Chương 1.

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

1.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính

1.1.1. Một số mô hình thực tế

A. Bài toán lập kế hoạch sản xuất

Một cơ sở có thể sản xuất hai loại sản phẩm A và B, từ các nguyên liệu I, II, III. Chi phí từng loại nguyên liệu và tiền lãi của một đơn vị sản phẩm, cũng như dự trữ nguyên liệu cho trong bảng sau đây:

Nguyên liệu / Sản phẩm	I	II	III	Lãi
A	2	0	1	3
B	1	1	0	5
Dự trữ	8	4	3	

Hãy lập bài toán thể hiện kế hoạch sản xuất sao cho có tổng số lãi lớn nhất, trên cơ sở dự trữ nguyên liệu đã có.

Lập bài toán:

Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm A và B được sản xuất ($x, y \geq 0$, đơn vị sản phẩm). Khi đó ta cần tìm $x, y \geq 0$ sao cho đạt lãi lớn nhất.

$$f(X) = 3x + 5y \rightarrow \max$$

với điều kiện nguyên liệu:

$$2x + y \leq 8;$$
$$1.y \leq 4;$$
$$1.x \leq 3;$$

Tức là cần giải bài toán:

$$f(X) = 3x + 5y \rightarrow \max$$

$$\text{với điều kiện:}\begin{cases} 2x + y = 8; \\ y \leq 4; \\ x \leq 3; \\ x, y \geq 0; \end{cases}$$

B. Bài toán phân công lao động:

Một lớp học cần tổ chức lao động với hai loại công việc: xúc đất và chuyển đất. Lao động của lớp được chia làm 3 loại A, B, C, với số lượng lần lượt là 10, 20, 12. Năng suất của từng loại lao động trên từng công việc cho trong bảng dưới đây:

Lao động / Công việc	A(10)	B(20)	C(12)
Xúc đất	6	5	4
Chuyển đất	4	3	2

Hãy tổ chức lao động sao cho có tổng năng suất lớn nhất.

Lập bài toán:

Gọi x_{ij} là số lao động loại j làm công việc i(j=1,2;$x_{ij} \geq 0$, nguyên). Khi đó, năng suất lao động của công việc đào đất sẽ là:

$$6x_{11} + 5x_{12} + 4x_{13};$$

còn chuyển đất sẽ là : $4x_{21} + 3x_{22} + 2x_{23};$

Ta thấy rằng để có năng suất lớn nhất thì không thể có lao động dư thừa, tức là phải cân bằng giữa hai công việc. Vì vậy ta có bài toán sau:

$$6x_{11} + 5x_{12} + 4x_{13} \to max;$$

với điều kiện $\begin{cases} 6x_{11} + 5x_{12} + 4x_{13} - 4x_{21} + 3x_{22} + 2x_{23} = 0; \\ x_{11} + x_{21} = 10; \\ x_{12} + x_{22} = 20; \\ x_{13} + x_{23} = 12; \end{cases}$

C. Bài toán khẩu phần thức ăn:

Một khẩu phần thức ăn có khối lượng P, có thể cấu tạo từ *n* loại thức ăn. Gía mua một đơn vị thức ăn loại *j* là c_j. Để đảm bảo cơ thể phát triển bình thường thì khẩu phần cần *m* loại chất dinh dưỡng. Chất dinh dưỡng thứ *i* cần tối thiểu cho khẩu phần là b_i và có trong một đơn vị thức ăn loại *j* là a_{ij}.

Hỏi nên cấu tạo một khẩu phần thức ăn như thế nào để ăn đủ no, đủ chất dinh dưỡng mà có giá thành rẻ nhất.

Lập bài toán:

Gọi x_j ($x_j \geq 0$) là số đơn vị thức ăn loại *j* được cấu tạo trong khẩu phần. Khi đó, giá thành của khẩu phần là:

$$f(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

Vì phải đảm bảo thoả mãn điều kiện đủ no và đủ chất, tức là:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = P, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_j, i=\overline{1,m}.$$

Ta có bài toán sau: $f(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$

với điều kiện $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_j = P; \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, i=\overline{1,m}; \\ x_j \geq 0, j=\overline{1,n}; \end{cases}$

Ta thấy rằng ba bài toán trên đều thuộc bài toán tổng quát.

1.1.2. Bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát

Bài toán tổng quát của QHTT có dạng :

$$f(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min(max)$$

với điều kiện $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i=\overline{1,k} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, i=\overline{k+1,m} \\ x_j \geq 0, j=\overline{1,r}, r \leq n \end{cases}$

Để phân biệt tính chất của các ràng buộc đối với một phương án, ta làm quen với hai khái niệm : *ràng buộc chặt* và *ràng buộc lỏng.*

Định nghĩa 1: *Nếu đối với phương án x mà ràng buộc i thỏa mãn với dấu đẳng thức, nghĩa là* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ *thì ta nói phương án x thỏa mãn chặt ràng buộc i*

Nếu đối với phương án x mà ràng buộc i thỏa mãn với dấu bất đẳng thức thực sự, nghĩa là $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j > b_i$ *thì ta nói phương án x thỏa mãn lỏng ràng buộc i*

Định nghĩa 2 : *Ta gọi một phương án thỏa mãn chặt n ràng buộc độc lập tuyến tính là phương án cực biên. Một phương án cực biên thỏa mãn chặt đúng n ràng buộc* *gọi là phương án cực biên không suy biến, thỏa mãn chặt hơn n ràng buộc gọi là phương án cực biên suy biến.*

Định nghĩa 3: *Một phương án mà tại đó hàm mục tiêu đạt cực tiểu (cực đại) gọi là phương án tối ưu. Bài toán có ít nhất một phương án tối ưu gọi là bài toán giải được, bài toán không có phương án hoặc có phương án nhưng hàm mục tiêu không bị chặn dưới (trên) trên tập phương án gọi là không giải được.*

Để nhất quán trong lập luận, ta xét bài toán tìm cực tiểu, sau đó ta xét cách đưa bài toán tìm cực đại về bài toán tìm cực tiểu.

* Chuyển bài toán tìm cực đại về bài toán tìm cực tiểu :

Nếu gặp bài toán tìm max, tức là :

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$X \in M$$

thì giữ nguyên ràng buộc, ta đưa nó về dạng bài toán tìm min :

$$g(X) = -f(X) = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$X \in M$$

<u>**Chứng minh :**</u>

Nếu bài toán tìm min có phương án tối ưu là X^* thì bài toán tìm max cũng có phương án tối ưu là X^* và *g(X)= - f(X).*

Thật vậy, X^* là phương án tối ưu của bài toán tìm min, tức là

$$f(X^*) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \le \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \forall X \in M$$

$$\Rightarrow -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \ge \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \forall X \in M$$

hay $-f(X^*) = g(X^*) \ge g(X), \forall X \in M$

Vậy X^* là phương án tối ưu của bài toán max và

$$f_{\max} = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = -g_{\min}$$

1.1.3. Dạng chính tắc của bài toán quy hoạch tuyến tính

Người ta thường xét bài toán QHTT dưới dạng sau:

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \qquad (1.1)$$

với điều kiện
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1,m} & (1.2) \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,n} & (1.3) \end{cases}$$

Bài toán (1.1), (1.2), (1.3) được gọi là ***Bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc.***

Kí hiệu ma trận hàng $c = (c_1, c_2, ..., c_n)_{1\times n}$ và các ma trận :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}, \ A = (a_{\text{ij}})_{m\times n}, \ A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ ... \\ a_{mj} \end{pmatrix} j = \overline{1,n}$$

Ta có bài toán ở dạng ***ma trận*** như sau:

$$f(\text{x}) = cx \to \min$$

Với điều kiện $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$

và bài toán ở dạng ***véc tơ*** như sau:

$$f(\text{x}) = cx \to \min$$

Với điều kiện $\begin{cases} A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = b \\ x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 \end{cases}$

Đối với bài toán dạng chính tắc ta có một số tính chất và khái niệm quan trọng của phương án cực biên như sau :

Tính chất 1(Nhận dạng phương án cực biên) : *Phương án x của bài toán dạng chính tắc là cực biên khi và chỉ khi hệ thống các véc tơ* $\{A_j : x_j > 0\}$ *độc lập tuyến tính. Với giả thiết hạng[A] = m thì một phương án cực biên không suy biến có đúng m thành phần dương, suy biến có ít hơn m thành phần dương.*

Chứng minh

Lấy một phương án x bất kì, giả sử p thành phần đầu của x là dương, tức là $x_j > 0 \ (j = \overline{1,p})$, suy ra $x_k = 0 \ (k = \overline{p+1,n})$. Thành lập ma trận tương ứng với các ràng buộc chặt của phương án x (bao gồm m ràng buộc đẳng thức và n - p ràng buộc chặt về dấu), kí hiệu là C, ta có :

$$C = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & a_{1p+1} & a_{1p+2} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & a_{2p+1} & a_{2p+2} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \boldsymbol{P} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} & a_{mp+1} & a_{mp+2} & \dots & a_{mn} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\\0\end{array}}\right\} n\text{-}p \end{array}$$

Theo cách tính hạng của ma trận thì hạng[C] = n – p + hạng[P]

Từ định nghĩa suy ra, x là phương án cực biên khi và chỉ khi hạng[C] = n, nghĩa là khi và chỉ khi hạng[P] = p, nói cách khác thì $\left\{A_j : j = \overline{1,p}\right\}$ hay $\left\{A_j : x_j > 0\right\}$độc lập tuyến tính. □

Từ đây đối với bài toán dạng chính tắc, không mất tính tổng quát , ta giả thiết :

- Hệ (1.2) có đúng m phương trình độc lập tuyến tính.
- $\forall b_i \geq 0, i = \overline{1,m}$
- m < n (trong trường hợp $m \geq n$ thì tập phương án có nhiều nhất một điểm, do vậy việc tìm phương án tối ưu là tầm thường).

Vì hạng của ma trận A bằng m nên số véc tơ điều kiện A_j độc lập tuyến tính cực đại là m, do đó bất kì phương án cực biên nào cũng tương ứng với ít nhất một hệ véc tơ độc lập tuyến tính cực đại, từ đó ta có định nghĩa sau :

Định nghĩa 4: *Ta gọi một hệ m véc tơ $\left\{A_j\right\}$ độc lập tuyến tính bao hàm hệ thống các véc tơ tương ứng với các thành phần dương của phương án cực biên x là **cơ sở của phương án cực biên** ấy, kí hiệu một cách quy ước là J, trong đó*

$$J = \left\{ j : A_j \text{ nằm trong cơ sở } \right\}$$

Một phương án cực biên không suy biến có đúng m thành phần dương, m véc tơ A_j tương ứng độc lập tuyến tính nên có một cơ sở duy nhất, đó chính là các véc tơ tương ứng với các thành phần dương ; còn đối với phương án cực biên suy biến thì có nhiều cơ sở khác nhau, phần chung của chúng là các véc tơ tương ứng với các thành phần dương.

Như vậy khi nói phương án cực biên có cơ sở J, cần hiểu J có 3 nội dung sau:

- Số phần tử của J: $|J| = m$
- $\{A_j : j \in J\}$ độc lập tuyến tính
- $\{A_j : j \in J\} \supset \{A_j : x_j > 0\}$

Tính chất 2 (Tính hữu hạn của số phương án cực biên): *Số phương án cực biên của mọi bài toán quy hoạch tuyến tính đều hữu hạn*

Thật vậy: Vì mỗi phương án cực biên đều tương ứng với một hệ n ràng buộc chặt độc lập tuyến tính, số hệ gồm n phương trình độc lập tuyến tính là hữu hạn, do đó số phương án cực biên cũng là hữu hạn. □

Tính chất 3 (Sự tồn tại phương án tối ưu): *Nếu bài toán dạng chính tắc có phương án và hàm mục tiêu bị chặn dưới trên tập phương án thì bài toán có phương án cực biên tối ưu.*

Thật vậy, giả sử bài toán có các phương án cực biên là $x^1, x^2, ..., x^k$.

Đặt $f(x^l) = Min\{f(x^i) : i = \overline{1,k}\}$.

Do tập nghiệm (hay tập phương án của bài toán quy hoạch tuyến tính) của hệ ràng buộc là một đa diện lồi, cho nên mọi nghiệm (phương án) x đều có thể phân tích thành:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

Suy ra $f(x) = f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x^i) \geq (\sum_{i=1}^{k} \lambda_i) f(x^l) = f(x^l)\ \forall x \in M$

Vậy x^l chính là phương án cực biên tối ưu. □

Một lớp quan trọng của các bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc là bài toán dưới đây gọi là ***<u>bài toán dạng chuẩn</u>*** :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + a_{1m+1}x_{m+1} + a_{1m+2}x_{m+2} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad x_2 \qquad\quad + a_{2m+1}x_{m+1} + a_{2m+2}x_{m+2} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \dots \qquad \dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots \\ \qquad\quad x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + a_{mm+2}x_{m+2} + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

trong đó $b_i \geq 0 (i = \overline{1,m})$, nghĩa là bài toán dạng chính tắc có vế phải không âm và mỗi phương trình đều có một biến số với hệ số bằng 1 đồng thời không có trong các phương trình khác (gọi là biến cô lập với hệ số bằng 1).

Từ hệ phương trình ràng buộc của bài toán dễ dàng suy ra một phương án:

$$x^0 = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, 0, \dots, 0)$$

Đây chính là một phương án cực biên có hệ cơ sở tương ứng là

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.1.4. Đưa bài toán quy hoạch tuyến tính về dạng chính tắc

<u>Phương pháp:</u> Ta có thể đưa bài toán tuyến tính tổng quát về bài toán tuyến tính dạng chính tắc tương đương nhờ các quy tắc sau:

- Nếu có *max f(X)* thì đổi thành $\{\min - f(X)\}$.
- Nếu có bất đẳng thức $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ hoặc $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ thì ta đưa thêm ẩn phụ $x_{n+i} \geq 0$,với hệ số hàm mục tiêu $c_{n+i} = 0$ để có:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i \text{ hoặc } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i\ ;$$

- Nếu có ẩn x_k chưa ràng buộc về dấu, thì ta có thể thay nó bởi hai biến mới $x_{k'}$ và $x_{k''}$ không âm, theo công thức:

$$x_k = x_{k'} - x_{k''}.$$

Ví dụ 1.1 Đưa bài toán sau về dạng chính tắc:

$$min\ \{x_1 - x_2 - x_3\};$$

$$\text{với điều kiện }\begin{cases} 6x_{11} + 5x_{12} + 4x_{13} - 4x_{21} + 3x_{22} + 2x_{23} = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \le 3; \\ x_1 + x_2 - x_3 \ge 4; \\ x_1, x_3 \ge 0; \end{cases}$$

Giải:

Ta thấy có bất đẳng thức $x_1 - 2x_2 + x_3 \le 3$ nên ta đưa thêm ẩn phụ $x_4, x_5 \ge 0$

Mặt khác, có ẩn x_2 chưa ràng buộc về dấu, do đó ta thay x_2 bởi $x_2^{'} - x_2^{''}$. Khi đó, bài toán ban đầu được chuyển về dạng sau:

$$(x_1 - x_2^{'} + x_2^{''} - x_3) \to \min$$

$$\text{với điều kiện }\begin{cases} x_1 + x_2^{'} - x_2^{''} + x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2^{'} + 2x_2^{''} + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2^{'} - x_2^{''} - x_3 - x_5 = 4 \\ x_1, x_2^{'}, x_2^{''}, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Ví dụ 1.2 Đưa bài toán QHTT sau về dạng chính tắc:

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 \to \min$$

$$\text{với điều kiện }\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \le 7(1) \\ x_2 + 2x_3 + x_4 \ge -1(2) \\ 2x_3 + x_4 + 3x_5 \ge 10(3) \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 20 \\ x_1, x_5 \ge 0 \\ x_4 \le 0 \end{cases}$$

Giải:

Vì x_2, x_3 chưa ràng buộc về dấu nên ta thay x_2 bởi $x_2^{'} - x_2^{''}(x_2^{'}, x_2^{''} \ge 0)$, x_3 bởi $x_3^{'} - x_3^{''}(x_3^{'}, x_3^{''} \ge 0)$, $x_4 \le 0$ nên thay x_4 bởi $-x_4^{'}(x_4^{'} \ge 0)$.

Vì có các bất đẳng thức (1), (2), (3) nên ta thêm các ẩn phụ x_6, x_7, x_8.

Từ đó, ta được bài toán sau:

$$2x_1 - (x_2^{'} - x_2^{''}) + 2(x_3^{'} - x_3^{''}) - x_4^{'} - 2x_5 \to \min$$

Với điều kiện $\begin{cases} x_1 - 2(x_2' - x_2'') + x_3' - x_3'' - 2x_4' + x_5 + x_6 = 7 \\ (x_2' - x_2'') + 2(x_3' - x_3'') - x_4' - x_7 = -1 \\ 2(x_2' - x_2'') - x_4' + 3x_5 - x_8 = 10 \\ x_1 + (x_2' - x_2'') - 2(x_3' - x_3'') - x_4' = 20 \\ x_1, x_5, x_6, x_7, x_8, x_2', x_2'', x_3', x_3'', x_4' \geq 0 \end{cases}$

1.2. Phương pháp đơn hình

1.2.1. Tư tưởng của phương pháp đơn hình

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1,m} \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

Dạng véctơ của bài toán:

$$f(x) = cx \to \min$$

Với điều kiện: $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} A_j x_j = b \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,n} \end{cases}$

Ta đã biết rằng :

- Nếu bài toán có phương án thì có phương án cực biên

- Nếu bài toán có phương án tối ưu thì cũng có phương án cực biên tối ưu.

Số phương án cực biên là hữu hạn.

Do đó, ta có thể tìm một phương án tối ưu(hay một lời giải của bài toán) trong tập hợp các phương án cực biên. Tập hợp này là hữu hạn. Vì vậy Dantzig đề xuất thuật toán đơn hình như sau:

Xuất phát từ một phương án cực biên x^0. Kiểm tra xem x^0 có là phương án tối ưu hay chưa. Nếu x^0 chưa phải là phương án tối ưu thì tìm cách cải tiến nó để được phương pháp khác là x^1 tốt hơn x^0, tức là $f(x^1) < f(x^0)$. Qúa trình này lặp lại nhiều lần. Vì số phương án cực biên là hữu hạn nên sau một số hữu hạn lần lặp ta sẽ tìm thấy phương án cực biên tối ưu.

Để thực hiện thuật toán đề ra ở trên, ta cần làm rõ hai vấn đề sau:

1. Làm thế nào để biết một phương án cực biên đã cho là tối ưu hay chưa, tức là cần tìm « dấu hiệu tối ưu ».

2. Làm thế nào để từ một phương án cực biên chưa tối ưu tìm được một phương án cực biên tốt hơn nó.

1.2.2. Biểu diễn qua cơ sở. Dấu hiệu tối ưu

Gỉa sử có phương án cực biên x^0 với cơ sở J_0(tức là hệ véctơ cột độc lập tuyến tính $\left\{A_j, j \in J_0\right\}$ và $x_j > 0$). Ta có:

$$AX^0 = b \text{ hay } b = \sum_{j=1}^{n} x_j^0 A_j = \sum_{j \in J_0} x_j^0 A_j \qquad (1)$$

(vì $x_j^0 = 0 \forall j \notin J_0$). Với mỗi $k \notin J_0$, ta biểu diễn véc tơ A_k qua các véc tơ cơ sở $\left\{A_j, j \in J_0\right\}$: $A_k = \sum_{j \notin J_0} z_{jk} A_j (\forall k \notin J_0)$

Gỉa sử $x \in$ M là một phương án bất kỳ. Ta có :

$$b = \sum_{j=1}^{n} x_j A_j = \sum_{j \in J} x_j A_j + \sum_{k \notin J} x_k A_k = \sum_{j \in J_0} x_j A_j + \sum_{k \notin J_0} x_k \sum_{j \in J_0} z_{jk} A_j = \sum_{j \in J_0} (x_j + \sum_{k \notin J_0} z_{jk} x_k) A_j \quad (2)$$

Vì $\left\{A_j, j \in J_0\right\}$ độc lập tuyến tính nên từ (1) và (2) suy ra:

$$x_j^0 = x_j + \sum_{k \notin J} z_{jk} x_k (\forall j \in J_0)$$

Hay: $x_j = x_j^0 - \sum_{k \notin J} z_{jk} x_k \forall j \in J_0$ (3)

Khi đó, ta có:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j \in J_0} c_j x_j + \sum_{k \notin J_0} c_k x_k \qquad (4)$$

Thay (3) vào ta được :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} (x_j^0 - \sum_{k \notin J_0} z_{jk} x_k) c_j + \sum_{k \notin J_0} c_k x_k = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 - \sum_{k \notin J_0} (\sum_{j \in J_0} z_{jk} c_j - c_k) x_k$$

Ký hiệu:

$\Delta_k = \sum_{j \in J_0} z_{jk} c_j - c_k (k \notin J_0)$ gọi là ước lượng của véc tơ cột A_k theo cơ sở J và:

$$f(x) = f(x^0) - \sum_{k \notin J_0} \Delta_k x_k$$

Nhận xét: Do x ≥ 0 nên nếu $\forall k \notin J_0, \Delta_k \le 0$ thì $f(x) \ge f(x^0), \forall x \in M$ do đó ta có ***dấu hiệu tối ưu*** sau đây:

Phương án cực biên x^0 với cơ sở J_0 là phương án tối ưu khi và chỉ khi $\Delta_k \le 0, \forall k \notin J_0$.

1.2.3. Công thức biến đổi. Bảng đơn hình

Giả sử x^0 với cơ sở J là một phương án cực biên nhưng chưa phải là phương án tối ưu, khi đó $\exists k \notin J_0$ sao cho $\Delta_k > 0$. Giả sử s là một chỉ số trong các chỉ số nói trên: $s \notin J_0, \Delta_s > 0$.

Theo thuật toán trên ta cần cải tiến x^0 để nhận được một phương án cực biên mới tốt hơn. Ta sẽ tìm một phương án cực biên mới x^1 ứng với cơ sở J^1 chỉ khác J một véc tơ : $J^1 = (J_0 \setminus r) \cup s$, tức là ta đưa véc tơ A_s vào cơ sở thay cho véc tơ A_r bị loại ra khỏi cơ sở J.

Vì mọi thành phần ngoài cơ sở của một phương án cực biên đều bằng 0 nên phương án cực biên mới x^1 có cơ sở $J^1 = (J \setminus r) \cup s$ là:

$$x_k^1 = \begin{cases} 0 & \text{với } k \notin J_0, k \ne s (\text{tức là } k \notin J^1) \\ \theta & \text{với } k = s \end{cases} \qquad (5)$$

Trong đó θ là một số dương sẽ được xác định sau sao cho x^1 là một phương án cực biên.

* Tìm điều kiện của θ để x^1 là một phương án:

Thay (5) vào (3) ta được:

$$x_j^1 = x_j^0 - \sum_{k \notin J_0} z_{jk}.x_k^1 = x_j^0 - \theta z_{js} (\forall j \in J_0)$$

Hay $$x_j^1 = \begin{cases} 0 & \text{với } j \notin J_0, j \ne s (\text{tức là } j \notin J^1) \\ \theta & \text{với } j = s \\ x_j^0 - \theta z_{js} & \text{với } j \in J_0 \end{cases} \qquad (6)$$

Để x^1 là một phương án thì nó phải thỏa mãn các điều kiện buộc Ax=b và x ≥ 0.

\+ Ta thấy rằng với mọi θ, ta có:

$$Ax^1 = \sum_{j \in J} x_j^1 A_j + \sum_{j \notin J} x_j^1 A_j = \sum_{j \in J} (x_j^0 - \theta z_{js}) A_j + \theta A_s = \sum_{j \in J_0} x_j^0 A_j - \theta \sum_{j \in J_0} z_{js} A_j + \theta A_s = b - \theta A_s + \theta A_s = b$$

Vậy với mọi θ thì ràng buộc thứ nhất thỏa mãn. Ta chỉ cần tìm θ sao cho $x^1 \ge 0$. Có hai trường hợp xảy ra:

+ Trường hợp 1: Nếu $z_{js} \le 0$ với mọi j $\in$J thì $x^1 \ge 0$ với mọi $\theta > 0$ và x^1 là phương án của bài toán. Nhưng do $\Delta_s > 0$:

$$f(x^1) = f(x^0) - \sum_{k \notin J_0} \Delta_k x_k^1 = f(x^0) - \Delta_s \theta \to -\infty \ khi\ \theta \to +\infty$$

Như vậy hàm mục tiêu không bị chặn dưới trên miền ràng buộc. Khi đó bài toán không có lời giải hữu hạn.

+ Trường hợp 2: Nếu $\exists j \in J_0$ để $z_{js} > 0$, khi đó theo (6) số θ không thể lớn tùy ý, nó phải thỏa mãn $x_j^0 - \theta z_{js} \ge 0, \forall j \in J_0$ mà $z_{js} > 0$. Giá trị θ lớn nhất chỉ có thể bằng

$$\min\left\{\frac{x_j^0}{z_{js}} : j \in J_0 \text{ mà } z_{js} > 0\right\}$$

Nếu vượt qua miền đó sẽ có một trong các ($x_j^0 - \theta z_{js} < 0$) và x^1 sẽ vượt ra khỏi miền ràng buộc.

Giả sử cực tiểu trên đạt tại j = r. Lấy $\theta = \dfrac{x_r^0}{z_{rs}}$, thay vào (6) ta được:

$$x_j^1 = \begin{cases} 0 \quad \text{với } j \notin J_0, j \ne s (\text{tức là } j \notin J^1) \\ \dfrac{x_r^0}{z_{rs}} \quad \text{với } j = s \\ x_j^0 - \dfrac{x_r^0}{z_{rs}} z_{js} \quad \text{với } j \in J_0 \end{cases} \qquad (7)$$

Khi đó, ta có:

$$f(x^1) = f(x^0) - \Delta_s \frac{x_r^0}{z_{rs}} \qquad (8)$$

Từ (8) ta thấy rằng x^1 là phương án tốt hơn x^0 nếu $\dfrac{x_r^0}{z_{rs}} > 0$.

Rõ ràng, phương án $\boldsymbol{x^1}$ được xác định theo công thức (7) là phương án cực biên với cơ sở $J^1 = (J_0 \setminus r) \cup s$.

Thật vậy, theo (7) suy ra $x_r^1 = 0$ nên $J^+(X^1) \subseteq J^1$ với ($J^+(X) = \{j : x_j > 0\}$). Ta cần chứng minh hệ véc tơ $\{A_j, j \in J^1\}$ độc lập tuyến tính.

+ Thật vậy, giả sử $\sum_{j\in J^1}\alpha_j x_j = 0$ ta cần chứng minh $\alpha_j = 0 \forall j \in J^1$. Ta có:

$$0=\sum_{j\in J^1}\alpha_j x_j=\sum_{j\in J, j\neq r}\alpha_j x_j+\alpha_s x_s=\sum_{j\in J_0, j\neq r}\alpha_j x_j+\alpha_s\sum_{j\in J_0} z_{js}A_j=\sum_{j\in J_0, j\neq r}(\alpha_j-\alpha_s z_{js})A_j+\alpha_s z_{rs}A_r$$

Vì hệ véc tơ $\{A_j, j\in J_0\}$ độc lập tuyến tính, nên:

$$\begin{cases}\alpha_j-\alpha_s z_{js}=0 \forall j\in J_0, j\neq r\\ \alpha_s z_{rs}=0\end{cases}$$

Vì $z_{rs} > 0$ nên suy ra $\alpha_s = 0$, do đó $\alpha_j = 0 (j \in J, j \neq r)$. Vậy $\alpha_j = 0 \forall j \in J^1 = (J_0 \setminus r)\cup s$.

Vì $J^+(X^1)\subseteq J^1$ nên hệ véc tơ $\{A_j, j\in J^+(X^1)\}$ độc lập tuyến tính. Do đó x^1 là phương án cực biên và J^1 là cơ sở của phương án cực biên x^1.

Như vậy x^1 là một phương án cực biên của bài toán.

ở trên ta đã tìm các thành phần của phương án cực biên mới x^1 cùng với giá trị hàm mục tiêu $f(x^1)$ thông qua các hệ số khai triển z_{jk} và các ước lượng Δ_k trong cơ sở J. Như vậy chúng ta cần xác định các đại lượng z^1_{jk} và Δ^1_k trong cơ sở J^1. Theo định nghĩa z_{jk} và z^1_{jk} là các hệ số khai triển của véc tơ A_k tương ứng với cơ sở J, J^1.

$$A_k=\sum_{j\in J_0} z_{jk}A_j=\sum_{j\in J^1} z^1_{jk}A_j \quad (*)$$

$$\sum_{j\in J_0} z_{jk}A_j=\sum_{j\in J_0, j\neq r} z_{jk}A_j+z_{rk}A_r \quad (**)$$

Từ

$$A_s=\sum_{j\in J_0} z_{js}A_j=\sum_{j\in J_0, j\neq r} A_j z_{js}+z_{rs}A_r \text{ vì } z_{rs}>0 \text{ ta có } A_r=\frac{1}{z_{rs}}\left(A_s-\sum_{j\in J_0, j\neq r} z_{js}A_j\right).$$

Thay vào (**) ta được:

$$\sum_{j\in J_0} z_{jk}A_j=\sum_{j\in J_0, j\neq r} z_{jk}A_j+\frac{z_{rk}}{z_{rs}}(A_s-\sum_{j\in J_0, j\neq r} z_{js}A_j)$$

$$=\sum_{j\in J_0, j\neq r}(z_{jk}-\frac{z_{rk}}{z_{rs}}.z_{js})A_j+\frac{z_{rk}}{z_{rs}}.A_s \quad (***)$$

Vì $\{A_j, j\in J^1\}$ độc lập tuyến tính nên từ (*) và (**) suy ra:

$$x_{jk}^1 = \begin{cases} \dfrac{z_{rk}}{z_{rs}} & \text{với } j = s \\ z_{jk} - \dfrac{z_{rk}}{z_{rs}} z_{js} & \text{với } j \in J_0, j \neq r \end{cases}$$

$$\Delta_k^1 = \sum_{j \in J^1} z_{jk}^1 c_j - c_k = \sum_{j \in J_0, j \neq r} \left(z_{jk} - \frac{z_{rk}}{z_{rs}} z_{js} \right) c_j + \frac{z_{rk}}{z_{rs}} c_s - c_k$$

$$= \sum_{j \in J_0} \left(z_{jk} - \frac{z_{rk}}{z_{rs}} z_{js} \right) c_j + \frac{z_{rk}}{z_{rs}} c_s - c_k \qquad (\text{vì j=r thì } \left(z_{jk} - \frac{z_{rk}}{z_{rs}} z_{js} \right) = 0)$$

$$= (\sum_{j \in J_0} z_{jk} c_j - c_k) - \frac{z_{rk}}{z_{rs}} \sum_{j \in J_0} z_{js} c_j - c_s) = \Delta_k - \frac{z_{rk}}{z_{rs}} \Delta_s.$$

Vậy: $\Delta_k^1 = \Delta_k - \dfrac{z_{rk}}{z_{rs}} \Delta_s$.

Để thuận tiện cho việc tính toán, người ta sắp xếp các số liệu thành một bảng gọi là ***bảng đơn hình*** như dưới đây:

Hệ số	Cơ sở	Phương án	c_1	c_2	....	c_k	c_s	c_n
			A_1	A_2	...	A_k	A_s	A_n
c_{j_1}	A_{j_1}	x_{j_1}	$z_{j_1 1}$	$z_{j_1 2}$	...	$z_{j_1 k}$ ...	$z_{j_1 s}$ ...	$z_{j_1 n}$
c_{j_2}	A_{j_2}	x_{j_2}	$z_{j_2 1}$	$z_{j_2 2}$	... ...	$z_{j_2 k}$ ...	$z_{j_2 s}$ ...	$z_{j_2 n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
c_{j_r}	A_{j_r}	x_{j_r}	$z_{j_r 1}$	$z_{j_r 2}$	...	$z_{j_r k}$ ...	$z_{j_r s}$ ...	$z_{j_r s}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
c_{j_m}	A_{j_m}	x_{j_m}	$z_{j_m 1}$	$z_{j_m 2}$		$z_{j_m k}$ ...	$z_{j_m s}$ ...	$z_{j_m s}$
		f(x)	Δ_1	Δ_2 ...	...	Δ_k	Δ_s...	Δ_n

Các cột ứng với j∈J sẽ là các véc tơ đơn vị với số 1 trên dòng với chỉ số j.

***Chú ý*:** Đối với bài toán dạng chuẩn, ta có ngay một phương án cực biên $x^0 = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, 0, ..., 0)$ với hệ véc tơ cơ sở tương ứng là $A_1, A_2, ..., A_m$. Đây là các véc tơ đơn vị nên trong bảng đơn hình xuất phát ta có $z_{jk} = a_{jk}$

1.2.4. Thuật toán đơn hình

Bước xuất phát: Tìm một phương án cực biên x^0 và cơ sở J_0 tương ứng . Tìm các hệ số khai triển z_{jk} và các ước lượng Δ_k.

Bước 1: Kiểm tra dấu hiệu tối ưu

- Nếu $\Delta_k \le 0 \forall k \notin J_0$ thì x^0 là phương án tối ưu. Thuật toán kết thúc.

- Nếu $\exists \Delta_k > 0$ thì chuyển sang bước 2.

Bước 2: Kiểm tra dấu hiệu hàm mục tiêu giảm vô hạn: Với mỗi $k \notin J_0$ mà $\Delta_k > 0$ thì kiểm tra các hệ số khai triên$_{jk}$ của cột A_k tương ứng:

a) Nếu có một $\Delta_k > 0$ mà tất cả $z_{jk} \le 0$ $\forall j \in J_0$ thì kết luận hàm mục tiêu giảm vô hạn trên miền ràng buộc. Bài toán không có lời giải hữu hạn. Thuật toán kết thúc.

b) $\forall k \notin J_0$ mà $\Delta_k > 0$ đều tồn tại ít nhất một hệ số $z_{jk}>0$ thì chuyển sang bước 3

Bước 3: Xác định cột xoay, dòng xoay, phần tử trục

- Chọn chỉ số $s \notin J_0 : \Delta_s = \max\{\Delta_k > 0, k \notin J_0\}$, đánh dấu ***cột s*** là ***cột xoay***

- Tìm chỉ số r đạt min: $\theta = \dfrac{x_r^0}{z_{rs}} = \min\left\{\dfrac{x_j^0}{z_{js}}, z_{js} > 0\right\}$, đánh dấu hàng r là hàng xoay.

Bước 4: Tính các $x_j^1, f(x^1), \Delta_k^1, z_{jk}^1$ trong cơ sở mới $J^1 = (J_0 \setminus r) \cup s$ theo các công thức trên. Ghi nhận các kết quả trong một bảng mới. Quay trở lại bước 1.

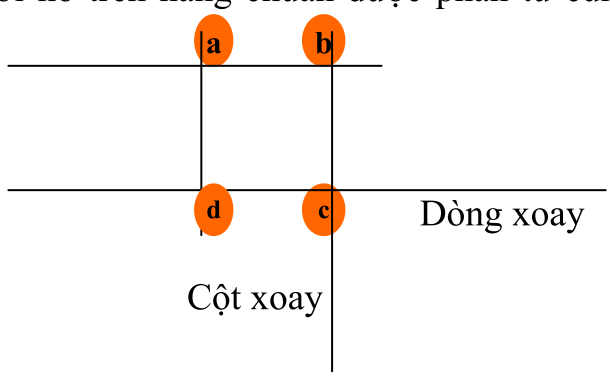
- Để nhận được bảng đơn hình mới từ bảng đơn hình cũ ta làm như sau:

+ Thay A_r bằng A_s, c_r bằng c_s.

+ Chia các phần tử trên hàng xoay (hàng r) cho phần tử trục z_{rs} ta được hàng r mới gọi là hàng chuẩn.

+ Mỗi phần tử khác ngoài hàng xoay trừ đi tích của phần tử cùng hàng với nó trên cột xoay với phần tử cùng cột với nó trên hàng chuẩn được phần tử cùng vị trí trong bảng đơn hình mới.

$$a' = a - \frac{bd}{c}$$



1.2.5. Tính hữu hạn của thuật toán đơn hình

Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính có phương án và không suy biến thì sau hữu hạn bước lặp theo thủ tục đơn hình ta sẽ tìm thấy phương án tối ưu hoặc phát hiện ra bài toán có hàm mục tiêu giảm vô hạn hay bài toán không có lời giải hữu hạn.

Thật vậy, vì bài toán không suy biến nên $x_j^0 > 0 \forall j \in J$ nên $\theta = \dfrac{x_r^0}{z_{rs}} > 0$ suy ra $x^1 \neq x^0$, $f(x^1)<f(x^0)$, nghĩa là x^1 thực sự tốt hơn x^0. Sau mỗi bước lặp, nếu không xảy ra trường hợp hàm mục tiêu giảm vô hạn thì ta tìm được một phương án mới thực sự tốt hơn phương án cũ, tức là không bao giờ trở lại phương án đã đi qua. Vì số phương án cực biên là hữu hạn nên sau hữu hạn bước lặp ta phải tìm được phương án cực biên tối ưu.

1.3. Phương pháp tìm phương án cực biên xuất phát

1.3.1. Nội dung phương pháp:

Xây dựng bài toán mới là bài toán biến giả hay bài toán "M" từ bài toán đang xét. Bài toán "M " có ngay phương án cực biên xuất phát và có đủ điều kiện áp dụng thuật toán đơn hình để giải, đồng thời từ kết quả của bài toán "M" đưa ra được kết luận cho bài toán đang xét.

1.3.2. Xây dựng bài toán "M"

Xét bài toán chính tắc:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

với điều kiện
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1,m} \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,n} \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Bài toán này được gọi là bài toán đầu. Gỉa thiết $b_i \ge 0$ ($i = \overline{1,m}$) và ma trận các hệ số trong hệ ràng buộc $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ không chứa véc tơ đơn vị nào.Bài toán "M" được xây dựng như sau:

Thêm vào vế trái của phương trình thứ i ($i = \overline{1,m}$) trong hệ ràng buộc (I) một biến giả $x_{n+i} \ge 0 (i = \overline{1,m})$. Hệ số của các biến giả này trên hàm mục tiêu đều bằng M, với M là số dương lớn tùy ý (M>>0), bài toán "M" có dạng:

$$f(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M\sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \min$$

Với điều kiện: $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \,(i = \overline{1,m}) \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,n}) \end{cases}$

Bài tóan "M" có ngay phương án cực biên xuất phát:

$\overline{x}^0 = (0;0;....;0;b_1;b_2;.....b_m)$ với cơ sở J_0 là: $E_m = (A_{n+1}; A_{n+2};....;A_{n+m})$;

$J_0 = \{n+1; n+2; ....;n+m\}$

Do vậy áp dụng được thuật toán đơn hình để giải bài toán "M".

Từ cách xây dựng bài toán "M" như trên ta thấy:

Nếu $\overline{x}^0 = (x_1;x_2;.....x_n;0;0;....;0)$ là phương án của bài toán "M" thì $x = (x_1;x_2;.....x_n)$ là phương án của bài toán ban đầu và ngược lại, đồng thời $f(x) = f(\overline{x})$.

1.3.3. Mối quan hệ giữa bài toán "M" và bài toán ban đầu

- *Nếu bài toán "M" có: $\overline{x}^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, 0, 0, ..., 0\right)$ là phương án tối ưu thì bài toán ban đầu có $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$ là phương án tối ưu và $f(\overline{x}^*) = f(x^*)$.*
- *Nếu bài toán "M" có $\overline{x}^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_{n+m}^*\right)$ trong đó tồn tại ít nhất một $x_{n+i}^* > 0 \,(i = \overline{1,m})$ thì bài toán ban đầu không có phương án tối ưu (bài toán không giải được.*
- *Nếu bài toán "M" vô nghiệm thì bài toán ban đầu cũng vô nghiệm.*

<u>Chú ý:</u>

- Nếu bài toán ban đầu có nghiệm x^* thì nghiệm này chỉ có thể nhận được sau ít nhất m + 1 bảng đơn hình.
- Nếu ma trận hệ số $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ đã chứa m_1 véc tơ đơn vị ($m_1 < m$) thì khi xây dựng bài toán "M" chỉ cần thêm $m - m_1$ biến giả.
- Nếu trong quá trình tính toán một biến giả $x_{n+i} \,(i = \overline{1,m})$ được đưa ra khỏi cơ sở thì sẽ không thể vào cơ sở được nữa. Do vậy việc tính toán trong bảng đơn hình tiếp theo đối với cột $A_{n+i} \,(i = \overline{1,m})$ là không cần thiết (***chỉ đối với biến giả***).

1.4. Bài tập mẫu

Bài 1: $F(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + 4x_6 \Rightarrow MIN$

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 6 \\ x_2 - x_4 + x_5 + x_6 = 3 \\ x_1 - 4x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_1 >= 0,\ x_2 >= 0,\ x_3 >= 0,\ x_4 >= 0,\ x_5 >= 0,\ x_6 >= 0 \end{cases}$$

Ñaây laø baøi toaùn quy hoaïch tuyeán tính daïng chuaån, ta coù ngay phöông aùn cöïc bieân $x^0 = (5,0,6,0,0,3)$ vôùi cô sôû A_3, A_6, A_1. Töø ñoù ta coù baûng ñôn hình xuaát phaùt nhö sau:

Hệ số	Cơ sở	P.a	2	-1	3	2	1	4	θ
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
3	A_3	6	0	2	1	2	**3**	0	2
4	A_6	3	0	1	0	-1	1	1	3
2	A_1	5	1	0	0	-4	2	0	5/2
	F(x)	40	0	11	0	-8	**16**	0	

Do coøn toàn taïi giaù trò Delta lôùn hôn 0 neân chöa coù phöông aùn toái öu ta caàn tìm bieán ñöa vaøo
Coät coù giaù trò lôùn nhaát öùng vôùi A5.Vaäy bieán ñöa vaøo laø A5
Haøng coù giaù trò θ nhoû nhaát öùng vôùi coät ñoù laø haøng 1

Hệ số	Cơ sở	P.a	2	-1	3	2	1	4	θ
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
1	A_5	2	0	**2/3**	1/3	2/3	1	0	3
4	A_6	1	0	1/3	-1/3	-5/3	0	1	3
2	A_1	1	1	-4/3	-2/3	-16/3	0	0	-
	F(x)	8	0	**1/3**	-16/3	-56/3	0	0	

Do coøn toàn taïi giaù trò Delta lôùn hôn 0 neân chöa coù phöông aùn toái öu ta caàn tìm bieán ñöa vaøo
Coät coù giaù trò lôùn nhaát öùng vôùi A2.Vaäy bieán ñöa vaøo laø A2
Haøng coù giaù trò θ nhoû nhaát öùng vôùi coät ñoù laø haøng 1

Hệ số	Cơ sở	P.a	2	-1	3	2	1	4	θ
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
-1	A_2	3	0	1	1/2	1	3/2	0	-

4	**A_6**	0	0	0	-1/2	-2	-1/2	1	-
2	**A_1**	5	1	0	0	-4	2	0	-
	F(x)	7	0	0	-11/2	-19	-1/2	0	

Phöông aùn toái öu cuûa baøi toaùn laø: (5,3,0,0,0,0)
Giaù trò haøm muïc tieâu ñaït ñöôïc laø: F(x) = 7

Bài 2: $F(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + 4x_6 \Rightarrow MIN$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 = 6 \\ x_2 - x_4 + x_5 = 3 \\ -x_1 + 3x_4 + 2x_5 \leq 5 \\ x_1 >= 0, x_2 >= 0, x_3 >= 0, x_4 >= 0, x_5 >= 0, x_6 >= 0 \end{cases}$$

Chuyển về dạng chính tắc:

$F(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + 4x_6 \Rightarrow MIN$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 = 6 \\ x_2 - x_4 + x_5 = 3 \\ -x_1 + 3x_4 + 2x_5 + x_7 = 5 \\ x_7 \text{ là biến phụ} \\ x_1 >= 0, x_2 >= 0, x_3 >= 0, x_4 >= 0, x_5 >= 0, x_6 >= 0, x_7 >= 0 \end{cases}$$

Đây là bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn, ta có ngay phương án cực biên $x^0 = (0,3,0,0,0,6,5)$ với cơ sở A_6, A_2, A_7. Từ đó ta có bảng đơn hình xuất phát như sau:

Hệ số	**Cơ sở**	**P.a**	**2**	**-1**	**3**	**2**	**1**	**4**	**0**	θ
			A_1	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**	**A_7**	
4	**A_6**	6	2	0	1	2	**3**	1	0	2
-1	**A_2**	3	0	1	0	-1	1	0	0	3
0	**A_7**	5	-1	0	0	3	2	0	1	5/2
	F(x)	21	6	0	1	7	**10**	0	0	

Do còn tồn tại giá trị Delta lớn hơn 0 nên chưa có phương án tối ưu ta cần tìm biến đưa vào

Cột có giá trị lớn nhất ứng với A_5.Vậy biến đưa vào là A_5

Hàng có giá trị θ nhỏ nhất ứng với cột đó là hàng 1

Hệ số	**Cơ sở**	**P.a**	**2**	**-1**	**3**	**2**	**1**	**4**	**0**	θ
			A_1	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**	**A_7**	
1	**A_5**	2	2/3	0	1/3	2/3	1	1/3	0	3
-1	**A_2**	1	-2/3	1	-1/3	-5/3	0	-1/3	0	-
0	**A_7**	1	-7/3	0	-2/3	**5/3**	0	-2/3	1	3/5
	F(x)	1	-2/3	0	-7/3	**1/3**	0	-10/3	0	

Do còn tồn tại giá trị Delta lớn hơn 0 nên chưa có phương án tối ưu ta cần tìm biến đưa vào

Cột có giá trị lớn nhất ứng với A_4.Vậy biến đưa vào là A_4

Hàng có giá trị θ nhỏ nhất ứng với cột đó là hàng 3

Hệ	**Cơ**	**P.a**	**2**	**-1**	**3**	**2**	**1**	**4**	**0**	θ

số	sở		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
1	A_5	8/5	8/5	0	3/5	0	1	3/5	-2/5	-
-1	A_2	2	-3	1	-1	0	0	-1	1	-
2	A_4	3/5	-7/5	0	-2/5	1	0	-2/5	3/5	-
	F(x)	4/5	-1/5	0	-11/5	0	0	-16/5	-1/5	

Phương án tối ưu của bài toán là: (0,2,0,3/5,8/5,0,0)

Giá trị hàm mục tiêu đạt được là: F(x) = 4/5

Bài 3: $F(x) = x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 \Rightarrow MIN$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 7 \\ x_1 >= 0,\ x_2 >= 0,\ x_3 >= 0,\ x_4 >= 0,\ x_5 >= 0,\ x_6 >= 0 \end{cases}$$

Vì bài toán chưa ở dạng chuẩn nên ta đưa vào hai biến giả x_7, x_8. Khi đó bài toán "M" có dạng: $F(x) = x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 + Mx_7 + Mx_8 \Rightarrow MIN$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 + x_7 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_4 + 2x_5 + x_8 = 7 \\ x_7,\ x_8 \text{ là biến giả} \\ x_1 >= 0,\ x_2 >= 0,\ x_3 >= 0,\ x_4 >= 0,\ x_5 >= 0,\ x_6 >= 0\ x_7 >= 0,\ x_8 >= 0 \end{cases}$$

Bài toán có ngay phương án cực biên $x^0 = (0,0,0,0,0,6,4,7)$ với cơ sở A_6, A_7, A_8. Từ đó ta có bảng đơn hình xuất phát như sau:

Hệ số	Cơ sở	P.a	1	-1	3	2	1	2	M	M	θ
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	
2	A_6	6	2	0	1	2	3	1	0	0	-
M	A_7	4	2	1	-2	-1	1	0	1	0	4
M	A_8	7	1	**3**	0	3	2	0	0	1	7/3
	F(x)	12 +11M	3 +3M	**1 +4M**	-1 -2M	2 +2M	5 +3M	0	0	0	

Do còn tồn tại giá trị Delta lớn hơn 0 nên chưa có phương án tối ưu ta cần tìm biến đưa vào

Cột có giá trị lớn nhất ứng với A_2.Vậy biến đưa vào là A_2

Hàng có giá trị θ nhỏ nhất ứng với cột đó là hàng 3

Hệ số	Cơ sở	P.a	1	-1	3	2	1	2	M	M	θ
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	
2	A_6	6	2	0	1	2	3	1	0		3
M	A_7	5/3	**5/3**	0	-2	-2	1/3	0	1		1
-1	A_2	7/3	1/3	1	0	1	2/3	0	0		7
	F(x)	29/3 +5/3M	**8/3 +5/3M**	0	-1 -2M	1 -2M	13/3 +1/3M	0	0		

Do còn tồn tại giá trị Delta lớn hơn 0 nên chưa có phương án tối ưu ta cần tìm biến đưa vào

Cột có giá trị lớn nhất ứng với A_1.Vậy biến đưa vào là A_1

Hàng có giá trị θ nhỏ nhất ứng với cột đó là hàng 2

Hệ số	**Cơ sở**	**P.a**	**1**	**-1**	**3**	**2**	**1**	**2**	M	M	θ
			A_1	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**	**A_7**	**A_8**	
2	**A_6**	4	0	0	17/5	**22/5**	13/5	1			10/11
1	**A_1**	1	1	0	-6/5	-6/5	1/5	0			-
-1	**A_2**	2	0	1	2/5	7/5	3/5	0			10/7
	F(x)	7	0	0	11/5	**21/5**	19/5	0			

Do còn tồn tại giá trị Delta lớn hơn 0 nên chưa có phương án tối ưu ta cần tìm biến đưa vào

Cột có giá trị lớn nhất ứng với A_4.Vậy biến đưa vào là A_4

Hàng có giá trị θ nhỏ nhất ứng với cột đó là hàng 1

Hệ số	**Cơ sở**	**P.a**	**1**	**-1**	**3**	**2**	**1**	**2**	M	M	θ
			A_1	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**	**A_7**	**A_8**	
2	**A_4**	10/11	0	0	17/22	1	**13/22**	5/22			20/13
1	**A_1**	23/11	1	0	-3/11	0	10/11	3/11			23/10
-1	**A_2**	8/11	0	1	-15/22	0	-5/22	-7/22			-
	F(x)	35/11	0	0	-23/22	0	**29/22**	-21/22			

Do còn tồn tại giá trị Delta lớn hơn 0 nên chưa có phương án tối ưu ta cần tìm biến đưa vào

Cột có giá trị lớn nhất ứng với A_5.Vậy biến đưa vào là A_5

Hàng có giá trị θ nhỏ nhất ứng với cột đó là hàng 1

Hệ số	**Cơ sở**	**P.a**	**1**	**-1**	**3**	**2**	**1**	**2**	M	M	θ
			A_1	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**	**A_7**	**A_8**	
1	**A_5**	20/13	0	0	17/13	22/13	1	5/13			-
1	**A_1**	9/13	1	0	-19/13	-20/13	0	-1/13			-
-1	**A_2**	14/13	0	1	-5/13	5/13	0	-3/13			-
	F(x)	15/13	0	0	-36/13	-29/13	0	-19/13			

Phương án tối ưu của bài toán mở rộng là: (9/13,14/13,0,0,20/13,0,0,0)

Do đó phương án tối ưu của bài toán ban đầu là: (9/13,14/13,0,0,20/13,0)

Giá trị hàm mục tiêu đạt được là: F(x) = 15/13

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. Lập bài toán QHTT

Bài 1. Xí nghiệp sản xuất giấy có 3 phân xưởng. Do trang bị kỹ thuật khác nhau nên mức hao phí tre gỗ, axít để sản xuất một tấn giấy thành phẩm cũng khác nhau. Mức hao phí được cho trong bảng dưới đây:

	Mức hao phí nguyên liệu cho một tấn giấy		
Nguyên liệu	P.Xưởng I	P.Xưởng II	P.Xưởng III
Tre gỗ	1,4 tấn	1,3	1,2
Axít	0,1	0,12	0,15

Số lượng tre gỗ có trong năm là 1.500.000 tấn, Axít là 100.000 tấn.

Hãy lập kế hoạch sản xuất sao cho tổng số giấy sản xuất trong năm của xí nghiệp là nhiều nhất?

Bài 2. Một xí nghiệp có thể sản xuất bốn loại mặt hàng xuất khẩu H1, H2, H3, H4. Để sản xuất 4 loại mặt hàng này, xí nghiệp sử dụng hai loại nguyên liệu N1, N2. Số nguyên liệu tối đa mà xí nghiệp huy động được tương ứng là 600 kg và 800 kg. Mức tiêu hao mỗi loại nguyên liệu để sản xuất một mặt hàng và lợi nhuận thu được cho trong bảng sau:

Định mức tiêu hao nguyên liệu và lợi nhuận	H1	H2	H3	H4
N1	0,5	0,2	0,3	0,4
N2	0,1	0,4	0,2	0,5
Lợi nhuận	0,8	0,3	0,5	0,4

Lập mô hình sao cho xí nghiệp sản xuất đạt lợi nhuận cao nhất?

Bài 3. Một cơ sở dự định sản xuất tối đa trong một ngày 500 ổ bánh mì dài và 500 ổ bánh mì tròn, muốn đạt lợi nhuận nhiều nhất, với những điều kiện như sau:

- Gía bán một ổ bánh mì dài làm từ 400g bột là 325 đồng, một ổ bánh mì tròn làm từ 250g bột là 220 đồng.
- Số lượng bột được cung cấp tối đa trong ngày là 225 kg với giá mỗi kg là 300 đồng.

- Lò nướng bánh cho phép nướng 75 ổ bánh mì dài hay 100 ổ bánh mì tròn trong một giờ nhưng không thể nướng hai loại cùng một lúc. Lò nướng hoạt động tối đa 8 giờ trong một ngày.

Hãy lập mô hình cho bài toán nêu trên?

Bài 4. Ba xí nghiệp A, B, C cùng có thể sản xuất áo vét và quần. Khả năng sản xuất của môic xí nghiệp như sau: Khi đầu tư 1000 USD vào xí nghiệp A thì thu được 35 áo vét và 45 quần; vào xí nghiệp B thì thu được 40 áo vét và 42 quần; vào xí nghiệp C thì thu được 43 áo vét và 30 quần. Lượng vải và giờ công sản xuất được cho trong bảng sau:

Xí nghiệp	A		B		C	
	vải/giờ		vải/giờ		vải/giờ	
1 áo vét	3,5m	20giờ	4m	16giờ	3,8m	18giờ
1 quần	2,8m	10giờ	2,6m	12giờ	2,5m	15giờ

Tổng số vải huy động được là 10000m. Tổng số giờ công huy động được là 52000 giờ. Theo hợp đồng thì tối thiểu phải có 1500 bộ quần áo, nếu lẻ bộ thì quần là dễ bán

Hãy lập kế hoạch đầu tư vào mỗi xí nghiệp bao nhiêu vốn để:

- Hoàn thành hợp đồng.
- Không khó khăn về tiêu thụ.
- Không bị động về vải và giờ công.
- Tổng số vốn đầu tư là nhỏ nhất.

Bài 5. Một nhà máy cán thép có thể sản xuất hai loại sản phẩm: thép tấm và thép cuộn. Nếu chỉ sản xuất một loại sản phẩm thì nhà máy chỉ có thể sản xuất 200 tấn thép tấm hoặc 140 tấn thép cuộn trong một giờ. Lợi nhuận thu được khi bán một tấn thép tấm là 25 USD, một tấn thép cuộn là 30 USD. Nhà máy làm việc 40 giờ trong một tuần và thị trường tiêu thụ tối đa là 6000 tấn thép tấm và 4000 tấn thép cuộn. Nhà máy cần sản xuất mỗi loại sản phẩm là bao nhiêu trong một tuần để lợi nhuận thu được là cao nhất?

2. Chuyển bài toán về dạng chính tắc

Bài 1. $-5x_1 - 4x_2 - 3x_3 \to \min$

với điều kiện $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 8 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$

Bài 2. $2x_1 - x_2 \to \max$

với điều kiện $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \ge 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}$

Bài 3. $2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \to \max$

với điều kiện $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 \le 3 \\ x_1, x_2, x_4 \ge 0 \end{cases}$

Bài 4. $x_1 - 2x_2 - x_3 \to \min$

với điều kiện $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \le 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ x_2 + x_3 \le 5 \\ 2x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}$

Bài 5. $-5x_1 - 2x_2 - 10x_3/3 \to \min$

với điều kiện $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \ge 46 \\ 4x_1 + 2x_3 + 3x_5 \le 38 \\ 3x_1 + x_3 \le 21 \\ x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}$

3. Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình

Bài 1: $f(x) = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 \to Min$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + 6x_6 = 9 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2 \\ x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6 \\ x_j \ge 0 \forall j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Bài 2: $f(x) = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to Min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 5x_4 + x_5 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ x_j \ge 0 \forall j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Bài 3: $f(x) = x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 \to Min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 + 7x_5 = 8 \\ x_3 + 5x_4 + x_5 \le 7 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 - 2x_5 = 3 \\ x_j \ge 0 \forall j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Bài 4:

$F(x) = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \Rightarrow MIN$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 6 \\ -x_1 - x_4 + x_6 = -3 \\ 4x_1 + x_2 - x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, \\ x_5 \ge 0, x_6 \ge 0 \end{cases}$$

Bài 5: $f(x) = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to Min$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 \le 11 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_4 \ge 8 \\ x_j \ge 0\ (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

Bài 6: $F(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + 4x_6 \Rightarrow MIN$

$$\begin{cases} x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 = 6 \\ x_2 - x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 - 4x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, \\ x_5 \ge 0, x_6 \ge 0 \end{cases}$$

ĐS: (1,1,0,0,2,0)

Bài 7: $F(x) = 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_6 \Rightarrow MIN$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_5 = 8 \\ x_1 + 3x_3 - x_5 + x_6 = 9 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 3 \\ x_1 >=0,\ x_2 >=0,\ x_3 >=0,\ x_4 >=0,\ x_5 >=0,\ x_6 >=0 \end{cases}$$

ĐS: (0,13/2,3/2,0,0,9/2)

Bài 8: $F(x) = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 \Rightarrow MIN$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_3 + x_5 + 4x_6 = 7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_6 = 9 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 5 \\ x_1 >=0,\ x_2 >=0,\ x_3 >=0,\ x_4 >=0,\ x_5 >=0,\ x_6 >=0 \end{cases}$$

ĐS: (7/2,11/2,0,3/2,0,0)

Bài 9: $F(x) = x_1 - x_2 - x_3 + x_5 + 3x_6 \Rightarrow MIN$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_5 + 3x_6 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_4 + x_6 = -8 \\ x_1 + x_3 + 3x_6 = 6 \\ x_1 >=0,\ x_2 >=0,\ x_3 >=0,\ x_4 >=0,\ x_5 >=0,\ x_6 >=0 \end{cases}$$

Bài 10: $F(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 \Rightarrow MIN$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 5 \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 3 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 2x_6 = 8 \\ x_1 >=0,\ x_2 >=0,\ x_3 >=0,\ x_4 >=0,\ x_5 >=0,\ x_6 >=0 \end{cases}$$

(0,23/5,2/5,0,0,19/5,0,0)

Bài 11: $F(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 \Rightarrow MIN$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 5x_1 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 >=0,\ x_2 >=0,\ x_3 >=0,\ x_4 >=0 \end{cases}$$

(17/22,23/22,25/22,0)

Bài 12: $F(x) = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \Rightarrow MIN$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 >=0,\ x_2 >=0,\ x_3 >=0,\ x_4 >=0 \end{cases}$$

(VN)

Chương 2. BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

2.1. Bài toán gốc và cách thành lập bài toán đối ngẫu

2.1.1. Định nghĩa

Định nghĩa 1: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1,m} \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,n} \end{cases} \qquad (I)$$

Ta xây dựng bài toán quy hoạch tuyến tính khác có dạng, kí hiệu là $(\tilde{I})$ như sau:

$$\tilde{f}(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i \leq c_j, j = \overline{1,n} \\ y_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,m} \end{cases} \qquad (\tilde{I})$$

Bài toán $(\tilde{I})$ được gọi là ***bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu*** của bài toán (I). Ta cũng chứng minh được bài toán (I) là bài toán đối ngẫu của bài toán $(\tilde{I})$, do vậy cặp bài toán (I) và $(\tilde{I})$ được gọi là ***cặp bài toán đối ngẫu***.

Định nghĩa 2 : Ta gọi hai ràng buộc bất dẳng thức (kể cả ràng buộc về dấu) trong hai bài toán cùng tương ứng với một chỉ số là một ***cặp ràng buộc đối ngẫu.***

Như vậy, ta có n + m cặp ràng buộc đối ngẫu:

- $x_j \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i \leq c_j, \quad j = \overline{1,n}$
- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \Leftrightarrow y_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1,m}$

Từ quan hệ giữa hai bài toán, ta có những nguyên tắc thành lập bài toán đối ngẫu như sau :

+) Nếu $f(x) \to \min$ thì $\tilde{f}(y) \to Max$ và nếu $f(x) \to Max$ thì $\tilde{f}(y) \to Min$.

+) Số ràng buộc trong bài toán này bằng số biến trong bài toán kia

+) Hệ số hàm mục tiêu trong bài toán này là vế phải hệ ràng buộc trong bài toán kia.

+) Ma trận hệ số trong hai bài toán là chuyển vị của nhau.

Trên đây là phương pháp xác định bài toán đối ngẫu của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc, còn đối với bài toán quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát thì ta làm thế nào?

Đối với bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát, ta đưa bài toán về dạng chính tắc, xây dựng bài toán đối ngẫu của bài toán này và gọi nó là bài toán đối ngẫu của bài toán đã cho.

Từ đó ta có các cặp bài toán đối ngẫu như sau:

Bài toán gốc	*Bài toán đối ngẫu*
$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$ $\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, i=\overline{1,m}\\ x_j \geq 0, j=\overline{1,n}\end{cases}$ (II)	$\bar{f}(y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max$ $\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_i \leq c_j, j=\overline{1,n}\\ y_i \geq 0, i=\overline{1,m}\end{cases}$ $(\overline{II})$
$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$ $\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i=\overline{1,m}\\ x_j \leq 0, j=\overline{1,n}\end{cases}$ $(II^{'})$	$\bar{f}(y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max$ $\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_i \geq c_j, j=\overline{1,n}\\ y_i \leq 0, i=\overline{1,m}\end{cases}$ $(\overline{II}^{'})$

Các cặp ràng buộc đối ngẫu của (II) và $(\overline{II})$ là :

- $x_j \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_i \leq c_j, \quad j=\overline{1,n}$
- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \Leftrightarrow y_i \geq 0, \quad i=\overline{1,m}$

của $(II^{'})$ và $(\overline{II}^{'})$ là :

- $x_j \leq 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_i \geq c_j, \quad j=\overline{1,n}$
- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \Leftrightarrow y_i \leq 0, \quad i=\overline{1,m}$

Từ đó ta có phương pháp để xây dựng bài toán đối ngẫu trong trường hợp tổng quát như sau :

2.1.2. Cách thành lập bài toán đối ngẫu

Để xây dựng bài toán đối ngẫu, ta có thể tuân thủ theo các quy tắc được cho trong bảng sau :

Bài toán gốc	*Bài toán đối ngẫu*
$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$	$\tilde{f}(y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i \in I_1$	$y_i \in \mathbb{R}, i \in I_1$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, i \in I_2$	$y_i \geq 0, i \in I_2$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i \in I_3$	$y_i \leq 0, i \in I_3$
$y_j \geq 0, j \in J_1$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i \leq c_j, j \in J_1$
$y_j \leq 0, j \in J_2$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i \geq c_j, j \in J_2$
$y_j \in \mathbb{R}, j \in J_3$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i = c_j, j \in J_3$

2.2. Các tính chất và ứng dụng của cặp bài toán đối ngẫu

2.2.1. Tính chất của cặp bài toán đối ngẫu

Định lý 1: Với mọi cặp phương án x và y của cặp bài toán đối ngẫu, ta có :

- Nếu $f(x) \to \min$ và $\tilde{f}(y) \to Max$ thì $f(x) \geq \tilde{f}(y)$
- Nếu $f(x) \to Max$ và $\tilde{f}(y) \to Min$ thì $f(x) \leq \tilde{f}(y)$

Định lý 2: Nếu x^*, y^* lần lượt là phương án của một cặp bài toán đối ngẫu, thoả mãn $CX^* = Y^*b$ thì x^*, y^* lần lượt là phương án tối ưu của mỗi bài toán.

Như vậy đối với một cặp bài toán đối ngẫu, bao giờ cũng chỉ xảy ra một trong ba trường hợp sau:

+) Nêú hai bài toán cùng không có phương án thì hiển nhiên cả hai bài toán đều không giải được.

+) Nếu cả hai bài toán đều có phương án thì cả hai bài toán đều giải được. Khi đó mọi cặp phương án tối ưu x^*, y^*, ta luôn có

+) Nếu một trong hai bài toán không có phương án thì bài toán còn lại nếu có phương án thì cũng không có phương án tối ưu.

Định lý 3 *(Định lý độ lệch bù)*:

Điều kiện cần và đủ để hai phương án x, y của một cặp bài toán đối ngẫu tối ưu là trong các cặp ràng buộc đối ngẫu nếu một ràng buộc thỏa mãn với dấu bất đẳng thức thực sự (lỏng) thì ràng buộc kia phải thỏa mãn với dấu bằng (chặt) và ngược lại.

Hệ quả: Nếu một ràng buộc là lỏng đối với một phương án tối ưu của bài toán này thì ràng buộc đối ngẫu của nó phải là chặt đối với phương án tối ưu của bài toán kia.

2.2.2. Ứng dụng

Kiểm tra một phương án hay một cặp phương án có tối ưu hay không ?

- Nếu biết cặp phương án x^* và y^*, thì ta chỉ cần kiểm tra điều kiện $f(x^*) = \bar{f}(y^*)$.
- Nếu chỉ biết phương án x^* thì áp dụng định lý độ lệch bù.

Ví dụ 1. Cho bài toán: $f(x) = 7x_1 + 6x_2 - 12x_3 + x_4 \to Max$

với điều kiện $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 8 \\ \qquad 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 \le -1 \\ 2x_1 \qquad - 3x_3 + x_4 = 10 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$

a) Lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và xác định các cặp ràng buộc đối ngẫu.

b) Chứng tỏ $x^0 = (0,6,0,10); y^0 = (-3,0,7)$ là phương án tối ưu của cặp bài toán đối ngẫu.

Ví dụ 2. Cho bài toán : $f(x) = -x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 \to Min$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 \le 13 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + 3x_4 \le 9 \\ -3x_1 - x_2 \quad - x_3 + 2x_4 \le 8 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$$

Dùng tính chất của bài toán đối ngẫu, chứng tỏ bài toán trên giải được.

Ví dụ 3. Cho bài toán : $f(x) = 5x_1 - 9x_2 + 15x_3 + 7x_4 + 6x_5 \to Min$

với điều kiện $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \le 1 \\ 4x_1 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 4 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - 2x_5 \ge -1 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{2,5}, x_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$ và véc tơ $x = (0,1,0,2,0)$

a) Viết bài toán đối ngẫu

b) Phương án x có là phương án tối ưu không ?

Ví dụ 4. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$f(x) = -2x_1 - 6x_2 + 5x_3 - x_4 - 4x_5 \to \max$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 9x_5 = 3 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 6 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Chứng minh $x^* = (0,0,16,31,14)$ là phương án tối ưu ?

2.3. Phương pháp đơn hình đối ngẫu

2.3.1. Cơ sở lý luận

Xét bài toán chính tắc

$$(\mathrm{I})\ \begin{array}{l} f(x) = cx \to Min \\ \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array} \quad \text{ta có bài toán đối ngẫu } (\tilde{I})\ \begin{array}{l} \tilde{f}(y) = yb \to Max \\ \begin{cases} y \in \mathbb{R}^m \\ yA \leq c \end{cases} \end{array}$$

Giả sử x^0 là phương án cực biên ứng với hệ véc tơ cơ sở $\{A_j\}_{j\in J_0}$, A_j là các véc tơ đơn vị, $|J_0| = m$, $B = (A_j)_{j\in J_0} = E$, $c^* = (c_j)_{j\in J_0}$. Xét $y = c^*B^{-1}$

<u>Mệnh đề 1</u>: $y = c^*B^{-1}$ là phương án của bài toán $(\tilde{I})$ khi và chỉ khi $\Delta_k = c^*.z_k - c_k \leq 0 \forall k$

Thật vậy, y là phương án $yA \leq c \Leftrightarrow yA_k \leq c_k \forall k \Leftrightarrow yA_k = c^*B^{-1}A_k = c^*z_k \leq c_k \Leftrightarrow \Delta_k \leq 0 \forall k$

<u>Mệnh đề 2</u>: Nếu tại phương án $y = c^*B^{-1}$ có được $x = B^{-1}b \geq 0$ thì x là phương án tối ưu (và y cũng là phương án tối ưu). Nếu x không thỏa mãn $x = B^{-1}b \geq 0$ thì x được gọi là một giả phương án tối ưu (Vì có $\Delta_k \leq 0 \forall k$)

Rõ ràng $Ax = AB^{-1}b = b$ và $x \geq 0$ nên $x = B^{-1}b$ là phương án. Kết hợp $\Delta_k \leq 0 \forall k$ nên x là phương án tối ưu.

<u>Mệnh đề 3</u>: Kí hiệu w_i là hàng thứ i của ma trận B^{-1}. Với mọi $b \geq 0$, ta có $y' = y - bw_i$ là phương án của $(\tilde{I})$ khi và chỉ khi $\Delta_j \leq b\, z_{ij}\ \forall j$

Thật vậy, $y' = y - bw_i$ là phương án của $(\tilde{I}) \Leftrightarrow y'A = yA - bw_iA \Leftrightarrow y'A_j = yA_j - bw_iA_j$

$\Leftrightarrow y'A_j = yA_j - bw_iA_j \Leftrightarrow c^*B^{-1}A_j - bw_iA_j \leq c_j \Leftrightarrow c^*B^{-1}A_j - b\,z_{ij} \leq c_j \Leftrightarrow \Delta_j + c_j - b\,z_{ij} \leq c_j$

$\Leftrightarrow \Delta_j \leq b\,z_{ij}$

<u>Mệnh đề 4</u>: Nếu tại phương án $y = c^*B^{-1}$ tồn tại $x_s < 0$ (trong $x = B^{-1}b$) và $z_{sj} \geq 0 \forall j$ thì hàm mục tiêu của bài toán $(\tilde{I})$ không bị chặn trên tập phương án, do đó $(\tilde{I})$ không có phương án tối ưu và (I) cũng vô nghiệm.

Thật vậy, Với mọi $b \geq 0$, ta có $y' = y - bw_i$ thỏa mãn $\Delta_j \leq b\, z_{ij} \forall j \Rightarrow y'$ là phương án.

$\Rightarrow \mathring{f}(y') = y'b = yb - bw_i b = \mathring{f}(y) - bw_i b = \mathring{f}(y) - b\, x_i$

Lấy i = r và cho $b \to +\infty \Rightarrow \mathring{f}(y') \to +\infty$. Vậy hàm mục tiêu không bị chặn nên bài toán không giải được.

<u>Mệnh đề 5</u>: Nếu tại phương án $y = c^* B^{-1}$ tồn tại $x_r < 0$ (trong $x = B^{-1}b$) và tồn tại $z_{rj} < 0$ thì xây dựng được phương án mới $y' = y - b_0 w_r$ (trong đó $b_0 = Min\left\{\frac{\Delta_j}{z_{rj}} : z_{rj} < 0\right\} = \frac{\Delta_s}{z_{rs}}$) tốt hơn y.

Thật vậy, Giả sử trong $x = B^{-1}b$ có $x_r < 0$. Ta có y' là phương án $\Leftrightarrow b \geq 0$ và $\Delta_j \leq b\, z_{ij} \forall j \Leftrightarrow 0 \leq b \leq \frac{\Delta_j}{z_{rj}} \forall j = \overline{1,n}; z_{rj} < 0$. Chọn $b_0 = Min\left\{\frac{\Delta_j}{z_{rj}} : z_{rj} < 0\right\} = \frac{\Delta_s}{z_{rs}}$, hiển nhiên $b_0 \geq 0$ và $\mathring{f}(y') = y'b = yb - b_0 x_r \geq yb = \mathring{f}(y) \Rightarrow y'$ tốt hơn y. Đpc/m

Từ các mệnh đề trên ta có nhận xét:

- Nếu có nhiều $x_r < 0$ thì ta có thể chọn $x_r = Min\{x_r < 0\}$. khi đó véc tơ A_r được đưa ra khỏi cơ sở.
- Từ việc chọn $b_0 = Min\left\{\frac{\Delta_j}{z_{rj}} : z_{rj} < 0\right\} = \frac{\Delta_s}{z_{rs}}$ nên ta sẽ đưa A_s vào cơ sở của phương án mới.
- Việc xây dựng các số liệu khác được biến đổi trên bảng đơn hình như cách thông thường.
- Cấu trúc bảng đơn hình đối ngẫu:

Hệ số	Cơ sở	Giả p.a	$c_1\ c_2$ ....c_m.......... c_n
			$A_1 A_2$............A_m.............A_n
c_1	A_1	x_1	1 0.................0....................
c_2	A_2	x_2	0 1................ 0....................
...	...	...	....
c_m	A_m	x_m	0 0............... 1....................
			$\Delta_1\ \Delta_2$...........Δ_m................Δ_n

2.3..2. Thuật toán đơn hình đối ngẫu

1. **Bước xuất phát**: Xuất phát từ hệ m véc tơ độc lập tuyến tính, có $B=\left(A_j\right)_{j\in J_0}=E$, $\left|J_0\right|=m$ sao cho $\underline{\Delta_j \le 0 \forall j}$. Tìm $x=(x^*,0)$, trong đó $x^*=c^*B^{-1}; x_j=0\forall j\notin J_0$

   Lập bảng đơn hình đối ngẫu xuất phát.

2. **Bước 1**: Kiểm tra dấu hiệu tối ưu
   - Nếu $x_j \ge 0\ \forall j\in J_0$ thì x tối ưu
   - Ngược lại, chuyển sang bước 2
3. **Bước 2**: Kiểm tra dấu hiệu bài toán vô nghiệm
   - Nếu $\exists x_j<0$ và $z_{ij}\ge 0\ \forall j=\overline{1,n}$ thì bài toán vô nghiệm.
   - Ngược lại chuyển sang bước 3
4. **Bước 3**: Xây dựng hệ cơ sở mới
   - Nếu $\exists x_j<0$ và $\exists z_{ij}<0$ thì chọn $x_r=Min\left\{x_r<0\right\}$. khi đó véc tơ A_r được đưa ra khỏi cơ sở.
   - Tính $b_0=Min\left\{\frac{\Delta_j}{z_{rj}}: z_{rj}<0\right\}=\frac{\Delta_s}{z_{rs}}$ nên ta sẽ đưa A_s vào cơ sở thay thế cho A_r.
5. **Bước 4**: Xây dựng bảng đơn hình mới (tính toán như trong phương pháp đơn hình)

   Sau đó quay trở lại bước 1.

2.4. Các bài tập mẫu

Bài 1: F(x) = $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ => MIN

Các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 6 \\ -x_1 - x_4 + x_6 = -3 \\ 4x_1 + x_2 - x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_1 >=0,\ x_2 >=0,\ x_3 >=0,\ x_4 >=0,\ x_5 >=0,\ x_6 >=0 \end{cases}$$

Giải: Xét cơ sở A_1, A_5, A_2 gồm các véc tơ đơn vị. Khi đó ma trận B là:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$, ta được giả phương án x = (0, 5, 6, 0, 0, -3)

Bảng đơn hình đối ngẫu là:

Hệ số	Cơ sở	Giả p.a	1	-1	1	1	1	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_3	6	2	0	1	-1	3	0
0	A_6	-3	-1	0	0	-1	0	1
-1	A_2	5	4	1	0	-1	2	0
			-3	0	0	-1	0	0
1	A_3	9	3	0	1	0	3	-1
1	A_4	3	1	0	0	1	0	-1
-1	A_2	8	5	1	0	0	2	-1
		4	-2	0	0	-1	0	0

Tại đây ta có $x \geq 0$ nên nó là phương án tối ưu, với $x = (0, 8, 9, 3, 0, 0)$ và $f_{Min} = 4$

Bài 2: $f(x) = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to Min$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 \leq 11 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_4 \geq 8 \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

Đưa về dạng chính tắc: $f(x) = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to Min$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 11 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_4 - x_6 = 8 \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,6}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 11 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_4 + x_6 = -8 \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,6}) \end{cases}$$

Như vậy ta có hệ véc tơ cơ sở $\{A_3, A_5, A_6\} \Rightarrow x^0 = (0,0,2,0,11,-8)$ (luôn có $\Delta_k \leq 0 \ \forall k$). Ta có bảng đơn hình đối ngẫu:

Hệ số	Cơ sở	Giả p.a	1	-1	1	1	1	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
2	A_3	2	1	0	1	-1	0	0
0	A_5	11	-1	2	0	1	1	0
0	A_6	-8	-2	-1	0	3	0	1
			-2	-3	0	-5	0	0

1	A_3	-2	0	-1/2	1	1/2	0	1/2
0	A_5	15	0	5/2	0	-1/2	1	-1/2
4	A_1	4	1	1/2	0	-3/2	0	-1/2
			0	-2	0	-10	0	-1
3	A_2	4	0	1	-2	-1	0	-1
0	A_5	5	0	0	5	2	1	2
4	A_1	2	1	0	1	-1	0	0
		20	0	0	-4	-8	0	-3

Tại đây ta có $x \geq 0$ nên nó là phương án tối ưu, với $x = (2, 4, 0, 0, 5, 0)$ và $f_{Min} = 20$

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

I. Bài toán đối ngẫu. Tính chất của bài toán đối ngẫu

1. Viết bài toán đối ngẫu và chỉ ra cặp ràng buộc đối ngẫu của bài toán sau:

a. $f(X) = x_1+3x_2-x_3+2x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

b. $f(X) = 2x_1-x_2+5x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 8 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 \le -4 \\ -5x_2 + x_4 \le 12 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

c. $f(x) = x_1+2x_2+3x_3+4x_4 + 5x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -7x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \le 1 \\ 4x_1 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 \ge -2 \\ -2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - x_5 \le -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 \ge 3 \\ x_j \ge 0 (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

d. $f(x) = -4x_1+2x_2-5x_3-x_4+x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 \ge -12 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 23 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_4 - x_5 \le 4 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

e. $f(x) = 2x_1-3x_2+4x_3+5x_4 -x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_5 - x_6 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + 2x_6 \le 8 \\ 3x_1 + 7x_3 - 2x_5 \ge -6 \\ 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 12 \\ -2x_1 + x_4 + 3x_6 \ge 10 \\ x_6 \le 1 \\ x_2, x_4 \ge 0; x_3, x_5 \le 0; x_1, x_6 \in R \end{cases}$$

2. Dùng lý thuyết đối ngẫu chứng tỏ các bài toán sau giải được:

a. $f(X) = 2x_1 +5x_3 +3x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = -5 \\ 3x_2 + 4x_3 - x_4 = -9 \\ 5x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 14 \\ x_1, x_2, x_3 \le 0; \quad x_2, x_5 \in R \end{cases}$$

b. $f(X) = 3x_1 +2x_3 +4x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + 3x_5 \le 16 \\ 4x_3 - 3x_4 + x_5 \ge 9 \\ -x_2 + x_3 - 2x_5 = -11 \\ x_1, x_3, x_5 \ge 0; \quad x_2, x_4 \in R \end{cases}$$

3. Dùng lý thuyết đối ngẫu, chứng minh rằng các bài toán sau không giải được:

a. $f(X) = -2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 30 \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 20 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 12 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

b. $f(X) = 2x_1 + 3x_3 - 4x_3 + x_4 + 2x_5 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_2 + 5x_3 - x_4 - 3x_5 \ge -7 \\ x_2 + 2x_3 - x_5 \le 11 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 + 6x_4 - x_5 \le 0 \\ 3x_3 + 2x_4 = 24 \\ x_4, x_5 \ge 0; \quad x_1, x_2, x_3 \in R \end{cases}$$

4 . Cho bài toán:

$$f(X) = -2x_1 - 6x_2 + 5x_3 - x_4 - 4x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 9x_5 = 3 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 6 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

Áp dụng lý thuyết đối ngẫu, chứng minh rằng $X^* = (0,0,16,31,14)$ là phương án tối ưu củ toán đã cho.

HD: Viết bài toán đối ngẫu và sử dụng định lý độ lệch bù.

5 **.** Biết rằng $X^* = (0,5,0,3)$ là phương án tối ưu của bài toán:

$$f(X) = 10x_1 + 5x_2 + 13x_3 + 16x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \ge 16 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \ge 22 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 \ge 20 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

Tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu:

ĐS: $Y_{opt} = Y = (0, \frac{3}{2}, 2)$.

6 **.** Cho bài toán: $f(X) = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ -x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 \ge 18 \\ -x_2 + 3x_3 + 2x_5 \le 10 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

Tìm phương án tối ưu của bài toán đã cho biết rằng $Y^* = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 0)$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

II. Giải bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu các bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

1) $f(x) = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \to Min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_4 \geq 8 \\ -3x_2 + x_3 - 4x_4 \leq 18 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \geq 20 \\ x_j \geq 0 \; (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

ĐS: x = (0, 0, 12, 4, 0, 22, 0)

2) $f(x) = 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 + x_4 \to Min$

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 + 3x_4 \geq 10 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 7 \\ x_j \geq 0 \; (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

ĐS: Vô nghiệm

3) $f(x) = -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 + 5x_5 \to Min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 6 \\ -2x_2 + x_3 - 4x_5 \leq 15 \\ 5x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \geq 18 \\ x_j \geq 0 \; (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

ĐS: x = (0, 3, 0, 3, 0, 21, 0)

4) $f(x) = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to Min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 21 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \geq 27 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geq 8 \\ x_j \geq 0 \; (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

ĐS: x = (0, 6, 5, 0, 0, 0, 26)

5) $f(x) = 5x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 5x_5 + 2x_6 \to Min$

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_5 - 3x_6 \geq 18 \\ -9x_1 + x_2 - x_5 + 2x_6 = 11 \\ 6x_1 - 5x_3 + x_4 + 3x_5 - 4x_6 = 24 \\ x_j \geq 0 \; (j = \overline{1,6}) \end{cases}$$

ĐS: x = (2, 33, 0, 0, 4, 0, 0)

Chương 3.

BÀI TOÁN VẬN TẢI

5.1. Nội dung và đặc điểm của bài toán

5.1.1. Nội dung bài toán

a) Bài toán

Có m địa điểm $A_1, A_2,...,A_m$ cùng sản xuất một loại hàng hóa với các lượng hàng tương ứng là $a_1, a_2,\dots,a_m$.

Có n nơi tiêu thụ loại hang đó $B_1,B_2,\dots,B_n$ với các yêu cầu tương ứng là $b_1, b_2, \dots,b_n$.

Để đơn giản ta sẽ gọi

A_i: điểm phát i, i=1,…m

B_j: điểm thu j, j=1,…n

Hàng có thể chở từ một điểm phát bất kỳ (i) tới một điểm thu bát kỳ (j).

Ký hiệu:

c_{ij}- chi phí vận chuyển chở một đơn vị hàng từ điểm phát (i) đến điểm thu (j)

x_{ij}- lượng hàng chuyên chở từ i tới j

Bài toán đặt ra là: xác định những đại lượng x_{ij} cho mọi con đường (i;j)sao cho tổng chi phí chuyên chở là nhỏ nhất với giả thiết:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Tức là lượng hàng phát ra bằng đúng lượng hàng yêu cầu ở các điểm thu.

b) Mô hình toán học

Dạng toán học của *bài toán vận tải*

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n} \\ a_i, b_j > 0; \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \end{cases}$$

Bài toán trên được gọi là bài toán cân bằng thu phát.

- Trường hợp $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$. Ta đưa về bài toán cân bằng thu phát bằng cách thêm vào một trạm thu giả B_{n+1} với yêu cầu $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, đồng thời $c_{i\,n+1} = 0$ ($\forall$i). Lượng hàng lấy từ trạm phát A_i cung cấp cho trạm thu giả B_{n+1}, nghĩa là lượng hàng được giữ lại ở trạm phát A_i.
- Trường hợp $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$. Ta đưa về bài toán cân bằng thu phát bằng cách thêm vào một trạm phát giả A_{m+1} với yêu cầu $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, đồng thời $c_{m+1j} = 0$ ($\forall$j). Lượng hàng lấy từ trạm phát giả A_{m+1} cung cấp cho trạm thu B_j, nghĩa là lượng hàng yêu cầu của trạm thu B_j không được thỏa mãn.

c) Bài toán vận tải dạng bảng

Ta đưa bài toán vận tải vào bảng gọi là bảng vận tải.

B_j \ A_i	b_1	b_2	……	b_j	…..	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	……	c_{1j} x_{1j}	…..	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	……	c_{2j} x_{2j}	…..	c_{2n} x_{2n}
….	….	….	….	….	….	….
a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	….	c_{ij} x_{ij}	….	c_{in} x_{in}
….	….	….	….	….	….	….
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	….	c_{mj} x_{mj}	….	c_{mn} x_{mn}

Các khái niệm về bài toán dạng bảng:

+ ô chọn: là ô có lượng hang $x_{ij}>0$, còn gọi là ô sử dụng

+ ô loại: là ô không có hàng, tức là $x_{ij}=0$.

+ Dây chuyền: là một đoạn thẳng hay một dãy liên tiếp các đoạn thẳng gấp khúc mà hai đầu mút là hai ô chỉ nằm trên cùng một hàng hoặc một cột với một ô chọn khác thuộc dây chuyền của bảng vận tải.

+ Chu trình: là một dây chuyền khép kín

Như vậy một hàng hoặc một cột mà chu trình đi qua thì chỉ đi qua hai ô và do đó, số ô ít nhất của một chu trình là 4.

+ Ma trận $X=(x_{ij})_{m\times n}$ thỏa mãn hệ điều kiện ràng buộc được gọi là một phương án của bài toán.

+ Phương án $X=(x_{ij})_{m\times n}$ được gọi là phương án cực biên của bài toán vận tải nếu tập hợp các ô tương ứng với các thành phần dương của nó không tạo thành chu trình.

+ Phương án $X=(x_{ij})_{m\times n}$ được gọi là phương án cực biên không suy biến nếu nó có đúng m + n – 1 ô chọn.

+ Phương án $X=(x_{ij})_{m\times n}$ được gọi là phương án cực biên suy biến nếu nó có ít hơn m + n – 1 ô chọn.

+ Phương án $X=(x_{ij})_{m\times n}$ được gọi là phương án tối ưu (hay là nghiệm) của bài toán nếu nó thỏa mãn điều kiện (5.1), ký hiệu là X^*.

5.1.2. Tính chất chung của bài toán

- Một phương án cực biên có tối đa m + n – 1 thành phần dương.
- Các véc tơ A_j tương ứng với biến x_{ij} có thành phần i và thành phần m+j bằng 1 còn các thành phần còn lại đều bằng 0.
- Bài toán luôn luôn có lời giải.

5.2. Phương pháp thế vị để giải bài toán

5.2.1. Phương pháp tìm phương án cực biên xuất phát

Để xây dựng môt phương án cực biên xuất phát người ta dùng một trong 3 phương pháp sau:

**** Phương pháp góc Tây_Bắc:***

Bước 1: Chọn ô ở dòng 1, cột 1 của bảng vận tải.

Bước 2: Phân lượng hàng h = $\{a_1,b_1\}$ vào ô (1;1).

Bước 3: Đánh dấu hàng (cột), theo đó lượng hàng ở trạm phát (trạm thu) đã hết (đã đủ).

Bước 4: Quay trở về bước 1 thực hiện công việc ở những ô còn lại.

**** Phương pháp chi phí nhỏ nhất::***

Bước 1: Chọn ô có cước phí thấp nhất, giả sử là ô (i;j).

Bước 2: Phân lượng hàng h = $\{a_i,b_j\}$ vào ô (i;j).

Bước 3: Đánh dấu các ô thuộc hàng i nếu trạm phát A_i đã hết hàng hoặc cột j nếu trạm thu B_j đã nhận đủ hàng.

Bước 4: Quay trở lại bước 1 thực hiện công việc ở những ô còn lại.

**** Phương pháp xấp xỉ Fogels:***

- Định nghĩa độ lệch của hàng(cột) là hiệu số giữa ô có cước phí thấp thứ nhì trừ đi ô có cước phí thấp thứ nhất ở hàng (cột) đó.

Bước 1: Chọn hàng hoặc cột có độ lệch lớn nhất

Bước 2: Chọn ô có cước phí thấp nhất thuộc hàng hoặc cột đó, giả sử là ô (i;j).

Bước 3: Phân lượng hàng h = $\{a_i, b_j\}$ vào ô (i;j).

-*Bước 4:* Đánh dấu các ô thuộc hàng i nếu trạm phát A_i đã hết hàng hoặc cột j nếu trạm thu B_j đã nhận đủ hàng.Quay trở về bước 1 tiếp tục thực hiện thuật toán.

5.2.1. Phương pháp thế vị giải bài toán vận tải

a) Tiêu chuẩn tối ưu

Phương án cực biên không suy biến $X=(x_{ij})_{m\times n}$ được gọi là phương án tối ưu khi và chỉ khi tồn tại các số u_i (i=1,..,m) cho các hàng và các số v_j (j= 1,...,n)cho các cột của bảng vận tải sao cho:

$$\begin{cases} u_i + v_j = c_{ij} & (i;j): x_{ij} > 0(*) \\ u_i + v_j \le c_{ij} & (i;j): x_{ij} = 0(**) \end{cases}$$

Phương trình (*) ứng với ô (i;j) là ô chọn.

Phương trình (**) ứng với ô (i;j) là ô loại.

Các số u_i và v_j được gọi là hệ thống thế vị, trong đó u_i được gọi là thế vị hàng, v_j được gọi là thế vị cột.

b) Thuật toán thế vị

Bước 1: Tìm phương án cực biên xuất phát $X^0 = =(x_{ij})_{m\times n}$

Sử dụng một trong 3 phương pháp ở trên. Nếu phương án tìm được là phương án suy biến thì ta bổ sung ô chọn không để được phương án cực biên không suy biến, ô chọn này có vai trò như các ô chọn khác.

Bước 2: Kiểm tra tính tối ưu của phương án.

+ Xây dựng hệ thống thế vị.

Cho u_i một giá trị tùy ý nào đó thì mọi giá trị khác đều xác định được một cách duy nhất do (*) có (n+m) ẩn và và (m+n-1) phương trình độc lập tuyến tính.

+ Tính các số kiểm tra Δ_{ij}

Đặt $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$. Tính các Δ_{ij} ứng với các ô loại.

- Nếu $\Delta_{ij} \le 0$ $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ thì phương án đang xét là phương án tối ưu.
- Nếu $\exists \Delta_{ij} > 0$ $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ thì phương án đang xét chưa tối ưu, chuyển sang bước 3.

Bước 3: Xây dựng phương án mới

+ Chọn ô điều chỉnh:

Ô (r,s) gọi là ô điều chỉnh nếu : $\Delta_{rs} = \max\{\Delta_{ij} > 0 \quad (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})\}$

+ Tìm chu trình điều chỉnh: Là chu trình với ô xuất phát là ô điều chỉnh, các ô còn lại là ô chọn. Gọi V là tập hợp các ô thuộc chu trình điều chỉnh.

+ Đánh dấu các ô của chu trình, bắt đầu từ ô điều chỉnh đánh dấu (+) rồi xen kẽ nhau đánh dấu (-), (+)…. cho đến hết chu trình. Gọi V+ là tập các ô có dấu (+), V- là tập các ô có dấu (-). Khi đó, $V = V^+ \cup V^-$.

+ Xác định lượng hàng điều chỉnh:

$$q = \min\{x_{ij} : (i,j) \in V^-\}, q > 0.$$

+ Điều chỉnh sang phương án mới: $X^1 = (x_{ij})_{m\times n}$ với:

$$\begin{cases} x_{ij} & ,(i,j) \notin V \\ x_{ij} + q & ,(i,j) \in V^+ \\ x_{ij} - q & ,(i,j) \in V^- \end{cases}$$

Gọi X^1 đóng vai trò như X^0 rồi quay lại bước 2 và lặp cho tới khi tìm được phương án tối ưu.

** Chú ý:* - Nếu ô điều chỉnh không duy nhất thì ta xét theo hàng từ trên xuống dưới trong bảng vận tải gặp ô nào trước thì ta chọn ô đó làm ô điều chỉnh.

- Nếu có thể thì ta chọn ô (i_0, j_0) thỏa mãn:

$q.\Delta_{i_0 j_0} = \max\{q.\Delta_{ij}\} > 0$ thì giá trị hàm mục tiêu giảm nhanh hơn.

c) Ví dụ

Ví dụ 1. Giải bài toán vận tải với số liệu cho trong bảng sau:

Thu / Phát	**46**	**45**	**76**	**20**	**52**
79	10	1	5	13	8
50	5	6	10	8	13
60	3	2	8	9	6
50	13	5	7	10	13

Giải:

Bước 1: Tìm phương án cực biên xuất phát:

Sử dụng phương pháp chi phí nhỏ nhất xây dựng phương án cực biên ta được phương án cực biên không suy biến cho trong bảng sau:

Thu / Phát	**46**	**45**	**76**	**20**	**52**
79	10 x	1 $\boxed{45}$	5 $\boxed{34}$	13 x	8 x
50	5 x	6 x	10 x	8 $\boxed{20}$	13 $\boxed{30}$
60	3 $\boxed{46}$	2 x	8 x	9 x	6 $\boxed{14}$
50	13 x	5 x	7 $\boxed{42}$	10 x	13 $\boxed{30}$

Bước 2: Kiểm tra tính tối ưu của phương án:

+ Xây dựng hệ thống thế vị:

Cho $u_4 = 0$, các ô (4,3) ,(4,5) là các ô cơ sở nên tính được $v_3 = 7$ và $v_5 = 13$. Xét cột 3 chẳng hạn ta thấy (1,3) là ô cơ sở nên tính được $u_1 = 7- 5 =2$,… Tiếp tục tính tương tự sẽ xác định được toàn bộ các thế vị hàng và cột như trong bảng dưới:

+ Tính các số kiểm tra:

Tính các Δ_{ij} $(i=\overline{1,4}, j=\overline{1,5})$ ta thấy các $\Delta_{15} = 3 > 0, \Delta_{21} = 5 > 0$ nên phương án đang xét chưa tối ưu, ta chuyển sang bước 3.

Thu / Phát	**46**	**45**	**76**	**20**	**52**	**u_i**
79	10 -2	1 $\boxed{45}$	5 $\boxed{34}$	13 -7	8 3	-2
50	5 5	6 -3	10 -3	8 $\boxed{20}$	13 $\boxed{30}$	0
60	3 $\boxed{46}$	2 -6	8 -8	9 -8	6 $\boxed{14}$	-7
50	13 -3	5 -2	7 $\boxed{42}$	10 -2	13 $\boxed{8}$	0
v_j	10	3	7	8	13	

Bước 3: Xây dựng phương án mới:

+ Chọn ô điều chỉnh:

$\Delta_{21} = \max\{5;3\} = 5$ nên chọn ô (2,1) làm ô điều chỉnh.đánh dấu (+) vào ô điều chỉnh.

+ Chọn chu trình điều chỉnh: Chu trình điều chỉnh như trong bảng sau:

Thu / Phát	**46**	**45**	**76**	**20**	**52**	**u_i**
79	10 / -2	1 / $\boxed{45}$	5 / $\boxed{34}$	13 / -7	8 / 3	-2
50	5 / (+) 5	6 / -3	10 / -3	8 / $\boxed{20}$	13 / (-) $\boxed{30}$	0
60	3 / (-) $\boxed{46}$	2 / -6	8 / -8	9 / -8	6 / (+) $\boxed{14}$	-7
50	13 / -3	5 / -2	7 / $\boxed{42}$	10 / -2	13 / $\boxed{8}$	0
v_j	10	3	7	8	13	

+Xác định lượng hàng điều chỉnh:

$q = \min\{46;30\} = 30$

+ Điều chỉnh sang phương án mới:

$X^1 = (x_{ij}^1)$ theo công thức cho trong bước 3 của thuật toán ta được bảng sau:

Thu / Phát	**46**	**45**	**76**	**20**	**52**	**u_i**
79	10 / -2	1 / $\boxed{45}$	5 / $\boxed{34}$	13 / -2	8 / 3	-2
50	5 / (+) $\boxed{30}$	6 / -8	10 / -8	8 / (-) $\boxed{20}$	13 / -5	-5
60	3 / (-) $\boxed{16}$	2 / -6	8 / -8	9 / -3	6 / (+) $\boxed{44}$	-7
50	13 / -3	5 / -2	7 / $\boxed{42}$	10 / (+) 3	13 / (-) $\boxed{8}$	0
v_j	10	3	7	13	13	

+ Lặp lại quá trình ta được chu trình như bảng trên. Ta được:

$q = \min\{16;20;8\} = 8$

+ Điều chỉnh sang phương án mới X^2 cho trong bảng dưới:

Thu / Phát	46	45	76	20	52	u_i
79	10 -5	1 $\boxed{45}$	5 $\boxed{34}$	13 -5	8 0	-2
50	5 $\boxed{38}$	6 -5	10 -5	8 $\boxed{12}$	13 -5	-2
60	3 $\boxed{8}$	2 -3	8 -5	9 -3	6 $\boxed{52}$	-4
50	13 -6	5 -2	7 $\boxed{42}$	10 $\boxed{8}$	13 -3	0
v_j	7	3	7	10	10	

Ta thấy mọi $\Delta_{ij} \le 0\ (i = \overline{1,4}, j = \overline{1,5})$ nên phương án tương ứng ở bảng trên là tối ưu với giá trị hàm mục tiêu là f* = 45 * 1 + 34 * 5 + 38 * 5 + 12 * 8 + 8*3 + 52 * 6 + 42 * 7 + 8 * 10 = 1211.

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

Giải các bài toán vận tải sau, sử dụng cả 3 phương pháp tìm phương án cực biên xuất phát:

Bài 1

Thu / Phát	60	70	40	30
100	2	1	4	3
80	5	3	2	6
20	6	2	1	5

Đáp số: $X^* = \begin{bmatrix} 60 & 10 & 0 & 30 \\ 0 & 60 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{bmatrix}; f(X^*) = 460$

Bài 2

Thu / Phát	10	10	10	20	20
5	5	1	4	6	7
15	3	4	2	7	8
20	4	3	1	7	9
30	6	5	4	9	11

Đáp số:

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 15 \end{bmatrix}; f(X^*) = 435$$

Bài 3

Thu / Phát	20	100	145	30	150
120	6	3	1	4	5
150	1	2	5	4	3
150	2	4	3	1	6
25	3	1	4	2	7

Đáp số:

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 150 \\ 20 & 75 & 25 & 30 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; f(X^*) = 940$$