XÁC SUẤT THỐNG KÊ

Tôn Thất Tú

Đà Nẵng, 2019

Chương 6: Kiểm định giả thuyết thống kê

1. Các khái niệm

1.1 Giả thuyết thống kê

- *Giả thuyết thống kê* là các khẳng định về phân phối của tổng thể nghiên cứu. Cụ thể, đó là các khẳng định về giá trị chưa biết của tham số đối với phân phối đã biết, các khẳng định về dạng phân phối chưa biết hay về mối quan hệ giữa các biến ngẫu nhiên.

Ví dụ 1

+ Gọi μ là tuổi thọ trung bình của người Việt Nam. Giả thuyết thống kê có thể là: $\mu = 60$ (tuổi) hoặc $\mu > 60$, hoặc $\mu \neq 60$, ...

+ Gọi p là tỉ lệ phế phẩm của nhà máy A. Giả thuyết thống kê có thể là: $p < 0,1$ hoặc $p = 0,1$ hoặc $p \neq 0,1$; ...

Khi nghiên cứu ta có thể đưa ra nhiều giả thuyết khác nhau. Trong chương này, chúng ta chỉ khảo sát bài toán kiểm định với **hai giả thuyết** mà thôi.

- *Bài toán kiểm định giả thuyết* là bài toán gồm một cặp giả thuyết thống kê mâu thuẫn nhau được đưa ra xem xét để chọn một giả thuyết đúng. Một trong hai giả thuyết đó được giả định ban đầu là giả thuyết đúng, gọi là *giả thuyết gốc* và được kí hiệu là H_0. Giả thuyết còn lại gọi là *đối thuyết*, được kí hiệu là H_1.

$$\begin{cases} H_0: \text{ giả thuyết gốc} \\ H_1: \text{ đối thuyết} \end{cases}$$

- Lưu ý: Với mỗi giả thuyết gốc H_0 ta có thể xây dựng nhiều đối thuyết H_1 khác nhau.
- *Kiểm định giả thuyết* là phương pháp sử dụng mẫu dữ liệu thu được để đưa ra quyết định bác bỏ H_0 hay chấp nhận H_0.

1.2 Nguyên lý xác suất nhỏ và xác suất lớn

- *Nguyên lí xác suất nhỏ*: Một biến cố có xác suất rất nhỏ gần bằng 0 thì biến cố đó hầu như không xảy ra khi thực hiện phép thử một lần.
- *Nguyên lí xác suất lớn*: Một biến cố có xác suất gần bằng 1 thì biến cố đó hầu như sẽ xảy ra khi thực hiện phép thử.

1.3 Thống kê kiểm định

Gọi $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ là một mẫu ngẫu nhiên tùy ý. Ta xây dựng một thống kê $T = T(X_1, X_2, ..., X_n)$ và sẽ sử dụng nó để đưa ra quyết định bác bỏ hay chấp nhận giả thuyết H_0. Lúc này, T được gọi là *thống kê kiểm định* (hay *tiêu chuẩn kiểm định*).

Với $\alpha \in (0, 1)$ cho trước, ta có thể xây dựng miền W_α sao cho:

$$P(T \in W_\alpha | H_0 \text{ đúng}) = \alpha$$

Lúc đó, miền W_α được gọi là *miền bác bỏ với mức ý nghĩa* α.

1.3 Các bước tiến hành

Khi cho trước mức ý nghĩa α ta có thể sử dụng các bước gợi ý sau đây để tiến hành giải bài toán kiểm định:
- Xác định giả thuyết H_0, H_1 và phát biểu bài toán.
- Chọn thống kê kiểm định T và tính giá trị của nó trên mẫu dữ liệu thu được (kí hiệu là T_s).
- Xác định miền bác bỏ W_α với mức ý nghĩa α cho trước.
- Kết luận: Nếu $T_s \in W_\alpha$ thì bác bỏ giả thuyết H_0. Ngược lại, ta chưa có cơ sở bác bỏ H_0 nên tạm thời chấp nhận giả thuyết này.

1.4 Sai lầm khi kiểm định

- Sai lầm loại I: Sai lầm mắc phải khi bác bỏ H_0 nhưng trong khi thực tế là H_0 là giả thuyết đúng. Kí hiệu: α.
- Sai lầm loại II: Sai lầm mắc phải khi chấp nhận H_0 trong khi thực tế là H_0 là giả thuyết sai. Kí hiệu: β.

Bảng dưới đây tổng hợp lại các trường hợp:

Quyết định \ Thực tế	H_0 đúng	H_0 sai
Bác bỏ H_0	sai lầm loại I	quyết định đúng
Chấp nhận H_0	quyết định đúng	sai lầm loại II

Như vậy,

$$\alpha = P(\text{bác bỏ } H_0 \mid H_0 \text{ đúng}), \quad \beta = P(\text{chấp nhận } H_0 \mid H_0 \text{ sai})$$

2. Kiểm định giả thuyết về kì vọng của phân phối chuẩn

2.1 Khi phương sai đã biết

Cho biến ngẫu nhiên X của một tổng thể có phân phối chuẩn $N(\mu;\sigma^2)$ với kì vọng μ chưa biết và phương sai σ^2 đã biết.

• Xét bài toán kiểm định giả thuyết:

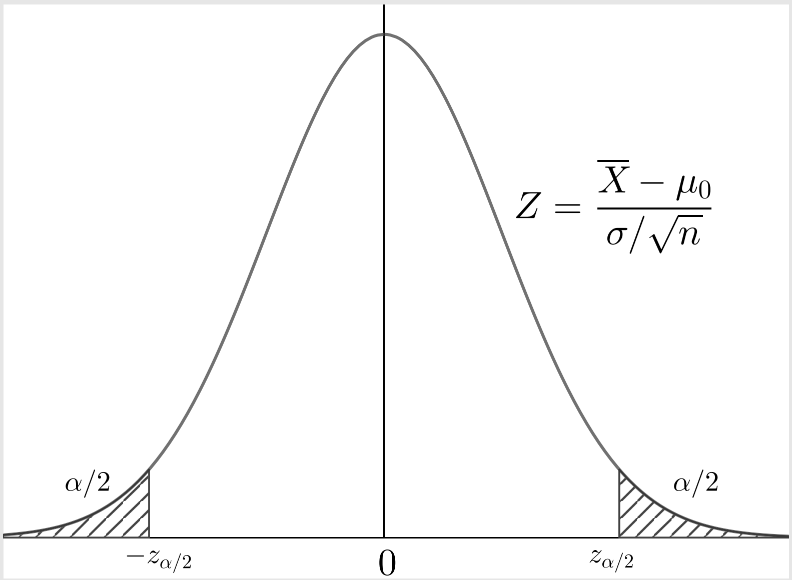
$$\begin{cases} H_0\colon \mu = \mu_0, \\ H_1\colon \mu \neq \mu_0, \end{cases} \qquad (I)$$

trong đó μ_0 là một số thực đã cho.

- Giả sử rằng H_0 đúng, thì

$$Z = \frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0,1)$$

- Miền bác bỏ với mức ý nghĩa α: $W_\alpha = (-\infty; -z_{\alpha/2}] \cup [z_{\alpha/2}; +\infty)$.



• Đối với bài toán kiểm định giả thuyết:

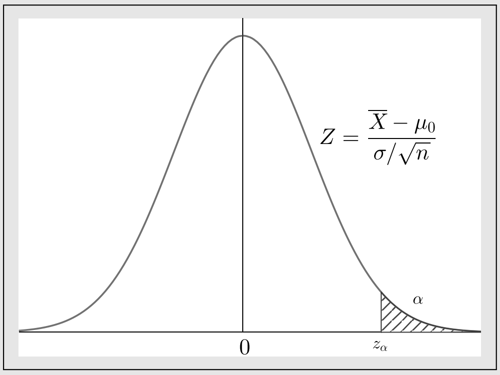
$$\begin{cases} H_0\colon \mu = \mu_0 \\ H_1\colon \mu > \mu_0. \end{cases} \qquad (II)$$

Miền bác bỏ H_0 là $W_\alpha = [z_\alpha; +\infty)$

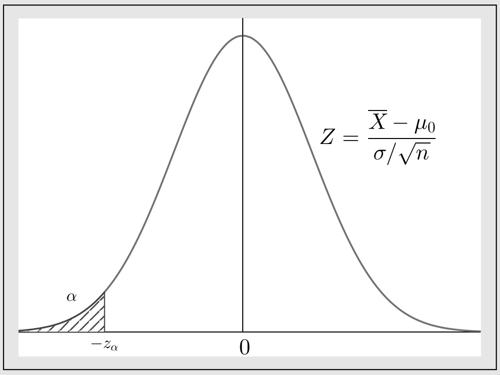
• Đối với bài toán kiểm định giả thuyết:

$$\begin{cases} H_0\colon \mu = \mu_0 \\ H_1\colon \mu < \mu_0. \end{cases} \qquad (III)$$

Miền bác bỏ H_0 là $W_\alpha = (-\infty; -z_\alpha]$



Bài toán II



Bài toán III

Ví dụ 2

Nguồn cấp điện cho máy tính đạt tiêu chuẩn là 19 volt. Đo nguồn cấp điện của một mẫu 25 sạc pin được chọn ngẫu nhiên của hãng sản xuất A người ta tính được $\overline{x} = 19,25$ volt. Giả sử nguồn cấp điện này có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn $\sigma = 0,5$ volt. Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$ hãy kiểm định giả thuyết gốc H_0: $\mu = 19$ (volt) với đối thuyết H_1: $\mu > 19$ (volt), trong đó μ là nguồn cấp điện trung bình của loại sạc pin trên.
Cho biết $z_{0.1} = 1.282; z_{0.05} = 1.645; z_{0.025} = 1.96; z_{0.02} = 2.054, z_{0.01} = 2.326$

Giải. Bài toán kiểm định:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 19 \\ H_1 : \mu > 19 \end{cases}$$

Các số đặc trưng mẫu: $n = 25; \bar{x} = 19,25$.
Giá trị của thống kê kiểm định: $z = \dfrac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} = \dfrac{(19,25 - 19)\sqrt{25}}{0,5} = 2,5$.
Mức ý nghĩa: $\alpha = 0,05 \Rightarrow z_\alpha = z_{0,05} = 1,645$.
Miền bác bỏ: $W_\alpha = [1,645; +\infty)$.
Vì $z \in W_\alpha$ nên ta bác bỏ giả thuyết H_0 và chấp nhận H_1.

Ví dụ 3

Trong năm trước khối lượng trung bình của bò xuất chuồng ở một trang trại là 380kg. Năm nay người ta áp dụng thử một chế độ ăn mới với hy vọng là bò sẽ tăng trọng nhanh hơn. Sau thời gian áp dụng thử, người ta chọn ngẫu nhiên 50 con bò xuất chuồng đem cân và tính được khối lượng trung bình của chúng là $\overline{x} = 390$kg. Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,02$ có thể cho rằng khối lượng trung bình của bò xuất chuồng đã tăng lên không? Giả sử rằng khối lượng của bò có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn $\sigma = 25,2$kg.
Cho biết $z_{0.1} = 1.282; z_{0.05} = 1.645; z_{0.025} = 1.96; z_{0.02} = 2.054, z_{0.01} = 2.326$

Giải. Gọi μ(kg) là khối lượng trung bình của bò xuất chuồng. Theo giả thiết, ta có bài toán kiểm định:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 380 \\ H_1 : \mu > 380 \end{cases}$$

Giá trị của thống kê kiểm định: $z = \dfrac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} = \dfrac{(390 - 380)\sqrt{50}}{25,2} = 2,806$.
Mức ý nghĩa: $\alpha = 0,02 \Rightarrow z_\alpha = z_{0,02} = 2,054$. Miền bác bỏ: $W_\alpha = [2,054; +\infty)$.
Vì $z \in W_\alpha$ nên ta bác bỏ giả thuyết H_0. Vậy, với mức ý nghĩa 2% khối lượng trung bình bò xuất chuồng đã tăng lên.

Khái niệm p-giá trị

P-giá trị tương ứng với một thống kê kiểm định là mức xác suất thấp nhất (được tính dựa trên giá trị thực nghiệm của thống kê này) mà ta chấp nhận giả thuyết H_0.
Quy tắc kiểm định:
- Nếu p-giá trị $\leq \alpha$ thì bác bỏ giả thuyết H_0.
- Nếu p-giá trị $> \alpha$ thì chưa có cơ sở bác bỏ giả thuyết H_0.

Khi mức ý nghĩa α không được chỉ ra thì ta thường so sánh nó với mức 5%.

Đối với 3 bài toán ở trên:

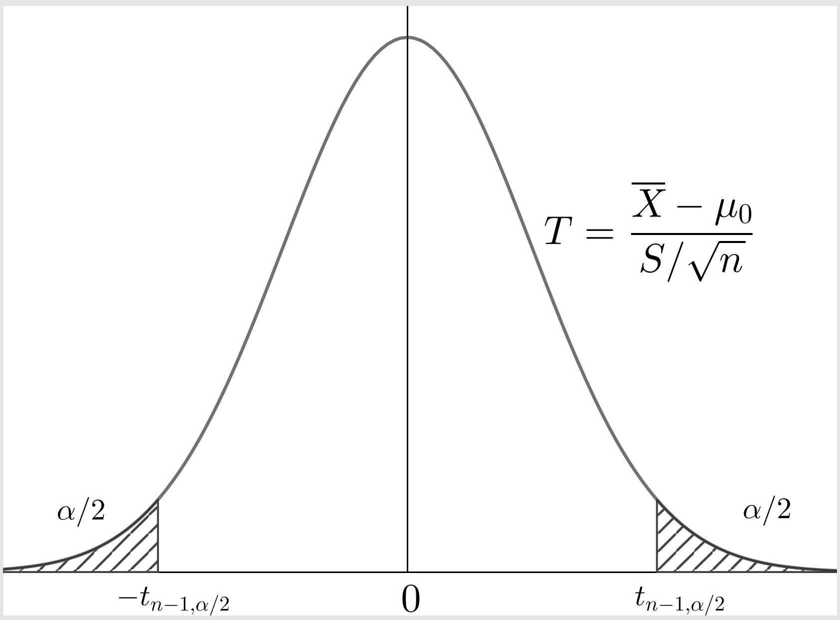
Bài toán	(I)	(II)	(III)
p-giá trị	$2(1-\Phi(\lvert z\rvert))$	$1-\Phi(z)$	$\Phi(z)$

2.2 Khi phương sai chưa biết

Cho biến ngẫu nhiên X của một tổng thể có phân phối chuẩn $N(\mu;\sigma^2)$ với kì vọng μ chưa biết và phương sai σ^2 chưa biết.
Xét bài toán kiểm định với H_0: $\mu = \mu_0$ và đối thuyết $H_1: \mu \neq \mu_0 (\mu > \mu_0, \mu < \mu_0)$.
Khi giả thuyết H_0: $\mu = \mu_0$ đúng, thống kê:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

có phân phối Student $n-1$ bậc tự do.



Cho biến ngẫu nhiên $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ với σ^2 chưa biết.
Giả thuyết gốc H_0: $\mu = \mu_0$
Giá trị thống kê kiểm định: $t = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n}$

Đối thuyết	Miền bác bỏ H_0	p-giá trị
H_1: $\mu \neq \mu_0$	$(-\infty; -t_{n-1;\alpha/2}] \cup [t_{n-1;\alpha/2}; +\infty)$	$2P(T_{n-1} > \|t\|)$
H_1: $\mu > \mu_0$	$[t_{n-1;\alpha}; +\infty)$	$P(T_{n-1} > t)$
H_1: $\mu < \mu_0$	$(-\infty; -t_{n-1;\alpha}]$	$P(T_{n-1} < t)$

Trong trường hợp $n > 30$: $t_{n-1;\alpha} \approx z_\alpha$.

Ví dụ 4

Tuổi thọ trung bình của một loại bóng đèn do nhà máy A sản xuất khi chưa cải tiến kĩ thuật là 2000 giờ. Sau thời gian cải tiến kĩ thuật người ta chọn ngẫu nhiên 25 bóng đèn cho lắp thử nghiệm. Kết quả thực nghiệm thu được tuổi thọ trung bình mẫu $\overline{x} = 2102$ giờ và độ lệch chuẩn mẫu $s = 15$ giờ. Với mức ý nghĩa $0,025$ có thể kết luận "sau khi cải tiến kĩ thuật, tuổi thọ bóng đèn có tăng lên" không? Biết tuổi thọ bóng đèn có phân phối chuẩn. Cho biết $t_{24;0,025} = 2,063$.

Giải. Gọi μ(giờ) là tuổi thọ trung bình của loại bóng đèn sau cải tiến. Ta có bài toán kiểm định:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 2000 \\ H_1 : \mu > 2000 \end{cases}$$

- Các số đặc trưng mẫu: $n = 25; \bar{x} = 2102; s = 15$

- Thống kê kiểm định:

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} = \frac{(2102 - 2000)\sqrt{25}}{15} = 34$$

- Mức ý nghĩa: $\alpha = 0,025; t_{n-1;\alpha} = t_{24;0,025} = 2,063$
- Miền bác bỏ: $W_\alpha = [2,063; +\infty)$

Vì $t \in W_\alpha$ nên ta bác bỏ H_0 và chấp nhận H_1. Vậy, sau cải tiến kỹ thuật tuổi thọ bóng đèn đã tăng lên.

Ví dụ 5

Một xí nghiệp có 5000 công nhân cùng sản xuất một loại sản phẩm. Theo dõi thời gian hoàn thành sản phẩm của 100 công nhân, ta được bảng số liệu sau:

Thời gian (ph)	*28-30*	*30-32*	*32-34*	*34-36*	*36-38*	*38-40*
Số công nhân	*5*	*15*	*25*	*30*	*20*	*5*

a) Tìm khoảng tin cậy đối xứng cho thời gian hoàn thành trung bình với độ tin cậy 90%.
b) Công nhân có tay nghề cao nếu thời gian hoàn thành 1 sản phẩm dưới 32ph. Với độ tin cậy 95%, tìm khoảng tin cậy đối xứng cho số công nhân có tay nghề cao của xí nghiệp.
c) Xí nghiệp quy định định mức hoàn thành trung bình 1 sản phẩm là 34 phút. Có ý kiến cho rằng định mức này có hại cho công nhân. Với mức ý nghĩa 2% hãy nhận xét về ý kiến đó.
Cho biết $z_{0.1} = 1.282; z_{0.05} = 1.645; z_{0.025} = 1.96; z_{0.02} = 2.054, z_{0.01} = 2.326$

Giải. a. Dạng thu gọn:

Thời gian (ph)	29	31	33	35	37	39
Số công nhân	5	15	25	30	20	5

Các số đặc trưng mẫu: $n = 100; \bar{x} = 34,2; s = 2,494$
Độ tin cậy: $1 - \alpha = 0,9 \Rightarrow \alpha = 0,1; t_{n-1;\alpha/2} = t_{99;0,05} \approx z_{0,05} = 1,645$
Sai số:

$$\varepsilon = t_{n-1;\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} = 1,645 * \frac{2,494}{\sqrt{100}} = 0,41$$

Khoảng tin cậy cho thời gian hoàn thành trung bình:

$$\bar{x} - \varepsilon < \mu < \bar{x} + \varepsilon \Leftrightarrow 33,79 < \mu < 34,61$$

b. Gọi K là số công nhân có tay nghề cao. Tỉ lệ công nhân có tay nghề cao: $p = K/5000$.
Tỉ lệ mẫu công nhân có tay nghề cao:

$$\hat{p} = k/n = (5 + 15)/100 = 0,2$$

Độ tin cậy: $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05; z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$
Sai số:

$$\varepsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 1,96 * \sqrt{\frac{0,2 * 0,8}{100}} = 0,0784$$

Khoảng tin cậy cho tỉ lệ công nhân có tay nghề cao:

$$\hat{p} - \varepsilon < p < \hat{p} + \varepsilon \Leftrightarrow 0,1216 < p < 0,2784$$

Suy ra: $0,1216 < K/5000 < 0,2784 \Leftrightarrow 608 < K < 1392.$

c. Gọi μ (ph) là thời gian hoàn thành trung bình 1 sản phâm của công nhân. Ta có bài toán kiểm định:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 34 \\ H_1 : \mu > 34 \end{cases}$$

- Thống kê kiểm định:

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} = \frac{(34,2 - 34)\sqrt{100}}{2,494} = 0,802$$

- Mức ý nghĩa: $\alpha = 0,02; t_{n-1;\alpha} = t_{99;0,02} \approx z_{0,02} = 2,054$
- Miền bác bỏ: $W_\alpha = [2,054; +\infty)$

Vì $t \notin W_\alpha$ nên ta chưa có cơ sở bác bỏ H_0. Vậy, định mức quy định không gây hại cho công nhân.

3. So sánh hai kỳ vọng của hai mẫu độc lập

Cho X và Y biến số ngẫu nhiên của hai tổng thể độc lập nhau và lần lượt có phân phối chuẩn $N(\mu_x; \sigma_x^2)$ và $N(\mu_y; \sigma_y^2)$ với phương sai σ_x^2, σ_y^2 chưa biết.
Xét bài toán kiểm định với

$$H_0 : \mu_x - \mu_y = \Delta_0$$

và đối thuyết $H_1 : \mu_x - \mu_y \neq \Delta_0 (\mu_x - \mu_y > \Delta_0, \mu_x - \mu_y < \Delta_0)$.
Giả sử $(x_1, ..., x_m)$ và $(y_1, ..., y_n)$ là các mẫu thu được từ X và Y tương ứng.
Chỉ xét trường hợp khi cỡ mẫu lớn (m,n>30).
Khi đó, áp dụng Định lí giới hạn trung tâm ta có:

$$Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\dfrac{S_x^2}{m} + \dfrac{S_y^2}{n}}}$$

có phân phối xấp xỉ phân phối chuẩn tắc $N(0; 1)$.

$X \sim N(\mu_x; \sigma_x^2)$ và $Y \sim N(\mu_y; \sigma_y^2)$ trong đó σ_x^2 và σ_y^2 đều chưa biết; $m > 30$ và $n > 30$.
Giả thuyết thống kê H_0: $\mu_x - \mu_y = \Delta_0$
Giá trị thống kê kiểm định: $z = \dfrac{\overline{x} - \overline{y} - \Delta_0}{\sqrt{\dfrac{s_x^2}{m} + \dfrac{s_y^2}{n}}}$

Đối thuyết	Miền bác bỏ H_0	p-giá trị
H_1: $\mu_x - \mu_y \neq \Delta_0$	$(-\infty; -z_{\alpha/2}] \cup [z_{\alpha/2}; +\infty)$	$2(1 - \Phi(\lvert z \rvert))$
H_1: $\mu_x - \mu_y > \Delta_0$	$[z_\alpha; +\infty)$	$1 - \Phi(z)$
H_1: $\mu_x - \mu_y < \Delta_0$	$(-\infty; -z_\alpha]$	$\Phi(z)$

Nhận xét: Khi $\Delta_0 = 0$, các bài toán kiểm định trên thường được viết lại dưới dạng:

$$(I) \quad \begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_y \\ H_1 : \mu_x \neq \mu_y \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_y \\ H_1 : \mu_x < \mu_y \end{cases}$$

$$(III) \quad \begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_y \\ H_1 : \mu_x > \mu_y \end{cases}$$

Thống kê kiểm định trở thành:

$$z = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{s_x^2}{m} + \dfrac{s_y^2}{n}}}$$

Ví dụ 6

Người ta cân trẻ sơ sinh ở hai khu vực thành thị và nông thôn, kết quả thu được:

Khu vực	*Số trẻ*	*Trung bình mẫu*	*Phương sai mẫu*
Nông thôn	$m = 60$	$\overline{x} = 3,0$ *kg*	$s_x^2 = 0,4$ *kg*^{2}
Thành thị	$n = 50$	$\overline{y} = 3,1$ *kg*	$s_y^2 = 0,5$ *kg*^{2}

Với mức ý nghĩa $0,05$ có thể coi khối lượng trung bình của trẻ sơ sinh ở hai khu vực khác nhau không? Biết khối lượng trẻ sơ sinh ở hai khu vực có phân phối chuẩn. Cho biết $z_{0.025} = 1.96$

Giải. Gọi μ_x, μ_y (kg) là khối lượng trung bình của trẻ sơ sinh ở nông thôn và thành thị.
Ta có bài toán kiểm định:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_y \\ H_1 : \mu_x \neq \mu_y \end{cases}$$

Thống kê kiểm định:

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{s_x^2/m + s_y^2/n}} = \frac{3,0 - 3,1}{\sqrt{0,4/60 + 0,5/50}} = -0,774$$

Mức ý nghĩa: $\alpha = 0,05; z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96.$
Miền bác bỏ: $W_\alpha = (-\infty; -1,96] \cup [1,96; +\infty)$
Vì $z \notin W_\alpha$ nên ta chưa có cơ sở bác bỏ giả thuyết H_0. Vậy, không có sự khác biệt về khối lượng trung bình của trẻ sơ sinh ở hai vùng trên.

Ví dụ 7

Người ta tiến hành một cuộc nghiên cứu để so sánh mức lương trung bình của phụ nữ so với mức lượng trung bình của nam giới trong một công ty lớn. Một mẫu gồm 100 phụ nữ có mức lương trung bình 7,23 đôla/giờ với độ lệch chuẩn 1,64 đôla/giờ. Một mẫu gồm 75 nam giới có mức lượng trung bình là 8,06 đôla/giờ với độ lệch chuẩn là 1,85 đôla/giờ. Với mức ý nghĩa 1% số liệu này có chứng minh được mức lương trung bình của phụ nữ trong công ty là thấp hơn nam giới hay không ? Cho biết $z_{0,01} = 2,326$.

Giải. Gọi μ_x, μ_y (đôla/giờ) là mức lương trung bình của nữ và nam giới. Ta có bài toán kiểm định:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_y \\ H_1 : \mu_x < \mu_y \end{cases}$$

Thống kê kiểm định:

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{s_x^2/m + s_y^2/n}} = \frac{7,23 - 8,06}{\sqrt{1,64^2/100 + 1,85^2/75}} = -3,08$$

Mức ý nghĩa: $\alpha = 0,01; z_\alpha = z_{0,01} = 2,326$.
Miền bác bỏ: $W_\alpha = (-\infty; -2,326]$
Vì $z \in W_\alpha$ nên ta bác bỏ giả thuyết H_0. Vậy, lương trung bình của nữ giới thấp hơn so với nam giới trong công ty.

4. Kiểm định giả thuyết về tỉ lệ

Cho tính chất A có tỉ lệ là p (chưa biết) trong tổng thể. Xét bài toán kiểm định giả thuyết:

$$H_0 : p = p_0$$

và đối thuyết $H_1 : p \neq p_0 (p > p_0, p < p_0)$.
Chọn một mẫu ngẫu nhiên kích thước n, đặt

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{phần tử } i \text{ có tính chất A} \\ 0, & \text{phần tử } i \text{ không có tính chất A} \end{cases}$$

và $\hat{P} = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$ - tỉ lệ phần tử có tính chất A.
Khi H_0 đúng, với n đủ lớn, theo Định lí giới hạn trung tâm:

$$Z = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}$$

có phân phối xấp xỉ phân phối chuẩn tắc $N(0; 1)$.

Cho $\hat{p} = k/n$ là một ước lượng của tỷ lệ p từ một mẫu kích thước n.
Giả thuyết gốc H_0: $p = p_0$
Giá trị thống kê kiểm định: $z = \dfrac{(\hat{p} - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}}$

Đối thuyết	Miền bác bỏ H_0	p-giá trị
$H_1 : p \neq p_0$	$(-\infty; -z_{\alpha/2}] \cup [z_{\alpha/2}; +\infty)$	$2(1 - \Phi(\lvert z\rvert))$
H_1: $p > p_0$	$[z_\alpha; +\infty)$	$1 - \Phi(z)$
H_1: $p < p_0$	$(-\infty; -z_\alpha]$	$\Phi(z)$

Ví dụ 8

Giám đốc một công ty tuyên bố 90% sản phẩm của công ty đạt tiêu chuẩn quốc gia. Một công ty kiểm định độc lập đã tiến hành kiểm tra 200 sản phẩm của công ty đó thì thấy có 168 sản phẩm đạt yêu cầu. Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,1$ có thể cho rằng tỷ lệ sản phẩm đạt tiêu chuẩn quốc gia thấp hơn 90% không? Cho biết $z_{0,1} = 1,282$.

Giải. Gọi p là tỉ lệ sản phẩm đạt tiêu chuẩn quốc gia của công ty. Bài toán kiểm định:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0,9 \\ H_1 : p < 0,9 \end{cases}$$

Tỉ lệ mẫu: $\hat{p} = k/n = 168/200 = 0,84$

Thống kê kiểm định:

$$z = \frac{(\hat{p} - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}} = \frac{(0,84 - 0,9)\sqrt{200}}{\sqrt{0,9 * 0,1}} = -2,83$$

Mức ý nghĩa: $\alpha = 0,1 \Rightarrow z_\alpha = z_{0.1} = 1.282$.

Miền bác bỏ: $W_\alpha = (-\infty; -1,282]$.

Vì $z \in W_\alpha$ nên bác bỏ H_0. Vậy, tỷ lệ sản phẩm đạt tiêu chuẩn quốc gia thấp hơn 90%.

Ví dụ 9

Một khu vực có 10000 hộ gia đình sinh sống và các hộ ở đây chỉ sử dụng ga của 2 công ty A và B. Điều tra 800 hộ thì có 600 hộ dùng ga, trong đó 360 hộ dùng ga của công ty A.

a) Với độ tin cậy 95%, tìm khoảng tin cậy đối xứng cho số lượng hộ dùng ga ở khu vực này.

b) Có ý kiến cho rằng ga của công ty A được các hộ thích dùng hơn. Với mức ý nghĩa 2% hãy nhận xét về ý kiến ấy.

Giải. a. Gọi K là số lượng hộ dùng ga ở khu vực này. Ta có tỉ lệ hộ dùng ga: $p = K/10000$.

Tỉ lệ mẫu: $\hat{p} = k/n = 600/800 = 0,75$.

Độ tin cậy: $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05; z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$.

Sai số:

$$\varepsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 1,96 * \sqrt{\frac{0,75 * 0,25}{800}} = 0,03$$

Khoảng tin cậy cho tỉ lệ hộ dùng ga: $\hat{p} - \varepsilon < p < \hat{p} + \varepsilon \Leftrightarrow 0,72 < p < 0,78$

Suy ra: $0,72 < K/10000 < 0,78 \Leftrightarrow 7200 < K < 7500$.

b. Gọi p là tỉ lệ hộ dùng ga của công ty A. Bài toán kiểm định:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0,5 \\ H_1 : p > 0,5 \end{cases}$$

Tỉ lệ mẫu: $\hat{p} = k/n = 360/600 = 0,6$

Giá trị của thống kê kiểm định:

$$z = \frac{(\hat{p} - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}} = \frac{(0,6 - 0,5)\sqrt{600}}{\sqrt{0,5 * 0,5}} = 4,9$$

Mức ý nghĩa: $\alpha = 0,02 \Rightarrow z_\alpha = z_{0.02} = 2,054$.

Miền bác bỏ: $W_\alpha = [2,054; +\infty)$.

Vì $z \in W_\alpha$ nên bác bỏ H_0. Vậy, sản phẩm ga của công ty A được ưa thích hơn.

5. So sánh hai tỉ lệ

Xét tính chất A có tỉ lệ là p_1 và p_2 chưa biết trong hai tổng thể độc lập nhau. Xét bài toán kiểm định với giả thuyết gốc:

$$H_0 : p_1 = p_2$$

và đối thuyết $H_1 : p_1 \neq p_2 (p_1 > p_2, p_1 < p_2)$.
Giả sử $\hat{p}_1 = k_1/n_1$ và $\hat{p}_2 = k_2/n_2$ lần lượt là ước lượng của p_1 và p_2 từ hai mẫu ngẫu nhiên độc lập kích thước n_1 và n_2 tương ứng.
Khi giả thuyết H_0 đúng, thống kê

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \text{ với } \hat{p} = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2}$$

có phân phối xấp xỉ phân phối chuẩn tắc $N(0, 1)$.

Giả sử $\hat{p}_1 = k_1/n_1$ và $\hat{p}_2 = k_2/n_2$ lần lượt là ước lượng của p_1 và p_2 từ hai mẫu ngẫu nhiên độc lập.
- Giả thuyết gốc H_0: $p_1 = p_2$
- Giá trị thống kê kiểm định:

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \text{ với } \hat{p} = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2}$$

Đối thuyết	Miền bác bỏ H_0	p-giá trị
$H_1 : p_1 \neq p_2$	$(-\infty; -z_{\alpha/2}] \cup [z_{\alpha/2}; +\infty)$	$2(1 - \Phi(\lvert z \rvert))$
$H_1 : p_1 > p_2$	$[z_\alpha; +\infty)$	$1 - \Phi(z)$
$H_1 : p_1 < p_2$	$(-\infty; -z_\alpha]$	$\Phi(z)$

Ví dụ 10

Kiểm tra ngẫu nhiên các sản phẩm cùng loại do hai nhà máy sản xuất thu được dữ liệu:

Nhà máy	*Số sản phẩm được kiểm tra*	*Số phế phẩm*
A	*1000*	*25*
B	*960*	*30*

Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$ *có thể coi tỷ lệ phế phẩm của hai nhà máy trên bằng nhau không? Cho biết* $z_{0.025} = 1.96$

Giải. Gọi p_1, p_2 là tỉ lệ phế phẩm của nhà máy A, B tương ứng. Ta có bài toán kiểm định:

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 \neq p_2 \end{cases}$$

Các tỉ lệ mẫu:

$$\hat{p}_1 = k_1/n_1 = 25/1000 = 0,025; \hat{p}_2 = k_2/n_2 = 30/960 = 0,03125$$

$$\hat{p} = (k_1 + k_2)/(n_1 + n_2) = (25 + 30)/(1000 + 960) = 0,028$$

Giá trị của thống kê kiểm định:

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0,025 - 0,03125}{\sqrt{0,028 * (1 - 0,028)(1/1000 + 1/960)}} = -0,838$$

Mức ý nghĩa: $\alpha = 0,05 \Rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1,96$.
Miền bác bỏ: $W_\alpha = (-\infty; -1,96] \cup [1,96; +\infty)$.
Vì $z \notin W_\alpha$ nên chưa có cơ sở bác bỏ H_0. Vậy, tỉ lệ phế phẩm của hai nhà máy không có sự khác biệt.

Ví dụ 11

Công ty nước giải khát đang nghiên cứu việc đưa vào một công thức mới để cải tiến sản phẩm của mình. Với công thức cũ khi cho 500 người dùng thử thì có 120 người ưa thích nó. Với công thức mới khi cho 1000 người khác dùng thì có 300 người bảo ưa thích hương vị này. Với mức ý nghĩa 2% hãy kiểm định xem công thức mới đưa vào có làm tăng tỉ lệ người ưa thích thức uống của công ty hay không ? Cho biết $z_{0,02} = 2,054$.

Giải. Gọi p_1, p_2 là tỉ lệ người ưa thích nước uống với công thức cũ và mới. Ta có bài toán kiểm định:

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 < p_2 \end{cases}$$

Các tỉ lệ mẫu: $\hat{p}_1 = 0,24; \hat{p}_2 = 0,3; \hat{p} = 0,28$.
Giá trị thống kê kiểm định: $z = -2,39$
Miền bác bỏ: $W_\alpha = (-\infty; -2,054]$.
Vì $z \in W_\alpha$ nên bác bỏ giả thuyết H_0.
Vậy, công thức mới đưa vào đã làm tăng tỉ lệ người ưa thích thức uống của công ty.