3.19. TurunanFungsi $y = x^r$, r BilanganRasional

Jika n = r dengan r bilanganrasional, apakahturunan $y = x^r$samadengan $r\ x^{r-1}$? Untukmenjawabpertanyaantersebutikutilangkah-langkahberikut.

Karena r bilanganrasional, makadapatditulis r = p/q atau r = - p/q dengan p, q ∈**B**+ dan q ≠ 0.

Pertama-tama diselidikiuntuk r = p/q

$y = x^r \Rightarrow y = x^{p/q}$

Misalkan $u = x^{1/q} \Rightarrow y = u^p$

Untukmenentukan $y' = \frac{dy}{dx}$ digunakan aturan rantai

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \Rightarrow y' = p\ u^{p-1} \cdot 1/q\ x^{1/q-1}$

$= p\ x^{(p/q-1/q)} \cdot 1/q\ x^{1/q-1}$

$= p/q\ x^{((p/q-1/q)+(1/q-1)}$

$= p/q\ x^{((p/q-1)}$atau

$= r\ x^{r-1}$ ■

Selanjutnyadiselidikiuntuk r = - p/q

$y = x^r \Rightarrow y = x^{-p/q}$

Misalkan $u = x^{-1} \Rightarrow y = u^{p/q}$

Selanjutnyauntukmenentukan y' digunakanaturanrantai.

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \Rightarrow y' = p/q\ u^{(p/q-1)} \cdot -x^{-2}$

$= -p/q\ x^{(-p/q+1)} \cdot x^{-2}$

$= -p/q\ x^{(-p/q-1)}$, atau

$= r\ x^{r-1}$ ■

Dalamsituasikhusus p = 1 dapatdijelaskansebagaiberikut.

$y = x^r \Rightarrow y = x^{1/q} \Rightarrow y^q = x \Leftrightarrow x = y^q$

$\frac{dx}{dy} = q\ y^{q-1}$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{qy^{q-1}}$

$$= \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{q} \cdot (q-1)}}$$

$$= \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{x^{(1-(\frac{1}{q}))}} \text{atau}$$

$$= \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{x^{-(\frac{1}{q}-1)}} \text{atau}$$

$$= \frac{1}{q} \cdot x^{(\frac{1}{q}-1)} \text{atau}$$

$$= r\, x^{r-1} \blacksquare$$

3.19.1. PerluasanTurunanFungsi $y = x^r$, r BilanganRasional

Jika $f(x) = x^r$,maka $f'(x) = r\, x^{r-1}$untuk $r \in Q$.

Perluasannya

$f(x) = g(x)^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot g(x)^{r-1} \cdot g'(x) \quad \forall r \in Q$.

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u

$f(x) = g(x)^r$menjadi $y = u^r$

$\frac{dy}{du} = r\, u^{r-1}dan\frac{du}{dx} = g'(x)$

Denganmenerapkanaturanrantai, diperoleh

$\frac{dy}{dx} = r\, u^{r-1} \cdot g'(x)$ atau

$\frac{dy}{dx} = r\; g(x)^{r-1} \cdot g'(x) \blacksquare$

Contoh 1: Tentukanturunanpertamadari

a. $f(x) = \sqrt[11]{x}$

b. $f(x) = \sqrt[20]{x^7}$

c. $f(x) = \sqrt[15]{(x^2 - 2x + 11)^{11}}$

Penyelesaian: a. $f(x) = \sqrt[11]{x}$atau$f(x) = x^{1/11}$

$f'(x) = 1/11\, x^{1/11 - 1}$

$= 1/11\, x^{-10/11}$

b. $f(x) = \sqrt[20]{x^7}$ atau $f(x) = x^{7/20}$

$f'(x) = 7/20\ x^{7/20-1}$

$= 7/20\ x^{-13/20}$

c. $f(x) = \sqrt[15]{(x^2 - 2x + 11)^{11}}$ atau

$fx) = (x^2 - 2x + 11)^{11/15}$

$f'(x) = 11/15\ (x^2 - 2x + 11)^{11/15-1} . (2x - 2)$ atau

$= 11/15\ (2x - 2)(x^2 - 2x + 11)^{-4/15}$

Soal-soal:

Tentukanturunanpertamadari

1. $f(x) = (2x^3 - 2x^2 + 2x - 2)^{3/4}$

2. $g(x) = (3x^2 + 3 \sin 2x)^{6/7}$

3. $h(x) = (\sinh 3x - \sin 2x + 1)^{2/9}$

4. $k(x) = (\ln (2x - 5)^{4/7}$

5. $l(x) = (\tan 2x - \arctan 3x)^{5/8}$

3.20.TurunanFungsiImplisit

Fungsi $y = f(x)$ dapatditulisdalambentukpersamaan $F(x,y) = 0$ yang bentuknya $F(x,y) = f(x) - y = 0$. Tetapibentuk $F(x,y) = 0$ belumtentumudahdibentuksebagai $y = f(x)$. Bentuk $F(x,y) = 0$ selanjutnyadisebutbentukimplisitdarisatufungsiatulebih, sedangkanbentuk $y = f(x)$ disebuteksplisit. Berikutdiberikanbeberapacontohbentukimplisit yang tidakmudahdijadikanbentukeksplisit.

1. $F(x,y) = 2x^2y^3 + 3x^3y^2 - 5x^4y + y^5 = 0$
2. $F(x,y) = -x^3y - 3x^2y^2 + x^4 = 0$

Adanyabentukimplisit yang tidakmudahdibentukmenjadieksplisit, makaperludimunculkanlebihdarisatufungsi f yang memenuhipersamaanimplisittersebut. Dari contoh 1, yaitu

1. $F(x,y) = 2x^2y^3 + 3x^3y^2 - 5x^4y + y^5 = 0$

y^5, y^3, y^2dan y diubahdalambentuk$[f(x)]^5$, $[f(x)]^3$, $[f(x)]^2$dan f(x), sehingga

$F(x,y) = 2x^2[f(x)]^3 + 3x^3[f(x)]^2 - 5x^4 f(x) + [f(x)]^5 = 0$

untuksetiap x padadaerahdefinisi F.

Denganmenggunakanaturanturunan yang ada, termasukaturanrantaifungsi F dapatditentukanturunannyaterhadap x.

Contoh :Tentukanturunanterhadap x (D_x y) dari

$x^5 + 3x^3 - 2xy^2 + y^3 = 0$

Penyelesaian: Diketahui$x^5 + 3x^3 - 2xy^2 + y^3 = 0$

Misaly = f(x)

$D_x x^5 + D_x 3x^3 - D_x\ 2x\,[f(x)]^2 + D_x[f(x)]^3 = D_x\ 0$

$5x^4 + 9x^2 - (2.[f(x)]^2 + 2x.2\,f(x)\,f'(x)) + 3\,[f(x)]^2\ f'(x) = 0$, atau

$5x^4 + 9x^2 - (2.y^2 + 2x.2\,yy') + 3y^2y' = 0$, atau

$5x^4 + 9x^2 - 2.y^2 - 4x.yy' + 3y^2y' = 0$

$5x^4 + 9x^2 - 2.y^2 = 4x.yy' - 3y^2y'$atau

$5x^4 + 9x^2 - 2.y^2 = y'(4xy - 3y^2)$

$\therefore D_x = y' = \frac{5x^4 + 9x^2 - 2y^2}{4xy - 3y^2}$

Soal-soal

Tentukanturunanpertamaterhadap x dari

1. $xy + x - 2y - 5 = 0$
2. $x^2 - 2xy + y^2 - 10 = 0$
3. $x^3 - x^2 y + 3xy^2 - y^3 = 0$
4. $e^{XY} - 4x^2 y + 9 = 0$
5. $\sin(x^2 y) + e^{XY} + x^2 = 0$
6. $y - \cos(x+y) = 0$
7. $\cos(xy) - y = 0$
8. $\tan(xy^3 + x^3 y) + \ln(xy^2 + \sin x)$
9. $x^2 y - xy^2 + x^3 + y^3 = 0$
10. $5y^5 - 2x^5 + x^2 y^3 - x^3 y^2 = 0$

3.21. GarisSinggung DanGaris Normal

Jika ffungsidalam x mempunyaiturunan $f'(x_0)$ pada $x = x_0$, makakurva $y = f(x)$ mempunyaigaris-singgungpada $P_0(x_0,y_0)$ dengangradien/slope/kemiringan $m = \tan\theta = f'(x_0)$. Persamaangaris-singgungnyaadalah $y - y_0 = m (x - x_0)$.

Jika m = 0, makapersamaangaris-singgungpadakurva di titik $P_0(x_0,y_0)$ adalah $y = y_0$ yang sejajardengansumbu x. Jika $f'(x_0) = \infty$dan f(x) kontinupada $x = x_0$, makapersamaangaris-singgungpadakurva di titik$P_0(x_0,y_0)$adalah $x = x_0$ yang sejajardengansumbu y.

Garis normal adalahgaristegaklurusdengangaris-singgung yang melaluisuatutitiksinggung. Persamaangaris normal pada$P_0(x_0,y_0)$adalah $y - y_0 = m_2 (x - x_0)$.

$m_2$diperolehdari $m_1 . m_2 = -1$ atau $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

Dalamkasuskhusus:

Garissinggunghorisontalyaitu $y = y_0 \Rightarrow$garis normal $x= x_0$,

Garissinggungvertikalyaitu$x= x_0 \Rightarrow$garis normal$y = y_0$.

Panjanggaris-singgungdidefinisikandenganpanjanggaris-singgungdarititiksinggung $P_0(x_0,y_0)$ dengantitikpotonggaris-singgungpadasumbu x. Panjangproyeksigaris-singgungterhadapsumbu x disebutpanjang sub-tangen.

Panjanggaris normal didefinisikandenganpanjanggaris-normal darititiksinggung$P_0(x_0,y_0)$) dengantitikpotonggaris normal padasumbu x. Panjangproyeksigaris normal terhadapsumbu x disebutpanjang sub-normal.

Contoh1 :Tentukanpersamaangaris-singgungdangaris normal dari $y = x^3 - 2x^2 + 4$ padatitik (2,4).

Penyelesaian: $y = x^3 - 2x^2 + 4$atau $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$maka $f'(x) = 3x^2 - 4x$.

Gradien/slope darigaris-singgungpadatitik (2,4) adalah

$m = f'(2) = 3.2^2 - 4.2 = 4$

Gradien/slope darigaris-normal padatitik (2,4) adalah

$m_2 = - 1/m_1 = - 1/4$

Persamaangaris-singgungnyaadalah y - 4 = 4(x-2) atau

$y = 4x – 4$

Persamaangarisnormalnyaadalah y - 4 = - 1/4 (x-2) atau

$y = - 1/4\ x + 4\ 1/2$ atau $x + 4y - 18 = 0$

Contoh 2: Tentukanpersamaangari-garisvertikal yang memotonggaris-garisdenganpersamaan

(1) $y = x^3 + 2x^2 + 4x - 4$ dan (2) $3y = 2x^3 + 9x^2 - 3x - 3$.

Penyelesaian: Misalgaris-garisvertikal yang dimintaadalah $x = x_0$.

$y = x^3 + 2x^2 + 4x - 4$diperoleh

$y' = 3x^2 + 4x + 4$, pada $x = x_0$maka $m = 3(x_0)^2 + 4x_0 + 4$ dan

$3y = 2x^3 + 9x^2 - 3x - 3 \Leftrightarrow y = 2/3x^3 + 3x^2 - x - 1$

diperoleh

$y' = 2x^2 + 6x - 1$, pada $x = x_0$maka $m = 2(x_0)^2 + 6x_0 - 1$

Karena$3(x_0)^2 + 4x_0 + 4 = 2(x_0)^2 + 6x_0 - 1$, diperoleh

$x_0 = -1$ dan $x_0 = 3$. Dengandemikiangaris-garisvertikal yang dimaksudadalah $x = -1$ dan$x = 3$.

Soal-soal

1. Tentukanpersamaangaris-singgungdangaris normal dari$x^2 + 3\ xy + y^2 = 5$ padatitik (1,1)

2. Tentukanpersamaangaris-singgungkurva $3y = 2\ x\ \ + 9x - 3x - 3$ padatitik (3, 21). Tentukan pulapanjanggaris-singgungnya.

3. Tunjukkanbahwapersamaangaris-singgungdengan $m \neq 0$ dari parabola $y\ \ = 4ax^2$adalah

$y = mx + a/m$.

4. Tunjukkanbahwapersamaangaris-singgungdariellips $a\ x\ \ + b\ y\ \ = a\ b$ padatitik $P(x\ ,y\ )$

adalaha $xx\ \ + b\ yy\ \ = a\ b$.

5. Tentukanpersamaangaris-singgungpadahiperbolaxy = 1 di titik (-1,1).