Problema 832

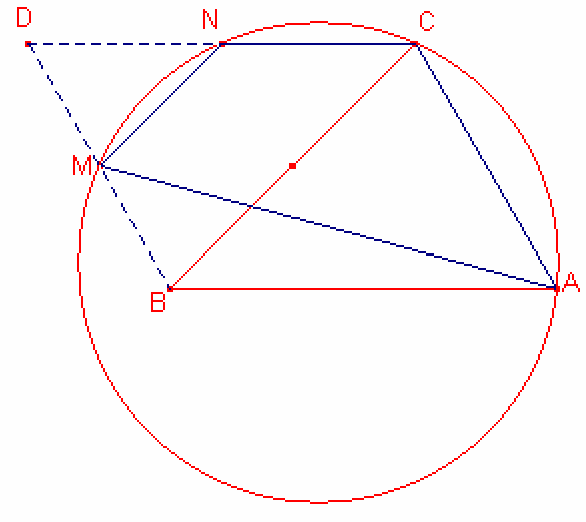
Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $B = 45^{o}$.

Siga D el punt simètric de A respecte del punt mig del costat $\overline{BC}$.

Siguen M i N els punts migs dels costats $\overline{BD}$ i $\overline{CD}$, respectivament.

Demostreu que l'angle $A = 60^{o}$ si i només si els punts A, M, N i C són cíclics.

Fondainache, P.



Solució de Ricard Peiró.

Si D és el simètric A respecte del punt mig del costat $\overline{BC}$, aleshores, BACD és un paral·lelogram.

$\overline{MN}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{DMN}$.

($\Rightarrow$)

Suposem que l'angle $A = 60^{o}$. Aleshores, $C = 75^{o}$.

$\angle DMN = \angle DBC = C = 75^{o}$.

$\angle NMB = 105^{o}$.

Siga $\alpha = \angle AMB$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{MBA}$:

$$\frac{c}{\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin(60^{o}-\alpha)} \qquad (1)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{c}{\sin 75^{o}} = \frac{b}{\sin 45^{o}} \qquad (2)$$

Dividint les expressions (1) (2):

$$\frac{\sin 75^{o}}{\sin\alpha} = \frac{\sin 45^{o}}{2\sin(60^{o}-\alpha)} \qquad (3)$$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}\right)2\sin(60^{o}-\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$. Simplificant:

$$\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right) = \sin\alpha .$$

$\mathrm{tg}\alpha = 1$.

Aleshores, $\alpha = 45^{o}$.

$\angle NMA = \angle NMB - \alpha = 105^{o}-45^{o} = 60^{o}$.

$\angle NCA = C + \angle DCB = 75^{o}+45^{o} = 120^{o}$.

Aleshores, el quadrilàter AMNC té els angles oposats suplementaris, per tant, és cíclic.

($\Leftarrow$)

Suposem que AMNC és cíclic. Aleshores, té els angles oposats suplementaris.

$C = 135^{o}-A$.

$\angle DCA = 180^{o}-A$.

$\angle NMA = A$.

$\angle DMN = C = 135 - A$.

$\angle NMB = 45^{o}+A$.

Aleshores, $\angle BMA = 45^{o}$. $\angle BAM = A + 45^{o}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{MBA}$:

$$\frac{c}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{2\sin(A - 45^\circ)} \qquad (1)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{c}{\sin(135^\circ - A)} = \frac{b}{\sin 45^\circ} \qquad (2)$$

Dividint les expressions (1) (2):

$$\frac{\sin(135^\circ - A)}{\sin 45^\circ} = \frac{\sin 45^\circ}{2\sin(A - 45^\circ)} \qquad (3)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\sin(A - 45^\circ)\cdot\sin(135^\circ - A).$$

$$\frac{1}{2} = \cos(180^\circ - 2A) - \cos 90^\circ.$$

$$A = 60^\circ.$$