共形场论

丽琪

2019 年 7 月 30 日

目录

第一章　预备知识

1.1　对称性

在这里, 我们用 [?] 的观点. 如果我们考虑场 Φ, 那么, 一个**变换**意味着同时对场 Φ 和坐标 x 进行变换:

$$\begin{aligned} &x \mapsto x', \\ &\Phi(x) \mapsto \Phi'(x'). \end{aligned} \tag{1.1}$$

要求变换后的场可以用变换前的场表示:

$$\Phi'(x') = \mathcal{F}(\Phi(x)).$$

我们在这里并不多谈这究竟是主动变换还是被动变换, 这是无意义的. 接下来只用例子说明.

例 1.1　平移变换. 场和坐标的变换规律如下:

$$\begin{aligned} &x \mapsto x + a, \\ &\Phi(x) \mapsto \Phi(x). \end{aligned}$$

其中 $\Phi'(x') = \Phi(x)$. $\Diamond$

例 1.2　Lorentz 变换. 场和坐标的变换规律如下

$$\begin{aligned} &x^\mu \mapsto \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \\ &\Phi(x) \mapsto L_\Lambda \Phi(x) \end{aligned}$$

L_Λ 是 Lorentz 变换的某个表示. 在这里

$$\Phi'(\Lambda x) = L_\Lambda \Phi(x).$$

$\Diamond$

例 1.3　标度变换. 场和坐标的变换规律如下

$$\begin{aligned} x^\mu &\mapsto \lambda x^\mu \\ \Phi(x) &\mapsto \lambda^{-\Delta}\Phi(x) \end{aligned}$$

Δ 是场 Φ 的标度维度. $\Diamond$

我们如下计算作用量 S 的变换 S'

$$\begin{aligned} S' &= \int d^dx \mathcal{L}(\Phi'(x), \partial_\mu \Phi'(x)) \\ &= \int d^dx' \mathcal{L}(\Phi'(x'), \partial'_\mu \Phi'(x')) \\ &= \int d^dx \det(\frac{\partial x'}{\partial x}) \mathcal{L}(\mathcal{F}(\Phi(x)), (\partial x^\nu / \partial x'^\mu)\partial_\nu \mathcal{F}(\Phi(x))) \end{aligned} . \tag{1.2}$$

1.1.1　无穷小变换与 Noether 定理

我们考虑坐标和场的无穷小变化. 假设变换可以用一组参数 $\{\omega_a\}$ 控制, 那么变换(1.1)的无穷小形式就是

$$\begin{aligned} x^\mu &\mapsto x^\mu + \omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \\ \Phi(x) &\mapsto \Phi(x) + \omega_a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a}(x). \end{aligned} \tag{1.3}$$

我们通常定义**生成元** G_a 为

$$\delta\Phi(x) = \Phi'(x) - \Phi(x) \coloneqq -\mathrm{i}\omega_a G_a \Phi(x). \tag{1.4}$$

因此, 只保留 ω_a 的一阶, 根据(1.3)

$$\Phi'(x) = \Phi(x) - \omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a}\partial_\mu \Phi(x) + \omega_a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a}(x)$$

于是我们得到生成元 G_a 的显式表达为

$$\mathrm{i}G_a\Phi = \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a}\partial_\mu \Phi - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a}. \tag{1.5}$$

下面我们介绍 Noether 定理. Noether 定理陈述了作用量的每个连续对称性都存在一个经典的守恒流.

定理 1.1 (Noether) *A continuous off-shell global symmetry of S implies a local on-shell conservation law.*

导出 Noether 定理的较为简洁的方法是, 假设无穷小参数 $\{\omega_a\}$ 是与坐标有关的. 我们先计算无穷小变换(1.3)的 Jacobi 矩阵元 $\partial x'^\mu/\partial x^\nu$:

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu + \partial_\nu(\omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a}).$$

根据反函数定理, 同时得到逆矩阵的元素为

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta^\nu_\mu - \partial_\mu(\omega_a \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a}).$$

由于在 E 无穷小的时候, 我们有公式

$$\det(1+E) \approx 1 + \mathrm{Tr}(E).$$

所以

$$\det(\frac{\partial x'}{\partial x}) = 1 + \partial_\mu(\omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a}).$$

将上面这些结果带入(1.2), 得到

$$\begin{aligned} S' = \int d^d x (1 + \partial_\mu(\omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a}))\times \\ \mathcal{L}(\Phi + \omega_a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a}, (\delta^\nu_\mu - \partial_\mu(\omega_a \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a}))(\partial_\nu \Phi + \partial_\nu(\omega_a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a}))) \end{aligned}$$

于是我们计算 $\delta S = S' - S$. 具体展开的过程我们不列出, 但是, 在化简的过程中, **我们用到了运动方程**

$$(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)})\omega_a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a} = 0.$$

以及用到了变分与求偏导数可以交换次序

$$\partial_\mu(\omega_a \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a}) = \partial_\mu \omega_a \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a} + \omega_a \partial_\mu \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a} = \partial_\mu \omega_a \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a} + \omega_a \frac{\delta}{\delta \omega_a} \delta^\nu_\mu = \partial_\mu \omega_a \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a}.$$

最终我们得到

$$\delta S = -\int d^d x j^\mu_a \partial_\mu \omega_a$$

其中

$$j^\mu_a = (\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\nu \Phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}) \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a}. \tag{1.6}$$

由于系统具有对称性, 所以 $\delta S = 0$. 那么, 进行一次分布积分

$$\int d^d x \partial_\mu j^\mu_a \omega_a = 0$$

于是得到流守恒

$$\partial_\mu j^\mu_a = 0$$

的结论. 进而可以构造守恒荷

$$Q_a = \int d^{d-1} x j^0_a.$$

我们要注意的是, Noether 定理本质上是一个经典的, 在壳的 (我们用到了运动方程) 结果. 在量子场论中, 对应的不在壳的恒等式就是 Ward 恒等式.

注 1.1 其实, 在任何具有连续对称性的理论中, 作用量的变分一定具有形式:

$$\delta S = \int d\mathrm{vol} J^\alpha \partial_\alpha \epsilon.$$

J^α 一定是守恒流. 原因如下

(i.) 当我们取的参数 ϵ 是常数时, 根据对称性的假定, 无论这个常数是多少, 无论运动方程是否被满足, 作用量在对称变换下的变化量都应该是 0. 所以 δS 一定依赖于 ϵ 的导数;

(ii.) 当我们取的 ϵ 不是常数时, 根据最小作用量原理, 我们要求在运动方程被满足时 $\delta S = 0$, 因为运动方程与作用量变分为 0 是等价的. 这等价于说, 我们希望运动方程被满足时有 $\partial_\alpha J^\alpha = 0$, 根据定义, J^α 一定是一个守恒流.

$\Diamond$

1.1.2 Ward 恒等式

在量子场论中, 我们认为的可观测量是关联函数, 而不是作用量 S. 将关联函数定义为 (忽略掉虚数单位 i)

$$\langle \mathcal{O}_1[\Phi(x_1)] \cdots \mathcal{O}_n[\Phi(x_n)] \rangle = \int D[\Phi] \mathcal{O}_1[\Phi(x_1)] \cdots \mathcal{O}_n[\Phi(x_n)] e^{-S} \tag{1.7}$$

我们现在假设, 作用量 S 泛函积分测度 $D[\Phi]$ 在变换(1.1)下的是不变的. 那么, 我们有

$$\begin{aligned} S' &\coloneqq S[\Phi'] = S[\Phi] \\ D[\Phi'] &= D[\Phi] \end{aligned}$$

根据这些不变性, 我们得到如下的等式

$$\begin{aligned} \langle \Phi(x'_1) \cdots \Phi(x'_n) \rangle &= \int D[\Phi] \Phi(x'_1) \cdots \Phi(x'_n) e^{-S} \\ &= \int D[\Phi'] \Phi'(x'_1) \cdots \Phi'(x'_n) e^{-S[\Phi']} \\ &= \int D[\Phi] \mathcal{F}(\Phi(x_1)) \cdots \mathcal{F}(\Phi(x_n)) e^{-S[\Phi]} \\ &= \langle \mathcal{F}(\Phi(x_1)) \cdots \mathcal{F}(\Phi(x_n)) \rangle \end{aligned}$$

因此, 关联函数的变换规律如下

$$\langle\Phi(x_1')\cdots\Phi(x_n')\rangle = \langle\mathcal{F}(\Phi(x_1))\cdots\mathcal{F}(\Phi(x_n))\rangle \tag{1.8}$$

上面的变换规律考虑的是关联函数对坐标变换 $x\mapsto x'$ 的响应, 因为在路径积分中积分变量是场, 因此单纯的场的变换 $\Phi\mapsto\Phi'$ 只是对积分变量的变换, 是不改变积分的值的. 这与作用量 S 的变换规律不同. 因为作用量 S 是一个 Φ 的泛函, 对坐标变换没有响应. 下面我们来看一些例子.

例 1.4 平移不变性.

$$\langle\Phi(x_1+a)\cdots\Phi(x_n+a)\rangle = \langle\Phi(x)\cdots\Phi(x_n)\rangle\,.$$

$\diamondsuit$

例 1.5 Lorentz 不变性.

$$\langle\Phi(\Lambda x_1)\cdots\Phi(\Lambda x_n)\rangle = \langle L_\Lambda\Phi(x_1)\cdots L_\Lambda\Phi(x_n)\rangle$$

$\diamondsuit$

例 1.6 标度不变性.

$$\langle\phi_1(\lambda x_1)\cdots\phi_n(\lambda x_n)\rangle = \lambda^{-\Delta_1}\cdots\lambda^{-\Delta_n}\langle\phi_1(x_1)\cdots\phi_n(x_n)\rangle\,.$$

$\diamondsuit$

现在我们考虑场本身的无穷小变换

$$\Phi'(x) = \Phi(x) - \mathrm{i}\omega_a G_a\Phi(x).$$

和之前一样, 我们假设 $D[\Phi]$ 和 S 在场的变换下不变. 根据关联函数的变换规律(1.8)以及下面的注释, 若将场的乘积 $\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_n)$ 记为 X, 则关联函数 $\langle X\rangle$ 在无穷小变换下是不变的. 所以, 我们可以写成

$$\langle X\rangle = \frac{1}{Z}\int D[\Phi](X+\delta X)\exp(-\{S+\int d^dx\partial_\mu j^\mu_a\omega_a(x)\})$$

上式可以写成

$$\langle \delta X\rangle = \int d^d x \partial_\mu \langle j_a^\mu(x) X\rangle \omega_a(x). \tag{1.9}$$

另一方面, δX 可以计算如下

$$\begin{aligned}\delta X &= -\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n}(\Phi(x_1)\cdots G_a\Phi(x_i)\cdots\Phi(x_n))\omega_a(x_i)\\ &= \mathrm{i}\int d^d x\omega_a(x)\sum_{i=1}^{n}\{\Phi(x_1)\cdots G_a\Phi(x_i)\cdots\Phi(x_n)\}\delta(x-x_i)\end{aligned}$$

为了使等式两边对所有的 $\omega_a(x)$ 都成立, 必须有如下的恒等式成立

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\langle j_a^\mu(x)\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_n)\rangle = -\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n}\delta(x-x_i)\langle\Phi(x_1)\cdots G_a\Phi(x_i)\cdots\Phi(x_n)\rangle \tag{1.10}$$

上面的恒等式被称为 Ward 恒等式.

Ward 恒等式使我们可以将守恒荷

$$Q_a = \int d^{d-1}x j_a^0(x)$$

等同于对称变换的生成元在 Hilbert 空间中的表示. 将 $\Phi(x_2)\cdots\Phi(x_n)$ 记为 Y 并假设 $t = x_1^0$ 与 Y 中所有的时间都不同. 因此, 我们可以选择一个区间 $[t_-, t_+]$, 使得

$$[t_-, t_+]\times\mathbb{R}^{d-1}$$

中只包含 x_1. 将 Ward 恒等式1.10两端对 x 积分, 我们得到

$$\langle Q_a(t_+)\Phi(x_1)Y\rangle - \langle Q_a(t_-)\Phi(x_1)Y\rangle = -\mathrm{i}\langle G_a\Phi(x_1)Y\rangle .$$

因为关联函数是用时序乘积定义的, 不妨设 t 比 Y 中所有的 x_i^0 都大, 再取极限 $t_-\to t_+$, 得到

$$\langle 0\,|\,[Q_a,\Phi(x_1)]Y\,|\,0\rangle = -\mathrm{i}\langle 0\,|\,G_a\Phi(x_1)Y\,|\,0\rangle$$

对任意的乘积 Y 都成立. 所以我们得到

$$11 \tag{1.11}$$

第二章　共形场论

2.1　为何要学习共形场论?

$$\beta = \frac{\partial g}{\partial \ln(\Lambda)} = \Lambda \frac{\partial g}{\partial \Lambda}$$

β 函数控制了重整化群流的流向. β 函数的不动点, 即耦合常数空间中使得 $\beta(g_*) = 0$ 的那些 g_*. 如果 β 函数为零, 那么耦合常数 g 是关于能标 Λ 是一个常数, 因此是标度不变的. 因此, 一个不动点 g_* 对应的是一个标度不变, 从而是共形不变的量子场论 (4 维时空中尚未发现标度不变但却不是共形不变的量子场论, 但一般的证明不知有没有). 这些不动点对于理解任何量子场论都是至关重要的.

那么, 不动点相关的共形场论是如何控制重整化群流的呢? 我们考虑耦合常数空间中重整化群流不动点的一个邻域. 这个邻域中, 一个特定的方向被称为是稳定或不稳定的, 取决于沿着这方向的一个重整化群流是流向或离开这个点. 一个方向被称为是边缘的, 如果沿着这个方向的重整化群流是不变的. 因此重整化群流的不动点对于量子场论来说是决定性的.

既然我们已经理解了重整化群流, 于是就可以对理论中出现的相互作用进行分类. 相互作用被称为是**相关的**, 如果它们的耦合常数是不稳定的, 并且重整化群流离开不动点, 即, 相关算子的耦合常数在红外时是增长的.

一般来说, 相关的相互作用具有表观发散度 $\Delta < d$. **非相关**的相互作用在红外是不重要的, 表观发散度 $\Delta > d$. 最后, 我们还有**边缘的**相互作用, 边缘相互作用的重整化群流的不动点不是孤立的, 而是一整个共形不变的流形. 边缘相互作用的表观发散度 $\Delta = d$.

最后, 应该能够理解共形场论对于量子场论的重要性. 给定一组场, 能够从它们构造出的相关算子和边缘算子的数目是有限的. 尽管我们从一般的 Lagrangian 以及一般的相互作用, 但只有少数的相互作用在低能时是重要的. 由于 Wilson 理论考虑的是所有可能的 Lagrangian 构成的空间, 我们于是可以将任何量子场论视为相关相互作用对共形场论的微扰. 即, 任何理论都可以视为某些不动点共形场论的微扰.

当然, 不是所有的人都对共形场论本身感兴趣. 许多情况下, 共形场论是研究其他有趣现象的一门工具. 比如, 我们可以考虑一个量子场论最多具有多少对称性. 长久以来, 人们认为具有最大时空对称性的量子场论被认为是共形场论. 如果考虑超对称, 那么具有最大时空对称性的量子场论就是超共形场论. 在 $d = 4$ 的情况, 最简单的超共形场论是 $\mathcal{N} = 4$ 的超 Yang-Mills 理论. 这几乎是过去三十年来最重要的玩具模型. $d = 4, \mathcal{N} = 4$ 的超 Yang-mills 理论最重要的特点是它的 β 函数在任意阶都是 0. 且这是唯一的一个超对称性与共形不变性结合的例子.

共形场论的另一个重要作用是, 可以不用 Lagrangian 就定义一个量子场论. 在原则上, 完全解出一个共形场论根本不需要知道其 Lagrangian, 我们只需要知道粒子谱和三点关联函数. 实际上, 不需要用 Lagrangian 描述的理论是存在的, 例如 $6d(2,0)$ 超共形场论以及它的紧化. 利用共形不变性和相容性条件来求解一个理论的过程被称为 **conformal bootstrap**.

通过 Ads/CFT 对偶, 共形场论为我们提供了对量子引力的最好理解.

共形场论的另一个重要应用是弦论. 我们在弦论中考虑扫过 2 维世界面的 1 维弦. 在这个世界面上, 我们实际上定义了一个共形场论. 通过要求在世界面上的场论是一个共形场论, 我们得到了弦的运动方程–包括 Einstein

的引力场方程. 弦论的动力学通过一个非线性 σ 模型来描述, 这个非线性 σ 模型的微扰论对 ℓ_s/R 进行微扰展开, ℓ_s 是基本弦的长度, R 是背景几何的一个标度, 例如曲率. 利用共形场论的工具, 我们可以将世界面上瞬子的贡献全部相加, 从而在微扰论中完全地解决弦论. 由于 2 维的共形场论是被理解得最透彻的一类共形场论, 所以我们有足够的动机来学习 2 维共形场论.

在本章中, 我们考虑的度规就是通常的 d 维空间的 Euclidean 度规, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. 我们最终得到共形变换的所有形式如下:

$$\begin{aligned}
x'^{\mu} &= x^{\mu} + a^{\mu}, \quad \text{平移} \\
x'^{\mu} &= \alpha x^{\mu}, \quad \text{伸缩} \\
x'^{\mu} &= M^{\mu}_{\nu} x^{\mu}, \quad \text{旋转} \\
x'^{\mu} &= \frac{x^{\mu} - b^{\mu}\mathbf{x}^2}{1 - 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{b}^2\mathbf{x}^2}, \quad \text{SCT}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

b^{μ} 是任意的常数向量.

生成元为

$$\begin{aligned}
P_{\mu} &= -\mathrm{i}\partial_{\mu} \\
D &= -\mathrm{i}x^{\mu}\partial_{\mu} \\
L_{\mu\nu} &= \mathrm{i}(x_{\mu}\partial_{\nu} - x_{\nu}\partial_{\mu}) \\
K_{\mu} &= -\mathrm{i}(2x_{\mu}x^{\nu}\partial_{\nu} - \mathbf{x}^2\partial_{\mu})
\end{aligned} \tag{2.2}$$

上面的生成元满足如下的对易关系, 构成了一个共形代数

$$\begin{aligned}
[D, P_{\mu}] &= \mathrm{i}P_{\mu} \\
[D, K_{\mu}] &= -\mathrm{i}K_{\mu} \\
[K_{\mu}, P_{\nu}] &= 2\mathrm{i}(\eta_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu}) \\
[K_{\rho}, L_{\mu\nu}] &= \mathrm{i}(\eta_{\rho\mu}K_{\nu} - \eta_{\rho\nu}K_{\mu}) \\
[P_{\rho}, L_{\mu\nu}] &= \mathrm{i}(\eta_{\rho\mu}P_{\nu} - \eta_{\rho\nu}P_{\mu}) \\
[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= \mathrm{i}(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho})
\end{aligned} \tag{2.3}$$

将上面的生成元线性组合, 定义下面的生成元

$$
\begin{aligned}
J_{\mu\nu} &= L_{\mu\nu} \\
J_{-1,\mu} &= \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu) \\
J_{-1,0} &= D \\
J_{0,\mu} &= \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu)
\end{aligned}
$$

它们满足对易关系

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \mathrm{i}(\eta_{ad}J_{bc} + \eta_{bc}J_{ad} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac})$$

这说明共形代数与 $\mathrm{SO}(d+1,1)$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{so}(d+1,1)$ 是同构的.

下面我们来构造共形不变量, 即, 在2.1中所有的变换下不变的函数. 平移对称性与旋转对称性告诉我们这函数一定只依赖于 $|x_i - x_j|$. 伸缩不变性告诉我们这函数只依赖于距离的比例

$$\frac{|x_i - x_j|}{x_k - x_l}$$

在特殊共形变化下, x_i 与 x_j 之间的距离变成

$$|x_i' - x_j'| = \frac{|x_i - x_j|}{\sqrt{1 - 2b\cdot x_i + b^2x_i^2}\sqrt{1 - 2b\cdot x_j + b^2x_j^2}}$$

因此不可能构造只与两点或三点有关的共形不变量. 最简单的共形不变量应该是如下的四点函数

$$\frac{|x_1 - x_2||x_3 - x_4|}{|x_1 - x_3||x_2 - x_4|}, \quad \frac{|x_1 - x_2||x_3 - x_4|}{|x_2 - x_3||x_1 - x_4|} \tag{2.4}$$

上面的共性不变量被称为**非调和比**或**交比**.

2.2 经典场论中的共形不变性

如果一个理论的作用量在共形变换下是不变的, 则称该理论在经典层面上具有共形不变性. 通常来说, 标度不变性和 Poincaré 不变性是一般的共

形不变性的结果; 但在某些特定的理论中, 可以从 Poincaré 不变性与标度不变性推出共形不变性.

但我们要知道, 量子层面的共形不变性无法从经典层面的共性不变性推出. 因为, 一个量子场论引入一个标度一定需要一个特定的正规化方案, 这个标度破坏了共形不变性, 除了参数的某些特定的取值处. 这些特定的取值事实上是一个重整化群不动点.

2.2.1 共形代数的表示

给定一个由 ω_g 参数化的无穷小共形变换. 我们要找到一个生成元的矩阵表示, 使得一个场 $\Phi(x)$ 按照如下规律变化

$$\Phi'(x') = (1 - \mathrm{i}\omega_g T_g)\Phi(x).$$

我们最终得到

$$\begin{aligned}
&P_\mu \Phi(x) = -\mathrm{i}\partial_\mu \Phi(x) \\
&L_{\mu\nu}\Phi(x) = \mathrm{i}(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)\Phi(x) + S_{\mu\nu}\Phi(x) \\
&D\Phi(x) = (-\mathrm{i}x^\nu \partial_\nu - \mathrm{i}\Delta)\Phi(x) \\
&K_\mu \Phi(x) = (\kappa_\mu - 2\mathrm{i}x_\mu \Delta x^\nu S_{\mu\nu} - 2\mathrm{i}x_\mu x^\nu \partial_\nu + \mathrm{i}x^2 \partial_\mu)\Phi(x)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

我们还可以从生成元的表示导出有限变换的表示. 我们仅给出标量场的结果, 这里 $S_{\mu\nu} = 0$. 在共形变换 $x \mapsto x'$ 下, 标量场的变化规律为

$$\phi(x) \mapsto \phi'(x') = |\frac{\partial x'}{\partial x}|^{-\Delta/d}\phi(x)$$

$|\partial x'/\partial x|$ 是共形变换的 Jacobian.

2.2.2 能动张量

在任意的坐标变换 $x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon^\mu$ 下, 作用量变化如下

$$\delta S = \int d^d x T^{\mu\nu} \partial_\mu \epsilon_\nu = \frac{1}{2} \int d^d x T^{\mu\nu} (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu)$$

最后一个等号是因为能动张量可以通过添加 Belinfante 项来对称化.

如果变换 $x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon^\mu$ 是共形的, 那么作用量的变化可以写成

$$\delta S = \frac{1}{d} \int d^d x T^\mu_\mu \partial_\rho \epsilon^\rho.$$

如果 T 是无迹的, 那么我们可以推出作用量的变化为 0. 即, 能动张量的无迹性能够推出共形不变性; 但反过来的话, 共形不变性能否推出无迹性的答案要更加微妙.

在某些特定的条件下, 如果系统具有标度不变性, 我们可以将能动张量无迹化, 就像在旋转不变的情况下对能动张量进行对称化一样. 在这种情况下, 共形不变性是 Poincaré 不变性和标度不变性的一个推论. 下面我们讨论的是将能动张量无迹化的手段.

考虑 $d > 2$ 时的一般的标度不变的场论. 无限小的伸缩变换为

$$\begin{aligned} x^\mu &\mapsto (1+\alpha) \\ \Phi(x) &\mapsto (1-\alpha\Delta)\Phi \end{aligned}$$

但是, 上面的方法只适用于 $d > 2$ 的情况. 对于 $d = 2$ 的情况, 我们只知道一些特例. 比如, 由于二维的自由玻色子系统和自由费米子系统的 $\Delta = \frac{1}{2}d - 1 = 0$, 所以这两个系统的能动张量是自动无迹的. 一般情况下, $d = 2$ 时能动张量的无迹性是无法证明的. 所以我们将能动张量无迹作为一个假设. 并且我们将会发现, 这个假设是与其他的现象相容的.

2.3 量子场论中的共形不变性

2.3.1 关联函数

考虑标量场. 根据关联函数的变换规律(1.8), 我们得到两点关联函数在共形变换下的变化规律为

$$\langle\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\rangle = \det(\frac{\partial x'}{\partial x})^{\Delta_1/d}_{x=x_1}\det(\frac{\partial x'}{\partial x})^{\Delta_2/d}_{x=x_2}\langle\phi_1(x_1')\phi_2(x_2')\rangle\,. \tag{2.6}$$

考虑变换为标度变换 $x\mapsto\lambda x$, 得到上式成立当且仅当

$$\langle\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\rangle = \lambda^{\Delta_1+\Delta_2}\langle\phi_1(\lambda x_1)\phi_2(\lambda x_2)\rangle\,.$$

平移不变性和转动不变性要求

$$\langle\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\rangle = f(|x_1-x_2|)\,,$$

其中 $f(x)=\lambda^{\Delta_1+\Delta_2}f(\lambda x)$. 换言之, 两点关联函数的形式一定是

$$\langle\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\rangle = \frac{C_{12}}{|x_1-x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}} \tag{2.7}$$

再将特殊共形变换应用于(2.6). 此时

$$|\frac{\partial x'}{\partial x}| = \frac{1}{(1-2b\cdot x+b^2x^2)^d}$$

等式两边变成

$$\frac{C_{12}}{|x_1-x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}} = \frac{C_{12}}{\gamma_1^{\Delta_1}\gamma_2^{\Delta_2}}\frac{(\gamma_1\gamma_2)^{(\Delta_1+\Delta_2)/2}}{|x_1-x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}}$$

因此, 我们得到, 对于 quasi-primary 场, 二点关联函数仅当他们的标度维数相同时不为零. 即

$$\langle\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\rangle = \begin{cases} C_{12}/|x_1-x_2|^{2\Delta_1}, & \Delta_1=\Delta_2 \\ 0, & \Delta_1\neq\Delta_2 \end{cases} \tag{2.8}$$

利用同样的分析, 还要要求当 $x_{ij} \to \infty$ 时, $\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3) \rangle \to \infty$, 我们得到三点关联函数的表达式

$$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3) \rangle = \frac{C_{123}}{x_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3} x_{23}^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_2} x_{13}^{\Delta_3+\Delta_1-\Delta_2}}. \tag{2.9}$$

但是当 $n \geq 4$ 时, n 点关联函数可以是交比的任意函数.

2.3.2 Ward 恒等式

根据(1.5), 对于平移来说, $\delta x^\mu / \delta\omega^\nu = \delta^\mu_\nu$, 所以平移变换的生成元是

$$P_\nu = -\mathrm{i}\partial_\nu.$$

对于 Lorentz 变换, 坐标变换具有形式

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu \\ &= x^\mu + \omega_{\rho\nu}\eta^{\rho\mu}x^\nu \end{aligned}$$

由于 Lorentz 变换保持度量 $\eta_{\mu\nu}$, 所以 $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$. 坐标在无穷小 Lorentz 变换下的变分为

$$\frac{\delta x^\mu}{\delta\omega_{\rho\nu}} = \frac{1}{2}(\eta^{\rho\mu}x^\nu - \eta^{\nu\mu}x^\rho).$$

Lorentz 变换在场 Φ 上的效应是

$$\mathcal{F}(\Phi) = L_\Lambda\Phi, \qquad L_\Lambda = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{i}\omega_{\rho\nu}S^{\rho\nu}\Phi$$

旋转变换的生成元是

$$L^{\rho\nu} = \mathrm{i}(x^\rho\partial^\nu - x^\nu\partial^\rho) + S^{\rho\nu}$$

平移不变性对应的 Ward 恒等式为

$$\partial_\mu \langle T^\mu_\nu X \rangle = -\sum_i \delta(x - x_i)\frac{\partial}{\partial x_i^\nu}\langle X \rangle. \tag{2.10}$$

其中 X 是 n 个场的乘积.

再考虑转动不变性对应的 Ward 恒等式. 一旦能动张量被对称化, 相应的守恒流的形式为

$$j^{\mu\nu\rho} = T^{\mu\nu}x^\rho - T^{\mu\rho}x^\nu.$$

所以 Ward 恒等式为

$$\partial_\mu \langle (T^{\mu\nu}x^\rho - T^{\mu\rho}x^\nu)X\rangle = \sum_i \delta(x-x_i)[(x_i^\nu\partial_i^\rho - x_i^\rho\partial_i^\nu)\langle X\rangle - \mathrm{i}S_i^{\nu\rho}\langle X\rangle].$$

假定系统还具有平移对称性, 利用第一个 Ward 恒等式(2.10), 我们最终得到转动不变性对应的 Ward 恒等式

$$\langle (T^{\rho\nu} - T^{\nu\rho})X\rangle = -\mathrm{i}\sum_i \delta(x-x_i)S_i^{\nu\rho}\langle X\rangle\,. \tag{2.11}$$

我们再来考虑标度对称性. 通过之前的步骤, 我们已经知道标度不变的守恒流可以写成

$$j_D^\mu = T^\mu_\nu x^\nu.$$

我们证明了 T^μ_ν 总可以进行无迹化. 再根据(2.5), $D = -\mathrm{i}x^\nu\partial_\nu - \mathrm{i}\Delta$, 所以 Ward 恒等式为

$$\partial_\nu \langle T^\mu_\nu x^\nu X\rangle = -\sum_i \delta(x-x_i)\{x_i^\nu \frac{\partial}{\partial x_i^\nu}\langle X\rangle + \Delta_i\langle X\rangle\}$$

再假设平移对称性, 利用(2.10), 最终得到

$$\left\langle T^\mu_\mu X\right\rangle = -\sum_i \delta(x-x_i)\Delta_i\langle X\rangle \tag{2.12}$$

.

2.3.3 2 维时 $T_{\mu\nu}$ 的无迹性

我们将要验证 $d=2$ 时能动张量取迹之后再取平方的真空平均值是 0. 从此可以看出, 我们之前所做的能动张量的无迹的假设是合理的.

考虑新的量
$$S_{\mu\nu\rho\sigma}=\langle T_{\mu\nu}(x)T_{\rho\sigma}(0)\rangle\,.$$

我们先观察 S 的对称性. 很容易得到
$$S_{\mu\nu\rho\sigma}=S_{\nu\mu\rho\sigma}=S_{\mu\nu\sigma\rho}=S_{\nu\mu\sigma\rho}.$$
再根据平移对称性
$$\begin{aligned}S_{\mu\nu\rho\sigma}(\boldsymbol{x})&=\langle T_{\mu\nu}(\boldsymbol{x})T_{\rho\sigma}(0)\rangle\\&=\langle T_{\mu\nu}(0)T_{\rho\sigma}(-\boldsymbol{x})\rangle\\&=\pm\langle T_{\rho\sigma}(-\boldsymbol{x})T_{\mu\nu}(0)\rangle\\&=\pm S_{\rho\sigma\mu\nu}(-\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$
由于标度不变性,
$$S_{\mu\nu\rho\sigma}(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda^{-4}S_{\mu\nu\rho\sigma}(\boldsymbol{x}).$$
上面的变化规律是因为 $d=2$ 时 $T_{\mu\nu}$ 的共形维数是 2.

我们首先考虑 $S_{\mu\nu\rho\sigma}(x)=-S_{\rho\sigma\mu\nu}(-\boldsymbol{x})$ 的情况. 根据之前的各种对称性, 得到 S 的最一般形式
$$S_{\mu\nu\rho\sigma}(\boldsymbol{x})\propto\frac{1}{\boldsymbol{x}^6}(g_{\mu\nu}x_\rho x_\sigma-g_{\rho\sigma}x_\mu x_\nu)$$
在此时,
$$S^{\mu}{}_{\mu}{}^{\rho}{}_{\rho}(\boldsymbol{x})=\left\langle T^{\mu}{}_{\mu}(\boldsymbol{x})T^{\rho}{}_{\rho}(0)\right\rangle=0$$

我们再考虑 $S_{\mu\nu\rho\sigma}(\boldsymbol{x})=S_{\rho\sigma\mu\nu}(-\boldsymbol{x})$ 的情况. 根据对称性, 写出 S 的最一般形式:
$$\begin{aligned}S_{\mu\nu\rho\sigma}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{-4}\{&A_1g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}\boldsymbol{x}^4+A_2(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}+g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})\boldsymbol{x}^4\\&+A_3(g_{\mu\nu}x_\rho x_\sigma+g_{\rho\sigma}x_\mu x_\nu)\boldsymbol{x}^2+A_4x_\mu x_\mu x_\rho x_\sigma\}.\end{aligned}$$
根据能量守恒 $\partial^\mu T_{\mu\nu}=0$, 得到
$$\partial^\mu S_{\mu\nu\rho\sigma}=-\boldsymbol{x}^{-8}\{3(A_4+2A_3)x_\nu x_\rho x_\sigma+(4A_1+3A_3)g_{\rho\sigma}x_\nu\boldsymbol{x}^2+(4A_2-A_3)(g_{\rho\nu}x_\sigma+g_{\nu\sigma}x_\rho)\boldsymbol{x}^2\}=0$$

上面的约束条件告诉我们, S 的一般形式为

$$S_{\mu\nu\rho\sigma}(\boldsymbol{x}) = \frac{A}{\boldsymbol{x}^8}\{(3g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})\boldsymbol{x}^4 - 4\boldsymbol{x}^2(g_{\mu\nu}x_\rho x_\sigma + g_{\rho\sigma}x_\mu x_\nu) + 8x_\mu x_\nu x_\rho x_\sigma\}$$

在对 S 求迹之后,

$$S^{\mu}{}_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \left\langle T^{\mu}{}_{\mu}(\boldsymbol{x}) T^{\sigma}{}_{\sigma}(0)\right\rangle = 0$$

在所有的 $\boldsymbol{x}$ 处都成立. 当 $\boldsymbol{x}=0$ 时, $\left\langle T^{\mu}{}_{\mu}(0)^2\right\rangle$ 可以取任何有限的值, 乃至无穷的值.

上面的证明使我感到怀疑. 因为 S 并非是一个在 0 点处有良好定义的量, 我们只能得到在 $\boldsymbol{x} \neq 0$ 时的结论. 但这与欲证的结论相去甚远. 我们希望证明的是 $\left\langle T^{\mu}{}_{\mu}(\boldsymbol{x})^2\right\rangle = 0$, 但可以想见的是, $\left\langle T^{\mu}{}_{\mu}(\boldsymbol{x})^2\right\rangle$ 未必是一个良定义的量, 因此上面的证明没有触及到问题的本质, 甚至不是一个证明.

将能动张量变换到复变量

$$\begin{aligned}
T_{zz} &= \frac{x^\mu}{z}\frac{x^\nu}{z}T_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(T_{xx} - T_{xy}) - \frac{\mathrm{i}}{4}(T_{xy} + T_{yx}) \\
T_{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{x^\mu}{\bar{z}}\frac{x^\nu}{\bar{z}}T_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(T_{xx} - T_{yy}) + \frac{\mathrm{i}}{4}(T_{xy} + T_{yx}) \\
T_{z\bar{z}} &= \frac{x^\mu}{z}\frac{x^\nu}{\bar{z}}T_{xy} = \frac{1}{4}(T_{xx} + T_{yy}) + \frac{\mathrm{i}}{4}(T_{yx} - T_{xy}) \\
T_{\bar{z}z} &= \frac{x^\mu}{\bar{z}}\frac{x^\nu}{z}T_{xy} = \frac{1}{4}(T_{xx} + T_{yy}) - \frac{\mathrm{i}}{4}(T_{yx} - T_{xy})
\end{aligned} \tag{2.13}$$

第三章　2 维共形场论

共形场论在 $d = 2$ 时表现出了全新的性质. 当 $d > 2$ 时, 共形变换构成了有限的 Lie 群. 但在 $d = 2$ 时, 所有的全纯变换和反全纯变换都是共形变换, 因此共形变换构成了一个无穷维的 Lie 群. 在这时, 我们要将这些局域的共形变换与六个全局变换做出区分.

3.1　2 维共形群

在共形变换下, 度规的变化为

$$g_{\mu\nu}(r) \to \Omega(r) g_{\mu\nu}(r)$$

考虑变换

$$x^\mu \mapsto w^\mu(x)$$

则这个变换是共形变换当且仅当

$$\frac{w^\mu}{x^\alpha}\frac{w^\nu}{x^\beta}g^{\alpha\beta} \propto g^{\mu\nu}$$

上式等价于 Cauchy-Riemann 方程. 于是推出 w 是全纯的. 我们知道, 复平面到自身的全纯映射是共形的. 所以变换 w 是共形的当且仅当它是全纯的.

我们在上面讨论的 w 是局域变换, 即, 我们并没有要求 w 在整个复平面上定义并且存在逆变换. 因此, 我们要把**全局共形变换**与局域共形变换区别开. 全局共形变换是定义在整个复平面上的全纯映射, 并存在逆. 因此所有的全局共形变换形成一个群, 被称为**特殊共形群**. 复变函数告诉我们 [?], 特殊共形群中的元素具有如下形式

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc=1. \tag{3.1}$$

其中 a, b, c, d 全部是复数. 于是, 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

完全确定了投影变换 f. 进一步验证, 映射

$$f = \frac{az+b}{cz+d} \mapsto A$$

是一个群同态, 将投影映射的复合映到矩阵的乘法. 因此, 我们将二维的特殊共形群等同于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. 但是, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 视为实 Lie 群时与 $\mathrm{SO}(3,1)$ 同构, 因此我们对二维的全局共形变换并不陌生.

在物理上, 一般碰到的都是局域共形变换. 任何局域无穷小变换都能表示成

$$z' = z + \epsilon(z)$$

其中

$$\epsilon(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^{n+1}.$$

标量场的变化

$$\phi(z', \bar{z}') = \phi(z, \bar{z}) + \epsilon(z)\partial\phi(z, \bar{z}) + \bar{\epsilon}(\bar{z})\bar{\partial}\phi(z, \bar{z})$$

或者

$$\delta\phi = \epsilon\partial\phi(z, \bar{z}) + \bar{\epsilon}\bar{\partial}\phi(z, \bar{z}) = \sum_n (c_n \ell_n \phi(z, \bar{z}) + \bar{c}_n \bar{\ell}_n \phi(z, \bar{z})).$$

定义

$$\begin{aligned}\ell_n &= z^{n+1}\partial \\ \bar{\ell}_n &= \bar{z}^{n+1}\bar{\partial},\end{aligned} \tag{3.3}$$

满足如下对易关系

$$\begin{aligned}[\ell_n, \ell_m] &= (m-n)\ell_{n+m} \\ [\bar{\ell}_n, \bar{\ell}_m] &= (m-n)\bar{\ell}_{n+m} \\ [\ell_n, \bar{\ell}_m] &= 0\end{aligned} \tag{3.4}$$

上面的共形代数有时被称为 Witt 代数.

在 Witt 代数中, 全局共性变换的 6 个生成元是 $\ell_{-1}, \ell_0, \ell_1$ 以及它们的复共轭. $\ell_{-1} = -\partial_z$ 对应的是平移变换. ℓ_0 对应的是伸缩变换和旋转变换, ℓ_1 对应的是特殊共形变换. $\ell_0 + \bar{\ell}_0$ 生成了伸缩变换, 而 $\ell_0 - \bar{\ell}_0$ 生成了旋转.

3.1.1 张量场

如果二维自旋是 s, 定义**全纯共形维数**h, 以及相对应的反全纯共形维数 $\bar{h}$

$$\begin{aligned}h &= \frac{1}{2}(\Delta + s) \\ \bar{h} &= \frac{1}{2}(\Delta - s).\end{aligned}$$

如果一个场 $\phi(z, \bar{z})$ 在共形变换

$$z \mapsto w(z), \qquad \bar{z} \mapsto \bar{w}(\bar{z})$$

下的变化规律为

$$\phi'(w, \bar{w}) = (\frac{\partial w}{\partial z})^{-h}(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}})^{-\bar{h}}\phi(z, \bar{z}) \tag{3.5}$$

我们就称这个场为**张量场**.

考虑接近恒等变换的共形变换 $w = z + \epsilon(z)$ 以及 $\bar{w} = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z})$, 且 $\epsilon, \bar{\epsilon}$ 都很小, 那么张量场的变分为

$$\delta_{\epsilon,\bar{\epsilon}}\phi = \phi'(z,\bar{z}) - \phi(z,\bar{z}) = -(h\phi\partial\epsilon + \epsilon\partial\phi) - (\bar{h}\phi\bar{\partial}\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}\bar{\partial}\phi).$$

有时也用上面的无穷小变换来作为张量场的等价定义.

如果一个场在 2 维全局共形变换 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 下的变化规律都是(3.5), 则称之为**类张量场**. 显然, 所有的张量场都是类张量场, 但反之不然. 我们将会看到, 一个场可能只在全局共形变换 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 下按照(3.5)变换, 但在局域共形变换下不按照(3.5)变换, 常见的不是张量场的类张量场是能动张量. 如果一个场是张量场, 那么这个场的导数就不是张量场.

3.2 Ward 恒等式

我们在上一章中得到了共形不变的 Ward 恒等式(2.10), (2.11), (2.12). 我们再将其重复如下

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\langle T^\mu_\nu(x)X\right\rangle &= -\sum_{i=1}^n \delta(x-x_i)\frac{\partial}{\partial x_i^\nu}\left\langle X\right\rangle \\
\epsilon_{\mu\nu}\left\langle T^{\mu\nu}(x)X\right\rangle &= -\mathrm{i}\sum_{i=1}^n s_i\delta(x-x_i)\left\langle X\right\rangle \\
\left\langle T^\mu_\mu(x)X\right\rangle &= -\sum_{i=1}^n \delta(x-x_i)\Delta_i\left\langle X\right\rangle .
\end{aligned} \tag{3.6}$$

我们希望用复坐标与复变量表示上述恒等式. 因此, 我们希望得到 δ 函数在复平面上的表示. 我们有如下结果:

命题 3.1

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\bar{\partial}\frac{1}{z} = \frac{1}{\pi}\partial\frac{1}{\bar{z}} \tag{3.7}$$

证明. 我们先导出 Green 公式在复平面上的表示. 2 维情况下, Green 公式为

$$\int_M d^2x \partial_\mu F^\mu = \int_{\partial M} d\xi_\mu F^\mu$$

$d\xi_1, d\xi_2$ 是 ∂M 上每一点处的法向量, 它与 ∂M 的切向量 dx^ρ 通过 $d\xi_\mu = \epsilon_{\mu\rho} dx^\rho$ 联系在一起. 接下来再进行坐标变换. Green 公式的左边的被积函数是

$$\partial_\mu F^\nu = \partial F^z + \bar{\partial} F^{\bar{z}}$$

等式右边有

$$d\xi_\mu F^\mu = \epsilon_{\mu\rho} dx^\rho F^\mu = \frac{\mathrm{i}}{2}(d\bar{z} F^z - dz F^{\bar{z}})$$

所以 Green 公式在复平面上的表示为

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\int_M dz \wedge d\bar{z}(\partial F^z + \bar{\partial} F^{\bar{z}}) = \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{\partial M}(d\bar{z} F^z - dz F^{\bar{z}}) \tag{3.8}$$

对于任意一个全纯函数 f, 令 M 是包含原点的区域, 则

$$\begin{aligned}\int_M d^2x \delta(x) f(x_1, x_2) &= \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_M dz \wedge d\bar{z} f(z) \bar{\partial}\frac{1}{z} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_M dz \wedge d\bar{z} \bar{\partial}(\frac{f(z)}{z}) \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{\partial M} dz \frac{f(z)}{z} \\ &= f(0)\end{aligned}$$

上面第二个等号用到了 $f(z)$ 的全纯性, 第三个等号用到了式(3.8), 其中 $F^{\bar{z}} = f(z)/z, F^z = 0$, 最后一个等式用到了 Cauchy 积分公式. □

于是, Ward 恒等式(3.6)就可以写成

$$
\begin{aligned}
2\pi\partial\left\langle T_{\bar{z}z}X\right\rangle+2\pi\bar{\partial}\left\langle T_{zz}X\right\rangle &= -\sum_{i=1}^{n}\bar{\partial}\frac{1}{z-w_i}\partial_{w_i}\left\langle X\right\rangle \\
2\pi\partial\left\langle T_{\bar{z}\bar{z}}X\right\rangle+2\pi\bar{\partial}\left\langle T_{z\bar{z}}X\right\rangle &= -\sum_{i=1}^{n}\partial\frac{1}{\bar{z}-\bar{w}_i}\bar{\partial}_{w_i}\left\langle X\right\rangle \\
2\left\langle T_{\bar{z}z}X\right\rangle-2\left\langle T_{z\bar{z}}X\right\rangle &= -\sum_{i=1}^{n}\delta(x-x_i)s_i\left\langle X\right\rangle \\
2\left\langle T_{z\bar{z}}X\right\rangle+2\left\langle T_{\bar{z}z}X\right\rangle &= -\sum_{i=1}^{n}\delta(x-x_i)\Delta_i\left\langle X\right\rangle
\end{aligned}
$$

将上面的最后两式相加相减, 得到

$$
\begin{aligned}
2\pi\left\langle T_{\bar{z}z}X\right\rangle &= -\sum_{i=1}^{n}\bar{\partial}\frac{1}{z-w_i}h_i\left\langle X\right\rangle \\
2\pi\left\langle T_{z\bar{z}}X\right\rangle &= -\sum_{i=1}^{n}\partial\frac{1}{\bar{z}-\bar{w}_i}\bar{h}_i\left\langle X\right\rangle
\end{aligned}
$$

再带回到前面的两式, 最终得到

$$
\begin{aligned}
\left\langle T(z)X\right\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\{\frac{1}{z-w_i}\partial_{w_i}\left\langle X\right\rangle+\frac{h_i}{(z-w_i)^2}\left\langle X\right\rangle\}+\text{reg.} \\
\left\langle \bar{T}(\bar{z})X\right\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\{\frac{1}{\bar{z}-\bar{w}_i}\partial_{\bar{w}_i}\left\langle X\right\rangle+\frac{\bar{h}_i}{(\bar{z}-\bar{w}_i)^2}\left\langle X\right\rangle\}+\text{reg.}
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

我们定义

$$
\begin{aligned}
T &= -2\pi T_{zz} \\
\bar{T} &= -2\pi T_{\bar{z}\bar{z}}
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

3.2.1 共形 Ward 恒等式

我们可以将(3.6)合并到一个恒等式中. 给定任何一个无穷小的坐标共形变换 ϵ^ν, 相应地有

$$j^\mu = T^{\mu\nu}\epsilon_\nu.$$

再根据式(1.9), 得到

$$\delta_\epsilon \langle X\rangle = \int_M d^2x\partial_\mu \langle T^{\mu\nu}(x)\epsilon_\nu(x)X\rangle$$

利用复平面上的 Green 公式(3.8), 得到

$$\delta_\epsilon \langle X\rangle = \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{\partial M}\{-dz(\langle T^{\bar z\bar z}\epsilon_{\bar z}X\rangle + \langle T^{\bar z z}\epsilon_z X\rangle) + d\bar z(\langle T^{z\bar z}\epsilon_{\bar z}X\rangle + \langle T^{zz}\epsilon_z X\rangle)\}$$

由于能动张量是无迹而对称的, 根据能动张量在 $z,\bar z$ 下的表现形式(2.13), $T^{\bar z z}$ 和 $T^{z\bar z}$ 的贡献消失了, 于是最终得到了共形 Ward 恒等式

$$\delta_{\epsilon,\bar\epsilon} \langle X\rangle = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\oint_C dz\epsilon(z)\langle T(z)X\rangle - \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\oint_C d\bar z\bar\epsilon(\bar z)\left\langle \bar T(\bar z)X\right\rangle \tag{3.11}$$

3.2.2 导出共形 Ward 恒等式的其他方法

To be continued.

3.3 自由场与算符乘积展开

当关联函数的两个场的位置趋近相同时, 关联函数会产生奇点. 这反映了在很小区域内的量子涨落趋于无穷.

我们观察(3.9), Ward 恒等式告诉了我们场 $T(z)$ 与 $\phi_i(w_i,\bar w_i)$ 的关联函数中, z 趋近于 w_i 的性质. 如果我们只考虑一个场 ϕ, 共形维数为 $h,\bar h$, 我们

得到

$$\begin{aligned} T(z)\phi(w,\bar{w}) &\sim \frac{h}{(z-w)^2}\phi(w,\bar{w}) + \frac{1}{z-w}\partial_w\phi(w,\bar{w}) \\ \bar{T}(\bar{z})\phi(w,\bar{w}) &\sim \frac{\bar{h}}{(\bar{z}-\bar{w})^2}\phi(w,\bar{w}) + \frac{1}{\bar{z}-\bar{w}}\partial_{\bar{w}}\phi(w,\bar{w}) \end{aligned} \tag{3.12}$$

之后我们自动略去关联函数的求平均值符号, 并假设之后讨论的一切情形都是在求平均值时才成立的. $\sim$ 代表模掉全纯部分后相等.

一般地, 我们将两个场的算符乘积展开写成

$$A(z)B(w) = \sum_{n=-\infty}^{N} \frac{\{AB\}_n(w)}{(z-w)^n}. \tag{3.13}$$

下面我们来熟悉几个例子.

3.3.1 自由玻色子

To be continued.

3.4 中心荷

我们考虑在上节的例子中出现的能动张量自身的算符乘积展开:

$$T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)}\,, \tag{3.14}$$

其中的常数 c 依赖于所研究的系统, 对于自由玻色子是 1, 自由费米子是 $\frac{1}{2}$, 以及对于不同的鬼粒子有不同的值, 这个常数被称为**中心荷**. 除了这一反常项, (3.14)告诉我们 T 是 quasi-parimary 的场, 共形维数 $h = 2$.

中心荷可能无法从对称性来确定, 因为它的值由理论的短程相互作用的行为所确定. 对于自由场, 它由 Wick 定理中的缩并所决定. 当两个无相互作用的系统被放在一起时, 整体的能动张量就是两个系统的能动张量的和, 系统的中心荷也是两个系统的中心荷的简单相加. 于是, 中心荷可被视为是系统自由度数的一个度量.

3.4.1 能动张量的变换规律

考虑能动张量对无穷小变换的相应, 根据共形 Ward 恒等式(3.11), T 在局部共形变换下的变分为

$$\delta_\epsilon T(w)=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\oint_C d\epsilon(z)T(z)T(w)\,,$$

将(3.14)代入上式, 在 w 处展开 $\epsilon(z)$, 得到

$$\delta_\epsilon T(w)=-\frac{1}{12}c\partial_w^3\epsilon(w)-2T(w)\partial_w\epsilon(w)-\epsilon(w)\partial_w T(w)$$

我们引入 **Schwarz 导数**,

$$\{w;z\}=\frac{\partial^3 w/\partial z^3}{\partial w/\partial z}-\frac{3}{2}(\frac{\partial^2 w/\partial z^2}{\partial w/\partial z})^2. \tag{3.15}$$

并断言, 在任意的共形变换 $z\mapsto w(z)$ 下, $T(z)$ 的变化规律为

$$T'(w)=(\frac{\partial w}{\partial z})^{-2}(T(z)-\frac{c}{12}\{w;z\}). \tag{3.16}$$

从这里我们也能看到, $T(z)$ 不是 primary 的场, 因为其在任意共形变换下的变化规律与(3.5)不同. 如果取

$$w(z)=\frac{az+b}{cz+d},\quad ad-bc=1$$

则容易计算 $\{w;z\}=0$, 我们只能说, 在特殊线性变换下, $T(z)$ 是 primary 的.

3.4.2 c 的物理意义

中心荷 c 的出现, 有时也被称为**共形反常**. 因为, 这与在系统中引入一个宏观的标度导致共性对称性的破坏有关. 换言之, c 描述了一个系统对引入宏观长度标度的响应.

$$\left\langle T^{\mu}_{\mu}(x)\right\rangle_g = \frac{c}{24\pi}R(x)$$

第四章　算子形式

4.1　径向量子化

量子场论的算符形式区分了空间和时间. 这在 Minkowski 时空中是自然的, 但是在 Euclidean 时空中, 时间与空间的区别并不明显.

我们在无限长的柱面上定义场论. 时间 t 从 $-\infty$ 到 ∞, 坐标 x 从 0 到 L, 且我们将 $(0,t)$ 与 (L,t) 视为相同的. 定义变量 $\xi = t + \mathrm{i}x$, 我们可以通过变换

$$z = e^{2\pi\xi/L} \tag{4.1}$$

将柱面变成复平面.

从正则量子化的观点来看, 真空态 $|0\rangle$ 是湮灭算符的零本征态. 而 Hilbert 空间的其他态都由创生算符作用在 $|0\rangle$ 上得到. 对于一个相互作用场 ϕ, 我们假定 Hilbert 空间与自由场的 Hilbert 空间相同, 但是实际上能量本征态是不同的. 假设相互作用可以被延拓到 $t \to \pm\infty$, 且渐进场

$$\phi_{\text{in}} \propto \lim_{t\to-\infty} \phi(x,t)$$

是自由的. 在径向量子化中, 由于当 $t \to -\infty$ 时 $z \to 0$, 场 ϕ_{in} 就变成了在 $z = 0$ 处的单个算符. 创生出一个单个的初态

$$|\phi_{\text{in}}\rangle = \lim_{z,\bar{z}\to 0} \phi(z,\bar{z})\,|0\rangle\,. \tag{4.2}$$

Hermite 共轭

在 Minkowski 时空中, Hermite 共轭不会对时空造成影响. 但是在 Euclidean 时空中, Hermite 共轭会导致时间的反演, 因为 $\tau = \mathrm{i}t$. 在径向量子化中, 这对应于 $z \to \frac{1}{z^*}$. 我们定义 Hermite 共轭如下

$$\phi(z,\bar{z})^\dagger = \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}} \phi(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{z}) \tag{4.3}$$

这样, 我们就可以将末态定义为

$$\langle \phi_{\text{out}} | = |\phi_{in}\rangle^\dagger$$

我们可以通过初态末态做内积来验证, (4.3)的形式是正确的.

模式展开

一个维数为 $(h,\bar{h})$ 的共形场可以进行如下的模式展开

$$\phi(z,\bar{z}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-m-h} \bar{z}^{-n-\bar{h}} \phi_{m,n}\,, \tag{4.4}$$

系数 $\phi_{m,n}$ 可以通过留数定理确定

$$\phi_{m,n} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint dz z^{m+h-1} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint d\bar{z} \bar{z}^{n+\bar{h}-1} \phi(z,\bar{z}).$$

为了确定展开的模式 $\phi_{m,n}$ 的 Hermite 共轭, 我们先对 $\phi(z,\bar{z})$ 在平面 $\bar{z} = z^*$ 上进行共轭, 得到

$$\phi(z,\bar{z})^\dagger = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{z}^{-m-h} z^{-n-\bar{h}} \phi^\dagger_{m,n}\,,$$

再利用定义(4.3)得到

$$\phi(z,\bar{z})^\dagger = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_{-m,-n} \bar{z}^{-m-h} z^{-n-\bar{h}}\,,$$

所以我们得到

$$\phi_{m,n}^{\dagger} = \phi_{-m,-n}. \tag{4.5}$$

如果我们想要定义初态和末态, 那么真空态 $\langle 0\rangle$ 一定要满足条件

$$\phi_{m,n}\left|0\right\rangle = 0, \quad m > -h, n > -\bar{h}\,, \tag{4.6}$$

因为当 $z, \bar{z} \to 0$ 时, 满足上面条件的 $\phi(z,\bar{z})$ 中的部分趋于无穷, 为了使 $|\phi_{\text{in}}\rangle$ 有良好的定义, 这些项作用在真空态上一定要为 0.

为了书写的简便, 我们之后在进行模式展开的时候将忽略场对 $\bar{z}$ 的依赖, 这样

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} z^{-m-h}\phi_m \\ \phi_m &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint dz z^{m+h-1}\phi(z). \end{aligned} \tag{4.7}$$

但我们必须要记住, ϕ 对 $\bar{z}$ 的依赖事实上是依然存在的, 我们在必要时还会回到原来的形式(4.4).

4.1.1 径向排序与算符乘积展开

在径向量子化中, 时间排序变成**径向排序**, 我们将之定义为

$$\mathcal{R}\Phi_1(z)\Phi_2(w) = \begin{cases} \Phi_1(z)\Phi_2(w), & |z| > |w| \\ \Phi_2(w)\Phi_1(z), & |z| < |w|. \end{cases} \tag{4.8}$$

如果两个场是费米场, 交换费米子场会产生一个负号.

由于所有在关联函数中的量都是时间排序的, 从而也是径向排序的, 所以一个表示算符乘积展开的等式的左端如果有算子的含义, 则也应该是径向排序的. 从现在开始, 我们不会每次都写出径向排序的记号 $\mathcal{R}$, 但是实际上我们隐含地使用了径向排序.

下面, 我们要将算符乘积展开与对易关系联系在一起. 令 $a(z), b(z)$ 为两个全纯的场, 考虑积分

$$\oint_w dza(z)b(w)$$

积分回路是绕 w 的闭合曲线. 我们只考虑上述积分出现在关联函数中的情况, 因此实际上隐含了一个径向排序. 观察到如下的事实

$$\oint_w dza(z)b(w) = \int_{C_1} dza(z)b(w) - \int_{C_2} b(w)a(z) = [A, b(w)]. \tag{4.9}$$

其中

$$A = \oint a(z)dz \tag{4.10}$$

是一个固定时间的回路积分. (4.9)中的 C_1, C_2 分别是半径为 $|w| + \epsilon$ 与 $|w| - \epsilon$ 的圆周. 我们在这里应该将 A 视为一个作用在 $b(w)$ 上的算子而不是一个函数, 作用的效果是相乘并沿着绕 w 的一个闭曲线积分. 对(4.9)的 w 进行积分, 我们得到了对易关系

$$[A, B] = \oint_0 dw \oint_w dza(z)b(w). \tag{4.11}$$

4.2 Virasoro 代数

我们将(4.11)与(4.9)应用于共形 Ward 恒等式(3.11). 定义共形荷

$$Q_\epsilon = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} dz\epsilon(z)T(z), \tag{4.12}$$

根据式4.9, 共形恒等式变成

$$\delta_\epsilon \Phi(w) = -[Q_\epsilon, \Phi(w)] \tag{4.13}$$

这说明 Q_ϵ 是共形变换的生成元.

由于 $T(z)$ 和 $\bar{T}(\bar{z})$ 分别是全纯的和反全纯的, 所以根据(4.4), 将二者进行模式展开:

$$
\begin{aligned}
T(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-2}L_n, \quad L_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint dz z^{n+1}T(z) \\
\bar{T}(\bar{z}) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{z}^{-n-2}\bar{L}_n, \quad \bar{L}_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint d\bar{z}\bar{z}^{n+1}\bar{T}(\bar{z})
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

再将 $\epsilon(z)$ 展开

$$
\epsilon(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{n+1}\epsilon_n,
$$

(4.12)变成

$$
Q_\epsilon = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \epsilon_n L_n.
$$

模式算子 L_n 与 $\bar{L}_n$ 是 Hilbert 空间上局域共形变换的生成元. 就如同 Witt 代数中 ℓ_n 和 $\bar{\ell}_n$ 是函数空间上局域共形变换的生成元一样. 类似地, SL$(2,\mathbb{C})$ 的生成元在 Hilbert 空间上的表示为 L_{-1}, L_0, L_1 以及 $\bar{L}_{-1}, \bar{L}_0, \bar{L}$. 特别地, $L_0+\bar{L}_0$ 生成了伸缩变换 $(z,\bar{z})\mapsto\lambda(z,\bar{z})$, 在径向量子化中就是时间平移. 所以 $L_0+\bar{L}_0$ 与系统的 Hamiltonian 成正比.

经典的 Witt 代数满足对易关系(3.4), 在量子情况下, 生成元 L_n 满足类似的关系, 但是与系统的中心荷 c 有关.

命题 4.1 生成元 L_n 满足下列的对易关系*:*

$$
\begin{aligned}
[L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \\
[L_n, \bar{L}_m] &= 0 \\
[\bar{L}_n, \bar{L}_m] &= (n-m)\bar{L}_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0}
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

证明. 根据(4.11), 以及3.14

$$
\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \oint_0 dw w^{m+1} \oint_w dz z^{n+1} T(w) T(z) \\
&= \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \oint_0 dw w^{m+1} \oint_w dz z^{n+1} \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_0 dw w^{m+1} \frac{c}{12}(n+1)n(n-1)w^{n-2} + 2(n+1)w^n T(w) + w^{n+1}\partial T(w) \\
&= \frac{c}{12} n(n^2-1)\delta_{m+n,0} + 2(n+1)L_{m+n} - (m+n+2)L_{m+n} \\
&= (n-m)L_{m+n} + \frac{c}{12} n(n^2-1)\delta_{m+n,0}
\end{aligned}
$$

其余两个等式的证明类似. □

我们还发现, (4.15)的第二个等式说明了 $T(z)\bar{T}(\bar{z}) \sim 0$.

4.2.1 Hilbert 空间

先观察真空态 $|0\rangle$. 首先可以确定的是, 真空态在全局共形变换 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的作用下是不变的, 所以 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的六个生成元 $L_{-1}, L_0, L_1, \bar{L}_{-1}, \bar{L}_0, \bar{L}_1$ 作用在 $|0\rangle$ 上结果均为零. 我们还希望在初态时, 能动张量作用在真空态上 $T(z)|0\rangle$ 以及 $\bar{T}(\bar{z})|0\rangle$ 是良定义的, 所以有

$$
\begin{aligned}
L_n |0\rangle &= 0, \quad n \geq -1\,, \\
\bar{L}_n |0\rangle &= 0, \quad n \geq -1\,.
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

如果场是 primary 的, 则它作用在真空态上产生初态或末态. 根据(3.12), 我们得到

$$
\begin{aligned}
[L_n, \phi(w,\bar{w})] &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_w dz z^{n+1} T(z)\phi(w,\bar{w}) \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_w dz z^{n+1} \left(\frac{h\phi(w,\bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial\phi(w,\bar{w})}{z-w}\right) \\
&= h(n+1)w^n\phi(w,\bar{w}) + w^{n+1}\partial\phi(w,\bar{w}).
\end{aligned}
$$

与对于 $\bar{L}_n$, 也有类似的结果. 所以,

$$\begin{aligned}
[L_n, \phi(w,\bar{w})] &= h(n+1)w^n\phi(w,\bar{w}) + w^{n+1}\partial\phi(w,\bar{w}), \\
[\bar{L}_n, \phi(w,\bar{w})] &= h(n+1)\bar{w}^n\phi(w,\bar{w}) + \bar{w}^{n+1}\bar{\partial}\phi(w,\bar{w}).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

我们定义渐进态 $\left|h,\bar{h}\right\rangle$:

$$\left|h,\bar{h}\right\rangle = \phi(0,0)\left|0\right\rangle$$

将(4.17)中令 $n=0$ 作用在 $\left|h,\bar{h}\right\rangle$ 上, 并注意到 $L_0\left|0\right\rangle = 0$, 我们有

$$\begin{aligned}
L_0\left|h,\bar{h}\right\rangle &= h\left|h,\bar{h}\right\rangle, \\
\bar{L}_0\left|h,\bar{h}\right\rangle &= \bar{h}\left|h,\bar{h}\right\rangle.
\end{aligned}$$

再令 n 正整数, 得到

$$\begin{aligned}
L_n\left|h,\bar{h}\right\rangle &= 0 \\
\bar{L}_n\left|h,\bar{h}\right\rangle &= 0
\end{aligned}$$

因此 $\left|h,\bar{h}\right\rangle$ 是 Hamiltonian 的一个本征态.

能量比基态 $\left|h,\bar{h}\right\rangle$ 高的激发态可以通过阶梯算子作用在 $\left|h,\bar{h}\right\rangle$ 上得到. 我们对全纯的场 $\phi(w)$ 进行模式展开, 可以很容易地得到

$$[L_n, \phi_m] = (n(h-1)-m)\phi_{n+m}\,, \tag{4.18}$$

取 $n=0$, 得到

$$[L_0, \phi_m] = -m\phi_m.$$

这说明 ϕ_m 是 L_0 本征态的升降算符. 将 ϕ_{-m} 作用在基态上会把基态的共形维数增加 m.

再通过 Virasoro 代数的对易关系(4.15), 我们得到

$$[L_0, L_{-m}] = mL_{-m},$$

即 L_{-m} 也会使基态的共形维数增加 m. 因此, 激发态通过将这些算子连续地作用在 $\left|h\right\rangle$ 上得到:

$$L_{-k_1}L_{-k_2}\cdots L_{-k_n}\left|h\right\rangle, \quad 1\le k_1\le\cdots\le k_n$$

约定从左到右 k_i 逐渐增加. 上面的态是 L_0 的本征值为

$$h' = h + k_1 + \cdots + k_n \coloneqq h + N$$

的本征态, 被称为态 $|h\rangle$ 的 descendants. 整数 N 被称为 descendant 的级数. 级数为 N 但互不相同且先行独立的态的个数就是整数 N 的配分数 $p(N)$.

由基态 $|h\rangle$ 以及其 descendant 构成的子空间在 Virasoro 代数的作用下是不变的, 于是构成了一个 Virasoro 代数的表示. 这个子空间被称为 Verma 模.

4.3 自由玻色子

4.3.1 柱面上的正则量子化

自由无质量玻色子在柱面上的正则量子化.

$$S = \int d^2x \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \tag{4.19}$$

从柱面变换到 2 维 Euclidean 平面, 最终得到模式展开

$$\phi(z,\bar{z}) = \phi_0 - \frac{\mathrm{i}}{4\pi g}\pi_0 \ln(z\bar{z}) + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{4\pi g}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n}(a_n z^{-n} + \bar{a}_n \bar{z}^{-n}). \tag{4.20}$$

柱面上的周期性条件使得 $\phi(z,\bar{z})$ 中的全纯部分和反全纯部分退耦和. 令

$$\tilde{a}_n = \frac{1}{\sqrt{4\pi g|n|}}(2\pi g|n|\varphi_n + \mathrm{i}\pi_{-n}) \tag{4.21}$$

由于 $\phi(x,t)$ 被假定为是实数场, 所以有

$$\tilde{a}_n^\dagger = \frac{1}{\sqrt{4\pi g|n|}}(2\pi g|n|\varphi_{-n} - \mathrm{i}\pi_n) \tag{4.22}$$

再根据 ϕ_n 与 π_n 的正则对易关系, 我们得到 $[\tilde{a}_n, \tilde{a}_m] = 0$ 以及 $[\tilde{a}_n, \tilde{a}_m^\dagger] = \delta_{nm}$. 在定义如下的算符

$$
\begin{aligned}
a_n &= \begin{cases} -\mathrm{i}\sqrt{n}\tilde{a}_n, & n > 0 \\ \mathrm{i}\sqrt{-n}\tilde{a}_{-n}^\dagger, & n < 0 \end{cases} \\
\bar{a}_n &= \begin{cases} -\mathrm{i}\sqrt{n}\tilde{a}_{-n}, & n > 0 \\ \mathrm{i}\sqrt{-n}\tilde{a}_n^\dagger, & n < 0 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

记忆的手段是, 当 $n > 0$ 时, $a_n, \bar{a}_n$ 都是产生算符, 当 $n < 0$ 时, 二者都是湮灭算符.

$$
H = \frac{1}{2gL}\pi_0^2 + \frac{2\pi}{L}\sum_{n\neq 0}(a_{-n}a_n + \bar{a}_{-n}\bar{a}_n) \tag{4.24}
$$

$$
\sum_{n\neq 0}(a_{-n}a_n + \bar{a}_{-n}\bar{a}_n) = \sum_{n>0} n(\tilde{a}_n^\dagger\tilde{a}_n + \tilde{a}_n\tilde{a}_n^\dagger) - \sum_{n<0} n(\tilde{a}_n^\dagger\tilde{a}_n + \tilde{a}_n\tilde{a}_n^\dagger) \tag{4.25}
$$

4.3.2 顶点算子

在 2 维时, 标度不变的标量场的标度维度是 0, 所以可以利用 ϕ 构造无穷多种定域的场, 且不引入标度. 比如下面的**顶点算子**:

$$
\mathcal{V}_\alpha(z, \bar{z}) =: e^{\mathrm{i}\alpha\phi(z,\bar{z})} :
$$

计算 $\mathcal{V}_\alpha$ 与 $\partial\phi$ 的算符乘积展开, 得到

$$
\partial\phi(z)\mathcal{V}_\alpha(w, \bar{w}) \sim -\frac{\mathrm{i}\alpha}{4\pi g}\frac{\mathcal{V}_\alpha(w, \bar{w})}{z - w}. \tag{4.26}
$$

再计算能动张量与 $\mathcal{V}_\alpha$ 的算符乘积展开, 得到

$$
T(z)\mathcal{V}_\alpha(w, \bar{w}) \sim \frac{\alpha^2}{8\pi g}\frac{\mathcal{V}_\alpha(w, \bar{w})}{(z - w)^2} + \frac{\partial_w\mathcal{V}_\alpha(w, \bar{w})}{z - w}. \tag{4.27}
$$

$\bar{T}$ 的算符乘积展开有类似的结果. 因此我们得到对于 $\mathcal{V}_\alpha(w,\bar{w})$, 有

$$h(\alpha) = \bar{h}(\alpha) = \frac{\alpha^2}{8\pi g}. \tag{4.28}$$

4.3.3 Fock 空间

从式(4.24)中可以看出, H 不含 φ_0, 所以 H 与 π_0 是对易的, 因此二者具有相同的本征向量. 所以, Fock 空间的真空态是一组连续简并的 $|\alpha\rangle$ 构造出来, $|\alpha\rangle$ 是 $a_0 = \pi_0/\sqrt{4\pi g}$ 的本征值为 α 的本征态. 根据(4.23), 当 $n > 0$ 时, $a_n, \bar{a}_n$ 都正比于湮灭算符, 所以有

$$\begin{aligned} &a_n |\alpha\rangle = \bar{a}_n |\alpha\rangle = 0, \quad n > 0 \\ &a_0 |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \end{aligned}$$

又根据

$$\partial\varphi(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$$

以及

$$T(z) = \frac{1}{2}\partial\varphi(z)\partial\varphi(z)$$

我们能够得到相应的 Virasoro 代数生成元

$$\begin{aligned} L_n &= a_m a_{n-m} \\ L_0 &= \sum_{n>0} a_{-n}a_n + \frac{1}{2}a_0^2 \end{aligned}$$

有价值的结论是, L_n 作用在 $|\alpha\rangle$ 上的效果与 a_n 相同, 且 $|\alpha\rangle$ 的共形维数是 $\alpha^2/2$. 并且,

$$H = \frac{2\pi}{L}(L_0 + \bar{L}_0). \tag{4.29}$$

事实上 $|\alpha\rangle$ 是由顶点算子 $\mathcal{V}_\alpha(0)$ 作用在真空态上得到的. 为证明这一点, 我们只需要证明

$$a_0\mathcal{V}_\alpha(0)|0\rangle = \alpha$$

以及

$$a_n \mathcal{V}_\alpha(0) = 0.$$

由于

$$[a_0, \mathrm{i}\alpha\varphi(z,\bar{z})] = \frac{1}{\sqrt{4\pi g}}\alpha$$

是一个常数, 所以

$$[a_0, \mathcal{V}_\alpha] = [a_0, e^{\mathrm{i}\alpha\varphi}] = \alpha\mathcal{V}_\alpha$$

上式中令 $g = 1/4\pi$, 于是有

$$a_0\mathcal{V}_\alpha |0\rangle = \alpha\mathcal{V}_\alpha |0\rangle .$$

同样, 我们得到

$$[a_n, \varphi(z,\bar{z})] = -\alpha z^n$$

对于算符来说是一个常数. 所以

$$[a_n, \mathcal{V}_\alpha] = -\alpha z^n \mathcal{V}_\alpha$$

取 $\bar{z} = z = 0$ 即得到证明.

4.4 自由费米子

二维 Euclidean 空间.

$$S = \frac{1}{2}g\int d^2x\Psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu\Psi$$

对易关系

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}$$

其中 $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,1)$.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ψ 是一个二分量的场, 我们写出它按照 $(z,\bar{z})$ 方式变换的分量 $(\psi,\bar{\psi})$, 于是

$$\Psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu\Psi = \Psi^\dagger\begin{pmatrix}2\bar{\partial} & 0\\ 0 & 2\partial\end{pmatrix}\Psi = 2(\psi\bar{\partial}\psi+\bar{\psi}\partial\bar{\psi})$$

$$S = g\int d^2x(\psi\bar{\partial}\psi+\bar{\psi}\partial\bar{\psi}).$$

将作用量 S 写成

$$S = \frac{1}{2}\int d^2xd^2y\Psi_iA(x,y)_{ij}\Psi_j$$

的形式. 其中, $A(x,y)$ 是算子

$$g\delta(x-y)\gamma^0\gamma^\mu\partial_u$$

变换到相应的复坐标 z,w, 得到

$$A(z,w) = g\delta(x-y)\begin{pmatrix}2\bar{\partial} & 0\\ 0 & 2\partial\end{pmatrix}$$

传播子就是 $A(z,w)$ 的逆 $K(w,u)$, 设 u 对应的实坐标是 v. 于是

$$A(z,w)K(w,u) = g\delta(x-y)\begin{pmatrix}2\partial_{\bar{w}} & 0\\ 0 & 2\partial_w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\langle\psi(w)\psi(u)\rangle & \left\langle\psi(w)\bar{\psi}(u)\right\rangle\\ \left\langle\bar{\psi}(w)\psi(u)\right\rangle & \left\langle\bar{\psi}(w)\bar{\psi}(u)\right\rangle\end{pmatrix} = \delta(x-v)I$$

根据 Dirac 函数在复平面上的表示(3.7)

$$g)\begin{pmatrix}2\partial_{\bar{w}} & 0\\ 0 & 2\partial_w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\langle\psi(w)\psi(u)\rangle & \left\langle\psi(w)\bar{\psi}(u)\right\rangle\\ \left\langle\bar{\psi}(w)\psi(u)\right\rangle & \left\langle\bar{\psi}(w)\bar{\psi}(u)\right\rangle\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\pi}\partial_{\bar{w}}\frac{1}{w-u} & 0\\ 0 & \frac{1}{\pi}\partial_w\frac{1}{\bar{w}-\bar{u}}\end{pmatrix}$$

所以得到

$$\begin{aligned}\langle\psi(z,\bar{z})\psi(w,\bar{w})\rangle &= \frac{1}{2\pi g}\frac{1}{z-w}\\ \left\langle\bar{\psi}(z,\bar{z})\bar{\psi}(w,\bar{w})\right\rangle &= \frac{1}{2\pi g}\frac{1}{\bar{z}-\bar{w}}\\ \left\langle\psi(z,\bar{z})\bar{\psi}(w,\bar{w})\right\rangle &= \left\langle\bar{\psi}(z,\bar{z})\psi(w,\bar{w})\right\rangle = 0\end{aligned} \tag{4.30}$$

求导得到

$$\langle\psi(z,\bar{z})\partial\psi(w,\bar{w})\rangle = -\frac{1}{2\pi g}\frac{1}{(z-w)^2}. \tag{4.31}$$

我们计算正则能动张量 T_c. 根据定义

$$T_c^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\partial^\nu\Phi - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{4.32}$$

Φ 代表对所有的场分量求和. 如果变换到 $(z,\bar{z})$ 坐标, 则定义相同, 但是

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

因此,

$$\begin{aligned}
T^{zz} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_z\Phi)}\partial^z\Phi = 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_z\Phi)}\partial_{\bar{z}}\Phi = 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\bar{\psi})}\bar{\partial}\bar{\psi} = 2\bar{\psi}\bar{\partial}\bar{\psi} \\
T^{\bar{z}\bar{z}} &= 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\bar{\partial}\psi)}\partial\psi = 2\psi\partial\psi \\
T^{z\bar{z}} &= 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\bar{\psi})}\partial\bar{\psi} - 2\mathcal{L} = -2\psi\bar{\partial}\psi \\
T^{\bar{z}z} &= -2\bar{\psi}\partial\bar{\psi}
\end{aligned}$$

我们发现, $T^{z\bar{z}} \neq T^{\bar{z}z}$, 所以正则能动张量不是对称的, 但这对后面的结果没有影响. 根据定义

$$T(z) = -2\pi T_{zz} = -\frac{\pi}{2}T^{\bar{z}\bar{z}} = -\pi g\psi\partial\psi$$

于是我们可以利用 Wick 定理计算 $T(z)$ 与 $\psi(w)$ 的算符乘积展开

$$T(z)\psi(w) = -\pi g\mathcal{T}(\psi(z)\partial\psi(z)\psi(w)) \sim \frac{1}{2}\frac{\psi(z)}{(z-w)^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial\psi(z)}{z-w}$$

将 $\psi(z)$ 绕着 w 展开, 并只保留奇异的项, 得到

$$T(z)\psi(w) \sim \frac{\psi(w)/2}{(z-w)^2} + \frac{\partial\psi(w)}{z-w} \tag{4.33}$$

因此得到 ψ 的共形维数 $h = \frac{1}{2}$.

类似地, 我们得到 $T(z)$ 与自身的算符乘积展开,

$$T(z)T(w) \sim \frac{\frac{1}{4}}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \tag{4.34}$$

所以中心荷 $c = 1/2$.

. 将 $\psi(x,t)$ 进行 Fourier 展开, 得到

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \sum_k b_k e^{-2\pi k w/L}.$$

做坐标变换 $z = e^{2\pi w/L}$, 并注意到 ψ 的共形维数 $h = 1/2$, 将柱面上的场映到平面上, 得到

$$\psi(z) = \sum_k b_k z^{-k-\frac{1}{2}} \tag{4.35}$$

模式 b_k 的反对易关系为

$$\{b_p, b_q\} = \delta_{p+q,0}.$$

4.5 正规排序

我们已经计算了很多的例子, 知道自由场最重要的特质是其与自身的算符展开只包含一个奇异项, 而且这项的系数是一个常数. 因此, 将两个自由场的乘积进行正规化的方法只需要减去相应的真空期望值.

但在非自由场的情况, 上面的论述不再成立. 我们看到, 当我们试图将 $T(z)T(w)$ 进行正规化时, 我们减去的 $\langle T(z)T(w)\rangle$ 只能使 $T(z)T(w)$ 中带有中心荷的一项消除, 而剩下的两项发散的像依然没有被消除. 这说明我们之前的应对发散情况时只是简单地引入正规序的做法只对自由场有效, 而对于一般的场是无效的. 因此, 我们希望减除算符乘积展开中所有的发散项,

因此我们要推广之前的正规序的概念. 我们用括号来表示正规序, $A(z)B(z)$ 的正规序记为 $(AB)(z)$.

如果 A 和 B 的算符乘积展开可以写成

$$A(z)B(w)=\sum_{n=-\infty}^{N}\frac{\{AB\}_n(w)}{(z-w)^n} \tag{4.36}$$

那么

$$(AB)(w)=\{AB\}_0(w).$$

我们定义的缩并包含了算符乘积展开的所有奇异项

$$\overbrace{A(z)B}(w)\coloneqq\sum_{n=1}^{n}\frac{\{AB\}_n(w)}{(z-w)^n}. \tag{4.37}$$

因此正规序 (AB) 可以写成

$$(AB)(w)=\lim_{z\to w}[A(z)B(w)-\overbrace{A(z)B}(w)],$$

$A(z)$ 与 $B(w)$ 的算符乘积展开可以写成

$$A(z)B(w)=\overbrace{A(z)B}(w)+(A(z)B(w)),$$

其中 $(A(z)B(w))$ 代表算符乘积展开中所有的正规项, 显然可以通过在 w 处对 $A(z)$ 进行 Taylor 展开得到.

利用 Cauchy 积分公式, 我们还能得到上面引入正规序的另一个表示.

$$(AB)(w)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_w\frac{dz}{z-w}A(z)B(w). \tag{4.38}$$

为了对(4.38)进行模式展开, 首先观察到

$$\oint_w\frac{dz}{z-w}A(z)B(w)=\oint_{|z|>|w|}\frac{dz}{z-w}A(z)B(w)-\oint_{|z|<|w|}\frac{dz}{z-w}B(w)A(z).$$

将 $A(z), B(w)$ 在 x 处展开, x 满足 $|w|<|x|<|z|$.

$$A(z)=\sum_{n}(z-x)^{-n-h_A}A_n(x)$$
$$B(w)=\sum_{p}(w-x)^{-p-h_B}B_p(x)$$
$$\frac{1}{z-w}=\sum_{l\geq 0}\frac{(w-x)^l}{(z-x)^{l+1}}$$

所以, 将以上的展开式带入, 得到

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|>|w|}=\sum_{p,n\leq -h_A}(w-x)^{-n-p-h_A-h_B}A_n(x)B_p(x).$$

在 $|z|<|w|$ 时, 将上式中 z 与 w 互换, 得到

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|w|>|z|}\frac{dz}{z-w}B(w)A(z)=\sum_{p,n>-h_A}(w-x)^{-n-p-h_A-h_B}B_p(x)A_n(x).$$

于是我们得到了正规序的模式展开

$$(AB)_m=\sum_{n\leq -h_A}A_nB_{m-n}+\sum_{n>-h_A}B_{m-n}A_n. \tag{4.39}$$

根据这个结果, 显然有 $(AB)\neq(BA)$

在之前的讨论中, 我们得到 Virasoro 代数的生成元都是将 $T(z)$ 在 0 处展开的. 但这点并不一般, 因此, 我们将 $T(z)$ 在 w 处展开:

$$T(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(z-w)^{-n-2}L_n(w)$$
$$L_n(w)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_w dz(z-w)^{n+1}T(z).$$

于是, 我们可以将 $T(z)$ 与任何场 $A(w)$ 的算符乘积展开写成

$$T(z)A(w)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(z-w)^{-n-2}(L_nA)(w). \tag{4.40}$$

(L_nA) 要用待定系数法来确定. 比较

$$T(z)A(w) = \cdots + \frac{h_A A(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial A(w)}{z-w} + (TA)(w) + (z-w)(\partial T)(w)A(w) + \cdots$$

因此得到

$$\begin{aligned}(L_0A)(w) &= h_A A(w)\\ (L_{-1}A)(w) &= \partial A(w)\\ (L_{-n-2}A)(w) &= \frac{1}{n!}(\partial^n TA)(w).\end{aligned} \tag{4.41}$$

4.6 共形等价类与算子代数

4.6.1 Descendant Fields

Descendant 态可以视为由 descendant field 作用在真空态上得到的态. 例如, 考虑 descendant 态 $L_{-n}\left|h\right\rangle$:

$$L_{-n}\left|h\right\rangle = L_{-n}\phi(0)\left|0\right\rangle = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int dz z^{-n+1}T(z)\phi(0)\left|0\right\rangle$$

根据定义(4.40), 这不过是 $(L_{-n}\phi(0))\left|0\right\rangle$, 所以 $L_{-n}\phi$ 就是一个 descendant field. 在任意一点 w, 态 $L_{-n}\left|h\right\rangle$ 的 descendant field 为

$$\phi^{(-n)}(w) \coloneqq (L_{-n}\phi)(w) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_w \frac{1}{(z-w)^{n-1}}T(z)\phi(w). \tag{4.42}$$

特别地, 根据(4.41), 有

$$\phi^{(0)}(w) = h\phi(w), \quad \phi^{(-1)}(w) = \partial\phi(w).$$

我们来计算这些 descendant field 的物理效应, 即关联函数. 烤炉关联函数

$$\left\langle (L_{-n}\phi)(w)X\right\rangle,$$

其中 $X=\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)$, 每个场的共形维数分别是 h_i. 在上面的关联函数中, $L_{-n}\phi$ 的回路积分只围绕着绕 w 的回路, 而排除掉其他所有的 w_i. 根据留数定理, 上面的关联函数可以通过计算在 w_i 处的反方向的留数得到, 即

$$\begin{aligned}\left\langle\phi^{(-n)}(w)X\right\rangle&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_w dz(z-w)^{1-n}\langle T(z)\phi(w)X\rangle\\&=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\{w_i\}}dz(z-w)^{1-n}\sum_i\{\frac{1}{z-w_i}\partial_{w_i}\langle\phi(w)X\rangle\\&+\frac{h_i}{(z-w_i)^2}\langle\phi(w)X\rangle\}\\&\coloneqq\mathcal{L}_{-n}\langle\phi(w)X\rangle\end{aligned}$$

上面第二个等式的来源是共形 Ward 恒等式(3.9), 第三个等式的来源是将 $(z-w)^{1-n}$ 在 w_i 展开, 这样做是可以的, 因为 $|z-w_i|<|w-w_i|$. 而 $\mathcal{L}_{-n}$ 定义为微分算子

$$\mathcal{L}_{-n}=\sum_i\{\frac{(n-1)h_i}{(w_i-w)^n}-\frac{1}{(w_i-w)^{n-1}}\partial_{w_i}\}$$

但注意到, $\mathcal{L}_{-1}=\partial_w$.

我们还可以通过将不同的生成元作用在 ϕ 上, 来得到更加复杂的 descendant field. 比如, 定义

$$\phi^{(-k,-n)}(w)\coloneqq(L_{-k}L_{-n}\phi)(w)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_w dz(z-w)^{1-k}T(z)(L_{-n}\phi)(w).$$

显然, 根据上面的定义, 我们有

$$\left\langle\phi^{(-k_1,\ldots,-k_n)}X\right\rangle=\mathcal{L}_{-k_1}\cdots\mathcal{L}_{-k_n}\langle\phi(w)X\rangle\,. \tag{4.43}$$

4.6.2 共形类

由 primary field ϕ 以及其生成的所有 descendant field 构成的空间, 被称为**共形类**, 有时记为 $[\phi]$. 我们能够想象得到, $[\phi]$ 在共形变换下是不变的. 换言之, $T(z)$ 与任何 $[\phi]$ 中的场做算符乘积展开得到的结果依然是 $[\phi]$ 中的场.

Example of OPE for $T(z)$ with $\phi^{(n)}(w)$

Primary field 的 descendant 被称为 secondary field. 在共形变换 $z \mapsto f(z)$ 下, secondary field $A(z)$ 变换形式为

$$A(z) \mapsto (\frac{\partial f}{\partial z})^{h'} A(f(z) + \text{extra terms})$$

其中, $h' = h + n$. 余下的项在与 $T(z)$ 做算符乘积展开时构成了阶数高于 2 的单极点.

4.6.3 算子代数

一个量子场论的主要任务就是计算各种关联函数. 共形不变性已经为我们确定了两点关联函数和三点关联函数的形式, 即(2.8)和(2.9). 但是, 共形不变性没有告诉我们所有的细节, 比如三点关联函数的系数 C_{ijk}, 因此我们需要输入更多的信息来求解它. 我们所需要的接下所有关联函数的信息, 就是所谓的**算子代数**: 所有的 primary field 的相互之间的算符乘积展开. 本节的目标就是确定出算子代数的具体形式, 并判断哪些形式是由共形不变性确定的, 哪些不是.

先来看两点关联函数. 我们要确定的是两点关联函数的系数 C_{12}. 回忆, 如果一组 primary field 的共形维数互不相同, 则任意两个场的关联函数都为 0. 场 ϕ_α 与 ϕ_β 的关联函数非零当且仅当它们的共形维数相同. 关联函数为

$$\langle \phi_\alpha(w, \bar{w}) \phi_\beta(z, \bar{z}) \rangle = \frac{C_{\alpha\beta}}{(w-z)^{2h}(\bar{w}-\bar{z})^{2\bar{h}}},$$

由于系数 $C_{\alpha\beta}$ 是对称的, 因此我们选取 $C_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}$, 只差一个正规化系数.

共形不变性要求, 下面的算符乘积展开一定具有如下的形式

$$\phi_1(z, \bar{z}) \phi(0, 0) = \sum_p \sum_{\{k, \bar{k}\}} C_{12}^{p\{k, \bar{k}\}} z^{h_p - h_1 - h_2 + K} \bar{z}^{\bar{h}_p - \bar{h}_1 - \bar{h}_2 + \bar{K}} \phi_p^{\{k, \bar{k}\}}(0, 0) \tag{4.44}$$

将上面的等式两端乘以第三个 primary field $\phi(w,\bar{w})$, 其共形维数是 h_r 和 $\bar{h}_r$, 根据 LSZ 公式, 我们有

$$\langle \phi_r \,|\, \phi_1(z,\bar{z}) \,|\, \phi_2 \rangle = \lim_{w,\bar{w}\to\infty} w^{2h_r} \bar{w}^{2\bar{h}_r} \langle \phi_r(w,\bar{w}) \phi_1(z,\bar{z}) \phi_2(0,0) \rangle = \frac{C_{r12}}{z^{h_1+h_2-h_r} \bar{z}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2-\bar{h}_r}}$$

最后一个等式是根据三点关联函数的一般形式(2.9)得到的. 在(4.44)的左端, 有贡献的项仅有 $p\{k,\bar{k}\} = r\{0,0\}$, 原因是 Verma 模的正交性, 我们将在下一章叙述. 我们记

$$C_{12}^{p\{0,0\}} := C_{12}^{p}.$$

我们设系数

$$C_{12}^{p\{k,\bar{k}\}} = C_{12}^{p} \beta_{12}^{p\{k\}} \bar{\beta}_{12}^{p\{\bar{k}\}}.$$

重要的关系是

$$L_n \,|N+n, h_p\rangle = (h_p + (n-1)h + N) \,|N, h_p\rangle \,. \tag{4.45}$$

第五章　极小模型

本节中我们关注被称为**极小模型**的共形场论. Virasoro 代数在这些理论的 Hilbert 空间上只有有限多个表示.

5.1　附录

二维的共形变换等价于全纯函数. 在复平面上, 我们有 $z = x^1 + \mathrm{i}x^2$, 于是

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

以及

$$\begin{pmatrix} dz \\ d\bar{z} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{pmatrix}.$$

记 $\partial \coloneqq \partial_z, \bar{\partial} \coloneqq \partial_{\bar{z}}$, 还有

$$\begin{pmatrix} \partial & \bar{\partial} \end{pmatrix} \coloneqq \begin{pmatrix} \partial_z & \partial_{\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 \end{pmatrix} U^{-1} = \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\mathrm{i}}{2} & \frac{\mathrm{i}}{2} \end{pmatrix}.$$

所以, 如果度规是二维的, 显然 ds^2 在变换 U 下保持不变. 所以

$$g_{z\bar{z}} = (U^{-1})^T g_{\mu\nu} U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

然后取逆

$$g^{z\bar{z}} = U g^{\mu\nu} U^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

同样, 我们得到反对称张量 $\epsilon_{\mu\nu}$ 在坐标 $z, \bar{z}$ 下的矩阵

$$\epsilon_{z\bar{z}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mathrm{i}}{2} \\ -\frac{\mathrm{i}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

以及

$$\epsilon^{z\bar{z}} = \begin{pmatrix} 0 & -2\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

如果我们考虑无穷小的共形变换, 对坐标系来说是仿射变换

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^1 + \alpha^1 \\ x^2 + \alpha^2 \end{pmatrix} = \mathbf{x} + \alpha.$$

于是, 1-形式的变化规律为

$$d\mathbf{x}' = (1 + d\alpha) d\mathbf{x}.$$

其中,

$$d\alpha = \begin{pmatrix} \partial_1 \alpha^1 & \partial_2 \alpha^1 \\ \partial_1 \alpha^2 & \partial_2 \alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^1 & \alpha^2 \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} \partial \\ \bar{\partial} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^z & \alpha^{\bar{z}} \end{pmatrix} (U^{-1})^T.$$

根据反函数定理, 精确到 α 的一阶,

$$(1 + d\alpha)^{-1} = 1 - d\alpha.$$

所以,

$$g'_{\mu\nu} = (1 - d\alpha)^T g_{\mu\nu} (1 - d\alpha) \tag{5.1}$$

然后

$$g'_{z\bar{z}} = (U^{-1})^T g'_{\mu\nu} U^{-1} = (U^{-1})^T (1 - d\alpha)^T g_{\mu\nu} (1 - d\alpha) U^{-1}. \tag{5.2}$$

如果只要求精确到 α 的一阶, 并要求这是一个共形变换, 即

$$g'_{z\bar{z}} \propto g_{z\bar{z}}$$

我们详细地计算前一式, 得到上式成立当且仅当

$$\partial \alpha^{\bar{z}} = 0$$
$$\bar{\partial} \alpha^{z} = 0$$

即, 仿射变换

$$z \mapsto z + \alpha^z$$

是无穷小共形变换当且仅当 α^z 是全纯函数. 推广到一般的情况, 若变换

$$z' = f(z)$$

是共形变换, 当且仅当 f 是全纯的.

5.2 复标度

我们希望算符在标度变换

$$z \mapsto \lambda z$$

下的行为是

$$\phi_j(\lambda z, \bar{\lambda}\bar{z}) = \lambda^{-\Delta_j} \bar{\lambda}^{-\bar{\Delta}_j} \phi_j(z, \bar{z}).$$

如果上式成立, 那么在一般的共形变换

$$z \mapsto z' = f(z)$$

下, 关联函数的变化是

$$\langle \phi_1(z_1', \bar{z}_1') \cdots \phi_n(z_n', \bar{z}_n') \rangle = \prod_{j=1}^{n} (\partial f(z_j))^{-\Delta_j} (\bar{\partial} \bar{f}(\bar{z}_j))^{-\bar{\Delta}} \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle$$

5.3 能动张量

考虑无穷小变换 (不必共形)

$$x^\mu \mapsto x^\mu + \alpha^\mu.$$

这里用作用量的变化来定义能动张量

$$\delta S :== -\frac{1}{2\pi} \int T_{\mu\nu} \alpha^{\mu,\nu} d^2x = \frac{1}{2\pi} (\partial^\nu T_{\mu\nu}) \alpha^\mu d^2x.$$

将能动张量变换到复变量

$$\begin{aligned}
T_{zz} &= \frac{x^\mu}{z} \frac{x^\nu}{z} T_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(T_{xx} - T_{xy}) - \frac{\mathrm{i}}{4}(T_{xy} + T_{yx}) \\
T_{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{x^\mu}{\bar{z}} \frac{x^\nu}{\bar{z}} T_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(T_{xx} - T_{yy}) + \frac{\mathrm{i}}{4}(T_{xy} + T_{yx}) \\
T_{z\bar{z}} &= \frac{x^\mu}{z} \frac{x^\nu}{\bar{z}} T_{xy} = \frac{1}{4}(T_{xx} + T_{yy}) + \frac{\mathrm{i}}{4}(T_{yx} - T_{xy}) \\
T_{\bar{z}z} &= \frac{x^\mu}{\bar{z}} \frac{x^\nu}{z} T_{xy} = \frac{1}{4}(T_{xx} + T_{yy}) - \frac{\mathrm{i}}{4}(T_{yx} - T_{xy})
\end{aligned}$$

5.4 共形 Ward 恒等式

全纯函数可以在一点 z_0 展开为 Laurent 级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Cauchy 积分定理

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz.$$

考虑有界的开邻域 $\Omega \subset \mathcal{D}, \Omega$ 中包含 n-点关联函数 $\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle$ 的所有点 $z_1, \ldots z_n$. 我们要构造一个无穷小变换, 在 Ω 内是共形的, 在 Ω^c 中是恒等变换. 如果作用量是共形不变的, 那么也一定是转动不变和伸缩不变的, 因此得到 $T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0$. 再根据 Noether 定理, 得到守恒流为

$$j_\nu = T_{\mu\nu} \alpha^\mu$$

根据流守恒条件 $\partial^\nu j_\nu = 0$, 能够推出

$$\partial^\nu T_{\mu\nu} = 0.$$

从上述守恒条件, 可以推出 $\bar{\partial} T_{zz} = \partial T_{\bar{z}\bar{z}} = 0$.

这样, 作用量的变化为

$$\begin{aligned}
\delta S &= -\frac{1}{2\pi} \int_\Omega \partial^\nu (T_{\mu\nu} \alpha^\mu) d^2 x \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} (j_1 dx_2 - j_2 dx_1) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \int_{\partial\Omega} (j_z dz + j_{\bar{z}} d\bar{z}) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \int_{\partial\Omega} (T_{zz} \alpha dz + T_{\bar{z}\bar{z}} \bar{\alpha} d\bar{z})
\end{aligned}$$