경우의 수

합의 법칙

곱의 법칙

자연수 N이 $N = a^{\alpha}\beta^{\beta}$ 과 같이 소인수분해 될 때
N의 양의 약수의 개수 $\Rightarrow (\alpha+1)(\beta+1)$

순열 Permutation

서로 다른 n개에서 $r(n \geq r)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열이라 하고 이 순열을 기호로 ${}_nP_r$ 로 나타낸다

$$ {}_nP_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)}_{r\text{개}} $$

$$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (\text{단, } 0 \leq r \leq n) $$

$$ {}_nP_n = n!, \quad 0! = 1 \quad {}_nP_0 = 1 $$

ex) 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 순열의 수 ${}_4P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

${}_{N}P_{R} = {}_{n}P_{r}$ 이라고 해서 반드시 $N=n$ $R=r$ 인것은 아니다.

$${}_{n}P_{r} = n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\times\cdots 2\times 1}{(n-r)(n-r-1)\times\cdots\times 2\times 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

$${}_{n}P_{n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

$${}_{n}P_{0} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$0! = 1$

중복순열

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 순열을
서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열 이라고 한다.

$${}_n\Pi_r = n^r$$

Π : product

n이 r보다 작아도 무방

ex) 0, 1, 2, 3, 4

백의 자리 1, 2, 3, 4 　 4

십, 일의 자리 0, 1, 2, 3, 4 　 5×5 　 ${}_5\Pi_2$

$- \ 4 \times {}_5\Pi_2 = 4 \times 5^2 = 100$

$- \ {}_5\Pi_3 - {}_5\Pi_2 = 100$

원순열

서로 다른 n개를 원형으로 나열하는 순열을 원순열 이라고 한다.

$(n-1)!$

n개 중에서 어느 하나를 고정할때 나머지 n-1 개를 나열하는
방법의 수와 같으므로 $(n-1)!$ 이다.

n 개의 염주순열

서로 다른 n개의 구슬을

일렬로 나열 하는 방법 $\Rightarrow n!$

원형으로 나열 하는 방법 $\Rightarrow (n-1)!$

실에 꿰어서 목걸이를 만드는 방법 $\Rightarrow \dfrac{(n-1)!}{2}$

$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ $\quad B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$

A에서 B로의 함수의 개수는 $\Rightarrow {}_n\Pi_r$

A에서 B로의 일대일 함수의 개수는 $\Rightarrow {}_nP_r$ (단 $n \geq r$)

특히 $n=r$ 일 때 ${}_nP_n = n!$

같은 것이 있는 경우의 순열.

n개 중에서 같은것이 각각 p개 q개 r개 ... s개 있을 때
n개를 모두 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p! \times q! \times r! \times \cdots \times s!}$$ (단 $p+q+r+\cdots+s=n$)

$$\overbrace{\underbrace{a, a, \cdots, a}_{p}, \underbrace{b, b, \cdots, b}_{q}, c, d}^{n} \Rightarrow \frac{n!}{p! \times q!}$$

조합

서로 다른 n 개에서 순서를 생각하지 않고 r ($n \geq r$) 개를 택하는 것을 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합 이라고 한다.

$_nC_r$

① $_nC_r = \frac{_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ (단 $0 \leq r \leq n$)

② $_nC_r = {}_nC_{n-r}$ (단 $0 \leq r \leq n$)

③ $_nC_0 = 1$

$_nC_r \times r! = {}_nP_r$ 즉 $_nC_r = \frac{_nP_r}{r!}$ ①

$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ ∴ $_nC_r = \frac{_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ①

②를 이용

$_nC_r = {}_nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\{n-(n-r)\}!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$0! = 1$, $_nP_0 = 1$, $_nC_0 = \frac{_nP_0}{0!} = 1$

중복조합의 수와 $_nH_r$

Homogeneous (동차)

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합을 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합이라 한다.

$$_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$$

$_nP_r$ $_n\Pi_r$ $_nC_r$ $_nH_r$

순서를 생각한다. 중복을 허락하지 않는다 ⇒ 순열
순서를 생각한다. 중복을 허락한다 ⇒ 중복순열
순서를 생각하지 않는다. 중복을 허락하지 않는다 ⇒ 조합
순서를 생각하지 않는다. 중복을 허락한다 ⇒ 중복조합.

ex) 서로 다른 세문자 a, b, c

(i) ab, ba, ac, ca, bc, cb → $_3P_2$ 가지 (순열)

(ii) ab, ba, ac ca, bc, cb, aa, bb, cc → $_3\Pi_2$ 가지 (중복순열)

(iii) ab, ac, bc → $_3C_2$ 가지 (조합)

(iv) ab, ac, bc, aa, bb, cc → $_3H_2$ 가지 (중복조합)

자연수의 분할

자연수 n을 k $(1 \le k \le n)$개의 자연수 $n_1, n_2, n_3, \cdots n_k$의 합으로

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k \quad (n_1 \ge n_2 \ge n_3 \ge \cdots \ge n_k \ge 1)$$

와 같이 나타 내는 것을 자연수의 분할 이라고 한다.

자연수의 분할의 수 (partition)

자연수 n을 k개의 자연수로 분할하는 방법의 수

$P(n, k)$ 이 때, 자연수 n을 분할하는 모든 방법의 수

$$P(n,1) + P(n,2) + P(n,3) + \cdots + P(n,n)$$

$P(n, k)$의 성질

(1) $P(n,1) = 1 \quad P(n,n) = 1$

(2) 두 자연수 n, k에 대하여

① $P(n,k) = P(n-k,1) + P(n-k,2) + \cdots + P(n-k,k)$ (단 $n>k$)

② $P(n,k) = P(n-1,k-1) + P(n-k,k)$ (단 $n>k>1$)

8 의 분할 중 하나

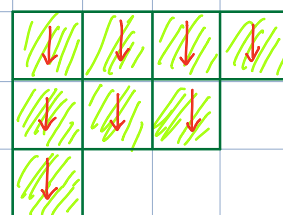
$8 = 4 + 3 + 1$

$8 = \underline{3 + 2 + 2 + 1}$

4+3+1 의 켤레 분할.

페러스 다이어그램

Ferrers Diagram



자연수 n을 k 이하의 자연수로 분할하는 방법의 수는 자연수 n을 k개 이하의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같다.

집합의 분할

원소의 개수가 유한개인 집합을 공집합이 아니고 서로소인 몇개의 부분 집합으로 나누는 것을 집합의 분할 이라고 한다.

집합의 분할의 수

원소의 개수가 n인 집합을 $k\,(1 \le k \le n)$개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수를 기호로 $S(n,k)$와 같이 나타낸다.
이때 원소의 개수가 n인 집합을 분할하는 모든 방법의 수는
$S(n,1) + S(n,2) + \cdots + S(n,n)$ 합의 법칙

S(n,k)의 성질

i) $S(n,1)=1$, $S(n,n)=1$

ii) 두 자연수 n, k $(1 \le k \le n)$에 대하여 ($k < n$ 이면 0)

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \times S(n-1,k)$$

$S(n,k)$: Stiring numbers

서로 다른 n개를 p개 q개 r개 $(p+q+r=n)$의 세 묶음으로 나누는 방법의 수는

p, q, r 가 서로 다르면 $\rightarrow {}_nC_p \times {}_{n-p}C_q \times {}_rC_r$

p, q, r 중 어느 한개만 같으면 $\rightarrow {}_nC_p \times {}_{n-p}C_q \times {}_rC_r \times \frac{1}{2!}$

$p=q=r$ 이면 $\rightarrow {}_nC_p \times {}_{n-p}C_q \times {}_rC_r \times \frac{1}{3!}$

---

n개의 공을 r개의 상자에 빈 상자가 없도록 넣는 방법의 수

- 서로 같은 공, 서로 같은 상자이면 $\rightarrow P(n,r)$
- 서로 다른 공, 서로 같은 상자이면 $\rightarrow S(n,r)$

$_nP_r$: 서로 다른 n개 에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수

$_n\Pi_r$: 서로 다른 n개 에서 중복을 허락하여 r개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수

$_nC_r$: 서로 다른 n개 에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 방법의 수

$_nH_r$: 서로 다른 n개 에서 중복을 허락하여 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 방법의 수

$P(n,r)$: 자연수 n을 r개의 자연수로 분할 하는 방법의 수

$S(n,r)$: 원소의 개수가 n인 집합을 r개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수

이항정리

n이 자연수 일때 $(a+b)^n$을 전개하면

$$(a+b)^n = {}_nC_0\,a^n + {}_nC_1\,a^{n-1}b + {}_nC_2\,a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_r\,a^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_n\,b^n$$

이것을 이항정리 라고 하고 ${}_nC_r\,a^{n-r}b^r$을 일반항,

${}_nC_0,\ {}_nC_1,\ {}_nC_2 \cdots {}_nC_n$ 을 이항계수 라고 한다.

일반항을 써서 이항정리를 나타내면 다음과 같다.

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\,a^{n-r}b^r, \quad (a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\,a^{r}b^{n-r}$$

일반적으로 $(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)\times\cdots\times(a+b_n)$ 을 전개하여

$$a^n + a^{n-1}B_1 + a^{n-2}B_2 + \cdots + aB_{n-1} + B_n$$

을 얻었다고 하면

항수

$$B_1 = b_1 + b_2 + b_3 \cdots + b_n \leftarrow {}_nC_1$$
$$B_2 = b_1b_2 + b_1b_3 + \cdots + b_1b_n + b_2b_3 + b_2b_4 + \cdots + b_{n-1}b_n \leftarrow {}_nC_2$$
$$B_3 = b_1b_2b_3 + b_1b_2b_4 + \cdots + b_1b_2b_n + \cdots + b_{n-2}b_{n-1}b_n \leftarrow {}_nC_3$$

이므로 B_r 은 $b_1, b_2 \cdots b_n$ 에서 r개를 택하여 만든 곱의 합이고 항의 개수는 ${}_nC_r$ 이다.

여기서 $b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = b_n = b$ 로 놓으면

$$(a+b)^n = {}_nC_0\,a^n + {}_nC_1\,a^{n-1}b + {}_nC_2\,a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_r\,a^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_n\,b^n$$

$(a+b)^4$ 의 전개

$a^4 \quad a^3 \quad a^2 \quad a \quad 1 \qquad 1 \quad b \quad b^2 \quad b^3 \quad b^4$

$a^4 \times 1 \quad a^3 b \quad a^2 b^2 \quad a b^3 \quad 1 \times b^4$

항의 계수 $\quad {}_4C_0 \quad {}_4C_1 \quad {}_4C_2 \quad {}_4C_3 \quad {}_4C_4$

$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

파스칼의 삼각형.

	1	1
$(a+b)^1$	1 1	${}_1C_0 \quad {}_1C_1$
$(a+b)^2$	1 2 1	${}_2C_0 \quad {}_2C_1 \quad {}_2C_2$
$(a+b)^3$	1 3 3 1	${}_3C_0 \quad {}_3C_1 \quad {}_3C_2 \quad {}_3C_3$
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1	${}_4C_0 \quad {}_4C_1 \quad {}_4C_2 \quad {}_4C_3 \quad {}_4C_4$
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1	
⋮	⋮	⋮

$${}_{n-1}C_{r-1} \quad {}_{n-1}C_r$$

$${}_nC_r$$

$${}_nC_r = {}_nC_{n-r},$$

$${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r$$

이항계수의 성질.

(1) ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$

(2) ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \cdots + (-1)^n {}_nC_n = 0$

(3) ${}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots {}_nC_n$ 에서

① ${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots$ (홀수번째 항의 계수의 합) $= 2^{n-1}$

② ${}_nC_1 + {}_nC_3 + \cdots$ (짝수번째 항의 계수의 합) $= 2^{n-1}$

(4) ${}_nC_1 + 2{}_nC_2 + 3{}_nC_3 + \cdots + n{}_nC_n = n \times 2^{n-1}$

(5) ${}_nC_1 - 2{}_nC_2 + 3{}_nC_3 - 4{}_nC_4 + \cdots + (-1)^{n-1} n{}_nC_n = 0$