3.16. Turunanfungsiinversi

Padabab II telahdibahastentangfungsiinversi. Fungsi yang mempunyaifungsiinversi, tentumempunyaiturunan. Karenatidaksemuafungsimempunyaifungsiturunan, berikutdisajikanteorema yang berkaitandenganfungsiinversitersebut.

Teorema :Misalkan f adalahfungsisatu-satu yang terdefinisipada interval buka I danterdeferensialkanpada x ϵ I dengan f'(x) $\neq$ 0. Misal g = f^{-1} ,danmisal y = f(x). Maka g terdeferensialkanpada y, dan g'(y) = $\frac{1}{f'(x)}$.

Bukti: Pilih h, sehingga (x+h) $\in$ I, danmisalkanf(x+h) - f(x) = k; k $\neq$ 0 dan h $\neq$ 0, karena f fungsisatu-satu, makadiperoleh

f(x+h) = f(x)+ k = y + k dan g(y+k) = g((x+h)) = x + h

karena g = f^{-1} , dan

$$h = g(y+k) - x = g(y+k) - g(y)$$

Karena g kontinupada y, untuk k $\rightarrow$ 0 mengakibatkan h $\rightarrow$ 0.

Dengandemikian

$$g'(y) = \underset{k \rightarrow 0}{\text{limit}} \frac{g(y+k) - g(y)}{k}$$

$$= \underset{h \rightarrow 0}{\text{limit}} \frac{h}{(f(x+h) - f(x)}$$

$$= \underset{h \rightarrow 0}{\text{limit}} \frac{1}{\frac{(f(x+h) - f(x)}{h}}$$ [∵pembilangdanpenyebutdibagidengan h]

$$= \frac{1}{f'(x)} \qquad \blacksquare$$

Contoh 1: Tentukanturunanfungsiinversidarif(x) = 3x - 5

Penyelesaian: Misal f(x) = y, maka y = 3x - 5 atau

3x = y + 5 $\Rightarrow$ x = g(y) = 1/3 y + 5/3

dx/dy = g'(y) = 1/3 (1)

f(x) = 3x - 5 $\Rightarrow$ f'(x) = dy/dx = 3 (2) dari (1) dan (2) terbuktibahwa dx/dy = $\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ ■

Contoh 2: Tentukanturunanfungsiinversidari f(x) = $x^2 - 9$

Penyelesaian: Misal f(x) = y, maka y = $x^2 - 9$ atau

$x^2 = y + 9 \Rightarrow x = g(y) = \pm\sqrt{y+9}$

$\Leftrightarrow g(y) = \pm (y + 9)^{1/2}$, didapat

$g'(y) = \pm\frac{1}{2} (y + 9)^{\frac{1}{2}-1} . \frac{d}{dy}(y + 9)$

$g'(y) = \pm\frac{1}{2} (y + 9)^{-\frac{1}{2}} . 1$

$g'(y) = \pm\frac{1}{2\sqrt{y+9}}$ berarti

$g'(y) = dx/dy = \frac{1}{2\sqrt{y+9}}$ atau $g'(y) = dx/dy = -\frac{1}{2\sqrt{y+9}}$

Pilih $g'(y) = dx/dy = \frac{1}{2\sqrt{y+9}}$ dansubstitusikandengan y = $x^2 - 9$

diperoleh $g'(y) = dx/dy = \frac{1}{2\sqrt{(x^2-9)+9}} = \frac{1}{2x}$ (1)

$f(x) = x^2 - 9 \Rightarrow f'(x) = dy/dx = 2x$ (2)

dari (1) dan (2) terbuktibahwa dx/dy = $\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ ■

3.17. Turunaninversifungsitrigonometri

Fungsi-fungsiinversidarifungsiTrigonometriadalah:

1.Fungsiinversidari f(x) = sin x adalah $\sin^{-1} x$ = arc sin x

2. Fungsiinversidarif(x) = cos x adalah$\cos^{-1} x$= arc cos x

3. Fungsiinversidarif(x) = tan x adalah$\tan^{-1} x$= arctan x

4. Fungsiinversidarif(x) = ctg x adalah$\text{ctg}^{-1} x$= arc ctg x

5. Fungsiinversidarif(x) = sec x adalah$\sec^{-1} x$ = arc sec x

6. Fungsiinversidarif(x) = csc x adalah$\csc^{-1} x$ = arc csc x

3.17.1. TURUNAN FUNGSI INVERSI DARI FUNGSI SINUS

Jika f(x) = arc sin x, maka f'(x) =$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Bukti: f(x) = arc sin x atau y = arc sin x

y = arc sin xidentikdengan x = sin y

x = sin y$\Rightarrow\frac{dx}{dy}$ = cos y   1)

x = sin y $\Rightarrow$ x^2 = $\sin^2$ y

$\cos^2$ y + $\sin^2$ y = 1 $\Rightarrow$ $\cos^2$ y = 1 - $\sin^2$ yataucos^2 y = 1 – x^2.

$\cos^2$ y = 1 – $x^2$$\Rightarrow$cos y = $\pm\sqrt{1-x^2}$

sehinggapersamaan 1) menjadi

$\frac{dx}{dy}$ = cos y = $\pm\sqrt{1-x^2}$

Pilihcos y = $\sqrt{1-x^2}$, didapat

$\frac{dy}{dx}$ =$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ■

Perluasannya

f(x) = arc sin g(x) $\Rightarrow$ f'(x) = $\frac{g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}$

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = arc sin g(x) menjadi y = arc sin u

g(x) = u didapat$\frac{du}{dx}$ = g'(x)

y = arc sin u identikdengan u = sin y

u = sin y$\Rightarrow\frac{du}{dy}$ = cos y   1)

u = sin y $\Rightarrow$ u^2 = $\sin^2$ y

$\cos^2$ y + $\sin^2$ y = 1 $\Rightarrow$ $\cos^2$ y = 1 -$\sin^2$ y

$\cos^2$ y = 1 - $\sin^2$ y $\Leftrightarrow$$\cos^2$ y = 1 -u^2

$\cos^2$ y = 1 -$u^2$$\Rightarrow$cos y =$\pm\sqrt{1-u^2}$

Pilihcos y = $\sqrt{1-u^2}$

sehinggapersamaan 1) menjadi

$\frac{du}{dy}$ = cos y =$\sqrt{1 - u^2}$dan$\frac{dy}{du}$ = $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

denganaturanrantaidiperoleh

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$. g'(x) atau

$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-u^2}}$ ■

Contoh 1: Tentukan f'(x), jika f(x) = arc sin $5x^2$

Penyelesaian: Misal u = g(x) = $5x^2$diperoleh

$\frac{du}{dx}$= g'(x) = 10 x

y = arc sin $5x^2$menjadi y = arc sin u

y = arc sin u identikdengan u = sin y dan $u^2 = \sin^2 y$

$\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \Rightarrow \cos^2 y = 1 - \sin^2 y$

$\Leftrightarrow \cos^2 y = 1 - u^2$ataucos y =$\pm\sqrt{1 - u^2}$

Pilih cos y = $\sqrt{1 - u^2}$

$\frac{du}{dy}$= cos y = $\sqrt{1 - u^2}$, didapat $\frac{dy}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} .10\ x = \frac{10\,x}{\sqrt{1-u^2}}$ atau

$= \frac{10\,x}{\sqrt{1-(5x^2)^2}}$

Contoh 2: Tentukan f'(x), jika f(x) = arc sin x/a

Penyelsaian: Misal u = g(x) = x/a, maka

du/dx = g'(x) = 1/a

y = arc sin u identikdengan u = sin y

$\frac{du}{dy}$ = cos y = $\sqrt{1 - u^2}$, didapat $\frac{dy}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$. 1/aatau

$= \frac{1}{a\sqrt{1-u^2}}$atau

$= \dfrac{1}{a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$ atau

$= \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

3.17.2. Turunanfungsiinversidarifungsicosinus

Jika f(x) = arc cos x, maka $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Bukti: f(x) = arc cos x   atauy = arc cos x

y = arc cos x identikdengan x = cos y

$\dfrac{dx}{dy} = -\sin y$ 1)

$x = \cos y \Rightarrow x^2 = \cos^2 y$

$\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \Rightarrow \sin^2 y = 1 - \cos^2 y$

$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y \Leftrightarrow \sin y = \pm\sqrt{1-x^2}$

Pilih $\sin y = \sqrt{1-x^2}$

sehinggapersamaan 1) menjadi

$\dfrac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1-x^2}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ ■

Perluasannya

$f(x) = \text{arc cos } g(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}$ (Buktikan!)

Contoh 1: Tentukan f'(x), jika f(x) = arc cosx^2 .

Penyelesaian. Misal $u = g(x) = x^2$diperoleh

$\dfrac{du}{dx} = g'(x) = 2x$

y = arc cos x   menjadi y = arc cos u

y = arc cos u identikdengan u = cos y

$u = \cos y \Rightarrow u^2 = \cos^2 y$

$\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \Rightarrow \sin^2 y = 1 - \cos^2 y$

$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y \Leftrightarrow \sin^2 y = 1 - u^2$

diperolehsin y =$\pm\sqrt{1 - u^2}$

Pilih sin y = $\sqrt{1 - u^2}$

$\frac{du}{dy}$= - sin y = - $\sqrt{1 - u^2}$diperoleh$\frac{dy}{du} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot 2x$ atau

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$

Contoh 2. Tentukan f'(x), jika f(x) = arc cos (4x - 5)

Penyelesaian. Misal u = g(x) = (4x - 5) diperoleh

$\frac{du}{dx}$ = g'(x) = 4

y = arc cos (4x - 5) menjadi y = arc cos u

y = arc cos u identikdengan u = cos y

u = cos y$\Rightarrow u^2 = \cos^2 y$

$\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \Rightarrow \sin^2 y = 1 - \cos^2 y$

$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y \Leftrightarrow \sin^2 y = 1 - u^2$

diperolehsin y =$\pm\sqrt{1 - u^2}$

Pilih sin y = $\sqrt{1 - u^2}$

$\frac{du}{dy}$= - sin y = - $\sqrt{1 - u^2}$diperoleh$\frac{dy}{du} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot 4$ atau

$\frac{dy}{dx} = \frac{-4}{\sqrt{1-(4x-5)^2}}$

3.17.3. Turunanfungsiinversidarifungsitangen

Jika f(x) = arc tan x, maka f'(x) =$\frac{1}{1+x^2}$

Bukti: f(x) = arc tan xatau y = arc tan x

y = arc tan xidentikdengan x = tan y

$\frac{dx}{dy}$ = $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+x^2}$ ■

Perluasannya

Jika f(x) = arc tan g(x), maka f'(x) = $\frac{g'(x)}{1+[g(x)]^2}$

Bukti: Misal u = g(x) dan f(x) = y, maka

f(x) = arc tan g(x) menjadi y = arc tan u

y = arc tan u identikdengan u = tan y

Dari u = g(x) diperoleh $\frac{du}{dx}$ = g'(x)

Dari u = tan y diperoleh $\frac{du}{dy}$ = $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + u^2$

$\frac{du}{dy} = 1 + u^2 \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{1+u^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+u^2}$. g'(x) , [aturanrantai]

$= \frac{g'(x)}{1+u^2}$.atau

$= \frac{g'(x)}{1+(g(x))^2}$ ■

Contoh :Tentukanturunanpertamadari

a. f(x) = arc tan (3x - 5)

b. f(x) = arc tan 5 x^2

Penyelesaian:

Denganmenerapkanrumus di atasdiperoleh

a. f'(x) = $\frac{g'(x)}{1+(g(x))^2} = \frac{3}{1+(3x-5)^2}$atau

$= \frac{3}{9x^2 - 30x + 26}$

b. f'(x) = $\frac{g'(x)}{1+(g(x))^2}$ = $\frac{10\,x}{1+(5x^2)^2}$

= $\frac{10\,x}{1+25\,x^4}$

3.17.4.Turunanfungsiinversidarifungsicotangen

Jika f(x) = arc cot x, maka f'(x) = $\frac{-1}{1+x^2}$ (Buktikan!)

Perluasannya:

Jika f(x) = arc ctg(x),maka f'(x) = $\frac{-g'(x)}{1+(g(x))^2}$

(Buktikan!)

3.17.5. Turunanfungsiinversidarifungsi secant

f(x) = arc sec x ⟶ f'(x) = $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(Buktikan!)

Perluasannya

f(x) = arc sec g(x) ⟶ f'(x) = $\frac{g'(x)}{g(x)\sqrt{(g(x))^2-1}}$

(Buktikan!)

3.17.6. TurunanFungsiinversidarifungsi cosecant

f(x) = arc csc x⟶ f'(x) = $\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (Buktikan !)

Perluasannya

f(x) = arc cscg(x) ⟶ f'(x) = $\frac{-g'(x)}{g(x)\sqrt{(g(x))^2-1}}$

(Buktikan!)

3.18. Turunanfungsiinversidarifungsihiperbolik

Fungsi-fungsiinversidarifungsiHiperbolikadalah:

1. Fungsiinversidari f(x) = sinh x adalah $\sinh^{-1}$ x = arc sinh x
2. Fungsiinversidari f(x) = cosh x adalah $\cosh^{-1}$ x= arc cosh x
3. Fungsiinversidari f(x) = tanh x adalah $\tanh^{-1}$x= arctanh x
4. Fungsiinversidari f(x) = ctgh x adalah ctgh^{-1} x= arc ctgh x
5. Fungsiinversidari f(x) = sech x adalah sech^{-1} x = arc sech x
6. Fungsiinversidari f(x) = csch x adalah csch^{-1} x = arc csch x

3.18.1. Turunanfungsiinversidarifungsisinus hiperbolik

f(x) = arc sinh x ⟶ f'(x) =$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Bukti: f(x) = arc sinh x atauy = arc sinh x

y = arc sinh x identikdengan x = sinh y

$\frac{dx}{dy}$ = cosh y 1)

x = sinhy ⇒ $x^2 = \sinh^2 y$

$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \Rightarrow \cosh^2 y = 1 + x^2$

$\cosh^2 y = 1 + x^2 \Rightarrow \cosh y = \pm\sqrt{1+x^2}$

Pilihcosh y= $\sqrt{1+x^2}$

sehinggapersamaan 1) menjadi

$\frac{dx}{dy} = \cosh y = \sqrt{1+x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ■

Perluasannya

f(x) = arc sinh g(x) ⟶ f'(x) =$\frac{g'(x)}{\sqrt{1+(g(x))^2}}$

(Buktikan!).

Contoh 1: Tentukan f'(x), jika f(x) = arc sinh (ax + b)

Penyelesaian

Misal g(x) = ax + b, maka g' (x) = a, sehingga

f'(x) = $\frac{a}{\sqrt{1+(ax+b)^2}}$

Contoh 2: Tentukan f'(x), jika f(x) = arc sinh (ax^2 + bx + c)

Penyelesaian

Misal g(x)=(ax^2 + bx + c), maka g'(x) = 2 ax + b, sehingga

$$f'(x) = \frac{2\,ax + b}{\sqrt{1 + (ax^2 + bx + c)^2}}$$

3.18.2. TurunanFungsiinversidarifungsicosinushiperbolik

$$f(x) = \text{arc cosh } x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Bukti: f(x) = arc cosh x atauy = arc cosh x

y = arc cosh x identikdengan x = cosh y

$\frac{dx}{dy}$ = sinh y 1)

x = coshy ⇒ $x^2 = \cosh^2 y$

$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \Rightarrow \sinh^2 y = x^2 - 1$

$\sinh^2 y = x^2 - 1 \Rightarrow \sinh y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$

Pilihsinh y = $\sqrt{x^2 - 1}$

sehinggapersamaan 1) menjadi

$$\frac{dx}{dy} = \sinh y = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad ■$$

Perluasannya

$$f(x) = \text{arch cosh } g(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{g'(x)1}{\sqrt{(g(x))^2 - 1}}$$

(Buktikan!)

Contoh 1: Tentukan f'(x), jika f(x) = arc cosh $3x^2$.

Penyelesaian. Misal g(x) = $3x^2$, maka g'(x) = 6 x

$$f'(x) = \frac{6\,x}{\sqrt{(3x^2)^2 - 1}}$$

Contoh 2: Tentukan f'(x), jika f(x) = arc cosh (sech x).

Penyelesaian. Misal g(x) = sech x, maka g'(x) = sec xh .tanh x f'(x) = $\frac{\text{sech } x.\tanh x}{\sqrt{(\text{sech } x)^2 - 1}}$ $= \frac{\text{sech } x.\tanh x}{\tanh x}$

= sech x

3.18.3. Turunanfungsiinversidarifungsitangent hiperbolik

f(x) = arc tanh x ⟶ f'(x) = $\frac{1}{1 - x^2}$

Bukti: f(x) = arc tanh x atau y = arc tanh x

y = arc tanh x identikdengan x = tanh y

$\frac{dx}{dy}$ = sech^2 y = 1 –tanh^{2}y = 1 - x^2

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1 - X^2}$ ■

Perluasannya

f(x) = arc tanh g(x) ⟶ f'(x) = $\frac{g'(x)}{1-(g(x))^2}$

Bukti: Misal u = g(x) dan f(x) = y, maka

f(x) = arc tanh g(x) menjadi y = arc tanh u

y = arc tanh u identikdengan u = tanh y

Dari u = g(x) diperoleh $\frac{du}{dx}$ = g'(x)

Dari u = tan y diperoleh $\frac{du}{dy}$ = sech^2 y = 1 –tan^2 y = 1 – u^2

$\frac{dy}{du} = \frac{1}{1 - u^2}$, dengan aturan rantai diperoleh

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - u^2}$ .g'(x) atau

$= \frac{g'(x)}{1-(g(x))^2}$ ■

Contoh 1: Tentukan f'(x), jika f(x) = arc tanh 3 x^2

Penyelesaian. f'(x) = $\frac{6x}{1-(3x^2)^2}$

Contoh 2: Tentukan f'(x), jikaf(x) = 2 arc tanh (tan 1/2 x)

Penyelesaian. Misal g(x) = tanh (1/2 x), maka g '(x) = ½ . sech^2 (1/2 x)

$$f'(x) = 2\frac{\frac{1}{2}\text{sech}^2\left(\frac{1}{2}x\right)}{1-(\tan h(\frac{1}{2}x))^2}$$

$$= \frac{\text{sech}^2\left(\frac{1}{2}x\right)}{1-(\tanh^2(\frac{1}{2}x)}$$

3.18.4. Turunanfungsiinversidarifungsicotangenthiperbolik

f(x) = arc coth x ⇒ f'(x) = $\frac{-1}{1-x^2}$. (Buktikan!)

Perluasannya:

f(x) = arc coth g(x) ⇒f'(x) =$\frac{-g'(x)}{1-[g(x)]^2}$

(Buktikan!)

3.18.5. Turunanfungsiinversidarifungsi secant hiperbolik

f(x) = arc sech x ⟶ f'(x) =$\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$. (Buktikan!)

Perluasannya

f(x) = arc sech g(x) ⟶ f'(x) =$\frac{-g'(x)}{g(x)\sqrt{1-[g(x)]^2}}$

(Buktikan!)

3.18.6. Turunanfungsiinversidarifungsi cosecant hiperbolik

f(x) = arc csch x ⟶ f'(x) = $\frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$. (Buktikan!)

Perluasannya

f(x) = arc cschg(x) ⟶ f'(x) = $\frac{-g'(x)}{g(x)\sqrt{1+[g(x)]^2}}$

(Buktikan!)