BAB IV
INTEGRAL DAN PENGGUNAANNYA

4.1. PENDAHULUAN

Integral terbagi atas integral tak tentu dan integral tertentu. Integral tak tentu dikontruksi berdasar turunan, sehingga integral tak tentu lebih dikenal balikan/anti turunan.Sedangkan integral tertentu dikontruksi berdasar limit jumlah luas persegipanjang di bawah kurva yang lebih dikenal dengan limit jumlah Riemann. Teorema dasar kalkulus menjembatani konsep integral tak tentu dengan integral tertentu.

4.1. KONSEP INTEGRAL TAK TENTU SEBAGAI ANTI TURUNAN

Mendiskusikan integral sebagai anti turunan diawali dengan diberikan turunan pertama suatu fungsi yang akhirnya ditentukan rumus dari fungsi tersebut.

Definisi 1

Fungsi $F(x)$ dikatakan antiderivatif dari fungsi $f(x)$ pada interval $[a,b]$, jika setiap titik pada interval ini memenuhi persamaan $F'(x) = f(x)$.

Contoh :

Tentukan persamaan kurva yang mempunyai turunan pertama 2x.

Pada soal ini kita dihadapkan dengan menentukan suatu fungsi yang turunan pertamanya sebesar 2x. Berdasar pengalaman dari menentukan turunan suatu fungsi dapat ditentukan fungsi yang diminta yaitu $f(x) = x$, $f(x) = x - 1$, $f(x) = x + 1$, $f(x) = x - 3$, $f(x) = x + ...$, $f(x) = x - ...$ atau secara umum $f(x) = x + C$.

Ternyata jawab dari soal tersebut adalah tidak tunggal.

Teorema.

Jika F (x) dan F (x) adalah dua antiderivatif dari fungsi f(x) pada interval [a,b], maka beda dari keduanya merupakan suatu konstanta.

Bukti.

Berdasar definisi antiderivatif didapat

(1)

untuk sebarang nilai x pada interval [a,b].

Misal F (x) - F (x) = í(x). (2)

Dari (1) diperoleh F' (x) - F' (x) = f(x) - f(x) = 0

atau í'(x) = [F (x) - F (x)]' = 0

untuk setiap nilai x pada [a,b]. Karena í'(x) = 0 menunjukkan bahwa í(x) adalah konstanta.

Karena F (x) - F (x) diferensiabel pada interval [a,b], tentu F (x) - F (x) kontinu pada [a,b].

Pada interval [a,b] dengan a $ b, akibatnya terdapat x sehingga a < x < x maka berlaku teorema Lagrange

í(x) - í(a) = (x-a)í'(x)

Karena í'(x) = 0, akibatnya í(x) - í(a) = 0

atau í(x) = í(a) (3)

Dengan demikian untuk setiap nilai x pada interval [a,b] tetap berlaku nilai í(a) dan berarti bahwa fungsi í(x) adalah suatu konstanta pada interval [a,b]. Konstanta í(a) dilambangkan dengan C, sehingga dari (2) dan (3) diperoleh

F (x) - F (x) = C. Ü

Dari teorema yang telah dibuktikan berlaku bahwa, jika diberikan fungsi f(x) terdapat antiderivatif yang berbentuk F(x) + C, dengan C suatu konstanta (C î R).

Definisi 2

Jika fungsi F(x) adalah antiderivatif dari f(x), maka pernyataan F(x) + C merupakan integral tak tentu dari fungsi f(x) dan dilambangkan dengan simbol i f(x) dx. Dengan demikian, definisi ini secara simbol adalah

i f(x) dx = F(x) + C

jika F'(x) = f(x).

Disini, fungsi f(x) disebut integrand, f(x) dx (pernyataan dibawah tanda integral) disebut elemen dari integrasi dan i adalah simbol integral.

Dengan demikian, integral tak tentu adalah sekumpulan/famili dari fungsi y = F(x) + C.

Secara geometris integral tak tentu merupakan famili kurva, yang diperoleh dengan mentranslasi dari satu kurva yang sejajar dengan dirinya sepanjang sumbu Y (arah ke atas atau arah ke bawah).

Berdasar definisi 2 berlaku hal-hal sebagai berikut:

1. Derivatif dari integral tak tentu sama dengan integrandnya, yaitu, jika F'(x) = f(x) maka

   (i f(x) dx)' = (F(x) + C)' = f(x)

   Persamaan ini dapat dipahami bahwa derivatif dari sebarang antiderivatif sama dengan integrandnya.

2. Diferensial dari integral tak tentu sama dengan pernyataan di bawah tanda integral:

   d(i f(x) dx) = f(x) dx atau   (i f(x) dx) = f(x)

3. Integral tak tentu dari diferensial dari suatu fungsi sama dengan fungsi ini ditambah sebarang konstanta.

   i d F(x) = F(x) + C.

4.1.1. SIFAT-SIFAT INTEGRAL TAK TENTU

1. i k f(x) dx = k i f(x) dx   ; k = konstanta

Bukti :

Ruas kiri diturunkan terhadap x diperolehII

[k(i f(x) dx)] = k f(x)   (1)

Ruas kanan diturunkan terhadap x diperolehI

[k i f(x) dx] = k   [i f(x) dx]

= k f(x)   (2)

Dari (1) dan (2) terbukti bahwa i k f(x) dx = k i f(x) dx   Ü

2. i [f(x) ñ g(x)] dx = i f(x) dx ñ i g(x) dx

Bukti :

Ruas kiri diturunkan terhadap x diperoleh

{i [f(x) ñ g(x)] dx } = [f(x) ñ g(x)]   (1)

Ruas kanan diturunkan terhadap x diperoleh

{i f(x) dx ñ i g(x) dx} =   i f(x) dx ñ   i g(x) dx

= [f(x) ñ g(x)]   (2)

Dari (1) dan (2) terbukti bahwa

i [f(x) ñ g(x)] dx = i f(x) dx ñ i g(x) dx   Ü

4.1.2. RUMUS-RUMUS INTEGRAL TAK TENTU

Rumus-rumus integral tak tentu dikelompokkan atas rumus dasar integral dan teknik integral.

Rumus-rumus integral tak tentu yang diperoleh dari balikan/inversi dari turunan/derivatif dikenal dengan Rumus-rumus dasar integral tak tentu.

a. RUMUS-RUMUS DASAR INTEGRAL TAK TENTU

1. i u du = + C ; n $ -1
2. i = ln ³u³ + C
3. i a du = + C, a > 0 dan a $ 1
4. i e du = e + C
5. i = ln ³ ³ + C
6. i = ln ³ ³ + C
7. i = ln (u +) + C
8. i = ln ³ u + ³ + C
9. i sin u du = - cos u + C
10. i cos u du = sin u + C
11. i tg u du = ln ³sec u³ + C
12. i cotg u du = ln ³sin u³ + C
13. i sec u du = ln ³sec u + tg u³ + C
14. i cosec u du = ln ³cosec u - cotg u³ + C
15. i sec u du = tg u + C
16. i cosec u du = - cotg u + C
17. i sec u tg u du = sec u + C
18. i cosec u ctg u du = - cosec u + C
19. i = arc sin + C
20. i = arc tg + C
21. i = arc sec + C ; ³u³ > 1

22. i du = u + a arc sin + C
23. i du = u + a ln(u +) + C
24. i du = u - a ln³u + ³ + C
25. i sinh u du = cosh u + C
26. i cosh u du = sinh u + C
27. i sech u du = tgh u + C
28. i cosech u du = - cotgh u + C
29. i sech u tgh u du = - sech u + C
30. i cosech u cotgh u du = - cosech u + C

31. i = arc sinh + C

32. i = arc cosh + C untuk u > a > 0

33. i = arc tgh + C ,untuk a > u

34. i = - arc cotgh + C, untuk u > a

35. i = - arc sech + C, untuk a > u

36. i = - arc cosech + C

Asal-usul rumus-rumus dasar integral tak tentu di atas dijelaskan sebagai berikut.

1. u adalah fungsi dalam x

(u) = (n + 1) (u)

d (u) = [n + 1 (u)] dx

kedua ruas diintegralkan, didapat

i d (u) = i [(n + 1) (u)] dx

(u) + C = (n+1) i (u) dx *)

% i u du = + C ; n $ -1

Dalam keadaan khusus, yaitu u = x diperoleh

% i x dx = + C ; n $ -1

2. u adalah fungsi dalam x

(ln u) = atau

d (ln u) = ( ) dx

kedua ruas diintegralkan, didapat

i d (ln u) = i ( ) dx

ln ³u³ + C = i ( ) dx *)

% i = ln ³u³ + C

Dalam keadaan khusus, yaitu u = x diperoleh

% i = ln ³x³ + C

3. u adalah fungsi dalam x

(a) = (a) ln a   atau

d (a) = [(a) ln a   ] dx

kedua ruas diintegralkan, didapat

i d (a) = i [(a) ln a   ] dx atau

i d (a) = ln a i [(a)   ] dx atau

i d (a) = i [(a)   ] dx

(a) + C = i [(a)   ] dx   *)

% i a du =   + C, a > 0 dan a $ 1

Dalam keadaan khusus, yaitu u = x diperoleh

% i a du =   + C, a > 0 dan a $ 1

4. u adalah fungsi dalam x

e = e   atau

d e = e   dx

kedua ruas diintegralkan, didapat

i d e = i e   dx   atau

e + C = i e   dx   *)

% i e du = e + C

Dalam keadaan khusus, yaitu u = x diperoleh

% i e du = e + C

5. u adalah fungsi dalam x

ln ³   ³ =

=

=   atau

d   ln ³   ³ = [   ] dx

kedua ruas diintegralkan, didapat

i d   ln ³   ³ = i [   ] dx atau

i d   ln ³   ³ = i [   ] dx

ln ³   ³ + C = i [   ] dx   *)

% i   =   ln ³   ³ + C

Dalam keadaan khusus, yaitu a = 1 dan u = x diperoleh

% i = ln ³ ³ + C

6. u adalah fungsi dalam x

ln ³ ³ =

=

= atau

d ln ³ ³ = [ ] dx

kedua ruas diintegralkan, didapat

i d ln ³ ³ = i [ ] dx atau

i d ln ³ ³ = i [ ] dx

ln ³ ³ + C = i [ ] dx *)

% i = ln ³ ³ + C

Dalam keadaan khusus, yaitu a = 1 dan u = x diperoleh

% i = ln ³ ³ + C

7. u adalah fungsi dalam x

ln (u +) = atau

= atau

=

= atau

d ln (u +)= dx atau

= [ ] dx

kedua ruas diintegralkan, didapat

i d ln (u +) = i [ ] dx

ln (u +) + C = i [ ] dx *)

% i = ln (u +) + C

Dalam keadaan khusus, yaitu a = 1 dan u = x diperoleh

% i = ln (x +) + C

8. u adalah fungsi dalam x

ln (u +) = atau

= atau

=

= atau

d ln (u +)= dx atau

= [ ] dx

kedua ruas diintegralkan, didapat

i d ln (u +) = i [ ] dx

ln (u +) + C = i [ ] dx *)

% i = ln (u +) + C

Dalam keadaan khusus, yaitu a = 1 dan u = x diperoleh

% i = ln (x +) + C

9. u adalah fungsi dalam x

- cos u = sin u atau

d - cos u = [sin u] dx

kedua ruas diintegralkan, didapat

i d - cos u = i [sin u] dx

- cos u + C = i [sin u] dx *)

% i sin u du = - cos u + C

Dalam keadaan khusus, yaitu u = x diperoleh

% i sin x dx = - cos x + C

10. u adalah fungsi dalam x

sin u = cos u atau

d sin u = [cos u] dx

kedua ruas diintegralkan, didapat

i d sin u = i [cos u] dx

sin u + C = i [cos u] dx *)

% i cos u du = sin u + C

Dalam keadaan khusus, yaitu u = x diperoleh

% i cos x dx = sin x + C

11. u adalah fungsi dalam x

ln ³sec u³ = atau

ln ³sec u³ = tg u atau

d ln ³sec u³ = [tg u] dx

kedua ruas diintegralkan, didapat

i d ln ³sec u³ = i [tg u] dx

ln ³sec u³ + C = i [tg u] dx *)

% i tg u du = ln ³sec u³ + C

Dalam keadaan khusus, yaitu u = x diperoleh

% i tg x dx = ln ³sec x³ + C

12. u adalah fungsi dalam x

ln ³sin u³ = atau

ln ³sin u³ = cotg u atau

d ln ³sin u³ = [cotg u] dx

kedua ruas diintegralkan, didapat

i d ln ³sin u³ = i [cotg u] dx

ln ³sin u³ + C = i [cotg u] dx *)

% i cotg u du = ln ³sin u³ + C

Dalam keadaan khusus, yaitu u = x diperoleh

% i cotg x dx = ln ³sin x³ + C

13. u adalah fungsi dalam x

ln ³sec u + tg u³ = [ ] atau

ln ³sec u + tg u³ = [ ] atau

ln ³sec u + tg u³ = sec u atau

d ln ³sec u + tg u³ = [sec u] dx

kedua ruas diintegralkan, didapat

i d ln ³sec u + tg u³ = i [sec u] dx

ln ³sec u + tg u³ + C = i [sec u] dx *)

% i sec u du = ln ^{3}sec u + tg u^3 + C

Dalam keadaan khusus, yaitu u = x diperoleh

14. u adalah fungsi dalam x

ln ^{3}cosec u - cotg u^3 = [ ]

ln ^{3}cosec u - cotg u^3 = [ ]

ln ^{3}cosec u - cotg u^3 = [cosec u]

d ln ^{3}cosec u - cotg u^3 = [cosec u] dx

kedua ruas diintegralkan, didapat

i d ln ^{3}cosec u - cotg u^3 = i [cosec u] dx

ln ^{3}cosec u - cotg u^3 + C = i [cosec u] dx *)

% i cosec u du = ln ^{3}cosec u - cotg u^3 + C

Dalam keadaan khusus, yaitu u = x diperoleh

% i cosec x dx = ln ^{3}cosec x - cotg x^3 + C

15. u adalah fungsi dalam x

tg u = sec u atau

d tg u = [sec u] dx

kedua ruas diintegralkan, didapat

i d tg u = i [sec u] dx

tg u + C = i [sec u] dx *)

% i sec u du = tg u + C

Dalam keadaan khusus, yaitu u = x diperoleh

% i sec x dx = tg x + C

16. u adalah fungsi dalam x

- cotg u = cosec u atau

d - cotg u = [cosec u] dx

kedua ruas diintegralkan, didapat

i d - cotg u = i [cosec u] dx

- cotg u + C = i [cosec u] dx *)

% i cosec u du = - cotg u + C

Dalam keadaan khusus, yaitu u = x diperoleh

% i cosec x dx = - cotg x + C