

Coordenadas Baricéntricas*

Francisco J. García Capitán

Contenido

1. Coordenadas baricéntricas respecto de un un triángulo	3
1.1. Coordenadas baricéntricas homogéneas	3
1.2. Coordenadas baricéntricas absolutas	5
1.3. Notación	8
2. Cevianas y trazas	9
2.1. Teorema de Ceva	10
2.2. Ejemplos	10
3. Area de un triángulo	11
4. Rectas	12
4.1. Ecuación de la recta	12
4.1.1. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos	12
4.1.2. Ejemplos	12
4.2. Rectas paralelas	13
4.2.1. Puntos del infinito y paralela por un punto	13
4.2.2. Ejercicios	14
4.3. Intersección de dos rectas	16
4.3.1. Ejemplos	16
4.4. Rectas perpendiculares	18
4.4.1. Ejemplos	19

*Este documento nace de una lectura atenta de sólo algunos apartados del trabajo de Paul Yiu: *Introduction to the Geometry of the Triangle*. Resolvemos algunos de los ejercicios allí propuestos, e incluimos algunos ejemplos procedentes de otras fuentes.

5. Fórmula de Leibniz	20
5.1. Fórmula de Leibniz	20
5.2. Aplicación	20
6. Cálculos con <i>Mathematica</i>	21
6.1. Puntos y rectas	21
6.2. Simplificación de coordenadas	22
6.3. Otro ejemplo	23
6.4. Búsqueda en la enciclopedia de Kimberling	24

1. Coordenadas baricéntricas respecto de un triángulo

1.1. Coordenadas baricéntricas homogéneas

Sean $u, v, w \in \mathbb{R}$ tales que $u + v + w \neq 0$, y sean A, B, C los vértices de un triángulo. Para cualquier punto O , sea P el punto del plano tal que $(u+v+w)\overrightarrow{OP} = u\overrightarrow{OA} + v\overrightarrow{OB} + w\overrightarrow{OC}$. Podemos ver que el punto P no depende de O . En efecto, si $(u+v+w)\overrightarrow{OP'} = u\overrightarrow{OA} + v\overrightarrow{OB} + w\overrightarrow{OC}$, entonces

$$(u+v+w)(\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP}) = u(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA}) + v(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB}) + w(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC}) = \\ = (u+v+w)\overrightarrow{OO'},$$

de donde $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}$ y $P' = P$.

Esto permite definir a P como *centro del masas* del sistema formado por los puntos A, B, C con las masas u, v, w .

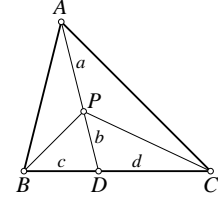
Las coordenadas baricéntricas homogéneas de un punto P respecto al triángulo ABC es una terna de números $(x : y : z)$ tales que

$$x : y : z = \triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB.$$

El sistema formado por los puntos A, B, C con las masas x, y, z tiene a P como centro de masas.

En efecto, considerando la figura,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{c}{c+d}\overrightarrow{BC}, \\ \overrightarrow{AP} &= \frac{a}{a+b}\overrightarrow{AD} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{AB} + \frac{ac}{(a+b)(c+d)}\overrightarrow{BC}, \\ \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} &= \frac{a}{a+b}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \frac{ac}{(a+b)(c+d)}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}), \\ \overrightarrow{OP} &= \frac{b}{a+b}\overrightarrow{OA} + \frac{ad}{(a+b)(c+d)}\overrightarrow{OB} + \frac{ac}{(a+b)(c+d)}\overrightarrow{OC}. \end{aligned}$$

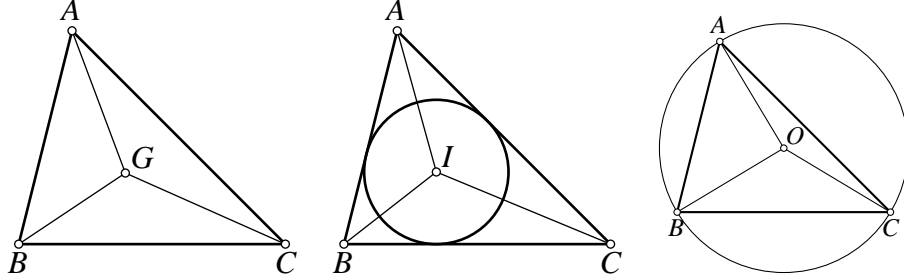


Entonces, P es el centro de masas de los puntos A, B, C con las masas $b(c+d)$, ad y ac . Pero,

$$\frac{ad}{ac} = \frac{DC}{BD} = \frac{\triangle ADC}{\triangle ABD} = \frac{\triangle PDC}{\triangle PBD} = \frac{\triangle ADC - \triangle PDC}{\triangle ABD - \triangle PBD} = \frac{\triangle PCA}{\triangle PAB}.$$

Esto comprueba que $y : z = \triangle PCA : \triangle PAB$. Para comprobar las otras relaciones bastaría considerar una figura en la que D estuviera en otro de los lados de ABC .

Ejemplos



1. El *baricentro* G tiene coordenadas baricéntricas homogéneas $(1 : 1 : 1)$, ya que las áreas GBC , GCA y GAB son iguales.
2. El *incentro* I tiene coordenadas baricéntricas homogéneas $a : b : c$, ya que si r es el radio de la circunferencia inscrita, las áreas de los triángulos IBC , ICA e IAB son, respectivamente $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$ y $\frac{1}{2}cr$.
3. El *circuncentro* O . Si R es el radio de la circunferencia circunscrita, las coordenadas de O son

$$\begin{aligned}
 \triangle OBC : \triangle OCA : \triangle OAB &= \\
 &= \frac{1}{2}R^2 \sin 2A : \frac{1}{2}R^2 \sin 2B : \frac{1}{2}R^2 \sin 2C = \\
 &= \sin A \cos A : \sin B \cos B : \sin C \cos C = \\
 &= a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = b \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \\
 &= a^2(b^2 + c^2 - a^2) : b^2(c^2 + a^2 - b^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2).
 \end{aligned}$$

4. Los puntos de la recta BC tienen coordenadas de la forma $(0 : y : z)$. De la misma forma, los puntos de CA y AB tienen coordenadas de las formas $(x : 0 : z)$ y $(x : y : 0)$, respectivamente.

Ejercicios

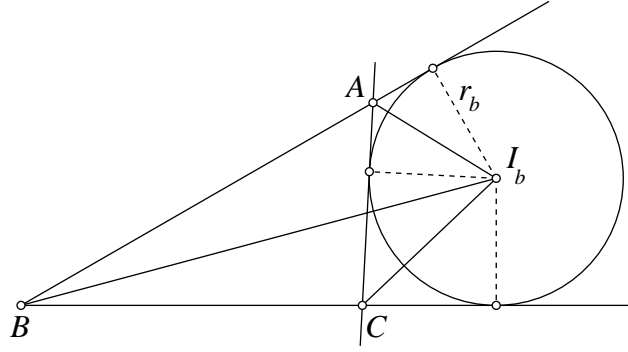
1. Comprobar que la suma de las coordenadas del circuncentro dadas anteriormente es $4S^2$, siendo S el área del triángulo ABC .

Teniendo en cuenta la fórmula de Herón para el área del triángulo y haciendo un poco de manipulación algebraica,

$$\begin{aligned}
& a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(c^2 + a^2 - b^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2) = \\
& = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = \\
& = (a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) = \\
& = 4 \cdot 4 \cdot \frac{a + b + c}{2} \cdot \frac{-a + b + c}{2} \cdot \frac{a - b + c}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2} = \\
& = 4S^2.
\end{aligned}$$

2. Hallar las coordenadas de los excentros.

Consideramos la figura siguiente en la que se muestran el triángulo ABC , el excentro I_b , centro de la circunferencia exinscrita que toca al lado AC y a las prolongaciones de BC y BA .



Las coordenadas baricéntricas de I_b son

$$\triangle I_b BC : \triangle I_b CA : \triangle I_b AB = ar_b : -br_b : cr_b = a : -b : c.$$

Observemos que la orientación del triángulo $I_b CA$ es distinta de la de los otros dos, y por ello resulta signo negativo en la segunda coordenadas. De igual forma obtenemos que $I_a = (-a : b : c)$ y que $I_c = a : b : -c$.

1.2. Coordenadas baricéntricas absolutas

Sea P un punto con coordenadas (baricéntricas homogéneas) $(x : y : z)$. Si $x + y + z \neq 0$, obtenemos unas coordenadas *absolutas* normalizando los coeficientes para que sumen la unidad:

$$P = \frac{x \cdot A + y \cdot B + z \cdot C}{x + y + z}.$$

Dadas las coordenadas baricéntricas absolutas de P y Q , el punto que divide a PQ en razón $PX : XQ = p : q$ tendrá coordenadas baricéntricas absolutas $\frac{qP+pQ}{p+q}$. Sin embargo, es conveniente evitar los denominadores de las fracciones en los cálculos. Por ello, adaptamos esta fórmula de la siguiente manera: Si $P = (u : v : w)$ y $Q = (u' : v' : w')$ son coordenadas baricéntricas homogéneas cumpliendo $u + v + w = u' + v' + w'$, entonces el punto X que divide a PQ en la razón $PX : XQ = p : q$ tiene coordenadas homogéneas $(qu + pu' : qv + pv' : qw + pw')$.

Ejercicios

1. El ortocentro está en la recta de Euler y divide al segmento OG externamente en la razón $3 : -2$. Demostrar que sus coordenadas baricéntricas pueden escribirse

$$H = (\tan A : \tan B : \tan C),$$

o equivalentemente,

$$H = \left(\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} : \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right).$$

Hemos visto que

$$\begin{aligned} O &= (a^2(b^2 + c^2 - a^2) : b^2(c^2 + a^2 - b^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2)), \\ G &= (1, 1, 1), \end{aligned}$$

siendo 3 la suma de coordenadas de G y $4S^2$ la suma de las de O .

Lo primero que hacemos es multiplicar un factor adecuado las coordenadas de cada punto para que ambas sumen lo mismo, en este caso, $12S^2$:

$$\begin{aligned} O &= (3a^2(b^2 + c^2 - a^2) : 3b^2(c^2 + a^2 - b^2) : 3c^2(a^2 + b^2 - c^2)), \\ G &= (4S^2, 4S^2, 4S^2). \end{aligned}$$

La primera coordenada de H será

$$\begin{aligned} &(-2)3a^2(b^2 + c^2 - a^2) + 3 \cdot 4S^2 = \\ &= -6(a^2b^2 + a^2c^2 - a^4) + 3(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) = \\ &= 3a^4 - 3b^4 + 6b^2c^2 - 3c^4 = \\ &= 3(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2). \end{aligned}$$

De la misma forma obtenemos $3(-a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)$ como segunda coordenada y $3(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)$ como tercera. Dividiendo por

$$(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)$$

obtenemos que

$$H = \left(\frac{1}{b^2+c^2-a^2} : \frac{1}{c^2+a^2-b^2} : \frac{1}{a^2+b^2-c^2} \right).$$

Ahora,

$$\frac{1}{b^2+c^2-a^2} = \frac{\frac{1}{2bc}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} = \frac{\frac{\sin A}{S}}{\cos A} = \frac{\tan A}{S},$$

y análogamente para las otras dos coordenadas, resultando

$$H = (\tan A : \tan B : \tan C).$$

2. Usar que el centro N de la circunferencia de los nueve puntos divide al segmento OG en la razón $ON : NG = 3 : -1$ para obtener que sus coordenadas baricéntricas pueden escribirse

$$N = (a \cos(B-C) : b \cos(C-A) : c \cos(A-B)).$$

Partiendo de

$$\begin{aligned} O &= (3a^2(b^2+c^2-a^2) : 3b^2(c^2+a^2-b^2) : 3c^2(a^2+b^2-c^2)), \\ G &= (4S^2, 4S^2, 4S^2), \end{aligned}$$

la primera coordenada de N será

$$\begin{aligned} &(-1)3a^2(b^2+c^2-a^2) + 3 \cdot 4S^2 = \\ &= -3a^2b^2 - 3a^2c^2 + 3a^4 + 3(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) \\ &= 3(a^2b^2 + a^2c^2 + 2b^2c^2 - b^4 - c^4). \end{aligned}$$

Para obtener el resultado buscado usamos las fórmulas

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \quad S = ac \sin B$$

y las correspondientes para el ángulo C . Entonces,

$$\begin{aligned}
\cos(B - C) &= \cos B \cos C + \sin B \sin C = \\
&= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + \frac{S}{ac} \frac{S}{ab} = \\
&= \frac{(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) + 4S^2}{4a^2bc} = \\
&= \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 4b^2c^2 - 2b^4 - 2c^4}{4a^2bc} = \\
&= \frac{1}{a} \cdot \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + 2b^2c^2 - b^4 - c^4}{2abc}.
\end{aligned}$$

De aquí es fácil concluir que

$$N = (a \cos(B - C) : b \cos(C - A) : c \cos(A - B)).$$

1.3. Notación

Si θ es un ángulo cualquiera y S es el doble del área del triángulo ABC , definimos $S_\theta = S \cot \theta$. Como caso particular,

$$S_A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, S_B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}, S_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

Para dos ángulos θ y ϕ , definimos $S_{\theta\phi} = S_\theta \cdot S_\phi$.

Con esta notación, se cumplen las siguientes relaciones:

1. $S_B + S_C = a^2, S_C + S_A = b^2, S_A + S_B = c^2$.
2. $S_{AB} + S_{BC} + S_{CA} = S^2$.

La primera relación es evidente. Para demostrar la segunda, debemos demostrar la identidad

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1.$$

Para ello, hacemos

$$\begin{aligned}
& \cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = \\
& = \cot A (\cot B + \cot C) + \cot B \cot C = \\
& = \frac{\cos A}{\sin A} \left(\frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C} \right) + \frac{\cos B}{\sin B} \cdot \frac{\cos C}{\sin C} = \\
& = \frac{\cos A}{\sin A} \cdot \frac{\sin C \cos B + \sin B \cos C}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin B} \cdot \frac{\cos C}{\sin C} = \\
& = \frac{\cos A}{\sin A} \cdot \frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin B} \cdot \frac{\cos C}{\sin C} = \\
& = \frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B \sin C}{\sin B \sin C} = \\
& = \frac{\cos B \cos C - \cos(B+C)}{\sin B \sin C} = \\
& = \frac{\sin B \sin C}{\sin B \sin C} = 1.
\end{aligned}$$

Ejemplos

1. El ortocentro tiene coordenadas

$$\left(\frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : \frac{1}{S_C} \right) = (S_{BC} : S_{CA} : S_{AB}).$$

2. El circuncentro tiene coordenadas

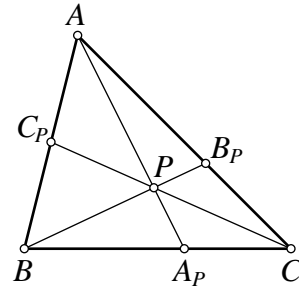
$$(a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C) = (S_A(S_B + S_C) : S_B(S_C + S_A) : S_C(S_A + S_B)).$$

En esta forma, la suma de las coordenadas es $2(S_{AB} + S_{BC} + S_{CA}) = 2S^2$.

2. Cevianas y trazas

Llamamos *cevianas* de un punto P a las rectas que lo unen con los vértices del triángulo de referencia ABC . Las intersecciones A_P, B_P, C_P de estas cevianas con los lados del triángulo se llaman *trazas* de P . Las coordenadas de las trazas pueden obtenerse fácilmente:

$$A_P = (0 : y : z), \quad B_P = (x : 0 : z), \quad C_P = (x : y : 0).$$



2.1. Teorema de Ceva

Tres puntos X, Y, Z sobre BC, CA y AB respectivamente son las trazas de un punto si y solo si tienen coordenadas de la forma $X = (0 : y : z)$, $Y = (x : 0 : z)$ y $Z = (x : y : 0)$ para ciertos x, y, z .

2.2. Ejemplos

El punto de Gergonne

Los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados son $X = (0 : s - c : s - b)$, $Y = (s - c : 0 : s - a)$ y $Z = (s - b : s - a : 0)$ que pueden reorganizarse como $X = (0 : \frac{1}{s-b} : \frac{1}{s-c})$, $Y = (\frac{1}{s-a} : 0 : \frac{1}{s-c})$ y $Z = (\frac{1}{s-a} : \frac{1}{s-b} : 0)$. Por tanto, AX, BY y CZ se cortan en un punto con coordenadas $(\frac{1}{s-a} : \frac{1}{s-b} : \frac{1}{s-c})$, que se conoce como el *punto de Gergonne* G_e del triángulo ABC .

El punto de Nagel

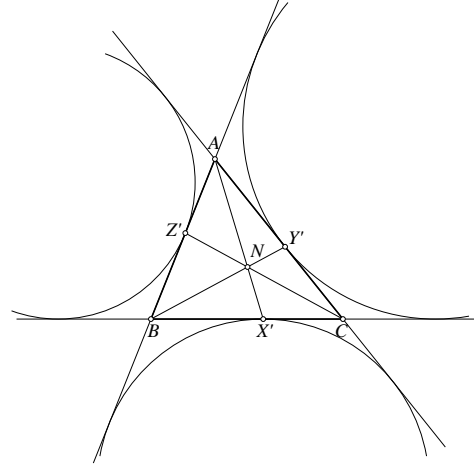
Los puntos de tangencia de las circunferencias exinscritas con los lados del triángulo tienen coordenadas

$$X' = (0 : s - b : s - c),$$

$$Y' = (s - a : 0 : s - c),$$

$$Z' = (s - a : s - b : 0).$$

Estas son las trazas del punto de coordenadas $(s - a : s - b : s - c)$, que se conoce como *punto de Nagel* N_a del triángulo ABC .



Ejercicio

1. El punto de Nagel N_a está en la recta que une el baricentro y el incentro y divide a IG en la razón $IN_a : N_aG = 3 : -2$.

En efecto, como las coordenadas de $I = (a : b : c)$ y $G = (1 : 1 : 1)$ suman respectivamente $2s$ y 3 , las expresamos de manera que $I = (3a : 3b : 3c)$ y $G = (2s : 2s : 2s)$ en las que ambas suman $6s$. Entonces,

$$-2I + 3G = (6s - 6a : 6s - 6b : 6s - 6c) = (s - a : s - b : s - c) = N_a.$$

3. Area de un triángulo

Si $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ y $R = (x_3, y_3)$ son tres puntos del plano, entonces el área (PQR) del triángulo PQR viene dada por

$$(PQR) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Si las coordenadas baricéntricas homogéneas P , Q y R respecto del triángulo ABC son $P = (u_1 : v_1 : w_1)$, $Q = (u_2 : v_2 : w_2)$ y $R = (u_3 : v_3 : w_3)$, entonces,

$$\begin{aligned} (u_1 + v_1 + w_1)P &= u_1A + v_1B + w_1C, \\ (u_2 + v_2 + w_2)Q &= u_2A + v_2B + w_2C, \\ (u_3 + v_3 + w_3)R &= u_3A + v_3B + w_3C, \end{aligned}$$

Siendo $A = (r_1, s_1)$, $B = (r_2, s_2)$ y $C = (r_3, s_3)$, estas igualdades pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned} (u_1 + v_1 + w_1)x_1 &= u_1r_1 + v_1r_2 + w_1r_3, \\ (u_1 + v_1 + w_1)y_1 &= u_1s_1 + v_1s_2 + w_1s_3, \\ (u_2 + v_2 + w_2)x_2 &= u_2r_1 + v_2r_2 + w_2r_3, \\ (u_2 + v_2 + w_2)y_2 &= u_2s_1 + v_2s_2 + w_2s_3, \\ (u_3 + v_3 + w_3)x_3 &= u_3r_1 + v_3r_2 + w_3r_3, \\ (u_3 + v_3 + w_3)y_3 &= u_3s_1 + v_3s_2 + w_3s_3. \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} &(u_1 + v_1 + w_1)(u_2 + v_2 + w_2)(u_3 + v_3 + w_3)(PQR) = \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} u_1 + v_1 + w_1 & u_2 + v_2 + w_2 & u_3 + v_3 + w_3 \\ (u_1 + v_1 + w_1)x_1 & (u_2 + v_2 + w_2)x_2 & (u_3 + v_3 + w_3)x_3 \\ (u_1 + v_1 + w_1)y_1 & (u_2 + v_2 + w_2)y_2 & (u_3 + v_3 + w_3)y_3 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} u_1 + v_1 + w_1 & u_2 + v_2 + w_2 & u_3 + v_3 + w_3 \\ u_1r_1 + v_1r_2 + w_1r_3 & u_2r_1 + v_2r_2 + w_2r_3 & u_3r_1 + v_3r_2 + w_3r_3 \\ u_1s_1 + v_1s_2 + w_1s_3 & u_2s_1 + v_2s_2 + w_2s_3 & u_3s_1 + v_3s_2 + w_3s_3 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & r_1 & s_1 \\ 1 & r_2 & s_2 \\ 1 & r_3 & s_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} (ABC). \end{aligned}$$

Cuando las coordenadas homogéneas de P , Q y R estén normalizadas, tendremos

$$(PQR) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} (ABC).$$

4. Rectas

4.1. Ecuación de la recta

4.1.1. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Teniendo en cuenta la fórmula del área del triángulo vista en la sección anterior, La ecuación de la recta que une dos puntos con coordenadas baricéntricas homogéneas $(u_1 : v_1 : w_1)$ y $(u_2 : v_2 : w_2)$ vendrá dada por

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0.$$

4.1.2. Ejemplos

1. Las ecuaciones de los lados BC , CA y AB son, respectivamente, $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$. Por ejemplo, como $B = (0 : 1 : 0)$ y $C = (0 : 0 : 1)$, la recta BC tendrá por ecuación

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

2. La ecuación de la mediatriz de BC es $(b^2 - c^2)x + a^2(y - z) = 0$. En efecto, esta recta pasa por el punto medio de BC , con coordenadas $(0 : 1 : 1)$ y por el circuncentro O de ABC , con coordenadas

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2) : b^2(c^2 + a^2 - b^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2).$$

Entonces, la ecuación de la mediatriz de BC es

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a^2(b^2 + c^2 - a^2) & b^2(a^2 + c^2 - b^2) & c^2(a^2 + b^2 - c^2) \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (a^2c^2 - c^4 - a^2b^2 + b^4)x - a^2(b^2 + c^2 - a^2)(y - z) = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (a^2c^2 - c^4 - a^2b^2 + b^4)x + a^2(b^2 + c^2 - a^2)(y - z) = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (b^2 + c^2 - a^2)((b^2 - c^2)x + a^2(y - z)) = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (b^2 - c^2)x + a^2(y - z) = 0.
\end{aligned}$$

3. La bisectriz del ángulo A es la recta que une el vértice $A = (1 : 0 : 0)$ y el incentro $(a : b : c)$. Su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow cy - bz = 0.$$

4.2. Rectas paralelas

4.2.1. Puntos del infinito y paralela por un punto

Para obtener la ecuación de una recta paralela a una recta dada consideramos los puntos del infinito. Cada recta tiene un punto del infinito y todos los puntos del infinito están en una recta del infinito. La ecuación de esta recta es $x + y + z = 0$, ya que si $x + y + z \neq 0$ resulta un punto real.

El punto del infinito de la recta $px + qy + rz = 0$ es $(q - r : r - p : p - q)$, ya que este punto está en dicha recta y es un punto infinito, pues sus coordenadas suman 0.

Por otro lado, si $P = (u_1 : v_1 : w_1)$ y $Q = (u_2 : v_2 : w_2)$, siendo $u_1 + v_1 + w_1 = u_2 + v_2 + w_2$, resulta que el punto del infinito de la recta PQ es $(u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$.

La recta que pasa por $P = (u : v : w)$ paralela a $px + qy + rz = 0$ tiene por ecuación

$$\begin{vmatrix} q - r & r - p & p - q \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0.$$

4.2.2. Ejercicios

1. Hallar las ecuaciones de las rectas paralelas por $P = (u : v : w)$ a los lados del triángulo.

La recta BC tiene por ecuación $x = 0$, y su punto del infinito es $(0, 1, -1)$ (basta restar las coordenadas de B y C). La paralela a BC que pasa por $P = (u : v : w)$ es

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (v + w)x - u(y + z) = 0.$$

Las paralelas a CA y AB serán, respectivamente, $(w + u)y - v(x + z) = 0$ y $(u + v)z - w(x + y) = 0$.

2. Sea DEF el triángulo medial de ABC . Dado un punto P , llamemos XYZ al triángulo ceviano respecto de ABC y UVW al triángulo medial de XYZ . Determinar el punto P de manera que las rectas DU , EV y FW sean paralelas a las bisectrices interiores de los ángulos A , B y C respectivamente.

Tenemos:

$$\begin{aligned} A &= (1 : 0 : 0), & B &= (0 : 1 : 0), & C &= (0 : 0 : 1), \\ D &= (0 : 1 : 1), & E &= (1 : 0 : 1), & F &= (1 : 1 : 0), \\ X &= (0 : v : w), & Y &= (u : 0 : w), & Z &= (u : v : 0). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} Y &= (u : 0 : w) = ((u + v)u : 0 : (u + v)w), \\ Z &= (u : v : 0) = ((u + w)u : (u + w)v : 0), \end{aligned}$$

resulta, sumando, que

$$U = ((2u + v + w)u : (u + w)v : (u + v)w).$$

Si la recta DU es paralela a la bisectriz del ángulo A , ambas rectas tendrán el mismo punto del infinito. Como $2u^2 + uv + uw + vw$ es la suma de las coordenadas de U , consideramos

$$D = (0 : u^2 + uv + uw + vw : u^2 + uv + uw + vw),$$

y restando las coordenadas de D y las de U obtenemos que el punto del infinito de la recta DU es

$$(2u^2 + uv + uw, -u^2 - uw : -u^2 - uv) = (2u + v + w, -u - w : -u - v).$$

La bisectriz del ángulo A pasa por los puntos $A = (a + b + c : 0 : 0)$ e $I = (a, b, c)$, por lo que su punto del infinito es $(b + c, -b, -c)$.

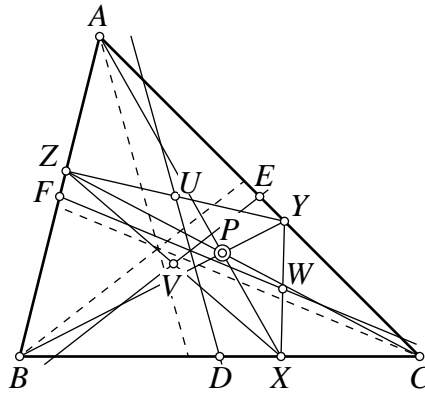
Para que se trate del mismo punto del infinito debe ser $u + w = kb$, $u + v = kc$ para algún cierto k . Haciendo lo mismo para EV y FW , obtendríamos las condiciones similares

$$\begin{cases} v + u = hc \\ v + w = ha \end{cases}, \quad \begin{cases} w + u = tb \\ w + v = ta \end{cases}$$

para ciertos h y t . De aquí deducimos que $k = h = t$ y que u, v, w deben ser las soluciones del sistema

$$\begin{cases} u + v = kc \\ u + w = kb \\ v + w = ka \end{cases},$$

es decir, $u = k(b + c - a)$, $v = k(a + c - b)$, $w = k(a + b - c)$ o bien, $P = (b + c - a : a + c - b : a + b - c)$ es el punto de Nagel del triángulo ABC .



4.3. Intersección de dos rectas

La intersección de dos rectas

$$\begin{cases} p_1x + q_1y + r_1z = 0, \\ p_2x + q_2y + r_2z = 0 \end{cases}$$

es el punto

$$\left(\begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \right).$$

El punto del infinito de una recta l puede considerarse la intersección de l con la recta del infinito $l_\infty : x + y + z = 0$.

Tres rectas $p_ix + q_iy + r_iz = 0$, $i = 1, 2, 3$ son concurrentes si solo si

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0.$$

4.3.1. Ejemplos

1. Sea DEF el triángulo medial de ABC . Hallar la ecuación de la recta uniendo D con el excentro $I_a = (-a : b : c)$. Análogamente, hallar las ecuaciones de las rectas que unen E con I_b y F con I_c . Demostrar que estas tres rectas son concurrentes, hallando las coordenadas del punto común.

La ecuación de la recta DI_a es

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ -a & b & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (b - c)x + ay - az = 0.$$

Análogamente tendremos

$$EI_b : -bx + (c - a)y + bz = 0.$$

$$FI_c : cx - cy + (a - b)z = 0.$$

Para demostrar que las tres rectas son concurrentes comprobamos que el determinante formado por sus coeficientes se anula:

$$\begin{vmatrix} b - c & a & -a \\ -b & c - a & b \\ c & -c & a - b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -c & c & b - a \\ -b & c - a & b \\ c & -c & a - b \end{vmatrix} = 0.$$

(El segundo determinante es nulo, por tener dos filas proporcionales, y se obtiene del primero sustituyendo la primera fila por la suma de las dos primeras).

Para hallar el punto común a las tres rectas, resolvemos el sistema formado por las dos primeras:

$$\begin{aligned}(x : y : z) &= \left(\begin{vmatrix} a & -a \\ c-a & b \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} b-c & -a \\ -b & b \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b-c & a \\ -b & c-a \end{vmatrix} \right) = \\ &= (a(b+c-a) : b(a+c-b) : c(a+b-c)) = \\ &= (a(s-a) : b(s-b) : c(s-c)),\end{aligned}$$

que es el llamado *Mittenpunkt*.

2. Sean D, E, F los puntos medios de los lados BC, CA, AB del triángulo ABC , y X, Y, Z los puntos medios de las alturas desde A, B, C , respectivamente. Hallar las ecuaciones de las rectas DX, EY y FZ , y demostrar que son concurrentes. ¿Cuáles son las coordenadas del punto de intersección?

Sabemos que el ortocentro es $H = (S_{BC} : S_{CA} : S_{AB})$, así que el pie de la altura desde A es $A_H = (0 : S_{CA} : S_{AB}) = (0 : S_C : S_B)$, con $S_C + S_B = a^2$. Entonces, el punto medio de A_H y $A = (a^2 : 0 : 0)$ es $X = (a^2 : S_C : S_B)$. La ecuación de la recta DX es

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ a^2 & S_C & S_B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z-y \\ 0 & 1 & 0 \\ a^2 & S_C & S_B - S_C \end{vmatrix} = (S_B - S_C)x + a^2y - a^2z = 0.$$

Como $S_B - S_C = c^2 - b^2$, resulta que $DX : (c^2 - b^2)x + a^2y - a^2z = 0$. Análogamente obtenemos que

$$\begin{aligned}EY : -b^2x + (a^2 - c^2)y + b^2z &= 0, \\ FZ : c^2x - c^2y + (b^2 - a^2)z &= 0.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{vmatrix} c^2 - b^2 & a^2 & -a^2 \\ -b^2 & a^2 - c^2 & b^2 \\ c^2 & -c^2 & b^2 - a^2 \end{vmatrix} = 0$$

ya que, por ejemplo, la primera fila es la suma de las otras dos, las tres rectas son concurrentes.

Para hallar el punto de intersección, resolvemos el sistema formado por las dos primeras:

$$\begin{aligned}
(x : y : z) &= \\
&= \left(\begin{vmatrix} a^2 & -a^2 \\ a^2 - c^2 & b^2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} c^2 - b^2 & -a^2 \\ -b^2 & b^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c^2 - b^2 & a^2 \\ -b^2 & a^2 - c^2 \end{vmatrix} \right) = \\
&= (a^2(a^2 + b^2 - c^2) : b^2(a^2 + b^2 - c^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2)) = \\
&= (a^2 : b^2 : c^2),
\end{aligned}$$

y las tres rectas se cortan en el punto simediano de ABC .

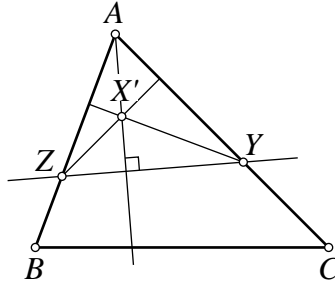
4.4. Rectas perpendiculares

Dada una recta $\mathcal{L} : px + qy + rz = 0$, hallemos el punto del infinito de las rectas perpendiculares a ella. La recta \mathcal{L} corta a las rectas CA y AB en los puntos $Y = (-r : 0 : p)$ y $Z = (q : -p : 0)$. Para hallar la perpendicular desde A a \mathcal{L} , primero hallaremos las ecuaciones de las perpendiculares desde Y a AB y desde Z a CA . Estas son

$$\begin{vmatrix} S_B & S_A & -c^2 \\ -r & 0 & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} S_C & -b^2 & S_A \\ q & -p & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0,$$

o bien

$$\begin{aligned}
S_A p x + (c^2 r - S_B p) y + S_A r z &= 0, \\
S_A p x + S_A q y + (b^2 q - S_C p) z &= 0.
\end{aligned}$$



El punto de intersección de ambas rectas, ortocentro del triángulo AYZ , es

$$\begin{aligned}
X' &= (** : S_A p (S_A r - b^2 q + S_C p) : S_A p (S_A q + S_B p - c^2 r)) = \\
&\sim (** : S_C (p - q) - S_A (q - r) : S_A (q - r) - S_B (r - p)),
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $S_A + S_C = b^2$ y $S_A + S_B = c^2$.

La perpendicular a \mathcal{L} desde A es la recta AX' , cuya ecuación es

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ *** & S_C(p-q) - S_A(q-r) & S_A(q-r) - S_B(r-p) \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{o } -(S_A(q-r) - S_B(r-p))y + (S_C(p-q) - S_A(q-r))z = 0.$$

Entonces, llamando $(f : g : h) = (q-r : r-p : p-q)$ al punto del infinito de la recta \mathcal{L} , la perpendicular a \mathcal{L} desde A tiene ecuación

$$-(S_A f - S_B g)y + (S_C h - S_A f)z = 0,$$

con $(f' : g' : h') = (S_B g - S_C h : S_C h - S_A f : S_A f - S_B g)$ como punto del infinito, punto que pertenecerá a cualquier recta perpendicular a \mathcal{L} .

4.4.1. Ejemplos

1. Demostrar que son concurrentes las perpendiculares a los lados de un triángulo por los puntos de contacto con las circunferencias exinscritas.

Sean $X = (0 : s-b : s-c)$, $Y = (s-a : 0 : s-c)$ y $Z = (s-a : s-b : 0)$ los puntos de contacto de las circunferencias exinscritas con los lados BC , CA y AB , respectivamente.

El punto del infinito del lado BC es $(0 : 1 : 0) - (0 : 0 : 1) = (0 : 1 : -1)$. El punto del infinito de cualquier perpendicular a BC es

$$\begin{aligned} & (S_B \cdot 1 - S_C(-1) : S_C(-1) - S_A \cdot 0 : S_A \cdot 0 - S_B \cdot 1) = \\ & = (S_B + S_C : -S_C : -S_B) = (-a^2, S_C, S_B). \end{aligned}$$

y la perpendicular a BC por X tiene la ecuación

$$\begin{vmatrix} 0 & s-b & s-c \\ -a^2 & S_C & S_B \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0,$$

que es equivalente a la ecuación $s(b-c)x + a(s-c)y - a(s-b)z = 0$.

Procediendo de forma análoga obtenemos la perpendicular a CA por Y y la perpendicular a AB por Z :

$$\begin{aligned} -b(s-c)x + s(c-a)y + b(s-a)z &= 0, \\ c(s-b)x - c(s-a)y + s(a-b)z &= 0. \end{aligned}$$

Como al sumar las tres ecuaciones obtenemos la identidad $0 = 0$, las tres ecuaciones no son independientes y las tres rectas se cortan en un punto.

5. Fórmula de Leibniz

5.1. Fórmula de Leibniz

Sean $(u : v : w)$ las coordenadas baricéntricas de un punto Q respecto del triángulo ABC . Entonces, se cumplirá que $u\overrightarrow{QA} + v\overrightarrow{QB} + w\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{0}$.

Para cualquier punto P se cumplen

$$\begin{aligned} u\overrightarrow{PA}^2 &= uPQ^2 + uQA^2 + 2u\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QA}, \\ v\overrightarrow{PB}^2 &= vPQ^2 + vQB^2 + 2v\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QB}, \\ w\overrightarrow{PC}^2 &= wPQ^2 + wQC^2 + 2w\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QC}. \end{aligned}$$

y, sumando, obtenemos la fórmula de Leibniz:

$$uPA^2 + vPB^2 + wPC^2 = (u + v + w)PQ^2 + uQA^2 + vQB^2 + wQC^2.$$

5.2. Aplicación

Si $Q = I = (a : b : c)$, entonces

$$aPA^2 + bPB^2 + cPC^2 = (a + b + c)PI^2 + aIA^2 + bIB^2 + cIC^2,$$

de donde deducimos que $aPA^2 + bPB^2 + cPC^2$ es mínimo cuando P es el incentro de ABC .

6. Cálculos con *Mathematica*

Dedicamos esta sección a mostrar cómo podemos usar el programa de cálculo simbólico *Mathematica* para efectuar operaciones con coordenadas baricéntricas.

6.1. Puntos y rectas

Usaremos una terna $\{u, v, w\}$ (formalmente una lista con tres elementos) para representar tanto al punto de coordenadas $(u : v : w)$ como a la recta $ux + vy + wz = 0$. Así, para representar al punto A y al punto medio M de BC escribiremos

```
ptA = {1, 0, 0};
ptM = {0, 1, 1};
```

El punto y coma, aparte de separar las instrucciones, evita que *Mathematica* muestre el resultado de cada operación, que en este caso se reduce a asignar un valor a una variable.

Ahora, para hallar la ecuación de la mediana AM tenemos en cuenta el apartado 4.1.1 y escribimos

```
Det[{ptA, ptM, {x, y, z}}]
-y + z
```

y obtenemos que la mediana AM tiene ecuación $-y + z = 0$.

Podemos representar una recta por la terna formada por sus coeficientes, y podemos definir una función que calcule dichos coeficientes a partir de la ternas que identifican a dos puntos de la recta. Llamaremos **Unir** a esta función:

```
Unir[{x1_, y1_, z1_}, {x2_, y2_, z2_}] :=
{Det[{y1, z1}, {y2, z2}], -Det[{x1, z1}, {x2, z2}], Det[{x1, y1}, {x2, y2}]};
```

Usando esta función con los puntos A y M , obtenemos:

```
Unir[ptA, ptM]
{0, -1, 1}
```

Teniendo en cuenta el apartado 4.3, la función **Unir** que acabamos de definir y usar nos puede servir también para hallar el punto de intersección de dos rectas, ya que la fórmula es la misma. Así, hallar el punto de intersección de las medianas AM y BN se podemos escribir:

```

ptA = {1, 0, 0};
ptB = {0, 1, 0};
ptM = {0, 1, 1};
ptN = {1, 0, 1};
Unir[Unir[ptA, ptM], Unir[ptB, ptN]]

{1, 1, 1}

```

Como sabemos, estas son las coordenadas del baricentro.

Teniendo en cuenta la sección 3 y el apartado 4.3, para determinar tanto si tres puntos están alineados como si tres rectas son concurrentes, basta comprobar que el determinante de las tres ternas se anule.

Así, para resolver con *Mathematica* el ejercicio 2 de la página 17 escribiremos

```

SA = (b^2 + c^2 - a^2)/2; SB = (c^2 + a^2 - b^2)/2; SC = (a^2 + b^2 - c^2)/2;
ptD = {0, 1, 1}; ptX = {a^2, SC, SB};
ptE = {1, 0, 1}; ptY = {SC, b^2, SA};
ptF = {1, 1, 0}; ptZ = {SB, SA, c^2};
Det[{Unir[ptD, ptX], Unir[ptE, ptY], Unir[ptF, ptZ]}]
Unir[Unir[ptE, ptY], Unir[ptF, ptZ]]

0

```

```

{-a^4 + a^2 b^2 + a^2 c^2, -a^2 b^2 + b^4 + b^2 c^2, -a^2 c^2 + b^2 c^2 + c^4}

```

Obtenemos que las tres rectas DX , EY y FZ son concurrentes, y que el punto de intersección es

$$(-a^2(a^2 - b^2 - c^2), -b^2(a^2 - b^2 - c^2) : -c^2(a^2 - b^2 - c^2)) = (a^2 : b^2 : c^2),$$

es decir el punto simediano.

6.2. Simplificación de coordenadas

Sabemos que las coordenadas baricéntricas son únicas salvo un factor de proporcionalidad, por lo que es conveniente simplificar los resultados para identificar más fácilmente a un determinado punto o recta.

Así en el ejercicio que acabamos de hacer, sería conveniente que *Mathematica* hubiera ofrecido el resultado simplificado $(a^2 : b^2 : c^2)$ en lugar de tener que hacerlo después manualmente.

Para conseguir esto, definimos una función `Simplificar` que divide una terna por su máximo común divisor y la usamos en la función `Unir`:

```

Simplificar[p_] := Factor[ $\frac{p}{\text{PolynomialGCD}[p[[1]], p[[2]], p[[3]]}}$ ];
Unir[{x1_, y1_, z1_}, {x2_, y2_, z2_}] :=
  Simplificar[{Det[ $\begin{pmatrix} y1 & z1 \\ y2 & z2 \end{pmatrix}$ ], -Det[ $\begin{pmatrix} x1 & z1 \\ x2 & z2 \end{pmatrix}$ ], Det[ $\begin{pmatrix} x1 & y1 \\ x2 & y2 \end{pmatrix}$ ]]};
SA =  $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$ ; SB =  $\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}$ ; SC =  $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$ ;
ptD = {0, 1, 1}; ptX = {a2, SC, SB};
ptE = {1, 0, 1}; ptY = {SC, b2, SA};
ptF = {1, 1, 0}; ptZ = {SB, SA, c2};
Det[{Unir[ptD, ptX], Unir[ptE, ptY], Unir[ptF, ptZ]}]
Unir[Unir[ptE, ptY], Unir[ptF, ptZ]]
0
{-a2, -b2, -c2}

```

Ahora el resultado es más aceptable.

6.3. Otro ejemplo

En el ejemplo 1 de la página 19 demostrábamos que eran concurrentes las perpendiculares trazadas por los puntos de tangencia de las circunferencias exinscritas.

Habíamos obtenido que $(-a^2, S_C, S_B)$ es el punto del infinito de cualquier recta perpendicular a BC , y análogamente, $(S_C, -b^2, S_A)$ y $(S_B, S_A, -c^2)$ serán los puntos del infinito de rectas perpendiculares a CA y AB , respectivamente.

Para hallar el punto de concurrencia hacemos:

```

Simplificar[p_] := Factor[p/PolynomialGCD[p[[1]], p[[2]], p[[3]]];
Unir[{x1_, y1_, z1_}, {x2_, y2_, z2_}] :=
  Simplificar[{Det[{y1, z1}, {y2, z2}], -Det[{x1, z1}, {x2, z2}], Det[{x1, y1}, {x2, y2}]}];
s = (a+b+c)/2; SA = (b^2+c^2-a^2)/2; SB = (c^2+a^2-b^2)/2; SC = (a^2+b^2-c^2)/2;
ptX = {0, s-b, s-c};
ptY = {s-a, 0, s-c};
ptZ = {s-a, s-b, 0};
piPerpendicularBC = {-a^2, SC, SB};
piPerpendicularCA = {SC, -b^2, SA};
piPerpendicularAB = {SB, SA, -c^2};
ptP = Unir[Unir[ptX, piPerpendicularBC], Unir[ptY, piPerpendicularCA]]

{-a (a^3 + a^2 b - a b^2 - b^3 + a^2 c - 2 a b c + b^2 c - a c^2 + b c^2 - c^3),
 b (a^3 + a^2 b - a b^2 - b^3 - a^2 c + 2 a b c - b^2 c - a c^2 + b c^2 + c^3),
 c (a^3 - a^2 b - a b^2 + b^3 + a^2 c + 2 a b c + b^2 c - a c^2 - b c^2 - c^3)}

```

6.4. Búsqueda en la enciclopedia de Kimberling

Una vez hallado un punto relacionado con el triángulo podemos querer saber de qué punto se trata o, incluso, si este punto es conocido.

Clark Kimberling ha recopilado en su *Encyclopedia of Triangle Centers* miles de puntos relacionados con el triángulo. Además, ha establecido un sistema de búsqueda, consistente en una tabla con la distancia del punto al lado menor del triángulo con lados $a = 6$, $b = 9$ y $c = 13$.

Tendremos un triángulo de estas características si consideramos los vértices

$$A = \left(-\frac{13}{3}, \frac{4\sqrt{35}}{3}\right), \quad B = (6, 0), \quad C = (0, 0).$$

En este caso la distancia especificada por Kimberling vendrá dada por la segunda coordenada del punto.

Como ejemplo, vamos a identificar el punto obtenido en el apartado anterior. Vemos que sus coordenadas baricéntricas son de la forma $f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$, siendo f una función de las variables a, b, c . Definimos una función **Kimberling** que halla las coordenadas cartesianas el punto asociado a la función f :


```

Kimberling[f_] := Module[{ptA, ptB, ptC, u, v, w},
  ptA = {- $\frac{13}{3}$ ,  $\frac{4\sqrt{35}}{3}$ }; ptB = {6, 0}; ptC = {0, 0};
  a = 6; b = 9; c = 13;
  u = f[a, b, c];
  v = f[b, c, a];
  w = f[c, a, b];
  
$$\frac{u \text{ ptA} + v \text{ ptB} + w \text{ ptC}}{u + v + w}$$
]

```

El uso de Module hace que las variables que intervienen se consideren locales.

Ahora, definimos la función f y usamos Kimberling con ella:

```

f[a_, b_, c_] := -a (a3 + a2 b - a b2 - b3 + a2 c - 2 a b c + b2 c - a c2 + b c2 - c3);
N[Kimberling[f], 12]

{5.000000000000, 11.87441727894}

```

La función N de *Mathematica* permite especificar el número deseado de decimales.

Si buscamos en la enciclopedia de Kimberling la segunda coordenada del punto obtenido, hallaremos que dicho punto está catalogado como $X(40)$ o punto de Bevan.