Penggunaan Turunan Dalam Masalah Soal Cerita

Di muka telah diungkap bahwa turunan suatu fungsi, baik turunan pertama maupun turunan yang lebih tinggi banyak digunakan dalam matematika diantaranya untuk menetukan nilai ektrim, titik belok dan sebagainya. Selain itu, ternyata turunan pertama, maupun turunan lebih tinggi dari suatu fungsi banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Lebih jelasnya, berikut diberikan beberapa contoh tentang penggunaan turunan pada soal cerita.

Contoh 1. Sebuah bak air dibuat dari beton dan ditutup dengan plat besi. Alas bak berbentuk persegi/bujursangkar dan isi bak 12000 liter. Harga plat besi dua kali lebih mahal dari harga beton per dm . Tentukan ukuran bak agar biaya pembuatan bak dan tutupnya semurah mungkin.

Penyelesaian:Misal B fungsi biaya dari pembuatan bak dan tutupnya. Harga beton tiap dm misalnya adalah a, Harga plat = 2a tiap dm. Jika tinggi bak t dan sisi alas bak x, maka volum bak $V(t)= x^2\ t = 12000 \Leftrightarrow t = \frac{12000}{x^2}$

Sehingga $B = 2ax^2 + a(x^2 + 4\ xt)$

$= 3\ ax^2 + 4ax. \frac{12000}{x^2}$

$= 3\ ax^2 + \frac{4800\ a}{x}$

$B' = 6ax - \frac{4800\ a}{x^2}$, B mencapai nilai ekstrim bila B' = 0, sehingga

$6ax - \frac{4800\ a}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{6ax^3 - 4800\ a}{x^2} = 0$ atau

$6\ ax^3 = 48000\ a$

$\Leftrightarrow x^3 = 8000$

diperoleh x = 20

karena $t = \frac{12000}{x^2}$, didapat t = 30

$B' = 6ax - \frac{4800\ a}{x^2}$, maka

$B'' = 6a - (\frac{x^2.(4800a)' - 4800\ a.2x}{(x^2)^2}$

$= 6a + \frac{9600\ a}{x^3}$

Karena harga beton (a) tidak mungkin negatif, dan nilai x juga positif, maka

B" = $6a + \frac{9600\ a}{x^3}$, bernilai positif atau

B" = $6a + \frac{9600\ a}{x^3} > 0$

$\because$B"> 0, maka terdapat nilai minimum.

Jadi B sekecil-kecil tercapai bila ukuran bak sisi alas = 20 dm dan tinggi 30 dm.

Contoh 2. Diketahui persamaan permintaan suatu jenis barang p = 4 - 0.0002 x, dengan x banyak barang yang diproduksi tiap minggu, p harga barang dalam dolar. Biaya total C = 600 + 3x. Bila perusahaan mendapat untung sebesar-besarnya, tentukan:

a. Banyak barang yang diproduksi tiap minggu

b. Harga setiap barang

c. Keuntungan setiap minggu

Penyelesaian: Diketahui p(x) = 4 - 0.0002 x, dan x memenuhi $0 \leq x \leq 20000$ (p(x) tidak pernah negatif).

$R(x) = x \cdot p(x) = 4x - 0.0002\ x^2$ dengan $0 \leq x \leq 20000$.

Fungsi biaya C(x) = 600 + 3x.

Fungsi keuntungan $S(x) = R(x) - C(x) = 4x - 0.0002\ x^2 - (600+3x)$ dengan $0 \leq x \leq 20000$.

R'(x) = 4 - 0.0004 x dan R"(x) = - 0.0004

C'(x) = 3. C" (x) = 0. Untuk R"(x) = C" (x) diperoleh x = 2500

Karena R"(x) < C"(x) untuk setiap x dan S"(x) = R"(x) - C"(x) < 0, maka S(2500) merupakan nilai maksimum mutlak.

a). Banyak barang yang diproduksi tiap minggu adalah 2500 buah.

b). Harga tiap barang P(2500) = 4 - 0.0002 x = $ 3.5

c). Keuntungan tiap minggu S(2500) = 4x - 0.0002 x - (600 + 3x) = $ 6.5.

Contoh 3: Suatu percetakan bermaksud menerbitkan buku saku tentang cerita detektif. Luas setiap halaman buku yang berisi tulisan hanya 50 cm , sedangkan pada tepi disediakan tempat selebar 4 cm baik di bagian atas maupun di bagian bawah dan 2 cm di bagian kiri dan kanan (lihat gambar bawah). Berapakah ukuran buku yang dike-hendaki oleh penerbit agar biaya pembuatannya seekonomis mungkin.

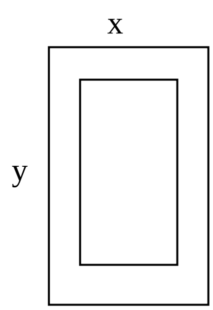
Penyelesaian : Misalkan lebar dan panjang buku itu masing-masing sebesar x cm dan y cm .

Ukuran lebar yang berisi tulisan (x - 4) cm

Ukuran panjang yang berisi tulisan (y - 8) cm, sehingga luas daerah yang berisi tulisan

L = (x - 4)(y - 8) = 50, diperoleh

$y = \frac{50}{x-4} + 8$, untuk x > 4



Luas keseluruhan halaman buku adalah

$L(x) = x \cdot y$

$= x\left[\frac{50}{x-4} + 8\right]$

$= \frac{x.50}{x - 4} + 8x$; untuk x > 4

Agar biaya penerbit seekonomis mungkin, dihitung

$L'(x) = \frac{(x\text{-}4)\frac{d}{dx}(x.50) - (X.50).\frac{d}{dx}(x\text{-}4)}{(x\text{-}4)^2} + 8$; untuk x > 4, atau

$L'(x) = \frac{(x\text{-}4)50 - 50\ x.1}{(x\text{-}4)^2} + 8$; untuk x > 4, atau

$L'(x) = \frac{-200}{(x\text{-}4)^2} + \frac{8(x\text{-}4)^2}{(x\text{-}4)^2}$

$L'(x) = \frac{8(x^2\text{-}8x+16) - 200}{(x\text{-}4)^2}$

$L'(x) = \frac{(8x^2\text{-}64x+128) - 200}{(x\text{-}4)^2}$

$L'(x) = \frac{(8x^2\text{-}64x - 72)}{(x\text{-}4)^2}$

$L'(x) = \frac{8\left(x^2 - 8x - 9\right)}{(x-4)^2}$

$L'(x) = \frac{8(x-9)(x+1)}{(x-4)^2}$

Mencapai nilai kritis bila L'(x) = 0, berarti 8(x + 1)(x - 9) = 0, didapat x = -1 (tidak memenuhi) atau x = 9. Dengan demikian titik kritisnya tercapai pada x = 9.

Dari $L'(x) = \frac{8(x-9)(x+1)}{(x-4)^2}$, diperoleh

$$L''(x) = \frac{(x^2-8x+16)\frac{d}{dx}(8x^2-64x-72) - (8x^2-64x-72)\frac{d}{dx}(x^2-8x+16)}{(x^2-8x+16)^2}$$

$$L''(x) = \frac{(x^2-8x+16)(16x-64) - (8x^2-64x-72)(2x-8)}{(x^2-8x+16)^2}$$

$$L''(x) = \frac{(16x^3 - 128x^2 - 64x^2 + 256x + 512x - 1024) - (16x^3 - 128x^2 - 64x^2 + 512x - 144x + 576)}{(x^2-8x+16)^2}$$

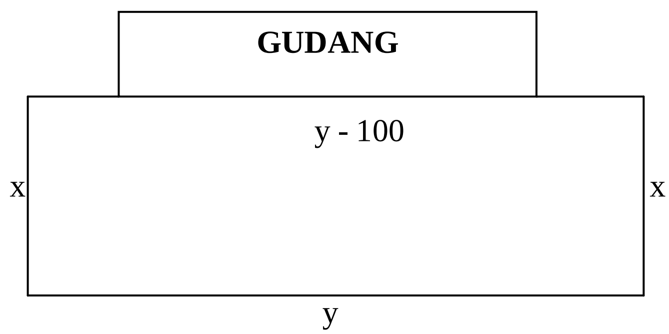
$L''(x) = \frac{(400x - 1600)}{(x^2-8x+16)^2}$, untuk x = 9 diperoleh

$L''(9) = \frac{3600-1600}{81-72+16} = 80 > 0$

Dengan demikian, agar biaya penerbit seekonomis mungkin bila ukuran lebar buku x = 9 cm dan panjang buku $y = \frac{50}{x-4} + 8 = 18$ cm.

Contoh 4. Dinding belakang sebuah gudang adalah 100 m yang dimanfaatkan sebagai pagar. Panjang seluruh pagar yang dibuat adalah 200 m. Bila pagar yang dibuat berbentuk persegi panjang, tentukan ukuran dari pagar agar luas tanah yang berpagar seluas mungkin.

Penyelesaian.



Misal lebar pagar = x dan panjang pagar y. Berdasar informasi gambar di atas, maka panjang pagar yang dibuat adalah

$x + y + x + (y - 100) = 200$

$\Leftrightarrow 2x + 2y = 300$

$\Leftrightarrow x + y = 150$ atau $y = 150 - x$.

Luas tanah yang berpagar = $A(x) = xy = x(150 - x)$

Dari informasidi atas, maka panjang pagar sekurang-kurangnya 100 m atau $y \geq 100$

Karena $y = 150 - x$ dan $y \geq 100$, maka $x \leq 50$.

Untuk $x \leq 50$ menunjukkan bahwa domain dari $A(x) = [0, 50]$.

Diketahui $A(x) = 150x - x^2 \Leftrightarrow A'(x) = 150 - 2x$.

Untuk $A'(x) = 0$ diperoleh $x = 75$ dan nilai ini terletak diluar [0, 50]. Oleh sebab itu nilai x yang memenuhi adalah titik ujung dari [0, 50], yaitu $x = 0$ atau $x = 50$. (why?)

Untuk $x = 0$, maka luas tanah yang berpagar adalah 0.

Untuk $x = 50$, maka luas tanah yang berpagar adalah 500.

Jadi, lebar pagar = 50 m dan panjang pagar = 100 m.

LATIHAN

1. Selama seseorang batuk, jari-jari tenggorokan mengecil (pengurangan lebar tenggorokan). Andaikan tenggorokantidak dapat membesar melebihi ukuran normal, tetapi dapatmengecil sampai separuh ukuran normal. Jika kecapatan udara merupakan hasil kali antara selisih jari-jari normal dengan jari-jari tenggo-rokan dengan kuadrat jari-jari tenggorokan. Tentukan jari-jari tenggorokan sehi-nggakecepatan udara setinggi mungkin.

   (Misalkan jari-jari normal R dan jari-jari tenggorokan r)

2. Untuk membuat suatu poster yang memuat tulisan dan berbentuk perseegipanjang luasnya 450 cm^2 . Jika ukuran tepiatas dan bawah masing-masing 6 cm dan tepi kiri dan kananmasing-masing 12 cm. Tentukan ukuran persegipanjangagar kertas yang digunakan sekecil mungkin.

3. Suatu pabrik membuat kaleng yang berbentuk tabung bertutup dan volumenya V. Misal upah buruh adalah C yang berbanding langsung dengan panjang bagian yang dipateri (yaitu jumlah tinggi dan dua kali keliling alas kaleng).Jika tinggi kaleng h dan jari-jari kaleng r tunjukkan bahwa: C = $k\left(\frac{V}{\pi r^2} + 4\pi r\right)$ dengan k = konstanta.

Buktikan bahwa upah buruh C paling murah jika tinggi kaleng samadengan keliling alasnya.

4. Selembar seng panjangnya 10 m dan lebarnya 60 cm. Sejajar dengan panjangnya dilipat kiri dan kanan dengan ukuran yang sama untuk dibuat talang. Berapa lebar lipatan agartalang dapat memuat air sebanyak mungkin.

5. Sebuah palung air berbentuk setengah tabung bertutup. Jika volume air 128 π kaki kubik. Tentukan jari-jari r dan panjang h agar pembuatan palung air tersebut menghabiskan bahan sesedikit mungkin.

6. Halaman sebuah buku harus memuat 27 inchi persegi cetakan. Jika tepi atas, bawah salah satunya 2 inchi dan tepi yang lain 1 inchi. Berapa ukuran halaman buku tersebut agar memakai kertas sesedikit mungkin.

7. Sebuah tangga dipasang pada suatu pohon dan dinding tembok, jika tinggi tangga h kaki dan dinding tembok letaknya w kaki dibelakang pohon. Tentukan tinggi tanggaminimal yang dapat dipakai.

8. Jika TR = x.p dan x = - 1/2 p - p^2 + 40. Tentukan nilai maksimal dari TR.

9. Suatu perusahaan pemukiman menyewakan tiap apartemennyadengan harga \$p setiap bulan dan terdapat x apartemen. Jika p = 10 , tentukan banyak apar temen agar perusahaan memperoleh hasil sewa maksimal.

10. Diketahui persamaan permintaan suatu jenis barang adalah p = (x - 8) dan fungsi biaya total C(x) = 18x – x^2 .
    a. Tentukan nilai-nilai x untuk keadaan di atas.
    b. Tentukan fungsi pendapatan marginal dan fungsi biayamarginal.
    c. Tentukan nilai x agar memberikan keuntungan maksimal.