Problema 1060

Construir sobre los lados AB y AC de un triángulo ABC pares de puntos B' y C', respectivamente, tales que $BB' = B'C' = C'C$.

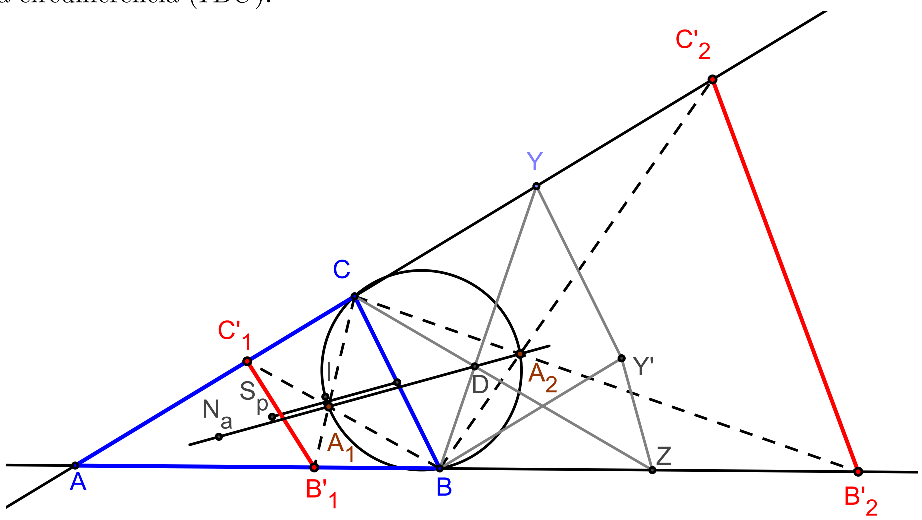
SOLUCIÓN (Angel Montesdeoca)

Tomemos un punto variable Y sobre AC. Consideremos el paralelogramo $BCYY'$ y el triángulo isósceles $BY'Z$, de cúspide B y Z sobre AB. Se tiene entonces que $CY = BZ$.

Si $(1 : 0, t)$ son las coordenadas baricéntricas de Y, entonces $Z = (-b : b - c(1 + t) : 0)$.

El lugar geométrico del punto diagonal $D = (b : -b + c + ct : bt)$ de $BCYZ$ es la recta ℓ de ecuación $(c - b)x - by + cz = 0$, que pasa por el punto de Nagel y es paralela a la recta que une el punto de Spieker con el punto medio, M_a, de BC.

Usando además que el punto diagonal de $BB'C'C$ debe estar en la circunferencia que pasa por el incentro y los vértices B y C del triángulo ABC, los posibles puntos diagonales de $BB'C'C$ son las dos intersecciones, A_1 y A_2, de la recta ℓ y la circunferencia (IBC).



Notas adicionales relativas a esta configuración:

• (HG291022) Sea ℓ_a la recta que pasa por los puntos diagonales de BCA_1A_2, distintos de $BC \cap A_1A_2$, y se definen las rectas ℓ_b y ℓ_c, procediendo cíclicamente sobre los vértices de ABC. Entonces, ABC y el triángulo $A'B'C'$ formado los las rectas ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c son perspectivos, con centro de perspectividad X_{37741}.

El punto fijo (finito) de la transformación afín que aplica ABC en $A'B'C'$ es X_{45392}.

• Cambiando la notación, se consideran los cuatro puntos A_b, A'_b (sobre AC) y A_c, A'_c (sobre AB) tales que:

$$BA_c = A_cA_b = A_bC \qquad y \qquad BA'_c = A'_cA'_b = A'_bC.$$

Las rectas de Euler de los triángulos $ABC, AA_cA_b, AA'_cA'_b$ concurren, en un punto E_a.

Se definen cíclicamente los puntos E_b y E_c.

Si $U_aU_bU_c$ es el triángulo ceviano de un punto U, las rectas E_aU_a, E_bU_b, E_cU_c son concurrentes si y solo si U está sobre la cúbica, circunscrita a ABC, de ecuación baricéntrica:

$$2abc(a-b)(a-c)(b-c)(a^2-b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)xyz+$$

$$\sum_{abcxyz} \left[ayz\left(b(a-c)^3(a+c)(a^3+a^2(-b+c)+(b-c)^2(b+c)+a(-b^2+c^2)\right)^2 y\right.$$

$$\left.-c(a-b)^3(a+b)(a^3+a^2(b-c)+(b-c)^2(b+c)+a(b^2-c^2))^2 z)\right] = 0.$$