I. PENALARAN MATEMATIKA

1.1.Pernyataan Matematika

Suatu rangkaian/susunan kata-kata yang mempunyai arti disebut **kalimat.** Kalimat sempurna terdiri atas subyek/pokok kalimat, predikat dan obyek.

Misal:

1. Ali menyapu halaman rumah.
2. Paman pergi ke kota.
3. Anjing mengejar kucing.
4. Ibu menjerang air.
5. Polisi memukul penjahat.

Dari lima (5) contoh kalimat di atas, kita tidak perlu menilai/menyelidiki apakah kalimat–kalimat tersebut **benar** atau **salah.** Selain kalimat-kalimat di atas masih ada kalimat-kalimat yang mempunyai **satu** nilai kebenaran. Nilai kebenaran tersebut adalah **benar** atau **salah.** Kalimat yang hanya memiliki satu nilai kebenaran disebut **kalimat deklaratif** atau **pernyataan** atau **proposisi**. Lebih jelasnya perhatikan contoh-contoh berikut:

a. Surabaya ibukota Jawa Timur.
b. 4 adalah bilangan prima.
c. $7 + 4 = 12$
d. Setiap persegi adalah jajaran genjang.
e. Jumlah dua bilangan prima adalah prima.

Dari contoh-contoh di atas, diketahui nilai kebenarannya.

Contoh a. bernilai *benar*

Contoh b. bernilai *salah*.

Contoh c. bernilai *salah.*

Contoh d. bernlai *benar*, dan

Contoh e. bernilai *salah*.

Berikut diberikan beberapa contoh ***bukan pernyataan***

a. $x + 4> 7$.
b. $x = 5$
c. A pacar Ani.
d. Dia dilahirkan di kota M

Tugas.

Buatlah **lima contoh pernyataan bernilai*benar*dan lima pernyataan bernilai*salah***.

1.2.Meyusun Pernyataan Baru berasal dari satu atau lebih pernyataan asal.

1.2.1. Meyusun Pernyataan Baru berasal dari satu pernyataan asal.

Suatu pernyataan asal dapat diubah menjadi pernyataan baru dengan cara***mengingkari/menyangkal/negasi*** dari pernyataan asal. Dengan demikian, jika nilai kebenaran pernyataan asal adalah *benar*, pernyataan bentukan darinya mempunyai nilai kebenaran *salah*, hal ini berlaku kebalikannya.

Contoh:

a. Semua sisi belah ketupat sama panjang
b. Jumlah sudut dalam segiempat 360^0.
c. Kuadrat bilangan ganjil adalah ganjil.

Semua pernyataan-pernyataan di atas mempunyai nilai kebenaran *benar*. Jika dibentuk pernyataan baru yang berasal dari pernyataan-pernyataan tersebut, pernyataan-pernyataan yang terjadi adalah

a’. Semua sisi belah ketupat **tidak** sama panjang
b’. Jumlah sudut dalam segiempat **tidak** 360^0.
c’. Kuadrat bilangan ganjil **tidak** ganjil.

Pernyataan-pernyataan pada a’ – c’ bernilai *salah*, sebab semua pernyataan asal bernilai *benar*.

1.2.2. Meyusun Pernyataan Baru berasal dari dua pernyataan asal

Pernyataan-pernyataan dapat digabung untuk membentuk suatu pernyataan baru dengan menggunakan ***kata hubung***atau***perangkai***atau ***operator***yang berlaku dalam logika. Pernyatan baru yang dihasilkan dari dua pernyataan dengan kata hubung yang berlaku dalam logika disebut dengan ***pernyataan majemuk***

Contoh:

p) Melalui dua buah titik hanya dapat dibuat sebuah garis lurus.
q) Kuadrat sebarang bilangan real adalah positif.
r) Jumlah sudut dalam suatu segitiga 180^0.

Bila pernyataan-pernyataan di atas dibentuk pernyataan baru yang berasal dari pernyataan-pernyataan tersebut dengan cara ***mengingkarinya***, pernyataan-pernyataan yang terjadi adalah p'. Melalui dua buah titik **tidak** dapat dibuat sebuah garis lurus.

q'. Kuadrat sebarang bilangan real **tidak** positif.

r'. Jumlah sudut dalam suatu segitiga **tidak** sama dengan 180^0

Pernyataan-pernyataan pada p – r bernilai *benar*, sedangkan pernyataan-pernyataan pada p' – r' bernilai *salah (why?).* Bila pernyataan-pernyataan p – r dan p' – r' dijadikan pernyataan majemuk dengan kata hubung (konektif) "**dan**", maka kemungkinan pernyataan-pernyataan majemuk yang terjadi adalah

1. Melalui dua buah titik hanya dapat dibuat sebuah garis lurus **dan** kuadrat sebarang bilangan real adalah positif.
2. Melalui dua buah titik hanya dapat dibuat sebuah garis lurus **dan** jumlah sudut dalam suatu segitiga 180^0.
3. Kuadrat sebarang bilangan real adalah positif **dan**melaluidua buah titik hanya dapat dibuat sebuah garis lurus
4. Kuadrat sebarang bilangan real adalah positif **dan** jumlah sudut dalam suatu segitiga 180^0.

Pernyataan-pernyataan majemuk dari 1 sampai dengan 4 masing-masing mempunyai satu nilai kebenaran , yaitu "benar", ***apa yang dapat kalian simpulkan?***

Lagi, perhatikan contoh berikut:

a. Segitiga ABC sama sisi
b. Segitiga ABC semua sudut dalamnya sama besar

Kedua pernyataaan di atas bernilai ***benar***. Dari masing-masing pernyataan ini dibuat ingkarannya, yaitu:

a') Segitiga ABC tidak sama sisi

b') Segitiga ABC tidak semua sudut dalamnya sama besar

Kedua pernyataan baru ini bernilai ***salah (why?)***. Dari empat pernyataan ini dibentuk pernyataan majemuk dengan kata hubung "**dan**", diperoleh

1. Segitiga ABC sama sisi **dan** semua sudut dalamnya sama besar.
2. Segitiga ABC sama sisi **dan** semua sudut dalamnya tidak sama besar.
3. Segitiga ABC tidak sama sisi **dan**semua sudut dalamnya sama besar.
4. Segitiga ABC tidak semua sudut dalamnya sama besar **dan** sama sisi.
5. Segitiga ABC semua sudut dalamnya sama besar **dan**tidak sama sisi

Tentukan nilai kebenaran dari lima pernyataan majemuk di atas.

Suatu pernyataan biasanya dilambangkan dengan huruf kecil misalnya p, q, r, s.Dengan menggunakan lambang dari pernyataan-pernyataan di atas, diperolehp **dan** q nilai kebenarannya "benar" , jika berasal dari nilai pernyataan p benar dan q benar.p **dan** r nilai kebenarannya "benar" , jika berasal dari nilai pernyataan p benar dan r benar.p **dan** s nilai kebenarannya "benar" , jika berasal dari nilai pernyataan p benar dan s benar.q **da**n r nilai kebenarannya "benar" , jika berasal dari nilai pernyataan q benar dan r benar, dan sterusnya. ***Benarkah kesimpulan yang ditetapkan di atas ?***Beri komentar atau penyangkal.

Selanjutnya , bila pernyataan-pernyataan a – c dan a' – c' dijadikan pernyataan majemuk dengan kata hubung "**atau**", maka kemungkinan pernyataan-pernyataan majemuk yang terjadi adalah

1) Melalui dua buah titik hanya dapat dibuat sebuah garis lurus **atau** kuadrat sebarang bilangan real adalah positif.
2) Melalui dua buah titik hanya dapat dibuat sebuah garis lurus **atau** jumlah sudut dalam suatu segitiga 180^0.
3) Kuadrat sebarang bilangan real adalah positif **atau** jumlah sudut dalam suatu segitiga 180^0.

Pernyataan-pernytaan majemuk dari 1) sampai dengan 3) masing-masingmempunyai satu nilai kebenaran , yaitu "benar", ***apa yang dapat kalian simpulkan***? ***Mengapa***?

Dengan menggunakan lambang dari pernyataan-pernytaan di atas, diperolehp **atau** q bernilai "benar" , jika berasal dari nilai pernyataan p benar **atau**q benar.p **atau** r bernilai "benar" , yang berasal dari nilai pernyataan p benar **atau** r benar.p **atau** s bernilai "benar" , yang berasal dari nilai pernyataan p benar **atau** s benar, dan seterusnya.***Dapatkah kalian menarik kesimpulan?***

Jika salah satu pernyataan pembentuk pernyataan majemuk dari bentuk di atas bernilai ***salah,*** apa *nilai kebenaran* dari pernyataan majemuk yang terjadi? Buat kesimpulan secara keseluruhan!

Sekarang, perhatikansifat-sifat dari semua bilangan genap, yaitu:

k. Hasil kali sebarang dua bilangan genap adalah genap.

l. Penjumlahan sebarang dua bilangan genap adalah genap.

Pernyataan k dilambangkan dengan k dan pernyataan l dilambangkan dengan l. Dari dua pernyataan ini dibentuk pernyataan-pernyataan baru yang merupakan negasi dari k dan l, masing-masing disebut k’ dan l’. Dari k, l, k’ dan l’ dibentuk pernyataan majemuk dengan kata hubung **atau** didapat:

k **atau** l;
k **atau** l’;
l **atau** k’; dan
k’**atau** l’.

Dengan memperhatikan pernyataan-pernyataan asal dan pernyataan-pernyataan negasinya, buat suatu kesimpulan dari pernyataan majemuk yang terjadi.

Pernyataan-pernyataan yang dilambangkan dengan p, q, r, dan s seperti contoh di atas disebut *operands* dan kata-kata hubung “dan”, “atau” dan “bukan/tidak” disebut ***operator-operator logis*** atau ***penghubung logis.*** Operator-operator logis mengoperasikan pernyataan-pernyataan atau proposisi-proposisi seperti layaknya operasi-operasi “tambah” dan “kali” pada bilangan-bilangan.
Lambang-lambang dari pernyataan/proposisi disebut “peubah proposional”.
Suatu pernyataan baru ataupernyataan majemuk yang memuat paling sedikit satu peubah proposional disebut suatu “ *propotional form*”.

Dari contoh-contoh di atas, jika p mewakili suatu pernyataan ”Melalui dua buah titik hanya dapat dibuat sebuahgaris lurus” dan q mewakili pernyataan.“Kuadrat sebarang bilangan real adalah positif”, proposional form “p **dan** q”mewakili proposisi-proposisi “Melalui dua buah titik hanya dapat dibuat sebuah garis lurus **dan**Kuadrat sebarang bilangan real adalah positif”. Bukan/tidak p mewakili proposisi “Melalui dua buah titik hanya tidak dapat dibuat sebuah garis lurus. Beda prinsip antara***proposisi*** dengan ***propositonal form*** adalah setiap proposisi hanya memiliki satu nilai kebenaran, tetapi nilai kebenaran dari propositinal form tergantung dari gabungan peubah-peubah proposisiyang membentuknya.

Operator logis “bukan/tidak” disebut juga “***negasi***” atau “***ingkaran***” dan dilambangkan dengan¬atau ~ atau $\overline{...}$.

Misal p menyatakan suatu proposisi, maka bukan/tidak p juga merupakan suatu proposisi yang disajikan dengan ┐p atau~p. Beberapa penulis melambangkannya dengan $\overline{p}$. Nilai kebenaran dari ~p adalah “salah” bila p bernilai benar, sebaliknya nilai kebenaran dari ~p adalah “benar” bila p bernilai “salah”. Hubungan nilai kebenaran antara p dan ~p disajikan dengan tabel kebenaran dengan menggunakan operator logis ~.

Tabel kebenaran mendaftar semua kemungkinan nilai kebenaran operand-operand terletak disebelah kiri kolom dan nilai kebenaran dari proposisi baru terletak disebelah kanan kolom. Tabel kebenaran dari ~ sebagai berikut:

p	~ p
True	False
False	True

Bentuk lain tabel kebenaran “~”sebagai berikut:

p	~ p
1	0
0	1

Bila kita mengkombinasikan dua proposisi dengan suatu operator logis selain negasi diperoleh proposisi baru. Misal, operator logis yang digunakan “**dan**” yang dilambangkan dengan “∧”. Jika p dan q adalah proposisi-proposisi, maka “p **dan** q “ adalah proposisi yang disajikan dengan “p ∧ q” disebut “***konjungsi***”. Berikut ini disajikan tabel kebenaran dari operator logis ∧.

p q	p ∧ q
1 1	1
1 0	0
0 1	0
0 0	0

Dari tabel kebenaran di atas p ∧ q mempunyai nilai kebenaran “benar” jika dan hanya jika p danq bernilai benar.

Seperti halnya operator logis “**dan**” operator logis “**atau**” dilambangkan dengan “∨”.

Jika p **dan** q adalah proposisi-proposisiyang disajikan dengan "p $\wedge$ q, maka "p **atau** q " adalah proposisi yang disajikan dengan "p $\vee$ q" dan disebut "***disjungsi***". Berikut disajikan tabel kebenaran dari operator logis $\vee$.

p	q	p $\vee$ q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Berdasar tabel kebenaran di atas p $\vee$ q bernilai salah jika dan hanya jika p dan q bernilai salah. Operator logis ini dikenal juga dengan nama "disjungsi logis" atau "disjungsi **inklusif** ", Satu bentuk lain dari disjungsi adalah "disjungsi **eksklusif**" yang dilambangkan dengan "$\oplus$".Tabel kebenarannya disajikan berikut

p	q	p $\oplus$ q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Dari tabel di atas p $\oplus$ qbernilai "salah" bila kedua pernyataan pembentuknya mempunyai nilai kebenaran yang sama. Untuk memudahkan pemahaman perhatikan proposisi-proposisi berikut:

a. p : Tini mencuci piring
b. q: Tini membersihkan garasi.

Bila kedua pernyataan ini dihubungkan oleh operator logis "atau eksklusif", terjadiTini mencuci piring atau (eksklusif) ia membersihkan garasi. Pernyataan majemuk ini, benilai***salah*** sebab tidak mungkin seseorang melakukan dua pekerjaan pada waktu yangbersamaan. Kembangkan pernyataan-pernyataan di atas dengan membentuk negasinya, kemudian bangun pernyataan majemuknya. Apakah hasilnya seperti yang didapat pada tabel?

Contoh yang lain

r : Δ ABC adalah segitiga siku-siku s : Δ ABC adalah segitiga sama sisi

Bila kedua pernyataan ini dihubungkan oleh operator logis "atau eksklusif", terjadi "Δ ABC adalah segitiga siku-siku **atau**(eksklusif)Δ ABC adalah segitiga sama sisi". Pernyataan majemuk ini juga benilai ***salah*****(Why?).**Kembangkan pernyataan-pernyataan di atas dengan membentuk negasinya, kemudian bangun pernyataan majemuknya. Apakah hasilnya juga seperti yang didapat pada tabel?

Operator logis yang lain "implies" yang dilambangkan dengan $\Rightarrow$. Proposisi "p implies q" disajikan dalam bentuk "$p \Rightarrow q$" dan disebut ***implikasi.***Operand p disebut premis, hipotesis, atau anteceden, dan q disebut konklusi atau konsekuensi. Implikasi dapat dinyatakan dengan beberapa cara, antara lain

"Jika p maka q"

"p hanya jika q"

"p syarat cukup untuk q"

"q syarat perlu untuk p"

"q jika p"

"q konsekuensi logis dari p"

Contoh:

p : Δ PQR adalah segitiga sama sisi , bernilai benar (1)

q : Δ PQR semua sudutnya sama besar, bernilai benar (1)

Jika p bernilai salah (0), pernyataannya menjadi "Δ PQR adalah segitiga bukan sama sisi", dan q bernilai salah (0), pernyataannya menjadi "Δ PQR semua sudutnya tidak sama besar". Dengan demikian p, q bernilai benar (1), pernyataan majemuknya adalah

"**Jika**Δ PQR adalah segitiga sama sisi **maka**semua sudutnya sama besar".

p bernilai benar (1) dan q bernilai salah (0), pernyataan majemuknya adalah

"**Jika**Δ PQR adalah segitiga sama sisi **maka**semua sudutnya tidak sama besar"

p bernilai salah (0) dan q bernilai benar (1), pernyataan majemuknya adalah

"**Jika** Δ PQR adalah segitiga bukan sama sisi **maka**semua sudutnya sama besar"

(Segitiga bukan sama sisi, bisa berupa segitiga sama kaki yang sudut alasnya 60^0)

p bernilai salah (0) dan q bernilai salah (0), pernyataan majemuknya adalah

"**Jika** Δ PQR adalah segitiga bukan sama sisi **maka**semua sudutnya tidak sama besar"

Sehingga dari pernyataan majemuk tersebut dibuat Tabel kebenaran dari operator $\Rightarrow$ sebagai berikut

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Proposisi $p \Rightarrow q$ bernilai ***salah,*** jika ***p bernilai benar*** dan ***q bernilai salah.***

Proposisi $p \Rightarrow q$ bernilai benar, maka p disebut proposisi yang ***lebih kuat*** dari q.

Konversi dari $p \Rightarrow q$ adalah proposisi $q \Rightarrow p$, dan

kontraposisi/kontrapositif dari $p \Rightarrow q$ adalah proposisi $\sim q \Rightarrow \sim p$.

Inversi dari $p \Rightarrow q$ adalah proposisi $\sim p \Rightarrow \sim q$

Tabel kebenaran dari ***konversi*** dari $p \Rightarrow q$, adalah sebagai berikut

p	q	$q \Rightarrow p$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

Sedangkan tabel kebenaran ***kontraposisi*** dari $p \Rightarrow q$, adalah sebagai berikut

p	q	$\sim p \sim q$		$\sim q \Rightarrow \sim p$
1	1	0	0	1
1	0	0	1	0
0	1			

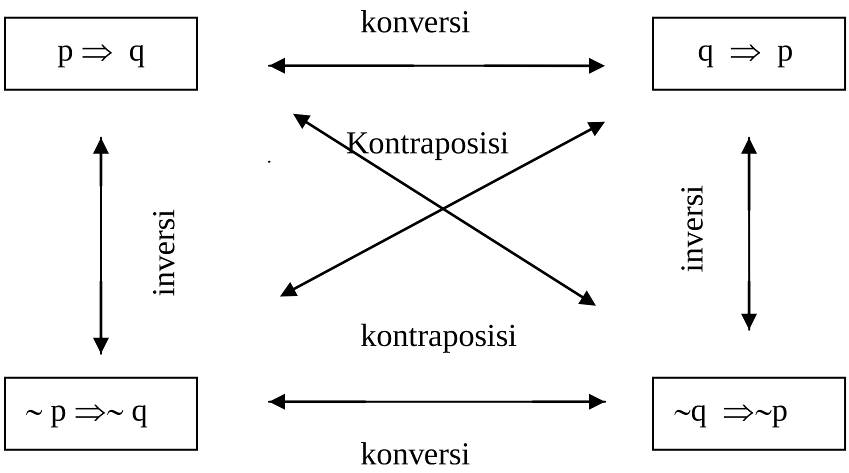
0	0	1 1	0 1	1 1

Hasil tabel kebenaran ini ternyata sama dengan nilai tabel kebenaran p ⇒ q. Hal ini menunjukkan~q ⇒~p senilai dengan p ⇒ q atau ~q ⇒~p≡p ⇒ q

Tabel kebenaran dari ***inversi*** dari p ⇒ q sebagai berikut

p q		~p~q		~p⇒~q
1	1	0	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Dari uraian di atas, ternyata dalam implikasi terdapat hubungan antara **implikasi**, **konversi**, **kontraposisi** dan **inversi**. Untuk jelasnya perhatikan diagram berikut.



Jika p dan q mempunyai nilai kebenaran yang sama, maka keduanya disebut proposisi-proposisi yang ekivalen secara logis.Operator logisnya disebut "ekivalensi/biimplikasi" yang dilambangkan dengan "⇔" dan menghasilkan proposisi yang bernilai benar jika operand-operand ekivalen secara logis.

Contoh:

a : garis g dan garis l saling sejajar, bernilai benar (1) b : garis g dan garis l bergradien sama, bernilai benar (1).

Kita bangun negasi dari kedua pernyataan tersebut, diperoleh:

a' :garis g dan garis l ***tidak*** saling sejajar, bernilai salah (0)

b' : garis g dan garis l ***tidak*** bergradien sama, bernilai salah (0)

Dari empat proposisi yang ada dibangun proposisi majemuk dengan kata hubung "jika dan hanya jika/iff", diperoleh

- garis g dan garis l saling sejajar ⇔ garis g dan garis l bergradien sama.
- garis g dan garis l saling sejajar ⇔garis g dan garis l ***tidak***bergradien sama.
- garis g dan garis l ***tidak*** saling sejajar ⇔garis g dan garis l bergradien sama.
- garis g dan garis l ***tidak*** saling sejajar ⇔garis g dan garis l ***tidak***bergradien sama.

Simbol ⇔ berarti pernyataan majemuk yang terjadi dibaca dari kiri ke kanan dan dibaca dari kanan ke kiri.

✓ Misal, garis g dan garis l saling sejajar ⇔ garis g dan garis l bergradien sama.

Dibaca: garis g dan garis l saling sejajar ⇔ garis g dan garis l bergradien sama, dan garis g dan garis l bergradien sama ⇔garis g dan garis l saling sejajar.

Tabel kebenaran yang mendefinisikan operator "ekivalensi/biimplikasi" sebagai berikut.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Sekarang perhatikan tabel kebenaran ekivalensi dan implikasi, nampak ada hubungan bahwa jika $p \Leftrightarrow q$ bernilai benar, maka $p \Rightarrow q$ dan $q \Rightarrow p$ keduanya bernilai benar, Sebaliknya, jika $p \Rightarrow q$ dan $q \Rightarrow p$ keduanya bernilai benar, maka $p \Leftrightarrow q$ bernilai benar. Proposisi $p \Leftrightarrow q$ dibaca "p ekivalen dengan q", "p syarat perlu dan cukup untuk q" atau " p jika dan hanya jika q".

Disamping operator-operator logis yang disebutkan di atas, masih terdapat operator-operator logis yang lain, yaitu “**nand**” , “**nor**” dan “**exnor**”. Operator logis “**nand**” merupakan singkatan dari “not and”, operator logis “**nor**” singkatan dari “not or” dan “**exnor**” singkatan dari “exclusive not or”.

Operator logis “nand” ***merupakan negasi*** dari operator logis “and” dan dilambangkan dengan “|”, untuk jelasnya, perhatikan tabel-tabel berikut.

p	**q**	**p ∧ q**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	**q**	**p | q**
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Dari tabel di atas dapat ditarik suatu kesimpulan bahwa $(p \mid q) = \sim(p \wedge q)$. Demikian halnya, operator “nor”, operator logis ini merupakan negasi dari operator logis “or” dan dilambangkan dengan “↓”. Adapun tabel kebenarannya seperti berikut

p	**q**	**p ∨ q**
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	**q**	**p ↓ q**
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Dari tabel di atas jelas operator logis “nor” merupakan negasi dari “or”, atau $p \downarrow q = \sim(p \vee q)$.

Sedangkan tabel kebenaran dari operator logis “exnor” adalah sebagai berikut

p	q	p ⊗ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Ternyata tabel kebenaran dari “exnor” identik dengan tabel kebenaran dari “ekivalensi”, dengan kata lain

$p \otimes q = p \Leftrightarrow q$.

Tabel kebenaran dari operator individual dapat digunakan untuk menyusun tabel kebenaran dari bentuk proposisi-proposisi yang lebih kompleks. Setiap variable proposisi diasumsikan mempunyai dua nilai kebenaran, yaitu “benar” dan “salah”, Oleh karena itu, bila kita mempunyai k variabel proposisi, maka akan diperoleh 2^k kasus.

Contoh :

1. Susun suatu tabel kebenaran dari proposisi $(q \wedge \sim p) \Rightarrow p$

   Pada contoh ini terdapat dua proposisi, yaitu p dan q, maka banyak kasus yang terjadi $2^2 = 4$

p	q	~p	$(q \wedge \sim p)$	$(q \wedge \sim p) \Rightarrow p$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	1

2. Susun suatu tabel kebenaran dari proposisi $[(p \wedge q) \vee \sim r] \Leftrightarrow p$

   Contoh ini memuat tiga proposisi, yaitu p, q dan r, maka banyak kasusn yang terjadi $2^3 = 8$.

p	q	r	$(p \wedge q)$	$\sim r$	$(p \wedge q) \vee \sim r$	$[(p \wedge q) \vee \sim r] \Leftrightarrow p$
1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1

0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1	0

Suatu bentuk proposisi yang mempunyai nilai kebenaran "benar" untuk setiap nilai variabel proposisi disebut "***Tautologi***". Contoh: $p \vee \sim p$.

Sebaliknya, suatu bentuk proposisi yang mempunyai kebenaran "salah" untuk setiap nilai variabel proposisi disebut "***Kontradiksi***" Contoh: $p \wedge \sim p$.

Apabila, suatu bentuk proposisi yng tidak tergolong tautologi atau kontradiksi disebut " ***kontingensi***"

Sifat dari bentuk proposisi dapat ditentukan dengan cara menyusun"penyederhanaan" suatu tabel kebenaran. Contoh, jika kita ingin menunjukkan bahwa bentuk proposisi merupakan kontingensi, cukup menunjukkan dua baris dari tabel kebenaran, satu baris menunjukkan proposisi bernilai benar dan yang lain menujukkan proposisi salah. Untuk menunjukkan bentuk proposisi merupakan tautologi, perlu memeriksa baris-baris pada tabel kebenaran yang proposisinya bernilai salah.

Contoh :

Perhatikan kasus dalam menentukan apakah $(p \wedge q) \Rightarrow p$ merupakan suatu tautologi. Untuk keperluan ini dibuat suatu tabel kebenaran sederhananya. Jika suatu implikasi $a \Rightarrow b$ bernilai salah, maka proposisi a harus bernilai benar dan proposisi b bernilai salah. Tabel kebenaran untuk $(p \wedge q) \Rightarrow p$ hanya satu baris, dengan menetapkan $(p \wedge q)$ bernilai benar . Karena hal ini merupakan suatu contoh dengan $(p \wedge q) \Rightarrow p$ dapat bernilai salah atau bernilai benar, selanjutnya perhatikan baris berikut.

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
1	1	1	1

Jika nilai dari bentuk proposisi ini adalah benar, maka proposisi merupakan suatu tautologi.

Sering ditemui bahwa suatu bentuk proposisi diganti dengan proposisi yang lain yang ekivalen. Jika dua bentuk proposisi adalah ekivalen, proposisi yang satu dapat disubstitusikan pada proposisi yang lain. Dengan demikian p ekivalen logis dengan $p \vee p$, hal inimengakibatkan bahwa $(p \vee q)$ ekivalen logis dengan $(p \vee p) \vee q$. Tabel berikut, menyajikan ekivalensi-ekivalensi penting yang disebut "***identitas***" Simbol p, q, dan r mewakili sebarang bentuk-bentuk proposisi. Simbol "1" digunakan untuk menyatakan suatu tautology atau suatu proposisi yang bernilai benar. Simbol "0" mewakili suatu proposisi yang bernilai salah atau suatu kontra -diksi. Nama-nama yang muncul di sebelah kanan merupakan sifat-sifat dan "aturan inferensi" yang dijelaskan kemudian.

Identitas- dentitas tertentu adalah sangat penting. Identitas 18, mengganti implikasi dengan disjungsi. Identitas 7 dan 8 mengganti disjungsi dengan konjungsi dan sebaliknya.

Tabel 1.1 Identitas Logis

1.$p \Leftrightarrow (p \vee p)$	idempoten dari $\vee$
2.$p \Leftrightarrow (p \wedge p)$	idempoten dari $\wedge$
3.$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$	sifat komutatif dari $\vee$
4.$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$	sifat komutatif dari $\wedge$
5.$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$	sifat asosiatif dari $\vee$
6.$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	sifat asosiatif dari $\wedge$
7.$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$	Hukum De Morgan
8.$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$	Hukum De Morgan
9.$[p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	sifat distributive $\wedge$ atas $\vee$
10.. $[p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	sifat distributive $\vee$ atas $\wedge$
11. $(p \vee 1) \Leftrightarrow 1$	
12. $(p \wedge 1) \Leftrightarrow p$	
13. $(p \vee 0) \Leftrightarrow p$	
14. $(p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$	
15. $(p \vee \sim p) \Leftrightarrow 1$	
16. $(p \wedge \sim p) \Leftrightarrow 0$	
17. $p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$	negasi ganda

18. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ implikasi
19. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ ekivalensi
20. $[(p \wedge q) \Rightarrow r \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$ eksportasi
21. $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)\} \Leftrightarrow \sim p$ absurditas/kontradiksi
22. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ kontraposisi

Proposisi-proposisi ekivalensi pada tabel di atas, secara sederhana dapat dibuktikan dengan menggunakan tabel kebenaran.
(Tugas: **Tabel 1.1 (identitas) di atas buktikan dengan menggunakan tabel kebenaran**)

Jika penulisan bentuk-bentuk proposisi kurang hati-hati, akan menimbulkan salah tafsir. Contoh, proposisi-proposisi $p \Rightarrow q \Rightarrow r$ dapat ditafsirkan sebagai $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ atau $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$. Kedua bentuk proposisi ini tidak ekivalen! (**Buktikan!**) Karena kedua proposisi tidak ekivalen logis, maka untuk bentuk proposisi yang diinginkan perlu digunakan ***kurung.*** Tetapi bentuk proposisi $p \wedge q \wedge r$ ditafsir berbentuk
$(p \wedge q) \wedge r$ atau $p \wedge (q \wedge r)$, keduanya ekivalen logis. Sering tanda kurung dihilangkan, hal ini dibenarkan, asal tafsiran menghasilkan proposisi yang ekivalen logis.Tanda negasi (~), juga akan menimbulkan salah tafsir, oleh sebab itu perlu diberi ***kurung***. Contoh, $(\sim p \vee q)$, dapat dotulis dalam bentuk $(\sim p) \vee q$, asal jangan ditafsir dalam bentuk $\sim(p \vee q)$.

Identitas pada tabel 1.1 di atas dapat digunakan untuk menunjukkan hubungan antara bentuk-bentuk proposisi yang digyunakan untuk menentukan suatu proposisi yang ekivalen logis.
Contoh, sederhanakan bentuk proposisi berikut

$$[(a \Rightarrow b) \vee (a \Rightarrow d)] \Rightarrow (b \vee d)$$

Penyelesaian:
(angka-angka di sebelah kanan menunjukkan nomor identitas pada tabel 1.1)

$[(\sim a \vee b) \vee (\sim a \vee d)] \Rightarrow (b \vee d)$ (18)

$[\sim a \vee (b \vee d)] \Rightarrow (b \vee d)$ (5,3,1)

$\sim [\sim a \vee (b \vee d)] \vee (b \vee d)$ (18)

$[a \wedge \sim (b \vee d)] \vee (b \vee d)$ (7,17)

$(a \vee b \vee d) \wedge [\sim (b \vee d)] \vee (b \vee d)]$ (3,10)

$(a \vee b \vee d) \wedge 1$ (15)

$(a \vee b \vee d)$ (12)

Tabel 1.2 berikut adalah suatu implikasi yang merupakan tautology. Nama-nama dikaitkan dengan implikasi yang sesuai dengan"aturan inferensi/penarikan kesimpulan". Hal ini secar khusus dibahas mendatang.

Tabel 1.2 Implikasi-implikasi logis

1. $p \Rightarrow (p \vee q)$	tambahan
2. $(p \wedge q) \Rightarrow p$	penyederhanaan
3. $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$	modus ponens
4. $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$	modus tollens
5. $[\sim p \wedge (p \vee q)] \Rightarrow q$	disjunctive syllogisme
6. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	hypotetical syllogisme
7. $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	
8. $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)]$	
9. $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$	

L A T I H A N I

1. Buat tabel kebenran untuk menunjukkan bahwa jika $p \Leftrightarrow q$ benar, maka $p \Rightarrow q$ dan $q \Rightarrow p$ benar.

   Sebaliknya, tunjukkan jika $p \Rightarrow q$ dan $q \Rightarrow p$ benar, maka $p \Leftrightarrow q$ juga benar.

2. Tunjukkan bahwa $p \Rightarrow q$ mempunyai nilai kebenaran yang sama dengan $\sim p \vee q$ untuk setiap nilai p dan q.

   Tunjukkan bahwa $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ adalah tautologi.

3. Selidiki apakah proposisi berikut tautologi, kontradiksi atau kontingensi.

   a. $p \vee \sim p$

   b. $p \wedge \sim p$

   c. $p \Rightarrow \sim(\sim p)$

   d. $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

   e. $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

   f. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

   g. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

   h. $[p \wedge (q \vee r) \Rightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

   i. $(p \wedge \sim p) \Rightarrow q$

   j. $(p \vee \sim p) \Rightarrow q$

   k. $p \Rightarrow (p \vee q)$

   l. $(p \wedge q) \Rightarrow p$

   m. $[(p \wedge q) \Leftrightarrow p] \Leftrightarrow [p \Leftrightarrow q]$

   n. $[(p \Rightarrow q) \vee (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)]$

4. Misal p : "It is snowing"

   q : "I will go to town"

   r : "I have time"

   a. Gunakan operator logis, tulis suatu proposisi yang menyimbulkan tiap pernyataan berikut:

      a.1. If it is not snowing and I have time, then I will go to town

      a.2. I will go to town only if I have time

      a.3. It isn't snowing

      a.4. It is snowing, and I will not go to town

   b. Tulis sebuah kalimat dalam bentuk bahasa Inggris dari proposisi-proposisi berikut:

      b.1. $q \Leftrightarrow (r \wedge \sim p)$

      b.2. $r \wedge q$

b.3. $(q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)$

b.4. $\sim (r \vee q)$

5. Buat konversi dan kontrapositif dari pernyataan berikut:
   a. If it rains, I'm not going.
   b. I will stay only if you go.
   c. If you get 4 pounds, you can bake the cake.
   d. I can't complete the task if I don't get more help.
6. Sederhanakan proposisi berikut dalam bentuk paling sederhana, dengan menggunakan identitas logis untuk
mendapatkan proposisi yang ekivalen hanya dengan operator logis $\wedge$ dan $\sim$.
   a. $p \vee q \vee \sim r$
   b. $p \vee [(\sim q \wedge r) \Rightarrow p]$
   c. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

Sederhanakan proposisi berikut dalam bentuk paling sederhana, dengan menggunakan identitas logis untuk mendapatkan proposisi yang ekivalen hanya dengan operator logis $\vee$ dan $\sim$.

   d. $(p \wedge q) \wedge \sim p$
   e. $[p \Rightarrow (q \vee \sim r)] \wedge \sim p \wedge q$
   f. $\sim p \wedge \sim q \wedge (\sim r \Rightarrow p)$
7. Selidiki bentuk proposisi berikut merupakan suatu tautology dengan cara menyederhanakan ruas kiri sehingga diperoleh proposisi pada ruas kanan.
   a. $[(p \wedge q) \Rightarrow p) \Leftrightarrow 1$
   b. $\sim(\sim(p \vee q) \Rightarrow \sim p \Leftrightarrow 0$
   c. $[(q \Rightarrow p) \wedge (\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow q) \Leftrightarrow p$
   d. $[(p \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \Rightarrow p)] \Leftrightarrow 0$
8. Selidiki mana diantra operator- operator logis berikut yang bersifat komutatif: $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ dan $\oplus$.

   Tunjukkan jawabanmu dengan tabel kebenaran.
9. Selidiki mana diantra operator- operator logis berikut yang bersifat asosiatif : $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ dan $\oplus$.

Tunjukkan jawabanmu dengan tabel kebenaran.

10. Diperlihatkan bahwa $\Rightarrow$, dapat dinyatakan dalam bentuk $\sim$ dan $\vee$, karena

$p \Rightarrow q$ ekivalen dengan $\sim p \vee q$

Tunjukkan bahwa semua operator logis dalam bab ini dapat dinyatakan dalam bentuk $\sim$ dan $\wedge$.