PAREJAS DE DATOS EQUIVALENTES. INTRODUCCIÓN.

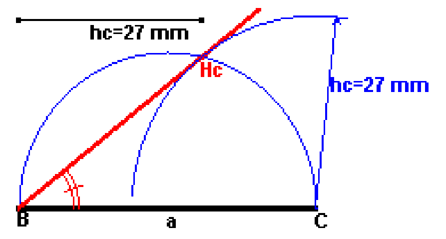
Un triángulo queda definido con tres datos, pero dos de ellos pueden ser equivalentes a otra pareja de datos, y a veces se pueden cambiar los datos del enunciado del problema aunque se trate de la resolución del mismo triángulo. Las operaciones gráficas son más limitadas que las analíticas y la transformación de datos del enunciado por otros equivalentes puede facilitar la resolución. Es más, yo aconsejo a mis alumnos que cuando vayan a resolver un triángulo, analicen en primer lugar los datos que puedan ser equivalentes a otros, antes de tantear el método por el que se puede resolver.

En este análisis, se van a exponer únicamente varios casos en los que dos de los datos del problema pueden ser sustituidos por sus parejas de datos equivalentes, por lo tanto, no se trata de ver el método que se puede aplicar para la resolución del problema porque va a faltar el tercer dato del enunciado.

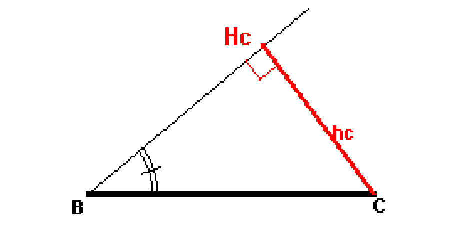
De las posibles parejas de datos equivalentes suele ser más fácil, para realizar la combinación con el tercer dato, la pareja en la cual uno de sus datos sea un lado. En los siete primeros casos se puede elegir la pareja en la que uno de los datos es el lado a, y al fijar este lado a, el vértice A va a pertenecer en un lugar geométrico.

01) **(a, hc, B)** DATOS EQUIVALENTES: **a, hc** <=> **a, B** <=> **hc, B**

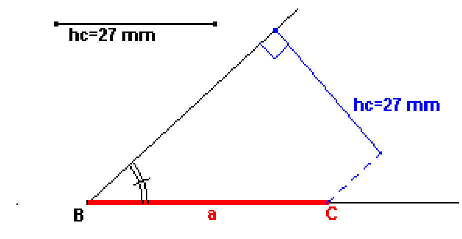
Dados dos datos se puede obtener el tercero teniendo en cuenta que son dos datos del triángulo rectángulo B-Hc-C, ya que uno de los catetos es la altura hc, la hipotenusa es el lado a y uno de los ángulos es B



01a) Dado el lado a y la altura hc, hallar el ángulo B



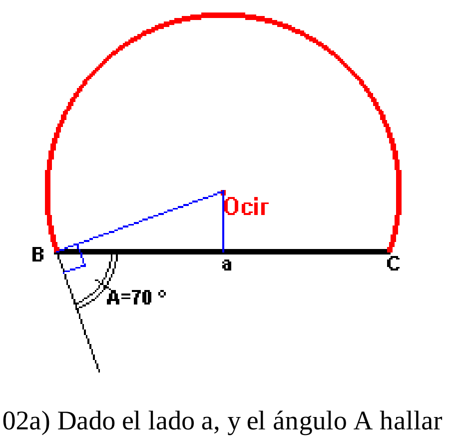
01b) Dado el lado a y el ángulo B, hallar la altura hc.



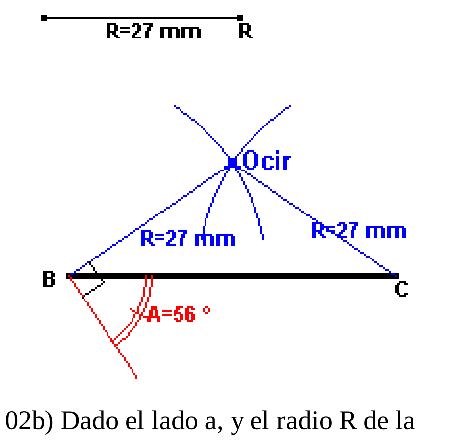
01c) Dado la altura hc y el ángulo B, hallar el lado a

02) **(a, A, R)** DATOS EQUIVALENTES: **a, A** <=> **a, R** <=> **A, R**

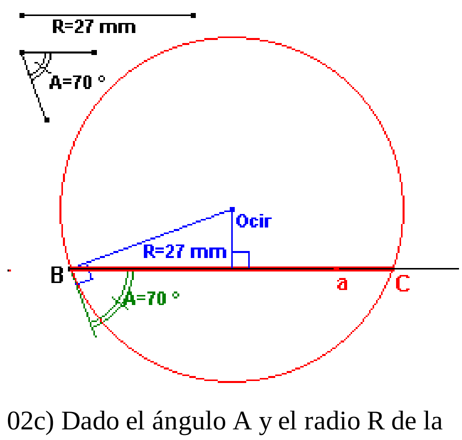
La transformación de una pareja de datos en otra está relacionada con el procedimiento empleado en el arco capaz del lado a



02a) Dado el lado a, y el ángulo A hallar la circunferencia circunscrita

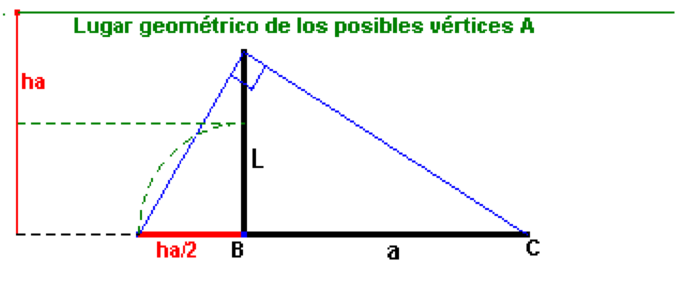


02b) Dado el lado a, y el radio R de la circunscrita, hallar ángulo A



02c) Dado el ángulo A y el radio R de la circunscrita, hallar lado a

03) **(a, ha, S)** DATOS EQUIVALENTES: **a, ha** <=> **a, S** <=> **ha, S**



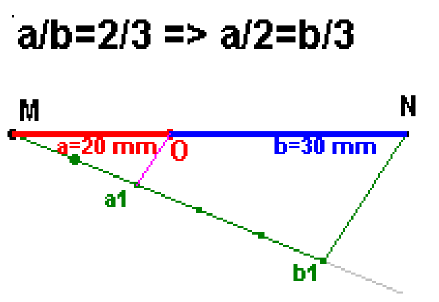
03) Dado el lado a del triángulo, y el lado L de un cuadrado equivalente a su superficie S, ($\sqrt{S} = L$), hallar la altura ha. Hallar también el lugar geométrico de los posibles vértices A.

Cuando uno de los datos del problema sea la superficie S del triángulo, (o sea, el lado L de un cuadrado equivalente a la superficie S del triángulo ABC, $\sqrt{S} = L$), y oto dato sea bien el lado a, o bien la altura ha; se puede transformar en la pareja de datos (a, ha) mediante el teorema de la altura.

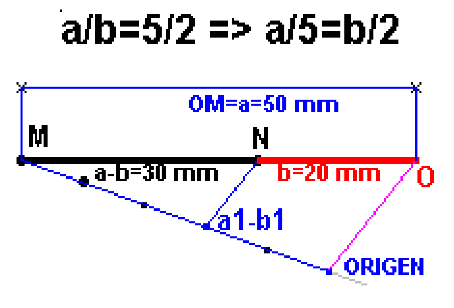
Si dos de los datos son a, ha, se puede definir el lugar geométrico de los posibles vértices A, porque corresponde a una paralela al lado a, a una distancia ha.

04) **a, b, (a±b), a/b, a.b**,... DATOS EQUIVALENTES: **a,b, <=> a/b, (a±b)** <=> **a.b, (a±b) <=> a/b, a.b**,...

Dados los datos **a/b, (a±b),** para hallar los datos equivalentes **a y b**, se aplica el teorema de Thales.

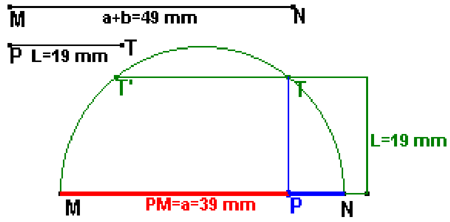


04a) Hallar los segmentos a y b dada la **suma a+b**= MN y su **relación a/b**=2/3



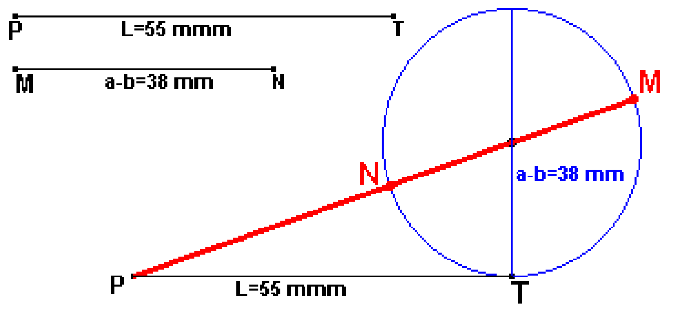
04b)) Hallar los segmentos a y b dada su **diferencia a-b**=MN y **relación a/b**=5/2

(a.b=S), (a+b), <=> a, b, se aplica el teorema de la altura en la transformación



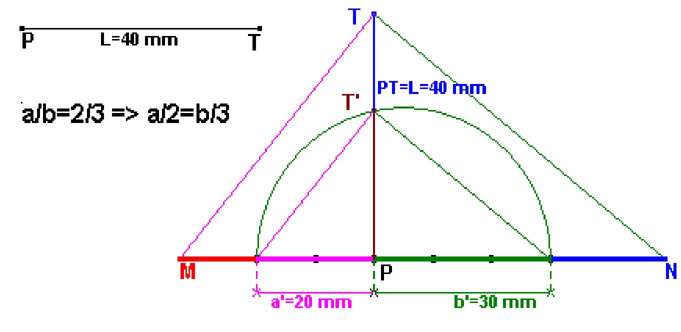
04c) Hallar los segmentos PM=a, y PN=b dada la **suma a+b**, y el lado L de un cuadrado de superficie equivalente al **producto** de los lados **a.b = S**, $\sqrt{S} = L$

En la transformación **(a . b=S), (a-b), <=> a, b**, se aplica potencia PT de una circunferencia de diámetro a-b



04d) Hallar los segmentos PM=a y PN=b dada la **diferencia a-b = MN**, y el lado L de un cuadrado de superficie equivalente al **producto** de los lados **a .b = S.** $\sqrt{S} = L$

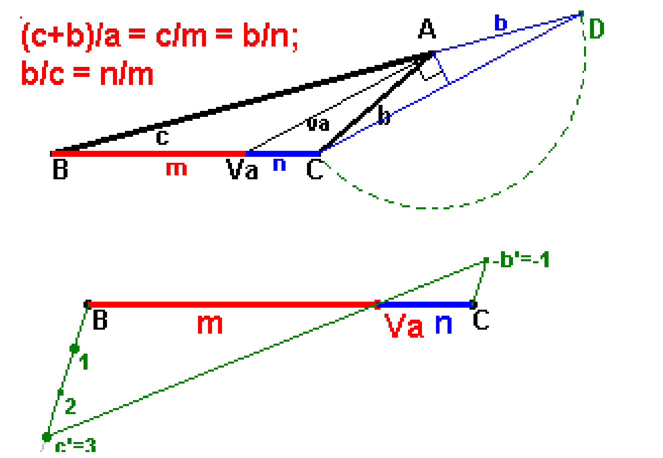
En la transformación **(a . b=S), (a/b), <=> a, b**, se aplica el teorema de la altura y una homotecia



04e) Hallar los segmentos PM=a y PN=b dada la **relación a/b**=2/3, y el lado L de un cuadrado de superficie equivalente al **producto** de los lados **a.b = S.** $\sqrt{S} = L$

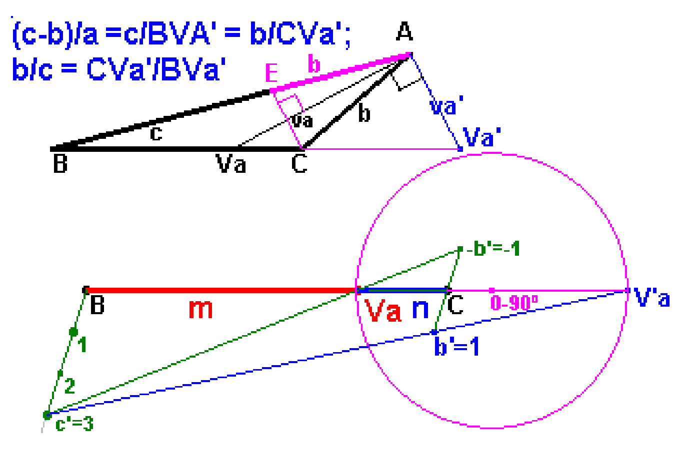
05) DATOS EQUIVALENTES: **(a, b/c) <=> a + pie Va** de la bisectriz interior **va <=> a + pie Va'** de **va'**

La bisectriz interior va, divide al lado opuesto a en dos segmentos m y n proporcionales a los lados b y c.
Al hacer el simétrico del lado b respecto de la bisectriz exterior va', se puede observar la relación con el teorema de Thales.
(c+b)/a = c/m = b/n =>b/c = n/m



05a) Dado el lado a y la relación b/c=1/3, hallar el pie Va de la bisectriz interior va

La pie Va' de la bisectriz exterior va', está a una distancia de los vértices C y B proporcionales a los lados b y c.
Al hacer el simétrico del lado b respecto de la bisectriz interior va, se puede observar la relación con el teorema de Thales.
(c-b)/a =c/BVA' = b/CVa' => b/c = CVa'/BVa'



05a) Dado el lado a y la relación b/c=1/3, hallar el pie Va' de la bisectriz exterior va'. Hallar el LG de los vértices A

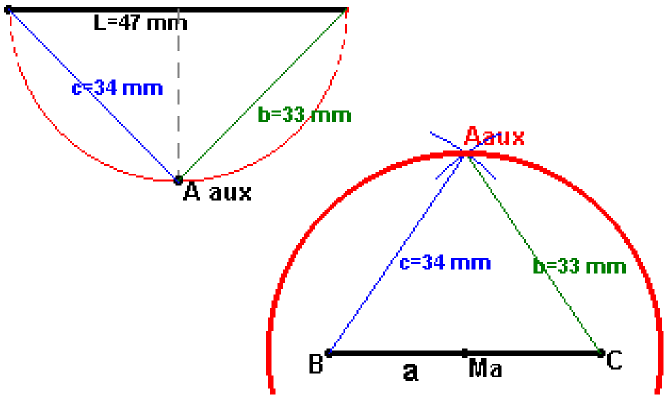
El lugar geométrico de los vértices A corresponde al punto de intersección de sus dos bisectrices que parten de sus pies Va y Va', o sea, es el arco capaz de 90º por ser estas perpendiculares. A este arco capaz se le conoce como *lugar geométrico de Apolonio*. Cada pie Va y Va' está separado de los vértices B y C una distancia proporcional a los lados b y c, o sea, los pies Va y Va' están armónicamente separados de los vértices B y C.
Si los datos iniciales fueran (a + pie Va de la Bisectriz va) se procede de modo similar para obtener el lugar geométrico de Apolonio

06) (a, ma, b^2+c^2) DATOS EQUIVALENTES: a, ma <=> a, b^2+c^2 <=> ma, b^2+c^2

Los tres datos están relacionados con el teorema de la mediana. **$b^2+c^2 = 2ma^2 + a^2/2$**

Transformación (a, b^2+c^2 => a, ma).

Si $b^2+c^2 = L^2$, al ser L y el lado a, los datos del enunciado, la mediana ma es una constante independientemente de los valores que tomen b y c. Por lo tanto se puede dar un valor cualquiera a los lados b y c, obtener un vértice auxiliar Aaux, y deducir el valor de la mediana ma. Los valores de b y c, por ser suma de cuadrados, están relacionados con el teorema de Pitágoras, y corresponden a los catetos de un triángulo auxiliar cuya hipotenusa sea el lado L, pero la posición más fácil corresponde al triángulo rectángulo e isósceles.



06a) Dado el lado a y el lado L de un cuadrado de superficie equivalente a la suna de los cuadrados de los otros dos lados $b^2+c^2 = S$, o sea, $\sqrt{S} = L$, hallar la mediana ma (el lugar geométrico del vértice A).

Transformación (ma, b^2+c^2 => a, ma).

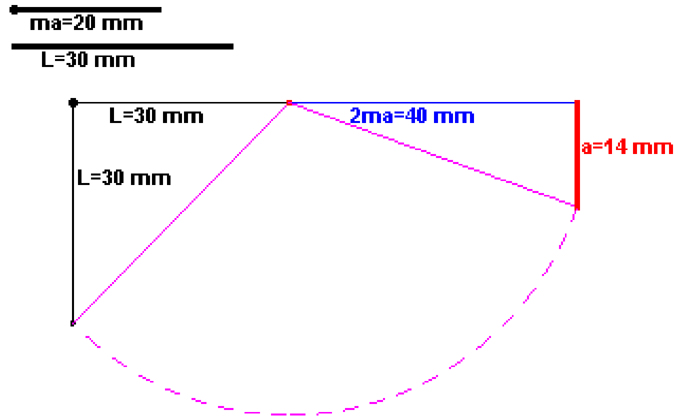
Para obtener el lado a, se utiliza el teorema de la mediana.

$b^2+c^2 = 2ma^2 + a^2/2$

Si $b^2+c^2 = L^2$; al despejar a^2, sale:

$a^2 = 2L^2 - 4ma^2 = (\sqrt{2}\ L)^2 - (2ma)^2$

Se puede obtener gráficamente, el valor del lado a, aplicando el teorema de Pitágoras



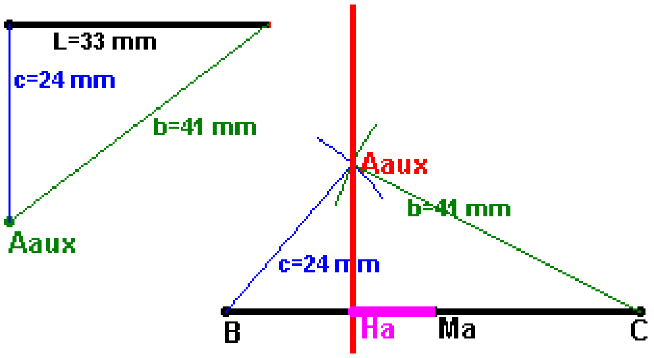
06b) Dado la mediana ma y el lado L de un cuadrado de superficie equivalente a la suna de los cuadrados de los otros dos lados $b^2+c^2 = S$, o sea, $\sqrt{S} = L$, hallar el lado a.

07) (a, segmento MaHa, b^2-c^2) DATOS EQUIVALENTES: a, MaHa <=> a, b^2-c^2 <=> MaHa, b^2-c^2

Ma es el pie de la mediana ma y Ha es el pie de la altura Ha. Relación de los datos: **$b^2-c^2 = 2MaHa\ .\ a$**

Transformación (a, b^2-c^2 => a, segmento MaHa).

Si $b^2-c^2 = L^2$, al ser L y el lado a, los datos del enunciado, el segmento MaHa es una constante independientemente de los valores que tomen b y c. Por lo tanto se puede dar un valor cualquiera a los lados b y c, obtener un vértice auxiliar Aaux, y deducir el valor del segmento MaHa. Los valores de b y c, por ser diferencia de cuadrados, están relacionados con el teorema de Pitágoras, b corresponde a la hipotenusa y c a un cateto.



07a) Dado el lado a y el lado L de un cuadrado de superficie equivalente a la diferencia de los cuadrados de los otros dos lados $b^2- c^2 = S$, o sea, $\sqrt{S} = L$, hallar el segmento MaHa (el pie Ha de la altura ha y el lugar geométrico del vértice A).

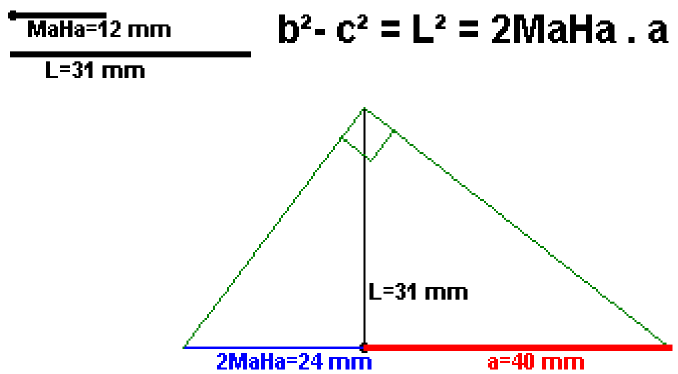
Transformación (MaHa, b^2-c^2 => a, MaHa).

Partiendo de relación de los datos:

$b^2-c^2 = L^2 = 2MaHa\ .\ a$

Se puede aplicar el teorema de la altura, tanto en esta transformación de parejas equivalentes, como en la equivalencia anterior (a, b^2-c^2 => a, segmento MaHa).

A veces el segmento MaHa hay que deducirlo previamente como en la resolución del triángulo (ma, ha, $b^2- c^2$)



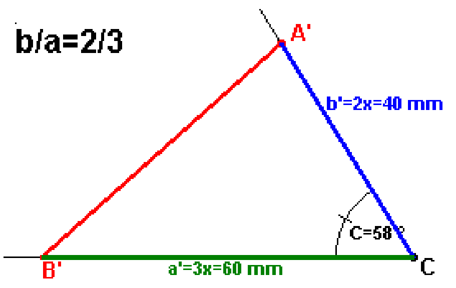
07b) Dado el segmento MaHa y el lado L de un cuadrado de superficie equivalente a la diferencia de los cuadrados de los lados $b^2- c^2 = S$, o sea, $\sqrt{S} = L$, hallar el lado a.

08)**(A, B, C, (B-C), b/c,...)** DATOS EQUIVALENTES: **B, C <=> C, b/a <=> B-C, b/c <=> A, B-C** ...

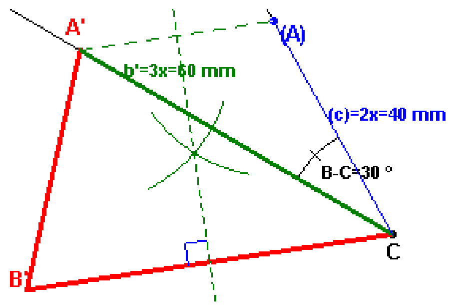
La equivalencia en datos angulares se reduce únicamente a hallar un triángulo homotético de la solución, este triángulo semejante contiene todos los datos angulares. El tercer dato del triángulo es un lineal.

Cuando se tiene la relación de dos datos lineales y un ángulo, se dan valores relacionados con la razón y se obtienen el resto de datos angulares

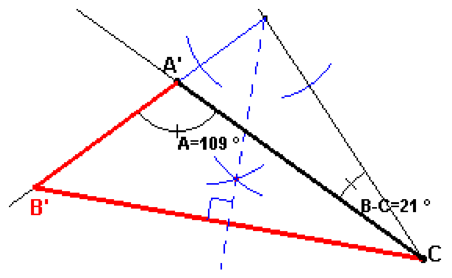
El ángulo B-C está formado por el lado b y el simétrico del lado c con respecto de la mediatriz del lado a. Con este eje de simetría, el simétrico del vértice B coincide con el vértice C. Para deshacer la simetría hay hallar el eje de simetría con una mediatriz o con una bisectriz.



08a) Hallar el resto de los datos angulares dada la relación de los lados b/a=2/3 y el ángulo C

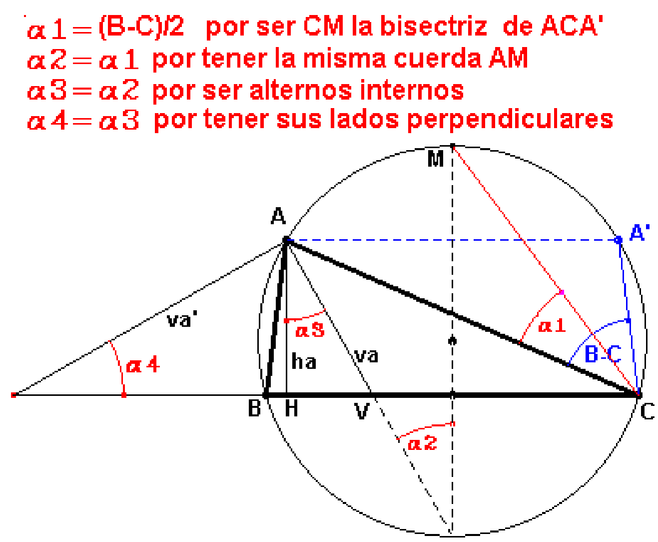


08b) Hallar el resto de los datos angulares dada la relación de los lados b/c=3/2, y la diferencia de los ángulos B-C



08c) Hallar el resto de los datos angulares dado el ángulo A, y la diferencia de los otros dos ángulos B-C

09) **[ha,va,va',(B-C)/2]** DATOS EQUIVALENTES: **ha,va<=>ha,(B-C)/2<=>va,(B-C)/2,<=>va,va'...**

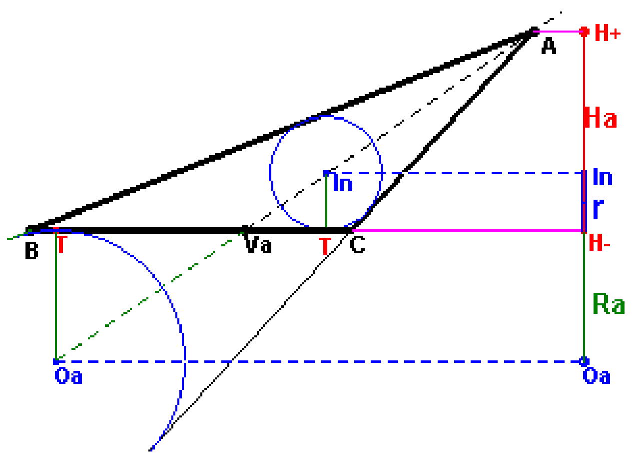


Cada una de las parejas formadas por datos lineales (ha,va), (ha,va') y (va,va') tienen la equivalencia relacionada con un triángulo rectángulo, el cuarto dato que interviene en las parejas de datos equivalentes es (B-C)/2 y corresponde al ángulo formado por la altura ha y la bisectriz va.

En la figura está la justificación del valor del ángulo (B-C)/2, pero también se puede deducir de modo siguiente:

HAV = 90 - AVH =
= 90 - (180 - AVC) =
= 90 - [180 - (180 -A/2 - C)] =
= 90 -180 + 180 - A/2 - C =
= 90 - A/2 - C =
= 90 - (180 - B - C)/2 -C =
= 90 - 180/2 + B/2 + C/2 - C =
= (B + C - 2C)/2
= **(B-C)/2**

10) **(ha, r, Ra)** DATOS EQUIVALENTES: **ha, r <=> r, Ra <=> ha, Ra**

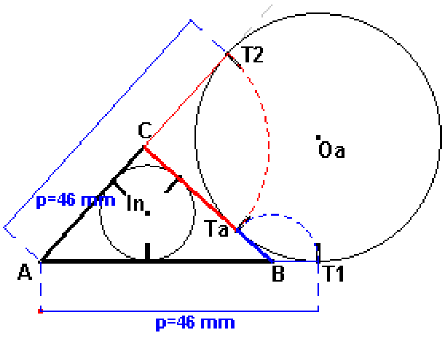


Los centros de dos circunferencias y sus centros de homotecia forman una cuaterna armónica.

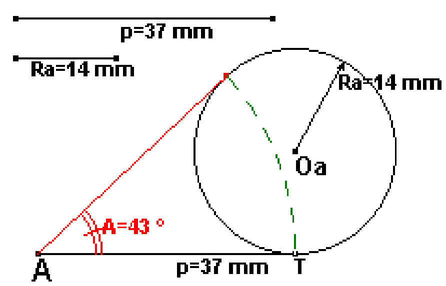
En los triángulos los centros de la inscrita y de la exinscrita están separados armónicamente de su bisectriz. Si esta cuaterna se proyecta en una recta perpendicular al lado a, la bisectriz va se proyecta en la magnitud de la altura ha, la distancia In-Va en el radio de la inscrita r, y la distancia Oa-Va en el radio de la exinscrita Ra. Si se parte de dos segmento de los tres que intervienen en la equivalencia (ha, r, Ra) se puede completar la cuaterna.

Los cuatro puntos (A-Va-In-Oa) estarán una haz amónico formado por las cuatro rectas paralelas.

11) **(A, Ra, p)** DATOS EQUIVALENTES: **A, Ra <=> A, p <=> Ra, p**



La equivalencia de los datos se justifica porque la distancia del vértice A, a los puntos de tangencia T1 y T2 de los lados del ángulo A con su circunferencia exinscrita de este ángulo A es el semiperímetro p. Se debe a que los dos segmentos formados desde el vértice A y a sus puntos de tangencia T1 y T2 con una circunferencia, tienen la misma longitud; como la suma de estos dos segmentos es el perímetro, (porque BT1=BTa y CT2=CTa), cada segmento mide el semiperímetro p.

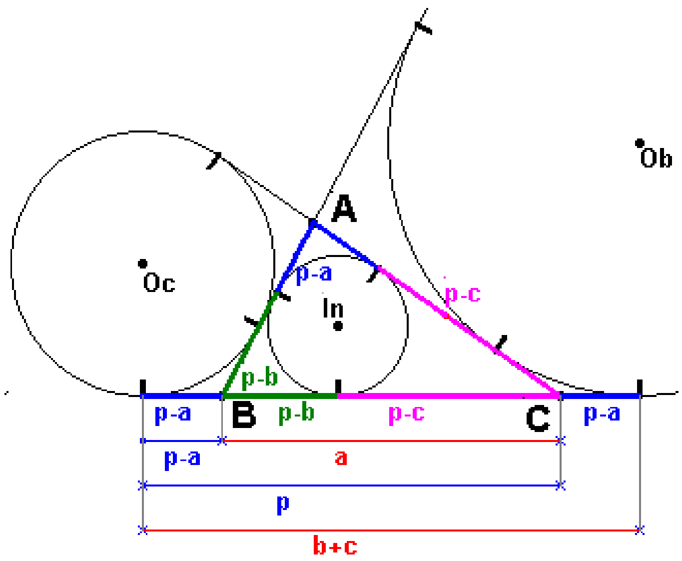


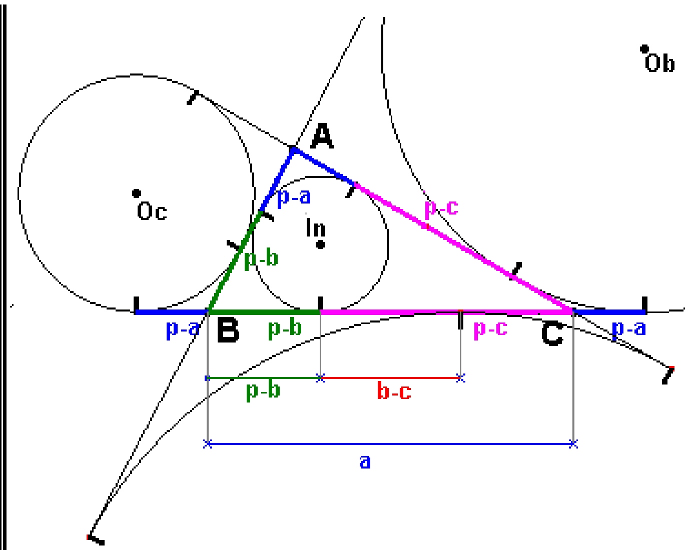
11b) Dado el semiperímetro p y el radio de la circunferencia exinscrita Ra, hallar el ángulo A

12) EQUIVALENCIAS: **a, p,<=> (p-a), (b+c), ...**

13) EQUIVALENCIAS: **a, (b-c)<=>(p-b), (p-c), ...**

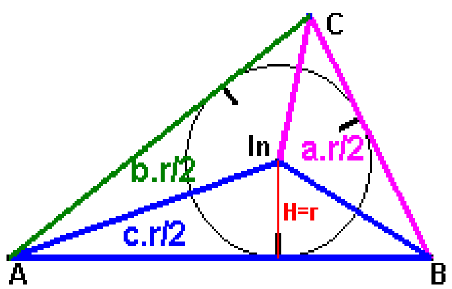
Los cuatro datos [a, p, (p-a) y (b+c)] y [a, (b-c), (p-b) y (p-c)] que interviene para formar las parejas de datos equivalentes, se puede deducir fácilmente con sumas y restas, pero es interesante mostrar estas operaciones de forma gráfica para asignar estos segmentos a las distancias que correspondan.





14) **(r,p,S)** EQUIVALENCIAS: **r,p<=>r,S<=>p,S**

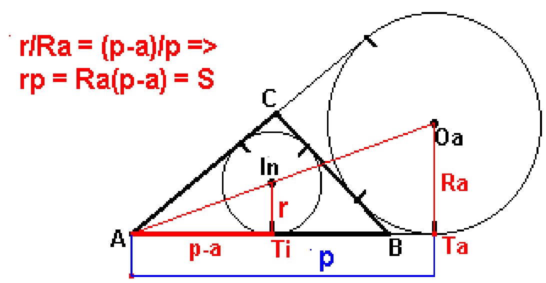
La expresión de la superficie S en función del semiperímetro p y el radio r de la circunferencia inscrita, se puede justificar con la descomposición del triángulo ABC en otros tres mediante los segmentos formado por el incentro In y los tres vértices. El área S del triángulo ABC = a . r/2 + b . r/2 + c . r/2 = p . r = S



15)EQUIVALENCIAS: **Ra, p-a<=>S, p-a<=>Ra, S**

La expresión de la superficie S en función del radio de la circunferencia exinscrita Ra, se puede justificar con los triángulos semejantes Oa Ta A, y el In Ti A, que al relacionar los catetos resulta:

r/Ra = (p-a)/p => r . p = Ra.(p-a) = S



A partir de las formulas de superficie (S = a.ha/2 = b.hb/2 = c.hc/2 = r.p = (p-a)Ra = (p-b)Rb = (p-c)Rc], se pueden obtener datos equivalentes, pero en este caso intervienen los tres datos del triángulo. Estas transformaciones referentes a los tres datos son:

1º Si se conocen tres datos de una igualdad, se puede obtener el cuarto. Por ejemplo, en el problema a,Ha,(b+c) => a,p,r

2º Si se conocen dos datos de una igualdad, se puede obtener la relación de los otros dos factores. Por ejemplo, en el ejercicio r,Ra,(b+c) se puede obtener la relación r/Ra = (p-a)/p; pero como (b+c) es un dato equivalente de la pareja [(p-a), p] se puede obtener el valor real de p: (b+c)/p = [p+(p-a)]/p => (b+c)/p =(Ra+r)/Ra, por lo tanto r,Ra,(b+c) => r,Ra,p

3º Si los tres datos están en estas fórmulas, se puede obtener la relación de los otros tres factores de cada producto mediante potencia, con lo cual se puede construir un triángulo homotético. Por ejemplo, en el problema ha, hb, hc => a’,b’,c’ semejante.