1.3. Predikat dan Kuantor

Kalimat sehari-hari belum bisa memenuhi apa yang dibutuhkan matematika. Di samping itu kita juga perlu membuat sesuatu seperti " $x = 3$" , "$x \geq y$" dan " $x + y = z$" . Sesuatu seperti ini jelas bukan merupakan suatu proposisi, karena tidak mempunyai satu nilai kebenaran. Sesuatu ini dalam matematika dikenal dengan kalimat terbuka (open sentences). Kalimat terbuka ini akan menjadi suatu proposisi bila peubah-peubah dalam kalimat terbuka tersebut diganti dengan suatu entry dari himpunan yang memuat peubah tersebut, sehingga jelas nilai kebenarannya. Bentuk kalimat terbuka dalam matematika ini, muncul juga dalam Bahasa Indonesia: Misal,

" Dia tinggi dan keren" ("x tinggi dan keren")

" Dia menetap di kota z " (y menetap di kota z")

Kalimat yang dibentuk dengan menggunakan variabel/peubah dalam suatu"template" yang menjelaskan suatu sifat dari suatu objek atau hubungan antar objek. Template-template ini disebut ***predikat***. Kalimat yang disusun atas predikat dan peubah menjadi benar atau salah bila variabel/peubah diganti dengan suatu nilai khusus. Dari Contoh kalimat "x tinggi dan keren," x adalah suatu peubah dan "tinggi dan keren" adalah predikat; dalam kalimat y menetap di kota z, y dan z adalah peubah dan "menetap di kota" adalah predikat.

Dalam matematika suatu predikat cukup penting dan dapat berbentuknotasi khusus.Contoh-contoh dengan menggunakan "=" dalam kalimat " x sama dengan y" dan ">" yang menyatakan "x lebih dari y". Kita akan menggunakannya dan notasi-notasi khusus yang lebih tepat/baik serta menyatakan predikat-predikat yang lain tersebut dengan huruf kapital, misal:

" x adalah laki-laki" dapat dinyatakan dengan L(x),

" x menikah dengan y "dapat dinyatakan dengan M (x,y),

"$x + y = z$ " dapat disajikan dalam bentuk S(x,y,z)

Simbol-simbol, seperti L, M atau S di atas "=" dalam kalimat "$x = y$" menyatakan suatu predikat khusus, dan disebut ***konstan predikat***. (Predikat ada dua macam yaitu konstan predikat dan peubah predikat) suatu peubah yang muncul dalam kurung setelah suatu predikat atau digunakan dengan konstan predikat seperti "=" disebut suatu ***peubah individual***. Dalam suatu ekspresi P(x_1,

x_2, …., x_n), P adalah suatu konstan predikat atau peubah, dan setiap x_i merupakan peubah individual, dan P disebut mempunyai n argumen atau predikat dengan n tempat.

Nilai-nilai dari peubah individual harus mengambarkan suatu himpunan yang disebut ***semesta pembicaraan*** atau ***semesta***. Contoh, dalam pembicaraan predikat di atas yaitu "$x < 3$,". Paling tepat dipilih suatu **himpunan bilangan** sebagai semesta pembicaraan, untuk menghidari kemungkinan munculnya "merah < 3".Lebih tepat perlu diselidiki secara eksplisit semesta pembicaraan. Dalam praktek semesta sering muncul secara implisit. Paling sedikit diperlukan satu elemen dalam suatu semesta pembicaraan.

Sebarang predikat yang mempunyai n argumen, dengan n suatu bilangan asli/bilangan bulat positif. Jika P adalah konstan predikat dengan n tempat dan nilai-nilai c_1, c_2, …, c_n dipasangkan dengan setiap peubah individual, menghasilkan suatu proposisi. Anggap semesta pembiraannya adalah **S**. Jika nilai dari P(c_1, c_2, …, $c_{n)}$ ***benar*** untuk setiap memilih argumen c_1, c_2, …, c_n dari**S**, maka P dikatakan ***valid*** dalam semesta **S**. Jika nilai dari P(c_1, c_2, …, $c_{n)}$***benaruntuk suatu*** (tidak perlu semua) pilihan pada argumen dari **S,** maka P dikatakan ***dapatmemenuhi***oleh semesta pembicaraan S, dan nilai-nilai c_1, c_2, …, c_n yang membuatP(c_1, c_2, …, $c_{n)}$***benar*** disebut memenuhi P. Jika P tidak dipenuhi oleh semesta S, maka dikatakan P ***tidak dipenuhi*** oleh semesta S. Ternyata bahwa suatu predikat diperbolehkan mempunyai ***nol argumen***. Karena suatu konstan predikat harus mempunyai satu nilai benar atau salah bila nilai-nilai dipasangkan dengan semua argumen, menurut hal ini suatu konstan predikat tanpa argumen merupakan proposisi. Dengan cara yang sama, suatu peubah predikat dengan ***nol argument*** merupakan peubah proposisional.

Dalam mengganti suatu predikat menjadi suatu proposisi, setiap peubah individual dari predikat harus satu **ikatan/kait,** hal ini mungkin dilakukan dengan dua cara. *Cara pertama*, mengkaitkan peubah individual dengan memasangkan ***suatu nilai darinya***.

Contoh

Perhatikan predikat " $x + y = 3$" dinyatakan dalam bentuk $P(x,y)$. Jika nilai 1 dipasangkan dengan x dan nilai 2 pada y, predikat berubah menjadi suatu proposisi yang mempnyai nilai kebenaran "***benar"***. Selain ini, jika memasangkan nilai 2 pada x dan 6 pada y, menghasilkan proposisi $P(2,6)$ yang bernilai salah.

*Cara kedua*dari mengkaitkan peubah-peubah individual dengan ***kuantifikasi*** dari peubah. Bentuk umum dari kuantifikasi adalah ***universal*** dan ***eksistensial***. Jika $P(x)$ adalah suatu predikat dengan peubah individual x sebagai argumen, maka pernyataan

"Untuk semua x, P(x)," yang mengintepretasikan

"Untuk semua nilai x, pernyataan P(x) adalah benar,"

Merupakan suatu pernyataan dengan peubah x dan disebut ***universally quantified***. Simbol $\forall$ disebut ***kuantor universal,*** yang digunakan untuk menyatakan ungkapan "untuk semua". Dengan demikian, "Untuk semua x, P(x)" ditulis "$\forall(x)P(x)$". Simbol $\forall$ dibaca "***untuk semua***", "***untuk setiap***", "***untuk sebarang***", Jika pernyataan $P(x)$ benar untuk setiap nilai x, maka $\forall(x)P(x)$ benar ***jika dan hanya jika*** predikat P **valid** dalam **S**. Berdasar hal ini, bahwa sebarang predikat P dan sebarang elemen c dari suatu semesta pembicaraan, implikasi

$\forall(x)P(x) \Rightarrow P(c)$ adalah benar.

Contoh-Contoh

Proposisi-proposisi berikut disusun dengan kuantifikasi universal:

(a) $\forall x\,[\,x < x + 1]$ (untuk semua x, x kurang dari x + 1)

(b) $\forall x[x = 3]$ (untuk sebarang x, x = 3)

Jika semesta pembicaraannya himpunan *bilangan bula*t **B, predikat x < x + 1** adalah benar untuk setiap nilai x, tetapi "x = 3" bernilai salah bila x dipasangkan dengan nilai 1. Akibatnya, dalam semesta pembicaraan ini (a) benar dan (b) salah.

(c) Jika A susunan bilangan bulat dengan 50 elemen/anggota, A[1], A[2], …, A[50], maka dapat dinyatakan bahwa semua elemen/entry adalah bukan nol sebagaimana bentuk berikut

$\forall i\{(1 \le i \wedge i \le 50) \Rightarrow A[i] \ne 0\}$

Elemen-elemen dari urutan tersebut dipilih dalam urutan ***tidak turun****(nondecreasing)* jika memenuhi hal berikut ini

$\forall i\{(1 \leq i \wedge i \leq 50) \Rightarrow A[i] \leq A[i+1]\}$

Kita juga dapat menggunakan lebih dari satu kuantor dengan predikat-predikat yang mempunyailebih dari satu peubah, perhatikan berikut ini

(d) $\forall x \forall y\ [\ x + y > x\ ]$ dibaca "untuk setiap x dan setiap y, x + y lebih dari x." Proposisi ini bernilai benar jika semesta pembicaraannya bilangan bulat positif $\mathbf{B}_+$ dan salah bila semestanya bilangan bulat **B**.(Why?)

Bentuk kuantor yang lain adalah ***eksistensial/existential***. Peubah individual x dalam

"Untuk suatu x, P(x)", ekivalen dengan

" Terdapat/ada suatu nilai x yang menyebabkan pernyataan P(x) benar,

disebut "***existentially quantified***". Simbol $\exists$ digunakan dalam menyajikan ungkapan "there exists/ada/terdapat" dan pernyataan di atas dapat ditulis "$\exists x$ P(x)". Simbol $\exists$ juga dapat dibaca "***untuk suatu***" atau "***paling sedikit satu***". Jika pernyataan P(x) benar untuk paling sedikit satu elemen dari semesta pembicaraanmaka proposisi $\exists x$ P(x) adalah benar, selainnya salah. Ringkasnya, $\exists x$ P(x) adalah benar ***jika dan hanya jika*** memenuhi semesta pembicaraan **S.** Berdasarkan hal ini, untuk sebarang elemen c pada semesta, implikasi

$P(c) \Rightarrow \exists x\ P(x)$ bernilai benar.

Contoh-contoh

Peubah x adalah existentially quantified dalam proposisi-proposisi berikut:

(a) $\exists x[x < x + 1]$ (terdapat suatu x sedemikian hingga x kurang dari x + 1)

(b) $\exists x[x = 3]$ (terdapat x sedemikian hingga x = 3)

Kedua proposisi ini bernilai benar bila semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat **B.** Proposisi

(c) $\exists\ x\ [x = x + 1]$ (terdapat nilai x sedemikian hingga x = x + 1)

adalah salah, karena akan kesulitan dalam menentukan nilai x, pernyataan

x = x + 1 adalah salah.

Bentuk ketiga, dari kuantifikasi yang dapat digunakan untuk menyatakan bahwa terdapat/ada ***satu dan hanya satu*** elemen dari semesta pembicaraan yang mebuat suatu predikat bernilai benar. Kuantor ini dinyatakan dengan $\exists!$ x dibaca "

Terdapat nilai tunggal dari x sedemikian hingga …” atau “Terdapat satu dan hanya satu nilai x sedemikian hingga … “

Contoh-contoh

Misal semesta pembicaraan adalah himpunan bilangan cacah **W.** Proposisi-proposisi berikut adalah benar.

(a) $\exists!\ x\ [x < 1]$

(b) $\exists!\ x\ [x = 3]$

Untuk x = 0 pernyataan x < 1 bernilai benar, hal ini salah untuk nilai x selain 0. Pada (b) Jelas, nilai x tunggal yaitu 3. Untuk semesta pembicaraan yang sama, proposisi

(c) $\exists!\ x\ [\ x > 1]$ bernilai salah (why?)

Suatu pernyataan dengan peubah-peubah quantified dapat diekspresikan dengan menggunakan proposisi-proposisi diperoleh dengan cara memasangkan nilai-nilai pada peubah individual dari predikat-predikat yang ada dalam pernyataan. Hubungan ini dapat dibuat eksplisit dengan mempertimbangkan semesta pembicaraan yang terhingga. Misal semesta memuat bilangan bulat 1, 2 dan 3.

Maka proposisi $\forall x\ P(x)$ekivalen dengan konjungsi

$P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)$,

dan proposisi $\exists x\ P(x)$ekivalen dengan disjungsi

$P(1) \vee P(2) \vee P(3)$.

Proposisi $\exists!\ X\ P(x)$

Ekivalen dengan proposisi

$[P(1) \wedge \sim P(2) \wedge \sim P(3)] \vee [P(2) \wedge \sim P(1) \wedge \sim P(3)] \vee P(3) \wedge \sim P(1) \wedge \sim P(2)]$.

Jika semesta pembicaraan tak hingga, suatu pernyataan quantified tidak dapat disajikan dengan konjungsi terhingga atau disjungsi terhingga dari proposisi-proposisi tanpa menggunakan kuantor. Bagaimanapun, konsep dapat diperluas, hal ini memerhatikan suatu pernyataan universally quantified atas suatu semesta takhinggasebagai konjungsi takhingga dan suatu pernyataan universally quantified sebagai disjungsi takhingga.

Contoh

Pandang semestanya berupa bilangan bulat positif, missal P(x) menyatakan suatu pernyataan

"x > 3.". Maka proposisi $\forall$x P(x) dapat diintepretasikan sebagai konjungsi takhingga

$P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge \ldots$ yang bernilai salah, karena satu dari operands yaitu P(0) bernilai salah. Proposisi $\exists$x P(x) dapat diintepretasikan sebagai disnjungsi takhingga

$P(0) \vee P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee \ldots$ yang bernilai benar, karena paling sedikit satu dari operands yaitu P(4) bernilai benar

Seluruh peubah individual dari suatu predikat harus dikaitkan dalam suatu aturan yang dapat mengubah suatu predikat ke dalam suatu proposisi. Terdapat dua cara mengkaitkan peubah-peubah individual, yaitu memasangkan nilai-nilai dengan peubah individual atau dapat dengan quantified. Peubah-peubah individual yang tidak dapat dikaitkan disebut ***bebas/free***. Jika P adalah suatu predikat dengan n peubah bebas, maka pengkaitan peubah bebas dengan cara mereduksi banyak peubah bebas denga ***satu,*** menghasilkan pernyataan yang ekivalen dengan suatu predikat dengan n-1 peubah. Sebagaiman dinyatakan sebelumnya, suatu predikat tanpa peubah bebas merupakan suatu proposisi.

Contoh-contoh

Predikat P(x,y,z) mewakili "x + y = z", mempunyai tiga peubah, semua peubah bebas dalam satu pernyataan P(x,y,z) Jika x dipasangkan dengan 2, menghasilkan predikat P denag satu peubah terikat, yaitu P(2,y,z). Pernyataan ini ekivalen dengan suatu predikat dengan dua peubah bebas, yang dapat dinyatakan dengan Q(y, z), Q(y, z) bernilai benar bila 2 + y = z. Dengan cara yang sama $\exists$yP(x,y,z) yang merupakan pernyataan dengan dua peubah bebas. Nilai kebenaran dari pernyataan ini ekivalen suatu predikat dengan dua peubah, yang akan disebut dengan R(x,z); jika semesta pembicaraannya bilangan asli, maka

$R(x,z) \Leftrightarrow \exists y P(x,y,z) \Leftrightarrow \exists y[\ x + y = z] \Leftrightarrow x \leq z.$

Jika y tidak muncul sebagai peubah individual dalam $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, maka pernyataan $\forall y P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dan $\exists y P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ keduanya ekivalen dengan

$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, karena tidak satupun peubah-peubah individual dari P terikat secara kuantifikasi. Contoh khusus, jika P suatu proposisi, maka nilai kebenaran $\exists xP$ atau $\forall xP$ adalah sama dengan nilai kebenaran dari P.

Jika lebih dari satu kuantor diaplikasikan pada sebuah predikat, urutan peubah-peubah yang terkait sama dengan urutan dalam daftar kuantor; contoh,

$\forall x\ \forall yP(x,y)$ menyatakan $\forall x[\forall yP(x,y)]$

Urutan ikatan dapat berakibat cukup dalam terhadap arti dari suatu pernyataan. Contoh, barisan "$\forall x\exists y$" dapat dikatakan dengan kata-kata sendiri sebagai "Tidak mengapa setiap memilih nilai x, satu nilai dari y dapat ditemukan sedemikian hingga … "Dalam barisan kuantor ini, karena y dipilih setelah x, nilai y tergantung pada nilai x. Bertentangan dengan barisan "$\exists y\ \forall x$" menyatakan "satu nilai y dipilih demikian juga tidak mengapa nilai dipilih untuk x … ". Dalam kasus ini, karena y adalah ikatan pertama, nilai dari y diambil secara bebas dibanding nilai x.

Contoh-contoh

Misal semesta pembicaraannya adalah himpunan orang-orang yang telah menikah. Maka

(a) $\forall x\exists y$[x menikah dengan y] adalah benar. Bagaimanapun

(b) $\exists y\forall x$[x menikah dengan y] menyatakan bahwa ada seseorang dalam semesta yang menikah dengan sebarang orang; hal ini adalah salah.

Sekarang, misal semesta pembicaraannya himpunan ***bilangan bulat*B. Pernyataan**

(c) $\forall x\exists y[x + y = 0]$ (Untuk setiap x ada y sedemikian hingga $x + y = 0$) adalah benar, karena untuksebarang nilai x ada nilai y($y = -x$) yang membuat pernyataan "$x + y = 0$." Proposisi

(d) $\exists y\forall x[x + y = 0]$ (Ada suatu nilai ysedemikian hingga untuk setiap x, $x + y = 0$), menyatakan bahwa nilai y dipilih sedemikian hingga dan secara bebas diambil nilai x. Karena tidak terdapat nilai y yang menghasilkan nol bila ditambahkan dengan sebarang nilai x, proposisi ini bernilai salah. Proposisi

(e) $\forall x \forall y \exists ! z[x+y=z)$ menyatakan bahwa setiap pasangan bilangan bulat x dan y, maka ada satu-satunya nilai z yang sama dengan hasil jumlahnya; pernyataan ini benar. Dengan menukar dua kuantor terakhir pada (e), diperoleh proposisi

(f) $\forall x \exists ! z \forall y[x+y=z)$ (yang menyatakan bahwa setiap x, ada satu-satunya nilai z yang dipilih sedemikian hingga tidak menjadi soal y ditambahkan pada x, x+y=z. Proposisi ini bernilai salah. Proposisi

(g) $\exists ! x[x.6=0]$ adalah benar, karena persamaan x.6=0adalah benar jika dan hanya jika x = 0.

Proposisi

(h) $\exists ! x \forall y[x.y=0]$ adalah benar (why?). tetapi

(i) $\forall y \exists ! x[x.y=0]$ adalah salah, karena , jika x = 0 dan sebarang nilai x akan diperoleh hasil 0.

Dengan cara yang sama

(j) $\forall y \exists ! x[x + y < 0]$ adalah salah, karena untuk sebarang nilai y terdapat beberapa nilai x yang menyebabkan jumlah dari x dan y negatif.

Walaupun mempertukarkan urutan peubah individual berakibat berubahnya arti dari suatu pernyataan, tetapi masih ada dua perkecualian, yaitu barisan $\forall x \forall y$ selalu dapat diganti dengan $\forall y \forall x$ dan $\exists x \exists y$ selalu dapat diganti dengan $\exists y \exists x$. ***Tunjukkan kebenaran ini!***

L A T I H A N 2

1. Misal S(x,y,z) menyatakan bahwa predikat “x + y = z,” P(x,y,z) menyatakan “x . y = z.”dan L(x,y) menyatakan “x < y.” Misal semesta pembicaraan bilangan asli **A.** Gunakan predikat-predikat di atas, nyatakan pernyataan-pernyataan berikut. Istilah “terdapat nilai x” yang tidak mengakibatkan x mempunyai nilai tunggal.
   a. Untuk setiap x dan y , terdapat suatu z sedemikian hingga x + y = z.
   b. Tidak terdapat x yang kurang dari 0.
   c. Untuk setiap x, x + 0 = x.
   d. Untuk setiap x, x.y = y untuk setiap y.
   e. Terdapat suatu nilai x sedemikian hingga x.y = y untuk setiap y.
2. Tunjukkan bahwa $\exists x \exists y$ P(x,y) dan $\exists y \exists x$ adalah ekivalen, dengan cara memperluas pernyataan-pernyataan dalam bentuk disjungsi-disjungsi takhingga.
3. Tentukan pernyataan-pernyataan berikut bernilai benar, jika semestanya himpunan bilangan bulat dan “.“ menyatakan operasi perkalian.
   a. $\forall x \exists y[x.y = 0]$
   b. $\forall x \exists! y[x.y= 1]$
   c. $\exists y \forall x[x.y=1]$
   d. $\exists y \forall x[x.y=x]$
4. Misal semesta pembicaraannya bilangan bulat. Untuk setiap pernyataan berikut, tentukan suatu predikat P yang menjadikan ***implikasi*** bernilai salah.
   a. $\forall x \exists! y P(x,y) \Rightarrow \exists! y \forall x P(x,y)$
   b. $\exists! y \forall x P(x,y) \Rightarrow \forall x \exists! y P(x,y)$
5. Tentukan semesta pembicaraan secara khusus agar pernyataan berikut benar.. Coba pilih semesta pembicaraan yang lebih luas, missal bilangan bulat. Jelaskan mengapa muncul kesulitan?
   a. $\forall x[x > 10]$
   b. $\forall x[x = 3]$
   c. $\forall x \exists y[x + y = 436]$
   d. $\exists y \forall x[[x + y < 0]$

6. Misal suatu semesta pembicaraannya v\bilangan bulat yang memuat 0 dan 1. Tentukan Disjungsi dan konjungsi terhingga (finite) dari proposisi-proposisi tanpa menggunakan kuantor namun ekivalen dengan yang berikut ini:
   a. $\forall x P(0,x)$
   b. $\forall x \forall y P(x,y)$
   c. $\forall x \exists y\ P(x,y)$
   d. $\exists x \forall y\ P(x,y)$
   e. $\exists y \exists x\ P(x,y)$
7. Semesta pembicaraannya bilangan bulat.
   a. Tentukan suatu predikat P(x) yang bernilai salah tanpa memperhatikan apakah peubah x terikat pada $\forall$ atau $\exists$.
   b. Tentukan suatu predikat P(x) yang bernilai benar tanpa memperhatikan apakah peubah x terikat pada $\forall$ atau $\exists$.
   c. Apakah mungkin suatu predikat P(x) bernilai benar tanpa memperhatikan apakah peubah x terikat pada $\forall$ atau $\exists$.? Jelaskan pendapatmu!
8. Misal P sebarang predikatdengan semesta pembicaraan bilangan bulat 1, 2 dan 3. apakah nilai kebenaran dari proposisi $\exists! x P(x)$ ekivalen dengan nilai kebenaran proposisi $P(1) \oplus P(2) \oplus P(3)$?
9. Misal semesta pembicaraan bilangan bulat dan P(x,y,z) menyatakan $x - y = z$. Jelaskan pernyataan-pernyataan berikut dengan menggunakan notasi logis.
   a. Untuk setiap x dan y, terdapat suatu nilai z sedemikian hingga $x - y = z$.
   b. Untuk setiap x dan y, terdapat suatu nilai z sedemikian hingga $x - z = y$.
   c. Terdapat suatu nilai x sedemikian hingga untuk setiap y, $y - x = y$
   d. Bilamana 0 dikurangi sebarang bilangan bulat menghasilkan bilangan asli
   e. 3 hasil pengurangan dari 5 dengan 2.