

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША

В.Е. Борисов, А.В. Иванов, Б.В. Критский,
И.С. Меньшов, Е.Б. Савенков, М.А. Тримонова

Москва, 2017

*В.Е. Борисов, А.В. Иванов, Б.В. Критский, И.С. Меньшов, Е.Б. Савенков,
М.А. Тримонова ****

Аннотация. В работе подробно описывается математическая постановка линейной задачи пороупругости. Рассматривается случай неизотермической среды. Приведены основные уравнения модели и ее определяющие соотношения для линейного случая малых деформаций. Рассматривается алгоритм решения задачи на основе метода конечных элементов. Приведены результаты численных расчетов.¹

Ключевые слова: геомеханика, пороупругая среда, МКЭ

*V.E. Borisov, A.V. Ivanov, B.V. Kritsky, I.S. Men'shov, E.B. Savenkov,
M.A. Trimonova

Abstract. In this work a mathematical problem statement for poroelasticity is presented in details. The nonisothermal case is considered. Equations of the model are described as well as constitutive relations for the case of small strains. A finite element method for the solution of the problem is reviewed. Results of the numerical simulations for a number of common test problems are presented.

Key words and phrases: geomechanics, poroelastic medium, FEM

Содержание

1 Введение	3
2 Математическая модель	4
3 Методы решения	5
4 Лабораторный эксперимент	10
5 Вычислительный эксперимент	14
6 Заключение	16
Литература	16

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 15-11-00021)

1 Введение

В настоящее время математическое моделирование является одним из основных инструментов, используемых для анализа и оптимизации процессов разработки нефтегазовых месторождений. Традиционно основное внимание при этом уделяется математическому моделированию фильтрационных процессов, то есть моделированию течения многофазного многокомпонентного флюида в деформируемом пористом пласте [Азиз2004]. Учет механического состояния пласта в фильтрационных моделях осуществляется путем задания зависимости пористости пласта (то есть объемной концентрации пустот, содержащих флюид) от давления флюида. Для решения фильтрационных задач описания такой точности обычно достаточно.

Однако известен целый ряд ситуаций, анализ которых требует полноценного учета напряженно-деформированного состояния пласта. В этом случае для описания системы «пласт»–«флюид» обычно используется модель пороупругой среды, которая позволяет описать фильтрацию флюида в порах совместно с полноценной механической моделью напряженно-деформированного состояния пласта.

В современном виде такие модели были предложены в работах М. Био [Biot1941]. Модель Био описывает протекающие совместно процессы деформации упругой среды (матрицы породы) и течения флюида в ней. Модель является макроскопической в том смысле, что в рамках нее принимается, что вмещающее пороупругую среду пространство заполнено двухфазной средой, причем одна фаза соответствует непосредственно пористой среде, а вторая – содержащемуся в порах флюиду. Обе фазы присутствуют в каждой точке физического пространства, а распределение фаз в пространстве описывается макроскопическими величинами типа пористости (объемной концентрации заполненных флюидом пустот в среде). Подвижную фазу далее будем называть флюидом. Для обозначения твердой фазы будем использовать термин «вмещающая среда» или «матрица». Для обозначения твердой фазы, то есть вещества, из которого состоит образующая матрицу твердая деформируемая «губка», будем использовать термин «скелет». Отметим, что матрица является пористой средой, в то время как скелет имеет нулевую пористость. В дальнейшем величины, отнесенные к твердой фазе (матрице, вмещающей среде), будем обозначать нижним индексом «s», к подвижной фазе (флюиду) — нижним индексом «f».

В общем случае модель Био состоит из двух групп уравнений: (I) уравнения теории (термо)упругости с учетом внутренних сил, связанных с влиянием давления флюида в порах на напряженно-деформированное состояние среды и (II) фильтрации флюида в порах с учетом изменения объема порового пространства, заполненного флюидом, за счет деформации среды.

В настоящем препринте приведено детальное описание модели Био в ее современном виде для случая физически и геометрически линейной упругой среды и однофазной фильтрации в порах. При этом считается, что поры полностью заполнены флюидом. Рассмотрены уравнения модели, имеющие вид законов сохранения массы, импульса и энергии, приведен полный набор определяющих соотношений. Описание модели основано на [Coussy2004]. Далее рассмотрены вычислительные алгоритмы на основе метода конечных элементов для решения уравнений модели и результаты их применения для решения ряда тестовых задач.

Описанная модель является основой разрабатываемого в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН программного комплекса для математического моделирования динамики развития трещины гидроразрыва пласта в рамках проекта РНФ № 15-11-00021.

Важно отметить, что назначение разрабатываемого программного комплекса – решение существенно более сложной, чем задача Био, задачи, а именно – математическое моделирование динамики развития трещины гидроразрыва пласта в полной трехмерной постановке. Пороупругая часть задачи является основной составляющей, но при этом и наиболее простой. По этой причине для решения задачи Био были использованы простейшие конечно-элементные методы, которые позволяют получить корректные результаты моделирования, хотя, возможно, в ущерб вычислительной эффективности как алгоритмов, так и их программной реализации.

2 Математическая модель

В настоящем разделе рассмотрим несколько упрощенный вариант модели, подробно описанной в [Борисов2017]. Именно такая модель будет использована ниже при описании вычислительных алгоритмов и проведении тестовых расчетов.

Указанные упрощения не являются принципиальными и носят, скорее, методический характер: упрощенная модель является изотермической, а вмещающая среда является однородной и изотропной.

Пусть задача решается в пространственной области Ω . Уравнения, составляющие линейную модель Био, имеют вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_f) + \nabla \cdot \left(-\rho_f^0 \frac{K}{\mu} \nabla p \right) = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{T} = \mathbf{T}' - b p \mathbf{I}$ – тензор полных напряжений, p – давление флюида, $\mathbf{T}' = \mathbf{C} : \mathbf{E}$ – тензор эффективных напряжений, $\mathbf{C} = \text{const}$ – тензор упругих

коэффициентов, $\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} [\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T]$ – линейный тензор деформаций, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – вектор перемещений. m_f – массы флюида в единице объема насыщенной среды,

$$m_f = \rho_f^0 v_f, \quad v_f = b\epsilon + \frac{1}{M}p, \quad \epsilon = \mathbf{E} : \mathbf{I};$$

$b = \text{const}$ и $M = \text{const}$ – параметры Био, ϵ – объемная деформация; $\rho = \text{const}$ – плотность насыщенной среды, $\rho = \rho_s^0(1 - \phi_0) + \rho_f^0\phi_0$, где $\rho_s^0 = \text{const}$ – плотность скелета, $\rho_f^0 = \text{const}$ – плотность флюида, $\phi_0 = \text{const}$ – начальная пористость; $K = \text{const}$ – коэффициент проницаемости пористой среды, μ – вязкость флюида, \mathbf{g} – ускорение свободного падения, $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_g$, $g = \text{const}$, \mathbf{e}_g – вектор направления силы тяжести.

Постановка задачи должна быть дополнена граничными условиями на границе $\partial\Omega$ области Ω , а также начальными условиями в момент времени $t = 0$. Для «упругой» части задачи (уравнение (1)) на границе области могут быть заданы компоненты (полных) нормальных напряжений либо компоненты поля перемещений. Для «фильтрационной» части задачи (уравнение (2)) могут быть заданы либо значения давления, либо нормальная компонента вектора плотности потока массы флюида.

Первичными неизвестными задачи являются поле перемещений вмещающей среды \mathbf{u} и давление флюида в пласте p .

3 Методы решения

В рассматриваемом приближении система уравнений пороупругости представляет собой связанную задачу для эллиптического уравнения (описывающего напряженно-деформированное состояние насыщенной среды) и параболического уравнения (описывающего закон сохранения массы флюида во вмещающей среде). Для решения указанной системы уравнений могут применяться различные методы, среди которых отметим метод конечных объемов, метод конечных элементов и метод граничных интегральных уравнений. Для аппроксимаций по времени чаще всего используются простые полностью неявные схемы (например, неявный метод Эйлера); они же будут использоваться и в данной работе.

При этом полная система уравнений может аппроксимироваться как одно целое, либо задача «развязывается», и ее решение получается в ходе тех или иных итераций между группами уравнений фильтрации и упругости. Последний подход чаще всего применяется в случае, если для решения задачи используются две различные программы для расчета фильтрационной части (например, промышленный симулятор фильтрации) и для решения задачи

теории упругости. Построение эффективных итерационных методов решения таких задач является отдельной проблемой [Kim2009, Kim2010].

Рассмотренный ниже алгоритм основан на методе конечных элементов. Детали реализации этого метода для задач теории пороупругости широко описаны в литературе, см., например, монографию [Lewis1998] и работы [Noorishad1982, Philips2005, Zheng2003].

Характерным свойством системы уравнений пороупругости в рассматриваемом приближении является то, что после аппроксимации по времени система уравнений имеет вид задачи о седловой точке [Brezzi1991]. В этом случае для устойчивости решения задачи как в континуальном, так и в дискретном случае необходимо выполнение так называемых $\inf\text{-sup}$ условий (условий Ладыженской–Бабушки–Бреззи) [Brezzi1991]. При нарушении этих условий в задачах пороупругости возникают численные неустойчивости и эффекты «блокировки» («locking») конечномерного решения, особенно в несжимаемом пределе, см. [Philips2009, Preisig2011, Haga2012, Vermeer1981]. Простейшим примером конечного элемента, удовлетворяющего этим условиям, является элемент Тэйлора–Худа, в котором для аппроксимации перемещений используются конечные элементы второго порядка, а для аппроксимации давления – первого [Ern2009, Murad1996, Showalter2000]. Альтернативным подходом является регуляризация исходной задачи (см., например, [White2008, Commend2004, Wan2002, Xia2009]), цель которой – построить задачу, для которой $\inf\text{-sup}$ условия выполняются для стандартных пар пространств (конечные элементы одинакового, первого, порядка и для поля перемещений, и для давления).

В случае, если для конкретной задачи $\inf\text{-sup}$ устойчивые пары пространств неизвестны, необходимы тщательный контроль особенностей решения и проверка выполнения численных $\inf\text{-sup}$ условий [Chappele1993].

3.1 Слабая постановка задачи

Для построения аппроксимаций задачи в дальнейшем будем использовать метод конечных элементов. Одним из основных элементов построения аппроксимаций является слабая постановка задачи, которая будет рассмотрена в данном разделе.

Сначала определим необходимые пространства, в которых будем искать решение. Пусть поле перемещений \mathbf{u} принадлежит пространству гладких векторных полей в области Ω , $\mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}} = V_{\mathbf{u}}(\Omega)$, поле давлений p во вмещающей среде также принадлежит пространству гладких в Ω функций, $p \in V_p = V_p(\Omega)$. Все указанные пространства могут быть точно охарактеризованы в терминах пространств Соболева нужной гладкости. Однако мы не будем этого делать в силу того, что исследование теоретических вопросов,

связанных с анализом существования и единственности решения и скоростью сходимостью численных аппроксимаций, в данной работе не рассматриваются.

Перейдем к построению слабой постановки задачи. Для простоты будем считать, что для всех переменных, определенных в Ω , заданы однородные главные граничные условия (то есть перемещения и поле давления). Учет естественных граничных условий не представляет труда и может быть выполнен стандартными способами.

Слабая форма уравнения (1) имеет вид:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{C} : \mathbf{E}(\mathbf{u}) - bp\mathbf{I}) : \mathbf{E}(\delta\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \rho\mathbf{g}\delta\mathbf{u} d\Omega, \quad \delta\mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}}.$$

Аналогично, слабая форма закона сохранения массы флюида во вмещающей среде будет иметь вид:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(m_f)\delta p d\Omega + \int_{\Omega} \rho_f^0 \frac{K}{\mu} \nabla p \cdot \nabla \delta p d\Omega = 0, \quad \delta p \in V_p. \quad (3)$$

Приведенная система уравнений содержит 2 уравнения относительно 2 неизвестных полей \mathbf{u} и p .

Введем следующие билинейные формы:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_u(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \mathbf{E}(\delta\mathbf{u}) d\Omega, & \mathbb{A}_p(p, \mathbf{u}) &= \int_{\Omega} (-bp\mathbf{I}) : \mathbf{E}(\delta\mathbf{u}) d\Omega, \\ \mathbb{B}(p, \delta p) &= \int_{\Omega} \rho_f^0 \frac{K}{\mu} \nabla p \cdot \nabla \delta p d\Omega, & \mathbb{M}_u(\mathbf{u}, \delta p) &= \int_{\Omega} (-\rho_f^0 b \delta p \mathbf{I}) : \mathbf{E}(\delta\mathbf{u}) d\Omega, \\ \mathbb{M}_p(p, \delta p) &= \int_{\Omega} \rho_f^0 \frac{1}{M} p \delta p d\Omega, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mathbf{u}, \delta\mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}}$, $p, \delta p \in V_p$.

Тогда слабая постановка задачи примет вид: определить $\mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}}$, $p \in V_p$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_u(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + \mathbb{A}_p(p, \delta\mathbf{u}) &= \mathbf{f}_u(\delta\mathbf{u}), \\ \frac{\partial}{\partial t} [\mathbb{M}_u(\mathbf{u}, \delta p) + \mathbb{M}_p(p, \delta p)] + \mathbb{B}(p, \delta p) &= \mathbf{f}_p(\delta p), \end{aligned} \quad (5)$$

для всех допустимых $\delta\mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}}$, $\delta p \in V_p$. Заметим, что в последней системе уравнений в случае постоянной плотности флюида билинейные формы \mathbb{M}_u

и $\rho_f^0 \mathbb{A}_p$ являются сопряженными в силу того, что сопряженными являются операторы дивергенции и градиента.

В приведенных выше соотношениях $\mathbf{f}_u(\delta \mathbf{u})$ и $\mathbf{f}_p(\delta p)$ — линейные функционалы, порождаемые правыми частями уравнений (1), (2). В рассматриваемом частном случае имеем $\mathbf{f}_p(\delta p) = 0$,

$$\mathbf{f}_u(\delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \delta \mathbf{u} d\Omega.$$

3.2 Конечномерные аппроксимации

Для построения конечномерных аппроксимаций задачи (5) необходимо ввести конечномерные аппроксимации пространств $V_{\mathbf{u}}$, V_p , которые, соответственно, будем обозначать верхним индексом « h », $V_{\mathbf{u}}^h \subset V_{\mathbf{u}}$, $V_p^h \subset V_p$. Как только аппроксимации пространств выбраны, построение конечномерных аппроксимаций не составляет труда: разложение решения и пробных функций по выбранной системе базисных функций необходимо подставить в вариационную постановку задачи (5). В результате получается конечномерная система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложения решения по выбранной системе базисных функций. Далее указанная система уравнений аппроксимируется по времени. В результате получается система линейных алгебраических уравнений для определения решения конечномерной задачи на каждом временном шаге. Указанная процедура является стандартной и детально описана в обширной литературе по методу конечных элементов.

Существует множество способов построения конечномерных пространств $V_{\mathbf{u}}^h$, V_p^h . Традиционно в методе конечных элементов для построения конечномерных пространств используется заданная в аппроксимации Ω_h расчетной области Ω сетка конечных элементов ω_i . Будем считать, что разбиение Ω_h области Ω на конечных элементы правильное, то есть два конечных элемента либо не пересекаются, либо имеют общую вершину (узел), либо общее ребро, либо общую грань.

Конечные элементы обычно имеют простую форму и являются тетраэдрами, шестигранниками или призмами и т.д. В разрабатываемом программном комплексе они имеют форму тетраэдров. Для аппроксимации компонент поля перемещений и давления используются одинаковые кусочно-линейные базисные функции. Соответствующая пара конечномерных пространств, вообще говоря, не является inf-sup устойчивой. По этой причине корректность расчетов, в том числе приведенных в настоящей работе, дополнительно контролировалась с точки зрения наличия в решении нефизических осцилляций.

После аппроксимации задачи по пространству соответствующая система

обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{M}_u & \mathbf{M}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_h \\ \dot{\mathbf{p}}_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_u & \mathbf{A}_p \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{p}_h \end{bmatrix} = \mathbf{F},$$

где точкой обозначена производная по времени, \mathbf{u}_h , \mathbf{p}_h – зависящие от времени векторы узловых значений конечно-элементных аппроксимаций поля перемещений и давления соответственно; матрицы \mathbf{A}_u , \mathbf{A}_p , \mathbf{M}_u , \mathbf{M}_p , \mathbf{B} и \mathbf{F} – конечномерные аппроксимации соответствующих билинейных форм и правой части из (5).

Пусть далее \mathbf{u}_h , \mathbf{p}_h – значения векторов неизвестных в момент времени t , $\hat{\mathbf{u}}_h$, $\hat{\mathbf{p}}_h$ – в момент времени $t + \Delta t$, Δt – шаг времени. Аппроксимируя последнюю систему уравнений по времени неявным образом, получим

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{M}_u & \mathbf{M}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h}{\Delta t} \\ \frac{\hat{\mathbf{p}}_h - \mathbf{p}_h}{\Delta t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_u & \mathbf{A}_p \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_h \\ \hat{\mathbf{p}}_h \end{bmatrix} = \mathbf{F},$$

или

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_u & \mathbf{A}_p \\ \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_u & \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_p + \mathbf{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_h \\ \hat{\mathbf{p}}_h \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{F}}; \quad \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_u & \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_p + \mathbf{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{p}_h \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Решение этой системы линейных алгебраических уравнений относительно $\hat{\mathbf{u}}_h$ и $\hat{\mathbf{p}}_h$ позволяет получить решение задачи в момент времени $t + \Delta t$.

Отметим, что существует целый ряд подходов для решения указанной системы уравнений, среди которых отметим следующие:

- Непосредственно решение системы относительно «полного» вектора неизвестных. Такой подход является наиболее надежным (с точки зрения устойчивости расчета), однако не всегда удобен на практике, особенно если речь идет о решении задачи, в которой уравнения Био составляют лишь часть полной системы уравнений – либо в случае, когда расчет упругой и фильтрационной части задачи осуществляется различными солверами, которые не могут быть объединены в одну программу.
- Организация тех или иных итераций между переменными $\hat{\mathbf{u}}_h$ и $\hat{\mathbf{p}}_h$ и соответствующими группами уравнений (блочными строками системы (6)). Эти итерации соответствуют методу простой итерации решения системы (6) с использованием того или иного варианта предобуславливания с помощью метода Гаусса–Зейделя.
- Наконец, простейший вариант состоит в использовании ровно одной итерации Гаусса–Зейделя на каждом шаге по времени. Этот метод обладает

минимальным запасом устойчивости в смысле величины шага по времени.

Приведенные ниже результаты расчетов соответствуют последнему, простейшему, случаю, в котором сначала на каждом временном шаге решается уравнение теории упругости, после чего по обновленным данным производится расчет порового давления (т.н. дренированное расщепление, «drained split»). Причина этого заключается в том, что, как уже отмечалось во введении, описанные в работе математическая модель и алгоритмы являются частью существенно более сложного алгоритма, включающего дополнительные, по сравнению с рассмотренной здесь задачей Био, группы уравнений. Следует также заметить, что используемый тип расщепления является условно устойчивым [Kim2010] в зависимости от физических параметров поровой среды и флюида:

$$\frac{b^2 M}{\lambda + 2G} \leq 1. \quad (7)$$

4 Лабораторный эксперимент

В настоящем разделе описывается лабораторная установка, на экспериментальных данных которой будет верифицироваться численная модель. Данная установка была разработана в Институте динамики геосфер Российской академии наук [Trimanova2017, Trimanova2018]. К ее основным возможностям можно отнести: исследования гидроразрыва пласта и сопутствующих ему процессов, создание трехмерного напряженно-деформированного состояния, изучение неустойчивых трещин на нагнетательных скважинах, моделирование взаимодействия трещин и многое другое. Ниже будут описаны особенности установки, важные с точки зрения математического моделирования протекающих в ней процессов.

4.1 Описание установки

Конструктивно установка для моделирования процессов в плоском коллекторе состоит из верхней и нижней крышек, в кольцевом углублении которых фиксируется боковина. Схематический внешний вид установки показан на рисунке 1. Между собой крышки скрепляются шестнадцатью шпильками, которые на рисунке не показаны. Толщина крышек составляет 75 мм при наружном диаметре 600 мм. Высота боковины равна 70 мм при внутреннем диаметре 430 мм и толщине стенки 25 мм.

Основные детали установки изготовлены из нержавеющей стали. Крышки размещаются на станине, что позволяет свободно их переворачивать и перемещать верхнюю крышку в свой ложемент. Это дает возможность проводить

необходимые операции, связанные с подготовкой и проведением экспериментов, несмотря на значительную массу составных частей установки (масса крышек превышает 160 кг). Фотографии общего вида установки представлены на рисунках 2.

Перед началом эксперимента в установку заливается гипс. Затвердевая, он образует модельную среду. Верхняя крышка отделена от образца резиновой мембраной. По периметру мембраны расположены резиновое кольцо и опорный хомут, которые создают герметичное пространство между мембраной и крышкой (рис. 1). Это пространство заполняется водой под давлением, что позволяет моделировать литостатическое давление в модели коллектора. Давление над мембраной поддерживается при помощи разделительного цилиндра, верхняя часть которого заполнена сжатым азотом под необходимым давлением, а нижняя водой.

Горизонтальное нагружение модели обеспечивается с помощью герметичных камер, расположенных на поверхности боковой стенки. Фотография установки (вид сверху) с боковыми камерами представлен на рисунке 3. Камеры изготовлены из листовой меди толщиной 0,3 мм. Внутренняя полость камер имеет толщину 3 мм, высота камеры на 2 мм меньше высоты боковой стенки. Длина дуги камеры составляет примерно 80° . Патрубок камеры через герметичное уплотнение выводится из боковой стенки наружу. Камеры зафиксированы на боковой поверхности кольца с помощью силиконового герметика. Боковое нагружение осуществляется за счет закачки газа или жидкости в попарно противоположные камеры.

В обеих крышках и в боковине просверлены сквозные технологические отверстия диаметром 6 мм, оснащенные с внешней стороны приваренными резьбовыми штуцерами. В верхней крышке находится 29 отверстий, в нижней — 13, в боковине — 6. Эти отверстия могут использоваться как для монтажа различных датчиков, так и для обеспечения отбора или закачки флюида в коллектор. Поровое давление в модели измеряется через технологические отверстия, расположенные в нижней крышке установки, с помощью тензопреобразователей. Технологические отверстия заполняются водой и перед заливкой гипса закрываются поролоновыми вкладышами. Вкладыши на 5 мм выступают над поверхностью нижнего основания и после заливки гипса оказываются вмонтированы в него, обеспечивая передачу порового давления к тензопреобразователям. Схема расположения датчиков показана на рисунке 4.

Вспомогательные скважины, необходимые для прокачки насыщенного раствора сульфата кальция (гипса) через образец и для создания поля порового давления в нем, формируются при отливке образца путем помещения в него заранее вставок из фторопласта диаметром 15 мм в центрально симметричные технологические отверстия (рисунок 3). После затвердевания

гипса вставки вынимаются, а сами образовавшиеся скважины закрываются фторопластовыми крышками.

Центральная скважина представляет собой латунную трубку диаметром 16 мм, которая герметично вставляется в нижнюю крышку установки. Трубка имеет возможность свободно вращаться вокруг вертикальной оси, позволяя ориентировать затравку трещины гидроразрыва пласта (ГРП) в заданном направлении. Верхний торец трубки закрыт винтовой пробкой. В средней части трубки проделана вертикальная прорезь, в которую вставляется сложенная вдвое тонкая латунная сетка, служащая затравкой трещины ГРП. Размер лепестков сетки составляет 8x8 мм. Углы лепестков срезаны примерно на 2 мм. После заливки гипса мы получаем обсаженную скважину с перфорированной стенкой и затравкой трещины ГРП.

Эксперименты, как правило, проводятся на третьи сутки после заливки гипса, когда высохнет гипс. После сборки экспериментальной установки модель нагружается небольшим вертикальным давлением (1 МПа), затем задается необходимое давление в боковых камерах. После этого вертикальное давление поднимается до рабочего значения. Перед началом эксперимента проводится дополнительное насыщение гипсового образца жидкостью под постоянным давлением закачки около 1 МПа на технологической нагнетательной скважине. Критерием завершения процесса насыщения служит стабилизация расхода на добывающей скважине и давлений в точках измерения порового давления. Обычно насыщение продолжается около 1 часа. Непосредственно после завершения процесса насыщения проводится эксперимент по ГРП.

4.2 Модельная среда

Выбор среды, моделирующей коллектор, определяется целью и постановкой решаемых экспериментальных задач. Целью данного исследования является экспериментальное моделирование ГРП с возможностью переноса результатов экспериментов на пластовые условия. Выбор материала модельного образца связан с двумя основными условиями:

- критерии подобия, отвечающие за возможность переноса данных с эксперимента на пласт [Cleary1994];
- технологические факторы, связанные с возможностью изготовления экспериментальных образцов.

С этой точки зрения смесь на основе гипса с добавкой портландцемента является хорошим выбором. Хорошая текучесть смеси и отсутствие усадки при затвердевании позволяет добиться плотного контакта со стенками установки.

Для замедления "схватывания" гипса в воду для приготовления смеси добавляется лимонная кислота в концентрации 2 г/дм³.

В рассматриваемых далее экспериментах среда обладает следующими свойствами.

$\nu_{\text{dyn}} = 0.25$ – динамический коэффициент Пуассона,

$\nu_{\text{st}} = 0.2$ – статический коэффициент Пуассона,

$E_{\text{dyn}} = 7.5 \times 10^9$ [Па] – динамический модуль Юнга,

$E_{\text{st}} = 3.7 \times 10^9$ [Па] – статический модуль Юнга,

$k = 2.4$ [мД] – коэффициент абсолютной проницаемости пласта.

Описание экспериментов по определению данных прочностных и фильтрационных характеристик образца можно найти в [Trimonova2017, Trimonova2018].

4.3 Описание эксперимента

В настоящем разделе приведено описание одного из экспериментов. Эксперимент проводился без гидроразрыва пласта для проверки теории однофазной фильтрации на кривых падения давления. Для этого во вспомогательные скважины сначала закачивался растрор гипса с целью насыщения образца и создания в нем стационарного поля порового давления, после чего давление в нагнетательной скважине сбрасывалось. Соответственно поровое давление в датчиках начинало спадать, и это фиксировалось в течение всего процесса падения давления. Давления в датчиках записывалось каждые 0.01 секунды.

Для создания этого эксперимента перед заливкой гипса на дно установки фиксировались вспомогательные скважины в точках с координатами [(0.057, 0.127), (-0.057, -0.127)] и центральная скважина. На дно установки монтировались датчики давления согласно рисунку 4 в точках с координатами [(0.057, -0.127), (0.07, 0.0), (-0.057, 0.127), (0.0, 0.127), (0.0, -0.185), (0.065, 0.065), (-0.121, 0.121), (0.0, 0.07), (0.121, 0.121), (0.127, 0.0), (0.0, -0.07), (0.0, 0.0), (-0.185, 0.0)]. Измеренное в датчиках давление соответствовало давлению на расстоянии 4 мм от дна образца. Далее в установку заливался гипс и высушивался в течение 2-3 дней. После затвердевания образца вспомогательные боковые скважины удалялись. Далее, как упоминалось выше, сверху на образец подавалось давление (20 атм, где 1 атм = 101335 Па), имитируя литостатическое давление. Давление в боковых камерах не задавалось. После этого во вспомогательную скважину с координатами центра (0.057, 0.127) и радиусом 7.5 мм закачивался раствор гипса с постоянным давлением (14.5 атм).

Другая скважина была соединена с атмосферой. Насыщение образца продолжалось до установления в нем стационарного режима. Установление режима определялось по давлению в центре образца, в точке с координатами $(0, 0)$. Когда давление в ней достигало значения, равного полусумме давлений, заданных в боковых скважинах. После этого раствор в нагнетательную скважину переставал подаваться. Кривые давления в датчиках порового давления фиксировались в течение всего эксперимента (рисунок 5). Длительность всего эксперимента составила примерно 220 мин.

5 Вычислительный эксперимент

В данном разделе представлены результаты численного моделирования описанного выше эксперимента. В первую очередь, ниже указаны граничные и начальные условия, используемые в математической модели, максимально соответствующие условиям эксперимента. Далее, после получения численных результатов, представлено сравнение кривых давления в точках нахождения датчиков порового давления. Основные уравнения модели приведены в разделе 2.

5.1 Постановка задачи: граничные условия для задачи упругости

Схематический вид образца с прикладываемыми нагрузками представлен на рисунке 6. На верхнюю поверхность образца прикладывалась вертикальная нагрузка перпендикулярно поверхности, поэтому вектор приложенной силы равен нормальной компоненте силы: $\mathbf{f} = \mathbf{f}_n = \sigma_n \mathbf{n}$, где $\sigma_n = P_{\text{top}}$. Следовательно, на верхнюю поверхность ставится граничное условие Неймана на нормальное напряжение, равное вертикальной нагрузке: $\sigma_n = P_{\text{top}} = 20$ атм.

Нижняя крышка установки зафиксирована жестко по вертикали, следовательно нижняя поверхность образца не может перемещаться вдоль оси OZ под действием вертикальной нагрузки. Таким образом, на низ образца ставится граничное условие Дирихле на перемещение (нулевое) по оси OZ : $u_z = 0$.

Чтобы исключить поворот образца вокруг своей оси и сдвига образца в плоскости OXY . Для исключения таких перемещений можно поставить граничное условие Дирихле на всю боковую поверхность образца в виде нулевого касательного перемещения в плоскости OXY : $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\tau = 0$, где $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$, $\mathbf{e}_\tau = (-n_y, n_x, 0)$. То есть, граничное условие может быть переписано в виде: $-n_y u_x + n_x u_y = 0$

Так же к граничным условиям для задачи упругости необходимо добавить условия на вспомогательные скважины, которые следуют из того фак-

та, что в нагнетательную скважину закачивается жидкость под давлением, а добывающая связана с атмосферой. Таким образом, на скважины необходимо поставить условие Неймана на полные нормальные напряжение: для нагнетательной: $\sigma_n = P_{\text{inj}} = 14.5$ атм, для добывающей: $\sigma_n = P_{\text{prod}} = 1$ атм.

5.2 Постановка задачи: граничные условия для задачи фильтрации

На верхнюю, нижнюю, боковую поверхности образца ставится условие непротекания. Это условие означает нулевой поток через данные поверхности, который, в свою очередь линейно зависит от градиента давления. То есть, граничное условие представляет собой условие Неймана на давление: $\partial P / \partial \mathbf{n} = 0$

На вспомогательные скважины сначала задаются постоянные давления: в нагнетательную скважину закачивается раствор гипса под давлением 14.5 атм, а добывающая скважина связана с атмосферой. После установления стационарного режима закачка раствора в нагнетательную скважину прекращается, а добывающая скважина так же связана с атмосферой. Таким образом, на всю поверхность нагнетательной скважины с координатами (0.057, 0.127) ставится граничное условие Дирихле: $P_{\text{inj}} = 14.5$ атм до достижения стационарного режима. Далее, когда подача раствора прекращается, на нее ставится уже условие Неймана $\partial P / \partial \mathbf{n} = 0$ до конца эксперимента. На добывающую скважину с координатами (−0.057, −0.127) ставится граничное условие Дирихле в течение всего эксперимента: $P_{\text{prod}} = 1$ атм.

6 Заключение

В настоящей работе подробно описана математическая постановка линейной задачи пороупругости в рамках классической модели Био. Рассмотрен общий случай неизотермической геометрически и физически линейной среды. Приведены основные уравнения модели и ее определяющие соотношения. Рассмотрены основные сложности, возникающие при численном решении задачи.

Описанная модель и алгоритмы легли в основу ядра программного комплекса для математического моделирования пороупругих процессов. Работоспособность программы иллюстрируется результатами расчета ряда распространенных тестов.

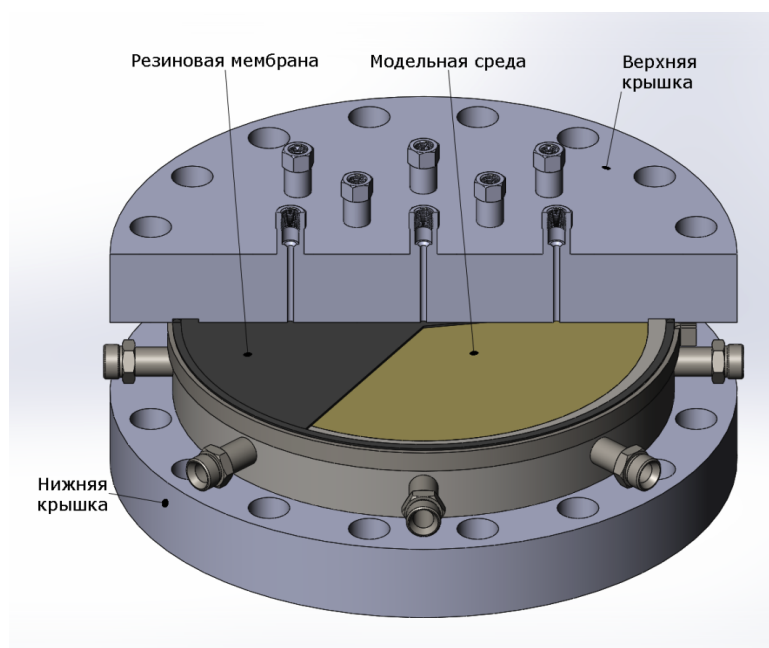


Рис. 1. Схема плоской модельной установки



Рис. 2. Общий вид экспериментальной установки

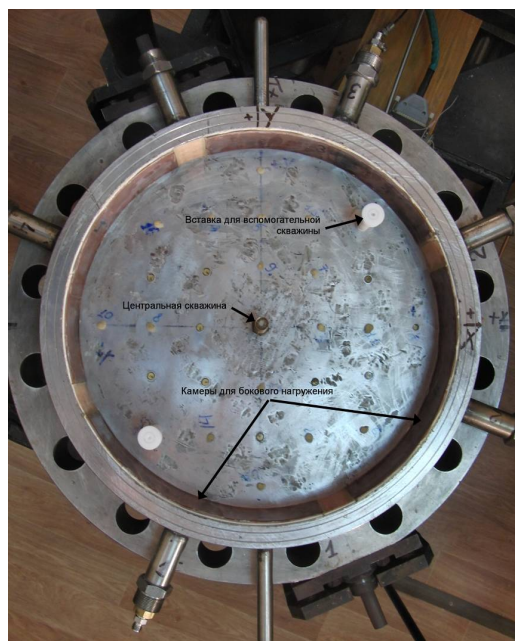


Рис. 3. Фотография установки: вид сверху

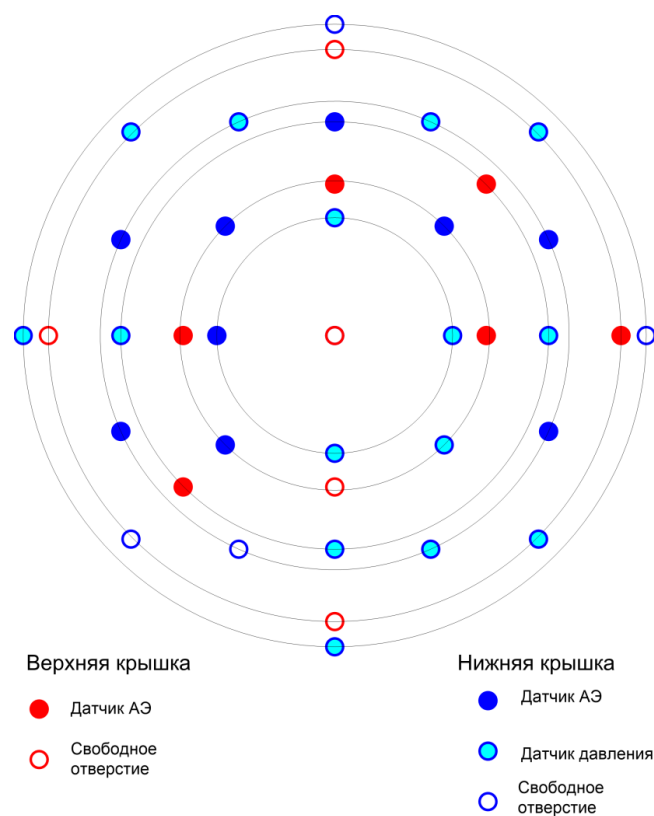


Рис. 4. Схема расположения датчиков в нижней и верхней крышках

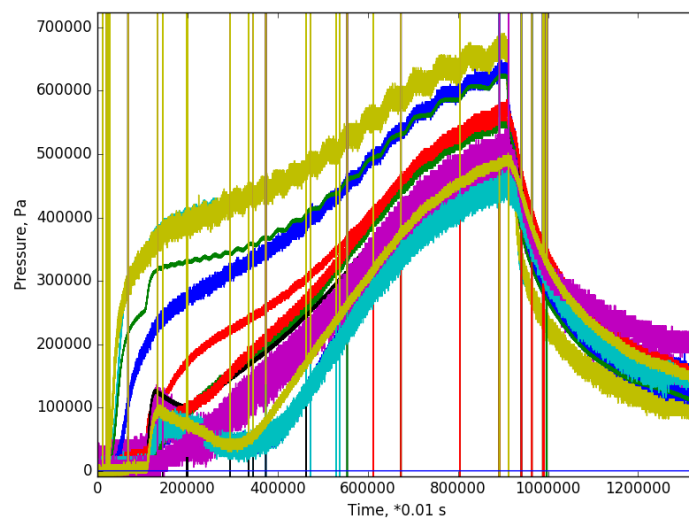


Рис. 5. Кривые давления в датчиках порового давления

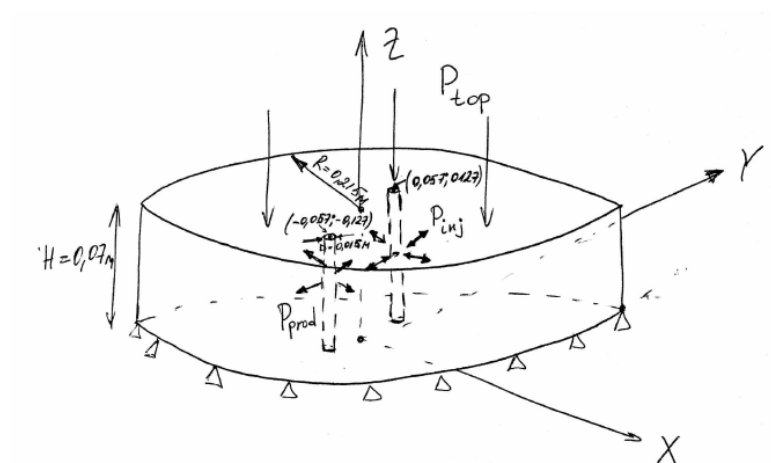


Рис. 6. Схематический вид образца с прикладываемыми нагрузками

Список литературы

- [Азиз2004] Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск, 2004, 416 с.
- [Борисов2017] Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск, 2004, 416 с.
- [Biot1941] Борисов В.Е., Иванов А.В., Критский Б.В., Меньшов И.С., Савенков Е.Б. Численное моделирование задач пороупругости. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. №81. 36 с.
- [Brezzi1991] Brezzi F., Fortin M. Mixed and Hybrid Finite Elements Methods. Springer, 1991.
- [Chappele1993] Chappelle D., Bathe K.J. The inf-sup Test // *Computers & Structures*, 1993. V. 47, № 4–5, pp. 537–545.
- [Cheng1988] Cheng A.H.-D., Detournay E. A direct boundary element method for plane strain poroelasticity // *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, 12, pp. 551–572, 1988.
- [Cleary1994] Cleary M.P., Quinn. T.S., C.J. de Pater. Experimental Verification of Dimensional Analysis for Hydraulic Fracturing // SPE Production & Facilities, November 1994. pp. 230–238
- [Commend2004] Commend S., Truty A., Zimmermann Th. Stabilized finite elements applied to elastoplasticity: I. Mixed displacement–pressure formulation // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2004. V. 193, pp. 3559–3586.
- [Coussy2004] Coussy O. Poromechanics, John Wiley and Sons, 2004.
- [Detournay1993] Detournay E., Cheng A.H.-D. Fundamentals of poroelasticity. Chapter 5 in Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects, Vol. II, Analysis and Design Method, ed. C. Fairhurst, Pergamon Press, 1993, pp. 113–171.
- [Ern2009] Ern A., Meunier S. A-posteriori error analysis of Euler-Galerkin approximations to coupled elliptic-parabolic problems // *ESAIM: M2AN*, 2009. V. 43, № 2, pp. 353–375.

- [Haga2012] Haga J.B., Osnes H., Langtangen H.P. On the causes of pressure oscillations in low-permeable and low-compressible porous media // *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 2012. V. 36, № 12, pp. 1507–1522.
- [Kim2009] Kim J., Tchelepi H.A., Juanes R. Stability, Accuracy and Efficiency of Sequential Methods for Coupled Flow and Geomechanics // SPE Paper 119084, 2009.
- [Kim2010] Kim J. Sequential Methods for Coupled Geomechanics and Multiphase Flow // PhD Thesis, Stanford University, 2010, 274 p.
- [Lewis1998] Lewis R.W., Schrefler B.A. The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation in Porous Media. J. Wiley, Chichester, 2nd ed., 1998.
- [Mandel1953] Mandel J. Consolidation des sols (étude mathématique) // *Géotechnique*, 1953, pp. 287–299.
- [Murad1996] Murad M.A., Thomee V., Loula A.F.D. Asymptotic Behavior of Semidiscrete Finite-Element Approximations of Biot's Consolidation Problem // *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1996. V. 33, № 3, pp. 1065–1083.
- [Noorishad1982] Noorishad J., Ayatollahi M.S., Witherspoon P.A. A Finite-Element Method for Coupled Stress and Fluid Flow Analysis in Fractured Rock Masses // *J. Rock Mech. Min. Sol & Geomech.*, 1982. V. 19, pp. 185–193.
- [Philips2005] Philips B.A. Finite Element Methods in Linear Poroelasticity: Theoretical and Computational Results // PhD Thesis, The University of Texas at Austin, 2005, 284 p.
- [Philips2009] Phillips P.J., Wheeler M.F. Overcoming the problem of locking in linear elasticity and poroelasticity: an heuristic approach // *Comput. Geosci.*, 2009. V. 13, pp. 5–12.
- [Preisig2011] Preisig M., Průst J.H. Stabilization procedures in coupled poromechanics problems: A critical assessment // *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 2011. V. 35, pp. 1207–1225.
- [Showalter2000] Showalter R.E. Diffusion in Poro-Elastic Media // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2000. V. 251, № 1, pp. 310–340.
- [Terzaghi1996] Terzaghi K. Soil mechanics in engineering practice. John Wiley & Sons, 1996.

- [Trimonova2017] Trimonova M., Baryshnikov N., Zenchenko E., Zenchenko P., Turuntaev S. The Study of the Unstable Fracure Propagation in the Injection Well: Numerical and Laboratory Modeling. // Society of Petroleum Engineers, 2017, October 16. Conference paper. 187822-MS.
- [Trimonova2018] Trimonova M., Baryshnikov N., Zenchenko E., Zenchenko P., Turuntaev S., Aigozhieva A. Estimation of the Hydraulic Fracture Propagation Rate in the Laboratory Experiment. // Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes. 2018.
- [Vermeer1981] Vermeer P.A., Verruijt A. An Accuracy condition for Consolidation by Finite Elements // *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 1981. V. 5, pp. 1–14.
- [Wan2002] Wan J. Stabilized Finite Element Method for Coupled Geomechanics and Multiphase Flow // PhD Thesis, Stanford Univeristy, 2002, 180 p.
- [Wang2000] Wang H.F. Theory of Linear Poroelasticity, Princeton University Press, 2000.
- [White2008] White J.A., Borja R.I. Stabilized low-order finite elements for coupled solid-deformation/fluid-diffusion and their application to fault zone transients // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2008. V. 197, № 49–50, pp. 4353–4366.
- [Wieners2003] Wieners C. Taylor-Hood elements in 3D // in Analysis and Simulation of Multifield Problems, Wolfgang L. Wendland, Messoud Efendiev, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Springer, 2003. V. 12, 381 p.
- [Xia2009] Xia K., Masud A. A stabilized finite element formulation for finite deformation elastoplasticity in geomechanics // *Computers and Geotechnics*, 2009. V. 36, pp. 396–405.
- [Zheng2003] Zheng Y., Burrige R., Burns D. Reservoir Simulation with the Finite Element Method Using Biot Poroelastic Approach // Earth Resources Laboratory Industry Consortia Annual Report 2003-11, Massachusetts Institute of Technology. Earth Resources Laboratory, 2003, 20 p.