3.25. Teorema de L'Hospital

3.26.FungsiCekung (keatas/ kebawah) danTitikBelok

Padabagianinidibahaskecekungandarigrafiksuatufungsi yang bernilaitunggaldanterdeferensiabelpadasuatuselangterbuka.

Definisi 1.Suatukurvadisebutcembungkeatasataucekungkebawahpada interval buka (a,b), jikasemuatitikpadakurvaterletak***dibawah***darisebarangtangenpada interval bukatersebut.

Suatukurvadisebutcembungkebawahataucekungkeataspada interval buka (a,b), jikasemuatitikpadakurvaterletak***di atas***darisebarangtangenpada interval bukatersebut.

Secarasimbolik

Kurva y = f(x) cembungkeataspada (a,b) $\Rightarrow$ f'(xi) > f(xi) untuk$\forall$(xi) $\in$ (a,b).

Kurva y = f(x) cekungkeataspada (a,b) $\Rightarrow$ f'(xi) < f(xi) untuk$\forall$(xi) $\in$ (a,b).

DefinisiKecekungan yang lain.

Suatufungsi f yang turunanpertamanyanaikpadaseluruh interval buka (a,b) disebutcekungkeatas.

Suatufungsi f yang turunanpertamanyaturunpadaseluruh interval buka (a,b) disebutcembungkeatas.

Teorema 1.Jikasemuatitikpada interval buka (a,b) turunankeduadarifungsif(x) negatifatauf"(x) < 0, kurva y = f(x) pada interval iniadalahcembungkeatas.

Jikasemuatitikpada interval buka (a,b) turunankeduadarifungsi f(x) positif f"(x) > 0, kurva y = f(x) pada interval iniadalahcekungkeatas.

Bukti.Pertama kali dibuktikanjikasemuatitikpada interval buka (a,b) turunankeduadarifungsi f(x) negatif f"(x) < 0, kurva y = f(x) pada interval iniadalahcembungkeatas. Untukmembuktikanteoremainiditunjukkanbahwa f'(xi) < f(xi), $\forall$xi $\in$ (a,b). Pada interval buka (a,b) dengan $a \neq b$, maka paling sedikitterdapatsatutitik $x = x_1 \in$ (a,b).

Persamaankurvaadalahberbentuk y = f(x) (1)

Persamaan yang melaluititik $(x_1, f(x_1)$ bergradien $f'(x_1)$

adalah

$\bar{y} - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$atau

$\bar{y} = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$ (2)

Persamaan (1) dikurangdenganpersamaan (2) diperoleh

$$y - \bar{y} = f(x) - f(x_1) – f'(x_1) (x – x_1)$$

DenganmenggunakanteoremaLangrangepada $f(x) - f(x_1)$ diperoleh

$$y - \bar{y} = f'(c) (x – x_1) – f'(x_1) (x – x_1)$$

(cterletakantara x dan x_1) atau_

$$y - \bar{y} = \{f'(c) – f'(x_1)\} (x – x_1)$$

Denganmenggunakanteorema Lagrange pada $f'(c) – f'(x_1)$ diperoleh

$$y - \bar{y} = f''(c_1) (c-x_1) (x – x_1) \qquad (3)$$

($c_1$terletakantara c dan x_1)

Pertama-tama diujikasusbila $x > x_1$. Dalamkasusini, $x_1 < c < x$ diperoleh $c > x_1$atau $c – x_1 > 0$ dan $x > x_1$atau $x – x_1 > 0$.

Diketahui $f''(c) < 0$, makapersamaan (3) menjadi

$$y - \bar{y} < 0 \text{ atau } y > \bar{y} \qquad (4)$$

Selanjutnyadiujikasusbila $x < x_1$. Dalamkasusini $x < c < x_1$, dengan $x - x_1 < 0$ atau $x_1 > x$ dan $c – x_1 < 0$ atau $x_1 > c$.

Karena $f''(c) < 0$, makapersamaan (3) menjadi

$$y - \bar{y} < 0 \text{ atau } y > \bar{y} \qquad (5)$$

Karena xdan $x_1$sebarangtitikpadakurva $y = f(x)$, dengandemikianterbuktibahwasetiaptitikpadakurvatersebutterletak di bawahtangendarikurvatersebut. Jadi, kurva $y = f(x)$ pada interval buka (a,b) adalahcembungkeatas. ■

Untukbukti "jikasemuatitikpada interval buka (a,b) turunankeduadarifungsi f(x) positif $f''(x) > 0$, kurva $y = f(x)$ pada interval iniadalahcekungkeatas" identikdenganbukti di atasdiberikansebagailatihan.

Contoh 1: Tentukan interval/selangcekungkeatasdancekungkebawah/ cembungkeatasdari

a) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 24x + 12$ dengan $D_{(f)}$ (-1,1).

b) $f(x) = 1/3 x - 2x - 6x + 2$ dengan $D_{(f)}$ (-1, 1)

Penyelesaian:

a) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 24x + 12$

$f'(x) = 6x^2 - 12x - 24$

$f''(x) = 12x - 12$

Untuk $f''(x) < 0$ diperoleh $12x - 12 < 0 \Leftrightarrow x < 1$

Hal inimenunjukkanbahwakurva $y = f(x)$ cekungkebawah/cembungkeataspada interval $(-\infty, 1)$.

Untuk $f''(x) > 0$ diperoleh $12x - 12 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Hal inimenunjukkanbahwakurva $y = f(x)$ cekungkeatas/ cembungkebawah pada interval $(1, \infty)$.

b) $f(x) = 1/3\ x^3 - 2x^2 - 6x + 2$

$f'(x) = x^2 - 4x - 6$

$f''(x) = 2x - 4$

Untuk $f''(x) < 0$ diperoleh $2x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 2$

Hal inimenunjukkanbahwakurva $y = f(x)$ cekungkebawah/cembungkeatas pada interval $(-\infty, 2)$.

Untuk $f''(x) > 0$ diperoleh $2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

Hal inimenunjukkanbahwakurva $y = f(x)$ cekungkeatas/cembungkebawah pada interval $(2, \infty)$.

Definisititikbelok

Misalfungsi f kontinupadaselang[a,b] danterdeferensialpadaselang (a,b). Jika $c \in (a,b)$, makatitik $(c, f(c))$ disebuttitikbelokdarikurva $y = f(x)$, jikakurvamempunyaigarissinggungpadatitiktersebut. Jika c dan x pada interval (a,b) akanberlakusalahsatudaripernyataanberikut:

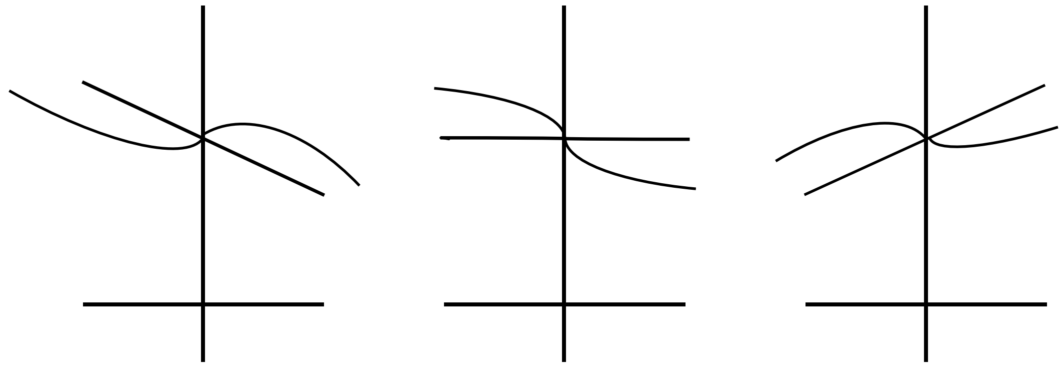
i) $f''(x) < 0$ untuk $x < c$ dan$f''(x) > 0$ untuk $x > c$ atau

ii) $f''(x) > 0$ untuk $x > c$ dan $f''(x) < 0$ untuk $x > c$.

Definisititikbelok (yang lain).

Suatutitik yang memisahkanbagiancekungkebawahpadasuatukurva yang kontinudaribagiancekungkeatas di sebuttitikbelokdarikurvatersebut.

Sebagaiillustrasidarititikbelokperhatikangambarberikut



Teorema 2.Misal fsuatufungsi yang diferensiabelpadaselangbuka (a,b) yang memuat c. Jika (c, f(c)) titikbelokkurva y = f(x) dan f''(c) ada, maka f''(c) = 0.

Bukti: Misalfungsi g memenuhi g(x) = f'(x) danberlaku g'(x) = f''(x). Karena (c,f(c)) titikbelokgarigrafik f, maka f'(x) berubahtandapada (c,f(c)), sehingga g jugaberubahtandapada x = c. Berdasarteoremarelatifekstrim, g mencapairelatifekstrimpada x = c dan c merupakanbilangan/nilaikritisdari g.

Karena g'(c) = f''(c) dan f''(c) ada, maka g'(c) ada. g'(c) adadanpada x = c fungsi g mencapairelatifekstrimberarti

g'(c) = 0. Akibatnya, f''(c) = 0. ■

Catatan:

f''(c) = 0 belummenjaminfungsi f mempunyaititikbelokpadatitik (c, f(c)).

Contoh :Diberikan $y = x^2 - 6x + 2$, selidikiapakah y mempunyaititikbelok.

Penyelesaian: $y = x^2 - 6x + 2$, maka

y' = 4 x - 6

y'' = 12 x

y'' = 0, didapat x = 0.

Selanjutnyadiselidikipada x = 0

Untuk x < 0, diperoleh y' < 0, y turun

Untuk x >0 ,diperoleh y' < 0 , y turun

Jadi y mempunyaititikbelokpada (0,2).

L A T I H A N

Tentukan interval-interval dimanagrafikdarifungsi-fungsi yang diberikanberikutinimerupakangrafik yang cekungkeatasataucekungkebawah.

1. $f(x) = x^2 + 9x$
2. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x – 3$
3. $f(x) = x^3 - 8x^2 + 24x$
4. $f(x) = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 - 5x – 20$
5. $f(x) = 1 + x - x^2 – x^3$
6. $f(x) = 1/3\ x^3 – x^2 – 3x + 3$
7. $f(x) = x^3 – 6\ x^2 + 5$
8. $f(x) = x^3(4 – x)$
9. Tentukantitikbelokdari $y = x^3 - x^4$
10. Tentukantitikbelokdari $y = x^4 - 6\ x^3 + 12\ x^2 - 8x$
11. Tunjukkanbahwatitik-titikbelokdari $y = \frac{a-x}{x^2+a^2}$ terletak pada garis lurus dan tentukan persamaan garis tersebut.
12. Tentukantitikbelokdari $y = 1 + \tanh 3x$.
13. Diketahui $f(x) = ax^2 + bx$, tentukannilai a dan b sehinggagrafik y mempunyaititikbelokpada (1,2).
14. Tentukana,b,cpada $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ agar grafik y mempunyaititikbelok di (1,2) dangaris-singgungpadatitikinibergradien -2.
15. Tentukan a, b, c, d dan e pada $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx + dx^2 + e$ agar grafik y mempunyaititikbelok di (1, -1).