1장. 선형 시스템(Linear System)

연립일차방정식과 행렬 표현

선형 방정식(Linear Equations)

- **연립일차방정식(Linear System)의 행렬 표현**

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$의 해집합:
단순해(Trivial Solution): $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$

$$\boldsymbol{x} = [\, x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n \,]$$

$$\boldsymbol{b} = [\, b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_m \,]$$

$$\boldsymbol{xA} = \boldsymbol{b}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Ax} &= \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{Ix} &= \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

선형 방정식(Linear Equations)

연립일차방정식(Linear System)의 풀이 방법

기본행렬(Elementary Matrix)

- 행렬 $\boldsymbol{A}$에서 한 번의 기본 행 연산을 통하여 얻은 행렬을 $\boldsymbol{B}$이라고 하자.
  - $\boldsymbol{A}[E_i(c)] = \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{B}[E_i(1/c)] = \boldsymbol{A}$
  - $\boldsymbol{A}[E_{ij}] = \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{B}[E_{ij}] = \boldsymbol{A}$
  - $\boldsymbol{A}[E_{ij}(c)] = \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{B}[E_{ij}(-c)] = \boldsymbol{A}$

기본 행 연산(Elementary Row Operations)
- 0이 아닌 상수(실수) c를 i-행에 곱한다($E_i(c)$).
- i-행과 j-행의 위치를 바꾼다(E_{ij}).
- i-행에 0이 아닌 실수 c를 곱하여 j-행에 더한다($E_{ij}(c)$).

- 행 동등(Row Equivalent)
  - 행렬 $\boldsymbol{A}$에 기본 행 연산을 적용하여 행렬 $\boldsymbol{B}$를 얻을 수 있으면 행렬 $\boldsymbol{B}$에서 행렬 $\boldsymbol{A}$를 얻을 수 있다.
  - 행렬 $\boldsymbol{A}$에 기본 행 연산을 적용하여 행렬 $\boldsymbol{B}$를 얻을 수 있으면 행렬 $\boldsymbol{A}$와 행렬 $\boldsymbol{B}$는 행 동등이다.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}[E_1(c)] = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B} \qquad \boldsymbol{B}[E_1(1/c)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{c}ca_{11} & \frac{1}{c}ca_{12} & \frac{1}{c}ca_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}[E_{13}(c)] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ca_{11} + a_{31} & ca_{12} + a_{32} & ca_{13} + a_{33} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{B}[E_{13}(-c)] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -ca_{11} + ca_{11} + a_{31} & -ca_{11} + ca_{12} + a_{32} & -ca_{11} + ca_{13} + a_{33} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}$$

선형 방정식(Linear Equations)

연립일차방정식(Linear System)의 풀이 방법

기본행렬(Elementary Matrix)

- 단위행렬에 한 번의 기본 행 연산을 적용하여 구할 수 있는 행렬을 기본행렬이라 함
- $\boldsymbol{E}_i(c)$, $\boldsymbol{E}_{ij}$, $\boldsymbol{E}_{ij}(c)$

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{E}_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{E}_2(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{E}_{13}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - $\boldsymbol{I}[E_i(c)] = \boldsymbol{E}_i(c) \Rightarrow \boldsymbol{E}_i(c)[E_i(^1/_c)] = \boldsymbol{I}$
  - $\boldsymbol{I}[E_{ij}] = \boldsymbol{E}_{ij} \Rightarrow \boldsymbol{E}_{ij}[E_{ij}] = \boldsymbol{I}$
  - $\boldsymbol{I}[E_{ij}(c)] = \boldsymbol{E}_{ij}(c) \Rightarrow \boldsymbol{E}_{ij}(c)[E_{ij}(-c)] = \boldsymbol{I}$

$\boldsymbol{E}_{ij} = \boldsymbol{E}_{ji}$
$\boldsymbol{E}_{ij}(c) \neq \boldsymbol{E}_{ji}(c)$

- $\boldsymbol{E}_i(c)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}[E_i(c)]$, $\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}[E_{ij}]$, $\boldsymbol{E}_{ij}(c)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}[E_{ij}(c)]$
  - 행렬 $\boldsymbol{A}$의 왼쪽에 기본행렬을 곱하는 것은 기본행렬을 만든 기본 행 연산을 행렬 $\boldsymbol{A}$에 적용하는 것임

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_{23}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_{13}(-2)\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -2a_{11} + a_{31} & -2a_{12} + a_{32} & -2a_{13} + a_{33} \end{bmatrix}$$

선형 방정식(Linear Equations)

연립일차방정식(Linear System)의 풀이 방법

기본행렬(Elementary Matrix)

- 행렬 $\boldsymbol{A}$의 왼쪽에 기본행렬을 곱하는 것은 기본행렬을 만든 기본 행 연산을 행렬 $\boldsymbol{A}$에 적용하는 것임

① $\boldsymbol{E}_k(c)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}[E_k(c)]$

$\boldsymbol{E}_k(c)$: k번째 행에서 $e_{kk} = c$, 나머지 원소들은 0

$(i = k)$: $(\boldsymbol{E}_k(c)\boldsymbol{A})_{ij} = e_{i1}a_{1j} + e_{i2}a_{2j} + \cdots + e_{ik}a_{kj} + \cdots + e_{ir}a_{rj} = e_{kk}a_{ij} = ca_{ij}$

$(i \neq k)$: $(\boldsymbol{E}_k(c)\boldsymbol{A})_{ij} = e_{i1}a_{1j} + e_{i2}a_{2j} + \cdots + e_{ii}a_{ij} + \cdots + e_{ir}a_{rj} = e_{ii}a_{ij} = a_{ij}$

② $\boldsymbol{E}_{pq}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}[E_{pq}]$

$\boldsymbol{E}_{pq}$: p번째 행에서 $e_{pq} = 1$, q번째 행에서 $e_{qp} = 1$

$(i = p)$: $(\boldsymbol{E}_{pq}\boldsymbol{A})_{ij} = e_{i1}a_{1j} + e_{i2}a_{2j} + \cdots + e_{ik}a_{kj} + \cdots + e_{ir}a_{rj} = e_{pq}a_{qj} = a_{qj}$

$(i = q)$: $(\boldsymbol{E}_{pq}\boldsymbol{A})_{ij} = e_{i1}a_{1j} + e_{i2}a_{2j} + \cdots + e_{ik}a_{kj} + \cdots + e_{ir}a_{rj} = e_{qp}a_{pj} = a_{pj}$

$(i \neq p), (i \neq q)$: $(\boldsymbol{E}_{pq}\boldsymbol{A})_{ij} = e_{i1}a_{1j} + e_{i2}a_{2j} + \cdots + e_{ik}a_{ij} + \cdots + e_{ir}a_{rj} = e_{ii}a_{ij} = a_{ij}$

③ $\boldsymbol{E}_{pq}(c)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}[E_{pq}(c)]$

$\boldsymbol{E}_{pq}(c)$: q번째 행에서 $e_{qp} = ce_{pp} = c$

$(i = q)$: $(\boldsymbol{E}_{pq}(c)\boldsymbol{A})_{ij} = e_{i1}a_{1j} + e_{i2}a_{2j} + \cdots + e_{ik}a_{kj} + \cdots + e_{ir}a_{rj} = e_{qp}a_{pj} + a_{qj} = ca_{pj} + a_{qj}$

$(i \neq q)$: $(\boldsymbol{E}_{pq}(c)\boldsymbol{A})_{ij} = e_{i1}a_{1j} + e_{i2}a_{2j} + \cdots + e_{ik}a_{ij} + \cdots + e_{ir}a_{rj} = e_{ii}a_{ij} = a_{ij}$

- 행렬 $\boldsymbol{A}$의 오른쪽에 기본행렬을 곱하는 것은 기본행렬을 만든 기본 열 연산을 행렬 $\boldsymbol{A}$에 적용하는 것임

선형 방정식(Linear Equations)

연립일차방정식(Linear System)의 풀이 방법

기본행렬(Elementary Matrix)

- 기본행렬 $\boldsymbol{E}$는 가역행렬이고 역행렬 $\boldsymbol{E}^{-1}$는 $\boldsymbol{E}$와 같은 유형의 기본행렬이다.

① $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{ij}$

$\boldsymbol{I}[E_{ij}] = \boldsymbol{E}_{ij} \Rightarrow \boldsymbol{E}_{ij}[E_{ij}] = \boldsymbol{I}$

$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{ij} = \boldsymbol{I}$

$(\boldsymbol{E}_{ij})^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}$

② $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_i(c)$

$\boldsymbol{I}[E_i(c)] = \boldsymbol{E}_i(c) \Rightarrow \boldsymbol{E}_i(c)[E_i({}^1/_c)] = \boldsymbol{I}$

$\boldsymbol{E}_i({}^1/_c)\boldsymbol{E}_i(c) = \boldsymbol{I}$

$\boldsymbol{E}_i(c)^{-1} = \boldsymbol{E}_i({}^1/_c)$

③ $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{ij}(c)$

$\boldsymbol{I}[E_{ij}(c)] = \boldsymbol{E}_{ij}(c) \Rightarrow \boldsymbol{E}_{ij}(c)[E_{ij}(-c)] = \boldsymbol{I}$

$\boldsymbol{E}_{ij}(-c)\boldsymbol{E}_{ij}(c) = \boldsymbol{I}$

$\boldsymbol{E}_{ij}(c)^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}(-c)$

$\boldsymbol{E}$: 기본행렬
$\boldsymbol{E}^*$: 기본 행 연산의 역연산으로 얻은 기본행렬
$\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{E}^*\boldsymbol{E} = \boldsymbol{I}$
$\boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{E}^{-1}$

선형 방정식(Linear Equations)

연립일차방정식(Linear System)의 풀이 방법

- $(n \times n)$ 행렬 $\boldsymbol{A}$의 기약 행사다리꼴 $\boldsymbol{R}$은 모든 원소가 0인 행을 가지거나 단위행렬이다.

  행렬 $\boldsymbol{A}$의 기약 행사다리꼴을 $\boldsymbol{R}$이라고 하자.

  $$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

  기약 행사다리꼴 $\boldsymbol{R}$의 마지막 행의 모든 원소들은 0이거나 모든 원소들이 0이 아니다.
  마지막 행의 모든 원소들이 0이 아니면 기약 행사다리꼴 $\boldsymbol{R}$은 모든 원소들이 0인 행을 포함하지 않는다.
  $\boldsymbol{R}$의 n개의 각 행은 선도 1을 가지며 아래쪽으로 내려갈수록 각 행의 선도 1은 오른쪽에 나타난다.
  각 행의 선도 1은 주대각 원소에 나타나야 하며 선도 1을 포함하는 열의 나머지 원소들은 0이다.
  ∴ 마지막 행의 모든 원소들이 0이 아니면 기약 행사다리꼴 $\boldsymbol{R}$은 단위행렬이다.

선형 방정식(Linear Equations)

연립일차방정식(Linear System)

- $(n \times n)$ 행렬 $\boldsymbol{A}$에 대하여 다음 명제들은 동치(Logically Equivalent)이다.

① 행렬 $\boldsymbol{A}$는 가역행렬이다.
② 방정식 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$가 하나의 단순해만을 갖는다.
③ 행렬 $\boldsymbol{A}$의 기약 행사다리꼴 행렬은 $\boldsymbol{I}_n$이다(행렬 $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{I}_n$는 행동등이다).
④ 행렬 $\boldsymbol{A}$는 기본행렬들의 곱으로 표현할 수 있다.

- ① ⇒ ②: $\boldsymbol{A}$가 가역행렬이다. ⇒ $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$가 단순해만을 갖는다.
  방정식 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$의 임의의 해를 $\boldsymbol{y}$라고 하자. $\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$
- ② ⇒ ③: $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$가 단순해만을 갖는다. ⇒ $\boldsymbol{A}$의 기약 행사다리꼴 행렬은 $\boldsymbol{I}_n$이다.
  $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$가 단순해만$(x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_{n-1} = 0)$을 가지면 해를 다음과 같이 표현할 수 있다.
  $1x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_{n-1} + 0x_n = 0$
  $0x_1 + 1x_2 + \cdots + 0x_{n-1} + 0x_n = 0$
  $\cdots$
  $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_{n-1} + 1x_n = 0$
  이 방정식을 행렬식으로 표현하면 $\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$이므로 $\boldsymbol{A}$의 기약 행사다리꼴은 $\boldsymbol{I}_n$이다.
- ③ ⇒ ④: $\boldsymbol{A}$의 기약 행사다리꼴 행렬은 $\boldsymbol{I}_n$이다. ⇒ $\boldsymbol{A}$는 기본행렬들의 곱이다.
  $\boldsymbol{A}$에 k번의 기본 행연산을 적용하여 $\boldsymbol{I}_n$을 얻는다면, 해당하는 기본행렬 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_k$이 존재한다.
  $\boldsymbol{E}_k\boldsymbol{E}_{k-1}\cdots\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n \quad (\boldsymbol{E}_k\boldsymbol{E}_{k-1}\cdots\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1)^{-1}(\boldsymbol{E}_k\boldsymbol{E}_{k-1}\cdots\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1)\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{E}_k\boldsymbol{E}_{k-1}\cdots\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1)^{-1}\boldsymbol{I}_n$
  $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{E}_1)^{-1}(\boldsymbol{E}_2)^{-1}\cdots(\boldsymbol{E}_{k-1})^{-1}(\boldsymbol{E}_k)^{-1}\boldsymbol{I}_n = (\boldsymbol{E}_1)^{-1}(\boldsymbol{E}_2)^{-1}\cdots(\boldsymbol{E}_{k-1})^{-1}(\boldsymbol{E}_k)^{-1}$
- ④ ⇒ ①: $\boldsymbol{A}$가 기본행렬들의 곱으로 표현할 수 있다면, $\boldsymbol{A}$는 가역행렬이다.
  $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\cdots\boldsymbol{E}_{k-1}\boldsymbol{E}_k = ((\boldsymbol{E}_k)^{-1}(\boldsymbol{E}_{k-1})^{-1}\cdots(\boldsymbol{E}_2)^{-1}(\boldsymbol{E}_1)^{-1})^{-1}$
  $\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{E}_k)^{-1}(\boldsymbol{E}_{k-1})^{-1}\cdots(\boldsymbol{E}_2)^{-1}(\boldsymbol{E}_1)^{-1}$
  $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I}_n$

$\boxed{(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}}$

선형 방정식(Linear Equations)

역행렬

- 가역행렬 $\boldsymbol{A}$의 역행렬을 구하는 방법
  - $\boldsymbol{A}$가 가역행렬이면 $\boldsymbol{E}_k\boldsymbol{E}_{k-1}\cdots\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n$이다.

    가역행렬 $\boldsymbol{A}$의 기약 행사다리꼴 행렬은 $\boldsymbol{I}_n$이다.

    $\boldsymbol{A}^{-1}$를 양변에 곱하면 $\boldsymbol{E}_k\boldsymbol{E}_{k-1}\cdots\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{A}^{-1}$

    $\boldsymbol{E}_k\boldsymbol{E}_{k-1}\cdots\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}_k\boldsymbol{E}_{k-1}\cdots\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1$

    행렬 $\boldsymbol{A}$를 단위행렬로 만드는 기본 행 연산들을 단위행렬 $\boldsymbol{I}_n$에 적용하면 역행렬 $\boldsymbol{A}^{-1}$이 됨을 의미함
  - 가역행렬 $\boldsymbol{A}$의 역행렬을 구하려면 행렬 $\boldsymbol{A}$를 단위행렬로 만드는 기본 행 연산들을 찾는다.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad E_{12}(-2)\ E_{13}(-1)$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-3\\0&-2&5\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\quad E_{23}(2)$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-3\\0&0&-1\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-5&2&1\end{bmatrix}\quad E_{3}(-1)$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\5&-2&-1\end{bmatrix}\quad E_{32}(3)\ E_{31}(-3)$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}-14&6&3\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{bmatrix}\quad E_{21}(-2)$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}-40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&6&4\\2&4&-1\\-1&2&5\end{bmatrix}\quad E_{12}(-2)\ E_{13}(1)$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&6&4\\0&-8&-9\\0&8&9\end{bmatrix}\quad E_{23}(1)$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&6&4\\0&-8&-9\\0&0&0\end{bmatrix}$$ 가역행렬이 아님

선형 방정식(Linear Equations)

- **역행렬을 사용한 연립방정식의 풀이**

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 + 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{I}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

선형 방정식(Linear Equations)

선형 방정식(Linear Equation)

연립일차방정식(System of Linear Equations)

모든 연립일차방정식은 해가 없거나, 유일해를 갖거나, 무수히 많은 해를 갖는다. 그 외의 다른 가능성은 없다.

- 방정식 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$는 다음 3가지 경우 중 하나에 해당하는 해만을 갖는다.

① 하나의 유일한 해를 갖는다.

$(n \times n)$ 행렬 $\boldsymbol{A}$가 가역행렬($\boldsymbol{A}^{-1}$가 존재)이다. $\Rightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$가 하나의 유일한 해 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$를 갖는다.

행렬 $\boldsymbol{A}$가 $(n \times n)$ 행렬이 아니면?

② 해가 존재하지 않는다.

행렬 $\boldsymbol{A}$ 의 기약 행 사다리꼴이 모든 원소가 0인 행을 갖는다.

③ 무수히 많은 해를 갖는다(2개 이상의 해가 존재하면 무수히 많은 해가 존재한다).

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$가 두개 이상의 해를 갖는다. ⇒ 무수히 많은 해를 갖는다.

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$가 서로 다른 해 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$를 갖는다고 가정하자.

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x}_0 = (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) \neq \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1 + k\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{b} + k\boldsymbol{0} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{b}$

임의의 실수 k에 대하여 $(\boldsymbol{x}_1 + k\boldsymbol{x}_0)$는 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$의 해이다.

$k = 0$: $\boldsymbol{x}_1$, $k = -1$: $\boldsymbol{x}_1 - (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{x}_2$, $k = 1$: $\boldsymbol{x}_1 + (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = 2\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2, \ldots$

$\therefore \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$는 무수히 많은 해를 갖는다.

선형 방정식(Linear Equations)

● 연립일차방정식(Linear System)

- 방정식 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$은 적어도 하나 이상의 해집합을 갖는다.
  단순해(Trivial Solution, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$)가 존재함
- '행렬 $\boldsymbol{A}$가 가역행렬이다'와 '방정식 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$가 단순해만을 갖는다'는 동치이다.
  '행렬 $\boldsymbol{A}$가 가역행렬이 아니다'와 '방정식 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$가 단순해만을 갖지 않는다'는 동치이다.
  "단순해만을 갖는다"의 부정은 "무수히 많은 해를 갖는다" 또는 "해가 없다"이다.
  방정식 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$은 적어도 하나 이상의 해집합을 가지므로 "해가 없다"는 거짓이다.
  그러므로 방정식 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$은 무수히 많은 해를 갖는다.
  행렬 $\boldsymbol{A}$가 가역행렬이 아니면 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$은 단순해가 아닌 해 $(\boldsymbol{z} \neq \mathbf{0})$를 가진다$(\boldsymbol{Az} = \mathbf{0})$.
- '행렬 $\boldsymbol{A}$가 가역행렬이다'와 '$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$가 하나의 유일한 해 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$를 갖는다'는 동치이다.
  ① 행렬 $\boldsymbol{A}$가 가역행렬이면 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$가 하나의 유일한 해 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$를 갖는다.
    $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{AA}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Ib} = \boldsymbol{b}$이므로 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$는 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$의 해이다.
    $\boldsymbol{y}$가 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$의 임의의 해라고 가정하자(유일성을 증명).
    $\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{b}$ $\quad \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ $\quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$
    $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$는 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$의 유일한 해이다.
  ② $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$가 유일한 해 $\boldsymbol{y}$를 가지면 행렬 $\boldsymbol{A}$가 가역행렬이다.
    $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$가 유일한 해 $\boldsymbol{y}$를 가질 때 행렬 $\boldsymbol{A}$가 가역행렬이 아니라고 가정하자$(\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{b})$.
    행렬 $\boldsymbol{A}$가 가역행렬이 아니면 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$은 단순해가 아닌 해 $(\boldsymbol{z} \neq \mathbf{0})$를 가진다$(\boldsymbol{Az} = \mathbf{0})$.
    $(\boldsymbol{w} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$이라고 하면 $(\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{y})$이고 $\boldsymbol{Aw} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{Ay} + \boldsymbol{Az} = \boldsymbol{b} + \mathbf{0} = \boldsymbol{b}$
    $\boldsymbol{Aw} = \boldsymbol{b}$이므로 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$도 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$의 해이다.
    이것은 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$가 유일한 해 $\boldsymbol{y}$를 가진다는 가정에 모순이다.
    ∴ 행렬 $\boldsymbol{A}$가 가역행렬이다.

선형 방정식(Linear Equations)

연립일차방정식(Linear System)

- A와 B가 정사각행렬일 때 "($AB = I$) 이고 ($BA = I$)" $\Leftrightarrow$ "A와 B는 서로의 가역행렬이다".
- ($AB = I$) 또는 ($BA = I$) $\Rightarrow$ A와 B는 서로의 가역행렬이다.
  - $(BA = I) \Rightarrow (B = A^{-1})$
    A가 가역행렬이다(A^{-1}가 존재한다). $\Leftrightarrow$ $Ax = 0$가 단순해만을 갖는다.
    A^{-1}가 존재하는 것을 보이기 위하여 $Ax = 0$가 단순해만을 가짐을 증명하자.
    $Ax = 0$의 임의의 해를 y라고 가정하자.
    $Ay = 0 \quad BAy = B0 \quad Iy = B0 \quad y = 0 \qquad (\because BA = I)$
    $\therefore Ax = 0$는 단순해만을 가진다.
    $Ax = 0$는 단순해만을 가지므로 A^{-1}가 존재한다.
    $BA = I \quad (BA)A^{-1} = IA^{-1} \quad BI = IA^{-1} \quad B = A^{-1}$
    B가 A^{-1}이다($B = A^{-1}$).
  - $(AB = I) \Rightarrow (A = B^{-1})$
    B^{-1}가 존재하는 것을 보이기 위하여 $Bx = 0$가 단순해만을 가짐을 증명하자.
    $Bx = 0$의 임의의 해를 y라고 가정하자.
    $By = 0 \quad ABy = A0 \quad Iy = A0 \quad y = 0 \qquad (\because AB = I)$
    $\therefore Bx = 0$는 단순해만을 가진다.
    $Bx = 0$가 단순해만을 가지므로 B^{-1}가 존재한다.
    $AB = I \quad (AB)B^{-1} = IB^{-1} \quad AI = IB^{-1} \quad A = B^{-1}$
    A가 B^{-1}이다($A = B^{-1}$).

  $\therefore A$가 B의 서로의 역행렬(가역행렬)임을 보이기 위하여 ($AB = I$) 또는 ($BA = I$)를 보이면 된다.
- A가 가역행렬일 때, ($AB = AC$)이면 ($B = C$)이고 ($BA = CA$)이면 ($B = C$)이다.
  $AB = AC \quad A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \quad (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \quad IB = IC \quad B = C$
  $BA = CA \quad (BA)A^{-1} = (CA)A^{-1} \quad B(AA^{-1}) = C(AA^{-1}) \quad BI = CI \quad B = C$

선형 방정식(Linear Equations)

● 연립일차방정식(Linear System)

- $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{B}$가 같은 크기의 정사각행렬일 때 $\boldsymbol{AB}$가 가역이면 $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{B}$도 가역이다.

① $(\boldsymbol{AB})$가 가역행렬이면 $\boldsymbol{B}$가 가역행렬이다.

$\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$은 단순해만을 갖는다. ⇔ $\boldsymbol{B}$가 가역행렬이다($\boldsymbol{B}^{-1}$가 존재한다).

$\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$의 임의의 해를 $\boldsymbol{y}$라고 가정하자.

$\boldsymbol{By} = \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{ABy} = \boldsymbol{A0} = \boldsymbol{0}$

$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \quad (\boldsymbol{AB})^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$는 단순해($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$)만을 가진다.

$\therefore \boldsymbol{B}^{-1}$가 존재한다.

② $(\boldsymbol{AB})$가 가역행렬이고 $\boldsymbol{B}$가 가역행렬이면 $\boldsymbol{A}$가 가역행렬이다.

$(\boldsymbol{B}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{B}$이므로 $\boldsymbol{B}^{-1}$가 가역행렬이다.

$(\boldsymbol{AB})$가 가역행렬이고 $\boldsymbol{B}^{-1}$가 가역행렬이면 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{B}^{-1}$는 가역행렬이다.

$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BB}^{-1}) = \boldsymbol{AI} = \boldsymbol{A}$

$\therefore \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{B}^{-1}$는 가역행렬이다.

$\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{B}$가 가역이면 $\boldsymbol{AB}$는 가역이고 $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$이다.

① $(\boldsymbol{AB})$의 가역행렬을 $\boldsymbol{C}$라고 하면 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}$이다.
$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = \boldsymbol{I}$
$\boldsymbol{BC}$는 $\boldsymbol{A}$의 역행렬이다($\boldsymbol{A}$가 가역이다).
② $(\boldsymbol{AB})$의 가역행렬을 $\boldsymbol{C}$라고 하면 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{I}$이다.
$(\boldsymbol{CA})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$
$\boldsymbol{CA}$는 $\boldsymbol{B}$의 역행렬이다($\boldsymbol{B}$가 가역이다).

선형 방정식(Linear Equations)

● 연립일차방정식(Linear System)의 행렬 표현

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \cdots \qquad & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$가 일치하는 모든 행렬 $\boldsymbol{b}$는?

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= b_1 \\ x + 3z &= b_2 \\ 2x + y + 3z &= b_3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - b_1 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - b_1 \\ b_3 - 2b_1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

2행=(1행*-1)+2행: $E_{12}(-1)$ 3행=(1행*-2)+3행: $E_{13}(-2)$ 2행=(2행*-1): $E_2(-1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - b_1 \\ b_3 - b_1 - b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2b_1 - b_2 \\ b_2 - b_1 \\ b_3 - b_1 - b_2 \end{bmatrix}$$

1행=(2행*-1)+1행: $E_{21}(-1)$

$$\begin{aligned} b_3 - b_1 - b_2 &= 0 \\ b_3 &= b_1 + b_2 \end{aligned} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

선형 방정식(Linear Equations)

● 연립일차방정식(Linear System)

❑ $(n \times n)$ 행렬 $\boldsymbol{A}$에 대하여 다음 명제들은 동치(Logically Equivalent)이다.

① 행렬 $\boldsymbol{A}$는 가역행렬이다.
② 모든 $(n \times 1)$ 행렬 $\boldsymbol{b}$에 대하여 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$는 일치한다.
③ 모든 $(n \times 1)$ 행렬 $\boldsymbol{b}$에 대하여 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$는 하나의 해만 갖는다.

- ① ⇒ ③: 행렬 $\boldsymbol{A}$가 가역행렬이다. ⇒ 방정식 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$가 하나의 유일한 해 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$를 갖는다.
- ③ ⇒ ②: $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$는 하나의 해만 갖는다. ⇒ $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$는 일치한다.
- ② ⇒ ①: 모든 $(n \times 1)$ 행렬 $\boldsymbol{b}$에 대하여 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$는 일치한다. ⇒ $\boldsymbol{A}$는 가역행렬이다.

모든 $(n \times 1)$ 행렬 $\boldsymbol{b}$에 대하여 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$가 일치한다면 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{e}_n$이 성립한다.
$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{e}_n$의 해를 각각 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$이라고 하자.
$\boldsymbol{Ax}_1 = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{Ax}_2 = \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{Ax}_n = \boldsymbol{e}_n$
$\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_n]$
$\boldsymbol{AC} = [\boldsymbol{Ax}_1 \quad \boldsymbol{Ax}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{Ax}_n] = [\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_n] = \boldsymbol{I}$
$(\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{I}) \Rightarrow (\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{-1})$
∴ 행렬 $\boldsymbol{A}$는 가역행렬이다.

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \ldots \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

① 행렬 $\boldsymbol{A}$는 가역행렬이다.
② 방정식 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$가 하나의 단순해만을 갖는다.
③ 행렬 $\boldsymbol{A}$의 기약 행사다리꼴 행렬은 $\boldsymbol{I}_n$이다.
④ 행렬 $\boldsymbol{A}$는 기본행렬들의 곱으로 표현할 수 있다.
⑤ 모든 $(n \times 1)$ 행렬 $\boldsymbol{b}$에 대하여 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$는 일치한다.
⑥ 모든 $(n \times 1)$ 행렬 $\boldsymbol{b}$에 대하여 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$는 하나의 해만 갖는다.

선형 방정식(Linear Equations)

연립일차방정식(Linear System)

- $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{B}$가 $(n \times n)$ 행렬 일 때 $\boldsymbol{B}$가 가역행렬이 아니면 $\boldsymbol{AB}$가 가역행렬이 아니다.

  행렬 $\boldsymbol{AB}$가 가역행렬이다. $\Rightarrow$ 행렬 $\boldsymbol{B}$가 가역행렬이다.

  행렬 $\boldsymbol{AB}$가 가역행렬이면 $(\boldsymbol{AB})^{-1}$가 존재한다.

  $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

  $\boldsymbol{B}$가 가역행렬이 아니면 $\boldsymbol{AB}$가 가역행렬이 아니다.

  행렬 $\boldsymbol{B}$가 가역행렬이 아니면 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$은 $(\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0})$인 해를 갖는다.

  $\boldsymbol{Bz} = \boldsymbol{0}$

  $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bz}) = \boldsymbol{0}$

  $((\boldsymbol{AB})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0})$이므로 $\boldsymbol{z}$는 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$의 해이다.

  $(\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0})$이므로 $\boldsymbol{AB}$가 가역행렬이 아니다.

선형 방정식(Linear Equations)

연립일차방정식(Linear System)

LU 분해(LU Decomposition)

$$\begin{array}{c} (i<j) \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ (i>j) \end{array}$$

- 상삼각행렬(Upper Triangle Matrix)
  - 주대각선 아래쪽의 모든 원소가 0인 정사각행렬 $[a_{ij}]$: $(i>j) \Rightarrow (a_{ij}=0)$
- 하삼각행렬(Lower Triangle Matrix)
  - 주대각선 위쪽의 모든 원소가 0인 정사각행렬 $[a_{ij}]$: $(i<j) \Rightarrow (a_{ij}=0)$
- 삼각행렬의 성질
  - 하삼각행렬의 전치행렬은 상삼각행렬이고 상삼각행렬의 전치행렬은 하삼각행렬이다.
    정사각행렬의 전치행렬은 주대각선을 중심으로 대칭
  - 하삼각행렬들의 곱은 하삼각행렬이고 상삼각행렬들의 곱은 상삼각행렬이다.
    $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$와 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$는 하삼각행렬이고 $\boldsymbol{C}=[c_{ij}]=\boldsymbol{AB}$라고 할 때, $(i<j) \Rightarrow (c_{ij}=0)$임을 보이자.
    $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$
    $\quad =a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{i(j-1)}b_{(j-1)j}+a_{ij}b_{jj}+a_{i(j+1)}b_{(j+1)j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$
    $(i<j) \Rightarrow (b_{1j}=b_{2j}=\cdots=b_{(j-1)j}=0) \Rightarrow a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{i(j-1)}b_{(j-1)j}=0$
    $(i<j) \Rightarrow (a_{ij}=a_{i(j+1)}=\cdots=a_{in}=0) \Rightarrow a_{ij}b_{jj}+a_{i(j+1)}b_{(j+1)j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=0$
    $\therefore (i<j) \Rightarrow c_{ij}=0$
  - 삼각행렬이 가역행렬이기 위한 필요충분조건은 주대각원소가 모두 0이 아니어야 한다.
  - 하삼각행렬의 역행렬은 하삼각행렬이고 상삼각행렬의 역행렬은 상삼각행렬이다.
  - 정사각행렬 $\boldsymbol{A}$가 행교환을 하지 않고 행사다리꼴 $\boldsymbol{U}$로 변환된다면 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$의 형태로 분해될 수있다. 이때 $\boldsymbol{L}$은 하삼각행렬이고 $\boldsymbol{U}$는 상삼각행렬이다. 이것을 $\boldsymbol{LU}$분해라고 한다.
    $\boldsymbol{E}_k\boldsymbol{E}_{k-1}\cdots\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}$
    $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{E}_1)^{-1}(\boldsymbol{E}_2)^{-1}\cdots(\boldsymbol{E}_{k-1})^{-1}(\boldsymbol{E}_k)^{-1}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{LU} \quad \boldsymbol{L}=(\boldsymbol{E}_1)^{-1}(\boldsymbol{E}_2)^{-1}\cdots(\boldsymbol{E}_{k-1})^{-1}(\boldsymbol{E}_k)^{-1}$

선형 방정식(Linear Equations)

연립일차방정식(Linear System)

LU 분해(LU Decomposition)

- 삼각행렬의 성질
  - 삼각행렬이 가역행렬이기 위한 필요충분조건은 주대각원소가 모두 0이 아니어야 한다.
    행렬 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$가 주대각선 원소가 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$인 삼각행렬이라고 하자.
    상삼각행렬과 하삼각행렬의 행렬식은 $det(\boldsymbol{A}) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$이다.
    행렬이 가역행렬이기 위한 필요충분조건은 $det(\boldsymbol{A}) \neq 0$이다.
    $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$
    $\therefore\ a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, \cdots, a_{nn} \neq 0$
  - 하삼각행렬의 역행렬은 하삼각행렬이고 상삼각행렬의 역행렬은 상삼각행렬이다.
    행렬 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$가 상삼각행렬이라고 하자.
    $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{det(\boldsymbol{A})}[\tilde{\boldsymbol{A}}_{ij}]^T$

$$\begin{array}{c} (i<j) \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ (i>j) \end{array}$$

    행렬 $\boldsymbol{A}^{-1}$가 상삼각행렬임을 보이려면 $[\tilde{\boldsymbol{A}}_{ij}]^T$가 상삼각행렬임을 보이면 된다.
    $[\tilde{\boldsymbol{A}}_{ij}]^T$가 상삼각행렬임을 보이려면 $[\tilde{\boldsymbol{A}}_{ij}]$가 하삼각행렬임을 보이면 된다.
    $(i<j)$일 때 $(\tilde{\boldsymbol{A}}_{ij} = 0)$임을 보이자.
    $\tilde{\boldsymbol{A}}_{ij} = (-1)^{i+j}det(\boldsymbol{A}_{ij})$이므로 $(i<j)$일 때 $det(\boldsymbol{A}_{ij}) = 0$임을 보이면 된다.
    행렬 $\boldsymbol{A}$의 i번째 행과 j번째 열을 제거하여 만든 행렬 $\boldsymbol{B}_{ij}$가 다음을 만족한다고 하자.
    $det(\boldsymbol{A}_{ij}) = det(\boldsymbol{B}_{ij})$
    행렬 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$가 상삼각행렬이고 $(i<j)$이므로 $\boldsymbol{B}_{ij}$는 상삼각행렬이다.
    행렬 $\boldsymbol{A}$가 상삼각행렬이므로 $(i+1)$번째 행은 적어도 i개의 0을 가진다. 그러나 $\boldsymbol{B}_{ij}$의 i번째 행은 행렬 $\boldsymbol{A}$로부터 j번째 열을 제거한 행렬 $\boldsymbol{A}$의 $(i+1)$번째 행이다. $(i<j)$이므로 처음 i개의 0은 j번째 열을 제거해도 없어지지 않는다. $\boldsymbol{B}_{ij}$의 i번째 행은 적어도 i개의 0을 가지므로 i번째 행의 주대각선 원소는 0이된다.
    $det(\boldsymbol{B}_{ij}) = 0$이므로 $det(\boldsymbol{A}_{ij}) = 0$이다.

선형 방정식(Linear Equations)

- **연립일차방정식(Linear System)의 응용**
  - 다항식 보간법
    - 평면 위의 점들을 지나는 그래프의 다항식을 찾는 문제
      - xy –평면 위의 서로 다른 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)을 지나는 다항식(직선의 방정식)

        $p(x) = ax + b$

        $y_1 = ax_1 + b \quad y_2 = ax_2 + b$

        $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad b = \dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$
      - xy –평면 위의 서로 다른 n개의 점을 지나는 차수가 $(n-1)$보다 작거나 같은 다항식은 유일하다.
      - 서로 다른 n개의 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n)$을 지나는 다항식

        $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 {x_1}^2 + \cdots + a_{n-1} {x_1}^{n-1} \\
y_2 &= a_0 + a_1 x_2 + a_2 {x_2}^2 + \cdots + a_{n-1} {x_2}^{n-1} \\
&\cdots \\
y_n &= a_0 + a_1 x_n + a_2 {x_n}^2 + \cdots + a_{n-1} {x_n}^{n-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} a_0 + x_1 a_1 + {x_1}^2 a_2 \ldots + {x_1}^{n-1} a_{n-1} \\ a_0 + x_2 a_1 + {x_2}^2 a_2 + \cdots + {x_2}^{n-1} a_{n-1} \\ \vdots \quad\quad \cdots \quad \vdots \\ a_0 + x_n a_1 + {x_n}^2 a_2 + \cdots + {x_n}^{n-1} a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \ldots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & {x_2}^{n-1} \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & \ldots & {x_n}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \ldots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & {x_2}^{n-1} \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & \ldots & {x_n}^{n-1} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}
$$

선형 방정식(Linear Equations)

- **연립일차방정식(Linear System)의 응용**
  - 도로망의 교통 흐름
    - 그림과 같은 회전 교차로에서 x_1, x_2, x_3, x_4를 구하라.

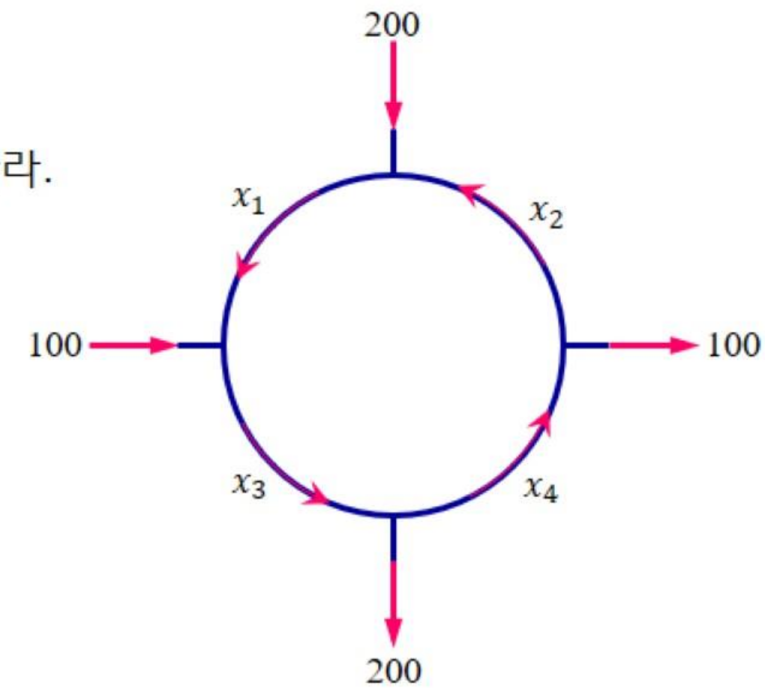
$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_2 + 200 & \quad x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 200 \\
x_2 &= x_4 - 100 & \quad 0x_1 + x_2 + 0x_3 - x_4 &= -100 \\
x_3 &= x_1 + 100 & \quad x_1 + 0x_2 - x_3 + 0x_4 &= -100 \\
x_4 &= x_3 - 200 & \quad 0x_1 + 0x_2 + x_3 - x_4 &= 200
\end{aligned}
$$

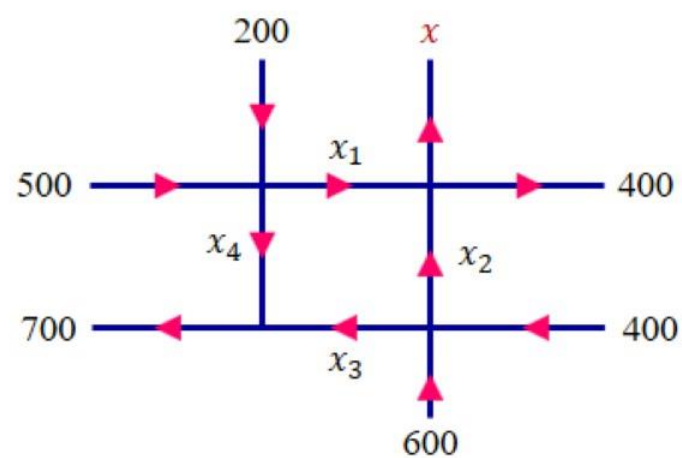
$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} 200 \\ -100 \\ -100 \\ 200 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} 100 \\ -100 \\ 200 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_4 &= 100 \\
x_2 - x_4 &= -100 \\
x_3 - x_4 &= 200
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
x_1 &= 100 + x_4 \\
x_2 &= -100 + x_4 \\
x_3 &= 200 + x_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 100 + t \\
x_2 &= -100 + t \\
x_3 &= 200 + t \\
x_4 &= t
\end{aligned}
$$

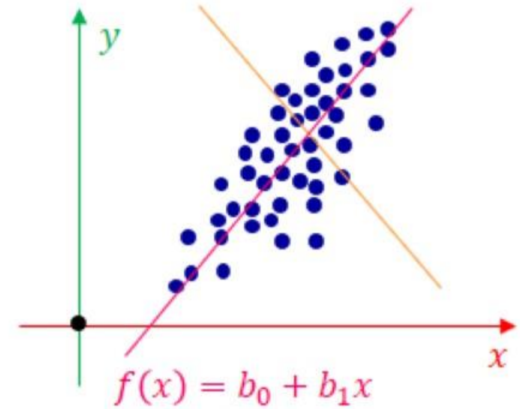




선형 방정식(Linear Equations)

연립일차방정식(Linear System)의 응용

- 최소 제곱 회귀분석(Least Square Linear Regression)
  - n개의 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n)$을 지나는 최소제곱회귀직선 $y = f(x) = \beta_0 + \beta_1 x$



$e_i = y_i - f(x_i)$

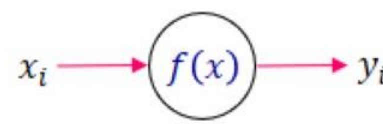
$e = \sum_{i=0}^{n} {e_i}^2 = \sum_{i=0}^{n} (y_i - f(x_i))^2$

최소제곱회귀직선은 e를 최소화하는 직선 $f(x) = \beta_0 + \beta_1 x$이다.

$e = (y_1 - f(x_1))^2 + (y_2 - f(x_2))^2 + \cdots + (y_n - f(x_n))^2$

$y_i = f(x_i) + (y_i - f(x_i))$

$y_i = (\beta_0 + \beta_1 x_i) + e_i$



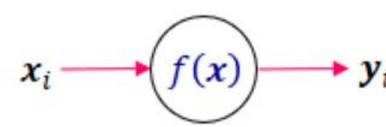
$y_i = (\beta_0 + \beta_1 x_i)$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{E}$

$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x})^{-1} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$

$e = \boldsymbol{E}^T \boldsymbol{E}$



$\boldsymbol{y}_i = (\boldsymbol{c}_0 + \boldsymbol{w}\boldsymbol{x}_i)$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{x}_1 \\ 1 & \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2m} \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

선형 방정식(Linear Equations)

- **Quiz**
  - n개의 미지수와 n개의 선형방정식을 갖는 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$이 단순해만을 갖는다고 가정하자.
    - $\boldsymbol{A}^k \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$도 단순해만을 갖는다.
  - n개의 미지수와 n개의 선형방정식을 갖는 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$이 단순해만을 가진다.
    그리고 $(n \times n)$ 행렬 $\boldsymbol{Q}$가 가역행렬이라고 가정하자.
    - "$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$이 단순해만을 갖는다"와 "$(\boldsymbol{QA})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$이 단순해만을 갖는다"는 동치이다.
  - $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$는 일치하며 $\boldsymbol{x}_1$이 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$의 해이다.
    - $\boldsymbol{x}_0$가 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$의 해일 때 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$의 모든 해는 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_0$의 형태로 표현된다.

선형 방정식(Linear Equations)

- **Quiz**
  - 일차연립방정식이 2개의 해만을 갖는 것은 불가능하다.
  - $\boldsymbol{A}$가 정사각형 행렬이고 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$가 단 하나의 해를 가지면 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{c}$도 단 하나의 해를 갖는다.
  - $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{B}$가 $(n \times n)$ 행렬일 때, $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}_n$이면 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}_n$이다.
  - $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{B}$가 행동등 행렬이면 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$와 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$는 같은 해집합을 갖는다.
  - $\boldsymbol{A}$가 $(n \times n)$ 행렬이고 $\boldsymbol{S}$가 가역행렬일 때, $\boldsymbol{x}$가 $(\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$의 해이면 $\boldsymbol{Sx}$는 $\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{Sb}$의 해이다.
  - $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x}$는 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$으로 나타낼 수 있고 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$의 해는 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x}$의 해와 같다.
  - $\boldsymbol{A}$가 $(n \times n)$ 행렬일 때, "$\boldsymbol{Ax} = 4\boldsymbol{x}$가 단 하나의 해를 가진다"와 "$(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I})$는 가역행렬이다"는 동치이다.
  - $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{B}$가 $(n \times n)$ 행렬일 때, $\boldsymbol{A}$ 또는 $\boldsymbol{B}$가(또는 둘다) 가역행렬이 아니면 $\boldsymbol{AB}$도 가역행렬이 아니다.