CHỦ ĐỀ 5

ỨNG DỤNG ĐỒNG DƯ THỨC TRONG GIẢI TOÁN SỐ HỌC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa

Cho a,b là các số nguyên và n là số nguyên dương. Ta định nghĩa a đồng dư với b theo môđun n và kí hiệu là: $a \equiv b \pmod{n}$, nếu a và b có cùng số dư khi chia cho n.

Chú ý : a) $a \equiv b \pmod{m}$ là một đồng dư thức với a là vế trái, b là vế phải.

b) $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a - b \,\vdots\, m \Leftrightarrow \exists t \in Z$ sao cho $a = b + mt$.

c) Nếu a và b không đồng dư với nhau theo môđun m ta ký hiệu :

$a \not\equiv b \pmod{m}$.

d) Nếu a chia cho b dư r thì $a \equiv r \pmod{b}$

2. Tính chất

1. Tính chất phản xạ : $a \equiv a \pmod{m}$.

2. Tính chất đối xứng : $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$.

3. Tính chất bắc cầu :

$a \equiv b \pmod{m};\ b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$.

4. Cộng hay trừ từng vế của đồng dư thức có cùng môđun :

$a \equiv b \pmod{m};\ c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$

Tổng quát : $a_i \equiv b_i \pmod{m}$, $i = 1; 2; ...; k \Rightarrow a_1 \pm a_2 \pm ... \pm a_k = b_1 \pm b_2 \pm ... \pm b_k \pmod{m}$.

5. a) Nhân hai vế của đồng dư thức với một số nguyên :

$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ka \equiv kb \pmod{m}$ với $k \in Z$

b) Nhân hai vế và môđun của đồng dư thức với một số nguyên dương:

$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ka \equiv kb \pmod{km}$ với $k \in N^*$

6. Nhân từng vế của nhiều đồng dư thức có cùng môđun :

$a \equiv b \pmod{m};\ c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$

Tổng quát $a_i \equiv b_i \pmod{m}$, $i = 1; 2; ...; k \Rightarrow a_1a_2...a_k \equiv b_1b_2...b_k \pmod{m}$.

7. Nâng hai vế của một đồng dư thức lên cùng một lũy thừa :

$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod{m}\ \ (k \in N^*)$

8. Nếu hai số đồng dư với nhau theo nhiều môđun thì chúng đồng dư với nhau theo môđun là BCNN của các môđun ấy:

$$a \equiv b \ (\text{mod } m_i),\ i = 1; 2; ...; k \Rightarrow a \equiv b \ (\text{mod } [m_1; m_2; ...; m_k]).$$

Đặc biệt nếu $(m_i, m_j) = 1$ (i, j = 1; 2;...; k) thì

$$a \equiv b \ (\text{mod } m_i) \Rightarrow a \equiv b \ (\text{mod } m_1.m_2....m_k).$$

9. Nếu $a \equiv b \ (\text{mod } m)$ thì tập hợp các ước chung của a và m bằng tập hợp các ước chung của b và m.

Đặc biệt : $a \equiv b \ (\text{mod } m) \Rightarrow (a, m) = (b, m)$

10. Chia hai vế và môđun của một đồng dư cho một ước dương chung của chúng :

$$a \equiv b \ (\text{mod } m),\ k \in UC(a,b,m),\ k > 0 \Rightarrow \frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k}\left(\text{mod}\,\frac{m}{k}\right)$$

Đặc biệt : $ac \equiv bc \ (\text{mod } m) \Rightarrow a \equiv b \left(\text{mod}\,\frac{m}{(c,m)}\right)$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

🗁 Dạng 1: Sử dụng đồng dư thức trong các bài toán chứng minh chia hết

*** Cơ sở phương pháp:** Khi số dư trong phép chia a cho m bằng 0 thì $a \vdots m$. Như vậy để chứng tỏ $a \vdots m$ ta chứng minh $a \equiv 0 \ (\text{mod } m)$

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng: $\left(2222^{5555} + 5555^{2222}\right) \vdots 7$

Hướng dẫn giải

Ta có: $2222 \equiv 3 (\text{mod}\, 7)$ hay $2222 \equiv -4 (\text{mod}\, 7) \Rightarrow 2222^{5555} \equiv (-4)^{5555} (\text{mod}\, 7)$ (*)

Mặt khác $5555 \equiv 4 (\text{mod}\, 7) \Rightarrow 5555^{2222} \equiv 4^{2222} (\text{mod}\, 7)$ (**)

Từ (*) và (**)

$$\Rightarrow \left(2222^{5555} + 5555^{222}\right) \equiv \left[(-4)^{5555} + 4^{2222}\right] (\text{mod}\, 7)$$

$$\Rightarrow \left(2222^{5555} + 5555^{222}\right) \equiv -4^{2222}\left(4^{3333} - 1\right) (\text{mod}\, 7)$$

Ta lại có: $4^{3333} = \left(4^3\right)^{1111} = 64^{1111}$ mà $64 \equiv 1 (\text{mod}\, 7) \Rightarrow 4^{3333} \equiv 1 (\text{mod}\, 7)$

$$\Rightarrow 4^{3333} - 1 \equiv 0 (\text{mod}\, 7) \Rightarrow -4^{2222}\left(4^{3333} - 1\right) \equiv 0 (\text{mod}\, 7)$$

Do vậy $\left(2222^{5555} + 5555^{2222}\right) \equiv 0 (\text{mod}\, 7)$ hay $\left(2222^{5555} + 5555^{2222}\right) \vdots 7$

Bài toán 2. Chứng minh rằng: $A = \left(7.5^{2n} + 12.6^n\right) \vdots 19$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$5^{2n}=\left(5^2\right)^n=25^n \Rightarrow A=7.25^n+12.6^n$$

$$25\equiv 6\left(\bmod 19\right)\Rightarrow 25^n\equiv 6^n\left(\bmod 19\right)\Rightarrow A\equiv 7.6^n+12.6^n\left(\bmod 19\right)\Leftrightarrow A\equiv 19.6^n\left(\bmod 19\right)$$

$$\Rightarrow A\equiv 0\left(\bmod 19\right)\Rightarrow A\vdots 19$$

Bài toán 3. Chứng minh rằng $12^{2n+1}+11^{n+2}\ \vdots\ 133$ ($n\in N$)

Hướng dẫn giải

Cách 1:Ta có $12^2=144\equiv 11(\bmod 133)$; $11^2=121\equiv -12(\bmod 133)$

Do đó $12^{2n+1}=12.\left(12^2\right)^n\equiv 12.\,11^n\,(\bmod 133)$

$11^{n+2}=11^2.\,11^n\equiv -12.\,11^n\,(\bmod 133)$

Do đó $12^{2n+1}+11^{n+2}\equiv 12.\,11^n-12.\,11^n\equiv 0\,(\bmod 133)$.

Vậy với $n\in N$ thì $12^{2n+1}+11^{n+2}\ \vdots\ 133$.

Cách 2: Ta có $12^2=144\equiv 11(\bmod 133)\Rightarrow 12^{2n}\equiv 11^n\,(\bmod 133)$ (1)

Mà $12\equiv -11^2\,(\bmod 133)$ (2) Nhân vế với vế của (1) và (2) ta có :

$12^{2n}.\,12\equiv 11^n.\,(-11^2)\ (\bmod 133)\Rightarrow 12^{2n+1}\equiv -11^{n+2}\,(\bmod 133)$

$12^{2n+1}+11^{n+2}\equiv 0\,(\bmod 133)$ hay $12^{2n+1}+11^{n+2}\ \vdots\ 133$.

Bài toán 4. Chứng minh rằng: $A=\left(2^{2^{2n}}+5\right)\vdots 7\left(\forall n\in N\right)$

Hướng dẫn giải

Ta có $2^3=8\equiv 1\left(\bmod 7\right)$

Ta đi tìm số dư của 2^{2n} khi chia cho 3 (đây chính là điểm mấu chốt của bài toán).

Vì $4\equiv 1\left(\bmod 3\right)\Rightarrow 4^n\equiv 1\left(\bmod 3\right)\Rightarrow 2^{2n}\equiv 1\left(\bmod 3\right)$ hay n chia cho 3 dư 1.

Giả sử: $2^{2n}=3k+1\left(k\in N\right)$

Khi đó ta có: $A=2^{3k+1}+5=2.8^k+5$

Vì $8^k\equiv 1\left(\bmod 7\right)\Rightarrow 2.8^k\equiv 2\left(\bmod 7\right)\Rightarrow 2.8^k+5\equiv 2+5\left(\bmod 7\right)$

$\Rightarrow A\equiv 0\left(\bmod 7\right)$

Vậy $A\vdots 7$

🗁 Dạng 2: Sử dụng đồng dư thức tìm số dư

*** Cơ sở phương pháp:** Với hai số nguyên a và m, m > 0 luôn có duy nhất cặp số nguyên q, r sao cho a = mq + r, $0 \le r < m$. Để tìm số dư r trong phép chia a cho m ta cần tìm r sao cho $\begin{cases} a \equiv r(\text{mod } m) \\ 0 \le r < m \end{cases}$.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm số dư khi chia 3^{2000} cho 7.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$3^2 \equiv 2\left(\text{mod}\,7\right) \Rightarrow 3^6 \equiv \left(3^2\right)^3 \equiv 1\left(\text{mod}\,7\right)$$

$$\Rightarrow \left(3^6\right)^{333} \equiv 1\left(\text{mod}\,7\right) \Leftrightarrow 3^{1998} \equiv 1\left(\text{mod}\,7\right)$$

Mặt khác $3^2 \equiv 2\left(\text{mod}\,7\right) \Rightarrow 3^{2000} \equiv 3^{1998}.3^2 \equiv 1.2\left(\text{mod}\,7\right) \Rightarrow 3^{2000} : 7$ dư 2.

Nhận xét: Để tìm số dư khi chia a^n cho $b > 0$, ta lấy lũy thừa với số mũ tăng dần của a chia cho b để tìm số dư. Ta sẽ dừng lại để xem xét khi tìm được số dư có giá trị tuyệt đối nhỏ hoặc là một giá trị đặc biệt có liên quan đến bài toán.

Bài toán 2. Tìm số dư trong phép chia $5^{70} + 7^{50}$ cho 12.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$5^2 \equiv 1\left(\text{mod}12\right) \Rightarrow \left(5^2\right)^{35} \equiv 1\left(\text{mod}12\right) \Leftrightarrow 5^{70} \equiv 1\left(\text{mod}12\right)\left(*\right)$$

$$7^2 \equiv 1\left(\text{mod}12\right) \Rightarrow \left(7^2\right)^{25} \equiv 1\left(\text{mod}12\right) \Leftrightarrow 7^{50} \equiv 1\left(\text{mod}12\right)\left(**\right)$$

Từ $\left(*\right);\left(**\right) \Rightarrow 5^{70} + 7^{50}$ cho 12 dư 2.

Bài toán 3. Tìm số dư của số $A = 3^{2005} + 4^{2005}$ khi chia cho 11

Hướng dẫn giải

Ta có $3^5 = 243 \equiv 1\left(\text{mod}11\right) \Rightarrow \left(3^5\right)^{401} \equiv 1\left(\text{mod}11\right) \Rightarrow 3^{2005} \equiv 1\left(\text{mod}11\right)\left(1\right)$

Mặt khác $4^5 = 1024 \equiv 1\left(\text{mod}11\right) \Rightarrow \left(4^5\right)^{401} \equiv 1\left(\text{mod}11\right) \Rightarrow 4^{2005} \equiv 1\left(\text{mod}11\right)\left(2\right)$

Từ $\left(1\right);\left(2\right) \Rightarrow$ số dư của số $A = 3^{2005} + 4^{2005}$ khi chia cho 11 là 2.

Bài toán 4. a) Tìm số dư trong phép chia $1532^5 - 1$ cho 9.

b) Tìm số dư trong phép chia $2016^{2018} + 2$ cho 5

Hướng dẫn giải

a) Ta có $1532 = 9.170 + 2 \equiv 2 \pmod 9$ do đó $1532^5 \equiv 2^5 \pmod 9$

$\Rightarrow 1532^5 - 1 \equiv 2^5 - 1 \pmod 9$. Vì $2^5 - 1 = 31 \equiv 4 \pmod 9$. Do đó

$1532^5 - 1 \equiv 4 \pmod 9$. Vậy số dư cần tìm là 4.

b) Ta có $2016 \equiv 1 \pmod 5$ do đó $2016^{2018} \equiv 1^{2018} \pmod 5$

suy ra $2016^{2018} + 2 \equiv 1^{2018} + 2 \pmod 5$. Vì $1 + 2 = 3 \equiv 3 \pmod 5$.

Do đó $2016^{2018} + 2 \equiv 3 \pmod 5$.

Vậy số dư cần tìm là 3.

Dạng 3: Tìm điều kiện của biến để chia hết

*** Cơ sở phương pháp:** Dựa vào tính chất của đồng dư thức về số dư để tìm ra điều kiện của ẩn để biểu thức chia hết.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm số tự nhiên n sao cho: a. $\left(2^{3n+4} + 3^{2n+1}\right) \vdots 19$ b. $\left(n.2^n + 1\right) \vdots 3$

Hướng dẫn giải

a. Ta có $2^{3n+4} + 3^{2n+1} = 16.8^n + 3.9^n$

Vì $16 \equiv -3 \pmod{19} \Rightarrow 16.8^n \equiv -3.8^n \pmod{19}$

$\Rightarrow \left(16.8^n + 3.9^n\right) \vdots 19 \Leftrightarrow (-3).8^n + 3.9^n \equiv 0 \pmod{19}$

$\Leftrightarrow 9^n - 8^n \equiv 0 \pmod{19} \Leftrightarrow 9^n \equiv 8^n \pmod{19}$

$\Rightarrow n = 0$

vì trái lại $9^n \equiv 8^n \pmod{19} \Rightarrow 9 \equiv 8 \pmod{19}$ là vô lý

Vậy $n = 0$.

b.Ta xét các trường hợp sau

Trường hợp 1

Nếu $n = 3k\,(k \in N) \Rightarrow n.2^n \vdots 3 \Rightarrow n.2^n + 1 \not\vdots\, 3 \Rightarrow$ loại

Trường hợp 2

Nếu $n = 3k + 1\,(k \in N) \Rightarrow n.2^n + 1 = (3k+1).2^{3k+1} + 1 = 3k.2^{3k+1} + 2^{3k+1} + 1 = 3k.2^{3k+1} + 2.8^k + 1$

$\Rightarrow n.2^n + 1 \vdots 3 \Leftrightarrow \left(2.8^k + 1\right) \vdots 3$

$8 \equiv -1 \pmod 3 \Rightarrow 8^k \equiv (-1)^k \pmod 3$

$\Rightarrow 2.8^k + 1 \vdots 3 \Leftrightarrow 2.(-1)^k + 1 \equiv 0 \pmod 3$

tương đương với k chẵn $\Leftrightarrow k = 2m\,(m \in N) \Rightarrow n = 6m + 1\,(m \in N)$

Trường hợp 3

Nếu

$n = 3k + 2\left(k \in N\right) \Rightarrow n.2^n + 1 = \left(3k+2\right).2^{3k+2} + 1$

$= 3k.3^{3k+2} + 2.2^{3k+2} + 1 = 3k.2^{3k+2} + 8^{k+1} + 1$

$\Rightarrow \left(n.2^n + 1\right) \vdots 3 \Leftrightarrow \left(-1\right)^{k+1} + 1 \equiv 0\left(\bmod 3\right)$

$\Rightarrow$ k+1 lẻ $k = 2m\left(m \in N\right) \Rightarrow n = 6m + 2\left(m \in N\right)$

Vậy điều kiện cần tìm là $m \equiv 1\left(\bmod 6\right)$ hoặc $m \equiv 2\left(\bmod 6\right)$.

Bài toán 2. Tìm số tự nhiên n có 4 chữ số sao cho chia n cho 131 thì dư 112 và chia n cho 132 thì dư 98.

Hướng dẫn giải

$n \equiv 98\left(\bmod 132\right) \Rightarrow n = 132k + 98\left(k \in N\right)\left(1\right)$

$\Rightarrow 132 + 98 \equiv 112\left(\bmod 131\right)$

$\Rightarrow k + 98 + 33 = 112 + 33\left(\bmod 131\right) \Rightarrow k \equiv 14\left(\bmod 131\right)$

$\Rightarrow k \equiv 131m + 14\left(m \in N\right)\left(2\right)$

Từ (1) và (2) $n = 131.132m + 1946 \Rightarrow n = 1946$

🗁 **Dạng 4: Tìm một chữ số tận cùng**

*** Cơ sở phương pháp:**

Nếu $a \equiv r\left(\bmod 10\right); 0 \le r < b$ thì r là chữ số tận cùng của a.

Ta cần lưu ý một số tính chất sau:

Tính chất 1

Nếu a có chữ số tận cùng là $0;1;5;6$ thì a^n cũng có chữ số tận cùng như a nghĩa là $a^n \equiv a\left(\bmod 10\right)$

Tính chất 2

Nếu a có chữ số tận cùng bằng $4;9$ thì a^2 có chữ số tận cùng bằng $6;1$.

Nghĩa là: Nếu $a \equiv 4\left(\bmod 10\right) \Rightarrow a^2 \equiv 6\left(\bmod 10\right) \Rightarrow a^{2k} \equiv 6\left(\bmod 10\right)$

Nếu $a \equiv 9\left(\bmod 10\right) \Rightarrow a^2 \equiv 1\left(\bmod 10\right) \Rightarrow a^{2k} \equiv 1\left(\bmod 10\right)$

Do vậy để tìm chữ số tận cùng của a^n ta chia n cho 2.

Tính chất 3

Nếu a có chữ số tận cùng là $2;3;7;8$ thì ta áp dụng một trong các kết quả sau:

$2^{4k} \equiv 6\left(\bmod 10\right); 3^{4k} \equiv 1\left(\bmod 10\right); 7^{4k} \equiv 1\left(\bmod 10\right); 8^{4k} \equiv 6\left(\bmod 10\right)$

Do vậy để tìm chữ số tận cùng của a^n ta chia n cho 4.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho số $A = 2012^{2013}$ tìm chữ số tận cùng của A.

Hướng dẫn giải

Ta có $2013 = 4.503 + 1$

Vì $2012 \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2012^4 \equiv 6 \pmod{10}$

$\Rightarrow \left(2012^4\right)^{503} \equiv 6 \pmod{10} \Leftrightarrow 2012^{2012} \equiv 6 \pmod{10}$

$\Rightarrow 2012^{2013} \equiv 6.2 \pmod{10} \Leftrightarrow 2012^{2013} \equiv 2 \pmod{10}$

Vậy A có chữ số tận cùng là 2.

Bài toán 2. Cho $B = 1978^{1986^8}$ tìm chữ số tận cùng của B.

Hướng dẫn giải

$1978 \equiv 8 \pmod{10} \Rightarrow 1978^4 \equiv 6 \pmod{10}$

$1986^8 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow 1986 = 4k \left(k \in N\right)$

$\Rightarrow C = 1978^{4k} \equiv 6 \pmod{10}$

Vậy chữ số tận cùng của B là 6.

🗁 **Dạng 5: Tìm hai chữ số tận cùng**

*** Cơ sở phương pháp:** Nếu $a \equiv r \pmod{100}; 10 \le r < 100$ thì r là chữ số tận cùng của a.

Ta cần lưu ý một số tính chất sau:

$2^{20} \equiv 76 \pmod{100}; 3^{20} \equiv 01 \pmod{100}; 6^5 \equiv \pmod{100}$

$7^6 \equiv 01 \pmod{100}; 5^2 \equiv 25 \pmod{100}$

$76^n \equiv 76 \pmod{100}; 25^n \equiv 25 \pmod{100} \left(\forall n \ge 2\right)$

Từ đó ta có: $\begin{cases} a \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow a^{20k} \equiv 01 \pmod{100} \\ a \equiv 1;3;7;9 \pmod{10} \Rightarrow a^{20k} \equiv 01 \pmod{100} \\ a \equiv 5 \pmod{10} \Rightarrow a^{20k} \equiv 25 \pmod{100} \\ a \equiv 2;4;6;8 \Rightarrow a^{20k} \equiv 76 \pmod{100} \end{cases}$

Do vậy để tìm hai chữ số tận cùng của a^n ta chia n cho 20.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho số $A = 2012^{2013}$ tìm hai chữ số tận cùng của A.

Hướng dẫn giải

Ta có

$2013 = 20.100 + 13$

$2012 \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2012^{20} \equiv 76 \pmod{100}$

$\Rightarrow \left(2012^{20}\right)^{100} \equiv 76 \pmod{100} \Leftrightarrow 2012^{2000} \equiv 76 \pmod{100} (1)$

Mặt khác $2012 \equiv 12 \pmod{100} \Rightarrow 2012^6 \equiv 12^6 \pmod{100} \Rightarrow 2012^6 \equiv 84 \pmod{100}$
$\Rightarrow 2012^6 \equiv 56 \pmod{100} \Rightarrow 2012^{12} \equiv 56 \pmod{100} \Rightarrow 2012^{2013} \equiv 72 \pmod{100} (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2012^{2013} = 2012^{2000}.2012^{2013} \equiv 76.72 \pmod{100} \Leftrightarrow 2012^{2013} \equiv 72 \pmod{100}$

Vậy A có hai chữ số tận cùng là: 72

Bài toán 2. Tìm hai chữ số tận cùng của các số sau

a. $A = 7^{9^{7^9}}$ b. $B = 29^{9^{2012}}$ c. $C = 1978^{1986^8}$

Hướng dẫn giải

a. Vì $7^4 \equiv 01 \pmod{100}$ nên ta đi tìm số dư khi chia 9^{7^9} cho 4.

Ta có

$9 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 9^{7^9} \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 9^{7^9} = 4k \left(k \in N\right)$

$\Rightarrow A = 7^{9^{7^9}} = 7^{4k+1} = 7.\left(7^4\right)^k \equiv 7.01 \pmod{100} \Rightarrow 7^{9^{7^9}} \equiv 07 \pmod{100}$

Vậy A có hai chữ số tận cùng là 07.

b. Vì $29^{10} \equiv 01 \pmod{100} \Rightarrow$ nên ta đi tìm số dư khi chia 9^{2012} cho 10

Ta có :

$9 \equiv -1 \pmod{10} \Rightarrow 9^{2012} \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow 9^{2012} = 10k + 1 \left(k \in N\right)$

$\Rightarrow B = 29^{10k+1} = 29.\left(29^{10}\right)^k \equiv 29.01 \pmod{100} \Leftrightarrow B \equiv 29 \pmod{100}$

Vậy B có hai chữ số tận cùng là 29.

c. Vì $C \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow C^{20} \equiv 76 \pmod{100} \Rightarrow C^{20m} \equiv 76 \pmod{100}$

Mặt khác

$1986 \equiv 6 \pmod{20} \Rightarrow 1986^8 \equiv 16 \pmod{20}$

$\Rightarrow C = 1978^{20k+6} = \left(1978^{20}\right)^k.1978^{16} \equiv 1978^{16}.76 \pmod{100}$

Ta lại có :

$1978 \equiv -22 \pmod{100} \Rightarrow 1978^4 \equiv 56 \pmod{100} \Rightarrow \left(1978^4\right)^4 \equiv 56^4 \pmod{100}$

$\Rightarrow 1978^{16} \equiv 76 \pmod{100}$

$\Rightarrow C \equiv 96.76 \pmod{100} \Leftrightarrow C \equiv 76 \pmod{100}$

Vậy C có hai chữ số tận cùng là 76.

Dạng 6: Sử dụng đồng dư thức trong các bài toán về số chính phương

*** Cơ sở phương pháp:**

Số chính phương là số có dạng $n^2\left(n\in N\right)$

Ta đi chứng minh một số tính chất cơ bản của số chính phương bằng đồng dư :

1. Số chính phương khi chia cho 3 chỉ có hai số dư là 0 hoặc 1.

Thật vậy ta đi xét các trường hợp sau

Với $n=3k\Rightarrow n\equiv 0\left(\bmod 3\right)\Rightarrow n^2\equiv 0^2\left(\bmod 3\right)\Leftrightarrow n^2\equiv 0\left(\bmod 3\right)$ số dư bằng 0

Với $n=3k\pm 1\Rightarrow n\equiv \pm 1\left(\bmod 3\right)\Rightarrow n^2\equiv \left(\pm 1\right)^2\left(\bmod 3\right)\Leftrightarrow n^2\equiv 1\left(\bmod 3\right)\Rightarrow$ số dư bằng.

2. Số chính phương khi chia cho 4 chỉ có hai số dư là 0 hoặc 1.

Chứng minh tương tự :

Với $n=4k\Rightarrow n\equiv 0\left(\bmod 4\right)\Rightarrow n^2\equiv 0^2\left(\bmod 4\right)\Rightarrow n\equiv 0\left(\bmod 4\right)\Rightarrow$ số dư bằng 0.

Với $n=4k\pm 1\Rightarrow n\equiv \pm 1\left(\bmod 4\right)\Rightarrow n^2\equiv \left(\pm 1\right)^2 \bmod 4\Leftrightarrow n^2\equiv 1\left(\bmod 4\right)\Rightarrow$ số dư bằng 1.

Với $n=4k+2\Rightarrow n\equiv 2\left(\bmod 4\right)\Rightarrow n^2\equiv 2^2=4\left(\bmod 4\right)\Leftrightarrow n^2\equiv 0\left(\bmod 4\right)\Rightarrow$ số dư bằng 0.

3. Số chính phương khi chia cho 8 chỉ có ba số dư là 0,1 hoặc 4.

Tương tự ta xét các trường hợp sau :

$n=8k\Rightarrow n\equiv 0\left(\bmod 8\right)\Rightarrow n^2\equiv 0\left(\bmod 8\right)$

$n=8k\pm 1\Rightarrow n\equiv \pm 1\left(\bmod 8\right)\Rightarrow n^2\equiv 1\left(\bmod 8\right)$

$n=8k\pm 2\Rightarrow n\equiv \pm 2\left(\bmod 8\right)\Rightarrow n^2\equiv \left(\pm 2\right)^2=4\left(\bmod 8\right)$

$n=8k\pm 3\Rightarrow n\equiv \pm 3\left(\bmod 8\right)\Rightarrow n^2\equiv \left(\pm 3\right)^2\left(\bmod 8\right)\Leftrightarrow n^2\equiv 1\left(\bmod 8\right)$

$n=8k+4\Rightarrow n\equiv 4\left(\bmod 8\right)\Rightarrow n^2\equiv 4^2\left(\bmod 8\right)\Leftrightarrow n^2\equiv 0\left(\bmod 8\right)$

Hoàn toàn tương tự ta có thể xét các trường hợp số dư của số chính phương khi chia cho 5,7,9..

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng số : $A=19^k+5^k+1995^k+1996^k$ với k chẵn không thể là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Với k chẵn ta có

$19^k\equiv \left(-1\right)^k\left(\bmod 4\right)\Rightarrow 19^k\equiv 1\left(\bmod 4\right)$

$1995^k\equiv \left(-1\right)^k\left(\bmod 4\right)\Rightarrow 1995^5\equiv 1\left(\bmod 4\right)$

$1996^k\equiv 0\left(\bmod 4\right)\Rightarrow A=19^k+5^k+1995^k+1996^k\equiv 3\left(\bmod 4\right)$

Hay A chia 3 dư 4. Vậy A không thể là số chính phương.

Bài toán 2. Tìm tất cả số tự nhiên x,y để $2^x + 5^y$ là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Giả sử $2^x+5^y=k^2\ \left(k\in N\right)$

Nếu $x=0$ thì $1+5^y=k^2$ do đó k chẵn $\Rightarrow k^2$ chia hết cho 4 nhưng $1+5^y$ chia 4 dư 2.

Vậy $x\neq 0$, từ $1+5^y=k^2\Rightarrow$ k lẻ và k không chia hết cho 5. Xét hai trường hợp.

+) Với $y=0$ thì $2^x+1=k^2=\left(2n+1\right)^2$ (vì k lẻ nên $k=2n+1,n\in N$).

$\Rightarrow 2^x=4n(n+1)\Rightarrow n=1$. Khi đó x = 3; y = 0 (thỏa mãn)

Thử lại: $2^x+5^y=2^3+5^0=9$ là số chính phương.

+) Với $y\neq 0$ và k không chia hết cho 5 $\Rightarrow k^2\equiv\pm 1(\bmod 5)$

Từ $2^x+5^y=k^2\Rightarrow 2^x\equiv\pm 1(\bmod 5)\Rightarrow x$ chẵn

Đặt $x=2x_1\ \left(x_1\in N\right)$, ta có

$5^y=(k+2^{x_1})(k-2^{x_1})$

$\Rightarrow\begin{cases}k+2^{x_1}=5^{y_1}\\ k-2^{x_1}=5^{y_2}\end{cases}$ với $y_1+y_2=y$ với $y_1>y_2$, y_1, y_2 là các số tự nhiên.

$\Rightarrow 2^{x_1+1}=5^{y_2}(5^{y_1-y_2}-1)\Rightarrow 5^{y_2}=1\Rightarrow y_2=0$.

$\Rightarrow y_1=y.$ Khi đó $2^{x_1+1}=5^y-1$.

Nếu y = 2t$\left(t\in N\right)$ thì $2^{x_1+1}=5^{2t}-1=25^t-1\vdots 3$, vô lý

Vậy y lẻ, khi đó $2^{x_1+1}=5^y-1=4(5^{y-1}+5^{y-2}+...+5+1)$.

Nếu $y>1$ thì $5^{y-1}+5^{y-2}+..+1$,lẻ (vô lý).

Nếu $y=1\Rightarrow x_1=1$ khi đó $x=2;y=1$.

Thử lại $2^x+5^y=2^2+5^1=9$ là số chính phương

Vậy $x=2;y=1$ hoặc x = 3, y = 0.

Bài toán 3. Giả sử rằng $2n+1$ và $3n+1$ là các số chính phương. Chứng minh rằng $5n+3$ là một hợp số.

Hướng dẫn giải

Giả sử $2n+1=a^2$ và $3n+1=b^2$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$.

Khi đó $5n+3=4\left(2n+1\right)-\left(3n+1\right)=4a^2-b^2=\left(2a-b\right)\left(2a+b\right)$.

Do $a^2 \equiv 1(mod 2)$ nên $a^2 \equiv 1(mod\,4)$. Suy ra $n \equiv 0\,(\bmod\,2)$ và $b \equiv 1(\bmod\,2)$. Do đó $2a - b > 1$ và $2a + b > 1$. Vậy $5n + 3$ là hợp số.

Bài toán 3. Tìm nghiệm nguyên dương x để $3^x + 171$ là số chính phương.

(HSG Lai Châu 2015 - 2016)

Hướng dẫn giải

Ta có: $3^x \equiv 1,3(mod 8)$; $y^2 \equiv 0,1,4(mod 8)$. Mà: $3^x + 171 = y^2 \Rightarrow 3^x \equiv 1(mod 8)$. Do đó: x có dạng 2k $(k \in \mathbb{N})$.

Phương trình trở thành $A = (3^k)^2 + 171 = y^2$ với k = 0, 1, 2 thì phương trình vô nghiệm nên nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó phải ≥ 3. Do đó theo nguyên lý kẹp được ta có: $\left[(3^k)^2 + 3\right]^2 \geq a > (3^k)^2$.

Khi đó: $A = \left[(3^k)^2 + 3\right]^2$ hoặc $A = \left[(3^k)^2 + 2\right]^2$

Giải từng trường hợp ra ta được k = 3 $\Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = 30$. Vậy x = 6.

🗁 Dạng 7: Sử dụng đồng dư thức trong các bài toán về số nguyên tố, hợp số

*** Cơ sở phương pháp:** Đối với nhiều bài toán về số nguyên tố và hợp số ngoài sử dụng các tính chất về số nguyên tố chúng ta còn phải vận dụng các tính chất của đồng dư thức và định lý Fermat.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p^2 + 14$ là số nguyên tố

Hướng dẫn giải

Ta xét hai trường hợp sau

Trường hợp 1

Với $p = 3 \Rightarrow p^2 + 14 = 23$ là số nguyên tố

Trường hợp 2

Với $p \neq 3 \Rightarrow p^2 \equiv 1(\bmod 3) \Rightarrow p^2 + 14 \,\vdots\, 3\left(p^2 + 14 > 3\right) \Rightarrow$ $p^2 + 14$ không phải là số nguyên tố.

Vậy $p = 3$.

Bài toán 2. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p đều tồn tại vô số số tự nhiên n sao cho $2^n - n \,\vdots\, p$.

Hướng dẫn giải

Ta xét hai trường hợp sau

Trường hợp 1

Nếu $p=2 \Rightarrow 2^n - n \vdots 2 \left(\forall n = 2k; k \in N\right)$

Trường hợp 2

Nếu $p>2 \Rightarrow 2^{p-1} \equiv 1 \left(\text{mod } p\right)$

Theo định lý Fermat$\Rightarrow 2^{(p-1)k} - \left(p-1\right)k \equiv 1 + k \left(\text{mod } p\right) \left(\forall k \in N\right)$

Do đó với mọi số tự nhiên n có dạng $n = \left(p-1\right)\left(hp-1\right)\left(k \in N^*\right)$

Ta có $2^n - n \equiv 1 + \left(hp-1\right) \equiv 0 \left(\text{mod } p\right)$ tức là $2^n - n \vdots p$

Bài toán 3. Cho $n \in N^*$ chứng minh rằng: $19.8^n + 17$ là hợp số.

Hướng dẫn giải

Ta xét các trường hợp sau

Trường hợp 1

Nếu $n = 2k \Rightarrow 19.8^n + 17 \equiv 1.\left(-1\right)^{2k} + 2 = 3 \equiv 0 \left(\text{mod} 3\right) \Rightarrow 19.8^n + 17 \vdots 3$

Mặt khác $19.8^n + 17 > 3 \Rightarrow$ $19.8^n + 17$ là hợp số.

Trường hợp 2

$n = 4k+1 \Rightarrow 19.8^n + 17 = 19.8^{4k+1} + 17 = 19.8.64^{2k} + 17 \equiv 6.8.\left(-1\right)^{2k} + 4 \equiv 52 \equiv 0 \left(\text{mod} 13\right)$ Mà $19.8^n + 17 > 3 \Rightarrow$ $19.8^n + 17$ là hợp số

Trường hợp 3

$n = 4k+3 \Rightarrow 19.8^n + 17 = 19.8^{4k+3} + 17 = 19.8.64^{2k+1} + 17 \equiv \left(-1\right).3.\left(-1\right)^{2k+1} + 2 \equiv 5 \equiv 0 \left(\text{mod} 3\right)$

$\Rightarrow 19.8^n + 17 \vdots 5$

Mà $19.8^n + 17 > 5 \Rightarrow$ $19.8^n + 17$ là hợp số.

Bài toán 4. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 8. Chứng min rằng : $\left(3^p - 2^p - 1\right) \vdots 42p$

Hướng dẫn giải

Ta có $42p = 2.3.7.9$ đề chứng minh $A = 3^p - 2^p - 1$ chia hết cho $42p$ ta chỉ cần chỉ ra rằng A chia hết cho 2,3,7

Thật vậy

Ta có $A \equiv 1^p - 0 - 1 = 0 \left(\text{mod} 2\right) \Rightarrow A \vdots 2$

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 8 nên p là số lẻ :

$p = 2k+1 \Rightarrow A = 3^p - 2^{2k+1} - 1 \equiv 0 - 4^k.2 - 1 \equiv -1.2 - 1 \equiv -3 \equiv 0 \left(\text{mod} 3\right) \Rightarrow A \vdots 3$

Mặt khác $A = 3^{2k+1} - 2^{2k+1} - 1 = 3.9^k - 2^{2k+1} - 1 \equiv 3.2^k - 2^{2k+1} - 1 = -\left(2^k - 1\right)\left(2^{2k+1} - 1\right)\left(\bmod 7\right)$

Do $p = 2k + 3$ không chia hết cho $3 \Rightarrow k \vdots 3$ hoặc $k + 1 \vdots 3$

Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1

Nếu $k = 3h\left(h \in N\right) \Rightarrow 2^k - 1 = 8^h - 1 \vdots 7$

Trường hợp 2

Tương tự nếu $k + 1 \vdots 3 \Rightarrow 2^{k+1} - 1 \vdots 7$

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có $A \vdots 7$

Theo định lý Fermat ta có $A = 3^p - 2^p - 1 = \left(3^p - 3\right) - \left(2^p - 2\right) \vdots p$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

🗁 **Dạng 8: Sử dụng đồng dư thức trong các bài toán giải phương trình nghiệm nguyên**

*** Cơ sở phương pháp:** Trong giải phương trình nghiệm nguyên việc lựa chọn môđun một cách thích hợp sẽ giúp việc giải các phương trình khó phức tạp trở nên đơn giản hơn. Đặc biệt là các bài toán chứng minh phương trình nghiệm nguyên vô nghiệm.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng các phương trình sau không có nghiệm nguyên:

a) $x^2 - y^2 = 1998$ b) $x^2 + y^2 = 1999$

Hướng dẫn giải

- Nhận xét: Số chính phương chia cho 4 chỉ có số dư 0 hoặc 1

a) Ta có: $\left.\begin{array}{l} x^2 \equiv 0,1\left(\bmod 4\right) \\ y^2 \equiv 0,1\left(\bmod 4\right) \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - y^2 \equiv 0,1,3\left(\bmod 4\right)$

Mà 1998 chia cho 4 dư 2, nên phương trình không có nghiệm nguyên.

b) Ta có: $\left.\begin{array}{l} x^2 \equiv 0,1\left(\bmod 4\right) \\ y^2 \equiv 0,1\left(\bmod 4\right) \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + y^2 \equiv 0,1,2\left(\bmod 4\right)$

Mà 1999 chia cho 4 dư 3, nên phương trình không có nghiệm nguyên.

Bài toán 2. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 = 2y^2 - 8y + 3$ (1)

Hướng dẫn giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^2 = 2(y-2)^2 - 5$

- Nhận xét: Số chính phương chia cho 8 chỉ có số dư 0, 1 hoặc 4

Ta có: $x^2 \equiv 0,1,4\left(\bmod 8\right)$

$$\left.\begin{array}{l}(y-2)^2 \equiv 0,1,4 \pmod 8 \Rightarrow 2(y-2)^2 \equiv 0,2 \pmod 8 \\ -5 \equiv 3 \pmod 8\end{array}\right\} \Rightarrow 2(y-2)^2 - 5 \equiv 3,5 \pmod 8$$

Suy ra phương trình không có nghiệm nguyên.

Bài toán 3. Phương trình $z^2 = (x^2-1).(y^2-1)+2013$ có nghiệm nguyên dương hay không?

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}x^2 \equiv 0,1,4 (\bmod 8) \Rightarrow x^2-1 \equiv 0,3,7 (\bmod 8) \\ y^2 \equiv 0,1,4 (\bmod 8) \Rightarrow y^2-1 \equiv 0,3,7 (\bmod 8)\end{array}\right\} \Rightarrow (x^2-1)(y^2-1) \equiv 0,1,5 (\bmod 8) \\ 2013 \equiv 5 (\bmod 8)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (x^2-1)(y^2-1)+2013 \equiv 5,6,2 (\bmod 8)$$

Mà $z^2 \equiv 0,1,4 (\bmod 8)$

Suy ra phương trình không có nghiệm nguyên.

🗁 **Dạng 9: Sử dụng các định lý (ta thừa nhận không chứng minh)**

*** Cơ sở phương pháp:**

1. Định lý Fermat bé. Cho a là số nguyên dương và p là số nguyên tố. Khi đó ta luôn có $a^p \equiv a$ (mod p). Đặc biệt nếu (a, p) =1thì $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).

2. Định lý Wilson. Với mọi số nguyên tố p thì (p – 1)! $\equiv -1$(mod p).

3. Định lý Euler. Cho m là số nguyên dương và a là số nguyên tố cùng nhau với m; φ(m) là số các số nguyên dương nhỏ hơn m và nguyên tố cùng nhau với m. Khi đó $a^{\varphi(m)} \equiv 1 (\bmod m)$.

Chú ý: Nếu số nguyên dương m có dạng phân tích thành thừa số nguyên tố: m = $p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.....p_k^{\alpha_k}$ thì $\varphi(m) = m\left(1-\dfrac{1}{p_1}\right)\left(1-\dfrac{1}{p_2}\right)...\left(1-\dfrac{1}{p_k}\right)$.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho $a,b \in Z; (a,b)=1$ Chứn minh rằng : a^3-2b^3 không chia hết cho 19.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh bằng phản chứng như sau:

Giả sử $(a^3-2b^3) \vdots 19$ khi đó $(a^3)^6-(2b^3)^6 \vdots (a^3-2b^3) \vdots 19$.

Mặt khác $\left(a^3\right)^6 - \left(2b^3\right)^6 = a^{18} - 64b^{18}$. Nếu a,b không chia hết cho 19 thì theo định lý Fermat *(Định lý Fermat:* $a^p \equiv a\left(\text{mod } p\right) \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1\left(\text{mod } p\right)$ *Với mọi a nguyên và p nguyên tố).*

$\Rightarrow a^{18} \equiv b^{18} \equiv 1\left(\text{mod}19\right) \Rightarrow a^{18} - 64b^{18} \equiv 1 - 64 = -63 \not\equiv 0\left(\text{mod}19\right)$ (Vô lý)

Nếu một trong hai số chia hết cho 19 thì từ $\left(a^3 - 2b^3\right) \vdots 19 \Rightarrow \begin{cases} a \vdots 19 \\ b \vdots 19 \end{cases} \Rightarrow$ vô lý vì $\left(a,b\right) = 1$.

Vậy $a^3 - 2b^3$ không chia hết cho 19.

Bài toán 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì : $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 2007$ chia hết cho 22

Hướng dẫn giải

Theo Định lý Fermat bé ta có $2^{10} \equiv 1(\text{mod } 11)$; $3^{10} \equiv 1(\text{mod } 11)$

Ta có $3^4 = 81 \equiv 1(\text{mod } 10) \Rightarrow 3^{4n+1} = 3.(3^4)^n \equiv 3(\text{mod } 10)$

$\Rightarrow 3^{4n+1} = 10k + 3$, $(k \in N)$

Mặt khác $2^4 = 16 \equiv 1 (\text{mod } 5) \Rightarrow 2^{4n} \equiv 1(\text{mod } 5)$

$\Rightarrow 2^{4n+1} = 2.(2^4)^n \equiv 2 (\text{mod } 10) \Rightarrow 2^{4n+1} = 10t + 2$, $(t \in N)$

Do đó $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 2007 = 2^{10k+3} + 3^{10t+2} + 2002 + 5$

$= 2^3.\left(2^{10}\right)^k + 3^2.\left(3^{10}\right)^t + 22.91 + 5 \equiv 2^3 + 3^2 + 0 + 5 \equiv 0 (\text{mod } 11)$

Mà $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 2007 \vdots 2$ (vì $2^{3^{4n+1}}$ là số chẵn $3^{2^{4n+1}}$ là số lẻ 2007 là số lẻ).

Do $(2 ; 11) = 1$ nên $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 2007 \vdots 22$.

Bài toán 3. Cho $a_1; a_2; ...; a_{2016}$ là 2016 số nguyên dương . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + ... + a_{2016}^5 \vdots 30$ là $a_1 + a_2 + ... + a_{2016} \vdots 30$.

Hướng dẫn giải

Theo định lý Fermat bé , do 2; 3; 5 là các số nguyên tố và a là số nguyên dương bất kỳ ta có :

$a^2 \equiv a (\text{mod } 2) \Rightarrow a^4 = (a^2)^2 \equiv a^2 \equiv a (\text{mod } 2) \Rightarrow a^5 \equiv a (\text{mod } 2)$

$a^3 \equiv a (\text{mod } 3) \Rightarrow a^5 = a^3. a^2 \equiv a.a^2 \equiv a^3 \equiv a (\text{mod } 3)$

$a^5 \equiv a (\text{mod } 5)$

Theo tính chất nếu hai số đồng dư với nhau theo nhiều môđun thì chúng đồng dư với nhau theo mô đun là BCNN của các môđun ấy.

Do đó $a^5 \equiv a (\text{mod } 2.3.5)$ hay $a^5 \equiv a (\text{mod } 30) \Rightarrow a^5 - a \equiv 0 (\text{mod } 30)$

Nghĩa là $\left(a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + ... + a_{2016}^5\right) - \left(a_1 + a_2 + ... + a_{2016}\right) \equiv 0 (\text{mod } 30)$

Vậy $a_1 + a_2 + ... + a_{2016} \vdots 30 \Leftrightarrow a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + ... + a_{2016}^5 \vdots 30$

Bài toán 3. Chứng minh rằng trong các số tự nhiên thế nào cũng có số k sao cho $1983^k - 1$ chia hết cho 10^5.

(Đề thi học sinh giỏi toán cấp 2 toàn quốc năm 1983).

Hướng dẫn giải

Vì 1983 không chia hết cho 2 và không chia hết cho 5 mà $10^5 = 2^5.5^5$ nên $(1983; 10^5) = 1$. Áp dụng định lý Euler ta có :

$$1983^{\varphi(10^5)} \equiv 1\left(\bmod 10^5\right).$$

Ta có $\varphi\left(10^5\right) = 10^5\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 4.10^4$. Nghĩa là $1983^{4.10^4} - 1 \vdots 10^5$

Vậy $k = 4.10^4$.

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Chứng minh $4^{2018} - 7 \vdots 9$

Bài 2: Chứng minh rằng với mọi số nguyên

$A = \left(n^n - n^2 + n - 1\right) \vdots (n-1)^2 \quad (\forall n \in Z, n > 1)$

Bài 3. Chứng minh rằng: $\left(9^n + 1\right)$ không chia hết cho $100(\forall n \in N)$

Bài 4. Cho số a = $\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ $(1 \le a_n \le 9;\ 0 \le a_i \le 9;\ i = 0; 1; ...; n-1)$

Hãy xác định dấu hiệu chia hết :

a) Cho 3; b) Cho 4.

Bài 5. Chứng minh rằng: $A = \left(1924^{2003^{2004^n}} + 1920\right) \vdots 124 (\forall n \in N^*)$

Bài 6. a) Hãy tìm chữ số tận cùng của $9^{9^{10}}$

b) Hãy tìm hai chữ số tận cùng của 3^{1000}

Bài 7. Tìm số dư trong phép chia

a) $8! - 1$ cho 11. b) $2014^{2015} + 2016^{2015} + 2018$ cho 5.

c) $2^{50} + 41^{65}$ cho 7 d) $1^5 + 3^5 + 5^5 + ... + 97^5 + 99^5$ cho 4.

Bài 8. Tìm số dư trong phép chia :

a) $1532^5 - 4$ cho 9 ; b) 2^{2000} cho 25;

c) $2014^{2015^{2016}}$ cho 13.

Bài 9. Tìm số dư trong phép chia :

a) $A = 35^2 - 35^3 + 35^4 - 35^8 + 35^{16} + 35^{32}$ cho 425.

b) $B = 10^{10} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + ... + 10^{10^{10}}$ cho 7.

Bài 10. a) Tìm chữ số tận cùng của 4^{3^2}

b) Tìm hai chữ số tận cùng của 3^{999}.

c) Tìm ba chữ số tận cùng của số 2^{512}.

Bài 11. Chứng minh :

a) $41^{2015} - 6 \vdots 7$; b) $2^{4n+1} - 2 \vdots 15$ $(n \in N)$;

c) $3^{76} - 2^{76} \vdots 13$; d) $20^{15} - 1 \vdots 341$.

Bài 12. Chứng minh $1890^{79} + 1945^{2015} + 2017^{2018} \vdots 7$.

Bài 13. a) Chứng minh $5555^{2222} + 2222^{5555} + 15554^{1111} \vdots 7$

b) Cho $M = 220^{119^{69}} + 119^{69^{220}} + 69^{220^{119}} + (220+119+69)^{102}$

Chứng minh $M \vdots 102$.

Bài 14. Chứng minh rằng $5^{2n-1}.2^{n+1} + 2^{2n-1}.3^{n+1} \vdots 38$ $(n \in N^*)$

Bài 15. Cho số $a = \overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}$ $(1 \le a_n \le 9$; $0 \le a_i \le 9$; $i = 0; 1; ...; n-1)$

Hãy xác định dấu hiệu chia hết :

a) Cho 9; b) Cho 25; c) Cho 11; d) Cho 8.

Bài 16. Cho $A = 2^{2^{10n+1}} + 19$ với $n \in N^*$. Chứng minh rằng A là một hợp số.

Bài 17. Cho $B = (12!)^{13} + 2016^{2015}$. Chứng minh rằng B chia hết cho 13.

Bài 18. Chứng minh rằng với $n \in N$:

a) $2^{2^{2n+1}} + 3.2^{3n} \vdots 7$;

b) $2^{2^{4n+1}} + 2.12^{5n+1} + 5.10^{2n} \vdots 11$.

Bài 19. a) Với giá trị nào của số tự nhiên n thì $3^n + 63$ chia hết cho 72.

b) Cho $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1$. Tìm giá trị tự nhiên của n để $A \vdots 323$.

Bài 20. Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn $2^p + 1 \vdots p$.

Bài 21. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p^2 + 20$ là số nguyên tố .

Bài 22. Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng số $ab^p - ba^p \vdots p$ với mọi số nguyên dương a, b.

Bài 23. a) Chứng minh rằng tổng các bình phương của ba số nguyên trong phép chia cho 8 không thể có dư là 7.

b) Chứng minh phương trình $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 2015$ không có nghiệm nguyên.

Bài 24. Tìm hai chữ số tận cùng của $2011^{2010^{2009}}$

(Đề thi Olympic Toán Singapore năm 2010)

Bài 25. Cho biểu thức $A = (a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}) - (a^{2008} + b^{2008} + c^{2008})$ với a, b, c là các số nguyên dương. Chứng minh rằng A chia hết cho 30.

(Đề thi chọn học sinh giỏi môn toán lớp 9 TP Hà Nội năm học 2011 – 2012)

Bài 26. Chứng minh rằng không tồn tại các bộ ba số nguyên (x; y; z) thỏa mãn đẳng thức $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$.

(Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên KHTN Hà Nội năm học 2011 – 2012).

Bài 27. Tìm hai chữ số cuối cùng của số $A = 41^{106} + 57^{2012}$.

(Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2012 – 2013).

Bài 28. Cho a, b là hai số nguyên dương thỏa mãn a + 20 và b + 13 cùng chia hết cho 21. Tìm số dư trong phép chia $A = 4^a + 9^b + a + b$ cho 21.

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên Trần Phú Hải Phòng năm học 2013 – 2014)

Bài 29. Cho n là một số nguyên dương chứng minh $A = 2^{3n+1} + 2^{3n-1} + 1$ là hợp số.

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9 TP Hà Nội năm học 2014 – 2015)

Bài 30. Chứng minh $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh năm học 2015 – 2016)

Bài 31. Chứng minh rằng phương trình : $x^{15} + y^{15} + z^{15} = 19^{2003} + 7^{2003} + 9^{2003}$ không có nghiệm nguyên.

Bài 32. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x(x+3) + y(y+3) = z(z+3)$ với điều kiện x, y là các số nguyên tố.

Bài 33. Chứng minh $\left(2013^{2016} + 2014^{2016} - 2015^{2016}\right)^{10} \vdots 106$.

Bài 34. Chứng minh rằng $1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k}$ không chia hết cho 5.

Bài 35. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p tồn tại vô số số có dạng $2^n - n$, (n $\in$N) chia hết cho p.

Bài 36. Tìm hai chữ số tận cùng của $26^{6^{2001}}$

Bài 37. Tìm số tự nhiên n sao cho $3^n + 4n + 1$ chia hết cho 10.

Bài 38. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất lớn hơn 4 sao cho $n^3 + 4n^2 - 20n - 48 \vdots 125$

Bài 39. Cho số nguyên a không chia hết cho 5 và 7. Chứng minh rằng:

$$\left(a^4 - 1\right)\left(a^4 + 15a^2 + 1\right) \vdots 35$$

Bài 40. Chứng minh rằng $2^m + 3^n$ không chia hết cho 23 với mọi số tự nhiên m, n.

Bài 41. Chứng minh rằng trong các số tự nhiên thế nào cũng có số k sao cho $2017^k - 1$ chia hết cho 10^5.

Bài 42. Tìm n nguyên dương để phương trình sau có nghiệm hữu tỉ:

$$x^n + (x+2)^n + (2-x)^n = 0$$

Bài 43. Gọi a là tổng các chữ số của số $\left(2^9\right)^{1945}$. Gọi b là tổng các chữ số của số a. Gọi c là tổng các chữ số của b. Tính c.

CHỦ ĐỀ 5. ỨNG DỤNG CỦA ĐỒNG DƯ THỨC TRONG GIẢI TOÁN SỐ HỌC

Bài 1.

Ta có $4^3 = 64 \equiv 1 \pmod 9 \Rightarrow 4^{2016} = \left(4^3\right)^{672} \equiv 1 \pmod 9$

Mặt khác $4^2 = 16 \equiv 7 \pmod 9 \Rightarrow 4^{2018} = 4^{2016}.\,4^2 \equiv 1.\,7 \pmod 9$

Vậy $4^{2018} - 7 \equiv 0 \pmod 9$ hay $4^{2018} - 7 \,\vdots\, 9$.

Bài 2.

Trường hợp 1:

Với $n = 2 \Rightarrow A = 1 \,\vdots\, (2-1)^2$ luôn đúng

Trường hợp 2:

Với $n > 2 \Rightarrow A = n^2\left(n^{n-2} - 1\right) + (n-1) = n^2(n-1)\left(n^{n-3} + n^{n-4} + \ldots + 1\right) + (n-1)$

$= (n-1)\left(n^{n-1} + n^{n-2} + \ldots + n^2 + 1\right)$

Mặt khác

$n \equiv 1\left(\mathrm{mod}\,(n-1)\right) \Rightarrow n^k \equiv 1\left(\mathrm{mod}\,(n-1)\right)(\forall k \in N)$

$\Rightarrow n^{n-1} + n^{n-2} + \ldots + n^2 \equiv n - 2\left(\mathrm{mod}\,(n-1)\right)$

$\Rightarrow n^{n-1} + \ldots + n^2 + 1 \equiv n - 1\left(\mathrm{mod}\,(n-1)\right)$

$n^{n-1} + \ldots + n^2 + 1 \equiv 0\left(\mathrm{mod}\,(n-1)\right)(1)$

$\Rightarrow (n-1)\left(n^{n-1} + .. + n^2 + 1\right) \equiv 0\left(\mathrm{mod}\,(n-1)^2\right)$

$\Rightarrow A = \left(n^n - n^2 + n - 1\right) \vdots (n-1)^2$

Bài 3.

Trường hợp 1:

Với $n = 0 \Rightarrow 9^n + 1 = 2$ không chia hết cho 100.

hoặc $n = 1 \Rightarrow 9^n + 1 = 10$ không chia hết cho 100.

Trường hợp 2:

$n \geq 2$ Ta đi xét 2 khả năng sau:

Khả năng 1:

Với n chẵn $n = 2k\,(k \in N^*) \Rightarrow 9^n + 1 = 9^{2k} + 1 \equiv 2 \pmod{10}$

$\Rightarrow$ $\left(9^n + 1\right)$ không chia hết cho 10.$\Rightarrow$ $\left(9^n + 1\right)$ không chia hết cho 100.

Khả năng 2:

Với n lẻ $n=2k+1(n\in N^*)\Rightarrow 9^n+1=9.81^k+1\equiv 2(\bmod 4)$

$\Rightarrow$ (9^n+1) không chia hết cho 4. $\Rightarrow$ (9^n+1) không chia hết cho 100.

Bài 4.

Ta có a = $\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}$ = $a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_1.10 + a_0$.

a) Ta có $10 \equiv 1 (\bmod 3)$ do đó $a_i. 10^i \equiv a_i (\bmod 3)$, i = 1; 2; 3; ...; n

Do đó $a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_1.10 + a_0 \equiv (a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0) (\bmod 3)$

Vậy a $\vdots$ 3 $\Leftrightarrow$ $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 \equiv 0 (\bmod 3)$

$\Leftrightarrow$ $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 \vdots 3$.

b) Ta có $10^2 = 100 \equiv 0 (\bmod 4)$ $\Rightarrow$ $a_i. 10^i \equiv 0 (\bmod 4)$, i = 2; 3; ...; n

$\Rightarrow$ $a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_1.10 + a_0 \equiv (a_1.10 + a_0) (\bmod 4)$

Vậy a $\vdots$ 4 $\Leftrightarrow$ $a_1. 10 + a_0 \equiv 0 (\bmod 4)$ $\Leftrightarrow$ $\overline{a_1 a_0} \vdots 4$.

Bài 5. Ta có $124 = 4.31 \Rightarrow A \equiv 0(\bmod 4)$

Do vậy để chứng minh $A \vdots 124$ ta đi chứng minh $A \vdots 31$

Thật vậy : $1924 \equiv 2(\bmod 31); 1920 \equiv -2(\bmod 31) \Rightarrow A \equiv 2^{2003^{2004^n}} - 2(\bmod 31)(*)$

Mặt khác : $2^5 = 32 \equiv 1(\bmod 31)$. Ta đi tìm số dư của 2003^{2004^n} khi chia cho5.

$2004^n \equiv 0(\bmod 4) \Rightarrow 2004^n = 4k \Rightarrow 2003^{2004^n} = 2003^{4k}$

$2003 \equiv 3(\bmod 5) \Rightarrow 2003^{4k} \equiv 3^{4k} \equiv 81^k \equiv 1(\bmod 5)$

$\Rightarrow 2003^{2004^n} \equiv 1(\bmod 5) \Rightarrow 2003^{2004^n} = 5m+1$

$\Rightarrow 2^{2003^{2004^n}} = 2^{5m+1} = 2.(2^5)^m \equiv 2(\bmod 31)$

Thay vào (*) ta có $A \equiv 0(\bmod 31) \Rightarrow A \vdots 31$

Bài 6.

a) Tìm chữ số tận cùng của một số là tìm dư trong phép chia số đó cho 10. Vì $9^{2n+1} = 9.81^n \equiv 9(\bmod 10)$. Do 9^{10} là số lẻ nên số $9^{9^{10}}$ có chữ số tận cùng là 9.

b) Tìm hai chữ số tận cùng của một số là tìm dư trong phép chia số đó cho 100.

Ta có $3^4 = 81 \equiv -19(\bmod 100)$ $\Rightarrow$ $3^8 \equiv (-19)^2(\bmod 100)$

Mà $(-19)^2 = 361 \equiv 61(\bmod 100)$ Vậy $3^8 \equiv 61(\bmod 100)$

$3^{10} \equiv 61.9 \equiv 549 \equiv 49 (\bmod 100)$

$3^{20} \equiv 49^2 \equiv 01 (\bmod 100)$ (do $49^2 = 2401 = 24.100 + 1$)

Do đó $3^{1000} \equiv 01 (\bmod 100)$ nghĩa là hai chữ số sau cùng của 3^{1000} là 01.

Bài 7. Với những bài toán dạng này, phương pháp chung là tính toán để đi đến $a \equiv b \pmod m$ với b là số có trị tuyệt đối nhỏ nhất có thể được (tốt nhất là $b = \pm 1$) từ đó tính được thuận lợi $a^n \equiv b^n \pmod m$

a) $8! = 1.2.3.4.5.6.7.8.$

Ta có $3.4 = 12 \equiv 1 \pmod{11}$; $2.6 = 12 \equiv 1 \pmod{11}$; $7.8 \equiv 1 \pmod{11}$ Vậy $8! \equiv 5 \pmod{11}$ $\Rightarrow 8! - 1 \equiv 4 \pmod{11}$. Số dư trong phép chia $8! - 1$ cho 11 là 4.

b) $2014 \equiv -1 \pmod 5 \Rightarrow 2014^{2015} \equiv -1 \pmod 5$

$2016 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 2016^{2015} \equiv 1 \pmod 5$; $2018 \equiv 3 \pmod 5$

$2014^{2015} + 2016^{2015} + 2018 \equiv 3 \pmod 5$.

c) $2^3 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 2^{50} = (2^3)^{16}.4 \equiv 4 \pmod 7$

$41 \equiv -1 \pmod 7 \Rightarrow 41^{65} \equiv (-1)^{65} \equiv -1 \pmod 7$

$2^{50} + 41^{65} \equiv 4 - 1 \equiv 3 \pmod 7$.

d) $1^5 \equiv 1 \pmod 4$; $3^5 \equiv -1 \pmod 4$; $5^5 \equiv 1 \pmod 4$; ...;

$97^5 \equiv 1 \pmod 4$; $99^5 \equiv -1 \pmod 4$. Đáp số : Dư 0 .

Bài 8. a) $1532 \equiv 2 \pmod 9 \Rightarrow 1532^5 \equiv 2^5 \equiv 5 \pmod 9$

$$\Rightarrow 1532^5 - 4 \equiv 1 \pmod 9$$

b) $2^5 = 32 \equiv 7 \pmod{25} \Rightarrow 2^{10} = (2^5)^2 \equiv 7^2 \equiv -1 \pmod{25}$.

$2^{2000} = (2^{10})^{200} \equiv (-1)^{200} \equiv 1 \pmod{25}$.

c) $2014 = 155.13 - 1$ nên $2014 \equiv -1 \pmod{13}$; $2015^{2016} = 2k + 1$ $(k \in N)$

$\Rightarrow 2014^{2015^{2016}} \equiv (-1)^{2k+1} \equiv -1 \pmod{13}$. Đáp số : dư 12.

Bài 9. a) Ta có $35^2 = 1225 = 425.3 - 50 \equiv -50 \pmod{425}$

$$35^3 = 35^2.35 \equiv -50.35 \equiv -1750 \equiv -50 \pmod{425}$$

$$35^4 = (35^2)^2 \equiv (-50)^2 \equiv 2500 \equiv -50 \pmod{425}$$

Tương tự với 35^8 ; 35^{16} ; 35^{32}. Từ đó có $A \equiv -100 \pmod{425}$.

Hay số dư trong phép chia A cho 425 là 325.

b) Ta có $10^5 = 7.14285 + 5 \equiv 5 \pmod 7$; $10^6 = 5.10 \equiv 1 \pmod 7$;

$10^n - 4 = \underbrace{\overline{99...96}}_{n-1 \text{ số } 9} \equiv 0 \pmod 2$ và $\underbrace{\overline{99...96}}_{n-1 \text{ số } 9} \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow 10^n - 4 \equiv 0 \pmod 6$

$\Rightarrow 10^n \equiv 4 \pmod 6$ và $10^n = 6k + 4$ $(k, n \in N^*)$.

Do đó $10^{10^n} = 10^{6k+4} = \left(10^6\right)^k.10^4 \equiv 10^4 \pmod 7$

Vậy $B \equiv 10^4 + 10^4 + 10^4 + ... + 10^4 \equiv 10.10^4 \equiv 10^5 \equiv 5 \pmod 7$.

Bài 10. a) Ta tìm dư trong phép chia số đó cho 10.

Vì $4^2 \equiv 6 (\text{mod } 10)$ nên $4^{3^2} = 4^9 = (4^2)^4.4 \equiv 6.4 \equiv 4 (\text{mod } 10) \Rightarrow$ chữ số tận cùng là 4.

b) Ta tìm dư trong phép chia số đó cho 100. Theo ví dụ 3 chuyên đề 26 ta đã có $3^{1000} \equiv 01$ (mod 100) nghĩa là hai chữ số sau cùng của 3^{1000} là 01. Số 3^{1000} là bội số của 3 nên chữ số hàng trăm của nó khi chia cho 3 phải có số dư là 2 để chia tiếp thì 201 chia hết cho 3 (nếu số dư là 0 hay 1 thì 001; 101 đều không chia hết cho 3). Vậy số $3^{999} = 3^{1000} : 3$ có hai chữ sô tận cùng bằng $201 : 3 = 67$.

c) Ta tìm dư trong phép chia số đó cho 1000. Do $1000 = 125.8$ trước hết ta tìm số dư của 2^{512} cho 125. Từ hằng đẳng thức:

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ ta có nhận xét nếu $a \vdots 25$ thì $(a + b)^5 \equiv b^5 (\text{mod } 125)$.

Vì $2^{10} = 1024 \equiv -1 (\text{mod } 25)$ nên $2^{10} = 25k - 1\ (k \in N)$.

Từ nhận xét trên ta có $2^{50} = (2^{10})^5 = (25k - 1)^5 \equiv -1 (\text{mod } 125)$

Vì vậy $2^{512} = (2^{50})^{10}. 2^{12} \equiv (-1)^{10}. 2^{12} \equiv 2^{12} (\text{mod } 125)$.

Do $2^{12} = 2^{10} . 2^2 = 1024. 4 \equiv 24.4 \equiv 96 (\text{mod } 125)$. Vậy $2^{512} \equiv 96 (\text{mod } 125)$.

Hay $2^{512} = 125m + 96, m \in N$. Do $2^{512} \vdots 8 ; 96 \vdots 8$ nên $m \vdots 8 \Rightarrow m = 8n\ (n \in N)$.

$2^{512} = 125. 8n + 96 = 1000n + 96$. Vậy ba chữ số tận cùng của số 2^{512} là 096.

Bài 11. Để chứng tỏ $a \vdots m$ ta chứng minh $a \equiv 0 (\text{mod } m)$

a) $41 = 42 - 1 \equiv -1 (\text{mod } 7)$. Do đó $41^{2015} \equiv (-1)^{2015} \equiv -1 (\text{mod } 7)$

Hay $41^{2015} \equiv 6 (\text{mod } 7) \Rightarrow 41^{2015} - 6 \equiv 0 (\text{mod } 7)$

b) Ta có $2^4 = 16 \equiv 1 (\text{mod } 15) \Rightarrow 2^{4n} \equiv 1 (\text{mod } 15) \Rightarrow 2^{4n} - 1 \equiv 0 (\text{mod } 15)$

Do đó $2^{4n+1} - 2 = 2(2^{4n} - 1) \equiv 0 (\text{mod } 15)$.

c) Ta có $3^3 = 27 \equiv 1 (\text{mod } 13)$; $3^{76} = (3^3)^{25}.3 \equiv 3 (\text{mod } 13)$

Ta có $2^4 \equiv 3 (\text{mod } 13) \Rightarrow 2^6 \equiv 12 \equiv -1 (\text{mod } 13)$

$2^{76} = (2^6)^{12}. 2^4 \equiv 3 (\text{mod } 13)$

Do đó $3^{76} - 2^{76} \equiv 0 (\text{mod } 13)$ hay $3^{76} - 2^{76} \vdots 13$

d) $341 = 11 . 31$

* Ta có $2^5 = 32 \equiv -1 (\text{mod } 11)$; $20 = 22 - 2 \equiv -2 (\text{mod } 11)$

Do đó $20^{15} \equiv (-2)^{15} \equiv -(2^5)^3 \equiv 1 (\text{mod } 11)$

* $20^{15} = (2^5)^3. (5^3)^5 \equiv 1 (\text{mod } 31)$ do $2^5 \equiv 1 (\text{mod } 31)$ và $5^3 \equiv 1 (\text{mod } 31)$

Do đó $20^{15} \equiv 1 (\text{mod } 11.31)$ hay $20^{15} \equiv 1 (\text{mod } 341) \Rightarrow 20^{15} - 1 \vdots 341$

Bài 12. $1890 \equiv 0 (\text{mod } 7)$; $1945 \equiv -1 (\text{mod } 7)$; $2017 \equiv 1 (\text{mod } 7)$

$1890^{79} \equiv 0 (\text{mod } 7)$; $1945^{2015} \equiv -1 (\text{mod } 7)$; $2017^{2018} \equiv 1 (\text{mod } 7) \Rightarrow$ đpcm.

Bài 13. a)Ta có $5555 = 793.7 + 4 \equiv 4 (\text{mod } 7)$; $2222 = 318.7 - 4 \equiv -4 (\text{mod } 7)$

$\Rightarrow 5555^{2222} + 2222^{5555} \equiv 4^{2222} + (-4)^{5555} \equiv -4^{2222}(4^{3333} - 1) \pmod 7$

Do $4^{3333} - 1 = \left[\left(4^3\right)^{1111} - 1\right]$; $4^3 = 64 \equiv 1 \pmod 7$ nên $(4^3)^{1111} \equiv 1 \pmod 7$

Hay $4^{3333} - 1 \equiv 0 \pmod 7$. Do đó $5555^{2222} + 2222^{5555} \equiv 0 \pmod 7$ và

$15554^{1111} = (2.\ 7777)^{1111} = 2^{1111}.\ 7777^{1111} \equiv 0 \pmod 7$ $\Rightarrow$ đpcm.

b) Ta có 102 = 2.3.17. Ta có $(220 + 119 + 69)^{102} \equiv 0 \pmod{102}$

*$220 \equiv 0 \pmod 2$; $119 \equiv -1 \pmod 2$; $69 \equiv 1 \pmod 2$ $\Rightarrow$ $M \equiv 0 \pmod 2$

*$220 \equiv 1 \pmod 3$; $119 \equiv -1 \pmod 3$; $69 \equiv 0 \pmod 3$ $\Rightarrow$ $M \equiv 0 \pmod 3$

*$220 \equiv -1 \pmod{17}$; $119 \equiv 0 \pmod{17}$; $69 \equiv 1 \pmod{17}$ $\Rightarrow$ $M \equiv 0 \pmod{17}$

(Để ý 119^{69} và 69^{220} là các số lẻ) ; $\Rightarrow M \equiv 0 \pmod{2.3.17}$. Hay $M \vdots 102$

Bài 14. Đặt $A = 5^{2n-1}.\ 2^{n+1} + 2^{2n-1}.\ 3^{n+1}$. Ta có $A \vdots 2$, $\forall n \in N^*$;

Ta có $A = 2^n (5^{2n-1}.\ 2 + 2^{n-1}.\ 3^{n+1}) = 2^n (25^{n-1}.\ 10 + 6^{n-1}.\ 9)$

Do $25 \equiv 6 \pmod{19} \Rightarrow A \equiv 2^n (6^{n-1}.10 + 6^{n-1}.\ 9) \equiv 2^n.6^{n-1}.\ 19 \equiv 0 \pmod{19}$

Hay $A \vdots 19$. Mà $(2 ; 19) = 1$ $\Rightarrow$ $A \vdots 19.\ 2$ $\Rightarrow$ $A \vdots 38$.

Bài 15. Ta có $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_1.10 + a_0$.

a) Ta có $10 \equiv 1 \pmod 9$ do đó $a_i.\ 10^i \equiv a_i \pmod 9$, $i = 1; 2; 3; \ldots; n$

Do đó $a \equiv (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) \pmod 9$. Vậy

$a \vdots 9 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod 9 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \vdots 9$.

b) Ta có $10^2 = 100 \equiv 0 \pmod{25} \Rightarrow a_i.\ 10^i \equiv 0 \pmod{25}$, $i = 2; 3; \ldots; n$.

$\Rightarrow a \equiv (a_1.10 + a_0) \pmod{25}$.

Vậy $a \vdots 25 \Leftrightarrow a_1.\ 10 + a_0 \equiv 0 \pmod{25} \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 25$.

c) Do $10 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow a_i.\ 10^i \equiv a_i .(-1)^i \pmod{11}$

$a \equiv (a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots) \pmod{11}$

Do đó $a \vdots 11 \Leftrightarrow (a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots) \equiv 0 \pmod{11}$

Tức là hiệu của tổng các chữ số ở vị trí lẻ và tổng các chữ số ở vị trí chẵn bằng 0.

d) Ta có $10^3 = 1000 \equiv 0 \pmod 8 \Rightarrow a_i.\ 10^i \equiv 0 \pmod 8$, $i = 3; 4; \ldots; n$.

$\Rightarrow a \equiv (a_2.\ 10^2 + a_1.10 + a_0) \pmod 8$.

Vậy $a \vdots 8 \Leftrightarrow a_2.\ 10^2 + a_1.\ 10 + a_0 \equiv 0 \pmod 8 \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} \vdots 8$.

Bài 16. Theo định lý Fermat bé, do 11 là số nguyên tố nên ta có

$2^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{10n} \equiv 1 \pmod{11}$

$\Rightarrow 2^{10n+1} = 2.\ 2^{10n} \equiv 2 \pmod{22} \Rightarrow 2^{10n+1} = 22k + 2\ (k \in N)$

Do 23 là số nguyên tố ta cũng có $2^{22} \equiv 1 \pmod{23} \Rightarrow 2^{2^{10n+1}} = 2^{22k+2} = 4.2^{22k} \equiv 4 \pmod{23} \Rightarrow$ $2^{2^{10n+1}} + 19 \equiv 4 + 19 \equiv 0 \pmod{23}$ Tức là $A \vdots 23$. Mà $A > 23, \forall n \geq 1$ nên A là hợp số.

Bài 17. Theo định lý Wilson : Với mọi số nguyên tố p thì $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Do 13 nguyên tố nên $12! \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow (12!)^{13} \equiv (-1)^{13} \equiv -1 \pmod{13}$.

Ta có $2016 = 13.155 + 1 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 2016^{2015} \equiv 1 \pmod{13}$.

Do đó B = $(12!)^{13} + 2016^{2015} \equiv 0 \pmod{13}$. Hay $B \vdots 13$.

Bài 18. a) Theo Định lý Fermat bé , do 7 là số nguyên tố nên $2^6 \equiv 1 \pmod{7}$.

Ta có $4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 4^n \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2.4^n \equiv 2 \pmod{6}$. Nghĩa là

$2^{2n+1} = 2(2^2)^n = 2.\,4^n \equiv 2 \pmod{6} \Rightarrow 2^{2n+1} = 6k + 2$, $(k \in N)$

Mặt khác $2^{3n} = (2^3)^n = 8^n \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 3.\,2^{3n} \equiv 3 \pmod{7}$.

Do đó $2^{2^{2n+1}} + 3.2^{3n} \equiv 2^{6k+2} + 3 \equiv 2^2.\,(2^6)^k + 3 \equiv 2^2.1 + 3 \equiv 0 \pmod{7}$.

b) Do 11 là số nguyên tố nên $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$

Ta có $16 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 16^n \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 2.16^n \equiv 2 \pmod{10}$. Nghĩa là $2^{4n+1} = 2(2^4)^n = 2.16^n \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n+1} = 10k + 2$, $(k \in N)$

Mặt khác $12 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 12^{5n+1} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 2.\,12^{5n+1} \equiv 2 \pmod{11}$;

Do $10^2 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 10^{2n} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 5.10^{2n} \equiv 5 \pmod{11}$.

Vì thế $2^{2^{4n+1}} + 2.12^{5n+1} + 5.10^{2n} \equiv 2^{10k+2} + 2 + 5 \equiv 2^2 + 7 \equiv 0 \pmod{11}$.

Bài 19. a) Ta có 72 = 8.9 và (8; 9) = 1.

*63 $\equiv 0 \pmod{9}$; khi n = 2 thì $3^n \equiv 0 \pmod{9}$ do đó $3^n + 63 \equiv 0 \pmod{9}$.

*Mặt khác, với n = 2k $(k \in N^*)$ thì $3^n - 1 = 3^{2k} - 1 = 9^k - 1 \equiv 1^k - 1$

$\equiv 0 \pmod{8}$ do đó $3^n + 63 = 3^n - 1 + 64 \equiv 0 \pmod{8}$.

Vậy với n = 2k $(k \in N^*)$ thì $3^n + 63 \vdots 72$.

b) Ta có 323 = 17 . 19 và (17; 19) = 1.

*A = $(20^n - 1) + (16^n - 3^n) = P + Q$.

Ta có $20^n \equiv 1 \pmod{19} \Rightarrow P \equiv 0 \pmod{19}$.

Nếu n = 2k $(k \in N^*)$ thì $Q = 16^{2k} - 3^{2k} \equiv (-3)^{2k} - 3^{2k} \equiv 3^{2k} - 3^{2k} \equiv 0 \pmod{19} \Rightarrow A = P + Q \equiv 0$ (mod 19)

* A = $(20^n - 3^n) + (16^n - 1) = P' + Q'$

$20^n \equiv 3^n \pmod{17}$. Do đó $P' = 20^n - 3^n \equiv 0 \pmod{17}$.

Nếu n = 2k $(k \in N^*)$ thì $Q' = 16^{2k} - 1 = (-1)^{2k} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{17}$

$\Rightarrow A = P' + Q' \equiv 0 \pmod{17}$. Do (17 ; 19) = 1 nên $A \equiv 0$ (mod 17. 19).

Vậy với $n = 2k$ $(k \in N^*)$ thì $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1 \;\vdots\; 323$.

Bài 20. Theo định lý Fermat bé ta có $2^p \equiv 2 \pmod p$ nên nếu $2^p \equiv -1 \pmod p$ thì ta có $3 \equiv 0 \pmod p \Rightarrow p = 3$.

Mặt khác khi $p = 3$ thì $2^3 + 1 = 9 \equiv 0 \pmod 3$. Vậy $p = 3$ là số cần tìm.

Bài 21. Với p = 3 thì $p^2 + 20 = 29$ là số nguyên tố.

Với $p \neq 3$ thì $p^2 \equiv 1 \pmod 3$ nên $p^2 + 20 \equiv 21 \equiv 0 \pmod 3$.

Vậy $p^2 + 20 \;\vdots\; 3$ mặt khác $p^2 + 20 > 3$ nên $p^2 + 20$ là hợp số . Vậy chỉ có 1 số nguyên tố cần tìm là p = 3.

Bài 22. Với $a, b \in N^*$. Nếu $ab \;\vdots\; p$ thì số $ab^p - ba^p \;\vdots\; p$

Nếu $ab \;\not\vdots\; p$ thì $(a, p) = (b, p) = 1$. Do đó $a^{p-1} \equiv b^{p-1} \equiv 1 \pmod p \Rightarrow$

$a^{p-1} - b^{p-1} \equiv 0 \pmod p \Rightarrow ab(a^{p-1} - b^{p-1}) \equiv 0 \pmod p$

$\Rightarrow ab^p - ba^p \equiv 0 \pmod p$ hay $ab^p - ba^p \;\vdots\; p$, $\forall a, b \in N^*$.

Bài 23. a) Giả sử $a, b, c \in Z$ mà $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 7 \pmod 8$.

Ta có $a \equiv 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; 4 \pmod 8 \Rightarrow a^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod 8$

$\Rightarrow b^2 + c^2 \equiv 7; 6; 3 \pmod 8$. Điều này vô lý vì $b^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod 8$ và $c^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod 8$
$\Rightarrow b^2 + c^2 \equiv 0; 1; 2; 4; 5 \pmod 8$.

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 \not\equiv 7 \pmod 8$.

b) Áp dụng câu a) ta có với $x, y, z \in Z$

$4x^2 + y^2 + 9z^2 = (2x)^2 + y^2 + (3z)^2 \not\equiv 7 \pmod 8$.

Mà $2015 = 8.251 + 7 \equiv 7 \pmod 8$

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Bài 24. Ta có $2011 \equiv 11 \pmod{100}$; $11^2 \equiv 21 \pmod{100}$; $11^3 \equiv 31 \pmod{100}$;

$11^5 \equiv 21.31 \equiv 51 \pmod{100} \Rightarrow 11^{10} \equiv 51^2 \equiv 1 \pmod{100}$.

Ta có $2010^{2009} \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow 2010^{2009} = 10k$ $(k \in Z)$

$\Rightarrow 2011^{2010^{2009}} = 2011^{10k} \equiv 11^{10k} \equiv (11^{10})^k \equiv 1 \pmod{100}$. Do đó hai chữ số tận cùng là số 01.

Bài 25. Bài toán có nhiều cách giải. Sau đây là cách giải theo đồng dư thức:

* Ta có $\forall n \in N^*$ thì $n^5 - n \equiv 0 \pmod{30}$ (ví dụ 8 chuyên đề 26 đã chứng minh)

$A = (a^{2012} - a^{2008}) + (b^{2012} - b^{2008}) + (c^{2012} - c^{2008})$

$A = a^{2007}(a^5 - a) + b^{2007}(b^5 - b) + c^{2007}(c^5 - c)$

Ta có $a^5 - a \equiv 0 \pmod{30} \Rightarrow a^{2007}(a^5 - a) \equiv 0 \pmod{30}$

Tương tự $b^{2007}(b^5 - b) \equiv 0 \pmod{30}$; $c^{2007}(c^5 - c) \equiv 0 \pmod{30}$

Vậy $A \equiv 0 \pmod{30}$. Hay $A \;\vdots\; 30$.

Bài 26. Giả sử tồn tại bộ ba số nguyên (x; y ; z) thỏa mãn $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$

$\Leftrightarrow\ x^4 + y^4 + z^4 = 8z^4 + 5$ (1).

Xét với một số nguyên a bất kỳ thì nếu a chẵn thì $a = 2k\ (k \in Z)$

$\Rightarrow\ a^4 = 16k^4 \equiv 0 \pmod 8$; nếu a lẻ thì $a^4 = (2k+1)^4 \equiv 1 \pmod 8$

Do đó $x^4 + y^4 + z^4 \equiv 0 ; 1 ; 2 ; 3 \pmod 8$. Trong khi đó $8z^4 + 5 \equiv 5 \pmod 8$ mâu thuẫn với (1).
Vậy không tồn tại các bộ ba số nguyên (x; y; z) thỏa mãn đẳng thức $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$.

Bài 27. Ta có $41^2 = (40+1)^2 = 40^2 + 80 + 1 \equiv 81 \pmod{100}$

$41^4 \equiv 81^2 \equiv 6561 \equiv 61 \pmod{100} \Rightarrow 41^5 \equiv 61.41 \equiv 1 \pmod{100}$

$\Rightarrow 41^{106} \equiv 41.(41^5)^{21} \equiv 41 \pmod{100}$

Mặt khác $57^4 = 10556001 \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow 57^{2012} = (57^4)^{503} \equiv 1 \pmod{100}$

Vì thế $A \equiv 41 + 1 \pmod{100}$.

Do đó hai chữ số cuối cùng của số $A = 41^{106} + 57^{2012}$ là 42

Bài 28. Do $a + 20 \,\vdots\, 21 \Rightarrow a \equiv 1 \pmod 3$ và $a \equiv 1 \pmod 7$

$b + 13 \,\vdots\, 21 \Rightarrow b \equiv 2 \pmod 3$ và $b \equiv 2 \pmod 7$

Suy ra $A = 4^a + 9^b + a + b \equiv 1 + 0 + 1 + 2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow A \equiv 10 \pmod 3$

Xét $a = 3k + 1 ; b = 3q + 2$ với $k, q \in N$ ta có $4^a = 4^{3k+1} = 4.64^k \equiv 4 \pmod 7$

$9^b = 9^{3q+2} \equiv 2^{3q+2} \equiv 4.8^q \equiv 4 \pmod 7$.

Do đó $A = 4^a + 9^b + a + b \equiv 4 + 4 + 1 + 1 \equiv 10 \pmod 7 \Rightarrow A \equiv 10 \pmod 7$

$A \equiv 10 \pmod 3$ và $A \equiv 10 \pmod 7$ mà $(3; 7) = 1$ nên $A \equiv 10 \pmod{3.7}$

Hay $A \equiv 10 \pmod{21}$. Vậy số dư trong phép chia A cho 21 là 10.

Bài 29. $2^3 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow (2^3)^n \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 2^{3n+1} = 2.(2^3)^n \equiv 2 \pmod 7$.

và $2^{3n-1} = 2^2.(2^3)^{n-1} \equiv 4 \pmod 7$.

Nên $A \equiv 2 + 4 + 1 \equiv 0 \pmod 7$ nghĩa là $A \,\vdots\, 7$. Mà với $n \in N^*$ thì $A > 7$.

Vậy A là hợp số.

Bài 30. $\forall n \in N^*$ ta có $2012^{4n} \equiv 0 \pmod 2$; $2013^{4n} \equiv 1 \pmod 2$;

$2014^{4n} \equiv 0 \pmod 2$; $2015^{4n} \equiv 1 \pmod 2$. Do đó $A \equiv 2 \equiv 0 \pmod 2$.

* Ta lại có $2012 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow 2012^{4n} \equiv 0 \pmod 4$;

$2014 \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow 2014^2 \equiv 2^2 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow 2014^{4n} \equiv (2014^2)^{2n} \equiv 0 \pmod 4$

Do $2013 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 2013^{4n} \equiv 1 \pmod 4$;

Do $2015 \equiv -1 \pmod 4 \Rightarrow 2015^{4n} = (-1)^{4n} \equiv 1 \pmod 4$

Vậy $A \equiv 2 \pmod 4$ nghĩa là A chia cho 4 dư 2. Ta có $A \,\vdots\, 2$; $A \not\vdots\, 2^2$; 2 là số nguyên tố. Vậy A không là số chính phương $\forall n \in N^*$.

Bài 31.

Ta có

$19^{2003} \equiv (2.9+1)^{2003} \equiv 1(\bmod 2003)(1); 7^{2003} \equiv (9-2)^{2003} \Rightarrow 7^{2003} \equiv (-2)^{2003}(\bmod 9)$ Mặt khác $(-2)^{2003} = (-2).2^{2002} = (-2).(2^3)^{667}.2 = (-4).(2^3)^{667}$

Do

$2^3 \equiv 1(\bmod 9) \Rightarrow (2^3)^{667} \equiv -1(\bmod 9) \Rightarrow (-4)(2^3)^{667} \equiv 4(\bmod 9) \Rightarrow 7^{2003} \equiv 4(\bmod 9)(2)$ Từ (1) và (2) $\Rightarrow 19^{2003} + 7^{2003} + 9^{2003} \equiv 5(\bmod 9)(3)$

Vì lập phương của một số tự nhiên khi chia cho 9 chỉ có thể dư là $0,1,-1$ nên mọi số nguyên x, y, z ta có : $x^{15} + y^{15} + z^{15} = (x^5)^3 + (y^5)^3 + (z^5)^3 \equiv (-3);(-1);0;1;3(\bmod 9)(4)$

Từ (3) và (4) suy ra phương trình không có nghiệm nguyên.

Bài 32.

Ta có $z(z+3) = z^2 + 3z$

Mặt khác ta luôn có $z^2 \equiv 0(\bmod 3)$ hoặc $z^2 \equiv 1(\bmod 3)$

Do đó với mọi z nguyên ta có :

$z(z+3) \equiv c(\bmod 3); c \in \{0;1\}(1)$

Chứng min tương tự với y,x

$\Rightarrow x(x+3) + y(y+3) \equiv d(\bmod 3); d \in \{0;1;2\}(2)$

Lại để ý rằng : $x(x+3) + y(y+3) = (x^2 + y^2)(\bmod 3)(3)$

Chú ý rằng nếu p là số nguyên tố khác 3 thì $p^2 \equiv 1(\bmod 3)$. Do vậy x, y đồng thời là các số nguyên tố khác 3 thì :

$x^2 + y^2 \equiv 2(\bmod 3)(4)$

Kết hợp (1), (2), (3), (4) suy ra ít nhất một trong hai số x,y phải là 3. Do vai trò đối xứng của x,y chọn $x = 3$

Khi $x = 3$ ta có :

$18 + y^2 + 3y = z^2 + 3z \Leftrightarrow 18 = z^2 + 3z - y^2 - 3y \Leftrightarrow 18 = (z-y)(x+y+3)(5)$

Từ $z > 0, y > 0 \Rightarrow z + y + z > 3 \Rightarrow z - y > 0$.

Vì thế kết hợp với $(z+y+3) - (z-y) = 2y + 3 \geq 7$ (do y nguyên tốn lớn hơn 2). Nên từ (5) suy ra :

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} z+y+3=18 \\ z-y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} z+y+3=9 \\ z-y=2 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=7 \\ z=8 \end{cases} \\ \begin{cases} y=2 \\ z=4 \end{cases}\end{array}\right.$$

Do tính đối xứng nên phương trình có 4 nghiệm nguyên dương :

$(3;7;8);(7;3;8);(3;2;4);(2;3;4)$

Bài 33. Ta phải tìm số tự nhiên r sao cho

$$0 = r \equiv (2013^{2016} + 2014^{2016} - 2015^{2016})^{10} \pmod{106}$$

Ta có $2013 = 106.19 - 1 \Rightarrow 2013 \equiv -1 \pmod{106} \Rightarrow 2013^{2016} \equiv 1 \pmod{106}$

$2014 = 106.19 \Rightarrow 2014 \equiv 0 \pmod{106} \Rightarrow 2014^{2016} \equiv 0 \pmod{106}$

$2015 = 106.19 + 1 \Rightarrow 2015 \equiv 1 \pmod{106} \Rightarrow 2015^{2016} \equiv 1 \pmod{106}$

Do đó $(2013^{2016} + 2014^{2016} - 2015^{2016})^{20} \equiv 0 \pmod{106}$.

Bài 34. Do 5 là số nguyên tố nên theo Định lý Fermat bé ta có: với a = 1; 2; 3; 4 ta có $a^5 \equiv a \pmod 5 \Leftrightarrow a^4 \equiv 1 \pmod 5 \Leftrightarrow a^{4k} \equiv 1 \pmod 5$.

Do đó $1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k} \equiv 1 + 1 + 1 + 1 \equiv 4 \pmod 5$.

Chứng tỏ $1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k} \not\vdots\ 5$.

Bài 35. * Nếu p = 2 thì $2^n - n \vdots 2$, $\forall n = 2k \ (k \in N)$.

* Nếu $p \neq 2$ do $(2 ; p) = 1$ nên theo định lý Fermat bé ta có :

$2^{p-1} \equiv 1 \pmod p \Rightarrow 2^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod p \Rightarrow 2^{(p-1)^{2k}} - 1 \equiv 0 \pmod p$.

Hay là $2^{(p-1)^{2k}} - 1 \vdots p \quad (k \in N ; k \geq 2)$.

Mặt khác $(p-1)^{2k} \equiv (-1)^{2k} \equiv 1 \pmod p$

$$\Rightarrow 2^{(p-1)^{2k}} - (p-1)^{2k} = \underbrace{\left[2^{(p-1)^{2k}} - 1\right]}_{\vdots p} - \underbrace{\left[(p-1)^{2k} - 1\right]}_{\vdots p} \vdots p$$

Vậy tồn tại vô số số tự nhiên n có dạng $n = (p-1)^{2k}$, ($\forall k \in N ; k \geq 2$) sao cho $2^n - n \vdots p$.

Bài 36. $A = 26^{6^{2001}}$. Ta có 1000 = 8.125

Xét số dư của A khi chia cho 125, ta có:

$6^{2001} \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 6^{2001} = 5m + 1 \quad (m \in Z^+)$

$\Rightarrow A = 26^{6^{2001}} = 26^{5m+1} = 62.(26^5)^m$

Mặt khác $26^5 \equiv 1 \pmod{125} \Rightarrow A \equiv 26 \pmod{125}$

$\Rightarrow A = 125k + 26 \quad (k \in Z^+)$

Xét số dư khi chia A cho 8, dễ thấy

$A \vdots 8 \Rightarrow 125k + 26 \vdots 8 \Rightarrow 5k + 2 \vdots 8 \Rightarrow k = 8m + 6 \quad (m \in Z^+)$
$\Rightarrow A = 125(8m + 6) + 26 = 1000m + 776 \equiv 776 \pmod{1000}$

Vậy ba chữ số tận cùng của A là 776.

Bài 37. Đặt $n = 4m + r \quad (m,\ r \in N,\ 0 \le r \le 3)$. Xét các trường hợp của r.

* $r = 0 \Rightarrow n = 4m$

Khi đó

$3^n = 81^m \equiv 1 \pmod{10}$
$\Rightarrow 3^n + 4n + 1 \vdots 10 \Leftrightarrow 16m + 2 \vdots 10 \Leftrightarrow 8m + 1 \vdots 5 \Leftrightarrow 3m + 1 \vdots 5 \Leftrightarrow m = 5k + 3 \quad (k \in N)$

Ta được $n = 20k + 12 \quad (k \in N)$

* $r = 1 \Rightarrow n = 4m + 1$

Khi đó

$3^n = 3.81^m \equiv 3 \pmod{10}$
$\Rightarrow 3^n + 4n + 1 \vdots 10 \Leftrightarrow 16m + 8 \vdots 10 \Leftrightarrow 8m + 4 \vdots 5 \Leftrightarrow 3m + 4 \vdots 5 \Leftrightarrow m = 5k + 2 \quad (k \in N)$

Ta được $n = 20k + 9 \quad (k \in N)$

Tương tự xét các trường hợp còn lại.

Bài 38. Đặt $A = n^3 + 4n^2 - 20n - 48$

Ta có $A = (n - 4)(n + 2)(n + 6)$

Vì $A \vdots 5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n \equiv 3 \pmod 5 \\ n \equiv 4 \pmod 5 \end{array}\right.$

* $n \equiv 3 \pmod 5$

Khi đó $n - 4 \not\vdots\, 5$ và $n + 6 \not\vdots\, 5$ nên $n + 2 \vdots 125 \Rightarrow n \ge 123$

* $n \equiv 4 \pmod 5$

Khi đó $n+2 \not\vdots 5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n-4 \vdots 25 \\ n+6 \vdots 25 \end{array}\right. \Rightarrow n \geq 19$

Vậy n = 19 thỏa mãn điều kiện đề bài.

Bài 39.

Đặt $A=\left(a^{4}-1\right)\left(a^{4}+15a^{2}+1\right)$

Áp dụng định lí Fermat ta có:

$a^{4} \equiv 1(\bmod 5)$ và $a^{6} \equiv 1(\bmod 7)$ do a không chia hết cho 5 và 7.

Vì $a^{4} \equiv 1(\bmod 5) \Rightarrow a^{4}-1 \vdots 5 \Rightarrow A \vdots 5$

Lại có: $A=a^{8}+15a^{6}-15a^{2}-1 \equiv a^{2}+15-15a^{2}-1 \equiv 0(\bmod 7) \Rightarrow A \vdots 7$

Vậy $A \vdots 5.7=35$ (vì (5, 7) = 1)

Bài 40. Giả sử $2^{m}+3^{n} \vdots 23 \Rightarrow 8^{n}\left(2^{m}+3^{n}\right) \vdots 23 \Rightarrow 2^{m+3n}+24^{n}$

Vì $24 \equiv 1(\bmod 23) \Rightarrow 24^{n} \equiv 1(\bmod 23)$

Do đó $2^{m+3n}+1 \vdots 23$

Ta chứng minh $2^{u}+1 \not\vdots 23 \quad \forall u \in N$

Ta có $2^{11} \equiv 1(\bmod 23)$. Lần lượt xét các số dư khi chia u cho 11 ta được
$2^{u}+1 \not\vdots 23 \quad \forall u \in N$.

Vậy $2^{m}+3^{n} \not\vdots 23 \quad \forall m, n \in N$.

Bài 41. Vì 2017 không chia hết cho 2 và không chia hết cho 5 còn $10^{5}=2^{5}.5^{5}$ nên $\left(2017,10^{5}\right)=1$.

Áp dụng định lí Euler ta có: $2017^{\varphi\left(10^{5}\right)} \equiv 1\left(\bmod 10^{5}\right)$

Mà $\varphi\left(10^{5}\right)=10^{5}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=4.10^{4}$

Bài 42. Phương trình đã cho: $x^{n}+(x+2)^{n}+(2-x)^{n}=0$

Nhận xét: Để phương trình có nghiệm thì n lẻ.

* $n=1 \Rightarrow x=-4 \in Q$

* n > 1: Giả sử phương trình có nghiệm hữu tỉ $x=\frac{p}{q}\left(p,q\in Z,\ q>0,\ \left(p,q\right)=1\right)$.

Thay vào phương trình ta có:

$$p^n+\left(p+2q\right)^n+\left(p-2q\right)^n=0 \quad (1)$$

Ta có:

$\left(p+2q\right)^n+\left(2q-p\right)^n \vdots \left(p+2q\right)+\left(2q-p\right)=4q$

$\Rightarrow p^n \vdots 4q \Rightarrow \begin{cases} q=1 \\ p=2m \end{cases}$

Thay vào (1) ta có: $m^n+\left(m+1\right)^n+\left(1-m\right)^n=0 \quad (2)$

Vì $\left(m+1\right)^n+\left(1-m\right)^n \vdots \left(m+1\right)+\left(1-m\right)=2 \Rightarrow m^n \vdots 2 \Rightarrow m$ chẵn.

Vì n lẻ nên $\left(m+1\right)^n\equiv m+1\left(\bmod 4\right),\ \left(1-m\right)^n\equiv 1-m\left(\bmod 4\right)$

Suy ra: $m^n\equiv 2\left(\bmod 4\right)$ Vô lí

Vậy $n=1$.

Bài 43. Bởi vì $2^3=8\equiv -1\left(\bmod 9\right)\Rightarrow \left(2^9\right)^{1945}\equiv -1\left(\bmod 9\right)$

$\Rightarrow \left(2^9\right)^{1945}$ chia 9 dư 8

$\Rightarrow a,b,c$ chia 9 dư 8

Ta có: $2^{13}=8192<10^4\Rightarrow 2^{130}<10^{40}\Rightarrow 2^{130.134}<10^{40.134}$

Ta cũng có: $\left(2^{13}\right)^6<\left(10^4\right)^6=10^{24}$ và $2^7<10^3$

$\Rightarrow \left(2^9\right)^{1945}=2^{17420+13.6+7}<10^{40.134+24+7}=10^{5391}$

$\Rightarrow$ số $\left(2^9\right)^{1945}$ không có quá 5391 chữ số.

$\Rightarrow a\le 5391.9=48519$

$\Rightarrow b\le 3+9+9+9+9=39\Rightarrow c\le 3+9=12$

$c\le 12$; mà c chia 9 dư 8 và $c>0$ nên suy ra $c=8$.