3.24. Fungsi Monoton (naik/turun) dan Ekstrem fungsi

3.24.1. Fungsi Monoton

Nilai suatu fungsi pada suatu interval tertentu beragam, ada yang konstan, ada yang turun dan naik dan ada pula yang naik dan turun. Untuk mengenal perilaku dari nilai fungsi ini berikut diberikan suatu definisi.

Definisi 1:

1. Suatu fungsi f yang terdefinisi pada interval I, dikatakan ***tidak turun*** pada I, jika untuk $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$ dan dikatakan ***tidak naik*** pada I, jika untuk $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$.

2. Suatu fungsi f dikatakan monoton pada I, jika f ***tidak naik*** atau ***tidak turun*** pada I.

3.Suatu fungsi f dikatakan ***turun*** pada I, jika untuk $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ maka

4.Suatu fungsi f dikatakan ***naik***, jika untuk $\forall x_1, x_2 \in I$, dan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Contoh: $f(x) = x^2$,***tidak turun*** pada $[0,\infty]$, karena untuk $0 < x_1 < x_2$ berlaku $f(x_1) < f(x_2)$. Hal ini ditunjukkan dengan $f(x_1) = (x_1^2)$ dan $f(x_2) = (x_2^2)$ sedangkan $f(x_1)- f(x_2)= (x_1^2)-(x_2^2)= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0$, sehingga $f(x_1)- f(x_2) < 0$ atau $f(x_1) < f(x_2)$.

$f(x) = x^2$, tidak naik pada $[-\infty,0]$, karena untuk $x_1 < x_2 < 0$ berlaku $f(x_1) > f(x_2)$. Hal ini ditunjukkan dengan $f(x_1) = (x_1^2)$ dan $f(x_2) = (x_2^2)$, sedangkan $f(x_1)- f(x_2)= (x_1^2)- (x_2^2)= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0$, sehingga $f(x_1) - f(x_2) > 0$ atau $f(x_1) > f(x_2)$.

Teorema: Jika fungsi f kontinu pada [a,b] dan diferensiabel pada (a,b). maka:

a. Jika $f'(x) > 0, \forall x \in (a,b)$, maka f tidak turun pada (a,b)
b. Jika $f'(x) < 0, \forall x \in (a,b)$, maka f tidak naik pada (a,b)

Bukti:a.Ambil $x_1, x_2 \in (a,b)$ dan $x_1 < x_2$. Berdasar teorema Langrange terdapat bilangan $c \in (a,b)$ sehingga $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Karena $c \in (a,b)$ maka $f'(c) > 0$ dan $x_2 - x_1 > 0$diperoleh $f(x_2) - f(x_1) > 0$ atau $f(x_2) > f(x_1)$. Karena x_1, x_2 diambil sebarang dari (a,b), dapat disimpulkan bahwa f *tidak turun* pada (a,b).

b.Ambil x_1 , $x_2 \in$ (a,b) dan $x_1 < x_2$. Berdasar teorema Langrange terdapat bilangan $c \in (a,b)$ sehingga $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Karena $c \in (a,b)$ maka $f'(c) < 0$ dan $x_2 - x_1 > 0$ diperoleh $f(x_2) - f(x_1) < 0$ atau $f(x_2) < f(x_1)$. Karena x_1 , x_2 diambil sebarang dari (a,b), dapat disimpulkan bahwa f tidak naik pada (a,b).

Contoh: Diketahui $f(x) = x^2$, maka $f'(x) = 2x$, $\forall x \in (0,\infty)$ dan $f'(x) > 0$. Ambil $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ dan $x_1 < x_2$. Karena $x_1, x_2 \in (0, \infty)$, maka $x_1, x_2 > 0$. Untuk $x_1 < x_2$ diperoleh nilai $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0$. Dengan kata lain $f(x_1) - f(x_2) < 0$ yang berarti $f(x_1) < f(x_2)$. Karena x_1, x_2 diambil sebarang dari $(0, \infty)$) dan $x_1 < x_2$ diperolehf$(x_1) < f(x_2)$, dapat disimpulkan bahwa f tidak turun pada interval $(0, \infty)$.

Apa yang terjadi bila $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$?

$\forall x \in (-\infty, 0)$ berlaku $f'(x) < 0$. Ambil $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ dan $x_1 < x_2$ .Karena $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, maka $x_1, x_2 < 0$. Untuk $x_1 < x_2$ diperoleh nilai $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0$. Berarti $f(x_2) - f(x_1) > 0$ atau $f(x_2) > f(x_1)$. Karena x_1, x_2 elemen sebarang dari $(-\infty, 0)$ dan $x_1 < x_2$ diperoleh $f(x_2) > f(x_1)$, dapat disimpulkan bahwa f tidak naik pada interval $(-\infty, 0)$.

3.24.2. Nilai Ekstrim Suatu Fungsi

Relatif Ekstrim Dari Suatu Fungsi

Telah diketahui, bahwa nilai suatu fungsi pada interval tertentu tidak selalu tetap, kadang-kadang naik atau kadang-kadang turun dan sebaliknya. Dengan sifat yang demikian ini menyebabkan suatu fungsi pada interval tertentu mempunyai nilai maksimal atau nilai minimal. Nilai maksimal atau minimal pada interval tertentu tersebut disebut nilai maksimum relatif atau minimum relatif. Untuk jelasnya perhatikan definisi berikut.

Definisi 2.

1. Suatu fungsi f dikatakan mempunyai ***nilai maksimum relatif***pada $x = c$, jika terdapat interval buka (a,b) yang memuat c dan f terdefinisi pada (a,b) dan berlaku $f(c) \geq f(x)$;$\forall x \in (a,b)$.
2. Suatu fungsi f dikatakan mempunyai ***nilai minimum relatif***pada $x = c$, jika terdapat interval buka (a,b) yang memuat c dan f terdefinisi pada (a,b) dan berlaku $f(c) \leq f(x)$; $\forall x \in (a,b)$.

Teorema 1. Misalkan fungsi f terdefinisi pada (a,b) dan f mencapai ekstrim relatif pada $x = c$, dengan $a < c < b$, $f'(c)$ ada maka $f'(c) = 0$.

Bukti: Berikut dibuktikan f mencapai nilai maksimum pada x = c.f '(c) ada berarti dipenuhi $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$.

Karena f mencapai maksimum relatif pada x = c, untuk x yang bergerak dari kanan mendekati c, berlaku

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \qquad 1)$$

[karena $f(x) - f(c) \leq 0$ dan $x - c > 0$]

atau

$f'(c) \leq 0$ 1')

Jika x bergerak dari kiri mendekati c, maka berlaku

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \qquad 2)$$

[karena $f(x) - f(c) \leq 0$ dan $x - c < 0$]

atau

$f'(c) \geq 0$ 2')

Suatu fungsi f mempunyai limit pada x = c, maka berlaku limit kiri = limit kanan, atau 1') = 2').Disimpulkan $f'(c) = 0$.

Jadi, fungsi f mempunyai maksimum relatif pada x = c, maka f '(c) = 0 ■

Dengan cara seperti di atas dapat didefinisikan uji turunanpertama untuk minimum relatif. (Tunjukkan !)

Kebalikan dari teorema di atas belum tentu benar, artinya jika $f'(c) = 0$ maka f belum tentu mempunyai ektrim pada x = c.

Untuk memperkuat pernyataan ini, perhatikan contoh berikut.

Contoh: Diberikan fungsi f yang didefinisikan dengan $f(x) = (x-2)^3$.

$f(x) = (x-2)^3$ diperoleh $f'(x) = 3\,(x-2)^2.1$

untuk $f'(x) = 0$ diperoleh $x = 2$, akan diselidiki apakah x = 2, sebagai nilai ekstrim.

Untuk $x < 2$ diperoleh $f'(x) > 0$, jadi f(x) tidak turun.

Untuk $x > 2$ diperoleh $f'(x) > 0$, jadi $f(x)$ tidak turun.

Disimpulkan bahwa $x = 2$ bukan nilai ekstrim.

Definisi 3. Misal fungsi f terdefinisi pada [a,b] dan $c \in (a,b)$ terdapat $f'(c) = 0$ atau $f'(c)$ tidak ada, maka $x = c$ disebut bilangan kritis dari f dan $(c,f(c))$ disebut titik kritis dari f.

Definisi 4.

1. Suatu fungsi f dikatakan mempunyai nilai maksimum mutlakpada $x = c$, jika $f(c) \geq f(x) \ \forall x \in D_{(f)}$.
2. Suatu fungsi f dikatakan mempunyai nilai minimum mutlakpada $x = c$, jika $f(c) \leq f(x) \ \forall x \in D_{(f)}$.

3.24.3. Uji Turunan Pertama Untuk Maksimum Relatif/Lokal

Definisi 5. Misal f adalah fungsi yang kontinu pada interval tutup [a,b] dan terdapat $c \in (a,b)$, sehingga $a < c < b$. Fungsi f diferensiabel pada (a,b) kecuali pada $x = c$. Jika $f'(x)$ positif untuk setiap $x < c$ pada (a,b) dan $f'(x)$ negatif untuk setiap $x > c$ pada (a,b), maka fungsi f dikatakan mempunyai maksimum relatif pada $x = c$.

Dengan cara seperti di atas dapat didefinisikan Uji Turunan Pertama Untuk Minimum Relatif.

Contoh 1: Misal $f(x) = x^2 - 10$ yang kontinu pada [-8,8] dan diferensiabel pada (-8,8). Selidiki maksimum/minimum relatifnya.

Diketahui $f(x) = x^2 - 10$, maka $f'(x) = 2x$.

Berdasar teorema 1, fungsi mempunyai ekstrim bila $f'(x) = 0$,dan diperoleh $x = 0$.

Untuk $x \in (0, 8)$, $f'(x) > 0$ dan untuk $x \in (-8, 0)$, $f'(x) < 0$.

Dengan demikianf(x) = $x^2 - 10$, mempunyai nilai minimum relatif yaitu -10 untuk $x = 0$.

Contoh 2. Misal $f(x) = x^4 - 4x^3$ kontinu pada [-3, 6] dan diferensiabel pada (-3,6). Selidiki nilai maksimum dan minimum relatifnya.

Diketahui $f(x) = x^4 - 4x^3$, maka $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ atau $f'(x)= 4x^2 (x - 3)$.

Berdasar teorema 1, fungsi mempunyai ekstrim bila $f'(x) = 0$,dan diperoleh $x = 0$ atau $x = 3$.

Untuk $x \in (-3,0)$, $f'(x) < 0$ dan untuk $x \in (0,3)$, $f'(x) < 0$

Akibatnya, untuk x = 0 diperoleh f(0) = 0 bukan nilai eksrim

Untuk $x \in (0,3)$, $f'(x) < 0$ dan

Untuk $x \in (3,6)$, $f'(x) > 0$.

Jadi, $f(x) = x^4 - 4x^3$ mempunyai nilai minimum relatif sebesar -27 untuk x = 3 pada interval [-3,6].

3.24.4. Uji Turunan Pertama Untuk Kemotononan Suatu Fungsi

Telah diketahui bahwa grafik suatu fungsi pada daerah definisi $D_{(f)}$ bentuknya selalu beragam, kadang naik, kadang turun dan kadang konstan pada interval-interval tertentu. Dengan menggunakan turunan pertama dari fungsi dalam sebarang interval tersebut dapat ditentukan karakteristik dari grafik fungsi tersebut. Teorema pendukung yang digunakannya adalah Teorema Langrange/Nilai rata-rata. Sedangkan teorema ini harus diawali oleh teorema Rolle.

Teorema Rolle. Jika fungsi f kontinu pada selang tutup [a,b] dan diferensiabel pada selang buka (a,b) dan f(a) = f(b) = 0, maka paling sedikit terdapat satu nilai x = c dengan $a < c < b$, sehingga f'(c) = 0.

Bukti. Fungsi f kontinu pada [a,b] dan diferensiabel pada (a,b). Dalam kasus ini tidak diketahui bagaimana karakteristik kekontinuan dari f pada [a,b]. Kemungkinan-kemungkinan f(x) dalam [a,b] adalah:

a). $f(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$,

b). $f(x) > 0 \ \forall x \in (a,b)$,

c). $f(x) < 0 \ \forall x \in (a,b)$.

Jika $f(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$, berarti f(x) konstan. Diketahui bahwa f(a) = f(b)= 0, maka. untuk $c \in (a,b)$ mengakibatkan f(c) = 0 dan f'(c) = 0. ■

Jika $f(x) > 0 \ \forall x \in (a,b)$, hal ini tidak mungkin terjadi karena f(a) = f(b) = 0, sehingga terdapat $c \in (a,b)$ sehingga $f(c) > f(x) \ \forall (x) \in (a,b)$. Karena f(c) merupakan nilai ekstrim, berdasar teorema 1, maka f'(c) = 0. ■

Jika $f(x) < 0 \ \forall x \in (a,b)$, hal ini tidak mungkin terjadi karena f(a) = f(b) = 0, sehingga terdapat $c \in (a,b)$ sehingga $f(c) < f(x) \ \forall (x) \in (a,b)$. Karena f(c) merupakan nilai ekstrim, berdasar teorema 1, maka f'(c) = 0. ■

Dapatkah syarat dari teorema Rolle di atas diperlonggar?

Syarat pada teorema Rolle di atas dapat diperlonggar menjadi

"Jika fungsi f kontinu pada selang tutup [a,b] dan diferensiabel pada selang buka (a,b) dan $f(a) = f(b) = k$ dengan $k \in R$, maka paling sedikit terdapat satu nilai $x = c$ dengan $a < c < b$, sehingga $f'(c) = 0$".

Lebih jelasnya, diberikan contoh berikut.

Misal $f(x) = x^2 + 3$ yang kontinu pada [-5,5] dan diferensiabel pada (-5,5). Jelas $f(-5) = f(5) = 28$ dan terdapat $x = 0 \in (-5,5)$ yang mengakibatkan $f(0) = 3$ merupakan nilai ekstrim, sehingga $f'(0) = 0$.

Tetapi, bila teorema ini diperlonggar menjadi

"Jika fungsi f kontinu pada selang tutup [a,b] dan $f(a) = f(b) = 0$, maka paling sedikit terdapat satu nilai $x = c$ dengan $a < c < b$, sehingga $f'(c) = 0$". Maka teorema ini tidak akan benar. Ingat fungsi yang kontinu pada suatu titik belum menjamin diferensiabel pada titik tersebut (lihat contoh sebelumnya).

Teorema Nilai Rata-rata atau Langrange. Jika fungsi f kontinu pada selang tutup [a, b] dan diferensiabel pada selang buka (a, b), maka paling sedikit terdapat satu nilai $c \in (a,b)$ sehingga

$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)}$ atau $f(b) = f'(c)(b-a) + f(a)$.

Bukti. Misal f adalah fungsi dalam x yang kontinu pada [a,b] dan diferensiabel pada (a,b). Karena f kontinu pada [a,b], maka terdapat A(a,f(a)) dan B(b,f(b)) pada fungsi tersebut. Jika titik A(a, f(a)) dan titik B(b, f(b)) dihubungkan, maka terdapat persamaan garis

$g(x) = f(a) + [f(b) – f(a)](x - a)$ dengan $a \leq x \leq b$.

Bangun suatu fungsi $F(x) = f(x) - g(x)$ dengan $a \leq x \leq b$.

Jadi, $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)}(x - a)$

Untuk $x = a \longrightarrow F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)}(a - a) = 0$

Untuk $x = b \longrightarrow F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)}(b - a) = 0$

Karena fungsi-fungsi f dan g kontinu pada [a,b] dan diferensiabel pada (a,b), maka fungsi F juga kontinu pada [a,b] dan diferensiabel pada (a,b).

Fungsi F kontinu pada [a,b] dan diferensiabel pada (a,b) juga F(a) = F(b) = 0, berarti fungsi F telah memenuhi persyaratan teorema Rolle. Akibatnya, terdapatc dengan a < c < b sehingga F'(c) = 0.

Diketahui $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}(x - a)$, maka

$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}$

Karena terdapat c dengan a < c < b, maka

$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}$.

Diketahui F'(c) = 0, maka $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}$ ■

Teorema Nilai rata-rata atau Langrange dapat juga dibuktikan secara geometris. (Kerjakan sebagai latihan !)

Contoh. Misal $f(x) = 5 - x^2$ yang kontinu pada [-3,7] dan diferensiabel pada (-3,7). Diperoleh f(-3) = - 4 dan f(7) = - 44. Gradien/tangen arah dari titik-titik (-3,-4) dan (7, -44) $= \frac{-44-(-4)}{7-(-3)} = -4$.

Diketahui $f(x) = 5 - x^2$, maka f'(x) = -2x. Karena x = c dengan -3 < c < 7, berlaku f'(c) = -2c.

Akhirnya didapat hubungan -2c = -4, sehingga c = 2.

Jadi, jika $f(x) = 5 - x^2$ yang kontinu pada [-3,7] dan diferensiabel pada (-3,7), maka terdapat c = 2, sehingga

f'(2) = -2. 2

f'(2) = -4

Teorema 2. Jika fungsi f kontinu pada [a,b] dan diferensiabel pada (a,b), maka:

1. Jika $f'(x) > 0, \forall x \in (a,b)$, maka ftidak turun pada (a,b)
2. Jika $f'(x) < 0, \forall x \in (a,b)$, maka f tidak naik pada (a,b)

Bukti:

1. Ambil x_1, $x_2 \in (a,b)$ dan $x_1 < x_2$. Berdasar teorema Langrange $\exists$ c $\in$ (a,b) $\ni f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.

Karena c $\in$ (a,b), $f'(c) > 0$ dan $(x_2 - x_1) > 0$ diperoleh $f(x_2) - f(x_1) > 0$ atau $f(x_2) > f(x_1)$. Karena x_1, x_2 diambil sebarang dari (a,b), dapat disimpulkan bahwa ftidak turun pada (a,b).

2. Ambil x_1, $x_2 \in (a,b)$ dan $x_1 < x_2$. Berdasar teorema Langrange $\exists$ c $\in$ (a,b) $\ni f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.

Karena c $\in$ (a,b), $f'(c) < 0$ dan $(x_2 - x_1) > 0$ diperoleh $f(x_2) - f(x_1) < 0$ atau $f(x_2) < f(x_1)$. Karena x_1, $x_2$diambil sebarang dari (a,b), dapat disimpulkan bahwa f tidak naik pada (a,b).

3.24.5. Uji Turunan Kedua Untuk Maksimum Relatif/Lokal

Misal f adalah fungsi yang kontinu pada [a,b] dan terdapat c $\in$ (a,b), sehingga a < c < b. Fungsi f diferensiabel pada (a,b) kecuali pada x = c dan f'(c) = 0, f"(c) ada. Jika f"(c) <0 maka fungsi f dikatakan mempunyai maksimum relatif pada x = c.

Teorema 3.Misal f adalah suatu fungsi yang diferensiabel pada $D_{(f)}$ dan misal f'(a) = 0, maka fungsi pada x = a mempunyai nilai maksimum jika f"(a) < 0 dan mempunyai nilai minimum jika f"(x) > 0.

Bukti: Pada kesempatan ini dibuktikan bagianpertama, yaitu: Diketahui bahwa f'(a) = 0 dan f"(a) < 0.

Karena itu menunjukkan bahwa f"(x) kontinu pada interval kecil yang memuat x = a, dengan demikian terdapat interval tutup kecil yang memuat x = a yang semua titik-titiknya turunan keduanya f"(x) bertanda negatif.

Karena f"(x) adalah turunan pertama dari turunan pertama, maka f"(x) = (f'(x))', yang memenuhi syarat f'(x) < 0 bahwa f'(x) turun pada interval tutup yang memuat a. Tetapi dalam interval ini diperoleh f'(a) = 0, dan diperoleh f'(x) > 0 bila x < a serta bila x > a diperoleh f'(x); dengan kata lain turunan f'(x) berubah tanda dari positif (+) ke negatif (-) bila melalui titik x = a, hal ini berarti fungsi mempnyai nilai maksimum pada titik x = a. ∎

Bukti bagian kedua sebagai latihan.

Contoh 1: Diberikan $f(x) = 1/3\ x^3 + x^2 - 6x + 8$, tentukan:

a. titik-titik kritis,

b. interval-interval dimana $y = f(x)$ tidak naik dan tidak turun dan,

c. nilai maksimum dan minimum dari y.

Penyelesaian: a. $f(x) = 1/3\ x^3 + x^2 - 6x + 8$, maka

$f'(x) = x^2 + 2x - 6 = (x + 3)(x - 2)$

untuk $f'(x) = 0$, diperoleh nilai kritis -3 dan 2

∴ titik-titik kritisnya (-3, 26) dan (2, 2 2/3)

b. Bila $f'(x) > 0$, f tidak turun dan untuk $f'(x) < 0$, f tidak naik.

Bila $x < -3$ diperoleh $f'(x) > 0$, berarti f naik.

Bila $-3 < x < 2$ diperoleh $f'(x) < 0$, berarti f turun.

Bila $x > 2$ diperoleh $f'(x) > 0$, berarti f naik.

c. Kita uji nilai-nilai kritis untuk mengetahui nilai ekstrim.

Pada $x = -3$, $f'(x)$ berganti tanda dari + ke - , f mempunyai nilai maksimum 26.

Pada $x = 2$, $f'(x)$ berganti tanda dari - ke +, f mempunyai nilai minimum 2 2/3.

Contoh 2: Selidiki apakah kurva $y = x^3 - 8$ mempunyai nilai ekstrim.

Penyelesaian: $y = f(x) = x^3 - 8$, diperoleh $f'(x) = 3\ x^2$.

Untuk $f'(x) = 0$ diperoleh $x = 0$.

Selanjutnya diselidiki apakah $x = 0$ nilai kritis dari y

Untuk $x < 0$ diperoleh $f'(x) > 0$, berarti y naik.

Untuk $x > 0$ diperoleh $f'(x) > 0$, berarti y naik.

Dengan demikian $x = 0$ bukan nilai kritis, dengan demikian y tidak mempunyai nilai ekstrim.

Contoh 3: Dengan menggunakan uji turunan kedua untuk mengetahui nilai ekstrim dari $f(x) = y = x(12 - 2x)^2$

Penyelesaian: $f(x) = y = x(12 - 2x)^2$

$= 144x – 48\ x^2 + 4\ x^3$, maka

$f'(x) = 12x^2 - 96x + 144$

$= 12(x^2 - 8x + 12)$

$= 12(x - 6)(x-2)$

Nilai-nilai kritis 2 dan 6

$f''(x) = 12(2x - 8)$

$= 24(x - 4)$

sehingga $f''(2) < 0$.

Karena $f'(2) = 0$ dan $f''(2) < 0$, maka y mempunyai nilai maksimal sebesar 128 untuk $x = 2$ (why?).

Diketahui $f''(x) = 24(x - 4)$, maka $f''(6) > 0$

Karena $f'(6) = 0$ dan $f''(6) > 0$, maka y mempunyai nilai minimal 0 untuk $x = 6$ (why?).

LATIHAN

Tentukan interval-interval di mana fungsi-fungsi berikut merupakan fungsi tidak naik dan fungsi tidak turun.

1. $f(x) = x^2 - 2x$
2. $f(x) = x^2 - 8x + 15$*
3. $f(x) = x^2 + 6x – 6$*
4. $f(x) = 4 - 2x + x^2$*
5. $f(x) = x^3$
6. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$*
7. $f(x) = 3x – x^3$
8. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$
10. $f(x) = 1 + x – x^2 - x^3$
11. Tunjukkan bahwa $\forall x \in R$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 10$ tidak pernah turun.
12. Suatu hiperbola mempunyai persamaan $y = \frac{c^2}{x}$, $x \neq 0$ danc suatu konstanta.

Tunjukkan bahwa gradien pada setiap garis-singgung hiperbola adalah negatif.

Tentukan persamaan garis-singgung pada titik A(c.c).

Tunjukkan bahwa jika M dan N titik-titik potong garissinggung itu dengan sumbu-sumbu koordinat, maka A adalahtengah-tengah MN.

13. Diberikan $y = f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$, tentukan

a. interval-interval dimana y naik dan turun, dan

b. nilai-nilai ekstrim dari y.

14. Diberikan $y = f(x) = 4x^3 – 15x^2 - + 12x + 9$

a. selidiki nilai ekstrim dari y,

b. tentukan interval-interval dimana y naik dan turun.

15. Diberikan $y = f(x) = 2x^4 - 2x^2$

a. dimana y mempunyai nilai ekstrim? dan

b. tentukan interval-interval dimana y naik dan turun.

Dengan menggunakan turunan pertama selidiki nilai maksimum relatif dan minimum relatif dari:

16. $f(x) = x^2 + 2x - 3$ untuk $-10 \leq x \leq 10$

17. $f(x) = (x^2 - 4)^4$ untuk $-10 \leq x \leq 10$

18. $f(x) = x^2 - 9$ untuk $-6 \leq x \leq 6$

19. $f(x) = x^2 - 6x + 9$ untuk $0 \leq x \leq 5$*

20. $f(x) = 2x^3$ untuk $-3 \leq x \leq 3$*

21. $f(x) = 4x - x^3$ untuk $-2 \leq x \leq 6$*

22. $f(x) = 2x - x^2$ untuk $-1/2 \leq x \leq 1/2$*

Gunakan turunan pertama dan turunan kedua untuk menyelidiki nilai maksimum dan minimum relatif fungsi-fungsi berikut.

23. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$ untuk $-10 \leq x \leq 10$*

24. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$ untuk $-10 \leq x \leq 10$*

Selidiki apakah soal 11.dan 12. mempunyai minimum atau maksimum mutlak, jika domainnya pada R.