

TRIÁNGULOS CABRI

1 de septiembre al 15 de octubre de 2022

Problema 1057. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un segmento BC , determinar el lugar geométrico que debe describir el punto A para que el ortocentro H , el A -Humpty punto H_u y el A -Dumpty punto D_u del triángulo ABC sean concíclicos con el punto A .

Solución:

Si A es uno de estos puntos y O es el circuncentro del triángulo ABC , considerando coordenadas baricéntricas con respecto a dicho triángulo, como:

$$\begin{cases} O = (a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C) \\ H = (S_B S_C : S_A S_C : S_A S_B) \end{cases}$$

y las ecuaciones de la mediana y la simediana correspondientes al vértice A son:

$$\begin{cases} AG \equiv 0 = y - z \\ AK \equiv 0 = c^2 y - b^2 z \end{cases}$$

al ser H_u y D_u los puntos proyección ortogonal de H y O sobre las rectas AG y AK , respectivamente, se verifica que:

$$\begin{cases} H_u = (a^2 : 2S_A : 2S_A) \\ D_u = (2S_A : b^2 : c^2) \end{cases}$$

por lo que:

$$\odot(AH_u D_u) \equiv c^2 xy + b^2 xz + a^2 yz - \left[\left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 - c^2} \right) y + \left(\frac{c^2 - a^2}{b^2 - c^2} \right) z \right] (x + y + z) = 0$$

e, imponiendo que el punto H esté situado sobre esta circunferencia, obtenemos que:

$$8(b+c)(b-c)S^2 S_A (a^2 b^2 + a^2 c^2 - b^4 - c^4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} S_A = 0 \\ \text{ó} \\ a^2 b^2 + a^2 c^2 - b^4 - c^4 = 0 \end{cases}$$

siendo el resultado obvio cuando $S_A = 0$, ya que, en este caso, el triángulo ABC es rectángulo en A y, por tanto, $H = A$. Además, considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el punto medio M del segmento BC y eje de abscisas en la recta BC y tomando como unidad de medida la semilongitud del segmento BC , si $A = (x, y)$ ($y \neq 0$), como:

$$\begin{cases} C = (1, 0) \\ B = (-1, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = BC = 2 \\ b = AC = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ c = AB = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \end{cases}$$

entonces:

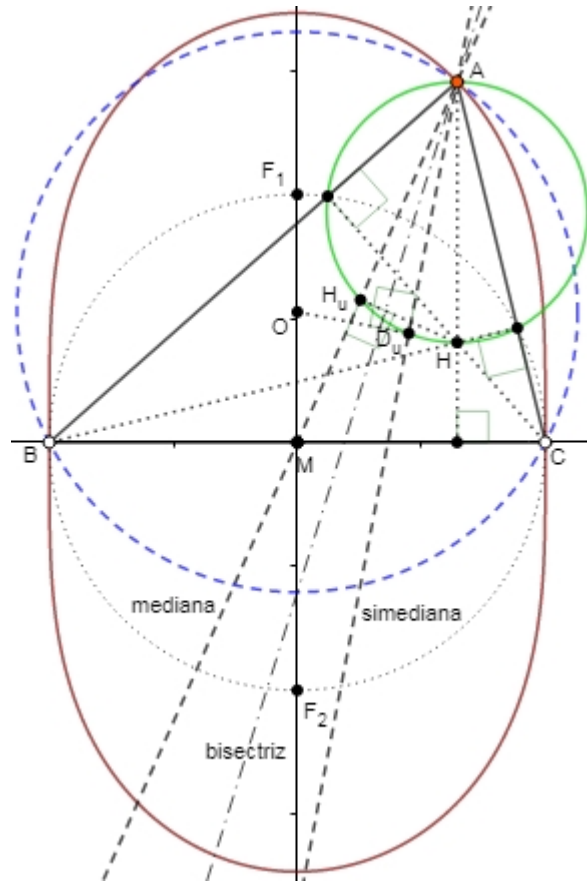
$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) + 1^4 = 2^2$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

1 de septiembre al 15 de octubre de 2022

por lo que el punto A ha de estar situado sobre el óvalo de Cassini cuyos focos son los puntos de intersección entre la recta mediatriz del segmento BC y la circunferencia que tiene por diámetro a dicho segmento y cuyo producto de distancias es igual a BC .



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega