Diferensial sebagai hampiran pertama

Pengertian Diferensial

Lambang untuk turunan fungsi dengan $\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{limit} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ dan $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ dapat diberikan tafsiran rasio antara dua diferensial dy dan dx. Dengan mengambil x tetap dan mendefinisikan dx sebagai suatu peubah yaang dapat diberi sebarang nilai, maka untuk suatu fungsi f yang diferensiabel di x, dan dy didefinisikan dengan $dy = f '(x)\, dx$.

Pada kasus ini $dx = \Delta x$, merupakan perubahan dari x menjadi $x + \Delta x$ dan Δx merupakan bilangan yang bernilai positif atau negatif. Perubahan dari y sebesar Δy ($dy \neq \Delta y$) terjadi bila x mengalami perubahan sebesar Δx, sehingga $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Karena $dy \neq \Delta y$ dan diasumsikan $dy \approx \Delta y$, maka $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f '(x)\, \Delta x$. Selanjutnya, $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f '(x)\, \Delta x$ dikenal sebagai hampiran diferensial.

Contoh. Dengan menggunakan hampiran diferensial tentukan sin 32^0 .

Penyelesaian. Andaikan, $f(x) = \sin x$ sehingga $f '(x) = \cos x$.

Ambil, x = 30 , untuk $\Delta x = 2^0$, maka $x + \Delta x = 32^0$

Karena, $2^0 \approx 0{,}0349066$, maka

$\sin 32^0 \approx \sin 30^0 + \cos 30^0 \,.\, 2^0$

$\approx 0{,}5000 + 0{,}8660 \,.\, 0{,}0349 = 0{,}5000 + 0{,}0302$

$\approx 0{,}5302$

Jadi, $\sin 32^0 \approx 0{,}5302$.

Contoh. Dengan menggunakan hampiran diferensial tentukan $f(x) = \sqrt[3]{127}$

Penyelesaian. $f(x) = \sqrt[3]{127}$

Misal x = 125 dan $\Delta x = dx = 2$, maka $x + \Delta x = 127$ dan

$f(x) + \Delta x = \sqrt[3]{x + \Delta x}$.

Karena $f(x) = \sqrt[3]{x + \Delta x} \Rightarrow f '(x) = 1/3\, x^{-2/3}$.

Sehingga $\approx \sqrt[3]{125} + 1/3\, (125)^{-2/3} \,.\, (2)$

$\approx 5 + 0.026667$

$\approx 5{,}026667$

Jadi, $\approx 5{,}026667$.

Hampiran Taylor

Nilai fungsi polinom pada suatu titik dapat dihitung melalui sejumlah hingga penjumlahan dan perkalian. Sebaliknya fungsi-fungsi seperti trigonometri, logaritma dan eksponen tidak dapat dihitung dengan mudah seperti pada fungsi polinom. Karena itu fungsi polinom sering digunakan untuk menghampiri fungsi-fungsi di atas. Pada kaitan ini nilai fungsi dihampiri dengan nilai polinom hampiran pada suatu titik tertentu. Salah satu polinom yang sering digunakan untuk menghampiri nilai suatu fungsi adalah polinom Taylor. Metode untuk menentukan nilai hampiran nilai suatu fungsi digunakan pendekatan polinomial orde-n Taylor.

Polinomial Taylor orde n pada a adalah polinomial orde ke-n diberikan oleh persamaan.

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n$$

Dengan polinomial Taylor orde-n tersebut, rumus yang digunakan untuk menghampiri f(x) adalah

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n$$

Contoh 1. Misal f(x) = sin x, dengan menggunakan polinomial Taylor berorde 3, tentukan sin 32^0 sampai 5 tempat desimal.

Penyelesaian. Jika f(x) = sin x, maka

$f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f'''(x) = -\cos x$

$32^0 = 32/180\ \pi$, dengan demikian $x = 32/180\pi$, maka:

$$(x - 1/6\ \pi) = \frac{32}{180}\pi - 1/6\ \pi = \frac{2}{180}\pi = \frac{1}{90}\pi$$

Dengan menggunakan polinomial Taylor di atas dengan x = 32^0 dan a = 30^0 maka diperoleh

$$\sin 32^0 = 0{,}50000 + 0{,}86602\ (1/90\ \pi) - 0{,}25000\ (1/90\ \pi)^2 - 0{,}14434\ (1/90\ \pi)^3$$

Untuk $\pi \approx 3{,}14159$ dan $1/90\ \pi \approx 0{,}03491$ maka diperoleh :

$$\sin 32^0 \approx 0{,}50000 + 0{,}86602\ (0{,}03491) - 0{,}25000\ (0{,}03491)^2 - 0{,}14434\ (0{,}03491)^3$$

$$\approx 0{,}52992$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa sin $32^0 \approx 0{,}52992$

Contoh 2. Dengan menggunakan polinom Taylor ber-orde 3 tentukan sampai 5 tempat desimal.

Penyelesaian. Misal $f(x) = \sqrt[3]{127}$, maka $f'(x) = 1/3\ x^{-2/3}$ $f''(x) = -2/9\ x^{-2/3}$; $f'''(x) = 10/27\ x^{-2/3}$.

Untuk $x = 127 \longrightarrow \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{127}$ dan $a = 125 \longrightarrow \sqrt[3]{125} = 5$

Dengan menggunakan polinomial Taylor di atas dengan x = 127 dan a = 125 maka diperoleh

$$\approx 5 + 1/3(125)^{-2/3}(127-125) - 2/18(125)^{-2/3}(127-125)^2 + 10/162(125)^{-2/3}(127-125)^3$$

$$\approx 5 + 0.026666 - 0.000142 + 0.0000019$$

$$\approx 5.02653$$

L A T I H A N

I. Dengan menggunakan hampiran diferensial, tentukan:

a. cos 59^0

b. sin 63^0

c. tan 46^0

d. sec 33^0

e. csc 42^0

II. Dengan Dengan menggunakan polinom Taylor ber-orde 3 tentukan sampai 5 tempat desimal dari :

a. sin 28^0

b. cos 63^0

c. tan 43^0

d. sec 33^0

e. csc 29^0

III. Dengan menggunakan hampiran diferensial atau polynomial Taylor, selesaikan soal-soal berikut.

a. Keping piring logam dipanasi, sehingga jari-jarinya berubah dari 5 cm menjadi 5.05 cm. Tentukan nilai pendekataan pertambahan luas piring logam tersebut.

b. Sebuah bola logam dimasukkan ke dalam bejana es, sehingga jari-jarinya menyusut dari 14 cm menjadi 13,4 cm. Tentukan nilai pendekatan penyusutan volume bola.

c. Sebuah kubus logam dipanaskan, sehingga rusuk-rusuknya mengembang dari 25 cm menjadi 25,8 cm. Tentukan nilai pendekatan pertambahan volume kubus.