

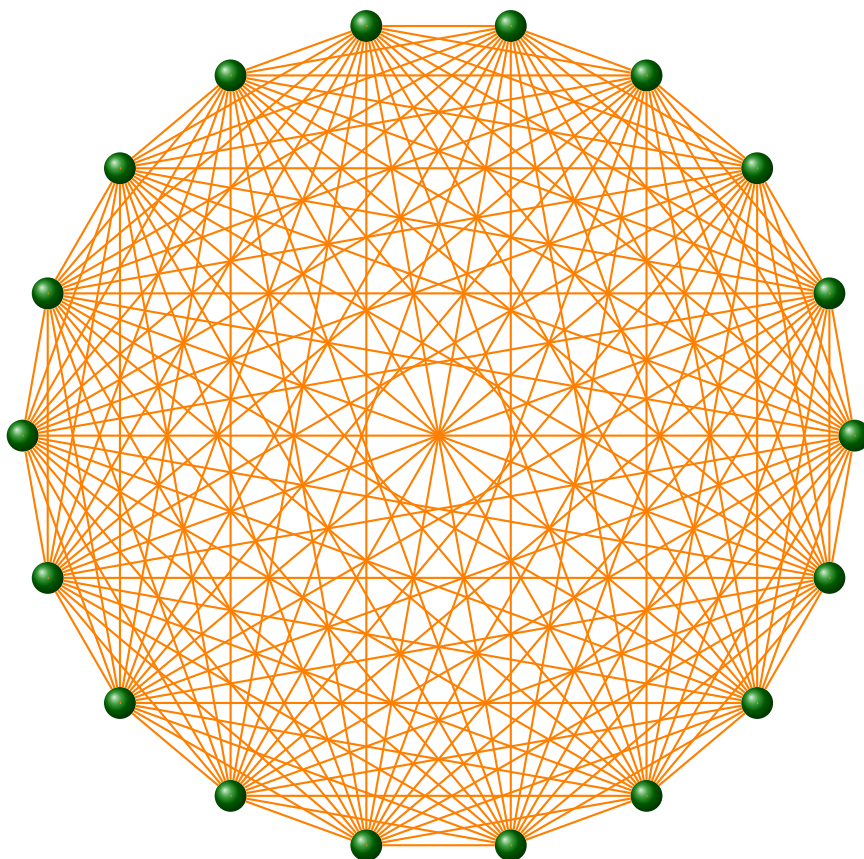
CLAUDIO DUCHI

---

# ESERCIZI SVOLTI DI MATEMATICA

## PRIMO

---




—4 Οκτωβρίου 2022 21:04:14 EET—

Release: (52c8765) Autore:claudio duchi 2022-03-12

*A Federico*





Sicuramente, in questo lavoro vi sono errori e imprecisioni, per cortesia segnalatemeli.

Copyright ©2022, Claudio Duchi.

Quest'opera è stata rilasciata con licenza  Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 — Condividi allo stesso modo. Internazionale.

Per leggere una copia della licenza visita il sito web <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/> o spedisce una lettera a Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.



-  Attribuzione: Devi riconoscere il contributo dell'autore originario.
-  Non commerciale: Non puoi utilizzare il contenuto di questo documento per scopi commerciali.
-  Non opere derivate: Non puoi alterare modificare o sviluppare questo documento.
-  Condividi allo stesso modo: Questo documento, se condiviso, deve rispettare tutte le condizioni della licenza.

# Indice

<b>Elenco delle figure</b>	<b>3</b>
<b>Esempi e contro esempi</b>	<b>4</b>
Esempi . . . . .	4
Contro esempi . . . . .	5
Esercizi svolti . . . . .	5
<b>1 Numeri Naturali</b>	<b>7</b>
1.1 mcd e mcm . . . . .	7
<b>2 Percentuale, Interesse e sconto</b>	<b>9</b>
2.1 Percentuale . . . . .	9
2.2 Sconto . . . . .	9
2.3 Incrementi . . . . .	10
2.4 Interesse . . . . .	10
2.5 Montante . . . . .	11
2.6 Soluzioni esercizi . . . . .	12
<b>3 Polinomi</b>	<b>18</b>
3.1 Somme . . . . .	18
3.2 Prodotti . . . . .	18
3.2.1 Polinomio per polinomio . . . . .	20
3.2.2 Quadrato del binomio . . . . .	21
3.2.3 Differenza di quadrati . . . . .	23
3.2.4 Cubo del Binomio . . . . .	24
3.2.5 Quadrato del trinomio . . . . .	24
3.3 Scomposizioni . . . . .	25
3.4 Minimo comune multiplo . . . . .	25
<b>4 Divisioni fra polinomi</b>	<b>26</b>
4.1 Divisioni fra monomi . . . . .	26
4.2 Divisione fra polinomi . . . . .	26
4.3 Metodo di Ruffini . . . . .	29
<b>5 Frazioni Algebriche</b>	<b>31</b>
5.1 Semplificazione della frazione . . . . .	31
5.2 Riduzione allo stesso indice . . . . .	31
5.3 Somma fra frazioni . . . . .	31
5.4 Prodotto di frazioni . . . . .	31
5.5 Divisione fra frazioni . . . . .	31
<b>Indice analitico</b>	<b>32</b>
<b>Mezzi usati</b>	<b>33</b>

## Elenco delle figure

4.1	<a href="#">Divisione fra polinomi</a>	28
4.3	<a href="#">Metodo di Ruffini</a>	30

# Esempi e contro esempi

## Esempi

1.1.1	mcm mcd	7
1.1.2	mcd mcm	7
1.1.3	mcd mcm	8
3.1.1		18
3.2.1		18
3.2.2		19
3.2.3		20
3.2.4		20
3.2.5		22
3.2.6		22
3.2.7		22
3.2.8		22
3.2.9		23
3.2.10		23
3.2.11		23
3.2.12		24
3.2.13		24
4.1.1		26
4.2.1		26
4.2.2		27
4.3.1		29

## Contro esempi

## Esercizi svolti

2.1.1	Esercizio 2.1.1:	9
2.1.2	Esercizio 2.1.2:	9
2.1.3	Esercizio 2.1.3:	9
2.1.4	Esercizio 2.1.4:	9
2.1.5	Esercizio 2.1.5:	9
2.2.1	Esercizio 2.2.1:	9
2.2.2	Esercizio 2.2.2:	9
2.2.3	Esercizio 2.2.3:	9
2.2.4	Esercizio 2.2.4:	10
2.2.5	Esercizio 2.2.5:	10
2.3.1	Esercizio 2.3.1:	10
2.3.2	Esercizio 2.3.2:	10

2.3.3 Esercizio 2.3.3:	10
2.3.4 Esercizio 2.3.4:	10
2.4.1 Esercizio 2.4.1:	10
2.4.2 Esercizio 2.4.2:	10
2.4.3 Esercizio 2.4.3:	10
2.4.4 Esercizio 2.4.4:	11
2.4.5 Esercizio 2.4.5:	11
2.5.1 Esercizio 2.5.1:	11
2.5.2 Esercizio 2.5.2:	11
2.5.3 Esercizio 2.5.3:	11

## 1

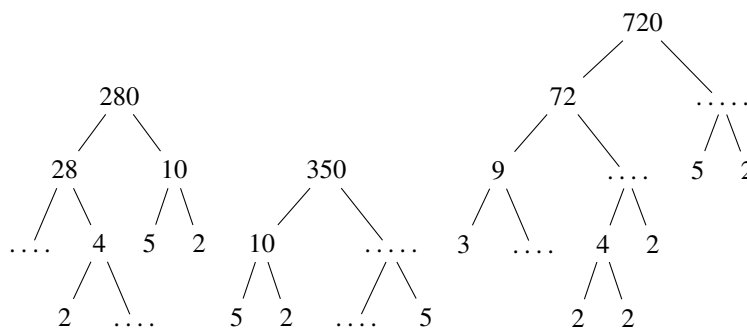
## Numeri Naturali

## 1.1 mcd e mcm

**Esempio 1.1.1. mcm mcd**

Trovare il mcd e il mcm di 280; 350 e 720

Iniziamo a scomporre i tre numeri



Allineo i fattori

$$\begin{array}{rcl}
 280 & = & \dots \cdot 5 \cdot 7 \\
 250 & = & 2 \cdot \dots \cdot 7 \\
 720 & = & 2^4 \cdot \dots \cdot 5
 \end{array}$$

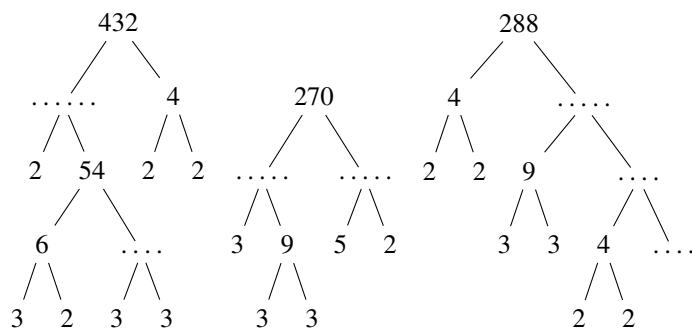
Ottengo

$$\begin{array}{rcl}
 \text{mcd} & = & 2 \cdot 5 = 10 \\
 \text{mcm} & = & \dots \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots = 25200
 \end{array}$$

**Esempio 1.1.2. mcd mcm**

Trovare il mcd e il mcm di 432; 270 e 288

Iniziamo a scomporre i tre numeri



Allineo i fattori

$$432 = \dots 3^2$$

$$270 = 2 \dots 5$$

$$288 = 2^5 3^2$$

Ottengo

$$\text{mcd} = 2 \cdot 3^2 = 18$$

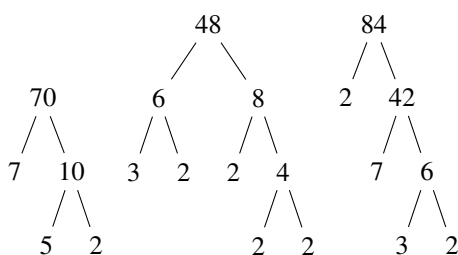
$$\text{mcm} = 2^5 \cdot \dots \cdot 5 = \dots\dots\dots$$

**Esempio 1.1.3. mcd mcm**

★★★★ Trovare il mcd e il mcm di 70; 48 e 78

★★★★

Iniziamo a scomporre i tre numeri



Allineo i fattori

$$70 = 2 \dots 5 \dots 7$$

$$48 = 2^4 \dots 3$$

$$84 = 2^2 \dots 3 \dots 7$$

Ottengo

$$\text{mcd} = 2 = 2$$

$$\text{mcm} = 2^4 \cdot \dots \cdot 5 \cdot 7 = \dots\dots\dots$$



# 2

## Percentuale, Interesse e sconto

---

### 2.1 Percentuale

**Esercizio 2.1.1:** Parte Calcola 62 % di 707

*Soluzione a pagina 12*

**Esercizio 2.1.2:** In un negozio il 20 % dei clienti ha comprato un cellulare. Se in questo giorno il negozio ha avuto 745 clienti, quanti hanno acquistato un cellulare?

*Soluzione a pagina 12*

**Esercizio 2.1.3:** In una società di 300 soci il 40 % sono insegnanti. Quanti sono gli altri soci?

*Soluzione a pagina 12*

**Esercizio 2.1.4:** Un negozio ha avuto 860 visitatori. Se il 70 % dei clienti ha comprato delle pere, quanti hanno acquistato delle pere

**Esercizio 2.1.5:** Calcola quel numero il cui 40 % è 540

*Soluzione a pagina 12*

### 2.2 Sconto

**Esercizio 2.2.1:** Per l'aquisto di un melo è stato praticato uno sconto del 90 % pari a €180. Qual era il prezzo iniziale?

*Soluzione a pagina 13*

**Esercizio 2.2.2:** In un negozio mi hanno ridotto il prezzo del 24 % e ho risparmiato €36. Quale era il prezzo iniziale e quanto ho speso?

*Soluzione a pagina 13*

**Esercizio 2.2.3:** Un commerciante mette in vendita una coperta praticando il 10 % di sconto. Dopo un mese la offre scontandola del 30 %. Se lo sconto complessivo è stato di €300, quale

era il prezzo iniziale?

*Soluzione a pagina [13](#)*

**Esercizio 2.2.4:** Pagando prima un debito ho avuto uno sconto del 24 % e pago € 171. A quanto ammontava il debito?

*Soluzione a pagina [14](#)*

**Esercizio 2.2.5:** Il prezzo del pane è di 67 €/kg. Mi è stato venduto a 43 €/kg. Che percentuale di sconto mi è stata praticata.

*Soluzione a pagina [15](#)*

## 2.3 Incrementi

**Esercizio 2.3.1:** Un commerciante ha acquistato della carne a 42 €/kg e l'ha rivenduta a 52 €/kg. Che percentuale di guadagno sul prezzo iniziale.

*Soluzione a pagina [15](#)*

**Esercizio 2.3.2:** Il prezzo di un melo è di € 37. Viene rivenduto a € 55. Quanto è stato l'aumento percentuale?

*Soluzione a pagina [15](#)*

**Esercizio 2.3.3:** Il costo di un bicchiere è di € 201 ha avuto un incremento del 20 %, quanto costa ora?

**Esercizio 2.3.4:** Un pollo dal costo di € 47 ha avuto un incremento del 47 %. Quanto costa ora?

*Soluzione a pagina [15](#)*

## 2.4 Interesse

**Esercizio 2.4.1:** Calcolare l'interesse semplice maturato su un capitale di € 43586 impiegato al 5 % per 7 anni.

**Esercizio 2.4.2:** Calcolare l'interesse semplice maturato su un capitale di € 1376 impiegato al 13 % per 12 anni.

*Soluzione a pagina [16](#)*

**Esercizio 2.4.3:** Calcolare l'interesse semplice maturato su un capitale di € 41712 impiegato al 18 % per 7 anni e 82 giorni.

*Soluzione a pagina [16](#)*

**Esercizio 2.4.4:** Calcolare l'interesse semplice maturato su un capitale di €75637 impiegato al 14 % per 3 anni e 2 mesi.

*Soluzione a pagina 16*

**Esercizio 2.4.5:** Calcolare l'interesse semplice maturato su un capitale di €9661 impiegato al 9 % per 11 anni e 11 mesi e 147 giorni.

*Soluzione a pagina 17*

## 2.5 Montante

**Esercizio 2.5.1:** Calcolare il montante, in regime di interesse semplice, maturato su un capitale di €83921 impiegato al 10 % per 15 anni e 199 giorni.

*Soluzione a pagina 17*

**Esercizio 2.5.2:** Calcolare il montante, in regime di interesse semplice, maturato su un capitale di €17945 impiegato al 6 % per 10 anni e 9 mesi.

*Soluzione a pagina 17*

**Esercizio 2.5.3:** Calcolare il montante, in regime di interesse semplice, maturato su un capitale di €51870 impiegato al 1 % per 6 anni e 7 mesi e 66 giorni.

*Soluzione a pagina 17*

## 2.6 Soluzioni esercizi

**Soluzione dell'esercizio 2.1.1 di pagina 9:**

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{PA}{TU} \cdot 100 \\
 PA &= \frac{p \cdot TU}{100} \\
 &= \frac{62 \cdot 707}{100} \\
 &= 438,34
 \end{aligned}$$

**Soluzione dell'esercizio 2.1.2 di pagina 9:**

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{PA}{TU} \cdot 100 \\
 PA &= \frac{p \cdot TU}{100} \\
 &= \frac{20 \cdot 745}{100} \\
 &= 149
 \end{aligned}$$

**Soluzione dell'esercizio 2.1.3 di pagina 9:**

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{PA}{TU} \cdot 100 \\
 PA &= \frac{p \cdot TU}{100} \\
 &= \frac{40 \cdot 300}{100} \\
 &= 120
 \end{aligned}$$

Altri soci

$$\begin{aligned}
 &= 300 - 120 \\
 &= 180
 \end{aligned}$$

**Soluzione dell'esercizio 2.1.5 di pagina 9:**

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{PA}{TU} \cdot 100 \\
 40 &= \frac{540}{TU} \cdot 100 \\
 TU &= \frac{540}{40} \cdot 100 \\
 &= 1350
 \end{aligned}$$

**Soluzione dell'esercizio 2.2.1 di pagina 9:**

$$\begin{aligned}
 p_s &= \frac{SC}{PI} \cdot 100 \\
 90 &= \frac{180}{PI} \cdot 100 \\
 PI &= \frac{180}{90} \cdot 100 \\
 &= €200
 \end{aligned}$$

**Soluzione dell'esercizio 2.2.2 di pagina 9:**

$$\begin{aligned}
 p_s &= \frac{SC}{PI} \cdot 100 \\
 24 &= \frac{36}{PI} \cdot 100 \\
 PI &= \frac{36}{24} \cdot 100 \\
 &= €150 \\
 PI &= SC + PF \\
 €150 &= PF + €36 \\
 PF &= €150 - €36 \\
 &= €114
 \end{aligned}$$

**Soluzione dell'esercizio 2.2.3 di pagina 9:**

In questo esempio lo sconto viene applicato due volte. Per risolverlo bisogna tener presente che il secondo sconto viene calcolato non sul prezzo iniziale ma questo nuovo importo, il quale sarà uguale a quello fissato all'inizio meno il primo sconto.

$$ScontoFinale = PrimoSconto + SecondoSconto = €300$$

Definiamo delle abbreviazioni

$$\begin{aligned}
 \text{Primoscontopercentuale} &= PSP \\
 \text{Secondoscontopercentuale} &= SSP \\
 \text{PrimoPrezzo} &= PP \\
 \text{SecondoPrezzo} &= SP
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{PrimoSconto} &= \frac{PSP \cdot PP}{100} \\
 SP &= PP - \text{PrimoSconto} \\
 &= PP - \frac{PSP \cdot PP}{100} \\
 &= PP \left( 1 - \frac{PSP}{100} \right) \\
 \text{SecondoSconto} &= \frac{SSP \cdot SP}{100} \\
 &= \frac{SSP}{100} \cdot PP \left( 1 - \frac{PSP}{100} \right)
 \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 \text{ScontoFinale} &= \frac{PSP \cdot PP}{100} + \frac{SSP}{100} \cdot PP \left( 1 - \frac{PSP}{100} \right) \\
 &= PP \left[ \frac{PSP}{100} + \frac{SSP}{100} \cdot \left( 1 - \frac{PSP}{100} \right) \right] \\
 PP &= \frac{\text{ScontoFinale}}{\frac{PSP}{100} + \frac{SSP}{100} \cdot \left( 1 - \frac{PSP}{100} \right)} \\
 PP &= \frac{300}{\frac{10}{100} + \frac{30}{100} \cdot \left( 1 - \frac{10}{100} \right)} \\
 &= €810,81
 \end{aligned}$$

**Soluzione dell'esercizio 2.2.4 di pagina 10:**

$$\begin{aligned}
 \text{Debito} &= \text{Pagato} + \text{Sconto} \\
 &= \text{Pagato} + \frac{Sp \cdot \text{Debito}}{100} \\
 \text{Pagato} &= \text{Debito} - \frac{Sp \cdot \text{Debito}}{100} \\
 &= \text{Debito} \left( 1 - \frac{Sp}{100} \right) \\
 \text{Debito} &= \frac{\text{Pagato}}{1 - \frac{Sp}{100}} \\
 \text{Debito} &= \frac{€171}{1 - \frac{24}{100}} \\
 &= €225
 \end{aligned}$$

Si poteva, riflettendoci sopra, operare in questa maniera:

$$\text{Debito} = \text{Pagato} + \text{Sconto}$$

Quindi se lo sconto è il 24 % del debito, il pagato è il 76 %. Quindi

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\text{Pagato}}{\text{Debito}} \cdot 100 \\
 76 &= \frac{\text{€171}}{\text{Debito}} \cdot 100 \\
 \text{Debito} &= \frac{\text{€171}}{76} \cdot 100 \\
 &= \text{€225}
 \end{aligned}$$

**Soluzione dell'esercizio 2.2.5 di pagina 10:**

$$\begin{aligned}
 \text{Sconto} &= PI - PF \\
 P &= \frac{\text{Sconto}}{PI} \cdot 100 \\
 P &= \frac{24}{67} \cdot 100 \\
 &= 35,82 \%
 \end{aligned}$$

**Soluzione dell'esercizio 2.3.1 di pagina 10:**

$$\begin{aligned}
 \text{Incremento} &= PF - PI \\
 P &= \frac{\text{Incremento}}{PI} \cdot 100 \\
 P &= \frac{10}{42} \cdot 100 \\
 &= 23,81 \%
 \end{aligned}$$

**Soluzione dell'esercizio 2.3.2 di pagina 10:**

$$\begin{aligned}
 \text{Incremento} &= PF - PI \\
 P &= \frac{\text{Incremento}}{PI} \cdot 100 \\
 P &= \frac{18}{37} \cdot 100 \\
 &= 48,65 \%
 \end{aligned}$$

**Soluzione dell'esercizio 2.3.4 di pagina 10:**

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{INC}{PI} \cdot 100 \\
 INC &= \frac{p \cdot PI}{100} \\
 &= \frac{47 \cdot 47}{100} \\
 &= €22.09 \\
 PF &= PI + INC \\
 &= €69.09
 \end{aligned}$$

Altrimenti

$$\begin{aligned}
 PF &= PI + INC \\
 PF &= PI + \frac{p \cdot PI}{100} \\
 &= PI \left( 1 + \frac{p}{100} \right) \\
 &= 47 \left( 1 + \frac{47}{100} \right) \\
 &= €69.09
 \end{aligned}$$

**Soluzione dell'esercizio 2.4.2 di pagina 10:**

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{C \cdot r}{100} \cdot t \\
 &= \frac{1376 \cdot 13}{100} \cdot 12 \\
 &= €2146.56
 \end{aligned}$$

**Soluzione dell'esercizio 2.4.3 di pagina 10:**

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{C \cdot r}{100} \cdot \left[ a + \frac{m}{12} + \frac{g}{360} \right] \\
 &= \frac{41712 \cdot 18}{100} \cdot \left[ 7 + \frac{0}{12} + \frac{82}{360} \right] \\
 &= €54267.31
 \end{aligned}$$

**Soluzione dell'esercizio 2.4.4 di pagina 11:**

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{C \cdot r}{100} \cdot \left[ a + \frac{m}{12} + \frac{g}{360} \right] \\
 &= \frac{75637 \cdot 14}{100} \cdot \left[ 3 + \frac{2}{12} + \frac{0}{360} \right] \\
 &= €33532.40
 \end{aligned}$$



**Soluzione dell'esercizio 2.4.5 di pagina 11:**

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{C \cdot r}{100} \cdot \left[ a + \frac{m}{12} + \frac{g}{360} \right] \\
 &= \frac{9661 \cdot 9}{100} \cdot \left[ 11 + \frac{11}{12} + \frac{147}{360} \right] \\
 &= € 10716.46
 \end{aligned}$$

**Soluzione dell'esercizio 2.5.1 di pagina 11:**

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{C \cdot r}{100} \cdot \left[ a + \frac{m}{12} + \frac{g}{360} \right] \\
 &= \frac{83921 \cdot 10}{100} \cdot \left[ 15 + \frac{0}{12} + \frac{199}{360} \right] \\
 &= € 130520.47 \\
 M &= C + I \\
 &= € 83921 + € 130520.47 \\
 &= € 214441.47
 \end{aligned}$$

**Soluzione dell'esercizio 2.5.2 di pagina 11:**

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{C \cdot r}{100} \cdot \left[ a + \frac{m}{12} + \frac{g}{360} \right] \\
 &= \frac{17945 \cdot 6}{100} \cdot \left[ 10 + \frac{9}{12} + \frac{0}{360} \right] \\
 &= € 11574.53 \\
 M &= C + I \\
 &= € 17945 + € 11574.53 \\
 &= € 29519.53
 \end{aligned}$$

**Soluzione dell'esercizio 2.5.3 di pagina 11:**

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{C \cdot r}{100} \cdot \left[ a + \frac{m}{12} + \frac{g}{360} \right] \\
 &= \frac{51870 \cdot 1}{100} \cdot \left[ 6 + \frac{7}{12} + \frac{66}{360} \right] \\
 &= € 3509.87 \\
 M &= C + I \\
 &= € 51870 + € 3509.87 \\
 &= € 55379.87
 \end{aligned}$$

## 3

## Polinomi

## 3.1 Somme

**Esempio 3.1.1**

Supponiamo di voler sommare

$$3a + 2b^2 + 4a - 6b^2 + 2b$$

procediamo come segue:



$$\begin{array}{l} 3a + 2b^2 + 4a - 6b^2 + 2b \\ (3 + 4)a + (2 - 6)b^2 + \text{individuo i simili} \\ 7a - 4b^2 + 2b \quad 3 + 4 \text{ e } 2 - 6 \end{array}$$

## 3.2 Prodotti

**Esempio 3.2.1**

Supponiamo di avere



$$3(2a - 5b) - 7a(2a + 3b) + 5(a^2 + 3b)$$

In questo esempio abbiamo tre moltiplicazioni di un monomio per un binomio. A destra

si vedono i risultati parziali che poi sommati, danno il risultato finale.

$$\begin{array}{rcl}
 \overbrace{3(2a-5b)}^1 - \overbrace{7a(2a+3b)}^2 + \overbrace{5(a^2+3b)}^3 & \xrightarrow{\quad} & \\
 6a+ & \xleftarrow{\quad} & 3 \cdot 2a \\
 -15b & \xleftarrow{\quad} & 3 \cdot (-5b) \\
 \hline
 6a - 15b - 7a(2a+3b) + 5(a^2+3b) & \xrightarrow{\quad} & \\
 -14a^2 & \xleftarrow{\quad} & -7a \cdot (2a) \\
 -21ab & \xleftarrow{\quad} & -7a \cdot (3b) \\
 \hline
 6a - 15b - 14a - 21ab + 5(a^2+3b) & \xrightarrow{\quad} & \\
 +5a^2 & \xleftarrow{\quad} & 5 \cdot (a^2) \\
 +15b & \xleftarrow{\quad} & 5 \cdot (3b) \\
 \hline
 6a - 15b - 14a^2 - 21ab + 5a^2 + 15b & \xrightarrow{\quad} & \\
 6a - 9a^2 - 21ab & \xleftarrow{\quad} & \text{sommando}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$



### Esempio 3.2.2

Supponiamo di avere

$$2a(3a-6) - (6a^2-2b) - 3a(a-2b)$$

Anche in questo esempio abbiamo tre moltiplicazioni di un monomio per un binomio. Nel secondo prodotto si nota il segno meno fuori della parentesi tonda che in pratica cambierà il segno dei termini all'interno della parentesi. A destra abbiamo i risultati parziali delle tre moltiplicazioni.

$$\begin{array}{rcl}
 \overbrace{2a(3a-6)}^1 - \overbrace{(6a^2-2b)}^2 - \overbrace{3a(a-2b)}^3 & \xrightarrow{\quad} & \\
 6a^2+ & \xleftarrow{\quad} & 2a \cdot 3a \\
 -12a & \xleftarrow{\quad} & 2a \cdot (-6) \\
 \hline
 6a^2 - 12a - (6a^2-2b) - 3a(a-2b) & \xrightarrow{\quad} & \\
 -6a^2 & \xleftarrow{\quad} & -1 \cdot (6a^2) \\
 +2b & \xleftarrow{\quad} & -1 \cdot (-2b) \\
 \hline
 6a^2 - 12a - 6a^2 + 2b - 3a(a-2b) & \xrightarrow{\quad} & \\
 -3a^2 & \xleftarrow{\quad} & -3a \cdot (a) \\
 +6ab & \xleftarrow{\quad} & -3a \cdot (-2b) \\
 \hline
 6a^2 - 12a - 6a^2 + 2b - 6a + 6ab & \xrightarrow{\quad} & \\
 -18a + 2b + 6ab & \xleftarrow{\quad} & \text{sommando}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$



## 3.2. PRODOTTI

## 3.2.1 Polinomio per polinomio

**Esempio 3.2.3**

Supponiamo di avere

$$(3a - 2b)(2a - b) + (2a^2 - 2)(2 - a)$$

In questo esempio abbiamo due moltiplicazioni di un binomio per un binomio. A destra i passaggi parziali. Infine sommiamo gli elementi simili e otteniamo la soluzione.



$$\begin{array}{rcl} \overbrace{(3a - 2b)(2a - b)}^1 + \overbrace{(2a^2 - 2)(2 - a)}^2 & \xrightarrow{\quad} & \\ 6a^2 & \leftarrow 3a \cdot 2a & \\ -3ab & \leftarrow 3a \cdot (-b) & \\ -4ab & \leftarrow -2b \cdot (2a) & \\ +2b^2 & \leftarrow -2b \cdot (-b) & \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{rcl} 6a^2 - 7ab + 2b^2 + (2a^2 - 2)(2 - a) & \xrightarrow{\quad} & \\ 4a^2 & \leftarrow 2a^2 \cdot (2) & \\ -2a^3 & \leftarrow 2a^2 \cdot (-a) & \\ -4 & \leftarrow -2 \cdot 2 & \\ 2a & \leftarrow -2 \cdot (-a) & \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{rcl} 6a^2 - 7ab + 2b^2 + 4a^2 - 2a^3 - 4 + 2a & \xrightarrow{\quad} & \\ 10a^2 + 2b^2 - 7ab - 2a^3 - 4 + 2a & \leftarrow \text{Sommando} & \end{array}$$

**Esempio 3.2.4**

Supponiamo di avere



$$(xy - 2)[(xy - 2)xy + 4 + 2xy] - (xy - 2)(x^2y^2 + 2xy + 4)$$

In questo esempio abbiamo quattro moltiplicazioni fra vari polinomi. A complicare le cose vi sono le regole di precedenza. A destra i vari risultati parziali. Si procede

seguendo l'ordine indicato sopra l'espressione.

$$\begin{array}{l}
 \overbrace{(xy-2) \overbrace{[(xy-2)xy+4+2xy]}^2}^3 - \overbrace{(xy-2)(x^2y^2+2xy+4)}^4 \quad \begin{array}{l} x^2y^2 \leftarrow xy \cdot xy \\ -2xy \leftarrow -2 \cdot xy \end{array} \\
 \\
 \overbrace{(xy-2) \overbrace{[x^2y^2-2xy+4+2xy]}^2}^3 - \overbrace{(xy-2)(x^2y^2+2xy+4)}^4 \quad \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \\
 \overbrace{(xy-2) \overbrace{[x^2y^2+4]}^3}^3 - \overbrace{(xy-2)(x^2y^2+2xy+4)}^4 \quad \text{Sommando} \\
 \overbrace{(xy-2) \overbrace{[x^2y^2+4]}^3}^3 - \overbrace{(xy-2)(x^2y^2+2xy+4)}^4 \quad \begin{array}{l} x^3y^3 \leftarrow xy \cdot (x^2y^2) \\ 4xy \leftarrow 4 \cdot xy \\ -2x^2y^2 \leftarrow -2 \cdot x^2y^2 \\ -8 \leftarrow -2 \cdot +4 \end{array} \\
 \\
 x^3y^3 + 4xy - 2x^2y^2 - 8 - \overbrace{(xy-2)(x^2y^2+2xy+4)}^4 \quad \begin{array}{l} \cdot (-1) \cdot xy \cdot x^2y^2 \\ -2 (-1) \cdot xy \cdot 2xy \\ -4 (-1) \cdot xy \cdot 4 \\ (-1) \cdot (-2) \cdot x^2y^2 \\ (-1) \cdot (-2) \cdot 2xy \\ (-1) \cdot (-2) \cdot 4 \end{array} \\
 \\
 x^3y^3 + 4xy - 2x^2y^2 - 8 - x^3y^3 - 2x^2y^2 - 4xy + 2x^2y^2 + 4xy + 8 \quad \begin{array}{l} 4xy - 2x^2y^2 \text{ Sommando} \end{array}
 \end{array}$$

### 3.2.2 Quadrato del binomio

**Esempio 3.2.5**

Supponiamo di voler calcolare il quadrato del binomio

$$(a + 2b)^2$$

procediamo come segue:



$$\begin{array}{rcl}
 (a + 2b)^2 & \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} & \\
 +a^2 & \xleftarrow{\hspace{1.5cm}} & a \cdot a \\
 +4b^2 & \xleftarrow{\hspace{1.5cm}} & 2b \cdot 2b \\
 +4ab & \xleftarrow{\hspace{1.5cm}} & 2 \cdot a \cdot 2b \\
 (a + 2b)^2 = a^2 + 4b^2 + 4ab & \xleftarrow{\hspace{1.5cm}} & \text{ottengo}
 \end{array}$$

**Esempio 3.2.6**

Supponiamo di voler calcolare il quadrato di

$$(2x - 3y)^2$$

procediamo come segue:



$$\begin{array}{rcl}
 (2x - 3y)^2 & \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} & \\
 +4x^2 & \xleftarrow{\hspace{1.5cm}} & 2x \cdot 2x \\
 +9y^2 & \xleftarrow{\hspace{1.5cm}} & (-3y) \cdot (-3y) \\
 -12xy & \xleftarrow{\hspace{1.5cm}} & 2 \cdot (2x) \cdot (-3y) \\
 (2x - 3y)^2 = 4x^2 + 9y^2 - 12xy & \xleftarrow{\hspace{1.5cm}} & \text{ottengo}
 \end{array}$$

**Esempio 3.2.7**

Supponiamo di voler calcolare il quadrato di

$$(2 - z)^2$$



$$\begin{array}{rcl}
 (2 - z)^2 & \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} & \\
 +4 & \xleftarrow{\hspace{1.5cm}} & 2 \cdot 2 \\
 +z^2 & \xleftarrow{\hspace{1.5cm}} & (-z) \cdot (-z) \\
 -4z & \xleftarrow{\hspace{1.5cm}} & 2 \cdot (2) \cdot (-z) \\
 (2 - z)^2 = 4 + z^2 - 4z & \xleftarrow{\hspace{1.5cm}} & \text{ottengo}
 \end{array}$$

**Esempio 3.2.8**

Supponiamo di voler calcolare il quadrato di



$$\left(1 - \frac{1}{2}z\right)^2$$



$$\begin{array}{rcl}
 \left(1 - \frac{1}{2}z\right)^2 & \xrightarrow{\hspace{10em}} & \\
 +1 & \xleftarrow{\hspace{10em}} & 1 \cdot 1 \\
 +\frac{1}{4}z^2 & \xleftarrow{\hspace{10em}} & \left(-\frac{1}{2}z\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}z\right) \\
 & & \\
 -z & \xleftarrow{\hspace{10em}} & 2 \cdot (1) \cdot \left(-\frac{1}{2}z\right) \\
 \left(1 - \frac{1}{2}z\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}z^2 - z & \xleftarrow{\hspace{10em}} & \text{ottengo}
 \end{array}$$

### 3.2.3 Differenza di quadrati

#### Esempio 3.2.9

Supponiamo di voler calcolare

$$(2x - 3y)(2x + 3y)$$

procediamo come segue



$$\begin{array}{rcl}
 (2x - 3y)(2x + 3y) & \xrightarrow{\hspace{10em}} & \\
 +4x^2 & \xleftarrow{\hspace{10em}} & 2x \cdot 2x \\
 -9y^2 & \xleftarrow{\hspace{10em}} & (-)(-3y) \cdot (-3y) \\
 (2x - 3y)(2x + 3y) = 4x^2 - 9y^2 & \xleftarrow{\hspace{10em}} & \text{ottengo}
 \end{array}$$

#### Esempio 3.2.10

Supponiamo di vole calcolare

$$(-4a - b)(-4a + b)$$

L'esempio non sembra una differenza di quadrati ma anche qui abbiamo un termine che mantiene il segno ed un termine che lo cambia, procediamo come segue



$$\begin{array}{rcl}
 (-4a - b)(-4a + b) & \xrightarrow{\hspace{10em}} & \\
 +16a^2 & \xleftarrow{\hspace{10em}} & -4x \cdot (-4x) \\
 -b^2 & \xleftarrow{\hspace{10em}} & (-)(-b) \cdot (-b) \\
 (-4a - b)(-4a + b) = 16a^2 - b^2 & \xleftarrow{\hspace{10em}} & \text{ottengo}
 \end{array}$$


#### Esempio 3.2.11

Supponiamo di vole calcolare



$$(a + b + c)(a + b + c)$$

L'esempio non sembra una differenza di quadrati ma anche qui abbiamo un termine che mantiene il segno ed un termine che lo cambia solo che qui non è un monomio ma un binomio, procediamo come segue:



$$\begin{aligned}
 & (a + b + c)(a - b - c) \\
 & [a + (b + c)][a - (b + c)] \leftarrow \text{raggruppamento} \\
 & \text{applico differenza di quadrati} \\
 & (a + b + c)(a - b - c) = a^2 - b^2 - c^2 - 2bc \leftarrow \text{ottengo}
 \end{aligned}$$


### 3.2.4 Cubo del Binomio

#### Esempio 3.2.12

Supponiamo di voler calcolare

$$(a - 3b)^3$$

procediamo come segue:



$$\begin{aligned}
 & (a - 3b)^3 \\
 & a^3 \leftarrow a \cdot a \cdot a \\
 & - (-3b) \cdot (-3b) \cdot (-3b) \\
 & -9a \cdot 3 \cdot (a) \cdot (a) \cdot (-3b) \\
 & + 3 \cdot (a) \cdot (-3b) \cdot (-3b) \\
 & (a - 3b)^3 = a^3 - 27b^3 - 9a^2b + 27ab^2 \leftarrow \text{ottengo}
 \end{aligned}$$


### 3.2.5 Quadrato del trinomio

#### Esempio 3.2.13

Supponiamo di voler calcolare

$$(a + 2b - 3c)^2$$

procediamo come segue:



$$\begin{aligned}
 & (a + 2b - 3c)^2 \\
 & a^2 \leftarrow a \cdot a \\
 & +4 (2b) \cdot (2b) \\
 & (-3c) \cdot (-3c) \\
 & + 2 \cdot (a) \cdot (2b) \\
 & 2 \cdot (a) \cdot (-3c) \\
 & 2 \cdot (2b) \cdot (-3c) \\
 & (a + 2b - 3c)^2 = a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 4ab - 6ac - 12bc \leftarrow \text{ottengo}
 \end{aligned}$$



### 3.3 Scomposizioni

Inserire esercizi

### 3.4 Minimo comune multiplo

Inserire esercizi

# 4

## Divisioni fra polinomi

---

### 4.1 Divisioni fra monomi

#### Esempio 4.1.1

Le seguenti divisioni sono possibili

$$3x^3y^2 : x^y = 3x^0y^1 = 3y$$

$$4x^5a^2b : 2x^2a = 2x^3ab$$



La seguente divisione è impossibile

$$x^4y^3 : y^5 = x^4y^{-2}$$

### 4.2 Divisione fra polinomi

#### Esempio 4.2.1



Supponiamo di voler fare la seguente divisione  $(x^3 - x^4 + 1) : (x^2 + 1)$

$$(x^3 - x^4 + 1) : (x^2 + 1)$$

Ordiniamo i polinomi

Scrivo la divisione lasciando spazi vuoti dove necessario

$$\begin{array}{r}
 -x^4 \quad +x^3 \quad \quad +1 \\
 -x^4 \quad +x^3 \quad \quad +1 \\
 \hline
 -x^4 \quad +x^3 \quad -x^2 \\
 -x^4 \quad \quad \quad -x^2 \\
 \hline
 \quad +x^3 \quad +x^2 \quad +1
 \end{array}$$

Calcolo il primo resto

$$\begin{array}{r}
 -x^4 \quad +x^3 \quad \quad +1 \\
 -x^4 \quad \quad \quad -x^2 \\
 \hline
 \quad +x^3 \quad +x^2 \quad +1
 \end{array}$$

Calcolo il secondo resto

$$\begin{array}{r}
 -x^4 \quad +x^3 \quad \quad +1 \\
 -x^4 \quad \quad \quad -x^2 \\
 \hline
 \quad +x^3 \quad +x^2 \quad +1 \\
 \quad +x^3 \quad \quad \quad +x \\
 \hline
 \quad \quad +x^2 \quad -x \quad +1
 \end{array}$$

Calcolo l'ultimo resto

$$\begin{array}{r}
 -x^4 \quad +x^3 \quad \quad +1 \\
 -x^4 \quad \quad \quad -x^2 \\
 \hline
 \quad +x^3 \quad +x^2 \quad +1 \\
 \quad +x^3 \quad \quad \quad +x \\
 \hline
 \quad \quad +x^2 \quad -x \quad +1 \\
 \quad \quad +x^2 \quad \quad \quad +1 \\
 \hline
 \quad \quad \quad -x
 \end{array}$$

**Esempio 4.2.2**

Supponiamo di voler dividere



$$(x^4 + 2x + 1) : (x^2 + 1)$$

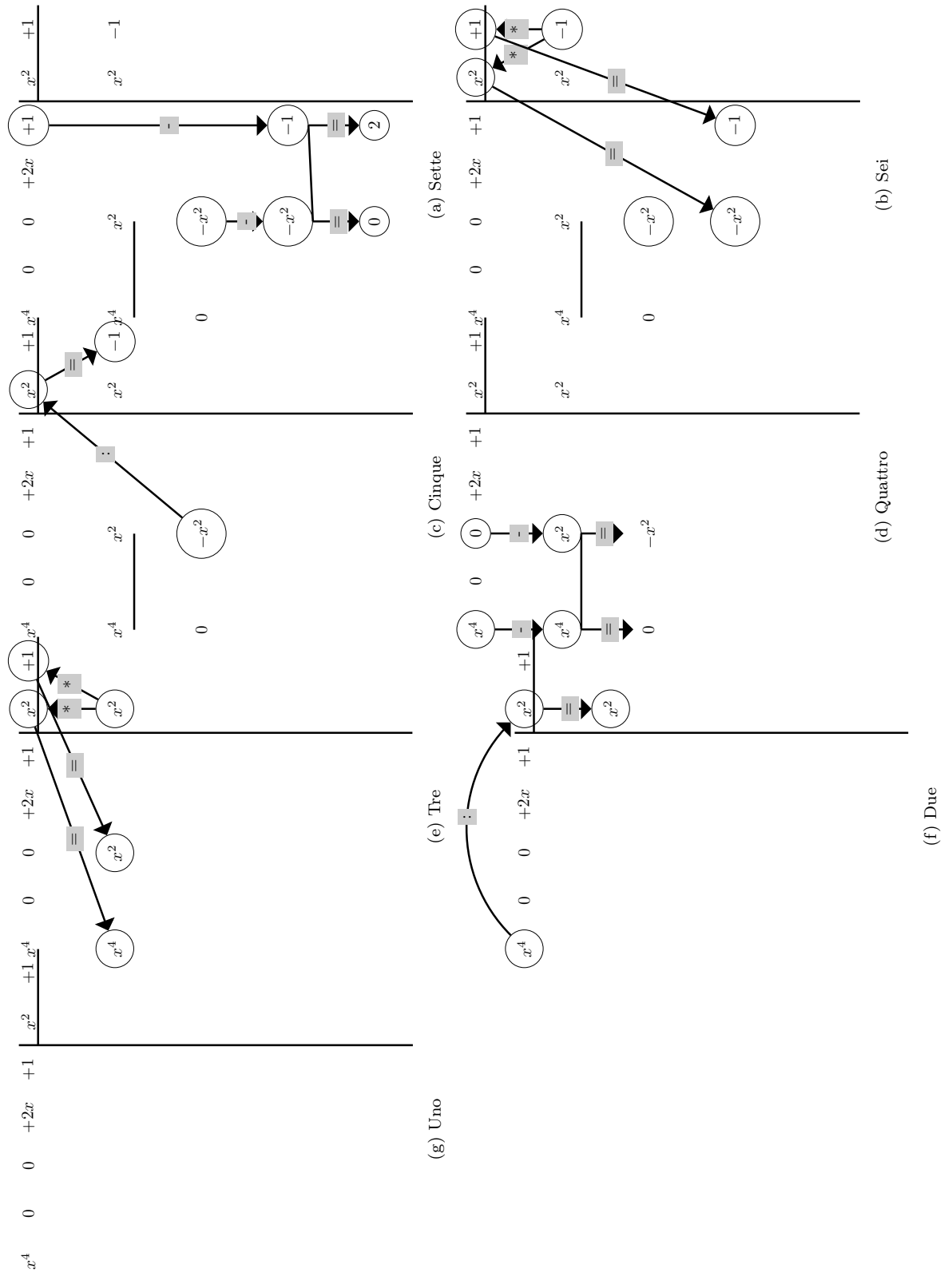


Figura 4.1: Divisione fra polinomi

### 4.3 Metodo di Ruffini

**Esempio 4.3.1**

Supponiamo di voler dividere

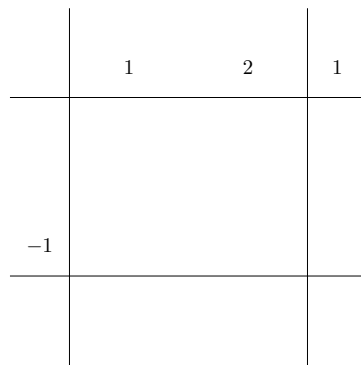
$$(x^2 + 2x + 1) : (x + 1)$$



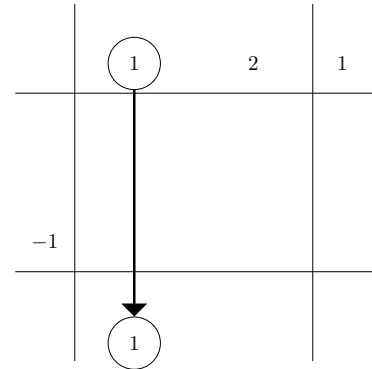
la risposta è

$$x + 1$$

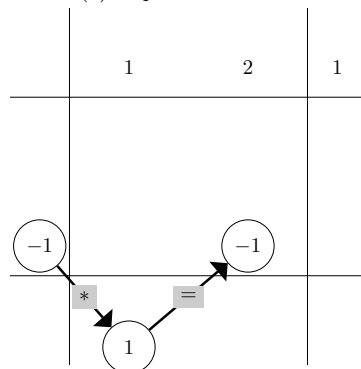
con resto zero.



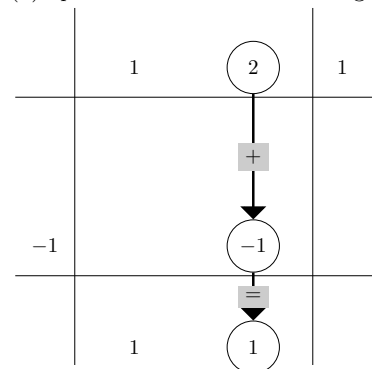
(a) Imposto il castello



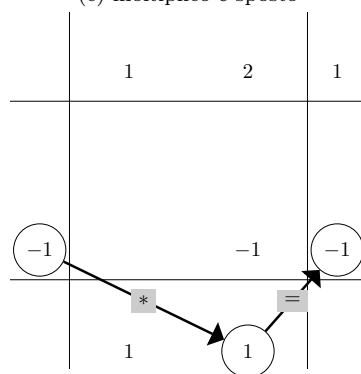
(b) Sposto il coefficiente sotto la riga



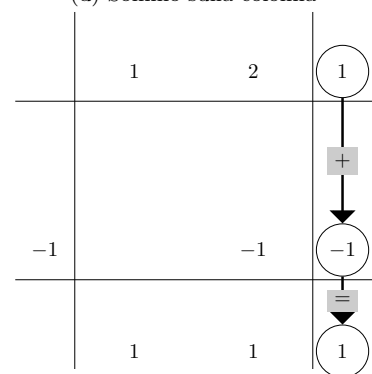
(c) multiplico e sposto



(d) Sommo sulla colonna



(e) Multiplico e sposto la risposta



(f) Sommo sulla colonna fine

Figura 4.3: Metodo di Ruffini

# 5

## Frazioni Algebriche

---

### 5.1 Semplificazione della frazione

Inserire esercizi

### 5.2 Riduzione allo stesso indice

Inserire esercizi

### 5.3 Somma fra frazioni

Inserire esercizi

### 5.4 Prodotto di frazioni

Inserire esercizi

### 5.5 Divisione fra frazioni

Inserire esercizi

$a + b]$

## Indice analitico

### **P**

#### Polinomi

    differenza  
    quadrati, [23](#), [24](#)

prodotti, [18–20](#)

quadrato

    binomio, [22](#)

    trinomio, [24](#)

somma, [18](#)



# Mezzi usati

- I mezzi usati
  - Lua<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X tramite la distribuzione T<sub>E</sub>X Live  
<http://www.tug.org/texlive>
  - Pacchetti usati
    1. Per la grafica il pacchetto PGF 3.1.9a, TikZ
    2. Per la grafica i pacchetti TKZ di Altermundus <http://altermundus.fr>
    3. Per l'elettronica il pacchetto CircuiTikZ
    4. Per la matematica il pacchetto  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ math
    5. Per la gestione della bibliografia Biber BibL<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X
    6. Per le presentazioni BEAMER
  - Editor usati
    1. T<sub>E</sub>XStudio  
<http://texstudio.sourceforge.net/>
    2. GeoGebra 5  
<https://www.geogebra.org>
- Aiuti e consigli
  1. Forum del G<sub>U</sub>I<sub>T</sub> Gruppo Utilizzatori Italiani di T<sub>E</sub>X  
<http://www.guitex.org/home/it/forum>
  2.  $\mathcal{A}\mathcal{r}\mathcal{s}\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$ nica la rivista del G<sub>U</sub>I<sub>T</sub>
  3. T<sub>E</sub>X ample.net  
<http://www.texample.net>  
da cui qualche immagine è stata tratta
  4. T<sub>E</sub>X StackExchange  
<http://tex.stackexchange.com>
- Aggiornamenti <http://breviariomatematico.altervista.org>