Limit Suatu Fungsi

3.2.1. Limit Fungsi di suatu titik

Perhatian fungsi f yang didefinisikan dengan f(x) = $\frac{2x^2 + x - 3}{x-1}$ fungsi ini terdefinisi pada setiap bilangan real x kecuali x = 1. Persamaan f(x) = $\frac{2x^2 + x - 3}{x-1}$ ini dapat ditulis dalam bentuk f(x) = $\frac{(2x+3)(x-1)}{x-1}$, sehingga didapat f(x) = 2x + 3, x $\neq$1. Apa yang terjadi dengan nilai f jika peubah x diberi nilai yang mendekati dengan 1? Untuk memudahkan jawab dari pertanyaan ini dibuat tabel sebagai berikut.

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	…	1.0	…	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	4.8	4.98	4.998	4.9998	…	5.0	…	5.0002	5.002	5.02	5.2

Tabel di atas nilai f(x) ditentukan dari bentuk f(x) = $\frac{2x^2 + x - 3}{x-1}$ atau f(x) = 2x + 3, walaupun kedua bentuk rumus fungsi ini berbeda. Rumus fungsi f(x) = $\frac{2x^2 + x - 3}{x-1}$, nilai f(x) tidak berlaku untuk sebarang nilai bilangan riil x, untuk x = 1 nilai f(x) tak terdefinisi (undefined). Sedangkan untuk f(x) = 2x +3 nilai f(x) berlaku untuk sebarang nilai bilangan riil x (lebih jelasnya dapat dilihat dari hasil grafiknya).

Jika tabel di atas, nilai f(x) ditetapkan dengan rumus f(x) = 2x + 3, maka untuk x = 1 didapat nilai f(x) sebesar 5. Dari penetapan nilai x dan f(x) ini, didapat hal-hal sebagai berikut.

Jika jarak x dengan 1, x ≠ 1 kurang dari 0.1, maka jarak f(x) dengan 5 kurang dari 0.2; (0.99 – 0.9) = 0.09 < 0.1 dan (4.98-4.8 = 0.18 < 0.2)

Jika jarak x dengan 1, x ≠ 1 kurang dari 0.01, maka jarak f(x) dengan 5 kurang dari 0.02; (0.999-0.99 = 0.009 < 0.01 dan (4.998 – 4.98 = 0.018 < 0.02)

Jika jarak x dengan 1, x ≠ 1 kurang dari 0.001, maka jarak f(x) dengan 5 kurang dari 0.002, (0.9999-0.999 = 0.001 dan 4.9998- 4.998 = 0.0018 < 0.002) dan seterusnya.

Dengan menggunakan lambang nilai mutlak untuk menyatakan jarak, situasi dapat ditulis sebagai berikut:

Jika 0 < $|x-1|$ < 0.1 maka $|f(x) - 5|$ < 0.2

Jika 0 < $|x-1|$ < 0.01 maka $|f(x) - 5|$ < 0.02

Jika 0 < $|x-1|$ < 0.001 maka $|f(x) - 5|$ < 0.002, dan seterusnya.

Dari tabel di atas dapat didekatkan dengan 5 sesuai dengan kebutuhan kita asal nilai x diambil dekat dengan 1. Artinya $|f(x) - 5|$ dapat dibuat sekecil mungkin, asalkan $|x-1|$ cukup kecil pula dan $x \neq 1$. Lambang-lambang yang umum digunakan untuk selisih-selisih kecil dan positif ini merupakan bilangan positif ε (epsilon) dan δ (delta), sehingga bentuk-bentuk di atas dapat ditulis

$|f(x) - 5| < \varepsilon$ bila $|x-1| < \delta$.

Dari tabel di atas juga terlihat adanya hubungan antara δ dengan ε, hal ini ditunjukkan dengan jika $|f(x) - 5| = 0.002$ bila $|x-1| = 0.001$. Jadi jika besar $\varepsilon = 0.002$ terdapat δ sebesar 0.001 dan berlaku hubungan $|f(x) - 5| < 0.002$ bila $0 < |x-1| < 0.001$. Dari hal ini nampak bahwa $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$. Dengan menentukan sebarang kecil dan positif nilai ε didapat nilai δ yang tergantung dengan ε.

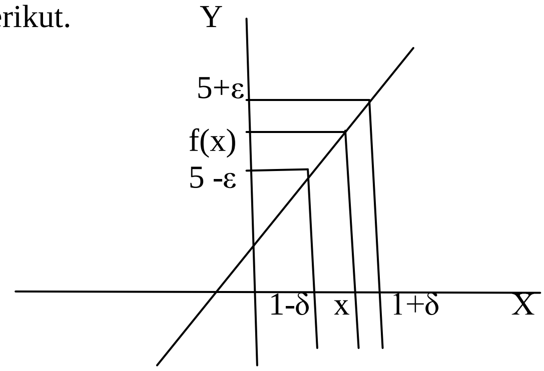
Karena untuk sebarang nilai $\varepsilon > 0$ dapat ditentukan nilai $\delta > 0$ sehingga

$|f(x) - 5| < \varepsilon$ bila $|x-1| < \delta$,

maka dikatakan bahwa limit f(x) untuk x mendekati 1 adalah 5 dan ditulis dalam bentuk

$\underset{x \to 1}{limit}\, f(x) = 5$ atau $\underset{x\to 1}{limit}\, \frac{2x^2+x-5}{x-1} = 5$

Perlu diperhatikan bahwa $|f(x) - 5| < \varepsilon$ identik dengan $5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon$, artinya nilai f(x) terletak antara $5 - \varepsilon$ dan $5 + \varepsilon$. Sedangkan, $|x-1| <$ identik dengan $1 - \delta < x < 1 + \delta$, artinya nilai berada antara $1 - \delta$ dan $1 + \delta$. Agar jelasnya perhatikan gambar berikut.



Definisi Limit di satu titik

Definisi :

Misalkan f adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada interval buka I yang memuat a (mungkin f tidak terdefinisi pada a). Limit f(x) untuk x mendekati a adalah L, $a \in \mathbf{R}$ dan $L \in \mathbf{R}$ ditulis $\underset{x \to a}{limit}$ f(x)=L, jika diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ ***ada*** bilangan $\delta > 0$ ***sedemikian hingga*** $|f(x) - L| < \varepsilon$ bila $0 < |x-a| < \delta$.

Secara simbolik:

$\lim_{x \to a} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \ni \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$ bila $0 < \left| x-a \right| < \delta$. atau

$\lim_{x \to a} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \ni 0 < \left| x-a \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$.

Limit Sepihak

Definisi. Misalkan f adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada interval buka (a,b). Fungsi f dikatakan mempunyai limit L jika x *mendekati a dari kanan,* ditulis $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$, jika $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \ni 0 < x-a < \delta \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$

Definisi. Misalkan f adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada interval buka (a,b). Fungsi f dikatakan mempunyai limit L jika x *mendekati a dari kiri,* ditulis $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$, jika $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \ni 0 < a-x < \delta \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$

Teorema.

$$\lim_{x \to a} f(x)= L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Bukti.

Teorema di atas dapat ditulis

$\lim_{x \to a} f(x)= L \Rightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ dan

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a^-} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x)=L$.

Berdasar definisi

$\lim_{x \to a} f(x)=L$, jika $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \ni 0 < \left| x-a \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$.

$0 < \left| x-a \right| < \delta \Leftrightarrow 0 < x - a < \delta$ dan $0 < a - x < \delta$

$0 < x - a < \delta$ keadaan ini berlaku bila a didekati oleh x dari kanan, dan

$0 < a - x < \delta$ keadaan ini berlaku bila a didekati oleh x dari kiri.

$0 < x - a < \delta$ berlaku $\left| f(x) - L \right| < \varepsilon$ dan

$0 < a - x < \delta$ berlaku $\left| f(x) - L \right| < \varepsilon$.

Dengan demikian $\lim_{x \to a} f(x)=L$ mengakibatkan $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$.,

Berdasar definisi limit kanan $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$,

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \ni 0 < x-a < \delta \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$ dan limit kiri $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$, jika $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0 \ni 0 < a-x < \delta \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$.

Karena jarak x dan a selalu positif, maka $0 < x - a < \delta$ dan $0 < a - x < \delta$, dapat ditulis menjadi $0 < \left| x - a \right| < \delta$.

Untuk setiap x pada $0 < \left| x - a \right| < \delta$ berlaku $\left| f(x) - L \right| < \varepsilon$. Dengan demikian limit kiri dan limit kanan yang bernilai sama mengakibatkan f mempunyai limit sebesar L untuk x mendekati a. Atau $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a^-} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x)=L$.

Teorema Ketunggalan Limit suatu fungsi

Jika $\underset{x\to a}{\text{limit}}\, f(x) = A$ dan $\underset{x\to a}{\text{limit}}\, f(x) = B$, maka A = B.

Bukti :

Teorema ini dibuktikan dengan kontradiksi. Andaikan $A \neq B$, maka $|A-B| > 0$. Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, berdasar definisi limit,

$\underset{x\to a}{\text{limit}}\, f(x) = A$ dan $\underset{x\to a}{\text{limit}}\, f(x) = B$, mengakibatkan

ada $\delta_1 > 0$ sehingga $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ dan

ada $\delta_2 > 0$ sehingga $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon$.

Jika $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, maka untuk $0 < |x-a| < \delta$ berlaku $|f(x) - A| < \varepsilon$ dan $|f(x) - B| < \varepsilon$, yang mengakibatkan

$|A-B| = |A - f(x) + f(x) - B|$ $\quad [\because f(x) - f(x) = 0]$

$\leq |f(x) - A| + |f(x) - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ untuk setiap x pada

$0 < |x-a| < \delta$, hubungan ini berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$.

Dari pengandaian $|A-B| > 0$, maka $\frac{1}{2}|A-B| > 0$

Ambil $\varepsilon = \frac{1}{2}|A-B| > 0$.

Dari $|A-B| < 2\varepsilon$, ε diganti dengan $\frac{1}{2}|A-B|$, didapat

$|A-B| < 2 . \frac{1}{2}|A-B|$ atau

$|A-B| < |A-B|$ untuk setiap x pada $0 < |x-a| < \delta$, hal ini merupakan kontradiksi. Jadi, pengandaian salah dan yang benar A = B..

Teorema.

Jika p dan q konstanta, maka $\underset{x\to a}{\text{limit}}(px + q) = pa + q$

Bukti:

Berdasar definisi limit, $\underset{x\to a}{\text{limit}}(px + q) = pa + q$, jika diberikan $\varepsilon > 0$, didapat $\delta > 0$ sehingga $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |(px+q) - (pa+q)| < \varepsilon$.

Konstanta p terdapat dua kemungkinan, yaitu p =0 atau $p \neq 0$.

a. Untuk p = 0, $|(px+q) - (pa+q)| = |q - q| = 0$ untuk setiap nilai x pada $0 < |x-a| < \delta$. Ambil sebarang nilai $\delta > 0$, maka secara otomatis yang ditunjukkan dipenuhi yaitu $0 < \varepsilon$.

b. Untuk $p \neq 0$, maka $|(px+q) - (pa+q)| = |px - pa| = |p|\,|x - a|$.

   Sekarang, ditentukan nilai $\delta > 0$ sehingga $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |p|\,|x-a| < \varepsilon$.

   $|p|\,|x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - a| < \frac{\varepsilon}{|p|}$. Ambil $\delta = \frac{\varepsilon}{|p|}$, maka $|x - a| < \delta = \frac{\varepsilon}{|p|}$.

   maka $|x - a| < \delta = \frac{\varepsilon}{|p|} \Rightarrow |(px+q) - (pa+q)| = |p|\,|x - a| < |p|\frac{\varepsilon}{|p|} = \varepsilon$.

Dengan demikian terbukti bahwa $\lim_{x \to a} (px + q) = pa + q$. ■

Teorema

Jika f(x) = c, c suatu konstanta, maka $\lim_{x \to a} f(x) = c$

Bukti:

Berdasar definisi limit $\lim_{x \to a} f(x) = c$, jika diberikan $\varepsilon > 0$ didapat $\delta > 0$ sehingga $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$. Karena f(x) = c, maka $|f(x) - c| < \varepsilon$ menjadi $|c - c| < \varepsilon$ atau $0 < \varepsilon$. Dengan mengambil x pada $0 < |x-a| < \delta$ dipenuhi bahwa $|f(x) - c| < \varepsilon$.

$\therefore \lim_{x \to a} f(x) = c$

Teorema

Jika $\lim_{x \to a} f(x) = A$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = B$, maka

$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = A \pm B$

Bukti:

Teorema ini dipecah atas:

a). $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = A + B$, dan

b). $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = A - B$

Pada kesempatan ini dibuktikan bagian a)., sedangkan bagian b). diserahkan pada pembaca.

Karena $\lim_{x \to a} f(x) = A$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = B$, sesuai dengan definisi limit dari suatu fungsi maka jika diberikan $\varepsilon_1 > 0$ dan $\varepsilon_2 > 0$, maka ada $\delta_1 > 0$ dan $\delta_2 > 0$ sehingga:

a. Jika $0 < |x-a| < \delta_1$, maka $|f(x) - A| < \varepsilon_1$ dan

b. Jika $0 < |x-a| < \delta_2$, maka $|g(x) - B| < \varepsilon_2$.

Jika $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, maka untuk $0 < |x-a| < \delta$ berlaku $|f(x) - A| < \varepsilon_1$ dan $|g(x) - B| < \varepsilon_2$.

Kembali pada yang akan dibuktikan, yaitu

$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = A + B$, pilih

$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = A + B$, berdasar definisi limit suatu fungsi, jika diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk $0 < |x-a| < \delta$ berlaku $|(f(x) + g(x)) - (A+B)| < \varepsilon$

$$
\begin{aligned}
|(f(x) + g(x)) - (A+B)| &= |((f(x) - A) + (g(x)) - B)| \\
&\leq |((f(x) - A)| + |(g(x)) - B)| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

Diketahui bahwa $|f(x) - A| < \varepsilon_1$ dan $|g(x) - B| < \varepsilon_2$, sehingga

$|((f(x) - A)| + |(g(x)) - B)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

Pilih $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = ½\, \varepsilon$, didapat $|((f(x) - A)| + |(g(x)) - B)| < ½\,\varepsilon + ½\,\varepsilon = \varepsilon$.

Dengan demikian $|(f(x) + g(x)) - (A+B)| \leq |((f(x) - A)| + |(g(x)) - B)| < \varepsilon$ untuk semua x pada $0 < |x-a| < \delta$. ■

Teorema

Jika $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ dan $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, maka

$\lim\limits_{x\to a} [f(x) \,.\, g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \,.\, \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \,.\, B$

Bukti:

$\lim\limits_{x\to a} [f(x) \,.\, g(x)] = A.B$, berdasar definisi limit suatu fungsi, jika diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat $0 < |x-a| < \delta$ sehingga $|((f(x) \,.\, (g(x) - AB| < \varepsilon$.

$|((f(x) \,.\, (g(x) - AB| = |\{(f(x)-A\}.\{ (g(x)-B\} + B\{f(x) - A\} + A\{g(x) - B\}|$

$\leq |(f(x)-A|\,.\,|g(x)-B| + |B|\,|f(x) - A| + |A|\,|g(x) - B|$

Karena $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ dan $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, sesuai dengan definisi limit dari suatu fungsi maka jika diberikan $\varepsilon_1 > 0$ dan $\varepsilon_2 > 0$, maka ada $\delta_1 > 0$ dan $\delta_2 > 0$ sehingga:

a. Jika $0 < |x-a| < \delta_1$, maka $|f(x)- A| < \varepsilon_1$ dan
b. Jika $0 < |x-a| < \delta_2$, maka $|g(x)- B| < \varepsilon_2$.

Jika $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, maka untuk $0 < |x-a| < \delta$ berlaku $|f(x) - A| < \varepsilon_1$ dan $|g(x) - B| < \varepsilon_2$.

Bentuk $\leq |(f(x)-A|\,.\,|g(x)-B| + |B|\,|f(x) - A| + |A|\,|g(x) - B|$ menjadi

$< \varepsilon_1.\, \varepsilon_2 + |B|\, \varepsilon_1 + |A|\, \varepsilon_2$, sehingga

$|((f(x) \,.\, (g(x) - AB| < \varepsilon_1.\, \varepsilon_2 + |B|\, \varepsilon_1 + |A|\, \varepsilon_2$ untuk setiap x pada $0 < |x-a| < \delta$

Pilih $\varepsilon_1.\, \varepsilon_2 < 1/3\, \varepsilon$, $\varepsilon_1 < 1/3\, \frac{\varepsilon}{|B|}$ dan $\varepsilon_2 < 1/3\, \frac{\varepsilon}{|A|}$ didapat

$|((f(x) \,.\, (g(x) - AB| < 1/3\, \varepsilon + |B|\, 1/3\, \frac{\varepsilon}{|B|} + |A|\, 1/3\, \frac{\varepsilon}{|A|}$ atau

$|((f(x) \,.\, (g(x) - AB| < 1/3\, \varepsilon + 1/3\, \varepsilon + 1/3\, \varepsilon$ atau

$|((f(x) \,.\, (g(x) - AB| < \varepsilon$. ■

Teorema

Jika $\lim\limits_{x\to a} k = k$ dan $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, maka $\lim\limits_{x\to a} k.\, f(x) = k.\, A$, k sebarang konstanta.

Bukti:

Dari teorema sebelumnya telah terbukti bahwa $\lim\limits_{x\to a} k = k$; $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, dan

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\,.\,g(x)] = A.B$. Untuk membuktikan, diadakan modifikasi pada limit dari perkalian dua fungsi, dengan mengganti g(x) = k dan menggunakan sifat komutatif atas perkalian fungsi terhadap suatu konstanta. Adapun langkah-langkah yang ditempuh adalah sebagai berikut.

Berdasar definisi limit $\lim\limits_{x\to a} k.f(x)=k.A$ adalah, jika diberikan ε > 0, ada δ > 0 sedemikian hingga $|k.f(x)-k.A| < \varepsilon$ untuk $0 < |x-a| < \delta$. Dalam kasus ini dicarai nilai δ > 0 sehingga $|k.f(x)-k.A| < \varepsilon$ untuk x pada $0 < |x-a| < \delta$.

Perhatikan, $|k.f(x)-k.A| = |k.(f(x)-A)|$

$$\leq |k|.|(f(x)-A)| < \varepsilon,$$

Dengan memilih $|(f(x)-A)| < \frac{\varepsilon}{|k|}$, didapat

$|k.f(x)-k.A| < |k|.|(f(x)-A)|$; untuk x pada $0 < |x-a| < \delta$.

$$< |k|.\frac{\varepsilon}{|k|}$$

$$< \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Teorema.

Jika $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ dan $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, maka

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ dengan } B \neq 0$$

Bukti:

Bentuk $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ diubah menjadi $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x).\frac{1}{g(x)}\right)$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x).\frac{1}{g(x)}\right) = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}$$

Diketahui bahwa $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, tinggal menunjukkan bahwa untuk setiap ε > 0 terdapat δ > 0, sehingga

$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \varepsilon$ untuk $0 < |x-a| < \delta$, tetapi

$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B-g(x)}{g(x).B}\right| = \left|\frac{g(x)-B)}{g(x).B}\right| \leq \frac{|g(x)-B|}{|B|}.\frac{1}{g(x)}$ untuk $0 < |x-a| < \delta$.

Berpedoman pada yang diketahui di atas, yaitu

$|g(x)-B| < \varepsilon_2$ bila $0 < |x-a| < \delta$.

$|g(x)-B| < \varepsilon_2$, dan $\varepsilon_2 > 0$, maka $|g(x)| > 0$, ambil b> 0 sehingga

$|g(x)| > b > 0$ dan $\frac{1}{|g(x)|} < 0$ untuk $0 < |x-a| < \delta$.

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| \leq \frac{|g(x)-B|}{|B|}.\frac{1}{g(x)}$$

$$< \frac{|g(x) - B|}{|B|} \cdot \frac{1}{|g(x)|}$$

I. $\underset{x \to a}{limit} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\underset{x \to a}{\text{limit}} f(x)} = \sqrt[n]{A}$, dengan $\sqrt[n]{A}$ merupakan bilangan riil,

Jenis-jenis Lain dari Limit

A. $\underset{x \to a}{\text{limit}} f(x) = \infty$, jika untuk sebarang bilangan positif M (cukup besar), ada bilangan positif δ sehingga, bila $0 < |x-a| < \delta$ maka $|f(x)| > M$.

B. $\underset{x \to \infty}{\text{limit}} f(x) = A$, jika untuk sebarang bilangan positif walaupun cukup kecil ε, ada bilagan suatu bilangan positif M yang memenuhi $|x| > M$, maka $|f(x)-A| < \varepsilon$

C. $\underset{x \to \infty}{\text{limit}} f(x) = \infty$,jika untuk sebarang bilangan positif M (cukup besar), ada suatu bilangan positif P yang memenuhi $|x| > P$, maka $|f(x)| > M$.