Teorema En todo triángulo inscrito a una hipérbola equilátera el ortocentro del triángulo está situado sobre la curva.

Brianchon y Poncelet, Annales de Montpellier, Tomo XI, 1 de Enero de 1821.

Demostración. Sabemos que en todo hexágono $ABCDEF$ inscrito en una cónica los tres puntos de intersección $H = AB \cap DE$, $I = BC \cap EF$, $K = CD \cap FA$ de los lados opuestos están alineados.

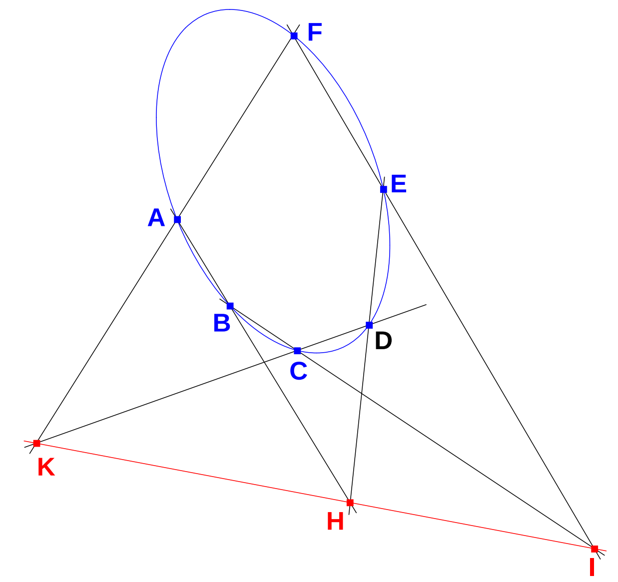

Figura 1

Supongamos que un triángulo ABC está inscrito en una hipérbola equilátera. Consideraremos el hexágono $ABCDEF$ inscrito en la hipérbola en el que E, F son los puntos del infinito de la hipérbola y el punto D lo elegimos cumpliendo que los lados AB y CD, son perpendiculares. Entonces:

(1) Al ser E, F puntos del infinito, el punto I, intersección de los lados EF y BC también estará en el infinito; lo que quiere decir que BC y HK son paralelas.

(2) Los lados DE y FA, contiguos a EF, que es la recta del infinito, serán respectivamente paralelos a las dos asíntotas. Como la hipérbola es equilátera, dichos lados serán perpendiculares.

(3) De la construcción de D, $AB \perp CD \Rightarrow AH \perp DK$.

(4) De (2), $DE \perp FA \Rightarrow AK \perp DH$.

(5) De (3) y (4), A es la intersección de dos alturas del triángulo DHK, por lo que AD también será perpendicular a KH y a su paralela BC. Por tanto D es el punto de intersección de dos alturas del triángulo ABC, y pertenece a la hipérbola.

□