Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie.

Von

T. Levi-Civita in Rom.

La première partie du présent mémoire (n^{os} 1—11) ne fait que reprendre des considérations tout à fait classiques en les combinant avec quelques remarques personnelles, déjà parues ailleurs en partie, sur la théorie des ondes dans les liquides[1]). J'y développe tous les détails de concept et de calcul qui permettent de caractériser nettement les ondes périodiques irrotationnelles permanentes, c'est-à-dire pouvant se propager sans altération de forme à la surface d'un liquide de profondeur infinie.

On parvient de la sorte à constater que la recherche revient à la question analytique suivante:

Assigner toutes les fonctions

$$\omega(\zeta) = \vartheta + i\tau \qquad (\vartheta \text{ partie réelle})$$

de la variable complexe $\zeta = \varrho e^{i\sigma}$ holomorphes à l'intérieur de la circonférence $|\zeta| = \varrho = 1$ qu'on appellera $\mathfrak{C}$, s'annulant à l'origine ($\zeta = 0$) et vérifiant sur $\mathfrak{C}$, c'est-à-dire pour $\zeta = e^{i\sigma}$, l'équation:

$$\text{(I)} \qquad \frac{d\tau}{d\sigma} = p e^{-3\tau} \sin\vartheta,$$

où p désigne un paramètre positif a priori indéterminé.

Toute $\omega(\zeta)$ non identiquement nulle donne lieu à un type effectif d'ondes permanentes, sous la réserve que, pour $|\zeta| \leqq 1$, subsiste l'inégalité

$$|e^{-i\omega} - 1| < 1$$

qui se trouve d'ailleurs automatiquement vérifiée pour $|\omega|$ assez petit.

---

[1]) Voyez par ex. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, Ser. V, **16** (2 semestre 1907), pp. 776—790; **21** (1 semestre 1912), pp. 3—14; ou bien le volume *Questions de mecànica clàssica i relativista,* II. Conférence (Barcelona: Institut d'estudis catalans, 1922), dont une édition italienne vient de paraître chez Zanichelli (Bologna, 1924) et une édition allemande se trouve maintenant sous presse chez Julius Springer (Berlin).

La constante p est liée aux éléments essentiels du phénomène (λ longueur de l'onde, c vitesse de propagation, g accélération de la gravité) par la formule

$$p = \frac{g\lambda}{2\pi c^2}. \tag{II}$$

On peut se borner aux valeurs $p \leqq 1$, puisqu'on reconnaît sans peine (n° 12) que de toute solution de (I) correspondant à une telle valeur de p on peut en obtenir d'autres en nombre infini en groupant n ondes simples de la première solution, où n est un entier arbitraire, et regardant cet assemblage comme une onde unique de longueur $\lambda_1 = n\lambda$: pour celle-ci le paramètre a la valeur $p_1 = np$.

Dans un mémoire des Math. Annalen **85** (1921) j'avais déjà étudié l'équation (I) et même une équation plus générale

$$\frac{d\tau}{d\sigma} - pe^{-3\tau}\sin\vartheta = \chi(\sigma) \qquad (\chi(\sigma) \text{ fonction connue sur } \mathfrak{C})$$

en démontrant, à l'égard de (I), que, pour $p < 1$, elle n'admet pas de solutions $\omega(\zeta)$ (non identiquement nulles) qui restent (sur $\mathfrak{C}$), en module, au-dessous d'une certaine limite numérique $L(p)$, pouvant dépendre de p et convergeant à zéro pour $p \rightarrow 1$. La conclusion n'est pourtant pas applicable à $p = 1$. D'après cela j'avais cru pouvoir affirmer que p doit être (pour toute espèce d'ondes permanentes, si tant est qu'il en existe) exactement $= 1$, ce qui reviendrait à

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}.$$

C'est la célèbre relation établie il y a bien longtemps par Airy pour sa solution de première approximation où ω peut être traitée comme infiniment petite.

Ma conclusion était hâtive, comme M. Weyl eut alors l'obligeance de me faire remarquer: on ne peut pas exclure d'avance, m'écrivit M. Weyl, que des solutions $\omega(\zeta)$ de (I), qualifiées pour donner lieu aux ondes permanentes, aient un module dépassant parfois $L(p)$. Il faut par conséquent chercher les ondes parmi les solutions de (I), non seulement pour $p = 1$, mais aussi pour tout $p < 1$.

Si l'on suppose $p = 1$, on ne trouve rien. Je me borne à l'affirmer, mais je l'ai constaté matériellement par le calcul numérique annoncé à la fin du mémoire cité conjointement avec l'intention de l'exécuter au plus tôt.

Pour les solutions de la seconde catégorie ($p < 1$) on tire de (II)

$$c^2 > \frac{g\lambda}{2\pi}$$

ce qui s'accorde avec le résultat obtenu par Stokes et Rayleigh à l'aide d'une méthode d'approximations successives, exigeant pas mal d'hypothèses sur l'ordre de grandeur des coefficients qu'il s'agit de déterminer. Quoi qu'il en soit sur la légitimité de la méthode, dès qu'on dépasse la première approximation (celle d'Airy), on avait trouvé constamment que le rapport entre c^2 et $\frac{g\lambda}{2\pi}$ croît avec la hauteur de l'onde. Cette circonstance aurait pu, à vrai dire, orienter à coup sûr ma recherche vers le cas où $p < 1$. Mais il ne faut pas oublier que la méthode suivie par Stokes et, après lui, sans différences substantielles de principe, par Rayleigh, soulevait bien de doutes, non seulement parce que la convergence n'était nullement démontrée, mais bien plus parce qu'elle n'en donnait pas la sensation. Lord Rayleigh lui-même avait été d'abord sceptique sur l'existence réelle de trains d'ondes permanentes, et changea son impression à la suite du succès obtenu par M. M. Korteweg, De Vries et Mc Cowan, en traitant le problème d'une manière approximative tout à fait différente (ignoration des coordonnées) qui emploie une évaluation simplifiée préalable de certains éléments d'ensemble pour leur appliquer les lois générales de la dynamique.

Dans un de ses derniers mémoires[2]) Rayleigh a repris et poursuivi ses calculs en poussant l'approximation jusqu'au $6^{\text{ième}}$ ordre. Il a même montré sur un exemple numérique que l'erreur relative y atteignait tout au plus $2{,}5 \cdot 10^{-6}$, exprimant la conviction que des ondes de hauteur modérée doivent exister rigoureusement; mais il souhaitait en même temps une démonstration mathématique de cette existence pour trancher la question d'une manière définitive.

C'est cette démonstration que nous allons fournir ici en perfectionnant au surplus d'une manière essentielle l'algorithme constructif de la solution.

Après avoir fixé la relation entre la hauteur de l'onde et la vitesse à la crête (n° 12) et indiqué les propriétés des ondes *bifrontes*, c'est-à-dire *symétriques* par rapport à la verticale de la crête (n° 13), on part de la remarque (n° 14) qu'en traitant ϑ, τ, $p-1$ comme des petites quantités du premier ordre, la condition à la frontière (I) se réduit à

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \vartheta .$$

En tenant compte des autres conditions rappelées plut haut et supposant que l'axe réel du plan ζ soit orienté d'une manière convenable, on

[2]) *On periodical irrotational waves at the surface of deep water,* Phil. Mag. (6) 32 (1917), pp. 381–389.

en tire aisément, comme première approximation de $\omega(\zeta)$ (revenant à la solution d'Airy)

$$-i\mu\zeta \qquad (\mu \text{ constante réelle}).$$

Pour aller plus loin on suppose la fonction inconnue $\omega(\zeta)$ et la constante (également inconnue) $1-p$ développables suivant les puissances entières de μ:

$$\omega(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(\zeta)\mu^n, \qquad 1-p=\sum_{n=1}^{\infty}k_n\mu^n.$$

On constate d'ailleurs que, pour n impair, les k_n sont nuls de sorte qu'on a le développement

$$1-p=\sum_{n=1}^{\infty}k_{2n}\mu^{2n}.$$

On reconnaît ensuite (nos 15—16) que les coefficients de ces développements restent univoquement déterminés de proche en proche par une marche régulière de calcul, chaque $\omega_n(\zeta)$ résultant notamment un polynome de dégré n purement imaginaire sur l'axe réel. Ceci exprime la propriété géométrique (et cinématique) qu'il s'agit en *tout cas* d'ondes symétriques. Les polynomes $\omega_n(\zeta)$ renferment seulement des puissances de ζ de même parité que n, ce qui équivaut aux relations

$$\omega_n(-\zeta)=(-1)^n\omega_n(\zeta).$$

Après un lemme sur une certaine opération fonctionnelle (n° 17) et l'étude d'un type particulier de fonctions majorantes (n° 18), j'applique les principes de la méthode des limites aux séries définissant $\omega(\zeta)$ et $1-p$ (n° 19) et je parviens finalement à établir (n° 20) la convergence des séries pour $|\mu|$ assez petit.

C'est comme dire qu'à *toute* valeur de p assez peu inférieure à 1 (et par là même à tout multiple entier d'une telle valeur p) il correspond un profil d'onde symétrique (et un seul): la hauteur de ce profil, ou plus précisément le rapport $\frac{a}{\lambda}$, d'après la formule dont il a été question au n° 12, dépend exclusivement de $1-p$, et en est une fonction croissante.

Voici prouvée en toute rigueur l'existence, et confirmés les résultats approximatifs de Stokes et Rayleigh, d'où ressortirent des recherches fort intéressantes, mais encore plus hardies se rapportant au profil critique de hauteur maximum[3]).

Dans un appendice j'ai développé le calcul numérique des polynomes $\omega_n(\zeta)$ et des constantes k_{n-1} $(n=2,3,\ldots)$ jusqu'à $n=5$.

---

[3]) Voir notamment T. H. Havelock, *Periodic irrotational waves of finite height*, Proc. of the Royal Society, A, **95** (1918), pp. 38—51.

Les résultats principaux de cette recherche ont été communiqués au Congrès International de Mécanique technique, qui eut lieu à Delft du 22 au 26 Avril 1924.

Je tiens à ajouter que M. Nekrassow était déjà parvenu pour son compte à des conclusions analogues, en ayant recours à la theorie des équations intégrales: il a même analysé davantage les limites du théorème d'existence, tout en s'étendant moins sur l'illustration des formules.

Le savant professeur de Moscou a eu la grande amabilité de me transmettre peu avant le Congrès une rédaction française de ses travaux en langue russe (qui ont commencé à paraître dès 1921). Ceci m'a permis de les signaler moi-même au Congrès.

1. Prémisses générales.

Considérons un liquide pesant dans un bassin de profondeur infinie, et supposons qu'il soit animé d'un mouvement parallèle à un plan vertical fixe: c'est ce qui arrive dans un canal très profond à parois verticales, lorsque le mouvement a lieu dans des plans parallèles aux parois sans différence d'un plan à l'autre. Il suffit alors d'en envisager un et on est réduit à un problème à deux dimensions.

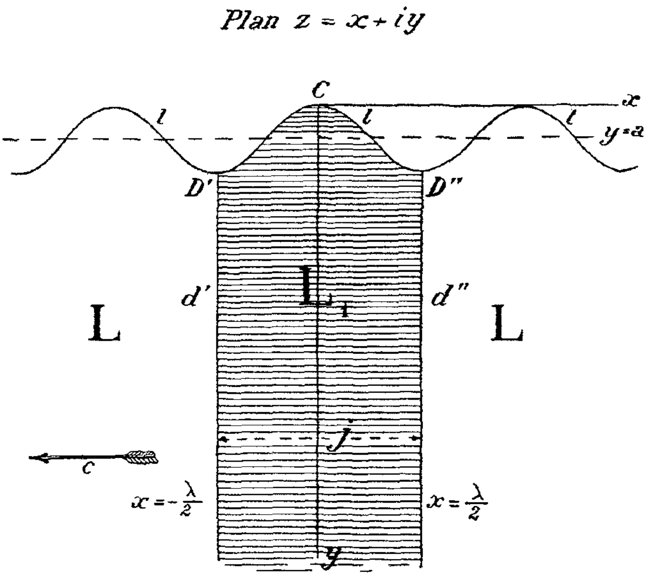

Fig. 1.

Nous plaçant désormais dans un de ces plans verticaux, introduisons l'hypothèse que le liquide soit limité supérieurement par une ligne l se déplaçant *sans altération de forme,* avec une vitesse horizontale c.

Quant à la forme de l, on peut pour le moment se borner à admettre que ce soit une ligne plus ou moins sinueuse, ne s'écartant pas trop d'une droite horizontale.

Le mouvement des particules se passe dans la région indéfinie L située au-dessous de la ligne l: à cause de la translation de celle-ci, le champ L varie (en général) d'un instant à l'autre par rapport à un observateur fixe.

Il convient donc de se rapporter à un système d'axes Cxy *invariablement liés à* l, et animés par conséquent de translation uniforme. Nous prendrons C sur l, Cy vertical vers le bas et Cx horizontal dirigé en *sens contraire* à celui de la vitesse c de l: les composantes de cette vitesse seront donc $0, -c$.

Pour un observateur lié à l, les objets immobiles (par rapport au bassin) semblent s'éloigner dans le sens de Cx avec une vitesse c.

La propriété qualitative fondamentale qui caractérise *un mouvement ondulatoire* ayant l pour *profil d'onde* c'est que la vitesse *absolue* des particules liquides est petite par rapport à c. C'est-a-dire que leur vitesse *relative* à l, savoir à nos axes Cxy, doit être peu différente de c, en grandeur et direction. Si l'on désigne par u, v les composantes de cette vitesse relative, on devra retenir, dans tout le champ L, $u-c$ et v petits vis-à-vis de c.

Introduisons le nombre complexe

$$w = u - iv \tag{1.1}$$

dont le conjugué $\overline{w} = u + iv$ représente vectoriellement (dans le plan complexe $x + iy$) la vitesse relative. La vitesse absolue est alors représentée par le conjugué de $w - c$, et la circonstance cinématique, qui distingue une propagation par ondes d'un mouvement ordinaire intéressant toute la masse, se traduit par une inégalité de la forme

$$\left|\frac{w-c}{c}\right| \leqq \beta < 1, \tag{1.2}$$

où l'on entend par β une constante: théoriquement elle est soumise uniquement à la condition indiquée d'être une fraction propre; dans les cas ordinaires β ne dépasse pas trop $1/10$.

Une autre circonstance appartenant sans contredit aux mouvements ondulatoires c'est que même les petites oscillations des particules ne sont perceptibles que dans le voisinage de la ligne libre l: elles tendent rapidement à s'amortir vers le bas, de sorte que la vitesse *absolue* $\overline{w} - c$, et avec elle aussi $w - c$ converge à zéro lorsque y croît indéfiniment. On a donc

$$\lim_{y \to \infty} w = c. \tag{1.3}$$

2. Conditions cinématiques.

L'irrotationalité du mouvement et *l'incompressibilité* du liquide se traduisent par l'existence de deux fonctions harmoniques conjuguées φ

(potentiel des vitesses) et ψ (fonction de courant) définies (à une constante près) par les différentielles (exactes)

$$(2.1)\qquad \begin{cases} d\varphi = u\,dx + v\,dy, \\ d\psi = -\,v\,dx + u\,dy. \end{cases}$$

Puisque le champ du mouvement L est simplement connexe, ces deux fonctions φ et ψ y résultent uniformes. Pour fixer les constantes additives, on supposera par exemple

$$(2.2)\qquad \varphi = \psi = 0 \qquad \text{au point } C.$$

Le profil de l'onde doit naturellement être formé à tout instant par les mêmes molécules. Ceci exige, puisque le profil est permanent, qu'il soit ligne de flux, c'est-à-dire qu'on ait $-v\,dx + u\,dy = 0$ ou $d\psi = 0$ sur l, donc, d'après (2.2),

$$(2.3)\qquad \psi = 0 \qquad \text{sur } l.$$

3. Première caractéristique de masse. Allure asymptotique de ψ. Constatation que le mouvement rapporté à l'onde est nécessairement permanent.

On précise la prémisse que les oscillations réelles des particules sont petites par rapport à c en exigeant d'abord:

a) que, malgré l'apparence de translation, le *débit* effectif de la masse liquide à travers une section verticale fixe reste fini (à tout instant). Pour déduire de cette hypothèse les conséquences qui nous intéressent, envisageons une verticale fixe quelconque. Elle paraît se déplacer par rapport à nos axes Cxy avec une vitesse horizontale c (dirigée comme Cx) et a pour équation

$$(3.1)\qquad x = x_0 + c\,t,$$

x_0 désignant son abscisse initiale.

En tenant compte de ce que x doit être remplacé par (3.1) dans u et v, on aura toujours dans ces fonctions les composantes de la vitesse relative du liquide qui traverse la verticale envisagée, et dans $u - c$, v celles de la vitesse absolue.

Si l'on suppose pour simplifier que la densité du liquide soit $= 1$, *le débit absolu* à travers un élément de notre verticale fixe sera à un instant quelconque

$$(u - c)\,dy.$$

Intégrons le long de la verticale (3.1) ($dx = 0$) depuis la ligne libre dont on représentera l'ordonnée par y_l jusqu'à une profondeur y quelconque. Le débit à travers le segment sera

$$\int_{y_l}^{y}(u-c)\,dy,$$

ou, ayant égard à la définition (2.1) de $d\psi$ (pour $dx=0$) et à (2.3),

$$\psi - c\,y + c\,y_l.$$

Comme y_l reste finie (même toujours petite) la condition a) équivaut au fait analytique suivant: *la fonction $\psi - c\,y$ reste finie* (quel que soit t) *dans tout le champ L, même si l'on fait croître y indéfiniment.*

D'après cela la fonction $\psi - c\,y$, *harmonique* dans le champ L, reste déterminée univoquement par ses valeurs à la frontière l; ces valeurs, $-c\,y_l$ à cause de (2.3), ne dépendent pas du temps t; le champ L du plan $C\,x\,y$ n'en dépend pas non plus. Il s'en suit que ψ est fonction uniquement de x, y, et la même conclusion, d'après (2.1), (2.2), s'applique évidemment à u, v, φ.

On a ainsi constaté que le *mouvement ondulatoire des particules a un caractère rigoureusement permanent par rapport aux axes $C\,x\,y$*: au début on avait admis seulement la permanence de la ligne libre l.

4. Seconde caractéristique de masse. Allure asymptotique de φ.

Exprimons maintenant qu'il n'y a pas de transport de matière dans les couches profondes, c'est-à-dire que non seulement le débit, mais aussi le flux, pendant un intervalle de temps $t_2 - t_1$ arbitrairement long, reste fini, pourvu que ce flux se rapporte à un élément quelconque dy de vercale fixe, qui reste *toujours immergé*, savoir toujours au-dessous de l.

Partant de l'expression

$$dy\,(u-c)\,dt$$

du flux élémentaire pendant un intervalle infiniment petit dt, il s'agit[4]) de transformer la circonstance

b) que le flux

$$dy\int_{t_1}^{t_2}(u-c)\,dt$$

pendant un intervalle de temps (t_1, t_2) reste fini, même si l'on fait croître indéfiniment $t_2 - t_1$.

---

[4]) Une telle expression convient à un élément dy en tant qu'il soit immergé pendant l'élément de temps dt. S'il pouvait rester parfois au-dessus de l, on devrait, dans les dt correspondants, remplacer $(u-c)\,dt$ par zéro

Or $u(x, y)$ dépend de t exclusivement par l'intermédiaire de x d'après (3.1); d'autre part on peut, toujours d'après (3.1), remplacer t par x comme variable d'intégration, et on obtient par conséquent, pour le flux susdit, l'expression

$$dy \frac{1}{c} \int_{x_1}^{x_2} (u - c)\, dx,$$

x_1, x_2 étant les valeurs de x que (3.1) fait correspondre à t_1, t_2.

Comme $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ l'intégration donne

$$\frac{dy}{c} \{[\varphi(x_2, y) - c x_2] - [\varphi(x_1, y) - c x_1]\}.$$

La condition que ce flux reste fini, même si l'on fait grandir indéfiniment l'intervalle de temps et par suite $x_2 - x_1$, exprime justement la *propriété asymptotique de la fonction*

$$\varphi(x, y) - c x$$

de rester finie dans le champ L, aussi pour x (ou y) $\rightarrow \infty$.

5. Condition dynamique.

Il est bien connu que, pour les mouvements irrotationnels sous l'action de forces dérivant d'une fonction de forces U, les équations indéfinies de l'hydrodynamique se réduisent à une relation unique définissant la pression p. Dans notre cas, en se rapportant aux axes Cxy animés de translation uniforme, par rapport auxquels le mouvement est permanent, comme $U = gy$ et la densité $= 1$, on a

$$p = gy - \frac{1}{2} |w|^2 + \text{const}, \tag{5.1}$$

où, conformément à (1.1), $|w|^2 = u^2 + v^2$ désigne le carré de la vitesse (relative) des particules.

Cette équation qui, à l'interieur du champ, n'est que la définition de p, donne lieu, sur la ligne libre, où la pression doit être constante, à la condition dynamique caractéristique

$$\frac{1}{2} |w|^2 - g y_l = \text{const} \qquad \text{sur } l. \tag{5.2}$$

6. Variables complexes. Première forme du problème analytique.

En posant

$$\begin{cases} z = x + iy, \\ f = \varphi + i\psi, \end{cases} \tag{6.1}$$

f résulte, d'après (2. 1), une fonction monogène de la variable complexe z. Toujours d'après (2. 1), en tenant compte de la définition (1. 1) de w, on a

$$\frac{df}{dz} = w. \tag{6.2}$$

On peut désormais formuler le problème analytique des ondes permanentes, en prenant comme inconnue la fonction (monogène) $w(z)$.

Elle doit (n° 1) être partout finie et holomorphe à l'intérieur de L, vérifier l'inégalité (1. 2) et la condition (1. 3), c'est-à-dire tendre à c lorsque $y \to \infty$.

La frontière supérieure l *a priori indéterminée* (sauf la restriction qualitative de ne s'écarter pas trop d'une horizontale) doit être à la fois ligne de flux, ce qui s'exprime par

$$-v\,dx + u\,dy = 0$$

et ligne isobarique, ce qui se traduit par (5. 2).

Une fois déterminée $w(z)$, on a de (6. 2), (6. 1) et (2. 2)

$$f = \int_0^z w\,dz,$$

les caractéristiques de masse exigeant encore, d'après les n^{os} 3 et 4, que cette intégrale se comporte à l'infini d'une manière bien déterminée, précisément de manière que la différence

$$F(z) = f(z) - cz \tag{6.3}$$

reste finie lorsqu'on s'éloigne indéfiniment à l'intérieur de L.

On simplifiera dans ce qui va suivre la position du problème analytique par une double transformation de variable indépendante et de fonction inconnue.

7. Représentation conforme du champ du mouvement L sur un demiplan S ($\psi \geqq 0$) du plan complexe $f = \varphi + i\psi$. Changement de variable.

Représentons dans un plan complexe $f = \varphi + i\psi$ (fig. 2) les valeurs prises par $f(z)$ lorsque z varie dans la région L du plan du mouvement.

Tout d'abord sur l on a, à cause de (2. 3), $\psi = 0$; à l'origine C correspond en particulier, d'après (2. 2), $f = 0$, c'est-à-dire l'origine Γ du plan f. Pour les points très profonds (y très grand positif), la circonstance (n° 3) que $\psi - cy$ reste fini nous assure que $\psi \to +\infty$. Ceci fait prévoir qu'à la région L du plan z correspondent biunivoquement des valeurs de $f(z)$ remplissant le demi-plan $\psi \geqq 0$ qu'on appellera S.

Pour le démontrer, remarquons d'abord que le module de $\frac{df}{dz}$ c'est-à-dire $|w|$ d'après (**6.** 2), reste toujours (n° 1) assez peu différent de c dans L, et y admet en tout cas une limite inférieure > 0.

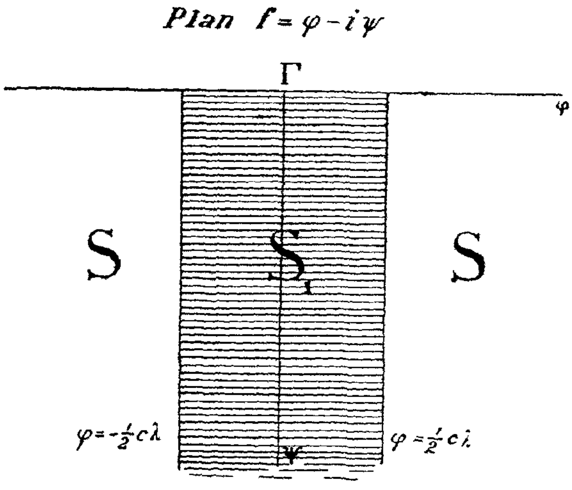

Fig. 2.

D'autre part, en représentant par dl un élément de la ligne libre l, comme on a, sur l $dl = |dz|$, et $df = d\varphi$ d'après (**2.** 3), il vient (pour $d\varphi > 0$), en égalant les modules des deux membres dans (**6.** 2),

$$\frac{d\varphi}{dl} = |w|$$

ce qui assure qu'en parcourant l depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$, φ varie (sur l'axe réel du plan f) également de $-\infty$ à ∞ toujours en croissant. Il y a donc correspondance biunivoque entre les deux contours l de L et l'axe réel du demi-plan S. Dès lors un théorème fondamental sur la représentation conforme[5]) nous assure qu'il y a correspondance biunivoque entre S et L. C'est-à-dire qu'on peut regarder z comme fonction de f, *uniforme* dans le demi-plan S.

Il s'ensuit que toute fonction, telle que w, de l'argument z, holomorphe dans L, peut également être regardée comme fonction de f holomorphe dans le demi-plan S.

Cette substitution de la variable f à z est évidemment avantageuse, puisque dans le plan f le contour du champ à envisager est l'axe réel, tandis que dans le plan originaire z c'était une ligne l à priori inconnue. Comme les points à l'infini se correspondent dans les deux champs, la condition (**1.** 2) peut s'écrire

$$(\mathbf{7.}\,1) \qquad \lim_{\varphi \to \infty} \frac{w}{c} = 1.$$

Quant à l'autre condition asymptotique du n° précedent: $f - cz$ partout finie, on y envisagera désormais f comme variable indépendente et z comme fonction de f, résultant (par intégration) de (**6.** 2) c'est-à-dire de

$$(\mathbf{7.}\,2) \qquad \frac{dz}{df} = \frac{1}{w}.$$

---

[5]) Comparez par ex. Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie* (Leipzig, Teubner, 1907), VIII Kap., § 5.

Elle revient alors à ceci: la différence

$$F(f) = f - c\int_0^f \frac{df}{w} = \int_0^f \left(1 - \frac{c}{w}\right) df \tag{7.3}$$

doit reste finie partout dans S.

Enfin les conditions à la frontière ($\psi = 0$ et (**5.** 2), sur l) se réduisent, dans le plan f, à (**5.** 2) pour $\psi = 0$.

On peut en éliminer y_l en substituant à (**5.** 2) sa dérivée par rapport à φ

$$\frac{1}{2}\frac{d|w|^2}{d\varphi} = g\frac{dy_l}{d\varphi}$$

et en ayant recours à (**7.** 2). Le long de l'axe réel on a en particulier $df = d\varphi$; égalant alors les coefficients de i dans les deux membres, on tire

$$\frac{dy_l}{d\varphi} = \frac{v}{|w|^2}$$

ce qui donne lieu à la condition

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\varphi}|w|^2 = g\frac{v}{|w|^2}. \tag{7.4}$$

8. Changement de fonction.

Posons encore

$$w = ce^{-i\omega}, \qquad \omega = \vartheta + i\tau \qquad (\vartheta, \tau \text{ réels}) \tag{8.1}$$

en ayant égard à (**7.** 1) et convenant d'attribuer à ω la détermination qui s'annule pour $\psi \to \infty$. Comme w ne s'annule jamais dans S, ce qu'on vient de dire définit ω complètement, comme *fonction uniforme de f, holomorphe* dans le demi-plan S et tendant à zéro pour $\psi \to \infty$.

On tire évidemment de (**1.** 1) et (**8.** 1)

$$u - iv = ce^{\tau}e^{-i\vartheta}, \tag{8.2}$$

ce qui donne lieu à une interprétation bien simple des quantités τ et ϑ (qui sont toutes les deux des nombres purs): ce^{τ} est la grandeur $|w|$ de la vitesse (rélative), ϑ en est l'argument, c'est-à-dire l'angle du vecteur $\overline{w} = u + iv$ avec l'horizontale Cx, dirigée — on s'en souvient — en sens contraire à la propagation de l'onde (n° 1).

Il nous sera commode de remplacer ultérieurement $w(f)$ par $\omega(f)$ comme fonction inconnue. Puisque, d'après la signification de ce^{τ} et de ϑ

$$|w| = ce^{\tau}, \qquad v = ce^{\tau}\sin\vartheta,$$

(7.4) s'écrit

(8.3)
$$\frac{d\tau}{d\varphi} = \frac{g}{c^3} e^{-3\tau} \sin\vartheta .$$

9. Cas des ondes périodiques. Expression de la hauteur a.

En revenant pour un moment au plan z (fig. 1), introduisons l'hypothèse que le profil de l'onde et en conséquence les circonstances du phénomène, par rapport aux axes Cxy, se reproduisent périodiquement en se déplaçant horizontalement d'une quantité constante (>0) λ (*longueur d'onde*). Pour cela il faut et il suffit (comme on s'en assure immédiatement) que $w(z)$ soit une fonction périodique de z ayant pour période justement le nombre λ:

(9.1)
$$w(z+\lambda) = w(z).$$

Lorsqu'il en est ainsi, il suffit évidement de se borner à faire varier z dans une bande de la région L, limitée latéralement par deux verticales à la distance λ, par ex. par les droites $x = -\frac{\lambda}{2}$, $x = \frac{\lambda}{2}$ de la figure 1.

Appelons l_1 la portion $D'D''$ du profil qui limite supérieurement cette bande, et fixons notre attention sur la portion finie L_1 qu'on en obtient en traçant inférieurement, à une profondeur quelconque, un segment j d'horizontale. Si l'on désigne par d', d'' les deux cotés verticales, le contour s de L_1 se compose de l_1, d, d', j.

Ceci posé, il va nous convenir d'avoir recours à un corollaire du lemme de Green, qui est souvent utile en hydrodynamique et qui est également valable dans le plan et dans l'espace[6]). Le voici: Si $\varphi(x, y)$ est une fonction harmonique régulière dans un champ L_1, dont s soit le contour, on a (avec des notations évidentes)

$$\frac{1}{2}\int_s \Delta\varphi \cos\widehat{ny}\, ds = \int_s \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{d\varphi}{dn}\, ds .$$

Appliquons cette formule au contour $s = l + d' + d'' + j$, en prenant pour $\varphi(x, y)$ notre potentiel des vitesses, dont les derivées $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = u$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = v$ admettent, par hypothèse, la période λ par rapport à x.

D'après cela les contributions provenant de d', d'' sont égales et opposées dans chacun des deux membres. D'ailleurs $\frac{d\varphi}{dn}$ s'annule sur l,

[6]) Je crois l'avoir signalé pour la première fois en 1906 dans la note *Sulla contrazione delle vene liquide,* Atti del R. Ist. Veneto, **64**, pp. 1465—1472. On l'établit d'ailleurs bien aisément en transformant les deux membres de la formule du texte en des intégrales de champ par les formules classiques et entenant compte de l'harmonicité de φ.

et se réduit à $-\frac{d\varphi}{dy}$ sur j; $\Delta\varphi$ n'est que $|w|^2$ et $\cos\widehat{ny} = -1$ sur j. Il reste par suite, en écrivant, au lieu de ds, dl sur l_1, et dj sur j,

$$\frac{1}{2}\int_{l_1} |w|^2 \cos\widehat{ny}\, dl = \int_{j} \left\{\frac{1}{2}|w|^2 - v^2\right\} dj.$$

Sur l, on a $\cos\widehat{ny} = \frac{dx}{dl}$, le sens positif étant celui des x croissants. L'égalité subsiste quelle que soit la profondeur y du segment j (de longueur λ). En la faisant croître indéfiniment, on a, d'après (**1**. 3), $\lim |w|^2 = c^2$, $\lim v^2 = 0$, et on est finalement conduit à l'identité

$$(\mathbf{9}.\,2) \qquad \frac{1}{2}\int_{l_1} |w|^2 dx = \frac{1}{2}c^2\lambda$$

exprimant que c^2 est la valeur moyenne des vitesses relatives des particules qui forment le profil d'une onde.

En combinant cette identité avec la condition dynamique (**5**. 2) on est conduit à une relation très simple entre la vitesse minimum et la hauteur de l'onde. Pour définir la *hauteur* il faut d'abord introduire la notion de *niveau moyen* (on non troublé): c'est l'horizontale $y = y^*$ correspondant à la valeur moyenne

$$y^* = \frac{1}{\lambda}\int_{l_1} y_l\, dx = \frac{1}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} y_l\, dx$$

des ordonnées de la ligne libre.

L'écart vertical maximum du profil de l'onde au-dessus du niveau moyen, c'est-à-dire la distance entre ce niveau et la *crête* C de l'onde (ou une des *crêtes* s'il y en avait plusieurs également élevées) s'appelle la *hauteur* de l'onde. Jusqu'ici on avait laissé indéterminée la position sur l de l'origine C des axes Cxy liés à l'onde. Nous supposerons dorénavant que C soit justement la crête de l'onde. Alors (l'axe des y étant dirigé vers le bas) la hauteur a n'est que l'ordonnée y du niveau moyen et il s'en suit

$$(\mathbf{9}.\,3) \qquad a = \frac{1}{\lambda}\int_{l_1} y_l\, dx.$$

D'autre part la constante du second membre dans (**5**. 2) peut être spécifiée en se rapportant à l'origine C: y_l s'y annule, et, en désignant par w_0 la vitesse en C, qui est réelle (horizontale), on a

$$(\mathbf{9}.\,4) \qquad \frac{1}{2}|w|^2 - g y_l = \frac{1}{2}w_0^2.$$

Puisque l'origine est dans une crête, pour tout autre point, $y_l > 0$, et w_0 *apparaît comme la valeur minimum de la vitesse* (relative) sur la ligne libre, et par suite dans tout le champ du mouvement [7]).

L'intégration de (**9.** 4) par rapport à x le long de l_1, en tenant compte de (**9.** 2) et (**9.** 3), donne

$$a = \frac{1}{2}\frac{c^2 - w_0^2}{g}. \tag{9.5}$$

A cause de cette relation, (**9.** 4) entraîne $|w| = c$ pour $y_l = a$. Voilà une propriété remarquable de la vitesse de propagation c: elle est en même temps la valeur absolue de la vitesse (relative) des particules en tout point où la ligne libre l traverse le niveau moyen.

10. Périodicité subordonnée dans le plan f. Dernier changement de variable réduisant à un cercle le domaine à envisager.

A cause de (**6.** 2), la fonction (**6.** 3)

$$F(z) = f(z) - cz$$

a pour dérivée

$$F'(z) = w(z) - c$$

qui admet la même période λ que $w(z)$.

Puisque

$$F'(z+\lambda) - F'(z) = 0,$$

on tire en intégrant

$$F(z+\lambda) - F(z) = \text{const},$$

mais la constante doit être nulle, à cause de la condition (n° 6) que $F(z)$ reste finie dans L: en effet, si la constante avait une valeur $\lambda_1 \neq 0$, on tirerait, pour n entier arbitrairement grand,

$$F(z+n\lambda) = F(z) + n\lambda_1$$

et on pourrait rendre F aussi grand que l'on veut.

De la périodicité de $F = f(z) - cz$ on déduit

$$f(z+\lambda) - f(z) = c\lambda, \tag{10.1}$$

ce qui montre que, dans la correspondance conforme entre les deux champs L et S, une translation horizontale d'ampleur λ du plan z se convertit dans une translation, également parallèle au demi-axe réel positif, d'ampleur $c\lambda$ dans le plan f.

---

[7]) Ceci résulte de la circonstance que $w = c\,e^{\tau}$, τ étant une fonction harmonique, régulière dans L: elle prend par conséquent ses valeurs extrêmes sur le contour.

Par conséquent toute fonction $w(z)$ de z admettant λ pour période, reste périodique, lorsqu'on l'envisage comme fonction de f, sa période devenant $c\lambda$. On aura notamment de (8.1)

$$\omega(f+c\lambda)=\omega(f). \tag{10.2}$$

Si l'on pose

$$\zeta=e^{\frac{2\pi i f}{c\lambda}}=\varrho e^{i\sigma} \qquad (\varrho, \sigma \text{ réels}), \tag{10.3}$$

on a, pour f réel, $|\zeta|=1$, et pour $\psi>0$, $|\zeta|<1$, de sorte que tout point f intérieur au demi-plan S a pour image dans le plan complexe ζ un point intérieur à la circonférence $\mathfrak{C}$ (où $|\zeta|=1$; voir la fig. 3).

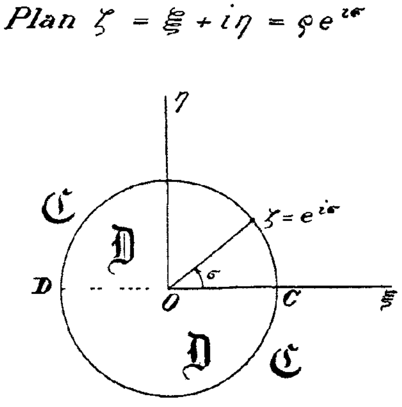

Fig. 3.

J'indiquerai par $\mathfrak{D}$ le domaine $|\zeta|\leqq 1$, c'est-à-dire le cercle (y comprise sa circonférence $\mathfrak{C}$). La correspondance établie par (10.3) serait ∞-forme si l'on envisageait tout le demi-plan S, mais elle devient uniforme si l'on en considère seulement une bande limitée par deux droites $\varphi=\text{const}$ dont la distance soit $c\lambda$: telle est par exemple la bande S_1 marquée par des hachures dans la fig. 2, entre les deux droites $\varphi=\pm\frac{c\lambda}{2}$. Sur toutes les deux on a, d'après (10.3),

$$\zeta=-e^{-\frac{2\pi}{c\lambda}\psi},$$

ψ allant de 0 à ∞; leur image commune est par suite le segment $DO(-1,0)$ de la fig. 3. En d'autres termes, à la dite bande correspond le cercle $\mathfrak{D}$ *coupé* le long du rayon OD.

Ce qui nous intéresse essentiellement c'est que *toute fonction périodique, telle que w ou ω, peut être envisagée comme fonction de ζ uniforme et régulière à l'intérieur de la circonférence.*

A la vérité le point $\zeta=0$ correspond, d'après (10.3), aux points à l'infini ($\psi=\infty$) de S (profondeur infinie dans le plan du mouvement), et nous savons seulement que w y tend à c et ω à zéro, sans avoir examiné d'une manière précise comment se comportent ces fonctions à l'infini. Mais, lorsqu'on passe au plan ζ, la régularité en O est assurée (d'après une remarque remontant à Riemann) dès qu'il s'agit de fonctions holomorphes en tout point autre que O, qui restent finies même en O.

11. Forme définitive du problème essentiel. Profil et vitesse en fonction de $\omega(\zeta)$. Vérifications.

Concentrons désormais notre attention sur la fonction $\omega(\zeta)$. D'après ce qui précède elle est holomorphe à l'intérieur de $\mathfrak{C}$, s'annule pour $\zeta = 0$, restant, comme w, pour le moins finie et continue sur la circonférence $\mathfrak{C}$ elle-même. Au point de vue qualitatif elle est encore soumise (dans tout son domaine d'existence, c'est-à-dire pour $|\zeta| \leqq 1$) à l'inégalité (**1.** 2) qui d'ailleurs, puisqu'on a $\frac{w-c}{c} = e^{-i\omega} - 1$, se trouve automatiquement satisfaite dès que le module de ω est assez petit. La condition caractéristique au contour $\mathfrak{C}$ est la (**8.** 3), ou plutôt son équivalente dans le plan ζ. Pour l'obtenir, différentions logarithmiquement (**10.** 3), ce qui donne

$$(\mathbf{11}.\,1) \qquad \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{2\pi i}{c\lambda}\, df = \frac{d\varrho}{\varrho} + i\, d\sigma.$$

Pour f réel, $\varrho = 1$, et on a en particulier

$$(\mathbf{11}.\,2) \qquad d\varphi = \frac{c\lambda}{2\pi}\, d\sigma,$$

après quoi (**8.** 3) acquiert sa forme définitive

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{d\tau}{d\sigma} = p\, e^{-3\tau} \sin\vartheta,$$

ayant posé pour abréger

$$(\mathrm{II}) \qquad p = \frac{g\lambda}{2\pi c^2}.$$

La relation (I) qui doit subsister sur $\mathfrak{C}$ constitue évidemment une liaison entre la partie réelle et le coefficient de i de notre fonction $\omega = \vartheta + i\tau$; la constante positive p, qui est un nombre pur, y apparaît comme un paramètre a priori indéterminé.

On peut à juste titre regarder (I) comme la résolvante de notre problème, puisque — nous allons le vérifier dans un moment — toute fonction $\omega(\zeta)$ holomorphe etc., qui y satisfait, donne lieu à un mouvement ondulatoire doué des propriétés voulues.

On tire d'abord, en combinant (**6.** 2), (**8.** 1) et (**11.** 1),

$$(\mathbf{11}.\,2) \qquad dz = \frac{df}{w} = \frac{\lambda}{2\pi i}\, e^{i\omega} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

d'où, en tenant compte qu'à l'origine C (crête) du plan z doit correspondre le point C ($\zeta = 1$) du plan ζ,

$$(\mathbf{11}.\,3) \qquad z = \frac{\lambda}{2\pi i} \int_1^\zeta e^{i\omega} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Sur la circonférence $\mathfrak{C}$ on a en particulier

$$\zeta = e^{i\sigma}, \quad \frac{d\zeta}{i\zeta} = d\sigma,$$

et par conséquent l'affixe z_l de la ligne libre s'exprime sous la forme

$$z_l = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\sigma e^{i\omega}\,d\sigma, \tag{11.4}$$

équivalente à la représentation paramétrique réelle de la dite ligne

$$\left\{\begin{aligned} x_l &= \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\sigma e^{-\tau}\cos\vartheta\,d\sigma, \\ y_l &= \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\sigma e^{-\tau}\sin\vartheta\,d\sigma. \end{aligned}\right. \tag{11.5}$$

On reconnaît sans peine que

$$\left\{\begin{aligned} x_l(\sigma+2\pi) &= x_l(\sigma)+\lambda, \\ y_l(\sigma+2\pi) &= y_l(\sigma), \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire qu'il s'agit d'un profil d'onde périodique de longueur λ. La démonstration est contenue dans la formule complexe (**11.** 3), d'où résulte en particulier que, si l'on fait décrire à ζ la circonférence $\mathfrak{C}$, z augmente de λ multiplié par le résidu de

$$\frac{e^{i\omega}}{\zeta}$$

au point $\zeta = 0$. Or, ω s'annulant à l'origine, $e^{i\omega} - 1$ s'y annule également, et, étant une fonction régulière, contient ζ en facteur. En écrivant $e^{i\omega} = 1 + (e^{i\omega} - 1)$, on constate que le résidu de $\frac{e^{i\omega}}{\zeta}$ se réduit à l'unité. Donc z subit le déplacement λ (dans le sens Cx) lorsque σ s'augment de 2π. C.Q.F.D.

Il en résulte aussi que la région du plan z balayée par (**11.** 3) lorsque ζ varie dans le cercle $\mathfrak{D}$ ($|\zeta| \leqq 1$) est bien de l'espèce envisagée au début (n° 1).

D'ailleurs il suffit de remplacer, dans (**8.** 1), c'est-à-dire dans

$$w = c e^{-i\omega(\zeta)},$$

la variable ζ par z, pour avoir la solution $w(z)$ du problème mécanique sous sa forme originaire. En effet w satisfait bien à la double condition que l soit à la fois ligne de flux et ligne isobarique. La première circonstance découle immédiatement de (**11.** 2) qui, sur la circonférence $\mathfrak{C}$, se réduit à

$$dz_l = \frac{\lambda}{2\pi} e^{i\omega} d\sigma.$$

En remplaçant $e^{i\omega}$ par sa valeur

$$\frac{c}{w} = \frac{c(u+iv)}{|w|^2},$$

et séparant le réel de l'imaginaire, on voit que dx_l, dy_l sont proportionnelles à u, v; en prenant les modules, on a au surplus

$$dl = \frac{\lambda c}{2\pi}\left|\frac{d\sigma}{w}\right|.$$

Cette identité (en tenant compte que à $d\sigma > 0$ correspond dans le plan z le sens des x croissantes) sert à repasser, par integration immédiate, à la condition d'isobarisme (**5.** 2) (en évitant les étapes intermédiaires où comparaît f). On n'a qu'à se servir de (**8.** 1), (**8.** 2), en écrivant (I) sous la forme

$$\frac{1}{2}\frac{d|w|^2}{d\sigma} = pc^3\frac{v}{|w|^2}.$$

Alors, en remplaçant $d\sigma$ par dl, il vient

$$\frac{1}{2}\frac{d|w|^2}{dl} = 2\pi p\frac{c^2}{\lambda}\frac{v}{|w|}.$$

et finalement, en tenant compte de la valeur (II) de p et remarquant que $\frac{v}{|w|}$, sur une ligne de flux telle que l, n'est que le cosinus $\frac{dy_l}{dl}$, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d|w|^2}{dl} = g\frac{dy_l}{dl},$$

qui est bien équivalent à (**5.** 2).

Il n'est peut être pas sans intérêt d'observer que, dans les équations (**11.** 3) et (**8.** 1) (moyennant lesquelles on déduit z et w de $\omega(\zeta)$), apparaissent les deux constantes λ et c. Elles pouvaient être censées arbitraires toutes les deux jusqu'au moment où l'on fait intervenir la valeur (II) de p. La conséquence en est que, en partant d'une solution $\omega(\zeta)$ de (I), pour une valeur bien déterminée du paramètre p, des deux constantes λ et c, une peut encore être choisie arbitrairement[8]), l'autre en dépendant d'après (II).

---

[8]) Au point de vue de la mesure des grandeurs mécaniques ceci correspond à la circonstance que des trois unités fondamentales une seule reste disponible, puisque d'une part on a convenu que la densité du liquide soit 1, et d'autre part on regarde comme donnée la valeur numérique de p.

Pour être complets il faut nous assurer encore que les caractéristiques de masse (n° 3 et 4) se trouvent aussi satisfaites. Elles se résument, comme nous l'avons constaté au n° 6, dans la circonstance que la fonction (**6.** 3)

$$F(z) = f(z) - cz$$

reste partout finie dans L, ou bien (n° 7) dans la circonstance équivalente que

$$\int_0^f \left(1 - \frac{c}{w}\right) df$$

reste finie, même si l'on s'éloigne à l'infini dans le demi-plan S.

D'après (**8.** 1) et (**11.** 1) l'intégrale précédente s'écrit

$$\frac{c\lambda}{2\pi i} \int_1^\zeta (1 - e^{i\omega}) \frac{d\zeta}{\zeta};$$

elle doit rester finie même pour $\zeta = 0$. C'est bien ce qui arrive, puisque $\frac{1-e^{i\omega}}{\zeta}$ n'a pas de singularité pour $\zeta = 0$.

12. Remarques sur la valeur numérique de p et du rapport $\frac{a}{\lambda}$.

La constante positive

$$\text{(II)} \qquad p = \frac{g\lambda}{2\pi c^2}$$

introduite n° 11 est a priori complètement arbitraire. On peut toutefois se borner à l'étude des mouvements ondulatoires pour lesquels

$$p \leqq 1,$$

puisque de toute solution appartenant à cette catégorie on en déduit d'autres en nombre infini pour lesquelles le paramètre a la valeur

$$p_1 = np \qquad (n \text{ entier arbitraire}).$$

Il suffit pour cela d'associer par la pensée n ondes simples de la solution envisagée. A cet assemblage il correspond évidemment encore une solution du problème, ayant la même vitesse de propagation c et une longueur d'onde $\lambda_1 = n\lambda$.

L'expression (II) de p est alors multipliée par n. C. Q. F. D.

Il vaut peut-être la peine de contrôler la conclusion au point de vue formel, en indiquant comment on passe d'une $\omega(\zeta)$ vérifiant (I) pour $p \leqq 1$ à la nouvelle fonction qui vérifie encore (I), sauf le changement de p en $p_1 = np$, et toutes les autres conditions énumérées au début du n° précédent.

On y arrive en remarquant que, pour l'assemblage de n ondes, on a la même fonction $w(z)$ relative à l'onde simple. Par conséquent (la vitesse c étant aussi la même dans les deux cas) (**8.** 1) et (**6.** 2) donnent lieu à une même fonction ω et à une même f *de* z (*non de* ζ). Au contraire les variables auxiliaires, ζ définie par (**10.** 3) et

$$\zeta_1 = e^{\frac{2\pi i f}{c\lambda_1}},$$

sont différentes à cause de la différence entre λ et λ_1.

On a précisément

$$\zeta = \zeta_1^n.$$

Donc la nouvelle solution est fournie par $\omega(\zeta_1^n)$. Comme l'argument σ_1 de ζ_1 n'est que $n\sigma$, il est bien clair qu'en substituant, dans (I), $\frac{1}{n} d\sigma_1$ à la place de $d\sigma$, et posant en même temps $p_1 = np$, l'équation reste inaltérée.

La limitation aux valeurs de $p \leqq 1$ est bien justifiée par la remarque précédente que les solutions $\omega(\zeta)$ *primitives* — j'indique ainsi celles qui correspondent à $p \leqq 1$ — donnent lieu par substitution matérielle à d'autres *multiples*, permettant d'attribuer à p toute valeur > 1. Toutefois il n'est pas immédiatement évident que les seules solutions de (I) pour $p > 1$ soient celles que l'on peut construire de la sorte. Je crois bien qu'il en soit ainsi, mais je n'ai pas analysé exactement la question.

Quoi qu'il en soit, en supposant désormais $p \leqq 1$ (*ondes primitives*), il est important de signaler une conséquence de l'expression (**9.** 5) de a. En y mettant en évidence le facteur $\frac{c^2}{g}$, c'est-à-dire, d'après (II), $\frac{1}{2\pi p}\lambda$, elle s'écrit

$$(\mathbf{12.}\,1) \qquad \alpha = \frac{a}{\frac{1}{2\pi}\lambda} = \frac{1}{2p}\left(1 - \frac{w_0^2}{c^2}\right) = \frac{1}{2p}\left(1 + \frac{w_0}{c}\right)\left(1 - \frac{w_0}{c}\right).$$

Comme, d'après les prémisses du n° 1, w ne diffère pas beaucoup de c, tandis que le module de $1 - \frac{w_0}{c}$ est toujours une (petite) fraction, on reconnaît de (**12.** 1) que l'ordre de grandeur de $\frac{a}{\lambda}$ est fixé par celui de ladite fraction.

Dans la première approximation, due à Airy, on suppose infiniment petit le rapport $\left|\frac{w-c}{c}\right|$; puisque p résulte dans cette hypothèse $= 1$, tandis que w_0 ne diffère de c que par des infiniment petits, (**12.** 1) nous montre que (en négligeant le second ordre) on a

$$(\mathbf{12.}\,2) \qquad \frac{a}{\lambda} = \frac{1}{2\pi}\frac{c - w_0}{c}.$$

En revenant au cas général nous traiterons dans ce qui va suivre $\left|\frac{w-c}{c}\right|$ comme une fraction (assez petite, mais) finie; dès que $p \leqq 1$, on a bien le droit, d'après (**12.** 1), de dire que notre recherche se rapporte aux ondes de hauteur finie, quoique assez limitée par rapport à la longueur λ.

Si l'on se rappelle que w_0, d'après sa définition, est la vitesse dans une crête C, et que d'ailleurs (ainsi qu'on l'a déjà remarqué au n° préc.) une telle crête a pour image, dans le plan ζ, le point $\zeta = 1$, on a en particulier de (**8.** 1)

$$w_0 = c\, e^{-i\omega(1)}, \tag{12.3}$$

après quoi (**12.** 1) s'écrit aussi

$$\alpha = \frac{a}{\frac{1}{2\pi}\lambda} = \frac{1}{p}\,\frac{1}{2}\left(1 - e^{-2i\omega(1)}\right). \tag{12.4}$$

13. Ondes symétriques. — Anticipation du résultat qu'il n'en existe pas de non symétriques (et permanentes).

Les ondes (dont il a été question jusqu'ici) s'appelent *symétriques ou bifrontes* lorsque leur profil l est symétrique par rapport à la verticale Cy de la crête. Alors, à cause de (**5.** 2), les vitesses en deux points de l tels que (x, y) $(-x, y)$ seront égales en valeur absolue. Il s'en suit que (le sens du mouvement relatif étant toujours celui des x croissantes) les composantes horizontales des vitesses seront égales et les composantes verticales égales et de signe contraire:

$$\begin{cases} u(-x, y) = u(x, y), \\ v(-x, y) = -v(x, y), \end{cases} \tag{13.1}$$

On aura également, d'après la signification de τ et de ϑ:

$$\begin{cases} \tau(-x, y) = \tau(x, y), \\ \vartheta(-x, y) = -\vartheta(x, y). \end{cases} \tag{13.2}$$

Ces relations se rapportent à la frontière l, mais elles s'étendent nécessairement à tout le champ L puisqu'il s'agit de fonctions harmoniques.

En tenant compte de (**13.** 1) on constate immédiatement que, pour les fonctions φ et ψ définies par (**2.** 1), (**2.** 2), on a

$$\begin{cases} \varphi(-x, y) = -\varphi(x, y), \\ \psi(-x, y) = \psi(x, y). \end{cases} \tag{13.3}$$

C'est-à-dire que, dans la correspondance (conforme) des deux plans z et f, la symétrie par rapport à l'axe imaginaire (Cy dans le premier plan, $\Gamma\psi$ dans le second) se conserve.

D'autre part, en passant du plan f au plan ζ, moyennant (**10.** 3)

$$\zeta = e^{\frac{2\pi i f}{c\lambda}},$$

deux points tels que (φ, ψ), $(-\varphi, \psi)$ ont pour images deux points

$$e^{-\frac{2\pi}{c\lambda}\psi} e^{\frac{2\pi i}{c\lambda}\varphi}, \qquad e^{-\frac{2\pi}{c\lambda}\psi} e^{-\frac{2\pi i}{c\lambda}\varphi}$$

conjugués, ou, si l'on veut, symétriques par rapport à l'axe réel.

D'après cela les équations (**13.** 2) rapportées au plan ζ deviennent

(**13.** 4)
$$\begin{cases} \tau(\xi, -\eta) = \quad \tau(\xi, \eta), \\ \vartheta(\xi, -\eta) = -\vartheta(\xi, \eta), \end{cases}$$

d'où en particulier $\vartheta = 0$ pour $\eta = 0$.

C'est dire que la fonction

$$-i\omega(\zeta) = -\tau + i\vartheta$$

doit être réelle, et par suite *que la fonction $\omega(\zeta)$ doit être purement imaginaire sur l'axe réel du plan ζ*. Sur la circonference $\mathfrak{C}$, où τ et ϑ deviennent des fonctions du seul argument σ, on aura en particulier

(**13.** 5)
$$\begin{cases} \tau(-\sigma) = \quad \tau(\sigma), \\ \vartheta(-\sigma) = -\vartheta(\sigma), \end{cases}$$

exprimant que $\tau(\sigma)$ est une fonction paire et $\vartheta(\sigma)$ une fonction impaire.

Nous allons reconnaître dans ce qui va suivre (comme conséquence nécessaire de l'algorithme constructif de $\omega(\zeta)$) que les ondes permanentes sont précisément symétriques.

En attendant il importe de remarquer que *toutes les ondes périodiques bifrontes* possèdent nécessairement une autre propriété: elles *sont symétriques non seulement par rapport à la verticale de la crête, mais aussi par rapport à celle du creux*. On appelle *creux* ou *selle* un point de l correspondant à l'abscisse $x = \frac{\lambda}{2}$, ou a celles qui en diffèrent par un multiple entier de λ (points D', D'', etc. de la fig. 1).

En effet, la périodicité et la symétrie par rapport à la verticale de la crête (axe des ordonnées) donnent en premier lieu pour le profil de l'onde, c'est-à-dire pour l'ordonnée y_l de la ligne libre:

$$y_l(\lambda - x) = y_l(-x) = y_l(x).$$

En y remplaçant x par $\frac{\lambda}{2} - x$ et égalant le premier et le troisième membre il vient

$$y_l\left(\frac{\lambda}{2} + x\right) = y_l\left(\frac{\lambda}{2} - x\right).$$

Plus généralement, des identités

$$u(\lambda - x, y) = u(-x, y) = u(x, y),$$
$$v(\lambda - x, y) = v(-x, y) = -v(x, y)$$

on tire

$$u\left(\frac{\lambda}{2} + x, y\right) = u\left(\frac{\lambda}{2} - x, y\right),$$
$$v\left(\frac{\lambda}{2} + x, y\right) = -v\left(\frac{\lambda}{2} - x, y\right),$$

qui, combinées avec la précédente, expriment bien la propriété annoncée.

D'autre part la formule (**10.** 1) et la première des (**13.** 3) donnent

$$\varphi(\lambda - x, y) = c\lambda + \varphi(-x, y) = c\lambda - \varphi(x, y),$$

d'où, en remplaçant x par $\frac{\lambda}{2} - x$,

$$\varphi\left(\frac{\lambda}{2} + x, y\right) = c\lambda - \varphi\left(\frac{\lambda}{2} - x, y\right)$$

et en particulier

$$\varphi\left(\frac{\lambda}{2}, y\right) = \frac{1}{2}c\lambda.$$

C'est dire, en se rapportant à la correspondance entre les plans z (fig. 1) et f (fig. 2), que la verticale $x = \frac{\lambda}{2}$ du point D'' a pour image, dans le plan f, la droite $\varphi = \frac{1}{2}c\lambda$, d'où il suit (n° 10) que les deux droites $x = -\frac{\lambda}{2}$, $\varphi = -\frac{1}{2}c\lambda$ se correspondent également.

Si l'on passe enfin au plan ζ et à la fonction $\omega(\zeta)$, la combinaison de la périodicité et de la symétrie apparaît encore plus immédiate. En effet la circonstance que $i\omega(\zeta)$ est réel sur l'axe réel s'applique (fig. 3) soit au rayon OC (qui est l'image de la verticale de la crête), soit à son prolongement OD, qui (n° 10) est l'image des droites $\psi = \pm\frac{1}{2}c\lambda$ du plan f, et par conséquent (comme on vient de constater), l'image des verticales des creux (d'', d' de la fig. 1).

Pour les ondes symétriques il y a lieu de signaler, à côté de la formule (**9.** 5) [et de son équivalente (**12.** 1)], qui se rapporte à la hauteur de l'onde, une formule analogue relative à la *dépression d, c'est à dire au niveau d'un creux D'' au-dessous du niveau moyen $y = a$.*

On vient de remarquer qu'à un tel creux correspond, dans le plan ζ, le point $D(\zeta = -1)$. Si l'on désigne par w_1 la vitesse (relative) du liquide au point D'' (dirigée horizontalement dans le sens des x croissants), on a de (**8.** 1)

$$(\mathbf{13.}\,6) \qquad w_1 = c\,e^{-i\omega(-1)}$$

qui résulte effectivement réelle et positive, puisque, comme on l'a constaté, la fonction $i\omega$ est réelle pour ζ réel.

Ceci posé, rapportons-nous au creux D'', dont l'ordonnée, à cause de la définition de d, a la valeur $a+d$. On déduit alors de (**9**. 4) (w_1 ne différant pas de $|w_1|$)

$$\frac{1}{2}w_1^2 - g(a+d) = \frac{1}{2}w_0^2,$$

d'où, en remplaçant $\frac{1}{2}w_0^2$ par sa valeur $\frac{1}{2}c^2 - ga$ fournie par (**9**. 5),

$$d = \frac{1}{2}\frac{w_1^2 - c^2}{g}. \tag{13.7}$$

En introduisant les rapports p, défini par (II) du n° 11, et

$$\delta = \frac{d}{\frac{1}{2\pi}\lambda}, \tag{13.8}$$

on peut écrire, d'après (**13**. 6),

$$\delta = \frac{1}{p}\frac{1}{2}\left(e^{-2i\omega(-1)} - 1\right). \tag{13.9}$$

Nous verrons que, dans les solutions rigoureuses qu'on va construire, d ne résulte pas égal (mais inférieur) à a.

Il s'en suit que *les ondes périodiques permanentes ne sont pas symétriques* (*avec décalage d'une demi-onde*) *par rapport à l'horizontale du niveau moyen.* Cette propriété subsiste seulement en première approximation, c'est-à-dire en regardant ω comme infiniment petite (ondes de Airy), et disparaît (comme il résulte du développement de ω qu'on va former dans les n^os suivants) dès qu'on passe aux approximations successives.

14. Le problème analytique se rapportant à $\omega(\zeta)$. Première approximation (revenant aux ondes simples de Airy). Développement suivant les puissances d'un paramètre μ.

Il s'agit désormais de déterminer une fonction $\omega(\zeta)$ holomorphe pour $|\zeta| < 1$, nulle pour $\zeta = 0$ et satisfaisant à (I) sur la circonférence $\mathfrak{C}$. A cause de l'inégalité fondamentale (**1**. 2), il faut encore et il suffit, comme on l'a déjà remarqué au début du n° 11, que le module de $\omega(\zeta)$ soit, dans tout le domaine $\mathfrak{D}$ ($|\zeta| \leqq 1$) une fraction propre assez petite. Ceci nous suggère d'aborder l'intégration de (I) par approximations successives en négligeant d'abord tous les termes d'ordre supérieur au premier en ϑ, τ. L'équation (I) se réduit alors à la forme

$$\frac{d\tau}{d\sigma} - p\vartheta = 0. \tag{14.1}$$

En remarquant que, sur $\mathfrak{C}$, on a d'après (**11.** 1)

$$i\,d\sigma = \frac{d\zeta}{\zeta}$$

de sorte que, $\mathfrak{R}$ désignant »partie réelle«,

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \mathfrak{R}\left(\frac{d\omega}{i\,d\sigma}\right) = \mathfrak{R}\left(\zeta\frac{d\omega}{d\zeta}\right),$$

$$p\,\vartheta = \mathfrak{R}(p\,\omega),$$

l'équation précédente exprime que la fonction $\zeta\frac{d\omega}{d\zeta} - p\,\omega$ (holomorphe à l'intérieur du cercle) a sa partie réelle nulle sur $\mathfrak{C}$. Dès lors cette partie réelle doit être nulle partout à l'intérieur, et la fonction doit se réduire à une constante purement imaginaire, nulle elle aussi puisque $\omega(0) = 0$.

On a donc identiquement dans $\mathfrak{D}$ ($|\zeta| \leqq 1$)

$$\zeta\frac{d\omega}{d\zeta} - p\,\omega = 0,$$

équation dont on peut représenter l'intégrale générale sous la forme

$$\omega = -i\,\mu\,\zeta^p \quad (\mu \text{ constante arbitraire}).$$

La condition que ω soit holomorphe à l'intérieur du cercle exige que la constante (positive) $p \leqq 1$ soit exactement 1, et l'on est conduit à la première approximation (de Airy)

$$(\mathbf{14.}\,2) \qquad \omega = -i\,\mu\,\zeta.$$

Sur la crête la vitesse doit être horizontale, ce qui exige $\vartheta = 0$, c'est-à-dire ω purement imaginaire au point $\zeta = 1$ correspondant à la crête. Il s'en suit que *la constante μ doit être réelle.* D'autre part la valeur absolue $c\,e^{\tau}$ de la vitesse (relative) atteint au point C sa valeur minimum w_0, qui est nécessairement (n° 9) $< c$. Donc τ est < 0 pour $\zeta = 1$. Sa valeur étant donnée par $-\mu$, on voit que *μ doit être aussi positif.* Il reste d'ailleurs arbitraire, sauf la limitation numérique d'être assez petit (provenant de la limitation analogue imposée à $|\omega|$). Dans la première approximation, μ doit être traité, à l'instar de ω, comme une quantité du premier ordre.

A cette première approximation (**14.** 2) correspondent les ondes simples de Airy. Il s'agit en premier lieu d'ondes symétriques, puisque (n° précédent) $i\,\omega$ est réel pour ζ réel.

On a ensuite

$$\omega(1) = -i\,\mu, \quad \omega(-1) = i\,\mu,$$

$\vartheta = \mu\sin\sigma$, $\tau = -\mu\cos\sigma$, $e^{-\tau}\cos\vartheta = 1 + \mu\cos\sigma$, $e^{-\tau}\sin\vartheta = \mu\sin\sigma$, sur $\mathfrak{C}$, d'où, d'après (**12.** 3) et (**13.** 6),

$$w_0 = c\,e^{-i\omega(1)} = c\,e^{-\mu} = c(1-\mu), \quad w_1 = c\,e^{-i\omega(-1)} = c\,e^{\mu} = c(1+\mu),$$

tandis que la représentation paramétrique (**11.** 5) de la ligne l donne

$$x_l = \frac{\lambda}{2\pi}(\sigma + \mu \sin\sigma), \quad y_l = \frac{\lambda}{2\pi}\mu(1-\cos\sigma),$$

d'où (en négligeant toujours μ^2)

$$y_l = \frac{\lambda}{2\pi}\mu\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

Le profil est donc sinusoïdal; par conséquent hauteur et dépression (au-dessus et au-dessous du niveau moyen) ont même valeur, etc.

Pour passer ensuite à l'intégration rigoureuse de (I), nous essayerons l'hypothèse que la fonction inconnue $\omega(\zeta)$ et la constante positive p (également inconnue) soient développables suivant les puissances d'un paramètre positif μ, de valeur arbitraire (suffisamment petite).

Nous poserons en conformité

$$(\mathbf{14.}3) \qquad \begin{cases} \omega = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \mu^n, \\ p = 1 - k, \quad k = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \mu^n, \end{cases}$$

où les séries sont censées uniformément convergentes pour $|\mu|$ assez petit, les $\omega_n(\zeta) = \vartheta_n + i\,\tau_n$ désignant des fonctions de ζ (holomorphes pour $|\zeta| \leqq 1$ et nulles en O) et les k_n des constantes qu'il s'agit de déterminer d'après les conditions imposées à $\omega(\zeta)$.

A propos de la première série $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(\zeta)\mu^n$ on admettra aussi (en se réservant de contrôler toutes ces circonstances a posteriori) qu'elle est uniformément convergente dans $\mathfrak{D}$ ($|\zeta| \leqq 1$), et qu'il en est de même pour la série des dérivées $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d\omega_n}{d\zeta}\mu^n$.

D'après cela, si l'on introduit dans (I) les expressions (**14.** 3) et que l'on égale dans les deux membres les termes du premier ordre en μ, on est évidemment reconduit pour caractériser $\mu\,\omega_1$ à l'équation (**14.** 1), où l'on a déjà posé $p = 1$. Il s'en suit, d'après (**14.** 2),

$$(\mathbf{14.}4) \qquad \omega_1 = -i\,\zeta.$$

Remarque.

Aux hypothèses précédentes *on peut ajouter sans restriction logique la spécification ultérieure que la différence*

$$\omega - \mu\,\omega_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n\,\mu^n$$

et par conséquent toutes les fonctions $\omega_n\,(n > 1)$ *contiennent* ζ^2 *en facteur*. En effet, s'il n'en était pas ainsi, le développement taylorien (en série de puissances de ζ) de $\omega - \mu\,\omega_1$ (qui s'annule pour $\zeta = 0$) commencerait par un terme en ζ dont le coefficient pourrait être désigné par $-\mu_1$, μ_1 étant une fonction de μ (holomorphe pour $|\mu|$ assez petit) qui contient μ^2 en facteur. Il serait alors loisible de prendre comme première approximation de ω, au lieu que $\mu\,\omega_1$,

$$\mu^*\,\omega_1 = \mu\,\omega_1 - i\,\mu_1\,\zeta = -\,i\,(\mu + \mu_1)\,\zeta,$$

et d'imaginer la fonction $\omega(\zeta)$ développée suivant les puissances de

$$\mu^* = \mu + \mu_1,$$

au lieu du développement suivant les puissances de μ, ce qui, d'après ce qu'on vient de dire, est parfaitement légitime pourvu que $|\mu|$ soit assez petit. Sous cette nouvelle forme $\omega - \mu^*\,\omega_1$ contiendrait évidemment le facteur ζ^2. Il est donc loisible de l'admettre dès le début.

15. Quelques lemmes servant à préparer les approximations successives.

En écrivant $1 - k$ au lieu de p on peut attribuer à l'équation (I) la forme

$$\text{(I')} \qquad \frac{d\tau}{d\sigma} - \vartheta = (1 - k)\,P(\vartheta, \tau) - k\,\vartheta,$$

où

$$\text{(15. 1)} \qquad P(\vartheta, \tau) = e^{-3\tau} \sin\vartheta - \vartheta.$$

Cette fonction P est évidemment une transcendente entière par rapport à chacun des deux arguments ϑ, τ, et son développement en série de ces deux arguments commence par le terme du second dégré $-3\,\vartheta\tau$.

D'autre part les développements (**14.** 3) entraînent

$$\text{(15. 2)} \qquad \begin{cases} \vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n\,\mu^n, \\ \tau = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n\,\mu^n, \end{cases}$$

étant sousentendu que $\omega_n = \vartheta_n + i\,\tau_n$.

Il s'en suit que, si, dans $(1-k)P(\vartheta, \tau)$, on envisage ϑ, τ et k comme des fonctions de μ, pour tenir compte des termes en $\mu, \mu^2, \ldots, \mu^n$, il suffit de considérer, *dans k, les premiers $n-2$ termes du développement*, puisqu'on doit les multiplier par P qui contient μ^2 en facteur; et, *dans ϑ, τ, les premiers $n-1$ termes*, puisqu'il s'y ajoute pour le moins un facteur μ.

Le coefficient de μ^n dans $(1-k)P$ peut naturellement être représenté sous la forme

$$(15.3) \qquad \tilde{\omega}_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\mu^n}(1-k)P\right]_{\mu=0},$$

la dérivation par rapport à μ devant être faite, cela va dans dire, par l'intermédiaire des arguments ϑ, τ, k.

Considérons pour un moment aussi le coefficient de μ^n dans $P(\vartheta, \tau)$

$$(15.4) \qquad P_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n P}{d\mu^n}\right]_{\mu=0}.$$

Naturellement il ne dépend lui aussi que de $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{n-1}$, $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}$, mais il possède en autre la propriété d'être une *fonction isobarique de poids n* par rapport à l'ensemble de ces arguments.

En effet multiplier ϑ_1, τ_1 par un nombre arbitraire γ, ϑ_2, τ_2 par γ^2 etc., ϑ_n, τ_n par γ^n c'est, d'après (15.2), comme multiplier μ par γ (dans les termes de P qui influencent le coefficient de μ^n).

Le coefficient de μ^n est alors multiplié par γ^n. C. Q. F. D.

Ceci posé, remarquons que $\omega_1 = -i\zeta$ est un polynome du premier dégré en ζ, possédant évidemment ces deux propriétés:

il est purement imaginaire pour ζ réel; $\mu\omega_1$ ne change pas lorsqu'on y change à la fois ζ en $-\zeta$ et μ en $-\mu$.

Cherchons d'après cela de procéder par récurrence en supposant qu'on ait réussi à déterminer aussi les fonctions

$$\omega_\nu(\zeta) \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n-1)$$

et les constantes $k_1, k_2, \ldots, k_{n-2}$, et à constater, à l'égard de ces dernières, que $k_1, k_3, \ldots$ (tous les k d'indice impair non supérieur à $n-2$) sont nulles, et, à l'égard des ω_ν, qu'il s'agit de polynomes de dégré ν, divisibles par ζ^2, qui sont en outre:

a) purement imaginaires pour ζ réel;

b) tels que $\mu^\nu\omega_\nu(\zeta)$ reste inaltéré lorsqu'on y change à la fois ζ en $-\zeta$ et μ en $-\mu$.

On montrera au n° suivant que l'équation (I') (conjointement avec la condition de régularité dans $\mathfrak{D}$ et de divisibilité par ζ^2) conduit à assigner sans ambiguité la constante k_{n-1} (nulle si n est pair) et la onction $\omega_n(\zeta)$, cette dernière comme polynome de dégré n, lui aussi divisible par ζ^2 et possédant les deux propriétés a) et b).

En attendant il nous faut préciser davantage la structure de $\tilde{\omega}_n$.

Partons pour cela des deux propriétés a) et b) dont jouissent ω_1, par vérification directe, et $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{n-1}$, par hypothèse.

Elles impliquent, en se rapportant en particulier à la circonférence $\mathfrak{C}$ $(\zeta = e^{i\sigma})$, que

a′) les parties réelles $\vartheta_1(\sigma), \vartheta_2(\sigma), \ldots, \vartheta_{n-1}(\sigma)$ sont des fonctions impaires de l'argument σ, et les conjuguées $\tau_1(\sigma), \tau_2(\sigma), \ldots, \tau_{n-1}(\sigma)$ des fonctions paires;

b′) $$\mu^\nu \vartheta_\nu(\sigma), \qquad \mu^\nu \tau_\nu(\sigma) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

restent inaltérées, lorsqu'on y change à la fois σ en $\sigma + \pi$ et μ en $-\mu$.

D'après (**15.** 2), on peut énoncer ces propriétés individuelles des fonctions ϑ_ν, τ_ν, sous la forme condensée que voici:

Dès qu'on néglige les termes d'ordre supérieur à $n-1$ par rapport à μ, ϑ est nécessairement une fonction impaire et τ une fonction paire de l'argument σ; l'une et l'autre restent inaltérées lorsqu'on change à la fois σ en $\sigma + \pi$ et μ en $-\mu$.

Reprenons maintenant la fonction $(1-k)P(\vartheta, \tau)$ et la remarque que les premiers n termes de son développement suivant les puissances de μ ne dépendent que des $n-1$ premiers termes dans le développement analogue de P, et des $n-2$ premiers termes dans celui de k.

Puisque

$$(1-k)P(\vartheta, \tau) = (1-k)e^{-3\tau}\sin\vartheta - (1-k)\vartheta$$

est (rigoureusement) une fonction impaire de ϑ, elle doit l'être aussi de σ (jusqu'au terme en μ^n inclus) d'après ce qu'on vient de dire.

Il s'en suit en particulier, d'après (**15.** 3), que $\tilde{\omega}_n$ est une fonction impaire de σ. D'autre part (k ne contenant, au moins jusqu'à l'ordre $n-2$, que des puissances paires de μ) $(1-k)P$ ne change pas, jusqu'au terme en μ^n inclus, lorsqu'on y change à la fois σ en $\sigma+\pi$ et μ en $-\mu$. Il en est de même par conséquent pour $\mu^n \tilde{\omega}_n$. On a ainsi démontré que $\tilde{\omega}_n$ vérifie ces deux relations:

(**15.** 5) $$\tilde{\omega}_n(-\sigma) = -\tilde{\omega}_n(\sigma),$$

(**15.** 6) $$\tilde{\omega}_n(\sigma+\pi) = (-1)^n \tilde{\omega}_n(\sigma).$$

Or on a reconnu que

$$P_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n P}{d\mu^n}\right]_{\mu=0}$$

est une fonction isobarique de poids n des arguments ϑ_ν, τ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Ces arguments peuvent être régardés sur $\mathfrak{C}$ comme des polynomes de dégré ν en $\cos\sigma$, $\sin\sigma$. Il s'en suit que la combinaison isobarique P_n se présente elle aussi, sur $\mathfrak{C}$, comme un polynome en $\cos\sigma$, $\sin\sigma$, naturellement de dégré n.

Si l'on tient compte de ce que, dans le développement de la constante k suivant les puissances de μ, il n'y a pas, par hypothèse, de puissances impaires jusqu'à l'ordre $n-2$ inclus, on voit bien que le coefficient de μ^n dans $(1-k)P$, c'est-à-dire $\tilde{\omega}_n$, est une combinaison à coefficients constants de $P_n, P_{n-2}, \ldots$ et peut par conséquent être regardé comme un polynome en $\cos\sigma$, $\sin\sigma$ de dégré n au plus. Cette circonstance, combinée avec les relations (**15.** 5) et (**15.** 6), permet d'affirmer que le développement de Fourier de $\tilde{\omega}_n(\sigma)$ ne contient que des sinus, à cause de l'imparité de la fonction; va jusqu'au terme en $\sin n\sigma$ au plus, puisqu'il s'agit d'un polynome de dégré non supérieur à n en $\cos\sigma$, $\sin\sigma$; et contient seulement les termes se rapportant aux multiples $(n-2\nu)\sigma$ de même parité que n, à cause de (**15.** 6). On a par suite

$$(15.\,5)\qquad \tilde{\omega}_n = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} q^*_{n|n-2\nu} \sin(n-2\nu)\sigma$$

les $q^*_{n|\nu}$ désignant des constantes et $\left[\frac{n}{2}\right]$ la partie entière de $\frac{n}{2}$.

16. Calcul de k_{n-1} et de $\tilde{\omega}_n(\zeta)$.

Nous sommes maintenant à même de tirer parti de (I′) en égalant les coefficients de μ^n dans les deux membres.

Puisque le coefficient de μ^n dans $k\vartheta$ est

$$k_1\vartheta_{n-1} + k_2\vartheta_{n-2} + \ldots + k_{n-2}\vartheta_2 + k_{n-1}\vartheta_1 = \sum_{\nu=1}^{n-2} k_\nu \vartheta_{n-\nu} + k_{n-1}\vartheta_1$$

et d'ailleurs, d'après (**14.** 4), $\vartheta_1 = \sin\sigma$, si l'on pose pour abréger

$$(16.\,1)\qquad \chi_n = \tilde{\omega}_n - \sum_{\nu=1}^{n-2} k_\nu \vartheta_{n-\nu},$$

il vient immédiatement

$$(16.\,2)\qquad \frac{d\tau_n}{d\sigma} - \vartheta_n = \chi_n - k_{n-1}\sin\sigma, \qquad \text{sur } \mathfrak{C}.$$

En tenant compte des hypothèses et des remarques du n° précédent, l'égalité (**16.** 1) montre que χ_n est une fonction de σ, connue et impaire, dont le développement trigonométrique a les mêmes caractéristiques qu'on a établies à l'égard de $\tilde{\omega}_n$, et est par conséquent de la forme

$$\chi_n(\sigma) = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} q_{n/n-2\nu} \sin(n-2\nu)\sigma,$$

les q étant (comme les q^*) des constantes qu'on doit censer connues.

Le terme correspondant à $\nu = \left[\frac{n}{2}\right]$ s'annule pour n pair et, pour n impair, prend la forme $q_{n/1} \sin\sigma$. *En convenant d'attribuer à $q_{n/1}$ la valeur zéro, pour n pair,* on peut retenir en tout cas

$$(\mathbf{16}.3) \qquad \chi_n(\sigma) = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} q_{n/n-2\nu} \sin(n-2\nu)\sigma + q_{n/1} \sin\sigma.$$

La somme contient d'après cela des termes en $\sin n\sigma$, $\sin(n-2)\sigma$, $\sin(n-4)\sigma, \ldots$, en descendant jusqu'à $\sin 2\sigma$ ou à $\sin 3\sigma$ suivant que n est pair ou impair.

Il s'agit désormais de tirer de (**16**.2) et la constante k_{n-1} et la fonction $\omega_n(\zeta)$. Puisque ω_n doit être holomorphe pour $|\zeta| < 1$ et nulle (du second ordre) pour $\zeta = 0$, elle admettra un développement taylorien de la forme

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} c_{n/\nu} \zeta^\nu,$$

les $c_{n\nu}$ désignant des constantes (complexes) inconnues, que j'envisagerai sous la forme $a_{n/\nu} - i b_{n/\nu}$, les a et les b étant réelles.

En admettant que $\omega_n(\zeta)$ reste holomorphe aussi sur $\mathfrak{C}(|\zeta| = 1)$ ou, ce qui suffit pour notre but, qu'elle y soit continue avec sa dérivée $\frac{d\omega_n}{d\zeta}$ et que l'une et l'autre soient développables en séries de Fourier (uniformément convergentes), on aura

$$\omega_n = \vartheta_n + i\tau_n = \sum_{\nu=2}^{\infty} (a_{n/\nu} - i b_{n/\nu}) e^{i\nu\sigma},$$

d'où

$$\begin{cases} \vartheta_n = \sum_{\nu=2}^{\infty} (a_{n/\nu} \cos\nu\sigma + b_{n/\nu} \sin\nu\sigma), \\ \tau_n = \sum_{\nu=2}^{\infty} (a_{n/\nu} \sin\nu\sigma - b_{n/\nu} \cos\nu\sigma), \end{cases}$$

$$\frac{d\tau_n}{d\sigma} - \vartheta_n = \sum_{\nu=2}^{\infty} [(\nu-1) a_{n/\nu} \cos\nu\sigma + (\nu-1) b_{n/\nu} \sin\nu\sigma].$$

Afin que cette dernière expression résulte identique au second membre de (**16**. 2), c'est-à-dire, d'après (**16**. 3), à

$$(q_{n/1}-k_{n-1})\sin\sigma+\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} q_{n/n-2\nu}\sin(n-2\nu)\sigma,$$

il faut avant tout que le coefficient de $\sin\sigma$ dans le second membre soit nul, *ce qui détermine k_{n-1} en lui assignant la valeur $q_{n/1}$, c'est-à-dire zéro pour n pair, comme il s'agissait de vérifier.*

Quel que soit n, on peut retenir

$$k_{n-1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi_n\sin\sigma\,d\sigma. \tag{16.4}$$

Arrêtons-nous en passant sur cette formule pour faire remarquer que, à cause de (**16**. 1), on peut y remplacer, sous le signe d'intégrale, χ_n par $\tilde{\omega}_n$. En effet la circonstance que $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{n-1}$ contiennent ζ^2 en facteur entraîne que les développements de Fourier de $\vartheta_2, \vartheta_3, \ldots, \vartheta_{n-1}$ ne renferment pas de termes en $\sin\sigma$. On a donc

$$k_{n-1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{\omega}_n\sin\sigma\,d\sigma. \tag{16.5}$$

En revenant à notre identité, on en tire ensuite que tous les $a_{n/\nu}$ et, pour $\nu>n$, aussi tous les $b_{n/\nu}$ doivent s'annuler; enfin que, pour $\nu\leqq\left[\frac{n}{2}\right]-1$,

$$b_{n/n-2\nu}=\frac{q_{n/n-2\nu}}{n-2\nu-1},$$

tandis que les autres b (dont le second indice n'a pas la même parité que n) sont également nulles. On en tire

$$\omega_n(\zeta)=-i\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}\frac{q_{n/n-2\nu}}{n-2\nu-1}\zeta^{n-2\nu}. \tag{16.6.}$$

C'est bien un polynome de dégré n, divisible en tout cas par ζ^2, purement imaginaire sur l'axe réel, et possédant la propriété b), c'est-à-dire tel que

$$\omega_n(-\zeta)=(-1)^n\omega_n(\zeta).$$

L'algorithme constructif des fonctions $\omega_n(\zeta)$ et des constantes k_{n-1} reste ainsi univoquement déterminé, s'appliquant de proche en proche, par une marche régulière de calcul, à partir de $n=2$ et de $\omega_1=-i\zeta$, pour toutes les valeurs entières de n.

Si l'on se propose d'arriver, dans les développements de ω et de k, jusqu'aux termes d'un ordre n donné, il faut assigner l'un après l'autre les $n-1$ polynomes $\omega_\nu(\zeta)$ $(\nu = 2, 3, \ldots, n)$ de degré ν, et les n constantes $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Comme un polynome $\omega_\nu(\zeta)$, rentrant dans le type (**16.** 6) dépend de $\left[\frac{\nu}{2}\right]$ constantes réelles, et comme d'ailleurs (les k d'ordre impair étant nulles), permi les $k_1, k_2, \ldots, k_n$ il y en a $\left[\frac{n}{2}\right]$ à déterminer, les calculs à effectuer (purement rationnels et dans le champ réel) reviennent à l'évaluation de

$$\sum_{\nu=2}^{n}\left[\frac{\nu}{2}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]$$

constantes.

Si l'on suppose n de la forme $2m$, on constate sans peine que la somme indiquée n'est que $m(m+1)$, c'est-à-dire $\frac{n(n+2)}{4}$; tandis que si n est de la forme $2m+1$, l'expression précédente a la valeur $m(m+2)$ qui peut s'écrire $\frac{n(n+2)-3}{4}$.

Donc, pour arriver jusqu'à l'ordre n, il faut se procurer $\frac{n(n+2)}{4}$ ou bien $\frac{n(n+2)-3}{4}$ constantes selon que n est pair ou impair.

Les calculs numériques se trouvent développés dans l'appendice jusqu'à $n=5$. D'après ce qu'on vient de dire, les expressions de ω et de k renfermeront, à cet ordre d'approximation,

$$\frac{5(5+2)-3}{4} = 8$$

coefficients.

Au point de vue mathématique il faut naturellement établir la convergence de ce procédé en s'assurant en même temps que les hypothèses du n° 14 sont bien vérifiées a posteriori. Nous y réussirons aisément en ayant recours à la méthode des limites de Cauchy. Pour s'en servir dans le cas actuel il semble toutefois essentiel de s'appuyer aussi sur un résultat qui figure (avec d'autres analogues) dans le mémoire des Math. Ann. cité au début. Sans rien emprunter à ce mémoire, je vais démontrer directement la proposition particulière qui nous intéresse ici.

17. Inégalité se rattachant a l'opération fonctionelle qui définit les approximations successives.

Il résulte du n° précédent que la détermination de chaque polynome $\omega(\zeta)$ se fait moyennent l'équation (**16.** 2), qui, en supprimant pour simplifier l'index n et en tenant compte d'avance de (**16.** 4), rentre dans le schéma

$$(\mathbf{17.}1) \qquad \frac{d\tau}{d\sigma} - \vartheta = \chi(\sigma) = \sum_{\nu=2}^{n} \mathfrak{x}_\nu \sin \nu\sigma,$$

où les $\mathfrak{x}_\nu$ désignent des constantes.

Sa solution $\omega(\zeta)$ est donnée par (**16.** 6), c'est-à-dire par

$$(\mathbf{17.}2) \qquad \omega = -i \sum_{\nu=2}^{n} \frac{\mathfrak{x}_\nu}{\nu - 1} \zeta^\nu.$$

Nous nous proposons d'obtenir une limitation supérieure de $|\omega|$ et de $\left|\frac{d\omega}{d\zeta}\right|$ dans tout le domaine $\mathfrak{D}$ ($|\zeta| \leqq 1$) en fonction des données, plus précisément des maxima M, M' de $|\chi(\sigma)|$ et $|\chi'(\sigma)|$ sur la circonférence $\mathfrak{C}$. A ce but on commence par exprimer le second membre de (**17.** 2) sous forme d'intégrale définie portant sur $\chi(\sigma)$. On y parvient, quel que soit le dégré de $\chi(\sigma)$, en introduisant la fonction auxiliaire

$$(\mathbf{17.}3) \qquad N(\zeta) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\zeta^m}{m-1} = \zeta \log \frac{1}{1-\zeta}.$$

En effet on vérifie bien facilement, d'après (**17.** 2), que

$$(\mathbf{17.}4) \qquad \omega(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} N(\zeta e^{-i\sigma_1}) \chi(\sigma_1)\, d\sigma_1,$$

pourvu qu'on remplace sous le signe N et χ par leurs développements (**17.** 1) et (**17.** 3), et qu'on intègre ensuite terme à terme. Ceci est légitime sans discussion pour $|\zeta| < 1$, et se justifie sans peine pour $|\zeta| = 1$.

En tenant compte que $\zeta = \varrho e^{i\sigma}$ et en prenant comme variable d'intégration $s = \sigma_1 - \sigma$ à la place de σ_1, (**17.** 4) (à cause de la périodicité des fonctions sous le signe, qui permet de retenir les limites $-\pi$ et π) peut s'écrire

$$(\mathbf{17.}5) \qquad \omega(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} N(\varrho e^{-is}) \chi(s + \sigma)\, ds.$$

Comme, pour une fonction monogène, $\frac{d\omega}{d\zeta}$ peut être calculée en faisant varier seulement σ (et non ϱ), on a

$$i\zeta \frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{d\omega}{d\sigma},$$

après quoi on tire de (**17.** 5)

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{1}{\pi i \zeta} \int_{-\pi}^{\pi} N(\varrho e^{-is}) \chi'(s + \sigma)\, ds;$$

et, reprenant ensuite comme variable d'intégration $\sigma_1 = s + \sigma$, il vient

$$(\mathbf{17}.6) \qquad \frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{1}{\pi i \zeta} \int_{-\pi}^{\pi} N(\zeta e^{-i\sigma_1}) \chi'(\sigma_1) d\sigma_1 .$$

Ceci posé, soient M et M' les maxima des valeurs absolues de $\chi(\sigma)$ (sur $\mathfrak{C}$). On déduit immédiatement de (**17**.3), (**17**.4), et (**17**.6) que, pour $|\zeta| \leqq 1$,

$$(\mathbf{17}.7) \qquad \begin{cases} |\omega| \leqq JM, \\ \left|\dfrac{d\omega}{d\zeta}\right| \leqq JM', \end{cases}$$

en désignant par J une constante non inférieure au maximum, pour $|\zeta| \leqq 1$, de

$$(\mathbf{17}.8) \qquad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X| \, d\sigma_1$$

où

$$X = \log \frac{1}{1 - \zeta e^{-i\sigma_1}} .$$

On peut affirmer d'avance qu'il existe un tel maximum fini, puisque $|X|$, tout en pouvant devenir infini lorsque ζ appartient a $\mathfrak{C}$, reste toujours intégrable. L'intégrale (**17**.8) ne paraît pas réductible à un type connu. Mais il nous suffit d'en fixer une limite supérieure, par exemple celle qui résulte de l'inégalité élémentaire

$$|X| \leqq \frac{1}{2}(1 + |X|^2).$$

On a alors

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X| \, d\sigma_1 \leqq 1 + \mathfrak{I},$$

ayant posé

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X|^2 d\sigma_1 .$$

Dans cette intégrale, on prendra encore une fois $s = \sigma_1 - \sigma$ comme variable d'intégration et on écrira aussi $X\overline{X}$ ($\overline{X}$ conjugué de X) au lieu de $|X|^2$, ce qui donne

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X \overline{X} \, ds ,$$

avec

$$X = \log \frac{1}{1 - \varrho e^{-is}} .$$

Pour $\varrho < 1$ on peut développer X en série de puissances de ϱ et on a

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^n}{n} e^{-ins};$$

de même

$$\overline{X} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varrho^m}{m} e^{ims}.$$

Les séries sont uniformément et absolument convergentes pour toute valeur réelle de s. En les introduisant dans l'expression de $\mathfrak{J}$, elles peuvent être traitées comme des sommes ordinaires et nous conduisent à

$$\mathfrak{J} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^{2n}}{n^2}.$$

Cette dernière série reste convergente pour $\varrho = 1$ et la somme y atteint sa valeur maximum (dans le domaine $\mathfrak{D}$) $\frac{\pi^2}{6}$. On peut retenir $\mathfrak{J} \leqq \frac{\pi^2}{6}$, et par conséquent

$$J \leqq 1 + \frac{\pi^2}{6}. \tag{17.9}$$

18. Introduction d'un type particulier de fonctions majorantes.

Soit $\vartheta(\mu, Q)$ une fonction de la variable complexe μ et du point Q variable dans un domaine $\mathfrak{D}^*$ appartenant au cercle $\mathfrak{D}$, domaine qui peut en particulier coïncider avec $\mathfrak{D}$, ou bien — c'est un cas important pour l'application que nous avons en vue — se réduire uniquement à la circonférence $\mathfrak{C}$.

On suppose ϑ holomorphe par rapport a μ, pour $|\mu|$ assez petit (et Q en $\mathfrak{D}^*$), uniforme et continue dans $\mathfrak{D}^*$ avec ses dérivées premières de direction, par rapport au point Q. D'après ces hypothèses la fonction ϑ est développable en série de puissances de μ:

$$\vartheta = \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n(Q)\,\mu^n, \tag{18.1}$$

les ϑ_n se comportant comme ϑ à l'égard de l'argument Q.

Je dirai que $\Omega(\mu, \zeta)$, fonction des deux variables complexes μ et $\zeta = \varrho e^{i\sigma}$, holomorphe pour $|\mu|$ assez petit et $|\zeta| \leqq 1$, est une *majorante stokienne*[9]) *de* ϑ, *lorsque son développement* $\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n(\zeta)\,\mu^n$ *jouit des propriétés suivantes: les* Ω_n *sont des séries (ou des polynomes) en* ζ *à coefficients*

[9]) D'après Stokes qui a abordé le premier le problème des ondes d'ampleur non infiniment petite.

positifs, dont les maxima $\Omega_n(1)$ *ne sont pas dépassés par* $|\vartheta_n|$ *quel que soit le point* Q *dans le domaine* $\mathfrak{D}^*$; *en outre, dans ce même domaine, les maxima* $\Omega'_n(1)$ *des modules des dérivées* $\frac{d\Omega_n}{d\zeta}$ *ne sont pas dépassés par les modules des dérivées de direction de* $\vartheta_n(Q)$.

Pour indiquer tout cela j'écrirai brièvement, à l'exemple de Poincaré,

$$\vartheta \ll \Omega .$$

Voici quelques conséquences de la définition précédente, que je me borne à énoncer puisque il est bien aisé de s'en rendre compte:

1°. Si ϑ ne dépend pas de Q, une majorante ordinaire par rapport à l'argument μ (à coefficients constants) en est en même temps une majorante stokienne.

2°. Si au contraire ϑ ne dépend pas de μ, pour s'en procurer une majorante stokienne, il suffit p. ex. d'avoir recours à une expression linéaire

$$M'\zeta + M$$

où M, M' sont respectivement les maxima de $|\vartheta|$ et des modules de ses dérivées de direction dans $\mathfrak{D}^*$. Mais on peut préférer des formes différentes. P. ex., si $\vartheta(Q)$ est un polynome $\omega_n(\zeta)$ de degré n en ζ,

$$\omega_n(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \zeta^\nu ,$$

une majorante stokienne est fournie par tout polynome du même degré

$$\Omega_n(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{n} B_\nu \zeta^\nu$$

à coefficients positifs, satisfaisant aux inégalités

$$\Omega_n(1) = \sum_{\nu=0}^{n} B_\nu \geqq M,$$

$$\Omega'_n(1) = \sum_{\nu=0}^{n} \nu B_\nu \geqq M'.$$

3°. Soit $\omega(\mu, \zeta)$ une fonction des variables complexes μ et ζ, holomorphe pour $|\mu|$ assez petit et ζ appartenant à $\mathfrak{D}$. Supposons que $\Omega(\mu, \zeta)$ en constitue une majorante stokienne.

Si $\vartheta(\mu, Q)$, $\tau(\mu, Q)$ (Q affixe de ζ) sont respectivement la partie réelle et le coefficient de i dans ω, on aura à fortiori

$$\vartheta \ll \Omega , \qquad \tau \ll \Omega .$$

4°. Les relations de majorance stokienne peuvent être additionnées, multipliées, et aussi dérivées indéfiniment par rapport à μ (non pas par rapport aux cordonnées de Q).

5°. Soit $\mathfrak{p}(\vartheta, \tau)$ un polynome ou une série de puissances des arguments ϑ, τ, et $\mathfrak{P}(\vartheta, \tau)$ une majorante (au sens ordinaire, par rapport aux deux arguments). Si l'on se place dans l'hypothèse de l'énoncé 3°, on pourra affirmer que

$$\mathfrak{P}(\Omega, \Omega)$$

constitue une majorante stokienne de $\mathfrak{p}(\vartheta, \tau)$.

En tenant compte de la notion de majorante stokienne, le résultat du n° précédent donne lieu au corollaire que voici: Soit $\mathrm{X}(\zeta)$ une majorante stokienne de $\chi(\sigma)$ [second membre de (**17.** 1)]. $J\mathrm{X}(\zeta)$ constitue une majorante stokienne du polynome $\omega(\zeta)$ défini par (**17.** 2).

19. Conditions d'après lesquelles on introduit des majorantes pour k_{n-1} et pour $\omega_n(\zeta)$.

Reprenons maintenant les développements (**14.** 3), et proposons-nous de les justifier en constatant l'existence des majorantes (stokiennes)

$$(\mathbf{19.}\,1)\qquad \begin{cases} \Omega(\mu, \zeta) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n \mu^n, \\ K \quad = \sum\limits_{n=1}^{\infty} K_n \mu^n, \end{cases}$$

la seconde ne différant pas (n° préc., 1°) d'une majorante ordinaire par rapport à μ.

L'esprit de la méthode est d'y parvenir en majorant à chaque pas l'algorithme constructif (exposé aux n° 15 et 16) des coefficients $\omega_n(\zeta)$ et k_n: les $\Omega_n(\zeta)$ et K_n, obtenues de la sorte, doivent rendre convergentes les séries (**19.** 1) pour $|\zeta| \leqq 1$ et $|\mu|$ assez petit. On sera alors assuré, d'après la définition des majorantes stokiennes, que les séries (**14.** 3) convergent pour $|\mu|$ assez petit, et cela, pour la première qui dépend aussi de ζ, uniformément dans $\mathfrak{D}$.

Pour le choix des majorantes Ω_n et K_n il est naturellement indiqué de partir de l'équation (I′) du n° 15 et de former d'abord une majorante stokienne du second membre

$$(1-k)\,P(\vartheta, \tau) - k\,\vartheta.$$

Le corollaire 5° du n° précédent montre immédiatement (si ω possède effectivement une majorante) que

$$P(\vartheta, \tau) = e^{-3\tau} \sin\vartheta - \vartheta$$

admet pour majorante stokienne

$$(\mathbf{19.}\,2)\qquad G(\Omega) = e^{3\Omega}\,\mathfrak{Sin}\,\Omega - \Omega,$$

$\mathfrak{Sin}$ désignant le sinus hyperbolique.

Dès lors (si tant est qu'il existe une majorante K de k)

$$(1+K)\,G(\Omega)$$

est une majorante stokienne de $(1-k)\,P$, et

$$(1+K)\,G(\Omega)+K\Omega$$

une majorante du second membre de (I').

En s'appuyant sur la définition (**15.** 3) de $\tilde{\omega}_n$ et sur la circonstance que $\chi_n - k_{n-1}\sin\sigma$ n'est que le coefficient de μ^n dans le second membre de (I'), on a le droit d'écrire (n° préc., 4°)

$$\tilde{\omega}_n \ll \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\mu^n}(1+K)\,G\right]_{\mu=0}, \tag{19.3}$$

$$\chi_n - k_{n-1}\sin\sigma \ll \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\mu^n}\left\{(1+K)\,G+K\Omega\right\}\right]_{\mu=0}. \tag{19.4}$$

D'autre part l'expression (**16.** 5) de k_{n-1} donne après coup

$$|k_{n-1}| \leqq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{\omega}_n|\,d\sigma \qquad (n=2,3,\ldots).$$

Mais la formule (**19.** 3) nous assure que $\tilde{\omega}_n$ (quel que soit σ) ne dépasse jamais la valeur maximum de sa majorante stokienne, qui se rapporte au point $\zeta=1$. Si l'on pose pour abréger

$$\Omega(\mu,1)=\sum_{n=1}^{\infty}\Omega_n(1)\,\mu^n = H, \tag{19.5}$$

on aura de l'inégalité précédente

$$|k_{n-1}| \leqq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\mu^n}(1+K)\,G(H)\right]_{\mu=0} d\sigma = \frac{2}{n!}\left[\frac{d^n}{d\mu^n}(1+K)\,G(H)\right]_{\mu=0},$$

et *l'on pourra par conséquent regarder la constante positive*

$$K_{n-1}=\frac{2}{n!}\left[\frac{d^n}{d\mu^n}(1+K)\,G(H)\right]_{\mu=0} \tag{19.6}$$

comme une majorante de k_{n-1}: nous nous en servirons bientôt. Mais il faut auparavant se procurer sous forme également convenable une majorante stokienne de $\omega_n(\zeta)$. Pour ω_1, qui d'après (**14.** 4) n'est que $-i\zeta$, on peut prendre

$$\Omega_1=\zeta. \tag{19.7}$$

Pour $n>1$ on s'appuiera sur l'équation (**16.** 2) dont le second membre a une majorante stokienne fournie par (**19.** 4). Le dernier corollaire du n° précédent nous assure alors que le produit de la constante numérique J par ladite majorante constitue une majorante stokienne de la fonction ω_n. On peut donc, toujours sous réserve de justification à la fin, prendre

$$(\mathbf{19}.8)\qquad \Omega_n(\zeta) = \frac{J}{n!}\left[\frac{d^n}{d\mu^n}\{(1+K)G(\Omega)+K\Omega\}\right]_{\mu=0}\quad (n=2,3,\ldots).$$

En posant dans les deux membres $\zeta = 1$ on aura en particulier, à cause de (**19**. 5),

$$(\mathbf{19}.9)\qquad \Omega_n(1) = \frac{J}{n!}\left[\frac{d^n}{d\mu^n}\{(1+K)G(H)+KH\}\right]_{\mu=0}.$$

20. Convergence des séries.

Les formules (**19**. 6) et (**19**. 8) en nombre infini peuvent être condensées en deux équations contenant le paramètre variable μ. Il suffit pour cela de les multiplier par μ^{n-1} et μ^n respectivement et d'additionner ensuite celles de chaque groupe depuis $n=2$ jusqu'à $n=\infty$. On obtient alors des (**19**. 6), d'après la seconde des (**19**. 1),

$$K = \frac{1}{\mu}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\mu^n}(1+K)G(H)\right]_{\mu=0}\mu^n.$$

Pour que la somme de la série représente le développement, suivant les puissances de μ, de l'expression $(1+K)G(H)$, il lui manquent les deux termes correspondant à $n=0$, $n=1$. Mais ces deux termes sont nuls puisque, d'après (**19**. 2), $G(H)$ contient H^2 en facteur et H à son tour contient μ d'après (**19**. 5). On a donc

$$(\mathbf{20}.1)\qquad K = \frac{1}{\mu}(1+K)G(H).$$

Les (**19**. 8), en remarquant qu'ici encore le second membre s'annule pour $n=0$ et $n=1$, tandis que

$$\sum_{n=2}^{\infty}\Omega_n(\zeta)\mu^n = \Omega(\mu,\zeta) - \Omega_1\mu = \Omega - \mu\zeta,$$

donnent

$$(\mathbf{20}.2)\qquad \Omega = J(1+K)G(\Omega) + JK\Omega + \mu\zeta,$$

d'où en particulier pour $\zeta = 1$

$$(\mathbf{20}.3)\qquad H = J(1+K)G(H) + JKH + \mu.$$

Si l'on réussit à prouver:

a) que (**20**. 1) et (**20**. 3) définissent H et K comme des séries de puissances de μ (à coefficients positifs) convergentes pour $|\mu|$ assez petit;

b) que, en prenant pour K cette fonction de μ, (**20**. 2) définit plus généralement $\Omega(\mu, \zeta)$ comme fonction holomorphe de ces deux arguments, pour $|\mu|$ assez petit et ζ appartenant au domaine $\mathfrak{D}(|\zeta| \leqq 1)$, les coefficients du développement en série de puissances étant tous positifs, on aura par là-même démontré la convergence uniforme des séries (**14**. 3) definissant ω et k, pour $|\mu|$ assez petit et (à l'égard de la première, et même de la série des derivées $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d\omega_n}{d\zeta} \mu^n$) pour ζ situé dans $\mathfrak{D}$.

Pour constater d'abord que de (**20**. 1) et (**20**. 3) on tire H et K comme fonctions holomorphes de μ au voisinage de $\mu = 0$, il convient de faire disparaître la singularité apparente de la première équation, due au diviseur μ. Il suffit de poser

$$H = \mu\mathfrak{x}, \qquad K = \mu\mathfrak{y} \tag{20.4}$$

en remarquant que, d'après (**19**. 2), on peut écrire

$$G(\mu\mathfrak{x}) = \mu^2\mathfrak{x}^2\,\mathfrak{G}(\mu\mathfrak{x}) = \mu^2\mathfrak{x}^2\left(3 + \frac{14}{3}\mu\mathfrak{x} + \ldots\right), \tag{20.5}$$

où $\mathfrak{G}$ désigne une fonction entière à coefficients positifs du produit $\mu\mathfrak{x}$, se réduisant à 3 pour $\mu = 0$.

Moyennant la substitution (**20**. 4) les équations (**20**. 3) et (**20**. 1) donnent lieu au système régularisé en $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$

$$\begin{cases} \mathfrak{x} = J(1+\mu\mathfrak{y})\mu\mathfrak{x}^2\,\mathfrak{G}(\mu\mathfrak{x}) + J\mu\mathfrak{x}\mathfrak{y} + 1, \\ \mathfrak{y} = (1+\mu\mathfrak{y})\,\mathfrak{x}^2\,\mathfrak{G}(\mu\mathfrak{x}), \end{cases} \tag{20.6}$$

qui pour $\mu = 0$ se réduit à

$$\mathfrak{x} = 1, \qquad \mathfrak{y} = 3$$

et apparaît par suite apte à définir deux fonctions $\mathfrak{x}(\mu)$, $\mathfrak{y}(\mu)$ développables en série de μ, pour $|\mu|$ assez petit, et se réduisant respectivement à 1 et 3 pour $\mu = 0$. Les coefficients de ces séries, qu'on peut calculer de proche en proche, en dérivant successivement les équations (**20**. 6), sont évidemment tous positifs.

Voici établi en toute rigueur l'énoncé a). Arrivant à b), posons dans l'équation (**20**. 2)

$$\Omega = \mu\mathfrak{z}, \qquad G(\Omega) = \mu^2\mathfrak{z}^2\,\mathfrak{G}(\mu\mathfrak{z})$$

et en outre $K = \mu\mathfrak{y}$ en entendant par $\mathfrak{y}$ la fonction de μ qu'on vient de définir. On a alors, en divisant les deux membres par μ,

$$\mathfrak{z} = J(1+\mu\mathfrak{y})\mu\mathfrak{z}^2\,\mathfrak{G}(\mu\mathfrak{z}) + J\mu\mathfrak{y}\mathfrak{z} + \zeta; \tag{20.7}$$

et le théorème fondamental de la théorie des fonctions implicites nous assure qu'on en tire $\mathfrak{z}(\mu, \zeta)$ douée des qualités requises.

En effet l'équation rentre dans le type

$$(\mathbf{20}.\,8)\qquad \mathfrak{z} = \zeta + \mu U(\mu, \mathfrak{z}),$$

U étant une fonction entière de $\mathfrak{z}$, holomorphe aussi par rapport à μ pour $|\mu|$ assez petit: son développement en série de puissances de $\mathfrak{z}$ et de μ a tous les coefficients positifs.

Au voisinage de toute valeur ζ_0 de ζ appartenant au domaine $\mathfrak{D}$, (**20.** 8) définit évidemment une fonction $\mathfrak{z}(\mu, \zeta)$ holomorphe pour $|\mu|$, $|\zeta - \zeta_0|$ assez petits. La limite inférieure de $|\mu|$ tant que ζ_0 varie dans $\mathfrak{D}$ est certainement > 0 d'après le théorème bien connu de Weierstrass affirmant que cette limite inférieure convient aussi au voisinage d'un ζ_0 bien détérminé (où elle est nécessairement > 0).

Donc $\mathfrak{z}(\mu, \zeta)$ et avec elle $\Omega(\mu, \zeta) = \mu\mathfrak{z}$ est bien une fonction de μ et de ζ, holomorphe pour $|\mu|$ assez petit, quel que soit ζ dans $\mathfrak{D}$. Les coefficients de son développement en série de puissances de μ et de ζ sont eux aussi tous positifs, comme on le constate immédiatement par dérivations successives de (**20.** 8), parce qu'il en est ainsi pour U (en tant que fonction de μ et de $\mathfrak{z}$). C. Q. F. D.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que $\mathfrak{z}(\mu, 1)$ coïncide bien avec $\mathfrak{x}$, puisque (**20.** 3) est justement ce que devient (**20.** 2) lorsqu'on y fait $\zeta = 1$.

Appendice contenant les calculs numériques jusqu'à $n = 5$.

1. Formules préparatoires.

De

$$\begin{cases} e^{-3\tau} = 1 - 3\tau + 9/2\,\tau^2 - 9/2\,\tau^3 + 27/8\,\tau^4 + \dots, \\ \sin\vartheta \;\; = \vartheta - 1/6\,\vartheta^3 + 1/120\,\vartheta^5 + \dots \end{cases}$$

on tire (jusqu'au cinquième ordre inclus), pour la fonction $P(\vartheta, \tau)$, définie par (**15.** 1),

$$(1)\qquad \begin{aligned} P(\vartheta, \tau) &= e^{-3\tau}\sin\vartheta - \vartheta \\ &= -3\tau\vartheta + (9/2\,\tau^2\vartheta - 1/6\,\vartheta^3) + (-9/2\,\tau^3\vartheta + 1/2\,\vartheta^3\tau) \\ &\quad + \left(27/8\,\tau^4\vartheta - 3/4\,\tau^2\vartheta^3 + 1/120\,\vartheta^5\right) + \dots . \end{aligned}$$

Ayant égard aux (**15.** 2), c'est-à-dire aux développements de τ, ϑ suivant les puissances de μ:

$$(2)\qquad \tau = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \mu^n, \qquad \vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n \mu^n,$$

on a, en allant jusqu'aux termes qui peuvent intéresser nos évaluations,

$$\begin{aligned}
\tau &= \mu\tau_1 + \mu^2\tau_2 + \mu^3\tau_3 + \mu^4\tau_4 + \dots,\\
\tau^2 &= \mu^2\{\tau_1^2 + 2\mu\tau_1\tau_2 + \mu^2(\tau_2^2 + 2\tau_1\tau_3) + \dots\},\\
\tau^3 &= \mu^3\{\tau_1^3 + 3\mu\tau_1^2\tau_2 + \dots\},\\
\tau^4 &= \mu^4\tau_1^4 + \dots;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta &= \mu\vartheta_1 + \mu^2\vartheta_2 + \mu^3\vartheta_3 + \mu^4\vartheta_4 + \mu^5\vartheta_5 + \dots,\\
\vartheta^3 &= \mu^3\{\vartheta_1^3 + 3\mu\vartheta_1^2\vartheta_2 + 3\mu^2(\vartheta_1^2\vartheta_3 + \vartheta_1\vartheta_2^2) + \dots\},\\
\vartheta^5 &= \mu^5\vartheta_1^5 + \dots,
\end{aligned}$$

d'où

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
\tau\vartheta &= \mu^2\{\tau_1\vartheta_1 + \mu(\tau_1\vartheta_2 + \tau_2\vartheta_1) + \mu^2(\tau_1\vartheta_3 + \tau_2\vartheta_2 + \tau_3\vartheta_1) + \mu^3(\tau_1\vartheta_4\\
&\qquad + \tau_2\vartheta_3 + \tau_3\vartheta_2 + \tau_4\vartheta_1) + \dots\},\\
\tau^2\vartheta &= \mu^3\{\tau_1^2\vartheta_1 + \mu\tau_1(2\tau_2\vartheta_1 + \tau_1\vartheta_2) + \mu^2(\tau_1^2\vartheta_3 + 2\tau_1\tau_2\vartheta_2\\
&\qquad + \tau_2^2\vartheta_1 + 2\tau_1\tau_3\vartheta_1) + \dots\},\\
\vartheta^3 &= \mu^3\{\vartheta_1^3 + 3\mu\vartheta_1^2\vartheta_2 + 3\mu^2(\vartheta_1^2\vartheta_3 + \vartheta_1\vartheta_2^2) + \dots\},\\
\tau^3\vartheta &= \mu^4\tau_1^2\{\tau_1\vartheta_1 + \mu(\tau_1\vartheta_2 + 3\tau_2\vartheta_1) + \dots\},\\
\tau\vartheta^3 &= \mu^4\vartheta_1^2\{\tau_1\vartheta_1 + \mu(3\tau_1\vartheta_2 + \tau_2\vartheta_1) + \dots\},\\
\tau^4\vartheta &= \mu^5\tau_1^4\vartheta_1 + \dots,\\
\tau^2\vartheta^3 &= \mu^5\tau_1^2\vartheta_1^3 + \dots,\\
\vartheta^5 &= \mu^5\vartheta_1^5 + \dots.
\end{aligned}\right.$$

En introduisant ces développements dans le second membre de (1), on trouve

$$(4)\qquad P(\vartheta,\tau) = \mu^2P_2 + \mu^3P_3 + \mu^4P_4 + \mu^5P_5 + \dots,$$

où

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
P_2 &= -3\tau_1\vartheta_1,\\
P_3 &= -3(\tau_1\vartheta_2 + \tau_2\vartheta_1) + 9/2\,\tau_1^2\vartheta_1 - 1/6\,\vartheta_1^3,\\
P_4 &= -3(\tau_1\vartheta_3 + \tau_2\vartheta_2 + \tau_3\vartheta_1) + 9/2\,\tau_1(2\tau_2\vartheta_1 + \tau_1\vartheta_2) - 1/2\,\vartheta_1^2\vartheta_2\\
&\qquad - 9/2\,\tau_1^3\vartheta_1 + 1/2\,\tau_1\vartheta_1^3,\\
P_5 &= -3(\tau_1\vartheta_4 + \tau_2\vartheta_3 + \tau_3\vartheta_2 + \tau_4\vartheta_1) + 9/2(\tau_1^2\vartheta_3 + 2\tau_1\tau_2\vartheta_2 + \tau_2^2\vartheta_1\\
&\qquad + 2\tau_1\tau_3\vartheta_1) - 1/2(\vartheta_1^2\vartheta_3 + \vartheta_1\vartheta_2^2) - 9/2\,\tau_1^2(\tau_1\vartheta_2 + 3\tau_2\vartheta_1)\\
&\qquad + 1/2\,\vartheta_1^2(3\tau_1\vartheta_2 + \tau_2\vartheta_1) + 27/8\,\tau_1^4\vartheta_1 - 3/4\,\tau_1^2\vartheta_1^3 + 1/120\,\vartheta_1^5.
\end{aligned}\right.$$

2. Forme explicite des équations qui définissent $\omega_n = \vartheta_n + i\tau_n$ $(n = 2, 3, 4, 5)$.

L'équation fondamentale (I') du n° 15

$$\frac{d\tau}{d\sigma} - \vartheta = (1-k)P(\vartheta, \tau) - k\vartheta,$$

en tenant compte de la circonstance [n^{os} 15 et 16] que le développement de k ne renferme que des puissances paires de μ, c'est-à-dire que k est de la forme

$$k = k_2\mu^2 + k_4\mu^4 + \dots,$$

donne lieu, d'après (2) et (4), aux équations suivantes:

$$\frac{d\tau_2}{d\sigma} - \vartheta_2 = P_2, \tag{6}$$

$$\frac{d\tau_3}{d\sigma} - \vartheta_3 = P_3 - k_2\vartheta_1, \tag{7}$$

$$\frac{d\tau_4}{d\sigma} - \vartheta_4 = P_4 - k_2 P_2 - k_2\vartheta_2, \tag{8}$$

$$\frac{d\tau_5}{d\sigma} - \vartheta_5 = P_5 - k_2 P_3 - k_2\vartheta_3 - k_4\vartheta_1. \tag{9}$$

3. Détermination des $\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$ et des constantes k_2, k_4.

Calcul de $\omega_2 = \vartheta_2 + i\tau_2$.

On a de (**14**. 4)

$$\omega_1 = -i\zeta,$$

et par conséquent, sur $\mathfrak{C}$,

$$\tau_1 = -\cos\sigma, \quad \vartheta_1 = \sin\sigma. \tag{10}$$

La première des (5) donne en conformité

$$P_2 = 3/2\sin 2\sigma,$$

d'où, par application immédiate, à l'équation (6), de la règle exposée au n° 16,

$$\begin{cases} \omega_2 = -i\,3/2\,\zeta^2; \\ \tau_2 = -3/2\cos 2\sigma, \quad \vartheta_2 = 3/2\sin 2\sigma, \quad \text{sur } \mathfrak{C}. \end{cases} \tag{11}$$

Calcul de k_2 *et de* $\omega_3 = \vartheta_3 + i\tau_3$.

L'expression (5) de P_3, en y remplaçant τ_1, ϑ_1 et τ_2, ϑ_2 par leurs valeurs (10) et (11), devient

$$P_3 = 17/3\sin 3\sigma + \sin\sigma;$$

après quoi, en appliquant à l'equation (7), la règle rappelée tout à l'heure, on déduit

$$k_2 = 1; \tag{12}$$

$$(13)\qquad \begin{cases} \omega_3 = -i\,17/6\,\zeta^3; \\ \tau_3 = -17/6\cos 3\sigma, \quad \vartheta_3 = 17/6\sin 3\sigma, \quad \text{sur } \mathfrak{C}. \end{cases}$$

Calcul de $\omega_4 = \vartheta_4 + i\tau_4$.

Dans l'expression (5) de P_4, on introduit les valeurs déjà obtenues de $\tau_1, \vartheta_1, \tau_2, \vartheta_2, \tau_3, \vartheta_3$ en remplaçant systématiquement les produits des fonctions sin et cos par des sinus ou cosinus des arcs multiples.

Il vient ainsi

$$P_4 = 71/4\ \sin 4\sigma + 4\sin 2\sigma,$$

et l'équation (8), en y faisant aussi

$$k_2 = 1, \quad P_2 = 3/2\sin 2\sigma, \quad \vartheta_2 = 3/2\sin 2\sigma$$

se met dans la forme

$$\frac{d\tau_4}{d\sigma} - \vartheta_4 = 71/4\sin 4\sigma + \sin 2\sigma.$$

La règle d'intégration fournit

$$(14)\quad \begin{cases} \omega_4 = -i\{71/12\,\zeta^4 + \zeta^2\}; \\ \tau_4 = -71/12\cos 4\sigma - \cos 2\sigma, \quad \vartheta_4 = 71/12\sin 4\sigma + \sin 2\sigma, \quad \text{sur } \mathfrak{C}. \end{cases}$$

Calcul de k_4 *et de* $\omega_5 = \vartheta_5 + i\tau_5$.

La dernière des (5), avec les valeurs trouvées pour $\tau_2, \vartheta_2, \ldots,$ donne après réduction

$$\begin{aligned} P_5 &= \frac{1}{384}\{20083{,}2\sin 5\sigma + 6144\sin 3\sigma + 1344\sin\sigma\} \\ &= 52{,}3\sin 5\sigma + 16\sin 3\sigma + 7/2\sin\sigma. \end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$P_3 + \vartheta_3 = 17/2\sin 3\sigma + \sin\sigma, \quad k_2 = 1,$$

et l'équation (9) devient en conformité

$$\frac{d\tau_5}{d\sigma} - \vartheta_5 = 52{,}3\sin 5\sigma + 15/2\sin 3\sigma + (5/2 - k_4)\sin\sigma.$$

En appliquant une dernière fois la règle du n° 16, on en tire

$$(15)\qquad k_4 = 5/2,$$

$$(16)\qquad \begin{cases} \omega_5 = -i\{(13 + 3/40)\zeta^5 + 15/4\,\zeta^3\}; \\ \tau_5 = -(13 + 3/40)\cos 5\sigma - 15/4\cos 3\sigma, \\ \vartheta_5 = (13 + 3/40)\sin 5\sigma + 15/4\sin 3\sigma, \qquad \text{sur } \mathfrak{C}. \end{cases}$$

4. Équations paramétriques du profil de l'onde.

L'affixe z_l de la ligne libre s'exprime, d'après (11. 4), sous la forme

$$z_l = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\sigma e^{i\omega}\,d\sigma.$$

En posant, pour abréger l'écriture,

$$i\omega = \omega', \qquad i\omega_n = \omega_n' \qquad\qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

on a tout de suite

$$\begin{aligned}
\omega' &= \mu\omega_1' + \mu^2\omega_2' + \mu^3\omega_3' + \mu^4\omega_4' + \mu^5\omega_5' + \ldots,\\
\omega'^2 &= \mu^2\omega_1'^2 + \mu^3 2\omega_1'\omega_2' + \mu^4(\omega_2'^2 + 2\omega_1'\omega_3')\\
&\quad + \mu^5 2(\omega_1'\omega_4' + \omega_2'\omega_3') + \ldots,\\
\omega'^3 &= \mu^3\omega_1'^3 + \mu^4 3\omega_1'^2\omega_2'\\
&\quad + \mu^5 3(\omega_1'^2\omega_3' + \omega_1'\omega_2'^2) + \ldots,\\
\omega'^4 &= \mu^4\omega_1'^4\\
&\quad + \mu^5 4\omega_1'^3\omega_2' + \ldots,\\
\omega'^5 &= \mu^5\omega_1'^5 + \ldots;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{i\omega} &= 1 + \omega' + 1/2\,\omega'^2 + 1/6\,\omega'^3 + 1/24\,\omega'^4 + 1/120\,\omega'^5 + \ldots\\
&= 1 + \mu\omega_1' + \mu^2\left(\omega_2' + \frac{1}{2}\omega_1'^2\right) + \mu^3(\omega_3' + \omega_1'\omega_2' + 1/6\,\omega_1'^3)\\
&\quad + \mu^4\{\omega_4' + 1/2(\omega_2'^2 + 2\omega_1'\omega_3') + 1/2\,\omega_1'^2\omega_2' + 1/24\,\omega_1'^4\}\\
&\quad + \mu^5\{\omega_5' + \omega_1'\omega_4' + \omega_2'\omega_3' + 1/2(\omega_1'^2\omega_3' + \omega_1'\omega_2'^2) + 1/6\,\omega_1'^3\omega_2'\\
&\quad + 1/120\,\omega_1'^5\} + \ldots.
\end{aligned}$$

Les valeurs des $\omega_n' = i\omega_n$, qui résultent des (11), (13), (14) et (16), sont

$$\begin{aligned}
\omega_1' &= \zeta,\\
\omega_2' &= 3/2\,\zeta^2,\\
\omega_3' &= 17/6\,\zeta^3,\\
\omega_4' &= 71/12\,\zeta^4 + \zeta^2,\\
\omega_5' &= (13 + 3/40)\zeta^5 + 15/4\,\zeta^3.
\end{aligned}$$

Il s'en suit

$$\begin{aligned}
e^{i\omega} &= 1 + \mu\zeta + \mu^2 2\zeta^2 + \mu^3 9/2\,\zeta^3 + \mu^4\{32/3\,\zeta^4 + \zeta^2\}\\
&\quad + \mu^5\{(26 + 1/24)\zeta^5 + 19/4\,\zeta^3\} + \ldots.
\end{aligned}$$

Le coefficient de ζ^5 est exact (comme tous les autres), mais il est largement suffisant d'écrire à sa place 26,04, ce qui est plus commode. En intégrant (sur l, c'est-a-dire pour $\zeta = e^{i\sigma}$) on a immédiatement, de

$$z_l = x_l + i\,y_l = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\sigma e^{i\omega}\,d\sigma,$$

les équations paramétriques

$$(17)\quad \begin{cases} x_l = \frac{\lambda}{2\pi}\{\sigma + \mu\sin\sigma + \mu^2\sin 2\sigma + \mu^3\, 3/2\sin 3\sigma \\ \quad + \mu^4(8/3\sin 4\sigma + 1/2\sin 2\sigma) + \mu^5(5{,}21\sin 5\sigma + 19/12\sin 3\sigma) + \ldots\}, \\ y_l = \frac{\lambda}{2\pi}\{\mu(1-\cos\sigma) + \mu^2(1-\cos 2\sigma) + \mu^3\, 3/2(1-\cos 3\sigma) \\ \qquad + \mu^4[8/3(1-\cos 4\sigma) + 1/2(1-\cos 2\sigma)] \\ \qquad + \mu^5[5{,}21(1-\cos 5\sigma) + 19/12(1-\cos 3\sigma)] + \ldots\}. \end{cases}$$

5. Vitesse relative minimum et maximum. Hauteur et dépression de l'onde.

De l'identité

$$e^{-2i\omega} = e^{-2\omega'} = 1 - 2\,\omega' + 2\,\omega'^2 - 4/3\,\omega'^3 + 2/3\,\omega'^4 - 4/15\,\omega'^5 + \ldots,$$

en utilisant les formules du n° précédent, on tire

$$\frac{1}{2}(1 - e^{-2i\omega}) = \mu\zeta + \mu^2\,1/2\,\zeta^2 + \mu^3\,1/2\,\zeta^3 + \mu^4(2/3\,\zeta^4 + \zeta^2) + \mu^5(25/24\,\zeta^5 + 7/4\,\zeta^3) + \ldots,$$

d'où en particulier, pour la crête ($\zeta = 1$),

$$\frac{1}{2}(1 - e^{-2i\omega(1)}) = \mu + 1/2\,\mu^2 + 1/2\,\mu^3 + 5/3\,\mu^4 + 67/24\,\mu^5 + \ldots.$$

On a démontré au n° 16 du texte que les produits $\mu^n\omega_n(\zeta)$ restent inaltérés lorsqu'on y change à la fois ζ en $-\zeta$ et μ en $-\mu$. D'après cela il est bien clair que, au lieu de changer dans

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n\mu^n$$

ζ en $-\zeta$, on peut changer μ en $-\mu$.

Dès lors, pour se procurer

$$\frac{1}{2}(1 - e^{-2i\omega(-1)}),$$

on n'a qu'à changer dans la dernière formule μ en $-\mu$, ce qui donne

$$\frac{1}{2}(e^{-2i\omega(-1)} - 1) = \mu - 1/2\,\mu^2 + 1/2\,\mu^3 - 5/3\,\mu^4 + 67/24\,\mu^5 + \ldots.$$

N'oublions pas que, à cause de l'expression générale $c e^{-i\omega(\zeta)}$ de w, les vitesses minimum et maximum w_0, w_1, c'est-à-dire les vitesses dans une crête ($\zeta = 1$) et dans un creux ($\zeta = -1$), sont respectivement

$$w_0 = c e^{-i\omega(1)}, \qquad w_1 = c e^{-i\omega(-1)},$$

d'où

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{w_0^2}{c^2}\right) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2i\omega(1)}), \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{w_1^2}{c^2} - 1\right) = \frac{1}{2}(e^{-2i\omega(-1)} - 1).$$

On a maintenant tout ce qu'il faut pour expliciter en fonction de μ, soit la hauteur a, soit la dépression d, de l'onde, ou plus précisément les rapports

$$\alpha = \frac{a}{\frac{1}{2\pi}\lambda}, \qquad \delta = \frac{d}{\frac{1}{2\pi}\lambda}.$$

En effet, d'après les formules (**12.** 4) et (**13.** 9) du texte, on tire tout de suite

$$\alpha = \frac{1}{p}(\mu + 1/2\,\mu^2 + 1/2\,\mu^3 + 5/3\,\mu^4 + 67/24\,\mu^5 + \ldots),$$

$$\delta = \frac{1}{p}(\mu - 1/2\,\mu^2 + 1/2\,\mu^3 - 5/3\,\mu^4 + 67/24\,\mu^5 + \ldots).$$

Or p n'est que $1 - k = 1 - k_2\mu^2 - k_4\mu^4 \ldots$, c'est-à-dire, avec les valeurs numériques (12) et (15) de k_2 et de k_4,

$$p = 1 - \mu^2 - 5/2\,\mu^4 + (6), \tag{18}$$

en convenant de désigner en général par (n) un terme qui contient μ^n en facteur.

On en déduit, pour α et δ, les expressions

$$\alpha = \mu\{1 + 1/2\,\mu + 3/2\,\mu^2 + 13/6\,\mu^3 + (6 + 19/24)\mu^4 + (5)\}, \tag{19}$$

$$\delta = \mu\{1 - 1/2\,\mu + 3/2\,\mu^2 - 13/6\,\mu^3 + (6 + 19/24)\mu^4 + (5)\}, \tag{20}$$

d'où en premier lieu la conséquence que α, δ et μ sont du même ordre, et coïncident en première approximation.

Dès qu'on tient compte des termes d'ordre supérieur, la comparaison entre (19) et (20) montre que $\alpha > \delta$, c'est-à-dire que *l'élévation de la crête au-dessus du niveau moyen est plus grande que la dépression du creux au-dessous du même niveau.*

On peut naturellement tirer de (19) et de (20) le développement de μ suivant les puissances de α ou de δ.

En nous bornant au premier, on trouve

$$\mu = \alpha\{1 - 1/2\,\alpha - \alpha^2 + 23/24\,\alpha^3 + (4)\}. \tag{19'}$$

A la vérité l'état du calcul nous aurait permis d'invertir la formule (19) en explicitant aussi le terme du cinquième ordre; mais ceci n'est pas nécessaire, tout en se proposant de tenir compte aussi de cet ordre dans les relations entre α, δ et p, qu'on va déduire et qui constituent, au point de vue physique, une conclusion essentielle de la théorie.

En vue de ce dernier calcul il faut préparer les expressions de μ^2 et de μ^4 en fonction de α, déduites de (19'). Or il arrive que de (19') on déduit

$$(21)\qquad \begin{cases} \mu^2 = \alpha^2\{1-\alpha-7/4\,\alpha^2+35/12\,\alpha^3+④\}, \\ \mu^4 = \alpha^4\{1-2\,\alpha+②\} \end{cases}$$

qui se trouvent l'une et l'autre explicitées justement jusqu'au cinquième ordre inclus.

6. Relations entre les constantes caractéristiques du phénomène.

Les trois constantes

$$\alpha = \frac{a}{\frac{1}{2\pi}\lambda}, \qquad \delta = \frac{d}{\frac{1}{2\pi}\lambda}, \qquad p = \frac{g\lambda}{2\pi c^2}$$

ont toutes une interprétation (géométrique ou cinématique) bien nette, tandis que μ est un paramètre auxiliaire. Il suffit de l'éliminer entre (18), (19) et (20) pour avoir deux relations indépendantes, où interviennent uniquement des éléments caractéristiques du phénomène. On peut en particulier, dans

$$\alpha-\delta = \mu^2+13/3\,\mu^4+⑥,$$

qu'on obtient en retranchant (20) de (19), et dans (18),

$$p = 1-\mu^2-5/2\,\mu^4+⑥,$$

remplacer μ en fonction de α à l'aide des formules (21). Il vient alors

$$(22)\qquad \delta = \alpha-\alpha^2+\alpha^3-31/12\,\alpha^4+23/4\,\alpha^5+⑥,$$

et

$$(23)\qquad p = \frac{g\lambda}{2\pi c^2} = 1-\alpha^2+\alpha^3-3/4\,\alpha^4+25/12\,\alpha^5+⑥$$

ce que nous écrivons aussi sous la forme équivalente

$$(23')\qquad \frac{1}{p} = \frac{2\pi c^2}{g\lambda} = 1+\alpha^2-\alpha^3+7/4\,\alpha^4-49/12\,\alpha^5+⑥.$$

Si dans (23') on tient compte seulement du deuxième ordre, il reste

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}(1+\alpha^2),$$

ce qui est un résultat déjà signalé per Stokes[10]).

[10]) Voir par ex. Lamb, *Hydrodynamics* (Cambridge, University Press, 1916), Chap. IX, p. 410.

En terminant j'ajouterai quelques mots sur la solution approchée de Lord Rayleigh (mémoire cité dans la note [2]) de la préface).

Il faudrait avant tout examiner de plus près si les hypothèses préliminares de cet auteur sur l'ordre de grandeur de certains coefficients $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sont effectivement une conséquence de notre théorème d'existence. Ceci aurait aussi un intérêt pratique, puisque, avec les prémisses de Rayleigh, les premières étapes du calcul numérique se déroulent plus rapidement.

Quoi qu'il en soit, je veux signaler ici une coïncidence, dont on s'assure sans peine.

Si, sans vouloir fixer d'avance l'ordre de grandeur des coefficients $\gamma, \delta, \varepsilon$ de Rayleigh, on admet seulement qu'ils soient tous d'ordre plus élevé que son β, on reconnaît en premier lieu, d'après la formule (7) du mémoire en question et ses analogues, que le paramètre α de Lord Rayleigh coïncide, au cinquième ordre près, avec notre μ; après quoi la formule (11) du même mémoire (en y écrivant μ au lieu que α) fournit (pour $x = \pi$) une expression de la hauteur de l'onde identique (jusqu'au cinquième ordre inclus) à notre formule (19).

(Eingegangen am 12. 6. 1924.)