\imath_X\omega - \imath_Y\imath_X d\omega.$$

Задача 6.4. Показать, что коммутатор производных Ли векторного поля Z вдоль векторных полей X и Y также является производной Ли вдоль некоторого векторного поля T: $[Ł_X,Ł_Y]Z = Ł_T Z$. Выразить T через X и Y.

6.3. **Производная Ли тензорных полей.** Мы уже поняли как вычислять производную Ли вдоль векторного поля от функций (форм нулевой степени), векторных полей и произвольных дифференциальных форм. При этом мы всюду требовали выполнения правила Лейбница. В этом ключе совершенно естественно обобщить производную Ли на случай произвольных тензорных полей[1], потребовав от производной Ли «уважения» тензорного произведения (выполнение правила Лейбница для тензорного произведения), то есть для произвольных тензорных полей S и T должно выполняться равенство

$$Ł_X(S\otimes T) = Ł_X S\otimes T + S\otimes Ł_X T.$$

Таким образом, производная Ли тензорных полей полностью определяется следующими свойствами:

- Производная Ли скалярного поля $Ł_X f = X(f)$.
- Производная Ли векторного поля $Ł_X Y$ есть скобка Ли $Ł_X Y = [X,Y]$.

[1]Тензорное поле типа (p,q) на многообразии M определяется через знакомую нам конструкцию векторного расслоения, а именно, тензорным полем называют сечение тензорного расслоения

$$\mathbf{T}^p_q(M) = \bigcup_{x\in M} \underbrace{T_xM\otimes\dots\otimes T_xM}_{p}\otimes\underbrace{T^\star_xM\otimes\dots\otimes T^\star_xM}_{q},$$

то есть гладкое отображение, сопоставляющее каждой точке $x\in M$ тензор типа (p,q). Координатные (голономные) базисы в касательном и кокасательном пространствах, $e_a=\partial_a$ и $h^a=dx^a$, индуцируют координатный базис $e_{a_1}\otimes\dots\otimes e_{a_p}\otimes h^{b_1}\otimes\dots\otimes h^{b_q}$ в тензорном произведении.

Тензорные поля фиксированного типа в каждой точке можно складывать и умножать на числа, т.е. они образуют (бесконечномерное) векторное пространство над полем вещественных чисел. Кроме того, тензорное поле произвольного типа можно поточечно умножать на произвольные функции, при этом получится новое тензорное поле того же типа. Таким образом, они образуют модуль над алгеброй гладких функций $C^\infty(M)$. Вместе с тензорным умножением тензоров, определенным поточечно, множество всех тензорных полей образует некоммутативную ассоциативную тензорную алгебру над полем вещественных чисел. Эта алгебра бесконечномерна, поскольку векторное пространство тензоров фиксированного типа бесконечномерно само по себе и, вдобавок, ранг тензоров неограничен. Алгебра тензоров естественным образом градуирована, как прямая сумма тензоров фиксированного типа. Образующими тензорной алгебры являются векторные поля и 1-формы.

- Для произвольных векторных полей и 1-формы выполняется тождество
$$(\text{Ł}_X\omega)(Y) = (d\omega)(X, Y) + Y\,\omega(X).$$
- Для произвольных тензорных полей S и T выполняется
$$\text{Ł}_X(S \otimes T) = \text{Ł}_X S \otimes T + S \otimes \text{Ł}_X T.$$

Найдем выражение для производной Ли $\text{Ł}_X T$ произвольного тензорного поля типа $(p{,}q)$ вдоль векторного поля X:
$$T = T^{a_1\dots a_p}{}_{b_1\dots b_q} e_{a_1} \otimes \dots \otimes e_{a_p} \otimes h^{b_1} \otimes \dots \otimes h^{b_q}$$
в координатах. Для того чтобы без громоздких вычислений понять, как примерно будет выглядеть производная Ли тензорного поля при произвольных p и q, рассмотрим сначала простой случай смешанного тензорного поля W типа (1,1):
$$W = W^a{}_b\, e_a \otimes h^b = W^a{}_b\, \partial_a \otimes dx^b,$$

$$\begin{aligned}\text{Ł}_X W = \text{Ł}_X(W^a{}_b\, \partial_a) \otimes dx^b + W^\alpha{}_b\, \partial_a \otimes \text{Ł}_X dx^b = \\ = W^a{}_b X^c [\partial_c, \partial_a] \otimes dx^b + X^c(\partial_c W^a{}_b)\, \partial_a \otimes dx^b - \\ - W^c{}_b(\partial_c X^a)\, \partial_a \otimes dx^b + W^a{}_c(\partial_b X^c)\, \partial_a \otimes dx^b.\end{aligned}$$

Отсюда окончательно получаем
$$\text{Ł}_X W := \text{Ł}_X W^a{}_b\, \partial_a \otimes dx^b,$$
где
$$\text{Ł}_X W^a{}_b = X^c\, \partial_c W^a{}_b - W^c{}_b\, \partial_c X^a + W^a{}_c\, \partial_b X^c.$$

Теперь нетрудно понять, что для произвольного тензорного поля производная Ли в координатах будет иметь следующий вид:
$$\begin{aligned}\text{Ł}_X T^{a_1\dots a_p}{}_{b_1\dots b_q} = X^c\, \partial_c T^{a_1\dots a_p}{}_{b_1\dots b_q} - \partial_c X^{a_1}\, T^{c a_2\dots a_p}{}_{b_1\dots b_q} - \dots - \\ - \partial_c X^{a_p}\, T^{a_1\dots a_{p-1} c}{}_{b_1\dots b_q} + \partial_{\nu_1} X^c\, T^{a_1\dots a_p}{}_{c b_2\dots b_q} + \dots + \partial_{\nu_q} X^c\, T^{a_1\dots a_p}{}_{b_1\dots b_{q-1} c}.\end{aligned}$$

Если вам данная формула не очевидна, проверьте ее самостоятельно, используя определение.

Задача 6.5. Вариация формы для тензорного поля типа $(p{,}q)$ определяется
$$\delta_X T^{a_1\dots a_p}{}_{b_1\dots b_q}(x) = T'^{a_1\dots a_p}{}_{b_1\dots b_q}(x) - T^{a_1\dots a_p}{}_{b_1\dots b_q}(x)$$
с точностью до линейных членов по X, а $T'^{a_1\dots a_p}{}_{b_1\dots b_q}(x)$ выражается из тензорного закона преобразования координат вида; само преобразование координат имеет вид: $x'^a = x^a + X^a(x)$. Найдите в явном виде выражение для вариации формы $\delta_X T^{a_1\dots a_p}{}_{b_1\dots b_q}(x)$ тензорного поля. Как связан полученный результат с выражением для производной Ли тензорного поля вдоль X?

Ближайшей нашей целью будет дать другое (геометрическое) определение производной Ли. Для этого необходимо посмотреть на интегрирование векторных полей. Начнем с того, что определим прямой и обратный образы тензорных полей при гладком отображении φ между многообразиями.

6.4. **Гладкие отображения многообразий.** *Гладким отображением между многообразиями* $\varphi : M \to N$ размерностей m и n называется непрерывное отображение, которое в окрестности каждой точки, в достаточно малых координатных картах, выглядит как гладкое отображение области из $\mathbb{R}^m$ в область в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим гладкое отображение $\varphi : M \to N$ между многообразиями M и N. Для гладкой функции $f : N \to \mathbb{R}$ на многообразии N можно определить *обратный образ* $\varphi^\star f$ при отображении φ как отображение $M \to \mathbb{R}$ согласно формуле

$$(\varphi^\star f)(p) = f(q),$$

где $p \in M$, $q = \varphi(p) \in N$. Вводя локальные координаты x^a на многообразии M и координаты y^b на многообразии N, получаем

$$(\varphi^\star f)(x) = f(\varphi(x)) = f(y(x)).$$

Формально, действие обратного образа $\varphi^\star$ на функцию f можно записать в виде композиции: $\varphi^\star f = f \circ \varphi$.

Пусть отображение $\varphi : M \to N$ является гладким отображением между многообразиями M и N с обратным гладким, т.е. является диффеоморфизмом[1]. Рассмотрим векторное поле на M: $X \in \mathrm{Vect}(M)$. Тогда можно определить *прямой образ векторного поля* $\varphi_\star X \in \mathrm{Vect}(N)$ при отображении φ:

$$(\varphi_\star X)(f)|_{\varphi(p)} = X(\varphi^\star f)|_p.$$

Формально это можно записать следующим образом:

$$(\varphi_\star X)(f) = X(f \circ \varphi) = X \circ \varphi^\star f, \quad \varphi_\star X = X \circ \varphi^\star.$$

В координатной карте прямой образ векторного поля

$$(\varphi_\star X)(f)|_{y(x)} = X^a \frac{\partial}{\partial x^a}(f \circ \varphi) = X^a \frac{\partial y^b}{\partial x^a}\frac{\partial f}{\partial y^b},$$

где $X = X^a \frac{\partial}{\partial x^a}$, $\varphi_\star X = (\varphi_\star X)^a \frac{\partial}{\partial y^a}$. Значит, координаты векторного поля $\varphi_\star X$ представляются в виде

$$(\varphi_\star X)^a = \frac{\partial y^a}{\partial x^b}\, X^b.$$

Задача 6.6. Проверьте, что для гладкой функции $f : U \to \mathbb{R}$ отображение $f_\star$ действительно совпадает с ее дифференциалом df. Здесь $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое.

Задача 6.7. Приведите пример гладкого отображения $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которое является инъективным, но переводит гладкие векторные поля в негладкие.

Задача 6.8. Доказать, что прямой образ $\varphi_\star$ согласован со структурой алгебры Ли в пространстве векторных полей, то есть $\varphi_\star[X,Y] = [\varphi_\star X,\varphi_\star Y]$.

Определим *обратный образ дифференциальной формы* $\varphi^\star\omega$ при гладком отображении многообразий $\varphi : M \to N$. Для всякого гладкого отображения $\varphi : M \to N$ между гладкими многообразиями определено отображение пространств дифференциальных форм

$$\varphi^\star : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M),$$

[1] Заметим, что если гладкое отображение φ является диффеоморфизмом на свой образ, то тогда на образе $\varphi(M)$ корректно определен и прямой образ всего векторного поля X (а не только отдельных векторов) при данном отображении. В таком случае каждая $q \in N$ является образом единственной точки $p \in M$, в качестве вектора в точке q мы однозначно выбираем $Y(q) = \varphi_\star(X(p))$. Гладкая зависимость Y от q гарантируется гладкой зависимостью p от q, так как по определению диффеоморфизма обратное отображение φ^{-1} тоже гладкое.

Если же отображение φ не является инъективным, то прямой образ векторного поля при таком отображении невозможно определить, так как в одну точку могут прийти два разных вектора.

действующее (для некоторых векторов $X_1, \dots, X_k$ в одной и той же точке $p \in M$) по формуле:

$$\varphi^\star\omega(X_1, \dots, X_k) = \omega\left(\varphi_\star X_1, \dots, \varphi_\star X_k\right).$$

В этом определении следует понимать, что когда левая часть вычисляется в точке $p \in M$, то правая вычисляется в точке $q = \varphi(p) \in N$. Также важно понимать, что в отличие от векторных полей, для дифференциальных форм (в частности, для функций) любое гладкое отображение порождает отображение пространства дифференциальных форм в обратную сторону.

Задача 6.9. Покажите, что взятие обратного образа от дифференциальных форм коммутирует с внешним умножением и внешним дифференцированием,

$$\varphi^\star(\omega \wedge \lambda) = \varphi^\star\omega \wedge \varphi^\star\lambda, \quad \varphi^\star(d\omega) = d(\varphi^\star\omega).$$

Чтобы лучше понять абстрактную формулу для обратного образа дифференциальной формы при гладком отображении многообразий, рассмотрим простой пример и выпишем в явном виде действие $\varphi^\star$ на дифференциальные формы высшей степени в областях $\mathbb{R}^n$, где φ — криволинейная замена координат. Начнем с тривиального частного случая, когда $n = 2$ ($\mathbb{R}^2$). Общий вид формы высшей степени в координатах дается выражением

$$\nu = f(y)\, dy_1 \wedge dy_2.$$

Ее обратный образ

$$\begin{aligned}\varphi^\star\nu = f(y(x)) \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x^a} dx^a \wedge \frac{\partial y_2}{\partial x^b} dx^b =& \\ = f(y(x)) \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} dx_2\right) \wedge \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} dx_2\right) =& \\ = f(y(x)) \cdot \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right) dx_1 \wedge dx_2 = f(y(x)) \cdot \det\left(\frac{\partial y^a}{\partial x^b}\right) dx_1 \wedge dx_2.&\end{aligned}$$

В случае произвольного n, как нетрудно понять, в правой части также появится якобиан замены $\mathcal{J}_\varphi = \det(\partial y^a / \partial x^b)$, то есть

$$\varphi^\star\nu = f(y(x)) \cdot \det\left(\frac{\partial y^a}{\partial x^b}\right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

где $\nu = f(y)\, dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$.

Задача 6.10. Докажите, что для двух гладких отображений открытых подмножеств евклидова пространства, $\varphi : U \to V$ и $\psi : V \to W$, имеет место соотношение $(\psi \circ \varphi)^\star = \varphi^\star \circ \psi^\star$.

6.5. **Интегрирование векторных полей.** Перед тем как дать геометрическое определение производной Ли, обсудим кратко интегрирование векторных полей. Пусть на многообразии M задано векторное поле X. Рассмотрим задачу о нахождении на M *интегральных кривых* $\gamma(t)$ векторного поля X, то есть кривых, касательные векторы к которым в каждой точке совпадают с векторным полем X. При этом нас будет интересовать задача о нахождении интегральной кривой $\gamma : [a,b] \to M$, проходящей через точку $p \in M$. По сути речь идет о решении дифференциального уравнения

$$\frac{d\gamma}{dt} = X_{\gamma(t)}, \quad \gamma(t_0) = p, \quad t_0 \in [a,b].$$

Здесь производную кривой по t можно определить как прямой образ вектора $\partial/\partial t$ в точке $\gamma(t)$, то есть

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma_\star\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

или, что то же самое, как дифференцирование функций на M в точке $\gamma(t)$:

$$\gamma_\star\partial/\partial t(f) = \partial/\partial t\left(f\circ\gamma(t)\right) = \frac{d}{dt}f(\gamma(t)).$$

Вводя координаты на многообразии нетрудно понять, что локально это и есть нахождение решения автономного дифференциального уравнения

$$\frac{dx^a(t)}{dt} = X^a(\gamma(t)), \quad \gamma(t_0) = p, \quad t_0\in[a,b].$$

Предполагается, что X не зависит явно от t. Если векторному полю X разрешить зависеть от t явно, то это уже будет нахождение решения неавтономного уравнения. Далее нас будет интересовать только автономный случай, когда векторное поле не зависит явно от t.

Сформулируем и докажем несколько важных для дальнейшего теорем. Начнем с *теоремы о выпрямлении векторного поля* на многообразии.

Теорема 6.11. Если векторное поле X в точке $p\in M$ не равно нулю, то в некоторой криволинейной системе координат $x^1,\dots,x^n$ в окрестности точки p оно может быть выпрямлено, то есть приведено к виду $X = \partial_1 \equiv \partial/\partial x^1$.

Доказательство. Рассмотрим гладкую функцию y в некоторой окрестности точки p, для которой $X(y)\neq 0$ в p и $y(p) = 0$, условие $X(y)\neq 0$ будет сохраняться в некоторой окрестности p. Дополним y до системы координат в $y, x^2,\dots,x^n$ и пока будем работать в некоторой окрестности p в этих координатах. Рассмотрим решения дифференциального уравнения

$$\dot{x}^a(t) = X^a(x(t))$$

с начальным условием $x(0) = (0, x^2,\dots,x^n)$, обозначим также через Y гиперплоскость $Y = \{y = 0\}$. В итоге решение этого уравнения гладко зависит от начальных условий $x^2,\dots,x^n$ и «времени» t, которое мы возьмем за координату x^1 вместо y. Это действительно координаты в достаточно малой окрестности p, так как отображение, порождаемое решениями дифференциального уравнения, $(t,x^2,\dots,x^n)\mapsto x(t,0,x^2,\dots,x^n)$ имеет невырожденный дифференциал в нуле; его частные производные по $x^2,\dots,x^n$ дают базис в T_pY, а частная производная по $x^1 = t$ равна $X(p)\notin T_pY$ (так как $X(y)\neq 0$). В построенной системе координат $(x^1,\dots,x^n)$, очевидно, решения уравнения $\dot{x}(t) = X(x(t))$ с произвольными начальными условиями (когда уже не обязательно $x^1\equiv t$) имеют вид $x^1 = t + \mathrm{const}$, $x^2 = \mathrm{const},\dots,x^n = \mathrm{const}$, а само векторное поле $X = \partial/\partial x^1$. □

Эта теорема позволила бы нам в нужный момент (к примеру) быстро вывести *формулу Картана* для производной Ли из ее геометрического определения. Хотя мы в нашем конспекте это сделаем другим путем, теорема 6.11 о выпрямлении векторного поля остается весьма полезным вычислительным инструментом дифференциальной геометрии.

Теперь вернемся к глобальному интегрированию векторных полей на многообразиях и рассмотрим вопрос о возможности продолжения интегральной кривой векторного поля. Следующая теорема — теорема 6.12 — конструирует максимальную интегральную кривую векторного поля, т.н. *непродолжаемое решение дифференциального уравнения*, а теорема 6.13 поясняет, почему максимальное решение является непродолжаемым.

Теорема 6.12. Пусть на многообразии M без края задано векторное поле X. Тогда $\forall t_0$ и точки $p \in M$ $\exists$ интегральная кривая γ, определенная на некотором интеравале (a,b), содержащем t_0 и удовлетворяющая условию $\gamma(t_0) = p$, максимальная в том смысле, что любая другая интегральная кривая γ' векторного поля X, удовлетворяющая тому же условию $\gamma'(t_0) = p$, является ограничением γ на некоторый интервал $(a',b') \subseteq (a,b)$, то есть

$$\gamma' = \gamma|_{(a',b')}.$$

Доказательство. Без ограничения общности положим $t_0 = 0$ и рассмотрим поведение решений задачи Коши $\gamma(0) = p$ для неотрицательных значений «времени». Пусть кривые $\gamma_1 : [0, t_1) \to M$ и $\gamma_2 : [0, t_2) \to M$ — два таких решения, определенные на разных полуинтервалах. Покажем, что γ_1 и γ_2 будут устроены так, что γ_2 будет продолжением γ_1 при $t_1 < t_2$. Действительно, если это не так, то достаточно рассмотреть $t_\star \in [0, t_1)$ как точную нижнюю грань моментов «времени», где решения различаются. Из открытости множества моментов «времени», на котором решения различаются, мы делаем вывод, что в $t_\star$ решения еще не различались, $\gamma_1(t_\star) = \gamma_2(t_\star) = p_\star$. Тогда можно использовать теорему существования и единственности для задачи Коши с начальным условием $\gamma(t_\star) = p_\star$ и заметить, что γ_1 и γ_2 на самом деле не должны различаться еще некоторое «время» после $t_\star$, приведя таким образом к противоречию с выбором $t_\star$. Чтобы построить максимальное решение при $t > 0$, рассмотрим объединение всех промежутков $[0, \tau)$, для которых существует интегральная кривая $\gamma_\tau : [0, \tau) \to M$ с заданным начальным условием $\gamma_\tau(0) = p$, это будет некоторый промежуток $[0, T)$, где T — это точная верхняя грань всевозможных τ. Определим $\gamma : [0, T) \to M$ следующим образом. Для любого $t \in [0, T)$ рассмотрим в силу определения T как точной верхней грани число $\tau \in (t, T)$ и соответствующую интегральную кривую $\gamma_\tau : [0, \tau) \to M$. Последняя определена в t и мы полагаем $\gamma(t) = \gamma_\tau(t)$. В силу вышесказанного это определение не зависит от выбора $\tau \in (t, T)$. Построенная кривая γ удовлетворяет начальному условию $\gamma(0) = p$ и является интегральной кривой, так как в окрестности каждой своей точки она совпадает с одной из γ_τ.

По построению γ, любое решение задачи Коши с начальным условием $\gamma(0) = p$ для неотрицательных значений t является ограничением γ некоторый полуинтервал $[0, T') \subseteq [0, T)$. Аналогично можно максимально продолжить решение в область отрицательных t и собрать из двух максимальное непродолжаемое решение для $t < 0$ и $t > 0$ одновременно. $\square$

Теорема 6.13. Пусть на многообразии M без края задано векторное поле X, а кривая $\gamma : (a,b) \to M$ — его максимальная интегральная кривая, не продолжающаяся за пределы интервала (a,b). Если b конечно, то кривая γ покидает любой компакт при $t \to b - 0$ в следующем смысле: $\forall$ компактного множества $K \subseteq M$ $\exists\, t_K \in (a,b) : \gamma(t) \notin K$ при $t > t_K$. Аналогичное утверждение формулируется для конечного a.

Доказательство. Без ограничения общности рассмотрим поведение кривой γ в пределе $t \to b - 0$ по отношению к компактному $K \subseteq M$ при конечном b. Предполагая противное, что кривая γ бывает в K при t, сколь угодно близких к b, мы должны обнаружить ее предельную точку $p_0 \in K$, так что для любой окрестности $U(p_0) \ni p_0$ оказывается $\gamma(t) \in U(p_0)$ при t, сколь угодно близких к b.

Теперь перейдем в некоторую окрестность $W(p_0)$, которая является координатной картой. Теорема о непрерывной зависимости решения от параметра показывает, что найдутся окрестности $U(p_0) \subset V(p_0) \subset W(p_0)$ и числа $0 < \delta < \varepsilon$, такие что при попадании интегральной кривой в $U(p_0)$ в момент «времени» в пределах $(b-\delta, b+\delta)$, гарантируется, что в моменты «времени», отличающиеся от момента попадания не более чем на ε, интегральная кривая будет продолжаться в $V(p_0)$. Но так как p_0 — предельная точка и кривая действительно попадает в $U(p_0)$ в моменты «времени», сколь угодно близкие к b, то оказывается, что она будет продолжаться и за момент «времени» b как минимум на величину $\varepsilon - \delta > 0$, что противоречит выбору b. $\square$

Следствие 6.14. Пусть на многообразии M без края задано векторное поле X с компактным носителем. Тогда все интегральные кривые этого векторного поля продолжаются по времени неограниченно в обе стороны.

По следствию, решая задачу Коши, можно сопоставить векторному полю X семейство диффеоморфизмов $\varphi_{t,t_0} : M \to M$, удовлетворяющее соотношению

$$\frac{d}{dt}\varphi_{t,t_0}(p) = X_{\varphi_{t,t_0}}, \quad \varphi_{t_0,t_0} = \mathrm{id}_M.$$

Если векторное поле зависит от «времени» гладко, то и φ_{t_0,t_0} будет зависеть от «времени» гладко. Смысл $\varphi_{t,t_0}(p)$ можно объяснить как нахождение интегральной кривой $\gamma(t)$ векторного поля X с начальным условием $\gamma(t_0) = p$ и определение $\varphi_{t,t_0}(p) = \gamma(t)$.

Теорема 6.15. Для возможно зависящего от «времени» векторного поля X на многообразии без края M и соответствующих ему диффеоморфизмов φ_{t,t_0} верна следующая формула композиции

$$\varphi_{t_2,t_1} \circ \varphi_{t_1,t_0} = \varphi_{t_2,t_0}.$$

Доказательство. Посмотрим на действия левой и правой части на точку $p_0 \in M$. Точка $p_1 = \varphi_{t_1,t_0}(p_0)$ — это положение решения дифференциального уравнения в момент «времени» t_1 при условии, что в момент «времени» t_0 оно находилось в точке p_0. Точка $p_2 = \varphi_{t_2,t_1}(p_1)$ тогда соответствует положению того же решения дифференциального уравнения в момент «времени» t_2. Но тогда $p_2 = \varphi_{t_2,t_0}(p_0)$ по определению и формула верна в $p_0 \in M$. $\square$

В частности, выполняется

$$\varphi_{t_0,t_1} \circ \varphi_{t_1,t_0} = \varphi_{t_0,t_0} = \mathrm{id}_M, \quad \varphi_{t_1,t_0} \circ \varphi_{t_0,t_1} = \varphi_{t_1,t_1} = \mathrm{id}_M,$$

и это показывает, что φ_{t,t_0} имеет гладкое обратное отображение и действительно является диффеоморфизмом.

В автономном случае, когда наше векторное поле не зависит явно от «времени», нетрудно заметить, что если $\gamma(t)$ является решением дифференциального уравнения, то и $\gamma(t+\tau)$ тоже является решением. Значит,

$$\varphi_{t,t_0} = \varphi_{t+\tau,t_0+\tau}, \quad \forall \tau.$$

Без потери общности веберем τ таким образом, чтобы $\varphi_{t,t_0} = \varphi_{t,0} \equiv \varphi_t$; тогда $\varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2} = \varphi_{t_1+t_2}$, в частности $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$. Значит, векторное поле порождает на многообразии *однопараметрическую группу диффеоморфизмов.*

6.6. **Геометрическое определение производной Ли.** В терминах диффеоморфизмов φ_t можно дать другое, т.н. *геометрическое определение производной Ли.* Построим его последовательно, начиная с производной Ли вдоль векторного поля от гладких функций. Опеределим производную Ли вдоль векторного поля X гладкой функции f через обратный образ функции при отображении φ_t по формуле

$$Ł_X f = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t^\star f - f}{t} = \frac{d}{dt}\, \varphi_t^\star f\,|_{t=0}\,.$$

В локальных координатах

$$Ł_X f = \left.\frac{df(\varphi_t(x))}{dt}\right|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^a}\frac{dx^a}{dt} = X^a \frac{\partial f}{\partial x^a} = X(f) = df(X).$$

Здесь мы воспользовались координатной записью дифференциального уравнения на нахождение интегральной кривой и учли, что $\dot{x}^a = X^a$.

Видно, что производная Ли от функции есть простое дифференцирование f по направлению X, что в точности совпадает с выражением для производной Ли от формы нулевой степени (то есть гладкой функции), полученным из формулы Картана — алгебраического определения производной Ли.

Производная Ли векторного поля Y вдоль векторного поля X определяется абсолютно аналогично

$$Ł_X Y = \frac{d}{dt}\, \varphi_t^\star Y\,|_{t=0}\,, \qquad \varphi_t^\star Y = (\varphi_{-t})_\star\, Y.$$

Вычислим производную Ли векторного поля Y вдоль другого — X в координатной карте по определению. Для начала найдем производную Ли векторного поля $Y = \partial/\partial x^a$ вдоль X:

$$Ł_X\, \partial/\partial x^a = \frac{d}{dt}\, (\varphi_{-t})_\star\, \partial/\partial x^a\,\Big|_{t=0}\,.$$

Прямой образ $(\varphi_{-t})_\star\, \partial/\partial x^a$ определяется, как известно, по формуле

$$\left[(\varphi_{-t})_\star\, \partial/\partial x^a\right] f = \frac{\partial}{\partial x^a}(f \circ \varphi_{-t}).$$

Кроме того, в локальных координатах

$$\varphi_t(x^b) = x^b(t) = x^b(0) + tX^b + \mathcal{O}(t^2), \quad t \to 0.$$

Значит,

$$\varphi_{-t}(x^b) = x^b(0) - tX^b + \mathcal{O}(t^2), \quad t \to 0.$$

Отсюда при $t \to 0$ находим

$$\left[(\varphi_{-t})_\star\, \partial/\partial x^a\right] f = \partial_b f \left(\delta_a^b - t\, \partial_a X^b + \mathcal{O}(t^2)\right),$$

или, окончательно,

$$Ł_X\, \partial/\partial x^a = \frac{d}{dt}\, (\varphi_{-t})_\star\, \partial/\partial x^a\,\Big|_{t=0} = -\partial_a X^b\, \partial/\partial x^b.$$

Заметим, что согласно геометрическому определению производной Ли от функций и векторных полей должно выполняться обычное правило Лейбница

$$Ł_X(fY) = f\, Ł_X Y + Y\, Ł_X f,$$

откуда

$$Ł_X \left(f \cdot \partial/\partial x^a\right) = f \cdot Ł_X\, \partial/\partial x^a + (Ł_X f)\, \partial/\partial x^a = f \cdot Ł_X \partial/\partial x^a + X(f)\, \partial/\partial x^a.$$

Из последнего тождества можно легко выписать выражение для производной Ли произвольного векторного поля $Y = Y^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ вдоль векторного поля X:

$$Ł_X Y = -Y^a \frac{\partial X^b}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial x^b} + X^a \frac{\partial Y^b}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial x^b},$$

то есть $Ł_X Y^a = X^b\,\partial_b Y^a - Y^b\,\partial_b X^a$, что в точности совпадает с выражением для производной Ли одного векторного поля вдоль другого, которое мы получили из формулы Картана.

Геометрическое определение производной Ли вдоль векторного поля X от дифференциальных форм строится абсолютно аналогично. Так, для произвольной дифференциальной формы ω имеем

$$Ł_X\omega = \frac{d}{dt}\,\varphi_t^\star\omega\,|_{t=0}\,.$$

Непосредственно из определения следует справедливость обычного правила Лейбница для внешнего умножения форм (если это не очевидно, докажите данное утверждение самостоятельно):

$$Ł_X(\omega\wedge\lambda) = Ł_X\omega\wedge\lambda + \omega\wedge Ł_X\lambda.$$

Найдем для примера производную Ли от дифференциальной 1-формы $\omega = \omega_a\,dx^a$ из ее геометрического определения. Для этого поступим также, как для случая векторного поля и вычислим сначала

$$Ł_X\,dx^a = \frac{d}{dt}\,\varphi_t^\star\,dx^a|_{t=0}\,.$$

Как мы уже показывали ранее, когда рассматривали производную Ли от векторных полей,

$$\varphi_t(x^a) = x^a(t) = x^a(0) + tX^a + \mathcal{O}(t^2), \quad t\to 0.$$

Значит, при $t\to 0$,

$$\varphi_t^\star\,dx^a = \big(\delta^a_b + t\,\partial_b X^a + \mathcal{O}(t^2)\big)\,dx^b.$$

Из вышесказанного получаем

$$Ł_X\,dx^a = \frac{d}{dt}\,\varphi_t^\star\,dx^a|_{t=0} = \partial_b X^a\,dx^b.$$

Имея в виду выполнение правила Лейбница, находим, что производная $Ł_X(f\,dx^a) = f\cdot Ł_X\,dx^a + X(f)\,dx^a$. Тогда компоненты производной Ли от произвольной 1-формы вида $\omega = \omega_a\,dx^a$:

$$Ł_X\omega_a = X^b\,\partial_b\omega_a + \omega_b\,\partial_a X^b,$$

что в точности совпадает с выражением для производной Ли для 1-формы, полученной из формулы Картана. Таким образом мы показали, что геометрическое определение производной Ли эквивалентно ее алгебраическому определению — формуле Картана, ведь для доказательства этого факта достаточно было рассматривать только формы нулевой и первой степени, так как обе части равенства удовлетворяют правилу Лейбница без знаков относительно внешнего умножения.

Для полноты картины осталось определить производную Ли произвольного тензорного поля T вдоль векторного поля X. Пусть на многообразии M задано векторное поле X и тензорное поле T. Тогда можно определить производную Ли от T вдоль векторного поля X по формуле

$$Ł_X T = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t^\star T - T}{t} = \frac{d}{dt}\,\varphi_t^\star T\,|_{t=0}\,,$$

причем из этого определения понятно, что должно выполняться правило Лейбница для тензорного произведения

$$Ł_X(S\otimes T) = Ł_X S\otimes T + S\otimes Ł_X T.$$

6.7. **Гамильтоновы векторные поля.** В классической нерелятивистской механике фазовое пространство представляет собой *симплектическое*[1] *многообразие* M, параметризованное координатами (x^i, p_j), где x^i — обобщенные координаты, а p_j — обобщенные импульсы. Причем, гамильтониан механической системы $H(x,p)$ является функцией на многообразии M; *уравнения Гамильтона* в координатах

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}.$$

Интересно отметить, что симплектические многообразия образуют категорию. Морфизм между многообразиями (M_1,ω_1) и (M_2,ω_2), также называемый *симплектоморфизмом*, это отображение $\varphi : M_1 \to M_2$, такое, что $\omega_1 = \varphi^\star\omega_2$. Когда $M_1 = M_2$ и $\omega_1 = \omega_2$, понятие симплектоморфизма обобщает понятие *канонического преобразования.*

Фазовое пространство гамильтоновой механической системы наделено дополнительной структурой — *скобками Пуассона*:

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x^i}.$$

Эволюция наблюдаемой $f(x,p)$ на фазовом пространстве определяется скобками Пуассона согласно

$$\dot{f} = \{f,H\}.$$

В связи в вышесказанным, гамильтонову механику можно сформулировать в терминах дифференциальных форм и векторных полей. Вкратце, необходим механизм, который превращает функцию $H : M \to \mathbb{R}$ в векторное поле v_H; при этом, траекториями частиц в фазовом пространстве M являются интегральные кривые, порожденные векторным полем v_H. Этот механизм довольно простой.

Дифференциальная форма второй степени ω на симплектическом многообразии M дает нам отображение $\omega^\flat : T_pM \to T_p^\star M$, которое на самом деле является изоморфизмом (в силу невырожденности симплектической формы ω). В таком случае для гамильтониана $H : M \to \mathbb{R}$ существует единственное *гамильтоново векторное поле* v_H, определяемое из формулы

$$\imath_{v_H}\omega = -dH, \quad \omega = \frac{1}{2}\omega_{ab}\, dx^a \wedge dx^b.$$

Это уравнение может быть переписано в терминах локальных координат x^a на многообразии M следующим образом:

$$v_H^a\omega_{ab} = -\partial_b H.$$

Определяя ω^{ab} из равенства $\omega^{ab}\omega_{bc} = \delta^a_c$, получаем, что координаты векторного поля $v_H^a = -\omega^{ba}\,\partial_b H = \omega^{ab}\,\partial_b H$. А как известно, интегральные кривые, порожденные векторным полем v_H, удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\dot{x}^a = v_H^a = \omega^{ab}\,\partial_b H.$$

Данное равенство представляет собой общую форму канонических уравнений Гамильтона. Они сводятся к привычным нам уравнениям Гамильтона, если записать $x^a = (x^i, p_j)$, а симплектическую форму ω^{ab} как

$$\omega^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[1] *Симплектическое многообразие* — это многообразие M с формой $\omega \in \Omega^2(M)$, которая *замкнута* ($d\omega = 0$) и невырожденна как билинейная форма, то есть если для некоторого вектора $v \in T_pM$ оказывается $\omega(v,w) = 0$ для всех $w \in T_pM$, то обязательно должно быть $v = 0$.

Скобки Пуассона можно определить при помощи аналогичной процедуры, определяя векторные поля v_f и v_g, порождаемые функциями f и g на симплектическом многообразии M из уравнения

$$\imath_{v_f}\omega = -df, \quad \imath_{v_g}\omega = -dg.$$

Значит $\{f,g\}$ могут быть записаны как

$$\{f,g\} = -\imath_{v_f}\omega(v_g) = \omega(v_g, v_f) = -\omega(v_f, v_g),$$

или, в локальных координатах, $\{f,g\} = \omega^{ab}\,\partial_a f\,\partial_b g$. Перепишем скобки Пуассона в виде

$$\{f,g\} = -\imath_{v_f}\omega(v_g) = df(v_g) = v_g(f).$$

Тогда эволюция некоторой наблюдаемой $f(x,p)$ на фазовом пространстве определяется формулой

$$\frac{df}{dt} = \{f,H\} = v_H(f) = \text{Ł}_{v_H} f.$$

Это говорит нам о том, что производная Ли вдоль v_H порождает эволюцию наблюдаемой f во времени[1].

Задача 6.16. Проверить, что на симплектическом многообразии операция скобки Ли векторных полей может быть поднята до операции скобок Пуассона функций: $[v_f,v_g] = v_{\{f,g\}}$.

В заключение рассмотрения гамильтоновых векторных полей на симплектических многообразиях посмотрим немного пристольней на требование замкнутости симплектической формы ω.

Задача 6.17. Покажите, что условие замкнутости симплектической формы необходимо, чтобы для скобок Пуассона выполнялось тождество Якоби.

Кроме того, условие замкнутости симплектической формы гарантирует, что сама симплектическая форма ω инвариантна по отношению к гамильтонову фазовому потоку, в том смысле, что

$$\text{Ł}_{v_H}\omega = 0.$$

Действительно,

$$\text{Ł}_{v_H}\omega = \imath_{v_H} d\omega + d\imath_{v_H}\omega = \imath_{v_H} d\omega - d^2 H = 0.$$

Значит, гамильтонов фазовый поток является симплектоморфизмом, то есть диффеоморфизмом $M \to M$, сохраняющим симплектическую структуру.

---

[1] Также интересно отметить, что на симплектическом многообразии гамильтоново векторное поле, соответствующее скобкам Пуассона двух гамильтоновых векторных полей, является их коммутатором, то есть операция скобки Ли векторных полей может быть поднята до операции скобок Пуассона функций: $[v_f,v_g] = v_{\{f,g\}}$.

7. Римановы многообразия

Для внутренних нужд дифференциальной геометрии и для нужд теоретической физики часто бывает полезно наделить многообразие дополнительной структурой. Один из способов это сделать мы рассматривали в заключительном параграфе прошлого раздела, когда говорили о фазовом пространстве гамильтоновой системы. Последнее мы наделяли невырожденной замкнутой 2-формой (симплектической формой), которая по своей природе является кососимметричной билинейной формой. Другая, не менее естественная структура на многообразии — это *(полу)риманова структура*, то есть симметричная билинейная форма на касательных векторах.

7.1. **(Полу)риманова структура многообразия.** Более строго, под римановой структурой на гладком многообразии M понимают задание положительно определенной квадратичной формы $\mathfrak{g}_p$ на касательном пространстве T_pM в каждой точке M, гладко зависящее от точки $p \in M$, или, другими словами, риманова структура представляет собой ковариантное тензорное поле второго ранга, которое является симметричным, невырожденным и положительно определенным в каждой точке многообразия; полуриманова структура (или *индефинитная метрика*) — это задание невырожденной, но необязательно положительно определенной квадратичной формы на TM.

О простейшем из примеров римановых многообразий вы уже знаете из линейной алгебры — это евклидово пространство со стандартной евклидовой структурой $\mathfrak{g}_E$ (скалярным произведением) на нем:

$$\mathfrak{g}_E = \delta_{ab}\, dx^a \otimes dx^b, \quad \mathfrak{g}_E(X,Y) := (X \cdot Y) = \delta_{ab}\, dx^a \otimes dx^b(X,Y) = X_a Y^a.$$

В общем случае, выбирая на многообразии M локальные координаты x^a, риманову или полуриманову структуры можно записать как

$$\mathfrak{g} = g_{ab}(x)\, dx^a \otimes dx^b.$$

где функции g_{ab} гладкие и в любой точке составляют симметричную невырожденную (и положительно определенную в римановом случае) матрицу $\hat{g}^a{}_b$, которая в линейной алгебре называется *матрицей Грама*. Иначе это можно выразить формулами

$$\mathfrak{g}(X,Y) = g_{ab}\, dx^a \otimes dx^b(X,Y) = g_{ab}\, X^a Y^b, \quad g_{ab} = \mathfrak{g}\left(\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^b}\right).$$

Ясно, что в случае стандартной римановой структуры $\mathfrak{g}_E$ на евклидовом пространстве компоненты матрицы Грама постоянны (не зависят от координат) и равны δ^a_b, то есть матрица Грама представляет собой единичную матрицу.

Можно доказать, что на любом гладком многообразии существует риманова структура. Для этого достаточно взять локально конечное разбиение единицы $\{\rho_a\}$, подчиненное картам $\{U_a\}$, в каждой карте построить риманову структуру $\mathfrak{g}_a$ (в координатах это нетрудно) и положить

$$\mathfrak{g} = \sum_a \rho_a \mathfrak{g}_a.$$

Эта сумма будет локально конечна и в любой точке будет давать положительно определенную квадратичную форму, так как сумма неотрицательно определенных квадратичных форм, хотя бы одна из которых положительно определена, будет положительно определена.

Следующая задача показывает, что римановы структуры образуют непустое выпуклое множество.

Задача 7.1. Докажите, что для всяких двух римановых структур $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ на одном и том же многообразии M и $t \in [0,1]$ билинейная форма $\mathfrak{g}'' = (1-t)\mathfrak{g} + t\mathfrak{g}'$ тоже будет римановой структурой.

Если мы имеем дело с *вложенными многообразиями*, то естественным способом получить риманову структуру на вложенном многообразии $M \subset \mathbb{R}^N$ является простое ограничение евклидовой структуры $\mathfrak{g}_E$ с евклидова пространства $\mathbb{R}^N$ на его подмногообразие M. В таком случае, если локальные координаты на M — это x^a, то риманова структура задается в координатах через евклидово скалярное произведение согласно

$$g_{ab} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^a} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^b}.$$

Так, например, *индуцированная метрика*[1] на двумерной сфере $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ имеет диагональный вид

$$g_{11} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = R^2(\cos^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta\sin^2\varphi + \sin^2\theta) = R^2,$$

$$g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = R^2\sin^2\theta, \quad g_{ab} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\theta \end{pmatrix},$$

где R — радиус двумерной сферы, а локальные координаты (θ,φ), определяемые посредством формул: $x = R\sin\theta\cos\varphi$, $y = R\sin\theta\sin\varphi$, $z = R\cos\theta$, корректно задают систему координат на сфере, поскольку, очевидно, выполняется $x^2+y^2+z^2 = R^2$.

Задача 7.2. Рассмотрите эллиплоид $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 = 1$. Покажите, что координаты (x,y,z), определяемые из формул

$$x = 2\sin\theta\cos\varphi, \quad y = 2\sin\theta\sin\varphi, \quad z = \cos\theta,$$

корректно задают систему координат на эллипсоиде. Найдите компоненты римановой метрики g_{ab} в терминах координат (θ,φ).

Для двух римановых многообразий M и N их декартово произведение $M \times N$ можно тоже считать римановым многообразием по формуле

$$\mathfrak{g}_{M\times N}(X,Y) = \mathfrak{g}_M(\pi_\star X, \pi_\star Y) + \mathfrak{g}_N(\sigma_\star X, \sigma_\star Y),$$

где $\pi : M \times N \to M$ и $\sigma : M \times N \to N$ — естественные проекции. В матричном виде на произведении координатных карт $\mathfrak{g}_{M\times N}$ будет просто прямой суммой $\mathfrak{g}_M$ и $\mathfrak{g}_N$, то есть блочной матрицей из двух соответствующих квадратных блоков на диагонали.

Задача 7.3. Проверьте, что евклидова структура на $\mathbb{R}^n$ является произведением n римановых структур на прямой $\mathbb{R}$.

7.2. **Преобразования изометрии.** Поскольку (полу)риманова метрика на многообразии является симметричным ковариантным тензорным полем типа второго ранга, то при замене координат $x \mapsto x'(x)$ компоненты метрики g_{ab} преобразуются согласно

$$g_{ab} = g'_{cd}\frac{\partial x'^c}{\partial x^a}\frac{\partial x'^d}{\partial x^b} := g'_{cd}\,\Lambda^c{}_a\Lambda^d{}_b.$$

[1]Здесь мы назвали риманову структуру на M, полученную как сужение $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_E|_M$, индуцированной *метрикой*. Происхождение такой терминологии, по-видимому, уходит своими корнями в общую теорию относительности, где (полу)риманову структуру обычно называют (полу)римановой метрикой или, просто, метрикой.

Важно отметить, что эта терминология является не самой удачной, ведь в отличие от римановой структуры, полуриманова структура на некотором многообразии, вообще говоря, не порождает никакой метрики в строго математическом смысле этого слова.

С помощью транспонированной матрицы $(\Lambda^{\mathrm{T}})^a{}_b = \Lambda^b{}_a$ преобразование метрики можно записать в матричном виде

$$\hat{g} = \Lambda^{\mathrm{T}} \hat{g}' \, \Lambda.$$

Преобразования координат $x \mapsto x'(x)$, не меняющие вид (полу)римановой метрики: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$, называют *преобразованиями изометрии.* При изометрии

$$\hat{g} = \Lambda^{\mathrm{T}} \hat{g} \, \Lambda,$$

откуда, взяв детерминант, находим $\det \Lambda = \pm 1$.

В качестве примера рассмотрим трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ со стандартной еклидовой структурой на нем: $g_{ab} = \delta_{ab}$ и найдем изометрии евклидовой метрики. Поскольку $g_{ab} = \delta_{ab}$, то есть $\hat{g} = 1$, то изометрии евклидовой метрики удовлетворяют $\Lambda^{\mathrm{T}} \Lambda = 1$. Преобразования, удовлетворяющие данному условию называются ортогональными, а условию $\det \Lambda = 1$ — специальными. Специальные изометрии — это вращения пространства, группа вращений трехмерного евклидова пространства $\mathbb{SO}(3)$, $x'^a = R^a{}_b x^b$, то есть в случае инфинитезимального поворота $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + (\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{r})$ при $\boldsymbol{\phi} \to 0$, и пространственные сдвиги $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{a}$, когда соответственно, $\Lambda^a{}_b = R^a{}_b$ с углом поворота $\boldsymbol{\phi}$ и $\Lambda^a{}_b = \delta^a_b$ при $\boldsymbol{a}$, которое не зависит от координат. Зеркальное отражение пространства $\boldsymbol{r} \mapsto -\boldsymbol{r}$ (символ $\mathbb{P}$) или нечетного числа его осей приводит, очевидно, к $\det \Lambda = -1$, а в общем случае подобные (несобственные) преобразования являются комбинацией вращения с отражением. В итоге, изометрии трехмерного евклидова пространства задаются шестью непрерывными параметрами: три угла поворота вокруг трех независимых осей и три сдвига координат при трансляции вдоль трех независимых осей, неоднородная группа $\mathbb{ISO}(3)$, — а также дискретным преобразованием зеркального отражения $\mathbb{P}$. Преобразования $\mathbb{SO}(3)$ вместе с $\mathbb{P}$ образуют группу $\mathbb{O}(3)$.

7.3. **Риманов объем и длина кривой.** Вместе с (полу)римановой структурой появляется и согласованный с ней способ измерять объемы. Действительно, для (полу)римановой структуры $\mathfrak{g}$ формула

$$\tau_{\mathfrak{g}} = \sqrt{|\det \mathfrak{g}|} \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

где $\det \mathfrak{g}$ подразумевает детерминант матрицы $\hat{g}^a{}_b$, корректно определяет одну и ту же *плотность меры* в любой системе координат. Понятие плотность меры означает величину, которая преобразуется почти как дифференциальная форма высшего ранга, но умножаясь при замене координат на модуль якобиана обратной замены, а не на сам якобиан; такая величина имеет интеграл, не зависящий от системы координат с любой ориентацией.

В случае ориентированного многообразия мы считаем $\tau_{\mathfrak{g}}$ формой высшей степени, положительной относительно выбранной ориентации.

Так как детерминант прямой суммы матриц равен произведению детерминантов исходных матриц, то для риманова объема произведения (например, борелевских) подмножеств $X \subseteq M$, $Y \subseteq N$ выполняется формула

$$\tau_{M \times N}(X \times Y) = \tau_M(X) \cdot \tau_N(Y),$$

это по сути утверждение о детерминанте прямой суммы квадратичных форм (с учетом *теоремы Фубини*). Свойство произведения в некотором смысле обосновывает естественность выбора риманова объема.

Задача 7.4. Найдите выражение для площади двумерной поверхности M в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Используя полученную формулу, посчитайте площадь поверхности (риманов объем) единичной сферы в $\mathbb{R}^3$.

Важным частным случаем риманова объема является функционал длины $\ell(\gamma)$ гладкой кривой $\gamma : [a,b] \to M$ (если рассматривать кривую γ как вложенное в M одномерное многообразие с индуцированной римановой структурой) в римановом многообразии

$$\ell(\gamma) = \int_a^b dt\, \sqrt{\mathfrak{g}(\dot\gamma,\dot\gamma)} = \int_a^b dt\, \sqrt{\mathfrak{g}(X,X)|_{\gamma(t)}},$$

где X — векторное поле, касательное к кривой $\gamma(t)$; или, вводя локальные координаты на многообразии M,

$$\ell(\gamma) = \int_a^b dt\, \sqrt{g_{ab}(x)\,\frac{dx^a}{dt}\frac{dx^b}{dt}}.$$

Говоря о метрических пространствах, как известно, длину кривой определяют с помощью метрики пространства. Для римановой структуры определение длины кривой другое и с его помощью уже можно определить внутреннюю метрику через нижнюю грань длин кривых, соединяющих две данных точки. Тогда риманово многообразие (с положительно определенной римановой структурой) превратится в метрическое пространство.

7.4. **Лоренцевы многообразия.** В математической физике особую роль играют римановы многообразия с полуримановой структурой $\mathfrak{g}$, имеющей *лоренцеву сигнатуру*[1]

$$\operatorname{sign}\mathfrak{g} = (+ - \cdots -).$$

Если на многообразии задана метрика[2] лоренцевой сигнатуры, то будем говорить, что многообразие *лоренцево*. Для лоренцевой метрики скалярное произведение двух векторов $\mathfrak{g}(X,Y)$ может быть положительно, отрицательно или равно нулю, а из условия $\mathfrak{g}(X,X) = 0$ не следует, что $X = 0$. Векторное поле X на лоренцевом многообразии M называют *времениподобным* в точке $x \in M$, если $\mathfrak{g}(X,X) > 0$, *светоподобным* в точке $x \in M$ — если $\mathfrak{g}(X,X) = 0$ и *пространственноподобным* в точке $x \in M$ — если $\mathfrak{g}(X,X) < 0$. Это определение распространяется на область $U \subset M$, если во всех точках $x \in U$ области выполнены соответствующие соотношения.

В теоретической физике лоренцево многообразие M называют обычно *пространством временем*. Причем, оно может быть наделено дополнительно некоторой причинной структурой. Последняя необходима для того, чтобы полевые уравнения движения допускали корректную постановку задачи Коши.

Наиболее распространенным в квантовой теории поля вариантом причинной структуры лоренцева многообразия является требование *глобальной гиперболичности*: лоренцево многообразие $(M,\mathfrak{g})$ называется глобально гиперболическим, если оно допускает существование *поверхности Коши*; под последней понимается *вложенное подмногообразие*

$$\Sigma \subseteq M,$$

такое, что любая времениподобная кривая на M может быть продолжена до времениподобной кривой, пересекающей поверхность Σ ровно в одной точке. Напомним,

[1] *Сигнатурой полуримановой метрики*, заданной на многообразии M, $\dim M = n$, называется пара натуральных чисел (p,q) таких, что $p + q = n$, где p и q — количество, соответственно, положительных и отрицательных чисел, стоящих на диагонали метрики после ее диагонализации в какой-либо точке многообразия $x \in M$. Причем, несложно показать, что сигнатура метрики инвариантна, не зависит от выбора системы координат и точки линейно связного многообразия.

[2] Подчеркнем, что задание метрики на многообразии может быть произвольным. В частности, на одном и том же многообразии можно задать несколько метрик одновременно, причем разной сигнатуры, если такие существуют.

что гладкая кривая $\gamma : [a,b] \to M$ на лоренцевом многообразии называется времениподобной, если касательный вектор $X_t = \gamma_\star(\partial/\partial t)$ к кривой $\gamma(t)$ в каждой точке времениподобен, то есть $\mathfrak{g}(X_t, X_t) > 0$.

Перед тем как пойти дальше, сделаем некоторое замечание относительно обозначений. В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения для координат x^a на пространстве-времени M, $\dim M = n$, с лоренцевой метрикой $\mathfrak{g}$. Латинские индексы $i,j,k,\dots$ пробегают значения $1,2,\dots,n-1$, соответствующие т.н. *пространственным координатам* x^i. Латинские индексы с начала алфавита $a, b, \dots$ в общем случае пробегают значения $0,1,\dots,n-1$, соответствующие *пространственно-временным координатам* $x^a = (x^0, x^i)$; причем символом x^0 обозначена *временная координата* t.

В наших обозначениях компоненты произвольной (полу)римановой метрики $\mathfrak{g}$ можно записать в виде

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{0j} \\ g_{i0} & g_{ij} \end{pmatrix}.$$

Сформулируем и докажем критерий того, что метрика, заданная на некотором многообразии M, имеет лоренцеву сигнатуру.

Теорема 7.5. Пусть в некоторой окрестности $U \subset M$ задана метрика g_{ab} такая, что $g_{00} > 0$. Эта метрика имеет лоренцеву сигнатуру тогда и только тогда, когда матрица

$$g_{ij} - \frac{g_{0i} g_{0j}}{g_{00}}$$

отрицательно определена в каждой точке U.

Доказательство. Достаточно рассмотреть произвольную точку из U. Пусть на U задана метрика g_{ab}, для которой $g_{00} > 0$:

$$\mathfrak{g} = g_{00}\, dx^0 \otimes dx^0 + 2 g_{0i}\, dx^0 \otimes dx^i + g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j, \quad g_{00} > 0.$$

Зафиксируем произвольную точку $p \in U$. Введем вместо x^0 новую координату $\tilde{x}^0$, для которой в точке $p \in U$ выполнено соотношение

$$dx^0 = d\tilde{x}^0 - \frac{g_{0i}}{g_{00}}\, dx^i.$$

В фиксированной точке этого всегда можно добиться линейным преобразованием координат. Тогда метрика примет вид

$$\mathfrak{g} = g_{00}\, d\tilde{x}^0 \otimes d\tilde{x}^0 + \left(g_{ij} - \frac{g_{0i} g_{0j}}{g_{00}} \right) dx^i \otimes dx^j.$$

Если метрика g_{ab} имеет лоренцеву сигнатуру, то существует такая система координат, что в точке p метрика $\mathfrak{g}$ диагональна, причем $g_{00} > 0$, а все остальные диагональные компоненты отрицательны. Поскольку метрика

$$g_{00}\, d\tilde{x}^0 \otimes d\tilde{x}^0 + \left(g_{ij} - \frac{g_{0i} g_{0j}}{g_{00}} \right) dx^i \otimes dx^j$$

связана с диагональной метрикой также невырожденным преобразованием координат, то матрица $g_{ij} - g_{0i} g_{0j}/g_{00}$ отрицательно определена. Обратно, если матрица $g_{ij} - g_{0i} g_{0j}/g_{00}$ отрицательно определена, то дальнейшим линейным преобразованием координат x^i ее всегда можно преобразовать к диагональному виду в фиксированной точке, причем на диагонали будут стоять отрицательные числа. Следовательно, метрика имеет лоренцеву сигнатуру. $\square$

Наиболее ярким примером лоренцева многообразия, которое часто встречается в физических приложениях, является четырехмерное *пространство-время Минковского* $M = \mathbb{R}^{1+3}$, то есть евклидово пространство $\mathbb{R}^4$, на котором в декартовых координатах задана лоренцева метрика вида[1]

$$\eta = \eta_{ab}\, dx^a \otimes dx^b, \quad \eta_{ab} = \eta^{ab} = \operatorname{diag}(+1, -1, -1, -1).$$

Декартовы системы координат в пространстве Минковского называются *инерциальными*.

Легко видеть, что пространство-время Минковского $\mathbb{R}^{1+3}$ представляет собой минимальную модификацию евклидова пространства в сторону замены положительно определенной евклидовой метрики на просто невырожденную. Причем на нем задано две метрики: евклидова и лоренцева. Евклидова метрика задается естественным образом на прямом произведении прямых и определяет топологию $\mathbb{R}^{1+3}$. Лоренцева метрика не является положительно определенной и ее нельзя использовать для определения расстояния в топологическом смысле. Поэтому не следует рассматривать пространство Минковского просто как прямое произведение прямых, на котором задана только метрика Минковского, поскольку евклидова метрика необходима для задания топологии. На самом деле это всегда подразумевается, так как непрерывность функций в пространстве Минковского понимается относительно естественной топологии евклидова пространства.

В пространстве-времени $\mathbb{R}^{1+3}$ векторы X с условием $\mathfrak{g}(X, X) = 0$ (светоподобные векторы) соответствуют движению световых лучей по прямым данного направления. Времениподобные векторы соответствуют возможным движениям релятивистских частиц положительной массы.

7.5. **Символ Леви-Чивита.** Рассмотрим тензорное поле $T_{a_1\dots a_p}(x)$ типа (0,p) на n-мерном многообразии. В общем случае $T_{a_1\dots a_p}$, очевидно, будет иметь n^p независимых компонент. Пусть теперь $T_{a_1\dots a_p}$ антисимметричен относительно перестановки любой пары индексов, т.е. является *полностью антисимметричным*:

$$T_{\dots a_i \dots a_j \dots} = -T_{\dots a_{i-1} a_j a_{i+1} \dots a_{j-1} a_i a_{j+1} \dots}, \quad i \neq j.$$

Ввиду антисимметрии, число независимых компонент тензора будет меньше, чем n^p. Чтобы найти число независимых компонент антисимметричного тензора, заметим, что компоненты с хотя бы двумя одинаковыми индексами равны нулю, а компоненты с одинаковым набором индексов, но взятым в различном порядке может отличаться только знаком. Тогда число независимых компонент антисимметричного тензора равно числу способов выбрать p различных чисел от одного до n, то есть

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Из проведенного выше рассуждения следует, что антисимметричный тензор с n индексами в n-мерном пространстве имеет $C_n^n = 1$, то есть всего одну независимую компоненту. Тогда любой такой тензор можно представить в виде

$$T_{a_1\dots a_n}(x) = T(x) \cdot \varepsilon_{a_1\dots a_n},$$

где $T(x)$ — некоторая функция, а $\varepsilon_{a_1\dots a_n}$ является «базисным» тензором в пространстве антисимметричных тензоров максимального ранга, определенный с точностью

[1] Выбор общего знака в *метрике Минковского* η является условным, и часто используется метрика противоположного знака: $\eta_{ab} = \operatorname{diag}(-1, +1, +1, +1)$.

до нормировки. Зафиксируем эту нормировку следующим условием: $\varepsilon_{12\ldots n} = 1$. Тогда имеем $T(x) = T_{12\ldots n}(x)$.

Антисимметричный тензор максимального ранга, нормированный на единицу называют *символом Леви-Чивита*. Рассмотрим следующее представление для символа Леви-Чивита

$$\varepsilon_{a_1\ldots a_n} = \det \begin{pmatrix} \delta^1_{a_1} & \delta^2_{a_1} & \ldots & \delta^n_{a_1} \\ \delta^1_{a_2} & \delta^2_{a_2} & \ldots & \delta^n_{a_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^1_{a_n} & \delta^2_{a_n} & \ldots & \delta^n_{a_n} \end{pmatrix}.$$

Антисимметричность следует из антисимметрии детерминанта относительно перестановки строк, а единичная нормировка из

$$\varepsilon_{12\ldots n} = \det \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1) = 1.$$

Выведем тождество

$$\varepsilon_{a_1\ldots a_n}\varepsilon^{b_1\ldots b_n} = \det \begin{pmatrix} \delta^{b_1}_{a_1} & \delta^{b_2}_{a_1} & \ldots & \delta^{b_n}_{a_1} \\ \delta^{b_1}_{a_2} & \delta^{b_2}_{a_2} & \ldots & \delta^{b_n}_{a_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{b_1}_{a_n} & \delta^{b_2}_{a_n} & \ldots & \delta^{b_n}_{a_n} \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon^{b_1\ldots b_n}$ — контравариантный аналог $\varepsilon_{a_1\ldots a_n}$ с теми же свойствами симметрии и нормировкой. Действительно, пользуясь представлением символа Леви-Чивита через детерминант, получаем

$$\varepsilon_{a_1\ldots a_n}\varepsilon^{b_1\ldots b_n} = \det \begin{pmatrix} \delta^1_{a_1} & \delta^2_{a_1} & \ldots & \delta^n_{a_1} \\ \delta^1_{a_2} & \delta^2_{a_2} & \ldots & \delta^n_{a_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^1_{a_n} & \delta^2_{a_n} & \ldots & \delta^n_{a_n} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \delta^{b_1}_1 & \delta^{b_1}_2 & \ldots & \delta^{b_1}_n \\ \delta^{b_2}_1 & \delta^{b_2}_2 & \ldots & \delta^{b_2}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{b_n}_1 & \delta^{b_n}_2 & \ldots & \delta^{b_n}_n \end{pmatrix} =$$

$$= \det \left[\begin{pmatrix} \delta^1_{a_1} & \delta^2_{a_1} & \ldots & \delta^n_{a_1} \\ \delta^1_{a_2} & \delta^2_{a_2} & \ldots & \delta^n_{a_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^1_{a_n} & \delta^2_{a_n} & \ldots & \delta^n_{a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{b_1}_1 & \delta^{b_1}_2 & \ldots & \delta^{b_1}_n \\ \delta^{b_2}_1 & \delta^{b_2}_2 & \ldots & \delta^{b_2}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{b_n}_1 & \delta^{b_n}_2 & \ldots & \delta^{b_n}_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \right],$$

$$\varepsilon_{a_1\ldots a_n}\varepsilon^{b_1\ldots b_n} = \det \begin{pmatrix} \delta^{b_1}_{a_1} & \delta^{b_2}_{a_1} & \ldots & \delta^{b_n}_{a_1} \\ \delta^{b_1}_{a_2} & \delta^{b_2}_{a_2} & \ldots & \delta^{b_n}_{a_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{b_1}_{a_n} & \delta^{b_2}_{a_n} & \ldots & \delta^{b_n}_{a_n} \end{pmatrix},$$

где при вычислении матричных элементов произведения мы воспользовались тем, что $\delta^i_a\delta^b_i = \delta^b_a$. Сворачивая пары индексов в выведенном тождестве, можно получить цепочку равенств

$$\varepsilon_{a_1\ldots a_{k-1}a_k\ldots a_n}\varepsilon^{b_1\ldots b_{k-1}a_k\ldots a_n} = n(n-1)\ldots k \cdot \det \begin{pmatrix} \delta^{b_1}_{a_1} & \delta^{b_2}_{a_1} & \ldots & \delta^{b_{k-1}}_{a_1} \\ \delta^{b_1}_{a_2} & \delta^{b_2}_{a_2} & \ldots & \delta^{b_{k-1}}_{a_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{b_1}_{a_{k-1}} & \delta^{b_2}_{a_{k-1}} & \ldots & \delta^{b_{k-1}}_{a_{k-1}} \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_{a_1\ldots a_n}\varepsilon^{a_1\ldots a_n} = n!$$

Тензор Леви-Чивита естественным образом возникает при рассмотрении римановых многообразий. Так, например, форму риманова объема можно переписать в виде

$$\tau_{\mathfrak{g}} = \frac{1}{n!}\tau_{a_1\dots a_n}\, dx^{a_1}\wedge\dots\wedge dx^{a_n},$$

где

$$\tau_{a_1\dots a_n} = \sqrt{|\det\mathfrak{g}|}\,\varepsilon_{a_1\dots a_n}, \qquad \varepsilon_{12\dots n} = +1.$$

Задача 7.6. Используя последние соотношения как определение символа Леви-Чивита, докажите справедливость «матричной» реализации формул в простейшем случае трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$.

7.6. **Обратная метрика и звездочка Ходжа.** Наличие на некотором многообразии (полу)римановой структуры позволяет преобразовать вектор в дифференциальную форму первой степени по формуле

$$X^\flat(Y) = \mathfrak{g}(X, Y).$$

Возможна и обратная операция, делающая из формы первой степени вектор в соответствии с формулой

$$\omega(Y) = \mathfrak{g}(\omega^\sharp, Y).$$

В теоретической физике эти операции называются операциями *опускания индекса* и *поднятия индекса*, что связано со специфическими обозначениями координат векторов и линейных форм. Например, для вектора с координатами X^a получается форма с координатами

$$X^\flat_{\ a} = g_{ab}\, X^b.$$

Если речь идет о стандартной евклидовой структуре в $\mathbb{R}^3$ и работе в ортонормированной системе координат, то эти операции оставляют те же самые координаты векторов и форм, ведь $g_{ab} = \delta_{ab}$; в этом случае верхние и нижние индексы можно не различать.

Наличие (полу)римановой структуры порождает билинейные симметрические формы на всех связанных с касательным пространством в точке пространствах, например на пространстве полилинейных кососимметричных форм в точке. Так, форма (полу)римановой структуры $\mathfrak{g}$, очевидно, может рассматриваться как отображение

$$T_pM\otimes T_pM\to\mathbb{R},$$

а также как элемент $T_p^\star M\otimes T_p^\star M$, или как отображение $T_pM\to T_p^\star M$ (опускание индексов) с обратным отображением $T_p^\star M\to T_pM$ (поднятие индексов). Композиция $\mathfrak{g}$ и двух поднятий индексов на ее аргументах дает билинейное отображение

$$\overline{\mathfrak{g}} : T_p^\star M\otimes T_p^\star M\to\mathbb{R},$$

то есть симметричную билинейную форму на кокасательном пространстве. Определим, как связаны матрицы g_{ab} и $\overline{g}_{ab}$ (последнюю в теоретической физике обычно пишут как g^{ab}), представляющие (полу)риманову структуру на исходном касательном пространстве и соответствующую билинейную форму на двойственном к нему кокасательном пространстве. По построению очевидно, что $\overline{\mathfrak{g}}(X^\flat, Y^\flat) = \mathfrak{g}(X,Y)$. Записывая последнее выражение в координатах, получаем $g^{ab}\, X^\flat_{\ a} Y^\flat_{\ b} = g_{cd}\, X^c Y^d$, откуда

$$g^{ab}g_{ac}g_{bd} = g_{cd}, \qquad g_{ab}g^{bc} = \delta_a^c,$$

то есть матрица $\overline{g}_{ab} := g^{ab}$ является обратной к метрике g_{ab}, в силу чего g^{ab} часто называют *обратной метрикой*.

Задача 7.7. Докажите неравенство для римановой структуры $\mathfrak{g}$, вектора X и формы первой степени ω в той же точке

$$\omega(X)^2 \leqslant \mathfrak{g}(X,X) \cdot \overline{\mathfrak{g}}(\omega,\omega).$$

Тензорно перемножая $\overline{\mathfrak{g}}$ на себя и сортируя тензорные множители, можно расширить ее до отображения

$$\overline{\mathfrak{g}} : \underbrace{T_p^\star M \otimes \cdots \otimes T_p^\star M}_{k} \otimes \underbrace{T_p^\star M \otimes \cdots \otimes T_p^\star M}_{k} \to \mathbb{R}.$$

Более конкретно, $\overline{\mathfrak{g}}$ будет определяться равенством на тензорных произведениях линейных форм

$$\overline{\mathfrak{g}}(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_k, \lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_k) = \overline{\mathfrak{g}}(\omega_1, \lambda_1) \dots \overline{\mathfrak{g}}(\omega_k, \lambda_k).$$

Вкладывая пространство $\Omega_p^k(M)$ дифференциальных форм степени k в точке p в тензорное произведение

$$\Omega_p^k(M) \subseteq \underbrace{T_p^\star M \otimes \cdots \otimes T_p^\star M}_{k},$$

мы таким образом можем рассмотреть $\overline{\mathfrak{g}}$ как билинейную форму на $\Omega_p^k(M)$. Поскольку кососимметричные формы по разному вкладываются в полилинейные формы (с точностью до умножения на зависящую от k постоянную), то нам надо внести определенность и нормировать произведение $\overline{\mathfrak{g}}_p(\omega,\lambda)$. Отнормируем так, что если линейные формы $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega^1(M)$ образуют (почти) ортонормированный базис в точке p, то есть

$$\overline{\mathfrak{g}}_p(\omega_i, \omega_j) = \pm\delta_{ij},$$

то формы $\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k}$ будут образовывать (почти) ортонормированный базис относительно $\overline{\mathfrak{g}}_p$.

Рассмотрим многообразие M размерности n. Как несложно заметить, внешнее умножение между $\Omega^k(M)$ и $\Omega^{n-k}(M)$ в точке p является *невырожденным спариванием*, то есть для всякой ненулевой формы $\omega \in \Omega^k(M)$ можно найти $\lambda \in \Omega^{n-k}(M)$ так, что $\omega \wedge \lambda$ не будет равна нулю в точке p.

Задача 7.8. Проверьте невырожденность внешнего умножения в координатах в качестве упражнения.

Поскольку $\overline{\mathfrak{g}}$ дает изоморфизм между $\Omega^{n-k}(M)$ в точке и его двойственным, мы можем обосновать корректность следующего определения.

Определение 7.9. В присутствии римановой структуры $\mathfrak{g}$ на ориентированном многообразии M, $\dim M = n$, для любой формы $\lambda \in \Omega^k(M)$ формула

$$\omega \wedge \star\lambda = \overline{\mathfrak{g}}(\omega,\lambda)\, \tau_{\mathfrak{g}}$$

корректно определяет форму $\star\lambda \in \Omega^{n-k}(M)$ и определяет линейное преобразование $\star : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$, так называемую *звездочку Ходжа.*

Точнее можно сказать, что операция $\star$ определяется как композиция изоморфизмов в каждой точке

$$\Omega_p^k(M) \to (\Omega_p^k(M))^\star \to \Omega_p^{n-k}(M),$$

в которой первый возникает из невырожденного спаривания $\overline{\mathfrak{g}}$ между дифференциальными формами степени k, а второй — из спаривания, заданного внешним умножением с делением на форму риманова объема $\tau_{\mathfrak{g}}$.

Оператор звездочки является поточечным, то есть линейным относительно умножения на функцию, $\star(f\omega) = f \star \omega$. Например, для $\mathbb{R}^3$ со стандартной евклидовой структурой и координатами x, y, z мы получим

$$\star 1 = dx \wedge dy \wedge dz, \quad \star(dx \wedge dy \wedge dz) = 1,$$

$$\star dx = dy \wedge dz, \quad \star dy = dz \wedge dx, \quad \star dz = dx \wedge dy,$$

$$\star(dx \wedge dy) = dz, \quad \star(dy \wedge dz) = dx, \quad \star(dz \wedge dx) = dy.$$

Действительно, по определению

$$dx \wedge \star dx = g^{11}\, dx \wedge dy \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz, \quad \star dx = dy \wedge dz.$$

Остальные тождества получаются аналогичными вычислениями.

Задача 7.10. Докажите, что на n-мерном римановом многообразии M с полуримановой структурой $\mathfrak{g}$ для звездочки $\star : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ выполняется

$$\star \star \omega = (-1)^{k(n-k)} \mathrm{sgn}\, \det \mathfrak{g} \cdot \omega.$$

Задача 7.11. Докажите, что для положительно определенной $\mathfrak{g}$ звездочка Ходжа является изометрией для скалярного произведения $\overline{\mathfrak{g}}$ на внешних формах касательного пространства в точке.

7.7. **Градиент, дивергенция, ротор.** С помощью операций $\flat$, $\sharp$, $\star$ мы можем выразить такие понятия, как *ротор* и *дивергенция* вектора в $\mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{rot} v = (\star dv^\flat)^\sharp, \quad \operatorname{div} v = \star d(\star v^\flat),$$

а также *градиент* функции как

$$\operatorname{grad} f = (df)^\sharp.$$

Задача 7.12. Докажите, что определение дивергенции для риманова многообразия согласовано с определением дивергенции относительно формы риманова объема как

$$\operatorname{div} v\, \tau_{\mathfrak{g}} = \mathrm{L}_v \tau_{\mathfrak{g}}.$$

Задача 7.13. Докажите что $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$ и $\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0$, где $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $v \in \operatorname{Vect}(\mathbb{R}^3)$.

Найдем формулы для дивергенции, ротора и градиента в декартовых координатах: векторное поле v в координатах имеет вид

$$v = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z},$$

откуда $v^\flat = v_x\, dx + v_y\, dy + v_z\, dz$, а потому

$$\star v^\flat = v_x\, dy \wedge dz + v_y\, dz \wedge dx + v_z\, dx \wedge dy.$$

Отсюда получаем, что

$$d(\star v^\flat) = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy,$$

$$d(\star v^\flat) = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \tau_{\mathfrak{g}}.$$

Значит

$$\operatorname{div} v = \star d(\star v^\flat) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Аналогично можно найти ротор векторного поля v и градиент функции f:

$$dv^\flat = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}dy + \frac{\partial v_x}{\partial z}dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}dx + \frac{\partial v_y}{\partial z}dz\right) \wedge dy + \\ + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x}dx + \frac{\partial v_z}{\partial y}dy\right) \wedge dz = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \\ + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) dx \wedge dy,$$

$$\star dv^\flat = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) dx + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) dy + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) dz,$$

$$\operatorname{rot} v = (\star dv^\flat)^\sharp = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial z}.$$

$$\operatorname{grad} f = (df)^\sharp = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^\sharp,$$

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}e_x + \frac{\partial f}{\partial y}e_y + \frac{\partial f}{\partial z}e_z.$$

Градиент можно геометрически описать как вектор с максимальным значением $v(f)$ в точке при фиксированной длине $\sqrt{\mathfrak{g}(v,v)}$ и такой что $\mathfrak{g}(v,v) = v(f)$. Геометрический смысл дивергенции в силу того, что $\star 1$ является формой риманова объема, соответствует изменению риманова объема при действии диффеоморфизмов, получающихся интегрированием данного векторного поля. Над геометрическим смыслом ротора читатель может поразмышлять самостоятельно.

Из приведенных формул для градиента, дивергенции и ротора видно, что они на самом деле зависят от римановой структуры в $\mathbb{R}^3$ и их можно считать корректно определенными только до тех пор, пока мы не меняем ее. Говоря проще, можно сказать, что координатные формулы для них остаются теми же самыми при замене ортонормированной системы координат на другую ортонормированную систему координат.

Определения градиента, дивергенции и ротора позволяют записать эти операции в любых криволинейных координатах, так как внешнее дифференцирование во всех системах координат записывается одинаково, а оператор $\star$ является линейным относительно умножения на функции (то есть не содержит производных) и может быть выписан в координатах с помощью своего определения. В качестве примера запишем звездочку Ходжа в сферических координатах. Для этого найдем сначала компоненты метрики g_{ab} в сферических координатах (r,ϑ,φ): $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$. После тривиальных вычислений получаем

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2\sin^2\theta, \quad g_{ab}|_{a\neq b} = 0,$$

то есть метрика в сферических координатах имеет диагональный вид. Значит, обратная метрика также диагональна:

$$g^{11} = 1, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}, \quad g^{ab}|_{a\neq b} = 0.$$

Отсюда оператор звездочки в сферических координатах имеет вид

$$\star 1 = \tau_{\mathfrak{g}} = \sqrt{|\det\mathfrak{g}|}\, dr \wedge d\theta \wedge d\varphi = r^2 \sin\theta\, dr \wedge d\theta \wedge d\varphi,$$

$$dr \wedge \star dr = g^{11}\, r^2 \sin\theta\, dr \wedge d\theta \wedge d\varphi = r^2 \sin\theta\, dr \wedge d\theta \wedge d\varphi,$$

$$d\theta \wedge \star d\theta = g^{22}\, r^2 \sin\theta\, dr \wedge d\theta \wedge d\varphi = \sin\theta\, dr \wedge d\theta \wedge d\varphi,$$

$$d\varphi \wedge \star d\varphi = g^{33}\, r^2 \sin\theta\, dr \wedge d\theta \wedge d\varphi = \frac{1}{\sin\theta}\, dr \wedge d\theta \wedge d\varphi,$$

$$\star dr = r^2 \sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi, \quad \star d\theta = \sin\theta\, d\varphi \wedge dr, \quad \star d\varphi = \frac{1}{\sin\theta} dr \wedge d\theta,$$

$$\star(d\theta \wedge d\varphi) = \frac{1}{r^2 \sin\theta} dr, \quad \star(d\varphi \wedge dr) = \frac{1}{\sin\theta} d\theta,$$

$$\star(dr \wedge d\theta) = \sin\theta\, d\varphi, \quad \star(dr \wedge d\theta \wedge d\varphi) = \frac{1}{r^2 \sin\theta}.$$

Теперь можно легко найти выражения для градиента, дивергенции и ротора в сферических координатах:

$$\operatorname{grad} f = (df)^\sharp = \left(\frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi\right)^\sharp,$$

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Вспоминая выражение для локального базиса сферической системы координат, получаем

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} e_\varphi.$$

Векторное поле v в сферических координатах имеет вид

$$v = v_r e_r + v_\theta e_\theta + v_\varphi e_\varphi = v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi},$$

откуда $v^\flat = v_r\, dr + r v_\theta\, d\theta + r \sin\theta\, v_\varphi\, d\varphi$, а потому

$$\star v^\flat = r^2 \sin\theta\, v_r\, d\theta \wedge d\varphi + r v_\vartheta \sin\theta\, d\varphi \wedge dr + r v_\varphi\, dr \wedge d\theta.$$

Отсюда получаем, что

$$d(\star v^\flat) = \left[\sin\theta \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + r\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + r\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right] dr \wedge d\theta \wedge d\varphi.$$

Значит,

$$\operatorname{div} v = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Аналогично можно вычислить ротор векторного поля в сферических координатах.

$$\operatorname{rot} v = \frac{1}{r \sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\varphi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi}\right) e_r + \\ + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\Delta(r v_\varphi)\right) e_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right) e_\varphi.$$

7.8. **Оператор Лапласа и сферические гармоники.** С использованием звездочки Ходжа и внешнего дифференцирования можно дать корректное определение хорошо известному нам *оператору Лапласа* — дифференциальному оператору, действующему на векторном пространстве гладких функций:

$$\Delta : C^\infty(\mathbb{R}^3) \to C^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \Delta = \star d \star d.$$

Несложно показать, что оператор Лапласа эквивалентен последовательному взятию операций градиента и дивергенции

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f.$$

Действительно, $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \star d \star (\operatorname{grad} f)^\flat = \star d \star df = \Delta f$.

Таким образом, значение оператора Лапласа в точке может быть истолковано как плотность источников потенциального векторного поля $\operatorname{grad} f$ в этой точке. С учетом выражений для дивергенции и градиента в декартовых координатах, получаем знакомую формулу для лапласиана:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Более интересно посмотреть на то, как данное выше определение позволяет быстро и изящно находить оператор Лапласа в криволинейных координатах. Выберем для определенности сферическую систему координат. Тогда

$$\star df = r^2 \sin\theta \frac{\partial f}{\partial r}\, d\theta \wedge d\varphi + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\, d\varphi \wedge dr + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\, dr \wedge d\theta,$$

а значит,

$$d \star df = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right)\tau_{\mathfrak{g}} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\tau_{\mathfrak{g}} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\,\tau_{\mathfrak{g}}.$$

Отсюда

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2},$$

или

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2},$$

Такими нехитрыми вычислениями можно выписывать формулы для лапласиана в произвольных криволинейных координатах.

Задача 7.14. Найти звездочку Ходжа и выписать оператор Лапласа в параболических координатах.

Задача 7.15. Функция f на римановом многообразии называется *гармонической*, если $\Delta f = 0$. Докажите, что у гармонической на $\mathbb{R}^n$ функции все средние значения на сферах с центрами в нуле равны ее значению $f(0)$.

Задача 7.16. Докажите, что непостоянная гармоническая функция на многообразии без края не может иметь компактный носитель.

Оператор Лапласа, записанный в сферических координатах (r,θ,φ), можно переписать в виде

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi} f,$$

где через $\Delta_{\theta,\varphi}$ обозначена угловая часть лапласиана; $\Delta_{\theta,\varphi}$ обычно называют *оператором Бельтрами-Лапласа*. Последний играет важную роль при построении собственных функции орбитального момента в квантовой механике. Проиллюстрируем это и произведем квантование орбитального момента. Совершим поворот некоторой физической системы, у которой нет поляризации, то есть спин системы тождественно равен нулю, вокруг некоторой оси на угол 2π. При этом преобразуются только координаты системы, так что система после поворота тождественно эквивалентна исходной системе до поворота. Другими словами, поворот физической системы с нулевым спином вокруг некоторой оси на угол 2π приводит к тождественному преобразованию для волновой функции этой системы. Даже отличие волновых функций до и после такого поворота на глобальную фазу запрещено, потому что при наличии такой фазы можно было бы ее обнаружить по интерференции с неким другим состоянием при составлении одинаковых суперпозиций стороннего состояния с двумя состояниями системы до и после поворота. Итак, если $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор вдоль оси поворота, то вектор углов $\boldsymbol{\varphi} = 2\pi\boldsymbol{e}$, и согласно закону преобразования волновой функции состояния без спина при вращениях, поворот на угол 2π дает

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = \exp\left(2\pi \mathrm{i}\hat{\boldsymbol{\ell}}\cdot\boldsymbol{e}\right)\Psi(\boldsymbol{r}),$$

где мы положили преобразованную функцию тождественно равной исходной. Квантование системы можно провести, положив в качестве проекции орбитального момента компоненту вдоль оси вращения, $\hat{\ell}_z = \hat{\boldsymbol{\ell}}\cdot\boldsymbol{e}$. Учитывая алгебру генераторов группы вращений и выбирая в качестве полного набора наблюдаемых операторы проекции $\hat{\ell}_z$ и квадрата орбитального момента $\hat{\boldsymbol{\ell}}^2$, находим $|\ell,m\rangle = \exp\left(2\pi\mathrm{i}\, m\right)|\ell,m\rangle$, откуда $m \in \mathbb{N}$, т.е. проекция орбитального момента может принимать только целые значения.

После тривиальных вычислений проекций и квадрата орбитального момента в сферических координатах, получаем

$$\hat{\ell}_x = \mathrm{i}\,\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{i}\cos\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad \hat{\ell}_y = -\mathrm{i}\,\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{i}\sin\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

$$\hat{\ell}_z = -\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad \hat{\boldsymbol{\ell}}^2 = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} = -\Delta_{\theta,\varphi}.$$

Мы видим, что оператор квадрата орбитального момента совпадает (с точностью до знака) с оператором Бельтрами-Лапласа. Общие собственные функции операторов $\hat{\ell}_z$ и $\hat{\boldsymbol{\ell}}^2$:

$$\hat{\boldsymbol{\ell}}^2\mathscr{Y}_{\ell,m}(\theta,\varphi) = \ell(\ell+1)\mathscr{Y}_{\ell,m}(\theta,\varphi), \quad \hat{\ell}_z\mathscr{Y}_{\ell,m}(\theta,\varphi) = m\mathscr{Y}_{\ell,m}(\theta,\varphi),$$

нормированные на единицу условием

$$\int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \mathscr{Y}^{\star}_{\ell,m}(\theta,\varphi)\mathscr{Y}_{\ell',m'}(\theta,\varphi) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'},$$

называются *сферическими гармониками*. В угловых переменных уравнение на собственные значения для проекции момента на ось z:

$$-\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathscr{Y}_{\ell,m}(\theta,\varphi) = m\mathscr{Y}_{\ell,m}(\theta,\varphi)$$

легко интегрируется, так что

$$\mathscr{Y}_{\ell,m}(\theta,\varphi) = e^{\mathrm{i}m\varphi}\,\Theta_{\ell,m}(\theta).$$

Функции $\Theta_{\ell,m} = \Theta_{\ell,m}(\theta)$ проще всего найти, используя повышающий оператор $\hat{\ell}_+ = \hat{\ell}_x + \mathrm{i}\hat{\ell}_y$, который зануляет старший вектор: $\hat{\ell}_+\mathscr{Y}_{\ell,\ell}(\theta,\varphi) = 0$, откуда, используя явный вид повышающего оператора

$$\hat{\ell}_+ = e^{\mathrm{i}\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{i}\,\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

находим

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\Theta_{\ell,m}(\theta) - \ell\cot\theta\,\Theta_{\ell,m}(\theta) = 0.$$

Решая полученное дифференциальное уравнение, получаем

$$\mathscr{Y}_{\ell,\ell}(\theta,\varphi) = \alpha_\ell e^{\mathrm{i}\ell\varphi}(\sin\theta)^\ell.$$

Постоянную α_ℓ несложно определить из условия нормировки сферических гармоник. Проделайте это самостоятельно в качестве полезного упражнения по математическому анализу. В итоге, нормированная на единицу сферическая функция для старшего вектора

$$\mathscr{Y}_{\ell,\ell}(\theta,\varphi) = (-1)^\ell \sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{4\pi}} \frac{1}{2^\ell \ell!} e^{\mathrm{i}\ell\varphi}(\sin\theta)^\ell,$$

где фактор $(-1)^\ell$ определяет общепринятое соглашение о фазе. Сферические гармоники с меньшими значениями проекции момента получаются действием понижающего оператора $\hat{\ell}_- = \hat{\ell}_x - \mathrm{i}\hat{\ell}_y$:

$$\hat{\ell}_-|\ell,\ell\rangle = \sqrt{\ell(\ell+1)-\ell(\ell-1)}\,|\ell,\ell-1\rangle = \sqrt{2\ell}\,|\ell,\ell-1\rangle,$$

$$\hat{\ell}_-|\ell,\ell-1\rangle = \sqrt{2(2\ell-1)}\,|\ell,\ell-2\rangle, \quad \hat{\ell}_-^2|\ell,\ell\rangle = \sqrt{2\ell(2\ell-1)2}\,|\ell,\ell-2\rangle,$$

$$\hat{\ell}_-|\ell,\ell-2\rangle = \sqrt{3(2\ell-2)}\,|\ell,\ell-3\rangle, \quad \hat{\ell}_-^3|\ell,\ell\rangle = \sqrt{2\ell(2\ell-1)(2\ell-2)2\cdot 3}\,|\ell,\ell-3\rangle.$$

Отсюда по индукции

$$|\ell,\ell-m\rangle = \sqrt{\frac{(2\ell-m)!}{(2\ell)!m!}}\,\hat{\ell}_-^m|\ell,\ell\rangle, \quad \mathscr{Y}_{\ell,0}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{(2\ell)!}}\,\hat{\ell}_-^\ell \mathscr{Y}_{\ell,\ell}(\theta,\varphi).$$

Запишем в явном виде действие понижающего оператора

$$\hat{\ell}_- = e^{-\mathrm{i}\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{i}\,\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

на сферические гармоники:

$$\hat{\ell}_-\mathscr{Y}_{\ell,m}(\theta,\varphi) = -e^{\mathrm{i}(m-1)\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + m\cot\theta\right)\Theta_{\ell,m}(\theta) =$$

$$= e^{\mathrm{i}(m-1)\varphi}\left(\frac{1}{(\sin\theta)^{m-1}}\frac{\partial}{\partial\cos\theta}(\sin\theta)^m\right)\Theta_{\ell,m}(\theta).$$

Отсюда находим

$$\hat{\ell}_-^\ell\mathscr{Y}_{\ell,\ell}(\theta,\varphi) = \frac{\partial^\ell}{\partial(\cos\theta)^\ell}(\sin\theta)^\ell\Theta_{\ell,\ell}(\theta) = \alpha_\ell\frac{\partial^\ell}{\partial(\cos\theta)^\ell}(\sin\theta)^{2\ell}.$$

Собирая множители, получаем

$$\mathscr{Y}_{\ell,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\frac{(-1)^\ell}{2^\ell\ell!}\frac{\partial^\ell}{\partial(\cos\theta)^\ell}(\sin\theta)^{2\ell}.$$

Согласно стандартному определению *полиномами Лежандра* называют следующие функции:

$$P_\ell(x) = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell\ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}(1-x^2)^\ell, \quad \mathscr{Y}_{\ell,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}P_\ell(\cos\theta).$$

Так как сферические гармоники, являющиеся собственными функциями, ортогональны и нормированы на единицу, для полиномов Лежандра автоматически находим

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_\ell(x)P_{\ell'}(x) = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}, \quad P_\ell(1) = 1, \quad P_\ell(-1) = (-1)^\ell.$$

Состояния $\mathscr{Y}_{\ell,m}(\theta,\varphi)$ с $m > 0$ обычно выводят с помощью действия повышающего оператора на функцию $\mathscr{Y}_{\ell,0}(\theta,\varphi)$. Для этого найдем

$$\hat{\ell}_+\mathscr{Y}_{\ell,m}(\theta,\varphi) = e^{\mathrm{i}(m+1)\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - m\cot\theta\right)\Theta_{\ell,m}(\theta) =$$
$$= -e^{\mathrm{i}(m+1)\varphi}\left((\sin\theta)^{m+1}\frac{\partial}{\partial\cos\theta}\frac{1}{(\sin\theta)^m}\right)\Theta_{\ell,m}(\theta) =$$
$$= \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m+1)}\,\mathscr{Y}_{\ell,m+1}(\theta,\varphi).$$

Значит, с одной стороны,

$$\hat{\ell}_+^m\Theta_{\ell,0}(\theta) = e^{\mathrm{i}m\varphi}(-1)^m\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}(\sin\theta)^m\frac{\partial^m}{\partial(\cos\theta)^m}P_\ell(\cos\theta),$$

а с другой стороны,

$$\hat{\ell}_+^m\Theta_{\ell,0}(\theta) = \sqrt{\frac{\ell!}{(\ell-m)!}\frac{(\ell+m)!}{\ell!}}\mathscr{Y}_{\ell,m}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}}\mathscr{Y}_{\ell,m}(\theta,\varphi).$$

В итоге

$$\mathscr{Y}_{\ell,m}(\theta,\varphi) = e^{\mathrm{i}m\varphi}(-1)^m\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}P_{\ell,m}(\cos\theta), \quad 0 \leqslant m \leqslant \ell,$$

где *присоединенные полиномы Лежандра*

$$P_{\ell,m}(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x).$$

Совершенно аналогично строятся сферические гармоники $\mathscr{Y}_{\ell,-m}(\theta,\varphi)$ с отрицательной проекцией орбитального момента на ось z, где $m > 0$:

$$\mathscr{Y}_{\ell,-m}(\theta,\varphi) = e^{-\mathrm{i}m\varphi}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}P_{\ell,m}(\cos\theta), \quad 0 \leqslant m \leqslant \ell,$$

так что имеет место элементарное соотношение комплексного сопряжения

$$\mathscr{Y}_{\ell,-m}(\theta,\varphi) = (-1)^m\mathscr{Y}^\star_{\ell,m}(\theta,\varphi).$$

7.9. **Сопряженный дифференциал.** В предыдущем параграфе мы определили оператор Лапласа на гладких функциях в $\mathbb{R}^3$. Оказывается, при помощи звездочки Ходжа его можно распространить на дифференциальные формы любой степени в пространствах произвольной размерности. Для этого необходимо ввести понятие *сопряженного дифференциала.*

Рассмотрим пространство $\Omega^k(M)$ дифференциальных форм степени k на компактном римановом многообразии M без края размерности n. Звездочка Ходжа позволяет определить скалярное произведение на $\Omega^k(M)$:

$$\langle\omega,\lambda\rangle = \int_M \omega\wedge\star\lambda, \quad \omega,\lambda\in\Omega^k(M).$$

Данное скалярное произведение является корректно определенным, поскольку $\star\lambda \in \Omega^{n-k}(M)$, а значит, $\omega\wedge\star\lambda$ является формой высшей степени, которую можно проинтегрировать по многообразию. Разумеется, мы предполагаем, что этот интеграл сходится. В противном случае скалярное произведение неопределено. Очевидно, что скалярное произведение $\langle\omega,\lambda\rangle$ симметрично. Если метрика риманова, то есть положительно определена, то скалярное произведение также положительно определено.

Теорема 7.17. Для дифференциальных форм $\omega \in \Omega^k(M)$ и $\lambda \in \Omega^{k-1}(M)$,

$$\langle d\lambda, \omega\rangle = \langle \lambda, d^\star\omega\rangle,$$

сопряженный дифференциал $d^\star : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ задается выражением

$$d^\star = (-1)^{nk+n-1}\mathrm{sgn}\,\det\mathfrak{g}\cdot\star d\,\star\,.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Лейбница для внешнего дифференцирования и формулой Стокса

$$0 = \int_M d(\lambda\wedge\star\omega) = \int_M d\lambda\wedge\star\omega + (-1)^{k-1}\int_M \lambda\wedge d\star\omega.$$

Первый член суммы есть просто скалярное произведение $\langle d\lambda, \omega\rangle$. Второй член суммы принимает вид скалярного произведения, которое с точностью до знака пропорционально $\langle\lambda, \star d\star\omega\rangle$. Для определения знака обратите внимание, что $d\star\omega \in \Omega^{n-k+1}(M)$. Поэтому $\langle d\lambda, \omega\rangle = (-1)^{nk+n-1}\mathrm{sgn}\,\det\mathfrak{g}\,\langle\lambda, \star d\star\omega\rangle$. □

Задача 7.18. Покажите, что сопряженный дифференциал является нильпотентным оператором, то есть $d^{\star 2} = 0$.

Определим теперь оператор Лапласа $\Delta : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$ на пространстве дифференциальных форм как антикоммутатор

$$\Delta = \{d, d^\star\} = d\circ d^\star + d^\star\circ d.$$

Для компактных римановых многообразий без края лапласиан является самосопряженным оператором относительно введенного ранее скалярного произведения: $\langle\Delta\omega, \lambda\rangle = \langle\omega, \Delta\lambda\rangle$. Действительно, из симметричности скалярного произведения следуют равенства

$$\langle dd^\star\omega, \lambda\rangle = \langle d^\star\omega, d^\star\lambda\rangle = \langle\omega, dd^\star\lambda\rangle.$$

Аналогичные равенства справедливы и для оператора $d^\star d$. Отсюда вытекает самосопряженность оператора Лапласа.

Лапласиан является дифференциальным оператором второго порядка эллиптического типа в римановом пространстве с положительно определенной метрикой. Если на многообразии задана метрика лоренцевой сигнатуры, то инвариантный оператор Δ также определен. В этом случае он будет гиперболического типа. Если для метрики лоренцевой сигнатуры скалярное произведение определено, то оператор Δ будет также самосопряжен, поскольку в доказательстве сигнатура метрики не используется.

Покажем, что в векторном пространстве гладких функций на $\mathbb{R}^3$ лапласиан $\Delta = d\circ d^\star + d^\star\circ d$ действует стандартным образом (с точностью до знака): $\Delta = -\star d\star d$, то есть что мы действительно существенно обобщили старый лапласиан:

$$\Delta f = (dd^\star + d^\star d)f = d^\star df = (-1)^5\star d\star df = -\star d\star df.$$

Найдем выражение для Δf в локальных координатах x^a на римановом многообразии с (полу)римановой метрикой g_{ab}:

$$\begin{aligned}\Delta f &= -\star d\star(\partial_a f\,dx^a) = \\ &= -\frac{1}{(n-1)!}\star d[(\partial_a f)g^{ab}\sqrt{|\det\mathfrak{g}|}\,\varepsilon_{ba_1\dots a_{n-1}}dx^{a_1}\wedge\dots\wedge dx^{a_{n-1}}] = \\ &= -\frac{1}{(n-1)!}\star\partial_c[\sqrt{|\det\mathfrak{g}|}\,g^{ab}\partial_a f]\,\varepsilon_{ba_1\dots a_{n-1}}dx^c\wedge dx^{a_1}\wedge\dots\wedge dx^{a_{n-1}} = \\ &= -\star\partial_b[\sqrt{|\det\mathfrak{g}|}\,g^{ab}\partial_a f]\,dx^1\wedge\dots\wedge dx^n = -\frac{1}{\sqrt{|\det\mathfrak{g}|}}\partial_b[\sqrt{|\det\mathfrak{g}|}\,g^{ab}\partial_a f].\end{aligned}$$

Такое выражение для лапласиана от функции довольно часто встречается в различных приложениях дифференциальной геометрии.

Задача 7.19. Доказать, что оператор Лапласа коммутирует со звездочкой Ходжа, а также с внешним и сопряженным дифференциалами.

Задача 7.20. Выписать действие оператора Лапласа на произвольные дифференциальные формы первой и второй степеней.

Задача 7.21. Доказать, что $d^\star\omega = -\operatorname{div}\omega^\sharp$ для произвольной $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$.

Продолжая разговор об операторе Лапласа $\Delta : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$, интересно посмотреть на *гармонические формы*. Некоторая k-форма ω называется гармонической, если $\Delta\omega = 0$. Легко видеть, что любая гармоническая форма на компактном ориентируемом римановом многообразии обязательно замкнута, $d\omega = 0$, и козамкнута, $d^\star\omega = 0$. Действительно,

$$\langle \omega, \Delta\omega\rangle = \langle d\omega, d\omega\rangle + \langle d^\star\omega, d^\star\omega\rangle = 0.$$

При этом ориентируемость и компактность многообразия достаточны для существования интеграла, входящего в скалярное произведение. Положительная определенность метрики необходима для того, чтобы оба слагаемых в правой части равенства обращались в нуль по отдельности.

Как следствие, любая гармоническая функция на компактном ориентируемом римановом многообразии является замкнутой $df = 0$ и, следовательно, равна константе.

Существует несколько довольно симпатичных фактов, связывающих существование гармонических форм с когомологиями де Рама. Обозначим пространство гармонических k-форм на многообразии M через $H^k(M)$. Первый интересный факт — т.н. *теорема Ходжа о разложении*, которую мы сформулируем без доказательства: любую k-форму ω на компактном ориентируемом римановом многообразии M можно однозначно представить в виде суммы точной, коточной и гармонической форм

$$\omega = d\alpha + d^\star\beta + \gamma, \quad \alpha \in \Omega^{k-1}(M),\ \beta \in \Omega^{k+1}(M),\ \ \gamma \in H^k(M).$$

Такое важное утверждение можно использовать для доказательства следующей *теоремы Ходжа.*

Теорема 7.22. Существует изоморфизм $H^k(M) \cong H^k_{\mathrm{dR}}(M)$, где через $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ обозначена группа k-мерных когомологий де Рама.

Доказательство. Во-первых, покажем, что любая гармоническая форма γ принадлежит в $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$. Как мы уже знаем, любая гармоническая k-форма замкнута, $d\gamma = 0$, то есть $\gamma \in \mathrm{Z}^k(M)$. Однако, единственность разложения Ходжа говорит нам о том, что $\gamma \neq d\lambda$ для некоторой формы λ.

Теперь нам нужно показать, что произвольный когомологический класс $[\omega] \in H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ может быть представлен гармонической формой. Для этого произведем разложение Ходжа вида $\omega = d\alpha + d^\star\beta + \gamma$. По определению $[\omega] \in H^k_{\mathrm{dR}}(M)$, а значит, $d\omega = 0$. Поэтому

$$0 = \langle d\omega, \beta\rangle = \langle \omega, d^\star\beta\rangle = \langle d\alpha + d^\star\beta + \gamma, d^\star\beta\rangle = \langle d^\star\beta, d^\star\beta\rangle,$$

где на последнем шаге мы «проинтегрировали по частям» и воспользовались тем, что $d^2\alpha = d\gamma = 0$. Поскольку скалярное произведение положительно определено, то $d^\star\beta = 0$ и, следовательно, $\omega = \gamma + d\alpha$. Любой другой представитель $\omega' \sim \omega$ класса $[\omega] \in H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ отличается от ω на точную форму: $\omega' = \omega + d\eta$ и поэтому, согласно разложению Ходжа, связан с той же самой гармонической формой γ. □

7.10. **Уравнения Максвелла.** Как мы хорошо знаем, электромагнитное поле характеризуется двумя величинами — вектором напряженности электрического поля $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, E_z)$ и вектором магнитной напряженности $\boldsymbol{H} = (H_x, H_y, H_z)$. Предполагается, что компоненты этих векторов гладко зависят от точки пространства, а также от времени. Совокупность экспериментальных данных в свое время была обобщена Максвеллом в его знаменитых уравнениях:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{j}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H}, \end{cases}$$

Здесь ρ — плотность заряда, $\boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{v}$ — плотность тока. Если следовать традиционному взгляду, что составляющие электромагнитного поля — поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ — это векторные поля, то анализ структуры операторов дивергенции и ротора показывает, что уравнения Максвелла могут быть записаны корректно лишь в трехмерном ориентированном пространстве, снабженной евклидовой метрикой. Но тот факт, что дивергенция и ротор могут меняться при каких-то заменах координат, не отражает физику уравнений Максвелла, поскольку природа этих уравнений никак не связана с выбором системы координат. Поэтому нам хотелось бы иметь какое-то инвариантное описание уравнений Максвелла.

Все вышеперечисленное позволяет предположить, что электромагнитное поле есть дифференциальная форма второй степени. Эта дифференциальная форма второй степени F, называемая *тензором напряженности электромагнитного поля*, определена на четырехмерном пространстве $\mathbb{R}^{1+3}$ с координатами (t, x, y, z), где координата t называется временем, и имеет вид:

$$F = E_x\, dx \wedge dt + E_y\, dy \wedge dt + E_z\, dz \wedge dt + H_x\, dy \wedge dz + H_y\, dz \wedge dx + H_z\, dx \wedge dy.$$

Вычислим дифференциал этой формы и приравняем его к нулю.

$$\begin{aligned} dF = \frac{\partial E_x}{\partial y}\, dy \wedge dx \wedge dt + \frac{\partial E_x}{\partial z}\, dz \wedge dx \wedge dt + \frac{\partial E_y}{\partial x}\, dx \wedge dy \wedge dt + \\ + \frac{\partial E_y}{\partial z}\, dz \wedge dy \wedge dt + \frac{\partial E_z}{\partial x}\, dx \wedge dz \wedge dt + \frac{\partial E_z}{\partial y}\, dy \wedge dz \wedge dt + \\ + \frac{\partial H_x}{\partial x}\, dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial H_x}{\partial t}\, dt \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial H_y}{\partial y}\, dy \wedge dz \wedge dx + \\ + \frac{\partial H_y}{\partial t}\, dt \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial H_z}{\partial z}\, dz \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial H_z}{\partial t}\, dt \wedge dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

Соберем коэффициенты при $dx \wedge dy \wedge dz$:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0,$$

и мы получим одно из уравнения Максвелла без источника. Теперь соберем коэффициенты при $dx \wedge dy \wedge dt$:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0.$$

Это есть z-компонента другого уравнения Максвелла без источника. Собирая коэффициенты при формах $dz \wedge dx \wedge dt$ и $dy \wedge dz \wedge dt$, мы получим y- и x-компоненты соответственно. Итак, пара уравнений Максвелла без источника может быть записана очень просто: $dF = 0$. В чем приемущество такой записи? Мы записали уравнения в инвариантной форме: ни дифференциальные формы, ни внешнее дифференцирование не зависят ни от координат, ни от ориентации, ни от метрики.

Вспомним также свойство нильпотентности оператора внешнего дифференцирования: $d^2 = 0$. Поскольку в пространстве-времени $\mathbb{R}^{1+3}$ имеет место лемма Пуанкаре: всякая замкнутая форма является точной, то $F = dA$, где A — форма первой степени на пространстве $\mathbb{R}^{1+3}$:

$$A = A_\mu\, dx^\mu,$$

где $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Эта форма первой степени называется *четырехмерным потенциалом электромагнитного поля.* Тогда мы можем записать наши формы в виде

$$F = dA = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Для записи оставшихся уравнений Максвелла вводится дуальная к F 2-форма $\star F$, называемая также *2-формой Максвелла*:

$$\star F = \frac{1}{2} \tilde{F}_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

и 3-форма тока $\star j$:

$$\star j = -\frac{1}{3!} j^\mu \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, dx^\nu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta,$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ — антисимметричный символ Леви-Чивиты с нормировкой вида $\varepsilon_{0123} = -1$. В этих обозначениях уравнения Максвелла с источником принимают следующий вид:

$$d \star F = 4\pi \star j.$$

Форму тока $\star j$ при этом можно интегрировать по трехмерным гиперповерхностям, находя полный заряд (если гиперповерхность пространственноподобна) или интерпретируя интеграл как поток заряда через двумерную пространственноподобную поверхность за заданное время. Равенство $d \star F = 4\pi \star j$ и общая формула Стокса гарантируют, что интеграл тока по компактным трехмерным многообразиям без края равен нулю, это называется «сохранение заряда».

Заметим, что форма A определяется по форме F неоднозначно: мы можем всегда прибавить к этой форме точную 1-форму, то есть дифференциал функции:

$$A' = A + df.$$

И вновь мы получим, что $dA' = F$, так как квадрат внешнего дифференциала равен нулю. Это означает, что 4-потенциал электромагнитного поля определяется, как говорят, с точностью до *калибровочных преобразований*:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f.$$

И поскольку в уравнения Максвелла входят только элементы $F_{\mu\nu}$, то, стало быть, выбор четырехмерного потенциала не влияет на уравнения Максвелла.

Задача 7.23. Докажите, что экстремалями функционала $S[A]$ являются уравнения движения максвелловской электродинамики

$$S[A] = \frac{1}{2} \int F \wedge \star F - \int A \wedge \star j.$$

7.11. **Поля Киллинга.** В заключение темы рассмотрим *поля Киллинга.* Так называются векторные поля скоростей (локальной) однопараметрической группы движений риманова многообразия с (полу)римановой структурой $\mathfrak{g}$. Другими словами, поток, который генерируется векторным полем Киллинга, задает непрерывное однопараметрическое семейство движений многообразия M, то есть преобразований, относительно которых (полу)риманова метрика остается инвариантной. Таким образом векторное поле X на M называется полем Киллинга если оно удовлетворяет следующему уравнению:

$$Ł_X \mathfrak{g} = 0.$$

Если (полу)риманова метрика $\mathfrak{g}$ в некоторой криволинейной системе координат не зависит от одной из координат x^a, тогда векторное поле вдоль этой координаты $\partial/\partial x^a$, очевидно, будет полем Киллинга.

Векторы Киллинга в теоретической физике указывают на симметрию физической модели и помогают найти сохраняющиеся величины, например, энергию или импульс.

Векторные поля Киллинга не выдерживают умножения на функцию. Поэтому они не образуют $C^\infty(M)$-модуль в отличие от множества всех векторных полей $\varkappa(M)$.

Задача 7.24. Найти производную Ли римановой метрики $g = g_{ab}\, dx^a \otimes dx^b$ в локальных координатах.

Задача 7.25. Найдите все линейно независимые поля Киллинга для стандартной евклидовой структуры

$$\mathfrak{g} = dx \otimes dx + dy \otimes dy$$

на плоскости $\mathbb{R}^2$. Должно получиться, что первые два поля Киллинга отвечают однопараметрическим подгруппам сдвигов вдоль осей x и y, а последнее отвечают подгруппе вращений вокруг начала координат. Различные комбинации из этих трех подгрупп исчерпывают всевозможные движения плоскости.

Задача 7.26. Найти все линейно независимые поля Киллинга гиперболического пространства де Ситтера ($n = 2$): $x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 1$, погруженного в пространство Минковского с полуримановой структурой

$$\mathfrak{g} = -dx_0 \otimes dx_0 + dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2.$$

Задача 7.27. Покажите, что коммутатор двух векторных полей Киллинга X и Y снова дает поле Киллинга: $Ł_{[X,Y]}\mathfrak{g} = 0$.

8. Аффинная связность и кривизна

Материал этого раздела в некотором смысле лежит несколько в стороне от изучаемых ранее дифференциальных структур на многообразиях. *Аффинная связность* — это дополнительная структура, придающая многообразию кривизну и форму; она не возникает естественно из дифференциальной структуры, она, как мы увидим, даже не является тензором. Однако без этой важной темы никакое изучение дифференциальной геометрии не будет полным для физика-теоретика.

В предыдущих разделах нам уже доводилось вводить дополнительные структуры на многообразиях: мы это делали, выделяя некоторое тензорное поле среди других, с тем чтобы оно служило нам как метрика или элемент объема и т.п. То же задание риманова объема совсем недалеко выводит за рамки дифференциальной структуры многообразия. (Полу)риманова метрика же порождает много дополнительных структур и помимо аффинной связности. Последняя не укладывается в рамки уже построенных нами структур. С точки зрения дифференциальной геометрии это совершенно новая структура на многообразии, открывающая большие возможности.

8.1. **Введение.** На дифференцируемых многообразиях нет само собой разумеющегося понятия параллельности векторов в разных точках. В связи с этим рассматривается *аффинная связность*, представляющая собой правило, посредством которого вводится понятие параллельности. Для того, чтобы понять, о какого рода правилах может идти речь, рассмотрим понятие параллельности векторов на простом примере двумерной сферы $M = \mathbb{S}^2$ единичного радиуса

$$\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Обозначим через $\gamma : [0,1] \to M$ полуокружность, заданную параметрически как

$$x(t) = 0, \quad y(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi t\right), \quad z(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi t\right).$$

Касательный вектор $Y \in T_pM$ в начальной точке $p = \gamma(0)$ с координатами $Y^i = (0,1,0)$, очевидно, является касательным к полуокружности $\gamma(t)$. Представим, что мы «переносим» этот вектор вдоль кривой γ в ее конец $q = \gamma(1)$. Чтобы вектор продолжал «лежать на сфере», он должен постоянно оставаться в касательной плоскости к сфере, и, если при переносе мы не будем его поворачивать, он будет просто оставаться касательным к рассматриваемой кривой $\gamma(t)$. Последнее означает, что в точку q он придет вектором $Y' \in T_qM$, направленным, с точки зрения нашего трехмерного мира точно противоположно вектору Y, то есть $Y'^i = (0, -1,0)$. Должны ли мы считать параллельными с точки зрения геометрии сферы векторы Y и Y'? Прежде чем сделать окончательный вывод, представим, что мы «переносим» вектор Y из точки p в точку q по другой полуокружности $\tilde{\gamma} : [0,1] \to M$:

$$x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi t\right), \quad y(t) = 0, \quad z(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi t\right).$$

Поскольку в начальной точке вектор Y перпендикулярен полуокружности $\tilde{\gamma}(t)$, то естественно считать, что мы перемещаем его не поворачивая, если он будет оставаться перпендикулярным к кривой $\tilde{\gamma}$ и касательным к сфере $\mathbb{S}^2$. В таком случае мы получаем вектор $\tilde{Y}' \in T_qM$, который, с точки зрения нашего трехмерного восприятия, и в самом деле параллелен вектору Y. Но ведь векторы Y' и $\tilde{Y}'$ противоположно направлены. Какой из них следует считать параллельным вектору Y? Ясно, что если рассматривать свойства сферы как таковой, ни один из векторов не заслуживает быть названным параллельным Y. Понятия параллельности (даже в этом простом случае) просто-напросто нет. Все что можно сделать, как мы поняли, это при помощи аффинной связности дать определение понятию *параллельного переноса вдоль кривой*. Посмотрим, к чему в таком случае можно прийти.

Пусть на многообразии M имеется некоторая кривая $\gamma : [0{,}1] \to M$ и аффинная связность. Обозначим через X векторное поле, для которого кривая γ является интегральной, то есть

$$X = \dot{\gamma}, \qquad \dot{\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\gamma}{dt}.$$

Зафиксируем в точке $p = \gamma(0) \in M$ произвольный касательный вектор $Y(p) \in T_pM$. Тогда связность позволяет нам выбрать в каждом касательном пространстве $T_{\gamma(t)}M$, $t \in [0{,}1]$ вдоль кривой вектор $Y(\gamma(t))$, который можно назвать результатом параллельного переноса вектора $Y(p)$. Таким образом мы надеемся получить параллельно перенесенное вдоль кривой γ векторное поле Y. Поскольку мы можем теперь сказать, что вектор Y в некотором смысле не меняется вдоль кривой γ, то можно определить производную, в смысле которой изменение Y равно нулю:

$$\nabla_X Y = 0.$$

Она называется *ковариантной производной по направлению* X.

Если теперь Y — произвольное векторное поле, заданное всюду на кривой $\gamma : [0{,}1] \to M$, то мы можем определить его ковариантную производную вдоль $X = \dot{\gamma}$ почти так же, как определяется производная Ли. Обозначим посредством $Y_\varepsilon(p)$ касательный вектор, являющийся результатом параллельного переноса вектора Y из точки $\gamma(\varepsilon)$ назад в точку p. Так как векторы $Y_\varepsilon(p)$ и $Y(p)$ лежат в одном касательном пространстве T_pM, мы можем записать следующее формальное определение ковариантной производной:

$$\nabla_X Y|_p = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{Y_\varepsilon(p) - Y(p)}{\varepsilon}.$$

Видно, что в отличие от вычисления производной Ли, для параллельного переноса вектора нам нужны лишь кривая γ, векторые поля X и Y на этой кривой, и конечно, аффинная связность.

Несложно понять, что ∇_X является дифференциальным оператором, то есть выполняется правило Лейбница

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y, \quad \nabla_X f \stackrel{\text{def}}{=} X(f), \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
\nabla_X(fY)|_p &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\gamma(\varepsilon))Y_\varepsilon(p) - f(\gamma(0))Y(p)}{\varepsilon} = \\
&= f(\gamma(0)) \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{Y_\varepsilon(p) - Y(p)}{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\gamma(\varepsilon)) - f(\gamma(0))}{\varepsilon} Y_\varepsilon(p) = \\
&= f\nabla_X Y|_p + X^i \partial_i f\, Y(p) = f\nabla_X Y|_p + X(f)Y(p).
\end{aligned}$$

Другим важным свойством ковариантной производной ∇_X является ее C^∞-линейность по X; иначе говоря, значение $\nabla_X Y$ в точке зависит только от значения X в той же точке, но не от производных X. В самом деле, представим, что мы ввели новый параметр на кривой, перейдя от параметра t к параметру $s(t)$. Тогда новым касательным вектором, очевидно, будет gX, где $g = \frac{dt}{ds}$. Значит, по определению, ковариантная производная тоже умножится на g, поскольку $\varepsilon \to 0$ заменится на $\varepsilon\frac{ds}{dt} = \frac{\varepsilon}{g}$. Таким образом, из определения ковариантной производной получаем, что для любых гладких функций f, g выполняется

$$\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z.$$

Из этого свойства следует, что ковариантная производная $\nabla_X Z$ определяет тензорное поле ∇Z типа (1,1), значение которого на аргументах X и $\omega \in \Omega^1(M)$ равно

$$\nabla Z(\omega, X) = \omega(\nabla_X Z).$$

Действительно, ведь для любых гладких функций $f, g \in C^\infty(M)$, векторных полей X, Y, Z и любых 1-форм $\omega, \lambda \in \Omega^1(M)$ справедливо

$$\nabla Z(f\omega + g\lambda, X) = f\omega(\nabla_X Y) + g\lambda(\nabla_X Y) = f\nabla Z(\omega, X) + g\nabla Z(\lambda, X),$$
$$\nabla Z(\omega, fX + gY) = \omega(f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z) = f\nabla Z(\omega, X) + g\nabla Z(\omega, Y).$$

Тот факт, что ∇Z есть тензорное поле означает, что мы можем совсем убрать кривую γ из определения ковариантной производной. Тензор ∇Z определяется только связностью и самим векторным полем Z.

Мы надеемся, что после такого формально-геометрического обсуждения понятий аффинной связности и ковариантной производной вдоль гладких кривых, абстрактные алгебраические определения этих математических объектов, которые мы сейчас дадим, станут совершенно естественными и понятными.

8.2. **Аффинная связность.** Рассмотрим дифференцируемое многообразие M размерности $\dim M = n$. Множество всех векторных полей на M обозначим через $\mathrm{Vec}(M)$. Оно, как известно, образует алгебру Ли относительно скобки Ли вида

$$[X, Y] = \mathrm{Ł}_X Y.$$

Определение 8.1. *Аффинной связностью* ∇ на многообразии M называется такое билинейное отображение

$$\nabla : \mathrm{Vec}(M) \times \mathrm{Vec}(M) \to \mathrm{Vec}(M),$$

что для любых гладких функций $f, g \in C^\infty(M)$ и для любых векторных полей $X, Y, Z \in \mathrm{Vec}(M)$ справедливы C^∞-линейность по первому аргументу и правило Лейбница по второму аргументу, то есть

- $\nabla(fX + gY, Z) = f\nabla(X, Z) + g\nabla(Y, Z)$,
- $\nabla(X, fY) = f\nabla(X, Y) + X(f)Y$.

Ковариантная производная вдоль векторного поля X определяется как

$$\nabla_X Y \overset{\mathrm{def}}{=} \nabla(X, Y) \quad \forall Y \in \mathrm{Vec}(M).$$

Полезно знать выражение для ковариантной производной векторного поля в локальных координатах $x^i, i \in \{1, \dots, n\}$ на многообразии. Если в касательном пространстве выбрать координатный базис $e_i = \partial_i$, то

$$\nabla_X Y = \nabla_X (Y^j e_j) = X(Y^j)\, e_j + Y^j(\nabla_X e_j) = X^i \partial_i Y^j e_j + X^i Y^j \nabla_{e_i} e_j.$$

Вводя обозначение $\nabla_{e_i} = \nabla_i$, получаем

$$\nabla_i e_j = \Gamma^k_{ij}\, e_k.$$

Символы Γ^k_{ij} называются *компонентами аффинной связности* в координатном базисе. Отсюда, для ковариантной производной от векторного поля находим следующее выражение:

$$\nabla_X Y = X^i \nabla_i Y = X^i(\partial_i Y^k + \Gamma^k_{ij} Y^j)\, e_k, \quad (\nabla_i Y)^k = \partial_i Y^k + \Gamma^k_{ij} Y^j.$$

Заметим, что символы аффинной связности не являются компонентами какого-нибудь смешанного тензора третьего ранга. Действительно, совершая переход к новым криволинейным координатам $x'^i = x'^i(x)$, ковариантную производную базисного вектора можно записать как

$$\nabla'_i e'_j = \Gamma'^k_{ij}\, e'_k.$$

Имея в виду, что $e'_i = (\partial'_i x^j) e_j$, получаем

$$\Gamma'^k_{ij}\,\frac{\partial x^\ell}{\partial x'^k} e_\ell = \nabla'_i e'_j = \frac{\partial x^a}{\partial x'^i}\frac{\partial x^b}{\partial x'^j}\Gamma^\ell_{ab}\, e_\ell + \frac{\partial^2 x^\ell}{\partial x'^i \partial x'^j} e_\ell.$$

Значит, закон преобразования компонент аффинной связности при криволинейных заменах координат имеет вид

$$\Gamma'^k_{ij} = \frac{\partial x^a}{\partial x'^i}\frac{\partial x^b}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^k}{\partial x^\ell}\Gamma^\ell_{ab} + \frac{\partial x'^k}{\partial x^\ell}\frac{\partial^2 x^\ell}{\partial x'^i \partial x'^j}.$$

Он, очевидно, отличается от тензорного закона наличием неоднородных слагаемых, которые содержат вторые производные от функций перехода. Если ограничить класс допустимых преобразований координат аффинными (линейными неоднородными), то аффинная связность будет преобразовываться как тензор.

Наличие неоднородного слагаемого в законе преобразования аффинной связности не позволяет их складывать как тензорные поля и умножать даже на числа. Например, если на многообразии M задано две аффинные связности Γ^k_{1ij} и Γ^k_{2ij}, то их сумма в общем случае связностью не является. В то же время нетрудно проверить, что выпуклая комбинация

$$\Gamma^k_{ij} = f\Gamma^k_{1ij} + (1-f)\Gamma^k_{2ij}, \quad f \in C^\infty(M),$$

задает компоненты некоторой аффинной связности.

Определение 8.2. *Вариацией* аффинной связности $\delta\Gamma^k_{ij}$ называется разность двух близких связностей (близость определяется либо поточечно, $\delta\Gamma^k_{ij} \ll 1$, либо другим образом в зависимости от задачи).

Вариация связности является тензорным полем типа (1,2), поскольку неоднородные слагаемые сокращаются.

8.3. **Производная тензорных полей.** Хоть сами по себе компоненты аффинной связности и не являются компонентами тензора, однако, они позволяют строить новые тензорные поля из заданных с помощью ковариантного дифференцирования. Собственно, название «ковариантное» и отражает это обстоятельство. Посмотрим, как можно распространить ковариантную производную на произвольные тензорные поля.

Действие ковариантной производной ∇_X на функции определяется просто как производная по направлению $X(f)$, а на формах первой степени определяется из требования выполнения правила Лейбница для канонического умножения дифференциальных форм первой степени на векторные поля:

$$(\nabla_X\omega)(Y) = \nabla_X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y).$$

Перепишем последнюю формулу в терминах локальных координат:

$$X^i(\nabla_i\omega)(Y) = X^i\partial_i(Y^j\omega_j) - X^i\omega_j(\nabla_i Y^j) = X^i(\partial_i\omega_j - \Gamma^k_{ij}\omega_k)Y^j.$$

Отсюда находим

$$(\nabla_i\omega)_j = \partial_i\omega_j - \Gamma^k_{ij}\omega_k.$$

Нетрудно заметить, что эта формула отличается от ковариантной производной векторного поля знаком при компонентах аффинной связности.

Задача 8.3. Доказать справедливость следующей формулы для ковариантной производной от базисной формы первой степени

$$\nabla_i h^k = -\Gamma_{ij}^k \, h^j, \quad h^k = dx^k.$$

Ковариантная производная, определенная на векторных полях и на формах первой степени, индуцирует связность на тензорных полях с помощью дополнительного требования выполнения правила Лейбница для тензорного произведения:

$$\nabla_X(T \otimes S) = (\nabla_X T) \otimes S + T \otimes (\nabla_X S).$$

Здесь T и S произвольные тензорные поля на многообразии M. Нетрудно проверить, что ковариантная производная коммутирует с каждым свертыванием: $\nabla_X C = C\nabla_X$, где C — оператор свертки. Кроме того, ковариантная производная вдоль векторного поля ∇_X сохраняет тип тензорных полей. Таким образом, ковариантная производная вдоль векторного поля является дифференцированием в тензорной алгебре.

Для того чтобы понять, как примерно будет выглядеть ковариантная производная от тензорного поля произвольного типа в локальных координатах, рассмотрим сначала простой случай смешанного тензорного поля T типа (1,1):

$$\nabla_k T = \nabla_k (T^i{}_j e_i \otimes h^j) = \partial_k T^i{}_j \, e_i \otimes h^j + T^i{}_j \nabla_k (e_i \otimes h^j).$$

Учитывая, что

$$\nabla_k e_i = \Gamma_{ki}^\ell \, e_\ell, \quad \nabla_k h^j = -\Gamma_{k\ell}^j \, h^\ell,$$

а также справедливость правила Лейбница для тензорного произведения,

$$\nabla_k (e_i \otimes h^j) = \Gamma_{ki}^\ell \, e_\ell \otimes h^j - \Gamma_{k\ell}^j \, e_i \otimes h^\ell,$$

получаем

$$\nabla_k T = (\nabla_k T)^i{}_j \, e_i \otimes h^j = (\partial_k T^i{}_j + \Gamma_{k\ell}^i T^\ell{}_j - \Gamma_{kj}^\ell T^i{}_\ell) \, e_i \otimes h^j,$$

или, окончательно,

$$(\nabla_k T)^i{}_j = \partial_k T^i{}_j + \Gamma_{k\ell}^i T^\ell{}_j - \Gamma_{kj}^\ell T^i{}_\ell.$$

Теперь нетрудно понять, что для произвольного тензорного поля ковариантная производная в координатах будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}(\nabla_k T)^{i_1 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_q} = \partial_k T^{i_1 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_q} + \Gamma_{k\ell}^{i_1} T^{\ell i_2 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_q} + \dots + \Gamma_{k\ell}^{i_p} T^{i_1 \dots i_{p-1}\ell}{}_{j_1 \dots j_q} \\ - \Gamma_{kj_1}^\ell T^{i_1 \dots i_p}{}_{\ell j_2 \dots j_q} - \dots - \Gamma_{kj_q}^\ell T^{i_1 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_{q-1}\ell}.\end{aligned}$$

Если кому-то данная формула не очевидна, проверьте ее самостоятельно в качестве полезного упражнения.

Задача 8.4. Показать с помощью прямых вычислений, что ковариантная производная $(\nabla_k T)^{i_1 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_q}$ тензора типа (p,q) дает тензор типа $(p,q+1)$.

Задача 8.5. Докажите, что для произвольных дифференциальных форм $\omega, \lambda \in \Omega^k(M)$ выполняется правило Лейбница

$$\nabla_X(\omega \wedge \lambda) = (\nabla_X \omega) \wedge \lambda + \omega \wedge (\nabla_X \lambda).$$

8.4. **Аффинная связность.** ...//

Кратко обсудим такие понятия как аффинная связность и ковариантная производная. Рассмотрим дифференцируемое многообразие M. Пространство векторных полей на M обозначим через $\varkappa(M)$. Тогда аффинной связностью ∇ на M называется билинейное отображение

$$\nabla : \varkappa(M) \times \varkappa(M) \to \varkappa(M),$$

такое, что для любых гладких функций $f,g \in C^\infty(M)$ и для любых векторных полей $X,Y,Z \in \varkappa(M)$ справедливы следующие формулы:
(1) f-линейность по первому аргументу: $\nabla(fX + gY,Z) = f\nabla(X,Z) + g\nabla(Y,Z)$,
(2) правило Лейбница по второму аргументу: $\nabla(X,fY) = f\nabla(X,Y) + X(f)Y$.
Определим ковариантную производную векторного поля согласно

$$\nabla(X,Y) = \nabla_X Y.$$

Из определения аффинной связности ясно, что ковариантная производная функции есть простое дифференцирование по направлению, то есть

$$\nabla_X f = X(f) = df(X) = f_\star X = Ł_X f. \tag{8.1}$$

Из (8.1) можно сделать неверное заключение о том, что ковариантная производная и производная Ли совпадают не только для гладких функций, но и в общем случае произвольных тензорных полей. Однако, это не так, что видно уже из того, что ковариантная производная векторного поля $\nabla_X Y$ является f-линейной по вектору X, в отличие от производной Ли $Ł_X Y$. Иначе говоря, значение $\nabla_X Y$ в точке зависит только от значения X в той же точке, но не от производных X.

Найдём выражение для ковариантной производной векторного поля $\nabla_X Y$ в локальных координатах на многообразии. Координатный базис в пространстве векторный полей $\varkappa(M)$, как известно, имеет вид $\{e_\alpha\} = \{\partial_\alpha\}$. Тогда

$$\nabla_X Y = \nabla_X(Y^\beta e_\beta) = \nabla_X(Y^\beta)\, e_\beta + Y^\beta\,(\nabla_X e_\beta) = X^\alpha\, \partial_\alpha Y^\beta\, e_\beta + X^\alpha Y^\beta\, \nabla_{e_\alpha} e_\beta.$$

Вводя обозначение $\nabla_{e_\alpha} \equiv \nabla_\alpha$, получаем

$$\nabla_\alpha e_\beta = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\, e_\gamma. \tag{8.2}$$

Символы $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ называются компонентами аффинной связности в базисе $\{e_\alpha\}$. Отсюда находим, что

$$\nabla_X Y = X^\alpha \nabla_\alpha Y = X^\alpha \left(\partial_\alpha Y^\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} Y^\beta\right) e_\gamma,$$

или

$$(\nabla_\alpha Y)^\gamma \equiv \nabla_\alpha Y^\gamma = \partial_\alpha Y^\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} Y^\beta. \tag{8.3}$$

Заметим, что символы аффинной связности не являются компонентами какого-нибудь смешанного тензора третьего ранга. Действительно, в новых координатах ковариантную производную базисного вектора можно записать как

$$\nabla'_\alpha e'_\beta = \Gamma'^\gamma_{\alpha\beta}\, e'_\gamma.$$

Имея в виду, что $e'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} e_\beta$, получаем

$$\Gamma'^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\gamma} e_\lambda = \nabla'_\alpha e'_\beta = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\, e_\lambda + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} e_\lambda.$$

Значит, закон преобразования символов аффинной связности при криволинейных заменах координат имеет вид

$$\Gamma'^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}. \tag{8.4}$$

Наличие второго слагаемого в последней формуле показывает, что символы $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ не являются компонентами смешанного тензора третьего ранга.

Задача 8.1. Приведите пример, когда в одной системе координат все символы аффинной связности обращаются в нуль, а в другой — нет.

Выпишем теперь ковариантную производную от дифференциальной формы ω первой степени на M. Действие ковариантной производной ∇_X на дифференциальных формах первой степени определяется из требования выполнения правила Лейбница для канонического умножения 1-форм на векторные поля:

$$(\nabla_X\omega)(Y) = \nabla_X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y). \tag{8.5}$$

Перепишем последнюю формулу в терминах локальных координат:

$$X^\mu \nabla_\mu \omega_\nu Y^\nu = X^\mu\, \partial_\mu(Y^\nu \omega_\nu) - X^\mu \omega_\nu(\nabla_\mu Y^\nu) = X^\mu \left(\partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\omega_\lambda\right) Y^\nu.$$

Отсюда получаем

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\omega_\lambda. \tag{8.6}$$

Нетрудно заметить, что эта формула отличается от ковариантной производной векторного поля знаком при компонентах аффинной связности. На формы высшей степени коваринатную производную тоже можно распространить, потребовав выполнения правила Лейбница для внешнего умножения форм. Также можно распространить определение ковариантной производной по правилу Лейбница на тензорные поля, причём, нетрудно понять, что

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha t^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q} = \partial_\alpha t^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q} + \Gamma^{\mu_1}_{\alpha\beta_1}\, t^{\beta_1\mu_2\ldots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q} + \ldots + \\ + \Gamma^{\mu_p}_{\alpha\beta_p}\, t^{\mu_1\ldots\mu_{p-1}\beta_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q} - \Gamma^{\gamma_1}_{\alpha\nu_1}\, t^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\gamma_1\nu_2\ldots\nu_q} - \ldots - \Gamma^{\gamma_q}_{\alpha\nu_q}\, t^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_{q-1}\gamma_q}.\end{aligned}$$

Здесь следует сделать замечание. Несмотря на то, что значение оператора ковариантной производной на каждом тензорном поле является тензором, сам по себе оператор ковариантной производной тензором не является. Однако, мы можем использовать ковариантную производную для построения двух тензоров: кручения и кривизны. **Кручением аффинной связности** ∇ называется отображение $T : \varkappa(M) \times \varkappa(M) \to \varkappa(M)$, определяемое формулой

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]_-, \tag{8.7}$$

где через $[\bullet,\bullet]_-$ обозначается скобка Ли векторных полей. **Кривизной аффинной связности** называется оператор $R : \varkappa(M) \times \varkappa(M) \to \varkappa(M)$, определяемый формулой

$$R(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]_-}. \tag{8.8}$$

Аффинная связность с нулевой кривизной называется **евклидовой**.

Для некоторой формы ω первой степени и векторных полей X,Y,Z определим

$$T(\omega,X,Y) = \omega(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]_-), \tag{8.9}$$

$$R(\omega, X,Y,Z) = \omega(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]_-}Z). \tag{8.10}$$

Явными вычислениями проверим, что T и R действительно являются тензорами. Для этого необходимо показать, что они линейны по всем аргументам. $\mathbb{R}$-линейность T и R по всем аргументам ясна из формул (8.9) и (8.10). Посмотрим, что происходит при умножении на гладкую функцию f. Для кручения имеем

$$T(f\omega,X,Y) = f\omega(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]_-) = fT(\omega,X,Y),$$

$$T(\omega,fX,Y) = \omega(f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - Y(f)X - f[X,Y]_- + Y(f)X) = fT(\omega,X,Y).$$

В последнем выражении учтено, что $[fX,Y]_- = f[X,Y]_- - Y(f)X$. Аналогично

$$T(\omega,X,fY) = \omega(f\nabla_X Y + X(f)Y - f\nabla_Y X - f[X,Y]_- - X(f)Y) = fT(\omega,X,Y).$$

Для кривизны получаем

$$R(f\omega, X,Y,Z) = f\omega(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]_-}Z) = fR(\omega, X,Y,Z),$$

$$\begin{aligned} R(\omega,fX,Y,Z) &= R(\omega, X,fY,Z) = \\ &= \omega(f\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y(f\nabla_X Z) - \nabla_{(f[X,Y]_- - Y(f)X)}Z) = \\ &= \omega(f\nabla_X\nabla_Y Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - Y(f)\nabla_X Z - \\ &\quad - f\nabla_{[X,Y]_-}Z + Y(f)\nabla_X Z) = fR(\omega, X,Y,Z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(\omega,X,Y,fZ) &= \omega(f\nabla_X\nabla_Y Z + X(f)\nabla_Y Z + Y(f)\nabla_X Z + X(Y(f))Z - \\ &\quad - f\nabla_Y\nabla_X Z - Y(f)\nabla_X Z - Y(X(f))Z - X(f)\nabla_Y Z - \\ &\quad - f\nabla_{[X,Y]_-}Z - X(Y(f))Z + Y(X(f))) = fR(\omega, X,Y,Z). \end{aligned}$$

Таким образом, и кручение, и кривизна являются тензорами на многообразии M. Выпишем компоненты этих тензоров в координатном базисе. Компонентами кручения являются

$$T^\alpha_{\ \mu\nu} = T(dx^\alpha, e_\mu, e_\nu) = dx^\alpha(\nabla_\mu e_\nu - \nabla_\nu e_\mu - [e_\mu,e_\nu]_-),$$

$$T^\alpha_{\ \mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} = 2\Gamma^\alpha_{[\mu\nu]} = -T^\alpha_{\ \nu\mu}.$$

В последнем выражении учтено, что $[e_\mu,e_\nu]_- = [\partial_\mu, \partial_\nu]_- = 0$. Кроме того, как несложно заметить, хотя символы аффинной связности не являются компонентами тензора, их антисимметричная часть $\Gamma^\alpha_{[\mu\nu]}$ образует смешанный антисимметричный (по перестановке нижних индексов) тензор.

Аффинные связности, компоненты которых симметричны по перестановкам нижних индексов: $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu}$, имеют нулевое кручение $T^\alpha_{\ \mu\nu} = 0$. Такие аффинные связности называются связностями, свободными от кручения. Они играют особую роль в теоретической физике.

Компоненты тензора кривизны в координатном базисе определяются согласно

$$\begin{aligned} R^\alpha_{\ \beta\mu\nu} &= R(dx^\alpha, e_\mu, e_\nu, e_\beta) = \\ &= dx^\alpha(\nabla_\mu\nabla_\nu e_\beta - \nabla_\nu\nabla_\mu e_\beta) = dx^\alpha(\nabla_\mu(\Gamma^\sigma_{\nu\beta}e_\sigma) - \nabla_\nu(\Gamma^\sigma_{\mu\beta}e_\sigma)) = \\ &= dx^\alpha(\partial_\mu\Gamma^\lambda_{\nu\beta}\, e_\lambda + \Gamma^\lambda_{\nu\beta}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\, e_\sigma - \partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\beta}\, e_\lambda - \Gamma^\lambda_{\mu\beta}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\, e_\sigma) = \\ &= \partial_\mu\Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\lambda_{\nu\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\beta}\Gamma^\alpha_{\nu\lambda} = -R^\alpha_{\ \beta\nu\mu}. \end{aligned}$$

Из последнего выражения видно, что

$$R^\alpha_{\ \beta\mu\nu} = R^\alpha_{\ \beta[\mu\nu]}. \tag{8.11}$$

Также интересно посмотреть на выражение для коммутатора ковариантных производных $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]_- Z^\sigma = 2\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]}Z^\sigma$:

$$\begin{aligned} \nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]}Z^\sigma &= \partial_{[\mu}(\nabla_{\nu]}Z^\sigma) + \Gamma^\sigma_{[\mu|\lambda|}\nabla_{\nu]}Z^\lambda - \Gamma^\rho_{[\mu\nu]}\nabla_\rho Z^\sigma = \\ &= \partial_{[\mu}\partial_{\nu]}Z^\sigma + (\partial_{[\mu}\Gamma^\sigma_{\nu]\rho})Z^\rho + (\partial_{[\mu}Z^\rho)\Gamma^\sigma_{\nu]\rho} + \Gamma^\sigma_{[\mu|\lambda|}\partial_{\nu]}Z^\lambda + \Gamma^\sigma_{[\mu|\lambda|}\Gamma^\lambda_{\nu]\rho}Z^\rho - \Gamma^\rho_{[\mu\nu]}\nabla_\rho Z^\sigma. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$R^\alpha_{\ \beta\mu\nu} = 2\,\partial_{[\mu}\Gamma^\alpha_{\nu]\beta} + 2\Gamma^\alpha_{[\mu|\lambda|}\Gamma^\lambda_{\nu]\beta}, \qquad T^\alpha_{\ \mu\nu} = 2\Gamma^\alpha_{[\mu\nu]}, \tag{8.12}$$

получаем тождество

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]_- Z^\sigma = R^\sigma_{\ \rho\mu\nu}Z^\rho - T^\rho_{\ \mu\nu}\nabla_\rho Z^\sigma, \tag{8.13}$$

известное как тождество Риччи.

8.5. **Связность Леви-Чивита.** При наличии (полу)римановой структуры $\mathfrak{g}$ на многообразии M можно сформулировать и доказать фундаментальную теорему римановой геометрии. Последняя утверждает, что существует единственная аффинная связность, свободная от кручения и при том, совместимая в метрикой $\mathfrak{g}$, в том смысле, что

$$\nabla_X \mathfrak{g} = 0 \tag{8.14}$$

для любого векторного поля X на римановом многообразии M. Такая аффинная связность называется связностью Леви-Чивита. Доказательство этой теоремы начнём с того, что запишем ковариантную производную

$$\nabla_X(\mathfrak{g}(Y,Z)) = (\nabla_X \mathfrak{g})(Y,Z) + \mathfrak{g}(\nabla_X Y,Z) + \mathfrak{g}(Y,\nabla_X Z) = \mathfrak{g}(\nabla_X Y,Z) + \mathfrak{g}(Y,\nabla_X Z).$$

Совершая циклическую перестановку векторных полей, получаем

$$\begin{aligned} X(\mathfrak{g}(Y,Z)) &= \mathfrak{g}(\nabla_X Y,Z) + \mathfrak{g}(Y,\nabla_X Z),\\ Y(\mathfrak{g}(Z,X)) &= \mathfrak{g}(\nabla_Y Z,X) + \mathfrak{g}(Z,\nabla_Y X),\\ Z(\mathfrak{g}(X,Y)) &= \mathfrak{g}(\nabla_Z X,Y) + \mathfrak{g}(X,\nabla_Z Y). \end{aligned}$$

Поскольку кручение отсутствует, то $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]_- \ \forall X,Y \in \varkappa(M)$, а значит

$$\begin{aligned} X(\mathfrak{g}(Y,Z)) &= \mathfrak{g}(\nabla_Y X,Z) + \mathfrak{g}(Y,\nabla_X Z) + \mathfrak{g}([X,Y]_-,Z),\\ Y(\mathfrak{g}(Z,X)) &= \mathfrak{g}(\nabla_Z Y,X) + \mathfrak{g}(Z,\nabla_Y X) + \mathfrak{g}([Y,Z]_-,X),\\ Z(\mathfrak{g}(X,Y)) &= \mathfrak{g}(\nabla_X Z,Y) + \mathfrak{g}(X,\nabla_Z Y) + \mathfrak{g}([Z,X]_-,Y). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(\nabla_Y X,Z) = \frac{1}{2}[&X(\mathfrak{g}(Y,Z)) + Y(\mathfrak{g}(Z,X)) - Z(\mathfrak{g}(X,Y)) -\\ &- \mathfrak{g}([X,Y]_-,Z) - \mathfrak{g}([Y,Z]_-,X) + \mathfrak{g}([Z,X]_-,Y)]. \end{aligned}$$

В силу невырожденности (полу)римановой метрики последняя формула однозначно определяет аффинную связность на римановом многообразии и называется формулой Козюля. Действительно, проверим, например, свойство f-линейности ковариантной производной по первому аргументу:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(\nabla_{fY} X,Z) = \frac{1}{2}[&fX(\mathfrak{g}(Y,Z)) + X(f)\mathfrak{g}(Y,Z) + fY(\mathfrak{g}(Z,X)) -\\ &- fZ(\mathfrak{g}(X,Y)) - Z(f)\mathfrak{g}(X,Y) - f\mathfrak{g}([X,Y]_-,Z) - X(f)\mathfrak{g}(Y,Z) -\\ &- f\mathfrak{g}([Y,Z]_-,X) + Z(f)\mathfrak{g}(X,Y) + f\mathfrak{g}([Z,X]_-,Y)] = \mathfrak{g}(f\nabla_Y X, Z). \end{aligned}$$

Остальные свойства аффинной связности проверяются аналогично.

Запишем теперь формулу Козюля для базисных векторных полей, то есть вычислим

$$\mathfrak{g}(\nabla_\mu e_\nu, e_\alpha) = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\alpha} \equiv \Gamma_{\alpha|\mu\nu}. \tag{8.15}$$

Учитывая, что $[e_\alpha, e_\beta]_- = [\partial_\alpha, \partial_\beta]_- = 0$, получаем

$$\Gamma_{\alpha|\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}\right). \tag{8.16}$$

Поднимая индексы обратной метрикой $g^{\lambda\alpha}$ находим, что

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}\left(\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}\right). \tag{8.17}$$

Компоненты связности Леви-Чивита $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ или $\Gamma_{\lambda|\mu\nu}$ называются символами Кристоффеля. Они, очевидно, симметричны по перестановке индексов μ и ν.

Интересно отметить, что тождество Риччи для связности Леви-Чивита имеет вид

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]_- Z^\sigma = R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} Z^\rho. \tag{8.18}$$

Если многообразие M являет собой просто евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, то существует глобальный базис, в котором риманова метрика имеет диагональный вид: $g_{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta}$, а символы Кристоффеля и тензор кривизны Римана обращаются в нуль во всех точках пространства; ковариантная производная в этом случае сводится к частной производной $\nabla_\mu \mapsto \partial_\mu$. Значит

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]_- Z^\sigma \;\mapsto\; [\partial_\mu, \partial_\nu]_- Z^\sigma \equiv 0,$$

поскольку частное дифференцирование перестановочно. Поэтому, чтобы узнать, является ли пространство евклидовым в заданных координатах, необходимо вычислить тензор кривизны Римана: риманова кривизна евклидова пространства тождественно равна нулю, во всех точках.

В заключение параграфа рассчитаем кривизну вложенного многообразия M на примере поверхности Бельтрами (псевдосферы). Поверхность Бельтрами в $\mathbb{R}^3$ можно задать параметрически как

$$\begin{cases} x = \sin a \cos b, \\ y = \sin a \sin b, \\ z = \ln \tan \frac{a}{2} + \cos a. \end{cases}$$

Здесь $0 \le a \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le b \le 2\pi$. Для начала найдём компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(a,b)$, индуцированной вложением $i : M \to \mathbb{R}^3$:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^\nu}.$$

Подставляя в последнее выражение формулы перехода от декартовых координат к локальным $x^\mu = (a,b)^{\mathrm{T}}$, получаем

$$g_{11} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial a} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial a} = \cot^2 a, \qquad g_{22} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial b} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial b} = \sin^2 a, \qquad g_{12} = g_{21} = 0,$$

то есть индуцированная метрика имеет диагональный вид. Отсюда ненулевые символы Кристоффеля

$$\Gamma^1_{11} = -\frac{1}{\sin a \cos a}, \qquad \Gamma^1_{22} = -\frac{\sin^3 a}{\cos a}, \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \cot a.$$

Вычисляя соответствующие компоненты тензора кривизны Римана, находим

$$R^1{}_{212} = -R^1{}_{221} = -\sin^2 a, \qquad R^2{}_{112} = -R^2{}_{121} = \cot^2 a.$$

Свёртка тензора Римана по индексам α и μ определяет тензор Риччи

$$R_{\beta\nu} = R^\alpha{}_{\beta\alpha\nu}. \tag{8.19}$$

В нашем случае (для поверхности Бельтрами), отличные от нуля компоненты тензора Риччи

$$R_{11} = -\cot^2 a, \qquad R_{22} = -\sin^2 a,$$

а значит, скалярная кривизна R, определяемая как свёртка тензора Риччи с обратной римановой метрикой: $R = g^{\beta\nu} R_{\beta\nu}$, постоянна для псевдосферы и равна $R = -2$.

Задача 8.2. Используя тождество Риччи докажите, что тензор Риччи является симметричным, то есть

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \tag{8.20}$$

Задача 8.3. Вычислить тензор кривизны Римана, а также тензор Риччи и скалярную кривизну на сфере радиуса a:

$$\mathfrak{g} = a^2 \left(d\vartheta \otimes d\vartheta + \sin^2 \vartheta \, d\varphi \otimes d\varphi \right) .$$

...///

9. Динамика локальных полей

Можно сказать, что для возникновения локальной теории поля имеются две основные причины. Первая из них состоит в том, что мы можем рассматривать механические системы с бесконечным числом степеней свободы. Динамическая система с конечным числом степеней свободы описывается обобщенными координатами x^i и обобщенными скоростями $\dot{x}^i$. Если число координат становится континуальным, мы начинаем иметь дело с полем $\phi^I(t,\boldsymbol{r})$. Например, колеблющаяся струна состоит из очень большого, фактически бесконечного числа атомов, непрерывно распределенных вдоль нее, и каждый из них совершает колебания. В этом случае x — номер атома, а поле $\varphi(x,t)$ — амплитуда его колебаний в момент времени t. Второй причиной является существование максимальной скорости распространения взаимодействий c. Из-за этого энергия взаимодействия должна перемещаться между источником и объектом взаимодействия, то есть где-то помещаться. Это «где-то» и есть поле. Возмущение поля в некотором месте вызывает его изменение в соседних точках, которые в свою очередь, распространяются дальше. Так в течение конечного времени осуществляется дальнодействие.

9.1. **Структура полевого лагранжиана.**

В механике частиц в качестве наблюдаемой величины измеряется положение частицы в пространстве, которое задается обобщенными координатами x^i. В локальной теории поля, как мы уже знаем, измеряются локальные характеристики поля

$$\phi^I = \phi^I(t,\boldsymbol{r}).$$

то есть вводится зависимость поля ϕ^I от точки пространства $\boldsymbol{r}$ и от времени t. В механике частиц при описании динамики механических систем мы всегда имели дело с конечным числом обобщенных координат x^i, в теории поля нас также интересует динамика полей ϕ^I, но в этом случае мы, очевидно, уже имеем дело с механической системой с бесконечным числом степеней свободы — по крайней мере, по одной для каждой точки пространства $\boldsymbol{r}$.

Как и в классической механике частиц, в классической теории поля динамика полей описывается функцией Лагранжа, так или иначе зависящей от полей ϕ^I, их производных $\dot{\phi}^I$, $\nabla\phi^I$ и, быть может, от пространственно-временных координат $x^\mu = (t,\boldsymbol{r})$, причем для всех локальных полевых систем, которые мы будем изучать, функция Лагранжа обычно имеет вид

$$L(t) = \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}\, \mathscr{L}(\phi^I(x), \partial_\mu \phi^I(x)).$$

Функция $\mathscr{L}$ представляет собой объемную плотность функции Лагранжа и обычно называется *лагранжианом*. Важно еще раз подчеркнуть, что речь идет о локальных полях. В общем случае не все теории поля представимы в таком виде. В различных приложениях, например, в гидродинамике, порой приходится сталкиваться и с нелокальными теориями поля. Впрочем, с точки зрения релятивизма, такие теории нарушают лоренц-инвариантность и причинность. С учетом вышесказанного функционал действия S для полевой системы примет вид[1]

$$S[\phi^I(x)] = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}\, \mathscr{L}(\phi^I(x), \partial_\mu \phi^I(x)) = \int_M d_4 x\, \mathscr{L}(\phi^I(x), \partial_\mu \phi^I(x)).$$

[1]Если хочется сходимости такого интеграла, необходимо потребовать, чтобы $\mathscr{L} \to 0$ при $|\boldsymbol{r}| \to \infty$. Во многих теориях поля для этого достаточно считать, что поля $\phi^I(x) \to 0$ при $|\boldsymbol{r}| \to \infty$.

Здесь, очевидно, $M = [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^3$. В принципе, в полевой лагражиан можно включить зависимость от более высоких производных полей по пространственным координатам: $\nabla^2 \phi^I$, $\nabla^3 \phi^I$ и т.д. Однако, с оглядкой на релятивистскую инвариантность, обычно рассматривают только лагранжианы, зависящие от производных первого порядка по координатам и времени.

Отметим еще, что поскольку физические свойства полевой системы определяются действием S, в выражение для которого лагранжиан входит под знаком интеграла, то соответствие $S \mapsto \mathscr{L}$ не является взаимно однозначным. Лагранжианы, отличающиеся друг от друга полной 4-дивергенцией[1]:

$$\mathscr{L}' = \mathscr{L} + \partial_\mu F^\mu(x),$$

могут оказаться физически эквивалентными. В самом деле, интеграл от $\partial_\mu F^\mu$ с помощью теоремы Гаусса-Остроградского сводится к поверхностным интегралам от компонент F^μ по трехмерным границам четырехмерного объема интегрирования. Предполагая, как обычно, что функции поля и их производные исчезают на этих границах (то есть, что можно пренебречь топологически нетривиальными вкладами, идущими из граничных условий), получаем, что член $\partial_\mu F^\mu$ не дает вклада в физические величины. Это свойство иногда используется для того, чтобы выбрать лагранжиан в наиболее удобном виде.

9.2. **Полевые уравнения движения.** Понимая теперь структуру действия S, получим уравнения Эйлера-Лагранжа для локальных полевых систем. Для этого воспользуемся принципом экстремального действия:

$$\delta S[\phi^I(x), \delta\phi^I(x)] = \int_M d_4x \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^I} \delta\phi^I(x) + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi^I} \partial_\mu \delta\phi^I(x) \right\} =$$

$$= \int_M d_4x \, \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi^I} \delta\phi^I(x) \right\} + \int_M d_4x \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^I} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi^I} \right) \delta\phi^I(x) = 0.$$

Первый член в выражении справа может быть преобразован по формуле Гаусса Остроградского в поверхностный интеграл по границе ∂M четырехмерного объема:

$$\int_M d_4x \, \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi^I} \delta\phi^I(x) \right\} = \int_{\partial M} d\Sigma_\mu \, \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi^I} \delta\phi^I(x)$$

и зануляется в силу граничных условий (аналогичных условиям для механической системы частиц): $\delta\phi^I(t_0, \boldsymbol{r}) = \delta\phi^I(t_1, \boldsymbol{r}) = 0$.

Поскольку равенство нулю вариации функционала действия верно при любых $\delta\phi^I(x)$, удовлетворяющих соответствующим граничным условиям, то получаем *полевые уравнения Эйлера-Лагранжа* в виде

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^I} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi^I} = 0, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^I} - \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^I) \partial \phi^J} \partial_\mu \phi^J - \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^I) \partial(\partial_\nu \phi^J)} \partial_\mu \partial_\nu \phi^J = 0.$$

Обозначим

$$K^{\mu\nu}_{IJ} = \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^I) \partial(\partial_\nu \phi^J)}, \quad G^\mu_{IJ} = \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^I) \partial \phi^J}, \quad H_I = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^I}.$$

[1]Здесь прослеживается аналогия с функцией Лагранжа для частиц в классической механике, где функция Лагранжа определена с точностью до прибавления к ней полной производной по времени от произвольной функции координат и времени. Она не случайна, ведь локальное поле рассматривается как механическая система с континуальным числом степеней свободы.

С учетом этих обозначений уравнения движения примут вид дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных

$$K^{\mu\nu}_{IJ}\partial_\mu\partial_\nu\phi^J + G^\mu_{IJ}\partial_\mu\phi^J + H_I = 0.$$

В качестве примера выпишем уравнение движения для наиболее простой из моделей теории поля — свободной теории *массивного вещественного скалярного поля* $\varphi(x)$, описывающей, например, нейтральные псевдоскалярные мезоны с нулевым спином. Функционал действия для такой теории записывается как

$$S[\varphi(x)] = \frac{1}{2}\int_M d_4x \left[\dot\varphi^2 - (\nabla\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right].$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа дает

$$[\partial_t^2 - \nabla^2]\varphi + m^2\varphi := [\Box + m^2]\varphi = 0,$$

где

$$K^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1), \quad G^\mu = 0, \quad H = m^2\varphi.$$

Полученное уравнение движения называют *уравнением Клейна-Гордона*. В том или ином виде оно повсеместно встречается в теории поля в разных местах. Поэтому ближайшей нашей целью будет найти его нетривиальное решение. Для этого проще всего перейти в импульсное пространство, то есть представить поле $\varphi(x)$ в виде интеграла Фурье.

Задача 9.1. Доказать, что следующие полевые лагранижаны вещественных скалярных полей физически эквивалентны:

$$\mathscr{L}_1 = -\frac{1}{2}\varphi[\Box + m^2]\varphi, \quad \mathscr{L}_2 = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2.$$

Задача 9.2. Вывести из принципа экстремального действия уравнения движения для массивного комплексного скалярного поля:

$$S[\varphi,\varphi^\star] = \int_M d_4x\,(\dot\varphi\dot\varphi^\star - \nabla\varphi\nabla\varphi^\star - m^2\varphi^\star\varphi).$$

Покажите, что это действие инвариантно относительно глобальных $\mathbb{U}(1)$ преобразований, то есть преобразований вида

$$\varphi_g(x) = e^{-\mathrm{i}eg}\varphi(x), \quad g \in \mathbb{R}.$$

Вещественную постоянную e в формуле для глобального преобразования скалярного поля называют *константой связи* (или, иногда, *зарядом*).

9.3. **Интеграл Фурье.** Определим *Фурье-образ* функции $F(t)$ согласно

$$f(\omega) = \lim_{\alpha\to+0}\int_{\mathbb{R}} dt\,F(t)\,e^{\mathrm{i}\omega t - \alpha^2 t^2}.$$

Для сходимости интеграла функция $F(t)$ не должна расти быстрее, чем

$$e^{\alpha^2 t^2}|_{\alpha\to+0} \to \mathrm{const}.$$

Вычислим Фурье-образ единицы:

$$\mathcal{I}(\omega) = \lim_{\alpha\to+0}\int_{\mathbb{R}} dt\,e^{-\alpha^2\left(t - \frac{1}{2}\mathrm{i}\omega/\alpha^2\right)^2 - \frac{1}{4}\omega^2/\alpha^2} = \lim_{\alpha\to+0}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\,e^{-\frac{1}{4}\omega^2/\alpha^2}.$$

Это четная функция от частоты, которая всюду стремится к нулю, кроме точки $\omega = 0$, где она стремится к бесконечности. Однако при бесконечно малом $\alpha \to +0$ Фурье-образ единицы вполне определен. Основным свойством Фурье-образа единицы является значение интеграла этого Фурье-образа с функцией от частоты, которая может быть разложена в ряд в окрестности точки $\omega = 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} d\omega\, \mathcal{I}(\omega) f(\omega) = \lim_{\alpha\to+0} \int_{\mathbb{R}} d\omega\, f(\omega)\, \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\, e^{-\frac{1}{4}\omega^2/\alpha^2} =$$
$$= \lim_{\alpha\to+0} \int_{\mathbb{R}} d\omega \left[f(0) + f'(0)\,\omega + \ldots\right] \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\, e^{-\frac{1}{4}\omega^2/\alpha^2} =$$
$$= f(0)\cdot \lim_{\alpha\to+0} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \int_{\mathbb{R}} d\omega\, e^{-\frac{1}{4}\omega^2/\alpha^2} = f(0)\cdot \lim_{\alpha\to+0} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \sqrt{4\pi}\,\alpha = 2\pi f(0).$$

Определим *дельта-функцию Дирака* через Фурье-образ единицы

$$2\pi\delta(\omega) = \mathcal{I}(\omega) = \lim_{\alpha\to+0} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\, e^{-\frac{1}{4}\omega^2/\alpha^2}.$$

Мы установили, что

$$\int_{\mathbb{R}} d\omega\, \delta(\omega) f(\omega) := \langle \delta_0, f\rangle = f(0),$$

для достаточно «хорошей» функции $f(\omega)$. В дальнейшем, согласно общей договоренности, принято, что писать всякий раз громоздкое выражение с пределом $\alpha \to +0$ в явном виде при использовании дельта-функции Дирака не представляется удобным, но этот предел безусловно необходимо иметь в виду для придания некоторой строгости математическому формализму выкладок с символом $\delta(\omega)$. Тогда основная формула метода преобразования Фурье легко доказывается:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi}\, f(\omega)\, e^{-\mathrm{i}\omega t} = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-\mathrm{i}\omega t} \int_{\mathbb{R}} dt'\, F(t')\, e^{\mathrm{i}\omega t'} =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} dt'\, F(t') \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-\mathrm{i}\omega(t-t')} = \int_{\mathbb{R}} dt'\, \delta(t-t')\, F(t') = F(t).$$

Таким образом, Фурье-образ функции позволяет восстановить саму функцию с помощью обратного преобразования Фурье. Одним из основных свойств дельта-функции является свойство смены масштаба $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$, которое является следствием четности дельта-функции с учетом замены переменных в интеграле с дельта-функцией $dx = \frac{1}{|a|} d(|a|x)$. Из свойства смены масштаба тут же вытекает следующее важное тождество:

$$\delta[\varphi(f') - \varphi(f)] = \frac{1}{|d\varphi/df|}\delta(f' - f).$$

Вообще, если $\varphi(x)$ есть некоторая однозначная функция, то имеет место полезная формула

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_{x_0} \frac{1}{|\varphi'(x_0)|}\delta(x - x_0),$$

где x_0 — корни уравнения $\varphi(x) = 0$.

Задача 9.3. Проверить, что ступенька Хевисайда, определяемая по формуле

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

представима в виде следующего интеграла с переменным верхним пределом:

$$\vartheta(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\alpha\to+0} \int_{-\infty}^{x} dy \int_{\mathbb{R}} dz\, e^{\mathrm{i}yz - \alpha^2 z^2}.$$

Найти также выражение для производной от ступеньки Хевисайда $\frac{d}{dx}\vartheta(x)$.

Задача 9.4. Покажите, что выполняется следующая формула для вычисления n-й производной от дельта-функции:

$$\int_{\mathbb{R}} dx\, \delta^{[n]}(x-x_0)f(x) = (-1)^n \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x_0).$$

Задача 9.5. Доказать равенство Парсеваля, то есть что преобразование Фурье сохраняет $\mathbb{L}_2$-норму

$$\int_{\mathbb{R}} dt\, |f(t)|^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi}\, |\tilde{f}(\omega)|^2.$$

9.4. **Решение уравнения Клейна-Гордона.** Вернемся к задаче о нахождении нетривиального решения уравнения Клейна-Гордона. Совершим переход в импульсное пространство, т.е. представим скалярное поле $\varphi(x)$ в виде интеграла Фурье

$$\varphi(x) = \int \frac{d_4 p}{(2\pi)^4}\, \phi(p)\, e^{-\mathrm{i}px} := \int \frac{d_4 p}{(2\pi)^4}\, \phi(p_0,\boldsymbol{p})\, e^{-\mathrm{i}p_0 t + \mathrm{i}\mathbf{pr}}.$$

Подстановка данного выражения в уравнение Клейна-Гордона дает алгебраическое уравнение на Фурье-образ $\phi(p_0,\boldsymbol{p})$:

$$[p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2]\phi(p_0,\boldsymbol{p}) = 0,$$

имеющее нетривиальное решение при условии

$$p_0 = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} := \pm\omega_{\mathbf{p}}.$$

Последнее представляет собой стандартное дисперсионное соотношение между энергией и импульсом кванта скалярного поля массы m; поэтому постоянную m отождествляют с *массой скалярного поля* φ. Отсюда, с учетом доказанных выше свойств дельта-функции, получаем

$$\phi(p_0,\boldsymbol{p}) = 2\pi\alpha(p_0,\boldsymbol{p})\cdot\delta[p_0^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2] = \frac{2\pi}{2\omega_{\mathbf{p}}}\alpha(p_0,\boldsymbol{p})\cdot\left[\delta(p_0-\omega_{\mathbf{p}}) + \delta(p_0+\omega_{\mathbf{p}})\right],$$

то есть

$$\varphi(t,\boldsymbol{r}) = \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3\, 2\omega_{\mathbf{p}}}\left[\alpha(\omega_{\mathbf{p}},\boldsymbol{p})\, e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t + \mathrm{i}\mathbf{pr}} + \alpha(-\omega_{\mathbf{p}},-\boldsymbol{p})\, e^{\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t - \mathrm{i}\mathbf{pr}}\right].$$

Вводя обозначение вида $\alpha(\omega_{\mathbf{p}},\boldsymbol{p}) := \alpha_{\mathbf{p}}$, а также учитывая условие вещественности скалярного поля $\varphi(x) = \varphi^\star(x)$, в качестве общего решения уравнения Клейна-Гордона находим

$$\varphi(x) = \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3\, 2\omega_{\mathbf{p}}}\left[\alpha_{\mathbf{p}}\, e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t + \mathrm{i}\mathbf{pr}} + \alpha_{\mathbf{p}}^\star\, e^{\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t - \mathrm{i}\mathbf{pr}}\right].$$

Данное выражение представляет собой разложение скалярного поля по *положительно частотным модам* $e^{-\mathrm{i}px}$ с амплитудами $\alpha_{\mathbf{p}}$ и *отрицательно-частотным модам* $e^{\mathrm{i}px}$ с амплитудами $\alpha_{\mathbf{p}}^\star$ в так называемой *релятивистской нормировке*. Как несложно заметить, полевые моды скалярного поля $u_{\mathbf{p}}(x) = e^{-\mathrm{i}px}$ и $u_{\mathbf{p}}^\star(x) = e^{\mathrm{i}px}$ образуют полный набор ортогональных относительно скалярного произведения

$$(f,g) = -\mathrm{i}\int_{\Sigma_{[t]}} d\boldsymbol{r}\, [f\dot{g}^\star - \dot{f}g^\star]$$

функций; интеграл берется по некоторой пространственнопободной гиперповерхности $\Sigma_{[t]}$ постоянного времени. Действительно,

$$(u_{\mathbf{p}}(t,\boldsymbol{r}),u_{\mathbf{q}}(t,\boldsymbol{r})) = (\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}})\, e^{-\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}})t}(2\pi)^3\, \delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}).$$

т.е. скалярное произведение обращается в нуль, если импульсы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ и, следовательно, энергии $\omega_{\mathbf{p}}$ и $\omega_{\mathbf{q}}$, не равны для обеих мод. Важно отметить, что таким образом введенное скалярное произведение на пространстве решений уравнения Клейна-Гордона требует проверки на корректность: необходимо убедиться в том, что значение скалярного произведения не зависит от того, по какой гиперповерхности $\Sigma_{[t]}$ производится интергирование. Это легко сделать, используя формулу Гаусса-Остроградского и полевое уравнение движения; проделайте вычисления самостоятельно в качестве упражнения.

9.5. **Внешние источники и функции Грина.** Изученная нами выше динамика массивного скалярного поля являет собой пример свободной (невзаимодействующей) теории. Рассмотрим теперь взаимодействие полей с *внешними источниками* на примере той же теории скалярного поля. Результаты, которые мы получим, разумеется, будут относиться только к частному случаю вещественного скалярного поля. Однако, методы их получения практически без изменений распространяются на другие модели теории поля.

Действие для теории, описывающей взаимодействие скалярного поля с внешним источником $j(t,\boldsymbol{r})$, имеет вид

$$S[\varphi, j] = \frac{1}{2}\int_M d_4x\,\left[\dot{\varphi}^2 - (\nabla\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right] + \int_M d_4x\, j(x)\varphi(x).$$

Запишем полевое уравнение движения: $[\Box + m^2]\varphi(x) = j(x)$. Для нахождения его решения перейдем, как обычно, в импульсное пространство посредством разложения поля и внешнего источника в интеграл Фурье

$$\varphi(t,\boldsymbol{r}) = \int \frac{d_4p}{(2\pi)^4}\,\phi(p_0,\boldsymbol{p})\cdot e^{-\mathrm{i}p_0t+\mathrm{i}\mathbf{pr}}, \quad j(t,\boldsymbol{r}) = \int \frac{d_4p}{(2\pi)^4}\,\mathscr{J}(p_0,\boldsymbol{p})\cdot e^{-\mathrm{i}p_0t+\mathrm{i}\mathbf{pr}}.$$

Тогда уравнение движения в импульсном пространстве примет вид

$$[p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2]\phi(p_0,\boldsymbol{p}) = -\mathscr{J}(p_0,\boldsymbol{p}),$$

откуда

$$\phi(p_0,\boldsymbol{p}) = -\frac{\mathscr{J}(p_0,\boldsymbol{p})}{p_0^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2}, \quad \omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}.$$

В качестве частного решения имеем

$$\varphi(t,\boldsymbol{r}) = -\int \frac{d_4p}{(2\pi)^4}\,\frac{\mathscr{J}(p_0,\boldsymbol{p})}{p_0^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2}\,e^{-\mathrm{i}p_0t+\mathrm{i}\mathbf{pr}}.$$

Вычислим в общем виде обратное преобразование Фурье для произведения Фурье-образов двух функций:

$$\int \frac{d_4p}{(2\pi)^4}\,e^{-\mathrm{i}px}f_1(p)f_2(p) = \int \frac{d_4p}{(2\pi)^4}\,e^{-\mathrm{i}px}\int_M d_4y\,e^{\mathrm{i}py}F_1(y)\int_M d_4z\,e^{\mathrm{i}pz}F_2(z).$$

После интегрирования по p получаем

$$\int \frac{d_4p}{(2\pi)^4}\,e^{-\mathrm{i}px}\,e^{\mathrm{i}py}\,e^{\mathrm{i}pz} = \delta(y+z-x),$$

так что интеграл по y приводит к следующему результату:

$$\int \frac{d_4p}{(2\pi)^4}\,e^{-\mathrm{i}px}f_1(p)f_2(p) = \int_M d_4z\,F_1(x-z)F_2(z) = [F_1 \star F_2](x),$$

то есть обратное преобразование Фурье от произведения Фурье-образов двух функций дает, как говорят, *свертку* $F_1 \star F_2$ этих функций. Отсюда следует, что решение уравнения движения для поля φ с внешним источником j можно представить в виде

$$\varphi(x) = \int_M d_4x'\, \mathcal{G}(x-x')\, j(x') := [\mathcal{G} \star j](x),$$

где *функция Грина*

$$\mathcal{G}(t,\boldsymbol{r}) = \int \frac{d_4p}{(2\pi)^4}\, \frac{-1}{p_0^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2}\, e^{-\mathrm{i}p_0t + \mathrm{i}\mathbf{pr}}.$$

Функция Грина $\mathcal{G}(t,\boldsymbol{r})$, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$[\Box + m^2]\, \mathcal{G}(x-x') = \delta(x-x').$$

Для ее вычисления нам придется воспользоваться интегральной формулой Коши. В этом свете полезно сформулировать и доказать следующие теоремы: *теорему Сохоцкого-Племеля*, точнее, ее частный случай для вещественной прямой, а также *интегральную теорему и формулу Коши.*

9.6. **Формула Сохоцкого-Племеля.** Найдем интеграл по числовой прямой $\mathbb{R}$ от произведения голоморфной (регулярной) функции $f(x)$ на сингулярную функцию $\frac{1}{x\pm \mathrm{i}0}$ с особой точкой в $x = \mp\mathrm{i}0$, то есть

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x \pm \mathrm{i}0}\, dx.$$

Согласно теореме Сохоцкого-Племеля

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x \pm \mathrm{i}0}\, dx = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x}\, dx \mp \mathrm{i}\pi f(0).$$

Символ v.p. перед интегралом означает взятие *интеграла в смысле главного значения* (Principal Value) по Коши.

Доказательство. Рассмотрим для определенности интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x + \mathrm{i}0}\, dx$$

с особой точкой в $x = -\mathrm{i}0$, то есть снизу от вещественной оси на комплексной плоскости x. Второй случай $\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x-\mathrm{i}0}\, dx$ рассматривается аналогично.

Введем малый параметр $\varepsilon \to +0$ и представим искомый интеграл в виде суммы трех интегралов

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x + \mathrm{i}0}\, dx = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\, dx + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx + \int_{\mathbb{S}_\varepsilon^+} \frac{f(x)}{x}\, dx.$$

Через $\mathbb{S}_\varepsilon^+$ обозначена полуокружность радиуса ε в верхней полуплоскости. Как можно заметить, при $\varepsilon \to +0$ сумма

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\, dx + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx$$

представляет собой по определению интеграл в смысле главного значения

$$\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x}\, dx = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\, dx + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx.$$

Интеграл по верхней полуокружности можно легко вычислить, если ввести замену переменных $x = \varepsilon e^{\mathrm{i}\phi}$:

$$\int_{\mathbb{S}_\varepsilon^+} \frac{f(x)}{x}\, dx = \int_{\pi}^{0} \frac{f(0)}{\varepsilon e^{\mathrm{i}\phi}}\, d(\varepsilon e^{\mathrm{i}\phi}) = -\mathrm{i}\pi f(0).$$

Здесь было учтено, что в пределе $\varepsilon \to +0$ в силу голоморфности $f(x) \to f(0)$.

Как было сказано в самом начале доказательства, другой случай

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x - \mathrm{i}0}\, dx$$

рассматривается аналогично, с той лишь разницей, что особая точка будет сверху от вещественной оси на комплексной плоскости и интегрировать придется по нижней полуокружности от π до 2π с учетом использованной выше замены переменных. $\square$

9.7. **Теорема Коши.** Если функция $f : U \to \mathbb{C}$ дифференцируема в комплексном смысле в $U \subseteq \mathbb{C}$, а непрерывная кривая $\gamma \subset U$ замкнута и стягиваема (гомотопна тождественной) в U, то

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 0.$$

Данное утверждение называют интегральной теоремой Коши. Нетрудно понять, что интегральная теорема Коши является тривиальным следствием следующей теоремы: если кусочно-линейная кривая γ_0 гомотопна внутри U кусочно-линейной кривой γ_1 с сохранением концов, а функция f дифференцируема в U в комплексном смысле, то

$$\int_{\gamma_0} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz.$$

Доказательство. В этой теореме гомотопия — это непрерывное отображение

$$\mathfrak{h} : [t_0,t_1] \times [0,1] \to U,$$

причем такое, что

$$\mathfrak{h}(t,0) = \gamma_0(t), \quad \mathfrak{h}(t,1) = \gamma_1(t), \quad \mathfrak{h}(t_0,s) = z_0, \quad \mathfrak{h}(t_1,s) = z_1.$$

Образ $\mathfrak{h}$, очевидно, компактен и содержится в U вместе со своей ε-окрестностью. Используя равномерную непрерывность $\mathfrak{h}$ разобъем $[t_0,t_1] \times [0,1]$ на прямоугольники настолько мелко, чтобы образ каждого прямоугольника был диаметра не более ε. Будем также считать, что образы вершин прямоугольников разбиения содержат все вершины γ_0 и γ_1. Для каждого такого прямоугольника разбиения $\Pi_k \subseteq [t_0,t_1] \times [0,1]$ рассмотрим четырехугольник Q_k (возможно с самопересечениями), образованный образами вершин Π_k при отображении гомотопии; в силу выбранной мелкости разбиения $Q_k \subset U$. Тогда

$$\int_{\gamma_0} f(z)\, dz - \int_{\gamma_1} f(z)\, dz$$

выражается через сумму интегралов по границам четырехугольников Q_k. Но всякий четырехугольник можно, очевидно, разбить на два треугольника в U. Для завершения доказательства используем следующее утверждение, которое мы оставляем в качестве полезного упражнения: если треугольник $\triangle$ содержится в U, а f дифференцируема в комплексном смысле в U, то

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\, dz = 0.$$

В процессе доказательства может потребоваться (возможно не раз) провести разбиение треугольника на четыре подобных ему треугольника его средними линиями.

Таким образом, интеграл по границе Q_k равен нулю, а значит и искомая разность интегралов равна нулю. $\square$

9.8. **Интегральная формула Коши.** Пусть замкнутая простая кривая γ лежит в области определения U дифференцируемой в комплексном смысле функции f, область V, ограниченная γ, лежит слева от γ в смысле ориентации кривой γ, $V \subseteq U$ и $z_0 \in V$. Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Данное утверждение называют интегральной формулой Коши.

Доказательство. Рассмотрим положительно ориентированную окружность $\mathbb{S}_\varepsilon \subset V$ малого радиуса $\varepsilon \to 0$ с центром в точке $z = z_0$, а также пару точек $a \in \mathbb{S}_\varepsilon$ и $a' \in \gamma$, которая реализует расстояние между $\mathbb{S}_\varepsilon$ и γ. Из условия минимальности отрезок $[a,a']$ полностью лежит в V, кроме его конца a'. Тогда мы можем сделать кривую Γ, которая является конкатенацией отрезка $[a,a']$, одного обхода кривой γ, отрезка $[a',a]$, и одного обхода $\mathbb{S}_\varepsilon$ против часовой стрелки. Очевидно, что кривая Γ стягиваема в $U \backslash U_\varepsilon(z_0)$. Теперь, функция $\frac{f(z)}{z-z_0}$ определена и дифференцируема в комплексном смысле в $U\backslash\{z_0\}$, а значит, по интегральной теореме Коши

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 0.$$

Отрезок $[a,a']$ в интеграле проходится туда и обратно и сокращается; поэтому, независимо от ε, имеем

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_{\mathbb{S}_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

В стандартной параметризации $z = z_0 + \varepsilon e^{\mathrm{i}\phi}$ вычислим интеграл $\int_{\mathbb{S}_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$ в частном случае, когда $f(z) \equiv 1$, то есть $\int_{\mathbb{S}_\varepsilon} \frac{dz}{z-z_0}$. Очевидно, что

$$\int_{\mathbb{S}_\varepsilon} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi \mathrm{i}.$$

Отсюда разность

$$\int_{\mathbb{S}_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - f(z_0) \int_{\mathbb{S}_\varepsilon} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{\mathbb{S}_\varepsilon} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz.$$

В силу комплексной дифференцируемости функции $f(z)$:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) + o(1),$$

откуда при $\varepsilon \to +0$ окончательно получаем, что

$$\int_{\mathbb{S}_\varepsilon} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz = (f'(z_0) + o(1)) \int_{\mathbb{S}_\varepsilon} dz = 0, \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz. \qquad \square$$

В качестве простого, но важного (например, в электродинамике сплошных сред) примера применения интегральной формулы Коши выведем так называемые *дисперсионные соотношения Крамерса-Кронига.* Найдем интеграл от произведения комплексной функции $\mathfrak{h}(x) = \mathfrak{h}_1(x) + \mathrm{i}\, \mathfrak{h}_2(x)$ на сингулярную функцию $\frac{1}{x - x_0 - \mathrm{i}0}$ с особой точкой в $x = x_0 + \mathrm{i}0$ по всей числовой прямой:

$$I = \int_\mathbb{R} \frac{\mathfrak{h}(x)\, dx}{x - x_0 - \mathrm{i}0}.$$

Потребуем от функции $\mathfrak{h}(x)$, чтобы она достаточно быстро убывала на бесконечности, чтобы обеспечить сходимость интеграла. Тогда по формуле Сохоцкого Племеля получаем

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathfrak{h}(x)\,dx}{x - x_0 - \mathrm{i}0} = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathfrak{h}(x)}{x - x_0}\,dx + \mathrm{i}\pi\mathfrak{h}(x_0).$$

Замыкая контур интегрирования на бесконечности, где интеграл по полуокружности равен нулю, по общей интегральной формуле Коши для интеграла I имеем

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathfrak{h}(x)\,dx}{x - x_0 - \mathrm{i}0} = 2\pi\mathrm{i}\,\mathfrak{h}(x_0).$$

Интегрирование I по контуру, образованному полуокружностью, включающей внутри себя точку x_0 и отрезком действительной прямой в качестве диаметра полуокружности, необходимо понимать в смысле предела, то есть если неограниченно увеличивать диаметр большой полуокружности, то в пределе по теореме Коши в силу должного убывания функции на бесконечности имеем последнюю формулу для I. Из вышесказанного получаем

$$\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathfrak{h}(x)}{x - x_0}\,dx = \mathrm{i}\pi\mathfrak{h}(x_0).$$

Выделяя из последнего выражения отдельно действительную и мнимую части, имеем

$$\mathfrak{h}_1(x_0) = \frac{1}{\pi}\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathfrak{h}_2(x)}{x - x_0}\,dx, \qquad \mathfrak{h}_2(x_0) = -\frac{1}{\pi}\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathfrak{h}_1(x)}{x - x_0}\,dx.$$

Данные соотношения называются соотношениями Крамерса-Кронига. С их помощью мы можем получить, например, дисперсионные соотношения в электродинамике сплошных сред для диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$, которая не имеет особых точек на оси частот, как, скажем, в случае *модели квазиупругих диполей*. К последней можно прийти исходя из следующих рассуждений. Падающая на покоящийся заряд e плоская электромагнитная волна вызывает его вынужденные колебания, в результате чего заряд начинает излучать. Уравнение движения заряда под воздействием электромагнитной волны имеет вид:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{H}).$$

Последнее уравнение при малых скоростях $\dot{\boldsymbol{r}}$ сводится к $m\ddot{\boldsymbol{r}} = e\boldsymbol{E}$. Хотя электрическое и магнитное поля в волне по модулю равны, все же, в нерелятивистском случае вкладом магнитного поля можно пренебречь.

Если заряд закрепить с помощью сил упругости, то в свободном виде он будет совершать гармонические колебания с частотой ω_0, уравнения которых очевидны: $\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2\boldsymbol{r} = 0$. Если есть диссипация, то ее можно учесть, добабив стандартный вклад:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \gamma\dot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2\boldsymbol{r} = 0.$$

В итоге, уравнение движения заряда с учетом упругой силы, диссипации и внешнего электрического поля принимает вид

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \gamma\dot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2\boldsymbol{r} = \frac{e}{m}\boldsymbol{E}.$$

Это уравнение представляет собой уравнение движения для квазиупругого диполя, если поместить неподвижный заряд $-e$ в начало координат. Применяя преобразование Фурье, например, для $\boldsymbol{r}(t)$ находим

$$\boldsymbol{r}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-\mathrm{i}\omega t}\,\boldsymbol{r}(\omega), \quad \boldsymbol{r}^\star(\omega) = \boldsymbol{r}(-\omega).$$

Отсюда, очевидно,

$$\boldsymbol{r}(\omega) = \frac{e}{m}\boldsymbol{E}(\omega)\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\gamma\omega}.$$

Нетрудно проверить, что полученное решение удовлетворяет условию вещественности. Индуцированный дипольный момент

$$\boldsymbol{d} = e\boldsymbol{r}(\omega) = \frac{e^2}{m}\boldsymbol{E}(\omega)\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\gamma\omega}.$$

Домножая полученное уравнение на концентрацию диполей N, получаем *поляризацию* единицы объема среды квазиупругих диполей

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \frac{Ne^2}{m}\boldsymbol{E}(\omega)\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\gamma\omega} = \alpha\boldsymbol{E}(\omega),$$

откуда находим *диэлектрическую проницаемость*

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi\alpha = 1 + 4\pi\frac{Ne^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\gamma\omega}.$$

Представляя полученное выражение для диэлектрической проницаемости в виде разложения на действительную и мнимую части, то есть

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1(\omega) + \mathrm{i}\,\varepsilon_2(\omega),$$

имеем

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 + 4\pi\frac{Ne^2}{m}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}, \qquad \varepsilon_2(\omega) = 4\pi\frac{Ne^2}{m}\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}.$$

Понятно, что диэлектрическая проницаемость, как коэффициент между вещественными электрическим полем и индукцией, должна удовлетворять условию вещественности $\varepsilon^\star(\omega) = \varepsilon(-\omega)$, откуда

$$\varepsilon_1(\omega) = \varepsilon_1(-\omega), \qquad \varepsilon_2(\omega) = -\varepsilon_2(-\omega).$$

Это тождество означает, что функция $\varepsilon_1(\omega)$ является четной функцией от ω, а функция $\varepsilon_2(\omega)$ — нечетной функцией от ω. Чтобы обеспечить сходимость соответствующих интегралов на бесконечности, вычтем из диэлектрической проницаемости единицу. Тогда, представляя диэлектрическую проницаемость в виде разложения на действительную и мнимую части

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1(\omega) + \mathrm{i}\,\varepsilon_2(\omega),$$

из дисперсионных соотношений Крамерса-Кронига получаем

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi}\mathrm{v.p.}\int_{\mathbb{R}}\frac{\varepsilon_2(\omega')}{\omega' - \omega}\,d\omega', \qquad \varepsilon_2(\omega) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{v.p.}\int_{\mathbb{R}}\frac{\varepsilon_1(\omega') - 1}{\omega' - \omega}\,d\omega'.$$

Вышеперечисленные требования относительно вида диэлектрической проницаемости и ее поведения на бесконечности выполняются в случае квазиупругих диполей с ненулевым затуханием. Если эти условия не выполняются, то необходимо рассматривать функцию, регуляризованную вычитанием сингулярных вкладов, для которой уже будут применимы соотношения Крамерса-Кронига.

Применим выведенные дисперсионные соотношения для диэлектрической проницаемости в частном случае модели квазиупругих диполей с бесконечно малым затуханием. Мнимая часть диэлектрической проницаемости в пределе $\gamma \to 0$ имеет вид

$$\varepsilon_2(\omega) = 4\pi\frac{Ne^2}{m}\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}0} - \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{i}0}\right].$$

Имея в виду формулу Сохоцкого-Племеля, опуская подробности вычислений (они тривиальны), находим

$$\varepsilon_2(\omega) = 4\pi^2\frac{Ne^2}{m}\delta(\omega_0^2 - \omega^2), \qquad \varepsilon_1(\omega) = 1 + 4\pi\frac{Ne^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Таким образом, при помощи дисперсионных соотношений мы восстановили действительную часть диэлектрической проницаемости по мнимой.

9.9. **Функция Грина оператора Клейна-Гордона.** Возвращаясь к вычислению функции Грина для массивного вещественного скалярного поля, проинтегрируем ее по переменной p_0:

$$\mathcal{G}(t,\boldsymbol{r}) = \int \frac{dp_0}{2\pi} \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \frac{-1}{p_0^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2} e^{-\mathrm{i}p_0 t + \mathrm{i}\mathbf{pr}}.$$

Чтобы взять последний интеграл, используем интегральную формулу Коши. При $t \to +\infty$ фактор $e^{-\mathrm{i}p_0 t}$ экспоненциально стремится к нулю в нижней комплексной полуплоскости p_0 и контур интегрирования можно замкнуть в нижней полуплоскости по часовой стрелке, а при $t \to -\infty$ фактор $e^{-\mathrm{i}p_0 t}$ экспоненциально стремится к нулю в верхней полуплоскости переменной p_0 и контур интегрирования можно замкнуть в верхней полуплоскости против часовой стрелки. Если мы хотим получить решение, отличное от нуля только в будущем (при $t > 0$), то граничные условия необходимо выбрать таким образом, чтобы оба полюса были расположены в точках $\pm\omega_{\mathbf{p}} - \mathrm{i}0$. Действительно, при таком расположении полюсов при $t < 0$ внутри контура интегрирования нет ни одного полюса и согласно интегральной формуле Коши получаем функцию Грина, тождественно равную нулю в прошлом. Такие граничные условия не являются $\mathbb{T}$-инвариантными, но их можно интерпретировать таким образом: положительно-частотные колебания исходят от источника к наблюдателю, который находится в будущем, а отрицательно-частотные колебания можно рассматривать как положительно-частотные колебания, которые исходят от наблюдателя из будущего к источнику, который находится в прошлом, то есть распространяются от наблюдателя к источнику назад во времени. Применяя формулу Коши, получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\mathrm{ret}}(t>0,\boldsymbol{r}) = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} e^{\mathrm{i}\mathbf{pr}} \int_\gamma \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-\mathrm{i}p_0 t}}{(p_0 - \omega_{\mathbf{p}} + \mathrm{i}0)(p_0 + \omega_{\mathbf{p}} + \mathrm{i}0)} = \\ = \frac{2\pi\mathrm{i}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3\, 2\omega_{\mathbf{p}}} e^{\mathrm{i}\mathbf{pr}} \left[e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}} t} - e^{\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}} t}\right],\end{aligned}$$

$$\mathcal{G}_{\mathrm{ret}}(t>0,\boldsymbol{r}) = -\mathrm{i} \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3\, 2\omega_{\mathbf{p}}} e^{\mathrm{i}\mathbf{pr}} \left[e^{\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}} t} - e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}} t}\right].$$

Этот интеграл легко берется в предельном случае безмассового поля, то есть когда $m = 0$, в сферических координатах. Учитывая, что

$$d_3 p = \omega_{\mathbf{p}}^2\, d\omega_{\mathbf{p}}\, d\cos\theta\, d\phi, \quad \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} = \omega_{\mathbf{p}} r \cos\theta,$$

имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\mathrm{ret}}(t>0,\boldsymbol{r}) = \frac{-1}{8\pi^2 r} \int_0^\infty d\omega_{\mathbf{p}} [e^{\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}} r} - e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}} r}]\, [e^{\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}} t} - e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}} t}] = \\ = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{\mathbb{R}} d\omega_{\mathbf{p}} \frac{1}{2} \left\{ \left[e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}(t-r)} - e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}(t+r)}\right] + \left[e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}(t-r)} - e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}(t+r)}\right]^\star \right\} = \\ = \frac{1}{8\pi^2 r} 2\pi \left[\delta(r-t) - \delta(r+t)\right] = \frac{1}{4\pi r}\delta(r-t),\end{aligned}$$

$$\mathcal{G}_{\mathrm{ret}}(t,\boldsymbol{r}) = \vartheta(t) \frac{\delta(r-t)}{4\pi r} = \vartheta(t) \frac{\delta(x^2)}{2\pi}, \quad x^2 = t^2 - \boldsymbol{r}^2.$$

Сворачивая с внешним источником $j(t,\boldsymbol{r})$ *запаздывающую функцию Грина оператора Клейна-Гордона* $\mathcal{G}_{\mathrm{ret}}(t,\boldsymbol{r})$, получим частное решение $\varphi(t,\boldsymbol{r})$ полевого уравнения движения. Общее же решение уравнения движения для поля с внешним источником, как известно из линейной алгебры, складывается из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Структура общего решения однородного уравнения нам уже известна. Поэтому общее решение уравнений движения для вещественного скалярного поля с внешним источником имеет вид

$$\varphi(t,\boldsymbol{r}) = \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3\, 2\omega_{\mathbf{p}}} \left[\alpha_{\mathbf{p}} e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}} t + \mathrm{i}\mathbf{pr}} + \alpha^\star_{\mathbf{p}} e^{\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}} t - \mathrm{i}\mathbf{pr}}\right] + [\mathcal{G}_{\mathrm{ret}} \star j](t,\boldsymbol{r}).$$

Задача 9.6. Рассмотреть взаимодействие внешнего источника $j(\boldsymbol{r},t)$ с массивным вещественным скалярным полем:

$$S[\varphi, j] = \int d_4x \left\{ \frac{1}{2}\dot\varphi^2 - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \right\} + \int d_4x\, j(x)\varphi(x).$$

Разобрать отдельно случай стационарного точечного источника $j(\boldsymbol{r}) = q\,\delta(\boldsymbol{r})$.

9.10. **Эффективное действие.** При исследовании теорий поля, функционал действия в которых зависит от нескольких полей, иногда удается решить часть уравнений Эйлера-Лагранжа явно, выразив одни переменные через другие в общем виде. В этом случае вариационную задачу можно свести к так называемому *эффективному действию*, зависящему от меньшего числа переменных. Далее при постановке вариационной задачи мы, как обычно, предполагаем фиксацию граничных условий.

Начнем с рассмотрения простейшего случая: пусть на ограниченной области M четырехмерного пространства-времени заданы два скалярных поля φ и χ. Предположим, что функция χ в каждой точке $x \in M$ задана как функция x^μ,φ, ее первых и вторых частных производных: $\partial_\mu\varphi, \partial_\mu\partial_\nu\varphi$. Представим значение функции

$$\chi(x) = \chi(x,\varphi(x), \partial\varphi(x), \partial^2\varphi(x))$$

в точке $x \in M$ в виде функционала, используя дельта-функцию,

$$\chi(x) = \int_M d_4z\, \delta(x-z)\, \chi(z).$$

Вариация функционала $\chi(x)$ имеет вид

$$\delta\chi(x) = \int_M d_4z\, \delta(x-z) \left\{ \frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\chi}{\partial\partial_\mu\varphi}\partial_\mu\delta\varphi + \frac{\partial\chi}{\partial\partial_\mu\partial_\nu\varphi}\partial_\mu\partial_\nu\delta\varphi \right\}.$$

Проинтегрировав второе и третье слагаемые по частям, получим выражение для вариационной производной

$$\frac{\delta\chi(x)}{\delta\varphi(z)} = \frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\delta(x-z) - \frac{\partial}{\partial z^\mu}\left\{ \frac{\partial\chi}{\partial\partial_\mu\varphi}\delta(x-z) \right\} + \partial_\mu\partial_\nu \left\{ \frac{\partial\chi}{\partial\partial_\mu\partial_\nu\varphi}\delta(x-z) \right\},$$

где в правой части $\chi = \chi(z)$, $\varphi = \varphi(z)$. Перейдем теперь к рассмотрению вариационного принципа. Пусть действие $S[\varphi,\chi]$ зависит от двух полей χ и φ. Тогда из принципа наименьшего действия следуют два уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\delta S}{\partial\varphi} = 0, \qquad \frac{\delta S}{\partial\chi} = 0.$$

Допустим, что второе уравнение Эйлера-Лагранжа допускает общее решение для χ, как функции от φ и ее производных: $\chi = \chi(x,\varphi, \partial\varphi, \partial^2\varphi)$. При этом мы предполагаем, что общее решение не имеет особенностей. Если действие зависит только от самих функций и их первых производных, то в общее решение будут входить производные от φ не выше второго порядка. Поскольку уравнение Эйлера-Лагранжа $\frac{\delta S}{\partial\chi} = 0$ является дифференциальным уравнением в частных производных, то общее решение зависит также от некоторого набора произвольных функций и постоянных. Часть этих произвольных функций и постоянных фиксируется, если это возможно, граничными условиями $\chi|_{\partial M} = \chi_0$ и $\varphi|_{\partial M} = \varphi_0$. Используем полученное решение для построения нового эффективного действия

$$S_{\text{eff}}[\varphi] = S[\varphi, \chi(\varphi)],$$

которое зависит только от одной функции φ. Тогда уравнение Эйлера-Лагранжа для φ связано со старыми уравнениями простым соотношением

$$\frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta\varphi(x)} = \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)} + \frac{\delta S}{\delta\chi(z)}\frac{\delta\chi(z)}{\delta\varphi(x)}\bigg|_{\chi=\chi(\varphi)} = 0.$$

где во втором слагаемом подразумевается интегрирование по аргументу поля $\chi(z)$, которое снимается дельта-функцией в вариационной производной. Ясно, что второе слагаемое равно нулю, если выполнено уравнение Эйлера-Лагранжа для χ. Проведенные вычисления остаются в силе и в том случае, когда мы рассматриваем наборы полей: φ_a, χ_A.

В качестве интересного примера рассмотрим *действие Полякова*, возникающее в двумерной конформной теории поля при описании динамики релятивистской бозонной струны:

$$S[X^\mu,g_{ab}] = \frac{1}{2}\int d_2\xi\,|\det g_{ab}|^{1/2}\, g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu.$$

Здесь набор D функций $X^\mu(\xi_1,\xi_2)$ задает отображение мировой поверхности, заметаемой струной при своей эволюции, в D-мерное пространство-время Минковского; $g_{ab}(\xi_1,\xi_2)$ — метрический тензор, определенный на мировой поверхности струны: двумерная гравитация, которая вводится в теорию с целью обеспечения *общекоординатной инвариантности.*

Такое действие с точки зрения двумерной теории поля является действием для D скалярных полей $X^\mu(\xi_1,\xi_2)$, *минимально связанных* с гравитацией g_{ab}. Построим по нему эффективное действие. Для этого запишем уравнения движения на метрику g^{ab} (подробные вычисления предоставляем проделать самостоятельно в качестве упражнения):

$$\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \frac{1}{2}g_{ab}g^{cd}\partial_c X^\mu \partial_d X_\mu = 0.$$

Здесь мы воспользовались известной формулой вариации корня из детерминанта метрики

$$\delta|\det g_{ab}|^{1/2} = \frac{1}{2}|\det g_{ab}|^{1/2}\, g^{ab}\delta g_{ab}.$$

Введя обозначение $\alpha_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu$, нетрудно получить равенство

$$\alpha_{ab} = \frac{1}{2}g_{ab}g^{cd}\alpha_{cd}.$$

Далее, вычисляя детерминант обеих частей этого уравнения, получим

$$\det\alpha_{ab} = \frac{1}{2}g^{cd}\alpha_{cd}\det g_{ab}, \quad \frac{\alpha_{ab}}{|\det\alpha_{ab}|^{1/2}} = \frac{g_{ab}}{|\det g_{ab}|^{1/2}}, \quad g^{ab}\alpha_{ab} = 2\sqrt{\frac{\det\alpha_{ab}}{\det g_{ab}}}.$$

Подставляя это выражение в действие Полякова, находим эффективное действие

$$S_{\text{eff}}[X^\mu] = \int d_2\xi\,\sqrt{\det\left(\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu\right)}.$$

Оно известно как *действие Намбу-Гото*. Его нелинейность очевидна, чего нельзя сказать об исходном действии Полякова. Последнее является линейным, что облегчает задачу квантования струны. Поэтому для общего описания динамики бозонной струны используют действие Полякова[1]. Тем не менее, именно действие Намбу-Гото представляет собой отправную точку анализа поведения бесконечно тонких струн с использованием принципов лагранжевой механики. Оно является простейшим инвариантным действием в бозонной теории струн, а также используется в других теориях, исследующих струноподобные объекты (например, космические струны).

9.11. **Гамильтонов формализм в теории поля.** До этого момента мы повсюду работали в рамках лагранжева формализма. Поговорим немного о гамильтоновой формулировки локальной теории поля. Лагранжева формулировка теории поля особенно хорошо подходит для релятивистских полей, ибо их лагранжианы могут быть записаны в лоренц-инвариантной форме. Тем не менее, гамильтонов формализм в теории поля позволяет довольно просто осуществить переход к квантовой механике и потому заслуживает отдельного рассмотрения. В частности, используя канонический формализм в теории поля, относительно легко произвести каноническое квантование свободных локальных полей.

Напомним, что в механике частиц (в дискретной механической системе) для каждой обобщенной координаты x^i определялся канонически сопряженный импульс p_i; тогда функция Гамильтона $H(x,p,t) = \sum_i p_i \dot{x}^i - L$. Обобщение на непрерывные полевые системы легче всего понять, если представлять точки пространства $\boldsymbol{r}_\alpha$ расположенными дискретно, $\alpha \in \mathbb{N}$. В таком случае

$$L(t) = \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}\, \mathscr{L}[\phi^I(x), \dot{\phi}^I(x), \nabla\phi^I(x)] \mapsto \sum d\boldsymbol{r}\, \mathscr{L}[\phi^I(t,\boldsymbol{r}_\alpha), \dot{\phi}^I(t,\boldsymbol{r}_\alpha), \nabla\phi^I(t,\boldsymbol{r}_\alpha)].$$

Мы можем определить

$$p_I(t,\boldsymbol{r}_\alpha) = \frac{\partial}{\partial\dot{\phi}^I(t,\boldsymbol{r}_\alpha)} \sum d\boldsymbol{z}\, \mathscr{L}[\phi^I(t,\boldsymbol{z}_\beta), \dot{\phi}^I(t,\boldsymbol{z}_\beta), \nabla\phi^I(t,\boldsymbol{z}_\beta)] := \pi_I(t,\boldsymbol{r}_\alpha)\, d\boldsymbol{r},$$

где

$$\pi_I(t,\boldsymbol{r}_\alpha) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}^I(t,\boldsymbol{r}_\alpha)}$$

называется *плотностью импульса*, сопряженного к полям $\phi^I(t,\boldsymbol{r}_\alpha)$. Таким образом, функция Гамильтона может быть записана в виде

$$H = \sum p_I\dot{\phi}^I - L = \sum d\boldsymbol{r}\left[\pi_I(t,\boldsymbol{r}_\alpha)\, \dot{\phi}^I(t,\boldsymbol{r}_\alpha) - \mathscr{L}\right].$$

Переходя к континууму, получаем функцию Гамильтона полевой системы

$$H = \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}\left[\pi_I(x)\, \dot{\phi}^I(x) - \mathscr{L}(x)\right] := \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}\, \mathscr{H},$$

заданную как функционал от канонических импульсов $\pi_I(x)$ и самих локальных полей $\phi^I(x)$. Здесь $\mathscr{H} = \pi_I\dot{\phi}^I - \mathscr{L}$ — *гамильтониан полевой системы*, то есть плотность функции Гамильтона локальных полей, а $\pi_I(x) = \partial\mathscr{L}/\partial\dot{\phi}^I(x)$ являет собой плотность канонического импульса.

[1]Интересно отметить, что результат детального анализа на квантовом уровне приводит к *критической размерности* существования бозонной струны $D = 26$, а также к наличию в основном состоянии бозонной струны метастабильного состояния, известного в теоретической физике как *тахион*.

Функциональные производные функции Гамильтона по полям и канонически сопряженным им импульсам определяются из выражения для вариации гамильтоновой функции $H = H[\phi^I(x),\pi_I(x)]$:

$$\delta H = \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r} \left[\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \phi^I}\delta\phi^I + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \nabla\phi^I}\nabla\delta\phi^I + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \pi_I}\delta\pi_I + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \nabla\pi_I}\nabla\delta\pi_I\right] =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r} \left[\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \phi^I}\delta\phi^I - \nabla\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \nabla\phi^I}\delta\phi^I + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \pi_I}\delta\pi_I - \nabla\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \nabla\pi_I}\delta\pi_I\right],$$

$$\frac{\delta H}{\delta\pi_I(x)} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \pi_I} - \nabla\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \nabla\pi_I}, \qquad \frac{\delta H}{\delta\phi^I(x)} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \phi^I} - \nabla\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \nabla\phi^I}.$$

Вычислим в явном виде данные вариационные производные по импульсам и их производным:

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \pi_I} = \delta^I_J\dot{\phi}^J + \frac{\partial\dot{\phi}^J}{\partial\pi_I}\pi_J - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}^J}\frac{\partial\dot{\phi}^J}{\partial\pi_I} = \dot{\phi}^I, \qquad \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \nabla\pi_I} = \frac{\partial\dot{\phi}^J}{\partial\nabla\pi_I}\pi_J - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}^J}\frac{\partial\dot{\phi}^J}{\partial\nabla\pi_I} = 0.$$

Таким образом,

$$\dot{\phi}^I(x) = \frac{\delta H}{\delta\pi_I(x)}.$$

Это *первое каноническое уравнение Гамильтона* для поля $\phi^I(x)$. Далее, производные

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \phi^I} = \frac{\partial}{\partial\phi^I}[\pi_J\dot{\phi}^J - \mathscr{L}] = \pi_J\frac{\partial\dot{\phi}^J}{\partial\phi^I} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\phi^I} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}^J}\frac{\partial\dot{\phi}^J}{\partial\phi^I} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\phi^I},$$

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \nabla\phi^I} = \pi_J\frac{\partial\dot{\phi}^J}{\partial\nabla\phi^I} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\nabla\phi^I} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}^J}\frac{\partial\dot{\phi}^J}{\partial\nabla\phi^I} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\nabla\phi^I}.$$

Отсюда находим, что

$$\frac{\delta H}{\delta\phi^I(x)} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\phi^I} + \nabla\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\nabla\phi^I}.$$

Правая часть данного уравнения, очевидно, представляет собой функциональную производную функции Лагранжа, взятую с обратным знаком:

$$\frac{\delta L}{\delta\phi^I(x)} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\phi^I} - \nabla\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\nabla\phi^I}, \qquad \frac{\delta H}{\delta\phi^I(x)} = -\frac{\delta L}{\delta\phi^I(x)}.$$

На экстремалях, в силу полевых уравнений Эйлера-Лагранжа,

$$\frac{\delta H}{\delta\phi^I(x)} = -\frac{\delta L}{\delta\phi^I(x)} = -\partial_t\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}^I} = -\dot{\pi}_I(x).$$

Это *второе каноническое уравнение Гамильтона.* Итак, динамическое описание механической системы с бесконечным числом степеней свободы также, как и в случае конечного числа степеней свободы, можно проводить двумя методами: лагранжевым и гамильтоновым. В лагранжевом методе система характеризуется «обобщенными координатами», то есть функциями поля ϕ^I, подчиняющимися полевым уравнениям Эйлера-Лагранжа. В гамильтоновом методе число полевых переменных увеличивается за счет введения плотности канонических импульсов π_I. Эти канонически сопряженные переменные удовлетворяют соответствующим уравнениям Гамильтона.

В отличие от уравнений Эйлера-Лагранжа, канонические уравнения Гамильтона являются уравнениями первого порядка по времени. При этом видно, что время в гамильтоновом методе играет выделенную роль. Тем самым, нарушается равноправие пространственных и временных координат, присущее методу Лагранжа. Однако, в квантовой механике процедура канонического квантования формулируется именно на гамильтоновом языке и поэтому для вторичного квантования полей необходимо использовать гамильтонов метод.

В качестве примера применения гамильтонова формализма в теории поля рассмотрим уже знакомое нам массивное скалярное поле Клейна-Гордона:

$$S[\varphi(x)] = \frac{1}{2}\int_M d_4x\left[\dot{\varphi}^2 - (\nabla\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right].$$

Соответствующая плотность канонического импульса поля $\pi = \partial\mathscr{L}/\partial\dot{\varphi} = \dot{\varphi}$. Гамильтониан поля Клейна-Гордона

$$\mathscr{H} = \pi\dot{\varphi} - \mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2\right].$$

Функция Гамильтона

$$H = \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}\,\mathscr{H} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}\left[\pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2\right].$$

Из этого выражения ясен выбор знаков в действии для скалярного поля: противоположные знаки перед $\dot{\varphi}^2$ и $(\nabla\varphi)^2$ привели бы к отрицательному знаку в первых двух слагаемых в выражении для функции Гамильтона, и энергия быстро осциллирующих полей была бы отрицательна и неограниченно убывала с ростом частоты осцилляции; положительный знак при слагаемом с m^2 в действии привел бы к отрицательному знаку при соответствующем (третьем) слагаемом в выражении для функции Гамильтона, и энергия однородного поля была бы отрицательна и неограничена снизу для больших полей φ. Уравнения Гамильтона для скалярного поля дают

$$\frac{\delta H}{\delta\pi(x)} = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\pi} - \nabla\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\nabla\pi} = \pi = \dot{\varphi},$$

$$\frac{\delta H}{\delta\varphi(x)} = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi} - \nabla\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\nabla\varphi} = m^2\varphi - \nabla^2\varphi = -\dot{\pi} = -\ddot{\varphi},$$

откуда окончательно имеем $[\Box + m^2]\varphi(x) = 0$. Выразим теперь функцию Гамильтона скалярного поля в терминах амплитуд положительно-частотных и отрицательно-частотных полевых мод. Это позволит нам в следующем параграфе канонически проквантовать массивное скалярное поле Клейна-Гордона, а также научит нас сейчас некоторым полезным приемам интегрирования, сплошь и рядом используемых в квантовой теории поля.

Найдем сначала интеграл от третьего слагаемого в выражении для функции Гамильтона:

$$\frac{m^2}{2}\int_{\Sigma_{[t]}} d\boldsymbol{r}\,\varphi^2(x) = \frac{m^2}{2}\int_{\Sigma_{[t]}} d\boldsymbol{r}\int\frac{d\boldsymbol{p}\,d\boldsymbol{q}}{4\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}(2\pi)^6}\left[\alpha_{\mathbf{p}}\alpha^\star_{\mathbf{q}}e^{-\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}})t+\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\mathbf{r}}+\right.$$
$$\left.+\,\alpha^\star_{\mathbf{p}}\alpha_{\mathbf{q}}e^{\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}})t-\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{p}}\alpha_{\mathbf{q}}e^{-\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}})t+\mathrm{i}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\mathbf{r}} + \alpha^\star_{\mathbf{p}}\alpha^\star_{\mathbf{q}}e^{\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}})t-\mathrm{i}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\mathbf{r}}\right].$$

Проинтегрируем, например, третье слагаемое в последнем выражении по пространственным координатам

$$\int_{\Sigma_{[t]}} d\boldsymbol{r}\int\frac{d\boldsymbol{p}\,d\boldsymbol{q}}{4\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}(2\pi)^6}\,\alpha_{\mathbf{p}}\alpha_{\mathbf{q}}e^{-\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}})t+\mathrm{i}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\mathbf{r}} =$$
$$= \int\frac{d\boldsymbol{p}}{4\omega_{\mathbf{p}}(2\pi)^3}\alpha_{\mathbf{p}}e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t}\int d\boldsymbol{r}\int\frac{d\boldsymbol{q}}{\omega_{\mathbf{q}}(2\pi)^3}e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{q}}t}\alpha_{\mathbf{q}}e^{\mathrm{i}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\mathbf{r}} = \int\frac{d\boldsymbol{p}}{4\omega^2_{\mathbf{p}}(2\pi)^3}\alpha_{\mathbf{p}}\alpha_{-\mathbf{p}}\,e^{-2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t}.$$

Проделывая аналогичные действия для остальных слагаемых, получаем

$$\int_{\Sigma_{[t]}} d\boldsymbol{r}\, \varphi^2(x) = \int \frac{d\boldsymbol{p}}{4\omega_{\mathbf{p}}^2(2\pi)^3}\, [\alpha_{\mathbf{p}}\alpha_{\mathbf{p}}^\star + \alpha_{\mathbf{p}}^\star\alpha_{\mathbf{p}} + \alpha_{\mathbf{p}}\alpha_{-\mathbf{p}}\, e^{-2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t} + \alpha_{\mathbf{p}}^\star\alpha_{-\mathbf{p}}^\star\, e^{2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t}].$$

Интегралы от других слагаемых в выражении для энергии поля вычисляются абсолютно также. Поэтому имеем

$$H = \frac{1}{2}\int \frac{d\boldsymbol{p}}{4\omega_{\mathbf{p}}^2(2\pi)^3}\{[\alpha_{\mathbf{p}}\alpha_{\mathbf{p}}^\star + \alpha_{\mathbf{p}}^\star\alpha_{\mathbf{p}}][\omega_{\mathbf{p}}^2 + \boldsymbol{p}^2 + m^2] +$$

$$+ [\alpha_{\mathbf{p}}\alpha_{-\mathbf{p}}\, e^{-2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t} + \alpha_{\mathbf{p}}^\star\alpha_{-\mathbf{p}}^\star\, e^{2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t}][-\omega_{\mathbf{p}}^2 + \boldsymbol{p}^2 + m^2]\}.$$

В силу уравнения движения в импульсном пространстве (дисперсионного соотношения между энергией и импульсом): $\omega_{\mathbf{p}}^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2 = 0$ осцилирующие вклады зануляются:

$$H = \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}}\frac{1}{2}[\alpha_{\mathbf{p}}\alpha_{\mathbf{p}}^\star + \alpha_{\mathbf{p}}^\star\alpha_{\mathbf{p}}]\omega_{\mathbf{p}} = \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}}\alpha_{\mathbf{p}}^\star\alpha_{\mathbf{p}}\,\omega_{\mathbf{p}}.$$

Отсюда видно, что по своему физическому смыслу величина $N_{\mathbf{p}} = |\alpha_{\mathbf{p}}|^2/2\omega_{\mathbf{p}}$ представляет собой *плотность квантов поля* с энергией $\omega_{\mathbf{p}}$ в импульсном пространстве.

В заключение рассмотрения гамильтонова формализма в теории поля хотелось бы заметить, что описанное выше обобщение гамильтонова формализма в механике на теорию поля, которое опирается на представление о полях, как о механических системах с бесконечным числом степеней свободы не является единственно возможным. В математической физике существует теория, которая, в отличие от гамильтонова формализма в теории поля, рассматривает пространство и время координаты на равных. Она называется *теорией де Дондера-Вейля*. Мы сейчас не будем поогружаться с детали теории, ибо это требует знаний *мультисимплектической геометрии*, которыми многие студенты не обладают.

Задача 9.7. Рассмотрим действие для бесмассового векторного поля

$$S[A] = -\frac{1}{4}\int_M d_4x\,\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Найти соответствующие плотности канонического импульса, а также гамильтониан векторного поля. Запишите уравнения Гамильтона и вычислите скобки Пуассона канонических переменных.

9.12. **Каноническое квантование скалярного поля.** В заключение раздела произведем каноническое квантование скалярного поля Клейна-Гордона. Процедура канонического квантования скалярного поля подразумевает реинтерпретацию наблюдаемых в классической теории вещественного скалярного поля как операторов, подчиняющихся каноническим коммутационным соотношениям. В случае скалярного поля динамические переменные — суть поле $\varphi(x)$ и канонически сопряженный импульс $\pi = \partial\mathscr{L}/\partial\dot\varphi = \dot\varphi$, которые при каноническом квантовании, естественно, должны перейти в соответствующие операторы φ и π (которые, как и раньше, мы будем обозначать теми же буквами), а с ними и амплитуды $\alpha_{\mathbf{p}}, \alpha_{\mathbf{p}}^\star \mapsto \alpha_{\mathbf{p}}, \alpha_{\mathbf{p}}^\dagger$.

Определим комплексные параметры $a_{\mathbf{p}}$ и $a_{\mathbf{p}}^\star$ с нерелятивистской нормировкой согласно

$$a_{\mathbf{p}} = \frac{\alpha_{\mathbf{p}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}, \quad a_{\mathbf{p}}^\star = \frac{\alpha_{\mathbf{p}}^\star}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}.$$

Тогда, для функции Гамильтона вещественного скалярного поля имеем

$$H = \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}a_{\mathbf{p}}^\star a_{\mathbf{p}}\,\omega_{\mathbf{p}}.$$

Глядя на гамильтонову функцию свободного скалярного поля, записанную в терминах амплитуд полевых мод в нерелятивистской нормировке, легко заметить ее явное сходство с гамильтонианом простого квантового осциллятора. Действительно, с точностью до энергии *вакуумного состояния* осциллятора, гамильтонова функция скалярного поля представляет собой сумму гамильтонианов гармонических осцилляторов с частотами $\omega_\mathbf{p}$. Кроме того, как нетрудно заметить, эволюция амплитуд $\alpha_\mathbf{p}(t) = e^{-\mathrm{i}\omega_\mathbf{p}t}\alpha_\mathbf{p}$, $\alpha^\star_\mathbf{p}(t) = e^{\mathrm{i}\omega_\mathbf{p}t}\alpha^\star_\mathbf{p}$, а значит и амплитуд $a_\mathbf{p}(t)$ и $a^\star_\mathbf{p}(t)$, в точности совпадает с эволюцией операторов рождения и уничтожения простого гармонического осциллятора. Поэтому, следовало бы ожидать, что гамильтониан H квантованного скалярного поля имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\,[a^\dagger_\mathbf{p} a_\mathbf{p} + a_\mathbf{p} a^\dagger_\mathbf{p}]\,\omega_\mathbf{p},$$

где $a_\mathbf{p}$ и $a^\dagger_\mathbf{p}$ — операторы рождения и уничтожения частиц с импульсом $\boldsymbol{p}$. В данной формуле с необходимостью учтена некоммутативность операторов рождения и уничтожения. Причем, поскольку для операторов a и $a^\dagger$ квантованного гармонического осциллятора коммутационные соотношения имеют вид

$$[a, a^\dagger] = 1,$$

то для операторов рождения и уничтожения скалярных частиц в нерелятивистской нормировке коммутатор должен выглядеть следующим образом:

$$[a_\mathbf{p}, a^\dagger_\mathbf{q}] = (2\pi)^3\,\delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}).$$

Данные коммутационные соотношения однозначно определяют вид коммутатора операторов $\varphi(x)$ и $\pi(x)$. Действительно, для оператора плотности импульса имеем

$$\pi(x) = \mathrm{i}\int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_\mathbf{p}}{2}}\,[a^\dagger_\mathbf{p} e^{\mathrm{i}px} - a_\mathbf{p} e^{-\mathrm{i}px}],$$

а оператор $\varphi(x)$ в нерелятивистской нормировке определяется выражением[1]

$$\varphi(x) = \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{p}}}\,[a_\mathbf{p} e^{-\mathrm{i}px} + a^\dagger_\mathbf{p} e^{\mathrm{i}px}].$$

Согласно формализму канонического квантования для коммутатора операторов поля и плотности канонического импульса следовало бы ожидать, что их коммутаторы, вычисленные на трехмерной гиперповерхности $\Sigma_{[t]}$ равного времени: $x_0 = z_0 = t$,

$$[\varphi(x), \pi(z)]|_{x_0=z_0} = \mathrm{i}\,\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{z}), \quad [\varphi(x), \varphi(z)]|_{x_0=z_0} = [\pi(x), \pi(z)]|_{x_0=z_0} = 0,$$

---

[1]Важно помнить, что классическое поле не имеет смысла амплитуды вероятности, то есть волновой функции. Оно является средним значением оператора квантованного поля по *когерентным состояниям.* Согласно принципу соответствия, при большом количестве квантов флуктуациями их количества можно пренебречь, и мы имеем наблюдаемое классическое поле. Как правило, никто не работает с квантовой теорией поля на языке амплитуд вероятности (т.е. в *шредингеровском представлении*), но нужно понимать, что последняя была бы некоторым функционалом $\Psi[\varphi(x)]$, представляющим собой амплитуду вероятности нахождения поля в каждой полевой конфигурации.

В качестве иллюстрации выпишем волновую функцию *вакуумного состояния* скалярного поля. Совершая обратное преобразование Фурье над полем $\varphi(x)$ по пространственным компонентам, получаем уравнение движения в терминах Фурье-образов $\varphi_\mathbf{p}$: $\ddot\varphi_\mathbf{p} + \omega^2_\mathbf{p}\varphi_\mathbf{p} = 0$, которое, как видно, представляет собой уравнение движения для обычного осциллятора с частотой $\omega_\mathbf{p}$: $\omega^2_\mathbf{p} = \boldsymbol{p}^2 + m^2$. Тогда для скалярного поля, очевидно,

$$\Psi_0[\varphi(\boldsymbol{r})] = \prod_\mathbf{p} \exp\left\{-\frac{\omega_\mathbf{p}\varphi^2_\mathbf{p}}{2}\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\omega_\mathbf{p}\varphi^2_\mathbf{p} e^{\mathrm{i}\mathbf{pr}}|_{\mathbf{r}=0}\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int d\boldsymbol{r}\,\varphi\sqrt{m^2 - \nabla^2}\,\varphi\right\}.$$

ведь соответствующие канонические скобки Пуассона

$$\{\varphi(t,\boldsymbol{r}),\pi(t,\boldsymbol{z})\} = \int d\boldsymbol{r}' \left(\frac{\delta\varphi(\boldsymbol{r})}{\delta\varphi(\boldsymbol{r}')}\frac{\delta\pi(\boldsymbol{z})}{\delta\pi(\boldsymbol{r}')} - \frac{\delta\varphi(\boldsymbol{r})}{\delta\pi(\boldsymbol{r}')}\frac{\delta\pi(\boldsymbol{z})}{\delta\varphi(\boldsymbol{r}')}\right) = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{z}),$$

$$\{\varphi(t,\boldsymbol{r}),\varphi(t,\boldsymbol{z})\} = 0, \qquad \{\pi(t,\boldsymbol{r}),\pi(t,\boldsymbol{z})\} = 0.$$

Проверим, что коммутационные соотношения для операторов рождения и уничтожения обеспечивают нам правильные коммутаторы для $\varphi(x)$ и $\pi(z)$:

$$[\varphi(x),\pi(z)]|_{x_0=z_0} = \mathrm{i}\int \frac{d\boldsymbol{p}}{2(2\pi)^3}[e^{\mathrm{i}\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{z})} + e^{\mathrm{i}\mathbf{p}(\mathbf{z}-\mathbf{r})}] = \mathrm{i}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{z}).$$

Подставляя коммутационные соотношения для операторов рождения и уничтожения в предполагаемый гамильтониан скалярного поля, получаем

$$H = \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\omega_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2}\int d\boldsymbol{p}\,\omega_{\mathbf{p}}\,\delta(0).$$

Видно, что второе слагаемое, представляющее собой сумму по всем нулевым колебаниям вакуума, дает расходимость, причем не только из-за дельта-функции $\delta(0)$. Нетрудно заметить, что интеграл от $\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$ расходится при больших значениях импульса. Обсудим физические причины этих расходимостей. Следуя процедуре канонического квантования, определим вакуумное состояние следующим образом:

$$\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}\,a_{\mathbf{p}}|\text{vac.}\rangle = 0.$$

Множитель $\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}$ вставлен в формулу исключительно ради согласования с релятивистской нормировкой одночастичных состояний. Это определение также согласуется со сделанным выше утверждением о том, что второе слагаемое в формуле представляет собой энергию вакуумного состояния E_0:

$$H|\text{vac.}\rangle = E_0|\text{vac.}\rangle = \frac{1}{2}\int d\boldsymbol{p}\,\omega_{\mathbf{p}}\,\delta(0)|\text{vac.}\rangle = \infty|\text{vac.}\rangle.$$

На самом деле в выражении для энергии вакуумного состояния скрываются две разных бесконечности. Первая возникает в связи с тем, что пространство бесконечно велико — *инфракрасная расходимость*. Чтобы устранить эту бесконечность, обычно рассматриваемую полевую систему «помещают» в кубический ящик со сторонами $L \to \infty$. При этом на поле накладываются периодические условия:

$$\varphi(t,x,y,z) = \varphi(t,x+L,y,z) = \varphi(t,x,y+L,z) = \varphi(t,x,y,z+L).$$

Предельный переход $L \to \infty$ понимается в смысле главного значения:

$$(2\pi)^3\,\delta(0) = \text{v.p.}\int d\boldsymbol{r}\,e^{\mathrm{i}\mathbf{pr}}\Big|_{\mathbf{p}=0} = \text{v.p.}\int d\boldsymbol{r} = \text{vol}_{[3]}.$$

Таким образом расходимость $\delta(0)$ связана с тем, что мы вычисляем полную энергию основного состояния, а не объемную плотность этой энергии ρ.

$$\rho = \frac{E_0}{\text{vol}_{[3]}} = \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}.$$

Получившийся интеграл все еще расходится при больших энергиях. Такие расходимости — расходимости на больших импульсах — называют *ультрафиолетовыми расходимостями*, и они являются источником головных болей людей, занимающихся квантовыми теориями поля.

Что же означает такая расходимость? Тут есть несколько подходов и ответов на этот вопрос. Во-первых, можно отметить, что плотность энергии вакуума не является наблюдаемой физической величиной. Измерима лишь разница энергий, и таким образом эту бесконечную константу можно просто игнорировать, покуда она неизмерима. Во-вторых — любопытный читатель может заметить, что *тензор энергии-импульса вакуума* входит в уравнения общей теории относительности Эйнштейна и определяет величину *космологической постоянной* Λ, и тем самым все-таки наблюдается. Совмещение квантовой теории поля и гравитации по сей день является нерешенной задачей, поэтому общей теорией относительности мы пока что заниматься не будем, а на это замечание ответим гораздо более важным утверждением. Большие импульсы и энергии по дуальности соответствуют малым расстояниям и масштабам времени. На самом деле никто до конца не знает, как там устроена природа и каким уравнениям она подчиняется. Мы знаем лишь, что в экспериментально допустимых пределах эта теория работает достаточно хорошо; но даже сейчас мы уже понимаем, что не все так просто. Частицы материи состоят из еще более мелких частиц — лептонов и кварков, а бозоны (переносчики взаимодействия) подчиняются чуть более сложным теориям, чем теория Клейна-Гордона. Так что на самом деле, всякая теория поля имеет смысл лишь как некоторое низкоэнергетическое эффективное рассмотрение, имеющее свои границы применимости. В частности, наличие ультрафиолетовых расходимостей лишь доказывает, что на больших энергиях наша теория попросту неприменима, а ее выводами можно пользоваться только для достаточно малых импульсов. В теорию необходимо вводить *параметр обрезания*, то есть *регуляризацию*, например, ограничивать допустимые импульсы некоторым большим, но конечным (и, увы, неизвестным) импульсом

$$|\boldsymbol{p}| < \Lambda.$$

Таким образом, ультрафиолетовые расходимости в некоторых физических величинах означают лишь то, что данные величины невозможно вычислить в рамках теории. Они зависят от поведения системы там, где теория уже не работает (зависят от параметра обрезания Λ). Может показаться странным, а зачем тогда вообще такая теория нужна? Прелесть в том, что в хороших теориях, таких как, например, квантовая электродинамика, количество величин, которые невозможно вычислить в рамках теории, оказывается конечным. Если взять значения для них, скажем, из эксперимента, то с ними можно уже связать другие, менее тривиальные физические величины. Такие, как говорят, *перенормируемые теории* обладают все-таки предсказательной силой и являются физически осмысленными.

Итак, мы поняли, что интеграл, вычисляющий плотность вакуумной энергии ρ, должен быть обрезан при некотором (достаточно большом) значении импульса, отражая тот факт, что наша теория перестает работать при слишком больших значениях импульса. Однако, в силу неизмеримости вакуумной энергии в физических экспериментах (в отсутствие гравитации), мы будем просто игнорировать это бесконечное слагаемое. Здесь обычно вводится *нормальный символ оператора* $:\bullet:$, который получается перестановкой всех операторов рождения налево от операторов уничтожения, причем каждая перестановка сопровождается умножением на фактор перестановки бозонного или фермионного оператора. В таком случае для гамильтониана скалярного поля имеем

$$:H:=\int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\omega_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}.$$

Записанный в таком виде гамильтониан скалярного поля уже не содержит в себе расходимостей. По существу соглашение о нормальном упорядочении являет собой простейший вариант так называемой *перенормировки*, то есть переопределения операторов наблюдаемых с целью устранения формальных расходимостей.

Настало время вернуться к релятивистской нормировке, дабы сохранить в дальнейшем лоренц-инвариантность формул. Так, коммутатор операторов уничтожения и рождения скалярных частиц в релятивистской нормировке имеет вид

$$[\alpha_{\mathbf{p}}, \alpha_{\mathbf{q}}^{\dagger}] = (2\pi)^3\, \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})\, 2\omega_{\mathbf{p}},$$

а гамильтониан канонически квантованного скалярного поля, записанного в терминах операторов $\alpha_{\mathbf{p}}$ и $\alpha_{\mathbf{p}}^{\dagger}$,

$$\mathcal{H} =: H := \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \omega_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{p}}^{\dagger} \alpha_{\mathbf{p}}.$$

Нетрудно видеть, что справедливы следующие соотношения:

$$[\mathcal{H}, \alpha_{\mathbf{p}}^{\dagger}] = \omega_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{p}}^{\dagger}, \quad [\mathcal{H}, \alpha_{\mathbf{p}}] = -\omega_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{p}}.$$

Значит, как и в случае простого гармонического осциллятора мы можем построить собственные состояния энергии, действуя на вакуум оператором рождения $\alpha_{\mathbf{p}}^{\dagger}$:

$$|\boldsymbol{p}\rangle = \alpha_{\mathbf{p}}^{\dagger} |\text{vac.}\rangle.$$

Состояние $|\boldsymbol{p}\rangle$, очевидно, является собственным для гамильтониана с энергией $\omega_{\mathbf{p}}$:

$$\mathcal{H}|\boldsymbol{p}\rangle = [\mathcal{H}, \alpha_{\mathbf{p}}^{\dagger}]|\text{vac.}\rangle = \omega_{\mathbf{p}}|\boldsymbol{p}\rangle,$$

где $\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$. Это равенство представляет собой стандартное дисперсионное соотношение для массивной скалярной частицы. Поэтому мы интерпретируем состояние $|\boldsymbol{p}\rangle$ как одночастичное с энергией $\omega_{\mathbf{p}}$. Можно убедиться в справедливости нашей интерпретации и на примере других квантовых чисел.

Заметим, что выражение для коммутатора операторов уничтожения и рождения скалярных частиц хорошо согласуется со стандартным выбором нормировки одночастичных состояний: $\alpha_{\mathbf{p}}^{\dagger}|\text{vac.}\rangle = |\boldsymbol{p}\rangle$, $\alpha_{\mathbf{p}}|\text{vac.}\rangle = 0$:

$$\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle = (2\pi)^3\, \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})\, 2\omega_{\mathbf{p}}.$$

Действуя операторами рождения $\alpha^{\dagger}$ на вакуум несколько раз, можно создавать *многочастичные состояния*. Состояние

$$|\boldsymbol{p}_1; \ldots; \boldsymbol{p}_N\rangle = \prod_{k=1}^{N} \alpha_{\mathbf{p}_k}^{\dagger} |\text{vac.}\rangle = \alpha_{\mathbf{p}_1}^{\dagger} \ldots \alpha_{\mathbf{p}_N}^{\dagger} |\text{vac.}\rangle$$

мы интерпретируем как N-частичное. Поскольку операторы рождения скалярных частиц коммутируют между собой, то состояние $|\boldsymbol{p}_1; \ldots; \boldsymbol{p}_N\rangle$ симметрично по перестановке любых двух частиц: $|\boldsymbol{p}; \boldsymbol{q}\rangle = |\boldsymbol{q}; \boldsymbol{p}\rangle$. Это означает, что частицы являются *бозонами*. Полное *гильбертово пространство* нашей теории поля определяется действием на вакуум всеми возможными комбинациями

$$|\text{vac.}\rangle, \quad \alpha_{\mathbf{p}}^{\dagger}|\text{vac.}\rangle, \quad \alpha_{\mathbf{p}}^{\dagger}\alpha_{\mathbf{q}}^{\dagger}|\text{vac.}\rangle, \quad \ldots$$

и называется *фоковским пространством*. Базис фоковского пространства составляют N-частичные состояния, порождаемые действием операторов рождения на вакуум. Состояния из фоковского пространства представляются в виде суперпозиции многочастичных состояний, например,

$$\Psi = \int \prod_{k=1}^{N} \frac{d\boldsymbol{p}_k}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}_k}} \psi(\boldsymbol{p}_1; \ldots; \boldsymbol{p}_N) |\boldsymbol{p}_1; \ldots; \boldsymbol{p}_N\rangle,$$

где в выражении для волновой функции $\psi(\boldsymbol{p}_1; \ldots; \boldsymbol{p}_N)$ еще необходимо учесть симметрию по перестановкам *тождественных частиц*.

Наконец, покажем, что состояние с одним квантом поля $|\boldsymbol{p}\rangle$ — это точечная частица. Для этого рассмотрим матричный элемент $\langle \text{vac.}|\varphi(x)|\boldsymbol{p}\rangle$. Легко заметить, что состояние

$$\varphi(x)|\text{vac.}\rangle = \int \frac{d\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}}} e^{\mathrm{i}qx}\, \alpha^\dagger_{\mathbf{q}}|\text{vac.}\rangle = \int \frac{d\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}}} e^{\mathrm{i}qx}|\boldsymbol{q}\rangle$$

является линейной суперпозицией одночастичных состояний, имеющих хорошо определённый импульс. Матричный элемент

$$\langle \text{vac.}|\varphi(x)|\boldsymbol{p}\rangle = e^{-\mathrm{i}px}.$$

Физический смысл этого матричного элемента следующий: на состояние поля с одним квантом импульса $\boldsymbol{p}$ и энергии $\omega_{\mathbf{p}}$ в момент времени t в точке $\boldsymbol{r}$ подействовал оператор квантованного поля $\varphi(x)$, а в конечном состоянии мы рассматриваем состояние вакуума, а значит, рассматриваемый квант поля исчез в точке x. Видно, что амплитуда перехода состояния поля с одним квантом в вакуум при действии локального поля отлична от нуля и представляет собой по существу положительно частотную моду поля. Ясно, что аналогичный матричный элемент

$$\langle \boldsymbol{p}|\varphi(x)|\text{vac.}\rangle = e^{\mathrm{i}px}$$

отвечает появлению (рождению) частицы в конечном состоянии из вакуума, и он описывается, подчеркнем, отрицательно-частотной модой. Логическая трактовка этого матричного элемента возможна только, если полагать, что сам квант является точечным объектом, то есть частицей! Таким образом, квант локального поля есть точечная частица, которая несет вполне определенную порцию энергии и импульса.

Задача 9.8. Доказать, что в *представлении Гейзенберга*

$$\dot{\varphi}(x) = \mathrm{i}\,[\mathcal{H}, \varphi(x)] = \pi(x), \quad \dot{\pi}(x) = \mathrm{i}\,[\mathcal{H}, \pi(x)] = \nabla^2\varphi(x) - m^2\varphi(x).$$

Отсюда покажите, что оператор поля $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона.

9.13. **Двухточечные корреляционные функции.** Настоящий параграф посвящен изучению некоторых *двухточечных корреляторов* для квантованного скалярного поля. Начнем с того, что найдем выражение для амплитуды распространения скалярной частицы (кванта скалярного поля φ) от точки z до точки x, т.е. вычислим простейшую двухточечную корреляционную функцию $\mathcal{G}_+(x,z) = \langle \text{vac.}|\varphi(x)\varphi(z)|\text{vac.}\rangle$:

$$\mathcal{G}_+(x,z) = \langle \text{vac.}| \int \frac{d\boldsymbol{p}\, d\boldsymbol{q}}{(2\pi)^6 4\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}} [\alpha_{\mathbf{p}} e^{-\mathrm{i}px} + \alpha^\dagger_{\mathbf{p}} e^{\mathrm{i}px}][\alpha_{\mathbf{q}} e^{-\mathrm{i}qz} + \alpha^\dagger_{\mathbf{q}} e^{\mathrm{i}qz}]|\text{vac.}\rangle =$$
$$= \int \frac{d\boldsymbol{p}\, d\boldsymbol{q}}{(2\pi)^6 4\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}} \langle \text{vac.}|\alpha_{\mathbf{p}}\alpha^\dagger_{\mathbf{q}}|\text{vac.}\rangle\, e^{-\mathrm{i}px+\mathrm{i}qz} =$$
$$= \int \frac{d\boldsymbol{p}\, d\boldsymbol{q}}{(2\pi)^6 4\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}} \langle \text{vac.}|[\alpha_{\mathbf{p}}, \alpha^\dagger_{\mathbf{q}}]|\text{vac.}\rangle\, e^{-\mathrm{i}px+\mathrm{i}qz}.$$

Вспоминая нормировку одночастичных состояний, получаем

$$\mathcal{G}_+(x,z) = \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3\, 2\omega_{\mathbf{p}}}\, e^{-\mathrm{i}p(x-z)}.$$

Аналогично, находим

$$\mathcal{G}_-(x,z) = \langle \text{vac.}|\varphi(z)\varphi(x)|\text{vac.}\rangle = \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3\, 2\omega_{\mathbf{p}}}\, e^{\mathrm{i}p(x-z)}.$$

Функции $\mathcal{G}_{\pm}(x,z)$ называются *функциями Вайтмана*; причем, как нетрудно понять, интегралы такого вида релятивистски инварианты. Не менее интересным объектом является коммутатор полей в двух точках x и z. В случае свободного вещественного скалярного поля коммутатор является функцией, так что можно рассматривать матричный элемент этого коммутатора по вакууму

$$\langle \text{vac.}|[\varphi(x),\varphi(z)]|\text{vac.}\rangle = \mathcal{G}(x,z),$$

где $\mathcal{G}(x,z)$ называют *функцией Паули-Йордана.* Из линейной алгебры известно, что если два самосопряженных оператора коммутируют, то у них имеется совместный базис; более того, это значит, что измерение поля в одной точке никак не может повлиять на результат взаимодействия (измерения) с таким полем в другой точке пространства-времени. Таким образом, коммутатор отражает свойства причинности локальной теории поля. Очевидно, что функция Паули-Йордана скалярного поля

$$\mathcal{G}(x,z) = \mathcal{G}_+(x,z) - \mathcal{G}_-(x,z) = \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3\, 2\omega_{\mathbf{p}}}[e^{-\mathrm{i}p(x-z)} - e^{\mathrm{i}p(x-z)}].$$

Исследуем полученный результат, не прибегая к прямому вычислению функции Паули-Йордана: пусть точки x и z связаны между собой пространственноподобным интервалом, так что $(x-z)^2 = -\boldsymbol{r}^2 < 0$. Это означает, что в выражении можно совершить лоренцев буст, который уберет временную компоненту скалярного произведения, и в показателе экспоненты останется $p(x-z) = -\boldsymbol{pr}$. Полученный интеграл нечетен по импульсу и, тем самым, зануляется. Если же точки x и z связаны времениподобным интервалом, так что $(x-z)^2 = t^2 > 0$, то аналогичные действия приводят выражение в показателе экспоненты к виду $p(x-z) = \omega_{\mathbf{p}} t$. В результате под интегралом остается вполне конечное ненулевое выражение. Таким образом, принцип причинности, гласящий, что события могут быть связаны причинной связью только если интервал между ними времениподобен, выполняется в квантовой теории поля.

Причинный коррелятор (или запаздывающий пропагатор Клейна-Гордона) определяется с дополнительной ступенькой Хевисайда:

$$\mathcal{G}_{\text{ret}}(x,z) = \vartheta(x_0 - z_0)\,\langle \text{vac.}|[\varphi(x),\varphi(z)]|\text{vac.}\rangle.$$

Чтобы лучше понять смысл этой величины, проделаем следующее вычисление:

$$\begin{aligned}
[\Box + m^2]\mathcal{G}_{\text{ret}}(x,z) = (\Box\vartheta(x_0-z_0))\,&\langle \text{vac.}|[\varphi(x),\varphi(z)]|\text{vac.}\rangle + \\
&+ 2\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\vartheta(x_0-z_0))(\partial_\nu\langle \text{vac.}|[\varphi(x),\varphi(z)]|\text{vac.}\rangle) + \\
&+ \vartheta(x_0-z_0)[\Box + m^2]\langle \text{vac.}|[\varphi(x),\varphi(z)]|\text{vac.}\rangle = \\
&= \delta(x_0-z_0)\,\langle \text{vac.}|[\varphi(x),\varphi(z)]|\text{vac.}\rangle = -\mathrm{i}\,\delta(x-y).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что с точностью до несущественного множителя $\mathcal{G}_{\text{ret}}(x,z)$ является запаздывающей функцией Грина оператора Клейна-Гордона. Данная функция, очевидно, обращается в нуль для $x_0 < y_0$; потому она и называется запаздывающей. Полезно знать ее Фурье-образ:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\text{ret}}(\omega,\boldsymbol{p}) = \int_0^\infty dt\, e^{\mathrm{i}\omega t}\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}\, e^{-\mathrm{i}\mathbf{pr}}\int \frac{d\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3\, 2\omega_{\mathbf{q}}}[e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{q}}t + \mathrm{i}\mathbf{qr}} - e^{\mathrm{i}\omega_{\mathbf{q}}t - \mathrm{i}\mathbf{qr}}] = \\
= \int_0^\infty dt\, e^{\mathrm{i}\omega t}\int \frac{d\boldsymbol{q}}{2\omega_{\mathbf{q}}}[e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{q}}t}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) - e^{\mathrm{i}\omega_{\mathbf{q}}t}\delta(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})],
\end{aligned}$$

то есть

$$\Delta_{\text{ret}}(\omega,\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}\int_0^\infty dt\,[e^{\mathrm{i}(\omega-\omega_{\mathbf{p}})t} - e^{\mathrm{i}(\omega+\omega_{\mathbf{p}})t}].$$

Формально, конечно, интеграл по времени расходится, и для придания им смысла их необходимо регуляризовать в соответствии с правилом обхода полюсов при взятии обратного преобразования Фурье: на самом деле, при рассмотрении интеграла $\int_0^\infty dt\, e^{\mathrm{i}\omega t}$ речь идет о Фурье-образе ступеньки Хевисайда, ведь

$$\theta(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \vartheta(t)\, e^{\mathrm{i}\omega t} = \int_0^\infty dt\, e^{\mathrm{i}\omega t},$$

который, как несложно заметить, сводится к выражению

$$\theta(\omega) = \frac{\mathrm{i}}{\omega + \mathrm{i}0}.$$

Таким образом, Фурье-образ

$$\Delta_{\mathrm{ret}}(\omega,\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}\left\{\frac{\mathrm{i}}{\omega - \omega_{\mathbf{p}} + \mathrm{i}0} - \frac{\mathrm{i}}{\omega + \omega_{\mathbf{p}} + \mathrm{i}0}\right\} = \frac{\mathrm{i}}{(\omega + \mathrm{i}0)^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2} = \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2}.$$

Обратное преобразование Фурье сводится к интегралу

$$\mathcal{G}_{\bullet}(x,z) = \int \frac{d_4 p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2}\, e^{-\mathrm{i}p(x-z)},$$

который может быть вычислен по четырем различным контурам в комплексной плоскости переменной ω, из которых в выражении для запаздывающего пропагатора использован только один. Другое, чрезвычайно полезное правило обхода полюсов, дает т.н. *пропагатор Фейнмана*

$$\mathcal{G}_F(x,z) = \int \frac{d_4 p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}0}\, e^{-\mathrm{i}p(x-z)},$$

то есть

$$\mathcal{G}_F(x,z) = \vartheta(x_0 - z_0)\, G_+(x,z) + \vartheta(z_0 - x_0)\, G_-(x,z).$$

Здесь было использовано равенство

$$\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}\left\{\frac{\mathrm{i}}{\omega - \omega_{\mathbf{p}} + \mathrm{i}0} - \frac{\mathrm{i}}{\omega + \omega_{\mathbf{p}} - \mathrm{i}0}\right\} = \frac{\mathrm{i}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2 + \mathrm{i}0} = \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}0}.$$

Построенный двухточечный коррелятор $\mathcal{G}_F(x,z)$, очевидно, можно переписать в терминах T-*произведения* согласно

$$\langle \mathrm{vac.}|\mathrm{T}\,\varphi(x)\varphi(z)|\mathrm{vac.}\rangle = \begin{cases}\langle \mathrm{vac.}|\varphi(x)\varphi(z)|\mathrm{vac.}\rangle, & x_0 > z_0,\\ \langle \mathrm{vac.}|\varphi(z)\varphi(x)|\mathrm{vac.}\rangle, & x_0 < z_0.\end{cases}$$

Полученный объект уже не обладает свойствами причинности, как запаздывающий коррелятор. В частности, он отличен от нуля во всем пространстве; для пространственноподобных интервалов он экспоненциально затухает.

9.14. **Представление взаимодействия и формула Дайсона.** Только что рассмотренная нами операция T-упорядочения (т.н. *хронологическое упорядочение*) возникает естественным образом при построении нестационарной теории возмущений в квантовой механике. Чтобы показать это, изучим представление взаимодействия, тем более, что эти знания потребуются нам в будущем.

В квантовой механике есть полезная точка зрения для описания ситуаций, когда мы имеем малое возмущение хорошо понимаемого гамильтониана. Речь идет о т.н. *представлении взаимодействия.* В шредингеровском представлении эволюция состояний описывается известным уравнением

$$\mathrm{i}\frac{d}{dt}|\Psi\rangle_S = H|\Psi\rangle_S.$$

Здесь и далее индекс S означает, что мы имеем дело с состояниями (или операторами) в шредингеровском представлении, а индекс H означает то же самое, только в гейзенберговском представлении. Напротив, в гейзенберговском представлении состояния фиксированы, а операторы зависят от времени:

$$|\Psi\rangle_H = e^{\mathrm{i}Ht}\,|\Psi\rangle_S, \quad A_H = e^{\mathrm{i}Ht}\,A_S\,e^{-\mathrm{i}Ht}.$$

Представление взаимодействия являет собой гибрид этих двух представлений. Разделим гамильтониан на две части

$$H = H_0 + H_{\mathrm{int}}.$$

В представлении взаимодействия временная зависимость операторов определяется величиной H_0, а временная зависимость состояний — величиной H_{int}. И хотя разделение на H_0 и H_{int} произвольно, оно оказывается особенно полезным в нестационарной теории возмущений, где известны точные решения стационарного уравнения Шредингера с гамильтонианом H_0 и рассматривается гамильтониан с малым возмущением

$$H = H_0 + aV(t), \quad a \mapsto 0.$$

Состояния и операторы в представлении взаимодействия обозначаются посредством индекса I и определяются формулами

$$|\Psi(t)\rangle_I = e^{\mathrm{i}H_0t}\,|\Psi\rangle_S, \quad A_I(t) = e^{\mathrm{i}H_0t}\,A_S\,e^{-\mathrm{i}H_0t}.$$

Последнее уравнение применимо и том случае, когда H_{int} зависит от времени. Как несложно заметить, гамильтониан H_{int} в представлении взаимодействия имеет вид

$$H_I = e^{\mathrm{i}H_0t}\,H^S_{\mathrm{int}}\,e^{-\mathrm{i}H_0t}.$$

Из вышенаписанного получаем

$$\mathrm{i}\frac{d}{dt}\left(e^{-\mathrm{i}H_0t}\,|\Psi(t)\rangle_I\right) = [H_0 + H_{\mathrm{int}}]\,e^{-\mathrm{i}H_0t}\,|\Psi(t)\rangle_I, \quad \mathrm{i}\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle_I = H_I|\Psi(t)\rangle_I.$$

Последнее уравнение часто называют уравнением Шредингера в представлении взаимодействия. Его решение определяет эволюцию состояния в предсталении взаимодействия. Будем искать решение уравнением Шредингера в представлении взаимодействия в виде

$$|\Psi(t)\rangle_I = U(t,t_0)\,|\Psi(t_0)\rangle_I,$$

где $U(t,t_0)$ — унитарный оператор эволюции. В терминах оператора эволюции

$$\mathrm{i}\frac{dU}{dt} = H_I(t)U.$$

Решение этого операторного уравнения дается *формулой Дайсона* (так называемой Т-*экспонентой*):

$$U(t,t_0) = \mathrm{T}\,\exp\left(-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t} H_I(\tau)\,d\tau\right),$$

где символ Т означает упорядочение по времени: операторы, вычисленные в более поздние моменты времени, помещаются слева.

$$\mathrm{T}\,[A_1(t_1)A_2(t_2)] = \begin{cases} A_1(t_1)A_2(t_2), & t_1 > t_2, \\ A_2(t_2)A_1(t_1), & t_2 > t_1. \end{cases}$$

Разлагая оператор эволюции в ряд, получаем

$$U(t,t_0) = 1 - \mathrm{i}\int_{t_0}^{t} H_I(\tau)\,d\tau +$$
$$+ (-\mathrm{i})^2\frac{1}{2}\left[\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\tau}^{t} d\tau'\, H_I(\tau')\, H_I(\tau) + \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\tau'\, H_I(\tau)\, H_I(\tau')\right] + \ldots$$

Поясним, как мы получили слагаемое в квадратных скобках. Здесь по сути идет речь об интегрировании по квадрату на плоскости (τ,τ'). Действие оператора упорядочения T на оператор $H_I(\tau)H_I(\tau')$ разделяет интегрирование по квадрату на интегрирование по двум треугольникам, на которые делит (по диагонали) квадрат прямая $\tau = \tau'$:

$$\mathrm{T}\int_{\square} d\tau\, d\tau'\, H_I(\tau)H_I(\tau') = \int_{\triangle_1} d\tau\, d\tau'\, H_I(\tau')H_I(\tau) + \int_{\triangle_2} d\tau\, d\tau'\, H_I(\tau)H_I(\tau').$$

Здесь $\triangle_1$ — треугольник, точки которого удовлетворяют соотношению $\tau' > \tau$; $\triangle_2$ — треугольник, точки которого удовлетворяют соотношению $\tau' < \tau$.

Дальнейшее применение теоремы Фубини дает формулу для разложения оператора эволюции $U(t,t_0)$ в ряд. Кроме того, как несложно заметить, замена переменных $\tau \mapsto \tau'$, $\tau' \mapsto \tau$, отвечающая отражению области интегрирования относительно прямой $\tau = \tau'$ на плоскости (τ,τ') дает нам равенство двух интегралов в правой части уравнения, то есть

$$\mathrm{T}\int_{\square} d\tau\, d\tau'\, H_I(\tau)H_I(\tau') = 2\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\tau'\, H_I(\tau)H_I(\tau').$$

Значит

$$U(t,t_0) = 1 - \mathrm{i}\int_{t_0}^{t} H_I(\tau)\,d\tau + (-\mathrm{i})^2\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\tau'\, H_I(\tau)H_I(\tau') + \ldots$$

Замечая, что под знаком T-упорядочения все операторы коммутируют (поскольку их порядок уже зафиксирован этим знаком), получаем

$$\mathrm{i}\frac{d}{dt}\mathrm{T}\,\exp\left(-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t} H_I(\tau)\,d\tau\right) =$$
$$= \mathrm{T}\left[H_I(t)\exp\left(-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t} H_I(\tau)\,d\tau\right)\right] = H_I(t)\,\mathrm{T}\exp\left(-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t} H_I(\tau)\,d\tau\right),$$

что и доказывает формулу Дайсона.

10. О роли граничных условий на примере струн

Теоретический аппарат, развитый нами в предыдущем разделе в основном на примере вещественного скалярного поля Клейна-Гордона, практически без изменений можно распространить и на другие модели теории поля. В этом смысле мы изучили некоторые аспекты динамики локальных полей без потери общности. Однако, в стороне остался следующий важный вопрос. По какому принципу строятся лагранжианы локальных полей? Через некоторое время мы ответим на поставленный вопрос и покажем, что как и в случае классической механики частиц, динамику локальных полей во многом определяет структура пространства-времени.

Перед тем как продолжить углубленное изучение различных аспектов локальной теории поля, поговорим немного о влиянии граничных условий на решения полевых уравнений движения на примере колебаний классических нерелятивистских струн и мембран. Вообще, полное понимание тонкостей теории релятивистских струн требует знания элементарных основ физики нерелятивистских струн. У этих струн имеются масса и натяжение. Они могут совершать поперечные и продольные колебания. В силу сказанного, в качестве полезного дополнения к лекциям по механике частиц и полей рассмотрим кратко классические уравнения движения нерелятивистских струн и мембран, а также разовьем лагранжев формализм для описания их динамики.

10.1. **Уравнение движения и граничные условия.** Изучение классических струн начнем с обсуждения малых поперечных колебаний однородной натянутой струны; направление вдоль струны называется *продольным*, а направления, ортогональные струне, называются *поперечными*. Для простоты обозначений мы рассматриваем случай, когда существует только одно поперечное направление. Обобщение на дополнительные поперечные направления очевидно.

Работая в плоскости xz, рассмотрим нерелятивистскую струну, концы которой закреплены в точках $(0{,}0)$ и $(a{,}0)$. В статической конфигурации струна натянута вдоль оси x между этими двумя точками. В процессе поперечных колебаний координата x каждой точки струны не изменяется со временем, а поперечное смещение точки задается ее координатой z. Направление вдоль оси x, очевидно, продольное, а вдоль оси z — поперечное.

Чтобы описать классическую механику однородной струны, необходимо, как мы увидим, знание двух параметров: ее *натяжения* λ и *массы* ρ*, приходящейся на единицу длины*,

$$\rho = \frac{dm}{dx}.$$

Полная масса струны в этом случае $m = \rho a$. Выведем уравнение движения такой струны в рамках лагражева формализма. Для этого, как мы хорошо знаем, необходимо найти ее функцию Лагранжа $L = T - U$.

Рассмотрим бесконечно малый отрезок струны от точки x до точки $x + dx$. Пусть в некоторый момент времени t поперечное смещение струны в точке x равно $z(t{,}x)$, а в точке $x + dx$, — равно $z(t{,}x + dx)$. Тогда кинетическая энергия этого бесконечно малого отрезка, очевидно, равна

$$dT = 1/2\, \rho \dot{z}^2\, dx.$$

Кинетическая энергия струны есть просто сумма кинетических энергий всех бесконечно малых отрезков, из которых она состоит, то есть

$$T = \frac{1}{2} \int_0^a dx\ \rho \dot{z}^2.$$

Потенциальная энергия струны возникает из той работы, которая должна быть выполнена для того, чтобы растянуть отрезки. Рассмотрим беконечно малый кусочек струны, занимающий положение от $(x,0)$ до $(x+dx,0)$, когда струна находится в равновесии. Если кусочек струны мгновенно растягивается от (x,z) до $(x+dx,z+dz)$, то изменение длины ds бесконечно малого отрезка оказывается равным

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} - dx = dx \left[\sqrt{1 + (\partial_x z)^2} - 1 \right].$$

Предположим, что колебания малы, подразумевая под этим то, что в любой момент времени $|\partial_x z| \ll 1$, в любой точке струны. Это условие гарантирует, что поперечное смещение струны мало по сравнению с длиной струны; длина струны изменяется мало, так что можно говорить о постоянном натяжении.

Имея в виду условие малости поперечных колебаний, отбрасывая члены более высокого порядка в разложении квадратного корня в ряд Тейлора, для изменения длины струны ds имеем $ds \approx dx\,(\partial_x z)^2/2$. Так как выполненная работа по растягиванию каждого бесконечно малого отрезка струны равна $\lambda\, ds$, то полная потенциальная энергия струны

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a dx\, \lambda\, (\partial_x z)^2 .$$

Значит, функция Лагранжа

$$L = T - U = \int_0^a dx\, \left[\frac{1}{2} \rho \dot{z}^2 - \frac{1}{2} \lambda\, (\partial_x z)^2 \right],$$

откуда функционал действия

$$S[z(t,x)] = \int_{t_0}^{t_1} dt\, L = \int_M d_2x\, \mathscr{L} = \int_M d_2x\, \left[\frac{1}{2} \rho \dot{z}^2 - \frac{1}{2} \lambda\, (\partial_x z)^2 \right].$$

Здесь $M = [t_0, t_1] \times [0, a]$. Как видно из действия, динамика поперечных колебаний нерелятивистской струны, по существу, являет собой динамику локального поля на M; в качестве поля, очевидно, выступает амплитуда z поперечных колебаний струны в момент времени t. В связи с этим, уравнение движения для нерелятивистской струны, казалось бы, имеет вид полевых уравнений Эйлера-Лагранжа

$$\partial_t \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_t z} + \partial_x \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_x z} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial z} = \rho \ddot{z} - \lambda \partial_x^2 z = 0.$$

Однако, следует быть осторожнее, ведь при выводе полевых уравнений Эйлера-Лагранжа на поля накладывались определенные условия на границе ∂M четырехмерного объема $M = [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^3$: помимо стандартной фиксации начальных и конечных полевых конфигураций предполагалось зануление вариации полей на пространственной бесконечности. В нашем случае, когда мы имеем дело с ограниченной струной, необходимо уделить особое внимание граничным условиям. Для того чтобы это аккуратно сделать, вернемся к первопринципам и проварьируем действие для струны:

$$\begin{aligned} \delta S[z, \delta z] &= \int_M d_2x\ \left[\rho\, \partial_t z\, \partial_t \delta z - \lambda\, \partial_x z\, \partial_x \delta z \right] = \\ &= \int_0^a dx\, \rho\, \partial_t z\, \delta z \big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} dt\, \lambda\, \partial_x z\, \delta z \big|_0^a - \int_M d_2x\, \left[\rho\, \partial_t^2 z - \lambda\, \partial_x^2 z \right] \delta z. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в полученном выражении определяется конфигурацией струны в моменты времени t_0 и t_1. Мы, как обычно, фиксируем эти конфигурации, то есть по существу полагаем $\delta z(t_0,x) = \delta z(t_1,x) = 0$. Это влечет за собой обращение в нуль первого слагаемого. Особый интерес представляет собой второе слагаемое, относящееся к движению концов струны $z(t,0)$ и $z(t,a)$:

$$-\lambda \int_{t_0}^{t_1} dt \;\; \partial_x z \, \delta z\big|_0^a = \int_{t_0}^{t_1} dt \;\; \left[-\lambda \partial_x z(t,a)\, \delta z(t,a) + \lambda \partial_x z(t,0)\, \delta z(t,0)\right].$$

Чтобы получить в качестве уравнения движения волновое уравнение, необходимо граничное условие для каждого из двух слагаемых в последнем выражении. Пусть $x_\star$ обозначает координату x концевой точки: $x_\star$ может равняться либо нулю, либо a. Выбор концевой точки означает фиксацию значения $x_\star$. Мы можем обратить каждое слагаемое в нуль, задав либо *граничные условия Дирихле*, либо *граничные условия Неймана.* Для рассматриваемой струны граничные условия Дирихле задают положения концов струны. Например, если мы прикрепим каждый конец струны к стенке, мы наложим граничные условия Дирихле

$$z(t,0) = z(t,a) = 0.$$

А если мы прикрепим невесомую петлю к каждому концу струны и позволим петлям скользить по двум стержням без трения, мы наложим граничные условия Неймана. Для рассматриваемой струны граничные условия Неймана задают значения производной $\partial_x z$ на концах струны. Так как петли невесомы и скользят по стержням без трения, то производная $\partial_x z$ должна обращаться в нуль в точках $x = 0$ и $x = a$. Если бы это было не так, то наклон струны к стержню был бы отличен от нуля, и компонента натяжения струны ускоряла бы петли в направлении оси z. Так как каждая петля невесома, их ускорение было бы бесконечно большим. Это невозможно, поэтому мы накладываем граничные условия Неймана

$$\partial_x z(t,0) = \partial_x z(t,a) = 0.$$

Такие граничные условия (условия Неймана), как мы только что поняли, применяются для струн, концевые точки которых могут свободно двигаться в поперечном направлении, то есть в направлении оси z.

Рассмотрим концевую точку $x = x_\star$ и связанное с ней слагаемое в выражении вариации действия. Если мы накладываем граничное условие Дирихле, положение выбранной конечной точки фиксируется во времени, и мы требуем, чтобы вариация $\delta z(t,x_\star)$ обращалась в нуль. Из этого следует, что выбранное слагаемое обратится в нуль. С другой стороны, если мы предполагаем, что концевая точка может свободно перемещаться, то вариация $\delta z(t,x_\star)$ ничем не ограничена. Слагаемое исчезает, если наложить условие Неймана: $\partial_x z(t,x_\star) = 0$. Граничные условия Дирихле можно переписать в такой форме, что станет явным их некоторое сходство с граничными условиями Неймана. Если концевые точки струны фиксированы, производные по времени от координат концевых точек должны обращаться в нуль:

$$\partial_t z(t,x_\star) = 0.$$

Если записать граничные условия Дирихле в этой форме, мы еще должны задать значения координат в фиксированных концевых точках.

Чтобы лучше понять физическое содержание граничных условий, рассмотрим импульс струны p_z. У импульса нет других компонент, так как мы предположили, что движение ограничено только направлением вдоль оси z. Этот импульс есть просто сумма импульсов каждого бесконечно малого отрезка вдоль струны:

$$p_z = \int_0^a dx \, \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_t z} = \int_0^a dx \, \rho \, \partial_t z.$$

Посмотрим, сохраняется ли он:

$$\frac{dp_z}{dt} = \int_0^a dx\,\rho\,\partial_t^2 z = \int_0^a dx\,\lambda\,\partial_x^2 z = \lambda\,\partial_x z\big|_0^a\,,$$

где мы использовали уравнение движения. Видно, что в случае граничных условий Неймана импульс сохраняется, но для граничных условий Дирихле импульс в общем случае не сохраняется! Действительно, когда концы струны прикреплены к стенке, эта стенка постоянно действует на струну с определенной силой. Почему это важно для теории струн? Долгое время струнные теоретики не принимали всерьез возможность граничных условий Дирихле. Казалось нефизическим, что импульс струны может перестать сохраняться. Кроме того, к чему же могли быть прикреплены концы открытой струны? Ответ таков: они прикреплены к *D-бранам* — новому типу динамических протяженных объектов. Если струна прикреплена к D-бране, то общий импульс может сохраняться: импульс, теряемый струной, поглощается D-браной. Детальный анализ поведения члена, индуцированного варьированием на пространственных границах, является решающим для осознания возможности существования D-бран в теории струн.

10.2. **Уравнение Даламбера.** Как видно из уравнения движения, свободные колебания струны описываются уравнением

$$\partial_t^2 z - v^2\partial_x^2 z = (\partial_t - v\partial_x)(\partial_t + v\partial_x)z = 0, \quad v = \sqrt{\lambda\rho^{-1}},$$

которое называется *уравнением Даламбера*.

Найдем структуру общего решения уравнения Даламбера. Для этого от переменных t и x перейдем к новым переменным $x_\pm$ согласно

$$x_\pm = x \pm vt,$$

так что

$$x = \frac{1}{2}(x_+ + x_-), \quad vt = \frac{1}{2}(x_+ - x_-).$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x_\pm} = \frac{\partial x}{\partial x_\pm}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x_\pm}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} \pm \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

и уравнение для амплитуды колебаний z:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_-\partial x_+} = 0.$$

Очевидно, что его решение имеет вид $z = z_+(x_-) + z_-(x_+)$, где $z_\pm$ — произвольные функции[1]. Таким образом,

$$z(t,x) = z_+(x - vt) + z_-(x + vt).$$

Пусть, например, $z_- = 0$, так что $z(t,x) = z_+(x - vt)$. Выясним смысл этого решения. В каждой точке плоскости $x = \mathrm{const}$ амплитуда меняется со временем; в каждый данный момент времени амплитуда различна при разных x. Очевидно, что $z(t,x)$ имеет одинаковое значение для координат x и моментов времени t, удовлетворяющих соотношениям $t - x/v = \mathrm{const}$, т.е. $x = \mathrm{const} + vt$. Это значит, что если в некоторый момент времени $t = 0$ в некоторой точке x пространства амплитуда имела определенное значение, то через промежуток времени t то же самое значение амплитуда имеет на расстоянии vt вдоль оси x от первоначального места. Мы можем сказать,

[1] Свой конкретный вид функции $z_\pm$ приобретают в зависимости граничных и начальных условий.

что все значения $z(t,x)$ распространяются в пространстве вдоль оси x со скоростью, равной скорости v. Таким образом, $z_+(x_-)$ представляет собой плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси x. Аналогично, $z_-(x_+)$ представляет собой плоскую волну, бегущую в противоположном, отрицательном, направлении оси x.

10.3. **Колебания закрепленной струны.** Перейдем к нахождению конкретных решений уравнения движения для струны. Начнем с рассмотрения свободных колебаний закрепленной струны и получим решение уравнения Даламбера при граничных условиях Дирихле: $z(t,0) = z(t,a) = 0$ и начальных условиях

$$z(t,x)|_{t=0} = u(x), \quad \partial_t z(t,x)|_{t=0} = w(x).$$

Для этого воспользуемся *методом Фурье*, то есть будем искать частные решения уравнения Даламбера в виде

$$z(t,x) = \chi(t)\psi(x).$$

Подставляя этот анзац в уравнение Даламбера, получаем

$$\psi(x)\,\partial_t^2\chi(t) - v^2\chi(t)\,\partial_x^2\psi(x) = 0,$$

или

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial_t^2\chi(t)}{\chi(t)} = \frac{\partial_x^2\psi(x)}{\psi(x)}.$$

Левая часть полученного равенства зависит только от времени t, а правая его часть — только от координаты x; понятно, что равенство возможно лишь тогда, когда общая величина отношений будет постоянной. Обозначим ее посредством $-\gamma$. Тогда из последнего уравнения получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\partial_t^2\chi(t) + v^2\gamma\chi(t) = 0, \quad \partial_x^2\psi(x) + \gamma\psi(x) = 0.$$

Чтобы получить нетривиальные решения вида $z(t,x) = \chi(t)\psi(x)$, удовлетворяющие граничным условиям Дирихле: $z(t,0) = z(t,a) = 0$, необходимо найти нетривиальные решения уравнения движения на $\psi(x)$, удовлетворяющие граничным условиям

$$\psi(x)|_{x=0} = \psi(x)|_{x=a} = 0.$$

При $\gamma < 0$ общее решение, очевидно, дается формулой

$$\psi(x) = A_1 e^{\sqrt{-\gamma}x} + A_2 e^{-\sqrt{-\gamma}x}.$$

Удовлетворяя граничным условиям, получаем

$$A_1 + A_2 = 0, \qquad A_1 e^{\sqrt{-\gamma}a} + A_2 e^{-\sqrt{-\gamma}a} = 0,$$

откуда $A_1 = 0$, $A_2 = 0$. Следовательно, решение уравнения движения на $\psi(x)$ тривиально при $\gamma < 0$. При $\gamma = 0$ его общее решение имеет вид $\psi(x) = A_1 + A_2 x$. Граничные условия показывают, что $A_1 = 0$, $A_1 + A_2 a = 0$. Отсюда находим $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ и, следовательно, решение тривиально при $\gamma = 0$. Наконец, при $\gamma > 0$ общее решение имеет вид

$$\psi(x) = A_1 \cos\sqrt{\gamma}x + A_2 \sin\sqrt{\gamma}x.$$

Удовлетворяя граничным условиям, получим

$$A_1 = 0, \quad A_1 \cos\sqrt{\gamma}a + A_2 \sin\sqrt{\gamma}a = 0.$$

Значит, нетривиальное решение возможно только при собственных значениях

$$\gamma_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Этим собственным значениям отвечают собственные функции

$$\psi_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right).$$

При $\gamma = \gamma_n$ общее решение уравнения на функцию $\chi(t)$ имеет вид

$$\chi_n(t) = \alpha_n \cos(\pi n v t/a) + \beta_n \sin(\pi n v t/a),$$

где α_n и β_n — произвольные постоянные. Таким образом, функции

$$z_n(t,x) = \left[\alpha_n \cos\left(\frac{\pi n v t}{a}\right) + \beta_n \sin\left(\frac{\pi n v t}{a}\right)\right] \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)$$

удовлетворяют уравнению Даламбера и граничным условиям Дирихле при произвольных α_n и β_n. В силу линейности и однородности уравнения Даламбера всякая конечная суперпозиция решений будет также решением. То же, на самом деле, справедливо и для ряда

$$z(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[\alpha_n \cos(\pi n v t/a) + \beta_n \sin(\pi n v t/a)\right] \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right),$$

если он сходится. Остается определить коэффициенты α_n и β_n, чтобы удовлетворить начальным условиям. Для этого продифференцируем ряд по времени:

$$\partial_t z = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\pi n v}{a} \left[-\alpha_n \sin(\pi n v t/a) + \beta_n \cos(\pi n v t/a)\right] \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right).$$

Полагая в последних уравнениях $t = 0$, в силу начальных условий получаем

$$u(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \sin\frac{\pi n x}{a}, \quad w(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\pi n v}{a} \beta_n \sin\frac{\pi n x}{a}.$$

Данные формулы представляют собой разложения функций $u(x)$ и $w(x)$ в *ряд Фурье* (см. подробнее следующий параграф) по синусам в интервале $(0, a)$. Коэффициенты разложений вычисляются по формулам

$$\alpha_n = \frac{2}{a}\int_0^a u(x)\sin\frac{\pi n x}{a}\,dx, \quad \beta_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^a w(x)\sin\frac{\pi n x}{a}\,dx;$$

последние, как известно, можно легко получить следующим образом: умножим левую и правую части разложения функции $u(x)$ в ряд Фурье на $\sin\frac{\pi n' x}{a}$ и проинтегрируем по x от $x = 0$ до $x = a$:

$$\begin{aligned}\int_0^a dx\, u(x) \sin\frac{\pi n' x}{a} &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \int_0^a dx \sin\frac{\pi n x}{a} \sin\frac{\pi n' x}{a} = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \int_0^a dx \left[\cos\frac{\pi(n'-n)x}{a} - \cos\frac{\pi(n'+n)x}{a}\right] = \\ &= \frac{a}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \left[\frac{\sin(n'-n)\xi}{n'-n} - \frac{\sin(n'+n)\xi}{n'+n}\right]\Bigg|_{\xi=0}^{\pi} = \frac{a}{2}\alpha_{n'}.\end{aligned}$$

Отсюда следует написанное выше тождество в выражении для α_n. Аналогичным образом получается другое равенство для β_n.

10.4. **Ряды Фурье.** От интеграла Фурье можно также прийти к *рядам Фурье* для периодических функций. Для начала заметим, что рассмотрение функции на конечном отрезке $[x_0,x_1]$ можно формально дополнить зеркальным отражением этой функции в точке x_1, получая уже периодическую функцию на отрезке $[x_0,x_1 + (x_1 - x_0)]$.

Тогда эту периодическую функцию можно непрерывно продолжить на всю числовую ось, так что, в итоге, достаточно будет рассмотреть эту периодическую функцию $F(x)$ на отрезке $[0,a]$, где период $a = 2(x_1 - x_0)$; ее Фурье-образ

$$f(p) = \int_{\mathbb{R}} dx\, F(x)\, e^{\mathrm{i}px} = \int_{\mathbb{R}} d(x+a)\, F(x+a)\, e^{\mathrm{i}p(x+a)} = e^{\mathrm{i}pa} \int_{\mathbb{R}} dx\, F(x)\, e^{\mathrm{i}px} = e^{\mathrm{i}pa}\, f(p).$$

Из соотношения

$$f(p) = e^{\mathrm{i}pa}\, f(p)$$

следует, что при $p \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$: $f(p) = 0$, а при $f(p) \neq 0$: $pa = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Это значит, что Фурье-образ периодической функции весьма сингулярен: он отличен от нуля в счетном числе точек в пространстве дуальной по Фурье переменной p. Покажем теперь, что это действительно так и

$$f(p) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\, \delta(pa - 2\pi n).$$

Фурье-образ за счет периодичности сводится к выражению

$$f(p) = \int_{\mathbb{R}} dx\, F(x) e^{\mathrm{i}px} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^a dx\, F(x) e^{\mathrm{i}p(x+na)} = \int_0^a dx\, F(x) e^{\mathrm{i}px} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(e^{\mathrm{i}pa}\right)^n.$$

Введем обозначение $z = e^{\mathrm{i}pa}$. Тогда сумму можно представить как

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(e^{\mathrm{i}pa}\right)^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} z^{-n} + \left(1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} z^n\right),$$

то есть в виде двух бесконечных сумм геометрических прогрессий. Для их сходимости введем бесконечно малую добавку $\epsilon \to +0$, чтобы показатель геометрической прогрессии в каждой из сумм был по модулю меньше единицы. В первом случае

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} [z(1+\epsilon)]^{-n} = [z(1+\epsilon)]^{-1} \frac{1}{1 - [z(1+\epsilon)]^{-1}} = \frac{1}{z(1+\epsilon) - 1},$$

а во втором

$$1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} [z(1-\epsilon)]^n = \frac{1}{1 - z(1-\epsilon)}.$$

Оба вклада имеют сингулярность при $z = 1$. Тогда подставляя определение $z = \cos pa + \mathrm{i}\sin pa$ и $pa = 2\pi n + x$ при $x \to 0$ получим цепочку пределов

$$\frac{1}{z(1+\epsilon) - 1} = \frac{1}{\cos pa - 1 + \mathrm{i}\sin pa + \epsilon(\cos pa + \mathrm{i}\sin pa)} =$$
$$= \frac{1}{\mathrm{i}x + \epsilon} = -\frac{\mathrm{i}}{x - \mathrm{i}\epsilon} = -\mathrm{i}\left[\mathrm{v.p.}\frac{1}{x} + \mathrm{i}\pi\, \delta(x)\right],$$

где мы использовали формулу Сохоцкого-Племеля. Аналогично

$$-\frac{1}{z(1-\epsilon) - 1} = \frac{\mathrm{i}}{x + \mathrm{i}\epsilon} = \mathrm{i}\left[\mathrm{v.p.}\frac{1}{x} - \mathrm{i}\pi\, \delta(x)\right].$$

В итоге, вклады в виде главного значения по Коши сокращаются, и остается

$$2\pi\, \delta(x) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(pa - 2\pi n),$$

так что

$$f(p) = \int_0^a dx\, F(x)\, e^{\mathrm{i}px} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(e^{\mathrm{i}pa}\right)^n = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(pa - 2\pi n) \int_0^a dx\, F(x)\, e^{2\pi \mathrm{i}\, nx/a}.$$

Обратное преобразование Фурье дает искомую функцию в виде ряда

$$F(x) = \int \frac{dp}{2\pi} f(p)\, e^{-\mathrm{i}px} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\, e^{-2\pi\mathrm{i}\, nx/a},$$

где

$$f_n = \frac{1}{a}\int_0^a dx\, F(x)\, e^{2\pi\mathrm{i}\, nx/a}.$$

В вещественном случае, когда $F = F^\star$, возникают упрощения:

$$\operatorname{Re} f_n = \frac{1}{a}\int_0^a dx\, F(x)\, \cos(2\pi nx/a), \quad \operatorname{Im} f_n = \frac{1}{a}\int_0^a dx\, F(x)\, \sin(2\pi nx/a),$$

$$F(x) = f_0 + 2\sum_{n\in\mathbb{N}} \left\{\operatorname{Re} f_n\, \cos(2\pi nx/a) + \operatorname{Im} f_n\, \sin(2\pi nx/a)\right\}.$$

10.5. **Вынужденные колебания струны.** Перейдем теперь к изучению вынужденных колебаний закрепленной струны под действием внешней силы $F(t,x)$, рассчитаной на единицу длины. Эта задача, очевидно, сводится к решению уравнения

$$\partial_t^2 z - v^2\partial_x^2 z = f(t,x), \quad f(t,x) = F(t,x)/\rho.$$

при граничных условиях Дирихле: $z(t,0) = z(t,a) = 0$ и начальных условиях

$$z(t,x)|_{t=0} = u(x), \quad \partial_t z(t,x)|_{t=0} = w(x).$$

Решение этой задачи будем искать в виде суммы

$$z(t,x) = z_0(t,x) + \tilde z(t,x),$$

где функция $\tilde z(t,x)$ — есть решение неоднородного уравнения

$$\partial_t^2 \tilde z - v^2\partial_x^2 \tilde z = f(t,x),$$

удовлетворяющего граничным условиям Дирихле

$$\tilde z(t,x)|_{x=0} = 0, \quad \tilde z(t,x)|_{x=a} = 0$$

и начальным условиям

$$\tilde z(t,x)|_{t=0} = 0, \quad \partial_t \tilde z(t,x)|_{t=0} = 0,$$

а функция $z_0(t,x)$ — есть решение однородного уравнения

$$\partial_t^2 z_0 - v^2\partial_x^2 z_0 = 0,$$

удовлетворяющего граничным условиям Дирихле

$$z_0(t,x)|_{x=0} = 0, \quad z_0(t,x)|_{x=a} = 0$$

и начальным условиям

$$z_0(t,x)|_{t=0} = u(x), \quad \partial_t z_0(t,x)|_{t=0} = w(x).$$

Решение $\tilde z(t,x)$, очевидно, представляет собой вынужденные колебания струны, то есть такие колебания, которые совершаются под действием внешней возмущающей силы, когда начальные возмущения отсутствуют. Решение же $z_0(t,x)$ представляют собой свободные колебания, то есть такие колебания, которые происходят только вследствие начальных возмущений.

Методы нахождения свободных колебаний $z_0(t,x)$ мы уже изучили ранее. Поэтому здесь остановимся на нахождении только вынужденных колебаний $\tilde z(t,x)$. Как и в случае свободных колебаний, решение $\tilde z(t,x)$ будем искать в виде ряда

$$\tilde z(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_n(t)\, \sin(\pi nx/a),$$

так что соответствующие граничные условия удовлетворяются сами собой. Подставив этот ряд в уравнение движения, получим

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left[\partial_t^2 \chi_n(t) + \omega_n^2 \chi_n(t)\right] \sin\frac{\pi n x}{a} = f(t,x),$$

где введено обозначение $\omega_n = \pi n/a$. Производя разложение функции $f(t,x)$ в интервале $(0,a)$ в ряд Фурье по синусам, находим, что

$$f(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) \sin\frac{\pi n x}{a}, \quad f_n(t) = \frac{2}{a}\int_0^a dx\, f(t,x) \sin\frac{\pi n x}{a}.$$

Отсюда получаем дифференциальные уравнения вида

$$\partial_t^2 \chi_n(t) + \omega_n^2 \chi_n(t) = f_n(t), \quad n \in \mathbb{N},$$

определяющие функции χ_n. Чтобы решение $\tilde{z}(t,x)$, определяемое выбранным в качестве анзаца рядом, удовлетворяло начальным условиям

$$\tilde{z}(t,x)|_{t=0} = 0, \quad \partial_t \tilde{z}(t,x)|_{t=0} = 0,$$

достаточно подчинить функции $\chi_n(t)$ условиям $\chi_n(0) = 0$, $\partial_t \chi_n(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Решение уравнения на $\chi_n(t)$, как известно, определяется сверткой функции Грина оператора $\hat{\Gamma} = \partial_t^2 + \omega_n^2$ с функцией $f_n(t)$; причем, как мы покажем ниже, выбор именно запаздывающей функции Грина обеспечивает выполнение нужных соотношений.

Функция Грина оператора $\hat{\Gamma} = \partial_t^2 + \omega_n^2$ определяется согласно

$$\mathcal{G}(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega_n^2 - \omega^2}.$$

Действительно, функция $\mathcal{G}(t)$, очевидно, удовлетворяет условию

$$[\partial_t^2 + \omega_n^2]\, \mathcal{G}(t - t') = \delta(t - t'),$$

которое и определяет функцию Грина оператора $\partial_t^2 + \omega_n^2$. Чтобы взять этот интеграл, используем интегральную формулу Коши. При $t \to +\infty$ фактор $e^{-\mathrm{i}\omega t}$ экспоненциально стремится к нулю в нижней комплексной полуплоскости ω и контур интегрирования можно замкнуть в нижней полуплоскости по часовой стрелке, а при $t \to -\infty$ фактор $e^{-\mathrm{i}\omega t}$ экспоненциально стремится к нулю в верхней полуплоскости переменной ω и контур интегрирования можно замкнуть в верхней полуплоскости против часовой стрелки. Если мы хотим получить решение, отличное от нуля только в будущем, т.е. запаздывающую функцию Грина, то граничные условия необходимо выбрать таким образом, чтобы оба полюса были расположены в точках $\pm\omega_n - \mathrm{i}0$. Действительно, при таком расположении полюсов при $t < 0$ внутри контура интегрирования нет ни одного полюса и согласно интегральной формуле Коши получаем функцию Грина, тождественно равную нулю в прошлом:

$$\mathcal{G}_{\mathrm{ret}}(t) = \frac{\vartheta(t)}{2\pi} 2\pi\mathrm{i} \left[\frac{e^{-\mathrm{i}\omega_n t}}{2\omega_n} - \frac{e^{\mathrm{i}\omega_n t}}{2\omega_n}\right] = \vartheta(t)\, \frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}.$$

Свертка запаздывающей функции Грина с функцией $f_n(t)$ дает решение уравнения движения при соответствующих начальных условиях:

$$\chi_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin\left[\omega_n(t - \tau)\right] d\tau.$$

Действительно, подставляя вместо функции $f_n(\tau)$ ее выражение через интеграл, получаем

$$\chi_n(t) = \frac{2}{\omega_n a} \int_0^t d\tau \int_0^a dx\, f(\tau,x) \sin\left[\omega_n(t - \tau)\right] \sin\frac{\pi n x}{a},$$

причем

$$\chi_n(0) = \frac{2}{\omega_n a} \int_0^t d\tau \int_0^a dx\;\; f(\tau,x)\, \sin\left[\omega_n(t-\tau)\right]\, \sin\frac{\pi n x}{a}\bigg|_{t\to 0} = 0,$$

$$\partial_t\chi_n(0) = \frac{2}{a} \int_0^t d\tau \int_0^a dx\;\; f(\tau,x)\, \cos\left[\omega_n(t-\tau)\right]\, \sin\frac{\pi n x}{a}\bigg|_{t\to 0} = 0.$$

Здесь мы воспользовались формулой дифференцирования определенного интеграла по параметру:

$$\frac{d}{da}\int\limits_{t_1(a)}^{t_2(a)} dt\, f(t,a) = f(t_2,a)\frac{dt_2}{da} - f(t_1,a)\frac{dt_1}{da} + \int\limits_{t_1(a)}^{t_2(a)} dt\,\frac{d}{da}f(t,a),$$

которую совсем несложно доказать. Действительно, формула Ньютона Лейбница устанавливает, что определенный интеграл от производной функции задается разницей значений этой функции на концах:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\,\frac{d}{dt}F(t) = F(t)\big|_{t_1}^{t_2} = F(t_2) - F(t_1).$$

Введение зависимости от параметра a эту формулу никак не изменит,

$$\int_{t_1(a)}^{t_2(a)} dt\,\frac{d}{dt}F(t,a) = F(t_2(a),a) - F(t_1(a),a),$$

так что дифференцирование по параметру дает

$$\frac{d}{da}\int_{t_1(a)}^{t_2(a)} dt\,\frac{d}{dt}F(t,a) = \frac{d}{da}\big\{F(t_2(a),a) - F(t_1(a),a)\big\} =$$
$$= \frac{dF(t,a)}{dt}\Big|_{t=t_2(a)}\frac{dt_2(a)}{da} - \frac{dF(t,a)}{dt}\Big|_{t=t_1(a)}\frac{dt_1(a)}{da} + \frac{d}{da}F(t,a)\Big|_{t=t_2(a)} - \frac{d}{da}F(t,a)\Big|_{t=t_1(a)}.$$

Обозначим

$$f(t,a) := \frac{d}{dt}F(t,a).$$

Тогда

$$\frac{dF(t,a)}{dt}\Big|_{t=t_2(a)}\frac{dt_2(a)}{da} - \frac{dF(t,a)}{dt}\Big|_{t=t_1(a)}\frac{dt_1(a)}{da} = f(t_2,a)\frac{dt_2}{da} - f(t_1,a)\frac{dt_1}{da}.$$

Затем

$$\frac{d}{da}F(t,a)\Big|_{t=t_2(a)} - \frac{d}{da}F(t,a)\Big|_{t=t_1(a)} = \int_{t_1(a)}^{t_2(a)} dt\,\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{da}F(t,a)\right),$$

но поскольку переменная интегрирования t и параметр a являются независимыми, порядок дифференцирования по t и a можно менять, так что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{da}F(t,a)\right) = \frac{d}{da}\left(\frac{d}{dt}F(t,a)\right) = \frac{d}{da}f(t,a).$$

В итоге, собрав все слагаемые, находим

$$\frac{d}{da}\int\limits_{t_1(a)}^{t_2(a)} dt\, f(t,a) = f(t_2,a)\frac{dt_2}{da} - f(t_1,a)\frac{dt_1}{da} + \int\limits_{t_1(a)}^{t_2(a)} dt\,\frac{d}{da}f(t,a),$$

то есть дифференцирование определенного интеграла по параметру включает в себя следующие члены: подынтегральную функцию, умноженную на производную верхнего предела по параметру, минус подынтегральную функцию, умноженную на производную нижнего предела по параметру, а также интеграл от производной подынтегральной функции по параметру.

Теперь, зная функции $\chi_n(t)$, решение задачи о вынужденных колебаниях струны можно записать в виде

$$z(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\alpha_n \cos\frac{\pi n v t}{a} + \beta_n \sin\frac{\pi n v t}{a}\right) \sin\frac{\pi n x}{a} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_n(t) \sin\frac{\pi n x}{a},$$

где

$$\alpha_n = \frac{2}{a}\int_0^a u(x)\sin\frac{\pi n x}{a}\,dx, \quad \beta_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^a w(x)\sin\frac{\pi n x}{a}\,dx.$$

В качестве примера рассмотрим колебания струны под действием однородной периодической силы $f(t,x) = f_0 \sin\Omega t$, причем, положим для простоты, что начальные смещения и начальные скорости отсутствуют. В этом случае решение выражается рядом

$$z(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_n(t) \sin\frac{\pi n x}{a},$$

где коэффициенты $\chi_n(t)$ оказываются равными

$$\chi_n(t) = \frac{2f_0}{\omega_n a}\int_0^t d\tau \int_0^a dx\, \sin\Omega\tau\, \sin\left[\omega_n(t-\tau)\right]\, \sin\frac{\pi n x}{a} =$$

$$= \frac{f_0}{\omega_n a}\int_0^t d\tau[\cos\left(\Omega\tau - \omega_n(t-\tau)\right) - \cos\left(\Omega\tau + \omega_n(t-\tau)\right)]\frac{a}{\pi n}\int_0^{\pi n} d\xi\, \sin\xi =$$

$$= \frac{f_0}{\omega_n a}\left[\frac{\sin\left((\Omega+\omega_n)\tau - \omega_n t\right)}{\Omega+\omega_n} - \frac{\sin\left((\Omega-\omega_n)\tau + \omega_n t\right)}{\Omega-\omega_n}\right]\Bigg|_{\tau=0}^{t} \frac{a}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right],$$

$$\chi_n(t) = \frac{2f_0}{\omega_n \pi n}\left[1-(-1)^n\right]\frac{\Omega\sin\omega_n t - \omega_n\sin\Omega t}{\Omega^2 - \omega_n^2}.$$

В приведенных выкладках предполагалось, что ни одна резонансная частота $\omega_n = \pi n v/a$ не совпадает с частотой внешней силы Ω. Отсюда, для функции $z(t,x)$ имеем

$$z(t,x) = \frac{4f_0 v}{a}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\Omega\sin\omega_{2n-1}t - \omega_{2n-1}\sin\Omega t}{\omega_{2n-1}^2(\Omega^2 - \omega_{2n-1}^2)}\, \sin\frac{\omega_{2n-1}x}{v}.$$

В том случае, когда частота внешней силы совпадает с одной из резонансных частот $\omega_{2n'-1}$, функцию $\chi_n(t)$ можно легко определить: раскрывая неопределенность $\frac{0}{0}$ по правилу Лопиталя, находим

$$\chi_{2n'-1}(t) = \frac{2f_0 v}{\omega_{2n'-1}^2 a}\left[\omega_{2n'-1}^{-1}\sin\omega_{2n'-1}t - t\cos\omega_{2n'-1}t\right].$$

Отсюда смещение $z(t,x)$ в резонансном случае выражается формулой

$$z(t,x) = \frac{2f_0 v}{\omega_{2n'-1}^2 a}\left[\omega_{2n'-1}^{-1}\sin\omega_{2n'-1}t - t\cos\omega_{2n'-1}t\right] +$$

$$+ \frac{4f_0 v}{a}\sum_{n\neq n'} \frac{\omega_{2n'-1}\sin\omega_{2n-1}t - \omega_{2n-1}\sin\omega_{2n'-1}t}{\omega_{2n-1}^2(\omega_{2n'-1}^2 - \omega_{2n-1}^2)}\, \sin\frac{\omega_{2n-1}x}{v}.$$

Заметим, что в реальных физических системах решение, содержащее слагаемое с линейно нарастающей во времени амплитудой колебаний, существовать не может из-за наличия диссипации энергии.

10.6. **Струна с подвижными концами.** Рассмотрим теперь уравнение движения струны, описывающее ее вынужденные колебания под действием внешней силы:

$$\partial_t^2 z - v^2 \partial_x^2 z = f(t,x)$$

в том случае, когда ее концы не закреплены, а совершают движение по закону

$$z(t,x)|_{x=0} = \varkappa_1(t), \quad z(t,x)|_{x=a} = \varkappa_2(t)$$

при начальных условиях $z(t,x)|_{t=0} = u(x)$, $\partial_t z(t,x)|_{t=0} = w(x)$. К решению этой задачи уже нельзя применять рассмотренный в предыдущих параграфах метод Фурье, так как граничные условия неоднородны. Но эта задача легко сводится к задаче с однородными граничными условиями следующим образом. Введем вспомогательную функцию

$$\tilde{z}(t,x) = \varkappa_1(t) + \big[\varkappa_2(t) - \varkappa_1(t)\big]\,\frac{x}{a}.$$

Ясно, что $\tilde{z}(t,x)|_{x=0} = \varkappa_1(t)$, $\tilde{z}(t,x)|_{x=a} = \varkappa_2(t)$. Решение задачи ищем в виде

$$z(t,x) = z_0(t,x) + \tilde{z}(t,x),$$

где $z_0(t,x)$ — новая неизвестная функция. В силу граничных и начальных условий, функция $z_0(t,x)$ должна удовлетворять граничным условиям

$$z_0(t,x)|_{x=0} = 0, \quad z_0(t,x)|_{x=a} = 0$$

и начальным условиям

$$z_0(t,x)|_{t=0} = u(x) - \varkappa_1(0) - \big[\varkappa_2(0) - \varkappa_1(0)\big]\,\frac{x}{a} = u_1(x),$$

$$\partial_t z_0(t,x)|_{t=0} = w(x) - \dot{\varkappa}_1(0) - \big[\dot{\varkappa}_2(0) - \dot{\varkappa}_1(0)\big]\,\frac{x}{a} = w_1(x).$$

Отсюда находим $\partial_t^2 z_0 - v^2\partial_x^2 z_0 + \partial_t^2 \tilde{z} - v^2 \partial_x^2 \tilde{z} = f(t,x)$. Учитывая определение функции $\tilde{z}(t,x)$, получаем уравнение для искомой функции $z_0(t,x)$:

$$\partial_t^2 z_0 - v^2 \partial_x^2 z_0 = f_1(t,x),$$

где введено обозначение

$$f_1(t,x) = f(t,x) - \ddot{\varkappa}_1(0) - \big[\ddot{\varkappa}_2(0) - \ddot{\varkappa}_1(0)\big]\,\frac{x}{a}.$$

В результате мы пришли к задаче с однородными граничными условиями, метод решения которой нам уже известен.

10.7. **Колебания прямоугольной мембраны.** В заключение раздела рассмотрим колебания прямоугольной мембраны. *Мембраной* называют свободно изгибающуюся натянутую пленку. Задача о свободных колебаниях мембраны сводится к решению двумерного волнового уравнения

$$\partial_t^2 z - v^2 \Delta z = 0, \quad \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$$

при граничных условиях

$$z(t,x,y)|_{x=0} = 0, \quad z(t,x,y)|_{x=a_x} = 0, \quad z(t,x,y)|_{y=0} = 0, \quad z(t,x,y)|_{y=a_y} = 0.$$

и начальных условиях

$$z(t,x,y)|_{t=0} = u(x,y), \quad \partial_t z(t,x,y)|_{t=0} = w(x,y),$$

где $z(t,x,y)$ — величина смещения мембраны от положения равновесия. Частные решения будем искать в виде

$$z(t,x,y) = \chi(t)\,\psi(x,y).$$

Они должны удовлетворять граничным условиям. Соответствующая подстановка дает

$$\frac{\partial_t^2 \chi(t)}{v^2 \chi(t)} = \frac{\partial_x^2 \psi(x,y) + \partial_y^2 \psi(x,y)}{\psi(x,y)}.$$

Очевидно, что это равенство возможно только в случае, когда обе его части равны константе. Обозначим ее через $-k^2$ и, принимая во внимание граничные условия, находим

$$\ddot{\chi}(t) + k^2 v^2 \chi(t) = 0, \quad \Delta\psi(x,y) + k^2 \psi(x,y) = 0,$$

причем

$$\psi(x,y)|_{x=0} = 0, \quad \psi(x,y)|_{x=a_x} = 0, \quad \psi(x,y)|_{y=0} = 0, \quad \psi(x,y)|_{y=a_y} = 0.$$

Граничную задачу будем решать методом Фурье, полагая $\psi(x,y) = \psi_1(x)\,\psi_2(y)$, получаем

$$-\frac{\partial_x^2 \psi_1(x)}{\psi_1(x)} = k^2 + \frac{\partial_y^2 \psi_2(y)}{\psi_2(y)}.$$

Отсюда находим два уравнения

$$\partial_x^2 \psi_1(x) + k_x^2 \psi_1(x) = 0, \quad \partial_y^2 \psi_2(y) + k_y^2 \psi_2(y) = 0, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2.$$

Общее решение этих уравнений имеет вид

$$\psi_1(x) = A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x, \quad \psi_2(y) = B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y.$$

Несложно получить граничные условия на функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(y)$:

$$\psi_1(x)|_{x=0} = 0, \quad \psi_1(x)|_{x=a_x} = 0, \quad \psi_2(y)|_{y=0} = 0, \quad \psi_2(y)|_{y=a_y} = 0.$$

Отсюда ясно, что $A_1 = B_1 = 0$. Если мы положим $A_2 = B_2 = 1$, то окажется,

$$\psi_1(x) = \sin k_x x, \quad \psi_2(y) = \sin k_y y, \quad \sin k_x a_x = 0, \quad \sin k_y a_y = 0.$$

Из последнего выражения следует, что k_x, k_y имеют счетное множество значений: $k_n = \pi n/a_x$, $k_m = \pi m/a_y$, $n, m \in \mathbb{N}$. Тогда из равенства $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ получаем значения постоянной k^2: $k_{nm}^2 = k_n^2 + k_m^2$. Таким образом, собственным числам k_n и k_m соответствуют собственные функции граничной задачи:

$$\psi_{nm}(x,y) = \sin k_n x\,\sin k_m y.$$

Обратимся теперь к уравнению движения. Его общее решение имеет вид

$$\chi_{nm}(t) = \alpha_{nm} \cos v k_{nm} t + \beta_{nm} \sin v k_{nm} t.$$

Значит, частные решения уравнения, согласованные с граничными условиями, имеют вид

$$z_{nm}(t,x,y) = [\alpha_{nm} \cos v k_{nm} t + \beta_{nm} \sin v k_{nm} t] \sin k_n x\,\sin k_m y.$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям, составим ряд

$$z(t,x,y) = \sum_{n,m \in \mathbb{N}} [\alpha_{nm} \cos v k_{nm} t + \beta_{nm} \sin v k_{nm} t] \sin k_n x\,\sin k_m y.$$

Для выполнения этих начальных условий необходимо

$$z(t,x,y)|_{t=0} = u(x,y) = \sum_{n,m \in \mathbb{N}} \alpha_{nm} \sin k_n x\,\sin k_m y,$$

$$\partial_t z(t,x,y)|_{t=0} = w(x,y) = \sum_{n,m\in\mathbb{N}} vk_{nm}\beta_{nm} \sin k_n x \, \sin k_m y.$$

Чтобы определить коэффициенты α_{nm} и β_{nm}, умножим обе части найденных уравнений на $\sin k_{n'}x \, \sin k_{m'}y$ и проинтегрируем по x от 0 до a_x и по y от 0 до a_y. Принимая во внимание, что

$$\int_0^{a_x}\int_0^{a_y} dx\, dy \, \sin k_n x \, \sin k_m y \sin k_{n'}x \, \sin k_{m'}y = \frac{a_x a_y}{4}\delta_{nn'}\delta_{mm'},$$

получаем

$$\alpha_{nm} = \frac{4}{a_x a_y}\int_0^{a_x}\int_0^{a_y} dx\, dy\, u(x,y) \, \sin k_n x \, \sin k_m y,$$

$$\beta_{nm} = \frac{4}{v a_x a_y k_{nm}}\int_0^{a_x}\int_0^{a_y} dx\, dy\, w(x,y) \, \sin k_n x \, \sin k_m y.$$

Решение $z(t,x,y)$ можно записать также в виде

$$z(t,x,y) = \sum_{n,m\in\mathbb{N}} \sigma_{nm} \sin\left(vk_{nm}t + \varphi_{nm}\right) \sin k_n x \, \sin k_m y,$$

где $\sigma_{nm} = \sqrt{\alpha_{nm}^2 + \beta_{nm}^2}$, $\varphi_{nm} = \arctan \alpha_{nm}/\beta_{nm}$. Из вышенаписанного очевидно, что частота собственного колебания определяется следующей формулой: $\omega_{nm} = vk_{nm}$. Заметим, что при решении двумерной задачи о собственных колебаниях прямоугольной мембраны, все вычисления естественным образом производились в декартовой (т.е. прямоугольной) системе координат. В случае необходимости рассмотрения задачи о собственных колебаниях круглой мембраны, соответствующие вычисления следует производить в полярной системе координат. Решение последней задачи сопровождается введением *специальных функций Бесселя*.

11. Группа и алгебра Пуанкаре

Как уже упоминалось ранее, динамику локальных полей во многом определяет структура пространства-времени. В основе современных представлений о пространстве и времени лежит специальная теория относительности, согласно которой структура пространства-времени (без учета гравитации) задается следующими фундаментальными постулатами:

• Пространство и время однородны.

• Пространство изотропно.

• Существует максимальная скорость распространения любого взаимодействия, совпадающая со скоростью света c в пустоте. В любой инерциальной системе отсчета скорость света имеет одно и то же значение c.

Эти постулаты означают, что пространство-время M представляет собой четырехмерное *пространство Минковского* $\mathbb{R}^{1+3}$, снабженное *инвариантной* полуримановой лоренцевой метрикой или *интервалом*:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

где *метрика Минковского* имеет вид $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Координаты x^μ трактуются как момент времени $x^0 = ct$ и пространственные координаты в трехмерном евклидовом пространстве $x^i = (x,y,z)$ события, рассматриваемого относительно некоторой инерциальной системы отсчета.

Инвариантность интервала означает следующее. Пусть заданы два бесконечно близких события и пусть в некоторой инерциальной системе отсчета они имеют координаты x^μ и $x^\mu + dx^\mu$ соответственно, а в любой другой инерциальной системе они имеют координаты x'^μ и $x'^\mu + dx'^\mu$ соответственно. Тогда форма квадрата интервала ds^2 не зависит от того, координаты какой из этих двух инерциальных систем отсчета были использованы, то есть

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = (dx'^0)^2 - (dx'^1)^2 - (dx'^2)^2 - (dx'^3)^2,$$

или

$$\eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

Наша ближайшая цель состоит в нахождении разнообразных следствий, вытекающих из условия инвариантности формы интервала.

11.1. Группа Пуанкаре. Установим связь между четырехмерными лоренцевскими координатами x^μ и $x'^\mu = \varphi^\mu(x)$, согласованную с условием инвариантности квадратичной формы интервала:

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi^\nu}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \qquad \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi^\nu}{\partial x^\beta}.$$

Так как левая часть последней формулы не зависит от координат, то и правая также не должна от них зависеть, значит

$$\partial \varphi^\mu / \partial x^\alpha = \Lambda^\mu_{\ \alpha} = \mathrm{const}, \qquad \varphi^\mu(x) = \Lambda^\mu_{\ \alpha} x^\alpha + a^\mu,$$

где $a^\mu = \mathrm{const}$ — произвольный постоянный 4-вектор. Таким образом, наиболее общее преобразование координат, сохраняющее форму интервала, то есть $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_{\ \alpha} \Lambda^\nu_{\ \beta}$, имеет вид $x'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \alpha} x^\alpha + a^\mu$. Преобразования такого вида называют *преобразованиями Лоренца*. Легко видеть, что произвольное преобразование Лоренца однозначно задается матрицей $\Lambda^\mu_{\ \alpha}$ и 4-вектором a^μ. Будем записывать такое преобразование согласно (Λ, a).

Пусть матрица Λ (наряду с 4-вектором a) осуществляет некоторое преобразование Лоренца. Тогда соотношение инвариантности формы интервала: $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}$ можно записать в виде $\eta = \Lambda^{\mathrm{T}}\eta\Lambda$. Его часто называют *базовым соотношением* на Λ-матрицы. В математике это соотношение известно как условие на *изометрии метрики Минковского*. Рассмотрим два последовательных преобразования Лоренца (Λ_1, a_1) и (Λ_2, a_2), то есть $x' = \Lambda_1 x + a_1$ и $x'' = \Lambda_2 x' + a_2$. Отсюда

$$x'' = \Lambda_2\Lambda_1 x + \Lambda_2 a_1 + a_2 = \Lambda x + a,$$

где $\Lambda = \Lambda_2\Lambda_1$, $a = \Lambda_2 a_1 + a_2$. Ясно, что $a = \mathrm{const}$. Покажем, что если матрицы Λ_1 и Λ_2 удовлетворяют базовому соотношению на изометрии метрики, то и их произведение $\Lambda = \Lambda_2\Lambda_1$ удовлетворяет условию на изометрии:

$$(\Lambda_2\Lambda_1)^{\mathrm{T}}\eta(\Lambda_2\Lambda_1) = \Lambda_1^{\mathrm{T}}(\Lambda_2^{\mathrm{T}}\eta\Lambda_2)\Lambda_1 = \eta.$$

Значит, преобразование $x \mapsto x' \mapsto x''$ есть некоторое преобразование Лоренца, то есть результат последовательного выполнения двух преобразований Лоренца является некоторым преобразованием Лоренца. Будем записывать это обстоятельство как

$$(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2).$$

Покажем, что множество всех преобразований Лоренца образуют группу, где в качестве группового произведения используется последовательное выполнение двух таких преобразований. Поскольку каждое преобразование Лоренца однозначно задается матрицей Λ и $a = \mathrm{const}$ и наоборот, то необходимо показать, что множество величин (Λ,a) с законом умножения $(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$ образует группу. Определим единичный элемент как $(1, 0)$. Тогда

$$(\Lambda, a)(1, 0) = (\Lambda 1, \Lambda 0 + a) = (\Lambda, a), \quad (1, 0)(\Lambda, a) = (1\Lambda, 1a + 0) = (\Lambda, a).$$

То есть $(1, 0)$ действительно единичный элемент. Обратный элемент к элементу (Λ, a) определяется как $(\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$:

$$(\Lambda, a)(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) = (\Lambda\Lambda^{-1}, -\Lambda\Lambda^{-1}a + a) = (1, 0),$$

$$(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)(\Lambda, a) = (\Lambda^{-1}\Lambda, \Lambda^{-1}a - \Lambda^{-1}a) = (1, 0).$$

То есть $(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ действительно обратный элемент. Строго говоря, здесь хорошо бы проверить, что если матрица Λ удовлетворяет условию на изометрии метрики, то соответствующая ей обратная матрица Λ^{-1} всегда существует и тоже удовлетворяет условию на изометрии. Действительно, последнего имеем следующее условие на матрицы Λ: $\det\Lambda = \pm 1$. Поэтому для любой матрицы, осуществляющей преобразование Лоренца, обратная матрица всегда существует. Кроме того,

$$\eta = \Lambda^{\mathrm{T}}\eta\Lambda, \quad \eta = (\Lambda^{\mathrm{T}})^{-1}\Lambda^{\mathrm{T}}\eta\Lambda\Lambda^{-1} = (\Lambda^{-1})^{\mathrm{T}}\eta\Lambda^{-1}.$$

Значит, матрица Λ^{-1} отвечает некоторому преобразованию Лоренца. Таким образом, все условия, определяющие группу, выполнены. Данная группа называется *неоднородной группой Лоренца* или *группой Пуанкаре*. Мы будем обозначать ее посредством $\mathbb{IO}$(3,1).

Группа Пуанкаре имеет две очевидные подгруппы. Одну из них формируют элементы вида $(1, a)$, осуществляющие преобразования $x \mapsto x' = x + a$. Операция умножения в ней:

$$(1, a_1)(1, a_2) = (1, a_1 + a_2),$$

единичный элемент — это $(1, 0)$, а элемент, обратный к $(1, a)$, есть $(1, -a)$. Эта подгруппа называется *группой трансляций*. Другая подгруппа формируется элементами

$(\Lambda, 0)$ и называется *группой Лоренца* $\mathbb{O}(3,1)$: групповое умножение в ней реализованно произведением матриц.

Посмотрим подробнее на структуру группы Лоренца, а именно, вспомним соотношение $\det\Lambda = \pm 1$ и введем непрерывную кривую на группе $\mathbb{O}(3,1)$ как множество матриц $\Lambda(s)$, удовлетворяющих базовому соотношению на изометрии и непрерывно зависящих от параметра s. Допустим, что существуют такие s_1 и s_2, что $\det\Lambda(s_1) = +1$, а $\det\Lambda(s_2) = -1$. Так как $\det\Lambda(s)$ является непрерывной функцией Λ, а значит, и непрерывной функцией s, то существует такое значение параметра s_0, лежащее между s_2 и s_1, что $\det\Lambda(s_0) = 0$. Но по условию, для любой матрицы $\Lambda(s)$ выполнено соотношение $\det\Lambda = \pm 1$. Таким образом, мы приходим к противоречию. Значит, такой непрерывной кривой с указанными свойствами не существует. Следовательно группа Лоренца разбивается на две компоненты связности $\mathbb{SO}_{\pm}(3,1)$. Если $\Lambda \in \mathbb{SO}_{+}(3,1)$, то $\det\Lambda > 0$, а если матрица $\Lambda \in \mathbb{SO}_{-}(3,1)$, то $\det\Lambda < 0$. При этом не существует непрерывной кривой, соединяющей матрицы из разных компонент связности. Заметим, что единичный элемент группы Лоренца (единичная матрица) лежит в $\mathbb{SO}_{+}(3,1)$. Очевидно, что если матрицы Λ_1 и Λ_2 принадлежат $\mathbb{SO}_{+}(3,1)$, то их произведение также принадлежит $\mathbb{SO}_{+}(3,1)$ и если $\Lambda \in \mathbb{SO}_{+}(3,1)$, то и $\Lambda^{-1} \in \mathbb{SO}_{+}(3,1)$. Это означает, что подмножество $\mathbb{SO}_{+}(3,1)$ образует группу, являющуюся подгруппой группы Лоренца. Множество $\mathbb{SO}_{-}(3,1)$ подгруппы не образует, так как не содержит в себе единичного элемента.

Запишем теперь соотношение на изометрии метрики Минковского покомпонентно: $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}$ и положим значения $\alpha = \beta = 0$. Тогда

$$1 = \eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{0} = (\Lambda^{0}{}_{0})^2 - \delta_{ij}\Lambda^{i}{}_{0}\Lambda^{j}{}_{0},$$

или

$$(\Lambda^{0}{}_{0})^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3}(\Lambda^{i}{}_{0})^2.$$

Отсюда следует, что $(\Lambda^{0}{}_{0})^2 \geqslant 1$, то есть либо $\Lambda^{0}{}_{0} > 0$, либо $\Lambda^{0}{}_{0} < 0$. Значит, возможны два случая

$$\operatorname{sgn}\Lambda^{0}{}_{0} = +1, \qquad \operatorname{sgn}\Lambda^{0}{}_{0} = -1.$$

Поскольку функция знака $\operatorname{sgn}\Lambda^{0}{}_{0}$ меняется скачком, то не существует непрерывной функции $\Lambda^{0}{}_{0}$, связывающей множество матриц, где $\Lambda^{0}{}_{0} > 0$ и множество матриц, где $\Lambda^{0}{}_{0} < 0$. Следовательно, каждое из множеств $\mathbb{SO}_{\pm}(3,1)$ разбивается на две компоненты связности[1], обозначаемые обычно через $\mathbb{SO}^{\uparrow}_{\pm}(3,1)$ и $\mathbb{SO}^{\downarrow}_{\pm}(3,1)$. Таким образом группа Лоренца имеет четыре компоненты связности

$$\begin{aligned}
\Lambda \in \mathbb{SO}^{\uparrow}_{+}(3,1): &\quad \det\Lambda = +1, \quad \operatorname{sgn}\Lambda^{0}{}_{0} = +1,\\
\Lambda \in \mathbb{SO}^{\downarrow}_{+}(3,1): &\quad \det\Lambda = +1, \quad \operatorname{sgn}\Lambda^{0}{}_{0} = -1,\\
\Lambda \in \mathbb{SO}^{\uparrow}_{-}(3,1): &\quad \det\Lambda = -1, \quad \operatorname{sgn}\Lambda^{0}{}_{0} = +1,\\
\Lambda \in \mathbb{SO}^{\downarrow}_{-}(3,1): &\quad \det\Lambda = -1, \quad \operatorname{sgn}\Lambda^{0}{}_{0} = -1.
\end{aligned}$$

Покажем, что множество $\mathbb{SO}^{\uparrow}_{+}(3,1)$ образует группу. Очевидно, что единичная матрица $1 \in \mathbb{SO}^{\uparrow}_{+}(3,1)$. Можно доказать, что если $(\Lambda_1)^{0}{}_{0} > 0$ и $(\Lambda_2)^{0}{}_{0} > 0$, то $(\Lambda_1\Lambda_2)^{0}{}_{0} > 0$,

[1]Условие $\operatorname{sgn}\Lambda^{0}{}_{0} = +1$ имеет инвариантный смысл: соответствующее преобразование Лоренца сохраняет направленность времениподобных векторов в будущее или прошлое. По этой причине преобразования Лоренца с $\operatorname{sgn}\Lambda^{0}{}_{0} = +1$ называют *ортохронными*, а преобразования со знаком $\operatorname{sgn}\Lambda^{0}{}_{0} = -1$ — *антиортохронными*.

а также если $\Lambda^0{}_0 > 0$, то $(\Lambda^{-1})^0{}_0 > 0$. Докажем только второе утверждение, первое доказывается аналогично. Имеем

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta(\Lambda^{-1})^\beta{}_\gamma = \eta_{\mu\gamma}\Lambda^\mu{}_\alpha = \eta_{\alpha\beta}(\Lambda^{-1})^\beta{}_\gamma, \qquad (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\gamma = \eta_{\mu\gamma}\eta^{\alpha\sigma}\Lambda^\mu{}_\alpha.$$

Отсюда получаем $(\Lambda^{-1})^0{}_0 = \eta_{\mu 0}\eta^{\alpha 0}\Lambda^\mu{}_\alpha = \Lambda^0{}_0 > 0$. Значит, множество матриц $\mathbb{SO}^\uparrow_+(3{,}1)$ действительно является группой. Ее называют *собственной ортохронной группой Лоренца*, а группу $\mathbb{O}(3{,}1)$ в этом контексте — *расширенной группой Лоренца*. Введем теперь следующие диагональные матрицы

$$\Lambda_{\mathbb{P}} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{\mathbb{T}} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что для них выполнено базовое соотношение на изометрии, то есть эти матрицы осуществляют некоторые преобразования Лоренца. Конкретно, преобразование $\Lambda_{\mathbb{P}}$ производит пространственную инверсию: $t' = t$, $\boldsymbol{r}' = -\boldsymbol{r}$, а преобразование $\Lambda_{\mathbb{T}}$ производит временную инверсию: $t' = -t$, $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}$.

Можно показать, что если матрица $\Lambda' \in \mathbb{SO}^\uparrow_-(3{,}1)$, то $\Lambda' = \Lambda_{\mathbb{P}}\Lambda$, где матрица $\Lambda \in \mathbb{SO}^\uparrow_+(3{,}1)$, а если $\Lambda' \in \mathbb{SO}^\downarrow_-(3{,}1)$, то $\Lambda' = \Lambda_{\mathbb{T}}\Lambda$, где $\Lambda \in \mathbb{SO}^\uparrow_+(3{,}1)$. Также несложно показать, что если $\Lambda' \in \mathbb{SO}^\downarrow_+(3{,}1)$, то $\Lambda' = \Lambda_{\mathbb{P}}\Lambda_{\mathbb{T}}\Lambda$, где $\Lambda \in \mathbb{SO}^\uparrow_+(3{,}1)$. Проделайте это в качестве упражнения. Следовательно произвольное преобразование Лоренца при $a^\mu = 0$ — это либо собственное ортохронное преобразование Лоренца, либо собственное ортохронное преобразование, дополненное дискретными преобразованиями пространственной и временной инверсий.

Поскольку группа Лоренца состоит из четырех компонент связности, то и группа Пуанкаре состоит также из четырех компонент связности: $\mathbb{ISO}^\uparrow_+(3{,}1)$, $\mathbb{ISO}^\downarrow_+(3{,}1)$, $\mathbb{ISO}^\uparrow_-(3{,}1)$, $\mathbb{ISO}^\downarrow_-(3{,}1)$, причем только множество $\mathbb{ISO}^\uparrow_+(3{,}1)$ содержит в себе единичный элемент, а потому является подгруппой группы Пуанкаре.

Перейдем для простоты в двумерное пространство Минковского. Нас интересуют непрерывные изометрии, включающие в себя тождественное преобразование и пространственно-временные трансляции, для которых матрица преобразования равна единичной, и следовательно, детерминант положительный $\det\Lambda = 1$, а $\Lambda^0{}_0 \geqslant 1$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad ad - bc = 1, \qquad a \geqslant 1.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} abc = a^2 d - a = c^2 d, \\ a^2 - c^2 = 1, \\ b^2 - d^2 = -1. \end{cases}$$

Отсюда $d = a$, $b = c$. Значит,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad a^2 - b^2 = 1.$$

Это однопараметрическое решение с параметром *быстроты* ϑ можно записать, например, в виде: $a = \cosh\vartheta$, $b = -\sinh\vartheta$, так что

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\vartheta & -\sinh\vartheta \\ -\sinh\vartheta & \cosh\vartheta \end{pmatrix}.$$

В координатах это преобразование изометрии запишется как

$$t' = \cosh\vartheta(t - \tanh\vartheta\, x), \quad x' = \cosh\vartheta(x - \tanh\vartheta\, t).$$

Вводя стандартные обозначения $v := \tanh\vartheta$, $\gamma := \cosh\vartheta = 1/\sqrt{1-v^2}$, в четырехмерном пространстве-времени получаем

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Данное преобразование носит название *лоренцева буста*. Другой пример непрерывных изометрий метрики Минковского дают пространственные вращения (ортогональные преобразования трехмерного евклидова пространства). Действительно, рассмотрим матрицу

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^i{}_j \end{pmatrix}.$$

Подставляя данное уравнение в базовое соотношение на изометрии, получим условие на R-матрицу: $R^{\mathrm{T}}R = 1$. То есть матрицы R осуществляют ортогональные преобразования пространственных координат — вращения трехмерного евклидова пространства.

В заключение параграфа найдем инфинитезимальную форму преобразований Лоренца. Для этого запишем матрицу Λ в виде $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu$, где матричные элементы $\omega^\mu{}_\nu$ являются инфинитезимальными параметрами. Матрице $\Lambda^\mu{}_\nu$ отвечают следующее преобразование Лоренца:

$$x'^\mu = x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu.$$

Выясним, какие условия на $\omega^\mu{}_\nu$ накладывает базовое соотношение на изометрии. Имеем

$$(1+\omega)^{\mathrm{T}}\eta(1+\omega) = \eta.$$

В первом порядке по ω получим $\omega^{\mathrm{T}}\eta + \eta\omega = 0$. Отсюда

$$\eta_{\mu\alpha}\omega^\alpha{}_\nu = -(\omega^{\mathrm{T}})_\mu{}^\alpha\eta_{\alpha\nu} = -\omega^\alpha{}_\mu\eta_{\alpha\nu}, \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu},$$

то есть матрица ω является антисимметричной. Преобразование Лоренца с матрицей $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ принадлежит группе $\mathbb{SO}^\uparrow_+(3{,}1)$. Действительно,

$$\Lambda^0{}_0 = 1 + \omega^0{}_0 > 0, \quad \det(1+\omega) = 1 + \operatorname{tr}\omega = 1 + \eta^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} = 1.$$

Здесь учтено, что $\omega^0{}_0$ — инфинитезимальный параметр. Очевидно, что вещественная антисимметричная 4×4 матрица имеет в окрестности единичного элемента шесть независимых вещественных параметров. Поэтому группа Лоренца является шести параметрической группой Ли: лоренцевы бусты по трем независимым направлениям + вращения относительно трех независимых осей, а группа Пуанкаре — десяти параметрической группой Ли: лоренцевы бусты по трем независимым направлениям + вращения относительно трех независимых осей + пространственно-временные трансляции.

Задача 11.1. Показать, что матрица лоренцева буста вдоль оси x может быть представлена в виде матричной экспоненты $\Lambda_x(\vartheta) = \exp(\vartheta\Gamma_x)$, где ϑ — параметр быстроты, а Γ_x — генератор буста вдоль оси x. Найти в явном виде матрицу Γ_x. Записать матрицы бустов и генераторы бустов вдоль осей y и z.

11.2. **Генераторы связной группы Ли.** Можно показать, что *собственная группа Пуанкаре* $\mathbb{ISO}_+^\uparrow(3{,}1)$ связна[1], так что всякое собственное ортохронное преобразование Лоренца, дополненное пространстверно-временными трансляциями, можно получить из тождественного преобразования непрерывным изменением параметров. В этом контексте полезно напомнить некоторые сведения о *генераторах связных групп Ли*. Групповой закон умножения в связной группе Ли G принимает вид

$$g(\theta_1)\, g(\theta_2) = g(f(\theta_1,\theta_2)).$$

Здесь $f^\alpha(\theta_1,\theta_2)$ — функция от групповых параметров θ_1 и θ_2. Если принять значение параметров $\theta^\alpha = 0$ как координаты единичного элемента группы: $g(0) = e$, то, очевидно, должно быть выполнено условие

$$f^\alpha(\theta,0) = f^\alpha(0,\theta) = \theta^\alpha.$$

Рассмотрим некоторое *представление* связной группы Ли G. Напомним, что представлением F группы G на векторном *пространстве представления* V называется отображение, которое каждому элементу $g \in G$ ставит в соответствие обратимый линейный оператор $F_g : V \to V$, действующий в V. Это отображение должно быть согласовано с групповыми операциями, так что единице группы G ставится в соответствие единичный оператор, а также выполняются равенства

$$F_{g_1} F_{g_2} = F_{g_1 g_2}, \qquad F_{g^{-1}} = F_g^{-1}.$$

То есть, по факту, представление группы — это гомоморфизм F группы в группу невырожденных линейных преобразований (*автоморфизмов*) пространства V. Операторы F_g некоторого представления связной группы Ли (по крайней мере, в некоторой окрестности единичного элемента) можно разложить в ряд

$$F_{g(\theta)} = 1 + \mathrm{i}\theta^\alpha \Gamma_\alpha + \frac{1}{2}\,\theta^\beta\theta^\gamma\, \Gamma_{\beta\gamma} + \ldots, \qquad \Gamma_{\beta\gamma} = \Gamma_{\gamma\beta},$$

где $\Gamma_\alpha = -\mathrm{i}\,\partial F_{g(\theta)}/\partial\theta^\alpha$ называют *генераторами группы* в этом представлении[2]. Поскольку операторы F_g являются операторами представления группы G, то

$$F_{g(\theta_1)} F_{g(\theta_2)} = F_{g(\theta_1) g(\theta_2)} = F_{g(f(\theta_1,\theta_2))}.$$

---

[1]Одно из возможных доказательств связности собственной группы Пуанкаре $\mathbb{ISO}_+^\uparrow(3{,}1)$ основано на *полярном разложении* собственной ортохронной группы Лоренца. Действительно, любая матрица Λ из группы Лоренца единственным образом может быть представлена в виде $\Lambda = u \exp\omega$, где матрицы u и ω имеют следующую блочную структуру

$$u = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь R — ортогональная матрица третьего порядка, а λ — строка из трех элементов. Такое представление матрицы из группы Лоренца называется ее полярным разложением и, как известно, определяется формулами $\omega = 1/2 \ln(\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda)$, $u = \Lambda \exp(-\omega)$. Заметим, что существование определенной таким образом вещественной матрицы ω гарантируется положительной определенностью матрицы $\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda$. Можно доказать, что построенное таким образом биективное соответствие $\mathbb{O}(3{,}1) \to \mathbb{O}(1,\mathbb{R}) \times \mathbb{O}(3,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$ является диффеоморфизмом гладких многообразий. Поскольку ортогональные группы $\mathbb{O}(1,\mathbb{R})$ и $\mathbb{O}(3,\mathbb{R})$ имеют по две компоненты связности, то получается, что группа Лоренца имеет ровно четыре компоненты связности. Далее, несложно видеть, что собственная ортохронная группа Лоренца является шестимерным гладким связным многообразием, так что собственная ортохронная группа Лоренца (так же, как и собственная группа Пуанкаре $\mathbb{ISO}_+^\uparrow(3{,}1)$) является связной группой Ли.

[2]Наличие мнимой единицы в члене первого порядка разложения оператора представления в ряд обеспечивает эрмитовость генераторов группы в случае, если операторы представления являются унитарными, как это обычно и бывает в квантовой теории поля.

Поймем, как это условие будет выглядеть после разложения по степеням параметров θ_1^α и θ_2^α. Во втором порядке по θ_1, θ_2 выражение для $f^\alpha(\theta_1,\theta_2)$ должно иметь вид

$$f^\alpha(\theta_1,\theta_2) = \theta_1^\alpha + \theta_2^\alpha + \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial\theta_1^\beta \partial\theta_2^\gamma}\theta_1^\beta\theta_2^\gamma + \dots = \theta_1^\alpha + \theta_2^\alpha + f^\alpha_{\ \beta\gamma}\theta_1^\beta\theta_2^\gamma + \dots$$

В результате

$$\left(1 + \mathrm{i}\theta_1^\alpha\Gamma_\alpha + \frac{1}{2}\,\theta_1^\beta\theta_1^\gamma\,\Gamma_{\beta\gamma} + \dots\right)\cdot\left(1 + \mathrm{i}\theta_2^\alpha\Gamma_\alpha + \frac{1}{2}\,\theta_2^\beta\theta_2^\gamma\,\Gamma_{\beta\gamma} + \dots\right) =$$

$$= 1 + \mathrm{i}(\theta_1^\alpha + \theta_2^\alpha + f^\alpha_{\ \beta\gamma}\theta_1^\beta\theta_2^\gamma + \dots)\Gamma_\alpha + \frac{1}{2}(\theta_1^\beta + \theta_2^\beta + \dots)(\theta_1^\gamma + \theta_2^\gamma + \dots)\Gamma_{\beta\gamma} + \dots$$

Члены порядка 1, θ_1, θ_2, θ_1^2 и θ_2^2 в правой и левой частях полученного уравнения автоматически совпадают, а благодаря существованию членов, пропорциональных $\theta_1\theta_2$, возникает нетривиальное условие

$$\Gamma_{\beta\gamma} = -\Gamma_\beta\Gamma_\gamma - \mathrm{i}f^\alpha_{\ \beta\gamma}\Gamma_\alpha.$$

Из этого соотношения следует, что если известна структура группы, т.е. функция $f(\theta_1,\theta_2)$, и тем самым заданы ее квадратичные коэффициенты $f^\alpha_{\ \beta\gamma}$, то в $F_{g(\theta)}$, используя генераторы, присутствующие в слагаемых первого порядка, можно вычислять слагаемые второго порядка. Кроме того, поскольку $\Gamma_{\beta\gamma} = \Gamma_{\gamma\beta}$, то с необходимостью должно быть справедливо следующее уравнение

$$[\Gamma_\beta,\Gamma_\gamma] = \mathrm{i}\mathfrak{c}^\alpha_{\ \beta\gamma}\,\Gamma_\alpha,$$

где $\mathfrak{c}^\alpha_{\ \beta\gamma} = -f^\alpha_{\ \beta\gamma} + f^\alpha_{\ \gamma\beta}$ — так называемые *структурные константы группы*. Отсюда видно, что структурные постоянные группы не зависят от представления, что является весьма важным и полезным утверждением. Такой набор коммутационных соотношений для генераторов определяет представление *алгебры Ли* группы G; сами генераторы, по своему геометрическому смыслу, составляют базис в соответствующей алгебре Ли.

Несложно понять, что коммутационные соотношения в (представлении) алгебре Ли являются единственным условием, гарантирующим, что процесс рекурентного восстановления следующих членов разложения по предыдущим может быть продолжен: из бесконечной последовательности соотношений типа $\Gamma_{\beta\gamma} = -\Gamma_\beta\Gamma_\gamma - \mathrm{i}f^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma_\alpha$ можно получить весь ряд $F_{g(\theta)}$, если известны члены первого порядка — генераторы группы. Это не обязательно означает, что операторы $F_{g(\theta)}$ однозначно определяются для любых θ, если известны генераторы Γ_α. Однако $F_{g(\theta)}$ действительно однозначно определяются по крайней мере в малой окрестности единичного элемента. Последнее утверждение станет совсем очевидным, если установить явную связь между матричными группами и алгебрами Ли. Данную процедуру проделаем в несколько шагов. Во-первых, вычислим произведение двух элементов группы Ли $g_1 = e^{\Gamma_1}$ и $g_2 = e^{\Gamma_2}$ с точностью до членов, квадратичных по Γ. Учитывая, что матрицы Γ_1 и Γ_2 в общем случае не коммутируют, имеем

$$g_1g_2 = e^{\Gamma_1}e^{\Gamma_2} = \left(1 + \Gamma_1 + \frac{1}{2}\Gamma_1^2 + \mathcal{O}(\Gamma^3)\right)\left(1 + \Gamma_2 + \frac{1}{2}\Gamma_2^2 + \mathcal{O}(\Gamma^3)\right) =$$

$$= 1 + (\Gamma_1 + \Gamma_2) + \Gamma_1\Gamma_2 + \frac{1}{2}\Gamma_1^2 + \frac{1}{2}\Gamma_2^2 + \mathcal{O}(\Gamma^3) = \exp\big(\Gamma_1 + \Gamma_2 + [\Gamma_1,\Gamma_2]/2\big) + \mathcal{O}(\Gamma^3).$$

Во-вторых, докажем, что для произвольных матричных операторов A и B имеет место тождество

$$e^ABe^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]] + \dots$$

Для этого рассмотрим вспомогательную функцию $f(\lambda) := e^{\lambda A}Be^{-\lambda A}$. Разлагая ее в ряд Тейлора, получаем

$$f(\lambda) = f(0) + f'(0)\lambda + \frac{1}{2}f''(0)\lambda^2 + \frac{1}{6}f'''(0)\lambda^3 + \dots$$

Поскольку при этом

$$f'(\lambda) = Ae^{\lambda A}Be^{-\lambda A} - e^{\lambda A}Be^{-\lambda A}A = e^{\lambda A}[A,B]e^{-\lambda A},\ f''(\lambda) = e^{\lambda A}[A,[A,B]]e^{-\lambda A},$$

и так далее, то имеем $f(0) = B$, $f'(0) = [A,B]$, $f''(0) = [A,[A,B]], \dots$, что и требовалось доказать.

Наконец, докажем важное утверждение: если матрицы Γ являются элементами некоторой алгебры Ли, то при малых Γ выражение $\exp(\Gamma)$ взаимно однозначно отображается на некоторую окрестность единичного элемента некоторой группы Ли G. Фактически нам необходимо доказать, что произведение двух произвольных элементов вида $\exp(\Gamma)$, где Γ является элементом алгебры Ли, вновь может быть записано в таком же виде. Для доказательства этого утверждения рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(\lambda) = \exp(\lambda A)\exp(\lambda B),$$

где A и B — некоторые элементы алгебры Ли. Тогда можно получить, что

$$\frac{dg}{d\lambda} = Ae^{\lambda A}e^{\lambda B} + e^{\lambda A}Be^{\lambda B} = \left(A + e^{\lambda A}Be^{-\lambda A}\right)e^{\lambda A}e^{\lambda B} =$$
$$= \left(A + B + \lambda[A,B] + \frac{1}{2}\lambda^2[A,[A,B]] + \dots\right)e^{\lambda A}e^{\lambda B} := \mu g,$$

где матрица $\mu(\lambda)$, очевидно, является элементом алгебры Ли. Будем искать решение уравнения $g' = \mu(\lambda)g(\lambda)$ в виде

$$g(\lambda) = \exp(a(\lambda)), \quad a(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}a_n\lambda^n.$$

С помощью тождества

$$\frac{dg}{d\lambda}g^{-1} + g\frac{dg^{-1}}{d\lambda} = 0,$$

дифференциальное уравнение может быть переписано как

$$\mu(\lambda) = -g\frac{d}{d\lambda}g^{-1} = a' + \frac{1}{2!}[a,a'] + \frac{1}{3!}[a,[a,a']] + \dots$$

откуда находим, что

$$a_1 = A + B, \quad a_2 = [A,B], \quad a_3 + \frac{1}{2}[a_1,a_2] = [A,[A,B]], \ \dots$$

Таким образом, найдена цепочка рекуррентных уравнений, из которой можно определить все коэффициенты a_n. Эти коэффициенты, с очевидностью, являются элементами алгебры Ли. При $\lambda = 1$ в выражении

$$a(\lambda) = \lambda(A + B) + \frac{1}{2}\lambda^2[A,B] + \dots$$

получаем тот же результат, что был получен явными вычислениями на первом шаге. Далее, поскольку алгебра Ли является векторным пространством,

$$a(1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}a_n$$

также принадлежит алгебре Ли. Операция умножения $e^A e^B = g(1) = e^{a(1)}$ не выводит нас за пределы множества элементов вида e^A. Это означает, что такое множество действительно является группой Ли.

Задача 11.2. Найти алгебру Лоренца и показать, что последняя (над комплексным полем) может быть представлена как прямая сумма двух алгебр

$$so(3{,}1) \cong su(2) \oplus su(2).$$

К каким физическим следствиям может привести этот факт?

11.3. **Алгебра Пуанкаре.** Найдем теперь алгебру Ли группы Пуанкаре. Для этого можно поступить так, как предсписывает нам процедура, описанная в предыдущем параграфе. Однако, мы поступим немного иначе и рассмотрим эту процедуру в нескольких частных случаях. Тем самым мы получим все необходимые коммутационные соотношения в алгебре Ли группы Пуанкаре.

Будем рассматривать унитарные представления группы Пуанкаре (хотя сейчас условие унитарности не является очень важным). Пусть $F_{\Lambda,a}$ — оператор такого представления. Тогда

$$F_{\Lambda_1,a_1} F_{\Lambda_2,a_2} = F_{(\Lambda_1,a_1)(\Lambda_2,a_2)} = F_{\Lambda_1\Lambda_2,\Lambda_1 a_2 + a_1}.$$

Заметим, что $(1,a)(\Lambda,0) = (\Lambda,a)$. Поэтому $F_{\Lambda,a} = F_{(1,a)(\Lambda,0)}$, то есть

$$F_{\Lambda,a} = F_{1,a} F_{\Lambda,0} := F_a F_\Lambda.$$

Отсюда

$$F_{a_1} F_{\Lambda_1} F_{a_2} F_{\Lambda_2} = F_{a_1+\Lambda_1 a_2} F_{\Lambda_1\Lambda_2}.$$

Оператор F_a является оператором представления подгруппы элементов вида $(1,a)$ группы Пуанкаре, то есть пространственно-временных трансляций: $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$. Учитывая связь представлений группы Ли с представлениями ее алгебры Ли, запишем

$$F_a = 1 + \mathrm{i} a_\mu P^\mu + \cdots = \exp(\mathrm{i} a_\mu P^\mu), \quad a \to 0,$$

Здесь P^μ — *генератор пространственно-временных трансляций*. Аналогично оператор F_Λ является оператором представления подгруппы элементов вида $(\Lambda,0)$ группы Пуанкаре, то есть оператором представления группы Лоренца: $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$. В инфинитезимальном виде $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu$, где $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$. Поэтому

$$F_\Lambda = 1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} + \cdots = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right), \quad \omega \to 0,$$

причем *генератор лоренцевских вращений* $S^{\mu\nu}$, очевидно, является антисимметричным, т.е. $S^{\mu\nu} = -S^{\nu\mu}$. Таким образом, произвольное унитарное представление группы Пуанкаре дается оператором

$$F_{\Lambda,a} = \exp(\mathrm{i} a^\mu P_\mu) \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right).$$

Положим $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 1$, что соответствует инфинитезимальным групповым параметрам $\omega_1^{\mu\nu} = \omega_2^{\mu\nu} = 0$. Тогда $F_{a_1} F_{a_2} = F_{a_1+a_2}$, $\exp(\mathrm{i} a_1^\mu P_\mu)\exp(\mathrm{i} a_2^\mu P_\mu) = \exp(\mathrm{i}(a_1^\mu + a_2^\mu) P_\mu)$. Для инфинитезимальных параметров трансляций во втором порядке имеем

$$1 + \mathrm{i}(a_1^\mu + a_2^\mu) P_\mu - a_1^\mu a_2^\nu P_\mu P_\nu - \frac{1}{2} a_1^\mu a_1^\nu P_\mu P_\nu - \frac{1}{2} a_2^\mu a_2^\nu P_\mu P_\nu =$$
$$= 1 + \mathrm{i}(a_1^\mu + a_2^\mu) P_\mu - \frac{1}{2} a_1^\mu a_1^\nu P_\mu P_\nu - \frac{1}{2} a_2^\mu a_2^\nu P_\mu P_\nu - \frac{1}{2}(a_1^\mu a_2^\nu + a_2^\mu a_1^\nu) P_\mu P_\nu,$$

откуда

$$P_\mu P_\nu = \frac{1}{2}\left(P_\mu P_\nu + P_\nu P_\mu\right), \qquad [P_\mu, P_\nu] = 0.$$

Теперь положим, что $a_1 = 0$, $\Lambda_2 = \Lambda_1^{-1}$, $a_2 = a$, $\Lambda_1 = \Lambda$. Тогда $F_\Lambda F_a F_{\Lambda^{-1}} = F_{\Lambda a} F_{\Lambda\Lambda^{-1}}$, то есть

$$F_\Lambda F_a F_\Lambda^{-1} = F_{\Lambda a},$$

или

$$F_\Lambda \exp(\mathrm{i} a^\mu P_\mu) F_\Lambda^{-1} = \exp(\mathrm{i} a^\mu F_\Lambda P_\mu F_\Lambda^{-1}) = \exp(\mathrm{i} a^\mu \Lambda^\nu{}_\mu P_\nu).$$

Отсюда

$$P'_\mu := F_\Lambda P_\mu F_\Lambda^{-1} = \Lambda^\nu{}_\mu P_\nu,$$

то есть преобразование $P'_\mu = F_\Lambda P_\mu F_\Lambda^{-1}$ индуцирует преобразование генератора трансляций как ковариантного вектора относительно преобразований Лоренца. В инфинитезимальном виде эту формулу можно записать как

$$\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta}\right) P_\mu \left(1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta}\right) = P_\mu + \omega^\nu{}_\mu P_\nu,$$

или

$$P^\mu + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}[S^{\alpha\beta}, P^\mu] = P^\mu + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}(\eta^{\mu\beta} P^\alpha - \eta^{\mu\alpha} P^\beta),$$

откуда

$$[P^\mu, S^{\alpha\beta}] = \mathrm{i}(\eta^{\mu\beta} P^\alpha - \eta^{\mu\alpha} P^\beta).$$

Наконец положим параметры трансляции $a_1 = a_2 = 0$. Тогда $F_{\Lambda_1} F_{\Lambda_2} = F_{\Lambda_1\Lambda_2}$. Значит, верно следующее тождество:

$$F_{\Lambda_1} F_{\Lambda_2} F_{\Lambda_1^{-1}} = F_{\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_1^{-1}} = F_{\Lambda_1} F_{\Lambda_2} F_{\Lambda_1}^{-1} = F_{\Lambda_1} e^{\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_2^{\mu\nu} S_{\mu\nu}} F_{\Lambda_1}^{-1} = e^{\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_2^{\mu\nu} F_{\Lambda_1} S_{\mu\nu} F_{\Lambda_1}^{-1}}.$$

Распишем $(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_1^{-1})^\lambda{}_\sigma = \delta^\lambda_\sigma + \tilde{\omega}^\lambda{}_\sigma$:

$$(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_1^{-1})^\lambda{}_\sigma = \delta^\lambda_\sigma + \Lambda_1{}^\lambda{}_\mu \omega_2{}^\mu{}_\tau (\Lambda_1^{-1})^\tau{}_\sigma = \delta^\lambda_\sigma + \Lambda_1{}^\lambda{}_\mu \omega_2^{\mu\nu}\, \eta_{\nu\tau}\eta_{\sigma\rho}\Lambda_1{}^\rho{}_\kappa \eta^{\kappa\tau} =$$
$$= \delta^\lambda_\sigma + \frac{1}{2}\omega_2^{\mu\nu}(\Lambda_1{}^\lambda{}_\mu\, \eta_{\sigma\rho}\Lambda_1{}^\rho{}_\nu - \Lambda_1{}^\lambda{}_\nu\, \eta_{\sigma\rho}\Lambda_1{}^\rho{}_\mu).$$

Следовательно

$$\tilde{\omega}^\lambda{}_\sigma = \frac{1}{2}\omega_2^{\mu\nu}(\Lambda_1{}^\lambda{}_\mu\, \eta_{\sigma\rho}\Lambda_1{}^\rho{}_\nu - \Lambda_1{}^\lambda{}_\nu\, \eta_{\sigma\rho}\Lambda_1{}^\rho{}_\mu),$$

то есть

$$F_{\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_1^{-1}} = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\tilde{\omega}^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}\right) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_2^{\mu\nu}\Lambda_1{}^\alpha{}_\mu \Lambda_1{}^\beta{}_\nu S_{\alpha\beta}\right).$$

Таким образом,

$$S'_{\mu\nu} := F_\Lambda S_{\mu\nu} F_\Lambda^{-1} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu S_{\alpha\beta},$$

то есть преобразование $S'_{\mu\nu} = F_\Lambda S_{\mu\nu} F_\Lambda^{-1}$ индуцирует преобразование генератора лоренцевских вращений как ковариантного тензора второго ранга относительно преобразований Лоренца. В инфинитезимальном виде

$$\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}\right) S_{\mu\nu} \left(1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}\right) = (\delta^\alpha_\mu + \omega^\alpha{}_\mu)(\delta^\beta_\nu + \omega^\beta{}_\nu) S_{\alpha\beta},$$

или

$$S_{\mu\nu} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{\alpha\beta}[S_{\alpha\beta}, S_{\mu\nu}] = S_{\mu\nu} + \omega^\alpha{}_\mu S_{\alpha\nu} + \omega^\beta{}_\nu S_{\mu\beta} = S_{\mu\nu} + \omega^{\alpha\beta}\eta_{\beta\mu} S_{\alpha\nu} + \omega^{\beta\alpha}\eta_{\alpha\mu} S_{\mu\beta},$$

то есть

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{\alpha\beta}[S_{\alpha\beta}, S_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}(\eta_{\beta\mu}S_{\alpha\nu} + \eta_{\beta\nu}S_{\mu\alpha} - \eta_{\alpha\mu}S_{\beta\nu} - \eta_{\alpha\nu}S_{\mu\beta}),$$

откуда

$$[S_{\alpha\beta}, S_{\mu\nu}] = \mathrm{i}(\eta_{\alpha\mu}S_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu}S_{\mu\beta} - \eta_{\beta\mu}S_{\alpha\nu} - \eta_{\beta\nu}S_{\mu\alpha}).$$

Таким образом мы построили алгебру Ли группы Пуанкаре: нашли все коммутационные соотношения между генераторами трансляций и генераторами лоренцевских вращений. Они даются соотношениями

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \qquad [P_\mu, S_{\alpha\beta}] = \mathrm{i}(\eta_{\mu\beta}P_\alpha - \eta_{\mu\alpha}P_\beta),$$

$$[S_{\alpha\beta}, S_{\mu\nu}] = \mathrm{i}(\eta_{\alpha\mu}S_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu}S_{\mu\beta} - \eta_{\beta\mu}S_{\alpha\nu} - \eta_{\beta\nu}S_{\mu\alpha}).$$

В квантовой механике особую роль играют сохраняющиеся операторы, т.е. операторы, коммутирующие с гамильтонианом $H = P_0$. Несложно понять, что таковыми является *вектор импульса* $\boldsymbol{P}^i = -P_i$, а также *вектор спинового момента* с компонентами $\boldsymbol{s}^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{0ijk}S_{jk}$ и, конечно, энергия P_0. Остальные генераторы образуют т.н. *вектор буста* с компонентами $\boldsymbol{\mathcal{K}}^i = -S_{0i}$. Последние не соответствуют сохраняющейся величине, поэтому мы не будем использовать собственные значения $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ для обозначения физических состояний. В трехмерных обозначениях, коммутационные соотношения могуть быть записаны в виде

$$[\boldsymbol{s}^i, \boldsymbol{s}^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{0ijk}\boldsymbol{s}^k, \quad [\boldsymbol{s}^i, \boldsymbol{\mathcal{K}}^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{0ijk}\boldsymbol{\mathcal{K}}^k,$$

$$[\boldsymbol{\mathcal{K}}^i, \boldsymbol{\mathcal{K}}^j] = -\mathrm{i}\varepsilon^{0ijk}\boldsymbol{s}^k, \quad [\boldsymbol{s}^i, \boldsymbol{P}^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{0ijk}\boldsymbol{P}^k,$$

$$[\boldsymbol{\mathcal{K}}^i, \boldsymbol{P}^j] = \mathrm{i}H\,\delta^{ij}, \quad [\boldsymbol{s}^i, H] = [\boldsymbol{P}^i, H] = [H, H] = 0, \quad [\boldsymbol{\mathcal{K}}^i, H] = \mathrm{i}\boldsymbol{P}^i.$$

Также полезно знать вид оператора F_Λ унитарного представления группы Лоренца в терминах $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}$. Для этого необходимо понять, как связаны параметры $\omega_{\mu\nu}$ с углами вращения и параметрами бустов. Начнем с пространственных вращений. Как мы уже знаем, в этом случае преобразование вращения сводится к ортогональному преобразованию трехмерного евклидова пространства $x'^i = R^i_{\ j}x^j$. В инфинитезимальном виде: $x'^i = x^i + \omega^i_{\ j}x^j$. С другой стороны, очевидно, что при бесконечно малом повороте $x'^i = x^i + \varepsilon^{0ijk}\phi^j x^k$. Значит, параметры вращений ω_{ij} связаны с углами ϕ^i следующим образом:

$$\omega_{ij} = \varepsilon^{0ijk}\phi^k, \quad \phi^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{0ijk}\,\omega_{jk}.$$

Что касается лоренцевых бустов, то при инфинитезимальных преобразованиях (т.е. при $\boldsymbol{v} \to 0$) отличными от нуля компонентами матрицы $\omega^\mu_{\ \nu}$ будут компоненты типа $\omega^0_{\ i} = -v^i$. Таким образом, $\omega^{0i} = -\omega^{i0} = v^i$. Значит, оператор F_Λ примет вид

$$F_\Lambda = \exp\left(-\mathrm{i}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\mathcal{K}} - \mathrm{i}\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{s}\right).$$

11.4. **Пространственная инверсия и обращение стрелы времени.** Как мы уже знаем, любое преобразование Лоренца при $a^\mu = 0$ является либо собственным ортохронным, либо собственным ортохронным преобразованием, помноженным на матрицы $\Lambda_{\mathbb{P}}$ или $\Lambda_{\mathbb{T}}$, или $\Lambda_{\mathbb{P}}\Lambda_{\mathbb{T}}$. Имея в виду фундаментальный закон умножения группы Пуанкаре, определим следующие операторы:

$$\mathbb{P} = F_{\Lambda_{\mathbb{P}},0} := F_{\Lambda_{\mathbb{P}}}, \qquad \mathbb{T} = F_{\Lambda_{\mathbb{T}},0} := F_{\Lambda_{\mathbb{T}}}.$$

Из этой формулы для произвольного собственного ортохронного преобразования Лоренца Λ и трансляции a имеем

$$\mathbb{P}F_{\Lambda,a}\mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}F_{\Lambda\Lambda_{\mathbb{P}}^{-1},a} = F_{\Lambda_{\mathbb{P}}\Lambda\Lambda_{\mathbb{P}}^{-1},\Lambda_{\mathbb{P}}a},$$

$$\mathbb{T}F_{\Lambda,a}\mathbb{T}^{-1} = \mathbb{T}F_{\Lambda\Lambda_{\mathbb{T}}^{-1},a} = F_{\Lambda_{\mathbb{T}}\Lambda\Lambda_{\mathbb{T}}^{-1},\Lambda_{\mathbb{T}}a}.$$

Применим данные соотношения к инфинитезимальным преобразованиям Лоренца: ${\Lambda^{\mu}}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + {\omega^{\mu}}_{\nu}$, где $\omega_{\mu\nu}$ и a^{μ} — бесконечно малые групповые параметры. Используя разложение

$$F_{\Lambda,a} = 1 + \mathrm{i}a_{\mu}P^{\mu} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} + \ldots,$$

найдем трансформационные свойства генераторов группы Пуанкаре относительно дискретных преобразований $\mathbb{P}$ и $\mathbb{T}$:

$$\mathbb{P}\left(1 + \mathrm{i}a_{\mu}P^{\mu} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} + \ldots\right)\mathbb{P}^{-1} = 1 + \mathrm{i}a_{\mu}(\Lambda_{\mathbb{P}})^{\mu}_{\alpha}P^{\alpha} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(\Lambda_{\mathbb{P}})^{\mu}_{\alpha}(\Lambda_{\mathbb{P}})^{\nu}_{\beta}S^{\alpha\beta} + \ldots,$$

$$\mathbb{T}\left(1 + \mathrm{i}a_{\mu}P^{\mu} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} + \ldots\right)\mathbb{T}^{-1} = 1 + \mathrm{i}a_{\mu}(\Lambda_{\mathbb{T}})^{\mu}_{\alpha}P^{\alpha} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(\Lambda_{\mathbb{T}})^{\mu}_{\alpha}(\Lambda_{\mathbb{T}})^{\nu}_{\beta}S^{\alpha\beta} + \ldots$$

Приравнивая коэффициенты при $\omega_{\mu\nu}$ и a_{μ} в полученных уравнениях, находим

$$\mathbb{P}\,\mathrm{i}P^{\mu}\mathbb{P}^{-1} = \mathrm{i}(\Lambda_{\mathbb{P}})^{\mu}_{\nu}P^{\nu}, \qquad \mathbb{T}\,\mathrm{i}P^{\mu}\mathbb{T}^{-1} = \mathrm{i}(\Lambda_{\mathbb{T}})^{\mu}_{\nu}P^{\nu},$$

$$\mathbb{P}\,\mathrm{i}S^{\mu\nu}\mathbb{P}^{-1} = \mathrm{i}(\Lambda_{\mathbb{P}})^{\mu}_{\alpha}(\Lambda_{\mathbb{P}})^{\nu}_{\beta}S^{\alpha\beta}, \qquad \mathbb{T}\,\mathrm{i}S^{\mu\nu}\mathbb{T}^{-1} = \mathrm{i}(\Lambda_{\mathbb{T}})^{\mu}_{\alpha}(\Lambda_{\mathbb{T}})^{\nu}_{\beta}S^{\alpha\beta}.$$

Они очень напоминают соответствующие законы преобразования генераторов группы Пуанкаре относительно непрерывных преобразований Лоренца, за исключением того, что в обеих частях уравнений мы не сократили комплексные единицы. Для того, чтобы от них избавиться, необходимо понять, являются ли операторы $\mathbb{P}$ и $\mathbb{T}$ *линейными и унитарными* или *антилинейными и антиунитарными*, ведь согласно *теореме Вигнера о представлении симметрии*, любое преобразование симметрии можно представить на гильбертовом пространстве физических состояний операторами, которые являются либо линейными и унитарными, либо антилинейными и антиунитарными.

Полагая в последних выражениях $\mu = 0$, получаем: $\mathbb{P}\,\mathrm{i}H\mathbb{P}^{-1} = \mathrm{i}H$, $\mathbb{T}\,\mathrm{i}H\mathbb{T}^{-1} = -\mathrm{i}H$, где $H = P_0$ — гамильтониан. Отсюда видно, что оператор $\mathbb{P}$ является линейным унитарным оператором, коммутирующим с гамильтонианом, а $\mathbb{T}$ — антилинейным и антиунитарным. Действительно, если бы оператор $\mathbb{P}$ был антиунитарным и антилинейным, то он бы антикоммутировал с комплексной единицей, то есть $\mathbb{P}H\mathbb{P}^{-1} = -H$, что означало бы существование состояния $\mathbb{P}^{-1}|\Psi\rangle$ с энергией $-E < 0$ для любого состояния $|\Psi\rangle$ с энергией $E > 0$. И поскольку состояний с отрицательной энергией, то есть с энергией, меньшей энергии вакуума, не существует, то $\mathbb{P}$ является линейным и унитарным оператором. Проводя аналогичные рассуждения, приходим к тому, что оператор $\mathbb{T}$ — антилинейный и антиунитарный оператор.

Соотношения дискретных преобразований генераторов группы Пуанкаре удобно переписать в трехмерных обозначениях:

$$\mathbb{P}\boldsymbol{s}\mathbb{P}^{-1} = +\boldsymbol{s}, \qquad \mathbb{P}\boldsymbol{\mathcal{K}}\mathbb{P}^{-1} = -\boldsymbol{\mathcal{K}}, \qquad \mathbb{P}\boldsymbol{P}\mathbb{P}^{-1} = -\boldsymbol{P},$$

$$\mathbb{T}\boldsymbol{s}\mathbb{T}^{-1} = -\boldsymbol{s}, \qquad \mathbb{T}\boldsymbol{\mathcal{K}}\mathbb{T}^{-1} = +\boldsymbol{\mathcal{K}}, \qquad \mathbb{T}\boldsymbol{P}\mathbb{T}^{-1} = -\boldsymbol{P}.$$

11.5. **Сужение Инену-Вигнера.** Интересно сравнить алгебру Пуанкаре с алгеброй Ли группы симметрии ньютоновской механики — *группы Галилея.* Ее можно вывести, воспользовавшись преобразованиями группы Галилея и следуя затем той же самой процедуре, с помощью которой нами была получена алгебра Пуанкаре. Однако, поскольку у нас уже есть релятивистские коммутационные соотношения, значительно проще получить галилеевскую алгебру как нерелятивистский предел алгебры Пуанкаре. Такой способ называют *сужением Инену-Вигнера.*

Для системы частиц с характерной массой m и скоростью v операторы 3-импульса и спинового момента оказываются порядка $P \sim mv$, $s \sim 1$. Оператор энергии $H = M+W$, где M — полная масса, а W — сумма кинетического и потенциального членов, имеющие порядок $M \sim m$, $W \sim mv^2$. Учитывая, что $\mathcal{K} \sim 1/v$, получаем

$$[\boldsymbol{s}^i, \boldsymbol{s}^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{0ijk}\boldsymbol{s}^k, \quad [\boldsymbol{s}^i, \boldsymbol{\mathcal{K}}^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{0ijk}\boldsymbol{\mathcal{K}}^k, \quad [\boldsymbol{\mathcal{K}}^i, \boldsymbol{\mathcal{K}}^j] = 0, \quad [\boldsymbol{s}^i, \boldsymbol{P}^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{0ijk}\boldsymbol{P}^k,$$

$$[\boldsymbol{\mathcal{K}}^i, \boldsymbol{P}^j] = \mathrm{i}M\,\delta^{ij}, \quad [\boldsymbol{s}_i, W] = [\boldsymbol{P}_i, W] = 0, \quad [\boldsymbol{\mathcal{K}}_i, W] = -\mathrm{i}\boldsymbol{P}_i,$$

$$[\boldsymbol{s}_i, M] = [\boldsymbol{P}_i, M] = [\boldsymbol{\mathcal{K}}_i, M] = [W, M] = 0.$$

Заметим, что результат произведения операторов трансляций координат $\boldsymbol{r} \mapsto \boldsymbol{r} + \boldsymbol{a}$ и лоренцева буста $\boldsymbol{r} \mapsto \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}t$ должен представлять собой преобразование вида $\boldsymbol{r} \mapsto \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}t + \boldsymbol{a}$, что, однако, неверно для действия этих операторов на гильбертовом пространстве состояний:

$$\exp\{-\mathrm{i}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\mathcal{K}}\}\exp\{-\mathrm{i}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{P}\} = \exp\{-\mathrm{i}M\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}/2\}\exp\{-\mathrm{i}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\mathcal{K}} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{P})\}.$$

где мы воспользовались *тождеством Бейкера-Кемпбела-Хаусдорфа*

$$\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B + [A,B]/2 + \dots).$$

Появление фазового множителя $\exp\{-\mathrm{i}M\boldsymbol{a}\boldsymbol{v}/2\}$ показывает, что данное представление является *проективным*, с *правилами суперотбора*, запрещающими суперпозицию квантовых состояний с различными массами. В этом отношении математика группы Пуанкаре проще математики группы Галилея. Однако, эту ситуацию можно исправить, если формально расширить группу Галилея, введя в ее алгебру Ли еще один коммутирующий со всеми остальными генератор, собственные значения которого равны массам различных состояний. В этом случае физические состояния образуют обычное, а не проективное представление расширенной группы симметрии. При таком переопределении группы Галилея уже нет необходимости в правилах суперотбора для масс.

11.6. **Проективные представления.** Как уже указывалось выше, группа симметрий G может быть представлена на физических состояниях проективно, то есть элементы g_1, g_2 и т.д. некоторой группы симметрии G могут быть представлены на физическом гильбертовом пространстве унитарными операторами F_{g_1}, F_{g_2} и т.д., удовлетворяющими правилу композиции

$$F_{g_1}F_{g_2} = e^{\mathrm{i}\phi(g_1,g_2)}F_{g_1g_2}$$

с действительной фазой ϕ. Основным требованием, которому должна удовлетворять фаза ϕ, является условие ассоциативности: $F_{g_3}(F_{g_2}F_{g_1}) = (F_{g_3}F_{g_2})F_{g_1}$, означающее

$$\phi(g_2,g_1) + \phi(g_3,g_2g_1) = \phi(g_3,g_2) + \phi(g_3g_2,g_1).$$

Хотя любая фаза вида

$$\phi(g_1,g_2) = \alpha(g_1g_2) - \alpha(g_1) - \alpha(g_2)$$

автоматически удовлетворяет нужному уравнению, проективное представление с такой фазой эквивалентно обычному представлению, что можно легко увидеть, совершив замену $F_g \mapsto F'_g := e^{\mathrm{i}\alpha(g)}F_g$. Любой набор функций $\phi(g_1,g_2)$ удовлетворяющий требованию ассоциативности операторов представления и отличающихся друг от друга на произвольную функцию $\delta\phi(g_1,g_2)$ вида $\alpha(g_1g_2) - \alpha(g_1) - \alpha(g_2)$, называется *два-коциклом.* Коцикл, содержащий функцию $\phi = 0$, является *тривиальным* *коциклом.* Как несложно видеть, он состоит из функций вида $\alpha(g_1 g_2) - \alpha(g_1) - \alpha(g_2)$, которые можно легко устранить переопределением оператора F_g. Нас же интересует, допускает ли группа симметрии какие-либо нетривиальные два-коциклы, то есть может ли она иметь на гильбертовом пространстве *существенно проективное представление*, такое, что фазу $\phi(g_1,g_2)$ нельзя устранить переопределением оператора представления.

Для ответа на поставленный вопрос полезно понять, как нетривиальная фаза ϕ из определения оператора проективного представления изменяет коммутационные соотношения для генераторов. Очевидно, что $\phi(g,e) = \phi(e,g) = 0$. Для инфинитезимальных преобразований фаза также должна быть мала. Параметризуем групповые элементы координатами θ^α и воспользуемся нашим соглашением $g(\theta = 0) = e$. Тогда

$$\phi(g(\theta_1)g(\theta_2)) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial\theta_1^\beta \partial\theta_2^\gamma}\theta_1^\beta\theta_2^\gamma + \dots = \gamma_{\beta\gamma}\theta_1^\beta\theta_2^\gamma + \dots,$$

получаем

$$\left(1 + \mathrm{i}\theta_1^\alpha\Gamma_\alpha + \frac{1}{2}\,\theta_1^\beta\theta_1^\gamma\,\Gamma_{\beta\gamma} + \dots\right)\cdot\left(1 + \mathrm{i}\theta_2^\alpha\Gamma_\alpha + \frac{1}{2}\,\theta_2^\beta\theta_2^\gamma\,\Gamma_{\beta\gamma} + \dots\right) =$$

$$= 1 + \mathrm{i}\gamma_{\beta\gamma}\theta_1^\beta\theta_2^\gamma + \mathrm{i}(\theta_1^\alpha + \theta_2^\alpha + f^\alpha{}_{\beta\gamma}\theta_1^\beta\theta_2^\gamma)\Gamma_\alpha + \frac{1}{2}(\theta_1^\beta + \theta_2^\beta)(\theta_1^\gamma + \theta_2^\gamma)\Gamma_{\beta\gamma} + \dots$$

Члены порядка 1, θ_1, θ_2, θ_1^2 и θ_2^2 в правой и левой частях полученного уравнения, как и в случае обычного представления связной группы Ли, автоматически совпадают, а благодаря существованию членов, пропорциональных $\theta_1\theta_2$, возникает условие

$$\Gamma_{\beta\gamma} = -\Gamma_\beta\Gamma_\gamma - \mathrm{i}f^\alpha{}_{\beta\gamma}\Gamma_\alpha - \mathrm{i}\gamma_{\beta\gamma}.$$

В силу того, что $\Gamma_{\beta\gamma} = \Gamma_{\gamma\beta}$ получаем

$$[\Gamma_\beta,\Gamma_\gamma] = \mathrm{i}\mathfrak{c}^\alpha{}_{\beta\gamma}\,\Gamma_\alpha + \mathrm{i}\mathfrak{a}_{\beta\gamma}, \quad \mathfrak{a}_{\beta\gamma} = -\gamma_{\beta\gamma} + \gamma_{\gamma\beta} = -\mathfrak{a}_{\gamma\beta},$$

где $\mathfrak{c}^\alpha{}_{\beta\gamma} = -f^\alpha{}_{\beta\gamma} + f^\alpha{}_{\gamma\beta}$ — уже известные нам структурные константы группы. Возникновение в правой части коммутационного соотношения членов, пропорциональных единичному — т.н. *центральных зарядов*, отражает тот факт, что фаза в проективном представлении группы для алгебры Ли нетривиальна. Из тождества Якоби для генераторов

$$[[\Gamma_\beta,\Gamma_\gamma],\Gamma_\sigma] + [[\Gamma_\sigma,\Gamma_\beta],\Gamma_\gamma] + [[\Gamma_\gamma,\Gamma_\sigma],\Gamma_\beta] = 0$$

можно получить важное соотношение, связывающее постоянные $\mathfrak{a}_{\beta\gamma}$ со структурными постоянными группы:

$$\mathfrak{c}^\alpha{}_{\beta\gamma}\mathfrak{c}^\lambda{}_{\alpha\sigma} + \mathfrak{c}^\alpha{}_{\sigma\beta}\mathfrak{c}^\lambda{}_{\alpha\gamma} + \mathfrak{c}^\alpha{}_{\gamma\sigma}\mathfrak{c}^\lambda{}_{\alpha\beta} = 0, \quad \mathfrak{c}^\alpha{}_{\beta\gamma}\mathfrak{a}_{\alpha\sigma} + \mathfrak{c}^\alpha{}_{\sigma\beta}\mathfrak{a}_{\alpha\gamma} + \mathfrak{c}^\alpha{}_{\gamma\sigma}\mathfrak{a}_{\alpha\beta} = 0.$$

Всегда существует класс ненулевых $\mathfrak{a}_{\alpha\beta}$, удовлетворяющих последним уравнениям: $\mathfrak{a}_{\alpha\beta} = \mathfrak{c}^\gamma{}_{\alpha\beta}u_\gamma$, где u_γ — произвольный набор вещественных постоянных. Для таких решений центральные заряды можно устранить, переопределив генераторы следующим образом: $\Gamma_\alpha \mapsto \Gamma'_\alpha = \Gamma_\alpha + u_\alpha$. Тогда новые генераторы будут удовлетворять старым коммутационным соотношениям без центральных зарядов. Для некоторой алгебры Ли решения соответствующих уравнений, отличные от $\mathfrak{a}_{\alpha\beta} = \mathfrak{c}^\gamma{}_{\alpha\beta}u_\gamma$, могут и не существовать.

Вообще, можно показать, что фазу любого представления группы можно выбрать так, чтобы $\phi = 0$, если группа *односвязна*, то есть любые два ее элемента можно соединить непрерывной кривой, лежащей внутри группы, и любые две такие кривые *непрерывно гомотопны*, а также если генераторы группы в этом представлении можно переопределить так, чтобы все центральные заряды алгебры Ли были устранены. Проделайте это самостоятельно в качестве нетривиального упражнения.

11.7. **Алгебра Пуанкаре при наличии центральных зарядов.** В предыдущем параграфе мы узнали, что существуют только два (стандартных) пути возниконовения существенно проективного представления: алгебраический, поскольку группа представлена проективно даже вблизи единицы, либо топологический, так как группа неодносвязна. Рассмотрим по очереди каждую из этих возможностей в случае группы Пуанкаре.

При наличии центральных зарядов коммутационные соотношения в алгебре Ли группы Пуанкаре примут вид

$$[P_\mu,P_\nu] = \mathrm{i}\mathfrak{a}_{\mu|\nu}, \qquad [P_\mu, S_{\alpha\beta}] = \mathrm{i}(\eta_{\mu\beta}P_\alpha - \eta_{\mu\alpha}P_\beta) + \mathrm{i}\mathfrak{a}_{\mu|\alpha\beta},$$

$$[S_{\alpha\beta}, S_{\mu\nu}] = \mathrm{i}(\eta_{\alpha\mu}S_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu}S_{\mu\beta} - \eta_{\beta\mu}S_{\alpha\nu} - \eta_{\beta\nu}S_{\mu\alpha}) + \mathrm{i}\mathfrak{a}_{\alpha\beta|\mu\nu}.$$

Из этих соотношений видно, что коэффициенты $\mathfrak{a}_\bullet$ удовлетворяют условиям антисимметрии: $\mathfrak{a}_{\mu|\nu} = -\mathfrak{a}_{\nu|\mu}$, $\mathfrak{a}_{\mu|\alpha\beta} = -\mathfrak{a}_{\alpha\beta|\mu}$, $\mathfrak{a}_{\alpha\beta|\mu\nu} = -\mathfrak{a}_{\mu\nu|\alpha\beta}$. Покажем теперь, что существуют дополнительные соотношения на эти константы, благодаря которым их можно устранить путем переопределения генераторов P_μ и $S_{\mu\nu}$ согласно описанной выше процедуре. Для этого воспользуемся тождествами Якоби для генераторов (тождество Якоби, включающее три генератора трансляций не дает никакой информации, так как, очевидно, удовлетворяется автоматически):

$$[S_{\mu\nu},[P_\rho, P_\sigma]] + [P_\sigma,[S_{\mu\nu}, P_\rho]] + [P_\rho,[P_\sigma, S_{\mu\nu}]] = 0,$$

$$[S_{\lambda\eta},[S_{\mu\nu}, P_\rho]] + [P_\rho,[S_{\lambda\eta}, S_{\mu\nu}]] + [S_{\mu\nu},[P_\rho, S_{\lambda\eta}]] = 0,$$

$$[S_{\lambda\eta},[S_{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}]] + [S_{\rho\sigma},[S_{\lambda\eta}, S_{\mu\nu}]] + [S_{\mu\nu},[S_{\rho\sigma}, S_{\lambda\eta}]] = 0.$$

Используя коммутационные соотношения в алгебре Пуанкаре, находим

$$\eta_{\nu\rho}\mathfrak{a}_{\mu|\sigma} - \eta_{\mu\rho}\mathfrak{a}_{\nu|\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\mathfrak{a}_{\nu|\rho} - \eta_{\nu\sigma}\mathfrak{a}_{\mu|\rho} = 0,$$

$$\eta_{\nu\rho}\mathfrak{a}_{\mu|\lambda\eta} - \eta_{\mu\rho}\mathfrak{a}_{\nu|\lambda\eta} + \eta_{\lambda\mu}\mathfrak{a}_{\rho|\eta\nu} - \eta_{\mu\eta}\mathfrak{a}_{\rho|\lambda\nu} + \eta_{\lambda\nu}\mathfrak{a}_{\rho|\mu\eta} - \eta_{\nu\eta}\mathfrak{a}_{\rho|\mu\lambda} + \eta_{\rho\lambda}\mathfrak{a}_{\eta|\mu\nu} - \eta_{\rho\eta}\mathfrak{a}_{\lambda|\mu\nu} = 0,$$

$$\eta_{\nu\rho}\mathfrak{a}_{\mu\sigma|\lambda\eta} - \eta_{\mu\rho}\mathfrak{a}_{\nu\sigma|\lambda\eta} - \eta_{\mu\sigma}\mathfrak{a}_{\rho\nu|\lambda\eta} + \eta_{\nu\sigma}\mathfrak{a}_{\rho\mu|\lambda\eta} + \eta_{\mu\eta}\mathfrak{a}_{\lambda\nu|\rho\sigma} - \eta_{\mu\lambda}\mathfrak{a}_{\eta\nu|\rho\sigma} - \eta_{\nu\lambda}\mathfrak{a}_{\mu\eta|\rho\sigma} +$$
$$+ \eta_{\nu\eta}\mathfrak{a}_{\mu\lambda|\rho\sigma} + \eta_{\sigma\lambda}\mathfrak{a}_{\rho\eta|\mu\nu} - \eta_{\rho\lambda}\mathfrak{a}_{\sigma\eta|\mu\nu} - \eta_{\rho\eta}\mathfrak{a}_{\lambda\sigma|\mu\nu} + \eta_{\sigma\eta}\mathfrak{a}_{\lambda\rho|\mu\nu} = 0.$$

Отсюда, сворачивая с обратной метрикой $\eta^{\nu\rho}$ полученные выражения, находим, что коэффициенты $\mathfrak{a}_\bullet$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\mathfrak{a}_{\mu|\sigma} = 0, \quad \mathfrak{a}_{\mu|\lambda\eta} = \eta_{\mu\eta}\mathfrak{a}_\lambda - \eta_{\mu\lambda}\mathfrak{a}_\eta, \quad \mathfrak{a}_{\mu\sigma|\lambda\eta} = \eta_{\mu\eta}\mathfrak{a}_{\lambda\sigma} - \eta_{\mu\lambda}\mathfrak{a}_{\eta\sigma} + \eta_{\sigma\lambda}\mathfrak{a}_{\eta\mu} - \eta_{\sigma\eta}\mathfrak{a}_{\lambda\mu}.$$

Здесь

$$\mathfrak{a}_\lambda = \frac{1}{3}\eta^{\rho\nu}\mathfrak{a}_{\rho|\lambda\nu}, \quad \mathfrak{a}_{\lambda\sigma} = \frac{1}{2}\eta^{\nu\rho}\mathfrak{a}_{\lambda\nu|\sigma\rho}.$$

Видно, что если $\mathfrak{a}_\bullet$ не равны нулю, то их можно легко устранить переопределением генераторов:

$$P'_\mu = P_\mu + \mathfrak{a}_\mu, \qquad S'_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + \mathfrak{a}_{\mu\nu}.$$

Для новых генераторов коммутационные соотношения, очевидно, не содержат центральных зарядов. Как можно видеть, группа Пуанкаре удовлетворяет одному из двух условий, необходимых для исключения существенно проективного представления. Удовлетворяет ли она другому условию? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, необходимо исследовать топологию группы Пуанкаре.

На самом деле, достаточно разобраться с топологией собственной ортохронной группы Лоренца, ведь группа трансляций — подгруппа группы Пуанкаре — топологически изоморфна пространству $\mathbb{R}^4$, которое, очевидно, односвязно; что касается остальных компонент связности группы Лоренца, отличных от $\mathbb{SO}^\uparrow_+(3,1)$, то все они гомеоморфны $\mathbb{SO}^\uparrow_+(3,1)$.

11.8. **Спинорный гомоморфизм.** Изучение топологии собственной ортохронной группы Лоренца $\mathbb{SO}_+^\uparrow(3{,}1)$ представлено в ближайших параграфах несколькими этапами. Первым делом построим так называемый *спинорный гомоморфизм* (или *универсальный накрывающий гомоморфизм*) для собственной ортохронной группы Лоренца

$$\pi : \mathbb{SL}(2{,}\mathbb{C}) \to \mathbb{SO}_+^\uparrow(3{,}1).$$

Для этого рассмотрим векторное пространство квадратных эрмитовых матриц второго порядка: $X = X^\dagger$. В этом пространстве можно выбрать базис из матриц $\sigma_\mu = (1, \boldsymbol{\sigma})$, где эрмитовы *матрицы Паули*

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем нам пригодятся еще матрицы $\tilde{\sigma}_\mu = (1, -\boldsymbol{\sigma})$. Полезно знать следующие свойства матриц σ_μ и $\tilde{\sigma}_\mu$:

$$\sigma_\mu^2 = 1, \quad \mathrm{tr}(\tilde{\sigma}_\mu \sigma_\nu) = 2\eta_{\mu\nu}.$$

Первое из них легко проверяется прямым вычислением, впрочем, как и второе. Поскольку матрицы σ_μ образуют базис в пространстве эрмитовых матриц второго порядка, то X можно разложить по этому базису согласно

$$X = x^\mu \sigma_\mu,$$

где координаты x^μ — вещественные числа. Как мы скоро увидим, их можно ассоциировать с координатами пространства-времени Минковского. Легко видеть, что

$$x^\mu = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\tilde{\sigma}^\mu X\right).$$

Действительно,

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\tilde{\sigma}^\mu X\right) = \frac{1}{2} x_\nu \mathrm{tr}\left(\tilde{\sigma}^\mu \sigma^\nu\right) = \eta^{\mu\nu} x_\nu = x^\mu.$$

Теперь рассмотрим линейное преобразование эрмитовых матриц X вида

$$X \mapsto X' = N X N^\dagger, \quad N \in \mathbb{SL}(2{,}\mathbb{C}).$$

Несложно заметить, что

$$X'^\dagger = (N X N^\dagger)^\dagger = N X^\dagger N^\dagger = X'.$$

Кроме того,

$$\det X' = |\det N|^2 \det X = \det X.$$

Записывая в явном виде матрицу $X = x^\mu \sigma_\mu$:

$$X = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - \mathrm{i}x^2 \\ x^1 + \mathrm{i}x^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix},$$

получаем $\det X = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$. Таким образом

$$\eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta.$$

То есть такое линейное преобразование сохраняет квадрат 4-вектора x^μ. Найдем x'^μ. Для этого разложим матрицу X' по базису σ_μ. Имеем

$$x'^\mu = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\tilde{\sigma}^\mu X'\right) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\tilde{\sigma}^\mu N X N^\dagger\right) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\tilde{\sigma}^\mu N \sigma_\nu N^\dagger\right) x^\nu := \Lambda^\mu{}_\nu(N) x^\nu.$$

То есть преобразование $X \mapsto X'$ выглядит в координатах как некоторое преобразование Лоренца. Покажем, что оно действительно является преобразованием Лоренца.

Для этого проверим выполнение базового соотношения $\Lambda^{\mathrm{T}}\eta\Lambda = \eta$. Оно на самом деле очевидно из равенства $\eta_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu} = \eta_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}$. Значит, матрица $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(N) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(\tilde{\sigma}^{\mu}N\sigma_{\nu}N^{\dagger})$ осуществляет некоторое преобразование Лоренца, $\Lambda(N) \in \mathbb{SO}(3{,}1)$. Можно показать, что $\det\Lambda(N) = 1$, а также, что $\Lambda^{0}{}_{0} > 0$. Докажем, например, второе утверждение:

$$\Lambda^{0}{}_{0} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(NN^{\dagger}).$$

Найдем $NN^{\dagger}$ в общем виде, то есть

$$NN^{\dagger} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{\star} & c^{\star} \\ b^{\star} & d^{\star} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2+|b|^2 & ac^{\star}+bd^{\star} \\ a^{\star}c+b^{\star}d & |c|^2+|d|^2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\mathrm{tr}\,(NN^{\dagger}) = |a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2 = \Sigma > 0$. Поэтому $\Lambda^{0}{}_{0} = \frac{1}{2}\Sigma > 0$, что и требовалось доказать.

Мы нашли, что все матрицы $\Lambda(N) \in \mathbb{SO}^{\uparrow}_{+}(3{,}1)$. Теперь покажем, что построенное нами отображение $\pi : \mathbb{SL}(2{,}\mathbb{C}) \to \mathbb{SO}^{\uparrow}_{+}(3{,}1)$ действительно является гомоморфизмом,

$$\Lambda(N_1)\cdot\Lambda(N_2) = \Lambda(N_1N_2).$$

Для этого вернемся к соотношению $X' = NXN^{\dagger}$. В наших обозначениях это равенство сводится к формуле

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(N)\,\sigma_{\mu} = N\sigma_{\nu}N^{\dagger}.$$

Тогда

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(N_1N_2)\sigma_{\mu} = N_1N_2\sigma_{\nu}N_2^{\dagger}N_1^{\dagger} = \Lambda^{\lambda}{}_{\nu}(N_2)\,N_1\sigma_{\lambda}N_1^{\dagger} = \Lambda^{\mu}{}_{\lambda}(N_1)\,\Lambda^{\lambda}{}_{\nu}(N_2)\,\sigma_{\mu},$$

что доказывает нам свойство гомоморфизма. Найдем ядро гомоморфизма $\ker\pi$, то есть $\sigma_{\mu} = N\sigma_{\mu}N^{\dagger}$. Положим в этом выражении сначала индекс $\mu = 0$. Тогда $NN^{\dagger} = 1$. Отсюда получаем

$$NN^{\dagger} = \begin{pmatrix} |a|^2+|b|^2 & ac^{\star}+bd^{\star} \\ a^{\star}c+b^{\star}d & |c|^2+|d|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad ad-bc = 1,$$

$$ad = 1+bc, \quad (1+bc)c^{\star} = -b|d|^2, \quad c^{\star}+b(|c|^2+|d|^2) = c^{\star}+b = 0,$$

значит $c = -b^{\star}$. Аналогично

$$bc = ad-1, \quad a^{\star}(ad-1) = -|b|^2d = |a|^2d - a^{\star}, \quad a^{\star} = d.$$

Таким образом

$$\omega = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^{\star} & a^{\star} \end{pmatrix}.$$

Теперь подставим $\mu = 3$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b^{\star} & a^{\star} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{\star} & -b \\ b^{\star} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -b^{\star} & -a^{\star} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{\star} & -b \\ b^{\star} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2-|b|^2 & -2ab \\ -2a^{\star}b^{\star} & |b|^2-|a|^2 \end{pmatrix}.$$

Имеем $b = 0$, $a = e^{\mathrm{i}\varphi}$. Наконец, при $\mu = 1{,}2$ получаем $e^{2\mathrm{i}\varphi} = 1$, $N = \pm 1$. Значит

$$\ker\pi \cong \mathbb{Z}_2.$$

Отсюда следует что две матрицы $\pm N$ отвечают одному и тому же преобразованию Лоренца по свойству гомоморфизма: $\Lambda(N)\Lambda(\pm 1) = \Lambda(N)$.

Таким образом отображение π является гомоморфизмом, причем $\operatorname{Im}\pi \subset \mathbb{SO}_+^{\uparrow}(3{,}1)$. Покажем, что на самом деле образ $\operatorname{Im}\pi = \mathbb{SO}_+^{\uparrow}(3{,}1)$, то есть отображение π сюръективно. Проще всего это установить, если заметить, что

$$\pi^{-1}(R_x(\phi)) = \pm\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_1\phi\right\}, \quad \pi^{-1}(R_y(\phi)) = \pm\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_2\phi\right\},$$

$$\pi^{-1}(R_z(\phi)) = \pm\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_3\phi\right\}, \quad \pi^{-1}(\Lambda_x(\vartheta)) = \pm\exp\left\{\frac{1}{2}\sigma_1\vartheta\right\},$$

$$\pi^{-1}(\Lambda_y(\vartheta)) = \pm\exp\left\{\frac{1}{2}\sigma_2\vartheta\right\}, \quad \pi^{-1}(\Lambda_z(\vartheta)) = \pm\exp\left\{\frac{1}{2}\sigma_3\vartheta\right\},$$

где R_x, R_y, R_z — матрицы поворота вокруг соответствующих пространственных осей, а $\Lambda_x, \Lambda_y, \Lambda_z$ — лоренцевские бусты в соответствующих пространственно временных плоскостях. Сюръективность π следует из того, что бусты и вращения порождают собственную ортохронную группу Лоренца, а матрицы $\exp\{\mathrm{i}\sigma_i\phi\}$ и $\exp\{\vartheta\sigma_i\}$ порождают группу $\mathbb{SL}(2{,}\mathbb{C})$. Значит, $\operatorname{Im}\pi = \mathbb{SO}_+^{\uparrow}(3{,}1)$. Но тогда, по первой теореме о гомоморфизме получаем

$$\operatorname{Im}\pi = \mathbb{SO}_+^{\uparrow}(3{,}1) \cong \mathbb{SL}(2{,}\mathbb{C})/\ker\pi \cong \mathbb{SL}(2{,}\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2.$$

Итак, на данном этапе имеем следующее. Ранее мы сформулировали теорему, которая утверждает, что фазу любого проективного представления группы можно выбрать так, чтобы в уравнении, определяющем проективное представление, $\phi = 0$, если группа односвязна, а также если генераторы группы в этом представлении можно переопределить так, чтобы все центральные заряды алгебры Ли были устранены. Как было выяснено, генераторы из алгебры Пуанкаре допускают исключение центральных зарядов. Однако, вопрос о том, является ли группа Пуанкаре односвязной, остался открытым. Для ответа на этот вопрос, как мы поняли, необходимо исследовать топологию группы Пуанкаре, причем, на самом деле, достаточно разобраться с топологией собственной ортохронной группы Лоренца. Мы начали двигаться в нужном направлении: был построен сюръектиный гомоморфизм $\pi : \mathbb{SL}(2{,}\mathbb{C}) \to \mathbb{SO}_+^{\uparrow}(3{,}1)$ с ядром $\ker\pi \cong \mathbb{Z}_2$, существование которого по первой теореме о гомоморфизме дало нам изоморфизм $\mathbb{SO}_+^{\uparrow}(3{,}1) \cong \mathbb{SL}(2{,}\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$. И поскольку изоморфизм, как известно из линейной алгебры, сохраняет топологию, займемся изучением топологии $\mathbb{SL}(2{,}\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$, предварительно вспомнив некоторые определения и понятия гомотопической топологии, необходимые для дальнейшего.

Ориентированные кривые $\gamma_1 : [a{,}b] \to M$ и $\gamma_2 : [a{,}b] \to M$ на некотором топологическом пространстве *гомотопны*, если $\exists\varphi : [a{,}b] \times [0{,}1] \to M$ — непрерывное, такое что $\varphi(t{,}0) = \gamma_1(t)$, $\varphi(t{,}1) = \gamma_2(t)$. Отношение гомотопности ориентированных кривых, очевидно, является отношением эквивалентности $\sim$. Класс ориентированных кривых, эквивалентных γ (*гомотопический класс* γ), обозначим через $[\gamma]$. Ориентированная кривая $\gamma : [a{,}b] \to M$ называется *петлей* в точке $p \in M$, если $\gamma(a) = \gamma(b) = p$. Операция конкатенации, очевидно, определена для любой пары петель в некоторой точке $p \in M$. Множество классов эквивалентности петель в точке $p \in M$ обозначается через $\pi(p{,}M)$. Это множество наделено умножением: $[\gamma_1]\cdot[\gamma_2] = [\gamma_1 \diamond \gamma_2]$. Несложно показать, что множество классов эквивалентности петель $\pi(p{,}M)$ является группой по отношению к операции конкатенации, которую называют *фундаментальной группой* топологического пространства M в точке $p \in M$. Единицей фундаментальной группы является кривая γ_e, гомотопная тождественной кривой id_p — т.н. *неподвижная* *петля*, а обратным элементом к $[\gamma]$ — гомотопический класс петли, пройденной в обратном направлении.

В терминах фундаментальной группы можно определить понятие односвязности следующим образом: топологическое пространство M называется *односвязным*, если оно линейно связно и $\pi(p,M) = \mathrm{id}_p$ для некоторой точки $p \in M$.

Пусть $f : N \to M$ — некоторое непрерывное отображение топологических пространств. Говорят, что открытое подмножество $U \subset M$ *правильно накрыто* отображением f, если $f^{-1}(U)$ представляет собой дизъюнктное объединение открытых подмножеств в N, каждое из которых гомеоморфно отображается на U при помощи отображения f. Непрерывное отображение $f : N \to M$ называется *накрытием*, если любая точка $p \in M$ имеет открытую окрестность, правильно накрытую отображением f. При этом M называют *базой накрытия*, а N — *накрывающим пространством* для M.

Если отображение $f : N \to M$ является накрытием, причем N является односвязным топологическим пространстом, то f называют *универсальным накрытием*, а пространство N — *универсальным накрывающим пространством.* Если универсальное накрытие существует, то оно единственно в следующем смысле: если $f_1 : N_1 \to M$, $f_2 : N_2 \to M$ — два универсальных накрытия с накрывающими пространствами N_1 и N_2, то существует гомеоморфизм $\varphi : N_1 \to N_2$, удовлетворяющий условию $f_2 \circ \varphi = f_1$, то есть такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} N_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f_1"'] & & N_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

11.9. **Топология группы Пуанкаре.** Перейдем к непосредственному изучению топологии $\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$. Начнем с группы $\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$. Согласно теореме о полярном разложении любую матрицу $N \in \mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$ можно записать в виде

$$N = ue^{\mathfrak{h}},$$

где u — унитарная матрица: $uu^\dagger = 1$, а $\mathfrak{h}$ — эрмитова матрица: $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^\dagger$. Причем, это разложение единственно, поэтому $\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$ с топологической точки зрения представляет собой прямое произведение пространства всех u на пространство всех $\mathfrak{h}$.

Поскольку $\det u$ равен по модулю единице, а $\det e^{\mathfrak{h}} = e^{\operatorname{tr}\mathfrak{h}}$ является вещественным и положительным числом, то для выполнения условия $\det N = 1$ необходимо, чтобы

$$\det u = 1, \quad \operatorname{tr}\mathfrak{h} = 0.$$

Как мы видели, в пространстве эрмитовых матриц второго порядка можно выбрать базис $\sigma_\mu = (1, \boldsymbol{\sigma})$. Поэтому матрицы $\mathfrak{h}$ можно разложить по этому базису согласно

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} \mathfrak{h}^0 + \mathfrak{h}^3 & \mathfrak{h}^1 - \mathrm{i}\mathfrak{h}^2 \\ \mathfrak{h}^1 + \mathrm{i}\mathfrak{h}^2 & \mathfrak{h}^0 - \mathfrak{h}^3 \end{pmatrix}.$$

Условие бесследовости дает нам

$$\mathfrak{h} = \begin{pmatrix} \mathfrak{h}^3 & \mathfrak{h}^1 - \mathrm{i}\mathfrak{h}^2 \\ \mathfrak{h}^1 + \mathrm{i}\mathfrak{h}^2 & -\mathfrak{h}^3 \end{pmatrix},$$

то есть эрмитовы бесследовые матрицы, как и должно быть, разлагаются по базису из матриц Паули, причем вещественные числа $\mathfrak{h}^i$ произвольны. Поэтому пространство всех $\mathfrak{h}$ с топологической точки зрения совпадает с обычным трехмерным плоским пространством $\mathbb{R}^3$. С другой стороны, любую унитарную матрицу второго порядка с единичным детерминантом можно представить в виде

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^\star & a^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + \mathrm{i}a_2 & b_1 + \mathrm{i}b_2 \\ -b_1 + \mathrm{i}b_2 & a_1 - \mathrm{i}a_2 \end{pmatrix}.$$

В силу условия $\det u = 1$ получаем $a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1$. Поэтому пространство $\mathbb{SU}(2)$ всех u топологически изоморфно $\mathbb{S}^3$, трехмерной сфере в плоском четырехмерном пространстве. Таким образом, группа $\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$ имеет такую же топологию, как прямое произведение $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^3$:

$$\mathbb{SL}(2,\mathbb{C}) \overset{\text{top.}}{\cong} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^3.$$

Это произведение односвязно: любая петля в пространстве $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{S}^3$ гомотопна тождественной кривой. То же самое верно и для прямого произведения. Докажем это. Пусть M и N — топологические пространства. Рассмотрим петлю $\gamma : [a,b] \to M \times N$ в некоторой точке $p \in M \times N$. При помощи естественных проекций: $\pi_M : M \times N \to M$, $\pi_N : M \times N \to N$ можно определить петли $\gamma_M : [a,b] \to M$ и $\gamma_N : [a,b] \to N$ согласно

$$\gamma_M = \pi_M \circ \gamma, \quad \gamma_N = \pi_N \circ \gamma.$$

Поскольку любая петля в пространстве M или N гомотопна тождественной, то существуют гомотопии

$$f : [a,b] \times [0,1] \to M, \quad g : [a,b] \times [0,1] \to N,$$

такие, что $f(t,0) = \gamma_M(t)$, $f(t,1) = \mathrm{id}_p$, $g(t,0) = \gamma_N(t)$, $g(t,1) = \mathrm{id}_p$. Определим отображение $h : [a,b] \times [0,1] \to M \times N$ как

$$h(t,s) = \begin{pmatrix} f(t,s) \\ g(t,s) \end{pmatrix}.$$

Видно, что

$$h(t,0) = \begin{pmatrix} f(t,0) \\ g(t,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_M(t) \\ \gamma_N(t) \end{pmatrix} = \gamma(t), \quad h(t,1) = \begin{pmatrix} f(t,1) \\ g(t,1) \end{pmatrix} = \mathrm{id}_p.$$

Остается показать, что h непрерывно. На $M \times N$ определена *тихоновская топология* τ: $U \times V \in \tau$, $U \in \tau_M$, $V \in \tau_N$, в которой все естественные проекции являются непрерывными отображениями. В виду топологического определения непрерывности покажем, что прообраз $h^{-1}(U \times V) \in \tau$. Нетрудно видеть, что

$$h^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V).$$

И поскольку $f(t,s) \in U$, $g(t,s) \in V$, то $h^{-1}(U \times V) \in \tau$. Таким образом группа $\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$ односвязна. Нас, однако, интересует $\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$, а не $\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$. Поскольку $e^{\natural}$ всегда положительно определена, то отождествление N с $-N$ эквивалентно отождествлению u и $-u$. Поэтому собственная ортохронная группа Лоренца имеет топологию $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{RP}^3$, где $\mathbb{RP}^3 = \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_2$ — трехмерная сферическая поверхность с отождествленными противоположными точками сферы. Эта поверхность неодносвязна. Например, кривую на $\mathbb{S}^3$ из u_1 в u_2 нельзя непрерывно деформировать в кривую $\mathbb{S}^3$ из u_1 в $-u_2$ даже в том случае, если эти две кривые связывают одинаковые точки из $\mathbb{RP}^3$. Фактически, *проективное пространство* $\mathbb{RP}^3$ двусвязно: кривые между любыми двумя точками распадаются на два гомотопических класса в зависимости от того, включают ли они инверсию $u \mapsto -u$ или нет, и любая другая кривая из одного класса может быть деформирована в другую кривую из того же класса. Эквивалентным является утверждение о том, что двойная петля, идущая дважды по одному и тому же пути из любого элемента назад в него же, может быть непрерывно деформирована в точку. С точки зрения математики это означает, что фундаментальной группой для $\mathbb{RP}^3$ является $\mathbb{Z}_2$. Аналогично, неоднородная группа Лоренца имеет ту же топологию, что и $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{RP}^3$, и, следовательно, также является двусвязной.

Так как группа Лоренца (однородная и неоднородная) неодносвязна, она действительно имеет существенно проективное представление. Однако поскольку дважды проходящая через 1, Λ, $\Lambda\Lambda'$ и обратно в 1 двойная петля действительно может быть деформирована в точку, верно соотношение

$$[F_\Lambda F_{\Lambda'} F_{\Lambda\Lambda'}^{-1}]^2 = 1$$

и, следовательно, фаза $\phi(\Lambda, \Lambda')$ равна π или $-\pi$: $F_\Lambda F_{\Lambda'} = \pm F_{\Lambda\Lambda'}$. Аналогично, для неоднородной группы Лоренца имеем

$$F_{\Lambda,a} F_{\Lambda',a'} = \pm F_{\Lambda\Lambda',\Lambda a'+a}.$$

Такие «представления с точностью до знака» хорошо известны в теоретической физике; как мы увидим позже, они описывают состояния с *целым спином*, для которых знаки в этих уравнениях всегда равны $+1$, и состояния с *полуцелым спином*, для которых эти знаки равны $+1$ или -1 в зависимости от того, является или не является путь, проходящий через 1, Λ, $\Lambda\Lambda'$ и обратно в 1, непрерывно деформируемым в точку. Разница возникает из-за того, что вращение на угол 2π вокруг оси z, действуя на состояние с третьей компонентой углового момента, умножает его на фазу $\exp\{2\pi \mathrm{i} s_z\}$ и, поэтому, ничего не меняя в случае целого спина, меняет знак, когда действует на состояние с полуцелым спином (эти два случая соответствуют двум неприводимым представлениям первой гомотопической группы, $\mathbb{Z}_2$). Таким образом, из полученных уравнений следует правило суперотбора: нельзя смешивать состояния с целым и полу целым спином.

Вместо того чтобы работать с проективными представлениями и накладывать правило суперотбора, можно расширить группу Лоренца, рассматривая вместо группы $\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ ее универсальную накрывающую группу $\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$. Инвариантность по отношению к обычным вращениям запрещает переходы между состояниями целого и полуцелого полного спина. Таким образом, единственная разница состоит в том, что теперь группа является односвязной и, следовательно, имеет только обычные, непроективные представления, и правило суперотбора вывести нельзя.

11.10. **Операторы Казимира.** При изучении представлений связных групп Ли особое значение имеют операторы $\mathcal{C}_a$ в пространстве представления, коммутирующие со всеми генераторами, то есть $[\mathcal{C}_a, \Gamma_\alpha] = 0$. Очевидно, что тогда $\mathcal{C}_a$ коммутируют и со всеми операторами F_g самого представления F связной группы Ли. Операторы $\mathcal{C}_a$ называются *операторами Казимира* представления F группы G, или, короче, операторами Казимира группы G, если ясно о каком представлении идет речь.

Важность операторов Казимира определяется *леммой Шура*, согласно которой на подпространстве неприводимого комплексного представления каждый $\mathcal{C}_a$ кратен единичному оператору, $\mathcal{C}_a = \lambda_a \,\mathrm{id}$, $\lambda_a \in \mathbb{C}$. Напомним, что представление называется *приводимым*, если оно имеет нетривиальные инвариантные подпространства представления. В противном случае оно называется *неприводимым*. Другими словами, представление F называется неприводимым, если оно имеет только тривиальные инвариантные подпространства $\tilde{V} = \{0\}$ и $\tilde{V} = V$.

Идея состоит в том, чтобы для алгебры Ли группы G построить все независимые нетривиальные операторы Казимира $\mathcal{C}_a$ и попытаться характеризовать каждое неприводимое представление группы набором соответствующих собственных значений λ_a операторов Казимира. Эту идею для группы Пуанкаре мы реализуем в следующем разделе: элемент векторного пространства представления, который зависит от координат пространства-времени Минковского, естественно называть *локальным релятивистским полем*. Покуда это так, базис релятивистских локальных полей составляют неприводимые представления алгебры Ли генераторов непрерывных изометрий пространства времени Минковского. Из этих базисных полей можно строить составные поля, то есть произведения полей, которые также будут обладать вполне определенными свойствами относительно бесконечно малых преобразований координат пространства-времени Минковского. Таким образом, после того, как мы произведем классификацию всех (унитарных) неприводимых представлений группы Пуанкаре, мы по факту построим уравнения движения для произвольных свободных локальных релятивистских полей — уравнения на собственные значения операторов из полного набора наблюдаемых величин. Сами уравнения, конечно, могут быть получены из принципа экстремального действия. Действие, как водится, в пространстве-времени Минковского является лоренц-инвариантным. Но это не единственные симметрии действия для свободных полей. Существует много теорий поля с так называемыми *внутренними симметриями* действия. Эти симметрии по теореме Нетер, которую для полей мы докажем позже, определяют сохраняющиеся величины: квантовые числа, токи и заряды. Разнообразие этих отличных от пространственно-временных симметрий определяет природа. Интересно, что такие непрерывные локальные симметрии действия могут диктовать и устройство взаимодействий полей по принципу *калибровочной инвариантности*. Сами поля, как всякие измеримые величины, становятся операторами, т.е. квантуются. Кванты поля наследуют все физические свойства самого поля: массу, заряд, спин и т.п.

Оказывается, произвольное представление группы Пуанкаре имеет, вообще говоря, два независимых оператора Казимира. Их легко построить, учитывая трансформационные свойства генераторов P^μ и $S^{\mu\nu}$. Поскольку P^μ и $S^{\mu\nu}$ — лоренцевские тензоры, то ясно, что для построения операторов, коммутирующих с преобразованиями Лоренца, нужно строить из генераторов лоренцевские скаляры. Среди лоренцевских скаляров необходимо отобрать те, которые трансляционно инвариантны. Получившиеся операторы и будут операторами Казимира собственной группы Пуанкаре, ибо любое преобразование Пуанкаре является суперпозицией преобразования Лоренца Λ и трансляции a. Из генераторов группы Пуанкаре можно построить следующие независимые лоренцевские скаляры:

$$\mathcal{C}_1 = P_\mu P^\mu = P^2, \quad \mathcal{C}_2 = W_\mu W^\mu = W^2, \quad \mathcal{C}_{1L} = \frac{1}{2} S_{\mu\nu} S^{\mu\nu}, \quad \mathcal{C}_{2L} = \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} S^{\mu\nu} S^{\alpha\beta},$$

где *псевдовектор Паули-Любаньского*

$$W_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, P^\nu S^{\alpha\beta}.$$

Напомним, что антисимметричный тензор Леви-Чивита в пространстве-времени Минковского нормирован условием $\varepsilon_{0123} = -\varepsilon^{0123} = -1$.

То, что операторы $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ и $\mathcal{C}_{1L}, \mathcal{C}_{2L}$ коммутируют с операторами представления собственной ортохронной группы Лоренца, проверяется непосредственными вычислениями. Например,

$$F_\Lambda P^2 F_\Lambda^{-1} = F_\Lambda P_\mu F_\Lambda^{-1} F_\Lambda P^\mu F_\Lambda^{-1} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \eta_{\mu\alpha} (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta\, P^\nu P^\beta =$$
$$= ((\Lambda^{-1})^{\mathrm{T}} \eta \Lambda^{-1})_{\nu\beta}\, P^\nu P^\beta = \eta_{\nu\beta}\, P^\nu P^\beta = P^2.$$

Точно так же проверяется, что

$$F_\Lambda \mathcal{C}_{1L} F_\Lambda^{-1} = \mathcal{C}_{1L}, \qquad F_\Lambda \mathcal{C}_{2L} F_\Lambda^{-1} = \mathcal{C}_{2L}.$$

Чтобы проделать аналогичные выкладки для квадрата вектора Паули-Любаньского W^2 достаточно заметить, что при собственных преобразованиях Лоренца W_μ преобразуются как компоненты лоренцевского ковектора

$$F_\Lambda W_\mu F_\Lambda^{-1} = \Lambda^\nu{}_\mu W_\nu.$$

Действительно,

$$F_\Lambda W_\mu F_\Lambda^{-1} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, F_\Lambda P^\nu F_\Lambda^{-1} F_\Lambda S^{\alpha\beta} F_\Lambda^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\Lambda^{-1})^\nu{}_\lambda (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\sigma (\Lambda^{-1})^\beta{}_\tau\, P^\lambda S^{\sigma\tau} = \frac{1}{2}(\det\Lambda)\Lambda^\rho{}_\mu \varepsilon_{\rho\lambda\sigma\tau}\, P^\lambda S^{\sigma\tau} = \Lambda^\nu{}_\mu W_\nu.$$

В этом выражении учтено, что при собственных преобразованиях Лоренца определитель $\det\Lambda = 1$. Теперь очевидно, что

$$F_\Lambda \mathcal{C}_2 F_\Lambda^{-1} = \mathcal{C}_2.$$

Несложно видеть, что каждый из операторов $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ и $\mathcal{C}_{1L}, \mathcal{C}_{2L}$ коммутирует со всеми генераторами алгебры Лоренца $S^{\mu\nu}$, ведь если $\mathcal{C}_a$ — любой из этих операторов, то

$$\mathcal{C}_a = F_\Lambda \mathcal{C}_a F_\Lambda^{-1} = \mathcal{C}_a + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}[S^{\mu\nu}, \mathcal{C}_a] + \ldots,$$

откуда

$$[S^{\mu\nu}, P^2] = 0, \quad [S^{\mu\nu}, W^2] = 0, \quad [S^{\mu\nu}, \mathcal{C}_{1L}] = 0, \quad [S^{\mu\nu}, \mathcal{C}_{2L}] = 0.$$

Однако только два из этих четырех операторов коммутируют с операторами трансляций F_a. В самом деле, поскольку тензор $S^{\mu\nu}$ трансляционно неинвариантен, не являются трансляционно инвариантными и лоренцевские скаляры $\mathcal{C}_{1L}$ и $\mathcal{C}_{2L}$. После тривиальных вычислений находим, что

$$F_a \mathcal{C}_{1L} F_a^{-1} = \frac{1}{2} F_a S_{\mu\nu} F_a^{-1} F_a S^{\mu\nu} F_a^{-1} = \frac{1}{2}(S_{\mu\nu} + a_\mu P_\nu - a_\nu P_\mu)(S^{\mu\nu} + a^\mu P^\nu - a^\nu P^\mu),$$

$$F_a \mathcal{C}_{2L} F_a^{-1} = \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, F_a S^{\mu\nu} F_a^{-1} F_a S^{\alpha\beta} F_a^{-1} =$$

$$= \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, S^{\mu\nu} S^{\alpha\beta} + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, S^{\mu\nu} a^\alpha P^\beta = \mathcal{C}_{2L} + 2a_\sigma W^\sigma \neq \mathcal{C}_{2L}.$$

Поэтому операторы $\mathcal{C}_{1L}$ и $\mathcal{C}_{2L}$ не являются операторами Казимира группы Пуанкаре. С другой стороны, векторы P_μ и W_μ трасляционно инвариантны:

$$F_a P^\mu F_a^{-1} = P^\mu,$$

$$F_a W_\mu F_a^{-1} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, P^\nu (S^{\alpha\beta} + a^\alpha P^\beta - a^\beta P^\alpha) = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, P^\nu S^{\alpha\beta} = W_\mu.$$

Поэтому, очевидно, трасляционно инвариантными будут и операторы $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$, откуда получаем, что

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \quad [P^\mu, W^\nu] = 0, \quad [P^\mu, \mathcal{C}_1] = 0, \quad [P^\mu, \mathcal{C}_2] = 0.$$

Итак, операторы $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ являются операторами Казимира собственной группы Пуанкаре. Можно показать, что произвольное представление собственной группы Пуанкаре не имеет, вообще говоря, других независимых операторов Казимира. Проделайте это в качестве полезного упражнения.

Как уже отмечалось ранее, генераторы $S^{\mu\nu}$ образуют подалгебру алгебры Пуанкаре, которая называется алгеброй Лоренца. Мы видим, что из генераторов $S^{\mu\nu}$ можно построить два оператора, коммутирующих со всеми $S^{\mu\nu}$: $\mathcal{C}_{1L}$ и $\mathcal{C}_{2L}$. Следовательно, эти операторы являются операторами Казимира собственной группы Лоренца. Можно показать, что произвольное представление группы Лоренца не имеет, вообще говоря, других независимых операторов Казимира.

11.11. **Некоторые свойства вектора Паули-Любаньского.** В заключение раздела отметим некоторые полезные свойства вектора Паули-Любаньского:

$$P^\mu W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}P^\mu P^\nu S^{\alpha\beta} = 0.$$

$$[P^\mu, W_\nu] = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\lambda\alpha\beta}[P^\mu, P^\lambda S^{\alpha\beta}] = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\lambda\alpha\beta}\, P^\lambda[P^\mu, S^{\alpha\beta}] = \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon_{\mu\lambda\alpha\beta}\, P^\lambda(\eta^{\mu\beta}P^\alpha - \eta^{\mu\alpha}P^\beta) = 0.$$

$$\begin{aligned}
[S_{\mu\nu}, W_\tau] &= \frac{1}{2}\varepsilon_\tau{}^{\rho\lambda\sigma}[S_{\mu\nu}, P_\rho S_{\lambda\sigma}] = \frac{1}{2}\varepsilon_\tau{}^{\rho\lambda\sigma}([S_{\mu\nu}, P_\rho]S_{\lambda\sigma} + P_\rho[S_{\mu\nu}, S_{\lambda\sigma}]) = \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon_\tau{}^{\rho\lambda\sigma}(-\eta_{\rho\nu}P_\mu S_{\lambda\sigma} + \eta_{\rho\mu}P_\nu S_{\lambda\sigma} + \eta_{\mu\lambda}P_\rho S_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}P_\rho S_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\sigma}P_\rho S_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}P_\rho S_{\mu\sigma}) = \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}(-\varepsilon_{\tau\nu}{}^{\lambda\sigma}P_\mu S_{\lambda\sigma} + \varepsilon_{\tau\mu}{}^{\lambda\sigma}P_\nu S_{\lambda\sigma} - 2\varepsilon_{\tau\mu}{}^{\lambda\sigma}P_\lambda S_{\nu\sigma} + 2\varepsilon_{\tau\nu}{}^{\lambda\sigma}P_\lambda S_{\mu\sigma}) = \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}(-\varepsilon_{\tau\nu}{}^{\lambda\sigma}(P_\mu S_{\lambda\sigma} - P_\lambda S_{\mu\sigma} + P_\sigma S_{\mu\lambda}) + \varepsilon_{\tau\mu}{}^{\lambda\sigma}(P_\nu S_{\lambda\sigma} - P_\lambda S_{\nu\sigma} + P_\sigma S_{\nu\lambda})),
\end{aligned}$$

откуда коммутатор $[S_{\mu\nu}, W_\tau]$ равен

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\varepsilon_{\tau\mu\lambda\sigma}\eta_{\nu\rho} - \varepsilon_{\tau\mu\rho\sigma}\eta_{\nu\lambda} - \varepsilon_{\tau\mu\lambda\rho}\eta_{\nu\sigma} - \varepsilon_{\tau\nu\lambda\sigma}\eta_{\mu\rho} + \varepsilon_{\tau\nu\rho\sigma}\eta_{\mu\lambda} + \varepsilon_{\tau\nu\lambda\rho}\eta_{\mu\sigma}\right) P^{[\rho}S^{\lambda\sigma]}.$$

Здесь и далее квадратные скобки означают антисимметризацию по соответствующим индексам. Из определения вектора Паули-Любаньского имеем

$$\begin{aligned}
W_\omega\varepsilon^{\omega\rho\lambda\sigma} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\omega\rho\lambda\sigma}\varepsilon_{\omega\mu\nu\kappa}P^{[\mu}S^{\nu\kappa]} = \\
&= \frac{1}{2}(\delta^\rho_\mu\delta^\lambda_\kappa\delta^\sigma_\nu - \delta^\rho_\mu\delta^\lambda_\nu\delta^\sigma_\kappa + \delta^\lambda_\mu\delta^\rho_\nu\delta^\sigma_\kappa - \delta^\lambda_\mu\delta^\rho_\kappa\delta^\sigma_\nu + \delta^\sigma_\mu\delta^\rho_\kappa\delta^\lambda_\nu - \delta^\sigma_\mu\delta^\rho_\nu\delta^\lambda_\kappa)P^{[\mu}S^{\nu\kappa]} = -3P^{[\rho}S^{\lambda\sigma]},
\end{aligned}$$

где было использовано известное тождество для свертки тензоров Леви-Чивита по одному индексу

$$\varepsilon^{\omega\rho\lambda\sigma}\varepsilon_{\omega\mu\nu\kappa} = -\det\begin{pmatrix} \delta^\rho_\mu & \delta^\rho_\nu & \delta^\rho_\kappa \\ \delta^\lambda_\mu & \delta^\lambda_\nu & \delta^\lambda_\kappa \\ \delta^\sigma_\mu & \delta^\sigma_\nu & \delta^\sigma_\kappa \end{pmatrix}.$$

Следовательно

$$P^{[\rho}S^{\lambda\sigma]} = -\frac{1}{3}W_\omega\varepsilon^{\omega\rho\lambda\sigma}.$$

Учитывая тождество для свертки тензоров Леви-Чивита по двум индексам, получаем

$$\begin{aligned}
[S_{\mu\nu}, W_\tau] &= \mathrm{i}(\eta_{\nu\rho}(\delta^\omega_\tau\delta^\rho_\mu - \delta^\omega_\mu\delta^\rho_\tau) - \eta_{\mu\rho}(\delta^\omega_\tau\delta^\rho_\nu - \delta^\omega_\nu\delta^\rho_\tau))W_\omega = \\
&= \mathrm{i}(\eta_{\mu\nu}W_\tau - \eta_{\nu\tau}W_\mu - \eta_{\mu\nu}W_\tau + \eta_{\mu\tau}W_\nu),
\end{aligned}$$

то есть

$$[S_{\mu\nu}, W_\tau] = \mathrm{i}(\eta_{\mu\tau}W_\nu - \eta_{\nu\tau}W_\mu).$$

Вычислим теперь коммутатор:

$$[W_\mu, W_\nu] = \frac{1}{2}\varepsilon_{\nu\lambda\rho\sigma}\,[W_\mu, P^\lambda S^{\rho\sigma}] = \frac{1}{2}\varepsilon_{\nu\lambda\rho\sigma}\, P^\lambda[W_\mu, S^{\rho\sigma}] = -\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon_{\nu\lambda\rho\sigma}\, P^\lambda(\delta^\rho_\mu W^\sigma - \delta^\sigma_\mu W^\rho).$$

Отсюда

$$[W_\mu, W_\nu] = -\mathrm{i}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, P^\alpha W^\beta.$$

Наконец, найдем выражение для квадрата вектора Паули-Любаньского:

$$W^2 = W_\omega W^\omega = \frac{1}{4}\varepsilon^{\omega\rho\lambda\sigma}\varepsilon_{\omega\mu\nu\kappa}\, P^\mu P_\rho S^{\nu\kappa} S_{\lambda\sigma} =$$

$$= \frac{1}{4}(\delta^\rho_\mu\delta^\lambda_\kappa\delta^\sigma_\nu - \delta^\rho_\mu\delta^\lambda_\nu\delta^\sigma_\kappa + \delta^\lambda_\mu\delta^\rho_\nu\delta^\sigma_\kappa - \delta^\lambda_\mu\delta^\rho_\kappa\delta^\sigma_\nu + \delta^\sigma_\mu\delta^\rho_\kappa\delta^\lambda_\nu - \delta^\sigma_\mu\delta^\rho_\nu\delta^\lambda_\kappa) P^\mu P_\rho S^{\nu\kappa} S_{\lambda\sigma} =$$

$$= \frac{1}{2}(-P^2 S_{\lambda\sigma}S^{\lambda\sigma} + P^\lambda P_\nu S^{\nu\sigma} S_{\lambda\sigma} + P^\sigma P_\nu S^{\lambda\nu} S_{\lambda\sigma}) = \mathcal{L}_\mu \mathcal{L}^\mu - \frac{1}{2}P^2 S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}, \quad \mathcal{L}^\mu = S^{\mu\nu}P_\nu.$$

12. Представления группы Пуанкаре и схема Вигнера

Перейдем к изучению теории Вигнера построения базиса свободных релятивистских полей в пространстве Минковского. Как уже упоминалось в конце предыдущего раздела, базис релятивистских локальных полей составляют неприводимые представления группы Пуанкаре[1]. Имея в виду теорему Вигнера о представлении симметрии, ограничимся рассмотрением унитарных представлений.

В ближайших параграфах мы будем иметь дело только с представлениями собственной группы Пуанкаре $\mathbb{ISO}_+^\uparrow(3,1)$, которую для краткости иногда будем называть «группа Пуанкаре», опуская прилагательное «собственная».

12.1. **Схема Вигнера.** Поскольку группа Пуанкаре являет собой некомпактную группу Ли, то за исключением важного случая единичного представления, все ее унитарные представления бесконечномерны. Рассмотрим некоторое неприводимое унитарное представление собственной группы Пуанкаре. Найдем базис в пространстве $\mathbb{H}$ такого представления. Это можно сделать следующим образом. Дополним операторы Казимира группы Пуанкаре до полного набора взаимно коммутирующих операторов, добавляя необходимые операторы. Далее рассмотрим задачу на собственные значения для всех операторов из полного набора. Соответствующие собственные векторы и формируют искомый базис.

Часть подходящих для полного набора операторов находится сразу. Действительно, поскольку все генераторы трансляций (компоненты оператора энергии-импульса) P^μ коммутируют между собой, $[P^\mu, P^\nu] = 0$, то в пространстве представления $\mathbb{H}$ существует базис, состоящий из общих собственных векторов операторов P^μ, $\mathcal{C}_1 = P^2$ и $\mathcal{C}_2 = W^2$, то есть

$$P^\mu|m^2,\ell,p,\sigma\rangle = p^\mu|m^2,\ell,p,\sigma\rangle,$$

$$P^2|m^2,\ell,p,\sigma\rangle = m^2|m^2,\ell,p,\sigma\rangle, \quad W^2|m^2,\ell,p,\sigma\rangle = \ell|m^2,\ell,p,\sigma\rangle.$$

Здесь (как, впрочем, и выше) мы использовали лемму Шура, согласно которой в пространстве неприводимого представления операторы Казимира кратны единичному оператору. Собственное состояние $|m^2,\ell,p,\sigma\rangle$ нумеруется собственными значениями p^μ, а также набором других возможных квантовых чисел, которые включены в метку σ. Насколько известно из экспериментов, состояние $|m^2,\ell,p,\sigma\rangle$ с фиксированным 4-импульсом p^μ, вырожденно с *конечной кратностью*. Заметим, что так как операторы P^μ и $\mathcal{C}_a$ эрмитовы, то их собственные значения вещественные.

Поскольку первый оператор Казимира равен $\mathcal{C}_1 = P^2 = P_\mu P^\mu$, то получаем

$$P^2|m^2,\ell,p,\sigma\rangle = p_\mu p^\mu|m^2,\ell,p,\sigma\rangle = m^2|m^2,\ell,p,\sigma\rangle, \quad p_0 = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2},$$

где введенное нами ранее вещественное собственное значение m^2 (наряду с ℓ) характеризует релятивистское поле и называется *квадратом массы*. Пока m^2 произвольно, т.е. мы не предопределяем заранее, будет ли $m^2 > 0$, $m^2 = 0$ или $m^2 < 0$. На трехмерный вектор $\boldsymbol{p}$ также нет никаких ограничений (в отличие от временной компоненты p_0). Поэтому каждый базисный вектор $|m^2,\ell,p,\sigma\rangle$ неприводимого представления с параметрами m^2 и ℓ нумеруется вектором $\boldsymbol{p}$. Такое представление принято называть *элементарной системой*.

[1] Важно подчеркнуть, что группа Пуанкаре является, вообще говоря, только кинематической группой симметрии. Полная группа симметрии, совместимая с принципами релятивистской квантовой теории поля, оказывается прямым произведением группы Пуанкаре и некоторой компактной группы *внутренней симметрии*. Так или иначе, изучение (унитарных) неприводимых представлений группы Пуанкаре является необходимым шагом к построению квантовой теории поля.

Установим теперь, как операторы исследуемого представления группы Пуанкаре

$$F_{\Lambda,a} = F_a F_\Lambda$$

действуют на базисные векторы состояния. Для этого достаточно найти $F_a|m^2,\ell,p,\sigma\rangle$ и $F_\Lambda|m^2,\ell,p,\sigma\rangle$. Поскольку группа трансляций абелева,

$$F_a|m^2,\ell,p,\sigma\rangle = \exp\left(\mathrm{i}a^\mu P_\mu\right)|m^2,\ell,p,\sigma\rangle = \exp\left(\mathrm{i}a^\mu p_\mu\right)|m^2,\ell,p,\sigma\rangle.$$

То есть действие операторов трансляций сводится к умножению на фазовый множитель $\exp\left(\mathrm{i}a_\mu p^\mu\right)$, который при переменном a_μ и фиксированном p^μ имеет смысл плоской волны с импульсом p^μ. Это лишний раз подчеркивает смысл p^μ как вектора энергии-импульса.

Перейдем к исследованию векторов вида $F_\Lambda|m^2,\ell,p,\sigma\rangle$. По-видимому, естественно ожидать, что поскольку состояние $|m^2,\ell,p,\sigma\rangle$ является собственным состоянием операторов P_μ с собственными значениями p_μ, то $F_\Lambda|m^2,\ell,p,\sigma\rangle$ также будет собственным 4-вектором операторов P_μ с собственными значениями $p'_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu p_\nu$: $P_\mu F_\Lambda|m^2,\ell,p,\sigma\rangle = \Lambda^\nu{}_\mu p_\nu F_\Lambda|m^2,\ell,p,\sigma\rangle$. На самом деле, это очень легко доказать:

$$P_\mu F_\Lambda|m^2,\ell,p,\sigma\rangle = F_\Lambda[F_\Lambda^\dagger P_\mu F_\Lambda]|m^2,\ell,p,\sigma\rangle = \Lambda^\nu{}_\mu p_\nu F_\Lambda|m^2,\ell,p,\sigma\rangle.$$

Отсюда следуют два важных факта. Во-первых, состояние $F_\Lambda|m^2,\ell,p,\sigma\rangle$ должно быть линейной комбинацией векторов $|m^2,\ell,\Lambda p,\sigma\rangle$, то есть

$$F_\Lambda|m^2,\ell,p,\sigma\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)|m^2,\ell,\Lambda p,\sigma'\rangle.$$

Во-вторых, для каждого вектора $|m^2,\ell,p,\sigma\rangle$ состояние $|m^2,\ell,\Lambda p,\sigma\rangle$ также принадлежит пространству неприводимого представления $\mathbb{H}$ с фиксированными значениями m^2 и ℓ для произвольной матрицы $\Lambda \in \mathbb{SO}_+^\uparrow(3,1)$. Таким образом, для каждой элементарной системы собственные значения оператора P^μ образуют *орбиту* собственной группы Лоренца. Этими орбитами являются:

- Верхняя полость двуполостного гиперболоида, $p^2 = m^2 > 0$, $p_0 > 0$.
- Нижняя полость двуполостного гиперболоида, $p^2 = m^2 > 0$, $p_0 < 0$.
- Верхняя полость светового конуса, $p^2 = 0$, $p_0 > 0$.
- Нижняя полость светового конуса, $p^2 = 0$, $p_0 < 0$.
- Точка, $p^\mu = 0$.
- Однополостный гиперболоид, $p^2 = m^2 < 0$.

Каждому рассматриваемому представлению соответствует одна из шести орбит. Причем, физический интерес в основном представляют собой только орбиты $p^2 = m^2 > 0$, $p_0 > 0$ и $p^2 = 0$, $p_0 > 0$, отвечающие соответственно массивным и безмассовым элементарным системам с положительной энергией. Орбиты $p^2 = m^2 > 0$, $p_0 < 0$ и $p^2 = 0$, $p_0 < 0$ соответствуют системам с отрицательной энергией. Такие системы не имеют наименьшей энергии и не могут быть стабильными на квантовом уровне; их называют *духами*, чтобы подчеркнуть, что им не отвечают реально существующие объекты природы. Орбита $p^2 = m^2 < 0$ соответствует системам с мнимой массой; такие системы называют *тахионами*, объекты такого типа в природе не наблюдаются. Их обнаружение повлекло бы существенное изменение физических представлений. В мире с тахионами может изменяться порядок следствия причинно связанных событий; кроме того, у тахионов нет вакуумного состояния, поэтому потенциально они являются неисчерпаемыми тепловыми резервуарами. Наконец, орбита $p^\mu = 0$ отвечает системе с нулевой энергией и нулевым трехмерным импульсом, т.е. вакууму. Далее мы будем рассматривать представления, отвечающие орбитам $p^2 = m^2 > 0$, $p_0 > 0$ и $p^2 = 0$, $p_0 > 0$, называя их соответственно *массивными* и *безмассовыми*.

Найдем теперь коэффициенты $C_{\sigma'\sigma}$, а также поймем, как можно решить уравнение $W^2|m^2,\ell,p,\sigma\rangle = \ell|m^2,\ell,p,\sigma\rangle$. Последнее сделать несложно: если один из множества векторов $|m^2,\ell,\Lambda p,\sigma\rangle$ удовлетворяет уравнению $W^2|m^2,\ell,\Lambda p,\sigma\rangle = \ell|m^2,\ell,\Lambda p,\sigma\rangle$, то и любой другой вектор данного вида удовлетворяет рассматриваемому уравнению. Отсюда и вытекает идея решения нашего уравнения $W^2|m^2,\ell,p,\sigma\rangle = \ell|m^2,\ell,p,\sigma\rangle$ и нахождения возможных значений ℓ. Необходимо из множества импульсов вида $p'_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu p_\nu$ выбрать один импульс k_μ такой, чтобы рассматриваемое уравнение имело наиболее простой вид. При этом значение ℓ не зависит от того, какой представитель k_μ из множества импульсов был выбран.

Описанная выше процедура фиксации *стандартного импульса* k^μ на некоторой орбите поможет нам и в нахождении коэффициентов $C_{\sigma'\sigma}$. Зафиксируем для каждого 4-импульса p^μ некоторое преобразование Лоренца $L^\mu{}_\nu(p,k) := L(p)$ такое, что

$$p^\mu = L^\mu{}_\nu(p,k)k^\nu.$$

Назовем $L(p)$ *стандартным преобразованием Лоренца.* Тогда можно определить следующее состояние состояние[1]

$$|m^2,\ell,p,\sigma\rangle = N(p)F_{L(p)}|m^2,\ell,k,\sigma\rangle.$$

Запишем вектор $F_\Lambda|m^2,\ell,p,\sigma\rangle$ в виде

$$F_\Lambda|m^2,\ell,p,\sigma\rangle = N(p)F_{\Lambda L(p)}|m^2,\ell,k,\sigma\rangle = N(p)F_{L(\Lambda p)}F_{L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)}|m^2,\ell,k,\sigma\rangle.$$

Суть последнего шага состоит в том, что преобразование Лоренца вида

$$R(\Lambda,p) = L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$$

оставляет стандартный вектор k^μ на месте,

$$(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))^\mu{}_\nu k^\nu = (L^{-1}(\Lambda p))^\mu{}_\alpha \Lambda^\alpha{}_\gamma p^\gamma = k^\mu,$$

т.е. принадлежит *стационарной группе* (или, как еще говорят, *малой группе Вигнера*) вектора k^μ, $(R(\Lambda,p))^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu$.

Будем обозначать малую группу Вигнера через H_k. Для преобразований из H_k формула разложения для вектора $F_{R(\Lambda,p)}|m^2,\ell,k,\sigma\rangle$ принимает вид

$$F_{R(\Lambda,p)}|m^2,\ell,k,\sigma\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(R(\Lambda,p))|m^2,\ell,k,\sigma'\rangle.$$

Очевидно, что операторы F_R с матричными элементами $D_{\sigma'\sigma}(R(\Lambda,p))$ образуют унитарное неприводимое представление малой группы H_k. Это означает, что для любых элементов R_1 и R_2 имеет место соотношение

$$\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(R_1R_2)|m^2,\ell,k,\sigma'\rangle = F_{R_1R_2}|m^2,\ell,k,\sigma\rangle = F_{R_1}F_{R_2}|m^2,\ell,k,\sigma\rangle =$$

$$= F_{R_1}\sum_{\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(R_2)|m^2,\ell,k,\sigma''\rangle = \sum_{\sigma',\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(R_1)D_{\sigma''\sigma}(R_2)|m^2,\ell,k,\sigma'\rangle,$$

и поэтому

$$D_{\sigma'\sigma}(R_1R_2) = \sum_{\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(R_1)D_{\sigma''\sigma}(R_2).$$

С учетом вышесказанного, вектор $F_\Lambda|m^2,\ell,p,\sigma\rangle$ принимает вид

$$F_\Lambda|m^2,\ell,p,\sigma\rangle = N(p)\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(R(\Lambda,p))F_{L(\Lambda p)}|m^2,\ell,k,\sigma'\rangle,$$

[1] Возможность такого определения обусловлена тем, что до сих пор мы ничего не говорили о том, как связаны друг с другом метки σ с разными импульсами. Наше определение как раз восполняет этот пробел.

или

$$F_\Lambda|m^2,\ell,p,\sigma\rangle = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(R(\Lambda,p))|m^2,\ell,\Lambda p,\sigma'\rangle.$$

Итак, помимо проблемы нормировки, задача определения коэффициентов $C_{\sigma'\sigma}$, а также построения унитарных неприводимых представлений собственной группы Пуанкаре сводится к построению неприводимых унитарных представлений малой группы Вигнера. Этот метод был предложен Вигнером и является, на самом деле, частным случаем более общего метода, известного в теории групп как *метод индуцированных представлений.*

Таким образом, с точки зрения релятивистской симметрии элементарная система характеризуется орбитой группы Лоренца в (импульсном) пространстве Минковского и неприводимым унитарным представлением малой группы этой орбиты. Заметим, что поскольку стационарные группы разных точек одной орбиты изоморфны, то выбор стандартного 4-вектора k^μ на орбите и стандартного преобразования Лоренца для классификации релятивистских полей не важен; он влияет только на конкретный вид операторов представления.

Прежде чем переходить к принципиальной задаче нахождения представлений малой группы для массивных и безмассовых орбит, обсудим проблему определения в этих случаях нормировочного множителя $N(p)$. Разумеется, что в определении нормировки собственных состояний оператора импульса имеется определенный произвол. Рассмотрим гильбертово пространство элементарной системы с квадратом массы $p^2 = m^2 \geqslant 0$ и $p_0 > 0$. В этом случае

$$p_0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2},$$

поэтому одночастичное состояние $|m^2,\ell,p,\sigma\rangle$ обозначим пока что через $|\boldsymbol{p},\sigma\rangle$. Из унитарности операторов трансляций имеем

$$\langle\boldsymbol{p}',\sigma'|\boldsymbol{p},\sigma\rangle = \langle\boldsymbol{p}',\sigma'|F_a^\dagger F_a|\boldsymbol{p},\sigma\rangle = e^{\mathrm{i}a_\mu(p^\mu - p'^\mu)}\langle\boldsymbol{p}',\sigma'|\boldsymbol{p},\sigma\rangle$$

при произвольных a^μ, откуда, с учетом унитарности представления малой группы, можно записать

$$\langle\boldsymbol{p}',\sigma'|\boldsymbol{p},\sigma\rangle = C(p)\,\delta_{\sigma'\sigma}\delta(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}).$$

С другой строны,

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{q}',\sigma'|\boldsymbol{q},\sigma\rangle = N^\star(q')N(q)\langle F_{L(q')}\boldsymbol{k},\sigma'|F_{L(q)}|\boldsymbol{k},\sigma\rangle =\\ = \frac{N^\star(q')N(q)}{N^\star(p')N(p)}\langle F_{L(q')L^{-1}(p')}\boldsymbol{p}',\sigma'|F_{L(q)L^{-1}(p)}|\boldsymbol{p},\sigma\rangle =\\ = \frac{N^\star(q')N(q)}{N^\star(p')N(p)}\langle\boldsymbol{p}',\sigma'|F_{L(p')L^{-1}(q')L(q)L^{-1}(p)}|\boldsymbol{p},\sigma\rangle,\end{aligned}$$

для любых q, q', принадлежащих той же орбите группы Лоренца, что и p, p'. Положим $q = \Lambda p$, $q' = \Lambda p'$. Тогда $L(p')L^{-1}(q')L(q)L^{-1}(p) = \mathrm{id}$, что приводит к соотношению

$$\frac{C(\Lambda p)}{|N(\Lambda p)|^2}\,\delta(\boldsymbol{q}' - \boldsymbol{q}) = \frac{C(p)}{|N(p)|^2}\,\delta(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}).$$

Поскольку $q_0\,\delta(\boldsymbol{q}' - \boldsymbol{q}) = p_0\,\delta(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})$, то на каждой орбите

$$\frac{C(\Lambda p)}{|N(\Lambda p)|^2(\Lambda p)_0} = \frac{C(p)}{|N(p)|^2 p_0} = \mathrm{const}.$$

Отсюда окончательно находим, что

$$N(p) = N\sqrt{\frac{C(p)}{p_0}},$$

где N — произвольная ненулевая постоянная. Обычно одночастичные состояния $|\boldsymbol{p},\sigma\rangle$ нормируют таким образом, чтобы $C(p) = 1$; тогда $N(p) \sim p_0^{-1/2}$. Другой удобный выбор нормировки $C(p) \sim p_0$; в этом случае $N(p) = \mathrm{const}$.

Задача 12.1. Докажите, что малая группа Вигнера состоит из операторов вида

$$F_{R(\Lambda,p)} = \exp\left(-\mathrm{i}n_\mu W^\mu\right),$$

то есть что генераторами малой группы являются компоненты псевдовектора Паули Любаньского W^μ, а ее параметрами — компоненты n_μ.

12.2. **Массивные представления.** Исследуем массивные неприводимые унитарные представления группы Пуанкаре. В массивном случае $k^2 = m^2 > 0$ в качестве стандартного 4-вектора импульса всегда можно выбрать $k^\mu = (m, \mathbf{0})$. Малая группа Вигнера изоморфна группе трехмерных вращений $\mathbb{SO}(3)$, ведь поворот является единственным собственным ортохронным преобразованием Лоренца, оставляющим инвариантной частицу с нулевым моментом. Значит, помимо массы, массивное неприводимое представление группы Пуанкаре характеризуется неприводимыми представлениями группы вращений.

Задача 12.2. Покажите, что компоненты вектора Паули-Любаньского в подпространстве представления малой группы вектора $k^\mu = (m, \mathbf{0})$ имеют вид

$$W_0 = 0, \quad \boldsymbol{W}^i = m\boldsymbol{s}^i.$$

Исследуем неприводимые унитарные предствления группы вращений. Выпишем для начала коммутационные соотношения для генераторов $\mathbb{SO}(3)$:

$$[\boldsymbol{s}^i,\boldsymbol{s}^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{0ijk}\boldsymbol{s}^k.$$

Видно, что в полный набор наблюдаемых можно включить лишь один из генераторов, например, s_z, так как два других генератора не коммутируют с ним и не могут иметь совместного с ним базиса собственных векторов.

Ясно, что нулевой коммутатор у генератора поворотов может быть только с самим собой или со скалярной величиной, которая не преобразуется при поворотах, поскольку собственное значение скалярной величины до поворота и после поворота не изменяется. Из генераторов группы поворотов можно построить лишь один независимый скаляр — оператор Казимира $\boldsymbol{s}^2$. Проверим, что $\boldsymbol{s}^2$ действительно является оператором Казимира. Для этого вычислим коммутатор:

$$[\boldsymbol{s}^2,\boldsymbol{s}^j] = [\boldsymbol{s}^i\boldsymbol{s}^i,\boldsymbol{s}^j] = \boldsymbol{s}^i[\boldsymbol{s}^i,\boldsymbol{s}^j] + [\boldsymbol{s}^i,\boldsymbol{s}^j]\boldsymbol{s}^i = \mathrm{i}\varepsilon^{0ijk}(\boldsymbol{s}^i\boldsymbol{s}^k + \boldsymbol{s}^k\boldsymbol{s}^i).$$

Здесь в круглых скобках — симметричный относительно перестановок индексов i и k тензор второго ранга — сворачивается с тензором Леви-Чивита, антисимметричным по перестановкам тех же индексов i и k, но такая свертка симметричного тензора с антисимметричным всегда тождественно равна нулю. В итоге $[\boldsymbol{s}^2,\boldsymbol{s}^i] = 0$ и полный набор наблюдаемых составляют $\{\boldsymbol{s}^2, s_z\}$.

Искомый базис в пространстве неприводимого представления группы вращений удовлетворяет уравнениям на собственные значения полного набора наблюдаемых для группы поворотов:

$$\boldsymbol{s}^2|\lambda,m_s\rangle = \lambda|\lambda,m_s\rangle, \quad s_z|\lambda,m_s\rangle = m_s|\lambda,m_s\rangle.$$

Будем считать этот базис ортонормированным. Введем теперь *повышающий* и *понижающий* генераторы согласно

$$s_\pm = s_x \pm \mathrm{i} s_y.$$

Понятно, что данные генераторы также коммутируют с квадратом спина $\boldsymbol{s}^2$, и это означает, что значение λ не меняется при действии бесконечно малых преобразований с генераторами $s_{x,y}$, но при действии тех же преобразований меняется значение m_s, так как в противном случае, эти генераторы коммутировали бы с s_z, что неверно. Такое положение указывает, что одному и тому же значению λ отвечают несколько значений m_s, т.е. имеет место вырождение спектра собственных значений λ по значениям m_s.

Найдем действие повышающего и понижающего генератора на совместный базисный вектор $|\lambda,m_s\rangle$. Для этого сначала вычислим коммутаторы

$$[s_\pm,s_z] = [s_x,s_z] \pm \mathrm{i}[s_y,s_z] = \mp s_\pm.$$

Тогда

$$s_z s_\pm|\lambda,m_s\rangle = (s_\pm s_z \pm s_\pm)|\lambda,m_s\rangle = (m_s \pm 1)s_\pm|\lambda,m_s\rangle.$$

Значит, вектор $s_\pm|\lambda,m_s\rangle$ имеет собственные значения s_z, равные $m_s \pm 1$:

$$s_\pm|\lambda,m_s\rangle = N_\pm(\lambda, m_s)|\lambda,m_s \pm 1\rangle.$$

Зададим комплексную фазу собственного вектора $|\lambda,m_s\rangle$ так, чтобы нормировочный коэффициент $N_\pm(\lambda, m_s)$ был бы вещественным. Вычислим $N_\pm(\lambda, m_s)$. Для этого заметим, что

$$\boldsymbol{s}^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = s_+s_- + \mathrm{i}[s_x,s_y] + s_z^2 = s_+s_- - s_z + s_z^2,$$

и аналогично

$$\boldsymbol{s}^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = s_-s_+ - \mathrm{i}[s_x,s_y] + s_z^2 = s_-s_+ + s_z + s_z^2.$$

Тогда

$$N_\pm^2(\lambda, m_s) = \langle\lambda,m_s|s_\mp s_\pm|\lambda,m_s\rangle = \langle\lambda,m_s|(\boldsymbol{s}^2 - s_z^2 \mp s_z)|\lambda,m_s\rangle,$$

то есть

$$N_\pm^2(\lambda, m_s) = \lambda - m_s(m_s \pm 1).$$

Поскольку нормировка вектора не может быть отрицательной, $N_\pm^2(\lambda, m_s) \geqslant 0$. Это условие может быть выполнено, только если в цепочках многократного действия повышающего и понижающего операторов, во-первых, значения m_j не произвольны, а принимают такие значения, чтобы $m_s(m_s \pm 1) \leqslant \lambda$, и во-вторых, должны существовать максимальное $m_s^{\max}$ и минимальное $m_s^{\min}$ значения, которые дают в точности нулевые значения нормы вектора после повышения и понижения, соответственно, так как в противном случае повышение и понижение приводило бы к возникновению векторов с отрицательной нормой, что недопустимо, то есть

$$m_s^{\max}(m_s^{\max} + 1) = \lambda, \quad m_s^{\min}(m_s^{\min} - 1) = \lambda.$$

Вместе с тем, действуя многократно на базисный вектор $|\lambda,m_s^{\max}\rangle$ понижающим оператором n раз, мы получим $m_s = m_s^{\max} - n$ и в конце концов вектор, в точности равный $|\lambda,m_s^{\min}\rangle$, в силу существования минимально допустимого значения m_j, т.е. для некоторого неотрицательного целого значения n верно $m_s^{\min} = m_s^{\max} - n$. Тогда связь минимального и максимального значений проекции спина на ось z с собственным значением квадрата спина λ приводит к единственному решению в виде

$$m_s^{\max}(m_s^{\max} + 1) - m_s^{\min}(m_s^{\min} - 1) = 0,$$

откуда

$$m_s^{\max} = \frac{n}{2}, \quad m_s^{\min} = -\frac{n}{2}.$$

Максимальное значение проекции спина на ось z обозначим символом s, так что $s = n/2$, то есть допустимые значения проекции спина — это положительные полуцелые и целые значения. Целые значения отвечают полям, которые называют *тензорными*, а полуцелые — *спинорным полям.*

Таким образом, базис в пространстве неприводимого представления группы вращений образуют общие собственные векторы квадрата спина и его проекции на выбранную ось, так что изменяя обозначения путем подстановки $\lambda = s(s+1) \mapsto s$, запишем его в виде

$$|s,m_s\rangle, \quad m_s \in \{-s, -s+1, \ldots, s-1, s\}.$$

Действие повышающей и понижающей матриц спина на базисные векторы строго определено:

$$s_\pm|s,m_s\rangle = \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)}\,|s,m_s \pm 1\rangle.$$

Размерность пространства собственных векторов квадрата спина и его проекции на выбранную ось равна один старший вектор с максимальным значением проекции и n шагов от старшего вектора до младшего, т.е. вектора с минимальным значением проекции, а значит, $d = 1 + n = 2s + 1$. Это число компонент называется *мультиплетностью* неприводимого представления группы поворотов для поля.

Возвращаясь к классификации массивных неприводимых представлений группы Пуанкаре, запишем квадрат вектора Паули-Любаньского:

$$W^2 = K^\alpha K_\gamma S_{\mu\alpha} S^{\mu\gamma} - \frac{1}{2} K^2 S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} = K_0^2 S_{i0} S^{i0} - \frac{1}{2} K_0^2 S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} =$$
$$= -m^2(\boldsymbol{\mathcal{K}}^2 - \boldsymbol{\mathcal{K}}^2 + 1/2\, S_{ij} S^{ij}) = -m^2 \boldsymbol{s}^2 = -m^2 s(s+1).$$

Значит, при заданной массе собственное значение W^2 определяется квадратом спина. В итоге все состояния заданного типа отвечают одинаковым значениям релятивистских инвариантов: массы и квадрата спина; отличаются же они значениями импульса и проекции спина на выделенное направление. Таким образом, состояние свободной массивной системы $|m^2,s,\boldsymbol{p},m_s\rangle$ можно характеризовать полным набором попарно коммутирующих наблюдаемых: масса, импульс, квадрат спина и проекция спина на выделенное направление, — и описать квантовыми числами: $\{m, \boldsymbol{p}, s, m_s\}$.

В заключение параграфа сделаем следующее замечание. Мы рассмотрели ситуацию с фиксированным значением спина. Отметим, что имеет место также предел, когда спин стремится к бесконечности, а масса бесконечно мало отличается от нуля, так что $m^2 s(s+1) \to w^2 = \text{const}$. В этом случае говорят о представлении с конечным значением квадрата псевдовектора Паули-Любаньского при бесконечном значении спина и нулевой массе. Данный случай мы не рассматриваем.

12.3. **Безмассовые представления.**

...///

12.4. **Тензорное представление группы Лоренца.**

12.5. **Вейлевские спиноры.** ...///

§6.1. Спин-тензоры и пространство неприводимого представления

Сопоставим каждой матрице $\omega \in SL(2|\mathbb{C})$ матрицу, действующую в $2(p+q)$-мерном комплексном пространстве по правилу

$$\omega_a{}^b \to \omega_{a_1}{}^{b_1} ... \omega_{a_p}{}^{b_p}\, \overline{\omega}_{\dot a_1}{}^{\dot b_1} ... \overline{\omega}_{\dot a_q}{}^{\dot b_q}.$$

Компоненты вектора из этого векторного пространства представления обозначим через $\psi_{a_1...a_p\dot a_1...\dot a_q}$. Его называют спин-тензором типа (p,q). Закон преобразования спин-тензора под действием группы $SL(2|\mathbb{C})$ даётся выражением

$$\psi'_{a_1...a_p\dot a_1...\dot a_q} = \omega_{a_1}{}^{b_1} ... \omega_{a_p}{}^{b_p}\, \overline{\omega}_{\dot a_1}{}^{\dot b_1} ... \overline{\omega}_{\dot a_q}{}^{\dot b_q} \psi_{b_1...b_p\dot b_1...\dot b_q}. \tag{6.1}$$

Соотношение (6.1) задаёт представление группы $SL(2|\mathbb{C})$ (которое по факту является тензорным произведением фундаментальных и сопряжённых представлений $SL(2|\mathbb{C})$) в пространстве спин-тензоров.

Представление, определённое выше, в общем случае приводимо. Научимся строить пространство неприводимого представления на простом примере: рассмотрим спин-тензор типа (2,0): $\psi_{a_1a_2}$; запишем его в виде суммы симметричной и антисимметричной частей.

$$\psi_{a_1a_2} = \psi_{(a_1a_2)} + \psi_{[a_1a_2]} = \psi_{(a_1a_2)} + \begin{pmatrix} 0 & -\psi \\ \psi & 0 \end{pmatrix} = \psi_{(a_1a_2)} + \varepsilon_{a_1a_2}\psi. \tag{6.2}$$

Найдём закон преобразования симметричной и антисимметричной частей (6.2). Начнём с антисимметричной части.

$$\psi'_{[a_1a_2]} = \varepsilon_{a_1a_2}\psi' = \omega_{[a_1}{}^{b_1}\omega_{a_2]}{}^{b_2}\psi_{b_1b_2} = \omega_{[a_1}{}^{b_1}\omega_{a_2]}{}^{b_2}\left(\psi_{(b_1b_2)} + \varepsilon_{b_1b_2}\psi\right),$$

$$\begin{aligned}
\omega_{[a_1}{}^{b_1}\omega_{a_2]}{}^{b_2}\psi_{(b_1b_2)} &= \frac{1}{4}\left(\omega_{a_1}{}^{b_1}\omega_{a_2}{}^{b_2} - \omega_{a_2}{}^{b_1}\omega_{a_1}{}^{b_2}\right)\left(\psi_{b_1b_2} + \psi_{b_2b_1}\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(\omega_{a_1}{}^{b_1}\omega_{a_2}{}^{b_2}\psi_{b_1b_2} + \omega_{a_1}{}^{b_1}\omega_{a_2}{}^{b_2}\psi_{b_2b_1} - \omega_{a_2}{}^{b_1}\omega_{a_1}{}^{b_2}\psi_{b_1b_2} - \omega_{a_2}{}^{b_1}\omega_{a_1}{}^{b_2}\psi_{b_2b_1}\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(\omega_{a_1}{}^{b_1}\omega_{a_2}{}^{b_2} + \omega_{a_1}{}^{b_2}\omega_{a_2}{}^{b_1} - \omega_{a_2}{}^{b_1}\omega_{a_1}{}^{b_2} - \omega_{a_2}{}^{b_2}\omega_{a_1}{}^{b_1}\right)\psi_{b_1b_2} = 0.
\end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned}
\omega_{[a_1}{}^{b_1}\omega_{a_2]}{}^{b_2}\varepsilon_{b_1b_2} &= \frac{1}{2}\left(\omega_{a_1}{}^{b_1}\omega_{a_2}{}^{b_2} - \omega_{a_2}{}^{b_1}\omega_{a_1}{}^{b_2}\right)\varepsilon_{b_1b_2} = \\
&= \frac{1}{2}\left(-\omega_{a_1}{}^{1}\omega_{a_2}{}^{2} + \omega_{a_1}{}^{2}\omega_{a_2}{}^{1} + \omega_{a_2}{}^{1}\omega_{a_1}{}^{2} - \omega_{a_2}{}^{2}\omega_{a_1}{}^{1}\right) = -\left(\omega_{a_1}{}^{1}\omega_{a_2}{}^{2} - \omega_{a_1}{}^{2}\omega_{a_2}{}^{1}\right),
\end{aligned}$$

то есть

$$\omega_{[a_1}{}^{b_1}\omega_{a_2]}{}^{b_2}\varepsilon_{b_1b_2} = \varepsilon_{a_1a_2}\left(\omega_1{}^1\omega_2{}^2 - \omega_1{}^2\omega_2{}^1\right) = \det\omega\cdot\varepsilon_{a_1a_2} = \varepsilon_{a_1a_2}.$$

Значит, $\psi' = \psi$, т.е. ψ не преобразуется. Рассмотрим теперь преобразование симметричной части.

$$\psi'_{(a_1a_2)} = \omega_{(a_1}{}^{b_1}\omega_{a_2)}{}^{b_2}\psi_{b_1b_2} = \omega_{(a_1}{}^{b_1}\omega_{a_2)}{}^{b_2}\left(\psi_{(b_1b_2)} + \varepsilon_{b_1b_2}\psi\right),$$

$$\omega_{(a_1}{}^{b_1}\omega_{a_2)}{}^{b_2}\varepsilon_{b_1b_2} = \frac{1}{2}\left(\omega_{a_1}{}^{b_1}\omega_{a_2}{}^{b_2} + \omega_{a_2}{}^{b_1}\omega_{a_1}{}^{b_2}\right)\varepsilon_{b_1b_2} = \frac{1}{2}\left(-\omega_{a_1}{}^{1}\omega_{a_2}{}^{2} + \omega_{a_1}{}^{2}\omega_{a_2}{}^{1} + \omega_{a_2}{}^{2}\omega_{a_1}{}^{1} - \omega_{a_2}{}^{1}\omega_{a_1}{}^{2}\right) = 0.$$

Отсюда $\psi'_{(a_1a_2)} = \omega_{(a_1}{}^{b_1}\omega_{a_2)}{}^{b_2}\psi_{(b_1b_2)}$. Таким образом, компоненты ψ и $\psi_{(a_1a_2)}$ спин-тензора $\psi_{a_1a_2}$ преобразуются независимо друг от друга. Мы видим, что в линейном пространстве спин-тензоров типа (2,0) есть инвариантные подпространства, а значит, представление группы $SL(2|\mathbb{C})$ в этом векторном пространстве приводимо. Очевидно, что представление на спин-тензорах ψ неприводимо, поскольку одномерное. Представление на симметричных спин-тензорах $\psi_{(a_1a_2)}$ также неприводимо, поскольку единственным инвариантным объектом, который можно было использовать для выделения инвариантного подпространства является спинорная метрика $\varepsilon_{a_1a_2}$, но она уже была использована.

Проводя аналогичные рассуждения для спин-тензоров типа (0,2), можно получить, что $\chi_{\dot a_1\dot a_2} = \chi_{(\dot a_1\dot a_2)} + \varepsilon_{\dot a_1\dot a_2}\chi$, причём компоненты $\chi_{(\dot a_1\dot a_2)}$ и χ преобразуются неприводимо. В общем же случае спин-тензора типа (p,q) необходимо просвести симметризацию и актисимметризацию по отдельности точечных и неточечных индексов: каждая симметризация порождает спинорную метрику $\varepsilon_{a_ia_k}$, $\varepsilon_{\dot a_i\dot a_k}$, умноженные на спин-тензор низшего ранга; в каждом таком спин-тензоре вновь проведём симметризацию и антисимметризацию точечных и неточечных индексов и т.д. Полностью симметричный спин-тензор $\psi_{(a_1\ldots a_p)(\dot a_1\ldots\dot a_q)}$ преобразуется через себя и не может быть сведён с помощью инвариантных тензоров к спин-тензору более простого вида. Это значит, что неприводимое конечномерное представление группы $SL(2|\mathbb{C})$ реализуется в линейном пространстве спин-тензорных полей вида $\psi_{(a_1\ldots a_p)(\dot a_1\ldots\dot a_q)}$. Это представление обозначается через $\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)$.

§6.2. Взаимная конвертация спинорных и пространственно-временных индексов

Мы только что построили спин-тензорное представление группы $SL(2|\mathbb{C})$ — универсальной накрывающей группы Лоренца; на прошлой лекции мы изучили тензорное представление группы Лоренца. Возникает вопрос: есть ли среди представлений $\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)$ группы $SL(2|\mathbb{C})$ тензорные представления группы Лоренца? Для ответа на этот вопрос вспомним соотношение, определяющее матрицу лоренцевских преобразований Λ в зависимости от $\omega \in SL(2|\mathbb{C})$ в контексте построенного нами ранее гомоморфизма $\pi : SL(2|\mathbb{C}) \to SO_+^\uparrow(3,1)$:

$$\Lambda(\omega)^\mu{}_\nu\,\sigma_\mu = \omega\sigma_\nu\omega^\dagger.$$

Отсюда

$$\sigma_\mu = (\Lambda^{\mathrm{T}}(\omega)^{-1})_\mu{}^\nu\omega\sigma_\nu\omega^\dagger. \tag{6.3}$$

Обозначим элемент матрицы $\sigma_\mu = (\mathbf{1},\boldsymbol{\sigma})$ через $(\sigma_\mu)_{a\dot a}$. Тогда в индексных обозначениях (6.3) примет вид

$$(\sigma_\mu)_{a\dot a} = (\Lambda^{\mathrm{T}}(\omega)^{-1})_\mu{}^\nu\omega_a{}^b\overline{\omega}_{\dot a}{}^{\dot b}\,(\sigma_\nu)_{b\dot b}. \tag{6.4}$$

Это соотношение показывает, что $(\sigma_\mu)_{a\dot a}$ образуют инвариантный тензор (σ_μ образуют инвариантный матричный вектор). Поднимая спинорные индексы, получим

$$(\tilde\sigma_\mu)^{\dot a a} = \varepsilon^{\dot a\dot b}\varepsilon^{ab}(\sigma_\mu)_{b\dot b} = (\sigma_\mu)^{a\dot a}. \tag{6.5}$$

Прямые вычисления показывают, что $\tilde{\sigma}_\mu = (\mathbf{1}, -\boldsymbol{\sigma})$. Матрицы σ_μ и $\tilde{\sigma}_\mu$ обладают большим количеством полезных свойств, из которых мы отметим следующие:

$$(\sigma_\mu\tilde{\sigma}_\nu + \sigma_\nu\tilde{\sigma}_\mu)_a{}^b = 2\eta_{\mu\nu}\delta_a{}^b, \qquad (\sigma_\mu\tilde{\sigma}_\nu + \sigma_\nu\tilde{\sigma}_\mu)_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} = 2\eta_{\mu\nu}\delta_{\dot{a}}{}^{\dot{b}},$$

$$(\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a}(\sigma_\nu)_{a\dot{a}} = 2\eta_{\mu\nu}, \qquad (\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{b}b}(\sigma^\mu)_{a\dot{a}} = 2\delta_a{}^b\delta_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}.$$

Эти свойства проверяются прямыми вычислениями. Инвариантные матричные векторы $(\sigma_\mu)_{a\dot{a}}$ и $(\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a}$, имеющие один лоренцев индекс и пару спинорных индексов, позволяют конвертировать один векторный индекс в пару спинорных индексов и наоборот. Так, например, вектору v_μ можно сопоставить спин-тензор $\psi^{(v)}_{a\dot{a}}$ по правилу

$$\psi^{(v)}_{a\dot{a}} = (\sigma^\mu)_{a\dot{a}}\, v_\mu. \tag{6.6}$$

Отсюда видно, что

$$v_\mu = \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a}\psi^{(v)}_{a\dot{a}} = \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a}(\sigma^\nu)_{a\dot{a}}\, v_\nu = \delta^\nu_\mu\, v_\nu = v_\mu. \tag{6.7}$$

Заметим, что спин-тензор $\psi^{(v)}_{a\dot{a}}$ соответствует неприводимому представлению $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ группы $SL(2|\mathbb{C})$ и поскольку, согласно (6.6) и (6.7), спин-тензор $\psi^{(v)}_{a\dot{a}}$ эквивалентен вектору v_μ, то лоренцев вектор v_μ соответствует неприводимому представлению $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ группы $SL(2|\mathbb{C})$.

Соотношения (6.6) и (6.7) указывают на общий способ взаимной конвертации лоренцевых и спинорных индексов: необходимо применять правила (6.6) к каждому пространственно-временному индексу и правило (6.7) к каждой паре неточечно-точечных спинорных индексов.
Пусть задан тензор n-го ранга $T_{\mu_1\ldots\mu_n}$. Ему соответствует спин-тензор типа (n,n):

$$\psi^{(T)}_{a_1\ldots a_n\dot{a}_1\ldots\dot{a}_n} = (\sigma^{\mu_1})_{a_1\dot{a}_1}\ldots(\sigma^{\mu_n})_{a_n\dot{a}_n}T_{\mu_1\ldots\mu_n}. \tag{6.8}$$

Отсюда, согласно (6.7), имеем

$$T_{\mu_1\ldots\mu_n} = \frac{1}{2^n}(\tilde{\sigma}_{\mu_1})^{\dot{a}_1a_1}\ldots(\tilde{\sigma}_{\mu_n})^{\dot{a}_na_n}\,\psi^{(T)}_{a_1\ldots a_n\dot{a}_1\ldots\dot{a}_n}. \tag{6.9}$$

Полученные соотношения показывают, что спин-тензор с равным количеством точечных и неточечных индексов эквивалентен некоторому лоренцеву тензору; при $m \neq n$ спин-тензор типа (n,m), вообще говоря, не сводится ни к каким чисто лоренцевым тензорам.

По построению произвольный спин-тензор типа (p,q) является комплексным. Рассмотрим закон его преобразования

$$\psi'_{a_1\ldots a_p\dot{c}_1\ldots\dot{c}_q} = \omega_{a_1}{}^{b_1}\ldots\omega_{a_p}{}^{b_p}\,\overline{\omega}_{\dot{c}_1}{}^{\dot{d}_1}\ldots\overline{\omega}_{\dot{c}_q}{}^{\dot{d}_q}\psi_{b_1\ldots b_p\dot{d}_1\ldots\dot{d}_q}.$$

После комплексного сопряжения, это равенство принимает вид

$$(\psi'_{a_1\ldots a_p\dot{c}_1\ldots\dot{c}_q})^\star = \omega_{c_1}{}^{d_1}\ldots\omega_{c_q}{}^{d_q}\,\overline{\omega}_{\dot{a}_1}{}^{\dot{b}_1}\ldots\overline{\omega}_{\dot{a}_p}{}^{\dot{b}_p}(\psi_{b_1\ldots b_p\dot{d}_1\ldots\dot{d}_q})^\star.$$

Мы видим, что спин-тензор $(\psi_{a_1\ldots a_p\dot{c}_1\ldots\dot{c}_q})^\star$ преобразуется как спин-тензор типа (q,p). Положим по определению

$$(\psi_{a_1\ldots a_p\dot{c}_1\ldots\dot{c}_q})^\star = \overline{\psi}_{c_1\ldots c_q\dot{a}_1\ldots\dot{a}_p}. \tag{6.10}$$

Говорят, что спин-тензор $\overline{\psi}_{c_1\ldots c_q\dot{a}_1\ldots\dot{a}_p}$ является комплексно сопряжённым к спин-тензору $\psi_{a_1\ldots a_p\dot{c}_1\ldots\dot{c}_q}$. Выясним теперь, при каких условиях спин-тензор может быть вещественным: в этом случае он должен сопадать со своим комплексно сопряжённым спин-тензором, то есть должно выполняться равенство

$$\overline{\psi}_{a_1\ldots a_q\dot{a}_1\ldots\dot{a}_p} = \psi_{a_1\ldots a_p\dot{a}_1\ldots\dot{a}_q}.$$

Отсюда следует, что $p = q$, поэтому вещественный спин-тензор должен иметь стуктуру типа $(p{,}p)$. Поскольку в этом случае числа точечных и неточечных индексов совпадают, то вещественный спин-тензор всегда может быть конвертирован к лоренцев тензор согласно формуле (6.9).

Переход от лоренцевых индексов к спинорным может оказаться полезным при выполнении некоторых преобразований типа выделения неприводимых компонент. В качестве примера рассмотрим тензор второго ранга $G_{\mu\nu}$. Соответствующий ему спин-тензор определяется согласно

$$\psi^{(G)}_{ab\dot a\dot b} = (\sigma^\mu)_{a\dot a}(\sigma^\nu)_{b\dot b}\, G_{\mu\nu}.$$

Выделим неприводимые компоненты спин-тензора $\psi^{(G)}_{ab\dot a\dot b}$ при помощи симметризации и антисимметризации:

$$\psi^{(G)}_{ab\dot a\dot b} = \psi^{(G)}_{(ab)(\dot a\dot b)} + \psi^{(G)}_{[ab](\dot a\dot b)} + \psi^{(G)}_{(ab)[\dot a\dot b]} + \psi^{(G)}_{[ab][\dot a\dot b]} = \psi^{(G)}_{(ab)(\dot a\dot b)} + \varepsilon_{ab}\psi^{(G)}_{(\dot a\dot b)} + \varepsilon_{\dot a\dot b}\psi^{(G)}_{(ab)} + \varepsilon_{ab}\varepsilon_{\dot a\dot b}\psi_{(G)}. \tag{6.11}$$

Здесь

$$\psi^{(G)}_{(ab)} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\dot a\dot b}\psi^{(G)}_{(ab)[\dot a\dot b]}, \qquad \psi^{(G)}_{(\dot a\dot b)} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ab}\psi^{(G)}_{[ab](\dot a\dot b)}, \qquad \psi_{(G)} = \frac{1}{4}\varepsilon^{ab}\varepsilon^{\dot a\dot b}\psi^{(G)}_{[ab][\dot a\dot b]} = \frac{1}{4}\varepsilon^{ab}\varepsilon^{\dot a\dot b}\psi^{(G)}_{ab\dot a\dot b}. \tag{6.12}$$

Поэтому

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\tilde\sigma_\mu)^{\dot a a}(\tilde\sigma_\nu)^{\dot b b}\,\psi^{(G)}_{ab\dot a\dot b} = \frac{1}{4}(\tilde\sigma_\mu)^{\dot a a}(\tilde\sigma_\nu)^{\dot b b}\left\{\psi^{(G)}_{(ab)(\dot a\dot b)} + \varepsilon_{ab}\psi^{(G)}_{(\dot a\dot b)} + \varepsilon_{\dot a\dot b}\psi^{(G)}_{(ab)} + \varepsilon_{ab}\varepsilon_{\dot a\dot b}\psi_{(G)}\right\}.$$

Проводя прямые вычисления, нетрудно проверить, что последнее выражение приводится к виду

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\tilde\sigma_\mu)^{\dot a a}(\tilde\sigma_\nu)^{\dot b b}\psi^{(G)}_{(ab)(\dot a\dot b)} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\psi_{(G)} + \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})^{ab}\psi^{(G)}_{(ab)} - \frac{1}{2}(\tilde\sigma_{\mu\nu})^{\dot a\dot b}\psi^{(G)}_{(\dot a\dot b)}, \tag{6.13}$$

где

$$(\sigma_{\mu\nu})_a{}^b = -\frac{1}{4}\left(\sigma_\mu\tilde\sigma_\nu - \sigma_\nu\tilde\sigma_\mu\right)_a{}^b, \qquad (\tilde\sigma_{\mu\nu})^{\dot a}{}_{\dot b} = -\frac{1}{4}\left(\tilde\sigma_\mu\sigma_\nu - \tilde\sigma_\nu\sigma_\mu\right)^{\dot a}{}_{\dot b}. \tag{6.14}$$

При этом $\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}$, $\tilde\sigma_{\mu\nu} = -\tilde\sigma_{\nu\mu}$, $(\sigma_{\mu\nu})^{ab} = (\sigma_{\mu\nu})^{ba}$, $(\tilde\sigma_{\nu\mu})^{\dot a\dot b} = (\tilde\sigma_{\nu\mu})^{\dot b\dot a}$.

Соотношение (6.13) представляет собой разложение произвольного тензора второго ранга на неприводимые компоненты. Таким образом, произвольный тензор второго ранга соответствует приводимому представлению группы $SL(2|\mathbb{C})$, включающему следующие неприводимые представления: (1,1), (1,0), (0,1) и (0,0).

Упражнение. Исследовать отдельно случаи симметричного и антисимметричного тензоров второго ранга. Какому представлению группы $SL(2|\mathbb{C})$ отвечает симметричный бесследовый тензор второго ранга?

13. Симметрии действия и теорема Нетер

Одна из важнейших ролей функционала действия заключается в том, что его симметрии определяют сохраняющиеся величины. В теории поля рассматривают три типа симметрий: *аффинные симметрии пространства и времени*, *внутренние симметрии* и *суперсимметрии*.

Аффинные симметрии включают в себя группу изометрий метрики пространства-времени. В основе современных представлений о пространстве и времени лежит специальная теория относительности, согласно которой наше пространство-время (в отсутствие гравитации) представляет собой плоское четырехмерное пространство Минковского $M = \mathbb{R}^{1+3}$, снабженное метрикой вида $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Ее изометрии

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + a^{\mu}, \quad \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}$$

называют *преобразованиями Лоренца*. Они, как известно, образуют некомпактную десяти параметрическую группу Ли — *группу Пуанкаре* $\mathbb{IO}(3{,}1)$, состоящую из четырех компонент связности и имеющую две очевидные подгруппы — группу пространственно-временных *трансляций*: $x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$ и *группу Лоренца* $\mathbb{O}(3{,}1)$: $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$. Преобразования группы Лоренца называются *однородными преобразованиями Лоренца* и включают в себя лоренцевы бусты по трем независимым направлениям, вращения относительно трех независимых осей, а также дискретные преобразования пространственной инверсии и обращения времени. Для некоторого инфинитезимального однородного преобразования Лоренца $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}$ выполняется свойство антисимметрии групповых параметров $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$. Действительно, уравнение на изометрии метрики η, записанное в компонентах с точностью до членов первого порядка, доказывает наше утверждение:

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = (\delta^{\mu}_{\alpha} + \omega^{\mu}{}_{\alpha})(\delta^{\nu}_{\beta} + \omega^{\nu}{}_{\beta})\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\nu}\omega^{\nu}{}_{\beta} + \eta_{\mu\beta}\omega^{\mu}{}_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha}.$$

Таким образом, среди параметров $\omega_{\mu\nu}$ только шесть являются независимыми: три параметра бустов $\omega_{0i} = v_i$ и три параметра вращений $\omega_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\phi^k$. К ним добавляются четыре параметра пространственно-временных трансляций a^{μ}. В итоге получаем, что группа Пуанкаре является десятипараметрической группой, как и указывалось выше. Инвариантность (симметрия) функционала действия относительно преобразований группы Пункаре обеспечивается «правильной» структурой полевого лагранжиана. Последняя подразумевает, что лагранжиан в теории поля является релятивистским инвариантом, т.е. ведет себя как скалярная функция при преобразованиях Лоренца. Для того, чтобы строить такие скалярные функции, необходимо понимать, как группа аффинных симметрий действует на различные локальные поля. Изучением этих вопросов мы скоро займемся, а сейчас поговорим о других типах симметрий.

Неформально говоря, под внутренними симметриями понимают преобразования инвариантности (образующие компактные группы), не затрагивающие напрямую пространственно-временных координат, то есть преобразования полей, которые оставляют инвариантным функционал действия рассматриваемой полевой системы. Внутренние симметрии могут быть либо *глобальными*, т.е. совсем независимыми от координат пространства-времени, либо *локальными*, как в *калибровочных теориях*, где группа внутренней симметрии зависит от точки пространства и времени. Важными для физики примерами внутренних симметрии являются *изотопическая* $\mathbb{SU}(2)$-*симметрия* и $\mathbb{SU}(3)$-*симметрия ароматов легких кварков*[1]. С множеством других интересных примеров внутренних симметрий мы познакомимся позже.

Суперсимметрия нетривиальным образом сочетает в себе как аффинные, так и внутренние симметрии. По своей сути суперсимметрия является расширением симметрии специальной теории относительности. Можно сказать, что суперсимметрия — это симметрия специальной теории относительности, расширенная симметрией между бозонами и фермионами. Основную идею суперсимметрии в теории поля можно объяснить следующим образом. Рассмотрим некоторую модель теории поля. Любая такая модель задается в терминах функционала действия $S[b,f]$, зависящего от набора бозонных полей $b(x)$ и набора фермионных полей $f(x)$. Рассмотрим инфинитезимальные преобразования полей $b(x)$ и $f(x)$ вида

$$b \to b + \delta b, \quad f \to f + \delta f, \quad \delta b \sim f, \quad \delta f \sim b.$$

Если действие S инвариантно относительно этих преобразований, $\delta S[b,f] = 0$, рассматриваемая модель поля называется суперсимметричной. Такие преобразования называются преобразованиями суперсимметрии или *суперпреобразованиями*. Конечно, приведенные выше утверждения выглядят очень схематично и наивно, пока мы не ответили на следующие вопросы. Каковы явные наборы полей b и f в рассматриваемой модели? Каков явный вид суперпреобразований? Каков явный вид функционала действия? На все эти вопросы мы ответим в свое время, а сейчас сформулируем и докажем важную теорему, связывающую непрерывные симметрии действия с законами сохранения — *теорему Нетер*.

Рассмотрим лагранжеву полевую систему, описываемую некоторым лагранжианом $\mathscr{L}(\phi^I, \partial_\mu \phi^I)$. Пусть полевая конфигурация $\phi^I(x)$ является решением уравнений движения для этой системы, которое под действием n-параметрической группы преобразований вида

$$\phi^I_g = \phi^I_g(x,g_a), \quad a \in \{1, \ldots, n\}$$

переходит в другое решение уравнений движения с тем же лагранжианом. Поскольку в любой группе существует единичный элемент, то существует такие значения параметров g^a, при котором преобразование полей тождественно. Пусть для определенности такое происходит при $g^a = 0$.

Посмотрим на изменение экстремума действия $S[\phi^I(x)]$ в зависимости от параметров преобразования g^a. Для этого рассмотрим инфинитезимальное преобразование вблизи $g = 0$: разложим преобразование по степеням g^a вблизи нуля до первого порядка

$$\phi^I_g(x) = \phi^I(x) + g^a \Phi^I_a(x).$$

Здесь функции

$$\Phi^I_a(x) = \frac{\partial}{\partial g^a} \phi^I_g(x,g_a)|_{g=0}$$

представляют собой генераторы инфинитезимальных полевых преобразований. Изменение экстремума действия в зависимости от параметра преобразования дается формулой

$$\frac{dS}{dg^a} = \lim_{g \to 0} \frac{S[\phi^I_g(x)] - S[\phi^I(x)]}{g^a}.$$

[1]Следует отметить, что симметрия ароматов легких кварков не является точной: массовые члены, а также электромагнитные и слабые взаимодействия не инвариантны относительно нее.

Найдем
$$\delta S = S[\phi^I_g(x)] - S[\phi^I(x)] = \int_M d_4x \left\{ \mathscr{L}(\phi^I_g, \partial_\mu \phi^I_g) - \mathscr{L}(\phi^I, \partial_\mu \phi^I) \right\}.$$
Для этого произведем разложение лагранжиана как функции от преобразованных полей по формуле Тейлора с точностью до первого порядка и воспользуемся уравнениями Эйлера-Лагранжа. Имеем
$$\delta S = g^a \int_M d_4x \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^I} \Phi^I_a(x) + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi^I} \partial_\mu \Phi^I_a(x) \right\} = g^a \int_M d_4x \, \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi^I} \Phi^I_a(x) \right\}.$$
Отсюда видно, что изменение экстремума действия
$$\frac{dS}{dg^a} = \int_M d_4x \, \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi^I} \Phi^I_a(x) \right\}.$$
Последнее выражение и составляет содержание теоремы Нетер. Если экстремум действия не зависит от параметров g^a, то есть $\frac{dS}{dg^a} \equiv 0$, то такое непрерывное преобразование называется *симметрией*. Значит, этому экстремуму отвечает целое семейство решений уравнений движения полевой системы.

Если вспоминить теперь, что полевые лагранжианы, отличающиеся друг от друга полной 4-дивергенцией, физически эквивалентны, то теорема Нетер допускает следующее очевидное обобщение:
$$\frac{dS}{dg^a} = \int_M d_4x \, \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi^I} \Phi^I_a(x) - F^\mu_a(x) \right\}.$$
Таким образом, при наличии симметрии имеет место уравнение непрерывности
$$\partial_\mu \mathscr{J}^\mu_a = 0, \quad \mathscr{J}^\mu_a = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi^I} \Phi^I_a - F^\mu_a.$$
Величины $\mathscr{J}^\mu_a$ называют обычно *нетеровскими токами.*

Подчеркнем, что физическое содержание теоремы Нетер полностью определяется нетривиальным фактом существования определенных n-параметрических преобразований в классе решений уравнений движений для заданной системы, то есть при неизменной функции Лагранжа. Именно этот факт является квинтэссенцией комплиментарного ряда эмпирических данных или теоретических идей и моделей, факт, который, на самом деле, многое говорит о физической системе. Сама же теорема обладает безусловной математической красотой, присущей безупречному потоку тождественных преобразований.

Прямым следствием теоремы Нетер является сохранение во времени *нетеровских зарядов*
$$Q_a = \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r} \, \mathscr{J}^0_a = \text{const}.$$
Для вывода этого закона сохранения проинтегрируем уравнения непрерывности для токов по пространству
$$0 = \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r} \, \partial_\mu \mathscr{J}^\mu_a = \frac{d}{dt} Q_a + \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r} \, \partial_i \mathscr{J}^i_a.$$
Преобразуем последний член по формуле Остроградского-Гаусса в поверхностный интеграл (по границе ∂V бесконечного объема $V \to \infty$)
$$\int_V d\boldsymbol{r} \, \partial_i \mathscr{J}^i_a = \oint_{\partial V} d_2\sigma_i \mathscr{J}^i_a = 0,$$

где предполагается, что $\mathscr{J}_a^i \to 0$ на пространственной бесконечности, при $|\boldsymbol{r}| \to \infty$. Отсюда и получается закон сохранения зарядов $Q_a = \mathrm{const}$. Однако, уравнение непрерывности для нетеровских токов ($\partial_\mu \mathscr{J}_a^\mu = 0$) является гораздо более сильным утверждением, чем существование сохраняющихся зарядов, поскольку оно подразумевает, что заряды сохраняются локально. Чтобы это увидеть, проинтегрируем уравнение непрерывности в конечном объеме V:

$$0 = \int_V d\boldsymbol{r}\, \partial_\mu \mathscr{J}_a^\mu = \frac{d}{dt} Q_V^a + \int_V d\boldsymbol{r}\, \partial_i \mathscr{J}_a^i = \frac{d}{dt} Q_V^a + \oint_{\partial V} d_2\sigma_i \mathscr{J}_a^i.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt} Q_V^a = -\oint_{\partial V} d_2\sigma_i \mathscr{J}_a^i.$$

Это уравнение означает, что любые заряды, выходящие из объема V, должны быть учтены потоком вектора $\mathscr{J}_a^i$, «вытекающего» из объема. Данный вид локального закона сохранения зарядов имеет место в любой локальной теории поля.

13.1. **Канонический тензор энергии-импульса.** В качестве важного примера применения теоремы Нетер посмотрим, к чему приводит инвариантность действия относительно подгруппы $\mathbb{IO}(3{,}1)$ — группы трансляций. Эта симметрия является наиболее распространенной среди тех, с которыми нам приходится сталкиваться в теории поля, ведь полевые лагранжианы не зависят явно от пространственно-временных координат.

При пространственно-временных трансляциях поля преобразуются согласно

$$\phi^I(x) \to \phi_g^I(x) = \phi^I(x+g).$$

Соответствующие генераторы полевых преобразований

$$\Phi_g^I(x) = \frac{\partial}{\partial g^\mu}[\phi^I(x) + g^\mu \partial_\mu \phi^I(x)]|_{g=0} = \partial_\mu \phi^I(x).$$

.../ / /

13.2. **Группа Пуанкаре.** В этом семестре мы будем изучать классические локальные релятивистские поля, то есть локальные поля на пространстве-времени Минковского M с координатами $x^\mu = (t, \boldsymbol{r})$. Смысл термина «локальный» в контексте теории поля мы объясним позже, а сейчас сосредоточимся на релятивистской инвариантности. В пространстве-времени M действует группа аффинных симметрий — группа Пуанкаре:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu + a^\mu, \quad \Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \quad \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1).$$

Групповое умножение представлено последовательными преобразованиями координат. В инфинитезимальном виде преобразования Пуанкаре можно записать как

$$x'^\mu = x^\mu + \omega^\mu_{\ \nu} x^\nu + a^\mu, \quad \omega, a \to 0.$$

Здесь параметры $\omega_{\mu\nu}$ являются антисимметричными, $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$. Действительно, условие $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$, записанное в компонентах с точностью до членов первого порядка, доказывает наше утверждение:

$$\eta_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_{\ \alpha} \Lambda^\nu_{\ \beta} \eta_{\mu\nu} = (\delta^\mu_\alpha + \omega^\mu_{\ \alpha})(\delta^\nu_\beta + \omega^\nu_{\ \beta})\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\nu}\omega^\nu_{\ \beta} + \eta_{\mu\beta}\omega^\mu_{\ \alpha} = \eta_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha}.$$

Таким образом, среди параметров $\omega_{\mu\nu}$ только шесть являются независимыми: три параметра бустов $\omega_{0i} = v_i$ и три параметра вращений $\omega_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\phi^k$. К ним добавляются четыре параметра пространственно-временных трансляций a^μ. В итоге находим, что группа Пуанкаре является десятипараметрической группой Ли.

13.3. **Скалярное поле и алгебра Пуанкаре.** Простейшим примером локального релятивистского поля является вещественное скалярное поле φ. Закон его преобразования под действием группы Пуанкаре тривиален

$$\varphi'(x') = \varphi(x).$$

Найдем вариацию формы $\delta\varphi(x) = \varphi'(x) - \varphi(x)$ при инфинитезимальных преобразованиях Пуанкаре. Для этого произведем разложение преобразованного поля в окрестности точки x по формуле Тейлора с точностью до членов первого порядка малости:

$$\varphi'(x + \omega x + a) = \varphi'(x) + (\omega x + a)^{\mu}\partial_{\mu}\varphi(x) = \varphi(x).$$

Отсюда, с одной стороны

$$\delta\varphi(x) = -(\omega^{\mu}_{\ \nu}x^{\nu} + a^{\mu})\partial_{\mu}\varphi(x),$$

а с другой стороны, вариацую формы скалярного поля можно выразить через действие генераторов P_{μ} и $J_{\mu\nu}$ группы Пуанкаре на поле $\varphi(x)$ согласно

$$\delta\varphi(x) = \mathrm{i}a^{\mu}P_{\mu}\varphi(x) + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}\varphi(x).$$

Приравнивая соответствующие члены в вариации формы, находим

$$-a^{\mu}\partial_{\mu} = \mathrm{i}a^{\mu}P_{\mu}, \quad -\omega^{\mu\nu}x_{[\nu}\partial_{\mu]} = \frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu},$$

откуда

$$P_{\mu} = \mathrm{i}\partial_{\mu}, \quad J_{\mu\nu} = x_{\nu}P_{\mu} - x_{\mu}P_{\nu} := L_{\mu\nu}.$$

Теперь несложно построить алгебру Пуанкаре, а точнее, ее скалярное представление:

$$[P_{\mu},P_{\nu}] = -[\partial_{\mu},\partial_{\nu}] = 0,$$

$$[P_{\mu},L_{\alpha\beta}] = [P_{\mu},x_{\beta}P_{\alpha} - x_{\alpha}P_{\beta}] = \mathrm{i}(\eta_{\mu\beta}P_{\alpha} - \eta_{\mu\alpha}P_{\beta}),$$

$$[L_{\alpha\beta},L_{\mu\nu}] = [x_{\beta}P_{\alpha} - x_{\alpha}P_{\beta}, x_{\nu}P_{\mu} - x_{\mu}P_{\nu}] = \mathrm{i}(\eta_{\alpha\nu}L_{\mu\beta} + \eta_{\beta\mu}L_{\nu\alpha} - \eta_{\alpha\mu}L_{\nu\beta} - \eta_{\beta\nu}L_{\mu\alpha}).$$

Найденные коммутационные соотношения для генераторов группы Пуанкаре, как известно, не зависят от рассматриваемого представления. Этот факт сильно упростит нам жизнь в ближайшем будущем.

13.4. **Векторное поле и спиновый генератор.** Менее тривиальный пример локального поля дает векторное поле A^{μ}. Закон его преобразования под действием группы Пуанкаре имеет вид

$$A'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}A^{\nu}(x).$$

Отсюда легко определяется вариация формы $\delta A^{\mu}(x) = A'^{\mu}(x) - A^{\mu}(x)$ при инфинитезимальных преобразованиях Пуанкаре:

$$A'^{\mu}(x + \omega x + a) = A'^{\mu}(x) + (\omega x + a)^{\alpha}\partial_{\alpha}A^{\mu}(x) = A^{\mu}(x) + \omega^{\mu}_{\ \nu}A^{\nu}(x),$$

$$\delta A^{\mu}(x) = -(\omega^{\alpha}_{\ \beta}x^{\beta} + a^{\alpha})\partial_{\alpha}A^{\mu}(x) + \omega^{\mu}_{\ \nu}A^{\nu}(x).$$

Как несложно заметить, первое слагаемое в правой части последнего выражения совпадает с соответствующим выражением для вариации формы скалярного поля. Это не случайно. Такое совпадение будет наблюдаться для любых тензорных полей, поскольку это слагаемое связано именно с преобразованием координат, а не компонент самого поля. Таким образом, для векторного поля

$$\delta A^{\mu}(x) = \mathrm{i}a^{\alpha}P_{\alpha}A^{\mu}(x) + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{\alpha\beta}(J_{\alpha\beta})^{\mu}_{\ \nu}A^{\nu}(x), \quad (J_{\alpha\beta})^{\mu}_{\ \nu} = L_{\alpha\beta}\delta^{\mu}_{\nu} + (S_{\alpha\beta})^{\mu}_{\ \nu},$$

где, очевидно,

$$(S_{\alpha\beta})^{\mu}_{\ \nu} = \mathrm{i}(\delta^{\mu}_{\beta}\eta_{\alpha\nu} - \delta^{\mu}_{\alpha}\eta_{\beta\nu}).$$

Прямыми вычислениями можно проверить, что оператор $J_{\mu\nu}$ удовлетворяет нужным коммутационным соотношениям в алгебре Пуанкаре. Хотя, это и так понятно.

Аналогичные рассуждения позволяют найти в явном виде генераторы группы Пуанкаре в любом тензорном представлении, причем, как нам уже понятно, отличие разных представлений друг от друга будет состоять только в формуле для спинового генератора $S_{\mu\nu}$, отвечающего за преобразование компонент поля.

13.5. **Алгебра Клиффорда и спинорное представление.** Скалярное и векторное поля (как, впрочем, и произвольные тензорные поля) дают примеры бозонных полей, обладающих целым спином. Построим теперь спинорное представление группы Лоренца (с полуцелым спином). Для этого рассмотрим алгебру Клиффорда, представленную дираковскими матрицами 4×4, удовлетворяющими следующему антикоммутационному соотношению вида

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} := \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2\eta^{\mu\nu}.$$

Из данного выражения очевидно, что для гамма-матриц Дирака справедливы следующие тождества:

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} = -\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}, \quad \mu \neq \nu, \qquad (\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^i)^2 = -1.$$

Поскольку в наших обозначениях $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$, то можно выбрать гамма-матрицы, например, в вейлевском (или киральном) представлении[1], то есть в виде

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

где каждый элемент является блоком размера 2×2, а матрицы σ^i представляют собой эрмитовы, $(\sigma^i)^{\dagger} = \sigma^i$, матрицы Паули

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Выполнение соответствующего антикоммутационного соотношения легко проверяется с помощью непосредственного блочного перемножения матриц. Тут же напрашивается вопрос: а какое отношение алгебра Клиффорда имеет к группе Лоренца? Для ответа на него рассмотрим коммутатор двух гамма-матриц

$$S^{\mu\nu} = -S^{\nu\mu} = -\frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}] = -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \eta^{\mu\nu}\right)$$

и докажем справедливость следующей формулы:

$$[\gamma^{\alpha},S^{\mu\nu}] = \mathrm{i}(\gamma^{\mu}\eta^{\nu\alpha} - \gamma^{\nu}\eta^{\mu\alpha}).$$

Действительно,

$$[\gamma^{\alpha},S^{\mu\nu}] = \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^{\mu}\gamma^{\nu},\gamma^{\alpha}] = \frac{\mathrm{i}}{2}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\alpha} - \gamma^{\alpha}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}) = \frac{\mathrm{i}}{2}\gamma^{\mu}\{\gamma^{\nu}, \gamma^{\alpha}\} - \frac{\mathrm{i}}{2}\{\gamma^{\alpha},\gamma^{\mu}\}\gamma^{\nu},$$

[1] Отметим, что можно построить и множество других представлений алгебры Клиффорда. Все они, как нетрудно понять, будут унитарно эквивалетны, то есть связаны между собой унитарным преобразованием $\gamma^{\mu} \mapsto U\gamma^{\mu}U^{\dagger}$, где $U \neq U(x)$ — некоторая постоянная унитарная матрица.

откуда, используя антикоммутационные соотношения для гамма-матриц, получаем требуемое тождество. Покажем теперь, что матрицы $S^{\mu\nu}$ реализуют так называемое спинорное представление алгебры Лоренца:

$$[S^{\alpha\beta},S^{\mu\nu}] = \frac{\mathrm{i}}{2}[S^{\mu\nu},\gamma^\alpha\gamma^\beta] = \frac{\mathrm{i}}{2}[S^{\mu\nu},\gamma^\alpha]\gamma^\beta + \frac{\mathrm{i}}{2}\gamma^\alpha[S^{\mu\nu},\gamma^\beta] =$$
$$= -\frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\beta\eta^{\nu\alpha} + \frac{1}{2}\gamma^\nu\gamma^\beta\eta^{\mu\alpha} - \frac{1}{2}\gamma^\alpha\gamma^\mu\eta^{\nu\beta} + \frac{1}{2}\gamma^\alpha\gamma^\nu\eta^{\mu\beta}.$$

Используя очевидное тождество $\gamma^\mu\gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} + 2\mathrm{i}S^{\mu\nu}$, получаем хорошо известные нам коммутационные соотношения для генераторов в алгебре Лоренца

$$[S^{\alpha\beta},S^{\mu\nu}] = \mathrm{i}(\eta^{\nu\alpha}S^{\mu\beta} - \eta^{\mu\alpha}S^{\nu\beta} + \eta^{\nu\beta}S^{\alpha\mu} - \eta^{\mu\beta}S^{\alpha\nu}).$$

13.6. **Дираковские спиноры.** Матрицы $(S^{\mu\nu})^\alpha_{\ \beta}$ размера 4×4, реализующие спинорное представление алгебры Лоренца, в свою очередь порождают операторы преобразований Лоренца (преобразований Пуанкаре без трансляций)

$$S[\Lambda] = 1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} + \dots = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right),$$

действующие на четырехкомпонентные объекты $\psi^\alpha(x)$ с комплексными компонентами, которые в теории поля называют дираковскими спинорами. В связи с вышесказанным, закон преобразования дираковского спинора под действием группы Пуанкаре можно записать как

$$\psi'^\alpha(x') = S[\Lambda]^\alpha_{\ \beta}\psi^\beta(x),$$

так что вариация формы

$$\delta\psi^\alpha(x) = \mathrm{i}a^\mu P_\mu\psi^\alpha(x) + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(J^{\mu\nu})^\alpha_{\ \beta}\psi^\beta(x), \quad (J^{\mu\nu})^\alpha_{\ \beta} = L^{\mu\nu}\delta^\alpha_\beta + (S^{\mu\nu})^\alpha_{\ \beta},$$

Нельзя не заметить, что и Λ, и $S[\Lambda]$ являются матрицами размера 4×4. Но как мы можем быть уверены, что построенное спинорное представление представляет является чем-то новым и не эквивалентно уже известному векторному представлению? Для того, чтобы увидеть, что эти два представления действительно различны, давайте посмотрим на некоторые конкретные преобразования. Начнем с вращений: $\omega_{0i} = 0$, $\omega_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\phi^k$. В этом случае

$$S[\Lambda] = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon_{ijk}S^{ij}\phi^k\right) = \exp\left(-\frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\gamma^i\gamma^j\phi^k\right),$$

где

$$\gamma^i\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma^i\sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^i\sigma^j\end{pmatrix}.$$

Имея в виду, что

$$\sigma^i\sigma^j = \frac{1}{2}\{\sigma^i,\sigma^j\} + \frac{1}{2}[\sigma^i,\sigma^j] = \delta^{ij} + \mathrm{i}\,\varepsilon_{ijk}\sigma^k,$$

находим

$$\exp\left(\frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\sigma^i\sigma^j\phi^k\right) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{4}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ij\ell}\,\phi^k\sigma^\ell\right) = \exp\left(\mathrm{i}\boldsymbol{\phi}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) := \exp\left(\mathrm{i}\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{s}\right),$$

а значит,

$$S[\Lambda] = \begin{pmatrix} \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{s}) & 0 \\ 0 & \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{s})\end{pmatrix}.$$

Совершим теперь поворот на угол 2π, скажем, относительно оси z. Тогда

$$\psi'^{\alpha} = S[\Lambda]^{\alpha}_{\ \beta}\psi^{\beta} = -\psi^{\alpha}, \quad S[\Lambda] = \begin{pmatrix} \exp\left(\mathrm{i}\pi\sigma^3\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\mathrm{i}\pi\sigma^3\right) \end{pmatrix} = -1.$$

Здесь мы воспользовались формулой

$$\exp\left(\mathrm{i}\pi\sigma^3\right) = \cos\left(\pi\right) + \mathrm{i}\sigma^3 \sin\left(\pi\right) = -1,$$

которую несложно получить прямым разложением матричной экспоненты в ряд Тейлора и дальнейшим выделением сумм по четным и нечетным степеням. Итак, мы получили, что при вращениях на угол $\phi = 2\pi$ дираковский спинор меняет знак, что явно отличается от поведения векторного поля при вращениях. Последнее в такой ситуации не изменило бы знак. Значит, построенное спинорное представление действительно отличается от векторного.

Полезно посмотреть также на преобразование спинора Дирака при лоренцевых бустах: $\omega_{0i} = v_i = -v^i$, $\omega_{ij} = 0$. В этом случае

$$S[\Lambda] = \exp\left(-\mathrm{i}v^i S^{0i}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma^0\gamma^i v^i\right),$$

где

$$\gamma^0\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим искомое выражение:

$$S[\Lambda] = \begin{pmatrix} \exp\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{s}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{s}\right) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что для вращений $S[\Lambda]$ унитарна, т.е. удовлетворяет условию $S[\Lambda]^{\dagger}S[\Lambda] = 1$. Однако, для бустов $S[\Lambda]$ не унитарна. На самом деле, так и должно быть, ведь группа Пуанкаре не являтся компактной, а значит, у нее не существует конечномерных унитарных представлений. Здесь мы продемонстрировали это явно для спинорного представления, используя киральное представление алгебры Клиффорда.

Займемся теперь построением релятивистских инвариантов, которые играют ключевую роль при конструировании полевых уравнений движения. Можно наивно предположить, что скалярное произведение $\psi^{\dagger}\psi$ является простейшим лоренцевским скаляром. Проверим, так ли это:

$$\psi'(x') = S[\Lambda]\psi(x), \quad \psi'^{\dagger}(x') = \psi^{\dagger}(x)\, S[\Lambda]^{\dagger}.$$

Значит,

$$\psi^{\dagger}(x)\psi(x) \to \psi'^{\dagger}(x')\psi'(x') = \psi^{\dagger}(x)\, S[\Lambda]^{\dagger}S[\Lambda]\psi(x) \neq \psi^{\dagger}(x)\psi(x),$$

поскольку спинорное представление не является унитарным. Таким образом, произведение $\psi^{\dagger}\psi$ не является скаляром. Как же тогда можно исправить ситуацию, чтобы построить скаляр? Для ответа на этот вопрос заметим, что в киральном представлении $(\gamma^0)^{\dagger} = \gamma^0$, $(\gamma^i)^{\dagger} = -\gamma^i$. Отсюда очевидно, что

$$\gamma^0\gamma^{\mu}\gamma^0 = (\gamma^{\mu})^{\dagger},$$

а потому, с учетом $(\gamma^0)^2 = 1$,

$$(S^{\mu\nu})^{\dagger} = \frac{\mathrm{i}}{4}[(\gamma^{\nu})^{\dagger},(\gamma^{\mu})^{\dagger}] = \frac{\mathrm{i}}{4}(\gamma^0\gamma^{\nu}\gamma^0\gamma^0\gamma^{\mu}\gamma^0 - \gamma^0\gamma^{\mu}\gamma^0\gamma^0\gamma^{\nu}\gamma^0) = \gamma^0 S^{\mu\nu}\gamma^0,$$

то есть

$$S[\Lambda]^{\dagger} = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^{\dagger}\right) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\gamma^0 S^{\mu\nu}\gamma^0\right) = \gamma^0 S[\Lambda]^{-1}\gamma^0.$$

Имея в виду полученное равенство, определим дираковски сопряженный спинор как

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0.$$

Теперь несложно понять, что произведение $\bar{\psi}\psi$ является скаляром относительно преобразований группы Пуанкаре. Действительно,

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) \to \bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \psi^\dagger(x)\, S[\Lambda]^\dagger \gamma^0 S[\Lambda]\psi(x) = \\ = \psi^\dagger(x)\,\gamma^0\gamma^0 S[\Lambda]^\dagger\gamma^0 S[\Lambda]\psi(x) = \bar{\psi}(x)\, S[\Lambda]^{-1} S[\Lambda]\psi(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x).$$

Продолжим и посмотрим, как можно построить лоренцев вектор. Для этого следует заметить, что гамма-матрицы Дирака не случайно имеют лоренцев индекс. Несложно догадаться, что релятивистским вектором будет величина $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. Действительно, закон ее преобразования под действием группы Пуанкаре имеет вид

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \to \psi^\dagger(\gamma^0)^2 S[\Lambda]^\dagger\gamma^0\gamma^\mu S[\Lambda]\psi = \bar{\psi}S[\Lambda]^{-1}\gamma^\mu S[\Lambda]\psi.$$

Учитывая, что

$$S[\Lambda]^{-1}\gamma^\mu S[\Lambda] = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}\right)\gamma^\mu \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}\right),$$

или, в инфинитезимальном виде

$$S[\Lambda]^{-1}\gamma^\mu S[\Lambda] = \left(1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}\right)\gamma^\mu\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}\right) \approx \gamma^\mu - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}[S^{\alpha\beta},\gamma^\mu] = \\ = \gamma^\mu - \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}(\gamma^\alpha\eta^{\mu\beta} - \gamma^\beta\eta^{\mu\alpha}) = \gamma^\mu + \omega^\mu_{\ \nu}\gamma^\nu = \Lambda^\mu_{\ \nu}\gamma^\nu,$$

получаем требуемое

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \to \Lambda^\mu_{\ \nu}\,\bar{\psi}\gamma^\nu\psi.$$

Из найденного объекта домножением на какой-нибудь ковектор можно построить скаляр. Аналогичными вычислениями можно показать, что $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi$ является релятивистским тензором. Таким образом, мы научились из спинорных полей Дирака строить различные тензорные поля (в частности, релятивистские инварианты). Это нам очень пригодится в будущем при рассмотрении их динамики.

13.7. **Вейлевские спиноры.** Ранее мы вычислили матрицы вращений и лоренцевых бустов, используя киральное представление алгебры Клиффорда:

$$S[\Lambda_{\text{rot}}] = \begin{pmatrix} \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{s}) & 0 \\ 0 & \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{s}) \end{pmatrix}, \quad S[\Lambda_{\text{boost}}] = \begin{pmatrix} \exp(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{s}) & 0 \\ 0 & \exp(-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{s}) \end{pmatrix}.$$

Эти формулы показывают, что спинорное представление группы Лоренца приводимо. Оно распадается на два неприводимых представления, действующих только на двухкомпонентные спиноры $\bar{\chi}^{\dot{a}}, \theta_a$, $a \in \{1,2\}$, $\dot{a} \in \{\dot{1},\dot{2}\}$, которые в киральном представлении определяются соотношениями

$$\psi^\alpha = (\theta_a, \bar{\chi}^{\dot{a}})^T$$

и называются вейлевскими спинорами. Закон их преобразования при непрерывных преобразованиях Лоренца имеет вид

$$\theta_a \to \theta'_a = [\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{s} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{s})]_a^{\ b}\,\theta_b := N_a^{\ b}\,\theta_b,$$

$$\bar{\chi}^{\dot{a}} \to \bar{\chi}'^{\dot{a}} = [\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{s} - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{s})]^{\dot{a}}_{\ \dot{b}}\,\bar{\chi}^{\dot{b}} := \bar{N}^{\dot{a}}_{\ \dot{b}}\,\bar{\chi}^{\dot{b}}.$$

Поскольку самосопряженные матрицы $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma}/2$ являются бесследовыми, то

$$\det N = \exp\operatorname{tr}(\mathrm{i}\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{s} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{s}) = 1, \quad \det\bar{N} = \exp\operatorname{tr}(\mathrm{i}\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{s} - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{s}) = 1.$$

То есть матрицы N и $\bar{N}$ лежат в группе $\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$, которая, как можно показать, является универсальной накрывающей группы Лоренца. На языке теории групп говорят, что спинор θ_a принадлежит пространству представления $(\frac{1}{2},0)$ группы Лоренца и называется левым вейлевским спинором. Спинор же $\bar{\chi}^{\dot{a}}$ называют правым вейлевским спинором; он лежит в представлении, эквивалентном сопряженному к $(\frac{1}{2},0)$ представлению $(0,\frac{1}{2})$. Последнее порождается комплексно сопряженными матрицами $N^\star$. Докажем это. Для начала заметим, что

$$N^\dagger = \bar{N}^{-1}, \quad \bar{N}^\dagger = N^{-1}.$$

Далее, эквивалентность указанных выше представлений означает, что существует некоторая невырожденная матрица ε, такая что

$$N^\star = \varepsilon\bar{N}\varepsilon^{-1} \;\Leftrightarrow\; N^\dagger = (\varepsilon^{-1})^T\bar{N}^T\varepsilon^T = \bar{N}^{-1} \;\Leftrightarrow\; (\bar{N}^{-1})^T = \varepsilon\bar{N}\varepsilon^{-1}.$$

Легко показать, что для произвольной матрицы из $\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$ на роль матрицы ε подходит

$$\varepsilon = \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{-1} = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Действительно,

$$\bar{N}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Эта же матрица $\varepsilon = \varepsilon_{ab}$ связывает преобразованием подобия матрицы N и $(N^{-1})^T$.

13.8. **Спинорная метрика.** Мы только что описали два неэквивалентных представления группы $\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$: фундаментальное и сопряженное. Первое реализовано матрицами N, которые преобразуют левые вейлевские спиноры, а второе — комплексно сопряженными матрицами, которые преобразуют правые вейлевские спиноры. Попутно мы ввели кососимметричные матрицы ε_{ab} и $\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}$. Покажем, что они являются инвариантами $\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$. Для этого рассмотрим, например, выражение

$$f_{ab} = N_a{}^c N_b{}^d \varepsilon_{cd} = N_a{}^1 N_b{}^2 \varepsilon_{12} + N_a{}^2 N_b{}^1 \varepsilon_{21} = N_a{}^2 N_b{}^1 - N_a{}^1 N_b{}^2.$$

Очевидно, что диагональные матричные элементы $f_{11} = f_{22} = 0$, а также, $f_{12} = -f_{21}$. Более того, выполняется $f_{12} = N_1{}^2 N_2{}^1 - N_1{}^1 N_2{}^2 = -\det N = -1$. Следовательно, получается $f_{ab} = \varepsilon_{ab}$. Таким образом

$$\varepsilon_{ab} = N_a{}^c N_b{}^d \varepsilon_{cd}, \quad \varepsilon = N\varepsilon N^T.$$

Это соотношение показывает, что матрица ε является инвариантом группы $\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$ в смысле тензорного закона преобразования. Аналогично доказывается, что матрицы ε^{ab}, $\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}$ и $\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}$ являются инвариантами группы $\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$. Эти матрицы называются спинорными метриками, поскольку они используются для опускания и поднимания точечных и неточечных спинорных индексов:

$$\theta^a = \varepsilon^{ab}\theta_b, \quad \theta_a = \varepsilon_{ab}\theta^b, \quad \bar{\chi}^{\dot{a}} = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}\bar{\chi}_{\dot{b}}, \quad \bar{\chi}_{\dot{a}} = \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}\bar{\chi}^{\dot{b}}.$$

При помощи спинорной метрики несложно построить скаляры. Так, например, выражения $\theta^a\varphi_a$, $\bar{\chi}_{\dot{a}}\bar{\varphi}^{\dot{a}}$ являются скалярами. Действительно,

$$\theta'^a\varphi'_a = \varepsilon^{ab}\theta'_b\varphi'_a = \varepsilon^{ab}N_a{}^c N_b{}^d\varphi_c\theta_d = \varepsilon^{cd}\varphi_c\theta_d = \theta^a\varphi_a,$$

аналогично

$$\bar{\chi}'_{\dot{a}}\bar{\varphi}'^{\dot{a}} = \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}\bar{\chi}'^{\dot{b}}\bar{\varphi}'^{\dot{a}} = \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}\bar{N}^{\dot{a}}_{\;\dot{c}}\bar{N}^{\dot{b}}_{\;\dot{d}}\bar{\varphi}^{\dot{c}}\bar{\chi}^{\dot{d}} = \varepsilon_{\dot{c}\dot{d}}\bar{\varphi}^{\dot{c}}\bar{\chi}^{\dot{d}} = \bar{\chi}_{\dot{a}}\bar{\varphi}^{\dot{a}}.$$

Отметим также следующие важные свойства левого и правого вейлевских спиноров:

$$(\theta\varphi) = \theta^a\varphi_a = \varepsilon^{ab}\theta_b\varphi_a = \varphi^a\theta_a = (\varphi\theta), \quad (\bar\chi\bar\varphi) = \bar\chi_{\dot a}\bar\varphi^{\dot a} = \bar\varphi_{\dot a}\bar\chi^{\dot a} = (\bar\varphi\bar\chi).$$

Здесь необходимо учитывать, что спинорные поля описываются грассмановыми переменными, которые антикоммутируют, ведь

$$(\theta\varphi) = \theta^a\varphi_a = \varepsilon^{ab}\theta_b\varphi_a = \theta_b(-\varphi^b), \quad \theta^a\varphi_a = -\varphi_a\theta^a.$$

13.9. **Антикоммутирующие спиноры.** Рассмотрим более подробно алгебру Грассмана антикоммутирующих спиноров. Базовые соотношения, выражающие основное свойство антикоммутирующих переменных, имеют вид

$$\theta_a\theta_b + \theta_b\theta_a = 0, \quad \bar\theta_{\dot a}\bar\theta_{\dot b} + \bar\theta_{\dot b}\bar\theta_{\dot a} = 0, \quad \theta_a\bar\theta_{\dot a} + \bar\theta_{\dot a}\theta_a = 0.$$

Эти отношения предполагают

$$(\theta_a)^2 = 0, \quad (\bar\theta_{\dot a})^2 = 0, \quad \theta_a\theta_b\theta_c = \bar\theta_{\dot a}\bar\theta_{\dot b}\bar\theta_{\dot c} = 0.$$

Перепишем выражения $\theta_a\theta_b$ и $\bar\theta_{\dot a}\bar\theta_{\dot b}$ в другом виде. Для этого вспомним, что $\theta_a\theta_b$ по существу является антисимметричной матрицей 2×2. Любая такая матрица всегда пропорциональна спинорной метрике ε_{ab} с некоторым коэффициентом, скажем, C, $\theta_a\theta_b = C\varepsilon_{ab}$. Производя свертку по спинорным индексам, получаем $\varepsilon^{ba}\theta_a\theta_b = C\varepsilon^{ba}\varepsilon_{ab} = 2C$ или $C = \frac{1}{2}\varepsilon^{ba}\theta_a\theta_b = \frac{1}{2}\theta^2$. Аналогичные рассуждения применимы к выражению $\bar\theta_{\dot a}\bar\theta_{\dot b}$. Как результат,

$$\theta_a\theta_b = \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\theta^2, \quad \bar\theta_{\dot a}\bar\theta_{\dot b} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\dot a\dot b}\bar\theta^2, \quad \theta^a\theta^b = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ab}\theta^2, \quad \bar\theta^{\dot a}\bar\theta^{\dot b} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot a\dot b}\bar\theta^2.$$

Несложно понять, что любая функция антикоммутирующих переменных может быть только полиномом вида

$$f(\theta,\bar\theta) = \alpha + \beta^a\theta_a + \tilde\beta_{\dot a}\bar\theta^{\dot a} + \gamma_{a\dot a}\theta^a\bar\theta^{\dot a} + g\theta^2 + \tilde g\bar\theta^2 + f^a\theta_a\bar\theta^2 + \tilde f_{\dot a}\bar\theta^{\dot a}\theta^2 + h\,\theta^2\bar\theta^2.$$

Здесь $\alpha, \beta^a, \tilde\beta_{\dot a}, \gamma_{a\dot a}, g, \tilde g, f^a, \tilde f_{\dot a}, h$ — действительные или комплексные числа. Иногда такое разложение $f(\theta,\bar\theta)$ называют суперфункцией.

Теперь введем понятия дифференцирования и интегрирования суперфункции f по грассмановым переменным $\theta_a, \bar\theta_{\dot a}$. Производные по антикоммутирующим переменным обозначаются как

$$\frac{\partial}{\partial\theta^a} := \partial_a, \quad \frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot a}} := \bar\partial_{\dot a}$$

и удовлетворяют следующим четырем условиям: производная — линейная операция,

$$\partial_a\theta^b = \delta^b_a, \quad \bar\partial_{\dot a}\bar\theta^{\dot b} = \delta^{\dot b}_{\dot a}, \quad \partial_a(\theta^b\theta^c) = \delta^b_a\theta^c - \delta^c_a\theta^b, \quad \bar\partial_{\dot a}(\bar\theta^{\dot b}\bar\theta^{\dot c}) = \delta^{\dot b}_{\dot a}\bar\theta^{\dot c} - \delta^{\dot c}_{\dot a}\bar\theta^{\dot b},$$

$$\bar\partial_{\dot a}\theta^b(\dots) = -\theta^b\bar\partial_{\dot a}(\dots), \quad \partial_a\bar\theta^{\dot b}(\dots) = -\bar\theta^{\dot b}\partial_a(\dots).$$

Несложно показать, что грассмановы производные являются антикоммутативными

$$\partial_a\partial_b + \partial_b\partial_a = 0, \quad \bar\partial_{\dot a}\bar\partial_{\dot b} + \bar\partial_{\dot b}\bar\partial_{\dot a} = 0, \quad \partial_a\bar\partial_{\dot b} + \bar\partial_{\dot b}\partial_a = 0.$$

В частности, $\partial_a^2 = \bar\partial_{\dot a}^2 = 0$. Так же легко выводятся следующие соотношения для грассмановых производных

$$\partial_a\partial_b = \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\partial^2, \quad \bar\partial_{\dot a}\bar\partial_{\dot b} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\dot a\dot b}\bar\partial^2, \quad \partial^a\partial^b = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ab}\partial^2, \quad \bar\partial^{\dot a}\bar\partial^{\dot b} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot a\dot b}\bar\partial^2.$$

Рассмотрим интегрирование по антикоммутирующим переменным. Поскольку для грассмановых производных $\partial_a^2 = \bar\partial_{\dot a}^2 = 0$, то интегрирование нельзя определить как операцию, обратную дифференцированию. Правильное определение интегрирования по антикоммутирующим переменным дал Березин. Интеграл Березина удовлетворяет следующим свойствам: во-первых, интегрирование — линейная операция; во-вторых, пусть $d\theta_a$ и $d\bar\theta^{\dot a}$ — дополнительные параметры, антикоммутирующие между собой и со всеми переменными $\theta_a, \bar\theta_{\dot a}$. Тогда, по определению,

$$\int d\theta_a\, f = \partial_a f, \quad \int d\bar\theta^{\dot a} f = \varepsilon^{\dot a\dot b}\,\bar\partial_{\dot b} f.$$

Так, например,

$$\int d\theta_a \theta^b = \delta_a^b, \quad \int d\bar\theta^{\dot a}\bar\theta_{\dot b} = \delta_{\dot b}^{\dot a}.$$

Введем обозначения

$$d_2\theta = \frac{1}{4}\varepsilon^{ab} d\theta_a d\theta_b, \quad d_2\bar\theta = \frac{1}{4}\varepsilon_{ab}\, d\bar\theta^{\dot a} d\bar\theta^{\dot b}.$$

Несложно понять, что

$$\int d_2\theta\, \theta^2 = 1, \quad \int d_2\bar\theta\, \bar\theta^2 = 1,$$

а также, что для любых суперфункций f, g выполняется тождество

$$\int d_2\theta\, \partial_a f = 0, \quad \int d_2\bar\theta\, \bar\partial_{\dot a} g = 0.$$

Действительно,

$$\int d_2\theta\, \theta^2 = \frac{1}{4}\varepsilon^{ab}\varepsilon_{cd}\int d\theta_a d\theta_b\, \theta^c\theta^d = \frac{1}{4}\varepsilon^{ab}\varepsilon_{cd}\int d\theta_a(\delta_b^c\theta^d - \delta_b^d\theta^c) = \frac{1}{2}\varepsilon^{ab}\varepsilon_{ba} = \frac{1}{2}\delta_a^a = 1,$$

$$\int d_2\theta\, \partial_c f = \frac{1}{4}\varepsilon^{ab}\int d\theta_a d\theta_b\, \partial_c f = \frac{1}{4}\varepsilon^{ab}\int d\theta_a\, \partial_b\partial_c f = \frac{1}{4}\varepsilon^{ab}\partial_a\partial_b\partial_c f = 0.$$

Справедливость остальных тождеств доказывается аналогично. Из вышесказанного получаем

$$\int d_2\theta\, \theta^2 f(\theta) = \int d_2\theta\, \theta^2(\alpha + \beta_a\theta^a + g\theta^2) = \alpha\int d_2\theta\, \theta^2 = \alpha = f(0).$$

Здесь мы использовали равенство $\theta_a\theta_b\theta_c = 0$. Найденное выражение абсолютно идентично известному свойству дельта-функции

$$\int_{\mathbb{R}} dx\, \delta(x) f(x) = f(0).$$

Поэтому θ^2 и $\bar\theta^2$ можно рассматривать как дельта-функции от переменных Грассмана:

$$\delta^{(2)}(\theta) = \theta^2, \quad \delta^{(2)}(\bar\theta) = \bar\theta^2.$$

Как следствие, выполняются следующие свойства

$$\int d_2\theta\, \delta^{(2)}(\theta) = 1, \quad \int d_2\theta\, \delta^{(2)}(\theta) f(\theta) = f(0),$$

$$\int d_2\bar\theta\, \delta^{(2)}(\bar\theta) = 1, \quad \int d_2\bar\theta\, \delta^{(2)}(\bar\theta) f(\bar\theta) = f(0).$$

Важно отметить, что в отличие от обычной дельта-функции, дельта-функции Грассмана не являются сингулярными в нуле, ведь

$$\delta^{(2)}(\theta)|_{\theta=0} = 0, \quad \delta^{(2)}(\bar\theta)|_{\bar\theta=0} = 0.$$

Этот факт имеет свои последствия для суперсимметричных моделей квантовой теории поля. Так, например, все интегрирования по петлям в таких теориях будут сходиться.

13.10. **Супералгебра Пуанкаре.** Как упоминалось в конце предыдущей лекции, возможно расширить алгебру Пуанкаре до т.н. супералгебры. Вообще, все суперсимметричные теории поля (как и все теории поля, содержащие спинорные поля) естественным образом формулируются с использованием алгебры Грассмана, оперирующей антикоммутирующими переменными. В связи с вышесказанным вполне понятна и общая идея такого расширения алгебры Пуанкаре: она должна быть основана на использовании спинорных генераторов Q^I_a и $\bar{Q}^I_{\dot a}$ с точечными и неточечными индексами $a, \dot a$ и $I = 1, 2, \ldots, \mathcal{N}$, где целое число $\mathcal{N}$ нумерует новые генераторы; причем, генераторы Q^I_a и $\bar{Q}^I_{\dot a}$ должны иметь фермионную природу, а их коммутационные соотношения будут задаваться в терминах антикоммутаторов.

Мы хотим сохранить известную алгебру Пуанкаре для P_μ и $J_{\mu\nu}$, но должны найти дополнительно следующие коммутаторы и антикоммутаторы

$$[P_\mu,Q^I_a],\quad [J_{\mu\nu},Q^I_a],\quad [P_\mu,\bar{Q}^I_{\dot a}],\quad [J_{\mu\nu},\bar{Q}^I_{\dot a}],\quad \{Q^I_a,Q^J_b\},\quad \{\bar{Q}^I_{\dot a},\bar{Q}^J_{\dot b}\},\quad \{Q^I_a,\bar{Q}^J_{\dot a}\}.$$

Совершенно понятно, что правые части этих коммутаторов и антикоммутаторов должны быть линейными комбинациями всех образующих $P_\mu, J_{\mu\nu}, Q^I_a, \bar{Q}^I_{\dot a}$ с некоторыми коэффициентами. Лоренц-инвариантность накладывает на эти коэффициенты условия: их можно построить только из инвариантных тензоров групп Лоренца и $\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$, то есть $\eta_{\mu\nu}$, ε_{ab}, $\varepsilon_{\dot a\dot b}$, а также инвариантных матричных векторов[1] $(\sigma_\mu)_{a\dot a}$, $(\tilde\sigma_\mu)^{\dot a a}$. Поэтому наиболее общий вид коммутаторов и антикоммутаторов записывается следующим образом:

$$[P_\mu,Q^I_a] = c_1(\sigma_\mu)_{a\dot a}\bar{Q}^{\dot a I},\quad [P_\mu,\bar{Q}^I_{\dot a}] = c_2(\tilde\sigma_\mu)_{\dot a a}Q^{aI},\quad [J_{\mu\nu},Q^I_a] = c_3(\sigma_{\mu\nu})_a{}^b Q^I_b,$$

$$[J_{\mu\nu},\bar{Q}^I_{\dot a}] = c_4(\tilde\sigma_{\mu\nu})_{\dot a}{}^{\dot b}\bar{Q}^I_{\dot b},\quad \{Q^I_a,\bar{Q}^J_{\dot a}\} = 2c_5(\sigma^\mu)_{a\dot a}P_\mu\delta^{IJ},$$

$$\{Q^I_a,Q^J_b\} = c_6\varepsilon_{ab}Z^{IJ} + c_6'(\sigma^{\mu\nu})_{ab}J_{\mu\nu}X^{IJ},\quad \{\bar{Q}^I_{\dot a},\bar{Q}^J_{\dot b}\} = c_7\varepsilon_{\dot a\dot b}\bar{Z}^{IJ} + c_7'(\tilde\sigma^{\mu\nu})_{\dot a\dot b}J_{\mu\nu}\bar{X}^{IJ}.$$

Здесь матрицы $Z^{IJ} = -Z^{JI}$, $X^{IJ} = X^{JI}$, $\bar{Z}^{IJ} = -\bar{Z}^{JI}$, $\bar{X}^{IJ} = \bar{X}^{JI}$, а тензоры (которые по совместительству составляют генераторы левого и правого вейлевских представлений группы Лоренца)

$$(\sigma_{\mu\nu})_a{}^b = \frac{1}{4}(\sigma_\mu\tilde\sigma_\nu - \sigma_\nu\tilde\sigma_\mu)_a{}^b,\quad (\tilde\sigma_{\mu\nu})^{\dot a}{}_{\dot b} = \frac{1}{4}(\tilde\sigma_\mu\sigma_\nu - \tilde\sigma_\nu\sigma_\mu)^{\dot a}{}_{\dot b}.$$

Конечно, коэффициенты $c_1, \ldots, c_4$ выписываются без каких-либо вычислений, так как они определяются законами преобразования точечных и неточечных спиноров под действием группы Пуанкаре. Мы пока не пишем эти коэффициенты, чтобы изложить общую схему того, как можно найти все коэффициенты в супералгебре.

Найдем неизвестные коэффициенты в супералгебре, используя тождества Якоби, которые записываются в терминах двойных коммутаторов и антикоммутаторов. Здесь мы будем использовать стандартную терминологию, когда операторы $P_\mu, J_{\mu\nu}$ называются бозонными, а $Q^I_a, \bar{Q}^I_{\dot a}$ — фермионными. Пусть B — некоторый бозонный

---

[1] Здесь уместно вспомнить соотношение $\Lambda(N)^\mu{}_\nu\sigma_\mu = N\sigma_\nu N^\dagger$, определяющее матрицу лоренцевских преобразований Λ в зависимости от $N \in \mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$ в контексте построенного нами ранее гомоморфизма $\pi : \mathbb{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathbb{SO}_+(3,1)$. Получается, что $\sigma_\mu = (\Lambda^T(N)^{-1})_\mu{}^\nu N\sigma_\nu N^\dagger$. Обозначая элементы матрицы $\sigma_\mu = (1,\boldsymbol{\sigma})$ через $(\sigma_\mu)_{a\dot a}$, в индексных обозначениях находим, что $(\sigma_\mu)_{a\dot a} = (\Lambda^T(N)^{-1})_\mu{}^\nu N_a{}^c\bar{N}_{\dot a}{}^{\dot c}(\sigma_\nu)_{c\dot c}$. Это соотношение показывает, что $(\sigma_\mu)_{a\dot a}$ образуют инвариантный тензор (σ_μ образуют инвариантный матричный вектор). Поднимая спинорные индексы, получим $(\tilde\sigma_\mu)^{\dot a a} = \varepsilon^{\dot a\dot c}\varepsilon^{ac}(\sigma_\mu)_{c\dot c} = (\sigma_\mu)^{a\dot a}$. Матрицы $\sigma_\mu, \tilde\sigma_\mu$ обладают большим количеством полезных свойств, из которых мы отметим следующие: $(\tilde\sigma_\mu)^{\dot a a}(\sigma_\nu)_{a\dot a} = 2\eta_{\mu\nu}$, $(\sigma_\mu\tilde\sigma_\nu + \sigma_\nu\tilde\sigma_\mu)_a{}^b = 2\eta_{\mu\nu}\delta_a{}^b$, $(\sigma_\mu\tilde\sigma_\nu + \sigma_\nu\tilde\sigma_\mu)_{\dot a}{}^{\dot b} = 2\eta_{\mu\nu}\delta_{\dot a}{}^{\dot b}$, $(\tilde\sigma_\mu)^{\dot b b}(\sigma^\mu)_{a\dot a} = 2\delta_a{}^b\delta_{\dot a}{}^{\dot b}$.

оператор, а F — фермионный. Тогда тождества Якоби для таких операторов имеют вид

$$[B_1,[B_2,B_3]] + [B_2,[B_3,B_1]] + [B_3,[B_1,B_2]] = 0,$$
$$[B,\{F_1,F_2\}] + \{F_1,[F_2,B]\} + \{F_2,[B,F_1]\} = 0,$$
$$[B_1,[B_2,F]] + [B_2,[F,B_1]] + [F,[B_1,B_2]] = 0,$$
$$\{F_1,\{F_2,F_3\}\} + \{F_2,\{F_3,F_1\}\} + \{F_3,\{F_1,F_2\}\} = 0.$$

Прямой подстановкой образующих $P_\mu, J_{\mu\nu}$ вместо B и образующих $Q^I_a, \bar{Q}^I_{\dot{a}}$ вместо F в тождества Якоби несложно найти все числовые коэффициенты в супералгебре (проделайте это самостоятельно в качестве упражнения). Результаты записываются как

$$c_1 = c_2 = c'_6 = c'_7 = 0, \quad c_3 = c_4 = \mathrm{i}, \quad c_5 = c_6 = c_7 = 1, \quad X^{IJ} = \bar{X}^{IJ} = 0,$$

а операторы Z^{IJ} и $\bar{Z}^{IJ}$ должны коммутировать со всеми образующими. Таким образом,

$$[P_\mu,Q^I_a] = 0, \quad [P_\mu,\bar{Q}^I_{\dot{a}}] = 0, \quad [J_{\mu\nu},Q^I_a] = \mathrm{i}(\sigma_{\mu\nu})_a{}^b Q^I_b, \quad [J_{\mu\nu},\bar{Q}^I_{\dot{a}}] = \mathrm{i}(\tilde{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \bar{Q}^I_{\dot{b}},$$

$$\{Q^I_a,\bar{Q}^J_{\dot{a}}\} = 2(\sigma^\mu)_{a\dot{a}} P_\mu \delta^{IJ}, \quad \{Q^I_a,Q^J_b\} = \varepsilon_{ab} Z^{IJ}, \quad \{\bar{Q}^I_{\dot{a}},\bar{Q}^J_{\dot{b}}\} = \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \bar{Z}^{IJ}.$$

Полученные коммутационные и антикоммутационные соотношения вместе с коммутаторами для генераторов алгебры Пуанкаре образуют так называемую супералгебру Пуанкаре. Фермионные генераторы $Q^I_a, \bar{Q}^I_{\dot{a}}$ называются суперзарядами, генераторы Z^{IJ} и $\bar{Z}^{IJ}$ называются центральными зарядами. Если $\mathcal{N} = 1$, суперсимметрия называется простой, или суперсимметрией $\mathcal{N} = 1$. В этом случае все центральные заряды отсутствуют. Если $N > 1$, суперсимметрия называется расширенной, или $\mathcal{N}$-расширенной суперсимметрией. Утверждение, что найденные нами соотношения представляют собой наиболее общее расширение алгебры Пуанкаре с помощью фермионных генераторов, называется теоремой Хаага-Лопузанского-Зониуса. Далее мы будем рассматривать только $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрию.

13.11. **Суперпространство и суперполе.** Мы знаем, что образующие алгебры Пуанкаре связаны с лоренцевскими преобразованиями координат пространства Минковского. Аналогично, образующие алгебры суперсимметрии также связаны с преобразованиями координат некоторого пространства, называемого суперпространством. Поскольку образующие $P_\mu, J_{\mu\nu}$ входят в алгебру суперсимметрии, координаты x^μ пространства-времени Минковского также должны быть включены в это новое пространство. А так как алгебра суперсимметрии содержит суперзаряды $Q^I_a, \bar{Q}^I_{\dot{a}}$, удовлетворяющие своим антикоммутационным соотношениям, естественно предположить, что с этими суперзарядами также связаны новые координаты. Поскольку суперзаряды удовлетворяют антикоммутационным соотношениям, то соответствующие координаты должны быть грассмановыми переменными.

Итак, суперпространство определяется как многообразие, параметризованное переменными $(x^\mu, \theta_a, \bar{\theta}_{\dot{a}})$, где x^μ — координаты пространства Минковского, а $\theta_a, \bar{\theta}_{\dot{a}}$ — грассмановы переменные. Обычно x^μ называют бозонными координатами, а $\theta_a, \bar{\theta}_{\dot{a}}$ называют фермионными координатами. Размерность такого суперпространства равна восьми.

Любая гладкая функция, определенная на суперпространстве, называется суперполем, $V = V(x, \theta, \bar\theta)$. Учитывая, что произвольная суперфункция является полиномом от антикоммутирующих переменных, можно написать

$$V(x,\theta,\bar\theta) = A(x) + \theta^a\psi_a(x) + \bar\theta_{\dot a}\bar\chi^{\dot a}(x) + \theta^2F(x) + \bar\theta^2G(x) + \\ + \theta^a(\sigma^\mu)_{a\dot a}\bar\theta^{\dot a}A_\mu(x) + \bar\theta^2\theta^a\lambda_a(x) + \theta^2\bar\theta_{\dot a}\bar\eta^{\dot a}(x) + \theta^2\bar\theta^2D(x).$$

Коэффициенты $A, \psi_a, \bar\chi^{\dot a}, F, G, A_\mu, \lambda_a, \bar\eta^{\dot a}, D$ в этом разложении называются компонентными полями. Все компонентные поля являются обыкновенными полями в пространстве времени Минковского. Мы видим, что суперполе автоматически включает в себя множество обычных релятивистских полей. Далее мы будем рассматривать только суперполя, являющиеся скалярами при преобразованиях группы Пуанкаре. В таком случае $A(x), F(x)$, $G(x)$, $D(x)$ являются скалярными полями, $A_\mu(x)$ — векторное поле, $\psi_a(x), \lambda_a(x)$ — левые вейлевские спиноры, а $\bar\chi^{\dot a}(x), \bar\eta^{\dot a}(x)$ являются правыми вейлевскими спинорами.

На суперполе можно наложить условие вещественности $V^\dagger = V$. Тогда поля A, D окажутся вещественными скалярами, $A_\mu(x)$ — вещественным векторным полем, а для остальных полей будут выполнятся следующие равенства (если вам не очевидно, проверьте их самостоятельно в качестве упражнения):

$$G = F^\star, \quad \bar\chi^{\dot a} = \psi_a^\dagger = \bar\psi^{\dot a}, \quad \bar\eta^{\dot a} = \lambda_a^\dagger = \bar\lambda^{\dot a}.$$

В результате разложение вещественного скалярного суперполя дается формулой

$$V(x,\theta,\bar\theta) = A(x) + \theta^a\psi_a(x) + \bar\theta_{\dot a}\bar\psi^{\dot a}(x) + \theta^2F(x) + \bar\theta^2F^\star(x) + \\ + \theta^a(\sigma^\mu)_{a\dot a}\bar\theta^{\dot a}A_\mu(x) + \bar\theta^2\theta^a\lambda_a(x) + \theta^2\bar\theta_{\dot a}\bar\lambda^{\dot a}(x) + \theta^2\bar\theta^2D(x).$$

Видно, что вещественное скалярное суперполе имеет меньшее количество независимых компонентных полей по сравнению с общим суперполем.

Найдем теперь выражения для суперзарядов $Q^I_a, \bar Q^I_{\dot a}$ в виде операторов, действующих на суперполя в случае $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрии. Мы рассматриваем суперпространственные преобразования координат вида

$$x'^\mu = x^\mu - \mathrm{i}(\epsilon\sigma^\mu\bar\theta - \theta\sigma^\mu\bar\epsilon), \quad \theta'^a = \theta^a + \epsilon^a, \quad \bar\theta'_{\dot a} = \bar\theta_{\dot a} + \bar\epsilon_{\dot a}.$$

Такие преобразования называются супертрансляциями или преобразованиями суперсимметрии. Здесь $\epsilon_a, \bar\epsilon^{\dot a}$ — параметры антикоммутирующего преобразования. Мы предполагаем, что инфинитезимальные преобразования любого суперполя $V(x, \theta, \bar\theta)$ при супертрансляциях должны быть записаны как

$$\delta V(x,\theta,\bar\theta) = \mathrm{i}(\epsilon^aQ_a + \bar\epsilon_{\dot a}\bar Q^{\dot a})V(x,\theta,\bar\theta).$$

Далее необходимо иметь в виду следующие антикоммутационные соотношения для суперзарядов в случае $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрии:

$$\{Q_a,\bar Q_{\dot a}\} = 2(\sigma^\mu)_{a\dot a}P_\mu, \quad \{Q_a,Q_b\} = 0, \quad \{\bar Q_{\dot a},\bar Q_{\dot b}\} = 0.$$

Поскольку речь идет о скалярном суперполе, то закон его преобразования при супертрансляциях имеет вид

$$V'(x+\delta x, \theta+\epsilon, \bar\theta+\bar\epsilon) = V(x,\theta,\bar\theta), \quad \delta x^\mu = -\mathrm{i}(\epsilon\sigma^\mu\bar\theta - \theta\sigma^\mu\bar\epsilon).$$

Отсюда

$$V'(x,\theta,\bar\theta) + \delta x^\mu\partial_\mu V(x,\theta,\bar\theta) + \epsilon^a\partial_a V(x,\theta,\bar\theta) + \bar\epsilon^{\dot a}\bar\partial_{\dot a}V(x,\theta,\bar\theta) = V(x,\theta,\bar\theta).$$

Значит, вариация формы суперполя при инфинитезимальных преобразованиях суперсимметрии выглядит как

$$\delta V(x,\theta,\bar\theta) = -\delta x^\mu \partial_\mu V - \epsilon^a \partial_a V - \bar\epsilon^{\dot a}\bar\partial_{\dot a} V =$$
$$= \mathrm{i}(\mathrm{i}\epsilon^a \partial_a V) - \mathrm{i}(-\mathrm{i}\bar\epsilon^{\dot a}\bar\partial_{\dot a} V) + \mathrm{i}\epsilon^a (\sigma^\mu)_{a\dot a}\bar\theta^{\dot a}\partial_\mu V - \mathrm{i}\theta^a(\sigma^\mu)_{a\dot a}\bar\epsilon^{\dot a}\partial_\mu V =$$
$$= \mathrm{i}\epsilon^a[\mathrm{i}\partial_a + (\sigma^\mu)_{a\dot a}\bar\theta^{\dot a}\partial_\mu]V(x,\theta,\bar\theta) - \mathrm{i}\bar\epsilon^{\dot a}[-\mathrm{i}\bar\partial_{\dot a} - \theta^a(\sigma^\mu)_{a\dot a}\partial_\mu]V(x,\theta,\bar\theta).$$

Мы готовы записать окончательные выражения для суперзарядов:

$$Q_a = \mathrm{i}\partial_a + (\sigma^\mu)_{a\dot a}\bar\theta^{\dot a}\partial_\mu, \quad \bar Q_{\dot a} = -\mathrm{i}\bar\partial_{\dot a} - \theta^a(\sigma^\mu)_{a\dot a}\partial_\mu.$$

Легко проверить, что данные операторы удовлетворяют требуемым антикоммутационным соотношениям, т.е. что они реализуют представление алгебры суперсимметрии на скалярных суперполях.

13.12. **Суперпреобразования компонентных полей.** Полученные соотношения для суперзарядов позволяют найти законы преобразования компонентных полей при супертрансляциях. Возьмем, например, вещественное скалярное суперполе и распишем в компонентах его вариацию формы

$$\delta V = \delta A + \theta^a\delta\psi_a + \bar\theta_{\dot a}\delta\bar\psi^{\dot a} + \theta^2\delta F + \bar\theta^2\delta F^\star + \theta^a\bar\theta^{\dot a}\delta A_{a\dot a} + \bar\theta^2\theta^a\delta\lambda_a + \theta^2\bar\theta_{\dot a}\delta\bar\lambda^{\dot a} + \theta^2\bar\theta^2\delta D =$$
$$= [\mathrm{i}\epsilon^a(\mathrm{i}\partial_a + \bar\theta^{\dot a}\partial_{a\dot a}) - \mathrm{i}\bar\epsilon^{\dot a}(-\mathrm{i}\bar\partial_{\dot a} - \theta^a\partial_{a\dot a})]\times$$
$$\times [A + \theta^b\psi_b + \bar\theta_{\dot b}\bar\psi^{\dot b} + \theta^2 F + \bar\theta^2 F^\star + \theta^b\bar\theta^{\dot b}A_{b\dot b} + \bar\theta^2\theta^b\lambda_b + \theta^2\bar\theta_{\dot b}\bar\lambda^{\dot b} + \theta^2\bar\theta^2 D],$$

где $\partial_{a\dot a} = (\sigma^\mu)_{a\dot a}\partial_\mu, A_{a\dot a} = (\sigma^\mu)_{a\dot a}A_\mu$. Теперь необходимо вычислить все производные по антикоммутирующим переменным в правой части уравнения. Проделайте это самостоятельно в качестве полезного упражнения. Сравнивая после левые и правые части равенства при соответствующих степенях θ-переменных, получаем

$$\delta A = -\epsilon^a\psi_a - \bar\epsilon_{\dot a}\bar\psi^{\dot a}, \quad \delta\psi_a = -2\epsilon_a F - \bar\epsilon^{\dot a}A_{a\dot a} - \mathrm{i}\bar\epsilon^{\dot a}\partial_{a\dot a}A, \quad \delta F = -\epsilon^a\lambda_a,$$

$$\delta A_{a\dot a} = 2(\bar\epsilon_{\dot a}\lambda_a - \epsilon_a\bar\lambda_{\dot a}) - 2\mathrm{i}[\epsilon_a\partial_{b\dot a}\psi^b + \bar\epsilon_{\dot a}\partial_{a\dot b}\bar\psi^{\dot b} + \mathrm{i}\partial_{a\dot a}(\bar\epsilon_{\dot b}\bar\psi^{\dot b} - \epsilon^b\psi_b)],$$

$$\delta\lambda_a = -2\epsilon_a D - \mathrm{i}\epsilon_a\partial_\mu A^\mu - 2\mathrm{i}\bar\epsilon^{\dot a}\partial_{a\dot a}F, \quad 2\,\delta D = -\mathrm{i}\partial_{a\dot a}(\epsilon^a\bar\lambda^{\dot a} + \bar\epsilon^{\dot a}\lambda^a).$$

В квантовой теории поля скалярное и векторное поля описывают некоторые бозоны. Спинорные же поля описывают фермионы. Найденные уравнения явно показывают, что суперсимметрия переводит бозонные поля в фермионные и наоборот.

13.13. **Вещественное скалярное поле.** Начнем с рассмотрения простейшей теории релятивистского поля — массивного вещественного скалярного поля (описывающего, например, нейтральные псевдоскалярные мезоны без спина) в четырехмерном пространстве Минковского с лоренцевой метрикой η вида $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1)$. Функционал действия для такой теории записывается как

$$S[\varphi(x)] = \frac{1}{2}\int_M d_4x\,\left[\dot\varphi^2 - (\nabla\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right] = \frac{1}{2}\int_M d_4x\,\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - m^2\varphi^2\right].$$

Данное действие является Пуанкаре-инвариантным, т.е. инвариантным относительно неоднородных преобразований Лоренца $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$, где $\Lambda^T\eta\Lambda = \eta$. Действительно, преобразование скалярного поля имеет вид $\varphi'(x) = \varphi(\Lambda^{-1}(x-a))$. Иными словами, преобразованное поле, вычисленное в преобразованной точке, дает то же самое значение, что и первоначальное поле, вычисленное в исходной точке. Преобразование $\partial_\mu\varphi(x)$ описывается формулой

$$\partial_\mu\varphi(x) \;\mapsto\; \partial_\mu(\varphi(\Lambda^{-1}(x-a))) = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu(\partial_\nu\varphi)(\Lambda^{-1}(x-a)).$$

Отсюда

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi(x)\partial_\nu\varphi(x) \;\mapsto\; \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi'(x)\partial_\nu\varphi'(x) =$$
$$= \eta^{\mu\nu}[(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\mu\partial_\sigma\varphi][(\Lambda^{-1})^\lambda{}_\nu\partial_\lambda\varphi](\Lambda^{-1}(x-a)) = \eta^{\sigma\lambda}(\partial_\sigma\varphi)(\partial_\lambda\varphi)(\Lambda^{-1}(x-a)).$$

Таким образом, лагранжиан преобразуется как скаляр: $\mathscr{L}(x) \mapsto \mathscr{L}(\Lambda^{-1}(x-a))$, а действие, полученное интегрированием лагранжиана по пространству-времени M, Пуанкаре инвариантно, как впрочем и уравнения движения, которые мы сейчас получим.

Полевое уравнение движения для свободного массивного скалярного поля имеет вид

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\varphi} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi} = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\varphi + m^2\varphi = [\Box + m^2]\varphi(x) = 0,$$

где $K^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1)$, $G^\mu = 0$, $H = m^2\varphi$.

Найденное уравнение движения называют уравнением Клейна-Гордона. В том или ином виде оно повсеместно встречается в теории поля в разных местах. Поэтому ближайшей нашей целью будет найти его нетривиальное решение. Для этого проще всего перейти в импульсное пространство, то есть представить $\varphi(x)$ в виде интеграла Фурье:

$$\varphi(x) = \int \frac{d_4p}{(2\pi)^4}\,\phi(p)\,e^{-\mathrm{i}px} := \int \frac{d_4p}{(2\pi)^4}\,\phi(p_0,\boldsymbol{p})\,e^{-\mathrm{i}p_0t+\mathrm{i}\mathbf{pr}}.$$

Подстановка данного выражения в уравнение Клейна-Гордона дает алгебраическое уравнение на Фурье-образ $\phi(p_0,\boldsymbol{p})$:

$$[p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2]\phi(p_0,\boldsymbol{p}) = 0,$$

имеющее нетривиальное решение при условии $p_0 = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} := \pm\omega_{\mathbf{p}}$. Последнее представляет собой стандартное дисперсионное соотношение между энергией и импульсом кванта скалярного поля массы m; поэтому постоянную m отождествляют с массой скалярного поля φ. Отсюда, с учетом доказанных выше свойств дельта-функции, получаем

$$\phi(p_0,\boldsymbol{p}) = 2\pi\alpha(p_0,\boldsymbol{p})\cdot\delta[p_0^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2] = \frac{2\pi}{2\omega_{\mathbf{p}}}\alpha(p_0,\boldsymbol{p})\cdot\left[\delta(p_0-\omega_{\mathbf{p}}) + \delta(p_0+\omega_{\mathbf{p}})\right],$$

то есть

$$\varphi(t,\boldsymbol{r}) = \int \frac{d_3p}{(2\pi)^3\,2\omega_{\mathbf{p}}}\left[\alpha(\omega_{\mathbf{p}},\boldsymbol{p})\,e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t+\mathrm{i}\mathbf{pr}} + \alpha(-\omega_{\mathbf{p}},-\boldsymbol{p})\,e^{\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t-\mathrm{i}\mathbf{pr}}\right].$$

Вводя обозначение $\alpha(\omega_{\mathbf{p}},\boldsymbol{p}) := \alpha_{\mathbf{p}}$, а также учитывая условие вещественности скалярного поля $\varphi(x) = \varphi^\star(x)$, в качестве общего решения уравнения Клейна-Гордона находим

$$\varphi(x) = \int \frac{d_3p}{(2\pi)^3\,2\omega_{\mathbf{p}}}\left[\alpha_{\mathbf{p}}\,e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t+\mathrm{i}\mathbf{pr}} + \alpha^\star_{\mathbf{p}}\,e^{\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t-\mathrm{i}\mathbf{pr}}\right].$$

Данное выражение представляет собой разложение скалярного поля по положительно частотным модам $e^{-\mathrm{i}px}$ с амплитудами $\alpha_{\mathbf{p}}$ и отрицательно-частотным модам $e^{\mathrm{i}px}$ с амплитудами $\alpha^\star_{\mathbf{p}}$ в так называемой релятивистской нормировке. Как несложно заметить, полевые моды скалярного поля $u_{\mathbf{p}}(x) = e^{-\mathrm{i}px}$ и $u^\star_{\mathbf{p}}(x) = e^{\mathrm{i}px}$ образуют полный набор ортогональных относительно скалярного произведения

$$(f,g) = -\mathrm{i}\int_{\Sigma_{[t]}} d_3x\,[f\dot{g}^\star - \dot{f}g^\star]$$

функций; интеграл берется по некоторой пространственнопободной гиперповерхности $\Sigma_{[t]}$ постоянного времени. Действительно,

$$(u_{\mathbf{p}}(t,\boldsymbol{r}),u_{\mathbf{q}}(t,\boldsymbol{r})) = (\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}})\, e^{-\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}})t}(2\pi)^3\, \delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}).$$

то есть скалярное произведение обращается в нуль, если импульсы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ и, следовательно, энергии $\omega_{\mathbf{p}}$ и $\omega_{\mathbf{q}}$, не равны для обеих мод. Важно отметить, что таким образом введенное скалярное произведение на пространстве решений уравнения Клейна-Гордона требует проверки на корректность: необходимо убедиться в том, что значение скалярного произведения не зависит от того, по какой гиперповерхности $\Sigma_{[t]}$ производится интергирование. Это легко сделать, используя формулу Гаусса-Остроградского и полевое уравнение движения; проделайте вычисления самостоятельно в качестве упражнения.

13.14. **Канонический тензор энергии-импульса.** Как мы установили ранее, действие для массивного скалярного поля Пуанкаре-инвариантно, в частности, инвариантно относительно пространственно-временных трансляций $x^\mu \mapsto x^\mu_a = x^\mu - a^\mu$. Согласно известной нам теореме Нетер

$$\int_M d_4x\, \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\partial_\mu \phi_I} \left(\frac{\partial \phi'_I}{\partial a^\lambda} - \partial_\nu \phi \frac{\partial x'^\nu}{\partial a^\lambda} \right) + \mathscr{L} \frac{\partial x'^\mu}{\partial a^\lambda} \right\} \equiv 0,$$

имеет место закон сохранения (уравнение непрерывности) канонического тензора энергии импульса $\partial_\mu T^\mu_{\ \nu} = 0$:

$$T^\mu_{\ \nu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\partial_\mu \varphi} \partial_\nu \varphi - \mathscr{L} \delta^\mu_\nu = \partial^\mu \varphi\, \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2}[\partial_\alpha \varphi\, \partial^\alpha \varphi - m^2 \varphi^2]\, \delta^\mu_\nu.$$

Как несложно заметить, канонический тензор энергии-импульса для скалярного поля полностью совпадает с т.н. метрическим тензором энергии-импульса. Действительно,

$$T_{\mu\nu} = \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \bigg|_{g \mapsto \eta} \int_M \mathrm{vol}_g \left[g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - m^2 \varphi^2 \right] = \partial_\mu \varphi\, \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2}[\partial_\alpha \varphi\, \partial^\alpha \varphi - m^2 \varphi^2]\, \eta_{\mu\nu}.$$

Интегрирование закона сохранения канонического тензора энергии-импульса по «бесконечной» пространственноподобной гиперповерхности $\Sigma_{[t]}$ постоянного времени дает

$$\int_{\Sigma_{[t]}} d_3x\, \partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{d}{dt} \int_{\Sigma_{[t]}} d_3x\, T^{0\nu} + \int_{\partial\Sigma_{[t]}} d_2\Sigma_i\, T^{i\nu} = \frac{d}{dt} \int_{\Sigma_{[t]}} d_3x\, T^{0\nu} = 0,$$

откуда получаем сохранение вектора энергии-импульса поля

$$P^\mu = \int_{\Sigma_{[t]}} d_3x\, T^{0\mu} = \mathrm{const}.$$

Вычислим энергию и импульс скалярного поля в терминах амплитуд положительно частотных и отрицательно-частотных мод. Начнем с энергии $E = P^0$:

$$E = \int_{\Sigma_{[t]}} d_3x\, T^{00} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{[t]}} d_3x \left[\dot\varphi^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2 \varphi^2 \right].$$

Найдем сначала интеграл от третьего слагаемого:

$$\frac{m^2}{2} \int_{\Sigma_{[t]}} d_3x\, \varphi^2(x) = \frac{m^2}{2} \int_{\Sigma_{[t]}} d_3x \int \frac{d_3p\, d_3q}{4\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}(2\pi)^6} \, [\alpha_{\mathbf{p}} \alpha^\star_{\mathbf{q}} e^{-\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}})t + \mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\mathbf{r}} +$$
$$+ \alpha^\star_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{q}} e^{\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}})t - \mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{q}} e^{-\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}})t + \mathrm{i}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\mathbf{r}} + \alpha^\star_{\mathbf{p}} \alpha^\star_{\mathbf{q}} e^{\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}})t - \mathrm{i}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\mathbf{r}}].$$

Проинтегрируем, например, третье слагаемое в последнем выражении по пространственным координатам

$$\int_{\Sigma_{[t]}} d_3x \int \frac{d_3p\, d_3q}{4\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}(2\pi)^6}\, \alpha_{\mathbf{p}}\alpha_{\mathbf{q}} e^{-\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}})t+\mathrm{i}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\mathbf{r}} =$$

$$= \int \frac{d_3p}{4\omega_{\mathbf{p}}(2\pi)^3}\alpha_{\mathbf{p}} e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t} \int d_3x \int \frac{d_3q}{\omega_{\mathbf{q}}(2\pi)^3} e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{q}}t}\alpha_{\mathbf{q}} e^{\mathrm{i}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\mathbf{r}} = \int \frac{d_3p}{4\omega_{\mathbf{p}}^2(2\pi)^3}\alpha_{\mathbf{p}}\alpha_{-\mathbf{p}}\, e^{-2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t}.$$

Проделывая аналогичные действия для остальных слагаемых, получаем

$$\frac{m^2}{2}\int_{\Sigma_{[t]}} d_3x\, \varphi^2(x) = \frac{m^2}{2}\int \frac{d_3p}{4\omega_{\mathbf{p}}^2(2\pi)^3}\, [\alpha_{\mathbf{p}}\alpha^\star_{\mathbf{p}} + \alpha^\star_{\mathbf{p}}\alpha_{\mathbf{p}} + \alpha_{\mathbf{p}}\alpha_{-\mathbf{p}}\, e^{-2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t} + \alpha^\star_{\mathbf{p}}\alpha^\star_{-\mathbf{p}}\, e^{2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t}].$$

Интегралы от других слагаемых в выражении для энергии поля вычисляются абсолютно также. Поэтому имеем

$$E = \frac{1}{2}\int \frac{d_3p}{4\omega_{\mathbf{p}}^2(2\pi)^3}\{[\alpha_{\mathbf{p}}\alpha^\star_{\mathbf{p}} + \alpha^\star_{\mathbf{p}}\alpha_{\mathbf{p}}][\omega_{\mathbf{p}}^2 + \boldsymbol{p}^2 + m^2] +$$
$$+ [\alpha_{\mathbf{p}}\alpha_{-\mathbf{p}}\, e^{-2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t} + \alpha^\star_{\mathbf{p}}\alpha^\star_{-\mathbf{p}}\, e^{2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t}][-\omega_{\mathbf{p}}^2 + \boldsymbol{p}^2 + m^2]\}.$$

В силу уравнения движения в импульсном пространстве (дисперсионного соотношения между энергией и импульсом): $\omega_{\mathbf{p}}^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2 = 0$ осцилирующие вклады зануляются:

$$E = \int \frac{d_3p}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}}\frac{1}{2}\left[\alpha_{\mathbf{p}}\alpha^\star_{\mathbf{p}} + \alpha^\star_{\mathbf{p}}\alpha_{\mathbf{p}}\right]\omega_{\mathbf{p}} = \int \frac{d_3p}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}}\alpha^\star_{\mathbf{p}}\alpha_{\mathbf{p}}\,\omega_{\mathbf{p}}.$$

Отсюда видно, что по своему физическому смыслу величина

$$N_{\mathbf{p}} = \frac{|\alpha_{\mathbf{p}}|^2}{2\omega_{\mathbf{p}}}$$

представляет собой плотность квантов поля с энергией $\omega_{\mathbf{p}}$ в импульсном пространстве. Вычислим теперь компоненты импульса скалярного поля P^i в терминах амплитуд положительно- и отрицательно-частотных мод:

$$\boldsymbol{P} = -\int d_3x\, \dot\varphi\, \nabla\varphi = \int_{\Sigma_{[t]}} d_3x \int \frac{d_3p\, d_3q}{4\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}(2\pi)^6}\, \omega_{\mathbf{p}}\boldsymbol{q}\, [\alpha_{\mathbf{p}}\alpha^\star_{\mathbf{q}} e^{-\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}})t+\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\mathbf{r}} +$$
$$+ \alpha^\star_{\mathbf{p}}\alpha_{\mathbf{q}} e^{\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}})t-\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\mathbf{r}} - \alpha_{\mathbf{p}}\alpha_{\mathbf{q}} e^{-\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}})t+\mathrm{i}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\mathbf{r}} - \alpha^\star_{\mathbf{p}}\alpha^\star_{\mathbf{q}} e^{\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}})t-\mathrm{i}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\mathbf{r}}] =$$
$$= \int \frac{d_3p}{4\omega_{\mathbf{p}}(2\pi)^3}\, \boldsymbol{p}\, [\alpha_{\mathbf{p}}\alpha^\star_{\mathbf{p}} + \alpha^\star_{\mathbf{p}}\alpha_{\mathbf{p}} + \alpha_{\mathbf{p}}\alpha_{-\mathbf{p}}\, e^{-2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t} + \alpha^\star_{\mathbf{p}}\alpha^\star_{-\mathbf{p}}\, e^{2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t}].$$

Отсюда находим

$$\boldsymbol{P} = \int \frac{d_3p}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}}\alpha^\star_{\mathbf{p}}\alpha_{\mathbf{p}}\, \boldsymbol{p}.$$

13.15. **Комплексное скалярное поле.** Массивное комплексное скалярное поле $\phi(x)$ с массой m является суперпозицией двух невзаимодействующих вещественных полей φ_1, φ_2 с той же массой,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_1(x) + \mathrm{i}\varphi_2(x)], \qquad \phi^\star(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_1(x) - \mathrm{i}\varphi_2(x)],$$

так что сумму функционалов действия для вещественных компонент φ_1 и φ_2, очевидно, можно представить как

$$S[\phi,\phi^\star] = \int_M d_4x\left[\partial_\mu\phi^\star\,\partial^\mu\phi - m^2\phi^\star\phi\right].$$

Рассматривая ϕ и $\phi^\star$ как независимые локальные поля, в качестве полевых уравнений Эйлера-Лагранжа получаем два уравнения Клейна-Гордона

$$[\Box + m^2]\phi(x) = 0, \qquad [\Box + m^2]\phi^\star(x) = 0.$$

На уравнениях движения можно ввести положительно-частотные и отрицательно частотные решения с амплитудами, которые выражаются через амплитуды исходных вещественных полей, так как согласно

$$\varphi_1(x) = \int \frac{d_3p}{(2\pi)^3\, 2\omega_{\mathbf{p}}}[\alpha_{1\mathbf{p}}e^{-\mathrm{i}px} + \alpha^\star_{1\mathbf{p}}e^{\mathrm{i}px}], \quad \varphi_2(x) = \int \frac{d_3p}{(2\pi)^3\, 2\omega_{\mathbf{p}}}[\alpha_{2\mathbf{p}}e^{-\mathrm{i}px} + \alpha^\star_{2\mathbf{p}}e^{\mathrm{i}px}],$$

определяя

$$\alpha_{\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha_{1\mathbf{p}} + \mathrm{i}\alpha_{2\mathbf{p}}], \quad \beta_{\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha_{1\mathbf{p}} - \mathrm{i}\alpha_{2\mathbf{p}}],$$

получим

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_1(x) + \mathrm{i}\,\varphi_2(x)] = \int \frac{d_3p}{(2\pi)^3\, 2\omega_{\mathbf{p}}}\left[\alpha_{\mathbf{p}}\, e^{-\mathrm{i}px} + \beta^\star_{\mathbf{p}}\, e^{\mathrm{i}px}\right].$$

Канонический тензор энергии-импульса для массивного комплексного скалярного поля

$$T^\mu_{\ \nu} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\partial_\nu\phi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^\star}\partial_\nu\phi^\star - \mathscr{L}\delta^\mu_\nu,$$

то есть

$$T^\mu_{\ \nu} = \partial^\mu\phi^\star\,\partial_\nu\phi + \partial^\mu\phi\,\partial_\nu\phi^\star - [\partial_\alpha\phi^\star\partial^\alpha\phi - m^2\phi^\star\phi]\,\delta^\mu_\nu.$$

Вычисление энергии и импульса комплексного скалярного поля в терминах амплитуд положительно-частотных и отрицательно-частотных мод производится абсолютно аналогично вещественному случаю. Начнем с энергии E:

$$E = \int_{\Sigma_{[t]}} d_3x\, T^{00} = \int_{\Sigma_{[t]}} d_3x\left[\dot\phi^\star\dot\phi + \nabla\phi^\star\nabla\phi + m^2\phi^\star\phi\right].$$

Найдем сначала интеграл от третьего слагаемого:

$$m^2\int_{\Sigma_{[t]}} d_3x\,\phi^\star(x)\phi(x) = m^2\int_{\Sigma_{[t]}} d_3x\int\frac{d_3p\, d_3q}{4\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}(2\pi)^6}\,[\alpha_{\mathbf{p}}\alpha^\star_{\mathbf{q}}e^{-\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}})t+\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\mathbf{r}} +$$
$$+\beta^\star_{\mathbf{p}}\beta_{\mathbf{q}}e^{\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}})t-\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{p}}\beta_{\mathbf{q}}e^{-\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}})t+\mathrm{i}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\mathbf{r}} + \beta^\star_{\mathbf{p}}\alpha^\star_{\mathbf{q}}e^{\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}})t-\mathrm{i}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\mathbf{r}}].$$

Проинтегрируем, например, третье слагаемое в последнем выражении по пространственным координатам

$$\int_{\Sigma_{[t]}} d_3x\int\frac{d_3p\, d_3q}{4\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}(2\pi)^6}\,\alpha_{\mathbf{p}}\beta_{\mathbf{q}}e^{-\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}})t+\mathrm{i}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\mathbf{r}} = \int\frac{d_3p}{4\omega^2_{\mathbf{p}}(2\pi)^3}\alpha_{\mathbf{p}}\beta_{-\mathbf{p}}\,e^{-2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t}.$$

Проделывая аналогичные действия для остальных слагаемых, получаем

$$\int d_3x\,\phi^\star(x)\phi(x) = \int\frac{d_3p}{4\omega^2_{\mathbf{p}}(2\pi)^3}\,[\alpha_{\mathbf{p}}\alpha^\star_{\mathbf{p}} + \beta^\star_{\mathbf{p}}\beta_{\mathbf{p}} + \alpha_{\mathbf{p}}\beta_{-\mathbf{p}}\,e^{-2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t} + \beta^\star_{\mathbf{p}}\alpha^\star_{-\mathbf{p}}\,e^{2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t}].$$

Интегралы от других слагаемых в выражении для энергии поля вычисляются абсолютно также. Поэтому имеем

$$E = \int\frac{d_3p}{4\omega^2_{\mathbf{p}}(2\pi)^3}\{[\alpha_{\mathbf{p}}\alpha^\star_{\mathbf{p}} + \beta^\star_{\mathbf{p}}\beta_{\mathbf{p}}][\omega^2_{\mathbf{p}} + \boldsymbol{p}^2 + m^2] +$$
$$+[\alpha_{\mathbf{p}}\beta_{-\mathbf{p}}\,e^{-2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t} + \beta^\star_{\mathbf{p}}\alpha^\star_{-\mathbf{p}}\,e^{2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t}][-\omega^2_{\mathbf{p}} + \boldsymbol{p}^2 + m^2]\} = \int\frac{d_3p}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}}\,[\alpha_{\mathbf{p}}\alpha^\star_{\mathbf{p}} + \beta_{\mathbf{p}}\beta^\star_{\mathbf{p}}]\,\omega_{\mathbf{p}}.$$

Аналогично вычисляются компоненты импульса комплексного скалярного поля в терминах амплитуд положительно- и отрицательно-частотных мод:

$$\boldsymbol{P} = \int \frac{d_3 p}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \left[\alpha_{\mathbf{p}} \alpha^\star_{\mathbf{p}} + \beta_{\mathbf{p}} \beta^\star_{\mathbf{p}}\right] \boldsymbol{p}.$$

13.16. **Глобальная симметрия.** Мы уже хорошо представляем поведение скалярного поля при преобразованиях группы аффинных симметрий пространства-времени Минковского — группы Пуанкаре. Однако, помимо аффинных симметрий, многие теории поля обладают также внутренними симметриями. Простейшим примером теории с внутренней симметрией является изучаемое нами сейчас свободное комплексное скалярное поле.

Выделение в комплексном поле ϕ пары динамических вещественных полей допускает введение произвольной глобальной фазы $g \in \mathbb{R}$:

$$\phi_g(x) = e^{-\mathrm{i}eg}\, \phi(x), \qquad \phi^\star_g(x) = e^{\mathrm{i}eg}\, \phi^\star(x),$$

что, как говорят, определяет глобальные фазовые преобразования скалярного поля, т.е. глобальные преобразования с калибровочной группой[1] $\mathbb{U}(1)$. Очевидно, что такие глобальные преобразования оставляют инвариантным действие для скалярного поля. Поэтому их часто называют преобразованиями глобальной $\mathbb{U}(1)$-симметрии. Вещественную постоянную e в формуле для глобального преобразования скалярного поля называют константой связи (или, иногда, зарядом).

Согласно теореме Нетер глобальной $\mathbb{U}(1)$-симметрии действия комплексного скалярного поля отвечает сохраняющийся ток

$$j^\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \left.\frac{\partial \phi_g}{\partial g}\right|_{g=0} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi^\star} \left.\frac{\partial \phi^\star_g}{\partial g}\right|_{g=0} = \mathrm{i}e \left[\phi^\star \partial^\mu \phi - \phi\, \partial^\mu \phi^\star\right],$$

$$\partial_\mu j^\mu = \mathrm{i}e \left[\phi^\star \Box \phi - \phi\, \Box \phi^\star\right] = \mathrm{i}em^2 \left[\phi\phi^\star - \phi^\star\phi\right] = 0.$$

Соответствующий сохраняющийся заряд Q равен

$$Q = \int d_3 x\, j_0 = \mathrm{i}e \int d_3 x\, [\phi^\star \dot{\phi} - \phi \dot{\phi}^\star].$$

Закон его сохранения легко получить из уравнения непрерывности $\partial_\mu j^\mu = 0$. Действительно, проинтегрируем закон сохранения нетеровского тока по всему пространству

$$0 = \int d_3 x\, \partial_\mu j^\mu = \int d_3 x\, [\partial_t j_0 + \nabla \boldsymbol{j}] = \frac{d}{dt} Q + \int d_3 x\, \nabla \boldsymbol{j}.$$

Преобразуем последний член по формуле Остроградского-Гаусса в поверхностный интеграл (по границе ∂V бесконечного объема $V \to \infty$):

$$\int_V d_3 x\, \nabla \boldsymbol{j} = \oint_{\partial V} d_2 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{j} = 0,$$

где предполагается, что вектор тока $\boldsymbol{j} \to 0$ на пространственной бесконечности, то есть при $|\boldsymbol{r}| \to \infty$. Отсюда и получается закон сохранения заряда $Q = \mathrm{const}$.

---

[1] Напомним, что унимодулярная группа $\mathbb{U}(1)$ — множество комплексных чисел по модулю равных единице: $z = e^{\mathrm{i}g}$, $g \in \mathbb{R}$. Умножение в $\mathbb{U}(1)$ — это умножение комплексных чисел, единица — это $z = 1$, а обратный элемент к $z = e^{\mathrm{i}g} \in \mathbb{U}(1)$ — это $z^{-1} = e^{-\mathrm{i}g}$.

В заключение параграфа найдем выражение для сохраняющегося заряда, отвечающего глобальной фазовой симметрии на уравнениях движения:

$$Q = e\int \frac{d_3p}{(2\pi)^3 4\omega_{\mathbf{p}}}[\alpha_{\mathbf{p}}\alpha^\star_{\mathbf{p}} - \beta_{\mathbf{p}}\beta^\star_{\mathbf{p}} + \alpha_{-\mathbf{p}}\beta_{\mathbf{p}}e^{-2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t} - \alpha^\star_{\mathbf{p}}\beta^\star_{-\mathbf{p}}e^{2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t}] +$$
$$+ e\int \frac{d_3p}{(2\pi)^3 4\omega_{\mathbf{p}}}[\alpha_{\mathbf{p}}\alpha^\star_{\mathbf{p}} - \beta_{\mathbf{p}}\beta^\star_{\mathbf{p}} + \alpha^\star_{\mathbf{p}}\beta^\star_{-\mathbf{p}}e^{2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t} - \alpha_{-\mathbf{p}}\beta_{\mathbf{p}}e^{-2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t}],$$

откуда окончательно

$$Q = e\int \frac{d_3p}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}}\left[\alpha_{\mathbf{p}}\alpha^\star_{\mathbf{p}} - \beta_{\mathbf{p}}\beta^\star_{\mathbf{p}}\right].$$

Полученные выражения для полной энергии и заряда поля говорят о том, что в импульсном пространстве

$$N^+_{\mathbf{p}} = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}\alpha_{\mathbf{p}}\alpha^\star_{\mathbf{p}}, \qquad N^-_{\mathbf{p}} = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}\beta_{\mathbf{p}}\beta^\star_{\mathbf{p}}$$

представляют собой плотности квантов скалярных частиц с зарядом e и скалярных античастиц с зарядом $-e$.

13.17. **Зарядовое сопряжение.** Поставим вопрос о классической теории поля в пространстве Минковского, в котором вместо частиц движутся античастицы и наоборот. Такой мир называют зарядово сопряженным к наблюдаемому нами исходному миру. Законы динамики в зарядово сопряженном мире не обязательно совпадают с законами движения в исходном мире. Связь полей в исходном мире с полями в зарядово сопряженном мире устанавливает операция зарядового сопряжения.

В случае комплексного скалярного поля с энергией E и зарядом Q, которые выражаются через положительно- и отрицательно-частотные амплитуды $\alpha_{\mathbf{p}}$ и $\beta_{\mathbf{p}}$, ясно что зарядовое сопряжение сводится к перестановке этих амплитуд, $\alpha_{\mathbf{p}} \leftrightarrow \beta_{\mathbf{p}}$, так что гамильтониан не меняет знак, а заряд поля меняет знак, что собственно и означает замену частиц на античастицы, так что плотность числа частиц $N^+_{\mathbf{p}}$ и плотность числа античастиц $N^-_{\mathbf{p}}$ преобразуются друг в друга $N^+_{\mathbf{p}} \leftrightarrow N^-_{\mathbf{p}}$. Далее, легко заметить, что если взять классическое скалярное поле

$$\phi(x) = \int \frac{d_3p}{(2\pi)^3\, 2\omega_{\mathbf{p}}}\left[\alpha_{\mathbf{p}}\, e^{-\mathrm{i}px} + \beta^\star_{\mathbf{p}}\, e^{\mathrm{i}px}\right]$$

и его комплексное сопряжение в явном виде

$$\phi^\star(x) = \int \frac{d_3p}{(2\pi)^3\, 2\omega_{\mathbf{p}}}\left[\alpha^\star_{\mathbf{p}}\, e^{\mathrm{i}px} + \beta_{\mathbf{p}}\, e^{-\mathrm{i}px}\right],$$

то это, как раз, и соответствует перестановке амплитуд $\alpha_{\mathbf{p}} \leftrightarrow \beta_{\mathbf{p}}$. Поэтому можно определить операцию зарядового сопряжения поля в виде $\phi_{\mathbb{C}}(x) = e^{-\mathrm{i}\gamma}\phi^\star(x)$, где мы ввели дополнительный множитель $e^{-\mathrm{i}\gamma}$, который, во-первых, сохраняет нормировку поля, во-вторых, является глобальным, т.е. не зависит от координат пространства-времени Минковского, а значит, он сохраняет вид разложения по положительно- и отрицательно-частотным амплитудам, и в-третьих, при введении глобального множителя $e^{-\mathrm{i}\gamma}$ действие скалярного поля $\phi_{\mathbb{C}}(x)$ в точности совпадает с действием для поля $\phi(x)$, и стало быть, законы движения в зарядово сопряженном мире со скалярным полем $\phi_{\mathbb{C}}(x)$ идентичны законам движения в исходном пространстве-времени Минковского с полем $\phi(x)$.

13.18. **Калибровочные преобразования.** Ранее мы рассмотрели глобальную симметрию комплексного скалярного поля и показали, что сохранение заряда поля Q является следствием инвариантности действия относительно глобальных преобразований с калибровочной группой $\mathbb{U}(1)$. При этом, когда мы совершаем вращение во внутреннем пространстве поля ϕ в одной точке на угол eg, мы, очевидно, должны одновременно совершить то же самое вращение во всех других точках. Если мы будем рассматривать такую картину всерьез, то увидим, что она не соответствует в полной мере духу теории относительности. Поэтому опустим требование глобальности параметра g, то есть будем считать его произвольной функцией от пространственно-временных координат, $g(x)$. Соответствующее локальное преобразование называется калибровочным преобразованием[1]. В этом случае действие для комплексного скалярного поля уже перестанет быть калибровочно инвариантным. Действительно,

$$\partial_\mu \phi_g^\star = e^{\mathrm{i}eg(x)}[\partial_\mu \phi^\star + \mathrm{i}e\phi^\star \partial_\mu g], \qquad \partial^\mu \phi_g = e^{-\mathrm{i}eg(x)}[\partial^\mu \phi - \mathrm{i}e\phi\,\partial^\mu g].$$

Значит,

$$S[\phi_g, \phi_g^\star] = \int_M d_4x\,[\partial_\mu \phi_g^\star\,\partial^\mu \phi_g - m^2 \phi_g^\star \phi_g] \neq S[\phi, \phi^\star] = \int_M d_4x\,[\partial_\mu \phi^\star \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\star \phi].$$

Попробуем модифицировать лагранжиан скалярного поля таким образом, чтобы действие для комплексного скалярного поля стало локально инвариантным. Для этого введем векторное поле $A^\mu(x)$ на пространстве Минковского согласно

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu.$$

Производная ∇_μ называется ковариантной производной[2] поля. Переход к ковариантной производной по формуле $\partial_\mu \mapsto \nabla_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu$ называют введением минимального калибровочного взаимодействия. Неминимальное взаимодействие строится в виде дополнительных, калибровочно инвариантных слагаемых в действии. Например, неминимальным является взаимодействие в виде произведения тензора напряженности поля

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

с тензором спина; оно относится к аномальному магнитному моменту поля. Более детально этот вопрос обсуждается в хороших курсах по квантовой механике.

Из определения ковариантной производной скалярного поля видно, что закон ее преобразования имеет вид

$$\nabla_\mu^g \phi_g = \partial_\mu \phi_g - \mathrm{i}eA_\mu^g \phi_g = e^{-\mathrm{i}eg(x)}\,[\partial_\mu \phi - \mathrm{i}e\phi\,\partial_\mu g - \mathrm{i}e\phi\,A_\mu^g].$$

Потребуем, чтобы

$$\nabla_\mu^g \phi_g = e^{-\mathrm{i}eg(x)}\,\nabla_\mu \phi, \qquad \nabla_\mu^g \phi_g^\star = e^{\mathrm{i}eg(x)}\,\nabla_\mu \phi^\star,$$

то есть

$$A_\mu^g(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu g(x).$$

---

[1]Локальное преобразование представляет собой действие элементом из группы $\mathbb{U}(1)$ на поле ϕ в каждой точке пространства и времени x. Геометрический объект, отвечающий этой картине, — это расслоение, причем пространство-время Минковского играет роль базы, а группа $\mathbb{U}(1)$ — слоя (его можно представить в виде единичной окружности на комплексной плоскости). Тогда калибровочные преобразования будут сечениями этого расслоения, которое математики называют $\mathbb{U}(1)$-расслоением.

[2]Форма связности A_μ первой степени сохраняет градиент при калибровочных преобразованиях, точно также, как аффинная связность на многообразии сохраняет параллельность. Аналогом тензора кривизны в нашем случае является тензор напряженности $F_{\mu\nu}$ поля $A^\mu(x)$: $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\phi = F_{\mu\nu}\phi$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Тогда, если в действии для свободного комплексного скалярного поля Клейна-Гордона заменить частные производные на ковариантные,

$$S[\phi^\star,\phi,A] = \int_M d_4x \left[\nabla_\mu \phi^\star \nabla^\mu \phi - m^2 \phi^\star \phi\right],$$

то очевидно, что полученное действие будет не только глобально инвариантным, но и (локально) калибровочно инвариантным, ведь в этом случае ковариантные производные преобразуются также, как и поля ϕ, $\phi^\star$. Таким образом, требование калибровочной инвариантности скалярного комплексного поля приводит нас к необходимости введения векторного калибровочного поля $A^\mu(x)$, взаимодействующего локально с этим скалярным полем.

Важно заметить, что преобразование комплексной фазы скалярного поля, конечно, никак не связано с пространственно-временными свойствами поля. В таком случае говорят, что имеют место преобразования внутренней симметрии, чтобы указать на их отличие от симметрий, связанных с изометриями пространства-времени. На математическом языке это означает, что генераторы непрерывных преобразований внутренней симметрии коммутируют с генераторами группы Пуанкаре (группы движений пространства-времени Минковского), а стало быть, заряд поля, который входит в определение элемента группы внутренней симметрии, является релятивистским инвариантом, а непрерывный параметр этой симметрии — это скаляр.

Векторное поле $A^\mu(x)$ может быть чистой калибровкой, то есть $A_\mu = \partial_\mu g$. Тогда с помощью калибровочного преобразования его можно сделать равным нулю во всех точках пространства-времени. Для определения того, является ли $A_\mu(x)$ тривиальным или нет, необходимо посмотреть на калибровочно инвариантный тензор напряженности[1] векторного поля. Если тензор напряженности тождественно обращается в нуль, то A_μ тривиально. Если же тензор напряженности не равен нулю, то имеет место взаимодействие заряженного скалярного поля с калибровочным векторным полем $A^\mu(x)$. Это векторное поле может быть внешним, то есть заданным условием задачи, или динамическим, то есть само возникать и распространяться вследствие взаимодействия с заряженными источниками. Такая динамическая теория поля — максвелловская электродинамика, которую мы скоро изучим.

13.19. **Свободное векторное поле и скалярная электродинамика.** Для того чтобы учесть динамику электромагнитного поля $A^\mu(x)$, необходимо добавить в действие

$$S[\phi^\star,\phi,A] = \int_M d_4x \left[\nabla_\mu \phi^\star \nabla^\mu \phi - m^2 \phi^\star \phi\right],$$

кинетический член (действие для свободного электромагнитного поля S_0), содержащий производные по пространственно-временным координатам от векторного поля $A^\mu(x)$, причем таким образом, чтобы действие оставалось калибровочно инвариантным. Требование калиборовочной инвариантности действия является естественным, поскольку наблюдаемые электромагнитные явления не должны зависеть от выбора калибровки.

---

[1] Видно, что тензор напряженности является антисимметричным, то есть $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, а его калибровочная инвариантность доказывается тривиально:

$$F^g_{\mu\nu} = \partial_\mu A^g_\nu - \partial_\nu A^g_\mu = F_{\mu\nu} - [\partial_\mu,\partial_\nu]\, g(x) = F_{\mu\nu}.$$

Здесь учтено, что в пространстве Минковского коммутатор $[\partial_\mu,\partial_\nu] = \partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu = 0$.

На данный момент единственным калибровочно инвариантным объектом, содержащим производные по пространственно-временным координатам от векторного поля $A^{\mu}(x)$, является тензор напряженности $F_{\mu\nu}$ электромагнитного поля. С его помощью можно легко построить скаляр (релятивистский инвариант) согласно

$$\mathcal{I}_1 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} = \eta^{\mu[\alpha}\eta^{\beta]\nu}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta}\eta^{\alpha\nu}]F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}.$$

Однако, этим скаляром не исчерпываются независимые квадратичные инварианты векторного поля.

Полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ в пространстве-времени Минковского определяется заданием значения с верхними индексами: $\varepsilon^{0123} = 1$. С его помощью можно определить дуальный тензор напряженности

$$\star F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,F^{\alpha\beta}$$

и построить еще пару квадратичных инвариантов поля[1]:

$$\mathcal{I}_2 = F_{\mu\nu}\star F^{\mu\nu}, \qquad \mathcal{I}_3 = \star F_{\mu\nu}\star F^{\mu\nu}.$$

На самом деле из этих трех квадратичных инвариантов электромагнитного поля независимыми являются только первые два. Действительно,

$$\mathcal{I}_3 = \star F_{\mu\nu}\star F^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^{\mu\nu\gamma\lambda}\,F^{\alpha\beta}F_{\gamma\lambda}.$$

Вспоминая, что свертка

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\cdot\varepsilon^{\mu\nu\gamma\lambda} = -2[\delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{\beta}_{\lambda} - \delta^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\beta}_{\gamma}],$$

получаем

$$\mathcal{I}_3 = -\frac{1}{2}[\delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{\beta}_{\lambda} - \delta^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\beta}_{\gamma}]F^{\alpha\beta}F_{\gamma\lambda} = -F_{\gamma\lambda}F^{\gamma\lambda} = -\mathcal{I}_1.$$

Таким образом, независимыми инвариантами поля являются $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$. Они, очевидно, являются также калибровочно инвариантными.

Теперь мы можем найти действие для свободного электромагнитного поля. Действительно, поскольку лагранжиан поля должен быть релятивистским скаляром, а независимыми релятивистскими скалярами являются инварианты поля $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$, то казалось бы, лагранжиан поля можно записать в виде их линейной комбинации[2]:

$$\mathscr{L}_0 = c_1\mathcal{I}_1 + c_2\mathcal{I}_2 = c_1F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + c_2F_{\mu\nu}\star F^{\mu\nu}.$$

Но инвариант $\mathcal{I}_2$ не является, что называется «истинным» скаляром. Он псевдоскаляр, то есть меняет знак при зеркальной инверсии пространства $\mathbb{P} : \boldsymbol{r} \mapsto -\boldsymbol{r}$, а значит, зависимость лагранжиана от этого инварианта приводила бы к нарушению инвариантности взаимодействий векторного поля относительно пространственной четности. Поэтому мы полагаем $c_2 = 0$. Определим знак коэффициента c_1. Для этого выпишем инвариант $\mathcal{I}_1$:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \dot{A}_i\dot{A}^i + \dots = -\dot{\boldsymbol{A}}^2 + \dots$$

[1] Другие релятивистские инварианты будут функциями от квадратичных инвариантов.

[2] Вообще говоря, в выражении для $\mathscr{L}_0$ можно было бы также включить квадратичные по инвариантам $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ члены или их произведения. Однако, согласно ограничениям, накладываемым на лагранжиан в локальной теории поля, мы в классической электродинамике требуем линейности уравнений движения электромагнитного поля.

Изучая квантовые поправки в уравнениях Максвелла, можно получить коэффициенты линейной комбинации $\mathscr{L}_0$ при нелинейных слагаемых (слагаемых, нарушающих линейность уравнений эволюции). Эти поправки будут описывать эффекты, которые в классической электродинамике не рассматриваются вовсе, например, рассеяние света на свете.

Если $c_1 > 0$, то минимум действия достигается при $|\dot{\boldsymbol{A}}| \to +\infty$. В этом случае лагранжиан $\mathscr{L}_0 \to -\infty$. Значит, чтобы давать положительный вклад в общую энергию, слагаемому с кинетической энергией нужно сменить знак. Поэтому $c_1 < 0$. Тогда, в естественной системе единиц, действие свободного поля S_0 запишется в виде

$$S_0[A] = -\frac{1}{4}\int_M d_4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

Прибавляя к $S[\phi^\star,\phi,A]$ действие $S_0[A]$ для свободного электромагнитного поля, получаем теорию взаимодействующих безмассового векторного и массивного скалярного полей с лагранжианом

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \nabla_\mu\phi^\star\nabla^\mu\phi - m^2\phi^\star\phi,$$

которую часто называют скалярной электродинамикой. Найдем уравнения движения для такой теории полей $\phi_a = \{\phi^\star,\phi,A_\mu\}$. Для поля $\phi^\star$ имеем

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^\star} = \mathrm{i}eA_\mu\nabla^\mu\phi - m^2\phi, \qquad \partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^\star} = \partial_\mu\nabla^\mu\phi,$$

откуда

$$\nabla_\mu\nabla^\mu\phi + m^2\phi = 0.$$

Аналогичное уравнение Эйлера-Лагранжа для поля ϕ получается из уравнения путем комплексного сопряжения последнего. Необходимо записать еще одно полевое уравнение движения — уравнение Эйлера-Лагранжа для безмассового калибровочного векторного поля $A^\mu(x)$:

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\alpha A_\beta} = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial\partial_\alpha A_\beta} = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\left[\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu - \delta^\alpha_\nu\delta^\beta_\mu\right],$$

то есть

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\alpha A_\beta} = -F^{\alpha\beta},$$

а потому, соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\partial_\alpha\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\alpha A_\beta} = -\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_\beta} = \mathrm{i}e\left[\phi^\star\nabla^\beta\phi - \phi\nabla^\beta\phi^\star\right],$$

то есть

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mathrm{i}e\left[\phi^\star\nabla^\nu\phi - \phi\nabla^\nu\phi^\star\right] := j^\nu.$$

Для того чтобы данное уравнение имело решение, необходимо выполнение уравнения непрерывности $\partial_\mu j^\mu = 0$. Действительно, $\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu j^\nu$, а поскольку оператор $\partial_\nu\partial_\mu$ является симметричным по перестановке индексов, то $\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$, ведь свертка симметричного тензора с антисимметричным, как известно, тождественно равна нулю. Отсюда и получается требование $\partial_\mu j^\mu = 0$. Покажем, что оно является следствием уравнений движения для скалярного комплексного поля. Имеем

$$\partial_\mu j^\mu = -\mathrm{i}e\,\partial_\mu\left[\phi^\star\nabla^\mu\phi - \phi\nabla^\mu\phi^\star\right].$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}\partial_\mu\left(\phi^\star\nabla^\mu\phi\right) &= \partial_\mu\phi^\star\nabla^\mu\phi + \phi^\star\partial_\mu\nabla^\mu\phi = \\ &= [\nabla_\mu\phi^\star - \mathrm{i}eA_\mu\phi^\star]\nabla^\mu\phi + \phi^\star[\nabla_\mu\nabla^\mu + \mathrm{i}eA_\mu\nabla^\mu]\phi = \nabla_\mu\phi^\star\nabla^\mu\phi + \phi^\star\nabla_\mu\nabla^\mu\phi.\end{aligned}$$

Аналогично

$$\partial_\mu\left(\phi\nabla^\mu\phi^\star\right) = \nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi^\star + \phi\nabla_\mu\nabla^\mu\phi^\star.$$

Поэтому, принимая во внимание уравнения движения, находим, что

$$\partial_\mu j^\mu = -\mathrm{i}e\,\left[\phi^\star\nabla_\mu\nabla^\mu\phi - \phi\nabla_\mu\nabla^\mu\phi^\star\right] = \mathrm{i}e\left[\phi^\star m^2\phi - \phi m^2\phi^\star\right] = 0.$$

Таким образом система уравнений движений скалярной электродинамики, что называется, совместна.

Заметим, что уравнения движения для свободного электромагнитного поля с действием $S_0[A]$ имеют вид $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$. В скалярной электродинамике взаимодействие со скалярным комплексным полем вполне определено и формально имеет вид локального взаимодействия электромагнитного поля с внешним источником — векторным током j^μ. Однако, в рамках скалярной электродинамики этот ток имеет конкретный вид, в отличие от максвелловской электродинамики, которая имеет дело с (почти) произвольными внешними токами j^μ. В связи с вышесказанным, действие для электромагнитного поля с учетом внешнего векторного тока можно записать в виде

$$S[A,j] = S_0[A] + S_{\mathrm{ext}}[j] = -\frac{1}{4}\int_M d_4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \int_M d_4x\, j^\mu(x)A_\mu(x).$$

Локальная теория поля с действием такого вида — суть классическая электродинамика Максвелла. Здесь интересно отметить, что глядя на действие классической электродинамики, на первый взгляд, можно усомниться в калибровочной инвариантности такой теории из-за члена взаимодействия с внешним током. Действительно, совершим калибровочное $\mathbb{U}(1)$-преобразование векторного поля $A^\mu(x)$. Тогда преобразованное действие $S^g_{\mathrm{ext}}[j]$ примет вид

$$S^g_{\mathrm{ext}}[j] = -\int_M d_4x\left[j^\mu A_\mu - \frac{d}{dx^\mu}(gj^\mu) + g\,\partial_\mu j^\mu\right].$$

Однако, как мы знаем, лагранжиан локального поля определен с точностью до прибавления к нему 4-дивергенции, оставляющей неизменными уравнения эволюции поля, а потому, второй член в подынтегральном выражении $S^g_{\mathrm{ext}}[j]$ можно опустить. Таким образом, чтобы уравнения эволюции не изменились при калибровочных преобразованиях, которые получаются из требования локальной инвариантности скалярного комплексного поля относительно преобразований с калибровочной группой $\mathbb{U}(1)$, необходимо выполнение уравнения непрерывности для векторного тока: $\partial_\mu j^\mu = 0$. Из уравнения непрерывности тут же получаем закон сохранения электрического заряда Q в трехмерном пространстве:

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} d_3x\, j_0 := \int_{\mathbb{R}^3} d_3x\,\rho = \mathrm{const}.$$

Уравнение непрерывности для векторного тока, однако, является гораздо более сильным утверждением, чем существование сохраняющегося в трехмерном пространстве заряда, поскольку оно подразумевает, что заряд сохраняется локально. Чтобы это увидеть, проинтегрируем уравнение непрерывности в конечном объеме V:

$$0 = \int_V d_3x\,\partial_\mu j^\mu = \frac{d}{dt}Q_V + \int_V d_3x\,\nabla\boldsymbol{j} = \frac{d}{dt}Q_V + \oint_{\partial V} d_2\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{j}.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}Q_V = -\oint_{\partial V} d_2\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{j}.$$

Это уравнение означает, что любой заряд, выходящий из объема V, должен быть учтен потоком вектора $\boldsymbol{j}$, «вытекающего» из объема. Этот вид локального закона сохранения заряда, как несложно понять, имеет место в любой локальной теории поля, в частности, в классической электродинамике. Таким образом, калибровочная

$\mathbb{U}(1)$-свобода электромагнитного поля тесно связана с законом сохранения электрического заряда.

13.20. **Уравнения Максвелла и преобразование полей.** Из последней лекции нам известно, что лагранжиан максвелловской электродинамики имеет вид

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu A_\nu} = -F^{\mu\nu}.$$

Отсюда, с учетом равенства $\partial\mathscr{L}/\partial A_\nu = -j^\nu$, получаем так называемую «вторую пару» уравнений Максвелла

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu.$$

Перепишем эти уравнения в компонентах. Начнем с того, что распишем тензор напряженности электромагнитного поля. Поскольку он является антисимметричным, то есть $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, то, очевидно, $F_{00} = F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$. Рассмотрим отдельно недиагональные компоненты тензора напряженности. Величины

$$F_{0i} = \boldsymbol{E}^i = -\partial_t \boldsymbol{A}^i - \partial_i A_0$$

образуют трехмерное векторное поле $\boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{A}} - \nabla A_0$, которое называется напряженностью электрического поля. Компоненты

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = -\partial_i \boldsymbol{A}^j + \partial_j \boldsymbol{A}^i = -\varepsilon_{ijk}(\nabla \times \boldsymbol{A})^k = -\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{H}^k.$$

Здесь

$$\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A},$$

называется напряженностью магнитного поля. Запишем теперь «вторую пару» уравнений Максвелла в терминах напряженностей электрических и магнитных полей:

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \partial_i F^{i0} = \partial_i F_{0i} = \partial_i \boldsymbol{E}^i = \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho(x),$$

то есть

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \rho(x).$$

Остальные компоненты

$$\partial_\mu F^{\mu i} = \partial_j F^{ji} + \partial_t F^{0i} = -\partial_j F_{ij} - \partial_t F_{0i} = \varepsilon_{ijk}\, \partial_j \boldsymbol{H}^k - \partial_t \boldsymbol{E}^i = (\nabla \times \boldsymbol{H})^i = \boldsymbol{j}^i,$$

то есть

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \dot{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{j}(x).$$

Величину $\boldsymbol{j}_{\text{b}} = \dot{\boldsymbol{E}}$ Максвелл назвал током смещения. «Первую пару» уравнений Максвелла мы могли получить гораздо раньше. Действительно, найдем дивергенцию дуального тензора напряженности: $\partial_\mu \star F^{\mu\nu}$. По определению запишем

$$\partial_\mu \star F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\mu \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\, F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\, \partial_\mu[\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha].$$

Поскольку оператор $\partial_\mu \partial_{\alpha,\beta}$ является симметричным по перестановке индексов, а символ Леви-Чивита представляет собой полностью антисимметричный тензор, то

$$\partial_\mu \star F^{\mu\nu} = 0,$$

что представляет собой тождество Биянки. Запишем «первую пару» уравнений Максвелла в компонентах. Для этого найдем сначала компоненты дуального тензора $\star F^{\mu\nu}$:

$$\star F^{0i} = \frac{1}{2}\varepsilon^{0i\alpha\beta}\, F_{\alpha\beta} = \varepsilon^{0ijk}\, F_{jk} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jkl}\boldsymbol{H}^l = -\delta_{il}\boldsymbol{H}^l = -\boldsymbol{H}^i,$$

$$\star F^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon^{ij\alpha\beta}\, F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij0k}\, F_{0k} + \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk0}\, F_{k0} = \varepsilon^{ij0k}\, F_{0k} = \varepsilon_{ijk}\, F_{0k} = \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{E}^k,$$

Как можно заметить, дуальное преобразование $F_{\mu\nu} \mapsto \star F_{\mu\nu}$ в электродинамике соответствует переходу

$$\boldsymbol{E} \mapsto \boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{H} \mapsto -\boldsymbol{E}.$$

Теперь «первая пара» уравнений Максвелла в компонентах принимает вид

$$\partial_\mu \star F^{\mu 0} = \partial_i \star F^{i0} = \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0,$$

$$0 = \partial_\mu \star F^{\mu i} = \partial_t \star F^{0i} + \partial_j \star F^{ji} = -\partial_t \boldsymbol{H}^i - \varepsilon_{ijk} \partial_j \boldsymbol{E}^k = -\partial_t \boldsymbol{H}^i - (\operatorname{rot} \boldsymbol{E})^i,$$

то есть

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{H}}.$$

Собирая полученные ранее уравнения движения для электромагнитного поля вместе, получаем систему уравнений Максвелла в векторном виде

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{H}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \rho, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \dot{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{j}. \end{cases}$$

Вычислим теперь квадратичные инварианты электромагнитного поля в терминах электрического и магнитного полей, а также найдем явный вид преобразования напряженностей электрического и магнитного полей при лоренцевых бустах. Начнем с последнего и посмотрим как преобразуются компоненты тензора напряженности электромагнитного поля при переходах от одних инерциальных систем к другим, то есть при лоренцевых бустах. Поскольку $F_{\mu\nu}$ является ковариантным тензором второго ранга, то, как известно, при переходах к другим системам отсчета его компоненты преобразуются обратными Λ-матрицами согласно

$$F'_{\mu\nu} = F_{\alpha\beta}\, \Lambda'^{\alpha}{}_{\mu} \Lambda'^{\beta}{}_{\nu}, \qquad \Lambda'^{\alpha}{}_{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}.$$

Перепишем этот закон преобразования в матричном виде

$$F'_{\mu\nu} = \Lambda'^{\alpha}{}_{\mu} F_{\alpha\beta} \Lambda'^{\beta}{}_{\nu} = (\Lambda'^{T})^{\mu}{}_{\alpha} F_{\alpha\beta} \Lambda'^{\beta}{}_{\nu}, \qquad F' = \Lambda'^{T} F \Lambda'.$$

Тогда, совершая лоренцев буст, к примеру, вдоль оси $x^1 = x$, то есть при

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} \gamma & v\gamma \\ v\gamma & \gamma \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}},$$

получаем, что

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}_x, \qquad \boldsymbol{H}'_x = \boldsymbol{H}_x,$$

$$\boldsymbol{E}'_y = \gamma(\boldsymbol{E}_y - v\boldsymbol{H}_z), \qquad \boldsymbol{H}'_y = \gamma(\boldsymbol{H}_y + v\boldsymbol{E}_z),$$

$$\boldsymbol{E}'_z = \gamma(\boldsymbol{E}_z + v\boldsymbol{H}_y), \qquad \boldsymbol{H}'_z = \gamma(\boldsymbol{H}_z - v\boldsymbol{E}_y).$$

Запишем теперь лоренцев буст для полей в произвольном направлении. Для этого разложим напряженности полей на продольные и поперечные компоненты:

$$\boldsymbol{E}_\parallel = \frac{\boldsymbol{v}}{v^2}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E}), \qquad \boldsymbol{E}_\perp = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_\parallel,$$

$$\boldsymbol{H}_\parallel = \frac{\boldsymbol{v}}{v^2}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{H}), \qquad \boldsymbol{H}_\perp = \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_\parallel.$$

При этом, как легко заметить, компоненты напряженностей электромагнитного поля не преобразуются вдоль направления буста. С учетом вышесказанного получаем

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}_\parallel + \gamma\left[\boldsymbol{E}_\perp + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H})\right], \qquad \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H}_\parallel + \gamma\left[\boldsymbol{H}_\perp - (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E})\right].$$

Поскольку сами напряженности электрического и магнитного полей являются векторами (или псевдовекторами), то очевидно, что релятивистские скаляры (или псевдоскаляры) должны быть квадратичными по напряженностям электрического и магнитного полей, а значит, и по тензору напряженности и дуальному тензору напряженности поля. Убедимся в этом, выписав квадратичные инварианты электромагнитного поля в терминах напряженностей электрического и магнитного полей:

$$\mathcal{I}_1 = F_{0i}F^{0i} + F_{i0}F^{i0} + F_{ij}F^{ij} = 2(\boldsymbol{H}^2 - \boldsymbol{E}^2), \quad \mathcal{I}_2 = -4(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}), \quad \mathcal{I}_3 = -\mathcal{I}_1.$$

13.21. **Структура общего решения уравнений Максвелла.** Полученные ранее уравнения движения электромагнитного поля с внешним источником являют собой линейные дифференциальные уравнения в частных производных. Их общее решение, как известно из линейной алгебры, складывается из общего решения однородных уравнений (свободных колебаний поля) и частного решения неоднородных уравнений с внешним источником (вынужденных колебаний).

Найдем общее решение уравнений Максвелла. Для этого перепишем их в терминах векторного поля $A^\mu(x)$, которое обычно называют четырехмерным потенциалом электромагнитного поля:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -\partial^2\left(-\eta^{\mu\nu} + \frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\partial^2}\right)A_\mu = j^\nu,$$

а также перейдем в импульсное пространство, то есть разложим в интеграл Фурье поле $A_\mu(x)$ и внешний ток $j^\mu(x)$. Под x, как и раньше, понимаются координаты пространства-времени Минковского с метрикой $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1)$, а под p — четырехмерный импульс.

$$A_\mu(x) = \int \frac{d_4p}{(2\pi)^4}\mathscr{A}_\mu(p_0,\boldsymbol{p})\cdot e^{-\mathrm{i}px}, \qquad j^\mu(x) = \int \frac{d_4p}{(2\pi)^4}\mathscr{J}^\mu(p_0,\boldsymbol{p})\cdot e^{-\mathrm{i}px}.$$

После соответствующей подстановки получаем

$$p^2\left(-\eta^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right)\mathscr{A}_\mu \equiv p^2\Pi^{\mu\nu}\mathscr{A}_\mu = \mathscr{J}^\nu,$$

где вещественный симметричный поляризационный тензор $\mathcal{P}^{\mu\nu} = -\Pi^{\mu\nu}$ является проектором на поперечные состояния:

$$\Pi^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}, \qquad \mathcal{P}^{\mu\lambda}\cdot\mathcal{P}^{\lambda}_{\nu} = \mathcal{P}^{\mu\nu}, \qquad p_\mu\Pi^{\mu\nu} = 0.$$

Значит, решение уравнений движения представляет собой суперпозицию продольной компоненты, свободного уравнения без источника и частного решения с источником:

$$\mathscr{A}^\nu(p_0,\boldsymbol{p}) = gp^\nu + \mathscr{A}^\nu_{\text{free}} + \Pi^{\mu\nu}\mathscr{J}_\mu\frac{1}{p^2}.$$

Продольная компонента — это отражение калибровочной свободы в выборе решения, так как $p_\mu g \mapsto \mathrm{i}\partial_\mu g$, что есть просто градиентное (калибровочное) преобразование четырехмерного потенциала. Вынужденные колебания, третий член в последнем выражении, требуют осторожного обращения, поскольку содержат явную сингулярность при $p^2 = 0$, и с этим мы разберемся чуть позже. А сейчас остановимся на решении в виде свободных волн.

13.22. **Свободные колебания поля.** В состав тензора напряженности входит производная по времени в компоненте $F_{0i} = \boldsymbol{E}^i = -\partial_t\boldsymbol{A}^i - \partial_i A_0$. Это означает, что скалярный потенциал A_0 не эволюционирует (то есть не является динамической величиной), так как производная скалярного потенциала $\partial_t A_0$ не входит в число компонент тензора напряженности. Поэтому положим $A_0 = 0$. Зафиксируем также калибровку условием Лоренца $\partial_\mu A^\mu = 0$, то есть занулим продольную компоненту поля. Из условия $A_0 = 0$, а также условия зануления продольной компоненты поля получаем так называемую кулоновскую калибровку вида

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0.$$

С учетом условия калибровки Лоренца получаем уравнение движения в импульсном пространстве

$$\partial^2 A_\mu(x) = 0 \;\mapsto\; -p^2 \mathscr{A}_\mu(p_0,\boldsymbol{p}) = 0,$$

которое имеет нетривиальное решение при условии $p^2 = p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 = 0$, то есть при $p_0 = \pm|\boldsymbol{p}| := \pm\omega_{\mathbf{p}}$. Это тождество представляет собой стандартное дисперсионное соотношение между энергией и импульсом фотона. Последнее, в свою очередь, диктует нам общий вид разложения четырехмерного потенциала электромагнитного поля:

$$A_\mu^{\text{free}}(x) = \int \frac{d_3p}{(2\pi)^3\, 2\omega_{\mathbf{p}}} \left[\tilde{\mathscr{A}_\mu}\left(\omega_{\mathbf{p}}, \boldsymbol{p}\right) \cdot e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t + \mathrm{i}\mathbf{pr}} + \tilde{\mathscr{A}_\mu}\left(-\omega_{\mathbf{p}}, \boldsymbol{p}\right) \cdot e^{\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t + \mathrm{i}\mathbf{pr}}\right].$$

Производя замену переменных $\boldsymbol{p} \mapsto -\boldsymbol{p}$ во втором слагаемом, получаем

$$A_\mu^{\text{free}}(x) = \int \frac{d_3p}{(2\pi)^3\, 2\omega_{\mathbf{p}}} \left[\tilde{\mathscr{A}_\mu}\left(\omega_{\mathbf{p}}, \boldsymbol{p}\right) \cdot e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t + \mathrm{i}\mathbf{pr}} + \tilde{\mathscr{A}_\mu}\left(-\omega_{\mathbf{p}}, -\boldsymbol{p}\right) \cdot e^{\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t - \mathrm{i}\mathbf{pr}}\right].$$

В силу выбранной нами калибровки $A_0 = 0$, а векторный потенциал ортогонален импульсу или, что то же самое, волновому вектору: $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{A} = 0$. Таким образом, отличным от нуля остается двухкомпонентное векторное поле евклидова пространства, ортогональное импульсу (или волновому вектору) $\boldsymbol{p}$:

$$\boldsymbol{A}_{\text{free}}(x) = \sum_{\lambda=1}^{2} \int \frac{d_3p}{(2\pi)^3\, 2\omega_{\mathbf{p}}} \left[\boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\boldsymbol{p})\, \alpha_\lambda(\boldsymbol{p})\, e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t + \mathrm{i}\mathbf{pr}} + \boldsymbol{\epsilon}_\lambda(-\boldsymbol{p})\, \alpha_\lambda(-\boldsymbol{p})\, e^{\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t - \mathrm{i}\mathbf{pr}}\right].$$

Условие вещественности векторного потенциала дает

$$\boldsymbol{\epsilon}_\lambda(-\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{\epsilon}_\lambda^\star(\boldsymbol{p}), \qquad \alpha_\lambda(-\boldsymbol{p}) = \alpha_\lambda^\star(\boldsymbol{p}).$$

В уравнении для векторного потенциала $\boldsymbol{A}_{\text{free}}(x)$ пара ортогональных поперечных векторов поляризации нормированы на единицу

$$\boldsymbol{\epsilon}_\lambda \cdot \boldsymbol{\epsilon}_s^\star = \delta_{\lambda s}, \qquad \boldsymbol{\epsilon}_\lambda \cdot \boldsymbol{p} = 0.$$

С учетом вышесказанного получаем

$$\boldsymbol{A}_{\text{free}}(x) = \sum_{\lambda=1}^{2} \int \frac{d_3p}{(2\pi)^3\, 2\omega_{\mathbf{p}}} \left[\boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\boldsymbol{p})\, \alpha_\lambda(\boldsymbol{p})\, e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t + \mathrm{i}\mathbf{pr}} + \boldsymbol{\epsilon}_\lambda^\star(\boldsymbol{p})\, \alpha_\lambda^\star(\boldsymbol{p})\, e^{\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t - \mathrm{i}\mathbf{pr}}\right].$$

Данное выражение представляет собой разложение двухкомпонентного векторного поля $\boldsymbol{A}_{\text{free}}(x)$ по положительно-частотным модам $\boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\boldsymbol{p})\, e^{-\mathrm{i}px}$ с амплитудами $\alpha_\lambda(\boldsymbol{p})$ и отрицательно частотным модам $\boldsymbol{\epsilon}_\lambda^\star(\boldsymbol{p})\, e^{\mathrm{i}px}$ с амплитудами $\alpha_\lambda^\star(\boldsymbol{p})$ в релятивистской нормировке.

Векторы напряженности электрического и магнитного полей в свободной волне связаны, поскольку

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \mapsto \mathrm{i}\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{\epsilon}, \qquad \boldsymbol{E} = -\partial_t \boldsymbol{A} \mapsto \mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}\, \boldsymbol{\epsilon},$$

а значит

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{|\boldsymbol{p}|} \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}.$$

Если условиться считать векторы поляризации вещественными, то различают следующие случаи, отвечающие комплексным значениям амплитуды колебаний: линейная поляризация: $\arg\alpha_1 = \arg\alpha_2 + \pi n$; круговая поляризация: $\arg\alpha_1 = \arg\alpha_2 + \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $|\alpha_1| = |\alpha_2|$; эллиптическая поляризация: $\arg\alpha_1 \neq \arg\alpha_2 + \pi n$, $|\alpha_1| \neq |\alpha_2|$. Кроме этого говорят о хаотической поляризации естественного света, когда в среднем $\langle\alpha_\lambda\alpha_s\rangle = \alpha^2\,\delta_{\lambda s}$.

13.23. **Энергия и импульс свободного поля.** Найдем выражения для полных энергии и импульса свободного электромагнитного поля. Вычислим сначала канонический тензор энергии-импульса электромагнитного поля:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu A_\alpha}\partial^\nu A_\alpha - \mathscr{L}\eta^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left[F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\,\eta^{\mu\nu} - 4F^{\mu\alpha}\,\partial^\nu A_\alpha\right].$$

Видно, что канонический тензор энергии-импульса не является калибровочно инвариантным. Так получилось из-за того, что векторное калибровочное поле, в отличие от скалярного, имеет нетривиальный спин. Как следствие получаем, что энергия и импульс также не являются калибровочно инвариантными. Понятно, что наличие калибровочной зависимости физических наблюдаемых абсолютно недопустимо. Поэтому переопределим тензор энергии-импульса следующим образом:

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\alpha\Omega^{\alpha\mu\nu},$$

причем так, чтобы $\partial_\mu\Theta^{\mu\nu} = 0$. Очевидно, что тензор $\Omega^{\alpha\mu\nu}$ должен быть в таком случае антисимметричным по перестановке первых двух индексов, ибо свертка симметричного тензора с антисимметричным тождественно равна нулю. Подберем $\Omega^{\alpha\mu\nu}$ таким образом, чтобы достичь калибровочной инвариантности тензора энергии-импульса $\Theta^{\mu\nu}$ векторного калибровочного поля:

$$\Theta_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \partial^\alpha(A_\nu F_{\mu\alpha}).$$

Раскрывая скобки в это выражении, получаем, что на уравнениях движения: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ сохраняется так называемый симметризованный тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left[F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\,\eta_{\mu\nu} - 4F_{\mu\alpha}\,F_\nu^{\ \alpha}\right].$$

Интересно отметить, что симметризованный тензор энергии-импульса свободного электромагнитного поля полностью совпадает с соответствующим метрическим тензором энергии-импульса. Действительно,

$$2\,\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}\bigg|_{g\mapsto\eta} = -\frac{1}{2}\,\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\bigg|_{g\mapsto\eta}\int_M \mathrm{vol}_g\left[g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\right] = \frac{1}{4}\left[F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\,\eta_{\mu\nu} - 4F_{\mu\alpha}\,F_\nu^{\ \alpha}\right].$$

Поэтому, для нахождения энергии и импульса в некоторой локальной теории поля, можно сразу вычислять метрический тензор энергии-импульса.

Теперь, зная вид симметризованного тензора энергии-импульса, можно легко найти полную энергию свободного электромагнитного поля:

$$E = \int d_3x\,\frac{1}{4}\left[F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\eta_{00} - 4F_{0\alpha}\,F_0^{\ \alpha}\right] = \frac{1}{4}\int d_3x\left[2(\boldsymbol{H}^2 - \boldsymbol{E}^2) + 4\boldsymbol{E}^2\right],$$

или

$$E = \frac{1}{2}\int d_3x\,[\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2].$$

Вычислим сначала интеграл от первого слагаемого. В силу выбранной калибровки электрическое поле

$$\boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{A}} = \mathrm{i}\sum_\lambda\int\frac{d_3p}{(2\pi)^3\,2\omega_{\mathbf{p}}}\omega_{\mathbf{p}}\left[\boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\boldsymbol{p})\,\alpha_\lambda(\boldsymbol{p})\,e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t+\mathrm{i}\mathbf{pr}} - \boldsymbol{\epsilon}^\star_\lambda(\boldsymbol{p})\,\alpha^\star_\lambda(\boldsymbol{p})\,e^{\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t-\mathrm{i}\mathbf{pr}}\right].$$

Интеграл от первого слагаемого

$$\frac{1}{2}\int d_3x\,\boldsymbol{E}^2=\frac{1}{2}\int d_3x\,\boldsymbol{E}^\star(x)\,\boldsymbol{E}(x)=\frac{1}{2}\sum_{s,\lambda}\int d_3x\int\frac{d_3p\,d_3q}{(2\pi)^6\,4\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}}\,\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}\cdot$$

$$[\boldsymbol{\epsilon}_s(\boldsymbol{p})\alpha_s(\boldsymbol{p})e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t+\mathrm{i}\mathbf{pr}}-\boldsymbol{\epsilon}_s^\star(\boldsymbol{p})\alpha_s^\star(\boldsymbol{p})e^{\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t-\mathrm{i}\mathbf{pr}}][\boldsymbol{\epsilon}_\lambda^\star(\boldsymbol{q})\alpha_\lambda^\star(\boldsymbol{q})e^{\mathrm{i}\omega_{\mathbf{q}}t-\mathrm{i}\mathbf{qr}}-\boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\boldsymbol{q})\,\alpha_\lambda(\boldsymbol{q})\,e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{q}}t+\mathrm{i}\mathbf{qr}}]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{s,\lambda}\int d_3x\int\frac{d_3p\,d_3q}{(2\pi)^6\,4\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}}\,\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}\cdot[\boldsymbol{\epsilon}_s(\boldsymbol{p})\,\boldsymbol{\epsilon}_\lambda^\star(\boldsymbol{q})\,\alpha_s(\boldsymbol{p})\,\alpha_\lambda^\star(\boldsymbol{q})\,e^{-\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}})t+\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\mathbf{r}}+$$

$$+\boldsymbol{\epsilon}_s^\star(\boldsymbol{p})\,\boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\boldsymbol{q})\,\alpha_s^\star(\boldsymbol{p})\,\alpha_\lambda(\boldsymbol{q})\,e^{\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}})t-\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\mathbf{r}}-\boldsymbol{\epsilon}_s(\boldsymbol{p})\,\boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\boldsymbol{q})\,\alpha_s(\boldsymbol{p})\,\alpha_\lambda(\boldsymbol{q})\,e^{-\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}})t+\mathrm{i}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\mathbf{r}}-$$

$$-\boldsymbol{\epsilon}_s^\star(\boldsymbol{p})\,\boldsymbol{\epsilon}_\lambda^\star(\boldsymbol{q})\,\alpha_s^\star(\boldsymbol{p})\,\alpha_\lambda^\star(\boldsymbol{q})\,e^{\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{q}})t-\mathrm{i}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\mathbf{r}}].$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}\int d_3x\,\boldsymbol{E}^2=\frac{1}{2}\sum_{\lambda}\int\frac{d_3p}{(2\pi)^3\,4\omega_{\mathbf{p}}^2}\,\omega_{\mathbf{p}}^2[\alpha_\lambda(\boldsymbol{p})\,\alpha_\lambda^\star(\boldsymbol{p})+\alpha_\lambda^\star(\boldsymbol{p})\,\alpha_\lambda(\boldsymbol{p})-$$

$$-\alpha_\lambda(\boldsymbol{p})\,\alpha_\lambda^\star(\boldsymbol{p})\,e^{-2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t}-\alpha_\lambda^\star(\boldsymbol{p})\,\alpha_\lambda(\boldsymbol{p})\,e^{2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t}].$$

Аналогично, для магнитного поля имеем

$$\boldsymbol{H}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\mathrm{i}\sum_{\lambda}\int\frac{d_3p}{(2\pi)^3\,2\omega_{\mathbf{p}}}\left[\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\boldsymbol{p})\,\alpha_\lambda(\boldsymbol{p})\,e^{-\mathrm{i}px}-\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\epsilon}_\lambda^\star(\boldsymbol{p})\,\alpha_\lambda^\star(\boldsymbol{p})\,e^{\mathrm{i}px}\right].$$

$$\frac{1}{2}\int d_3x\,\boldsymbol{H}^2=\frac{1}{2}\sum_{s,\lambda}\int d_3x\int\frac{d_3p\,d_3q}{(2\pi)^6\,4\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}}\cdot$$

$$\cdot\left[\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\epsilon}_s(\boldsymbol{p})\,\alpha_s(\boldsymbol{p})\,e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t+\mathrm{i}\mathbf{pr}}-\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\epsilon}_s^\star(\boldsymbol{p})\,\alpha_s^\star(\boldsymbol{p})\,e^{\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t-\mathrm{i}\mathbf{pr}}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{\epsilon}_\lambda^\star(\boldsymbol{q})\,\alpha_\lambda^\star(\boldsymbol{q})\,e^{\mathrm{i}\omega_{\mathbf{q}}t-\mathrm{i}\mathbf{qr}}-\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\boldsymbol{q})\,\alpha_\lambda(\boldsymbol{q})\,e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{q}}t+\mathrm{i}\mathbf{qr}}\right]=$$

$$=\cdots=\frac{1}{2}\sum_{\lambda}\int\frac{d_3p}{(2\pi)^3\,4\omega_{\mathbf{p}}^2}\,\boldsymbol{p}^2\cdot[\alpha_\lambda(\boldsymbol{p})\,\alpha_\lambda^\star(\boldsymbol{p})+\alpha_\lambda^\star(\boldsymbol{p})\,\alpha_\lambda(\boldsymbol{p})+$$

$$+\alpha_\lambda(\boldsymbol{p})\alpha_\lambda^\star(\boldsymbol{p})e^{-2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t}+\alpha_\lambda^\star(\boldsymbol{p})\,\alpha_\lambda(\boldsymbol{p})e^{2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{p}}t}].$$

При расчете $\frac{1}{2}\int d_3x\,\boldsymbol{H}^2$ было использовано равенство:

$$[\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\boldsymbol{p})]^2=\boldsymbol{p}^2\boldsymbol{\epsilon}_\lambda^2-(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_\lambda)^2=\boldsymbol{p}^2.$$

Из вышенаписанного, с учетом зануления осцилирующих вкладов, находим

$$E=\sum_{\lambda}\int\frac{d_3p}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}}\,\alpha_\lambda^\star(\boldsymbol{p})\,\alpha_\lambda(\boldsymbol{p})\,\omega_{\mathbf{p}}.$$

Видно, что по своему физическому смыслу величина $N_\lambda(\boldsymbol{p})=|\alpha_\lambda(\boldsymbol{p})|^2/2\omega_{\mathbf{p}}$ представляет собой плотность квантов поля с энергией $\omega_{\mathbf{p}}$ и поляризацией λ в импульсном пространстве.

13.24. **Вынужденные колебания.** Разберемся теперь с вынужденными колебаниями поля. В качестве частного решения имеем

$$A^\nu(x)=\int\frac{d_4p}{(2\pi)^4}\mathscr{A}^\nu(p_0,\boldsymbol{p})\cdot e^{-\mathrm{i}px}=\int\frac{d_4p}{(2\pi)^4}\Pi^{\mu\nu}\,\mathscr{J}_\mu(p_0,\boldsymbol{p})\,\frac{1}{p^2}\cdot e^{-\mathrm{i}px}.$$

При вычислении данного Фурье-преобразования следует учесть сохранение заряда $\partial_\mu j^\mu=0$, которое в импульсном представлении принимает вид $p_\mu\mathscr{J}^\mu=0$, так что

$$\Pi^{\mu\nu}\,\mathscr{J}_\mu=\left(-\eta^{\mu\nu}+\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right)\mathscr{J}_\mu=-\mathscr{J}^\nu,$$

и нам в дальнейшем достаточно будет провести рассмотрение лишь, например, для временной компоненты — скалярного потенциала

$$A_0(x) = -\int \frac{d_4 p}{(2\pi)^4} \mathscr{J}^0(p_0,\boldsymbol{p}) \, \frac{1}{p^2} \cdot e^{-\mathrm{i}px},$$

а пространственные компоненты векторного потенциала будут вычисляться совершенно аналогично. Отсюда следует, что частное решение уравнения движения для поля $A^\nu(x)$ с внешним источником $j^\mu(x)$ можно представить в виде

$$A^\nu(x) = \int d_4x' \, \mathcal{G}^{\mu\nu}(x-x') \, j_\mu(x') := [\mathcal{G}^{\mu\nu} \star j_\mu](x),$$

где соответствующая функция Грина

$$\mathcal{G}^{\mu\nu}(t,\boldsymbol{r}) = \int \frac{d_4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} \left(-\eta^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) e^{-\mathrm{i}px},$$

Функция Грина $\mathcal{G}^{\mu\nu}(t,\boldsymbol{r})$, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$-\partial^2 \mathcal{G}^{\mu\nu}(t,\boldsymbol{r}) = \Pi^{\mu\nu} \, \delta(x) = \Pi^{\mu\nu} \delta(t) \delta(\boldsymbol{r}).$$

Для нахождения функции Грина $\mathcal{G}^{\mu\nu}(x)$ воспользуемся уже известным нам выражением для запаздывающего пропагатора в свободной безмассовой теории скалярного поля. Тогда, с учетом тензора поляризаций фотона, запаздывающий пропагатор можно записать в виде

$$\mathcal{G}^{\mu\nu}_{\text{ret}}(x) = \vartheta(t) \frac{\delta(x^2)}{2\pi} \, \Pi^{\mu\nu}.$$

В квантовой теории поля функция Грина (пропагатор фотона) используется не только для вычислений вынужденных колебаний, но и для расчета квантовых петлевых поправок, когда тензор поляризации сворачивается с виртуальными токами. Тогда важно указать в тензоре поляризаций и способ обхода полюса в слагаемом $p^\mu p^\nu / p^2$.

Сворачивая с внешним источником $j^\mu(x)$ найденную функцию Грина, получим частное решение $A^\nu(x)$ уравнений движения поля. Общее же решение уравнения движения для поля с внешним источником, как мы уже поняли, складывается из продольной компоненты, общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Структура общего решения однородного уравнения нам уже известна. Поэтому общее решение уравнений Максвелла с внешним источником имеет вид

$$A^\nu(x) = \mathrm{i}\partial^\nu \alpha(x) + \mathcal{A}^\nu_{\text{free}}(x) + [\mathcal{G}^{\mu\nu}_{\text{ret}} \star j_\mu](x).$$

Решение для Фурье-образа поля вынужденных колебаний является произведением Фурье-образов функции Грина на источник $j^\mu(x)$, а как мы недавно выяснили, произведение Фурье-образов переходит в свертку в координатном пространстве, так что

$$A^\mu_{\text{ret}}(x) = \int d_4x' \, \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \, \delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| - (t-t')) \, j^\mu(t',\boldsymbol{r}').$$

Интегрирование по t снимается дельта-функцией и мы получаем выражение для запаздывающих потенциалов

$$A^\mu_{\text{ret}}(t,\boldsymbol{r}) = \int d_3x' \, \frac{j^\mu(t',\boldsymbol{r}')}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} |_{t'=t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Время запаздывания сигнала — разность $(t-t')$ — определяется скоростью распространения электромагнитного взаимодействия.

13.25. **Уравнение Дирака.** черновик...

Часть 4. Общая теория относительности

Элементарная теория гравитации была создана еще Ньютоном и до сих пор верно служит человечеству. Ее вполне достаточно для решения многих, если не большинства, задач современной астрономии и астрофизики. Между тем, ее принципиальный недостаток был ясен уже самому Ньютону. Это теория с дальнодействием: в ней гравитационное действие одного тела на другое передается мгновенно, без запаздывания. В этом смысле ньютоновская теория тяготения соотносится с общей теорией относительности, как закон Кулона с максвелловской электродинамикой. Максвелл изгнал дальнодействие из электродинамики. В теории гравитации это сделал Эйнштейн, о чем мы и расскажем вам на этих лекциях. В настоящее время эйнштейновская общая теория относительности является общепринятой классической (т.е. неквантовой) теорией тяготения, связывающей его с кривизной четырехмерного пространства-времени. Суть теории проста и изящна: *гравитация есть геометрия*, то есть эффекты гравитации полностью обусловлены эффектами кривизны пространства-времени, и наоборот, кривизна пространства-времени создается движущейся в нем материей. Цель настоящих лекций — объяснить это.

Общая теория относительности является завершенной теорией, в том же смысле, что и классическая механика, классическая электродинамика, квантовая механика. Подобно им она дает однозначные ответы на физически осмысленные вопросы, дает четкие предсказания для наблюдений и экспериментов. Однако область применимости эйнштейновской гравитации, как или любой другой физической теории, ограничена. Так, вне этой области лежат сверхсильные гравитационные поля, где важны квантовые эффекты. Законченной квантовой теории гравитации пока не существует.

...///

черновик...///

14. $f(R)$-гравитация

В настоящем разделе обсуждается ..///

14.1. **Действие и уравнения движения.**

Как уже было упомянуто во введении, функционал действия $f(R)$-гравитации может быть записан в виде

$$S[g] = -\frac{m_{\rm pl}^2}{16\pi}\int \mathrm{vol}_g\, f(R). \tag{14.1}$$

Здесь $m_{\rm pl} = G^{-1/2}$ — планковская масса, G — гравитационная постоянная. Функционал действия (14.1) по построению является инвариантным относительно общекоординатных преобразований (диффеоморфизмов): форма риманова объёма $\mathrm{vol}_g = \sqrt{-\det g}\, d_4x$ корректно определяет одну и ту же плотность меры в любой системе координат, а $f(R)$ является скаляром как функция от скалярной кривизны.
Запишем уравнения движения в $f(R)$-гравитации. Для этого вычислим вариационную производную функционала действия (14.1):

$$\delta S = -\frac{m_{\rm pl}^2}{16\pi}\int d_4x\left[\delta\sqrt{-g}\, f(R) + \sqrt{-g}\, F(R)\, \delta R\right], \tag{14.2}$$

где под функцией $F(R)$ понимается производная

$$F(R) = \frac{df}{dR}.$$

Найдём для начала

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\,\delta g. \tag{14.3}$$

Для этого выпишем вариацию

$$\delta\ln g = \delta g/g = \delta\ln\det g_{\mu\nu} = \ln\det\left(g_{\mu\nu}+\delta g_{\mu\nu}\right) - \ln\det g_{\mu\nu} = \\ = \ln\left[g^{\mu\alpha}(g_{\alpha\nu}+\delta g_{\alpha\nu})\right] = \ln\det\left[\delta^\mu_\nu + g^{\mu\alpha}\,\delta g_{\alpha\nu}\right] = \ln\left(1+\mathrm{tr}\, g^{\mu\alpha}\,\delta g_{\alpha\nu}\right) = g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}.$$

Отсюда

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}. \tag{14.4}$$

Теперь рассмотрим вариацию δR скалярной кривизны:

$$\delta R = \delta(g^{\beta\nu}R_{\beta\nu}) = \delta g^{\beta\nu}R_{\beta\nu} + g^{\beta\nu}\,\delta R_{\beta\nu}. \tag{14.5}$$

Вычислим $\delta g^{\beta\nu}$. Для этого запишем очевидное тождество $g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$. Отсюда

$$\delta g^{\beta\nu} = -g^{\beta\sigma}g^{\lambda\nu}\delta g_{\lambda\sigma}. \tag{14.6}$$

Рассмотрим $\delta R_{\beta\nu}$. Компоненты тензора Риччи

$$R_{\beta\nu} = \partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} + \Gamma^\lambda_{\nu\beta}\Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{\nu\lambda}. \tag{14.7}$$

То есть для нахождения вариации $\delta R_{\beta\nu}$ необходимо вычислить $\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$. Будем действовать по определению:

$$\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\delta g^{\alpha\lambda}\left(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}\left(\partial_\mu \delta g_{\lambda\nu} + \partial_\nu \delta g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda \delta g_{\mu\nu}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}\left(\partial_\mu \delta g_{\lambda\nu} + \partial_\nu \delta g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda \delta g_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}g^{\lambda\tau}\delta g_{\sigma\tau}\left(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}[\partial_\mu\delta g_{\beta\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}\,\delta g_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\,\delta g_{\lambda\beta} + \partial_\nu\delta g_{\mu\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\beta}\,\delta g_{\lambda\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\,\delta g_{\lambda\beta} - \partial_\beta\delta g_{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}\,\delta g_{\lambda\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\beta}\,\delta g_{\lambda\mu}] =$$
$$= \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}\left(\nabla_\mu \delta g_{\lambda\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\lambda\mu} - \nabla_\lambda \delta g_{\mu\nu}\right).$$

Из последнего выражения видно, что хотя символы Кристоффеля (символы метрической связности) не являются комопонентами смешанного тензора третьего ранга, их вариация $\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ является тензором. Возвращаясь к вычислению $\delta R_{\beta\nu}$, находим

$$\delta R_{\beta\nu} = \partial_\alpha\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \partial_\nu\delta\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} + \delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\beta}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\beta}\delta\Gamma^{\alpha}_{\alpha\lambda} - \delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}.$$

После небольших вычислений нетрудно получить, что

$$\delta R_{\beta\nu} = \nabla_\sigma\delta\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^{\sigma}_{\beta\sigma}. \tag{14.8}$$

В результате

$$\delta S = -\frac{m^2_{\rm pl}}{16\pi}\int d_4x\,\{1/2\,\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}f(R) + \sqrt{-g}\,F(R)\,\delta g^{\beta\nu}R_{\beta\nu} + \sqrt{-g}\,F(R)\,g^{\beta\nu}\,\delta R_{\beta\nu}\} =$$
$$= -\frac{m^2_{\rm pl}}{16\pi}\int d_4x\,\sqrt{-g}\,\{1/2\,g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}f(R) - g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}F(R)\,R_{\alpha\beta}\,\delta g_{\mu\nu} + g^{\alpha\beta}F(R)[\nabla_\sigma\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} - \nabla_\beta\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma}]\}.$$

Преобразуем немного полученное выражение: проинтегрируем по частям последнее слагаемое

$$-\frac{m^2_{\rm pl}}{16\pi}\int d_4x\,\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}F(R)[\nabla_\sigma\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} - \nabla_\beta\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma}] =$$
$$= -\frac{m^2_{\rm pl}}{16\pi}\int d_4x\,\sqrt{-g}\,\nabla_\sigma[g^{\alpha\beta}F(R)\,\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}] + \frac{m^2_{\rm pl}}{16\pi}\int d_4x\,\sqrt{-g}\,\nabla_\beta[g^{\alpha\beta}F(R)\,\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma}] +$$
$$+ \frac{m^2_{\rm pl}}{16\pi}\int d_4x\,\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\nabla_\sigma F(R) - \frac{m^2_{\rm pl}}{16\pi}\int d_4x\,\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma}\nabla_\beta F(R) =$$
$$= -\frac{m^2_{\rm pl}}{16\pi}\int d\Sigma_\sigma[\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}F(R)\,\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}] + \frac{m^2_{\rm pl}}{16\pi}\int d_4x\,d\Sigma_\beta[\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}F(R)\,\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma}] +$$
$$+ \frac{m^2_{\rm pl}}{16\pi}\int d_4x\,\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\nabla_\sigma F(R) - \frac{m^2_{\rm pl}}{16\pi}\int d_4x\,\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma}\nabla_\beta F(R).$$

В этом выражении мы воспользовались формулой Остроградского-Гаусса. Поверхностные интегралы

$$\int d\Sigma_\sigma[\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}F(R)\,\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}] = 0, \qquad \int d_4x\,d\Sigma_\beta[\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}F(R)\,\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma}] = 0$$

в силу соответствующих граничных условий: вариации полей $\delta g_{\mu\nu}$ и их производных $\partial_\alpha\delta g_{\mu\nu}$ на поверхности интегрирования обращаются к нуль. С учётом этого вариация действия

$$\delta S = \frac{m_{\rm pl}^2}{16\pi}\int d_4x\,\sqrt{-g}\left[F(R)R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}f(R)\right]\delta g_{\mu\nu} + \\ + \frac{m_{\rm pl}^2}{16\pi}\int d_4x\,\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\nabla_\sigma F(R) - \frac{m_{\rm pl}^2}{16\pi}\int d_4x\,\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma}\nabla_\beta F(R),$$

$$\delta S = \frac{m_{\rm pl}^2}{16\pi}\int d_4x\sqrt{-g}\left[F(R)R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}f(R)\right]\delta g_{\mu\nu} + \frac{m_{\rm pl}^2}{16\pi}\int d_4x\sqrt{-g}\,\nabla^\mu F(R)[\nabla^\nu\delta g_{\mu\nu} - \nabla_\mu(g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta})].$$

Повторное интегрирование по частям второй строчки последнего выражения даёт

$$\frac{m_{\rm pl}^2}{16\pi}\int d_4x\sqrt{-g}\,\nabla^\mu F(R)[\nabla^\nu\delta g_{\mu\nu} - \nabla_\mu(g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta})] = \frac{m_{\rm pl}^2}{16\pi}\int d_4x\sqrt{-g}\,[g^{\mu\nu}\Box_g F(R) - \nabla^\mu\nabla^\nu F(R)]\,\delta g_{\mu\nu}.$$

Здесь была использована теорема Остроградского-Гаусса; как и раньше, она позволила занулить соответствующие поверхностные интегралы. Под $\Box_g$ понимается оператор Бельтрами-Лапласа, связанный с метрикой $g_{\mu\nu}(x)$: $\Box_g = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$. Подставляя полученное уравнение в выражение для вариации действия, после применения принципа экстремального действия Гамильтона, находим динамические уравнения $f(R)$-гравитации:

$$F(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) = \nabla_\mu\nabla_\nu F(R) - g_{\mu\nu}\Box_g F(R). \tag{14.9}$$

14.2. **Слабая $f(R)$-гравитация.**

...

14.3. **Задача для младенца.** Она состоит в вычислении производящего функционала

$$Z[j] = \int_{\mathbb{R}} dx \, \exp\left(-\frac{1}{2}m^2x^2 - \frac{\lambda}{4!}x^4 + jx\right)$$

При $\lambda = 0$ это всего лишь гауссов интеграл. Произведем разложение $Z[j]$ в ряд по λ:

Часть 7. Космология и модификации гравитации