2.5. S e l a n g / I n t e r v a l

Himpunan bagian dari bilangan Real yang merupakan himpunan takhingga dapat dinyatakan dalam bentuk selang. Misalkan a, b $\in$ **R** dan a < b, maka

1) $(a,b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ disebut selang buka.

   $(a,b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ adalah terbatas

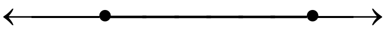
   a dan b titik-titik ujung dari selang buka (a,b), tetapi a dan b *tidak termasuk dalam selang.*

a b

2) $[a,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x \le b\}$ disebut selang tutup.

   $[a,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x \le b\}$ adalah terbatas.

   a dan b titik-titik ujung dari selang tutup [a,b], tetapi a dan b *termasuk dalam selang*.

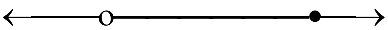


a b

3) $(a,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \le b\}$ disebut selang setengah buka.

   $(a,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \le b\}$ adalah terbatas.

   a dan b titik-titik ujung dari selang setengah buka (a,b], tetapi a *tidak pada selang* dan b *termasuk dalam selang*.

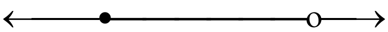


a b

4) $[a,b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x < b\}$ disebut selang setengah buka.

   $[a,b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x < b\}$ adalah terbatas.

   a dan b titik-titik ujung dari selang setengah buka [a,b), a *terletak dalam selang* sedangkan b *tidak pada selang.*

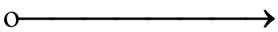


a b

5) $(b,+\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > b\}$ disebut selang buka tak hingga

   $(b,+\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > b\}$ adalah tak terbatas.

   $(b,+\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > b\}$ merupakan sinar buka.

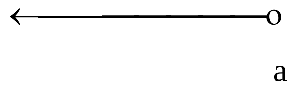


b

6) $(-\infty,a) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < a\}$ disebut selang buka tak hingga

$(-\infty,a) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < a\}$ adalah tak terbatas.

$(-\infty,a) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < a\}$ merupakan sinar buka.

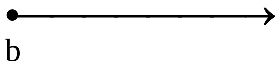


7) $[b,+\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq b\}$ disebut selang tutup tak hingga

$[b,+\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq b\}$ adalah tak terbatas.

$[b,+\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq b\}$ merupakan sinar tutup.

b merupakan titik pangkal dari sinar.

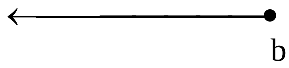


8) $(-\infty,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\}$ disebut selang tutup tak hingga

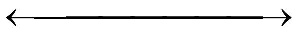
$(-\infty,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\}$ adalah tak terbatas.

$(-\infty,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\}$ merupakan sinar tutup.

b merupakan titik pangkal dari sinar.



9) $(-\infty.+\infty) = \mathbf{R}$ adalah tak terbatas.



10) $(a,a) = \{\ \}$ adalah terbatas.

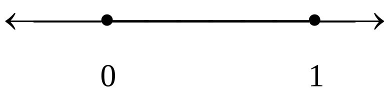
$[a,a] = \{a\}$ adalah terbatas.

a termasuk dalam selang.

Selain selang di atas dikenal juga

$[0,1] = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$

adalah selang satuan dan dilambangkan dengan I.



I n t e r va l - m e n y a r a n g

Suatu barisan interval-interval I , $n \in A$ merupakan interval menyarang jika memenuhi hal berikut:

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$$

Contoh 1: I = [0, 1/n]

I_1 = [0, 1], I_2 = [0, 1/2] , I_3 =[0, 1/3] ... I_n = [0, 1/n]

Jelas I_n merupakan sarang interval, karena memenuhi $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ... \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq ...$

Lebih lanjut $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ = {0} dan $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = I_1$.

Contoh 2: I = (0, 1/n)

I_1 = (0, 1), I_2 = (0, 1/2) , I_3 =(0, 1/3) ... I_n = (0, 1/n)

Jelas I_n merupakan sarang interval, karena memenuhi

$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ... \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq ...$

Lebih lanjut $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ = { } (why?) dan $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = I_1$.

Sifat interval menyarang

Jika $I_n = [a_n , b_n]$ adalah sarang barisan dari interval-interval tertutup dan terbatas, maka terdapat bilangan $\xi \in$ **R** sedemikian hingga $\xi \in I_n$ untuk setiap n elemen **A**. Selanjutnya, jika panjang dari $I_n = b_n - a_n$ yang memenuhi inf.$\{b_n - a_n \mid n \in$ **A**$\}$ = 0, maka elemen sekutu dari ξ adalah tunggal.

Bukti :

Karena interval-interval adalah sarang interval, didapat hubungan $I_n \subseteq I$, $\forall n \in$ **A** dan berlaku $a_n \leq b_1$, $\forall n \in$ **A**. Himpunan $\{a_n \mid n \in$ **A**$\}$ tak kosong (why?) dan terbatas atas, misal ξ merupakan supremumnya, sehingga dipenuhi a $\leq \xi$ $\forall n \in$ **A**.

Claim $\xi \leq b_n$, Vn $\in$ **A**. Hal ini dapat dijelaskan dengan menunjukkan untuk nilai n tertentu b_n merupakan batas atas dari himpunan $\{a_k \mid k \in$ **A**$\}$.

Selanjutnya ditinjau dua kasus.

i) jika n $\leq$ k, diperoleh $I_n \supseteq I_k$ yang mengakibatkan $a_k \leq b_k \leq b_n$.

ii) jika k < n , diperoleh $I_k \supseteq I_n$ yang mengakibatkan $a_k \leq a_n \leq b_n$.

Dengan demikian, disimpulkan bahwa $a_k \leq b_n$; $\forall k \in$ **A** dan b_n merupakan batas atas dari himpunan

$\{a_k \mid k \in$ **A**$\}$. Oleh sebab itu, x $\leq$ b , $\forall n \in$ **A**.

Karena a $\leq$ x $\leq$ b , $\forall n \in$ **A**, diperoleh x $\in$ I , $\forall n \in$ **A**.

Jika h = inf.{b | n $\in$ **A**} dan analog dengan cara di atas dapat ditunjukkan bahwa a $\leq$ x $\forall n \in$ A dan x $\leq$ h.

Kenyataan menunjukkan bahwa

$x \in I$, $\forall n \in$ **A** jika dan hanya jika $x \le x \le h$.

Sekarang, anggap bahwa inf $\{(b - a) \mid n \in$ **A**$\} = 0$.

Maka untuk sebarang $\varepsilon > 0 \; \exists \; n \in$ **A** $\ni$ $0 \le h - x \le b - a < \varepsilon$.

Menunjuk teorema sebelummya berarti $h - x = 0$ yang mengakibatkan $h = x$ satu-satunya titik pada I , $\forall n \in$ **A**.

Titik Kumpul/Timbun (Cluster Points)

Definisi Titik $x \in$ **R** adalah titik kumpul dari $S \subseteq$ **R**, jika $\forall \varepsilon$ persekitaran $V\varepsilon = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ dari x memuat ***paling sedikit satu titik*** dari S ***yang berbeda dengan x.***

Definisi ini dapat dinyatakan dengan

Suatu titik x merupakan titik kumpul dari $S \subseteq$ **R**, jika $\forall n \in$ **A** $\exists\, s \in S \ni 0 < |x - s| < 1/n$.

Contoh :

1. Jika S adalah himpunan buka (0,1), maka setiap titik pada interval tutup [0,1] merupakan titik kumpul dai S .
   ternyata bahwa 0 dan 1 yang bukan elemen S juga merupakan titik kumpulnya.
2. Himpunan terhingga tidak mempunyai titik kumpul (why). Himpunan tak terbatas S = A juga tidak mempunyai titik kumpul (why?).
3. Himpunan $S = \{1/n \mid n \in$ **A**$\}$ hanya mempunyai satu titik kumpul yaitu 0 sedangkan tidak satu titikpun dalam S yang merupakan titik kumpulnya

Teorema Bolzano-Weierstrass. *Setiap himpunan bagian dari **R** yang tak hingga dan terbatas paling sedikit mempunyai satu titik kumpul.*

Bukti. Anggap S adalah himpunan terbatas dan tak hingga. Karena S terbatas maka ada interval tertutup dan terbatas $I_1 = [a,b]$ yang termuat S.

Pembuktian dimulai dengan cara membagi interval atas dua bagian yang sama secara berulang agar menghasilkan barisan sarang interval yang titik sekutunya merupakan titik timbun dari S.

Pertama-tama I_1 ***dibagi dua*** yang sama menjadi sub interval [a, ½ (a+b)] dan [½(a+b), b], nyatakan satu dari sub interval ini memuat titik-titik tak hingga dari S. Jika hal ini ***tidak dipenuhi*** menunjukkan bahwa S merupakan ***gabungan dari dua himpunan terhingga*** dan S himpunan terhingga.

Misalkan I_2 merupakan sub interval sedemikian hingga $S \cap I_2$ adalah tak hingga. Sekarang I_2 dibagi ats dua bagian yang sama seperti sebelumnya, dipilih satu dari sub interval baru misal I_3 sedemikian hingga $S \cap I_3$ adalah infinite set. Cara ini diteruskan hingga diperoleh $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$ dari sarang interval-interval yang terbatas sedemikian hingga panjang dari I_n adalah $I_n = (b-a)/2^{n-1}$ dan $S \cap I_n$ merupakan infinite set $\forall n \in \mathbf{A}$.

Dengan menerapkan sifat sarang interval diperoleh suatu titik $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Tinggal menunjukkan bahwa x adalah titik kumpul dari S. Diberikan $\varepsilon > 0$ dan $V\varepsilon = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ adalah ε neighborhood dari x, pilih $n \in \mathbf{A}$ sedemikian hingga $(b-a)/2^{n-1} < \varepsilon$. Karena $x \in I_n$ dan $I_n < \varepsilon$, hal ini menunjukkan bahwa $I_n \subseteq V$ (Why?).

Karena I_n memuat titik-titik tak hingga dari S dan ε neighborhood V memuat titik-titik tak hingga dari S yang berbeda dengan x, maka x adalah titik kumpul dari S .

L A T I H A N 2.5

1. Jika I = [a,b] dan I' = [a',b'] adalah interval-interval tertutup dan terbatas dalam **R**, tunjukkan bahwa $I \subseteq I' \Leftrightarrow a \leq a'$ dan $b \leq b'$.

2. Misal I = [0, 1/n] untuk n $\in$ **A**. Tunjukkan bahwa jika x > 0, maka $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

3. Tunjukkan bahwa, jika J_n = (0,1/n) untuk n $\in$ **A**, maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \phi$

4. Tunjukkan bahwa semua titik dalam [0,1] merupakan titik kumpul dari (0,1).

5. Tunjukkan secara rinci bahwa himpunan terhingga tidak mempunyai titik kumpul.

2.6. Himpunan Buka dan Tutup dalam R (Open and closed set in R).

Definisi 2.6.1

i. Misal G $\subseteq$ **R** dikatakan himpunan buka dalam **R** jika $\forall \in$ G $\exists$ persekitaran V dari x $\ni$ V $\subseteq$ G.

ii. Misal F $\subseteq$ **R** dikatakan himpunan tutup dalam **R** jika komplemen ℓ (F) = **R** - F adalah himpunan buka dalam **R**.

Untuk menunjukkan bahwa G $\subseteq$ R adalah ***himpunan buka*** cukup dengan menunjukkan bahwa setiap titik dalam G mempunyai persekitaran ε yang termuat dalam G. Kenyataannya, G himpunan buka dalam **R** ***jika dan hanya jika*** setiap x $\in$ G, terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga $(x-\varepsilon , x+\varepsilon)$ termuat dalam G. Untuk menunjukkan bahwa

F $\subseteq$ **R** adalah ***himpunan tutup*** cukup dengan menunjukkan bahwa setiap titik y $\notin$ F mempunyai persekitaran yang disjoint dengan F. Kenyataannya, F adalah himpunan tutup dalam **R** ***jika dan hanya jika*** terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga $F \cap (y - \varepsilon , y + \varepsilon) = \phi$.

Contoh:

a. Himpunan bilangan real **R** = $(-\infty, + \infty)$ adalah himpuan buka.

b. B = [0, 1) bukan himpunan buka (why?)

c. C = [0,1] bukan himpunan buka (why?)

d. C = [0,1] adalah himpunan tutup, sebab komplemen dari C adalah himpuan buka.

e. Himpunan kosong merupakan himpunan buka, juga himpunan tutup (why?).

3.6.1. Sifat-sifat Himpunan Buka

*a. Gabungan dari sebarang koleksi dari himpunan bagian buka dalam **R** adalah himpunan buka.*

b. Irisan dari koleksi terhingga dari himpunan buka adalah himpunan buka.

Bukti.

a. Misal $\{ G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$ adalah famili dari himpunan-himpunan buka dalam **R** dan misal G adalah gabungannya. Pandang x $\in$ G. Berdasar definisi gabungan x $\in G\lambda_0$ untuk suatu $\lambda_0 \in \Lambda$. Karena $G\lambda_0$ himpunan buka , maka ada neighborhood V dari x sedemikian hingga $V \subseteq G\lambda_0$. Diketahui $G\lambda_0 \subseteq G$ dan $V \subseteq G$ serta x diambil sebarang elemen dari G, sehingga dapat disimpulkan bahwa G adalah himpunan buka. Dengan demikian gabungan dari koleksi himpunan buka adalah himpunan buka.

b. Anggap G_1 dan G_2 adalah himpunan buka dan $G = G_1 \cap G_2$. Untuk membuktikan G adalah himpunan buka, pandang x adalah sebarang elemen dari G. Berdasar definisi irisan himpunan, $x \in G$ berarti $x \in G_1$ dan $x \in G_2$. Karena G_1 buka, maka ada $\varepsilon_1 > 0$ sedemikian hingga $(x - \varepsilon_1 , x + \varepsilon_1)$ termuat dalam G_1 (why?) Karena G_2 juga himpunan buka maka ada $\varepsilon_2 > 0$ sedemikian hingga $(x - \varepsilon_2 , x + \varepsilon_2)$ termuat dalam G_2 . Selanjutnya ambil $\varepsilon > 0$ yang paling kecil dari ε_1 dan ε_2 . Dengan demikian terdapat ε neighborhood dari x, yaitu $U = (x - \varepsilon , x + \varepsilon)$ yang memenuhi $U \subseteq G_1$ dan $U \subseteq G_2$. Dengan demikian dipenuhi $x \in U \subseteq G$. Karena x diambil sebarang dari G dan memenuhi $x \in U \subseteq G$, maka disimpulkan bahwa G adalah himpunan buka di **R**.

Tinggal menunjukkan apakah interseksi dari sebarang himpunan buka yang berhingga juga merupakan himpunan buka dan apakah interseksi dari himpunan buka yang tak hingga juga merupakan himpunan buka.

Corolarry 2.6.1:

a. Interseksi dari sebarang koleksi himpunan tutup dalam ***R*** *adalah himpunan tutup.*

b. Gabungan dari koleksi himpunan tutup yang terhingga dalam ***R*** *adalah himpunan tutup.*

Bukti. Jika $\{F\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$ adalah famili dari himpunan tutup dalam **R**dan $F = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F\lambda$,

maka $\mathcal{C}(F_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}(F_\lambda)$ adalah gabungan dari himpunan-himpunan buka dalam **R**. Dengan demikian $\mathcal{C}(F_\lambda)$ adalah himpunan buka dalam R. Berdasar teorema sebelumnya yaitu jika $\mathcal{C}(F_\lambda)$ merupakan himpunan buka dalam **R**, maka F adalah himpunan tutup dalam **R**.

Jadi, interseksi dari sebarang koleksi himpunan tutup dalam **R** adalah himpunan tutup.

a. Jika $F_1 , F_2 , ..., F_n$ adalah himpunan-himpunan tutup dalam **R**, dan misal $F = F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n$. Dengan menerapkan identitas dari de Morgan, maka **komplemen dari** F adalah $\mathcal{C}(F) = \mathcal{C}(F_1) \cap \mathcal{C}(F_2) ... \cap \mathcal{C}(F_n)$.
Karena $\mathcal{C}(F_i)$ adalah himpunan buka dan berdasar teorema sebelumnya, maka $\mathcal{C}(F)$ merupakan himpunan buka. Dengan demikian F adalah himpunan tutup.

Contoh-contoh :

1. Misal $G_n = (0, 1 + 1/n)$ untuk $n \in$ **A,** maka G_n adalah himpunan buka untuk setiap $n \in$ **A.** Tetapi irisan $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ adalah interval (0, 1] dalam **R** yang tidak buka.
2. Misal $F_n = [1/n, 1]$ untuk $n \in$ **A,** maka F_n adalah himpunan tutup untuk setiap $n \in$ **A.** Tetapi gabungan

   $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ adalah interval (0, 1] dalam **R** yang tidak tutup.

Teorema 2.6.2. *Himpunan bagian dari **R** adalah buka **jika dan hanya jika** gabungan dari interval-interval buka terpisah adalah terbilang.*

Bukti. Anggap bahwa $G \neq \phi$ adalah himpunan buka dalam **R** dan $x \in G$.
Misal $A_x = \{a \in \mathbf{R} \mid (a,x]\} \subseteq G$ dan $B_x = \{ b \in \mathbf{R} \mid [x, b)\} \subseteq G$. Karena G buka, maka A_x dan B_x tidak kosong (why?)

Jika himpunan A_x terbatas bawah, ditentukan $a_x = \inf A_x$. Jika A_x tak terbatas bawah, ditentukan $a_x = -\infty$

Dalam kasus yang lain $a_x \neq G$. Jika himpunan B_x terbatas atas, ditentukan $b_x = \sup B_x$. Jika B_x tak terbatas atas, ditentukan $b_x = +\infty$. Dalam kasus yang lain $b_x \neq G$.

Sekarang didefinisikan $I_x = (a_x , b_x)$, jelas bahwa I_x adalah ***interval buka*** yang memuat x.

Klaim bahwa $I_x \subseteq G$, untuk menunjukkan bahwa $I_x \subseteq G$ dimisalkan $y \in I_x$ dan anggap bahwa $y < x$. Berdasar definisi dari a_x , maka terdapat $a' \in A$ dengan $a' < y$, hal ini menunjukkan bahwa $y \in (a', y\,] \subseteq G$. Dengan cara yang sama, jika $y \in I_x$ dan $x < y$ maka ada $b' \in B_x$ dengan $y < b'$ dan dipenuhi bahwa $y \in [x, b') \subseteq G$. Karena y sebarang elemen dari I_x , maka $I_x \subseteq G$. Karena x adalah sebarang elemen dari G, disimpulkan bahwa $\bigcup_{x \in G} I_x \subseteq G$.

Pada sisi lain, karena $\forall x \in G$ terdapat interval buka I_x dengan $x \in I_x \subseteq G$, juga $G \subseteq \bigcup_{x \in G} I_x$ akibatnya $G = \bigcup_{x \in G} I_x$.

Klaim bahwa jika $x, y \in G$ dan $x \neq y$, maka $I_x = I_y$ atau $I_x \cap I_y = \phi$ Untuk membuktikannya anggap bahwa

$z \in I_x \cap I_y$, yang memenuhi $a_x < z < b_y$ dan $a_y < z < b_x$. (Why?) Akan ditunjukkan bahwa $a_x = a_y$, .Jika $a_x \neq a_y$, maka berdasar sifat Trichotomy (i) $a_x < a_y$ atau (ii) $a_y < a_x$. Dalam kasus (i) maka $a_y \in I_x = (a_x, b_x) \subseteq G$.

Hal ini menimbulkan kontradiksi dengan kenyataan bahwa $a_x \notin G$. Karena haruslah $a_x = a_y$ dengan cara dan alasan yang sama diperoleh $b_x = b_y$. Kesimpulan yang diambil jika $I_x \cap 1_y \neq \phi$, maka $I_x = I_y$

Tinggal menunjukkan bahwa koleksi dari interval-interval yang berbeda $\{Ix : x \in G\}$adalah terbilang. Untuk menunjukkannya diambil himpunan bilangan rasional **Q** = $\{r_1, r_2, ..., r_n, ...\}$ Berdasar teorema kepadatan bahwa ***setiap interval*** $\boldsymbol{I_x}$ memuat bilangan-bilangan rasioanal; **dipilih** bilangan rasional dalam I_x dengan indeks n terkecil dalam **Q** yaitu $r_{n(x)} \in$ **Q** *sedemikian hingga* $I_{r\,n(x)} = I_x$., dan n(x) adalah indeks terkecil n sedemikian hingga $I_{rn} = I_x$. Dengan demikian himpunan dari interval-interval yang berbeda I_x , $x \in G$ berko-respoindensi 1-1 dengan suatu himpunan bagian dalam **A (**segmen awal dalam **A) .** Hal ini menunjukkan bahwa himpunan dari nterval-interval yang berbeda adalah terbilang/countable.

Teorema 2.6.3. *Himpunan bagian dari **R** adalah te tutup jika dan hanya jika memuat semua titik kumpulnya.*

Bukti. Misal F adalah suatu himpunan tertutup dalam R and misal x adalah suatu titik kumpul dalam F; akan ditunjukkan bahwa $x \in F$. Jika $x \notin \Phi$, maka *x* adalah elemen dari himpunan buka ℓ (F). Karena itu terdapat suatu persekitaran V dari x sedemikian hingga $V \subseteq \ell(F)$. Akibatnya $V \cap F = \phi$. hal ini menunjukkan suatu kontradiksi dengan asumsi bahwa x is suatu titik kumpul dalam F.

Akibatnya, misal F adalah suatu himpunan bagian dalam **R** memuat semua semua titik kumpulnya; selanjutnya ditunjukkan bahwa ℓ(F) adalah buka. Jika $y \in \ell(F)$, maka y bukan suatu titik kumpul dalam F.

Berdasar definisi dari titik kumpul terdapat suatu persekitaran $V\varepsilon$ dari y yang tidak memuat satu titik dari F (kecuali y). Karena $y \in \ell(F)$, maka $V_\in \subseteq \ell(F)$. Karena y sebarang elemen dari ℓ (F), dapat disimpulkan bahwa ℓ(F) adalah himpunan buka dalam **R.** Oleh sebab itu F adalah himpunan tutup dalam **R**.

L A T I H A N 2.6

1. Jika $x \in (0,1)$ dan misal ε_x. Tunjukkan bahwa jika $|u - x| < \varepsilon_x$ maka $u \in (0,1)$.

2. Tunjukkan bahwa $(0,1] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(0, 1+1/n)$.

3. Jika G himpunan bukan dan $x \in G$. Tunjukkan bahwa A_x dan B_x adalah himpunan-himpunan tidak kosong!
   (Gunakan teorema 2.6.2)
4. Suatu titik $x \in \mathbf{R}$ dikatakan *titik dalam* dari $A \subseteq \mathbf{R}$ maka terdapat suatu persekitaran V dari x sedemikian hingga $V \subseteq A$. Tunjukkan bahwa $A \subseteq \mathbf{R}$ ***adalah buka*** *jika dan hanya jika* setiap titik dari A merupakan suatu titik dalam dari A.
5. Suatu titik $x \in \mathbf{R}$ *dikatakan titik batas dari* $A \subseteq \mathbf{R}$ jika setiap persekitaran V dari x memuat titik-titik dari A dan titik-titik dari $\mathcal{C}$ (A). Tunjukkan bahwa himpunan A dan komplemennya ($\mathcal{C}$ (A)) mempunya titik batas yang sama.
6. Tunjukkan bahwa suatu himpunan $G \subseteq \mathbf{R}$ adalah **buka** jika dan hanya jika tidak memuat sebarang titik batasnya.
7. Tunjukkan bahwa suatu himpunan $G \subseteq \mathbf{R}$ adalah **tertutup** jika dan hanya jika memuat semua titik-titik batasnya.
8. Jika $A \subseteq \mathbf{R}$, misal A^o adalah **gabungan** dari semua himpunan-himpunan buka yang termuat dalam A. Himpunan A^o disebut interior dari A. Tunjukkan bahwa A^o suatu himpunan buka, yaitu himpunan buka terbesat yang termuat dalam A, dan titik z elemen A^o jika dan hanya jika z merupakan suatu titik dalam dari A.
9. Misal A, B adalah himpunan-himpunan bagian dalam **R.** Tunjukkan bahwa $A^o \subseteq A$ dan

   $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$.

10. Jika $A \subseteq \mathbf{R}$,, misal $\mathbf{A}^-$ adalah irisan dari semua himpunan tertutup yang memuat A; himpunan A^- disebut ***closur/penutup/selimut*** dari A. Tunjukkan bahwa A^- adalah himpunan tertutup, yaitu himpunan tertutup terkecil yang memuat AS, dan w adalah elemen dari A^- jika dan hanya jika suatu titik dalam atau titik batas dari A.