3.10. **AturanRantaiDan PerluasanTurunanSuatuFungsi**

3.10.1. **AturanRantai**

Aturan-aturanyang telahdijelaskandi atasbelumcukupuntukmenentukanturunandarifungsi-fungsirangkap (fungsi yang lebihrumit), misal f(x) = sin 3x ,f(x) = $(2x^2 - 5x + 10)$. Untukkeperluaninidibutuhkanaturanbaru, yaituaturanrantai.

Jika yfungsidalam u, yang didefinisikan y = f(u), f'(u) adadan u fungsidalam x yang didefinisikan u = g(x), g'(x) ada, maka y fungsidalam x dan$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Secarasimbolik:

y = f(u) dengan u = g(x) dan f'(u), g'(x) ada⇒ y = f(g(x)) dan$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Bukti :$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$ dan $\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$

dengan $\Delta x \Rightarrow 0$, $\Delta y \Rightarrow 0$ dan $\Delta u \Rightarrow 0$

jika $\Delta u \neq 0$, maka $\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta u} - \frac{dy}{du}$ Δu untuk $\varepsilon \epsilon$ R dan $\varepsilon \neq 0$

diperoleh$\Delta y = \frac{dy}{du}\Delta u + \varepsilon\, \Delta u$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon \frac{\Delta u}{\Delta x}$ kedua ruas dibagi dengan Δx

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{dy}{du} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon \frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$, atau

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \varepsilon \frac{du}{dx}$, $(\Delta x \to 0) \Rightarrow (\varepsilon \to 0)$

$= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ ■

Cara lain:

Bukti: Misal F = g o f, maka F'(x) = (g o f)'(x)merupakan limit untukh $\to 0$

dari

$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{g((fx+h) - f(x))}{h}$

Misal y = f(x), danmisal k = f(x+h) - f(x), maka

f(x+h) = f(x) + k, diperoleh

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{g(y+k)-g(y)}{h}$$

Jikak $\neq 0$, maka

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{g(y+k)-g(y)}{k} . \frac{k}{h}$$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{g(y+k)-g(y)}{k} . \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{g(y+k)-g(y)}{k} . \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(y+k)-g(y)}{k} . \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h})$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(y+k)-g(y)}{k} . \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h})$$

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(y+k)-g(y)}{k} . \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h})$$

diketahuikeduafaktormempunyai limit, maka

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(y+k)-g(y)}{k} . f'(x))$$

Karena f '(x) ada, berlaku

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x) \Rightarrow \lim_{k \to 0} k = 0 \text{ , mengakibatkan}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(y+k)-g(y)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{g(y+k)-g(y)}{k}$$

diketahui g terdefirensialkanpada y = f(x), sehingga

$$\lim_{k \to 0} \frac{g(y+k)-g(y)}{k} = g'(y)$$

Dengandemikian

$$F'(x) = g'(y)\, f'(x) \quad \text{atau}$$
$$= g'(f(x))\, f'(x)$$

$\Delta F = g \circ f$, maka $F'(x) = (g \circ f)'(x)$ ■

Denganadanyaaturanrantai, makasebagianbesardariaturanaturan yang dibahas di atasdapatdiperluas. Berikutdibahasperluasannya.

3.11. PerluasanTeoremaAturanPangkat

Jika $f(x) = x^n$, dengan n bilanganbulatpositif, makaf '(x) = n x^{n-1}.

Perluasannya:

Jika $f(x) = g(x)^n$, dengan n bilanganbulatpositif, makaf '(x) = n $g(x)^{n-1}$ g'(x).

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = $g(x)^n$menjadi y = u^n

$\frac{dy}{du}$ = n u^{n-1}dan$\frac{du}{dx}$ = g'(x)

denganaturanrantaidiperoleh

$\frac{dy}{dx}$= n u^{n-1}.g'(x) atau

= n. $g(x)^{n-1}$. g'(x) ■

Contoh 1: Tentukanf'(x) dari $f(x) = (3x^2 - 2x + 10)^5$

Penyelesaian:

$f'(x) = 5(3x^2 - 2x + 10)^{5-1} . (3x^2 - 2x + 10)'$

$= 5 (3x^2 - 2x + 10)^4. (6x - 2)$

$= (30x - 10)(3x^2 - 2x + 10)^4$

Contoh 2: Tentukan f'(x) dari $f(x) =[\frac{x^3 - 1}{2x^3+1}]^4$

Penyelesaian: $f'(x) = 4 [\frac{x^3 - 1}{2x^3+1}]^3 . \frac{d}{dx}[\frac{x^3 - 1}{2x^3+1}]$.

$= 4[\frac{x^3 - 1}{2x^3+1}]^3 . \frac{(2x^3+1)(3x^2) - (x^3 - 1)(6x^2)}{(2x^3+1)^2}$.

$=4 \frac{[x^3 - 1]^3}{[2x^3+1]^3} . \frac{(3x^2)[(2x^3+1) - (2x^3 - 2)]}{(2x^3+1)^2}$

$=4\frac{[x^3 - 1]^3}{[2x^3+1]^3} . \frac{(3x^2).-1}{(2x^3+1)^2}$

$=4 \frac{[x^3 - 1]^3}{[2x^3+1]^3} . \frac{-(3x^2).(2x^3+1)}{(2x^3+1)^3}$

$=4 \frac{[x^3 - 1]^3}{[2x^3+1]^3} . \frac{(-6x^5 - 3x^2)}{(2x^3+1)^3}$

3.12. PerluasanTurunanFungsiTrigonometri

3.12.1. PerluasanTurunanFungsiSinus

Jika f(x) = sin x, maka f'(x) = cos x
Perluasannya
Jika f(x) = sing(x), maka f'(x) = g'(x) cos g(x)

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = sin g(x) menjadi y = sin u

$\frac{dy}{du}$= cosu dan$\frac{du}{dx}$ = g'(x)

denganaturanrantaidiperoleh

$\frac{dy}{dx}$ = cos u .g'(x) atau

f(x)'= cos g(x) . g'(x) ■

3.12.2. PerluasanTurunanFungsiCosinus

Jika f(x) = cos x, maka f'(x) = - sin x

Perlusannya:

Jika f(x) = cos g(x), maka f'(x) = - g'(x) sin g(x)

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = cos g(x) menjadi y = cos u

$\frac{dy}{du}$ = - sin u dan$\frac{du}{dx}$ = g'(x)

denganaturanrantaidiperoleh

$\frac{dy}{dx}$ = - sin u .g'(x) atau

f(x)' = - sin g(x) . g'(x) ■

3.12.3. PerluasanTurunanFungsiTangen

Jika f(x) = tan x, maka f'(x) = $\sec^2$ x

Perluasannya

Jika f(x) = tan g(x), maka f'(x) = g'(x) $\sec^2$ g(x)

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = tan g(x) menjadi y = tan u

$\frac{dy}{du}$= $\sec^2$ u dan$\frac{du}{dx}$ = g'(x)

denganaturanrantaidiperoleh

$\frac{dy}{dx}$ = $\sec^2$ u .g'(x) atau

f(x)' = $\sec^2$ g(x) . g'(x) ■

3.12.4. PerluasanTurunanFungsiCotangen

Jika f(x) = cot x, maka f'(x) = $-\csc^2 x$

Perluasannya

Jika f(x) = cot g(x), maka f'(x) = - g'(x) $\csc^2$ g(x)

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = cot g(x) menjadi y = cot u

$\frac{dy}{du}$ = - $\csc^2$u dan$\frac{du}{dx}$ = g'(x)

denganaturanrantaidiperoleh

$\frac{dy}{dx}$ = $-\csc^2$ u .g'(x) atau

= - g'(x) . $\csc^2$ g(x) ■

3.12.5. PerluasanTurunanFungsiSecant

Jika f(x) = sec x, maka f'(x) = sec x . tan x

Perluasannya

Jika f(x) = sec g(x), maka f'(x) = g'(x) (sec g(x) . tan g(x))

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = sec g(x) menjadi y = sec u

$\frac{dy}{du}$= sec u .tan u dan$\frac{du}{dx}$ = g'(x)

denganaturanrantaidiperoleh

$\frac{dy}{du}$= (sec u . tan u) . g'(x) atau

= g'(x) . sec u . tan u ■

$\therefore$ f(x) = sec g(x) $\Rightarrow$ D(sec g(x)) = g'(x) (sec g(x) . tan g(x))

3.12.6. PerluasanTurunanFungsiCosecant

Jika f(x) = csc x, maka f'(x) = - csc x . cot x

Perluasannya

$$f(x) = \csc g(x) \longrightarrow f'(x) = - g'(x) (\csc g(x).\cot g(x))$$

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = csc g(x) menjadi y = csc u

= - csc u . cot u dan = g'(x)

denganaturanrantaidiperoleh

= - csc u . cot u . g'(x) atau

= - g'(x) . csc u . cot u ■

$\therefore$f(x) = csc g(x) $\longrightarrow$ f'(x) = - g'(x) (csc g(x). cot g(x))

Contoh 1: Tentukan f'(x) dari f(x) = sin 3x + cos 2x

Penyelesaian: f'(x) = cos 3x . (3x)' + (-sin 2x) . (2x)'

= 3 cos 3x - 2 sin 2x

Contoh 2: Tentukan f'(x) dari f(x) = $\tan^2 (3x - 2)$

Penyelesaian: f'(x) = $(2 \tan (3x-2) \sec^2 (3x-2)) \frac{d}{dx}(3x-2)$

= $2 \tan (3x-2) \sec^2 (3x-2) . 3$

= $6 \tan (3x-2) \sec^2 (3x-2)$

Contoh 3: Tentukan f '(x) dari f(x) = $\sec^3 x^{1/2}$

Penyelesaian: f'(x) = $3 \sec^2 x^{1/2} \frac{d}{dx} (\sec x^{1/2})$

= $3 \sec^2 x^{1/2}. \sec x^{1/2}.\tan x^{1/2} \frac{d}{dx} (x^{1/2})$

= $3 \sec^3 x^{1/2}. \tan x^{1/2} . 1/2\, x^{-1/2}$

= $\frac{3}{2\sqrt{x}} \sec^3 x^{1/2} \tan x^{1/2}$

3.13. PerluasanTurunanFungsiLogaritmis

Jika $f(x) = {}^{a}\log x$, maka $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

Perluasannya

Jika $f(x) = {}^{a}\log g(x)$, maka $f'(x) = \frac{1}{g(x) \ln a} g'(x)$

Bukti : Misal $f(x) = y$ dan $g(x) = u$, sehingga

$f(x) = {}^{a}\log g(x)$ menjadi $y = {}^{a}\log u$

$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u \ln a}$ dan $\frac{du}{dx} = g'(x)$

denganaturanrantaidiperoleh

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u \ln a} \cdot g'(x)$ atau

$= \frac{1}{g(x) \ln a} \cdot g'(x)$ ■

3.13.1. PerluasanTurunanFungsiLogaritmisNaturalis

Jika $f(x) = \ln x$, maka $f'(x) = \frac{1}{x}$

Perluasannya

Jika $f(x) = \ln g(x)$, maka $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

Bukti : Misal $f(x) = y$ dan $g(x) = u$, sehingga

$f(x) = \ln g(x)$ menjadi $y = \ln u$

$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$ dan $\frac{du}{dx} = g'(x)$

denganaturanrantaidiperoleh

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot g'(x)$ atau

$= \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$ ■

3.14. PerluasanTurunanFungsiEksponensial

Jika $f(x) = a^{x}$, maka $f'(x) = a^{x} \ln a$

Perluasannya

Jika $f(x) = a^{g(x)}$, maka $f'(x) = a^{g(x)} \ln a.g'(x)$

Bukti :Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

$f(x) = a^{g(x)}$menjadi $y = a^u$

$\frac{dy}{du} = a^u \ln a$ dan$\frac{du}{dx} = g'(x)$

denganaturanrantaidiperoleh

$\frac{dy}{dx} = a^u \ln a . g'(x)$ atau

$= a^{g(x)} \ln a. g'(x)$ ■

3.14.1. PerluasanTurunanFungsiEksponensialDenganBilanganPokok e

Jika $f(x) = e^x$, maka $f'(x) = e^x$

Perluasannya

Jika $f(x) = e^{g(x)}$, maka $f'(x) = g'(x).e^{g(x)}$

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

$f(x) = e^{g(x)}$menjadi $y = e^u$

$\frac{dy}{du} = e^u$dan$\frac{du}{dx} = g'(x)$

denganaturanrantaidiperoleh

$\frac{dy}{dx} = e^u . g'(x)$ atau

$= e^{g(x)} . g'(x)$ ■

Contoh 1: Tentukan f'(x), jika $f(x) = \log (3x^2 - 5)$

Penyelesaian: $f'(x) = \frac{1}{3x^2-5} \log e \frac{d}{dx} (3x^2 - 5)$

$= \frac{6x}{3x^2-5} \log e$

Contoh 2: Tentukan f'(x), jika$f(x) = \ln (x^3 + 2)(2x^2 - 5)$

Penyelesaian: $f(x) = \ln (x^3 + 2)(2x^2 - 5)$

$= \ln (x^3 + 2) + \ln (2x^2 - 5)$

$f'(x) = \frac{1}{x^3+2} \frac{d}{dx} (x^3 + 2) + \frac{1}{2x^2-5} \frac{d}{dx} (2x^2 - 5)$

$= \frac{3x^2}{x^3+2} + \frac{4x}{2x^2-5}$

Contoh 3: Tentukan f'(x), jika $f(x) = x^x$

Penyelesaian: Cara 1 (menggunakansifatlogaritma)

$f(x) = x^x \longrightarrow \; y = x^x$keduaruasdioperasikandenganln

$\ln y = \ln x^x$atau

$\ln y = x \ln x \Rightarrow \frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx}\, x \ln x$

$\Leftrightarrow \; \frac{1}{y} . \frac{dy}{dx} = x . \frac{d}{dx} \ln x + \ln x \frac{dx}{dx}$

$\Leftrightarrow \; \frac{1}{y} . \frac{dy}{dx} = x . \frac{1}{x} + \ln x . 1$

$\Leftrightarrow \; \frac{1}{y} . \frac{dy}{dx} = (1 + \ln x)$

$\Leftrightarrow \; \frac{dy}{dx} = (1 + \ln x). y \quad$; kedua ruas dikali dengan y

atau$\Leftrightarrow \; \frac{dy}{dx} = x^x(1 + \ln x) \qquad \blacksquare$

Cara 2

$f(x) = x^x$dapatditulisdalambentuk $f(x) = e^{x \ln x}$

$f'(x) = \frac{d}{dx}(x \ln x) . e^{x \ln x}$

$= (x . 1/x + \ln x)(e^{x \ln x})$

$= (1 + \ln x)(e^{x \ln x})$ atau

$= x^x \; (1 + \ln x) \qquad \blacksquare$

3.15. PerluasanTurunanFungsiHiperbolik

3.15.1. PerluasanTurunanFungsiSinus Hiperbolik

Jika f(x) = sinh x, maka f'(x) = cosh x

Perluasannya

Jika f(x) = sinh g(x), maka f'(x) = g'(x).cosh g(x)

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = sinh g(x) menjadi y = sinh u

$\frac{dy}{du}$= coshu dan$\frac{du}{dx}$ = g'(x)

denganaturanrantaidiperoleh

$\frac{dy}{dx}$ = cosh u . g'(x)   atau

= g'(x) . cosh g(x)   ■

3.15.2. PerluasanTurunanFungsiCosinusHiperbolik

Jika f(x) = cosh x, maka f'(x) = sinh x

Perluasannya

Jika f(x) = cosh g(x), maka f'(x) = g'(x).sinh g(x)

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = cosh g(x) menjadi y = cosh u

$\frac{dy}{du}$ = sinh u dan$\frac{du}{dx}$ = g'(x)

denganaturanrantaidiperoleh

$\frac{dy}{dx}$ = sinh u . g'(x)   atau

= g'(x . sinh g(x))   ■

3.15.3. PerluasanTurunanFungsiTangenHiperbolik

Jika f(x) = tanh x, maka f'(x) = sech^2 x

Perluasannya

Jika f(x) = tanh g(x), maka f'(x) = g '(x).sech^2 g(x)

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = tanh g(x) menjadi y = tanh u

$\frac{dy}{du}$ = sech^2udan$\frac{du}{dx}$ = g'(x)

denganaturanrantaidiperoleh

$\frac{dy}{dx}$ = sech^2 u . g'(x)   atau

= g'(x) . sech^2 g(x)■

3.15.4. PerluasanTurunanFungsiCotangenHiperbolik

Jika $f(x) = \coth x$, maka $f'(x) = -\operatorname{csch}^2 (x)$

Perluasannya

Jika $f(x) = \coth g(x)$, maka $f'(x) = -g'(x) \cdot \operatorname{csch}^2 g(x)$

Bukti: Misal $f(x) = y$ dan $g(x) = u$, sehingga

$f(x) = \coth g(x)$ menjadi $y = \coth u$

$\frac{dy}{du} = -\operatorname{csch}^2 u$ dan $\frac{du}{dx} = g'(x)$

denganaturanrantaidiperoleh

$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{csch}^2 u \cdot g'(x)$ atau

$= -g'(x) \operatorname{csch}^2 g(x)$ ■

3.15.5. PerluasanTurunanFungsiSecant Hiperbolik

Jika $f(x) = \operatorname{sech} x$, maka $f'(x) = -\operatorname{sech} x \cdot \tanh x$

Perluasannya

$f(x) = \operatorname{sech} g(x) \rightarrow f'(x) = -g'(x) \operatorname{sech} g(x) . \tanh g(x)$

Bukti: Misal $f(x) = y$ dan $g(x) = u$, sehingga

$f(x) = \operatorname{sech} g(x)$ menjadi $y = \operatorname{sech} u$

$\frac{dy}{du} = -\operatorname{sech} u . \tanh u$ dan $\frac{du}{dx} = g'(x)$

denganaturanrantaidiperoleh

$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sech} u . \tanh u \cdot g'(x)$ atau

$= -g'(x) \operatorname{sech} u . \tanh u$ atau

$= -g'(x) \operatorname{sech} g(x) \cdot \tanh g(x)$ ■

3.15.6. PerluasanTurunanFungsiCosecant Hiperbolik

Jika $f(x) = \operatorname{csch} x$, maka $f'(x) = -\operatorname{csch} x \cdot \operatorname{ctgh} x$

Perluasannya

$f(x) = \operatorname{csch} g(x) \Rightarrow f'(x) = -g'(x) \operatorname{csch} g(x) . \operatorname{ctgh} g(x)$

Bukti: Misal $f(x) = y$ dan $g(x) = u$, sehingga

$f(x) = \operatorname{csch} g(x)$ menjadi $y = \operatorname{csch} u$

$\frac{dy}{du} = -\operatorname{csch} u \cdot \operatorname{ctgh} u$ dan $\frac{du}{dx} = g'(x)$

denganaturanrantaidiperoleh

$\frac{dy}{dx}$ = - csch u . ctgh u . g'(x)   atau

= - g'(x) csch u . ctgh u   atau

= - g'(x) csch g(x) . ctgh g(x)   ■

Contoh 1: Tentukan f'(x), jika f(x) = sinh 3x

Penyelesaian: f'(x) = cosh 3x d/dx 3x

= 3 cosh 3x

Contoh 2: Tentukan f'(x), jika f(x) = ctgh 1/x

Penyelesaian:

f '(x) = - $csch^2$ 1/x . d/dx 1/x

= $\frac{1}{x^2}$ ($csch^2$ 1/x)

Contoh 3:Tentukan f'(x), jika f(x) = 1/3 sinh 2x - 1/2 x

Penyelesaian: f'(x) = 1/3 (cosh 2x d/dx 2x) - 1/2

= 2/3 cosh 2x - 1/2

Contoh 4: Tentukan f'(x) dari f(x) = x sech x^2

Penyelesaian:

f'(x) = x ((- sech x^2tanh x^2) d/dx x^2) + sech x^2 . 1

= - 2 x^2 (sech x^2tanh x^2) + sech x^2