

PROBLEMA 815

Problema 815

14.- Medianas multicolores

Érase una vez un triángulo ABC cuyas medianas BM y CN eran perpendiculares. Cada uno de sus tres lados era también el lado de un cuadrado exterior al triángulo. Estos cuadrados estaban coloreados respectivamente, de azul, rosa y amarillo, dependiendo de si su base era BC, CA o AB. ¿Cuántos cuadrados azules se necesitarán para obtener una superficie igual a la de los cuadrados rosa y amarillo juntos?

Sean sin pérdida de generalidad los siguientes vértices del triángulo ABC

Solución del profesor Nicolás Rosillo Fernández, IES Máximo Laguna (Santa Cruz de Mudela, Ciudad Real)

$$A(0,0) \ B(1,0) \ C(b,c) \Rightarrow M_{AC}(b/2, c/2) \text{ y } M_{AB}(1/2, 0)$$

Como las medianas han de ser perpendiculares $\overrightarrow{BM}_{AC} \cdot \overrightarrow{CM}_{AB} = 0$

$$\Rightarrow (b/2 - 1, c/2) \cdot (b - 1/2, c) = 0 \Rightarrow b^2 - \frac{5b}{2} + 1 + c^2 = 0 \Rightarrow c^2 = -b^2 + \frac{5b}{2} - 1$$

El lugar geométrico corresponde a una circunferencia de centro (1'25,0) y radio 0'75

Respondamos ahora a la cuestión sobre los cuadrados

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = k \cdot |\overrightarrow{CB}|^2 \Rightarrow 1 + b^2 + c^2 = k((b-1)^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow 1 + b^2 - b^2 + \frac{5b}{2} - 1 = k(b^2 + 1 - 2b - b^2 + \frac{5b}{2} - 1) \Rightarrow \frac{5b}{2} = k \frac{b}{2} \Rightarrow k = 5$$

Se necesitan 5 cuadrados azules para igualar la superficie obtenida al sumar los cuadrados rosa y amarillo.