Búsqueda Binaria y más Búsqueda Binaria

Matías Salim Seda Auil
Universidad de Chile

La búsqueda binaria es una herramienta muy poderosa que permite, dado un arreglo ordenado, buscar un elemento en el arreglo en un tiempo de búsqueda logarítmico, es decir, en un tiempo proporcional al logaritmo del largo del arreglo. Sin embargo, el algoritmo de búsqueda binaria puede ser implementado de dos maneras distintas: realizando una comparación por iteración o dos comparaciones por iteración. Por esta razón, en el siguiente trabajo, se estudiarán las dos variantes de la búsqueda binaria en un caso de estudio. En específico, dado un arreglo de números, se analizará el tiempo que toma realizar una búsqueda exitosa para todos los elementos del arreglo, utilizando las dos variantes de la búsqueda binaria en cada caso. Luego, se realizará un comparación en los tiempos obtenidos y se constrastarán los resultados obtenidos para las dos variantes mencionadas, notando que la implementación con una sola iteración permite realizar una búsqueda más eficiente.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA: BUSCANDO TODOS LOS ELEMENTOS

Supóngase que tiene un arreglo de números ordenados por tamaño. Gustaría tener un procedimiento para realizar una búsqueda exitosa para cada uno de los elementos presentes en el arreglo. Una forma de buscar elementos en un arreglo es utilizar la famosa técnica *búsqueda binaria*, conocido algoritmo de búsqueda. Sin embargo, para implementar la búsqueda binaria, existen dos algoritmos distintos:

1. La primera variante del algoritmo de búsqueda binaria realiza dos comparación por cada iteración. En primer lugar, el algoritmo pregunta si el elemento del arreglo ubicado en el medio es igual al elemento buscado. En caso de no ser igual a el elemento buscado, el algoritmo realiza una segunda comparación preguntando si el elemento buscado es menor que el elemento del medio. En caso de ser menor, se busca recursivamente en la primera mitad del arreglo (sin incluir al elemento del medio); en caso contrario, se busca recursivamente en la segunda mitad del arreglo (sin incluir al elemento del medio).

2. La segunda variante del algoritmo de búsqueda binaria realiza una comparación por cada iteración. El algoritmo pregunta si el elemento del arreglo ubicado en el medio es igual o menor al elemento buscado. En caso de ser menor o igual , se busca recursivamente en la primera mitad del arreglo (incluyendo al elemento del medio); en caso contrario, se busca recursivamente en la segunda mitad del arreglo (sin incluir al elemento del medio).

Dadas las dos variantes de la búsqueda binaria, gustaría saber como es el comportamiento del algoritmo que realiza una búsqueda exitosa para cada uno de los elementos presentes en el arreglo utilizando, respectivamente, cada una de las variantes, es decir, cuál es el número total de comparaciones que se hacen al realizar una búsqueda exitosa para cada uno de los elementos (para ambas versiones de la búsqueda).

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA: ENCONTRANDO LOS ELEMENTOS

Teniendo las dos variantes en mente, gustaría conocer alguna expresión que cuantifique el número total de comparaciones que se hacen al realizar una búsqueda exitosa para todos los elementos presentes en el arreglo, tanto para la primer implementación (dos comparaciones) como para la segunda implementación (una comparación). En particular, se puede definir a_n y b_n como expresiones que cuentan el número total comparaciones para cada implementación, respectivamente. Nótese que, por casos borde, se tiene que $a_0 = b_0 = 0$ y $a_1 = b_1 = 1$.

Ahora, más específicamente, a_n y b_n se definen como:

1. Sea a_n el número total de comparaciones que se hacen al realizar una búsqueda exitosa para cada uno de los elementos presentes en el arreglo utilizando la primera variante del algoritmo de búsqueda binaria. Nótese que, como se utiliza la primera versión, se necesitan $2n - 1$ comparaciones para todos los elementos: por cada elemento en el arreglo son dos comparaciones a excepción por el elemento del medio (solo una comparación). Luego, se busca recursivamente en la primera mitad del arreglo (sin incluir al elemento del medio) y después se busca recursivamente en la segunda mitad del arreglo (sin incluir al elemento del medio). Dado lo mencionado anteriormente, a_n viene dado por la siguiente expresión:

$$a_n = 2n - 1 + a_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} + a_{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}$$

La expresión para a_n está planteada recursivamente. Sin embargo, se quisiese conocer una expresión directa para a_n. Para resolver la ecuación, se definirá la expresión $d_n = a_{n+2} - a_{n+1}$ y se resolverá la ecuación recursiva asociada a d_n (más simple que la ecuación recursiva a_n). Luego, al tener una expresión directa para d_n, se resolverá la ecuación a_n en función de d_n. El procedimiento explicado anteriorment es el siguiente:

Inicialmente, se define d_n como:

$$d_n = a_{n+2} - a_{n+1}$$

Lo que es equivalente, dado las definiciones de a_{n+2} y a_{n+1}, a:

$$d_n = 2(n+2) - 1 + a_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + a_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil} - (2(n+1) - 1 + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + a_{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$$

Notando que $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ y $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ se cumple que:

$$d_n = 2 + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} - a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Por definición, $d_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} = a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} - a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Así, se tiene que:

$$d_n = 2 + d_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}$$

Ahora, d_n es una ecuación recursiva más sencilla, simple y posible de resolver. Para determinar una forma explícita para d_n, se necesitan calcular los casos de borde d_0 y d_1. Utilizando la defnición de d_n, se puede establecer que $d_0 = 3$ y $d_1 = 3$.

Ya que se conocen los casos de borde d_0 y d_1, es necesario entender y comprender el comportamiento de la expresión d_n, es decir, qué ocurre con los valores de d_n para los otros valores de n. En particular, la tabla 1 muestra valores explícitos de d_n para distintos valores de n.

$(n)_2$	n	d_n
0	0	$d_0 = 3$
1	1	$d_1 = 3$
10	2	$d_2 = 2 + d_{\lfloor \frac{2}{2} \rfloor - 1} = 2 + d_0 = 5$
11	3	$d_3 = 2 + d_{\lfloor \frac{3}{2} \rfloor - 1} = 2 + d_0 = 5$
100	4	$d_4 = 2 + d_{\lfloor \frac{4}{2} \rfloor - 1} = 2 + d_1 = 5$
101	5	$d_5 = 2 + d_{\lfloor \frac{5}{2} \rfloor - 1} = 2 + d_1 = 5$
110	6	$d_6 = 2 + d_{\lfloor \frac{6}{2} \rfloor - 1} = 2 + d_2 = 7$
111	7	$d_7 = 2 + d_{\lfloor \frac{7}{2} \rfloor - 1} = 2 + d_2 = 7$
1000	8	$d_8 = 2 + d_{\lfloor \frac{8}{2} \rfloor - 1} = 2 + d_3 = 7$
1001	9	$d_9 = 2 + d_{\lfloor \frac{9}{2} \rfloor - 1} = 2 + d_3 = 7$
1010	10	$d_{10} = 2 + d_{\lfloor \frac{10}{2} \rfloor - 1} = 2 + d_4 = 7$
1011	11	$d_{11} = 2 + d_{\lfloor \frac{11}{2} \rfloor - 1} = 2 + d_4 = 7$
1100	12	$d_{12} = 2 + d_{\lfloor \frac{12}{2} \rfloor - 1} = 2 + d_5 = 7$
1101	13	$d_{14} = 2 + d_{\lfloor \frac{13}{2} \rfloor - 1} = 2 + d_5 = 7$
1110	14	$d_{13} = 2 + d_{\lfloor \frac{14}{2} \rfloor - 1} = 2 + d_6 = 9$

TABLE I. Valores de d_n para $0 \leq n \leq 12$

Nótese que para dos valores de n la expresión es 3, para cuatro valores de n la expresión es 5, para ocho valores de n la expresión es 7. Así, d_n pareciese tener un comportamiento asociado al logaritmo en base dos de n. Específicamente, mediante inducción, se puede demostrar que:

$$d_n = 2\lceil \log_2(n+3) \rceil - 1 \tag{1}$$

Ahora, como se conoce una forma explícita para d_n, es necesario establecer una relación entre a_n y d_n. Nótese que se definió $d_n = a_{n+2} - a_{n+1}$, por lo tanto, se cumple que $a_{n+2} = d_n + a_{n+1}$, es decir, se cumple que $a_n = d_{n-2} + a_{n-1}$. Luego, aplicando el mismo procedimiento para a_{n-1} se tiene que $a_n = d_{n-2} + d_{n-3} + a_{n-2}$. Así, recursivamente se tiene que:

$$a_n = a_1 + \sum_{i=0}^{n-2} d_i$$

Recordando que que $a_1 = 1$ y $d_i = 2\lceil \log_2(i+3) \rceil - 1$ se tiene que:

$$a_n = 1 + \sum_{i=0}^{n-2} (2\lceil \log_2(i+3) \rceil - 1)$$

$$a_n = 1 + 2\sum_{i=0}^{n-2} \lceil \log_2(i+3) \rceil - \sum_{i=0}^{n-2} 1$$

A grandes rasgos, la expresión a_n depende de dos expresiones. En primer lugar, se tiene la expresión $\sum_{i=0}^{n-2} 1$. Es fácil notar que $\sum_{i=0}^{n-2} 1 = (n-1)$. La expresión, $\sum_{i=0}^{n-2} \lceil \log_2(i+3) \rceil$ es un poco más compleja y merece mayor atención.

Primeramente, la sumatoria anterior es equivalente a $\sum_{i=2}^{n} \lceil \log_2(i+1) \rceil$. Además, se tiene que $\lceil \log_2(1+1) \rceil = 1$, por lo tanto, se tiene que $\sum_{i=0}^{n-2} \lceil \log_2(i+3) \rceil = \sum_{i=1}^{n} \lceil \log_2(i+1) \rceil - 1$.

Nótese que para un número n cualquiera, $\lceil \log_2(i+1) \rceil$ representa la cantidad de dígitos del número en representación binaria. Por lo tanto, $\sum_{i=1}^{n} \lceil \log_2(i+1) \rceil$ es equivalente a la suma de todos los dígitos en forma binaria de los números desde 1 a n. Lo anteriormente mencionado es equivalente a:

$$\sum_{i=1}^{n} \lceil \log_2(i+1) \rceil = n\lceil \log_2(n+1) \rceil - (2^{\lceil \log_2(n+1) \rceil} - 1 - \lceil \log_2(n+1) \rceil)$$

Ya que se conocen todos los valores de las expresiones asociadas a a_n, se puede calcular el valor explícito para a_n. En particular, se tiene que:

$$a_n = 1 + 2(n\lceil \log_2(n+1) \rceil - (2^{\lceil \log_2(n+1) \rceil} - 1 - \lceil \log_2(n+1) \rceil) - 1) - (n-1)$$

Desarrollando y ordenando la expresión, se tiene que, finalmente, la forma explícita para a_n viene dada por:

$$a_n = 2(1 + n\lceil \log_2(n+1) \rceil - 2^{\lceil \log_2(n+1) \rceil} + \lceil \log_2(n+1) \rceil) - n$$

2. Sea b_n el número total de comparaciones que se hacen al realizar una búsqueda exitosa para cada uno de los elementos presentes en el arreglo utilizando la segunda variante del algoritmo de búsqueda binaria. Nótese que, como se utiliza la segunda versión, se necesitan n comparaciones para todos los elementos: por cada elemento en el arreglo se realiza una comparación. Luego de la comparaciones, se busca recursivamente en la primera mitad del arreglo (incluyendo al elemento del medio) y después se busca recursivamente en la segunda mitad del arreglo (sin incluir al elemento del medio). Por lo tanto, b_n viene dado por la siguiente expresión:

$$b_n = n + b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + b_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

La expresión para b_n está planteada recursivamente. Sin embargo, se quisiese conocer una expresión directa para b_n. El procedimiento para resolver la ecuación es homólogo al procedimiento para resolver la expresión a_n, es decir, se definirá una expresión e_n tal que $e_n = b_{n+1} - b_n$ y se resolverá la ecuación recursiva asociada a e_n (más simple que la ecuación recursiva b_n), luego, al tener una expresión directa para e_n, se resolverá la ecuación

b_n en función de e_n. El procedimiento explicado recientemente es el siguiente:

Se define e_n como:

$$e_n = b_{n+1} - b_n$$

Lo que es equivalente, dado las definiciones de b_{n+1} y b_n, a:

$$e_n = n + 1 + b_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + b_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil} - (n + b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + b_{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$$

Notando que $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ y $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ se cumple que:

$$e_n = 1 + b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} - b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Por definición, $e_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} = b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} - b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Así, se tiene que:

$$e_n = 1 + d_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Ahora, e_n es una ecuación recursiva más sencilla, simple y posible de resolver. Para determinar una forma explícita para e_n, se necesita calcular el caso borde e_1. Utilizando la defінción de e_n, se puede establecer que $e_1 = 3$.

Ya que se conoce el caso borde e_1, es necesario entender y comprender el comportamiento de la expresión e_n, es decir, qué ocurre con los valores de e_n para otros valores de n. En particular, la siguiente tabla muestra valores explícitos de d_n para distintos valores de n.

$(n)_2$	n	e_n
1	1	$e_1 = 3$
10	2	$e_2 = 1 + e_{\lfloor \frac{2}{2} \rfloor} = 1 + e_1 = 4$
11	3	$e_3 = 1 + e_{\lfloor \frac{3}{2} \rfloor} = 1 + e_1 = 4$
100	4	$e_4 = 1 + e_{\lfloor \frac{4}{2} \rfloor} = 1 + e_2 = 5$
101	5	$e_5 = 1 + e_{\lfloor \frac{5}{2} \rfloor} = 1 + e_2 = 5$
110	6	$e_6 = 1 + e_{\lfloor \frac{6}{2} \rfloor} = 1 + e_3 = 5$
111	7	$e_7 = 1 + e_{\lfloor \frac{7}{2} \rfloor} = 1 + e_3 = 5$
1000	8	$e_8 = 1 + e_{\lfloor \frac{8}{2} \rfloor} = 1 + e_4 = 6$
1001	9	$e_9 = 1 + e_{\lfloor \frac{9}{2} \rfloor} = 1 + e_4 = 6$
1010	10	$e_{10} = 1 + e_{\lfloor \frac{10}{2} \rfloor} = 1 + e_5 = 6$
1011	11	$e_{11} = 1 + e_{\lfloor \frac{11}{2} \rfloor} = 1 + e_5 = 6$
1010	12	$e_{12} = 1 + e_{\lfloor \frac{12}{2} \rfloor} = 1 + e_6 = 6$
1011	13	$e_{13} = 1 + e_{\lfloor \frac{13}{2} \rfloor} = 1 + e_6 = 6$
1110	14	$e_{14} = 1 + e_{\lfloor \frac{14}{2} \rfloor} = 1 + e_7 = 6$

TABLE II. Valores de e_n

Nótese que para un valor de n la expresión es 3, para dos valores de n la expresión es 4, para cuatro valores de n la expresión es 5. Así, al igual que d_n, e_n pareciese tener un comportamiento asociado al logaritmo en base dos de n. Más en particular, e_n pareciese contar la cantidad de dígitos de n en representación binaria más un valor extra. Específicamente, mediante inducción se puede demostrar que:

$$e_n = 2 + \lceil \log_2(n+1) \rceil \tag{2}$$

Ahora que se conoce una forma explícita para e_n, es necesario establecer una relación entre b_n y e_n. Nótese que que se definió $e_n = b_{n+1} - b_n$, por lo tanto, se cumple que $b_{n+1} = e_n + b_n$, es decir, se cumple que $b_n = e_{n-1} + b_{n-1}$.

Luego, aplicando el mismo procedimiento para a_{n-1} se tiene que $a_n = e_{n-1} + e_{n-2} + b_{n-2}$. Así, recursivamente se tiene que:

$$b_n = b_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$$

Ahora, recordando que recordando que $b_1 = 1$ y $e_i = 2 + \lceil \log_2(i+1) \rceil$ se tiene que:

$$b_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (2 + \lceil \log_2(i+1) \rceil)$$

$$a_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2(i+1) \rceil + 2 \sum_{i=1}^{n-1} 1$$

A grandes rasgos, la expresión a_n depende de dos expresiones. En primer lugar, se tiene la expresión $\sum_{i=1}^{n-1} 1$. Es fácil notar que $\sum_{i=1}^{n-1} 1 = (n-1)$. Por el otro lado, la expresión, $\sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2(i+1) \rceil$ se estudió en la primera parte y se sabe que:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2(i+1) \rceil = (n-1)\lceil \log_2(n) \rceil - (2^{\lceil \log_2(n) \rceil} - 1 - \lceil \log_2(n) \rceil)$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$b_n = 1 + (n-1)\lceil \log_2(n) \rceil - (2^{\lceil \log_2(n) \rceil} - 1 - \lceil \log_2(n) \rceil) + 2(n-1)$$

Desarrollando y ordenando la expresión, se tiene que, finalmente, la forma explícita para b_n viene dada por:

$$b_n = n(2 + \lceil \log_2(n) \rceil) - 2^{\lceil \log_2(n) \rceil}$$

Así, dados lo calculos realizados anteriormente, se tienen dos fórmulas directas para las expresiones a_n y b_n. Ahora, con las fórmulas conocidas, gustaría poder realizar un análisis comparativo para estudiar las diferencias en los comportamientos de las expresiones.

ANÁLISIS DE LA SOLUCIÓN: BUSCANDO LA MEJOR BÚSQUEDA

A primera vista, observando las expresiones para a_n y b_n se puede determinar que $a_n = O(n\log_2(n))$ y $b_n = O(n\log_2(n))$. Sin embargo, gustaría tener un comparación más precisa entra las dos expresiones. En primera instancia, para tener una comparación inicial entre las expresiones, se graficará a_n y b_n y se realizará un análisis *visual* entre las expresiones.

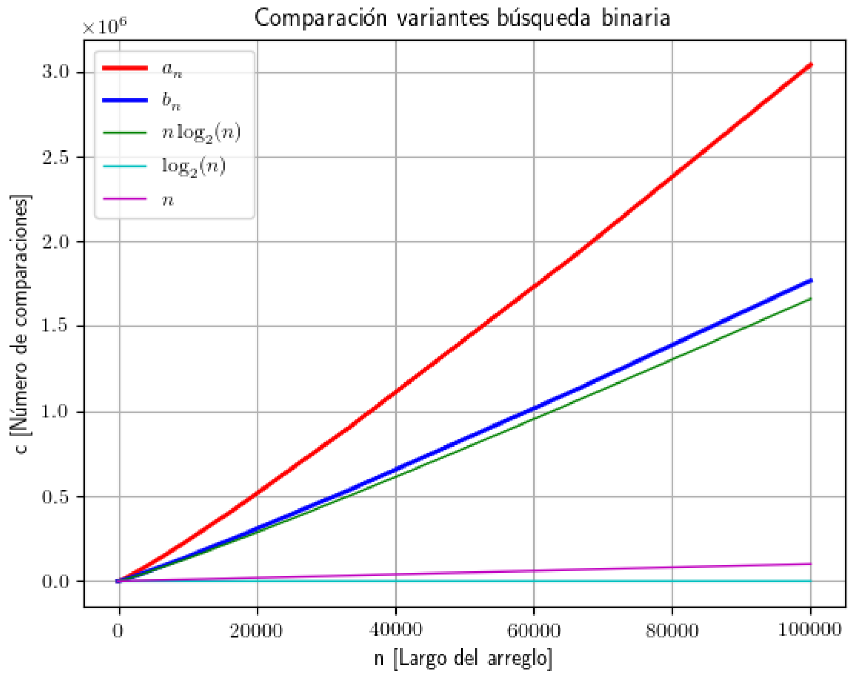

FIG. 1. Comparación variantes búsqueda binaria

Nótese que, por lo observado en la figura 1, pareciese que se cumple lo siguiente: $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq b_n$, es decir, para cualquier valor de n, la expresión a_n es mayor o igual a b_n. Del mismo modo, pareciese que mientras mayor es el valor de n, mayor en la diferencia entre a_n y b_n. Lo anterior permite preguntarse cómo es la función que modela esta diferencia entre a_n y b_n.

Para cuantificar de forma precisa esta diferencia, se puede definir la expresión $c_n = a_n - b_n$. Numéricamente, c_n viene dada por:

$$c_n = 2(1 + n\lceil\log_2(n+1)\rceil - 2^{\lceil\log_2(n+1)\rceil} + \lceil\log_2(n+1)\rceil) - n - (n(2 + \lceil\log_2(n)\rceil) - 2^{\lceil\log_2(n)\rceil})$$

Desarrollando y ordenando la expresión, se tiene que, finalmente, la forma explícita para c_n viene dada por:

$$c_n = 2 + n(2\lceil\log_2(n+1)\rceil - \lceil\log_2(n)\rceil) + 2^{\lceil\log_2(n)\rceil} - 2^{\lceil\log_2(n+1)\rceil+1} - 3n + 2\lceil\log_2(n+1)\rceil$$

La expresión asociada a c_n es un poco engorrosa. Sin embargo, se puede definir una expresión equivalente a c_n denotada $\hat{c}_n$ tal que:

$$\hat{c}_n = 2 + n(2\lceil\log_2(n+1)\rceil - \lceil\log_2(n+1)\rceil) + 2^{\lceil\log_2(n+1)\rceil} - 2^{\lceil\log_2(n+1)\rceil+1} - 3n + 2\lceil\log_2(n+1)\rceil$$

Desarrollando y ordenando la expresión $\hat{c}_n$ se tiene que:

$$\hat{c}_n = 2 + n\lceil\log_2(n+1)\rceil - 2^{\lceil\log_2(n+1)\rceil} - 3n + 2\lceil\log_2(n+1)\rceil$$

$\hat{c}_n$ es equivalente a c_n ya que $\forall n \in \mathbb{N}$ tal que $2^{k-1} < n \leq 2^k - 1$, con $k \in \mathbb{N}$, se cumple que $\lceil\log_2(n)\rceil = \lceil\log_2(n+1)\rceil$, es decir, para todos los números que no son potencias de 2, se tiene que $\hat{c}_n = c_n$. Por el otro lado, cuando $n = 2^k$, con $k \in \mathbb{N}$ se tiene que la expresión $\hat{c}_n - c_n$ viene dada por:

$$\hat{c}_n - c_n = n\lceil \log_2(n+1)\rceil - 2^{\lceil \log_2(n+1)\rceil} - (n(2\lceil \log_2(n+1)\rceil - \lceil \log_2(n)\rceil) + 2^{\lceil \log_2(n)\rceil} - 2^{\lceil \log_2(n+1)\rceil+1})$$

Lo es que equivalente a:

$$\hat{c}_{n=2^k} - c_{n=2^k} = 2^k(k+1) - 2^{k+1} - (2^k(2(k+1)-k) + 2^k - 2^{k+2})$$

Desarrollando la expresión se tiene que:

$$\hat{c}_{n=2^k} - c_{n=2^k} = 0$$

Es decir, $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \hat{c}_n$. Ahora, observando la expresión para $\hat{c}_n$ se puede determinar que $c_n = O(n\log_2(n))$. Del mismo modo, la figura 2 muestra una gráfica de c_n para observar el comportamiento de la expresión.

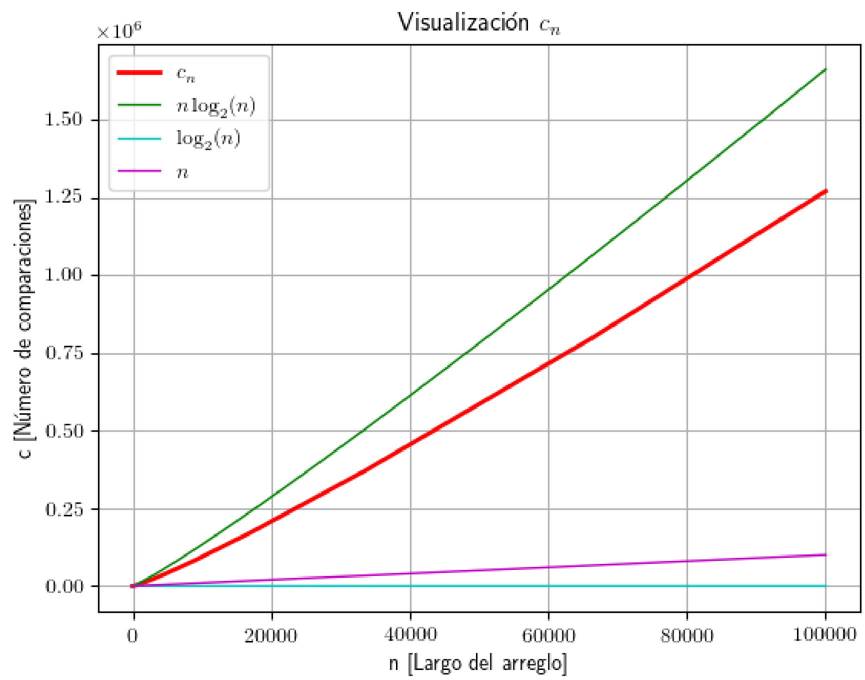

FIG. 2. Diferencia comparaciones entre las dos implementaciones.

DISCUSIONES Y CONCLUSIONES: ENCONTRANDO LA BÚSQUEDA

En primer lugar y lo más importante del presente trabajo es destacar que la segunda implementación de la búsqueda binaria permite realizar de forma más eficaz el problema planteado, es decir, en el caso de estudio, la variante de búsqueda binaria con una comparación por iteración realiza un cantidad de menor de comparaciones que el algoritmo de búsqueda binaria implementada con dos comparaciones por iteración. Más aún, la diferencia de comparaciones es de orden $n\log_2(n)$, es decir, mientras mayor es el tamaño del arreglo de números, la diferencia de comparaciones entre las dos variantes crece proporcionalmente al largo del arreglo por el logaritmo en base dos del largo del arreglo. Para arreglos de tamaño menor la diferencia no es significativa, sin embargo, a medida que n crece, la diferencia se torna relevante.

Del mismo modo, dado que el arreglo es de un tamaño cualquiera y sus elementos son aleatorios se puede especular que, en general, la búsqueda binaria asociada a la segunda versión es más eficiente que la búsqueda binaria asociada a la primera implementación, es decir, en promedio, la búsqueda exitosa de un elemento cualquiera en un arreglo utilizando búsqueda binaria es más eficiente si la búsqueda binaria es implementada con solo una comparación por iteración (en constraste con la implementación que realiza dos comparaciones por iteración).

ANEXOS

- **Proposición 1:** Dada la ecuación de recurrencia $d_n = 2 + d_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}$ con $d_0 = d_1 = 3$, se tiene que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$d_n = 2\lceil \log_2(n+3) \rceil - 1$$

Demostración:

Sea $P(n)$ una función proporcional tal que dado un número n, se cumple que $d_n = 2\lceil \log_2(n+3) \rceil - 1$. En la tabla 1 se calcularon valores explícitos para d_n y se observa que se cumple $P(n)$ para casos bases. Así, se puede establecer la siguiente hipótesis inductiva:

$$\forall i \in \mathbb{N},\ i \leq n, \text{ se tiene } P(i)$$

Ahora, dada la hipótesis inductiva, se quiere demostrar que se tiene $P(n+1)$. Por defición, $d_{n+1} = 2 + d_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}$. Nótese que, para el valor $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, existen dos casos posibles:

1. Si $n+1 = 2k$, con $k \in \mathbb{N}$, entonces se cumple que: $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1 = \frac{n+1}{2} - 1$. Utilizando la hipótesis inductiva en la igualdad $d_{n+1} = 2 + d_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}$, se tiene que:

$$d_{n+1} = 2 + 2\left\lceil \log_2(\frac{n+1}{2} - 1 + 3) \right\rceil - 1$$

Desarrollando la expresión:

$$d_{n+1} = 2 + 2\left\lceil \log_2(\frac{n+5}{2}) \right\rceil - 1$$

$$d_{n+1} = 2 + 2\lceil \log_2(n+5) - \log_2(2) \rceil - 1$$

$$d_{n+1} = 2 + 2\lceil \log_2(n+5) \rceil - 2 - 1$$

Como $n+5 = 2\hat{k}$, con $\hat{k} \in \mathbb{N}$, se cumple que $\lceil \log_2(n+5) \rceil = \lceil \log_2((n+5)-1) \rceil$. Por lo tanto, se tiene que

$$d_{n+1} = 2\lceil \log_2((n+1)+3) \rceil - 1$$

2. Si $n+1 = 2k+1$, con $k \in \mathbb{N}$, entonces se cumple que: $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1 = \frac{n}{2} - 1$. Utilizando la hipótesis inductiva en la igualdad $d_{n+1} = 2 + d_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}$, se tiene que:

$$d_{n+1} = 2 + 2\left\lceil \log_2(\frac{n}{2} - 1 + 3) \right\rceil - 1$$

Desarrollando la expresión:

$$d_{n+1} = 2 + 2\left\lceil \log_2(\frac{n+4}{2}) \right\rceil - 1$$

$$d_{n+1} = 2 + 2\lceil \log_2(n+4) - \log_2(2) \rceil - 1$$

$$d_{n+1} = 2 + 2\lceil \log_2(n+4) \rceil - 2 - 1$$

$$d_{n+1} = 2\lceil \log_2((n+1)+3) \rceil - 1$$

Por inducción, como se cumple que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ ((\forall i \in \mathbb{N},\ i \leq n,\ P(i)) \Rightarrow P(n+1))$$

Entonces se tiene que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$$

Es decir, dada la ecuación de recurrencia $d_n = 2 + d_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}$ con $d_0 = d_1 = 3$, se tiene que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$d_n = 2\lceil \log_2(n+3) \rceil - 1$$

- **Proposición 2:** Dada la ecuación de recurrencia $e_n = 1 + e_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ con $e_1 = 3$, se tiene que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$e_n = 1 + \lceil \log_2(n+1) \rceil$$

Demostración:

Sea $P(n)$ una función proporcional tal que dado un número n, se cumple que $e_n = 1 + \lceil \log_2(n+1) \rceil$. En la tabla 2 se calcularon valores explícitos para e_n y se observa que se cumple $P(n)$ para casos bases. Así, se puede establecer la siguiente hipótesis inductiva:

$$\forall i \in \mathbb{N},\ i \leq n, \text{ se tiene } P(i)$$

Ahora, dada la hipótesis inductiva, se quiere demostrar que se tiene $P(n+1)$. Por definción, $e_{n+1} = 1 + d_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$. Nótese que, para el valor $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, existen dos casos posibles:

1. Si $n+1 = 2k$, con $k \in \mathbb{N}$, entonces se cumple que: $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \frac{n+1}{2}$. Utilizando la hipótesis inductiva en la igualdad $e_{n+1} = 1 + e_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$, se tiene que:

$$e_{n+1} = 1 + 1 + \left\lceil \log_2(\frac{n+1}{2} + 1) \right\rceil$$

Desarrollando la expresión:

$$e_{n+1} = 2 + \left\lceil \log_2(\frac{n+3}{2}) \right\rceil - 1$$

$$e_{n+1} = 2 + \lceil \log_2(n+3) - \log_2(2) \rceil - 1$$

$$e_{n+1} = 2 + \lceil \log_2(n+3) \rceil - 1$$

Como $n+3 = 2\hat{k}$, con $\hat{k} \in \mathbb{N}$, se cumple que $\lceil \log_2(n+3) \rceil = \lceil \log_2((n+3)-1) \rceil$. Por lo tanto, se tiene que

$$d_{n+1} = 1 + \lceil \log_2((n+1)+1) \rceil$$

2. Si $n+1 = 2k+1$, con $k \in \mathbb{N}$, entonces se cumple que: $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$. Utilizando la hipótesis inductiva en la igualdad $e_{n+1} = 1 + d_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$, se tiene que:

$$e_{n+1} = 1 + 1 + \left\lceil \log_2(\frac{n}{2} + 1) \right\rceil$$

Desarrollando la expresión:

$$e_{n+1} = 2 + \left\lceil \log_2(\frac{n+2}{2}) \right\rceil$$

$$e_{n+1} = 2 + \lceil \log_2(n+2) - \log_2(2) \rceil$$

$$e_{n+1} = 2 + \lceil \log_2(n+2) \rceil - 1$$

$$e_{n+1} = 1 + \lceil \log_2((n+1)+1) \rceil$$

Por inducción, como se cumple que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\, ((\forall i \in \mathbb{N},\, i \leq n,\, P(i)) \Rightarrow P(n+1))$$

Entonces se tiene que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\, P(n)$$

Es decir, dada la ecuación de recurrencia $e_n = 1 + e_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ con $d_1 = 3$, se tiene que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$e_n = 1 + \lceil \log_2(n+1) \rceil$$