BilanganNaturalis (e)

Definisi : Varian adalahsuatufungsieksplisitdenganvariabelbilanganasli n. Secarasimbolis Variant (C_n) = f (n).

TeoremaVariant $C_n = (1 + \frac{1}{n})^n$untuk $n \to \infty$ mempunyai nilai limit yang terletak diantara 2 dan 3.

Bukti:

$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + \frac{n}{1!}.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} . (1/n)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} . (1/n)^3 + \ ... + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ ...\ (n-(n-1))}{n!} . (1/n)^n$

$= 1 + \frac{n}{1}.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} . \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} . \frac{1}{n^3} + \ ... + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ ...\ (n-(n-1))}{n!} . \frac{1}{n^n}$

$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{n^2 - 3n + 2}{n^2} + \ ... + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ ...\ (n-(n-1))}{n!\, n^n}$

$= 2 + \frac{1}{2!}(1 - 1/n) + \frac{1}{3!}(1-1/n)(1-2/n) + \ ... + \frac{1}{n!}(1-1/n)(1-2/n)\ ...\ (1- \frac{n-1}{n})$

Untuk n > 1, didapat $(1 - 1/n) < 1$; $(1-1/n)(1-2/n) < 1$; . . . $(1-1/n)(1-2/n)\ ...\ (1- \frac{n-1}{n}) < 1$.

Sehingga

$(1+\frac{1}{n})^n = 2 + \frac{1}{2!}(1 - 1/n) + \frac{1}{3!}(1-1/n)(1-2/n) + \ ... + \frac{1}{n!}(1-1/n)(1-2/n)\ ...\ (1- \frac{n-1}{n})$ . . . #)

menjadi

$(1+\frac{1}{n})^n < 2 + \frac{1}{2!} \times 1 + \frac{1}{3!} \times 1 + \ ... + \frac{1}{n!} \times 1$

Atau

$(1+\frac{1}{n})^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ ... + \frac{1}{n!}$

Sedangkan$\frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}$;$\frac{1}{4!} < \frac{1}{2^3}$; . . . ; $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$

Dengandemikian

$(1+\frac{1}{n})^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ ... + \frac{1}{n!}$

menjadi

$(1+\frac{1}{n})^n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ ... + \frac{1}{2^{n-1}}$

atau

$(1+\frac{1}{n})^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$ . . . . 1*)

Sekarang, perhatikan

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$

Deretinimerupakanderetgeometridengansukuawal a = 1 danrasio r = ½, jumlahsukuke n darideretiniadalah$\frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} = 2 - 1/2^{n-1}$

Pertidaksamaan 1*) berubahmenjadi

$(1+\frac{1}{n})^n < 1 + 2 - 1/2^{n-1}$

atau

$(1+\frac{1}{n})^n < 3.$ . . . . 1**)

Dari #) diketahuibahwa$(1+\frac{1}{n})^n > 2$. Dengandemikiandapatdisimpulkanbahwa

$(1 + \frac{1}{n})^n$untuk $n \to \infty$ mempunyai nilai limit yang terletak diantara 2 dan 3.

Denganperhitungan yang cukup teliti