

Producción y Formalización de los Argumentos Matemáticos Vía la Geometría Dinámica.

David Benítez Mojica
Universidad Autónoma de Coahuila

En este estudio, un problema de geometría se emplea como plataforma para que los estudiantes expresen, construyan y refinan sus argumentos sobre la validez de una conjetura. El uso de la tecnología desempeña un papel importante en la presentación, identificación y exploración de conjeturas y relaciones. En particular, se documenta sobre la existencia de distintos niveles argumentativos.

Introducción.

Las experiencias didácticas, a nivel internacional, con relación al uso de las herramientas informáticas en la educación, sugieren que la capacidad computacional de las herramientas informáticas amplía el rango de los problemas que son susceptibles de ser abordados por los estudiantes. (Laborde, 1995; Balacheff y Kaput 1996;; Santos, 2000; NCTM, 2000; Santos y Espinosa, 2002). Los autores mencionados, coinciden en señalar que la tecnología computacional ofrece potencial para comprometer a los estudiantes en la discusión de ideas matemáticas significativas.

Un principio notable en la instrucción matemática es que los estudiantes al resolver problemas deben desarrollar el hábito de buscar varias formas de solución e investigar ventajas y limitaciones de las representaciones que aparecen en el proceso de resolución.

En la práctica actual, gran parte de la enseñanza tiene lugar dentro de un sólo sistema de representación. Se dedica mucho tiempo y esfuerzo a que los estudiantes desarrollen habilidades para operar el lenguaje formal simbólico, y relativamente poco tiempo se dedica al empleo de otras representaciones de la misma idea (Goldenberg, 1995, p.156).

El empleo de distintas representaciones desempeña un papel importante en el entendimiento de ideas matemáticas y en la resolución de problemas. En esta dirección, es necesario que los estudiantes construyan sistemas representación que les permitan analizar y entender conceptos matemáticos desde varios ángulos o perspectivas. El uso de las herramientas tecnológicas pueden servir de plataforma para que los estudiantes empleen distintas representaciones en la solución de un problema.

Se utiliza un problema de geometría para documentar sobre la producción y refinamiento de los argumentos geométricos que emergen en la solución.

Problema. Sea ABC un triángulo cualquiera, M, N y O los puntos medios de los lados CA, AB y BC, respectivamente. Se construyen los puntos M', N' y O', **en los semiplanos que no contienen al triángulo** y sobre las mediatrices de los lados CA, AB y BC, respectivamente y tales que: $\frac{MM'}{CA} = \frac{NN'}{AB} = \frac{OO'}{BC}$

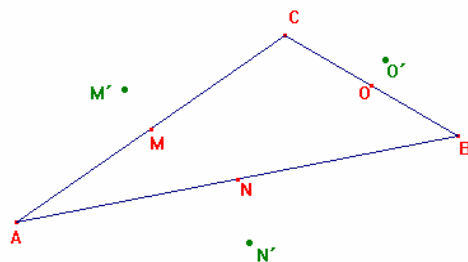


Fig. No 1

¿Qué se puede decir de las rectas BM' , CN' y AO' ?

Con la ayuda de Cabri, los alumnos pueden trazar las rectas BM' , CN' y AO' :

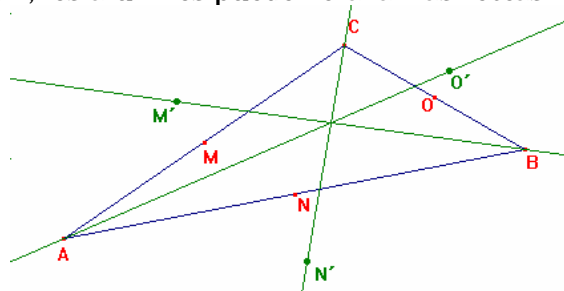


Fig. No 2

Conjetura A: Las rectas BM' , CN' y AO' son concurrentes.

La línea de argumentación, producto de las representaciones visuales que se generan en la pantalla de Cabri, se basa en la búsqueda de invariantes de estas tres rectas cuando los objetos libres sean arrastrados alrededor del plano. ¿Cómo se puede argumentar tal propiedad? La respuesta a esta pregunta, Cabri pone a disposición del estudiante un amplio repertorio de recursos. A continuación se presentarán una serie de argumentos que le dan soporte y seguimiento a la conjetura A. Tales argumentos se presentarán en categorías distintas:

a. **Reconocimiento visual.** Existen estudiantes que pueden reconocer una figura geométrica, pero no logran definirla. En este sentido, las figuras geométricas son reconocidas por su forma como un todo, esto es, por su apariencia física y no por sus partes o propiedades matemáticas. En la discusión del problema que estamos tratando, los estudiantes pueden percibir que las tres rectas son concurrentes. Sin embargo, algunos no pueden dar argumentaciones distintas a la percepción, tampoco intentan encontrar un contraejemplo a la aparente ley.

b. **La prueba del arrastre.** Otros estudiantes manipulan los puntos libres, en este caso arrastran los puntos A, B, C con el propósito de “contradecir” la ley, esto es, intentan encontrar algún dibujo en el cual las rectas no sean concurrentes. Bajo estas condiciones, los alumnos construyen diferentes dibujos:

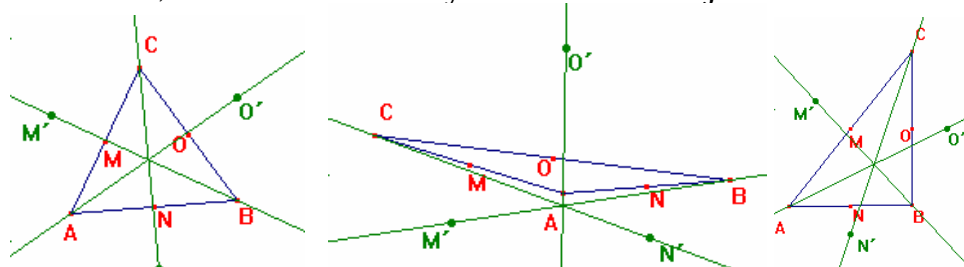


Fig. No 3. La prueba del arrastre

c. Verificación de Propiedades. Los argumentos esgrimidos hasta el momento son puramente perceptuales. Otro nivel de argumentación es cuando el alumno aprovecha otros recursos proporcionados por Cabri para verificar el cumplimiento de cierta propiedad. En este sentido, los estudiantes pueden encontrar el punto de intersección de dos rectas y verificar si éste pertenece a la tercera recta, en este caso el software emite la siguiente respuesta:

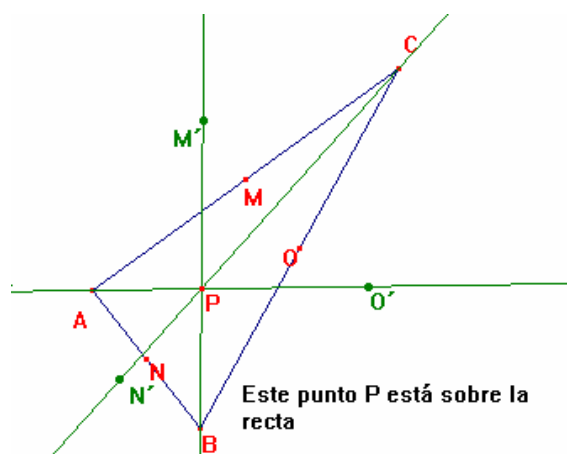


Fig. 4. Verificando propiedades

A partir de experiencias de este tipo con la medición, no resulta fácil convencer a los estudiantes de la necesidad de refinar la línea argumentativa. La medición parece aportar un nivel de evidencia suficiente, *empirismo ingenuo* (Schoenfeld, 1985). De manera que el problema didáctico de *cómo crear la necesidad de la demostración* recibe aquí un fuerte desafío.

d. La macro-construcción. Los estudiantes pueden diseñar una macroconstrucción con las siguientes características:

- Objetos iniciales: el triángulo ABC y el punto M' ,
- Objetos finales: los puntos N' , O' , las rectas BM' , CN' y AO' y el punto P .

Con la ayuda de la macroconstrucción, los estudiantes pueden explorar el cumplimiento de la propiedad en otros triángulos:

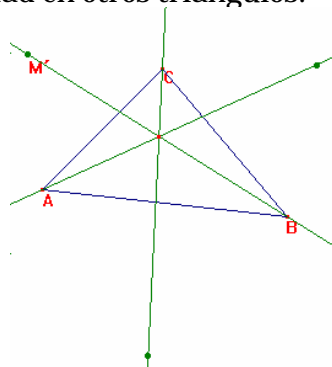


Fig. 5. El resultado de una macro-construcción

Las exploraciones sobre el objeto electrónico que tenemos sobre la pantalla generan experiencias que sugieren la presencia del universo interno; de un mecanismo que controla el comportamiento de los objetos electrónicos, e indica vías hacia la formalización del argumento.

Como este, muchos otros problemas geométricos pueden abordarse para movilizar los recursos de Cabri. En la pantalla viven objetos geométricos que hay que entender como objetos dinámicos, como estados transitorios dentro de un proceso evolutivo. Podemos decir que este es un *teorema situado en el dominio de la herramienta tecnológica*.

Ahora bien, la argumentación desarrollada dentro de un cierto contexto, como el que acabamos de considerar, permite acceder a un cierto nivel de formalización que empieza a desvincular el hecho matemático considerado de dicho contexto, pues la argumentación se va modelando de acuerdo a las características del universo interno. Así se inicia la *descontextualización de la argumentación*.

Sea ABC un triángulo en un sistema de coordenadas (se estudiará el caso de un triángulo que tiene uno de sus vértices sobre el origen de coordenadas y un lado sobre el semieje positivo de X). Sean M, N y O los puntos medios de los lados CA, AB y BC, respectivamente. Dado un punto sobre la mediatriz del lado AB y en el semiplano que no contiene el triángulo ABC. Se construyen los puntos M', N' y O', **en los semiplanos que no contienen al triángulo** y sobre las mediatrices de los lados CA, AB y BC, respectivamente y tales que: $\frac{MM'}{CA} = \frac{NN'}{AB} = \frac{OO'}{BC}$.

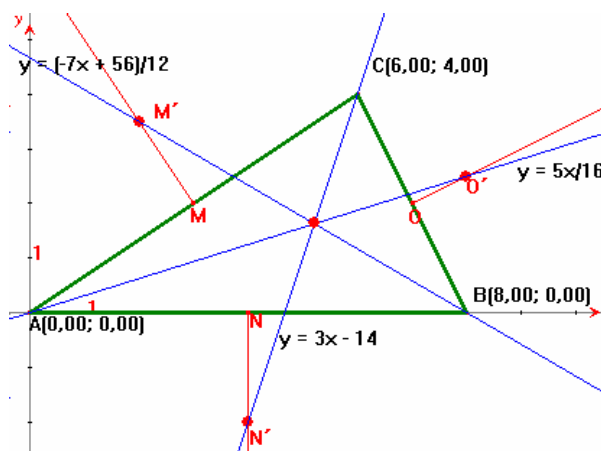


Fig. 6. Usando geometría analítica en un caso particular

Se le pueden pedir a Cabri las ecuaciones de las rectas AO', BM' y CN'. Si estas tres rectas concurren, entonces el sistema de ecuaciones que se presenta a continuación, debe tener solución única:

$$y = \frac{5}{16} x \quad (1)$$

$$y = -\frac{7}{12} x + \frac{14}{3} \quad (2)$$

$$y = 3x - 14 \quad (3)$$

Reemplazando la ecuación (1) en la ecuación (2), se obtiene:

$$\frac{5}{16}x = -\frac{7}{12}x + \frac{14}{3}$$

$$x = \frac{224}{43}$$

Reemplazando la ecuación (1) en la ecuación (3), se obtiene:

$$\frac{5}{16}x = 3x - 14$$

$$x = \frac{224}{43}$$

A partir de estos resultados, se puede concluir que las rectas presentadas en la figura número 6 concurren. Es decir, la validez del argumento se restringe para un caso particular.

¿Se puede utilizar esta técnica para la demostración del caso general? En la siguiente sección, se abordará el problema general. Para ello es necesario:

- Encontrar las coordenadas de los puntos M' y O' en términos de las coordenadas de los puntos A, B, C y N'.
- Escribir las ecuaciones de las rectas en términos de términos de las coordenadas de los puntos A, B, C y N'.
- Solucionar el sistema de ecuaciones y verificar si las rectas concurren o no.

e. La demostración con lápiz y papel

Sea ABC un triángulo en un sistema de coordenadas (sin pérdida de generalidad, se puede estudiar el caso de un triángulo que tiene uno de sus vértices sobre el origen de coordenadas y un lado sobre el semieje positivo de X). Sean M, N y O los puntos medios de los lados CA, AB y BC, respectivamente. Dado un punto sobre la mediatriz del lado AB y en el semiplano que no contiene el triángulo ABC. Se construyen los puntos M' y O', **en los semiplanos que no contienen al triángulo ("por fuera")** y sobre las mediatrices de los lados CA y BC, respectivamente y tales que: $\frac{MM'}{CA} = \frac{NN'}{AB} = \frac{OO'}{BC}$. Entonces, las rectas AO', BM' y CN' concurren.

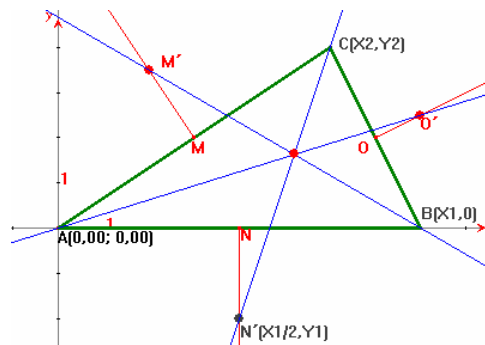


Fig. 7. Usando geometría analítica en el caso general

Los puntos M', N' y O' deben escogerse en los semiplanos que no contienen al triángulo ABC y deben satisfacer: $\frac{MM'}{CA} = \frac{NN'}{AB} = \frac{OO'}{BC}$. Esto es:

$$\frac{|y_1|}{x_1} = \frac{\overline{OO'}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + y_2^2}} = \frac{\overline{MM'}}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

De la condición anterior, se deduce que:

$$\overline{OO'}^2 = \frac{y_1^2}{x_1^2} [(x_2 - x_1)^2 + y_2^2] \quad (1)$$

$$\overline{MM'}^2 = \frac{y_1^2}{x_1^2} [x_2^2 + y_2^2] \quad (2)$$

La ecuación de la recta que pasa por los puntos A y C es $y = \frac{y_2}{x_2}x$. Ahora bien, la ecuación de la recta que pasa por los puntos M y M' es:

$$y - \frac{y_2}{2} = -\frac{x_2}{y_2} \left(x - \frac{x_2}{2}\right) \quad (3)$$

Para encontrar el punto M', se debe encontrar la intersección entre la recta descrita en la ecuación (3) y la circunferencia de centro en M y radio $\overline{MM'}$. La ecuación de esta circunferencia es:

$$\left(y - \frac{y_2}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{x_2}{2}\right)^2 = \overline{MM'}^2 \quad (4)$$

Reemplazando (2) en (4), obtenemos:

$$\left[y - \frac{y_2}{2}\right]^2 + \left[x - \frac{x_2}{2}\right]^2 = \frac{y_1^2}{x_1^2} [x_2^2 + y_2^2] \quad (5)$$

Reemplazando (3) en (5) obtenemos:

$$\left[x - \frac{x_2}{2}\right]^2 = \frac{y_2^2 y_1^2}{x_1^2}$$

$$x - \frac{x_2}{2} = \pm \frac{y_2 |y_1|}{x_1}$$

Sin embargo, M' es un punto fuera del semiplano que contiene al triángulo, por tanto la solución que se acepta es:

$$x = \frac{x_2}{2} - \frac{y_2 |y_1|}{x_1} \quad (6)$$

Reemplazando (6) en (3), se obtiene:

$$y = \frac{y_2}{2} + \frac{x_2|y_1|}{x_1} \quad (7)$$

Por tanto, el punto M' tiene las siguientes coordenadas:

$$M' \left[\frac{x_2}{2} - \frac{y_2|y_1|}{x_1}, \frac{y_2}{2} + \frac{x_2|y_1|}{x_1} \right]$$

Utilizando un procedimiento análogo al anterior, se pueden encontrar las coordenadas del punto O'.

La ecuación de la recta que pasa por los puntos B y C es $y = \frac{y_2}{x_2 - x_1}(x - x_1)$. Por otra parte, la ecuación de la recta que pasa por los puntos O y O' es:

$$y - \frac{y_2}{2} = \frac{x_1 - x_2}{y_2} \left[x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right] \quad (9)$$

Para encontrar el punto O', se debe encontrar la intersección entre la recta descrita en la ecuación (9) y la circunferencia de centro en O y radio $\overline{OO'}$. La ecuación de esta circunferencia es:

$$\left[y - \frac{y_2}{2} \right]^2 + \left[x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right]^2 = \overline{OO'}^2 \quad (10)$$

Reemplazando (1) en (10), obtenemos:

$$\left[y - \frac{y_2}{2} \right]^2 + \left[x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right]^2 = \frac{y_1^2}{x_1^2} \left[(x_2 - x_1)^2 + y_2^2 \right] \quad (11)$$

Reemplazando (9) en (11) obtenemos:

$$\left[x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right]^2 = \frac{y_2^2 y_1^2}{x_1^2}$$

$$x - \frac{x_1 + x_2}{2} = \pm \frac{y_2|y_1|}{x_1}$$

Sin embargo, O' es un punto fuera del semiplano que contiene al triángulo, por tanto la solución que se acepta es:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{y_2|y_1|}{x_1} \quad (12)$$

Reemplazando (12) en (9), se obtiene:

$$y = \frac{y_2}{2} + \frac{|y_1|}{x_1}(x_1 - x_2) \quad (13)$$

Por tanto, el punto O' tiene las siguientes coordenadas:

$$O' \left[\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{y_2 |y_1|}{x_1}, \frac{y_2}{2} + \frac{|y_1|}{x_1} (x_1 - x_2) \right] \quad (14)$$

Usando las coordenadas de los puntos A, B, C, M', N' y O', se pueden obtener las ecuaciones de las rectas AO', BM' y CN'. Como y_1 es la ordenada del punto N' y por construcción y_1 es negativo, entonces $|y_1| = -y_1$.

a) La ecuación de la recta que pasa por C y N' es:

$$y = y_2 + \frac{2(y_2 - y_1)}{2x_2 - x_1} (x - x_2) \quad (15)$$

b) La ecuación de la recta que pasa por A y O' es:

$$y = \frac{-2y_1(x_1 - x_2) + y_2 x_1}{-2y_1 y_2 + x_1(x_1 + x_2)} x \quad (16)$$

c) La ecuación de la recta que pasa por B y M' es:

$$y = \frac{y_2 x_1 - 2x_2 y_1}{x_1 x_2 + 2y_1 y_2 - 2x_1^2} (x - x_1) \quad (17)$$

Para solucionar este sistema de ecuaciones lineales, primero se igualan (15) y (17) y luego se igualan (15) y (16). Posteriormente se resuelven para x tales ecuaciones y se comparan los resultados.

Iguando (15) y (17) y despejando x:

$$x = \frac{(x_1^2 + x_1 x_2 - 2y_1 y_2)(2y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_1^2(4y_1 - 3y_2) - 4x_1 y_1 x_2 - 4y_1(y_1 y_2 - x_2 - y_2)} \quad (18)$$

Iguando (15) y (16) y despejando x:

$$x = - \frac{x_1^3 y_2 + x_1^2 y_2^2 + x_1^2 x_2 (y_2 - 2y_1) - 2x_1 y_1 (x_2^2 + y_2^2) + 4y_1^2 x_2 y_2}{x_1^2(4y_1 - 3y_2) - 4x_1 y_1 x_2 - 4y_1(y_1 y_2 - x_2 - y_2)} \quad (19)$$

Los denominadores de las ecuaciones (18) y (19) son iguales. Únicamente falta desarrollar y comparar los numeradores. Sea N_1 el numerador de la ecuación (18) y N_2 el numerador de la ecuación (19).

$$\begin{aligned} N_1 &= (x_1^2 + x_1 x_2 - 2y_1 y_2)(2y_1 x_2 - x_1 y_2) \\ &= -x_1^3 y_2 + 2x_1^2 y_1 x_2 - x_1^2 x_2 y_2 + 2x_1 y_1 x_2^2 + 2x_1 y_1 y_2^2 - 4y_1^2 x_2 y_2 \end{aligned}$$

$$N_2 = -[x_1^3 y_1^2 + x_1^2 x_2 (y_2 - 2y_1) - 2x_1 y_1 (x_2^2 + y_2^2) + 4y_1^2 x_2 y_2]$$

$$N_2 = -x_1^3 y_2 + 2x_1^2 y_1 x_2 - x_1^2 x_2 y_2 + 2x_1 y_1 x_2^2 + 2x_1 y_1 y_2^2 - 4y_1^2 x_2 y_2$$

Como $N_1 = N_2$, entonces las expresiones (18) Y (19) son iguales. Para encontrar los valores de x de las ecuaciones (18) y (19) se igualaron los valores de Y en las ecuaciones (15) y (16), (15) y (17). Entonces, hemos encontrado que la solución del sistema de ecuaciones (15) y (16), es igual a la solución del sistema de ecuaciones (15) y (17).

De lo anterior se puede concluir que las rectas AO' , BM' y CN' concurren.

e. **Extensión.**

A partir del problema que se discutió en la sección anterior, se puede proponer un nuevo problema:

Sea ABC un triángulo cualquiera, M , N y O los puntos medios de los lados CA , AB y BC , respectivamente. Se construyen los puntos M' , N' y O' , **en los semiplanos que contienen el triángulo ("por dentro")** y sobre las mediatrices de los lados CA , AB y BC , respectivamente y tales que: $\frac{MM'}{CA} = \frac{NN'}{AB} = \frac{OO'}{BC}$. ¿Qué se puede decir de las rectas BM' , CN' y AO' ? (ver Fig. 8)

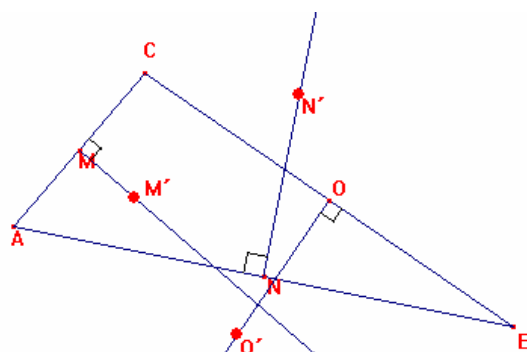


Fig. 8. Una extensión

Trazamos las rectas BM' , CN' y AO' :

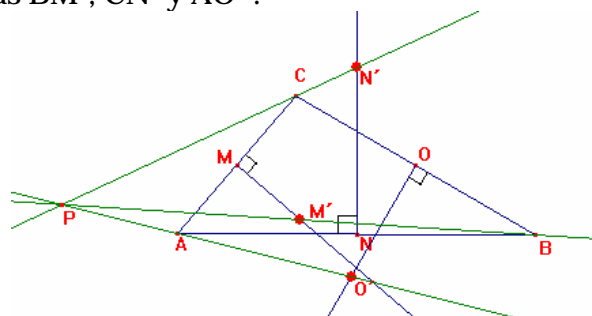


Fig. 9 Estudiando la concurrencia en el nuevo caso.

En la Fig. 9, se puede percibir que las rectas BM' , CN' y AO dan la apariencia de ser concurrentes en el punto P . Nuevamente podemos iniciar una aventura que nos

lleve desde usar argumentos visuales, hasta la demostración de la concurrencia de las rectas.

En efecto, siguiendo una técnica similar a la empleada en el problema originalmente planteado, se puede demostrar que las rectas BM' , CN' y AO concurren en el punto P .

f. Conexiones

f1. **El baricentro.** Si el punto libre N' se mueve hasta hacerlo coincidir con N , el punto M' coincidirá con M y O' coincidirá con O , en este caso $\frac{MM'}{CA} = \frac{NN'}{AB} = \frac{OO'}{BC} = 0$.

Como consecuencia del teorema que demostramos en la sección e, las rectas AO' , BM' y CN' (medias del triángulo ABC) concurren en un punto P .

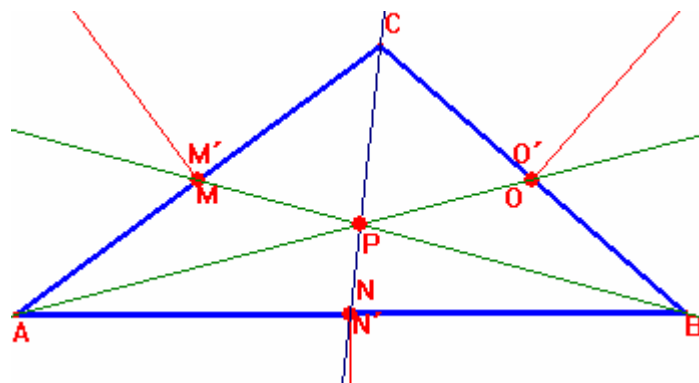


Fig. 10 Un caso particular: el baricentro

f2. **El punto de Fermat.** Se construyen triángulos equiláteros sobre cada uno de los lados del triángulo ABC . Los vértices V_1 , V_2 y V_3 de los triángulos equiláteros están sobre las mediatrices de los lados AB , BC y CA , respectivamente.

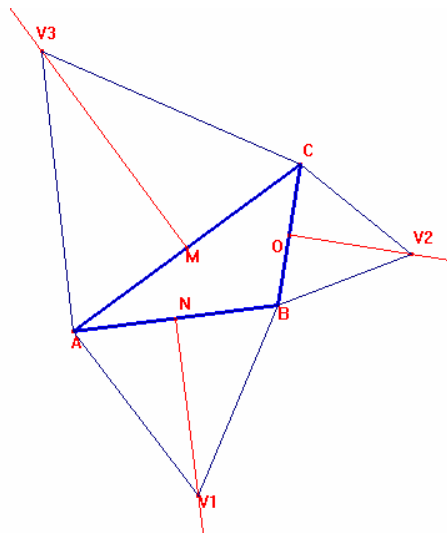


Fig. 11 Construyendo triángulos equiláteros sobre los lados de un triángulo

Los vértices V_1 , V_2 y V_3 , están sobre las mediatrices de los lados AB , BC y AC y cumplen $\frac{MV_3}{CA} = \frac{NV_1}{AB} = \frac{OV_2}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Como se satisfacen las hipótesis del teorema que demostramos en la sección e, las rectas AO' , BM' y CN' concurren, veamos:

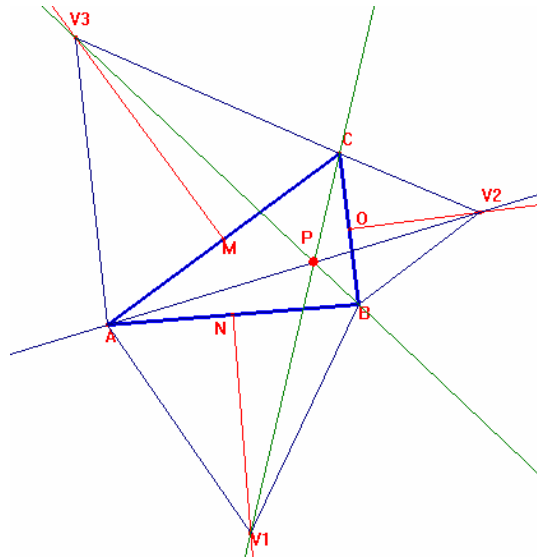


Fig. 12 Un corolario: El punto de Fermat.

El punto P es conocido con el nombre de punto de Fermat.

F3. Una nueva generalización. A partir de la discusión que se dio con el punto de Fermat, nos podemos preguntar si la propiedad se puede extender a otros polígonos regulares:

Por ejemplo, se construyen cuadrados sobre cada uno de los lados de un triángulo ABC. En la figura No 13, los puntos V_1 , V_2 y V_3 son los puntos medios de los lados del cuadrado, opuestos a los lados AB, BC y AC. Tales puntos están sobre las mediatrices de los lados AB, BC y CA, respectivamente.

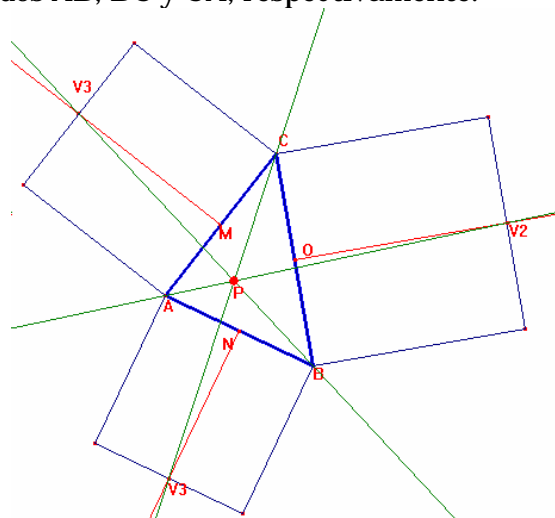


Figura 13. El caso del cuadrado

Los puntos V_1 , V_2 y V_3 , están sobre las mediatrices de los lados AB, BC y AC y cumplen $\frac{MV_3}{CA} = \frac{NV_1}{AB} = \frac{OV_2}{BC} = 1$. Como se satisfacen las hipótesis del teorema que demostramos en el presente artículo, entonces las rectas AO' , BM' y CN .

Se construyen eneágonos (siendo n un número par de lados) regulares sobre cada uno de los lados del triángulo ABC. Sean V_1 , V_2 y V_3 los puntos medios de los lados del eneágono que son opuestos a los lados AB, BC y CA (del triángulo ABC), respectivamente.

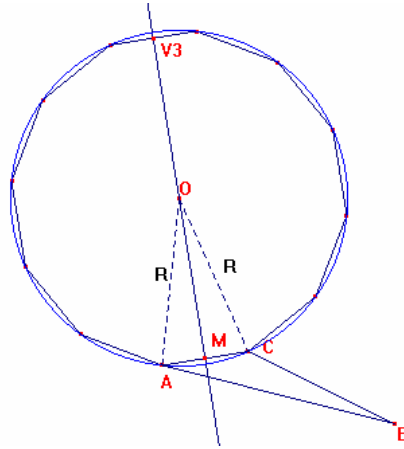


Fig. 14 construyendo polígonos regulares de un número par de lados

Se construye una circunferencia de radio R , circunscrita al eneágono. La medida del ángulo central AOC es:

$$AOC = \frac{p}{n}$$

Como la recta OM es perpendicular al lado AC , entonces el triángulo OMC es rectángulo y se cumple que:

$$\ell = 2R \operatorname{sen} \frac{AOC}{2} = 2R \operatorname{sen} \left(\frac{p}{2n} \right)$$

$$a = R \cos \frac{AOC}{2} = R \cos \left(\frac{p}{2n} \right)$$

Sean M , N y O , los puntos medios de los lados AC , AB y BC , respectivamente. A partir de los resultados encontrados en esta sección, se cumple que:

$$\frac{MV_3}{CA} = \frac{NV_1}{AB} = \frac{OV_2}{BC} = \frac{2a}{\ell} = \cot \left(\frac{p}{n} \right)$$

A partir de estos resultados, se puede concluir que las rectas AV_2 , BV_3 , CV_1 concurren:

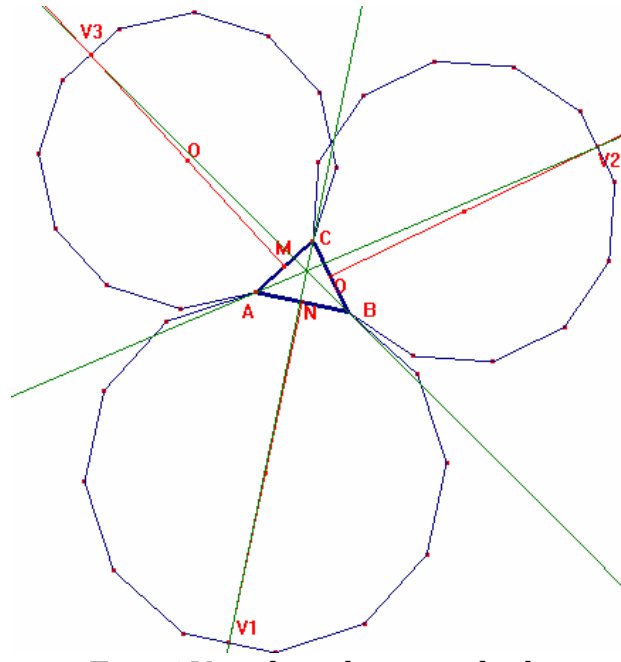


Fig. 15 Visualizando un resultado

Se construyen eneágonos (siendo n un número impar de lados) regulares sobre cada uno de los lados del triángulo ABC. Sean V_1 , V_2 y V_3 los puntos medios de los lados del eneágono que son opuestos a los lados AB, BC y CA (del triángulo ABC), respectivamente.

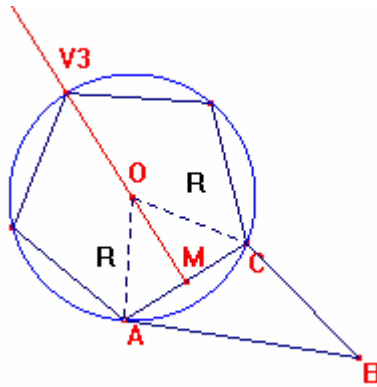


Fig. 16 Construyendo polígonos regulares de un número impar de lados

Sean M, N y O, los puntos medios de los lados AC, AB y BC, respectivamente. A partir de los resultados encontrados en el caso del número par de lados, se concluye que:

$$\frac{MV_3}{CA} = \frac{NV_1}{AB} = \frac{OV_2}{BC} = \frac{MO \cdot OV_3}{\ell} = \frac{a+R}{\ell} = \frac{1}{2} \left[\csc \frac{p}{n} + \cot \frac{p}{n} \right]$$

Se satisfacen las hipótesis del teorema que se presenta en este artículo, por lo cual se puede concluir que las rectas AV_2 , BV_3 , CV_1 concurren.

Hemos considerado el proceso de argumentación desde la mediación de las herramientas computacionales. Esto es importante porque implica considerar las características particulares de los objetos matemáticos vistos a través de las nuevas tecnologías. Desde este punto de vista, la manera de argumentar, de demostrar, no pueden ser consideradas al margen del problema de la contextualización del conocimiento. La medición nos permite acercarnos *perceptualmente* al problema de la argumentación. Este tratamiento es posible, porque estamos trabajando en un ambiente dinámico.

F4. El Ortocentro. Hasta el momento hemos estudiado ubicaciones especiales del punto N' cuando coincide con el punto N y cuando coincide con el vértice de un triángulo equilátero. En el primer caso, el punto P es el baricentro del triángulo ABC y en el segundo, P es el punto de Fermat. A partir de estas exploraciones, surge la pregunta:

¿En dónde queda ubicado el punto P , cuando N' esté en el infinito?

Sea ABC un triángulo cualquiera, M , N y O los puntos medios de los lados CA , AB y BC , respectivamente. Sea ℓ una recta que corta la mediatriz del lado AB en un punto N' .

Se construyen los puntos M' y O' , **en los semiplanos que no contienen al triángulo** y sobre las mediatrices de los lados CA , AB y BC , respectivamente y tales que:

$$\frac{MM'}{CA} = \frac{NN'}{AB} = \frac{OO'}{BC}$$

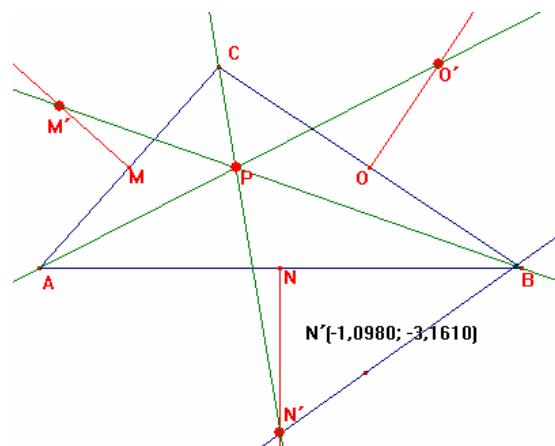


Fig. 17 Diseñando una estrategia para enviar el punto N' al infinito

Se encuentran las coordenadas del punto N' . Se mueve la recta ℓ hasta cuando las coordenadas del punto N' estén en el infinito:

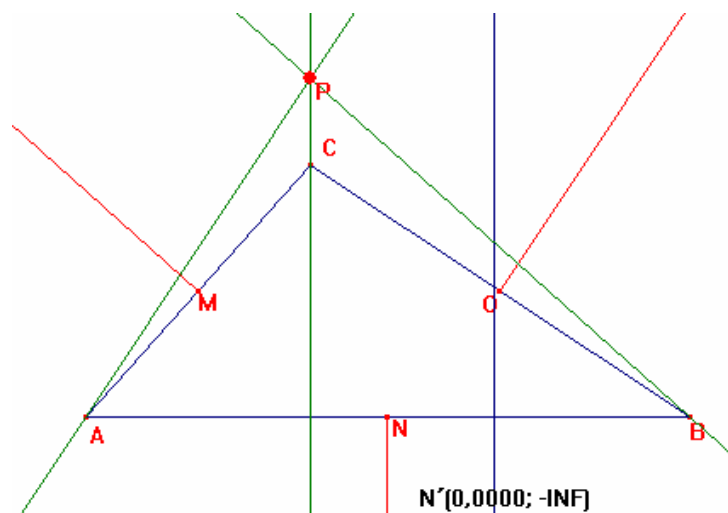


Fig. 18 Ubicación de P cuando N' está en el infinito

Para averiguar qué clase de punto es P , cuando N' esté en el infinito, prolongamos el lado AB y medimos el ángulo formado por las rectas AC y BP :

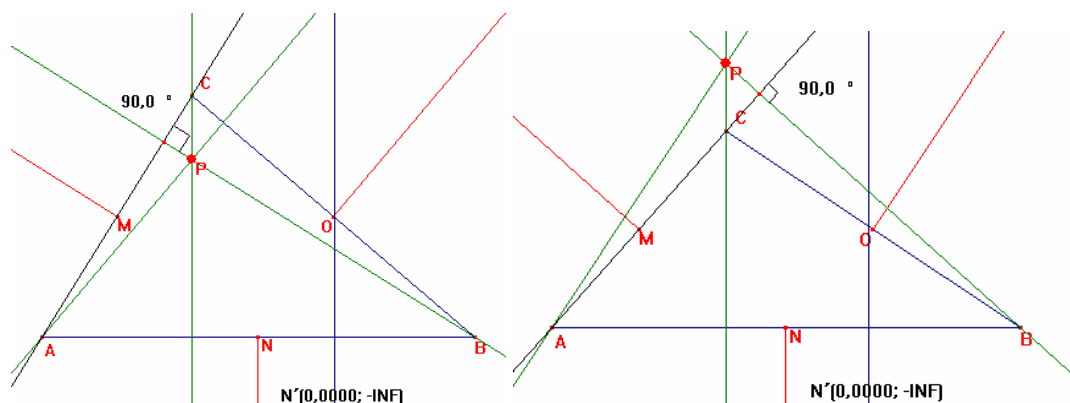


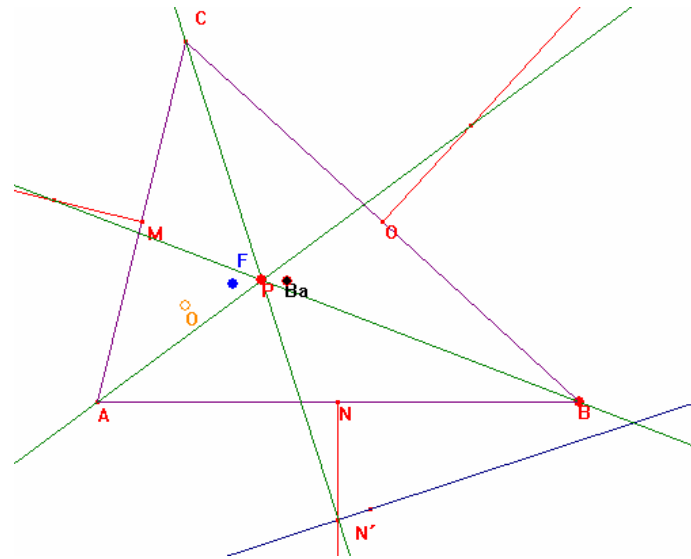
Fig. 19

Arrastrando el punto C , se puede apreciar que las rectas AC y BP son perpendiculares. Algo similar ocurre con las parejas de rectas PC y AB , BC y AP . De aquí emerge la conjetura: Si N' está en el infinito, entonces el punto P es el ortocentro del triángulo.

F5. Un lugar geométrico interesante.

En el presente artículo hemos demostrado que si ABC un triángulo en un sistema de coordenadas (sin pérdida de generalidad, se puede estudiar el caso de un triángulo que tiene uno de sus vértices sobre el origen de coordenadas y un lado sobre el semieje positivo de X). Sean M , N y O los puntos medios de los lados CA , AB y BC , respectivamente. Dado un punto sobre la mediatriz del lado AB y en el semiplano que no contiene el triángulo ABC . Se construyen los puntos M' y O' , **en los semiplanos que no contienen al triángulo ("por fuera")** y sobre las mediatrices de los lados CA y BC , respectivamente y tales que: $\frac{MM'}{CA} = \frac{NN'}{AB} = \frac{OO'}{BC}$. Entonces, las rectas AO' , BM' y CN' concurren en un punto P .

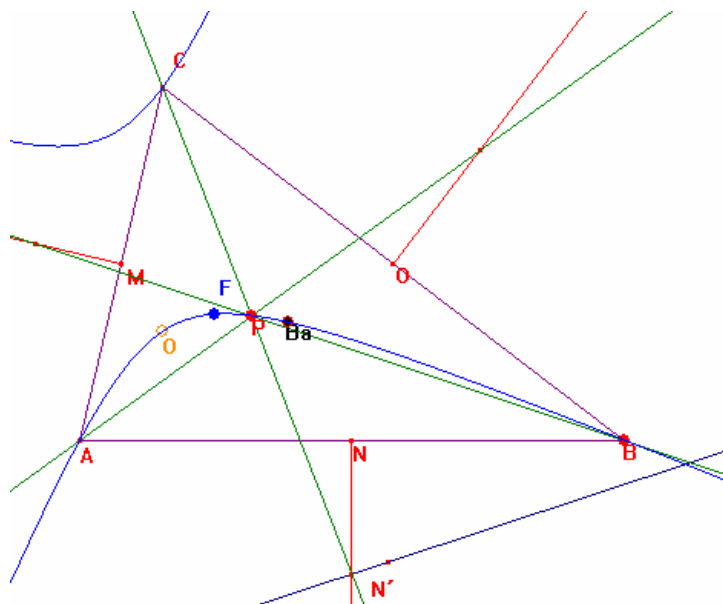
Ahora bien, para posiciones específicas de N' el punto P puede transformarse en el ortocentro (O) del triángulo ABC , en el baricentro (Ba) el punto de Fermat, los vértices del triángulo (A, B y C):



El lugar geométrico en el que están el ortocentro, baricentro y punto de Fermat

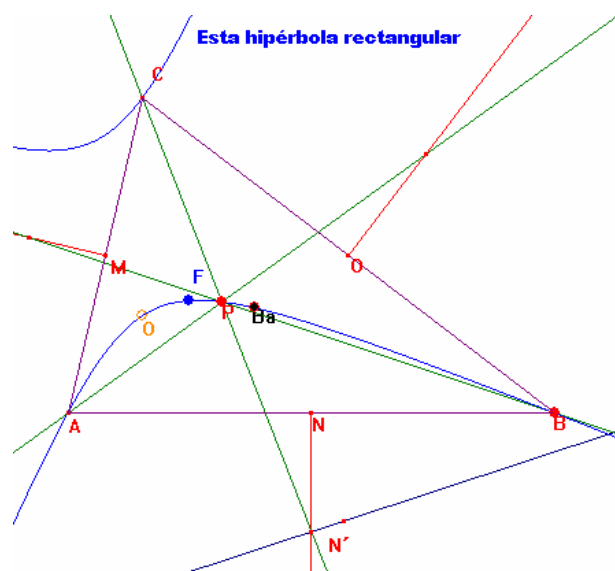
¿Cuál es el lugar geométrico del punto P cuando el punto N' se mueva sobre la mediatriz?

Podemos hacer la Cabri-construcción y resulta lo siguiente:



Generando el lugar geométrico de P con respecto a N' .

Tal lugar geométrico, da la apariencia de ser una hipérbola. Ponemos cinco puntos sobre la curva y ponemos el puntero sobre ella, las dos curvas coinciden y el software confirma nuestras sospechas:



El lugar geométrico de P con respecto a N' es una hipérbola.

A partir de todas las exploraciones que se han hecho en el presente escrito, emerge una nueva conjetura:

Por los vértices (A, B y C) de un triángulo, por el ortocentro, baricentro y punto de Fermat, pasa una hipérbola.

REFERENCIAS

- Balacheff, N. & Kaput, J. (1996). Computer Based Environments in mathematics. In *International Handbook of mathematical Education*, Bishop, A. et al(Eds.) Kluwer Academic Publishers.
- Goldenberg, E. P. (1995). Multiple Representations: A vehicle for Understanding. In Perkins, D., Schwart, J., Maxwell, M., Stone, M. (Eds.). *Software Goes to School. Teachers understanding with new technologies*. Oxford University Press. (pp 155-170).
- Laborde, C. (1995). Designing Task for Learning Geometry and Computer - Based Environment, in Burton, L. y Jaworsky, B. (eds) *Technology in Mathematics Teaching. A bridge between teaching and learning*, Chartwel-Bratt, Sweden.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Salles, J. (1988). TI 92 Retroprojetee outil D'Aide a L'introduction D'Une notion, a la conjeture, a la découverte de propriétés. En Guin, D. (Eds). *Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques. Actes du colloque francophone européen de La Grande- Motte*. (pp. 227-238). Montpellier.
- Santos, T. L. (2000). Students' Approaches to the Use of Technology in Mathematical Problem Solving. *Twenty Second Annual Meeting, North*

American Chapter of the International Group for the Psychology of the Mathematics Education. Working Group Representation and Mathematics Visualization. Tucson, Arizona, U.S. A.

Santos, T. L. y Espinosa, H. (2002). *Searching and Exploring Properties of Geometric Configuration via the Use of Dynamic Software.* International Journal of Mathematical Education in Science and technology.