那么，如何理解这种转变过程？

流体力学课程已经给了我们大致的图像：

能量通过非线性作用传输到特定的模式，并指数地增长；

这种增长最终达到与基本流相当的程度，便将原有的流动和输运过程扭曲掉。

-秋千 页

这种过程可以通过秋千来理解。

小孩子是如何将秋千荡起来的呢？他们在最高点处站起，在最低点处蹲下

小孩重心的振动频率是秋千摆动的两倍

这就形成了对系统的倍频激励——或者说，系统对这一激励发生了亚谐响应

-mathieu方程 页

这种称为参变共振的机制是由马修方程控制的

通过求解可以发现，只要激励频率落在二倍基频的一个邻域内

系统就会不可控地增长，也就是出现不稳定

即使系统有耗散，这种不稳定仍能发生，

但这时激励必须落在二倍频的一个去心邻域中

-水波 1

好的，我们从单质点回到连续介质情形。

振源就相当于那个小孩，而水波就是秋千

在线性理论中，振子激发的各个简谐模式独立发展

至于振源的具体形式其实无关紧要

-水波 2

而在非线性的情况下 不同模式间就会彼此耦合

这时，近场就在能量输入下失稳，形成一定的模式

而在远场能量输入已经衰减，因此不再失稳，

但近场形成的模式将在此扩展，形成有趣的现象

-实验对比

可以看到，这正是在我们的系统中所发生的事情，

在小振幅下形成了和振源同频率的平面波，

而当振幅大到足以让波面横向失稳，

向外扩展的行波的频率也变成了波源的一半

-stokes 波 1

我们首先来看小振幅的情况

线性波理论告诉我们，水中的质点有椭圆形的闭合轨道

但这和我们的实验观察显然不一致

我们需要考虑非线性效应

从未线化的水波方程出发

-stokes 波 2

取三阶近似

-stokes 波 3

对流场各量取形式的级数解

-stokes 波 4

比较系数，我们就得到了 2\*\* 这一组方程，可以发现各阶量彼此分离

-stokes波 5

于是，按这个顺序迭代求解

-stokes 波 6

我们就得到了所谓的三阶stokes波

-stokes 漂移

这种级数解法对任意阶都适用，其收敛性也已经被证明

利用求得的速度势，我们可以求出流体微团的轨迹，

它们都大致按旋轮线运动

轮心的速度就是所谓的stokes drift，前进方向是波的传播方向

这就解释了小振幅下粒子向外的运动

- B-F不稳定性

类似的级数解对表面张力波也存在；然而不幸的是，这两种波都是不稳定的

首先，二维的水波就会面临调制不稳定性

过程是在二次谐波的存在时，基频上下非常接近的频率分量将能成对地从基频抽取能量，从而发展起来，这就称为旁带；

- B-F不稳定性 2

旁带中能发展的宽度和振幅成正比

不过，实际的系统中存在能量耗散，这就意味着真正能发展起来的旁带也是一个去心邻域，必须要振幅超过一定阈值才会观察到明显的调制不稳定性

-交叉波

此外，波面还会发生横向的不稳定，导致水面出现棋盘状的波形；这是通过一个类似的机制形成了波矢方向和原先方向叉开一点的一对平面波，可以看作是空间上的旁带

-总结

在这两种机制的作用下，原先简单的平面波就被复杂的流场所取代；原本沿平面波方向的均匀的输运分裂为交叉波中的成束的流动；

当不稳定性充分发展，近场便完成转捩，形成湍流。

实验中振子振幅变大后运动模式转变了。由于运动的复杂与不同区域的差异过大，我们的研究方式也不能是先求解液面方程，再求解质点漂移——我们需要与前半不同的理解方式。实验表明，用二维湍流而不是水波去建模水面的质点运动的二维投影是较为合理的。

湍流表现随机性，却因为物理而并不完全随机与独立。刻画湍流的“不随机”，是重要的。相关函数和傅立叶分解两个工具是很合适的。前者用来刻画的是波动速度的“非随机”属性，而空间上的傅立叶分解可以刻画“全局”中，不同尺度运动中非随机性与物理量的分布。我们将用这两个工具与统计的思想从能量与质点运动两个方面论证运动的合理性。

如果大家还记得这张课件截图，大家应该会有这样的物理图像：在湍流中能量从大尺度中输入，在小尺度中耗散。那么这个结论是如何得到与定量论证的呢？

首先我们可以得到雷诺应力的控制方程，再考虑湍流为“均匀的各向同性湍流”，即每一点的波动速度小u产生的雷诺应力是一样的对角元相等的对角阵。这样显然可以简化计算，而且竟然在现实中很有用。

简化后我们就可以比较简单地写出湍动能的方程了。我们可以看右面，第一大项在全局积分后就消失了，它是一个输运项；后面两项一个是粘性项，一个是输入项；最后一项可以忽略。

输入项应该是在平均流处于的尺度，即最大的尺度中工作；而粘性项会在较小的尺度上与湍动能达到较为类似的水平。因此Kolmogorov就因此决定在大尺度与小尺度中间没有湍动能的输入与输出，被称为inertial subrange。

但如何刻画这种“能量在尺度中的稳定分布”呢？这时就需要空间上的相关函数对空间的傅立叶分解表示了。波数k可以看作尺度的倒数。因此，Kolmogorov就得到了需要的分布。

但在二维湍流的中间尺度，除了能量涡量也守恒，因此有两个守恒方程，导致物理量可以同时向小尺度与大尺度传递：涡量在小尺度耗散，能量向大尺度传递。由于在我们的流动中，局部的湍流的能量在传到大尺度后，可以变为大范围的水面运动，耗散仅有壁面摩擦，因此在几何条件适合的时候可以影响很远。这是三维湍流无法做到的。

另一方面，我们可以计算得到在长时近似下，均匀各向同性湍流的质点运动近似随机游走。而在本实验中，稍微远离振子的湍流近似为均匀各向同性湍流，再把振子周边复杂的流场当作边界条件，可以从质点运动的方面定性论证近场区质点向杆两侧运动的模式，进而论证转捩后运动模式的合理性。

水面转捩后的运动模式是复杂的，由于不规则与局域性，这样的模式比水波更难建模与定量研究。对几何边界的要求和流动的二维性让露天泳池落叶清理成为可能的应用，返校后就提议测试一下。同时，水面的二维湍流表现也为实验提供了很好的工具。自然界中没有完全“二维”的流动，但在大气运动的过程中，不同层间穿插较少的时候可以近似为二维流动。因此二维湍流在大气运动中应用较多。如果可以论证二维湍流在水面的真实性，就可以考虑用此设计实验，进行一定的模拟了。当然，科里奥利力可能会比较难以模拟，因此可能需要考虑好尺度的影响。