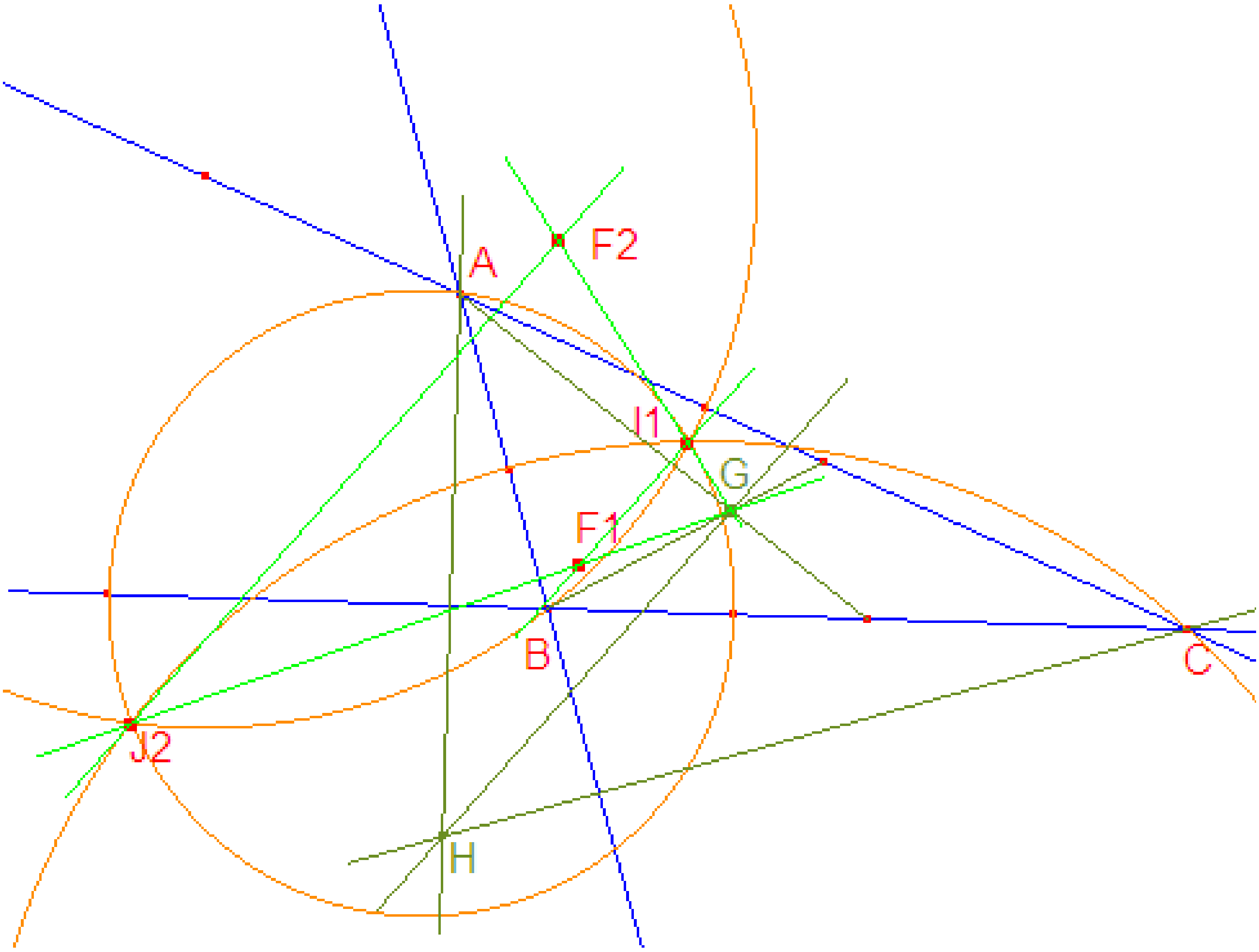
Dado un triángulo ABC, sean f1 y f2 los puntos de Fermat (ver problemas 13 y 14).
Sean i1 e i2 los puntos isodinámicos (ver problema 18).
Sean g el baricentro y o el ortocentro (ver problemas 3 y 4)
Lema3.1 Los vectores i1f1 e i2f2 son respectivamente antiparalelos y paralelos al vector go. Si el triángulo es no isósceles, ninguna de las líneas i1f1 i2f2 coincide con go.




```
<< Baricentricas`;
```

Obtenemos las ecuaciones de dos de las circunferencias de Apolonio del triángulo ABC.

$$caA = \text{Numerator}\left[\text{Factor}\left[\frac{\text{CuadradoDistancia}[ptP, ptB]}{\text{CuadradoDistancia}[ptP, ptC]} - \frac{c^2}{b^2}\right]\right]$$

$$caB = \text{Numerator}\left[\text{Factor}\left[\frac{\text{CuadradoDistancia}[ptP, ptC]}{\text{CuadradoDistancia}[ptP, ptA]} - \frac{a^2}{c^2}\right]\right]$$

$$-a^2 c^2 x y - b^2 c^2 x y + c^4 x y - a^2 c^2 y^2 + a^2 b^2 x z - b^4 x z + b^2 c^2 x z + a^2 b^2 z^2$$

$$-b^2 c^2 x^2 - a^2 c^2 x y - b^2 c^2 x y + c^4 x y - a^4 y z + a^2 b^2 y z + a^2 c^2 y z + a^2 b^2 z^2$$

Hallamos los dos puntos de intersección de estas dos circunferencias, que serán los puntos isodinámicos. Por razones técnicas, imponemos algunas condiciones a **Simplify**. La solución está compuesta de dos soluciones reales y dos complejas, estas dos últimas no las tendremos en cuenta.

```
sol = Simplify[Solve[{caA == 0, caB == 0}, {x, y}],
  {z > 0 , b > 0, c > 0, b^2 - c^2 > 0 }]
```

$$\Big\{\Big\{x \to -\Big(a^2 \Big(a^4 - 2 b^4 + b^2 c^2 + c^4 - \sqrt{3}\, c^2 \sqrt{-a^4 - (b^2 - c^2)^2 + 2 a^2 (b^2 + c^2)} + a^2 \Big(b^2 - 2 c^2 + \sqrt{3} \sqrt{-a^4 - (b^2 - c^2)^2 + 2 a^2 (b^2 + c^2)}\Big)\Big) z\Big) \Big/ \Big(2 c^2 \big(a^4 + a^2 (b^2 - 2 c^2) + (b^2 - c^2)^2\big)\Big),$$

$$y \to -\frac{b^2 \Big(-2 a^4 + a^2 (b^2 + c^2) + (b^2 - c^2) \Big(b^2 - c^2 + \sqrt{3} \sqrt{-a^4 - (b^2 - c^2)^2 + 2 a^2 (b^2 + c^2)}\Big)\Big) z}{2 c^2 \big(a^4 + a^2 (b^2 - 2 c^2) + (b^2 - c^2)^2\big)}\Big\},$$

$$\Big\{x \to -\Big(a^2 \Big(a^4 - 2 b^4 + b^2 c^2 + c^4 + \sqrt{3}\, c^2 \sqrt{-a^4 - (b^2 - c^2)^2 + 2 a^2 (b^2 + c^2)} + a^2 \Big(b^2 - 2 c^2 - \sqrt{3} \sqrt{-a^4 - (b^2 - c^2)^2 + 2 a^2 (b^2 + c^2)}\Big)\Big) z\Big) \Big/ \Big(2 c^2 \big(a^4 + a^2 (b^2 - 2 c^2) + (b^2 - c^2)^2\big)\Big),$$

$$y \to \frac{b^2 \Big(2 a^4 - a^2 (b^2 + c^2) + (b^2 - c^2) \Big(-b^2 + c^2 + \sqrt{3} \sqrt{-a^4 - (b^2 - c^2)^2 + 2 a^2 (b^2 + c^2)}\Big)\Big) z}{2 c^2 \big(a^4 + a^2 (b^2 - 2 c^2) + (b^2 - c^2)^2\big)}\Big\},$$

$$\Big\{x \to \frac{\Big(-a^2 + b^2 - c^2 + \sqrt{-4 b^2 c^2 + (-a^2 + b^2 + c^2)^2}\Big) z}{2 c^2},$$

$$y \to -\frac{\Big(-a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{-4 b^2 c^2 + (-a^2 + b^2 + c^2)^2}\Big) z}{2 c^2}\Big\},$$

$$\Big\{x \to -\frac{\Big(a^2 - b^2 + c^2 + \sqrt{-4 b^2 c^2 + (-a^2 + b^2 + c^2)^2}\Big) z}{2 c^2},$$

$$y \to \frac{\Big(a^2 - b^2 - c^2 + \sqrt{-4 b^2 c^2 + (-a^2 + b^2 + c^2)^2}\Big) z}{2 c^2}\Big\}\Big\}$$

Ahora obtenemos los dos puntos isodinámicos:

```
ptI1 = Simplificar[{x, y, z} /. sol[[2]]]
```

$$\Big\{-a^2 \Big(a^4 - 2 b^4 + b^2 c^2 + c^4 + \sqrt{3}\, c^2 \sqrt{-a^4 - (b^2 - c^2)^2 + 2 a^2 (b^2 + c^2)} + a^2 \Big(b^2 - 2 c^2 - \sqrt{3} \sqrt{-a^4 - (b^2 - c^2)^2 + 2 a^2 (b^2 + c^2)}\Big)\Big),$$

$$-b^2 \Big(-2 a^4 + a^2 (b^2 + c^2) + (b^2 - c^2) \Big(b^2 - c^2 - \sqrt{3} \sqrt{-a^4 - (b^2 - c^2)^2 + 2 a^2 (b^2 + c^2)}\Big)\Big),$$

$$2 c^2 \big(a^4 + a^2 (b^2 - 2 c^2) + (b^2 - c^2)^2\big)\Big\}$$

```
ptI2 = Simplificar[{x, y, z} /. sol[[1]]]
```

$$\left\{-a^2 \left(a^4 - 2 b^4 + b^2 c^2 + c^4 - \sqrt{3}\, c^2 \sqrt{-a^4 - (b^2 - c^2)^2 + 2 a^2 (b^2 + c^2)} + a^2 \left(b^2 - 2 c^2 + \sqrt{3} \sqrt{-a^4 - (b^2 - c^2)^2 + 2 a^2 (b^2 + c^2)}\right)\right),\right.$$
$$-b^2 \left(-2 a^4 + a^2 (b^2 + c^2) + (b^2 - c^2) \left(b^2 - c^2 + \sqrt{3} \sqrt{-a^4 - (b^2 - c^2)^2 + 2 a^2 (b^2 + c^2)}\right)\right),$$
$$\left. 2 c^2 \left(a^4 + a^2 (b^2 - 2 c^2) + (b^2 - c^2)^2\right)\right\}$$

Ahora introducimos directamente las coordenadas de los puntos de Fermat, que se obtienen a partir de la **notación de Conway**, tal como se indica en *Introduction to Triangle Geometry* de Paul Yiu:

$$S = 2 \sqrt{s (s - a) (s - b) (s - c)};$$
$$ptF1 = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}\, SA + S}, \frac{1}{\sqrt{3}\, SB + S}, \frac{1}{\sqrt{3}\, SC + S}\right\};$$
$$ptF2 = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}\, SA - S}, \frac{1}{\sqrt{3}\, SB - S}, \frac{1}{\sqrt{3}\, SC - S}\right\};$$

Ahora podemos hallar los puntos W1 y W2 de intersección de las rectas I1F1 e I2F2, respectivamente, con la recta GH.

```
ptW1 = Punto[Recta[ptI1, ptF1], Recta[ptG, ptH]]
ptW2 = Punto[Recta[ptI2, ptF2], Recta[ptG, ptH]]
```

$$\left\{-2 a^4 + (b^2 - c^2)^2 + a^2 (b^2 + c^2),\ a^4 - 2 b^4 + b^2 c^2 + c^4 + a^2 (b^2 - 2 c^2),\ a^4 + b^4 + b^2 c^2 - 2 c^4 + a^2 (-2 b^2 + c^2)\right\}$$

$$\left\{2 a^4 - (b^2 - c^2)^2 - a^2 (b^2 + c^2),\ -a^4 - a^2 b^2 + 2 b^4 + 2 a^2 c^2 - b^2 c^2 - c^4,\ -a^4 + 2 a^2 b^2 - b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + 2 c^4\right\}$$

Para ver que ambas rectas I1F1 e I2F2 son paralelas a GH basta comprobar que los dos puntos son puntos del infinito, es decir, suscoordenadas suman 0. Para ello usamos la función **Tr** (traza).

```
Simplify[Tr[ptW1]]
Simplify[Tr[ptW2]]
```

```
0
```

```
0
```

También podemos demostrar que los puntos G, I1, F2 por una parte, y G, I2, F1, por otra, están alineados.

```
Factor[Expand[Det[{ptG, ptI1, ptF2}]]]
Factor[Expand[Det[{ptG, ptI2, ptF1}]]]
```

```
0
```

```
0
```