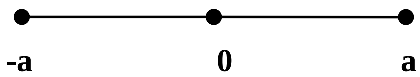
2.3. NILAI MUTLAK

Konsep nilai mutlak dari bilangan real a secara geometri adalah jarak titik-titik sejauh a terhadap titik 0 pada garis bilangan. Hal ini dipenuhi oleh titik a dan titik -a.



Definisi.3.3.1 Jika a $\in$ **R**, nilai mutlak dari a dinotasikan dengan $|a|$,didefinisikan sebagai

$$|a| = \begin{cases} a \text{ untuk } a \geq 0 \\ -a \text{ untuk } a < 0 \end{cases}$$

Teorema 3.3.1. a). $|-a| = |a| \ \forall a \in \mathbf{R}$.

b). $|a \times b| = |a| \times |b| \ \forall a,b \in \mathbf{R}$.

c). jika $c > 0$, maka $|a| \leq c \Leftrightarrow -c \leq a \leq c$.

d). $-|a| \leq a \leq |a| \ \forall a \in \mathbf{R}$.

Bukti. a. $a = 0 \Rightarrow |0| = 0 = |-0|$

$a > 0 \Rightarrow -a \leq 0 \Rightarrow |a| = a = -(-a) = |-a|$

$a < 0 \Rightarrow -a \geq 0 \Rightarrow |-a| = -a = |a|$

Jadi, $|-a| = |a| \ \forall a \in \mathbf{R}$. ⇧

b. Untuk $a = 0$ atau $b = 0 \Rightarrow |a \times b| = 0 = |a| \times |b|$

Untuk $a > 0$ dan $b > 0 \Rightarrow |a \times b| = a \times b = |a| \times |b|$

Untuk $a > 0$ dan $b < 0 \Rightarrow |a \times b| = -ab = a \times (-b) = |a| \times |b|$.
Untuk $a < 0$ dan $b > 0 \Rightarrow |a \times b| = -ab = (-a) \times b = |a||b|$.

Untuk $a < 0$ dan $b < 0 \Rightarrow |a \times b| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$.

Jadi, $|a \times b| = |a| \times |b| \ \forall a,b \in \mathbf{R}$ ⇧

c. Pertama-tama ditunjukkan, bahwa

$c > 0$ dan $|a| \leq c \Rightarrow -c \leq a \leq c$.

$|a| \leq c$ berarti $a \leq c$ untuk $a \geq 0$ atau

$-a \leq c$ untuk $a < 0 \Rightarrow a \geq -c$

Dari $a \leq c$ dan $a \geq -c$ diperoleh $-c \leq a \leq c$. *)

Selanjutnya ditunjukkan, bahwa

$-c \le a \le c \Rightarrow |a| \le c$ untuk $c > 0$.

$-c \le a \le c$ berarti $-c \le a$ atau $a \le c$

$-c \le a \Rightarrow c \ge -a$.

$c \ge a$ dan $c \ge -a$ dapat ditulis $c \ge |a|$ **)

Dari *) dan **), disimpulkan bahwa

jika $c > 0$, maka $|a| \le c \Leftrightarrow -c \le a \le c$. ⇧

d. Dari teorema 2.3.1 c, yaitu jika $c > 0$, maka $|a| \le c$

$\Leftrightarrow -c \le a \le c$ dan ambil $|a| = c$ (why?), maka

$-|a| \le a \le |a| \ \forall a \in \mathbf{R}$. ⇧

Teorema 2.3.1. (Ketidaksamaan setitiga) *$\forall a,b \in \mathbf{R}$ berlaku $|a + b| \le |a| + |b|$*

Bukti. $\forall a \in \mathbf{R}$, $-|a| \le a \le |a|$ *) [teo. 2.3.1.d.]

$\forall b \in \mathbf{R}$, $-|b| \le b \le |b|$ **) [teo. 2.3.1.d.]

*) + **) diperoleh $-(|a| + |b|) \le a + b \le (|a| + |b|)$ xx)

Karena $(|a| + |b|) > 0$, maka berdasar teorema 2.3.1.c. bentuk xx) ditulis menjadi

$|a + b| \le (|a| + |b|)$

Jadi, $\forall a,b \in \mathbf{R}$ berlaku $|a + b| \le |a| + |b|$

Akibat-akibat dari teorema 2.3.1.:

2.3.1.a. $\forall a,b \in \mathbf{R}$ berlaku $\big||a| - |b|\big| \le |a - b|$

2.3.1.b. $\forall a,b \in \mathbf{R}$ berlaku $|a - b| \le |a| + |b|$

2.3.1.c. $\forall a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$ berlaku $|a_1 + a_2 + ... + a_n| \le |a_1| + |a_2| + ...$
$+ |a_n|$

Bukti 2.3.1.a. $|a| = |a - b + b| = |(a - b) + b| \le |a - b| + |b|$

atau $(|a| - |b|) \le |a - b|$ *.

Dengan cara yang sama diperoleh

$|b| - |a| = -(|a| - |b|) \le |b - a|$

Karena,

$|a - b| = |b - a| \ \forall a,b \ \varepsilon \ R$ dan $(|a| - |b|) \ge -(|a| - |b|)$

maka bentuk *. menjadi

$-(|a| - |b|) \le (|a| - |b|) \le |a - b|$ **.

karena $||a| - |b|| = (|a| - |b|)$ atau $-(|a| - |b|)$

maka, bentuk **. menjadi $||a| - |b|| \le |a - b|$

Jadi, $\forall a,b \in \mathbf{R}$ berlaku $||a| - |b|| \le |a - b|$

Bukti. 2.3.1.b. $|a - b| = |a + (-b)| \le |a| + |(-b)|$

karena $|(-b)| = |b|$, maka $|a - b| \le |a| + |b|$

Bukti 2.3.1.c. Sebagai latihan.

Contoh 1. Tentukan himpunan penyelesaian dari $|2x + 5| < 10$, jika $x \in \mathbf{R}$.

Penyelesaian. Karena $10 > 0$, maka $|2x + 5| < 10$ indentik dengan

$-10 < 2x + 5 < 10$.

$-10 < 2x + 5 < 10 \Rightarrow -15 < 2x < 5$

$\Rightarrow -7.5 < x < 2.5$ [dibagi dengan 2]

Jadi, HP = $\{x \in \mathbf{R} \mid -7.5 < x < 2.5\}$

Contoh 2. Tentukan himpunan $B = \{x \mid |x - 1| < |x|\}$.

Penyelesaian. $|x - 1| = \begin{cases} x - 1 \ untuk \ x \ge 1 \\ 1 - x \ untuk \ x < 1 \end{cases}$

$$|x| = \begin{cases} x \ untuk \ x \ge 0 \\ -x \ untuk \ x < 0 \end{cases}$$

Untuk $x > 1 \Rightarrow (x - 1) < x$ pernyataan selalu benar.

Jadi, $(x > 1) \in B$ 1)

Untuk $0 \le x \le 1 \Rightarrow -(x - 1) < x \Rightarrow x > 1/2$

Jadi, $1/2 < x \le 1 \Rightarrow x \in B$. 2)

Untuk $x < 0 \Rightarrow -(x - 1) < x \Rightarrow 1 < 0$ (selalu salah)

Jadi, ϕ 3)

Dari 1), 2) dan 3) diperoleh $B = \{x \mid x > 1/2\}$

Cara 2. $|x - 1| < |x| \Rightarrow |x - 1|^2 < |x|^2$

$\Rightarrow (x - 1)^2 < x^2$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 < x^2$

$\Rightarrow -2x < -1$

$\Rightarrow x > 1/2$

Jadi, B = $\{x \mid x > 1/2\}$

Contoh 3. Misal f adalah fungsi yang didefinisikan dengan f(x) = $\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 1}$ dengan $2 \le x \le 3$. Tentukan suatu konstanta M sehingga $|f(x)| \le M$ dengan $2 \le x \le 3$.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 1} \quad \Rightarrow |f(x)| = \frac{|\ 2x^2 - 3x + 1\ |}{|\ 2x - 1\ |}$$

$$|f(x)| = \frac{|\ x^2 - 3x + 1\ |}{|\ x - 1\ |}$$

pada pembilang $|2x - 3x + 1| \le 2|x| + 3|x| + 1$

pada penyebut $|2x - 1| \ge 2|x| - 1$

agar $|f(x)|$ bernilai maksimal, maka pembilang harus bernilai maksimum dan penyebut bernilai minimal.

Oleh sebab itu

$$|f(x)| = \frac{|\ x^2 - 3x + 1\ |}{|\ x - 1\ |} \qquad \text{dipandang sebagai}$$

$$|f(x)| = \frac{2|\ x^2| - 3|\ x\ | + 1}{2|\ x\ | - 1}$$

jika x = 3 berlaku pada pembilang dan x = 2 berlaku pada penyebut,

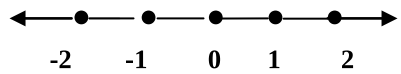
maka $|f(x)| \le 28/3$.

Dengan memilih M = 28/3 dipenuhi $|f(x)| \le M$.

Nilai M = 28/3 mungkin bukan nilai terkecil (selidiki!)

Garis Bilangan

Garis bilangan adalah suatu penyajian bilangan-bilangan real secara geometris oleh titik-titik pada suatu garis lurus dan setiap titik pada garis bilangan mewakili satu bilangan real. Dengan kata lain terdapat korespondensi satu-satu antara himpunan bilangan real dengan titik-titik yang ada pada garis bilangan.



a < b dalam garis bilangan ditunjukkan dengan posisi a berada di sebelah kiri b. Jika $a \in \mathbf{R}$, maka $|a|$ pada garis bilangan diinterpretasikan sebagai jarak dari a ke titik 0 (nol). Sedangkan, jika $a,b \in \mathbf{R}$, maka $|a - b|$ pada garis bilangan diinterpretasikan sebagai jarak dari a ke b.

Definisi. Misal $a \in \mathbf{R}$.

a. Untuk $\varepsilon > 0$, ε neighborhood dari a adalah himpunan $V(a) = \{x \in \mathbf{R} | (|x - a|) < \varepsilon\}$.

b. Neighborhood dari a adalah sebarang himpunan yang memuat ε neighborhood dari a untuk suatu $\varepsilon > 0$.

Teorema 2.3.2. *Misal $a \in \mathbf{R}$, jika $x \in \mathbf{R}$ sedemikian hingga x elemen dari setiap neighborhood dari a maka $x = a$.*

Bukti. $a \in \mathbf{R}$, $x \in V(a) \Rightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.

$x \varepsilon V(a)$ dan $\forall e > 0$ berarti $|x - a| < \varepsilon$.

Karena $\forall e > 0$, maka $|x - a| < \varepsilon$ dapat ditulis dalam bentuk

$0 \leq |x - a| < \varepsilon$, sehingga $|x - a| = 0$ ($\forall \varepsilon > 0, 0 \leq a < \varepsilon \Rightarrow$ $a = 0$).

$|x - a| = 0$, berarti $x = a$.

Jadi, $a \in \mathbf{R}$, $x \in V(a)$, $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x = a$.

Contoh 4. Misal $U = \{ x \mid 0 < x < 1\}$.

Jika $a \in U$, maka $0 < a < 1$.

Jika ε = minimal (a, (1-a)), maka V(a) adalah suatu neighborhood dari a yang termuat dalam U.

Jadi, U neighborhood dari setiap anggotanya.

Contoh 5. Jika I = {x | $0 \leq x \leq 1$, maka I bukan neighborhood dari 0. Karena $\forall\varepsilon > 0$ terdapat $x < 0 \ni x \neq I$ yang memenuhi $|x| < \varepsilon$.

Contoh 6. Jika $a \in \mathbf{R}$ dan $\varepsilon = 0{,}5 \times 10^{-k}$, maka

$|x - a| < \varepsilon$ menyatakan bahwa setelah pembulatan hingga k tempat desimal, a dan x akurat hingga k tempat desimal.

Jadi, $x \varepsilon V\varepsilon (a) \Leftrightarrow$ x mengaproksimasi a sedikitnya k tempat desimal.

Contoh 7. Jika $|x - a| < \varepsilon$ dan $|y - b| < \varepsilon$, maka berdasar ketidaksamaan segitiga didapat

$$\begin{aligned} |(x + y) - (a + b)| &= |(x - a) + (y - b)| \\ &\leq |(x - a)| + |(y - b)| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

L A T I H A N 2.3.

1. Misal $a \in \mathbf{R}$. Tunjukkan bahwa

   a) $|a| = a$ b). $|-a| = a$

2. Jika $a, b \in \mathbf{R}$, tunjukkan bahwa

   $|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$

3. Jika $x, y, z \in \mathbf{R}$, $x \leq z$.

   Tunjukkan bahwa $x < y < z \Leftrightarrow |x - y| + |y - z| = |x - z|$

4. Tentukan semua nilai $x \in \mathbf{R}$ yang memenuhi:

   a. $|x - 1| > |x + 1|$

   b. $|x| + |x + 1| < 2$

5. Jika $a < x < b$ dan $a < y < b$, tunjukkan bahwa $|x - y| < b - a$. Tunjukkan dengan gambar.

6. Tentukan dan buatlah seketsa dari himpunan pasangan urut $(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ yang memenuhi:

   a. $|x| + |y| = 1$

   b. $|x| - |y| = 2$

7. Tentukan dan buatlah seketsa dari himpunan pasangan urut

   $(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ yang memenuhi:

   a. $|x| \leq |y|$

   b. $|xy| \leq 2$

8. Tunjukkan bahwa $|x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$

9. Tunjukkan bahwa, jika U dan V adalah neighborhood dari $a \in \mathbf{R}$, maka $U \cup V$ dan $U \cap V$ neighborhood dari a.

10. Tunjukkan bahwa , jika $a, b \in \mathbf{R}$ dan $a \neq b$, maka ada neighborhood U dari a dan V dari b sehingga $U \cap V = \phi$.

2.4. Aksioma Kelengkapan Dari R.

Dalam seksi ini dibahas aksioma/sifat kelengkapan yang menjamin existensi dari elemen-elemen dalam **R**.

Supremum Dan Infimum

Berikut ini dikenalkan ide tentang batas atas dari suatu himpunan semua bilangan real.

Definisi 2.4.1. Misal $S \subseteq \mathbf{R}$.

a. $u \in \mathbf{R}$ dikatakan batas atas dari S jika $s \leq u \quad \forall s \in S$.

b. $w \in \mathbf{R}$ dikatakan batas bawah dari S jika $w \leq s \quad \forall s \in S$.

Terdapat kemungkinan bahwa S tidak mempunyai batas atas, yaitu bila $S = \mathbf{R}$ (why?). Jika S mempunyai satu batas atas, maka S mempunyai tak hingga batas atas karena jika u batas atas dari S, maka terdapat sebarang v sedemikian hingga $u < v$ merupakan batas atas dari S.

Suatu himpunan mungkin hanya mempunyai batas atas tetapi tidak mempunyai batas bawah dan sebaliknya. Contoh,

$S_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$, S tanpa batas atas.

$S_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 0\}$, S tanpa batas bawah.

Jika $S = \phi$, apakah S mempunyai batas atas atau batas bawah?

Selanjutnya suatu himpunan bagian dari **R** dikatakan terbatas atas jika mempunyai batas atas.

Dengan cara yang sama suatu himpunan bagian dari **R** dikatakan terbatas bawah jika mempunyai batas bawah.

Suatu himpunan bagian dari **R** dikatakan terbatas jika mempunyai batas atas dan batas bawah. Sebaliknya, jika himpunan bagian dari R dikatakan tak terbatas jika hanya mempunyai batas atas atau batas bawah.

Contoh, $S_3 = \{x \,\varepsilon\, R \mid x < 5\}$, S tak terbatas.

$S_4 = \{x \varepsilon R \mid x > 2\}$, S tak terbatas.

Definisi 2.4.2. Misal $S \subseteq \mathbf{R}$.

a. Jika S terbatas atas, maka batas atas disebut supremum (batas atas terkecil (l.u.b)) dari S jika batas atas tersebut kurang dari setiap batas atas yang lain dari S.

b. Jika S terbatas bawah, maka batas bawah disebut infimum (batas bawah terbesar (g.l.b)) dari S jika batas bawah tersebut lebih besar dari setiap batas bawah yang lain dari S.

Definisi batas atas terkecil (supremum) di atas dapat dinyatakan berikut. Bilangan $u \in R$ adalah supremum dari $S \subseteq \mathbf{R}$ bila memenuhi dua syarat berikut:

(1) $s \leq u \ \ \forall s \in S$;

(2) jika $s \leq v \ \forall s \in S$, maka $u \leq v$.

Syarat (1) menyatakan bahwa u batas atas dari S dan syarat (2) menyatakan bahwa u kurang dari setiap batas atas yang lain dari S.

Dengan cara yang sama dapat didefinisikan tentang infimum.

Dari definisi,supremum dari $S \subseteq \mathbf{R}$ adalah tunggal. Misal u_1 dan u_2 adalah supremum dari S dengan $u_1 \neq u_2$.

Dengan syarat (2) diperoleh:

u_1 supremum dari S, maka $u_1 \leq u_2$,

u_2 supremum dari S, maka $u_2 \leq u_1$.

Maka $u_1 = u_2$. Berarti kontradiksi dengan permisalan yaitu u_1 dan u_2 masing-masing supremum dari S.

Jadi, supremum dari S adalah ***tunggal.***

Lemma 1. Suatu batas atas u dari $S \neq \phi$ dan $S \subseteq \mathbf{R}$ adalah supremum dari S jika dan hanya jika terdapat

$s_\varepsilon \in S$ sedemikian hingga $u - \varepsilon < s$.

Bukti. Misal v sebarang batas atas dari S dengan $v \neq u$. Misal $v < u$ dan pilih

$\varepsilon = u - v > 0$ yang mengakibatkan terdapat $s \in S$ sedemikian hingga $v = u - \varepsilon < s$. Timbul kontradiksi, karena v batas atas dari S dan permisalan $v < u$ adalah ***salah***, maka ***yang benar*** $u < v$ atau $u = \sup S$.

Misal $u = \sup S$ dan misal $\varepsilon > 0$. Karena $u - \varepsilon < u$, maka $u - \varepsilon$ bukan batas atas dari S. Akibatnya terdapat suatu elemen $s \in S$ sedemikian hingga $u - \varepsilon < s$.

Contoh 1. Jika S_1 himpunan hingga/finit, maka S mempu-nyai elemen terbesar u dan elemen terkecil w.

Maka $u = \sup. S_1$ dan $w = \inf. S_1$ ($u, w \varepsilon S_1$).

Contoh 2. Misal $S_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$

$0 = \inf. S_2$ dan $1 = \sup. S_2$ dengan $0 \in S_2$ dan $1 \in S_2$.

Contoh 3. Misal $S_3 = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 1\}$, 1 merupakan batas atas dari S_3 dan $1 = \sup. S_3$ (Tunjukkan dengan pertolongan lemma 1), dan $0 = \inf. S_3$.($0 \notin S_3$ dan $1 \notin S_3$)

Contoh 4. $S_4 = \phi$ mempunyai batas atas dan batas bawah tetapi tidak mempunyai supremum dan infimum (why?) Perlu diingat. Tidak selalu supremum dan infimum suatu himpunan merupakan elemen pada himpunan tersebut. Jika supremum suatu himpunan termuat dalam himpunan tersebut, maka supremum tersebut merupakan elemen terbesarnya. Jika infimum suatu himpunan termuat dalam himpunan tersebut, maka infimum tersebut merupakan elemen terkecilnya.

Sifat Supremum Dari R

Sifat Supremum dari **R**. Setiap himpunan dari bilangan real tak kosong yang mempunyai batas atas mempunyai supremum.

Analog. Setiap himpunan dari bilangan real tak kosong yang mempunyai batas bawah mempunyai infimum.

Contoh 1. Misalkan $S \subseteq \mathbf{R}$, $S \neq \phi$ dan $a \in \mathbf{R}$.

$a + S = \{a + x \mid x \in S\}$

Klaim $\sup (a + S) = a + \sup. S$

Misal $u = \sup S$

Maka $x \leq u \ \ \forall x \in S$.

sehingga $a + x \leq a + u$

$a + u$ merupakan batas atas dari $a + S$

$\sup (a + S) \leq a + u$

Jika v batas atas yang lain dari $a + S$, maka

$a + x \leq v \ \ \forall x \in S$.

$a + x \leq v \Rightarrow x \leq v - a \ \forall x \in S$

yang mengakibatkan bahwa $u = \sup S \leq v - a$.

Dengan demikian, $a + u \leq v$

Jadi $a + u = \sup (a + S)$

$= a + \sup S$.

Contoh 2. Misal $D \subseteq R$ dan fungsi-fungsi $f,g : D \rightarrow \mathbf{R}$

Misal $f(D)$ dan $g(D)$ terbatas.

a. Jika $f(x) \leq g(x) \ \ \forall x \in D$, maka $\sup f(D) \leq \sup g(D)$

b. Jika $f(x) \leq g(y) \ \ \forall x,y \in D$, maka $\sup f(D) \leq \inf g(D)$ (Buktikan!).

Sifat ARCHIMIDES

Satu akibat penting dari sifat supremum adalah himpunan semua bilangan asli A tidak terbatas atas.

Berarti diberikan bilangan real x terdapat bilangan asli n (tergantung pada x) sehingga $x < n$. Untuk membuktikan kebenarannya digunakan sifat Archimides.

Sifat Archimides. *Jika $x \in \boldsymbol{R}$, maka ada $n \in \boldsymbol{A}$ sehingga $x < n$.*

Bukti. Misal x batas atas dari **A**. Misal $u = \sup A$.

$u = \sup A \Rightarrow u - 1 < u \Rightarrow \exists m \in \mathbf{A} \ni u - 1 < m$.

$\Rightarrow u < m + 1$.

sedangkan $m + 1 \in \mathbf{A}$, maka u bukan batas atas dari **A**.Terjadi kontradiksi akibat pemisalan x batas atas dari A.

Jadi yang benar adalah $x < n$.

Sifat Archimides dapat dinyatakan dalam beberapa cara. Berikut disajikan tiga ragam dari sifat di atas.

Corolarry 1. Misal y dan z bilangan real positit sejati. Maka

a) $\exists\, n \in \mathbf{A} \ni z < ny$,

b) $\exists\, n \in \mathbf{A} \ni 0 < 1/n < y$,

c) $\exists\, n \in \mathbf{A} \ni n - 1 \leq z < n$.

Bukti. a. Misal $x = z/y$, maka $x > 0$ [karena $y, z \in P$]

$x = z/y > 0$, maka $\exists\, n \in \mathbf{A} \ni x = z/y < n$.

Maka $z/y < n$, atau $z < ny$.

b. $y, z \in P$, misal $z = 1$, maka $1 < ny$.

$1 < ny \Rightarrow 1/n < y$. $n \in \mathbf{A}$, maka $n \in \mathbf{P}$ sehingga $1/n > 0$.

$1/n < y$ dan $1/n > 0$, maka $0 < 1/n < y$.

c. Sifat Archimides meyakinkan kita bahwa $\{m \in \mathbf{A} \mid z < m\}$ himpunan bagian dari **A** bukan himpunan kosong.

Misal $n \in \{m \in A \mid z < m\}$, maka $z < n$, sehingga $n - 1 \leq z < n$.

Eksistensi dari $\sqrt{2}$

Berikut ini akan diberikan gambaran dengan membuktikan adanya bilangan real positif x sehingga $x^2 = 2$.

Teorema 2.4.1. *Terdapat bilangan real positif x sehingga $x^2 = 2$.*

Bukti. Misal $S = \{s \in \mathbf{R} \mid 0 \leq s , s^2 < 2\}$.

Jelas $S \neq \phi$, karena $1 \in S$ dan S terbatas atas oleh 2, jika $t > 2$, maka $t^2 > 4$ menunjukkan bahwa $t \notin S$. S terbatas atas, maka S mempunyai supremum di **R** dan misal $x = \sup S$.

Akan ditunjukkan bahwa $x^2 = 2$, jika tidak $x^2 > 2$ atau $x^2 < 2$.

Pertama-tama anggap bahwa $x^2 < 2$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa hal ini kontradiksi bahwa x adalah batas atas dari S. Untuk mengakhirinya, digunakan berdasar fakta yaitu $\frac{(2-x^2)}{(2x+1)} > 0$ dan digunakan sifat

Archimmides bahwa ***ada*** n $\in$ **A** $\ni 1/n < \frac{(2-x^2)}{(2x+1)}$. Maka $x + 1/n \in S$, karena

$$
\begin{aligned}
(x + 1/n)^2 &= x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \\
&= x + 1/n\,(2x + 1/n) \\
&\leq x^2 + 1/n\,(2x + 1) \\
&< x^2 + (2 - x^2) = 2
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, didapat $x < x + 1/n \in S$, hal ini tidak mungkin karena x adalah batas atas dari S. Oleh sebab itu tidak mungkin didapat $x^2 < 2$.

Sekarang anggap bahwa $x^2 > 2$. Ditunjukkan bahwa ini merupakan batas atas dari S yang lebih kecil dari x, yang bertentangan dengan kenyataan bahwa x adalah supremum dari S. Karena $(x^2 - 2)/2x > 0$, jika dipilih

m $\in$ **A** sedemikian hingga $1/m < (x^2 - 2)/2x$, didapat

$$
\begin{aligned}
(x - 1/m)^2 &= x^2 - 2x/m + 1/m^2 > x^2 - 2x/m \\
&> x^2 - (x^2 - 2) = 2
\end{aligned}
$$

Berarti $x - 1/m > s$ untuk sebarang $s \in S$, hal ini menunjukkan bahwa $x - 1/m$ batas atas dari S, hal ini bertentangan dengan fakta bahwa x supremum dari S. Karena itu tidak mungkin didapat $x^2 > 2$.

Karena kemungkinan-kemungkin $x^2 < 2$ dan $x^2 > 2$ menghasilkan hasil yang tidak diharapkan, maka haruslah $x^2 = 2$.

Kepadatan Dari Bilangan Rasional Dalam R.

Kita baru mengenal bilangan irasional $\sqrt{2}$. Sedangkan, kenyataannya bilangan irasional lebih banyak dari bilangan rasional.Hal ini dibenarkan bahwa himpunan semua bilangan rasional adalah countable/terbilang, sedangan himpunan semua bilangan irasional adalah tak terbilang/uncountable. Himpunan semua bilangan rasional adalah "padat" dalam R, berarti bilangan rasional dapat diperoleh diantara sebarang dua bilangan real yang berbeda..

Teorema Kepadatan. *Jika x dan y bilangan-bilangan real dengan $x < y$, maka terdapat bilangan rasional r sehingga $x < r < y$.*

Bukti. Tanpa mengurangi keumuman, misal $x > 0$. Berdasar sifat Archimides $\exists\, n \in \mathbf{A} \ni n > 1/(y-x)$.untuk suatu n, didapat $ny - nx > 1$.

Berdasar Corollary 1.c jika $nx > 0$, $\exists m \in \mathbf{A} \ni m-1 \leq nx < m$.

Karena $m-1 < nx < m \Rightarrow m < nx + 1$

Selain itu m juga memenuhi $m < ny$. Dari $m \leq nx + 1$ dan $m < ny$ dan $x < y$ diperoleh $m \leq nx .+ 1 < ny$.

Dari $m \leq nx + 1 < ny$., diperoleh $nx < m < ny$.

$nx < m < ny$ identik dengan $x < m/n < y$. Misal $r = m/n$, maka $x < r < y$. □

Diketahui bahwa bilangan-bilangan irasional lebih banyak dari pada bilangan-bilangan rasioanl dan bilangan rasional selalu terdapat diantara dua bilangan real yang berbeda. Akibatnya bilangan irasional juga terletak diantara dua bilangan real yang berbeda.

Corolarry 2. *Jika x dan y bilangan real dengan $x < y$, maka terdapat bilangan irasional z, sehingga $x < z < y$.*

Bukti. Dengan menerapkan teorema kepadatan untuk bilangan real $x/\sqrt{2}$ dan $y/\sqrt{2}$ ***terdapat*** bilangan rasional $r \neq 0$, sehingga $x/\sqrt{2} < r < y/\sqrt{2}$.

$x/\sqrt{2} < r < y/\sqrt{2} \Rightarrow x < r\sqrt{2} < y$

$r\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional, pilih $z = r\sqrt{2}$, maka $x < z < y$.

L A T I H A N 2.4

1. Tentukan supremum dan infimum dari $S = \{1 - (-1)^n/n \mid n \in \mathbf{A}\}$
2. Tunjukkan secara rinci bahwa $T = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$ mempunyai batas bawah tetapi tidak mempunyai batas atas.
3. Tunjukkan bahwa himpunan tak kosong dan berhingga memuat infimum dan supremumnya.
4. JIka $S \subseteq \mathbf{R}$ memuat satu batas atasnya, maka tunjukkan bahwa batas atas tersebut merupakan supremumnya.
5. Misal $S \neq \phi$ dan $S \subseteq \mathbf{R}$. Tunjukkan bahwa $u \in \mathbf{R}$ batas atas dari S jika dan hanya jika $t \in \mathbf{R}$ dan $t > u$ maka $t \neq S$.
6. Misal $S \neq \phi$ dan $S \subseteq \mathbf{R}$. Tunjukkan bahwa $u = \sup S$ jika dan jika $\forall n \in \mathbf{A}$, bilangan $u - 1/n$ bukan batas atas dari S tetapi bilangan $u + 1/n$ batas atas dari S.
7. Misal $S \neq \phi$ dan S terbatas dalam **R**.
   a) Misal $a > 0$ dan misal $aS = \{as \mid s \in S\}$. Buktikan $\inf (aS) = a \inf S$ dan $\sup (aS) = a \sup S$.
   b) Misal $b < 0$ dan misal $bS = \{bs \mid b \in S\}$. Buktikan $\inf (bS) = b \sup S$ dan $\sup (bS) = b \inf S$.
8. Misal X himpunan tak kosong dan misal $f : X \Rightarrow \mathbf{R}$ mempunyai daerah hasil yang terbatas dalam **R**. Jika $a \in \mathbf{R}$, tunjukkan bahwa:
   a) $\sup \{a + f(x) \mid x \in X\} = a + \sup \{f(x) \mid x \in X\}$
   b) $\inf \{a + f(x) \mid x \in X\} = a + \inf \{f(x) \mid x \in X\}$
9. Tunjukkan bahwa ada bilangan real positif y sehingga $y^2 = 3$.
10. Tunjukkan bahwa jika $a > 0$, maka ada bilangan real positif z sehingga $z^2 = a$.
11. Modifikasi teorema kepadatan dengan mengganti $x \leq 0$.
12. Jika u sebarang bilangan dalam **R** dan $x < y$, tunjukkan bahwa ada bilangan rasional r sehingga $x < ru < y$.