Propuesto por José María Pedret. Ingeniero Naval. (Esplugues de Llobregat, Barcelona)
Problema 143

• Por el vértice B de un triángulo, trazar una recta tal que las perpendiculares AP y CQ a ella determinen dos triángulos ABP y CBQ cuyas superficies estén en una razón dada.

Se lleva ABP a la posición CBP_1, variando al mismo tiempo su tamaño, y con BC como diámetro se traza un círculo. La cuerda P_1Q tiene entonces una posición determinada y BC la corta según una razón conocida.

Petersen, J (1880): Méthodes et théories pour la résolution des problémes de constructions géomètriques. Gauthier-Villars. (p. 64), problema 330

Antes de proseguir debemos decir que el método sugerido recibe en francés el nombre de "retournement" que podemos traducir como el de “voltear” la figura. Este método es la base para resolver el problema de STURM: "Construir un cuadrilátero inscriptible conociendo los cuatro lados". FGM lo clasifica dentro de los métodos con figuras auxiliares.

[FGM EXERCICES DE GÉOMÉTRIE sixième édition. nº 151 página 68.]

Julius Petersen lo destaca por lo siguiente:

"Retournement"

Se usa este método, para dar a los diferentes elementos una posición cómoda para efectuar la construcción. Consiste en llevar una parte de la figura a una nueva posición, buscando lo siguiente:

1. *Poner juntos los elementos dados.*

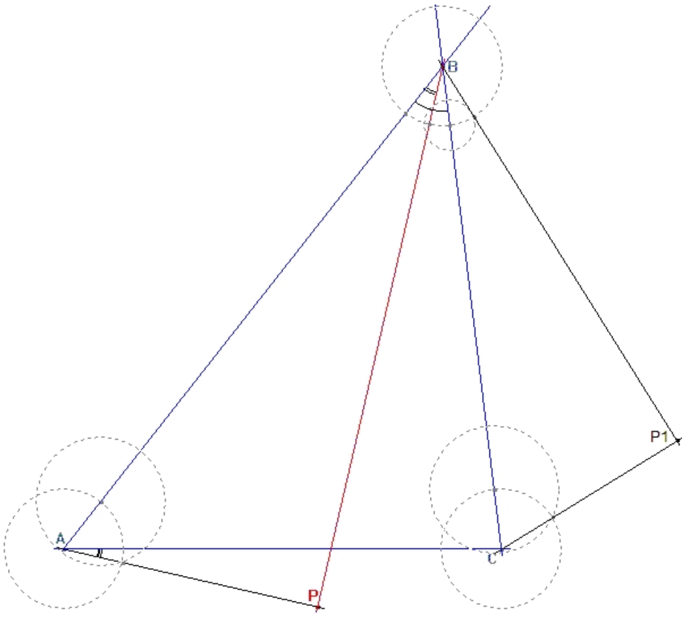
2. *Introducir en la figura los elementos dados.*

3. *Superponer líneas o ángulos de igual magnitud. Este procedimiento se emplea a menudo, cuando los elementos de igual magnitud se desconocen y se quiere, en cierta medida, eliminarlos. Se puede emplear un método análogo cuando se conoce la razón de dos líneas; para superponerlas, se hace crecer una parte de la figura en la proporción dada colocando, al mismo tiempo, la parte de la figura en la nueva posición.*

4. *Constituir una figura simétrica, de tal manera que un punto buscado este en el eje de simetría.*

5. *Llevar una porción de la figura de modo que dos puntos desconocidos se confundan en uno solo, mientras que dos líneas que pasan por estos puntos forman un ángulo conocido y contienen cada una un punto conocido. Entonces, se puede trazar un círculo que pasa por el punto de intersección de las dos rectas.*

¿Dado el triángulo ABP, cómo se lleva AB sobre BC, es decir, ABP sobre CBP_1?



Giramos BA un ángulo ABC. BC es la transformada de BA.
La transformada de AP se consigue trazando la recta que forma con BC un ángulo igual a BAP,
En la intersección de las transformadas de BA y AP se encuentra P_1

Figura 1

Tracemos ahora el enunciado del problema como si estuviera resuelto:

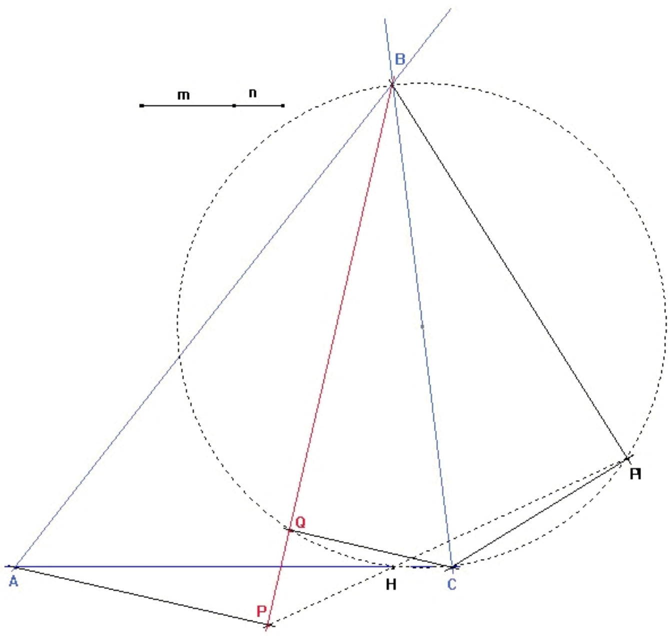


Figura 2

En este caso, existe una peculiaridad, el ángulo APB es recto, el vértice P_1 estará sobre el círculo de diámetro BC y para trazarlo no nos hace falta la construcción general. Sólo saber que la recta PP_1 pasa por H, intersección del lado AC y el círculo de diámetro BC.

(Hay que demostrar que PP_1 pasa por H)

P_1 es el transformado de P por giro de centro B y ángulo ABP, entonces el triángulo BPP_1 tiene el lado BP que pasa por un punto fijo B y P recorre un círculo, el segundo lado BP_1 tiene un punto fijo B y P_1 se desplaza sobre el mism círculo, entonces el tercer lado que tiene un punto sobre el círculo tiene también un punto fijo en él.
Como en una de las múltiples posiciones el triángulo coincide con ABC y BC corta al círculo en H, entonces H es el punto fijo. Apesar de ello, H no es necesario si sólo buscamos la recta BQ

Situado P_1 busquemos ahora la razón conocida a la que se refiere el problema:

La observación de la figura nos muestra que la razón, que podemos conocer, es la de las alturas de CQB y CP_1B que como tienen la misma base, esa razón coincidirá con la razón de sus áreas.

$$\frac{AreaCBP_1}{AreaCBQ}=\frac{\frac{1}{2}\overline{BC}h_{P_1}}{\frac{1}{2}\overline{BC}h_Q}=\frac{h_{P_1}}{h_Q} \qquad (1)$$

Al llevar ABP sobre CBP_1 se producen las siguientes relaciones

$$\frac{AreaCBP_1}{AreaABP}=\left(\frac{BC}{BA}\right)^2 \qquad AreaCBP_1=AreaABP\left(\frac{BC}{BA}\right)^2 \qquad (2)$$

Relacionemos esta última razón con la razón dada

$$\frac{AreaABP}{AreaCBQ}=\frac{m}{n}(dada) \qquad AreaCBQ=AreaABP\frac{n}{m} \qquad (3)$$

y queda

$$\frac{AreaCBP_1}{AreaCBQ}=\frac{\left(AreaABP\left(\frac{BC}{BA}\right)^2\right)}{AreaABP\frac{n}{m}}=\frac{m}{n}\left(\frac{BC}{BA}\right)^2=\frac{h_{P_1}}{h_Q}(4)$$

Hemos expresado la relación de alturas en función de datos conocidos del problema.

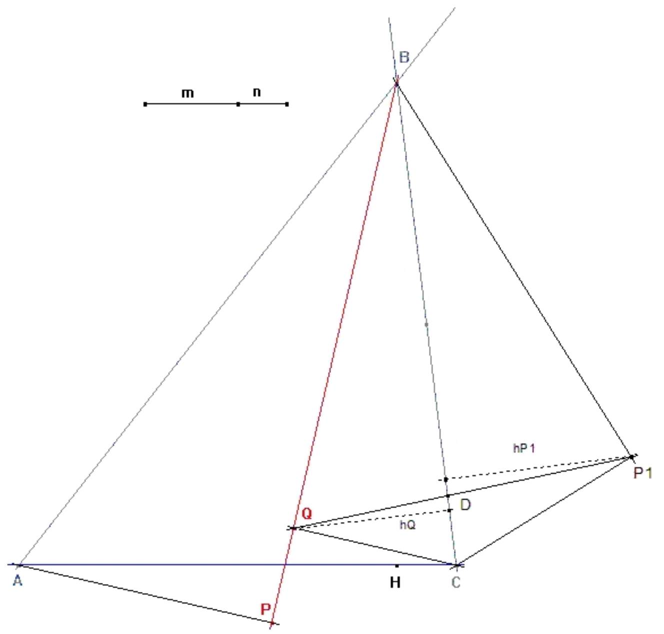


Figura 3

Si, conociendo la razón que nos indica la sugerencia del enunciado, somos capaces de terminar el punto D, que divide QP_1 en la razón hallada, determinamos QP_1 y resolvemos el problema.

Para determinar el lugar geométrico de los puntos D que dividen al segmento QP_1 según la razón hallada, observamos que al ser APB recto, P estará sobre el círculo de diámetro BA y que debemos resolver el siguiente problema antes de tener todas las herramientas para resolver el problema original:

Dado un triángulo ABC, sea P un punto sobre el círculo de diámetro BA. Sea P_1 la intersección de la recta PH con el círculo de diámetro BC. Sea Q la intersección de la perpendicular por C a la recta BP.

Hallar el lugar geométrico de los puntos D que dividen al segmento QP_1 según una razón conocida λ, cuando P recorre el círculo de diámetro BA.

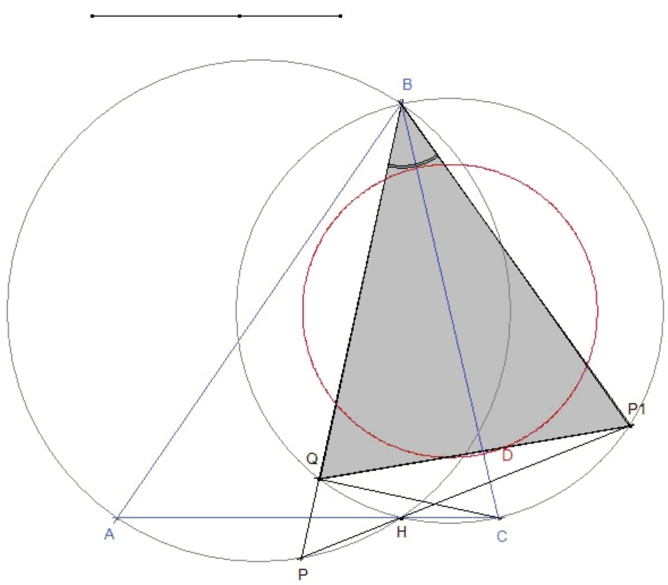


Figura 4

Al desplazarse P sobre su círculo, gira en torno a B (radio de giro variable).
Q realiza el mismo tipo de giro al estar sobre BP.
P_1 es el transformado de P por giro con centro B y ángulo ABP.

Por tanto el segmento QP_1 abarca en el círculo de diámetro BC un arco capaz fijo igual a ABP, entonces QP_1 es de longitud constante ya que sus extremos se desplazan sobre el mismo círculo y abarcan un arco capaz de ángulo ABP

Demostremos ahora que:

El lugar de un punto, sobre una cuerda de longitud fija que se mueve sobre un círculo y divide según una razón fija dicha cuerda, es un círculo concéntrico al círculo de la cuerda.

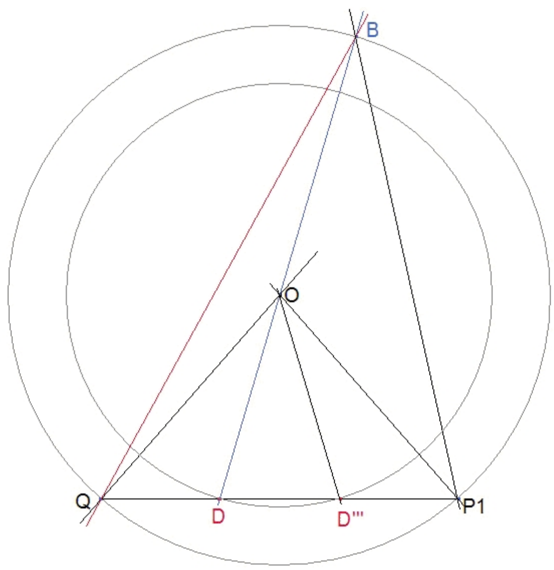


Figura 5

$<QOP_1 = 2 <QBP$ = Constante. QP_1 = Constante.
$OQ = OP_1$ = Constante = ½AB.
$<OQP_1$ = Constante.

Como DQ = Constante, se deduce que OD es constante y por tanto D recorre un círculo con centro en el punto medio de AB.

Además. D´´´ P_1=DQ, entonces DD´´´=constante.

Más adelante al construir la solución usaremos el hecho de que DD´´´ es constante.

Como D debe estar sobre BC, está en la intersección de este último círculo y BC.

De lo visto hasta aquí se deriva el siguiente método de construcción de la:

SOLUCION

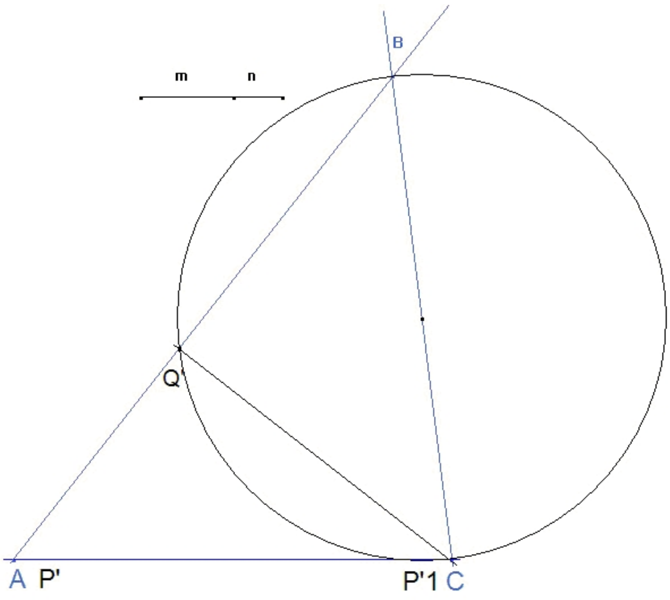


Figura 6

a Trazamos el círculo de centro el punto medio de BC, que pasa por D y para determinar un punto cualquiera D´ usamos un punto fácil sobre el círculo, el propio punto A. Si P´ está en A, BP´=BA y Q´ está en el pie de la perpendicular a AB desde. No hace falta trazar la perpendicular, la intersección de BA con el círculo de diámetro BC ya nos proporciona Q´. El círculo ya sirve para más adelante. P'_1 coincide con C. Para hallar D´ sobre $Q'P'_1$ se divide ese segmento por D´ según:

$$\frac{h_{P_1}}{h_Q} = \frac{D'P'_1}{D'Q'} = \frac{m}{n}\left(\frac{BC}{BA}\right)^2$$

Para construir la razón buscada y con el fin de economizar, trabajamos en el vértice B.

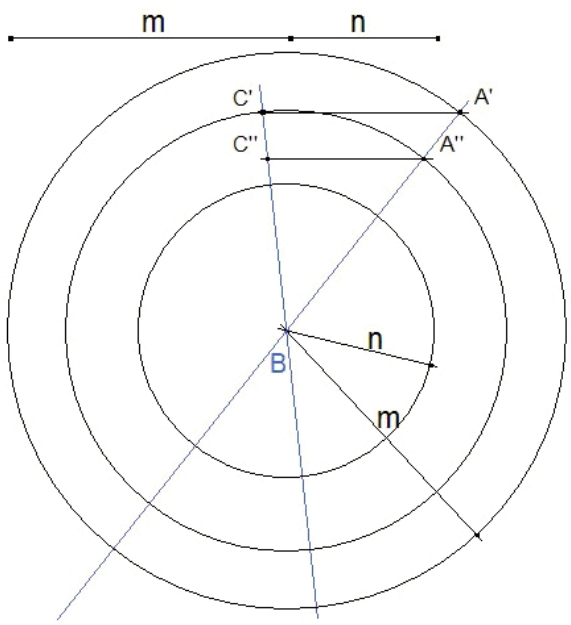


Figura 7

b Círculo de centro B y radio m, corta a BA en A´

c Paralela por A´ a AC, corta a BC en C´

d Llevar BC´ sobre BA´ y obtenemos A´´

e Paralela por A´´ a AC, corta a BC en C´´

$$m\left(\frac{BC}{BA}\right)^2 = \frac{BC''}{BA'}$$

f y

$$\frac{m}{n}\left(\frac{BC}{BA}\right)^2 = \frac{BC''}{n}$$

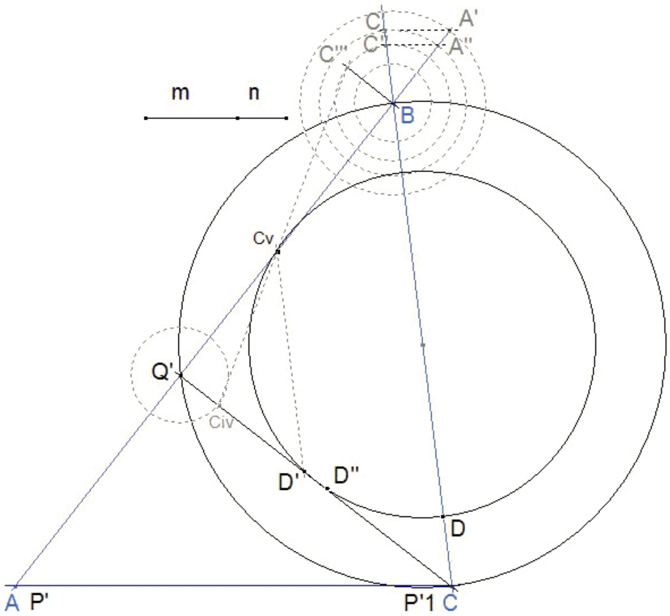


Figura 8

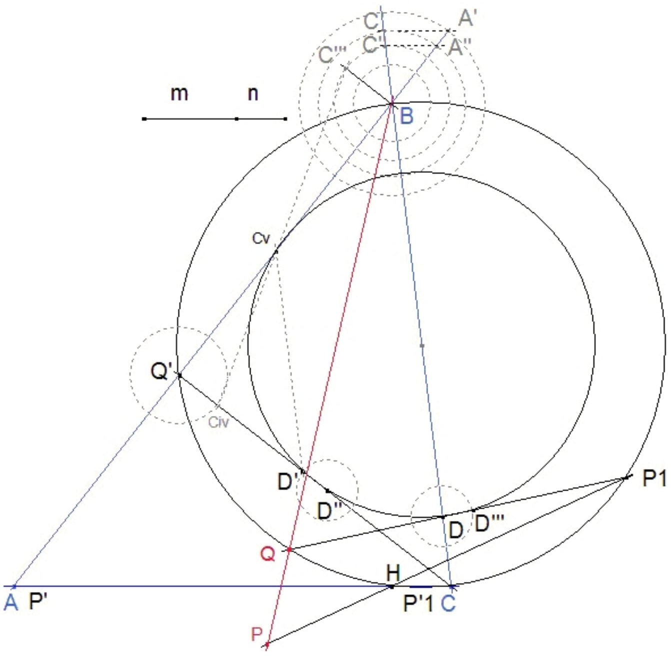


Figura 9

g Llevar BC´´ sobre la perpendicular a BA desde B. Obtenemos C´´´

h Círculo de centro Q´ y radio n. Obtenemos C^v en su intersección con $Q´P´_1$

i Unimos C´´´ y C^v. Esta recta corta a BA en C^v

j hemos dividido BQ´ en la razón calculada. Paralela a BC por C^v, que corta a $Q´P´_1$ en D´

k Con centro en el punto medio de BC, trazamos el círculo que pasa por D´

l D se halla en la intersección del círculo trazado y el lado BC. El círculo tiene una segunda intersección con $Q´P´_1$ en D´´.

m D´D´´ es de longitud constante como hemos visto más al principio; por tanto si trazamos, con centro en D, el círculo de radio D´D´´, este círculo determina D´´´ sobre el círculo de centro el punto medio de BC y que pasa por D. DD´´´=D´D´´.

¡OJO! EN CABRI, m NO SIRVE COMO CONSTRUCCIÓN DINÁMICA
(Ver más adelante: Construcción dinámica del punto D´´´).

n A su vez DD´´´ está sobre QP_1 y por tanto la recta Por D y D´´´ determina Q en su intersección con el círculo de diámetro BC y P_1 en su segunda intersección.

o Podemos trazar la recta solución BQ

p Pero sabemos también que PP_1 pasa por el punto fijo H, intersección de AC con el círculo de diámetro BC. La recta P_1H

CONSTRUCCIÓN DINÁMICA DEL PUNTO D´´´

caso I $\quad m = \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{BC}{BA}\right)^2$

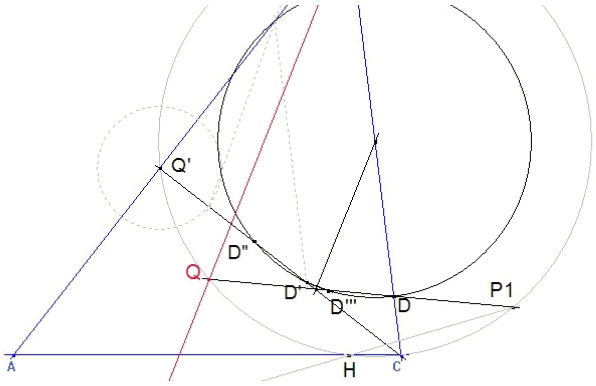


Figura 10

caso II $\quad m > \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{BC}{BA}\right)^2$

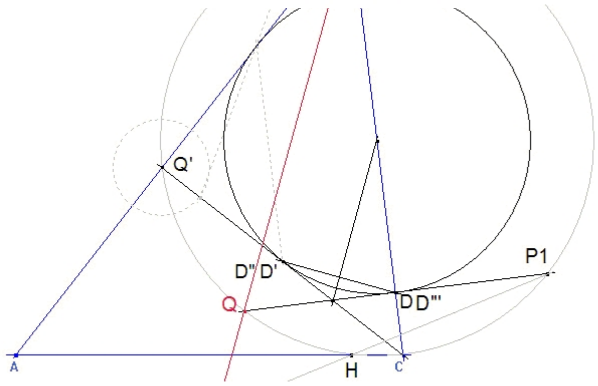
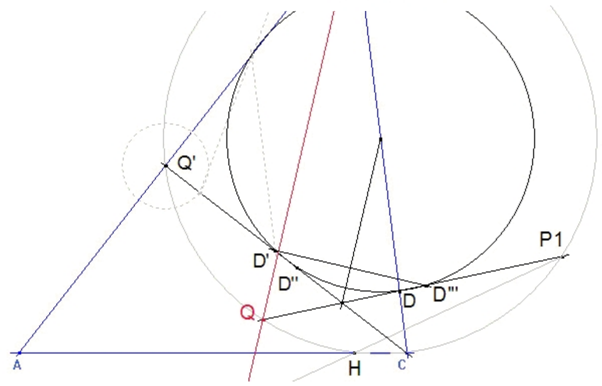


Figura 12

caso III $\quad m < \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{BC}{BA}\right)^2$



Si nosotros imaginamos una recta cualquiera por B que corte a AC, siempre existen dos triángulos como enuncia el problema que estarán en una razón que irá desde cero (caso de que la recta sea BA) hasta infinito (caso de que la recta sea BC), por lo tanto, siempre existe solución . Es decir:

$$\left| \forall m > 0 \quad y \quad \forall n > 0 \quad \exists Q \right|$$

Caso I
D´ y D´´ se confunden. La recta BQ tiene una posición que se produce cuando el segmento QP_1 es tangente al círculo buscado. En ese caso la construcción puede hacerse directamente.

Caso II
D´D´´ tiene la orientación de QC.
DD´´´ tiene la orientación de QC.

Caso III
D´D´´ tiene la orientación de CQ.
DD´´´ tiene la orientación de CQ.

Comparando el caso III con el II, si efectuamos la construcción citada en el párrafo m y usamos, de Cabri II, la herramienta compás, DD´´´ tendría la orientaciónde QC y la recta DD´´´ no es la buscada y la construcción no es válida.

Para que la construcción sirva, en cualquier caso, debemos ver que D´´´ es el simétrico de D´ respecto a la mediatriz de D´´ y D. Así ya podríamos construir D´´´ y obtener la solución.

Observando un poco más vemos que DD´´´ pasa por la intersección I de dicha mediatriz y la recta Q´C. Obtenemos QP_1