FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY

Đồ Thị Euler Và Đồ Thị Hamilton

Nội dung

- Đường đi, chu trình
- Đồ thị liên thông
- Chu trình Euler
- Chu trình Hamilton

Đường đi – chu trình

ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

Cho G = (V,E) là đồ thị vô hướng với $u,v \in V$

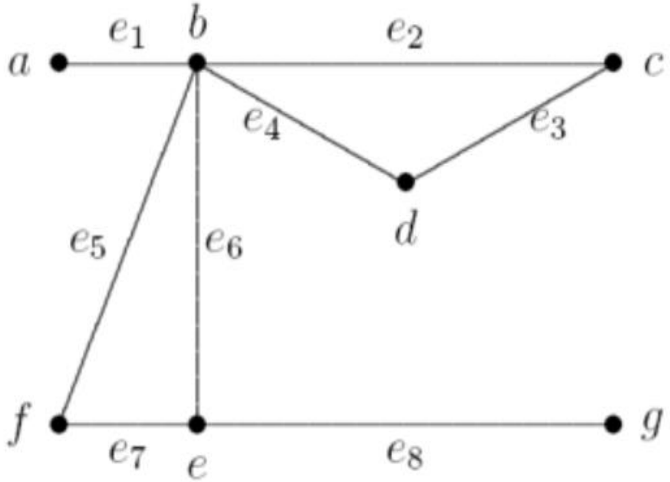
Đường đi (dây chuyền) có chiều dài k nối hai đỉnh u, v là dãy đỉnh và cạnh liên tiếp nhau: $v_0e_1v_1e_2\ldots v_{k-1}e_kv_k$ sao cho:

$$\begin{cases} v_0 = u,\ v_k = v; \\ e_i = v_{i-1}, \text{ với } i = 1, 2, \ldots, k \end{cases}$$

Đường đi – chu trình

ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

Đơn đồ thị
- Không khuyên
- Không cạnh song song



$(a, e_1, b, e_2, c, e_3, d, e_4, b)$ là đường đi từ đỉnh a tới đỉnh b có chiều dài là 4.

(a, b, c, d, b)

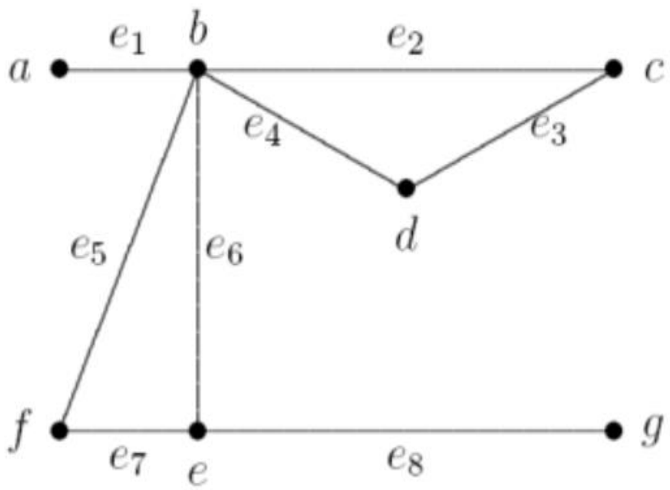
Đường đi – chu trình

ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

- Đường đi không có *cạnh* nào xuất hiện quá một lần được gọi là đường đi đơn.
- Đường đi không có *đỉnh* nào xuất hiện quá một lần gọi là đường đi sơ cấp.
- Đường đi gọi là chu trình nếu nó bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh.

Đường đi – chu trình

ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG



Có chu trình sơ cấp nào không?

Chu trình sơ cấp:
- (b, c, d, b)
- (b, f, e, b)

Đường đi – chu trình

ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

Cho G = (V,E) là đồ thị có hướng với u,v $\in$ V

Đường đi (dây chuyền) có chiều dài k nối hai đỉnh u, v là dãy đỉnh và cung liên tiếp nhau: $v_0e_1v_1e_2 \ldots v_{k-1}e_kv_k$ sao cho:

$$\begin{cases} v_0 = u,\ v_k = v; \\ e_i = v_{i-1},\ \text{với } i = 1, 2, \ldots, k \end{cases}$$

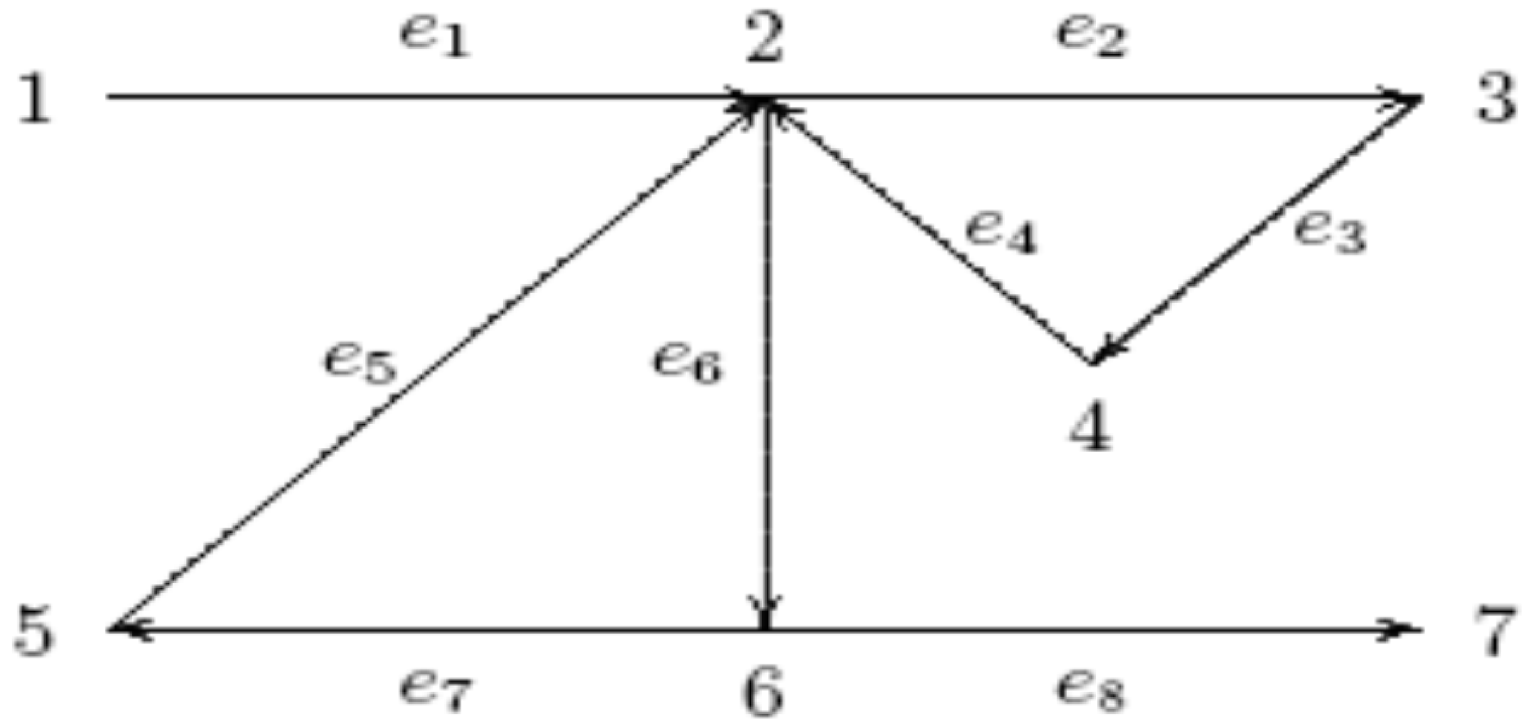
Đường đi – chu trình

ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

- Đường đi không có *cung* nào xuất hiện quá một lần được gọi là đường đi đơn.
- Đường đi không có *đỉnh* nào xuất hiện quá một lần gọi là đường đi sơ cấp.
- Đường đi gọi là mạch (chu trình) nếu nó bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh.

Đường đi – chu trình

ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

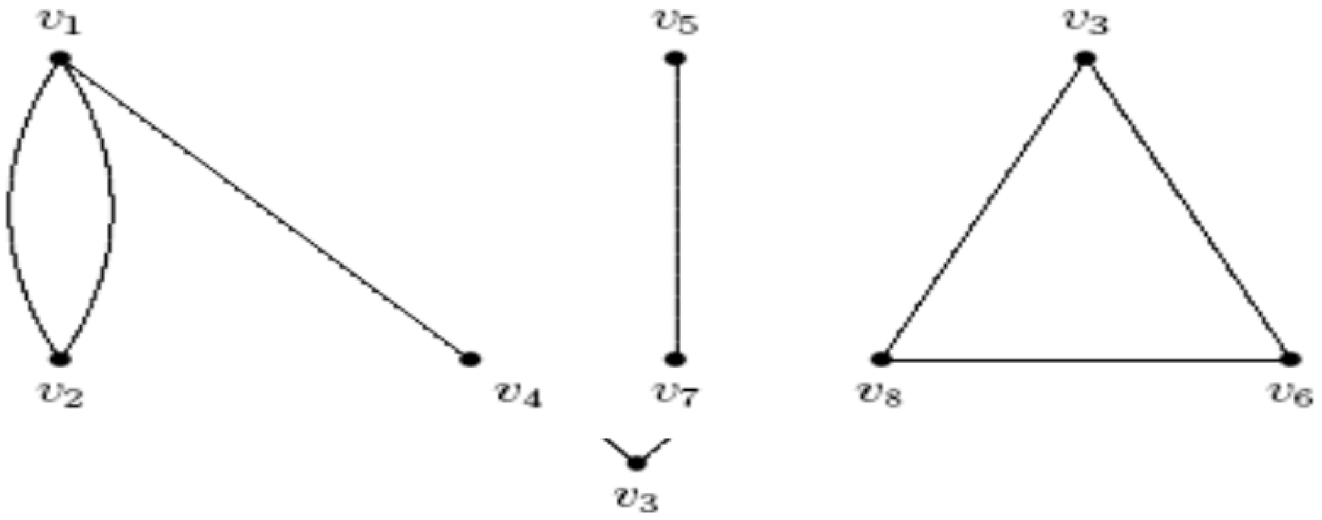


Đường đi từ đỉnh 1 tới đỉnh 2 là (1, 2, 3, 4, 2) có độ dài là 4.

Đồ thị liên thông

ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

Đồ thị vô hướng G = (V,E) được gọi là liên thông nếu luôn tìm được đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của nó.

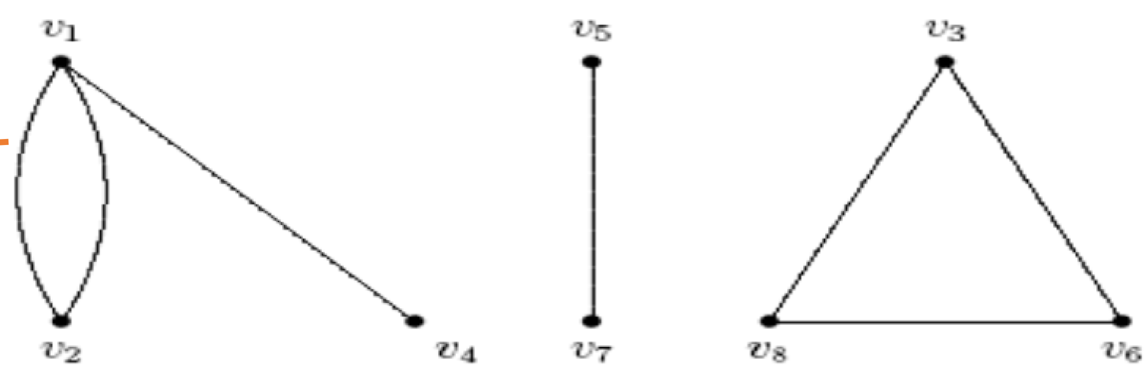


Đồ thị liên thông

ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

- Gọi đồ thị con của đồ thị G = (V, E) là đồ thị H = (W, F) với $W \subseteq V$ và $F \subseteq E$.
- Một đồ thị là không liên thông → chia thành một số đồ thị con liên thông không có đỉnh chung → thành phần liên thông của đồ thị.

Tp1: v1, v2, v4
Tp2: v5, v7
Tp3: v3, v6, v8

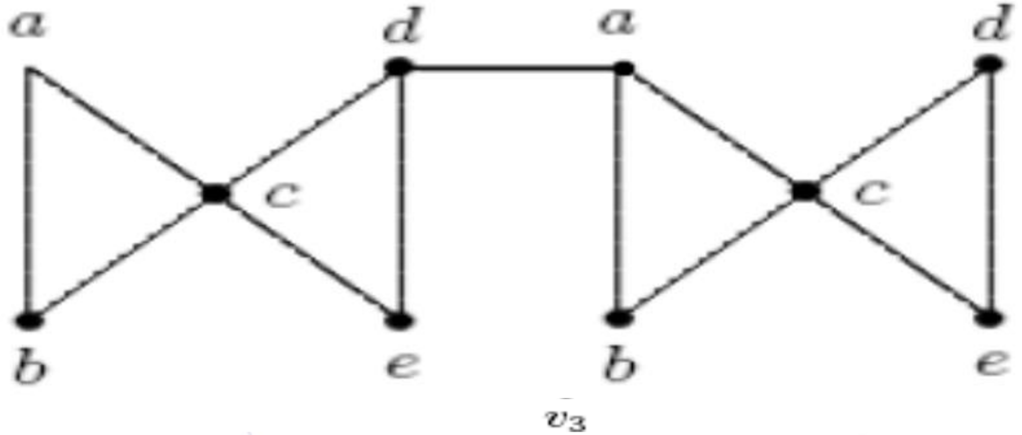


Đồ thị liên thông

ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

Cho G = (V, E) là đồ thị vô hướng liên thông:

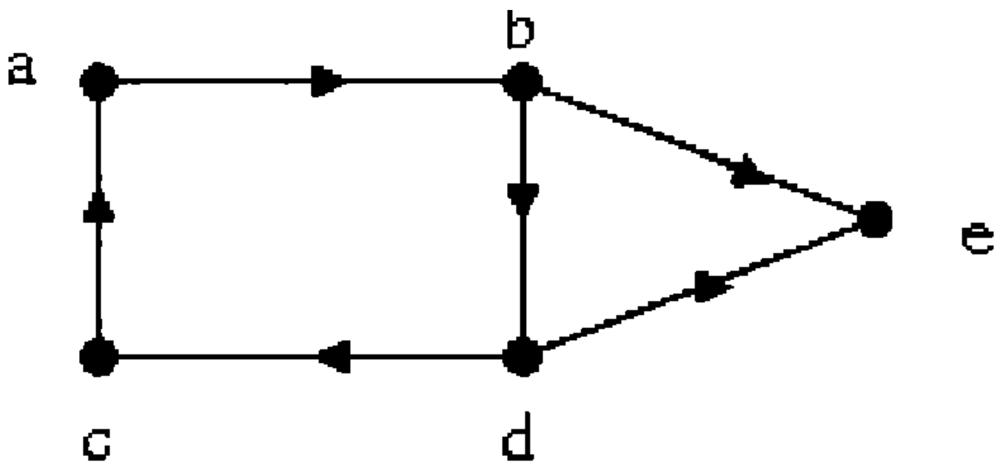
- Đỉnh v được gọi là đỉnh khớp nếu G-v không liên thông. (G-v là đồ thị con của G có được bằng cách xóa v và các cạnh kề với v).
- Cạnh e được gọi là cầu nếu G-e không liên thông.



Đồ thị liên thông

ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

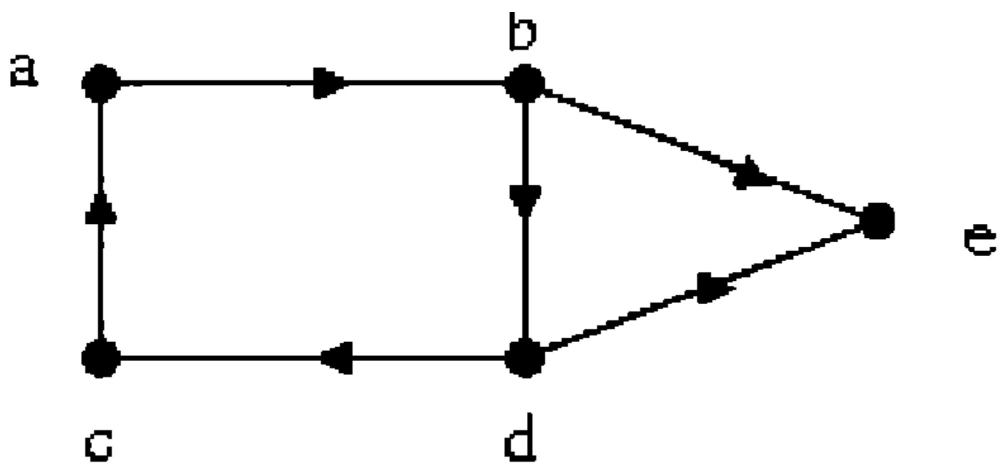
Đồ thị có hướng G = (V,E) được gọi là liên thông mạnh nếu luôn tìm được đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của nó.



Đồ thị liên thông

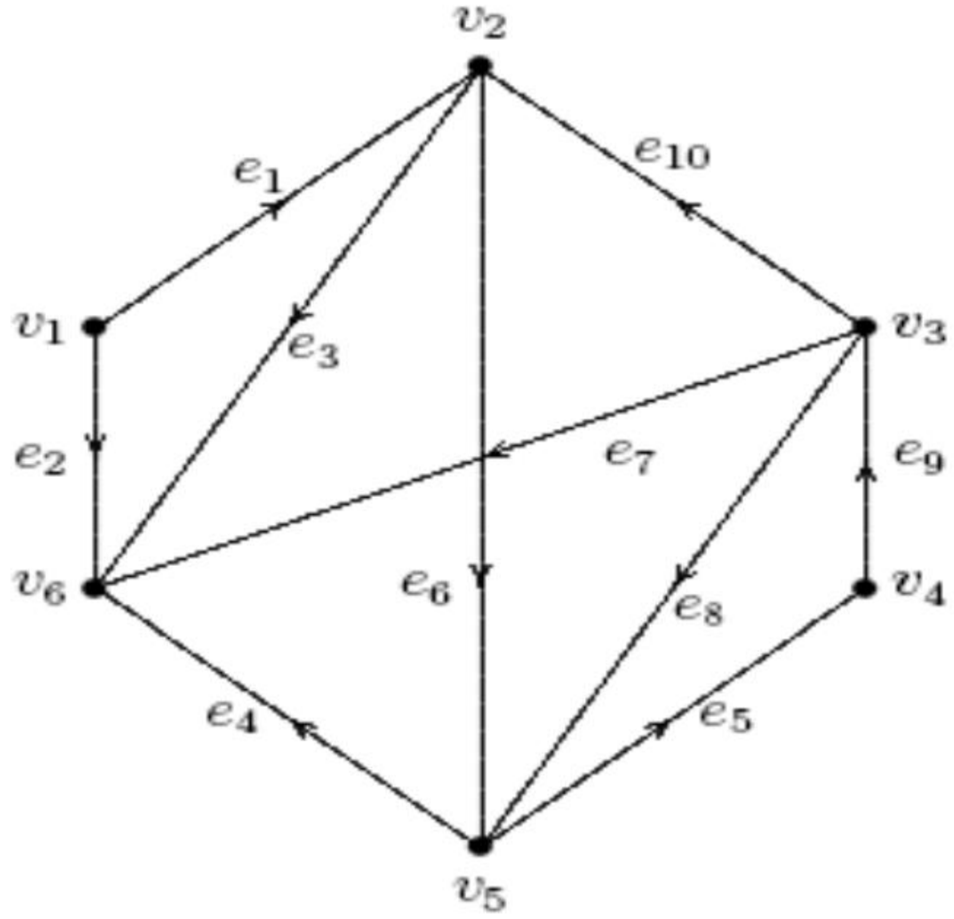
ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

Đồ thị có hướng G = (V,E) được gọi là liên thông yếu nếu đồ thị vô hướng tương ứng với nó là đồ thị vô hướng liên thông.



Bài tập

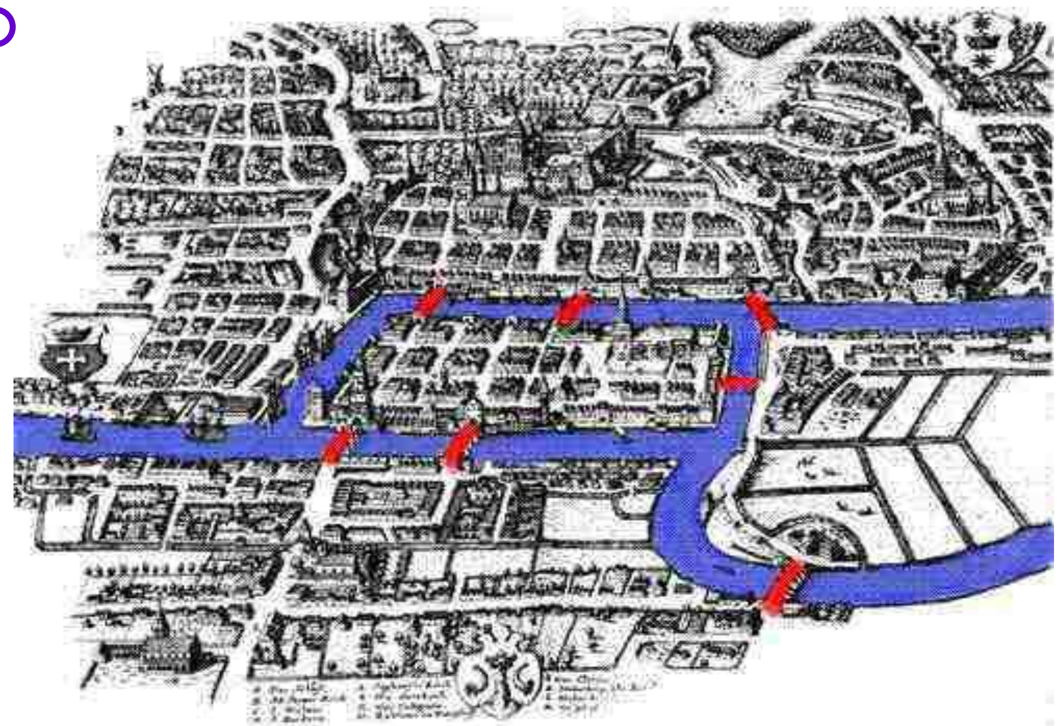
❖ Đồ thị sau có liên thông mạnh hay liên thông yếu không? Vì sao?



Đồ thị Euler

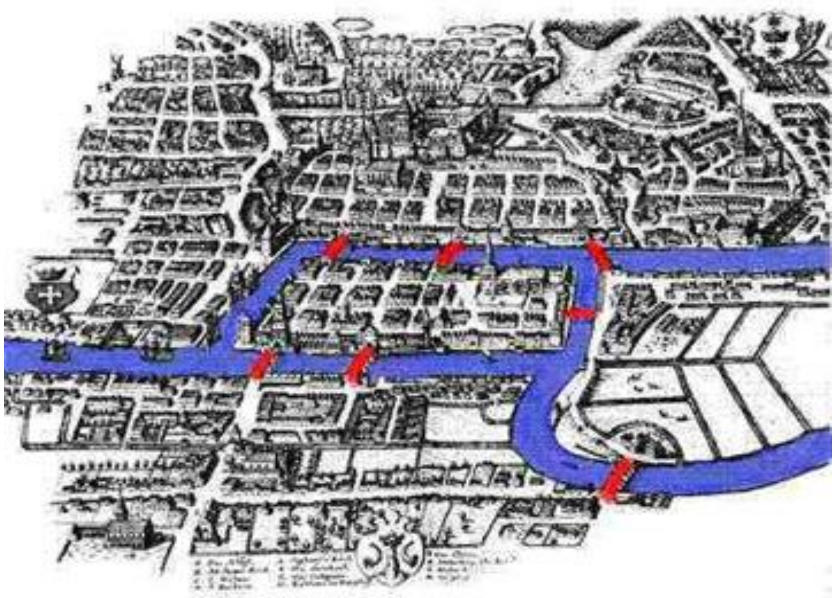
Konigsberg,
Hmmm

Leonhard Euler
(1707 – 1783)



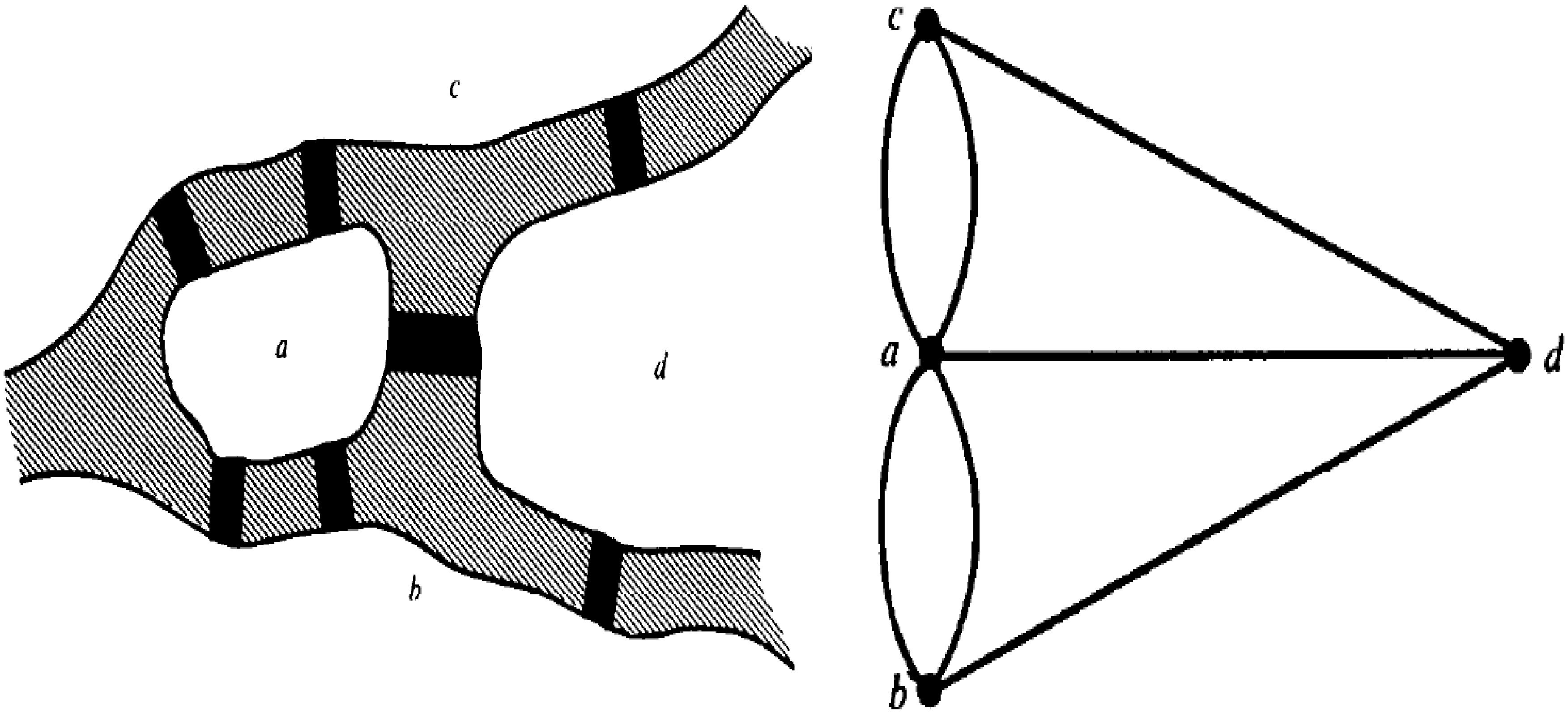
Chu trình Euler

❖ 1736 Euler (1707-1783) công bố lời giải "7 cây cầu ở Konigsburg - Lithuania ".



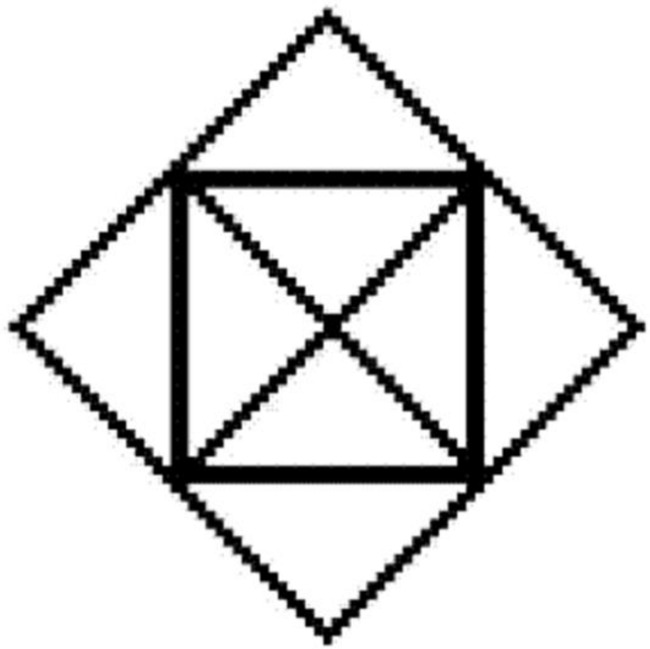
Liệu rằng có thể xuất phát từ 1 vị trí, di chuyển qua tất cả các cầu (mỗi cầu qua 1 lần) và trở về vị trí xuất phát hay không?

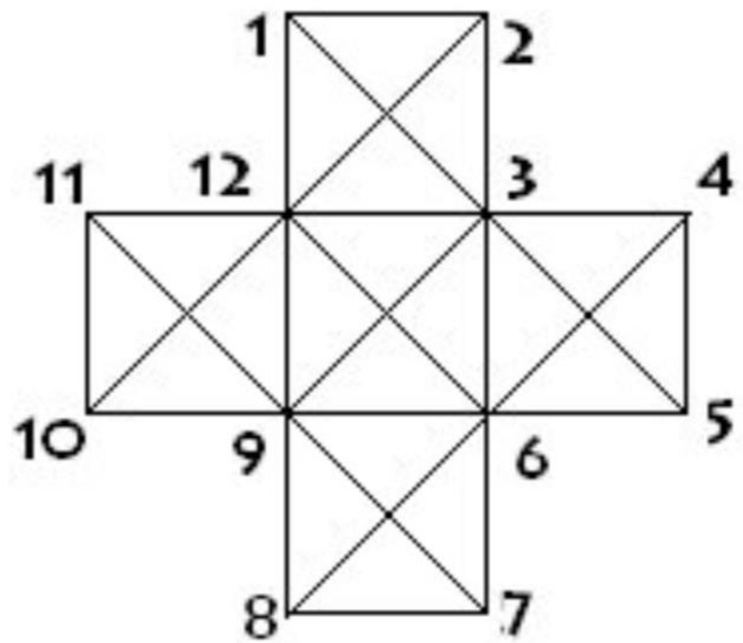
Chu trình Euler



Chu trình Euler

❖ Hãy vẽ các hình sau bằng đúng một nét bút (không được nhấc bút lên khi vẽ)



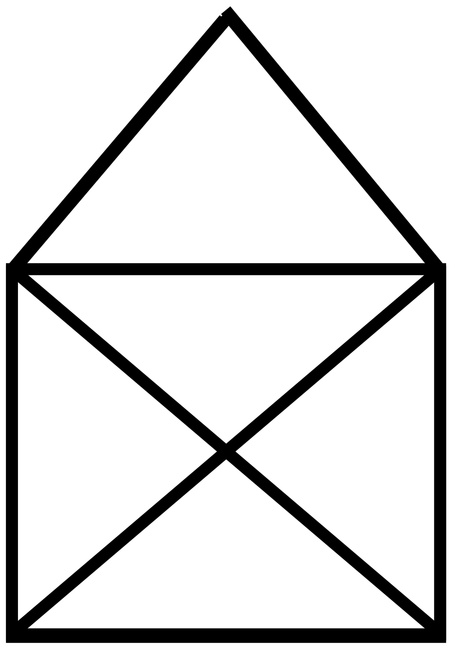


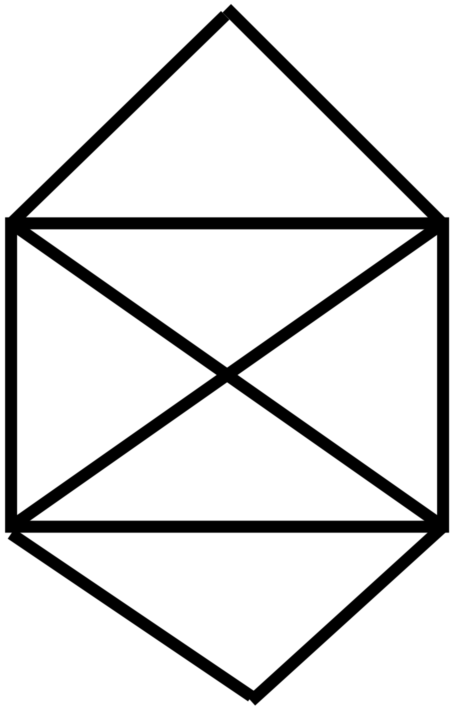
Không vẽ được bằng 1 nét.
Tối thiểu phải vẽ bằng 2 nét.

Không vẽ được bằng 1 nét.
Tối thiểu phải vẽ bằng 6 nét.

Chu trình Euler

- Hãy vẽ các hình sau bằng đúng một nét bút (không được nhấc bút lên khi vẽ)





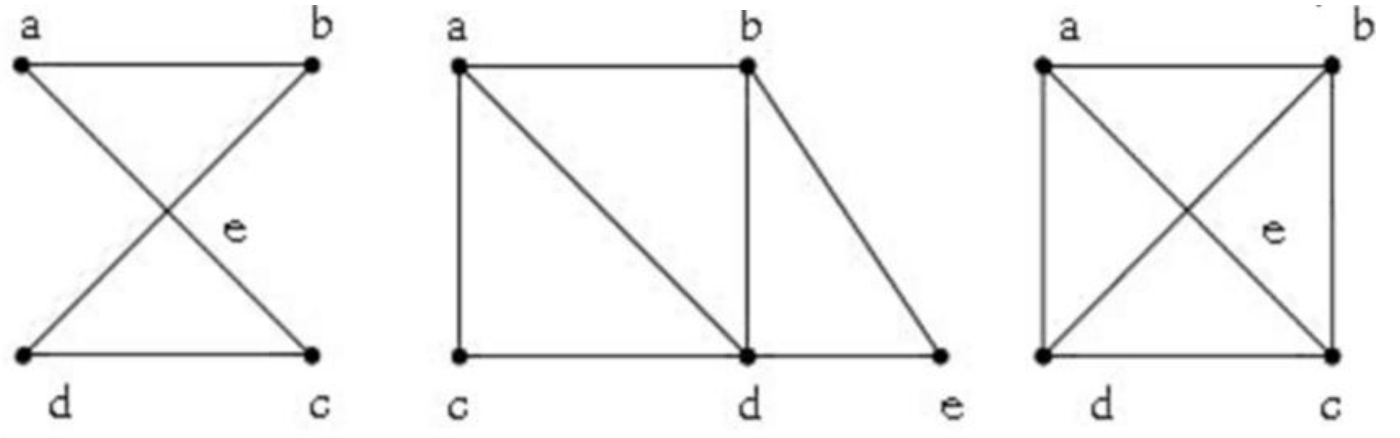
Chu trình Euler

❖ Cho đồ thị G liên thông

- Chu trình Euler: Chu trình Euler trong đồ thị G là chu trình đơn chứa mọi cạnh của G
- Đường đi Euler: Đường đi Euler trong đồ thị G là đường đi đơn chứa mọi cạnh của G
- Đồ thị Euler: Là đồ thị có chu trình Euler
- Đồ thị nửa Euler: Là đồ thị có đường đi Euler

Chu trình Euler

❖ Ví dụ



- Đồ thị G1 trong hình là đồ thị Euler vì nó có chu trình Euler (a, e, c, d, e, b, a).
- Đồ thị G2 không có chu trình Euler nhưng có đường đi Euler (a, c, d, e, b, d, a, b), vì thế G2 là đồ thị nửa Euler.
- Đồ thị G3 không có chu trình cũng như đường đi Euler

Dấu hiệu nhận biết

ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

❖ Định lý 1 (Euler): G là đồ thị Euler

- G là đồ thị vô hướng liên thông.
- mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn

❖ Hệ quả: Đồ thị vô hướng liên thông G là nửa Euler khi và chỉ khi nó có không quá 2 đỉnh bậc lẻ

Dấu hiệu nhận biết

ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

- Đồ thị có hướng liên thông có chu trình Euler khi và chỉ khi nó là đồ thị cân bằng
- Đồ thị có hướng có đường đi Euler khi và chỉ khi đồ thị có 2 đỉnh a và b sao cho:

$$d^+(a) = d^-(a) + 1$$

$$d^-(b) = d^+(b) + 1$$

Thuật toán Fleury

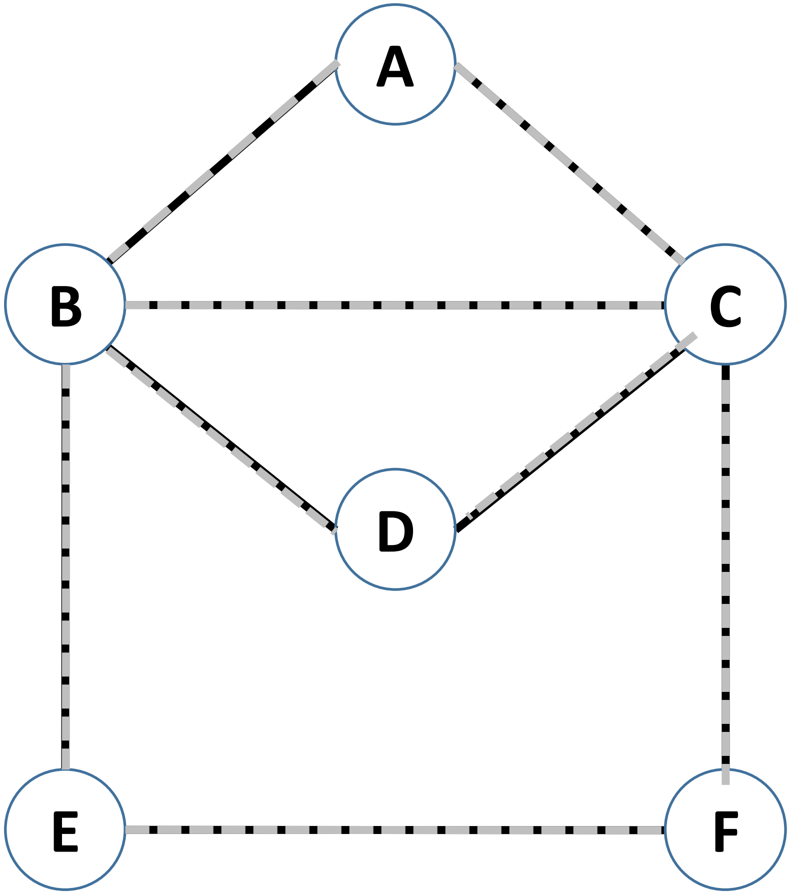
Ý tưởng

Xuất phát từ một đỉnh u nào đó của G ta đi theo các cạnh của nó một cách tuỳ ý chỉ cần tuân thủ 2 qui tắc sau:

- **Qui tắc 1:** Xoá bỏ cạnh đã đi qua đồng thời xoá bỏ đỉnh cô lập tạo thành.
- **Qui tắc 2:** Ở mỗi bước ta chỉ đi qua cầu khi không còn lựa chọn nào khác.

Thuật toán Fleury

- Ví dụ



A →B →C →D →B →E →F →C →A

Thuật toán Fleury

Thuật toán

- Bước 1: Chọn 1 đỉnh x bất kỳ với bậc khác 0
  - Tìm không được: đồ thị không có cạnh -> kết thúc
  - Tìm được: qua bước 2
- Bước 2: Lặp
  - Đi ngẫu nhiên từ x theo các cạnh chưa đi qua cho đến khi tắt đường (tại x) (*cạnh "một đi không trở lại"*)
  - Tìm đỉnh y đã đi qua mà còn cạnh chưa đi qua
    - Nếu tìm thấy y thì đảo chu trình hiện tại bắt đầu đi từ y. Sau đó đặt x = y
    - Ngược lại dừng thuật toán.

Thuật toán Fleury

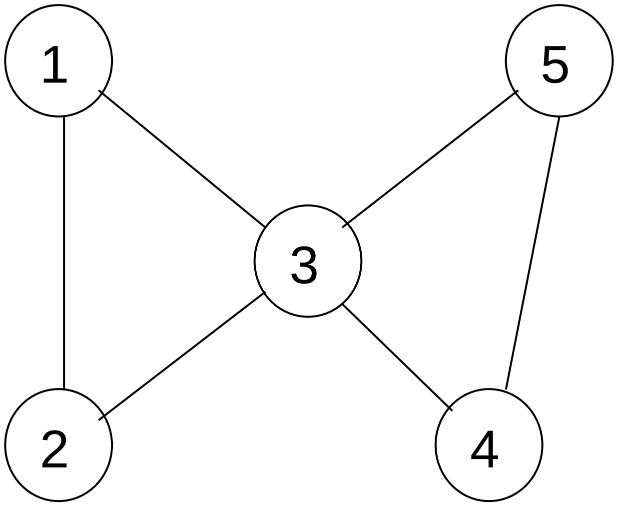
❖ **Cài đặt**

Dùng danh sách đỉnh kề và mảng để lưu trữ danh sách các đỉnh kề và lưu vết đường đi trong quá trình tìm chu trình Euler

Thuật toán Fleury

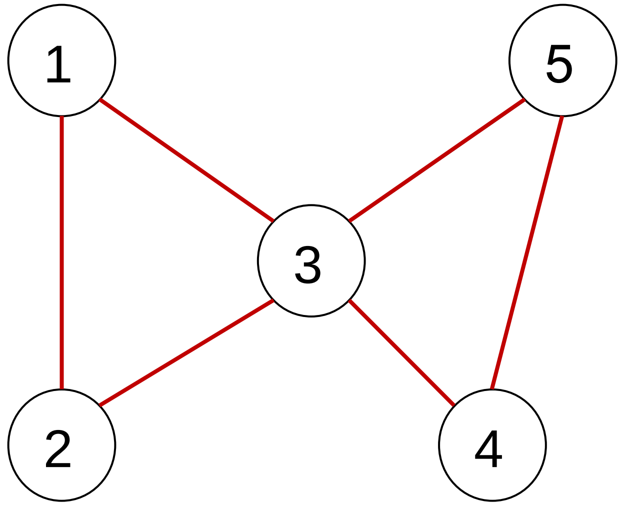
❖ Ví dụ

Dùng danh sách đỉnh kề và mảng, minh họa từng bước để tìm chu trình Euler.



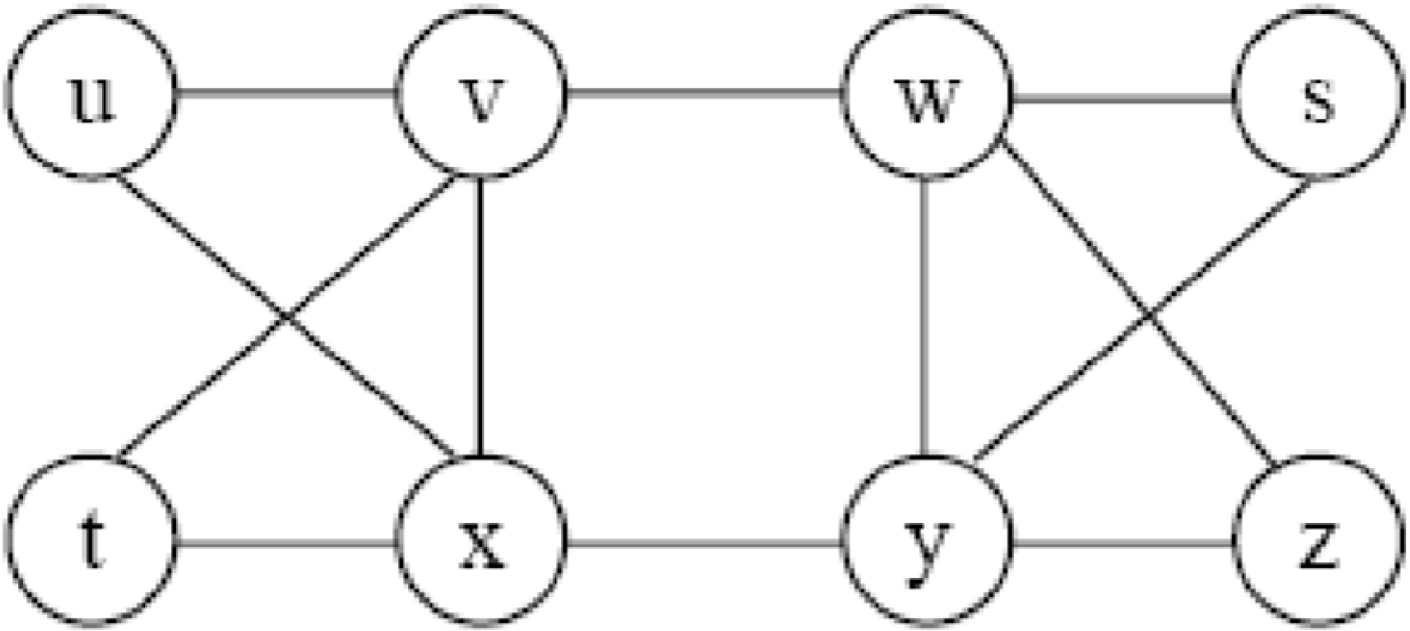
v	Các đỉnh kề của v
1	2,3
2	1,3
3	1,2,4,5
4	3,5
5	3,4

Mảng	Chu trình Euler
1	
1,2	
1,2,3	
1,2,3,1	
1,2,3	1
1,2,3,4	
1,2,3,4,5	
1,2,3,4,5,3	
1,2,3,4,5	1,3
1,2,3,4	1,3,5
1,2,3	1,3,5,4
1,2	1,3,5,4,3
1	1,3,5,4,3,2
	1,3,5,4,3,2,1

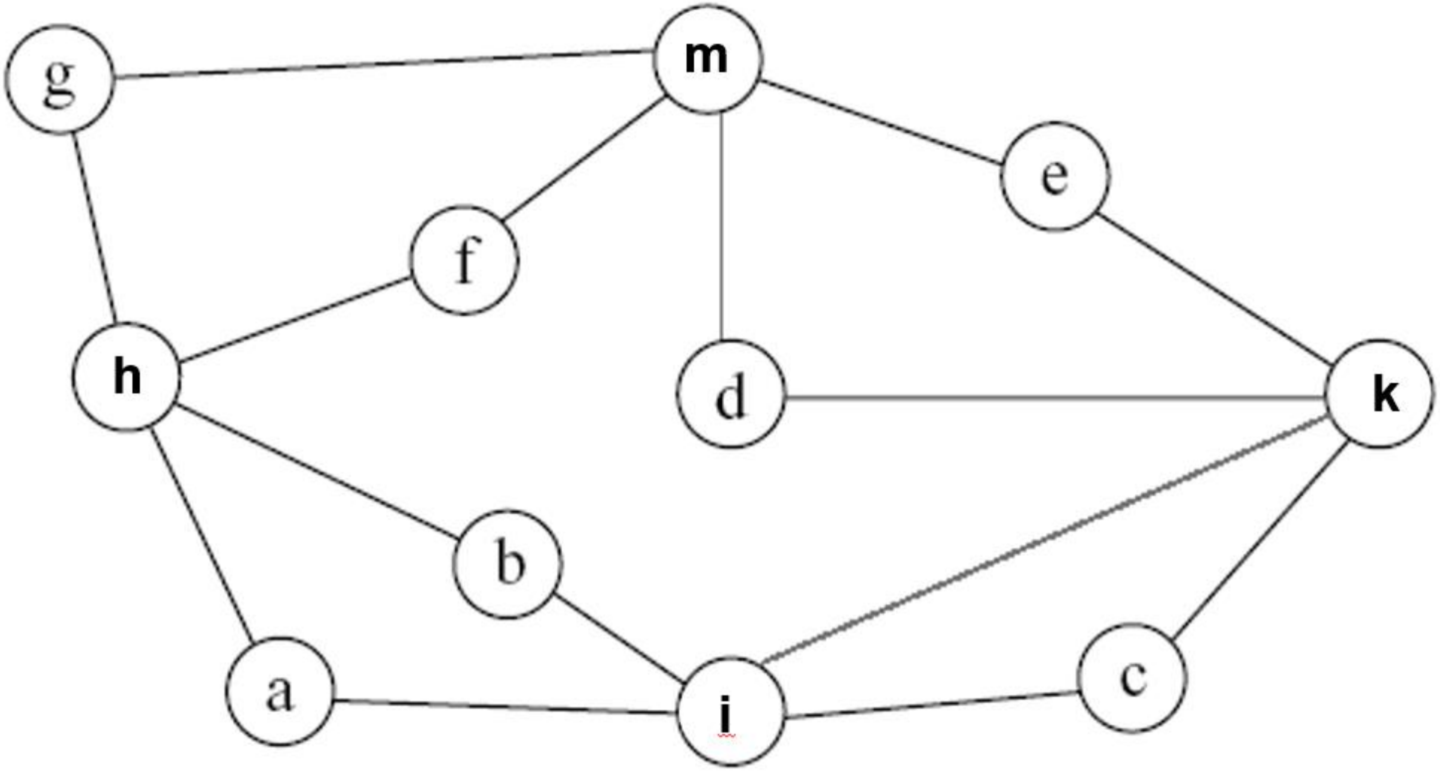


Chu trình Euler C = (1, 3, 5, 4, 3, 2, 1)

Bài tập

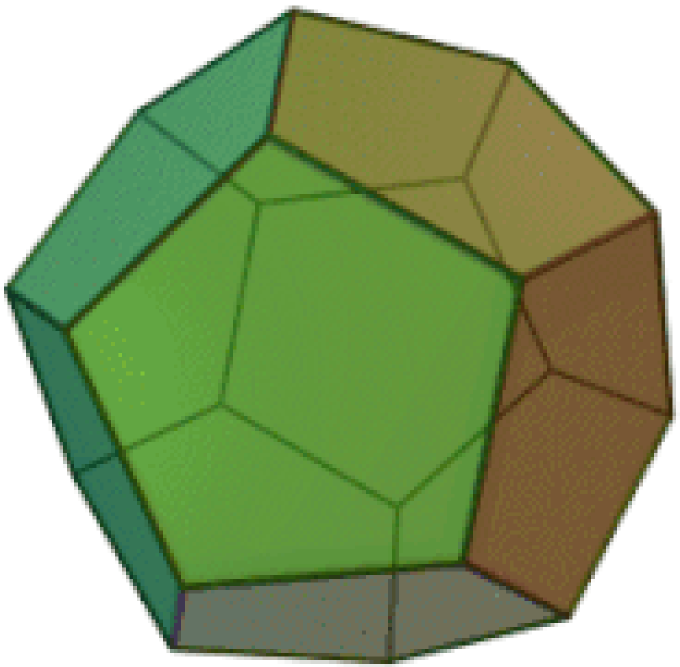


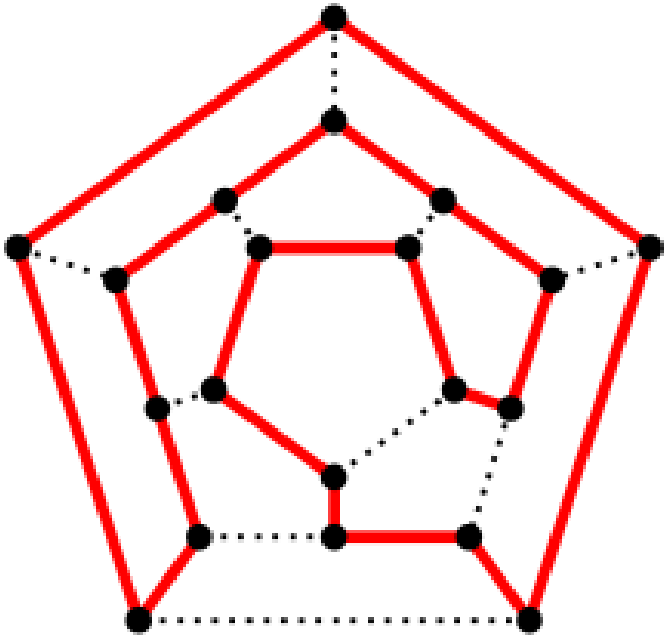
❖ Xuất phát từ a



ĐỒ THỊ HAMILTON

❖ William Rowan Hamilton phát biểu vào năm 1859.



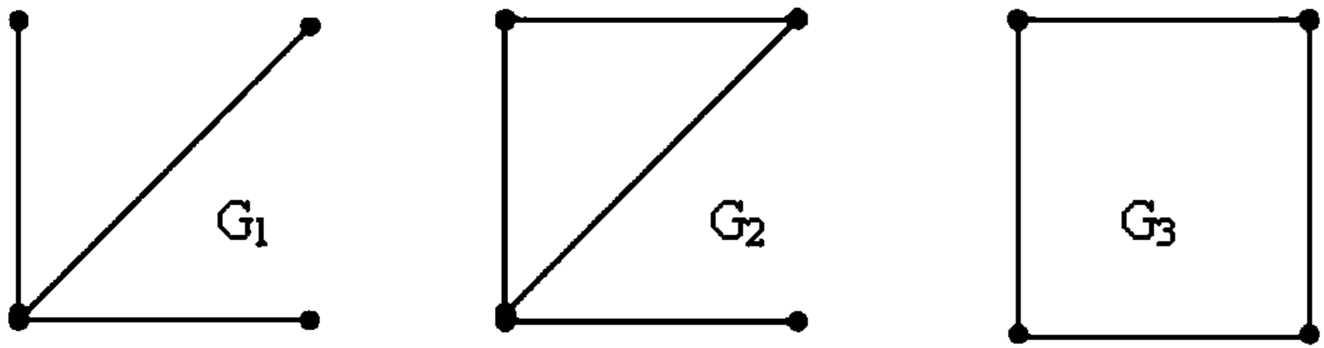


ĐỒ THỊ HAMILTON

- ĐƯỜNG ĐI HAMILTON: đường đi đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị mỗi đỉnh đúng một lần.
- CHU TRÌNH HAMILTON: đường đi Hamilton và một cạnh trong đồ thị nối đỉnh đầu của dây chuyền với đỉnh cuối của nó.
- ĐỒ THỊ HAMILTON: Là đồ thị có 1 chu trình Hamilton.
- ĐỒ THỊ NỮA HAMILTON : Là đồ thị có 1 đường đi Hamilton.

ĐỒ THỊ HAMILTON

Đồ thị G3 là Hamilton, G2 là nửa Hamilton còn G1 không là nửa Hamilton.



- Cho đến nay việc tìm một tiêu chuẩn nhận biết đồ thị Hamilton vẫn còn là mở. Phần lớn các phát biểu đều có dạng "nếu G có số cạnh đủ lớn thì G là Hamilton"

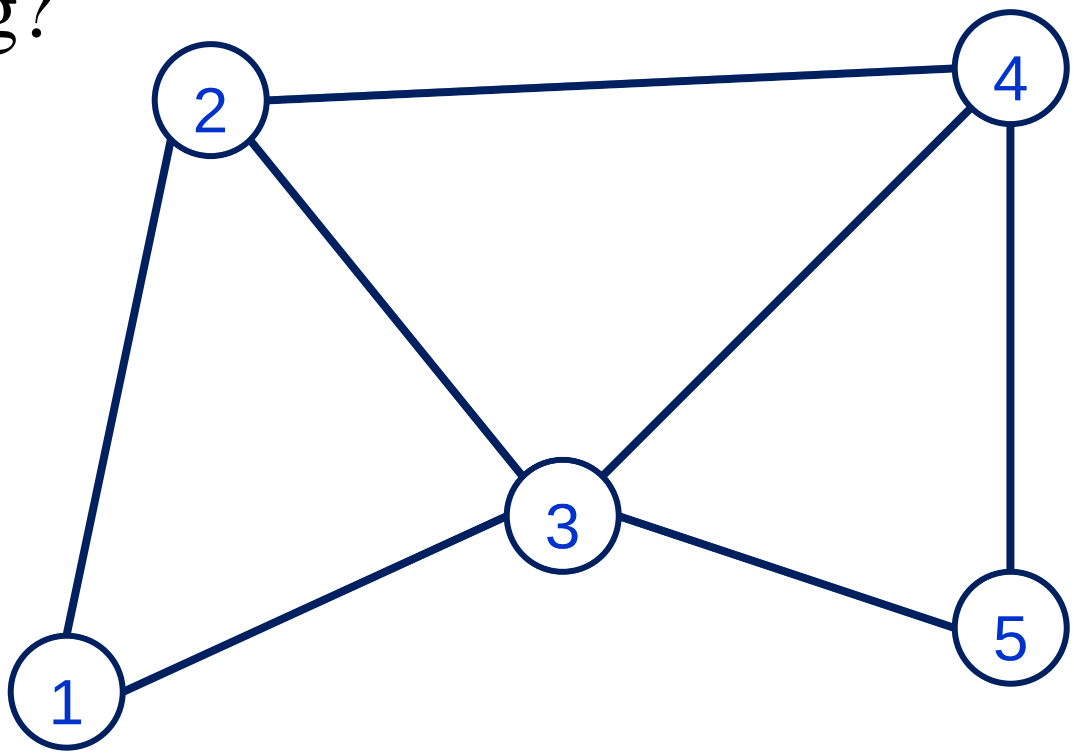
ĐỒ THỊ HAMILTON

❖ Các quy tắc sau dùng để xây dựng chu trình Hamilton (H) hoặc chỉ ra đồ thị vô hướng không là đồ thị Hamilton

- **Qui tắc 1:** Nếu có đỉnh bậc 2 thì hai cạnh của đỉnh này bắt buộc phải nằm trong H.
- **Qui tắc 2:** không được có chu trình con (độ dài nhỏ hơn n) nằm trong H.
- **Qui tắc 3:** ứng với 1 đỉnh nào đó, nếu đã chọn đủ 2 cạnh vào H thì phải loại bỏ tất cả các cạnh còn lại.
- **Qui tắc 4:** Không có đỉnh cô lập hay đỉnh treo nào được ta ra sau khi áp dụng quy tắc 3

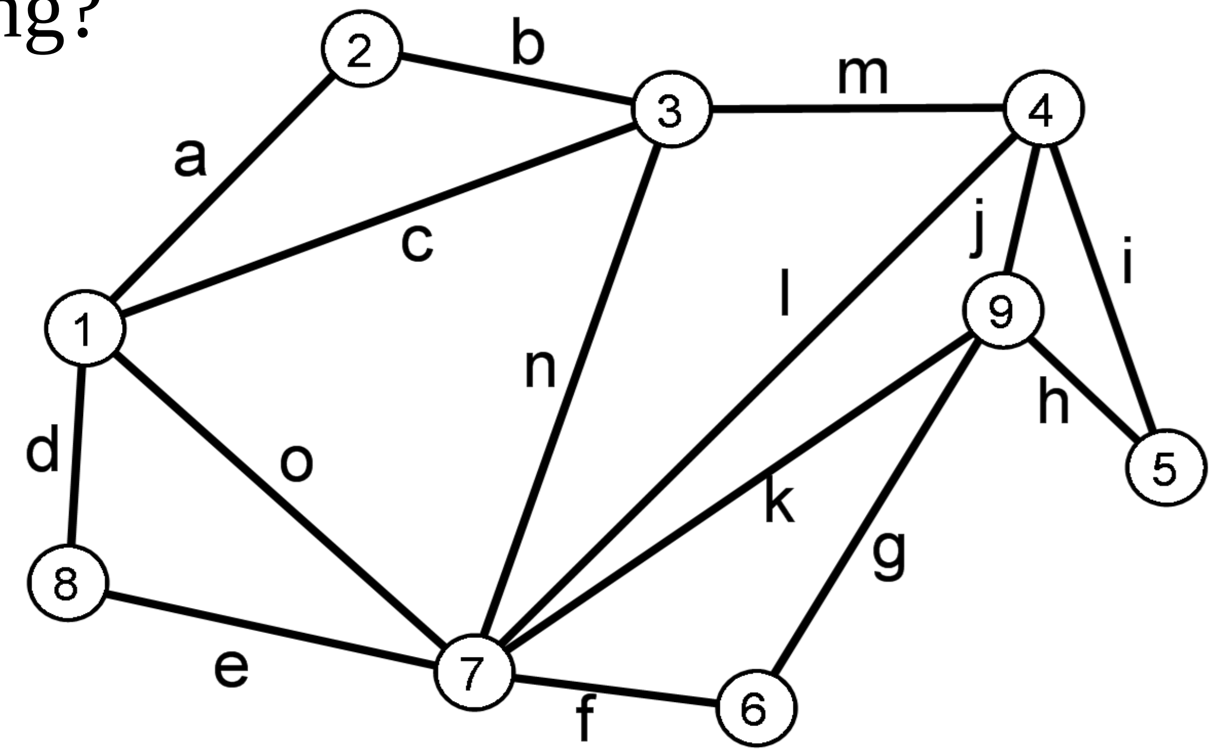
ĐỒ THỊ HAMILTON

❖ Đồ thị sau đây có phải là đồ thị Hamilton không?



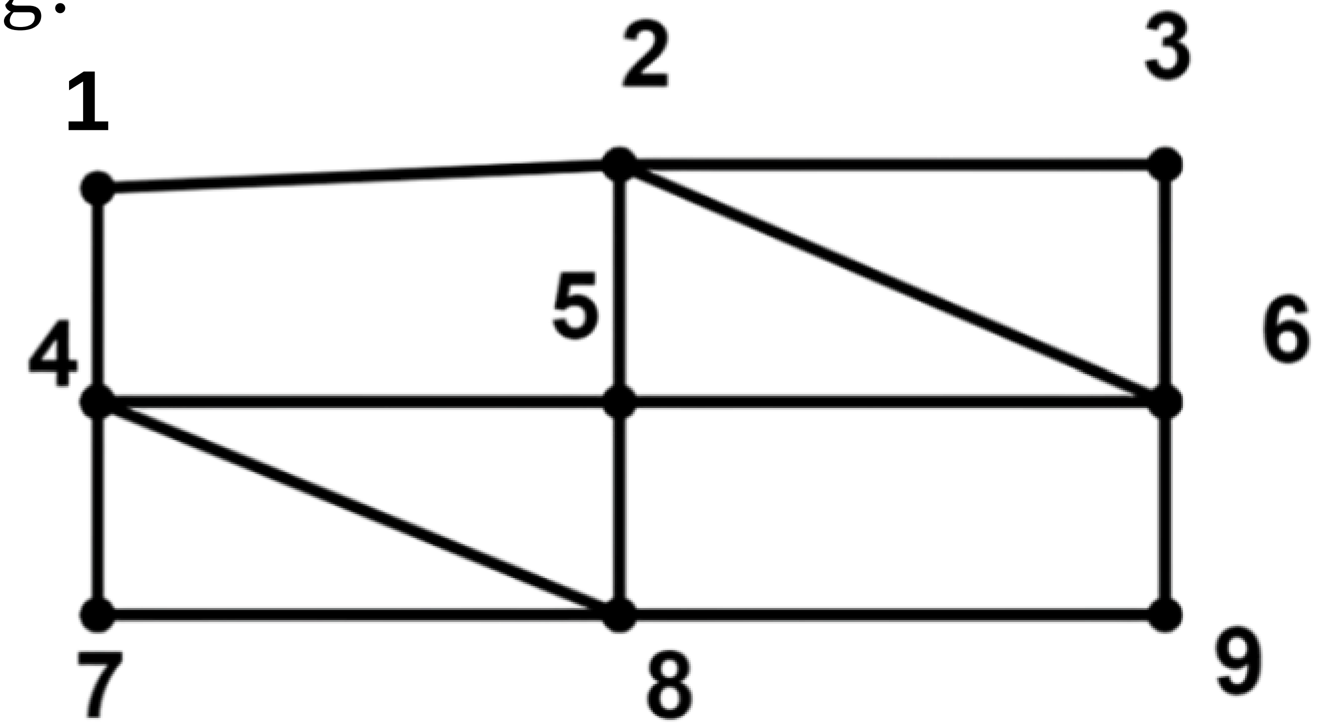
ĐỒ THỊ HAMILTON

❖ Đồ thị sau đây có phải là đồ thị Hamilton không?



ĐỒ THỊ HAMILTON

❖ Đồ thị sau đây có phải là đồ thị Hamilton không?



ĐỒ THỊ HAMILTON

❖ Định lý 1 (Dirac, 1952):

Cho đơn đồ thị vô hướng G=(V, E) liên thông có n đỉnh ($n \geq 3$). Nếu $deg(v) \geq n/2$, $\forall\ u \in V$ thì G có chu trình Hamilton

ĐỒ THỊ HAMILTON

❖ Định lý 2 (Dirac tổng quát):

Cho đồ thị có hướng G=(V, E) liên thông mạnh có n đỉnh. Nếu deg+() ≥ n/2 và deg-() ≥ n/2 thì G có chu trình Hamilton

ĐỒ THỊ HAMILTON

❖ **Cho ví dụ về**

1. Đồ thị có 1 chu trình, vừa là chu trình Euler vừa là chu trình Hamilton.
2. Đồ thị có 1 chu trình Euler và 1 chu trình Hamilton, 2 chu trình này không trùng nhau.
3. Đồ thị có 6 đỉnh, là đồ thị Hamilton nhưng không là Euler.
4. Đồ thị có 6 đỉnh, là đồ thị Euler nhưng không là Hamilton.