3.3. Carthesian Product

Definisi 3.3.1. Jika A dan B himpunan *yang tidak kosong*, maka Carthesian Product dari A dan B dilambangkan dengan A x B adalah himpunan ***pasangan urut*** (a,b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$.

Secara simbolik: $\mathbf{A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}}$

Contoh:

a. Jika A = {a,b} dan B = {p, q, r}, maka

A x B = {(a,p), (a,q), (a,r), (b,p), (b,q), (b,r)}.

B x A = {(p,a), (p,b), (q,a), (q,b), (r,a), (r,b)}.

b. Jika P = {a,b,c} dan Q = {1,2,3}, maka

P x Q = {(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3), (c,1), (c,2), (c,3)}

Q x P = {(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c), (3,a), (3,b), (3,c)}

Kesimpulan: $\mathbf{A \times B \neq B \times A}$ **dan** $\mathbf{P \times Q \neq Q \times P}$

3.4. Relasi

Definisi 3.4.1. Diberikan dua himpunan $A \neq \phi$ dan $B \neq \phi$, suatu relasi R dari A ke B adalah himpunan *pasangan urut* yang elemen-elemen pertama dari setiap pasangan urutnya berasal dari elemen A dan elemen-elemen kedua dari setiap pasangan urutnya berasal dari elemen B yang merupakan **himpunan bagian** dari A x B. Jika A = B, maka suatu relasi R pada A x A disebut **relasi dalam** A.

Secara simbolik: $R = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\} \subseteq A \times B$

Definisi 3.4.2. Jika $R \subseteq A \times B$ adalah suatu relasi pada himpunan A x B, maka himpunan semua elemen pertama dalam pasangan urut $(a,b) \in R$ disebut *daerah definisi* (daerah asal/domain) dari relasi R dan himpunan semua elemen kedua dalam pasangan urut $(a,b) \in R$ disebut *daerah nilai* (daerah hasil/jelajah/range) dari relasi R.Daerah definisi dari relasi R dilambangkan dengan $D_{(R)}$, dan daerah hasil dari relasi R dilambangkan dengan $R_{(R)}$. Daerah definisi dan daerah hasil dari relasi R, secara simbolik dinyatakan sebagai berikut

$D_{(R)} = \{a \in A \mid (a,b) \in R, \text{ R relasi pada } A \times B\}$

$R_{(R)} = \{b \in B \mid (a,b) \in R, \text{ R relasi pada } A \times B\}$

Contoh :

1. Misal $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{a,b\}$, maka

   $R = \{(1,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$ merupakan suatu relasi karena $R \subseteq A \times B$.

   Pada relasi ini $(1,b) \in R$ dan $(2,a) \in R$.

   $D_{(R)} = \{1,2,3\}$ dan $R_{(R)} = \{a,b\}$

2. Misal $W = \{1,2,3\}$, maka

   $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,3), (3,3)\}$ merupakan **relasi dalam** W.

   Pada relasi ini $(1,3) \in R$, $(2,2) \in R$, $(3,1) \in R$ dan $(3,2) \in R$.

   $D_{(R)} = \{1,2,3\}$ dan $R_{(R)} = \{1,2,3\}$

3. $R = \{(x,y) \mid (x, y \in R, y < x \}$ merupakan relasi dalam R.

   $D_{(R)} = \{x \mid x \in R\}$ dan $R_{(R)} = \{y \mid y < x , x \in R\}$

4. Diberikan $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{3,4,5,6,7\}$, R suatu relasi dari A ke B

yang didefinisikan sebagai berikut

$(a,b) \in R$ (**3a < b**, $a \in A$ dan $b \in B$).

Tentukan daerah definisi dan daerah hasil/nilai dari R.

Penyelesaian:

$R = \{(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(2,7)\}$

$D_{(R)} = \{1,2\}$ dan $R_{(R)} = \{4,5,6,7\}$

Inversi suatu Relasi

Definisi 3.4.3. Setiap relasi R dari A ke B mempunyai suatu inversi (R^{-1}) dari B ke A yang didefinisikan dengan

$(R^{-1}) = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$.

Contoh:

1. Diberikan $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{a,b\}$ dan $R = \{(1,a), (2,b), (3,a)\}$ merupakan relasi dalam A x B, maka

$R^{-1} = \{(a,1), (b,2), (a,3)\}$

2. Diberikan $W = \{a,b,c\}$ dan $R = \{(a,a), (a,b), (b,b), (c,b), (c,c)\}$adalah relasi dalam W, maka

$R^{-1} = \{(a,a), (b,a), (b,b), (b,c), (c,c)\}$

Relasi Refleksif

Definisi 3.4.4. Misal R adalah suatu relasi dalam A (R $\subseteq$ A x A). Relasi R disebut relasi refleksif, jika ***untuk setiap a elemen A*** berlaku (a,a) $\in$ R.

Contoh :

1. Misal V = {1,2,3,4} dan

   R = {(1,1), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (3,4),(4,4)}

   Relasi R disebut refleksif, karena setiap (a,a) $\in$ R.

2. Misal T adalah himpunan segitiga-segitiga pada bidang Euclides.

   Relasi R dalam T didefinisikan dengan kalimat terbuka "x sebangun dengan y". Relasi R ini jelas merupakan relasi refleksif, karena setiapsegitiga dalam T sebangun dengan dirinya sendiri.

3. Misal R adalah suatu relasi dalam bilangan real **R** yang didefinisikan dengan kalimat terbuka " x < y".

   Relasi ini <u>**bukan relasi refleksif**</u>, karena setiap bilangan real x tidak akan kurang dari atas dirinya.

4. Misal A adalah power set dari himpunan A. R suatu relasi dalam A yang didefinisikan dengan "x subset dari y". Relasi R adalah relasi refleksif arena setiap himpunan dalam A merupakan subset atas dirinya sendiri.

Relasi Simetrik

Definisi 3.4.5. Misal R adalah suatu relasi dalam A (R $\subseteq$ A x A). Relasi R disebut relasi simetrik, jika (a,b) $\in$ R mengakibatkan (b,a) $\in$ R *berarti* jika a direlasikan dengan b, maka b juga direlasikan dengan a.

Contoh :

1. Misal S = {1,2,3,4} dan

   R = {(1,1), (1,2), (2,1), (2,4), (3,3), (4,2)} adalah relasi simetrik, karena setiap a direlasikan dengan b, maka b juga direlasikan dengan a.

2. Misal T adalah himpunan segitiga-segitiga pada bidang Euclides.

   Relasi R dalam T didefinisikan dengan kalimat terbuka "x kongruen dengan y". Relasi R ini jelas merupakan relasi simetrik, karena setiap segitiga dalam

T kongruen dengan dirinya sendiri.

3. Misal R adalah relasi dalam bilangan asli A, yang didefinisikan dengan "x pembagi y".

Relasi R ini *bukan simetrik*, karena x yang membagi y belum tentu y pembagi x. Misal (2,4) $\in$ R tetapi (4,2) $\notin$ R.

Akibat: Karena (a,b) $\in$ R mengakibatkan (b,a) $\in$ R , maka R adalah relasi simetrik jika dan hanya jika R = R

Relasi Anti Simetrik

Definisi 3.4.6.Misal R adalah suatu relasi dalam A (R$\subseteq$ (A x A). Relasi R disebut relasi anti simetrik, jika (a,b) $\in$ R dan (b,a) $\in$ R mengakibatkan a = b.

Contoh :

1. Misal R adalah relasi dalam bilangan asli A, yang didefinisikan dengan "x pembagi y". relasi ini adalah relasi anti simetri, karena a pembagi b dan b pembagi a mengakibatkan a = b.
2. Misal A adalah power set dari himpunan A. R suatu relasi dalam A yang didefinisikan dengan "x subset dari y". Relasi R adalah relasi anti simetrik, karena x $\subset$ y dan y $\subset$ x mengakibatkan x = y.
3. Misal W = {1,2,3,4} dan R = {(1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)} bukan relasi anti simetrik, walaupun (1,2) $\in$ R dan (2,1) $\in$ R secara fakta 1$\neq$2.

Relasi Transitif

Definisi 3.4.7. Suatu relasi R dalam himpunan A disebut relasi transitif, jika (a,b) $\in$ R dan (b,c) $\in$ R, maka (a,c) $\in$ R.

Dengan kata lain, jika a direlasikan dengan b dan b direlasikan dengan c, maka a direlasikan dengan c.

Contoh :

1. Misal R adalah relasi dalam **R**, yang didefinisikan dengan "x > y ".

Sebagaimana definisi di atas $x > y$ dan $y > z$ mengakibatkan $x > z$.
Jadi, R adalah relasi transitif.

2. Misal W = {a,b,c} dan R = {(a,a), (a,b), (a,c), (b,c), (c,a), (b,a), (c,b),(b.b), (c,c)}.

   R adalah relasi transitif, karena (a,b) ∈ R dan (b,c) ∈ R maka (a,c) ∈ R.
Demikian halnya, (a,c) ∈ R dan (c,a) ∈ R maka (a,a) ∈ R.

4. Misal A adalah power set dari himpunan A. R suatu relasi dalam A yang didefinisikan dengan "x subset dari y". Relasi R adalah relasi transitif, karena $x \subset y$ dan $y \subset z$, maka $x \subset z$.
5. Misal M adalah himpunan mahasiswa Universitas Muhammadiyah Surabaya dan R adalah relasi yang didefinisikan dengan "x mencintai y".

R **bukan relasi transitif,** karena x mencintai y dan y mencintai z belum tentu x mencitai z.

Relasi Ekivalensi

Definisi 3.4.8. Suatu relasi R dalam himpunan A merupakan relasi ekivalensi, jika memenuhi tiga syarat berikut

i. R adalah relasi refleksif, yaitu a ∈ A berlaku (a,a) ∈ R,

ii. R adalah relasi simetrik, yaitu (a,b) ∈ R, maka (b,a) ∈ R,

iii. R adalah relasi transitif, yaitu (a,b) ∈ R, (b,c) ∈ R, maka (a,c) ∈ R

Contoh :

1. Misal T adalah himpunan segitiga-segitiga pada bidang Euclides. Relasi R dalam T didefinisikan dengan kalimat terbuka "x sebangun dengan y". Relasi R ini jelas merupakan relasi refleksif, simetrik dan transitif.

   Jadi, R adalah relasi ekivalensi. Segitiga dalam T sebangun dengan dirinya sendiri.
2. Misal A adalah power set dari himpunan A. R suatu relasi dalam A yang didefinisikan dengan "x = y".

   Relasi R adalah relasi refleksif, simetrik dan transitif. Jadi, R adalah relasi ekivalensi.

3.5. Fungsi

Definisi 3.5.1. Jika A dan B adalah himpunan (tidak perlu keduanya berbeda) Suatu fungsi f dari A ke B adalah himpunan pasangan urut dalam A x B yang memenuhi sifat jika (a,b) dan (a, b') merupakan elemen-elemen dari f, maka b = b'.

Secara simbolik : $f : \{(a,b) \in A \times B \mid (a, b), (a, b') \in f \Rightarrow b = b'\}$.

Himpunan elemen-elemen dari A yang merupakan elemen-elemen pertama pada pasangan urut dalam f disebut Domain dari f dan dilambangkan dengan $D_{(f)}$.

Himpunan elemen-elemen dari B yang merupakan elemen-elemen kedua pada pasangan urut dalam f disebut Range dari f dan dilambangkan dengan $R_{(f)}$.

Jika $(a,b) \in f$, maka $b = f(a)$ atau $f : a \Rightarrow b$.

Contoh:

1. Misal W = {1,2,3,4}. Perhatikan relasi-relasi berikut

   $R_1 = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)\}$

   $R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}$

   $R_3 = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)\}$

   $R_4 = \{(1,2), (3,4), (4,1)\}$

   $R_5 = \{(2,1), (2,3), (3,1), (4,4)\}$

   Nyatakan apakah relasi-relasi di atas merupakan fungsi?

   Penyelesaian:

   Suatu relasi R dalam W merupakan fungsi jika dan hanya jika $\forall a \in W$ muncul sekali dan hanya sekali sebagai elemen pertama dalam pasangan urut (a, R (a)). Berdasar kriteria ini, maka

   a. R merupakan fungsi, karena $\forall x \in W$ muncul sekali sebagai elemen pertamadalam pasangan urut R.

   b. R bukan fungsi, karena $1 \in W$ muncul lebih dari satu kali sebagai elemen pertama pada himpunan pasangan pasangan urut dalam R .

   c. R merupakan fungsi. (Why?)

   d. R merupakan fungsi. (Why?)

e. R bukan fungsi, karena $2 \in W$ muncul lebih dari satu kali sebagai elemen pertama pada himpunan pasangan pasangan urut dalam R .

3. Misal A = {Ibukota Negara-negara Asean} dan B = {Negera-negara Asean}

   Relasi f dari A ke B yang didefinisikan dengan " X ibukota negara Y",relasi f jelas merupakan fungsi sebab tidak mungkin Ibukota Negara dimiliki lebih dari satu negara dan tidak mungkin Ibukota Negara tidak memiliki Negara.

3. Misal A = {1,2,3,4,5} dan B = {1,3,5,7,9}. Misal g suatu relasi dari A ke B yang didefinisikan dengan "a banyaknya faktor dari b". Relasi ini bukan fungsi, karena $4 \in A$ dan $5 \in A$ tidak mempunyai pasangan dengan anggota B dan $2 \in A$ mucul lebih dari satu kali sebagai elemen pertama dari g

   g = {(1,1),(2,3),(2,5),(2,7),(3,9)}).

4. Misal h adalah relasi dalam A yang didefinisikan dengan "x dikawankan dengan x ". Relasi h adalah fungsi (why?).

Macam-macam Fungsi

Dari cari peninjauannya, terdapat bermacam-macam fungsi.

Ditinjau dari banyaknya peubah bebas yang berhubungan dengan peubah tak bebas , fungsi dibedakan atas:

1. ***Fungsi dengan satu peubah bebas***, jika nilai peubah tak bebas y = f(x)**,** hanya tergantung pada nilai peubah bebas x yang mungkin.

   Secara simbolik dinyatakan dengan: y = f(x).

   Contoh: a. $f(x) = x - 3$

   b. $f(x) = x^2 + 2x + 2$

   c. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x - 10$

2. ***Fungsi dengan dua peubahbebas*,**jika nilai peubah tak bebas z = f(x,y)**,** tergantung pada tiap nilai dari dua peubah bebas x dan y yang mungkin.

   Secara simbolik dinyatakan dengan: z = f(x,y).

   Contoh: a. $z = x^2 + y^2 - 25$

   b. $z = x^2 - y^2 - 16$

   c. $z = x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20$.

***3.Fungsi dengan tiga peubahbebas*,**jika nilai peubah tak bebas w = f(x,y,z), tergantung pada tiap nilai dari tiga peubah bebas x, y dan z yang mungkin. Secara simbolik dinyatakan dengan: w = f(x,y,z).

Contoh: a. w = x + y – 3yz + 10

b. w = 2xy + $\sqrt{x^2 + y^2}$

II. Ditinjau dari ***penyajian rumus fungsinya*** fungsi terbagi atas:

1. Fungsi eksplisit, yaitu jika peubah-peubah x dan y dalam ruas yang berbeda (biasanya y di ruas kiri danx di ruas kanan) dan dilambangkan dengan y = f(x).

Contoh: a. $y = x^2 - x + 3$

b. y = g(log x +2)

c. $y = 3x^3 + x^2 + 5x + 10$

2.Fungsi implisit, yaitu jika peubah-peubah x dan y dalam ruas yang sama dan dilambangkan dengan f(x,y) = 0.

Contoh : a. $x^2y - 3xy^2 + 2 = 0$

b. xy - 9 = 0

c. $4x^2 + 9y^2 – 36 = 0$

3. Fungsi Parameter. jika hubungan peubah-peubah x dan y dinyatakan oleh fungsi-fungsi dengan peubahlain yang disebut parameter dan dilambangkan dengan x = f(t) dan y = g(t), t sebagai parameter.

Contoh. x = 2t dan y = 4t + 1

x = 2t ⇔ t = 1/2 x

⇔ y = 4.(1/2 x) + 1

⇔ y = 2x + 1

III. Ditinjau atas objek/materi**,** fungsi terdiri atas:

a) Fungsi aljabar. Suatu fungsi f disebut fungsi aljabar, jika rumus fungsi dioperasikan dengan operasi-operasi aljabaryaitu penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian atau penarikan akar dari peubah bebasnya.

Fungsi aljabar yang menggunakan penarikan akar pada peubah bebasnya disebut ***fungsi irasional.***

Contoh : $f(x) = 2x^2 - \sqrt{x}$; $\forall x \geq 0, x \in \mathbf{R}$

$g(x) = \frac{x^2+4}{\sqrt{x}}$; $\forall x \geq 0, x \in \mathbf{R}$

$h(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$; $\forall x \geq 0, x \in \mathbf{R}$

Fungsi aljabar yang tidak menggunakan penarikan tanda akar pada peubah bebasnya disebut ***fungsi rasional.***Fungsi rasional terdiri atas fungsi rasional bulat dan fungsi rasional pecah. Fungsi **rasional bulat** disebut juga fungsi polinom. Secara umum fungsi polinom dinyatakan dalam bentuk

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$; $a_0 \neq 0$ dan $n \in \mathbf{A}$, n merupakan derajat dari polinom tersebut.

Contoh : $f(x) = x^2 - 3x + 4$ adalah polinom berderajat dua

$g(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x - 10$ adalah polinom berderajat tiga.

Fungsi **rasional pecah** adalah fungsi yang merupakan hasil bagi dari dua bentuk polinom.

Contoh : $h(x) = \frac{2x+1}{3x^2+2x+1}$

2. Fungsi transendal:

Suatu fungsi f dikatakan fungsi transendal bila fungsi f bukan fungsi aljabar. Fungsi-fungsi transendalantara lain:

a. fungsi pangkat

Contoh : $y = x^a$ dengan a bilangan irasional

b. fungsi eksponen

Contoh: $f(x) = 2e^x$

c. fungsi logaritma

Contoh $f(x) = 2x^3 + \log x$

d. fungsi trigonometri

Contoh $f(x) = \sin 2x$

e. fungsi hiperbolik

Contoh $f(x) = \cosh 3x$

f. fungsi siklometri

Contoh $f(x) = \arctan x$

IV. Ditinjau dari ***kesamaan nilai fungsinya***, fungsi terdiri atas:

1. Fungsi genap

Misal f suatu fungsi dengan daerah asal D(f), dikatakan fungsi genap, jika $\forall x \in D(f)$ berlaku $f(-x) = f(x)$

Contoh: $f(x) = x^4 + 3x^2$

$g(x) = x^2 - 2 \cos x$

2. Fungsi ganjil

Misal g suatu fungsi dengan daerah asal D(g) , dikatakan fungsi ganjil, jika $\forall x \in D(g)$ berlaku $f(-x) = - f(x)$

Contoh : $f(x) = 2x + 3 \sin x$

$g(x) = 3x + 2\tan x$

$h(x) = x^3 + x$

3. Fungsi periodik.

Misal f suatu fungsi dengan daerah asal D(f) , dikatakan fungsi periodik, jika $\forall x \in D(f)\ \exists p \in D(f)$ sehingga $f(x + p) = f(x)$

Contoh: $f(x) = \sin x$ adalah fungsi periodik dengan periode $p = 2k\pi$, $k \in \mathbf{B}$

$f(x) = \sin x \Leftrightarrow f(x + 2\pi) = \sin x$, untuk $k = 1$

$g(x) = \cos x$ adalah fungsi periodik dengan periode $p = 2k\pi$, $k \in \mathbf{B}$

$g(x) = \cos x \Leftrightarrow f(x + 4\pi) = \cos x$, untuk $k = 2$

$h(x) = \tan (x)$ adalah fungsi periodik dengan periode $p = k\pi$, $k \in \mathbf{B}$

$h(x) = \tan x \Leftrightarrow f(x + 3\pi) = \tan x$, untuk $k = 3$

V. Ditinjau dari ***domain/daerah asal*** fungsi terbagi atas ***fungsi restriksi*** dan ***fungsi extensi.***

Jika f suatu fungsi dengan domain $D_{(f)}$ dan $D_{(f1)} \subseteq D_{(f)}$ merupakan domain dari fungsi baru f_1 dan $f_1(x) = f(x)\ \forall x \in D_{(f1)}$, maka f_1 disebut fungsi ***restriksi*** domain $D_{(f)}$ dipersempitmenjadi $D_{(f1)}$.

Secara simbolik : $f_1 : = \{(a,b) \in f \mid a \in D_{(f1)}\}$

Jika g suatu fungsi dengan domain D(g) dan $D_{(g2)} \supseteq D_{(g)}$ merupakan domain dari fungsi baru g_2 dan $g_2(x) = g(x) \forall x \in D_{(g2)}$, maka g_2 disebut fungsi ***extensi*** domain $D_{(g2)}$ merupakan perluasan dari domain $D_{(g)}$.

Secara simbolik : $g_2 : = \{(a,b) \in g \mid a \in D_{(g2)}\}$

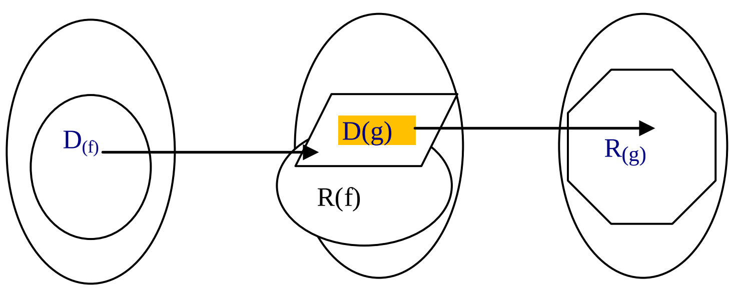
Fungsi Tersusun

Definisi 3.5.2. Jika f adalah fungsi dengan domain $D_{(f)}$ pada A dan Range $R_{(f)}$ pada B dan g adalah fungsi dengan domain $D_{(g)}$ pada B dan Range $R_{(g)}$ pada C.

Perhatikan gambar berikut

A B C

fg



Komposisi g o f adalah fungsi dari A ke C, yang didefinisikan dengan

$g \circ f = \{(a,c) \in A \times C \mid \exists\, b \in B \ni (a,b) \in f \wedge (b,c) \in g\}$.

Jika f dan g adalah fungsi dan x ∈ D(f), maka pada pasangan urut pada g ditentukan oleh elemen f(x) dan f(x)∈ D(g). Dengan demikian jelas bahwa

Domain dari g o f (D(gof)) = {x ∈ D(f) | f(x) ∈ D(g)}.

Untuk x ∈ (D(gof)), maka nilai g o f pada x ditentukan dengan (g o f)(x) = g(f(x)).

Sedangkan Range dari g o f adalah himpunan (R(gof)) = { g(f(x)) | x ∈ D(gof)}.

Contoh :

1. Misal fungsi-fungsi f : **R**↦**R** dan g : **R**↦**R** yang didefinisikan dengan $f(x) = x + 1$ dan $g(x) = x^2$. Tentukan suatu rumus yang mendefinisikan g o f dan f o g.

Penyelesaian:

Sebelum menyelesaikan soal ini terlebih dahulu fahami bahwa g o f berarti fungsi f dilanjutkan dengan fungsi g, sedangkan f o g berarti fungsi g dilanjutkan dengan fungsi f.

Dengan menggunakan definisi di atas maka

$g \circ f = g(f(x))$

$= g(x + 1)$

$= (x + 1)^2$ atau

$= x^2 + 2x + 1$, sedangkan

$f \circ g = f(g(x))$

$= f(x)$

$= x + 1$

Ternyata $g \circ f \neq f \circ g$.

2. Misal f dan g adalah fungsi dalam R yang didefinisikan dengan $f(x) = x^2 + 2x - 3$ dan $g(x) = 3x - 4$.

a. Tentukan rumus fungsi dari g o f dan f o g.

b. Selidiki apakah $(g \circ f)(2) = g(f(2))$ dan $(f \circ g)(2) = f(g(2))$.

Penyelesaian:

a. $g \circ f = g(f(x))$

$= g(x^2 + 2x - 3)$

$= 3(x^2 + 2x - 3) - 4$

$= 3x^2 + 6x - 13$

$f \circ g = f(g(x))$

$= f(3x - 4)$

$= (3x - 4)^2 + 2(3x - 4) - 3$

$= 9x^2 - 24x + 16 + 6x - 8 - 3$

$= 9x^2 - 18x + 5$

$g \circ f(2) = 3.2^2 + 6.2 - 13$

$= 12 + 12 - 13$

$= 11$

$g(f(2)) = g(2 + 2.2 - 3)$

$= g(5)$

$= 3.5 - 4$

$= 11$

Jadi, $g \circ f(2) = g(f(2))$

Definisi 3.5.4. Jika f adalah fungsi dengan domain $D_{(f)}$ pada A dan Range $R_{(f)}$ pada B, f dikatakan fungsi *injektif atau satu-satu* jika (a,b) dan (a',b) elemen dari f, maka a = a'.

Jika f fungsi injektif disebut juga f adalah injeksi.

Dengan kata lain f adalah fungsi *injektif* jika dan hanya jika dua relasi f(a) = b dan f(a') = b, maka a = a'.

Alternatif yang lain, f adalah fungsi *injektif* jika dan hanya jika a, a' elemen $D_{(f)}$ dan $a \neq a'$, maka $f(a) \neq f(a')$.

Contoh :

1. Misal A = {2,4,6,8} dan B ={1,2,3,4}. Misal f suatu fungsi dari A ke B yang didefinisikan dengan "a dua kali b". Fungsi f ini adalah fungsi injektif, Karena $2 \in A$ dan $4 \in A$ ($2 \neq 4$) berpasangan dengan $1 \in B$ dan $2 \in B$ ($1 \neq 2$) (dua elemen berbeda di A berpasangan dengan dua elemen berbeda di B).
2. Misal $f : \mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}$ yang didefisikan dengan rumus $f(x) = x^2$. Fungsi f adalah fungsi satu-satu/injektif sebab dua elemen berbeda di **A** daerah domain berpasangan dengan dua elemen berbeda di daerah jelajah **A**.
3. Misal $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ yang didefisikan dengan rumus $f(x) = x^2$. Fungsi f bukan fungsi satu-satu/injektif (why?).
4. Misal $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ yang didefisikan dengan rumus $f(x) = x^3$. Fungsi f adalah fungsi satu-satu/injektif (why?).

Definisi 3.5.5. Jika f adalah injeksi dengan domain $D_{(f)}$ pada A dan Range $R_{(f)}$ pada B. Dibangun fungsi $g = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in f\}$ dan g juga injeksi dengan domain $D_{(g)} = R_{(f)}$ pada B dan Range $R_{(g)} = D_{(f)}$ pada A.

Fungsi g disebut fungsi *inversi* dari f dan dilambangkan dengan $f^{(-1)}$.

Contoh :

1. Misal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi yang didefinisikan dengan $f(x) = 2x - 3$. Tentukan rumus fungsi inversi $f^{(-1)}$.

Penyelesaian:

Relasi f adalah fungsi injektif (why?)

Tinggal menunjukkan $f^{(-1)}$ apakah juga injektif!

Untuk menentukan rumus $f^{(-1)}$ ditempuh langkah-langkah sebagai berikut

Misal y adalah bayangan dari x atas fungsi f, sehingga

$y = f(x) = 2x - 3$ i)

Akibatnya, x merupakan bayangan dari y atas fungsi $f^{(-1)}$, yaitu

$x = f^{(-1)}(y)$ ii)

Dari pers. i), ditentukan x dalam y diperoleh

$x = \frac{y+3}{2}$

Berdasar pers. ii), diperoleh

$f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2}$

Rumus fungsi $f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2}$ ini dapat diubah dalam bentuk

$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ dengan $x \in R_{(f)0} = D_{(f^{-1})}$

Jika f^{-1} ini merupakan fungsi injektif, maka f^{-1} merupakan fungsi inversi dari f.

Dari rumus fungsi $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$, jelas f^{-1}merupakan fungsi injektif (why?).

Dengan demikian, $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ merupakan rumus fungsi inversi dari f.

2. Misal $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ yang didefinisikan dengan $f(x) = x^2$. Tentukan rumus fungsi inversi f^{-1} .

Penyelesaian:

Relasi f adalah fungsi injektif (why?)

Tinggal menunjukkan f^{-1} apakah juga injektif!

Untuk menentukan rumus f^{-1} ditempuh langkah-langkah sebagai berikut

Misal y adalah bayangan dari x atas fungsi f, sehingga

$y = f(x) = x^2$ i)

Akibatnya, x merupakan bayangan dari y atas fungsi $f^{(-1)}$, yaitu

$x = f^{(-1)}(y)$ ii)

Dari pers. i), ditentukan x dalam y dan diperoleh

$x = \sqrt{y}$

Berdasar pers. ii) bentuk ini ($x = \sqrt{y}$) diubah menjadi

$f^{(-1)}(y) = \sqrt{y}$ bentuk ini dapat diubah menjadi

$f^{(-1)}(x) = \sqrt{y}$ dengan $x \in R_{(f)} = D_{(f^{(-1)})}$

Relasi $f^{(-1)}$ jelas fungsi injektif (why?).

Jadi, rumus fungsi inversi dari f yang diminta adalah $f^{(-`1)}(x) = \sqrt{y}$

Definisi 2.5.7. Jika f adalah fungsi dengan domain $D_{(f)} \subseteq A$ dan Range $R_{(f)} \subseteq B$, f dikatakan fungsi surjektif atau memetakan Aonto B bila $R_{(f)} = B$.

Jika f fungsi surjektif, dapat dikatakan f *surjeksi*.

Contoh :

1. Misal P = {Penduduk kota Surabaya} dan U = {ukuran sepatu}

Misal f adalah fungsi yang didefinisikan "p ukuran sepatunya adalah u". Fungsi f merupakan fungsi surjektif, karena setiap penduduk kota Surabaya mempunyai satu ukuran sepatu dan semua ukuran sepatu berpasangan dengan semua penduduk kota Surabaya.

2. Misal A = [-1,1]. Misal g adalah fungsi dalam A yang didefinisikan dengan $g(x) = x^3$.

Jelas g adalah fungsi surjektif/onto, karena g(A) = A.

2. Misal B = [-1,1]. Misal h adalah fungsi dalam B yang didefinisikan dengan $h(x) = x^2$.

Jelas h bukan fungsi surjektif, karena tidak terdapat elemen-elemen negatif dalam B yang muncul sebagai range dari h.

Definisi 3.5.8. Fungsi f dengan domain $D_{(f)} \subseteq A$ dan Range $R_{(f)} \subseteq B$ dikatakan fungsi bijektif bila fungsi f

1. injektif dan
2. surjektif.

Jika f fungsi bijektif, dapat dikatakan f bijeksi.

Contoh :

1. Misal f : **R**→**R** adalah fungsi yang didefinisikan dengan f(x) = x.
   Jelas f adalah fungsi injektif dan surjektif, karena setiap elemen dipasangkan atas dirinya sendiri.
2. Misal A = {Negara-negara Asean} dan B = {Ibukota negara-negara Asean}
   Jika relasi f didefinisikan dengan "a beribukota b", maka relasi f adalah fungsi bijektif, karena setiap negara mempunyai satu ibukota negara dan tidak mungkin satu negara mempunyai lebih dari satu ibukota negara.

Definisi 3.5.9. Jika $E \subseteq A$, maka bayangan langsung (direct image) atas f adalah $f(E) \subseteq B$ dan ditunjukkandengan

$f(E) = \{ f(x) \mid x \in E \}$.

Jika $H \subseteq B$, maka bayangan inversi atas f dari H adalah

$f^{(-1)}(H) \subseteq A$ dan ditunjukkan dengan

$f^{(-1)}(H) = \{ x \mid f(x) \in H \}$

Contoh :

Jika f : E $\subseteq$**R** ditentukan dengan E = {x | -1 < x < 2}, maka direct image dari E dalam fyaitu f(E) = {y | 1 < y < 10}.

Misal y = f(x), maka y = 3x + 4

$\Leftrightarrow$ 3x = y - 4

$\Leftrightarrow$ x = $\dfrac{y-4}{3}$ atau

$\Leftrightarrow$ $f^{1}(x) = \dfrac{x-4}{3}$

Jika ditetapkan H $\subseteq$**R** (codomain) yaitu $H = \{y \mid -2 \le y \le 7 \}$, maka didapat $f^{(-1)}(H) = \{ x \mid -2 \le x \le 1 \}$

L A T I H A N   3. 2

1. Misal R relasi dalam **A**, yang didefinisikan dengan “2x + y= 10”. Tentukan
    a) Domain dari R,
    b) Range dari R ,
    c) R.

2. Misal R relasi dalam **R**, yang didefinisikan dengan “x + y= 16”. Tentukan
    a. Domain dari R,
    b. Range dari R ,
    c. R

3. R suatu relasi dalam **R**, nyatakan suatu syarat agar R **bukan relasi refleksif**

4. Misal W = {1,2,3,4} dan
    R = {(l,l), (1,2), (2,1), (2,3), (3,3),(3,4),(4,4)}
    Apakah R refleksif? Jelaskan.

5.Berikut diberikan kalimat terbuka yang mendefinisikan relasi R dalam bilangan asli **A**.

Apakah relasinya refleksif?
a. “x kurang dari atau sama dengan y”
b. “x membagi y”
c. “x + y = l0”

6. R suatu relasi dalam **R**, nyatakan suatu syarat agar R bukan relasi simetris.

7. Misal V={1,2,3,4} dan R= {(l,l), (1,2), (2,1), (3,3), (4,4)}
    Apakah R simetris? Jelaskan.

8. Berikut diberikan kalimat terbuka yang mendefinisikan relasi R dalam bilangan asli **A**. Apakah relasinya simetris?

a. "x kurang dari atau sama dengan y"
b. "x membagi y"
c. "x + y = 10”

9. R suatu relasi dalam **R**, nyatakan suatu syarat agar R **bukan relasi anti simetris**.

10. Berikut diberikan kalimat terbuka yang mendefinisikan relasi R dalam bilangan asli **A**. Apakah relasinya anti simetris?
    a. “x kurang dari atau sama dengan y”
    b. “x membagi y”
    c. “ x + y = 10”

11. Misal $f(x) = x^2$ dan terdefinisi pada [-2,8]
    Tentukan a. f(4) , b. f(-3) , c. f(-2)

12. Misal $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dan didefinisikan sebagai berikut

    $f(x)= \begin{cases} 1 \ jika\ x\ rasional \\ 0\ jika\ x\ irasional \end{cases}$, tentukan

    a. f(1/2) , b. f(π) , c. f(2,1313...) , d. f(√2)

13. Misal A-= {a,b,c,d} danB = { 0, 1}. Berapa banyak fungsi yang terjadi pada relasi dari A ke B. Tunjukkan.

14. Misal A=[-1,l], B =[1,3] dan C = [-3,-1]. Misal fungsi-fungsi
$f : A \rightarrow \mathbf{R}$,$f : B \rightarrow \mathbf{R}$,$f : C \rightarrow \mathbf{R}$ yang didefinisikan dengan "tiap-tiap bilangan dipasangkan dengan kuadratnya". Diantara ketiga fungsi tersebut mana yang tergolong fungsi injektif.

15. Misal A =[-1,l], B=[1,3] dan C =[-3,-1]. Misal fungsi-fungsi
    $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, $f : B \rightarrow \mathbf{R}$,$f : C \rightarrow \mathbf{R}$ yang didefinisikan dengan "tiap-tiap bilangan dipasangkan dengan pangkat tiganya". Diantara ketiga fungsi tersebut mana yang tergolong fungsi injektif

16. Tentukan $D_{(f)}$, dari $f(x) = x^2$ agar fungsi ini merupakan fiingsi injektif.

17. Berikan suatu syarat agar fungsi konstanta merupakan fungsi injektif?

18. Dari soal 17. adakah fungsi-fungsi di atas merupakan fungsi injektif?

19. Misal $f : A \rightarrow B$ adalah fungsi. Tentukan f(A) agar f merupakan fungsi surjektif.

20. Misal A = [- 1 , 1] fungsi f,g dan h dalam A didefenisikan
    sebagai berikut:
    a. $f(x) = x^2$ b. $g(x) = x^3$ c. $h(x) = x^5$

Dari ketiga fungsi ini, mana yang tergolong fungsi surjektif?

21. Tentukan suatu syarat agar fungsi konstanta merupakan fungsi surjektif.

22. Misal f(a) = a, jika f fungsi dalam R apakah f fungsi surjektif?

23. Misal A = {1,2,3,4,5} dan fungsi-fungsi $f: A \rightarrow A$ dan $g: A \rightarrow A$
yang difenisikan sebagai berikut:
f(1)=3, f(2)=5, f(3)=3, f(4)=1, f(5)=2
g(1) = 4, g(2) = 5, g(3) = 3, g(4) = 1,g(5) = 2
Tentukan g o f dan f o g.

24. Jika $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow C$ adalah fungsi-fungsi surjektif, tunjukkan bahwa
$(g \text{ o } f) : A \rightarrow C$ juga fungsi surjektif.

25. Misal $f : A \rightarrow B$,$g: B \rightarrow C$ dan $h : C \rightarrow D$.
Buktikan bahwa (h o g) o f= h o(g o f).

26. Beri contoh dua fungsi f dan g yang memenuhi f o g= g o f.

27. Misal f dan g adalah fungsi yang memenuhi
$g \text{ o } f(x) = x ; \forall x \in D_{(f)}$,
$f \text{ o } g(y) = y; \forall y \in D_{(g)}$.
Tunjukkan bahwa $g = f^{(-1)}$

28. Jika f fungsi injektif dari A ke B, tunjukkan bahwa $f^{(-1)} = \{(b,a) \mid (a,b \in f\}$ juga fungsi.

29. Misal $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ yang didefinisikan dengan f(x) = x + 5. Tentukan suatu syarat agar fungsi f mempunyai fungsi inversi.

30. Misal A = **R**-{3} dan B = **R** - {1}. Misal fungsi $f : A \rightarrow B$
yang didefinisikan dengan f(x) = $\frac{x-2}{x-3}$

Apakah f mempunyai fungsi inversi? Jelaskan.

31. Misal A=[1, +∞]dan B= [-4, + ∞]. Misal fungsi $f: A \rightarrow B$ yang didefinisikan dengan $f(x) = x^2 - 2x - 3$ Apakah f mempunyai fungsi inversi? Jelaskan.