Problema 832

Sea el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ $B=45^o$.

Sea D el punto simétrico de A respecto del punto medio del lado $\overline{BC}$.

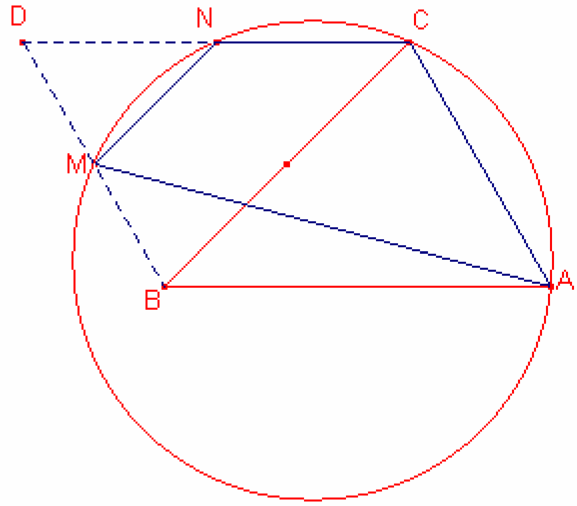
Sean M y N los puntos medios de los lados $\overline{BD}$ y $\overline{CD}$, respectivamente.

Demostrar que el ángulo $A=60^o$ si y sólo si los puntos A, M, N y C son cíclicos.

Fondainache, P.

Solución de Ricard Peiró.

Si D es el simétrico A respecto del punto medio del lado $\overline{BC}$, entonces, BACD es un paralelogramo.



$\overline{MN}$ es paralela media del triángulo $\overset{\Delta}{DMN}$.

$(\Rightarrow)$

Supongamos que el ángulo $A=60^o$. Entonces,

$C=75^o$.

$\angle DMN=\angle DBC=C=75^o$.

$\angle NMB=105^o$.

Sea $\alpha=\angle AMB$.

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{MBA}$:

$$\frac{c}{\sin\alpha}=\frac{b}{2\sin(60^o-\alpha)} \qquad (1)$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{c}{\sin 75^o}=\frac{b}{\sin 45^o} \qquad (2)$$

Dividiendo las expresiones (1) (2):

$$\frac{\sin 75^o}{\sin\alpha}=\frac{\sin 45^o}{2\sin(60^o-\alpha)} \qquad (3)$$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}\right)2\sin(60^o-\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$. Simplificando:

$\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)=\sin\alpha$.

$\mathrm{tg}\alpha=1$.

Entonces, $\alpha=45^o$.

$\angle NMA=\angle NMB-\alpha=105^o-45^o=60^o$.

$\angle NCA=C+\angle DCB=75^o+45^o=120^o$.

Entonces, el cuadrilátero AMNC tiene los ángulos opuestos suplementarios, por tanto, es cíclico .

$(\Leftarrow)$

Supongamos que AMNC es cíclico. Entonces, tienen los ángulos opuestos suplementarios.

$C=135^o-A$.

$\angle DCA=180^o-A$.

$\angle NMA=A$.

$\angle DMN=C=135-A$.

$\angle NMB=45^o+A$.

Entonces, $\angle BMA = 45º$. $\angle BAM = A + 45º$.

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{MBA}$:

$$\frac{c}{\sin 45º} = \frac{b}{2\sin(A - 45º)} \qquad (1)$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{c}{\sin(135º - A)} = \frac{b}{\sin 45º} \qquad (2)$$

Dividiendo las expresiones (1) (2):

$$\frac{\sin(135º - A)}{\sin 45º} = \frac{\sin 45º}{2\sin(A - 45º)} \qquad (3)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\sin(A - 45º)\cdot\sin(135º - A).$$

$$\frac{1}{2} = \cos(180º - 2A) - \cos 90º.$$

$$A = 60º.$$