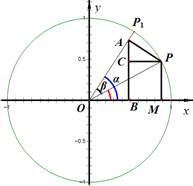
**两角和与差的余弦公式的五种推导方法之对比**

沈阳市教育研究院　王恩宾

两角和与差的余弦公式是三角函数恒等变换的基础，其他三角函数公式都是在此公式基础上变形得到的，因此两角和与差的余弦公式的推导作为本章要推导的第一个公式，往往得到了广大教师的关注. 对于不同版本的教材采用的方法往往不同，认真体会各种不同的两角和与差的余弦公式的推导方法，对于提高学生的分析问题、提出问题、研究问题、解决问题的能力有很大的作用.下面将两角和与差的余弦公式的五种常见推导方法归纳如下：

**方法一：应用三角函数线推导差角公式的方法**

设角*α*的终边与单位圆的交点为*P*1，∠*POP*1＝*β*，则∠*POx*＝*α*－*β*．



过点*P*作*PM*⊥*x*轴，垂足为*M*，那么*OM*即为*α*－*β*角的余弦线，这里要用表示*α*，*β*的正弦、余弦的线段来表示*OM*．

过点*P*作*PA*⊥*OP*1，垂足为*A*，过点*A*作*AB*⊥*x*轴，垂足为*B*，再过点*P*作*PC*⊥*AB*，垂足为*C*，那么cos*β*＝*OA*，sin*β*＝*AP*，并且∠*PAC*＝∠*P*1*Ox*＝*α*，于是*OM*＝*OB*＋*BM*＝*OB*＋*CP*＝*OA*cos*α*＋*AP*sin*α*＝cos*β*cos*α*＋sin*β*sin*α*．

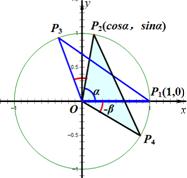
综上所述，http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492309835.gif.

    说明：应用三角函数线推导差角公式这一方法简单明了，构思巧妙，容易理解. 但这种推导方法对于如何能够得到解题思路，存在一定的困难. 此种证明方法的另一个问题是公式是在http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492301489.gif均为锐角的情况下进行的证明，因此还要考虑http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492301489.gif的角度从锐角向任意角的推广问题.

**方法二：应用三角形全等、两点间的距离公式推导差角公式的方法**

设*P*1(*x*1，*y*1)，*P*2(*x*2，*y*2)，则有|*P*1*P*2|= http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492307144.gif.

在直角坐标系内做单位圆，并做出任意角*α*，*α*+*β*和http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492456378.gif，它们的终边分别交单位圆于*P*2、*P*3和*P*4点，单位圆与*x*轴交于*P*1，则*P*1(1,0)、*P*2(cos*α*，sin*α*)、*P*3(cos(*α*+*β*)，sin(*α*+*β*))、http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492454154.gif.



∵http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492452814.gif，且http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492456250.gif，

∴http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492450642.gif，∴http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492454097.gif，

∴http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492451521.gif

http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492459873.gif，

∴http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492453146.gif，

∴http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492451317.gif，http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492309835.gif.

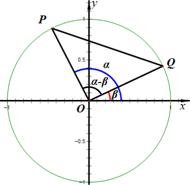
    说明：该推导方法巧妙的将三角形全等和两点间的距离结合在一起，利用单位圆上与角http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492301489.gif有关的四个点http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492455694.gif，http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492454154.gif建立起等式关系，通过将等式的化简、变形就可以得到符合要求的和角与差角的三角公式. 在此种推导方法中，推导思路的产生是一个难点，另外对于http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492450454.gif三点在一条直线和http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492611321.gif三点在一条直线上时这一特殊情况，还需要加以解释、说明.

**方法三：应用余弦定理、两点间的距离公式推导差角公式的方法**

设http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492617534.gif，

则http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492611688.gifhttp://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492614297.gif.

在△*OPQ*中，∵http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492616545.gif，



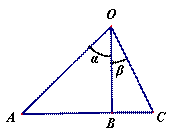
∴http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492612331.gif，

∴http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492309835.gif.

    说明：此题的解题思路和构想都是容易实现的. 因为要求两角和与差的三角函数，所以构造出和角和差角是必须实现的. 构造出的和角或差角的余弦函数又需要和这两个角的三角函数建立起等式关系，因此借助于余弦定理、两点间的距离公式建立起等式关系容易出现，因此此种方法是推导两角和与差的余弦的比较容易理解的一种方法. 但此种方法必须是在学习完余弦定理的前提下才能使用，因此此种方法在必修四中又无法使用. 另外也同样需要考虑http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492611015.gif三点在一条直线上的情况.

**方法四：应用三角形面积公式推导推导差角公式的方法**

设*α*、*β*是两个任意角，把*α*、*β*两个角的一条边拼在一起，顶点为*O*，过*B*点作*OB*的垂线，交*α*另一边于*A*，交*β*另一边于*C*，则有*S*△*OAC*=*S*△*OAB*+*S*△*OBC..*



根据三角形面积公式，有http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492616063.gifhttp://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492615358.gif，

∴http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492612649.gifhttp://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492776423.gif.

∵http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492777464.gif，http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492771100.gif，http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492770193.gif，

∴http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492612649.gifhttp://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492772512.gif，

∵http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492775739.gif，∴sin(*α*+*β*)=sin*α*cos*β*+sin*β*cos*α*.

根据此式和诱导公式，可继续证出其它和角公式及差角公式.

(1)sin(*α*-*β*)=sin[*α*+(-*β*)]=sin*α*cos(-*β*)+sin(-*β*)cos*α*=sin*α*cos*β*-sin*β*cos*α*；

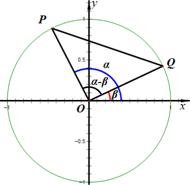
(2)cos(*α*+*β*)=sin[90-(*α*+*β*)]=sin[(90-*α*)-*β*]=sin(90-*α*)cos*β*-sin*β*cos(90-*α*)

=cos*α*cos*β*-sin*α*sin*β*；

(3)cos(*α*-*β*)=cos[*α*+(-*β*)]=cos*α*cos(-*β*)-sin*α*sin(-*β*)=cos*α*cos*β*+sin*α*sin*β*.

    说明：此种推导方法通过三角形的面积的和巧妙的将两角和的三角函数与各个角的三角函数和联系在一起，体现了数形结合的特点. 缺点是公式还是在两个角为锐角的情况下进行的证明，因此同样需要将角的范围进行拓展.

**(五)应用数量积推导余弦的差角公式**



在平面直角坐标系*xOy*内，作单位圆*O*，以*Ox*为始边作角α，β，它们的终边与单位圆的交点为*A*，*B*，则

http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492778126.gif＝(cosα，sinα)，http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492778048.gif＝(cosβ，sinβ).

由向量数量积的概念，有http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492775304.gif.

由向量的数量积的坐标表示，有

http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492770274.gif.

于是，有http://www.pep.com.cn/gzsxb/jszx/jxyj/201403/W020140321388492309835.gif.

    说明：应用数量积推导余弦的差角公式无论是构造两个角的差，还是得到每个角的三角函数值都是容易实现的，而且从向量的数量积的定义和坐标运算两种形式求向量的数量积将二者之间结合起来，充分体现了向量在数学中的桥梁作用.

综上所述，从五种不同的推导两角和与差的余弦公式的过程可以看出，不同的推导方法体现出不同的数学特点，不同的巧妙构思，相同的结果，也进一步体验了数学的博大精深.