bit全探索 bitDP

bit全探索とは

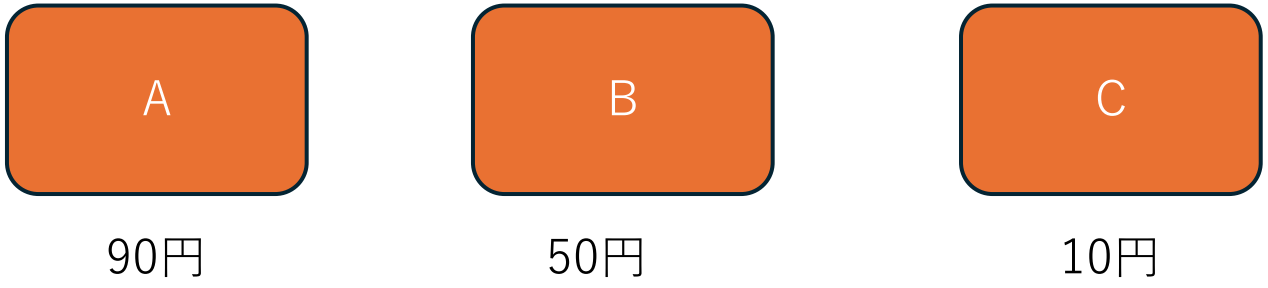
- bit演算を用いて 2^n 通りの状態を全探索するテクニック
  - 「オン/オフ」,「使う/使わない」,「買う/買わない」などの 2 通りの選択肢が複数ある状況で有効
  - 2 通りの選択肢を 0/1 で表現する
- あり得る全ての状況を列挙して, それぞれの場合において計算や判定を行う

商品 3	商品 2	商品 1
買う	買わない	買う

商品 3	商品 2	商品 1
1	0	1

具体例

- 3つの商品A,B,Cの中からいくつか選んで金額を100円にできるか？



方針: 選び方を全て試して金額が100円になる選び方があるか探したい

=>A,B,Cそれぞれ選ぶ選ばないの2通りあるので$2^3 = 8$通り試せば良い

選び方を列挙する

・3つの商品A,B,Cの中からいくつか選んで金額を100円にできるか？

A	B	C
90円	50円	10円

選んだを1,選ばなかったを0とすると…

	A	B	C	合計金額	
0	0	0	0	0円	
1	0	0	1	10円	
2	0	1	0	50円	
3	0	1	1	60円	
4	1	0	0	90円	
5	1	0	1	100円	←できた
6	1	1	0	140円	
7	1	1	1	150円	

bit演算

- bit全探索ではbit列を扱う

→ どうやって実装する？

- 計算機上で整数は全て 2 進数で計算されている

0 → 0⋯000　1 → 0⋯001　2 → 0⋯010　3 → 0⋯011

4 → 0⋯100　5 → 0⋯101　6 → 0⋯110　7 → 0⋯111

- さらに 2^n 通りの状態は $0, 1, \cdots, 2^n$ (10進数) で表せる

bit演算

bit全探索で使用するbit演算

ビットシフト

```
n = 14  # 1110(2)
print(n << 1)
#> 28  (11100(2))
print(n >> 2)
#> 3  (11(2))
```

n　　= 1110|
n<<1 =11100|
n>>2 =　　11|10

bit論理積

```
a = 14  # 1110(2)
b = 11  # 1011(2)
print(a & b)
#> 10  (1010(2))
```

1110
&1011
1010

bit演算

右から
- i bit目の求め方
- n >> i
  - n を i 個右シフト
  - n の i-bit目が 1 bit目に来る
- n & 1
  - n と 0…001 のbit論理積
  - 1-bit 目が 1 の時に 1, 0 のときに 0 になる

```
n     =  1110|
n>>1  =   111|0
```

```
  111
& 001
-----
  001
```

i-bit目の取得

```python
bit = 14  # 1110(2)
for i in range(4):
    print(bit >> i & 1)
    #> 0
    #> 1
    #> 1
    #> 1
```

例題：問題

問題文

N 個の整数 $A_0, A_1, \cdots, A_{N-1}$ と整数 W が与えられます.
$A_0, A_1, \cdots, A_{N-1}$ の中からいくつか選んで総和を W にすることはできますか？

制約

- $1 \leq N \leq 20$
- $0 \leq A_i \leq 10^9$
- $0 \leq W \leq 10^9$

問題文
N 個の整数 $A_0, A_1, \cdots, A_{N-1}$ と整数 W が与えられます.
$A_0, A_1, \cdots, A_{N-1}$ の中からいくつか選んで総和を W にすることはできますか？

制約
- $1 \leq N \leq 20$
- $0 \leq A_i \leq 10^9$
- $0 \leq W \leq 10^9$

例題：解法

- $A_0, A_1, \cdots, A_{N-1}$ のそれぞれは「使う/使わない」の 2 通り
- bit全探索でそれぞれを「使う/使わない」を列挙する
- 各状態で使うものの総和を計算して, W と一致するか判定する

例題：実装（Python）

- 2^n通りの状態は for 文を使うと楽に表せる
- 各状態において i-bit目が 0 か 1 かは bit >> i & 1 で求められる

計算量O(n2ⁿ)

```
ans = False
for bit in range(1 << n):
    s = 0  # a の部分和

    for i in range(n):
        # i-bit目が 1 かどうか
        if bit >> i & 1:
            s += a[i]

    # 部分和が w と一致するかどうか
    if s == w:
        ans = True
```

bit全探索おまけ

- i bit目が0の時True(1)になってほしい時nを反転させると楽
  ~n >> i & 1

  当然 n >> i & 1 == 0とかでもいい

- bitシフト演算子の演算順位が低いので注意する
  例) 2^n - 1を計算したい

```
n = 3;
print(1 << n -1);//4
print((1 << n)-1);//7
```

練習問題

ABC045C-たくさんの数式

+を入れる場所をbit全探索します。
文字列→整数の変換も確認しましょう

ABC128C-Switches

スイッチのON/OFFをbit全探索します。
全ての電球を点灯できるかその都度確認しましょう。

bit DP

bitDPとは

・DPの添字で集合を管理するDP

添字で集合を管理とは？

A　B　C

90円　50円　10円

選んだを1,選ばなかったを0とすると...

「5」で{A,C}という集合を表現できる

	A	B	C	合計金額
5	1	0	1	100円
6	0	1	1	140円
7	1	1	1	150円

よくbitDPを使う問題

・巡回セールスマン問題

　グラフが与えられて、全ての頂点を1回ずつ通って戻って来る最短経路長を求める

->例題で扱います

・和集合を考えていく問題

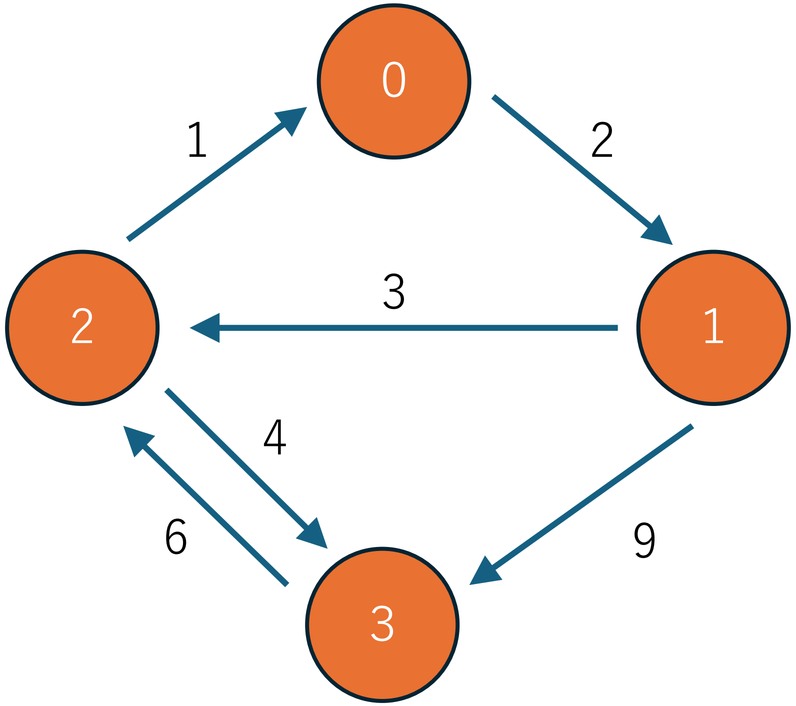
->練習問題で

巡回セールスマン問題を考える

巡回セールスマン問題

重み付き有向グラフ $G(V, E)$ について、以下の条件を満たす最短経路の距離を求めて下さい：

- ある頂点から出発し、出発点へ戻る閉路である。
- 各頂点をちょうど 1 度通る。



方針の前に...

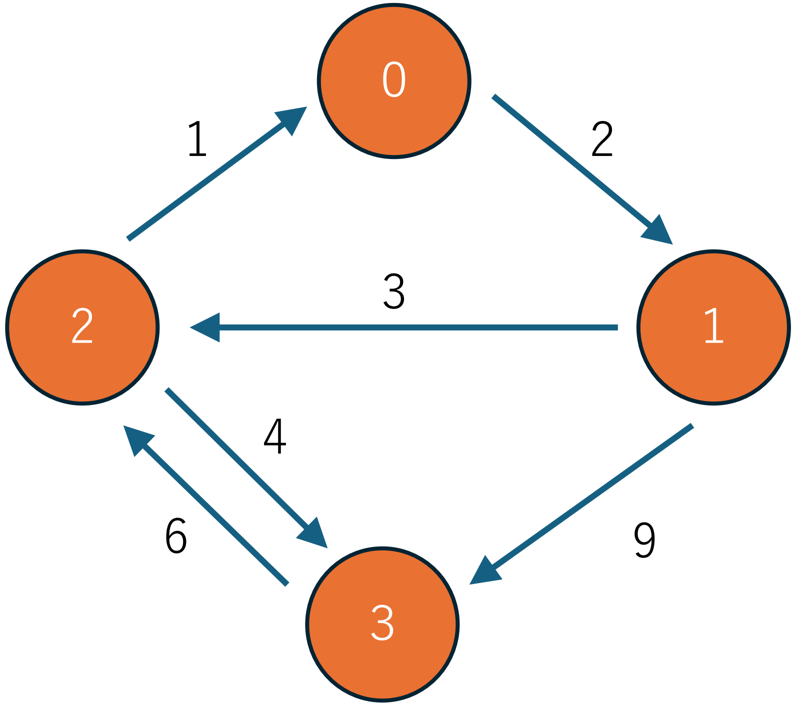
巡回セールスマン問題

重み付き有向グラフ $G(V, E)$ について、以下の条件を満たす最短経路の距離を求めて下さい：

- ある頂点から出発し、出発点へ戻る閉路である。
- 各頂点をちょうど 1 度通る。

各頂点をちょうど１度通る(一筆書きになる)ので、
どの頂点から考えても良い

->頂点0から考える



方針

巡回セールスマン問題

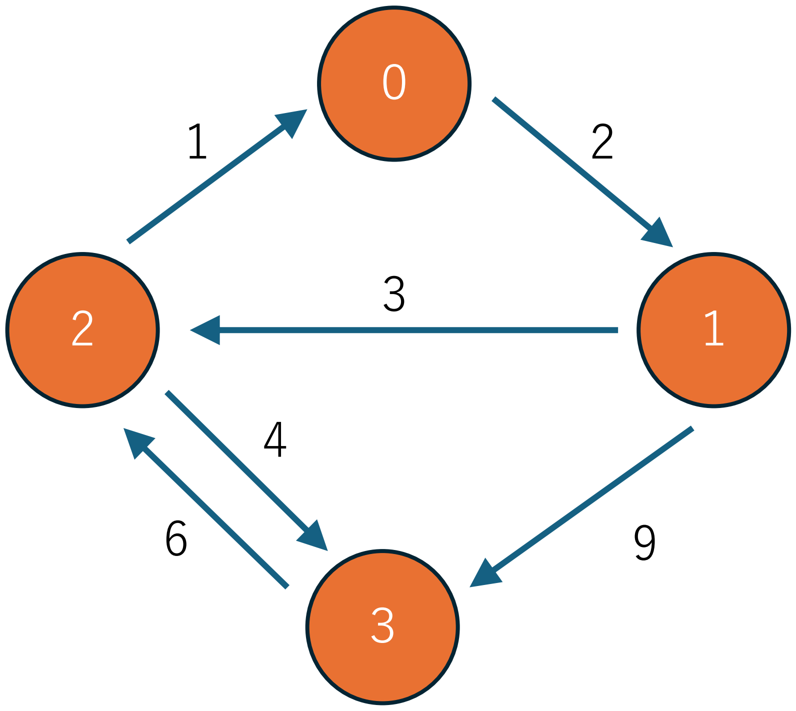
重み付き有向グラフ $G(V, E)$ について、以下の条件を満たす最短経路の距離を求めて下さい：

- ある頂点から出発し、出発点へ戻る閉路である。
- 各頂点をちょうど１度通る。

頂点0からスタートして

・ dp[i][j] = 今までに訪れた頂点の集合が i で、
今 頂点 j にいるとき、考えられる移動した距離の最小値

(最初の頂点0は訪れた頂点に含まない)



遷移は

ある頂点 x ＝ $\begin{cases} \text{頂点 j に隣接} \\ \text{集合 i に含まれない頂点} \end{cases}$ に対して

dp[i + (1 << x)][x] = min(dp[i+(1 << x)][x] , dp[i][j] + |v(i,j)|)

答えは dp[(1 << n)-1][0] (全頂点通って最後に0についた時)

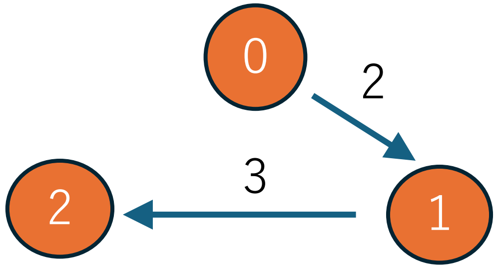
$(1 << n)-1 = \underbrace{111...11}_{n}{}_{(2)}$

補足1

dp[i][j] = 頂点0からスタートして今までに訪れた頂点の集合が i で、
今 頂点 j にいるとき、考えられる移動した距離の最小値

例）dp[6][2] = 頂点1と2を通って2に着いた時に一番短い経路長

6=110(2)



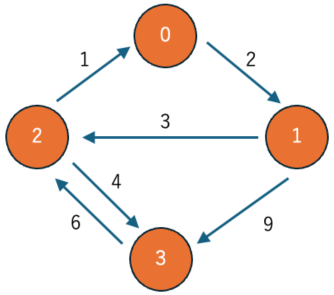
遷移は

ある頂点 x = { 頂点 j に隣接 / 集合 i に含まれない頂点 } に対して

dp[i + (1 << x)][x] = min(dp[i+(1 << x)][x] , dp[i][j] + |v(i,j)|)

i + (1<<x) の例） i = 5 , x = 1

5 + (1 << 1) = 0101 + 0010 = 0111(2)



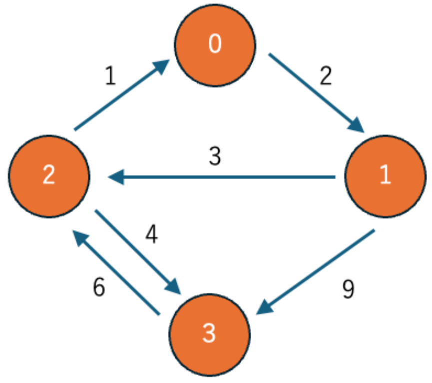
補足2

答えは dp[(1 << n)-1][0] (全頂点通って最後に0についた時)

$(1 << n)-1 = \underbrace{111...11}_{n}{}_{(2)}$

今回なら dp[(1<<4)-1][0]

(1 << 4)-1 = 15 = 1111(2)



(1 << n)-1とすると n個のビットが立った状態になり全ての頂点を通ったを表現できる！

実装

スライドに載らないので下のリンクから見てください

[Pythonの実装]　　[C++の実装]

g は隣接リスト

```
dp[1<<n][n] = 全ての要素をINFで初期化
#どこにも訪れてなくて0にいる状態で初期化
dp[0][0] = 0

for i = [0..1<<n):
  for j = [0..n):
    if dp[i][j]がINFのまま(到達しなかった):continue

    for (to,cost) in g[j]:
      if iのtoビット目が1 :continue #すでに通った
      #遷移
      dp[i +(1<<to)][to] = min(dp[i + (1<<to)][to],dp[i][j] + cost])

答えは
if dp[(1<<n)-1][0]がINF => -1
else dp[(1<<n)-1][0]
```

DPの動き

初期化 (x=INF)

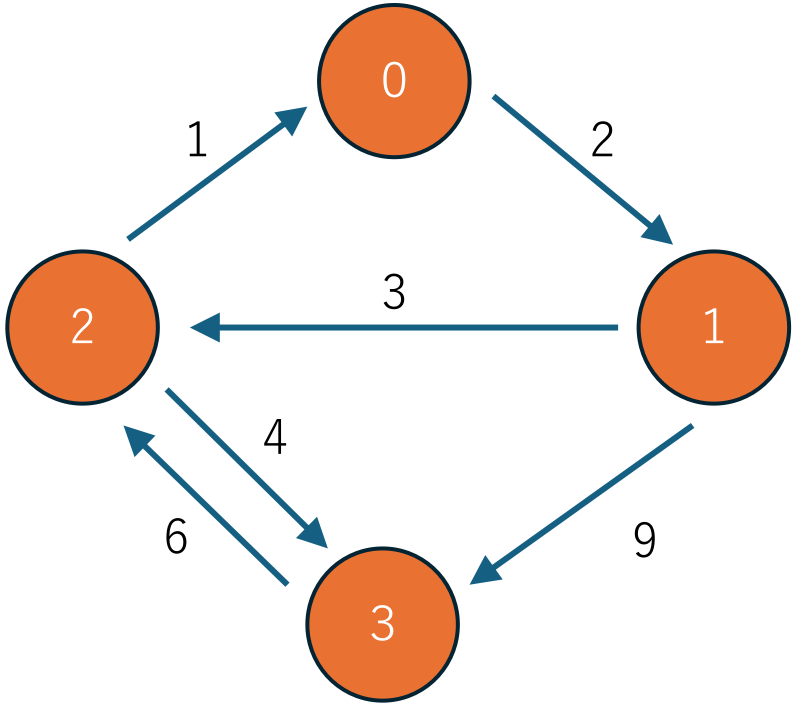
	頂点3	頂点 2	頂点1	頂点 0
0 (0000)	x	x	x	0
1(0001)	x	x	x	x
2(0010)	x	x	x	x
3(0011)	x	x	x	x
4(0100)	x	x	x	x
5(0101)	x	x	x	x
6(0110)	x	x	x	x
7(0111)	x	x	x	x
8(1000)	x	x	x	x
9(1001)	x	x	x	x
10(1010)	x	x	x	x
11(1011)	x	x	x	x
12(1100)	x	x	x	x
13(1101)	x	x	x	x
14(1110)	x	x	x	x
15(1111)	x	x	x	x

・dp[i][j] = 今までに訪れた頂点の集合が i で、
今 頂点 j にいるとき、考えられる移動した距離の最小値
(最初の頂点0は訪れた頂点に含まない)

・遷移

dp[i + (1 << x)][x] = min(dp[i+(1 << x)][x] , dp[i][j] + |v(i,j)|)

```
dp[1<<n][n] = 全ての要素をINFで初期化
dp[0][0] = 0
```



DPの動き

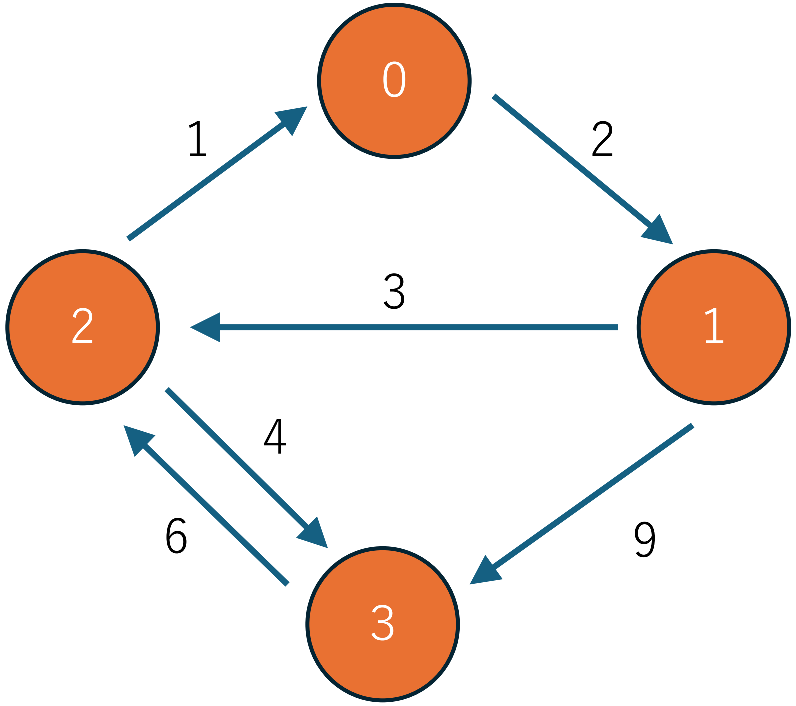
i = 0

	頂点3	頂点 2	頂点1	頂点 0
0 (0000)	x	x	x	0
1(0001)	x	x	x	x
2(0010)	x	x	2	x
3(0011)	x	x	x	x
4(0100)	x	x	x	x
5(0101)	x	x	x	x
6(0110)	x	x	x	x
7(0111)	x	x	x	x
8(1000)	x	x	x	x
9(1001)	x	x	x	x
10(1010)	x	x	x	x
11(1011)	x	x	x	x
12(1100)	x	x	x	x
13(1101)	x	x	x	x
14(1110)	x	x	x	x
15(1111)	x	x	x	x

・dp[i][j] = 今までに訪れた頂点の集合が i で、
今 頂点 j にいるとき、考えられる移動した距離の最小値
(最初の頂点0は訪れた頂点に含まない)

・遷移

dp[i + (1 << x)][x] = min(dp[i+(1 << x)][x] , dp[i][j] + |v(i,j)|)



DPの動き

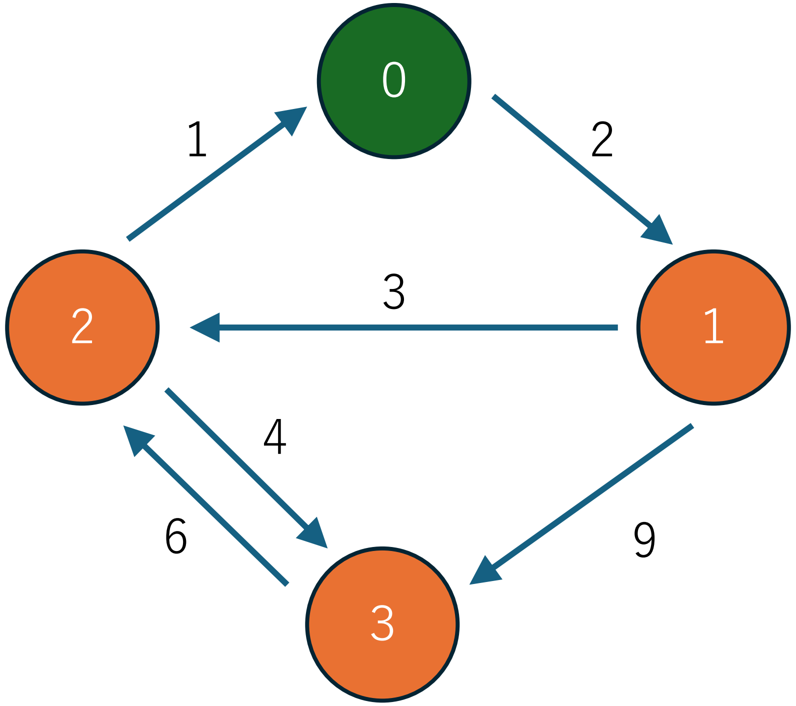
i = 1

	頂点3	頂点 2	頂点1	頂点 0
0 (0000)	x	x	x	0
1(0001)	x	x	x	x
2(0010)	x	x	2	x
3(0011)	x	x	x	x
4(0100)	x	x	x	x
5(0101)	x	x	x	x
6(0110)	x	x	x	x
7(0111)	x	x	x	x
8(1000)	x	x	x	x
9(1001)	x	x	x	x
10(1010)	x	x	x	x
11(1011)	x	x	x	x
12(1100)	x	x	x	x
13(1101)	x	x	x	x
14(1110)	x	x	x	x
15(1111)	x	x	x	x

・dp[i][j] = 今までに訪れた頂点の集合が i で、
今 頂点 j にいるとき、考えられる移動した距離の最小値
(最初の頂点0は訪れた頂点に含まない)

・遷移

dp[i + (1 << x)][x] = min(dp[i+(1 << x)][x] , dp[i][j] + |v(i,j)|)



DPの動き

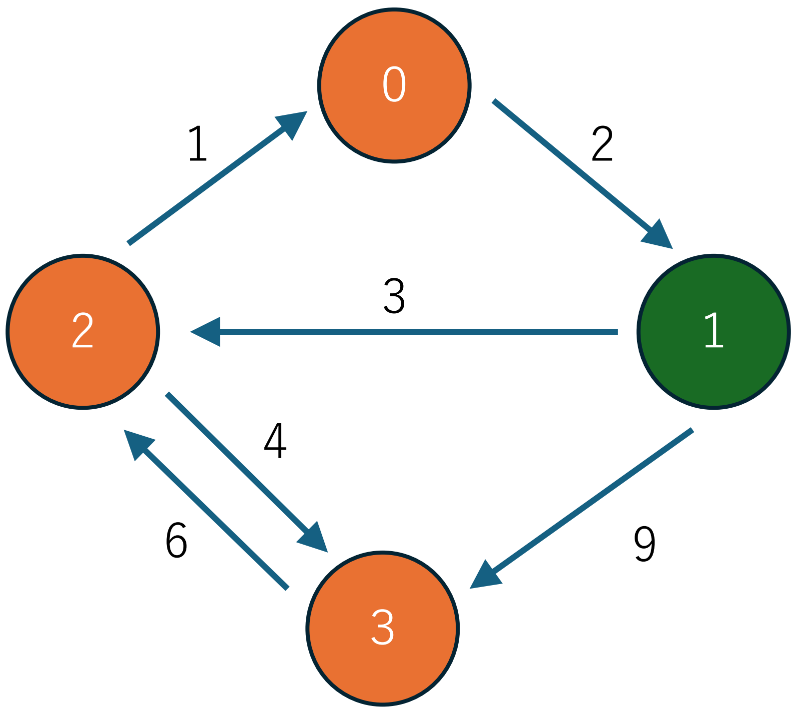
i = 2

	頂点3	頂点 2	頂点1	頂点 0
0 (0000)	x	x	x	0
1(0001)	x	x	x	x
2(0010)	x	x	2	x
3(0011)	x	x	x	x
4(0100)	x	x	x	x
5(0101)	x	x	x	x
6(0110)	x	5	x	x
7(0111)	x	x	x	x
8(1000)	x	x	x	x
9(1001)	x	x	x	x
10(1010)	11	x	x	x
11(1011)	x	x	x	x
12(1100)	x	x	x	x
13(1101)	x	x	x	x
14(1110)	x	x	x	x
15(1111)	x	x	x	x

・dp[i][j] = 今までに訪れた頂点の集合が i で、
今 頂点 j にいるとき、考えられる移動した距離の最小値
(最初の頂点0は訪れた頂点に含まない)

・遷移

dp[i + (1 << x)][x] = min(dp[i+(1 << x)][x] , dp[i][j] + |v(i,j)|)



DPの動き

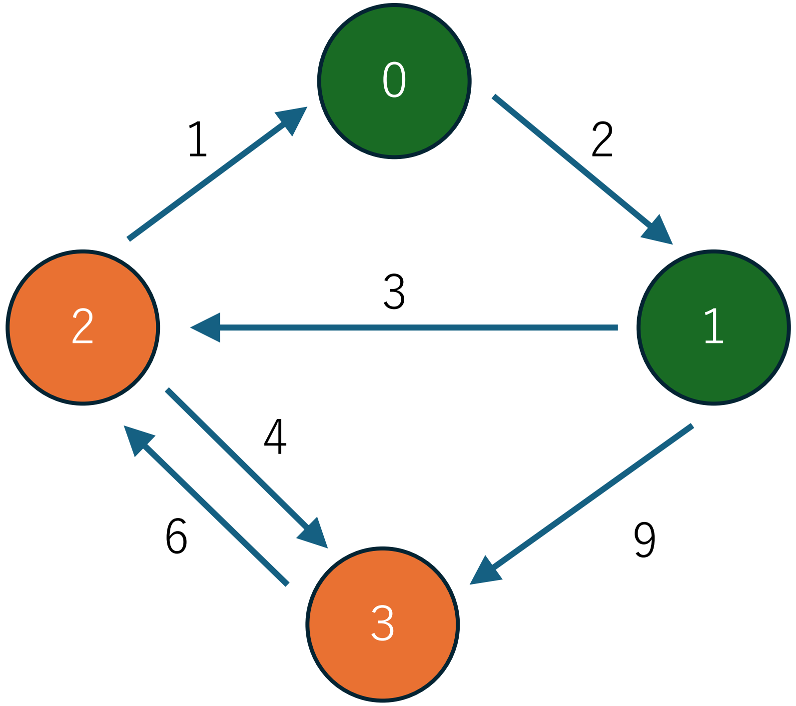
i = 3

	頂点3	頂点 2	頂点1	頂点 0
0 (0000)	x	x	x	0
1(0001)	x	x	x	x
2(0010)	x	x	2	x
3(0011)	x	x	x	x
4(0100)	x	x	x	x
5(0101)	x	x	x	x
6(0110)	x	5	x	x
7(0111)	x	x	x	x
8(1000)	x	x	x	x
9(1001)	x	x	x	x
10(1010)	11	x	x	x
11(1011)	x	x	x	x
12(1100)	x	x	x	x
13(1101)	x	x	x	x
14(1110)	x	x	x	x
15(1111)	x	x	x	x

・dp[i][j] = 今までに訪れた頂点の集合が i で、
今 頂点 j にいるとき、考えられる移動した距離の最小値
(最初の頂点0は訪れた頂点に含まない)

・遷移

dp[i + (1 << x)][x] = min(dp[i+(1 << x)][x] , dp[i][j] + |v(i,j)|)



DPの動き

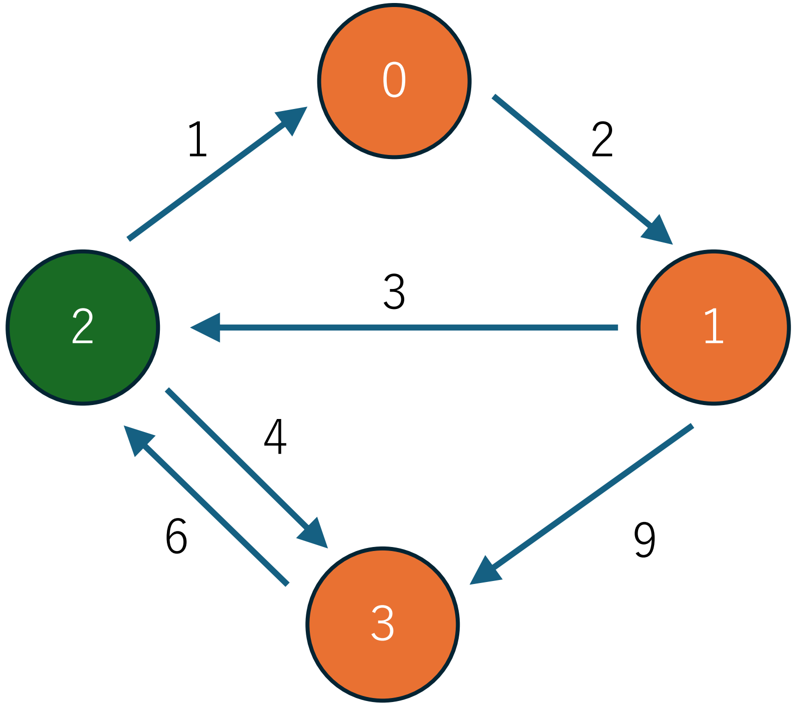
i = 4

	頂点3	頂点 2	頂点1	頂点 0
0 (0000)	x	x	x	0
1(0001)	x	x	x	x
2(0010)	x	x	2	x
3(0011)	x	x	x	x
4(0100)	x	x	x	x
5(0101)	x	x	x	x
6(0110)	x	5	x	x
7(0111)	x	x	x	x
8(1000)	x	x	x	x
9(1001)	x	x	x	x
10(1010)	11	x	x	x
11(1011)	x	x	x	x
12(1100)	x	x	x	x
13(1101)	x	x	x	x
14(1110)	x	x	x	x
15(1111)	x	x	x	x

・dp[i][j] = 今までに訪れた頂点の集合が i で、
今 頂点 j にいるとき、考えられる移動した距離の最小値
(最初の頂点0は訪れた頂点に含まない)

・遷移

dp[i + (1 << x)][x] = min(dp[i+(1 << x)][x] , dp[i][j] + |v(i,j)|)



DPの動き

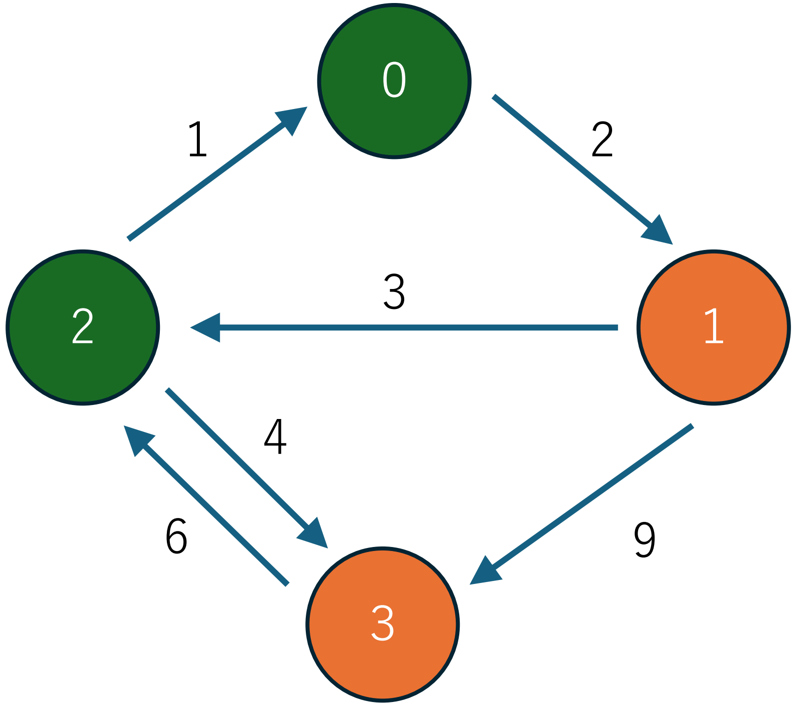
i = 5

	頂点3	頂点 2	頂点1	頂点 0
0 (0000)	x	x	x	0
1(0001)	x	x	x	x
2(0010)	x	x	2	x
3(0011)	x	x	x	x
4(0100)	x	x	x	x
5(0101)	x	x	x	x
6(0110)	x	5	x	x
7(0111)	x	x	x	x
8(1000)	x	x	x	x
9(1001)	x	x	x	x
10(1010)	11	x	x	x
11(1011)	x	x	x	x
12(1100)	x	x	x	x
13(1101)	x	x	x	x
14(1110)	x	x	x	x
15(1111)	x	x	x	x

・dp[i][j] = 今までに訪れた頂点の集合が i で、
今 頂点 j にいるとき、考えられる移動した距離の最小値
(最初の頂点0は訪れた頂点に含まない)

・遷移

dp[i + (1 << x)][x] = min(dp[i+(1 << x)][x] , dp[i][j] + |v(i,j)|)



DPの動き

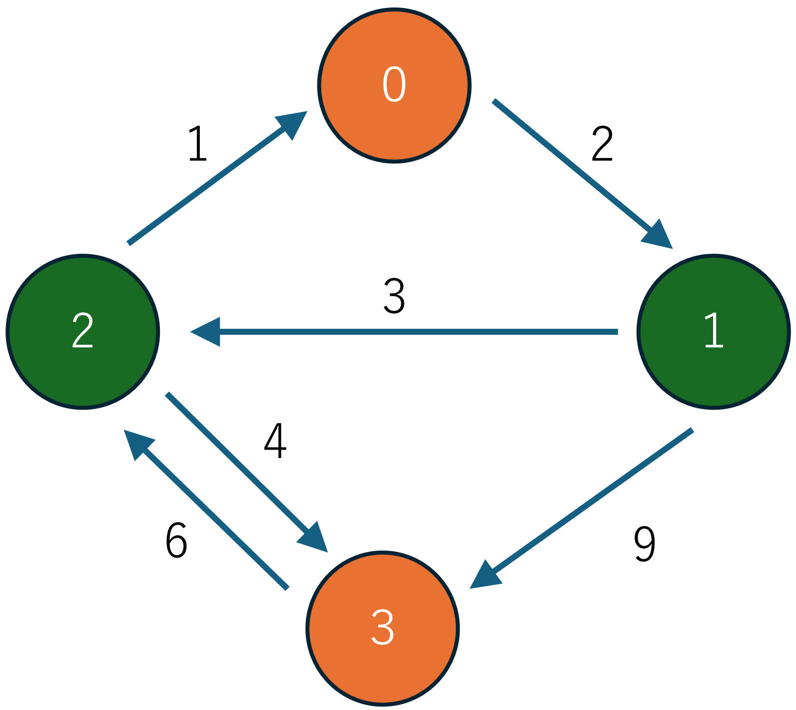
i = 6

	頂点3	頂点 2	頂点1	頂点 0
0 (0000)	x	x	x	0
1(0001)	x	x	x	x
2(0010)	x	x	2	x
3(0011)	x	x	x	x
4(0100)	x	x	x	x
5(0101)	x	x	x	x
6(0110)	x	5	x	x
7(0111)	x	x	x	6
8(1000)	x	x	x	x
9(1001)	x	x	x	x
10(1010)	11	x	x	x
11(1011)	x	x	x	x
12(1100)	x	x	x	x
13(1101)	x	x	x	x
14(1110)	9	x	x	x
15(1111)	x	x	x	x

・dp[i][j] = 今までに訪れた頂点の集合が i で、
今 頂点 j にいるとき、考えられる移動した距離の最小値
(最初の頂点0は訪れた頂点に含まない)

・遷移

dp[i + (1 << x)][x] = min(dp[i+(1 << x)][x] , dp[i][j] + |v(i,j)|)



DPの動き

i = 7

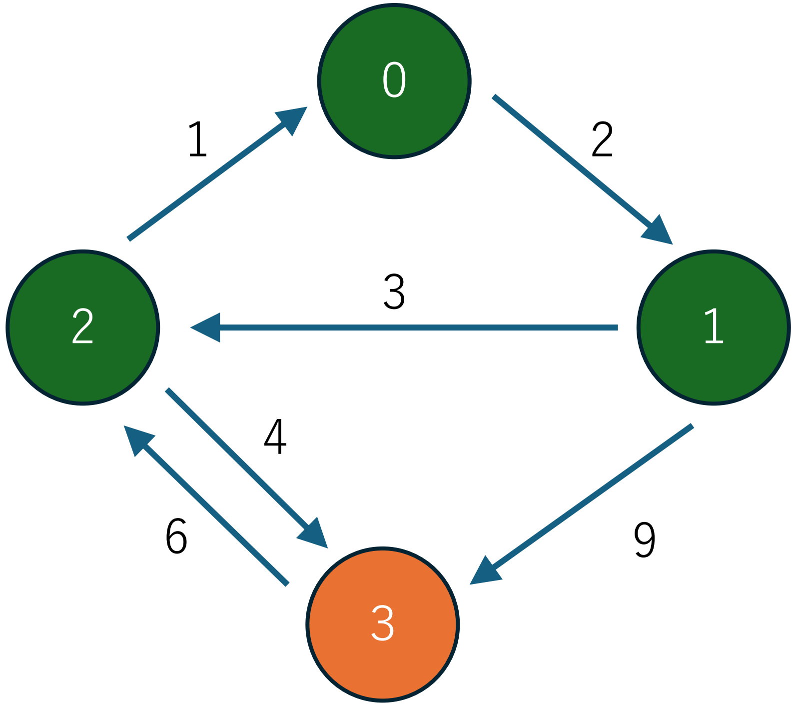
	頂点3	頂点 2	頂点1	頂点 0
0 (0000)	x	x	x	0
1(0001)	x	x	x	x
2(0010)	x	x	2	x
3(0011)	x	x	x	x
4(0100)	x	x	x	x
5(0101)	x	x	x	x
6(0110)	x	5	x	x
7(0111)	x	x	x	6
8(1000)	x	x	x	x
9(1001)	x	x	x	x
10(1010)	11	x	x	x
11(1011)	x	x	x	x
12(1100)	x	x	x	x
13(1101)	x	x	x	x
14(1110)	9	x	x	x
15(1111)	x	x	x	x

・dp[i][j] = 今までに訪れた頂点の集合が i で、
　今 頂点 j にいるとき、考えられる移動した距離の最小値
(最初の頂点0は訪れた頂点に含まない)

・遷移

dp[i + (1 << x)][x] = min(dp[i+(1 << x)][x] , dp[i][j] + |v(i,j)|)

```
for (to,cost) in g[j]:
    if iのtoビット目が1 :continue #すでに通った
    #遷移
```



DPの動き

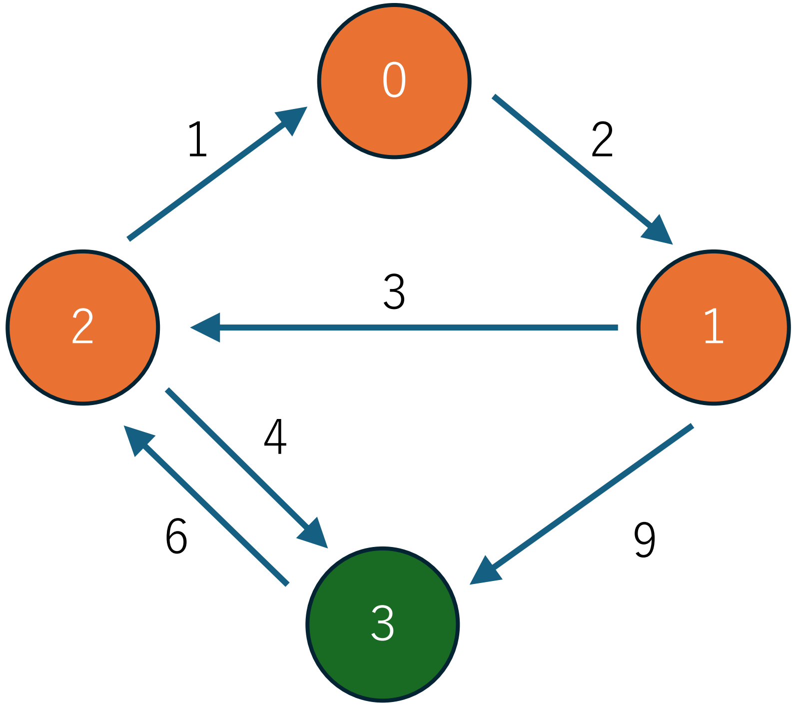
i = 8

	頂点3	頂点 2	頂点1	頂点 0
0 (0000)	x	x	x	0
1(0001)	x	x	x	x
2(0010)	x	x	2	x
3(0011)	x	x	x	x
4(0100)	x	x	x	x
5(0101)	x	x	x	x
6(0110)	x	5	x	x
7(0111)	x	x	x	6
8(1000)	x	x	x	x
9(1001)	x	x	x	x
10(1010)	11	x	x	x
11(1011)	x	x	x	x
12(1100)	x	x	x	x
13(1101)	x	x	x	x
14(1110)	9	x	x	x
15(1111)	x	x	x	x

・dp[i][j] = 今までに訪れた頂点の集合が i で、
今 頂点 j にいるとき、考えられる移動した距離の最小値
(最初の頂点0は訪れた頂点に含まない)

・遷移

dp[i + (1 << x)][x] = min(dp[i+(1 << x)][x] , dp[i][j] + |v(i,j)|)



DPの動き

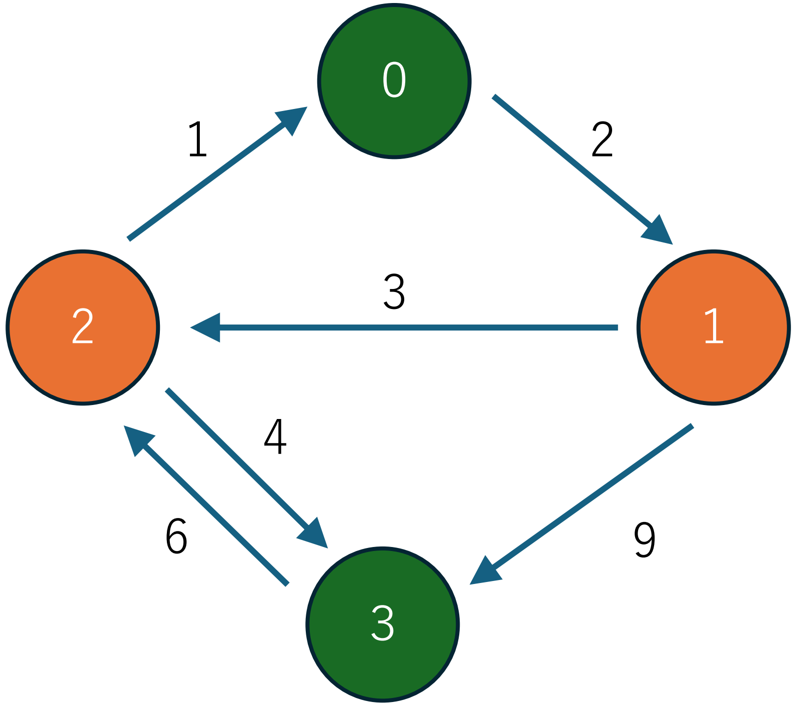
i = 9

	頂点3	頂点 2	頂点1	頂点 0
0 (0000)	x	x	x	0
1(0001)	x	x	x	x
2(0010)	x	x	2	x
3(0011)	x	x	x	x
4(0100)	x	x	x	x
5(0101)	x	x	x	x
6(0110)	x	5	x	x
7(0111)	x	x	x	6
8(1000)	x	x	x	x
9(1001)	x	x	x	x
10(1010)	11	x	x	x
11(1011)	x	x	x	x
12(1100)	x	x	x	x
13(1101)	x	x	x	x
14(1110)	9	x	x	x
15(1111)	x	x	x	x

・dp[i][j] = 今までに訪れた頂点の集合が i で、
今 頂点 j にいるとき、考えられる移動した距離の最小値
(最初の頂点0は訪れた頂点に含まない)

・遷移

dp[i + (1 << x)][x] = min(dp[i+(1 << x)][x] , dp[i][j] + |v(i,j)|)



DPの動き

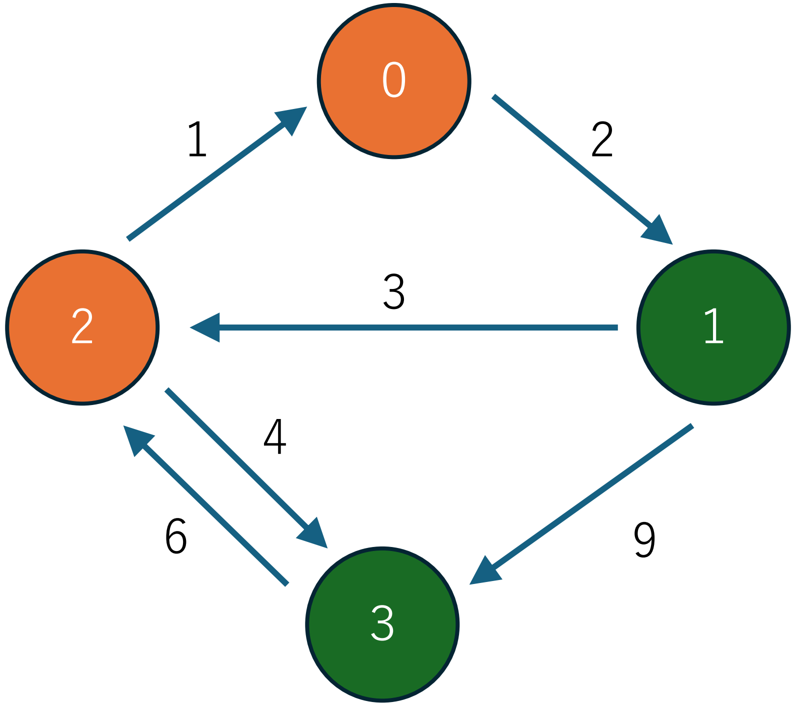
i = 10

	頂点3	頂点 2	頂点1	頂点 0
0 (0000)	x	x	x	0
1(0001)	x	x	x	x
2(0010)	x	x	2	x
3(0011)	x	x	x	x
4(0100)	x	x	x	x
5(0101)	x	x	x	x
6(0110)	x	5	x	x
7(0111)	x	x	x	6
8(1000)	x	x	x	x
9(1001)	x	x	x	x
10(1010)	11	x	x	x
11(1011)	x	x	x	x
12(1100)	x	x	x	x
13(1101)	x	x	x	x
14(1110)	9	17	x	x
15(1111)	x	x	x	x

・dp[i][j] = 今までに訪れた頂点の集合が i で、
今 頂点 j にいるとき、考えられる移動した距離の最小値
(最初の頂点0は訪れた頂点に含まない)

・遷移

dp[i + (1 << x)][x] = min(dp[i+(1 << x)][x] , dp[i][j] + |v(i,j)|)



DPの動き

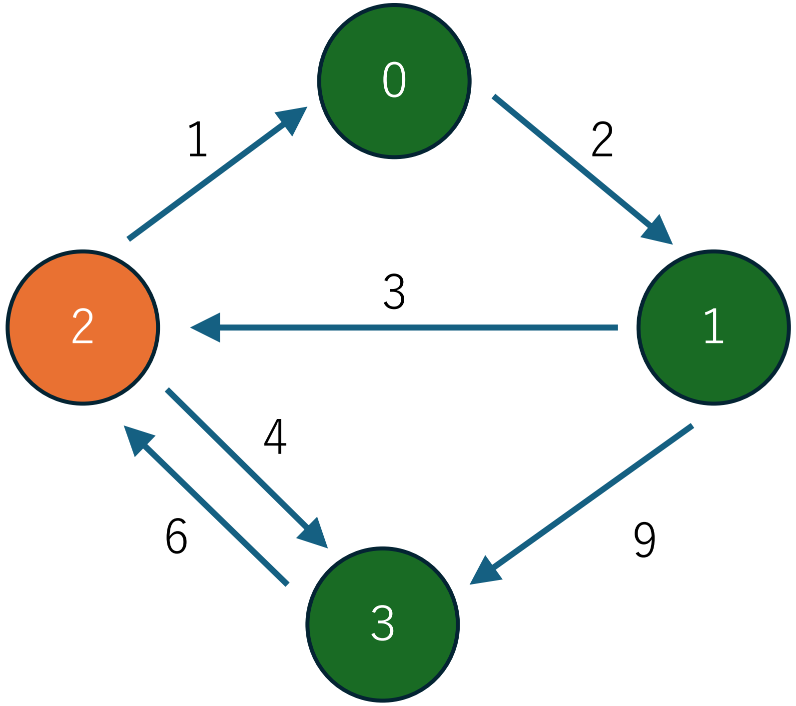
$i = 11$

	頂点3	頂点 2	頂点1	頂点 0
0 (0000)	x	x	x	0
1(0001)	x	x	x	x
2(0010)	x	x	2	x
3(0011)	x	x	x	x
4(0100)	x	x	x	x
5(0101)	x	x	x	x
6(0110)	x	5	x	x
7(0111)	x	x	x	6
8(1000)	x	x	x	x
9(1001)	x	x	x	x
10(1010)	11	x	x	x
11(1011)	x	x	x	x
12(1100)	x	x	x	x
13(1101)	x	x	x	x
14(1110)	9	17	x	x
15(1111)	x	x	x	x

・dp[i][j] = 今までに訪れた頂点の集合が i で、
今 頂点 j にいるとき、考えられる移動した距離の最小値
(最初の頂点0は訪れた頂点に含まない)

・遷移

dp[i + (1 << x)][x] = min(dp[i+(1 << x)][x] , dp[i][j] + |v(i,j)|)



DPの動き

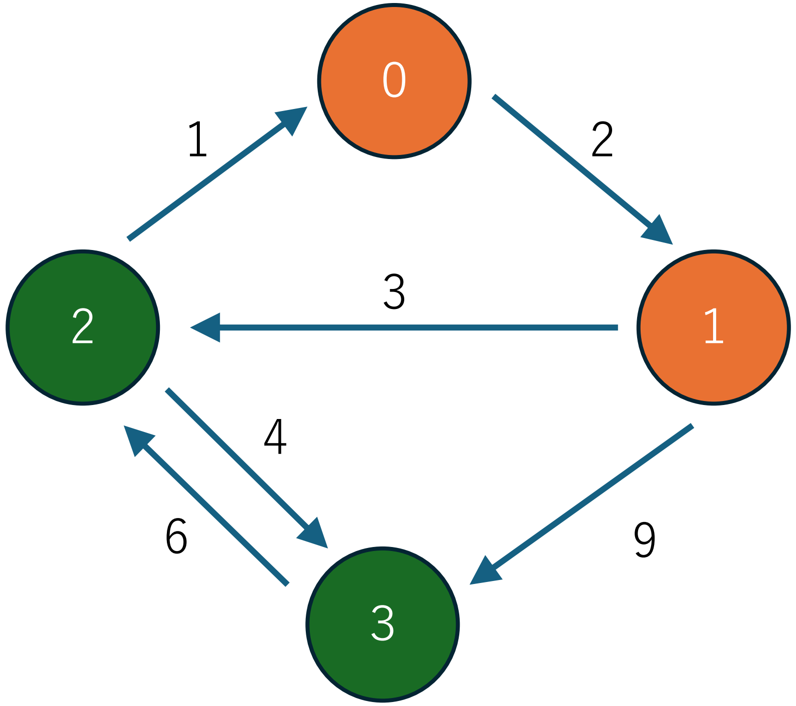
i = 12

	頂点3	頂点 2	頂点1	頂点 0
0 (0000)	x	x	x	0
1(0001)	x	x	x	x
2(0010)	x	x	2	x
3(0011)	x	x	x	x
4(0100)	x	x	x	x
5(0101)	x	x	x	x
6(0110)	x	5	x	x
7(0111)	x	x	x	6
8(1000)	x	x	x	x
9(1001)	x	x	x	x
10(1010)	11	x	x	x
11(1011)	x	x	x	x
12(1100)	x	x	x	x
13(1101)	x	x	x	x
14(1110)	9	17	x	x
15(1111)	x	x	x	x

・$dp[i][j]$ = 今までに訪れた頂点の集合が i で、
今 頂点 j にいるとき、考えられる移動した距離の最小値
(最初の頂点0は訪れた頂点に含まない)

・遷移

$dp[i + (1 << x)][x] = \min(\ dp[i+(1 << x)][x]\ ,\ dp[i][j] + |v(i,j)|\ )$



DPの動き

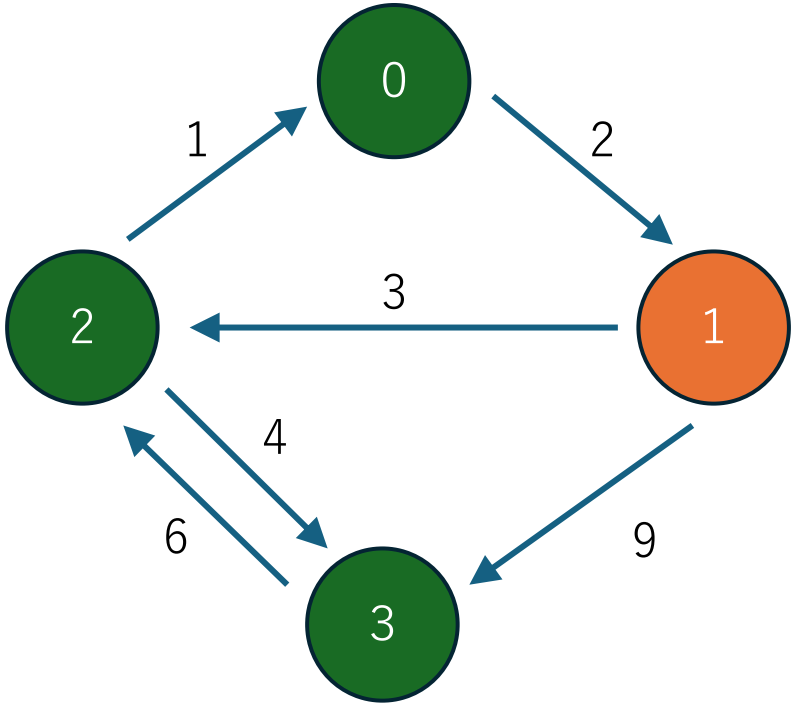
i = 13

	頂点3	頂点 2	頂点1	頂点 0
0 (0000)	x	x	x	0
1(0001)	x	x	x	x
2(0010)	x	x	2	x
3(0011)	x	x	x	x
4(0100)	x	x	x	x
5(0101)	x	x	x	x
6(0110)	x	5	x	x
7(0111)	x	x	x	6
8(1000)	x	x	x	x
9(1001)	x	x	x	x
10(1010)	11	x	x	x
11(1011)	x	x	x	x
12(1100)	x	x	x	x
13(1101)	x	x	x	x
14(1110)	9	17	x	x
15(1111)	x	x	x	x

・dp[i][j] = 今までに訪れた頂点の集合が i で、
今 頂点 j にいるとき、考えられる移動した距離の最小値
(最初の頂点0は訪れた頂点に含まない)

・遷移

dp[i + (1 << x)][x] = min(dp[i+(1 << x)][x] , dp[i][j] + |v(i,j)|)



DPの動き

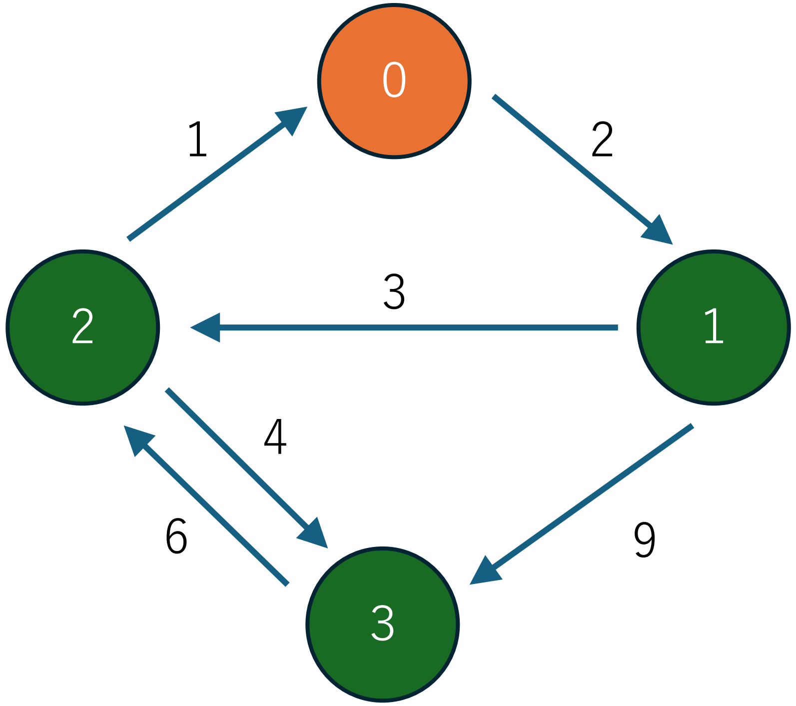
i = 14

	頂点3	頂点 2	頂点1	頂点 0
0 (0000)	x	x	x	0
1(0001)	x	x	x	x
2(0010)	x	x	2	x
3(0011)	x	x	x	x
4(0100)	x	x	x	x
5(0101)	x	x	x	x
6(0110)	x	5	x	x
7(0111)	x	x	x	6
8(1000)	x	x	x	x
9(1001)	x	x	x	x
10(1010)	11	x	x	x
11(1011)	x	x	x	x
12(1100)	x	x	x	x
13(1101)	x	x	x	x
14(1110)	9	17	x	x
15(1111)	x	x	x	18

・dp[i][j] = 今までに訪れた頂点の集合が i で、
今 頂点 j にいるとき、考えられる移動した距離の最小値
(最初の頂点0は訪れた頂点に含まない)

・遷移

dp[i + (1 << x)][x] = min(dp[i+(1 << x)][x] , dp[i][j] + |v(i,j)|)



DPの動き

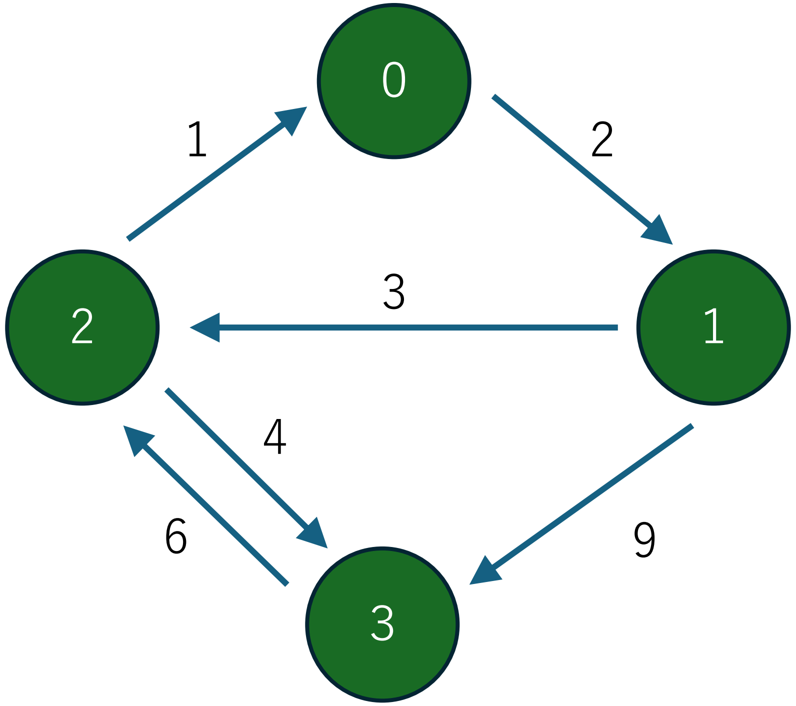
i = 15

	頂点3	頂点 2	頂点1	頂点 0
0 (0000)	x	x	x	0
1(0001)	x	x	x	x
2(0010)	x	x	2	x
3(0011)	x	x	x	x
4(0100)	x	x	x	x
5(0101)	x	x	x	x
6(0110)	x	5	x	x
7(0111)	x	x	x	6
8(1000)	x	x	x	x
9(1001)	x	x	x	x
10(1010)	11	x	x	x
11(1011)	x	x	x	x
12(1100)	x	x	x	x
13(1101)	x	x	x	x
14(1110)	9	17	x	x
15(1111)	x	x	x	18

・dp[i][j] = 今までに訪れた頂点の集合が i で、
今 頂点 j にいるとき、考えられる移動した距離の最小値
(最初の頂点0は訪れた頂点に含まない)

・遷移

dp[i + (1 << x)][x] = min(dp[i+(1 << x)][x] , dp[i][j] + |v(i,j)|)



DPの動き　　答え

	頂点3	頂点 2	頂点1	頂点 0
0 (0000)	x	x	x	0
1(0001)	x	x	x	x
2(0010)	x	x	2	x
3(0011)	x	x	x	x
4(0100)	x	x	x	x
5(0101)	x	x	x	x
6(0110)	x	5	x	x
7(0111)	x	x	x	6
8(1000)	x	x	x	x
9(1001)	x	x	x	x
10(1010)	11	x	x	x
11(1011)	x	x	x	x
12(1100)	x	x	x	x
13(1101)	x	x	x	x
14(1110)	9	17	x	x
15(1111)	x	x	x	18

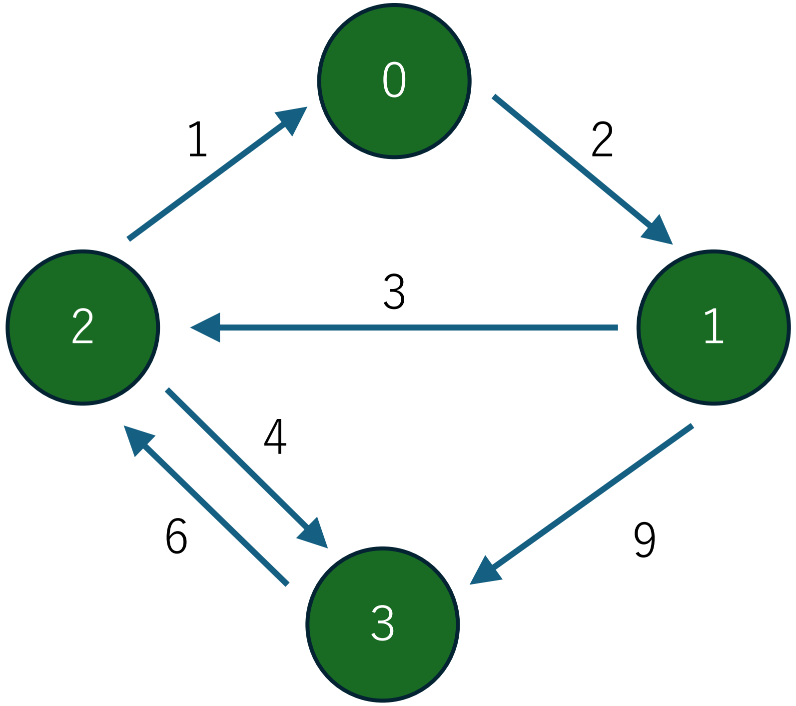
・dp[i][j] = 今までに訪れた頂点の集合が i で、
今 頂点 j にいるとき、考えられる移動した距離の最小値
（最初の頂点0は訪れた頂点に含まない）

・遷移

dp[i + (1 << x)][x] = min(dp[i+(1 << x)][x] , dp[i][j] + |v(i,j)|)

```
答えは
if dp[(1<<n)-1][0]がINF => -1
else dp[(1<<n)-1][0]
```

dp[15][0] = 18



Q. なぜ i を昇順に見て遷移を行えるのか

A. iに対応する集合の真部分集合は i 未満で全て現れるから

	頂点3	頂点 2	頂点1	頂点 0
0 (0000)	x	x	x	0
1(0001)	x	x	x	x
2(0010)	x	x	2	x
3(0011)	x	x	x	x

例えば 3 = {頂点1,頂点0} の真部分集合{},{頂点0},{頂点1}はすでに現れている。

i の部分集合からしか i に遷移しないのでiを昇順に見るだけでOK！

計算量について

$O(n^2 2^n)$程度

```
dp[1<<n][n] = 全ての要素をINFで初期化
#どこにも訪れてなくて0にいる状態で初期化
dp[0][0] = 0

for i = [0..1<<n):
  for j = [0..n):
    if dp[i][j]がINFのまま(到達しなかった):continue

    for (to,cost) in g[j]:
      if iのtoビット目が1 :continue #すでに通った
      #遷移
      dp[i +(1<<to)][to] = min(dp[i + (1<<to)][to],dp[i][j] + cost])

答えは
if dp[(1<<n)-1][0]がINF => -1
else dp[(1<<n)-1][0]
```

練習問題

・ABC180E-Traveling Salesman among Aerial Cities

同じような問題です。確認にやってみましょう

・A23-All Free

ちょっと違ったタイプのbitDPです。