Plebiscitos, Bosques y Clases Combinatoriales

Matías Salim Seda Auil
Universidad de Chile

Las clases combinatoriales son un poderosa abstracción que permite modelar problemas y estructuras combinatoriales de forma relativamente simple y obtener información asociada a la clase a través de su función generatirz. Así, en el siguiente trabajo, se estudiarán dos problemas combinatoriales, se utilizarán clases combinatoriales y funciones generatices para su resolución y se analizará la información obtenida. El primer problema es sobre una votación entre dos opciones que termina siendo un empate y en los distintos escenarios en que el empate puede ocurrir. El segunda problema está asocido a árboles binarios y bosques binarios. Finalmente, gracias a los casos de estudios y la aplicación de las clases combinatoriales en estos, se concluirá y recalcará lo realmente útil que son las clases combinatoriales y como permien facilitar problemas que, a priori, no se visualizan como problemas con soluciones simples.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA: PLEBISCITOS, BOTS Y ESCONDITES

En chile, el año 2020 se realizó un plebiscito para aprobar la idea de iniciar un proceso para crear una nueva constitución para el país o rechazar el proceso y seguir con la constitución vigente. En el periodo antes del plebiscito, en la red social twitter, gran cantidad de bots se vieron involucrados en la campaña por el rechazo, creando la ilusión de que el plebiscito sería una votación disputada. Sin embargo, cuando fue el plebiscito, la opcion apruebo ganó por un margen considerable. Ante este escenario, los bots del rechazo no se vieron muy conformes y planearon inventar una trama paralela en la red social de twitter en donde el rechazo ganaba el plebiscito. En particular, para darle emoción a los hechos ficticios, el escenario planteado por lo bots fue el siguiente:

- Inicialmente, tanto la opción rechazo como la opción apruebo se encuentran empatadas (nadie ha votado, es decir, la dos opciones tienen cero votos).
- En el transcurso de la votación, la opción apruebo siempre se encuentra con mayor cantidad de votos que la opción rechazo.
- Sin embargo, al final, la opción rechazo empata a la opción apruebo.
- Luego, un último voto le da el triunfo al rechazo y los bots celebran.

Respecto a el escenario planteado, a los bots les interesó el proceso del empate, es decir, les interesó el momento desde que ninguna opción tiene votos, hasta que el rechazo logra alcanzar en cantidad de votos al apruebo. En especifíco, querían saber todas las posibles formas en que puede ocurrir el empate, para así, escoger el empate más interesante. Como los bots no saben la cantidad de votantes que asistirán al plebiscito, necesitan una expresión general para calcular la cantidad de formas esperadas.

Por el otro lado, en caso de que la gente descubriera la mentira que se creó en twitter respecto al resultado de plebiscito, los bots idearon un plan de escape para no ser juzgados por sus mentiras. Sin embargo, como los bots no pueden esconderse en una cueva, una montaña o un bosque, decidieron crear *bosques binarios* para ocultarse. En especifíco, un bosque binario es una secuencia de árboles binarios. Respecto a los bosques binarios, a los bots le interesa de sobre manera conocer el número de bosques binarios con cierta cantidad de nodos, para sí, escoger los bosques más interesantes para esconderse.

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA: ENCONTRANDO LOS ELEMENTOS

En primer lugar, para resolver el problema de los votos, inicialmente, se estudiarán algunos casos básicos donde se cumplan las condiciones mencionadas por los bots.

Para estudiar los casos, se definirá una palabra p que representa una secuencia de votos (un escenario). Por ejemplo $p = aarr$ significa que el primer voto fue apruebo, el segundo apruebo, el tercero rechazo y el cuarto rechazo. Nótese que, para que la palabra cumpla las condiciones, necesita tener la misma cantidad de a como de r. Del mismo modo, al leer la palabra de izquierda a derecha, la cantidad de r siempre tiene que ser menor o igual a la cantidad de a. Más específicamente, al inicio, cuando no sea ha leído ninguna letra de la palabra, la cantidad de a y r es la misma, luego, mientras se leen letras, la cantidad de a's siempre es mayor que la cantidad de r's, sin embargo, al leer la última letra, la cantidad de a's es igual a la cantidad de r's.

Lo anterior planteado ya muestra dos restricciones necesarias para las palabras p. Las palabras p tiene que tener un número par de caracteres y deben empezar con una a y terminar con una r. Por lo tanto, si n es el largo de la palabra, n es de la forma $n = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$.

Ahora, para seguir ahondando en la estrucutra de las palabras p, véase los siguiente casos de palabras válidas para distintos largos (cantidad de caracteres):

- $n = 2$:
$$p_1 = ar$$
- $n = 4$:
$$p_2 = aarr$$
- $n = 6$:
$$p_3 = aaarr,\ p_4 = aararr$$
- $n = 8$:
$$p_5 = aaaarrrr,\ p_6 = aaararrrr,\ p_7 = aaarrarr,\ p_8 = aaraarrr,\ p_9 = aarararr$$

Nótese que se puede establecer una dependencia entre las distintas palabras. En particular, se tiene que:

- $p_2 = aarr = ap_1b$
- $p_3 = aaarrr = ap_2b$
- $p_4 = aararr = ap_1p_1b$
- $p_5 = aaaarrrr = ap_3b$
- $p_6 = aaararrr = ap_4b$
- $p_7 = aaarrarr = ap_2p_1ab$
- $p_8 = aaraarrr = ap_1p_2b$
- $p_9 = aarararr = ap_1p_1p_1b$

Con lo anterior, no es difícil notar que, definiendo la clase combinatorial $\mathcal{P}$ como el conjunto de escenarios posibles (palabras que cumplen las condiciones planteadas) se tiene que $\mathcal{P}$ es de la forma:

$$\mathcal{P} = a \times (\mathcal{P})^* \times b$$

Ahora, si se quiere conocer la cantidad de palabras de un largo en especifíco, la siguiente función generatriz de la clase $\mathcal{P}$ contiene esa información:

$$P(z) = \frac{z^2}{1 - P(z)}$$

Gustaría conocer una forma explícita para la función $P(z)$. Para encontrar una forma explícita, primeramente, ordenando la expresión, se tiene que:

$$P(z)^2 - P(z) + z^2 = 0$$

Nótese que se tiene una ecuación cuadrática con $P(z)$ como parámetro. Por fórmula cuadrática se tiene que:

$$P(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4z^2}}{2}$$

$P(z)$ contiene la información sobre la cantidad de palabras de cierto largo que contiene la clase $\mathcal{P}$. En particular, $P(z=0)$ es la cantidad de palabras de largo 0. Como se vió en los casos bases, no existen palabras de largo 0 que cumplan las condiciones y, por lo tanto, $P(z)$ tiene que ser de la forma:

$$P(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4z^2}\right)$$

Se tiene una forma explícita para $P(z)$. Ahora, gustaría conocer como se *comporta* la función $P(z)$. Para eso, se desarrollará la expresión asociada a la función para obtener una expresión del tipo $\sum_{n\geq 0} p_n z^n$, donde p_n es la cantidad de palabras que largo n que cumplen las condiciones.

Primero, recordando el teorema generalizado del binomio para exponentes reales, se cumple que $\sqrt{1-4z^2} = (1+(-4z^2))^{1/2} = \sum_{n\geq 0}\binom{1/2}{n}(-4z^2)^n$. Por lo tanto, se tiene que:

$$P(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{n\geq 0}\binom{1/2}{n}(-4z^2)^n\right)$$

El primer término de la sumatoria es 1, así que se puede restar con el 1 del principio del paréntesis. Del mismo modo, $(-4z^2)^n$ es equivalente a $(-1)^n 2^{2n} z^{2n}$. Finalmente, agregaron el signo menos dentro la sumatoria, se tiene que $P(z)$ viene dado por:

$$P(z) = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\binom{1/2}{n}(-1)^{n+1}2^{2n}z^{2n}$$

Ahora, la expresión anterior es equivalente a:

$$P(z) = \sum_{n\geq 0}\binom{1/2}{n+1}(-1)^{n+2}2^{2n+1}z^{2n+2}$$

Utilizando la siguiente igualdad conocida:

$$\binom{1/2}{n+1}(-1)^{n+2}2^{2n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \tag{1}$$

Se tiene que:

$$P(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}z^{2n+2}$$

Expandiendo la expresión, se tiene que:

$$P(z) = z^2 + z^4 + 2z^6 + 4z^6 + \sum_{n\geq 4}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}z^{2n+2}$$

Nótese que los valores dados son coherentes con los casos básicos estudiados. En particular, la información que entrega la expresión es que solo existe una palabra de largo 2 que cumple la condición, una palabra de largo 4 que cumple la condición, dos palabras de largo 6 y cuatro palabras de largo 8. En término generales, se puede decir que existen C_{n-1} palabras de largo $2n$ que cumplen las condicones para ser un escenario posible de empate. C_n es el enésimo número de catalán y viene dado por la expresión:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Ahora, respecto a los bósques binarios, en primer lugar, recuérdese que la clase combinatorial $\mathcal{A}$ que contiene a todos los árboles binarios viene dada por:

$$\mathcal{A} = \mathcal{E} + \mathcal{A}\times z\times\mathcal{A}$$

La función generatriz asociada a $\mathcal{A}$ que contiene la información sobre la cantidad de árboles binarios de cierto tamaño (cantidad de nodos internos) es:

$$A(z) = 1 + zA(z)^2$$

Al igual que para la función generatriz $P(z)$, gustaría conocer una forma explícita para la función $A(z)$. Para encontrar una forma explícita, primeramente, ordenando la expresión, se tiene que:

$$zA(z)^2 - P(z) + 1 = 0$$

Nótese que se tiene una ecuación cuadrática con $A(z)$ como parámetro. Por fórmula cuadrática se tiene que:

$$A(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}$$

$A(z)$ contiene la información sobre la cantidad de árboles binarios de cierto tamaño que contiene la clase $\mathcal{A}$. En particular, $A(z=0)$ es la cantidad árboles binarios de tamaño 0. Solo existe un árbol con 0 nodos internos (el árbol vacío). Luego, utilizando la regla *l'hopital* se puede demostrar que:

$$A(z) = \frac{1}{2z}\left(1 - \sqrt{1-4z}\right)$$

Y, por lo tanto, se tiene una forma explícita para $A(z)$.

Por el lado de los bosques binarios, se puede definir la clase combinatorial $\mathcal{B}$ como el conjunto de todos los bosques binarios de la siguiente forma:

$$\mathcal{B} = (\mathcal{A} - \mathcal{E})^*$$

Nótese que, básicamente, la definición para $\mathcal{B}$ establece que un bosque binario es una secuencia de árboles binarios, sin incluir el árbol vacío. No se incluye el árbol binario vacío para que no existen ambiguedades en los distintos tipos de bosques binarios.

Ahora, si se quiere conocer la cantidad de bosques binarios de de un largo en especifíco (cantidad de nodos presentes en el bosque), la siguiente función generatriz de la clase $\mathcal{B}$ contiene esa información:

$$B(z) = \frac{1}{1 - (A(z) - 1)}$$

$$B(z) = \frac{1}{2 - A(z)}$$

Recordando que $A(z) = \frac{1}{2z}\left(1 - \sqrt{1-4z}\right)$ cumple que:

$$B(z) = \frac{1}{2 - \frac{1}{2z}\left(1 - \sqrt{1-4z}\right)}$$

Desarrollando la expresión se tiene que:

$$B(z) = \frac{2z}{4z - 1 + \sqrt{1-4z}}$$

Ahora, si el lado derecho de la expresión se multiplica por $\frac{4z-1-\sqrt{1-4z}}{4z-1-\sqrt{1-4z}}$, y se trabaja la expresión, se puede llegar al siguiente resultado:

$$B(z) = \frac{1}{2}\left(1 + (1-4z)^{-1/2}\right)$$

Nótese que se tiene una forma explícita para $B(z)$. Ahora, gustaría conocer como se *comporta* la función $B(z)$. Para eso, se desarrollará la expresión asociada a la función para obtener una expresión del tipo $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$, donde

b_n es la cantidad bosques binarios de n nodos. El procedimiento es similar al realizado para la función generatriz $P(z)$.

Primero, recordando el teorema generalizado del binomio para exponentes reales, se cumple que $(1-4z)^{-1/2} = (1+(-4z))^{-1/2} = \sum_{n\geq 0}\binom{-1/2}{n}(-4z)^n$. Por lo tanto, se tiene que:

$$B(z) = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n\geq 0}\binom{-1/2}{n}(-4z)^n\right)$$

El primer término de la sumatoria es 1, así que se puede sumar con el 1 del principio del paréntesis. Del mismo modo, $(-4z)^n$ es equivalente a $(-1)^n 2^{2n} z^n$. Luego, se tiene que $B(z)$ viene dado por:

$$B(z) = \frac{1}{2}\left(2 + \sum_{n\geq 1}\binom{-1/2}{n}(-1)^n 2^{2n} z^n\right)$$

$$B(z) = 1 + \sum_{n\geq 1}\binom{-1/2}{n}(-1)^n 2^{2n-1} z^n$$

Utilizando la siguiente igualdad conocida:

$$\binom{-1/2}{n}(-1)^n 2^{2n-1} = \binom{2n-1}{n} \tag{2}$$

Se tiene que:

$$B(z) = 1 + \sum_{n\geq 1}\binom{2n-1}{n} z^n$$

Expandiendo la expresión, se tiene que:

$$P(z) = 1 + z + 3z^2 + 10z^3 + \sum_{n\geq 4}\binom{2n-1}{n} z^n$$

Nótese que los valores dados son coherentes con las cantidad de bosques binarios que poseen cero, uno dos y tres nodos. Si se listan los bosques binarios que no contiene un solo nodo, existe solo un bosque (el bosque vacío). Luego, cuando los bosques tienen un solo nodo, solo existe un bosque (el bosque compuesto de un árbol binario de un nodo). Para los bosques con dos nodos, se tiene que existe tres árboles (un bosque compuesto por dos árboles binarios de un nodo y los bosques binarios compuestos por solo un árbol de dos nodos). En término generales, se puede decir que existen $\binom{2n-1}{n}$ bosques binarios n nodos (asumiendo que para $n = 0$, se puede asumir que $\binom{2n-1}{n} = \binom{-1}{0} = 1$).

DISCUSIONES Y CONCLUSIONES: SOBRE LA IMPORTANCIA DE LAS POSIBILIDADES

En primer lugar y lo más importante del presente trabajo es destacar que la utilización de clases combinatoriales permite describir ciertos conjuntos de manera precisa. Con las funciones generatrices asociadas a las clases, es posible obtener la cantidad de objetos del conjunto que poseen el mismo *tamaño*. La secuencia de la cantidad de objetos del mismo tamaño en el conjunto es conocida como *secuencia de enumeración de la clase* y, evidentemente, está relacionada con la función generatriz. En particular, la secuencia de enumeración de la clase y la función generatriz describen lo mismo: la cantidad de elemento del conjunto que poseen el mismo tamaño. Nótese que conocer la cantidad de objetos de un tamaño de un conjunto no es algo irrelevante. Una buena descripción de los objetos en un conjunto permite, ciertamente, conocer a el conjunto. Asimismo, cuando el conjunto contiene objetos combinatoriales, es realmente útil conocer la secuencia de enumeración del conjunto, ya que permite conocer que tipo de combinatoria modela al conjunto.

Asimismo, en los ejemplos estudiados en el presente trabajo, se vislumbró lo útil que pueden llegar a ser las clases combinatoriales para modelar procesos y situaciones *reales*, es decir, las clases combinatoriales tienen una aplicación sumamente práctica a la hora de resolver problemas combinatoriales de forma precisa y sin mayor complicaciones.

ANEXOS

- **Proposición 1:** Se cumple la siguiente igualdad:

$$\binom{1/2}{n+1}(-1)^{n+2}2^{2n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Demostración:

En primer lugar, $(-1)^{n+2} = (-1)^n$. Asimismo, $\binom{1/2}{n+1} = \frac{(1/2)^{\underline{n+1}}}{(n+1)!}$. Expandiendo (por definición) $(1/2)^{\underline{n+1}}$ se tiene que:

$$(1/2)^{\underline{n+1}} = (1/2) \cdot (1/2 - 1) \cdot (1/2 - 2) \cdot ... \cdot (1/2 - n)$$

Lo que es equivalente a:

$$(1/2)^{\underline{n+1}} = (1/2) \cdot (-1/2) \cdot (-3/2) \cdot ... \cdot \frac{-2n+1}{2}$$

$$(1/2)^{\underline{n+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (-1) \cdot (-3) \cdot ... \cdot (-2n+1)$$

$$(1/2)^{\underline{n+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (-1)^n 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1)$$

Por lo tanto se tiene que:

$$\binom{1/2}{n+1}(-1)^{n+2}2^{2n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (-1)^n 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1) \frac{1}{(n+1)!}(-1)^n 2^{2n+1}$$

Desarrollando y simplificando términos comunes, se cumple que:

$$\binom{1/2}{n+1}(-1)^{n+2}2^{2n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1) \frac{1}{(n+1)!} 2^{2n+1}$$

$$\binom{1/2}{n+1}(-1)^{n+2}2^{2n+1} = 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1) \frac{1}{(n+1)!} 2^n$$

Multiplicando el lado derecho de la expresión por $\frac{n!}{n!}$ y notando que $\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)n!}$, se tiene que:

$$\binom{1/2}{n+1}(-1)^{n+2}2^{2n+1} = \frac{1}{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1) \cdot 2^n n!}{n!n!}$$

Nótese que $2^n n! = 2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 ... \cdot n = 2 \cdot 4 \cdot 6 ... \cdot 2n$ y, por lo tanto, se tiene que:

$$\binom{1/2}{n+1}(-1)^{n+2}2^{2n+1} = \frac{1}{n+1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2n}{n!n!}$$

Lo que es, finalmente, equivalente a:

$$\binom{1/2}{n+1}(-1)^{n+2}2^{2n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

- **Proposición 2:** Se cumple la siguiente igualdad:

$$\binom{-1/2}{n}(-1)^n 2^{2n-1} = \binom{2n-1}{n}$$

En primer lugar, $\binom{-1/2}{n} = \frac{(-1/2)^{\underline{n}}}{n!}$. Expandiendo (por definición) $(-1/2)^{\underline{n}}$ se tiene que:

$$(-1/2)^{\underline{n}} = (-1/2) \cdot (-1/2-1) \cdot (-1/2-2) \cdot ... \cdot (-1/2-(n-1))$$

Lo que es equivalente a:

$$(-1/2)^{\underline{n}} = (-1/2) \cdot (-3/2) \cdot (-5/2) \cdot ... \cdot \frac{-2n+1}{2}$$

$$(-1/2)^{\underline{n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n (-1) \cdot (-3) \cdot ... \cdot (-2n+1)$$

$$(-1/2)^{\underline{n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n (-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1)$$

Por lo tanto se tiene que:

$$\binom{-1/2}{n}(-1)^n 2^{2n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n (-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1)\frac{1}{n!}(-1)^n 2^{2n-1}$$

Desarrollando y simplificando términos comunes, se cumple que:

$$\binom{-1/2}{n}(-1)^n 2^{2n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1)\frac{1}{n!}2^{2n-1}$$

$$\binom{-1/2}{n}(-1)^n 2^{2n-1} = 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1)\frac{1}{n!}2^{n-1}$$

Multiplicando el lado derecho de la expresión por $\frac{(n-1)!}{(n-1)!}$ se tiene que:

$$\binom{-1/2}{n}(-1)^n 2^{2n-1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1) \cdot 2^{n-1}(n-1)!}{(n-1)!n!}$$

Nótese que $2^{n-1}(n-1)! = 2^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3... \cdot n-1 = 2 \cdot 4 \cdot 6... \cdot 2n-2$ y, por lo tanto, se tiene que:

$$\binom{-1/2}{n}(-1)^n 2^{2n-1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2n-1}{(n-1)!n!}$$

Lo que es, finalmente, equivalente a:

$$\binom{-1/2}{n}(-1)^n 2^{2n-1} = \binom{2n-1}{n}$$