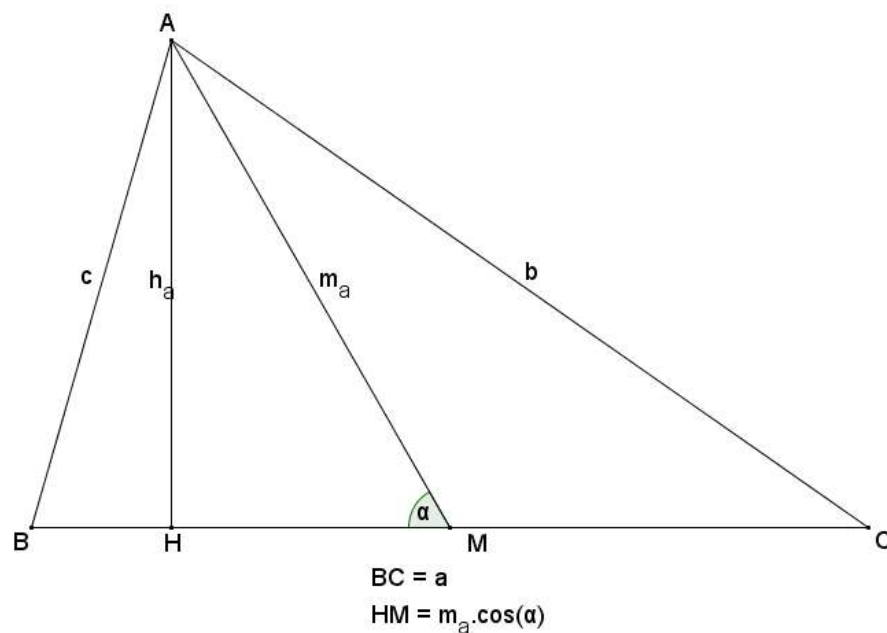


Problema n° 822

Construir el triángulo cuyos datos son h_a , m_a , $b - c$.

Santamaría, J. (2017):Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

La hauteur $AH = h_a$ et la médiane $AM = m_a$ issues de A étant connues, on en déduit le côté HM du triangle rectangle HAM ainsi que l'angle α de la médiane AM avec le côté BC. $HM = \sqrt{m_a^2 - h_a^2}$ et $\sin(\alpha) = h_a/m_a$.

On connaît par ailleurs la grandeur $d = b - c$ et on suppose sans perte de généralité $b > c$.

On a les deux égalités: $b^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} + a \cdot m_a \cdot \cos(\alpha)$ et $c^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - a \cdot m_a \cdot \cos(\alpha)$.

On en déduit:

$$\sqrt{m_a^2 + \frac{a^2}{4} + a \cdot m_a \cdot \cos(\alpha)} = \sqrt{m_a^2 + \frac{a^2}{4} - a \cdot m_a \cdot \cos(\alpha)} + d$$

Par éliminations successives des deux radicaux, on obtient la relation:

$$a = d \sqrt{\frac{4m_a^2 - d^2}{4m_a^2 \cos^2(\alpha) - d^2}} = d \sqrt{\frac{4m_a^2 - d^2}{4HM^2 - d^2}}$$

qui permet d'exprimer le côté $BC = a$ en fonction des trois grandeurs h_a , m_a et $d = b - c$. a est toujours défini quand $d < 2 m_a$.

Comme l'expression donnant a contient une racine carrée et des formes quadratiques, a est constructible à la règle et au compas.