## 1.4. Kuantor Dan Operator Logika

Diperlukan kehati-hatian dalam menulis pernyataan matematika yang melibatkan banyak kuantor, predikat dan operator-operator logika. Pernyataan-pernyataan tersebut terjadi dalam berbagai ragam.

*Contoh*

Misalkan semesta pembicaraannya **bilangan bulat**dan N(x) menyatakan”x bilangan bulat positif”, E(x) menyatakan “x bilangan genap”, 0(x) menyatakan“x bilangan ganjil” dan P(x) menyatakan“x bilangan prima.”Berikut ini rekaman ilustrasi contoh– contoh - pernyataan dalam bentuk notasi logika.

a. Ada suatu bilangan genap.$\exists x E(x)$

b. Setiap bilangan bulat adalah genap atau ganjil . $\forall x\ [E(x) \vee O(x))$

c. Semua bilangan prima adalah positif. $\forall x\ [P(x) \Rightarrow N(x)$

d. Bilangan prima yang genap hanya dua.$\forall x\ [E(x) \wedge P(x)) \Rightarrow x = 2)$

e. Ada satu dan hanya satu bilangan prima genap $\exists! x[E(x) \wedge P(x))$

f. Tidak semua bilangan bulat ada ganjil.$\sim\forall x\ O(x)$ or $\exists x \sim O(x)$

g. Tidak semua bilangan prima adalah ganjil. $\sim\forall x\ (P(x) \Rightarrow O(x)$ or $Ex[P(x) \wedge \sim O(x)$

h. Jika bi1angan bulat tidak ganjil, maka biIangan bulat genap $\forall x\ [\sim 0(x) \Rightarrow E(x)]$

Pada contoh sebelumnya, kuantor-kuantor muncul diawal pernyataan. Walaupun dalam menulis beberapa pernyataanmatematika, kuantor-kuantor secara wajar dapat menempati pada tempat lain merupakan hal yang penting..

*Contoh-contoh*

Perhatikan, semestanya bilangan bulat dan misalkan P(x, y, z) menyatakan “x.y = z” berikut ini contoh-contoh pernyataan matematika dan formulasi yang ekivalen dalam notasi logika. Ternyata bahwa pernyataan yang non formal dari proposisi-proposisi sering menghilangkan kuantor universal pada peubah-peubah individu.

a. “Jika x = 0, maka x.y = x untuk semua nilai y”

$\forall x\ [\ x=0 \Rightarrow \forall y P(x,y,x)]$

b. “Jika xy = x untuk setiap y, maka x = 0”

$\forall x\ [\forall y\ P(x,y,x) \Rightarrow x = 0]$

Amati bahwa $\forall x\ \forall y\ [P(x\ y\ x) \Rightarrow x = 0]$ adalah penulisan yang tidak tepat untuk pemyataan b. Penulisan terakhirmenyajikan pernyataan yang salah , yaitu "untuk semua x dan y, jika x.y = x, maka x = 0”. Nilai x = 1 dany = 1sebagai contoh penyangkal pada pernyataan ini, yang mengakibatkan pernyataan b. benar.

c. “Jika xy $\neq$ x untuk suatu y makax $\neq$0”

$\forall x\ [\exists y \sim P(x, y, x) \Rightarrow \sim (x = 0]$

Contoh-contoh sebelumnya menggambarkan beragam cara menyatakan pernyataan beserta predikat, kuantor dan operator logka. Dalam menyusun bukti-bukti, diperlukan untuk dapat menunjukkan hubungan-hubungan antar pernyataan. Sebagai contoh, perhatikan pernyataan

$\exists x[P(x) \Rightarrow Q(x)]$ dan $\exists x[P(x) \Rightarrow \exists y Q(y)]$.

Apakah kedua pernyataan ekivalen, atau yang satu termasuk yang lain atau tidak ada pernyataan yang mungkin dalam bentuk ini ? Untuk menjawab pertanyaan ini diperlukan untuk memahami interaksi antar operator logika, kuantor dan predikat.

Sebuah pernyataan melibatkan peubah-peubah predikat dikatakan ***valid,*** jika pernyataan benar untuk untuk setiap semesta pembicaraan tanpa mempedulikan tafsiran terhadap peubah- peubah predikat. Suatu pernyataan ***stisfiable*** bila terdapat suatu semesta dan suatu interpretasi dari peubah-peubah predikat yang menjadikan pernyataan benar. Jika sebuah pernyataan tidak benar untuk setiap semesta atau interpretasi disebut ***unstisfiable***. Pernyataan-pernyataan yang ***valid, stisfiable dan unstisfiable***analog dengan tautogi, kontingen dan kontradiksi dalam bahasa proposisi. Dalam bab ini, kita mengembangkan identitas dasar pokok yang dapat digunakan untuk menentukan validitassuatu pernyataan. Diskusi di sini sering mengarah pada pernyataan-pernyataan yang“ekivalen". Dua pernyataan $A_1$, dan $A_2$dikatakan “ekivalen” (secara logis)***jika dan hanya jika*** untuk setiap semesta pembicaraan dan intepretasi peubah-peubah predikat. $A_1$ benar ***jika dan hanya jika*** $A_2$ benar. Dengan kata lain $A_1$ dan $A_2$ adatah ekuivalen ***jika dan hanya jika***pernyataan $A_1 \Leftrightarrow A_2$ ***valid.***

Pertama-tama dicermati bagaimana pengaruh operasi negasi dalam proposisi-proposisi yang melibatkan kuantor. Misal P(x) adalah suatu predikat danperhatikan makna dari preposisi $\sim\forall x\ P(x)$. Kita dapat mengintepretasikan proposisi ini sebagai “pernyataan $\forall x P(x)$ adalah salah,”yang ekuivalen dengan pernyataan “untuk suatu x, P(x) tidak benar,” atau $\exists x \sim P(x)$. Hal menyebabkan kevalidan dari pernyataan.

$\sim\forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \sim P(x)$

Dengan cara yang sama, proposisi $\sim\exists x\ P(x)$ menyatakan bahwa "proposisi bernilai salah bila terdapat x sedemikian hingga P(x) benar,” atau “untuk setiap x, P(x) salah.”Hal ini membuktikan pernyataan valid

$\sim\exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \sim P(x)$

Dua pernyataan yang ekivalen dapat digunakan untuk memperluas penggunakan tanda negasi pada semua barisan kuantor, seperti illustrasi contoh berikut.

$$\begin{aligned} \sim\exists x\forall y\forall z\ P(x.y,z) &\Leftrightarrow \forall x\sim\forall y\forall z\ P(x.y,z) \\ &\Leftrightarrow \forall x\exists y \sim\forall z\ P(x.y,z) \\ &\Leftrightarrow \forall x\exists y\exists z \sim P(x.y,z) \end{aligned}$$

Perluasan negasi dalam kuantor sering digunakan dalam penyusunan bukti dan contoh-contoh penyangkal. Perhatikan pernyataan berikut:

“Untuk sctiap sepasang bilangan bulat x dan y, ada z sedemikian hingga x + z = y.
Pernyataan ini bisa diformulasikan sebagai berikut

$\forall x\forall y\exists z[x + z = y]$

pernyataan bagian terkecil serta konsisten dengan tanda kurung pada setiap pernyataan. Akibatnya pernyataan,

$$\forall x\ P(x) \vee Q(x)$$

tidak menyatakan proposisi $\forall x[\mathbf{P(x) \vee Q(x)}]$

tetapi menyatakan predikat $\mathbf{[\forall x\ P(x)] \vee Q(x).}$

Pernyataan ini mempunyai dua peubah, satu terikat dan satu bebas. Keduanya dinotasikan dalam bentuk x, yang equivalen dengan

$$\mathbf{\forall y\ P(x) \vee Q(x).}$$

yang menggunakan simbol berbeda untuk peubah terikat den peubah bebas. Penggunaan simbol yang sama untuk peubah yang berbeda, walaupun secara formal benar,tetapi sering membingungkan danen sebaiknya dihindari.

*Contoh*

Dalam pernyataan berikut $\forall x[P(x) \vee Q(y) \vee R(x, z)]$

Kedua kejadian ini x mewakili peubah yang sama Tetapi dalam pernyataan

$\forall x[P(x) \vee Q(y)] \vee R(x, z)$,

Kejadian pada peubah x dalam predikat P(x) adalah terikat sedang kejadian x dalam predikat R(x,z) adalah bebas . Pernyataan terakhir adalah ekuivalen dengan

$$\forall \mathbf{x}\ [\mathbf{P(x)} \vee \mathbf{Q(y)}] \vee \mathbf{R(w, z)}$$

Sekarang, perhatikan cara suatu kuantor yang mengakibatkan konjungsi dan disjungsi. Pertama ternyata bahwa jika suatu proposisi terjadi dalam suatu disjungsi atau konjungsi dalam scope suatu kuantor, proposisi ini dapat diubah dari scope kuantor. Dengan demikian,

$\forall x[A(x) \vee P] \Leftrightarrow [\forall xA(x) \vee P]$,

$\forall x[A(x) \wedge P] \Leftrightarrow [\forall xA(x) \wedge P]$,

$\exists x[A(x) \vee P] \Leftrightarrow [\exists xA(x) \vee P]$, dan

$\exists x[A(x) \wedge P] \Leftrightarrow [\exists xA(x) \wedge P]$

semuanya valid. Predikat yang peuabah-peubahnya tidak terikat oleh suatu kuantordapat disajikan dengan cara yang sama,

$\forall x[P(x) \vee Q(y)] \Leftrightarrow [\forall xP(x) \vee Q(y)]$ dan

$\forall x[\forall yP(x,y) \wedge Q(z)] \Leftrightarrow [\forall x \forall yP(x,y) \wedge Q(z)]$

kedua-duanya juga valid.

Pembaca mungkin mendapatkan pengertian yang lebih mendalam dari ekivalensi-ekivalensi dengan jalan memperluas konjungsi dan disjungsi secara takhingga/infionite. Dengan demikian untuk semesta bilangan Asli, identitas pertama di atas dapat disajikan sebagai berikut:

Pernyataan $\forall x[A(x) \vee P]$ ekivalen dengan konjungsi takhingga

$[A(0) \vee P] \wedge [A(1) \vee P] \wedge [A(2) \vee P] \wedge \ldots$

yang dapat disussun dengan menggunakan sifat distributive seperti berikut

$[A(0) \wedge A(1) \wedge A(2) \wedge \ldots] \vee P$

yang ekivalen dengan $\forall x A(x) \vee P$.

Sekarng angap bahwa peubah terikat oleh suatu kuantor terjadi dalam dua predikat dari suatu konjungsi atau disjungsi. Pertama ditunjukkan bahwa proposisi $\forall x[P(x) \wedge Q(x)\mathbf{]} \Leftrightarrow \mathbf{[}\forall x P(x) \wedge \forall x\, Q(x)\mathbf{]}$ ***valid.*** Proposisi $\forall x[P(x) \wedge Q(x)\mathbf{]}$ dapat dibaca " Untuk setiap x, P(x) benar dan Q(x) benar." Ditunjukkan bahwa ekivalensi dari dua pernyataan dengan semesta bilangan asli **A,** dengan memper- luas $\forall x[P(x) \wedge Q(x)\mathbf{]}$ ke dalam bentuk konjungsi takhingga seperti berikut:

$[P(0) \wedge Q(0)] \wedge [P(1) \wedge Q(1)] \wedge [P(2) \wedge Q(2)\ ] \wedge \ldots$

Dengan membandingkan sifat asosiatif dan komutatif dari $\wedge$ (identitas 4 dan 6 pada tabel 1.1) , suku-sukunya disusun kembali , didapat

$[P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots\ ] \wedge [Q(0) \wedge Q(1) \wedge Q(2) \wedge \ldots\ ]$

yang ekivalen dengan $\mathbf{[}\forall x P(x) \wedge \forall x\, Q(x)\mathbf{]}$

atau ekivalen dengan $\mathbf{[}\forall x P(x) \wedge \forall y\, Q(y)\mathbf{]}$**.**

Argumen menggunakan semesta bilangan Asli **A,** tetapi kedua pernyataan ekivalen dengan sebarang semesta pembicaraan. Pernyataan berikut adalah valid:

$\forall x[(x) \wedge Q(x)\mathbf{]} \Leftrightarrow \mathbf{[}\forall x P(x) \wedge \forall x\, Q(x)\mathbf{]}$**.**

Hubungan antara $\forall$ dan $\wedge$ ini secara formal dikarakterisasi oleh pernyataan dengan semesta kuantor $\forall$***mendistibusikan*** atas hubungan logika $\wedge$. Bagaimanapun kuantor ekstensial $\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$, tidak bersisifat distributif atas hubungan logika $\wedge$. Oleh sebab itu $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$ tidak ekivalen dengan $\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$, sebagaimana ditunjukkan dalam argumen berikut. Proposisi $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$ menyatakan bahwa "Terdapat x sedemikian hingga P(x) dan Q(x) keduanya benar. Pernyataan memerlukan nilai x yang sama dan memenuhi P dan Q. Selain itu, pernyataan " Terdapat suatu nilai x sedemikian hingga P(x) benar dan terdapat suatu nilai x sedemikian hingga Q(x) benar," yang disajikan dengan $\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$, memungkinkan nilai x yang berbeda untuk memenuhi P dan Q.

Untuk menunjukkan kedua pernyataan $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$ dan $\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$ tidak ekivalen, digunakan analisis sebelumnya untuk menyusun suatu semesta dan predikat-predikat P dan Q sedemikian hingga satu pernyataan benar dan yang lain salah. Misal semestanya bilangan bulat dan misal P(x) menyatakan " x adalah bilangan bulat genap" dan Q(x) menyatakan "x adalah bilangan bulat negatif." Maka $\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$merupakan suatu proposisi yang bernilai benar, sedangkan $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$ bernilai salah. (***Why?***)

Dengan demikian $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$ dan $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)]$ tidak ekivalen, Pada implikasi proposisi pertama mengakibatkan proposisi kedua, pernyataan

$\exists x[P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow \exists xP(x) \wedge \exists x\ Q(x)]$ adalah valid (***Why?***)

Jikas $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$ bernilai benar, maka terdapat suatu elemen c dari semesta sedemikian hingga proposisi $P(c) \wedge Q(c)$ bernilai benar. Karena itu, P(c) benar dan Q(c) benar. Kebenaran P(c), dapat disimpulkan bahwa $\exists xP(x)$ benar. Dengan cara yang sama, dari Q(c) berasal $\exists xQ(x)$ benar, akibatnya konjungsi $\exists xP(x) \wedge \exists x\ Q(x)]$ bernilai benar.

Dengan mengganti nama-nama peubah pada predikat dan dengan menggunakan hasil sebelumnya ditunjukkan bahwa $\exists$ bersifat distributif atas $\vee$, tetapi $\forall$ tidak bersifat distributif. Karena hasil-hasil yang diperoleh berasal dari sebarang predikat, maka kita dapat mengganti P dengan ~R dan Q dengan~T dalam pernyataan valid

$\forall x[P(x) \wedge Q(x)] \Leftrightarrow \forall xP(x) \wedge \forall x\ Q(x)]$

Karena proposisi ekivalen agar tetap valid, maka kedua ruas dinegasikan sehingga bentuknya menjadi

$\sim\forall x[\sim R(x) \wedge \sim T(x)] \Leftrightarrow \sim[\forall x \sim R(x) \wedge \forall x \sim T(x)]$

Dengan menerapkan identitas, diperoleh ekivalensi berikut.

$\exists x \sim[\sim R(x) \wedge \sim T(x)] \Leftrightarrow [(\sim\forall x \sim R(x) \vee \sim\forall x \sim T(x)]$

$\exists x[\sim(\sim R(x)) \vee \sim(\sim T(x)] \Leftrightarrow [(\exists x \sim(\sim R(x))) \vee (\exists x \sim(\sim T(x)))]$

$\exists x[R(x) \vee T(x)] \Leftrightarrow [\exists xR(x) \vee \exists x\ T(x)]$

Hal ini menunjukkan adanya sifat distributif $\exists$ atas $\vee$.

Dengan menggunakan teknik yang sama, yaitu mengganti peubah-peubah predikat P dan Q dengan ~P dan ~Q dalam pernyataan yang valid.

$\exists x[P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow \exists xP(x) \wedge \exists x\, Q(x)]$

dapat ditunjukkan bahwa

$\forall x[P(x) \vee Q(x)] \Rightarrow \forall xP(x) \vee \forall x\, Q(x)]$

Konversi dari implikasi ini ***tidak valid.***

Dapat ditunjukkan bagaimana kuantor dari operator-operator $\wedge$, $\vee$ dan ~, dapat pula disajikan bentuk hubungan $\Rightarrow$ dan $\Leftrightarrow$dengan menerapkanidentitas-identitasnya ke dalam bentuk $\wedge$, $\vee$ dan ~.

Contoh :

Ditunjukkan bahwa tidak terdapat sifat distributif atas. $\Rightarrow$, pernyataan berikut ini ***tidak valid.***

$\exists x[P(x) \Rightarrow Q(x)] \Leftrightarrow [\exists xP(x) \Rightarrow \exists x\, Q(x)]$.

Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut

Karena A$\Rightarrow$ B ekivalen dengan ~A $\vee$ B, maka hal berikut ini

$\exists x[P(x) \Rightarrow Q(x)] \Leftrightarrow \exists x[\sim P(x) \vee Q(x)]$.

$\Leftrightarrow [\exists x \sim P(x) \vee \exists x\, Q(x)]$

$\Leftrightarrow [\sim \forall x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)]$

$\Leftrightarrow [\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists x\, Q(x)]$

Dengan demikian, pernyataan asal ekivalen dengan pernyataan

$[\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists x\, Q(x)] \Leftrightarrow [\exists xP(x) \Rightarrow \exists x\, Q(x)]$.

Dapat disusun tabel kebenaran suatu bentuk proposisi dari pernyataan ini, ambil komponen-komponen $\forall x\, P(x)$, $\exists x\, Q(x)$, dan $\exists xP(x)$ sebagai peubah-peubah proposisi. Bagaimanapun, karena $\exists xP(x)$ bernilai benar bila $\forall x\, P(x)$, dua baris pada tabel kebenaran tidak dapat diaplikasikan (n.a)

| $\forall x\, P(x)$ | $\exists x P(x)$ | $\exists x Q(x)$ | $\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)$ | $\exists x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | n.a | na |
| 1 | 0 | 1 | n.a | n.a |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Bila diperhatikan dua kolom terakhir dari tabel di atas, disimpulkan bahwa implikasi hanya berjalan searah.

$[\exists x P(x) \Rightarrow \exists x\, Q(x)]. \Rightarrow [\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists x\, Q(x)]$.

Dengan demikian, dapat ditunjukkan bahwa konversinya tidak valid dengan memberikan suatu contoh penyangkal. Pada baris ketiga tabel di atas , diketahui bahwa untuk sebarang contoh penyangkal harus diinterpretasikan bahwa predikat P dalam $\forall x\, P(x)$ bernilai salah dan $\exists x P(x)$ bernilai benar, dan suatu interpretasi untuk Q dalam $\exists x\, Q(x)$ bernilai salah. Untuk semesta pembicaraan bilangan bulat, misal P9x) menyatakan "$x = 0$" dan Q(x) menyatakan "$x \neq x$.". Dari contoh penyangkal yang ditetapkan menunjukkan bahwa $\exists$ tidak bersifat distributive atas $\Rightarrow$.

Tabel 1.3 merupakan daftar yang digunakan dalam hubungan secara logika antara pernyataan-pernyata an yang mengandung kuantor. Tiap hubungan pada tabel ini juga menjelaskan bila peubah-peubah bebas ditambahkan dengan cara menyisipkan secara konsisten dala setiap predikat. Dengan demikian, pada identitas 4, dapat disimpulkan bahwa

$\forall x P(x,y) \Rightarrow \exists x P(x,y)$

dan dari identitas 6 disimpulkan bahwa

$[\forall x P(x,y) \wedge Q(z)] \Leftrightarrow \forall x[P(x,y) \wedge Q(z)]$.

**Tabel 1.3. Ringkasan Hubungan Logis yang Mengandung Kuantor**

-----------------------------------------------------------

1. $\forall x P(x) \Rightarrow P(c)$ , c sebarang elemen dari semesta
2. $P(c) \Rightarrow \exists x P(x)$, c sebarang elemen dari semesta
3. $\forall x \sim P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$
4. $\forall x P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$
5. $\exists x \sim P(x) \Leftrightarrow \sim \forall x P(x)$
6. $[\forall x P(x) \wedge Q] \Leftrightarrow \forall x [P(x) \wedge Q]$
7. $[\forall x P(x) \vee Q] \Leftrightarrow \forall x [P(x) \vee Q]$
8. $[\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)] \Leftrightarrow \forall x [P(x) \wedge Q(x)]$
9. $[\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)] \Rightarrow \forall x [P(x) \vee Q(x)]$
10. $[\exists x P(x) \wedge Q] \Leftrightarrow \exists x [P(x) \wedge Q]$
11. $[\exists x P(x) \vee Q] \Leftrightarrow \exists x [P(x) \vee Q]$
12. $[\exists x P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow [\exists x P(x) \wedge \exists x\, Q(x)]$
13. $[\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)] \Leftrightarrow \exists x [P(x) \vee Q(x)]$

-----------------------------------------------------------

Suatu bentuk keserempakkan dari notasi-notasi logis sering digunakan dalam pernyataan matematika. Sebagai contoh,  pemyataan "untuk setiap x sehingga x > 0, P(x) bernilai benar,”

Ditulis dengan notasi ini menjadi

$\forall x[(x > 0) \Rightarrow P(x)]$

penulisan yang lebih serempak/kompak adalah

$\forall x_{x>0} P(x)$

Dengan cara yang sama ,

“Terdapat suatu nilai x sedemikian hingga $x \neq 3$ dan Q(x) bernilai benar”

penulisannya adalah

$\exists x[(x \neq 3) \wedge Q(x)]$

dapat ditulis

$\exists x_{x \neq 3}\, Q(x)$.

Dengan menggunakan peraturan ini, pernyataan bentuk formal dari suatu pernyataan-pernyataan menjadi lebih kompak dan lebih mudah difahami. Selanjutnya, notasi kekompakan dapat melibatkan tanda negasi dalam suatu barisan kuantor-kuantor dengan cara yang sama sebagaimana diutarakan sebelumnya.

***Contoh***

Limit suatu fungsi yang terdefinisi pada garis bilangan real. Definisinya secara umum seperti berikut.

***Definisi:*** Limit dari f(x) untuk x mendekati c adalah k (dilambangkan dengan $\lim_{x-c} f(x) = k$) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap x, jika $|x - c| < \delta$, maka $|f(x) - k| < \varepsilon$

Definisi ini dapat dijelaskan secara ringkas dalam bentuk notasi logika sebagai berikut.

***Definisi:*** $\lim_{x \mapsto c} f(x) = k \Leftrightarrow \forall \varepsilon_{\varepsilon > 0} \exists \delta_{\delta > 0} \forall x \, [| x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - k| < \varepsilon]$

Untuk menunjukkan bahwa $\lim_{x \mapsto c} f(x) \neq k$, kedua sisi dari definisi diatas diberi negasi

$\lim_{x \mapsto c} f(x) \neq k \Leftrightarrow \exists \varepsilon_{\varepsilon > 0} \forall \delta_{\delta > 0} \exists x \, [| x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - k| \geq \varepsilon]$

Menunjukkan bahwa $\lim_{x \mapsto c} f(x) \neq k$ jika dan hanya jika terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian hingga untuk setiap $\delta > 0$, terdapat suatu nilai x sedemikian hingga $| x - c| < \delta$ dan $|f(x) - k| \geq \varepsilon$.

## L A T I H A N 3

1. Misal $P(x,y,z)$ menyatakan $xy = z$;

    $E(x,y)$ menyatakan $x = y$;

    $G(x,y)$ menyatakan $x > y$

    Misal semesta pembicaraannya bilangan bulat. Dengan menggunakan notasi logika, jelaskan hal-hal berikut

    a. Jika $y = 1$, maka $xy = x$ untuk sebarang nilai x.
    b. Jika $xy \neq 0$, maka $x \neq 0$ atau $y \neq 0$
    c. Jika $xy = 0$, maka $x = 0$ atau $y = 0$
    d. $3x = 6$ jika dan hanya jika $x = 2$.
    e. Tidak ada penyelesaian dari $x^2 = y$ kecuali $y \geq 0$.
    f. $x < z$ syarat perlu untuk $x < y$ dan $y < z$.
    g. $x \leq y$ dan $y \leq x$ syarat cukup untuk $x = y$
    h. Tidak mungkin terjadi $x = y$ dan $x < y$.
    i. Jika $x < y$, maka ada suatu z sedemikian hingga y dan z, $xy = xz$.

2. Misal semesta pembicaraannya himpunan pernyataan aritmetika dengan predikat-predikat yang didefinisikan sebagai berikut.

P(x) menyatakan " x is proveable"

T(x) menyatakan " x is true"

S(x) menyatakan " x is satisfiable"

D(x,y,z) menyatakan " z is the disjunction $x \vee y$"

Ubah pernyatan berikut ke dalam pernyataan bahasa Indonesia. Buat pernyataan yang mudah difahami dan wajar.

a. $\forall x[P(x) \Rightarrow T(x)]$
b. $\forall x[T(x) \Rightarrow \neg S(x)]$
c. $\exists x[T(x) \wedge \neg P(x)]$
d. $\forall x \forall y \forall z\{[D(x,y,z) \wedge P(z)] \Rightarrow [P(x) \vee P(y)]\}$
e. $\forall x[T(x) \Rightarrow \forall y \forall z[D(x,y,z) \Rightarrow T(z)]\}$

3. Ubah pernyataan berikut dengan menggunakan notasi logika. Pilih suatu predikat sehingga setiap

   Pernyataan paling sedikit memuat satu kuantor.

   a. There is one and only one even prime.

   b. No odd numbers are even.

   c. Every train is faster than some cars.

   d. Some cars are slower than all trains but at less one train is faster than every car.

   e. If it rains tomorrow, then somebody will get wet.

4. Buat suatu pernyataan yang ekivalen secara logis dengan $\forall xP(x)$ hanya dengan menggunakan

   kuantor $\exists$ dan operator logis $\neg$. Dengan cara yang sama nyatakan $\exists xP(x)$ dengan kuantor $\forall$ dan operator logis $\neg$.

5. Buat suatu pernyataan yang ekivalen secara logis dengan $\exists! xP(x)$ dengan kuantor $\forall$ dan $\exists$beserta predikat yang sama dan gunakan operator-operator logis.

6. Tunjukkan bahwa proposisi-proposisi berikut valid.

   a. $[\forall xP(x) \Rightarrow Q(x)] \Leftrightarrow [\exists x[P(x) \Rightarrow Q]]$

   b. $\forall x[P \Rightarrow Q(x)] \Leftrightarrow [P \Rightarrow \forall xQ(x)]$

7. Untuk pernyataan-pernyataan berikut ini, tentukan interpretasi untuk P dan Q jika pernyataan

   benar. Beri contoh penyangkal bila pernyataan salah.

   a. $\forall x[P(x) \Rightarrow Q(x)] \Rightarrow [\forall xP(x) \Rightarrow \forall xQ(x)]$

   b. $[\forall xP(x) \Rightarrow \forall x\, Q(x)] \Rightarrow \forall x[P(x) \Rightarrow Q(x)]$

### 1.5. Sistem Aksioma

Sistem adalah suatu sistem dalam logika yang mempunyai istilah-istilah asal dan terdiri empat bagian penting, yaitu:

1. Istilah tak terdefinisi,
2. Istilah terdefinisi,
3. Aksioma atau postulat,
4. Teorema atau dalil.

***1) Istilah tak terdefinisi***

Istilah tak terdefinisi adalah suatu istilah yang didasarkan pada istilah asal (primitif) dan tidak mempunyai arti yang pasti. Istilah ini digunakan untuk membangun istilah lainnya.

Sebagai ilustrasi, dalam Geometri: titik, garis, dan bidang adalah istilah tak terdefinisi.

***2) Istilah terdefinisi***

Istilah terdefinisi adalah istilah asal yang digunakan pada suatu system dengan cara merumuskannya dari istilah tak terdefinisi. Suatu model dari suatu sistem aksioma diperoleh dengan merangkaikan istilah yang mempunyai arti sehingga perumusannya menjadi suatu pernyataan benar.

Definisi yang baik mempunyai ciri:

2.1. ***Konsisten,*** *dalam setiap kasus yang mungkin mempunyai arti yang sama,*

2.2. ***Jelas,*** *tepat dan hanya mempunyai satu makna,*

2.3. *Hanya menggunakan istilah tak terdefinisi dan istilah terdefinisi yang digunakan sebelumnya,*

2.4. *Cukup luas untuk memuat semua objek yang dapat dijangkau.*

Sebagai ilustrasi, dalam geometri ruang kita mendefinisikan dua garis sejajar, berpotongan, berimpit dan bersilangan.

***3) Aksioma***

Aksioma adalah suatu pernyataan yang diandalkan benar pada suatu system dan diterima tanpa bukti. Aksioma ini hanya memuat istilah asal dan merupakan suatu dasar dari beberapa sifat pada suatu sistem. Aksioma tidak dapat berdiri sendiri dan teruji kebenarannya. Sekelompok aksioma dalam suatu system harus konsisten dan tidak saling bertentangan.

Sebagai ilustrasi, dalam geometri ruang kita mempunyai aksioma yang menyatakan " Melalui setiap tiga titik di ruang dapat dibuat sebuah bidang datar"

***4) Teorema***

Teorema adalah suatu pernyataan yang dirumuskan secara logika dan dibuktikan dengan menggunakan istilah yang telah ada sebelumnya, aksioma dan pernyataan benar lainnya yang diturunkan langsung dari definisi.

Sebagai ilustrasi, dalam geometri ruang kita mempunyai teorema yang menyatakan "Melalui dua garis sejajar atau dua garis berpotongan dapat dibuat tepat satu bidang datar"

Selanjutnya, aksioma, sifat dan teorema dikenal dengan istilah hokum atau rumus dalam matematika.

## 1.6.Metoda pembuktian rumus matematika

Untuk membuktikan suatu rumus matematika, secara umum digunakan salah satu dari metoda berikut.

### *1.6.1. Bukti langsung*

Bukti langsung adalah suatu bukti yang menggunakan pernyataan dalam Matematika $p \Rightarrow q$ untuk mencapai kebenaran suatu hasil dalam matematika.

Contoh:

Jika x bilangan genap, maka $x^2$ juga bilangan genap.

***Bukti :***

Menurut definisinya, jika x bilangan genap, maka terdapat suatu bilangan bulat k sedemikian hingga $x = 2k$. Akibatnya

$x^2 = 4\,k^2 = 2\,(2k^2)$.

Karena hasil kali dari sejumlah berhingga bilangan bulat adalah bilangan bulat (sifat tertutup pada perkalian bilangan bulat), maka $2\,k^2$ juga bilangan bulat, sehingga diperoleh $x^2$ juga bilangan genap. Dengan demikian pernyataan bahwa Jika x bilangan genap, maka $x^2$ juga bilangan genap terbukti kebenarannya.

### *1.6.2. Bukti tak langsung*

Bukti tak langsung adalah suatu bukti yang menggunakan pernyataan yang ekivalen untuk mencapai kebenaran suatu hasil matematika. Khususnya bilamana untuk membuktikan pernyataan $p \Rightarrow q$ kita membuktikan dengan menggunakan $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Bukti tak langsung yang demikian disebut bukti dengan kontra posisi.

Contoh:

Jika $x^2$ bilangan genap maka x juga bilangan genap.

***Bukti:***

Bentuk kontra posisi dari pernyataan di atas adalah “Jika x bilangan ganjil maka $x^2$ juga bilangan ganjil”. Pernyataan ini dibuktikan, bilamana pernyataan ini terbukti benar, berarti pernyataan asal (Jika $x^2$ bilangan genap maka x juga bilangan genap) juga terbukti benar.

Berdasar definisi x bilangan ganjil, maka ada bilangan bulat k sedemikian hingga $x = 2k +1$.

$$
\begin{aligned}
\text{Akibatnya } x^2 &= (2k +1)^2 \\
&= 4k^2 + 4k + 1 \\
&= 2(2k^2 + 2k) + 1
\end{aligned}
$$

Karena hasil kali bilangan bulat dan hasil penjumlahan bilangan bulat adalah bilangan bulat, maka $(2k^2 + 2k)$ juga bilangan bulat. Dengan demikian, $2(2k^2 + 2k)$ adalah bilangan genap dan $2(2k^2 + 2k) + 1$ adalah bilangan ganjil.

Karena pernyataan kontra posisi terbukti benar, maka pernyataan “Jika $x^2$ bilangan genap maka x juga bilangan genap” juga terbukti benar.

### *1.6.3. Bukti dengan kontradiksi*

Bukti dengan kontradiksi adalah suatu bukti yang menggunakan negasi ganda dari dari pernyataan p dalam membuktikan kebenaran pernyataan p. Dengan demikian untuk membuktikan pernyataan p benar, diasumsikan atau diandaikan $\neg p$ benar, atau p salah. Kemudian akan ditemukan suatu kontradiksi atau pertentangan akibat asumsi tadi. Karena ada pertentangan maka haruslah $\neg(\neg p) = p$ benar.

Contoh:

Tidak ada bilangan rasional yang kuadratnya 2

***Bukti :***

Dalam bentuk implikasi p ⇒ q, pernyataan di atas berbentuk “ Jika $x^2 = 2$, maka x bilanganrasional”

Andaikan x bilangan rasional, berdasar definisi bilangan rasional $x = \frac{m}{n}$ dengan m, n bilangan bulat dan $n \neq 0$, m dan n tidak mempunyai factor persekutuan kecuali 1. $x^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2$ atau $m^2 = 2\,n^2$ , sehingga $m^2$ merupakan bilangan genap. Berdasar contoh di atas jika $m^2$ genap, diperoleh m genap. Karena m bernilai genap, maka dapat dinyatakan $m = 2\,k$ , untuk k suatu bilangan bulat dan mengakibatkan $m^2 = 4\,k^2$. Diketahui $m^2 = 2\,n^2$, kita ganti $m^2$ dengan $4\,k^2$ diperoleh $4\,k^2 = 2\,n^2$. Dari $4\,k^2 = 2\,n^2 \Leftrightarrow 2\,k^2 = n^2$. Dengan demikian $n^2$ adalah bilangan genap. Karena $n^2$ bilangan genap, maka diperoleh n genap.

Sekarang m dan n keduanya bilangan genap, hal ini berarti m dan n mempunyai faktor persekutuan selain 1. Pernyataan ini bertentangan dengan pengandaian yang telah ditetapkan. Akibatnya x bukanlah bilangan rasional.

### *1.6.4. Bukti dengan induksi matematika.*

Bukti dengan induksi matematika digunakan untuk membuktikan rumus matematika yang berlaku untuk setiap bilangan asli (bilangan bulat positif)