2. BILANGAN REAL

2.0. PENDAHULUAN

Himpunan bilangan real mencakup himpunan bilangan rasional,himpunan bilangan irasional, himpunan bilangan bulat, himpunan bilangan cacah dan himpunan bilangan asli.

A. Himpunan bilangan asli **A** = { 1, 2, 3, 4, ... }

Bilangan asli terdiri atas

1. Bilangan asli yang mempunyai satu faktor, yaitu 1.
2. Bilangan asli yang mempunyai dua faktor, yaitu 2, 3, 5, 7 dan seterusnya. Bilangan ini disebut bilangan prima.
3. Bilangan asli yang mempunyai lebih dari dua faktor, yaitu 4, 6, 8, 9 ... Bilangan ini disebut bilangan komposit.

B. Himpunan bilangan cacah **W** = { 0, 1, 2, 3, ... }

Bilangan cacah terdiri atas 0 dan bilangan asli.

C. Himpunan bilangan bulat **B** = { ..., -2, -1, 0 , 1, 2, ... }

Bilangan bulat terdiri atas bilangan cacah dan negatif bilangan asli.

Bilangan bulat kelipatan dua (2) disebut bilangan genap dan selainnya disebut bilangan ganjil.

D. Himpunan bilangan rasional **Q**, adalah himpunan yang anggota-anggotanya dapat dinyatakan dalam bentuk p/q, dengan p, q bilangan bulat dan $q \neq 0$.

Bilangan rasional dapat dinyatakan sebagai bentuk desimal berulang.

Misal, $2\frac{3}{4}$ = 2,75000000 ; $1\frac{2}{3}$ = 1,66666666 dan seterusnya.

Bilangan rasional yang nilai p ***habis dibagi*** oleh q disebut bilangan bulat, selainnya disebut bilangan pecahan.

Himpunan **bilangan Irasional**, adalah himpunan yang anggota anggotanya tidak dapat dinyatakan dalam bentuk p/q, dengan p, q bilangan bulat dan $q \neq 0$.

Bilangan irasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai desimal berulang. Misal,

$\sqrt{3}$ = 1, 732050807 ; log 2 = 0.301029995 dan seterusnya.

2.1. SISTEM BILANGAN REAL

Bilangan real (**R**) merupakan gabungan dari bilangan rasional **Q**dan bilangan Irasioanal.

Sistem bilangan real adalah himpunan bilangan real **R** yang disertai dengan dua buah operasi yaitu penjumlahan dan perkalian sehingga memenuhi 3 aksioma yaitu aksioma lapangan, urutan dan kelengkapan.

Aksioma Lapangan

Himpunan semua bilangan real **R** terhadap operasi-operasi penjumlahan dan perkalian merupakan lapangan.

Dengan rincian:

I. **R** terhadap operasi penjumlahan (**R**, +) merupakan **grup abelian**, yaitu:

A.1. Sifat tertutup terhadap penjumlahan

$\forall a,b \in \mathbf{R}$berlaku $(a + b) \in \mathbf{R}$,

A.2. Sifat komutatif terhadap penjumlahan

$\forall a,b \in \mathbf{R}$berlaku $a + b = b + a$,

A.3. Sifat assosiatif terhadap penjumlahan

$\forall a, b, c \in \mathbf{R}$berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$,

A.4. Adanya unsur kesatuan (identitas) pada penjumlahan

$\exists\ 0 \in \mathbf{R} \ni\ a + 0 = a = 0 + a$,

A.5. Adanya inversi pada penjumlahan

$\forall a \in \mathbf{R}, \exists\ (-a) \in \mathbf{R} \ni a + (-a) = 0 = (-a) + a$.

II. **R**terhadap operasi perkalian (**R**, x) merupakan grup abelian, yaitu:

M.1. Sifat tertutup terhadap perkalian

$\forall a,b \in \mathbf{R}$berlaku $(a \text{ x } b) \in \mathbf{R}$,

M.2. Sifat komutatif terhadap perkalian

$\forall a,b \in \mathbf{R}$berlaku $a \text{ x } b = b \text{ x } a$,

M.3. Sifat assosiatif terhadap perkalian

$\forall a,b,c \in \mathbf{R}$berlaku $(a \text{ x } b) \text{ x } c = a \text{ x } (b \text{ x } c)$,

M.4. Adanya unsur kesatuan (identitas) pada perkalian

$\exists 1 \in \mathbf{R} \ni\ a \text{ x } 1 = a = 1 \text{ x } a$,

M.5. Adanya inversi pada perkalian

$\forall a \neq 0 \in \mathbf{R}, \exists (\frac{1}{a}) \in \mathbf{R} \ni a \text{ x } \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \text{ x } a$.

III. **R** terhadap penjumlahan dan perkalian bersifat distributif (distributif perkalian terhadap penjumlahan) yaitu:

$\forall a, b, c \in \mathbf{R} \rightarrow a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ dan

$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$.

Sebelum menjelaskan aksioma urutan dan aksioma kelengkapan, terlebih dahulu diberikan beberapa teorema yang berhubungan dengan sifat-sifat aljabar elementer yang dapat dibuktikan dengan menggunakan aksioma lapangan.

Teorema 2.1.1.*(a) Jika z dan a elemen-elemen dalam **R**, sehingga z + a = a, maka z = 0.*

(b) Jika u dan b ≠ 0 elemen-elemen dari R, sehingga u x b = b, maka u = 1.

Bukti.(a) z + a = a [hipotesis]

z + a + (-a) = a + (-a) [kedua ruas + (-a) dari kanan]

z + (a + (-a)) = (a + (-a)) [sifat asosiatif (A.3)]

z + 0 = 0 [sifat inversi (A.5)]

z = 0 [sifat identitas (A.4)]

(b)u x b = b ; b ≠ 0 [hipotesis]

u x bx 1/b = bx 1/b [kedua ruas x 1/b dari kanan]

u x (bx 1/b) = (bx 1/b) [sifat asosiatif (M.3)]

u x 1 = 1 [sifat inversi (M.5)]

u = 1 [sifat identitas (M.4)]

Teorema 2.1.2.*(a) Jika a dan b elemen-elemen dalam **R** sehingga a + b = 0, maka b = -a.*

*(b) Jika a ≠ 0 dan b elemen-elemen dalam **R** sehingga a x b = 1, maka b =* $\frac{1}{a}$.

Bukti. (a) a + b = 0 [hipotesis]

(-a) + a + b = (-a) + 0 [kedua ruas + (-a) dari kiri]

((-a) + a) + b = ((-a) + 0) [sifat asosiatif (A.3)]

0 + b = ((-a) + 0) [sifat inversi (A.5)]

b = (-a) [sifat identitas]

(b) a x b = 1 ; a ≠ 0 [hipotesis]

$\frac{1}{a}$ x a x b = $\frac{1}{a}$ x 1 [kedua ruas x $\frac{1}{a}$ dari kiri]

($\frac{1}{a}$ x a) x b = $\frac{1}{a}$ x 1 [sifat asosiatif (M.3)]

1 x b = ($\frac{1}{a}$ x 1) [sifat inversi (M.5)]

$b = {}^{1}\!/_{a}$ [sifat identitas (M.4)]

Teorema 2.1.3. *Misal a, b elemen-elemen sebarang dalam* ***R*** *maka:*

(a) persamaan a + x = b mempunyai penyelesaian tunggal x = (-a) + b,

(b) Jika a ≠ 0, persamaan a x = b mempunyai penylesaian tunggal x = ${}^{b}\!/_{a}$.

Bukti. (a) a + x = b [hipotesis]

(-a) + a + x = (-a) + b [kedua ruas + (-a) dariu kiri]

((-a) + a) + x = ((-a) + b) [sifat asosiatif (A.3)]

0 + x = ((-a) + b) [sifat inversi (A.5)]

x = (-a) + b [sifat identitas (A.4)]

untuk menunjukkan bahwa persamaan di atas hanya mempunyai penyelesaian tunggal, anggap bahwa x penyelesaian dari persamaan tersebut, maka

a + x = b

(-a) + a + x = (-a) + b [kedua ruas + (-a) dari kiri]

(-a) + a) + x = ((-a) + b) [sifat asosiatif (A.3)]

0 + x =((-a) + b) [sifat inversi (A.5)]

x = (-a) + b [sifat identitas (A.4)]

Ternyata penyelesaian dari persamaan di atas x = x , yaitu merupakan penyelsaian tunggal.

(b) a x = b ; a ≠ 0

${}^{1}\!/_{a}$. a x = ${}^{1}\!/_{a}$. b [kedua ruas dikali ${}^{1}\!/_{a}$ dari kiri]

(${}^{1}\!/_{a}$. a) . x = (${}^{1}\!/_{a}$ .b) [sifat asosiatif (M.3)]

1 . x = (${}^{1}\!/_{a}$. b) [sifat inversi (M.5)]

x = (${}^{1}\!/_{a}$ .b) [sifat identitas (M.4)]

x = ${}^{b}\!/_{a}$ [(${}^{1}\!/_{a}$. b) = ${}^{b}\!/_{a}$]

untuk menunjukkan bahwa persamaan di atas hanya mempunyai penyelesaian tunggal, anggap bahwa x_1 penyelesaian dari persamaan tersebut, maka

a x_1 = b

${}^{1}\!/_{a}$. a. x_1 = ${}^{1}\!/_{a}$. B [kedua ruas dikali ${}^{1}\!/_{a}$ dari kiri]

(${}^{1}\!/_{a}$. a) .x = (${}^{1}\!/_{a}$. b) [sifat asosiatif (M.3)]

1 .x = (${}^{1}\!/_{a}$. b) [sifat inversi (M.5)]

x = (${}^{1}\!/_{a}$. b) [sifat identitas (M.4)]

$x = {}^{b}\!/_{a}$ $\qquad$ $[(\,{}^{1}\!/_{a} \,.\, b) = {}^{b}\!/_{a}\,]$

Ternyata penyelesaian dari persamaan di atas x = x_1, yaitu merupakan penyelsaian tunggal.

Teorema 2.1.4. *Jika a sebarang elemen dari **R**, maka:*

(a) a .0 = 0

(b) (-1) . a = -a

(c) -(-a) = a

(d) (-1) . (-1) = 1

Bukti. (a) a(1 + 0)) = a . 1 $\qquad$ [1 = 1 + 0 (A.4)]

a . 1 + a . 0 = a . 1 $\qquad$ [sifat distributif]

a + a .0 = a $\qquad$ [sifat identitas (M.4)]

$\Rightarrow$a . 0 = 0

(b) a + (-1) . a = 1 . a + (-1) .a $\qquad$ [a . 1 = a (M.4)]

= (1 + (-1)) .a $\qquad$ [distributif kanan]

= 0 .a $\qquad$ [sifat inversi (A.5)]

= 0 $\qquad$ [0 . a = 0, teorema 2.1.4.a.]

Jadi, (-1) . a = (-a) $\qquad$ [a + (-a) = 0]

(c) a + (-a) = 0 $\qquad$ [sifat inversi (A.5)]

(-a) + -(-a) = 0 $\qquad$ [analog dengan A.5]

-(-a) + (-a) = 0 $\qquad$ [sifat komutatif (A.2)]

Jadi -(-a) = a

(d) (-1) . a = -a $\qquad$ [teorema 2.1.4.b]

jika a = (-1), maka

(-1) . (-1) = -(-1) $\qquad$ [analog dengan teorema 2.1.4b]

= 1 $\qquad$ [teorema 2.1.4.c]

Teorema 2.1.5. *Misalkan a, b, c* $\in$***R***

(a) $a \neq 0 \rightarrow {}^{1}\!/_{a} \neq 0$ *dan* $\frac{1}{1/a} = a$

(b) $a \,.\, b = a \,.c$ *dan* $a \neq 0 \rightarrow b = c$

(c) $a \,.\, b = 0 \rightarrow a = 0$ *atau* $b = 0$

Bukti. (a) $a \neq 0$, maka terdapat $\frac{1}{a}$ [M.5]

andaikan $\frac{1}{a} = 0$

$\Rightarrow 1 = a \cdot \frac{1}{a} = a \cdot 0 = 0$

kontradiksi dengan sifat inversi (M.5), maka pengandaian salah dan yang benar $\frac{1}{a} \neq 0$.

$\frac{1}{a} \neq 0 \rightarrow \frac{1}{a} \cdot a = 1 = a \cdot \frac{1}{a}$

$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \rightarrow b \cdot \frac{1}{b} = 1$

misal $b = \frac{1}{a} \rightarrow \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1/a} = 1$

Jadi, $\frac{1}{1/a} = a$.

(b) Diketahui $a \cdot b = a \cdot c$ dengan $a \neq 0$.

$\frac{1}{a} \cdot a \cdot b = \frac{1}{a} \cdot a \cdot c$ [kedua ruas x $\frac{1}{a}$]

$(\frac{1}{a} \cdot a) \cdot b = (\frac{1}{a} \cdot a) \cdot c$ [sifat asosiatif (M.2)]

$1 \cdot b = 1 \cdot c$ [sifat inversi (M.5)]

$b = c$ [identitas (M.4)]

(c) Diketahui $a \cdot b = 0$ dan $a \neq 0$

Dari teorema 2.1.4a.diketahui bahwa $a \cdot 0 = 0$, maka

$a \cdot b = a \cdot 0$

$b = 0$ [teorema 2.1.5b.]

Jadi, $a \cdot b = 0$ dan $a \neq 0$, maka $b = 0$.

Dengan cara yang sama, untuk $b \neq 0$ dan $a \cdot b = 0$ diperoleh $a = 0$.

Disimpulkan, bahwa $a \cdot b = 0 \rightarrow a = 0$ atau $b = 0$.

Berikut diberikan definisi-definisi dari

Pengurangan:

$a - b = a + (-b) \quad \forall a,b \in \mathbf{R}$.

Pembagian:

$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \; \forall a,b \in \mathbf{R}$ dan $b \neq 0$.

Eksponen:

$a^2 = a \cdot a = aa \; \forall a \in \mathbf{R}$.

$a^3 = a^2 \cdot a = (a^2)a$

..

..

$a^{n+1} = a^n . a = (a^n)a \quad \forall a \in \mathbf{R}$.

$a^0 = 1$ dan $a^1 = a$.

$a^{-1} = \frac{1}{a}\ \forall a \in \mathbf{R}$.dan $a \neq 0$.

$a^{-n} = (\frac{1}{a})^n \forall n \in .\mathbf{A}$

BILANGAN RASIONAL

Elemen-elemen **R** yang dapat ditulis dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b bilangan bulat dengan b $\neq 0$ disebut *bilangan rasional*. Himpunan semua bilangan rasional dilambangkan dengan **Q**. Jumlah dan hasil kali dari dua bilangan rasional adalah bilangan rasional (bersifat tertutup). Tunjukkan !

Teorema 2.1.6. *Tidak terdapat bilangan rasional r sehingga $r^2 = 2$.*

Bukti. Anggap bahwa terdapat bilangan bulat a dan b sehingga

$r = (\frac{a}{b})^2 = 2$ dengan faktor persekutuan 1. (Why?)

$(\frac{a}{b})^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 2\,b^2$

a^2 genap $\Rightarrow$ a genap.

(Misal a ganjil, yaitu a = 2k + 1 dengan $k \in \mathbf{B}$

maka a = $4k^2 + 4k + 1$, juga bilangan ganjil)

Misal a = 2m dengan $m \in \mathbf{B}$

maka $a^2 = 4m^2 = 2\,b^2$

$2m^2 = b^2$

berarti b^2 genap, maka b juga genap.

Dengan demikian, faktor persekutuan a dan b $\neq 1$. (Why?)

Mengakibatkan kontradiksi bahwa faktor peresekutuan a dan b = 1.

Jadi, tidak terdapat bilangan rasional r sehingga $r^2 = 2$.

L A T I H A N 2.1

1. Selesaikan persamaan-persamaan berikut dengan menggunakan sifat-sifat atau teorema-teorema yang ada.

a. $2x + 3 = 6$

b. $x^2 = 3x$

c. $(x + 2)(x - 3) = 0$

2. Jika $a, b \in \mathbf{R}$, buktikan:

a. $-(a + b) = (-a) + (-b)$

b. $(-a)(-b) = ab$

c. $1/(-b) = -(1/b)$ $b \neq 0$.

3. Jika $a \in \mathbf{R}$ dan memenuhi $a \cdot a = a$, buktikan $a = 0$ atau $a = 1$.

4. Jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$, tunjukkan bahwa $1/(ab) = (1/a)(1/b)$

5. Dengan memodivikasi *teorema 2.1.6.* tunjukkan bahwa tidak ada bilangan rasional s sehingga $s^2 = 3$.

6. Jika a, b bilangan irasional, tunjukkan bahwa $a + b$ dan ab bukan bilangan irasional.

7. Misal B suatu operasi biner pada R dan R terhadap operasi B bersifat:

a. komutatif, yaitu $B(a,b) = B(b,a)$ $\forall a,b \in \mathbf{R}$,

b. asosiatif, yaitu $B(a, B(b,c)) = B(B(a,b)c)$ $\forall a,b,c \in \mathbf{R}$,

c. mempunyai unsur identitas $e \in \mathbf{R} \ni B(a,e) = a = B(e,a)$

Manakah diantara operasi-operasi biner berikut yang memenuhi sifat di atas?

1. $B_1(a,b) = 1/2(a + b)$ 2. $B_2(a,b) = 1/2(ab)$

3. $B_3(a,b) = a - b$ 4. $B_4(a,b) = 1 + ab$

8. Dengan menggunakan induksi matematika tunjukkan:

a. $a^{m+n} = a^m a^n \forall a \in \mathbf{R}$ dan $m,n \in \mathbf{A}$,

b. $(a^m)^n = a^{mn} \forall a \in \mathbf{R}$ dan $m,n \in \mathbf{A}$.

2.2. Aksioma Urutan Pada Bilangan Real

Terdapat himpunan bagian tak kosong P dari **R** yang unsur- unsurnya dinamakan bilangan positip sejati, bila
memenuhi aksioma berikut:

a. jika a, b $\in$ P maka a + b $\in$ P,

b. jika a, b $\in$ P maka ab $\in$ P,

c. jika a $\in$ R maka memenuhi tepat satu dari
a$\in$ P, a = 0, -a $\in$ P.

Sifat-sifat a dan b adalah sifat urutan pada operasi penjumlahan dan perkalian. Kondisi c. disebut sifattrichotomi karena membagi elemen-elemen **R** atas tiga bagian yang berbeda. Himpunan {-a | a $\in$ P}bilangan real negatif sejati (murni) yang tidak mempunyai elemen yang bersekutu dengan P. Selanjutnya **R** merupakan gabungan dari tiga himpunan yang saling terpisah (disjoint).

Definisi 2.2.1.Jika a$\in$ P, maka a dikatakan bilangan positif sejati dan ditulis a > 0. Jika a $\in$ P atau a = 0, maka dikatakan bahwa a bilangan real positif dan ditulis a $\geq$ 0. Jika -a $\in$ P dikatakan bahwa a bilangan real negatif sejati dan ditulis a <0. Jika -a $\in$ P atau a = 0,dikatakan bahwa a bilangan real negatif dan ditulis a $\leq$ 0.

Berikut disajikan idea pertidaksamaan dalam bilangan real.

Definisi 2.2.2. Misal a, b elemen-elemen dari **R**.

i. Jika (a - b) $\in$ P, maka ditulis a > b atau b < a.

ii. Jika (a - b) $\in$ (P $\cup$ {0}), maka ditulis a $\geq$ b atau b $\leq$ a.

Notasi a < b < c, berarti a < b dan b < c.

Dengan cara yang sama a $\leq$ b < c, berarti a $\leq$ b dan b < c.

Sifat-Sifat Urutan

Berikut diberikan sifat-sifat dari urutan dalam **R**.

Teorema 2.2.1.*Misal a, b, c elemen-elemen dalam **R**.*

a. Jika a > b dan b > c, maka a > c.

b. Berlaku tepat satu dari berikut ini:

$a > b$, $a = b$, $a < b$.

c. Jika $a \geq b$ dan $a \leq b$, maka $a = b$.

Bukti.a. $a > b \Rightarrow (a - b) \in P$

$b > c \Rightarrow (b - c) \in P$

$[(a - b) + (b - c)] \in P$ $\qquad$ $[a \in P, b \in P \Rightarrow a + b \in P]$

$[a + (-b + b) - c] \in P$ $\qquad$ [sifat asosiatif (A.2)]

$[a + 0 - c] \in P$ $\qquad$ [sifat inversi (A.5)]

$(a - c) \in P$ $\qquad$ [sifat identitas (A.4)]

$\Rightarrow a > c$

Jadi, $a > b$ dan $b > c \Rightarrow a > c$

b. Dari sifat trichotomi, didapat kemungkinan

$(a - b) \in P$, $(a - b) = 0$, $-(a - b) \in P$

atau $a > b$, $a = b$, $a < b$.

c. Andaikan $a \neq b$, maka $a - b \neq 0$, maka kemungkinannya

$(a - b) \in P$ atau $-(a - b) \in P$.

$(a - b) \in P \Rightarrow a > b$ kontradiksi dengan $a \leq b$

$-(a - b) \in P \Rightarrow a < b$ kontradiksi dengan $a \geq b$

Dengan demikian pengandaian salah, maka yang benar $a = b$.

Teorema 2.2.2. *a. Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, maka $a > 0$.*

b. $1 > 0$.

c. Jika $n \in A$, maka $n > 0$.

Bukti. a. Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, berdasar sifat trichotomi $a \in P$ atau $-a \in P$.

$a \in P \Rightarrow a \,.\, a \in P$

$\Rightarrow a \in P$

atau $a > 0$.

$-a \in P \Rightarrow (-a).(-a) \in P$

$(-a).(-a) = (-1\, a).(-1\, a)$ $\qquad$ [teorema 2.1.4.b.]

$= (-1)(-1)\, a.a$ $\qquad$ [M2 dan M3]

$= 1\, a$ $\qquad$ $[(-1)(-1) = 1$ [teo 2.1.4.d.]

$= a \in P$ $\qquad$ [identitas (M.4.)]

atau $\quad a > 0$

b. Karena $1 \neq 0$ dan $1 = 1 . 1 = 1$ juga $1 = (-1)(-1) = (-1)$

maka $1 > 0$ [teorema 2.2.2b]

c. Dengan menggunakan induksi matematika:

Untuk $n = 1$

berdasar teorema 2.2.2b, maka $n > 0$.

Karena untukn = 1 pernyataan benar, maka diasumsikan pernyataan benar untuk $n = k$, berarti $k > 0$

Mudah ditunjukkan, bahwa $n = k + 1 > 0$, yaitu

$k> 0 \Rightarrow k \in P$ dan $1 > 0 \Rightarrow 1 \in P$

akibatnya $k + 1 \in P$ [$a \in P$ dan $b \in P \Rightarrow a + b \in P$]

atau $n = k + 1 > 0$.

Jadi, $\forall n \in \mathbf{A} \Rightarrow n > 0$.

Teorema 2.2.3. *Misal $a, b, c, d \in R$.*

a. Jika $a > b$, maka $a + c > b + c$.

b. Jika $a > b$ dan $c > d$, maka $a + c > b + d$.

c. Jika $a > b$ dan $c > 0$, maka $ca > cb$.

Jika $a > b$ dan $c < 0$, maka $ca < cb$.

d. Jika $a > 0$, maka $1/a > 0$.

Jika $a < 0$, maka $1/a < 0$.

Bukti.a. $a > b \Rightarrow a - b \in P$

$a - b = a - b + (c - c) \in P$ [$a + 0 = a$ (A.4)]

$= (a + c) - (b + c) \in P$ [sifat asosiatif (A.2)]

$\Rightarrow (a + c) > (b + c)$

b. $a > b \Rightarrow a - b \in P$

$c > d \Rightarrow c - d \in P$

$(a - b) + (c - d) \in P$ [$a \in P, b \in P \Rightarrow a + b \in P$]

$(a + c) - (b + d) \in P$ [asosiatif (A.2)]

$\Rightarrow (a + c) > (b + d)$

c.1. $a > b \Rightarrow a - b \in P$

$c> 0 \Rightarrow c \in P$

$c(a - b) \in P$ [$a \in P, b \in P \Rightarrow ab \in P$]

$ca - cb \in P$ [sifat distributif]

$ca > cb$.

c.2. $a > b \Rightarrow a - b \in P$

$c< 0 \Rightarrow -c > 0$ atau $-c \in P$

$-c(a - b) \in P$

$\Rightarrow -ca + cb \in P$ [sifat distributif]

$\Rightarrow cb - ca \in P$ [sifat komutatif (A.3)]

$cb> ca$ atau $ca < cb$

d.1. $a > 0 \Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow 1/a \neq 0$

andaikan $1/a < 0$, maka $1 = a \times 1/a < 0$

kontradiksi dengan $1 > 0$

Dengan demikian, pengandaian salah dan yang benar $1/a > 0$

Jadi $a > 0 \Rightarrow 1/a > 0$.

d.2. dengan cara yang sama untuk $a < 0 \Rightarrow 1/a < 0$

Teorema 2.2.4. *Misal $a, b \in R$. Jika $a > b$, maka $a> 1/2\,(a + b) > b$.*

Bukti. $a > b \Rightarrow a + a > a + b$ [teorema 2.2.3a]

$\Rightarrow 2a > a + b$

$\Rightarrow a> 1/2\,(a + b)$ *)

$a > b \Rightarrow a + b > b + b$ [teorema 2.2.3a]

$\Rightarrow a + b > 2b$

$\Rightarrow 1/2\,(a + b) >$ **) [kedua ruas x $1/2 > 0$ dan teorema 2.2.3c.]

Dari *) dan **), diperoleh $a > 1/2\,(a + b) > b$.

Jadi, $a > b \Rightarrow a > 1/2\,(a + b) > b$.

Akibatnya, $Aa \in R$ dan $a > 0 \Rightarrow a > 1/2\,a > 0$.

Teorema 2.2.5. *$\exists a \in \mathbf{R} \ni 0 \leq a < \varepsilon \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a = 0$.*

Bukti. Andaikan $a > 0 \Rightarrow a > 1/2\,a > 0$ [akibat teorema 2.2.4]

Pilih $\varepsilon = 1/2\,a \Rightarrow a > \varepsilon > 0$.

Timbul kontradiksi, karena $\varepsilon > a, \forall \varepsilon > 0$.

Dengan demikian, pengandaian $a > 0$ salah, yang benar $a = 0$.

Teorema 2.2.6.*ab> 0 ⇒ a > 0 dan b > 0 atau a < 0 dan b < 0.*

Bukti.ab> 0 ⇒ a ≠ 0 dan b ≠ 0

a> 0 ⇒ 1/a > 0

b = 1.b = (1/a . a) b

= 1/a (ab) > 0 [1/a > 0 dan ab > 0]

Jadi, ab > 0 ⇒ a > 0 dan b > 0.

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa

ab> 0 ⇒ a < 0 dan b < 0, yaitu

a< 0 ⇒ 1/a < 0

b = 1 . b = (1/a .a)b

= 1/a (ab) < 0 [1/a < 0 dan ab > 0]

Jadi, ab > 0 ⇒ a < 0 dan b < 0.

Akibatnya, ab < 0 ⇒ a > 0 dan b < 0 atau a < 0 dan b > 0.

Ketidaksamaan

Suatu pernyataan yang dihubungkan dengan tanda <atau < atau ≤ atau ≥ disebut ketidaksamaan. Berikut diberikan beberapa contoh:

Contoh 1.Tentukan himpunan penyelesaian dari 2x + 2 ≤ 7, dengan x ∈**R**.

Penyelesaian.2x + 2 ≤ 7 ⇒ 2x ≤ 5 ⇒ x ≤ 2 1/2.

Jadi, HP = { x∈**R**| x ≤ 2 1/2 }

Contoh 2. Jika 0 < a < b, maka a < b .

Penyelesaian.0 < a < b ⇒ b - a > 0 dan b + a > 0.

(b - a)(b + a) > 0 ⇒b - a > 0 ⇒ a < b .

Beberapa ketidaksamaan yang penting diantaranya ketidaksamaan Bernoulli, ketidaksamaan Cauchy dan ketidaksamaan segitiga.

Ketidaksamaan Bernoulli.

x > -1 ⇒ (1 + x) ≥ 1 + nx ∀n ∈**A**.

Bukti.Ketidaksamaan ini dibuktikan dengan induksi mate-matika.

Untuk n = 1 ⇒ (1 + x) ≥ 1 + x

Karena untuk n = 1 pernyataan valid, maka diasumsikan pernyataan valid untuk n = k, sehingga berlaku

$x > -1 \Rightarrow (1 + x) \;\; \geq \;\; 1 + kx \quad Ak \in A$

Selanjutnya dibuktikan apakah berlaku untuk n = k + 1

Karena 1 + x > 0, maka memenuhi

$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^{k} (1 + x)$

$\geq (1 + kx)(1 + x) = 1 + (k + 1)x + kx$

$\geq 1 + (k + 1)x$

Dengan demikian, $x > -1 \Rightarrow (1 + x) \;\; \geq \;\; 1 + nx$ berlaku untuk setiap n elemen bilangan asli (**A**).

Ketidaksamaan Cauchy.

$n \in \mathbf{A}$ dan $a_i \in \mathbf{R}$, $b_i \in \mathbf{R}$, i = 1, 2, ...,n $\Rightarrow (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n) \leq (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2)$

(Buktikan, sebagai latihan)

Ketidaksamaan segitiga.

$n \in \mathbf{A}$ dan $a_i \in \mathbf{R}$, $b_i \in \mathbf{R}$, i = 1, 2, ...,n $\Rightarrow$

$[(a_1 + b_{1)]}^2 + \ldots + (a_n + b_n)^2]^{1/2} \leq (a_1^2 + \ldots + a_n^2)^{1/2} (b_1^2 + \ldots + b_n^2)^{1/2}$

(Buktikan, sebagai latihan)

L A T I H A N 2.2.

1. Jika $0 < a < b$ dan $0 < c < d$, buktikan $0 < ac < bd$.

2. Jika $a < b$ dan $c < d$, buktikan $ad + bc < ac + bd$.

3. Tentukan a, b, c, d $\in \mathbf{R}$ yang memenuhi $0 < a < b$ dan $c < d < 0 \Rightarrow ac < bd$ atau $bd < ac$.

4. Jika a,b$\in \mathbf{R}$, tunjukkan bahwa $a + b = 0$ $a = 0$ dan $b = 0$.

5. Tunjukkan bahwa, $0 < a < b \Rightarrow a < \sqrt{ab} < b$ dan $0 < 1/b < 1/a$.

6. Jika $0 < c < 1$, tunjukkan $0 < c^2 < c < 1$.

7. Jika $c > 1$, tunjukkan bahwa $c^n > c$ $\forall n \in \mathbf{A}$.

8. Jika $c > 1$, m, n $\in \mathbf{A}$, buktikan $c^m > c^n \Leftrightarrow m > n$.

9. Jika $0 < c < 1$, tunjukkan $c^n \leq c$ $\forall n \in \mathbf{A}$.

10. Jika $a > 0$, $b > 0$ dan $n \in \mathbf{A}$, buktikan $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$.