

Problema 797

Construcción. Dado el triángulo ABC, hallar dos puntos D, E sobre el segmento BC tales que AD y AE sean rectas isogonales y el área de ADE sea la mitad del área de ABC.

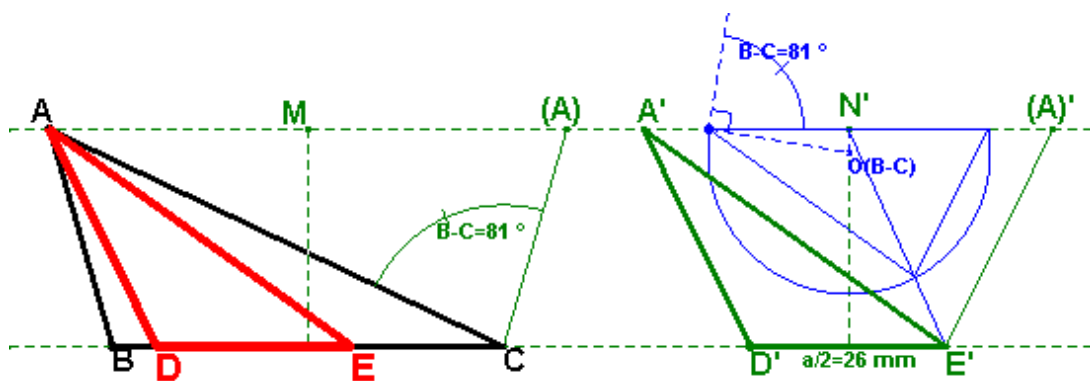
García, F. J. (2016): Comunicación personal

Resuelto por JULIÁN SANTAMARÍA TOBAR profesor de Dibujo del IES La Serna de Fuenlabrada

Los triángulos ABC y ADE comparten la altura del vértice A (H_a), como el área del triángulo ADE es la mitad del dado, al mantener la altura H_a , el lado $DE = BC/2 = a/2$. También la bisectriz del vértice A (V_a) de los triángulos ABC y ADE es la misma al ser los lados AD y AE isogonales. En definitiva se trata de **construir el triángulo ADE conociendo la altura H_a , la bisectriz V_a y el lado DE**. Este triángulo lo voy construir de dos modos: aplicando el ángulo B-C y aplicando una cuaterna armónica.

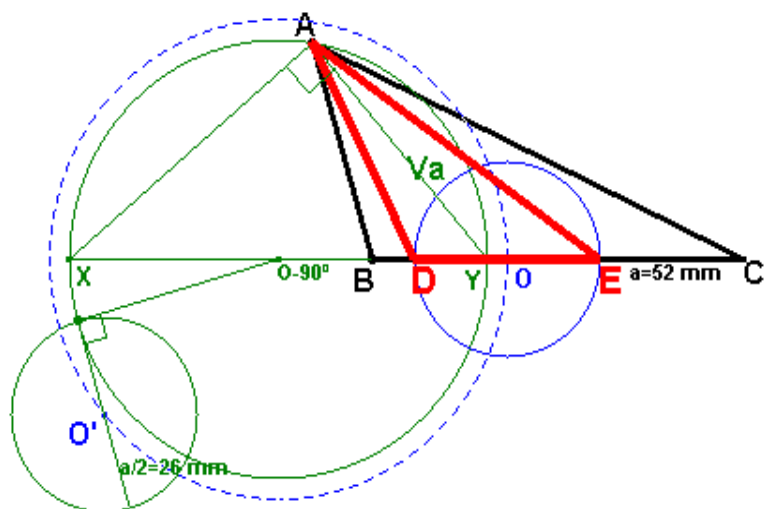
1ª resolución, aplicación del ángulo B-C

El ángulo que forma la altura H_a con la bisectriz V_a es $(B-C)/2$. Al ser común estos segmentos en los dos triángulos se cumple que la diferencia de los ángulos $ADE - DEA = B-C$. El ángulo B-C es el ángulo AC(A) siendo el lado C(A) el simétrico del lado BA respecto de la mediatriz de BC. La construcción del triángulo se realiza fuera porque se comienza colocando el lado D'E' en una posición cualquiera y aplicando una homotecia del triángulo A'E'(A)' de centro N', punto medio entre A' y (A)'



2ª resolución, aplicando una cuaterna armónica

Los vértices D y E de un triángulo y los pies X e Y de las dos bisectrices del otro vértice A forman una cuaterna armónica. Por otra parte si una recta corta a dos circunferencias ortogonales y pasa por el centro de una de ellas, los puntos de intersección (entre dicha recta y las circunferencias) forman una cuaterna armónica. En este caso la recta pasa por los dos centros de las circunferencias.



La pareja XY de los pies de las bisectrices es el diámetro de una de las circunferencias. La otra será ortogonal y tendrá de diámetro $DE = a/2$. La posición concreta de la circunferencia de diámetro DE se obtiene mediante un giro.