

PHẦN	TT	NỘI DUNG	CÁC DẠNG TOÁN	Trang
GIẢI TÍCH	1	NGUYÊN HÀM	Các câu hỏi lý thuyết về nguyên hàm	2
			Nguyên hàm của hàm số đa thức	2
			Nguyên hàm của hàm số hữu tỉ	3
			Nguyên hàm của hàm số chứa căn	5
			Nguyên hàm của hàm số lượng giác	7
			Nguyên hàm của hàm số mũ và logarit	9
			Nguyên hàm tổng hợp	10
			Các bài toán nguyên hàm có điều kiện	13
			Nguyên hàm của hàm ẩn	15
			Bài toán ứng dụng của nguyên hàm	16
	2	TÍCH PHÂN & ỨNG DỤNG	Tích phân hàm đa thức	16
			Tích phân hàm số hữu tỉ	17
			Tích phân hàm vô tỉ	18
			Tích phân hàm lượng giác	20
			Tích phân của hàm số mũ và logarit	21
			Tích phân tổng hợp	22
			Tích phân dùng tính chất	23
			Ứng dụng tích phân vào tính diện tích hình phẳng, thể tích khối tròn xoay	26
			Ứng dụng tích phân để giải quyết bài toán thực tế	30
	3	SỐ PHỨC	Câu hỏi lý thuyết về số phức	32
			Các phép toán số phức	33
			Phương trình bậc nhất, bậc hai trong tập số phức	34
			Điều kiện của bài toán hàm số có chứa module, số phức liên hợp	35
			Điểm biểu diễn của số phức	36
			Vận dụng các tính chất hình học để giải toán về số phức	37
HÌNH HỌC	1	HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN	Hệ tọa độ trong không gian	40
			Phương trình mặt phẳng trong hệ trục tọa độ Oxyz	42
			Phương trình mặt cầu trong hệ trục tọa độ Oxyz	45
			Phương trình đường thẳng trong hệ trục tọa độ Oxyz	47
	2	PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ HÓA HÌNH HỌC KHÔNG GIAN	Tọa độ hóa bài toán hình trong không gian .	53

**Vấn đề 1. Các câu hỏi lý thuyết.**

**Câu 1.** Giả sử hàm số  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $K$ . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

**A.** Chỉ có duy nhất một hằng số  $C$  sao cho hàm số  $y = F(x) + C$  là một nguyên hàm của hàm  $f$  trên  $K$ .

**B.** Với mỗi nguyên hàm  $G$  của  $f$  trên  $K$  thì tồn tại một hằng số  $C$  sao cho  $G(x) = F(x) + C$  với  $x$  thuộc  $K$ .

**C.** Chỉ có duy nhất hàm số  $y = F(x)$  là nguyên hàm của  $f$  trên  $K$ .

**D.** Với mỗi nguyên hàm  $G$  của  $f$  trên  $K$  thì  $G(x) = F(x) + C$  với mọi  $x$  thuộc  $K$  và  $C$  bất kỳ.

**Câu 2.** Cho hàm số  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $K$ . Mệnh đề nào **sai**?

**A.**  $\int f(x)dx = F(x) + C.$

**B.**  $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

**C.**  $\left(\int f(x)dx\right)' = f'(x).$

**D.**  $\left(\int f(x)dx\right)' = F'(x).$

**Câu 3.** Cho hai hàm số  $f(x), g(x)$  là hàm số liên tục, có  $F(x), G(x)$  lần lượt là nguyên hàm của  $f(x), g(x)$ . Xét các mệnh đề sau:

(I).  $F(x) + G(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) + g(x)$ .

(II).  $k.F(x)$  là một nguyên hàm của  $kf(x)$  với  $k \in \mathbb{R}$ .

(III).  $F(x).G(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x).g(x)$ .

Các mệnh **đúng** là

**A.** (I).

**B.** (I) và (II).

**C.** Cả 3 mệnh đề.

**D.** (II).

**Câu 4.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.**  $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

**B.** Nếu  $F(x)$  và  $G(x)$  đều là nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  thì  $F(x) - G(x) = C$  là hằng số.

**C.**  $F(x) = \sqrt{x}$  là một nguyên hàm của  $f(x) = 2\sqrt{x}$ .

**D.**  $F(x) = x^2$  là một nguyên hàm của  $f(x) = 2x$ .

**Câu 5.** Trong các khẳng định sau khẳng định nào **đúng**?

**A.**  $\int \left(2x - 1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \left(\int \left(2x - 1 + \frac{1}{x}\right) dx\right)^2.$

**B.**  $\int \left(2x - 1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx = 2 \int \left(2x - 1 + \frac{1}{x}\right) dx.$

**C.**  $\int \left(2x - 1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int \left(2x - 1 + \frac{1}{x}\right) dx \cdot \int \left(2x - 1 + \frac{1}{x}\right) dx.$

**D.**  $\int \left(2x - 1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx = 4 \int x^2 dx + \int dx + \int \frac{1}{x^2} dx - 4 \int x dx - \int \frac{2}{x} dx + 4 \int dx.$

**Vấn đề 2. Nguyên hàm của hàm số đa thức.**

**Câu 6.** Nếu  $\int f(x)dx = 4x^3 + x^2 + C$  thì hàm số  $f(x)$  bằng

**A.**  $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3} + Cx.$

**B.**  $f(x) = 12x^2 + 2x + C.$

**C.**  $f(x) = 12x^2 + 2x.$

**D.**  $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3}.$

**Câu 7.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^3 + x^2$  là

- A.  $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$       B.  $3x^2 + 2x + C$       C.  $x^3 + x^2 + C$       D.  $x^4 + x^3 + C$

**Câu 8.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2019$  là

- A.  $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + C$ .      B.  $\frac{1}{9}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2019x + C$ .  
C.  $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2019x + C$ .      D.  $\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 2019x + C$ .

**Câu 9.** Tìm nguyên  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$ ?

- A.  $F(x) = \frac{x^4}{4} - 6x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + C$ .      B.  $F(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + C$ .  
C.  $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C$ .      D.  $F(x) = x^3 + 6x^2 + 11x^2 + 6x + C$ .

**Câu 10.** Họ các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (2x+3)^5$  là

- A.  $F(x) = \frac{(2x+3)^6}{12} + C$ .      B.  $F(x) = \frac{(2x+3)^6}{6} + C$ .  
C.  $F(x) = 10(2x+3)^4 + C$ .      D.  $F(x) = 5(2x+3)^4 + C$ .

**Câu 11.** Tìm nguyên hàm  $\int x(x^2+7)^{15} dx$ ?

- A.  $\frac{1}{2}(x^2+7)^{16} + C$       B.  $-\frac{1}{32}(x^2+7)^{16} + C$       C.  $\frac{1}{16}(x^2+7)^{16} + C$       D.  $\frac{1}{32}(x^2+7)^{16} + C$

**Câu 12.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^3(x^2+1)^{2019}$  là

- A.  $\frac{1}{2} \left[ \frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020} \right]$ .      B.  $\frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020}$ .  
C.  $\frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020} + C$ .      D.  $\frac{1}{2} \left[ \frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020} \right] + C$ .

**Câu 13.** Biết rằng hàm số  $F(x) = mx^3 + (3m+n)x^2 - 4x + 3$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$ . Tính  $mn$ .

- A.  $mn = 1$ .      B.  $mn = 2$ .      C.  $mn = 0$ .      D.  $mn = 3$ .

### Vấn đề 3. Nguyên hàm của hàm số hữu tỉ.

**Câu 14.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{5x-2}$ .

- A.  $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C$       B.  $\int \frac{dx}{5x-2} = \ln|5x-2| + C$   
C.  $\int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2} \ln|5x-2| + C$       D.  $\int \frac{dx}{5x-2} = 5 \ln|5x-2| + C$

**Câu 15.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{1-2x}$  trên  $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ .

- A.  $\frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$ .      B.  $\frac{1}{2} \ln(1-2x) + C$ .      C.  $-\frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$ .      D.  $\ln|2x-1| + C$ .

**Câu 16.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$ .

- A.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$ .      B.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$ .  
C.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$ .      D.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$ .

**Câu 17.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2}$ .

- A.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$ .      B.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$ .  
C.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$ .      D.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$ .

**Câu 18.** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2}$  trên khoảng  $(2; +\infty)$  là

- A.  $3 \ln(x-2) + \frac{2}{x-2} + C$       B.  $3 \ln(x-2) - \frac{2}{x-2} + C$   
C.  $3 \ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C$       D.  $3 \ln(x-2) + \frac{4}{x-2} + C$ .

**Câu 19.** Cho biết  $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = a \ln|x+1| + b \ln|x-2| + C$ .

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $a + 2b = 8$ .      B.  $a + b = 8$ .      C.  $2a - b = 8$ .      D.  $a - b = 8$ .

**Câu 20. (Đề tham khảo đánh giá năng lực 2021-ĐH Quốc Gia Hà Nội)** Họ nguyên hàm của hàm số

$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$  trên khoảng  $(2; +\infty)$  là

- A.  $\frac{\ln(x-2) + \ln x}{2} + C$ .      B.  $\frac{\ln x - \ln(x-2)}{2} + C$ .  
C.  $\frac{\ln(x-2) - \ln x}{2} + C$ .      D.  $\ln(x-2) - \ln x + C$ .

**Câu 21.** Cho biết  $\int \frac{1}{x^3 - x} dx = a \ln|(x-1)(x+1)| + b \ln|x| + C$ . Tính giá trị biểu thức:  $P = 2a + b$ .

- A. 0.      B. -1.      C.  $\frac{1}{2}$ .      D. 1.

**Câu 22.** Đổi biến  $t = x - 1$  thì  $\int \frac{x}{(x-1)^4} dx$  trở thành

- A.  $\int \frac{t-1}{t^4} dt$ .      B.  $\int \frac{(t+1)^4}{t} dt$ .      C.  $\int \frac{t+1}{t^4} dt$ .      D.  $\int \frac{t+1}{t} dt$ .

**Câu 23.** Tìm tất cả các họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x^9 + 3x^5}$

A.  $\int f(x) dx = -\frac{1}{3x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4 + 3} \right| + C$

B.  $\int f(x) dx = -\frac{1}{12x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4 + 3} \right| + C$

C.  $\int f(x) dx = -\frac{1}{3x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4 + 3} \right| + C$

D.  $\int f(x) dx = -\frac{1}{12x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4 + 3} \right| + C$

**Câu 24.** Biết  $\int \frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx = \frac{1}{a} \cdot \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^b + C, x \neq -1$  với  $a, b \in \mathbb{N}^*$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $a = 2b$ .

B.  $b = 2a$ .

C.  $a = 2018b$ .

D.  $b = 2018a$ .

**Câu 25.** Cho  $I = \int \frac{1}{x^3(1+x^2)} dx = \frac{-a}{x^2} - b \ln|x| + 2c \ln(1+x^2) + C$ . Khi đó  $S = a + b + c$  bằng

A.  $-\frac{1}{4}$ .

B.  $\frac{3}{4}$ .

C.  $\frac{7}{4}$ .

D. 2.

#### Vấn đề 4. Nguyên hàm của hàm số chứa căn.

**Câu 26.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt{2x-1}$ .

A.  $\int f(x) dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$ .

B.  $\int f(x) dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$ .

C.  $\int f(x) dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$ .

D.  $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$ .

**Câu 27.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt[3]{3x+1}$  là

A.  $\int f(x) dx = (3x+1)\sqrt[3]{3x+1} + C$ .

B.  $\int f(x) dx = \sqrt[3]{3x+1} + C$ .

C.  $\int f(x) dx = \frac{1}{3}\sqrt[3]{3x+1} + C$ .

D.  $\int f(x) dx = \frac{1}{4}(3x+1)\sqrt[3]{3x+1} + C$ .

**Câu 28.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x-1}}$  có dạng

A.  $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C$ .

B.  $\int f(x) dx = \sqrt{2x+1} + C$ .

C.  $\int f(x) dx = 2\sqrt{2x+1} + C$ .

D.  $\int f(x) dx = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} + C$ .

**Câu 29.** Biết  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+2} + (x+2)\sqrt{x}} = a\sqrt{x} - b\sqrt{x+2} + C$  với  $a, b$  là các số nguyên dương và  $C$  là

hằng số thực. Giá trị của biểu thức  $P = a + b$  là:

A.  $P = 2$

B.  $P = 8$

C.  $P = 46$

D.  $P = 22$

**Câu 30.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên khoảng  $(0; +\infty)$ . Khi đó  $\int \frac{f'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$  bằng

A.  $\frac{1}{2}f(\sqrt{x}) + C$

B.  $f(\sqrt{x}) + C$

C.  $-2f(\sqrt{x}) + C$

D.  $2f(\sqrt{x}) + C$

**Câu 31.** Khi tính nguyên hàm  $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$ , bằng cách đặt  $u = \sqrt{x+1}$  ta được nguyên hàm nào?

- A.  $\int 2(u^2 - 4) du$ .      B.  $\int (u^2 - 4) du$ .      C.  $\int (u^2 - 3) du$ .      D.  $\int 2u(u^2 - 4) du$ .

**Câu 32.** Nguyên hàm  $P = \int x\sqrt[3]{x^2+1} dx$  là

- A.  $P = \frac{3}{8}(x^2+1)\sqrt[3]{x^2+1} + C$       B.  $P = \frac{3}{8}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C$   
C.  $P = \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^2+1} + C$       D.  $P = \frac{3}{4}(x^2+1)\sqrt[3]{x^2+1} + C$

**Câu 33.** Nguyên hàm  $R = \int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$  là

- A.  $R = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} \right| + C$       B.  $R = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C$   
C.  $R = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} \right| + C$       D.  $R = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C$

**Câu 34.** Nguyên hàm  $S = \int x^3\sqrt{x^2+9} dx$  là

- A.  $S = \frac{(x^2+9)^2\sqrt{x^2+9}}{5} - 3(x^2+9)\sqrt{x^2+9} + C$   
B.  $S = \frac{(x^2+9)^4\sqrt{x^2+9}}{5} - 3(x^2+9)\sqrt{x^2+9} + C$   
C.  $S = \frac{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}{5} - 3(x^2+9)^2\sqrt{x^2+9} + C$   
D.  $S = \frac{(x^2+9)^2\sqrt{x^2+9}}{5} - 3\sqrt{x^2+9} + C$

**Câu 35.** Nguyên hàm  $I = \int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$  là

- A.  $\sqrt[3]{(1-x^2)^2} + C$       B.  $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$       C.  $\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} + C$       D.  $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$

**Câu 36.** Cho  $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$ . Bằng phép đổi biến  $u = \sqrt{x^2+1}$ , khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.  $x^2 = u^2 - 1$       B.  $xdx = udu$       C.  $I = \int (u^2 - 1).udu$       D.  $I = \frac{u^3}{3} - u + C$

**Câu 37.** Nguyên hàm  $I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$  là

- A.  $I = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C$       B.  $I = \frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C$

C.  $I = \frac{\sqrt{9-x^2}}{9x^2} + C$

D.  $I = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x^2} + C$

**Câu 38.** Nguyên hàm  $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$  là

A.  $I = -\frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{1+x^2} + C$

B.  $I = \frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{1+x^2} + C$

C.  $I = -\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1+x^2} + C$

D.  $I = \frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1+x^2} + C$

**Vấn đề 5. Nguyên hàm của hàm số lượng giác.**

**Câu 39.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2 \sin x$ .

A.  $\int 2 \sin x dx = -2 \cos x + C$

B.  $\int 2 \sin x dx = 2 \cos x + C$

C.  $\int 2 \sin x dx = \sin^2 x + C$

D.  $\int 2 \sin x dx = \sin 2x + C$

**Câu 40.** Họ nguyên hàm của hàm số  $y = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$  là

A.  $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$

B.  $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$

C.  $\int f(x) dx = \frac{1}{6} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$

D.  $\int f(x) dx = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$

**Câu 41.** Phát biểu nào sau đây đúng?

A.  $\int \sin 2x dx = \frac{\cos 2x}{2} + C, C \in \mathbb{R}$

B.  $\int \sin 2x dx = \cos 2x + C, C \in \mathbb{R}$

C.  $\int \sin 2x dx = 2 \cos 2x + C, C \in \mathbb{R}$

D.  $\int \sin 2x dx = \frac{-\cos 2x}{2} + C, C \in \mathbb{R}$

**Câu 42.** Biết  $\int f(x) dx = 3x \cos(2x-5) + C$ . Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A.  $\int f(3x) dx = 3x \cos(6x-5) + C$

B.  $\int f(3x) dx = 9x \cos(6x-5) + C$

C.  $\int f(3x) dx = 9x \cos(2x-5) + C$

D.  $\int f(3x) dx = 3x \cos(2x-5) + C$

**Câu 43.** Biết  $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx = x + \frac{a}{b} \cos 4x + C$ , với  $a, b$  là các số nguyên dương,  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản và  $C \in \mathbb{R}$ . Giá trị của  $a+b$  bằng

A. 5.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

**Câu 44.** Nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \cos 3x \cos x$ , biết đồ thị  $y = F(x)$  đi qua gốc tọa độ là

A.  $F(x) = \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 2x}{2}$

B.  $F(x) = \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{2}$

C.  $F(x) = \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{4}$

D.  $F(x) = \frac{\sin 8x}{8} + \frac{\sin 4x}{4}$

**Câu 45.** Biết  $\int (\cos^2 x - \sin^2 x)^5 \sin 4x dx = -\frac{\cos^m nx}{p} + C$ , với  $m, n, p \in \mathbb{Z}$  và  $C$  là hằng số thực. Giá

trị của biểu thức  $T = m + n + p$  là

A.  $T = 9$

B.  $T = 14$

C.  $T = 16$

D.  $T = 18$

**Câu 46.** Nguyên hàm  $M = \int \frac{2 \sin x}{1 + 3 \cos x} dx$  là

**A.**  $M = \frac{1}{3} \ln(1 + 3 \cos x) + C$

**B.**  $M = \frac{2}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C$

**C.**  $M = -\frac{2}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C$

**D.**  $M = -\frac{1}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C$

**Câu 47.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3 \sin^2 x \cos x$  là

**A.**  $\sin^3 x + C$ .

**B.**  $-\sin^3 x + C$ .

**C.**  $\cos^3 x + C$ .

**D.**  $-\cos^3 x + C$ .

**Câu 48.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x}$ .

**A.**  $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C$ .

**B.**  $\int f(x) dx = \ln|1 + 3 \cos x| + C$ .

**C.**  $\int f(x) dx = 3 \ln|1 + 3 \cos x| + C$ .

**D.**  $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C$ .

**Câu 49.** Tìm các hàm số  $f(x)$  biết  $f'(x) = \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2}$ .

**A.**  $f(x) = \frac{\sin x}{(2 + \sin x)^2} + C$ .

**B.**  $f(x) = \frac{1}{(2 + \cos x)} + C$ .

**C.**  $f(x) = -\frac{1}{2 + \sin x} + C$ .

**D.**  $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \sin x} + C$ .

**Câu 50.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \tan^5 x$ .

**A.**  $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\cos x| + C$ .

**B.**  $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\cos x| + C$ .

**C.**  $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\cos x| + C$ .

**D.**  $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\cos x| + C$ .

**Câu 51.** Cho nguyên hàm  $I = \int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$ . Nếu  $u = \cos 2x$  đặt thì mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.**  $I = \int \frac{-1}{u^2 + 1} du$

**B.**  $I = \int \frac{1}{2u^2 + 1} du$

**C.**  $I = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2 + 1} du$

**D.**  $I = \int \frac{2}{u^2 + 1} du$

**Câu 52.** Cho  $\int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x + 2)^3} dx = -\frac{(\sin x + \cos x + 1)^m}{(\sin x + \cos x + 2)^n} + C$ , với  $m, n \in \mathbb{N}$  và  $C$  là hằng số

thực. Giá trị của biểu thức  $A = m + n$  là

**A.**  $A = 5$

**B.**  $A = 2$

**C.**  $A = 3$

**D.**  $A = 4$



**Câu 53.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 7^x$ .

A.  $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$

B.  $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C$

C.  $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$

D.  $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$

**Câu 54.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^{3x}$  là hàm số nào sau đây?

A.  $3e^x + C$ .

B.  $\frac{1}{3}e^{3x} + C$ .

C.  $\frac{1}{3}e^x + C$ .

D.  $3e^{3x} + C$ .

**Câu 55.** Nguyên hàm của hàm số  $y = e^{2x-1}$  là

A.  $2e^{2x-1} + C$ .

B.  $e^{2x-1} + C$ .

C.  $\frac{1}{2}e^{2x-1} + C$ .

D.  $\frac{1}{2}e^x + C$ .

**Câu 56.** Tính  $F(x) = \int e^2 dx$ , trong đó  $e$  là hằng số và  $e \approx 2,718$ .

A.  $F(x) = \frac{e^2 x^2}{2} + C$ .

B.  $F(x) = \frac{e^3}{3} + C$ .

C.  $F(x) = e^2 x + C$ .

D.  $F(x) = 2ex + C$ .

**Câu 57.** Hàm số  $F(x) = e^{x^2}$  là nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau

A.  $f(x) = 2xe^{x^2}$ .

B.  $f(x) = x^2 e^{x^2} - 1$ .

C.  $f(x) = e^{2x}$ .

D.  $f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}$ .

**Câu 58.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2^x (2^{-x} + 5)$  là

A.  $x + 5 \left( \frac{2^x}{\ln 2} \right) + C$ .

B.  $x + 5 \cdot 2^x \ln 2 + C$ .

C.  $\frac{2^x}{\ln 2} \left( -\frac{2^x}{\ln 2} x + 5x \right) + C$ .

D.  $1 + 5 \left( \frac{2^x}{\ln 2} \right) + C$ .

**Câu 59.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \frac{1}{2e^x + 3}$  thỏa mãn  $F(0) = 10$ . Hàm số  $F(x)$  là

A.  $\frac{1}{3} \left( x - \ln(2e^x + 3) \right) + 10 + \frac{\ln 5}{3}$

B.  $\frac{1}{3} \left( x + 10 - \ln(2e^x + 3) \right)$

C.  $\frac{1}{3} \left( x - \ln \left( 2e^x + \frac{3}{2} \right) \right) + \ln 5 - \ln 2$

D.  $\frac{1}{3} \left( x - \ln(2e^x + 3) \right) + 10 + \frac{\ln 5 - \ln 2}{3}$

**Câu 60.** Hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và:  $f'(x) = 2e^{2x} + 1, \forall x, f(0) = 2$ . Hàm  $f(x)$  là

A.  $y = 2e^x + 2x$ .

B.  $y = 2e^x + 2$ .

C.  $y = e^{2x} + x + 2$ .

D.  $y = e^{2x} + x + 1$ .

**Câu 61.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  là

A.  $\frac{\ln^2 x}{2} + C$

B.  $\frac{1 - \ln x}{x^2} + C$

C.  $\frac{\ln x}{2} + C$

D.  $\ln^2 x + C$

**Câu 62.** Nguyên hàm  $T = \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x + 1}} dx$  là

A.  $T = \frac{1}{2\sqrt{\ln x + 1}} + C$

B.  $T = 2\sqrt{\ln x + 1} + C$

C.  $T = \frac{2}{3}(\ln x + 1)\sqrt{\ln x + 1} + C$

D.  $T = \sqrt{\ln x + 1} + C$

**Câu 63.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3+1}$ .

A.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} \cdot e^{x^3+1} + C$ .

B.  $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C$ .

C.  $\int f(x) dx = e^{x^3+1} + C$ .

D.  $\int f(x) dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C$ .

**Câu 64.** Nguyên hàm của  $f(x) = \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x}$  là

A.  $\sin^2 x \cdot e^{\sin^2 x-1} + C$ .

B.  $\frac{e^{\sin^2 x+1}}{\sin^2 x + 1} + C$ .

C.  $e^{\sin^2 x} + C$ .

D.  $\frac{e^{\sin^2 x-1}}{\sin^2 x - 1} + C$ .

**Câu 65.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  là

A.  $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \sqrt{x^2 + 1} + C$ .

B.  $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + C$ .

C.  $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$ .

D.  $F(x) = x^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$ .

**Câu 66.** Xét nguyên hàm  $V = \int \frac{\ln^2 x}{x(1 + \sqrt{\ln x + 1})} dx$ . Đặt  $u = 1 + \sqrt{1 + \ln x}$ , khẳng định nào sau đây sai?

A.  $\frac{dx}{x} = (2u - 2) du$

B.  $V = \int \frac{(u^2 - 2u)^2}{u} \cdot (2u - 2) du$

C.  $V = \frac{2}{5}u^5 - \frac{5}{2}u^4 + \frac{16}{3}u^3 - 4u^2 + C$

D.  $V = \frac{u^5}{5} + \frac{u^4}{2} - \frac{16}{3}u^3 + 4u^2 + C$

**Câu 67.** Cho hàm số  $f(x) = 2x^2 e^{x^3+2} + 2xe^{2x}$ , ta có  $\int f(x) dx = me^{x^3+2} + nxe^{2x} - pe^{2x} + C$ . Giá trị của biểu thức  $m + n + p$  bằng

A.  $\frac{1}{3}$

B. 2

C.  $\frac{13}{6}$

D.  $\frac{7}{6}$

**Câu 68.** Biết  $\int f(2x) dx = \sin^2 x + \ln x$ . Tìm nguyên hàm  $\int f(x) dx$ .

A.  $\int f(x) dx = \sin^2 \frac{x}{2} + \ln x + C$ .

B.  $\int f(x) dx = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \ln x + C$ .

C.  $\int f(x) dx = 2 \sin^2 x + 2 \ln x - \ln 2 + C$ .

D.  $\int f(x) dx = 2 \sin^2 2x + 2 \ln x - \ln 2 + C$ .

### Vấn đề 7. Nguyên hàm tổng hợp.

**Câu 69.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x + x$  là

A.  $e^x + 1 + C$

B.  $e^x + x^2 + C$

C.  $e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$

D.  $\frac{1}{x+1}e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$

**Câu 70.** Tính  $\int (x - \sin 2x) dx$ .

A.  $\frac{x^2}{2} + \sin x + C$ .

B.  $\frac{x^2}{2} + \cos 2x + C$ .

C.  $x^2 + \frac{\cos 2x}{2} + C$ .

D.  $\frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + C$ .

**Câu 71.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$ .

A.  $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$

B.  $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$

C.  $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}.$

D.  $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}.$

**Câu 72.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3x^2 + \sin x$  là

A.  $x^3 + \cos x + C.$

B.  $6x + \cos x + C.$

C.  $x^3 - \cos x + C.$

D.  $6x - \cos x + C.$

**Câu 73.** Công thức nào sau đây là **sai**?

A.  $\int \ln x \, dx = \frac{1}{x} + C.$

B.  $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C.$

C.  $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$

D.  $\int e^x \, dx = e^x + C.$

**Câu 74.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A.  $\int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$

B.  $\int x^e \, dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C.$

C.  $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C.$

D.  $\int e^x \, dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C.$

**Câu 75.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$  là

A.  $\ln x - \cos x + C.$

B.  $-\frac{1}{x^2} - \cos x + C.$

C.  $\ln|x| + \cos x + C.$

D.  $\ln|x| - \cos x + C.$

**Câu 76.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x \left( 2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right).$

A.  $\int f(x) \, dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C.$

B.  $\int f(x) \, dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C.$

C.  $\int f(x) \, dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C.$

D.  $\int f(x) \, dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C.$

**Câu 77.** Họ nguyên hàm của hàm số  $y = e^x \left( 2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$  là

A.  $2e^x + \tan x + C$

B.  $2e^x - \tan x + C$

C.  $2e^x - \frac{1}{\cos x} + C$

D.  $2e^x + \frac{1}{\cos x} + C$

**Câu 78.** Hàm số  $F(x) = x^2 \ln(\sin x - \cos x)$  là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A.  $f(x) = \frac{x^2}{\sin x - \cos x}.$

B.  $f(x) = 2x \ln(\sin x - \cos x) + \frac{x^2 (\cos x + \sin x)}{\sin x - \cos x}.$

C.  $f(x) = \frac{x^2 (\sin x + \cos x)}{\sin x - \cos x}.$

D.  $f(x) = 2x \ln(\sin x - \cos x) + \frac{x^2}{\sin x - \cos x}.$

**Câu 79.** Cho hàm số  $f(x) = 2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{x}}$ . Hàm số nào dưới đây **không** là nguyên hàm của hàm số  $f(x)$ ?

A.  $F(x) = 2^{\sqrt{x}} + C$

B.  $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} - 1) + C$

C.  $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} + 1) + C$

D.  $F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} + C$

**Câu 80.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^2 e^{x^3+1}$

**A.**  $\int \left( -t^{-5} + 2t^{-3} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{4} t^{-4} - t^{-2} - \ln|t| + C.$

**B.**  $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C.$

**C.**  $\int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C.$

**D.**  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} e^{x^3+1} + C.$

**Câu 81.** Biết  $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$  với  $a, b$  là các số hữu tỉ. Tính tích  $ab$ ?

**A.**  $ab = \frac{1}{8}.$

**B.**  $ab = \frac{1}{4}.$

**C.**  $ab = -\frac{1}{8}.$

**D.**  $ab = -\frac{1}{4}.$

**Câu 82.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 4x(1 + \ln x)$  là

**A.**  $2x^2 \ln x + 3x^2.$

**B.**  $2x^2 \ln x + x^2.$

**C.**  $2x^2 \ln x + 3x^2 + C.$

**D.**  $2x^2 \ln x + x^2 + C.$

**Câu 83.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x.e^{2x}$  là

**A.**  $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \left( x - \frac{1}{2} \right) + C$

**B.**  $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} (x - 2) + C$

**C.**  $F(x) = 2e^{2x} (x - 2) + C$

**D.**  $F(x) = 2e^{2x} \left( x - \frac{1}{2} \right) + C$

**Câu 84.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2x(1 + e^x)$  là

**A.**  $(2x - 1)e^x + x^2.$

**B.**  $(2x + 1)e^x + x^2.$

**C.**  $(2x + 2)e^x + x^2.$

**D.**  $(2x - 2)e^x + x^2.$

**Câu 85.** Họ nguyên hàm của  $f(x) = x \ln x$  là kết quả nào sau đây?

**A.**  $F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{2} x^2 + C.$

**B.**  $F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C.$

**C.**  $F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$

**D.**  $F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x + C.$

**Câu 86.** Tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$  trên khoảng  $(0; \pi)$  là

**A.**  $-x \cot x + \ln|\sin x| + C.$

**B.**  $x \cot x - \ln|\sin x| + C.$

**C.**  $x \cot x + \ln|\sin x| + C.$

**D.**  $-x \cot x - \ln(\sin x) + C.$

**Câu 87.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^4 + xe^x$  là

**A.**  $\frac{1}{5} x^5 + (x + 1)e^x + C.$

**B.**  $\frac{1}{5} x^5 + (x - 1)e^x + C.$

**C.**  $\frac{1}{5} x^5 + xe^x + C.$

**D.**  $4x^3 + (x + 1)e^x + C.$

**Câu 88.** Họ nguyên hàm của hàm số  $y = \frac{(2x^2 + x) \ln x + 1}{x}$  là

**A.**  $(x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C.$

**B.**  $(x^2 + x - 1) \ln x + \frac{x^2}{2} - x + C.$

**C.**  $(x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C.$

**D.**  $(x^2 + x - 1) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C.$

**Câu 89.** Biết  $F(x) = -\frac{(x-a)\cos 3x}{b} + \frac{1}{c}\sin 3x + 2019$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (x-2)\sin 3x$ , (với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ). Giá trị của  $ab + c$  bằng

A. 14.                                      B. 15.                                      C. 10.                                      D. 18.

**Câu 90.** Cho hàm số  $f(x) = 2x^2e^{x^3+2} + 2xe^{2x}$ , ta có  $\int f(x)dx = me^{x^3+2} + nxe^{2x} - pe^{2x} + C$ . Giá trị của biểu thức  $m + n + p$  bằng

A.  $\frac{1}{3}$                                       B. 2                                      C.  $\frac{13}{6}$                                       D.  $\frac{7}{6}$

**Câu 91.** Cho hàm số  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = 2019^x(x^2 - 4)(x^2 - 3x + 2)$ . Khi đó số điểm cực trị của hàm số  $F(x)$  là

A. 5.                                      B. 4.                                      C. 3.                                      D. 2.

**Câu 92.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^{x^2}(x^3 - 4x)$ . Hàm số  $F(x^2 + x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6.                                      B. 5.                                      C. 3.                                      D. 4.

### Vấn đề 8. Các bài toán nguyên hàm có điều kiện.

**Câu 93.** Nếu  $F'(x) = \frac{1}{2x-1}$  và  $F(1) = 1$  thì giá trị của  $F(4)$  bằng

A.  $\ln 7$ .                                      B.  $1 + \frac{1}{2}\ln 7$ .                                      C.  $\ln 3$ .                                      D.  $1 + \ln 7$ .

**Câu 94.** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$  thỏa mãn  $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$ . Giá trị của biểu thức  $f(-1) + f(3)$  bằng

A.  $2 + \ln 15$                                       B.  $3 + \ln 15$                                       C.  $\ln 15$                                       D.  $4 + \ln 15$

**Câu 95.** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  thỏa mãn  $f'(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $f(0) = 2017$ ,  $f(2) = 2018$ . Tính  $S = f(3) - f(-1)$ .

A.  $S = \ln 4035$ .                                      B.  $S = 4$ .                                      C.  $S = \ln 2$ .                                      D.  $S = 1$ .

**Câu 96.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = ax^2 + \frac{b}{x^3}$ ,  $f'(1) = 3$ ,  $f(1) = 2$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}$ . Khi đó  $2a + b$  bằng

A.  $-\frac{3}{2}$ .                                      B. 0.                                      C. 5.                                      D.  $\frac{3}{2}$ .

**Câu 97.** Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^{2x}$  và  $F(0) = 0$ . Giá trị của  $F(\ln 3)$  bằng

A. 2.                                      B. 6.                                      C. 8.                                      D. 4.

**Câu 98.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = xe^x$  và  $f(0) = 2$ . Tính  $f(1)$ .

A.  $f(1) = 3$ .                                      B.  $f(1) = e$ .                                      C.  $f(1) = 5 - e$ .                                      D.  $f(1) = 8 - 2e$ .

**Câu 99.** Gọi  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = xe^{-x}$ . Tính  $F(x)$  biết  $F(0) = 1$ .

A.  $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 2$ .                                      B.  $F(x) = (x+1)e^{-x} + 1$ .  
C.  $F(x) = (x+1)e^{-x} + 2$ .                                      D.  $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 1$ .

**Câu 100.** Gọi  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2^x$ , thỏa mãn  $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$ . Tính giá trị biểu thức  $T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$ .

**A.**  $T = 1009 \cdot \frac{2^{2019} + 1}{\ln 2}$ .

**B.**  $T = 2^{2019 \cdot 2020}$ .

**C.**  $T = \frac{2^{2019} - 1}{\ln 2}$ .

**D.**  $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$ .

**Câu 101.** Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm  $f(x) = \cos 3x$  và  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$ . Tính  $F\left(\frac{\pi}{9}\right)$ .

**A.**  $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3} + 2}{6}$

**B.**  $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3} - 2}{6}$

**C.**  $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3} + 6}{6}$

**D.**  $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3} - 6}{6}$

**Câu 102.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = -\cos x$  và  $f(0) = 2020$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.**  $f(x) = -\sin x + 2020$

**B.**  $f(x) = \cos x + 2020$

**C.**  $f(x) = \sin x + 2020$ .

**D.**  $f(x) = 2020 - \cos x$

**Câu 103.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \sin x + \cos x$  thỏa mãn  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ .

**A.**  $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$

**B.**  $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$

**C.**  $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$

**D.**  $F(x) = \cos x - \sin x + 3$

**Câu 104.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ . Biết  $F\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = k$  với mọi  $k \in \mathbb{Z}$ .

Tính  $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi)$ .

**A.** 55.

**B.** 44.

**C.** 45.

**D.** 0.

**Câu 105.** Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$  và  $F(0) = \pi$ . Tính  $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

**A.**  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$ .

**B.**  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ .

**C.**  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \pi$ .

**D.**  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi$ .

**Câu 106.** Gọi  $F(x)$  là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x$  thỏa  $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ . Giá trị  $F(2019\pi)$  là

**A.**  $F(2019\pi) = -\frac{1}{15}$

**B.**  $F(2019\pi) = 0$

**C.**  $F(2019\pi) = -\frac{2}{15}$

**D.**  $F(2019\pi) = \frac{1}{15}$

**Câu 107.** Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm  $f(x) = \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin x}}$  và  $F(0) = 2$ . Giá trị của  $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$  là

**A.**  $\frac{2\sqrt{2} - 8}{3}$

**B.**  $\frac{2\sqrt{2} + 8}{3}$

**C.**  $\frac{4\sqrt{2} - 8}{3}$

**D.**  $\frac{4\sqrt{2} + 8}{3}$

**Câu 108.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{2x + 1}{x^4 + 2x^3 + x^2}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$  thỏa mãn  $F(1) = \frac{1}{2}$ . Giá trị của biểu thức  $S = F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2019)$  bằng

**A.**  $\frac{2019}{2020}$ .

**B.**  $\frac{2019 \cdot 2021}{2020}$ .

**C.**  $2018 \cdot \frac{1}{2020}$ .

**D.**  $-\frac{2019}{2020}$ .

**Câu 109.** Giả sử  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x^2}$  sao cho  $F(-2) + F(1) = 0$ . Giá trị của  $F(-1) + F(2)$  bằng

- A.  $\frac{10}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5$ .      B. 0.      C.  $\frac{7}{3} \ln 2$ .      D.  $\frac{2}{3} \ln 2 + \frac{3}{6} \ln 5$ .

**Câu 110.** Gọi  $g(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \ln(x-1)$ . Cho biết  $g(2) = 1$  và  $g(3) = a \ln b$  trong đó  $a, b$  là các số nguyên dương phân biệt. Hãy tính giá trị của  $T = 3a^2 - b^2$

- A.  $T = 8$ .      B.  $T = -17$ .      C.  $T = 2$ .      D.  $T = -13$ .

### Vấn đề 9. Nguyên hàm của hàm ẩn

**Câu 111.** Hàm số  $F(x)$  nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số  $f(x).g(x)$ , biết  $F(1) = 3$ ,  $\int f(x) dx = x + C_1$  và  $\int g(x) dx = x^2 + C_2$ .

- A.  $F(x) = x^2 + 1$       B.  $F(x) = x^2 + 3$       C.  $F(x) = x^2 + 2$       D.  $F(x) = x^2 + 4$

**Câu 112.** Cho  $\int f(x) dx = 4x^3 + 2x + C_0$ . Tính  $I = \int xf(x^2) dx$ .

- A.  $I = 2x^6 + x^2 + C$ .      B.  $I = \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^6}{6} + C$ .      C.  $I = 4x^6 + 2x^2 + C$ .      D.  $I = 12x^2 + 2$

**Câu 113.** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f'(x).f(x) = x^4 + x^2$ . Biết  $f(0) = 2$ . Tính  $f^2(2)$ .

- A.  $f^2(2) = \frac{313}{15}$ .      B.  $f^2(2) = \frac{332}{15}$ .      C.  $f^2(2) = \frac{324}{15}$ .      D.  $f^2(2) = \frac{323}{15}$ .

**Câu 114.** Cho hai hàm số  $F(x), G(x)$  xác định và có đạo hàm lần lượt là  $f(x), g(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Biết rằng

$F(x).G(x) = x^2 \ln(x^2 + 1)$  và  $F(x).g(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$ . Họ nguyên hàm của  $f(x).G(x)$  là

- A.  $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) + 2x^2 + C$ .      B.  $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - 2x^2 + C$ .  
C.  $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - x^2 + C$ .      D.  $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) + x^2 + C$ .

**Câu 115.** Cho hàm số  $f$  liên tục và có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) > -1 \forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(0) = 0$  và thỏa mãn

$f'(x)\sqrt{x^2 + 1} = 2x\sqrt{f(x) + 1}$ . Tính  $f(\sqrt{3})$ .

- A. 9.      B. 7.      C. 3.      D. 0.

**Câu 116.** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên đoạn  $[-1; 2]$  thỏa mãn  $f(0) = 1$  và  $f^2(x).f'(x) = 1 + 2x + 3x^2$

. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x)$  trên  $[-1; 2]$  là

- A.  $\min_{[-1; 2]} f(x) = \sqrt[3]{2}; \max_{[-1; 2]} f(x) = \sqrt[3]{43}$ .      B.  $\min_{[-1; 2]} f(x) = \sqrt[3]{2}; \max_{[-1; 2]} f(x) = \sqrt[3]{40}$   
C.  $\min_{[-1; 2]} f(x) = \sqrt[3]{-2}; \max_{[-1; 2]} f(x) = \sqrt[3]{43}$ .      D.  $\min_{[-1; 2]} f(x) = \sqrt[3]{-2}; \max_{[-1; 2]} f(x) = \sqrt[3]{40}$ .

**Câu 117.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) \neq 0$  với mọi  $x$  và thỏa mãn  $f(1) = -\frac{1}{2}$ ,

$f'(x) = (2x + 1)f^2(x)$ . Biết  $f(1) + f(2) + \dots + f(2019) = \frac{a}{b} - 1$  với  $a, b \in \mathbb{N}, (a, b) = 1$ . Khẳng định

nào sau đây sai?

- A.  $a - b = -2019$ .      B.  $ab > 2019$ .      C.  $2a + b = 2022$ .      D.  $b \leq 2020$ .

**Câu 118.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn các điều kiện:  $f(0) = 2\sqrt{2}$ ,  $f(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(x) \cdot f'(x) = (2x+1)\sqrt{1+f^2(x)}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Khi đó giá trị  $f(1)$  bằng

- A.  $\sqrt{26}$ . B.  $\sqrt{24}$ . C.  $\sqrt{15}$ . D.  $\sqrt{23}$ .

**Câu 119.** Cho h/s  $y = f(x)$  liên tục trên  $(0; +\infty)$  thỏa mãn  $2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x}$ ;  $f(1) = \frac{1}{2}$ . Tính  $f(4)$ ?

- A. 24. B. 14. C. 4. D. 16.

**Câu 120.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = f'(0) = 1$ . Tính giá trị của  $T = f^2(2)$ .

- A.  $\frac{43}{30}$ . B.  $\frac{16}{15}$ . C.  $\frac{43}{15}$ . D.  $\frac{26}{15}$ .

### Vấn đề 10. Một số bài toán ứng dụng của nguyên hàm.

**Câu 121. (Đề tham khảo đánh giá năng lực 2021\_Đại học Quốc Gia Hà Nội)** Một vật rơi tự do theo phương thẳng đứng có quãng đường dịch chuyển  $S(t) = \frac{1}{2}gt^2$  với  $t$  là thời gian tính bằng giây (s) kể từ lúc vật bắt đầu rơi,  $S$  là quãng đường tính bằng mét (m),  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm  $t_0 = 4$  (s) là:

- A.  $156,8(m/s)$  B.  $78,4(m/s)$  C.  $19,6(m/s)$ . D.  $39,2(m/s)$ .

**Câu 122.** Một ô tô đang chạy với vận tốc  $10(m/s)$  thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = 10 - 2t(m/s)$ , trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

- A.  $50m$ . B.  $25m$ . C.  $55m$ . D.  $10m$ .

**Câu 123.** Một vận động viên điền kinh chạy với gia tốc  $a(t) = -\frac{1}{24}t^3 + \frac{5}{16}t^2(m/s^2)$ , trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính từ lúc xuất phát. Hỏi vào thời điểm  $5(m/s)$  sau khi xuất phát thì vận tốc của vận động viên là bao nhiêu?

- A.  $5,6m/s$  B.  $6,51(m/s)$ . C.  $7,72(m/s)$  D.  $6,8(m/s)$

**Câu 124.** Số lượng của một loại vi khuẩn được tính theo công thức  $N(x)$ , trong đó  $x$  là số ngày kể từ thời điểm ban đầu. Biết rằng  $N'(x) = \frac{2000}{1+x}$  và lúc đầu số lượng vi khuẩn là 5000 con. Hỏi ngày thứ 12 số lượng vi khuẩn gần nhất với kết quả nào sau đây?

- A. 10130. B. 10120. C. 5154. D. 10132.

### B. TÍCH PHÂN.

#### Vấn đề 1. Tích phân hàm đa thức

**Câu 1.** Tính tích phân  $I = \int_{-1}^0 (2x+1)dx$ .

- A.  $I=0$ . B.  $I=1$ . C.  $I=2$ . D.  $I=-\frac{1}{2}$ .



**Câu 2.** Tích phân  $\int_0^1 (3x+1)(x+3)dx$  bằng

- A. 12.                                      B. 9.                                      C. 5.                                      D. 6.

**Câu 3.** Với  $a, b$  là các tham số thực. Giá trị tích phân  $\int_0^b (3x^2 - 2ax - 1)dx$  bằng

- A.  $b^3 - b^2a - b$ .                      B.  $b^3 + b^2a + b$ .                      C.  $b^3 - ba^2 - b$ .                      D.  $3b^2 - 2ab - 1$ .

**Câu 4.** Biết rằng hàm số  $f(x) = mx + n$  thỏa mãn  $\int_0^1 f(x)dx = 3, \int_0^2 f(x)dx = 8$ . Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

- A.  $m + n = 4$ .                      B.  $m + n = -4$ .                      C.  $m + n = 2$ .                      D.  $m + n = -2$ .

**Câu 5.** Cho  $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1)dx = 6$ . Giá trị của tham số  $m$  thuộc khoảng nào sau đây ?

- A.  $(-1; 2)$ .                      B.  $(-\infty; 0)$ .                      C.  $(0; 4)$ .                      D.  $(-3; 1)$ .

**Câu 6.** Cho  $n$  là số nguyên dương khác 0, hãy tính tích phân  $I = \int_0^1 (1-x^2)^n x dx$  theo  $n$ .

- A.  $I = \frac{1}{2n+2}$ .                      B.  $I = \frac{1}{2n}$ .                      C.  $I = \frac{1}{2n-1}$ .                      D.  $I = \frac{1}{2n+1}$ .

### Vấn đề 2. Tích phân hàm số hữu tỉ.

**Câu 7.**  $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$  bằng

- A.  $\frac{1}{2} \ln 35$                       B.  $\ln \frac{7}{5}$                       C.  $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{5}$                       D.  $2 \ln \frac{7}{5}$

**Câu 8.** Biết  $\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = a + b \ln c$ , với  $a, b, c \in \mathbb{Z}, c < 9$ . Tính tổng  $S = a + b + c$ .

- A.  $S = 7$ .                      B.  $S = 5$ .                      C.  $S = 8$ .                      D.  $S = 6$ .

**Câu 9.** Cho  $\int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$  với  $a, b$  là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A.  $a + 2b = 0$                       B.  $a + b = 2$                       C.  $a - 2b = 0$                       D.  $a + b = -2$

**Câu 10.** Tính tích phân  $I = \int_1^e \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

- A.  $I = \frac{1}{e}$                       B.  $I = \frac{1}{e} + 1$                       C.  $I = 1$                       D.  $I = e$

**Câu 11.** Biết  $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(2x+1)} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ . Khi đó giá trị  $a + b + c$  bằng

- A. -3.                      B. 2.                      C. 1.                      D. 0.

**Câu 12.** Biết  $I = \int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x-2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b, (a, b \in \mathbb{R})$ . Khi đó giá trị của  $a + 4b$  bằng

- A. 50                                      B. 60                                      C. 59                                      D. 40

**Câu 13.** Biết  $\int_0^2 \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 + 4x + 3} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$ ,  $(a, b, c \in \mathbb{Q})$ . Giá trị của  $abc$  bằng

- A.  $-8$ .                                      B.  $-10$ .                                      C.  $-12$ .                                      D.  $16$ .

**Câu 14.** Biết  $\int_0^1 \frac{2x^2 + 3x + 3}{x^2 + 2x + 1} dx = a - \ln b$  với  $a, b$  là các số nguyên dương. Tính  $P = a^2 + b^2$ .

- A.  $13$ .                                      B.  $5$ .                                      C.  $4$ .                                      D.  $10$ .

**Câu 15.** Cho tích phân  $I = \int_0^1 \frac{x^7}{(1+x^2)^5} dx$ , giả sử đặt  $t = 1 + x^2$ . Tìm mệnh đề đúng.

- A.  $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt$ .                                      B.  $I = \int_1^3 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt$ .  
C.  $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^4} dt$ .                                      D.  $I = \frac{3}{2} \int_1^4 \frac{(t-1)^3}{t^4} dt$ .

**Câu 16.** Có bao nhiêu số thực  $a$  để  $\int_0^1 \frac{x}{a+x^2} dx = 1$ .

- A.  $2$                                       B.  $1$                                       C.  $0$                                       D.  $3$

### Vấn đề 3. Tích phân hàm vô tỉ.

**Câu 17.** Tính tích phân  $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx$  bằng cách đặt  $u = x^2 - 1$ , mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$                                       B.  $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du$                                       C.  $I = 2 \int_0^3 \sqrt{u} du$                                       D.  $I = \int_1^2 \sqrt{u} du$

**Câu 18.** Cho  $\int_5^{21} \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = a \ln 3 + b \ln 5 + c \ln 7$ , với  $a, b, c$  là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $a - b = -2c$                                       B.  $a + b = -2c$                                       C.  $a + b = c$                                       D.  $a - b = -c$

**Câu 19.** Tích phân  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$  bằng

- A.  $\frac{4}{3}$ .                                      B.  $\frac{3}{2}$ .                                      C.  $\frac{1}{3}$ .                                      D.  $\frac{2}{3}$ .

**Câu 20.** Biết  $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+x\sqrt{x+1}}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương. Tính

$$P = a + b + c$$

- A.  $P = 18$                                       B.  $P = 46$                                       C.  $P = 24$                                       D.  $P = 12$

**Câu 21.** Cho tích phân  $I = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16-x^2} dx$  và  $x = 4 \sin t$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt$ .                                      B.  $I = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt$ .

**C.**  $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt.$

**D.**  $I = -16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt.$

**Câu 22.** Biết  $\int_1^5 \frac{1}{1 + \sqrt{3x+1}} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$  ( $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ). Giá trị của  $a + b + c$  bằng

**A.**  $\frac{7}{3}.$

**B.**  $\frac{5}{3}.$

**C.**  $\frac{8}{3}.$

**D.**  $\frac{4}{3}.$

**Câu 23.** Cho biết  $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx = \frac{m}{n}$  với  $\frac{m}{n}$  là một phân số tối giản. Tính  $m - 7n$

**A.** 0.

**B.** 1.

**C.** 2.

**D.** 91.

**Câu 24.** Cho  $\int_0^3 \frac{x}{4 + 2\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{3} + b \ln 2 + c \ln 3$  với  $a, b, c$  là các số nguyên. Giá trị  $a + b + c$  bằng

**A.** 9

**B.** 2

**C.** 1

**D.** 7

**Câu 25.** Tính  $I = \int_0^a \frac{x^3 + x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$

**A.**  $I = (a^2 + 1)\sqrt{a^2 + 1} - 1.$

**B.**  $I = \frac{1}{3}[(a^2 + 1)\sqrt{a^2 + 1} - 1].$

**C.**  $I = \frac{1}{3}[(a^2 + 1)\sqrt{a^2 + 1} + 1].$

**D.**  $I = (a^2 + 1)\sqrt{a^2 + 1} + 1.$

**Câu 26.** Giá trị của tích phân  $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$  bằng tích phân nào dưới đây?

**A.**  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin^2 y dy.$

**B.**  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx.$

**C.**  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 y}{\cos y} dy.$

**D.**  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 y dy.$

**Câu 27.** Cho tích phân  $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$  nếu đổi biến số  $x = 2 \sin t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  thì ta được.

**A.**  $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} dt.$

**B.**  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt.$

**C.**  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t dt.$

**D.**  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{t}.$

**Câu 28.** Biết  $\int_0^1 \frac{x^3}{x + \sqrt{1+x^2}} dx = \frac{a\sqrt{b} + c}{15}$  với  $a, b, c$  là các số nguyên và  $b \geq 0$ . Tính  $P = a + b^2 - c$

**A.**  $P = 3.$

**B.**  $P = 7.$

**C.**  $P = -7.$

**D.**  $P = 5.$

**Câu 29.** Giả sử  $I = \int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = a \ln \frac{2}{3} + b$  với  $a, b$  là số nguyên. Khi đó giá trị  $a - b$  là

**A.** -17.

**B.** 5.

**C.** -5.

**D.** 17.

**Câu 30.** Biết  $\int_1^2 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} dx = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{35}$ ,  $a, b, c$  là các số hữu tỷ, tính  $P = a + 2b + c - 7$

**A.**  $-\frac{1}{9}.$

**B.**  $\frac{86}{27}.$

**C.** -2.

**D.**  $\frac{67}{27}.$

**Câu 31.** Biết  $\int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}dx}{2x+3\sqrt{2x+1}+3} = a + b \ln 2 + c \ln \frac{5}{3} \left( a, b, c \in \mathbb{Z} \right)$ . Tính  $T = 2a + b + c$ .

A.  $T = 4$ .

B.  $T = 2$ .

C.  $T = 1$ .

D.  $T = 3$ .

**Vấn đề 4. Tích phân hàm lượng giác.**

**Câu 32.** Cho hàm số  $f(x)$ . Biết  $f(0) = 4$  và  $f'(x) = 2 \sin^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ , khi đó  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$  bằng

A.  $\frac{\pi^2 + 16\pi - 4}{16}$ .

B.  $\frac{\pi^2 - 4}{16}$ .

C.  $\frac{\pi^2 + 15\pi}{16}$ .

D.  $\frac{\pi^2 + 16\pi - 16}{16}$ .

**Câu 33.** Cho hàm số  $f(x)$ . Biết  $f(0) = 4$  và  $f'(x) = 2 \cos^2 x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$ , khi đó  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$  bằng?

A.  $\frac{\pi^2 + 8\pi + 8}{8}$ .

B.  $\frac{\pi^2 + 8\pi + 2}{8}$ .

C.  $\frac{\pi^2 + 6\pi + 8}{8}$ .

D.  $\frac{\pi^2 + 2}{8}$ .

**Câu 34.** Giá trị của  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$  bằng

A. 0.

B. 1.

C. -1.

D.  $\frac{\pi}{2}$ .

**Câu 35.** Giả sử  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx = a + b \frac{\sqrt{2}}{2} \left( a, b \in \mathbb{Q} \right)$ . Khi đó giá trị của  $a - b$  là

A.  $-\frac{1}{6}$

B.  $-\frac{1}{6}$

C.  $-\frac{3}{10}$

D.  $\frac{1}{5}$

**Câu 36.** Biết  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin x - \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx = \frac{-11}{3} \ln 2 + b \ln 3 + c \left( b, c \in \mathbb{Q} \right)$ . Tính  $\frac{b}{c}$ ?

A.  $\frac{22}{3}$ .

B.  $\frac{22\pi}{3}$ .

C.  $\frac{22}{3\pi}$ .

D.  $\frac{22\pi}{13}$ .

**Câu 37.** Tính tích phân  $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x \cdot \sin x dx$ .

A.  $I = -\frac{1}{4}$

B.  $I = -\frac{1}{4} \pi^4$

C.  $I = -\pi^4$

D.  $I = 0$

**Câu 38.** Cho tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + \cos x} \cdot \sin x dx$ . Nếu đặt  $t = 2 + \cos x$  thì kết quả nào sau đây đúng?

A.  $I = \int_3^2 \sqrt{t} dt$ .

B.  $I = \int_2^3 \sqrt{t} dt$ .

C.  $I = 2 \int_3^2 \sqrt{t} dt$ .

D.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t} dt$ .

**Câu 39.** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$  bằng cách đặt  $u = \tan x$ , mệnh đề nào dưới đây đúng?

A.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u^2 du.$       B.  $I = \int_0^2 \frac{1}{u^2} du.$       C.  $I = -\int_0^1 u^2 du.$       D.  $I = \int_0^1 u^2 du.$

**Câu 40.** Cho tích phân  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2} dx = a \ln 5 + b \ln 2$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A.  $2a + b = 0.$       B.  $a - 2b = 0.$       C.  $2a - b = 0.$       D.  $a + 2b = 0.$

**Câu 41.** Có bao nhiêu số  $a \in (0, 20\pi)$  sao cho  $\int_0^a \sin^5 x \sin 2x dx = \frac{2}{7}.$

A. 10.      B. 9.      C. 20.      D. 19.

**Câu 42.** Biết  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{1 + \sin x} = \frac{a\sqrt{3} + b}{c}$ , với  $a, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Z}^+$  và  $a, b, c$  là các số nguyên tố cùng nhau. Giá trị của tổng  $a + b + c$  bằng

A. 5.      B. 12.      C. 7.      D. -1.

**Câu 43.** Cho tích phân số  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2} dx = a \ln 5 + b \ln 2$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A.  $2a + b = 0.$       B.  $a - 2b = 0.$       C.  $2a - b = 0.$       D.  $a + 2b = 0.$

**Câu 44.** Cho  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\cos x)^2 - 5 \cos x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$ , với  $a, b$  là các số hữu tỉ,  $c > 0$ . Tính tổng  $m$ .

A.  $S = 3.$       B.  $S = 0.$       C.  $S = 1.$       D.  $S = 4.$

#### Vấn đề 5. Tích phân hàm mũ và logarit.

**Câu 45.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ . Tính:  $I = F(e) - F(1)$ ?

A.  $I = \frac{1}{2}$       B.  $I = \frac{1}{e}$       C.  $I = 1$       D.  $I = e$

**Câu 46.**  $\int_0^1 e^{3x+1} dx$  bằng

A.  $\frac{1}{3}(e^4 + e)$       B.  $e^3 - e$       C.  $\frac{1}{3}(e^4 - e)$       D.  $e^4 - e$

**Câu 47.** Cho  $\int_1^2 e^{3x-1} dx = m(e^p - e^q)$  với  $m, p, q \in \mathbb{Q}$  và là các phân số tối giản. Giá trị  $m + p + q$  bằng

A. 10.      B. 6.      C.  $\frac{22}{3}.$       D. 5.

**Câu 48.** Biết tích phân  $\int_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1 + \sqrt{e^x + 3}} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ , với  $a, b, c$  là các số nguyên. Tính

$T = a + b + c.$

A.  $T = -1.$       B.  $T = 0.$       C.  $T = 2.$       D.  $T = 1.$

**Câu 49.** Biết  $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = a + b\sqrt{2}$  với  $a, b$  là các số hữu tỷ. Tính  $S = a + b$ .

- A.  $S=1$ . B.  $S=\frac{1}{2}$ . C.  $S=\frac{3}{4}$ . D.  $S=\frac{2}{3}$ .

**Câu 50.** Cho  $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = a + b \ln \frac{1+e}{2}$ , với  $a, b$  là các số hữu tỉ. Tính  $S = a^3 + b^3$ .

- A.  $S=-2$ . B.  $S=0$ . C.  $S=1$ . D.  $S=2$ .

**Câu 51.** Cho tích phân  $I = \int_1^e \frac{3 \ln x + 1}{x} dx$ . Nếu đặt  $t = \ln x$  thì

- A.  $I = \int_0^1 \frac{3t+1}{e^t} dt$ . B.  $I = \int_1^e \frac{3t+1}{t} dt$ . C.  $I = \int_1^e (3t+1) dt$ . D.  $I = \int_0^1 (3t+1) dt$ .

**Câu 52.** Cho  $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + \frac{c}{3}$ , với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Khẳng định nào sau đây đúng.

- A.  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . B.  $a^2 + b^2 + c^2 = 11$ . C.  $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ . D.  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ .

**Câu 53.** Biết  $I = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 3e^{-x} + 4} = \frac{1}{c} (\ln a - \ln b + \ln c)$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương.

Tính  $P = 2a - b + c$ .

- A.  $P=-3$ . B.  $P=-1$ . C.  $P=4$ . D.  $P=3$

#### Vấn đề 6. Tích phân tổng hợp.

**Câu 54.** Biết rằng  $\int_0^1 x e^{x^2+2} dx = \frac{a}{2} (e^b - e^c)$  với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Giá trị của  $a + b + c$  bằng

- A. 4. B. 7. C. 5. D. 6.

**Câu 55.** Biết  $\int_1^e \frac{x+1}{x^2 + x \ln x} dx = \ln(ae + b)$  với  $a, b$  là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức

$T = a^2 - ab + b^2$ .

- A. 3. B. 1. C. 0. D. 8.

**Câu 56.** Biết  $\int_1^2 (x+1)^2 e^{\frac{x-1}{x}} dx = m e^{\frac{p}{q}} - n$ , trong đó  $m, n, p, q$  là các số nguyên dương và  $\frac{p}{q}$  là phân số

tối giản. Tính  $T = m + n + p + q$ .

- A.  $T=11$ . B.  $T=10$ . C.  $T=7$ . D.  $T=8$ .

**Câu 57.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  đồng thời thỏa mãn  $f(0) = f(1) = 5$ . Tính tích

phân  $I = \int_0^1 f'(x) e^{f(x)} dx$ .

- A.  $I=10$  B.  $I=-5$  C.  $I=0$  D.  $I=5$

**Câu 58.** Biết  $I = \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$  trong đó  $a, b, c$  là các số thực. Giá trị của biểu

thức  $T = a + b + c$  là:

- A.  $T=11$ . B.  $T=9$ . C.  $T=10$ . D.  $T=8$ .

**Câu 59.** Cho  $\int_1^e \frac{(3x^3 - 1) \ln x + 3x^2 - 1}{1 + x \ln x} dx = a.e^3 + b + c \ln(e + 1)$  với  $a, b, c$  là các số nguyên và

$\ln e = 1$ . Tính  $P = a^2 + b^2 + c^2$ .

- A.  $P = 9$ . B.  $P = 14$ . C.  $P = 10$ . D.  $P = 3$ .

**Câu 60.** Biết  $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2 + x \ln x} dx = \ln(\ln a + b)$  với  $a, b$  là các số nguyên dương. Tính  $P = a^2 + b^2 + ab$ .

- A. 10. B.  $\xi$ . C. 12. D.  $\epsilon$ .

**Câu 61.** Cho  $\int_0^1 \frac{(x^2 + x)e^x}{x + e^{-x}} dx = a.e + b \ln(e + c)$  với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Tính  $P = a + 2b - c$ .

- A.  $P = 1$ . B.  $P = -1$ . C.  $P = 0$ . D.  $P = -2$ .

### Vấn đề 7. Tích phân dùng tính chất.

**Câu 62.** Biết  $\int_1^2 f(x) dx = 2$  và  $\int_1^2 g(x) dx = 6$ , khi đó  $\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx$  bằng

- A.  $\xi$ . B.  $-4$ . C. 4. D.  $-8$ .

**Câu 63.** Biết tích phân  $\int_0^1 f(x) dx = 3$  và  $\int_0^1 g(x) dx = -4$ . Khi đó  $\int_0^1 [f(x) + g(x)] dx$  bằng

- A.  $-7$ . B. 7. C.  $-1$ . D. 1.

**Câu 64.** Khẳng định nào trong các khẳng định sau đúng với mọi hàm  $f, g$  liên tục trên  $K$  và  $a, b$  là các số bất kỳ thuộc  $K$ ?

- A.  $\int_a^b [f(x) + 2g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + 2 \int_a^b g(x) dx$ . B.  $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$ .  
C.  $\int_a^b [f(x) \cdot g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$ . D.  $\int_a^b f^2(x) dx = \left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2$ .

**Câu 65.** Cho  $\int_{-2}^2 f(x) dx = 1$ ,  $\int_{-2}^4 f(t) dt = -4$ . Tính  $\int_2^4 f(y) dy$ .

- A.  $I = 5$ . B.  $I = -3$ . C.  $I = 3$ . D.  $I = -5$ .

**Câu 66.** Cho  $\int_0^2 f(x) dx = 3$  và  $\int_0^2 g(x) dx = 7$ , khi đó  $\int_0^2 [f(x) + 3g(x)] dx$  bằng

- A. 16. B.  $-18$ . C. 24. D. 10.

**Câu 67.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục, có đạo hàm trên  $[-1; 2]$ ,  $f(-1) = 8$ ;  $f(2) = -1$ . Tích phân

$\int_{-1}^2 f'(x) dx$  bằng

- A. 1. B. 7. C.  $-9$ . D. 9.

**Câu 68.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $\int_1^8 f(x) dx = 9$ ,  $\int_4^{12} f(x) dx = 3$ ,  $\int_4^8 f(x) dx = 5$ .

Tính  $I = \int_1^{12} f(x) dx$ .

- A.  $I = 17$ . B.  $I = 1$ . C.  $I = 11$ . D.  $I = 7$ .

**Câu 69.** Cho  $f, g$  là hai hàm liên tục trên đoạn  $[1; 3]$  thỏa mãn

$$\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10, \int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6. \text{ Tính } \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx.$$

- A. 7. B. 6. C. 8. D. 9.

**Câu 70.** Cho  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$ . Tính  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx = 5$ .

- A.  $I = 7$  B.  $I = 5 + \frac{\pi}{2}$  C.  $I = 3$  D.  $I = 5 + \pi$

**Câu 71.** Cho  $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$  và  $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$ . Tính  $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$ .

- A.  $I = \frac{17}{2}$  B.  $I = \frac{5}{2}$  C.  $I = \frac{7}{2}$  D.  $I = \frac{11}{2}$

**Câu 72.** Số điểm cực trị của hàm số  $f(x) = \int_{2x}^{x^2} \frac{2tdt}{1+t^2}$  là

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

**Câu 73.** Cho biết  $\int_{-1}^5 f(x) dx = 15$ . Tính giá trị của  $P = \int_0^2 [f(5-3x) + 7] dx$ .

- A.  $P = 15$ . B.  $P = 37$ . C.  $P = 27$ . D.  $P = 19$ .

**Câu 74.** Cho  $\int_0^4 f(x) dx = 2018$ . Tính tích phân  $I = \int_0^2 [f(2x) + f(4-2x)] dx$ .

- A.  $I = 0$ . B.  $I = 2018$ . C.  $I = 4036$ . D.  $I = 1009$ .

**Câu 75.** Cho  $y = f(x)$  là hàm số chẵn, liên tục trên  $[-6; 6]$ . Biết rằng  $\int_{-1}^2 f(x) dx = 8$ ;

$\int_1^3 f(-2x) dx = 3$ . Giá trị của  $I = \int_{-1}^6 f(x) dx$  là

- A.  $I = 5$ . B.  $I = 2$ . C.  $I = 14$ . D.  $I = 11$ .

**Câu 76.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_0^{\pi^2} f(x) dx = 2018$ , tính  $I = \int_0^{\pi} xf(x^2) dx$ .

- A.  $I = 1008$ . B.  $I = 2019$ . C.  $I = 2017$ . D.  $I = 1009$ .

**Câu 77.** Cho  $\int_1^2 f(x) dx = 2$ . Khi đó  $\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$  bằng

- A. 1 B. 4 C. 2 D. 3

**Câu 78.** Cho  $\int_1^2 f(x^2 + 1) x dx = 2$ . Khi đó  $I = \int_2^5 f(x) dx$  bằng

- A. 2 B. 1 C. 4 D. -1

**Câu 79.** Cho  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(x) = f(10-x)$  và  $\int_3^7 f(x) dx = 4$ . Tính  $I = \int_3^7 xf(x) dx$

- A. 80. B. 60. C. 40. D. 20.



**Câu 80.** Cho  $\int_0^1 f(x) dx = 9$ . Tính  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin 3x) \cos 3x dx$ .

- A.  $I = 5$ . B.  $I = 9$ . C.  $I = 3$ . D.  $I = 2$ .

**Câu 81.** Cho hàm  $f(x)$  thỏa mãn  $\int_0^{2017} f(x) dx = 1$ . Tính tích phân  $I = \int_0^1 f(2017x) dx$ .

- A.  $I = \frac{1}{2017}$ . B.  $I = 0$ . C.  $I = 2017$ . D.  $I = 1$ .

**Câu 82.** Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x^2; & x \geq 1 \\ 5 - x; & x < 1 \end{cases}$ . Tính  $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx + 3 \int_0^1 f(3 - 2x) dx$ .

- A.  $I = \frac{71}{6}$ . B.  $I = 31$ . C.  $I = 32$ . D.  $I = \frac{32}{3}$ .

**Câu 83.** Cho  $I = \int_1^2 f(x) dx = 2$ . Giá trị của  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x f(\sqrt{3 \cos x + 1})}{\sqrt{3 \cos x + 1}} dx$  bằng

- A. 2 B.  $-\frac{4}{3}$  C.  $\frac{4}{3}$  D. -2

**Câu 84.** Biết  $\int_1^4 f(x) dx = 5$  và  $\int_4^5 f(x) dx = 20$ . Tính  $\int_1^2 f(4x - 3) dx - \int_0^{\ln 2} f(e^{2x}) e^{2x} dx$ .

- A.  $I = \frac{15}{4}$ . B.  $I = 15$ . C.  $I = \frac{5}{2}$ . D.  $I = 25$ .

**Câu 85.** Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(x) + f(2 - x) = x.e^{x^2}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Tính tích phân  $I = \int_0^2 f(x) dx$ .

- A.  $I = \frac{e^4 - 1}{4}$ . B.  $I = \frac{2e - 1}{2}$ . C.  $I = e^4 - 2$ . D.  $I = e^4 - 1$ .

**Câu 86.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(2x) = 3f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Biết rằng

$\int_0^1 f(x) dx = 1$ . Tính tích phân  $I = \int_1^2 f(x) dx$ .

- A.  $I = 5$  B.  $I = 6$  C.  $I = 3$  D.  $I = 2$

**Câu 87.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa  $\int_0^{2018} f(x) dx = 2$ . Khi đó tích phân

$\int_0^{\sqrt{e^{2018} - 1}} \frac{x}{x^2 + 1} f(\ln(x^2 + 1)) dx$  bằng

- A. 4 B. 1 C. 2 D. 3

**Câu 88.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 3$  và  $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 1$ . Tính

$I = \int_0^1 f(x) dx$ .

A.  $I = 2$ .

B.  $I = 6$ .

C.  $I = 3$ .

D.  $I = 4$ .

**Câu 89.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = 1$ . Tính

tích phân  $\int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx$ .

A.  $I = 3$ .

B.  $I = \frac{3}{2}$ .

C.  $I = 2$ .

D.  $I = \frac{5}{2}$ .

**Câu 90.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[1; 4]$  và thỏa mãn  $f(x) = \frac{f(2\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}$ . Tính tích

phân  $I = \int_3^4 f(x) dx$ .

A.  $I = 3 + 2 \ln^2 2$ .

B.  $I = 2 \ln^2 2$ .

C.  $I = \ln^2 2$ .

D.  $I = 2 \ln 2$ .

**Câu 91.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $7f(x) + 4f(4-x) = 2018x\sqrt{x^2 + 9}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Tính  $I = \int_0^4 f(x) dx$ .

A.  $\frac{2018}{11}$ .

B.  $\frac{7063}{3}$ .

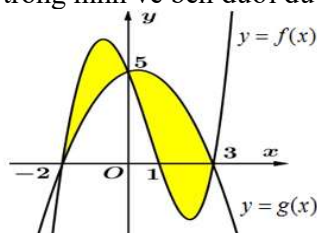
C.  $\frac{98}{3}$ .

D.  $\frac{197764}{33}$ .

### C. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

#### Vấn đề 1. Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng, thể tích khối tròn xoay

**Câu 1.** Diện tích phần hình phẳng tô đen trong hình vẽ bên dưới được tính theo công thức nào dưới đây?



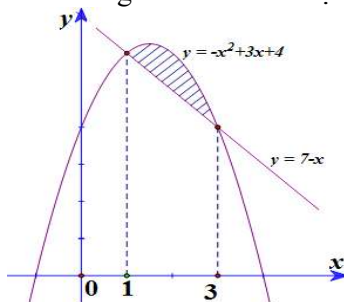
A.  $\int_{-2}^3 (f(x) - g(x)) dx$ .

B.  $\int_{-2}^3 (g(x) - f(x)) dx$ .

C.  $\int_{-2}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^3 (g(x) - f(x)) dx$ .

D.  $\int_{-2}^0 (g(x) - f(x)) dx + \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx$ .

**Câu 2.** Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên dưới được tính theo công thức nào dưới đây?



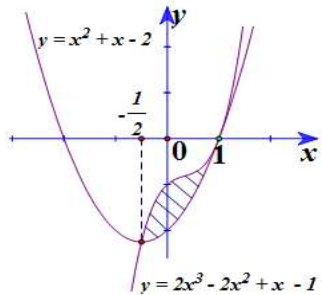
A.  $\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx$ .

B.  $\int_1^3 (-x^2 + 2x + 11) dx$ .

C.  $\int_1^3 (x^2 - 2x - 11) dx$ .

D.  $\int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx$ .

**Câu 3.** Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



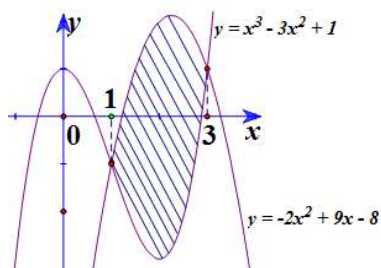
A.  $\int_{-\frac{1}{2}}^1 (-2x^3 + 3x^2 - 1) dx$ .

B.  $\int_{-\frac{1}{2}}^1 (2x^3 - x^2 + 2x - 3) dx$ .

C.  $\int_{-\frac{1}{2}}^1 (2x^3 - 3x^2 + 1) dx$ .

D.  $\int_{-\frac{1}{2}}^1 (-2x^3 + x^2 - 2x + 3) dx$ .

**Câu 4.** Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



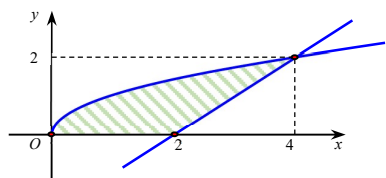
A.  $\int_1^3 (x^3 - 5x^2 + 9x - 7) dx$ .

B.  $\int_1^3 (-x^3 + 5x^2 - 9x + 7) dx$ .

C.  $\int_1^3 (-x^3 + x^2 + 9x - 9) dx$ .

D.  $\int_1^3 (x^3 - x^2 - 9x + 9) dx$ .

**Câu 5.** Tính diện tích  $S$  của hình phẳng (phần gạch sọc) giới hạn bởi hai đồ thị hàm số  $f(x) = \sqrt{x}$ ;  $g(x) = x - 2$  và trục hoành là:



A.  $S = \frac{7}{3}$ .

B.  $S = \frac{10}{3}$ .

C.  $S = \frac{11}{3}$ .

D.  $S = \frac{13}{3}$ .

**Câu 6.** Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = e^{2x}$ , trục  $Ox, Oy$  và đường thẳng  $x = 2$ . Tính  $S$  hình phẳng trên.

A.  $e^4 - 1$ .

B.  $\frac{1}{2}(e^4 - 1)$ .

C.  $\frac{1}{2}e^4$ .

D.  $\frac{1}{2}(e^4 + 1)$ .

**Câu 7.** Gọi  $S$  là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = \frac{\ln x}{x^2}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = e$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A.  $S = \pi \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$ .

B.  $S = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$ .

C.  $S = \int_1^e \left( \frac{\ln x}{x^2} \right)^2 dx$ .

D.  $S = \pi \int_1^e \left( \frac{\ln x}{x^2} \right)^2 dx$ .

**Câu 8.** Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường  $y = \sin 2x$ ;  $y = \cos x$  và  $x = 0$ ;  $x = \frac{\pi}{2}$  là

A.  $\frac{1}{4}$ .

B.  $\frac{1}{6}$ .

C.  $\frac{3}{2}$ .

D.  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 9.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = 2x - 1$ ;  $y = \frac{6}{x}$ ;  $x = 3$  là:

- A.  $4 - 6\ln 6$ . B.  $4 + 6\ln \frac{2}{3}$ . C.  $\frac{443}{24}$ . D.  $\frac{25}{6}$ .

**Câu 10.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = e^x$ ;  $y = 1$  và  $x = 1$  là:

- A.  $e - 2$ . B.  $e$ . C.  $e + 1$ . D.  $1 - e$ .

**Câu 11.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = 4x - x^2$  và trục  $Ox$

- A. 11. B.  $\frac{34}{3}$ . C.  $\frac{31}{3}$ . D.  $\frac{32}{3}$ .

**Câu 12.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường  $y = x^3 + 11x - 6$  và  $y = 6x^2$  là

- A. 52. B. 14. C.  $\frac{1}{4}$ . D.  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 13.** Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $(H): y = \frac{x-1}{x+1}$  và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của  $S$  bằng

- A.  $S = 2\ln 2 - 1$ . B.  $S = \ln 2 + 1$ . C.  $S = \ln 2 - 1$ . D.  $S = 2\ln 2 + 1$ .

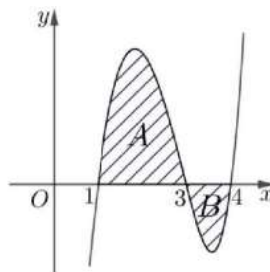
**Câu 14.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị  $(P): y = -\frac{1}{3}(x^2 - 8x + 7)$ ,  $(H): y = \frac{x-7}{3-x}$ .

- A. 3,455. B.  $9 - 8\ln 2$ . C.  $3 - \ln 4$ . D.  $\frac{161}{9} + 4\ln 3 + 8\ln 2$ .

**Câu 15.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị  $y = |x^2 - 4x + 3|$  và  $y = x + 3$  là:

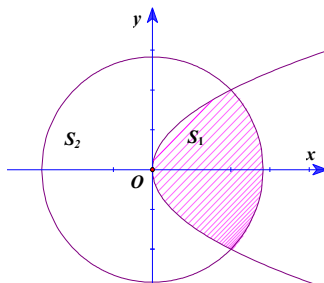
- A.  $\frac{55}{6}$ . B.  $\frac{205}{6}$ . C.  $\frac{109}{6}$ . D.  $\frac{126}{5}$ .

**Câu 16. (Đề tham khảo đánh giá năng lực 2021\_ĐH Quốc Gia Hà Nội)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Biết các miền  $A$  và  $B$  có diện tích lần lượt là 4 và 1. Tính  $I = \int_1^2 4xf(x^2)dx$ .



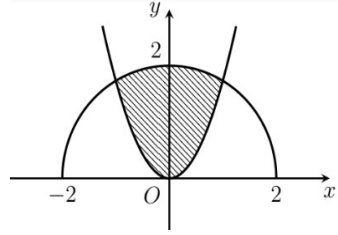
- A.  $I = 6$ . B.  $I = 10$ . C.  $I = 8$ . D.  $I = 12$ .

**Câu 17.** Biết rằng parabol  $(P): y^2 = 2x$  chia đường tròn  $(C): x^2 + y^2 = 8$  thành hai phần lần lượt có diện tích là  $S_1$ ,  $S_2$  (như hình vẽ). Khi đó  $S_2 - S_1 = a\pi - \frac{b}{c}$  với  $a, b, c$  nguyên dương và  $\frac{b}{c}$  là phân số tối giản. Tính  $S = a + b + c$ .



- A.  $S = 13$ . B.  $S = 16$ . C.  $S = 15$ . D.  $S = 14$ .

**Câu 18.** Cho  $(H)$  là hình phẳng giới hạn bởi parabol  $y = \sqrt{3}x^2$  và nửa đường tròn tâm  $(H)$  bán kính bằng 2 nằm phía trên trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ bên). Diện tích của  $(H)$  được tính theo công thức nào dưới đây?



A.  $S = \int_0^1 [\sqrt{2-x^2} - \sqrt{3}x^2] dx.$

B.  $S = 2 \cdot \int_0^1 [\sqrt{4-x^2} - \sqrt{3}x^2] dx.$

C.  $S = \int_0^1 [\sqrt{3}x^2 - \sqrt{4-x^2}] dx.$

D.  $S = \int_0^1 [\sqrt{4-x^2} - \sqrt{3}x^2] dx.$

**Câu 19.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = mx \cos x$ ;  $Ox$ ;  $x = 0$ ;  $x = \pi$  bằng  $3\pi$ . Khi đó  $m$  là:

A.  $m = -3.$

B.  $m = 3.$

C.  $m = -4.$

D.  $m = \pm 3.$

**Câu 20.** Cho Parabol  $(P): y = x^2 + 1$  và đường thẳng  $d: y = mx + 2$  với  $m$  là tham số. Gọi  $m_0$  là giá trị của  $m$  để diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $(P)$  và  $d$  là nhỏ nhất. Hỏi  $m_0$  nằm trong khoảng nào?

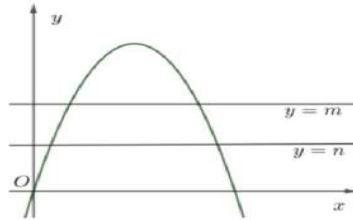
A.  $(-\sqrt{2}; -\frac{1}{2}).$

B.  $(0; 1).$

C.  $(-1; \frac{1}{\sqrt{2}}).$

D.  $(\frac{1}{2}; 3).$

**Câu 21.** Gọi  $(H)$  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = -x^2 + 4x$  và trục hoành. Hai đường thẳng  $y = m$  và  $y = n$  chia  $(H)$  thành 3 phần có diện tích bằng nhau (tham khảo hình vẽ). Giá trị của biểu thức  $T = (4-m)^3 + (4-n)^3$  bằng



A.  $T = \frac{320}{9}.$

B.  $T = \frac{512}{15}.$

C.  $T = 405.$

D.  $T = \frac{75}{2}.$

**Câu 22.** Gọi  $(H)$  là hình phẳng giới hạn bởi các đường:  $y = \sin x$ ;  $Ox$ ;  $x = 0$ ;  $x = \pi$ . Quay  $(H)$  xung quanh trục  $Ox$  ta được khối tròn xoay có thể tích là

A.  $\frac{\pi^2}{2}.$

B.  $\frac{\pi}{2}.$

C.  $\pi$

D.  $\pi^2.$

**Câu 23.** Gọi  $(H)$  là hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = \sqrt{x} \cdot \ln x$ , trục  $Ox$ ,  $x = 1$ ,  $x = e$ . Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng  $(H)$  quanh trục  $Ox$ .

A.  $\frac{\pi(e^2+1)}{4}.$

B.  $\frac{\pi(e-1)}{3}.$

C.  $\frac{\pi(e+1)}{3}.$

D.  $\frac{\pi(e^2-1)}{4}.$

**Câu 24.** Thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi  $y = \sqrt{x \cos x + \sin^2 x}$ ;  $y = 0$ ;  $x = 0$ ;  $x = \frac{\pi}{2}$ , là

A.  $\frac{\pi(3\pi-4)}{4}$

B.  $\frac{\pi(5\pi+4)}{4}$

C.  $\frac{\pi(3\pi+4)}{4}$

D.  $\frac{\pi(3\pi+4)}{5}$

**Câu 25.** Tính thể tích vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi  $y = \sqrt{\ln x}$ , trục  $Ox$  và đường thẳng  $x = 2$  quay xung quanh trục  $Ox$ .

- A.  $2\ln 2 + 1$ . B.  $2\pi \ln 2 + \pi$ . C.  $2\pi \ln 2 - \pi$ . D.  $2\ln 2 - 1$ .

**Câu 26.** Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi Parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $d: y = 2x$  quay quanh trục  $Ox$  bằng

- A.  $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$ . B.  $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$ . C.  $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$ . D.  $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x) dx$ .

**Câu 27.** Thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục  $Ox$  hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x \ln x, y = 0, x = e$  có giá trị bằng  $\frac{\pi}{a}(b.e^3 - 2)$  trong đó  $a, b$  là hai số thực nào dưới đây?

- A.  $a = 27, b = 5$ . B.  $a = 24, b = 6$ . C.  $a = 27, b = 6$ . D.  $a = 24, b = 5$ .

**Câu 28. (Đề tham khảo đánh giá năng lực 2021\_ĐH Quốc Gia Hà Nội)** Cho  $(H)$  là hình phẳng giới hạn bởi đường  $y = \sqrt{x}$  và  $y = x^2$ . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình  $(H)$  quanh trục  $Ox$  bằng

- A.  $\frac{3\pi}{10}$  B.  $\frac{3}{10}$  C.  $\frac{9}{70}$  D.  $\frac{9\pi}{70}$

**Câu 29.** Thể tích khối tròn xoay khi cho Elip  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  quay quanh trục  $Ox$  bằng

- A.  $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ . B.  $\frac{4}{3}\pi ab^2$ . C.  $\frac{2}{3}\pi a^2 b$ . D.  $-\frac{2}{3}\pi ab^2$ .

## Vấn đề 2. Ứng dụng tích phân để giải quyết bài toán thực tế

**Câu 30.** Một tàu lửa đang chạy với vận tốc 200 m/s thì người lái tàu đạp phanh ; từ thời điểm đó, tàu chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = 200 - 20t$  m/s. Trong đó  $t$  khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, tàu còn di chuyển được

- A. 1000 m. B. 500 m. C. 1500 m. D. 2000 m.

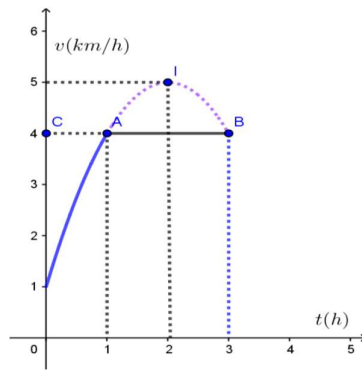
**Câu 31. (Đề thi thử đánh giá năng lực 2022-ĐH Bách Khoa Hà Nội)** Một ô tô đang chạy thì người ta đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = a - 8t$  (m/s) trong đó  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu đạp phanh và  $a$  là một hằng số dương. Biết rằng từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được 36m. Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A.  $a \in (18, 21)$ . B.  $a \in (25, 28)$ . C.  $a \in (15, 18)$ . D.  $a \in (23, 25)$

**Câu 32.** Hai người  $A, B$  đang chạy xe ngược chiều nhau thì xảy ra va chạm, hai xe tiếp tục di chuyển theo chiều của mình thêm một quãng đường nữa thì dừng hẳn. Biết rằng sau khi va chạm, một người di chuyển tiếp với vận tốc  $v_1(t) = 6 - 3t$  mét trên giây, người còn lại di chuyển với vận tốc  $v_2(t) = 12 - 4t$  mét trên giây. Tính khoảng cách hai xe khi đã dừng hẳn.

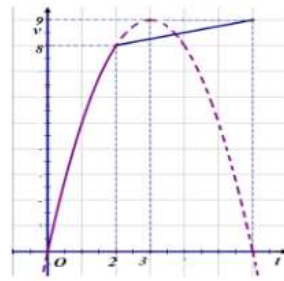
- A. 25 mét. B. 22 mét. C. 20 mét. D. 24 mét.

**Câu 33.** Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc  $v$  (km/h) phụ thuộc vào thời gian  $t$  (h) có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh  $I(2;5)$  và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



- A. 15 (km).      B.  $\frac{32}{3}$  (km).      C. 12 (km).      D.  $\frac{35}{3}$  (km).

**Câu 34.** Một vật chuyển động trong 6 giờ với vận tốc  $v(km/h)$  phụ thuộc vào thời gian  $t(h)$  có đồ thị như hình dưới. Trong khoảng thời gian 2 giờ từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường Parabol có đỉnh  $I(3;9)$  và có trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại, đồ thị vận tốc là một đường thẳng có hệ số góc bằng  $\frac{1}{4}$ . Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 6 giờ?



- A.  $\frac{130}{3}(km)$ .      B. 9(km).      C. 40(km).      D.  $\frac{134}{3}(km)$ .

**Câu 35.** Một nghiên cứu chỉ ra rằng sau  $x$  tháng kể từ bây giờ, dân số của thành phố A sẽ tăng với tốc độ  $v(x) = 10 + 2\sqrt{2x+1}$  (người/tháng). Số dân tăng thêm của thành phố trong 4 tháng tới gần nhất với kết quả nào sau đây?

- A. 77.      B. 47.      C. 57.      D. 67.

**Câu 36.** Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện Hồ Hô đã xả lũ trong 40 phút với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm  $t$  giây là  $v(t) = 10t + 500$  ( $m^3/s$ ). Hỏi sau thời gian xả lũ trên thì hồ chứa nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là bao nhiêu?

- A. 25 triệu khối nước.      B. 45 triệu khối nước.      C. 35 triệu khối nước.      D. 30 triệu khối nước.

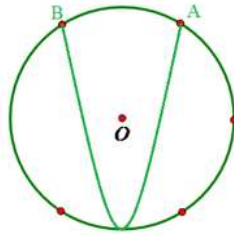
**Câu 37.** Sau  $t$  giờ làm việc một người công nhân có thể sản xuất với tốc độ là  $q(t) = 100 + e^{-0,5t}$  đơn vị sản phẩm trong 1 giờ. Giả sử người đó bắt đầu làm việc từ lúc 8 giờ sáng. Hỏi người đó sẽ sản xuất được bao nhiêu đơn vị sản phẩm giữa 9 giờ sáng và 11 giờ trưa?

- A. 201,76 đơn vị sản phẩm.      B. 200,76 đơn vị sản phẩm.  
C. 202,76 đơn vị sản phẩm.      D. 203,76 đơn vị sản phẩm đồng.

**Câu 38.** Một công ty sản xuất sản phẩm A, giả sử chi phí cận biên khi  $x$  sản phẩm được sản xuất là  $q(x) = x^3 - 6x^2 + 40$  USD/ sản phẩm. Hỏi tổng chi phí sản xuất sẽ tăng lên bao nhiêu nếu sản phẩm sản xuất ra tăng từ 3 sản phẩm đến 7 sản phẩm?

- A. 180USD.      B. 160USD.      C. 108USD.      D. 106USD.

**Câu 39.** Bạn An xây một bể cá hình tròn tâm  $O$  bán kính 10m và chia nó thành 2 phần như hình vẽ sau. Bạn An sẽ thả cá cảnh với mật độ 4 con cá cảnh trên  $1m^2$  ở phần bể giới hạn bởi đường tròn tâm  $O$  và Parabol có trục đối xứng đi qua  $O$  và chứa  $O$ . Gọi  $S$  là phần nguyên của diện tích phần thả cá. Hỏi bạn An thả được bao nhiêu con cá cảnh trên phần bể có diện tích  $S$ , biết  $A, B \in (O)$  và  $AB = 12m$ ?



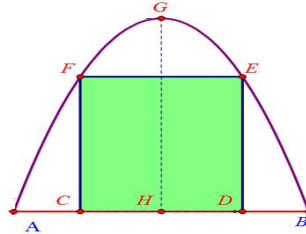
A. 560.

B. 650.

C. 460.

D. 640.

**Câu 40.** Một cái cổng hình parabol như hình vẽ. Chiều cao  $GH = 4m$ , chiều rộng  $AB = 4m$ ,  $AC = BD = 0,9m$ . Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật CDEF tô đậm giá là 1200000 đồng/m<sup>2</sup>, còn các phần để trống làm xiên hoa có giá là 900000 đồng/m<sup>2</sup>.



Hỏi tổng chi phí để là hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 11445000 (đồng).

B. 7368000 (đồng).

C. 4077000 (đồng).

D. 11370000 (đồng).

## D. SỐ PHỨC.

### Vấn đề 1. Câu hỏi lý thuyết.

**Câu 1.** Cho hai số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) và  $z' = a' + b'i$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Điều kiện giữa  $a, b, a', b'$  để  $z + z'$  là một số ảo là

A.  $b + b' = 0$ .

B.  $\begin{cases} a + a' = 0 \\ b + b' \neq 0 \end{cases}$ .

C.  $\begin{cases} a + a' = 0 \\ b + b' = 0 \end{cases}$ .

D.  $a + a' = 0$ .

**Câu 2.** Cho số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) tùy ý. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Mô đun của  $z$  là một số thực dương.

B.  $z^2 = |z|^2$ .

C. Số phức liên hợp của  $z$  có mô đun bằng mô đun của số phức  $iz$ .

D. Điểm  $M(-a; b)$  là điểm biểu diễn của  $\bar{z}$ .

**Câu 3.** Cho số phức  $z = a + bi$  với  $a, b$  là các số thực bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Phần ảo của  $z$  là  $bi$ .

B. Mô đun của  $z^2$  bằng  $a^2 + b^2$ .

C.  $z - \bar{z}$  không phải là số thực.

D. Số  $z$  và  $\bar{z}$  có mô đun khác nhau.

**Câu 4.** Cho số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}, a, b \neq 0$ ). Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A.  $z - \bar{z} \in \mathbb{R}$ .

B.  $z^2 = |z|^2$ .

C.  $|\bar{z} \cdot z^{-1}| = 1$ .

D.  $|\bar{z} \cdot \bar{z}| = |z|^2$ .

**Câu 5.** Cho hai số phức  $z$  và  $z'$ . Trong các mệnh đề sai, mệnh đề nào **sai**?

A.  $|z + z'| = |z| + |z'|$ .

B.  $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$ .

C.  $\bar{z} \cdot \bar{z'} = \overline{z \cdot z'}$ .

D.  $\bar{z} + \bar{z'} = \overline{z + z'}$ .

**Câu 6.** Cho số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Khẳng định nào sau đây **sai**?

A.  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

B.  $\bar{z} = a - bi$ .

C.  $z^2$  là số thực.

D.  $z \cdot \bar{z}$  là số thực.

### Vấn đề 2. Các phép toán số phức.

**Câu 7.** Xác định phần ảo của số phức  $z = 18 - 12i$ .

A.  $-12$ .

B.  $18$ .

C.  $12$ .

D.  $-12i$ .

**Câu 8.** Số phức liên hợp của số phức  $z = 1 - 2i$  là

A.  $1 + 2i$

B.  $-1 - 2i$

C.  $2 - i$

D.  $-1 + 2i$



**Câu 9.** Tính môđun của số phức  $z = 4 - 3i$ .

- A.  $|z| = 7$ . B.  $|z| = \sqrt{7}$ . C.  $|z| = 5$ . D.  $|z| = 25$ .

**Câu 10.** Cho số phức  $z_1 = 1 + i$  và  $z_2 = 2 - 3i$ . Tìm số phức liên hợp của số phức  $w = z_1 + z_2$ ?

- A.  $\bar{w} = 3 - 2i$ . B.  $\bar{w} = 1 - 4i$ . C.  $\bar{w} = -1 + 4i$ . D.  $\bar{w} = 3 + 2i$ .

**Câu 11. (KỶ THI TỐT NGHIỆP THPT QUỐC GIA – ĐỢT 1 – NĂM 2020 -2021)**

Cho số phức  $iz = 5 + 4i$ . Số phức liên hợp của  $z$  là

- A.  $\bar{z} = 4 + 5i$  B.  $\bar{z} = 4 - 5i$ . C.  $\bar{z} = -4 + 5i$  D.  $\bar{z} = -4 - 5i$

**Câu 12. (KỶ THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM 2020)**

Cho hai số phức  $z = 1 + 2i$  và  $w = 3 + i$ . Môđun của số phức  $z\bar{w}$  bằng

- A.  $5\sqrt{2}$  B.  $\sqrt{26}$  C. 26 D. 50.

**Câu 13.** Tính môđun của số phức  $z = (1 - 2i)[2 + i + i(3 - 2i)]$ .

- A.  $|z| = 4\sqrt{10}$ . B.  $|z| = 4\sqrt{5}$ . C.  $|z| = 160$ . D.  $|z| = 2\sqrt{10}$ .

**Câu 14.** Biết  $\frac{1}{3 + 4i} = a + bi$ , ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Tính  $ab$ .

- A.  $\frac{12}{625}$ . B.  $-\frac{12}{625}$ . C.  $-\frac{12}{25}$ . D.  $\frac{12}{25}$ .

**Câu 15.** Cho số phức  $z = 1 + i$ . Khi đó  $|z^3|$  bằng

- A.  $\sqrt{2}$ . B.  $2\sqrt{2}$ . C. 4. D. 1.

**Câu 16.** Tính môđun của số phức là nghịch đảo của số phức  $z = (1 - 2i)^2$ .

- A.  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ . B.  $\sqrt{5}$ . C.  $\frac{1}{25}$ . D.  $\frac{1}{5}$ .

**Câu 17.** Cho số phức  $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . Tìm số phức  $w = 1 + z + z^2$ .

- A.  $2 - \sqrt{3}i$ . B. 1. C. 0. D.  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

**Câu 18.** Tính  $P = |1 + \sqrt{3}i|^{2018} + |1 - \sqrt{3}i|^{2018}$ .

- A.  $P = 2$  B.  $P = 2^{1010}$  C.  $P = 2^{2019}$  D.  $P = 4$

**Câu 19.** Tính  $S = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2017} + i^{2018}$

- A.  $S = -i$ . B.  $S = 1 + i$ . C.  $S = 1 - i$ . D.  $S = i$ .

**Câu 20.** Tính  $S = 1009 + i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 2017i^{2017}$ .

- A.  $S = 2017 - 1009i$ . B.  $1009 + 2017i$ . C.  $2017 + 1009i$ . D.  $1008 + 1009i$ .

**Câu 21.** Cho các số phức  $z_1, z_2, z_3$  thỏa mãn:  $|z_1| = 4, |z_2| = 3, |z_3| = 2$  và  $|4z_1z_2 + 16z_2z_3 + 9z_1z_3| = 48$ .

Giá trị của biểu thức  $P = |z_1 + z_2 + z_3|$  bằng:

- A. 1 B. 8. C. 2 D. 6

**Câu 22.** Cho các số phức  $z_1, z_2, z_3$  thỏa mãn 2 điều kiện  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2017$  và  $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ .

Tính  $P = \left| \frac{z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}{z_1 + z_2 + z_3} \right|$ .

- A.  $P = 2017$ . B.  $P = 1008,5$ . C.  $P = 2017^2$ . D.  $P = 6051$ .

**Câu 23.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = \left| 1 + \frac{5i}{z} \right|$ .

- A. 5. B. 4. C. 6. D. 8.

**Câu 24.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = |1 + z| + 3|1 - z|$ .

- A.  $3\sqrt{15}$ . B.  $6\sqrt{5}$ . C.  $\sqrt{20}$ . D.  $2\sqrt{20}$ .

**Câu 25.** Trong các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-i| = |\bar{z}-2-3i|$ . Tìm số phức  $z$  có môđun nhỏ nhất.

- A.  $z = \frac{27}{5} + \frac{6}{5}i$ . B.  $z = -\frac{6}{5} - \frac{27}{5}i$ . C.  $z = -\frac{6}{5} + \frac{27}{5}i$ . D.  $z = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$ .

**Câu 26.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn đồng thời hai điều kiện  $|z-3-4i| = \sqrt{5}$  và biểu thức

$M = |z+2|^2 - |z-i|^2$  đạt giá trị lớn nhất. Môđun của số phức  $z-2-i$  bằng

- A.  $\sqrt{5}$ . B. 9. C. 25. D. 5.

**Câu 27. (KỲ THI TỐT NGHIỆP THPT QUỐC GIA – ĐỢT 1 – NĂM 2020 -2021)**

Xét các số phức  $z, w$  thỏa mãn  $|z|=1$  và  $|w|=2$ . Khi  $|z+iw-6-8i|$  đạt giá trị nhỏ nhất,  $z-w$  bằng

- A.  $\frac{\sqrt{221}}{5}$ . B.  $\sqrt{5}$ . C. 3. D.  $\frac{\sqrt{29}}{5}$ .

### Vấn đề 3. Phương trình bậc nhất - bậc hai trong tập số phức

**Câu 28.** Trên tập số phức, cho phương trình:  $az^2 + bz + c = 0$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ). Chọn kết luận **sai**.

- A. Nếu  $b=0$  thì phương trình có hai nghiệm mà tổng bằng 0.  
 B. Nếu  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  thì phương trình có hai nghiệm mà môđun bằng nhau.  
 C. Phương trình luôn có hai nghiệm phức là liên hợp của nhau.  
 D. Phương trình luôn có nghiệm.

**Câu 29.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $(2-i)z-2=2+3i$ . Môđun của  $z$  là:

- A.  $|z|=5$ . B.  $|z|=\frac{5\sqrt{3}}{3}$ . C.  $|z|=\frac{5\sqrt{5}}{3}$ . D.  $|z|=\sqrt{5}$ .

**Câu 30.** Tìm môđun của số phức  $z$  thỏa  $3iz + (3-i)(1+i) = 2$ .

- A.  $|z|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ . B.  $|z|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ . C.  $|z|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ . D.  $|z|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

**Câu 31.** Tính môđun của số phức  $z$  biết  $(1+2i)z^2 = 3+4i$ .

- A.  $|z|=\sqrt{5}$ . B.  $|z|=\sqrt[4]{5}$ . C.  $|z|=2\sqrt{5}$ . D.  $|z|=5$ .

**Câu 32.** Phương trình  $z^2 + 3z + 9 = 0$  có hai nghiệm phức  $z_1, z_2$ . Tính  $S = z_1z_2 + z_1 + z_2$ .

- A.  $S=-6$ . B.  $S=6$ . C.  $S=12$ . D.  $S=-12$ .

**Câu 33. (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018)** Gọi  $z_1$  và  $z_2$  là hai nghiệm phức của phương trình

$4z^2 - 4z + 3 = 0$ . Giá trị của biểu thức  $|z_1| + |z_2|$  bằng

- A.  $3\sqrt{2}$ . B.  $2\sqrt{3}$ . C. 3. D.  $\sqrt{3}$ .

**Câu 34.** Gọi  $z_1$  và  $z_2$  là hai nghiệm phức của phương trình  $z^2 - 6z + 11 = 0$ . Giá trị của biểu thức

$|3z_1| - |z_2|$  bằng

- A. 22. B. 11. C.  $2\sqrt{11}$ . D.  $\sqrt{11}$ .

**Câu 35.** Gọi  $z_1, z_2$  là hai nghiệm phức của phương trình  $z^2 - 2z + 2 = 0$ . Tính  $T = |z_1^{2018}| + |z_2^{2018}|$

- A.  $T=0$ . B.  $T=2^{2019}$ . C.  $T=1$ . D.  $T=2^{1010}$ .

**Câu 36. (KỲ THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM 2020)**

Gọi  $z_0$  là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình  $z^2 + 6z + 13 = 0$ . Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức  $1-z_0$  là

- A.  $N(-2;2)$  B.  $M(4;2)$  C.  $P(4;-2)$  D.  $Q(2;-2)$

**Câu 37.** Cho  $m$  là số thực, biết phương trình  $z^2 + mz + 5 = 0$  có hai nghiệm phức trong đó có một nghiệm có phần ảo là 1. Tính tổng môđun của hai nghiệm.

- A. 3                                      B.  $\sqrt{5}$                                       C.  $2\sqrt{5}$                                       D. 4

**Câu 38.** Tìm tổng các giá trị của tham số thực  $a$  sao cho phương trình  $z^2 + 3z + a^2 - 2a = 0$  có nghiệm phức  $z_0$  thỏa  $|z_0| = 2$ .

- A. 0.                                      B. 2.                                      C. 6.                                      D. 4.

**Vấn đề 4. Điều kiện của bài toán có chứa modul, số phức liên hợp**

**Câu 39.** Nếu 2 số thực  $x, y$  thỏa:  $x(3+2i) + y(1-4i) = 1+24i$  thì  $x+y$  bằng

- A. 4.                                      B. 3.                                      C. 2.                                      D. -3.

**Câu 40.** Tìm số thực  $m$  sao cho  $(m^2 - 1) + (m+1)i$  là số ảo.

- A.  $m=0$ .                                      B.  $m=1$ .                                      C.  $m=\pm 1$ .                                      D.  $m=-1$ .

**Câu 41.** Có bao nhiêu số phức  $z$  thỏa mãn  $(1+i)z + (2-i)\bar{z} = 13+2i$ ?

- A. 4.                                      B. 3.                                      C. 2.                                      D. 1.

**Câu 42.** Có bao nhiêu số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = |z + \bar{z}| = 1$ ?

- A. 0.                                      B. 1.                                      C. 4.                                      D. 3.

**Câu 43.** Tìm số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-3| = |z-1|$  và  $(z+2)(\bar{z}-i)$  là số thực

- A.  $z=2$                                       B.  $z=-2+2i$                                       C.  $z=2-2i$                                       D. không có  $z$

**Câu 44.** Cho số phức  $z = a+bi$  ( $a, b \in \mathbb{Z}$ ) thỏa mãn  $|z+2+5i| = 5$  và  $z\bar{z} = 82$ . Tính giá trị của  $P = a+b$ .

- A. 10                                      B. -8                                      C. -35                                      D. -7

**Câu 45.** Cho số phức  $z = a+bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $z+1+3i - |z|i = 0$ . Tính  $S = a+3b$ .

- A.  $S = \frac{7}{3}$ .                                      B.  $S = -5$ .                                      C.  $S = 5$ .                                      D.  $S = -\frac{7}{3}$ .

**Câu 46. (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018)** Cho số phức  $z = a+bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $z+2+i - |z|(1+i) = 0$  và  $|z| > 1$ . Tính  $P = a+b$ .

- A.  $P = -1$ .                                      B.  $P = -5$ .                                      C.  $P = 3$ .                                      D.  $P = 7$ .

**Câu 47.** Cho hai số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1| = 1, |z_2| = 2$  và  $|z_1 + z_2| = 3$ . Giá trị của  $|z_1 - z_2|$  là

- A. 0.                                      B. 1.                                      C. 2.                                      D. 3.

**Câu 48.** Tìm môđun của số phức  $z$  biết  $z-4 = (1+i)|z| - (4+3z)i$ .

- A.  $|z| = \frac{1}{2}$ .                                      B.  $|z| = 2$ .                                      C.  $|z| = 4$ .                                      D.  $|z| = 1$ .

**Câu 49.** Tính môđun của số phức  $z$  thỏa mãn:  $3z\bar{z} + 2017(z - \bar{z}) = 48 - 2016i$ .

- A.  $|z| = 4$ .                                      B.  $|z| = \sqrt{2016}$ .                                      C.  $|z| = \sqrt{2017}$ .                                      D.  $|z| = 2$ .

**Câu 50.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $\frac{1+i}{z}$  là số thực và  $|z-2| = m$  với  $m \in \mathbb{R}$ . Gọi  $m_0$  là một giá trị của  $m$  để có đúng một số phức thỏa mãn bài toán. Khi đó:

- A.  $m_0 \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ .                                      B.  $m_0 \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ .                                      C.  $m_0 \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$ .                                      D.  $m_0 \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$ .

**Vấn đề 5. Điểm biểu diễn của số phức**

**Câu 51.** Giả sử  $A, B$  theo thứ tự là điểm biểu diễn của số phức  $z_1, z_2$ . Khi đó độ dài đoạn  $AB$  bằng

- A.  $|z_2 + z_1|$ .                                      B.  $|z_2 - z_1|$ .                                      C.  $|z_1| + |z_2|$ .                                      D.  $|z_1| - |z_2|$ .

**Câu 52.** Trong mặt phẳng phức, gọi  $M$  là điểm biểu diễn cho số phức  $(z - \bar{z})^2$  với  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ ). Chọn kết luận **đúng**.

- A.  $M$  thuộc tia  $Ox$ .      B.  $M$  thuộc tia  $Oy$ .  
C.  $M$  thuộc tia đối của tia  $Ox$ .      D.  $M$  thuộc tia đối của tia  $Oy$ .

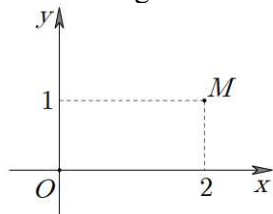
**Câu 53.** Điểm  $M(3; -1)$  là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây?

- A.  $z = -1 + 3i$       B.  $z = 1 - 3i$       C.  $z = 3 - i$

**Câu 54. (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018)** Điểm  $M$  trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức

- A.  $z = -2 + i$ .      B.  $z = 1 - 2i$ .      C.  $z = 2 + i$ .

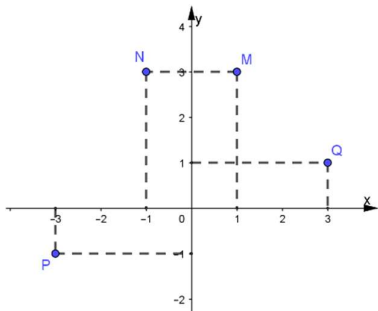
**Câu 55.** Trong hình vẽ dưới đây,  $M$  là điểm biểu diễn của số phức  $z$ .



Số phức  $\bar{z}$  là

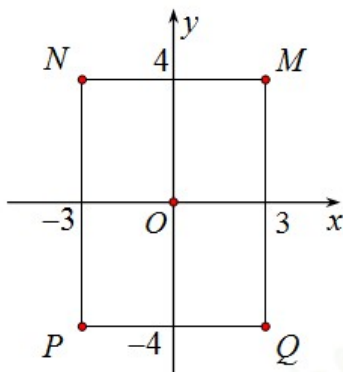
- A.  $2 - i$ .      B.  $1 + 2i$ .      C.  $1 - 2i$ .      D.  $2 + i$ .

**Câu 56.** Điểm nào trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn của số phức  $z = (1 + i)(2 - i)$ ?



- A.  $P$ .      B.  $M$ .      C.  $N$ .      D.  $Q$ .

**Câu 57.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $(2 + i)z = 10 - 5i$ . Hỏi điểm biểu diễn số phức  $z$  là điểm nào trong các điểm  $M, N, P, Q$  trong hình vẽ sau?



- A. Điểm  $Q$ .      B. Điểm  $M$ .      C. Điểm  $P$ .      D. Điểm  $N$ .

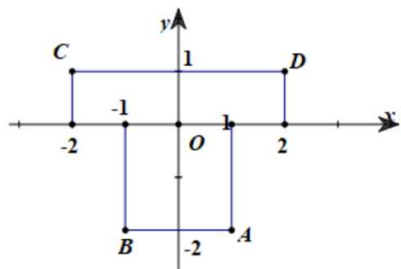
**Câu 58.** Cho số phức  $z = 2 - i$ . Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , tìm điểm biểu diễn số phức  $w = iz$ .

- A.  $M(-1; 2)$ .      B.  $M(2; -1)$ .      C.  $M(2; 1)$ .      D.  $M(1; 2)$ .

**Câu 59.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $iz + 2 - i = 0$ . Khoảng cách từ điểm biểu diễn của  $z$  trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  đến điểm  $M(3; -4)$  là

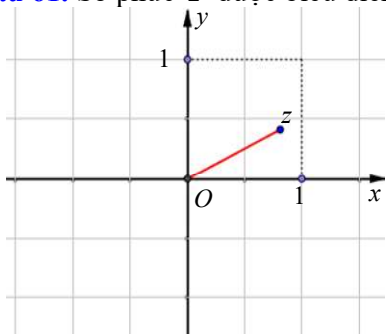
- A.  $2\sqrt{5}$ .      B.  $\sqrt{13}$ .      C.  $2\sqrt{10}$ .      D.  $2\sqrt{2}$ .

**Câu 60.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$ . Số phức  $w = \frac{5}{iz}$  có điểm biểu diễn là điểm nào trong các điểm  $A, B, C, D$  ở hình vẽ sau?

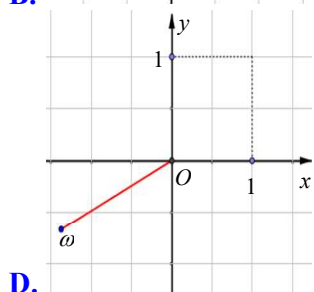
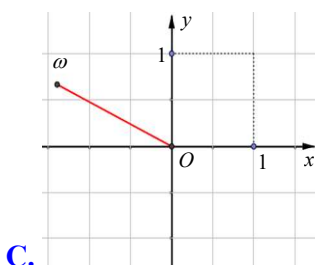
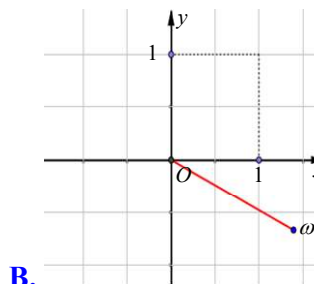
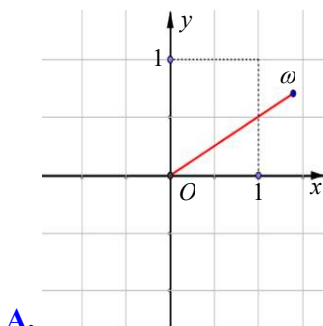


- A. Điểm  $D$ .      B. Điểm  $C$ .      C. Điểm  $B$ .      D. Điểm  $A$ .

**Câu 61.** Số phức  $z$  được biểu diễn bởi một điểm trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  như hình vẽ:



Trong các hình dưới đây, hình nào có thể là điểm biểu diễn của số phức  $w = \frac{i}{z}$ ?



### Vấn đề 6. Vận dụng các tính chất hình học để giải toán về số phức

**Câu 62.** Cho  $A, B, C$  tương ứng là các điểm trong mặt phẳng  $Oxy$  biểu diễn các số  $z_1 = 1 + 2i$ ,  $z_2 = -2 + 5i$ ,  $z_3 = 2 + 4i$ . Số phức  $z$  biểu diễn bởi điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành là

A.  $-1 + 7i$ .      B.  $5 + i$ .      C.  $1 + 5i$ .      D.  $3 + 5i$ .

**Câu 63.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , gọi  $M$  là điểm biểu diễn số phức  $z = 3 - 4i$ ;  $M'$  là điểm biểu diễn cho số phức  $z' = \frac{1+i}{2}z$ . Tính diện tích tam giác  $OMM'$ .

A.  $S_{\Delta OMM'} = \frac{25}{4}$ .      B.  $S_{\Delta OMM'} = \frac{25}{2}$ .      C.  $S_{\Delta OMM'} = \frac{15}{4}$ .      D.  $S_{\Delta OMM'} = \frac{15}{2}$ .

**Câu 64.** Cho các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1| = 3, |z_2| = 4, |z_1 - z_2| = 5$ . Gọi  $A, B$  lần lượt là các điểm biểu diễn số phức  $z_1, z_2$  trên mặt phẳng tọa độ. Tính diện tích  $S$  của  $\Delta OAB$  với  $O$  là gốc tọa độ.

A.  $S = 5\sqrt{2}$ .      B.  $S = 6$ .      C.  $S = \frac{25}{2}$ .      D.  $S = 12$ .

**Câu 65.** Cho hai số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1| = |z_2| = 1$ . Khi đó  $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$  bằng

A. 2.      B. 4.      C. 1.      D. 0.

**Câu 66.** Cho  $A, B$  là hai điểm biểu diễn hình học số phức theo thứ tự  $z_0, z_1$  khác 0 và thỏa mãn đẳng thức  $z_0^2 + z_1^2 = z_0 z_1$ . Tam giác  $OAB$  là tam giác gì? Chọn phương án đúng nhất.

A. Đều      B. Cân tại  $O$       C. Vuông tại  $O$       D. Vuông cân tại  $O$

**Câu 67.** Cho hai số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1| = 6, |z_2| = 2$ . Gọi  $M, N$  là các điểm biểu diễn cho  $z_1$  và  $iz_2$ .

Biết  $\widehat{MON} = 60^\circ$ . Tính  $T = |z_1^2 + 9z_2^2|$ .

A.  $T = 18$ .      B.  $T = 24\sqrt{3}$ .      C.  $T = 36\sqrt{2}$ .      D.  $T = 36\sqrt{3}$ .

**Câu 68. (Đề tham khảo đánh giá năng lực 2021-DH Quốc Gia Hà Nội)** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + 2 + i| = |\bar{z} + i|$ . Tập hợp điểm biểu diễn các số phức  $z$  là đường thẳng có phương trình

A.  $x - y + 1 = 0$ .      B.  $x + y + 1 = 0$ .      C.  $x + 1 = 0$ .      D.  $2x + 2y + 3 = 0$ .

**Câu 69.** Cho số phức  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $z + 2 - i - |z|(1 - i) = 0$ . Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , điểm  $M$  là điểm biểu diễn của số phức  $z$ . Hỏi  $M$  thuộc đường thẳng có phương trình nào sau đây?

A.  $x - y + 5 = 0$ .      B.  $x - y + 2 = 0$ .      C.  $x + y - 2 = 0$ .      D.  $x + y + 1 = 0$ .

**Câu 70.** Trên mặt phẳng  $Oxy$ , tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - i| = |iz|$  là

A. Đường thẳng  $y = 2$ .      B. Đường thẳng  $y = -\frac{1}{2}$ .  
C. Đường thẳng  $y = \frac{1}{2}$ .      D. Đường tròn tâm  $I(0; 1)$ .

**Câu 71.** Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức  $z$  thỏa mãn:  $|\bar{z} + 2 - i| = 4$  là đường tròn có tâm  $I$  và bán kính  $R$  lần lượt là

A.  $I(-2; -1); R = 4$ .      B.  $I(-2; -1); R = 2$ .      C.  $I(2; -1); R = 4$ .      D.  $I(2; -1); R = 2$ .

**Câu 72.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|z - 3 + 4i| \leq 2$ . Trong mặt phẳng  $Oxy$  tập hợp điểm biểu diễn số phức  $w = 2z + 1 - i$  là hình tròn có diện tích là

A.  $S = 9\pi$ .      B.  $S = 12\pi$ .      C.  $S = 16\pi$ .      D.  $S = 25\pi$ .

**Câu 73.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , tập hợp các điểm biểu diễn các số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $\left| \frac{z}{z-1} \right| = 3$  là

A. Đường tròn  $x^2 + y^2 - \frac{9}{4}x - \frac{9}{8} = 0$ .      B. Đường tròn  $x^2 + y^2 - \frac{9}{4}x + \frac{9}{8} = 0$ .  
C. Đường tròn  $x^2 + y^2 + \frac{9}{4}x + \frac{9}{8} = 0$ .      D. Đường tròn tâm  $I\left(0; \frac{9}{8}\right)$  và  $R = \frac{1}{8}$ .

**Câu 74.** Cho các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - i| = 5$ . Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức  $w = iz + 1 - i$  là đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

A.  $r = 20$ .      B.  $r = 22$ .      C.  $r = 4$ .      D.  $r = 5$ .

**Câu 75.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $(z-2+i)(\bar{z}-2-i)=25$ . Biết tập hợp các điểm  $M$  biểu diễn số phức  $w=2\bar{z}-2+3i$  là đường tròn tâm  $I(a;b)$  và bán kính  $c$ . Giá trị của  $a+b+c$  bằng

- A. 17. B. 20. C. 10. D. 18.

**Câu 76.** Tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|z-2|+|z+2|=10$ .

- A. Đường tròn  $(x-2)^2+(y+2)^2=100$ . B. Elip  $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ .  
C. Đường tròn  $(x-2)^2+(y+2)^2=10$ . D. Elip  $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$ .

**Câu 77.** Có bao nhiêu số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $\begin{cases} |iz-i+1|=2 \\ |z-1|=|z+2i| \end{cases}$  ?

- A. 2. B. 0. C. Có vô số số. D. 1.

**Câu 78.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-1|=2$ . Gọi  $M$  và  $m$  là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của  $|z|$ . Tính  $M+m$ .

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 5.

**Câu 79.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-1+2i|=3$ . Tìm môđun nhỏ nhất của số phức  $z-1+i$ .

- A. 4. B.  $2\sqrt{2}$ . C. 2. D.  $\sqrt{2}$ .

**Câu 80.** Cho các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z|=2$ . Đặt  $w=(1+2i)z-1+2i$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $|w|$ .

- A. 2. B.  $3\sqrt{5}$ . C.  $2\sqrt{5}$ . D.  $\sqrt{5}$ .

**Câu 81.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn:  $|z+2i-1|=|z+i|$ . Trong mặt phẳng  $Oxy$ ,  $z$  được biểu diễn bởi điểm  $M$ . Tìm  $z$  sao cho độ dài đoạn  $MA$  ngắn nhất với  $A(1,3)$ .

- A.  $3+i$ . B.  $1+3i$ . C.  $2-3i$ . D.  $-2+3i$ .

**Câu 82.** Nếu  $z$  là số phức thỏa  $|\bar{z}|=|z+2i|$  thì giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $|z-i|+|z-4|$  là

- A. 2. B.  $\sqrt{3}$ . C. 4. D. 5.

**Câu 83.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $5|z-i|=|z+1-3i|+3|z-1+i|$ . Tìm giá trị lớn nhất  $M$  của  $|z-2+3i|$  ?

- A.  $M=\frac{10}{3}$  B.  $M=1+\sqrt{13}$  C.  $M=4\sqrt{5}$  D.  $M=9$

**Câu 84.** Cho số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1|=12$  và  $|z_2-3-4i|=5$ . Giá trị nhỏ nhất của  $|z_1-z_2|$  là

- A. 0. B. 2. C. 7. D. 17

**Câu 85.** Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $P=\left|\frac{z+i}{z}\right|$ , với  $z$  là số phức khác 0

và thỏa mãn  $|z|\geq 2$ . Tính tỷ số  $\frac{M}{m}$ .

- A.  $\frac{M}{m}=5$  B.  $\frac{M}{m}=3$  C.  $\frac{M}{m}=\frac{3}{4}$  D.  $\frac{M}{m}=\frac{1}{3}$

## PHẦN II. HÌNH HỌC

### Vấn đề 1. Hệ tọa độ trong không gian.

**Câu 1.** Cho  $\vec{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}$  và  $\vec{OB} = 9\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}$ . Vector  $\vec{AB}$  có tọa độ là

- A.  $(7; 3; 10)$ .      B.  $(-7; -3; -10)$ .      C.  $(11; 11; -2)$ .      D.  $(7; -3; 10)$ .

**Câu 2.** Cho đoạn thẳng  $AB$  có trung điểm  $I$ . Biết  $A(2; 1; -1)$ ,  $I(1; 2; 0)$ . Khi đó điểm  $B$  có tọa độ là

- A.  $(1; -1; -1)$ .      B.  $(3; 0; -2)$ .      C.  $(0; 3; 1)$ .      D.  $(-1; 1; 1)$ .

**Câu 3.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , biết  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(-2; 2; 3)$ ,  $C(-5; -2; 2)$ . Tọa độ điểm  $D$  là

- A.  $(-2; -3; 0)$ .      B.  $(2; 3; 4)$ .      C.  $(-2; 3; 0)$ .      D.  $(-8; -1; 4)$ .

**Câu 4.** Cho điểm  $A(3; -1; 1)$ . Hình chiếu của điểm  $A$  trên mặt phẳng  $(Oyz)$  là điểm

- A.  $M(3; 0; 0)$ .      B.  $N(0; -1; 1)$ .      C.  $P(0; -1; 0)$ .      D.  $P(0; 0; 1)$ .

**Câu 5.** Cho điểm  $M(1; 2; 3)$ . Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên trục  $Oz$ . Điểm đối xứng với  $M$  qua  $H$  có tọa độ:

- A.  $(0; 0; 3)$ .      B.  $(1; 2; -3)$ .      C.  $(-1; -2; -3)$ .      D.  $(-1; -2; 3)$ .

**Câu 6.** Cho hai điểm  $B(0; 3; 1)$ ,  $C(-3; 6; 4)$ . Gọi  $M$  là điểm nằm trên đoạn  $BC$  sao cho  $MC = 2MB$ . Tính tọa độ điểm  $M$ .

- A.  $M(-1; 4; -2)$ .      B.  $M(-1; 4; 2)$ .      C.  $M(1; -4; -2)$ .      D.  $M(-1; -4; 2)$ .

**Câu 7.** Cho ba điểm  $A(2; -1; 1)$ ;  $B(3; -2; -1)$ . Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng  $AB$  và mặt phẳng  $(yOz)$ ?

- A.  $\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}; 0\right)$       B.  $(0; -3; -1)$       C.  $(0; 1; 5)$       D.  $(0; -1; -3)$

**Câu 8.** Cho véc tơ  $\vec{a} = (2; -2; -4)$ ,  $\vec{b} = (1; -1; 1)$ . Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **sai**?

- A.  $\vec{a} + \vec{b} = (3; -3; -3)$ .      B.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương.      C.  $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ .      D.  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

**Câu 9.** Cho sáu điểm  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(2; -1; 1)$ ,  $C(3; 3; -3)$ ,  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  thỏa mãn  $\vec{A'A} + \vec{B'B} + \vec{C'C} = \vec{0}$ . Gọi  $G'(a; b; c)$  là trọng tâm tam giác  $A'B'C'$ . Giá trị  $3(a + b + c)$  bằng

- A. 6.      B. 1.      C. 11.      D. -3.

**Câu 10.** Cho  $A(-1; -1; 0)$ ,  $B(3; 1; -1)$ . Điểm  $M$  thuộc trục  $Oy$  và cách đều hai điểm  $A$ ,  $B$  có tọa độ là:

- A.  $M\left(0; -\frac{9}{4}; 0\right)$ .      B.  $M\left(0; \frac{9}{2}; 0\right)$ .      C.  $M\left(0; -\frac{9}{2}; 0\right)$ .      D.  $M\left(0; \frac{9}{4}; 0\right)$ .

**Câu 11.** Cho ba điểm  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(-1; 1; 0)$ ,  $C(3; 1; -1)$ . Điểm  $M(a; b; c)$  trên mặt phẳng  $(Oxz)$  cách đều 3 điểm  $A, B, C$ . Giá trị  $3(a + b + c)$  bằng

- A. 6.      B. 1.      C. -3.      D. -1.

**Câu 12.** Cho hai điểm  $M(2; 2; 1)$ ,  $N\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$ . Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $OMN$ .

- A.  $I(1; 1; 1)$ .      B.  $I(0; 1; 1)$ .      C.  $I(0; -1; -1)$ .      D.  $I(1; 0; 1)$ .

**Câu 13.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(2; -1; 3)$ ,  $C(-4; 7; 5)$ . Gọi  $D(a; b; c)$  là chân đường phân giác trong góc  $B$  của tam giác  $ABC$ . Giá trị của  $a + b + 2c$  bằng

- A. 5.      B. 4.      C. 14.      D. 15.

**Câu 14.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(a; 0; 0)$ ;  $D(0; 2a; 0)$ ,  $A'(0; 0; 2a)$  với  $a \neq 0$ . Độ dài đoạn thẳng  $AC'$  là:

- A.  $|a|$ .      B.  $2|a|$ .      C.  $3|a|$ .      D.  $\frac{3}{2}|a|$ .



**Câu 15.** Góc giữa hai vector  $\vec{i}$  và  $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$  là

- A.  $120^\circ$ . B.  $30^\circ$ . C.  $60^\circ$ . D.  $150^\circ$ .

**Câu 16.** Cho ba điểm  $A(-1; -2; 3); B(0; 3; 1); C(4; 2; 2)$ . Côsin của góc  $\widehat{BAC}$  bằng

- A.  $\frac{-9}{\sqrt{35}}$ . B.  $\frac{9}{2\sqrt{35}}$ . C.  $\frac{9}{\sqrt{35}}$ . D.  $\frac{-9}{2\sqrt{35}}$ .

**Câu 17.** Cho  $A(1; 2; 0)$ ,  $B(2; -1; 1)$ . Tìm  $C$  có hoành độ dương trên  $Ox$  sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ .

- A.  $C(3; 0; 0)$ . B.  $C(2; 0; 0)$ . C.  $C(1; 0; 0)$ . D.  $C(5; 0; 0)$ .

**Câu 18.** Cho ba điểm không thẳng hàng  $A(-1; 2; 4)$ ,  $B(-1; 1; 4)$ ,  $C(0; 0; 4)$ . Tam giác  $ABC$  là tam giác gì?

- A. Tam giác tù. B. Tam giác vuông. C. Tam giác đều. D. Tam giác nhọn.

**Câu 19.** Cho ba điểm  $M(2; 3; -1)$ ,  $N(-1; 1; 1)$ ,  $P(1; m-1; 3)$ . Tìm  $m$  thì tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$

- A.  $m = 3$ . B.  $m = 1$ . C.  $m = 2$ . D.  $m = 0$ .

**Câu 20.** Cho hai vecto  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$ . Kết luận nào sau đây **sai**?

- A.  $[\vec{a}, 3\vec{b}] = 3[\vec{a}, \vec{b}]$ . B.  $[2\vec{a}, \vec{b}] = 2[\vec{a}, \vec{b}]$ . C.  $[3\vec{a}, 3\vec{b}] = 3[\vec{a}, \vec{b}]$ . D.  $[[\vec{a}, \vec{b}]] = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$ .

**Câu 21.** Cho  $\vec{u} = (1; 1; 2)$ ,  $\vec{v} = (-1; m; m-2)$ . Khi đó  $[[\vec{u}, \vec{v}]] = \sqrt{14}$  thì

- A.  $m = 1, m = -\frac{11}{5}$ . B.  $m = -1, m = -\frac{11}{3}$ . C.  $m = 1, m = -3$ . D.  $m = -1$ .

**Câu 22.** Cho  $A(1; -2; 0)$ ,  $B(1; 0; -1)$ ,  $C(0; -1; 2)$ ,  $D(-2; m; n)$ . Trong các hệ thức liên hệ giữa  $m, n$  dưới đây, hệ thức nào để bốn điểm  $A, B, C, D$  đồng phẳng?

- A.  $2m + n = 13$ . B.  $2m - n = 13$ . C.  $m + 2n = 13$ . D.  $2m - 3n = 10$ .

**Câu 23.** Trong không gian  $Oxyz$  cho tứ diện  $ABCD$  có  $A(0; 1; 1)$ ,  $B(-1; 0; 2)$ ,  $C(-1; 1; 0)$  và  $D(2; 1; -2)$ . Tính thể tích khối tứ diện  $ABCD$ .

- A.  $\frac{5}{6}$ . B. 5. C.  $\frac{5}{2}$ . D.  $\frac{5}{3}$ .

**Câu 24.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $A(0; 1; -1)$ ;  $B(1; 1; 2)$ ;  $C(1; -1; 0)$ ;  $D(0; 0; 1)$ . Tính độ dài đường cao  $AH$  của hình chóp  $ABCD$ .

- A.  $3\sqrt{2}$ . B.  $2\sqrt{2}$ . C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . D.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 25.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $A(2; -1; 1)$ ,  $B(3; 0; -1)$ ,  $C(2; -1; 3)$ ,  $D \in Oy$  và có thể tích bằng 5.

Tính tổng tung độ của các điểm  $D$ .

- A. -6. B. 2. C. 7. D. -4.

**Câu 26.** Cho hai điểm  $A(9; -3; 4)$ ,  $B(a; b; c)$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là giao điểm của đường thẳng  $AB$  với các mặt phẳng  $(Oxy)$ ,  $(Oxz)$ ,  $(Oyz)$ . Biết các điểm  $M, N, P$  đều nằm trên đoạn  $AB$  sao cho  $AM = MN = NP = PB$ . Giá trị của  $ab + bc + ca$  bằng

- A. -17. B. 17. C. -9. D. 12.

**Câu 27.** Cho  $A(1; -2; 3)$ ;  $B(2; 2; 4)$ ;  $C(3; -3; 2)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho:

$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$  ngắn nhất?

- A.  $M(2; 1; 0)$  B.  $M(2; -1; 0)$  C.  $M(0; -1; 3)$  D.  $M(2; 0; 3)$

**Câu 28.** Cho ba điểm  $A(-1; 2; 2)$ ,  $B(3; -1; -2)$ ,  $C(-4; 0; 3)$ . Tọa độ điểm  $I$  trên mặt phẳng  $(Oxz)$  sao cho biểu thức  $|\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}|$  đạt giá trị nhỏ nhất là

A.  $I\left(-\frac{19}{2}; 0; \frac{15}{2}\right)$ .      B.  $I\left(-\frac{19}{2}; 0; -\frac{15}{2}\right)$ .      C.  $I\left(\frac{19}{2}; 0; \frac{15}{2}\right)$ .      D.  $I\left(\frac{19}{2}; 0; -\frac{15}{2}\right)$ .

**Câu 29.** Cho  $A(0;0;-1)$ ,  $B(-1;1;0)$ ,  $C(1;0;1)$ . Tìm điểm  $M$  sao cho  $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

A.  $M\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$ .      B.  $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{2}; -1\right)$ .      C.  $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$ .      D.  $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; 2\right)$ .

**Câu 30.** Cho các điểm  $A(-1;2;3)$ ,  $B(6;-5;8)$  và  $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{k}$  với  $a, b$  là các số thực luôn thay đổi. Nếu  $|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}|$  đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của  $a - b$  bằng

A.  $-25$ .      B.  $-13$ .      C.  $0$ .      D.  $26$ .

## Vấn đề 2. Phương trình mặt phẳng trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ .

**Câu 31.** Cho mặt phẳng  $(P): x - 2z + 1 = 0$ . Chọn câu đúng nhất trong các nhận xét sau:

A.  $(P)$  đi qua gốc tọa độ  $O$ .      B.  $(P)$  song song với  $(Oxy)$ .  
C.  $(P)$  vuông góc với trục  $Oz$ .      D.  $(P)$  song song với trục  $Oy$ .

**Câu 32.** Ba mặt phẳng  $x + 2y - z - 6 = 0$ ,  $2x - y + 3z + 13 = 0$ ,  $3x - 2y + 3z + 16 = 0$  cắt nhau tại điểm  $M$ . Tọa độ của  $M$  là:

A.  $M(-1;2;-3)$ .      B.  $M(1;-2;3)$ .      C.  $M(-1;-2;3)$ .      D.  $M(1;2;3)$ .

**Câu 33.** Gọi  $m, n$  là hai giá trị thực thỏa mãn: giao tuyến của hai mặt phẳng  $(P_m): mx + 2y + nz + 1 = 0$  và  $(Q_m): x - my + nz + 2 = 0$  vuông góc với mặt phẳng  $(\alpha): 4x - y - 6z + 3 = 0$ .

A.  $m + n = 0$ .      B.  $m + n = 2$ .      C.  $m + n = 1$ .      D.  $m + n = 3$ .

**Câu 34.** Cho điểm  $H(2;1;2)$ ,  $H$  là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ  $O$  lên mặt phẳng  $(P)$ , số đo góc của mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(Q): x + y - 11 = 0$ .

A.  $60^\circ$ .      B.  $30^\circ$ .      C.  $45^\circ$ .      D.  $90^\circ$ .

**Câu 35.** Cho các điểm  $A(2;0;0)$ ,  $B(0;3;0)$ ,  $C(0;0;6)$ ,  $D(1;1;1)$ . Có bao nhiêu mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm  $O, A, B, C, D$ ?

A.  $10$ .      B.  $5$ .      C.  $7$ .      D.  $6$ .

**Câu 36.** Mặt phẳng  $(Oxy)$  có phương trình là

A.  $z = 0$ .      B.  $x = 0$ .      C.  $y = 0$ .      D.  $x + y = 0$ .

**Câu 37.** Mặt phẳng song song với mặt phẳng  $(Oxz)$  và đi qua điểm  $A(1;1;1)$  có phương trình là

A.  $y - 1 = 0$ .      B.  $x + y + z - 1 = 0$ .      C.  $x - 1 = 0$ .      D.  $z - 1 = 0$ .

**Câu 38.** Cho  $A(1;-1;5)$ ,  $B(0;0;1)$ . Mặt phẳng  $(P)$  chứa  $A, B$  và song song với trục  $Oy$  có phương trình là

A.  $4x - z + 1 = 0$ .      B.  $4x + y - z + 1 = 0$ .      C.  $2x + z - 5 = 0$ .      D.  $x + 4z - 1 = 0$ .

**Câu 39.** Cho hai điểm  $A(1;3;-4)$ ,  $B(-1;2;2)$ . Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng  $AB$  là

A.  $4x + 2y - 12z - 17 = 0$ .      B.  $4x + 2y + 12z - 17 = 0$ .  
C.  $4x - 2y - 12z - 17 = 0$ .      D.  $4x - 2y + 12z + 17 = 0$ .

**Câu 40. (KỶ THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM 2020)**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(3;0;0)$ ,  $B(0;1;0)$  và  $C(0;0;-2)$ . Mặt phẳng  $(ABC)$  có phương trình là

A.  $\frac{x}{3} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$ .      B.  $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-2} = 1$ .      C.  $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$ .      D.  $\frac{x}{-3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$ .

**Câu 41.** Cho điểm  $A(2;4;1); B(-1;1;3)$  và mặt phẳng  $(P): x-3y+2z-5=0$ . Một mặt phẳng  $(Q)$  đi qua hai điểm  $A, B$  và vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  có dạng  $ax+by+cz-11=0$ . Khẳng định nào sau là đúng?

- A.  $a+b+c=5$ .      B.  $a+b+c=15$ .      C.  $a+b+c=-5$ .      D.  $a+b+c=-15$ .

**Câu 42.** Cho điểm  $A(-2;0;-2), B(0;3;-3)$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng đi qua  $A$  sao cho khoảng cách từ  $B$  đến mặt phẳng  $(P)$  là lớn nhất. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng  $(P)$  bằng

- A.  $\frac{1}{\sqrt{14}}$ .      B.  $\frac{4}{\sqrt{14}}$ .      C.  $\frac{2}{\sqrt{14}}$ .      D.  $\frac{3}{\sqrt{14}}$ .

**Câu 43.** Mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua gốc tọa độ  $O$  và vuông góc với 2 mặt phẳng  $(P): x-y+z-7=0$ ,  $(Q): 3x+2y-12z+5=0$  có phương trình là

- A.  $(\alpha): 2x-3y-z=0$ .      B.  $(\alpha): 10x-15y+5z+2=0$ .  
C.  $(\alpha): 10x+15y+5z-2=0$ .      D.  $(\alpha): 2x+3y+z=0$ .

**Câu 44.** Cho 2 mặt phẳng  $(\alpha): x+y+z-3=0; (\beta): 2x-y+z+1=0$ . Viết phương trình mặt phẳng  $(P)$  vuông góc với  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  và khoảng cách từ  $M(2;-3;1)$  đến mặt phẳng  $(P)$  bằng  $\sqrt{14}$ . Có hai mặt phẳng thỏa mãn là:

- A.  $(P_1)x+2y-3z+16=0$  và  $(P_2)x+2y-3z-12=0$   
B.  $(P_1)2x+y-3z-16=0$  và  $(P_2)2x+y-3z+12=0$   
C.  $(P_1)2x+y-3z+16=0$  và  $(P_2)2x+y-3z-12=0$   
D.  $(P_1)x+2y-3z-16=0$  và  $(P_2)2x+y-3z+12=0$

**Câu 45.** Cho mặt phẳng  $(P): x+2y+2z-10=0$ . Phương trình mặt phẳng  $(Q)$  với  $(Q)$  song song với  $(P)$  và khoảng cách giữa hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  bằng  $\frac{7}{3}$  là

- A.  $x+2y+2z-3=0; x+2y+2z-17=0$ .      B.  $x+2y+2z+3=0; x+2y+2z+17=0$ .  
C.  $x+2y+2z+3=0; x+2y+2z-17=0$ .      D.  $x+2y+2z-3=0; x+2y+2z+17=0$ .

**Câu 46.** Phương trình của mp đi qua ba điểm  $A(1;0;0), B(0;-1;0), C\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$  là

- A.  $x-y+2z-1=0$ .      B.  $x-y+2z=0$ .      C.  $x-y+2z+1=0$ .      D.  $x-y+\frac{z}{2}-1=0$ .

**Câu 47.** Viết phương trình mặt phẳng  $(P)$  đi qua điểm  $G(1;2;3)$  và cắt ba trục  $Ox, Oy, Oz$  lần lượt tại  $A, B, C$  sao cho  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

- A.  $x+2y+3z-14=0$ .      B.  $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1$       C.  $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ .      D.  $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{9}=1$

**Câu 48.** Cho điểm  $M(1;2;5)$ . Mặt phẳng  $(P)$  đi qua điểm  $M$  cắt trục tọa độ  $Ox, Oy, Oz$  tại  $A, B, C$  sao cho  $M$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Phương trình mặt phẳng  $(P)$  là

- A.  $x+y+z-8=0$ .      B.  $x+2y+5z-30=0$ .      C.  $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=0$ .      D.  $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$ .

**Câu 49.** Cho điểm  $A(1; 2; 3)$ . Gọi  $A_1, A_2, A_3$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên các mặt phẳng  $(Oyz), (Ozx), (Oxy)$ . Phương trình của mặt phẳng  $(A_1A_2A_3)$  là:

- A.  $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1$ .      B.  $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1$ .      C.  $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ .      D.  $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=0$ .

**Câu 50.** Cho điểm  $M'(4;-7;-5), N(3;-9;-10)$  và các đường thẳng  $d_1, d_2, d_3$  cùng đi qua điểm  $N$  và lần lượt song song với  $Ox, Oy, Oz$ . Mặt phẳng  $(P')$  đi qua  $M'$  cắt  $d_1, d_2, d_3$  lần lượt tại  $A', B', C'$  sao cho  $M'$  là trọng tâm  $\triangle A'B'C'$ . Phương trình mặt phẳng  $(P')$  là

**A.**  $x + 2y + 5z - 35 = 0$ . **B.**  $x + 2y + 5z + 35 = 0$ . **C.**  $\frac{x}{4} + \frac{y}{-7} + \frac{z}{-5} = 0$ . **D.**  $\frac{x}{4} + \frac{y}{-7} + \frac{z}{-5} = 1$ .

**Câu 51.** Cho điểm  $A(3; -1; 1)$ . Tính khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $Oxy$ .

**A.** 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

**Câu 52.** Cho mặt phẳng  $(P): 16x - 12y - 15z - 4 = 0$  và điểm  $A(2; -1; -1)$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của điểm  $A$  lên mặt phẳng  $(P)$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AH$ .

**A.** 5. **B.**  $\frac{11}{5}$ . **C.**  $\frac{11}{25}$ . **D.**  $\frac{22}{5}$ .

**Câu 53.** Cho điểm  $M(1; 2; 3)$  gọi  $A, B, C$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm  $M$  lên các trục  $Ox, Oy, Oz$ . Khi đó khoảng cách từ điểm  $O(0; 0; 0)$  đến mặt phẳng  $(ABC)$  có giá trị bằng

**A.**  $\frac{1}{2}$ . **B.**  $\sqrt{6}$ . **C.**  $\frac{6}{7}$ . **D.**  $\frac{1}{\sqrt{14}}$ .

**Câu 54.** Cho tứ diện  $ABCD$  với  $A(1; 2; 3), B(-3; 0; 0), C(0; -3; 0), D(0; 0; 6)$ . Tính độ dài đường cao hạ từ đỉnh  $A$  của tứ diện  $ABCD$ .

**A.** 9. **B.** 1. **C.** 6. **D.** 3.

**Câu 55.** Cho hai mặt phẳng  $(P): 5x + 5y - 5z - 1 = 0$  và  $(Q): x + y - z + 1 = 0$ . Khoảng cách giữa hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  bằng

**A.**  $\frac{2\sqrt{3}}{15}$ . **B.**  $\frac{2}{5}$ . **C.**  $\frac{2}{15}$ . **D.**  $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ .

**Câu 56.** Cho  $A(1; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c), (b > 0, c > 0)$  và mặt phẳng  $(P): y - z + 1 = 0$ . Tính  $S = b + c$  biết mặt phẳng  $(ABC)$  vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  và khoảng cách từ  $O$  đến  $(ABC)$  bằng  $\frac{1}{3}$ .

**A.**  $S = 1$ . **B.**  $S = \sqrt{2}$ . **C.**  $S = 0$ . **D.**  $S = \frac{3}{2}$ .

**Câu 57.** Xác định tọa độ điểm  $M'$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $M(2; 3; 1)$  lên mặt phẳng  $(\alpha): x - 2y + z = 0$

**A.**  $M'\left(2; \frac{5}{2}; 3\right)$ . **B.**  $M'(1; 3; 5)$ . **C.**  $M'\left(\frac{5}{2}; 2; \frac{3}{2}\right)$ . **D.**  $M'(3; 1; 2)$ .

**Câu 58.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(-3; 2; 5)$  và mặt phẳng  $(P): 2x + 3y - 5z - 13 = 0$ . Tìm tọa độ điểm  $A'$  đối xứng với điểm  $A$  qua mặt phẳng  $(P)$ .

**A.**  $A'(1; 8; -5)$  **B.**  $A'(2; -4; 3)$  **C.**  $A'(7; 6; -4)$  **D.**  $A'(0; 1; -3)$

**Câu 59.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(1; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 1)$ . Trục tâm tam giác  $ABC$  có tọa độ là

**A.**  $\left(\frac{4}{9}; \frac{2}{9}; \frac{4}{9}\right)$ . **B.**  $(2; 1; 2)$ . **C.**  $(4; 2; 4)$ . **D.**  $\left(\frac{4}{9}; \frac{2}{9}; \frac{4}{9}\right)$ .

**Câu 60.** Cho  $A(0; 1; 2), B(0; 1; 0), C(3; 1; 1)$  và mặt phẳng  $(Q): x + y + z - 5 = 0$ . Xét điểm  $M$  thay đổi thuộc  $(Q)$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $MA^2 + MB^2 + MC^2$  bằng

**A.** 12. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 10.

**Câu 61.** Cho mặt phẳng  $(\alpha): x + y + z - 4 = 0$  và ba điểm  $A(1; 2; 1), B(0; 1; 2)$  và  $C(0; 0; 3)$ . Điểm

$M(x; y; z)$  thuộc  $(\alpha)$  sao cho  $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}|$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức  $P = x + y + z$ .

- A. 3.                                      B.  $-\frac{1}{3}$ .                                      C.  $\frac{5}{3}$ .                                      D. 4.

**Câu 62.** Cho hai điểm  $A(2; -2; 4)$ ,  $B(-3; 3; -1)$  và mặt phẳng  $(P): 2x - y + 2z - 8 = 0$ . Xét  $M$  là điểm thay đổi thuộc  $(P)$ , giá trị nhỏ nhất của  $2MA^2 + 3MB^2$  bằng:

- A. 135.                                      B. 105.                                      C. 108.                                      D. 145.

**Câu 63.** Cho tứ diện  $ABCD$  có điểm  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(2; 0; 2)$ ,  $C(-1; -1; 0)$ ,  $D(0; 3; 4)$ . Trên các cạnh  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$  lần lượt lấy các điểm  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  thỏa:  $\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} = 4$ . Viết phương trình mặt phẳng  $(B'C'D')$  biết tứ diện  $AB'C'D'$  có thể tích nhỏ nhất.

- A.  $16x + 40y + 44z - 39 = 0$ .                                      B.  $16x - 40y - 44z + 39 = 0$ .  
C.  $16x - 40y - 44z - 39 = 0$ .                                      D.  $16x + 40y - 44z + 39 = 0$ .

**Câu 64.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): x + y - z + 2 = 0$  và hai điểm  $A(3; 4; 1)$ ;  $B(7; -4; -3)$ . Điểm  $M(a; b; c)$  ( $a > 2$ ) thuộc  $(P)$  sao cho tam giác  $ABM$  vuông tại  $M$  và có diện tích nhỏ nhất. Khi đó giá trị biểu thức  $T = a + b + c$  bằng

- A.  $T = 6$ .                                      B.  $T = 8$ .                                      C.  $T = 4$ .                                      D.  $T = 0$ .

**Câu 65.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(0; m; 0)$ ,  $C(0; 0; n)$  với  $m, n$  là các số thực dương thỏa mãn  $3mn = 4\sqrt{m^2 + n^2}$ . Mặt phẳng qua  $A$  vuông góc với  $OA$  cắt đường thẳng qua  $O$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  tại điểm  $H$ . Tính  $OH$ ?

- A.  $\frac{5}{4}$                                       B.  $\frac{4}{5}$                                       C.  $\frac{3}{4}$                                       D.  $\frac{4}{3}$

### Vấn đề 3. Phương trình mặt cầu

**Câu 66.** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  trong không gian thỏa mãn hệ thức  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = a$  ( $a > 0$ ) là

- A. Mặt cầu bán kính  $R = \frac{a}{3}$ .                                      B. Đường tròn bán kính  $R = \frac{a}{3}$   
C. Mặt cầu bán kính  $R = a$ .                                      D. Đoạn thẳng có độ dài bằng  $a$ .

**Câu 67.** Cho hai điểm  $A(-2; 1; 0)$ ,  $B(2; -1; 2)$ . Phương trình của mặt cầu có đường kính  $AB$  là

- A.  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = \sqrt{24}$ .                                      B.  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = \sqrt{6}$ .  
C.  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 24$ .                                      D.  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 6$ .

**Câu 68.** Phương trình mặt cầu tâm  $I(-1; 2; 0)$  và đi qua điểm  $A(2; -2; 0)$  là

- A.  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 100$ .                                      B.  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 5$ .  
C.  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 10$ .                                      D.  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 25$ .

**Câu 69.** Gọi  $(S)$  là mặt cầu đi qua 4 điểm  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(1; 3; 0)$ ,  $C(-1; 0; 3)$ ,  $D(1; 2; 3)$ . Tính bán kính  $R$  của  $(S)$

- A.  $R = 2\sqrt{2}$ .                                      B.  $R = 3$ .                                      C.  $R = 6$ .                                      D.  $R = \sqrt{6}$ .

**Câu 70.** Cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$  cắt các trục  $Ox, Oy, Oz$  lần lượt tại các điểm  $A, B, C$  (khác  $O$ ). Phương trình mặt phẳng  $(ABC)$  là

- A.  $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} - \frac{z}{6} = 1$ .                                      B.  $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1$ .                                      C.  $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 0$ .                                      D.  $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} - \frac{z}{6} = 1$ .

**Câu 71.** Cho điểm  $I(-1; 2; 3)$  và mp  $(P): 4x + y - z - 1 = 0$ . Viết ptnh mặt cầu tâm  $I$  và tiếp xúc với  $(P)$ .

A.  $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$ .

B.  $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{2}$ .

C.  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 2$ .

D.  $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$ .

**Câu 72.** Cho mặt cầu  $(S): (x+3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = m^2 + 4$ . Tập các giá trị của  $m$  để mặt cầu  $(S)$  tiếp xúc với mặt phẳng  $(Oyz)$  là:

A.  $\{\sqrt{5}\}$ .

B.  $\{\pm\sqrt{5}\}$ .

C.  $\{0\}$ .

D.  $\emptyset$ .

**Câu 73.** Cho mặt cầu  $(S)$  tâm  $I(1;2;3)$  bán kính  $R=3$  và hai điểm  $M(2;0;0)$ ,  $N(0;1;0)$ .

$(X): x+by+cz+d=0$  là mặt phẳng qua  $MN$  và cắt  $(S)$  theo giao tuyến là đường tròn có bán kính  $r$  lớn nhất. Tính  $T=b+c+d$ .

A.  $-1$ .

B.  $4$ .

C.  $2$ .

D.  $3$ .

**Câu 74.** Cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$  và mặt phẳng  $(\alpha): 3x+4z+12=0$ . Khẳng định nào sau đúng?

A. Mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua tâm mặt cầu  $(S)$ .

B. Mặt phẳng  $(\alpha)$  tiếp xúc mặt cầu  $(S)$ .

C. Mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt mặt cầu  $(S)$  theo một đường tròn.

D. Mặt phẳng  $(\alpha)$  không cắt mặt cầu  $(S)$ .

**Câu 75.** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình  $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 4y + 2z + 6m = 0$  là phương trình của một mặt cầu trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ .

A.  $m \in (1;5)$

B.  $m \in (-\infty;1) \cup (5;+\infty)$

C.  $m \in (-5;-1)$

D.  $m \in (-\infty;-5) \cup (-1;+\infty)$

**Câu 76.** Cho mặt cầu  $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ . Mặt phẳng  $(Oxy)$  cắt mặt cầu  $(S)$  theo một thiết diện là đường tròn  $(C)$ . Diện tích của đường tròn  $(C)$  là

A.  $8\pi$

B.  $12\pi$

C.  $16\pi$

D.  $4\pi$

**Câu 77.** Cho  $I(1;1;1)$  và mặt phẳng  $(P): 2x+y+2z+4=0$ . Mặt cầu  $(S)$  tâm  $I$  cắt  $(P)$  theo một đường tròn bán kính  $r=4$ . Phương trình của  $(S)$  là

A.  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 16$ .

B.  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$ .

C.  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$ .

D.  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$ .

**Câu 78.** Cho mặt phẳng  $(Q): x-2y+z-5=0$  và mặt cầu  $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 15$ .  $(P)$  song song với  $(Q)$  và cắt mặt cầu  $(S)$  theo giao tuyến là đường tròn có chu vi  $6\pi$  đi qua điểm nào sau đây?

A.  $A(0; -1; -5)$

B.  $B(1; -2; 0)$

C.  $C(2; -2; 1)$

D.  $D(-2; 2; -1)$

**Câu 79.** Cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z + 5 = 0$ . Phương trình mặt phẳng  $(Q)$  chứa trục  $Ox$  và cắt  $(S)$  theo giao tuyến là một đường tròn bán kính bằng 2 là

A.  $(Q): 2y-z=0$ .

B.  $(Q): 2x-z=0$ .

C.  $(Q): y-2z=0$ .

D.  $(Q): 2y+z=0$ .

**Câu 80.** Cho hai mặt phẳng song song  $(\alpha_1): 2x-y+2z-1=0$ ,  $(\alpha_2): 2x-y+2z+5=0$  và một điểm  $A(-1;1;1)$  nằm trong khoảng giữa của hai mặt phẳng đó. Gọi  $(S)$  là mặt cầu đi qua  $A$  và tiếp xúc với  $(\alpha_1), (\alpha_2)$ . Biết rằng khi  $(S)$  thay đổi thì tâm  $I$  của nó nằm trên một đường tròn cố định  $(\omega)$ . Tính diện tích hình tròn giới hạn bởi  $(\omega)$ .

A.  $\frac{2}{3}\pi$ .

B.  $\frac{4}{9}\pi$ .

C.  $\frac{8}{9}\pi$ .

D.  $\frac{16}{9}\pi$ .

**Câu 81.** Cho  $A(2;0;0), B(0;2;0), C(0;0;2)$ . Có tất cả bao nhiêu điểm  $M$  trong không gian thỏa mãn  $M$  không trùng với các điểm  $A, B, C$  và  $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ$ ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

**Câu 82.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  với  $S(1;-1;6), A(1;2;3), B(3;1;2), C(4;2;3), D(2;3;4)$ . Gọi  $I$  là tâm mặt cầu  $(S)$  ngoại tiếp hình chóp. Tính khoảng cách  $d$  từ  $I$  đến mặt phẳng  $(SAD)$ .

- A.  $d = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ . B.  $d = \frac{\sqrt{6}}{2}$ . C.  $d = \frac{\sqrt{21}}{2}$ . D.  $d = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 83.** Cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$  và điểm  $A(2;2;0)$ . Viết phương trình mặt phẳng  $(OAB)$ , biết rằng điểm  $B$  thuộc mặt cầu  $(S)$ , có hoành độ dương và tam giác  $OAB$  đều.

- A.  $x - y - z = 0$ . B.  $x - y + z = 0$ . C.  $x - y - 2z = 0$ . D.  $x - y + 2z = 0$ .

**Câu 84.** Cho hai điểm  $A(3;1;-3), B(0;-2;3)$  và mặt cầu  $(S): (x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 1$ . Xét điểm  $M$  thay đổi thuộc mặt cầu  $(S)$ , giá trị lớn nhất của  $MA^2 + 2MB^2$  bằng

- A. 102. B. 78. C. 84. D. 52.

**Câu 85.** Cho mặt phẳng  $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$  và mặt cầu  $(S)$  tâm  $I(5;-3;5)$ , bán kính  $R = 2\sqrt{5}$ . Từ một điểm  $A$  thuộc  $(P)$  kẻ một đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu  $(S)$  tại  $B$ . Tính  $OA$  biết  $AB = 4$ .

- A.  $OA = \sqrt{11}$ . B.  $OA = 5$ . C.  $OA = 3$ . D.  $OA = \sqrt{6}$ .

**Câu 86.** Cho mặt phẳng  $(P)$  có phương trình  $x + y + z = 2$  và mặt cầu  $(S)$  có phương trình  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ . Gọi điểm  $M(a;b;c)$  thuộc giao tuyến giữa  $(P)$  và  $(S)$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A.  $\min c \in (-1;1)$ . B.  $\min b \in [1;2]$ . C.  $\max a = \min b$ . D.  $\max c \in [\sqrt{2};2]$ .

**Câu 87.** Cho mặt cầu  $(S_1)$  có tâm  $I_1(3;2;2)$  bán kính  $R_1 = 2$ , mặt cầu  $(S_2)$  có tâm  $I_2(1;0;1)$  bán kính  $R_2 = 1$ . Phương trình mặt phẳng  $(P)$  đồng thời tiếp xúc với  $(S_1)$  và  $(S_2)$  và cắt đoạn  $I_1I_2$  có dạng  $2x + by + cz + d = 0$ . Tính  $T = b + c + d$ .

- A. -5. B. -1. C. -3. D. 2.

#### Vấn đề 4. Phương trình đường thẳng trong hệ tọa độ $Oxyz$ .

**Câu 88.** (KỲ THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM 2020)

Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z+1}{3}$ . Vector nào sau đây là một vector chỉ phương của  $d$ ?

- A.  $\vec{u}_2 = (3;4;-1)$  B.  $\vec{u}_1 = (2;-5;3)$  C.  $\vec{u}_3 = (2;5;3)$  D.  $\vec{u}_4 = (3;4;1)$

**Câu 89.** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(7;2;1)$  và  $B(-5;-4;-3)$ ,

Chọn đáp án sai?

- A.  $AB$  không đi qua điểm  $(1,-1,-1)$   
B.  $AB$  vuông góc với mặt phẳng:  $6x + 3y - 2z + 10 = 0$

- C.  $AB$  song song với đthẳng  $\begin{cases} x = 1 - 12t \\ y = -1 - 6t \\ z = -1 - 4t \end{cases}$

- D.  $AB$  vuông góc với đường thẳng  $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 - 2t \\ z = 3t \end{cases}$



**Câu 90.** Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$ ?

- A.  $Q(-2;1;-3)$ . B.  $P(2;-1;3)$ . C.  $M(-1;1;-2)$ . D.  $N(1;-1;2)$ .

**Câu 91.** Đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$  không đi qua điểm nào dưới đây?

- A.  $Q(1;2;3)$ . B.  $M(3;-1;2)$ . C.  $P(2;-2;3)$ . D.  $N(-1;5;4)$ .

**Câu 92.** Cho mặt phẳng  $(\alpha): x + 2y - z + 3 = 0$  và đường thẳng  $d: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{2}$ . Mệnh đề nào đúng?

- A.  $d$  song song với  $(\alpha)$ . B.  $d$  vuông góc với  $(\alpha)$ . C.  $d$  nằm trên  $(\alpha)$ . D.  $d$  cắt  $(\alpha)$

**Câu 93.** Trong không gian hệ tọa độ Oxyz, hai đường thẳng  $d_1: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{1}$ ;

$d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-7}{-3}$  có vị trí tương đối là:

- A. song song B. trùng nhau C. cắt nhau D. chéo nhau

**Câu 94.** Cho ba điểm  $A(3;-1;2)$ ,  $B(4;-1;-1)$ ,  $C(2;0;2)$  và đường thẳng  $(d): \frac{x}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-1}$ . Gọi  $M$

là giao điểm của  $(d)$  và mp  $(ABC)$ . Độ dài đoạn  $OM$  bằng

- A.  $2\sqrt{2}$  B. 3 C.  $\sqrt{6}$  D.  $\sqrt{3}$

**Câu 95.** Cho ba điểm  $A(-1;2;1)$ ,  $B(2;-1;4)$  và  $C(1;1;4)$ . Đường thẳng nào dưới đây vuông góc với mp  $(ABC)$

- A.  $\frac{x}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ . B.  $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ . C.  $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ . D.  $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ .

**Câu 96.** Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm  $A(1;2;-3)$ ,  $B(2;-3;1)$ .

- A.  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 5t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$  B.  $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 5t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$  C.  $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -8 + 5t \\ z = 5 - 4t \end{cases}$  D.  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 5t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$

**Câu 97.** Viết phương trình tham số của đường thẳng (D) qua  $I(-1;5;2)$  và song song với trục  $Ox$ .

- A.  $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 5 \\ z = 2 \end{cases}; t \in \mathbb{R}$  B.  $\begin{cases} x = -m \\ y = 5m \\ z = 2m \end{cases}; m \in \mathbb{R}$  C.  $\begin{cases} x = -2t \\ y = 10t \\ z = 4t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$  D. A và C đều đúng

**Câu 98. (KỲ THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM 2020)**

Trong không gian Oxyz, cho ba điểm  $A(1;0;1)$ ,  $B(1;1;0)$  và  $C(3;4;-1)$ . Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là

- A.  $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{-1}$ . B.  $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$  C.  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$  D.  $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{-1}$

**Câu 99.** Phương trình chính tắc của đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $M(1;-2;5)$  và vuông góc với mặt phẳng  $(\alpha): 4x - 3y + 2z + 5 = 0$  là

- A.  $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{2}$ . B.  $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{2}$ . C.  $\frac{x-1}{-4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{-2}$ . D.  $\frac{x-1}{-4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{2}$ .



- Câu 100.** Cho đường thẳng  $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$  và mặt phẳng  $P: x - y - z - 1 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $A(1;1;-2)$ , song song với mặt phẳng  $(P)$  và vuông góc với đường thẳng  $d$ .
- A.  $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{-3}$       B.  $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-3}$   
C.  $\Delta: \frac{x+1}{-2} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{3}$       D.  $\Delta: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{3}$
- Câu 101.** Gọi  $d$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(\alpha): 2x - y + 3z - 7 = 0$  và  $(\beta): x - 2y + z - 2 = 0$ . Đường thẳng  $d$  đi qua điểm nào dưới đây?
- A.  $Q(2;-1;3)$ .      B.  $M(1;0;-3)$ .      C.  $P(-1;0;3)$ .      D.  $N(1;-2;1)$ .
- Câu 102.** (KỲ THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM 2020)  
Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M(2;-2;3)$  và đường thẳng  $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-1}$ . Mặt phẳng đi qua  $M$  và vuông góc với  $d$  có phương trình là
- A.  $3x + 2y - z + 1 = 0$       B.  $2x - 2y + 3z - 17 = 0$   
C.  $3x + 2y - z - 1 = 0$       D.  $2x - 2y + 3z + 17 = 0$
- Câu 103.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$  và điểm  $A(-2;1;0)$ . Viết phương trình mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $A$  và chứa  $d$ ?
- A.  $x - 7y - 4z + 9 = 0$       B.  $x - 7y - 4z + 8 = 0$       C.  $x - 6y - 4z + 9 = 0$       D.  $x - y - 4z + 3 = 0$
- Câu 104.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(-3;2;-3)$  và hai đường thẳng  $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}$  và  $d_2: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{3}$ . Phương trình mặt phẳng chứa  $d_1$  và  $d_2$  có dạng:
- A.  $5x + 4y + z - 16 = 0$       B.  $5x - 4y + z - 16 = 0$       C.  $5x - 4y - z - 16 = 0$       D.  $5x - 4y + z + 16 = 0$
- Câu 105.** Cho hai đường thẳng  $(d_1): \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = -2 - t \end{cases}; (d_2): \begin{cases} x = m - 3 \\ y = 2 + 2m \\ z = 1 - 4m \end{cases}$ . Phương trình tổng quát của mặt phẳng  $(P)$  chứa  $d_1$  và song song với  $d_2$  là:
- A.  $x + 7y + 5z - 20 = 0$       B.  $2x + 9y + 5z - 5 = 0$       C.  $x - 7y - 5z = 0$       D.  $x - 7y + 5z + 20 = 0$
- Câu 106.** Cho đường thẳng  $\Delta$  có phương trình  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$  và mặt phẳng  $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$ . Phương trình mặt phẳng  $(Q)$  chứa  $\Delta$  và tạo với  $(P)$  một góc nhỏ nhất là:
- A.  $2x - y + 2z - 1 = 0$       B.  $10x - 7y + 13z + 3 = 0$       C.  $2x + y - z = 0$       D.  $-x + 6y + 4z + 5 = 0$
- Câu 107.** Cho đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ . Gọi  $d'$  là hình chiếu vuông góc của  $d$  trên mặt phẳng tọa độ  $(Oxz)$ . Viết phương trình đường thẳng  $d'$ .
- A.  $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 0 \\ z = 1 + 3t \end{cases} \ (t \in \mathbb{R})$ .      B.  $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ .      C.  $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + 2t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ .      D.  $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 0 \end{cases}$
- Câu 108.** Cho đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-3}{4}$ . Phương trình nào dưới đây là phương trình hình chiếu vuông góc của  $d$  lên mặt phẳng  $(P): x - 5 = 0$ .

$$\text{A. } \begin{cases} x = 5 \\ y = -7 + t \\ z = 11 + 4t \end{cases}$$

$$\text{B. } \begin{cases} x = 5 \\ y = -7 - t \\ z = 11 + 4t \end{cases}$$

$$\text{C. } \begin{cases} x = 1 \\ y = -5 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

$$\text{D. } \begin{cases} x = 1 \\ y = -5 - t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

**Câu 109.** Phương trình đường thẳng  $d'$  là hình chiếu vuông góc của đường thẳng  $d$  trên mặt phẳng

$$(P), \text{ biết } d: \begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases} \text{ và } (P): 3x + 5y - z - 2 = 0. \text{ Đường thẳng } d' \text{ là giao tuyến của hai mphẳng}$$

nào?

$$\text{A. } 3x + 5y - z - 2 = 0 \text{ và } 8x - 7y - 11z - 22 = 0.$$

$$\text{B. } 3x + 5y - z - 2 = 0 \text{ và } 4x - 7y - z - 22 = 0.$$

$$\text{C. } 3x + 5y - z - 2 = 0 \text{ và } x - y - 11z - 22 = 0.$$

$$\text{D. } 3x + 5y - z - 2 = 0 \text{ và } 8x - 3y - z - 2 = 0.$$

**Câu 110.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 2; -3)$  và mặt phẳng

$(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$ . Đường thẳng  $d$  đi qua  $A$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (3; 4; -4)$  cắt  $(P)$  tại điểm  $B$ . Điểm  $M$  thay đổi trong  $(P)$  sao cho  $M$  luôn nhìn đoạn  $AB$  dưới góc  $90^\circ$ . Khi độ dài  $MB$  lớn nhất, đường thẳng  $MB$  đi qua điểm nào trong các điểm sau ?

$$\text{A. } (-2; -19; 3).$$

$$\text{B. } (3; 0; 15).$$

$$\text{C. } (18; -2; 41).$$

$$\text{D. } (-3; 20; 7).$$

**Câu 111.** Viết phương trình đường thẳng đi qua  $A(1; -1; 1)$ , vuông góc và cắt đường thẳng

$$d: \frac{x-4}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+5}{1}.$$

$$\text{A. } \frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-8}.$$

$$\text{B. } \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-1}{-4}.$$

$$\text{C. } \frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-1}{-4}.$$

$$\text{D. } \frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{8}.$$

**Câu 112.** Cho mặt phẳng  $(P): x + 2y + z - 4 = 0$  và đường thẳng  $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3}$ . Viết phương

trình đường thẳng  $\Delta$  nằm trong mặt phẳng  $(P)$  đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng  $d$ .

$$\text{A. } \frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$$

$$\text{B. } \frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-3}$$

$$\text{C. } \frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

$$\text{D. } \frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{3}$$

**Câu 113.** Cho 2 đường thẳng  $d_1: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$ ;  $d_2: \frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$  và mp

$(P): x + 2y + 3z - 5 = 0$ . Đường thẳng vuông góc với  $(P)$ , cắt  $d_1$  và  $d_2$  lần lượt tại  $A, B$ . Độ dài đoạn  $AB$  là

$$\text{A. } 2\sqrt{3}.$$

$$\text{B. } \sqrt{14}.$$

$$\text{C. } 5.$$

$$\text{D. } \sqrt{15}.$$

**Câu 114.** Cho đường thẳng  $d_1$  có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (1; 0; -2)$  và đi qua điểm

$$M(1; -3; 2), d_2: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+4}{3}. \text{ Phương trình mặt phẳng } (P) \text{ cách đều hai đường thẳng } d_1 \text{ và } d_2 \text{ có}$$

dạng  $ax + by + cz + 11 = 0$ . Giá trị  $a + 2b + 3c$  bằng

$$\text{A. } -42.$$

$$\text{B. } -32.$$

$$\text{C. } 11.$$

$$\text{D. } 20.$$

**Câu 115.** Cho điểm  $A(1; 2; -1)$ , đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$  và mặt phẳng

$(P): x + y + 2z + 1 = 0$ . Điểm  $B$  thuộc  $(P)$  thỏa mãn đường thẳng  $AB$  vừa cắt vừa vuông góc với  $d$ .

Tọa độ điểm  $B$  là:

$$\text{A. } (6; -7; 0).$$

$$\text{B. } (3; -2; -1).$$

$$\text{C. } (-3; 8; -3).$$

$$\text{D. } (0; 3; -2).$$

**Câu 116.** Cho đường thẳng  $d$  và mặt phẳng  $(P)$  lần lượt có phương trình  $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$  và

$x + y - 2z + 8 = 0$ , điểm  $A(2; -1; 3)$ . Phương trình đường thẳng  $\Delta$  cắt  $d$  và  $(P)$  lần lượt tại  $M$  và  $N$  sao cho  $A$  là trung điểm của đoạn thẳng  $MN$  là

A.  $\frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-5}{2}$ .

B.  $\frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{2}$ .

C.  $\frac{x-5}{6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-5}{2}$ .

D.  $\frac{x-5}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{2}$ .

**Câu 117.** Cho mặt phẳng  $(P): x-2y+2z-5=0$  và hai điểm  $A(-3;0;1)$ ,  $B(0;-1;3)$ . Viết phương trình đường thẳng  $d$  đi qua  $A$  và song song với  $(P)$  sao cho khoảng cách từ  $B$  đến đường thẳng đó là nhỏ nhất.

A.  $\begin{cases} x = -3+2t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases}$ .

B.  $\begin{cases} x = 3-2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$ .

C.  $\begin{cases} x = 3-2t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases}$ .

D.  $\begin{cases} x = -3+2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$ .

**Câu 118.** Trong không gian Oxyz cho 2 điểm  $A(1;3;0)$  và  $B(-2;1;1)$  và đường thẳng

$(\Delta): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$ . Viết phương trình mặt cầu đi qua A, B có tâm I thuộc đường thẳng  $(\Delta)$ ?

A.  $\left(x+\frac{2}{5}\right)^2 + \left(y-\frac{13}{10}\right)^2 + \left(z+\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{521}{100}$

B.  $\left(x+\frac{2}{5}\right)^2 + \left(y-\frac{13}{10}\right)^2 + \left(z+\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{25}{3}$

C.  $\left(x-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(y+\frac{13}{10}\right)^2 + \left(z-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{521}{100}$

D.  $\left(x-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(y+\frac{13}{10}\right)^2 + \left(z-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{25}{3}$

**Câu 119.** Trong mặt phẳng Oxyz, cho đường thẳng  $d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}$  và 2 mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có

phương trình  $x+2y+2z+3=0$ ;  $x+2y+2z+7=0$ . Mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng  $(d)$ , tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) và (Q) có phương trình

A.  $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = \frac{4}{9}$

B.  $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}$

C.  $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}$

D.  $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}$

**Câu 120.** Trong không gian Oxyz, cho điểm  $I(1;3;-2)$  và đường thẳng  $\Delta: \frac{x-4}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+3}{-1}$ .

Phương trình mặt cầu (S) có tâm là điểm I và cắt  $\Delta$  tại hai điểm phân biệt A, B sao cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng 4 là:

A.  $(S): (x-1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$

B.  $(S): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9$

C.  $(S): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 9$

D.  $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+2)^2 = 9$

**Câu 121.** Cho  $E(0;-1;-5)$ , mp  $(P): 2x+2y-z-3=0$  và mặt cầu  $(S): (x-4)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$ .

Gọi  $\Delta$  là đt đi qua  $E$ , nằm trong  $(P)$  và cắt  $(S)$  tại hai điểm có khoảng cách lớn nhất. Phương trình của  $\Delta$  là

A.  $\begin{cases} x = 11t \\ y = -1-2t \\ z = -5+26t \end{cases}$ .

B.  $\begin{cases} x = 50t \\ y = -1+23t \\ z = -5+7t \end{cases}$ .

C.  $\begin{cases} x = 11t \\ y = -1+2t \\ z = -5+26t \end{cases}$ .

D.  $\begin{cases} x = 50t \\ y = -1+23t \\ z = -5-7t \end{cases}$ .

**Câu 122.** Cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0$ . Tìm  $m$  để  $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 2 \end{cases}$  cắt  $(S)$  tại

hai điểm phân biệt

A.  $m \leq \frac{31}{2}$ .

B.  $m < \frac{31}{2}$ .

C.  $m > \frac{31}{2}$ .

D.  $m \geq \frac{31}{2}$ .

**Câu 123.** Góc giữa hai đường thẳng  $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$  và  $d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$  bằng:

- A.  $45^\circ$                       B.  $90^\circ$                       C.  $60^\circ$                       D.  $30^\circ$

**Câu 124.** Góc giữa đường thẳng  $d: \begin{cases} x=5-t \\ y=6 \\ z=2+t \end{cases}$  và mp  $(P): y-z+1=0$  là:

- A.  $30^\circ$                       B.  $60^\circ$                       C.  $90^\circ$                       D.  $45^\circ$

**Câu 125.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho  $A(3;0;1), B(6;-2;1)$ . Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B và (P) tạo với mp(Oyz) góc  $\alpha$  thỏa mãn  $\cos \alpha = \frac{2}{7}$  ?

- A.  $\begin{cases} 2x-3y+6z-12=0 \\ 2x-3y-6z=0 \end{cases}$                       B.  $\begin{cases} 2x+3y+6z+12=0 \\ 2x+3y-6z-1=0 \end{cases}$   
C.  $\begin{cases} 2x+3y+6z-12=0 \\ 2x+3y-6z=0 \end{cases}$                       D.  $\begin{cases} 2x-3y+6z-12=0 \\ 2x-3y-6z+1=0 \end{cases}$

**Câu 126.** Cho điểm  $A(1;1;1)$  và hai đường thẳng  $d_1: \begin{cases} x=2-2t \\ y=1 \\ z=-2+t \end{cases}; d_2: \begin{cases} x=5+3s \\ y=1 \\ z=3-s \end{cases}$ .

Gọi B, C là các điểm lần lượt di động trên  $d_1; d_2$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P=AB+BC+CA$  là:

- A.  $2\sqrt{29}$                       B.  $2\sqrt{985}$                       C.  $\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{29}$                       D.  $\sqrt{5}+\sqrt{10}$

**Câu 127.** Cho điểm  $A(0;1;9)$  và mặt cầu  $(S): (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 25$ . Gọi (C) là đường tròn giao tuyến của (S) với mp(Oxy); điểm B và C di chuyển trên (C) sao cho  $BC=2\sqrt{5}$ . Khi tứ diện OABC có thể tích lớn nhất thì đường thẳng BC có phương trình là

- A.  $\begin{cases} x=\frac{21}{5}-4t \\ y=\frac{28}{5}-3t \\ z=0 \end{cases}$                       B.  $\begin{cases} x=21+4t \\ y=28-3t \\ z=0 \end{cases}$                       C.  $\begin{cases} x=\frac{21}{5}-3t \\ y=\frac{28}{5}+4t \\ z=0 \end{cases}$                       D.  $\begin{cases} x=\frac{21}{5}-4t \\ y=\frac{28}{5}+3t \\ z=0 \end{cases}$

**Câu 128.** Cho điểm  $E(2;1;3)$ , mp  $(P): 2x+2y-z-3=0$  và mặt cầu

$(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$ . Gọi  $\Delta$  là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Biết  $\Delta$  có một vec-tơ chỉ phương  $\vec{u}=(2018; y_0; z_0)$ . Tính  $T=z_0-y_0$ .

- A.  $T=0$ .                      B.  $T=-2018$ .                      C.  $T=2018$ .                      D.  $T=1009$ .

**Câu 129.** Cho điểm  $A(0;1;-2)$ , mặt phẳng  $(P): x+y+z+1=0$  và mặt cầu

$(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-7=0$ . Gọi  $\Delta$  là đường thẳng đi qua A nằm trong mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm B, C sao cho tam giác IBC có diện tích lớn nhất với I là tâm của mặt cầu (S).

Phương trình của  $\Delta$  là

- A.  $\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=-2+t \end{cases}$                       B.  $\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=-2 \end{cases}$                       C.  $\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=-2 \end{cases}$                       D.  $\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=-2-t \end{cases}$

**Câu 130.** Cho điểm  $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$  và mặt cầu  $(S): x^2+y^2+z^2=8$ . Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M, cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB.

A.  $S = \sqrt{7}$ .

B.  $S = 4$ .

C.  $S = 2\sqrt{7}$ .

D.  $S = 2\sqrt{2}$ .

**Câu 131.** Cho điểm  $A(1;1;1)$ ,  $B(2;2;2)$  và mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z - 10 = 0$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng đi qua  $A, B$  và cắt  $(S)$  theo một thiết diện là đường tròn  $(C)$ . Đường thẳng  $AB$  cắt  $(C)$  tại hai điểm  $E, F$ . Điểm  $C$  thuộc đường tròn  $(C)$  sao cho tam giác  $CEF$  cân tại  $C$ ,  $CH$  là đường cao ứng với cạnh  $EF$ . Khi thiết diện có diện tích nhỏ nhất thì phương trình của  $CH$  là

A.  $\Delta: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1 \\ z = 1-t \end{cases}$ .

B.  $\Delta: \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+t \\ z = 1 \end{cases}$ .

C.  $\Delta: \begin{cases} x = -1-t \\ y = 1+t \\ z = 0 \end{cases}$ .

D.  $\Delta: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1 \\ z = 2-t \end{cases}$ .

**Câu 132.** Cho đường thẳng  $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{2-z}{1}$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng chứa đường thẳng  $d$  và tạo với mặt phẳng  $(Q): 2x - y - 2z - 2 = 0$  một góc có số đo nhỏ nhất. Điểm  $A(1;2;3)$  cách  $(P)$  một khoảng bằng

A.  $\sqrt{3}$ .

B.  $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ .

C.  $\frac{7\sqrt{11}}{11}$ .

D.  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ .

**Câu 133.** Cho đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = t \end{cases}$  và hai điểm  $A(1;0;-1)$ ,  $B(2;1;1)$ . Tìm điểm  $M$  thuộc

đường thẳng  $d$  sao cho  $MA + MB$  nhỏ nhất.

A.  $M(1;1;0)$ .

B.  $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ .

C.  $M\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ .

D.  $M\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .

**Câu 134.** Cho ba điểm không thẳng hàng  $A(3;0;0)$ ,  $B(0;3;0)$ ,  $C(0;0;3)$ . Hai mặt cầu có phương trình  $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 9 = 0$  và  $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4z + 8 = 0$  cắt nhau theo đường tròn  $(C)$ . Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa  $(C)$  và tiếp xúc với ba đường thẳng  $AB, BC, CA$ ?

A. vô số

B. 1

C. 3

D. Không có

**Câu 135.** Cho mặt cầu  $(S): x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1$  và đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 2+t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$ . Hai mặt phẳng

$(P), (Q)$  chứa  $d$ , tiếp xúc với  $(S)$  tại  $T$  và  $T'$ . Điểm  $H(a;b;c)$  là trung điểm của đoạn  $TT'$ , giá trị của biểu thức  $T = a + b + c$  là

A. 0.

B.  $\frac{1}{3}$ .

C.  $\frac{2}{3}$ .

D. 1.

### Vấn đề 5. Tọa độ hóa bài toán hình trong không gian

**Câu 136.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật,  $AB = a$ ,  $BC = a\sqrt{3}$ ,  $SA = a$  và  $SA$  vuông góc với đáy  $ABCD$ . Tính  $\sin \alpha$  với  $\alpha$  là góc tạo bởi đường thẳng  $BD$  và mặt phẳng  $(SBC)$ .

A.  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ .

B.  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{8}$ .

C.  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$ .

D.  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 137.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA = 2a$  vuông góc với đáy. Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $SD$ . Tính  $\cos$  của góc tạo bởi hai mặt phẳng  $(AMC)$  và  $(SBC)$ .

A.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

B.  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ .

C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

D.  $\frac{2}{3}$ .

**Câu 138.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh bằng  $a$ , biết  $SO = a$  và  $SO$  vuông góc với mặt đáy  $(ABCD)$ . Gọi  $M, N$  là trung điểm của  $SA, BC$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa đường thẳng  $MN$  và mặt phẳng  $(SBD)$ . Tính  $\cos \alpha$ .

A.  $\frac{2}{\sqrt{7}}$ .

B.  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ .

C.  $\frac{\sqrt{5}}{10}$ .

D.  $\frac{2}{5}$ .

**Câu 139.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SA = a$  và  $SA$  vuông góc với đáy. Gọi  $M$  là trung điểm  $SB$  và  $N$  là điểm thuộc cạnh  $SD$  sao cho  $SN = 2ND$ . Tính thể tích khối tứ diện  $ACMN$ .

A.  $V = \frac{1}{12}a^3$ .

B.  $V = \frac{1}{8}a^3$ .

C.  $V = \frac{1}{6}a^3$ .

D.  $V = \frac{1}{36}a^3$ .

--- HẾT ---