B A B III
TURUNAN DAN APLIKASINYA

3.1.Definisi Turunan Pertama di Satu Titik

Pengantar

Sebelum membahas turunan suatu fungsi pada satu titik, terlebih dahulu disajikan ilustrasi sebagai pembangkit motivasi untuk mempelajari turunan suatu fungsi.

Contoh 1. Suatu partikel(titik materi) bergerak sepanjang garis lurus dengan persamaan geraks = $4t^2 + 1$, dimana s menyatakan posisi titik materi pada saat t dengan t menyatakan waktu. Tentukan kecepatan rata-rata gerak partikel tersebut pada selang waktu t = 1sampai t = 1,5.

Jawab:Misal s = f(t) dan f(t) = $4t^2 + 1$

Kecepatan rata-rata adalah jarak tempuh (Δs) dibagi waktu tempuh (Δt)

$$\overline{V} = \frac{4.1.5^2 + 1 - (4.1+1)}{1.5 - 1}$$

$$= \frac{5}{0.5}$$

$$= 10$$

Kecepatan rata-rata ini kurang menggambarkan perilaku gerak partikel yang sesungguhnya. Konsep kecepatan sesaat lebih memberikan gambaran yang lebih tepat mengenai gerak partikel tersebut. Tinjau suatu keadaan pada selang waktu tempuhnya adalah t = t_1 sampait_2 = t_1 +Δt, maka diperoleh kecepatan rata-rata sebagai berikut.

$$\overline{V} = \frac{4(t_1 + \Delta t)^2 + 1 - (4t_1^2 + 1)}{(t_1 + \Delta t) - t_1}$$

Dengan mengambil t mendekati nol didapat kecepatan sesaat dari gerak partikel tersebut untuk t = Δt yang dinyatakan dalam bentuk limit.

$$\overline{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{4t_1^2 + 8t_1.\Delta t + 4\Delta t_1{}^2 + 1 - (4t_1^2 + 1)}{\Delta t} \right)$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{8t_1.\Delta t + 4\Delta t^2}{\Delta t} \right)$$

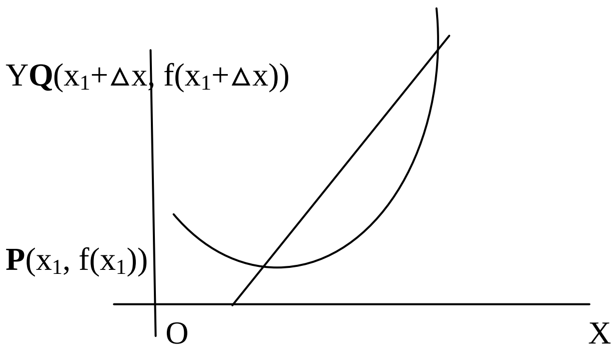
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \Delta t \left(\frac{8t_1 + 4.\Delta t}{\Delta t} \right)$$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{limit} \; 8t_1 + 4.\Delta t$$

$$= \; 8\,t$$

Jadi, kecepatan rata-ratanya adalah 8 t_1 .

Contoh 2: Andaikan y = f(x) menyatakan persamaan suatu kurva. Titik P pada kurva mempunyai koordinat (x_1 ,f(x_1)) dan titik Q juga pada kurva tersebut didekat P yang koordinatnya (x_1+Δx,f(x_1 +Δx)).



Gradien (kemiringan) dari tali busur yang melalui titik P dan Q adalah

$$\text{mPQ} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{(x_1 + \Delta x) - x_1}$$

Apabila titik Q bergerak mendekati titik P, sepanjang kurva y = f(x), maka tali busur PQ bergerak mendekati garis-singgung pada kurva y = f(x) di titik P untuk Δx mendekati nol. Proses ini memperoleh gradien garis-singgung pada kurva y = f(x) di titik P(x_1 ,f(x_1)) yang senilai dengan gradien dari kurva y = f(x) pada titik x = x_1 . Gradien tersebut besarnya adalah

$$\text{mPQ} = \lim \Delta x \longrightarrow 0 \left(\frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{(x_1 + \Delta x) - x_1}\right)$$

Contoh 3: Tentukan persamaan garis-singgung kurva y = f(x) = x^2 melalui titik P(2,4).

Jawab :

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x)\text{- } f(2)}{\Delta x}$$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - (2)^2}{\Delta x}$$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2^2 + 2.2.\Delta x + \Delta x^2) \; - \; 2^2}{\Delta\, x}$$

$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(4.\Delta x+\Delta x^2)}{\Delta x}$

$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4+\Delta x)}{\Delta x}$

$m = 4$

Persamaan garis melalui suatu titik (x_1, y_1) dengan gradien m adalah $y - y_1 = m(x-x_1)$.

Persamaan grais singgung yang diminta adalah

$y - 4 = 4(x - 2)$

$= 4x - 8$

$y = 4x - 8 + 4$

$= 4x - 4.$

Turunan pertama suatu fungsi di satu titik tertentu didefinisikan sebagai berikut.Misalkan fungsi f terdefinisi pada sebarang titik dalam interval buka (a,b). Turunan pertama fungsi f pada $x = x_0$ yang dilambangkan dengan $f'(x_0)$ didefinisikan sebagai

$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)- f(x_0)}{\Delta x}$ jika limitnya ada.

Dengan menggunakan definisi di atas selesaikan soal-soal berikut:

a. Misal $f(x) = \frac{3+x}{3-x}$, $x \neq 3$. Tentukan f'(2).

b. Misal $f(x) = \sqrt{2x - 1}$, tentukan f'(5).

Penyelesaian.

a. $f'(2) = \underset{h \to 0}{\text{limit}} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

$= \underset{h \to 0}{\text{limit}} \frac{1}{h} \frac{(3+(2+h))}{(3-(2+h))} - 5)$

$= \underset{h \to 0}{\text{limit}} \frac{1}{h} \frac{(5+h)}{(1-h)} - 5)$

$= \underset{h \to 0}{\text{limit}} \frac{1}{h} \frac{(5+h) - 5(1-h)}{(1-h)}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{6h}{(1-h)}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{6h}{h} \cdot \frac{1}{1-h}$

$= \lim_{h \to 0} 6 \cdot \frac{1}{1-h}$

$= 6.\ 1$

$= 6$

b. $f'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2(5+h)-1} - \sqrt{2.5-1}}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{10+2h-1} - \sqrt{2.5-1}}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{9+2h} - \sqrt{9}}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{9+2h} - 3}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{9+2h} - 3}{h} x \frac{\sqrt{9+2h} + 3}{\sqrt{9+2h} + 3}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{9+2h-9}{h} x \frac{1}{\sqrt{9+2h} + 3}$ [$\because$ $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$]

$= \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} x \frac{1}{\sqrt{9+2h} + 3}$

$= \lim_{h \to 0} 2 x \frac{1}{\sqrt{9+2h} + 3}$

$= 2x\frac{1}{3 + 3}$

$= \frac{1}{3}$

3.2. Turunan kiri dan Turunan kanan

Definisi turunan kiri

Misalkan fungsi f terdefinisi pada sebarang titik dalam interval buka (a,b). Turunan kiri dari fungsi f pada x = x_0 didefinisikan sebagai

$$f\,'(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0}$$

jika limitnya ada. Dalam kasus ini h = Δx bernilai negatif dan mendekati nol.

Definisi Turunan kanan

Misalkan fungsi f terdefinisi pada sebarang titik dalam interval buka (a,b). Turunan kanan dari fungsi f pada x = x_0 didefinisikan sebagai

$$f\,'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0}$$

jika limitnya ada. Dalam kasus ini h = Δ x <u>*bernilai positif dan mendekati nol*</u>.

Suatu fungsi f mempunyai turunan pada x = x_0 jika dan hanya jika $f_-'(x_0) = f_+'(x_0)$.

Contoh 4: Dengan menggunakan definisi turunan kiri dan tururan kanan, selidiki apakah f(x) = $|2x - 2|$ + x mempunyai turuan pertama pada x = 1.

Penyelesaian.

$$f\,'(1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{[|(2(1+h)-2)| + (1+h)] - [|(2.1-2)| + 1]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{[|2+2h-2+1+h|] - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{[1+3h]-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{[3h]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} 3$$

$$= 3$$

$$f\,'(1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{[|(2(1-h)-2)| + (1-h)] - [|(2.1-2)| + 1]}{h}$$

$$f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{\left[\left|(2-2h)-2\right| + (1-h)\right] - [1]}{h}$$

$$f'(1^-) = \lim_{h\to -} \frac{-3h}{h}$$

= -3

Karena f' ($1^+ \neq$ f ' (1^-), maka fungsi f tidak mempunyai turunan pada x = 1.

3.3. Kaitan antara Turunan di satu titik dengan Kekontinuan

Setelah dipelajari tentang turunan di satu titik, muncul pertanyaan apakah suatu fungsi yang mempunyai turunan di satu titik, juga kontinu pada titik tersebut? Bagaimana dengan kejadian sebaliknya?

Kaitan antara turunan di satu titik dengan kekontinuannya dinyatakan oleh teorema sebagai berikut.

Teorema. Misalkan fungsi f terdefinisi pada sebarang titik dalam interval buka (a,b), mempunyai turunan pertama pada $x = x_0$, maka fungsi f kontinu pada $x = x_0$.

Bukti. Untuk setiap $x \in (a,b)$ dan $x \neq x_0$ berlaku

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

kedua ruas dikenai limit, diperoleh

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x \to x_0}(x - x_0)$$

Pada ruas kiri

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} f(x_0)$$

Pada ruas kanan

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x \to x_0}(x - x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x \to x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} (x - x_0)$$

$= f'(x) . 0$; $f'(x)$ ada

= 0

Akhirnya diperoleh

$\lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} f(x_0) = 0$, sehingga

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \blacksquare$$

Kebalikan dari pernyataannya yaitu " Jika fungsi f kontinu pada x = x_0 , maka fungsi f mempunyai turunan pertama pada x = x0 " adalah tidak benar. Hal ini tidak usah dibuktikan, cukup diberikan contoh penyangkalnya saja , yaitu:

Misal f(x) = $|$ x - 2 $|$, f(x) kontinu pada x = 2 (tunjukkan),

Sedangkan

$$f'(2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\left[\left|((2+h)-2)\right|\right] - \left[\left|(2-2)\right|\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\left[\left|2+h-2\right|\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} 1$$

$$= 1$$

$$f'(2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\left[\left|((2-h)-2)\right|\right] - \left[\left|(2-2)\right|\right]}{h}$$

$$f'(2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\left[\left|-h\right|\right]}{h}$$

$$f'(2^-) = \lim_{h \to 0^-} -1$$

$$= -1$$

Ternyata f '(2) $\neq$ f '(2), hal ini menunjukkan fungsi f tidak mempunyai turunan pada x = 2.

Kesimpulan:

"***Fungsi f kontinu pada*** x = x_0 , ***belum tentu mempunyai turunan pertama*** pada x = x_0 "

3.4. Pengertian Fungsi Terdeferensialkan dan Turunan Fungsi

3.4.1. Pengertian Fungsi Terdeferensialkan

Misal fungsi f terdefinisi pada sebarang titik dalam interval buka (a,b), jika fungsi f mempunyai turunan pertama pada setiap titik dalam interval buka (a,b), maka fungsi f dikatakan terdeferensialkan pada interval buka (a,b). Dalam situasi khusus, jika fungsi f terdefinisi pada interval tutup [a,b], maka fungsi f dikatakan terdeferensialkan dalam interval tersebut jika dan hanya jika f'(x) ada untuk setiap x $\in$ (a,b) dan f '(a), f '(b) ada.

3.4.2.Pengertian Turunan fungsi

Misalkan fungsi f terdefinisi pada sebarang titik dalam domain f. Turunan fungsi f adalah suatu fungsi yang dilambangkan dengan f' yang diberikan oleh persamaan:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}$$

terdefinisi untuk setiap x pada daerah definisi f.

Notasi lain dari f'(x) di antaranya : y' ; $\frac{dy}{dx}$; D(f(x).

3.5.Aturan Untuk Menentukan Turunan Fungsi

Untuk mementukan turunan suatu fungsi digunakan definisi suatu turunan, yaitu hasil bagi diferensial

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}$$

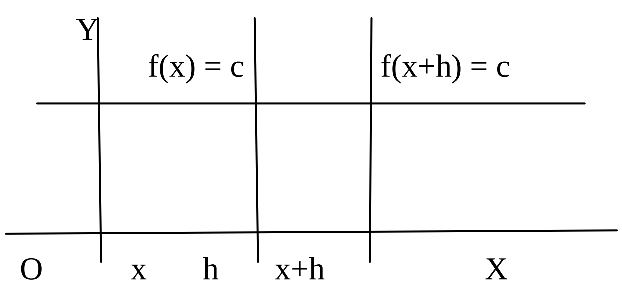
Berikut diberikan beberapa dalil/aturan yang berkaitan dengan turunan suatu fungsi.

Teorema 1: (Aturan Fungsi Konstanta)

Jika f(x) = c dengan c suatu bilangan/konstanta maka untuk sebarang x, maka f'(x) = 0.

Secara simbolik: f(x) = c $\Rightarrow$ f'(x) = 0

Bukti:



f(x) = c $\Rightarrow$ f(x+h) = c (lihat gambar di atas)

$$D(f(x)) = D(c) = f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}$$

$$= 0 \quad \blacksquare$$

$\therefore f(x) = c \Rightarrow f'(x) = D(c) = 0$

Contoh 1:

Tentukan f'(x), jika $f(x) = \pi$

Penyelesaian :

Karena π adalah suatu konstanta, maka f'(x) = 0

$\therefore f(x) = \pi \Rightarrow f'(x) = 0$

Contoh 2:

Tentukan f'(x), jika f(x) = log 3

Penyelesaian : Karena log3 adalah suatu konstanta, maka

f '(x) = 0.

$\therefore f(x) = \log 3 \Rightarrow f'(x) = 0$

***Teorema 2:* (Aturan Fungsi Identitas/Kesatuan)**

Jika f(x) = x, maka f'(x) = 1

Secara simbolik: $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = D(x) = 1$

Bukti: $f(x) = x \Rightarrow f(x+h) = x + h$

$$f'(x) = \underset{h \to 0}{\text{limit}} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{limit}} \frac{(x+h) - (x)}{(x+h) - x}$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{limit}} \frac{(x+h) - (x)}{(x+h) - x}$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{limit}} \quad 1$$

$= 1$ ■

$\therefore f(x) = x \Rightarrow f'(x) = D(x) = 1$

Contoh 1: Tentukan f'(t), jika f(t) = t

Penyelesaian :

f(t) = t, berdasar teorema identitas diperoleh f'(t) = 1

$\therefore f(t) = t \Rightarrow f'(t) = 1$

Contoh 2: Tentukan f'(z), jika f(z) = z

Penyelesaian :

f(z) = z, berdasar teorema identitas diperoleh f'(z) = 1

$\therefore f(z) = z \Rightarrow f'(z) = 1$

Teorema 3: (Aturan Pangkat)

Jika $f(x) = x^n$, dengan n bilangan bulat positif, maka
$f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Secara simbolik:

$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = D(x) = n\,x^{n-1}$, $\forall n \in \mathbf{B}_+$

Bukti: $f(x) = x^n \Rightarrow f(x+h) = (x + h)^n$

$$(x+h)^n = x^n + \frac{n}{1!}x^{n-1}.h + \frac{n(n-1)}{2\,!}x^{n-2}.h^2 + \ldots + \frac{n}{(n-1)!}x.h^{n-1} + h^n$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{[x^n + \frac{n}{1!}x^{n-1}.h + \frac{n(n-1)}{2\,!}x^{n-2}.h^2 + \ldots + \frac{n}{(n-1)!}x.h^{n-1} + h^n}{h}\right] - x^n$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\frac{n}{1!}x^{n-1}.h + \frac{n(n-1)}{2\,!}x^{n-2}.h^2 + \ldots + \frac{n}{(n-1)!}x.h^{n-1} + h^n}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h[\frac{n}{[1!}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2\,!}x^{n-2}.h + \ldots + \frac{n}{(n-1)!}x.h^{n-2} + h^{n-1}]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\ [\frac{n}{[1!}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2\,!}x^{n-2}.h + \ldots + \frac{n}{(n-1)!}x.h^{n-2} + h^{n-1}]$$

$$= [\frac{n}{1!}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2\,!}x^{n-2}.0 + \ldots + \frac{n}{(n-1)!}x.0 + 0]$$

$\therefore f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = D(x) = nx^{n-1}$

Contoh 1: Tentukan f'(x), jika $f(x) = x^{101}$

Penyelesaian: $f(x) = x^{101}$

berdasar aturan pangkat diperoleh

$f'(x) = 101\, x^{101-1}$

$\therefore f(x) = x^{101} \Rightarrow f'(x) = 101\, x^{100}$

Contoh 2: Tentukan f'(x), jika $f(x) = x^{-111}$

Penyelesaian: $f(x) = x^{-111}$

berdasar aturan pangkat diperoleh

$f'(x) = -\,111\, x^{-111-1}$

$\therefore f(x) = x^{-111} \Rightarrow f'(x) = -\,111\, x^{-112}$

Teorema 4: (Aturan Kelipatan Konstanta)

Jika c suatu konstanta dan f suatu fungsi dan g suatu fungsi yang didefinisikan sebagai g(x) = c . f(x), maka berlaku hubungan g'(x) = c. f'(x).

Secara simbolis:

$g(x) = c.f(x) \Rightarrow f'(x) = D(c.f(x)) = c.f'(x)$

Bukti: $g(x) = c.f(x) \Rightarrow g(x+h) = c.f(x+h)$

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{c.\big(f(x+h)\big) - c.f(x)}{(x+h) - x}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} c \left(\frac{\big(f(x+h)\big) - f(x)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} c \,.\, \lim_{h \to 0} \frac{\big(f(x+h)\big) - f(x)}{h}$$

$= c \,.\, f'(x) \quad \blacksquare$

$\therefore g(x) = c \,.\, f(x) \Rightarrow g'(x) = D\,(c.f(x)) = c.\, f'(x)$

Contoh 1: Diketahui g(x) = cf(x), jika c = e dan $f(x) = x^5$. Tentukan g'(x).

Penyelesaian : $g(x) = e\, x^5$

berdasar teorema 4 diperoleh $g'(x) = e\, 5\, x^4$

atau

$g'(x) = 5e\ x^4$

$\therefore g(x) = e\ x^5 \Rightarrow\ g'(x) = 5e\ x^4$

Contoh 2: Diketahui $g(x) = cf(x)$, jika $c = -15$ dan $f(x) = x^{-51}$. Tentukan $g'(x)$.

Penyelesaian : $g(x) = -15\ x^{-51}$

berdasar teorema 4 diperoleh

$g'(x) = -15 \ .\ -51\ x^{-52}$ atau

$g'(x) = 765\ x^{-52}$

$\therefore g(x) = -15\ x^{-51} \Rightarrow\ g'(x) = 765\ x^{-52}$