Primitive asimmetriche

Con il termine "**Primitive asimmetriche**" ci si riferisce a tutta una serie di problemi computazionali che rappresentano la base necessaria per costruire sistemi di cifratura asimmetriche affidabili.

Tabella riassuntiva dei problemi

Problema	Input	Output da trovare
`Logaritmo discreto` (**dl**)	g^x	x
`Il problema computazionale Diffie-Hellman` (**cdh**)	g^x, g^y	g^{xy}
`Il problema decisionale Diffie-Hellman` (**ddh**)	g^x, g^y, g^z	Is $z \equiv xy \mod \|G\|$

Logaritmo discreto (su gruppi finiti)

Sia G un gruppo ciclico e g un generatore di G. Questo vuol dire che $G = \{g^0, g, g^2, g^3, \ldots, g^{m-1}\}$, dove $m = |G|$, ordine di G.
La funzione `Logaritmo discreto` $DLog_{G,g} : G \rightarrow Z_m$ prende in input un elemento $a \in G$, e restituisce un $i \in Z_m$ tale che $a = g^i$.

Definizione formale (dl)

Per descrivere formalmente la difficoltà che si ha nel calcolo della funzione `Logaritmo discreto`, si può utilizzare il seguente esperimento.

Sia G un gruppo ciclico di ordine $m = |G|$ e g un generatore di G. Si consideri quindi l'elemento $x \overset{\$}{\leftarrow} G$.

Un avversario A riceve come input un valore $X = g^x$, e il suo obiettivo è quello di determinare il valore di x.

```
ESP_{G,g}^{dl}(A):
    x <-R- Z_m
    X <- g**x
    x` <- A(X)
    if g**x` == X:
        return 1
    return 0
```

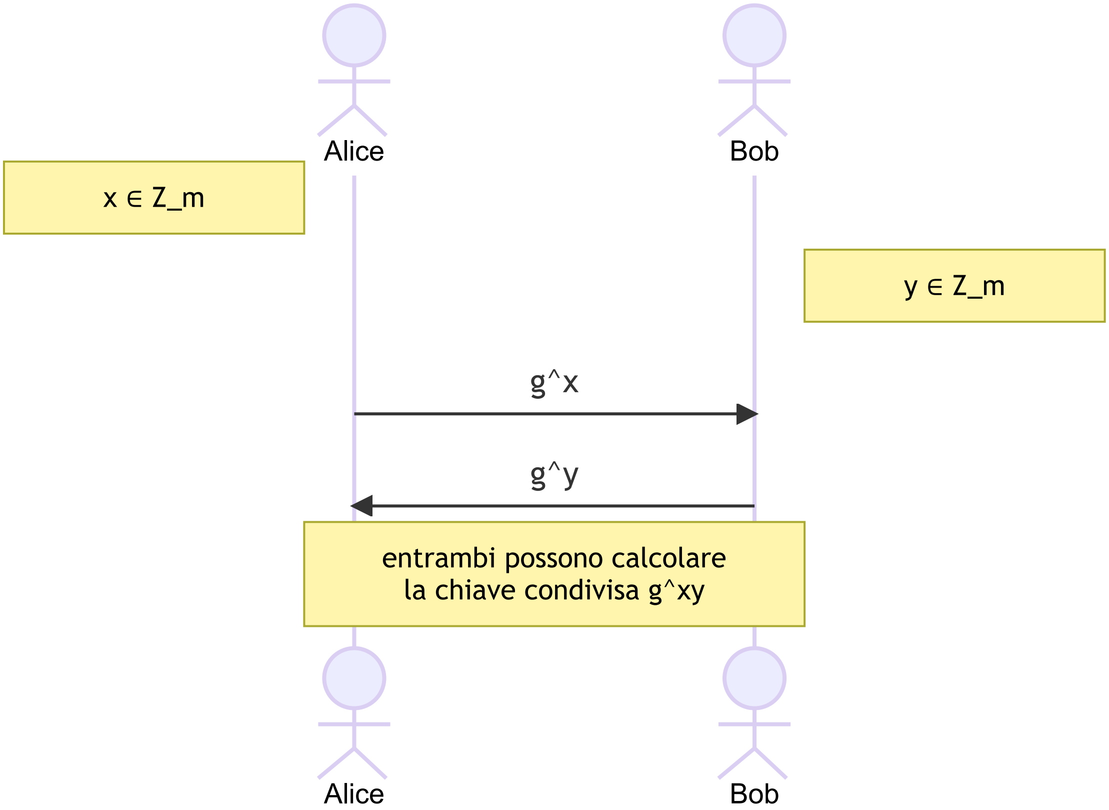
Il vantaggio di A in senso **df** è così definito:

$$Adv^{df}_{G,g}(A) = Pr[Esp^{df}_{G,g}(A) = 1]$$

Il problema del `Logaritmo discreto` è intrattabile in G se il vantaggio così definito è prossimo a 0 per ogni avversario A computazionalmente limitato.
Al momento possiamo basarci sula congettura che, per determinati gruppi, il problema del `Logaritmo discreto` sia (asintoticamente) intrattabile, in particolare per Z^*_p e gruppi di punti di curve ellittiche su campi finiti, fintanto che la dimensione del problema è sufficientemente grande.

Il problema computazionale Diffie-Hellman

Sia G un gruppo con $m = |G|$ ordine del gruppo, nel quale il `Logaritmo discreto` è *(stando alla congettura)* difficile. Sotto queste ipotesi, si immagini il seguente scambio di messaggi attraverso un canale insicuro.
Alice sceglie un $x \overset{\$}{\leftarrow} Z_m$ e Bob fa lo stesso scegliendo $y \overset{\$}{\leftarrow} Z_m$. Dopo essersi scambiati rispettivamente g^x e g^y, dove g è un generatore di Z_m, entrambi possono facilmente calcolare g^{xy}, poiché che già conoscono x o y.



Per poter recuperare la chiave condivisa g^{xy}, un avversario che non ha accesso a x e y può solo provare ad ottenere g^{xy} conoscendo solo $X = g^x$ e $Y = g^y$. Questo è proprio il `problema computazionale Diffie-Hellman`.

Definizione formale (cdh)

Per descrivere formalmente la difficoltà che si ha nella risoluzione del `problema computazionale Diffie-Hellman` si può utilizzare il seguente esperimento.

Sia G un gruppo ciclico di ordine $m = |G|$ e g un generatore di G. Si considerino quindi due elementi $x \overset{\$}{\leftarrow} G$ e $y \overset{\$}{\leftarrow} G$.

Un avversario A riceve come input i valori $X = g^x$ ed $Y = g^y$, e il suo obiettivo è quello di determinare il valore di g^{xy}.

```
ESP_{G,g}^{cdh}(A):
    x <-R- Z_m
    y <-R- Z_m
    X <- g**x
    Y <- g**y
    Z <- A(X, Y)
    if Z == g**(x*y):
        return 1
    return 0
```

I vantaggio di A in senso **cdh** è così definito:

$$Adv^{cdh}_{G,g}(A) = Pr[Esp^{cdh}_{G,g}(A) = 1]$$

Il `problema computazionale Diffie-Hellman` è intrattabile in G se il vantaggio così definito è prossimo a 0 per ogni avversario computazionalmente limitato.

Si noti inoltre che il `problema computazionale Diffie-Hellman` non può essere più difficile del problema del `Logaritmo discreto`. Persiste infatti la relazione

$$Adv^{dl}_{G,g}(A) \leq Adv^{cdh}_{G,g}(A)$$

Ciò indica che se il problema del `Logaritmo discreto` è trattabile, lo è sicuramente anche quello `computazionale Diffie-Hellman`, in quanto un avversario con un vantaggio sufficientemente grande per il primo ne avrebbe uno almeno altrettanto grande per il secondo. Non è vero il contrario.
Attualmente l'unico modo conosciuto per risolvere il `problema computazionale Diffie-Hellmane` è risolvere il `Logaritmo discreto`.

Il problema decisionale Diffie-Hellman

Dopo aver ottenuto una chiave condivisa g^{xy}, ci si pone il quesito se questo valore appare random agli occhi di un qualunque avversario computazionalmente limitato. Riuscire a distinguere g^{xy} da un numero casuale nella forma g^h con $h \overset{\$}{\leftarrow} Z_m$ è proprio il `problema decisionale Diffie-Hellman`.

Definizione formale (ddh)

Per descrivere formalmente la difficoltà che si ha nella risoluzione del `problema decisionale Diffie-Hellman` si può utilizzare la seguente coppia di esperimenti.

Sia G un gruppo ciclico di ordine $m = |G|$ e g un generatore di G. Si considerino quindi due elementi $x \overset{\$}{\leftarrow} G$ e $y \overset{\$}{\leftarrow} G$, ed un terzo elemento z che cambia a seconda dell'esperimento:

$$z = \begin{cases} x \cdot y \mod m & \text{se siamo nel mondo 1} \\ \overset{\$}{\leftarrow} Z_m & \text{se siamo nel mondo 0} \end{cases}$$

Un avversario A riceve come input i valori $X = g^x$,$Y = g^y$ e $Z = g^z$, e il suo obiettivo è quello di determinare in quale dei due esperimenti si trovi attraverso un bit di output.

```
ESP_{G,g}^{ddh-1}(A):
    x <-R- Z_m
    y <-R- Z_m
    z <- (x*y) % m
    X <- g**x
    Y <- g**y
    Z <- g**z
    d <- A(X, Y, Z)
    return d

ESP_{G,g}^{ddh-0}(A):
    x <-R- Z_m
    y <-R- Z_m
    z <-R- Z_m
    X <- g**x
    Y <- g**y
    Z <- g**z
    d <- A(X, Y, Z)
    return d
```

I vantaggio di A in senso **ddh** è così definito:

$$Adv^{ddh}_{G,g}(A) = |Pr[Esp^{ddh-1}_{G,g}(A) = 1] - Pr[Esp^{ddh-0}_{G,g}(A) = 1]|$$

Il `problema decisionale Diffie-Hellman` è intrattabile in G se il vantaggio così definito è prossimo a 0 per ogni avversario computazionalmente limitato.

Si noti inoltre che il `problema decisionale Diffie-Hellman` non può essere più difficile del `problema computazionale Diffie-Hellman`. Persiste infatti la relazione

$$Adv^{cdh}_{G,g}(A) \leq Adv^{ddh}_{G,g}(A) + \frac{1}{|G|}$$

Ciò indica che se il problema del `problema computazionale Diffie-Hellman` è trattabile, lo è sicuramente anche quello `decisionale Diffie-Hellman`, in quanto un avversario con un vantaggio sufficientemente grande per il primo ne avrebbe uno almeno altrettanto grande per il secondo. Non è vero il contrario.
Sebbene esistano alcuni gruppi in cui il `problema decisionale Diffie-Hellman` è facile mentre il `problema computazionale Diffie-Hellman` non lo è, se G è scelto adeguatamente l'unico modo conosciuto per risolvere il `problema computazionale Diffie-Hellmane` è risolvere il `problema computazionale Diffie-Hellman`.

Calcolare logaritmi discreti

Si possono individuare due famiglie principali fra gli algoritmi utilizzate per calcolare i logaritmi discreti all'interno di un gruppo:

- **Index calculus**: metodi efficienti, anche se non polinomiali, che però richiedono che il gruppo verifichi alcune proprietà aritmetiche non sempre presenti
- **Collision search**: metodi generici, ma con complessità puramente esponenziale

Baby-step / giant-step

Sia $m = |G|$ e sia $n = \lceil \sqrt{m} \rceil$. Dato come input $X = g^x$, l'obiettivo è quello di calcolare $DLog_{G,g}(X)$, quindi ottenere x.

Si noti che esistono due interi $x_0, x_1 : 0 \leq x_0, x_1 \leq n \ \wedge \ x = nx_1 + x_0$. Questo vuol dire che si può considerare $X = g^x = g^{nx_1+x_0}$ e quindi $Xg^{-x_0} = (g^n)^{x_1}$.

L'idea dell'algoritmo è quella di calcolare due liste

$$\begin{array}{ll} Xg^{-b} & \text{per } b = 0, 1, \ldots, n \\ (g^n)^a & \text{per } a = 0, 1, \ldots, n \end{array}$$

e trovare quindi gli elementi che appartengono ad entrambe. I valori di a, b che verificano $Xg^{-x_0} = (g^n)^{x_1}$ verificheranno anche $DLog_{G,g}(X) = an + b = x$.

```
BsGs(X):
    n <- ??m?
    N <- g**n
    for b <- 0 to n:
        B[X * g** (-b)] <- b
    for a <- 0 to n:
        Y <- N**a
        if B[Y] is not null:
            x_0 <- B[Y]
            x_1 <- a
            return n * x_1 + x_0
    return ?
```

Sebbene sia decisamente migliore di una ricerca esaustiva, una complessità $O(\sqrt{|G|})$ è comunque improponibile per gruppi abbastanza grandi.

Gruppi ciclici Z_p^*

Se il gruppo $G = Z_p^*$ con p primo. Si considerino i vari problemi elencati finora per verificarne l'intrattabilità.

Il problema decisionale Diffie-Hellman in Z_p^*

Si può notare che il problema decisionale Diffie-Hellman è facile in Z_p^*. Nello specifico, si può nota che il valore g^{xy} è un quadrato residuo con probabilità $\frac{3}{4}$, con $x, y \overset{\$}{\leftarrow} Z_{p-1}$. Tuttavia, un elemento preso a caso dal gruppo è un quadrato residuo con probabilità $\frac{1}{2}$. Dato che il simbolo di Jacobi si può calcolare piuttosto efficientemente, avendo complessità cubica, un avversario può facilmente acquisire un vantaggio $\ggg 0$ pari a

$$Adv_{G,g}^{ddh}(A) = \frac{1}{2}$$

Il problema computazionale Diffie-Hellman in Z_p^*

Come detto in precedenza, l'unico modo conosciuto per trattare il problema computazionale Diffie-Hellman è quello di risolvere il problema del logaritmo discreto

Logaritmo discreto in Z_p^*

Un algoritmo in grado di risolvere il logaritmo discreto in Z_p^* è il **GNFS** [1], che ha una complessità del tipo $O(e^{(C+o(1))\cdot \ln(p)^{1/3} \cdot (\ln\ln(p))^{2/3}})$, dove $C \approx 1.92$.

Se però la fattorizzazione dell'ordine del gruppo è nota, si possono ottenere risultati migliori. Supponiamo di conoscere $p - 1 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$. I logaritmi discreti possono essere calcolati in tempo $O(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\sqrt{p_i} + |p_i|))$. Se vogliamo quindi che il logaritmo discreto continui ad essere intrattabile, è bene che almeno uno dei fattori p_i sia abbastanza grande.

La fattorizzazione di $p - 1$ potrebbe essere difficile da ottenere conoscendo solo p, ma nella pratica spesso p è scelto proprio in maniera da conoscere la fattorizzazione, così da poter trovare facilmente un generatore in Z_p^*. Una scelta comune è quindi quella di scegliere $p = sq + 1$, dove $s \geq 2$ è un intero piccolo e q è primo, in modo che $p - 1$ abbia almeno un fattore, q, grande.

Problema della fattorizzazione

L'algoritmo più rapido conosciuto per fattorizzare e' il **Number Field Sieve**, super polinomiale, con una complessità paragonabile ad **GNFS**. Fattorizzare interi con un numero maggiore di 1024 (o ancora meglio 2048) bit è considerato intrattabile.

RSA

RSA [2] è la base per le soluzioni di crittografia asimmetrica più popolari.

Definizione

Siano $N, f \geq 1$ due interi. La funzione RSA associata ad N, f è la funzione $RSA_{N,f} : Z_p^* \to Z_p^*$ definita come $RSA_{N,f}(w) = w^f \mod N \quad \forall w \in Z_p^*$. Si ricordi inoltreche $\phi(N)$ è l'ordine del gruppo Z_N^*.

Siano $e, d \in Z_{\phi(N)}^* : ed \equiv 1 \mod \phi(N)$, con $N \geq 2$. Allora le funzioni $RSA_{N,e}, RSA_{N,d}$ sono entrambe biiettive su Z_p^* ed inoltre sono una l'inverso dell'altra. Quindi $RSA_{N,e}^{-1} = RSA_{N,d}$ e $RSA_{N,d}^{-1} = RSA_{N,e}$. La condizione $ed \equiv 1 \mod \phi(N)$ impone anche che $e^{-1} = d$ in $Z_{\phi(N)}^*$.

Per provare che le due funzioni siano una l'inverso dell'altra si consideri la seguente prova:

$$RSA_{N,e}(RSA_{N,d}) \equiv (x^d)^e \equiv x^{ed} \equiv x^{ed \mod \phi(N)} \equiv x^1 \equiv x \mod N$$

Abbiamo usato il fatto che $\phi(N)$ è l'ordine del gruppo Z_n^* e il fatto che e, d sono inversi in $Z_{\phi(N)}^*$. La prova è uguale anche invertendo le due funzioni.

Sebbene sia quindi facile invertire una delle due funzioni conoscendo entrambi e, d, il problema sembra essere intrattabile se si conosce uno solo di questi valori e non si ha accesso a $\phi(N)$.

Generazione dei parametri

RSA necessita una serie di parametri, nello specifico $((N, e), (N, p, q, d))$. Ci sono due algoritmi che, in serie, sono in grado di produrre tutti i valori richiesti.

Un generatore di modulo **RSA** con parametro di sicurezza $k \geq 2$ è un algoritmo randomizzato che non accetta input e restituisce i valori (N, p, q) che soddisfano le seguenti condizioni:

- $p, q : p \neq q$, numeri primi
- $N = pq$
- $2^{k-1} \leq N \leq 2^k$. In pratica $|N| = k$ bit

Un generatore **RSA** con parametro di sicurezza $k \geq 2$ è un algoritmo randomizzato che non accetta input e restituisce i valori $((N, e), (N, p, q, d))$ che soddisfano le condizioni espresse sopra, ed inoltre le seguenti:

- $\phi(N) = (p-1)(q-1)$. Ordine del gruppo Z_N^*
- $e, d \in Z_{\phi(N)}^*$. Questo vuol dire che $1 \leq e, d \leq \phi(N)$ e che $MCD(e, \phi(N)) = MCD(d, \phi(N)) = 1$
- $ed \equiv 1 \mod \phi(N)$

N viene chiamato *modulo RSA* o *modulo*, e è l'*esponente di cifratura* e d l'*esponente di decifratura*.

Seguono degli esempi di implementazione:

```
RSA-MOD():
    l_1 <- floor(k/2)
    l_2 <- cail(k/2)
```

```
    N <- 0
    while N == 0:
        p <-R- {0, 1}^{l_1}
        q <-R- {0, 1}^{l_2}
        if TEST-PRIME(p) and TEST-PRIME(q) and p != q and 2**(k - 1) <= N:
            N <- p*q
    return (N, p, q)

RSA-GEN():
    (N, p, q) ? RSA-MOD()
    m <- (p-1)*(q-1)
    e <-R- Z_m
    d <- MOD-INV(m, e)
    return ((N,e),(N, p, q, d))
```

Ci sono due funzioni ausiliare che vale la pena specificare. Per poter verificare che i numeri trovati siano effettivamente primi, ci si avvale di un test di primalità `TEST-PRIME`. Per trovare l'inverso di e in Z_m^* si utilizza `MOD-INV` [3], che utilizza l'algoritmo di Euclide esteso per trovare il valore cercato in maniera efficiente.

Test di primalità (Miller-Rabin)

Esistono diversi algoritmi che si occupano di effettuare dei test di primalità, ma uno fra i più utilizzati è quello di **Miller-Rabin**. La sua versione originale, è deterministica, ma dipende dall'ipotesi di Riemann generalizzata [4]. La versione adattata, invece, è probabilistica e cerca di determinare se l'input è primo o composito, ma con i seguenti accorgimenti:

- Se restituisce "**composito**", la risposta è corretta con probabilità 1.
- Se restituisce "**primo**", la risposta è sbagliata con probabilità $2^{-2s} \leq \frac{1}{4}$

Il test ha complessità $O(s|a|^3)$.

```
MILLER-RABIN(p):
    LET p = 2**k * m + 1 /* assumendo p sia primo, lo si può scrivere come una
potenza di 2 * m (dispari) + 1 */
    a <-R- range(2, p-1)
    b <- a**m % p
    if b % p == 1 or b % p == p - 1:
        return "prime"
    for i <-0 to k - 1:
        if b % p == 1: /* eravamo ad un numero diverso da 1 e -1 che però era la
radice quadrata di 1, a cui siamo ora */
            return "composite"
        if b % p == p - 1:
            return "prime"
        b <- b**2 % p
    return "composite"
```

Calcolare le potenze modulo N (Square and Multiply)

Un'operazione che viene ripetuta molte volte nel corso di **RSA** e che vale la pena rendere più efficiente possibile è l'elevamento a potenza di un numero modulo N. Possiamo sfruttare la rappresentazione binaria che utilizziamo per i numeri al fine di rendere l'operazione meno costosa.

L'obiettivo è calcolare $x^e \mod N$. Sia $e_k, e_{k-1}, \dots, e_0$ la rappresentazione binaria di e. Quindi $e = e_k \cdot 2^k + e_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \dots + e_1 \cdot 2 + e_0$.
Dunque $x^e \mod N = (x^{2^k})^{e_k} \cdot (x^{2^{k-1}})^{e_{k-1}} \dots (x^2)^{e_1} \cdot (x)^{e_0} \mod N$.

```
SQUARE-MULTIPLY(x, e, N):
    d <- 1
    k <- |e|
    for i <- k down to 0:
        if d != 1:
            d <- d*d % N
        if e_i == 1
            d = d*x % N
    return d
```

Problema della non invertibilità (ow-kea)

La proprietà fondamentale per la sicurezza di **RSA** è che la funzione non sia facilmente invertibile, e cioè che noti N, e, y sia infattibile calcolare $RSA^{-1}_{N,e}(y)$.
Per definire formalmente questo concetto, si consideri il seguente esperimento.

Sia $\mathcal{K}_{rsa}$ un generatore **RSA** con il parametro di sicurezza k.

Un avversario A riceve in input i valori pubblici di **RSA**, N, e ed un messaggio cifrato prodotto dallo schema $y = x^e \mod N$. Il suo obiettivo è quello di risalire al messaggio originale x.

```
ESP_{K_{rsa}}^{ow-kea}(A):
    ((N, e), (N, p, q, d)) <- K_{rsa}()
    x <-R- Z_N
    y <- x**e % N
    x` <- A(N, e, y)
    if x` == x:
        return 1
    return 0
```

I vantaggio di A in senso **ow-kea** è così definito:

$$Adv^{ow-kea}_{\mathcal{K}_{rsa}}(A) = Pr[ESP^{ow-kea}_{\mathcal{K}_{rsa}}(A) = 1]$$

Il **RSA** non è invertibile se il vantaggio così definito è prossimo a 0 per ogni avversario computazionalmente limitato.

Problema della non invertibilità (ow-cea)

Nel caso precedente, **kea** sta per “known-exponent attack". Si potrebbe anche pensare ad una sicurezza **cea**, "chosen-exponent attack" del tutto equivalente, con la differenza che l'esponente viene scelto dall'avversario, purché non venga scelto il valore 1.

Sia $\mathcal{K}_{rsa}$ un generatore modulo **RSA** con il parametro di sicurezza k.

Un avversario A riceve in input i valori pubblici di **RSA**, N, y. Il suo obiettivo è quello di trovare $x, e : x^e \equiv y \mod N \land e > 1$.

```
ESP_{K_{rsa}}^{ow-cea}(A):
    (N, p, q) <- K_{mod}()
    y <-R- Z_N
    (x, e) <- A(N, y)
    if y == x**e % N and e > 1:
        return 1
    return 0
```

l vantaggio di A in senso **ow-cea** è così definito:

$$Adv_{\mathcal{K}_{rsa}}^{ow-cea}(A) = Pr[ESP_{\mathcal{K}_{rsa}}^{ow-cea}(A) = 1]$$

Il **RSA** non è invertibile anche in caso di esponente scelto se il vantaggio così definito è prossimo a 0 per ogni avversario computazionalmente limitato.

---

1. General Number Field Sieve ↩
2. Acronimo formato dai cognomi degli inventori Ronald Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman ↩
3. Vedi appunti su "Teoria dei numeri computazionale", capitolo "Algoritmo per l'inverso modulare" ↩
4. Congettura riguardante gli zeri in alcune funzioni particolari ↩