1.7. Induksi Matematika

Induksi matematika sering digunakan kebenaran suatu rumus-rumus matematika yang berlaku untuk semua bilangan Asli (**A**).Bukti dengan cara ini didasarkan rumus.

Teorema. (Prinsip Induksi Matematika)

Misalkan P_n adalah suatu pernyataan tentang bilangan bulat positif n. Jika kedua syarat berikut dipenuhi:

1). P_1 benar,

2). Jika k bilangan bulat positif sebarang sehingga P_k benar, maka P_{k+1} juga benar,

maka P_n benar ***untuk semua*** bilangan Asli n

Bukti. Andaikan Syarat 1). dan 2). dipenuhi, tetapi kesimpulan tidak dipenuhi. Ini berarti P_n tidak berlakuuntuk setiap bilangan asli n. Misalkan n + 1 adalah bilangan bulat positif terkecil sehingga P_n tidak benar, yaitu P_1 , P_2 , ..., P_N benar, tetapi untuk P_{N+1} tidak benar .

Menurut syarat 1). $N \geq 1$.

Menurut syarat 2). karena P_N benar, maka P_{N+1} benar pulahal ini bertentangan dengan hipotesis bahwa P_{N+1} tidak benar.

Karena itu haruslah P_n benar untuk setiap $n \in$ **A.**

Contoh 1.***Buktikan*** $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$

Bukti.P : $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$

Untuk n = 1, maka $2.1 – 1= 1^2$

$1 = 1$

Karena untuk n = 1, yaitu P_1 benar.

maka diasumsikan benar untuk n = k yaitu P_k , sehingga

$1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) = k^2$

Selanjutnya, ditunjukkan benar untuk n = k + 1 , yaitu

$1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) + (2(k+1) - 1) = (k + 1)^2$

Diketahui bahwa $1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) = k^2$, sehingga

ruas kiri menjadi

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) + (2(k+1) - 1) = k^2 + (2(k+1) - 1)$$

$$= k^2 + 2k + 1$$

$= (k + 1)^2$

dengan demikian ruas kiri = ruas kanan, yaitu

$$(k + 1)^2 = (k + 1)^2$$

Jadi, P_{n+1} benar.

Karena P_{n+1} benar, maka P_n benar untuk setiap $n \in$ **A.**

Contoh 2.*Buktikan* $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = 1/6n(n + 1)(2n + 1)$

Bukti. P :$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = 1/6n(n + 1)(2n + 1)$

Untuk n = 1, maka $1^2 = 1/6 \times 1(1 + 1)(2 \times 1 + 1)$

$1 = 1/6 (2)(3)$

$1 = 1$

Karena P_1 benar, maka diasumsikan P_k juga benar, yaitu

$1^2 + 2^2 + ... + k^2 = 1/6k(k + 1)(2k + 1)$

Selanjutnya, ditunjukkan P_{k+1} benar, yaitu

$1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2 = 1/6(k+1)((k+1) + 1)(2(k +1) + 1)$

atau

$1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2 = 1/6(k+1)(k + 2)(2k + 3)$

Diketahui $1^2 + 2^2 + ... + k^2 = 1/6k(k + 1)(2k + 1)$, maka

ruas kiri menjadi

$$= 1/6k(k + 1)(2k + 1) + (k + 1)^2$$

$$= 1/6\, k(k + 1)(2k + 1) + 1\, (k + 1)^2$$

$$= 1/6\, k(k + 1)(2k + 1) + 1/6.\, 6(k + 1)^2$$

$$= 1/6[k(k + 1)(2k + 1) + 6(k + 1)^2]$$

$$= 1/6(k + 1)[(2k^2 + k) + 6(k + 1)]$$

$$= 1/6(k + 1)(2k^2 + 7k + 6)$$

$$= 1/6(k + 1)[(k + 2)(2k + 3)]$$

dengan demikian ruas kiri = ruas kanan, yaitu

$1/6(k + 1)[(k + 2)(2k + 3)] = 1/6(k + 1)[(k + 2)(2k + 3)]$

Jadi, P_{n+1} benar.

Karena P_{n+1} benar, maka P_n benar untuk setiap $n \in$ **A.**

Contoh 3. Jika $n! = n(n-1)(n-2)... 1$

$0! = 1$

Buktikan bahwa $n! > 2^n$ untuk $n \geq 4$

Bukti. P_n : $n! > 2^n$ untuk $n \geq 4$

Untuk n = 4, maka $4! > 2^4$

$4.3.2.1 = 24 > 16$

Pernyataan benar untuk n = 4, diasumsikan benar untuk n = k yaitu P_k untuk $k \geq 4$ atau

$k! > 2^k$ untuk $k \geq 4$

Selanjutnya ditunjukkan benar untuk n = k + 1, yaitu

$(k + 1)! > 2^{k+1}$ untuk $k \geq 4$

ruas kiri:

$(k + 1)!$ dapat ditulis $(k + 1)(k!)$

karena $k! > 2^k$ untuk $k \geq 4$, maka

$(k + 1)! > (k + 1)\, 2^k$ *)

ruas kanan:

$2^{k+1} = 2^k \cdot 2^1$ **)

berdasar fakta $(k + 1) > 2$ $[k \geq 4)$

Jadi, $(k + 1)! > 2^{k+1}$

Karena P_{k+1} benar, maka P_n benar untuk $n \geq 4$ dan $n \in$ **A.**

Contoh 4. Jika $\sum_{i=1}^{n} 2i = 2.1 + 2.2 + 2.3 + ... + 2.n$

Buktikan $\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n + 1)$

Bukti. P_n : $\sum_{i=1}^{n} 2i = 2.1 + 2.2 + 2.3 + ... + 2.n$

Untuk n = 1, maka $2 = 1.(1 + 1)$

$= 2$

Karena untuk n = 1 dan P_1 benar, maka diasumsikan P_k benar, yaitu

$$\sum_{i=1}^{k} 2i = k(k+1)$$

Selanjutnya ditunjukkan, bahwa benar juga untuk n = k + 1, yaitu

$$\sum_{i=1}^{k+1} 2i = (k+1)((k+1)+1)$$

$$= (k+1)(k+2)$$

Sedangkan diketahui bahwa $\sum_{i=1}^{k} 2i = k(k+1)$, sehingga

ruas kiri menjadi

$$k(k+1) + (2(k+1) = (k+1)(k+2)$$

ternyata ruas kiri sama dengan ruas kanan, sehingga P_{n+1} benar.

Jadi, P_n berlaku untuk setiap $n \in$ **A.**

L A T I H A N

Dengan menggunakan induksi matematika selesaikan soal-soalberikut, jika n $\in$ **A**

1. Buktikan $\sum_{k=1}^{n}(3k-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$

2. Buktikan $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$

3. Buktikan $\sum_{i=1}^{n} a^{n-i}b^{n-i} = \frac{a^n - b^n}{a-b}$

4. Buktikan $\sum_{i=1}^{n} 3^i = 3/2(3^n - 1)$

5. Buktikan $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1/4\ n^2(n+1)^2$

6. Buktikan 1.3.5 + 2.4.6 + 3.5.7… + n(n+2)(n+4) = ¼ n(n+1)(n+4)(n+5)

7. Buktikan : $2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = 2(2^n - 1)$

8. Buktikan : $1.5 + 2.5^2 + 3.5^3 + ... + n.5^n = \frac{5+(4n-1)5^{n+1}}{16}$

9. Buktikan : $n^5 - n$ habis dibagi oleh 30.

10. Buktikan : $3^{4n} - 1$ habis dibagi oleh 80.