

Problema 808

Resolver un triángulo $\triangle ABC$ conocidos r (radio de la circunferencia inscrita), r_a (radio de la circunferencia exinscrita relativo al vértice A y $b - c$.

Santamaría, J. (2017): Comunicación personal.

Solución de Ricard Peiró:

Sea T el punto de tangencia de la circunferencia inscrita y el lado \overline{AB} .

Sea R el punto de tangencia de la circunferencia exinscrita y la prolongación del lado \overline{AB} .

$$\text{Sea } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

$$\text{Sea } d = b - c.$$

$$\overline{BT} = p - b = \frac{a-d}{2}, \quad \overline{BT'} = p - c = \frac{a+d}{2}.$$

$$\overline{AT} = p - a, \quad \overline{AT'} = p$$

Los triángulos $\triangle BTI$, $\triangle I_a T' B$ son semejantes.

Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{r}{\overline{BT}} = \frac{\overline{BT'}}{r_a}.$$

$$\frac{2r}{a-d} = \frac{a+d}{2r_a}.$$

$$a^2 = 4r \cdot r_a + d^2.$$

$$a = \sqrt{4r \cdot r_a + d^2}.$$

Los triángulos $\triangle ATI$, $\triangle AT'I_a$ son semejantes.

Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{r}{\overline{AT}} = \frac{r_a}{\overline{AT'}}.$$

$$\frac{r}{p-a} = \frac{r_a}{p}.$$

$$2p = a + b + c = \frac{a \cdot r_a}{r_a - r}.$$

$$\begin{cases} b + c = \frac{a \cdot r_a}{r_a - r} - a \\ b - c = d \end{cases} \text{ Resolviendo el sistema obtenemos } b \text{ y } c.$$

Ejemplo:

Si $r = 1$, $r_a = 4$ y $b - c = 2$:

$$a = 2\sqrt{5}, \quad b = \frac{3+5\sqrt{5}}{3}, \quad c = \frac{3+5\sqrt{5}}{3}.$$

$$a = 4,47 \text{ cm}$$

$$b = 4,73 \text{ cm}$$

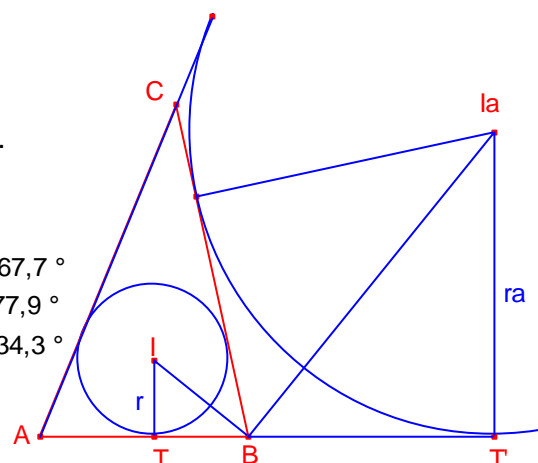
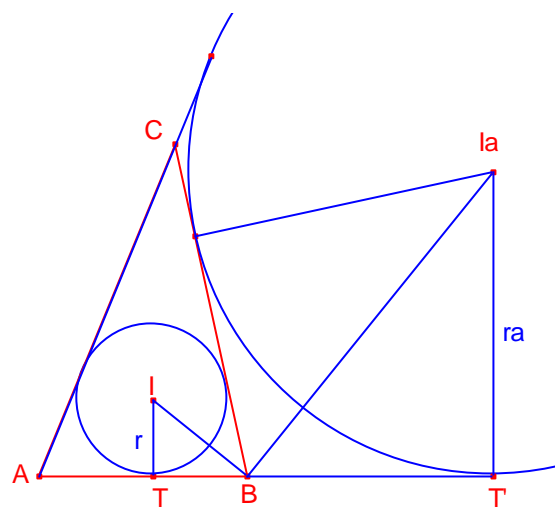
$$c = 2,73 \text{ cm}$$

$$BT = (a - (b - c)) / 2$$

$$A = 67,7^\circ$$

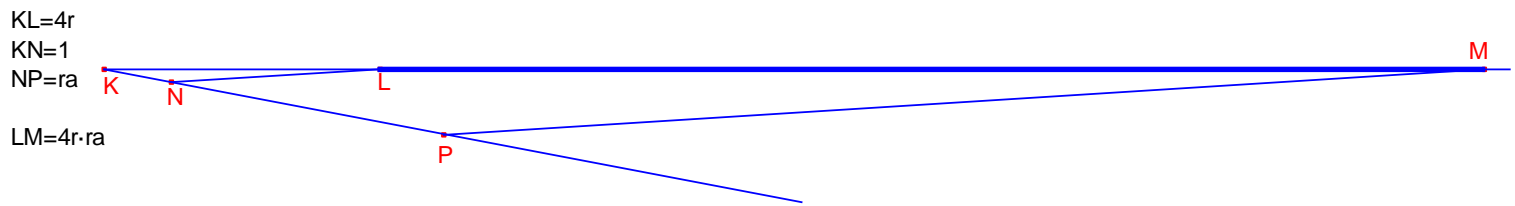
$$B = 77,9^\circ$$

$$C = 34,3^\circ$$

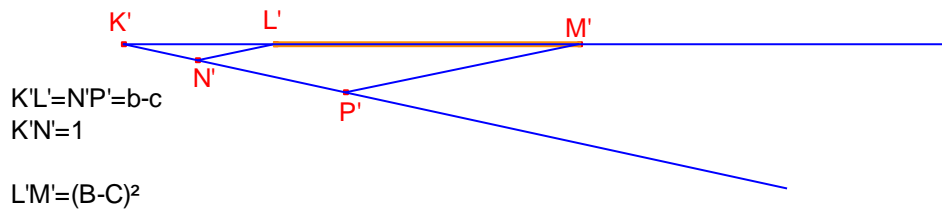


Construcción con regla y compás:

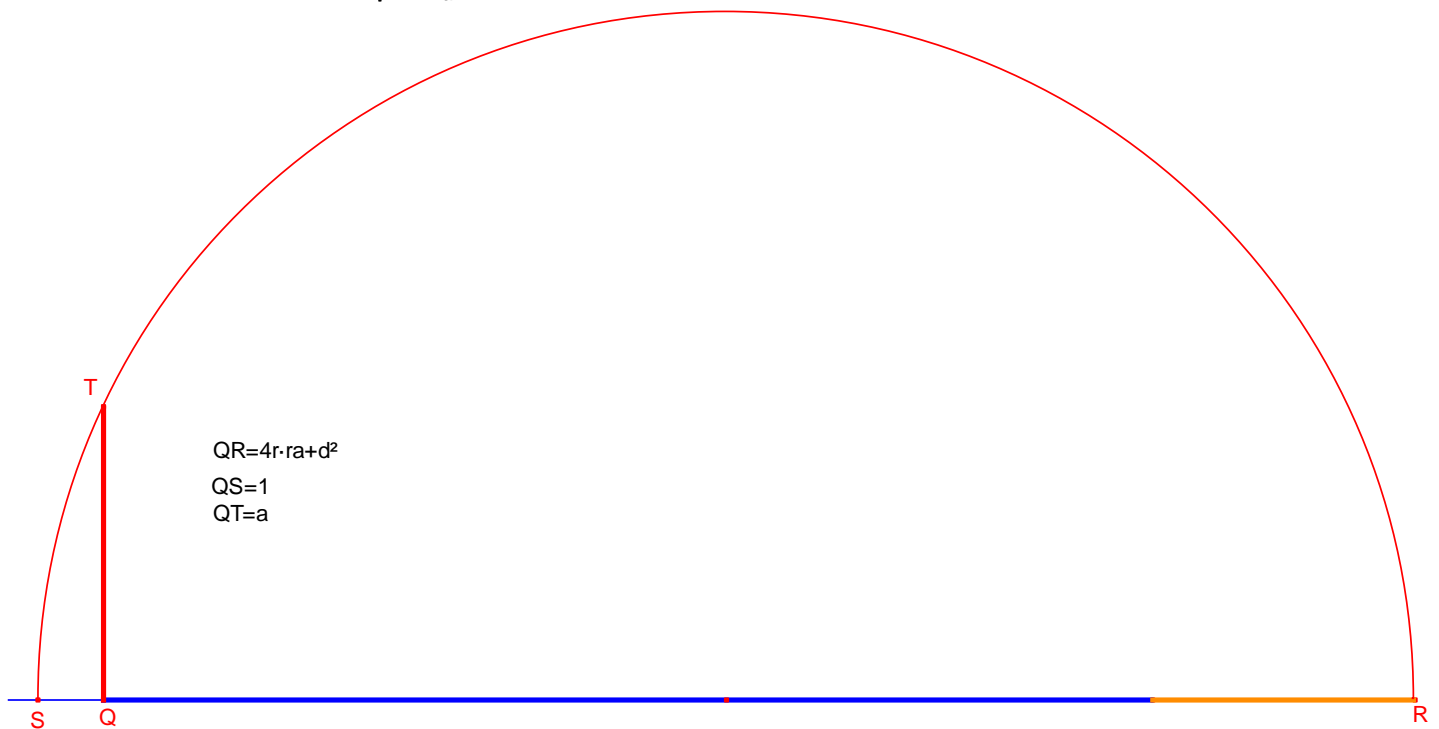
1.- Construir $4r \cdot r_a$



2.- Construir $d^2 = (b - c)^2$.



3. Construir $a = \sqrt{4r \cdot r_a + d^2}$.



4.- Dibujar $\overline{BT} = p - b = \frac{a - d}{2}$.

5.- Dibujar la circunferencia inscrita de centro I y radio $\overline{IT} = r$.

6.- Dibujar la recta que pasa por B y tangente a la circunferencia inscrita.

7.- Dibujar $\overline{BC} = a$.

8.- Dibujar la recta que pasa por C y tangente a la circunferencia inscrita.

9. Dibujar la intersección A de la recta tangente anterior y la recta BT.

10.- Dibujar el triángulo