4. Limit Suatu Fungsi

4.1. Limit Fungsi di suatu titik

Perhatian fungsi f yang didefinisikan dengan f(x) = $\frac{2x^2+x-3}{x-1}$ fungsi ini terdefinisi pada setiap bilangan real x **kecuali x = 1**.Persamaan f(x) = $\frac{2x^2+x-3}{x-1}$ ini dapat ditulis dalam bentuk f(x) = $\frac{(2x+3)(x-1)}{x-1}$, sehingga didapat f(x) = 2x + 3, x ≠1. Apa yang terjadi dengan nilai f jika peubah x diberi nilai yang mendekati dengan 1? Untuk memudahkan jawab dari pertanyaan ini dibuat tabel sebagai berikut.

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	…	1.0	…	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	4.8	4.98	4.998	4.9998	…	5.0	…	5.0002	5.002	5.02	5.2

Tabel di atas nilai f(x) ditentukan dari bentuk f(x) = $\frac{2x^2+x-3}{x-1}$ atau f(x) = 2x + 3, walaupun kedua bentuk rumus fungsi ini berbeda. Rumus fungsi f(x) = $\frac{2x^2+x-3}{x-1}$, nilai f(x) tidak berlaku untuk sebarang nilai bilangan riil x, untuk x = 1 nilai f(x) tak terdefinisi (undefined). Sedangkan untuk f(x) = 2x +3 nilai f(x) berlaku untuk sebarang nilai bilangan riil x (lebih jelasnya dapat dilihat dari hasil grafiknya).

Jika tabel di atas, nilai f(x) ditetapkan dengan rumus f(x) = 2x + 3, maka untuk x = 1 didapat nilai f(x) sebesar 5. Dari penetapan nilai x dan f(x) ini, didapat hal-hal sebagai berikut.

Jika jarak x dengan 1, x ≠ 1 kurang dari 0.1, maka jarak f(x) dengan 5 kurang dari 0.2; (0.99 – 0.9) = 0.09 < 0.1 dan (4.98-4.8 = 0.18 < 0.2)

Jika jarak x dengan 1, x ≠ 1 kurang dari 0.01, maka jarak f(x) dengan 5 kurang dari 0.02; (0.999-0.99 = 0.009 < 0.01 dan (4.998 – 4.98 = 0.018 < 0.02)

Jika jarak x dengan 1, x ≠ 1 kurang dari 0.001, maka jarak f(x) dengan 5 kurang dari 0.002, (0.9999-0.999 = 0.001 dan 4.9998- 4.998 = 0.0018 < 0.002) dan seterusnya.

Dengan menggunakan lambang nilai mutlak untuk menyatakan jarak, situasi dapat ditulis sebagai berikut:

Jika 0 < $|x-1|$ < 0.1 maka $|f(x) - 5|$ < 0.2

Jika 0 < $|x-1|$ < 0.01 maka $|f(x) - 5|$ < 0.02

Jika 0 < $|x-1|$ < 0.001 maka $|f(x) - 5|$ < 0.002, dan seterusnya.

Dari tabel di atas dapat di

dekatkan dengan 5 sesuai dengan kebutuhan kita asal nilai x diambil dekat dengan 1. Artinya $|f(x) - 5|$ dapat dibuat sekecil mungkin, asalkan $|x-1|$ cukup kecil pula dan $x \neq 1$. Lambang-lambang yang umum digunakan untuk selisih-selisih kecil dan positif ini merupakan bilangan positif ε (epsilon) dan δ (delta), sehingga bentuk-bentuk di atas dapat ditulis

$|f(x) - 5| < \varepsilon$ bila $|x-1| < \delta$.

Dari tabel di atas juga terlihat adanya hubungan antara δ dengan ε, hal ini ditunjukkan dengan jika $|f(x) - 5| = 0.002$ bila $|x-1| = 0.001$. Jadi jika besar $\varepsilon = 0.002$ terdapat δ sebesar 0.001 dan berlaku hubungan $|f(x) - 5| < 0.002$ bila$0 < |x-1| < 0.001$. Dari hal ini nampak bahwa $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$. Dengan menentukan sebarang kecil dan positif nilai ε didapat nilai δ yang tergantung dengan ε.

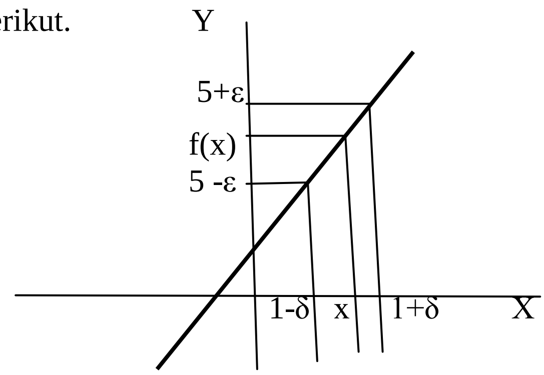
Karena untuk sebarang nilai $\varepsilon > 0$ dapat ditentukan nilai $\delta > 0$ sehingga

$$|f(x) - 5| < \varepsilon \text{ bila } 0 < |x-1| < \delta,$$

maka dikatakan bahwa limit f(x) untuk x mendekati 1 adalah 5 dan ditulis dalam bentuk

$$\underset{x \to 1}{limit} f(x) = 5 \text{ atau } \underset{x \to 1}{limit} \frac{2x^2+x-5}{x-1} = 5$$

Perlu diperhatikan bahwa $|f(x) - 5| < \varepsilon$ identik dengan $5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon$, artinya nilai f(x) terletak antara $5 - \varepsilon$ dan $5+ \varepsilon$. Sedangkan, $|x-1| <$ identik dengan $1 - \delta < x < 1+ \delta$, artinya nilai berada antara $1 - \delta$ dan $1 + \delta$. Agar jelasnya perhatikan gambar berikut.



Definisi Limit di satu titik

Definisi 4.1.1 :

Misalkan f adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada **interval** buka I yang memuata (mungkin f tidak terdefinisi pada a). Limit f(x) untuk x mendekati a adalah L, $a \in \mathbf{R}$ dan $L \in \mathbf{R}$ditulis $\underset{x \to a}{limit}$ f(x)=L, jika diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ ***ada*** bilangan $\delta > 0$ ***sedemikian hingga*** $|f(x) - L| < \varepsilon$ bila $0 < |x-a| < \delta$.

Secara simbolik:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \ni |f(x) - L| < \varepsilon$ **bila** $0 < |x-a| < \delta$.atau

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \ni 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Limit Sepihak

Definisi 4.1.2.Misalkan f adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada interval buka (a,b). Fungsi f dikatakan mempunyai limit L jika x *mendekati a dari kanan*, ditulis $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$, jika $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \ni 0 < x-a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Definisi. Misalkan f adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada interval buka (a,b). Fungsi f dikatakan mempunyai limit L jika x *mendekati a dari kiri*, ditulis$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$, jika $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \ni 0 < a-x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Teorema 4.1.1.

$$\lim_{x\to a} f(x)= L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = L \text{ dan} \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

Bukti.

Teorema di atas dapat ditulis

$$\lim_{x\to a} f(x)= L \Rightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = L \text{ dan} \lim_{x\to a^-} f(x) = L \text{ dan}$$

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ dan $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Berdasar definisi

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$, jika $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \ni 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

$0 < |x-a| < \delta \Leftrightarrow 0 < x - a < \delta$ dan $0 < a - x < \delta$

$0 < x - a < \delta$ keadaan ini berlaku bila a didekati oleh x dari kanan, dan

$0 < a - x < \delta$ keadaan ini berlaku bila a didekati oleh x dari kiri.

$0 < x - a < \delta$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$ dan

$0 < a - x < \delta$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Dengan demikian $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ mengakibatkan $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ dan$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$,

Berdasar definisi limit kanan $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$,

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \ni 0 < x-a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ dan limit kiri $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$, jika $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0 \ni 0 < a-x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Karena jarak x dan a selalu positif, maka $0 < x - a < \delta$ dan $0 < a - x < \delta$, dapat ditulis menjadi $0 < |x - a| < \delta$.

Untuk setiap x pada $0 < |x - a| < \delta$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$. Dengan demikian limit kiri dan limit kanan yang bernilai sama mengakibatkan f mempunyai limit sebesar L untuk x mendekati a. Atau $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ dan $\lim_{x\to a^-} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = L$.

Teorema Ketunggalan Limit suatu fungsi (4.1.2).

Jika $\lim_{x\to a} f(x) = A$ dan $\lim_{x\to a} f(x) = B$, maka A = B.

Bukti :

Teorema ini dibuktikan dengan kontradiksi. Andaikan $A \neq B$, maka $|A-B| > 0$. Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, berdasar definisi limit,

$\lim_{x\to a} f(x) = A$ dan $\lim_{x\to a} f(x) = B$, mengakibatkan

ada $\delta_1 > 0$ sehingga $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ dan

ada $\delta_2 > 0$ sehingga $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon$.

Jika $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, maka untuk $0 < |x-a| < \delta$ berlaku $|f(x) - A| < \varepsilon$ dan $|f(x) - B| < \varepsilon$,yang mengakibatkan

$|A-B| = |A - f(x) + f(x) - B|$ $\quad [\because f(x) - f(x) = 0]$

$\leq |f(x) - A| + |f(x) - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ untuk setiap x pada

$0 < |x-a| < \delta$, hubungan ini berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$.

Dari pengandaian $|A-B| > 0$, maka $\frac{1}{2}|A-B| > 0$

Ambil $\varepsilon = \frac{1}{2}|A-B| > 0$.

Dari $|A-B| < 2\varepsilon$, ε diganti dengan $\frac{1}{2}|A-B|$, didapat

$|A-B| < 2 . \frac{1}{2}|A-B|$ atau

$|A-B| < |A-B|$ untuk setiap x pada $0 < |x-a| < \delta$, hal ini merupakan kontradiksi. Jadi, pengandaian salah dan yang benar A = B..

Teorema 4.1.3.

Jika p dan q konstanta, maka $\lim_{x\to a}(px + q) = pa + q$

Bukti:

Berdasar definisi limit, $\lim_{x\to a}(px + q) = pa + q$, jika diberikan $\varepsilon > 0$, didapat $\delta > 0$ sehingga $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |(px+q) - (pa+q)| < \varepsilon$.

Konstanta p terdapat dua kemungkinan, yaitu p =0 atau $p \neq 0$.

a. Untuk p = 0, $|(px+q) - (pa+q)| = |q - q| = 0$ untuk setiap nilai x pada $0 < |x-a| < \delta$. Ambil sebarang nilai $\delta > 0$, maka secara otomatis yang ditunjukkan dipenuhi yaitu $0 < \varepsilon$.
b. Untuk $p \neq 0$, maka $|(px+q) - (pa+q)| = |px - pa| = |p|\,|x - a|$.

   Sekarang, ditentukan nilai $\delta > 0$ sehingga $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |p|\,|x - a| < \varepsilon$.

$|p|\,|x-a| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-a| < \frac{\varepsilon}{|p|}$. Ambil $\delta = \frac{\varepsilon}{|p|}$, maka $|x-a| < \delta = \frac{\varepsilon}{|p|}$.

maka $|x-a| < \delta = \frac{\varepsilon}{|p|} \Rightarrow |(px+q)-(pa+q)| = |p|\,|x-a| < |p|\frac{\varepsilon}{|p|} = \varepsilon$.

Dengan demikian terbukti bahwa $\lim_{x\to a}(px+q) = pa+q$. ■

Contoh:

a) Tentukan $\lim_{x\to 3} f(x)=5x-1$

b) Tentukan $\lim_{x\to -2} f(x)=15x+25$

c) Tentukan $\lim_{x\to 5} f(x)=2x+13$

d) Tentukan $\lim_{x\to -1} f(x)=-7x+11$

e) **Tunjukkan bahwa** $\lim_{x\to 3} f(x)=4x+3$ adalah 15.

Penyelsaian:

Berdasarkan teorema di atas

a. $\lim_{x\to 3}(5x-1) = 5.3 - 1 = 14$

b. $\lim_{x\to -2}(15x+25) = 15.-2+25 = -5$

c. $\lim_{x\to 5}(2x+13) = 2.5+13 = 23$

d. $\lim_{x\to -1}(-7x+11) = -7.-1+11 = 18$

e. Tunjukkan bahwa $\lim_{x\to 3} f(x)=4x+3$ adalah 15.

Ditunjukkan bahwa $\lim_{x\to 3} f(x)=4x+3$ adalah 15.

Berdasar definisi limit suatu fungsi, jika diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sehingga $|f(x)-15| < \varepsilon$ untuk $0 < |x-3| < \delta$.

$|f(x)-15| = |4x+3-15| = |4x-12| = |4(x-3)| \leq |4||x-3| < \varepsilon$

$|4||x-3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{|4|}$, untuk x pada $0 < |x-3| < \delta$.

Pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{|4|}$, sehingga untuk $0 < |x-3| < \frac{\varepsilon}{|4|}$ berlaku $|f(x)-15| < \varepsilon$. ■

Untuk meyakinkan kebenaran dari bukti ini, perhatikan hal berikut.

Pilih $\varepsilon = 0.04$, sehingga $\delta = 0.01$ dan didapat $0 < |x-3| < 0.01$.

Untuk nilai x pada (3-0.01, 3+0.01).

Pilih x =3, 001, didapat $|4x-12| = |4.3.001-12|$

$= 0.004 < 0.04$. ■

Teorema 4.1.4.

Jika $f(x) = x$, maka $\lim_{x\to a} f(x) = a$

Bukti:

Menurut definisi limit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a$, jika diberikan $\varepsilon > 0$ didapat $\delta > 0$ sehingga $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-a| < \varepsilon$. Karena $f(x) = x$, maka $|f(x)-a| < \varepsilon$ menjadi $|x-a| < \varepsilon$. Dengan mengambil x pada $0 < |x-a| < \delta$ dipenuhi bahwa $|f(x)-a| < \varepsilon$.

$\therefore \lim\limits_{x \to a} f(x) = a$.

Contoh:

a. Tentukan $\lim\limits_{t \to a} f(t) = t$
b. Tentukan $\lim\limits_{k \to b} f(k) = k$
c. Tentukan $\lim\limits_{l \to 5} f(l) = l$
d. Tentukan $\lim\limits_{m \to -2} f(m) = m$

Penyelesaian:

Berdasar teorema di atas, didapat:

a) $\lim\limits_{t \to a} t = a$
b) $\lim\limits_{k \to b} k = b$
c) $\lim\limits_{l \to 5} l = 5$
d) $\lim\limits_{m \to -2} m = -2$

Teorema 4.1.5.

Jika $f(x) = c$, c suatu konstanta, maka $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

Bukti:

Berdasar definisi limit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$, jika diberikan $\varepsilon > 0$ didapat $\delta > 0$ sehingga $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-c| < \varepsilon$. Karena $f(x) = c$, maka $|f(x)-c| < \varepsilon$ menjadi $|c-c| < \varepsilon$ atau $0 < \varepsilon$. Dengan mengambil x pada $0 < |x-a| < \delta$ dipenuhi bahwa $|f(x)-c| < \varepsilon$.

$\therefore \lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

Contoh:

a. Tentukan $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 19$
b. Tentukan $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \sqrt{2}$
c. Tentukan $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \log 13$
d. Tentukan $\lim\limits_{x \to -5} f(x) = 2\pi$
e. Tunjukkan bahwa $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 10$

Penyelsaian:

Berdasar teorema di atas, didapat:

a. $\underset{x\to 3}{limit}\, 19 = 19$

b. $\underset{x\to -1}{limit}\sqrt{2} = \sqrt{2}$

c. $\underset{x\to 2}{limit} \log 13 = \log 13$

d. $\underset{x\to -5}{limit}\quad 2\pi = 2\pi$

e. Tunjukkan bahwa $\underset{x\to 1}{limit} f(x)=10$

Ditunjukkan bahwa $\underset{x\to 1}{limit} f(x)=10$

Menurut definisi limit suatu fungsijika diberikan $\varepsilon > 0$ didapat $\delta > 0$ sehingga $|f(x)- A| < \varepsilon$ untuk $0 < |x-a| < \delta$.

Diketahui A = 10 dan a = 1, didapat $|10- 10| < \varepsilon$ untuk $0 < |x-a| < \delta$, atau $0 < \varepsilon$ untuk $0 < |x-a| < \delta$. Karena $\varepsilon > 0$, maka selalu ada $\delta > 0$ sehingga untuk setiap x pada $0 < |x-a| < \delta$ berlaku $|f(x)- A| < \varepsilon$. ■

Teorema 4.1.6.

Jika $\underset{x\to a}{\text{limit}} f(x)=A$ dan $\underset{x\to a}{\text{limit}} g(x)=B$, maka $\underset{x\to a}{\text{limit}}[f(x)\pm g(x)] = \underset{x\to a}{\text{limit}} f(x)\pm\underset{x\to a}{\text{limit}} g(x)= A \pm B$

Bukti:

Teorema ini dipecah atas:

a). $\underset{x\to a}{\text{limit}}[f(x)+g(x)] = \underset{x\to a}{\text{limit}} f(x)+\underset{x\to a}{\text{limit}} g(x)= A + B$, dan

b). $\underset{x\to a}{\text{limit}}[f(x)-g(x)] = \underset{x\to a}{\text{limit}} f(x)- \underset{x\to a}{\text{limit}} g(x)= A - B$

Pada kesempatan ini dibuktikan bagian a)., sedangkan bagian b). diserahkan pada pembaca.

Karena $\underset{x\to a}{\text{limit}} f(x)=A$ dan $\underset{x\to a}{\text{limit}} g(x)=B$, sesuai dengan definisi limit dari suatu fungsi maka jika diberikan $\varepsilon_1 > 0$ dan $\varepsilon_2 > 0$, maka ada $\delta_1 > 0$ dan $\delta_2 > 0$ sehingga:

a. Jika $0 < |x-a| < \delta_1$, maka $|f(x)- A| < \varepsilon_1$ dan

b. Jika $0 < |x-a| < \delta_2$, maka $|g(x)- B| < \varepsilon_2$.

Jika $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, maka untuk $0 < |x-a| < \delta$ berlaku $|f(x) - A| < \varepsilon_1$ dan $|g(x) - B| < \varepsilon_2$.

Kembali pada yang akan dibuktikan, yaitu

$\underset{x\to a}{\text{limit}}[f(x)+g(x)] = \underset{x\to a}{\text{limit}} f(x)+\underset{x\to a}{\text{limit}} g(x)= A + B$, pilih

$\underset{x\to a}{\text{limit}}[f(x)+g(x)] = A + B$, berdasar definisi limit suatu fungsi, jika diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk $0 < |x-a| < \delta$ berlaku $|(f(x) + g(x))–(A+B)| < \varepsilon$

$|(f(x) + g(x)) - (A+B)| = |((f(x) - A) + (g(x)) - B)|$

$\leq |((f(x) - A)| + |(g(x)) - B)| < \varepsilon$

Diketahui bahwa $|f(x) - A| < \varepsilon_1$ dan $|g(x) - B| < \varepsilon_2$, sehingga

$|((f(x) - A)| + |(g(x)) - B)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

Pilih $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = ½\, \varepsilon$, didapat $|((f(x) - A)| + |(g(x)) - B)| < ½\, \varepsilon + ½\, \varepsilon = \varepsilon$.

Dengan demikian $|(f(x) + g(x)) - (A+B)| \leq |((f(x) - A)| + |(g(x)) - B)| < \varepsilon$ untuk semua x pada $0 < |x-a| < \delta$. ■

Contoh:

a. Jika f(x) = 2x – 1 dan g(x) = 5, tentukan $\lim\limits_{x \to 6} [f(x) + g(x)]$
b. Jika f(x) = -4x + 7 dan g(x) = 2x - 10, tentukan $\lim\limits_{x \to 3} [f(x) - g(x)]$
c. Jika f(x) = 3x - 1 dan g(x) = x , tentukan $\lim\limits_{x \to -1} [f(x) + g(x)]$
d. Jika f(x) = 5x + 1 dan g(x) = 7x – 1, tentukan tentukan $\lim\limits_{x \to -2} [f(x) - g(x)]$
e. Jika f(x) = 5x + 1 dan g(x) = 7x, tunjukkan bahwa $\lim\limits_{x \to 2} [f(x) + g(x)]$ adalah 25.

Penyelesaian:

a) f(x) = 2x – 1, $\lim\limits_{x \to 6} 2x - 1$ = 11 dan g(x) = 5, $\lim\limits_{x \to 6} 5$ = 5
$\therefore \lim\limits_{x \to 6} [f(x) + g(x)] = 11 + 5 = 16$
b) f(x) = -4x + 7, $\lim\limits_{x \to 3} -4x + 7$ = -5 dan g(x) = 2x - 10, $\lim\limits_{x \to 3} 2x - 10$ = -4
$\therefore \lim\limits_{x \to 3} [f(x) - g(x)]$ = -5 – (-4) = -1.
c) f(x) = 3x – 1, $\lim\limits_{x \to -1} 3x - 1 = -4$ dan g(x) = x, $\lim\limits_{x \to -1} x = -1$
$\therefore \lim\limits_{x \to 6-1} [f(x) + g(x)]$ = -4 + (-1) = -5.
d) f(x) = 5x + 1, $\lim\limits_{x \to -2} 5x + 1 = -9$ dan g(x) = 7x – 1, $\lim\limits_{x \to -2} 7x - 1 = -15$
$\therefore \lim\limits_{x \to -2} [f(x) - g(x)]$ = -9 –(-15) = 6
e) Jika f(x) = 5x + 1 dan g(x)
f) = 7x, tunjukkan bahwa $\lim\limits_{x \to 2} [f(x) + g(x)]$ adalah 25.

Ditunjukkan bahwa $\lim\limits_{x \to 2} [f(x) + g(x)]$ adalah 25. Dengan mengaplikasikan definisi limit suatu fungsi, jika diberikan $\varepsilon > 0$ didapat $\delta > 0$ sehingga
$|f(x)+g(x) - (A+B)| < \varepsilon$ untuk $0 < |x-a| < \delta$.
$|12x + 1 - (11+14)| = |12x - 24| = |12||x-2| < \varepsilon$ untuk $0 < |x-2| < \delta$ atau
$|x-2| < \frac{\varepsilon}{12}$ untuk $0 < |x-2| < \delta$.

Pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{12}$, sehingga untuk setiap x pada $0 < |x-2| < \frac{\varepsilon}{12}$ berlaku $|f(x)+g(x) - (A+B)| < \varepsilon$.

Untuk meyakinkan kebenaran dari bukti ini, perhatikan hal berikut.

Pilih ε = 0.012, sehingga δ = 0.001 dan didapat $0 < |x-2| < 0.001$.

x pada $0 < |x-2| < 0.001$, berarti x =(2-0.001, 2 +0,001).

Ambil x = 2.0001, sehingga $|12x + 1 - (11+14)| = |12x - 24|$

$= |12.\ 2.001 - 24| = |0.0012| < 0.012.$ ■

Teorema 4.1.7.

Jika $\lim_{x\to a} f(x) = A$ dan $\lim_{x\to a} g(x) = B$, maka $\lim_{x\to a} [f(x).\ g(x)] = \lim_{x\to a} f(x). \lim_{x\to a} g(x) = A.B$

Bukti:

$\lim_{x\to a} [f(x).\ g(x)] = A.B$, berdasar definisi limit suatu fungsi, jika diberikan ε > 0, terdapat $0 < |x-a| < \delta$ sehingga $|((f(x).\ (g(x) - AB| < \varepsilon$.

$|((f(x).\ (g(x) - AB| = |\{(f(x)-A\}.\{(g(x)-B\} + B\{f(x) - A\} + A\{g(x) - B\}|$

$\le |(f(x)-A|.|g(x)-B| + |B|\ |f(x) - A| + |A|\,g(x) - B|$

Karena $\lim_{x\to a} f(x) = A$ dan $\lim_{x\to a} g(x) = B$, sesuai dengan definisi limit dari suatu fungsi maka jika diberikan $\varepsilon_1 > 0$ dan $\varepsilon_2 > 0$, maka ada $\delta_1 > 0$ dan $\delta_2 > 0$ sehingga:

a. Jika $0 < |x-a| < \delta_1$, maka $|f(x) - A| < \varepsilon_1$ dan
b. Jika $0 < |x-a| < \delta_2$, maka $|g(x) - B| < \varepsilon_2$.

Jika $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, maka untuk $0 < |x-a| < \delta$ berlaku $|f(x) - A| < \varepsilon_1$ dan $|g(x) - B| < \varepsilon_2$.

Bentuk $\le |(f(x)-A|.|g(x)-B| + |B|\ |f(x) - A| + |A|\,g(x) - B|$ menjadi $< \varepsilon_1.\ \varepsilon_2 + |B|\,\varepsilon_1 + |A|\,\varepsilon_2$, sehingga

$|((f(x).\ (g(x) - AB| < \varepsilon_1.\ \varepsilon_2 + |B|\,\varepsilon_1 + |A|\,\varepsilon_2$ untuk setiap x pada $0 < |x-a| < \delta$

Pilih $\varepsilon_1.\ \varepsilon_2 < 1/3\ \varepsilon$, $\varepsilon_1 < 1/3 \frac{\varepsilon}{|B|}$ dan $\varepsilon_2 < 1/3 \frac{\varepsilon}{|A|}$ didapat

$|((f(x).\ (g(x) - AB| < 1/3\ \varepsilon + |B|\ 1/3 \frac{\varepsilon}{|B|} + |A|\ 1/3 \frac{\varepsilon}{|A|}$ atau

$|((f(x).\ (g(x) - AB| < 1/3\ \varepsilon + 1/3\ \varepsilon + 1/3\ \varepsilon$ atau

$|((f(x).\ (g(x) - AB| < \varepsilon.$ ■

Contoh.

a. Jika f(x) = 2x – 1 dan g(x) = 5, tentukan $\lim_{x\to 6} [f(x).\ g(x)]$
b. Jika f(x) = -4x + 7 dan g(x) = 2x - 10, tentukan $\lim_{x\to 3} [f(x).\ g(x)]$

c. Jika f(x) = 3x - 1 dan g(x) = x , tentukan $\lim_{x\to -1} [f(x).g(x)]$

d. Jika f(x) = 5x + 1 dan g(x) = 7x – 1, tentukan tentukan $\lim_{x\to -2} [f(x).g(x)]$

e. Jika f(x) = 5x + 1 dan g(x) = 3x, tunjukkan bahwa $\lim_{x\to 2} [f(x).g(x)]$ adalah 66.

Penyelesaian:

a) Diketahui f(x) = 2x – 1 dan g(x) = 5, maka

$\lim_{x\to 6} 2x-1$ = 11 dan $\lim_{x\to 6} 5$ = 5, maka

$\therefore \lim_{x\to 6} [f(x).g(x)]$ = 11 . 5 = 55

b) Diketahui f(x) = -4x + 7 dan g(x) = 2x – 10, maka

$\lim_{x\to 3} -4x+7$ = -5 dan $\lim_{x\to 3} 2x-10$ = -4

$\therefore \lim_{x\to 3} [f(x).g(x)]$ = -5 . -4 = 20.

c) Diketahui f(x) = 3x - 1 dan g(x) = x, maka

$\lim_{x\to -1} 3x-1$ = -4 dan $\lim_{x\to -1} x$ = -1

$\therefore \lim_{x\to -1} [f(x).g(x)]$ = -4 . -1 = 4

d) Diketahui f(x) = 5x + 1 dan g(x) = 7x – 1, maka

$\lim_{x\to -2} 5x+1$ = -9 dan $\lim_{x\to -2} 7x-1$ = -13

$\therefore \lim_{x\to -2} [f(x).g(x)]$ = -9 . -13 = 117.

e) Diketahui f(x) = 5x + 1 dan g(x) = 3x.Tunjukkan bahwa $\lim_{x\to 2} [f(x).g(x)]$= 66.

Menurut definisi limit suatu fungsi, jika diberikan $\varepsilon > 0$ didapat $\delta > 0$ sehingga

$|f(x).g(x) - (A.B)| < \varepsilon$ untuk $0 < |x-a| < \delta$. Dengan demikian

$|(5x+1)(3x) - 66| < \varepsilon$ untuk $0 < |x-2| < \delta$.

$|15x^2 + 3x - 66| = |(15x + 33)(x - 2)|$

$\leq |(x-2)|\,|3(5x+11)| < \varepsilon$ untuk $0 < |x-2| < \delta$.

Misalkan $|3(5x+11)| = k$, $k \in \mathbf{R}$ dan $k > 0$, sehingga

$|(x-2)|\,|3(5x+11)| < \varepsilon$ menjadi

$|k||(x-2)| = |(x-2)| < \frac{\varepsilon}{k}$ untuk $0 < |x-2| < \delta$.

Pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$

Untuk menentukan nilai k, ditempuh langkah-langkah sebagai berikut.

Misal $\delta \leq 1$, maka $0 < |x-2| < \delta \leq 1$ atau $0 < |x-2| \leq 1$

$0 < |x-2| \leq 1 \Leftrightarrow 2 < x \leq 3$, mengakibatkan $|(5x+11)| \leq 26$ untuk $x = 3$.

Dengan demikian didapat nilai k = 26. Sekarang nilai δ tidak tunggal, yaitu

$\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ dan $\delta \leq 1$.

Pilih $\delta = \min(\frac{\varepsilon}{k}, 1)$ sehingga $0 < |x-2| < \delta$ berlaku $|(5x+1)(3x) - 66| < \varepsilon$.

Untuk meyakinkan kebenaran dari bukti ini, perhatikan hal berikut.

Pilih $\varepsilon = 0.026$, sehingga $\delta = 0.001$ dan didapat $0 < |x-2| < 0.001$.

x pada $0 < |x-2| < 0.001$, berarti x =(2-0.001, 2 +0,001). Ambil x = 2.0001, sehingga

$$(5x+1)(3x) - 66| = |(10.0005+1)(6.0003) - 66|$$
$$= |(11.0005)(6.0003) - 66| < 0.026 \blacksquare$$

Teorema 4.1.8.

Jika $\lim_{x\to a} k = k$ dan $\lim_{x\to a} f(x) = A$, maka $\lim_{x\to a} k.f(x) = k.A$, k sebarang konstanta.

Bukti:

Dari teorema sebelumnya telah terbukti bahwa $\lim_{x\to a} k = k$; $\lim_{x\to a} f(x) = A$, dan $\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = A.B$. Untuk membuktikan , diadakan modifikasi pada limit dari perkalian dua fungsi, dengan mengganti g(x) = k dan menggunakan sifat komutatif atas perkalian fungsi terhadap suatu konstanta. Adapun langkah-langkah yang ditempuh adalah sebagai berikut.

Berdasar definisi limit $\lim_{x\to a} k.f(x) = k.A$ adalah, jika diberikan $\varepsilon > 0$, ada $\delta > 0$ sedemikian hingga $|k.f(x) - k.A| < \varepsilon$ untuk $0 < |x-a| < \delta$. Dalam kasus ini dicarai nilai $\delta > 0$ sehingga $|k.f(x) - k.A| < \varepsilon$ untuk x pada $0 < |x-a| < \delta$.

Perhatikan, $|k.f(x) - k.A| = |k.(f(x) - A)|$

$\leq |k|.|(f(x) - A)| < \varepsilon$,

Dengan memilih $|(f(x) - A)| < \frac{\varepsilon}{|k|}$, didapat

$|k.f(x) - k.A| < |k|.|(f(x) - A)|$; untuk x pada $0 < |x-a| < \delta$.

$< |k|.\frac{\varepsilon}{|k|}$

$< \varepsilon$. $\blacksquare$

Contoh:

a. Jika f(x) = 2x – 1 dan k = 5. Tentukan $\lim_{x\to 3} k.f(x)$
b. Jika f(x) = 4x + 1 dan k = 3. Tentukan $\lim_{x\to 2} k.f(x)$
c. Jika f(x) =3x – 5dan k = -2. Tentukan $\lim_{x\to -3} k.f(x)$
d. Jika f(x) = 5x – 3dan k = -4. Tentukan $\lim_{x\to -5} k.f(x)$
e. Jika f(x) = 4x – 1 dan k = 5. Tunjukkan bahwa $\lim_{x\to 1} k.f(x)$ adalah 15.
f.

Penyelesaian:

a) $\lim_{x\to 3} 2x - 1$ = 5 dan k = 5

$\therefore \lim_{x\to 3} k\, f(x) = 5.5 = 25$

b) $\lim_{x\to 2} 4x + 1$ = 9 dan k = 3

$\therefore \lim_{x\to 3} k\, f(x) = 3.9 = 2$

c) $\lim_{x\to -3} 3x - 5$ = -14 dan k = -2

$\therefore \lim_{x\to 3} k\, f(x)$ = -2. -14 = 28

d) $\lim_{x\to -5} 5x - 3$ = -28 dan k = -4

Teorema 4.1.9.

Jika $\lim_{x\to a} f(x)=A$ dan $\lim_{x\to a} g(x)=B$, maka

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}$, dengan $B \neq 0$

Bukti:

Karena $\lim_{x\to a} f(x)=A$ dan $\lim_{x\to a} g(x)=B$, sesuai dengan definisi limit dari suatu fungsi maka jika diberikan $\varepsilon_1 > 0$ dan $\varepsilon_2 > 0$, maka ada $\delta_1 > 0$ dan $\delta_2 > 0$ sehingga:

a. Jika $0 < |x-a| < \delta_1$, maka $|f(x)- A| < \varepsilon_1$ dan
b. Jika $0 < |x-a| < \delta_2$, maka $|g(x)- B| < \varepsilon_2$.

Bentuk $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ diubah menjadi $\lim_{x\to a} \left(f(x).\frac{1}{g(x)}\right)$

$\lim_{x\to a} \left(f(x).\frac{1}{g(x)}\right) = \lim_{x\to a} f(x). \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)}$

tinggal menunjukkan bahwa jika $0 < |x-a| < \delta$ berlaku $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \varepsilon$, tetapi

$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B-g(x)}{g(x).B}\right| = \left|\frac{g(x)-B)}{g(x).B}\right| \leq \frac{|g(x)- B|}{|B|}.\frac{1}{g(x)}$ untuk $0 < |x-a| < \delta$.

Berpedoman pada yang diketahui di atas, yaitu

$|g(x)- B| < \varepsilon_2$ bila $0 < |x-a| < \delta_2$.

$|g(x)- B| < \varepsilon_2$, dan $\varepsilon_2 > 0$, maka $|g(x)| > 0$, ambil $b > 0$ sehingga

$|g(x)| > b > 0$ dan $\frac{1}{|g(x)|} < 0$ untuk $0 < |x-a| < \delta_2$.

$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| \leq \frac{|g(x)- B|}{|B|}.\frac{1}{g(x)}$ untuk $0 < |x-a| < \delta_2$.

$\leq \frac{|g(x)- B|}{|B|}.\frac{1}{|g(x)|}$

$<\frac{\varepsilon_2}{|B|}.\frac{1}{b}$ untuk $0<|x-a|<\delta_2$.

Pilih $\varepsilon_2<\varepsilon.b.|B|$, mengakibatkan $\varepsilon>\frac{\varepsilon_2}{|B|.b}$ dan pilih $\delta=\delta_2$, sehingga

$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{B}\right|<\frac{\varepsilon_2}{|B|}.\frac{1}{b}<\frac{\varepsilon.b.|B|}{|B|}.\frac{1}{b}<\varepsilon.$ ■

Karena terbukti $\underset{x\to a}{limit}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{B}$, maka $\underset{x\to a}{\text{limit}}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{A}{B}$, dengan $B\neq 0$

Teorema 4.1.10.

- Jika $\lim_{x\to a} f(x)=A$, maka $\lim_{x\to a} f(x)^n=[\lim_{x\to a} f(x)]^n=A^n$
- Jika $\lim_{x\to a} f(x)=A$, maka $\underset{x\to a}{limit}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}=\sqrt[n]{A}$, $\sqrt[n]{A}\in\mathbf{R}$.
- Jika $\lim_{x\to a} f(x)=A$, maka $\lim_{x\to a}[\ln f(x)]=\ln \lim_{x\to a}[f(x)]=\ln A$
- Jika $\lim_{x\to a} f(x)=A$, maka $\lim_{x\to a} e^{f(x)}=e^{\lim_{x\to a} f(x)}=e^A$
- Jika $\lim_{x\to a} f(x)=A$ dan $\lim_{x\to a} g(x)=B$, maka

  $\lim_{x\to a}[f(x)^{g(x)}]=[\lim_{x\to a} f(x)]^{\lim_{x\to a} g(x)}=A^B$

  (Bukti dari teorema-teorema ini diserahkan pada pembaca)

Jenis-jenis Lain dari Limit

A. $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, jika untuk sebarang bilangan positif M (cukup besar),ada bilangan positif δ sehingga, bila $0<|x-a|<\delta$ maka $|f(x)|>M$.

Contoh: Tunjukkan $\underset{x\to 2}{limit}-\frac{1}{(x-2)^3}=\infty$.

Ambilsebarang $M>0$. Untuk setiap x pada $0<|x-2|<\delta$, didapat

$\left|\frac{1}{(x-2)^3}\right|>\frac{1}{\delta^3}$. Maka $\left|\frac{1}{(x-2)^3}\right|>M$ bila $\frac{1}{\delta^3}>M$ atau $\delta<\frac{1}{\sqrt[3]{M}}$.

B.. $\lim_{x\to\infty} f(x)=A$, jika untuk sebarang bilangan positif walaupun cukup kecil ε, ada bilagan suatu bilangan positif M yang memenuhi $|x|>M$, maka $|f(x)-A|<\varepsilon$

Contoh:Tunjukkan $\underset{x\to\infty}{limit}\frac{x}{x+1}=\infty$.

Ambil sebarang $\varepsilon>0$. Untuk setiap x, sedemikian hingga $|x|>M$,

$\left|\frac{x}{x+1}-1\right|=\left|\frac{x}{x+1}-\frac{x+1}{x+1}\right|=\left|\frac{-1}{x+1}\right|=\frac{1}{|x+1|}\leq\frac{1}{|x|-1}<\frac{1}{M-1}$.

Maka $\left|\frac{x}{x+1} - 1\right| < \varepsilon$ bila $\frac{1}{M-1} < \varepsilon$ atau $M > 1 + \frac{1}{\varepsilon}$.

C. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, jika untuk sebarang bilangan positif M (cukup besar), ada suatu bilangan positif P yang memenuhi $|x| > P$, maka $|f(x)| > M$.

Contoh: Tunjukkan $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty$.

Misal, pilih M cukup besar. Untuk setiap x seedemikian hingga $|x| > P > 1$.

$$\left|\frac{x^2}{x-1}\right| \geq \frac{x^2}{|x|+1} > \frac{x^2}{2|x|} = \frac{1}{2}|x| > \frac{1}{2}P. \text{ Maka } > M \text{ bila } P > 2M.$$