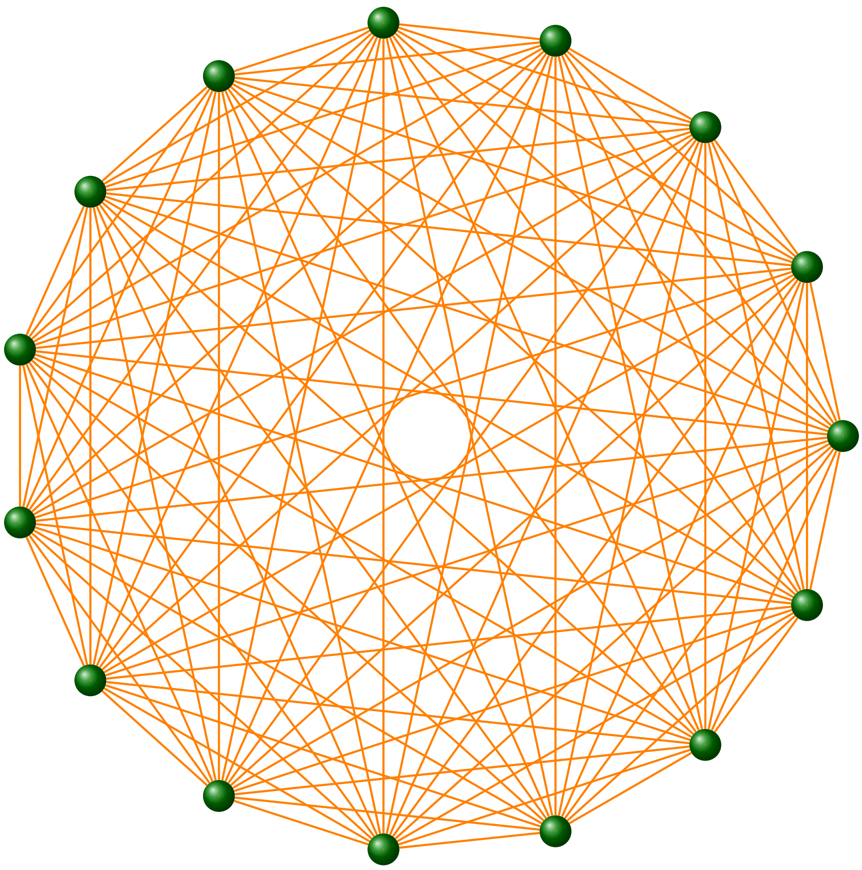
Claudio Duchi

APPUNTI DI MATEMATICA
PRIMO



−venerdì 3 dicembre 2021 09:42:15 CET−

Release: (b14e042) Autore:Claudio Duchi 2021-01-25

A Federico

Sicuramente, in questo lavoro vi sono errori e imprecisioni, per cortesia segnalatemeli.

venerdì 3 dicembre 2021 **09:42:15**

Indice

Elenco delle tabelle 6

Elenco delle figure 7

Elenco esempi 7

Esempi . . . 7

Contro esempi . . . 9

1 Numeri Naturali 11

1.1 Operazioni . . . 11

1.1.1 Addizione . . . 11

1.1.2 Sottrazione . . . 13

1.1.3 Moltiplicazione . . . 13

1.1.4 Divisione . . . 15

1.1.5 Potenza . . . 16

1.1.6 Distributiva . . . 18

1.1.7 Espressioni . . . 18

1.2 Numeri primi e composti . . . 18

1.2.1 Scomposizione in fattori primi . . . 20

1.3 Massimo Comun Divisore . . . 23

1.4 Minimo comune multiplo . . . 26

2 Numeri razionali assoluti 30

2.1 Frazione . . . 30

2.2 Numeri decimali . . . 30

2.2.1 Da frazione a numero decimale . . . 30

2.2.2 Da numero decimale a frazione . . . 32

2.2.3 Da numero percentuale a decimale . . . 36

2.2.4 Da numero decimale a percentuale . . . 36

2.2.5 Da percentuale a frazione . . . 36

2.2.6 Da frazione a percentuale . . . 37

2.3 Frazioni equivalenti . . . 37

2.4 Proprietà invariantiva . . . 37

2.5 Semplificare una frazione . . . 38

2.6 Riduzione allo stesso denominatore . . . 39

2.6.1 Confronto fra frazioni . . . 39

2.7 Operazioni . . . 40

2.7.1 Somma e sottrazione . . . 40

2.7.2 Moltiplicazione . . . 42

2.7.3 Semplificazioni e moltiplicazioni . . . 42

2.7.4 Divisione fra frazioni . . . 42

2.7.5 Potenze . . . 43

3 Le proporzioni **44**
3.1 Proporzioni semplici . . . 44
3.2 Proprietà delle proporzioni . . . 44
3.2.1 Proprietá fondamentale delle proporzioni . . . 44
3.3 Serie di rapporti uguali . . . 45

4 Numeri relativi **47**
4.1 Glossario . . . 47
4.2 Ordine . . . 47
4.3 Operazioni con i numeri relativi . . . 48
4.3.1 Somma sottrazione . . . 48
4.3.2 Prodotto . . . 48
4.3.3 Divisione . . . 48

5 Proprietà delle potenze **49**

6 Notazione scientifica **50**
6.1 Introduzione . . . 50
6.2 Convertire un numero in notazione scientifica . . . 50

7 Approssimazione, arrotondamento e troncamento **51**
7.1 Approssimazioni per difetto e per eccesso . . . 51
7.2 Troncamento . . . 51
7.3 Arrotondamenti . . . 52

8 Errori ed orrori **53**
8.1 Precedenze . . . 53
8.2 Lo zero . . . 53

9 Somme, prodotti e frazioni **54**
9.1 Segni . . . 54
9.2 Precedenze . . . 55
9.3 Somme prodotti divisioni . . . 55

10 Monomi **57**
10.1 Definizioni . . . 57
10.2 Operazioni . . . 60
10.2.1 Somma . . . 60
10.2.2 Divisione . . . 61

11 Polinomi **64**
11.1 Somme . . . 64
11.2 Prodotti . . . 64
11.2.1 Monomio per un polinomio . . . 64
11.2.2 Polinomio per polinomio . . . 66
11.2.3 Quadrato del binomio . . . 68
11.2.4 Differenza di quadrati . . . 70
11.2.5 Cubo del Binomio . . . 71
11.2.6 Quadrato del trinomio . . . 71

12 Divisioni fra polinomi **75**
12.1 Divisioni fra monomi . . . 75
12.2 Divisioni fra Polinomi e monomi . . . 75
12.3 Divisione fra polinomi . . . 75
12.4 Metodo di Ruffini . . . 78

13 Raccoglimento in fattori **80**

14 MCD e mcm **82**
14.1 MCD 82
14.2 mcm 84

Indice analitico **87**

Mezzi usati **89**

Elenco delle tabelle

1.1 Criteri di divisibilità 20

2.1 Somma di frazioni 41

5.1 Proprietà delle potenze 49

6.1 Costanti fisiche 50

9.1 Segni 54
9.2 Precedenze 55
9.3 Somme, prodotti 55
9.4 Prodotti notevoli 56
9.5 frazioni 56

10.1 Parte Numerica e letterale 58

11.1 prodotti 73
11.2 Prodotti 74

13.1 Polinomi raccoglimenti 80
13.2 Polinomi raccoglimenti 81

Elenco delle figure

1.1 Retta orientata . . . 11
1.2 Numeri Naturali . . . 12
1.3 Operazioni . . . 12
1.4 Operazioni in $\mathbb{N}$ . . . 12
1.5 Proprietà addizione . . . 13
1.6 Proprietà Sottrazione . . . 14
1.7 Proprietà Moltipplicazione . . . 14
1.8 I nomi della divisione . . . 15
1.9 Proprietà Divisione . . . 16
1.10 Proprietà Potenza . . . 17
1.11 Classificazione . . . 19
1.12 Albero Binario. . . . 19
1.17 Massimo Comun Divisore . . . 24
1.18 Algoritmo di Euclide . . . 25
1.20 Calcolo del mcm . . . 28

2.1 Da frazione a decimale . . . 31

4.1 Numeri relativi . . . 47
4.2 Retta orientata . . . 48

12.1 Divisione fra polinomi . . . 77
12.3 Metodo di Ruffini . . . 79

Elenco esempi

Esempi

1.2.1 Scomposizione numero . . . 23
1.3.1 MCD . . . 23
1.3.2 MCD . . . 25
1.3.3 MCD . . . 25
1.3.4 Metodo di Euclide . . . 26
1.4.1 mcm . . . 27
1.4.2 mcm . . . 27
1.4.3 mcm . . . 27
2.1.1 Frazione Impropria . . . 30
2.2.1 Frazione apparente . . . 31
2.2.2 Frazione decimale . . . 31
2.2.3 Numeri decimali finiti . . . 31
2.2.4 Numeri decimali finiti . . . 32
2.2.5 Numeri periodici . . . 32
2.2.6 Decimale finito . . . 32
2.2.7 Trovare la frazione generatrice . . . 33
2.2.8 Trovare la frazione generatrice . . . 34
2.2.9 Trovare la frazione generatrice . . . 34
2.2.10 Trovare la frazione generatrice . . . 34
2.2.11 Trovare la frazione generatrice . . . 35
2.2.12 Trovare la frazione generatrice . . . 35
2.2.13 Da percentuale a decimale . . . 36
2.2.14 Da decimale a percentuale . . . 36
2.2.15 Trasformare una percentuale in una frazione . . . 36
2.2.16 Da frazione a percentuale . . . 37
2.3.1 Frazioni equivalenti . . . 37
2.3.2 Frazioni equivalenti . . . 37
2.4.1 Proprietà invariantiva . . . 38
2.4.2 Frazioni equivalenti . . . 38
2.5.1 Semplificare la frazione . . . 38
2.5.2 Semplificare la frazione . . . 39
2.6.1 Trasformare due frazioni a denominatore diverso . . . 39
2.6.2 Ordinare in modo decrescente frazioni . . . 39
2.7.1 Somma/differenza due frazioni . . . 40
2.7.2 Somma/differenza due frazioni . . . 40
2.7.3 Moltiplicazione di frazione con frazione . . . 42
2.7.4 Prodotto numero con frazione . . . 42
2.7.5 Semplificazione in verticale . . . 42
2.7.6 Semplificazione in croce . . . 42
2.7.7 Frazioni reciproche . . . 43
2.7.8 Reciproco di un intero . . . 43

2.7.9 Divisione fra frazioni . . . 43
2.7.10 Divisione fra una frazione e un numero . . . 43
2.7.11 Potenza di una frazione . . . 43
6.2.1 Notazione scientifica . . . 50
7.1.1 Approssimazioni . . . 51
7.2.1 Troncamento . . . 52
7.2.2 Troncamento . . . 52
7.3.1 Arrotondamento . . . 52
7.3.2 Arrotondamento . . . 52
9.3.1 . . . 56
10.1.1 Monomio . . . 57
10.1.2 Non monomio . . . 57
10.1.3 Forma normale . . . 58
10.1.4 Monomio zero . . . 59
10.1.5 Monomi simili . . . 59
10.1.6 Monomi opposti . . . 59
10.1.7 Grado rispetto alla lettera . . . 60
10.2.1 Somma . . . 60
10.2.2 Prodotto di monomi . . . 61
10.2.3 Prodotto di monomi . . . 61
10.2.4 Divisioni monomi . . . 62
10.2.5 Divisioni monomi . . . 62
10.2.6 Divisioni monomi . . . 62
10.2.7 Divisioni monomi . . . 63
11.1.1 . . . 64
11.2.1 Moltiplicazione . . . 65
11.2.2 . . . 65
11.2.3 Moltiplicazione . . . 66
11.2.4 Moltiplicazione . . . 67
11.2.5 . . . 68
11.2.6 . . . 69
11.2.7 . . . 69
11.2.8 . . . 69
11.2.9 . . . 70
11.2.10 . . . 70
11.2.11 . . . 70
11.2.12 . . . 71
11.2.13 . . . 72
12.1.1 . . . 75
12.3.1 . . . 75
12.3.2 . . . 76
12.4.1 . . . 78
14.1.1 . . . 82
14.1.2 . . . 83
14.1.3 . . . 83
14.2.1 . . . 84
14.2.2 . . . 85
14.2.3 . . . 85

Contro esempi

Elenco delle cose da fare

1 Numeri Naturali

I numeri naturali sono un insieme numerico. Questo insieme, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \}$ è costituito da un numero infinito di elementi. Tutti i numeri naturali hanno, tranne lo zero, un precedente ed un successivo, questo definisce, per i numeri naturali, un ordine. L'insieme dei numeri naturali è discreto nel senso che fra un numero e il suo successivo non vi è nessun altro elemento dell'insieme. Una rappresentazione dell'inseme sono dei punti equidistanti su una semiretta orientata figura 1.1 dove i numeri sono ordinati dal minore al maggiore secondo il verso della retta.

1.1 Operazioni

Prima di parlare di operazioni in $\mathbb{N}$ spendiamo due parole sul concetto di operazione. In matematica, un'operazione è una relazione che lega, in generale, due elementi a un elemento detto risultato come nella figura figura 1.3a nella pagina successiva. Operazioni di questo tipo vengono dette binarie. Esistono anche operazioni unarie, come per esempio il cambio di segno, il quadrato di un numero eccetera in questo caso abbiamo un elemento in ingresso e uno in uscita. Le operazioni si dividono ulteriormente in interne o esterne a seconda che il risultato appartenga o no all'insieme dei valori in ingresso. L'ordine con cui sono scritte è importante. La regola prevede che vengano eseguite andando da sinistra verso destra. Per variare l'ordine di esecuzione sono introdotte le parentesi che indicano cosa debba essere eseguita per prima.

1.1.1 Addizione

L'addizione è una operazione binaria figura 1.4a nella pagina seguente interna in $\mathbb{N}$. I termini in ingresso si dicono addendi, il risultato somma. L'operazione di addizione è commutativa cioè cambiando l'ordine degli addendi il risultato non cambia.

$$2 + 3 = 3 + 2 = 5$$

L'operazione ha un elemento neutro lo zero. L'addizione dell'elemento neutro e di un addendo ha per somma l'addendo

$$4 + 0 = 0 + 4 = 4$$

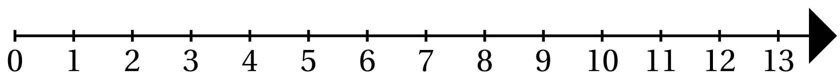


Figura 1.1: Retta orientata

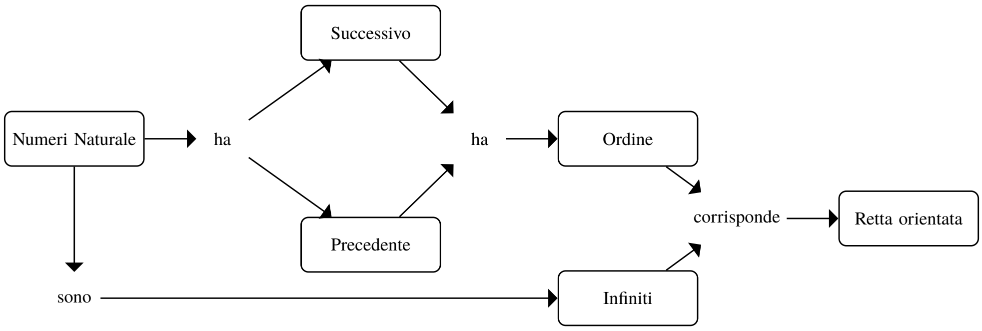
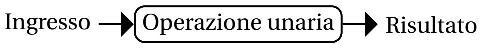


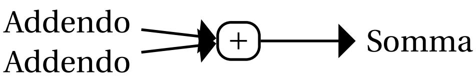
Figura 1.2: Numeri Naturali

(a) Operazione Binaria

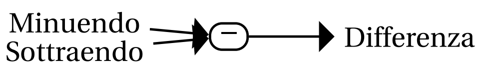


(b) Operazione Unaria

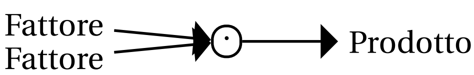
Figura 1.3: Operazioni



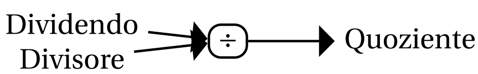
(a) Operazione addizione



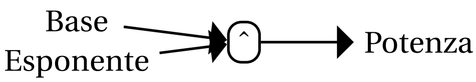
(b) Operazione sottrazione



(c) Operazione moltiplicazione



(d) Operazione divisione



(e) Operazione potenza

Figura 1.4: Operazioni in $\mathbb{N}$

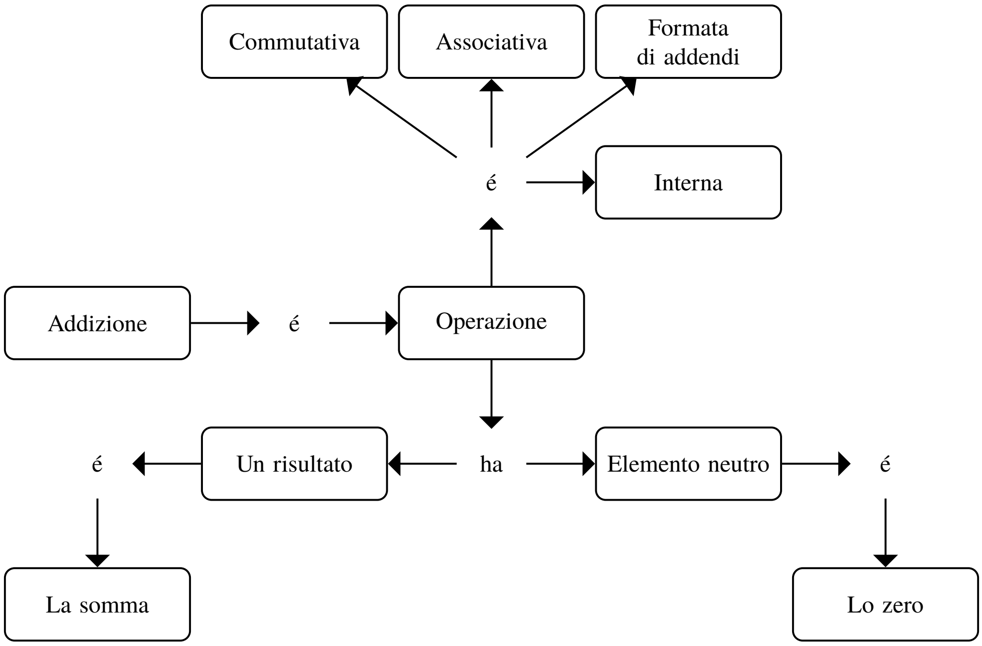


Figura 1.5: Proprietà addizione

. L'addizione è associativa. Nell'addizione tre numeri è possibile sostituire a due numeri la loro somma che il risultato non cambia.

$$2 + 3 + 4 = (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$$

La tabella figura 1.5 riepiloga i risultati.

1.1.2 Sottrazione

La sottrazione è una operazione binaria figura 1.4b nella pagina precedente non sempre interna in $\mathbb{N}$. I termini in ingresso si dicono minuendo e sottraendo, il risultato differenza. Se il sottraendo è maggiore del minuendo l'operazione è esterna. Se il minuendo è uguale al sottraendo la differenza è zero. La sottrazione non è commutativa

$$3 - 2 \neq 2 - 3$$

e neppure associativa

$$(4 - 3) - 2 \neq 4 - (3 - 2)$$

L'operazione gode della proprietà invariantiva, per cui aggiungendo o sottraendo la stessa quantità al minuendo e al sottraendo la differenza non cambia figura 1.6 nella pagina successiva.

1.1.3 Moltiplicazione

La moltiplicazione è una operazione binaria figura 1.4c nella pagina precedente interna in $\mathbb{N}$. I termini in ingresso si dicono fattori, il risultato prodotto. L'operazione di moltiplicazione è commutativa quindi cambiando l'ordine degli fattori il risultato non cambia

$$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6$$

. L'operazione ha un elemento neutro uno. La moltiplicazione dell'elemento neutro e di un fattore ha per prodotto il fattore

$$4 \cdot 1 = 1 \cdot 4 = 4$$

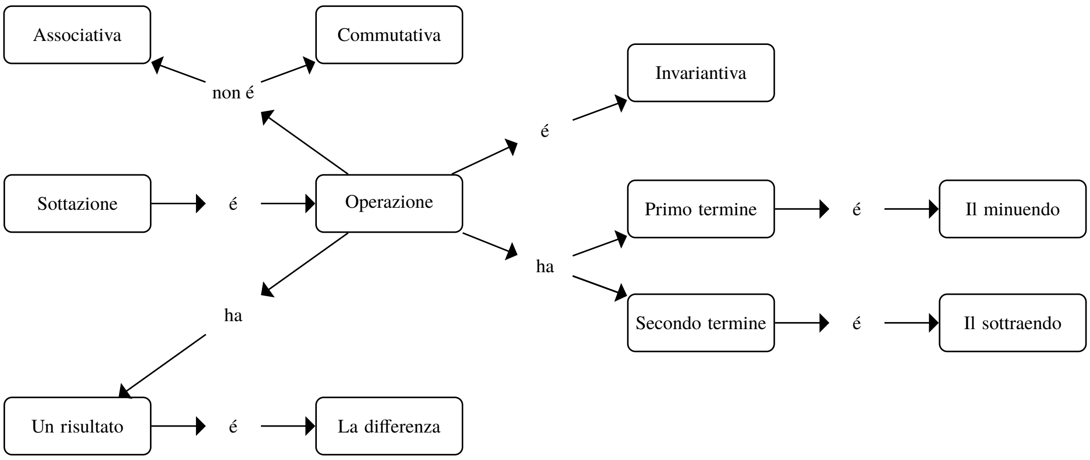


Figura 1.6: Proprietà Sottrazione

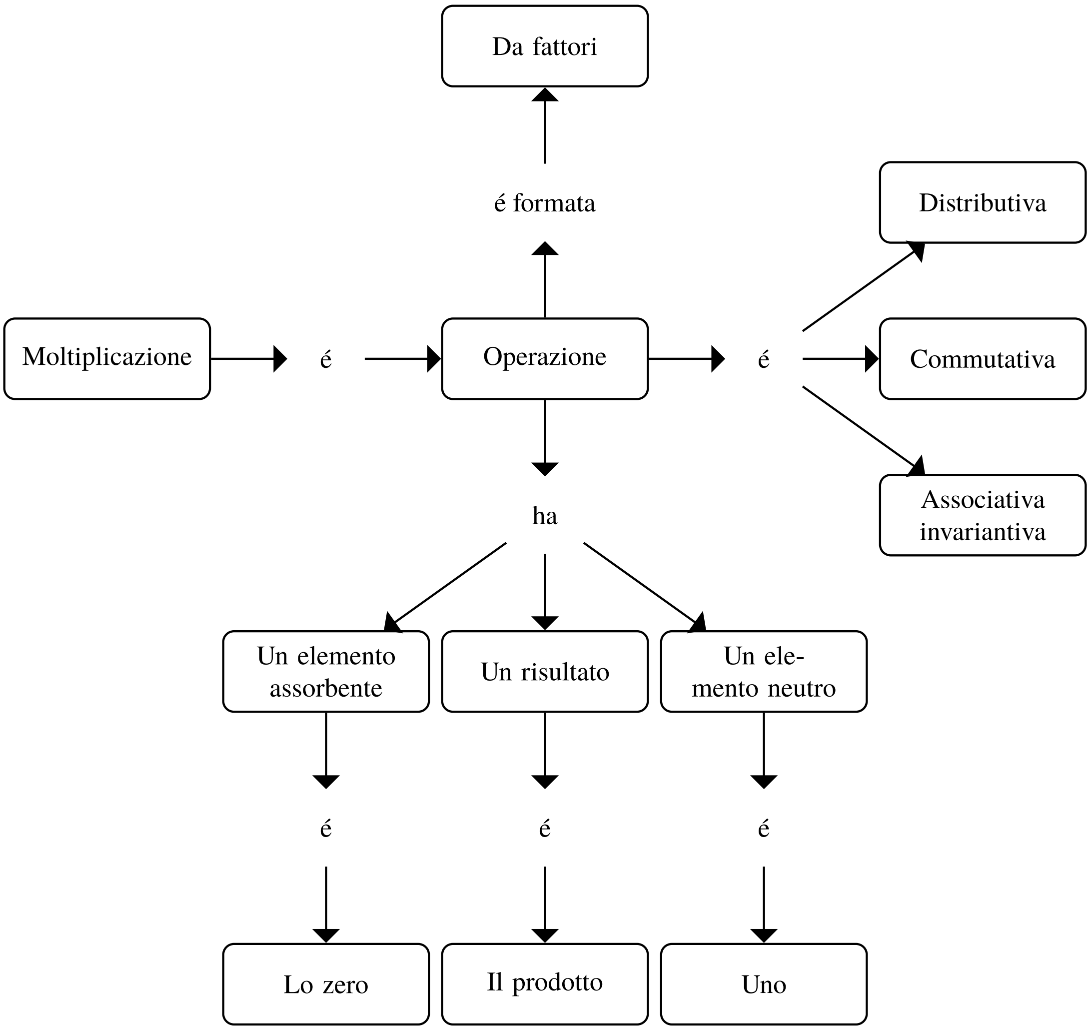


Figura 1.7: Proprietà Moltipplicazione

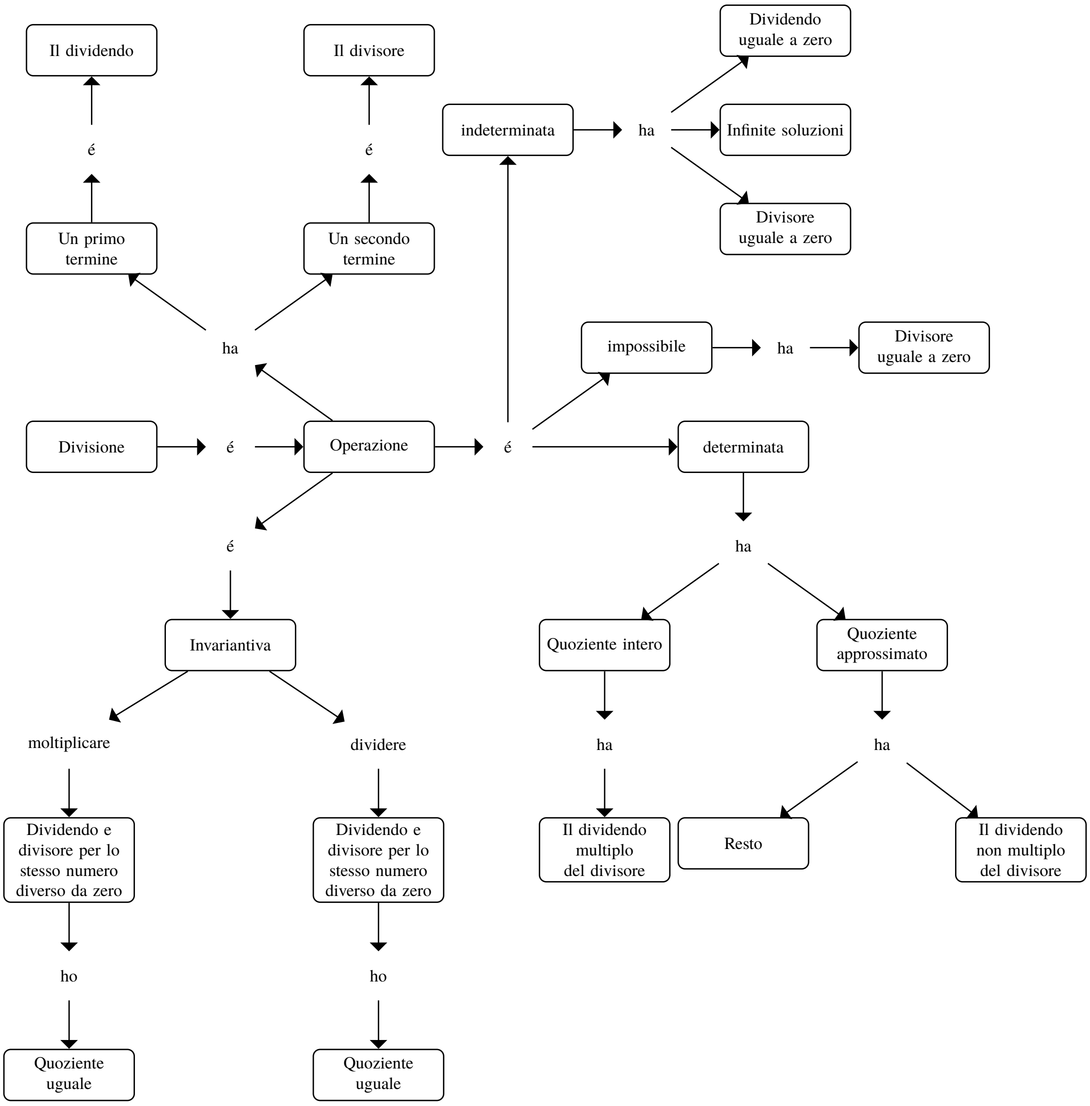


Figura 1.8: I nomi della divisione

. La moltiplicazione è associativa. Nella moltiplicazione di tre numeri o più numeri il risultato finale non cambia se vengono sostituiti due fattori con il loro prodotto figura 1.7 nella pagina precedente

$$2 \cdot 3 \cdot 4 = (2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4)$$

. La moltiplicazione è dissociativa. Nella moltiplicazione il risultato finale non cambia se viene sostituito un fattore con altri fattori il cui prodotto è uguale al fattore sostituito

$$6 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

. L'elemento assorbente è lo zero. La moltiplicazione di un numero qualunque per zero ha come prodotto zero figura 1.7 nella pagina precedente

1.1.4 Divisione

La divisione è una operazione binaria figura 1.4d a pagina 12 non sempre interna in $\mathbb{N}$. I termini in ingresso si dicono dividendo e divisore, il risultato quoziente. Se il dividendo non è multiplo del divisore l'operazione è esterna. La divisione non è commutativa

$$3 \div 2 \neq 2 \div 3$$

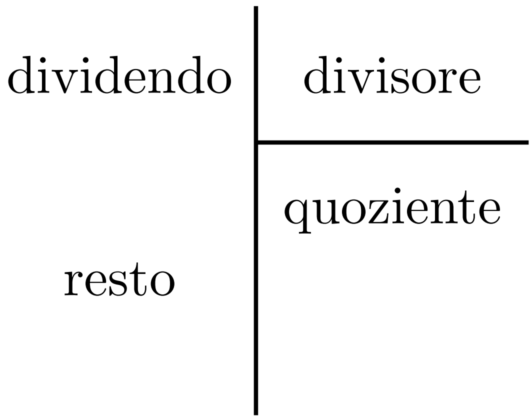


Figura 1.9: Proprietà Divisione

e neppure associativa

$$(4 \div 3) \div 2 \neq 4 \div (3 \div 2)$$

L'operazione gode della proprietà invariantiva, per cui moltiplicando o dividendo la stessa quantità diverso da zero, al dividendo e al divisore il quoziente non cambia figura 1.8 nella pagina precedente. Casi particolari sono

$$1 \div 0$$

$$0 \div a$$

Nel primo caso la divisione è impossibile. Nel secondo è indeterminata.

1.1.5 Potenza

La potenza è una operazione binaria figura 1.4e a pagina 12 interna in $\mathbb{N}$. I termini in ingresso si dicono base ed esponente il risultato potenza. L'indice della potenza indica quante volte la base deve essere moltiplicata per se stessa. Quindi

$$a^1 = a \; a^2 = a \cdot a \; a^3 = a \cdot a \cdot a \text{ eccetera}$$

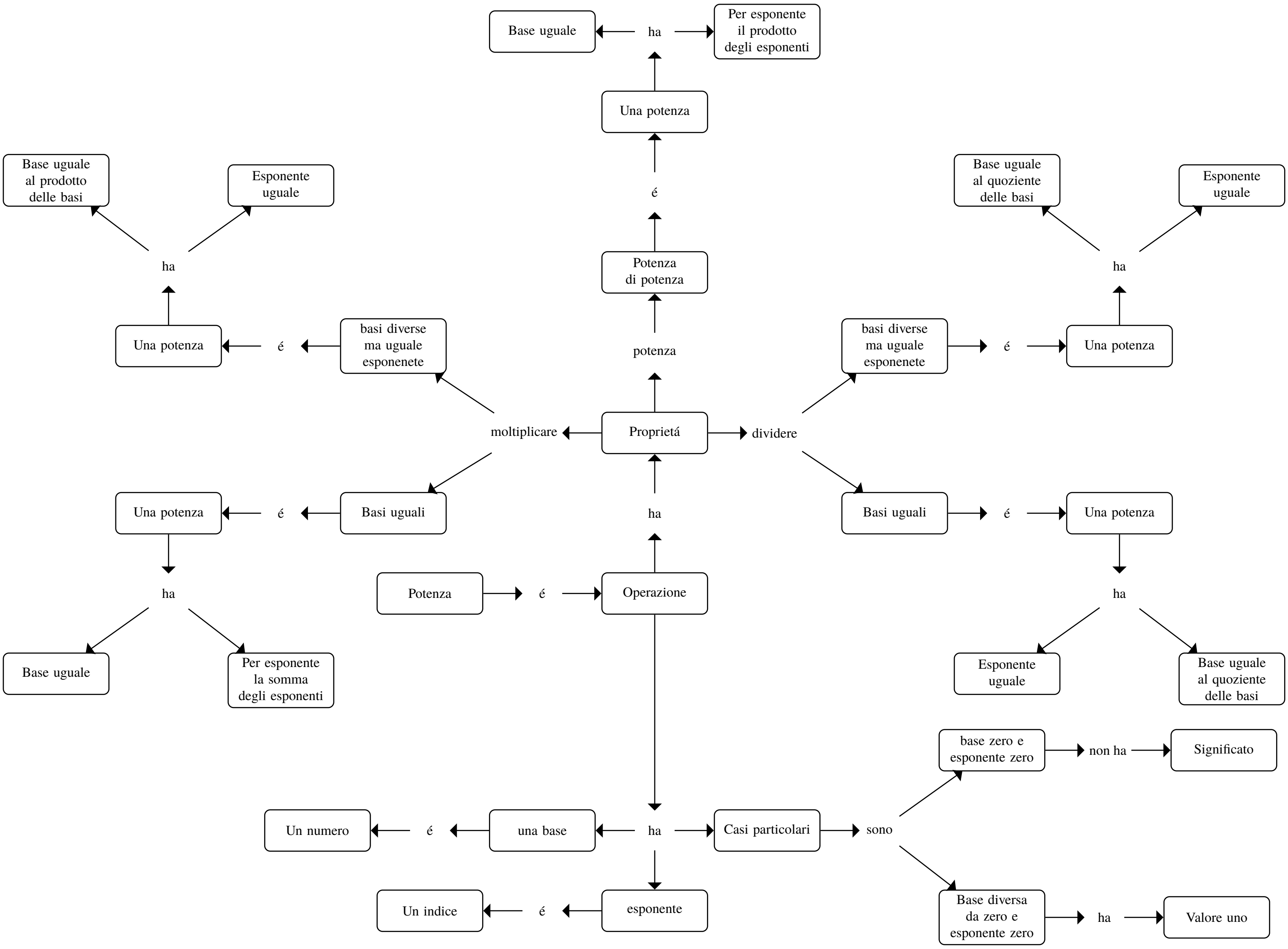


Figura 1.10: Proprietà Potenza

La potenza ha varie proprietà rispetto al prodotto e la divisione. non ha nessuna proprietà rispetto la somma e la sottrazione ciò segue dal fatto che la potenza si basa sulla moltiplicazione.

Per la moltiplicazione vale che il prodotto di potenze con base uguale, è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$$

Il prodotto di potenze di basi diverse ma esponente uguale è una potenza che ha per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente.

$$2^3 \cdot 4^3 = 8^3$$

Per la divisione vale che la divisione di potenze con base uguale, è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti.

$$2^5 \div 2^3 = 2^2$$

Questa proprietà non è sempre definita. La proprietà è valida se il grado del dividendo è maggiore del grado del divisore e la divisione è definita. La divisione di potenze di basi diverse ma esponente uguale è una potenza che ha per base il quoziente delle basi e per esponente lo stesso esponente. Anche in questo caso la divisione deve essere definita.

$$4^3 \cdot 2^3 = 2^3$$

1.1.6 Distributiva

La proprietà distributiva non è un'operazione ma è una proprietà delle operazioni di addizione e moltiplicazione. Questa proprietà lega le due operazioni nel senso che è possibile cambiare l'ordine di esecuzione fra la somma e il prodotto e il risultato non cambia.

$$5 \cdot (2 + 3) = 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 25$$

1.1.7 Espressioni

Un'espressione è la combinazione di una o più operazioni fra loro anche diverse. Per convenzione si dice che le operazioni vengono eseguite nell'ordine in cui si trovano leggendo l'espressione da sinistra. La precedenza spetta alle potenze poi alle moltiplicazioni divisioni infine alle somme differenze. A parità di precedenza viene eseguita l'operazione che s trova più a sinistra. L'ordine di esecuzione può essere cambiato inserendo fra parentesi l'operazione da eseguire prima. Vi sono tre tipi di parentesi quindi tre livelli di priorità.

1.2 Numeri primi e composti

Per la moltiplicazione i numeri naturali (escluso lo zero) sono divisibili in due gruppi: in numeri primi e in numeri composti o multipli. Un numero è composto se è il prodotto di due o più numeri diversi da uno e da lui stesso. Un numero è primo se non è composto.

Anche con la divisione possiamo classificare in due gruppi: i numeri primi e i numeri divisibili. Un numero è divisibile per un altro numero diverso da uno se il resto della divisione è zero. Un numero non divisibile è primo. La figura figura 1.11 nella pagina seguente riassume quanto detto.

Esistono varie regole che permettono di semplificare la ricerca del numero divisore. La tabella tabella 1.1 a pagina 20 le riassume.

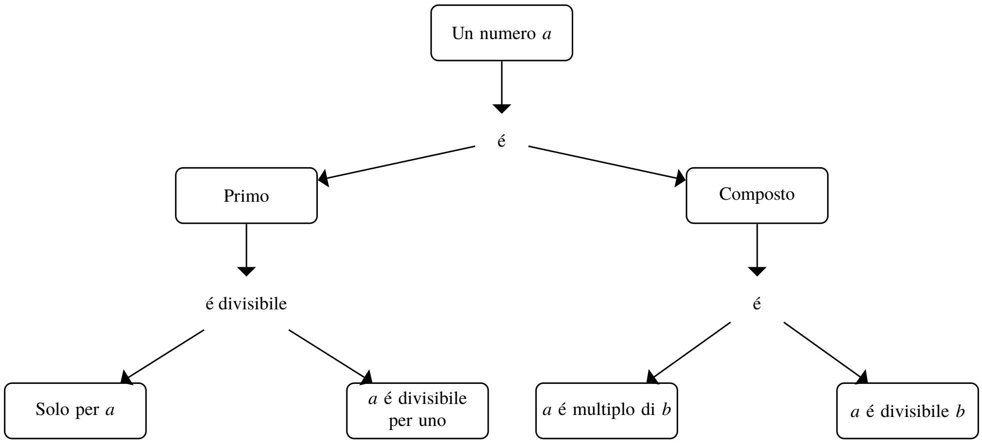


Figura 1.11: Classificazione

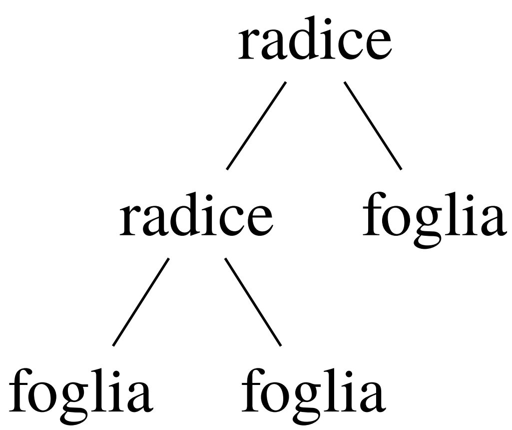


Figura 1.12: Albero Binario

N		Regola
2	Se	l'ultima cifra è pari, cioè è 0; 2; 4; 6 e 8
3	Se	la somma delle cifre è divisibile per tre.Esempio 375 $3+7+5 = 15 \div 3 = 5$ infatti $375 \div 3 = 125$
4	Se	le ultime due cifre sono divisibili per quattro o sono due zeri **00**. Esempio 4**60** $60 \div 4 = 15$ $469 \div 4 = 115$
5	Se	l'ultima cifra è divisibile per cinque
6	Se	è divisibile contemporaneamente per tre e per due
8	Se	ultime tre cifre sono divisibili per 8 o sono tre zeri **000**. Esempio 9**872** le ultime tre cifre sono divisibili per otto $872 \div 8 = 109$ $9872 \div 8 = 1234$
9	Se	la somma delle cifre è divisibile per 9. Esempio 405 $4+0+5 = 9$ $405 \div 9 = 45$
10	Se	l'ultima sua cifra è zero
11	Se	la differenza della somma delle cifre di posto pari e le cifre di posto dispari è zero o si divide per undici. Esempio 25652 $(5+5) - (2+6+2) = 0$ $25652 \div 11 = 2332$. Esempio 4 145 889 $(4+4+8+9) - (1+5+8 = 11)$ $4145889 \div 11 = 376899$
12	Se	è divisibile contemporaneamente per tre e per quattro
25	Se	il numero formato dalle ultime due cifre è divisibile per venticinque

Tabella 1.1: Criteri di divisibilità

1.2.1 Scomposizione in fattori primi

Iniziamo a introdurre un oggetto che utilizzeremo in seguito. Un albero binario è formato da un nodo detto radice da cui si staccano due nodi detti figli. Un nodo senza figli è detto foglia.

Per scomposizione in fattori primi di un numero si intende riscrivere quel numero come prodotto di numeri primi (fattori). Procediamo come nella figura figura 1.16 a pagina 22.

A Iniziamo con 210;

B 210 si può scrivere come il prodotto di due numeri 21 e 10;

C 21 si può scrivere come il prodotto di due numeri 7 e 3 che essendo primi cerchio;

D 10 si può scrivere come il prodotto di due numeri 2 e 5 che essendo primi cerchio;

Posso dire che

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5$$

Ho ottenuto la scomposizione cercata.

Per la scomposizione di 180, procediamo come prima e otteniamo lo schema figura 1.14 nella pagina successiva. Quindi la scomposizione cercata è:

$$180 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

La scomposizione di un numero in fattori è unica. Non vi possono essere due scomposizioni in fattori diverse per lo stesso numero. L'esempio figura 1.15 a pagina 22 mostra che anche procedendo in maniera diversa, la scomposizione finale è la stessa. Un altro metodo per scomporre un numero in fattori è quello di dividere ripetutamente il numero da scomporre per dei primi, terminando quando il quoziente ottenuto è uno.

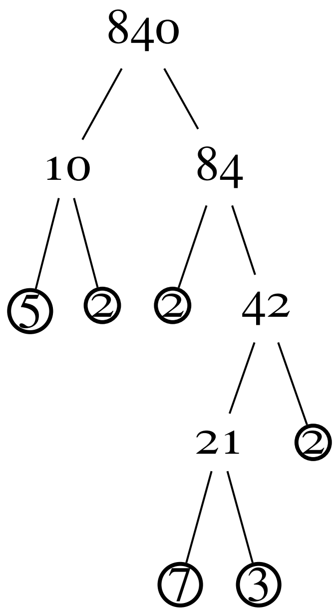


Figura 1.13: Scomposizione di120

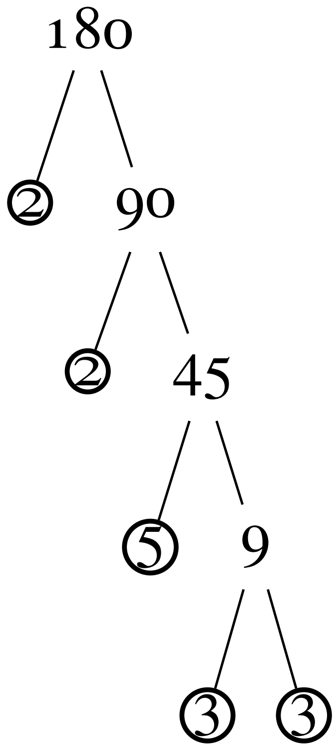


Figura 1.14: Scomposizione di 180

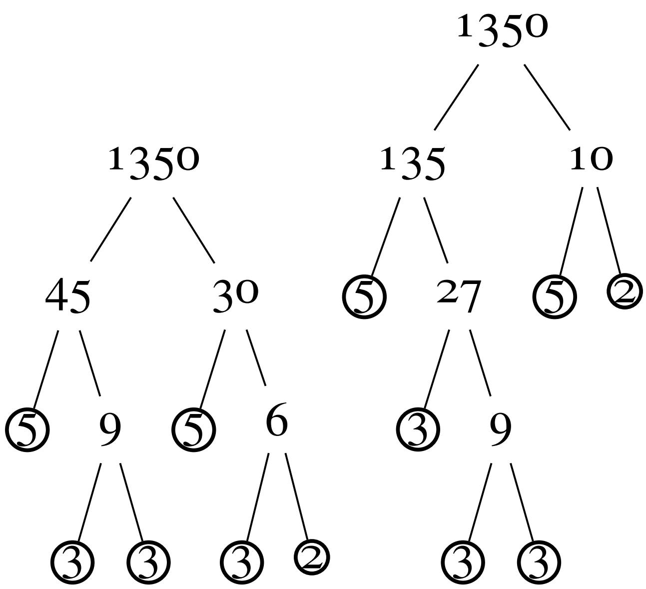


Figura 1.15: Scomposizioni di 1350

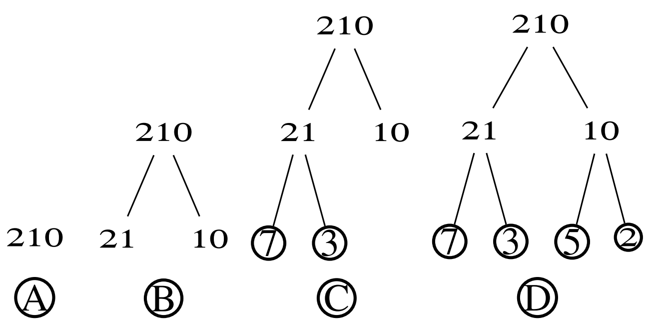


Figura 1.16: Scomposizioni di 210

Esempio 1.2.1. Scomposizione numero

Supponiamo di voler scomporre il 120.

Procediamo come segue

1 2 0	2
6 0	2
3 0	2
1 5	3
5	5
1	

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

1.3 Massimo Comun Divisore

Dati due o più numeri, il mcd è il numero più grande in comune che li divide tutti. Vi sono casi, in cui il mcd vale uno, perché uno è l'unico numero che li divide. In questo caso si dice che i due numeri sono primi fra di loro. Per calcolare $\mathrm{mcd}(120, 180, 1350)$ utilizziamo lo schema figura 1.17 nella pagina successiva. Abbiamo già scomposto questi tre numeri e allineo le scomposizioni.

$$\begin{array}{rclllll} 840 & = & 2^3 & 3 & 5 & 7 \\ 180 & = & 2^2 & 3 & 5 & \\ 1350 & = & 2 & 3^3 & 5^2 & \end{array}$$

I fattori comuni sono 2; 3 e 5 e presi gli esponenti minori ottengo che

$$\mathrm{mcd}(840; 180; 1350) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

Un modo veloce per calcolare il mcd è l'algoritmo di Euclide. Il diagramma figura 1.18 a pagina 25 mostra la versione con divisione.

Supponiamo di voler calcolare il mcd di $a = 27$ e di $b = 15$. Seguiamo lo schema, dividiamo a con b otteniamo un quoziente di 1 e un resto di 12. Il resto non è 0 per cui $a = 15$ e di $b = 12$ e ripetiamo. Dividiamo a con b otteniamo un quoziente di 1 e un resto di 3. Il resto non è 0 per cui $a = 15$ e di $b = 3$ e ripetiamo. Dividiamo a con b otteniamo un quoziente di 5 e un resto di 0. Il resto è 0 per cui $\mathrm{mcd} = 3$. La tabella seguente mostra i passaggi necessari.

a	b	a/b	r
27	15	1	12
15	12	1	3
12	3	4	0

Esempio 1.3.1. MCD

Supponiamo di voler calcolare il mcd fra 40 e 12.

Organizziamo i calcoli come nella tabella seguente. Inizio dividendo 40 per 12. Ottengo come quoziente 3 e per resto 4. La seconda riga ha per a il precedente valore di b e per b il valore di r. Divido 12 per 4. Ottengo come quoziente 3 e per resto 0. Essendo il resto uguale a zero, $\mathrm{mcd}(40; 12) = 4$.

a	b	a/b	r
40	12	3	4
12	4	3	0

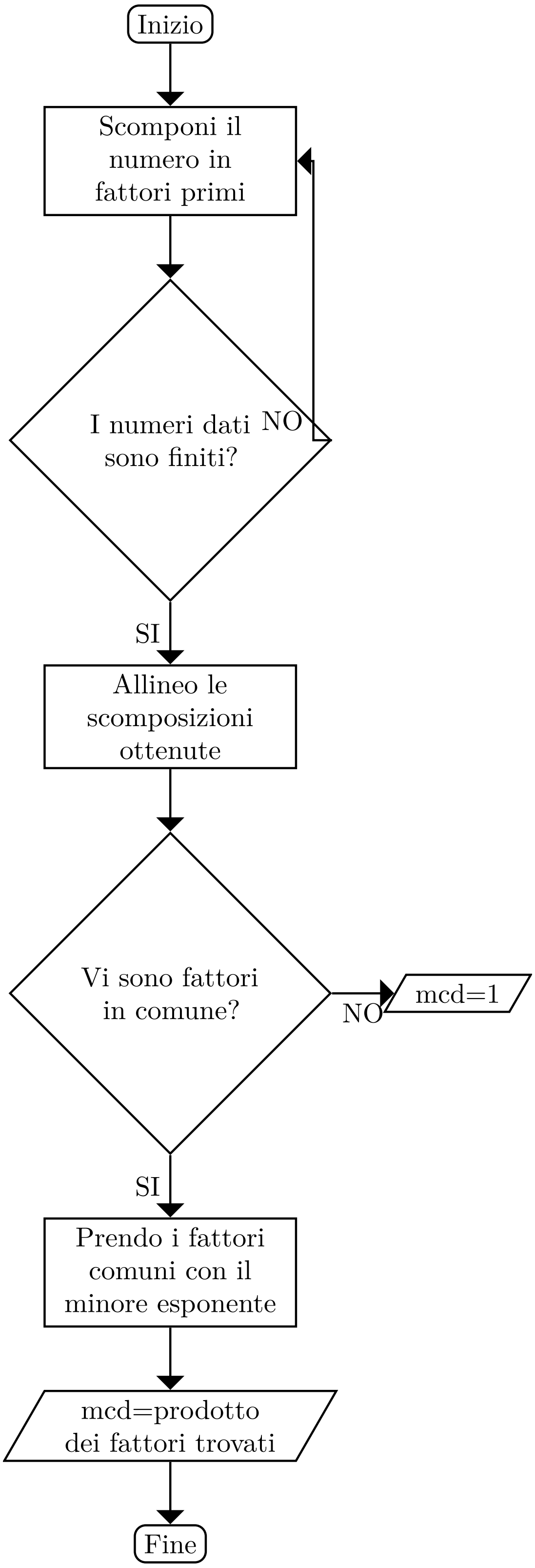


Figura 1.17: Massimo Comun Divisore

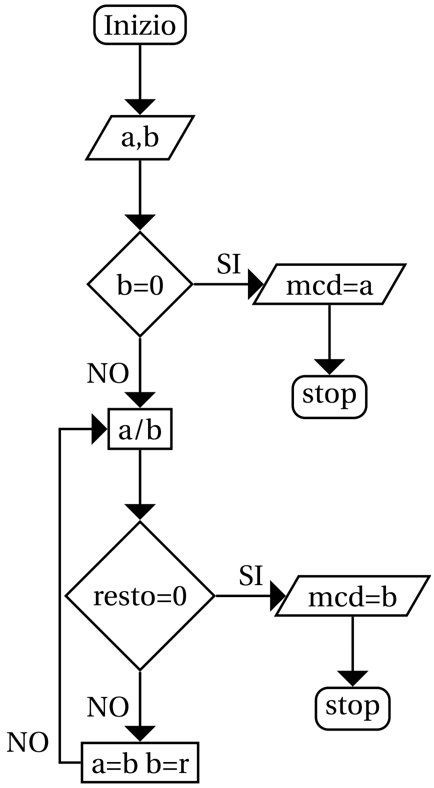


Figura 1.18: Algoritmo di Euclide

Esempio 1.3.2. MCD

Calcoliamo il mcd fra 85 e 26.

Dopo qualche passaggio otteniamo che il resto è zero quando $b = 1$, quindi $\text{mcd}(85; 26) = 1$. I numeri sono primi fra di loro.

a	b	a/b	r
85	26	3	7
26	7	3	5
7	5	1	2
5	2	2	1
2	1	2	0

Esempio 1.3.3. MCD

Calcoliamo il mcd fra 128 e 75.

Imposto la tabella

a	b	a/b	r
128	75	1	53
75	53	1	22
53	22	2	9
22	9	2	4
9	4	2	1
4	1	4	0

Dato che per resto zero il valore di b è uno i due numeri sono primi fra loro.

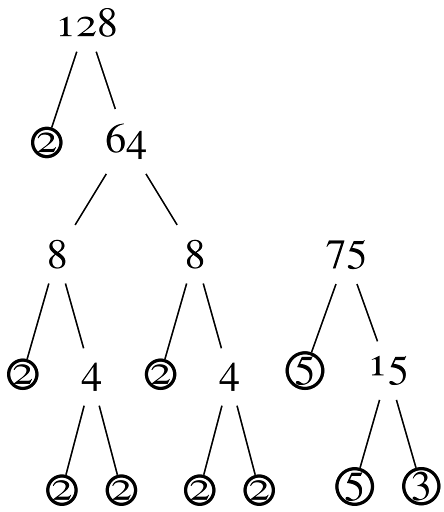


Figura 1.19: Scomposizione di 128 e 75

Calcoliamo lo stesso mcd con il metodo delle scomposizioni. Dalla tabella figura 1.19 abbiamo le seguenti scomposizioni allineate:

$$\begin{array}{rcllll} 128 & = & 2^7 & & \\ 75 & = & & 3 & 5^2 \end{array}$$

Dato che non vi sono fattori in comune, il mcd è uno.

Esempio 1.3.4. Metodo di Euclide

Utilizziamo il metodo di Euclide per calcolare il mcd tra 60; 32 e 50.

Il procedimento è il seguente prima trovo il mcd tra 60 e 32 e poi cerco il mcd fra il mcd trovato e 50. Imposto la tabella

a	b	a/b	r
60	32	1	28
32	28	1	4
28	4	7	0

Il $\text{mcd}(60; 32) = 4$ Trovo il $\text{mcd}(50; 4)$ Imposto la tabella

a	b	a/b	r
50	4	21	2
4	2	2	0

Il mcd tra 60; 32 e 50 è due.

1.4 Minimo comune multiplo

Il minimo comune multiplo fra due più o numeri è il più piccolo multiplo in comune fra i numeri dati.

Per calcolare il minimo comune multiplo fra 120; 80 e 45 scompongo in fattori primi i tre numeri come nello schemafigura 1.21 a pagina 29 e seguo la procedura figura 1.20 a pagina 28

Allineo le scomposizioni

$$\begin{array}{rcllll} 120 & = & 2^3 & 3 & 5 \\ 80 & = & 2^4 & & 5 \\ 45 & = & & 3^2 & 5 \end{array}$$

quindi

$$\mathrm{mcm}(120; 80; 45) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Esempio 1.4.1. mcm

Calcoliamo lo stesso mcm con il metodo delle scomposizioni.

Dalla tabella figura 1.19 nella pagina precedente abbiamo le seguenti scomposizioni allineate:

$$\begin{array}{rclll} 128 & = & 2^7 & & \\ 75 & = & & 3 & 5^2 \end{array}$$

non avendo fattori in comune avremo

$$\mathrm{mcm}\, 128; 75 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5^2 = 9600$$

Un altro modo per trovare il mcm di due numeri è utilizzare la seguente formula

$$\mathrm{mcm}(a, b) = \frac{a \cdot b}{\mathrm{mcd}(a, b)}$$

Esempio 1.4.2. mcm

Calcoliamo il mcm fra 128 e 76.

Iniziamo a calcolare il mcd con il metodo di Euclide.

a	b	a/b	r
128	76	1	52
76	52	1	24
52	24	2	4
24	4	6	0

quindi

$$\mathrm{mcd}(128; 76) = 4$$

ottengo

$$\mathrm{mcm}(128, 76) = \frac{128 \cdot 76}{4} = 2432$$

Il mcm è una operazione per cui vale la proprietà associativa quindi

$$\mathrm{mcm}(a, b, c) = \mathrm{mcm}(\mathrm{mcm}(a, b), c)$$

di conseguenza possiamo sostituire a due temini il loro minimo comune multiplo.

Esempio 1.4.3. mcm

Calcoliamo il minimo comune multiplo fra 45; 78 e 48.

Iniziamo a calcolare il massimo comun divisore fra 45 e 78 con il metodo di Euclide.

a	b	a/b	r
78	45	1	33
45	33	1	12
33	12	2	9
12	9	1	3
9	3	3	0

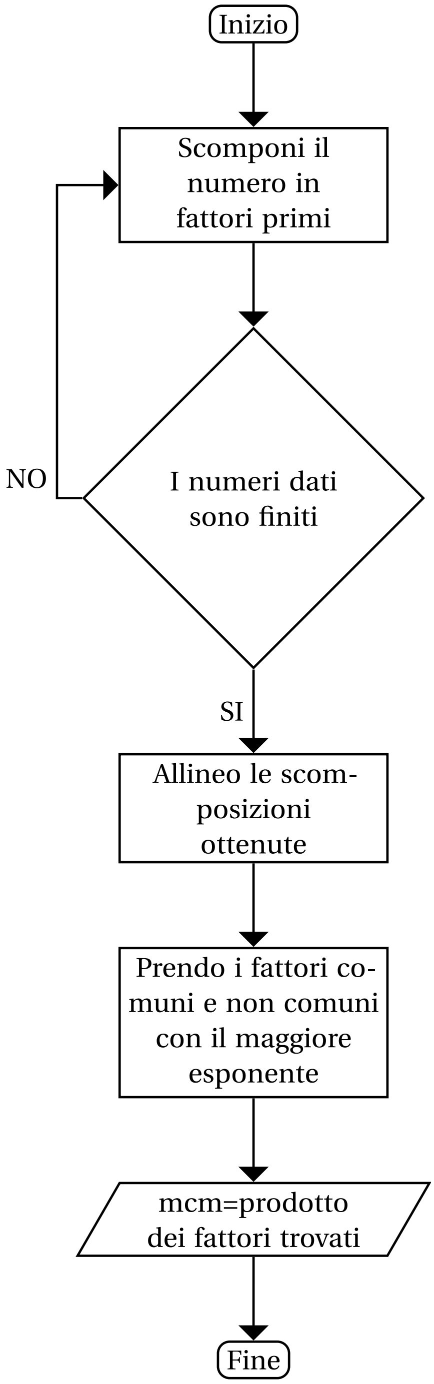


Figura 1.20: Calcolo del mcm

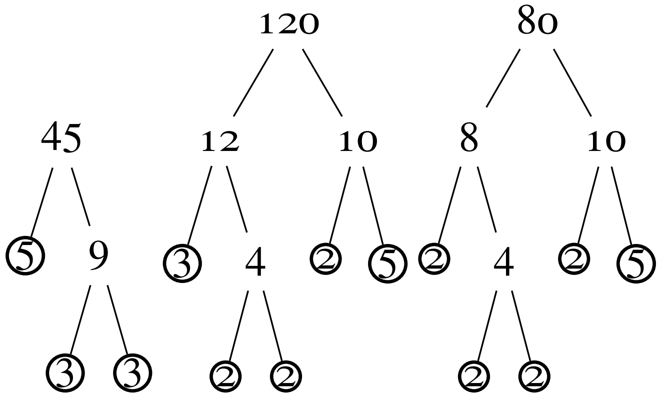


Figura 1.21: Scomposizione di 120; 80 e 45

quindi

$$\mathrm{mcd}(78;45) = 3$$

ottengo

$$\mathrm{mcm}(78,45) = \frac{78 \cdot 45}{3} = 1170$$

Calcoliamo il massimo comun divisore fra 1170 e 48 con il metodo di Euclide.

a	b	a/b	r
1170	48	24	18
48	18	2	12
18	12	1	6
12	6	2	0

quindi

$$\mathrm{mcd}(1170;48) = 6$$

ottengo

$$\mathrm{mcm}(1170,48) = \frac{1170 \cdot 48}{6} = 9360$$

Ricapitolando il mimino comune multiplo fra 45; 78 e 48 è 9360

2 Numeri razionali assoluti

2.1 Frazione

Una frazione è il quoziente di una divisione. Alla frazione $\frac{a}{b}$ corrisponde la divisione $a \div b$ e viceversa.

$$\text{Frazione} = \frac{\text{Numeratore}}{\text{Denominatore}}$$

Una frazione è

- Propria: il numeratore è minore del denominatore. Es. $\frac{2}{3}$ e $\frac{7}{8}$
- Impropria: il numeratore è maggiore del denominatore. Es. $\frac{3}{2}$ e $\frac{8}{7}$.
- Apparente: il numeratore è un multiplo del denominatore. In questo caso la frazione coincide con un numero intero. Es. $\frac{8}{4}$ e $\frac{10}{5}$

Una frazione impropria può essere scritta come somma di un numero intero e di una frazione propria.

Esempio 2.1.1. Frazione Impropria

Frazione Impropria

$$\frac{12}{5} = \frac{10}{5} + \frac{2}{5} = 2 + \frac{2}{5}$$

2.2 Numeri decimali

Frazioni, numeri decimali, tanti modi per scrivere la stessa quantità. di seguito verranno elencati dei metodi per passare da una ad un'altra forma.

2.2.1 Da frazione a numero decimale

Una frazione è il quoziente di una divisione. A una frazione è associata una divisione. Avremo molti casi fra loro diversi:

- La frazione è una frazione apparente. In questo caso a una frazione corrisponde un numero intero.

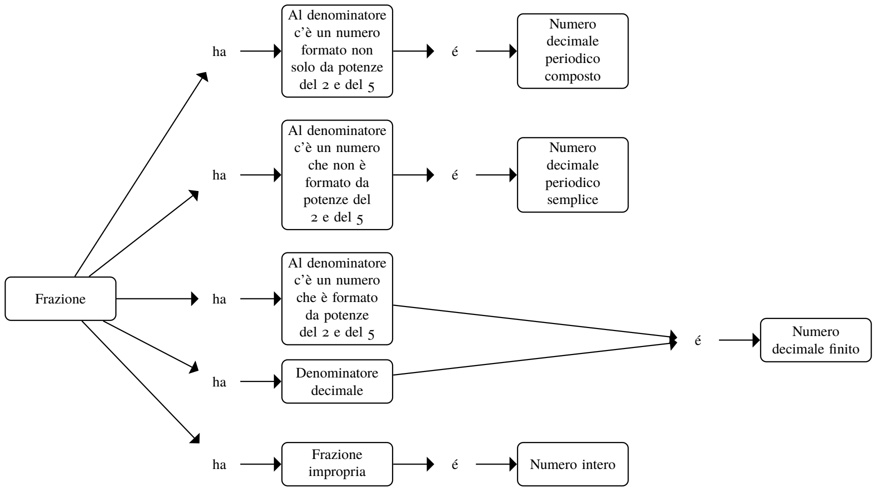


Figura 2.1: Da frazione a decimale

- La frazione ha per denominatore una potenza del dieci allora alla frazione corrisponde un numero decimale finito
- La frazione ha per denominatore un numero formato da potenze del 2 e del 5. In questo caso è possibile trasformare la frazione in una frazione decimale.
- La frazione ha per denominatore un numero non formato da potenze del 2 e del 5. Il numero decimale ottenuto è un numero decimale periodico semplice,
- La frazione ha per denominatore un numero formato anche da potenze del 2 e del 5.

Esempio 2.2.1. Frazione apparente

Frazione apparente:

$$\frac{8}{4} = 2$$

Esempio 2.2.2. Frazione decimale

Frazione decimale:

$$\frac{3}{10} = 0{,}3$$

Esempio 2.2.3. Numeri decimali finiti

Frazione che ha al denominatore potenze del 2 e del 5

$$\frac{3}{8}$$

In questo casi si procede in questo modo

1. Si scompone il denominatore in numeri primi, in questo caso $8 = 2^3$

2. Si considera la seguente tabella

$$\begin{aligned} 10 &= 2 \cdot 5 \\ 100 &= 2^2 \cdot 5^2 \\ 1000 &= 2^3 \cdot 5^3 \\ 10\,000 &= 2^4 \cdot 5^4 \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Da cui si vede che 2^3 moltiplicato per 5^3 da come risulto 1000. Per cui, applicando la proprietà invariantiva che ci garantisce l'equivalenza delle frazioni, abbiamo:

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{8} \cdot \frac{5^3}{5^3} = \frac{375}{1000} = 0{,}375$$

che è un decimale finito.

Esempio 2.2.4. Numeri decimali finiti

Frazione che ha al denominatore potenze del 2 e del 5

$$\frac{7}{20} = \frac{7}{2^2 \cdot 5} = \frac{7}{2^2 \cdot 5} \cdot \frac{5}{5} = \frac{35}{100} = 0{,}35$$

Esempio 2.2.5. Numeri periodici

Frazione che ha per denominatore un numero non formato da potenze del 2 e del 5.

$$\begin{aligned} \frac{7}{9} &= 0{,}777\,777\,77\cdots = 0.\overline{7} \\ \frac{15}{11} &= 1{,}363\,636\,363\,6\cdots = 1.\overline{36} \end{aligned}$$

2.2.2 Da numero decimale a frazione

Le parti di un numero decimale hanno un nome che è bene sapere:

$$2{,}357\overline{142857} = \overbrace{2}^{\text{parte intera}}\ ,\ \overbrace{\overbrace{357}^{\text{antiperiodo}}\ \overbrace{142857}^{\text{periodo}}}^{\text{parte decimale}}$$

Possiamo avere due alternative:

1. Il numero decimale è un decimale finito. Quindi per trovare la frazione generatrice si mette a denominatore il numero senza la virgola e al denominatore una potenza del 10 con tanti zeri quanto è lunga la parte decimale.

2. Il numero decimale è un numero decimale infinito periodico.

Esempio 2.2.6. Decimale finito

Decimale finito 2,3; 34,567 e 0,007

$$2{,}3 = \frac{23}{10} \qquad 34{,}567 = \frac{34567}{1000} \qquad 0{,}007 = \frac{7}{1000}$$

Per trovare la frazione generatrice di un numero decimale infinito periodico bisogna: togliere la virgola e sottrarre al numero con la parte periodica compresa il numero senza la parte periodica. Dividere per un numero composto da tanti nove per quanto è lungo il periodo e tanti zero per quanto è lungo l'antiperiodo. Il perché di questa regola può essere spiegato con questi esempi:

1. Per trovare la funzione generatrice di $x = 7{,}2\overline{4}$ si procede in questo modo
$$\begin{aligned} 100x &= 724{,}\overline{4} \\ 10x &= 72{,}\overline{4} \\ 100x - 10x &= 724{,}\overline{4} - 72{,}\overline{4} = 652 \\ 90x &= 652 \\ x &= \frac{652}{90} \end{aligned}$$
2. Per trovare la funzione generatrice di $x = 1{,}\overline{2}$ si procede in questo modo
$$\begin{aligned} 10x &= 12{,}\overline{2} \\ x &= 1{,}\overline{2} \\ 10x - x &= 12{,}\overline{2} - 1{,}\overline{2} = 11 \\ 9x &= 11 \\ x &= \frac{11}{9} \end{aligned}$$
3. Per trovare la funzione generatrice di $x = 1{,}\overline{22}$ si procede in questo modo
$$\begin{aligned} 100x &= 122{,}\overline{22} \\ x &= 1{,}\overline{22} \\ 100x - x &= 122{,}\overline{22} - 1{,}\overline{22} = 121 \\ 99x &= 121 \\ x &= \frac{121}{99} \end{aligned}$$

Un piccolo gioco
$$0{,}\overline{9} = 1$$

Esempio 2.2.7. Trovare la frazione generatrice

Trovare la frazione generatrice

$$27{,}47\overline{932} =$$

Prendo tutto il numero senza la virgola

$$= \frac{2\,747\,932 -}{} =$$

Sottraggo il numero escluso il periodo

$$= \frac{2\,747\,932 - 2747}{} =$$

Il periodo è lungo tre divido per 999

$$= \frac{2\,747\,932 - 2747}{999} =$$

L'antiperiodo è lungo 2 aggiungo quindi due zeri

$$= \frac{2\,747\,932 - 2747}{99\,900} =$$

Ottengo

$$= \frac{2\,747\,185}{99\,900}$$

Esempio 2.2.8. Trovare la frazione generatrice

Trovare la frazione generatrice

$$7{,}4\overline{25} =$$

Prendo tutto il numero senza la virgola

$$= \frac{7425 -}{} =$$

Sottraggo il numero escluso il periodo

$$= \frac{7425 - 74}{} =$$

il periodo è lungo due

$$= \frac{7425 - 74}{99} =$$

L'antiperiodo è lungo uno quindi aggiungo uno zero

$$= \frac{7425 - 74}{990} =$$

Ottengo

$$= \frac{7351}{990}$$

Esempio 2.2.9. Trovare la frazione generatrice

Trovare la frazione generatrice

$$7{,}4\overline{25} =$$

Prendo tutto il numero senza la virgola

$$= \frac{7425 -}{} =$$

Sottraggo il numero escluso il periodo

$$= \frac{7425 - 74}{} =$$

il periodo è lungo due

$$= \frac{7425 - 74}{99} =$$

L'antiperiodo è lungo uno quindi aggiungo uno zero

$$= \frac{7425 - 74}{990} =$$

Ottengo

$$= \frac{7351}{990}$$

Esempio 2.2.10. Trovare la frazione generatrice

Trovare la frazione generatrice

$$35,\overline{5} =$$

Prendo tutto il numero senza la virgola

$$= \frac{355 -}{} =$$

Sottraggo il numero escluso il periodo

$$= \frac{355 - 35}{} =$$

Il periodo è lungo uno divido per 9

$$= \frac{355 - 35}{9} =$$

Ottengo

$$= \frac{320}{9}$$

Esempio 2.2.11. Trovare la frazione generatrice

Trovare la frazione generatrice

$$0,\overline{25} =$$

Prendo tutto il numero senza la virgola

$$= \frac{25 -}{} =$$

Sottraggo il numero escluso il periodo

$$= \frac{25 - 0}{} =$$

Il periodo è lungo due divido per 99

$$= \frac{25 - 0}{99} =$$

Ottengo

$$= \frac{25}{99}$$

Esempio 2.2.12. Trovare la frazione generatrice

Trovare la frazione generatrice

$$0,3\overline{47} =$$

Prendo tutto il numero senza la virgola

$$= \frac{347 -}{} =$$

Sottraggo il numero escluso il periodo

$$= \frac{347 - 3}{} =$$

Il periodo è lungo due

$$= \frac{347 - 3}{99} =$$

L'antiperiodo è lungo 1 aggiungo quindi uno zero

$$= \frac{347 - 3}{990} =$$

Ottengo

$$= \frac{344}{990}$$

2.2.3 Da numero percentuale a decimale

Per trasformare un numero percentuale in numero decimale basta dividere il numero per cento.

Esempio 2.2.13. Da percentuale a decimale

Da percentuale a decimale

$$10\% = 10 : 100 = 0,1$$
$$82,5\% = 82,5 : 100 = 0,825$$

2.2.4 Da numero decimale a percentuale

Per trasformare un numero decimale in percentuale basta moltiplicare il numero per $\frac{100}{100}$

Esempio 2.2.14. Da decimale a percentuale

Da decimale a percentuale

$$4{,}5 = 4,5 \cdot \frac{100}{100} = \frac{450}{100} = 450\%$$
$$0{,}58 = 0{,}58 \cdot \frac{100}{100} = \frac{58}{100} = 58\%$$

2.2.5 Da percentuale a frazione

Per trasformare una percentuale in una frazione basta ricordare che una percentuale è una divisione per cento. da percentuale a frazione

Esempio 2.2.15. Trasformare una percentuale in una frazione

Trasformare una percentuale in una frazione

$$20\% = \frac{20}{100}$$

2.2.6 Da frazione a percentuale

La trasformazione è in due tempi

1. Trasformo la frazione in un numero decimale
2. Trasformo il numero decimale in percentuale

Esempio 2.2.16. Da frazione a percentuale

Da frazione a percentuale

$$\frac{75}{4} = 18,75 = 18,75 \cdot \frac{100}{100} = 1875\%$$

2.3 Frazioni equivalenti

Due frazioni sono equivalenti quando rappresentano lo stesso quoziente.

Esempio 2.3.1. Frazioni equivalenti

Frazioni equivalenti

$\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$ sono equivalenti e si scrive

$$\frac{2}{3} \equiv \frac{6}{8}$$

Se due frazioni sono equivalenti vale il cosiddetto prodotto in croce e viceversa, cioè:

$$\frac{A}{B} \quad \frac{C}{D} \qquad A \cdot D = B \cdot C$$

Esempio 2.3.2. Frazioni equivalenti

Frazioni equivalenti

$$\frac{3}{4} \quad \frac{6}{8} \qquad 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$$

quindi le due frazioni sono equivalenti

2.4 Proprietà invariantiva

Moltiplicando o dividendo per un numero diverso da zero il numeratore e il denominatore di una frazione si ottiene una frazione equivalente infatti $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$

$$\frac{a}{b} \quad \frac{ac}{bc} \qquad a \cdot bc = b \cdot ac$$

Esempio 2.4.1. Proprietà invariantiva

Proprietà invariantiva

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 8} = \frac{24}{32}$$

le due frazioni sono equivalenti infatti:

$$\frac{3}{4} \times \frac{24}{32} \qquad 3 \cdot 32 = 4 \cdot 24$$

Esempio 2.4.2. Frazioni equivalenti

Frazioni equivalenti

$$\frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$$

le due frazioni sono equivalenti infatti:

$$\frac{6}{8} \times \frac{3}{4} \qquad 6 \cdot 4 = 8 \cdot 3$$

2.5 Semplificare una frazione

Semplificare una frazione significa dividere il numeratore e il denominatore per il loro Massimo Comune Divisore (mcd). Per la proprietà invariantiva la frazione ottenuta è equivalente a quella data. La procedura è quindi la seguente

Procedura 2.1

Data la frazione $\frac{a}{b}$

1. Calcolo il $\text{mcd}(a, b)$
2. Divido il numeratore e il denominatore per $\text{mcd}(a, b)$

Esempio 2.5.1. Semplificare la frazione

Semplificare la frazione $\frac{84}{48}$

1. Inizio con trovare il $\text{mcd}(84, 48)$ li scompongo in fattori primi e ottengo

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$48 = 2^4 \cdot 3 \quad 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

quindi $\text{mcd}(84, 48) = 2^2 \cdot 3 = 12$

2. Divido numeratore e denominatore per 12 e ottengo $\frac{7}{4}$

Esempio 2.5.2. Semplificare la frazione

Semplificare la frazione $\frac{84}{48}$

Vi è un altro metodo per semplificare una frazione: Dividere se possibile numeratore e denominatore per lo stesso numero e continuare finché ciò è possibile.

$$\frac{84}{48} \quad \frac{42}{24} \quad \frac{21}{12} \quad \frac{7}{4}$$

2.6 Riduzione allo stesso denominatore

La proprietà invariantiva permette di trasformare due frazioni a denominatore diverso in due frazioni che hanno lo stesso denominatore. Il procedimento è il seguente

Esempio 2.6.1. Trasformare due frazioni a denominatore diverso

Trasformare due frazioni a denominatore diverso in due frazioni che hanno lo stesso denominatore.

1. Date le frazioni $\frac{5}{21}$ e $\frac{7}{12}$
2. Scompongo i denominatori in fattori primi cioè:

$$\begin{array}{c|c} 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$21 = 3 \cdot 7 \qquad 12 = 3 \cdot 2^4$$

3. Calcolo il mcm che in questo caso è $\mathrm{mcm}(21, 12) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$
4. Scrivo due frazioni con denominatore 84 cioè $\frac{}{84}$ e $\frac{}{84}$
5. Applico la proprietà invariantiva al numeratore e scrivo $\frac{84 : 21 \cdot 5}{84}$ e $\frac{84 : 12 \cdot 7}{84}$
6. Otteniamo $\frac{20}{84}$ e $\frac{49}{84}$

2.6.1 Confronto fra frazioni

Per confrontare due frazioni le riduco allo stesso denominatore è maggiore la frazione con denominatore maggiore.

Esempio 2.6.2. Ordinare in modo decrescente frazioni

Ordinare in modo decrescente le seguenti frazioni

$$\begin{array}{rcccc} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & \frac{3}{8} \\ \text{Calcolo il mcm} & & & & \\ & \frac{}{120} & \frac{}{120} & \frac{}{120} & \frac{}{120} \\ \text{Riduco allo stesso denominatore} & & & & \\ & \frac{60}{120} & \frac{40}{120} & \frac{72}{120} & \frac{45}{120} \end{array}$$

La frazione che ha il numeratore più grande è $\frac{72}{120}$ che corrisponde a $\frac{3}{5}$ questa è la frazione più grande. A questa segue $\frac{3}{8}$ perché corrisponde a $\frac{45}{120}$ e così di seguito $\frac{1}{2}$ ed infine $\frac{1}{3}$.

2.7 Operazioni

2.7.1 Somma e sottrazione

Nel sommare due frazioni possiamo avere due casi

1. Denominatori uguali

   La somma/differenza due frazioni che hanno lo stesso denominatore è una frazione che ha lo stesso denominatore e per numeratore la somma/differenza dei numeratori.

2. Denominatori diversi

   Riduco le due frazioni allo stesso denominatore come in sezione 2.6 nella pagina precedente e quindi sommo.

Esempio 2.7.1. Somma/differenza due frazioni

La somma/differenza due frazioni

Denominatori uguali:

$$\frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$
$$\frac{12}{5} - \frac{8}{5} = \frac{4}{5}$$

Esempio 2.7.2. Somma/differenza due frazioni

La somma/differenza due frazioni

Denominatori diversi

$$\frac{2}{3} + \frac{7}{5}$$

Calcolo

$$\mathrm{mcd}(3,5) = 15$$
$$\frac{15:3\cdot 2 + 15:5\cdot 7}{15}$$
$$= \frac{10+21}{15}$$
$$= \frac{21}{15}$$

Tabella 2.1: Somma di frazioni

2.7.2 Moltiplicazione

Nel moltiplicare due frazioni possiamo avere due casi

1. Frazione con frazione

   Nella moltiplicazione fra due frazioni si moltiplicano numeratore con numeratore e denominatore con denominatore.

2. Frazione con numero

   Quindi nella moltiplicazione fra una frazione e un numero si moltiplica il numero con il numeratore e il denominatore resta uguale.

Esempio 2.7.3. Moltiplicazione di frazione con frazione

Moltiplicazione di frazione con frazione

$$\frac{21}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{21}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{21\cdot 3}{4\cdot 5}=\frac{63}{20}$$

Esempio 2.7.4. Prodotto numero con frazione

Prodotto numero con frazione

$$\frac{5}{4}\cdot 7=\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{1}=\frac{5\cdot 7}{4}=\frac{35}{4}$$

2.7.3 Semplificazioni e moltiplicazioni

Semplificare una frazione è possibile quando numeratore e denominatore sono divisibili per lo stesso numero.

Esempio 2.7.5. Semplificazione in verticale

Semplificazione in verticale

$$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

Con la moltiplicazione è possibile anche la cosiddetta semplificazione in croce. In questo caso si semplifica il denominatore della prima frazione con il numeratore della seconda e il numeratore della prima con il denominatore della seconda.

Esempio 2.7.6. Semplificazione in croce

Semplificazione in croce

$$\frac{\overset{1}{5}}{\underset{3}{27}}\cdot\frac{\overset{1}{9}}{\underset{4}{20}}=\frac{1\cdot 1}{3\cdot 4}=\frac{1}{12}$$

2.7.4 Divisione fra frazioni

Prima di parlare di divisioni fra frazioni occorre parlare di reciproci. Due numeri sono reciproci se il loro prodotto è uno.

Esempio 2.7.7. Frazioni reciproche

Frazioni reciproche

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = 1$$

In questo caso si dice che $\frac{2}{5}$ e $\frac{5}{2}$ sono frazioni fra loro reciproche.

Esempio 2.7.8. Reciproco di un intero

Reciproco di un intero

$$2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

In pratica vi sono due casi per trovare il reciproco di un numero:

1. Il numero è una frazione. In questo caso basta scrivere una frazione con numeratore e denominatore scambiato fra loro.
2. Il numero è intero. In questo caso basta scrivere una frazione che ha per numeratore uno e per denominatore il numero di partenza

1. Per dividere due frazioni bisogna trasformare la divisione nel prodotto della prima per il reciproco della seconda.
2. Se divido una frazione per un numero, trasformerò la divisione nella moltiplicazione della frazione per il reciproco del numero.

Esempio 2.7.9. Divisione fra frazioni

Divisione fra frazioni

$$\frac{7}{4} : \frac{4}{5} = \frac{7}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{7 \cdot 5}{5 \cdot 4} = \frac{35}{20}$$

Esempio 2.7.10. Divisione fra una frazione e un numero

Divisione fra una frazione e un numero

$$\frac{7}{4} : 3 = \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7 \cdot 1}{4 \cdot 3} = \frac{7}{12}$$

2.7.5 Potenze

La potenza di una frazione è uguale alla potenza del numeratore fratto la potenza del denominatore.

Esempio 2.7.11. Potenza di una frazione

Potenza di una frazione

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$$

3 Le proporzioni

3.1 Proporzioni semplici

Una proporzione è un'uguaglianza fra frazioni

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\underbrace{a : \overbrace{b = c}^{medi} : d}_{estremi}$$

$$a, b, c, d \in N$$

Una proporzione con i medi uguali si dice continua

3.2 Proprietà delle proporzioni

3.2.1 Proprietá fondamentale delle proporzioni

1. In una proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi

$$a \cdot d = b \cdot c$$

2. In una proporzione qualunque un medio incognito è uguale al prodotto degli estremi fratto l'altro medio.

$$a : x = c : d$$
$$x = \frac{a \cdot d}{c}$$

3. In una proporzione qualunque un estremo incognito è uguale al prodotto degli medi fratto l'altro medio.

$$x : b = c : d$$
$$x = \frac{b \cdot c}{d}$$

4. Il medio proporzionale fra due numeri dati à uguale alla radice quadrata del prodotto degli estremi.

$$a : x = x : d$$
$$x = \sqrt{a \cdot d}$$

5. In una proporzione la somma dei primi due termini sta al primo (secondo) come dei due restanti termini sta al terzo (quarto)[1]

$$(a+b):b=(c+d):d$$

$$(a+b):a=(c+d):c$$

6. In una proporzione la differenza fra il maggiore e il minore dei primi due termini sta al primo (secondo) come la differenza fra il maggiore e il minore dei due restanti termini sta al terzo (quarto)

$$(a-b):a=(c-d):c$$

$$(a-b):b=(c-d):d$$

7. Una proporzione é ancora una proporzione scambiando fra loro i medi (o gli estremi)

8. In una proporzione la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come un antecedente sta al suo conseguente[2].

$$(a+c):(b+d)=a:b$$

9. In una proporzione, la differenza tra il maggiore e il minore degli antecedenti, sta alla differenza tra il maggiore e il minore dei conseguenti, come un antecedente sta al suo conseguente.

$$(a-c):(b-d)=a:b$$

3.3 Serie di rapporti uguali

Una serie di rapporti uguali è l'uguaglianza fra tre o più frazioni

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n} \qquad n\geq 3$$

[Comporre generalizzata]

[1]dimostriamo la prima uguaglianza:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$
$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$
$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

dimostriamo la seconda uguaglianza

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$
$$\frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1$$
$$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$$

[2]

$$\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$$
$$1+\frac{c}{a}=1+\frac{d}{b}$$
$$\frac{a+c}{a}=\frac{b+d}{b}$$
$$(a+c):a=(b+d):b$$
$$(a+c):(b+d)=a:b$$

In una serie di rapporti uguali la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti, come un antecedente sta al proprio conseguente[3]

$$
\begin{gathered}
(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) : (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = a_1 : b_1 \\
(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) : (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = a_2 : b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) : (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = a_n : b_n
\end{gathered}
$$

[3] Dalla definizione sezione 3.3 nella pagina precedente

$$
\begin{gathered}
\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} \\
\frac{a_3}{a_1} = \frac{b_3}{b_1} \\
\ldots \\
\frac{a_n}{a_1} = \frac{b_n}{b_1}
\end{gathered}
$$

sommando membro a membro ottengo

$$\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} + \frac{b_3}{b_1} + \cdots + \frac{b_n}{b_1}$$

da cui

$$1 + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} + \frac{b_3}{b_1} + \cdots + \frac{b_n}{b_1} + 1$$

da cui

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_1} = \frac{b_1 + b_1 + \cdots + b_n}{b_1}$$

da cui la prima relazione.
Procedendo in maniera analoga otteniamo il resto.

4 Numeri relativi

4.1 Glossario

1. Un numero relativo è formato da una parte numerica detta modulo e da un segno
2. Due o più numeri relativi che hanno lo stesso segno si dicono concordi
3. Due o più numeri relativi che hanno segno diverso si dicono discordi
4. Due numeri relativi concordi che hanno lo stesso modulo si dicono opposti.

4.2 Ordine

Ordinare dei numeri significa confrontali fra di loro per stabilire un prima e un poi. La figura figura 4.2 nella pagina successiva è un esempio di ordinamento. In questo ordine i numeri negativi sono a sinistra dello zero e i numeri positivi a destra.

Quando ordiniamo due numeri relativi possiamo avere tre casi

1. I due numeri sono concordi positivi: In questo caso è maggiore il numero con modulo più grande;
2. I due numeri sono concordi negativi: In questo caso è maggiore il numero con modulo più piccolo;
3. I due numeri sono discordi: In questo caso è maggiore il numero positivo;

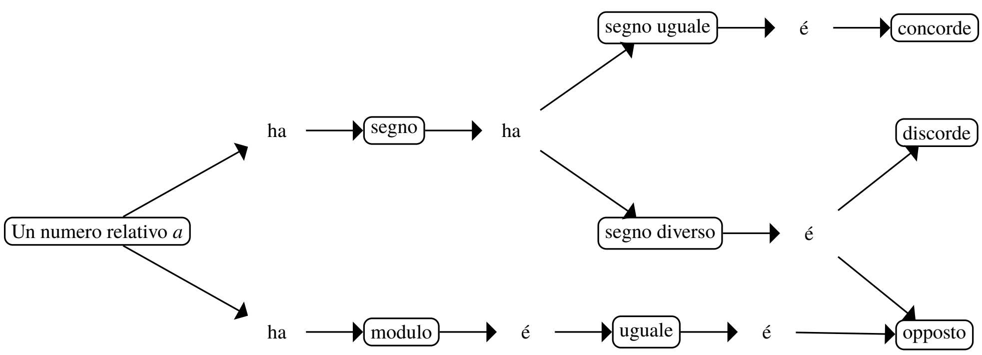


Figura 4.1: Numeri relativi

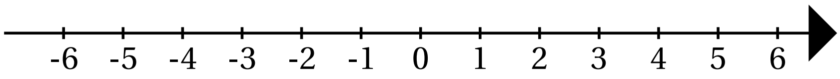


Figura 4.2: Retta orientata

4.3 Operazioni con i numeri relativi

I numeri relativi sono formati da due parti, quindi un'operazione deve definire delle regole che permettano di determinare il segno e il modulo del risultato.

4.3.1 Somma sottrazione

La somma di due numeri relativi segue le sue regole che sono simili a quelle della moltiplicazione ma con cui non vanno confuse.

Quando sommiamo due numeri relativi possiamo avere cinque casi come nel seguente esempio:

- $+5 + 3 = +8$: I due numeri hanno lo stesso segno e come risultato ho un numero dello stesso segno e che ha per modulo la somma dei moduli
- $-5 - 3 = -8$: I due numeri hanno lo stesso segno e come risultato ho un numero dello stesso segno e che ha per modulo la somma dei moduli
- $-5 + 3 = -2$: I due numeri hanno segno diverso e come risultato ho un numero dello stesso segno del numero maggiore in modulo e che ha per modulo la differenza dei moduli
- $+5 - 3 = +2$: I due numeri hanno segno diverso e come risultato ho un numero dello stesso segno del numero maggiore in modulo e che ha per modulo la differenza dei moduli
- $+5 - 5 = 0$: I due numeri sono opposti e come risultato ottengo zero.

4.3.2 Prodotto

Quando moltiplico due numeri posso avere due casi:

- I due numeri sono concordi ottengo un numero positivo.
- I due numeri sono discordi ottengo un numero negativo.

4.3.3 Divisione

Quando divido due numeri posso avere due casi:

- I due numeri sono concordi ottengo un numero positivo.
- I due numeri sono discordi ottengo un numero negativo.

5 Proprietà delle potenze

$$
\begin{aligned}
a^n &= \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{volte}} \\
a^0 &= 1 \\
0^0 &= ? \\
a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\
a^m \div a^n &= a^{m-n} \\
(a^n)^m &= a^{n \cdot m} \\
a^n b^n &= (ab)^n \\
a^n \div b^n &= (a \div b)^n \\
\left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} \\
a^{-n} &= \left(\frac{1}{a}\right)^n
\end{aligned}
$$

Tabella 5.1: Proprietà delle potenze

6 Notazione scientifica

6.1 Introduzione

Consideriamo qualche quantità fisica per esempio massa del protone 0,000 000 000 000 000 000 000 000 001 672 62

Definizione 6.1. Notazione scientifica

Un numero è scritto in notazione scientifica se è della forma:

$$X, YYYY \cdot 10^n$$

dove: $X = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
$Y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
$n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$
il numero delle cifre $YYYY$ dipende dal grado di precisione desiderato

6.2 Convertire un numero in notazione scientifica

Esempio 6.2.1. Notazione scientifica

$1,412 \cdot 10^3$ è in notazione scientifica
$14,12 \cdot 10^2$ non è in notazione scientifica

Nome	Valore
Massa protone	0,000 000 000 000 000 000 000 000 001 672 621 71 kg
Massa elettrone	0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 910 938 26 kg
Massa sole	19 888 920 000 000 000 000 000 000 000 000 kg

Tabella 6.1: Costanti fisiche

7 Approssimazione, arrotondamento e troncamento

7.1 Approssimazioni per difetto e per eccesso

Un'approssimazione è la rappresentazione non precisa di una quantità. Un'approssimazione può essere o per eccesso o per difetto. Indicando con q la quantità e con a l'approssimazione avremo che: se

$$a < q$$

l'approssimazione è per difetto altrimenti se

$$a > q$$

per eccesso.

Esempio 7.1.1. Approssimazioni

Consideriamo il numero

$$q = 5{,}327\,843\,2$$

$$\begin{aligned} a &= 5 \\ a &= 5{,}3 \\ a &= 5{,}32 \\ a &= 5{,}327 \end{aligned}$$

Sono tutte approssimazioni per difetto di q.

$$\begin{aligned} a &= 6 \\ a &= 5{,}4 \\ a &= 5{,}34 \\ a &= 5{,}328 \end{aligned}$$

Sono tutte approssimazioni per eccesso di q.

7.2 Troncamento

Un troncamento di un numero decimale è riscrivere un numero eliminando le cifre di un numero decimale da una posizione scelta in poi.

Esempio 7.2.1. Troncamento

Consideriamo il numero
$$q = 5{,}689\,547\,155$$
il suo troncamento dalla terza cifra decimale è:
$$q = 5{,}689$$

Esempio 7.2.2. Troncamento

Consideriamo il numero
$$q = 8{,}456\,982\,021\,24$$
il suo troncamento dalla quinta cifra decimale è:
$$q = 8{,}456\,98$$

7.3 Arrotondamenti

Come si decide se approssimare per difetto o per eccesso? Si utilizza il metodo di arrotondamento. Utilizziamo la seguente regola se vogliamo arrotondare un numero a una certa posizione decimale se la successiva cifra è 0, 1, 2, 3, 4 si tronca alla posizione. Se la successiva cifra è 5, 6, 7, 8, 9. Si aumenta di uno.

Esempio 7.3.1. Arrotondamento

Consideriamo il numero
$$q = 8{,}456\,982\,021\,24$$
arrotondando dalla terza cifra decimale è:
$$q = 8{,}457$$
visto che la quarta cifra decimale è 9

Esempio 7.3.2. Arrotondamento

Consideriamo il numero
$$q = 8{,}456\,982\,021\,24$$
arrotondando dalla terza cifra decimale è:
$$q = 8{,}456\,98$$
visto che la quarta cifra decimale è 2

8 Errori e Orrori

Cioè quello che non andrebbe mai fatto

8.1 Precedenze

Sono errori dovuto al mancato rispetto delle precedenze nelle operazioni.

Esempio $(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}) : \frac{3}{7} + 1$

Sbagliato $(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}) : \frac{3+3}{7}$

Corretto $(\frac{2+3}{4}) : \frac{3}{7} + 1$

Commento Non sono state rispettate le precedenze della parentesi ne la precedenza della divisione rispetto alla somma. Bisognava quindi prima sommare all'interno della parentesi poi dividere ed infine sommare con uno.

8.2 Lo zero

Esempio $(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}) =$

Sbagliato $(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = 1$

Corretto $(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = 0$

Commento Non si è compreso cosa significa sottrarre

9 Somme, prodotti e frazioni

9.1 Segni

operazione	*segno*
$(-\boldsymbol{a}) \cdot (-\boldsymbol{b})$	$+(a) \cdot (b)$
$(+\boldsymbol{a}) \cdot (-\boldsymbol{b})$	$-(a) \cdot (b)$
$(-\boldsymbol{a}) \cdot (+\boldsymbol{b})$	$-(a) \cdot (b)$
$(+\boldsymbol{a}) \cdot (+\boldsymbol{b})$	$+(a) \cdot (b)$

(a) Segno prodotto algebrico

operazione	*segno*
$(-\boldsymbol{a}) \div (-\boldsymbol{b})$	$+(a) \div (b)$
$(+\boldsymbol{a}) \div (-\boldsymbol{b})$	$-(a) \div (b)$
$(-\boldsymbol{a}) \div (+\boldsymbol{b})$	$-(a) \div (b)$
$(+\boldsymbol{a}) \div (+\boldsymbol{b})$	$+(a) \div (b)$

(b) Segno divisione algebrica

operazione		*segno*
$-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$		$-$
$-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$	$\lvert a\rvert > \lvert b\rvert$	$-$
	$\lvert a\rvert = \lvert b\rvert$	0
	$\lvert a\rvert < \lvert b\rvert$	$+$
$+\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$	$\lvert a\rvert > \lvert b\rvert$	$+$
	$\lvert a\rvert = \lvert b\rvert$	0
	$\lvert a\rvert < \lvert b\rvert$	$-$
$+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$		$+$

(c) Segno somma algebrica

Tabella 9.1: Segni

9.2 Precedenze

precedenza	operazione
1	potenza
2	prodotto divisione
3	somma sottrazione

(a) Precedenza operazioni

precedenza	parentesi
1	$\left(\dots\right)$
2	$\left[\dots\right]$
3	$\left\{\dots\right\}$

(b) Precedenza parentesi

Tabella 9.2: Precedenze

9.3 Somme prodotti divisioni

$a+b=b+a$	$b\cdot a=a\cdot b$
$a+a=2a$	$a\cdot a=a^2$
$a^n+a^m=a^n+a^m$	$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$
$a+1=a+1$	$a\cdot 1=a$
$1+a=1+a$	$1\cdot a=a$
$a+0=a$	$a\cdot 0=0$
$0+a=a$	$0\cdot a=0$

Tabella 9.3: Somme, prodotti

$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$	$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$	$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$	$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$
$c(a+b)^2 = c(a^2+2ab+b^2)$	$-(a-b+c) = -a+b-c$
$c(a-b)(a+b) = c(a^2-b^2)$	$a(b+c) = ab+bc$
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Tabella 9.4: Prodotti notevoli

$a : b = \frac{a}{b} \quad b \neq 0$	$\frac{1}{n}a = \frac{a}{n} \quad n \neq 0$
$\frac{a}{b} = a : b \quad b \neq 0$	$\frac{a}{n} = \frac{1}{n}a \quad n \neq 0$
$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad b \neq 0 \quad c \neq 0 \quad d \neq 0$	$\frac{a}{a} = 1 \quad a \neq 0$
$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b} \quad b \neq 0$	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad b \neq 0 \quad d \neq 0$
$-\frac{a+b}{c} = +\frac{-a-b}{c} \quad c \neq 0$	$\frac{a}{b-c} = -\frac{a}{c-b} \quad b \neq c$
$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{[(mcm(bd) \div b) \cdot a] + [(mcm(bd) \div d) \cdot c]}{mcm(bd)}$
$\frac{a}{b} + c = \frac{a+bc}{b}$	$\frac{1}{a}(b+c) = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$

Tabella 9.5: frazioni

Esempio 9.3.1

Bisogna stare molto attenti alle divisioni

$$\frac{3}{4}a^5b^6 : \frac{3}{14}a^3b^3 = \overbrace{\frac{3}{4}a^5b^6 \cdot \frac{14}{3}a^3b^3}^{\text{Errore grave}} = \frac{7}{2}a^8b^9$$

La procedura corretta è la seguente:

$$\frac{3}{4}a^5b^6 : \frac{3}{14}a^3b^3 = \overbrace{\frac{3a^5b^6}{4} \cdot \frac{14}{3a^3b^3}}^{\text{Corretto}} = \frac{7}{2}a^2b^3$$

10 Monomi

10.1 Definizioni

Definizione 10.1. Monomio

Un monomio è il prodotto fra numeri e lettere

Esempio 10.1.1. Monomio

I seguenti esempi sono tutti monomi

$$
\begin{aligned}
m \cdot a \cdot m \cdot m \cdot a \\
a^2 \cdot m^3 \\
2 \cdot a \cdot b \cdot 3 \cdot c \cdot a \\
2 \cdot x \cdot x \\
2 \cdot x^2 \\
\frac{2}{3} \cdot x
\end{aligned}
$$

Esempio 10.1.2. Non monomio

Quello che segue non sono monomi

$$
\begin{aligned}
a + b \\
\frac{a}{d + c} \\
x \div (x + y) \\
2 \cdot x^{-2}
\end{aligned}
$$

Monomio	Partte numerica	Parte letterale
$3a$	$+3$	a
$-5x^2y^3$	-5	x^2y^3
$+\frac{2}{5}a^2b^3z^4$	$+\frac{2}{5}$	$a^2b^3z^4$
$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}$	mv^2

Tabella 10.1: Parte Numerica e letterale

Definizione 10.2. Forma normale monomio

Un monomio è in forma normale se è formato da un solo numero che chiameremo parte numerica e dal prodotto di potenze con basi letterali che compaiono una sola volta, la parte letterale.

Osservazione 10.1. Numeri nascosti

Le convenzioni tipografiche portano a nascondere o celare dele quantità numeriche. Prendiamo il semplice monomio

$$x$$

Questa semplice scrittura sottintende un segno e tre numeri infatti

$$x = +\frac{1}{1}x^1$$

Esempio 10.1.3. Forma normale

I seguenti monomi sono in forma normale

$$\begin{aligned} 2x^3y \\ a^2m^3 \\ \frac{5}{4} \cdot x^2y \\ 2 \end{aligned}$$

Definizione 10.3. Monomio nullo

Un monomio è nullo se ha parte numerica zero.

Esempio 10.1.4. Monomio zero

$$0x^4y^2$$
$$0b^2c^3$$
$$0x^3yz$$
$$0$$

Definizione 10.4. Monomi simili

Due monomi sono simili se hanno la stessa parte letterale

Il concetto di similitudine è usato normalmente nella vita quotidiana. Una penna è simile a un'altra penna. Una matita non è simile a un pennarello, una mela è simile a una mela ma non è simile a un peperone. Il nostro cervello naturalmente classifica gli oggetti che ci circondano e questo ci permette d'interagire con loro. Se cerco della frutta dolce prendo un mandarino e non un limone, infatti un limone non è simile a un mandarino.

Esempio 10.1.5. Monomi simili

I seguenti monomi sono simili a coppie.

$$\begin{aligned} 4a &\qquad 5a \\ -3xy^2 &\qquad \frac{2}{3}xy^2 \\ x &\qquad 5x \\ 3z &\qquad z5 \end{aligned}$$

Definizione 10.5. Monomi opposti

Due monomi simili sono opposti se hanno la parte numerica opposta.

Quindi per definire un monomio opposto devo porre due condizioni.

Esempio 10.1.6. Monomi opposti

I seguenti monomi sono opposti a coppie

$$\begin{aligned} 4a &\qquad -4a \\ -3xy^2 &\qquad 3xy^2 \\ -x &\qquad x \\ -5z &\qquad z5 \end{aligned}$$

Definizione 10.6. Monomi opposti

Due monomi simili sono uguali se hanno la parte numerica uguale.

Anche in questo caso dobbiamo verificare due condizioni.

Definizione 10.7. Grado rispetto ad una lettera

Il grado di un monomio rispetto a una lettera è l'esponente con cui appare questa lettera. Se una lettera non compare il suo grado è zero.

Esempio 10.1.7. Grado rispetto alla lettera

Calcolare il grado rispetto alla lettera del monomio

$$3a^3b^2c^4d$$

Per la a, questo monomio è di terzo grado , di secondo per la b, quarto per c, primo per d, zero per e

10.2 Operazioni

10.2.1 Somma

Definizione 10.8. Somma monomi

La somma fra monomi simili, è un monomio che ha per somma la somma algebrica delle parti numeriche e per parte letterale la stessa parte letterale.

La somma di due oggetti simili è un oggetto simile. Aggiungendo tre cacciaviti ad altri cinque otteniamo otto cacciativi non otto martelli.

Esempio 10.2.1. Somma

$$\begin{aligned} 3a + 5a =& 8a \\ -3ab + 4ab =& ab - 2m + 2m = \qquad 0 \end{aligned}$$

Definizione 10.9. Prodotto monomi

l prodotto di due monomi è un monomio che ha per parte numerica il prodotto delle parti numeriche e per parte letterale il prodotto delle parti letterali. Nella somma di due monomi non cambia perciò la parte letterale

Osservazione 10.2. Regola pratica

Nel prodotto di due monomi bisogna rispondere a tre domande

1. Che segno ottengo?
2. Che numero ottengo?

3. Che parte letterale avrò?

Esempio 10.2.2. Prodotto di monomi

Calcolare

$$3ab \cdot (-5abc)$$

Ecco come risolvere l'esercizio. Dopo aver risposto alle tre domande otteniamo la soluzione. Attenzione alla parentesi che è obbligatoria.

$$\begin{aligned}
3ab \cdot (-5abc) & \\
+ \cdot - = - & \qquad \text{Segno} \\
3 \cdot 5 = 15 & \qquad \text{Numero} \\
ab \cdot abc = a^2b^2c & \qquad \text{Lettere} \\
3ab \cdot (-5abc) = -\,15a^2b^2c & \qquad \text{Risultato}
\end{aligned}$$

Esempio 10.2.3. Prodotto di monomi

Calcolare

$$3ab \cdot (-5abc)$$

Ecco come risolvere l'esercizio. Dopo aver risposto alle tre domande otteniamo la soluzione. Qui la parentesi è inutile. Attenzione al numero nascosto.

$$\begin{aligned}
-x^2yz \cdot 2xy^2 & \\
+ \cdot - = - & \qquad \text{Segno} \\
1 \cdot 2 = 2 & \qquad \text{Numero} \\
x^2yz \cdot xy^2 = x^3y^3z & \qquad \text{Lettere} \\
-x^2yz \cdot 2xy^2 = -\,2x^3y^3z & \qquad \text{Risultato}
\end{aligned}$$

10.2.2 Divisione

Prima di procedere con le definizioni ricordiamo le proprietà delle potenze. Alla moltiplicazione di basi uguali corrisponde la somma degli esponenti. Alla divisione di basi uguali segue la sottrazione fra gli esponenti. Facciamo due esempi:

$$\begin{aligned}
a^6 \div a^4 &= a^2 \\
a^4 \div a^6 &= a^{-2}
\end{aligned}$$

Nel primo caso il risultato è un monomio nel secondo caso no infatti:

$$a^4 \div a^6 = \frac{a^4}{a^6} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a} = \frac{1}{a^2}$$

Che non è un monomio.

Definizione 10.10. Divisione monomi

La divisione fra due monomi non è sempre definita. La divisione fra monomi è un monomio se la differenza fra gli esponenti delle basi è positiva o nulla.

Esempio 10.2.4. Divisioni monomi

Eseguire la divisione:

$$3x^2y^3 \div 4xy^2$$

$$\begin{aligned} 3x^2y^3 \div 4xy^2 = \\ &= \frac{3}{4}x^{2-1}y^{3-2} \\ &= \frac{3}{4}x^1y^1 \\ &= \frac{3}{4}xy \end{aligned}$$

E se manca una lettera?

Esempio 10.2.5. Divisioni monomi

Eseguire la divisione:

$$-5x^4y^2z \div 10x^3y$$

$$\begin{aligned} -5x^6y^2z \div 10x^3y = \\ &= -5x^6y^2z^1 \div 10x^3yz^0 \\ &= -\frac{5}{10}x^{6-3}y^{2-1}z^{1-0} \\ &= -\frac{5}{10}x^3y^1z^1 \\ &= -\frac{1}{2}x^3yz \end{aligned}$$

Scompaiono le lettere, che succede

Esempio 10.2.6. Divisioni monomi

Eseguire la divisione:

$$6x^3y^2 \div 3x^3y$$

$$
\begin{aligned}
6x^3y^2 \div 3x^3y = & \\
&= \frac{6}{3}x^{3-3}y^{2-1} \\
&= 2x^0y^1 \\
&= 2 \cdot 1 \cdot y^1 \\
&= 2y
\end{aligned}
$$

La trappola delle frazioni.

Esempio 10.2.7. Divisioni monomi

Bisogna stare attenti quando nella divisione si hanno delle frazioni

$$\frac{3}{5}a^4b^2 \div \frac{2}{7}a^2b$$

Procedimento corretto:

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{5}a^4b^2 \div \frac{2}{7}a^2b = & \\
&= \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2}a^{4-2}b^{2-1} \\
&= \frac{21}{10}a^2b^1 \\
&= \frac{21}{10}a^2b
\end{aligned}
$$

Procedimento sbagliato:

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{5}a^4b^2 \div \frac{2}{7}a^2b = & \\
&= \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2}a^4b^2a^2b \\
&= \frac{21}{10}a^{4+2}b^{2+1} \\
&= \frac{21}{10}a^6b^3
\end{aligned}
$$

L'errore è non aver diviso la parte numerica contemporaneamente alla parte letterale.

11 Polinomi

11.1 Somme

La somma fra polinomi si ottiene sommando, se vi sono, i monomi simili che li compongono. La somma cambia solo la parte numerica di un monomio mai la sua parte letterale.

Esempio 11.1.1

Supponiamo di voler sommare

$$3a + 2b^2 + 4a - 6b^2 + 2b$$

procediamo come segue:

$$\begin{aligned} 3a + 2b^2 + 4a - 6b^2 + 2b & \\ (3 + 4)a + (2 - 6)b^2 + 2b & \longleftarrow \text{individuo i simili} \\ 7a - 4b^2 + 2b & \longleftarrow 3 + 4 \text{ e } 2 - 6 \end{aligned}$$

11.2 Prodotti

Il prodotto fra due polinomi si ottiene moltiplicando tutti i termini di un polinomio per tutti i monomi dell'altro.

11.2.1 Monomio per un polinomio

Il caso più semplice è il prodotto di un monomio per un binomio. Il monomio fuori della parentesi moltiplica il binomio all'interno.

$$A\ (B + C) = AB + AC$$

Esempio 11.2.1. Moltiplicazione

Semplificare

$$3(2a-5b)-7a(2a+3b)+5(a^2+3b)$$

In questo esempio abbiamo tre moltiplicazioni di un monomio per un binomio. A destra si vedono i risultati parziali che poi sommati, danno il risultato finale.

$$\begin{array}{rcrr}
\overbrace{3(2a-5b)}^{1}-\overbrace{7a(2a+3b)}^{2}+\overbrace{5(a^2+3b)}^{3} & & & \\
6a+ & \longleftarrow & 3\cdot 2a & (1) \\
-15b & \longleftarrow & 3\cdot(-5b) & \\
6a-15b-7a(2a+3b)+5(a^2+3b) & & & \\
-14a^2 & \longleftarrow & -7a\cdot(2a) & (2) \\
-21ab & \longleftarrow & -7a\cdot(3b) & \\
6a-15b-14a-21ab+5(a^2+3b) & & & \\
+5a^2 & \longleftarrow & 5\cdot(a^2) & (3) \\
+15b & \longleftarrow & 5\cdot(3b) & \\
6a-15b-14a^2-21ab+5a^2+15b & & & \\
6a-9a^2-21ab & \longleftarrow & \text{sommando} &
\end{array}$$

Esempio 11.2.2

Semplificare

$$2a(3a-6)-(6a^2-2b)-3a(a-2b)$$

Anche in questo esempio abbiamo tre moltiplicazioni di un monomio per un binomio. Nel secondo prodotto si nota il segno meno fuori della parentesi tonda che in pratica cambierà il segno dei termini all'interno della parentesi. A destra abbiamo i risultati parziali delle tre moltiplicazioni.

$$\begin{array}{rcrr}
\overbrace{2a(3a-6)}^{1}-\overbrace{(6a^2-2b)}^{2}-\overbrace{3a(a-2b)}^{3} & & & \\
6a^2+ & \longleftarrow & 2a\cdot 3a & (1) \\
-12a & \longleftarrow & 3\cdot(-5b) & \\
6a^2-12a-(6a^2-2b)-3a(a-2b) & & & \\
-6a^2 & \longleftarrow & -1\cdot(6a^2) & (2) \\
+2b & \longleftarrow & -1\cdot(-2b) & \\
6a^2-12a-6a^2+2b-3a(a-2b) & & & \\
-6a & \longleftarrow & -3a\cdot(a) & (3) \\
+6ab & \longleftarrow & -3a\cdot(-2b) & \\
6a^2-12a-6a^2+2b-6a+6ab & & & \\
-18a+2b+6ab & \longleftarrow & \text{sommando} &
\end{array}$$

11.2.2 Polinomio per polinomio

In questo caso il polinomio nella prima parentesi moltiplica il polinomio della seconda parentesi. In pratica ogni monomio contenuto nella prima parentesi moltiplica tutti i monomi della seconda.

$$(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$$

Esempio 11.2.3. Moltiplicazione

Semplificare

$$(xy-2)[(xy-2)xy+4+2xy]-(xy-2)(x^2y^2+2xy+4)$$

In questo esempio abbiamo quattro moltiplicazioni fra vari polinomi. A complicare le cose vi sono le regole di precedenza. A destra i vari risultati parziali. Si procede seguendo l'ordine indicato sopra l'espressione.

$$\overbrace{(xy-2)\,\overbrace{\left[\underbrace{(xy-2)xy}_{1}+4+2xy\right]}^{2}}^{3}-\overbrace{(xy-2)(x^2y^2+2xy+4)}^{4}$$

$$x^2y^2 \longleftarrow {\color{red}xy\cdot xy}$$
$$-2xy \longleftarrow {\color{red}-2\cdot xy}$$

$$\overbrace{(xy-2)\,\overbrace{\left[x^2y^2-2xy+4+2xy\right]}^{2}}^{3}-\overbrace{(xy-2)(x^2y^2+2xy+4)}^{4}$$
$$\overbrace{(xy-2)[x^2y^2+4]}^{3}-\overbrace{(xy-2)(x^2y^2+2xy+4)}^{4} \longleftarrow {\color{red}\text{Sommando}}$$

$$\overbrace{(xy-2)[x^2y^2+4]}^{3}-\overbrace{(xy-2)(x^2y^2+2xy+4)}^{4}$$
$$x^3y^3 \longleftarrow {\color{red}xy\cdot(x^2y^2)}$$
$$4xy \longleftarrow {\color{orange}4\cdot xy}$$
$$-2x^2y^2 \longleftarrow {\color{orange}-2\cdot x^2y^2}$$
$$-8 \longleftarrow {\color{red}-2\cdot +4}$$

$$x^3y^3+4xy-2x^2y^2-8-\overbrace{(xy-2)(x^2y^2+2xy+4)}^{4}$$
$$-x^3y^3 \longleftarrow {\color{red}(-1)\cdot xy\cdot x^2y^2}$$
$$-2x^2y^2 \longleftarrow {\color{red}(-1)\cdot xy\cdot 2xy}$$
$$-4xy \longleftarrow {\color{red}(-1)\cdot xy\cdot 4}$$
$$2x^2y^2 \longleftarrow {\color{red}(-1)\cdot(-2)\cdot x^2y^2}$$
$$4xy \longleftarrow {\color{red}(-1)\cdot(-2)\cdot 2xy}$$
$$8 \longleftarrow {\color{red}(-1)\cdot(-2)\cdot 4}$$

$$x^3y^3+4xy-2x^2y^2-8-x^3y^3-2x^2y^2-4xy+2x^2y^2+4xy+8$$
$$4xy-2x^2y^2 \longleftarrow {\color{red}\text{Sommando}}$$

Esempio 11.2.4. Moltiplicazione

Semplificare

$$(3a-2b)(2a-b)+(2a^2-2)(2-a)$$

In questo esempio abbiamo due moltiplicazioni di un binomio per un binomio. A destra i passaggi parziali. Infine sommiamo gli elementi simili e otteniamo la soluzione.

$$\overbrace{(3a-2b)(2a-b)}^{1}+\overbrace{(2a^2-2)(2-a)}^{2}$$

$$\begin{array}{rcl}
6a^2 & \longleftarrow & 3a\cdot 2a \\
-3ab & \longleftarrow & 3a\cdot(-b) \\
-4ab & \longleftarrow & -2b\cdot(2a) \\
+2b^2 & \longleftarrow & -2b\cdot(-b)
\end{array} \tag{1}$$

$$6a^2-7ab+2b^2+(2a^2-2)(2-a)$$

$$\begin{array}{rcl}
4a^2 & \longleftarrow & 2a^2\cdot(2) \\
-2a^3 & \longleftarrow & 2a^2\cdot(-a) \\
-4 & \longleftarrow & -2\cdot 2 \\
2a & \longleftarrow & -2\cdot -a
\end{array} \tag{2}$$

$$6a^2-7ab+2b^2+4a^2-2a^3-4+2a$$

$$10a^2+2b^2-7ab-2a^3-4+2a \longleftarrow \text{Sommando}$$

11.2.3 Quadrato del binomio

Il quadrato di un binomio è il prodotto di un binomio per se stesso. Si calcola utilizzando la regola

$$(A+B)^2 = A^2+B^2+2AB$$

che va letta: « Il quadrato di in binomio è uguale al quadrato del primo termine più il quadrato del secondo termine più il doppio del prodotto del primo termine per il secondo».

$$(A\ +B)^2 =\ A^2\ +\ B^2\ +2AB$$

Esempio 11.2.5

Calcolare il quadrato del binomio

$$(a+2b)^2$$

procediamo come segue:

$$(a+2b)^2$$

$$\begin{array}{rcl}
+a^2 & \longleftarrow & a\cdot a \\
+4b^2 & \longleftarrow & 2b\cdot 2b \\
+4ab & \longleftarrow & 2\cdot a\cdot 2b \\
(a+2b)^2 = a^2+4b^2+4ab & \longleftarrow & \text{ottengo}
\end{array}$$

Esempio 11.2.6

Calcolare il quadrato di

$$(2x-3y)^2$$

procediamo come segue:

$$\begin{array}{rcl}
(2x-3y)^2 & & \\
+4x^2 & \longleftarrow & 2x \cdot 2x \\
+9y^2 & \longleftarrow & (-3y)\cdot(-3y) \\
-12xy & \longleftarrow & 2\cdot(2x)\cdot(-3y) \\
(2x-3y)^2 = 4x^2+9y^2-12xy & \longleftarrow & \text{ottengo}
\end{array}$$

Esempio 11.2.7

Supponiamo di voler calcolare il quadrato di

$$(2-z)^2$$

$$\begin{array}{rcl}
(2-z)^2 & & \\
+4 & \longleftarrow & 2\cdot 2 \\
+z^2 & \longleftarrow & (-z)\cdot(-z) \\
-4z & \longleftarrow & 2\cdot(2)\cdot(-z) \\
(2-z)^2 = 4+z^2-4z & \longleftarrow & \text{ottengo}
\end{array}$$

Esempio 11.2.8

Calcolare il quadrato di

$$\left(1-\frac{1}{2}z\right)^2$$

$$\begin{array}{rcl}
\left(1-\frac{1}{2}z\right)^2 & & \\
+1 & \longleftarrow & 1\cdot 1 \\
+\frac{1}{4}z^2 & \longleftarrow & (-\frac{1}{2}z)\cdot(-\frac{1}{2}z) \\
-z & \longleftarrow & 2\cdot(1)\cdot(-\frac{1}{2}z) \\
\left(1-\frac{1}{2}z\right)^2 = 1+\frac{1}{4}z^2-z & \longleftarrow & \text{ottengo}
\end{array}$$

11.2.4 Differenza di quadrati

In questo caso il prodotto è fra due binomi in cui un termine mantiene il suo segno mentre l'altro lo cambia. Si calcola utilizzando la regola

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

che va letta: « Al prodotto fra la somma di due termini con la loro differenza è uguale al quadrato del primo termine meno il quadrato del secondo».

$$(A \;+\; B)\;(A \;-\; B) \;=\; A^2 \;-\; B^2$$

Esempio 11.2.9

Calcolare

$$(2x-3y)(2x+3y)$$

procediamo come segue

$$\begin{array}{rl}
(2x-3y)(2x+3y) & \\
+4x^2 & \longleftarrow \color{red}{2x \cdot 2x} \\
-9y^2 & \longleftarrow \color{red}{(-)(-3y)\cdot(-3y)} \\
(2x-3y)(2x+3y) = 4x^2 - 9y^2 & \longleftarrow \color{red}{\text{ottengo}}
\end{array}$$

Esempio 11.2.10

Calcolare

$$(-4a-b)(-4a+b)$$

L'esempio non sembra una differenza di quadrati ma anche qui abbiamo un termine che mantiene il segno ed un termine che lo cambia, procediamo come segue

$$\begin{array}{rl}
(-4a-b)(-4a+b) & \\
+16a^2 & \longleftarrow \color{red}{-4x \cdot (-4x)} \\
-b^2 & \longleftarrow \color{red}{(-)(-b)\cdot(-b)} \\
(-4a-b)(-4a+b) = 16a^2 - b^2 & \longleftarrow \color{red}{\text{ottengo}}
\end{array}$$

Esempio 11.2.11

Calcolare

$$(a+b+c)(a+b+c)$$

L'esempio non sembra una differenza di quadrati ma anche qui abbiamo un termine che mantiene il segno ed un termine che lo cambia solo che qui non è un monomio ma un binomio, procediamo come segue:

$$
\begin{aligned}
(a+b+c)(a-b-c) & \\
[a+(b+c)][a-(b+c)] & \longleftarrow \text{raggruppo} \\
a^2 - & \text{ applico differenza di quadrati} \\
(a+b+c)(a-b-c) = a^2 - b^2 - c^2 - 2bc & \longleftarrow \text{ottengo}
\end{aligned}
$$

11.2.5 Cubo del Binomio

Un altro prodotto notevole è il cubo del binomio. Si calcola utilizzando la regola

$$(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3A^2B + 3AB^2$$

che va letta: « Il cubo di un binomio è uguale al cubo del primo termine più il cubo del secondo termine più il triplo del prodotto del quadrato primo termine per il secondo più il triplo del prodotto del primo per il quadrato del secondo».

$$(A \; + B)^3 = A^3 \; + \; B^3 \; + 3A^2B + 3AB^2$$

Esempio 11.2.12

Calcolare

$$(a-3b)^3$$

procediamo come segue:

$$
\begin{aligned}
(a-3b)^3 & \\
a^3 & \longleftarrow a \cdot a \cdot a \\
-27b^3 & \longleftarrow (-3b) \cdot (-3b) \cdot (-3b) \\
-9a^2b & \longleftarrow 3 \cdot (a) \cdot (a) \cdot (-3b) \\
+27ab^2 & \longleftarrow 3 \cdot (a) \cdot (-3b) \cdot (-3b) \\
(a-3b)^2 = a^3 - 27b^3 - 9a^2b + 27ab^2 & \longleftarrow \text{ottengo}
\end{aligned}
$$

11.2.6 Quadrato del trinomio

Il quadrato del trinomio si calcola utilizzando la regola

$$(A+B+c) = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$$

che va letta: « Il quadrato di un trinomio è uguale al quadrato del primo termine più il quadrato del secondo termine più il quadrato del terzo termine, più la somma del doppio del prodotto del primo per il secondo, più la somma del doppio del prodotto del primo per il terzo, più la somma del doppio del prodotto del secondo per il terzo».

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$$

Esempio 11.2.13

Calcolare

$$(a + 2b - 3c)^2$$

procediamo come segue:

$$
\begin{array}{rl}
(a + 2b - 3c)^2 & \\
a^2 & \longleftarrow a \cdot a \\
+4b^2 & \longleftarrow (2b) \cdot (2b) \\
+9c^2 & \longleftarrow (-3c) \cdot (-3c) \\
+4ab & \longleftarrow 2 \cdot (a) \cdot (2b) \\
-6ac & \longleftarrow 2 \cdot (a) \cdot (-3c) \\
-12bc & \longleftarrow 2 \cdot (2b) \cdot (-3c) \\
(a + 2b - 3c)^2 = a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 4ab - 6ac - 12bc & \longleftarrow \text{ottengo}
\end{array}
$$

La tabellatabella 11.1 nella pagina seguente da qualche esempio di prodotto notevole.

$$(a+b)\cdot(c+d) = \begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{a} & +ac & +ad \\ \hline \boldsymbol{b} & +bc & +bd \\ \hline & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{array} = ac+ad+dc+bd$$

$$(a+b)\cdot(a-b) = \begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{a} & +a^2 & -ab \\ \hline \boldsymbol{b} & +ab & -b^2 \\ \hline & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{-b} \end{array} = a^2+ab-ab-b^2 = a^2-b^2$$

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = \begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{a} & a^2 & +ab \\ \hline \boldsymbol{b} & +ab & b^2 \\ \hline & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{array} = a^2+b^2+ab+ab = a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = \begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{a} & a^2 & -ab \\ \hline \boldsymbol{-b} & -ab & b^2 \\ \hline & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{-b} \end{array} = a^2+b^2-ab-ab = a^2-2ab+b^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = \begin{array}{c|c|c|c} \boldsymbol{a} & +ac & +cd & +ae \\ \hline \boldsymbol{b} & +bc & +db & +be \\ \hline & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} \end{array} = ac+cd+ae+bc+bd+be$$

Tabella 11.1: prodotti

$A(B+C)$	$A\ (B\ +\ C)\ = AB + AC$
$(A+B)(C+D)$	$(A\ +\ B)\ (C\ +\ D)\ = AC + AD + BC + BD$
$(A+B)^2$	$(A\ + B)^2 = A^2\ +\ B^2\ + 2AB$
$(A-B)(A+B)$	$(A\ +\ B)\ (A\ -\ B)\ = A^2\ -\ B^2$
$(A+B)^3$	$(A\ + B)^3 = A^3\ +\ B^3\ + 3A^2B + 3AB^2$
$(A+B+C)^2$	$(A\ +\ B\ + C)^2 = A^2\ +\ B^2\ +\ C^2\ + 2AB + 2AC + 2BC$

Tabella 11.2: Prodotti

12 Divisioni fra polinomi

12.1 Divisioni fra monomi

Un monomio è divisibile per un altro monomio se il grado del dividendo per ciascuna lettera è minore o uguale al grado della stessa lettera del divisore.

Esempio 12.1.1

Le seguenti divisioni sono possibili

$$3x^3y^2 : x^y = 3x^0y^1 = 3y$$
$$4x^5a^2b : 2x^2a = 2x^3ab$$

La seguente divisione è impossibile

$$x^4y^3 : y^5 = x^4y^{-2}$$

12.2 Divisioni fra Polinomi e monomi

La divisione di un polinomio per un monomio è possibile se è possibile la divisione fra ogni termine del polinomio con il monomio.

12.3 Divisione fra polinomi

Esempio 12.3.1

Eseguire la seguente divisione $(x^3 - x^4 + 1) : (x^2 + 1)$

$$(x^3 - x^4 + 1) : (x^2 + 1)$$

Ordino i polinomi

$$(-x^4 + x^3 + 1) : (x^2 + 1)$$

Scrivo la divisione lasciando spazi vuoti dove necessario

$$\begin{array}{ccccc|l}
-x^4 & +x^3 & & & +1 & x^2+1 \\ \cline{6-6}
& & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|l}
-x^4 & +x^3 & & & +1 & x^2+1 \\ \cline{6-6}
& & & & & -x^2
\end{array}
\qquad \frac{-x^4}{x^2} = -x^2$$

$$\begin{array}{ccccc|l}
-x^4 & +x^3 & & & +1 & x^2+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & & -x^2 & & & -x^2 \\ \cline{1-5}
& +x^3 & +x^2 & & +1 &
\end{array}$$

Calcolo il primo resto

$$\begin{array}{ccccc|l}
-x^4 & +x^3 & & & +1 & x^2+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & & -x^2 & & & -x^2+x \\ \cline{1-5}
& +x^3 & +x^2 & & +1 &
\end{array}
\qquad \frac{x^3}{x^2} = x$$

$$\begin{array}{ccccc|l}
-x^4 & +x^3 & & & +1 & x^2+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & & -x^2 & & & -x^2+x \\ \cline{1-5}
& +x^3 & +x^2 & & +1 & \\
& +x^3 & & +x & & \\ \cline{2-5}
& & +x^2 & -x & +1 &
\end{array}$$

Calcolo il secondo resto

$$\begin{array}{ccccc|l}
-x^4 & +x^3 & & & +1 & x^2+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & & -x^2 & & & -x^2+x+1 \\ \cline{1-5}
& +x^3 & +x^2 & & +1 & \\
& +x^3 & & +x & & \\ \cline{2-5}
& & +x^2 & -x & +1 &
\end{array}
\qquad \frac{x^2}{x^2} = 1$$

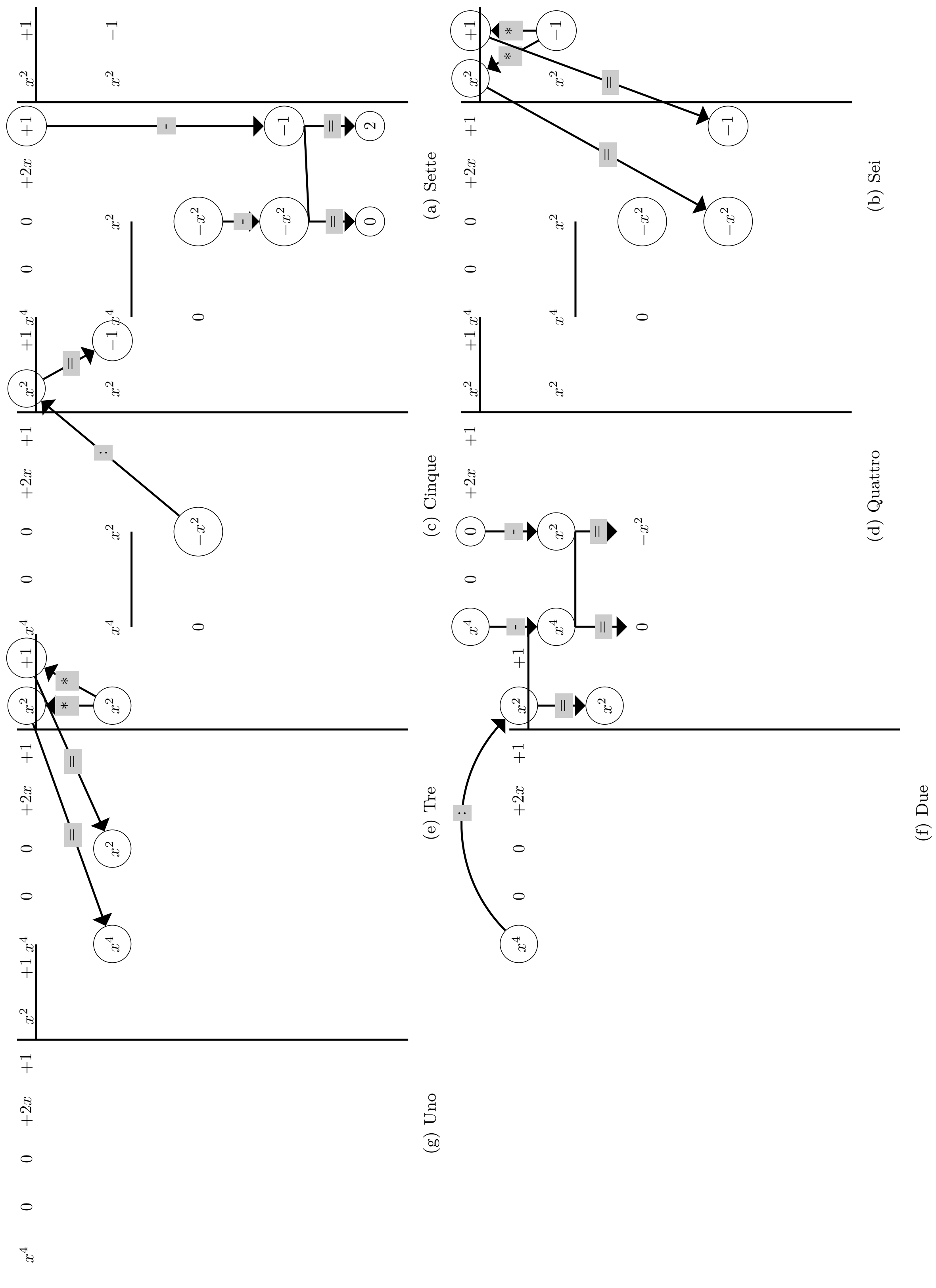
$$\begin{array}{ccccc|l}
-x^4 & +x^3 & & & +1 & x^2+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & & -x^2 & & & -x^2+x+1 \\ \cline{1-5}
& +x^3 & +x^2 & & +1 & \\
& +x^3 & & +x & & \\ \cline{2-5}
& & +x^2 & -x & +1 & \\
& & +x^2 & & +1 & \\ \cline{3-5}
& & & -x & &
\end{array}$$

Calcolo l'ultimo resto

Esempio 12.3.2

Dividere

$$(x^4 + 2x + 1) : (x^2 + 1)$$



(a) Sette (b) Sei (c) Cinque (d) Quattro (e) Tre (f) Due (g) Uno

Figura 12.1: Divisione fra polinomi

12.4 Metodo di Ruffini

Esempio 12.4.1

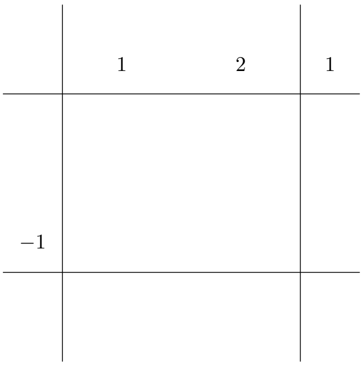
Dividere

$$(x^2 + 2x + 1) : (x + 1)$$

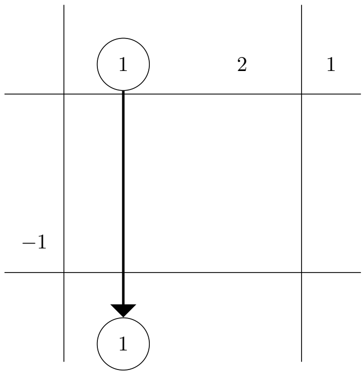
la risposta è

$$x + 1$$

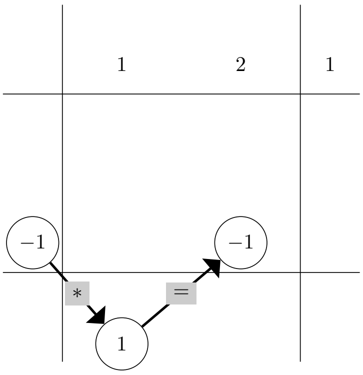
con resto zero.



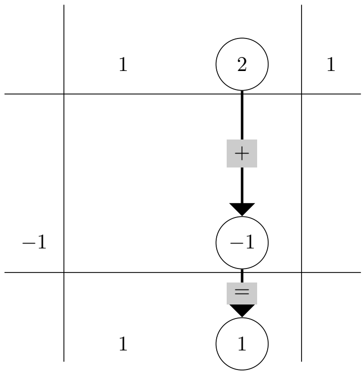
(a) Imposto il castello



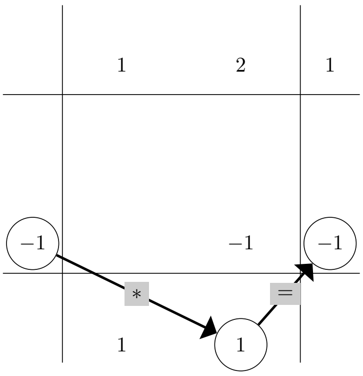
(b) Sposto il coefficiente sotto la riga



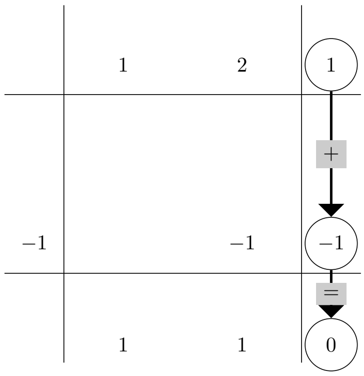
(c) moltiplico e sposto



(d) Sommo sulla colonna



(e) Moltiplico e sposto la risposta



(f) Sommo sulla colonna fine

Figura 12.3: Metodo di Ruffini

13 Raccoglimento in fattori

Raccoglimenti	
Tipo	Esempio
totale	$ab + ac = a(b + c)$
parziale	$ab + ac + db + dc =$ $a\underbrace{(b + c)} + d\underbrace{(b + c)} =$ $= (b + c)(a + d)$
quadrato binomio	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
quadrato trinomio	$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$
cubo binomio	$a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = (a + b)^3$ $a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2 = (a - b)^3$
differenza di quadrati	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
Somma differenza cubi	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
trinomi particolari	$x^2 + sx + p = (x + a)(x + b)$ $\begin{cases} s = a + b \\ p = a \cdot b \end{cases}$ $x^4 + sx^2 + p = (x^2 + a)(x^2 + b)$ $\begin{cases} s = a + b \\ p = a \cdot b \end{cases}$

Tabella 13.1: Polinomi raccoglimenti

Raccoglimenti	
Esempio	Tipo
$ab + ac = a(b + c)$	Totale
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	Differenza di quadrati
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	Somma differenza cubi
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$	quadrato binomio
$x^2 + sx + p = (x + a)(x + b) \ \begin{cases} s = a + b \\ p = a \cdot b \end{cases}$ $x^4 + sx^2 + p = (x^2 + a)(x^2 + b) \ \begin{cases} s = a + b \\ p = a \cdot b \end{cases}$	trinomi particolari
$a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = (a + b)^3$ $a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2 = (a - b)^3$	cubo binomio
$ab + ac + db + dc =$ $a\underbrace{(b + c)} + d\underbrace{(b + c)} =$ $= (b + c)(a + d)$	parziale
$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$	quadrato trinomio

Tabella 13.2: Polinomi raccoglimenti

14 MCD e mcm

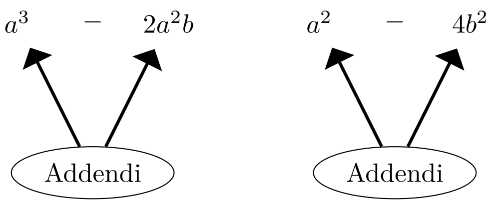
14.1 MCD

Il mcd fra più polinomi si ottiene moltiplicando i fattori comuni presi una sola volta, con il minore esponente.

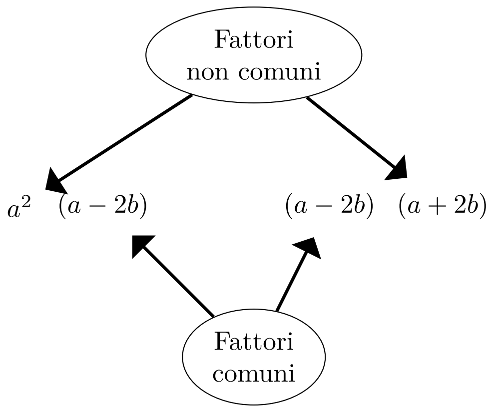
Esempio 14.1.1

Trovare il mcd fra $a^3 - 2a^2b$ e $a^2 - 4b^2$

i due polinomi sono somme di addendi quindi



raccogliendo a fattore comune nel primo e osservando che nel secondo abbiamo una differenza di quadrati otteniamo



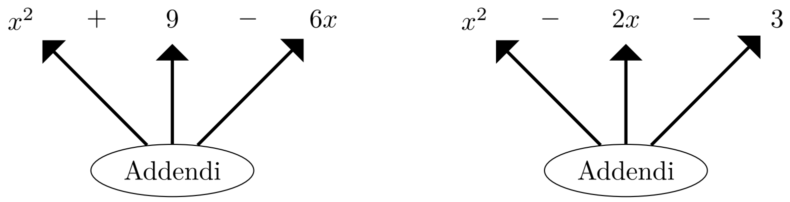
Abbiamo trasformato le due somme in prodotti di fattori tramite un raccoglimento totale. Vi è un solo fattore comune, il mcd fra i due polinomi sarà

$$(a - 2b)$$

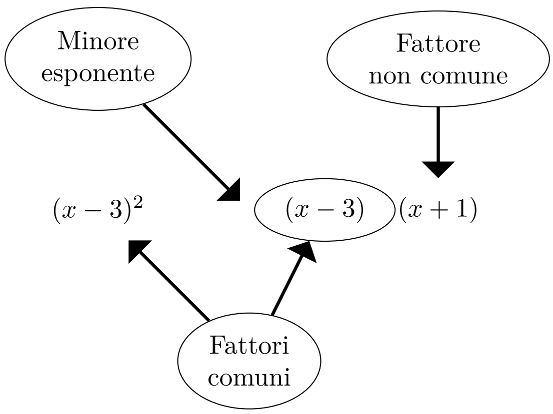
Esempio 14.1.2

Trovare il mcd fra $x^2 + 9 - 6x$ e $x^2 - 2x - 3$

i due polinomi sono somme di addendi quindi:



Il primo è il quadrato di un binomio, l'altro trinomio è un trinomio particolare o somma prodotto. Otteniamo:



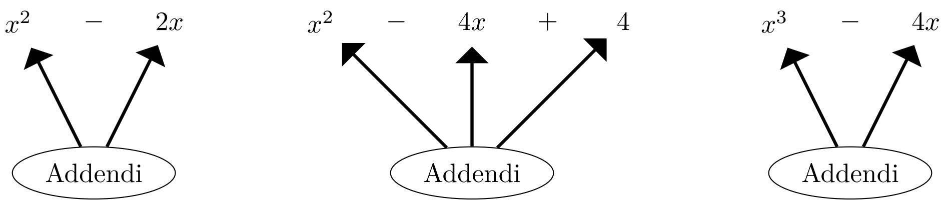
Abbiamo trasformato le due somme in prodotti di fattori. I fattori in questo caso sono due. Viene preso il fattore comune con il minore esponente. Il mcd fra i due polinomi sarà

$$x - 3$$

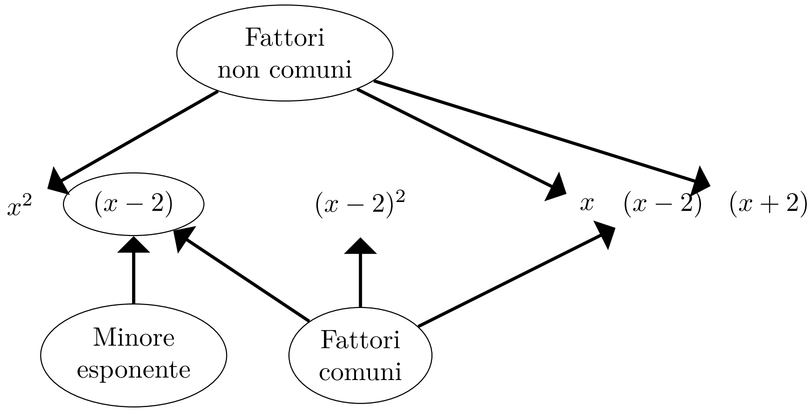
Esempio 14.1.3

Trovare il mcm fra $x^3 - 2x^2$, $x^2 - 4x + 4$ e $x^3 - 4x$

i tre polinomi sono somme di addendi quindi



Il primo lo fattorizzo con un raccoglimento totale, ho poi un quadrato, l'altro binomio un altro raccoglimento totale e una differenza di quadrati. Otteniamo:



Abbiamo trasformato le tre somme in prodotti di fattori. Vi è un solo fattore comune ed è preso quello con il minore esponente. Il mcd fra i tre polinomi sarà

$$x-2$$

14.2 mcm

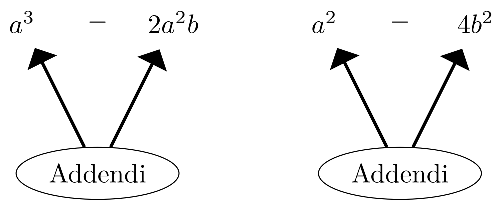
Il mcm fra più polinomi si ottiene moltiplicando i fattori comuni e non comuni, presi una sola volta, con il maggiore esponente.

In genere, i polinomi sono una somma di più termini (addendi) quindi non è possibile,in genere, calcolare subito il mcm.

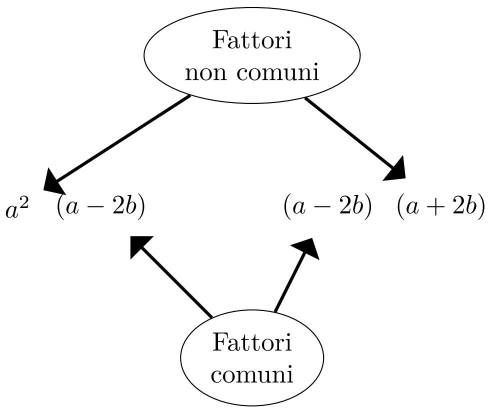
Esempio 14.2.1

Trovare il mcm fra a^3-2a^2b e a^2-4b^2

i due polinomi sono somme di addendi quindi



raccogliendo a fattore comune nel primo e osservando che nel secondo abbiamo una differenza di quadrati otteniamo



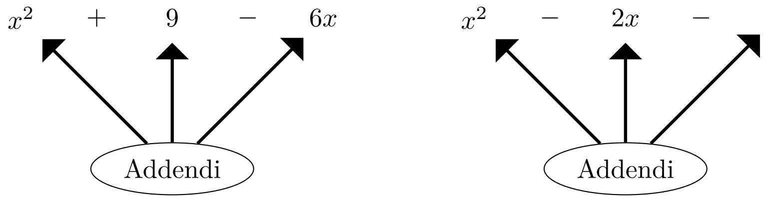
Abbiamo trasformato le due somme in un prodotti di fattori. Possiamo dividere i fattori in fattori comuni e in fattori non comuni. Il mcm fra i due polinomi sarà

$$a^2(a-2b)(a+2b)$$

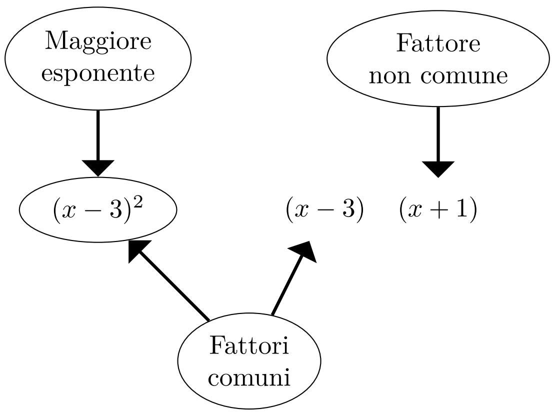
Esempio 14.2.2

Trovare il mcm fra x^2+9-6x e x^2-2x-3

i due polinomi sono somme di addendi quindi



Il primo è il quadrato di un binomio, l'altro trinomio è un trinomio particolare o somma prodotto. Otteniamo:



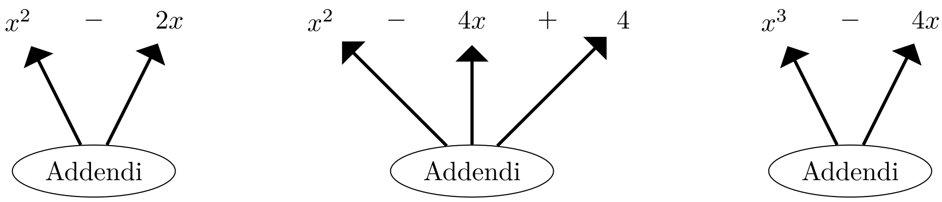
Abbiamo trasformato le due somme in prodotti di fattori. I fattori in questo caso sono due. Per i fattori comuni viene preso quello con il maggiore esponente. Il mcm fra i due polinomi sarà

$$(x-3)^2(x+1)$$

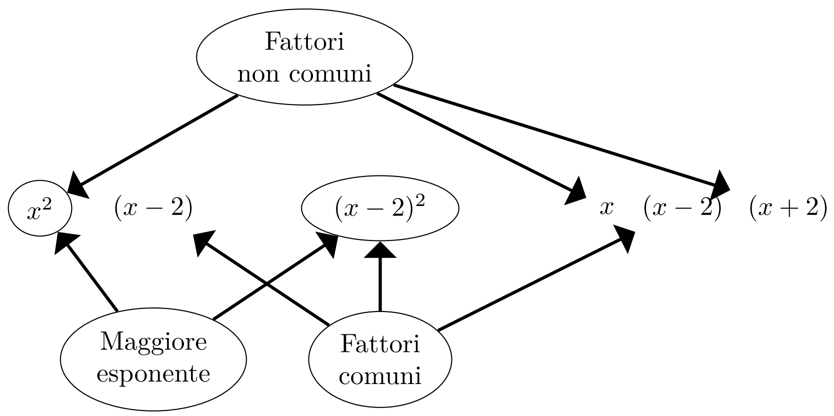
Esempio 14.2.3

Trovare il mcm fra x^3-2x^2, x^2-4x+4 e x^3-4x

i tre polinomi sono somme di addendi quindi



Il primo lo fattorizzo con un raccoglimento totale, ho poi un quadrato, l'altro binomio un altro raccoglimento totale e una differenza di quadrati. Otteniamo:



Abbiamo trasformato le tre somme in un prodotto di fattori. I fattori in questo caso sono tre. Per i fattori comuni viene preso quello con il maggiore esponente. Il mcm fra i tre polinomi sarà

$$x^2(x-2)^2(x+2)$$

Indice analitico

A

Albero Binario, 20
Approssimazione
    per difetto, 51
    per eccesso, 51
Arrotondamenti, 52

C

Cubo
    binomio, 71

D

Differenza
    quadrati, 70

F

Frazione
    apparente, 30
    equivalente, 37
    generatrice, 32
    impropria, 30
    propria, 30
    semplificare, 38

M

mcd, 23
    Euclide, 23, 26, 27, 29
Monomio, 57
    Forma
        normale, 58
    nullo, 58
    opposto, 59
    parte
        letterale, 58
        numerica, 58
    prodotto, 60
    simile, 59
    somma, 60
    uguale, 60
    zero, 58

N

Notazione
    scientifica, 50
Numeri
    Naturali, 11
        discerti, 11
        ordinati, 11
    primi fra loro, 23, 25
    Razionali , 30
Numero
    composto, 18
    primo, 18
    reciproco, 42

O

Operazione
    addizione, 11
        addendo, 11
        associativa, 13
        commutativa, 11
        distributiva, 18
        elemento neutro, 11
        somma, 11
    divisione, 15
        dividendo, 15
        divisore, 15
        invariantiva, 16
        quoziente, 15
    moltiplicazione, 13
        associativa, 15
        commutativa, 13
        dissociativa, 15
        distributiva, 18
        elemento assorbente, 15
        elemento neutro, 13
        fattore, 13
        prodotto, 13
    potenza, 16
        base, 16
        divisione, 18
        esponente, 16
        moltiplicazione, 18

sottrazione, 13
differenza, 13
invariantiva, 13
minuendo, 13
sottraendo, 13

P

Polinomi
divisione, 75
MCD, 82
mcm, 84
prodotto, 64
somma, 64
Prodotto
in croce, 37
Proporzione
antecedenti, 45
conseguenti, 45
continua, 44
estremi, 44, 45
medi, 44, 45

Q

Quadrato
binomio, 68
Quoziente, 30

R

Rapporti uguali
comporre generalizzata, 45
rapporti, 45

S

Semplificazione
in croce, 42

T

Troncamento, 51

Mezzi usati

- I mezzi usati
  - pdfLaTeX tramite la distribuzioneTeX Live
    http://www.tug.org/texlive
  - Pacchetti usati
    1. Per la grafica il pacchetto PGF 3.1.9a, TikZ
    2. Per la grafica i pacchetti TKZ di Altermundus http://altermundus.fr
    3. Per l'elettronica il pacchetto CircuiTikZ
    4. Per la matematica il pacchetto $\mathcal{AMS}$
    5. Per le presentazioni Beamer
  - Editor usati
    1. TeXstudio
       http://texstudio.sourceforge.net/
    2. GeoGebra 5
       https://www.geogebra.org
- Aiuti e consigli
  1. Forum del GuIT Gruppo Utilizzatori Italiani di TeX
     http://www.guitex.org/home/it/forum
  2. ArsTeXnica la rivista del GuIT
  3. TeX ample.net
     http://www.texample.net
     da cui qualche immagine è stata tratta
  4. TeX StackExchange
     http://tex.stackexchange.com
- Aggiornamenti http://breviariomatematico.altervista.org