

Problema 805

Si la recta d'Euler és paral·lela al costat \overline{BC} del triangle $\triangle ABC$, els angles B i C satisfan que $\text{tg}B \cdot \text{tg}C = 3$.

Coxeter, H.S.M. (1961, 1969): *Introduction to Geometry. Second Edition*, (pag 18)

Solució de Ricard Peiró:

La recta d'Euler passa pel baricentre G, l'ortocentre H i el circumcentre O.

El baricentre està entre l'ortocentre i el circumcentre i a doble distància de l'ortocentre que del circumcentre.

Siga AH l'altura sobre la base \overline{BC} que talla la base en el punt D.

Per ser la recta d'Euler paral·lela al costat \overline{BC} AH és perpendicular a la recta d'Euler.

Siga M el punt mig del costat \overline{BC}

Per la propietat del baricentre

$$\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM}.$$

Siga K el punt mig del segment

\overline{AG} .

Siga L el punt mig del segment \overline{HG} .

KL és paral·lela mitjana del triangle $\triangle AHG$.

$$\overline{KL} = \frac{1}{2} \overline{AH}.$$

Siga P la projecció de K sobre l'altura AD.

$$\overline{AK} = \overline{KG} = \overline{GM}.$$

Aleshores, $\overline{AP} = \overline{PH} = \overline{PD}$.

Siga $x = \overline{BD}$. Siga $\overline{HD} = y$

$$\angle HBC = 90^\circ - C, \angle BHD = C.$$

$$\text{tg}B = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{3y}{x}.$$

$$\text{tg}C = \frac{\overline{BD}}{\overline{HD}} = \frac{x}{y}.$$

$$\text{tg}B \cdot \text{tg}C = \frac{3y}{x} \cdot \frac{x}{y} = 3.$$

