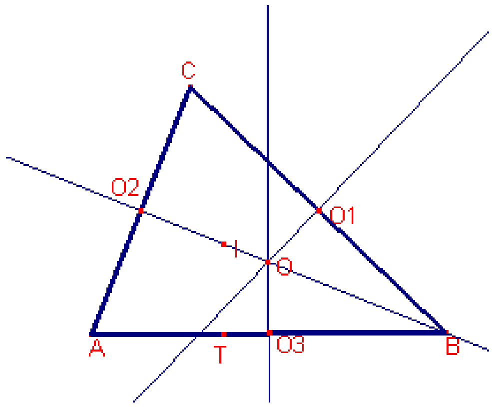
Problema 790

Teorema de Carnot:

Sea el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ acutángulo. Sean los puntos O, I el circuncentro y el el incentro del triángulo, respectivamente. Sean R, r los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita al triángulo, respectivamente.
Sean O_1, O_2, O_3 los puntos medio de los lados.
Entonces: $\overline{OO_1} + \overline{OO_2} + \overline{OO_3} = R + r$.

Demostración de Ricard Peiró i Estruch:
Sea O el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ de radio R.
Sea r el radio de la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.
Sean O_1, O_2, O_3 los puntos medio de los lados a, b, c, respectivamente.



$\text{Àrea}\overset{\Delta}{ABC} = rp$, donde p es el semiperímetro del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\text{Àrea}\overset{\Delta}{ABC} = \text{Àrea}\overset{\Delta}{ABO} + \text{Àrea}\overset{\Delta}{BCO} + \text{Àrea}\overset{\Delta}{ACO}$.

Por tanto, $2 \cdot rp = a \cdot \overline{OO_1} + b \cdot \overline{OO_2} + c \cdot \overline{OO_3}$ (1)

El cuadrilátero AO_2OO_3 es cíclico y que $\angle AO_3O = \angle AO_2O = 90º$

Los triángulos $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{AO_2O_3}$ son semejantes y la razón de semejanza es 2:1

Por tanto el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo $\overset{\Delta}{AO_2O_3}$ es $\frac{R}{2}$

$\angle OO_2O_3 = 90º - C$, $\angle OO_3O_2 = 90º - B$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{AO_2O_3}$,

$\frac{\overline{OO_2}}{\sin(90º - B)} = \frac{\overline{OO_3}}{\sin(90º - C)} = 2\left(\frac{R}{2}\right)$. Entonces, $\overline{OO_2} = R \cdot \cos B$, $\overline{OO_3} = R \cdot \cos C$

Análogamente, $\overline{OO_1} = R \cdot \cos A$

Sabemos que:

$a = c \cdot \cos B + b \cdot \cos C$

$b = c \cdot \cos A + a \cdot \cos C$

$c = b \cdot \cos A + a \cdot \cos B$

Sumando las tres ecuaciones:

$2p = (b + c)\cos A + (a + c)\cos B + (a + b)\cos C$

Multiplicando la ecuación por R

$2pR = (b + c)R \cdot \cos A + (a + c)R \cdot \cos B + (a + b)R \cdot \cos C$

Entonces:

$2pR = (b + c)\overline{OO_1} + (a + c)\overline{OO_2} + (a + b)\overline{OO_3}$ (2)

Sumando (1) i (2)

$2pr + 2pR = (a + b + c)\overline{OO_1} + (a + b + c)\overline{OO_2} + (a + b + c)\overline{OO_3}$

Simplificando:

$\overline{OO_1} + \overline{OO_2} + \overline{OO_3} = R + r$

Nota: si A es obtusángulo la fórmula es: $-\overline{OO_1} + \overline{OO_2} + \overline{OO_3} = R + r$