

读书笔记

张弛

2019 年 10 月 16 日

目录

第一章 量子场论	1
1.1 概览	1
1.1.1 路径积分与量子化	1
1.1.2 Feynman 图	5
1.1.3 Stokes 现象	9
1.1.4 行列式	14
1.1.5 量子力学	18
1.2 约束体系的约化	23
1.2.1 首要约束	23
1.2.2 次要约束	26
1.2.3 弱方程与强方程	27
1.2.4 Lagrange 乘子的限制	28
1.2.5 可约与不可约情形	28
1.2.6 全哈密顿量	29
1.2.7 第一类函数与第二类函数	29
1.2.8 第一类约束作为规范变换的生成元	30
1.2.9 扩展的哈密顿量	31
1.2.10 第二类约束: Dirac 括号	31
1.2.11 Symplectic Geometry in a Nutshell	36
1.3 量子电动力学	43
1.3.1 规范不变性的引入	44
1.3.2 量子化	46
1.3.3 相互作用绘景	49

1.3.4	光子的传播子	52
1.3.5	p -形式的规范场	52
1.4	散射理论	54
1.4.1	构建初态和末态上的 Poincaré 表示	54
1.4.2	散射截面与衰变率	56
1.4.3	么正性的应用	58
1.4.4	微扰展开	60
1.4.5	不在质壳的情形	63
1.4.6	关联函数	66
1.5	关联函数的整体性质	67
1.5.1	对称性的应用	67
1.5.2	解析性质	68
1.5.3	场算符与质量的重整化	69
1.5.4	荷的重整化与 Ward 恒等式	74
1.5.5	规范不变性	76
第二章	粒子物理	79
2.1	夸克模型	79
2.1.1	介子	80
2.1.2	重子	84
2.2	弱相互作用	87
2.2.1	历史遗迹	87
2.2.2	电弱统一理论	92
第三章	范畴论初步	99
3.1	基本概念	99
3.1.1	对偶性	101
3.1.2	函子性	104
3.1.3	自然性	107
3.1.4	范畴的等价	109
3.1.5	图表追踪	113
3.2	泛性质, 可表性以及 Yoneda 引理	117

3.2.1	可表函子.....	117
3.2.2	Yoneda 引理.....	121
3.2.3	泛性质与泛元素.....	125
3.2.4	元素范畴.....	128
3.3	极限与余极限.....	132
3.3.1	锥形与余锥形	132
3.3.2	集合范畴中的极限	138
3.3.3	极限与余极限的保持, 反射, 和创生.....	141
3.3.4	极限与余极限的可表性	144
3.3.5	完备与余完备范畴	150
3.3.6	极限与余极限的函子性	153
3.3.7	极限与余极限的关系.....	155
3.4	伴随.....	159
3.4.1	伴随函子.....	159
3.4.2	单位与余单位	162
3.4.3	逆变及多变量伴随函子	165
3.4.4	伴随的计算	169
3.4.5	伴随, 极限与余极限	170
3.4.6	伴随函子的存在性	174
第四章	有限群的结构	175
4.1	群在集合上的作用.....	175
4.2	Sylow 定理.....	181
4.3	有限群的分类.....	185
第五章	同调代数	189
5.1	动机.....	189
5.2	单纯与奇异同调	192
5.3	链复形.....	201
5.4	Abel 同伦论.....	225
5.4.1	链同伦与分解	225
5.4.2	导出范畴.....	235

5.4.3	导出函子.....	238
5.4.4	导出函子的基本例子.....	251
5.5	基本定理.....	268
5.5.1	万有系数定理与 Künneth 定理.....	268
第六章	BRST 上同调	275
6.1	Lie 代数的上同调.....	275
6.1.1	泛包络代数.....	275
6.1.2	Lie 代数的上同调.....	277
6.1.3	用导出函子定义上同调.....	278
6.2	辛约化.....	279
6.2.1	Lie 群作用与 Lie 代数作用.....	279
6.2.2	Lie 群作用在辛流形上.....	288
6.2.3	辛约化.....	290
6.2.4	余迷向约化.....	291
6.3	BRST 复形.....	293
6.3.1	代数的序曲.....	293
6.3.2	群作用的 BRST 复形.....	294
6.3.3	Koszul 分解.....	295
6.3.4	BRST 复形.....	297
6.3.5	经典 BRST 算子以及 Poisson 结构.....	297
第七章	一些代数拓扑	299
7.1	覆叠空间.....	299
7.1.1	覆叠空间的定义.....	299
7.1.2	道路提升性质.....	300
7.1.3	广群的覆叠空间.....	301
7.1.4	群作用与轨道范畴.....	303
7.1.5	广群覆叠的分类.....	304
7.1.6	构造广群的覆叠.....	306
7.1.7	覆叠空间的分类.....	307
7.1.8	构造覆叠空间.....	309

7.1.9	问题.....	312
7.2	图.....	314
7.2.1	图的定义.....	314
7.2.2	树, 边组成的道路.....	314
7.2.3	图的同伦型.....	316
7.2.4	图的覆叠空间和 Euler 示性类.....	316
7.2.5	在群论中的应用.....	317
7.3	余纤维化.....	318
7.3.1	余纤维化的定义.....	319
7.4	纤维化.....	320
7.4.1	纤维化的定义.....	321
7.4.2	道路提升函数与纤维化.....	321
7.4.3	用纤维化代替映射.....	323
7.4.4	纤维化的判据.....	323
第八章	半单 Lie 代数的表示	325
8.1	概念和定义.....	325
8.2	半单 Lie 代数及其根系.....	327
8.3	权和 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 子代数.....	333
8.4	单根与 Cartan 矩阵.....	335
8.5	有限维不可约复表示.....	338
8.6	$\mathfrak{su}(N)$ 及其复化 $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$	342
8.7	对称群和 Young 图.....	344
第九章	BV 量子化	349
9.1	物理学家们的语言.....	349
9.1.1	Faddeev-Popov 方法.....	352
9.1.2	BRST 对称性.....	353
9.2	动机与技术.....	353
9.3	超几何.....	357
9.3.1	\mathbb{Z}_2 -分级代数.....	357
9.3.2	超流形.....	358

9.3.3	积分.....	360
9.4	分级几何.....	360
9.4.1	\mathbb{Z} -分级线性代数.....	361
9.4.2	分级流形.....	362
9.5	奇 Fourier 变换与 BV 形式化.....	363
9.5.1	奇 Fourier 变换.....	364
9.6	Stokes 定理.....	366
9.6.1	代数观点看积分.....	368
9.7	规范理论回顾.....	371
9.7.1	主丛上的联络.....	371
9.7.2	规范场.....	377
9.8	附录.....	378
9.8.1	层.....	378
第十章	共形场论初步	381
10.1	对称性.....	381
10.1.1	无穷小变换与 Noether 定理.....	382
10.1.2	Ward 恒等式.....	384
10.2	一般的共形场论.....	387
10.2.1	经典场论中的共形不变性.....	389
10.2.2	量子场论中的共形不变性.....	391
10.3	2 维共形场论.....	393
10.3.1	2 维共形群.....	393
10.3.2	Ward 恒等式.....	396
10.3.3	自由场与算符乘积展开.....	399
10.3.4	中心荷.....	400
10.4	算子形式.....	401
10.4.1	径向量子化.....	401
10.4.2	Virasoro 代数.....	405
10.4.3	例子: 自由玻色子.....	408
10.4.4	正规排序.....	409
10.5	附录.....	410

第一章 量子场论

1.1 概览

1.1.1 路径积分与量子化

一个物理系统总是可以被如下的映射描述

$$S : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}$$

\mathcal{E} 被称为**场空间**, S 被称为**作用量泛函**. 通常来说, \mathcal{E} 是无穷维的.

经典物理可以被临界点描述

$$\text{Crit}(S) = \{\delta S = 0\}$$

$\delta S = 0$ 被称为运动方程. 量子物理由积分

$$\int_{\mathcal{E}} \mathcal{O} e^{iS/\hbar}$$

描述. \mathcal{O} 是 \mathcal{E} 上的映射, 称为**可观测量**. 当 \hbar 很小时, 上述积分可以被取 S 的临界点处的值近似, 这种方法被称为**驻相法**.

当 \mathcal{E} 是无穷维时, 上述积分被称为**路径积分**, 通常情况下路径积分时没有被严格定义的. 但在 S 的临界点附近路径积分的渐近展开是可以被严格

理解的, 这被称为**微扰论**. 理解微扰论与理解整个的路径积分相去甚远, 但微扰论毕竟是理解整个路径积分的第一步. 有时, 在某些超对称理论中, 微扰论可以完全描述整个理论. 在最近的 **resurgent modthod** 的某些进展中, 微扰论可以给出某些非微扰信息. 于是, 这里我们主要关注微扰论的研究.

下面是我们要关注的量子场论的几个基本例子:

- (i.) 标量场理论. $\mathcal{E} = C^\infty(X)$, 场空间是流形 X 上的光滑函数.
- (ii.) 规范理论. 场空间是 X 上的某个纤维丛上的所有联络.
- (iii.) σ -模型. $\mathcal{E} = \text{Map}(\Sigma, X)$, 场空间是两个流形之间的映射.
- (iv.) 引力. 场空间是 X 上的度规.

我们将主要利用 BV 量子化的方法来理解路径积分. 先在有限维的情况下理解其主要思想. 令

$$\mathcal{E} = C_c^\infty(X),$$

X 为 n 维光滑定向流形. 令 Ω 为 X 上给定的一个体积形式, 于是我们就有如下的映射

$$\begin{aligned} \int_X : C_c^\infty &\rightarrow \mathbb{R}, \\ g &\mapsto \int_X g \Omega. \end{aligned}$$

我们有如下的 de Rham 上同调表述. 令

$$\Omega_c(X) = \oplus_p \Omega_c^p(X)$$

为 X 上具有紧支集的微分形式. 存在微分映射

$$d : \Omega_c^p(X) \rightarrow \Omega_c^{p+1}(X).$$

根据 Poincaré 引理, 我们知道

$$H^n(\Omega_c(X)) = \mathbb{R}.$$

事实上, Ω 就是 $H^n(\Omega_c(X) = \mathbb{R})$ 的生成元.

我们用另一种稍微不同的方法. 先定义**多向量场**:

$$\mathbf{PV}(X) := \oplus_p \mathbf{PV}^p(X) = \oplus_p \Gamma(X, \wedge^p T_X),$$

即为 X 的切丛附加楔积结构. 记 $\mathbf{PV}_c(X)$ 为具有紧支集的多向量场. 于是我们可以自然地定义映射

$$\Gamma_\Omega : \mathbf{PV}(X) \rightarrow \Omega(X),$$

在 p 分量上为

$$\wedge^p T_X \rightarrow \Omega^{n-p}(X),$$

通过将 n -形式 Ω 与一个 p -多向量场进行缩并. 将 de Rham 上同调的微分映射沿着 Γ_Ω 拉回, 我们得到了 $\mathbf{PV}(X)$ 复形的微分映射 Δ_Ω , 根据构造, 满足

$$\Gamma_\Omega \circ \Delta_\Omega = d \circ \Gamma_\Omega.$$

令分量 $\mathbf{PV}^p(X)$ 具有阶数 $-p$, 于是

$$\Delta_\Omega : \mathbf{PV}^p(X) \rightarrow \mathbf{PV}^{p-1}(X)$$

具有阶数 1. 在上面的构造下, 我们发现积分 \int_X 可以通过

$$g \mapsto [g] \in H_0(\mathbf{PV}_c(X)) = \mathbb{R}$$

等价地描述. 于是我们用多向量场代替了微分形式, 将积分与函数进行对偶

$$H^n \rightarrow H_0.$$

这样做的好处在于, 当 X 是无穷维时, $n \rightarrow \infty$, H^n 是较难处理的, 但只要我们能够让 Δ_Ω 有意义, H_0 总是容易处理的. 我们将会看到, 这的确可以做到.

Δ_Ω 被称为 BV 算子. 为了知道 Δ_Ω 的具体形式, 我们取流形 X 的开集 \mathcal{U} 上的一个局部坐标 $\{x^i\}$. 令

$$\Omega = e^{f(x)} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

在局部上,

$$\mathrm{PV}(\mathcal{U}) = C^\infty(\mathcal{U})[\partial_1, \dots, \partial_n],$$

且满足关系

$$\partial_i \partial_j = -\partial_j \partial_i.$$

引入 Grassmann 变量 θ_i , 即令

$$\theta_i := \partial_i.$$

于是一个局部截面 $\mu \in \mathrm{PV}(X)$ 是 x^i, θ_i 的函数

$$\mu = \mu(x^i, \theta_i).$$

于是, 我们可以定义对 θ_i 的导数 $\partial/\partial\theta_i$.

引理 1.1 BV 算子 Δ_Ω 在局部坐标系中的表示为

$$\Delta_\Omega = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \theta_i} + \sum_i \partial_i f \frac{\partial}{\partial \theta_i}$$

并注意未添加的符号.

观察到第一项与通常的 Laplace 算子类似, 但 BV 算子并非真正的 Laplace 算子. 有时将 Δ_Ω 称为 BV Laplace 算子.

与通常的微分算子 d 相比, Δ_Ω 看起来像一个二阶微分算子. 我们可以引入如下概念, 来度量它与微分算子的差距.

定义 1.1 我们定义括号

$$\{-, -\} : \mathrm{PV}(X) \times \mathrm{PV}(X) \rightarrow \mathrm{PV}(X),$$

作用在元素上

$$\{\alpha, \beta\} = \Delta_\Omega(\alpha\beta) - \Delta_\Omega(\alpha)\beta - (-1)^{|\alpha|}\alpha\Delta_\Omega(\beta).$$

$\{-, -\}$ 就是 Schouten-Nijenhuis 括号. 我们将会发现, 量子化过程可以理解为形变

$$\{-, -\} \rightarrow \Delta_\Omega.$$

◇

1.1.2 Feynman 图

我们考虑最简单的 $X = \mathbb{R}$ 的情况. 选择体积形式

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx,$$

BV 算子为

$$\Delta_\Omega = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} - x \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

对于任意的多项式 $g(x)$, 我们有

$$\Delta_\Omega g = 0,$$

因为 $g(x)$ 不依赖于 θ . 令 $[g]$ 为 g 在 Δ_Ω -同调中的同调类. 由于

$$\Delta_\Omega(x^{m-1}\theta) = (m-1)x^{m-2} - x^m,$$

我们发现

$$[x^m] = (m-1)[x^{m-2}].$$

注意到, 在一维和零维的情况下, Γ_Ω 是一个同构, 因此当 m 是奇数时, $[x^m] = 0$. 且

$$[x^{2k}] = (2k-1)!![1],$$

于是

$$\int_{\mathbb{R}} x^{2k} \Omega = (2k-1)!! \int_{\mathbb{R}} \Omega = (2k-1)!!,$$

即在链复形 $(\mathbb{C}[x, \theta], \Delta_\Omega)$ 中取 0 阶同调的操作, 就是将多项式对体积形式 Ω 在 \mathbb{R} 上积分.

为了更清楚地看清这一切的结构, 我们引入算子

$$U = e^{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}} : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x],$$

U 可以自然地扩张到 $\mathbb{C}[x, \theta]$.

引理 1.2

$$\Delta_\Omega = U^{-1}(-x \frac{\partial}{\partial \theta})U.$$

我们有上链复形之间的上链同构

$$U : (\mathbb{C}[x, \theta], \Delta_\Omega) \rightarrow (\mathbb{C}[x, \theta], -x \frac{\partial}{\partial \theta}),$$

且 $U(1) = 1$. 算子 $-x \frac{\partial}{\partial \theta}$ 的同调是容易描述的. 任何多项式函数 $h(x)$ 与 $h(0)$ 都在一个同调类中, 因此在复形 $(\mathbb{C}[x, \theta], -x \frac{\partial}{\partial \theta})$ 中, 取 0 阶同调群的操作就是在 0 处取值. 由于 U 诱导了上同调群之间的同构, 所以

$$U([g(x)]) = [U(g)(x)] = [U(g)(0)].$$

等价地,

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) \Omega = e^{\frac{1}{2} \partial_x^2} g(x)|_{x=0} [1] = e^{\frac{1}{2} \partial_x^2} g(x)|_{x=0}.$$

更一般地, 引入辅助的参数 a , 于是有

$$\int_{\mathbb{R}} g(x+a) \Omega = e^{\frac{1}{2} \partial_a^2} g(a). \quad (1.1)$$

所以算子 U 描述了多项式在体积形式 Ω 上积分的全部信息.

我们现在考虑相互作用系统的一个玩具模型

$$\int_{(\mathbb{R})} e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3)/\hbar} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

我们之前研究的二次项 $\frac{1}{2}x^2$ 对应着自由部分, 三次项代表相互作用. 这积分显然是发散的, 但我们有几种办法来处理. 第一种办法是将积分区间 \mathbb{R} 形变到 \mathbb{C} 中的一个不同圆周, 令积分收敛. 这能够激发非微扰论的一些方法. 另一种方法是我们可以将相互作用项视为小的微扰. 例如, 如果我们重新标度 $x \rightarrow \sqrt{\hbar}x$, 积分变成

$$\sqrt{\hbar} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{\sqrt{\hbar}}{3!}x^3} \sqrt{dx} \sqrt{2\pi},$$

于是我们可以将 $e^{\frac{\hbar}{3!}x^3}$ 展开成 \hbar 的幂级数, 这给出了当 $\hbar \rightarrow 0$ 的渐进性质. 我们在这里采取后一种方法.

我们将 \hbar 带回, 此时的 U 算子变成

$$U_{\hbar} = e^{\frac{\hbar}{2}\partial_x^2}.$$

根据(1.1), 我们可以形式地写出

$$\int_{\mathbb{R}} e^{(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}(x+a)^3)/\hbar} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} = e^{\frac{\hbar}{2}\partial_a^2} e^{\frac{1}{3!}a^3/\hbar} = \sum_{k,m \geq 0} \frac{(\frac{\hbar}{2}\partial_a^2)^k}{k!} \frac{(\frac{1}{3!}a^3)^m}{m!}.$$

上述的级数可以用分组的图来描述. 我们引入被称为**传播子**边以及一个三次顶点. 传播子表示了 $\frac{\hbar}{2}\partial_a^2$, 是 \hbar 的一次项. 顶点表示 $\frac{1}{3!}a^3$, 携带 \hbar^{-1} 项. 将每个 ∂_a 连接某个 a , 我们得到了连接一个顶点的一条边. 于是上面的级数可以被分成不同类型的三价图的和. 将每一条外线上都放一个 a . 对于每个图 Γ , 按照上面的规则, 并写出一个多项式

$$W_{\Gamma}(a) = a^D \hbar^{E-V}$$

其中 D 是外线的数目, E 是内线的数目, V 是顶点的数目. 令 $\text{Aut}(\Gamma)$ 为图 Γ 到自身的所有顶点, 内线, 外线的置换.

命题 1.3 我们有形式和的公式

$$\sum_{k,m \geq 0} \frac{(\frac{\hbar}{2}\partial_a^2)^k}{k!} \frac{(\frac{1}{3!}a^3)^m}{m!} = \sum_{\Gamma: \text{all trivalent graphs}} \frac{W_{\Gamma}(a)}{|\text{Aut}(\Gamma)|} = \exp\left(\sum_{\Gamma: \text{all connected graphs}} \frac{W_{\Gamma}(a)}{|\text{Aut}(\Gamma)|}\right).$$

我们将积分形式地写为

$$e^{W(a)/\hbar} := \int_{\mathbb{R}} e^{(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}(x+a)^3)/\hbar} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}},$$

于是,

$$W(a) := \hbar \sum_{\Gamma: \text{connected}} \frac{W_{\Gamma}(a)}{|\text{Aut}(\Gamma)|}$$

我们还可以将 $W(a)$ 用 \hbar 展开:

$$W(a) = \sum_{g \geq 0} W_g(a) \hbar^g.$$

注意到 $\hbar W_\Gamma(a)$ 贡献了 $\hbar^{g(\Gamma)} := \hbar^{E-V+1}$, 其中 $g(\Gamma)$ 是 Γ 中的圈数. 于是 W_g 是由 g -圈连通图贡献的. $g = 0$ 的图被称为**树图**. $g = 1$ 的图被称为**一圈图**. 树图对应于经典的信息, 从一圈图开始, 可以被视为量子修正.

上面的方法可以被推广. 我们考虑

$$e^{\frac{\hbar}{2} \partial_a^2} e^{I(a)/\hbar} := \int_{\mathbb{R}} e^{(-\frac{1}{2}x^2 + I(x+a))/\hbar} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}}.$$

相互作用 I 中可以包含许多项, 每一项都代表一种类型的顶点. I 中的项也可以还有 \hbar 的幂. 此时, 我们将含有 \hbar^k 的顶点的圈数定义为 k . 例如, 一项 $\hbar^2 x^4$ 可以被视为给出了一个 4 价 2 圈的顶点. 当我们计算一个图 Γ 的圈数时, 我们应该计入来自每个顶点的额外圈数. 记

$$e^{W(P,I)/\hbar} = e^{\frac{\hbar}{2} \partial_a^2} e^{I(a)/\hbar}.$$

其中 $P = \frac{1}{2} \partial_x^2$ 代表传播子, I 代表相互作用项. 根据 Feynman 图公式, 我们定义 $W(P, I)$ 为

$$W(P, I) = \hbar \sum_{\Gamma: \text{connected}} \frac{W_\Gamma(a)}{|\text{Aut}(\Gamma)|}, \quad (1.2)$$

Γ 取遍所有连通的图, 图的顶点来自 I 中的可能的项. 于是, 这定义了一个变换

$$I \rightarrow W(P, I)$$

使得

$$e^{W(P,I)/\hbar} \rightarrow e^{\hbar P} e^{I/\hbar}.$$

命题 1.4 $W(P, -)$ 是一个良定义的变换

$$W(P, -) : \mathbb{C}[[x, \hbar]]^+ \rightarrow \mathbb{C}[[x, \hbar]]^+.$$

其中, $\mathbb{C}[[x, \hbar]]^+$ 是 $\mathbb{C}[[x, \hbar]]$ 中模调 \hbar 后至少三次的子空间, 即

$$\mathbb{C}[[x, \hbar]]^+ := x^3 \mathbb{C}[[x]] \oplus \hbar \mathbb{C}[[x, \hbar]].$$

证明. 对于 $I \in \mathbb{C}[[x, \hbar]]^+$, 我们要证明给定有限的外线数以及圈数, 只存在有限个数目的图. 令 Γ 为一个 G -圈图, 有 D 条外线, V 个顶点, E 条内线. 设 Γ 中含有 $n_{g,k}$ 个 k 价 g 圈的顶点. 那么

$$\begin{aligned} G &= E - V + 1 + \sum_{g,k} g n_{g,k}, \\ V &= \sum_{g,k} n_{g,k}, \\ \sum_{g,k} k n_{g,k} &= 2E + D. \end{aligned}$$

于是

$$2G + D - 2 = \sum_{g,k} (2g + k - 2) n_{g,k}.$$

由于 $I \in \mathbb{C}[[x, \hbar]]^+$, 所以 $2g + k - 2 \geq 0$, 仅当 $g = 1, k = 0$ 时等号成立. 由于 $n_{g,k}$ 的数目是有限的, 所以

$$2G + D - 2 \geq 0,$$

仅当 $G = 1, D = 0$ 时等号成立. 于是 $W(P, I) \in \mathbb{C}[[x, \hbar]]^+$. □

我们将 $W(P, -)$ 称为 P 的重整化群流.

1.1.3 Stokes 现象

在处理无穷维的问题之前, 我们来观察积分

$$\int_C e^{(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3)/\hbar} \frac{dx}{2\pi\hbar},$$

其中 C 是复平面上一个回路 \mathbb{C} . 我们知道, 如果 C 是实直线 \mathbb{R} , 上述积分实际上是发散的. 我们先忽略掉这一点, 再来研究一些上述“积分”的整体性质, 并找到 Feynman 图的一般公式.

经过变量替换, 上述积分可以变成

$$\int e^{(x^3-x)/\hbar} dx.$$

为了使这积分收敛, 我们将积分区间从 \mathbf{R} 变换到另一个回路 $C \subset \mathbb{C}$. 我们先假定 $\hbar > 0$, 此时, 我们令

$$C = i\mathbf{R}.$$

积分

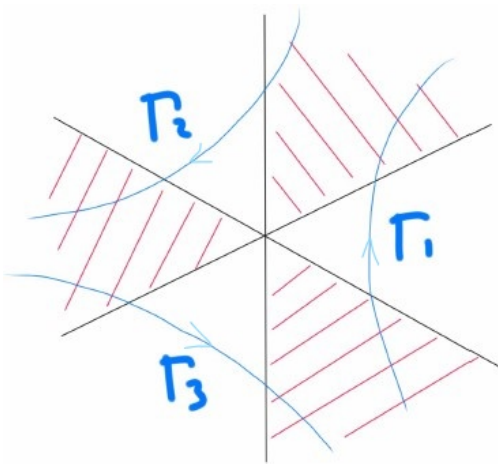
$$\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{(x^3-x)/\hbar} dx = 2 \int_0^\infty \cos((x^3-x)/\hbar) dx$$

被称为 **Airy 积分**.

更一般地, 我们可以选择 C , 使得 $(\frac{x^3}{3} - x)/\hbar$ 在 C 的边界上是衰减的, 即区域

$$\operatorname{Re}(x^3/\hbar) < 0.$$

在复平面上用阴影标出上述区域, 并画出曲线 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, 曲线的定向如下图所示. 在阴影区域的无穷远处, $e^{\frac{x^3}{\hbar}}$ 的实部是趋于零的, 所以积分是有定义



的. 因此, 积分

$$\int_{\Gamma_i} e^{(x^3-x)/\hbar} dx, \quad i = 1, 2, 3$$

是有定义的. 根据留数定理, 我们得到了关系

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i} e^{(x^3-x)/\hbar} dx = 0.$$

现在到了关键的步骤. 令

$$Z_i(\hbar) := \int_{\Gamma_i} e^{(x^3-x)/\hbar} dx.$$

$Z_i(\hbar)$ 作为 \hbar 的函数具有怎样的解析性质? 如果我们将 $Z_i(\hbar)$ 通过

$$\hbar \rightarrow e^{i\theta} \hbar$$

延拓, 并将曲线 Γ_i 进行适当的形变. 由于积分在曲线的较小形变下值不会改变, 所以当一周过后

$$\hbar \rightarrow e^{2\pi i} \hbar$$

三条曲线 Γ_i 进行了一个轮换. 于是有

$$Z_i(e^{2\pi i} \hbar) = Z_{i+1}(\hbar).$$

如果令 $Z_1(\hbar), Z_2(\hbar)$ 代表两个线性独立的积分, 那么当 $\hbar \rightarrow e^{2\pi i} \hbar$ 时,

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}.$$

矩阵 $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ 被称为**单延拓**. 显然, $M^3 = 1$.

为了得到一些几何图像, 我们管擦和所谓的 **Lefschetz thimble**. 只有两个独立的积分的根本原因是, $I = (x^3 - x)/\hbar$ 有两个临界点

$$\text{Crit}(I) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\} = \{p_+, p_-\}.$$

临界值为

$$I(p_{\pm}) = \mp \frac{2}{3\sqrt{3}\hbar}.$$

从两个临界点 p_{\pm} 开始, 我们可以如下构造两个回路 Γ_{\pm} .

考虑方程

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\overline{\partial I}}{\partial x}, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{C},$$

横线代表复共轭. 于是有

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{\partial I}{\partial x} = -\left|\frac{\partial I}{\partial x}\right|^2.$$

这意味着, 沿着每条流线

- (i.) $\operatorname{Re}(I)$ 在衰减,
- (ii.) $\operatorname{Im}(I)$ 是常数,
- (iii.) 当 $t \rightarrow \pm\infty$ 时, $x(t)$ 趋于 ∞ 或 p_{\pm} .

令

$$\Gamma_{\pm} = \cup \{\text{flows} \mid x(-\infty) = p_{\pm}\}.$$

在每条流线上, $\operatorname{Im}(I)$ 是常数. 由于

$$\operatorname{Im}(I)(\Gamma_+) = \operatorname{Im}(I)(p_+) = \operatorname{Im}\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}\hbar}\right), \operatorname{Im}(I)(\Gamma_-) = \operatorname{Im}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}\hbar}\right).$$

因此, 若 \hbar 不是实数, 则 Γ_+ 与 Γ_- 不会相交 (若相交, 在交点处的 I 取值必然相同. 但由于 I 在两条流线上的虚部是一个常数, 且 \hbar 为复数时 I 在两条流线上的虚部不同, 故矛盾). 因此, 我们找到了两个独立的积分

$$\int_{\Gamma_+} e^I dx, \int_{\Gamma_-} e^I dx.$$

但当 \hbar 是实数时, 存在一条从一个临界点流向另一个临界点的流线. 因此, Γ_{\pm} 的定义将变得混淆. 两条射线 $\{\hbar > 0\}$ 以及 $\{\hbar < 0\}$ 被称为 **Stokes 射线**.

考虑 $\{\hbar > 0\}$. 在这条射线上,

$$I(p_-) > I(p_+).$$

由于 $\text{Re}(I)$ 沿着流线是衰减的, 所以存在一条流线使得 $x(-\infty) = p_-$, $x(+\infty) = p_+$. 我们考虑这条流线的下方的其余流线和上方的其余流线. 从 Stokes 射线下方越过 Stokes 射线到达下方可以用如下的变换来描述:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_+ \\ \Gamma_- \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_+ \\ \Gamma_- \end{pmatrix}.$$

在实际应用中, 我们需要一个有意义的积分

$$Z(\hbar) = \int e^I dx := n_+ \int_{\Gamma_+} e^I dx + n_- \int_{\Gamma_-} e^I dx,$$

并期望 $Z(\hbar)$ 是 \hbar 的一个解析函数, (n_+, n_-) 是 \hbar -平面上的局部常数, 但在 Stokes 射线两边有越变. 这也被称为**隧穿效应**.

这与 Feynman 图有什么关系呢? 事实上, 我们得到的用 Feynman 图计算的幂级数就是上述积分在一个临界点处的渐近展开. 回忆我们之前的相互作用项 $I = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$, 有两个临界点 $\{0, 2\}$. 我们考虑了在一点 0 出的渐近展开, 将 x^3 视为微扰, 但忽略掉了另一个临界点.

这两个临界点与 $\{p_{\pm}\}$ 是相同的. 我们分析一下这两点附近的渐进性质. 费曼图给出了我们如下的答案:

$$p_+ : \int_{\Gamma_+} e^I dx \sim \frac{e^{I(p_+)}}{\sqrt{\hbar}} (a_0 + a_1 \hbar + \cdots)$$

以及

$$p_- : \int_{\Gamma_-} e^I dx \sim \frac{e^{I(p_-)}}{\sqrt{\hbar}} (b_0 + b_1 \hbar + \cdots).$$

我们发现

(i.) 若 $\text{Re}(\hbar) > 0$, 则 $e^{I(p_-)}$ 占主导地位,

(ii.) 若 $\text{Re}(\hbar) < 0$, 则 $e^{I(p+)}$ 站主导地位.

射线 $i\mathbb{R}^+$ 与 $i\mathbb{R}^-$ 由于区分了主导的渐进性质, 有时被称为**反 Stokes 射线**.

1.1.4 行列式

现在让我们回到微扰论. 我们先将关于费曼图的讨论推广到更高的维度. 考虑积分

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{(-\frac{1}{2}Q(x)+I(x))/\hbar},$$

其中 $Q(x) = \sum_{i,j=1}^n Q_{ij}x^i x^j$, Q_{ij} 是一个正定对称矩阵, 被称为自由部分. $I(x)$ 被称为相互作用部分. 体积形式

$$\frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{1}{2\hbar}Q(x)}$$

给出了 BV 算子

$$\hbar \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \theta_i} - \sum_{i,j} Q_{ij} x^i \frac{\partial}{\partial \theta_j} = U^{-1} \left(- \sum_{i,j} Q_{ij} x^i \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) U,$$

其中

$$U = e^{\hbar P}, P = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

其中 $\{Q^{ij}\}$ 是 $\{Q_{ij}\}$ 的逆矩阵. 类似于一维的情形, 积分等价于

$$e^{\hbar P} e^{I/\hbar},$$

我们得到了 Feynman 图的幂级数

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{(-\frac{1}{2}Q(x)+I(x+a))/\hbar} \sim \frac{1}{\sqrt{\det(Q)}} \exp\left(\sum_{\Gamma:\text{connected}} \frac{W_{\Gamma}(a)}{|\text{Aut}(\Gamma)|}\right).$$

我们可以类似地写出重整化群流

$$W(P, -) : \mathbb{C}[[x^i, \hbar]]^+ \rightarrow \mathbb{C}[[x^i, \hbar]]^+,$$

$$W(P, I) = \hbar \sum_{\Gamma: \text{connected}} \frac{W_\Gamma}{|\text{Aut}(\Gamma)|}.$$

我们现在来考虑无穷维的情况. 我们从标量场开始. 场空间为流形 X 上的光滑函数

$$\mathcal{E} = C^\infty(X).$$

这是一个无穷维的空间. 我们可以在 X 上取 N 个点, 作为 X 的一个离散近似, 并认为 X 是一个当 $N \rightarrow \infty$ 的连续的极限. 我们可以很粗糙地认为

$$\mathbb{R}^N = \text{Map}(N\text{-points}, \mathbb{R}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \text{Map}(X, \mathbb{R}).$$

与有限维的情形相比较,

$$i \leftrightarrow \text{a point of } X.$$

考虑作用量泛函. 我们先从自由理论开始, 并考虑如下的作用量

$$S = \frac{1}{2} \int_X \phi D \phi, \phi \in C^\infty(X).$$

D 是一个正定的 Laplace 算子. $X = \mathbb{R}^d$ 时的一个典型的例子是

$$D = - \sum_i^d \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} + m^2.$$

m^2 被称为**质量**. 先尝试理解自由理论的路径积分

$$\int_{\mathcal{E}} [D\phi] e^{-S/\hbar}.$$

符号 $[D\phi]$ 代表测度, 在绝大多数情况下是没有定义的. 在任何情况下, 如果我们类比有限维的情形, 我们希望下面的等式成立

$$\int_{\mathcal{E}} [D\phi] e^{-S/\hbar} = \frac{1}{\sqrt{\det(D)}}.$$

但是, 我们究竟如何定义 $\det(D)$? 我们先用一个具有启发性的物理方法作为例子, 然后再解释数学构造.

考虑 $X = S^1_\beta$ 的情况, 即一个周长为 β 的圆周. 令

$$D = -\frac{d^2}{dt^2} + 1.$$

D 的特征向量为 $e^{2\pi i n t/\beta}, n \in \mathbb{Z}$. 于是特征值为

$$\frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2} + 1, n \in \mathbb{Z}.$$

我们朴素地认为,

$$\det(D) \stackrel{?}{=} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2}\right).$$

上式的当然是没有初等的意义的. 我们下面做一些形式上的操作:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\beta^2}{4\pi^2 n^2}\right) = e^{\sum_{n \geq 1} \ln \frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\beta^2}{4\pi^2 n^2}\right).$$

我们先来处理上式最右边的第一项. 定义

$$\eta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta}{2\pi n}\right)^{2s} = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{2s} \zeta(2s),$$

其中

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

是 Riemann ζ -函数. 形式上,

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2} = \eta'(0).$$

我们可以从解析延拓的角度来理解. $\zeta(s)$ 当 $\operatorname{Re}(s) > 1$ 时是有定义的, 且在 $s = 0$ 时具有解析延拓

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \zeta'(0) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi).$$

所以我们有一个有启发性的答案:

$$e^{\sum_{n \geq 1} \ln \frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2}} = e^{-\eta'(0)} = \beta.$$

第二项

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\beta^2}{4\pi^2 n^2}\right) = \frac{\sinh(\beta/2)}{\beta/2}.$$

将所有的贡献加在一起, 我们得到

$$\det(D) = 2 \sinh(\beta/2).$$

于是, 我们得到路径积分的一个可能的值为

$$\int_{\mathcal{E}} [D\phi] e^{-S/\hbar} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(\beta/2)}}.$$

我们将在之后给出这个结果的物理含义.

现在我们用上边的思路, 更加严格地处理 $\det(D)$. 令 D 为一个正定的 Laplace 算子, λ_i 为其特征值. 类比 Riemann ζ -函数, 定义

$$\zeta_D(s) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^s}.$$

得到 $\zeta_D(s)$ 的一种方法是利用热核算子 e^{-tD} . 热算子被一个核函数 $h_t(x, y)$ 表示:

$$(e^{-tD}\phi)(x) = \int h_t(x, y)\phi(y)dy.$$

h_t 是热方程

$$\left(\frac{d}{dt} + D_x\right)h_t(x, y) = 0$$

的基本解, 且 $\lim_{t \rightarrow 0} h_t(x, y) = \delta(x, y)$ 是 δ -函数. 利用

$$\frac{1}{\lambda^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^{s-1} dt,$$

我们得到

$$\zeta_D(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty (\text{Tre}^{-tD}) t^{s-1} dt.$$

注意到 $\text{Tre}^{-tD} = \int h_t(x, x) dx$, 当 $t \rightarrow 0$ 时具有良好的渐进性质. 因此 $\zeta_D(s)$ 在 $s = 0$ 处是具有解析延拓的. 于是, 行列式被定义为

$$\det(D) := e^{-\zeta'_D(0)}.$$

1.1.5 量子力学

量子力学是一维的量子场论. 令

$$q : I, \mathbb{R}, \text{ or } S^1 \rightarrow M$$

为流形 M 上的一条曲线. 考虑作用量泛函

$$S[q] = \int \mathcal{L}(q, \dot{q}) dt = \int \left(\frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q, \dot{q}) \right) dt,$$

其中 $\dot{q} = dq/dt$. V 被称为**势**. \mathcal{L} 被称为 Lagrangian, 可以被视为切丛 T_*M 上的一个函数

$$\mathcal{L} : T_*M \rightarrow \mathbb{R}.$$

经典物理研究的是 S 的临界点. 由于

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q,$$

临界点由**运动方程**描述:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0$$

考虑 Legendre 变换:

$$\begin{aligned} \lambda : T_*M &\rightarrow T^*M, \\ (q, \dot{q}) &\mapsto (q, p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}). \end{aligned}$$

假设 λ 是可逆的, 于是我们可以解出 $\dot{q} = \dot{q}(q, p)$. 因此, 我们得到了一个函数 \mathcal{H} 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} T_*M & \xleftarrow{\lambda^{-1}} & T^*M \\ \downarrow \mathcal{L} & \swarrow \mathcal{H} & \\ \mathbb{R} & & \end{array}.$$

且

$$\mathcal{H}(q, p) = p\dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q}),$$

被称为 Hamiltonian.

在 T^*M 上处理问题的好处是, T^*M 是一个辛流形, 具有正则的 Poisson 括号

$$\{-, -\} : C^\infty(T^*M) \times C^\infty(T^*M) \rightarrow C^\infty(T^*M)$$

使得

$$\{p, q\} = -\{q, p\} = 1.$$

于是经典的运动方程可以被描述为 Hamilton 向量场的流线.

经典物理中, 一个**可观测测量**是一个函数 $f \in C^\infty(T^*M)$, 其随时间的演化方程为

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\}.$$

为了得到量子理论, 我们引入所谓的**正则量子化**. 正则量子化不过是一个保持 Poisson 括号的映射

$$(p, q) \mapsto (\hat{p}, \hat{q}),$$

其中 \hat{p}, \hat{q} 是某个 Hilbert 空间中的算子, 且有

$$\begin{aligned} [\hat{q}, \hat{p}] &= i\hbar, \\ [\hat{q}, \hat{q}] &= [\hat{p}, \hat{p}] = 0. \end{aligned}$$

我们可以选择 Hilbert 空间为 $L^2(M)$. 于是令

$$\hat{q} = q, \hat{p} = -\hbar i \frac{\partial}{\partial q}.$$

这里, 量子化就是一个函子

$$T^*M \rightarrow D_M$$

其中 D_M 是 M 上的微分算子构成的空间. 类似地, Hamiltonian 也被量子化为一个算子

$$H \mapsto \hat{H}.$$

量子可观测量的演化方程变成了

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = i[\hat{H}, \hat{f}],$$

方程具有形式的解

$$\hat{f}(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{f}(0) e^{-i\hat{H}t/\hbar}.$$

时间演化算子 $e^{i\hat{H}t/\hbar}$ 定义了 Hilbert 空间上的一个酉算子. 我们引入 Dirac 的记号来标记量子态. 将 \hat{q} 的本征值记为 $|q\rangle$:

$$\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle.$$

Hilbert 空间中的任何一个元素都可以被表示为线性组合

$$|\phi\rangle = \sum_q \phi(q) |q\rangle.$$

$\phi(q)$ 被称为 $|\phi\rangle$ 的波函数表示. 我们将 $|\phi\rangle$ 的复共轭记为

$$\langle\phi|.$$

另一种表示波函数的方法是

$$\phi(q) = \langle q|\phi\rangle.$$

随着时间的变化, 坐标算子的演化方程为

$$\hat{q}(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{q} e^{-i\hat{H}t/\hbar}$$

特征值的演化方程为

$$|q, t\rangle = e^{i\hat{H}t/\hbar} |q\rangle .$$

在 t 时刻的波函数表示为

$$\phi(q, t) = \langle q, t | \phi \rangle = \left\langle q \left| e^{-i\hat{H}t/\hbar} \right| \phi \right\rangle ,$$

于是我们可以导出 Schrödinger 方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi = \hat{H} \phi .$$

现在我们终于可以进行实质性的讨论了. 考虑初态 $|\phi_i\rangle$ 经过时间 t 的演化之后变成模态 $|\phi_f\rangle$ 的概率幅. 即, 我们感兴趣的是

$$\langle \phi_f, t | \phi_i \rangle = \left\langle \phi_f \left| e^{-i\hat{H}t/\hbar} \right| \phi_i \right\rangle .$$

路径积分的基本物理意义就是来表示时间演化算子 $e^{-i\hat{H}t/\hbar}$. 我们可以形式地写出

$$K_t(q_f, q_i) = \int_{q(0)=q_i, q(t)=q_f} [Dq] e^{iS[q]} ,$$

这是一个对于有固定边界条件的道路空间的积分. 那么

$$\langle \phi_f, t | \phi_i \rangle = \int dq_f dq_i \overline{\phi_f(q_f)} K_t(q_f, q_i) \phi_i(q_i) .$$

特别地, 如果我们考虑在长度为 t 的圆周上的路径积分, 那么

$$\int_{q(0)=q(t)} [Dq] e^{iS} = \int dq K_t(q, q) = \text{Tre}^{-i\hat{H}t/\hbar} .$$

但路径积分的测度在一般情况下都是没有定义的. 然而, 上面的关系给物理系统带来了许多启发, 如果我们在初态和末态之间插入许多算子

$$\langle \phi_f, t | \hat{A}_n(q(t_n)) \cdots \hat{A}_1(q(t_1)) | \phi_i \rangle ,$$

其中 $0 < t_1 < \cdots < t_n < t$. 那么这样的算子将被核

$$\int_{q(0)=q_i, q(t)=q_f} [Dq] A_n(q(t_n)) \cdots A_1(q(t_1)) e^{iS[q]} .$$

例 1.1 现在我们来解释之前结果 $\frac{1}{2 \sinh(\beta/2)}$ 的物理意义.

考虑谐振子

$$S = \int_0^t (\frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{1}{2} q^2) dt.$$

在实际操作中, 为了得到性质更好的路径积分, 物理学家们经常会做 **Wick 转动**

$$t \mapsto -i\tau,$$

在这个变换下

$$e^{iS} \mapsto e^{-S_E}$$

S_E 被称为 **Euclidean 作用量**. 在我们的例子中, 得到

$$S_E = \int_0^\beta (\frac{1}{2} (\frac{dq}{d\tau})^2 + \frac{1}{2} q^2) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^\beta q Dq d\tau, \beta = -it$$

这里

$$D = -\frac{d^2}{d\tau^2} + 1.$$

为简便记, 令 $\hbar = 1$. 在上一章中, 我们计算

$$\int_{q(0)=q(\beta)} [Dq] e^{-\frac{1}{2} \int_0^\beta q Dq d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\det(D)}} = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(\beta/2)}}.$$

现在我们回到 **Hilbert 空间** 的描述. **Hamiltonian** 为

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} q^2.$$

量子化之后, 我们得到算子

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\hat{q}^2}{2} = -\frac{1}{2} (\frac{d}{dq})^2 + \frac{1}{2} q^2$$

利用经典的升降算符的方法, 我们知道 \hat{H} 存在能量最低的本征态, 称为 **真空态**. 根据条件 $a|0\rangle = 0$, 我们可以轻松地解得真空态的波函数为

$$\phi_0 = e^{-\frac{1}{2} q^2}.$$

其他的本征态可以通过升算子作用在真空态上得到. 可以证明, 我们得到了 L^2 空间的一组完备基, 以及所有的本征值. 于是

$$\mathrm{Tre}^{-i\hat{H}t} = \mathrm{Tre}^{\beta\hat{H}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta(n+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2 \sinh(\beta/2)}.$$

这与我们发展的一般理论相同.

◇

1.2 约束体系的约化

本节主要参考 [3].

对于辛流形, 我们有如下定理, 它指出每个辛流形都存在一个局部坐标, 使得辛结构在这个坐标下可以写成最简单的形式.

定理 1.5 设 Ω 是 \mathbb{R}^{2n} 中一点 x 的邻域中的一个非退化的 2-形式. 则可以选择一个坐标系 $(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$, 使得在这个坐标系中 Ω 可以写成:

$$\Omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$$

一个规范系统总是可以视为一个附加了约束条件的 Hamiltonian 系统. 但反之未必.

1.2.1 首要约束

假设我们已经有有了一个 Lagrangian \mathcal{L} , 并且承认最小作用量原理, 那么我们可以得到熟悉的 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, i = 1, \dots, N$$

进一步写出来, 上式可以写成

$$\ddot{q}_j \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = -\dot{q}_j \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

我们可以看到, 当所有的速度和坐标都确定时, 加速度 \ddot{q}_j 是唯一确定的, 但条件是行列式

$$\det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right)$$

不为 0. 或者说, 如果上述行列式不为 0, 则加速度无法被速度和坐标完全确定, 运动方程的解可能会含有任意对时间的函数, 而这正是我们感兴趣的情形.

Hamiltonian 形式化开始于定义正则动量

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

那么, 上述行列式为 0 说明正则动量无法表示为速度和坐标的函数, 或者说, 正则动量并不是全部相互独立的, 所以正则动量之间存在关系

$$\phi_m(q, p) = 0, m = 1, \dots, M \quad (1.3)$$

当上述关系中的正则动量用 $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ 替代时, (1.3) 就会变成恒等式. 所以 (1.3) 被称为首要约束, 强调这些约束并非从运动方程中得来, 并且对坐标 q_i 和速度 \dot{q}_i 没有做出任何限制.

为简便计, 我们认为矩阵 $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$ 的秩在 (q, \dot{q}) -- 空间中是一个常数, (1.3) 在相空间中确定了一个子流形. 若矩阵 $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$ 的秩为 $N - M'$, 那么在 (1.3) 中只有 M' 个相互独立的方程, 且这些约束确定的子流形的维数是 $2N - M'$.

这 $2N - M'$ 维的子流形应该可以被开区域覆盖, 在每个开区域上, 约束函数 ϕ_m 可以被分类为相互独立的约束条件 $\phi_{m'} = 0 (m' = 1, \dots, M')$, 即 Jacobi 矩阵 $\partial(\phi_{m'})/\partial(q_n, p_n)$ 的秩为 M' , 以及不相互独立的约束 $\phi_{\bar{m}'} = 0, (\bar{m}' = M' + 1, \dots, M)$.

上述对 Jacobi 矩阵的约束等价于下列表述

- 函数 $\phi_{m'}$ 可以作为子流形的某个局部坐标系的前 M' 个坐标
- 微分形式 $d\phi_1, \dots, d\phi_{M'}$ 是线性独立的

当约束函数 ϕ_m 满足上述条件时, 我们可以得到如下的结果

定理 1.6 若定义在相空间上的光滑函数 G 在子流形 $M(\phi_m)$ 上为 0, 那么存在某些函数 g^m 使得 $G = g^m \phi_m$

定理 1.7 子流形 $M(\phi_m)$ 切向的变分 $\delta q_n, \delta p_n$ 满足条件 $\lambda^n \delta q_n + \mu^n \delta p_n = 0$, 那么有

$$\begin{aligned}\lambda^n &= u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_n} \\ \mu^n &= u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}\end{aligned}$$

对某些 u^m , 在子流形 $M(\phi_m)$ 上成立.

第一个定理的局部证明如下: 取相互独立的约束函数 $\phi_{m'}$ 作为子流形的某个局部坐标系的前 M' 个分量, 即 $(\phi_{m'}, x_\alpha)$. 在这个坐标系上有 $G(0, x) = 0$, 所以

$$G(\phi, x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} G(t\Phi, x) dt = \phi_m \int_0^1 \frac{\partial G(t\phi, x)}{\partial \phi_m} dt$$

第二个定理的证明基于观察, 由于子流形 $M(\phi_m)$ 的切空间的位数是 $2N - M'$, 所以, 满足方程 $\lambda^n \delta q_n + \mu^n \delta p_n = 0$ 的解是法空间中的元素, 维数为 M' . 根据之前对 $\phi_{m'}$ 独立性的假设, 法向量 $(\frac{\partial \phi_{m'}}{\partial q_n}, \frac{\partial \phi_{m'}}{\partial p_n})$ 是相互独立的. 由于法向量自动地满足切向变分方程, 所以解的存在性得到证明, 从而证明了定理.

运动方程可以写成

$$\dot{F} = [F, H]_P + u^m [F, \phi_m]_P \quad (1.4)$$

1.2.2 次要约束

下面我们来考察 (1.4) 的结果. 一个基本的相容性的要求, 或是假设是约束不随时间改变, 所以, 我们有 $\dot{\phi}_m = 0$. 依据运动方程 (1.4), 得到

$$[F, H]_P + u^{m'} [F, \phi_{m'}]_P = 0$$

上式可以是与 u 无关的关系 (只与 p, q) 有关, 也可以是 u 的限制. 在前一种情况中, p, q 之间的关系与首要约束无关, 所以关系 ϕ 被称为次要约束. 两类约束的只要区别在于是否涉及运动方程. 如果存在一个第二类约束 $X(p, q) = 0$, 那我们还要要求它满足

$$[X, H]_P + u^m [X, \phi_m]_P = 0$$

我们还要检查这是第二类约束还是新的对 u 的限制. 重复这样的过程, 我们得到了一些第二类约束

$$\phi_k = 0, k = M + 1, \dots, M + K$$

但是, 我们最终得到的理论的结果将会与约束的类型无关, 所以我们可以统一地处理第一类约束和第二类约束

$$\phi_j = 0, j = 1, \dots, M + K \quad (1.5)$$

我们将正规性条件用于所有的约束.

1.2.3 弱方程与强方程

我们引入弱等号 \approx 来描述约束方程. 这样, 可以将(1.5) 写成

$$\phi_j \approx 0$$

含义是, 量 ϕ_j 只在子流形 $M(\phi_i)$ 上取值为 0 但在整个相空间上取值不为零. 所以, 它与其他正则变量的 Poisson 括号可能不为 0.

如果两个函数 F, G 在子流形上取值相等, 则称二者是弱相等的, 记为 $F \approx G$. 如果二者在整个相空间上相等则成为强相等的, 用普通的等号来表示. 根据前述定理, 我们有

$$F \approx G \iff F - G = c^j(p, q)\phi_j$$

假设我们已经找到了系统中所有的约束 (1.5), 下面我们开始研究 Lagrange 乘子 u_m 的限制. 这些限制是

$$[\phi_j, H]_P + u^m[\phi_j, \phi_m]_P \approx 0$$

1.2.4 Lagrange 乘子的限制

我们可以认为上式是关于 M 个未知数 u^m 的 J 个线性非齐次方程, 系数是 p, q 的函数.

上式的解为

$$u^m = U^m + V^m$$

其中 U^m 是非齐次方程的一个特解, V^m 是齐次方程的一个通解. 线性独立的通解 V_a^m 的数量 A 是与子流形坐标无关的量, 因为我们之前已经假定矩阵 $[\phi_j, \phi_m]$ 的秩在子流形上是不变的. 所以, 最一般的解是

$$u^m \approx U^m + v^a V_a^m \quad (1.6)$$

1.2.5 可约与不可约情形

若方程 $\phi_j = 0$ 不是独立的, 则称约束是冗余的或可约的; 如果所有的约束方程都是独立的, 则称约束是不可约的.

扔掉冗余的约束不会丧失任何信息. 因此, 我们总是假设我们处理的是不可约的情况 (至少在局部上如此). 然而, 将约束分成冗余的或不可约的两类是较难操作的, 甚至会破坏某些重要的对称性, 或者在整体上由于拓扑的原因是不可能的. 我们因此要建立一般的, 包括可约和不可约情形的形式化. 当坐标包括 \mathbf{p} -形式的规范场时, 会出现约束冗余的例子.

1.2.6 全哈密顿量

我们现在回到约束系统的运动方程(1.4), 带入 Lagrange 乘子的一般形式(1.6), 可以得到

$$\dot{F} \approx [F, H' + v^a \phi_a]_P$$

其中

$$\begin{aligned} H' &= H + U^m \phi_m \\ \phi_a &= V_a^m \phi_m \end{aligned}$$

量

$$H_T = H' + v^a \phi_a \quad (1.7)$$

被称为全哈密顿量. 运动方程可以简单写为

$$\dot{F} \approx [F, H_T].$$

上述方程带有 A 个未知函数 v^a , 与最开始的 Euler-Lagrange 方程等价.

1.2.7 第一类函数与第二类函数

函数 $F(q, p)$ 被称为是第一类的, 若

$$[F, \phi_j]_P \approx 0, j = 1, \dots, J$$

对所有的约束都成立. 不属于第一类的函数被称为第二类函数, 或者说, 若 F 与至少一个约束的 Poisson 括号不弱等于 0, 则 F 是第二类函数.

第一类函数的重要性质是在 Poisson 括号下闭合. 我们还能够发现, H' 与 ϕ_a 也在第一类函数中. 另外, ϕ_a 是第一类第一类约束的完全集, 即任何的第一类的第一类约束都能表示成 ϕ_a 的线性组合.

1.2.8 第一类约束作为规范变换的生成元

待续.

1.2.9 扩展的哈密顿量

我们说过, 约束条件真正重要的分类观点是从 Hamiltonian 方法出发的第一类和第二类约束. 前者记为 γ , 后者记为 χ .

最一般的物理上允许的运动应该包括一个在系统演化过程中任意的一个规范变换. H_T 生成的运动含有的任意的函数的个数与独立的第一类首要约束的个数相同. 我们还要在 H_T 中加上第一类次要约束的任意线性组合, 这样得到的第一类函数具有如下形式

$$H_E = H' + u^a \gamma_a \quad (1.8)$$

被称为扩展的哈密顿量.

对于规范不变的动力学变量, 由 H' , H_T 以及 H_E 所决定的演化规律是一样的, 但是对于其他的力学量, 我们必须要用 H_E , 以便计入所有的规范自由度.

值得注意的是, H_E 并非是从 Lagrangian 中得到的. 更严格地说, 从 H_T 可以导出最开始的 Euler-Lagrange 方程, H_E 中含有比 H_T 中更多的任意函数.

1.2.10 第二类约束: Dirac 括号

第一类与第二类约束

回忆第二类约束的定义: 所有使得矩阵 $C_{jj'} = [\phi_j, \phi_{j'}]_P$ 在约束确定的子流形上不恒为 0 的约束. 为简便计, 我们假定约束是不可约的, 并假定矩阵 $C_{jj'}$ 在子流形上是常秩的. 于是, 有如下结论:

命题 1.8 若 $\det C_{jj'} \approx 0$, ϕ_j 中至少存在一个第一类约束.

通过相似变换, 我们可以将矩阵 C 分块对角化成如下形式 (Jordan 标准型定理):

$$(C)_{ij} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (C)_{\beta\alpha} \end{pmatrix}$$

其中 $(C)_{\beta\alpha}$ 在子流形上是处处可逆的. 通过这种方法, 我们可以找到一个表示, 使得约束可以在这个表示下完全被分成第一类和第二类.

处理第二类约束的例子

第二类约束无法被视为规范变换的生成元, 更一般地, 无法被是为任何有物理意义变换的生成元. 原因是, 根据定义, 由一个第二类约束 χ 生成的接触变换不会保持所有的约束不变, 并且将一个被允许的态映到一个不被允许的态.

下面我们考虑最简单的第二类约束

$$\chi_1 = q_1 \approx 0$$

$$\chi_2 = p_1 \approx 0$$

这的确是两个第二类约束, 因为

$$[\chi_1, \chi_2]_P = 1$$

这两类约束告诉我们, 第一个自由度是不重要的, 于是我们可以不去考虑 p_1, q_1 , 而是重新定义一个 Poisson 括号

$$[F, G]_P^* = \sum_{n=2}^N \left(\frac{\partial F}{\partial q_n} \frac{\partial G}{\partial p_n} - \frac{\partial G}{\partial q_n} \frac{\partial F}{\partial p_n} \right) \quad (1.9)$$

在新的 Poisson 括号之下, 上面的两个第二类约束与任意的动力学变量作括号都是 0. 这说明, 在新的括号下, 我们可以直接令第二类约束为强等于 0, 而其他自由度 ($n \geq 2$) 的运动方程不会受到影响.

Dirac 括号

将 (1.9) 推广到任意多个第二类约束的情形是由 Dirac 做到的.

由于矩阵 $(C)_{\alpha\beta}$ 是可逆的, 将其逆记为 $(C)^{\alpha\beta}$, 从而

$$C^{\alpha\beta} C_{\beta\gamma} = \delta_{\gamma}^{\alpha}.$$

Dirac 括号被定义为

$$[F, G]_D = [F, G]_P - [F, \chi_{\alpha}]_P C^{\alpha\beta} [\chi_{\beta}, G]_P \quad (1.10)$$

我们可以验证, Dirac 括号满足线性, Leibnitz 性质以及 Jacobi 恒等式. 并且满足如下性质

$$\begin{aligned}
[\chi_\alpha, F]_D &= 0 \\
[F, G]_D &\approx [F, G]_P, F, G \text{ 中有一个是第一类函数} \\
[R, [F, G]_D]_D &\approx [R, [F, G]_P]_P, F, G \text{ 均为第一类函数, } R \text{ 是任意函数.}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

从上述性质中我们发现, 第二类约束可以在计算 Dirac 括号之前就令之强等于 0, 另外, 由于扩展的 Hamiltonian (1.8) 是第一类函数, 所以在 Dirac 括号之下 H_E 会产生相同的运动方程:

$$\dot{F} \approx [F, H_E]_P \approx [F, H_E]_D$$

特别地, 规范变换的效应也可以用 Dirac 括号来计算:

$$[F, \gamma_a]_P \approx [F, \gamma_a]_D.$$

原来的 Poisson 括号在完成第一类与第二类约束的分类之后就可以被 Dirac 括号取代. 所有的方程都可以用 Dirac 括号来描述, 且第二类约束此时只是描述正则变量之间关系的等式. 在一些简单的情形中, 第二类约束可以用来完整地将某些动力学变量消去; 但是, 在更复杂的情形中, 消除自由度是较为困难的一件事, 尽管从原则上可以办到.

可约的第一类约束与第二类约束

我们之前的讨论可以扩展到可约的情形. 称约束 $\phi_j = (\gamma_a, \chi_a)$ 被分成了第一类约束 (γ_a) 与第二类约束 (χ_a) , 如果下面三个条件被满足

- 可约性条件也被完全地分成了第一类和第二类两种:

$$\begin{aligned} Z_{\bar{a}}^a \gamma_a &= 0, (a = 1, \dots, A; \bar{a} = 1, \dots, \bar{A}) \\ Z_{\bar{\alpha}}^\alpha \gamma_\alpha &= 0, (\alpha = 1, \dots, B; \bar{\alpha} = 1, \dots, \bar{B}) \end{aligned}$$

- Poisson 括号 $[\gamma_a, \gamma_b]_P$ 以及 $[\gamma_a, \chi_\beta]_P$ 弱等于 0:

$$[\gamma_a, \gamma_b]_P \approx 0, [\gamma_a, \chi_\beta]_P \approx 0$$

- 矩阵 $[\chi_\alpha, \chi_\beta]_P$ 在子流形上取极大秩 $B - \bar{B}$

$$\text{rank}([\chi_\alpha, \chi_\beta]_P) = B - \bar{B}$$

从上述的假设可以知道 γ_a 全部是第一类约束, 且没有任何第二类约束的线性组合会等于非平凡的第一类约束.

在 Minkowski 空间中, 一个嵌入的子流形继承了 Minkowski 空间的度规. 如果 $\eta_{\lambda\mu}$ 是一个 Minkowski 度规, $x^\lambda(y^j)$ 是子流形的参数方程, 那么继承的度规为

$$g_{ij} = \eta_{\lambda\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^i} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^j}$$

继承的度规 g_{ij} 的性质由子流形完全决定, 而与子流形被如何用参数表示是无关的. 同样, 子流形的度规也与 Minkowski 度规有关. 例如: 子流形不可能有任意数目的类时方向和类光方向, 因为 Minkowski 空间类时方向与类光方向的数目不是任意的.

与 Minkowski 空间类似, 我们考虑相空间. 相空间上有自然的辛结构 Ω , 对于嵌入相空间的子流形, 我们可以将辛结构限制在子流形上, 从而讨论子流形的辛几何.

1.2.11 Symplectic Geometry in a Nutshell

设 M^{2n} 是偶数维流形, M 上的一个辛结构是一个处处非退化的闭 2-形式 Ω :

$$d\Omega = 0, \forall X \neq 0, \exists Y : \Omega(X, Y) \neq 0 (X, Y \in TM^{2n})$$

一个辛流形就是 (M^{2n}, Ω) 一个偶数维的微分流形 M^{2n} , 并附加一个辛结构 Ω , 且要求流形的坐标之间的转换映射能够与辛结构相容.

正如黎曼流形的度规一样, 辛流形 (M^{2n}, Ω) 上的辛结构 Ω 也可以在流形上每一点 p 处的切空间 $T_p M^{2n}$ 和余切空间 $T_p^* M^{2n}$ 之间建立同构 I

$$I : T_p M^{2n} \rightarrow T_p^* M^{2n}$$

$$I : X \mapsto \omega_X$$

$$\omega_X(Y) = \Omega(X, Y), \forall X, Y \in T_p M^{2n}$$

若 H 是 (M^{2n}, Ω) 上的一个函数, 则 dH 是 M 上的一个 1-形式, 称 $I^{-1}(dH)$ 为哈密顿矢量场, H 为哈密顿函数. 哈密顿矢量场会诱导一个流 g^t , 使得

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g^t(p) = I^{-1}(dH)(p)$$

称 g^t 为具有哈密顿函数 H 的哈密顿相流.

下面, 我们可以定义辛流形上的两个函数的 Poisson 括号

定义 1.2 辛流形 (M^{2n}, Ω) 上的函数 F 与 H 之间的 Poisson 括号是函数 F 在哈密顿函数为 H 的相流方向的导数:

$$[F, H]_P(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(g_H^t(p))$$

◇

根据相流的性质和辛形式诱导的对偶, 我们可以发现如下关系:

$$[F, H]_P = \Omega(I^{-1}(dH), I^{-1}(dF))$$

子流形上的辛结构

先用比较物理的方式描述. 相比于逆变张量 $\Omega^{\mu\nu}$, 我们更喜欢考虑协变张量 $\Omega_{\mu\nu}$, 这是因为协变张量总是在子流形上诱导出一个协变张量场, 但逆变张量却没有这种性质.

令 $x^\lambda = x^\lambda(y^i)$ 为相空间的子流形 Σ 的 (局部) 参数方程. 那么, 分量 Ω_{ij} 就是辛形式在子流形上坐标系 (y^i) 中的分量:

$$\Omega_{ij} = \Omega_{\lambda\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^i} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^j} \quad (1.12)$$

我们可以验证, 子流形上的辛形式还是闭的, 但未必是非退化的. 正如在 Minkowski 空间中, 将度规限制在超平面 $t + x + y + z = 1$ 上会退化一样. 但我们假设矩阵 $(\Omega)_{ij}$ 的秩在子流形上是一个常数, 由此可以看出, 这是一个与子流形本身相关的内禀性质.

令相空间的维数为 $2N$, 子流形 Σ 的维数为 $2N - M$. 那么 $(\Omega)_{ij}$ 就是一个 $2N - M$ 阶的方阵, 它的最大秩为:

$$\text{rank} \Omega_{ij} \leq 2N - M.$$

为了确定它的最小秩, 记零化空间 $\text{null}(\Omega)_{ij}$ 的维数为 A , 且它一定是切空间的一个子空间, 令 X_a^λ 为零化空间的一组基, 再将这组基扩充成切空间的一组基 $(X_a^\lambda, Y_a^\lambda)$, 再将之扩充为整个相空间的一组基 $(X_a^\lambda, Y_a^\lambda, Z_\alpha^\lambda)$.

现在, 我们考虑如下的方程

$$A^a X_a^\lambda \Omega_{\lambda\mu} Z_\alpha^\mu = 0$$

一共有 M 个方程 (M 是法空间的维数). 如果 $A > M$, 那么上面的方程将会存在非平凡的解 (未知数个数大于方程个数), 但既然如此, 我们就会得到两个在相空间中斜正交的向量, 这与辛结构的非退化性矛盾. 所以零化空间 $\text{null}(\Omega)_{ij}$ 的维数一定要不大于法空间的维数, $A \leq M$. 所以, 矩阵 $(\Omega)_{ij}$ 的秩的上下界为

$$2N - 2M \leq \text{rank}(\Omega)_{ij} \leq 2N - M \quad (1.13)$$

不过, 上述证明只用到了相空间辛形式的非退化性, 将辛形式换成任何一个非退化的 2-形式, 如度规, 也可以得到完全相同的结果.

第一类约束确定的子流形

我们先考虑所有的约束都是第一类约束的情况, 并假设它们相互独立. 约束 $\gamma_a, a = 1, \dots, M$ 可以通过辛形式诱导 Hamiltonian 向量场, 在局部坐标系下, 向量场的分量是

$$X_a^\lambda = \Omega^{\lambda\mu} \partial_\mu \gamma_a.$$

根据之前的 Poisson 括号的定义, 向量场作用到函数 F 上:

$$X_a^\lambda \partial_\lambda F \equiv \partial_a F = [F, \gamma_a].$$

根据假设, 这 M 个 Hamiltonian 向量场在每一点上相互独立, 它们生成了无限小规范变换.

定理 1.9 子流形上继承的 2-形式 Ω_{ij} 是极大退化的, 即

$$\text{rank} \Omega_{ij} = 2N - 2M, \quad (1.14)$$

且零化空间是由向量 X_a^λ 张成的空间.

证明 之前已经证过 Ω_{ij} 的最大秩是 $2N - 2M$, 只需证 Ω_{ij} 有 M 个特征值为 0 的向量即可.

注意到, 向量 Y^λ 与曲面 γ_a 相切当且仅当 $Y^\lambda \gamma_a \approx 0$. 这说明了

- 约束函数 γ_a 生成的 **Hamiltonian** 向量场与 $\gamma_a = 0$ 是相切的, 因为 $X_b^\lambda \partial_\lambda \gamma_a = [\gamma_a, \gamma_b]_P = 0$
- 当 Y^λ 与子流形相切时, 有 $\Omega_{\lambda\mu} X_a^\lambda Y^\mu \approx 0$, 因为 $\Omega_{\lambda\mu} X_a^\lambda Y^\mu = -Y^\mu \partial_\mu \gamma_a$

所以, 约束函数对应的 M 个线性独立的向量 X_a^λ 就是子流形上诱导的辛结构的特征值为 0 的向量. \square

我们最后要指出, 第一类约束确定的子流形包括了所有与自身斜正交的方向, 这在数学上被称为 **co-isotropic surfaces**.

定理 1.10 M 个约束对应的 **Hamiltonian** 向量场生成了一个 M 维子流形.

证明 定理的证明归结为验证 **Frobenius** 可积性的条件:

$$[X_a, X_b]^\lambda = X_c^{\text{lambda}} \text{ 的线性组合} \quad (1.15)$$

其中

$$[X_a, X_b]^\lambda = X_b^\mu X_{a,\mu}^\lambda - X_a^\mu X_{b,\mu}^\lambda \quad (1.16)$$

被称为向量场 X_a, X_b 的 **Lie** 括号 (我们的定义与通常的定义差了一个负号).

验证是较为直接的. 我们知道, 两个函数作 **Poisson** 括号得到的函数对应的 **Hamiltonian** 向量场, 等于这两个函数对应的 **Hamiltonian** 向量场作 **Lie** 括号. 由于 $[\gamma_a, \gamma_b]_P = C_{ab}^c \gamma_c$, 所以

$$[X_a, X_b]^\lambda = \Omega^{\lambda\mu} (C_{ab}^c \gamma_c)_{,\mu} = C_{ab}^c X_c^\lambda + \gamma_c \Omega^{\lambda\mu} \partial_\mu C_{ab}^c \approx C_{ab}^c X_c^\lambda$$

从而证明了定理. \square

在约束确定的子流形之外时, 向量场作 Lie 括号产生的第二项不会消失, 除非 $\partial_\mu C_{ab}^c = 0$. 此时, 向量场未必可积. 这就是所谓的”对于在壳上闭合的代数, 规范轨道也只存在于壳上.”

我们看到, 当约束确定的子流形上的 2-形式作用在这 M 维子流形的切空间上时, 结果总是 0, 所以我们称这 M 维的子流形是零化子流形. 由于向量场 X_a^λ 生成规范变换, 我们看到零化子流形就是之前定义的规范轨道. 这样, 规范轨道不过是辛形式限制在第一类约束确定的子流形上的内禀性质.

由于约束确定的子流形上继承的辛形式不是非退化的, 所以在约束子流形上没有继承的 Poisson 括号. 但是, 如果将约束子流形与零化子流形作商, 我们就可以得到一个更小的流形, 上面有非退化的二形式以及良好定义的 Poisson 括号. 我们称这个商流形为约化相空间.

定义在约化相空间上的函数, 在每条规范轨道上都是常数, 也是之前定义的”可观测量”. 而且, 定义在约化相空间上的 Poisson 括号, 就是原来相空间上的规范不变函数作 Poisson 括号.

但是, 当我们商掉零化子流形时, 我们会失去很多需要的性质, 如 Lorentz 不变性或场的多项式性质以及局域性. 更进一步, 在技术上往往不可能只通过规范不变的量来重建理论, 因为这需要微分方程 $[A, \gamma_a]_P \approx 0$ 的完备的解. 由于这些原因, 我们不会用约化相空间的手段去发展第一类约束系统的理论. 相反, 我们会发现, 通过扩展像空间, 而不是约化它, 我们会得到更加简洁的结果. 这将是 BRST 理论的内容.

第二类约束确定的子流形

现在, 我们考虑纯粹的第二类约束 $\chi_\alpha = 0$ 的情况. 与第一类约束的情况类似, 第二类约束函数 χ_α 对应的 Hamiltonian 向量场在局部坐标下的形式是

$$\chi_\alpha^\lambda = \Omega^{\lambda\mu} \partial_\mu \chi_\alpha, \alpha = 1, \dots, M.$$

这些向量场是线性独立的, 根据我们的正规性和不可约性假设.

在第一类约束的情况, 我们发现 Hamiltonian 向量场都是约束子流形的切向量场, 但在这里, 我们遇到的情况完全相反.

定理 1.11 没有任何向量场 X_α^λ 的线性组合与约束子流形相切.

证明 向量场 Y^λ 与 $\chi_\alpha = 0$ 相切当且仅当 $Y^\lambda \partial_\lambda \chi_\alpha \approx 0$. 如果 $Y^\lambda \approx a^\alpha X_\alpha^\lambda$, 那么 $Y^\lambda \partial_\lambda \chi_\alpha \approx a^\beta C_{\alpha\beta}$. 由于 $C_{\alpha\beta}$ 是可逆的, 所以得到 $Y^\lambda \approx 0$. 从而定理得证. \square

利用这个结果, 我们可以得到下面的结果:

定理 1.12 约束子流形是由第二类约束 $\chi_\alpha = 0$ 确定的, 当且仅当 Ω_{ij} 达到极大秩 $2N - M$, 此时

$$\det \Omega_{ij} \neq 0$$

上述结果给出了第二类约束子流形的一个内禀表述, 我们可以用上述结果来定义第二类约束子流形, 而不用去提及约束方程的具体形式.

由于 $\det \Omega_{ij} \neq 0$, 在约束子流形上不存在零化子流形, 所以没有必要去进一步约化以得到一个非退化的闭 2-形式. 我们可以在约束子流形上定义 Poisson 括号: 给定两个约束子流形上的函数 $f(y^i), g(y^i)$, 我们可以定义

$$[f, g]_P^\Sigma = \frac{\partial f}{\partial y^i} \Omega^{ij} \frac{\partial g}{\partial y^j} \quad (1.17)$$

但是, 如果 F, G 都是定义在相空间上的函数, 我们可以先考虑它们在约束子流形 Σ 上的限制 f, g , 接着按照(1.17)来计算 $[f, g]_P^\Sigma$; 还可以按照(1.10)计算 F, G 的 $[F, G]_D$, 然后再将 $[F, G]_D$ 限制在 Σ 上. 这两种途径得到的结果相同吗?

答案是肯定的. 这是下面的定理所陈述的内容:

定理 1.13 用第二类约束定义的 *Dirac* 括号(1.10)限制在约束子流形 Σ 上, 就是在 Σ 上定义的 *Poisson* 括号(1.17). 更确切地

$$[F, G]_D \Big|_{\Sigma} = [f, g]_P^{\Sigma}$$

其中

$$F \Big|_{\Sigma} = f, G \Big|_{\Sigma} = g.$$

证明 等式两端与坐标无关, 所以我们可以一个局部坐标系中证明. 我们将约束子流形的坐标 (y^i) 扩充成相空间的一个局部坐标, 并要求 $[y^i, \chi_{\alpha}]_P \approx 0$. 这是可以做到的, 因为若 \bar{y}^i 是任意的子流形的局部坐标, 那么 $\bar{y}^i + \lambda^{i\alpha} \chi_{\alpha}$ 是符合要求的, 其中 $\lambda^{i\alpha} C_{\alpha\beta} = -[\bar{y}^i, \chi_{\beta}]_P$. 我们将相空间的局部坐标系取为 (y^i, χ_{α}) . 矩阵 $\Omega^{\lambda\mu}$ 在局部坐标系下的形式为

$$\Omega^{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} [y^i, y^j] & 0 \\ 0 & C_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

所以, 通过对上述矩阵取逆, $\Omega_{\lambda\mu}$ 的形式一定是

$$\Omega^{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} \Omega_{ij} & 0 \\ 0 & C^{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

但是, Ω 限制在 Σ 上的分量, 就是 $\Omega_{\lambda\mu}$ 的左上角部分, 亦即 Ω_{ij} . 又根据定义(1.17), 我们可以得到

$$[y^i, y^j]_P \Big|_{\Sigma} = [y^i, y^j]_P^{\Sigma}.$$

还是在局部坐标系 (y^i, χ_{α}) 下, 取任何函数 F, G , 有

$$[F, \chi_{\alpha}]_P \Big|_{\Sigma} = (\Omega^{\lambda\mu} \partial_{\lambda} F \partial_{\mu} \chi_{\alpha}) \Big|_{\Sigma} = (\partial_{\beta} F C_{\beta\alpha}) \Big|_{\Sigma}$$

显然, $\partial_\beta F = \frac{\partial F}{\partial \chi_\beta}$. 进一步

$$\begin{aligned} [F, G]_P \Big|_\Sigma &= (\Omega^{\lambda\mu} \partial_\lambda F \partial_\mu G) \Big|_\Sigma \\ &= (\Omega^{ij} \partial_i F \partial_j G) \Big|_\Sigma + (C_{\alpha\beta} \partial_\alpha F \partial_\beta G) \Big|_\Sigma \\ &= \Omega^{ij} \partial_i f \partial_j g + [F, \chi_\alpha]_P C^{\alpha\beta} [\chi_\beta, G] \Big|_\Sigma \end{aligned}$$

从而定理得证. □

由于 Ω^{ij} 是一个内禀的量, 所以上述定理给出了 Dirac 括号的一个内禀定义. 从这种观点来看, 违反了正规性假设的第二类约束, 例如, 将 χ 替换为 χ^2 , 就会导致一个 Dirac 括号没有定义的表象的产生.

第一类约束与第二类约束共同确定的子流形

在这种情况下, Ω_{ij} 的秩等于 $2N - M - k$, $0 < k < M$, k 是独立的第一类约束的个数. 由规范变换生成的轨道依旧是零化子流形. 通过约束流形与零化子流形作商, 可以得到约化相空间. 剩下的处理方法, 已经在前面讲过了.

1.3 量子电动力学

本章之后三节主要参考 [10].

1.3.1 规范不变性的引入

回顾我们在量子化无质量螺旋度为 ± 1 的粒子时遇到的困难. 在这个例子中, 场 $a_\mu(x)$ 在 Lorentz 变换下会差一个规范项

$$U(\Lambda)a_\mu(x)U^{-1}(\Lambda) = \Lambda_\mu^\nu a_\nu(\Lambda x) + \partial_\mu \Omega(x, \Lambda) \quad (1.18)$$

因此, 无法找到一个真正的 Lorentz 4-向量, 使得它是创生算符和湮灭算符的线性组合.

我们可以通过要求所有的相互作用都只含有 $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ (这里, 我们用大写字母表示 Heisenberg 绘景中的动力学变量), 但这并不是最一般的情况, 也不是物理的情况. 因此, 我们要求物质场和其与电磁场相互作用的部分 I_M 除了满足 Lorentz 不变性之外, 在一般的规范变换

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \epsilon(x)$$

下也是不变的. 因此, 作用量作完 Lorentz 变换之后, (1.18)中虽然多出了偏导数项, 但根据规范不变性的要求, 作用量依然保持不变. I_M 中含有 A_μ 只有两种可能: 含有 A_μ 本身或是含有 $F_{\mu\nu}$. (如果含有 $\partial_\mu A_\nu$ 却不含 $F_{\mu\nu}$, 为满足 Lorentz 不变性, 必须要与物质场 $\Psi_\ell^\mu, \Psi_\gamma^\nu$ 相乘, 这样就可以通过分部积分消去偏导数, 使这一项只含有 A_μ . 但如果含有 $\partial_\mu A_\nu \partial_\lambda A_\eta$ 这样的项, 我还不知道怎么处理. 可能可重整化的要求会要求只有导数的二次幂之内的像?) 如果不考虑括号之内的情形, 我们有

$$0 = \delta I_M = \int d^4x \frac{\delta I_M}{\delta A_\mu} \partial_\mu \epsilon(x)$$

从而要求

$$\partial_\mu \frac{\delta I_M}{\delta A_\mu} = 0 \quad (1.19)$$

对于只含 $F_{\mu\nu}$ 的 I_M , 上述条件是自动成立的. 可以验证:

$$\frac{\delta I_M}{\delta A_\mu} = 2\partial_\nu \frac{\delta I_M}{\delta F_{\mu\nu}}.$$

观察对 I_M 的约束(1.19), 我们发现这实际上是一个流守恒方程. 从而我们得到了如下的结论

命题 1.14 如果一个含 $A_\mu(x)$ 的场理论是 *Lorentz* 不变的, 那么与 $A_\mu(x)$ 耦合的 *Lorentz* 4-向量 $\mathcal{J}^\mu(x)$ 一定是一个守恒的流:

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x) = \frac{\delta I_M}{\delta A_\mu} = 0$$

现在的问题是, 究竟是怎样的理论, 才会产生上述命题中的守恒流 \mathcal{J}^μ ? 我们可以验证, 如果 I_M 在变换

$$\delta \Psi^\ell(x) = i\epsilon(x)q_\ell \Psi^\ell(x)$$

下不变, 就会有

$$0 = \delta I_M = - \int d^4x \mathcal{J}^\mu(x) \partial_\mu \epsilon(x)$$

其中

$$\mathcal{J}^\mu = -i \sum_\ell \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu \Psi^\ell)} q_\ell \Psi^\ell(x).$$

注 1.1 上述守恒流的形式不要求场满足运动方程. 如果 I_M 只含场和场的一阶导数项, 得到上述守恒流的表达式的推导为:

$$0 = \delta I_M = \int d^4x \sum_\ell i \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \Psi^\ell} q_\ell \Psi^\ell \epsilon(x) + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu \Psi^\ell)} q_\ell \partial_\mu (\Psi^\ell \epsilon(x)) \right)$$

上述等式要求对任意的 $\epsilon(x)$ 都成立, 常数情况或非常数情况. 如果 ϵ 是常数, 那么上式能够推出

$$\sum_\ell \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \Psi^\ell} q_\ell \Psi^\ell + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu \Psi^\ell)} q_\ell \partial_\mu \Psi^\ell \right) = 0.$$

因此, 当 ϵ 不是常数时, 将后面一式带入前面一式, 得到:

$$0 = \delta I_M = \int d^4x \sum_\ell i \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu \Psi^\ell)} q_\ell \Psi^\ell \partial_\mu \epsilon(x).$$

◇

如果令

$$\mathcal{J}^\mu = \frac{\delta I_M}{\delta A_\mu} = J^\mu,$$

则在规范变换

$$\begin{aligned}\delta A_\mu(x) &= \partial_\mu \epsilon(x) \\ \delta \Psi_\ell(x) &= i\epsilon(x)q_\ell \Psi_\ell(x)\end{aligned}\tag{1.20}$$

下, I_M 的变化为:

$$\delta I_M = - \int d^4x J^\mu(x) \partial_\mu \epsilon(x) + \int d^4x \mathcal{J}^\mu(x) \partial_\mu \epsilon(x) = 0.$$

在上述讨论中, 我们首先承认了我们有一个无质量的螺旋度为 $pm1$ 的场 $A_\mu(x)$, 再根据它在 Lorentz 变换下的变化规律要求 I_M 除了满足 Lorentz 不变性之外, 还要满足规范不变性, 从而推出物质场也要满足相应的规范不变性. 相反, 如果我们要求 I_M 在变换

$$\delta \Psi_\ell(x) = i\epsilon(x)q_\ell \Psi_\ell(x)$$

下不变, 则为了让场的导数 $\partial_\mu \Psi_\ell$ 依然满足 Lorentz 不变性, 我们不得不引入协变导数 $D_\mu \Psi_\ell = \partial_\mu \Psi_\ell - iq_\ell A_\mu \Psi_\ell$, 并要求 A_μ 也要按照规律

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \epsilon(x)$$

变化, 并且在 Lagrangian 中不得出现 $-\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$ 这样的项, 否则将会违背 I_M 在规范变换(1.20)下的不变性. 因此, 我们看到, 作用量的规范不变性在某种程度上和无质量的粒子的存在是等价的.

1.3.2 量子化

按照之前的经验, 我们应该定义电磁场的共轭动量为

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)}$$

但在量子电动力学的情形, 这中方法是行不通的, 原因是 A_μ 与 Π^μ 都被约束条件限制.

由于 Lagrangian 中不含 $\partial_0 A_0$, 所以, 第一个约束条件是

$$\Pi^0 = 0 \quad (1.21)$$

第二个约束条件来源于场方程和第一个约束条件的相容性:

$$\partial_i \Pi^i = \partial_i F^{i0} = -J^0. \quad (1.22)$$

通过前一节的讨论, J^0 只与物质场的场变量和对应的正则动量有关

$$J^0 = -i \sum_\ell \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_0 \Psi^\ell)} q_\ell \Psi^\ell(x) = -i \sum_n P_n q_n Q^n,$$

式(1.22)是正则变量之间的关系. 所以, 我们不能简单地将 Poisson 括号变成对易子.

我们发现, 约束函数 Π^0 与 $\partial_i \Pi^i + J^0$ 之间的 Poisson 括号为 0, 这是第一类约束, 故不能直接用 Dirac 括号的方法来处理. 由于理论具有规范不变性, 对于任何满足场方程的解 $A_\mu(\mathbf{x}, t)$, $(A_\mu(\mathbf{x}, t) + \partial_\mu \epsilon(\mathbf{x}, t))$ 也满足场方程, 我们总可以选择两个 $A_\mu(\mathbf{x}, t)$ 使得它们在某一时刻 t 取值相同但在之后的时刻取值不同.

由于 $A_\mu(\mathbf{x}, t)$ 的任意性, 不可能直接对 A_μ 进行正则量子化. 在解决这个困难的众多方法中, 有两种方法特别有用. 一种方法是我们之后要介绍的 BRST 量子化方法, 另一种方法则是选择一个合适的规范, 使得 Dirac 括号的方法能够得以应用. 在这里, 我们选择 Coulomb 规范

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (1.23)$$

在 Coulomb 规范下, 原来的第二个约束条件(1.22)变成了

$$\nabla^2 A^0 = -J^0$$

我们知道上式有解

$$A^0(\mathbf{x}, t) = \int d^3y \frac{J^0(\mathbf{y}, t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (1.24)$$

尽管我们用(1.24)将 A^0 表示为其他正则动量 P_n, Q^n 的函数, 但我们依然不能直接用将剩余的 A^i 正则量子化, 由于 Coulomb 规范的引入, 还有两个约束. 第一个是 Coulomb 规范

$$\chi_{1\mathbf{x}} = \partial_i A^i(\mathbf{x}) = 0 \quad (1.25)$$

第二个是约束(1.22)

$$\chi_{2\mathbf{x}} = \partial_i \Pi^i(\mathbf{x}) + J^0(\mathbf{x}) = 0 \quad (1.26)$$

上述约束是第二类约束, 约束函数之间的 Poisson 括号为

$$\begin{aligned} C_{1\mathbf{x}, 2\mathbf{y}} &= [\chi_{1\mathbf{x}}, \chi_{2\mathbf{y}}]_P = -\nabla^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ C_{1\mathbf{x}, 1\mathbf{y}} &= [\chi_{1\mathbf{x}}, \chi_{1\mathbf{y}}]_P = 0 \\ C_{2\mathbf{x}, 2\mathbf{y}} &= [\chi_{2\mathbf{x}}, \chi_{2\mathbf{y}}]_P = 0 \end{aligned} \quad (1.27)$$

其中, 对任何 U, V

$$[U, V]_P \equiv \int d^3x \left[\frac{\delta U}{\delta A^i(\mathbf{x})} \frac{\delta V}{\delta \Pi_i(\mathbf{x})} - \frac{\delta V}{\delta A^i(\mathbf{x})} \frac{\delta U}{\delta \Pi_i(\mathbf{x})} \right] \quad (1.28)$$

由于矩阵 $C_{\mathbf{xy}}$ 是非退化的, 所以我们可以用 Dirac 括号的方法来进行量子化. 我们先计算 C 的逆:

$$\begin{aligned} (C^{-1})_{1\mathbf{x}, 2\mathbf{y}} &= -(C^{-1})_{2\mathbf{y}, 1\mathbf{x}} = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{\mathbf{k}^2} = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \\ (C^{-1})_{1\mathbf{x}, 1\mathbf{y}} &= (C^{-1})_{2\mathbf{x}, 2\mathbf{y}} = 0 \end{aligned}$$

之后计算正则变量之间的对易关系 (Dirac 括号乘以虚数单位 i):

$$\begin{aligned} [A^i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] &= i\delta_j^i + i \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} \left(\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \\ [A^i(\mathbf{x}), A^j(\mathbf{y})] &= [\Pi_i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] = 0 \end{aligned} \quad (1.29)$$

尽管上述的对易关系足够简单,但我们依旧要面对 \mathbf{A} 与物质场的正则动量不对易的困难. 如果 F 是任何物质场自由度的泛函, 那么它与 \mathbf{A} 的 Dirac 括号是 0, 但是与 \mathbf{A} 的 Dirac 括号却不为 0:

$$\begin{aligned}
 [F, \mathbf{A}(\mathbf{z})]_D &= - \int d^3x d^3y [F, \chi_{2x}]_P \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} [\chi_{1y}, \mathbf{A}(\mathbf{z})]_P \\
 &= - \int d^3x d^3y [F, J^0]_P \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \nabla \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\
 &= - \int d^3y [F, A^0(\mathbf{y})]_P \nabla \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\
 &= - \int d^3y [F, A^0(\mathbf{y})]_P \nabla \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\
 &= [F, \nabla A^0(\mathbf{z})]_P = [F, \nabla A^0(\mathbf{z})]_D.
 \end{aligned}$$

为了转移到相互作用绘景, 我们将 Hamiltonian 用 \mathbf{A} 和 \mathbf{A}_\perp 表示, 其中

$$\mathbf{A}_\perp \equiv \mathbf{A} - \nabla A^0 = \dot{\mathbf{A}}$$

这样 $[F, \mathbf{A}(\mathbf{z})]$ 就为 0. 而且, \mathbf{A}_\perp 与 \mathbf{A} 有相同的对易关系. 此时 \mathbf{A}_\perp 满足较为显然的约束:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_\perp = 0.$$

最终, 我们得到的 Hamiltonian 为:

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \mathbf{A}_\perp^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{2} J^0 A^0 \right] + H_M. \quad (1.30)$$

其中, $\frac{1}{2} J^0 A^0$ 正是 Coulomb 势:

$$V_{\text{Coul}} = \frac{1}{2} \int d^3x J^0 A^0 = \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \frac{J^0(\mathbf{x}) J^0(\mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (1.31)$$

1.3.3 相互作用绘景

我们将 Hamiltonian (1.30) 分成自由部分 H_0 和相互作用部分 V :

$$\begin{aligned}
 H_0 &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \mathbf{A}_\perp^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right] + H_{\text{matter},0} \\
 V &= V_{\text{Coul}} + V_{\text{matter}} - \int d^3x \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}
 \end{aligned}$$

在相互作用表象中, 任何算符 $o(\mathbf{x}, t)$ 与 Heisenberg 表象中 $t = 0$ 时刻的算符 $O(\mathbf{x}, 0)$ 有如下关系

$$o(\mathbf{x}, t) = \exp iH_0 t O(\mathbf{x}, 0) \exp -iH_0 t, \quad (1.32)$$

所以有运动方程

$$i\dot{o}(\mathbf{x}, t) = [o(\mathbf{x}, t), H_0]. \quad (1.33)$$

下面, 我们导出相互作用绘景下正则变量的运动方程, 但是略去下标 \perp . 为此, 我们要知道它们之间的对易关系. 由于相似变换保持 Dirac 括号, 所以相互作用绘景中的对易关系和 Heisenberg 绘景中的对易关系是一样的

$$\begin{aligned} [a^i(\mathbf{x}), \pi^j(\mathbf{y})] &= i[\delta^{ij} + \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} (\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|})] \\ [a^i(\mathbf{x}), a^j(\mathbf{y})] &= [\pi^i(\mathbf{x}), \pi_j(\mathbf{y})] = 0 \end{aligned} \quad (1.34)$$

显然, 在相互作用绘景中, 约束依然存在

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{a} &= 0, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\pi} &= 0. \end{aligned} \quad (1.35)$$

为了建立 $\boldsymbol{\pi}$ 与 \mathbf{a} 之间的关系,

$$\begin{aligned} i\dot{a}_i(\mathbf{x}, t) &= [a_i(\mathbf{x}, t), H_0] \\ &= i \int d^3 y [\delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}] \pi_j(\mathbf{y}, t) \end{aligned}$$

上式的后一项可以将 $\partial/\partial x^j$ 替换为 $-\partial/\partial y^j$, 再利用约束条件(1.35), 分部积分之后可以得到

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\pi}. \quad (1.36)$$

$\boldsymbol{\pi}$ 的运动方程为

$$\begin{aligned} i\dot{\pi}_i(\mathbf{x}, t) &= [\pi_i(\mathbf{x}, t), H_0] \\ &= -i \int d^3 y [\delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}] (\nabla \times \nabla \times \dot{\mathbf{a}}(\mathbf{y}, t))_j \end{aligned}$$

分步积分第二项, 并用约束条件(1.35)以及运动方程(1.36), 得到

$$\square \mathbf{a} = 0. \quad (1.37)$$

在 Heisenberg 绘景中, A^0 不是一个独立的正则变量, 而是一个与物质场正则变量有关的量, 我们在相互作用绘景中将不再引入相应的算符 a^0 , 而是令它为 0:

$$a^0 = 0 \quad (1.38)$$

满足(1.35), (1.37)以及(1.38)并且满足对易关系的最一般的实数解的形式为

$$a^\mu(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \sum_{\sigma} [e^{ip \cdot x} e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) + e^{-ip \cdot x} e^{\mu*}(\mathbf{p}, \sigma) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma)] \quad (1.39)$$

$\mathbf{e}(\mathbf{p}, \sigma)$ 是任意两个独立的向量并且满足极化条件:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{p}, \sigma) &= 0 \\ e^0(\mathbf{p}, \sigma) &= 0 \end{aligned} \quad (1.40)$$

注意到, 这里的极化条件与规范的选择是有关的. 但我没有试过用其他的规范是否会产生不同的极化条件. 还可以将 $\mathbf{e}(\mathbf{p}, \sigma)$ 归一化, 使得它们满足

$$\sum_{\sigma} e^i(\mathbf{p}, \sigma) e^j(\mathbf{p}, \sigma)^* = \delta_{ij} - p_i p_j / |\mathbf{p}|^2 \quad (1.41)$$

我们可以选择和之前一样的极化向量:

$$e^\mu(\mathbf{p}, \pm 1) = R(\hat{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ \pm i/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

1.3.4 光子的传播子

根据之前的结果, 我们得到

$$\Delta_{\mu\nu}(x-y) = (2\pi)^{-4} \int d^4q \frac{P_{\mu\nu}(\mathbf{q})}{q^2 - i\epsilon} e^{iq \cdot (x-y)}. \quad (1.43)$$

在动量空间中, 传播子为

$$\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{P_{\mu\nu}(\mathbf{q})}{q^2 - i\epsilon}.$$

根据一些原因, 比如 q_μ 和 q_ν 之类的项对 S -矩阵没有贡献, 所以最终传播子等效为

$$\Delta_{\mu\nu}(x-y) = (2\pi)^{-4} \int d^4q \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2 - i\epsilon} e^{iq \cdot (x-y)}. \quad (1.44)$$

但与此相伴地, (1.30)中的 J_{Coul} 一项将不会再出现. 所以, 之后在动量空间中的传播子就写成

$$\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2 - i\epsilon}. \quad (1.45)$$

1.3.5 p -形式的规范场

我们考虑由 p -形式 A 描述的无质量粒子, 在规范变换

$$\delta A = d\Omega \quad (1.46)$$

下不变. 我们还可以构造一个规范不变的场强

$$F = dA. \quad (1.47)$$

根据与电动力学的对比, 我们希望 Lagrangian 的形式为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2(p+1)} F_{\mu_1 \dots \mu_p} F^{\mu_1 \dots \mu_p} + A_{\mu_1 \dots \mu_p} J^{\mu_1 \dots \mu_p} \quad (1.48)$$

为了使作用量在规范变换(1.46)下保持不变, 我们希望 J 满足守恒条件

$$\partial_{\mu_1} J^{\mu_1 \dots \mu_p} = 0 \quad (1.49)$$

此时的场方程为

$$\partial_\mu F^{\mu\mu_1\cdots\mu_p} = -J^{\mu_1\cdots\mu_p}. \quad (1.50)$$

p -形式的规范场在高于四维的理论中有重要应用, 但是在四维的情况, p -形式规范场并没有带来新的物理. 为了说明这一点, 假设我们处理的是 D 维时空. 此时, F 是一个 $(p+1)$ -形式, 可以用一个对偶的 $(D-p-1)$ -形式来描述

$$F^{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} = \epsilon^{\mu_1\cdots\mu_D} \mathcal{F}_{\mu_{p+2}\cdots\mu_D}.$$

同时, p -形式 J 可以用对偶的 $(D-p)$ -形式描述

$$J^{\mu_1\cdots\mu_p} = \epsilon^{\mu_1\cdots\mu_D} \mathcal{J}_{\mu_{p+1}\cdots\mu_D}.$$

流守恒方程(1.49)以及场方程(1.50)变成

$$\begin{aligned} d\mathcal{F} &= \mathcal{J}, \\ d\mathcal{J} &= 0. \end{aligned}$$

由于 \mathcal{J} 是一个闭形式, 根据 Poincaré 引理, 存在一个 $(D-p-1)$ -形式 \mathcal{S} (假设时空是单连通的), 使得

$$\mathcal{J} = d\mathcal{S}.$$

又因为 \mathcal{F} 与 \mathcal{S} 的差是闭形式, 再用一次 Poincaré 引理, 有

$$\mathcal{F} = \mathcal{S} + d\phi.$$

此时, 无源的 Maxwell 方程 $dF = 0$ 用分量的形式写成

$$\partial_{\mu_1} \mathcal{F}^{\mu_1\cdots\mu_{D-p-1}} = 0.$$

(将 $(dF)_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} = \epsilon_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} \partial^1 F^{2\cdots p+1}$ 以及 $F^{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} = \epsilon^{\mu_1\cdots\mu_D} \mathcal{F}_{\mu_{p+2}\cdots\mu_D}$ 带入即可验证) 上式给出了 ϕ 的场方程

$$\partial_{\mu_1} (d\phi)^{\mu_1\cdots\mu_{D-p-1}} = -\partial_{\mu_1} \mathcal{J}^{\mu_1\cdots\mu_{D-p-1}}.$$

ϕ 的场方程在规范变化下 $\phi \rightarrow \phi + d\omega$ 是不变的. 通过上述讨论, 我们可以得到如下结论:

命题 1.15 在 D 维时空中, 一个 p -形式规范场 A 的理论与一个 $(D-p-2)$ -形式规范场 ϕ 的理论是等价的. (假设 A 满足无源的 *Maxwell* 方程.)

因此, 当 $D = 4$ 时, 我们只有三种可能的规范场, $p = 0, 1, 2$. 0-形式的规范场是一个标量 S , 场强是 $F_\mu = \partial_\mu S$, 场方程是 $\square S = -J$. 容易看出, 这就是一个与流 J 耦合的标量场理论. 1-形式的规范场就是我们熟知的电磁场. 2-形式的规范场, 根据上述命题, 等价于 0-形式的规范场, 亦即一个标量场.

1.4 散射理论

S -矩阵是不同的 Fock 空间之间的映射? 大约所有的材料都认为 in 态和 out 态不是自由粒子态. 但我不清楚 Weinberg I 的第三章为何承认 in 态和 out 态的能量与自由粒子态相同. 目前我除了弹性散射之外, 没有更好的理解.

1.4.1 构建初态和末态上的 Poincaré 表示

在散射问题中, 经常遇到的情况是, 几乎没有相互作用的粒子经过 (相对的) 较长时间和较长距离后相互作用, 在极短的距离和时间内完成相互作用, 得到了几乎没有相互作用的末态粒子. 所以, 我们假设反应的初态和末态在 Poincaré 群的作用下都按照自由粒子态张量积的变化规律而变化. 且将初态和末态分别记为 Ψ_α^+ 和 Ψ_α^- 的指标.

由于 Heisenberg 绘景能够自动地保持 Lorentz 不变性, 我们在这里采用 Heisenberg 绘景. 因此, 态是不随时间而变化的. 但注意, 这里默认了在一个参考系下. 如果一个观察者 O 在时刻 t 观察到系统的态是 Ψ , 另一个观察者 O' 的时间 t' 与 t 的关系为 $t' = t - \tau$, 其余坐标相同, 则 O' 在时刻 t 观察到的系统的态就是 $e^{-iH\tau}\Psi$, 其中 H 是系统的 Hamiltonian. 所以, 粒子的初态和末

态分别对应于 $\tau \rightarrow -\infty$ 和 $\tau \rightarrow \infty$ 时的 $e^{-iH\tau}\Psi$. 我们发现, Ψ 不可能是 H 的本征态, 因为如果这样, 那么初态和末态只不过是 Ψ 乘上一个相位因子, 与 Ψ 是等价的. 所以, 我们只能考虑 Ψ 是初末态的波包:

$$\Psi = \int d\alpha g(\alpha) \Psi_{\alpha}^{\pm}.$$

其中 $g(\alpha)$ 是光滑变化的函数, 且当 $\tau \rightarrow \infty$ 及 $\tau \rightarrow -\infty$ 时, 都满足

假设 Φ_{α} 和 Ψ_{α} 分别是 H_0 和 H 具有相同能量的本征态.

定义 S 矩阵元为

$$S_{\beta\alpha} = (\Phi_{\beta}, S \Phi_{\alpha}) \quad (1.51)$$

我们希望 S -矩阵元是 Lorentz 协变的, 这就要求

$$U_0(\Lambda, a)^{-1} S U_0(\Lambda, a) = S$$

其中, U_0 是 Poincaré 群在多自由粒子态张量积 Φ_{α} 上的一个表示. 上述交换性写成无穷小形式为

$$[H_0, S] = [\mathbf{P}_0, S] = [\mathbf{J}_0, S] = [\mathbf{K}_0, S] = 0, \quad (1.52)$$

$H_0, \mathbf{P}_0, \mathbf{K}_0, \mathbf{J}_0$ 是 Poincaré 代数在所有 Φ_{α} 组成的 Hilbert 空间上的酉表示.

我们希望初态 Φ_{α}^{+} 和末态 Φ_{α}^{-} 所分别张成的 Hilbert 空间上也分别存在 Poincaré 群的酉表示, 并且 Poincaré 代数中的元素 $H, \mathbf{J}, \mathbf{P}, \mathbf{K}$ 就是相应的物理量. 在已知的绝大多数理论中, 都有如下关系

$$H = H_0 + V,$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0,$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0.$$

但 \mathbf{K} 不可能是原来的 \mathbf{K}_0 , 因为 $H_0, \mathbf{P}_0, \mathbf{K}_0, \mathbf{J}_0$ 与 $H, \mathbf{J}, \mathbf{P}, \mathbf{K}$ 分别满足 Poincaré 代数, 如果 $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0$, 就会让二者是同一个代数. 因此, 我们希望

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{W}$$

并假定 \mathbf{W} 满足一系列的假设, 如光滑性等. 根据这些假设, 我们可以证明如下结果:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\Omega(\mp\infty) &= \Omega(\mp\infty)\mathbf{K}_0, \\ \mathbf{P}\Omega(\mp\infty) &= \Omega(\mp\infty)\mathbf{P}_0, \\ \mathbf{J}\Omega(\mp\infty) &= \Omega(\mp\infty)\mathbf{J}_0, \\ H\Omega(\mp\infty) &= \Omega(\mp\infty)H_0. \end{aligned} \tag{1.53}$$

我们看到, 在我们的假定下, 初末态所张成的 Hilbert 空间的确存在一个 Poincaré 群的表示.

1.4.2 散射截面与衰变率

为了与实际的实验联系, 我们在这里用箱归一化的手段来近似初态和末态.

假设我们所考虑的物理系统处于一个长度为 L , 体积为 V 的正方体内, 假设正方体相对两面上的物理是相同的. 根据波函数的单值性要求动量的空间部分是归一化的

$$\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3)$$

其中 n_i 取整数. 在正方体内的 δ 函数定义为

$$\delta_V^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V d^3x e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{\mathbf{p}', \mathbf{p}}. \tag{1.54}$$

同样, 我们也希望反应的时间限制在时间间隔 T 内, 因此, 代表能量守恒的 δ 函数也可以同样定义

$$\delta_T(E_\alpha - E_\beta) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(E_\alpha - E_\beta)t} dt. \tag{1.55}$$

再根据合适的归一化条件, 我们得到了动量空间中 $d\beta$ 范围内反应 $\alpha \rightarrow \beta$ 的概率为

$$dP(\alpha \rightarrow \beta) = (2\pi)^2 [(2\pi)^3/V]^{N_\alpha-1} (T/2\pi) |M_{\beta\alpha}|^2 \delta_V^3(\mathbf{p}'_\beta - \mathbf{p}_\alpha) \delta_T(E_\alpha - E_\beta) d\beta$$

当系统 L, T 很大时, 上式中 δ 函数将变成连续时空上的 δ 函数. 我们可以定义**跃迁率**

$$d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta) \equiv dP(\alpha \rightarrow \beta)/T = (2\pi)^{3N_\alpha-2} V^{1-N_\alpha} |M_{\beta\alpha}|^2 \delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta \quad (1.56)$$

上式将是我们讨论与具体实验预测相关的主要公式. 有两种情况值得特别关注.

$$N_\alpha = 1$$

此时, V 消失了. 我们得到了单个粒子衰变为多粒子态的跃迁率

$$d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta) = 2\pi |M_{\beta\alpha}|^2 \delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta \quad (1.57)$$

$$N_\alpha = 2$$

此时, (1.56) 正比于 $1/V$. 但实验者们比起这个量来, 更喜欢**散射截面**, 亦即**单位通量的迁移率**. 我们先定义**通量**为:

$$\Phi_\alpha = u_\alpha/V \quad (1.58)$$

于是, 散射截面为

$$d\sigma(\alpha \rightarrow \beta) \equiv d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)/\Phi_\alpha = (2\pi)^4 u_\alpha^{-1} |M_{\beta\alpha}|^2 \delta^4(p_\alpha - p_\beta) d\beta \quad (1.59)$$

下面, 我们讨论迁移率和散射截面的 **Lorentz** 变换性质. 要知道这一点, 首先要知道 $M_{\beta\alpha}$ 的变换性质. 我们很容易地看出, 如果对初态和末态的所有粒子的角动量 (或者螺旋度) 的第三分量求和, 我们可以得到一个 **Lorentz** 标量

$$\sum_{\text{spins}} |M_{\beta\alpha}|^2 \prod_{\beta} E \prod_{\alpha} E \equiv R_{\beta\alpha} \quad (1.60)$$

其中 $\prod E$ 是反应前 (或反应后) 的所有粒子的能量乘积. 对于单个粒子的衰变, 对(1.57)两边求初末态所有粒子的自旋三分量的和, 得到

$$\sum_{\text{spins}} d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta) = 2\pi E_\alpha^{-1} R_{\beta\alpha} \delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta / \prod_{\beta} E \quad (1.61)$$

我们发现, 上式中 $d\beta / \prod_{\beta} E$ 是 Lorentz 不变的体积元, δ 函数以及 R 都是 Lorentz 不变的量. 因此整个衰变率在 Lorentz 变换下的规律与 $1/E_\alpha$ 相同. 事实上, 这就是通常的狭义相对论的时间延缓效应, 如果一个粒子的速度越快, 它衰变得越慢.

接下来, 我们对二粒子衰变的散射截面(1.59)两端对所有的自旋求和, 得到

$$\sum_{\text{spins}} d\sigma(\alpha \rightarrow \beta) = (2\pi)^4 u_\alpha^{-1} E_1^{-1} E_2^{-1} R_{\beta\alpha} \delta^4(p_\alpha - p_\beta) d\beta / \prod_{\beta} E \quad (1.62)$$

根据习惯, 我们定义散射截面为 Lorentz 标量. 因此, 我们需要给出 u_α 的确切定义, 使得上式是 Lorentz 不变的. 这里

$$u_\alpha = \sqrt{(p_1 \cdot p_2) - m_1^2 m_2^2 / E_1 E_2} \quad (1.63)$$

在质心系中

$$u_\alpha = \frac{|\mathbf{p}|(E_1 + E_2)}{E_1 E_2} = \left| \frac{\mathbf{p}_1}{E_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{E_2} \right|,$$

的确是一种相对速度.

1.4.3 么正性的应用

回忆, S -矩阵元与 δ 函数成正比, 这是 Poincaré 不变性的要求:

$$S_{\beta\alpha} = \delta(\beta - \alpha) - 2\pi i \delta^4(p_\beta - p_\alpha) M_{\beta\alpha}.$$

结合 S -矩阵的酉性质

$$\delta(\gamma - \alpha) = \int d\beta S_{\beta\gamma}^* S_{\beta\alpha}$$

可以轻易得到

$$0 = -iM_{\gamma\alpha} + iM_{\alpha\gamma}^* + 2\pi \int d\beta \delta^4(p_\beta - p_\alpha) M_{\beta\gamma}^* M_{\beta\alpha}. \quad (1.64)$$

但需要注意, 上式的成立条件是 $p_\alpha = p_\gamma$.

上式最有用的情况是当 $\alpha = \gamma$ 时, 我们有

$$\text{Im}M_{\alpha\alpha} = -\pi \int d\beta \delta^4(p_\beta - p_\alpha) |M_{\beta\alpha}|^2 \quad (1.65)$$

利用(1.56), 我们发现, 散射振幅 $M_{\alpha\alpha}$ 的虚部正比于初态是 α 的所有反应的跃迁速率之和, 即

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha &\equiv \int d\beta \frac{\Gamma(\alpha - \beta)}{d\beta} \\ &= (2\pi)^{3N_\alpha-2} V^{1-N_\alpha} \int d\beta \delta^4(p_\beta - p_\alpha) |M_{\beta\alpha}|^2 \\ &\quad - \frac{1}{\pi} (2\pi)^{3N_\alpha-2} V^{1-N_\alpha} \text{Im}M_{\alpha\alpha}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

下面我们考虑 α 是两粒子态的特殊情况, 此时有

$$\text{Im}M_{\alpha\alpha} = -\sigma_\alpha u_\alpha / 16\pi^3.$$

其中, σ_α 是初态为 α 的所有反应的截面之和, 即

$$\sigma_\alpha = \int d\sigma(\alpha - \beta)$$

我们还要讨论 CPT 不变性带来的结果, 这里我们认为 α, β 都是一般的态. 根据 CPT 不变性的假设, 我们可以得到

$$M_{\beta,\alpha} = M_{\mathcal{C}\mathcal{P}\mathcal{T}\alpha, \mathcal{C}\mathcal{P}\mathcal{T}\beta}$$

注意到, 由于 CPT 是一个反酉算符, 所以上式的初末态会交换. 特别地, 如果初态和末态相同的话, 有

$$M_{p_1\sigma_1 n_1; p_2\sigma_2 n_2; \dots, p_1\sigma_1 n_1; p_2\sigma_2 n_2; \dots} = M_{p_1-\sigma_1 n_1^c; p_2-\sigma_2 n_2^c; \dots, p_1-\sigma_1 n_1^c; p_2-\sigma_2 n_2^c; \dots}$$

根据光学定理(1.66),

$$\Gamma_{p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2;\dots,p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2;\dots} = \Gamma_{p_1-\sigma_1n_1^c;p_2-\sigma_2n_2^c;\dots,p_1-\sigma_1n_1^c;p_2-\sigma_2n_2^c;\dots}$$

于是,有如下定理

定理 1.16 由一些粒子组成的初态的总跃迁速率,与自旋第三分量反号的这些粒子的反粒子组成的初态的总跃迁速率是相等的.

1.4.4 微扰展开

我们已经知道, S -矩阵元可以写成

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &= \delta(\beta - \alpha) - 2i\pi\delta(E_\beta - E_\alpha)T_{\beta\alpha}^+, \\ T_{\beta\alpha}^+ &= (\Phi_\beta, V\Psi_\alpha^+). \end{aligned} \quad (1.67)$$

且 Ψ_α^+ 满足 Lippmann-Schwinger 方程

$$\Psi_\alpha^+ = \Phi_\alpha + \int d\gamma \frac{T_{\gamma\alpha}^+ \Phi_\gamma}{E_\alpha - E_\gamma + i\epsilon}. \quad (1.68)$$

不停地将 Lippmann-Schwinger 方程(1.68)带入(1.67),可以得到

$$T_{\beta\alpha}^+ = V_{\beta\alpha} + \int d\gamma \frac{V_{\beta\gamma} V_{\gamma\alpha}}{E_\alpha - E_\gamma + i\epsilon} + \int d\gamma d\gamma' \frac{V_{\beta\gamma} V_{\gamma\gamma'} V_{\gamma'\alpha}}{(E_\alpha - E_\gamma + i\epsilon)(E_\alpha - E_{\gamma'} + i\epsilon)} + \dots$$

上面展示的方法就是上世纪 30 年代流行的微扰论计算方法,今天被称作”old-fashioned”微扰论. 其缺点在于无法直接看出 S -矩阵元的 Lorentz 协变性,但优点在于揭示了 S -矩阵元的奇点来源于反应的中间过程. 我们接下来将要发展的是一套等价的方法,被称为**时序微扰论**.

这里,我们最好用 S 矩阵的另一种形式:

$$S = U(\infty, -\infty). \quad (1.69)$$

其中

$$U(\tau, \tau_0) \equiv \exp(iH_0\tau) \exp(-iH(\tau - \tau_0)) \exp(-iH_0\tau_0) \quad (1.70)$$

对时间 τ 求导, 可以得到

$$i \frac{d}{d\tau} U(\tau, \tau_0) = V(\tau) U(\tau, \tau_0),$$

不难看出, 方程具有显然的解

$$U(\tau, \tau_0) = 1 - i \int_{\tau_0}^{\tau} dt V(t) U(t, \tau_0) \quad (1.71)$$

其中, $V(t)$ 是相互作用绘景下的算符,

$$V(t) \equiv \exp(iH_0t) V \exp(-iH_0t)$$

不停地对(1.71)自身进行迭代, 我们得到了 $U(t, \tau_0)$ 对 V 的展开

$$\begin{aligned} U(\tau, \tau_0) = & 1 - i \int_{\tau_0}^{\tau} dt_1 V(t_1) + (-i)^2 \int_{\tau_0}^{\tau} dt_1 \int_{\tau_0}^{t_1} dt_2 V(t_1) V(t_2) \\ & + (-i)^3 \int_{\tau_0}^{\tau} dt_1 \int_{\tau_0}^{t_1} dt_2 \int_{\tau_0}^{t_2} dt_3 V(t_1) V(t_2) V(t_3) + \cdots \end{aligned}$$

令 $\tau \rightarrow \infty$ 以及 $\tau_0 \rightarrow -\infty$, 得到了 S 的微扰展开

$$\begin{aligned} S = & 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 V(t_1) + (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 V(t_1) V(t_2) \\ & + (-i)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_3 V(t_1) V(t_2) V(t_3) + \cdots \end{aligned}$$

如果引入时序算子 T , S 可以写成更紧凑的形式

$$S = T \exp(-i \int_{-\infty}^{\infty} V(t) dt). \quad (1.72)$$

由于 S -矩阵元 $S_{\alpha\beta}$ 是 S 在多自由粒子态 Φ_β 与 Φ_α 之间的矩阵元, 在态的内积在 Poincaré 群作用下不改变的基本假设下, 我们能够得到

$$U_0(\Lambda, a) S U_0^{-1}(\Lambda, a) = S \quad (1.73)$$

其中, $U_0(\Lambda, a)$ 是 Poincaré 变换 (Λ, a) 在 Hilbert 空间上的一个表示. 这里, 我目前还不知道 U_0 和 U 是否是同一个表示. 很大可能二者是同一个表示, 但是在不同的基下矩阵元不一样, 或说, 二者由一个相似变换联系起来, 是等价的. 而这相似变换就是 $\Omega(\mp\infty)$. 既然算符 S 与 $U_0(\Lambda, a)$ 是对易的, 那么 S 与 $U_0(\Lambda, a)$ 的生成元 $H_0, \mathbf{P}_0, \mathbf{K}_0, \mathbf{J}_0$ 也是对易的. 为了满足对易性的要求, 我们假设 $V(t)$ 是某个量 $\mathcal{H}(\mathbf{x}, t)$ 的空间积分

$$V(t) = \int d^3x \mathcal{H}(\mathbf{x}, t).$$

并且满足

$$U_0(\Lambda, a) \mathcal{H}(x) U_0^{-1}(\Lambda, a) = \mathcal{H}(\Lambda x + a) \quad (1.74)$$

此时, S 可以写成

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T\{\mathcal{H}(x_1) \cdots \mathcal{H}(x_n)\}. \quad (1.75)$$

除了 T 作用在算符上, 其他一切都是自动满足在 Poincaré 变换下不变的.

但是, 由于我们考虑的 Poincaré 变换是 $SO(3, 1) \times \mathbb{R}^4$, 如果两点 x_1, x_2 之间的间隔不是类空的话, Poincaré 变换是不改变 $t_1 - t_2$ 的符号的, 故如果想要满足 S 的对易条件, 我们只要求

$$[\mathcal{H}(x), H(x')] = 0 \text{ 对一切 } (x - x')^2 \neq 0 \quad (1.76)$$

成立即可. 因此, 我们从 Poincaré 不变性出发, 得到了因果性条件.

反之, 如果我们假设 \mathcal{H} 因果性条件(1.76)和对易关系(1.74), 我们可以证明 S -矩阵元满足正确的 Poincaré 变换规律. 对于一个无穷小的递升, (1.76)给出

$$-i[\mathbf{K}_0, \mathcal{H}(\mathbf{x}, t)] = t \nabla \mathcal{H}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{x} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}(\mathbf{x}, t),$$

两端积分并令 $t = 0$ 得到

$$[\mathbf{K}_0, V] = [H_0, \mathbf{W}].$$

其中

$$\mathbf{W} = -i \int d^3x \mathcal{H}(\mathbf{x}, 0).$$

接下来我们发现

$$[\mathbf{W}, V] = \int d^3x \int d^3y \mathbf{x} [\mathcal{H}(\mathbf{x}, 0), \mathcal{H}(\mathbf{y}, 0)] = 0,$$

上式最后一步用到了因果性条件(1.76). 所以有

$$[\mathbf{K}, H] = [\mathbf{K}_0 + \mathbf{W}, H_0 + V] = [\mathbf{K}_0, H_0] + [\mathbf{K}_0, V] + [\mathbf{W}, H_0] + [\mathbf{W}, V] = -i\mathbf{P}_0 = -i\mathbf{P}$$

如果再加上条件 $[\mathbf{P}_0, \mathcal{H}] = [\mathbf{J}_0, \mathcal{H}] = 0$, 就能够推出(1.53). 从而得到了 Poincaré 群在初末态上的一个表示.

注 1.2 虽然我们在微扰论中构造的理论不是最一般的 Poincaré 不变的理论, 但所有的 Poincaré 不变的理论都有类似因果性条件(1.76)的限制, 而非相对论性的量子理论没有类似的限制. 这是因为在非相对论的情况下, 时间排序都是 Galilean 不变的. 或许可以认为, 正是因果性条件, 才使得相对论性的量子理论有如此强烈的限制. \diamond

1.4.5 不在质壳的情形

我们假设读者已经掌握了如何利用 Feynman 图来计算 S -矩阵元. 我们已经熟知, Feynman 图外线上的粒子都是满足质能关系 $p^2 = m^2$ 的粒子, 而内线粒子的能量则不受质能关系的约束. 但是, 由于一些原因, 我们不得不考虑外线的粒子也不满足质能关系的情况. 显然, 如果我们计算出了外线粒子不在壳时的 S -矩阵元, 可以通过令 $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ 得到外线粒子在壳时的 S -矩阵元. 在利用路径积分方法量子化时, 我们将会看到, 利用这种方法计算 S -矩阵元往往是最容易的.

带有不在壳外线粒子的 Feynman 图, 可以归结为考虑加入合适的外场的相互作用. 假设我们在相互作用 $V(t)$ 中添加一系列的外场 $\epsilon_a(x)$, 那么

在(1.72)中的 $V(t)$ 应该被替换为

$$V_\epsilon(t) = V(t) + \sum_a \int d^3x \epsilon_a(\mathbf{x}, t) o_a(\mathbf{x}, t) \quad (1.77)$$

其中 o_a 是任何形式的算子, 且此时的 $o_a(t)$ 在相互作用绘景中:

$$o_a(t) = \exp(iH_0 t) o_a(\mathbf{x}, 0) \exp(-iH_0 t).$$

这时, 从 $\alpha \rightarrow \beta$ 的 S -矩阵元 $S_{\beta\alpha}$ 变成了一个经典场 $\epsilon_a(t)$ 的泛函 $S_{\beta\alpha}[\epsilon]$.

我们注意到, 计算 $S_{\beta\alpha}[\epsilon]$ 的 Feynman 规则除了 V 的 Feynman 规则之外, 还添加了 ϵ_a 乘以 o_a 的费曼规则. 如果 o_a 中含有 n_a 个场算符, 那么一个 o_a 节点就含有 n_a 条线. 考虑 r 阶变分导数

$$\left[\frac{\delta^r S_{\beta\alpha}[\epsilon]}{\delta \epsilon_l(x) \delta \epsilon_m(y) \cdots} \right]_{\epsilon=0} \quad (1.78)$$

对应的坐标空间的 Feynman 图. 这些图会多出 r 个顶点, 每个顶点都有 n_a, n_b, \cdots 条内线, 没有外线与这些顶点相连.

特别地, 我们考虑 o_a 全部是单个场算符的情况, 即

$$V_\epsilon(t) = V(t) + \sum_l \int d^3x \epsilon_l(\mathbf{x}, t) \psi_l(\mathbf{x}, t) \quad (1.79)$$

则前述的 r 阶变分导数的 Feynman 图多出了 r 个顶点, 每个顶点都只有一条内线相连. 这些顶点对 S 矩阵元的贡献是传播子, 而不是通常的外线系数 $(2\pi)^{-\frac{3}{2}} u_l(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x}$. 这些内线可视为不在壳的外线. (此处不理解.)

更一般地, 我们有定理如下.

定理 1.17 对于微扰论中的所有阶数, 都有如下关系

$$\left[\frac{\delta^r S_{\beta\alpha}[\epsilon]}{\delta \epsilon_l(x) \delta \epsilon_m(y) \cdots} \right]_{\epsilon=0} = (\Psi_\beta^-, T\{-iO_a(x), -iO_b(y) \cdots\} \Psi_\alpha^+)$$

成立. 其中 $O_a(x)$ 是 $o_a(x)$ 在 Heisenberg 绘景中的对应

$$O_a(\mathbf{x}, t) = \exp(iHt) o_a(\mathbf{x}, 0) \exp(-iHt) = \Omega(t) o_a(\mathbf{x}, t) \Omega^{-1}(t), \quad (1.80)$$

并且

$$\Omega(t) \equiv e^{iHt} e^{-iH_0 t}. \quad (1.81)$$

证明 根据(1.72), 我们可以很容易地得到

$$\left[\frac{\delta^r S[\epsilon]}{\delta \epsilon_{a_1}(x_1) \cdots \delta \epsilon_{a_r}(x_r)} \right]_{\epsilon=0} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^{N+r}}{N!} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \cdots d\tau_N (\Phi_\beta, T\{V(\tau_1) \cdots V(\tau_N) o_{a_1}(x_1) \cdots o_{a_r}(x_r)\} \Phi_\alpha)$$

为简便计, 不妨设 $x_1^0 \geq x_2^0 \geq \cdots \geq x_r^0$, 并将 $\tau_1 \cdots \tau_N$ 分成 $r+1$ 组, 每组有 N_0, N_1, \cdots, N_r 个, 记为 $\tau_{01}, \cdots, \tau_{0N_0}; \tau_{11}, \cdots, \tau_{1N_1}; \cdots; \tau_{r1}, \cdots, \tau_{rN_r}$, 此时上述等式可以写成

$$\begin{aligned} \left[\frac{\delta^r S[\epsilon]}{\delta \epsilon_{a_1}(x_1) \cdots \delta \epsilon_{a_r}(x_r)} \right]_{\epsilon=0} &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^{N+r}}{N!} \times \sum_{N_0 N_1 \cdots N_r} \frac{N!}{N_0! N_1! \cdots N_r!} \times \\ &\quad \int_{x_1^0}^{\infty} d\tau_{01} \cdots d\tau_{0N_0} \int_{x_2^0}^{x_1^0} d\tau_{11} \cdots d\tau_{1N_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_r^0} d\tau_{r1} \cdots d\tau_{rN_r} \times \\ &\quad (\Phi_\beta, T\{V(\tau_{01}) \cdots V(\tau_{0N_0})\} o_{a_1}(x_1) T\{V(\tau_{11}) \cdots V(\tau_{1N_1})\} o_{a_2}(x_2) \times \cdots \times \\ &\quad o_{a_r}(x_r) T\{V(\tau_{r1}) \cdots V(\tau_{rN_r})\} \Phi_\alpha) \end{aligned}$$

并且满足条件 $N = N_0 + N_1 + \cdots + N_r$. 分别对 $N_i, i = 0, \cdots, r$ 求和, 就可以得到

$$\left[\frac{\delta^r S[\epsilon]}{\delta \epsilon_{a_1}(x_1) \cdots \delta \epsilon_{a_r}(x_r)} \right]_{\epsilon=0} = (-i)^r (\Phi_\beta, U(\infty, x_1^0) o_{a_1}(x_1) U(x_1^0, x_2^0) o_{a_2}(x_2) \times \cdots \times o_{a_r}(x_r) U(x_r^0, -\infty) \Phi_\alpha), \quad (1.82)$$

其中,

$$U(t', t) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \int_t^{t'} d\tau_1 \cdots d\tau_N T\{V(\tau_1) \cdots V(\tau_N)\}.$$

我们还发现, 如果给定了初始条件 $U(t, t) = 1$, 可以得到

$$U(t', t) = \exp(iH_0 t') \exp(-iH(t' - t)) \exp(-iH_0 t) = \Omega^{-1}(t') \Omega(t).$$

将上式代入欲证等式, 定理得证. \square

1.4.6 关联函数

我们定义两点关联函数为

$$(\Psi_0, T\{O_a(x), O_b(y)\}\Psi_0), \quad (1.83)$$

其中, O_a, O_b 是在 Heisenberg 绘景下任意算符. 根据(1.17), 以及(1.81), 我们得到了关联函数与真空平均之间的关系

$$(\Psi_0, T\{O_a(x), O_b(y)\}\Psi_0) = (\Phi_0, T\{o_a(x)o_b(y)S\}\Phi_0) \quad (1.84)$$

其中, 我们用到了 S 算子与时间演化算子 Ω 的关系(1.69), 以及初末态与自由粒子态的关系:

$$\Psi_\alpha^\pm = \Omega(\mp\infty)\Phi_\alpha. \quad (1.85)$$

注 1.3 值得注意的是, (1.84)与其他的书可能相差无穷大常数. 但这并不妨碍我们得到正确的结果, 反正后面的 LSZ 约化公式会将场重新定义. \diamond

下面, 我们可以将关联函数推广到 n 点关联函数的情形, 定义

$$(\Psi_0, T\{O_1(x_1) \cdots O_n(x_n)\}\Psi_0) \quad (1.86)$$

为 n 个算符在真空态之间的 n 点关联函数, 根据 Feynman 规则, 我们有如下陈述

命题 1.18 真空态的 n 点关联函数等于所有联通的 n 个顶点 O_1, \cdots, O_n 之间的 Feynman 图之和. 但是注意到, 联通 (connected) 与不可约 (irreducible) 并不相同. 连通是指整体地扣除了真空涨落的图, 但有可能表示成两个子图的乘积, 但不可约的图没有非平凡的子图, 也就无法表示成子图的乘积.

由上述陈述, 我们能够理解1.17中等式(1.82)右端夹在 Φ_α, Φ_β 之间的量了. 其实那就是 $T\{o_{a_1}o_{a_2} \cdots o_{a_r}S\}$, 亦即未经过真空平均的关联函数. 每一幅

Feynman 图的外线总是由关联函数联系起来的, 如果我们知道了关联函数, 则可以通过与外线连接的方式计算得到整个散射振幅. 所以, 我们如果知道了关联函数, 就几乎知道了整个散射振幅. 我们在之后的 LSZ 约化公式中可以看到, 可以通过计算关联函数的 Fourier 变换之后, 再取极点附近的系数来计算散射振幅.

1.5 关联函数的整体性质

1.5.1 对称性的应用

在上一章中, 我们要求 S -矩阵元具有 Poincaré 不变性. 根据 Poincaré 群在 Hilbert 空间上的表示的酉性要求, 存在 Hermitian 的算符 P^μ (**注意在物理中从 Lie 群到 Lie 代数的指数映射习惯取为 $\exp : X \mapsto e^{iX}$, 所以这里对应 Hermitian 算符而不是反 Hermitian 算符**), 使得对任何算符 $O(x)$, 都有

$$[P_\mu, O(x)] = i \frac{\partial}{\partial x^\mu} O(x).$$

由于初末态被选为 H 的本征态, 又由于 P_μ 之间相互对易, 所以初末态是所有 P_μ 的本征态. 因此, 对于任何的算符 $O_a(x), O_b(x), \dots$, 都有

$$\begin{aligned} & (p_{\beta\mu} - p_{\alpha\mu})(\Psi_\beta^-, T\{O_a(x_1)O_b(x_2)\dots\}\Psi_\alpha^+) \\ &= (\Psi_\beta^-, [P_\mu, T\{O_a(x_1)O_b(x_2)\dots\}]\Psi_\alpha^+) \\ &= i\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\mu} + \frac{\partial}{\partial x_2^\mu} + \dots\right)(\Psi_\beta^-, T\{O_a(x_1)O_b(x_2)\dots\}\Psi_\alpha^+). \end{aligned}$$

根据上式, 我们可以推断出算符乘积的时间序的最一般形式

$$(p_{\beta\mu} - p_{\alpha\mu})(\Psi_\beta^-, T\{O_a(x_1)O_b(x_2)\dots\}\Psi_\alpha^+) = \exp(i(p_\alpha - p_\beta)x) F_{ab\dots}(x_1 - x_2, x_1 - x_3, \dots),$$

其中, x 是所有点处算符的平均值

$$\begin{aligned} x^\mu &= c_1 x_1^\mu + c_2 x_2^\mu + \dots \\ c_1 + c_2 + \dots &= 1. \end{aligned} \tag{1.87}$$

对(1.87)进行 Fourier 变换, 容易验证

$$\int d^4x_1 d^4x_2 \cdots (\Psi_\beta^-, T\{O_a(x_1)O_b(x_2)\cdots\}\Psi_\alpha^+) \exp(-ik_1 \cdot x_1 - ik_2 \cdot x_2 - \cdots) \propto \delta^4(p_\alpha - p_\beta - k_1 - k_2)$$

我们看到, 上式不过是对流经顶点 $O_a, O_b \cdots$ 的动量守恒.

另一个较为不平凡的应用是电荷共轭操作不变性. 我们从之前的内容得知, 对于 QED 顶点 $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 以及电磁场 a^μ , 有

$$C(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)C^{-1} = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

$$Ca^\mu C^{-1} = -a^\mu$$

在 QED 中, H 与 H_0 在 C 变换下不变, 所以上述等式在 Heisenberg 绘景中也成立. 对于一个 C 不变的理论, 我们有如下定理

定理 1.19 (Furry 定理) 如果电流和电磁场总共有奇数个, 那么它们的关联函数是 0.

亦即, 所有奇数个光子外线 (在壳或不在壳, 且奇数是固定的) 的费曼图之和为 0.

1.5.2 解析性质

非微扰方法的最重要应用之一就是揭示费曼图的极点与外动量的关系. 考虑动量空间中的 n 点关联函数

$$G(q_1, \cdots, q_n) \equiv \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_n e^{-iq_1 \cdot x_1} \cdots e^{-iq_n \cdot x_n} (\Psi_0, T\{A_1(x_1) \cdots A_n(x_n)\}\Psi_0). \quad (1.88)$$

A_i 是任意的场算符或场算符的导数.

我们考虑 G 在某些入射动量的平方处的极点. 我们假设 G 是 q^2 的函数, 这里

$$q \equiv q_1 + \cdots + q_r = -q_{r+1} - \cdots - q_n, 1 \leq r \leq n-1.$$

我们将证明如下引理.

引理 1.20 $q^2 = -m^2$ 是 G 的一个极点. m 是任何单粒子态的质量, 只要这个单粒子态与态 $A_1^\dagger \cdots A_r^\dagger \Psi_0$ 以及态 $A_{r+1} \cdots A_n \Psi_0$ 均不正交. G 在这个极点处的渐进行为如同

$$\frac{-2i\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}}{q^2 - m^2 + i\epsilon} (2\pi)^7 \delta^4(q_1 + \cdots q_n) \sum_{\sigma} M_{0|\mathbf{q},\sigma}(q_2 \cdots q_r) M_{\mathbf{q},\sigma|0}(q_{r+2} \cdots q_n).$$

我们定义 M 为

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + \cdots q_r - p) M_{0|\mathbf{q},\sigma}(q_2 \cdots q_r) \\ & \equiv \int d^4x_1 \cdots d^4x_r e^{-iq_1 \cdot x_1} \cdots e^{-iq_r \cdot x_r} (\Phi_0, T\{A_1(x_1) \cdots A_r(x_r)\} \Psi_{\mathbf{p},\sigma}) \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4 \delta^4(q_{r+1} + \cdots q_n + p) M_{\mathbf{q},\sigma|0}(q_{r+2} \cdots q_n) \\ & \equiv \int d^4x_{r+1} \cdots d^4x_n e^{-iq_{r+1} \cdot x_{r+1}} \cdots e^{-iq_n \cdot x_n} (\Psi_{\mathbf{p},\sigma}, T\{A_{r+1}(x_{r+1}) \cdots A_n(x_n)\} \Psi_0). \end{aligned}$$

引理的证明主要用到了单位分解, 我们不去证明它. 但值得注意的是, M 只是用于简化记号, 不必过于纠结, 理解时还是按照等号右边理解为好.

1.5.3 场算符与质量的重整化

这里, 我们要用到上节引理的命题的一个特殊情况. 我们将会考虑特定形式的关联函数

$$G_l(q_1, q_2 \cdots) = \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots e^{-iq_1 \cdot x_1} e^{-iq_2 \cdot x_2} (\Psi_0, T\{O_l(x_1) A_2(x_2) \cdots\} \Psi_0),$$

其中 $O_l(x)$ 是与某种自由粒子场算符 $\psi_l(x)$ 有同样的 Poincaré 变换规律的 Heisenberg 绘景中的算符. 如果存在一个单粒子态 $\Psi_{\mathbf{q}_l, \sigma}$, 与态 $O_l \Psi_0$ 以及

$A_2 A_3 \cdots \Psi_0$ 均不正交, 根据上一节证明的引理, G_l 在 $q_1^2 = m^2$ 处有一个极点, 且该处极点的渐进行为如同

$$\frac{-2i\sqrt{\mathbf{q}_1^2 + m^2}}{q_1^2 - m^2 + i\epsilon} (2\pi)^3 \delta^4(q_1 + \cdots q_n) \sum_{\sigma} (\Psi_0, O_l \Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma}) \int d^4 x_2 \cdots e^{-iq_2 \cdot x_2} \cdots (\Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma}, T\{A_2(x_2) \cdots\} \Psi_0)$$

根据 Poincaré 不变性, 我们可以确定 $(\Psi_0, O_l \Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma})$ 一定具有形式

$$(\Psi_0, O_l \Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} N v_l(\mathbf{q}_1, \sigma) \quad (1.89)$$

其中 v_l 是场算符中创生算符之前的系数, N 是一个未定常数. 同样根据 Poincaré 不变性, 我们在定义一个矩阵元 M_l

$$N^{-1} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_l v_l^*(\mathbf{q}_1, \sigma) M_l(q_2 \cdots) \equiv \int d^4 x_2 \cdots e^{-iq_2 \cdot x_2} (\Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma}, T\{A_2(x_2) \cdots\} \Psi_0)$$

于是 G_l 在极点附近的行为如同

$$\frac{-2i\sqrt{\mathbf{q}_1^2 + m^2}}{q_1^2 - m^2 + i\epsilon} \sum_{\sigma, l'} v_l(\mathbf{q}_1, \sigma) v_{l'}^*(\mathbf{q}_1, \sigma) M_{l'}$$

我们发现, $\sum_{\sigma, l'} v_l(\mathbf{q}_1, \sigma) v_{l'}^*(\mathbf{q}_1, \sigma)$ 正是 ψ_l 的自由传播子, 也是 O_l 的自由传播子. 因此, 我们从上式得知, M_l 就是动量空间中带有顶点 O_l, A_2, \cdots 的所有 Feynman 图之和, 且流过每个顶点的动量分别是 q_1, q_2, \cdots , 只不过除掉 O_l 的自由传播子.

更进一步, 我们可以将算符 $O_{l_1}, O_{l_2} \cdots$ 逐个地抽出 M , 得到 G 的极点附近的性质为

$$G(q_1, q_2, \cdots) \sim \frac{-2i\sqrt{\mathbf{q}_1^2 + m^2}}{q_1^2 - m^2 + i\epsilon} \sum_{\sigma, l'} v_{l_1}(\mathbf{q}_1, \sigma) v_{l'_1}^*(\mathbf{q}_1, \sigma) \frac{-2i\sqrt{\mathbf{q}_2^2 + m^2}}{q_2^2 - m^2 + i\epsilon} \sum_{\sigma, l''} v_{l_2}(\mathbf{q}_2, \sigma) v_{l'_2}^*(\mathbf{q}_2, \sigma) \cdots (\Psi_0,$$

特别地, 如果这是一个散射过程的关联函数, 则上式最后的一项就是散射振幅. 因此我们有如下陈述

定理 1.21 (LSZ 约化规则) 动量空间中的关联函数在动量极点附近的性质等价于在壳的传播子乘以相应的散射振幅.

注 1.4 LSZ 约化规则告诉我们的最重要的事实, 是关联函数 $G(q_1, q_2, \dots, q_n)$ 作为动量 q_1, q_2, \dots, q_n 的函数, 且当动量在壳时, 关联函数会出现极点, 极点的系数就是相应的过程的散射振幅. 因此, 如果我们假定关联函数 G 是一个可以测量的物理量, 那么, 就可以通过单粒子态的极点来确定出散射振幅, 而我们之前计算散射振幅都是通过微扰论进行的. 这样, 量子场论的微扰论就与实验的可观测量之间建立了联系, 这个过程实际上也就是重整化的过程. \diamond

接下来, 我们回到(1.89). 如果此时的 O_l 是 Heisenberg 绘景下的场算符 Φ_l , 那么我们有

$$(\Psi_0, \Phi_l(0)\Psi_{\mathbf{q},\sigma}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} N v_l(\mathbf{q}_1, \sigma)$$

为了消除这个待定常数 N , 我们定义

$$\Phi_l \rightarrow \frac{1}{N} \Phi_l$$

这样, 就不会出现未知常数了. 上述经过重新定义的场被称为**重整化的场**.

注 1.5 到现在为止, 我们看到, 场的重整化的根源来源于我们对真空态的无知. \diamond

接下来, 根据引理1.20, 可以看到, 如果只取两个场 O_l, O_r , 那么, 2-点关联函数

$$\begin{aligned} G(q_1, q_2) &= \int d^4x_1 d^4x_2 e^{-iq_1 \cdot x_1} e^{-iq_2 \cdot x_2} (\Psi_0, T\{O_l O_r\} \Psi_0) \\ &\sim \frac{-2iN^2 \sqrt{\mathbf{q}_1^2 + m^2}}{q_1^2 - m^2 + i\epsilon} \sum_{\sigma} u_l(\mathbf{q}_1, \sigma) u_r^*(\mathbf{q}_1, \sigma) (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

这就是一般的传播子在极点附近的行为, 但是多出了 N^2 . 如果我们对场做了重整化, 则 N^2 就会消失. 于是我们得到如下结果

定理 1.22 重整化的场的传播子在极点附近的行为如同自由场的传播子, 重整化的质量由传播子的极点位置所确定.

例 1.2 (标量场的重整化) 我们考虑实数标量场理论. Lagrangian 写成

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_B \partial^\mu \Phi_B - \frac{1}{2} m_B^2 \Phi_B^2 - V_B(\Phi_B) \quad (1.90)$$

下标 B 表示未经重整化场, 亦即“裸量”. 我们对场和质量进行重整化

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv Z^{-\frac{1}{2}} \Phi_B, \\ m^2 &= m_B^2 + \delta m^2. \end{aligned} \quad (1.91)$$

将重整化之后的场带入 Lagrangian, 得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} Z \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} Z (m^2 - \delta m^2) \Phi^2 - V(\Phi) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^2) + \frac{1}{2} (Z - 1) (\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^2) + \frac{1}{2} \delta m^2 Z \Phi^2 - V(\Phi). \end{aligned}$$

其中, $V(\Phi) = V_B(\sqrt{Z}\Phi)$. 将动量空间的传播子记为 $\Delta'(q)$, 将单粒子不可约的费曼图记为 $i(2i)^4 \Pi(q^2)$, 通过对一个等比数列求和, 得到了

$$\Delta'(q) = \frac{i}{q^2 - m^2 - \Pi(q^2) + i\epsilon} \quad (1.92)$$

根据 LSZ 约化规则, Δ' 的单极点是 $q^2 = m^2$, 且在该极点的留数与自由传播子相同. 由此我们得到了重整化条件

$$\begin{aligned} \Pi(m^2) &= 0 \\ \frac{d\Pi}{dq^2} \Big|_{q^2=m^2} &= 0 \iff \lim_{q^2 \rightarrow m^2} \frac{q^2 - m^2}{q^2 - m^2 - \Pi(q^2) + i\epsilon} = 1 \end{aligned} \quad (1.93)$$

通过重整化后的 Lagrangian, 我们得到了

$$\Pi(q^2) = (Z - 1)(q^2 - m^2) + \delta m^2 Z + \Pi(q^2)_{loop} \quad (1.94)$$

于是, 重整化条件为

$$\begin{aligned} Z \delta m^2 &= -\Pi_{loop}(m^2) \\ Z &= 1 + \frac{d\Pi_{loop}}{dq^2} \Big|_{q^2=m^2} \end{aligned}$$

从重整化条件(1.93)中我们还可以看到, $\Pi(q^2)$ 中不含 q^2 的一次多项式, 因此可以推出, $\Pi_{loop}(q^2)$ 中一定含 $-(Z-1)q^2$ 这一项与之相消. 之后我们将会看到, 正是这种相减的操作使得 Π_{loop} 中的无穷大项消去. 通过这些事实, 我们应该清楚, **质量与场算符的重整化未必与无穷大的出现有直接的关系. 即使** 在没有无穷大的理论中, 我们有时也需要进行重整化. \diamond

下面我们来看对 Dirac 场的重整化.

例 1.3 (Dirac 场的重整化) 未经重整化的 Dirac 场的 Lagrangian 的形式如下

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_B(i\not{\partial} - m_B)\Psi_B - V_B(\bar{\Psi}_B\Psi_B) \quad (1.95)$$

对场和电荷做重整化, 有

$$\begin{aligned} \Psi &\equiv Z_2^{-\frac{1}{2}}\Psi_B \\ m &= m_B + \delta m \end{aligned} \quad (1.96)$$

带入 Lagrangian, 得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi \\ &+ (Z_2 - 1)\bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi + \delta m Z_2 \bar{\Psi}\Psi - V_B(Z_2 \bar{\Psi}\Psi) \end{aligned} \quad (1.97)$$

同样地, 将单粒子不可约的费曼图记为 $i(2\pi)^4\Sigma$, 得到重整化之后的传播子为

$$S'(k) = \frac{i}{i\not{k} - m - \Sigma(\not{k}) + i\epsilon}. \quad (1.98)$$

重整化条件依然是

$$\begin{aligned} \Sigma(-im) &= 0 \\ \frac{\partial \Sigma(\not{k})}{\partial \not{k}} \Big|_{\not{k}=-im} &= 0 \end{aligned} \quad (1.99)$$

我们能够从(1.97)中读出 Σ 到树图阶的表达式

$$\Sigma(\not{k}) = (Z_2 - 1)(i\not{k} - m) + Z_2\delta m + \Sigma_{loop}(\not{k})$$

从而,重整化条件写成

$$\begin{aligned} Z_2 \delta m &= -\Sigma_{loop}(-im) \\ Z_2 &= 1 - i \frac{\partial \Sigma_{loop}(k)}{\partial k} \Big|_{k=-im} \end{aligned} \quad (1.100)$$

我们将会看到,重整化条件将会导致费米子外线不必辐射修正. \diamond

1.5.4 荷的重整化与 Ward 恒等式

我们希望物理的电荷能够反应带电物质场对真实电磁场的响应,亦即,电荷 q_l 应该通过要求重整化后的电磁场和物质场在物质场的 Lagrangian 中以 $(\partial_\mu - iq_l A_\mu)\Psi_l$ 的形式出现,这样才能使重整化之后的电流 J^μ 具有形式

$$J^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta A_\mu}$$

的形式,或者说, **我们不希望重整化会破坏规范对称性**. 因此,电荷的重整化与电磁场的重整化是直接相关的

$$\begin{aligned} A^\mu &\equiv Z_3^{-\frac{1}{2}} A_B^\mu, \\ q_l &\equiv \sqrt{Z_3} q_{Bl}. \end{aligned} \quad (1.101)$$

由此我们看到,可观测的电荷与出现在 Lagrangian 中的电荷是成正比的,且比例系数 $\sqrt{Z_3}$ 对所有类型的带电粒子来说都是相同的. 因此,电荷的高阶修正项全部出现在比例系数 $\sqrt{Z_3}$ 中.

为了使电荷重整化只来源于光子传播子的辐射修正,顶点修正和其他的传播子修正必须要相消. **带电粒子传播子与顶点之间的关系被称为 Ward 恒等式**. 我们将利用 Ward 恒等式来看清传播子修正与顶点修正相消之间的本质.

我们首先考虑 $J^\mu(x), \Psi_n(y), \bar{\Psi}_m(z)$ 的三点关联函数, 并通过这三点关联函数定义 QED 的定点函数 Γ^μ :

$$\begin{aligned} & \int d^4x d^4y d^4z e^{-ip \cdot x} e^{-ik \cdot y} e^{il \cdot z} (\Psi_0, T\{J^\mu(x) \Psi_n(y) \bar{\Psi}_m(z)\} \Psi_0) \\ & \equiv -i(2\pi)^4 q S'_{nn'}(k) \Gamma_{n'm'}^\mu(k, l) S'_{m'm}(l) \delta^4(p + k - l). \end{aligned} \quad (1.102)$$

其中, S' 就是修正的传播子,

$$-i S'_{nm} \delta^4(k - l) = \int d^4y d^4z (\Psi_0, T\{\Psi_n(y) \bar{\Psi}_m(z)\} \Psi_0) e^{-ik \cdot y} e^{il \cdot z} \quad (1.103)$$

根据 LSZ 约化规则, 我们得知 Γ^μ 是将所有费米子外线, 反费米子外线, 以及光子外线的动量空间 Feynman 图加起来再扔掉费米子传播子和光子传播子的结果. 为了使重整化明确, 我们注意到, 在没有相互作用的情况

$$\begin{aligned} S'(k) & \rightarrow \frac{i}{i\mathbf{k} - m + i\epsilon}, \\ \Gamma^\mu(k, l) & \rightarrow \gamma^\mu. \end{aligned} \quad (1.104)$$

接下来我们可以通过等式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T\{J^\mu(x) \Psi_n(y) \bar{\Psi}_m(z)\} &= T\{\partial_\mu J^\mu \Psi_n(y) \bar{\Psi}_m(z)\} \\ &+ \delta(x^0 - y^0) T\{[J^0(x), \Psi_n(y)] \bar{\Psi}_m(z)\} \\ &+ \delta(x^0 - z^0) T\{\Psi_n(y) [J^0(x), \bar{\Psi}_m(z)]\} \\ &= \delta(x^0 - y^0) T\{[J^0(x), \Psi_n(y)] \bar{\Psi}_m(z)\} \\ &+ \delta(x^0 - z^0) T\{\Psi_n(y) [J^0(x), \bar{\Psi}_m(z)]\} \end{aligned}$$

得到 Γ 与 S' 的关系:

$$(l - k)_\mu \Gamma^\mu(k, l) = i S'^{-1}(k) - i S'^{-1}(l) \quad (1.105)$$

上式被称为广义的 Ward 恒等式. 最初的 Ward 恒等式令上式的 $l \rightarrow k$ 得到的, 这时

$$\Gamma^\mu(k, k) = -i \frac{\partial}{\partial k_\mu} S'^{-1}(k). \quad (1.106)$$

通过上一节的讨论, 我们知道 S' 和 Σ 有关系(1.98):

$$S'^{-1}(k) = i\not{k} - m - \Sigma(\not{k})$$

于是 Ward 恒等式(1.106)可以写成

$$\Gamma^\mu(k, k) = \gamma^\mu + i \frac{\partial}{\partial k_\mu} \Sigma(\not{k}). \quad (1.107)$$

但根据重整化条件(1.99), 如果重整化后的外部的电子是在壳上的, 可以得到

$$\bar{u}'(k) \Gamma^\mu(k, k) u(k) = \bar{u}'(k) \gamma^\mu u(k).$$

由此可知, 如果电子的动量没有改变, 对顶点的辐射修正是 0.

1.5.5 规范不变性

这一节, 我们将证明规范不变性带来的一些结果. 考虑振幅

$$M_{\beta\alpha}^{\mu\mu'\cdots}(q, q', \cdots) \equiv \int d^4x d^4x' \cdots e^{-iq \cdot x} e^{-iq' \cdot x'} \cdots (\Psi_\beta^-, T\{J^\mu(x) J^{\mu'}(x') \cdots\} \Psi_\alpha^+). \quad (1.108)$$

对于类似于 QED 的理论, 相互作用项对 A_μ 来说是现行的, 因此上述的振幅描述的是, 在任意的反应过程 $\alpha \rightarrow \beta$ 中, 吸收或释放不在壳的具有动量 q, q', \cdots 的光子, 并除去光子传播子并除去顶点的动量空间的费曼图之和. 上一节的对算子的时间序求导数的技术, 我们得到, 对于动量 q, q', \cdots , 有下面的关系成立

$$q_\mu M^{\mu\mu'\cdots}(q, q', \cdots) = q'_{\mu'} M^{\mu\mu'\cdots}(q, q', \cdots) = \cdots = 0 \quad (1.109)$$

利用上式, 我们可以得到如下结果

定理 1.23 如果我们对光子的传播子 $\Delta_{\mu\nu}(q)$ 以及偏振矢量 $e_\rho(\mathbf{k}, \lambda)$ 作如下变换

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}(q) &\rightarrow \Delta_{\mu\nu} + \alpha_\mu q_\nu + q_\mu \beta_\nu, \\ e_\rho(\mathbf{k}, \lambda) &\rightarrow e_\rho(\mathbf{k}, \lambda) + c k_\rho, \end{aligned}$$

则 S -矩阵元对在上述变换下是不变的. 其中 α_μ, β_ν, c 是任意的量.

只要注意到, 对于一个具体的电磁相互作用理论, 有

$$S_{\beta\alpha} \propto e\Delta M$$

应用式(1.23), 即可证明定理.

式(1.23)还可以用来计算光子的传播子. 经过全图修正的光子的传播子通常被记为 $\Delta'_{\mu\nu}(q)$, 并具有如下形式

$$\Delta'_{\mu\nu}(q) = \Delta_{\mu\nu}(q) + \Delta_{\mu\rho}(q)M^{\rho\sigma}(q)\Delta_{\sigma\nu}(q)$$

$M_{\mu\nu}$ 的定义如同(1.108), 但是夹在真空态中间. 在一个 Lorentz 不变的规范下, 自由光子传播子可以写成

$$\Delta_{\mu\nu}(q) = \frac{\eta_{\mu\nu} - \xi(q^2)q_\mu q_\nu / q^2}{q^2 - i\epsilon}$$

第二章 粒子物理

2.1 夸克模型

我们考虑夸克的 $SU(3)$ 味对称性. 事实上, 这种 $SU(3)$ 的夸克的味对称性只是一种近似的味对称性, 因为实际上夸克有六种味而不是三种. 但是, 考虑色对称性时, $SU(3)$ 是一种严格的对称性. 所以, 这个例子还是有意义的.

假设我们已经知道了在某种有限维的表示下, $\mathfrak{su}(3)$ 的 Lie 代数的生成元的表示矩阵如下:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} & 0 \\ \frac{i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-i}{2} \\ 0 & \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

我们发现, $\mathfrak{su}(3)$ 的下列生成元, 分别生成一个子代数, 且每个子代数与 $\mathfrak{su}(2)$ 同构:

$$\begin{aligned} &\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \\ &\lambda_6, \lambda_7, \sqrt{3}\lambda_8 - \lambda_3, \\ &\lambda_4, \lambda_5, \sqrt{3}\lambda_8 + \lambda_3. \end{aligned}$$

在这个表示下, 如果定义如下的三个向量:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

那么, λ_1 和 $2/\sqrt{3}\lambda_8$ 分别对应的是同位旋第三分量 I_3 以及超荷 Y . 相应地, $\bar{u}, \bar{s}, \bar{t}$ 也是 $\mathfrak{su}(3)$ 的某个表示下的 $\bar{\lambda}_1$ 和 $2/\sqrt{3}\bar{\lambda}_8$ 的本征向量, 但是对应的本征值与 u, s, t 的本征值相反, 假设这个表示存在, 并简单记为 $\overline{\mathfrak{su}}(3)$.

2.1.1 介子

下面我们考虑表示 $\mathfrak{su}(3) \otimes \overline{\mathfrak{su}}(3)$, 为了简便, 下面我们省略张量积记号. 按照张量积表示分解为直和表示的一般思路, 我们尝试构造如下的表示空间的基:

$$I = 1, S = 0$$

$$\begin{aligned} &u\bar{d}, \\ &\frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{d} - u\bar{u}) \\ &d\bar{u}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$I = \frac{1}{2}, S = 1$$

$$\begin{aligned} &u\bar{s}, \\ &d\bar{s}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$I = \frac{1}{2}, S = -1$$

$$\begin{aligned} s\bar{u}, \\ s\bar{d}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$I = 0, S = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{6}}(d\bar{d} + u\bar{u} - 2s\bar{s}), \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(d\bar{d} + u\bar{u} + s\bar{s}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

我们将上述的分解简单记为 $3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$.

赝标量介子

在上述组合中, 我们只考虑内禀的 $SU(3)$ 味对称性, 并未考虑 Poincaré 对称性. 如果考虑两个态的张量积态的空间对称性, 则对于张量积态的每一个角动量和宇称 J^P , 都有上述的九种态. 考虑角动量最低的 0^- , 我们给上述的态按照从上到下的顺序命名:

$$I = 1, S = 0 \quad \pi^+, \pi^0, \pi^-, \text{ 上角标代表电荷数,}$$

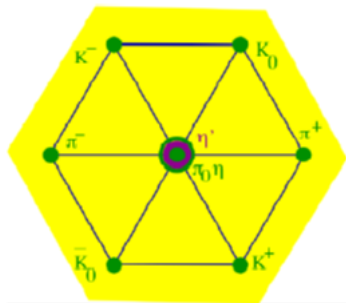
$$I = \frac{1}{2}, S = 1 \quad K^+, K^0, \text{ 上角标代表电荷数,}$$

$$I = \frac{1}{2}, S = -1 \quad K^{-1}, \bar{K}^0, \text{ 上角标代表电荷}$$

$$I = 0, S = 0 \quad \eta_8, \eta_0, \text{ 下角标代表是在表示 } 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \text{ 中的哪个不可约表示中.}$$

如果 $SU(3)$ 的味对称性是严格没有破缺的, 那么 η_0 和 η_8 的两个态应该是严格兼并的, 但事实上, 这两个态是有混合的, 实验上观察到的是它们的混

合态 η 和 η' , 这两个态衰变的产物有所不同. 用 $Y - I_3$ 图来表示, 赝标量介子的九重态如下图所示:



我们看到, 赝标量介子的反粒子与粒子都在同一幅图上, 粒子和反粒子关于原点对称.

赝标量介子是质量最轻的介子, 只能发生味道改变的若衰变或电磁衰变.

矢量介子

我们考虑角动量和宇称 $J^P = 1^-$ 的介子态, 这描述的是在 Poincaré 群作用下的矢量介子. 但是其 $SU(3)$ 群的表示和赝标量介子是完全一样的, 但由于实验上观测到的是矢量介子, 所以我们要给予不同的名称. 与上一小节中的命名顺序相同, 我们有

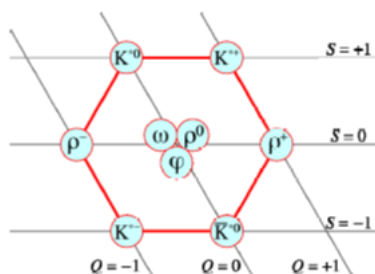
$I = 1, S = 0$ ρ^+, ρ^0, ρ^- , 上角标代表电荷数,

$I = \frac{1}{2}, S = 1$ K^{*+}, K^{*0} , 上角标代表电荷数,

$I = \frac{1}{2}, S = -1$ $K^{*-1}, \overline{K^{*0}}$, 上角标代表电荷

对于 $I = 0, S = 0$ 的两个态, 在实验上观测到的实际上是 $s\bar{s}$ 以及

$1/\sqrt{2}(u\bar{u} + d\bar{d})$, 我们将这两个态记为 φ 和 ω . 矢量介子的八重态在 $Y - I_3$ 图上表示如下图:



同样, 介子和其反粒子关于原点对称.

由于矢量介子的质量远大于赝标量介子, 所以都可以通过强相互作用衰变到赝标量介子, 衰变宽度都可以超过 MeV 量级.

OZI 规则

当初在研究短寿命介子时, 发现 ω 介子和 ϕ 介子的量子数完全相同, 都是 $I^G = 0^-, J^{PC} = 1^{--}$. 既然 ω 和 ϕ 介子的量子数相同, 它们可以衰变的道也完全相同, 则这两个粒子应该有非常类似的强相互作用. 由于 ω 介子比 ϕ 介子质量要小, 所以相应的衰变宽度也应该比较小, 而且有些衰变道应该只有 ϕ 介子才有. 但实验给出的 ω 介子比 ϕ 介子的衰变宽度要宽一倍. 尤其是 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 的衰变道上, ω 的宽度是 7.6MeV, ϕ 的宽度仅为 0.57MeV. 按照夸克模型, ϕ 介子是 $s\bar{s}$ 态, ω 是 u 和 d 的叠加态, ϕ 粒子无法直接提供 u, d 夸克, 所以 ϕ 介子到 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 是被压低的.

Okubo, Zweige 和 Iizuka 三人据此总结出了经验的 OZI 规则: 在强子衰变或反应过程当中, 如果价夸克的费曼图被断成了互不相连的两部分, 则过程的几率被大大压低.

介子的命名规则

对于只由 u, d 组成的介子, 命名强行记忆.

对于含有 s, c, b 组成的介子, 奇异数对应 K , 粲数对应 D , 底数对应 B . 带电荷符号与奇异数 (粲数, 底数) 符号一致.

2.1.2 重子

一个自由的重子态, 在实验上被测得是三个夸克 (不含反夸克) 的张量积态. 如果我们只研究比较轻的重子, 即只由 u, d, s 三种夸克构成的重子, 那么我们只需要考虑 $\mathfrak{su}(3) \otimes \mathfrak{su}(3) \otimes \mathfrak{su}(3)$ 的表示即可. 我们假设, $\mathfrak{su}(3)$ 的基本表示(2.1)就能够很好地描述三味轻夸克.

为了研究 $\mathfrak{su}(3) \otimes \mathfrak{su}(3) \otimes \mathfrak{su}(3)$, 我们先研究 $\mathfrak{su}(3) \otimes \mathfrak{su}(3)$. 按照通常的思路, 我们将九个张量积进行对称化和反对称化, 得到:

对称基

$$\begin{aligned}
 &uu, \\
 &\frac{1}{\sqrt{2}}(ud + du), \\
 &dd, \\
 &\frac{1}{\sqrt{2}}(us + su), \\
 &ss, \\
 &\frac{1}{\sqrt{2}}(ds + sd),
 \end{aligned}$$

反对称基

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du), \\ & \frac{1}{\sqrt{2}}(us - su), \\ & \frac{1}{\sqrt{2}}(ds - sd). \end{aligned}$$

但是我们还发现, $Y = 2/\sqrt{3}$ 作用在反对称基上, 对应的超荷按顺序分别为 $2/3, -1/3, -1/3$, 对应的同位旋第三分量为 $0, 1/2, -1/2$, 因此这组基承载的不是基本表示 (夸克), 而是反夸克对应的表示. 我们将这一现象简单记为 $3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}$.

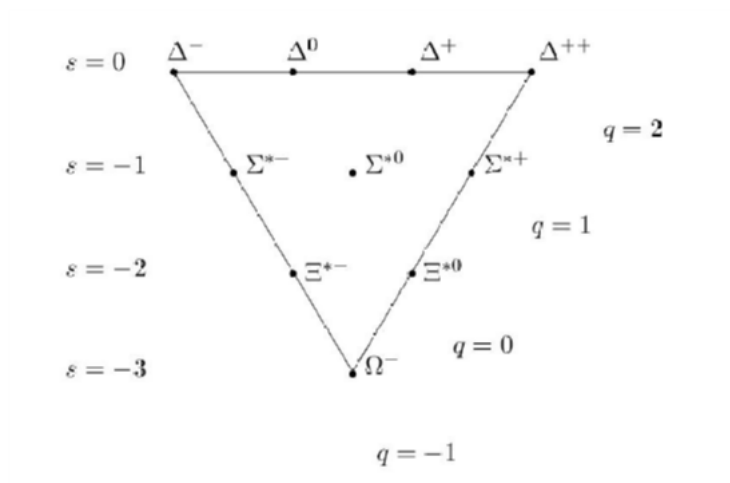
根据线性空间张量积与直和的性质, 有如下的事实

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 3 \otimes (6 \oplus \bar{3}) = (3 \otimes 6) \oplus (3 \otimes \bar{3}) = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

其中, 由 u, d, s 生成的全对称基张成了 10 维子空间, 生成的全反对称基张成了平凡的子空间, 剩余的两个 8 维子空间既不是全对称也不是全反对称的基.

重子十重态

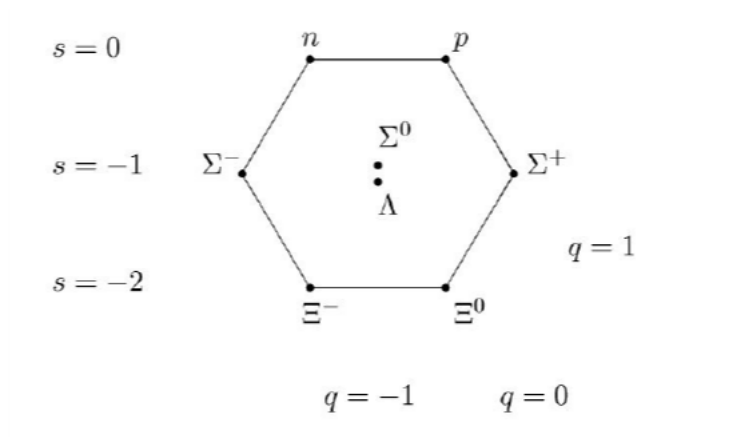
10 个全对称基生成的子空间, 被称为重子十重态, 对于角动量最低的态 $J^P = \frac{3}{2}^-$ 为何不能有角动量 $1/2$ 的十重态, 表示在 $Y - I_3$ 图上如下图所示:



角标代表电荷数. 另外, 我们看到, 反重子和重子不在一张 $Y - I_3$ 图上.

重子八重态

剩下两个 8 维子空间的某一个被称为重子八重态. 重子八重态在味空间是混合对称的. 角动量最低的 $J^P = \frac{1}{2}^-$ 态在 $Y - I_3$ 图上如如下图:



同样, 上角标代表电荷数, 且反重子和重子不在同一张图里.

重子的命名规则

通过观察重子八重态和十重态再 $Y - I_3$ 图上的分布, 我们可以看到, 重子是根据其同位旋来命名的.

对于全部由 u, d 夸克组成的重子, 同位旋可能为 $1/2$ 或者 $3/2$. 将同位旋为 $1/2$ 的命名为核子 N , 同位旋为 $3/2$ 的命名为 Δ .

对于有两个 u, d 夸克组成的重子, 同位旋可能为 0 或者 1 . 将同位旋为 0 的命名为 Λ , 将同位旋为 1 的命名为 Σ .

对于只有一个 u, d 夸克组成的重子, 同位旋为 $1/2$, 将其命名为 Ξ .

对于不是第一代夸克组成的重子, 将之命名为 Ω .

如果夸克组分中同位旋为 0 的夸克不是 s , 要在右下角将夸克组分标出来. 比如, $\Sigma_c^{++}, \Xi_{cc}^{++}, \Omega_{ccc}$.

2.2 弱相互作用

2.2.1 历史遗迹

弱作用的发现

第一个被人类观测到的弱相互作用是广为人知的 β -衰变:

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e. \quad (2.7)$$

当时的人们还不知道有中微子的存在, 正是这个实验的现象使得人们提出了中微子的概念. 人们发现, 电子和反应之后得到的质子并不共线, 这样看似动量不守恒. 在能量守恒和动量守恒的信念的支撑下 (还有其他看起来蹊

跷的实验结果, 比如反应后电子的动量是连续的, 中子的角动量改变只有 0 和 ± 1 等等), 人们预测了一种自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子, 并将之命名为**中微子**.

Fermi 认为, β -衰变是通过弱作用流 $\langle p | J_\mu^{wk} | n \rangle$ 以及 $\langle e\bar{\nu} | J_\mu^{wk} | 0 \rangle$ 相互作用的, 因此整个 β -衰变(2.7)的振幅为:

$$|\mathcal{M}_{fi}| = \langle p | J_\mu^{wk} | n \rangle \langle e\bar{\nu} | J_\mu^{wk} | 0 \rangle.$$

如果定义这种相互作用的耦合常数为 G_F , 那么跃迁速率为

$$\Gamma_{fi} \propto |G_F|^2 |\mathcal{M}_{fi}|^2 \mathcal{D}(E_f)$$

\mathcal{D} 是态密度, $G_F = 1.16637 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$. G_F 竟然是能量的负二次方量纲, 这是一个严重的问题, 这代表了理论不能重整化.

当理论的能量比较低的时候, Fermi 的四粒子相互作用模型能够较好地符合实验. 但当能量改变 q^2 很大时, 全微分截面对 q^2 的依赖关系为

$$\sigma \propto \frac{1}{q^2},$$

酉性质将不再满足.

类比电动力学, 如果我们认为弱相互作用是由一个有质量的矢量玻色子 W 来传播的, 那么振幅的形式为

$$\mathcal{M}_{fi} \propto g_{wk} J_\mu^{wk} \frac{-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / m_W^2}{q^2 - m_W^2} J_\nu^{wk}$$

这可能是比四粒子相互作用模型更加成功的一个模型, 因为它似乎能够保证酉性质不再被破坏.

因为有质量的矢量玻色子 W 有横向偏振, 在高能标时, 如果不引入新的粒子, 比如 Higgs 粒子, 截面的酉性质依旧会被破坏.

对于电动力学来说, $J_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$, 在弱相互作用中, 我们可以将之推广为 $J = \bar{\psi} O \psi$, 实验结果证明, O 只能是矢量或者赝矢量.

下面我们来考虑无质量费米子的螺旋度算子, 并引入投影算符. 首先, 我们定义无质量粒子的**螺旋度** h (helicity):

$$h = \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E}. \quad (2.8)$$

再定义投影算符

$$P_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \pm h). \quad (2.9)$$

根据粒子按 Poicaré 群的不可约表示分类的精神, 无论粒子是否有质量, 自旋为 $\frac{1}{2}$ 的自由粒子都应该遵循 Dirac 方程 (但这里有一个疑问, 如果没有质量的话, 则粒子对应的小群就不同, 那么小群不同的时候是否表示也不相同?):

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi = \not{p} \psi = 0$$

对于 Poicaré 群的 $\frac{1}{2}$ 表示, 其表示空间是四维的复空间. 令

$$\psi = \begin{pmatrix} u_L \\ u_R \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

我们选取如下表示中的 γ 矩阵:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

则无质量的 Dirac 方程可以写为

$$E \begin{pmatrix} 0 & 1-h \\ 1+h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ u_R \end{pmatrix} = 0 \implies hu_L = 1, hu_R = -1.$$

那么, 将算符 $\frac{1}{2}(1+h)$ 作用在整个旋量 ψ 上

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+h & 0 \\ 0 & 1+h \end{pmatrix} \psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+h & 0 \\ 0 & 1+h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ u_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_L \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi$$

我们回忆有质量的情况时, 定义的左右投影算符为

$$P_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5) \quad (2.12)$$

我们发现, 两种情况下定义的投影算符是一致的.

0 质量的中微子是完全的左手中微子, 没有右手中微子.

注 2.1 可能, 两种投影算符是一致的这个结论看起来是较为显然的, 只需将质量 $m \rightarrow 0$ 即可. 但是注意到, 质量为 0 的粒子的小群是 $E(2)$, 即二维的 Euclidean 群; 但是有质量的粒子的小群是 $SO(3)$, 这两个群不是同胚的, 因此不存在一种连续的方法, 将一个变成另一个. 因此, 必须分别处理质量为 0 以及质量非 0 的情况. 类似于有质量的自旋为 1 的粒子和无质量的自旋为 1 的粒子. 如果是这样的话, 那么中微子可能对应的也是一种规范理论. \diamond

宇称不守恒

一堆我不想去看的实验结果.

一般来说, 弱相互作用抽去外腿的顶点算符一般可以写成 $\gamma_\mu(C_V + C_A\gamma_5)/2$. 对于**轻子间的相互作用**, 总是有 $C_V = -C_A$, 这样的话, 顶点就变成了 $C_A\gamma_\mu P_L$, 即只有左手中微子参与相互作用. 但对于**强子之间的弱相互作用**, C_A, C_V 之间没有简单的关系, 实验测量到的 $C_A/C_V \neq -1$. 例如, 对于人们熟知的 β -衰变, $C_A/C_V = -1.26$, 对于 $\Lambda \rightarrow \Sigma^+ + e + \bar{\nu}_e$, $C_A/C_V = +0.34$ 等等.

$SU(2) \times U(1)$ 的规范作用事实上涉及两个独立的规范作用, 因此有两个独立的耦合常数. $SU(2)$ 作用的耦合常数是 g_2 , 对应的规范玻色子是 W^+, Z^0, W^- . $U(1)$ 作用的耦合常数是 g_1 , 对应的规范玻色子是 B^0 . 费米子与 Higgs 粒子与 W^+, Z^0, W^-, B^0 这些粒子耦合时, 对应的耦合常数都是 g_2 或 g_1 .

Cabibbo 混合角

我们考虑涉及核子的**半轻子衰变**. 对于涉及奇异粒子的半轻子衰变 $\Sigma^- \rightarrow n + e + \bar{\nu}_e$, 竟然比不涉及奇异粒子的半轻子衰变 $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ 要压低 20 多倍.

涉及核子的 β -衰变 $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ 的 Fermi 耦合常数, 竟然比不涉及核子的轻子衰变 $\mu \rightarrow e \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ 的 Fermi 耦合常数要小.

这些现象能被 Cabibbo 的理论很好地解释. 他认为, 轻子以味本征态参与弱相互作用, 而夸克在参与弱相互作用之前要先进行味混合, d, s 夸克混合成 d' 夸克, 混合的程度由 Cabibbo 角 θ_C 来描述:

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_C + s \sin \theta_C \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

我们现在就可以解释奇异粒子的半轻子衰变的压低, 以及 Fermi 耦合常数变小的现象了. 对于 $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$, 不涉及 s 夸克, 所以参与的 d 夸克为 $d \cos \theta_C$, Fermi 耦合常数为 $G_F \cos \theta_C$; 而 $\Sigma^- \rightarrow n + e + \bar{\nu}_e$ 有 s 夸克参与, 参与的夸克为 $s \sin \theta_C$, Fermi 耦合常数为 $G_F \sin \theta_C$. 实验给出的 $\sin \theta_C = 0.22$, $\sin^2 \theta_C = 0.05$, 所以半轻子衰变的压低约为 20 倍, 并且 $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ 的 Fermi 耦合常数较纯粹的轻子衰变要小.

GIM 机制

虽然 Cabibbo 的理论能够很好地解释带电流的过程, 但是对中性流却无法做出很好的预言. 按照 Cabibbo 的理论, 考虑 Z^0 与 $u\bar{u}, d\bar{d}$ 的耦合 (下面省略张量积符号), 由于 d 在参与弱作用之前要先混合, 所以有:

$$\begin{aligned} u\bar{u} + d'\bar{d}' &= u\bar{u} + (d \cos \theta_C + s \sin \theta_C)(\bar{d} \cos \theta_C + \bar{s} \sin \theta_C) \\ &= u\bar{u} + d\bar{d} \cos^2 \theta_C + s\bar{s} \sin^2 \theta_C \\ &\quad + (d\bar{s} + s\bar{d}) \cos \theta_C \sin \theta_C \end{aligned}$$

这说明由 Z^0 传递弱相互作用是, 是允许奇异数改变的过程的发生的. 但在实验上, 奇异数改变的过程是被严格限制的.

为了解释这一现象, Glashow, Iliopoulos, Maiani 三人在 1970 年引入了 c 夸克, 并且提出, d, s 的混合是下述形式的

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

这样, 就满足

$$u\bar{u} + d'\bar{d}' + s'\bar{s}' + c\bar{c} = u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s} + c\bar{c}$$

这样, 说明了 Z^0 对轻子和重子的带电弱流是相同的 (极其地不显然).

CKM 矩阵

将两代夸克的混合推广到三代, 我不想写出自己都不知道怎么来的的奇怪矩阵. 等以后用到了再去补罢.

2.2.2 电弱统一理论

自发对称性破缺

定理 2.1 (Goldstone 定理) 如果标量粒子体系的有效势在某个 Lie 群 G 的作用下是不变的, 但体系的真空态仅在 G 的子群 H 的作用下保持不变, 那么体系中存在零质量的标量粒子, 且粒子的数目等于 $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h}$.

证明. 由于 V 在整个 Lie 群 G 下不变, 那么在单位元附近的无穷小变换下也不变. 所以我们考虑无穷小变换, 此时, 单位元附近的一个元素 $U(\theta)$ 可以写

成

$$U(\theta) = \exp(-i\theta^\alpha T^\alpha) \simeq 1 - i\theta^\alpha T^\alpha.$$

则有

$$\begin{aligned}\delta\phi &= -i\theta^\alpha T^\alpha \phi, \\ \delta\phi_i &= -i\theta^\alpha T_{ij}^\alpha \phi_j.\end{aligned}$$

由于有效势 $V(\phi)$ 在 $U(\theta)$ 的作用下不变, 那么有

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \delta\phi_i = -i\theta^\alpha \frac{\partial V}{\partial \phi_i} T_{ij}^\alpha \phi_j = 0.$$

θ^α 是任意的实数, 要想上式成立, 必须有 $N := \dim \mathfrak{g}$ 个方程成立:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} T_{ij}^\alpha \phi_j = 0, \alpha = 1, 2, \dots, N.$$

再将上述 N 个方程对 ϕ 求导 (为何对约束求导之后依然为 0? 如果 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 求导之后是 0, 结果将是荒谬的.), 得到

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_k} T_{ij}^\alpha \phi_j + \frac{\partial V}{\partial \phi_i} T_{ik}^\alpha = 0, \alpha = 1, 2, \dots, N.$$

将上述 N 个方程限制在真空 v 上, 并假设 L^α 是 \mathfrak{h} 的一组基, 那么根据假定, H 中的元素作用在真空态上保持真空态不变, 那么有

$$L_{ij}^\alpha v_j = 0, \alpha = 1, 2, \dots, M$$

其中 $M := \dim \mathfrak{h}$. 且根据真空态的定义, $\frac{\partial V}{\partial \phi}|_{\phi=v} = 0$, 那么方程变为

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_k} \right|_{\phi=v} T_{ij}^\alpha v_j = 0, \alpha = M+1, \dots, N.$$

剩下的 $N - M$ 个 T^α , 在 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 当中, 所以一定有 $T_{ij}^\alpha v_j \neq 0$. 而 $\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_k}$ 是 V 中的二次项系数, 即为质量的平方. 又因为 $T^\alpha, \alpha = M+1, \dots, N$ 是 \mathfrak{g} 的基, 所以相互独立. 因此我们得到了 $N - M$ 个相互独立的质量为 0 的态. 令 $K^\beta = T^\alpha, \alpha = M+1, \dots, N$.

下面, 为了具体起见, 我们将场 ϕ 进行参数化. 由于 v 和 $K^\beta v$ 是线性独立的, 所以我们将空间分成 $\text{span}\{K^\beta v\}, \beta = M+1, \dots, N$ 以及其补空间的直和. 令 $\xi \in \text{span}\{K^\beta v\}, \beta = M+1, \dots, N$, η 在 $\text{span}\{K^\beta v\}, \beta = M+1, \dots, N$ 的补空间中, 接下来, 我们可以将 ϕ 微分同胚地表示为 (这里无法说服自己)

$$\phi = \exp\left(\frac{-i \sum_\beta K^\beta \xi}{|v|}\right)(v + \eta) \quad (2.14)$$

对于一般的标量场理论, $V = V(\phi^\dagger \phi)$, 利用(2.14), 发现

$$\phi^\dagger \phi = (v^\dagger + \eta^\dagger)(v + \eta).$$

没有 ξ 的质量项, 所以, 我们得到了 $N - M$ 个无质量的标量场 $K^\beta \xi, \beta = M+1, \dots, N$. \square

我们将参数化之后的场带入体系的 \mathcal{L} , 此时, 用 ξ, η 表示的场不再具有群 G 的对称性, 但 ξ, η 的真空态却是 0, 因为 ϕ 的真空态是 v . 因此, 真空态在 G 的作用下是不变的, 但 Lagrangian 的对称性破缺了.

上述的使用有效势求导的过程是 Goldstone 定理的经典证明, 但证明中有许多奇怪的地方, 比如对有效势 $V(\phi)$ 对 ϕ 求导之后再对方程两边求导依然为 0, 下面我们来看另一种方法, 可以绕开有效势.

Goldstone 定理的另一种证明. 由假设, 由于体系在整体的规范变换

$$U = e^{i\theta_a t^a}$$

下不变, 所以在无穷小变换

$$\phi_n \rightarrow \phi_n(x) + i\theta_a t_{nm}^a \phi_m(x)$$

下也不变.

根据 Noether 定理, 以及注 1.1, 我们可以得到一些守恒流

$$J^{a\mu} = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_n)} t_{nm}^a \phi_m$$

以及相应的守恒荷

$$Q^a = \int d^3x J^{a0}(x) \quad (2.15)$$

如果假定系统是可以正则量子化的, 根据以上两式, 以及 $\pi^n = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_n)}$, 我们可以得到 Q^a 与场 ϕ_n 的对易关系:

$$[Q^a, \phi_n] = -t_{nm}^a \phi_m. \quad (2.16)$$

更进一步, 如果假定我们已经知道了 Lie 代数的对易关系:

$$[t^a, t^b] = i f_c^{ab} t^c$$

, 容易验证

$$[Q^a, Q^b] = i f_c^{ab} Q^c,$$

即, **守恒量构成了对称群的 Lie 代数的一个表示.**

下面, 我们考虑守恒流 $(J^a)^\lambda$ 与 ϕ_n 对易子的真空平均:

$$\langle [(J^a)^\lambda, \phi_n] \rangle_{\text{VAC}} = (2\pi)^{-3} \int d^4p [\rho_n^{a\lambda}(p) e^{ip \cdot (y-x)} - \tilde{\rho}_n^{a\lambda}(p) e^{ip \cdot (x-y)}]$$

我们用到了真空平均的平移不变性, 且在这里,

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-3} i \rho_n^{a\lambda}(p) &= \sum_N \langle \text{VAC} | J^{a\lambda}(0) | N \rangle \langle N | \phi_n(0) | \text{VAC} \rangle \delta^4(p - p_N), \\ (2\pi)^{-3} i \tilde{\rho}_n^{a\lambda}(p) &= \sum_N \langle \text{VAC} | \phi_n(0) | N \rangle \langle N | J^{a\lambda}(0) | \text{VAC} \rangle \delta^4(p - p_N). \end{aligned} \quad (2.17)$$

如果单位分解中有连续的粒子谱, 将求和换成积分, 实质是一样的, 上面的求和只是形式上的写法. 如果我们选择 $J^{a\lambda}, \phi_n$ 均为 Hermitian 的算符, 那么有

$$\rho_n^{a\lambda}(p) = -(\tilde{\rho}_n^{a\lambda}(p))^*$$

根据 Poicaré 不变性, 可以得到 $\rho_n^{a\lambda}$ 一定具有如下形式:

$$\begin{aligned} \rho_n^{a\lambda}(p) &= p^\lambda \rho_n^a(-p^2) \theta(p^0), \\ \tilde{\rho}_n^{a\lambda}(p) &= p^\lambda \tilde{\rho}_n^a(-p^2) \theta(p^0). \end{aligned}$$

那么,

$$\langle [(J^a)^\lambda, \phi_n] \rangle_{\text{VAC}} = (2\pi)^{-3} \frac{\partial}{\partial y^\lambda} \int d\mu^2 d^4 p [\rho_n^a(\mu^2) e^{ip \cdot (y-x)} + \tilde{\rho}_n^a(\mu^2) e^{ip \cdot (x-y)}] \theta(p^0) \delta(\mu^2 + p^2).$$

然而我们发现

$$\begin{aligned} \Delta_+(z; \mu^2) &:= (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3 p}{2E_p} e^{ip \cdot z} \\ &= (2\pi)^{-3} \int d^4 p \delta(\mu^2 + p^2) \theta(p^0) e^{ip \cdot z} \end{aligned}$$

所以

$$\langle [(J^a)^\lambda, \phi_n] \rangle_{\text{VAC}} = (2\pi)^{-3} \frac{\partial}{\partial y^\lambda} \int d\mu^2 [\rho_n^a(\mu^2) \Delta_+(y-x; \mu^2) + \tilde{\rho}_n^a(\mu^2) \Delta_+(x-y; \mu^2)].$$

为了化简上式, 我们令 $y-x$ 为类空间隔, 因为此时 $\Delta_+(y-x; \mu^2) = \Delta_+(x-y; \mu^2)$, 且由于因果性, 上式左端为 0. 但 $\Delta_+(y-x; \mu^2)$ 在类空间隔不为 0, 所以一定有

$$\rho_n^a = -\tilde{\rho}_n^a$$

所以 $\rho, \tilde{\rho}$ 都是实的. 于是

$$\langle [(J^a)^\lambda, \phi_n] \rangle_{\text{VAC}} = (2\pi)^{-3} \frac{\partial}{\partial y^\lambda} \int d\mu^2 \rho_n^a(\mu^2) (\Delta_+(y-x; \mu^2) - \Delta_+(x-y; \mu^2)). \quad (2.18)$$

在两边再对 y_λ 求偏导数, 左边因为流守恒得到 0, 右边带入 Klein-Gordon 方程:

$$(\square - \mu^2) \Delta_+(y-x; \mu^2) = (\square - \mu^2) \Delta_+(x-y; \mu^2) = 0$$

可以得到

$$\int d\mu^2 \mu^2 \rho_n^a(\mu^2) (\Delta_+(y-x; \mu^2) - \Delta_+(x-y; \mu^2)) = 0.$$

在 $x-y$ 类光或者类时时, Δ_+ 不是 $x-y$ 的偶函数, 因此只能有

$$\mu^2 \rho_n^a(\mu^2) = 0.$$

在对称性未被破缺时, 我们会有结论 $\rho_n^a(\mu^2) = 0$ 对所有的 μ^2 都成立. 但是, 当对称性破缺时, 情况有所不同. 在(2.18)两端取 $\lambda = 0$ 以及 $x^0 = y^0$, 并利用(2.16)以及(2.15), 可以得到

$$-t_{nm}^a \langle \phi_m \rangle_{\text{VAC}} = i \int d\mu^2 \rho_n^a(\mu^2).$$

当对称性不再保持场的真空平均不变时, 上式一定不为 0. 从而有

$$\rho_n^a(\mu^2) = i\delta(\mu^2)t_{nm}^a \langle \phi_m \rangle_{\text{VAC}}.$$

我们发现质量谱中有一个 $\mu^2 = 0$ 处的单独奇点. 根据(2.17), 一定是一个单粒子态贡献的这个奇点. 否则, 如果是多粒子束缚态的话, 贡献的将是一个分支. 而且, 由于 ϕ_n 的自旋为 0, 所以 N 只有自旋为 0 才能使得概率幅不为 0. 所以, 我们看到, 在真空态的对称性不再是整个系统的对称性时, 将会产生质量为 0 的玻色子. 这就是我们要找的 Goldstone 玻色子. \square

自发的对称性破缺是与简并的真空态相联系的. 考虑作用量的对称变换, 这对称变换是线性地作用在一组标量场 $\phi_n(x)$ 上的:

$$\phi_n(x) \rightarrow \phi'_n(x) = \sum_m L_{nm} \phi_m(x),$$

并且路径积分的测度已经给定. 我们已经知道, 有效作用量具有相同的对称性:

$$\Gamma[\phi] = \Gamma[L\phi].$$

且 $\phi(x)$ 的真空期望值, 一定会取在 $-\Gamma[\phi]$ 的极小值处, 比如说 $\phi(x) = \bar{\phi}$, $\bar{\phi}$ 是一个常数. 但是, 如果 $L\bar{\phi} \neq \bar{\phi}$, 那么真空态将不是唯一的, $-\Gamma[\phi]$ 将在 $L\bar{\phi}$ 这一点与 $\bar{\phi}$ 这一点具有相同的值.

到现在为止, 我们还不能确定在 $L\bar{\phi} \neq \bar{\phi}$ 的情况下, 对称性是破缺的, 因为我们无法排除真正的真空态是我们得到的简并真空态的线性组合.

BEH 机制

到了 1964 年, 人们相信必须用 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 来描写电磁相互作用和弱相互作用.

根据规范不变性和可重整性的要求, 不能向 **Lagrangian** 中直接放入规范玻色子的质量, 与 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 相关的四个规范玻色子无法获得质量, 因此是零质量的. 但弱作用是短程的相互作用, W^\pm, Z^0 一定具有很重的质量. 对称性的自发破缺可以使规范粒子获得质量, 但会产生相应的零质量的 **Goldstone** 粒子, 但在实验上从未发现这种粒子, 要从理论中除去.

1964 年, Englert, Brout, Higgs 三人提出了通过规范对称性自发破缺使得规范粒子获得质量的机制. 将标量场和规范场放到一起考虑, 对称性破缺产生的零质量 **Goldstone** 粒子可以被规范粒子吃掉, 变成其纵向分量, 使得规范粒子获得质量. 这种机制被称为 **BEH** 机制.

第三章 范畴论初步

本章主要参考 [8].

3.1 基本概念

定义 3.1 一个范畴 \mathcal{C} 由如下内容组成:

- C_1 (对象): 一些对象 A, B, C, \dots . 由对象构成的类记为 $\text{ob}\mathcal{C}$
- C_2 (态射): 对象任意两个对象之间的态射构成的集合 $\text{Hom}(A, B), \forall A, B \in \text{ob}\mathcal{C}$.
- C_3 (态射之间的合成法则): 对 $\forall A, B, C \in \text{ob}\mathcal{C}, \sigma \in \text{Hom}(A, B), \tau \in \text{Hom}(B, C)$, 存在唯一的 $\phi \in \text{Hom}(A, C)$ 与 σ, τ 对应, 称 ϕ 为 σ 与 τ 的乘积或合成, 记为 $\phi = \tau\sigma$.

并且, 态射服从如下三条公理:

- A_1 (不相交性): 除非 $A = A'$ 且 $B = B'$, 否则

$$\text{Hom}(A, B) \cap \text{Hom}(A', B') = \emptyset$$

- A_2 (结合性): 对 $\forall A, B, C, D \in \text{ob}\mathcal{C}$, 若 $\sigma \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), \tau \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C), \phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$, 则有

$$\phi(\tau\sigma) = (\phi\tau)\sigma$$

- A_3 (存在恒等态射): 对 $\forall A \in \text{ob}\mathcal{C}$, 都 $\exists 1_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$, 使得对 $\forall B, C \in \text{ob}\mathcal{C}$ 都有

$$\sigma 1_A = \sigma, 1_B \tau = \tau.$$

其中, $\sigma \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), \tau \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$.

◇

注 3.1 \mathcal{C}_1 告诉我们, $\text{ob}\mathcal{C}$ 只是一个类, 而不一定是一个集合. $\text{ob}\mathcal{C}$ 不必满足集合论的公理.

◇

设 \mathcal{C}, \mathcal{D} 是范畴, 若 $\text{ob}\mathcal{C} \subset \text{ob}\mathcal{D}$, 且

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \subset \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B), \forall A, B \in \text{ob}\mathcal{C},$$

则称 \mathcal{C} 是 \mathcal{D} 的**子范畴**. 更进一步, 如果有 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B)$, 则称 \mathcal{C} 是 \mathcal{D} 的**全子范畴**.

如果一个范畴 \mathcal{C} 的所有态射构成一个集合, 则称 \mathcal{C} 是一个**小范畴**. 如果范畴 \mathcal{C} 中的任何两个对象之间的所有态射构成一个集合, 则称 \mathcal{C} 是一个**局部小范畴**.

例 3.1 (i.) 对于一个含么环 R , Mat_R 是一个范畴, 对象是正整数. $\text{Hom}(n, m)$ 定义为环 R 上的 $m \times n$ 矩阵组成的集合, 态射之间的复合定义为矩阵的乘法.

(ii.) 一个群 G 事实定义了一个范畴. 这个范畴只有一个对象, 群中的元素是这个对象的自同构.

- (iii.) 偏序集 (P, \leq) 定义了一个范畴. 这范畴中的对象就是偏序集中的元素, 两个对象 x, y 之间存在一个态射 $x \rightarrow y$ 当且仅当 $x \leq y$. 偏序的传递性保证了态射的合成法则, 偏序的自反性保证了恒等态射的存在性.
- (iv.) 是只有一个对象和一个同构态射的范畴, $\mathbf{2}$ 是只有两个对象和一个非同构态射的范畴, 更一般地, ω 是由图

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots$$

自由生成的范畴, 即任何非恒等的态射都可以唯一表示成上图中态射的复合.

◇

3.1.1 对偶性

定义 3.2 (反范畴) 一个范畴 \mathbf{C} 的反范畴.

◇

例 3.2 (i.) \mathbf{Mat}_R^{op} 是 \mathbf{Mat}_R 的反范畴. \mathbf{Mat}_R^{op} 中的对象依然是正整数, 但是 $\text{Hom}(m, n)$ 定义为环 R 上的 $n \times m$ 矩阵组成的集合, 如果 \mathbf{Mat}_R 中有 $A : m \rightarrow n$, 那 \mathbf{Mat}_R^{op} 中对应的态射就是 $A^T : n \rightarrow m$.

- (ii.) 偏序集 (P, \leq) 的反范畴的对象依然是偏序集中的元素. 但两个对象 x, y 之间存在一个态射当且仅当 $y \leq x$.

◇

为了解释范畴论中的对偶性原理, 我们考虑下面的结果. 下面的结果将范畴中刻画了范畴中的同构态射的性质.

引理 3.1 下列陈述是等价的:

(i.) $f : x \rightarrow y$ 是范畴 \mathbf{C} 中的一个同构.

(ii.) 对任一对象 $c \in \mathbf{C}$, f 的后置复合定义了一个双射

$$f_* : \text{Hom}(c, x) \rightarrow \text{Hom}(c, y).$$

(iii.) 对任一对象 $c \in \mathbf{C}$, f 的前置复合定义了一个双射

$$f^* : \text{Hom}(y, c) \rightarrow \text{Hom}(x, c).$$

证明. (i.) \iff (ii.) 的证明就是在重复定义, 我们假定已经证明了 (i.) \iff (ii.). 我们用对偶性来推出 (i.) \iff (iii.)

我们已经证明了 (i.) \iff (ii.) 的等价性是对所有范畴成立的, 特别地, 对范畴 \mathbf{C} 的反范畴 \mathbf{C}^{op} 也是成立的. 所以 \mathbf{C}^{op} 中的一个态射 $f^{op} : y \rightarrow x$ 是一个同构当且仅当

$$f_*^{op} : \text{Hom}_{\mathbf{C}^{op}}(c, y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}^{op}}(c, x)$$

是一个双射, 对所有的 $c \in \mathbf{C}^{op}$ 成立. 根据反范畴的定义, 上面的陈述等价于

$$f^* : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(y, c) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, c)$$

是一个双射对所有的 $c \in \mathbf{C}$ 成立, 这正是 (iii.) 的陈述. 这就证明了 (i.) \iff (iii.). \square

在范畴论的定义中, 也会遇到对偶性, 比如:

定义 3.3 一个范畴中的态射 $f : x \rightarrow y$ 被称为是**单态射 (monomorphism)**, 若对任何两个态射 $h, k : w \rightarrow x$, $fh = fk$ 能推出 $h = k$; 被称为是**满态射 (epimorphism)**, 若对任何两个态射 $h, k : y \rightarrow z$, $hf = kf$ 能推出 $h = k$. \diamond

因此 \mathbf{C} 中的一个单态射或满态射, 分别对应 \mathbf{C}^{op} 中的一个满态射或单态射. 满态射通常被记为, 单态射通常被记为.

我们可以用后置复合和前置复合的语言来重新叙述单态射和满态射的定义:

命题 3.2 一个范畴 \mathbf{C} 中的态射 $f: x \rightarrow y$ 是:

- (i.) 单态射当且仅当对任何对象 $c \in \mathbf{C}$, f 的后置复合 (*post-composition*) 定义了一个单射 $f_*: \text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, x) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, y)$;
- (ii.) 满态射当且仅当对任何对象 $c \in \mathbf{C}$, f 的前置复合 (*pre-composition*) 定义了一个单射 $f^*: \text{Hom}_{\mathbf{C}}(y, c) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, c)$.

例 3.3 考虑态射 $s: x \rightarrow y$ 和 $r: y \rightarrow x$ 使得 $rs = 1_x$. s 被称为 r 的**截面**或**左逆**, r 被称为 s 的**收缩**或**右逆**. 对于具有这样关系的对象 x, y , 对象 x 被称为对象 y 的收缩.

根据命题3.2, s 是一个单态射; 对偶地, r 是一个满态射. 在这种情况下, s 被称为**分裂单态射 (split monomorphism)**, r 被称为**分裂满态射 (split monomorphism)**. \diamond

例 3.4 根据前一个例子, 一个同构同时是单且满的, 但同时是单且满的态射未必是一个同构. 例如在含么环范畴 **Ring** 中的嵌入 $i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ 是一个单态射, 也是一个满态射 (从根本上来说, 这是一个含么环的分式化的唯一性的体现), 但 i 却不是一个环同构. 事实上, 在 **Ring** 中, 从 \mathbb{Q} 到 \mathbb{Z} 没有非平凡的环同态.

但是, 通过很简单的验证 (只需要在纸上画出交换图来), 如果一个单态射同时是一个分裂满态射, 则这个态射是同构态射. 对偶地, 如果一个满态射同时是一个分裂单态射, 这个态射也是同构态射. \diamond

单态射和满态射是对偶的, 它们的范畴论性质也是对偶的, 这体现在如下的引理中:

引理 3.3 (i.) 若 $f : x \rightarrow y$ 和 $g : y \rightarrow z$ 是单态射, 那么 $gf : x \rightarrow z$ 也是单态射;

(ii.) 若 $f : x \rightarrow y$ 和 $g : y \rightarrow z$ 使得 gf 是单态射, 那么 f 是单态射.

对偶地,

(i.) 若 $f : x \rightarrow y$ 和 $g : y \rightarrow z$ 是满态射, 那么 $gf : x \rightarrow z$ 也是满态射;

(ii.) 若 $f : x \rightarrow y$ 和 $g : y \rightarrow z$ 使得 gf 是满态射, 那么 g 是满态射.

3.1.2 函子性

定义 3.4 函子保持态射. ◇

定义 3.5 一个从 \mathbf{C} 到 \mathbf{D} 的反变函子 F , 是一个函子 $F : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{D}$. ◇

例 3.5 (反变函子的例子) (i.) 对偶函子 $(-)^* : \mathbf{Vect}_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{T}}$ 将一个线性空间 V 映到对偶空间 $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{T})$, 将线性映射 $\phi : V \rightarrow W$ 映到线性映射 $\phi^* : W^* \rightarrow V^*$

(ii.) 函子 $O : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Poset}$ 将一个拓扑空间 X 映到 X 的开子集族 $O(X)$, 映射 $f : X \rightarrow Y$ 被映到 $f^{-1} : O(Y) \rightarrow O(X)$: f^{-1} 将一个开集 $U \subset Y$ 映到开集 $f^{-1}(U) \subset X$. 这就是**连续性的定义**. 类似地, 另一个反变函子 $C : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Poset}$ 将拓扑空间的范畴映到拓扑空间的闭集族的范畴.

(iii.) 存在一个函子 $\text{Spec} : \mathbf{CRing}^{op} \rightarrow \mathbf{Top}$, 将一个交换环 R 映到它的素谱 $\text{Spec}(R)$, 素谱 $\text{Spec}(R)$ 是 R 的所有素理想组成的集合, 并赋予 **Zariski 拓扑**. Zariski 拓扑中 I 的一个闭集 $V_I \subset \text{Spec}(R)$ 是由任何包含 I 的素理想组成的集合. 对于任何一个环同态 $\phi R \rightarrow S$ 以及素理想 $\mathfrak{p} \in S$, $\phi^{-1}(\mathfrak{p}) \subset R$ 也是 R 中的素理想, 所以函子 Spec 将 ϕ 映到 $\phi^{-1} : \text{Spec}(S) \rightarrow \text{Spec}(R)$. 交换环之间的同态在 Zariski 拓扑下是连续的.

- (iv.) 对于任何一般的小范畴 \mathbf{C} , 一个反变函子 $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ 被称为 \mathbf{C} 上的**原层**. 一个典型的例子是函子 $O(X) \rightarrow \mathbf{Set}$, $O(X)$ 是拓扑空间 X 的开集族. 对于开集 $U \in X$, 函子将 U 映到所有定义在 U 上的连续实函数组成的集合. 开集之间的嵌入被函子映到函数的限制.

◇

例 3.6 令 G 为一个群. 一个函子 $X : \mathcal{B}G \rightarrow \mathbf{C}$ 确定了一个对象 $X \in \mathbf{C}$, 以及对象的自同构 $g_* : X \rightarrow X$. 一个函子 $X : \mathbf{B}G \rightarrow \mathbf{C}$ 定义了一个 G 的作用. 当 $\mathbf{C} = \mathbf{Set}$ 时, X 被称为一个 G -集合. 当 $\mathbf{C} = \mathbf{Vect}$, X 被称为一个 G -表示, 当 $\mathbf{C} = \mathbf{Top}$, X 被称为 G -空间.

◇

被函子 $\mathbf{B}G \rightarrow \mathbf{C}$ 确定的作用有时被称为一个**左作用**. 一个反变函子 $\mathbf{B}G^{op} \rightarrow \mathbf{C}$ 被称为一个**右作用**, 但是这时反变函子将 $g \in G$ 映到 $g^* : X \rightarrow X$, 满足规则 $(hg)^* = g^*h^*$.

从函子的定义可知, 函子一定是保持同构态射的. 同样, 一个函子一定保持分裂单态射或者分裂满态射, 却未必保持单态射或满态射.

定义 3.6 若 \mathbf{C} 是一个局部小范畴, 那么对任何 \mathbf{C} 中的对象 c , 我们都能定义一对**被 c 表示的** 函子与反变函子: $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -)$ 与 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, c)$.

◇

定义 3.7 范畴之间的同构.

◇

例 3.7 令 E/F 为一个 **Galois 扩张**, 即 F 是 E 的一个子域且 F 在 E 中的指标 $[E : F]$ 是有限的, 且 E 的所有保持 F 不变的自同构群 $\text{Aut}(E/F)$ 的阶数满足 $|\text{Aut}(E/F)| = [E : F]$. 此时 $G = \text{Aut}(E/F)$ 被称为 Galois 扩张的 **Galois 群**.

令 \mathbf{Field}_F^E 为所有满足 $F \subset K \subset E$ 中间域 K 构成的范畴, 对象之间的态射 $K \rightarrow L$ 是一个域同态, 且限制在 F 上是一个恒等态射. 注意到, 作为范畴 \mathbf{Field}_F^E 中的对象, E 在范畴 \mathbf{Field}_F^E 中所有到自身的同构态射构成的群就是

Galois 群 $\text{Aut}(E/F)$.

我们定义一个反变函子 $\Phi : \mathbf{O}(G) \rightarrow \mathbf{Field}_F^E$, 将 G 的子群 H 映到在 H 的作用下不变的 E 的子域. 如果 G -映射 $\alpha : G/H \rightarrow G/K$ 具有 $\alpha(H) = \gamma K$ 的形式. 如果将 \mathbf{Field}_F^E 记为 X , 那么 $\Phi(\alpha)$ 将 X^K 中的元素 x 映到 X^H 中的元素 γx . **Galois 理论基本定理 (Fundamental Theorem of Galois Theory)** 陈述了 Φ 实际上是范畴之间的等价 $\mathbf{O}(G) \cong \mathbf{Field}_F^E$. \diamond

范畴之间等价的定义有些不自然. 为了看到这一点, 我们先引入一些概念. 一个**部分函数 (partial function)** $f : X \rightarrow Y$ 是一个定义在 X 的 (可能为空) 的子集 $X' \subset X$ 上的函数, X' 被称为 f 的定义域, 两个部分函数 $f : X \rightarrow Y$ 和 $g : Y \rightarrow Z$ 的复合也是一个部分函数, 相应的定义域是 g 的定义域在 f 下的原像, 与 f 的定义域的交.

考虑范畴 \mathbf{Set}^∂ , 范畴中的对象是集合, 对象之间的态射是定义在集合上的部分函数. 考虑函子 $(-)_+ : \mathbf{Set}^\partial \rightarrow \mathbf{Set}_*$, 这函子将集合 X 映到加点集合 X_+ , 将部分函数 $f : X \rightarrow Y$ 映到加点集合之间的函数 $f_+ : X_+ \rightarrow Y_+$, f_+ 在 f 的定义域上与 f 的定义相同, 将 f 的定义域外的每一点映到 Y_+ 后添加的那一点. 逆函子 $U : \mathbf{Set}_* \rightarrow \mathbf{Set}^\partial$ 将加点集合 (X, x) 映回 $X - \{x\}$, 并将一个函数 $f_+ : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ 限制为 $X - \{x\} \rightarrow Y - \{y\}$ 上具有可能最大定义域的部分函数.

通过上述定义, 我们发现复合函子 $U(-)_+$ 是范畴 \mathbf{Set}^∂ 上的恒等函子. 但另一方面 $(-U)_+ : \mathbf{Set}_* \rightarrow \mathbf{Set}_*$ 却未必将 (X, x) 映回 (X, x) , $(-U)_+$ 只能保证将 (X, x) 映到与 (X, x) 一一对应的集合. 没有集合论上的构造能够保证一个 $(-)_+$ 函子的真正逆. 因此 \mathbf{Set}^∂ 与 \mathbf{Set}_* , 并不是严格意义上的同构.

为了回答两个范畴在何种程度上能够看成是相同的, 我们必须放宽两个范畴的等价的定义. 我们之间将范畴 \mathbf{C} 或 \mathbf{D} 看成范畴 \mathbf{Cat} 或范畴 \mathbf{CAT} 中的对象, 并将函子 $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ 与 $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ 视为 \mathbf{Cat} 或范畴 \mathbf{CAT} 中的态射. 但我们忽略了一点, 即 $\mathbf{Hom}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$ 与 $\mathbf{Hom}(\mathbf{D}, \mathbf{D})$ 未必只是集合, 它们可

能具有更精细的结构. 更一般地 $\text{Hom}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ 是一个范畴, 这就需要我们引入**自然变换**的概念.

3.1.3 自然性

我们已经熟知在域 k 上的线性空间 V 与其对偶空间 $V^* = \text{Hom}(V, k)$ 是线性同构的. 如果 V 是有限维的, 我们立刻可以得到 $V^{**} \cong V^* \cong V$. 这实际上就蕴含了“自然变换”的思想.

定义 3.8 (自然变换) 给定两个范畴 \mathbf{C} 和 \mathbf{D} , 以及两个函子 $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, 一个**自然变换** $\alpha : F \rightarrow G$ 定义如下: 若对于每个对象 $c \in \mathbf{C}$, 都存在一个 \mathbf{D} 中的态射 $\alpha_c : Fc \rightarrow Gc$, 使得对任意的 \mathbf{C} 中的态射 $f : c \rightarrow c'$, 都有下面的图表交换, 则称所有的 α_c 组成的类为自然变换. 单个的 α_c 被称为自然变换的一个**分量**. \diamond

一个**自然同构**是指一个自然变换 $\alpha : F \rightarrow G$, 满足 α 的每个分量 α_c 都是一个同构. 自然同构在交换图表中经常记为 $\alpha : F \cong G$.

例 3.8 (i.) 存在一个自然变换 $\eta : 1_{\text{Set}} \rightarrow P$, 1_{Set} 是 Set 上的恒等函子, P 是共变幂集函子. 对于集合范畴中的任何一个 A , η 的分量 $\eta_A : A \rightarrow P(A)$ 是将 $a \in A$ 映到 $\{a\} \in P(A)$ 的函数.

(ii.) 若 G 是一个群, 函子 $X : \mathbf{BG} \rightarrow \mathbf{C}$ 就是 G 左作用于 \mathbf{C} 中的对象 X 上. 如果一对函子 $X, Y : \mathbf{BG} \rightarrow \mathbf{C}$ 之间存在自然变换 $\alpha : X \rightarrow Y$, 那么 α 只有一个分量, 这分量是一个 G -映射, 也记为 α . 即, 对任何的 $g \in G$, 下列图表交换.

(iii.) 构造一个群的反群事实上定义了一个群范畴的共变函子 $(-)^{op} : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}$. 函子 $(-)^{op}$ 将群同态 $\phi : G \rightarrow H$ 映到了群同态 $\phi^{op} : G^{op} \rightarrow H^{op}$, $\phi^{op} = \phi$. 我们定义自然变换 η 的分量 $\eta_G : G \rightarrow G^{op}$, $\eta_G(g) = g^{-1}$, 可以验证下面的图表对于每个 ϕ 都是交换的. 我们发现, 映射 $g \mapsto g^{-1}$ 并没

有定义一个 G 的自同构, 而是定义了一个 $\mathbf{B}G \rightarrow \mathbf{B}G^{op}$ 的反变函子, 或者是定义了两个共变函子之间的自然同构.

- (iv.) 定义从 \mathbf{Vect}_k 到自身的函子 $V \mapsto V \otimes V$. 存在一个从恒等函子到该函子的自然变换, 但这自然变换是零同态. 事实上, 这也是唯一的自然变换: 不存在与基无关的定义线性映射 $V \rightarrow V \otimes V$ 的方法.

◇

另一个熟悉的但不自然的同构出现在有限生成 Abel 群的分类当中. 将有限生成的 Abel 群范畴记为 \mathbf{Ab}_{fg} . 令 $T(A)$ 为 Abel 群的**挠子群**. 有限生成 Abel 群的结构定理告诉我们, 任何一个 Abel 群都同构于其无挠部分和挠子群的直和, 即 $A \cong T(A) \oplus (A/T(A))$. 然而, 这同构不是自然的, 我们将在下面证明.

命题 3.4 同构 $A \cong T(A) \oplus (A/T(A))$ 在有限生成的 Abel 群范畴 \mathbf{Ab}_{fg} 中不是自然的.

证明. 略.

□

例 3.9 考虑局部小范畴 \mathbf{C} 中的态射 $f : w \rightarrow x$ 以及 $h : y \rightarrow z$. h 的后置复合与 f 的前置复合导出了态射集之间的映射.

将 f^* 视为 f 在函子 $\mathbf{Hom}(-, y)$ 以及函子 $\mathbf{Hom}(-, z)$ 下的像, 那么我们得到了这两个函子之间的一个自然变换 $h_* : \mathbf{Hom}(-, y) \rightarrow \mathbf{Hom}(-, z)$, h_* 的在每个终点为 y 的态射集上的分量是将态射后置复合 $h : y \rightarrow z$. 同样地, 我们将 h_* 视为 h 在函子 $\mathbf{Hom}(x, -)$ 以及函子 $\mathbf{Hom}(w, -)$ 下的像, 那么这两个函子之间存在一个自然变换 $f^* : \mathbf{Hom}(x, -) \rightarrow \mathbf{Hom}(w, -)$, f^* 在每个起点为 x 的态射集上的分量是将态射前置复合 $f : w \rightarrow x$.

◇

3.1.4 范畴的等价

定义 3.9 范畴 \mathbf{C} 与 \mathbf{D} 之间的一个等价, 指函子 $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ 以及函子 $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$, 以及两个自然变换 $\eta : 1_{\mathbf{C}} \cong GF, \epsilon : FG \cong 1_{\mathbf{D}}$. 如果范畴 \mathbf{C} 与 \mathbf{D} 之间存在一个等价, 则称范畴 \mathbf{C} 与 \mathbf{D} 是等价的, 记为 $\mathbf{C} \cong \mathbf{D}$. \diamond

引理 3.5 范畴之间的等价是一个等价关系.

考虑范畴 \mathbf{Mat}_k , 对象是正整数, 对象之间的态射是 k -值得矩阵. 以及 \mathbf{Vect}_k^f , 对象是有限维的 k 上的向量空间, \mathbf{Vect}_k^b , 对象是选定一组基的有限维向量空间, 对象之间的态射是任意的线性映射 (不必将基映到基). 这些范畴被下面的函子联系起来:

其中 $U : \mathbf{Vect}_k^b \rightarrow \mathbf{Vect}_k^f$ 是忽略选择的一组基的函子. $k^- : \mathbf{Mat}_k \rightarrow \mathbf{Vect}_k^b$ 将正整数 n 映到向量空间 k^n , 将 $m \times n$ 矩阵映到在选定基下的表示为该矩阵的线性映射 $k^n \rightarrow k^m$. 函子 H 将线性空间映到其维数, 将线性映射映到其在选定基上的表示矩阵. 函子 C 为每个线性空间选定一组基.

我们的目的是证明上面的这些函子构成了范畴之间的等价:

$$\mathbf{Mat}_k \cong \mathbf{Vect}_k^b \cong \mathbf{Vect}_k^f.$$

我们可以直接定义合适的自然变换来达到目的. 但我们更喜欢证明一个有用的定理, 再用定理来得到我们的结论. 我们需要再引入一些概念.

定义 3.10 一个函子 $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ 被称为:

- (i) **完全的**, 若对任意的 $x, y \in \mathbf{C}$, 映射 $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(x), F(y))$ 是满的,
- (ii) **忠实的**, 若对任意的 $x, y \in \mathbf{C}$, 映射 $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(x), F(y))$ 是单的,

(iii.) 在对象上是本质满的, 若对任意的对象 $d \in \mathbf{D}$, 存在对象 $c \in \mathbf{C}$ 使得 d 与 $F(c)$ 之间是同构的.

◇

注 3.2 完全性和忠实性是局部定义, 而非整体的定义. 一个忠实的函子不必在整个态射的类上是单射, 完全的函子也不必在整个态射的类上是满射. 一个忠实的函子, 如果限制在对象上也是单射, 被称为一个**嵌入**, 这函子的像是值域的一个子范畴. 一个完全而忠实的函子, 如果限制在对象上是单射, 被称为一个**完全嵌入**, 这函子的像是值域的一个全子范畴. ◇

定理 3.6 定义了范畴之间等价的函子是完全的, 忠实的, 且在对象上是本质满的. 如果承认选择公理, 任何有如上性质的函子都定义了一个范畴间的等价.

在证明定理之前, 我们要叙述一个经常要用到的引理.

引理 3.7 对于任何一个对象间的态射 $f: a \rightarrow b$ 以及固定的同构态射 $a \cong a'$, 以及 $b \cong b'$, 存在一个唯一的态射 $f': a' \rightarrow b'$, 使得下面所有的图表交换.

$$\begin{array}{ccc}
 a \xleftarrow{\cong} a' & a \xrightarrow{\cong} a' & a \xleftarrow{\cong} a' & a \xrightarrow{\cong} a' \\
 \downarrow f & \downarrow f & \downarrow f & \downarrow f \\
 b \xrightarrow{\cong} b' & b \xrightarrow{\cong} b' & b \xleftarrow{\cong} b' & b \xrightarrow{\cong} b'
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 a \xleftarrow{\cong} a' & a \xrightarrow{\cong} a' & a \xleftarrow{\cong} a' & a \xrightarrow{\cong} a' \\
 \downarrow f & \downarrow f & \downarrow f & \downarrow f \\
 b \xrightarrow{\cong} b' & b \xrightarrow{\cong} b' & b \xleftarrow{\cong} b' & b \xrightarrow{\cong} b'
 \end{array}$$

定理 3.6 的证明. 首先假设函子 $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}, G: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ 以及自然同构 $\eta: 1_{\mathbf{C}} \cong GF, \epsilon: 1_{\mathbf{D}} \rightarrow FG$ 是范畴间的自然同构. 对于任何的 $d \in \mathbf{D}$, 根据自然同构的定义, 都有 ϵ 的分量 $\epsilon_d: FG(d) \cong d$ 是 \mathbf{D} 中的同构态射, 这说明 F 是本质满的. 考虑一对态射 $f, g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, c')$, 如果 $F(f) = F(g)$, 那么根据 η 的自然性, 下图是交换的.

根据引理 3.7, $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, c')$ 只有唯一的态射能使上图交换, 因此 $f = g$, 这就证明了 F 是忠实的. 同样的方法, 也可证明 G 是忠实的. 再来证 F 是完全

的, 选取 $k \in \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(c), F(c'))$, 根据引理3.7, 存在唯一的 $h \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, c')$ 使得下图交换, 又根据 η 的自然性, $GF(h) \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(GF(c), GF(c'))$ 也能使下图交换, 因此 $GF(h) = G(k)$, 根据 G 的忠实性, 得到 $k = F(h)$. 这就证明了 F 是完全的. 因此 F 是完全的, 忠实的, 在对象上本质满的.

反之, 假设 $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ 是完全的, 忠实的, 在对象上本质满的. 利用本质满的性质和选择公理, 对于每一个 $d \in \mathbf{D}$, 选择 \mathbf{C} 中的元素, 记为 $G(d)$, 使得同构 $\epsilon_d : F(G(d)) \cong d$. 对于每个 $l \in \text{Hom}_{\mathbf{D}}(d, d')$, 引理3.7保证了存在一个唯一的 $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(FG(d), FG(d'))$ 中的态射, 使下图交换, 用虚线表示. 再根据 F 的完全性和忠实性, 虚线表示的态射在 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(G(d), G(d'))$ 有唯一的原像, 记为 $G(l) \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(G(d), G(d'))$. 下面我们只要证明 G 是一个函子, 并定义一个自然同构 $\eta : 1_{\mathbf{C}} \rightarrow GF$. 根据再用引理3.7, 我们能够证明 G 确实是一个函子. 最后, 我们确实能够定义一个自然同构 η , 这就证明了定理. \square

推论 3.8 对任何的域 k , Mat_k 和 Vect_k^f 是等价的.

证明. 根据定理3.6, 只要验证函子 U, k^- 是完全的, 忠实的, 本质满的即可. \square

一个范畴被称为是**连通的**, 如果任意两个对象之间的态射能够表示成有限多个态射的复合.

命题 3.9 任何连通的广群都与单个群视作的范畴是等价的.

证明. 选取联通广群 \mathbf{G} 的任何一个对象 X , 令 $G = \text{Hom}(X, X)$ 为 G 的自同构群. 那么嵌入 $\mathbf{BG} \rightarrow \mathbf{G}$ 是一个忠实而且完全的函子, 由于广群是联通的, 这函子也是本质满的. 所以嵌入 $\mathbf{BG} \rightarrow \mathbf{G}$ 是范畴之间的同构. \square

作为上述命题的一个特殊情况, 我们能得到如下的结果:

推论 3.10 如果空间 X 是道路连通的, 那么在任意基点 x 处得到的基本群 $\pi_1(X, x)$ 都是同构的.

证明. 我们已经知道基本群 $\pi_1(X, x)$ 与基本广群 $\Pi(X)$ 作为范畴是等价的. 因此任意两点 x, x' 处的基本群作为范畴是等价的. 但是由于这两个范畴都只有一个对象, 可以立刻验证, 范畴之间的等价就是一个群同构. \square

注 3.3 我们从定理3.6的证明中可以看到, 构成范畴之间等价的函子可以很自然地定义, 但是它的逆函子却要依赖于选择公理. 在基本广群和基本群的例子中也是如此. 将道路连通并选定基点的拓扑空间的范畴记为 \mathbf{Top}_*^{pc} , 我们将基本群函子 π_1 和基本广群函子 Π 视为下列函子的复合:

$$\begin{aligned}\pi_1 : \mathbf{Top}_*^{pc} &\rightarrow \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Cat}, \\ \Pi : \mathbf{Top}_*^{pc} &\rightarrow \mathbf{Top}^{pc} \rightarrow \mathbf{Grpoid} \rightarrow \mathbf{Cat}.\end{aligned}$$

基本群到基本广群之间的嵌入, 定义了一个正则变换 $\pi_1 \rightarrow \Pi$, 这正则变换的每一个分量 $\pi_1(X, x) \rightarrow \Pi(X)$ 都是一个函子 (\mathbf{Cat} 中的态射是函子). 但定义 $\Pi(X) \rightarrow \pi_1(X, x)$ 却需要为每个同伦等价类选择一条代表道路, 因此并不是自然的. \diamond

定义 3.11 一个范畴 \mathbf{C} 被称为是 **skeletal** 如果 \mathbf{obC} 中每个由同构态射生成的等价类中只有一个对象. 范畴 \mathbf{C} 的 **skeleton** \mathbf{skC} , 是与 \mathbf{C} 等价的唯一的 **skeletal** 范畴. \diamond

范畴论的一个核心原则是在范畴上定义的概念应该是在范畴的等价间不变的. 有些范畴论者将在范畴的等价下改变的定义成为“邪恶”的. 到现在为止, 我们接触到的邪恶的概念只有小和离散. 一个范畴被称为是**本质小的**, 如果这范畴与一个小范畴等价, 或者说, 这范畴的 **skeleton** 是一个小范畴. 一个范畴被称为是**本质离散**的, 如果这范畴与一个离散范畴是等价的.

下列的构造都是在范畴的等价下不变的:

- (i.) 如果一个范畴是局部小的, 那么与它等价的任何范畴都是局部小的.
- (ii.) 如果一个范畴是一个广群, 那么与他等价的任何范畴都是广群
- (iii.) 如果 $\mathbf{C} \cong \mathbf{D}$, 那么 $\mathbf{C}^{op} \cong \mathbf{D}^{op}$.
- (iv.) 两个范畴的积与等价于与这两个范畴等价的范畴的积.
- (v.) 一个范畴中的同构态射在与之等价的范畴中的像也是同构态射.

上述性质的最后一条可以被推广. 根据定理3.6, 一个完全而忠实的函子 $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ 定义了 \mathbf{C} 与 F 的**本质像**之间的等价. 我们可以很轻易地验证, 完全忠实函子的本质像 $F(\mathbf{C})$ 中的同构态射与 \mathbf{C} 中的同构态射是一一对应的. 我们将在下一章中介绍范畴论中最重要的完全忠实函子: 共变与反变 Yoneda 嵌入.

3.1.5 图表追踪

定理3.6的证明用到了一项技术, 称为**图表追踪**, 也被称为”抽象的废话”. 我们将在本节详细地研究这类技术. 在范畴论中, 交换图表可以用来定义许多复杂的对象, 如:

定义 3.12 一个**半群**是 \mathbf{Set} 中的一个对象 M 以及一对态射 $\mu : M \times M \rightarrow M$ 和 $\eta : 1 \rightarrow M$ 使得如下的两个图表交换:

$$\begin{array}{ccc}
 M \times M \times M & \xrightarrow{1_M \times \mu} & M \times M \\
 \downarrow \mu \times 1_M & & \downarrow \mu \\
 M \times M & \xrightarrow{\mu} & M
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{\eta \times 1_M} & M \times M & \xleftarrow{1_M \times \eta} & M \\
 & \searrow 1_M & \downarrow \mu & \swarrow 1_M & \\
 & & M & &
 \end{array}$$

◇

上面左边的图表说明半群的乘法满足结合律, 右边的图表说明半群中

有单位元并且左乘单位元或右乘单位元都等于自身. 用交换图表来定义概念的好处是, 可以将这个定义推广到其他的范畴, 例如:

定义 3.13 一个**拓扑半群**是 \mathbf{Top} 中的一个对象 M 以及一对态射 $\mu : M \times M \rightarrow M$ 和 $\eta : 1 \rightarrow M$ 使得如下的两个图表交换:

$$\begin{array}{ccc}
 M \times M \times M & \xrightarrow{1_M \times \mu} & M \times M \\
 \downarrow \mu \times 1_M & & \downarrow \mu \\
 M \times M & \xrightarrow{\mu} & M
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{\eta \times 1_M} & M \times M & \xleftarrow{1_M \times \eta} & M \\
 & \searrow 1_M & \downarrow \mu & \swarrow 1_M & \\
 & & M & &
 \end{array}$$

一个**含么环**是 \mathbf{Ab} 中的一个对象 R 以及一对态射 $\mu : R \otimes_{\mathbb{Z}} R \rightarrow R$ 和 $\eta : \mathbb{Z} \rightarrow R$ 使得如下的两个图表交换:

$$\begin{array}{ccc}
 R \otimes_{\mathbb{Z}} R \otimes_{\mathbb{Z}} R & \xrightarrow{1_R \otimes \mu} & R \otimes_{\mathbb{Z}} R \\
 \downarrow \mu \otimes 1_R & & \downarrow \mu \\
 R \otimes_{\mathbb{Z}} R & \xrightarrow{\mu} & R
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccccc}
 R & \xrightarrow{\eta \otimes 1_R} & R \otimes_{\mathbb{Z}} R & \xleftarrow{1_R \otimes \eta} & R \\
 & \searrow 1_R & \downarrow \mu & \swarrow 1_R & \\
 & & R & &
 \end{array}$$

一个 **\mathbb{k} -代数**是 $\mathbf{Vect}_{\mathbb{k}}$ 中的一个对象 R 以及一对态射 $\mu : R \otimes_{\mathbb{k}} R \rightarrow R$ 和 $\eta : \mathbb{k} \rightarrow R$ 使得如下的两个图表交换:

$$\begin{array}{ccc}
 R \otimes_{\mathbb{k}} R \otimes_{\mathbb{k}} R & \xrightarrow{1_R \otimes \mu} & R \otimes_{\mathbb{k}} R \\
 \downarrow \mu \otimes 1_R & & \downarrow \mu \\
 R \otimes_{\mathbb{k}} R & \xrightarrow{\mu} & R
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccccc}
 R & \xrightarrow{\eta \otimes 1_R} & R \otimes_{\mathbb{k}} R & \xleftarrow{1_R \otimes \eta} & R \\
 & \searrow 1_R & \downarrow \mu & \swarrow 1_R & \\
 & & R & &
 \end{array}$$

◇

上述的定义显然具有形式上的相似性, 这是因为它们都是半群范畴中一个半群的特例.

下面我们来看一下经常说的”图表”的确切含义.

定义 3.14 范畴 \mathbf{C} 中的一个**图表**是一个函子 $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$, 其定义域被称为**指标范畴**, 是一个小范畴. \diamond

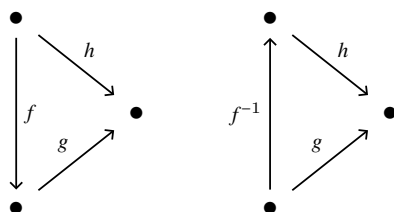
人们经常只画出图表的像, 而省略指标范畴, 特别是当 \mathbf{J} 是一个偏序集时. 但是, \mathbf{J} 的确有重要的作用. 函子性要求 \mathbf{J} 中的任何态射合成关系都要在图表的像中成立, 这就是我们通常意义上说的图表在 \mathbf{C} 中的像是**交换的**. 从我们的图表的定义中可以直接推出以下结果.

引理 3.11 函子保持交换图表.

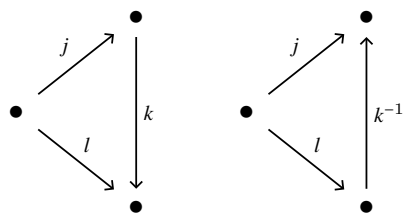
证明. 一个 \mathbf{C} 中的图表由一个函子 $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$, \mathbf{C} 是一个小范畴. 对任何函子 $G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, 函子的复合 GF 给出了 \mathbf{D} 中的一个图表. \square

引理 3.12 如果 f_1, \dots, f_n 是一个范畴中可以复合的态射的序列. 如果 $f_k f_{k-1} \cdots f_{i+1} f_i$ 等于 $g_m \cdots g_1, g_1, \dots, g_m$ 是另一列可以复合的态射. 那么 $f_n \cdots f_1 = f_n \cdots f_{k+1} g_m \cdots g_1 f_{i-1} \cdots f_1$.

引理 3.13 如果下面的图中, 左边的三角形是交换的, 且 f 是一个同构, 那么右边的的三角形也是交换的.



对偶地, 如果下图中的 k 是一个同构, 那么左边的三角形交换当且仅当右边的三角形交换.



引理 3.14 对于任何交换正方形 $\beta\alpha = \gamma\delta$, 如果每个态射都是一个同构, 它们的逆也是一个交换正方形 $\alpha^{-1}\beta^{-1} = \gamma^{-1}\delta^{-1}$.

在一些特定情况下, 图标可以自动满足交换性. 例如在偏序集中, 任何两列平行的可复合的态射复合之后的结果必然相同, 因为在偏序集中, 两个对象之间的态射集中至多只有一个态射. 在一般情况下, 对于两列平行的可复合的态射, 如果起点和终点满足一定条件的话, 这两列态射的复合结果是一样的.

定义 3.15 范畴 \mathbf{C} 中的一个对象 i 被称为是**初的**, 如果对任何的对象 $c \in \mathbf{C}$, 都存在唯一的态射 $i \rightarrow c$. 对偶地, 一个对象 $t \in \mathbf{C}$ 被称为是**终的**, 如果对任何的对象 $c \in \mathbf{C}$, 都存在唯一的态射 $c \rightarrow t$. \diamond

例 3.10 许多我们熟悉的范畴都有初对象和终对象.

- (i.) 空集是 **Set** 中的初对象, 任何单元素组成的集合是 **Set** 的终对象.
- (ii.) **Top** 中的初对象和空对象分别是空空间和只有一个元素的空间.
- (iii.) 在 **Mod_R** 中, 零模既是初对象又是终对象; 在 **Grp** 中, 平凡的群既是初对象也是终对象.
- (iv.) 在 **Ring** 中, 初对象是整数环 \mathbb{Z} , 终对象是零环; 在 **Rng** 中, 初对象和终对象都是零环.
- (v.) **Field** 既没有初对象也没有终对象. 不同特征的域之间不存在同态.
- (vi.) 空范畴是 **Cat** 的初对象, 范畴 $\mathbf{1}$ 是 **Cat** 的终对象.
- (vii.) 在一个偏序集中, 初对象是一个全局的极小元素, 终对象是一个全局的极大元素, 在对于特定的偏序及来说, 初对象和终对象可能存在, 也可能不存在.

\diamond

引理 3.15 令 f_1, \dots, f_n 以及 g_1, \dots, g_m 为可复合的映射的序列, 且 f_1 与 g_1 的起点相同, f_n 与 g_m 的终点相同. 如果相同的起点是初对象, 或相同的终点是终对象, 则 $f_n \cdots f_1 = g_m \cdots g_1$.

我们注意到如果两个正方形交换能推出外边的长方形交换, 但外边的长方形交换却不一定能保证任何一个正方形交换.

引理 3.16 考虑如下图所示的态射, 并假设外边的矩形是交换的. 如果下列条件之一被满足, 则整个图是一个交换矩形.

- (i.) 右边的正方形是交换的, 且 m 是一个单态射,
- (ii.) 左边的正方形是交换的, 且 f 是一个满态射.

3.2 泛性质, 可表性以及 Yoneda 引理

3.2.1 可表函子

我们称一个对象 $c \in \mathbf{C}$ 是初的, 相当于说对于所有的其他对象 x , 集合 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, x)$ 是一个单点集. 对偶地, $c \in \mathbf{C}$ 是终的, 相当于说对于所有的其他对象 x , 集合 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, c)$ 是一个单点集. 这些性质可以被归结为函子 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -)$ 与反变函子 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, c)$ 的性质. 函子 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -)$ 与反变函子 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, c)$ 被称为被 c 表示的函子或反变函子.

定义 3.16 (i.) 范畴 \mathbf{C} 中的一个对象 c 被称为是初的, 当且仅当函子 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ 与将所有对象都映到一个单点集的常函子 $*$: $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ 是自然同构的.

(ii.) 范畴 \mathbf{C} 中的一个对象 c 被称为是终的, 当且仅当反变函子 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, c) :$

$\mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ 与将所有对象都映到一个单点集的常函子 $*$: $\mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ 是自然同构的.

◇

上面的定义实际上断言, \mathbf{C} 中有一个初对象当且仅当常函子 $*$: $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ 可以被一个对象 c 表示; 对偶地, \mathbf{C} 中有一个终对象当且仅当常函子 $*$: $\mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ 可以被一个对象 c 表示.

定义 3.17 (i.) 若 \mathbf{C} 是一个局部小范畴, 一个函子或反变函子 $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ 被称为**可表的**, 若存在一个对象 $c \in \mathbf{C}$ 以及 F 与被 c 表示的函子或反变函子之间的自然同构. 此时, 我们说 F 被对象 c 表示.

(ii.) 函子 F 的一个**表示**, 是一个 \mathbf{C} 中的元素 c 以及一个自然变换 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -) \cong F$ 如果 F 是共变函子, 或者 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, c) \cong F$ 如果 F 是反变函子.

◇

根据上面的定义, 一个可表的函子 $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ 或反变函子 $F : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ 决定了其表示元素的**泛性质**. 不太严格地说, 对象 X 的泛性质是对函子 $\text{Hom}(X, -)$ 或 $\text{Hom}(-, X)$ 的性质的一种描述.

例 3.11 (i.) 恒等函子 $1_{\mathbf{Set}} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ 是被单元素集合 $\{1\}$ 表示的. 对任何集合 X , 自然同构 $\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\{1\}, -) \cong 1_{\mathbf{Set}}$ 都会有分量 $\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\{1\}, X) \cong X$. $\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\{1\}, -)$ 中的映射 $x : \{1\} \mapsto x$ 被元素 $x \in X$ 唯一确定. 下图显然是交换的.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\{1\}, X) & \xrightarrow{\cong} & X \\ \downarrow f_* & & \downarrow f \\ \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\{1\}, Y) & \xrightarrow{\cong} & Y \end{array}$$

(ii.) 忘却函子 $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ 被 \mathbb{Z} 表示. 对于每一个 $g \in U(G)$, 都

有唯一的一个群同态 $\mathbb{Z} \rightarrow G$ 使得 $1 \mapsto g$, 即存在自然同构的分量 $\text{Hom}_{\text{Grp}}(\mathbb{Z}, G) \cong U(G)$. 称 \mathbb{Z} 是**单个生成元上的自由群**.

- (iii.) 对于含么环 R , 忘却函子 $U : \text{Mod}_R \rightarrow \text{Set}$ 被环 R 表示. R 是**单个生成元上的自由 R -模**.
- (iv.) 忘却函子 $U : \text{Ring} \rightarrow \text{Set}$ 被含么环 $\mathbb{Z}[x]$ 表示. $\mathbb{Z}[x]$ 是**单个生成元上的自由含么环**.
- (v.) 忘却函子 $U(-)^n : \text{Grp} \rightarrow \text{Set}$ 将一个群 G 映到一个 n -元数组组成的集合. $U(-)^n$ 被 **n 个生成元上的自由群 F_n** 表示. 同样地, 函子 $U(-)^n : \text{Ab} \rightarrow \text{Set}$ 由 **n 个生成元上的自由 Abel 群 $\bigoplus_n \mathbb{Z}$** .
- (vi.) 忘却函子 $(-)^{\times} : \text{Ring} \rightarrow \text{Set}$ 将一个含么环映到它的单位组成的集合. 这函子由单个变量的 Laurent 多项式环 $\mathbb{Z}(x^{-1}, x)$ 表示.
- (vii.) 函子 $\text{ob} : \text{Cat} \rightarrow \text{Set}$ 将一个小范畴映到该范畴的对象集. ob 被范畴 $\mathbb{1}$ 表示, $\mathbb{1} \rightarrow \mathbf{C}$ 等价于在范畴 \mathbf{C} 中选择一个对象.
- (viii.) 函子 $\text{mor} : \text{Cat} \rightarrow \text{Set}$ 将一个小范畴映到该范畴的态射集. mor 被范畴 $\mathbb{2}$ 表示, $\mathbb{2} \rightarrow \mathbf{C}$ 等价于在范畴 \mathbf{C} 中选择一个态射, 因此 $\mathbb{2}$ 被称为**自由箭头**. 更一般地, $\mathbb{n} + \mathbb{1}$ 代表范畴 \mathbf{C} 中的 n 个态射的复合.
- (ix.) 函子 $\text{Path} : \text{Top} \rightarrow \text{Set}$ 将一个空间映到这个空间上所有道路组成的集合, 被单位区间 I 表示. 函子 $\text{Loop} : \text{Top}_* \rightarrow \text{Set}$ 将一个带基点的空间映到这空间上所有回路组成的集合, 被圆环 S^1 表示.

◇

形容词“自由”可用来形容所有可表函子对应的对象, 例如 $\mathbb{2}$ 是一个只有一个非同构态射的自由范畴, S^1 是只有一个回路的自由空间. 但可表反变函子相应的形容词“余自由”却较少使用.

例 3.12 (i.) 幂集函子 $\mathcal{P} : \text{Set}^{op} \rightarrow \text{Set}$ 被集合 $\Omega = \{\top, \perp\}$ 表示, Ω 是任意具有两个不同元素的集合. 我们发现, A 的任何子集 A' , 都可以看成

某个函数 $\chi_{A'} : A \rightarrow \Omega$ 在 τ 处的原像, 且 A' 与 $\chi_{A'}$ 之间的对应是一一的. 因此在 **Set** 中, 我们有同构 $\text{Hom}_{\text{Set}}(A, \Omega) \cong \mathcal{P}(A)$, 且对于任何的 $f : A \rightarrow B$, 下图都是交换的, 因此这是一个自然同构.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\text{Set}}(B, \Omega) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{P}(B) \\ \downarrow f^* & & \uparrow \mathcal{P}(f) \\ \text{Hom}_{\text{Set}}(A, \Omega) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{P}(A) \end{array}$$

- (ii.) 函子 $\mathcal{O} : \mathbf{Top}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ 是一个反变函子, 将一个空间映到它的开集族. \mathcal{O} 被 **Sierpinski 空间** S 表示. S 是只有两个点的拓扑空间, 一个点是一个开集, 一个点是一个闭集. 自然同构 $\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, S) \cong \mathcal{O}(X)$ 将连续函数与它在 S 中开集的原像一一对应.
- (iii.) 函子 $\text{Hom}_{\text{Set}}(- \times A, B) : \mathbf{Set}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ 被集合 $\text{Hom}_{\text{Set}}(A, B)$ 表示. 有时将 $\text{Hom}_{\text{Set}}(A, B)$ 记为 B^A , 因此对每一个集合 X , 都有 $\text{Hom}_{\text{Set}}(X \times A, B) \cong \text{Hom}_{\text{Set}}(X, \text{Hom}_{\text{Set}}(A, B)) = \text{Hom}_{\text{Set}}(X, B^A)$. 这反应的事实是, 任何一个二元函数 $X \times A \rightarrow B$, 将第一个变量视为参数, 就会得到一族的一元函数 $X \rightarrow B^A$. 这一自然同构不难推广到 **Top** 中, 具体应用见图??.
- (iv.) 反变函子 $U(-)^* : \mathbf{Vect}_{\mathbb{k}}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ 将一个线性空间映到它的对偶空间, 再将对偶空间的结构忘却. 函子 $U(-)^*$ 被 \mathbb{k} 表示. 亦即, 任何 $V \rightarrow \mathbb{k}$ 的线性映射就是一个对偶向量.

◇

我们的定义告诉我们, 可表函子将一些泛性质传递给了它的表示元素. 但依然有些问题我们无法回答:

- (i.) 这些泛性质是唯一的吗? 如果一个函子能被两个对象表示, 这两个对象是同构的吗?
- (ii.) 构造被对象 c 表示的可表函子 F 自然同构的自然同构需要哪些数据?

(iii.) 用可表函子描述的泛性质, 如何与初对象还有终对象联系起来?

所有以上的问题, Yoneda 引理都会给我们答案.

3.2.2 Yoneda 引理

定理 3.17 (Yoneda 引理) 对于任何一个函子 $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, 以及任何一个对象 $c \in \mathbf{C}$, \mathbf{C} 是一个局部小范畴, 都存在一个一一对应:

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -), F) \cong F(c)$$

将自然变换 $\alpha : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -) \rightarrow F$ 对应到 $\alpha_c(1_c) \in F(c)$, $F(c)$ 是一个集合. 且这个对应 c 和 F 都是自然的.

同样, 对于反变函子 $F : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$, 以及任何一个对象 $c \in \mathbf{C}$, 也存在一个一一对应:

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, c), F) \cong F(c)$$

对 F 和 c 都是自然的.

证明. 我们不难发现, 自然变换 $\alpha : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -) \rightarrow F$ 与集合 $F(c)$ 之间的确存在一个映射 $\Phi : \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -), F) \rightarrow F(c)$, 通过 $\Phi(\alpha) = \alpha_c(1_c)$ 定义. 为了证明这是一个双射, 我们只需要定义一个逆 $\Psi : F(c) \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -), F)$, 将集合 $F(c)$ 中的一个元素 x 映到一个自然变换 $\Psi(x) : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -) \rightarrow F$. 于是, 定义 $\Psi(x)$ 的分量 $\Psi(x)_d : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, d) \rightarrow F(d)$, 使得如下的图表对任何的 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, d)$ 交换.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, c) & \xrightarrow{\Psi(x)_c} & F(c) \\ \downarrow f_* & & \downarrow F(f) \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, d) & \xrightarrow{\Psi(x)_d} & F(d) \end{array}$$

在交换图表中, 对于 $1_c \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, c)$, 左下角的复合结果是 $\Psi(x)_d(f)$, 右上角的复合结果是 $F(f)(\Psi(x)_c(1_c))$, 为使 Ψ 是 Φ 的逆, 我们一定要定义 $\Psi(x)_c(1_c) = x$. 因此, 自然性要求我们定义 $\Psi(x)$ 的分量为

$$\Psi(x)_d(f) = F(f)(x).$$

我们还要验证 $\Psi(x)$ 的自然性, 对任何一个 $g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(d, e)$, 我们只需验证如下的图交换即可. 对于任何的 $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, d)$, 下图左下角的合成结果是 $\Psi(x)_e(gf) = F(gf)(x) = (F(g)F(f))(x)$, 右上角的合成结果是 $F(g)(\Psi(x)_d(f)) = F(g)(F(f)(x)) = F(g)F(f)(x)$, 这证明了 $\Psi(x)$ 确实是一个自然变换, 因此上面的 $\Psi : F(c) \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -), F)$ 是良定义的.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, d) & \xrightarrow{\Psi(x)_d} & F(d) \\ \downarrow g_* & & \downarrow F(g) \\ \text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, e) & \xrightarrow{\Psi(x)_e} & F(e) \end{array}$$

根据定义 $\Phi\Psi(x) = \Psi(x)_c(1_c) = x$, 我们还需要验证 $\Psi\Phi(\alpha) = \alpha$, 即验证自然变换 $\Psi(\alpha_c(1_c)) = \alpha$. 我们只要对任意分量验证即可. 根据定义, $\Psi(\alpha_c(1_c))_d(f) = F(f)(\alpha_c(1_c))$, 又根据 α 的自然性, $F(f)(\alpha_c(1_c)) = \alpha_d(f)$. 所以, $\Psi(\alpha_c(1_c))_d = \alpha_d$. 这样我们就证明了 Φ 的确是一个双射.

接下来我们要证明 Yoneda 引理中的自然性. 对函子 F 的自然性是指, 对给定的自然变换 $\beta : F \rightarrow G$ 下面的图在 \mathbf{Set} 中是交换的. 根据定义, $\Phi_G(\beta\alpha) = (\beta\alpha)_c(1_c) = \beta_c(\alpha_c(1_c))$, 所以下图是交换的.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -), F) & \xrightarrow{\Phi_F} & F(c) \\ \downarrow \beta_* & & \downarrow \beta_c \\ \text{Hom}(\text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -), G) & \xrightarrow{\Phi_G} & G(c) \end{array}$$

对象 c 的自然性是指在 \mathbf{Set} 中, 下图是交换的. 对于任何的自然变换 $\alpha \in \text{Hom}(\text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -), F)$, 右上角的合成结果是 $F(f)(\alpha_c(1_c))$, 右下角的合成

结果是 $(\alpha f^*)_d(1_d) = \alpha_d(f)$, 且 $\alpha_d(f) = F(f)(\alpha_c(1_c))$ 所以下图是交换的. 这就证明了共变函子的情况. 反变函子的证明完全相同.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -), F) & \xrightarrow{\Phi_c} & F_c \\ \downarrow (f^*)^* & & \downarrow F(f) \\ \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(d, -), F) & \xrightarrow{\Phi_d} & F(d) \end{array}$$

□

注 3.4 如果不考虑范畴的大小, 我们可以更简洁地陈述 Yoneda 引理: 映射 Φ 是两个定义在积范畴 $\mathbf{C} \times \mathbf{Set}^{\mathbf{C}}$ 上的双函子之间的自然同构. 一个双函子是 $\mathrm{Hom}(y(-), -)$, 其中 $y : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}}$ 是之后将要定义的反变 Yoneda 嵌入, 将对象 c 映到 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -)$; 另一个双函子是 $\mathrm{ev} : \mathbf{Set}^{\mathbf{B}^{\mathrm{Gop}}} \rightarrow \mathbf{Set}$, 将 (c, F) 映到 $F(c)$. Yoneda 引理事实上陈述了 $\mathrm{Hom}(y(-), -) \cong \mathrm{ev}$. 对于反变的情况, 只要将反变 Yoneda 嵌入换成共变 Yoneda 嵌入即可, 定理的形式不变. ◇

推论 3.18 (Yoneda 嵌入) 定义如下的函子 y 是忠实而完全的嵌入.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \xhookrightarrow{y} & \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}} \\ c & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, c) \\ \downarrow f & & \downarrow f_* \\ d & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, d) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^{\mathrm{op}} & \xhookrightarrow{y} & \mathbf{Set}^{\mathbf{C}} \\ c & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -) \\ \downarrow f & & \uparrow f^* \\ d & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(d, -) \end{array}$$

证明. 我们只需要验证

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, d) &\cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, c), \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, d)), \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, d) &\cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(d, -), \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -)). \end{aligned}$$

即可. 我们只选第二个来验证. 单性是容易验证的, 因为对两个不同的 $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, d)$, f^*, g^* 一定是不同的. Yoneda 引理保证了满性. 对任何一个自然

变换 $\alpha : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(d, -) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -)$, 根据3.17, $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, d)$ 中都有唯一一个元素 f 与之对应, 且 $f = \alpha_d(1_d)$, 但我们知道有 $f^*1_d = f$, 所以 $\alpha = f^*$. \square

推论3.18告诉我们, 可表函子之间的自然同构与表示元素之间的态射是一一对应的. 这是一个十分强有力的结果, 我们将在之后发现. 人们一般把定理3.17和推论3.18一起称为 Yoneda 引理.

我们用两个非范畴论的应用来结束本节.

推论 3.19 对 n 行矩阵来说, 每一个行操作都与左乘某个 $n \times n$ 矩阵一一对应, 且每个行操作对应的矩阵就是对 n 阶单位矩阵进行行操作之后得到的结果.

证明. Mat_R 中 $m \rightarrow n$ 的一个态射是一个 $n \times m$ 的 R -值矩阵. 因此, n 行矩阵就是函子 $\text{Hom}_{\text{Mat}_R}(-, n)$ 的像中的元素 (因为 Mat_R 是一个小范畴, 所以这里可以说元素). 线性代数中的矩阵行操作就是函子 $\text{Hom}_{\text{Mat}_R}(-, n)$ 到自身的自然变换, 自然性体现在行操作与右乘矩阵是可交换的. 于是, 根据引理3.18, 每个行操作都对应一个 $n \times n$ 矩阵. 更进一步, 根据定理3.17, 这个 $n \times n$ 矩阵就是行操作作用在 1_n 上, 即行操作作用在 n 阶单位矩阵上. \square

另一个 Yoneda 引理的应用的例子是群论中的 Cayley 定理.

推论 3.20 (Cayley 定理) 任何 (离散) 群都同构于置换群的一个子群.

证明. 观察到 Yoneda 嵌入 $\mathbf{BG} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{BG}^{op}}$ 代表了一个右 G -集合 G , 推论3.18告诉我们, 右 G -集合 G 到自身的 G -映射, 与 G 中的元素一一对应. 更进一步, 任何 G 到自身的右 G -映射都是一个同构. 所以 G 与右 G -集合的自同构群是同构的. 将 Yoneda 嵌入 $\mathbf{BG} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{BG}^{op}}$ 与忠实的忘却函子 $\mathbf{Set}^{\mathbf{BG}^{op}}$ 复合, 我

们得到了一个忠实的函子, 将 G 映到 \mathbf{Set} 中的对象 G 的自同构群 $\text{Aut}(G)$ 中. \square

3.2.3 泛性质与泛元素

Yoneda 引理能够让我们回答 3.2.1 节中的最后几个问题. 在本节中, 我们将证明可表函子定义了它的表示元素.

在一个局部小范畴中, 任何一对同构的对象 $x \cong y$ 都是可表同构的, 即两个对象的表示函子是自然同构的, 这可以由 Yoneda 嵌入 $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ 以及 $\mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}}$ 的函子性立刻得到. Yoneda 引理保证了这个现象的逆也是对的:

命题 3.21 考虑局部小范畴 \mathbf{C} 中的两个对象 x 和 y .

- (i.) 如果被 x 和 y 表示的共变函子或者反变函子之一是自然同构的, 则 x 和 y 是同构的,
- (ii.) 特别地, 如果 x 和 y 表示的是同一函子, 则 x 和 y 是同构的.

推论 3.22 由 \mathbf{C} 的所有终对象组成的全子范畴只可能是空范畴或可缩广群 (一个可缩广群是指与范畴 $\mathbf{1}$ 等价的范畴).

定义 3.18 (泛性质) 范畴 \mathbf{C} 中一个对象 c 的泛性质是指一个可表函子 F 以及一个泛元素 $x \in F(c)$, x 通过 Yoneda 引理确定了同构 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -) \cong F$ 或 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, c) \cong F$, 分别对应 F 是共变或反变函子. \diamond

例 3.13 回忆忘却函子 $U : \mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Set}$, U 被 $\mathbb{Z}[x]$ 表示. 根据 Yoneda 引理的证明, 对应自然同构

$$\text{Hom}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z}[\mathbb{x}], -) \cong U$$

的泛元素是 x . 自然同构的 R 分量 $\text{Hom}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z}[\mathbb{x}], R) \cong U(R)$ 具体形式是, 对于任何的环同态 $\phi \in \text{Hom}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z}[x], R)$, $\phi \mapsto \phi(x)$. \diamond

例 3.14 一个函子 $E : \mathbf{BG} \rightarrow \mathbf{Set}$, 是可表的当且仅当作为 G -集合 $G \cong E$. 这时 G 自由且可迁地作用在 E 上. 反之, 一个非空的自由可迁的 G 集合是可表的. 根据 Yoneda 引理, 一个给定的自然同构 $G \cong E$ 的泛元素是 G 中单位元在 E 中的像. 换言之, 一个可表的 G -集合 E 是忘却了单位元的群. E 被称为一个 G -旋子 (G -torsor).

例如, \mathbb{R}^n 是一个 Abel 群, 它的主齐性空间是 n 维仿射空间 A^n . A^n 可以想象为普通的 \mathbb{R}^n 但没有原点. \mathbb{R}^n 在 A^n 中的作用就是将 \mathbb{R}^n 中的元素视为向量, 将向量尾端平移到 A^n 中的点上, 向量首端指向的点就是作用后得到的点. 这作用显然是自由而可迁的, 因此有 \mathbb{R}^n 集合之间的同构 $\mathbb{R}^n \cong A^n$. 对于一个给定的同构 $\mathbb{R}^n \cong A^n$, 只要确定了 \mathbb{R}^n 中的原点在 A^n 中的像, 就确定了整个同构. 因此, 这个例子中的泛元素是为 A^n 选定的一个原点. \diamond

例 3.15 固定 \mathbb{k} -线性空间 V 和 W , 考虑函子

$$\mathbf{Bilin}(V, W; -) : \mathbf{Vect}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathbf{Set},$$

将一个线性空间 U 映到所有定义在 $V \times W$ 上的 \mathbb{k} -双线性映射 $V \times W \rightarrow U$ 的集合.

函子 $\mathbf{Bilin}(V, W; -)$ 是一个可表函子, 表示它的对象是一个 \mathbb{k} -线性空间 $V \otimes_{\mathbb{k}} W$, 称为 V 和 W 的张量积. 即, 张量积是通过自然同构

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{Vect}_{\mathbb{k}}}(V \otimes_{\mathbb{k}} W, U) \cong \mathbf{Bilin}(V, W; U) \quad (3.1)$$

定义的对象.

Yoneda 引理告诉我们, 上述的自然同构由集合 $\mathbf{Bilin}(V, W; V \otimes_{\mathbb{k}} W)$ 中的一个泛元素确定, 即一个映射 $\otimes : V \times W \rightarrow V \otimes_{\mathbb{k}} W$. 于是, 张量积 $V \otimes_{\mathbb{k}} W$ 就是一个泛线性空间再加上一个线性映射. Yoneda 引理能够告诉我们, 上面的形式化的语言的确切含义. 自然同构的分量 (3.1) 将任意的双线性映射 $f : V \times W \rightarrow U$ 与线性映射 $\bar{f} : V \otimes_{\mathbb{k}} W \rightarrow U$ 一一对应. 考虑如下的交换图,

追踪 $1_{V \otimes_{\mathbb{k}} W}$, 我们知道 f 可以唯一地分解为双线性映射 \otimes 与线性映射 \bar{f}

的复合.

泛性质告诉我们双线性映射 $\otimes : V \times W \rightarrow V \otimes_{\mathbb{K}} W$ 是初的, 这将在之后叙述.

张量积的泛性质还告诉我们如何具体地构造两个线性空间的张量积. 假设线性空间 $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ 是存在的, 我们考虑 $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ 与双线性映射 $-\otimes-$ 的像张成的线性空间 $\langle v \otimes w \rangle$ 的商. (中间的证明的漏洞我无法补上). 总之, 最终的结果是 $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ 与所有形如 $v \otimes w$ 的元素张成的向量空间再商去双线性映射 $-\otimes-$ 满足的关系. \diamond

张量积的泛性质可以使我们推出如下的结果, 并不用选择特定的基.

命题 3.23 对任何 \mathbb{K} -线性空间 V 和 W , 都有 $V \otimes_{\mathbb{K}} W \cong W \otimes_{\mathbb{K}} V$.

证明. 我们注意到函子 $\text{Bilin}(V, W; -)$ 与函子 $\text{Bilin}(W, V; -)$ 之间存在一个自然同构. 对于任何线性空间 U , 自然同构 $\text{Bilin}(V, W; U) \cong \text{Bilin}(W, V; U)$ 将任意的双线性映射 $f : V \times W \rightarrow U$ 映到双线性映射 $f' : W \times V \rightarrow U$, $f'(w, v) = f(v, w)$. 因此, 我们有如下的自然同构:

$$\text{Hom}_{\text{Vect}_{\mathbb{K}}}(V \otimes_{\mathbb{K}} W, -) \cong \text{Bilin}(V, W; -) \cong \text{Bilin}(W, V; -) \cong \text{Hom}_{\text{Vect}_{\mathbb{K}}}(W \otimes_{\mathbb{K}} V, -)$$

根据3.21, 得到 $V \otimes_{\mathbb{K}} W \cong W \otimes_{\mathbb{K}} V$. \square

例 3.16 固定一个群 G , 存在一个共变函子

$$\text{Hom}_{\text{Grp}}(G, (-)^{\times}) : \text{Ring} \rightarrow \text{Set},$$

将一个含么环 R 映到所有从 G 到 R 的单位群 R^{\times} 之间的群同态的集合. 这个函子描述了群环 $\mathbb{Z}[G]$ 的泛性质. 根据 Yoneda 引理, 一个自然同构

$$\text{Hom}_{\text{Ring}}(\mathbb{Z}[G], -) \cong \text{Hom}_{\text{Grp}}(G, (-)^{\times})$$

由某个群同态 $G \rightarrow \mathbb{Z}[G]^{\times}$ 唯一确定. 对于某一个环 R , 环同态 $\mathbb{Z}[G] \rightarrow R$ 与群同态 $G \rightarrow R^{\times}$ 之间的同构如下构造: 一个环同态 $\mathbb{Z}[G] \rightarrow R$ 诱导了一个群

同态 $\mathbb{Z}[G]^\times \rightarrow R^\times$, 再将群同态 $\mathbb{Z}[G]^\times \rightarrow R^\times$ 前置复合 $G \rightarrow \mathbb{Z}[G]^\times$ 就得到了 $G \rightarrow R^\times$.

◇

3.2.4 元素范畴

在本节中, 我们将证明, 在定义3.18中的泛元素, 在某个特定的范畴中是初对象或终对象. 这个特定的范畴被称为**元素范畴**, 可以通过典范的方式从可表函子 F 的数据中构造得到.

元素范畴也能够回答我们的另一个问题: 如何确定一个在 **Set** 中取值的函子 F 是否是一个可表函子? 如果我们知道了确定 F 是否可表的方法, 是否存在一种方法能够直接找到泛元素 $x \in F(c)$, 而不用通过自然同构 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -) \cong F$?

定义 3.19 共变函子 $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ 的**元素范畴** $\int F$ 定义如下:

- (i.) 对象是形如 (c, x) 的有序对, $c \in \mathbf{C}$ 且 $x \in F(c)$,
- (ii.) 对象之间的一个态射 $(c, x) \rightarrow (c', x')$ 是 \mathbf{C} 中的一个态射 $f : c \rightarrow c'$, 使得 $F(f)(x) = x'$.

◇

元素范畴中有一个自然的忘却函子 $\Pi : \int F \rightarrow \mathbf{C}$, 将 (c, x) 映到 c , 将满足 $F(f)(x) = x'$ 的 $\int F$ 中的 f 映到 \mathbf{C} 中的 f . 对于反变函子的元素范畴, 我们希望上面的自然的忘却函子的定义与共变的情况是相同的, 因此我们定义反变函子的元素范畴.

定义 3.20 反变函子 $F : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ 的元素范畴 $\int F$ 定义如下:

- (i.) 对象是形如 (c, x) 的有序对, $c \in \mathbf{C}$ 且 $x \in F(c)$,
- (ii.) 对象之间的一个态射 $(c, x) \rightarrow (c', x')$ 是 \mathbf{C} 中的一个态射 $f: c \rightarrow c'$, 使得 $F(f)(x') = x$.

◇

例 3.17 一个**具体范畴** \mathbf{C} 是一个范畴 \mathbf{C} , 并配备一个忠实的忘却函子 $U: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$. 考虑忘却函子 U 的元素范畴 $\int U$, $\int U$ 中的态射是以 \mathbf{C} 中的对象 c 为指标的 $U(c)$ 中的元素 x , 态射是保持各个选定的 x 之间的 \mathbf{C} 中的态射. 形象却未必严谨的描述是, 元素范畴 $\int U$ 可以看成以 \mathbf{C} 为底空间的纤维丛. 我们将 $\int U$ 记为 \mathbf{C}_* .

◇

例 3.18 如果范畴 \mathbf{C} 是一个离散范畴, 那么一个函子 $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ 事实上定义了一族纤维 $\{F_c\}_{c \in \mathbf{C}}$. $\int F$ 也是一个离散范畴, 且 $\text{ob} \int F = \coprod_{c \in \mathbf{C}} F_c$. 忘却函子 Π 事实上就是从纤维丛到底空间的正则投影. 显然 $\coprod_{c \in \mathbf{C}} F_c$ 是集族 $\{F_c\}_{c \in \mathbf{C}}$ 的**和**, 而正则投影 $\Pi: \coprod_{c \in \mathbf{C}} F_c \rightarrow \mathbf{C}$ 的所有截面的集合称为集族 $\{F_c\}_{c \in \mathbf{C}}$ 的**积**, 记为 $\prod_{c \in \mathbf{C}} F_c$.

◇

例 3.19 考虑函子 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -)$ 的元素范畴 $\int \text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -)$. $\int \text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -)$ 中的对象是 \mathbf{C} 中以 c 为起点的态射. 将对象 $f: c \rightarrow x$ 映到 $g: c \rightarrow y$ 的态射是使得 $g = hf$ 的态射 $h: x \rightarrow y$. 这个范畴的另一个名称是**对象 c 下的切片范畴 c/\mathbf{C}** . 忘却函子 $c/\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ 将态射 $f: c \rightarrow x$ 映到它的终点, 将交换三角形 $g = hf$ 映到其顶点 c 的对边 h .

对偶地, $\int \text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, c)$ 是**对象 c 下的切片范畴 \mathbf{C}/c** . 这范畴中的对象是以 c 为终点的态射, 将对象 $f: x \rightarrow c$ 映到 $g: y \rightarrow c$ 的态射是使得 $gh = f$ 的态射 $h: x \rightarrow y$. 忘却函子 $\mathbf{C}/c \rightarrow \mathbf{C}$ 将态射映到其起点, 并将交换三角形 $gh = f$ 映到其顶点 c 的对边.

◇

Yoneda 引理给出了函子 F 的元素范畴的另一种定义.

引理 3.24 对于反变函子 $F : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$, 有

$$\int F \cong y, F$$

其中 y 是 Yoneda 嵌入 $y : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$, 将等号右边的 F 看成 $F : \mathbb{1} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$.

上述引理的形式对于反变函子是相同的, 只是需要将 Yoneda 嵌入变成反变 Yoneda 嵌入 $y : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}}$.

命题 3.25 一个共变的取值为集合的函子是可表的当且仅当它的元素范畴中存在一个初对象. 对偶地, 一个反变的取值为集合的函子是可表的当且仅当它的元素范畴中有一个终对象.

证明. 考虑函子 $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, 并假设 $(c, x) \in \int F$ 是一个初对象. 我们只需要证明 Yoneda 引理 3.17 定义的 $\Psi(x) : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -) \rightarrow F$ 是一个自然同构. 对任何 $y \in F(d)$, 因为 (c, x) 的初性, 所以存在一个唯一的 $f : (c, x) \rightarrow (d, y)$, 以及 \mathbf{C} 中唯一的映射 $f : c \rightarrow d$ 并使得 $F(f)(x) = y$. 当 y 取遍 $F(d)$ 中的元素时, $\Psi(x)_d : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, d) \rightarrow F(d)$ 事实上是一个同构: 在 Yoneda 引理的证明中, $\Psi(x)_d(f) = F(f)(x)$, $\int F$ 中态射 $(c, x) \rightarrow (d, y)$ 的存在性证明了满性, 唯一性证明了单性.

反过来, 如果函子 F 是可表的, 则存在一个自然同构 $\alpha : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -) \cong F$, 我们只需证明 $(c, \alpha_c(1_c))$ 是 $\int F$ 中的一个初对象. 由于 $\alpha_d : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, d) \rightarrow F(d)$ 是一个一一映射, 因此, 对于任意的 $y \in F(d)$, 都存在一个唯一的 $f : c \rightarrow d$ 使得 $\alpha_d(f) = y$. 根据自然性, $\alpha_d(f) = F(f)(\alpha_c(1_c)) = y$. 因此, 对于任何的 $(d, y) \in \int F$, 都存在一个唯一的态射 $f : (c, \alpha_c(1_c)) \rightarrow (d, y)$. \square

回忆, 一个函子 F 的表示包括一个自然同构 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -) \cong F$ 和一个对象 c . 根据命题 3.25, 函子 F 的表示就是 $\int F$ 中的初对象. 表示并不是唯一的, 但是是自然同构的.

命题 3.26 对任何函子 $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, 由 F 的所有表示构成的 $\int F$ 的全子范畴, 只能是空范畴或是可缩广群.

证明. 如果 F 不是可表函子, 则它没有表示对象, 所以它的表示组成的全子范畴是空的. 若 F 是可表函子, 命题3.21告诉我们任何表示都是 $\int F$ 中的初对象. 根据初对象的定义, 两个初对象之间存在唯一的态射, 因此它们构成的范畴是一个可缩广群. \square

例 3.20 G -集合 $X : \mathbf{BG} \rightarrow \mathbf{Set}$ 的元素范畴是**平移广群** $\mathbf{T}_G X$, 其中的对象是集合 X 中的元素 x , 态射 $g : x \rightarrow y$ 是使得 $gx = y$ 的群元素 $g \in G$. 根据例3.14, 若 X 是可表的, 那么 X 中的任意元素都是一个泛元素. 根据命题3.26, $\mathbf{T}_G X$ 是可表的当且仅当它是一个可缩广群.

如果 X 是非空的, 平移广群 $\mathbf{T}_G X$ 是可缩的, 当且仅当对任意的 $x, y \in X$, 都存在唯一的 $g \in G$ 使得 $gx = y$, 当且仅当 G 作用在 X 上是自由而可迁的.

\diamond

任何的范畴 \mathbf{E} 都可以看成是元素范畴, 对应的函子是常函子 $* : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{Set}$, 将所有的 E 中的对象都映到同一个单点集, 这样的元素范畴是平凡的. 更有趣的情况是 \mathbf{E} 是某个忘却函子 $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{C}$ 的元素范畴

例 3.21 (i.) 考虑反变幂集函子 $\mathcal{P} : \mathbf{Set}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{PoSet}$ 的元素范畴. 该范畴中的对象是一对集合 $A' \subset A$, A' 是集合 A 的指定子集. 一个态射 $f : (A' \subset A) \rightarrow (B' \subset B)$ 是使得 $f^{-1}(B') = A'$ 的函数 $f : A \rightarrow B$. 这函子的表示对象是 Ω , 在元素范畴 $\int \mathcal{P}$ 中相应的终对象是 $\{\tau\} \subset \Omega$, 对于任何的 $A' \subset A$, 都存在唯一的函数 $h : A \rightarrow \Omega$ 使得 $h^{-1}(\tau) = A'$.

(ii.) 忘却函子 $U : \mathbf{Vect}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathbf{Set}$ 的元素范畴 $\int U$ 的对象是某个 \mathbb{k} -向量空间 V 中的的一个向量 v . 态射 $(V, v) \rightarrow (W, w)$ 是将 v 映到 w 的线性映射 $T : V \rightarrow W$. 向量空间 \mathbb{k} 是函子 U 的表示对象. $(\mathbb{k}, 1)$ 是 $\int U$ 中的初对象. 但这初对象不是唯一的, 对于任何的非零的 $c \in \mathbb{k}$, (\mathbb{k}, c) 也是 $\int U$

中的初对象.

- (iii.) 双线性函子 $\mathbf{Bilin}(V, W; -)$ 的元素范畴 $\int \mathbf{Bilin}(V, W; -)$ 是形如 (U, f) 的有序对, U 是一个 \mathbb{k} -向量空间, $f : V \times W \rightarrow U$ 是一个双线性映射. $\int \mathbf{Bilin}(V, W; -)$ 中的态射 $T : (U, f) \rightarrow (U', f')$ 是使得下图交换的线性映射 $T : U \rightarrow U'$. 我们之前讨论过的张量积 $V \otimes_{\mathbb{k}} W$ 的泛性质告诉我们, $(V \otimes_{\mathbb{k}} W, \otimes)$ 是范畴 $\int \mathbf{Bilin}(V, W; -)$ 中的初对象.
- (iv.) 忘却函子 $U(-)^n : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ 的元素范畴 $\int U(-)^n$ 中的对象形如 (G, g_1, \dots, g_n) , $g_1, \dots, g_n \in G$. 态射 $(G, g_1, \dots, g_n) \rightarrow (H, h_1, \dots, h_n)$ 是一个群同态 $\phi : G \rightarrow H$ 使得 $\phi(g_i) = h_i$ 对所有 i 成立. 由 $x_1 \dots x_n$ 生成的自由群 F_n 满足, 对任何的 (G, g_1, \dots, g_n) , 都存在唯一的态射 $(F_n, x_1, \dots, x_n) \rightarrow (G, g_1, \dots, g_n)$. 因此 (F_n, x_1, \dots, x_n) 是范畴 $\int U(-)^n$ 中的初对象.
- (v.) 忘却函子 $U(-)^* : \mathbf{Vect}_{\mathbb{k}}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ 的元素范畴 $\int U(-)^*$ 中的对象形如 V, f , $f : V \rightarrow \mathbb{k}$ 是一个线性泛函. 将 $f : V \rightarrow \mathbb{k}$ 映到 $g : W \rightarrow \mathbb{k}$ 的态射是一个满足 $f = gT$ 的线性映射 $T : V \rightarrow W$. 从定义可知, $\int U(-)^* \cong \mathbf{Vect}_{\mathbb{k}}/\mathbb{k}$. 因此 $1 : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$ 是元素范畴中的终对象.
- (vi.) 忘却函子 $U : \mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Set}$ 的元素范畴中的对象形如 (R, r) , $r \in R$. 元素范畴中的初对象是 $(\mathbb{Z}[x], x)$, $\int U$ 中从 $(\mathbb{Z}[x], x)$ 出发到自身的态射都是平凡的. 但是在范畴 \mathbf{Ring} 中, 泛对象 $\mathbb{Z}[x]$ 有许多非平凡的自同态. 事实上, $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z}[x], \mathbb{Z}[x])$ 中的元素与 $\mathbb{Z}[x]$ 中的多项式一一对应. 根据 Yoneda 嵌入的忠实性和完全性, 任何忘却函子 U 到自身的自然变换一定与 $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z}[x], \mathbb{Z}[x])$ 中的元素一一对应. 因此, U 到自身的自然变换的分量 $R \rightarrow R$ 一定有 $r \mapsto p(r)$ 的形式, 其中 $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

◇

3.3 极限与余极限

3.3.1 锥形与余锥形

回忆, 范畴 \mathbf{C} 中一个 \mathbf{J} 形的图是一个函子 $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$. 在本节中, 我们用锥形定义极限与余极限. 我们先来定义锥形.

定义 3.21 对于任何 \mathbf{C} 中的对象 c 以及任何范畴 \mathbf{J} , 常函子 $c : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ 将 \mathbf{J} 中的每一个对象都映到 c , 将每一个态射都映到 1_c . 常函子定义了一个嵌入 $\Delta : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{J}}$, 将一个对象 c 映到常函子 c , 将态射 $f : c \rightarrow c'$ 映到常自然变换, 常自然变换的每个分量都是 f . \diamond

定义 3.22 图 $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ 上的以 c 为最高点的锥形是一个自然变换 $\lambda : c \rightarrow F$, c 是一个常函子. 自然变换的分量 $\lambda_j : c \rightarrow F(j)$, $j \in \mathbf{J}$ 被称为锥形的边. 更加明确地,

- (i.) 图 $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ 上的以 c 为最高点的锥形含有的数据, 是一族以 $j \in \mathbf{J}$ 为指标的态射 $\lambda_j : c \rightarrow F(j)$,
- (ii.) 这族态射定义了一个锥形, 当且仅当对于每个 \mathbf{J} 中的态射 $f : j \rightarrow k$, 如下的三角形是交换的.

对偶地, 图 $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ 下的以 c 为最低点的锥形, 是一个自然变换 $\lambda : F \rightarrow c$, 锥形的边是 $\lambda_j : F(j) \rightarrow c$, $j \in \mathbf{J}$. 自然性条件要求对每个 \mathbf{J} 中的态射 $f : j \rightarrow k$, 下面的三角形是交换的. \diamond

在图 $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ 下的锥形被称为**余锥形**. 但我们将会发现, 形容词”上”和”下”是很好的描述方式.

F 的极限一般被简单定义为 F 上的泛锥型, F 的余极限被定义为 F 下

的泛锥形. 正如上一章中所讨论的, 极限和余极限的泛性质可以用两种方式理解. 一个极限可以被定义为某个反变函子的表示元素, 或者是某个元素范畴中的终对象; 对偶地, 一个余极限可以定义为某个共变函子的表示元素, 或者是某个元素范畴中的初对象.

定义 3.23 (极限与余极限 1) 对任何图 $F : J \rightarrow C$, 存在一个反变函子

$$\text{Cone}(-, F) : C^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$$

将 C 中的对象映到图 F 上以 c 为顶点的所有锥型的集合 $\text{Cone}(c, F)$. F 的一个**极限**是 $\text{Cone}(-, F)$ 的一个表示. 根据 Yoneda 引理, 一个极限由一个对象 $\lim F \in C$ 以及一个**极限锥型** $\lambda : \lim F \rightarrow F$ 构成, 极限锥型 λ 与自然同构

$$\text{Hom}_C(-, \lim F) \cong \text{Cone}(-, F)$$

一一对应.

对偶地, 存在一个共变函子

$$\text{Cone}(F, -) : C \rightarrow \text{Set}$$

将对象 c 映到 F 下以 c 为最低点的所有锥形的集合 $\text{Cone}(F, -)$. F 的一个**余极限**是 $\text{Cone}(F, -)$ 的一个表示. 根据 Yoneda 引理, 一个余极限由一个对象 $\text{colim} F \in C$ 以及一个**余极限锥型** $\lambda : F \rightarrow \text{colim} F$ 构成, 余极限锥型 λ 与自然同构

$$\text{Hom}_C(\text{colim} F, -) \cong \text{Cone}(F, -)$$

一一对应. ◇

应用命题3.25, 极限和余极限还可以定义为相应的元素范畴中的终对象和初对象.

定义 3.24 (极限与余极限 2) 对任何的图 $F : J \rightarrow C$, 一个**极限**是元素范畴 $\int \text{Cone}(-, F)$ 中的一个终对象. 元素范畴 $\int \text{Cone}(-, F)$ 是图 F 上的锥型的范

畴, 其中的一个对象是 F 上的具有任意最高点的一个锥型. 锥型 $\lambda : c \rightarrow F$ 以及锥型 $\mu : d \rightarrow F$ 之间的一个态射是 \mathbf{C} 中的一个态射 $f : c \rightarrow d$, 使得 $\mu_j f = \lambda_j$ 对所有的 $j \in \mathbf{J}$ 都成立. 忘却函子 $\int \text{Cone}(-, F) \rightarrow \mathbf{C}$ 将一个锥型映到它的最高点.

对偶地, 一个**余极限**是元素范畴 $\int \text{Cone}(F, -)$ 中的一个初对象. 元素范畴 $\int \text{Cone}(F, -)$ 是图 F 下的锥型的范畴, 其中的一个对象是 F 上的具有任意最低点的一个锥型. 锥型 $\lambda : F \rightarrow c$ 以及锥型 $\mu : F \rightarrow d$ 之间的一个态射是 \mathbf{C} 中的一个态射 $f : c \rightarrow d$, 使得 $\mu_j = f \lambda_j$ 对所有的 $j \in \mathbf{J}$ 都成立. 忘却函子 $\int \text{Cone}(F, -) \rightarrow \mathbf{C}$ 将一个锥型映到它的最低点. \diamond

形状为 \mathbf{J} 的一个图 F 的极限或者余极限记为 $\lim_{\mathbf{J}} F$ 或者 $\text{colim}_{\mathbf{J}} F$, 特别是许多不同形状的图同时出现的时候.

根据初对象和终对象的泛性质, 我们得到如下的结果:

命题 3.27 (极限与余极限的唯一性) 给定任何两个 F 上的极限锥形 $\lambda : l \rightarrow F$ 和 $\lambda' : l' \rightarrow F$, 都存在唯一的同构 $\lambda \cong \lambda'$, 与两个极限锥型的每条边都交换.

对偶地, 给定任何两个 F 下的余极限锥形 $\lambda : F \rightarrow l$ 和 $\lambda' : F \rightarrow l'$, 都存在唯一的同构 $\lambda \cong \lambda'$, 与两个余极限锥形的每条边都交换.

我们注意到, 这个结果告诉我们, 极限和余极限没有非平凡的自同态.

定义 3.25 一个**积**是以一个离散范畴为指标范畴的图的极限. \mathbf{C} 中以离散范畴 \mathbf{J} 为指标的图是一族离散的对象 $\{F_j\}_{j \in \mathbf{J}}$. 这图上的一个锥形是一族态射 $(\lambda_j : c \rightarrow F_j)_{j \in \mathbf{J}}$. 极限一般被记为 $\prod_{j \in \mathbf{J}} F_j$, 极限锥形的边被记为

$$(\pi_k : \prod_{j \in \mathbf{J}} F_j \rightarrow F_k)_{k \in \mathbf{J}}$$

被称为**投影**. \diamond

定义 3.26 一个**终对象**常常被视为积的平凡情况, 指标范畴是空范畴. 一个空的图上的锥形, 只有一个最高点. 任何最高点之间的态射定义了空锥形之间的态射. 用这种方法定义的终对象与定义3.15是等价的. \diamond

定义 3.27 一个**等值子**是以只有一对平行态射为指标的图的极限. 这里的一对平行态射不太准确, 应该说, 指标范畴如下图所示.



如上图形状的图一定是范畴 \mathcal{C} 中的平行态射 $f, g : A \rightarrow B$. 图上以 C 为最高点的锥形由态射 $a : C \rightarrow A$ 以及态射 $b : C \rightarrow B$ 组成, 且满足 $fa = b, ga = b$. 事实上, 这两个方程说明 $fa = ga$. 于是, 一对平行映射 $f, g : A \rightarrow B$ 上的锥形只由单个映射 $a : C \rightarrow A$ 决定.

如下的图被称为**等值子图**.

$$E \xrightarrow{h} A \xrightleftharpoons[g]{f} B$$

等值子的泛性质要求, 对任何给定的满足 $fa = ga$ 的映射 $a : C \rightarrow A$, 存在唯一的分解 $k : C \rightarrow E$ 使得下图交换.

$$\begin{array}{ccccc} C & & & & \\ \downarrow \exists! k & \searrow a & & & \\ E & \xrightarrow{h} & A & \xrightleftharpoons[g]{f} & B \end{array}$$

\diamond

例 3.22 群同态 $\phi : G \rightarrow H$ 以及平凡同态 $e : G \rightarrow H$ 的等值子是 $\ker \phi$, 锥型的边是嵌入 $\ker \phi \hookrightarrow G$

一对群同态 $\phi, \psi : G \rightrightarrows H$ 的等值子是 G 中使得 $\phi(g) = \psi(g)$ 的子群. \diamond

定义 3.28 一个**拉回**是以如下范畴为指标范畴的图的极限.



将这两个态射在 \mathbf{C} 中的像记为 f, g . 一个以 D 为顶点的锥形含有三个态射, 使得下图中的两个三角形都是交换的.

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{c} & C \\ \downarrow b & \searrow a & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

拉回 P 是 f 与 g 上的泛锥形. 满足如下图所示的泛性质. 有时 P 被称为**纤维积**, 经常被记为 $B \times_A C$. 如果 $B = 1$, 1 是 \mathbf{C} 中忘却函子 $U : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ 的泛元素, 那么 P 称为映射 $g : C \rightarrow A$ 在 f 上的**纤维**.

$$\begin{array}{ccccc} D & & \xrightarrow{c} & & C \\ & \searrow \exists! & & \searrow & \\ & P & \xrightarrow{k} & & C \\ & \downarrow h & & \downarrow g & \\ & B & \xrightarrow{f} & & A \end{array}$$

◇

例 3.23 考虑在范畴 \mathbf{Top} 中, $\rho : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ 定义为 $\rho(t) = e^{2\pi i t}$. 考虑下图, 容易验证 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ 确实是 $1 : 1 \rightarrow S^1$ 以及 $\rho : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ 的拉回. 纤维是被拉回映射的值域的子集并不是一个偶然的结果. 事实上, 将单态射 $B \rightarrowtail A$ 沿着任何态射 $C \rightarrow A$ 的拉回都定义了一个单态射 $B \times_A C \rightarrowtail C$.

◇

定义 3.29 以 ω^{op} 为指标范畴的图的极限被称为一系列态射的**反向极限**. 一个 ω^{op} 形状的图由如下的对象和态射组成:

图上以 c 为最高点的锥形由一族态射 $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ 组成, 使得下图中的每个三角形都是交换的.

反向极限通常被记为 $\lim_{\leftarrow} F_n$, 反向极限是所有这样锥形的范畴中的终对象.

◇

例 3.24 p -进制整数.

◇

对偶地, 我们可以定义余积, 余等值子, 推出, 正向极限.

例 3.25 $S^1 \vee S^1$ 是范畴 **Top** 中的图 $S^1 \leftarrow * \rightarrow S^1$ 的推出. 我们还可以继续进行推出, 下图得到的推出定义了环面 $T \cong S^1 \times S^1$.

i 是将 S^1 嵌入 D^2 的边缘的映射, 如果 a, b 是 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ 的两个生成元, 那么映射 $aba^{-1}b^{-1}$ 将 S^1 映到 $aba^{-1}b^{-1} \in S^1 \vee S^1$. \diamond

例 3.26 群同态 $\phi : G \rightarrow H$ 与平凡同态 $e : G \rightarrow H$ 的余等值子是**余核**, 即 H 商掉 $\text{im}\phi$ 生成的正规子群的商群. \diamond

例 3.27 一系列集合嵌入的余极限

$$X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow \dots$$

的余极限是这一列集合的并 $\bigcup_{n \geq 0} X_n$. 一个 CW 复形就是它的所有 n -骨架的并, 一个 n -骨架由粘贴维数至多为 n 的圆盘得到. \diamond

上述的这些例子, 说明了在数学中极限与余极限的普遍性. 但是, 对于一个给定的图, 我们如何求出该图的极限或余极限? 大致有两种策略, 第一种是猜出极限与余极限, 事实上, 所求的极限或余极限经常是这样得到的.

另一种方法是从简单的图的极限中构造更复杂的图的极限. 下一节中, 我们将在集合范畴中实现这一想法.

3.3.2 集合范畴中的极限

尽管极限可以在任意范畴中对任意形状的图定义, 但是这种具有特定泛性质的对象未必存在. 本节我们将给出 **Set** 中极限存在的构造性证明.

定义 3.30 一个图是**小的**, 如果它的指标范畴是个小范畴. 一个范畴 **C** 是**完备的**, 如果所有小图在 **C** 中都存在极限; 称它是**余完备的**, 如果所有的小图

在 \mathbf{C} 中都存在余极限. \diamond

为了证明 \mathbf{Set} 是完备的, 我们考虑一个小图 $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$. 图 F 的一个极限是一个表示

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, \lim F) \cong \mathrm{Cone}(-, F)$$

的表示元素. 我们将上述自然变换限制在单点集 $\{1\}$ 上, 从而得到

$$\lim F \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\{1\}, \lim F) \cong \mathrm{Cone}(\{1\}, F) \quad (3.2)$$

我们可以将这种动机作为小图 F 的极限的定义.

定义 3.31 (小图的极限) 对任何的小图 $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{Set}$, 定义

$$\lim F = \mathrm{Cone}(\{1\}, F).$$

即 F 的极限是 F 上所有以 $\{1\}$ 为最高点的锥形的集合. F 上的极限锥形的边为函数 $\lambda_j : \lim F \rightarrow F(j)$, 以 $j \in \mathbf{J}$ 为指标, 定义如下:

$$\lim F \xrightarrow{\lambda_j} F(j)$$

$$\mu : \{1\} \rightarrow \lim F \mapsto \mu_j : \{1\} \rightarrow F(j)$$

即, λ_j 是将 $\mathrm{Cone}(\{1\}, F)$ 中的一个以 $\{1\}$ 为顶点的锥形 μ 映到 μ 的第 j 条边 μ_j . 实际上 μ_j 可以视为集合 $F(j)$ 中的一个元素. \diamond

注 3.5 实际上, 上面对 \mathbf{J} 是小图的要求是重要的. 如果 \mathbf{J} 是一个小范畴, 那么 $\mathbf{Set}^{\mathbf{J}}$ 是一个局部小范畴. 因此, $\mathrm{Cone}(\{1\}, F)$ 作为 $\mathbf{Set}^{\mathbf{J}}$ 中的态射集是一个集合. 因此在这种情况下, Yoneda 引理是适用的, 所以 $\mathrm{Cone}(-, F)$ 是可表的. \diamond

定理 3.28 范畴 \mathbf{Set} 是完备的.

证明. 我们只要验证定义3.31的确定义了一个极限即可. 为此, 首先要验证, 定义3.31中的 $\lim F$ 的确是 F 上的一个锥形. 即, 对每个 \mathbf{J} 中的态射 $f : j \rightarrow k$, 都有下面的交换图成立.

对于任何一个 $\lim F$ 中的元素 $\mu : 1 \rightarrow F$, 我们有 $F(f)(\lambda_j(\mu)) = F(f)(\mu_j) = \mu_k = \lambda_k(\mu)$. 第二个等号成立的原因是 $\mu \in \text{Cone}(\{1\}, F)$ 是 F 上的一个锥形.

加下来要证明的是 $\lambda : \lim F \rightarrow F$ 的泛性质, 即, 考虑一个以 X 为最高点的一个锥形 $\zeta : X \rightarrow F$, 都存在一个映射 $r : X \rightarrow \lim F$, 使得 μ 能唯一分解为 r 与 λ . X 中的每个元素 x , 都可以视为函数 $x : \{1\} \rightarrow X$, 因此存在一个锥形 $\zeta x : 1 \rightarrow F$. 定义 $r(x) \in \lim F = \text{Cone}(\{1\}, F)$ 为锥形, 根据 λ 的边的定义,

$$\lambda_j(r(x)) = \lambda_j(\zeta x) = (\zeta x)_j = \zeta_j(x)$$

这就证明了锥形 ζ 的确是 r 和 λ 的合成. \square

注 3.6 集合中的极限大概是 $\prod_{j \in J} F(j)$ 中满足所有 $F(i) \rightarrow F(j) \rightarrow F(k) \dots$ 的构形的集合? \diamond

我们还可以利用定义3.31来计算 **Set** 中的一些极限.

例 3.28 给定一堆平行态射 $f, g : X \rightrightarrows Y$, 他们的等值子是所有使得 $f(x) = g(x)$ 的映射 $x : \{1\} \rightarrow X$ 的集合. 即, 等值子 E 是如下的集合

$$E = \{x \in X | f(x) = g(x)\}.$$

\diamond

例 3.29 图 $F : \omega^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ 的极限是以元素 $(x_n \in F_n)_{n \in \omega}$ 为分量的数组 $(x_n)_n$:

$$\lim F = \{(x_n)_n \in \prod_{n \in \omega} F_n | f_{n,n-1}(x_n) = x_{n-1}\}.$$

\diamond

例 3.30 函数 $f : B \rightarrow A$ 与 $g : C \rightarrow A$ 的拉回是如下的集合

$$B \times_A C = \{(b, c) \in B \times C | f(b) = g(c)\}.$$

\diamond

例 3.31 G -集合 $X : \mathbf{BG} \rightarrow \mathbf{Set}$ 的极限是所有满足 $gx = x, \forall g \in G$ 的映射 $x : \{1\} \rightarrow X$ 的映射组成的集合. 即, $\lim X = X^G$, X 的极限是 G 在 X 中的不动点集. \diamond

定理 3.29 \mathbf{Set} 中的任何小图的极限都可表示成积之间一对映射的等值子. 即, 对任何小的 $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{Set}$, 都存在一个等值子图

$$\lim_{\mathbf{J}} F \hookrightarrow \prod_{j \in \text{obj} \mathbf{J}} F(j) \rightrightarrows \prod_{f \in \text{mor} \mathbf{J}} F(\text{cod} f).$$

3.3.3 极限与余极限的保持, 反射, 和创生

定义 3.32 对于任何类型的图 $K : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$, 函子 $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, L 是图 K 上的任意锥形, 称函子 F

- (i.) **保持**极限, 当且仅当 L 是 K 的极限 $\implies F(L)$ 是 FK 的极限;
- (ii.) **反射**极限, 当且仅当 $F(L)$ 是 FK 上的极限 $\implies L$ 是 K 的极限;
- (iii.) **创生**极限, 当且仅当图 FK 在 \mathbf{D} 中存在极限 \implies 图 K 在 \mathbf{C} 中存在极限, 且 F 反射极限.

\diamond

将上述定义对偶, 可以得到余极限的保持, 反射和创生的定义.

人们最感兴趣的情形是, 当函子 $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ 保持极限或余极限, 且 \mathbf{D} 中这些极限的存在性是已知的. 在这种情况下, 创生极限的函子同时也保持和反射极限:

命题 3.30 若 $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ 创生 \mathbf{C} 中某一类图的极限, 且 \mathbf{D} 中存在这类图的极限, 那么 \mathbf{C} 中也存在这类图的极限, 且 F 保持这些极限.

证明. 对任何满足命题的要求的图 $K : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$, 根据假设, \mathbf{D} 中存在 FK 的极限 μ . 由于 F 生成极限, 所以 \mathbf{C} 中一定存在图 K 的一个极限 λ , 使得 $F(\lambda)$ 是 \mathbf{D} 中 FK 的极限. 这就证明了 \mathbf{C} 中也存在图 K 的极限. 为了证明 F 保持极限, 假设 K 在 \mathbf{C} 中存在另外一个极限 λ' , 显然 λ 与 λ' 是同构的. 由于 F 的函子性, F 保持同构态射, 所以 $F(\lambda)$ 与 $F(\lambda')$ 在 \mathbf{D} 中也是同构的. 因此 $F(\lambda')$ 也是 \mathbf{D} 中的一个极限, 这就证明了 F 保持极限. \square

下面的引理介绍了一类保持或生成极限的函子.

引理 3.31 任何完全忠实函子反射其值域中的极限或余极限.

引理 3.32 任何范畴的等价都保持, 反射, 生成其定义域或值域中的余极限.

注 3.7 注意到, 完全忠实函子无法生成值域中的极限的原因是, 一个完全忠实函子未必是本质满的. 而范畴之间的等价是完全忠实而本质满的. 因此 Yoneda 嵌入 $y : \mathbf{C} \hookrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ 未必生成极限, 只能反射极限. \diamond

除了范畴等价的情况, 我们还会经常遇到下面定义的函子.

定义 3.33 一个函子 $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ **严格创生** 一类图的极限, 当且仅当对这类图中的任何图 $K : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$, 图 FK 在 \mathbf{D} 中的任何极限可以通过 F 唯一地提升到图 K 在 \mathbf{C} 中的极限. \diamond

一个非空范畴被称为**连通**的, 若 \mathbf{C} 中任意两个对象都可以通过有限个态射的复合连接. 一个图被称为是连通的, 如果这图的指标范畴是连通的.

命题 3.33 对任何的对象 $c \in \mathbf{C}$, 忘却函子 $\Pi : c/\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ 严格地创生:

- (i.) \mathbf{C} 中所有允许的极限,
- (ii.) \mathbf{C} 中所有连通的余极限.

证明. c/\mathbf{C} 中的一个图 $(K, \kappa) : \mathbf{J} \rightarrow c/\mathbf{C}$ 事实上是一个 \mathbf{C} 中的图 $K : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ 以及 K 上的以 c 为顶点的一个锥形 κ . 我们将要证明, 如果 K 在 \mathbf{C} 中存在一个极限, 那么这个极限可以被唯一地提升到 c/\mathbf{C} 中的锥形, 且这个锥形是 c/\mathbf{C} 中的一个极限. (我们可以直观地将 c/\mathbf{C} 中的图 (K, κ) 看成是交换图表中的一个底面, 而图 K, κ 上的锥形实际上是这个地面之外增加了一个顶点的几何意义上的锥形.)

给定 \mathbf{C} 中 K 的一个以 l 为最高点的极限 λ , \mathbf{C} 中 K 上的以 c 为最高点的锥形 κ 可以通过唯一的态射 $t : c \rightarrow l$ 进行分解. 我们可以按照步骤验证, c/\mathbf{C} 中的对象 $t : c \rightarrow l$ 实际上是 c/\mathbf{C} 中一个锥形的顶点, 且这个锥形是一个极限. 这就证明了极限可以被提升, 而 $t : c \rightarrow l$ 的唯一性保证了提升的唯一性. 这就证明了 $\Pi : c/\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ 严格创生 \mathbf{C} 中的极限.

假设 \mathbf{J} 是连通的, 且 K 在 \mathbf{C} 中有最低点为 p 的余极限 μ . 我们将证明这个余极限会通过 Π 唯一地提升为 c/\mathbf{C} 中的余极限. 提升的方法是, 选择任意的 \mathbf{J} 中的对象 j , 考虑态射 $\kappa_j : c \rightarrow K(j)$ 以及态射 $\mu_j : K(j) \rightarrow p$ 的复合 $\mu_j \kappa_j : c \rightarrow p$. 由于 \mathbf{J} 是一个连通的范畴, 所以 $\mu_j \kappa_j$ 与 j 的选择无关. 而 $\mu_j \kappa_j : c \rightarrow p$ 事实上是 c/\mathbf{C} 中图 (K, κ) 下的余极限的顶点.

□

我们最后要证明的结果是, 由函子组成的范畴继承了这些函子的值域中的极限和余极限. 即, 对于给定的一个 $\mathbf{C}^{\mathbf{A}}$ 中的 \mathbf{J} -形图, 图中的对象是函子 $F_j : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$, 那么这个图的极限是一个函子 $\lim_{j \in \mathbf{J}} F_j : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$. 函子 $\lim_{j \in \mathbf{J}} F_j$ 在对象 $a \in \mathbf{A}$ 中的取值 $(\lim_{j \in \mathbf{J}} F_j)(a)$ 是 \mathbf{C} 中 \mathbf{J} -形图的极限 $\lim_{j \in \mathbf{J}} F_j(a)$, 图中的对象是 $F_j(a)$. 为了更严格地描述这个结果, 我们小指标范畴 \mathbf{A} 的对象集视为 \mathbf{A} 的一个极大离散子范畴 $\text{ob} \mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{A}$.

命题 3.34 若 \mathbf{A} 是一个小范畴, 那么忘却函子 $\mathbf{C}^{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{C}^{\text{ob} \mathbf{A}}$ 严格地创生 \mathbf{C} 中存在的所有极限和余极限. 这些极限是逐对象定义的, 即对任何的对象 $a \in \mathbf{A}$, 赋值函子 $\text{ev}_a : \mathbf{C}^{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{C}$ 保持 $\mathbf{C}^{\mathbf{A}}$ 中所有的极限.

证明. 函子范畴 $\mathbf{C}^{\mathbf{obA}}$ 与以 \mathbf{obA} 为指标集的范畴 \mathbf{C} 与自身的积 $\prod_{\mathbf{obA}} \mathbf{C}$ 是同构的, 这是 \mathbf{CAT} 中一个 \mathbf{obA} -形图的极限. 根据积的泛性质, 积范畴 $\prod_{\mathbf{obA}} \mathbf{C}$ 中的 \mathbf{J} -形图是一族以 \mathbf{obA} 为指标的图 $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}_{\mathbf{obA}}$. 因此, 图 $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}_{\mathbf{obA}}$ 的每个分量的极限作积之后就成为了整个图 $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}_{\mathbf{obA}}$ 的极限, 也是 $\mathbf{C}^{\mathbf{obA}}$ 中的极限. 因此, \mathbf{C} 中的任何极限和余极限都可以提升到 $\mathbf{C}^{\mathbf{obA}}$ 中去, 且赋值函子 $\text{ev}_a : \mathbf{C}^{\mathbf{obA}} \rightarrow \mathbf{C}$.

为了证明 $\mathbf{C}^{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{obA}}$ 严格创生所有的极限和余极限, 我们需要证明对任何的图 $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{A}}$, 以 \mathbf{obA} 为指标集的一族极限 $\{\lim_{j \in \mathbf{J}} F_j(a)\}_{a \in \mathbf{obA}}$ 事实上定义了一个函子 $\lim_{j \in \mathbf{J}}$ 在 \mathbf{obA} 中的取值. 利用极限的泛性质, 我们可以定义函子 $\lim_{j \in \mathbf{J}} F_j$ 在 \mathbf{A} 中的态射 $f : a \rightarrow b$ 上的值 $(\lim_{j \in \mathbf{J}} F_j)(f)$ 为泛性质决定的极限之间的唯一映射 $\lim_{j \in \mathbf{J}} F_j(a) \rightarrow \lim_{j \in \mathbf{J}} F_j(b)$. 映射的唯一性保证了 $\lim_{j \in \mathbf{J}} F_j$ 的函子性. \square

3.3.4 极限与余极限的可表性

固定一个局部小范畴 \mathbf{C} 中的小图 $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$, 以及对象 $X \in \mathbf{C}$. 考虑复合函子 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, F(-)) : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, 它是 \mathbf{Set} 中的一个 \mathbf{J} 形图. 定理3.28告诉我们, 图 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, F(-))$ 的极限是存在的, 之后的定理告诉我们如何构造这个极限. 集合 $\lim_{j \in \mathbf{J}} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, F(j))$ 中的一个元素是积 $\prod_{j \in \mathbf{J}} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, F(j))$ 中的一个元素, 即是满足条一定条件的态射的积 $(\lambda_j : X \rightarrow F(j))_{j \in \mathbf{J}}$. 对于 \mathbf{J} 中的每个非平凡态射 $f : j \rightarrow k$, 都有下图交换:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \lambda_j \swarrow & & \searrow \lambda_k \\ F(j) & \xrightarrow{F(f)} & F(k) \end{array}$$

因此, $\lim_{j \in \mathbf{J}} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, F(-))$ 中的一个元素就是 \mathbf{Set} 中的 F 上的以 X 为最高点的一个锥形. 因此

$$\lim_{j \in \mathbf{J}} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, F(-)) \cong \text{Cone}(X, F)$$

稍加验证可知, 上述的同构对于 X 是自然的. 在本章最开始时, 我们利用 Yoneda 引理, 对图 F 的极限给出了定义3.23: F 的极限是函子 $\text{Cone}(-, F)$ 的一个表示对象. 于是我们得到如下结果:

定理 3.35 对任何存在极限的图 $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$, 存在如下的自然同构:

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, \lim_{\mathbf{J}} F) \cong \lim_{\mathbf{J}} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, F(-)). \quad (3.3)$$

上述的自然同构(3.3)表达了**极限的可表泛性质**, 即, 在一个局部小范畴 \mathbf{C} 中的以 \mathbf{J} 为指标范畴的图的极限, 可以通过 \mathbf{Set} 中的以 \mathbf{J} 为指标范畴的图的极限, 利用 Yoneda 引理将前者定义为后者的表示.

例 3.32 对象 $A \in \mathbf{C}$ 在任意指标集上的与自身的积被称为**幂或余张量**. 对于一个集合 I , A 的以 I 为指标的积被记为 $\prod_I A$ 或者 A^I . 积的可表泛性质通过自然同构:

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, A^I) \cong \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, A)^I$$

体现. 亦即, 一个映射 $h : X \rightarrow A^I$ 与它的分量 $(h_i : X \rightarrow A)_{i \in I}$ 是一一对应的. ◇

定理3.35有许多不同的表述值得单独列出.

命题 3.36 共变的可表函子 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ 保持在局部小范畴 \mathbf{C} 中的所有极限, 将这些极限映到 \mathbf{Set} 中的极限.

定理3.35的另一种表述是反变函子 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, \lim F)$, 当被视为范畴 $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ 中的一个对象时, 是图 yF 的一个极限. 其中 $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$, $y : \mathbf{C} \hookrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ 是共变的 Yoneda 嵌入. 更确切地表述是, Yoneda 嵌入 $y : \mathbf{C} \hookrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ 保持 \mathbf{C} 中的所有极限. 又根据 Yoneda 引理, Yoneda 嵌入是完全忠实的, 所以之前的引理说明 $y : \mathbf{C} \hookrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ 也反射 \mathbf{C} 中的所有极限. 综合起来得到:

定理 3.37 令 \mathbf{C} 为一个局部小范畴.

- (i.) 共变可表函子 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -)$ 保持 \mathbf{C} 中的所有极限.
- (ii.) 共变 Yoneda 嵌入 $y : \mathbf{C} \hookrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ 保持和反射 \mathbf{C} 中的所有极限.

相应地, 余极限的刻画可以由之前的步骤对偶得到. 对于固定的 $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ 以及 $X \in \mathbf{C}$, 考虑如下的复合函子:

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(F(-), X) = \mathbf{J}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}.$$

同样地, 定理3.28告诉我们上述复合函子的极限是存在的, 定理告诉我们如何构造这个极限. 集合 $\lim_{\mathbf{J}^{\text{op}}} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(F(-), X)$ 中的一个元素是积 $\prod_{j \in \mathbf{J}^{\text{op}}} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(F(j), X)$, 即一族满足相应条件的映射 $(\lambda_j : F(j) \rightarrow X)_{j \in \mathbf{J}}$. 对于每个 \mathbf{J} 中的非恒等态射 $f : j \rightarrow k$, 有如下的图表交换.

$$\begin{array}{ccc} F(j) & \xrightarrow{F(f)} & F(k) \\ & \searrow \lambda_j & \swarrow \lambda_k \\ & X & \end{array}$$

因此 $\lim_{\mathbf{J}^{\text{op}}} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(F(-), X)$ 中的一个元素就是 F 下的以 X 为最低点的锥形. 同构

$$\lim_{\mathbf{J}^{\text{op}}} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(F(-), X) \cong \text{Cone}(F, X)$$

依然对 X 是自然的. 这可以总结为如下的定理:

定理 3.38 对任何存在余极限的图 $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$, 存在如下的自然同构:

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(\text{colim}_{\mathbf{J}} F, X) \cong \lim_{\mathbf{J}^{\text{op}}} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(F(-), X).$$

定理3.38描述了余极限的可表泛性质, 即, 在一个范畴 \mathbf{C} 中的以 \mathbf{J} 为指标范畴的图的余极限, 可以通过 \mathbf{Set} 中的以 \mathbf{J}^{op} 为指标范畴的图的极限, 利用 Yoneda 引理来定义将前者定义为后者的表示元素.

例 3.33 对于局部小范畴 \mathbf{C} 中的任何三个对象 X, Y, Z , 余积的可表泛性质体现在如下的自然同构上:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X \coprod Y, Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, Z)$$

◇

例 3.34 对象 $A \in \mathbf{C}$ 在任意指标集上的与自身的余积被称为**余幂**或**张量**. 对于一个集合 I , A 的以 I 为指标的余积被记为 $\coprod_I A$ 或者 $I \cdot A$. 余幂的可表泛性质通过自然同构:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\coprod_I A, X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, X)^I$$

体现. 亦即, 一个映射 $h : \coprod_I A \rightarrow X$ 与它的分量 $h_i : A \rightarrow X$ 是一一对应的, 通过复合嵌入 $\iota_i : A \rightarrow \coprod_I A$. 当 $\mathbf{C} = \mathbf{Set}$ 时, 余幂 $\coprod_I A$ 与集合 $I \times A$ 是同构的.

◇

例 3.35 一个推出 P

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow g & \lrcorner & \downarrow h \\ W & \xrightarrow{k} & P \end{array}$$

的可表泛性质体现在, 对于任何一个对象 $X \in \mathbf{C}$, 态射集 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(P, X)$ 可以通过下面的拉回定义:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(P, X) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(h, X)} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V, X) \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(k, X) \downarrow & \lrcorner & \downarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(f, X) \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(W, X) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(g, X)} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(U, X) \end{array}$$

◇

定理3.37的对偶形式是

定理 3.39 令 \mathbf{C} 为一个局部小范畴.

- (i.) 反变可表函子 $\text{Hom}_C(-, X)$ 将 C 中的余极限映为 \mathbf{Set} 中的极限.
- (ii.) 逆变 Yoneda 嵌入 $y : C^{\text{op}} \hookrightarrow \mathbf{Set}^C$ 保持和反射 C^{op} 中的所有极限. 即, C 中一个图下的锥形是一个余极限当且仅当这个锥形在反变 Yoneda 嵌入下的像是 \mathbf{Set}^C 中的一个极限.

现在, 我们要应用定理3.39以及定理3.37来推广之前的定理, 构造任何范畴中的极限与余极限.

定理 3.40 任何小图 $F : J \rightarrow C$ 的余极限都可以表示为余积之间的一对态射的余等值子:

$$\coprod_{f \in \text{Mor} J} F(\text{dom} f) \rightrightarrows \coprod_{j \in \text{obj} J} F(j) \twoheadrightarrow \text{colim}_J F.$$

特别地, 任何具有余积和余等值子的范畴都是余完备的. 对偶地, 任何小图的极限都可以表示为积之间的一对态射的等值子, 任何具有积和等值子的范畴都是完备的.

注 3.8 在定理的证明中, 我们用到了**广义元素的哲学**.

我们首先注意到, 集合 A 中的元素与映射 $a : \{1\} \rightarrow A$ 是一一对应的. 映射 $f : A \rightarrow B$ 通过与映射 a 复合, 作用在元素 a 上, fa 包含了 $f(a)$ 的信息. 在任何的范畴 C 中, 一个对象 A 的**广义元素**是指一个值域为 A 的态射 $a : X \rightarrow A$. C 中的态射 $f : A \rightarrow B$ 通过态射之间的复合作用在 X -形的元素上, 得到 B 的一个 X 形的广义元素 fa . 利用广义元素的概念, 反变函子

$$\text{Hom}_C(-, A) : C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$$

将对象 X 映为 A 中所有 X -形的广义元素构成的集合. 有于 Yoneda 嵌入 $C \hookrightarrow \mathbf{Set}^{C^{\text{op}}}$ 是完全忠实的, 所以用函子 $\text{Hom}_C(-, A)$ 来代替 A 不会丢失信息.

特别地, 为了证明一对平行态射 $f, g : A \rightarrow B$ 是相等的, 我们只需要证明 f 与 g 作用在所有的广义元素上得到同样的态射. 或者说, 以 A 为最低点的锥形是一个极限锥形, 只需要证明对于任何形状的广义元素, 函

子 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, A)$ 在 \mathbf{Set} 中定义了一个极限锥形. 这些论述就构成了可表泛性质. \diamond

我们用广义元素的哲学的一个非正式的应用来结束这一节.

引理 3.41 在任何有终对象 1 的范畴中, 拉回图

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\pi_B} & B \\ \downarrow \pi_A & \lrcorner & \downarrow ! \\ A & \xrightarrow{!} & 1 \end{array}$$

定义了对象 A 与对象 B 的积.

任何存在拉回和一个终对象的范畴中, 可以定义任意两个对象的积, 重复这一步骤, 就可以得到任何有限的积.

引理 3.42 在任何具有二元积的范畴中, 拉回图

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{e} & A \\ \downarrow l & \lrcorner & \downarrow f \times g \\ B & \xrightarrow{1_g \times 1_g} & B \times B \end{array}$$

定义了一对平行态射 $f, g : A \rightrightarrows B$ 的等值子.

一个图被称为是**有限**的, 如果其指标范畴中只含有有限多个态射. 以上两个引理证明了:

定理 3.43 任何具有拉回和一个终对象的范畴具有所有的有限极限. 对偶地, 任何具有推出和一个初对象的范畴具有所有的有限余极限.

3.3.5 完备与余完备范畴

命题 3.44 范畴 **Set** 是余完备的.

证明. 根据定理3.40, 只需验证 **Set** 具有余积和余等值子. **Set** 中的余积是集合的不交并, 一对平行态射 $f, g : A \rightrightarrows B$ 的余等值子是集合 B 模掉 $f(a) \sim g(a)$ 生成的等价关系. \square

命题 3.45 范畴 **Top** 是完备且余完备的.

证明. 在从前的经验中我们得知, 忘却函子 $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ 被单点空间 $*$ 表示. 根据定理3.37, 如果 **Top** 中存在任何极限, 那么这极限一定是为 **Set** 中的相应极限赋予相应的拓扑得到.

我们如下构造一族拓扑空间 X_α 的积. 我们为集合的积 $\prod_\alpha X_\alpha$ 赋予积拓扑, 这是使得投影映射 $\pi_\beta : \prod_\alpha X_\alpha \rightarrow X_\beta$ 为连续映射的最粗拓扑. 一对连续映射 $f, g : X \rightrightarrows Y$ 的等值子定义为将 **Set** 中相应的等值子 $E \subset X$ 赋予子空间拓扑, 也是使得嵌入映射 $E \hookrightarrow X$ 为连续映射的最粗拓扑.

对偶地, 我们猜测 **Top** 中的余极限来自于给 **Set** 中的相应余极限赋予相应拓扑. 后面将会看到, **Top** 中的余极限必须要通过这种方式构造. **Top** 中的余积, 是为不交并 $\coprod_\alpha X_\alpha$ 赋予使得含入映射 $\iota_\beta : X_\beta \rightarrow \coprod_\alpha X_\alpha$ 连续的最细拓扑. 一对连续映射 $f, g : X \rightrightarrows Y$ 的余等值子, 是为 **Set** 中的余等值子 $Y_{/\sim}$ 赋予商拓扑得到的, 这是使得商映射 $Y \twoheadrightarrow Y_{/\sim}$ 连续的最细拓扑.

我们已经构造出了 **Top** 中的积与等值子, 余积与余等值子, 根据定理3.40, 命题得证. \square

例 3.36 像前一个命题的证明中的那样, 我们可以构造 **Top** 中的任何极限与余极限: 先构造相应的 **Set** 中的极限与余极限, 再赋予相应的拓扑使得极限锥形或余极限锥形的边是连续的. 极限赋予最粗的拓扑, 余极限赋予最细的拓扑. \diamond

Set 与 **Top** 的完备性与余完备性能够推出 **Set**_{*} 与 **Top**_{*} 的完备性与余完备性, 作为如下结果的一个特例:

命题 3.46 如果 **C** 是完备且余完备的, 那么切片范畴 c/\mathbf{C} 以及 \mathbf{C}/c 也是完备且余完备的.

证明. 我们只要证明 c/\mathbf{C} 的结果即可. 如果 **C** 是完备且余完备的, 那么 c/\mathbf{C} 中存在所有由忘却函子 $\Pi : c/\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ 创造的极限和连通的余极限. 因此, c/\mathbf{C} 是完备的, 为了证明 c/\mathbf{C} 是余完备的, 我们只需证明 c/\mathbf{C} 中存在余积即可. 由于 c/\mathbf{C} 中具有初对象 1_c , 再利用我不清楚的方法构造余积即可. \square

我们考虑在 **Cat** 与 **CAT** 中图的极限. 我们之前的例子说明, 函子 $\text{ob}, \text{mor} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Set}$ 都是可表函子, 分别被范畴 **1** 和 **2** 表示, 根据定理3.37, ob 和 mor 都保持极限. 这说明, 如果在 **Cat** 或 **CAT** 中的图的极限存在, 那么这极限的对象集一定是相应的对象集的极限; 这极限的态射集一定是相应的态射集的极限. 更进一步, 定义域, 值域以及恒等态射都被保持. 这些现象告诉我们

命题 3.47 范畴 **Cat** 与 **CAT** 是完备的.

例 3.37 考虑 $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ 以及 $U : \mathbf{Set}_* \rightarrow \mathbf{Set}$ 在 **CAT** 中的拉回. 这是一个范畴, 范畴中的对象是由 $c \in \mathbf{C}$ 以及 $(X, x) \in \mathbf{Set}_*$ 满足 $F(c) = X$, 范畴中的态射是满足 $F(f) = U(g)$ 的态射对 $f : c \rightarrow c'$ 以及 $g : (X, x) \rightarrow (X', x')$, 简言之, 这个拉回是 F 的元素范畴 $\int F$. \diamond

Cat 和 **CAT** 也是余完备的. 在这两个范畴中, 余积是比较容易想象的, 将离散图中的范畴做类似余积的构造即可. 但是, 推出却是较难想象的.

我们最后要知道, 完备性和余完备性都是范畴等价不变的. 特别地, 一个原序关系 (preorder) 是完备且余完备的当且仅当它的 skeleton, 即一个偏序集 (poset) 是完备且余完备的.

命题 3.48 一个偏序集 P 是完备且余完备的, 当且仅当它是一个**完全格**, 即当且仅当每个子集 $A \subset P$ 同时具有上确界 (最小上界) 和下确界 (最大下界).

证明. 对于任何的偏序集, 一个图的极限是该图的对象集的下确界; 一个图的余极限是该图的对象集的上确界. \square

例 3.38 在任何具有有限极限范畴中, 态射 $f : X \rightarrow Y$ 的**核对 (kernel pair)** 是指 f 沿自身的拉回:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{t} & X \\ \downarrow s & \lrcorner & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

拉回确定了一个单射 $(s, t) : R \hookrightarrow X \times X$. 在 **Set** 中, 子集 $R \subset X \times X$ 定义了 X 上的一个关系. 事实上, 由核对定义的关系是等价关系, 在如下的范畴论意义上: 自反的映射由下面的交换图定义:

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & X \\ & \searrow \rho & & \nearrow 1_X & \\ & R & \xrightarrow{t} & X & \\ & \downarrow s & \lrcorner & \downarrow f & \\ & X & \xrightarrow{f} & Y & \end{array}$$

(Note: The diagram above is a simplified representation of the one in the image. The image shows a more complex diagram with an additional 1_X arrow from X to X and a curved arrow from X to R labeled 1_X .)

对称的映射由下面的交换图定义:

$$\begin{array}{ccccc} R & & & & X \\ & \searrow \sigma & & \nearrow s & \\ & R & \xrightarrow{t} & X & \\ & \downarrow s & \lrcorner & \downarrow f & \\ & X & \xrightarrow{f} & Y & \end{array}$$

(Note: The diagram above is a simplified representation of the one in the image. The image shows a more complex diagram with an additional t arrow from R to X and a curved arrow from R to X labeled s .)

传递性由下面的交换图定义:

$$\begin{array}{ccccc}
 R \times_X R & \xrightarrow{\tilde{t}} & R & \xrightarrow{t} & X \\
 \downarrow \tilde{s} & \lrcorner & \downarrow s & & \\
 R & \xrightarrow{t} & X & & \\
 \downarrow s & & & & \\
 X & & & &
 \end{array}$$

一个具有有限极限的范畴 \mathbf{C} 中的等价关系是一个子对象 $(s, t) : R \rightrightarrows X \times X$ 以及态射 ρ, σ, τ 满足上面的三幅交换图表. 态射 $s, t : R \rightrightarrows X$ 的余等值子定义了商映射 $e : X \twoheadrightarrow X/R$. 在 \mathbf{Set} 中, X/R 是所有 X 中的 R -等价类构成的集合. 当等价关系是一个核对应时, 存在唯一的分解:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \searrow e & & \nearrow m \\
 & X/R &
 \end{array}$$

◇

3.3.6 极限与余极限的函子性

我们知道, 如果一个图具有多个极限或余极限, 那么它们是分别相互同构的, 我们选择其中一个作为极限或余极限是相当任意的. 但是, 我们有下面这个结果. 需要注意的是, 函子性未必代表正则性, 我们的选择仍然是相当任意的.

命题 3.49 如果 \mathbf{C} 中包含所有 \mathbf{J} -形图的极限, 那么对每个 \mathbf{J} -形图选择一个极限定义了一个函子 $\lim_{\mathbf{J}} : \mathbf{C}^{\mathbf{J}} \rightarrow \mathbf{C}$.

证明. 对于每一个图 $F \in \mathbf{C}^{\mathbf{J}}$, 选择 F 的一个极限. 这就定义了函子 $\lim_{\mathbf{J}}$ 在对象上的作用. 我们只需要定义 $\lim_{\mathbf{J}}$ 在态射上的作用. 我们先选定图 F 的一个

极限锥形 $\lambda : \lim_j F \rightarrow F$, 在考虑图 F 与图 G 之间的自然变换 $\alpha : F \rightarrow G$. λ 与 α 的复合 $\alpha\lambda : \lim_j F \rightarrow F \rightarrow G$, 这是图 G 上的以 $\lim_j F$ 为最高点的一个锥形. 这个锥形在极限锥形 $\lim_j G \rightarrow G$ 上可以唯一分解. 我们将锥形最高点 $\lim_j F$ 与 $\lim_j G$ 之间的唯一映射定义为 $\lim_j \alpha : \lim_j F \rightarrow \lim_j G$. 极限锥形的泛性质使得 \lim_j 保持函子的复合. \square

推论 3.50 图之间的自然同构诱导了这些图之间的极限或余极限之间的自然定义的同构, 如果这些图的极限或余极限存在.

Eilenberg 与 MacLane 建立自然性概念的主要动机, 就是要能够正确地描述上面的推论. 尽管在当时极限与余极限的一般理论尚未建立, 它们依证明了上面的推论在有向图情况下的特例. 在上面的推论中, 极限之间同构的自然性是一个必要条件.

例 3.39 对任何群 G , 两个 G -集合 $X, Y : \mathbf{BG} \rightarrow \mathbf{Set}$, X, Y 之间的一一对应只是对象同构, 不是自然同构. 仅当 X, Y 之间的一一对应能够保持群作用, 即是 G -集合之间的 G -映射时, 对象同构才变成自然同构.

我们考虑群 \mathbb{Z}_2 以及 \mathbb{Z}_2 -集合 $2, 2'$. 2 和 $2'$ 都是具有两个元素的集合. \mathbb{Z}_2 平凡地作用在 2 上, 不平凡地作用在 $2'$ 上. 2 和 $2'$ 显然是对象同构的, 却不是自然同构的. 因为不存在保持 \mathbb{Z}_2 作用的一一对应. 通过计算两个集合的极限与余极限, 我们能够看到二者确实不是自然同构的.

对于一个 G -集合 $X : \mathbf{BG} \rightarrow \mathbf{Set}$, 其极限是 G 在 X 中的不动点集, 其余极限是 G 在 X 中的轨道集合. $\lim 2$ 是两个元素的集合, 而 $\lim 2'$ 是空集. $\operatorname{colim} 2$ 是两个元素的集合, 而 $\operatorname{colim} 2'$ 是单点集. \diamond

尽管选择相互同构的极限是等价的, 但是它们之间的自然同构却未必是恒等的. 我们首先观察到:

引理 3.51 对于任何具有二元积的范畴中的任意三个对象 X, Y, Z , 存在一个

唯一的自然同构 $X \times (Y \times Z) \cong (X \times Y) \times Z$, 使得这同构与到 X, Y, Z 的投影映射是交换的.

上面的引理告诉我们, 积是满足自然的结合律的. 因此, 用二元积构造任何的有限积的顺序是无关的. 但是, 引理中的唯一的自然同构, 未必是恒等. 下面就给出一个例子.

例 3.40 考虑范畴 \mathbf{skSet} . 由于 \mathbf{skSet} 与 \mathbf{Set} 是等价的, 所以 \mathbf{skSet} 也是完备的. 令 C 为可数无穷的集合. 假设自然同构 $C \times (C \times C) \cong (C \times C) \times C$ 是恒等, 那么, 根据自然性, 对任何三个映射 $f, g, h : C \rightarrow C$ 有 $f \times (g \times h) = (f \times g) \times h$. 由于积泛性质, 积之间的映射是相等的当且仅当它们的分量是相等的. 因此, 有 $f = f \times g$ 以及 $g \times h = h$. 由于 f, g, h 是任意的, 因此有 $f = f \times g = g$, 即 C 到自身的任意两个态射都是相同的. 这显然是荒谬的. 因此, 自然同构 $C \times (C \times C) \cong (C \times C) \times C$ 不是恒等. \diamond

3.3.7 极限与余极限的关系

考虑多变量的函子, 我们很自然地考虑对每个变量求极限. 根据极限和余极限的泛性质, 如果对全部的变量都取极限或余极限, 那么最终的结果与取极限的顺序无关. 但是, 如果一部分变量取极限另一部分变量取余极限, 由于极限和余极限的方向是不同的, 所以一般情况下两个操作时不可交换的.

我们首先考虑两个变量的函子 $F : I \times J \rightarrow C$, 这可以视为 I -形图 $F : I \rightarrow C^J$ 或 J -形图 $F : J \rightarrow C^I$. 若对每个 $j \in J$, $\lim_{i \in I} F(i, j)$ 都存在, 根据3.34, 这些对象 $\{\lim_{i \in I} F(i, j)\}_{j \in J}$ 实际上是一个函子 $\lim_{i \in I} F(i, -) : J \rightarrow C$ 在对象 $j \in J$ 中的取值. 下面的定理证明, 这个 J -形图 $\lim_{i \in I} F(i, -) : J \rightarrow C$ 的极限如果存在, 则与 I -形图 $\lim_{j \in J} F(-, j) : I \rightarrow C$ 的极限是同构的.

定理 3.52 若极限 $\lim_{i \in I} \lim_{j \in J} F(i, j)$ 以及 $\lim_{j \in J} \lim_{i \in I} F(i, j)$ 在 C 中存在, 则二者是同构的, 并定义了图 $F : I \times J \rightarrow C$ 的极限.

证明. 根据 Yoneda 引理, 为了证明这三个极限是同构的, 只要证明自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, \lim_{i \in \mathbf{I}} \lim_{j \in \mathbf{J}} F(i, j)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, \lim_{(i, j) \in \mathbf{I} \times \mathbf{J}} F(i, j)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, \lim_{j \in \mathbf{J}} \lim_{i \in \mathbf{I}} F(i, j))$$

即可. 根据定理3.37, 共变可表函子 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -)$ 保持极限:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, \lim_{i \in \mathbf{I}} \lim_{j \in \mathbf{J}} F(i, j)) \cong \lim_{i \in \mathbf{I}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, \lim_{j \in \mathbf{J}} F(i, j)) \cong \lim_{i \in \mathbf{I}} \lim_{j \in \mathbf{J}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, F(i, j)).$$

对另一种顺序的取极限也有同样的结果. 我们只需要证明对任何 \mathbf{Set} 值的函子 $H : \mathbf{I} \times \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{Set}$, 特别是函子 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, F(-))$,

$$\lim_{i \in \mathbf{I}} \lim_{j \in \mathbf{J}} H(i, j) \cong \lim_{(i, j) \in \mathbf{I} \times \mathbf{J}} H(i, j) \cong \lim_{j \in \mathbf{J}} \lim_{i \in \mathbf{I}} H(i, j)$$

成立. 由于范畴 $\mathbf{I} \times \mathbf{J} \cong \mathbf{J} \times \mathbf{I}$, 我们只要证明左面的同构即可.

我们知道, 集合 $\lim_{(i, j) \in \mathbf{I} \times \mathbf{J}} H(i, j)$ 是 $\mathbf{I} \times \mathbf{J}$ -形图 H 上以 $\{1\}$ 为最高点的所有锥型的集合. 集合 $\lim_{i \in \mathbf{I}} \lim_{j \in \mathbf{J}} H(i, j)$ 是 \mathbf{I} -形图 $\lim_{j \in \mathbf{J}} H(-, j)$ 上以 $\{1\}$ 为最高点的所有锥型的集合. 后者中的一个锥形是由边

$$\{\lambda_i : \{1\} \rightarrow \lim_{j \in \mathbf{J}} H(i, j)\}_{i \in \mathbf{I}}$$

构成, 这些边与极限之间的映射 $\lim_{j \in \mathbf{J}} H(i, j) \rightarrow \lim_{j \in \mathbf{J}} H(i', j)$ 交换. 极限之间的映射由命题3.49定义. 之后再仔细验证即可. \square

根据定理3.52以及其对偶, 求极限的操作可以相互交换, 求余极限的操作也可以相互交换. 根据极限与极限泛性质中的唯一性, 我们知道存在如下的自然同构:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^{\mathbf{I} \times \mathbf{J}} & \xrightarrow{\lim_{\mathbf{J}}} & \mathbf{C}^{\mathbf{I}} \\ \lim_{\mathbf{I}} \downarrow & \cong & \downarrow \lim_{\mathbf{I}} \\ \mathbf{C}^{\mathbf{J}} & \xrightarrow{\lim_{\mathbf{J}}} & \mathbf{C} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^{\mathbf{I} \times \mathbf{J}} & \xrightarrow{\mathrm{colim}_{\mathbf{J}}} & \mathbf{C}^{\mathbf{I}} \\ \mathrm{colim}_{\mathbf{I}} \downarrow & \cong & \downarrow \mathrm{colim}_{\mathbf{I}} \\ \mathbf{C}^{\mathbf{J}} & \xrightarrow{\mathrm{colim}_{\mathbf{J}}} & \mathbf{C} \end{array}$$

但取极限和去余极限的操作的可交换性更加复杂, 二者往往是不能交换的. 不过, 总是存在如下的正则比较态射:

引理 3.53 对任何的双函子 $F : I \times J \rightarrow C$, 如果下面展示的极限和余极限存在, 则存在一个正则比较函子:

$$\kappa : \operatorname{colim}_{i \in I} \lim_{j \in J} F(i, j) \rightarrow \lim_{j \in J} \operatorname{colim}_{i \in I} F(i, j).$$

为了记忆比较函子 κ 的方向, 我们先看最外层的操作, 由于余极限总是具有“出发”的泛性质, 极限总是有“到达”的泛性质, 所以 κ 的方向是如上所示的.

证明. 根据余极限的泛性质, 我们想定义一个正则态射

$$\kappa : \operatorname{colim}_{i \in I} \lim_{j \in J} F(i, j) \rightarrow \lim_{j \in J} \operatorname{colim}_{i \in I} F(i, j),$$

只需定义其分量

$$\{\kappa_i : \lim_{j \in J} F(i, j) \rightarrow \lim_{j \in J} \operatorname{colim}_{i' \in I} F(i', j)\}_{i \in I}.$$

但根据极限的泛性质, 我们要定义上述的 κ 的分量, 只需在定义 κ 的分量的分量

$$\{\kappa_{i,j} : \lim_{j' \in J} F(i, j') \rightarrow \operatorname{colim}_{i' \in I} F(i', j)\}_{j \in J}.$$

于是, 我们定义 $\kappa_{i,j}$ 为 $\pi_{i,j} : \lim_{j' \in J} F(i, j') \rightarrow F(i, j)$ 与 $\iota_{i,j} : F(i, j) \rightarrow \operatorname{colim}_{i' \in I} F(i', j)$ 的复合. 由于投影映射和含入映射都是极限和余极限自带的映射, 不依赖于选择公理, 所以得到的 κ 是正则的.

□

当 C 是偏序集 (\mathbb{R}, \leq) 时, 我们立刻得到如下的推论.

推论 3.54 对任何的集合 X, Y 以及任何的函数 $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, 当相应的上确界和下确界存在时, 总有

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y) \leq \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y).$$

定义 3.34 一个范畴 \mathbf{J} 被称为**滤子化**的, 如果 \mathbf{J} 中每个有限的图下都有一个锥形. 一个**滤子化余极限**是指一个图 $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ 的余极限, 其中 \mathbf{J} 是一个滤子化的范畴. \diamond

例 3.41 范畴 ω , 或更一般地, 任何序范畴, 都是滤子化的. 只有一个对象和一个非单位幂等元的范畴也是滤子化的. 多于一个对象的离散范畴不是滤子化的. 范畴 $\cdot \rightrightarrows \cdot$, 以及范畴 $\cdot \leftarrow \cdot \rightarrow \cdot$ 也不是滤子化的. \diamond

定理 3.55 在 \mathbf{Set} 中, 滤子化余极限与有限极限交换.

证明. 设 \mathbf{I} 是一个有限范畴, \mathbf{J} 是一个滤子化小范畴. 我们需要证明对任何的双函子 $F : \mathbf{I} \times \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{Set}$, 正则比较态射

$$\kappa : \operatorname{colim}_{i \in \mathbf{I}} \lim_{j \in \mathbf{J}} F(i, j) \rightarrow \lim_{j \in \mathbf{J}} \operatorname{colim}_{i \in \mathbf{I}} F(i, j)$$

是一个双射. 由于讨论的是 \mathbf{Set} 中的极限与余极限, $\lim_{j \in \mathbf{J}} \operatorname{colim}_{i \in \mathbf{I}} F(i, j)$ 中的一个元素是以 $\{1\}$ 为顶点, 图 $\operatorname{colim}_{j \in \mathbf{J}} F(-, j)$ 上的一个锥形, 记为 λ . 由于 \mathbf{I} 是有限的, 所以锥型具有有限条边 $\lambda_i \in \operatorname{colim}_{j \in \mathbf{J}} F(i, j)$, 满足有限个交换条件, 且每条边都是一个锥形. 由于 \mathbf{J} 是滤子化的, 所以一定存在一个对象 $t \in \mathbf{J}$, 使得对于每个 $i \in \mathbf{I}$, \mathbf{J} -形图 $F(i, -) : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{Set}$ 下都有以 $F(i, t)$ 为最低点的锥形 λ'_i . 由于 λ_i 是 \mathbf{J} -形图 $F(i, -) : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{Set}$ 的余极限, 余极限的泛性质告诉我们存在唯一的映射 $\lambda_i \rightarrow \lambda'_i$. 因此, 我们实际上对每个 $i \in \mathbf{I}$ 都得到了态射 $\lambda'_i : \{1\} \rightarrow F(i, t)$, 这样的一族态射 $\{\lambda'_i : \{1\} \rightarrow F(i, t)\}_{i \in \mathbf{I}}$ 事实上是 $\lim_{i \in \mathbf{I}} F(i, t)$ 中的一个元素. 我们再对 $\lim_{i \in \mathbf{I}} F(i, t)$ 中的 t 取余极限, 得到的结果为 λ_i . 由于 κ 完全由极限和余极限的泛性质决定, 是唯一的, 这就证明我们找到的 $\{\lambda'_i\}_{i \in \mathbf{I}}$ 是 $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbf{I}}$ 在 κ 下的一个原像. 所以 κ 是满的.

考虑 κ 左端的两个锥形 $\alpha : \{1\} \rightarrow F(-, j)$ 与 $\beta : \{1\} \rightarrow F(-, k)$, $j, k \in \mathbf{J}$ 是 \mathbf{J} 中的对象. 如果这两个锥形在 κ 下具有共同的像, 根据 κ 的构造方法, 对于每个 $i \in \mathbf{I}$, 一定存在某个 $t_i \in \mathbf{J}$ 使得 α_i 和 β_i 在 $F(i, t_i)$ 中相同. 由于 \mathbf{I} 是有限的, \mathbf{J} 是滤子化的, 一定存在某个 $t \in \mathbf{J}$ 使得对所有的 i , α_i 与 β_i 在 $F(i, t)$ 中的像是相同的. 但根据极限的泛性质, 这就说明 α 与 β 是相同的锥形, 证明了 κ 是单的. \square

3.4 伴随

3.4.1 伴随函子

定义 3.35 (伴随 1) 一个**伴随**由两个函子 $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ 以及 $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ 组成, 且对于每个 $c \in \mathbf{C}$ 以及 $d \in \mathbf{D}$ 都有如下的同构:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(c), d) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, G(d)) \quad (3.4)$$

对两个变量都是自然的. 称 F 为 G 的**左伴随**, G 是 F 的**右伴随**. (3.4)中出现的一一对应的态射 $f^{\#} : F(c) \rightarrow d$ 以及 $f^{\flat} : c \rightarrow G(d)$ 被称为互为**伴随**或互为**转置**的. \diamond

定义3.35中对 \mathbf{D} 的自然性要求是指, 对任何的态射 $k : d \rightarrow d'$, 如下的图表在 \mathbf{Set} 中是交换的:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(c), d) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, G(d)) \\ \downarrow k_* & & \downarrow G(k)_* \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(c), d') & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, G(d')) \end{array} \quad \forall F(c) \xrightarrow{f^{\#}} d \iff \begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{f^{\flat}} & G(d) \\ & \searrow (k \circ f^{\#})^{\flat} & \downarrow G(k) \\ & & G(d') \end{array}$$

即对任何的 $f^{\#} : F(c) \rightarrow d$ 以及 $k : d \rightarrow d'$, $k f^{\#}$ 的转置等于 $G(k) f^{\flat}$.

对偶地, 对 \mathbf{C} 中的自然性是指对任何的态射 $h : c' \rightarrow c$ 如下的图表在 \mathbf{Set} 中是交换的:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(c), d) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, G(d)) \\ \downarrow F(h)^* & & \downarrow h^* \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(c'), d) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c', G(d)) \end{array} \quad \forall F(c) \xrightarrow{f^{\#}} d \iff \begin{array}{ccc} c & & \\ \downarrow h & \searrow (f^{\#} \circ F(h))^{\flat} & \\ c' & \xrightarrow{f^{\flat}} & G(d') \end{array}$$

即对任何的 $f^{\#} : F(c) \rightarrow d$ 以及任何的 $h : c' \rightarrow c$, $f^{\#} F(h)$ 的转置是 $f^{\flat} h$.

下面的引理, 提供了自然性的另一种表述. 这在证明中是较为易用的.

引理 3.56 伴随 $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ 以及 $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ 的自然性要求等价于下图左边的图表在 \mathbf{D} 中交换当且仅当下边的图表在 \mathbf{C} 中交换.

$$\begin{array}{ccc} F(c) & \xrightarrow{f^\sharp} & d \\ \downarrow F(h) & & \downarrow k \\ F(c') & \xrightarrow{g^\sharp} & d' \end{array} \iff \begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{f^\flat} & G(d) \\ \downarrow h & & \downarrow G(k) \\ c' & \xrightarrow{g^\flat} & G(d') \end{array}$$

注 3.9 如果 $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ 是 $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ 的左伴随, 我们记 $F \dashv G$ 或 $G \vdash F$. \diamond

例 3.42 忘却函子 $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ 同时具有左伴随和右伴随. 忘却函子 U 的左伴随从集合 S 构造一个拓扑空间, 使得这个从这个空间出发到另一个空间 T 的连续函数与 $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(S, U(T))$ 中的映射自然地一一对应. S 上的离散拓扑具有这种泛性质, 将 S 赋予离散拓扑后得到的拓扑空间记为 $D(S)$, 任意的函数 $S \rightarrow U(T)$ 都是一个连续函数 $D(S) \rightarrow T$.

类似地, U 的右伴随从集合 S 构造一个拓扑空间, 使得从拓扑空间 T 出发到这个拓扑空间的连续函数与 $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(U(T), S)$ 中的函数一一对应. S 上的平凡拓扑具有这种泛性质. 将 S 赋予平凡拓扑之后的空间记为 $I(S)$, 任何函数 $U(T) \rightarrow S$ 都是一个连续函数 $T \rightarrow I(S)$.

两个原序关系之间的伴随被称为 **(单调) Galois 关联**. 两个原序关系之间的函子 $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ 以及 $G : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ 不过是保序映射. 一个伴随 $F \dashv G$ 说明

$$F(a) \leq b \iff a \leq G(b)$$

对所有的 $a \in \mathbf{A}$ 以及 $b \in \mathbf{B}$ 成立. 此时, F 被称为下伴随, G 被称为上伴随. \diamond

例 3.43 有一大类重要的“自由 \dashv 忘却”伴随. 忘却函子 U 定义了右伴随, 自由函子 F 定义了左伴随. 如果可以用 \mathbf{S} 类型的对象构造一个 \mathbf{A} 类型具有泛性质的对象, 且这种构造定义了一个忘却函子 $U : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{S}$, 那么我们就用形容词“自由”来代替形容词“泛”, 强调这种特殊的关系. 如下的忘却函子有左伴随, 定义了“自由”的构造.

(i.) $U : \mathbf{Set}_* \rightarrow \mathbf{Set}$. 左伴随将一个集合 X 映到带基点的集合 $X_+ : X \amalg \{X\}$,

为 X 添加一个任意的基点.

- (ii.) $U : \mathbf{Monoid} \rightarrow \mathbf{Set}$. X 上的自由幺半群是 $\coprod_{n \geq 0} X^n$, 元素是用 X 中的元素构成的有限长度的字符串.
- (iii.) $U : \mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Ab}$, 忘却乘法结构. Abel 群 A 上的自由环是 $\bigoplus_{n \geq 0} A^{\otimes n}$.
- (iv.) $U : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Set}$. 集合 X 上的自由 Abel 群是 $\bigoplus_X \mathbb{Z}$.
- (v.) $U : \mathbf{Mod}_R \rightarrow \mathbf{Set}$. X 上的自由 R -模是 $\bigoplus_X R$.
- (vi.) $U : \mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Set}$. 将两个左伴随复合, 集合 X 上的自由环是 $\bigoplus_{n \geq 0} (\bigoplus_X \mathbb{Z})^{\otimes n}$.
- (vii.) $(-)^{\times} : \mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Grp}$, 将一个环映到它的单位元素构成的群. 一个群 G 上的自由环是群环 $\mathbb{Z}[G] = \bigoplus_G \mathbb{Z}$, 其中的元素是 G 中元素的有限形式和, 乘法是群中自带的乘法.
- (viii.) $\mathbf{Ab} \hookrightarrow \mathbf{CMonoid}$ 将所有 Abel 群构成的范畴嵌入到所有交换幺半群构成的范畴. 左伴随 \mathbf{Gr} 将一个交换幺半群 $(M, +, 0)$ 映到它的群完备化, 也被称为 **Grothendieck 群**: 作为一个集合, $\mathbf{Gr}(M, +, 0)$ 是 $M \times M$ 商掉关系 $(a, b) \sim (a', b')$ if 存在某个 $c \in M$ 使得 $a + b' + c = a' + b + c$.
- (ix.) $\mathbf{Group} \hookrightarrow \mathbf{Monoid}$. 左伴随是将一个幺半群映到这个幺半群上的自由群商掉上一个例子中出现的等价关系.
- (x.) $\phi^* : \mathbf{Mod}_S \rightarrow \mathbf{Mod}_R$ 是由一个环同态 $\phi : R \rightarrow S$ 诱导的**标量的限制**. 它的左伴随, $S \otimes_R - : \mathbf{Mod}_R \rightarrow \mathbf{Mod}_S$ 被称为**标量的扩张**.
- (xi.) $\phi^* : \mathbf{Set}^{BG} \rightarrow \mathbf{Set}^{BH}$, 由群同态 $\phi : H \rightarrow G$ 诱导的标量限制. ϕ^* 的左伴随被称为**分导**.

以上的所有“自由 + 忘却”类型的伴随, 都是一个**单子伴随**的例子. ◇

例 3.44 (Frobenius 定理) 上面的最后一个例子可推广到任意的完备与余完备范畴 \mathbf{C} : 对任何的群同态 $\phi : H \rightarrow G$, 限制函子 $\phi^* : \mathbf{C}^{BG} \rightarrow \mathbf{C}^{BH}$ 同时具有

左伴随和右伴随. ϕ 在绝大多数情况下是子群的嵌入 $H \subset G$, 我们称左伴随为**诱导**, 右伴随为**余诱导**. 令 $\mathbf{C} = \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$, 我们有如下伴随:

$$\begin{array}{ccc} & \text{ind}_H^G & \\ \text{C}^{BG} & \xleftarrow{\quad} & \text{C}^{BH} \\ & \text{res}_H^G & \\ & \text{coin}_H^G & \end{array}$$

伴随 $\text{ind}_H^G \dashv \text{res}_H^G$ 在表示论中被称为 Frobenius 定理. \diamond

例 3.45 忘却函子 $U : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{DirGraph}$ 有一个左伴随 F , 定义了在一个有向图上的**自由范畴**. 一个**有向图** G 由一个顶点集 V 和一个箭头集 E 以及两个确定箭头的源和靶的函数 $s, t : E \rightrightarrows V$ 组成. G 上的自由范畴以 V 为其对象集, 态射集由每个顶点的单位态射以及有限个箭头合成的道路组成. 态射之间的复合定义为道路的拼接.

上面的伴随定义了函子 $F(G) \rightarrow \mathbf{C}$ 与有向图之间的态射 $G \rightarrow U(\mathbf{C})$ 之间的自然双射. 一个函子 $F(G) \rightarrow \mathbf{C}$ 定义了 \mathbf{C} 中的一个图, 但没有交换性的要求, 因为一个有向图没有定义映射的复合. 这个有向图的数具由 G 的顶点以及箭头在 F 下的像唯一确定. 这些箭头组成了范畴 $F(G)$ 中的**原子箭头**, 没有非平凡的分解. \diamond

3.4.2 单位与余单位

回忆, 一个伴随是一对方向相反的函子 $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ 再加上一个自然同构 $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(c), d) \cong \text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, G(d))$. 固定 $c \in \mathbf{C}$, 这个自然同构告诉我们对象 $F(c) \in \mathbf{D}$ 表示了函子 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, G(-)) : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{Set}$. 根据 Yoneda 引理, 自然同构 $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(c), -) \cong \text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, G(-))$ 由 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, GF(c))$ 中的一个元素确定, 是 $1_{F(c)}$ 的一个转置, 记为 η_c . 转置的自然性确保所有的映射 η_c 是一个自然变换 $\eta : 1_{\mathbf{C}} \rightarrow GF$ 的分量.

引理 3.57 给定一个伴随 $F \dashv G$, 存在一个自然变换 $\eta : 1_{\mathbf{C}} \rightarrow GF$, 被称为伴随的**单位**. 它在 c 处的分量 $\eta_c : c \rightarrow GF(c)$ 定义为 $1_{F(c)}$ 的转置.

证明. 根据引理3.56, 有下面的交换图成立, 从而立刻证明了 η 的自然性.

$$\begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{\eta_c} & GF(c) \\
 f \downarrow & & \downarrow GF(f) \\
 c' & \xrightarrow{\eta_{c'}} & GF(c')
 \end{array}
 \iff
 \begin{array}{ccc}
 F(c) & \xrightarrow{1_{F(c)}} & F(c) \\
 F(f) \downarrow & & \downarrow F(f) \\
 F(c') & \xrightarrow{1_{F(c')}} & F(c')
 \end{array}$$

□

对偶地, 在(3.4)中固定 $d \in \mathbf{D}$, 对象 $G(d) \in \mathbf{C}$ 表示了反变函子 $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(-), d) : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$. 根据 Yoneda 引理, 自然同构 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, G(d)) \cong \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(-), d)$ 由 $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(FG(d), d)$ 中的一个元素确定, 是 $1_{G(d)}$ 的转置, 记为 ϵ_d . 根据引理3.57的对偶, ϵ_d 构成了自然变换 $\epsilon : FG \rightarrow 1_{\mathbf{D}}$ 的分量.

引理 3.58 给定一个伴随 $F \dashv G$, 存在一个自然变换 $\epsilon : FG \rightarrow 1_{\mathbf{D}}$, 被称为伴随的**余单位**. 它在 d 处的分量 $\epsilon_c : FG(d) \rightarrow d$ 定义为 $1_{G(d)}$ 的转置.

引理3.57和引理3.57证明了任何伴随都存在单位和余单位. 反之, 如果 $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ 和 $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ 是一对相反的函子, 且具有自然变换 $\eta : 1_{\mathbf{C}} \rightarrow GF$ 以及 $\epsilon : FG \rightarrow 1_{\mathbf{D}}$ 满足满足一对对偶的条件, 那么这些数据可以用来定义一个自然的双射 $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(c), d) \cong \text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, G(d))$, 使得 F 和 G 是相互伴随的. 于是伴随可以定义如下

定义 3.36 (伴随 2) 一个**伴随**由一对相反的函子 $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}, G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ 以及自然变换 $\eta : 1_{\mathbf{C}} \rightarrow GF, \epsilon : FG \rightarrow 1_{\mathbf{D}}$ 满足如下的**三角恒等式**:

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{F(\eta)} & FGF \\
 \searrow 1_F & & \downarrow \epsilon_F \\
 & & F
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\eta_G} & GFG \\
 \searrow 1_G & & \downarrow G(\epsilon) \\
 & & G
 \end{array}$$

◇

上图左边的三角形是在 $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ 中的一个交换三角形, 右边的是在 $\mathbf{C}^{\mathbf{D}}$ 中的交换三角形.

三角恒等式说明“余单位是单位的左逆模掉平移”. 余单位和单位不是真正的逆, 因为单位的分量 $\eta_c : c \rightarrow GF(c)$ 是 \mathbf{C} 中态射, 余单位的分量 $\epsilon_d : FG(d) \rightarrow d$ 是 \mathbf{D} 中的态射, 二者无法复合. 但是如果我们将 F 作用在单位的分量上, 我们得到了 \mathbf{D} 中的一个态射 $F\eta_c : F(c) \rightarrow FGF(c)$, 它的左逆是 $\epsilon_{F(c)}$. 如果我们将 G 作用在余单位的分量上, 我们得到了一个 \mathbf{C} 中的态射 $G\epsilon_d : GFG(d) \rightarrow G(d)$, 它的右逆是 $\eta_{G(d)}$.

命题 3.59 给定一对函子 $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}, G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$, 存在一个自然同构 $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(c), d) \cong \text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, G(d))$ 当且仅当存在一对自然变换 $\eta : 1_{\mathbf{C}} \rightarrow GF, \epsilon : FG \rightarrow 1_{\mathbf{D}}$ 满足三角恒等式.

证明. 根据引理3.57以及引理3.58, 一个自然同构 $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(c), d) \cong \text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, G(d))$ 保证了 $\eta : 1_{\mathbf{C}} \rightarrow GF$ 以及 $\epsilon : FG \rightarrow 1_{\mathbf{D}}$. 只需要验证三角恒等式. 根据引理3.56, 下面的四个图表中, 左上和右下的图表是交换的, 因为左下和右上的相应图表是自动交换的. 因此三角恒等式是被满足的.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc} Fc & \xrightarrow{1_{Fc}} & Fc \\ F\eta_c \downarrow & & \downarrow 1_{Fc} \\ FGFc & \xrightarrow{\epsilon_{Fc}} & Fc \end{array} & \Leftrightarrow & \begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{\eta_c} & GFc \\ \eta_c \downarrow & & \downarrow 1_{GFc} \\ GFc & \xrightarrow{1_{GFc}} & GFc \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc} FGd & \xrightarrow{1_{FGd}} & FGd \\ 1_{FGd} \downarrow & & \downarrow \epsilon_d \\ FGd & \xrightarrow{\epsilon_d} & d \end{array} & \Leftrightarrow & \begin{array}{ccc} Gd & \xrightarrow{\eta_{Gd}} & GFGd \\ 1_{Gd} \downarrow & & \downarrow G\epsilon_d \\ Gd & \xrightarrow{1_{Gd}} & Gd \end{array}
 \end{array}$$

反之, 单位和余单位可以用来定义自然同构 $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(c), d) \cong \text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, G(d))$. 给定态射 $f^{\#} : F(c) \rightarrow d$ 以及 $g^{\flat} : c \rightarrow G(d)$, 我们将它们的伴随定义为复合 $f^{\flat} = \eta_c G(f^{\#})$ 以及 $g^{\#} = F(g^{\flat}) \epsilon_d$. $f^{\#} : F(c) \rightarrow d$ 连续取两次伴随等于下图的

最上边的态射

$$\begin{array}{ccccccc}
 F(c) & \xrightarrow{F(\eta_c)} & FGF(c) & \xrightarrow{FG(f^\sharp)} & FG(d) & \xrightarrow{\epsilon_d} & d \\
 & \searrow 1_{F(c)} & \searrow \epsilon_{F(c)} & & \nearrow f^\sharp & & \\
 & & F(c) & & & &
 \end{array}$$

根据 ϵ 的自然性以及一个三角恒等式, 我们得到上图是交换的, 即 f^\sharp 的两次伴随等于自身. 利用同样的方法, $g^\flat : c \rightarrow G(d)$ 的两次伴随也等于自身. 这就说明了 $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(c), d)$ 与 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, G(d))$ 之间存在一个自然同构. \square

单位和余单位的存在, 可以让我们建立如下的偏序集之间 Galois 关联的不动点公式.

推论 3.60 若 \mathbf{A}, \mathbf{B} 是偏序集且 $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ 以及 $G : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ 构成了一个 Galois 关联, 那么 F, G 满足如下的不动点公式:

$$\begin{aligned}
 FGF &= F, \\
 GFG &= G.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

证明. 根据三角恒等式, $F(a) \leq FGF(a) \leq F(a)$ 对所有的 $a \in \mathbf{A}$ 成立, 这样我们得到 $FGF = F$. 另一个公式是对偶的. \square

3.4.3 逆变及多变量伴随函子

定义 3.37 一对反变函子 $F : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{D}, G : \mathbf{D}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{C}$ 被称为是**相互左伴随**的, 如果存在下面的自然同构:

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(c), d) \cong \text{Hom}_{\mathbf{C}}(G(d), c),$$

被称为是**相互右伴随**的, 如果存在下面的自然同构:

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}}(d, F(c)) \cong \text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, G(d)).$$

\diamond

我们容易验证, 一对相互左伴随的反变函子 $F : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{D}, G : \mathbf{D}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{C}$ 有一对余单位 $GF \rightarrow 1_{\mathbf{C}}, FG \rightarrow 1_{\mathbf{D}}$. 相应地, 一对相互右伴随的反变函子有一对单位 $1_{\mathbf{C}} \rightarrow GF, 1_{\mathbf{D}} \rightarrow FG$. 相应的三角恒等式分别为

$$\begin{array}{ccc} F & \xleftarrow{F\eta} & FGF \\ & \searrow 1_F & \downarrow \epsilon_F \\ & & F \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G & \xleftarrow{G\epsilon} & GFG \\ & \searrow 1_G & \downarrow \eta_G \\ & & G \end{array}$$

以及

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{F\eta} & FGF \\ & \searrow 1_F & \uparrow \epsilon_F \\ & & F \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{G\epsilon} & GFG \\ & \searrow 1_G & \uparrow \eta_G \\ & & G \end{array}$$

偏序集之间的相互右伴随有时被称为**反序 Galois 关联**.

在我们开始讨论多变量函子之前, 我们对普通的伴随做出如下观察:

命题 3.61 考虑一个函子 $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, 如果对每个 $a \in \mathbf{A}$, 都存在一个对象 $G(b) \in \mathbf{A}$ 以及一个对 $a \in \mathbf{A}$ 是自然的同构:

$$\text{Hom}_{\mathbf{B}}(F(a), b) \cong \text{Hom}_{\mathbf{A}}(a, G(b)),$$

那么存在一个唯一的方式, 使得对应 $G : \text{ob} \mathbf{B} \rightarrow \text{ob} \mathbf{A}$ 能够扩张成一个函子 $G : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$, 且 $F \dashv G$ 是一个伴随.

换言之, 如果 $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ 是一个函子, 且对每个 $b \in \mathbf{B}$, 函子

$$\text{Hom}_{\mathbf{B}}(F(-), b) : \mathbf{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$$

都是可表的, 则 F 存在右伴随 $F \dashv G$.

证明. 对于 \mathbf{B} 中的态射 $f : b \rightarrow b'$, 我们将 $G(f) : G(b) \rightarrow G(b')$ 的后置复合定义为

$$\text{Hom}_{\mathbf{A}}(a, G(b)) \cong \text{Hom}_{\mathbf{B}}(F(a), b) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{B}}(F(a), b') \cong \text{Hom}_{\mathbf{A}}(a, G(b')).$$

如上的复合定义了一个自然变换 $\text{Hom}_A(-, G(b)) \rightarrow \text{Hom}_A(-, G(b'))$, 根据 Yoneda 引理, 这自然变换对应唯一的一个态射 $G(b) \rightarrow G(b')$ 的后置复合. 这种定义函子的唯一性保证了 G 的函子性. \square

证明上面命题的方法可以推广到多变量函子.

命题 3.62 设 $F : A \times B \rightarrow C$ 是一个双函子, 如果对每个对象 $a \in A$, 导出的函子 $F(a, -) : B \rightarrow C$ 都存在一个右伴随 $G_a : C \rightarrow B$. 那么:

- (i.) 这些右伴随组成了唯一的双函子 $G : A^{\text{op}} \times C \rightarrow B$, 定义为 $G(a, c) = G_a(c)$, 使得同构

$$\text{Hom}_C(F(a, b), c) \cong \text{Hom}_B(b, G(a, c))$$

对三个变量都是自然的.

更进一步, 如果对每个对象 $b \in B$, 导出的函子 $F(-, b) : A \rightarrow C$ 都存在一个右伴随 $H_b : C \rightarrow A$, 那么:

- (i.) 存在唯一的双函子 $H : B^{\text{op}} \times C \rightarrow A$, 定义为 $H(b, c) = H_b(c)$, 使得同构

$$\text{Hom}_C(F(a, b), c) \cong \text{Hom}_B(b, G(a, c)) \cong \text{Hom}_A(a, H(b, c))$$

对每个变量都是自然的.

- (ii.) 在同样的条件下, 对每个 $c \in C$, 函子 $G(-, c) : A^{\text{op}} \rightarrow B$ 以及函子 $H(-, c) : B^{\text{op}} \rightarrow A$ 互为右伴随.

定义 3.38 三个双函子

$$F : A \times B \rightarrow C, G : A^{\text{op}} \times C \rightarrow B, H : B^{\text{op}} \times C \rightarrow A$$

以及自然同构

$$\text{Hom}_C(F(a, b), c) \cong \text{Hom}_B(b, G(a, c)) \cong \text{Hom}_A(a, H(b, c))$$

定义了一个二元伴随.

\diamond

特别地, 当 $F : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ 定义了 (非交换的) 乘法, 它的逐对象定义的权利伴随 G 和 H 分别被称为**左闭包**与**右闭包**. 如果它们定义了一个双函子伴随, 则称双函子 F 是**闭的**.

例 3.46 \mathbf{Set} 中的二元积作为一个双函子

$$\times : \mathbf{Set} \times \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$$

是闭的. 计算机科学中经常用到的 **Curry 化**定义了自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A \times B, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, C^B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(B, C^A).$$

因此集合之间的二元积与指数双函子定义了一个二元伴随. ◇

定义 3.39 一个 **Descartes 闭**的范畴是一个具有有限积的范畴 \mathbf{C} , 且其中的二元积双函子

$$\times : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$$

是闭的. ◇

除了 \mathbf{Set} , \mathbf{Fin} , \mathbf{Cat} , $\mathbf{Set}^{\mathbf{BG}}$ 以及 $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}}$ 都是 Descartes 闭的.

例 3.47 (拓扑空间的适宜范畴) \mathbf{Top} 不是 Descartes 闭的. 然而, Steenrod 证明了存在一个**拓扑空间的适宜范畴**, 是完备的, 余完备的且是 Descartes 闭的, 且足够大, 能够在其中得到 CW 复形. Steenrod 的适宜范畴是所有的 Hausdorff 空间和连续函数构成的范畴 \mathbf{Haus} 的一个子范畴, 记为 \mathbf{cgHaus} .

\mathbf{cgHaus} 中的对象称为**紧生成 Hausdorff 空间**. 一个对象 X 是一个 Hausdorff 空间, 并且若任何 X 的闭子集的子集 $A \subset X$ 与每个紧子集 $K \subset X$ 交 $A \cap K$ 都是 X 中的闭集. 嵌入 $\mathbf{cgHaus} \hookrightarrow \mathbf{Haus}$ 具有右伴随 $k : \mathbf{Haus} \rightarrow \mathbf{cgHaus}$, 被称为 **k -化**: 空间 $k(X)$ 是空间 X 的加细, 将定义中的闭集加入 X 的闭集族中.

根据后面的结果, 右伴随的存在性证明了 \mathbf{cgHaus} 是完备且余完备的. \mathbf{cgHaus} 中的积是 \mathbf{Haus} 中的积的 k -化. 逐对象定义的权利伴随 k 由下面的函数

空间 $\text{Map}(X, Y)$ 上的构造给出: $\text{Map}(X, Y)$ 中的元素是所有连续函数 $X \rightarrow Y$, 拓扑是紧开拓扑的 k -化. \diamond

例 3.48 考虑 Hom 双函子:

$$\text{Hom} : \mathbf{Ab}^{\text{op}} \times \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

$\text{Hom}(A, B)$ 是 Abel 群之间的同态 $A \rightarrow B$ 构成的群, 其中的加法在 B 中逐点定义. 将反变的变量固定, 函子 $\text{Hom}(A, -) : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ab}$ 与 $A \otimes_{\mathbb{Z}} - : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ab}$ 是互为伴随的. 自然同构

$$\text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A \otimes_{\mathbb{Z}} B, C) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(B, \text{Hom}(A, C))$$

定义了张量积. (我们假设对每个 B , $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ 都是存在的.) 根据命题3.61, $A \otimes_{\mathbb{Z}} - : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ab}$. 又根据命题3.62, 我们可以将这些数据扩张成一个双函子

$$\otimes_{\mathbb{Z}} : \mathbf{Ab} \times \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

称为**张量积函子**, 张量积函子与 Hom 函子定义了一个双函子伴随.

上面用 Hom 函子来定义张量积, 上述过程也可以反过来, 用张量积来定义 Hom 函子. 给定双函子 $\otimes_{\mathbb{Z}} : \mathbf{Ab} \times \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ab}$, Abel 群 $\text{Hom}(B, C)$ 可以定义为函子

$$\text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(- \otimes_{\mathbb{Z}} B, C) : \mathbf{Ab}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$$

的一个表示, 命题3.61以及命题3.62告诉我们, $\text{Hom}(,)$ 可以唯一地扩张成一个双函子. \diamond

3.4.4 伴随的计算

命题 3.63 若 F 和 F' 都是 G 的左伴随, 那么 $F \cong F'$, 且存在唯一的自然同构 $\theta : F \cong F'$ 与单位和余单位交换:

$$\begin{array}{ccc} 1_C & \xrightarrow{\eta} & GF \\ & \searrow \eta' & \downarrow G\theta \\ & & GF' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} FG & \xrightarrow{\epsilon} & 1_D \\ \downarrow \theta_G & \nearrow \epsilon' & \\ F'G & & \end{array}$$

证明使用 Yoneda 引理.

命题 3.64 给定两个伴随 $F \dashv G$ 以及 $F' \dashv G'$, 复合函子 $F'F$ 是复合函子 GG' 的左伴随.

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow[\scriptstyle G]{\scriptstyle \perp} \end{array} D \begin{array}{c} \xrightarrow{F'} \\ \xleftarrow[\scriptstyle G']{\scriptstyle \perp} \end{array} E \implies C \begin{array}{c} \xrightarrow{F'F} \\ \xleftarrow[\scriptstyle GG']{\scriptstyle \perp} \end{array} E$$

命题 3.65 任何的范畴等价 $F : C \rightarrow D, G : D \rightarrow C$ 都是一个伴随.

命题 3.66 给定一个伴随 $F : C \rightarrow D, G : D \rightarrow C$. 对任何的小范畴 J , F 和 G 的后置复合定义了一个伴随 $F_* : C^J \rightarrow D^J, G_* : D^J \rightarrow C^J$; 对任何的局部小范畴 E , F 和 G 的前置复合定义了一个伴随 $G^* : E^C \rightarrow E^D, F^* : E^D \rightarrow E^C$.

3.4.5 伴随, 极限与余极限

命题 3.67 一个范畴 C 中存在以小范畴 J 为指标的所有极限当且仅当常图函子 $\Delta : C \rightarrow C^J$ 存在右伴随; 存在以小范畴 J 为指标的所有余极限当且仅当常图函子 $\Delta : C \rightarrow C^J$ 存在左伴随

$$\begin{array}{ccc} & \text{colim} & \\ & \curvearrowright & \\ C & \xrightarrow{\Delta} & C^J \\ & \curvearrowleft & \\ & \text{lim} & \end{array}$$

当这些伴随存在时, 它们定义了命题3.49中定义的极限和余极限函子. 我们在这时需要用到选择公理.

证明. 对于 $c \in C$ 以及 $F \in C^J$, $\text{Hom}_{C^J}(\Delta c, F)$ 是所有在 c 处的 J -形常数图到 J -形图 F 之间的自然变换组成的集合, 而这就是图 F 上的以 c 为最高点的锥形的集合. 存在一个对象 $\lim F \in C$ 以及一个同构

$$\text{Hom}_{C^J}(\Delta c, F) \cong \text{Hom}_C(c, \lim F)$$

使得这个同构 $c \in \mathbf{C}$ 是自然的, 当且仅当极限是存在的. 如果上述的自然同构对每一个图 $F \in \mathbf{C}^{\mathbf{J}}$ 都是存在的, 根据命题3.61, 我们可以将这些对象 $\lim F$ 扩张成一个函子 $\lim : \mathbf{C}^{\mathbf{J}} \rightarrow \mathbf{C}$. \square

上面的命题告诉我们, 极限函子是常图函子的右伴随. 极限出现在右侧的原因是, 极限在最开始被定义为反变函子的表示: 图 $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ 的极限的泛性质决定了函子 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, \lim F)$.

类似地, 右伴随函子 $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ 在对象 $d \in \mathbf{D}$ 上的值由反变可表函子 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, G(d))$ 的分类所决定. 根据这些观察, 我们猜测, 右伴随函子应该对极限有很好的性质. 事实也正是如此:

定理 3.68 (RAPL) 右伴随函子保持极限.

定理的证明实际上就是在证明如下的自然同构:

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}^{\mathbf{J}}}(\Delta c, GK) \cong \text{Hom}_{\mathbf{D}^{\mathbf{J}}}(F\Delta c, K) \cong \text{Hom}_{\mathbf{D}^{\mathbf{J}}}(\Delta F(c), K) \cong \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(c), \lim_{\mathbf{J}} K) \cong \text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, G(\lim_{\mathbf{J}} K)).$$

对偶地, 有

定理 3.69 (LAPC) 左伴随函子保持余极限.

RAPL 与 LAPC 的推论是无处不在的.

推论 3.70 对任何函数 $f : A \rightarrow B$, $f^{-1} : P(B) \rightarrow P(A)$ 保持子集之间的交和并, $f_* : P(A) \rightarrow P(B)$ 只保持子集之间的并.

推论 3.71 对任何向量空间 U, V, W , 有

$$U \otimes (V \oplus W) \cong (U \otimes V) \oplus (U \otimes W).$$

证明. 函子 $U \otimes - : \mathbf{Vect}_k \rightarrow \mathbf{Vect}_k$ 是函子 $\mathrm{Hom}(U, -)$ 的左伴随, 所以保持余积 $V \oplus W$. \square

推论 3.72 对任何集合 A, B, C , 存在自然同构

$$\begin{aligned} A \times (B + C) &\cong (A \times B) + (A \times C), \\ (B \times C)^A &\cong B^A \times C^A, \\ A^{B+C} &\cong A^B \times A^C. \end{aligned}$$

证明. 左伴随 $A \times -$ 保持余积 $B + C$, 右伴随 $(-)^A$ 保持积 $B \times C$, 反变函子 $A^- : \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ 与自身互为右伴随, 将 \mathbf{Set} 中的余积映到 \mathbf{Set} 中的积. \square

我们在之前遇到的从 $\mathbf{Grp}, \mathbf{Ring}, \mathbf{Mod}_R$ 中出发的忘却函子, 都是右伴随, 所以能够将这些范畴中的极限映到集合范畴中的相应极限. 在之后的内容中, 我们将会看到, 这些忘却函子不只是保持相应的极限, 而且创生相应的极限. \mathbf{RAPL} 的对偶, \mathbf{LAPC} 在这时不是十分好用, 只能处理与“自由”图相关的余极限, 例如:

推论 3.73 集合 $X \coprod Y$ 上的自由群是 X 上的自由群与 Y 上的自由群的自由积.

任意的两个群之间的自由积, 将在之后叙述. 利用同样的语言, 可以叙述范畴 $\mathbf{Ab}, \mathbf{Ring}, \mathbf{Mod}_R$ 中的余积的构造.

\mathbf{RAPL} 与 \mathbf{LAPC} 在同调代数中有着重要的应用.

我们称一个范畴是 **Abel 范畴**, 如果这个范畴是模范畴的一个全子范畴, 在其中存在一个零对象 (同时是初对象和终对象的对象), 且对直和, 核与余核封闭.

定义 3.40 一个函子被称为是**右正合**的, 如果它保持有限的余极限; 被称为是**左正合**的, 如果它保持有限的极限. \diamond

根据定义3.40以及 RAPL 和 LAPC, 我们立刻得到

推论 3.74 对任何 *Abel* 范畴之间的伴随, 左伴随是右正合的, 右伴随是左正合的. 且两个函子都是加性的 (保持直和).

我们下面来证明这个结论的一个推论.

推论 3.75 对任何的 $R-S$ 双模 M , 张量积 $M \otimes_R -$ 是右正合的.

证明. 对任何的 $R-S$ 双模 M (M 同时是一个左 R -模和右 S -模), 存在一对伴随函子 $M \otimes_S - : \mathbf{Mod}_S \rightarrow \mathbf{Mod}_R, \text{Hom}_R(M, -) : \mathbf{Mod}_R \rightarrow \mathbf{Mod}_S$. 右伴随 $\text{Hom}_R(M, -)$ 将一个左 R -模 N 映到一个由模同态 $M \rightarrow N$ 组成的右 S -模. 作为一个左伴随, 函子 $M \otimes_S -$ 是右正合的. \square

对于一类重要的伴随, RAPL 和 LAPC 具有更强的形式.

定义 3.41 范畴 \mathbf{C} 的一个**反射子范畴**是一个全子范畴 \mathbf{D} , 使得嵌入 $\mathbf{D} \hookrightarrow \mathbf{C}$ 存在一个左伴随 $L : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, 这个左伴随被称为**反射子**或**局部化**. \diamond

引理 3.76 考虑伴随 $F \dashv G$, 余单位记为 $\epsilon : FG \rightarrow 1_{\mathbf{D}}$, 那么:

- (i.) G 是忠实的当且仅当 ϵ 的每个分量都是满态射.
- (ii.) G 是完全的当且仅当 ϵ 的每个分量都是分裂单态射.
- (iii.) G 是完全忠实的当且仅当 ϵ 的每个分量都是一个同构.

对偶地, 将单位记为 $\eta : 1_{\mathbf{C}} \rightarrow GF$, 那么:

- (i.) F 是忠实的当且仅当 η 的每个分量都是单态射.

- (ii.) F 是完全的当且仅当 η 的每个分量都是分裂满态射.
- (iii.) F 是完全忠实的当且仅当 η 的每个分量都是一个同构.

3.4.6 伴随函子的存在性

待续.

第四章 有限群的结构

本章主要参考 [4]

4.1 群在集合上的作用

定义 4.1 群 G 在集合 S 上的作用, 定义为从集合 $G \times S$ 到集合 S 的一个映射

$$\begin{aligned} G \times S &\rightarrow S \\ (g, x) &\mapsto gx, \end{aligned}$$

使得对 $\forall x \in S$ 以及 $\forall g_1, g_2 \in G$, 都有

$$\begin{aligned} ex &= x, \\ (g_1 g_2)x &= g_1(g_2 x) \end{aligned}$$

成立. 称 S 为一个 G -集合.

◇

我们可以得到如下定理:

定理 4.1 令 G 为作用在集合 S 上的群. 那么:

(i.) 在集合 S 上定义的关系

$$x \sim x' \iff gx = x', \exists g \in G$$

是一个等价关系.

(ii.) 对 $\forall x \in S, G_x = \{g \in G | gx = x\}$ 是 G 的一个子群.

上述定理中定义的等价关系生成的等价类被称为**群 G 在集合 S 上的轨道**, 记为 \bar{x} . 子群 G_x 被称为 x 的**迷向子群**.

若对 $\forall s \in S, gs = s \implies g = e$, 则称群 G 在集合 S 上的作用是**自由的**, 换言之, 对 $\forall s \in S, s$ 的迷向子群 G_s 是平凡的. 若对 $\forall s, s' \in S, \exists g \in G$ 使得 $gs = s'$, 则称群 G 在集合 S 上的作用是**可迁的**, 换言之, 集合 S 是由 S 中任一元素生成的轨道.

例 4.1 若群 G 作用于自身上, 群作用为通常定义的共轭作用. 那么 $h \in G$ 所在的轨道 $\{ghg^{-1} | g \in G\}$ 就是我们已经熟悉的 h 的共轭类.

如果 G 的子群 H 共轭地作用在 G 上, 那么对于某个 $x \in G, x$ 的迷向子群 $H_x = \{h \in H | h x h^{-1} = x\} = \{h \in H | h x = x h\}$ 被称为 x 在 H 中的**中心化子**, 并被记为 $C_H(x)$. 若 $H = G, C_G(x)$ 被简称为 x 的**中心化子**.

如果集合 S 是由 G 的所有子群组成的集合, H 共轭地作用在 S 上. 考虑 $K \in S$ 在 H 中的迷向子群, 即 $\{h \in H | h K h^{-1} = K\}$, 这被称为 K 在 H 中的**正规化子**, 被记为 $N_H(K)$. $N_G(K)$ 被简称为 K 的**正规化子**. 容易看出 K 是 G 的正规子群当且仅当 $N_G(K) = G$. \diamond

定理 4.2 若 G 作用在集合 S 上, $x \in S$ 的轨道的基数等于 G_x 在群 G 中的指标 $[G : G_x]$, 即

$$|\bar{x}| = [G : G_x].$$

即 G/G_x 与 $|\bar{x}|$ 间存在一个双射, 其中 G/G_x 是 G_x 在 G 中所有 (左) 陪集构成的集合.

证明 若令 $g, h \in G$, 我们注意到:

$$gx = hx \iff g^{-1}hx = x \iff g^{-1}h \in G_x \iff hG_x = gG_x,$$

从而在 G_x 的陪集与 x 的轨道 $\bar{x} = \{gx | g \in G\}$ 之间存在双射 $gG_x \mapsto gx$. 从而 $[G : G_x] = |\bar{x}|$. \square

上述证明的本质, 在于发现 G_x 作用在 x 上不会改变 x , 只有 G 中不同于 G_x 的元素才能使 x 变成其他的 S 中的元素. 我们看到, 对称性 (即作用在某个元素上不变) 代表了冗余.

推论 4.3 如果 G 可迁地作用在集合 S 上, 那么对于任意的 $x \in S$, S 与 G/G_x 间存在一一映射.

定义 4.2 令 S 为一个 G -集合, 如果 T 是另一个 G -集合, 则一个映射 $f : S \rightarrow T$ 被称为一个 G -映射, 如果 $f(gs) = gf(s)$ 对所有的 $g \in G, s \in S$ 都成立. \diamond

若 H, K 都是 G 的子群, 那么 G 可以作用在 H, K 在 G 中的陪集上, 即 G/H 和 G/K 都是较为自然的 G -集合. 而这样的 G -集合之间的 G -映射, 形式也可以被完全确定.

命题 4.4 G -映射 $\alpha : G/H \rightarrow G/K$ 具有形式 $\alpha(gH) = g\gamma K$, 其中 $\gamma \in G$ 满足 $\gamma^{-1}h\gamma \in K$ 对于所有的 $h \in H$ 都成立.

证明. 若 $\alpha(eH) = \gamma K$, 那么

$$\gamma K = \alpha(eH) = \alpha(hH) = h\alpha(eH) = h\gamma K$$

所以 $\gamma^{-1}h\gamma \in K$ 对 $\forall h \in H$ 都成立. \square

下面, 我们考虑定义如下的范畴 $\mathbf{O}(G)$:

定义 4.3 范畴 $\mathbf{O}(G)$ 的对象由所有的 G -集合 G/H 组成, 其中 H 是 G 的子群. 范畴 $\mathbf{O}(G)$ 中两个对象 G/H 与 G/K 之间的态射定义为它们之间的 G -映射. \diamond

在范畴 $\mathbf{O}(G)$ 中, 对象 G/H 到自身的所有态射构成的集合 $\text{Hom}_{\mathbf{O}(G)}(G/H, G/H)$ 事实上构成了一个群. 下面的定理给出了 $\text{Hom}_{\mathbf{O}(G)}(G/H, G/H)$ 的结构.

定理 4.5 令 H 为 G 的一个子群, 那么 $\text{Hom}_{\mathbf{O}(G)}(G/H, G/H)$ 事实上构成了一个群, 且满足

$$\text{Hom}_{\mathbf{O}(G)}(G/H, G/H) \cong N_G(H)/H.$$

群 $\text{Hom}_{\mathbf{O}(G)}(G/H, G/H)$ 作用于集合 G/H 是可迁的, 当且仅当 H 是 G 中的正规子群.

证明. 对于任何的 G/H 到自身的 G -映射 $\alpha : G/H \rightarrow G/H$, 根据命题 4.4, α 一定具有形式

$$\alpha(H) = k^{-1}H, \quad (4.1)$$

k^{-1} 是某个 G 中的元素 (选用这样的记号较为方便), 且满足 $kHk^{-1} \in H$, 但我们知道 $kHk^{-1} \cong H$, 所以 k 一定满足 $kHk^{-1} = H$, 即 $k \in N_G(H)$. 我们注意到 α 是一个满射, 因为对于任何的 $g \in G$, 都有 $gH = gkk^{-1}H = \alpha(gkH)$; α 还是一个单射, 因为 $\alpha(g_1H) = \alpha(g_2H) \implies g_1k^{-1}H = g_2k^{-1}H \implies kg_2^{-1}g_1k^{-1} \in H \implies g_2^{-1}g_1 \in H \implies g_1H = g_2H$. 这样, 我们验证了对于任意的 $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbf{O}(G)}(G/H, G/H)$ 事实上是一个一一映射. 更加容易验证的是 $\text{Hom}_{\mathbf{O}(G)}(G/H, G/H)$ 形成一个群, 如果将 (4.1) 中定义的映射记为 α_k , 那么 $\alpha_{k^{-1}} = \alpha_k^{-1}$, $\alpha_{kh} = \alpha_k \circ \alpha_h$, 所以 $\text{Hom}_{\mathbf{O}(G)}(G/H, G/H)$ 构成一个群. 此外:

$$\begin{aligned} N_G(H) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{O}(G)}(G/H, G/H), \\ k &\mapsto \alpha_k \end{aligned}$$

构成了一个满的群同态, 其为 H , 所以我们证明了

$$\text{Hom}_{\mathbf{O}(G)}(G/H, G/H) \cong N_G(H)/H.$$

如果 $\text{Hom}_{\mathbf{O}(G)}(G/H, G/H)$ 作用在 G/H 上是可迁的, 当且仅当对任何的 $g \in G$, 都存在一个 $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbf{O}(G)}(G/H, G/H)$ 使得 $\alpha(H) = gH$, 但根据开始的讨论, $g \in N_G(H)$. 所以, $\text{Hom}_{\mathbf{O}(G)}(G/H, G/H)$ 作用在 G/H 上是可迁的当且仅当 $N_G(H) = G$. \square

推论 4.6 令 G 为有限群, K 为 G 的子群.

(i.) $x \in G$ 所在的类的元素的个数等于 $[G : G_x]$

(ii.) 若 $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, x_i \in G$ 是 G 的所有共轭类, 那么

$$|G| = \sum_{i=1}^n [G : C_G(x_i)]$$

(iii.) G 中与 K 共轭的子群的数目是 $[G : N_G(K)]$.

定理 4.7 若群 G 作用在集合 S 上, 那么这个群作用诱导了一个群同态 $G \rightarrow A(S)$, 其中 $A(S)$ 是集合 S 的对称群.

推论 4.8 (Cayley 定理) 若 G 是一个群, 那么存在一个单的群同态 $G \rightarrow A(G)$. 于是, 每个群都与某个对称群的子群同构. 特别地, 每个有限群都和置换群 S_n 的子群同构, 其中 $|G| = n$.

证明 令 G 作用于自身, 作用为左移. 根据上一个定理, 我们得到了一个同态 $\tau : G \rightarrow A(S)$, 容易证明 τ 是单的. \square

推论 4.9 令 G 为一个群.

(i.) 对于每个 $g \in G$, g 通过共轭作用诱导了一个 G 上的自同构, 可以记为 τ_g .

(ii.) 在 G 与 $\text{Aut}(G)$ 之间存在一个映射, 这个映射就是 $\tau : G \rightarrow \text{Aut}(G)$, 且 $\ker \tau = C(G) = \{g \in G | gx = xg, \forall x \in G\}$.

推论中的自同态 τ_g 被称为由 g 诱导的内禀自同构. 正规子群 $C(G) = \ker \tau$ 被称为群 G 的中心. 元素 $g \in G$ 在 $C(G)$ 内当且仅当 g 的共轭类中只有 g 自身一个元素. 于是, 当 G 是有限群且 $x \in C(G)$, 那么 $[G : C_G(x)] = 1$. 相应地, 根据推论4.6, 群类方程应该写成

$$|G| = |C(G)| + \sum_{i=1}^m [G : C_G(x_i)]. \quad (4.2)$$

其中, $x_i \in G - C(G)$, 且 $|x_i| > 1$.

命题 4.10 令 H 为 G 的子群, 集合 S 是 H 在 G 中所有左陪集的集合. G 通过左移作用在 S 上. 那么, 诱导的同态 $G \rightarrow A(S)$ 的核含于 H .

推论 4.11 若 H 是 G 的子群, 且 H 在 G 中的指标为 n , H 中不含 G 的非平凡的正规子群, 那么 G 同构于 S_n 的一个子群.

证明 注意到, 命题中并未说明 G 是有限群. 对 H 应用上一个命题, 根据本推论的假设, $G \rightarrow A(S)$ 的核只能是平凡的. 所以 $G \rightarrow A(S)$ 是单同态. 因此, G 同构于 n 个左陪集的置换群的子群. \square

推论 4.12 若 H 是有限群 G 的子群, H 在 G 中的指标为 p . 若 p 是能够整除 $|G|$ 的最小素数, 那么 H 是 G 的正规子群.

证明 令 S 为 H 在 G 中的左陪集构成的集合. 那么 $A(S) \cong S_p$. 若 K 是同态 $G \rightarrow A(S)$ 的核, 那么 K 是正规的且含于 H . 同时 G/K 同构于 S_p 的一个子群. 因此 $|G/K|$ 能够整除 $|S_p| = p!$ 和 G . 根据假设, 没有任何比 p 小的整数能够整除 $|G|$, 那么 $|G/K|$ 一定为 p 或者 1. 然而 $|G/K| = [G : K] = [G : H][H : K] = p[H : K] \geq p$. 所以 $|G/K| = p$ 且 $[H : K] = 1$, 那么 $H = K$, K 是正规的. \square

4.2 Sylow 定理

非交换群的结构远比交换群的结构要复杂. 本节介绍的 Sylow 定理将是理解任意的有限群结构的第一个非平凡定理.

我们的问题是: 如果一个整数 m 能够整除群 G 的阶数, 那么 G 中是否存在一个 m 阶的子群? 这是 Lagrange 定理的逆问题. 对于有限的交换群, 回答是肯定的; 但对于任意的有限群, 则未必正确. 我们先考虑 m 是素数的情况 (Cauchy 定理), 接下来再考虑 m 是素数的幂的情况 (Sylow 第一定理). 随后, 我们将会讨论 m 取最大可能的素数的幂的情况 (Sylow 第二定理与第三定理).

引理 4.13 如果群 H 的阶数为 p^n , p 是素数. 令 p 作用一个有限集合 S 上. 如果定义 $S_0 = \{x \in S | hx = x \forall h \in H\}$, 那么 $|S| \equiv |S_0| \pmod{p}$.

证明 一条轨道 \bar{x} 只有一个元素, 当且仅当 $x \in S_0$. 所以, S 可以写成 S_0 与其余轨道的不交并: $S = S_0 \cup \bar{x}_1 \cup \bar{x}_2 \cdots \cup \bar{x}_n$, 且对所有的 i 都有 $|\bar{x}_i| > 1$. 那么 $|S| = |S_0| + |\bar{x}_1| + |\bar{x}_2| + \cdots + |\bar{x}_n|$. 由于 $|\bar{x}_i| = [H : H_{x_i}]$ 能够整除 $|H| = p^n$, 那么 $p \mid |\bar{x}_i|$, 因为 $|\bar{x}_i| > 1$, 于是 $|S| \equiv |S_0| \pmod{p}$. \square

我们称引理中的集合 S_0 为 H 作用在集合 S 上的**不动点集**.

定理 4.14 (Cauchy 定理) 若 G 是一个有限群, G 的阶数能够被一个素数 p 整除, 那么 G 中包含一个 p 阶的元素.

证明 令 S 为 G 中元素的 p 元有序数对组成的集合,

$$\{(a_1, a_2, \cdots, a_p) | a_i \in G, a_1 a_2 \cdots a_p = e\}.$$

显然 S 是非空的. 由于 a_p 可以被 $(a_1 a_2 \cdots a_{p-1})^{-1}$ 唯一确定, 所以 $|S| = n^{p-1}$, 设 $|G| = n$. 根据假设 $p \mid n$, 有 $|S| \equiv 0 \pmod{p}$. 令循环群 \mathbb{Z}_p 按照如下方式作用在 S 上: 对 $k \in \mathbb{Z}_p$, 有

$$k(a_1, a_2, \cdots, a_p) = (a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots, a_p, a_1, \cdots, a_k).$$

容易验证, 这样定义的 \mathbb{Z}_p 在 S 上的作用的确是一个群作用.

那么, 我们立刻可以得到, $(a_1, \dots, a_p) \in S_0$ 当且仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_p$. 由于 $(e, \dots, e) \in S_0$ 所以 $|S_0| \neq 0$. 根据引理4.13, 可以得到 $0 \equiv |S| \equiv |S_0| \pmod{p}$. 那么 S_0 中至少有 p 个元素. 即 $\exists a \in G, a \neq e$, 使得 $(a, a, \dots, a) \in S_0$, 所以 $a^p = e$. 因为 p 是素数, 所以 $|a| = p$. \square

如果一个群的每个元素的阶数都是某个固定素数 p 的幂次, 则称这个群是一个 p -群. 若 H 是 G 的子群而且 H 是一个 p 群, 则称 H 是 G 的一个 p -子群.

推论 4.15 一个有限群 G 是一个 p -群, 当且仅当 $|G|$ 是 p 的幂.

证明 若 G 是一个 p -群, 根据定义, G 中每个元素的阶数都是 p 的幂. 若 q 是一个素数, 且 $q \mid |G|$, 根据 Cauchy 定理, G 中有一个 q 阶的元素. 那么 $q = p$, $|G| \propto p$. 由于 $|G|$ 能够被所有 p 的幂次整除, 所以 $|G|$ 是 p 的幂次. 反之, 如果 $|G|$ 是 p 的幂次, 根据 Lagrange 定理, 每个元素的阶数一定是 p 的幂次, 从而 G 是一个 p -群. \square

推论 4.16 若 G 是一个有限的非平凡 p -群, 那么 G 的中心 $C(G)$ 的阶数大于 1.

证明 考虑群 G 的类方程(4.2):

$$|G| = |C(G)| + \sum [G : C_G(x_i)].$$

由于 $[G : C_G(x_i)] > 1$ 并且能够整除 $|G| = p^n$, 所以有 $p \mid [G : C_G(x_i)]$, 从而 $p \mid C(G)$. 由于 $C(G) \geq 1$, $C(G)$ 中至少有 p 个元素. \square

引理 4.17 若 H 是有限群 G 的 p -子群, 那么 $[N_G(H) : H] \equiv [G : H] \pmod{p}$

证明 令 S 为 H 在 G 中的左陪集, 令 H 左移地作用在 S 上, 那么 $S = [G : H]$. 同时, 有

$$xH \in S_0 \iff hxH = xH \forall h \in H \iff x^{-1}hx \in H, \forall h \in H \iff x^{-1}Hx = H \iff x \in N_G(H).$$

所以, $|S_0|$ 是满足 $x \in N_G(H)$ 的所有 xH 的数目, 所以 $|S_0| = [N_G(H), H]$. 根据引理4.13, $[N_G(H) : H] = |S_0| \equiv |S| = [G : H] \pmod{p}$. \square

推论 4.18 若 H 是有限群 G 的一个 p -子群, 且满足 $p \mid [G : H]$, 那么 $N_G(H) \neq H$.

证明 $0 \equiv [G : H] \equiv [N_G(H) : H] \pmod{p}$. 又因为 $[N_G(H) : H] \geq 1$, 所以一定有 $[N_G(H) : H] > 1$. 于是 $N_H \neq H$. \square

定理 4.19 (Sylow 第一定理) 令 G 为一群, 阶数为 $p^n m$, $n \geq 1$, p 是素数, p, m 互素. 那么, 对于每一个 $1 \leq i \leq n$, G 都有一个 p^i 阶的子群, 且 G 中的每一个 $p^i, i < n$ 阶的子群都在某个 p^{i+1} 阶的子群中正规.

证明 由于 $p \mid |G|$, 根据 Cauchy 定理, 存在一个元素 $a \in G$ 的阶数是 p , $\langle a \rangle$ 是 G 的 p 阶循环子群. 这完成了 $i = 1$ 时的证明. 下面我们用归纳法来证明定理.

假设 H 是 G 的一个 p^i 阶子群, 从而 $p \mid [G : H]$ 那么根据引理4.17以及推论(??), $H \neq N_G(H)$, 故 $1 < [N_G(H) : H] \equiv [G : H] \equiv 0 \pmod{p}$, 且根据 $N_G(H)$ 的定义 H 在 $N_G(H)$ 中是正规的. 现在考虑商群 $N_G(H)/H$, 因为 $p \mid |N_G(H)/H|$, 再用一次 Cauchy 定理, 商群 $N_G(H)/H$ 中存在一个 p 阶的子群, 根据群同态定理, 这子群一定具有 H_1/H 的形式, 其中 H_1 是 $N_G(H)$ 的包含 H 的子群. 由于 H 在 $N_G(H)$ 中正规, H 也在 H_1 中正规, 且 $|H_1| = |H||H_1/H| = p^i p = p^{i+1}$. 所以 H_1 就是要找的 p^{i+1} 阶子群. \square

群 G 的一个子群 P 被称为一个 **Sylow p -子群**, 如果 P 是 G 的一个最大 p -子群. 根据 Sylow 第一定理, Sylow p -子群总是存在的, 且每一个 p -子群都包含在一个 Sylow p -子群中. 对于有限群的情况, Sylow 第一定理告诉我们, 对于每一个能够整除 $|G|$ 的素数 p , G 都包含一个非平凡的 Sylow p -子群. 更进一步地, 我们有

推论 4.20 令 G 为一个 $p^n m$ 阶的群, 要求与定理4.19中的相同. 令 H 为 G 的

一个 p -子群.

- (i.) H 是 G 的一个 Sylow p -子群, 当且仅当 $|H| = p^n$.
- (ii.) 任何与 Sylow p -子群共轭的 G 的子群也是一个 Sylow p -子群.
- (iii.) 如果 G 只有一个 Sylow p -子群 P , 那么 P 在 G 中是正规的.

由于对于任意能够整除 $|G|$ 的 p , 所有的 Sylow p -子群都是相互共轭的. 所以我们有下面的结果

定理 4.21 (Sylow 第二定理) 若 H 是有限群 G 的一个 p -子群, P 是 G 的任意一个 Sylow p -子群, 那么存在 $x \in G$ 使得 H 含于 xPx^{-1} 中. 特别地, G 的任意两个 Sylow p -子群都是相互共轭的.

定理 4.22 (Sylow 第三定理) 若 G 是一个有限群, p 是一个素数, 那么 G 中 Sylow p -子群的个数整除 G 的阶数 $|G|$, 并能够写成 $kp + 1$ 的形式, k 是某个非负整数.

证明 根据 Sylow 第二定理, 若 P 是 G 的一个 Sylow p -子群, 那么 G 中的 Sylow p -子群的个数等于 P 的所有共轭类的个数, 亦即 $[G : N_G(P)]$, $[G : N_G(P)]$ 显然能够整除 G . 令集合 S 为 G 中所有 Sylow p -子群的集合, 令 P 共轭地作用在 S 上. 记 S_0 为 P 的不动点集. 那么 $Q \in S_0$ 当且仅当 $xQx^{-1} = Q, \forall x \in P$, 当且仅当 P 含于 $N_G(Q)$ 中. 显然, Q 也含于 $N_G(Q)$. 因此, P, Q 均含于 $N_G(Q)$ 并且在 $N_G(Q)$ 中相互共轭. 但 Q 是 $N_G(Q)$ 的正规子群, 所以只能有 $P = Q$. 所以, 集合 S 在 P 的共轭作用下的不动点集 S_0 中只有 P 一个元素, 根据引理 4.13, $|S| \equiv |S_0| = 1 \pmod{p}$, 故 $|S| = kp + 1$. \square

定理 4.23 若 P 是有限群 G 的一个 Sylow p -子群, 那么 $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$.

证明 由于 P 在 $N_G(P)$ 中正规, 根据 Sylow 第二定理, P 是 N_G 中唯一的 Sylow p -子群. 为方便起见, 记 $N = N_G(P)$, 那么

$$x \in N_G(N) \iff xNx^{-1} = N \implies xPx^{-1} < N \implies xPx^{-1} = P \implies x \in N.$$

所以 $N_G(N_G(P)) < N_G(P)$, 另一个方向的包含是显然的. \square

4.3 有限群的分类

作为之前内容的应用, 我们将分类所有 pq 阶的群 (p, q 都是素数) 以及所有 15 阶之内的群.

命题 4.24 令 p, q 为素数, 且 $p > q$. 若 q 不能整除 $p-1$, 那么 pq 阶的群同构于循环群 \mathbb{Z}_{pq} ; 如果 q 能够整除 $p-1$, 那么 pq 阶的群只能同构于循环群 \mathbb{Z}_{pq} 或者是由如下的 c 和 d :

$$|c| = p, |d| = q, dc = c^s d$$

生成的非交换群 K , 其中 $s \not\equiv 1 \pmod{p}$ 且 $s^q \equiv 1 \pmod{p}$.

证明 我们将在附录中构造出一个 pq 阶非交换群 K , 满足题设性质. 现在, 假定 K 的存在性是已知的. 对于一个 pq 阶的群 G , 根据 Cauchy 定理, G 中含有元素 a, b , 且 $|a| = p, |b| = q$. 记 $S = \langle a \rangle$, 那么 S 是 G 的 Sylow p -子群, 根据 Sylow 第三定理 4.22, G 包含的 Sylow p 子群的数目为 $kq+1$ 而且整除 $|G| = pq$, 因此只能为 1, 即 S 是 G 的唯一的 Sylow p -子群, 从而是 G 的正规子群. 商群 G/S 的阶为 q , q 是素数, 所以商群 G/S 是 q 阶循环群, 生成元是 bS . 从而 G 中的任何一个元素可以写成 $b^i a^j$ 的形式, G 是由 a, b 生成的群.

同样, 根据 Sylow 第三定理 4.22, G 中 Sylow q -子群的数目为 $kq+1$ 并且 $(kq+1) \mid pq$, 因此必为 1 或 p . 若 $q \nmid (p-1)$, 那么 $kq+1 = 1$, G 中只有一个 Sylow q -子群 $\langle b \rangle$, 从而 $\langle b \rangle$ 也是 G 的正规子群. 由于 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle e \rangle$, 于是 G 可以表示成这两个循环群的直和: $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q \cong \mathbb{Z}_{pq}$. 若 $q \mid (p-1)$, 则 $kq+1 = p$. 由于 $\langle a \rangle$ 在 G 中正规, 则 $bab^{-1} = a^r$, 且 $r \not\equiv 1 \pmod{p}$. 根据 $bab^{-1} = a^r$, 可以得到 $b^j ab^{-j} = a^{r^j}$, 特别地, 对于 $j = q$, 得到 $a = a^{r^q}$, 从而可以推出 $r^q \equiv 1 \pmod{p}$.

下面我们要证明, 若 $q \mid (p-1)$, G 是命题中描述的非交换群. 我们知道,

方程 $x^q \equiv 1 \pmod{p}$ 有 q 个模 p 不同的解. 根据初等数论中的结果, 如果 r 是方程 $x^q \equiv 1 \pmod{p}$ 的解, 而又令 k 为使得 $r^k \equiv 1 \pmod{p}$ 的最小正整数, 那么一定有 $k \mid q$. 在这里 k 只能等于 q 或 1 . 但由于 G 不是交换的, 所以 $r \not\equiv 1 \pmod{p}$, 因此必有 $k = q$. 由此, 我们得到 $1, r, r^2, \dots, r^{q-1}$ 就是方程 $x^q \equiv 1 \pmod{p}$ 的 q 个互不相同的解. 再令 $s \equiv r^t \pmod{p}$, t 可以在 $1, 2, \dots, q-1$ 中任意选取. 又令 $b_1 = b^t$, 则有 $|b_1| = q$, 所以, 可令 $b_1 S$ 作为商群 G/S 的生成元, 到此为止, 我们证明了群 G 的任何一个元素都能够写成 $b_1^i a^j$ 的形式, 且 $b_1 a b_1^{-1} = b^t a b^{-t} = a^{r^t} = a^s$, 从而 $b_1 a = a^s b_1$. 定义映射

$$\begin{aligned} G &\rightarrow K \\ a &\mapsto c, b_1 \mapsto d \end{aligned}$$

我们很容易验证这是一个同构. □

推论 4.25 若 p 是素数且 $p > 2$, 那么任何一个 $2p$ 阶的群都同构于循环群 \mathbb{Z}_{2p} 或 D_p .

证明 应用上一个命题, $q = 2$. 若 G 不是循环群, 那么条件 $s \not\equiv 1 \pmod{p}$ 以及 $s^2 \equiv 1 \pmod{p}$ 能够推出 $s \equiv -1 \pmod{p}$. 所以, G 是由 c, d 生成的群, 且满足 $|d| = 2, |c| = p$ 以及 $dc = c^{-1}d$. 这正是 D_p . □

命题 4.26 非交换的 8 阶群只同构于四元数群 Q_8 或正方形对称群 D_4 .

证明 首先, 容易看出 $D_4 \not\cong Q_8$. 下面我们考虑 8 阶的非交换群 G 中一个元素的阶数都有哪些可能. 首先, G 中显然不可能有 8 阶的元素, 如果这样的话 $G \cong \mathbb{Z}_8$; 其次 G 的每个元素的阶数不可能都是 2, 如果这样的话 $G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. 根据 Lagrange 定理, G 中存在一个阶数为 4 的元素 a , 又根据推论 4.12, a 生成的循环群 $\langle a \rangle$ 是 G 的正规子群, 且再 G 中指标为 2. 考虑商群 $G/\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_2 = \langle b\langle a \rangle \rangle$, 其中 $b \in G - \langle a \rangle$, 且满足 $b^2 \in \langle a \rangle$. 因此, 只有两种可能: $b^2 = a^2$ 或者 $b^2 = e$. (如果 $b^2 = a^3$ 或者 $b^2 = a$, 那么有 $b^8 = e$, 与 G 中没有 8 阶元素矛盾.) 另外, 由于 $\langle a \rangle$ 是正规的, 所以 $bab^{-1} \in \langle a \rangle$, 经过试验, 发现与 $b^2 = a^2$ 或 $b^2 = e$ 相容的条件只有 $bab^{-1} = a^3 = a^{-1}$. 由于 $G/\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_2$, G 中任意的元素都可以写成 $b^i a^j$ 的形式. 当 $|a| = 4, |b| = 4, ba = a^{-1}b$ 时, $G \cong Q_8$; 当 $|a| = 4, |b| = 2, ba = a^{-1}b$ 时, $G \cong D_4$. □

命题 4.27 12 阶的非交换群只可能与三个群同构, 正六边形的对称群 D_6 , A_4 以及 T .

证明 首先, 我们看到, T 群和 A_4 以及 D_6 显然不同构. 若 G 是一个 12 阶的非交换群, 令 P 为 G 的一个 Sylow 3-子群. 令 S 为 P 的左陪集, 令 G 左移地作用在 S 上, 这诱导了一个群同态 $f: G \rightarrow S_4$, 且 $\ker f < P$. 由于 $|P| = 3$, 所以 $\ker f = P$ 或者 $\ker f = \langle e \rangle$. 如果 $\ker f = \langle e \rangle$, f 是单的, G 同构于 S_4 的某一个 12 阶子群, 这个子群只能是 A_4 . 如果 $\ker f = P$, 那么 P 在 G 中是正规的, 从而 P 是 G 的唯一的 Sylow 3-子群. 所以 G 中只含有两个 3 阶元素. 如果 c 是这两个元素之一, 那么 $[G : C_G(c)]$ 等于 1 或 2, 因为 $[G : C_G(c)]$ 是与 c 共轭的元素的数目, 且所有与 c 共轭的元素的数目的阶数都是 3. 所以群 $C_G(c)$ 的阶数是 6 或 12. 无论是哪一种情况, 根据 Cauchy 定理, $C_G(c)$ 中都有一个 2 阶元素 d . 我们可以立刻验证 $|cd| = 6$.

令 $a = cd$, 根据推论 4.12, $\langle a \rangle$ 是 G 的正规子群, 且 $|G/\langle a \rangle| = 2$, 所以存在 $b \in G$ 使得 $b \notin \langle a \rangle$, $b \neq e$, $b^2 \in \langle a \rangle$, 且 $bab^{-1} \in \langle a \rangle$. 由于 G 不是交换的, 所以只能有 $bab^{-1} = a^5 = a^{-1}$ 这种可能, 即 $ba = a^{-1}b$. 对于 $b^2 \in \langle a \rangle$ 有六种可能, 经过验证, 只有两种可能符合要求: $b^2 = e$ 或 $b^2 = a^3$.

所以, 当 $G \not\cong A_4$ 时, 只有两种情况:

- (i.) $|a| = 6, b^2 = e, ba = a^{-1}b$, 此时 $G \cong D_6$.
- (ii.) $|a| = 6, b^2 = a^3, ba = a^{-1}b$, 此时 $G \cong T$.

□

利用之前的所有结果, 以及有限生成 Abel 群的结构定理 [?], 我们已经将 15 阶以内的所有群都进行了分类. 更高阶的群的结果, 例如 16 阶群只有 14 种, 32 阶群只有 51 种, 可以参见 [?] 以及 [?]. 我们将 15 阶以内的群的分类情况列成下表.

第五章 同调代数

本章主要参考 [6].

5.1 动机

定义 5.1 (拓扑 n -单形) 对于 $n \in \mathbb{N}$, 在相差一个同胚的意义上, 一个**拓扑 n -单形**是一个拓扑空间, 其中的元素构成 \mathbb{R}^{n+1} 的一个子集

$$\Delta^n := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1, \forall i. x_i \geq 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

拓扑是 \mathbb{R}^{n+1} 上拓扑的子空间拓扑. ◇

定义 5.2 对于 $n \in \mathbb{N}^+$ 以及 $0 \leq k \leq n$, 拓扑 n -单形的**第 k 个 $n-1$ -面 (嵌入)**是子空间的嵌入:

$$\delta_k : \Delta^{n-1} \hookrightarrow \Delta^n.$$

用定义5.1中的表示, δ_k 是嵌入

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (x_0, \dots, x_{n-1}) &\mapsto (x_0, \dots, x_{k-1}, 0, x_k, \dots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

限制在 Δ^{n-1} 上. ◇

定义 5.3 对于 $n \in \mathbb{N}$ 以及 $0 \leq k < n$, 第 k 个退化的 n -单形 (投影) 是满射:

$$\sigma_k : \Delta^n \rightarrow \Delta^{n-1}.$$

用定义 5.1 中的表示, δ_k 是投影

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n+1} &\hookrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto (x_0, \dots, x_k + x_{k+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

限制在 Δ^n 上. ◇

定义 5.4 (奇异 n -单形) 对于拓扑空间 X , X 中的一个奇异 n -单形是一个连续映射

$$\sigma : \Delta^n \rightarrow X$$

我们用

$$(\text{Sing} X)_n := \text{Hom}_{\text{Top}}(\Delta^n, X)$$

表示 X 上的所有 n -单形构成的集合. ◇

定义 5.5 对于两个拓扑空间之间的连续函数 $f, g : X \rightarrow Y$, 一个左同伦 $\eta : f \Rightarrow g$ 是 Top 中的如下的交换图表.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \text{id} \times \delta_0 \downarrow & \searrow f & \\ X \times \Delta^1 & \xrightarrow{\eta} & Y \\ \text{id} \times \delta_1 \uparrow & \nearrow g & \\ X & & \end{array}$$

◇

命题 5.1 左同伦是 $\text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y)$ 上的一个等价关系.

拓扑空间在同伦论中最基本的不变量是同伦群. 第一同伦群就是基本群. 更高阶的同伦群是基本群的一个直接推广.

定义 5.6 令 X 为一个拓扑空间, $x : * \rightarrow X$ 是一点. 对于 $n \in \mathbb{N}^+$, X 在 x 处的 n 阶同伦群 $\pi_n(X, x)$ 是一个群, 群中的元素是 $\text{Hom}_{\text{Top}_*}(S^n, (X, x))$ 的一个左同伦等价类, 元素之间的乘法就是 S^n 的表示在基点 x 处的楔和.

0 阶同伦群是拓扑空间的连通分支构成的集合. \diamond

定义 5.7 对于两个拓扑空间 X, Y , 一个连续函数 $f : X \rightarrow Y$ 被称为一个**弱同伦等价**, 如果

(i.) f 在 **Set** 中诱导了连通分支之间的同构

$$\pi_0(f) : \pi_0(X) \xrightarrow{\cong} \pi_0(Y)$$

(ii.) 对于 X 中的任意一点 x 以及任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, f 在 **Grp** 中诱导了同伦群之间的同构

$$\pi_n(f, x) : \pi_n(X, x) \xrightarrow{\cong} \pi_n(Y, f(x))$$

\diamond

同伦论正是研究由弱同伦等价的拓扑空间. 相似地, 我们将会发现同调代数正是研究类同构的链复形. 但实际情况更加复杂, 部分原因是下面的命题陈述的事实:

命题 5.2 弱同伦等价在 **Top** 中是一个自反而传递的关系, 但不是一个对称关系.

证明. 自反性和传递性显然. 对称性的反例由 S^1 和伪圆周之间的弱同伦等价给出. \square

定义 5.8 称两个空间 X 和 Y 具有相同的**(弱)同伦型**, 若它们在由弱同伦等价关系生成的等价关系下是等价的. \diamond

5.2 单纯与奇异同调

在定义5.4中, 我们看到每个拓扑空间 X 都被赋予了一些奇异 n -单形:

$$(\mathrm{Sing}X)_n := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(\Delta^n, X).$$

由于拓扑 n -单形之间存在定义5.2中的面嵌入

$$\delta_k : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$$

以及定义5.3中的退化投影

$$\sigma_k : \Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^n$$

从而我们诱导出奇异 n -单形之间的映射

$$d_k := \delta_k^* : (\mathrm{Sing}X)_n \rightarrow (\mathrm{Sing}X)_{n-1}$$

将每个奇异 n -单形映到它的第 k 个面, 以及

$$s_k := \sigma_k^* : (\mathrm{Sing}X)_n \rightarrow (\mathrm{Sing}X)_{n+1},$$

将一个奇异 n -单形视为一个退化的奇异 $(n+1)$ -单形. 所有的单形构成的集合, 以及这些集合之间的面映射与退化映射, 构成了下面的结构.

定义 5.9 (单纯集合) 一个单纯集合 $S \in \mathbf{sSet}$, 包含如下的数据:

- (i.) 对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有一个集合 $S_n \in \mathbf{Set}$ (对应 $(\mathrm{Sing}X)_n$),
- (ii.) 对于每个全序集之间的保序嵌入 $\delta_i : \overline{n-1} \rightarrow \bar{n}$, 都有一个映射 $d_i : S_n \rightarrow S_{n-1}$ (对应 n -单形上的第 i 个面映射),
- (iii.) 对于每个全序集之间的保序投影 $\sigma_i : \overline{n+1} \rightarrow \bar{n}$, 都有一个函数 $s_i : S_n \rightarrow S_{n+1}$ (对应于 n -单形上的第 i 个退化映射),

且这些函数满足单纯恒等式.

◇

定义 5.10 (单纯恒等式) 面映射与退化映射满足的**单纯恒等式**如下:

$$(i.) d_i \circ d_j = d_{j-1} \circ d_i \text{ 若 } i < j,$$

$$(ii.) s_i \circ s_j = s_j \circ s_{i-1} \text{ 若 } i > j,$$

(iii.)

$$d_i \circ s_j = \begin{cases} s_{j-1} \circ d_i & \text{若 } i < j, \\ \text{id} & \text{若 } i = j \text{ 或 } i = j + 1, \\ s_j \circ d_{i-1} & \text{若 } i > j + 1. \end{cases}$$

◇

我们可以直接验证, X 上所有的奇异单形 $(\text{Sing}X)_\bullet$ 构成一个单纯集合. 下面我们用范畴论的语言来定义单纯集合与单形.

定义 5.11 单纯范畴 Δ 是 **Cat** 的一个全子范畴, 其对象是如下生成的自由范畴:

$$\begin{aligned} [0] &:= \{0\} \\ [1] &:= \{0 \rightarrow 1\} \\ [2] &:= \{0 \rightarrow 1 \rightarrow 2\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

◇

命题 5.3 定义 5.9 中的单纯集合 S 是一个函子

$$S : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}.$$

例 5.1 定义 5.1 中的拓扑 n -单形是 **Top** 中的余单纯对象, 即一个函子

$$\Delta^\bullet : \Delta \rightarrow \mathbf{Top}.$$

◇

定义 5.12 对于一个拓扑空间 X , 它的奇异单形的单纯集合 (常被叫做**奇异单纯复形**) 是一个函子:

$$(\text{Sing}X)_\bullet : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}.$$

它是例5.1中的函子 Δ^\bullet 与反变函子 $\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(-, X)$ 的复合. \diamond

现在我们将奇异单纯复形 $(\text{Sing}X)_\bullet$ 交换化.

定义 5.13 集合 S 中的元素的一个**形式线性组合**是一个函数

$$a : S \rightarrow \mathbb{Z}$$

使得只有有限多个 $a(s) \in \mathbb{Z}$ 不为 0.

我们将一个元素 $s \in S$ 与一个函数 $s : S \rightarrow \mathbb{Z}$ 等同起来, $s : S \rightarrow \mathbb{Z}$ 将 s 映到 1, 将其他的元素映到 0. 所以, 我们可以将 a 写成

$$a = \sum_{s \in S} a(s) \cdot s.$$

我们称 $a(s) \in \mathbb{Z}$ 是形式线性组合中元素 s 的系数. \diamond

注 5.1 对于 $S \in \mathbf{Set}$, 所有的 S 中的元素的形式线性组合构成一个群 $\mathbb{Z}[S]$. 群操作在 \mathbb{Z} 中逐点定义:

$$\left(\sum_{s \in S} a(s) \cdot s\right) + \left(\sum_{s \in S} b(s) \cdot s\right) = \sum_{s \in S} (a_s + b_s) \cdot s.$$

我们已经熟知 $\mathbb{Z}[S]$ 是 S 上的自由 Abel 群. \diamond

定义 5.14 对于一个单纯集合 S_\bullet , 自由 Abel 群 $\mathbb{Z}[S_n]$ 被称为 S 上的**(单纯) n -链群**. \diamond

定义 5.15 对于一个拓扑空间 X , 奇异单纯复形 $\text{Sing}X$ 上的一个 n -链被称为 X 上的一个**奇异 n -链**. \diamond

上述构造将单形变为 Abel 群. 但我们还可以利用不同的面映射构造一个边界映射:

定义 5.16 对于一个单纯集合 S , 它的 n 次交错面微分映射是一个线性映射:

$$\partial : \mathbb{Z}[S_n] \rightarrow \mathbb{Z}[S_{n-1}],$$

定义在基 $\sigma \in S_n$ 上是单纯面映射的交错和:

$$\partial\sigma := \sum_{k=0}^n (-1)^k d_k \sigma.$$

◇

命题 5.4 单纯恒等式能够推出

$$\partial \circ \partial = 0.$$

证明. 由于 ∂ 的线性性, 只要在任意的基 $\sigma \in S_n$ 上验证即可.

□

定义 5.17 对于一个单纯集合 S , 我们称如下的数据:

- (i.) 所有 n -链的 Abel 群 $C_n := \mathbb{Z}[S_n], \forall n \in \mathbb{N}$,
- (ii.) 由 5.16 定义的边界同态 $\partial_n : C_{n+1}(S) \rightarrow C_n(S), \forall n \in \mathbb{N}$.

为 S 的交错面映射链复形:

$$C_\bullet(S) = [\cdots \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}[S_2] \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[S_1] \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z}[S_0]].$$

当 $S = \text{Sing}X$ 时我们称其为 X 的奇异链复形.

◇

我们有如下更广的定义:

定义 5.18 Abel 群的类 C_\bullet 的一个链复形是一族 Abel 群 $\{C_n \in \mathbf{Ab}\}_n$ 以及群同态 $\{\partial_n : C_{n+1} \rightarrow C_n\}$, 使得 $\partial \circ \partial = 0$. \diamond

定义 5.19 对于 5.17 中定义的链复形 $C_\bullet(S)$, 当 $n \in \mathbb{N}$ 时, 我们称:

- (i.) 一个形如 $\partial\sigma \in C_n(S)$ 的 n -链为一个 n -**边界**,
- (ii.) 一个 n -链 $\sigma \in C_\bullet(S)$ 是一个 n -**闭链**, 若 $\partial\sigma = 0$.

 \diamond

根据 ∂ 的线性性, 边界与闭链构成了链群的子群, 我们将 n -边界构成的子群记为

$$B_n := \text{im}(\partial_n) \subset C_n(S),$$

将 n -闭链构成的子群记为

$$Z_n := \ker(\partial_n) \subset C_n(S).$$

注 5.2 更一般地, 对于任何的含么环 R , 总是可以对每个 n 构造自由 R -模 $R[\text{Sing}X]$, 这对应的同调是 R 中系数的奇异同调, 记为 $H_n(X, R)$. 我们将在下一节中遇到这种推广的情况. \diamond

定义 5.20 对于 5.17 中定义的一个链复形 $C_\bullet(S)$, n -**阶链同调群** $H_n(C(S)) \in \mathbf{Ab}$ 定义为商群

$$H_n(C(S)) := \frac{\ker(\partial_{n-1})}{\text{im}(\partial_n)} = \frac{Z_n}{B_n}.$$

当 $n = 0$ 时, 约定 $\partial_{-1} = 0$.

特别地, $C_\bullet(\text{Sing}X)$ 的链同调被称为拓扑空间 X 的奇异同调. 人们通常用 $H_n(X, \mathbb{Z})$ 或者 $H_n(X)$ 指代 X 的奇异同调. \diamond

注 5.3

$$H_0(C_\bullet(S)) = C_\bullet(S)/\text{im}(\partial_0).$$

◇

例 5.2 对于一个拓扑空间 X , 我们能够得到它的 0 阶同调群为

$$H_0(X) \simeq \mathbb{Z}[\pi_0(X)],$$

是 X 的连通分支构成的集合上的自由 Abel 群.

◇

例 5.3 对于一个连通的定向 n 维流形 X , 我们有

$$H_n(X) \simeq \mathbb{Z}.$$

这个群的生成元是在 X 上选择一个定向. 在选定定向之后, $H_n(X)$ 的生成元

$$[X] \in H_n(X)$$

被称为流形 X 的**基本类**.

◇

定义 5.21 给定一个拓扑空间之间的连续映射 $f : X \rightarrow Y$ 以及一个自然数 $n \in \mathbb{N}$, X 中的每个奇异 n -单形 $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ 被映到 Y 中的一个奇异 n -单形

$$f_*\sigma : \Delta^n \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f} Y.$$

这被称为 σ 沿 f 的**前推**. 这当然诱导出奇异链群之间的同态:

$$(f_*)_n : C_n(X) \rightarrow C_n(Y).$$

◇

命题 5.5 前推映射使得下图交换.

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1}(X) & \xrightarrow{(f_*)_{n+1}} & C_{n+1}(Y) \\ \downarrow \partial_n^X & & \downarrow \partial_n^Y \\ C_n(X) & \xrightarrow{(f_*)_n} & C_n(Y) \end{array}$$

证明. 只需要验证前推映射事实上是一个函子

$$f_* : \text{Sing} X \rightarrow \text{Sing} Y.$$

以及 $\mathbb{Z}[-] : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{sAb}$ 是一个函子. □

定义 5.22 对于定义5.18中定义的两个链复形 C_\bullet, D_\bullet , 二者之间的同态被称为一个**链映射** $f_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$, 定义为对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 都存在一个 Abel 群之间的同态 $f_n : C_n \rightarrow D_n$, 使得 $f_n \circ \partial_n^C = \partial_n^D \circ f_{n+1}$:

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ \downarrow \partial_{n+1}^C & & \downarrow \partial_{n+1}^D \\ C_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & D_{n+1} \\ \downarrow \partial_n^C & & \downarrow \partial_n^D \\ C_n & \xrightarrow{f_n} & D_n \\ \downarrow \partial_{n-1}^C & & \downarrow \partial_{n-1}^D \\ \vdots & & \vdots \end{array}.$$

链映射之间的复合是由每一阶之间的分量分别复合得到的.

显然, 链复形以及他们之间的链映射构成了一个范畴, 即 Abel 群的链复形范畴, 记为

$$\mathbf{Ch}_\bullet(\mathbf{Ab}) \in \mathbf{Cat}.$$

◇

命题 5.6 将一个拓扑空间 X 映到它的奇异链复形 $C_\bullet(X)$, 将拓扑空间之间的连续映射映到前推链映射构成了一个函子

$$C_\bullet(-) : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ch}_\bullet(\mathbf{Ab})$$

将 \mathbf{Top} 映到链复形范畴.

特别地, 对于每个 $n \in \mathbb{N}$, 奇异同调都是一个函子

$$H_n(-) : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

我们下面将叙述奇异同调的基本性质, 它是 X 的同伦型的交换化近似. 这些命题的证明需要后面我们将要发展的同调代数的工具, 以及一些代数拓扑的工具.

命题 5.7 若 $f: X \rightarrow Y$ 是拓扑空间之间的弱同伦等价, 那么诱导的奇异同调群之间的同态

$$H_n(f): H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$$

是一个同构.

于是我们有弱同伦等价的交换化对应:

定义 5.23 对于两个链复形 C_\bullet, D_\bullet , 一个链映射 $f_\bullet: C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ 被称为一个**类同构**, 如果它诱导了同调群之间的同构

$$f_n: H_n(C) \xrightarrow{\cong} H_n(D).$$

◇

因此, 链同调将弱同伦等价映到类同构. 链复形之间的类同构是拓扑空间之间的弱同伦等价的交换化. 与弱同伦等价一样, 类同构也不是一个对称的关系.

命题 5.8 链复形之间的类同构是一个自反而传递的关系, 但不是一个对称关系.

证明. 自反性和传递性显然. 我们有一个反例:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

这说明了类同构不是对称的.

□

但类同构较原来的弱同伦等价有些粗糙. 奇异链函子 $C_\bullet(-)$ 会丢失原来的拓扑空间中同伦型的某些信息. 下列的论断告诉我们, 奇异同调在何种程度上丢失和保存了原来的拓扑空间的信息.

首先我们需要一个比较映射:

定义 5.24 (Hurewicz 同态) 对于一个带基点的拓扑空间 (X, x) , Hurewicz 同态是一个从 (X, x) 的 k 阶同伦群到 k 阶同调群的一个函数

$$\Phi : \pi_k(X, x) \rightarrow H_k(X)$$

定义为

$$\Phi : (f : S^k \rightarrow X)_{\sim} \mapsto f_*[S^k]$$

将 X 中的一个 k -球同伦等价类映到 S^k 的基本类 $[S^k] \in H_k(S^k)$ 沿 f 的前推. ◇

命题 5.9 对于一个拓扑空间 X , 0 阶的 Hurewicz 映射展现了同构

$$\mathbb{Z}[\pi_0(X)] \simeq H_0(X).$$

由于更高阶的同伦群取决于基点所在的连通分支的同伦型, 但同调群的定义却与基点无关, 因此只有当 X 是连通的拓扑空间时方才可以比较.

命题 5.10 对于一个道路连通的拓扑空间 X , 1 阶的 Hurewicz 映射

$$\Phi : \pi_1(X, x) \rightarrow H_1(X)$$

是满的. 它的核是 $\pi_1(X, x)$ 的交换子子群. 所以它诱导了基本群的交换化 $\pi_1(X, x)^{\text{ab}} := \pi_1(X, x)/[\pi_1, \pi_1]$ 与 1 阶同调群之间的同构:

$$\pi_1(X, x)^{\text{ab}} \xrightarrow{\cong} H_1(X).$$

定理 5.11 (Hurewicz 定理) 若 X 是一个 $n-1$ -连通的拓扑空间 ($n-1$ 阶及以下阶的同调群都是平凡的), $n \geq 2$, 那么

$$\Phi : \pi_n(X, x) \rightarrow H_n(X)$$

是一个同构.

5.3 链复形

模的链复形与它们之间的链映射构成一个范畴, 同调代数的故事就发生在这个舞台上.

在定义5.17中, 我们遇到了奇异链复形. 这里我们更深入地讨论这样的链复形. 我们之前将一个奇异的链定义为奇异单形具有 \mathbb{Z} 系数的形式和. 我们可以进一步将其系数推广为任意 Abel 群 A 的系数, 或是任意环上的模的系数.

定义 5.25 (Abel 群的张量积) 对于两个 Abel 群, 它们的张量积 $A \otimes B$ 是积 $A \times B$ 上的自由群商掉如下的关系:

$$(i.) (a_1, b) + (a_2, b) \sim (a_1 + a_2, b)$$

$$(ii.) (a, b_1) + (a, b_2) \sim (a, b_1 + b_2)$$

对于所有的 $a, a_1, a_2 \in A$ 以及 $b, b_1, b_2 \in B$.

简言之, 两个 Abel 群 A, B 的张量积是这样的一个群, 它的每一个元素都被 A 与 B 中的元素表示, 且当一个变量被固定时, 群操作是另一个变量的群操作. \diamond

注 5.4 存在一个正则的从基础集到张量积的映射

$$A \times B \xrightarrow{\otimes} A \otimes B.$$

将 (a, b) 映到上述等价关系中的代表元. \diamond

虽然例3.15中定义的是线性空间之间的张量积,但实际上,Abel群之间的张量积也可以用这种完全范畴论的方式定义,且容易验证,二者是等价的.所以,我们可以轻易地得到Abel群的张量积的泛性质:

命题 5.12 任何一个双线性函数 $f : A \times B \rightarrow C$ 都可以进行如下的唯一分解:

$$f : A \times B \xrightarrow{\otimes} A \otimes B \xrightarrow{\phi} C.$$

ϕ 与 f 一一对应.

命题 5.13 附加了张量积 \otimes 的 \mathbf{Ab} 是一个么半范畴 (亦称张量范畴). (\mathbf{Ab}, \otimes) 中的单位对象是 \mathbb{Z} . 即:

(i.) 张量积对每个变量都是一个函子:

$$A \otimes (-) : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ab},$$

(ii.) 存在一个自然的结合同构 $(A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\cong} A \otimes (B \otimes C)$, 对于任何顺序的结合律, 得到的结果都是一样的.

(iii.) 存在一个单位自然同构 $A \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} A$, 在显然的意义下与结合同构是相容的.

证明. 为了说明 \mathbb{Z} 是一个单位对象, 考虑任何的Abel群 A 以及映射

$$\begin{aligned} A \otimes \mathbb{Z} &\rightarrow A \\ (a, n) &\mapsto n \cdot a := \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ summands}}. \end{aligned}$$

根据张量积 $A \otimes \mathbb{Z}$ 中的等价关系, 有

$$(a, n) = \underbrace{(a, 1) + (a, 1) + \cdots + (a, 1)}_{n \text{ summands}} = (n \cdot a, 1).$$

这说明 $A \otimes \mathbb{Z} \rightarrow A$ 事实上是一个同构.

至于前两条性质, 函子性是显然的. 而结合性是由于基础集之间具有同构 $A \times (B \times C) \simeq (A \times B) \times C$ 以及张量积的泛性质得到的. \square

例 5.4 对于 $a, b \in \mathbb{N}^+$, 我们有

$$\mathbb{Z}_a \otimes \mathbb{Z}_b \simeq \mathbb{Z}_{\text{GCD}(a,b)},$$

其中 $\text{GCD}(-, -)$ 代表最大公约数. 我们可以通过构造同态

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \\ z &\mapsto z(1 \otimes 1) \end{aligned}$$

来证明这一事实. \diamond

定义 5.26 令 $I \in \mathbf{Set}$ 为一个集合, $\{A_i\}_{i \in I}$ 是以 I 为指标集的一族 Abel 群. **直和** $\bigoplus_{i \in I} A_i$ 是 \mathbf{Ab} 中 I -形图的一个余极限. \diamond

例 5.5 若 $A_i = \mathbb{Z}$, 则直和是 I 上的自由 Abel 群

$$\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}[I].$$

\diamond

从现在开始, 我们令环 R 为一个交换环. 有了范畴论的语言, 我们可以给模以严格的定义.

定义 5.27 环 R 上的一个模 N 是:

- (i.) 一个对象 $N \in \mathbf{Ab}$,
- (ii.) 附加了一个态射

$$\alpha : R \otimes N \rightarrow N$$

(iii.) 使得下图在 \mathbf{Ab} 中交换:

$$\begin{array}{ccc} R \otimes R \otimes N & \xrightarrow{1_N \otimes \alpha} & R \otimes N \\ \downarrow \alpha \otimes 1_R & & \downarrow \alpha \\ R \otimes N & \xrightarrow{\alpha} & N \end{array}$$

(iv.) 使得下图在 \mathbf{Ab} 中交换:

$$\begin{array}{ccc} 1 \otimes N & \xrightarrow{1 \otimes 1_N} & R \otimes N \\ & \searrow & \swarrow \alpha \\ & N & \end{array}$$

◇

定理 5.14 令 R 为一个交换环, 那么 \mathbf{Mod}_R 是一个 *Abel* 范畴.

定义 5.28 范畴中的一个对象如果同时是初对象和终对象, 那么称它为一个 **零对象**. ◇

命题 5.15 平凡群是 \mathbf{Ab} 中的零对象. 平凡模是 \mathbf{Mod}_R 中的零对象.

定义 5.29 在一个具有初对象 0 以及拉回的范畴, 态射 $f: A \rightarrow B$ 的**核** $\ker(f)$ 是如下定义的拉回:

$$\begin{array}{ccc} \ker(f) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow p & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

◇

定义 5.30 在一个具有零对象和推出的范畴, 态射 $f: A \rightarrow B$ 的**余核** $\operatorname{coker}(f)$ 是如下定义的推出:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow i \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{coker}(f) \end{array}$$

◇

由于 \mathbf{Mod}_R 具有零对象, 拉回和推出, 所以我们有

命题 5.16 \mathbf{Mod}_R 具有所有态射的核与余核.

定义 5.31 对于两个模 $N_1, N_2 \in \mathbf{Mod}_R$, 在 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(N_1, N_2)$ 上可以定义 Abel 群的结构, 群操作是在 N_2 中逐点定义的: $(f_1 + f_2) : n \mapsto f_1(n) + f_2(n)$. ◇

命题 5.17 对于上面定义的态射集上的乘法, 态射之间的复合

$$\circ : \mathrm{Hom}(N_1, N_2) \times \mathrm{Hom}(N_2, N_3) \rightarrow \mathrm{Hom}(N_1, N_3)$$

是一个双线性映射, 因此等价于一个映射

$$\mathrm{Hom}(N_1, N_2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(N_2, N_3) \rightarrow \mathrm{Hom}(N_1, N_3),$$

张量积是两个 Abel 群之间的张量积.

定义 5.32 若范畴 \mathbf{C} 中有 0 对象, 且满足如下公理:

- (i.) 对任何的 $A, B \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ 是一个 Abel 群,
- (ii.) 态射的合成是双线性的,

则称范畴 \mathbf{C} 是一个预加法范畴.

预加法范畴 \mathbf{C} 被称为一个加法范畴, 如果它满足下面的公理:

- (i.) \mathbf{C} 中存在有限的余积.

◇

由于 \mathbf{Mod}_R 中有零对象, 根据上一个命题, 我们可以得出推论:

推论 5.18 \mathbf{Mod}_R 是一个预加法范畴.

又因为 \mathbf{Mod}_R 中含有积和余积, 所以

推论 5.19 \mathbf{Mod}_R 是一个加法范畴.

命题 5.20 在 \mathbf{Mod}_R 中

- (i.) 每个单态射的定义域都是其余核的核,
- (ii.) 每个满态射的值域都是其核的余核.

因此, 根据定义, \mathbf{Mod}_R 是一个 Abel 范畴.

现在我们终于可以谈论 R -模的链复形了.

定义 5.33 一个 \mathbf{Mod}_R 中的链复形包含如下数据:

- (i.) 一族对象 $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$,
- (ii.) 一些态射 $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$

$$\cdots \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} C_{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}} \cdots$$

使得

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$$

对所有的 $n \in \mathbb{N}$ 成立.

◇

定义 5.34 对于一个链复形 C_\bullet 以及 $n \in \mathbb{N}$

- (i.) 态射 ∂_n 被称为**边界映射**或**微分映射**,
- (ii.) C_n 中的元素被称为 **n -链**,
- (iii.) 对于 $n \geq 1$, 态射 $\partial_{n-1} : C_n \rightarrow C_{n-1}$ 的核

$$Z_n := \ker(\partial_{n-1})$$

中的元素被称为 **n -闭链**. 当 $n = 0$ 时与 Abel 群的情况完全一致.

- (iv.) 态射 $\partial_n : C_{n+1} \rightarrow C_n$ 的像

$$B_n := \text{im}(\partial_n)$$

中的元素被称为 **n -边界**.

- (v.) 正则嵌入

$$0 \hookrightarrow B_n \hookrightarrow Z_n \hookrightarrow C_n$$

的余核

$$H_n := Z_n / B_n$$

被称为 C_\bullet 的 **n -阶链同调**.

◇

至于 \mathbf{Mod}_R 中的链复形之间的链映射, 与 Abel 群的链复形之间的链映射的定义完全一致.

命题 5.21 对于一个链映射 $f : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$, 它将边界映到边界, 将闭链映到闭链. 因此对于所有的 $n \in \mathbb{Z}$, 有映射

$$B_n(f) : B_n(C_\bullet) \rightarrow B_n(D_\bullet)$$

以及

$$Z_n(f) : Z_n(C_\bullet) \rightarrow Z_n(D_\bullet).$$

特别地, 它将链同调映到链同调

$$H_n(f) : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(D_\bullet).$$

推论 5.22 链同调是一个函子

$$H_n(-) : \mathbf{Ch}_\bullet(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A},$$

将 *Abel* 范畴 \mathcal{A} 上的链复形范畴映到 \mathcal{A} 自身.

我们还要定义链复形之间的张量积.

定义 5.35 对于两个链复形 $X, Y \in \mathbf{Ch}_\bullet(\mathcal{A})$, $X \otimes Y \in \mathbf{Ch}_\bullet(\mathcal{A})$ 逐阶定义为

$$(X \otimes Y)_n := \bigoplus_{i+j=n} X_i \otimes_R Y_j$$

微分映射作用在元素 (x, y) 上为

$$\partial^{X \otimes Y}(x, y) = (\partial^X x, y) + (-1)^{\deg(x)}(x, \partial^Y y).$$

◇

命题 5.23 R -模上的链复形构成的范畴 $\mathbf{Ch}_\bullet(\mathbf{Mod}_R)$ 在附加了上面定义的链复形之间的张量积之后构成了一个么半范畴 $(\mathbf{Ch}_\bullet(\mathbf{Mod}_R), \otimes)$. 这个范畴中的单位对象是这样的一个链复形: 它的 0 阶之外的分量均为 0-模, 0 阶分量为 R -模 R .

定义 5.36 用 $\mathbf{Ch}_\bullet^{\text{ub}}$ 代表所有无界的链复形构成的范畴.

◇

定义 5.37 对于两个链复形 $X, Y \in \mathbf{Ch}_\bullet^{\text{ub}}(\mathcal{A})$, 我们可以定义一个链复形 $[X, Y] \in \mathbf{Ch}_\bullet^{\text{ub}}(\mathcal{A})$, 其分量定义为

$$[X, Y]_n := \prod_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(X_i, Y_{i+n}).$$

对于一个 $f \in [X, Y]_n$, 微分映射定义为:

$$df := d_Y \circ f - (-1)^n f \circ d_X.$$

◇

上面事实上定义了一个函子

$$[-, -] : \mathbf{Ch}_\bullet^{\text{ub}}(\mathcal{A})^{\text{op}} \times \mathbf{Ch}_\bullet^{\text{ub}}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Ch}_\bullet^{\text{ub}}(\mathcal{A}).$$

定义 5.38 令 (\mathbf{C}, \otimes) 为一个么半范畴. \mathbf{C} 中的一个**内禀 Hom 函子**是一个双函子

$$[-, -] : \mathbf{C}^{\text{op}} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C},$$

使得对每一个对象 $X \in \mathbf{C}$, 都存在一对伴随函子

$$((-) \otimes X \dashv [X, -]) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}.$$

如果内禀 Hom 函子存在, 那么 (\mathbf{C}, \otimes) 被称为一个**闭么半范畴**.

◇

命题 5.24 函子

$$[-, -] : \mathbf{Ch}_\bullet^{\text{ub}}(\mathcal{A})^{\text{op}} \times \mathbf{Ch}_\bullet^{\text{ub}}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Ch}_\bullet^{\text{ub}}(\mathcal{A}).$$

是链复形范畴的内禀 Hom 函子.

命题 5.25 链复形 $[X, Y]_\bullet$ 中的所有 0 阶闭链的构成的集合事实上就是 X, Y 之间所有的链映射

$$Z_0([X, Y]) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{Ch}_\bullet^{\text{ub}}}(X, Y).$$

$[X, Y]_\bullet$ 的 0 阶链同调群就是链映射的同伦等价类.

命题 5.26 么半范畴 $(\mathbf{Ch}_\bullet, \otimes)$ 是一个闭么半范畴, 内禀 Hom 函子就是定义 5.37 中的双函子.

我们已经定义了链复形范畴, 现在考虑它的第一个应用: 同调的长正合列. 下面, 我们将交换环 R 上的模范畴 \mathbf{Mod}_R 记为

$$\mathcal{A} := \mathbf{Mod}_R.$$

定义 5.39 \mathcal{A} 中的一个**正合列**是 \mathcal{A} 中的一个链复形 C_\bullet , 且每一阶的链同调群都是平凡的:

$$H_n(C) = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

◇

定义 5.40 一个**短正合列**是如上定义的一个正合列, 但具有如下的形式

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots.$$

经常将短正合列记为 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ 或 $A \rightarrow B \rightarrow C$.

◇

命题 5.27 一个序列

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$$

是 \mathcal{A} 中的一个短正合列, 当且仅当

- (i.) i 是单态射,
- (ii.) p 是满态射,
- (iii.) i 的像等于 p 的核.

命题 5.28 如果一个正合列的一部分具有下列形式

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_n} C_n \rightarrow 0 \rightarrow \cdots,$$

那么 ∂_n 是一个同构, 且

$$C_{n+1} \simeq C_n.$$

定义 5.41 \mathcal{A} 中的一个短正合列 $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$ 被称为是**分裂的**, 如果下列条件之一成立:

- (i.) 存在 p 的一个截面, 即一个态射 $s: B \rightarrow C$ 使得 $p \circ s = \text{id}_C$.
- (ii.) 存在 i 的一个收缩, 即一个态射 $r: B \rightarrow A$ 使得 $r \circ i = \text{id}_A$.
- (iii.) 短正合列与如下的正合列

$$0 \rightarrow A \rightarrow A \oplus C \rightarrow C \rightarrow 0$$

同构.

◇

命题 5.29 (分裂引理) 定义 5.41 中的三个条件是等价的.

证明. 第三个条件显然能够推出第一个和第二个条件, 将截面态射和收缩态射分别取为嵌入和投射即可.

反之, 如果我们有 $i: A \rightarrow B$ 的一个收缩态射 $r: B \rightarrow A$. 考虑复合态射 $P: B \xrightarrow{r} A \xrightarrow{i} B$, 由于 $r \circ i = \text{id}_A$, 所以 P 是幂等的: $P \circ P = P$.

因此, 每个元素 $b \in B$ 都可以分解成 $b = (b - P(b)) + P(b)$, 且 $b - P(b) \in \ker(r)$, $P(b) \in \text{im}(i)$. 更进一步这一分解是唯一的, 因为如果存在 a 使得 $b = i(a)$ 以及 $r(b) = 0$ 那么 $0 = r(i(a)) = a$. 这说明 $B \simeq \text{im}(i) \oplus \ker(r)$ 以及 $i: A \rightarrow B$ 是一个正则嵌入. 又根据正合性 $A \simeq \text{im}(i) \simeq \ker(p)$, $C \simeq \text{im}(p) \simeq \ker(r)$, 所以 $B \simeq A \oplus C$.

第二个条件与第三个条件的等价完全类似.

□

定义 5.42 一个链复形之间的链映射的序列

$$0 \rightarrow A_{\bullet} \rightarrow B_{\bullet} \rightarrow C_{\bullet} \rightarrow 0$$

被称为 \mathcal{A} 中的一个**链复形的短正合列**, 若对每个 n , 链复形的分量都是 \mathcal{A} 中的一个短正合列

$$0 \rightarrow A_n \rightarrow B_n \rightarrow C_n \rightarrow 0.$$

◇

定义 5.43 考虑一个定义链复形的短正合列. 对于 $n \in \mathbb{Z}$, 定义一个群同态

$$\delta_n : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$$

被称为短正合列的 n 阶**连接同态**, 定义为

$$\delta_n : [c] \mapsto [\partial^B \hat{c}]_A.$$

其中

- (i.) $c \in Z_n(C)$ 是 C_n 中的一个闭链, $[c]$ 是 c 在 $H_n(C)$ 中的同调类,
- (ii.) $\hat{c} \in C_n(B)$ 是 c 在 B_n 中的任意提升, 由于 p 是一个满射, 所以 \hat{c} 总是存在的,
- (iii.) 根据正合性, $\partial^B \hat{c}$ 实际上是 A_{n-1} 中的元素, 因为 $p(\partial^B \hat{c}) = \partial^C p(\hat{c}) = \partial^C c = 0$. 又因为 $\partial^A \partial^B \hat{c} = \partial^B \partial^B \hat{c} = 0$. $[\partial^B \hat{c}]_A$ 是 $\partial^B \hat{c}$ 中的同调类.

◇

定义 5.44 定义??中的连接同态是良定义的, 与提升 \hat{c} 的选择无关, 并且的确是一个群同态.

◇

证明. 假设 $\tilde{c} \in B_n$ 是 c 的另一个提升. 那么 $p(\hat{c} - \tilde{c}) = 0$, 于是 $\hat{c} - \tilde{c} \in A_n \hookrightarrow B_n$, 这说明 $[\partial^B \hat{c}]_A \simeq [\partial^B \tilde{c}]_A$, 因为 $\partial^A(\hat{c} - \tilde{c}) = \partial^B \hat{c} - \partial^B \tilde{c}$.

由于链映射和微分映射都是 Abel 群之间的同态, 所以连接映射 δ_n 是同调群之间的同态. □

命题 5.30 链复形之间的短正合列以及连接同态构成了链同调 $H_\bullet(-)$ 下的同调长正合列

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \rightarrow H_n(B) \rightarrow H_n(C) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A) \rightarrow H_{n-1}(B) \rightarrow H_{n-1}(C) \rightarrow \cdots$$

证明. 先验证 $H_n(A) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(B) \xrightarrow{H_n(p)} H_n(C)$ 的正合性.

由于对于任何 $a \in A_n$ 都有 $p(i(a)) = 0$, 所以对于 $a \in Z_n(A) \hookrightarrow Z_n(B)$ 也有 $p(i(a)) = 0$. 反之, $[b] \in H_n(B)$ 在 $\ker(H_n(p))$ 中当且仅当存在某个 $c \in C_{n+1}$ 使得 $\partial^C c = p(b)$. 令 $\hat{c} \in B_{n+1}$ 为 c 的任意提升, 那么 $[b] = [b - \partial^B \hat{c}]$, 但 $p(b - \partial^B \hat{c}) = p(b) - p(\partial^B \hat{c}) = p(b) - \partial^C c = 0$. 根据正合性 $b - \partial^B \hat{c} \in Z_n(A) \hookrightarrow Z_n(B)$, 所以 $[b]$ 在 $H_n(A) \rightarrow H_n(B)$ 的像中.

下面我们只需要验证, $H_n(B) \rightarrow H_n(C)$ 的像是 δ_n 的核, 以及 δ_n 的像是 $H_{n-1}(A) \rightarrow H_{n-1}(B)$ 的核.

若 $[c]$ 在 $H_n(B) \rightarrow H_n(C)$ 的像中, 那么对任意的提升 \hat{c} 都有 $\partial^B \hat{c} = 0$, 所以 $\delta_n[c] = [\partial^B \hat{c}]_A = 0$. 反之, 若 $[c]$ 使得 $\delta_n[c] = 0$, 那么对于一个提升 \hat{c} , $[\partial^B \hat{c}]_A = 0$ 意味着存在一个 $a \in A_n$ 使得 $\partial^A a = \partial^B \hat{c}$, 令 $\tilde{c} := \hat{c} - a$, 那么 \tilde{c} 是 c 的另一个提升. 因此, 我们知道 $[c]$ 中的任意元素 c 的任意提升形如 $\hat{c} - a$, 根据正合性, $[c]$ 在 $H_n(B) \rightarrow H_n(C)$ 的像中.

根据同调群的定义, 对于任何的 $\hat{c} \in A_n \hookrightarrow B_n$, 都有 $[\partial^B \hat{c}]_A = 0 \in H_{n-1}(A)$. 反之, $H_{n-1}(A) \rightarrow H_{n-1}(B)$ 的核中的元素一定形如 $[\partial^A a], a \in A_n$ \square

定义 5.45 $\text{Ch}_\bullet(\mathcal{A})$ 中的两个链映射 $f, g : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ 之间的一个链同伦 $\psi : f \Rightarrow g$ 由一系列态射

$$\{(\psi_n : C_n \rightarrow D_{n+1}) \in \mathcal{A} | n \in \mathbb{N}\}$$

组成, 使得

$$f_n - g_n = \partial^D \circ \psi_n + \psi_{n-1} \circ \partial^C.$$

\diamond

注 5.5 下面的图表可以直观地理解链同伦, 但下面的图表不是一个交换图表

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}-g_{n+1}} & D_{n+1} \\
 \downarrow \partial_n^C & \nearrow \psi_n & \downarrow \partial_n^D \\
 C_n & \xrightarrow{f_n-g_n} & D_n \\
 \downarrow \partial_{n-1}^C & \nearrow \psi_{n-1} & \downarrow \partial_{n-1}^D \\
 C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}-g_{n-1}} & D_{n-1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

用真正的交换图标来描述联同伦的方法, 将在下面的命题中给出, 为此我们要引入链复形的区间对象的概念: \diamond

定义 5.46 令

$$I_{\bullet} := N_{\bullet}(C(\Delta^1))$$

为 \mathcal{A} 中正规化的链复形:

$$I_{\bullet} = [\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow R \xrightarrow{(-\text{id}, \text{id})} R \oplus R].$$

\diamond

注 5.6 这就是链复形中的标准区间. 事实上, 这就是单位区间 $\Delta^1 \in \mathbf{Top}$ 中的单位区间的交换化. \diamond

命题 5.31 $\mathbf{Ch}_{\bullet}(\mathcal{A})$ 中的一个链同伦 $\psi : f \Rightarrow g$ 与下列的交换图表等价:

$$\begin{array}{ccc}
 C_{\bullet} & & \\
 \downarrow & \searrow f & \\
 I_{\bullet} \otimes C_{\bullet} & \xrightarrow{(f, g, \psi)} & D_{\bullet} \\
 \uparrow & \nearrow g & \\
 C_{\bullet} & &
 \end{array}$$

因此实际上是链复形之间的一个左同伦.

证明. $N_\bullet(C(\Delta^1))$ 是如下的链复形:

$$(\cdots 0 \rightarrow 0 \rightarrow R \xrightarrow{(-\text{id}, \text{id})} R \oplus R \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots)$$

$R \oplus R$ 的阶数是 0.

链复形 I_\bullet 与 C_\bullet 的张量积 $I_\bullet \otimes C_\bullet$ 的张量积是下面的链复形

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & (I \otimes C)_2 & \rightarrow & (I \otimes C)_1 & \rightarrow & (I \otimes C)_0 \rightarrow \cdots \\ \cdots & \rightarrow & C_1 \oplus C_2 \oplus C_2 & \rightarrow & C_0 \oplus C_1 \oplus C_1 & \rightarrow & C_{-1} \oplus C_0 \oplus C_0 \rightarrow \cdots \end{array}$$

链同伦 $(f, g, \psi) : I_\bullet \otimes C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ 就等价于如下的一族交换图表

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1} \oplus C_{n+1} \oplus C_n & \xrightarrow{(f_{n+1}, g_{n+1}, \psi_n)} & D_{n+1} \\ \partial^{I \otimes C} \downarrow & & \downarrow \partial^D \\ C_n \oplus C_n \oplus C_{n-1} & \xrightarrow{(f_n, g_n, \psi_{n-1})} & D_n \end{array}$$

. 考虑形如上图中左上角中形如 $(c, 0, 0)$ 以及 $(0, c, 0)$, 交换图表给出了 f, g 为链映射的条件. 再考虑左上角中形如 $(0, 0, c)$ 的元素, 我们得到了

$$g_n - f_n - \psi_{n-1} \partial^C = \partial^D \psi_n,$$

这正是链同伦的条件, 与定义相差一个负号无关紧要. □

定义 5.47 令 $C_\bullet, D_\bullet \in \text{Ch}_\bullet(\mathcal{A})$ 为两个链复形, 定义 $\text{Hom}(C_\bullet, D_\bullet)$ 上的链同伦关系为

$$(f \sim g) \iff \exists(\psi : f \rightarrow g).$$

◇

命题 5.32 链同伦是 $\text{Hom}(C_\bullet, D_\bullet)$ 上的一个等价关系.

定义 5.48 将 $\text{Hom}(C_\bullet, D_\bullet)$ 上的链同伦等价类记为 $\text{Hom}(C_\bullet, D_\bullet)_\sim$. \diamond

命题 5.33 从 $\text{Hom}(C_\bullet, D_\bullet)$ 到 $\text{Hom}(C_\bullet, D_\bullet)_\sim$ 的商映射保持链映射的复合.

证明. 令 $\bar{g} \in \text{Hom}(C_\bullet, D_\bullet)$, $\bar{f} \in \text{Hom}(D_\bullet, E_\bullet)$. 若 $f \sim \bar{f}$, $g \sim \bar{g}$, 则根据定义, 对于所有的 $n \in \mathbb{Z}$, 都有

$$\begin{aligned} g_n &= \bar{g}_n + \partial^D \circ \phi_n + \phi_{n-1} \circ \partial^C, \\ f_n &= \bar{f}_n + \partial^E \circ \psi_n + \psi_{n-1} \circ \partial^D. \end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned} f_n \circ g_n &= (\bar{f}_n + \partial^E \circ \psi_n + \psi_{n-1} \circ \partial^D) \circ g_n \\ &= \bar{f}_n \circ g_n + (\partial^E \circ \psi_n + \psi_{n-1} \circ \partial^D) \circ g_n \\ &= \bar{f}_n \circ \bar{g}_n + \bar{f}_n \circ (\partial^D \circ \phi_n + \phi_{n-1} \circ \partial^C) \\ &\quad + \partial^E \circ (\psi_n g_n) + (\psi_{n-1} g_{n-1}) \circ \partial^C \\ &= \bar{f}_n \circ \bar{g}_n + \partial^E \circ (\bar{f}_{n+1} \phi_n) + (\bar{f}_n \phi_{n-1}) \circ \partial^C \\ &\quad + \partial^E \circ (\psi_n g_n) + (\psi_{n-1} g_{n-1}) \circ \partial^C \\ &= \bar{f}_n \circ \bar{g}_n + \partial^E \circ (\bar{f}_{n+1} \phi_n + \psi_n g_n) + (\bar{f}_n \phi_{n-1} + \psi_{n-1} g_{n-1}) \circ \partial^C. \end{aligned}$$

所以有 $f_n \circ g_n \sim \bar{f}_n \circ \bar{g}_n$, 即 $\overline{f_n \circ g_n} = \bar{f}_n \circ \bar{g}_n$, 所以商映射保持链映射之间的复合. \square

因此, 我们可以定义如下的范畴:

定义 5.49 范畴 $\mathcal{K}_\bullet(\mathcal{A})$ 是这样的一个范畴: 其对象是范畴 $\mathbf{Ch}_\bullet(\mathcal{A})$ 中的对象, 态射是链映射的链同伦等价类:

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}_\bullet(\mathcal{A})}(C_\bullet, D_\bullet) := \text{Hom}_{\mathbf{Ch}_\bullet(\mathcal{A})}(C_\bullet, D_\bullet)_\sim.$$

$\mathcal{K}_\bullet(\mathcal{A})$ 通常被称为 \mathcal{A} 中链复形的 (强) 同伦范畴. \diamond

注 5.7 我们应该注意, 另一个可以被称为“同伦范畴”的范畴将在之后被称为 \mathcal{A} 的导出范畴. 导出范畴中的态射也是链映射的链同伦等价类, 但是两个链映射 f 和 g 的定义域是类同构的. \diamond

定义 5.50 一个 $\mathbf{Ch}_\bullet(\mathcal{A})$ 中的链映射 $f_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ 被称为是一个**类同构**, 若对每个 $n \in \mathbb{N}$, 链同调群上的诱导态射

$$H_n(f) : H_n(C) \rightarrow H_n(D)$$

是一个群同构. \diamond

注 5.8 类同构也被称为**同调同构**或 **H_\bullet -同构**. \diamond

有了链同伦的定义以及类同构的定义, 我们可以给出同调群的长正合列的更深刻的解释.

尽管链复形的短正合列对计算十分有帮助, 但在同伦论中, 如果将链复形视为对象, 那么短正合列不是一个不变量. 此时我们需要考虑态射的链同伦类, 以及链复形之间的类同构类.

如果一个链映射 $A_\bullet \rightarrow B_\bullet$ 是链映射 $B_\bullet \rightarrow C_\bullet$ 在逐阶意义上定义的核, 且若 $\hat{A}_\bullet \xrightarrow{\sim} A_\bullet$ 是一个类同构, 那么复合的链映射 $\hat{A}_\bullet \rightarrow B_\bullet$ 显然不是 $B_\bullet \rightarrow C_\bullet$ 的核. 因此逐阶定义的链映射的核, 以至于短正合列, 在 \mathcal{A} 中链复形的同伦论中是无意义的.

链复形的短正合列在同调代数中起重要作用的原因, 是因为下面的“技术上的巧合”.

命题 5.34 若 $A_\bullet \rightarrow B_\bullet \rightarrow C_\bullet$ 是一个链复形的短正合列, 那么下面的交换图表

$$\begin{array}{ccc} A_\bullet & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_\bullet & \rightarrow & C_\bullet \end{array}$$

不仅仅是 $\mathbf{Ch}_\bullet(\mathcal{A})$ 中的一个推出图 (C_\bullet 是 $A_\bullet \rightarrow B_\bullet$ 沿着 $A_\bullet \rightarrow 0$ 的余纤维), 也是一个同伦推出.

但纤维或余纤维与同伦纤维或同伦余纤维的最主要区别是, (余) 纤维上的 (余) 纤维是平凡的, 但同伦 (余) 纤维上的同伦 (余) 纤维一般来说并不平凡.

我们即将引入的映射锥的概念, 在当下列条件被满足时总是有意义的

- (i.) 存在柱形对象的概念, 类似拓扑空间 X 上的柱形 $[0, 1] \times X$ 或链复形的柱形 $I_\bullet \otimes X_\bullet$,
- (ii.) 存在余极限的概念, 即可以沿着对象之间的态射将对象粘合在一起.

定义 5.51 对于一个具有柱对象 $\text{cyl}(-)$ 的范畴 \mathbf{C} 中, 态射 $f: X \rightarrow Y$ 的**映射锥**或**同伦余纤维**是下图的余极限

$$\begin{array}{ccccc}
 & X & \xrightarrow{f} & Y & \\
 & \downarrow i_1 & & \downarrow & \\
 X & \xrightarrow{i_0} & \text{cyl}(X) & & \\
 \downarrow & & \searrow & \downarrow & \\
 * & \rightarrow & & \rightarrow & \text{cone}(f)
 \end{array}$$

◇

注 5.9 我们可以直观地认为, 映射锥 $\text{cone}(f)$ 是通过如下方式构造的对象:

- (i.) 构造 X 上的柱形,
- (ii.) 将柱形的一个底面与对象 Y 用态射 f 粘合,
- (iii.) 将柱形的另一个底面收缩成一点.

我们发现, 每一个在 $\text{im}(f)$ 中的 Y 中的闭链, 都可以通过映射锥”连续”地变成一个点. 这说明, Y 中在 $\text{im}(f)$ 中的每个同伦群在映射锥中都变得平凡. 因此, 在映射锥中, $f(X)$ 在同伦等价的意义上在 Y 中被扣除. 这就说明了 $\text{cone}(f)$ 是同伦论版本的 f 的余核. \diamond

命题 5.35 映射锥作为余极限, 可以用两个连续的推出来计算

$$\begin{array}{ccccc}
 & X & \xrightarrow{f} & Y & \\
 & \downarrow^{i_1} & & \downarrow & \\
 X & \xrightarrow{i_0} & \text{cyl}(X) & \rightarrow & \text{cyl}(f) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 * & \rightarrow & \text{cone}(f) & \rightarrow & \text{cone}(f)
 \end{array}$$

上图中每一个正方形都是一个推出, 根据拼接引理, 每个长方形也是一个推出.

定义 5.52 定义 $*_{\bullet} \in \text{Ch}_{\bullet}(\mathcal{A})$ 为只有 0 阶分量为 R , 其余分量为 0 的链复形

$$*_{\bullet} := [\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow R].$$

\diamond

定义 5.53 令 $I_{\bullet} \in \text{Ch}_{\bullet}(\mathcal{A})$ 为定义 5.46 中的链复形. 定义

$$i_0 : *_{\bullet} \rightarrow I_{\bullet}$$

为将 $*_0$ 嵌入到 I_0 第二个分量的映射,

$$i_1 : *_{\bullet} \rightarrow I_{\bullet}$$

为将 $*_0$ 嵌入到 I_0 第一个分量的映射. \diamond

命题 5.36 对于 $X_{\bullet} \in \text{Ch}_{\bullet}(\mathcal{A})$, 张量积

$$I_{\bullet} \otimes X_{\bullet} \in \text{Ch}_{\bullet}(\mathcal{A})$$

是 Ch_{\bullet} 中的余纤维对象组成的范畴中的柱形对象. 由余纤维对象组成的范畴的余纤维化是单态射, 弱等价类是类同构.

命题 5.37 链复形 $(I \otimes X)_\bullet$ 具有分量

$$(I \otimes X)_n : X_n \oplus X_n \oplus X_{n-1}$$

微分映射由

$$\begin{array}{ccc} X_{n+1} \oplus X_{n+1} & \xrightarrow{\partial^X \oplus \partial^X} & X_n \oplus X_n \\ \oplus & \nearrow (-\text{id}, \text{id}) & \oplus \\ X_n & \xrightarrow{-\partial^X} & X_{n-1} \end{array}$$

给出. 写成矩阵的形式为:

$$\partial^{I \otimes X} = \begin{pmatrix} \partial^X \oplus \partial^X & (-\text{id}, \text{id}) \\ 0 & -\partial^X \end{pmatrix} : (X_{n+1} \oplus X_{n+1}) \oplus X_n \rightarrow (X_n \oplus X_n) \oplus X_{n-1}.$$

注 5.10 将 X_\bullet 嵌入到柱形 $(I \otimes X)_\bullet$ 的两个底面的映射可以通过 5.53 中定义的嵌入来构造:

$$i_0^X : X_\bullet \simeq *_\bullet \otimes X_\bullet \xrightarrow{i_0 \otimes \text{id}_X} (I \otimes X)_\bullet,$$

以及

$$i_1^X : X_\bullet \simeq *_\bullet \otimes X_\bullet \xrightarrow{i_1 \otimes \text{id}_X} (I \otimes X)_\bullet.$$

各自的分量分别为

$$X_n \hookrightarrow X_n \oplus X_n \oplus X_{n-1},$$

分别对应将 X_n 嵌入到第二个直和项和第一个直和项. ◇

定义 5.54 对于一个链映射 $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$, 映射柱 $\text{cyl}(f)_\bullet$ 被定义为如下的推出:

$$\begin{array}{ccc} X_\bullet & \xrightarrow{f} & Y_\bullet \\ \downarrow i_0 & & \downarrow \\ I_\bullet \otimes X_\bullet & \rightarrow & \text{cyl}(f)_\bullet \end{array}.$$

◇

命题 5.38 映射锥 $\text{cyl}(f)_\bullet$ 的分量是

$$\text{cyl}(f)_n = X_n \oplus Y_n \oplus X_{n-1},$$

微分映射由

$$\begin{array}{ccc} X_{n+1} \oplus Y_{n+1} & \xrightarrow{\partial^X \oplus \partial^Y} & X_n \oplus Y_n \\ \oplus & \nearrow_{(-id, f)} & \oplus \\ X_n & \xrightarrow{-\partial^X} & X_{n-1} \end{array}$$

给出. 写成矩阵的形式为

$$\partial_n^{\text{cyl}(f)} = \begin{pmatrix} \partial^X \oplus \partial^Y & (-id, f_n) \\ 0 & -\partial^X \end{pmatrix} : (X_{n+1} \oplus Y_{n+1}) \oplus X_n \rightarrow (X_n \oplus Y_n) \oplus X_{n-1}.$$

定义 5.55 对于链映射 $f_\bullet : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$, 映射锥 $\text{cone}(f)_\bullet$ 定义为如下的推出:

$$\begin{array}{ccc} X_\bullet & \rightarrow & *_\bullet \\ \downarrow^{i_1} & & \downarrow \\ I_\bullet \otimes X_\bullet & \rightarrow & \text{cone}(X)_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{cyl}(f)_\bullet & \rightarrow & \text{cone}(f)_\bullet \end{array}$$

◇

命题 5.39 映射锥 $\text{cone}(f)_\bullet$ 的分量为

$$\text{cone}(f)_n = Y_n \oplus X_{n-1}.$$

微分映射由

$$\begin{array}{ccc} Y_{n+1} & \xrightarrow{\partial^Y} & Y_n \\ \oplus & \nearrow_{f_n} & \oplus \\ X_n & \xrightarrow{-\partial^X} & X_{n-1} \end{array}$$

给出. 写成矩阵的形式为

$$\partial_n^{\text{cone}(f)} = \begin{pmatrix} \partial_n^Y & f_n \\ 0 & -\partial_n^X \end{pmatrix} : Y_{n+1} \oplus X_n \rightarrow Y_n \oplus X_{n-1}.$$

命题 5.40 对于一个链映射 $f_\bullet : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$, 将 Y_\bullet 嵌入到 $\text{cone}(f)_\bullet$ 的正则映射 $i_\bullet : Y_\bullet \rightarrow \text{cone}(f)_\bullet$ 的分量为

$$i_n : Y_n \rightarrow \text{cone}(f)_n = Y_n \oplus X_{n-1},$$

是从 Y_n 到第一个直和项的正则嵌入.

利用链复形的映射锥的概念, 我们现在可以解释同调群的长正合列为何是真正的链复形的同伦余纤维序列的一个障碍.

定义 5.56 记 $X[1]_{\bullet} \in \mathbf{Ch}_{\bullet}(\mathcal{A})$ 为链复形 X_{\bullet} 的垂悬. 链映射 $p_{\bullet} : \text{cone}(f)_{\bullet} \rightarrow X[1]_{\bullet}$ 的分量为

$$p_n : Y_n \oplus X_{n-1} \rightarrow X_{n-1}.$$

◇

命题 5.41 链映射 $p_{\bullet} : \text{cone}(f)_{\bullet} \rightarrow X[1]_{\bullet}$ 表示了正则映射 $i_{\bullet} : Y_{\bullet} \rightarrow \text{cone}(f)_{\bullet}$ 的同伦余纤维.

证明. 根据 p_{\bullet} 与 i_{\bullet} 的性质,

$$Y_{\bullet} \xrightarrow{i_{\bullet}} \text{cone}(f)_{\bullet} \xrightarrow{p_{\bullet}} X[1]_{\bullet}.$$

是链复形之间的短正合列. 所以我们有一个余纤维推出图:

$$\begin{array}{ccc} Y_{\bullet} & \xhookrightarrow{i} & \text{cone}(f)_{\bullet} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & X[1]_{\bullet} \end{array}.$$

那么, 在链复形的内射模结构上所有的链复形都是余纤维对象, 类似 $i : Y_{\bullet} \hookrightarrow \text{cone}(f)_{\bullet}$ 的嵌入是一个余纤维化. 根据详细的同伦极限的讨论, 这意味上面的推出作为一个通常的余极限同时也是一个同伦余极限, 于是, p_{\bullet} 是 i_{\bullet} 的同伦余纤维. □

推论 5.42 对于一个链映射 $f_{\bullet} : X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$, 存在一个如下的同伦余纤维

$$X_{\bullet} \xrightarrow{f_{\bullet}} Y_{\bullet} \xrightarrow{i_{\bullet}} \text{cone}(f)_{\bullet} \xrightarrow{p_{\bullet}} X[1]_{\bullet} \xrightarrow{f[1]_{\bullet}} Y_{\bullet} \xrightarrow{i[1]_{\bullet}} \text{cone}(f)_{\bullet} \xrightarrow{p[1]_{\bullet}} X[2]_{\bullet} \rightarrow \cdots$$

引理 5.43 令

$$X_{\bullet} \xrightarrow{f_{\bullet}} Y_{\bullet} \xrightarrow{p_{\bullet}} Z_{\bullet}$$

为链复形的短正合列.

线性映射

$$h_n : Y_n \oplus X_{n-1} \rightarrow Y_n \rightarrow Z_n$$

构成了一个链映射

$$h_{\bullet} : \text{cone}(f)_{\bullet} \rightarrow Z_{\bullet},$$

这链映射是一个类同构. $H_n(h_{\bullet})$ 的逆将一个闭链 $z \in Z_n$ 映到

$$(\hat{z}_n, \partial^Y \hat{z}_n) \in Y_n \oplus X_{n-1},$$

其中 \hat{z}_n 是 z_n 沿着 p_n 的任何提升, $\partial^Y \hat{z}_n$ 的定义与短正合列中连接同态的定义 5.43 相同.

最终, 态射 $i_{\bullet} : Y_{\bullet} \rightarrow \text{cone}(f)_{\bullet}$ 在同伦范畴中与下面的锯齿形等价

$$\begin{array}{ccc} & \text{cone}(f)_{\bullet} & \\ & \downarrow \simeq^h & \\ Y_{\bullet} & \rightarrow & Z_{\bullet} \end{array}.$$

定理 5.44 令

$$X_{\bullet} \xrightarrow{f_{\bullet}} Y_{\bullet} \xrightarrow{p_{\bullet}} Z_{\bullet}$$

为链复形之间的短正合列.

那么, 链同调函子

$$H_n(-) : \mathbf{Ch}_{\bullet}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$$

将推论 5.42 中的同伦余纤维序列映到命题 5.30 中的长正合列.

证明. 根据引理5.43, 同伦与纤维序列与下列锯齿是等价的:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \text{cone}(f)[1]_{\bullet} & \rightarrow & \cdots \\
 & & & & \downarrow \cong & & \\
 & & \text{cone}(f)_{\bullet} & \rightarrow & X[1]_{\bullet} & \xrightarrow{f[1]_{\bullet}} & Y[1]_{\bullet} \rightarrow Z[1]_{\bullet} \\
 & & \downarrow h_{\bullet} & & & & \\
 X_{\bullet} & \xrightarrow{f_{\bullet}} & Y_{\bullet} & \rightarrow & Z_{\bullet} & &
 \end{array}$$

根据定义5.56, 我们得到

$$H_n(X[k]_{\bullet}) \simeq H_{n-k}(X_{\bullet}).$$

于是, 只需验证

$$H_n \left(\begin{array}{c} \text{cone}(f)_{\bullet} \rightarrow X[1]_{\bullet} \\ \downarrow \cong \\ Z_{\bullet} \end{array} \right) : H_n(Z_{\bullet}) \rightarrow H_n(\text{cone}(f)_{\bullet}) \rightarrow H_{n-1}(X_{\bullet})$$

与短正合列之间的连接映射 δ_n 是等价的.

根据引理5.43, 映射 $H_n(Z_{\bullet}) \xrightarrow{\cong} H_n(\text{cone}(f)_{\bullet}) \rightarrow H_{n-1}(X_{\bullet})$ 作用在同调类 $[z_n]$ 上的结果为

$$[z_n] \mapsto [(\hat{z}_n, \partial^Y \hat{z}_n)] \mapsto [\partial^Y \hat{z}_n]_X$$

这就是连接同态 δ_n 的作用结果. □

上述定理实际上在陈述, 对于每个链映射 $f_{\bullet} : X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$, 我们都能得到映射

$$X_{\bullet} \xrightarrow{f} Y_{\bullet} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \text{id}_{Y_{\bullet}} \end{pmatrix} \rightarrow \text{cone}(f)_{\bullet} \quad \begin{pmatrix} \text{id}_{X[1]_{\bullet}} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X[1]_{\bullet},$$

这得到了一个同伦余纤维序列, 通过不断地进行悬垂, 对于所有的 $n \in \mathbb{Z}$ 都有

$$X[n]_{\bullet} \xrightarrow{f} Y[n]_{\bullet} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \text{id}_{Y[n]_{\bullet}} \end{pmatrix} \rightarrow \text{cone}(f)[n]_{\bullet} \quad \begin{pmatrix} \text{id}_{X[n+1]_{\bullet}} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X[n+1]_{\bullet}.$$

为了更明显地表示上述的类似循环的行为, 我们用下面的图来表示同伦余纤维序列的延长:

$$\begin{array}{ccc} X_{\bullet} & \xrightarrow{f} & Y_{\bullet} \\ & \nwarrow [1] & \swarrow \\ & \text{cone}(f)_{\bullet} & \end{array}$$

并将这图称为 f 的**映射锥三角形**.

正是由于这些三角形, 我们将链复形的同伦范畴在类同构处的局部化 (也就是我们将来讨论的导出范畴) 称为一个**三角范畴**.

5.4 Abel 同伦论

我们在上一节中看到, 链复形范畴中最有趣的性质是被链同伦与类同构控制的. 严格来说, 链同伦与类同构超出了通常的范畴论的内容, 属于一般的抽象同伦范畴. 在本节中, 我们将从真正的同伦论的观点来研究链复形范畴的性质. 将链复形范畴变成真正的同伦论之后的结果被称为导出范畴, 我们即将讨论同伦导出的动机, 以及非常必要的链复形的分解的概念. 这将自然地给出导出函子的概念. 导出范畴和导出函子的概念在同调代数中是随处可见的, 但是在基本的丰饶范畴论中, Hom 函子的导出函子 Ext 以及张量积函子的导出函子 Tor 具有更深刻的重要性.

5.4.1 链同伦与分解

回忆定义5.49中的链复形的同伦范畴 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. 这看起来像是研究链复形的同伦论的正确语境, 但人们发现, 链映射在 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 中依然没有良好的对应.

为了解决这一问题, 我们先在类同构意义上通过投射分解和内射分解对链复形进行分解. 许多同调代数中的计算都可以归结为这样的分解.

例 5.6 当 $\mathcal{A} = \mathbf{Ab}$ 时, 考虑 \mathbf{Ch}_\bullet 中的链映射

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \mathbb{Z}_2 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow^{\text{id}} \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{mod } 2} & \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

这个链映射的值域是一个正合列, 所以类同构于链复形 0_\bullet . 因此在同伦论中, 它应该与 0_\bullet 的性质完全相同. 特别地, 以它为值域的所有链映射都与 0 链映射链同伦.

但事实上, 上面的链映射只与自身链同伦. 原因是, 如果存在一个链同伦使得上面的链映射与 0 链映射链同伦, 那么根据定义, 链同伦的 0 阶分量应该是一个 \mathbf{Abel} 群同态 $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}$, 但这同态一定是 0 .

这说明了, 上述链映射的原想不够自由, 不能容纳从它出发的许多链映射.

于是, 我们考虑在类同构意义上的一个定义域链复形的自由分解

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow^{\text{mod } 2} \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

此时定义域链复形完全由自由群组成. 将自由分解与原来的链映射复合, 得到

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow^0 & & \downarrow^{\text{mod } 2} \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{mod } 2} & \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

这就是原来的链映射的相应分解, 且这分解的确是同 0_\bullet 同伦的:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z} \\ & & \downarrow \swarrow & & \downarrow \swarrow & & \downarrow^0 & & \downarrow^{\text{mod } 2} \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{mod } 2} & \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

因此, 如果将定义域的复形进行适当的自由分解, 我们就能够找回丢失的链同伦. 在讨论一般的情况之前, 我们要引进一些概念和事实. \diamond

定义 5.57 范畴 \mathbf{C} 中的对象 P 被称为一个**投射对象**, 如果 P 具有沿着满态射的左提升性质.

即 P 是投射的当且仅当对任何的态射 $f: P \rightarrow B$ 以及满态射 $q: A \rightarrow B$, 存在某个态射 $P \rightarrow A$ 使得 f 能够沿 q 分解.

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \exists \nearrow & \downarrow q & \\ P & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

◇

定义 5.58 等价地, 一个对象 P 是投射的当且仅当函子 $\text{Hom}(P, -)$ 保持满态射.

◇

例 5.7 在 \mathbf{Set} 中, 下面两个陈述是等价的:

- (i.) 每个对象都是投射的.
- (ii.) 选择公理是成立的.

◇

引理 5.45 假设选择公理成立, 一个集合 S 上的自由 R -模是投射的.

证明. 设 $S \in \mathbf{Set}$ 且 $F(S)$ 是 S 上的自由模. 由于函子 $F \dashv U$, U 是伴随函子. 因此, 我们只需验证对于任意的满的模同态 $p: \tilde{N} \rightarrow N$ 映射 $f: S \rightarrow U(N)$ 都具有如下提升

$$\begin{array}{ccc} & U(\tilde{N}) & \\ \tilde{f} \nearrow & \downarrow p & \\ S & \xrightarrow{f} & U(N) \end{array}$$

即可.

由于 $p : \tilde{N} \rightarrow N$ 是满的, 所以 $U(p)$ 也是满的. 我们在 **Set** 中假定选择公理成立, 那么对于任意的 $n = f(s) \in U(N)$, 我们都可以选择 $\tilde{n} \in U(p)^{-1}(n)$, 使得 $\tilde{f}(s) = \tilde{n}$. 因此, 对于任意的 f , 上述提升总是存在的. 根据伴随性, $F(S)$ 是投射的. \square

引理 5.46 若 $N \in \mathbf{Mod}_R$ 是投射模的直和项, 那么 N 是一个投射模.

证明. 根据直和的泛性质可以直接验证. \square

命题 5.47 $N \in \mathbf{Mod}_R$ 是一个投射模当且仅当 N 是一个自由模的直和项.

证明. 若 N 是某个自由模的直和项, 自由模是投射的, 投射模的直和项是投射的, 所以 N 是投射的.

反之, 我们知道伴随函子 $F \dashv U$ 具有余单位 $\epsilon : FU \Rightarrow 1$, 因此对于任何一个 $N \in \mathbf{Mod}_R$ 都有模同态 $\epsilon_N : FU(N) \rightarrow N$. 显然, ϵ_N 是一个满同态, 所以有 $FU(N) \simeq N \oplus \ker(\epsilon_N)$. \square

下面我们讨论如何通过投射模构造链复形的分解. 但在开始之前, 我们有必要引入链复形的对偶概念.

定义 5.59 $\mathcal{A} = \mathbf{Mod}_R$ 中的一个余链复形 C^\bullet 是一列 \mathcal{A} 中的态射

$$C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2 \xrightarrow{d^2} \dots$$

并满足 $d \circ d = 0$. 余连映射的定义是显然的. 将 \mathcal{A} 上链复形构成的范畴记为 $\mathbf{Ch}^\bullet(\mathcal{A})$. \diamond

类似链复形的闭链, 边界, 同调, 我们可以对偶地定义余链复形的上闭链, 上边界和上同调.

投射对象在链复形范畴中的作用, 与内射对象在余链复形范畴中的作用是对偶的.

定义 5.60 范畴中的一个对象 I 被称为**内射对象**, 如果所有如下形状的图

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & I \\ \downarrow & & \\ Z & & \end{array}$$

都存在一个扩张

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & I \\ \downarrow & \nearrow \exists & \\ Z & & \end{array} .$$

其中 $X \rightarrow Z$ 是一个单态射.

◇

定义 5.61 一个范畴

- (i.) **具有足够多的投射**, 若对范畴中的每个对象 X 都存在一个投射对象 Q 以及一个满态射 $Q \rightarrow X$,
- (ii.) **具有足够多的内射**, 若对范畴中的每个对象 X 都存在一个内射对象 P 以及一个单态射 $X \rightarrow P$.

◇

命题 5.48 假设选择公理成立, 范畴 \mathbf{Mod}_R 具有足够多的投射.

证明. 对于任意的 $N \in \mathbf{Mod}_R$, $\epsilon_N : FU(N) \rightarrow N$ 是一个满态射.

□

下面我们要证明 \mathbf{Mod}_R 具有足够多的内射. 但这需要一些准备工作.

命题 5.49 假设选择公理成立, 一个 Abel 群 A 作为 \mathbb{Z} -模是内射的当且仅当它是可除的, 即对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $nA = A$.

例 5.8 根据上面的命题, 下列 Abel 群作为 \mathbb{Z} -模是可除的.

任何的域作为 Abel 群都是内射的, 所以 \mathbb{Q} 和 \mathbb{R} 都是内射 \mathbb{Z} -模. 任何域上的向量空间作为 Abel 群也是内射的. 可除群与任何子群的商群都是内射的.

\mathbb{Z} 和 \mathbb{Z}_n 不是内射的.

◇

命题 5.50 假设选择公理成立, 范畴 $\mathbf{Ab} \simeq \mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}}$ 具有足够多的内射.

证明. 根据命题 5.49, 只需证明每个 Abel 群都是一个可除群的子群.

对于任何一个 $A \in \mathbf{Ab}$, 我们有一个满射 $\epsilon_A : FU(A) \rightarrow A$. 记 $S = U(A)$, 那么 $FU(A) = F(S) \simeq \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}$. 因此, 任何的 A 都是 $\bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}$ 的商群, $A \simeq \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z} / \ker(\epsilon_A)$. 因此我们有一个嵌入 $A \simeq \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z} / \ker(\epsilon_A) \hookrightarrow \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Q} / \ker(\epsilon_A)$. 由于可除群的直和是可除的, 可除群的商群也是可除的, 所以 $\bigoplus_{s \in S} \mathbb{Q} / \ker(\epsilon_A)$ 是一个可除群. \square

引理 5.51 忘却函子 $U : \mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$ 存在一个右伴随

$$R_* : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Mod}_R .$$

这实际上是沿着环同态 $\mathbb{Z} \rightarrow R$ 的标量的余扩张.

证明. 令

$$U(R_*(A)) := \text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(U(R), A),$$

附加的 R -模结构如下: $r \in R$ 作用在一个 Abel 群同态 $f : U(R) \rightarrow A$ 的结果为 rf , 由

$$rf : r' \longmapsto f(r \cdot r')$$

定义.

对于任何一个 $N \in \mathbf{Mod}_R$, 我们定义单位 $\eta : 1_{\mathbf{Mod}_R} \Rightarrow R_*U$ 在 N 的分量为 $\eta_N : N \rightarrow R_*U(N)$, 对于任意的 $n \in N$, $\eta_N(n) \in \text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(U(R), U(N))_R$, 且

有 $\eta_N(n)(r) = rn$. 我们定义余单位 $\epsilon : UR_* \rightarrow 1_{\mathbf{Ab}}$ 在 $A \in \mathbf{Ab}$ 处的分量 $\epsilon_A : UR_*(A) \rightarrow A$ 为, 对于任何 $f \in UR_*(A) = \text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(U(R), U(A))$, $\epsilon_A(f) = f(e)$.

通过验证单位 $\eta : 1_{\mathbf{Mod}_R} \Rightarrow R_*U$, 余单位 $\epsilon : UR_* \rightarrow 1_{\mathbf{Ab}}$ 以及两个三角恒等式即可完成证明. \square

命题 5.52 假设选择公理成立, 范畴 \mathbf{Mod}_R 具有足够多的内射.

证明. 令 $N \in \mathbf{Mod}_R$, 我们需要找到一个单同态 $N \rightarrow \tilde{N}$ 使得 \tilde{N} 是一个内射 R -模.

根据命题5.50, 存在一个 Abel 群单同态

$$i : U(N) \hookrightarrow D ,$$

使得 D 是一个内射的 Abel 群.

考虑 $U \dashv R_*$ 伴随, 我们能够得到如下的态射

$$N \xrightarrow{\eta_N} R_*(U(N)) \xrightarrow{R_*(i)} R_*(D) .$$

将 U 作用在其上, 得到

$$U(N) \xrightarrow{U(\eta_N)} \text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(U(R), U(N)) \xrightarrow{i_*} \text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(U(R), D) ,$$

容易验证这是 \mathbf{Ab} 中的单同态. 根据 R_* 的构造, 这也是 \mathbf{Mod}_R 中的单同态. 我们只要验证 $R_*(D)$ 是一个内射模即可.

根据伴随的定义, 有自然同构

$$\text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(U(K), D) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(K, R_*(D)) .$$

根据第一个分量的自然性, 对任何的 $L \in \mathbf{Mod}_R$, 下面两幅图是等价的

$$\begin{array}{ccc} U(K) & \longrightarrow & D \\ \downarrow & \nearrow & \\ U(L) & & \end{array} \iff \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & R_*(D) \\ \downarrow & \nearrow & \\ L & & \end{array} ,$$

而左边的图的成立是显然的. \square

下面我们可以陈述本节的主要定义了.

定义 5.62 对于一个对象 $X \in \mathcal{A}$, X 的一个**内射分解**是一个余链复形 $J^\bullet \in \mathbf{Ch}^\bullet(\mathcal{A})$, 并附加一个类同构

$$i: X \xrightarrow{\cong} J^\bullet$$

使得对于所有的 $n \in \mathbb{N}$, $J^n \in \mathcal{A}$ 都是一个内射对象. \diamond

注 5.11 在定义5.62中, 类同构 i 是具有如下形式的余链映射

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ \downarrow i_0 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ J^0 & \xrightarrow{d^0} & J^1 & \xrightarrow{d^1} & \cdots & \xrightarrow{d^{n-1}} & J^n & \xrightarrow{d^n} & \cdots \end{array}.$$

根据定义, 一个余链复形 C^\bullet 的 0 阶上同调群为 $H^0(C^\bullet) = \ker(d^0)$, 所以 $H^0(X) = X, H^0(J^\bullet) = \ker(d^0)$. 因此, i 是一个类同构与

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{i^0} J^0 \xrightarrow{d^0} J^1 \xrightarrow{d^1} J^2 \xrightarrow{d^2} \cdots$$

是一个正合列是等价的. 经常用正合列来定义内射分解. \diamond

定义 5.63 对于一个对象 $X \in \mathcal{A}$, X 的一个**投射分解**是一个链复形 $J_\bullet \in \mathbf{Ch}_\bullet(\mathcal{A})$, 并附加一个类同构

$$p: J_\bullet \xrightarrow{\cong} X$$

使得对于所有的 $n \in \mathbb{N}$, $J_n \in \mathcal{A}$ 都是一个投射对象. \diamond

注 5.12 在定义5.63中, 类同构 p 是具有如下形式的链映射

$$\begin{array}{ccccccc} J_0 & \xleftarrow{\partial_0} & J_1 & \xleftarrow{\partial_1} & \cdots & \xleftarrow{\partial_n} & J_n & \xleftarrow{\partial_n} & \cdots \\ \downarrow p_0 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ X & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \cdots \end{array}.$$

根据定义, 一个链复形 C_\bullet 的 0 阶同调群为 $H_0(C_\bullet) = C_0/\text{im}(\partial_0) = \text{coker}(\partial_0)$, 所以 $H_0(X) = X, H_0(J_\bullet) = \text{coker}(\partial_0)$. 因此, p 是一个类同构与

$$0 \longleftarrow X \xleftarrow{p_0} J_0 \xleftarrow{\partial_0} J_1 \xleftarrow{\partial_1} J_2 \xleftarrow{\partial_2} \cdots$$

是一个正合列是等价的. 经常用正合列来定义投射分解. \diamond

我们先讨论投射分解与内射分解的存在性, 再讨论它们的函子性.

命题 5.53 令 \mathcal{A} 为具有足够多内射的 *Abel* 范畴, 那么每个对象 $X \in \mathcal{A}$ 都有内射分解.

对偶地,

命题 5.54 令 \mathcal{A} 为具有足够多投射的 *Abel* 范畴, 那么每个对象 $X \in \mathcal{A}$ 都有投射分解.

上面两个命题的证明用到了内射分解和投射分解的正合列定义, 以及对 $n \in \mathbb{N}$ 进行归纳.

为了结束这一节, 我们将要证明, 我们在本节发展的工具的确能够解决本节开始的例子中的问题.

命题 5.55 令 $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow J^\bullet$ 为余链复形之间的余链映射, 其中 X^\bullet 与 0^\bullet 类同构, J^\bullet 是逐阶的内射余链复形. 那么存在一个同伦

$$\eta : 0 \Longrightarrow f^\bullet.$$

证明. 我们需要构造一系列态射 $\{\eta^{n+1} : X^{n+1} \rightarrow J^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 使得对所有的 $n \in \mathbb{N}$,

$$f^n = \eta^{n+1} \circ d_X^n + d_J^{n-1} \circ \eta^n$$

成立.

利用归纳法. 为了便于进行归纳, 我们令余链复形中的 n 从 -1 开始. 定义 $\eta^{n \leq 0} := 0, f^{n < 0} := 0$. 当 $n = 0$ 时, 我们需要构造一个 η^1 , 使得

$$\begin{array}{ccc} X^0 & \xrightarrow{d_X^0} & X^1 \\ \downarrow f^0 & \swarrow \eta^1 & \\ J^0 & & \end{array}$$

交换. 根据约定, d_X^0 是单同态, 且 J^0 是内射的, 所以 f^0 一定存在一个扩张, 使得上图交换, 将这扩张记为 η^1 , 这就证完了 $n = 0$ 的情况.

因此我们假定, 对于给定的一个 $n \in \mathbb{N}$ 以及 $f^{< n}$, 我们已经构造出了满足条件的 $\eta^{< n}$. 考虑

$$g^n := f^n - d_J^{n-1} \circ \eta^n.$$

根据归纳假设以及余链映射的交换性, 我们得到

$$g^n \circ d_X^{n-1} = 0$$

根据余核 $X^n / \text{im}(d_X^{n-1}) = \text{coker}(d_X^{n-1})$ 的泛性质, $g^n : X^n \rightarrow J^n$ 诱导出唯一的态射 $\bar{g}^n : X^n / \text{im}(d_X^{n-1}) \rightarrow J^n$. 再根据 X^\bullet 的正合性, $d_X^n : X^n / \text{im}(d_X^{n-1}) \rightarrow X^{n-1}$ 是一个单同态, 而 J^n 是内射的, 故存在 \bar{g}^n 的一个扩张 η^{n+1} 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} X^n / \text{im}(d_X^{n-1}) & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} \\ \downarrow \bar{g}^n & \swarrow \eta^{n+1} & \\ J^n & & \end{array}.$$

□

完全对偶地, 我们得到

命题 5.56 令 $f_\bullet : P_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ 为链复形之间的链映射, 其中 Y_\bullet 与 0_\bullet 类同构, P_\bullet 是逐阶的投射链复形. 那么存在一个同伦

$$\eta : 0 \Longrightarrow f_\bullet.$$

我们已经看到了链复形的投射与内射分解能够使得链同伦与类同构相容. 在下一节中我们将证明, 投射与内射分解可以对整个链复形范畴进行. 得到的“分解”范畴就是导出范畴, 是 Abel 同伦论真正的舞台.

5.4.2 导出范畴

在上一节中, 我们看到, 每个对象 $A \in \mathcal{A}$ 都存在内射分解和投射分解. 本节中我们将态射也进行相应的分解, 从而将链复形范畴分解.

命题 5.57 令 $f: X \rightarrow Y$ 为 \mathcal{A} 中的一个态射. 令

$$i_Y: Y \longrightarrow Y^\bullet$$

为 Y 的内射分解,

$$i_X: X \xrightarrow{\simeq} X^\bullet$$

是一个单态射, 且同时是一个类同构, 那么存在一个余链映射 $f^\bullet: X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\simeq} & X^\bullet \\ \downarrow f & & \downarrow f^\bullet \\ Y & \xrightarrow{i_Y} & Y^\bullet \end{array}.$$

证明. 只需要构造映射 $\{f^n: X^n \rightarrow Y^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 使得当 $n \geq 1$ 时有交换图

$$\begin{array}{ccc} X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} \\ \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} \\ Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} \end{array}$$

成立, 当 $n = 0$ 时有交换图

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_X} & X^0 \\ \downarrow f & & \downarrow f^0 \\ Y & \xrightarrow{i_Y} & Y^0 \end{array}$$

成立.

证明用归纳法, 完全类似上一节中命题5.55的证明. \square

命题 5.58 命题5.57中构造的 f^\bullet 在链同伦意义下是唯一的.

证明. 假设有两个余链映射 g_1^\bullet, g_2^\bullet 使得命题5.57中的图表交换. 存在链同伦 $g_1^\bullet \Rightarrow g_2^\bullet$ 当且仅当存在链同伦 $0^\bullet \Rightarrow g_2^\bullet - g_1^\bullet$. 记 $f^\bullet := g_2^\bullet - g_1^\bullet$, 我们有下面的图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_X} & X^\bullet \\ \downarrow 0^\bullet & & \downarrow f^\bullet \\ Y & \xrightarrow{i_Y} & Y^\bullet \end{array}$$

交换. 用正合列来描述, 即

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{i_X^0} & X^0 & \xrightarrow{d_X^0} & X^1 & \xrightarrow{d_X^1} & \cdots \\ 0 \downarrow & & 0 \downarrow & & f^0 \downarrow & & f^1 \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{i_Y^0} & Y^0 & \xrightarrow{d_Y^0} & Y^1 & \xrightarrow{d_Y^1} & \cdots \end{array}$$

是交换的. 为了证明 f^\bullet 是零伦的, 我们只要构造出合适的 $\eta: 0^\bullet \rightarrow f^\bullet$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{i_X^0} & X^0 & \xrightarrow{d_X^0} & X^1 & \xrightarrow{d_X^1} & \cdots \\ 0 \downarrow & \nearrow \eta^{-1} & 0 \downarrow & \nearrow \eta^0 & f^0 \downarrow & \nearrow \eta^1 & f^1 \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{i_Y^0} & Y^0 & \xrightarrow{d_Y^0} & Y^1 & \xrightarrow{d_Y^1} & \cdots \end{array}$$

在上图中, 令 $\eta^{-1} = 0, \eta^0 = 0$, 再利用5.55中的方法构造出剩余的 $\eta^{\geq 1}$ 即可. \square

我们现在要讨论投射分解与内射分解在链复形的同伦范畴中的函子性. 我们引入下面的概念, 来区分链复形和余链复形.

定义 5.64 (导出范畴) 令 $\mathcal{K}_\bullet(\mathcal{A}) \in \mathbf{Cat}$ 为定义5.49中的链复形的强同伦范畴. 类似地, 令 $\mathcal{K}^\bullet(\mathcal{A}) \in \mathbf{Cat}$ 为余链复形的强同伦范畴. 记 $\mathcal{K}_\bullet(\mathcal{A})$ 中由逐阶投射

链复形生成的全子范畴为

$$\mathcal{D}_\bullet(\mathcal{A}) := \mathcal{K}_\bullet(\mathcal{P}_{\mathcal{A}}) \hookrightarrow \mathcal{K}_\bullet(\mathcal{A}) .$$

同样, 记 $\mathcal{K}^\bullet(\mathcal{A})$ 中逐阶内射链复形生成的全子范畴为

$$\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{A}) := \mathcal{K}^\bullet(\mathcal{I}_{\mathcal{A}}) \hookrightarrow \mathcal{K}^\bullet(\mathcal{A}) .$$

称 $\mathcal{D}_\bullet(\mathcal{A})$ 与 $\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{A})$ 或任何与之范畴等价的范畴为 \mathcal{A} 的导出范畴. \diamond

注 5.13 人们通常利用更加抽象的方法定义上面的导出范畴, 即在链复形范畴中的类同构上做局部化. 如果使用这种定义的话, 那么定义5.64就是一个定理. \diamond

定理 5.59 如果 \mathcal{A} 中有足够多的内射, 那么存在一个函子

$$P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{A})$$

以及自然同构

$$\begin{aligned} H^0(-) \circ P &\simeq \text{id}_{\mathcal{A}}, \\ H^{n \geq 1}(-) \circ P &\simeq 0. \end{aligned}$$

证明. 根据命题5.53, 任何一个 $X \in \mathcal{A}$ 都存在一个内射分解. 根据命题5.57, 任给两个内射分解 $X \rightarrow X^\bullet$ 以及 $X \rightarrow \tilde{X}^\bullet$, 都存在 $\mathcal{K}^\bullet(\mathcal{A})$ 中的一个态射 $X^\bullet \rightarrow \tilde{X}^\bullet$, 命题5.58告诉我们这个态射在 $\mathcal{K}^\bullet(\mathcal{A})$ 中是唯一的. 特别地, $X^\bullet \rightarrow \tilde{X}^\bullet$ 还是 $\mathcal{K}^\bullet(\mathcal{A})$ 中的一个同构.

于是, 我们令 $P(X)$ 为 X 的一个内射分解. 当 P 作用在 $f : X \rightarrow Y$ 上时, 得到的提升 f^\bullet 的确是 $\mathcal{K}^\bullet(\mathcal{A})$ 中的一个态射. 提升的唯一性保证了 P 的函子性.

根据内射分解的定义, $P(X)$ 与 X 是类同构的, 因此 $P(X)$ 的上同调群等于 X 的上同调群. 再根据上同调群函子 H^\bullet 的函子性以及 P 的函子性, 自然同构的存在是显然的. \square

对偶地, 我们有:

定理 5.60 如果 \mathcal{A} 中有足够多的投射, 那么存在一个函子

$$Q: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{D}_\bullet(\mathcal{A})$$

以及自然同构

$$H_0(-) \circ Q \simeq \text{id}_{\mathcal{A}},$$

$$H_{n \geq 1}(-) \circ Q \simeq 0.$$

对于在导出范畴中的实际计算, 下面的陈述是十分重要的. 由于涉及到局部化理论, 所以我们只进行陈述, 不给出证明. 命题所陈述的是, 在导出范畴中计算态射集, 实际上只需要对定义域或值域进行分解.

命题 5.61 令 $X_\bullet, Y_\bullet \in \text{Ch}_\bullet(\mathcal{A})$ 为两个正合的链复形. 我们有自然同构

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}_\bullet}(Q(X_\bullet), Q(Y_\bullet)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{K}_\bullet}(Q(X_\bullet), Y_\bullet).$$

对偶地, 令 $X^\bullet, Y^\bullet \in \text{Ch}^\bullet(\mathcal{A})$ 为两个正合的余链复形. 我们有自然同构

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^\bullet}(P(X^\bullet), P(Y^\bullet)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{K}^\bullet}(X^\bullet, P(Y^\bullet)).$$

5.4.3 导出函子

上一节中我们知道了如何将范畴 \mathcal{A} 嵌入到导出范畴中. 这种导出范畴的构造方法自然地给出了导出函子的概念.

定义 5.65 令 \mathcal{A}, \mathcal{B} 为两个 Abel 范畴, 一个函子

$$F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

被称为一个**加性函子**, 若

- (i.) F 将零对象映到零对象, 即 $F(0) \simeq 0 \in \mathcal{B}$,
- (ii.) 保持直和以及直和的正则嵌入和投影.

◇

给定一个加法函子 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$, 如下的复合

$$\mathbf{Ch}_\bullet(F) : \mathbf{Ch}_\bullet(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{Ch}_\bullet(\mathcal{A}')$$

也是一个函子. 由于 F 保持零对象, 所以 F 保持微分映射, 从而保持链映射和链同伦. 再对链同伦关系做商, 可以得到

$$\mathcal{K}_\bullet(F) : \mathcal{K}_\bullet(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{K}_\bullet(\mathcal{A}')$$

是链复形的同伦范畴之间的一个函子.

注 5.14 如果 $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ 具有足够多的投射和内设, 我们就会希望从 F 导出一个导出范畴之间的函子 $\mathcal{D}_\bullet(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}_\bullet(\mathcal{A}')$. 在定义域这边, 看起来是容易的, 因为我们可以直接进行函子的复合:

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\mathcal{Q}} \mathcal{D}_\bullet(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{K}_\bullet(\mathcal{P}_\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathcal{K}_\bullet(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathcal{K}_\bullet(F)} \mathcal{K}_\bullet(\mathcal{A}') \quad (5.1)$$

但一般来说, (5.1)得到的函子, 无法沿着

$$\mathcal{A}' \xrightarrow{\mathcal{Q}} \mathcal{D}_\bullet(\mathcal{A}') \simeq \mathcal{K}_\bullet(\mathcal{P}_{\mathcal{A}'}) \hookrightarrow \mathcal{K}_\bullet(\mathcal{A}')$$

分解, 即

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{F} & \mathcal{A}' \\ \downarrow \mathcal{Q} & & \downarrow \mathcal{Q} \\ \mathcal{D}_\bullet(\mathcal{A}) & & \mathcal{D}_\bullet(\mathcal{A}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{K}_\bullet(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathcal{K}_\bullet(F)} & \mathcal{K}_\bullet(\mathcal{A}') \end{array}$$

一般来说不是交换的.

在更加抽象的讨论中, 可以通过将投射分解函子作用在链复形上使得上图交换. 但根据投射分解的定义, 这种交换仅仅是类同构意义上的交换.

这就意味着, 如果只关心导出函子的像中的“弱链同调类型”, 那么将(5.1)的像取同调群之后就可以得到想要的信息. 这正是之后要做的事情.

◇

定义 5.66 (正合函子) 令 $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ 为 Abel 范畴. 一个加性函子 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 被称为

- 一个**左正合函子**, 若 F 保持核,
- 一个**右正合函子**, 若 F 保持余核,
- 一个**正合函子**, 若 F 同时是左正合而右正合的.

◇

注 5.15 由于 Abel 范畴中的有限积与有限余积都是直和, 核与余核分别是 Abel 范畴中的有限极限与有限余极限, 零对象既是有限的极限又是有限的余极限. 所以我们可以定义左正合函子为保持 Abel 范畴中有限极限的函子, 右正合函子为保持 Abel 范畴中有限余极限的函子, 正合函子为同时保持 Abel 范畴中有限极限和有限余极限的函子. 这就是定义 3.40.

◇

命题 5.62 若 F 是一个左正合函子, 那么 F 保持每个形如

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

的正合列. 对偶地, 若 F 是一个右正合函子, 那么 F 保持每个形如

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

的正合列.

证明. 按照定义直接验证即可. \square

注 5.16 命题5.62是定义5.66中的名称的来源. 一个函子是左正合的, 如果它保持从左边开始的正合列; 一个函子是右正合的, 如果它保持到右边结束的正合列. \diamond

现在我们来陈述本节中的两个主要定义.

定义 5.67 (右导出函子) 令

$$F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$$

为 Abel 范畴之间的左正合函子, 且 \mathcal{A} 中含有足够多的内射. 对于 $n \in \mathbb{N}$, F 的 n 阶右导出函子定义为如下的复合:

$$R^n F : \mathcal{A} \xrightarrow{P} \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{A}) \hookrightarrow K^\bullet(\mathcal{A}) \xrightarrow{K^\bullet(F)} K^\bullet(\mathcal{A}') \xrightarrow{H^n(-)} \mathcal{A}' .$$

\diamond

对偶地,

定义 5.68 (左导出函子) 令

$$F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$$

为 Abel 范畴之间的右正合函子, 且 \mathcal{A} 中含有足够多的投射. 对于 $n \in \mathbb{N}$, F 的 n 阶左导出函子定义为如下的复合:

$$L_n F : \mathcal{A} \xrightarrow{Q} \mathcal{D}_\bullet(\mathcal{A}) \hookrightarrow K_\bullet(\mathcal{A}) \xrightarrow{K_\bullet(F)} K_\bullet(\mathcal{A}') \xrightarrow{H_n(-)} \mathcal{A}' .$$

\diamond

下面的命题说明, 0 阶的导出函子与原来的函子是相同的.

命题 5.63 令 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 为一个左正合函子, 且 \mathcal{A} 中有足够多的内射. 那么, 存在自然同构

$$R^0 F \simeq F.$$

对偶地, 若 F 是一个右正合函子且 \mathcal{A} 中具有足够多的投射, 那么, 存在自然同构

$$L_0 F \simeq F.$$

证明. 我们先证明第一个论述, 第二个论述对偶的到.

根据正合列的定义, X 的内射分解是一个正合列

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow \dots$$

由于 F 是左正合的, 所以

$$0 \longrightarrow F(X) \longrightarrow F(X^0) \longrightarrow F(X^1) \longrightarrow \dots$$

也是一个正合列. 所以

$$R^0 F(X) := \ker(F(X^0) \rightarrow F(X^1)) \simeq F(X).$$

自然性由函子性保证. □

命题 5.64 令 F 为加性函子.

- 若 F 是右正合的, $N \in \mathcal{A}$ 是一个投射对象, 那么

$$L_n F(N) = 0, n \geq 1.$$

- 若 F 是左正合的, $N \in \mathcal{A}$ 是一个内射对象, 那么

$$R^n F(N) = 0, n \geq 1.$$

证明. 若 N 是投射的, 那么

$$N \longleftarrow 0 \longleftarrow 0 \longleftarrow \dots$$

是 N 的一个投射分解. 接下来直接验证即可. \square

为了证明导出函子在更高阶的性质, 我们要证明下面的技术性的引理.

引理 5.65 令 \mathcal{A} 为 *Abel* 范畴, 且 \mathcal{A} 中具有足够多的投射. 若 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$ 是 \mathcal{A} 中的短正合列, 则存在如下的链复形交换图表

$$\begin{array}{ccccccc} 0_{\bullet} & \longrightarrow & A_{\bullet} & \longrightarrow & B_{\bullet} & \longrightarrow & C_{\bullet} \longrightarrow 0_{\bullet} \\ & & \downarrow f_{\bullet} & & \downarrow g_{\bullet} & & \downarrow h_{\bullet} \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C \longrightarrow 0 \end{array},$$

其中, 每个竖直方向的态射都是一个投射分解, 且上面的一行是链复形的短正合列.

证明. 根据命题 5.54, 我们构造出 f_{\bullet}, g_{\bullet} , 只需要找到另一个投射分解 g_{\bullet} , 使得交换图中的第一行是一个短正合列.

对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$B_n := A_n \oplus C_n$$

每一阶之间的态射 $A_n \rightarrow B_n \rightarrow C_n$ 为正则嵌入和正则投射. 令

$$g_0 = ((g_0)_A, (g_0)_C) : A_0 \oplus C_0 \longrightarrow B$$

其中, $(g_0)_A$ 是如下的复合

$$(g_0)_A : A_0 \oplus C_0 \longrightarrow A_0 \xrightarrow{f_0} A \hookrightarrow B,$$

$(g_0)_C$ 为如下的复合

$$(g_0)_C : A_0 \oplus C_0 \longrightarrow C_0 \xrightarrow{\bar{p}} B,$$

\tilde{p} 是如下的 p 的提升

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ \tilde{p} \nearrow & & \downarrow p \\ C_0 & \xrightarrow{h_0} & C \end{array} .$$

定义 B_\bullet 的微分映射为

$$\partial_k^B = \begin{pmatrix} \partial_A^k & (-1)^k e_k \\ 0 & \partial_C^k \end{pmatrix} : A_{k+1} \oplus C_{k+1} \longrightarrow A_k \oplus C_k ,$$

其中 e_k 用下面的方法归纳定义. 令 e_0 为如下的 f_0 的提升

$$\begin{array}{ccc} & A_0 & \\ e_0 \nearrow & & \downarrow f_0 \\ C_1 & \xrightarrow{\tilde{p} \circ \partial_C^0} & A \end{array} .$$

映射 $\tilde{p} \circ \partial_C^0$ 的像的确在 A 中, 因为 $p \circ \tilde{p} \circ \partial_C^0 = h_0 \circ \partial_C^0 = 0$. 假设我们已经找到了 e_{n-1} , 且 e_{n-1} 保持微分映射, 则令 e_n 为 e_{n-1} 的如下提升

$$\begin{array}{ccc} & A_n & \\ e_n \nearrow & & \downarrow \partial_A^{n-1} \\ C_1 & \xrightarrow{e_{n-1} \circ \partial_C^n} \text{im}(\partial_A^{n-1}) = \ker(\partial_A^{n-2}) & \end{array} .$$

容易验证, $\partial_B^n \circ \partial_B^{n+1} = 0$, 且 ∂_B 显然与各阶的正则映射与正则投影是交换的. 这就证明了命题中交换图中第一行是一个正合列.

还要证明 g_\bullet 是一个类同构. 当 $n \geq 1$ 时, 对 $0 \rightarrow A_\bullet \rightarrow B_\bullet \rightarrow C_\bullet \rightarrow 0$ 取同调的结果为 0, 根据同调长正合列. 当 $n = 0$ 时, 得到了短正合列 $0 \rightarrow A \rightarrow H_0(B_\bullet) \rightarrow C \rightarrow 0$, 有如下的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \hookrightarrow & H_0(B_\bullet) & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & = & \downarrow & & \downarrow & = & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A & \hookrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

上下行都是正合的. 根据五引理, 中间的态射是一个同构. \square

对偶地, 我们有

引理 5.66 令 \mathcal{A} 为 *Abel* 范畴, 且 \mathcal{A} 中具有足够多的内射. 若 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$ 是 \mathcal{A} 中的短正合列, 则存在如下的链复形交换图表

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f^\bullet & & \downarrow g^\bullet & & \downarrow h^\bullet \\ 0^\bullet & \longrightarrow & A^\bullet & \longrightarrow & B^\bullet & \longrightarrow & C^\bullet \longrightarrow 0^\bullet \end{array},$$

其中, 每个竖直方向的态射都是一个内射分解, 且下面的一行是余链复形的短正合列.

导出函子最重要的事实将在这个命题中体现:

命题 5.67 令 \mathcal{A}, \mathcal{B} 为 *Abel* 范畴, 且 \mathcal{A} 中含有足够多的内射. $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 是一个左正合函子, $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ 是 \mathcal{A} 中的短正合列. 那么, 右导出函子 $R^\bullet F(-)$ 的像在 \mathcal{B} 中存在如下的长正合列:

$$0 \rightarrow R^0 F(A) \rightarrow R^0 F(B) \rightarrow R^0 F(C) \xrightarrow{\delta_0} R^1 F(A) \rightarrow R^1 F(B) \rightarrow R^1 F(C) \xrightarrow{\delta_1} R^2 F(A) \rightarrow \cdots.$$

证明. 根据引理 5.66, 我们可以找到余链复形的短正合列

$$0 \longrightarrow A^\bullet \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow 0$$

由于对所有的 $n \in \mathbb{N}$, A^n 都是一个内射对象, $0 \rightarrow A^n \rightarrow B^n \rightarrow C^n \rightarrow 0$ 是一个分裂正合列. 由于函子 F 是一个加性函子, 所以保持直和以及正则嵌入与正则投影, 从而保持分裂正合列. 所以

$$0^\bullet \longrightarrow F(A^\bullet) \longrightarrow F(B^\bullet) \longrightarrow F(C^\bullet) \longrightarrow 0^\bullet$$

是 \mathcal{B} 中余链复形的短正合列. 根据命题 5.30, 我们可以得到相应的上同调群的长正合列, 再根据右导出函子的定义, 命题得证. \square

注 5.17 上个命题说明, 我们可以将 $R^1F(A)$ 解释为“左正合函子与正合函子之间差距的度量”. 对任何短正合列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, 上述命题给出了正合列

$$0 \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow R^1F(A) \rightarrow \cdots,$$

所以 $0 \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow 0$ 是一个短正合列当且仅当 $R^1F(A) = 0$.

对偶地, $L_1F(C)$ 是“右正合函子与正合函子之间差距的度量”, 即正合列

$$\cdots \rightarrow L_1F(C) \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow R^1F(A) \rightarrow 0$$

是一个短正合列当且仅当 $L_1F(C) = 0$. ◇

根据注5.17的精神, 我们可以立刻从定义得到下面的结果.

命题 5.68 令 F 为一个正合函子. 那么

$$R^{\geq 1}F = 0$$

且

$$L_{\geq 1}F = 0.$$

定义 5.69 令 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 为左正合函子或者右正合函子. 一个对象 $A \in \mathcal{A}$ 被称为一个 **F -非循环对象**, 若所有正数阶的右导出函子或左导出函子作用在 A 上结果为 0. ◇

非循环对象在计算导出函子时是有用的. 更一般地, 我们可以不必用内射分解或投射分解来计算 F 的导出函子, 只需要用“ F -投射分解”或“ F -内射分解”计算即可.

尽管 \mathcal{A} 中的投射分解已经足够计算任何左导出函子, 内射分解也足够计算任何右导出函子, 但如果只关心某个特定的函子 F , 这些分解可能会远远超出需要. 所以, 我们将介绍这两种更弱的分解.

令 \mathcal{A}, \mathcal{B} 为 Abel 范畴, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 为加性函子.

定义 5.70 令 F 为左正合的, \mathcal{A} 的一个加性全子范畴 $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ 被称为 F -**内射** 的, 若

- (i.) 对任何对象 $A \in \mathcal{A}$, 都存在一个到 $\tilde{A} \in \mathcal{J}$ 的单态射 $A \rightarrow \tilde{A}$,
- (ii.) 对于每个 \mathcal{A} 中的短正合列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, 若 $A, B \in \mathcal{J}$, 则也有 $C \in \mathcal{J}$,
- (iii.) 对于每个 \mathcal{A} 中的短正合列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, 若有 $A \in \mathcal{J}$, 则 $0 \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow 0$ 是 \mathcal{B} 中的一个短正合列.

◇

对偶地,

定义 5.71 令 F 为右正合的, \mathcal{A} 的一个加性全子范畴 $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ 被称为 F -**投射** 的, 若

- (i.) 对任何对象 $A \in \mathcal{A}$, 都存在一个从 $\tilde{A} \in \mathcal{P}$ 出发的满态射 $\tilde{A} \rightarrow A$,
- (ii.) 对于每个 \mathcal{A} 中的短正合列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, 若 $B, C \in \mathcal{P}$, 则也有 $A \in \mathcal{P}$,
- (iii.) 对于每个 \mathcal{A} 中的短正合列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, 若有 $C \in \mathcal{P}$, 则 $0 \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow 0$ 是 \mathcal{B} 中的一个短正合列.

◇

有了上面定义的 $\mathcal{J}, \mathcal{P} \subset \mathcal{A}$, 我们称

定义 5.72 对于 $A \in \mathcal{A}$,

- A 的一个 F -内射分解是一个余链复形 $I^\bullet \in \mathbf{Ch}^\bullet(\mathcal{J})$ 以及一个类同构

$$A \xrightarrow{\sim} I^\bullet$$

- A 的一个 F -投射分解是一个链复形 $Q_\bullet \in \mathbf{Ch}_\bullet(\mathcal{P})$ 以及一个类同构

$$Q_\bullet \xrightarrow{\sim} A$$

◇

命题 5.69 现在令 \mathcal{A} 中有足够多的投射, 令 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 为一个加性函子, 令 $\mathbf{Ac} \subset \mathcal{A}$ 为定义 5.69 中的 F -非循环对象构成的范畴. 那么

- 若 F 是左正合的, 则 $\mathcal{J} := \mathbf{Ac}$ 是 \mathcal{A} 的一个 F -内射子范畴,
- 若 F 是右正合的, 则 $\mathcal{P} := \mathbf{Ac}$ 是 \mathcal{A} 的一个 F -投射子范畴.

证明. 考虑 F 左正合的情况, 右正合的情况是对偶的. 先看定义 5.70 的第一个条件. 由于 \mathcal{A} 具有足够多的内射, 那么对任何一个 $A \in \mathcal{A}$, 我们都能找到一个内射对象 $\tilde{A} \in \mathcal{A}$, 并存在一个单同态 $A \rightarrow \tilde{A}$. 但内射对象 \tilde{A} 显然满足 $R^{\geq 1}(\tilde{A}) = 0$, 故 $\tilde{A} \in \mathcal{J}$. 再看第二个条件, 由命题 5.67, 写出长正合列

$$0 \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow R^1 F(A) \rightarrow R^1 F(B) \rightarrow R^1 F(C) \rightarrow R^2 F(A) \rightarrow \cdots.$$

根据 F -非循环对象的定义, 若 $A, B \in \mathcal{J}$, 则有 $R^{\geq 1} F(A) = R^{\geq 1} F(B) = 0$, 从而有正合列

$$0 \rightarrow R^{\geq 1} F(C) \rightarrow 0,$$

从而 $C \in \mathcal{J}$. 第三个条件, 若 $A \in \mathcal{J}$ 能够推出 $R^1 F(A) = 0$, 根据注 5.17, 这等价于 $0 \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow 0$ 是 \mathcal{B} 中的短正合列. \square

在命题5.69中通过非循环对象得到的 F -投射分解或内射分解, 被称为 F -非循环分解.

引理 5.70 令 \mathcal{A} 为有足够多内射的 *Abel* 范畴, $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 为左正合函子. \mathcal{J} 是之前5.70中定义的 F -内射子范畴. 若一个余链复形 $X^\bullet \in \mathbf{Ch}^\bullet(\mathcal{J})$ 与 0^\bullet 类同构

$$X^\bullet \xrightarrow{\cong} 0^\bullet,$$

那么 $F(X^\bullet) \in \mathbf{Ch}^\bullet(\mathcal{B})$ 与 0^\bullet 也是类同构的

$$F(X^\bullet) \xrightarrow{\cong} 0^\bullet.$$

证明. 考虑从长正合列 X^\bullet 中得到的下列短正合列

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow X^0 \xrightarrow{d^0} X^1 \xrightarrow{d^1} \mathrm{im}(d^1) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \mathrm{im}(d^1) \rightarrow X^2 \xrightarrow{d^2} \mathrm{im}(d^2) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \mathrm{im}(d^2) \rightarrow X^3 \xrightarrow{d^3} \mathrm{im}(d^3) \rightarrow 0 \\ \vdots \end{aligned}$$

根据定义5.70中的第二个条件, 对 $n \in \mathbb{N}$ 用归纳法, 得到 $\mathrm{im}(d^n)$ 也在 \mathcal{J} 中. 根据定义5.70的第三个条件, 得到对所有的 $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \rightarrow F(\mathrm{im}(d^n)) \rightarrow F(X^{n+1}) \rightarrow F(\mathrm{im}(d^{n+1})) \rightarrow 0$$

都是 \mathcal{B} 中的短正合列. 但这意味着

$$0 \rightarrow F(X^0) \rightarrow F(X^1) \rightarrow F(X^2) \rightarrow \cdots$$

是 \mathcal{B} 中的正合列, 所以 $F(X^\bullet)$ 与 0^\bullet 类同构. □

定理 5.71 令 \mathcal{A} 中有足够多的内射, F 是左正合函子. 设 $A \in \mathcal{A}$ 的一个 F -内射分解为 $A \xrightarrow{\cong} I_F^\bullet$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 存在同构

$$R^n F(A) \simeq H^n(F(I_F^\bullet)).$$

证明. 由于 \mathcal{A} 中有足够多的内射, 我们可以构造一个内射分解 $A \xrightarrow{\sim} I^\bullet$. 根据命题5.57, 可以将单位态射提升为 f^\bullet 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sim} & I_F^\bullet \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow f^\bullet \\ A & \xrightarrow{\sim} & I^\bullet \end{array} .$$

由于图中上边, 下边, 左边的态射都是类同构, 故 f^\bullet 也是一个类同构.

令 $\text{cone}(f^\bullet)$ 为 f^\bullet 的映射锥, 根据命题5.39中映射锥的显式公式, 我们有如下观察:

- $F(\text{cone}(f^\bullet)) = \text{cone}(F(f^\bullet))$,
- $\text{cone}(f^\bullet) \in \text{Ch}^\bullet(\mathcal{J})$.

上面的第二个观察是由于 $\text{cone}(f^\bullet)$ 的分量都是由 I^\bullet 的分量与 I_F^\bullet 的分量之直和. 由于 I^\bullet 是 A 的内射分解, 可以验证, I^\bullet 也是 A 的一个 F -内射分解 (主要用到了内射对象的直和项还是内射的). 再根据定义5.70, $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ 是 \mathcal{A} 的一个加法全子范畴, 对有限的余极限封闭, 所以对直和封闭.

根据第一个观察以及定理5.44, 我们有如下的上同调长正合列

$$\cdots \rightarrow H^n(F(I^\bullet)) \rightarrow H^n(F(I_F^\bullet)) \rightarrow H^n(\text{cone}(F(f^\bullet))) \rightarrow H^{n+1}(F(I^\bullet)) \rightarrow H^{n+1}(F(I_F^\bullet)) \rightarrow H^{n+1}(\text{cone}(F(f^\bullet)))$$

注意到 $\text{cone}(f^\bullet)$ 与 0^\bullet 类同构, 根据第二个观察以及引理5.70, $F(\text{cone}(f^\bullet)) = 0$. 所以上同调长正合列能够推出, 对所有的 $n \in \mathbb{N}$

$$0 \rightarrow H^n(F(I^\bullet)) \rightarrow H^n(F(I_F^\bullet)) \rightarrow 0$$

是正合的, 即二者是同构的. 根据右导出函子的定义, 定理得证. \square

至此, 我们给出了导出函子的一半定义和一般性质. 在下一节中, 我们考虑两个最基本的例子.

5.4.4 导出函子的基本例子

在所有的函子中, 一个给定范畴中的 **Hom** 函子是最重要的函子. 在我们考虑的 \mathbf{Mod}_R 范畴中, **Hom** 函子的左伴随函子即张量积函子也具有同样的重要性. 这里, 我们考虑这两个基本函子的导出函子.

为简便记, 我们令 $R = \mathbb{Z}$. 我们可以得到如下的结果

命题 5.72 自由 *Abel* 群的任意一个子群也是自由 *Abel* 群.

命题 5.73 假设选择公理成立, 任何一个 *Abel* 群 A 都存在一个投射分解, 且投射分解只在 0 阶和 1 阶处的分量不为零. 用正合列的语言, 即对任何一个 *Abel* 群 A , 都存在一个短正合列

$$0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow A \rightarrow 0,$$

其中 F_1 和 F_0 是投射的, 也是自由的.

证明. 根据我们熟知的 $F \dashv U$ 伴随, 对任何的 $A \in \mathbf{Ab}$, 取 $F_0 = F(U(A))$ 即可得到满射 $F_0 \rightarrow A$. 根据命题 5.72, 映射 $F_0 \rightarrow A$ 的核也是一个自由的 *Abel* 群, 又根据命题 5.47, $F_0 \rightarrow A$ 的核也是投射的. 取 F_1 为这个核, 从而得到正合列

$$0 \rightarrow F_1 \hookrightarrow F_0 \rightarrow A \rightarrow 0.$$

□

上述命题极大地增加了 *Abel* 群的右导出函子的复杂性:

命题 5.74 令 $F : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ab}$ 为左正合函子, 那么导出函子 $R^n F$ 当 $n \geq 2$ 时为 0.

证明. 根据命题 5.73, 任何 A 都有投射分解

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow A.$$

根据右导出函子的定义, 命题立刻得证. \square

注 5.18 这个命题的结果对任何主理想整环上的模都成立. 特别地, 当 $R = \mathbb{k}$ 为一个域时, R 上的模就是一个 \mathbb{k} 向量空间. 另一方面, 由于每个 \mathbb{k} 向量空间本身就是投射的, 因此对于范畴 $\mathbf{Vect}_{\mathbb{k}}$, 整个导出函子的理论都是平凡的. \diamond

Hom 函子的导出函子以及群扩张

对于一个 Abel 范畴 \mathcal{A} , 态射集自动具有 Abel 群的结构. 我们有如下的较为基本的结果:

命题 5.75 函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, -) : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$ 是一个左正合函子. 即, 对任何的 $X \in \mathcal{A}$, 函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$ 是左正合的; 对每个 $A \in \mathcal{A}$, 函子 $\mathrm{Hom}(-, A) : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$ 是左正合的.

于是, 我们有如下的右导出函子:

定义 5.73 给定一个 $A \in \mathcal{A}$, 定义

$$\mathrm{Ext}^{\bullet}(-, A) := R^{\bullet}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, A) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}.$$

这被称为 **Ext 函子**. \diamond

Ext 的函子的基本性质为, 它将 A 的群扩张进行分类. 我们将详细谈论这一点, 从群扩张本身开始.

下面的定义几乎是在重复短正合列的定义, 但要注意的是, G 可能不是一个 Abel 群.

定义 5.74 令 A 为一个 Abel 群, G 为一个群, 如下的两个连续的群同态

$$A \xhookrightarrow{i} \hat{G} \xrightarrow{p} G$$

被称为一个**短正合列**, 若

- (i.) i 是单同态,
- (ii.) p 是满同态,
- (iii.) $\ker(p) = \operatorname{im}(i)$.

我们称这个短正合列展示了 \hat{G} 作为 G 通过 A 的一个**群扩张**.

如果 $A \hookrightarrow \hat{G}$ 能通过 \hat{G} 的中心进行分解, 我们称这是一个**中心扩张**. \diamond

注 5.19 有时, 人们将 \hat{G} 称为 A 通过 G 的扩张. 这种叫法会与中心扩张, 主丛的扩张等等概念冲突. 我们总是将扩张视为底空间通过纤维的扩张. \diamond

定义 5.75 给定一个群 G 和一个 Abel 群 A , G 通过 A 的扩张之间的同态 $f: \hat{G}_1 \rightarrow \hat{G}_2$ 是一个群同态, 并使得下图交换

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \hat{G}_1 & & \\
 & \nearrow & \downarrow f & \searrow & \\
 A & & & & G \\
 & \searrow & \downarrow & \nearrow & \\
 & & \hat{G}_2 & &
 \end{array}$$

\diamond

命题 5.76 定义 5.75 中的扩张之间的同态实际上是一个群同构.

证明. 用五引理.

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & \hat{G}_1 & \xrightarrow{p} & G \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i'} & \hat{G}_2 & \xrightarrow{p'} & G \longrightarrow 1
 \end{array}$$

□

定义 5.76 对于群 G 与 Abel 群 A , 记 $\text{Ext}(G, A)$ 为 G 通过 A 的扩张构成的等价类的集合. 同样, 将中心扩张构成的等价类的集合记为 $\text{CentrExt}(G, A) \hookrightarrow \text{Ext}(G, A)$. 若 G 也是 Abel 群, 记

$$\text{AbExt}(G, A) \hookrightarrow \text{CentrExt}(G, A)$$

为 \hat{G} 为 Abel 群时的子集.

◇

我们将用以下的两种方法讨论 Ext^1 如何分类上述的扩张.

- (i.) G 不是 Abel 群时, G 的中心扩张由系数在 A 中的 2 阶上同调群 $H_{\text{Grp}}^2(G, A)$ 分类, 这等价于计算 $\text{Ext}_{\text{Mod}_{\mathbb{Z}[G]}}^1(\mathbb{Z}, A)$, 其中 $\mathbb{Z}[G]$ 是 G 的群环.
- (ii.) G 是一个 Abel 群时, 交换扩张由 $\text{Ext}_{\text{Ab}}^1(G, A)$ 分类. 事实上, 更一般地, 在一个 Abel 范畴 \mathcal{A} 中, $G \in \mathcal{A}$ 通过 $A \in \mathcal{A}$ 的扩张由 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(G, A)$ 决定.

下面我们来讨论群的上同调.

定义 5.77 令 G 为一个群, A 为一个 Abel 群. 那么, G 上的一个 A 系数的群 2-上闭链是一个函数

$$c : G \times G \rightarrow A,$$

且对所有的 $(g_1, g_2) \in G \times G$ 满足下面的等式

$$c(g_1, g_2) - c(g_1, g_2 \cdot g_3) + c(g_1 \cdot g_2, g_3) - c(g_2, g_3) = 0 \in A.$$

上述等式被称为 2-上闭链条件.

对于两个上闭链 c, \tilde{c} , 二者之间的一个上边界 $h : c \rightarrow \tilde{c}$ 是一个函数

$$h : G \rightarrow A$$

使得对所有的 $(g_1, g_2) \in G \times G$, 等式

$$\tilde{c}(g_1, g_2) = c(g_1, g_2) + dh(g_1, g_2)$$

在 A 中成立, 其中

$$(dh)(g_1, g_2) := h(g_1 \cdot g_2) - h(g_1) - h(g_2)$$

是一个2-上边界.

2-阶群上调是群 2-上闭链构成的集合商掉群 2-上边界构成的集合. 即

$$H_{Grp}^2(G, A) = (2 - \text{Cocycles}(G, A)) / (2 - \text{Coboundaries}(G, A)).$$

这是一个自然的 Abel 群. ◇

下面的定义告诉我们, 为了计算 $H_{Grp}^2(G, A)$, 我们可以关心一些具有良好性质的代表元, 这些代表元被称为正规化的上闭链:

定义 5.78 一个群 2-上闭链 $c : G \times G \rightarrow A$ 被称为**正规化的**, 若对任意的 $g_0, g_1 \in G$, 若 g_0, g_1 之一为 e , 能够推出

$$c(g_0, g_1) = 0$$

◇

引理 5.77 对于一个群 2-上闭链 $c : G \times G \rightarrow A$, 对于所有的 $g \in G$, 都有

$$c(e, g) = c(e, e) = c(g, e).$$

证明. 在上闭链条件中, 取 $(g_1, g_2, g_3) = (g^{-1}, g, e)$, 得到

$$c(g^{-1}, g) + c(e, e) = c(g^{-1}, g) + c(g, e),$$

于是

$$c(e, e) = c(g, e).$$

同样在上闭链条件中取 $(g_1, g_2, g_3) = (e, g, g^{-1})$ 可以得到

$$c(e, g) = c(e, e).$$

□

命题 5.78 每个群 2-上闭链 c : 都与一个正规化的 2-上闭链上同调等价.

证明. 根据引理 5.77, 我们只要证明 c 与一个满足 $\tilde{c}(e, e) = 0$ 的上闭链相差一个 2-上边界即可. 给定一个 c , 我们定义上边界 $h : G \rightarrow A$ 为

$$h := c(g, g).$$

那么, 令 $\tilde{c} = c + dh$, 于是

$$\tilde{c}(e, e) = (c + dh)(e, e) = c(e, e) + c(e, e) - c(e, e) - c(e, e) = 0$$

□

定义 5.79 令 $[c] \in H_{\text{Grp}}^2(G, A)$ 为一个群 2-上闭链的上同调类. 选取正规化的 2-上闭链 $c : G \times G \rightarrow A$ 为这个上同调类的代表元. 定义一个群

$$G \times_c A \in \text{Grp}$$

如下. 令 $G \times_c A$ 的基础集为 G 与 A 的基础集的积 $U(G) \times U(A)$, 群乘法定义为

$$(g_1, a_1) \cdot (g_2, a_2) := (g_1 \cdot g_2, a_1 + a_2 + c(g_1, g_2)).$$

◇

命题 5.79 定义 5.79 的确定义了一个群. 进一步, 定义中的构造可以扩张成一个同态

$$\text{Rec} : H_{\text{Grp}}^2(G, A) \rightarrow \text{Ext}(G, A).$$

证明. 由于 c 是正规化的, 所以单位元是 $(e, 0)$. 对于 $(g, a) \in G \times_c A$, 显然有逆

$$(g, a)^{-1} = (g^{-1}, -a - c(g, g^{-1})).$$

再直接验证

$$(g_1, a_1) \cdot ((g_2, a_2) \cdot (g_3, a_3)) \cdot (((g_1, a_1) \cdot (g_2, a_2)) \cdot (g_3, a_3))^{-1} = (e, 0)$$

即可. 于是定义5.79定义的确实是一个群.

再利用正规化的假设, 我们发现嵌入

$$\begin{aligned} i : A &\rightarrow G \times_c A \\ a &\mapsto (e, a) \end{aligned}$$

是一个群同态, 且投影

$$\begin{aligned} p : G \times_c A &\rightarrow G \\ (g, a) &\mapsto g \end{aligned}$$

显然是一个群同态. 又发现

$$A \xhookrightarrow{i} G \times_c A \xrightarrow{p} G$$

是正合的. 所以 $G \times_c A$ 的确是一个群扩张. 进一步, 它还是一个中心扩张, 因为

$$(g, a) \cdot (e, a') = (g, a + a' + 0) = (e, a') \cdot (g, a).$$

我们还要证明如上的构造是与 $[c]$ 的代表元 c 的选取是无关的. 令 \tilde{c} 为与 c 相差一个 2-上边界的 2 上闭链:

$$\tilde{c}(g_1, g_2) := c(g_1, g_2) - h(g_1) - h(g_2) + h(g_1 \cdot g_2).$$

我们发现

$$(\text{id}_G, p_A - h \circ p_G) : G \times_c A \rightarrow G \times_{\tilde{c}} A$$

是一个群同态, 因为

$$(g_1, a_1 - h(g_1)) \cdot (g_2, a_2 - h(g_2)) = (g_1 \cdot g_2, a_1 + a_2 - h(g_1) - h(g_2) + c(g_1, g_2)) = (g_1 \cdot g_2, a_1 + a_2 + \tilde{c}(g_1, g_2)).$$

根据命题5.76, $G \times_c A$ 与 $G \times_{\tilde{c}} A$ 是同构的. \square

下面我们一直都假设选择公理成立.

定义 5.80 给定一个中心扩张 $A \rightarrow \hat{G} \rightarrow G$, 我们可以如下定义一个群 2-上闭链.

选择基础集之间的一个截面映射 $\sigma : U(G) \rightarrow U(\hat{G})$, 由于 p 是满射, 所以选择公理保证了截面态射的存在性. 定义 c 为

$$c : (g_1, g_2) \mapsto \sigma(g_1)^{-1} \sigma(g_2)^{-1} \sigma(g_1 \cdot g_2)$$

由于 p 是一个群同态, 所以

$$p(\sigma(g_1)^{-1} \sigma(g_2)^{-1} \sigma(g_1 \cdot g_2)) = e$$

根据扩张的正合性, c 的像的确在 $A \hookrightarrow \hat{G}$ 中. ◇

命题 5.80 定义 5.80 中的确定义了一个群 2-上闭链. 它还可以扩张为一个态射

$$\text{Extr} : \text{Ext}(G, A) \rightarrow H_{\text{Grp}}^2(G, A).$$

证明. 对于群 2-上闭链, 我们直接验证即可.

为了证明存在到 $H_{\text{Grp}}^2(G, A)$ 的一个两定义的映射, 我们要证明这与截面的选取无关. 选择另一个截面映射 $\tilde{\sigma} : G \rightarrow \hat{G}$, 令

$$h : g \mapsto \tilde{\sigma}(g) \sigma(g)^{-1}$$

我们可以验证两个上闭链之间相差一个上边界 $\tilde{c} - c = dh$. □

命题 5.81 定义 5.79 与定义 5.80 中的两个映射实际上是一一映射:

$$H^2(G, A) \xrightleftharpoons[\text{Rec}]{\text{Extr}} \text{CentrExt}(G, A)$$

证明. 由于映射 Extr 与 Rec 是不依赖于截面映射和上闭链的选择的, 故给定一个 $[c] \in H_{\text{Grp}}^2(G, A)$, 我们选择一个最简单的截面态射 $\sigma : G \rightarrow G \times_c A$:

$$\sigma : g \mapsto (g, 0).$$

由 σ 诱导出的上闭链作用在 (g_1, g_2) 上, 得到

$$\begin{aligned}
 (g_1, g_2) &\mapsto (g_1, 0)(g_2, 0)(g_1 g_2, 0)^{-1} \\
 &= (g_1, 0)(g_2, 0)((g_1 g_2)^{-1}, -c(g_1 g_2, (g_1 g_2)^{-1})) \\
 &= (g_1 g_2, c(g_1, g_2))((g_1 g_2)^{-1}, -c(g_1 g_2, (g_1 g_2)^{-1})) \\
 &= (e, c(g_1, g_2) - c(g_1 g_2, (g_1 g_2)^{-1}) + c(g_1 g_2, (g_1 g_2)^{-1})) \\
 &= (e, c(g_1, g_2))
 \end{aligned}$$

这就是 $c(g_1, g_2) \in A \hookrightarrow G \times_c A$.

上述论证说明了 $\text{Extr} \circ \text{Rec} = \text{id}$, 能推出 Rec 是一个单射. 而再证明 Rec 是一个满射即可. \square

定义 5.81 定义 Abel 群之间的同态

$$\epsilon : \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}$$

为

$$\epsilon : r \mapsto \sum_{g \in G} r_g.$$

\diamond

定义 5.82 对于 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$Q_n^u := F(U(G)^{\times n})$$

为群环 $\mathbb{Z}[G]$ 中所有 n -元数组生成的自由 $\mathbb{Z}[G]$ -模.

对于 $n \geq 1$, 定义 $\partial_{n-1} : Q_n^u \rightarrow Q_{n-1}^u$ 在基元素上的作用为:

$$\partial_{n-1}[g_1, \dots, g_n] := g_1(g_2, \dots, g_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [g_1, \dots, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_n] + (-1)^n [g_1, \dots, g_{n-1}],$$

特别地

$$\partial_0 : [g] \mapsto g(*) - (*) = g - e \in \mathbb{Z}[G]$$

进一步, 记 Q_n 为 Q_n'' 中商掉集合 $\{[g_1, \dots, g_n] \mid \exists g_i = e, 1 \leq i \leq n\}$ 而得到的自由模. \diamond

命题 5.82 定义 5.82 中的构造定义了一个 $\mathbb{Z}[G]$ -模的链复形 Q_\bullet'' 以及 Q_\bullet . 进一步, 利用定义 5.81, 存在如下的投射分解:

$$\epsilon : Q_\bullet'' \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$$

$$\epsilon : Q_\bullet \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$$

\mathbb{Z} 视为 $\mathbb{Z}[G]$ -模, $\mathbb{Z}[G]$ 平凡地作用在 \mathbb{Z} 上.

证明. 为了证明我们的确定义了一个链复形, 只要证明 $\partial \circ \partial = 0$, 按照定义验证即可.

为证明 ϵ 是一个类同构, 等价于证明

$$\cdots \xrightarrow{\partial_1} Q_1'' \xrightarrow{\partial_0} Q_0'' \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

是一个正合列. 我们只需构造一个零伦 $s_\bullet : 0_\bullet \Rightarrow \text{id}_{Q_\bullet''}$, 如果这样, 则说明链复形 Q_\bullet'' 与 0_\bullet 是同伦等价的, 而所有的同伦等价都是一个类同构 (反之不然). 我们定义

$$s_{-1} : \mathbb{Z} \rightarrow Q_0'',$$

将 $1 \in \mathbb{Z}$ 映到 Q_0'' 中唯一的生成元, 对 $n \in \mathbb{N}$, 定义

$$s_n : Q_n'' \rightarrow Q_{n+1}''$$

在生成元上的作用为

$$s_n(g[g_1, \dots, g_n]) := [g, g_1, \dots, g_n].$$

在最低阶容易验证

$$\epsilon \circ s_{-1} = \text{id}_{\mathbb{Z}}$$

以及

$$\partial_0 \circ s_0 + s_{-1} \circ \epsilon = \text{id}_{Q_0''}.$$

当 $n \geq 1$ 时, 我们也容易验证

$$\partial_n \circ s_n + s_{n-1} \circ \partial_{n-1} = \text{id}_{Q_n''}$$

因此我们找到的的确是 \mathbb{Z} 的一个分解.

由于 Q_n'' 的每个分量都是一个自由 $\mathbb{Z}[G]$ -模, 所以 Q_n'' 是一个投射分解. 根据 Q_n' 的构造, Q_n' 的每个分量也是一个自由 $\mathbb{Z}[G]$ 模, 所以 Q_n' 也是一个投射分解. \square

定理 5.83 对于一个附加了线性 G 作用的 Abel 群 A (即 A 是一个 $\mathbb{Z}[G]$ -模), 对于 $n \in \mathbb{N}$, G 的 n 阶 A 系数的群上同调 $H_{\text{Grp}}^n(G, A)$ 可以用如下方法计算:

$$\begin{aligned} H_{\text{Grp}}^n(G, A) &\simeq \text{Ext}_{\text{Mod}_{\mathbb{Z}[G]}}^n(\mathbb{Z}, A) \\ &\simeq H^n(\text{Hom}_{\text{Mod}_{\mathbb{Z}[G]}}(Q_n'', A)) \\ &\simeq H^n(\text{Hom}_{\text{Mod}_{\mathbb{Z}[G]}}(Q_n', A)) \end{aligned}$$

证明. 略. \square

至此我们将群的中心扩张分类完毕了, 下面我们要讨论一个 Abel 群的 Abel 扩张.

Abel 群的扩张以及扩张之间的同态与定义 5.74 和定义 5.75 完全一致, 这里就不赘述了.

导出的张量积函子以及挠子群

我们现在讨论如下的张量积函子的导出函子. 我们之前在定义 5.25 中定义了 \mathbb{Z} -模范畴中的张量积. 令 R 为一个交换环, 我们可以将这定义直接推广到 R -模范畴.

定义 5.83 对于两个 R -模 $N, N' \in \mathbf{Mod}_R$, 他们的张量积

$$N \otimes_R N' \in \mathbf{Mod}_R$$

定义为 $U(N) \times U(N)$ 上的自由 Abel 群商掉双线性关系, 之后再赋予自然的 R -模结构. \diamond

例 5.9 存在 R -模同构

$$R \otimes_R N \xrightarrow{\cong} N.$$

\diamond

定义 5.84 对于任意的 $N \in \mathbf{Mod}_R$, 定义张量积函子

$$(-) \otimes_R N : \mathbf{Mod}_R \rightarrow \mathbf{Mod}_R.$$

\diamond

命题 5.84 对任意的 $N \in \mathbf{Mod}_R$, 函子 $(-) \otimes_R N$

- 是加性函子,
- 是右正合函子.

证明. 根据伴随 $(-) \otimes_R N \dashv \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(N, -)$, 张量积函子是一个左伴随. 根据定理 3.69, 张量积函子保持余极限. 直和与余核都是余极限, 从而命题得证. \square

由于张量积函子是右正合的, 我们考虑它的左导出函子.

定义 5.85 对于 $N \in \mathbf{Mod}_R$ 以及 $n \in \mathbb{N}$, 记张量积函子 $(-) \otimes N$ 的 n 阶左导出函子为

$$\mathrm{Tor}_n^R(-, N) := L_n((-) \otimes_R N) : \mathbf{Mod}_R \rightarrow \mathbf{Mod}_R,$$

称为 **Tor 函子**. \diamond

Tor 函子的名称来源于它和挠子群的管子. 我们现在要谈这一点.

定义 5.86 一个 Abel 群被称为**有挠的**, 若它的所有元素都是有限阶的. \diamond

定义 5.87 对于 $A \in \mathbf{Ab}$ 以及 $p \in \mathbb{N}$, 记

$${}_pA := \{a \in A \mid p \cdot a = 0\},$$

称为 **p -挠子群**. \diamond

命题 5.85 对于 $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$ 以及任意的 Abel 群 $A \in \mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}}$, 我们都有同构

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_p, A) \simeq {}_pA.$$

当 $p = 0$ 时, 我们有

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, A) \simeq 0.$$

证明. 对于第一个陈述, 考虑短正合列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{mod} p} \mathbb{Z}_p \rightarrow 0,$$

这是 \mathbb{Z}_p 的一个投射分解. 于是, 我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_p, A) &\simeq H_1([\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \otimes A \rightarrow \mathbb{Z} \otimes A]) \\ &\simeq \ker((\cdot p) \otimes A) \\ &\simeq \{a \in A \mid p \cdot a = 0\}. \end{aligned}$$

对于第二个陈述, 由于 \mathbb{Z} 已经是自由 Abel 群, 所以我们选取 $[\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}]$ 为其投射分解. \square

命题 5.86 对于 $N \in \mathbf{Mod}_R$, 函子 $\mathrm{Tor}_n^R(-, N)$ 保持直和.

证明. 令 $S \in \mathbf{Set}$ 为一个集合, $\{N_s\}_{s \in S}$ 为以 S 为指标的一族 R -模. 观察到

- 若 $\{(F_s)_\bullet\}_{s \in S}$ 是一族投射分解, 那么它们逐阶的直和 $(\oplus_{s \in S} F_s)_\bullet$ 是 $\oplus_{s \in S} N_s$ 的投射分解,
- 张量积作用在直和上满足分配律,
- 同调函子保持张量积.

利用上面的观察, 我们得到

$$\mathrm{Tor}_n^R(\oplus_{s \in S} N_s, N) \simeq H_n((\oplus_{s \in S} F_s) \otimes N)_\bullet \simeq \oplus_{s \in S} \mathrm{Tor}_n^R(N_s, N).$$

□

命题 5.87 令 A 为一个有限的 $Abel$ 群, B 为任意的 $Abel$ 群. 那么 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B)$ 是一个有挠群. 特别地, $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B)$ 是 B 的挠子群的直和.

证明. 根据有限生成 $Abel$ 群的分类定理, $A \simeq \oplus_k \mathbb{Z}_{p_k}$. 根据命题5.86, Tor 函子保持直和. 再根据命题5.85, 命题得证. □

命题 5.88 对于 $A, B \in \mathbf{Ab}$ 以及 $n \in \mathbb{N}$, 存在一个自然的同构

$$\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A, B) \simeq \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(B, A).$$

证明. 由于 $A \in \mathbf{Ab}$, 故存在一个短正合列

$$0 \rightarrow F'_1 \rightarrow F'_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

为 A 的投射分解. 于是, 有 $\mathrm{Tor}_{n \geq 2}^{\mathbb{Z}}(-, -) = 0$.

令

$$0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow B \rightarrow 0$$

为 B 的一个投射分解. 根据命题5.67的对偶命题, 我们得到了长正合列

$$0 \leftarrow A \otimes B \leftarrow A \otimes F_0 \leftarrow A \otimes F_1 \leftarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B) \leftarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, F_0) \leftarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, F_1) \leftarrow 0.$$

又因为 F_0, F_1 都是投射的, 根据命题5.64, $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, F_0) = \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, F_1) = 0$. 于是我们得到短正合列

$$0 \leftarrow A \otimes B \leftarrow A \otimes F_0 \leftarrow A \otimes F_1 \leftarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B) \leftarrow 0.$$

接下来, 根据五引理

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B) & \longrightarrow & A \otimes F_1 & \longrightarrow & A \otimes F_0 & \longrightarrow & A \otimes B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(B, A) & \longrightarrow & F_1 \otimes A & \longrightarrow & F_0 \otimes A & \longrightarrow & B \otimes A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

得到 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(B, A)$ 是一个同构. \square

为了更加深入地理解定理5.93, 我们需要理解张量积函子的一类非循环对象, 平坦模.

定义 5.88 一个 R -模 N 被称为是**平坦的**, 如果函子

$$(-) \otimes_R N : \mathbf{Mod}_R \rightarrow \mathbf{Mod}_R$$

是一个正合函子. \diamond

注 5.20 我们可以通过如下的等价方式定义平坦模:

- (i.) N 是平坦的当且仅当 $(-) \otimes_R N$ 是一个左正合函子, 因为 $(-) \otimes_R N$ 本身是一个右正合函子.
- (ii.) N 是平坦的当且仅当 $(-) \otimes_R N$ 保持单同态.
- (iii.) N 是平坦的当且仅当 1 阶 Tor 函子 $\mathrm{Tor}_1^R(-, N)$ 是平凡的.
- (iv.) N 是平坦的当且仅当所有高阶的 Tor 函子是 $\mathrm{Tor}_{\geq 1}^R(-, N)$ 是平凡的.
- (v.) N 是平坦的当且仅当 N 是张量积函子的非循环对象.

◇

一类特别简单的 R -模嵌入是将环 R 的有限生成理想嵌入到 R 中 $I \hookrightarrow R$, 这里将环 R 视为自身的 R -模. 根据注释 5.20, N 是平坦的能够推出 $I \otimes_R N \rightarrow R \otimes_R N \simeq N$ 是一个单态射. 下面的定理告诉我们, 通过 $I \otimes_R N \rightarrow R \otimes_R N \simeq N$ 是单态射这一条件, 就能够推出 $(-)\otimes_R N$ 保持其余所有的单态射.

定理 5.89 一个 R -模是平坦的, 若对于 R 的任意一个有限生成理想 I , 嵌入 $I \hookrightarrow R$ 诱导的同态

$$I \otimes_R N \rightarrow R \otimes_R N \simeq N$$

也是一个单同态.

我们不证明这个定理, 但定理的确告诉了我们平坦模的如下分类.

命题 5.90 一个 R -模 N 是平坦的, 当且仅当对 N 中的每个有限的零线性组合 $\sum_i r_i n_i = 0, r_i \in R, n_i \in N$, 都存在一族元素 $\{\tilde{n}_j \in N\}_j$ 以及系数 $\{b_{ij} \in R\}_{i,j}$ 满足

$$n_i = \sum_j b_{ij} \tilde{n}_j,$$

使得对所有的 j 都有如下的 R 中零线性组合

$$\sum_i r_i b_{ij} = 0 \in R.$$

证明. 令 $I \hookrightarrow R$ 为任一有限集 $\{r_i \in R\}_i$ 生成的理想. 我们考虑态射 $I \otimes_R N \rightarrow N$

根据模的张量积的定义, 存在某些全部不为 0 的 $\{n_i \in N\}_i$ 使得 $I \otimes_R N$ 中的任一元素具有 $\sum_i (r_i, n_i)$ 的形式. 在映射 $I \otimes_R N \rightarrow N$ 下, 这个元素映到 N 中的线性组合 $\sum_i r_i n_i$. 只要我们能够证明 $I \otimes_R N \rightarrow N$ 是一个单同态, 根

据定理5.89, 就等价于证明 N 是一个平坦模. 而映射是一个单射意味着, 当 $\sum_i r_i n_i = 0 \in N$ 时, 能够推出 $\sum_i (r_i, n_i) = 0 \in I \otimes_R N$.

但在 $I \otimes_R N$ 中, $\sum_i (r_i, n_i) = 0$ 意味着存在满足命题条件的 $\{\tilde{n}_j \in N\}_j$ 以及 $\{b_{ij} \in R\}_{i,j}$, 将原来的线性组合表示为

$$\sum_i (r_i, n_i) = \sum_j (\tilde{r}_j, \tilde{n}_j) = 0$$

而这意味着所有的 $\tilde{r}_j = 0$. 这就证明了命题. \square

利用和上述命题相同的证明方法, 我们得到

命题 5.91 一个模是平坦的, 当且仅当它是自由模的一个滤子化余极限.

于是我们能够证明下面的结果:

命题 5.92 对于 $N \in \mathbf{Mod}_R$ 以及 $n \in \mathbb{N}$, 函子

$$\mathrm{Tor}_1^R(-, N) : \mathbf{Mod}_R \rightarrow \mathbf{Mod}_R$$

保持滤子化的余极限.

现在我们终于可以证明命题5.85的推广了.

注 5.21 自由模 \subset 投射模 \subset 平坦模 \subset 无挠模 \diamond

定理 5.93 对于 $A, B \in \mathbf{Ab}$, 有挠群 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B)$ 是 A 或 B 的挠子群的直和的滤子化余极限.

证明. 我们主要用到了如下的事实, Abel 群 A 可以被表示成它的所有有限生成的子群的滤子化余极限

$$A \simeq \mathrm{colim}_{i \in I} A_i,$$

根据有限生成的 Abel 群的结构定理, 每一个 A_i 都是循环群的直和. 根据上一个命题, $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(-, B)$ 保持这些余极限. 根据命题 5.85, 每个有限生成子群的直和像都是 B 的一个挠子群, 再根据命题 5.86 保持直和. 故 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B)$ 是 B 的挠子群的直和的滤子化余极限. 又根据 1 阶 Tor 函子的对称性, 故 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B)$ 对 B 的论述同时也对 A 成立. \square

我们在此结束我们对 Tor 函子的基本性质的讨论. 在下一节中, 我们将看到 Tor 函子与 Ext 函子会推出更深刻的结论.

5.5 基本定理

5.5.1 万有系数定理与 Künneth 定理

我们假定 R 是一个主理想整环.

命题 5.94 若 R 是一个主理想整环, R 上每个自由模的子模都是自由的.

上述命题的证明在模的结构理论中可以找到, 我们不证.

定义 5.89 令 $C_{\bullet} \in \mathbf{Ch}_{\bullet}(\mathbf{Mod}_R)$ 为链复形, 且每一阶的分量都是一个自由模. 令 $A \in \mathbf{Mod}_R$ 为任意的模, 我们称

- C_{\bullet} 的 A 中系数的同调为同调

$$H_{\bullet}(C_{\bullet} \otimes A),$$

即 C_{\bullet} 的每一阶分量都与 A 做张量积后得到的链复形再取同调

- C_{\bullet} 的 A 中系数的上同调为上同调

$$H^{\bullet}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(C_{\bullet}, A)),$$

即取 C_\bullet 的每一阶分量到 A 的所有态射, 构成一个自然的余链复形之后再取上同调.

◇

注 5.22 由于对 $n \in \mathbb{N}$, 每一个 C_n 都是一个自由模, 因此 $C_n = \oplus_{s \in S_n} R$. 张量积与直和满足分配律, 所以

$$C_n \otimes_R A = \oplus_{s \in S_n} (R \otimes_R A) \simeq \oplus_{s \in S_n} A.$$

◇

例 5.10 令 X 为一个拓扑空间, $C_\bullet := C_\bullet(R[\text{Sing}X])$ 是 R 上的奇异链复形. 但 $C_k := R[\text{Sing}X]_k$ 是所有 X 上的 k -单形构成的集合上的自由 R -模, 我们有

- $H_\bullet(C_\bullet(R[\text{Sing}X]) \otimes_R A)$ 是 X 的 A 中系数的奇异同调.
- $H^\bullet(\text{Hom}_{\text{Mod}_R}(C_\bullet(R[\text{Sing}X]), A))$ 是 X 的 A 中系数的奇异上同调.

◇

下面的万有系数定理大概在说, 系数环 R 是具有如下意义的泛性质的

- (i.) 其他系数的同调都可以通过一个 Tor -模从 R 系数的同调中构造,
- (ii.) 其他系数的上同调都可以通过一个 Ext -模从 R 系数的上同调中构造.

定理 5.95 (同调的万有系数定理) 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 都存在短正合列

$$0 \rightarrow H_n(C_\bullet) \otimes_R A \rightarrow H_n(C_\bullet \otimes_R A) \rightarrow \text{Tor}_1^R(H_{n-1}(C_\bullet), A) \rightarrow 0.$$

其中 C_\bullet 与 A 的约定与定义 5.89 相同.

$$H_n(C_\bullet \otimes_R A) \simeq H_n(C_\bullet) \otimes_R A.$$

◆

引理 5.96 对于一个自由链复形 C , 以及任意的模 A , 都存在一个长正合列

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & B_n \otimes_R A & \xrightarrow{i_n \otimes A} & Z_n \otimes_R A & \longrightarrow & H_n(C_\bullet \otimes_R A) \\ & & & & & & \\ & \searrow & & & & & \\ & & B_{n-1} \otimes_R A & \xrightarrow{i_{n-1} \otimes A} & Z_{n-1} \otimes_R A & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

其中, B_n 是 n 阶的边界, Z_n 是 n 阶的闭链, $i_n: B_n \hookrightarrow Z_n$ 是正则嵌入.

$$0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow 0$$

是分裂的, 即 $C_n \simeq Z_n \oplus B_{n-1}$. 因此我们找到了链复形之间的分裂正合列

$$0 \rightarrow Z_{\bullet} \rightarrow C_{\bullet} \rightarrow B_{\bullet-1} \rightarrow 0.$$

由于张量积函子作用在直和上满足分配律, 我们得到了下面的短正合列

$$0 \rightarrow Z_\bullet \otimes A \rightarrow C_\bullet \otimes A \rightarrow B_\bullet \otimes A \rightarrow 0.$$

这也是一个分裂正合列. 根据命题5.30, 我们导出了所需要的长正合列, 并且可以验证, 连接同态的确是嵌入映射. \square

注 5.24 R -模范畴中短正合列未必是分裂的, 如 $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}}$ 中的

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{mod } 2} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0.$$

短正合列

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

是分裂的, 当且仅当 A 是内射的, 当且仅当 C 是投射的. \diamond

定理 5.95 的证明. 根据引理 5.96, 我们得到短正合列

$$0 \rightarrow \text{coker}(i_n \otimes_R A) \rightarrow H_n(C_\bullet \otimes_R A) \rightarrow \ker(i_{n-1} \otimes_R A) \rightarrow 0.$$

由于张量积函子是右正合的, 即是一个左伴随函子, 所以保持余极限, 从而保持余核. 于是

$$\text{coker}(i_n \otimes_R A) \simeq \text{coker}(i_n) \otimes_R A = H_n(C_\bullet) \otimes_R A,$$

所以定理的左边得到了证明.

如果张量积函子是左正合的, 那么定理的右边也得到了证明. 当然, 在一般情况下, 张量积函子不是左正合的, 所以 Tor 函子刻画了张量积函子与左正合函子的差距.

由于 C_\bullet 是自由的, 所以短正合列

$$0 \rightarrow B_n \xrightarrow{i_n} Z_n \rightarrow H_n(C_\bullet) \rightarrow 0$$

实际上是 $H_n(C_\bullet)$ 的一个投射分解. 于是根据定义, $\text{Tor}_1^R(H_n(C_\bullet), A)$ 是

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow B_n \otimes_R A \xrightarrow{i_n \otimes A} Z_n \otimes_R A$$

的 1 阶同调群, 即

$$\text{Tor}_1^R(H_n(C_\bullet), A) \simeq \ker(i_n \otimes_R A)$$

从而定理的右边得到了证明. \square

下面的陈述在某种意义上是同调万有系数定理的对偶.

定理 5.97 (上同调万有系数定理) 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 都存在短正合列

$$0 \rightarrow \text{Ext}_1^R(H_{n-1}(C_\bullet), A) \rightarrow H^n(\text{Hom}_{\text{Mod}_R}(C_\bullet, A)) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Mod}_R}(H_n(C_\bullet), A) \rightarrow 0.$$

其中 C_\bullet 与 A 的约定与定义 5.89 相同.

引理 5.98 给定 R -模同态 $A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow{g} A_3$ 以及 g 的一个收缩 $s: A_3 \rightarrow A_2$, 存在一个余核之间的短正合列

$$0 \rightarrow \text{coker}(f) \xrightarrow{g'} \text{coker}(g \circ f) \rightarrow \text{coker}(g) \rightarrow 0.$$

证明. 根据嵌入 $\text{im}(g \circ f) \hookrightarrow \text{im}(g) \hookrightarrow A_3$, 我们有下面的短正合列

$$0 \rightarrow \text{im}(g)/\text{im}(g \circ f) \rightarrow A_3/\text{im}(g \circ f) \rightarrow A_3/\text{im}(g) \rightarrow 0.$$

我们断言, 这就是引理中的正合列. 对于右边的后两项来说, 这是显然的. 根据余核 $A_2/\text{im}(f)$ 的泛性质, g 诱导出唯一的映射 $g': A_2/\text{im}(f) \rightarrow A_3/\text{im}(g \circ f)$. 由于 g 有截面 s , 再根据余核 $A_3/\text{im}(f \circ g)$ 的泛性质, s 诱导出唯一的映射 $s': A_3/\text{im}(f \circ g) \rightarrow A_2/\text{im}(f)$. 因为 $s \circ g = \text{id}_{A_2}$, 根据余极限的函子性质, 我们得到 $s' \circ g' = \text{id}$. 因此推出 g' 是单态射. 再观察到

$$g'(A_2/\text{im}(f)) = \text{im}(g)/\text{im}(g \circ f),$$

我们便证明了引理. □

定理 5.97 的证明. 考虑短正合列

$$0 \rightarrow B_n \rightarrow Z_n \rightarrow H_n(C_\bullet) \rightarrow 0.$$

由于 B_n, Z_n 都是 C_n 的子模, 而 C_n 是主理想整环上的自由模, 所以 B_n, Z_n 都是自由模. 因此, 上面的正合列是 $H_n(C_\bullet)$ 的投射分解. 于是, $\text{Ext}_R^1(H_n(C_\bullet), A)$ 可以用如下的正合列描述:

$$\text{Hom}(Z_n, A) \rightarrow \text{Hom}(B_n, A) \rightarrow \text{Ext}_R^1(H_n(C_\bullet), A) \rightarrow 0.$$

注意到短正合列

$$0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial} B_{n-1} \rightarrow 0$$

是分裂的, 因为 B_{n-1} 是自由的

□

第六章 BRST 上同调

6.1 Lie 代数的上同调

6.1.1 泛包络代数

定义 6.1 令 \mathfrak{g} 为一个 \mathbb{k} -Lie 代数. 一个 \mathfrak{g} -模是一个 \mathbb{k} -向量空间 V 以及一个表示 $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$, ρ 是一个 Lie 代数同态. 即, 一个 \mathfrak{g} -模 V 就是一个 Lie 代数 \mathfrak{g} 线性地作用在向量空间 V 上. \diamond

定义 6.2 令 \mathfrak{g} 为 \mathbb{k} -Lie 代数. \mathfrak{g} 的**泛包络代数**是一个 \mathbb{k} -结合代数 $U(\mathfrak{g})$ 以及一个 Lie 代数同态 $\iota : \mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{g})$, 满足下图的泛性质

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\phi} & A \\ \downarrow \iota & \searrow \exists! \psi & \uparrow \\ U(\mathfrak{g}) & & \end{array} .$$

其中, A 是任意的 \mathbb{k} -结合代数, ϕ 是任意的 Lie 代数同态, ψ 是 \mathbb{k} -结合代数同态. \diamond

我们将构造任意 Lie 代数的泛包络代数.

定义 6.3 令 V 为任意的 \mathbb{k} -线性空间. 对于 $n \in \mathbb{N}$, 令 $T^n(V) = V^{\otimes n}$, 约定

1 的存在性是因为 $T(\mathfrak{g})$ 的泛性质, 2 的存在性是因为商的泛性质. \square

注 6.2 Birkhoff-Witt 定理告诉我们映射 $\iota : \mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{g})$ 是一个嵌入. \diamond

例 6.1 (i.) 若 \mathfrak{g} 是交换的, 则 $U(\mathfrak{g})$ 是向量空间 \mathfrak{g} 上的对称代数, 即 \mathfrak{g} 上的自由交换代数.

(ii.) 若 \mathfrak{g} 是 Lie 群 G 的 Lie 代数, 我们可以将 \mathfrak{g} 与 G 上的左不变向量场 (一阶微分算子) 等同. 于是 $U(\mathfrak{g})$ 可以与 G 上所有阶的左不变微分算子等同.

\diamond

6.1.2 Lie 代数的上同调

本小节中, 我们定义 Lie 代数的上同调. 为此, 我们定义 Chevalley-Eilenberg 复形. 令 \mathfrak{g} 为一个 \mathbb{k} -Lie 代数, Γ 为一个 \mathfrak{g} -模. 令

$$\begin{aligned} C^n(\mathfrak{g}, \Gamma) &:= \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\Lambda^n \mathfrak{g}, \Gamma), n > 0 \\ C^0(\mathfrak{g}, \Gamma) &:= \Gamma. \end{aligned}$$

即, $C^n(\mathfrak{g}, \Gamma)$ 是所有交错 n 重 \mathbb{k} -线性映射 $\mathfrak{g}^n \rightarrow \Gamma$ 的集合. 我们定义微分映射 $d : C^n(\mathfrak{g}, \Gamma) \rightarrow C^{n+1}(\mathfrak{g}, \Gamma)$ 如下: 给定一个 $c \in C^n(\mathfrak{g}, \Gamma)$, 定义 $dc \in C^{n+1}(\mathfrak{g}, \Gamma)$ 为

$$\begin{aligned} dc(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} x_i \cdot c(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} c([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

其中 $x_i \cdot c(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$ 表示 x_i 作用在 \mathfrak{g} -模 Γ 中的元素 $c(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$ 上. 我们可以验证, $d^2 = 0$.

定义 6.4 $(C^\bullet(\mathfrak{g}, \Gamma), d)$ 被称为 Γ 中系数的 Chevalley-Eilenberg 复形. 而 Γ 系数的 \mathfrak{g} 的上同调 $H^\bullet(\mathfrak{g}, \Gamma)$, 被定义为 Chevalley-Eilenberg 复形的上同调. \diamond

6.1.3 用导出函子定义上同调

我们现在用一种更加范畴论的方法来得到 Lie 代数的上同调. 令 \mathfrak{g} 为一个 \mathbb{k} -Lie 代数. 我们将要证明, Lie 代数的上同调是 $\mathbf{Mod}_{\mathfrak{g}}$ 到自身的不变函子 I 的右导出函子:

$$I: \Gamma \mapsto \Gamma^{\mathfrak{g}} = \{ \gamma \in \Gamma \mid x \cdot \gamma = 0, \forall x \in \mathfrak{g} \}.$$

对于两个 \mathfrak{g} -模 V 与 W , 表示分别为 $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ 以及 $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(W)$. 我们发现, V 与 W 都是 $U(\mathfrak{g})$ -模. 且容易发现, V 与 W 作为 $U(\mathfrak{g})$ -模之间的态射集是如下的集合:

$$\text{Hom}_{\mathbf{Mod}_{U(\mathfrak{g})}} = \{ T \in \text{Hom}_{\mathbf{Mod}_{\mathbb{k}}}(V, W) \mid T \circ \rho(x) = \pi(x) \circ T, \forall x \in \mathfrak{g} \},$$

因为对于任意的 $[x_1 \otimes \cdots \otimes x_n] \in U(\mathfrak{g})$ 以及 $v \in V$ 都有

$$\begin{aligned} T([x_1 \otimes \cdots \otimes x_n] \cdot v) &= T(\rho(x_1) \circ \cdots \circ \rho(x_n)(v)) \\ &= \pi(x_1) \circ \cdots \circ \pi(x_n)(T(v)) \\ &= [x_1 \otimes \cdots \otimes x_n] \cdot T(v). \end{aligned}$$

因此, 若 Γ 是一个 \mathfrak{g} -模, 我们已经知道 $\text{Hom}_{\mathbf{Mod}_{\mathbb{k}}}(\mathbb{k}, \Gamma) \simeq \Gamma$, 我们由此能够得到 $\Gamma^{\mathfrak{g}} \simeq \text{Hom}_{\mathbf{Mod}_{U(\mathfrak{g})}}(\mathbb{k}, \Gamma)$, \mathbb{k} 是平凡的 $U(\mathfrak{g})$ -模. 这个同构是自然的, 所以两个函子 I 与 $\text{Hom}_{\mathbf{Mod}_{U(\mathfrak{g})}}(\mathbb{k}, -)$ 是自然同构的.

定理 6.3 \mathfrak{g} 的 Γ 系数的上同调是 I 的右导出函子, 也可以用 Ext 函子描述:

$$H^{\bullet}(\mathfrak{g}, \Gamma) \simeq \text{Ext}_{U(\mathfrak{g})}^{\bullet}(\mathbb{k}, \Gamma) \simeq R^{\bullet}I(\Gamma).$$

证明. 我们根据观察得到 $I \simeq \text{Hom}_{\mathbf{Mod}_{U(\mathfrak{g})}}(\mathbb{k}, -)$, 再根据右导出函子的定义得到 $\text{Ext}_{U(\mathfrak{g})}^{\bullet}(\mathbb{k}, \Gamma) \simeq R^{\bullet}I(\Gamma)$. 我们只需要证明第一个同构成立即可. 为此我们要计算 $\text{Ext}_{U(\mathfrak{g})}^{\bullet}(\mathbb{k}, \Gamma)$, 所以要找到一个 \mathbb{k} 的投射分解. 考虑如下的序列

$$\cdots \longrightarrow \Lambda^3 \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \Lambda^2 \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} U(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{k},$$

映射 $\Lambda^n \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} U(\mathfrak{g}) \rightarrow \Lambda^{n-1} \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} U(\mathfrak{g})$ 定义为

$$(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) \otimes u \mapsto \sum_{i=1}^n (-1)^i (x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_n) \otimes x_i u \\ + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j+1} ([x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_n \otimes u),$$

映射 $U(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{k}$ 是正则投影.

经过冗长的证明, 上面的序列是 \mathbb{k} 的一个投射分解. 且是一个链复形, 被称为 **Koszul 复形**. 而对于所有的 $n \in \mathbb{N}$, $\Lambda^n \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} U(\mathfrak{g})$ 都是一个自然的 $U(\mathfrak{g})$ -模. 设 $\phi: \mathbb{k} \rightarrow U(\mathfrak{g})$, 则相应的标量限制函子 $\phi^*: \mathbf{Mod}_{U(\mathfrak{g})} \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{k}}$ 与标量扩张函子 $U(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{k}} -: \mathbf{Mod}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathbf{Mod}_{U(\mathfrak{g})}$ 是一对伴随函子 $U(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{k}} - \dashv \phi^*$. 于是, 将函子 $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Mod}_{U(\mathfrak{g})}}(-, \Gamma)$ 作用在上述分解上, 通过伴随 $U(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{k}} - \dashv \phi^*$ 可以得到下面的自然同构:

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{Mod}_{U(\mathfrak{g})}}(\Lambda^n \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} U(\mathfrak{g}), \Gamma) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathbb{k}}(\Lambda^n \mathfrak{g}, \Gamma) = C^n(\mathfrak{g}, \Gamma).$$

接下来再取同调, 就得到了我们要证的同构

$$H^\bullet(\mathfrak{g}, \Gamma) \simeq \mathbf{Ext}_{U(\mathfrak{g})}^\bullet(\mathbb{k}, \Gamma).$$

□

6.2 辛约化

6.2.1 Lie 群作用与 Lie 代数作用

定义 6.5 (积分曲线) 设 X 是光滑的向量场, $\sigma: (a, b) \rightarrow M$ 是光滑曲线. 如果

$$\sigma'(t) = X_{\sigma(t)}, \forall t \in (a, b)$$

则称 σ 为 X 的积分曲线或流线.

◇

定理 6.4 (积分曲线的存在唯一性) 设 X 是光滑向量场, 则对任意的 $p \in M, c \in \mathbb{R}$, 存在 $\epsilon > 0$ 以及唯一的积分曲线 $\sigma : (c - \epsilon, c + \epsilon) \rightarrow M$, 使得 $\sigma(c) = p$.

证明. 取包含 p 的一个局部坐标系 (U, ϕ) , 设在 U 内 X 的形式为

$$X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

其中 a^i 均为 U 中的光滑函数. 则在 U 内 σ 为经过 p 的积分曲线当且仅当

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \sigma^i(t) = a^i(\sigma^1(t), \sigma^2(t), \dots, \sigma^n(t)), \\ \sigma^i(c) = x^i(p) \end{cases}, i = 1, 2, \dots, n.$$

其中 $\sigma^i(t) := x^i \circ \sigma(t)$. 根据常微分方程组解的存在唯一性, 这个上述方程组在局部上的解是唯一的. \square

根据常微分方程组的理论, 积分曲线 σ 光滑地依赖于 c 和 p , 再根据常微分方程组解的存在唯一性, 我们得到如下结果:

定理 6.5 设 X 为 M 上的光滑向量场, $p \in M$, 则存在 p 的开邻域 V 以及 $\epsilon > 0$, 以及光滑映射 $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \times V \rightarrow M$ 使得如下条件被满足:

- $\phi(-, q) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ 是经过 q 的积分曲线, $\forall q \in V$,
- $\phi(0, q) = q, \forall q \in V$, 且当 $|s|, |t|, |s+t| < \epsilon$ 时, 有

$$\phi(s+t, q) = \phi(s, q) \circ \phi(t, q)$$

- $\phi(t, -) : V \rightarrow M$ 是微分同胚, $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

若记 $\phi_t := \phi(t, -)$, 则称 $\{\phi_t\}$ 是由 X 生成的一族局部单参数变换群, X 称为单参数变换群的无穷小生成元.

利用局部单参数变换群, 我们可以重新给出向量场的 **Lie** 括号的定义. 设 X, Y 是 M 上的光滑向量场, 对于 $p \in M$, X 在 p 附近的邻域上生成的局部单参数变换群为 $\{\phi_t\}$, 则定义

$$\mathcal{L}_X Y(p) := \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\phi_{-s})_* \phi_{s(p)} Y_{\phi_s(p)} - Y_p}{s} = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\phi_{-s})_* Y_{\phi_s}.$$

为了证明这一定义与通常的向量场的 **Lie** 括号是等价的, 我们先证明如下的引理.

引理 6.6 设 $f : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow \mathbb{R}$ 为光滑函数, 且 $f(0, p) = 0, \forall p \in M$, 则存在光滑函数 $g : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$\begin{aligned} f(s, p) &= sg(s, p), \\ g(0, p) &= \frac{\partial f}{\partial s}(0, p), \forall p \in M. \end{aligned}$$

证明. 由微积分基本定理, 有

$$f(s, p) = f(s, p) - f(0, p) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(st, p) dt = s \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} f(st, p) dt = sg(s, p),$$

$$\text{其中, } g(0, p) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} f(0, p) dt = \frac{\partial}{\partial s} f(0, p).$$

□

定理 6.7 设 X, Y 如前, 则

$$(i.) \mathcal{L}_X Y = [X, Y],$$

(ii.) 设 $h : M \rightarrow M$ 为微分同胚, 则

$$h_* X = X \iff \phi_s \circ h = h \circ \phi_s, \forall (s, p) \in (-\epsilon, \epsilon) \times M.$$

即微分同胚保持向量场不变当且仅当与向量场的积分曲线交换.

证明. (i) 对于任何 $p \in M$, 由引理6.6, 有

$$\begin{aligned} f \circ \phi_t - f &= t g_t, \\ g_0 &= Xf. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X f)(p)f &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\phi_{-s})_* \phi_s(p) Y_{\phi_s(p)} - Y_p}{s} f \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (Y_{\phi_s}(f \circ \phi_{-s}) - Y_p f) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (Y_{\phi_s}(f) - Y_p f) - \lim_{s \rightarrow 0} Y_{\phi_s}(g_{-s}) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (Y_{\phi_s}(f) - Y_p f) - Y_p(g_0) \\ &= X_p(Yf) - Y_p(Xf) = [X, Y]_p f. \end{aligned}$$

(ii) 对于任何 $p \in M$ 以及任何的 $f \in C^\infty(M)$, 考虑 $(h_* X)_{h(p)}$, 有

$$(h_* X)_{h(p)} f = X_p(f \circ h) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ h \circ \phi_t(p)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ h \circ \phi_t \circ h^{-1})(h(p)).$$

由于 $h \circ \phi_t \circ h^{-1}$ 也是局部单参数变换群, 根据局部单参数变换群的唯一性, $h \circ \phi_t \circ h^{-1}$ 就是 $h_* X$ 在 $h(p)$ 点附近生成的局部单参数变换群. 而 X 在 $h(p)$ 附近生成的单参数变换群为 ϕ_t . 所以 $h_* X = X$ 对所有的 $p \in M$ 成立当且仅当

$$h \circ \phi_t \circ h^{-1} = \phi_t, \forall (t, p) \in (-\epsilon, \epsilon) \times M.$$

□

推论 6.8 设 X, Y 如上, Y 在一点处生成的局部单参数变换群为 $\{\psi_t\}$, 则

(i.) $[X, Y] = 0$ 当且仅当 $(\phi_s)_* Y = Y, \forall s$.

(ii.) $[X, Y] = 0$ 当且仅当 $\phi_s \circ \psi_t = \psi_t \circ \phi_s, \forall s, t$.

证明. (i) 若 $(\phi_s)_*Y = Y$, 根据 Lie 导数的定义

$$(\mathcal{L}_X Y)(p) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\phi_{-s})_* Y_{\phi_s} - Y_p}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Y_p - Y_p}{s} = 0.$$

反之, 若 $[X, Y] = 0$, 则根据定义, $T_p M$ 中的曲线 $(\phi_{-s})_* Y_{\phi_s}(p)$ 的导数为 0, 所以恒为 Y_p , 因此 $(\phi_t)_* Y = Y$

(ii) 根据 (i) 以及上一个定理中的 (ii). □

下面我们利用上述结果研究 Lie 群.

定义 6.6 设 M 为 n 维流形, 若存在微分同胚 $f: TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^n$, 使得对任意的 $p \in M$, $f|_{T_p M}: T_p M \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^n$ 为线性同构, 则称 M 是可平行化的. ◇

从定义可知, 一个流形 M 是可平行化的当且仅当切丛 TM 是平凡的. 因此, 如下引理是显然的.

引理 6.9 n 维流形 M 可平行化当且仅当 M 上存在 n 个处处线性无关的切向量场.

下面我们来说明 Lie 群都是可平行化的. 设 G 为 Lie 群, 给定单位元 e 处的一个切向量 X_e , 令

$$X(g) := g_* X_e, \forall g \in G$$

则 $X(g)$ 是 g 处的一个切向量, 且

$$h_* X(g) = h_* g_* X_e = (hg)_* X_e = X(hg), \forall h \in G.$$

由于 Lie 群乘法是光滑的, 所以映射 $g \mapsto X(g)$ 定义了 G 上的一个切向量场 X , 且对任何 $h \in G$ 都有 $h_* X = X$. 称 X 为 G 上的**左不变向量场**.

命题 6.10 (i.) 左不变向量场都是完备的向量场,

(ii.) 左不变向量场的 Lie 括号依然是左不变向量场,

(iii.) Lie 群都是可平行化的.

证明. (i) 若 $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G$ 是局部定义的 X 的积分曲线, 则可以将之扩充到整个 \mathbb{R} 上, 因为 X 是左不变的.

(ii) 由切映射保持 Lie 括号立刻得证.

(iii) 由于 Lie 群乘法是微分同胚, 所以切映射是线性同构. 取 X_e 的一组基, 并用群作用将其扩张到整个 G 上, 则这组基生成的左不变向量场是线性无关的. 所以 Lie 群是可平行化的. \square

定义 6.7 (单参数变换群) 依赖于参数 $t \in \mathbb{R}$ 的一组微分同胚 $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ 若满足下列条件:

- $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M, \phi(t, p) := \phi_t(p)$ 是光滑映射,
- $\phi_0 = \text{id}$,
- $\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t, \forall s, t \in \mathbb{R}$

则称 $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ 是 (光滑) 单参数同胚群. \diamond

注意, 上面的定义中的单参数同胚群, 不是局部的单参数同胚群. 之后我们说到单参数同胚群, 若未特别强调, 都是指上述定义中的单参数同胚群. $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ 在 M 上能够确定一个向量场 X :

$$X(p) = (\phi(t, p))'(0),$$

反之, 如果 M 上的向量场能够生成 M 的单参数变换群, 则称 X 是 M 上的**完备向量场**. 这等价于 X 的积分曲线可以定义在整个 \mathbb{R} 上.

对于 M 上的光滑向量场, 记

$$\text{supp}X := \overline{\{p \in M \mid X(p) \neq 0\}}$$

成为 X 的**支集**. 我们有

定理 6.11 微分流形上具有紧支集的向量场都是完备的.

证明的关键是, 由于向量场的支集是紧的, 我们可以选取 $\text{supp}X$ 的一组有限的开覆盖 $\{V_i\}$ 以及一个共同的 $\epsilon > 0$, 使得每个 $(-\epsilon, \epsilon) \times V_i$ 上都存在唯一的定理6.5中的 ϕ_i . 由唯一性可知, 这确定了整个的 $\text{supp}X$ 上的 $\phi_t : \text{supp}X \rightarrow \phi_t(\text{supp}X)$. 我们将 ϕ_t 延拓到整个 $\mathbb{R} \times M$ 上就得到了一个单参数变换群.

我们因此立刻有如下推论

推论 6.12 紧流形上的光滑向量场都是完备的.

定义 6.8 (Lie 群作用) 令 M 为一个光滑流形, $\text{Diff}(M)$ 是 M 到自身的微分同胚群. G 在 M 上的一个作用是一个群同态 $\tau : G \rightarrow \text{Diff}(M)$. 将 $\tau(g)(m)$ 简记为 $g \cdot m$.

G 在 M 上的一个作用 τ 被称为是光滑的, 如果下面的赋值映射是光滑的

$$\begin{aligned} \text{ev} : G \times M &\rightarrow M, \\ (g, m) &\mapsto g \cdot m. \end{aligned}$$

◇

M 到自身的微分同胚群 $\text{Diff}(M)$ 在某种程度上可以被视为**无穷维 Lie 群**. 我们很自然地询问, 这 Lie 群的 Lie 代数是什么? 为了回答这个问题, 我们应该在 $\text{Diff}(M)$ 上选取一条从单位映射出发的道路, 至少在局部上选取. 接下来, 这条道路的导数就是单位映射处切空间的一个元素. 即, 我们取一

个单参数控制的微分同胚 $\phi_t : M \rightarrow M$, 使得当 $t = 0$ 时 $\phi_0 = \text{id}$. 如果 t 的范围足够小而且流形 M 的性质不太差的话, 我们总是可以找到一个 (局部的) 向量场, 使得 ϕ_t 在足够小的邻域内是这向量场的积分曲线. 因此, 粗略来说, $\text{Diff}(M)$ 的 Lie 代数是 M 上的向量场 $\Gamma(TM)$.

现在考虑 G 在 M 上的光滑作用 τ . 那么 $\tau : G \rightarrow \text{Diff}(M)$ 可以被视为某种意义上的 Lie 群同态. 因此, 很自然地, 我们考虑 τ 的线性化, 即相应的 Lie 代数之间的同态. 选择任意的 $X \in \mathfrak{g}$, 则 $\text{Diff}(M)$ 上由 τ 导出的流为

$$\begin{aligned}\Phi_X : \mathbb{R} \times M &\rightarrow M, \\ (t, p) &\mapsto \exp(tX) \cdot p.\end{aligned}$$

那么 τ 的导数是映射

$$\begin{aligned}d\tau : \mathfrak{g} &\rightarrow \Gamma(TM), \\ X &\mapsto \xi_X,\end{aligned}$$

其中

$$(\xi_X)_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tX) \cdot p.$$

引理 6.13 令 $\tau : G \rightarrow \text{Diff}(M)$ 为一个光滑 Lie 群作用, 那么,

$$(i.) \text{ 对任何 } X \in \mathfrak{g}, \tau(\exp(tX)) = \exp(t\xi_X).$$

$$(ii.) \text{ 对任何 } g \in G \text{ 以及 } X \in \mathfrak{g}, \xi_{\text{Ad}_g X} = (g^{-1})_* \xi_X.$$

证明. (i.) 我们只要证明曲线

$$\gamma_m(t) := \exp(tX) \cdot m$$

是向量场 ξ_X 的积分曲线.

$$\dot{\gamma}_m(t) = \frac{d}{dt}(\exp(tX) \cdot m) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\exp(sX) \circ \exp(tX) \cdot m) = \xi_X(\exp(tX) \cdot m) = \xi_X(\gamma_m(t)).$$

(ii.) 按照第一个结论直接计算即可.

□

根据上面的结论, 我们有命题

命题 6.14

$$\xi_{[X,Y]} = [\xi_X, \xi_Y],$$

即映射 $d\tau$ 是一个 Lie 代数同态.

因此, 对于一个 Lie 群作用, 我们找到了一个自然的 Lie 代数作用. 对于 $f \in C^\infty(M)$, 定义 $X \in \mathfrak{g}$ 的作用为

$$X \cdot f := \xi_X(f) = \mathcal{L}_{\xi_X} f.$$

若 η 是一个向量场, 则有

$$X \cdot \eta := [\xi_X, \eta] = \mathcal{L}_{\xi_X} \eta.$$

若 $\omega \in \Omega^p(M)$ 是一个 p -形式, 则

$$X \cdot \omega := (d \circ \iota_{\xi_X} + \iota_{\xi_X} \circ d)\omega = \mathcal{L}_{\xi_X} \omega.$$

由于 Lie 导数作用在闭形式上得到一个恰当形式, 所以一个连通 Lie 群作用在 M 的 de Rham 上同调上是平凡的作用.

工具箱

设 ω 是流形 M 上的一个 n -形式, 则其常见的各种运算如下.

$$\begin{aligned}
 (d\omega)(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} Y_i(\omega(Y_1, \dots, \hat{Y}_i, \dots, Y_{n+1})) \\
 &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} \omega([Y_i, Y_j], Y_1, \dots, \hat{Y}_i, \dots, \hat{Y}_j, \dots, Y_{n+1}) \\
 &= Y_1(\omega(Y_2, Y_3, \dots, Y_{n+1})) - Y_2(\omega(Y_1, Y_3, \dots, Y_{n+1})) + \dots \\
 &\quad - \omega([Y_1, Y_2], Y_3, \dots, Y_{n+1}) + \omega([Y_1, Y_3], Y_2, Y_4, \dots, Y_{n+1}) + \dots
 \end{aligned}$$

$$(\iota_X \omega)(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}) = \omega(X, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}).$$

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}_X \omega)(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) &= \mathcal{L}_X(\omega(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)) - \sum_{i=1}^n \omega(Y_1, \dots, \mathcal{L}_X Y_i, \dots, Y_n) \\
 &= X(\omega(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)) - \sum_{i=1}^n \omega(Y_1, \dots, [X, Y_i], \dots, Y_n)
 \end{aligned}$$

若 α, β 均为流形 M 上的 1-形式, 则有

$$\alpha \wedge \beta(X, Y) = \alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X)$$

6.2.2 Lie 群作用在辛流形上

令 (M, ω) 为一个辛流形. 现在, 令连通 Lie 群 G 同过辛自同构作用在 M 上. 考虑 Lie 代数 \mathfrak{g} 的作用. 对任意的 $X \in \mathfrak{g}$, 由于辛自同构保持辛结构, 所以

$$0 = X \cdot \omega = d \circ \iota_{\xi_X} \omega + \iota_{\xi_X} \circ d\omega = d \circ \iota_{\xi_X} \omega,$$

且 1-形式 $\iota_{\xi_X}\omega$ 是闭的. 使得 $\iota_{\xi}\omega$ 为闭形式的向量场 ξ 被称为是**辛向量场**. 由于辛流形上有自然的向量场与 1 形式之间的对偶:

$$\begin{aligned} \flat : \Gamma(TM) &\rightarrow \Omega^1(M), \\ \sharp : \Omega^1(M) &\rightarrow \Gamma(TM). \end{aligned}$$

故所有辛向量场构成的集合是闭 1-形式在 \sharp 下的像:

$$\mathfrak{sym}(M) = \sharp(\Omega^1_{\text{closed}}(M)).$$

若对于向量场 ξ , ξ^\flat 是恰当的, 则称 ξ 是一个 **Hamilton 向量场**. 这说明, 存在一个 $\phi_\xi \in C^\infty(M)$, 使得

$$\xi^\flat + d\phi_\xi = 0.$$

将所有 **Hamilton 向量场** 构成的空间记为 $\mathfrak{ham}(M)$, 于是有

$$\mathfrak{ham}(M) = \sharp(\Omega^1_{\text{exact}}(M)).$$

我们将上面讨论的结果总结成下面的正合列:

$$0 \longrightarrow H^0_{dR}(M) \xrightarrow{i} C^\infty(M) \xrightarrow{\sharp \circ d} \mathfrak{sym}(M) \xrightarrow{\flat} H^1_{dR}(M) \longrightarrow 0.$$

M 上的一个 G 作用被称为是 **Hamilton 的**, 若对每一个 $X \in \mathfrak{g}$, 我们都能找到一个 $\phi_X \in C^\infty(M)$ 使得 $\xi_X^\flat + d\phi_X = 0$. 此时, 我们就有一个映射 $\mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$. 可以验证, 当 $H^1(\mathfrak{g}) = 0$ 时, G 在 M 上的辛作用是 **Hamilton 的**.

在辛流形上, 我们可以定义 **Poisson 括号**. 若 $f, g \in C^\infty(M)$, 两者的 **Poisson 括号** 被定义为

$$\{f, g\} := \xi_f(g) = \omega(\xi_f, \xi_g),$$

其中 ξ_f 是使得 $\xi_f^\flat + df = 0$ 的 **Hamilton 向量场**. **Poisson 括号** 满足反对称性与 **Jacobi 恒等式**, 且与乘积相容

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}.$$

特别地, Poisson 括号赋予了 $C^\infty(M)$ 一个 Lie 代数结构. 一个 Hamilton 的群作用被称为是 **Poisson 的**, 若存在一个 Lie 代数同态 $\mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$, 将 X 映到 ϕ_X , 使得 $\xi_X^\flat + d\phi_X = 0$ 且

$$\phi_{[X,Y]} = \{\phi_X, \phi_Y\}.$$

一个辛流形上的 Lie 群作用 G 与 Poisson 作用之间的障碍可以用上同调来测量. 这是 M 的 de Rham 上同调与 \mathfrak{g} 的 Chevalley-Eilenberg 上同调的结合. 例如, 当 \mathfrak{g} 是半单 Lie 代数时, 群作用自然是 Poisson 的. 但事实上, 我们可以用 M 的**等变**上同调来更加简洁地表述这个障碍.

6.2.3 辛约化

若 G 在 M 上的作用是 Poisson 的, 我们可以定义**矩映射**

$$\Phi : M \rightarrow \mathfrak{g}^*,$$

使得对任意的 $m \in M$ 以及 $X \in \mathfrak{g}$ 都有 $\Phi(m)(X) = \phi_X(m)$. Φ 与 Poisson 作用诱导的映射 $\mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$ 是对偶的. G 通过辛自同构作用在 M 上, 通过余伴随表示作用在 \mathfrak{g}^* 上, 我们能够验证, Φ 是一个 G -映射. 如果假设 G 是连通的, 我们只要保证 Φ 是一个 \mathfrak{g} -映射即可. 但是,

$$X \cdot \Phi(m)(Y) = (X \cdot \phi_Y)(m) = (\mathcal{L}_{\xi_X} \phi_Y)(m) = (\xi_X \phi_Y)(m) = \{\phi_X, \phi_Y\}(m) = \phi_{[X,Y]}(m),$$

所以 Φ 的确是一个 G -映射. 因此, 集合

$$M_0 := \{ m \in M \mid \Phi(m) = 0 \},$$

在 G 作用下是不变的. 如果 $0 \in \mathfrak{g}^*$ 是矩映射 Φ 的正则值, 则 M_0 是 M 的一个闭子流形. 在这种情况下, 如果 G 的作用是自由可迁的, 我们就可以做商 M_0/G , 这是一个光滑流形. 一般情况下, 这只是一个轨道空间. 下面的定理是这方面的一个重要结果.

定理 6.15 (Marsden-Weinstein) 令 (M, ω) 为辛流形, 令 G 为连通 *Lie* 群. G 光滑地作用在 M 上且存在一个 G -矩映射 $\Phi: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$. 令 $M_0 = \Phi^{-1}(0)$ 并记 $\tilde{M} = M_0/G$. 若 \tilde{M} 是一个流形, 则 \tilde{M} 是一个辛流形且其上的辛流形可以如下唯一地定义. 令 $i: M_0 \rightarrow M$ 以及 $\pi: M_0 \rightarrow \tilde{M}$ 为显然的映射, 则存在一个辛形式 $\tilde{\omega} \in \Omega^2(\tilde{M})$ 使得 $i^*\omega = \pi^*\tilde{\omega}$.

通常也将 \tilde{M} 记为 $M//G$.

6.2.4 余迷向约化

一个辛向量空间 (V, ω) 是一个向量空间 V 附加一个反对称的双线性形式 ω . 辛流形 M 在每一点 p 处的切空间 $T_p M$ 都是一个辛向量空间.

若 $W \subset V$ 是辛向量空间的一个线性子空间, 令

$$W^\perp := \{ v \in V \mid \omega(v, w) = 0, \forall w \in W \}.$$

与欧氏空间不同, W 与 W^\perp 不必不交. 但我们依旧有 $\dim W^\perp + \dim W = \dim V$. 子空间 $W \subset V$ 被称为

- 迷向的, 若 $W \subset W^\perp$,
- 余迷向的, 若 $W^\perp \subset W$,
- Lagrange 的, 若 $W = W^\perp$,
- 辛的, 若 $W \cap W^\perp = \{0\}$.

我们容易看到, 若 $W \subset V$ 是迷向的, 那么 $\dim W \leq \frac{1}{2} \dim V$; 若 W 是余迷向的, 则 $\dim W \geq \frac{1}{2} \dim V$. Lagrange 子空间是迷向且余迷向的, 所以 $\dim W = \frac{1}{2} \dim V$. 注意到将辛结构限制在迷向子空间上为 0, 若 W 是余迷向的, 商空间 W/W^\perp 继承了 V 的辛结构.

令 (M, ω) 为辛流形, 令 $N \subset M$ 为闭子流形. 称 N 是迷向的, 若对任意的 $p \in N$, $T_p N \subset T_p M$ 是迷向的. 余者同理.

若 G 作用在 (M, ω) 上存在一个 G -矩映射 $\Phi : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$, 则矩映射的零点集 M_0 是一个余迷向子流形. 为证明这一点, 我们要证明 $(T_p M_0)^\perp \subset T_p M_0$ 对所有的 $p \in M_0$ 成立. 我们有如下的观察: 对于一点 $p \in M_0$, 一个向量 $v \in T_p M$ 也在 $T_p M_0$ 中, 当且仅当 $d\Phi(v) = 0$. 然而, 对所有的 $X \in \mathfrak{g}$, 都有

$$d\Phi(v)(X) = d\phi_X(v) = \omega(v, \xi_X).$$

于是, $(T_p M_0)^\perp$ 是 $T_p M$ 的由 $\xi_X(p)$ 张成的子空间, 换言之, 这是 p 点所在的 G -轨道 \mathcal{O} 的切空间. 由于 G 保持 M_0 , 所以 $\mathcal{O} \subset M_0$ 且 $(T_p M_0)^\perp = T_p \mathcal{O} \subset T_p M_0$.

现在我们考虑更一般的情况. 若 $M_0 \subset M$ 是 M 的一个一般的余迷向子流形, $i : M_0 \rightarrow M$ 是嵌入. 令 $\omega_0 = i^* \omega$ 为 M 上辛形式的拉回. 显然 ω_0 不是一个辛形式, 因为在 M_0 上 ω_0 是退化的. 其在 p 处的核是 $(T_p M_0)^\perp \subset T_p M_0$. 假设 $\dim(T_p M_0)^\perp$ 当 p 在 M 上变动是一个常数时. 此时, 子空间 $(T_p M_0)^\perp \subset T_p M_0$ 定义了一个分布, 称为 ω_0 的特征分布并记为 TM_0^\perp . 我们断言这分布是可积的. 我们只要验证, 对于 (TM_0^\perp) 中的两个局部截面 v, w , 它们的 Lie 括号 $[v, w]$ 依然是 TM_0^\perp 中的局部截面. 这一点可以用 ω_0 是一个闭形式来证明. 根据 Frobenius 可积性定理, M_0 上存在存在联通子流形的分叶结构, 这些子流形的切丛构成了 TM_0^\perp . 令 \tilde{M} 表示 M_0 的分叶结构的叶的空间, $pi : M_0 \rightarrow \tilde{M}$ 是自然的商映射. 于是, 局部上 \tilde{M} 是一个流形. 我们通过要求 $\pi^* \tilde{\omega} = \omega_0$ 赋予 \tilde{M} 辛结构 $\tilde{\omega}$. 详细的论证告诉我们, 我们的确构造出了一个辛流形 $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$, 于是我们证明了定理6.15.

注意到, 我们从 M 得到 \tilde{M} 做的是子流形的商: 我们先得到余迷向子流形 M_0 , 然后再对 M_0 做商得到 \tilde{M} . 这让我们想到了上同调. 一个上链复形的上同调也是一个子商: 我们先得到上链复形的上闭链构成的集合, 然后再商掉上边界. 于是, 我们自然地联想, 在辛约化中也存在一个上同调论. 令人欣慰的是, 事实确实如此.

6.3 BRST 复形

我们将在本节中展示余迷向约化的同调代数方法. 我们要将几何的语言转化成代数的语言.

6.3.1 代数的序曲

光滑流形 M 上的自然的一个代数结构就是 $C^\infty(M)$. M 上的一个辛结构将 $C^\infty(M)$ 变成了一个 Poisson 代数.

M 的任何闭子流形 M_0 都确定了 $C^\infty(M)$ 的一个理想 $\mathcal{I} \in C^\infty(M)$, \mathcal{I} 由在 M_0 上取值为 0 的函数构成, 所以被称为 M_0 的**零化理想**. 若 $M_0 = \Phi^{-1}(0)$ 是映射 $\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ 的正则子流形, 那么 \mathcal{I} 是由 Φ 的分量生成的理想.

M 上的任何一个光滑函数限制在 M_0 上都是 M_0 上的一个光滑函数. 并且, 两个光滑函数限制在 M_0 上得到相同的结果当且仅当这两个函数的差在理想 \mathcal{I} 中. 换言之, 存在一个同构

$$C^\infty(M_0) \simeq C^\infty(M)/\mathcal{I}.$$

现在, 我们将 M_0 是余迷向子流形的事实代数化. 考虑 M 上的向量场, 可以定义为函数环上的导数 $\mathcal{X}(M) = \text{Der}C^\infty(M)$. 根据上面的同构, $C^\infty(M)$ 上的导数限制在 $C^\infty(M_0)$ 上还是 $C^\infty(M_0)$ 上的导数当且仅当它保持理想 \mathcal{I} . 因此,

$$\text{Der}C^\infty(M_0) = \{ \xi \in \text{Der}C^\infty(M) \mid \xi(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I} \}.$$

在上一节中, 我们看到, TM_0^\perp 中的 Hamilton 向量场与 \mathcal{I} 中的函数一一对应. 所以, 余迷向条件 $TM_0^\perp \subset TM_0$ 转化为 $\{\mathcal{I}, \mathcal{I}\} \subset \mathcal{I}$. 这样的理想被称为余迷向理想.

最后 \tilde{M} 上的函数是在 M_0 的分叶结构中每一叶上都为常数的函数. 由于叶是连通的, 叶上的向量场也是 \mathcal{I} 中的函数生成的 Hamilton 向量场, 我

们有同构

$$C^\infty(\tilde{M}) = \{f \in C^\infty(M_0) \mid \{f, \mathcal{J}\} = 0\}$$

其中 $\{f, \mathcal{J}\} = 0$ 是在 M_0 上成立. 将 f 扩张到 M 上, 上述的同构变成

$$C^\infty(\tilde{M}) = \{f \in C^\infty(M) \mid \{f, \mathcal{J}\} \in \mathcal{J}\} / \mathcal{J}$$

这是不依赖于扩张 $f \in C^\infty(M)$ 的, 因为 \mathcal{J} 在 Poisson 括号下是封闭的. 换言之,

$$C^\infty(\tilde{M}) = N(\mathcal{J}) / \mathcal{J},$$

其中 $N(\mathcal{J})$ 是 $C^\infty(M)$ 中 \mathcal{J} 的 Poisson 正规化子.

注意到, $N(\mathcal{J})$ 是 $C^\infty(M)$ 的一个 Poisson 子代数, \mathcal{J} 又是 $N(\mathcal{J})$ 的一个理想. 所以商 $N(\mathcal{J}) / \mathcal{J}$ 具有 Poisson 代数的结构.

代数的威力在于, 当几何变得奇异时, 代数依然有意义. 我们可以将上述约化过程直接在 Poisson 代数构成的范畴中完成. 令 P 为一个 Poisson 代数, $I \subset P$ 是一个余迷向理想. $N(I)$ 是 P 的 Poisson 子代数, $I \subset N(I)$ 是 $N(I)$ 的 Poisson 理想, $N(I)/I$ 也是一个 Poisson 代数, 是 P 对 I 的约化. BRST 构造的目的是构造一个 (超) Poisson 代数的复形, 微分映射与 (超) Poisson 括号相容, 使得这复兴的上同调与 (超) Poisson 代数同构. 这依赖于理想 I 的正规性, 为了使讨论简单, 我们之后都假设 I 是满足一定正规性条件的.

6.3.2 群作用的 BRST 复形

我们要构造与 Lie 群作用与矩映射 $\Phi : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ 相容的情况下的 BRST 复形. 若 $0 \in \mathfrak{g}^*$ 是 Φ 的正则值, 令 $M_0 = \Phi^{-1}(0)$ 为余迷向子流形. \mathcal{J} 是 M 的零化理想. 令 $\pi : M_0 \rightarrow \tilde{M}$ 为正则商映射, 拉回 $\pi^* : C^\infty(\tilde{M}) \rightarrow C^\infty(M_0)$ 令我们可以将 \tilde{M} 上的函数视为 M_0 上的函数. M_0 上的函数是 \tilde{M} 上的函数当且仅当在每条 G -轨道上是常数. 由于 G 是连通的, 在每条 G -轨道上是常数当且仅当在向量场 ξ_X 的流线上是常数, 当且仅当与 ϕ_X 的 Poisson 括号为 0. 用

更加代数的语言,

$$C^\infty(\tilde{M}) \simeq C^\infty(M_0)^{\mathfrak{g}} = H^0(\mathfrak{g}; C^\infty(M_0)).$$

但我们并不满足, 因为 $C^\infty(M_0)$ 是 $C^\infty(M)$ 的商, 但我们更喜欢直接处理 $C^\infty(M)$. 这说明, 我们需要引入 $C^\infty(M_0)$ 的 $C^\infty(M)$ -模分解.

6.3.3 Koszul 分解

为了理解这分解的存在性, 我们回忆 $C^\infty(M_0) \simeq C^\infty(M)/\mathcal{I}$, $C^\infty(M_0)$ 已经是一个 $C^\infty(M)$ 的投影. 我们需要的第一个事实是, 零化理想 \mathcal{I} 与矩映射的分量生成的理想 $I[\Phi]$ 是同构的.

引理 6.16 由矩映射 Φ 的分量生成的理想 $I[\Phi]$ 就是 M_0 的零化理想 \mathcal{I} .

证明. 由于矩映射在 M_0 上取值为 0, 所以 $I[\Phi] \subset \mathcal{I}$. 我们只要证明, 任何在 M_0 上取值为 0 的函数可以被矩映射的分量生成. 只需在局部证明, 单位分解的存在性将之延拓到整体.

令 $N = \dim M$, $k = \dim \mathfrak{g}$. 取 \mathfrak{g} 的一组基为 X_i , 并令 ϕ_i 为矩映射在这组基下的分量. 由于 M_0 是嵌入子流形, 所以在 M_0 上的任何一点处都存在一个 M 的邻域 U 以及局部坐标 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : U \rightarrow \mathbb{R}^{N-k} \times \mathbb{R}^k$, 使得 $y^i = \phi_i$ 对 $i = 1, \dots, k$ 成立. 若 f 在 M_0 上取值为 0. 将 f 限制在 U 上, 并将之视为 \mathbb{R}^N 上的函数, 这是我们有 $f(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0$ 对所有的 \mathbf{x} 都成立. 那么

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}, t\mathbf{y}) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^k y^i (\partial_i f)(\mathbf{x}, t\mathbf{y}) dt \\ &= \sum_{i=1}^k \phi_i \int_0^1 (\partial_i f)(\mathbf{x}, t\mathbf{y}) dt. \end{aligned}$$

因此我们证明了 $f|_U$ 可以被 $\phi|_U$ 生成. 我们总可以找到这样一族 U 成为 M 的开覆盖, 再利用这个开覆盖的单位分解将 f 延拓到整个流形上. \square

因此, 我们现在可以构造一个长度为 2 的链复形

$$\mathfrak{g} \otimes C^\infty(M) \xrightarrow{\delta} C^\infty(M) \xrightarrow{\delta} 0,$$

其中 $\delta f = 0, \delta X = \phi_X$. 若 X_i 是 \mathfrak{g} 的一组基, 那么

$$\delta\left(\sum_i X_i \otimes f_i\right) = \sum_i f_i \phi_i$$

其中 ϕ_i 是 Φ 的分量. 因此 δ 的像是理想 $\mathcal{I} = I[\Phi]$. $\delta^2 = 0$ 是显然的, 所以上面的链复形的上同调是

$$H_\delta^0 = \frac{C^\infty(M)}{\mathcal{I}} \simeq C^\infty(M_0).$$

但上述的链复形不是 $C^\infty(M)$ 的一个投射分解, 因为映射 $\mathfrak{g} \otimes C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ 有非平凡的核: 形如

$$\sum_{i,j} X_i \otimes h_{ij} \phi_j$$

的元素, 其中 $h_{ij} = -h_{ji}$. 因此, 我们要将链复形延长

$$\Lambda^2 \mathfrak{g} \otimes C^\infty(M) \xrightarrow{\delta} \mathfrak{g} \otimes C^\infty(M) \xrightarrow{\delta} C^\infty(M) \xrightarrow{\delta} 0,$$

并将 δ 扩张成

$$\delta(X \wedge Y \otimes f) = Y \otimes \phi_X f - X \otimes \phi_Y f.$$

按照上述思想, 我们得到了 (K^\bullet, δ) , 其中 $K^\bullet = \wedge^\bullet \mathfrak{g} \otimes C^\infty(M)$. 下面的正合列

$$\cdots \xrightarrow{\delta} K^2 \xrightarrow{\delta} K^1 \xrightarrow{\delta} C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M_0) \longrightarrow 0$$

是 $C^\infty(M)$ 的自由 $C^\infty(M)$ -模分解, 被称为 Koszul 分解.

6.3.4 BRST 复形

我们可以用 Koszul 复形 (K^\bullet, δ) 的每一阶构造 Chevalley-Eilenberg 复形, 从而得到一个双复形

$$C^{p,q} := C^p(\mathfrak{g}; K^q) = \wedge^p \mathfrak{g}^* \times \wedge^q \mathfrak{g} \otimes C^\infty(M)$$

这是一个复形 \mathcal{C}^\bullet, D . 特别地, 我们关注其 0 阶同调, 有

$$H^0(\mathcal{C}^\bullet) \simeq H^0(\mathfrak{g}; C^\infty(M_0)) \simeq C^\infty(\tilde{M}).$$

复形 (\mathcal{C}^\bullet, D) 被称为 **BRST 复形**, D 被称为 **BRST 微分**. 复形的阶数 $p - q$ 被称为 **鬼粒子数**.

事实上, 我们可以证明经典的 BRST 上同调可以用

$$H^n(\mathcal{C}^\bullet) \simeq H^n(\mathfrak{g}) \otimes C^\infty(\tilde{M}).$$

但我们知道, $C^\infty(\tilde{M})$ 是一个 Poisson 代数, 我们不禁要问, 能否将上述同构变成 Poisson 代数之间的同构? 这就需要在 BRST 复形上定义 Poisson 代数的结构.

6.3.5 经典 BRST 算子以及 Poisson 结构

我们将要证明, 复形 \mathcal{C}^\bullet 可以赋予一个分级 Poisson 代数的结构, 使得微分算子 D 能够表示成一由一阶元素 $Q \in \mathcal{C}^1$ 生成的内禀导数 $D = \{Q, -\}$. D 被称为 **经典 BRST 算子**. 由于导数是由超 Poisson 括号生成的, 上闭链构成了一个 Poisson 超子代数, 上边界构成了一个 Poisson 理想, 所以同调也是一个 Poisson 超子代数. 特别地, 0 阶的同调是一个 Poisson 代数.

定理 6.17 令 $Q \in \mathcal{C}^1$ 满足 $\{Q, Q\} = 0$. 令 $Q = Q_0 + Q_1 + \cdots$, 其中 $Q_i \in C^{i+1,i}$, $Q^0 = c^i \phi_i$. 那么 $D := \{Q, -\} : \mathcal{C}^\bullet \rightarrow \mathcal{C}^{\bullet+1}$ 是微分映射, 复形 \mathcal{C}^\bullet, D 的 0 阶上同调是

$$H^0(\mathcal{C}^\bullet) \simeq N(\mathcal{I})/\mathcal{I},$$

$N(\mathcal{J})$ 是 \mathcal{J} 中的正规化子, 上述同构也是 *Poisson* 代数之间的同构.

换言之, 上述 Q 的存在性让我们能够构造一个 BRST 复形, 使得这复形的 0 阶上同调是 M 上的 *Poisson* 代数到 M_0 的约化.

剩下来只需要证明 Q 的存在性. 这可以通过归纳法来进行.

第七章 一些代数拓扑

本章主要参考 [5].

7.1 覆叠空间

7.1.1 覆叠空间的定义

定义 7.1 一个映射 $p : E \rightarrow B$ 被称为一个覆叠映射, 如果 p 是一个满射, B 中的任何一点 b 都存在一个开邻域 $V \subset B$, 使得 $p^{-1}(V)$ 的每一个连通分支都是 E 中的开集, 且由 p 同胚地映到 V . 称满足如上性质的局部道路连通的开邻域 V 是 B 中的一个基本开邻域. 称 E 为全空间, B 为底空间, $F_b = p^{-1}(b)$ 是覆叠映射 p 的一个纤维. \diamond

任何的同胚映射都是覆叠映射. 覆叠映射的积还是覆叠映射. 投影 $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ 也是覆叠映射, 因为 $\mathbb{R}P^n$ 是由 S^n 将对径点粘合得到.

7.1.2 道路提升性质

定理 7.1 (道路提升) 令 $p : E \rightarrow B$ 为覆叠映射, $b \in B, e, e' \in F_b$.

- (i.) B 中一条以 b 为起点的道路 $f : I \rightarrow B$ 可以唯一地提升为 E 中的一条道路 $g : I \rightarrow E$, 使得 $g(0) = e$ 且 $p \circ g = f$.
- (ii.) B 中以 b 为起点的同伦的两条道路 $f \simeq f' : I \rightarrow B$ 可以提升为 E 中以 e 为起点的同伦的两条道路 $g \simeq g' : I \rightarrow E$.
- (iii.) $p_* : \pi_1(E, e) \rightarrow \pi_1(B, b)$ 是一个单射.
- (iv.) 群 $p_*(\pi_1(E, e'))$ 和群 $p_*(\pi_1(E, e))$ 是共轭的.
- (v.) 当 e' 在 F_b 中变动时, 群 $p_*(\pi_1(E, e'))$ 也在 $\pi_1(B, b)$ 中所有与 $p_*(\pi_1(E, e))$ 共轭的子群中变动.

证明. 将区间 I 划分成子区间, f 将每一个子区间映到一个 B 中的基本邻域 V 中, 利用覆叠映射在基本邻域上的局部同胚性质, 可以将 f 逐段地提升到 E 上, 利用归纳法可以证明 (i.). 同理, 我们知道存在一个 $f \simeq f'$ 之间的同伦 $h : I \times I \rightarrow B$. 将 $I \times I$ 划分成小正方形, 每一个小正方形都被 h 映到 B 的基本邻域上, 再归纳地证明同伦的提升, 从而证明了 (ii.). (iii.) 的单性可以由 (i) 推出. (iv.) 可以通过我们已知的更换基点的操作, 得到 $\pi_1(E, e')$ 和 $\pi_1(E, e)$ 之间的一个同构, 这是一个共轭变换, 这就证明了 (iv.). 我们知道, 在 $\pi_1(B, b)$ 中与 $p_*(\pi_1(E, e))$ 共轭的子群一定具有 $[f]p_*(\pi_1(E, e))[\bar{f}]$ 的形式, 其中 $[f]$ 是以 b 为基点的回路 f 的同伦等价类. 将 f 唯一地提升到 E 上, 可以得到 E 中的道路 $\tilde{f} : e \rightarrow e', e'$ 是道路 \tilde{f} 的终点, $e' \in F_b$, 因此 $p_*(\pi_1(E, e')) = [f]p_*(\pi_1(E, e))[\bar{f}]$, 这就证明了当 e 遍历 F_b 时, $p_*(\pi_1(E, e))$ 遍历 $\pi_1(B, b)$ 中与 $p_*(\pi_1(E, e))$ 共轭的所有子群. \square

定义 7.2 一个覆叠映射 $p : E \rightarrow B$ 被称为**正则的 (regular)**, 若 $p_*(\pi_1(E, e))$ 是 $p_*(\pi_1(B, b))$ 的一个正规子群. 若 E 是单连通的, 则称 p 是 **universal** 的. \diamond

我们将在之后看到, 对于一个万有覆叠映射 $p : E \rightarrow B$, F_b 中的元素与 $\pi_1(B, b)$ 中的元素是一一对应的 (集合论意义上). 下面的例子将会让我们看到这个事实的力量.

例 7.1 当 $n \geq 2$ 时, S^n 是 $\mathbb{R}P^n$ 的万有覆叠, 也是二重覆叠. 所以 $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$ 中有 2 个元素. 因此 $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$. \diamond

7.1.3 广群的覆叠空间

定义 7.3 令 C 为一个范畴, x 是 C 中的一个对象, 不难验证 $\text{Hom}_C(x, -) : C \rightarrow x \backslash C$ 是一个函子. $x \backslash C$ 定义如下: $x \backslash C$ 中的对象是所有从 x 出发的态射. $x \backslash C$ 中的两个对象 $f \in \text{Hom}_C(x, y), g \in \text{Hom}_C(x, z)$ 之间的一个态射 $h_* : f \rightarrow g$ 是 $\text{Hom}_C(y, z)$ 中某个态射 h 的后置复合. 当 C 是一个广群时, $h = g \circ f^{-1}$, 此时范畴 $x \backslash C$ 由对象完全确定. \diamond

定义 7.4 若广群 C 是一个小范畴, 将 C 中所有从对象 x 出发的态射的集合记为 $\text{St}(x)$, 即 $\text{St}(x) = \text{Hom}_C(x, C)$. 在广群条件下, 记 $\text{Hom}_C(x, x) = \pi(C, x)$, 这是 x 的所有自同构构成的群. \diamond

定义 7.5 令连通广群 E, B 为小范畴, 一个覆叠是一个函子 $p : E \rightarrow B$, p 限制在对象上是一个满射, 对于每个 E 中的对象 e ,

$$p : \text{St}(e) \rightarrow \text{St}(p(e))$$

是一个双射. 对于 B 中的对象 b , 令 F_b 为 E 中所有满足 $p(e) = b$ 的对象的集合. 那么, $p^{-1}(\text{St}(b))$ 是所有 $\text{St}(e), e \in F_b$ 的不交并. \diamond

引入了上面的概念, 映射提升定理的 (i.) 和 (ii.) 就能以如下的方式叙述.

命题 7.2 若 $p : E \rightarrow B$ 是空间之间的覆叠映射, 那么函子 $\Pi(p) : \Pi(E) \rightarrow \Pi(B)$ 就是广群之间的覆叠.

映射提升定理的 (iii.), (iv.), (v.) 则是纯粹的范畴论的结果, 对所有的连通广群的覆叠都成立. 可以叙述如下:

命题 7.3 令 $p : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ 是广群之间的覆叠, b 是 \mathbf{B} 中的对象, e, e' 是 F_b 中的对象.

- (i.) $p : \pi(\mathbf{E}, e) \rightarrow \pi(\mathbf{B}, b)$ 是一个单同态.
- (ii.) $p(\pi(\mathbf{E}, e'))$ 与 $p(\pi(\mathbf{E}, e))$ 是共轭的.
- (iii.) 当 e' 取遍 F_b 中所有元素, $p(\pi(\mathbf{E}, e'))$ 取遍 $p(\pi(\mathbf{B}, b))$ 中 $p(\pi(\mathbf{E}, e))$ 的所有共轭.

证明. 对于 (i.), 若 $g, g' \in \pi(\mathbf{E}, e)$, 且 $p(g) = p(g')$, 根据 p 在 $\text{St}(e)$ 上的单性可以得到 $g = g'$. 对于 (ii.), 由于 \mathbf{E} 是连通的, 一定存在态射 $g : e \rightarrow e'$. g 共轭地作用在 $\pi(\mathbf{E}, e)$ 上得到了一个同构 $\pi(\mathbf{E}, e) \rightarrow \pi(\mathbf{E}, e')$. 对于 (iii.), 在 $\pi(\mathbf{B}, b)$ 中的所有与 $p(\pi(\mathbf{E}, e))$ 共轭的元素由某个 $f \in \pi(\mathbf{B}, b)$ 联系起来. 根据 p 在 $\text{St}(b)$ 上的满性, 一定存在一个 $g \in \text{St}(e)$ 使得 $f = p(g)$. \square

定义 7.6 令 $p : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ 为广群之间的覆叠. 定义纤维平移函子 $T : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{S}$ 如下: 对于 \mathbf{B} 中的对象 b , $T(b) = F_b$; 对于 \mathbf{B} 中的态射 $f : b \rightarrow b'$, $T(f) : F_b \rightarrow F_{b'}$ 定义为 $T(f)(e) = g(e)$, 其中 g 是 $\text{St}(e)$ 中唯一的使得 $p(g) = f$ 的态射. \diamond

根据广群之间的覆叠的定义, 容易验证 T 是一个定义好的函子. 事实上, 比起纤维平移函子这个名称, T 更加本质的作用是道路提升. 如果将 T 限制在某个 $\text{St}(e)$ 上, T 是与 p 互逆的映射.

命题 7.4 对于广群之间的覆叠 $p : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$, 任意两点 b, b' 处的纤维 $F_b, F_{b'}$ 具有相同的基数.

证明. 对于 $f : b \rightarrow b'$, $T(f) : F_b \rightarrow F_{b'}$ 是一个双射, 其逆为 $T(f^{-1})$. \square

7.1.4 群作用与轨道范畴

用群或广群作用在集合上的范畴论语言, 能够最好地描述覆叠映射的分类.

群 G 中的元素 g 作用在集合 S 中的元素 s 上, 得到 S 中的元素 gs , 并称 S 是一个 G -集合 (G -set).

引理 7.5 范畴 $\mathbf{O}(G)$ 与范畴 \mathbf{G} 是等价的. 范畴 \mathbf{G} 中的对象是 G 的子群, 对象 $H \rightarrow K$ 之间的态射是关系 $\gamma^{-1}H\gamma \subset K, \gamma \in G$.

如果我们将群 G 视为只有一个对象的范畴, 换言之, 将群 G 视为某个集合 S 上所有自同构的集合, 那么一个群在集合 S 上的左作用就是一个函子 $\mathbf{B}G \rightarrow \mathbf{Set}$. 同理, 一个右作用就是一个反变函子. 若广群 \mathbf{B} 是一个小范畴, 我们可以很自然地将群作用推广到广群上, 即考虑函子 $T : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{Set}$. 对于每个 \mathbf{B} 中的对象 b , T 导出了 $\pi(\mathbf{B}, b)$ 在 $T(b)$ 上的作用. 我们称函子 T 是可迁的, 若对每个对象 b , $\pi(\mathbf{B}, b)$ 作用在 $T(b)$ 上都是可迁的. 若 \mathbf{B} 是连通的, 只要 T 在一个对象 b 上导出了可迁的作用, 则 T 是可迁的.

对于广群之间的覆叠 $p : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$, 纤维平移函子导出了群 $\pi(\mathbf{B}, b)$ 在纤维 F_b 上的一个作用. $e \in F_b$ 的迷向子群是 $p(\pi(\mathbf{E}, e))$, 因为 $T(f)(e) = e$ 当且仅当将 f 提升到 $\text{St}(e)$ 上之后依旧是 e 的一个自同构. 进一步, 上述群作用还是可迁的, 因为对于 F_b 中的任何两个元素 e, e' , 由 \mathbf{E} 的连通性得到一定存在一个同构 $f : e \rightarrow e'$, 而 $p(e) = p(e') = b$, 且 \mathbf{B} 又是一个广群, 所以 $p(f)$ 作为 \mathbf{B} 中的态射, 一定是 b 的自同构, 从而 $p(f) \in \pi(\mathbf{E}, e)$, 这就证明了 T 导出的群作用是可迁的. 那么, 作为一个 $\pi(\mathbf{B}, b)$ -集, 根据定理4.2:

$$|F_b| = [\pi(\mathbf{B}, b) : p(\pi(\mathbf{E}, e))]$$

即任意一点 b 上的纤维中的元素与 $p(\pi(\mathbf{E}, e))$ 在 $\pi(\mathbf{B}, b)$ 中的陪集是一一对应的.

定义 7.7 广群之间的覆叠 $p : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ 被称为**正则的**, 如果 $p(\pi(\mathbf{E}, e))$ 是 $\pi(\mathbf{B}, b)$

的一个正规子群; p 被称为**万有的**, 如果 $p(\pi(\mathbf{E}, e)) = \{e\}$. \diamond

从上面的定义可知, $p : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ 是万有覆叠当且仅当 $\pi(\mathbf{B}, b)$ 自由地作用在 F_b 上, 且 F_b 中的元素与 $\pi(\mathbf{B}, b)$ 中的元素是一一对应的.

7.1.5 广群覆叠的分类

在这节和下节中, 我们都假设广群 \mathbf{B} 是一个小范畴, 且是连通的. 接下来我们要对覆叠空间进行分类. 我们在最开始陈述覆叠广群的基本定理, 在定理中, 所有的广群都是连通的小范畴.

定理 7.6 令 $p : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ 为广群之间的覆叠, 令 \mathbf{X} 为一个广群, $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{B}$ 为一个函子. 选取一个对象 $x_0 \in \mathbf{X}$, 令 $b_0 = f(x_0)$, 选取 $e_0 \in F_{b_0}$. 那么, 存在唯一的函子 $g : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{E}$ 使得如下图表交换, 当且仅当 $f(\pi(\mathbf{X}, x_0)) \subset p(\pi(\mathbf{E}, e_0))$.

证明. 如果 g 是存在的, 由于它使得图表交换, 所以 $f = p \circ g$. 由于 $g(\pi(\mathbf{X}, x_0)) \subset \pi(\mathbf{E}, e_0)$, 所以 $f(\pi(\mathbf{X}, x_0)) = p(g(\pi(\mathbf{X}, x_0))) \subset p(\pi(\mathbf{E}, e_0))$. 反之, 如果假定 $f(\pi(\mathbf{X}, x_0)) \subset p(\pi(\mathbf{E}, e_0))$, 我们需要找到唯一的 g 使得图表交换. 对于 \mathbf{X} 中的另一对象 x , 连通性保证了存在一个同构 $\alpha : x_0 \rightarrow x$. 记 $\tilde{\alpha} \in \text{St}(e_0)$ 是使得 $p(\tilde{\alpha}) = f(\alpha)$ 的唯一态射, 我们定义 $g(\alpha) = \tilde{\alpha}$, 且令 $g(x) = T(f(\alpha))(e_0)$. 道路提升的唯一性保证了 g 定义在态射集上的唯一性, 下面我们只需要证明, g 在对象集上的定义, 与态射 α 的选择无关即可.

选取与 α 起点终点相同的态射 $\beta : x_0 \rightarrow x$, 于是, $\alpha^{-1} \circ \beta \in \pi(\mathbf{X}, x_0)$,

$$f(\alpha)^{-1} \circ f(\beta) = f(\alpha^{-1} \circ \beta) = p(\gamma)$$

γ 是道路提升定理所保证的唯一提升. 那么,

$$p(\tilde{\alpha} \circ \gamma) = f(\alpha) \circ p(\gamma) = f(\beta)$$

所以我们找到了 β 的唯一提升 $\tilde{\alpha} \circ \gamma$, 且二者的终点是相同的. 因此我们找到了唯一的 g 使得图表交换. \square

定义 7.8 \mathbf{B} 的覆叠之间的映射 $g : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}'$, 是指使得如下的图表交换的函子 g .

令 $\mathbf{Cov}(\mathbf{B})$ 为 \mathbf{B} 的所有覆叠映射所组成的范畴, 如果 \mathbf{B} 在上下文中是明确的, 那么我们将 $\mathbf{Cov}(\mathbf{B})$ 中 \mathbf{E}, \mathbf{E}' 之间的态射集记为 $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Cov}(\mathbf{B})}(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$. \diamond

引理 7.7 $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Cov}(\mathbf{B})}(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$ 中的一个态射 $g : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}'$ 本身也是一个广群之间的覆叠.

证明. 对于 \mathbf{E}' 中的任何一个元素 e' , 选择一个元素 $e \in \mathbf{E}$ 以及一个 \mathbf{E}' 中的态射 $f : g(e) \rightarrow e'$, 由于交换图表以及 T 在局部是 p 的逆, 可以验证 $e' = g(T(p'(f)(e)))$. 由于 p' 限制在 $\text{St}_{\mathbf{E}'}(g(e))$ 以及 p 限制在 $\text{St}_{\mathbf{E}}(e)$ 上都是双射, 而且 $p' = g \circ p$, 所以 g 是 $\text{St}_{\mathbf{E}}(e)$ 与 $\text{St}_{\mathbf{E}'}(g(e))$ 之间的双射. \square

根据以上引理以及定理7.6, 我们可以立刻确定 \mathbf{B} 的所有覆叠的类型.

定理 7.8 令 $p : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ 以及 $p' : \mathbf{E}' \rightarrow \mathbf{B}$ 为广群间的覆叠. 选取 $e \in \mathbf{E}$, $e' \in \mathbf{E}'$ 以及 $b \in \mathbf{B}$ 使得 $p(e) = b = p'(e')$. 那么, 存在覆叠之间的唯一映射 $g : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}'$ 使得 $p = p' \circ g$ 当且仅当

$$p(\pi(\mathbf{E}, e)) \subset p'(\pi(\mathbf{E}', e')).$$

其中 e, e' 两点满足 $g(e) = e'$. 特别地, 覆叠之间的两个映射 $g, g' : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}'$ 只要满足对任一 $e \in \mathbf{E}$ 有 $g(e) = g'(e)$, 则这两个映射是相同的. g 是一个同构, 当且仅当

$$p(\pi(\mathbf{E}, e)) \subset p'(\pi(\mathbf{E}', e')).$$

于是, \mathbf{E} 和 \mathbf{E}' 是同构的, 当且仅当对于任意的 $e \in F_b$ 以及任意的 $e' \in F'_b$, $p(\pi(\mathbf{E}, e))$ 以及 $p'(\pi(\mathbf{E}', e'))$ 是 $\pi(\mathbf{B}, b)$ 中相互共轭的子群.

推论 7.9 如果 \mathbf{B} 存在万有覆叠, 则万有覆叠是唯一的, 且是其他所有覆叠的覆叠.

万有覆叠的存在性将在之后证明. 将上一个定理用纤维上的作用叙述是有好处的.

定理 7.10 令 $p : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ 以及 $p' : \mathbf{E}' \rightarrow \mathbf{B}$ 是覆叠, 取 $b \in \mathbf{B}$, 令 $G = \pi(\mathbf{B}, b)$. 如果 $g : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}'$ 是覆叠之间的映射, 那么 g 限制在纤维上得到了 G -集合之间的一个 G -映射 $F_b \rightarrow F'_b$, 而且 $\text{Hom}_{\text{Cov}(\mathbf{B})}(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$ 中的元素与 G -映射 $F_b \rightarrow F'_b$ 之间是一一对应的.

证明. 令 $e \in F_b$ 以及 $f \in \pi(\mathbf{B}, b)$. 根据我们定义的 $\pi(\mathbf{B}, b)$ 在 F_b 上的作用, fe 是 $\text{St}_{\mathbf{E}}(e)$ 中 \tilde{f} 的终点, 其中 $p(\tilde{f}) = f$. 而根据交换图表, $g(fe)$ 是 $\text{St}_{\mathbf{E}'}(g(e))$ 中 $g(\tilde{f})$ 的终点, 所以 $g(fe) = fg(e)$. 上一条定理保证了 g 的唯一性, 从而将覆叠之间的映射限制在纤维上诱导了在 $\text{Hom}_{\text{Cov}(\mathbf{B})}(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$ 上的单射. 下面我们再来证明这这也是一个满射. 取 $\alpha : F_b \rightarrow F'_b$ 为 G -映射, 取 $e \in F_b$ 并令 $e' = \alpha(e)$. 根据命题 4.4, $p(\pi(\mathbf{E}, e)) \subset p'(\pi(\mathbf{E}', e'))$. 根据上一个定理, α 可以唯一地扩张成 $g \in \text{Hom}_{\text{Cov}(\mathbf{B})}(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$. \square

定义 7.9 令 $\text{Aut}(\mathbf{E})$ 表示范畴 $\text{Cov}(\mathbf{B})$ 中 \mathbf{E} 到自身的态射构成的群. \diamond

推论 7.11 令 $p : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ 是一个覆叠, 并选取 $b \in \mathbf{B}$, $e \in F_b$. 记 $G = \pi(\mathbf{B}, b)$ 以及 $H = p(\pi(\mathbf{E}, e))$. 那么, 根据前一个定理, $\text{Aut}(\mathbf{E})$ 与 G -集合 F_b 上所有 G -映射构成的群是同构的, 又根据定理 4.5, $\text{Aut}(\mathbf{E})$ 同构于 $N_G(H)/H$. 如果覆叠映射 p 是正则的, 则有 $\text{Aut}(\mathbf{E}) \cong G/H$; 若覆叠映射 p 是万有的, 则 $\text{Aut}(\mathbf{E}) \cong G$.

7.1.6 构造广群的覆叠

我们已经对广群 \mathbf{B} 的所有覆叠进行了分类: $\pi(\mathbf{B}, b)$ 的某个子群的共轭类, 对应相互同构的 \mathbf{B} 的覆叠.

定理 7.12 选择 \mathbf{B} 中的一个对象 b , 并令 $G = \pi(\mathbf{B}, b)$. 存在一个函子

$$\mathbf{E}(-) : \mathbf{O}(G) \rightarrow \mathbf{Cov}(\mathbf{B}),$$

它是范畴间的一个等价. 对于每个 G 的子群 H , 都存在一个对象 $e \in F_b$ 使得覆叠 $p : \mathbf{E}(G/H) \rightarrow \mathbf{B}$ 满足

$$p(\pi(\mathbf{E}(G/H), e)) = H.$$

进一步, 作为 G -集合, $F_b = G/H$. 对于范畴 $\mathbf{O}(G)$ 中的态射 $\alpha : G/H \rightarrow G/K$, 将 $\mathbf{E}(\alpha) : \mathbf{E}(G/H) \rightarrow \mathbf{E}(G/K)$ 限制在 b 的纤维上得到的映射就是 α .

7.1.7 覆叠空间的分类

在本节和下一节, 我们将分类拓扑空间的覆叠空间, 使用的是与广群的覆叠完全平行的论述. 事实上, 将之前的结果应用到一个拓扑空间的基本广群上, 代数的结果就会直接得出拓扑的结果. 下面的定理被称为覆叠空间理论的基本定理, 它说明了基本群给出了一个提升问题中的唯一“障碍”. 本节中, 我们假设所有的空间都是连通且局部道路连通的.

定理 7.13 令 $p : E \rightarrow B$ 为覆叠映射, $f : X \rightarrow B$ 是一个连续映射. 取 $x \in X$, 令 $b = f(x)$ 并选择 $e \in F_b$. 存在唯一的映射 $g : X \rightarrow E$ 使得 $g(x) = e$ 且 $p \circ g = f$ 当且仅当

$$f_*(\pi_1(X, x)) \subset p_*(\pi_1(E, e)).$$

证明. 如果 g 是存在的, $g_*(\pi_1(X, x)) \subset \pi_1(E, e) \implies f_*(\pi_1(X, x)) \subset p_*(\pi_1(E, e))$. 反之, 假设 $f_*(\pi_1(X, x)) \subset p_*(\pi_1(E, e))$, 利用类似于广群情况的证明, 即可证明定理. \square

定义 7.10 映射 $g : E \rightarrow E'$ 被称为 B 的覆叠空间之间的映射, 如果 g 使得下面的图表交换.

将空间 B 的覆叠空间组成的范畴记为 $\mathbf{Cov}(B)$, 如果在上下文中 B 是明确的, 将 E, E' 之间的态射集记为 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cov}(B)}(E, E')$. \diamond

引理 7.14 覆叠空间之间的映射 $g: E \rightarrow E'$ 本身也是一个覆叠空间.

定理 7.15 令 $p: E \rightarrow B$ 以及 $p': E' \rightarrow B$ 为 B 的覆叠空间. 选取 $e \in E$, $e' \in E'$ 以及 $b \in B$ 使得 $p(e) = b = p'(e')$. 那么, 存在覆叠空间之间的唯一映射 $g: E \rightarrow E'$ 使得 $p = p' \circ g$ 当且仅当

$$p_*(\pi_1(E, e)) \subset p'_*(\pi_1(E', e')).$$

其中 e, e' 两点满足 $g(e) = e'$. 特别地, 覆叠空间之间的两个映射 $g, g': E \rightarrow E'$ 只要满足对任一 $e \in E$ 有 $g(e) = g'(e)$, 则这两个映射是相同的. g 是一个同胚, 当且仅当

$$p_*(\pi_1(E, e)) = p'_*(\pi_1(E', e')).$$

于是, E 和 E' 是同构的, 当且仅当对于任意的 $e \in F_b$ 以及任意的 $e' \in F'_b$, $p_*(\pi_1(E, e))$ 以及 $p'_*(\pi_1(E', e'))$ 是 $\pi_1(B, b)$ 中相互共轭的子群.

推论 7.16 如果 B 存在万有覆叠空间, 则万有覆叠空间在同胚意义上是唯一的, 且是所有覆叠空间的覆叠空间.

值得注意的是, 上述类型的定理在代数拓扑中并不是经常出现的例子. 代数不变量, 例如基本群, 并不能完全确定拓扑空间之间的映射的存在性和唯一性. 上述定理的推论告诉我们出现这种现象的原因.

推论 7.17 基本广群函子 Π 限制在任意两个 $\mathbf{Cov}(B)$ 的任意两个对象 E, E' 之间的态射集上是一个单射

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cov}(B)}(E, E') \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cov}(\Pi(B))}(\Pi(E), \Pi(E')).$$

即 Π 是范畴 $\mathbf{Cov}(B)$ 上的忠实函子.

定理 7.18 令 $p: E \rightarrow B$ 以及 $p': E' \rightarrow B$ 是覆叠空间, 取 $b \in B$, 令 $G = \pi_1(B, b)$. 如果 $g: E \rightarrow E'$ 是覆叠空间之间的映射, 那么 g 限制在纤维上

得到了 G -集合之间的一个 G -映射 $F_b \rightarrow F'_b$, 而且 $\text{Cov}(E, E')$ 中的元素与 G -映射 $F_b \rightarrow F'_b$ 之间是一一对应的.

定义 7.11 令 $\text{Aut}(E) \subset \text{Cov}(E, E)$ 表示覆叠空间 E 的自同胚群. \diamond

推论 7.19 令 $p : E \rightarrow B$ 是一个覆叠空间, 并选取 $b \in B, e \in F_b$. 记 $G = \pi_1(B, b)$ 以及 $H = p_*(\pi_1(E, e))$. 那么, $\text{Aut}(E)$ 同构于 G -集合 F_b 的所有到自身的 G 映射构成的群, 即 $\text{Aut}(E)$ 同构于 $N_G(H)/H$. 如果覆叠映射 p 是正则的, 则有 $\text{Aut}(E) \cong G/H$; 若覆叠映射 p 是万有的, 则 $\text{Aut}(E) \cong G$.

7.1.8 构造覆叠空间

上一节中, 我们已经给出了 B 的所有覆叠空间的代数划分: $\pi_1(B, b)$ 的相互共轭的子群对应相互同胚的覆叠空间. 我们先构造万有覆叠空间, 然后证明万有覆叠空间的存在性保证了其他覆叠空间的存在性. 我们在这节中依旧考虑局部可缩的空间. 称一个空间 B 是**局部半单连通的**, 若对 $\forall b \in B$, 都存 B 的一个邻域 U 使得 $i_* : \pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$ 是平凡的同态.

定理 7.20 若 B 是连通的, 局部道路联通的, 局部半单连通的, 那么 B 存在万有覆叠空间.

证明. 固定一个基点 $b \in B$. 我们通过构造满足条件的道路的集合来构造万有覆叠空间. 将 E 记为所有以 b 为起点的道路的同伦等价类的集合, 并定义映射 $p : E \rightarrow B$ 为 $p([f]) = f(1)$, 由于终点不同的道路不是同伦等价的, 所以 p 是良定义的. 于是, 作为一个集合, $E = \text{St}_{\Pi(B)}(b)$, 就像在构造广群 $\Pi(B)$ 的万有覆叠时一样. B 的拓扑可以由一个拓扑基 \mathcal{B} 生成, \mathcal{B} 中的元素是道路连通的开集 U , 且对 $\forall u \in U$ 都有 $i_* : \pi_1(U, u) \rightarrow \pi_1(B, u)$ 是平凡的同态. 因此, U 中任意两条起点终点相同的道路 $u \rightarrow u'$ 在 B 中都是同伦等价的. 我们只要为 E 赋一个拓扑, 使得 B 中的这些开集 U 都是 p 的基本邻域, p 是这些 U 的覆叠映射. 对于一条 B 中起点为 b 终点在 U 内的道路 f , 定义 E 的子集

$U[f]$:

$$U[f] = \{[g] | [g] = [c \cdot f], c : I \rightarrow U\}$$

其中 c 是 U 中的一条道路.

所有如上定义的 $U[f]$ 构成了 E 的一个拓扑基: 若 $U[f]$ 和 $U'[f']$ 是如上定义的两个集合, 那么对于任何的 $[g] \in U[f] \cap U'[f']$, 我们总能找到一个 $W[g]$, 使得

$$W[g] \subset U[f] \cap U'[f'],$$

$W \subset U \cap U'$ 是任何满足 $p([g]) \in W$ 的 $U \cap U'$ 的开子集. 对于 $u \in U$, 每个 $U[f]$ 中存在唯一的 $[g]$ 使得 $p([g]) = u$. (可能存在不同伦等价的 $[f]$, 但是其起点重点都是相同的, 并且这些 $[f]$ 定义的 $U[f]$ 都是不交的, 者可以根据定义来证明.) 因此, p 将每个 $U[f]$ 一一地映到 U 上, $p^{-1}(U)$ 是一些不交的 $U[f]$ 的并. 为了使 p 是一个局部的同胚, 只需验证在拓扑基 $U[f]$ 生成的拓扑下, E 是连通, 局部道路连通并且单连通的. 局部道路连通性是显然的. 给定 E 中的基点 e . e 是 B 中与点 b 的同伦等价类. 我们可以定义 E 中以 e 为起点, $[f]$ 为终点的一条道路 $\tilde{f} : I \rightarrow E$, $\tilde{f}(s) = [f_s]$, 其中 $f_s(t) = f(st)$. 由 $U[g]$ 的定义和 f 的连续性, 可以推出 $\tilde{f}^{-1}(U[g])$ 是 I 中的开集, 这就证明了 E 是道路连通的, 从而是连通的. 由于 $f_s(1) = f(s)$, $p \circ \tilde{f} = f$. 根据定义:

$$T[f](e) = [\tilde{f}(1)] = [f].$$

如果 f 是一条回路, 那么 $T[f](e) = e$ 当且仅当 $[f] = e$. 因此 $\pi_1(B, b)$ 在 F_b 上的作用是自由的, 迷向子群 $p_*(\pi_1(E, e))$ 是平凡的. \square

下面, 我们将通过万有覆叠空间来构造一般的覆叠空间, 但是需要一点准备工作.

定义 7.12 一个 G -空间 X 是一个空间 X , 同时又是一个 G -集合, 群作用 $G \times X \rightarrow X$ 是连续的. 定义轨道空间 X/G 为由轨道组成的集合 $\{Gx | x \in X\}$, 并赋予这个集合 X 的商拓扑 (将一条轨道视为一点). \diamond

上述的定义对一般的拓扑群 G 也是成立的. 然而, 我们在这里只对 G 是离散的群的情况感兴趣, 在这种情况下, 群作用的连续性条件意味着 G 的每个元素都是 X 到自身的同胚.

引理 7.21 令 X 为一个 G -空间. 那么从 X 到轨道空间 X/G 事实上定义了一个函子 $X/(-) : \mathbf{O}(G) \rightarrow \mathbf{Top}$.

证明. 函子将陪集 G/H 映到轨道的集合 X/H , 将映射 $\alpha : G/H \rightarrow G/K$ 映到映射 $X/\alpha : X/H \rightarrow X/K$, X/α 将轨道 Hx 映到轨道 $H\gamma^{-1}x$, 其中, $\gamma \in G$ 就是出现在命题 4.4 中的确定 α 的元素. \square

下面我们开始构造一般的覆叠空间.

命题 7.22 令 $p : E \rightarrow B$ 为覆叠映射, 且 $\text{Aut}(E)$ 可迁地作用在 F_b 上. 那么覆叠映射 p 是正则的, 且 $E/\text{Aut}(E)$ 与 B 同胚.

证明. 对于 F_b 中的任何两点 e, e' , 由于 $\text{Aut}(E)$ 可迁地作用到 F_b 上, 所以存在一个 $g \in \text{Aut}(E)$ 使得 $g(e) = e'$, 所以 $p_*(\pi_1(E, e)) = p_*(\pi_1(E, e'))$. 因此, 所有 $p_*(\pi_1(E, e))$ 的共轭都等于自身, $p_*(\pi_1(E, e))$ 是 $\pi_1(B, b)$ 的正规子群, p 是正则的. 由于 $\text{Aut}(E)$ 可迁地作用在 F_b 上, 所以 $\text{Aut}(E)$ 的轨道就是 F_b , 所以 $E/\text{Aut}(E) = E/F_b$. 在这个商空间中, 所有基本邻域的原像都被粘合起来, 与基本邻域同胚. 注意到从商空间 $E/\text{Aut}(E)$ 到 B 之间的映射是一个一一的连续映射, 因此这是一个同胚. \square

定理 7.23 选择基点 $b \in B$ 并令 $G = \pi_1(B, b)$. 存在一个函子

$$E(-) : \mathbf{O}(G) \rightarrow \mathbf{Cov}(B),$$

它是范畴之间的等价. 对于 G 中的每个子群 H , b 在 $E(G/H)$ 的纤维中存在一点 e 使得覆叠空间 $p : E(G/H) \rightarrow B$ 满足

$$p_*(\pi_1(E(G/H), e)) = H.$$

更近一步, 作为一个 G -集合, $|F_b| = [G : H]$; 对于 $O(G)$ 中的 G -映射 $\alpha : G/H \rightarrow G/K$, 将 $E(\alpha) : E(G/H) \rightarrow E(G/K)$ 限制在 b 在 $E(G/H)$ 的纤维上与 α 相同.

证明. 令 $p : E \rightarrow B$ 为 B 的万有覆叠空间, 固定 $e \in E$ 使得 $p(e) = b$. 我们有一个重要的观察: $\text{Aut}(E) \cong \pi_1(B, b)$, 二者之间的同构通过 $\pi_1(B, b)$ 中的回路提升到 E 上得到. 这样, 我们就将 G 的子群视为 $\text{Aut}(E)$ 的子群. 将 $E(G/H)$ 定义为轨道空间 E/H , 并且令 $q : E \rightarrow E/H$ 是商映射. 我们将 B 与 $E/\text{Aut}(E)$ 等同, 轨道之间的嵌入导致了映射 $p' : E/H \rightarrow B$, 并满足 $p' \circ q = p$. 若 $U \subset B$ 是一个基本邻域, V 是 $p^{-1}(U)$ 的一个分支, 那么有

$$p^{-1}(U) = \coprod_{g \in \text{Aut}(E)} gV.$$

商映射 q 不过是将这些分支中的一些粘合在一起, 因此 p', q 都是覆叠映射. 若 $e' = q(e)$, 那么 p'_* 将 $\pi_1(E/H, e')$ 映到 H , 从而 e' 在 G 作用下的迷向子群就是 H . 这就证明了 $E(G/H)$ 是一个覆叠空间. $E(-)$ 的函子性可以直接从本节的引理中得到证明.

$E(-)$ 是范畴的等价这一点, 可以从前面一节的结果中得到. □

覆叠空间的分类定理与覆叠广群的分类定理可以很好的联系起来. 下图中的函子在相差一个自然变换意义上是交换的.

推论 7.24 $\Pi : \text{Cov}(B) \rightarrow \text{Cov}(\Pi(B))$ 是范畴之间的等价.

7.1.9 问题

令 G 为连通且道路连通的拓扑群, 单位元是 e . 令 $p : H \rightarrow G$ 为一个覆叠空间. 固定一个 $f \in H$ 使得 $p(f) = e$. 那么 H 可以定义一个唯一的连续的乘积 $H \times H \rightarrow H$, f 是单位元, 且 p 是群同态. 具体的定义方法为: 对于 H 中

的任意两个元素 a, b , 选取 H 中的两条道路 g, h , 使得 g, h 的起点为 f , 终点为 a, b . 定义 ab 为 $T(p(g)p(h))(f)$, 即为 G 中道路 $p(g)p(h)$ 的唯一提升的终点. 这样定义的乘积满足 $p(ab) = p(a)p(b)$, 从而 p 是一个同态. 由于这样定义的乘法是连续的, 所以 H 也是一个拓扑群. 根据覆叠空间的性质, $K = \ker p$ 是 H 的一个离散的正规子群. 取 K 中任意一个元素 k , 有 $gkg^{-1} \in K, \forall g \in H$. 由于 gkg^{-1} 是一个连续映射 $H \rightarrow K$, K 是离散的, 所以这是一个常值映射 $gkg^{-1} = fkg^{-1} = k$, 所以 K 含于 H 的中心. 更一般地, 对于任何连通的拓扑群, 其任何离散的正规子群都包含在其中心内. K 与 $\text{Aut}(H)$ 是同构的 (不会证).

令 X 为一个 G -空间, G -是一个 (离散) 群. 对于 G 的一个子群 H , 定义

$$X^H = \{x | hx = x, \forall h \in H\} \subset X.$$

X^H 是子群 H 在 X 中的不动点集. 将所有函数 $G/H \rightarrow X$ 组成的集合视为 X 在指标集 G/H 上的积 $\prod_{G/H} X$ 并赋予积拓扑 (开集是相应各分量开集的积), 所有的 G -映射 $G/H \rightarrow X$ 继承子空间拓扑. 我们容易验证, G 映射的集合与 X^H 事实上是同胚的. 因为对于任何一个 G -映射 $\alpha : G/H \rightarrow X$, 只要确定了 $\alpha(H)$ 的值, α 也就唯一确定; 反过来, 对于任何一个 $x \in X^H$, 我们定义 $\alpha(H) = x$, 容易验证 α 确实是一个 G 映射. 为了证明这是一个同胚, 我们记 $G/H = \{H, fH, gH, \dots\}$, 若选取任何一个开集 $U \in X^H$, 相应的所有 G -映射的集合中的原像形如为 (U, fU, gU, \dots) . 由于 G 作用于 X 等价于 X 到自身的同胚, 所以 (U, fU, gU, \dots) 是 $\prod_{G/H} X$ 中的开集, 这就证明了所有 G -映射组成的集合与 X^H 是同胚的. 特别地, $\text{Hom}_{\mathbf{O}(G)}(G/H, G/K) \cong (G/K)^H$. 根据引理7.5, 我们将 $\mathbf{O}(G)$ 视为 \mathbf{G} , 这样 $\mathbf{O}(G)$ 中的对象就可以视为 G 的所有子群, 对象 H, K 之间存在一个态射 $K \rightarrow H$, 当且仅当存在某个 $\gamma \in G$ 使得 $\gamma H \gamma^{-1} \subset K$. $X^- : \mathbf{O}(G) \rightarrow \mathbf{Top}$ 是一个反变函子, 将子群 H 映到子群 H 在空间 X 上的不动点集 X^H . X^H, X^K 之间在 \mathbf{Top} 中存在一个态射 $X^H \rightarrow X^K$, 当且仅当存在一个 $\gamma \in G$, 使得 $\gamma^{-1}X^H \subset X^K$.

7.2 图

在本章中, 我们定义图, 并描述图的同伦类. 我们还将证明任何自由群的子群都是自由的, 并证明任何一个群都是某个拓扑空间的基本群.

7.2.1 图的定义

定义 7.13 一个图 X 是由一个 (离散的) 顶点集 X^0 以及一个由映射组成的集合 $J = \text{Hom}_{\text{Set}}(S^0, X^0)$ 作商空间得到的. X 是集合的不交并 $X^0 \coprod (J \times I)$ 再将 $(j, 0)$ 与 $j(0)$, $(j, 1)$ 与 $j(1)$ 粘合在一起得到的. 区间的像 $\{j\} \times I$ 被称为**边**. 一个图被称为是有限的, 如果它只有有限个顶点且只有有限个边, 或者等价地说, 是紧的. 一个图被称为是局部有限的, 如果每个顶点都是有限条边的边界, 或者等价地说, 是局部紧的. \diamond

注意到一个图是一个局部可缩的空间: 图中任意一点的任意邻域都包含该点的一个可缩邻域. 于是一个**连通**的图有所有可能的覆叠空间.

7.2.2 树, 边组成的道路

图 X 中的一条边界道路是由有线条有向的边首尾相接组成的道路. 如果任何相接两条有向的边都不是定向相反但边相同的, 这样的边界道路被称为是已约的. 一条边界道路被称为是闭合的, 如果这条边界道路的起点和终点是相同的.

定义 7.14 一个**树**, 是一个连通的图, 并且没有闭合的已约的边界道路. \diamond

空间 X 的子空间 A 被称为是 X 的一个**形变收缩核**, 如果存在一个同伦

$h : X \times I \rightarrow X$ 使得 $h(x, 0) = x, h(a, t) = a, h(x, 1) \in A$ 对所有的 $t \in I, x \in X, a \in A$ 都成立. 这样的同伦被称为从 X 到 A 的一个形变收缩.

引理 7.25 一个树 T 的任何一个顶点 v_0 都是 T 的一个形变收缩核.

一个图 X 的子树是**极大的**, 若它不是任何其他树的子树.

定义 7.15 给定集合 A , A 中的一个关系 $<$ 被称为 A 上的一个**严格偏序**, 如果它有下面两个性质

- (i.) (非自反性) 关系 $a < a$ 对任意的 $a \in A$ 不成立
- (ii.) (传递性) 若 $a < b$ 且 $b < c$, 那么 $a < c$.

◇

定义 7.16 设 A 是一个集合, $<$ 是 A 上的一个严格偏序. 若 B 是 A 的一个子集, $c \in A$, 使得对于每个 $b \in B$ 都有 $b < c$ 或者 $b = c$, 则称 c 是 B 的一个**上界**. 若 m 是 A 的一个元素, 并且对于每个 $a \in A, m < a$ 不成立, 则称 m 是 A 的一个**极大元**.

◇

引理 7.26 (Zorn 引理) 设 A 是一个严格偏序集, 若 A 的每个全序子集都有上界, 则 A 中必有一个极大元.

引理 7.27 若一个树 T 是图 X 的一个子图, 那么 T 被含于 X 的一个极大树中. 若 X 是连通的, 那么 X 中的一个树是极大的当且仅当这个树包含 X 中的所有顶点.

证明. X 中任何树的升链取并之后仍是一个树, 根据 Zorn 引理可知每一个子树都包含在一个极大树中. 如果 X 是连通的, 那么一个包含 X 的所有顶点的树是极大的, 因为增加一个顶点就会导致一个不是树的子图, 反之一个不

包含所有顶点的树肯定不是极大的, 因为不在 T 中的顶点可以通过一条已约的边界道路与在 T 中的顶点链接起来. \square

7.2.3 图的同伦型

定理 7.28 令 X 为一个连通图, T 是 X 中的极大树. 那么, 商空间 X/T 是一些圆环的 *wedge sum*, 圆环的个数等于 X 中不在 T 中的边的个数, 商映射 $q: X \rightarrow X/T$ 是一个同伦等价.

证明. 第一个论断是显然的. 第二个论断可以通过之后的一个结果证明: 对于一个可缩空间 T 到 X 的一个合适嵌入 (被称为“余纤维化”), 商映射 $X \rightarrow X/T$ 就是一个同伦等价. \square

7.2.4 图的覆叠空间和 Euler 示性类

定义一个有限图 X 的 Euler 示性类为 $\chi(X) = V - E$, 其中 V 是 X 的定点数, E 是 X 的边数. 利用对边数的归纳法, 我们可以得出, 对于任何有限的树 T 都有 $\chi(T) = 1$.

推论 7.29 若 X 是一个连通的图, 那么 $\pi_1(X)$ 是一个自由群, 生成元是不在 X 的极大树中的边. 如果 X 是有限的, 那么 $\pi_1(X)$ 在 $1 - \chi(X)$ 个生成元上是自由的, 特别地 $\chi(X) \leq 1$, 取等号时当且仅当 X 是一个树.

定理 7.30 若 B 是一个连通的图, 顶点集是 B^0 , $p: E \rightarrow B$ 是一个覆叠空间. 那么, E 也是一个连通的图, 顶点集 $E^0 = p^{-1}(B^0)$, 对于 B 中的每一条边 j , E 中都有一条边与之对应. 如果 B 是有限的且 p 是一个有限的覆叠, 纤维的基数是 n , 那么 E 是一个有限的图且 $\chi(E) = n\chi(B)$.

证明. 将 B 中的一条边 j 视为一条道路 $I \rightarrow B$, 令 k 为 j 提升到 E 的唯一道

路, $p(k(0)) = j(0)$, $k(0) \in F_{j(0)}$. 由于 $E - E^0$ 的每一点都被 p 映到 B 的边上, 根据道路提升的唯一性, 我们可以断定 $E - E^0$ 的每一点都在 E 中一条边的内部, 且只在一条边的内部. 因此, 我们有一个从 $E^0 \coprod (K \times I) / \sim$ 到 E 的同胚, K 是将顶点集 E^0 按照覆叠空间的要求链接起来的映射 $S^0 \rightarrow E^0$. 根据图的定义, E 确实是一幅图. 由于 E 和 B 的顶点与边之间存在 n 对 1 的关系, 所以 E 也是一个有限的图, 且 $\chi(E) = n\chi(B)$. \square

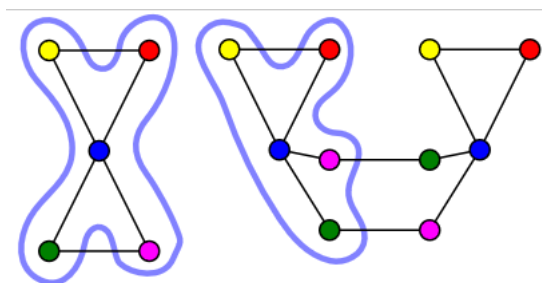


图 7.1: 图的覆叠空间的一个例子. 顶点的颜色代表覆叠映射的映射规则.

7.2.5 在群论中的应用

下面纯粹代数的结果可以用拓扑的方法最容易地证明.

定理 7.31 一个自由群 G 的子群 H 也是自由的. 若 G 是由 k 个生成元生成的自由群, H 在 G 中的指标为 n , 那么 H 是由 $1 - n + nk$ 个生成元生成的自由群.

证明. 将 G 视为 $\pi_1(B)$, B 是 G 的生成元个圆环的 wedge sum. 根据定理 7.23, 我们可以构造覆叠空间 $p: E \rightarrow B$, 使得 $p_*(\pi_1(E)) = H$. 根据定理 7.1, p_* 是一个单同态, 所以有 $\pi_1(E) \cong H$. 根据推论 7.29, $\pi_1(E)$ 也是一个自由群, 所以 H 是一个自由群. 若 G 有 k 个生成元, 那么 $\chi(B) = 1 - k$. 如果 $[G : H] = n$, 则 F_b 的纤维具有基数 n , 故 $\chi(E) = n\chi(B) = n - nk$, 所以 H 的生成元的个数为 $1 - \chi(E) = 1 - n + nk$. \square

我们可以将这一思想推广到任意的群, 将任意的群视为某个连通空间的基本群.

定理 7.32 对于任何一个群 G , 都存在一个连通的空间 X , 使得 $\pi_1(X) \cong G$.

证明. 我们可以将 G 写为 $G = F/N$, F 是一个自由群, N 是 F 的一个正规子群. 像上一个定理的证明一样, 我们也可以构造一个覆盖空间 $p: E \rightarrow B$, 使得 $\pi_1(B) = F$. 我们将 E 的映射圆锥记为 $CE = (E \times I)/(E \times \{1\})$, 并定义

$$X = B \coprod CE/(\sim),$$

上面的等价关系是 $(e, 0) \sim p(e)$. 令 U, V 为 X 的开覆盖, 如图所示. 显然, U 与 $U \cap V$ 分别同伦等价于 B 和 E , V 同伦等价于一点. 根据 van Kampen 定理, $\pi_1(X) = \pi_1(B)/N = F/N$, 其中 N 是 F 中包含 $p_*(\pi_1(E))$ 的最小正规子群. 那么, 我们只需构造满足 $p_*(\pi_1(E)) \subset N$ 的 E 即可, 而根据定理 7.23, 这总是可以办到的. 这样, 我们就构造了连通的空间 X , 使得其基本群为 G . \square

7.3 余纤维化

在同伦, 同调, 上同调中遇到的正合列, 都可以通过纤维和余纤维序列中同调地导出. 这些思想的抽象化是现代的公理化处理同调代数的核心, 以及代数 K -理论的基础.

纤维与余纤维序列解释了对偶性定理, 被称为 Eckmann-Hilton 对偶. 它的基础是笛卡尔积与函数空间之间的伴随. 我们假设所有的空间都是紧生成的.

7.3.1 余纤维化的定义

定义 7.17 一个映射 $i: A \rightarrow X$ 被称为余纤维化, 如果它满足同伦扩张性质 (HEP). 即, 如果在下面的图表中有 $h \circ i_0 = f \circ i$ 成立, 那么存在一个 \tilde{h} 使得下面的图表交换.

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i_0} & A \times I \\
 i \downarrow & \nearrow f & \downarrow i \times \text{id} \\
 & Y & \\
 X & \xrightarrow{i_0} & X \times I
 \end{array}$$

(Note: The diagram shows a central node Y. Arrows: A to A×I (i₀), A to X (i), X to X×I (i₀), A to Y (f), X to Y (f), A×I to Y (h), X×I to Y (h̃).)

◇

在上面的定义中, $i_0(x) = (x, 0)$. 我们不要求 \tilde{h} 是唯一的, 事实上 \tilde{h} 经常不是唯一的. 利用我们对同伦的等价定义, 我们可以将定义中的交换图表写成如下形式, 其中 $p_0(\xi) = \xi(0)$.

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{h} & Y^I \\
 i \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \downarrow p_0 \\
 X \times I & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

余纤维化的推出仍然是余纤维化. 我们通常将余纤维化 $i: A \rightarrow X$ 以及映射 $g: A \rightarrow B$ 的推出记为 $B \amalg_g X$.

引理 7.33 令 $i: A \rightarrow X$ 为余纤维化, $g: A \rightarrow B$ 是任意映射. 那么, 导出的映射 $B \rightarrow B \amalg_g X$ 是一个余纤维化.

在一个给定的空间 A 下的空间的范畴中进行讨论是十分必要的, 之后我们将会用到这个范畴中的一个基本的同伦等价的结果. 我们还将在这个范畴中推广一对平行的同伦等价. 本节中的主要结果十分容易理解, 但证明却不具备启发性而冗长.

A 下的一个空间是一个连续映射 $i: A \longrightarrow B$. A 下空间之间的态射是如下的交换图

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ i \swarrow & & \searrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} .$$

A 下的连续映射之间的同伦是一个映射之间的同伦, 且这同伦在每一时间 t 都是 A 下的连续映射. 我们将这个同伦记为 $h: f \simeq f' \text{ rel } A$ 且有 $h(i(a), t) = j(a)$ 对所有的 $a \in A$ 以及所有的 $t \in I$ 都成立. 这样的等价关系也被称为**余纤维同伦等价**.

命题 7.34 令 $i: A \longrightarrow X$ 以及 $j: A \longrightarrow Y$ 为两个余纤维化, 且令 $f: X \longrightarrow Y$ 为连续映射使得 $f \circ i = j$. 若 f 是一个同伦等价, 那么 f 是一个余纤维同伦等价.

命题 7.35 给定一个交换图表:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{d} & B \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} ,$$

其中 i 和 j 是余纤维化, d 和 f 是同伦等价. 那么 $(f, d): (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ 是一对同伦等价.

7.4 纤维化

我们将之前一章的余纤维化的定义和结果对偶, 就得到了纤维化. 这是覆盖空间在同伦意义中的推广.

7.4.1 纤维化的定义

定义 7.18 一个满射 $p : E \longrightarrow B$ 是一个**纤维化**, 若它满足覆叠同伦条件. 即, 在下图中若 $h \circ i_0 = p \circ f$ 成立, 则存在 \tilde{h} 使得下图交换.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & E \\ i_0 \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

◇

定义中的测试图表可以写成如下的等价形式:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xleftarrow{p_0} & E^I & & \\ & \nwarrow f & \nearrow \tilde{h} & & \\ & Y & & & \\ & \searrow h & & & \\ B & \xleftarrow{p_0} & B^I & & \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow p \\ \downarrow p^I \end{array}$$

引理 7.36 若 $p : E \longrightarrow B$ 是一个纤维化, $g : A \longrightarrow B$ 是任何连续映射, 那么拉回 $A \times_g E \longrightarrow A$ 是一个纤维化.

7.4.2 道路提升函数与纤维化

尽管覆叠同伦性质是用任意的测试图表来表示的, 但是的确存在一个具有泛性质的测试图表. 令定义7.18中的测试图表中的 Y 为映射道路空间:

$$Np := E \times_p B^I = \{(e, \beta) \mid \beta(0) = p(e)\}$$

即 Np 是 p_0 与 p 的拉回, f 与 h 分别是显然的两个投影. 根据拉回的泛性质, 从测试图表中我们可以得到唯一的映射 $k : E^I \rightarrow Np$, 使得 k 的两个分量分

别是 p_0 和 p^I . 如果存在一个映射 $s : Np \rightarrow E^I$ 使得 $k \circ s = \text{id}$, 则称 s 是一个道路提升函数. 容易验证, 若 s 存在, 则有

$$\begin{aligned} s(e, \beta)(0) &= e, \\ p \circ s(e, \beta) &= \beta. \end{aligned}$$

给定任意一个测试图表, 根据拉回的泛性质, 都有被 f 和 h 唯一确定的映射 $g : Y \rightarrow Np$, 取 $\tilde{h} = s \circ g$ 即可满足覆叠同伦性质.

一般来说, 道路提升函数不是唯一的. 但事实上, 我们已经研究过了使得道路提升函数唯一的纤维化的情形.

引理 7.37 若 $p : E \rightarrow B$ 是一个覆叠, 那么 p 是具有唯一道路提升函数 s 的纤维化.

证明. 覆叠空间的道路提升的唯一性保证了 s 的唯一性. □

下面的观察告诉我们, 纤维化与余纤维化之间是有关系的.

引理 7.38 若 $i : A \rightarrow X$ 是一个余纤维化, B 是一个空间, 那么导出的映射

$$p = B^i : B^X \longrightarrow B^A$$

是一个余纤维化.

证明. 容易验证下面的同胚:

$$B^{Mi} = B^{X \times \{0\} \cup A \times I} \simeq B^X \times_p (B^A)^I = Np.$$

若 $r : X \times I \rightarrow Mi$ 是一个收缩, 那么

$$B^r : Np \simeq B^{Mi} \longrightarrow B^{X \times I} \simeq (B^X)^I$$

是一个道路提升函数. □

7.4.3 用纤维化代替映射

我们可以用映射道路空间将任意的连续映射 $f : X \rightarrow Y$ 分解成同伦等价和纤维化的复合. 即, 在同伦等价意义上, 任何映射都等价于一个纤维化. 为了说明这一点, 我们考虑 $Nf = X \times_f Y^I$, 并注意到 f 等于下面的复合:

$$X \xrightarrow{\nu} Nf \xrightarrow{\rho} Y,$$

其中 $\nu(x) = (x, c_{f(x)})$, $c_{f(x)}$ 是以 $f(x)$ 为基点的常值道路, $\rho(x, \chi) = \chi(1)$. 令 $\pi : Nf \rightarrow X$ 为投影, 那么 $\pi \circ \nu = \text{id}$ 且 $\text{id} \simeq \nu \circ \pi$, 同伦是因为空间 Y 是道路联通的, 因此存在一个从 Nf 到 $\nu(X)$ 的形变收缩. 这就证明了 ν 是一个同伦等价.

下面我们只要验证 $\rho : Nf \rightarrow Y$ 是一个余纤维化. 考虑一个测试图表

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & Nf \\ i_0 \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \downarrow \rho \\ A \times I & \xrightarrow{h} & Y \end{array},$$

其中 g 与 h 满足 $h \circ i_0 = \rho \circ g$, 只需构造一个 \tilde{h} 使得上图交换. 记 $g(a) = (g_1(a), g_2(a))$, 构造

$$\tilde{h}(a, t) = (g_1(a), j(a, t)),$$

其中

$$j(a, t)(s) = \begin{cases} g_2(a)(s + st) & 0 \leq s \leq 1/(1+t) \\ h(a, s + ts - 1) & 1/(1+t) \leq s \leq 1. \end{cases}$$

7.4.4 纤维化的判据

我们需要一个盘踞来判断一个映射是否是一个纤维化. 但在这时, 余纤维化的结果的对偶是不成立的, 所以我们将纤维化视为覆叠空间的推广. 考虑底空间 B 的一个性质良好的开覆盖 \mathcal{O} , U 是 \mathcal{O} 中的某个开集, 覆叠空间

$p: E \rightarrow B$ 限制在 U 上时, 同胚与投影映射 $U \times F \rightarrow U$, 其中 F 是一个固定的离散集合.

上述概念的一个推广就是纤维丛. 一个映射 $p: E \rightarrow B$ 被称为一个纤维丛, 若限制在底空间 B 的一个性质良好的开覆盖 \mathcal{O} 中的任意开集 U 上时, 存在同胚 $\phi: U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$ 使得 $p \circ \phi = \pi_1$, F 是一个固定的拓扑空间. 即, 纤维丛在一族选好的坐标卡上同胚于坐标卡与丛空间的积. 我们要求 B 的一个性质良好的开覆盖 \mathcal{O} 是可数的. 这意味着存在连续映射 $\lambda_U: B \rightarrow I$ 使得 $\lambda_U^{-1}(0, 1] = U$ 且 \mathcal{O} 是局部有限的 (对于每个 $b \in B$ 都存在一个 b 的邻域使得这邻域只与有限个 $U \in \mathcal{O}$ 相交). 任何仿紧空间的覆盖都有一个可数的加细. 在对 \mathcal{O} 进行了上述限制后, 我们将看到, 任何纤维丛都是一个纤维化.

定理 7.39 令 $p: E \rightarrow B$ 为一个映射, \mathcal{O} 是 B 的一个可数开覆盖. p 是一个纤维化当且仅当 $p: p^{-1}(U) \rightarrow U$ 对所有的 $U \in \mathcal{O}$ 都成立.

第八章 半单 Lie 代数的表示

8.1 概念和定义

如果不加说明, 我们提到的域总是代数闭域.

定义 8.1 (结合代数) 一个域 k 上的结合代数 A , 就是域 k 上的一个线性空间 A , 并赋予了一个满足结合律的乘法. \diamond

为了方便起见, 我们今后只考虑含单位元的结合代数, 即存在一个元素 $1 \in A$, 使得对所有的 $a \in A$ 都有 $1a = a1 = a$.

定义 8.2 (结合代数的表示) 结合代数 A 的一个表示, 是指一个向量空间 V 以及一个结合代数之间的同态 $\rho: V \rightarrow \text{End}V$. \diamond

容易看出, 结合代数的一个表示是一个左 A -模.

定义 8.3 (子表示) 结合代数 A 的一个表示 V 的一个子表示, 是指 V 的一个子空间 W , 且对 $\forall a \in A$, W 在 $\rho(a)$ 下不变. \diamond

定义 8.4 (表示的同态) 令 V_1, V_2 是结合代数 A 的两个表示. V_1, V_2 之间的同态 $\phi: V_1 \rightarrow V_2$ 是线性空间之间的与代数 A 的作用交换的线性映射, 即对所

有的 $v \in V_1$, 都有 $\phi(av) = a\phi(v)$. 如果 ϕ 是线性空间之间的同构, 则称表示 V_1, V_2 是同构的. 所有从 V_1 到 V_2 之间的同态构成的集合, 记为 $\text{Hom}_A(V_1, V_2)$.

◇

定义 8.5 A 的表示 V 被称为 indecomposable 的, 若 V 不与两个表示的直和同构.

◇

若 \mathfrak{g} 是一个 Lie 代数, 若 $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$ 是 \mathfrak{g} 的一个子代数, 且满足

$$[\mathfrak{i}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{i}$$

则称 \mathfrak{i} 是 \mathfrak{g} 的一个**理想**. 若一个 Lie 代数的理想都是平凡的, 则称其为**单 Lie 代数**; 若高于 1 维的 Lie 代数是单 Lie 代数的直和, 则称这 Lie 代数是**半单 Lie 代数**.

定理 8.1 一个复 Lie 代数是半单的当且仅当它同构于一个单连通的紧矩阵 Lie 群的 Lie 代数的复化.

通过复化扩张引理, 我们可以将一个实的 Lie 代数复化. 反之, 对于一个复 Lie 代数, 我们能否找到一个实 Lie 代数, 使得这个实 Lie 代数的复化就是原来的复 Lie 代数呢?

对于一个半单的复 Lie 代数 \mathfrak{g} , 那么 \mathfrak{g} 的**紧实形式**是 \mathfrak{g} 的一个子代数 \mathfrak{l} , 且使得对任何一个 $X \in \mathfrak{g}$, 都存在 $X_1, X_2 \in \mathfrak{l}$ 满足 $X = X_1 + iX_2$. 亦即, 一个半单的复 Lie 代数 \mathfrak{g} 是其紧实形式 \mathfrak{l} 的复化. 根据上面的定理, \mathfrak{g} 是某个单连通的紧 Lie 群 K 的 Lie 代数 \mathfrak{k} 的复化. 因此复化扩张

命题 8.2 若 \mathfrak{g} 是一个实的 Lie 代数, 那么它是半单的当且仅当它的复化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是半单的.

从这个命题可以推知, 紧的单连通矩阵 Lie 群的实 Lie 代数是半单的, 但

是反过来, 不是任何半单实 Lie 代数都能找到紧的单连通矩阵 Lie 群.

定义 8.6 (Cartan 子代数) 若 \mathfrak{g} 是一个复的半单 Lie 代数, 那么 \mathfrak{g} 的一个子空间 \mathfrak{h} 被称为 \mathfrak{g} 的 **Cartan 子代数**, 若 \mathfrak{h} 满足:

- (i.) 对任何两个元素 $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$, 都有 $[H_1, H_2] = 0$;
- (ii.) 对于任何 $X \in \mathfrak{g}$, 若满足 $[X, \mathfrak{h}] = 0$, 则能推出 $X \in \mathfrak{h}$.
- (iii.) 对于所有的 $H \in \mathfrak{h}$, ad_H 是完全可约的 Lie 代数表示.

称 Cartan 子代数的维数为半单 Lie 代数的**秩**.

◇

上述定义中的第一个条件说明 Cartan 子代数是交换子代数, 第二个条件说明 Cartan 子代数是一个极大的子代数.

命题 8.3 令 \mathfrak{g} 是一个复的半单 Lie 代数, \mathfrak{l} 是 \mathfrak{g} 的紧实形式, 再令 \mathfrak{t} 是 \mathfrak{l} 的任意极大交换子代数. 定义 $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} + i\mathfrak{t}$, 那么 \mathfrak{h} 就是 \mathfrak{g} 的 Cartan 子代数.

我们之后只谈论紧 Lie 群和 Lie 代数的表示,

8.2 半单 Lie 代数及其根系

定义 8.7 (Killing 形式) 设 G 是 Lie 群, \mathfrak{g} 是其 Lie 代数. 我们可以定义如下的双线性形式, 称为 **Killing 形式**:

$$\langle X, Y \rangle = N \text{Tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y).$$

系数 N 是归一化系数, 依赖于 Lie 代数 \mathfrak{g} .

◇

在几何上, 如果 Lie 代数上可以配备一个双不变的内积, 则 G 是一个 Riemann 流形, Killing 形式实际上就是 Lie 群的 Ricci 曲率.

引理 8.4 设 μ 是 \mathfrak{g} 上的一个自同构, 则

$$\langle \mu(X), \mu(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

证明. 由于 μ 是 \mathfrak{g} 的自同构, 所以满足 $[\mu(X), \mu(Y)] = \mu([X, Y])$, 即 $\text{ad}_{\mu(X)}(\mu(Y)) = \mu(\text{ad}_X(Y))$, 将 $\mu(Y)$ 换成 Y , 得到 $\text{ad}_{\mu(X)}(Y) = \mu \text{ad}_X \mu^{-1} Y$, 于是 $\text{ad}_{\mu(X)} = \mu \circ \text{ad}_X \circ \mu^{-1}$, 再根据矩阵迹的性质, 最终能够推得结论. \square

从引理中我们可以看到, G 上的 Killing 形式是双不变的. 但是 Killing 形式却不一定非退化的. 如果 \mathfrak{g} 上的 Killing 形式是非退化的, 则称这样的 Lie 代数是半单的.

命题 8.5 若 Lie 代数 \mathfrak{g} 是半单的, 则它的交换理想都是平凡的. 即, 若存在 $X \in \mathfrak{g}$ 使得 $[X, \mathfrak{g}] = 0$, 则有 $X = 0$.

证明. 假设 \mathfrak{g} 存在一个非平凡的交换理想 \mathfrak{a} , 那么 $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$. 如果对于任何的 $X \in \mathfrak{a}, Y \in \mathfrak{g}$, 我们都能够证明 $\langle X, Y \rangle = 0$, 则足以说明 Killing 形式是退化的.

考虑 \mathfrak{g} 的自同态 $\sigma := \text{ad}_X \circ \text{ad}_Y : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, 则 $\langle X, Y \rangle = \text{Tr}(\sigma)$. 为此, 选取 \mathfrak{g} 的一组基 $\{X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_n\}$, 其中 $\{X_i\}_{1 \leq i \leq k} \subset \mathfrak{a}, \{X_i\}_{k+1 \leq i \leq n}$. 将 σ 作用在这组基上. 当 $1 \leq i \leq k$ 时, 由于 \mathfrak{a} 是一个交换理想, 所以 $\sigma(X_i) = 0$; 当 $k+1 \leq i \leq n$ 时, 根据理想的定义, $\sigma(X_i) \in \mathfrak{a}$, 所以 $\sigma_{ii} = 0$. 于是 $\langle X, Y \rangle = \text{Tr}(\sigma) = \sum_{i=1}^n \sigma_{ii}$. \square

上一节中的定理, 任何一个有限维复半单李代数 \mathfrak{g} 都是一个紧李群 H 的 Lie 代数的复化. 设这个紧李群的 Lie 代数为 \mathfrak{h} , 则根据复化扩张引理, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + i\mathfrak{h}$. 群 H 的紧性保证了 \mathfrak{h} 上的 Killing 形式可以唯一扩张成 H 上的双

不变度量, 接下来, 我们可以将这度量唯一扩张成 \mathfrak{g} 上的双不变度量. 让我们依然用 $\langle -, - \rangle$ 表示这个度量, 则对任意的 $X, Y \in \mathfrak{g}, H \in \mathfrak{h}$, 根据

$$e^{t\text{ad}_H} = \text{Ad}_{e^{tH}},$$

得到

$$\langle \exp(t\text{ad}_H)X, \exp(t\text{ad}_H)Y \rangle_K = \langle X, Y \rangle_K,$$

两边求导后得到

$$\langle \text{ad}_H X, Y \rangle_K + \langle X, \text{ad}_H Y \rangle_K = 0.$$

根据非退化性, 得到表示 ad_H 是反 Hermite 的

$$\text{ad}_H + \text{ad}_H^\dagger = 0$$

根据有限维的谱定理, 我们一定可以对角化 ad_H , 且对角元是纯虚数.

引理 8.6 若 k 个方阵 A^1, \dots, A^k 满足 $[A^i, A^j] = 0$ 对任意的 $1 \leq i, j \leq k$ 都成立, 且每个 A^i 都是可以对角化的, 则 A^1, \dots, A^k 可以同时对角化.

若 \mathfrak{l} 是 \mathfrak{h} 的 Cartan 子代数, 则 $\mathfrak{l} \oplus i\mathfrak{l}$ 也是 \mathfrak{g} 的 Cartan 子代数. 若 $H_1, H_2 \in \mathfrak{l}$, 根据 Jacobi 恒等式, ad_{H_1} 与 ad_{H_2} 是可交换的, 所以二者可以同时对角化. 根据引理, 对于所有的 $H \in \mathfrak{l} \oplus i\mathfrak{l}$, ad_H 都是可对角化的. 再根据 Cartan 子代数的性质, 由于 $[\text{ad}_H, \text{ad}_{H'}] = \text{ad}_{[H, H']}$, 所以, Cartan 子代数中的元素的伴随表示都是可以同时对角化的.

设 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ 如上. 对于任意的 $H, H' \in \mathfrak{g}$, 根据 \mathfrak{h} 的交换性, 得到

$$\text{ad}_H H' = 0.$$

这是一个对应零本征值的本征方程, 且 ad_H 的 0 本征值对应的本征空间就是 \mathfrak{h} , 因为 Cartan 子代数是极大交换的.

现在, 我们找到了 ad_H 的零本征空间, 于是我们可以将 \mathfrak{g} 分解成两个子空间的直和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}'$. 对于任何 $H \in \mathfrak{h}$, ad_H 是 \mathfrak{g}' 上的一个自同态.

之前我们用零本征空间粗略分解了 Lie 代数, 下面我们继续分解.

令 \mathfrak{h} 的维数为 r , \mathfrak{h} 的一组基为 $\{H^1, H^2, \dots, H^r\}$. 根据前面的讨论, 我们可以将所有的 $\text{ad}_{H^i}, 1 \leq i \leq r$ 同时对角化, 且它们都是 \mathfrak{g}' 上的自同态, 于是我们可以找到 \mathfrak{g}' 的一组基 $\{E^\alpha\}$ 使得如下的本征方程

$$\text{ad}_{H^i} E^\alpha = [H^i, E^\alpha] = \alpha^i E^\alpha$$

对每个 i 和 α 都成立, α^i 就是 $\text{ad}_{H^i} : \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}'$ 的本征值, 本征矢量 E^α 被称为**阶梯算子**. 下面, 我们将上面的等式简记为

$$H^i |\alpha\rangle = \alpha^i |\alpha\rangle.$$

固定一个 α , 设 $h = \mu_j H^j$ 是 Cartan 子代数中的任意元素, 那么

$$h |\alpha\rangle = \mu_j H^j |\alpha\rangle = \mu_j \alpha^j |\alpha\rangle,$$

定义 \mathfrak{h} 上的线性函数 $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ 为 $\alpha(h) = \mu_j \alpha^j$, 则

$$h |\alpha\rangle = \alpha(h) |\alpha\rangle.$$

这样定义的 α 被称为 \mathfrak{g} 的**根**, 将所有的根构成的集合记为 Δ . 由于 Δ 中的元素都是 \mathfrak{h} 上的线性函数, 所以 $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$. 但我们无法断言, Δ 是否是 \mathfrak{h}^* 的一个线性子空间. 我们下面利用 Killing 形式来确定 Δ 的结构.

对于有限维半单复 Lie 代数 \mathfrak{g} 的一个根, 将满足方程

$$h |\alpha\rangle = \alpha(h) |\alpha\rangle$$

的阶梯算符 $|\alpha\rangle$ 生成的线性子空间称为对应于根 α 的根子空间, 记为 \mathfrak{g}_α . 于是, 我们将有限维半单复 Lie 代数 \mathfrak{g} 的分解细化为

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{h}.$$

我们通常认为 0 也是一个根, 那么 \mathfrak{h} 就可以记为 \mathfrak{g}_0 . 从而 $0 \in \Delta$, \mathfrak{g} 可以用根子空间来描述:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Lie 括号可以定义在两个根子空间之间. 设 $a \in \mathfrak{g}_\alpha, b \in \mathfrak{g}_\beta$, 根据 \mathfrak{g} 的根子空间分解, 我们 $[a, b]$ 也在某个根子空间中. 为了求出它的根, 对于任意的 $h \in \mathfrak{h}$, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_h([a, b]) &= [\mathrm{ad}_h a, b] + [a, \mathrm{ad}_h b] \\ &= [\alpha(h)a, b] + [a, \beta(h)b] \\ &= (\alpha(h) + \beta(h))[a, b]\end{aligned}$$

因此, 如果 $\alpha + \beta \in \Delta$, 则 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. 若 $\alpha + \beta \notin \Delta$, 则 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_0$, 进一步发现, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = 0$.

命题 8.7 Δ 生成了 \mathfrak{h}^* .

证明. 任取 $h \in \mathfrak{h}$, $\alpha(h) = 0$ 对任意 $\alpha \in \Delta$ 成立当且仅当 $[h, \mathfrak{g}_\alpha] = 0$ 对任意的 $\alpha \in \Delta$ 成立, 即 $[h, \alpha] = 0$. 由半单性可以推出 $h = 0$. \square

命题 8.8 设 $E^\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, E^\beta \in \mathfrak{g}_\beta$, 若存在某个 $h \in \mathfrak{h}$ 使得 $\alpha(h) + \beta(h) \neq 0$, 则 $\langle E^\alpha, E^\beta \rangle_K = 0$. 如果 $\alpha \in \Delta$, 则 $-\alpha \in \Delta$.

证明. 根据 Jacobi 恒等式, 对于任何 $X, Y \in \mathfrak{g}$, 我们有

$$\mathrm{ad}_{[X, Y]} = \mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y - \mathrm{ad}_Y \circ \mathrm{ad}_X.$$

于是,

$$\begin{aligned}\langle [h, E^\alpha], E^\beta \rangle_K + \langle E^\alpha, [h, E^\beta] \rangle_K &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{[h, E^\alpha]} \circ \mathrm{ad}_{E^\beta}) + \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{E^\alpha} \circ \mathrm{ad}_{[h, E^\beta]}) \\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_h \circ \mathrm{ad}_{E^\alpha} \circ \mathrm{ad}_{E^\beta}) - \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{E^\alpha} \circ \mathrm{ad}_h \circ \mathrm{ad}_{E^\beta}) \\ &\quad + \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{E^\alpha} \circ \mathrm{ad}_h \circ \mathrm{ad}_{E^\beta}) - \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_h \circ \mathrm{ad}_{E^\alpha} \circ \mathrm{ad}_{E^\beta}) \\ &= 0\end{aligned}$$

但另一方面,

$$\langle [h, E^\alpha], E^\beta \rangle_K + \langle E^\alpha, [h, E^\beta] \rangle_K = (\alpha(h) + \beta(h))\langle E^\alpha, E^\beta \rangle_K$$

而 $\alpha(h) + \beta(h) \neq 0$, 所以 $\langle E^\alpha, E^\beta \rangle_K = 0$.

如果 $-\alpha \notin \Delta$, 那么对于任何 $\beta \in \Delta$ 都有 $\alpha + \beta \neq 0$, 这就是说, 对任何 $a \in \mathfrak{g}$ 都有 $\langle E^\alpha, a \rangle_K = 0$, 但这与 \mathfrak{g} 的半单性矛盾. \square

特别地, 考虑 $h \in \mathfrak{h}$ 以及 $E^\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, 因为 $0 + \alpha \neq 0$ 所以 $\langle h, E^\alpha \rangle_K = 0$. 由于 Killing 形式在 \mathfrak{g} 上是非退化的, 且 $\langle h, E^\alpha \rangle_K = 0$, 所以 Killing 形式在 \mathfrak{h} 上也是非退化的.

那么, 我们就有可能用非退化的 Killing 形式表示根. 我们通过如下的方式定义唯一的 $h_\alpha \in \mathfrak{h}$

$$\langle h_\alpha, h \rangle_K = \alpha(h).$$

立刻得到 $h_{\alpha+\beta} = h_\alpha + h_\beta$. 因为 Killing 形式是对称的, 所以 $\alpha(h_\beta) = \beta(h_\alpha)$.

我们可以定义 Δ 上的一个形式 $\langle - | - \rangle$,

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \langle h_\alpha, h_\beta \rangle_K.$$

那么 $[h_\beta, E^\alpha] = \alpha(h_\beta)E^\alpha = \langle \beta | \alpha \rangle E^\alpha$, 或者

$$h_\beta |\alpha\rangle = \langle \beta | \alpha \rangle |\alpha\rangle$$

命题 8.9 设 $E^\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, E^{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, 则 $[E^\alpha, E^{-\alpha}] = \langle E^\alpha, E^{-\alpha} \rangle_K h_\alpha$. 这说明 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ 是一维的, 由 h_α 张成.

证明. 由于 $[E^\alpha, E^{-\alpha}] \in \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$, 所以考虑

$$\langle [E^\alpha, E^{-\alpha}], h \rangle_K = -\langle E^{-\alpha}, [E^\alpha, h] \rangle_K = \alpha(h) \langle E^{-\alpha}, E^\alpha \rangle_K = \langle h_\alpha, h \rangle_K \langle E^{-\alpha}, E^\alpha \rangle_K,$$

再利用 Killing 形式在 \mathfrak{h} 与 \mathfrak{g} 上的非退化性得到结论. \square

8.3 权和 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 子代数

考虑复半单 Lie 代数的任意不可约表示. 因为 $\{H^i\}_{1 \leq i \leq r}$ 两两可交换, 所以总能找到一个共同的本征矢量 $|\lambda\rangle$ 使得 $H^i |\lambda\rangle = \lambda^i |\lambda\rangle$, 则矢量 $(\lambda^1, \dots, \lambda^r)$ 被称为**权**. 通过定义 $\lambda(\mu_i H^i) = \mu_i \lambda^i$, 我们可以将权看作 \mathfrak{h}^* 中的一个线性函数. 因此, 在伴随表示中, 权就是根. 同样可以通过 Killing 形式来定义

$$\langle h_\lambda, h \rangle_K = \lambda(h),$$

以及

$$\langle \lambda | \mu \rangle = \langle h_\lambda, h_\mu \rangle_K,$$

同时我们记 $\lambda^2 = \langle \lambda | \lambda \rangle$.

利用 $[H^i, E^\alpha] = \alpha^i E^\alpha$, 我们有

$$H^i E^\alpha |\lambda\rangle = [H^i, E^\alpha] |\lambda\rangle + E^\alpha H^i |\lambda\rangle = (\lambda^i + \alpha^i) E^\alpha |\lambda\rangle.$$

如果 $E^\alpha |\lambda\rangle$ 不为 0, 那么它一定正比于 $|\lambda + \alpha\rangle$, 这就是我们称呼 E^α 为**阶梯算子**的原因. 在上一节中, 我们知道, 如果 $\alpha \in \Delta$, 则 $-\alpha \in \Delta$, 所以 $E^{-\alpha} \sim |\lambda - \alpha\rangle$.

由于我们只考虑有限维的表示, 所以对于任意的 $\alpha \in \Delta$, 所以存在正整数 p, q , 使得

$$(E^{-\alpha})^q \sim |\lambda - q\alpha\rangle = 0$$

$$(E^\alpha)^p \sim |\lambda + p\alpha\rangle = 0.$$

如果我们选择 $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, F_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 满足 $\langle E_\alpha, F_\alpha \rangle_K = 2/\alpha^2$, 再选取 $H_\alpha = \frac{1}{\alpha^2} h_\alpha$, 那么

$$[H_\alpha, E_\alpha] = E_\alpha$$

$$[H_\alpha, F_\alpha] = -F_\alpha$$

$$[E_\alpha, F_\alpha] = 2H_\alpha$$

这其实就是 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的对易关系. 所以, E_α, F_α 生成了一个同构于 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的子代数, 记为 \mathfrak{s}^α .

对于 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, 我们有如下的结果

命题 8.10 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的 $2j+1$ 维不可约表示中 H 的本征值或者是整数或者是半整数, 且可以对角化为 $\text{diag}(-j, -j+1, \dots, j-1, j)$.

利用这个子代数, 我们可以证明如下的命题:

命题 8.11 如果 α 是一个根, 对任意的 $k \in \mathbb{C}$, 除了 $k=0$ 或 $k=\pm 1$, $k\alpha$ 都不是一个根. 此外, $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, 这意味着本征方程 $H^i |\alpha\rangle = \alpha^i |\alpha\rangle$ 的解不存在简并.

于是, 在伴随表示中, ad_h 是对角的, 且对角元素为 $\{\alpha(h)\}_{\alpha \in \Delta}$, 根据 Killing 形式的定义,

$$\langle h, h' \rangle_K = \sum_{\gamma \in \Delta} (\dim \mathfrak{g}_\gamma) \gamma(h) \gamma(h'),$$

特别地, 我们有

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \langle h_\alpha, h_\beta \rangle_K = \sum_{\gamma \in \Delta} (\dim \mathfrak{g}_\gamma) \gamma(h_\alpha) \gamma(h_\beta) = \sum_{\gamma \in \Delta} \langle \alpha | \beta \rangle \langle \gamma | \beta \rangle.$$

由于 $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, 所以上面被简化为

$$\langle h, h' \rangle_K = \sum_{\gamma \in \Delta} \gamma(h) \gamma(h'), \langle \alpha | \beta \rangle = \sum_{\gamma \in \Delta} \langle \alpha | \gamma \rangle \langle \gamma | \beta \rangle.$$

设有一个 Lie 代数的有限维不可约表示, 则它限制在子代数 \mathfrak{s}^α 上的表示也是有限维不可约表示. 令 λ 是这个表示的一个权, α 是一个根, \mathfrak{s}^α 的表示的维度是 $2j+1$. 对于 $|\lambda\rangle$, $H_\alpha \in \mathfrak{s}^\alpha$ 的本征值为

$$H_\alpha |\lambda\rangle \frac{1}{\alpha^2} h_\alpha |\lambda\rangle = \frac{\langle \alpha | \lambda \rangle}{\alpha^2} |\lambda\rangle.$$

将 E_α 与 F_α 分别作用 p 次与 q 次在 $|\lambda\rangle$, 我们可以得到最高与最低的本征态, 即

$$j = \frac{\langle \alpha | \lambda \rangle}{\alpha^2} + p, \quad -j = \frac{\langle \alpha | \lambda \rangle}{\alpha^2} - q,$$

所以

$$q - p = 2 \frac{\langle \alpha | \lambda \rangle}{\alpha^2}$$

是一个整数. 特别地, 对于任意的 $\alpha, \beta \in \Delta$, $2 \frac{\langle \alpha | \lambda \rangle}{\alpha^2} / \alpha^2$ 是一个整数.

考虑子代数 $\mathfrak{i} = \oplus_j \mathfrak{g}_{\beta+j\alpha}$, 其中 $\beta \neq \pm\alpha$, 每个非零的加项都是一维的, 且 (s^α, \mathfrak{i}) 构成一个表示. 对于 $\beta + j\alpha \neq 0$ 的 j , 对应本征方程为 $H_\alpha |\beta + j\alpha\rangle = (\beta(H_\alpha) + j) |\beta + j\alpha\rangle$ 的本征空间, 由于每一个权都差 1, 所以这是一个不可约有限维表示. 因此存在两个自然数 p 和 q 使得

$$\beta - q\alpha, \beta - (q-1)\alpha, \dots, \beta + p\alpha$$

是一列根. 在这列根中, β 是整数第 q 个根, 那么倒数第 q 个根也是一个根, 即 $\beta - (q-p)\alpha$ 也是一个根, 即

$$\beta - 2 \frac{\langle \alpha | \beta \rangle}{\alpha^2} \alpha$$

是一个根.

8.4 单根与 Cartan 矩阵

前面谈到了分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}'$, 如果 $\dim \mathfrak{g} = n$ 而 $\dim \mathfrak{h} = r$, 则 $\dim \mathfrak{g}' = n - r$. 对于 \mathfrak{g}' , 它是由阶梯算符 $\{E^\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ 张成的, 这就意味着根的数量最多是 $n - r$ 个. 由于 Δ 张成 \mathfrak{h}^* , 所以应该有 $n - r \geq r$, 另外也可以看出 Δ 中的元素多半是线性相关的. 选取 \mathfrak{h}^* 的一组基 $\beta_{i1 \leq i \leq r}$, 任意一个根可以表示成 $\alpha = n_\alpha^i \beta_i$.

我们将根分类如下, 如果 $(n_\alpha^1, \dots, n_\alpha^r)$ 的第一个非零系数是正(负)的, 则称其为正根(负根), 记为 $\alpha \in \Delta_+$ ($\alpha \in \Delta_-$). 由于 $\alpha \in \Delta$ 当且仅当 $-\alpha \in \Delta$, 所

以我们得到 $\Delta_- = -\Delta_+$. 如果一个正根无法写成两个正根的和, 就称其为一个**单根**. 单根一定是存在的, 如果我们给 Δ_+ 赋予如下的序: 出现第一个非零分量的序号越大越小, 第一个非零分量序号相同时这个分量越小则越小, 则在这个序中的最小元就是第一个单根, 记为 α_1 . 扣除其他正根中的 α_1 成分, 在剩下的正根中重复上面的步骤, 就能挑出所有的单根.

根据单根的定义, 我们立刻得到, 任意两个单根的差不是根. 否则, 假设 α, β 是两个单根且 $\alpha - \beta$ 是根, 若 $\alpha - \beta$ 是正根, 则 $\alpha = \beta + \alpha - \beta$; 若 $\alpha - \beta$ 是负根, 则 $\beta = \beta - \alpha + \alpha$, 都矛盾. 同时可以断言, 任意根都是单根的整系数线性组合. 因为所有的正根都是单根之和, 每个负根都可以由正根得到. 因此单根足够用来张成 Δ , 而 Δ 张成 \mathfrak{h}^* , 故而单根的个数不可能少于 r .

定义 $\alpha^\vee = 2\alpha/\alpha^2$, 称为根 α 的一个**伴随根**. 根据上一节, 任意的 $\langle \alpha^\vee | \beta \rangle$ 都是整数. 对于单根族 $\{\alpha_i\}$ 定义矩阵 $A_{ij} = \langle \alpha | \alpha_j^\vee \rangle$, 称为 **Cartan 矩阵**. 这是一个整数矩阵, 它的对角元素都是 2.

根据 Schwarz 不等式, $\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle^2 \leq \alpha_i^2 \alpha_j^2$, 所以如果 $i \neq j$, 则

$$A_{ij}A_{ji} = 4 \frac{\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle \langle \alpha_j | \alpha_i \rangle}{\alpha_i^2 \alpha_j^2} < 4.$$

因为 $\alpha_i - \alpha_j$ 不是一个根, 所以 $E^{-\alpha_j} |\alpha_i\rangle = 0$, 所以

$$\langle \lambda | \alpha^\vee \rangle = 2 \frac{\langle \alpha | \lambda \rangle}{\alpha^2} = q - p$$

中的 $q = 0$, 因此当 $i \neq j$ 时 $A_{ij} \leq 0$. 所以 $A_{ij} = 0, -1, -2, -3$. 如果 $A_{ij} \neq 0$, 则至少有一个 A_{ij} 或 A_{ji} 中有一个是 -1 , 否则 $A_{ij}A_{ji} > 4$.

现在, 我们可以完全描述整个 Lie 代数了. 对于每一个单根 α_i , 选取相应的 $e^i = E_{\alpha_i}, f^i = F_{\alpha_i}$ 以及 $h^i = 2H_{\alpha_i}$, 全部的对易关系为

$$[h^i, h^j] = 0, \quad [h^i, e^j] = A_{ji}e^j, \quad [h^i, f^j] = -A_{ji}f^j, \quad [e^i, f^j] = -\delta_{ij}h^j.$$

所以 Cartan 矩阵表示了全部对易关系中的系数. 我们可以用图示表示

Cartan 矩阵. α_i , 我们赋予一个点 i , 在每一对 i 和 j 之间, 连接 $A_{ij}A_{ji}$ 根先, 对于根系的分类, 就变成了对图的分类. 这种图称为 **Dynkin 图**.

由于单根张成 \mathfrak{h}^* , 所以我们可以用它来展开权. 类似于所有的根都可以由单根的整系数线性组合而成, 我们希望找到一组基, 使得它们可以整系数线性组合所有的权. 注意到

$$\langle \lambda | \alpha^\vee \rangle = 2 \frac{\langle \alpha | \lambda \rangle}{\alpha^2} = q - p$$

是一个整数, 所以我们选取 $\{\alpha^\vee\}_i$ 通过度规 $\langle -, - \rangle$ 的对偶基 $\{\omega_i\}$ 来展开, 其中 $\langle \omega_i | \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{ij}$, 这样, 任意的权 λ 都可以如下展开

$$\lambda = \sum_i \langle \lambda | \alpha_i^\vee \rangle \omega_i = \sum_i \lambda_i \omega_i,$$

其中每一个 λ_i 都是整数, 被称为 **Dynkin 标记**, 而 ω_i 被称为**基本权**.

Dynkin 标记实际上是 h^i 对权 $|\lambda\rangle$ 的本征值, 即

$$h^i |\lambda\rangle = \lambda(h^i) |\lambda\rangle = |\lambda \alpha_i^\vee\rangle |\lambda\rangle = \lambda_i |\lambda\rangle \quad (8.1)$$

当我们已知表示的具体构造的时候, 就可以用它来计算 Dynkin 标记.

对于 Cartan 矩阵, $A_{ij} = \langle \alpha_i | \alpha_j^\vee \rangle$, 所以我们有

$$\alpha_i = \sum_j A_{ij} \omega_j,$$

因此 A 的第 i 就是单根 α_i 的 Dynkin 标记.

考虑两个权 λ 和 μ 的内积

$$\langle \lambda | \mu \rangle = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \langle \omega_i | \omega_j \rangle = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j F_{ij}.$$

其中的系数 F_{ij} 可以如下求出, 注意到

$$\omega_i = \sum_j F_{ij} \alpha_j^\vee, \quad \alpha_i^\vee = \frac{2}{\alpha_i^2} \sum_j A_{ij} \omega_j,$$

于是得到

$$F_{ij} = \frac{1}{2} (A^{-1})_{ij} \alpha_j^2.$$

8.5 有限维不可约复表示

定理 8.12 (Weyl 定理) 复半单 Lie 代数的任意有限维表示, 都可以表示成不可约表示的直和.

因此, 我们现在开始考虑复半单 Lie 代数 \mathfrak{g} 的任意不可约表示 $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$. 其中 V 是有限维复线性空间.

同一个表示当然可能有不同的权, 我们将表示 ρ 的所有权的几何记为 Ω_ρ . 显然, 权的个数不多于 $\dim V$.

与伴随表示不同, 任意的表示 ρ 的一个权 λ , 其本征空间可能存在简并. 我们用 V_λ 表示这个本征空间.

命题 8.13 对于任意半单复 Lie 代数的复不可约表示 $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, 我们有分解

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \Omega} V_\lambda.$$

证明. 令 $W = \bigoplus_{\lambda \in \Omega} V_\lambda$, 则 $W \subset V$. 显然 $\rho(H^\alpha)V_\lambda \subset V_\lambda$. 再任取 $v \in V_\lambda$, 有 $\rho(E^{\pm\alpha})v \in V_{\lambda \pm \alpha}$ 或者 $\rho(E^{\pm\alpha})v = 0$, 所以 $\rho(\mathfrak{g})W \subset W$, 由表示的不可约性, 我们有 $W = V$. \square

用类似的手段, 固定一个权 λ , 考虑所有形如 $\lambda + \sum_{\alpha \in \Delta} n_\alpha \alpha$ 的权, 其中 n_α 是整数 α 是根. 设它们的权子空间的直和为 V' , 则 $\rho(\mathfrak{g})V' \subset V'$, 根据表示的不可约性, 得到 $V' = V$. 这样我们就有如下的命题:

命题 8.14 对于同一个不可约表示的两个权, 它们的差是根的整系数线性组合. 如果选定单根, 则它们的差是单根的一个整系数线性组合.

考虑同一个不可约表示的两个权 λ, μ , 它们的差写作 $\lambda - \mu = n^i \alpha_i$, 其中

α_i 是单根. 定义 $\mu \leq \lambda$ 当且仅当对每个 i 都有 $n^i \geq 0$, 等号只在 $\lambda = \mu$ 的时候取到.

Ω 在赋予上述的序结构之后, 我们感兴趣的是这个序结构的极大元, 记为 λ_m . 这个权被称为不可约表示的最高权. 根据极大性, 这个权唯一, 且其他权都可以由它减去单根的非负整数的线性组合得到.

定理 8.15 复半单 Lie 代数的不可约表示的最高权存在, 且权子空间的维度是 1.

证明. 考虑一个权 λ 使得 $\rho(E^\alpha)V_\lambda = \{0\}$ 对任意的正根 α 都成立, 这个权一定存在, 否则 V 就是无限维的.

任取一个非零矢量 $v \in V_\lambda$, 令 W 由 $\{\rho(F^{\alpha_1})^{i_1} \cdots \rho(F^{\alpha_n})^{i_n} v \mid 1 \leq j \leq n, i_n \in \mathbb{N}\}$ 线性组合而成, 其中 $\{\alpha_i\}$ 是单根, 则 (ρ, W) 是一个表示. 根据对易关系, 我们得到 $\rho(\mathfrak{g})W \subset W$.

根据 W 的构造, (ρ, W) 的权都可以写作 $\lambda - n^i \alpha_i$, $\{n^i\}$ 是一组自然数. 且 $\dim W_\lambda = 1$, 因为 $\lambda - n^i \alpha_i = \lambda$ 当且仅当所有的 $n^i = 0$.

由于 (ρ, V) 是不可约表示, 所以 $W = V$. 且 λ 就是我们需要的最高权. □

上述证明中选取的 v 被称为**最高权矢量**.

引理 8.16 设 W 是上个引理中构造出的不变子空间, 若 (ρ, W) 是完全可约的, 则它是不可约的.

证明. 因为完全可约, 所以将 (ρ, W) 分解成不可约表示 $(\oplus_{i=1}^n \rho_i, \oplus_{i=1}^n W_i)$, 设 $(W_i)_\lambda$ 分别是表示 ρ_i 的权 λ 的权子空间, 我们证明 $W_\lambda = (\oplus_{i=1}^n W_i)_\lambda = \oplus_{i=1}^n (W_i)_\lambda$.

任取 $x \in W$, 可以将它分解成 $x = \sum_{i=1}^n w_i, w_i \in W_i$, 于是

$$\sum_{i=1}^n \lambda(h)w_i = \lambda(h) \sum_{i=1}^n w_i = \left(\bigoplus_{i=1}^n \rho_i \right)(h) \left(\sum_{i=1}^n w_i \right) = \sum_{i=1}^n \rho_i(h)w_i,$$

由于 $\rho_i(h)w_i \in W_i$ 以及 $\lambda(h)w_i \in W_i$, 所以 $\rho_i(h)w_i = \lambda(h)w_i$.

由于 $\dim W_\lambda = \dim(\bigoplus_{i=1}^n W_i)_\lambda = 1$, 所以只存在一个 i 使得 $(W_i)_\lambda$ 不为 0. 此时, $W_\lambda = (W_i)_\lambda$, 由于 $v \in W_\lambda$, W 由 v 生成, 所以 $W = W_i$, 故而表示是不可约的. \square

定理 8.17 两个不可约表示 (ρ, V) 和 (π, W) 等价当且仅当它们的最高权相同.

证明. 如果两个表示等价, 则存在一个线性同构 $T : V \rightarrow W$ 使得对任意的 $g \in \mathfrak{g}$ 都有 $T \circ \rho(g) = \pi(g) \circ T$, 或者, $\pi(g) = T \circ \rho(g) \circ T^{-1}$. 在相似变换下, 线性算子的本征值不变, 所以二者的本征值相同, 最高权也相同.

反之, 考虑表示 $\rho \oplus \pi, V \oplus W$, 如同上一个定理中的构造, 在 $v + w$ 上不断使用下降算符, 构造出一个不变子空间 U . 由于 $\rho \oplus \pi, V_\lambda \oplus W_\lambda$ 是完全可约的, 所以 $\rho \oplus \pi, U$ 也是完全可约的, 根据引理, $(\rho \oplus \pi, U)$ 是不可约的. 考虑投影算符 $p_V : V \oplus W \rightarrow V$ 以及 $p_W : V \oplus W \rightarrow W$, 显然有 $p_i \circ (\rho \oplus \pi) = (\rho \oplus \pi) \circ p_i$, 将之限制在 U 上, 根据 Schur 引理, 得知 p_i 是同构, 所以 $V \simeq U \simeq W$. \square

之前的内容, 固定了一个不可约表示, 我们能够得到这个表示的最高权, 且根据上面的定理, 不可约表示和最高权是一一对应的. 反之, 我们如何确定出所有的不可约表示, 或者, 所有的最高权? 回忆, 任意的权 λ 都能被基本权展开:

$$\lambda = \sum_i \langle \lambda | \alpha_i^\vee \rangle \omega_i,$$

且每个 Dynkin 标记 λ_i 都是整数. 如果 λ 是最高权, 则它的 Dynkin 标记都是非负整数, 所以, 最高权是基本权的非负整数线性组合. 自然, 我们猜测, 是否

每个基本全的非负整数线性组合都构成一个不可约表示的最高权. 对于半单 Lie 代数来说, 的确如此. 基本权的非负整数线性组合被称为**主权**.

定理 8.18 每个主权将唯一确定一个以它为最高权的不可约表示.

最后我们来谈论一下复半单 Lie 代数不可约表示的维度. 直接列出一些结果.

定义 $\rho = \sum_i \omega_i$, 称为 **Weyl 矢量**, 则不可约表示 π, V 的维度由下面的公式表示

$$\dim V = \prod_{\alpha > 0} \frac{\langle \rho + \lambda | \alpha \rangle}{\langle \rho | \alpha \rangle}$$

其中 λ 是这个表示的最高权.

我们最后的任务是, 给出最高权 λ 的情况下, 找出所有的权. 任取一个权 μ 以及单根 α_i , 我们有 $\langle \mu | \alpha_i^\vee \rangle = \mu_i = q_i - p_i$ 是一个整数, 其中 q_i 是最高下降次数, p_i 是最高上升次数. 所以, 如果我们一次下降, $\mu - \alpha_i$ 对应的 q 如果不为 0, 则这就是一个权.

对于最高权 λ , 我们有 $\langle \lambda | \alpha_i^\vee \rangle = \lambda_i = q_i$, 所以, 为了求出所有的权, 我们先计算出全部的

$$\lambda - \alpha_i, \lambda - 2\alpha_i, \dots, \lambda - q_i\alpha_i$$

然后再从这些权下降, 如此迭代, 直到 Dynkin 标记全部为负数. 对于任意的权, 都可以从最高权下降得到, 下降的次数被称为这个权的层. 通常是从最高权开始, 将层从低往高寻找权.

8.6 $\mathfrak{su}(N)$ 及其复化 $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$

我们先来介绍一个重要的恒等式. 设 $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, 则可以证明

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_A \mathrm{ad}_B) = 2N\mathrm{Tr}(AB) - 2\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B). \quad (8.2)$$

$\mathfrak{su}(N)$ 是所有迹零的满足 $A = A^\dagger$ 的所有复矩阵 A 构成的 Lie 代数. 这是一个实 Lie 代数, 因为如果 A 满足 $A = A^\dagger$, 则 $\mathrm{i}A$ 一般不满足 $\mathrm{i}A = (\mathrm{i}A)^\dagger$. 其生成元可以选成

$$E_{ij} + E_{ji}, \quad \mathrm{i}E_{ij} - \mathrm{i}E_{ji}, \quad E_{11} - E_{ii}$$

所以这个 Lie 代数的维数为 $(N^2 - N) + (N - 1) = N^2 - 1$.

$\mathfrak{su}(N)_\mathbb{C}$ 是 $\mathfrak{su}(N)$ 的复化, 生成元可以选作

$$E_{ij}, \quad E_{11} - E_{ii},$$

其中 $i \neq j$, 复维度依旧是 $N^2 - 1$. 实际上, 它同构于 $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$, 记 $e_i = E_{ii} - E_{i+1, i+1}$.

$\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ 的 Cartan 子代数 \mathfrak{h} 为

$$\mathfrak{h} = \left\{ \sum_{i=1}^N a_i E_{ii} \mid \sum_{i=1}^N a_i = 0 \right\}$$

其复维度为 $N - 1$, 生成元为 $\{e_i\}_{1 \leq i \leq N}$.

对于 $A, B \in \mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$, 此时 $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B) = 0$. 利用(8.2)得到 $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_A \mathrm{ad}_B) = 2N\mathrm{Tr}(AB)$, 选取 Killing 形式为 $\langle A, B \rangle_K = \mathrm{Tr}(AB)$. 计算得到这个 Killing 形式非退化. 所以 $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ 是一个复半单 Lie 代数.

记 $\epsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ 为如下的线性函数

$$\epsilon_i \left(\sum_{j=1}^N a_j E_{jj} \right) = a_i,$$

则 $\epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ 构成了 \mathfrak{h} 的一组基.

通过计算

$$\left[\sum_{i=1}^N a_i E_{ii}, E_{jk} \right] = \sum_{i=1}^N a_i (\delta_{ij} E_{ik} - \delta_{ik} E_{ji}) = (a_j - a_k) E_{jk},$$

可以得知 E_{ij} 构成了全部的升降算符, 而对应于 E_{ij} 的根就是 $\epsilon_i - \epsilon_j$, 对应的 $H_{ij} = E_{ii} - E_{jj}$.

所以, 我们可以总结出所有的 $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ 的生成元如下:

$$\begin{cases} H_{ij} = E_{ii} - E_{jj}, \\ E_{ij} = E_{ij}, \\ F_{ij} = E_{ji}, \end{cases}$$

以及他们的对易关系

$$[H_{ij}, E_{ij}] = 2E_{ij}, \quad [H_{ij}, F_{ij}] = -2F_{ij}, \quad [E_{ij}, F_{ij}] = H_{ij},$$

令 $H_{ij} \mapsto H_{ij}/2$, 就可以看出这是一个 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 子代数. $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 子代数的个数为 $N(N-1)/2$. 当 $N=2$ 时, 只有一组, $N=3$ 时, 有三组. 当 $N>2$ 时, $N(N-1)/2 > N-1$, 根的个数大于 $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ 的维数, 所以我们选择单根即可.

单根可选择 $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$, 对应的本征矢量为 $E_{i,i+1}$, 负根对应的本征矢量为 $E_{i+1,i}$, 相应的 h^i 为:

$$h^i = h_{\alpha_i} = e_i.$$

注意到, $\alpha_i^\vee = 2\alpha_i/\alpha_i^2 = \alpha_i$, 于是可以计算 Cartan 矩阵如下

$$A_{ij} = \langle \alpha_i | \alpha_j \rangle = \langle h^i, h^j \rangle_K = \langle e_i, e_j \rangle_K = 2\delta_{ij} - \delta_{i,j+1} - \delta_{j,i+1}.$$

我们最后得到, $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ 的 Weyl 群是 S_n .

我们来看 $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ 的例子, 我们有

8.7 对称群和 Young 图

对称群的不可约表示与 $GL(N)$ 以及 $SL(N)$ 的不可约表示紧密相连. 我们仅陈述对称群不可约表示的结构定理, 但不做证明.

考虑集合 $I_n = \{1, \dots, n\}$ 以及任意的双射 $\sigma : I_n \rightarrow I_n$, 可以直接用下面的对应来描述这个双射

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

所有这样的双射按照复合构成一个群, 称为**对称群**, 记为 S_n . 这是一个有限群, $|S_n| = n!$.

我们将 \mathbb{R}^n 的标准基为 e_i , 任意的置换 $\sigma \in S_n$ 可以通过 $\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ 作用在 \mathbb{R}^n 上. 这是一个线性作用, 即一个表示, 表示的矩阵为 $D(\sigma)_{ij} = \delta_{i, \sigma(j)}$ 给出. 经过行变换和列变换, 总可以将这个矩阵变到单位矩阵. 于是 $\det D(\sigma) = \pm 1$. 当 $\det D(\sigma) = 1$ 时, 称这个置换为**偶置换**, 否则, 称之为**奇置换**.

上面的例子中, $D : S_n \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ 被称为 S_n 的**标准表示**.

现在, 固定 σ , 考虑任意的 $i \in I_n$, 以及集合 $\{i, \sigma(i), \sigma^2(i), \dots, \sigma^k(i), \dots\}$, 这集合一定是有有限周期的, 记为 p , 则 $\sigma^p(i) = i$. 我们得到的 I_n 的 p 个元素的子集被称为一个**循环**, 长度为 p , 有时将它称为一个 p -循环. 由于 I_n 是有限的, 所以可以将 I_n 分解成不同循环的并.

事实上, 任何一个置换都可以分解成若干个独立的置换的复合. 我们知道, I_n 可以分解成下面不同的循环的并

$$\{i_{11}, \dots, i_{1_{k_1}}\} \cup \{i_{21}, \dots, i_{2_{k_2}}\} \cup \cdots \cup \{i_{m_1}, \dots, i_{m_{k_m}}\},$$

其中每个 I_n 中的正整数只出现一次, 因为在每个循环内, 不可不可能存在两个相等的正整数; 而若两个循环的交集非空, 则这两个循环实际上是一个循环. 上述的每个子集显然确定了唯一的一个 σ_m , 使得 $\sigma_m(k_m) = i_{m_{k_m}}$,

而其余不在第 m 个子集中的正整数是 σ_m 不变的. 这样确定的置换满足 $\sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_j \circ \sigma_i$. 上面的从左到右的排序也确定了唯一的一个置换 σ , 于是我们有 $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_m$. 我们称一个循环对应的置换为**轮换**, 长度为 2 的轮换为**对换**. 由于轮换是用循环来定义的, 我们约定, 记 $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_r)$ 为一个长度为 r 的轮换, 即 $i_1 \mapsto i_2, i_2 \mapsto i_3, \dots, i_{r-1} \mapsto i_r, i_r \mapsto i_1$. 这样我们证明了任意置换都可以分解成数个轮换的复合. 更进一步, 我们有:

命题 8.19 对称群中的任意置换都可以写成多个对换的复合.

我们考虑置换群在自身上的共轭作用.

命题 8.20 对于 $\sigma = (i_1 i_2, \dots, i_k) \in S_n$ 以及任意的 $\tau \in S_n, \tau \circ (i_1 i_2, \dots, i_k) \circ \tau^{-1} = (\tau(i_1) \tau(i_2) \dots \tau(i_k))$. 即伴随作用将轮换变成轮换, 并保持长度不变.

证明. 由于 $\tau \in S_n$ 是一个双射, 我们用 $\tau(i), i \in I_n$ 代表 I_n 中的一般元素. 若 $\tau(i)$ 在 σ 的作用下不变, 则在 $\tau \circ (i_1 i_2, \dots, i_k) \circ \tau^{-1}$ 的作用下, 有

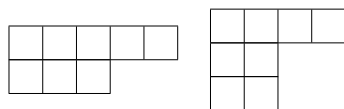
$$\tau(i) \mapsto i \mapsto i \mapsto \tau(i),$$

所以它在 $\tau \circ (i_1 i_2, \dots, i_k) \circ \tau^{-1}$ 的作用下也不变. 若 $\tau(i)$ 在 σ 的作用下改变, 则一定有 $i \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, 否则 $\tau(i)$ 在 σ 的作用下不变. 将此时的 i 记作 i_j , 那么 $i = i_j$ 在 $\tau \circ (i_1 i_2, \dots, i_k) \circ \tau^{-1}$ 的作用下的效果为

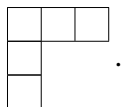
$$\tau(i_j) \mapsto i_j \mapsto i_{j+1} \mapsto \tau(i_{j+1}),$$

于是命题得证. □

现在来看 Young 图. 对于一个正整数 n , 我们可以将之唯一分解 $n = \sum_{i=1}^k n_i$, 其中 $0 \leq n_k \leq n_{k-1} \leq \cdots \leq n_1$, 将这样一个分解记为 $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$. 我们还可以用一个 Young 图表示这样的分解, 在第 i 行画 n_i 个方块. 比如 8 的分解有 $\{5, 3\}$ 或 $\{4, 2, 2\}$, 这两个分解的 Young 图分别是



我们可以通过置换群可以写成数个轮换之积这一事实将置换群与 Young 图联系起来. 例如一个置换 $\sigma = (123)(4)(5)$, 对应的分解是 $\{3, 1, 1\}$, 对应的 Young 图是



Young 图并不唯一确定置换. 因为在自共轭作用下, $\tau \circ (i_1 i_2, \dots, i_k) \circ \tau^{-1} = (\tau(i_1) \tau(i_2) \dots \tau(i_k))$, 所以置换 σ 和 $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ 的 Young 图是相同的. 因此, S_n 中所有置换的不同 Young 图的总数等于 S_n 中共轭类的数目, 即群作用 $\text{Ad}(G)$ 在自身的轨道数目.

我们知道, 有限群的有限维不等价不可约表示的个数等于有限群的共轭类的数目. 因此, S_n 拥有的所有可能的 Young 图的数目就是其有限维不等价不可约表示的数目.

为了通过 Young 图确定置换, 我们要在 Young 图中填入数字. 填入数字的 Young 图称为 **Young 表**. 像如下这种左边的数字比右边的小, 上边的数字比下边的小的 Young 表, 被称为**正则 Young 表**.

1	2	3	4	5
6	7	8		

1	2	3	4
5	6		
7	8		

给定一个 Young 图以及这个 Young 图的一个正则 Young 表, 即 P_i 为所有第 i 行数字之间的置换构成的 S_n 的子群, Q_j 为所有第 j 列数字之间的置换构成的子群. 例如, 以正则 Young 表

1	2	3	4	5
6	7	8		

为例, 我们有 $(12) \in P_1, (34) \in P_1, (12543) \in P_1$, 但是 $(12634) \notin P_1$. 再令

$$P = \cap_i P_i, \quad Q = \cap_j Q_j$$

这是两个 S_n 的子群. 我们有如下定理:

定理 8.21 给定 S_n 的一个 Young 图 λ , 我们得到子群 P_λ 与 Q_λ , 令 $a_\lambda = \sum_{\sigma \in P_\lambda} \sigma$ 以及 $b_\lambda = \sum_{\sigma \in Q_\lambda} \text{sgn}(\sigma)\sigma$, 这是两个 $\mathbb{C}[S_n]$ 中的元素. 定义 $c_\lambda = a_\lambda b_\lambda$, 称为 Young 图 λ 的 Young 对称化子. 则 $V_\lambda = \mathbb{C}[S_n]c_\lambda$ 以及 $\rho_\lambda(g) = L_g$ 构成了 S_n 的一个不可约表示, 且不同 Young 图对应的不可约表示不等价. 因此, S_n 的不可约表示与其 Young 图的数目一一对应.

命题 8.22 对于 S_n 的一个 Young 图 $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$, 记 $l_i = \lambda_i + k - i$, 则

$$\dim V_\lambda = \frac{n!}{l_1! \cdots l_k!} \prod_{1 \leq i < j \leq k} (l_i - l_j) = \frac{n!}{l_1! \cdots l_k!} \begin{vmatrix} 1 & l_k & l_k^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & l_1 & l_1^2 & \cdots \end{vmatrix},$$

其中的行列式被称为 *Vandermonde* 行列式.

命题 8.23 设 λ 是 S_n 的一个 Young 图, 则 $c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda$, 其中 $n_\lambda = n! / \dim V_\lambda$. n_λ 被称为钩形数, 可以通过 Young 图直接确定.

给定 Young 图 λ , 记 n_{ij} 为第 i 行 j 列的格子正下方与正右方的格子数之和. 比如下面的 Young 图

	*	*	*
	*		
	*		

n_{22} 为有 * 的格子的数目, 所以 $n_{22} = 5$. 我们得到 $n_\lambda = \prod_{i,j} n_{ij}$. 所以, 我们得到下面计算不可约表示 V_λ 的维数的公式.

命题 8.24

$$\dim V_\lambda = \frac{n!}{n_\lambda} = \frac{n!}{n_{ij}}.$$

我们可以定义 $\mathbb{C}[S_n]$ 在 $V^{\otimes n}$ 上的右作用. 定义

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)\sigma = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}.$$

对于一个 S_n 的 Young 图 λ , 我们有 Young 对称化子 c_λ , 记 $S_\lambda V = (V^{\otimes n})c_\lambda$. 为了看清 $S_\lambda V$ 的意义, 我们考虑 $n = 2$ 的情况. 对于 Young 图

$$\lambda_1 = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array},$$

它对应的正则 Young 表为

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

所以 $P_{\lambda_1} = \{e\}$, $Q_{\lambda_1} = \{e, (1, 2)\}$, $c_{\lambda_1} = a_{\lambda_1} b_{\lambda_1} = e(e - (1, 2)) = e - (1, 2)$. 考虑任意的 $v \otimes w \in V^2$,

$$(v \otimes w)_{c_{\lambda_1}} = v \otimes w - w \otimes v = v \wedge w,$$

所以 $S_{\lambda_1} V$ 就是那些反对称的张量构成的空间.

接着考虑 Young 图

$$\lambda_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array},$$

它对应的正则 Young 表为

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array},$$

所以 $P_{\lambda_2} = \{e + (1, 2)\}$, $Q_{\lambda_2} = \{e\}$, $c_{\lambda_2} = a_{\lambda_2} b_{\lambda_2} = (e + (1, 2))e = e + (1, 2)$.

考虑任意的 $v \otimes w \in V^2$,

$$(v \otimes w)_{c_{\lambda_2}} = v \otimes w + w \otimes v = v \wedge w,$$

所以 $S_{\lambda_2} V$ 就是那些对称的张量构成的空间.

对于一个一般的 Young 图 λ , $S_\lambda V$ 就是那些按列反对称, 按行对称的张量构成的空间.

第九章 BV 量子化

9.1 物理学家们的语言

我们考虑 Lagrangian 在一个 Lie 群作用下不变的情况. 自然, 这理论在无穷小变换下也是不变的. 设 ψ_l 是物质场, 则其在无穷小变换下的显示表达式为

$$\delta\psi_l(x) = i\epsilon^\alpha(x)(t_\alpha)_l^m\psi_m(x),$$

其中, t_α 是 Lie 代数的生成元. 由于物质场的导数 $\partial_\mu\psi_l(x)$ 的无穷小变换显然与 $\psi_l(x)$ 本身的无穷小变换不同, 所以我们要引入协变导数

$$(D_\mu\psi(x))_l = \partial_\mu\psi_l(x) - iA_\mu^\beta(x)(t_\beta)_l^m\psi_m(x),$$

这样, 协变导数在无穷小变换下的规律就与物质场本身相同了:

$$\delta(D_\mu\psi(x))_l = i\epsilon^\alpha(x)(t_\alpha)_l^m(D_\mu\psi)_m.$$

其中 A_μ^β 是规范场, 在无穷小变换下的规律为

$$\delta A_\mu^\beta = \partial_\mu\epsilon^\beta + C_{\gamma\alpha}^\beta\epsilon^\alpha A_\mu^\gamma.$$

$C_{\gamma\alpha}^\beta$ 是 Lie 代数的结构常数.

我们还可以定义规范场的场强

$$F_{\nu\mu}^\gamma := \partial_\nu A_\mu^\gamma - \partial_\mu A_\nu^\gamma + C_{\alpha\beta}^\gamma A_\nu^\alpha A_\mu^\beta.$$

接下来,我们要对如下的规范理论进行量子化

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\mu\nu}F_{\alpha}^{\mu\nu} + \mathcal{L}_M(\psi, D_{\mu}\psi).$$

但我们不能用正则量子化的方法,因为在这里理论中有两个约束. 分别是

$$\begin{aligned}\Pi_{\alpha 0} &:= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_{\alpha}^0)} = 0 \\ -\partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} A_{\alpha 0})} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha 0}} &= \partial_{\mu} F_{\alpha}^{\mu 0} + F_{\gamma}^{\mu 0} C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta\mu} + J_{\alpha}^0 = \partial_k \Pi_{\alpha}^k + \Pi_{\gamma}^k C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta k} + J_{\alpha}^0 = 0\end{aligned}$$

其中 $\Pi_{\alpha}^k := \partial \mathcal{L} / \partial(\partial_0 A_{\alpha k}) = F_{\alpha}^{k0}$, k 取遍 1, 2, 3. 因此, 这两个约束做 Poisson 括号为 0, 从而都是第一类约束, 不能通过直接将 Poisson 括号替换为 Dirac 括号的方法来进行正则量子化, 这在第一章中有详细的讨论.

就像在 QED 的例子中一样, 我们首先通过选取一个规范, 减少正则变量的数目. 换言之, 将辛流形进行约化. 为了技术上的简单, 我们选择规范

$$A_{\alpha 3} = 0.$$

于是, 此时规范场的正则坐标是 $A_{\alpha i}$, i 取值为 1, 2. 与之相应的正则变量为

$$\Pi_{\alpha i} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_{\alpha i})} = -F_{\alpha}^{0i} = \partial_0 A_{\alpha i} - \partial_i A_{\alpha 0} + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta 0} A_{\gamma i}.$$

我们还察觉到, $A_{\alpha 0}$ 不是一个独立的正则变量, 通过两个约束与其他的量相关联. 为了看清这一点, 注意到

$$F_{\alpha}^{i0} = \Pi_{\alpha i}, F_{\alpha}^{30} = \partial_3 A_{\alpha}^0,$$

于是, 第二个约束变成

$$-(\partial_3)^2 A_{\alpha}^0 = \partial_i \Pi_{\alpha i} + \Pi_{\gamma i} C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta i} + J_{\alpha}^0.$$

这就说明 A_{α}^0 是 $\Pi_{\gamma i}, A_{\beta i}$ 以及 J_{α}^0 的函数. 我们还可以将 J_{α}^0 表示成物质场的正则坐标. 因为

$$\pi_l := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi_l)} = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(D_0 \psi_l)},$$

所以

$$J_\alpha^0 = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_0 \psi_l)} (t_\alpha)_l^m \psi_m = -i \pi_l (t_\alpha)_l^m \psi_m.$$

因此 A_α^0 是 $\Pi_{\gamma i}, A_{\beta i}$ 以及 π_l, ψ_m 的函数. 根据正则量子化的精神, 我们得到的 Hamiltonian 为

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &:= \Pi_{\alpha i} \partial_0 A_{\alpha i} + \pi_l \partial_0 \psi_l - \mathcal{L} \\ &= \mathcal{H}_M + \Pi_{\alpha i} (\partial_i A_{\alpha 0} - C_{\alpha \beta \gamma} A_{\beta 0} A_{\gamma i}) + \frac{1}{2} \Pi_{\alpha i} \Pi_{\alpha i} \\ &\quad + \frac{1}{4} F_{\alpha i j} F_{\alpha i j} + \frac{1}{2} \partial_3 A_{\alpha i} \partial_3 A_{\alpha i} - \frac{1}{2} \partial_3 A_{\alpha 0} \partial_3 A_{\alpha 0}. \end{aligned} \quad (9.1)$$

于是, 我们可以利用路径积分计算可观测量, 积分因子是 $\exp(\frac{i}{\hbar} S)$, 其中

$$S = \int d^4 x (\Pi_{\alpha i} \partial_0 A_{\alpha i} + \pi_l \partial_0 \psi_l - \mathcal{H} + \epsilon \text{terms}). \quad (9.2)$$

但是, 我们得到的(9.2)中, 在对正则动量 $\Pi_{\alpha i}$ 的可观测量进行积分时, 我们会配方得到一个与 $A_{\alpha i}$ 相关的项. 另外, 上述的作用量显然不是 Lorentz 不变的.

于是, 我们在这里先暂时将 $A_{\alpha 0}$ 视为独立的变量, 之后再对其施加约束条件. 这样, 作用量(9.2)显然是 $A_{\alpha 0}$ 的二次式, 二次项系数为与场无关的 $(\partial_3)^2 \delta^4(x-y)$. 根据驻相法, 对 $A_{\alpha 0}$ 的积分可以由临界点的值来计算. 但

$$\frac{\delta S}{\delta A_{\alpha 0}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_{\alpha 0}} = J_\alpha^0 + \partial_i \Pi_{\alpha i} + C_{\beta \alpha \gamma} \Pi_{\beta i} A_{\gamma i} - \partial_3^2 A_{\alpha 0},$$

所以, 作用量的临界点就是第二个约束方程. 因此, 我们证明了, 对 $A_{\alpha 0}$ 进行积分等价于在原积分中应用约束条件, 从而我们的确可以将 $A_{\alpha 0}$ 视为独立变量然后再施加约束条件.

于是, 我们得到,

$$\langle T \{ O_A O_B \cdots \} \rangle \propto \int \prod_l D\psi_l(x) \prod_{\alpha, \mu} D A_{\alpha \mu}(x) O_A O_B \cdots \exp(\frac{i}{\hbar} S + \epsilon \text{terms}) \prod_{x, \alpha} \delta(A_{\alpha 3}(x)). \quad (9.3)$$

9.1.1 Faddeev-Popov 方法

我们来考虑一种更加广泛的路径积分

$$\mathcal{I} = \int \prod_n D\phi_n(x) \mathcal{G}[\phi] B[f[\phi]] \det(\mathcal{F}[\phi]). \quad (9.4)$$

其中, $\phi_n(x)$ 是规范场和物质场, $D\phi_n(x)$ 是规范不变的测度, $\mathcal{G}[\phi]$ 是规范不变的泛函, $f_\alpha[\phi; x]$ 是规范固定项, \mathcal{F} 是矩阵

$$\mathcal{F}_{\alpha x, \beta y} := \frac{\delta f_\alpha[\phi_\lambda; x]}{\delta \lambda_\beta(y)} \Big|_{\lambda=0}.$$

在(9.3)中, 我们可以辨认出

$$\begin{aligned} f_\alpha[A, \psi; x] &= A_{\alpha 3}(x) \\ B[f] &= \prod_{x, \alpha} \delta(A_{\alpha 3}(x)) \\ \mathcal{G}[A, \psi] &= \exp\left(\frac{i}{\hbar} S + \epsilon \text{ terms}\right) O_A O_B \cdots \\ \prod_n D\phi_n(x) &= \prod_l D\psi_l(x) \prod_{\alpha, \mu} DA_{\alpha\mu}(x) \end{aligned}$$

经过几步计算, 我们还发现

$$\mathcal{F}_{\alpha x, \beta y}[\phi] = \delta_{\alpha\beta} \partial_3 \delta^4(x - y),$$

这是一个与场有关的量, 但是只对真空涨落有贡献, 所以在我们选定的 $A_{\alpha 3} = 0$ 这个规范中, 这一项是无关紧要的. 但对于一般的情况, 这一项不是平凡的.

根据 Grassmann 变量的性质, 任何矩阵 $\mathcal{F}_{\alpha x, \beta y}$ 都可以表示成 Berezin 积分:

$$\det(\mathcal{F}) = \int \left(\prod_\alpha D\omega_\alpha^*(x) \right) \left(\prod_\alpha D\omega_\alpha(x) \right) \exp(iI_{gh}),$$

其中

$$I_{gh} := \int d^4x d^4y \omega_\alpha^*(x) \omega_\beta(y) \mathcal{F}_{\alpha x, \beta y}.$$

ω_α^* 与 ω_α 是独立的 Grassmann 变量, 两者之间不是复共轭的. 因此, 计算可观测量的路径积分为

$$\langle T\{O_A \cdots\} \rangle = \int \prod_l D\psi_l(x) \prod_{\alpha,\mu} DA_{\alpha\mu}(x) \prod_\alpha \omega_\alpha^*(x) \prod_\beta \omega_\beta(x) O_A \cdots \exp\left(\frac{i}{\hbar} S + iI_{gh} + \epsilon \text{ terms}\right) B[f]$$

关于 $B[f]$ 项, 我们有如下定理

定理 9.1 路径积分(9.4)的值与 $f_\alpha[\phi; x]$ 的选择无关, 且 $B[f]$ 的选择只会影响到路径积分(9.4)的常数因子.

9.1.2 BRST 对称性

尽管上面的 Faddeev-Popov 方法使得理论自动是 Lorentz 不变的, 但在形式上却依然依赖于规范的选取. 这不能体现理论是规范不变的. 当我们要证明规范理论的可重整性时, 这一点是致命的. 规范不变性限制了 Lagrangian 中的紫外发散项的形式, 但当我们选定了一个确定的规范时, 我们如何说明规范不变性对紫外发散的有限制?

9.2 动机与技术

我们从有效理论的角度理解规范理论. 我们可以很朴素地认为, 给定一个规范理论, 在任意能标下都存在一个有效的规范理论, 不同能标下的规范理论之间用重整化群流联系起来.

但是, 事实上, 低能的规范变换并不构成一个群. 两个低能规范变换的乘积未必是低能的, 且乘积的低能部分的乘法不再满足结合律 [1].

BV 量子化被认为将规范理论量子化的最有力方法. 第一步引入鬼场,

对应于无穷小规范变换; 与规范场对偶的反场; 与鬼场对偶的反鬼场. 然后写下扩张的场空间的相应的作用量, 通常是从原来的作用量中加上一些项.

QME 不是良定义的.

为简便起见, 我们先考虑有限维的经典规范理论, 规范群是 G , 场空间是 V , 作用量是 f .

我们的第一个任务是为下面形式的积分寻找一个定义

$$\int_{V/G} e^{f/\hbar},$$

这就是 BRST 构造.

V/G 上的函数就是 V 上的 G -不变函数. 如果考虑连通 Lie 群 G , 则等价地是 \mathfrak{g} -不变函数. 根据 6.1.3 中的讨论, 代数 $\mathcal{O}(V)$ 作为 \mathfrak{g} -模的导出不变量就是 Chevalley-Eilenberg 复形

$$C^\bullet(\mathfrak{g}, \mathcal{O}(V)).$$

的上同调. 其中, 0 阶上同调群就是 \mathfrak{g} -不变函数.

Chevalley-Eilenberg 复形是一个分级线性空间. 我们先看一个较为简单的情况. 假设 $V = V^0 \oplus V^1$ 是一个超线性空间, V^0 级数是 0, V^1 级数是 1. 那么 $\text{Sym}(V)$ 就是 $\wedge^\bullet V$, 其中 $\wedge^0 V = V^0$. 接下来, 根据 6.1.2 中 Chevalley-Eilenberg 复形的构造, 我们可以得到

$$C^\bullet(\mathfrak{g}, \mathcal{O}(V)) = \text{Sym}(\mathfrak{g}[1] \oplus V)^*.$$

其中, $\mathfrak{g}[1]$ 中的 $[1]$ 表示为 \mathfrak{g} 赋予级数 -1 , 对称化之后取对偶空间是因为 Chevalley-Eilenberg 复形的上链定义为 \mathfrak{g} 上 $\mathcal{O}(V)$ 的多线性映射, 而我们默认 $\mathcal{O}(V)$ 就是 V 上的多项式. 而且, 我们可以认为 $C^\bullet(\mathfrak{g}, \mathcal{O}(V))$ 是线性空间

$$\mathfrak{g}[1] \oplus V$$

上的函数环, 所以 $\mathfrak{g} \oplus V$ 就是一个微分分级流形. Chevalley-Eilenberg 复形的边界算子是流形 $\mathfrak{g}[1] \oplus V$ 上的级数为 1 的向量场.

BRST 构造告诉我们, 我们可以将积分中的商 V/G 换成导出商 $\mathfrak{g} \oplus V$, 积分的形式变成

$$\int_{\mathfrak{g}[1] \oplus V} e^{f/\hbar}.$$

我们通过 BRST 构造得到了导出商 $\mathfrak{g}[1] \oplus V$, 所以我们可以导出商上面做积分. 这比从前的情形要好很多, 因为 V/G 有时未必是一个流形, 而 $\mathfrak{g}[1] \oplus V$ 无疑是一个光滑流形. 但是, 我们依然面对着许多困难. f 在 $\mathfrak{g}[1] \oplus V$ 上是简并的, 在临界点处也是简并的, 因此相应的 Gauss 型积分不是良定义的, 这为临界点处的微扰展开带来了麻烦.

从现在开始, BV 量子化才正式出现. 令 E 表示余切丛 $T^*[-1](\mathfrak{g}[1] \oplus V)$, 所以

$$E = \mathfrak{g}[1] \oplus V \oplus V^\vee[-1] \oplus \mathfrak{g}^\vee[-2].$$

我们将 $\mathfrak{g}[1]$ 称为鬼场空间, V 是场空间, $V^\vee[-1]$ 是反场空间, $\mathfrak{g}^\vee[-2]$ 是反鬼场空间. 可以通过投影映射 $E \rightarrow \mathfrak{g}[1] \oplus V$ 将 $\mathfrak{g} \oplus V$ 上的函数 f 和向量场 X 提升到 E 上, 仍然记为 f 和 X . 稍加验证就会发现, 如果 $[X, X] = 0$ 和 $X(f) = 0$ 在 $\mathfrak{g}[1] \oplus V$ 上成立, 则同样的等式也在 E 上成立.

E 是一个分级微分流形, 上面可以附加一个级数是 -1 的辛结构, 设 X 是保持辛结构不变的级数为 1 的向量场. 则根据辛结构的非退化性, 存在函数 h_X 使得其 Hamilton 向量场是 X . 如果我们令 h_X 在 E 的原点处取 0, 则 h_X 是唯一的. 我们还能数出 h_X 的级数是 0.

同样, 由于 E 上辛结构的级数是 -1 , E 的函数环上存在级数为 1 的一个 Poisson 括号. 从 $[X, X] = 0$ 我们得到 $h_X, h_X = 0$, 从 $X(f) = 0$ 得到 $\{h_X, f\} = 0$. 若将 f 提升到 E 上, 得到 $\{f, f\} = 0$. 从这些结果, 我们得到如下的经典 QME

$$\{f + h_X, f + h_X\} = 0$$

函数 $f + h_X$ 被称为 BV 作用量,

$$S_{BV}(e) = f(e) + h_X(e).$$

导出几何观点看 BV 量子化

一般地, 如果我们有一个概形 M 以及 M 上的函数 f , f 的临界概形就是 1-形式 df 的零点. 导出临界概形是通过将方程 $df = 0$ 进行 Koszul 分解之后得到的微分分级流形. 更明显地, f 的导出临界概形就是 $T^*[-1]M$. 导出概形上的函数环是

$$C^\infty(T^*[-1]M) = \Gamma(M, \wedge^* TM).$$

这函数环上的微分算子是 1-形式 df 的缩并.

然后再看出 $H^0(C^\infty(T^*[-1]M), df \lrcorner)$ 就是 f 的临界值上的函数环.

如果我们对导出商 $\mathfrak{g}[1] \oplus V$ 应用上述的构造, 我们就会得到 BV 微分分级流形 E .

BV 量子化作为辛约化

我们还可以从辛约化的观点来看 BV 量子化. 对于一个 V 上的函数 f , 对其导出概形进行辛约化之后, 我们就可以得到 BV 流形 E .

f 的导出临界概形是一个微分分级辛流形

$$T^*[-1]V = V \oplus V^\vee[-1]$$

微分算子是与 1-形式 df 做缩并.

Lie 代数 \mathfrak{g} 作用在 $T^*[-1]V$ 上, 保持微分算子. 断言微分分级流形 E 就是 \mathfrak{g} 作用在 $T^*[-1]V$ 上的同伦辛约化. 由于存在 \mathfrak{g} 到 $T^*[-1]V$ 上的 Hamilton 向

量场的一个 Lie 代数同态, 而 Hamilton 向量场由 Hamilton 函数生成, 素以我们得到了从 \mathfrak{g} 到 $T^*[-1]V$ 上的 Hamilton 函数的一个 Lie 代数同态. Hamilton 函数的级数是 -1 , 所以这可以被视为奇 Lie 代数之间的映射

$$\mathfrak{g}[1] \rightarrow \mathcal{O}(T^*[-1]V).$$

这诱导了代数之间的映射

$$\mathcal{O}(\mathfrak{g}^\vee[-1]) \rightarrow \mathcal{O}(T^*[-1]V)$$

进而诱导了矩映射

$$m : T^*[-1]V \rightarrow \mathfrak{g}^\vee[-1].$$

然后, 在同伦的意义上进行辛约化, 就得到了 BV 流形 E .

- (i.) 经典 BV 机制, 应用于导出几何, 描述函数的临界点,
- (ii.) 量子 BV 机制, 提供了积分理论的同调代数版本, 适合无穷维流形.

9.3 超几何

9.3.1 \mathbb{Z}_2 -分级代数

\mathbb{Z}_2 -分级线性空间 V 是一个线性空间, 并有如下的分解

$$V = V_0 \oplus V_1.$$

V_0 被称为偶的, V_1 被称为奇的. 若 $\dim V_0 = d_0, \dim V_1 = d_1$, 记 $V^{d_0|d_1}$ 以及 (d_0, d_1) 为 V 的超维数.

若 V 是结合代数, 且其中的乘法保持分级, 即 $|ab| = |a| + |b| \pmod{2}$, 称 V 为超代数. 超代数 V 的自同态是一个 $|D|$ 阶导数 D 使得

$$D(ab) = (Da)b + (-1)^{|D||a|}a(Db). \quad (9.5)$$

对于任何超代数, 我们都可以定义 Lie 括号 $[a, b] = ab - (-1)^{|a||b|}ba$. Lie 括号具有如下性质

$$\begin{aligned} [a, b] &= -(-1)^{|a||b|}[b, a], \\ [a, [b, c]] &= [[a, b], c] + (-1)^{|a||b|}[b, [a, c]]. \end{aligned} \quad (9.6)$$

如果一个超代数 V 配备了任何满足上面两条性质的双线性映射 $[-, -]$, 则称其为 Lie 超代数.

若超代数 V 满足

$$ab = (-1)^{|a||b|}ba, \quad (9.7)$$

则称 V 是超交换代数. 我们下面来看超交换代数的一个重要例子, 外代数.

例 9.1 考虑 m 维的纯粹奇的超空间 $\mathbb{R}^{0|m}$. ◇

考虑超交换代数 V 且附加了宇称为 ϵ 的 Lie 括号. 我们要求 $[a, -]$ 是一个关于 $-$ 的 $|a| + \epsilon$ 的导数, 即

$$[a, bc] = [a, b]c + (-1)^{(|a|+\epsilon)|b|}b[a, c]. \quad (9.8)$$

这样的结构 $(V, \cdot, [-, -])$ 当 $\epsilon = 0$ 时被称为 Poisson 代数, 当 $\epsilon = 1$ 时被称为 Gerstenhaber 代数.

9.3.2 超流形

我们可以构造更加复杂的超交换代数的例子. 考虑超空间 $\mathbb{R}^{n|m}$, 定义上面的函数为

$$C^\infty(\mathbb{R}^{n|m}) := C^\infty \otimes \wedge^\bullet(\mathbb{R}^m)^*.$$

如果我们选择 \mathbb{R}^n 中的一个开集 U_0 , 我们可以将 U_0 与超交换代数联系起来

$$U_0 \rightarrow C^\infty(U_0) \otimes \wedge^\bullet(\mathbb{R}^m)^*.$$

这个超交换代数可以视为定义在超定义域 $U^{n|m} \subset \mathbb{R}^{n|m}$ 上的还输的代数, $C^\infty(U^{n|m}) = C^\infty(U_0) \otimes \wedge^\bullet(\mathbb{R}^m)^*$. 超定义域 $U^{n|m}$ 可以用偶坐标 $x^\mu (\mu = 1, 2, \dots, n)$ 以及奇坐标 $\theta^i (i = 1, 2, \dots, m)$ 描述, 其中 $\theta^i \theta^j = -\theta^j \theta^i$. 与通常的流形的定义一样, 我们可以定义坐标 (x^μ, θ^i) 的转换映射. 通过转换映射, 我们将超定义域连接起来组成超流形. 下面我们给出光滑超流形的明确定义.

定义 9.1 一个 (n, m) 维的光滑超流形 \mathcal{M} , 是一个光滑流形 M 以及其上的一个超交换超代数层, 记为 \mathcal{O}_M 或 $C^\infty(\mathcal{M})$, 在局部上与 $C^\infty(U_0) \otimes \wedge^\bullet(\mathbb{R}^m)^*$ 同构, U_0 是 \mathbb{R}^n 的开集. \diamond

下面我们给出超流形的两个具体例子.

例 9.2 设 M 是一个光滑流形, 它的奇切丛是一个超流形, 记为 ΠTM , 转换映射定义为

$$\tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x), \tilde{\theta}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} \theta^\nu,$$

x^μ 是 M 的局部坐标, θ^μ 的转换规律与微分形式相同. ΠTM 上的函数具有如下的形式

$$f(x, \theta) = \sum_p \frac{1}{p!} f_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}(x) \theta^{\mu_1} \theta^{\mu_2} \dots \theta^{\mu_p},$$

因此, 与微分形式是同构的, 即 $C^\infty(\Pi TM) = \Omega^\bullet(M)$. 在局部上, 微分形式显然是自由生成的超交换代数

$$\Omega^\bullet(U_0) = C^\infty \otimes \wedge^\bullet(\mathbb{R}^n)^*.$$

\diamond

例 9.3 设 M 是一个光滑流形, 它的奇余切丛是一个超流形, 记为 ΠT^*M , 转换映射定义为

$$\tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x), \tilde{\theta}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} \theta_\nu,$$

x^μ 是 M 的局部坐标, θ^μ 的转换规律与向量场相同. ΠT^*M 上的函数具有如下

的形式

$$f(x, \theta) = \sum_p \frac{1}{p!} f^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}(x) \theta_{\mu_1} \theta_{\mu_2} \dots \theta_{\mu_p},$$

因此, 与多向量场是同构的, 即 $C^\infty(\Pi T^*M) = \Gamma(\wedge^\bullet TM)$. 局部上的多向量场显然也满足条件. \diamond

9.3.3 积分

我们可以定义超流形上的积分. 与通常积分不一样的性质来源于反交换的变量.

我们先考虑被积函数 $f(x)$ 是单变量的情形. 如果变量是偶的, 则与通常的积分定义相同. 下面考虑只有一个奇变量 θ 的函数 $f(\theta)$, 根据超流形上函数的定义, f 是 θ 的多项式, 所以 f 的形式只能是 $f = f_0 + f_1 \theta$, f_0, f_1 取实数值. 定义积分为如下的线性映射

$$\int d\theta = 0, \quad \int d\theta \theta = 1.$$

除此之外, 我们还希望上面定义的线性映射在变换 $\tilde{\theta} = c\theta$ 之下不变, 所以我们推知测度的变化规律为

$$d\tilde{\theta} = \frac{1}{c} d\theta.$$

于是, 考虑奇变量为 $\{\theta^i\}_{i=1}^m$, 我们定义这些坐标的体积形式为

$$\int d^m \theta \theta^1 \theta^2 \dots \theta^m := 1.$$

我们考虑坐标变换 $\tilde{\theta}^i = A_j^i \theta^j$, 根据奇变量的反交换关系, 我们得到

$$\tilde{\theta}^1 \tilde{\theta}^2 \dots \tilde{\theta}^m = \det A \theta^1 \theta^2 \dots \theta^m. \quad (9.9)$$

我们依然要求有多变量的时候积分在上述变换下不变, 那么体积形式的变化只能是

$$d^m \tilde{\theta} = (\det A)^{-1} d^m \theta.$$

9.4 分级几何

分级几何式超几何的 \mathbb{Z} -加细. 许多超几何的定义都可以直接推广到分级几何.

9.4.1 \mathbb{Z} -分级线性代数

一个 \mathbb{Z} -分级向量空间 V 就是一个向量空间 V 并可以分解成子空间的直和

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n.$$

对于一个 \mathbb{Z} -分级向量空间 V , 其对偶 V^* 定义为 $(V^*)_i := (V_{-i})^*$. V 的位移 $V[k]$ 也是一个 \mathbb{Z} -分级向量空间, 定义为 $(V[k])_i := V_{i+k}$.

若分级向量空间 V 同时配备了一个保持分级的结合性乘积, 则称 V 是一个分级代数. 分级代数的自同态是一个 $|D|$ 阶的导数 D , 满足(9.5). 若 V 中两个元素 a, b 满足关系(9.7), 则称 V 是分级交换代数. 分级交换代数在分级几何中扮演了重要的角色. 分级交换代数的最重要的例子之一就是分级对称空间 $S(V)$.

定义 9.2 令 V 为一个 \mathbb{R} 或 \mathbb{C} 上的分级向量空间. 定义分级对称代数 $S(V)$ 为 V 上的多项式构成的线性空间, $S(V)$ 中的元素具有形式

$$\sum_l f_{a_1 a_2 \dots a_l} v^{a_1} v^{a_2} \dots v^{a_l},$$

且 $S(V)$ 中有如下的关系成立

$$v^a v^b = (-1)^{|v^a||v^b|} v^b v^a.$$

多项式构成的线性空间是自然分级的, 且上述关系保证了分级交换性. 于是对称交换代数 $S(V)$ 是分级交换代数. \diamond

类似于超代数的情形, 我们可以定义 ϵ 阶的 Lie 括号 $[-, -]$ 使得 $|[v, w]| = |v| + |w| + \epsilon$, 并且满足性质(9.6). 同样地, 我们可以定义分级 Poisson 代数. 若 \mathbb{Z} -分级向量空间 V 具有分级乘法 \cdot 以及一个 ϵ 阶的分级 Lie 括号 $[-, -]$, 且 Lie 括号结构和乘法结构具有(9.8)中的相容性, 则称 $(V, \cdot, [-, -])$ 是一个 ϵ -阶 Poisson 代数. 0-阶 Poisson 代数被称为 Poisson 代数, ± 1 -阶 Poisson 代数通常被称为 Gerstenhaber 代数.

关于双分级向量空间记号的约定.

9.4.2 分级流形

分级流形与超流形的定义是非常类似的.

定义 9.3 一个光滑分级流形 \mathcal{M} 是一个光滑流形 M 并附加一个分级交换代数层, 记为 $C^\infty(\mathcal{M})$. $C^\infty(\mathcal{M})$ 在局部上同构于 $C^\infty(U_0) \otimes S(V)$, U_0 是 \mathbb{R}^n 中的开集, V 是分级向量空间. \diamond

我们可以将一个光滑的 \mathbb{Z} -分级流形视为向量丛的直和

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}^k,$$

底流形 \mathcal{M}^0 就是 M . \mathcal{M} 上的光滑函数环是向量丛的分级截面环

$$C^\infty(\mathcal{M}) = \Gamma(M, S(\mathcal{M}_e^*)) \oplus \Gamma(M, \Lambda(\mathcal{M}_o^*))$$

其中 $\mathcal{M}_e = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}^{2k}$, $\mathcal{M}_o = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}^{2k+1}$. 但要注意的是, S 在上面代表的不是分级对称化, 而是对称化, 因为对于 \mathcal{M}_e 中的元素, 交换性当且仅当分级交换性.

上述的定义是超流形在分级情况下的直接推广. 我们通过具体的例子来理解这个定义.

例 9.4 我们引入例9.2在分级情况下的推广. 我们将光滑流形 M (不分级) 的分级切丛记为 $T[1]M$, 坐标 x^μ 与 θ^μ 与例9.2中的相同, 且有相同的转换关系. x 的级数是 0, θ 的级数是 1. 函数空间 $C^\infty(T[1]M) = \Omega^\bullet(M)$ 显然是 \mathbb{Z} -分级代数. \diamond

例 9.5 同样, 我们可以引入例9.3在分级情况下的推广. 我们将光滑流形 M 的分级余切丛记为 $T^*[-1]M$. 坐标和转换映射与例9.3中的相同. 令 x 的级数为 0, θ 的级数为 -1 . 函数环 $C^\infty(T^*[-1]M) = \Gamma(\wedge^\bullet TM)$ 是 M 上的多向量场. \diamond

微分几何的一大部分都可以推广到分级几何. 分级流形 M 上的向量场被定义为 $C^\infty(M)$ 的导数. M 上的向量场是自然分级的, 但我们只关心奇数次的向量场, 这样的向量场根据定义是幂零的.

定义 9.4 若分级流形 M 上附加了一个 $C^\infty(M)$ 的级数为 1 的导数 D , 且满足性质 $D^2 = 0$, 称 D 是一个同调向量场. 那么 $(C^\infty(M), D)$ 就是一个复形. 我们称这样的附加了 D 的分级交换代数为微分分级代数. \diamond

我们考虑分级切丛上的同调向量场.

例 9.6 考虑例9.4中描述的 $T[1]M$. 我们在局部坐标中定义 1 级向量场

$$D = \theta^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

显然 $D^2 = 0$, 于是这是一个同调向量场. 由于 $C^\infty(T[1]M) = \Omega^\bullet(M)$, $(C^\infty(T[1]M), D)$ 就是普通的 de Rham 复形. \diamond

9.5 奇 Fourier 变换与 BV 形式化

我们在本节将介绍从 $C^\infty(T[1]M)$ 到 $C^\infty(T^*[-1]M)$ 的奇 Fourier 变换. 余切丛 $T^*[-1]M$ 上的函数环具有良好的代数性质, 且利用奇 Fourier 变换, 我们可以推出在 $T^*[-1]M$ 上的 Stokes 定理. BV 形式化的威力在于余切丛 $T^*[-1]M$ 上的代数解释.

在介绍奇 Fourier 变换之前, 我们先来回忆通常 \mathbb{R} 上的 Fourier 变换的一些性质. 我们定义函数之间的**卷积***

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y).$$

容易验证, 卷积运算是结合的, 交换的. 卷积运算与 Fourier 变换之间具有关系

$$F[f * g] = F[f]F[g].$$

9.5.1 奇 Fourier 变换

假设 M 是一个可定向流形, 那么我们总可以找到一个体积形式

$$\text{vol} = \rho(x)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n =$$

使得 $\rho(x)$ 处处非零. 于是, 我们定义函数 $f(x, \theta) \in C^\infty(T[1]M)$ 的奇 Fourier 变换为

$$F[f](x, \psi) := \int d^n\theta \rho^{-1} e^{\psi_\mu \theta^\mu} f(x, \theta),$$

其中 $d^n\theta = d\theta^n \cdots d\theta^1$. 我们希望上式在整个流形上都是良定义的, 所以我们规定 $|\psi_\mu| = -1$ 且 ψ_μ 在坐标变换下的规律与 ∂_μ 相同. 我们还可以定义奇 Fourier 变换的逆, 将 $T^*[-1]M$ 上的函数映到 $T[1]M$ 上

$$F^{-1}[\tilde{f}](x, \theta) = (-1)^{n(n+1)/2} \int d^n\psi \rho e^{-\psi_\mu \theta^\mu} \tilde{f}(x, \psi),$$

其中 $\tilde{f}(x, \psi) \in C^\infty(T^*[-1]M)$. 之后, 我们将余切丛上的函数上面加波浪线, 与切丛上的函数相区别.

$C^\infty(T[1]M)$ 是一个微分分次代数, 且上面的微分算子被定义为

$$D = \theta^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

我们考虑 D 与在奇 Fourier 变换下的性质. 我们发现,

$$F[Df] = (-1)^n \Delta F[f].$$

在确定上式的同时, 我们也得到了 Δ 的明确表达式:

$$\Delta = \rho^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial \psi_\mu} \rho = \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial \psi_\mu} + \partial_\mu (\ln \rho) \frac{\partial}{\partial \psi_\mu} \quad (9.10)$$

根据定义, $\Delta^2 = 0$ 且 $|\Delta| = 1$.

下面考虑两个奇 Fourier 变换与卷积的关系. 我们得到

$$F[fg] = F[f] * F[g],$$

同时我们能够得到明确的卷积的表达式:

$$(\tilde{f} * \tilde{g})(x, \psi) = (-1)^{n(n+|\tilde{f}|)} \int d^n \lambda \rho \tilde{f}(x, \lambda) \tilde{g}(x, \psi - \lambda),$$

其中 $\tilde{f}, \tilde{g} \in C^\infty(T^*[-1]M)$, ψ, λ 是 $T^*[-1]M$ 上的奇坐标. 由于 D 与原本的乘积相容, 所以我们得到 Δ 与 $*$ 相容. 我们还有如下的关系

$$\tilde{f} * \tilde{g} = (-1)^{(n-|\tilde{f}|)(n-|\tilde{g}|)} \tilde{g} * \tilde{f},$$

但是, 这个积不保持 \mathbb{Z} -分级, 即 $|\tilde{f} * \tilde{g}| \neq |\tilde{f}| + |\tilde{g}|$. 相仿的是, 虽然 Δ 是卷积 $*$ 的一个导数, 但却不是自然的乘积的一个导数, 即

$$\Delta(\tilde{f}\tilde{g}) \neq \Delta(\tilde{f})\tilde{g} + (-1)^{|\tilde{f}|} \tilde{f}\Delta(\tilde{g}).$$

我们可以定义一个双线性映射来度量 Δ 与自然乘积的导数的差别:

$$(-1)^{|\tilde{f}|} \{\tilde{f}, \tilde{g}\} = \Delta(\tilde{f}\tilde{g}) - \Delta(\tilde{f})\tilde{g} - (-1)^{|\tilde{f}|} \tilde{f}\Delta(\tilde{g}).$$

直接的计算可以给出

$$\{\tilde{f}, \tilde{g}\} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \psi_\mu} + (-1)^{|\tilde{f}|} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \psi_\mu} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^\mu}$$

我们可以验证, 装备了上述奇 Poisson 括号的 $C^\infty(T^*[-1]M)$ 是一个 Gerstenhaber 代数. 如果我们再加上 Δ , 则 $C^\infty(T^*[-1]M)$ 是一个 BV 代数. 分级流形 $T^*[-1]M$ 是一个 **BV 流形**. 我们上面定义的 BV 算子是依赖积分定义的, 所以 BV 算子与测度的选择有关.

9.6 Stokes 定理

若 C 是光滑流形 M 的子流形, 我们考虑 $T^*[-1]M$ 的子流形 $N^*[-1]C$. 在局部坐标下, $N^*[-1]C$ 被如下条件所限制:

$$x^{p+1} = 0, \quad x^{p+2} = 0, \dots, x^n = 0, \psi_1 = 0, \psi_2 = 0, \dots, \psi_p = 0$$

$x^{p+1}, \dots, x^n, \psi_1, \dots, \psi_p$ 生成了零化理想 $\mathcal{I}_{N^*[-1]C}$. 于是函数层 $C^\infty(N^*[-1]C)$ 可以等同于商 $C^\infty(T^*[-1]M)/\mathcal{I}_{N^*[-1]C}$. 将子流形 $N^*[-1]C$ 的嵌入映射记为 $j: N^*[-1]C \rightarrow T^*[-1]M$. 我们还可以考虑 $T[1]M$ 的子流形 $T[1]C$. 在局部坐标下, $T[1]C$ 被如下条件所限制:

$$x^{p+1} = 0, \quad x^{p+2} = 0, \dots, x^n = 0, \theta^{p+1} = 0, \theta^{p+2} = 0, \dots, \theta^n = 0$$

$x^{p+1}, \dots, x^n, \theta^{p+1}, \dots, \theta^n$ 生成了零化理想 $\mathcal{I}_{T[1]C}$. 于是函数层 $C^\infty(T[1]C)$ 可以等同于商 $C^\infty(T[1]M)/\mathcal{I}_{T[1]C}$. 将子流形 $T[1]C$ 的嵌入映射记为 $i: T[1]C \rightarrow T[1]M$.

上一节中, 我们将奇 Fourier 变换定义为映射

$$F: C^\infty(T[1]M) \rightarrow C^\infty(T^*[-1]M),$$

但 F 无法保持两边的自然的分级交换关系. 利用奇 Fourier 变换, 我们可以将两边的分级流形上的积分联系起来.

$$\int_{T[1]C} d^p x d^p i^*(f(x, \theta)) = (-1)^{(n-p)(n-p+1)/2} \int_{N^*[-1]C} d^p x d^{n-p} \psi \rho j^*(F[f](x, \psi)). \quad (9.11)$$

其中, $d^p x d^p \theta = d^p x d\theta^p d\theta^{p-1} \cdots d\theta^1$ 是 $T[1]C$ 上的积分测度, $d^p x d^{n-p} \psi \rho = d^p x d\psi_n d\psi_{n-1} \cdots d\psi_{p+1} \rho$ 是 $N^*[-1]C$ 上的积分测度.

设 $\{x^\mu\} = \{x^i, x^\alpha\}$ 是 M 的一个正则局部坐标, 即 $\{x^i\}_{i=1}^p$ 是 C 的局部坐标, $\{x^\alpha\}_{\alpha=p+1}^n$ 是 M 中与 C 横截部分的局部坐标. 考虑一个 M 的坐标变换

$$\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j, x^\beta), \quad \tilde{x}^\alpha = \tilde{x}^\alpha(x^j, x^\beta),$$

如果我们要求这个变换也是正则的, 那么应该满足条件

$$\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^i}(x^j, 0) = 0.$$

且根据 Frobenius 定理, 形式 $d\tilde{x}^\alpha$ 限制在 C 上只能是 $\{dx^\beta\}_{\beta=p+1}^n$ 的线性组合. 在 $N^*[-1]C$ 上, ψ 的变化规律为

$$\tilde{\psi}_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\alpha}(x^j, 0) \psi_\beta.$$

于是, 我们看到, $T[1]C$ 和 $N^*[-1]C$ 上的测度在正则坐标变换下是不变的, 所以我们的确找到了子流形上整体定义的一个测度. 在局部坐标中很容易验证上面的积分公式是正确的. 而公式中所有的量都在正则坐标变换下不变, 所以我们得到的上述积分公式是整体定义的一个关系.

下面我们回忆通常的 Stokes 定理的两个重要推论. 首先, M 上的恰当形式在闭 (禁止无边) 子流形 C 上的积分是 0:

$$\int_C d\omega = 0.$$

其次, 闭形式的积分只依赖于 C 的同调类:

$$\int_C \alpha = \int_{\tilde{C}} \alpha$$

其中 $d\alpha = 0$ 且 C 与 \tilde{C} 是同一个同调类中的闭子流形. 在分级流形上, 我们有类似的结果

$$\begin{aligned} \int_{T[1]C} d^p x d^p \theta Dg &= 0, \\ \int_{T[1]C} d^p x d^p \theta f &= \int_{T[1]C} d^p x d^p \theta \tilde{f}, Df = 0. \end{aligned}$$

接下来, 我们可以利用积分公式(9.11)与上面两个结果推出 $N^*[-1]N$ 上的相应结果, 我们之后将会看到, 这就是 **Ward 恒等式**.

$$\begin{aligned} \int_{N^*[-1]C} d^p x d^{n-p} \psi \rho \Delta \tilde{g} &= 0, \\ \int_{N^*[-1]C} d^p x d^{n-p} \psi \rho \tilde{f} &= \int_{N^*[-1]\tilde{C}} d^p x d^{n-p} \psi \rho \tilde{f}, \quad \Delta \tilde{f} = 0 \end{aligned} \quad (9.12)$$

这是奇辛超流形的 Lagrange 子流形上一般的积分理论的一部分, 见 [9].

9.6.1 代数观点看积分

我们现在已经知道了有关 $T^*[-1]M$ 的两个事实: 一方面, $C^\infty(T^*[-1]M)$ 上具有 BV 代数结构, 特别地, 这是一个分级 Lie 代数; 另一方面, 我们在上一节中看到了 $T^*[1]M$ 的子流形与形式的联系(9.12). 我们试图将两个性质结合, 并希望将积分表示成特定的上闭链.

在讨论之前, 我们先回忆一下 Chevalley-Eilenberg 复形的内容. 考虑 Lie 代数 \mathfrak{g} 以及空间 $\wedge^k \mathfrak{g}$. 对于 $\wedge^k \mathfrak{g}$ 中的任何一个元素

$$T_1 \wedge T_2 \wedge \cdots \wedge T_k,$$

微分算子定义为

$$\partial(T_1 \wedge T_2 \wedge \cdots \wedge T_k) = \sum_{i \leq j \leq k} [T_i, T_j] \wedge T_1 \wedge \cdots \wedge \hat{T}_i \wedge \cdots \wedge \hat{T}_j \wedge \cdots \wedge T_n$$

设 $c^k \in \wedge^k \mathfrak{g}^*$, 再定义 $\wedge^k \mathfrak{g}^*$ 中的微分算子 δ 为

$$\delta c^k(T_1 \wedge T_2 \wedge \cdots \wedge T_{k+1}) = c^k(\partial(T_1 \wedge T_2 \wedge \cdots \wedge T_{k+1}))$$

如果令上链 c^k 再一般的 \mathfrak{g} -模中取值, 我们就得到了之前定义的 Chevalley-Eilenberg 复形.

现在我们考虑 Chevalley-Eilenberg 复形在分级 Lie 代数中的推广. 我们从前将通常的 Chevalley-Eilenberg 复形中的上链定义为从 $\wedge^k \mathfrak{g}$ 到 \mathbb{R} 的线性映射, 并将之等同于 $\wedge^k \mathfrak{g}^*$ 中的元素. 换一个角度, $\wedge^k \mathfrak{g}^*$ 也可以被视为是 $S(\mathfrak{g}[1])$, 即将 $\mathfrak{g}[1]$ 做对称化. 我们因此可以在这个意义上将 Chevalley-Eilenberg 复形推广到分级 Lie 代数的情况.

令一个分级向量空间 V 装备了一个级数是 0 的 Lie 括号 $[-, -]$. 我们将上链定义为从 $S(V[1])$ 到实数的映射, 即, 一个 k -上链是满足如下条件的多线性映射 c^k :

$$c^k(v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k) = (-1)^{(|v_i|+1)(|v_{i+1}|+1)} c^k(v_1, \dots, v_{i+1}, v_i, \dots, v_k).$$

微分算子 δ 定义积分为如下的线性映射

$$\delta c^k(v_1, \dots, v_{k+1}) = \sum (-1)^{s_{ij}} c^k((-1)^{|v_i|} [v_i, v_j], v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{k+1}),$$

其中 s_{ij} 被称为 **Koszul 符号**, 定义为

$$s_{ij} = (|v_i| + 1)(|v_1| + \cdots + |v_{i-1}| + i - 1) + (|v_j| + 1)(|v_1| + \cdots + |v_{j-1}| + j - 1) + (|v_i| + 1)(|v_j| + 1)$$

来源于将 v_i, v_j 移至最前方.

现在, 我们令 V 装备的 Lie 括号的级数为 1. 记 $W = V[1]$. k -上链的定义如前:

$$c^k(w_1, \dots, w_i, w_{i+1}, \dots, w_k) = (-1)^{(|w_i|)(|w_{i+1}|)} c^k(w_1, \dots, w_{i+1}, w_i, \dots, w_k).$$

微分算子的定义为

$$\delta c^k(w_1, \dots, w_{k+1}) = \sum (-1)^{s_{ij}} c^k((-1)^{|w_i|-1} [w_i, w_j], w_1, \dots, \hat{w}_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_{k+1}),$$

s_{ij} 定义为

$$s_{ij} = |w_i|(|w_1| + \cdots + |w_{i-1}|) + \\ |w_j|(|w_1| + \cdots + |w_{j-1}|) + |w_i||w_j|$$

我们有了分级 Lie 代数的 Chevalley-Eilenberg 复形的定义, 再结合(9.12), 可以陈述如下的定理.

定理 9.2 考虑 $C^\infty(T^*[-1]M)$ 中的一族函数 $f_1, f_2, \dots, f_k \in C^\infty(T^*[-1]M)$, 且满足

$$\Delta f_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

定义积分

$$c^k(f_1, f_2, \dots, f_k; C) := \int_{N^*[-1]C} d^p x d^{n-p} \psi \rho f_1(x, \psi) \cdots f_k(x, \psi), \quad (9.13)$$

其中 C 是 M 的一个闭子流形. 那么 $(C^\infty(T^*[-1]M), \{-, -\})$ 是一个奇 Lie 代数, 且 c^k 是这个奇 Lie 代数的 Chevalley-Eilenberg 复形的上闭链, 即 $\delta c^k = 0$.

进一步, 如果 C 与 \tilde{C} 在一个同调类中, $c^k(f_1, f_2, \dots, f_k; C)$ 与 $c^k(f_1, f_2, \dots, f_k; \tilde{C})$ 也在一个同调类中. 即,

$$c^k(f_1, f_2, \dots, f_k; C) - c^k(f_1, f_2, \dots, f_k; \tilde{C}) = \delta \tilde{c}^{k-1},$$

其中 \tilde{c}^{k-1} 是某个 $(k-1)$ -上链.

证明. 证明见 [7]. 但是感觉 ψ_i 的变化规律有些奇怪.

基本的思路就是观察到满足

$$\delta f_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

的 $\{f_i\}_{i=1}^p$ 是 $C^\infty(T^*[-1]M)$ 的一个 Lie 子代数. 接下来, 再验证我们定义的积分

$$c^k(f_1, f_2, \dots, f_k; C) := \int_{N^*[-1]C} d^p x d^{n-p} \psi \rho f_1(x, \psi) \cdots f_k(x, \psi)$$

的确是一个上链, 且对于这些 $\{f_i\}_{i=1}^p$, Δ 是一个边界算子. 那么, $\{f_i\}_{i=1}^p$ 就可以构造奇的 Chevalley-Eilenberg 复形. 于是我们定义这个复形的微分算子如下

$$\delta c^k(f_1, \dots, f_{k+1}; C) = - \int_{N^*[-1]C} d^p x d^{n-p} \psi \rho \Delta(f_1(x, \psi) \cdots f_{k+1}(x, \psi)).$$

注意到上面的 δ 的定义只与积分的线性性以及 Δ 作用在 $\{f_i\}_{i=1}^p$ 上的性质有关, 所以这样的 Chevalley-Eilenberg 复形事实上的定义不是唯一的. 比如, 证明中的

$$\int_{N^*[-1]C} d^p x d^{n-p} \psi \rho \epsilon^\alpha \psi_\alpha \Delta(f_1 \cdots f_k)$$

事实上定义的是一个微分算子 δ' , 相差一个 $N^*[-1]C$ 上的测度

$$d^p x d^{n-p} \psi \rho \epsilon^\alpha \psi_\alpha.$$

接下来逐步验证就好. □

例 9.7 我们下面来举一些具体的例子来说明定理. 我们选取 M 的一个体积形式 vol 以及一族向量场 $\{v_i\}_{i=1}^k$, 且任意的 v_i 均保持体积形式不变, 即 $\mathcal{L}_{v_i} \text{vol} = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$, \mathcal{L}_{v_i} 是沿 v_i 的 Lie 导数. 这些向量场构成了一个 Lie 子代数, 且均是散度为零的向量场. 根据 BV 算子的显示表达(9.10), v_i 是无散的当且仅当 $\Delta v_i = 0$. 所以 $\{v_i\}_{i=0}^k$ 满足上面定理的条件. 因此, 若 $n - p = k$, 积分(9.13)化为

$$c^k(v_1, \dots, v_k; C) = \int_C \iota_{v_1} \iota_{v_2} \cdots \iota_{v_k} \text{vol}.$$

这是保持给定体积形式的向量场的 Lie 代数上同调.

上面的特殊情况出现在许多例子中. 比如, 考虑 Lie 群 G 的左不变向量场以及左不变体积形式, 辛流形上的 Hamilton 向量场等等. ◇

9.7 规范理论回顾

9.7.1 主丛上的联络

令 G 为一个 Lie 群, B 为一个流形.

定义 9.5 一个 B 上的 G -主丛 P 是一个流形以及一个光滑映射 $\pi : P \rightarrow B$ 满足如下的条件:

- (i.) G 自由地作用在 P 上,
- (ii.) P 是 B 上的纤维丛, B 上每一点处的纤维都是一个 G -轨道,
- (iii.) 存在 B 的一个开覆盖, 在每个开集 U 上都有 P 的一个局部平凡化 $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ 使得

$$\begin{aligned}\phi_U(p) &= (\pi(p), s_U(p)) \\ s_U(p)(g \cdot p) &= g \cdot s_U(p), s_U(p) \in G\end{aligned}$$

◇

例 9.8 令 $P = S^3$, 视为 \mathbb{C}^2 中的球面:

$$P = S^3 = \{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \}.$$

令 G 为 S^1 , $e^{i\theta} \in S^1$ 通过复数乘法作用在 S^3 上:

$$(z_1, z_2) \mapsto (e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2).$$

定义 π 为:

$$\pi(z_1, z_2) = (2z_1\bar{z}_2, |z_1|^2 - |z_2|^2).$$

由于 $2z_1\bar{z}_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1|^2 - |z_2|^2 \in \mathbb{R}$, 所以 $\text{im}(\pi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^3$. 且 $\text{im}(\pi) \simeq S^2$, 因为

$$|2z_1\bar{z}_2|^2 + (|z_1|^2 - |z_2|^2)^2 = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^2 = 1.$$

因此, S^3 是一个 S^1 -主丛. \diamond

我们考虑无穷小的 G 作用, 即 \mathfrak{g} 作用在 P 上. 选取 Lie 代数 \mathfrak{g} 的一组基 X_1, \dots, X_k , 与之前一样, 记向量场 $\xi_{X_1}, \dots, \xi_{X_k}$ 为 X_1, \dots, X_k 生成的向量场.

由于 G 的作用是自由的, 所以 $\xi_{X_1}, \dots, \xi_{X_k}$ 是线性独立的向量场. 由 $\xi_{X_1}, \dots, \xi_{X_k}$ 张成的向量丛 V 是 TP 的秩为 k 的子丛, V 被称为**垂直丛**.

由于 G 只作用于纤维上, 所以, 容易验证 V 在切映射 π_* 的核中.

定义 9.6 主丛 P 上的一个 (Ehresmann) **联络** 是一个划分

$$TP = V \oplus H,$$

其中 H 是一个 G 不变的 TP 的子丛, 且与 V 互补. H 被称为一个**水平丛**. \diamond

联络与曲率形式 主丛 P 上的联络可以用 1-形式等价地描述.

定义 9.7 主丛 P 上的一个**联络形式** 是一个 Lie 代数值的 1-形式

$$A = \sum_{i=1}^k A_i \otimes X_i \in \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g},$$

使得:

(i.) A 是 G -不变的, $\Omega^1(P)$ 上的 G -作用是 P 上的 G -作用诱导的, \mathfrak{g} 上的 G -作用是伴随作用,

(ii.) A 是垂直的, 即 $\iota_{\xi_X} A = X$ 对所有的 $X \in \mathfrak{g}$ 成立.

\diamond

从 G -主丛的定义中来看, 由于 G 自由地作用在纤维上, 且纤维取值也在 G 中, 因此一点处的纤维实际上就是 Lie 群 G . 在局部上, P 同胚于 $U \times G$, U 是底流形 B 的一个开集, 所以 P 在一点 p 处的切空间 $T_p P$ 实际上可以表示成 $T_p P \simeq T_{\pi(p)} B \oplus T_p G$. 而我们在之前已经找到了 $T_p G$ 的 k 个处处无关的向量场 $\xi_{X_1}, \dots, \xi_{X_k}$ 张成的向量丛 V . 所以 $T_p G = V_p$. 而 P 上的 G -不变向量场, 当且仅当其 G 分量为 0, 所以, $H_p = T_{\pi(p)} B$.

而根据联络形式 A 的 G -不变性与垂直性, 我们发现, H 与 $\ker A$ 之间有如下的联系:

$$H = \ker A = \{ v \in TP \mid \iota_v A = 0 \}.$$

所以, 一个联络形式 A 与一个划分 $TP = H \oplus V$ 是等价的.

给定一个 P 上的联络, 划分 $TP = V \oplus H$ 给出了如下的余切丛的划分:

$$\begin{aligned} T^*P &= V^* \oplus H^* \\ \wedge^2 T^*P &= (\wedge^2 V^*) \oplus (V^* \wedge H^*) \oplus (\wedge^2 H^*) \\ &\vdots \end{aligned}$$

以及余切丛的截面的划分:

$$\begin{aligned} \Omega^1(P) &= \Omega_v^1(P) \oplus \Omega_h^1(P) \\ \Omega^2(P) &= \Omega_v^2(P) \oplus \Omega_m^2(P) \oplus \Omega_h^2(P) \\ &\vdots \end{aligned}$$

我们定义的联络形式 A 是 $\Omega_v^1 \otimes \mathfrak{g}$ 中的元素, 其微分 dA 在空间

$$\Omega^2(P) \otimes \mathfrak{g} = (\Omega_v^2(P) \oplus \Omega_m^2(P) \oplus \Omega_h^2(P)) \otimes \mathfrak{g}$$

中.

设 M 为微分流形, M 上的一个秩为 k 的**分布**是切丛 TM 的一个秩为 k 的子丛. 设 D 为一个分布, 若对 D 中的任意两个向量场 X, Y , 都有 $[X, Y] \in D$, 则称 D 为一个**可积分分布**或**对合分布**.

设 $i: N \rightarrow M$ 是嵌入, D 是一个分布. 若对任意的 $p \in N$, 都有

$$i_{*p}(T_p N) = D_{i(p)}$$

则称 N 为分布 D 的**积分流形**.

如果分布 D 由 X 张成, X 是一个完备向量场, 则 D 的积分流形就是 X 的积分曲线. 下面我们考虑一般的分布. 如果分布 D 的积分流形存在, 则显然 D 是对合的. 反之, 我们有

定理 9.3 (Frobenius) 设 D 为 M 上秩为 k 的对合分布, M 的任何一个如下分页,

$$\{q \in V \mid y^l(q) = \text{const}, l = k+1, \dots, n\}$$

都是 D 的积分流形. 其中 (V, ψ) 是 M 的局部坐标.

我们对联络 1-形式做外微分, 就得到了一个 2 形式. 定义 Ω 为

$$\Omega(X, Y) := dA(X_h, Y_h)$$

其中 X_h, Y_h 为向量场 X, Y 的水平分量, Ω 被称为曲率 2-形式. 进一步,

$$\Omega(X, Y) = X_h(A(Y_h)) - Y_h(A(X_h)) - A([X_h, Y_h]) = -A([X_h, Y_h]).$$

$\Omega(X, Y) = 0$ 当且仅当 $[X_h, Y_h]$ 也是水平的. 换言之, 曲率 2-形式衡量了水平分布 $H \subset TP$ 的可积性. 水平分布 H 的积分流形存在当且仅当 Ω 在 H 上为 0. 反之, 垂直分布 $V \subset TP$ 总是可积的, 因为 $X \mapsto \xi_X$ 实际上是一个 Lie 代数同构, 所以垂直向量场的 Lie 括号依然是垂直向量场. 垂直分布 V 的积分流形显然是 P 上的纤维.

分布的可积性也可以用微分形式的语言来描述. 横向分布 $H = \ker A$ 是可积的当且仅当 A 的分量生成了一个微分理想, 使得 $dA = \Theta \wedge A$, Θ 是 P 上某个 $\text{End}(\mathfrak{g})$ 值的 1-形式. 由于 Ω 度量了 H 的可积性, 我们自然有下面的结果:

命题 9.4

$$\Omega = dA + \frac{1}{2}(A, A)$$

其中, $(-, -)$ 是对称的双线性形式, 由 \mathfrak{g} 上的 Lie 代数与 1-形式的楔积组成.

证明. 我们只要证明

$$dA(u_h, v_h) = dA(u, v) + [A(u), A(v)]$$

对任何 $u, v \in TP$ 成立即可, $[-, -]$ 是 \mathfrak{g} 中的 Lie 括号. 我们只需要分情况讨论.

若 u, v 都是水平的, 那么 $u_h = u, v_h = v, A(u) = A(v) = 0$, 等式显然成立.

若 u, v 都是竖直的, 则 $u_h = v_h = 0$. 我们只要证明欲证等式右边等于 0 即可. 不妨设 $u = \xi_X, v = \xi_Y$, 其中 $X, Y \in \mathfrak{g}$, 那么

$$\begin{aligned} & dA(u, v) + \frac{1}{2}(A(u), A(v)) \\ &= \xi_X(1 \otimes Y) - \xi_Y(1 \otimes X) - A([\xi_X, \xi_Y]) + [X, Y] \\ &= -A(\xi_{[X, Y]}) + [X, Y] \\ &= 0 \end{aligned}$$

若 u 是水平的, v 是竖直的. 因此 $u = u_h, v_h = 0$, 欲证等式左边是 0. 依然设 $v = \xi_Y$, 于是

$$dA(u, \xi_Y) + [A(u), Y] = dA(u, \xi_Y) = -A([u, \xi_Y])$$

由于 $H \subset TP$ 是 G -不变的向量场, 所以 $[u, \xi_Y] = 0$

□

命题 9.5

$$(d\Omega)(u_h, v_h, w_h) = 0, \forall u, v, w \in TP.$$

证明. 我们将 A 写成

$$A = \theta^i \otimes X_i$$

的形式, 其中 $\theta^i \in \Omega^1(P)$. 于是, 根据上一个命题, 我们有

$$\Omega = dA + \frac{1}{2}(A, A) = (d\theta^i) \otimes X_i + \frac{1}{2}\theta^i \wedge \theta^j \otimes [X_i, X_j],$$

再求一次外微分, 得到

$$\begin{aligned} d\Omega &= \frac{1}{2}d\theta^i \wedge \theta^j \otimes [X_i, X_j] + \frac{1}{2}\theta^i \wedge d\theta^j \otimes [X_i, X_j] \\ &= d\theta^i \wedge \theta^j \otimes [X_i, X_j]. \end{aligned}$$

由于 $\theta^j(u_h) = 0$ 对任意 $u \in TP$ 都成立, 于是命题成立. \square

9.7.2 规范场

定义 9.8 Maurer-Cartan 形式 是 Lie 群 G 上的 \mathfrak{g} -值 1-形式, 定义为

$$\theta|_g := \theta_e \circ (g^{-1})_*.$$

其中 θ_e 是 $T_e G$ 与 \mathfrak{g} 之间的自然同构. \diamond

若 v 是一个左不变向量场, 那么 $\theta(v) = v_e$. 容易验证

$$d\theta = -\frac{1}{2}(\theta, \theta).$$

事实上, 如果将 G 视为一个 G 主丛, 则其底流形为一点. 因此, 任何向量场的水平分量均为 0, 上述等式就是 G 作为主丛时的 Maurer-Cartan 结构方程.

若主丛 P 的一个局部平凡化是 U_α , 那么, 我们就存在局部的截面 $s_\alpha : U_\alpha \rightarrow \pi^{-1}U_\alpha$. 将联络 1-形式沿着这个局部截面拉回, 我们就可以定义 U_α 上的一个 \mathfrak{g} -值 1-形式:

$$\omega_\alpha := s_\alpha^* A.$$

命题 9.6 将联络 1-形式 A 限制在 $\pi^{-1}U_\alpha$ 上, 得到的局部表示为

$$A_\alpha = \text{Ad}_{g_\alpha} \circ \pi^* \omega_\alpha + g_\alpha^* \theta,$$

其中 θ 是 *Maurer-Cartan* 1-形式.

证明. 注意到, 对于一点 $p \in \pi^{-1}U_\alpha$, 任何 $v \in T_p P$ 都能够分解成 $v = (s_\alpha)_* \pi_* + \bar{v}$, 且上述分解是唯一的. 由于 $g_\alpha \circ s_\alpha = e$ 是常值映射, 所以 $(g_\alpha)_* \circ (s_\alpha)_* = 0$. 由于

$$A_\alpha = \text{Ad}_{g_\alpha} \circ \pi^* \omega_\alpha + g_\alpha^* \theta = g_\alpha^* \circ \pi^* \omega_\alpha + g_\alpha^* \theta,$$

于是, 将 A_α 作用在 v 上, 得到

$$\begin{aligned} A_\alpha(v) &= (g_\alpha^* \circ \pi^* \circ s_\alpha^* A)(v) + (g_\alpha^* \theta)(v) \\ &= A((g_\alpha)_* \circ (s_\alpha)_* \circ \pi_* v) + \theta_e(v) \\ &= 0 + \theta_e((g_\alpha)_* \bar{v}) \\ &= A(\bar{v}) \\ &= A(v). \end{aligned}$$

接下来, 我们还可以证明 A_α 在 G 的作用下是不变的. 于是 A_α 与 A 在 $\pi^{-1}U_\alpha$ 的每一点上都是一致的. \square

9.8 附录

9.8.1 层

数学中, 一个**层**是用来系统地描述定义在拓扑空间中的开集上的局部性质的工具. 局部性质可以被限制在更小的开集上, 且一个开集上的局部性质与这个开集的开覆盖的局部性质的并是等价的. 例如, 这种局部性质可以是在每个开集上定义的光滑实函数环. 层是一般而抽象的定义, 对于具体的局部性质, 定义可以十分不同. 例如, 可以定义集合的层与环的层.

层之间存在态射. 一个固定的拓扑空间上的层构成了一个范畴.

由于层的十分一般的性质, 层在几何与拓扑中有很多的应用. 例如, 一个微分流形或一个概型上的几何结构可以用拓扑空间上环的层来表达. 例如, 像向量丛和除子这样的几何构造可以用层自然地描述. 其次, 层给出了一个非常一般的上同调论的框架, 包含了例如奇异上同调的通常的拓扑上同调理论. 在代数几何与复几何中, 层的上同调提供了空间的拓扑性质与几何性质之间的有力联系.

定义一个层的第一步是定义一个**原层**. 原层描述了局部性质的限制. 第二部是提出正规化与粘结公理. 满足这些公理的原层是一个层.

定义 9.9 令 X 为一个拓扑空间, 令 \mathbf{C} 为一个范畴. X 上的一个**原层** F 是一个反变函子 $F: \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathbf{C}$, 将 $\mathcal{O}(X)$ 中的任何开集之间的嵌入 $i: V \hookrightarrow U$ 映到限制映射 $\text{res}_{V,U}: F(U) \rightarrow F(V)$. \diamond

若 F 是 X 上的一个 \mathbf{C} -值的原层, U 是 X 的一个开子集. 那么 $F(U)$ 被称为 F 在 U 上的**截面**. 若 \mathbf{C} 是一个具体范畴, 那么 $F(U)$ 中的每个元素被称为一个**截面**. $F(U)$ 也经常被记为 $\Gamma(U, F)$, 在层的上同调理论中, U 经常是固定的而 F 却是一个变量.

为了简便起见, 我们先考虑 $\mathbf{C} = \mathbf{Set}$ 的情况. 事实上, 下面的层的定义当 \mathbf{C} 是一个具体范畴, 且 \mathbf{C} 到 \mathbf{Set} 的忘却函子保持同构时也是成立的.

定义 9.10 一个**层**是一个 \mathbf{Set} -值的原层, 并满足如下的两条公理:

- (i.) (局部性) 若 $\{U_i\}$ 是开集 U 的一个开覆盖, $s, t \in F(U)$ 使得 $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ 在每个 U_i 上都成立, 那么 $s = t$.
- (ii.) (粘合性) 若 $\{U_i\}$ 是开集 U 的一个开覆盖. 若对每个 $s_i \in F(U_i)$ 都有 $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$, 则存在一个 $s \in F(U)$ 使得 $s|_{U_i} = s_i$.

◇

局部性公理保证了满足粘合性公理的层的唯一性.

若 \mathbf{C} 中存在积, 那么上述的两条公理等价于要求, 对 U 的任何开覆盖 $\{U_i\}$, 下图存在等值子 $F(U)$:

$$F(U) \longrightarrow \prod_i F(U_i) \xrightleftharpoons[\text{res}_{U_i \cap U_j, U_j}]{\text{res}_{U_i \cap U_j, U_i}} \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j) .$$

注意到, 拓扑空间的空子集被空子集族所覆盖. 空子集族的积与空子集族的极限都是终对象, 因此, 空子集上的层的值也是一个终对象. 若层是 **Set**-值的, 用局域性公理, 说明空子集上至多有一个截面. 在利用粘合公理, 说明空子集上至少有一个截面. 这个性质被称为**正规化公理**.

可以证明, 拓扑空间上定义一个层等价于在拓扑基上定义层. 因此, 层经常在拓扑基的开集中定义, 实际中也经常在拓扑基的开集上验证层公理.

定义 9.11 令 F, G 为 X 上两个 \mathbf{C} -值的层. 层之间的态射 $\phi : G \rightarrow F$ 是函子 F, G 之间的自然变换. 即, 对于任何的嵌入 $i : V \hookrightarrow U$, 下图交换.

$$\begin{array}{ccc} G(U) & \xrightarrow{\phi_U} & F(U) \\ \downarrow \text{res}_{V,U} & & \downarrow \text{res}_{V,U} \\ G(V) & \xrightarrow{\phi_V} & F(V) \end{array}$$

◇

注意到我们定义层之间的态射时没有用到粘结公理, 于是, 上述定义对原层之间的态射一样是成立的.

例 9.9 令 X, Y 为拓扑空间, 定义 X 上的原层为

$$C_{X,Y}(U) := \langle f : U \rightarrow Y \mid f \text{ is continuous} \rangle$$

容易验证, 这个原层是层.

◇

例 9.10 令 $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, 再令上例中的 $Y = \mathbb{K}$. 于是 $C_X := C_{X, \mathbb{K}}$ 就是一个 \mathbb{K} -代数层.

◇

定义 9.12 Let X be a complex manifold. Then a sheaf of modules over the structure sheaf \mathcal{O}_X of X is called an **analytic sheaf**.

◇

第十章 共形场论初步

本章主要参考 [2]

10.1 对称性

在这里, 我们用 [2] 的观点. 如果我们考虑场 Φ , 那么, 一个**变换**意味着同时对场 Φ 和坐标 x 进行变换:

$$\begin{aligned} x &\mapsto x', \\ \Phi(x) &\mapsto \Phi'(x'). \end{aligned} \tag{10.1}$$

要求变换后的场可以用变换前的场表示:

$$\Phi'(x') = \mathcal{F}(\Phi(x)).$$

我们在这里并不多谈这究竟是主动变换还是被动变换, 这是无意义的. 接下来只用例子说明.

例 10.1 平移变换. 场和坐标的变换规律如下:

$$\begin{aligned} x &\mapsto x + a, \\ \Phi(x) &\mapsto \Phi(x). \end{aligned}$$

其中 $\Phi'(x') = \Phi(x)$.

◇

例 10.2 Lorentz 变换. 场和坐标的变换规律如下

$$\begin{aligned} x^\mu &\mapsto \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \\ \Phi(x) &\mapsto L_\Lambda \Phi(x) \end{aligned}$$

L_Λ 是 Lorentz 变换的某个表示. 在这里

$$\Phi'(\Lambda x) = L_\Lambda \Phi(x).$$

◇

例 10.3 标度变换. 场和坐标的变换规律如下

$$\begin{aligned} x^\mu &\mapsto \lambda x^\mu \\ \Phi(x) &\mapsto \lambda^{-\Delta} \Phi(x) \end{aligned}$$

Δ 是场 Φ 的标度维度.

◇

我们如下计算作用量 S 的变换 S'

$$\begin{aligned} S' &= \int d^d x \mathcal{L}(\Phi'(x), \partial_\mu \Phi'(x)) \\ &= \int d^d x' \mathcal{L}(\Phi'(x'), \partial'_\mu \Phi'(x')) \\ &= \int d^d x \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) \mathcal{L}(\mathcal{F}(\Phi(x)), (\partial x^\nu / \partial x'^\mu) \partial_\nu \mathcal{F}(\Phi(x))) \end{aligned} \quad (10.2)$$

10.1.1 无穷小变换与 Noether 定理

我们考虑坐标和场的无穷小变化. 假设变换可以用一组参数 $\{\omega_a\}$ 控制, 那么变换(10.1)的无穷小形式就是

$$\begin{aligned} x^\mu &\mapsto x^\mu + \omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \\ \Phi(x) &\mapsto \Phi(x) + \omega_a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a}(x). \end{aligned} \quad (10.3)$$

我们通常定义生成元 G_a 为

$$\delta\Phi(x) = \Phi'(x) - \Phi(x) := -i\omega_a G_a \Phi(x). \quad (10.4)$$

因此, 只保留 ω_a 的一阶, 根据(10.3)

$$\Phi'(x) = \Phi(x) - \omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \partial_\mu \Phi(x) + \omega_a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a}(x)$$

于是我们得到生成元 G_a 的显式表达为

$$iG_a \Phi = \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \partial_\mu \Phi - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a}. \quad (10.5)$$

下面我们介绍 Noether 定理. Noether 定理陈述了作用量的每个连续对称性都存在一个经典的守恒流. 导出 Noether 定理的较为简洁的方法是, 假设无穷小参数 $\{\omega_a\}$ 是与坐标有关的. 我们先计算无穷小变换(10.3)的 Jacobi 矩阵元 $\partial x'^\mu / \partial x^\nu$:

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu + \partial_\nu \left(\omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \right).$$

根据反函数定理, 同时得到逆矩阵的元素为

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta_\mu^\nu - \partial_\mu \left(\omega_a \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a} \right).$$

由于在 E 无穷小的时候, 我们有公式

$$\det(1 + E) \approx 1 + \text{Tr}(E).$$

所以

$$\det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) = 1 + \partial_\mu \left(\omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \right).$$

将上面这些结果带入(10.2), 得到

$$S' = \int d^d x \left(1 + \partial_\mu \left(\omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \right) \right) \times \\ \mathcal{L} \left(\Phi + \omega_a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a}, \left(\delta_\mu^\nu - \partial_\mu \left(\omega_a \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a} \right) \right) (\partial_\nu \Phi + \partial_\nu \left(\omega_a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a} \right)) \right)$$

于是我们计算 $\delta S = S' - S$. 具体展开的过程我们不列出, 但是, 在化简的过程中, 我们用到了运动方程

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}\right) \omega_a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a} = 0.$$

以及用到了变分与求偏导数可以交换次序

$$\partial_\mu \left(\omega_a \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a}\right) = \partial_\mu \omega_a \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a} + \omega_a \partial_\mu \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a} = \partial_\mu \omega_a \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a} + \omega_a \frac{\delta}{\delta \omega_a} \delta_\mu^\nu = \partial_\mu \omega_a \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a}.$$

最终我们得到

$$\delta S = - \int d^d x j_a^\mu \partial_\mu \omega_a$$

其中

$$j_a^\mu = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\nu \Phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}\right) \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a}. \quad (10.6)$$

由于系统具有对称性, 所以 $\delta S = 0$. 那么, 进行一次分布积分

$$\int d^d x \partial_\mu j_a^\mu \omega_a = 0$$

于是得到流守恒

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0$$

的结论. 进而可以构造守恒荷

$$Q_a = \int d^{d-1} x j_a^0.$$

我们要注意的, Noether 定理本质上是一个经典的, 在壳的 (我们用到了运动方程) 结果. 在量子场论中, 对应的不在壳的恒等式就是 Ward 恒等式.

10.1.2 Ward 恒等式

在量子场论中, 我们认为的可观测量是关联函数, 而不是作用量 S . 将关联函数定义为 (忽略掉虚数单位 i)

$$\langle O_1[\Phi(x_1)] \cdots O_n[\Phi(x_n)] \rangle = \int D[\Phi] O_1[\Phi(x_1)] \cdots O_n[\Phi(x_n)] e^{-S} \quad (10.7)$$

我们现在假设, 作用量 S 泛函积分测度 $D[\Phi]$ 在变换(10.1)下的是不变的. 那么, 我们有

$$\begin{aligned} S' &:= S[\Phi'] = S[\Phi] \\ D[\Phi'] &= D[\Phi] \end{aligned}$$

根据这些不变性, 我们得到如下的等式

$$\begin{aligned} \langle \Phi(x'_1) \cdots \Phi(x'_n) \rangle &= \int D[\Phi] \Phi(x'_1) \cdots \Phi(x'_n) e^{-S} \\ &= \int D[\Phi'] \Phi'(x'_1) \cdots \Phi'(x'_n) e^{-S[\Phi']} \\ &= \int D[\Phi] \mathcal{F}(\Phi(x_1)) \cdots \mathcal{F}(\Phi(x_n)) e^{-S[\Phi]} \\ &= \langle \mathcal{F}(\Phi(x_1)) \cdots \mathcal{F}(\Phi(x_n)) \rangle \end{aligned}$$

因此, 关联函数的变换规律如下

$$\langle \Phi(x'_1) \cdots \Phi(x'_n) \rangle = \langle \mathcal{F}(\Phi(x_1)) \cdots \mathcal{F}(\Phi(x_n)) \rangle \quad (10.8)$$

上面的变换规律考虑的是关联函数对坐标变换 $x \mapsto x'$ 的响应, 因为在路径积分中积分变量是场, 因此单纯的场的变换 $\Phi \mapsto \Phi'$ 只是对积分变量的变换, 是不改变积分的值的. 这与作用量 S 的变换规律不同. 因为作用量 S 是一个 Φ 的泛函, 对坐标变换没有响应. 下面我们来看一些例子.

例 10.4 平移不变性.

$$\langle \Phi(x_1 + a) \cdots \Phi(x_n + a) \rangle = \langle \Phi(x) \cdots \Phi(x_n) \rangle.$$

◇

例 10.5 Lorentz 不变性.

$$\langle \Phi(\Lambda x_1) \cdots \Phi(\Lambda x_n) \rangle = \langle L_\Lambda \Phi(x_1) \cdots L_\Lambda \Phi(x_n) \rangle$$

◇

例 10.6 标度不变性.

$$\langle \phi_1(\lambda x_1) \cdots \phi_n(\lambda x_n) \rangle = \lambda^{-\Delta_1} \cdots \lambda^{-\Delta_n} \langle \phi_1(x_1) \cdots \phi_n(x_n) \rangle.$$

◇

现在我们考虑场本身的无穷小变换

$$\Phi'(x) = \Phi(x) - i\omega_a G_a \Phi(x).$$

和之前一样, 我们假设 $D[\Phi]$ 和 S 在变换下不变. 根据关联函数的变换规律(10.8)以及下面的注释, 若将场的乘积 $\Phi(x_1) \cdots \Phi(x_n)$ 记为 X , 则关联函数 $\langle X \rangle$ 在无穷小变换下是不变的. 所以, 我们可以写成

$$\langle X \rangle = \frac{1}{Z} \int D[\Phi] (X + \delta X) \exp(-\{S + \int d^d x \partial_\mu j_a^\mu \omega_a(x)\})$$

上式可以写成

$$\langle \delta X \rangle = \int d^d x \partial_\mu \langle j_a^\mu(x) X \rangle \omega_a(x). \quad (10.9)$$

另一方面, δX 可以计算如下

$$\begin{aligned} \delta X &= -i \sum_{i=1}^n (\Phi(x_1) \cdots G_a \Phi(x_i) \cdots \Phi(x_n)) \omega_a(x_i) \\ &\quad - i \int d^d x \omega_a(x) \sum_{i=1}^n \{\Phi(x_1) \cdots G_a \Phi(x_i) \cdots \Phi(x_n)\} \delta(x - x_i) \end{aligned}$$

为了使等式两边对所有的 $\omega_a(x)$ 都成立, 必须有如下的恒等式成立

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle j_a^\mu(x) \Phi(x_1) \cdots \Phi(x_n) \rangle = -i \sum_{i=1}^n \delta(x - x_i) \langle \Phi(x_1) \cdots G_a \Phi(x_i) \cdots \Phi(x_n) \rangle \quad (10.10)$$

上面的恒等式被称为 Ward 恒等式.

Ward 恒等式使我们可以将守恒荷

$$Q_a = \int d^{d-1} x j_a^0(x)$$

等同于对称变换的生成元在 Hilbert 空间中的表示. 将 $\Phi(x_2) \cdots \Phi(x_n)$ 记为 Y 并假设 $t = x_1^0$ 与 Y 中所有的时间都不同. 因此, 我们可以选择一个区间 $[t_-, t_+]$, 使得

$$[t_-, t_+] \times \mathbb{R}^{d-1}$$

中只包含 x_1 . 将 Ward 恒等式 10.10 两端对 x 积分, 我们得到

$$\langle Q_a(t_+) \Phi(x_1) Y \rangle - \langle Q_a(t_-) \Phi(x_1) Y \rangle = -i \langle G_a \Phi(x_1) Y \rangle.$$

因为关联函数是用时序乘积定义的, 不妨设 t 比 Y 中所有的 x_i^0 都大, 再取极限 $t_- \rightarrow t_+$, 得到

$$\langle 0 | [Q_a, \Phi(x_1)] Y | 0 \rangle = -i \langle 0 | G_a \Phi(x_1) | 0 \rangle$$

对任意的乘积 Y 都成立. 所以我们得到

$$11 \tag{10.11}$$

10.2 一般的共形场论

在本章中, 我们考虑的度规就是通常的 d 维空间的 Euclidean 度规, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. 我们最终得到共形变换的所有形式如下:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + a^\mu, & \text{平移} \\ x'^\mu &= \alpha x^\mu, & \text{伸缩} \\ x'^\mu &= M^\mu_\nu x^\nu, & \text{旋转} \\ x'^\mu &= \frac{x^\mu - b^\mu \mathbf{x}^2}{1 - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}^2 \mathbf{x}^2}, & \text{SCT} \end{aligned} \tag{10.12}$$

b^μ 是任意的常数向量.

生成元为

$$\begin{aligned}
 P_\mu &= -i\partial_\mu \\
 D &= -ix^\mu\partial_\mu \\
 L_{\mu\nu} &= i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \\
 K_\mu &= -i(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - \mathbf{x}^2\partial_\mu)
 \end{aligned} \tag{10.13}$$

上面的生成元满足如下的对易关系, 构成了一个共形代数

$$\begin{aligned}
 [D, P_\mu] &= iP_\mu \\
 [D, K_\mu] &= -iK_\mu \\
 [K_\mu, P_\nu] &= 2i(\eta_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu}) \\
 [K_\rho, L_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}K_\nu - \eta_{\rho\nu}K_\mu) \\
 [P_\rho, L_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu) \\
 [L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho})
 \end{aligned} \tag{10.14}$$

将上面的生成元线性组合, 定义下面的生成元

$$\begin{aligned}
 J_{\mu\nu} &= L_{\mu\nu} \\
 J_{-1,\mu} &= \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu) \\
 J_{-1,0} &= D \\
 J_{0,\mu} &= \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu)
 \end{aligned}$$

它们满足对易关系

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i(\eta_{ad}J_{bc} + \eta_{bc}J_{ad} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac})$$

这说明共形代数与 $\text{SO}(d+1, 1)$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{so}(d+1, 1)$ 是同构的.

下面我们来构造共形不变量, 即, 在10.12中所有的变换下不变的函数. 平移对称性与旋转对称性告诉我们这函数一定只依赖于 $|x_i - x_j|$. 伸缩不变性告诉我们这函数只依赖于距离的比例

$$\frac{|x_i - x_j|}{x_k - x_l}$$

在特殊共形变化下, x_i 与 x_j 之间的距离变成

$$|x'_i - x'_j| = \frac{|x_i - x_j|}{\sqrt{1 - 2b \cdot x_i + b^2 x_i^2} \sqrt{1 - 2b \cdot x_j + b^2 x_j^2}}$$

因此不可能构造只与两点或三点有关的共形不变量. 最简单的共形不变量应该是如下的四点函数

$$\frac{|x_1 - x_2||x_3 - x_4|}{|x_1 - x_3||x_2 - x_4|}, \quad \frac{|x_1 - x_2||x_3 - x_4|}{|x_2 - x_3||x_1 - x_4|} \quad (10.15)$$

上面的共形不变量被称为**非调和比**或**交比**.

10.2.1 经典场论中的共形不变性

如果一个理论的作用量在共形变换下是不变的, 则称该理论在经典层面上具有共形不变性. 通常来说, 标度不变性和 Poincaré 不变性是一般的共形不变性的结果; 但在某些特定的理论中, 可以从 Poincaré 不变性与标度不变性推出共形不变性.

但我们要知道, 量子层面的共形不变性无法从经典层面的共形不变性推出. 因为, 一个量子场论引入一个标度一定需要一个特定的正规化方案, 这个标度破坏了共形不变性, 除了参数的某些特定的取值处. 这些特定的取值事实上是一个重整化群不动点.

共形代数的表示

给定一个由 ω_g 参数化的无穷小共形变换. 我们要找到一个生成元的矩阵表示, 使得一个场 $\Phi(x)$ 按照如下规律变化

$$\Phi'(x') = (1 - i\omega_g T_g)\Phi(x).$$

我们最终得到

$$\begin{aligned} P_\mu \Phi(x) &= -i\partial_\mu \Phi(x) \\ L_{\mu\nu} \Phi(x) &= i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \Phi(x) + S_{\mu\nu} \Phi(x) \\ D\Phi(x) &= (-ix^\nu \partial_\nu - i\Delta) \Phi(x) \\ K_\mu \Phi(x) &= (\kappa_\mu - 2ix_\mu \Delta x^\nu S_{\mu\nu} - 2ix_\mu x^\nu \partial_\nu + ix^2 \partial_\mu) \Phi(x) \end{aligned} \tag{10.16}$$

我们还可以从生成元的表示导出有限变换的表示. 我们仅给出标量场的结果, 这里 $S_{\mu\nu} = 0$. 在共形变换 $x \mapsto x'$ 下, 标量场的变化规律为

$$\phi(x) \mapsto \phi'(x') = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\Delta/d} \phi(x)$$

$|\partial x' / \partial x|$ 是共形变换的 Jacobian.

能动张量

在任意的坐标变换 $x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon^\mu$ 下, 作用量变化如下

$$\delta S = \int d^d x T^{\mu\nu} \partial_\mu \epsilon_\nu = \frac{1}{2} \int d^d x T^{\mu\nu} (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu)$$

最后一个等号是因为能动张量可以通过添加 Belinfante 项来对称化.

如果变换 $x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon^\mu$ 是共形的, 那么作用量的变化可以写成

$$\delta S = \frac{1}{d} \int d^d x T^\mu_\mu \partial_\rho \epsilon^\rho.$$

如果理论是共形不变的, 那么对任意的 ϵ , 上式为 0 仅当 $T_\mu^\mu = 0$, 即共形不变性能够导致无迹的能动张量. 反之, 若能动张量是无迹且对称的, 那么就能够推出整个共形不变性. 在某些条件下, 标度不变性和转动不变性能够得到无迹对称的能动张量; 但一般来说, 这两个对称性无法推出整个共形不变性.

考虑 $d > 2$ 时的一般的标度不变的场论. 无限小的伸缩变换为

$$\begin{aligned} x^\mu &\mapsto (1 + \alpha) x^\mu \\ \Phi(x) &\mapsto (1 - \alpha \Delta) \Phi(x) \end{aligned}$$

10.2.2 量子场论中的共形不变性

关联函数

考虑标量场. 根据关联函数的变换规律(10.8), 我们得到两点关联函数在共形变换下的变化规律为

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|_{x=x_1}^{\Delta_1/d} \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|_{x=x_2}^{\Delta_2/d} \langle \phi_1(x'_1) \phi_2(x'_2) \rangle. \quad (10.17)$$

考虑变换为标度变换 $x \mapsto \lambda x$, 得到上式成立当且仅当

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \lambda^{\Delta_1 + \Delta_2} \langle \phi_1(\lambda x_1) \phi_2(\lambda x_2) \rangle.$$

平移不变性和转动不变性要求

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = f(|x_1 - x_2|),$$

其中 $f(x) = \lambda^{\Delta_1 + \Delta_2} f(\lambda x)$. 换言之, 两点关联函数的形式一定是

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} \quad (10.18)$$

再将特殊共形变换应用于(10.17). 此时

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \frac{1}{(1 - 2b \cdot x + b^2 x^2)^d}$$

等式两边变成

$$\frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} = \frac{C_{12}}{\gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2}} \frac{(\gamma_1 \gamma_2)^{(\Delta_1 + \Delta_2)/2}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}}$$

因此, 我们得到, 对于 quasi-primary 场, 二点关联函数仅当他们的标度维数相同时不为零. 即

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \begin{cases} C_{12}/|x_1 - x_2|^{2\Delta_1}, & \Delta_1 = \Delta_2 \\ 0, & \Delta_1 \neq \Delta_2 \end{cases} \quad (10.19)$$

利用同样的分析, 我们得到三点关联函数的表达式

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \phi_3(x_3) \rangle = \frac{C_{123}}{x_{12}^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} x_{23}^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1} x_{13}^{\Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2}}. \quad (10.20)$$

但是当 $n \geq 4$ 时, n 点关联函数可以是交比的任意函数.

Ward 恒等式

平移不变性对应的 Ward 恒等式为

$$\partial_\mu \langle T^\mu_\nu X \rangle = - \sum_i \delta(x - x_i) \frac{\partial}{\partial x_i^\nu} \langle X \rangle. \quad (10.21)$$

其中 X 是 n 个场的乘积.

再考虑转动不变性对应的 Ward 恒等式. 一旦能动张量被对称化, 相应的守恒流的形式为

$$j^{\mu\nu\rho} = T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu.$$

所以 Ward 恒等式为

$$\partial_\mu \langle (T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu) X \rangle = \sum_i \delta(x - x_i) [(x_i^\nu \partial_i^\rho - x_i^\rho \partial_i^\nu) \langle X \rangle - i S_i^{\nu\rho} \langle X \rangle].$$

假定系统还具有平移对称性, 利用第一个 Ward 恒等式(10.21), 我们最终得到转动不变性对应的 Ward 恒等式

$$\langle (T^{\rho\nu} - T^{\nu\rho})X \rangle = -i \sum_i \delta(x - x_i) S_i^{\nu\rho} \langle X \rangle. \quad (10.22)$$

我们再来考虑标度对称性. 通过之前的步骤, 我们已经知道标度不变的守恒流可以写成

$$j_D^\mu = T_\nu^\mu x^\nu.$$

我们证明了 T_ν^μ 总可以进行无迹化. 再根据(10.16), $D = -ix^\nu \partial_\nu - i\Delta$, 所以 Ward 恒等式为

$$\partial_\nu \langle T_\nu^\mu x^\nu X \rangle = - \sum_i \delta(x - x_i) \{ x_i^\nu \frac{\partial}{\partial x_i^\nu} \langle X \rangle + \Delta_i \langle X \rangle \}$$

再假设平移对称性, 利用(10.21), 最终得到

$$\langle T_\mu^\mu X \rangle = - \sum_i \delta(x - x_i) \Delta_i \langle X \rangle \quad (10.23)$$

.

2 维时 $T_{\mu\nu}$ 的无迹性

To be continued.

10.3 2 维共形场论

10.3.1 2 维共形群

在共形变换下, 度规的变化为

$$g_{\mu\nu}(r) \rightarrow \Omega(r) g_{\mu\nu}(r)$$

考虑变换

$$x^\mu \mapsto w^\mu(x)$$

则这个变换是共形变换当且仅当

$$\frac{w^\mu}{x^\alpha} \frac{w^\nu}{x^\beta} g^{\alpha\beta} \propto g^{\mu\nu}$$

上式等价于 **Cauchy-Riemann** 方程. 于是推出 w 是全纯的. 我们知道, 复平面到自身的全纯映射是共形的. 所以变换 w 是共形的当且仅当它是全纯的.

我们在上面讨论的 w 是局域变换, 即, 我们并没有要求 w 在整个复平面上定义并且存在逆变换. 因此, 我们要把**全局共形变换**与局域共形变换区别开. 全局共形变换是定义在整个复平面上的全纯映射, 并存在逆. 因此所有的全局共形变换形成一个群, 被称为**特殊共形群**. 复变函数告诉我们 [2], 特殊共形群中的元素具有如下形式

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1. \quad (10.24)$$

其中 a, b, c, d 全部是复数. 于是, 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (10.25)$$

完全确定了投影变换 f . 进一步验证, 映射

$$f = \frac{az + b}{cz + d} \mapsto A$$

是一个群同态, 将投影映射的复合映到矩阵的乘法. 因此, 我们将二维的特殊共形群等同于 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. 但是, $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 视为实 **Lie** 群时与 $\mathrm{SO}(3, 1)$ 同构, 因此我们对二维的全局共形变换并不陌生.

在物理上, 一般碰到的都是局域共形变换. 任何局域无穷小变换都能表示成

$$z' = z + \epsilon(z)$$

其中

$$\epsilon(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^{n+1}.$$

标量场的变化

$$\phi(z', \bar{z}') = \phi(z, \bar{z}) + \epsilon(z) \partial \phi(z, \bar{z}) + \bar{\epsilon}(\bar{z}) \bar{\partial} \phi(z, \bar{z})$$

或者

$$\delta \phi = \epsilon \partial \phi(z, \bar{z}) + \bar{\epsilon} \bar{\partial} \phi(z, \bar{z}) = \sum_n (c_n \ell_n \phi(z, \bar{z}) + \bar{c}_n \bar{\ell}_n \phi(z, \bar{z})).$$

定义

$$\begin{aligned} \ell_n &= z^{n+1} \partial \\ \bar{\ell}_n &= \bar{z}^{n+1} \bar{\partial}, \end{aligned} \tag{10.26}$$

满足如下对易关系

$$\begin{aligned} [\ell_n, \ell_m] &= (m - n) \ell_{n+m} \\ [\bar{\ell}_n, \bar{\ell}_m] &= (m - n) \bar{\ell}_{n+m} \\ [\ell_n, \bar{\ell}_m] &= 0 \end{aligned} \tag{10.27}$$

上面的共形代数有时被称为 Witt 代数.

Primary Fields

如果二维自旋是 s , 定义**全纯共形维数** h , 以及相对应的反全纯共形维数 \bar{h}

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}(\Delta + s) \\ \bar{h} &= \frac{1}{2}(\Delta - s). \end{aligned}$$

Quasi-primary 的场的变化规律为

$$\phi'(w', \bar{w}') = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-h} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}\right)^{-\bar{h}} \phi(z, \bar{z}) \tag{10.28}$$

如果 $w = z + \epsilon(z)$ 以及 $\bar{w} = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z})$, 且 $\epsilon, \bar{\epsilon}$ 都很小, 那么 quasi-primary 场的变分为

$$\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \phi = \phi'(z, \bar{z}) - \phi(z, \bar{z}) = -(h\phi\partial\epsilon + \epsilon\partial\phi) - (\bar{h}\phi\bar{\partial}\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}\bar{\partial}\phi).$$

如果一个场在所有的 2 维局部共形变换下的变化规律都是(10.28), 则称之为 primary 的. 显然, 所有 primary 的场都是 quasi-primary 的, 但反之不然. 我们将会看到, 一个场可能只在全局共形变换 $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 下按照(10.28)变换, 但在局域共形变换下不按照(10.28)变换, 常见的不是 primary 场的 quasi-primary 场是能动张量.

10.3.2 Ward 恒等式

我们在上一章中得到了共形不变的 Ward 恒等式(10.21), (10.22), (10.23). 我们将其重复如下

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle T_\nu^\mu(x) X \rangle &= - \sum_{i=1}^n \delta(x - x_i) \frac{\partial}{\partial x_i^\nu} \langle X \rangle \\ \epsilon_{\mu\nu} \langle T^{\mu\nu}(x) X \rangle &= -i \sum_{i=1}^n s_i \delta(x - x_i) \langle X \rangle \\ \langle T_\mu^\mu(x) X \rangle &= - \sum_{i=1}^n \delta(x - x_i) \Delta_i \langle X \rangle. \end{aligned} \quad (10.29)$$

我们希望用复坐标与复变量表示上述恒等式. 因此, 我们希望得到 δ 函数在复平面上的表示. 我们有如下结果:

命题 10.1

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \bar{\partial} \frac{1}{z} = \frac{1}{\pi} \partial \frac{1}{\bar{z}} \quad (10.30)$$

证明. 我们先导出 Green 公式在复平面上的表示. 2 维情况下, Green 公式为

$$\int_M d^2x \partial_\mu F^\mu = \int_{\partial M} d\xi_\mu F^\mu$$

$d\xi_1, d\xi_2$ 是 ∂M 上每一点处的法向量, 它与 ∂M 的切向量 dx^ρ 通过 $d\xi_\mu = \epsilon_{\mu\rho} dx^\rho$ 联系在一起. 接下来再进行坐标变换. Green 公式的左边的被积函数是

$$\partial_\mu F^\nu = \partial F^z + \bar{\partial} F^{\bar{z}}$$

等式右边有

$$d\xi_\mu F^\mu = \epsilon_{\mu\rho} dx^\rho F^\mu = \frac{i}{2} (d\bar{z} F^z - dz F^{\bar{z}})$$

所以 Green 公式在复平面上的表示为

$$\frac{i}{2} \int_M dz \wedge d\bar{z} (\partial F^z + \bar{\partial} F^{\bar{z}}) = \frac{i}{2} \int_{\partial M} (d\bar{z} F^z - dz F^{\bar{z}}) \quad (10.31)$$

对于任意一个全纯函数 f , 令 M 是包含原点的区域, 则

$$\begin{aligned} \int_M d^2x \delta(x) f(x_1, x_2) &= \frac{i}{2\pi} \int_M dz \wedge d\bar{z} f(z) \bar{\partial} \frac{1}{z} \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_M dz \wedge d\bar{z} \bar{\partial} \left(\frac{f(z)}{z} \right) \\ &= -\frac{i}{2\pi} \int_{\partial M} dz \frac{f(z)}{z} \\ &= f(0) \end{aligned}$$

上面第二个等号用到了 $f(z)$ 的全纯性, 第三个等号用到了式(10.31), 其中 $F^{\bar{z}} = f(z)/z, F^z = 0$, 最后一个等式用到了 Cauchy 积分公式. \square

于是, Ward 恒等式(10.29)就可以写成

$$\begin{aligned} 2\pi\partial \langle T_{\bar{z}z} X \rangle + 2\pi\bar{\partial} \langle T_{zz} X \rangle &= - \sum_{i=1}^n \bar{\partial} \frac{1}{z - w_i} \partial_{w_i} \langle X \rangle \\ 2\pi\partial \langle T_{\bar{z}\bar{z}} X \rangle + 2\pi\bar{\partial} \langle T_{z\bar{z}} X \rangle &= - \sum_{i=1}^n \partial \frac{1}{\bar{z} - \bar{w}_i} \bar{\partial}_{w_i} \langle X \rangle \\ 2 \langle T_{\bar{z}z} X \rangle - 2 \langle T_{z\bar{z}} X \rangle &= - \sum_{i=1}^n \delta(x - x_i) s_i \langle X \rangle \\ 2 \langle T_{z\bar{z}} X \rangle + 2 \langle T_{\bar{z}\bar{z}} X \rangle &= - \sum_{i=1}^n \delta(x - x_i) \Delta_i \langle X \rangle \end{aligned}$$

将上面的最后两式相加相减, 得到

$$\begin{aligned} 2\pi \langle T_{\bar{z}z} X \rangle &= - \sum_{i=1}^n \bar{\partial} \frac{1}{z - w_i} h_i \langle X \rangle \\ 2\pi \langle T_{zz} X \rangle &= - \sum_{i=1}^n \partial \frac{1}{\bar{z} - \bar{w}_i} \bar{h}_i \langle X \rangle \end{aligned}$$

再带回到前面的两式, 最终得到

$$\begin{aligned} \langle T(z) X \rangle &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{z - w_i} \partial_{w_i} \langle X \rangle + \frac{h_i}{(z - w_i)^2} \langle X \rangle \right\} + \text{reg.} \\ \langle \bar{T}(\bar{z}) X \rangle &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{\bar{z} - \bar{w}_i} \partial_{\bar{w}_i} \langle X \rangle + \frac{\bar{h}_i}{(\bar{z} - \bar{w}_i)^2} \langle X \rangle \right\} + \text{reg.} \end{aligned} \quad (10.32)$$

我们定义

$$\begin{aligned} T &= -2\pi T_{zz} \\ \bar{T} &= -2\pi T_{\bar{z}\bar{z}} \end{aligned} \quad (10.33)$$

共形 Ward 恒等式

我们可以将(10.29)合并到一个恒等式中. 给定任何一个无穷小的坐标共性变换 ϵ^ν , 相应地有

$$j^\mu = T^{\mu\nu} \epsilon_\nu.$$

再根据式(10.9), 得到

$$\delta_\epsilon \langle X \rangle = \int_M d^2x \partial_\mu \langle T^{\mu\nu}(x) \epsilon_{\nu\mu}(x) X \rangle$$

利用复平面上的 Green 公式(10.31), 得到

$$\delta_\epsilon \langle X \rangle = \frac{i}{2} \int_{\partial M} \{ -dz \langle T^{\bar{z}z} \epsilon_z X \rangle + \langle T^{\bar{z}z} \epsilon_z X \rangle + d\bar{z} \langle T^{z\bar{z}} \epsilon_{\bar{z}} X \rangle + \langle T^{z\bar{z}} \epsilon_{\bar{z}} X \rangle \}$$

因为某些不明原因, $T^{\bar{z}z}$ 和 $T^{z\bar{z}}$ 的贡献消失了, 于是最终得到了共形 Ward 恒等式

$$\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \langle X \rangle = \frac{i}{2\pi} \oint_C dz \epsilon(z) \langle T(z) X \rangle - \frac{i}{2\pi} \oint_C d\bar{z} \bar{\epsilon}(\bar{z}) \langle \bar{T}(\bar{z}) X \rangle \quad (10.34)$$

导出共形 Ward 恒等式的其他方法

To be continued.

10.3.3 自由场与算符乘积展开

当关联函数的两个场的位置趋近相同时, 关联函数会产生奇点. 这反映了在很小区域内的量子涨落趋于无穷.

我们观察(10.32), Ward 恒等式告诉了我们场 $T(z)$ 与 $\phi_i(w_i, \bar{w}_i)$ 的关联函数中, z 趋近于 w_i 的性质. 如果我们只考虑一个场 ϕ , 共形维数为 h, \bar{h} , 我们得到

$$\begin{aligned} T(z)\phi(w, \bar{w}) &\sim \frac{h}{(z-w)^2} \phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{z-w} \partial_w \phi(w, \bar{w}) \\ \bar{T}(\bar{z})\phi(w, \bar{w}) &\sim \frac{\bar{h}}{(\bar{z}-\bar{w})^2} \phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{\bar{z}-\bar{w}} \partial_{\bar{w}} \phi(w, \bar{w}) \end{aligned} \quad (10.35)$$

之后我们自动略去关联函数的求平均值符号, 并假设之后讨论的一切情形都是在求平均值时才成立的. \sim 代表模掉全纯部分后相等.

一般地, 我们将两个场的算符乘积展开写成

$$A(z)B(w) = \sum_{n=-\infty}^N \frac{\{AB\}_n(w)}{(z-w)^n}. \quad (10.36)$$

下面我们来熟悉几个例子.

例子: 自由玻色子

To be continued.

10.3.4 中心荷

我们考虑在上节的例子中出现的能动张量自身的算符乘积展开:

$$T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)}, \quad (10.37)$$

其中的常数 c 依赖于所研究的系统, 对于自由玻色子是 1, 自由费米子是 $\frac{1}{2}$, 以及对于不同的鬼粒子有不同的值, 这个常数被称为**中心荷**. 除了这一反常项, (10.37)告诉我们 T 是 quasi-primary 的场, 共形维数 $h = 2$.

中心荷可能无法从对称性来确定, 因为它的值由理论的短程相互作用的行为所确定. 对于自由场, 它由 Wick 定理中的缩并所决定. 当两个无相互作用的系统被放在一起时, 整体的能动张量就是两个系统的能动张量的和, 系统的中心荷也是两个系统的中心荷的简单相加. 于是, 中心荷可被视为是系统自由度数的一个度量.

能动张量的变换规律

考虑能动张量对无穷小变换的相应, 根据共形 Ward 恒等式(10.34), T 在局部共形变换下的变分为

$$\delta_\epsilon T(w) = \frac{i}{2\pi} \oint_C d\epsilon(z) T(z) T(w),$$

将(10.37)代入上式, 在 w 处展开 $\epsilon(z)$, 得到

$$\delta_\epsilon T(w) = -\frac{1}{12} c \partial_w^3 \epsilon(w) - 2T(w) \partial_w \epsilon(w) - \epsilon(w) \partial_w T(w)$$

我们引入 **Schwarz 导数**,

$$\{w; z\} = \frac{\partial^3 w / \partial z^3}{\partial w / \partial z} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial^2 w / \partial z^2}{\partial w / \partial z} \right)^2. \quad (10.38)$$

并断言, 在任意的共形变换 $z \mapsto w(z)$ 下, $T(z)$ 的变化规律为

$$T'(w) = \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-2} \left(T(z) - \frac{c}{12} \{w; z\} \right). \quad (10.39)$$

从这里我们也能看到, $T(z)$ 不是 **primary** 的场, 因为其在任意共形变换下的变化规律与(10.28)不同. 如果取

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1$$

则容易计算 $\{w; z\} = 0$, 我们只能说, 在特殊线性变换下, $T(z)$ 是 **primary** 的.

c 的物理意义

中心荷 c 的出现, 有时也被称为**共形反常**. 因为, 这与在系统中引入一个宏观的标度导致共形对称性的破坏有关. 换言之, c 描述了一个系统对引入宏观长度标度的响应.

$$\langle T_\mu^\mu(x) \rangle_g = \frac{c}{24\pi} R(x)$$

10.4 算子形式

10.4.1 径向量子化

量子场论的算符形式区分了空间和时间. 这在 **Minkowski** 时空中是自然的, 但是在 **Euclidean** 时空中, 时间与空间的区分并不明显.

我们在无限长的柱面上定义场论. 时间 t 从 $-\infty$ 到 ∞ , 坐标 x 从 0 到 L , 且我们将 $(0, t)$ 与 (L, t) 视为相同的. 定义变量 $\xi = t + ix$, 我们可以通过变换

$$z = e^{2\pi\xi/L} \quad (10.40)$$

将柱面变成复平面.

从正则量子化的观点来看, 真空态 $|0\rangle$ 是湮灭算符的零本征态. 而 Hilbert 空间的其他态都由创生算符作用在 $|0\rangle$ 上得到. 对于一个相互作用场 ϕ , 我们假定 Hilbert 空间与自由场的 Hilbert 空间相同, 但是实际上能量本征态是不同的. 假设相互作用可以被延拓到 $t \rightarrow \pm\infty$, 且渐进场

$$\phi_{\text{in}} \propto \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(x, t)$$

是自由的. 在径向量子化中, 由于当 $t \rightarrow -\infty$ 时 $z \rightarrow 0$, 场 ϕ_{in} 就变成了在 $z = 0$ 处的单个算符. 创生出一个单个的初态

$$|\phi_{\text{in}}\rangle = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \phi(z, \bar{z}) |0\rangle. \quad (10.41)$$

Hermite 共轭

在 Minkowski 时空中, Hermite 共轭不会对时空造成影响. 但是在 Euclidean 时空中, Hermite 共轭会导致时间的反演, 因为 $\tau = it$. 在径向量子化中, 这对应于 $z \rightarrow \frac{1}{z^*}$. 我们定义 Hermite 共轭如下

$$\phi(z, \bar{z})^\dagger = \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}} \phi\left(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{z}\right) \quad (10.42)$$

这样, 我们就可以将末态定义为

$$\langle \phi_{\text{out}} | = |\phi_{\text{in}}\rangle^\dagger$$

我们可以通过初态模态做内积来验证, (10.42) 的形式是正确的.

模式展开

一个维数为 (h, \bar{h}) 的共形场可以进行如下的模式展开

$$\phi(z, \bar{z}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-m-h} \bar{z}^{-n-\bar{h}} \phi_{m,n}, \quad (10.43)$$

系数 $\phi_{m,n}$ 可以通过留数定理确定

$$\phi_{m,n} = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{m+h-1} \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \bar{z}^{n+\bar{h}-1} \phi(z, \bar{z}).$$

为了确定展开的模式 $\phi_{m,n}$ 的 Hermite 共轭, 我们先对 $\phi(z, \bar{z})$ 在平面 $\bar{z} = z^*$ 上进行共轭, 得到

$$\phi(z, \bar{z})^\dagger = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{z}^{-m-h} z^{-n-\bar{h}} \phi_{m,n}^\dagger,$$

再利用定义(10.42)得到

$$\phi(z, \bar{z})^\dagger = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_{-m, -n} \bar{z}^{-m-h} z^{-n-\bar{h}},$$

所以我们得到

$$\phi_{m,n}^\dagger = \phi_{-m, -n}. \quad (10.44)$$

如果我们想要定义初态和末态, 那么真空态 $|0\rangle$ 一定要满足条件

$$\phi_{m,n} |0\rangle = 0, \quad m > -h, n > -\bar{h}, \quad (10.45)$$

因为当 $z, \bar{z} \rightarrow 0$ 时, 满足上面条件的 $\phi(z, \bar{z})$ 中的部分趋于无穷, 为了使 $|\phi_{in}\rangle$ 有良好的定义, 这些项作用在真空态上一定要为 0.

为了书写的简便, 我们之后在进行模式展开的时候将忽略场对 \bar{z} 的依赖, 这样

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^{-m-h} \phi_m \\ \phi_m &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{m+h-1} \phi(z). \end{aligned} \quad (10.46)$$

但我们必须要记住, ϕ 对 \bar{z} 的依赖事实上是依然存在的, 我们在必要时还会回到原来的形式(10.43).

径向排序与算符乘积展开

在径向量子化中, 时间排序变成**径向排序**, 我们将之定义为

$$\mathcal{R}\Phi_1(z)\Phi_2(w) = \begin{cases} \Phi_1(z)\Phi_2(w), & |z| > |w| \\ \Phi_2(w)\Phi_1(z), & |z| < |w|. \end{cases} \quad (10.47)$$

如果两个场是费米场, 交换费米子场会产生一个负号.

由于所有在关联函数中的量都是时间排序的, 从而也是径向排序的, 所以一个表示算符乘积展开的等式的左端如果有算子的含义, 则也应该是径向排序的. 从现在开始, 我们不会每次都写出径向排序的记号 \mathcal{R} , 但是实际上我们隐含地使用了径向排序.

下面, 我们要将算符乘积展开与对易关系联系在一起. 令 $a(z), b(z)$ 为两个全纯的场, 考虑积分

$$\oint_w dz a(z)b(w)$$

积分回路是绕 w 的闭合曲线. 我们只考虑上述积分出现在关联函数中的情况, 因此实际上隐含了一个径向排序. 观察到如下的事实

$$\oint_w dz a(z)b(w) = \int_{C_1} dz a(z)b(w) - \int_{C_2} b(w)a(z) = [A, b(w)]. \quad (10.48)$$

其中

$$A = \oint a(z)dz \quad (10.49)$$

是一个固定时间的回路积分. (10.48)中的 C_1, C_2 分别是半径为 $|w|+\epsilon$ 与 $|w|-\epsilon$ 的圆周. 而上面的对易关系是等时对易关系. 对(10.48)的 w 进行积分, 我们得到了对易关系

$$[A, B] = \oint_0 dw \oint_w dz a(z)b(w). \quad (10.50)$$

10.4.2 Virasoro 代数

我们将(10.50)与(10.48)应用于共形 Ward 恒等式(10.34). 定义共形荷

$$Q_\epsilon = \frac{1}{2\pi i} dz \epsilon(z) T(z), \quad (10.51)$$

根据式10.48, 共形恒等式变成

$$\delta_\epsilon \Phi(w) = -[Q_\epsilon, \Phi(w)] \quad (10.52)$$

这说明 Q_ϵ 是共形变换的生成元.

由于 $T(z)$ 和 $\bar{T}(\bar{z})$ 分别是全纯的和反全纯的, 所以根据(10.43), 将二者进行模式展开:

$$\begin{aligned} T(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-2} L_n, & L_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{n+1} T(z) \\ \bar{T}(\bar{z}) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{z}^{-n-2} \bar{L}_n, & \bar{L}_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \bar{z}^{n+1} \bar{T}(\bar{z}) \end{aligned} \quad (10.53)$$

再将 $\epsilon(z)$ 展开

$$\epsilon(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{n+1} \epsilon_n,$$

(10.51)变成

$$Q_\epsilon = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \epsilon_n L_n.$$

模式算子 L_n 与 \bar{L}_n 是 Hilbert 空间上局域共形变换的生成元. 就如同 Witt 代数中 ℓ_n 和 $\bar{\ell}_n$ 是函数空间上局域共形变换的生成元一样. 类似地, $SL(2, \mathbb{C})$ 的生成元在 Hilbert 空间上的表示为 L_{-1}, L_0, L_1 以及 $\bar{L}_{-1}, \bar{L}_0, \bar{L}$. 特别地, $L_0 + \bar{L}_0$ 生成了伸缩变换 $(z, \bar{z}) \mapsto \lambda(z, \bar{z})$, 在径向量子化中就是时间平移. 所以 $L_0 + \bar{L}_0$ 与系统的 Hamiltonian 成正比.

经典的 Witt 代数满足对易关系(10.27), 在量子情况下, 生成元 L_n 满足类似的关系, 但是与系统的中心荷 c 有关.

命题 10.2 生成元 L_n 满足下列的对易关系:

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \\ [L_n, \bar{L}_m] &= 0 \\ [\bar{L}_n, \bar{L}_m] &= (n-m)\bar{L}_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \end{aligned} \quad (10.54)$$

证明. 根据(10.50), 以及10.37

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_0 dw w^{m+1} \oint_w dz z^{n+1} T(w) T(z) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_0 dw w^{m+1} \oint_w dz z^{n+1} \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_0 dw w^{m+1} \frac{c}{12} (n+1)n(n-1)w^{n-2} + 2(n+1)w^n T(w) + w^{n+1} \partial T(w) \\ &= \frac{c}{12} n(n^2-1)\delta_{m+n,0} + 2(n+1)L_{m+n} - (m+n+2)L_{m+n} \\ &= (n-m)L_{m+n} + \frac{c}{12} n(n^2-1)\delta_{m+n,0} \end{aligned}$$

其余两个等式的证明类似. □

我们还发现, (10.54)的第二个等式说明了 $T(z)\bar{T}(\bar{z}) \sim 0$.

Hilbert 空间

先观察真空态 $|0\rangle$. 首先可以确定的是, 真空态在全局共形变换 $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 的作用下是不变的, 所以 $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 的六个生成元 $L_{-1}, L_0, L_1, \bar{L}_{-1}, \bar{L}_0, \bar{L}_1$ 作用在 $|0\rangle$ 上结果均为零. 我们还希望在初态时, 能动张量作用在真空态上 $T(z)|0\rangle$ 以及 $\bar{T}(\bar{z})|0\rangle$ 是良定义的, 所以有

$$\begin{aligned} L_n |0\rangle &= 0, \quad n \geq -1, \\ \bar{L}_n |0\rangle &= 0, \quad n \geq -1. \end{aligned} \quad (10.55)$$

如果场是 primary 的, 则它作用在真空态上产生初态或末态. 根据(10.35), 我们得到

$$\begin{aligned} [L_n, \phi(w, \bar{w})] &= \frac{1}{2\pi i} \oint_w dz z^{n+1} T(z) \phi(w, \bar{w}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_w dz z^{n+1} \left(\frac{h\phi(w, \bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial\phi(w, \bar{w})}{z-w} \right) \\ &= h(n+1)w^n \phi(w, \bar{w}) + w^{n+1} \partial\phi(w, \bar{w}). \end{aligned}$$

与对于 \bar{L}_n , 也有类似的结果. 所以,

$$\begin{aligned} [L_n, \phi(w, \bar{w})] &= h(n+1)w^n \phi(w, \bar{w}) + w^{n+1} \partial\phi(w, \bar{w}), \\ [\bar{L}_n, \phi(w, \bar{w})] &= h(n+1)\bar{w}^n \phi(w, \bar{w}) + \bar{w}^{n+1} \bar{\partial}\phi(w, \bar{w}). \end{aligned} \quad (10.56)$$

我们定义渐进态 $|h, \bar{h}\rangle$:

$$|h, \bar{h}\rangle = \phi(0, 0) |0\rangle$$

将(10.56)中令 $n = 0$ 作用在 $|h, \bar{h}\rangle$ 上, 并注意到 $L_0 |0\rangle = 0$, 我们有

$$\begin{aligned} L_0 |h, \bar{h}\rangle &= h |h, \bar{h}\rangle, \\ \bar{L}_0 |h, \bar{h}\rangle &= \bar{h} |h, \bar{h}\rangle. \end{aligned}$$

再令 n 正整数, 得到

$$\begin{aligned} L_n |h, \bar{h}\rangle &= 0 \\ \bar{L}_n |h, \bar{h}\rangle &= 0 \end{aligned}$$

因此 $|h, \bar{h}\rangle$ 是 Hamiltonian 的一个本征态.

能量比基态 $|h, \bar{h}\rangle$ 高的激发态可以通过阶梯算子作用在 $|h, \bar{h}\rangle$ 上得到. 我们对全纯的场 $\phi(w)$ 进行模式展开, 可以很容易地得到

$$[L_n, \phi_m] = (n(h-1) - m)\phi_{n+m}, \quad (10.57)$$

取 $n = 0$, 得到

$$[L_0, \phi_m] = -m\phi_m.$$

这说明 ϕ_m 是 L_0 本征态的升降算符. 将 ϕ_{-m} 作用在基态上会把基态的共形维数增加 m .

再通过 Virasoro 代数的对易关系(10.54), 我们得到

$$[L_0, L_{-m}] = mL_{-m},$$

即 L_{-m} 也会使基态的共形维数增加 m . 因此, 激发态通过将这些算子连续地作用在 $|h\rangle$ 上得到:

$$L_{-k_1} L_{-k_2} \cdots L_{-k_n} |h\rangle, \quad 1 \leq k_1 \leq \cdots \leq k_n$$

约定从左到右 k_i 逐渐增加. 上面的态是 L_0 的本征值为

$$h' = h + k_1 + \cdots + k_n := h + N$$

的本征态, 被称为态 $|h\rangle$ 的 **descendants**. 整数 N 被称为 **descendant** 的级数. 级数为 N 但互不相同且先行独立的态的个数就是整数 N 的配分数 $p(N)$.

由基态 $|h\rangle$ 以及其 **descendant** 构成的子空间在 Virasoro 代数的作用下是不变的, 于是构成了一个 Virasoro 代数的表示. 这个子空间被称为 **Verma 模**.

10.4.3 例子: 自由玻色子

柱面上的正则量子化

自由无质量玻色子在柱面上的正则量子化.

$$S = \int d^2x \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \quad (10.58)$$

从柱面变换到 2 维 Euclidean 平面, 最终得到模式展开

$$\phi(z, \bar{z}) = \phi_0 - \frac{i}{4\pi g} \pi_0 \ln(z\bar{z}) + \frac{i}{\sqrt{4\pi g}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (a_n z^{-n} + \bar{a}_n \bar{z}^{-n}). \quad (10.59)$$

柱面上的周期性条件使得 $\phi(z, \bar{z})$ 中的全纯部分和反全纯部分退耦和.

顶点算子

在 2 维时, 标度不变的标量场的标度维度是 0, 所以可以利用 ϕ 构造无穷多种定域的场, 且不引入标度. 比如下面的**顶点算子**:

$$\mathcal{V}_\alpha(z, \bar{z}) =: e^{i\alpha\phi(z, \bar{z})} :$$

计算 \mathcal{V}_α 与 $\partial\phi$ 的算符乘积展开, 得到

$$\partial\phi(z)\mathcal{V}_\alpha(w, \bar{w}) \sim -\frac{i\alpha}{4\pi g} \frac{\mathcal{V}_\alpha(w, \bar{w})}{z-w}. \quad (10.60)$$

再计算能动张量与 \mathcal{V}_α 的算符乘积展开, 得到

$$T(z)\mathcal{V}_\alpha(w, \bar{w}) \sim \frac{\alpha^2}{8\pi g} \frac{\mathcal{V}_\alpha(w, \bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w \mathcal{V}_\alpha(w, \bar{w})}{z-w}. \quad (10.61)$$

\bar{T} 的算符乘积展开有类似的结果. 因此我们得到对于 $\mathcal{V}_\alpha(w, \bar{w})$, 有

$$h(\alpha) = \bar{h}(\alpha) = \frac{\alpha^2}{8\pi g}. \quad (10.62)$$

10.4.4 正规排序

我们已经计算了很多的例子, 知道自由场最重要的特质是其与自身的算符展开只包含一个奇异项, 而且这项的系数是一个常数. 因此, 将两个自由场的乘积进行正规化的方法只需要减去相应的真空期望值.

但在非自由场的情况, 上面的论述不再成立. 我们看到, 当我们试图将 $T(z)T(w)$ 进行正规化时, 我们减去的 $\langle T(z)T(w) \rangle$ 只能使 $T(z)T(w)$ 中带有中心荷的一项消除, 而剩下的两项发散的像依然没有被消除. 这说明我们之前的应对发散情况时只是简单地引入正规序的做法只对自由场有效, 而对于一般的场是无效的. 因此, 我们希望减除算符乘积展开中所有的发散项, 因此我们要推广之前的正规序的概念.

10.5 附录

二维的共形变换等价于全纯函数. 在复平面上, 我们有 $z = x^1 + ix^2$, 于是

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

以及

$$\begin{pmatrix} dz \\ d\bar{z} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{pmatrix}.$$

记 $\partial := \partial_z, \bar{\partial} := \partial_{\bar{z}}$, 还有

$$\begin{pmatrix} \partial & \bar{\partial} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \partial_z & \partial_{\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 \end{pmatrix} U^{-1} = \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

所以, 如果度规是二维的, 显然 ds^2 在变换 U 下保持不变. 所以

$$g_{z\bar{z}} = (U^{-1})^T g_{\mu\nu} U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

然后取逆

$$g^{z\bar{z}} = U g^{\mu\nu} U^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

同样, 我们得到反对称张量 $\epsilon_{\mu\nu}$ 在坐标 z, \bar{z} 下的矩阵

$$\epsilon_{z\bar{z}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

以及

$$\epsilon^{z\bar{z}} = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$$

如果我们考虑无穷小的共形变换, 对坐标系来说是仿射变换

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^1 + \alpha^1 \\ x^2 + \alpha^2 \end{pmatrix} = \mathbf{x} + \alpha.$$

于是, 1-形式的变化规律为

$$d\mathbf{x}' = (1 + d\alpha)d\mathbf{x}.$$

其中,

$$d\alpha = \begin{pmatrix} \partial_1 \alpha^1 & \partial_2 \alpha^1 \\ \partial_1 \alpha^2 & \partial_2 \alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix} (\alpha^1 \quad \alpha^2) = U^T \begin{pmatrix} \partial \\ \bar{\partial} \end{pmatrix} (\alpha^z \quad \alpha^{\bar{z}}) (U^{-1})^T.$$

根据反函数定理, 精确到 α 的一阶,

$$(1 + d\alpha)^{-1} = 1 - d\alpha.$$

所以,

$$g'_{\mu\nu} = (1 - d\alpha)^T g_{\mu\nu} (1 - d\alpha) \quad (10.63)$$

然后

$$g'_{z\bar{z}} = (U^{-1})^T g'_{\mu\nu} U^{-1} = (U^{-1})^T (1 - d\alpha)^T g_{\mu\nu} (1 - d\alpha) U^{-1}. \quad (10.64)$$

如果只要求精确到 α 的一阶, 并要求这是一个共形变换, 即

$$g'_{z\bar{z}} \propto g_{z\bar{z}}$$

我们详细地计算前一式, 得到上式成立当且仅当

$$\partial \alpha^{\bar{z}} = 0$$

$$\bar{\partial} \alpha^z = 0$$

即, 仿射变换

$$z \mapsto z + \alpha^z$$

是无穷小共形变换当且仅当 α^z 是全纯函数. 推广到一般的情况, 若变换

$$z' = f(z)$$

是共形变换, 当且仅当 f 是全纯的.

我们希望算符在标度变换

$$z \mapsto \lambda z$$

下的行为是

$$\phi_j(\lambda z, \bar{\lambda} \bar{z}) = \lambda^{-\Delta_j} \bar{\lambda}^{-\bar{\Delta}_j} \phi_j(z, \bar{z}).$$

如果上式成立, 那么在一般的共形变换

$$z \mapsto z' = f(z)$$

下, 关联函数的变化是

$$\langle \phi_1(z'_1, \bar{z}'_1) \cdots \phi_n(z'_n, \bar{z}'_n) \rangle = \prod_{j=1}^n (\partial f(z_j))^{-\Delta_j} (\bar{\partial} \bar{f}(\bar{z}_j))^{-\bar{\Delta}_j} \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle$$

考虑无穷小变换 (不必共形)

$$x^\mu \mapsto x^\mu + \alpha^\mu.$$

这里用作用量的变化来定义能动张量

$$\delta S := -\frac{1}{2\pi} \int T_{\mu\nu} \alpha^{\mu,\nu} d^2x = \frac{1}{2\pi} (\partial^\nu T_{\mu\nu}) \alpha^\mu d^2x.$$

将能动张量变换到复变量

$$\begin{aligned} T_{zz} &= \frac{x^\mu}{z} \frac{x^\nu}{z} T_{\mu\nu} = \frac{1}{4} (T_{xx} - T_{xy}) - \frac{i}{4} (T_{xy} + T_{yx}) \\ T_{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{x^\mu}{\bar{z}} \frac{x^\nu}{\bar{z}} T_{\mu\nu} = \frac{1}{4} (T_{xx} - T_{yy}) + \frac{i}{4} (T_{xy} + T_{yx}) \\ T_{z\bar{z}} &= \frac{x^\mu}{z} \frac{x^\nu}{\bar{z}} T_{\mu\nu} = \frac{1}{4} (T_{xx} + T_{yy}) + \frac{i}{4} (T_{yx} - T_{xy}) \\ T_{\bar{z}z} &= \frac{x^\mu}{\bar{z}} \frac{x^\nu}{z} T_{\mu\nu} = \frac{1}{4} (T_{xx} + T_{yy}) - \frac{i}{4} (T_{yx} - T_{xy}) \end{aligned}$$

全纯函数可以在一点 z_0 展开为 **Laurent** 级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Cauchy 积分定理

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

考虑有界的开邻域 $\Omega \subset \mathcal{D}$, Ω 中包含 n -点关联函数 $\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle$ 的所有点 z_1, \dots, z_n . 我们要构造一个无穷小变换, 在 Ω 内是共形的, 在 Ω^c 中是恒等变换. 如果作用量是共形不变的, 那么也一定是转动不变和伸缩不变的, 因此得到 $T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0$. 再根据 **Noether** 定理, 得到守恒流为

$$j_\nu = T_{\mu\nu} \alpha^\mu$$

根据流守恒条件 $\partial^\nu j_\nu = 0$, 能够推出

$$\partial^\nu T_{\mu\nu} = 0.$$

从上述守恒条件, 可以推出 $\bar{\partial} T_{z\bar{z}} = \partial T_{\bar{z}z} = 0$.

这样, 作用量的变化为

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \partial^\nu (T_{\mu\nu} \alpha^\mu) d^2 x \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} (j_1 dx_2 - j_2 dx_1) \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{\partial\Omega} (j_z dz + j_{\bar{z}} d\bar{z}) \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{\partial\Omega} (T_{z\bar{z}} \alpha dz + T_{\bar{z}z} \bar{\alpha} d\bar{z}) \end{aligned}$$

参考文献

- [1] K. Costello. *Renormalization and Effective Field Theory*. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Soc.
- [2] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal. *Conformal Field Theory*. Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [3] M. Henneaux and C. Teitelboim. *Quantization of gauge systems*. 1992.
- [4] Thomas Hungerford. *Algebra*. Springer, eighth edition, 2003.
- [5] J.P. May. *A Concise Course in Algebraic Topology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, 1999.
- [6] nLab authors. homological algebra. <http://ncatlab.org/nlab/show/homological%20algebra>, June 2019. Revision 36.
- [7] Jian Qiu and Maxim Zabzine. Introduction to Graded Geometry, Batalin-Vilkovisky Formalism and their Applications. *Archivum Math.*, 47:143–199, 2011.
- [8] E. Riehl. *Category Theory in Context*. Aurora: Dover Modern Math Originals. Dover Publications, 2016.
- [9] Albert S. Schwarz. Geometry of Batalin-Vilkovisky quantization. *Commun. Math. Phys.*, 155:249–260, 1993.

- [10] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*, volume 1. Cambridge University Press, 1995.