3. HIMPUNAN DAN FUNGSI

3.1. Aljabar Himpunan

Konsep tentang himpunan merupakan dasar penting dalam matematika. Himpunan berperan dalam matematika dan bermanfaat dalam bentuk pemodelan dan penyelidikan masalah-masalah dalam ilmu komputer. Himpunan pertama kali dikenalkan oleh G. Cantor.

Himpunan merupakan pengertian pangkal, sehingga tidak dapat didefinisikan. Himpunan dilambangkan dengan huruf capital, misal A, B, C, … . Himpunan merupakan kumpulan objek-objek yang terdefinsikan secara jelas. Objek-objek dalam himpunan disebut elemen atau anggota. Terdapat *dua cara penulisan* suatu himpunan, yaitu

a. Metode Roster (tabelaris) dengan menyebut/mendaftar nama semua anggota.

   Contoh : S = {Senin, Selasa, Sabtu}

   W= {hijau, kuning, merah}

   I = {Surabaya, Yogyakarta, Semarang, Jakarta, Bandung}

b. Metode Rule (notasi pembentuk himpunan) dengan menyebut syarat keanggotaannya.

   Contoh : S = {Senin, Selasa, Sabtu} dalam metode Rule ditulis

   S = { x | x nama hari dalam satu minggu yang diawali dengan S}

   W = {hijau, kuning, merah} dalam metode Rule ditulis

   W = { r | r warna lampu pada rambu lalulintas}

   I = {Surabaya, Yogyakarta, Semarang, Jakarta, Bandung} dalam metode Rule ditulis

   I = {i | i ibukota propinsi atau daerah istimewa di Pulau Jawa}

Relasi Himpunan dan elemen

Jika A dinyatakan sebagai suatu himpunan dan jika x dinyatakan sebagaielemen/anggota, kemungkinan yang terjadi

a. $x \in A$ (x anggota dari A) dan

b. $x \notin A$ (x bukan anggota dari A)

Jika terdapat himpunan A dan B serta x suatu elemen/anggota, maka terdapat empat kemungkinan, yaitu

a. $x \in A$ dan $x \in B$

b. $x \in A$ dan $x \notin B$

c. $x \notin A$ dan $x \in B$

d. $x \notin A$ dan $x \notin B$

Dari $x \in A$ dan $x \in B$, menunjukkan bahwa x merupakan anggota dari A juga anggota dari B.

Dari $x \in A$ dan $x \notin B$, menunjukkan bahwa x elemen dari himpunan A dan bukan elemen B.

Dari $x \notin A$ dan $x \in B$, menunjukkan bahwa x hanya elemen dari B dan bukan elemen A.

Dari $x \notin A$ dan $x \notin B$, menunjukan bahwa x bukan elemen dari himpunan A dan B

Relasi Himpunan

Aksioma Perluasan (Axiom of Extension) : Dua himpunan A dan B adalah sama, A = B, ***jika dan hanya jika*** keduanya mempunyai elemen-elemen yang sama (Setiap elemen dari A merupakan elemen dari B dan setiap elemen dari B merupakan elemen dari A)

Aksioma perluasan ini dapat dinyatakan dengan notasi logika melalui dua cara:

a. $A = B \Leftrightarrow \forall x\, [x \in A \Leftrightarrow x \in B]$

b. $A = B \Leftrightarrow [\forall x\, [x \in A \Rightarrow x \in B] \Leftrightarrow \forall x\, [x \in B \Rightarrow x \in A]]$

Aksioma perluasan menyatakan bahwa jika dua himpunan mempunyai anggota yang sama, maka tanpa dipandang bagaimana himpunan-himpunan tersebut ditetapkan. Hal ini berarti jika suatu himpunan ditetapkan secara eksplisit dengan cara mendaftar, urutan dari pendaftaran tidak diperhatikan; himpunan yang dinyatakan dengan {a,b,c} adalah sama dengan himpunan-himpunan yang dinyatakan dcngan {c,b,a} dan {b,a,c}. Oleh selanjutnya, tidak menjadi masalah jika suatu elemen muncul lebih dari satu kali; {a,b,a} {a,b}dan {a,a,a,b,b}adalah sepesifikasi berbeda dari himpunan yang sama.Suatu himpunqn berhingga dapat dicirikan secara implisit maupun eksplisit, misal {1,2,3,4,5} dan $\{x \mid x \in \mathbf{B} \wedge 1 \le x \le 5\}$. Selain itu, himpunan yang sama dapat ditentukan secara implisit dengan predikat yang berbeda, misal $\{x \mid x = 0\}$ dan $\{x \mid x \in \mathbf{B} \wedge -1 < x < 1\}$ adalah sama.

Definsi 3.1.1: Misal A dan B adalah himpunan, himpunan A dikatakan ***himpunan bagian dari*** *B,* jika setiap elemen dari A merupakan elemen dari B, dan dilambangkan dengan $A \subseteq B$.

Secara simbolik $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \Rightarrow x \in B]$

Jika $A \subseteq B$, dapat juga ditulis dalam bentuk $B \supseteq A$ dan dikatakan A ***termuat dalam*** B, atau B memuat A, atau B superset dari A.Ditulis $A \not\subset B$ jika A ***bukan himpunan bagian dari*** B. Jika $A \subseteq B$ dan $A \neq B$, dikatakan A proper subset (himpunan bagian sejati dari) B.

Contoh:

a. Himpunan bilangan bulat genap adalah proper subset dari himpunan semua bilangan bulat.
b. Himpunan semua orang laki-laki adalah proper subset dari himpunan semua manusia.
c. Himpunan {1,2,3,4,5} adalah subset (bukan proper subset) dari himpunan $\{x \mid 0 < x < 6\}$

Dalam tulisan ini, diasumsikan semesta pembicaraan U / S yang mungkin atau tidak mungkin ditetapkan secara eksplisit. Setiap peubah yang menyatakan suatu elemen dari suatu himpunan dapat mengambil nilai/values dari semesta ini. Berikut ini suatu teorema yang menrupakan konsekuensi.

Teorema 3.1.1.: Misal S adalah semesta pembicaraan dan A adalah himpunan. Maka $A \subseteq S$.

Bukti: Bukti ini merupakan suatu contoh dari bukti yang sangat trivial yang berdasar fakta bahwa x $\in$S, untuk setiap elemen x. Himpunan A merupakan bagian dari S ***jika dan hanya jika*** implikasi

$x \in A \Rightarrow x \in S$ adalah benar.

Tetapi x $\in$S***selalu benar***; oleh sebab itu implikasi adalah benar. Karena x adalah sebarang, secara generalisasi

$\forall x[x \in A \Rightarrow x \in S$

oleh karena itu $A \subseteq S$. ■

Teorema berikut ini berkenaan dengan kesamaan dua himpunan.

Teorema 3.1.2. Misal A dan B adalah himpunan-himpunan. Maka A = B ***jika hanya jika*** $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Bukti: teorema ini dibuktikan dalam ***dua bagian*** dengan menggunakan bukti langsung.

a. (bagian "hanya jika" / $\Leftarrow$): $A = B \Rightarrow [A \subseteq B \wedge B \subseteq A]$

Anggap bahwa A = B. Dengan menerapkan aksioma perluasan, setiap anggota dari A adalah anggota dari B. Oleh karena itu, dengan definisi 1.1.1, $A \subseteq B$. Hal ini menunjukkan bahwa jika A = B maka $A \subseteq B$. Dengan alasan yang sama, tetapi penukaran peran dari A dan B, jika A = B maka $B \subseteq A$.

Dengan demikian

$$[A = B \Rightarrow A \subseteq B] \wedge [A = B \Rightarrow B \subseteq A]$$

yang ekivalen dengan

$$[A = B] \Rightarrow [A \subseteq B \wedge B \subseteq A]$$

b. (bagian "jika"/ $\Rightarrow$): $[A \subseteq B \wedge B \subseteq A] \Rightarrow A = B$

Anggap bahwa $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$. Berdasar Definisi 1.1.1

$A \subseteq B. \Rightarrow \forall x[x \in A \Rightarrow x \in B]$ dan $B \subseteq A. \Rightarrow \forall x[x \in B \Rightarrow x \in A]$

Oleh sebab itu,

$$(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Rightarrow [\forall x[x \in A \Rightarrow x \in B] \wedge \forall x[x \in B \Rightarrow x \in A]]$$

Dengan demikian,

$(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \in (A = B)$. ■

Teorema ini, mengakibatkan

Corrolary 3.1.1. Untuk sebarang himpunan A, $A \subseteq A$. (Bukti sebagai latihan)

Teorema 3.1.3. Misal A, B dan C adalah himpunan-himpunan. Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq$ Cmaka $A \subseteq C$.

Bukti: Misal x adalah sebarang himpunan pada semesta pembicaraan.

Karena $A \subseteq B$, maka dipenuhi

$x \in A \wedge x \in B$.

Karena $B \subseteq C$, maka dipenuhi

$x \in B \in\wedge x \in C$.

Dengan demikian diperoleh.

$x \in A \Rightarrow x \in C$.

Karena x adalah sebarang elemen dari semesta, yang memenuhi bahwa

$\forall x[x \in A \Rightarrow x \in C]$dan $A \subseteq C$. ■

Definisi 3.1.2.Suatu himpunan yang tidak mempunyai elemen disebut himpunan ***Kosong atau Null.***

Suatu himpunan yang hanya memiliki ***satu elemen*** disebut himpunan ***singleton.***

Teorema3.1.4. Misal Let ϕsuatu himpunan kosong dan A sebarang himpunan, maka $\phi \subseteq A$.

Bukti: Misal x sebarang elemen dari semesta. Tetapi ϕ tidak memiliki elemen, implikasi

$x \in \phi \Rightarrow x \in A$selalu benar.

Karena x dipilih sebarang, pernyataan dapat ditetapkan secara universal, yaitu

$\forall x[x \in \phi \Rightarrow x \in A]$,

yang menunjukkan bahwa $\phi \subseteq A$. ■

Teorema berikut menunjukkan bahwa terdapat *satu dan hanya satu*himpunan kosong,dinyatakan "himpuan kosong adalah tunggal”

Teorem 3.1.5: Misal ϕ dan ϕ' adalah himpuanan-himpunan kosong, maka $\phi = \phi'$.

Bukti (Langsung): Karena ϕ adalah kosong, maka menurut teorema 1.1.4 bahwa $\phi \subseteq \phi'$. Dengan cara yang sama $\phi' \subseteq \phi$. Dengan menerapkan teorema 1.1.2 diperoleh

$\phi = \phi'$ ■

Contoh-contoh

a. Himpunan {*a*, b} mempunyai 4 subset yang berbeda, yaitu {*a*, b},[a},{b}danϕ.

b.Himpunan {{a}} adalah singleton set; yang mempunyai tepat dua subset, yaitu {{a}}dan ϕ

3.2 OPERASI-OPERASI PADA HIMPUNAN

Suatu operasi pada himpunan-himpunan menggunakan himpunan-himpunan (yang disebut oprerand) untuk memperoleh himpunan baru.

Seperti yang dijelaskan sebelumnya, dianggap bahwa semua himpunan berasal dari semesta S/U.

Definisi3.2.1**:** Jika A dan B adalah himpunan.

a. Gabungan dari A dan B., dinyatakan dengan $A \cup B$, adalah **himpunan**

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

b. Irisan dari A dan B, dinyatakan dengan $A \cap B$, adalah himpunan

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

c. Selisih dari A dan B atau komplemen relatif B atas A, dinyatakan dengan A-B adalah himpunan

$A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$.

Contoh-contoh:

$E \subset$ **B** dan E adalah himpunan semua bilangan genap

$G \subset$ **B** dan G adalah himpunan semua bilangan ganjil

$P \subset$ **B** dan P adalah himpunan semua bilangan prima

B adalah himpunan semua bilangan bulat, maka

B adalah himpunan semua bilangan bulat, maka

$E \cup G = \mathbf{B}$; $E \cup \mathbf{B} = \mathbf{B}$; $G \cup \mathbf{B} = \mathbf{B}$; $P \cup \mathbf{B} = \mathbf{B}$

$E \cap G = \phi$, karena tidak ada elemen dari E yang merupakan elemen dari G.

$E \cap P = \{2\}$

$G \cap P = \{3, 5, 7, 11, 13, ...\}$

$E \cap \mathbf{B} = E$, semua bilangan genap adalah bilangan Bulat.

$G \cap \mathbf{B} = G$, semua bilangan ganjil adalah bilangan Bulat.

$\mathbf{B} - E = G$

$\mathbf{B} - G = E$

$E - G = \phi$

$G - E = \phi$

Definisi 3.2.2: Jika A dan B adalah himpunan-himpunan dan $A \cap B = \phi$,maka A dan B adalah disjointatau saling asing. Jika $\mathcal{C}$ koleksi dari himpunan-himpunan sedemikian hingga dua elemen sebarang berbeda dari $\mathcal{C}$ adalah disjoint, maka $\mathcal{C}$ adalah koleksi dari himpunan-himpunan yang saling asing.

Contoh

Jika $\mathcal{C} = \{\{0\}, \{1), \{2\},...\} = \{(i) \mid i \in \mathbf{N}\}$, maka $\mathcal{C}$ adalah koleksi dari himpunan-himpunan saling asing.

Teorema3.2.1: Operasi-operasi himpunan , yaitu gabungan dan irisan bersifat komutatif dan asosiatif.

(a) $A \cup B = B \cup A$

(b) $A \cap B = B \cap A$

(c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Bukti dari pernyataan (a) – (d) menggunakan sifat komutatif dan asosiatif dari operator-operator logis $\vee$ dan $\vee$. Sebagai contoh, dibuktikan pernyataan (a) dan (c) (**sisanya sebagai latihan!**).

Bukti :

(a).$A \cup B = B \cup A$**?**

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\Leftrightarrow x \in \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B) \\ &\Leftrightarrow (x \in B) \vee (x \in A) \\ &\Leftrightarrow x \in \{x \mid x \in B \vee x \in A\} \\ &\Leftrightarrow x \in B \cup A \end{aligned}$$

$\therefore A \cup B = B \cup A$ ■

(c) $(A\cup B) \cup C=A\cup(B\cup C)$**?**

$$\begin{aligned} (A\cup B) \cup C &\Leftrightarrow x \in \{x \mid x \in (A\cup B) \vee x \in C\} \\ &\Leftrightarrow \{x \in A\cup B \vee x \in C\} \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee (x \in (B \cup C)) \\ &\Leftrightarrow \{x \mid x \in A \vee x \in (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow A\cup(B\cup C) \end{aligned}$$

$\therefore (A\cup B) \cup C=A\cup(B\cup C)$ ■

Teorema 3.2.2. Misal A, B dan C sebarang himpunan, maka

a. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
b. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Dari teorema di atas, hanya dibuktikan bagian a. Sisanya, sebagai latihan bagi mahasiswa.

Untuk membuktikan $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dilakukan dengan cara

$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dan $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

Pertama-tama dibuktikan $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in [A \cap (B \cup C)]$, maka $x \in A$ dan $x \in (B \cup C)$, berarti

$x \in A$ dan $x \in B$ atau $x \in C$. Dengan demikian, didapat

i. $x \in A$ dan $x \in B$, juga
ii. $x \in A$ dan $x \in C$.

Karena dari $x \in [A \in (B \cup C)]$ didapat $x \in A$ dan $x \in B$ atau $x \in A$ dan $x \in C$, maka disimpulkan bahwa

$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. i).

Selanjutnya dibuktikan $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

$x \in [(A \cap B) \cup (A \in C)]$, maka $x \in [(A \cap B)]$ atau $x \in [(A \cap C)]$.

$x \in [(A \cap B)]$ berarti $x \in A$ dan $x \in B$ atau *

$x \in [(A \subset C)]$ berarti $x \in A$ dan $x \in C$. **

Dari * dan ** dapat disederhanakan menjadi $x \in A$ dan $x \in B$ atau $x \in C$, secara simbolik

ditulis $x \in A$ dan $x \in (B \cup C)$ atau $A \cap (B \cup C)$.

Karena darix $\in [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$ didapat $x \in A$ dan $x \in (B \cup C)$, berarti$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$ ii)

Dari i) dan ii) disimpulkan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Analog dengan ini dapat dibuktikan $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. ⇨

Teorema3.2.3 Jika A, B dan C adalah himpunan, maka

i. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ dan

ii. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Bukti:

a. Seperti langkah-langkah sebelumnya, akan ditunjukkan bahwa

i. $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ dan

ii. $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$.

Pertama-tama ditunjukkan bahwa $A \setminus (B \cup C) \subset (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

$x \in (A \setminus (B \cup C))$ berarti $x \in A$ dan $x \notin ((B \cup C))$ identik dengan $x \in A$ dan $x \notin B$ atau $x \notin C$ dan didapat

i. $x \in A$ dan $x \notin B$ atau $x \in (A \setminus B)$, juga

ii. $x \in A$ dan $x \notin C$ atau $x \in (A \setminus C)$.

Karena dari $x \in (A \setminus (B \cup C))$ didapat $x \in (A \setminus B)$ dan $x \in (A \setminus C)$, halini menunjukkan bahwa $A \setminus (B \cup C) \subset (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. *.

Akhirnya ditunjukkan bahwa $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cup C)$.

$x \in [(A \setminus B) \cap (A \setminus C)]$ berarti $x \in A$ dan $x \notin B$ dan $x \in A$ dan $x \notin C$, disederhanakan

menjadi $x \in A$ dan $x \notin B$ dan $x \notin C$ identik dengan $x \in A$ dan $x \notin (B \cup C)$.

Karena dari $x \in [(A \setminus B)$ ï $(A \setminus C)]$ didapat $x \in A$ dan $x \notin (B \cup C)$,

menunjukkan bahwa $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cup C)$. **.

Dari * dan ** disimpulkan bahwa $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Analog dengan ini ditunjukkan bahwa $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. ⇨

Teorema 3.2.4 Jika A dan B adalah himpunan, maka

a. $A \cup A = A$

b. $A \cup \phi = A$

c. $A \cup U = U$

d. $A \subseteq (A \cup B)$

e. $B \subseteq (A \cup B)$

Bukti:

Pada kesempatan ini dibuktikan bagian a. dan d, ***sisanya untuk tugas.***

a. $A \cup A = A$**?**

$x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in \{x \mid x \in A \vee x \in A\}$

$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in A$

$\Leftrightarrow x \in A$

$\Leftrightarrow x \in \{x \mid x \in A\}$

$\Leftrightarrow x \in A$

$\therefore$ $A \cup A = A$ ⇨

d. $A \subseteq (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B)$

$\Leftrightarrow x \in A \Rightarrow (x \in A \vee x \in B)$

$\Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in A$ dan $x \in A \Rightarrow x \in B$.

$\therefore$ $A \subseteq (A \cup B)$ ⇨

Teorema 3.2.5 Jika A dan B adalah himpunan, maka

a. $A \cap A = A$

b. $A \cap \phi = \phi$

c. $A \cap U = A$

d. $(A \cap B) \subseteq A$

e. $(A \cap B) \subseteq B$

Bukti:

Pada kesempatan ini dibuktikan bagian a. dan e, ***sisanya untuk tugas.***

a. $A \cap A = A$ **?**

$$\begin{aligned} x \in A \cap A &\Leftrightarrow x \in \{x \mid x \in A \wedge x \in A\} \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \\ &\Leftrightarrow x \in A \\ &\Leftrightarrow x \in \{x \mid x \in A\} \\ &\Leftrightarrow x \in A \end{aligned}$$

$\therefore A \cap A = A$ ■

e. $(A \cap B) \subseteq B$

Teorema 3.2.6 Jika A dan B adalah himpunan, maka

a. $U' = \phi$

b. $\phi' = U$

c. $A \cup A' = U$

d. $A \cap A' = \phi$

e. $(A')' = A$

f. $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

g. $(A \cap B)' = A' \cup B'$ Hukum De Morgan

h. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ Hukum De Morgan

Bukti:

Sebagai latihan

Teorema 3.2.7 Jika A dan B adalah himpunan, maka

a. $A' = U - A$

b. $A - B = A \cap B'$

c. $A - A = \phi$

d. $A - \phi' = A$

e. $A - B = B - A \Leftrightarrow A = B$

f. $A - B = A \Leftrightarrow (A \cap B) = \phi$

g. $A - B = \phi \Leftrightarrow A \subseteq B$

Bukti:

Sebagai latihan

Definisi 3.2.3. Simetris diferensi dari himpunan A dan B adalah komplemen relative dari $A \cap B$ dalam $A \cup B$dan dilambangkan dengan $A \Delta B$.

Secara simbolik ditulis

$$A \Delta B. = \{x \mid x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B.$$

Contoh:

Teorema 3.2.7 Jika A, B dan C adalah himpunan, maka

a. $A \Delta A = \phi$

b. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

c. $A \Delta \phi = A$

d. $A \Delta B = B \Delta A$

e. $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A - B) - (A \cap B)$

Bukti:

(Bukti sebagai latihan)