高级量化交易技术

闫涛
科技有限公司
北京
{yt7589}@qq.com

31st Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS 2017), Long Beach, CA, USA.

第一篇深度强化学习

第1章强化学习概述

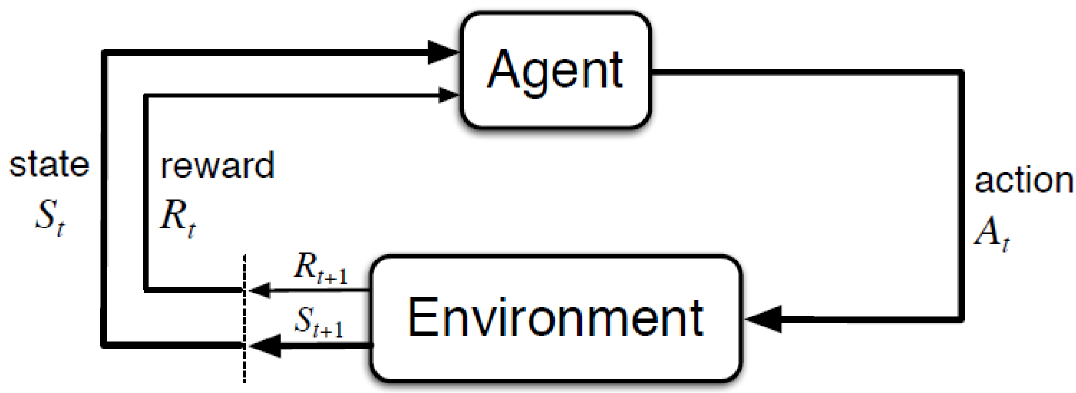
Abstract

在本章中我们将讨论强化学习中的环境、Agent、状态、Action和奖励，并重点讨论MDP相关内容。

1 MDP概述

一个典型的强化学习系统结构如下所示：

图 1: 典型强化学习系统架构图



如图所示：

1. 在t时刻Agent观察到环境状态S_t，并得到上一时刻所采取的行动A_{t-1}（在图中未画出）所得到的奖励r_t；

2. Agent根据环境状态S_t，根据某种策略π，选择行动A_t；

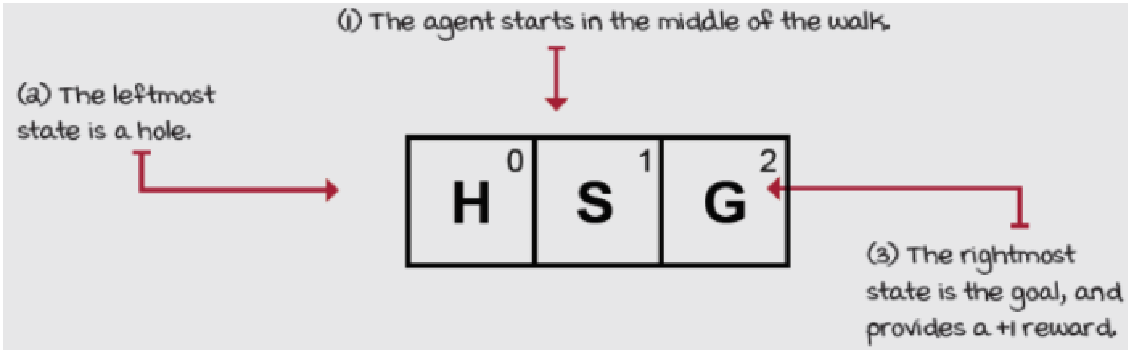
3. 环境接收到Agent的行动A_t后，根据环境的动态特性，转移到新的状态S_{t+1}，并产生R_t的奖励信号；

1.1 典型环境

1.1.1 Bandit Walk环境

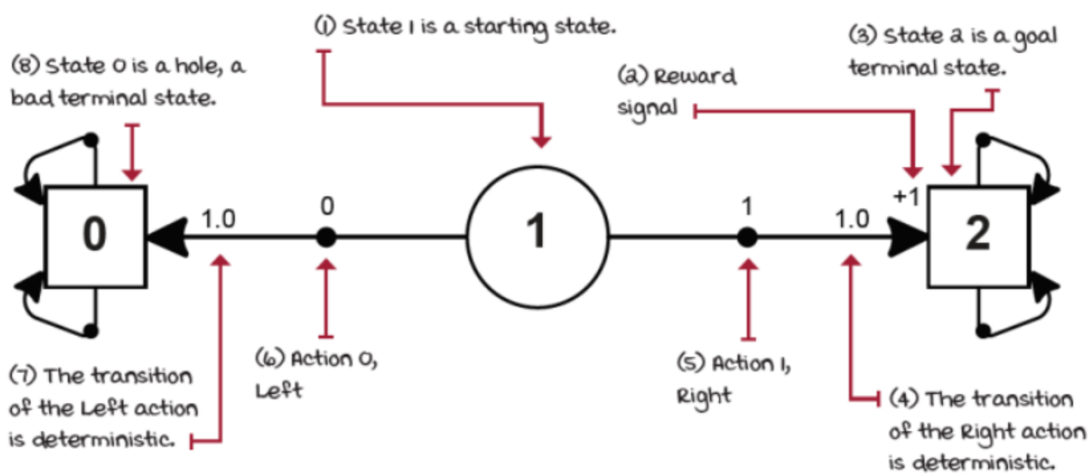
下面我们来研究一个最简单的强化学习环境，叫Bandit Walk，如下所示：

图 2: Bandit Walk环境图



如图所示， Agent初始时位于中间的S格，状态编号为S_0，其可以采取向左、向右两个动作，向左则进入状态H，其是一个洞，就会掉到洞里，过程就会结束，此时得到的奖励为0；当Agent采取向右行动时，就会进入G状态，此时会获得奖励+1，由此可见其是一个确定性的环境，就是说当 Agent采取向右行动时，会100%确定进行G状态。我们可以通过如下的图来表示上述过程：

图 3: Bandit Walk环境MDP图



如图所示：

- 在初始状态S_0时，有两个可选行动，分别表示为向左、向右的直线；
- 当采取向右行动时，就会到达小黑点位置，然后由环境决定将转到哪个状态，以及转到这个状态的概率，以本例为例，其就是以100% 的概率转到G状态S_2，其中小黑点上面的1代表行动编号，向右简头上面的1.0代表100%的概率，向右简头处的1代表奖励为+1；

我们首先安装所需要的库：

```
pip install gym -i https://pypi.tuna.tsinghua.edu.cn/simple
```

Listing 1: 安装gmy库

下面我们用Python对象来表示这一过程：

```python
P = {
    0: {
        0: [(1.0, 0, 0.0, True)],
        1: [(1.0, 0, 0.0, True)]
    },
    1: {
        0: [(1.0, 0, 0.0, True)],
        1: [(1.0, 2, 1.0, True)]
    },
    2: {
        0: [(1.0, 2, 0.0, True)],
        1: [(1.0, 2, 0.0, True)]
    }
}
print(P)
```

Listing 2: Bandit Walk python程序

代码解读如下所示：

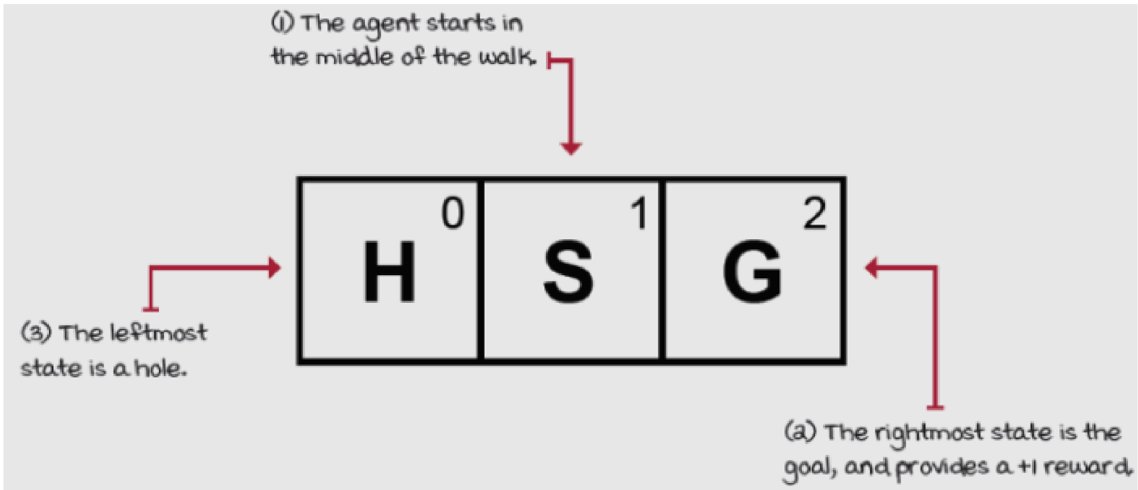
- P为一个字典对象，其键值0、1、2代表三个状态；
- P的键值0：其同样是一个字典对象，键值代表可以采取的行动，0代表向右，1代表向右；
- P的键值0下键值0：即在状态0下面采取行动0，其值为一个数组，代表由环境决定要转到哪个状态，转到每个状态为一个Turple，含义为：（概率, 目的状态，获得奖励，新状态是否为终止状态），注意：我们规定在终止状态采取任何行动都会回到自身；

上面我们仅举了一个例子，其他状态读者可以自己解析出来。

1.1.2 Bandit Slippery Walk环境

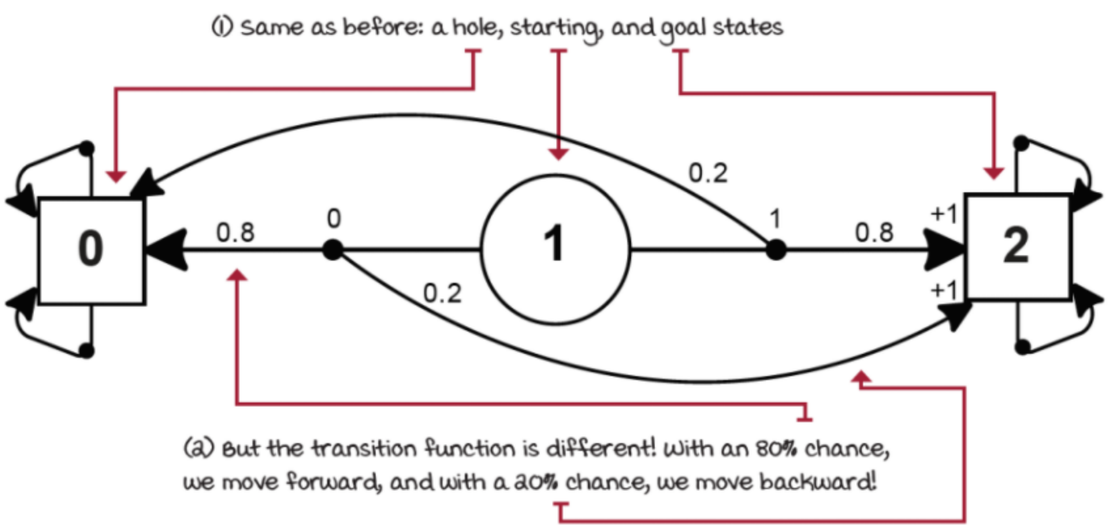
在上面的环境中，我们向左移动，环境会确定地向左移动。但是在本节中，当我们向左移动时，环境在80%的情况下会向左移动，20%的情况会向右移动。如下图所示：

图 4: Bandit Slippery Walk环境图



除了环境的随机性之外，环境与上一节相同。其MDP图如下所示：

图 5: Bandit Slippery Walk环境MDP图



如上图所示，在开始时Agent位于状态S，其可以采取的行动为向左编号为0或向右编号为1，我们以向右为例，当Agent采取向右行动时，其达到状态S右侧的小黑点，上面的1代表是编号为1的行动，此时环境将以80%的概率转变为状态G，得到+1的奖励，如图中的右箭头所示，同时环境还可能将以20%的概率变为状态H，其所获得的奖励为0，如图中向左的曲线箭头所示。读者可以按照上面的描述，自己补充出其他状态变化情况。由前面的讨论可以看出，在这个例子中，当Agent采取向右行动Action时，环境仅以80%的概率完成该Action，同时还可能以20%的概率向相反的方向变化，既环境具有一定的随机性。我们可以通过如下的Python代码来表示这一过程：

```
    def bandit_slippery_walk(self):
        P = {
```

```
        0: {
            0: [(1.0, 0, 0.0, True)],
            1: [(1.0, 0, 0.0, True)]
        },
        1: {
            0: [(0.8, 0, 0.0, True), (0.2, 2, 1.0, True)],
            1: [(0.8, 2, 1.0, True), (0.2, 0, 0.0, True)]
        },
        2: {
            0: [(1.0, 2, 0.0, True)],
            1: [(1.0, 2, 0.0, True)]
        }
    }
    print(P)
```

Listing 3: Bandit Slippery Walk python程序

如上所示，在状态S时，如果采取编号为0的向左行动，则有80%的概率会进入到状态H，奖励为0.0，并且是终止状态，当采用编号为1的向右行动时，将进入状态G，获得奖励为1.0，并且为终止状态，采用这种方式我们就表示了环境的随机性。

1.2 典型交互

Agent与环境的交互分为分段的或连续的，由一系列时间步聚组成，在时间t时刻：

- Agent得到环境给的奖励信号R_t，其由Agent在上一时刻S_{t-1}采取行动A_{t-1}时所获得的，并且Agent观察到环境状态S_t；
- Agent根据所观察到的环境状态S_t，选择采取行动A_t；
- 环境接收到行动A_t后，会转移到新的状态S_{t+1}，并且会给Agent奖励R_{t+1}；
- 依次循环......

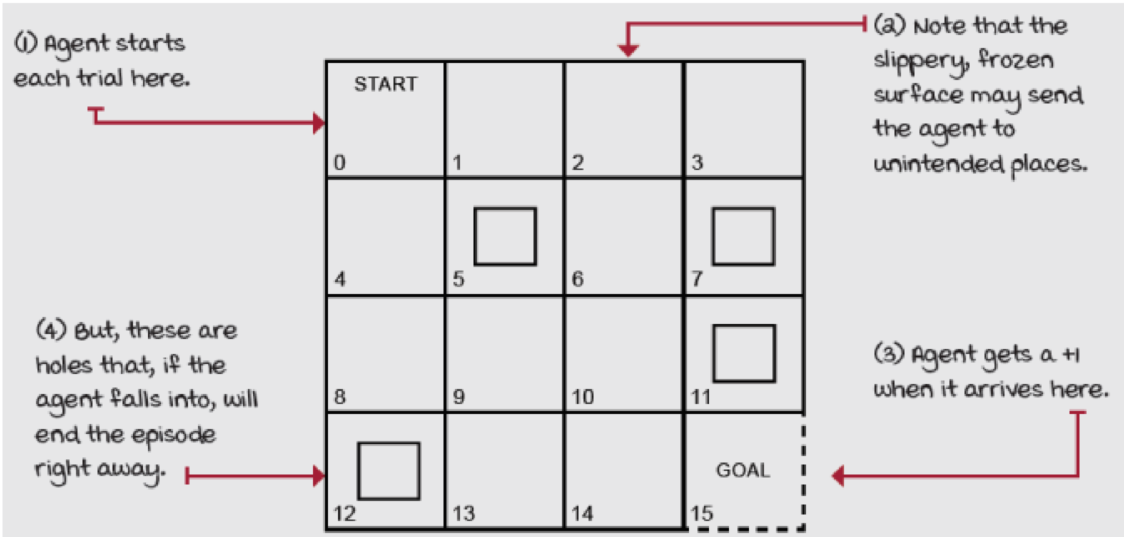
上述过程可以表示为：

$$(R_0, S_0, A_0), (R_1, S_1, A_1), (R_2, S_2, A_2), ..., (R_t, S_t, A_t), ..., (R_T, S_T, A_T) \tag{1}$$

1.3 MDP定义

我们以Frozen Lake为例来定义MDP过程。该环境如下所示：

图 6: Frozen Lake环境图



如图所示：

- Agent从状态Start开始；
- 在每个状态，Agent可以采取向左、向上、向下、向右行动，当在边缘状态时，走出环境的行动会100%使Agent留在原状态；
- 由于是冻冰的湖面，例如当Agent选择向下行动时，其有33.3%的概率向下运动，还有66.7%的概率会向垂直的方向运动，既以33.3%的概率向左运动，33.3%的概率向右运动；
- 当Agent到达有洞的状态时，过程立即结束；
- 当Agent到达最终节点时，可以获得+1的奖励；

1.3.1 环境状态建模

时刻t环境状态的状态表示为S_t，环境所有可能的状态用集合$\mathcal{S}$表示，通常我们用n维向量来表示一个状态：

$$S_t = \boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ ... \\ s_n \end{bmatrix} \in R^n \tag{2}$$

对于我们当前研究的这个问题，环境状态只需要表示Agent处于哪个状态即可，我们采用0~15来对状态进行编号，因此状态可以用0~15来表示：

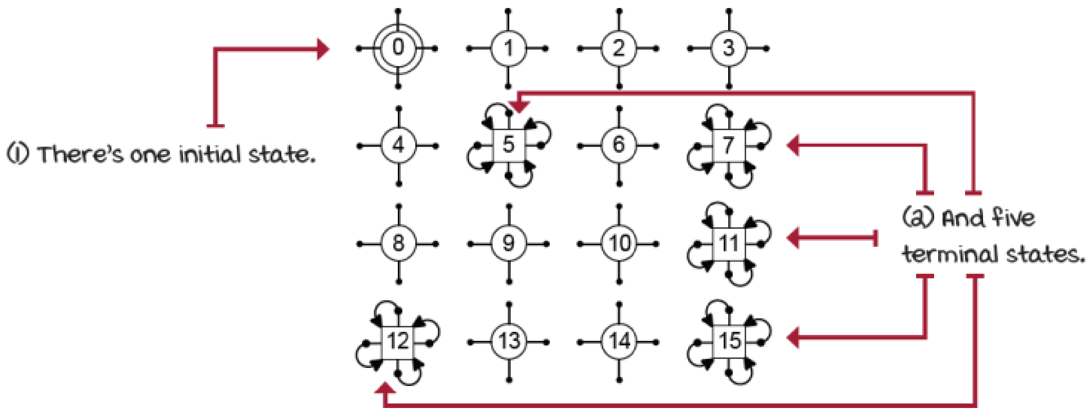
$$S_t = \boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} i \end{bmatrix} \in R^1, i \in \{0, 1, 2, 3, ..., 15\} \tag{3}$$

我们规定环境只与当前状态有关，而与过去的历史无关，这就是马可夫特性，即我们研究的过程是无记忆的。乍一看，这是一个非常严重的限制条件，但是在实际应用中，我们通常可以通过设计合适的状态，使所研究的问题变为无记忆的。用数学语言可以表示为：

$$P(S_{t+1}|S_t, A_t) = P(S_{t+1}|S_t, A_t, S_{t-1}, A_{t-1}, ...) \tag{4}$$

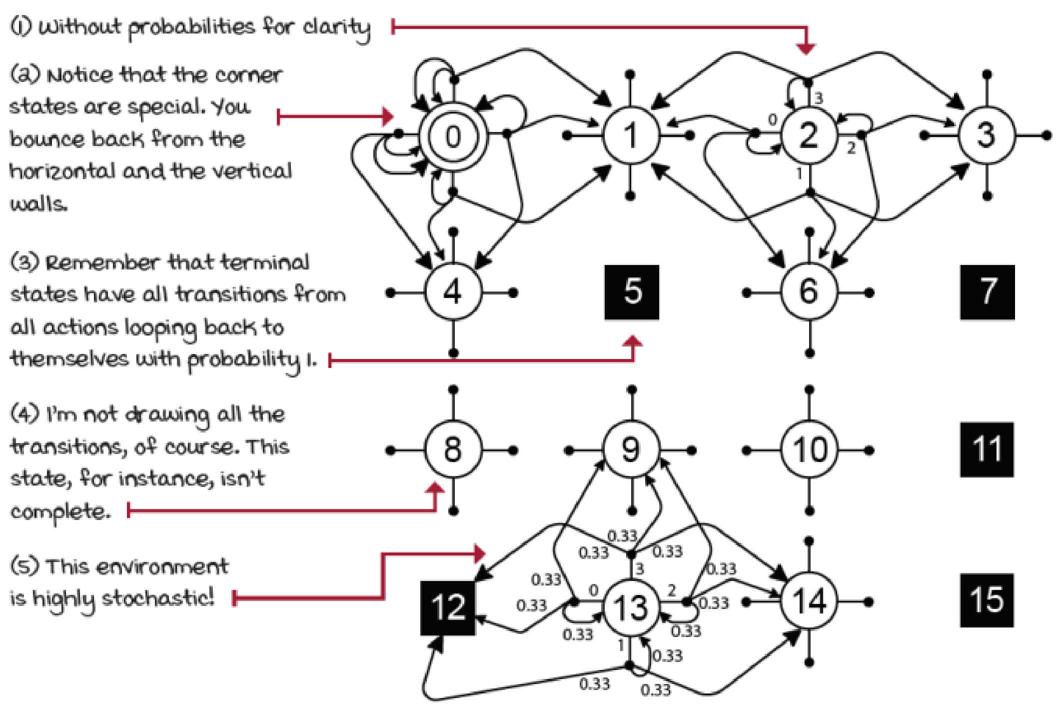
以Frozen Lake为例，其每个状态和在状态上可以采取的行动如下所示：

图 7: Frozen Lake状态和行动图



当Ageng采取行动后，环境会根据自身的动态特性，转移到下一个状态，我们称之为转移函数，如下图所示：

图 8: Frozen Lake状态转移图



在状态13时，共有向左、向下、向右、向上编号分别为0、1、2、3的四种行动，当Agent采取行动0向左时，将到达左侧的小黑点，

- 行动0（向左）：到达左侧小黑点，由于冻冰原因，其有如下三种可能性：
  - 33.3%：向左，进入状态12，获取奖励0.0，并且为终止状态，用(0.333, 12, 0.0, True)表示；

- 33.3%：向下，由于是边缘节点，其仍然在状态13，获取奖励0.0，不为终止状态，用(0.333, 13, 0.0, False)表示；
- 33.3%：向上，进入状态9，获取奖励为0.0，不是终止状态，用(0.33, 9, 0.0, False)表示；

• 行动1（向下）：到达下面小黑点，有如下三种可能性：

- 33.3%（向下）：由于是边缘节点，其仍然在状态13，获得奖励为0.0，不是终止状态，用(0.333, 13, 0.0, False)表示；
- 33.3%（向左）：进入状态12，获得奖励0.0，并且为终止状态，用(0.333, 12, 0.0, True)表示；
- 33.3%（向右）：进入状态14，获得奖励0.0，不是终止状态，用(0.333, 14, 0.0, False)表示；

我们这里仅举了两个例子，其余内容读者可以自己补全。环境的状态转移函数如下所示：

$$
\begin{aligned}
p(s'|s,a) = P(S_t = s'|S_{t-1} = s, A_{t-1} = a) \\
\sum_{s' \in S} p(s'|s,a) = 1, \forall s \in S, \forall a \in A(s)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

上式表明在任意时刻，环境状态为$S_{t-1} = s$，Agnet采取行动为$A_{t-1} = a$时，环境由于具有随机性，以一个确定的概率分布进入新状态$S_t = s'$，并且如果我们将所有可能到达的新状态的概率相加，其值为1。当Agent根据自己的策略，在任意时刻采取行动后，系统会给Agent一个奖励Reward，其是一个标量，越大代表该行动决策越好，越小代表越差，甚至可以为负值，代表需要尽力避免的情况。需要注意的是，Agent不仅要关注当前获得的奖励，还要关注最终获得的累积的奖励，Agent的目标就是使最终获得的累积奖励最大。环境的奖励函数如下表示：

$$
r(s,a) = E\bigg(R_t|S_{t-1} = s, A_{t-1} = a\bigg) \tag{6}
$$

上式表明在$t-1$时刻，环境状态为$S_{t-1} = s$，Agent采取行动$A_{t-1} = a$，环境在t时刻给出奖励R_t，由于环境具有随机性，环境可能进入不同的状态，从而获得不同的奖励，而且即使是进入同一个状态，获得的奖励也有可能不同，因此在这种情况，下的奖励就是所有这种情况下获得奖励的期望值。在$t-1$时刻，环境状态为$S_{t-1} = s$，Agent采取行动$A_{t-1} = a$，环境进入$S_t = s'$时，获得的奖励为：

$$
r(s,a,s') = E\bigg(R_t|S_{t-1} = s, A_{t-1} = a, S_t = s'\bigg) \tag{7}
$$

从上式就可以看出，即使是转移到同一个状态，也可能获得不同的奖励，所以我们将奖励定义所有这些值的期望。在上面我们定义在任意时刻，Agent通过与环境交互，获得的奖励为R_t，同时我们知道，Agent的目标是使整个过程，所有时刻所获得奖励的累加值最大，我们将其定义为回报G_t。但是由于未来具有更大的不确定性，因此距离当前时间点越近，获得的奖励就越有价值，越远则价值越小，因此我们引入折扣的概念，如下所示：

$$
\begin{aligned}
G_t = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + ... + \gamma^{k-1} R_{t+k} + ... + R_T \\
= \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1} \\
= R_{t+1} + \gamma G_{t+1}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

1.4 状态价值函数

我们假定Agent的策略为π，我们定义当Agent在某个状态可以获得的累积奖励的期望值为该状态的值函数，如下所示：

$$v_\pi(s) = E_\pi(G_t|S_t = s) = E_\pi(R_{t+1} + \gamma G_{t+1}|S_t = s) \tag{9}$$

由于上式是求期望值，根据期望值定义，可以得到：

$$v_\pi(s) = \sum_a \pi(a|s) \sum_{s',r} p(s', r|s, a)(r + \gamma v_\pi(s')) \tag{10}$$

这个公式在本质上是一个递归形式的公式，我们将用递归的方法来求解。

1.5 行动价值函数

我们还需要知道在某个状态下，采取某个行动到底有多好，这就是行动价值函数：

$$q_\pi(s, a) = E_\pi(G_t|S_t = s, A_t = a) = E_\pi(R_{t+1} + \gamma G_{t+1}|S_t = s, A_t = a) \tag{11}$$

根据期望的定义可得：

$$q_\pi(s, a) = \sum_{s',r} p(s', r|s, a)(r + \gamma v_\pi(s')) \tag{12}$$

这就是所谓的Q函数，需要注意的是这个公式的含义，这个公式表示在状态$S_t = s$时Agent不按照策略π情况下采取$A_t = a$，然后Agent会一直采用策略π，这种情况下所取得的累积奖励的期望值。

1.6 优势函数

当在状态$S_t = s$时Agent不按照策略π情况下采取$A_t = a$，与在状态$S_t = s$时Agent按照策略π相比，所取得的累积奖励的期望值的变化量定义为优势函数（Advantage Function）：

$$a_\pi(s, a) = q_\pi(s, a) - v_\pi(s) \tag{13}$$

1.7 优化

我们的目的是要找到最优策略，使得在每个状态下的状态价值函数可以最大，每个行动价值函数也达到最大，需要注意的是，最优策略可能不止一种，但是对于每个状态的状态价值函数值却是唯一的，同时每个状态采取行动的行动价值函数值也是唯一的。我们用π^*”来表示最优策略，定义如下所示：

$$v_*(s) = \max_\pi v_\pi(s), \forall s \in S \tag{14}$$

我们可以将v_π的计算公式代入可得：

$$v_*(s) = \max_a \sum_{s',r} p(s', r|s, a)\left(r + \gamma v_*(s')\right) \tag{15}$$

同样对于行动价值函数来说，最优策略可以定义为：

$$q_*(s, a) = \max_\pi q_\pi(s, a), \forall s \in S, \forall a \in A \tag{16}$$

代入具体的计算公式可行：

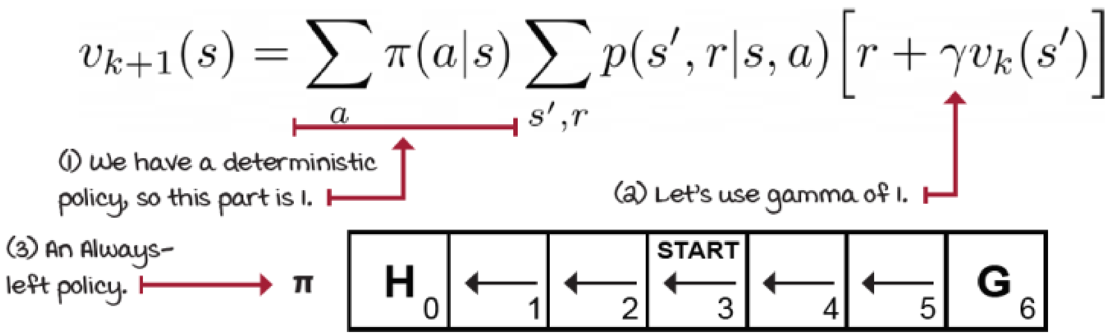
$$q_*(s, a) = \Delta sum_{s',r} p(s', r|s, a)\left(r + \gamma \max_{a'} q_*(s', a')\right) \tag{17}$$

在有了最佳策略定义之后，我们就需要来评估策略，我们首先用状态价值函数来评估策略，我们称之为预测问题：

$$v_{k+1}(s) = \sum_a \pi(a|s) \sum_{s',r} p(s',r|s,a)\Big(r + \gamma vk(s')\Big) \tag{18}$$

在上式中，下标k代表是第几次迭代，通过迭代，我们可以求出每个状态的状态价值函数的值。我们以Slippery Wall Floor为例，来看上面公式的具体使用：

图 9: Slippery Walk Floor环境示意图



如上图所示，我们的策略是在每个状态均采取向左的行动，我们假设现在我们在状态5处，根据当前策略，我们只有一个行动既向左行动，同时由于环境具有随机性，使我们可能进入到状态4（50%概率）、状态5（33.3%概率）和状态6（16.6%概率），初始时，我们设所有状态的状态价值函数的值为0，如下所示：

$$\begin{aligned}
& v_1^{\pi}(5) = \sum_a \pi(a|s) \sum_{s',r} p(s',r|s,a)\Big(r + \gamma v_0^{\pi}(s')\Big) \\
& = \sum_{s',r} p(s',r|s,a)\Big(r + \gamma v_0^{\pi}(s')\Big) && 1 \\
& = p(s'=4, r=0|s=5, a=Left)(r=0+1.0 * v_0^{\pi}(4)) && 2 \\
& + p(s'=5, r=0|s=5, a=Left)(r=0+1.0 * v_0^{\pi}(5)) && 3 \\
& + p(s'=6, r=1)(r=1+1.0 * v_0^{\pi}(6)) && 4 \\
& = 0.5 * (0+0) + 0.33 * (0+0) + 0.16 * (1+0) = 0.16
\end{aligned} \tag{19}$$

公式解读如下所示：

- 第1行：由于本策略只采取向左行动，因此前面的$\sum_a \pi(a|s)$的概率值为1，所以可以去掉；
- 第2行：转移到状态4时的情况；
- 第3行：转移到状态5时的情况；
- 第4行：转移到状态6时的情况；

通过上面的计算过程可以看出，我们将初始状态时所有状态的状态价值函数值设置为0，然后通过上面的迭代算法，就可以算出各个状态的状态价值函数的真实值，并且收敛的速度还是比较快的。我们首先初始化强化学习环境，我们先安装所需的库：

```
cd /e/awork/ext
git clone https://github.com/mimoralea/gym-walk.git
cd gym-walk
pip install .
```

Listing 4: 安装依赖库

环境初始化代码如下所示：

```
1  def startup(self):
2      env = gym.make('SlipperyWalkFive-v0')
3      P = env.env.P
4      init_state = env.reset()
5      goal_state = 6
6      LEFT, RIGHT = range(2)
7      pi = lambda s: {
8          0:LEFT, 1:LEFT, 2:LEFT, 3:LEFT, 4:LEFT, 5:LEFT, 6:LEFT
9      }[s]
10     self.print_policy(pi, P, action_symbols=('<', '>'), n_cols=7)
11
12 def print_policy(self, pi, P, action_symbols=('<', 'v', '>', '^'),
13             n_cols=4, title='Policy:'):
14     print(title)
15     arrs = {k:v for k,v in enumerate(action_symbols)}
16     for s in range(len(P)):
17         a = pi(s)
18         print("| ", end="")
19         if np.all([done for action in P[s].values()
20                         for _, _, _, done in action]):
21             print("".rjust(9), end=" ")
22         else:
23             print(str(s).zfill(2), arrs[a].rjust(6), end=" ")
24         if (s + 1) % n_cols == 0: print("|")
```

Listing 5: SWF环境初始化(chp001/exp001_002.py)

代码解读如下所示：

- 第2行：生成强化学习环境，使用的是gmy_walk包中定义的环境；
- 第3行：P为我们在前面讨论的结构：

```
{
    si:{
        ai: [(p, s', r, False)]
    }
}
```

Listing 6: SWF环境初始化(chp001/exp001_002.py)

第一层为以状态为键的字典，每个状态是以行动为键的字典，值为一个列表，代表在当前状态下采取行动后，环境会以多大的概率，转移动新状态，获得的奖励以及新状态是否为终止状态；

- 第4行：重置环境状态，并获取初始状态；
- 第5行：将状态6设置为目标状态；
- 第6行：设置行动LEFT为0，RIGHT为1；
- 第7~9行：定义策略，其为lambda表达式，参数为s，定义了一个字典，策略为取出该字典中以参数s为键的元素，其中s代表状态编号，策略的类型为函数；
- 第10行：打印策略；
- 第12、13行：定义打印策略函数：，
  - pi为策略类型为函数，参数为状态编号，返回值为所采取的行动；
  - P为状态、行动的转移矩阵，即环境的MDP特性；
  - action_symbols 行动的符号表示；
  - n_cols 共有几个状态，这里有7个状态，0和6代表终止状态；
  - title 标题；
- 第15行：arrs的形式为：0: '<', 1: '>'；
- 第16行：循环处理每个状态，s为状态编号；
- 第27行：以状态编号为参数，调用策略函数，求出该状态下采取的行动编号（在其他复杂问题中，可能是采取一系列行动的概率分布）；
- 第19、20行：通过如下代表：

```python
def test001(self, P, state):
    v1 = [action for action in P[state].values()]
    print('v1: {0};'.format(v1))
    v2 = [done for action in P[state].values() for _, _, _, done in action]
    print('v2: {0};'.format(v2))
    v3 = np.all(v2)
    print('v3: {0};'.format(v3))
```

Listing 7: SWF环境初始化(chp001/exp001_002.py)

状态0时：

```
    v1: [
            [
                (0.5000000000000001, 0, 0.0, True),
                (0.3333333333333333, 0, 0.0, True),
                (0.16666666666666666, 0, 0.0, True)
            ],
            [
                (0.5000000000000001, 0, 0.0, True),
                (0.3333333333333333, 0, 0.0, True),
                (0.16666666666666666, 0, 0.0, True)
            ]
        ];
    v2: [True, True, True, True, True, True];
    v3: True;
```

Listing 8: SWF环境初始化(chp001/exp001_002.py)

状态1时：

```
    v1: [
            [
                (0.5000000000000001, 0, 0.0, True),
                (0.3333333333333333, 1, 0.0, False),
                (0.16666666666666666, 2, 0.0, False)
            ],
            [
                (0.5000000000000001, 2, 0.0, False),
                (0.3333333333333333, 1, 0.0, False),
                (0.16666666666666666, 0, 0.0, True)
            ]
        ];
    v2: [True, False, False, False, False, True];
    v3: False;
```

Listing 9: SWF环境初始化(chp001/exp001_002.py)

状态2时：

```
    v1: [
            [
                (0.5000000000000001, 1, 0.0, False),
                (0.3333333333333333, 2, 0.0, False),
                (0.16666666666666666, 3, 0.0, False)
            ],
            [
                (0.5000000000000001, 3, 0.0, False),
                (0.3333333333333333, 2, 0.0, False),
                (0.16666666666666666, 1, 0.0, False)
            ]
        ];
    v2: [False, False, False, False, False, False];
    v3: False;
```

Listing 10: SWF环境初始化(chp001/exp001_002.py)

上面的代码就是确定某个状态是否是终止状态；

- 第21行：当为终止状态时打印空；
- 第23行：当不为终止状态时，打印状态编号和行动的符号；

下面我们来看我们取得胜利的概率，如下所示：

```python
    def probability_success(self, env, pi, goal_state, n_episodes=100, max_steps=200):
        random.seed(123); np.random.seed(123) ; env.seed(123)
        results = []
        for epoch in range(n_episodes):
            state, done, steps = env.reset(), False, 0
            while not done and steps < max_steps:
                state, _, done, h = env.step(pi(state))
                steps += 1
```

```
9             results.append(state == goal_state)
10        return np.sum(results)/len(results)
```

Listing 11: 求获得胜利既到达状态6的概率(chp001/exp001_002.py)

代码解读如下所示：

- 第4行：循环指定epoch数；
- 第5行：初始化环境，我们假定开始时Agent在状态3；
- 第6行：完整执行一个epoch，并且如果超过指定步数后，强制终止此epoch；
- 第7行：在当前状态state下，根据策略pi，采取一个行协pi(state)，调用环境的evn.step方法，转移到下一个状态，其返回值为：下一状态、奖励、是否完结、附加信息，其中新状态和奖励是根据我们状态转移P来决定的；
- 第8行：统计当前epoch中的步数；
- 第9行：当完成一个epoch后，如果终止状态为Goal状态，则将1加入到results列表中，否则将0加入到results列表中；
- 第10行：results列表中为1的项数除以总项数即为获胜的概率；

接下来我们看一下在该策略下，我们可以获取平均回报：

```
    def mean_return(self, env, pi, n_episodes=100, max_steps=200):
        random.seed(123); np.random.seed(123) ; env.seed(123)
        results = []
        for _ in range(n_episodes):
            state, done, steps = env.reset(), False, 0
            results.append(0.0)
            while not done and steps < max_steps:
                state, reward, done, _ = env.step(pi(state))
                results[-1] += reward
                steps += 1
        return np.mean(results)
```

Listing 12: 求平均回报(chp001/exp001_002.py)

这段代码的逻辑与11类似，只不过是每个epoch开始前，向results列表中加入一个0.0元素，在该epock中的每一步，都会将所获得奖励reward叠加到该值上，这样可以求出每个epoch的累积奖励，最后我们返回这些累积奖励值的平均值。接下来我们对当前策略进行评估，利用迭代法求出所状态价值函数的值：

```
    def policy_evaluation(self, pi, P, gamma=1.0, theta=1e-10):
        prev_V = np.zeros(len(P), dtype=np.float64)
        while True:
            V = np.zeros(len(P), dtype=np.float64)
            for s in range(len(P)):
                for prob, next_state, reward, done in P[s][pi(s)]:
                    V[s] += prob * (reward + gamma * prev_V[next_state] *
 (not done))
            if np.max(np.abs(prev_V - V)) < theta:
                break
            prev_V = V.copy()
```

```
11         return V
```

Listing 13: 策略评估(chp001/exp001_002.py)

代码解读如下所示：

- 第2行：初始时将所有状态的状态价值函数的值设置为0，将其作为上一迭代的值；
- 第4行：进行无限次迭代循环；
- 第5行：当前状态的状态价值函烽的初始值置为0；
- 第6行：对每个状态进行循环；
- 第7行：对每个状态，在当前策略下采取的行动，根据转移函数P，得到概率prob，下一个状态next_state和奖励reward，以及是否结束标志done；
- 第8行：利用公式$v_{k+1} = \sum_a \pi(a|s) \sum_{s',r} (r + \gamma v_k)$求出新的状态价值函数的值；
- 第8、9行：当求完所有状态的状态价值函数值时，看两次迭代之间状态价值函数的差值是否小于阈值，如果小于则退出最外层的无限循环；
- 第10行：如果二者的差值大于阈值，则将当前值设置为上一次迭代值，重复进行循环；

上面程序的最终结果就是求出所有状态的真实的状态价值函数的值，接下来我们打印状态价值函数的值：

```
    def print_state_value_function(self, V, P, n_cols=4, prec=3, title='State-value function:'):
        print(title)
        for s in range(len(P)):
            v = V[s]
            print("| ", end="")
            if np.all([done for action in P[s].values() for _, _, _, done in action]):
                print("".rjust(9), end=" ")
            else:
                print(str(s).zfill(2), '{}'.format(np.round(v, prec)).rjust(6), end=" ")
            if (s + 1) % n_cols == 0: print("|")

    def startup(self):
        env = gym.make('SlipperyWalkFive-v0')
        P = env.env.P
        init_state = env.reset()
        goal_state = 6
        LEFT, RIGHT = range(2)
        pi = lambda s: {
            0:LEFT, 1:LEFT, 2:LEFT, 3:LEFT, 4:LEFT, 5:LEFT, 6:LEFT
        }[s]
        self.print_policy(pi, P, action_symbols=('<', '>'), n_cols=7)
        prob = self.probability_success(env, pi, goal_state)
        print('win prob:{0};'.format(prob))
        g_mean = self.mean_return(env, pi)
```

```
        print('mean return:{0};'.format(g_mean))
        V = self.policy_evaluation(pi, P)
        self.print_state_value_function(V, P, n_cols=7, prec=5)
        improved_pi = self.policy_improvement(V, P)
        self.print_policy(improved_pi, P, action_symbols=('<', '>'),
    n_cols=7)
```

Listing 14: 打印状态价值函数的值(chp001/exp001_002.py)

这个函数比较简单，我们就不做介绍了。通过对策略的评价，我们得到了每个状态的状态价值函数的值，接下来我们讨论怎样根据这些内容来优化我们的策略。这里我们需要用到行动函数，即在每个状态，我们从所有行动中，找出可以使我们转到的新状态，可以获得最高的状态价值函数，并以此为新的策略：

$$\pi'(s) = \arg\max_a \sum_{s',r} p(s',r|s,a)(r+\gamma v_\pi(s')) \tag{20}$$

上式中的$\pi'(s)$就是改进后的策略。策略改进代码如下所示：

```
1     def policy_improvement(V, P, gamma=1.0):
2         Q = np.zeros((len(P), len(P[0])), dtype=np.float64)
3         for s in range(len(P)):
4             for a in range(len(P[s])):
5                 for prob, next_state, reward, done in P[s][a]:
6                     Q[s][a] += prob * (reward +
7                                 gamma * V[next_state] * (not done))
8         new_pi = lambda s: {s:a for s, a
9             in enumerate(np.argmax(Q, axis=1))
10        }[s]
11        return new_pi
```

Listing 15: 策略改进(chp001/exp001_002.py)

代码解读如下所示：

- 第2行：Q为一个二维数组，第一维是所有的状态，第二维是在某个状态下所有的行动选项，其值为该行动的行动价值函数，初始时设置为0；
- 第3行：循环处理所有状态；
- 第4行：循环处理每个状态下可以采取的所有行动；
- 第5行：根据环境的状态转移函数，在该状态下采取该行动，可以得到：转移到新状态的概率、新状态、奖励、是否为终止状态；
- 第6、7行：根据公式$q_\pi(s,a)=\sum_{s',r} p(s',r|s,a)(r+\gamma v_\pi(s'))$；
- 第8～10行：求出新的优化过的策略：

$$\begin{bmatrix} q(s_0,a_0) & q(s_0,a_1) & ... & q(s_0,a_{k_0}) \\ q(s_1,a_0) & q(s_1,a_1) & ... & q(s_1,a_{k_1}) \\ ... & ... & ... & ... \\ q(s_l,a_0) & q(s_l,a_1) & ... & q(s_l,a_{k_l}) \end{bmatrix} \tag{21}$$

  上式中每一行代表一个状态，每一列代表在该状态下采取某个行动可以获取到的累积回报，注意每行的数量可能并不相同。np.argmax(,axis=1)代表把第2维去掉，即求每一行的最大值，也就是求出某个状态采取什么行动可以获得最大的回报。最终形厉每个状态应该采取的行动编号，利用lambda表达式形成策略函数。；

- 第11行：返回这个新生成的策略函数；

运行结果如下所示：

图 10: Slippery Walk Floor策略优化一次结果

```
(pydev) E:\awork\iching>python app_main.py
易经量化交易系统 v0.0.1
MDP应用
Policy:
|           | 01      < | 02      < | 03      < | 04      < | 05      < |           |
获胜概率: 0.07;
平均回报: 0.07;
State-value function:
|           | 01 0.00275 | 02 0.01099 | 03 0.03571 | 04 0.10989 | 05 0.33242 |           |
Policy:
|           | 01      > | 02      > | 03      > | 04      > | 05      > |           |
```

如上图可以看出，仅经过一次策略优化，我们就可以得到正确的策略。实际上我们对策略优化之后，我们可以重新进行策略评估，然后再进行优化，形成所谓的策略迭代，程序如下所示：

```python
    def policy_iteration(self, P, gamma=1.0, theta=1e-10):
        random_actions = np.random.choice(tuple(P[0].keys()), len(P))
        pi = lambda s: {s:a for s, a in enumerate(random_actions)}[s]
        while True:
            old_pi = {s:pi(s) for s in range(len(P))}
            V = self.policy_evaluation(pi, P, gamma, theta)
            pi = self.policy_improvement(V, P, gamma)
            if old_pi == {s:pi(s) for s in range(len(P))}:
                break
        return V, pi

    def startup(self):
        env = gym.make('SlipperyWalkFive-v0')
        P = env.env.P
        init_state = env.reset()
        goal_state = 6
        LEFT, RIGHT = range(2)
        pi = lambda s: {
            0:LEFT, 1:LEFT, 2:LEFT, 3:LEFT, 4:LEFT, 5:LEFT, 6:LEFT
        }[s]
        self.print_policy(pi, P, action_symbols=('<', '>'), n_cols=7)
        prob = self.probability_success(env, pi, goal_state)
        print('win prob:{0};'.format(prob))
        g_mean = self.mean_return(env, pi)
        print('mean return:{0};'.format(g_mean))
        V = self.policy_evaluation(pi, P)
        self.print_state_value_function(V, P, n_cols=7, prec=5)
        improved_pi = self.policy_improvement(V, P)
        self.print_policy(improved_pi, P, action_symbols=('<', '>'),
    n_cols=7)
        # policy iteration
        optimal_V, optimal_pi = self.policy_iteration(P)
```

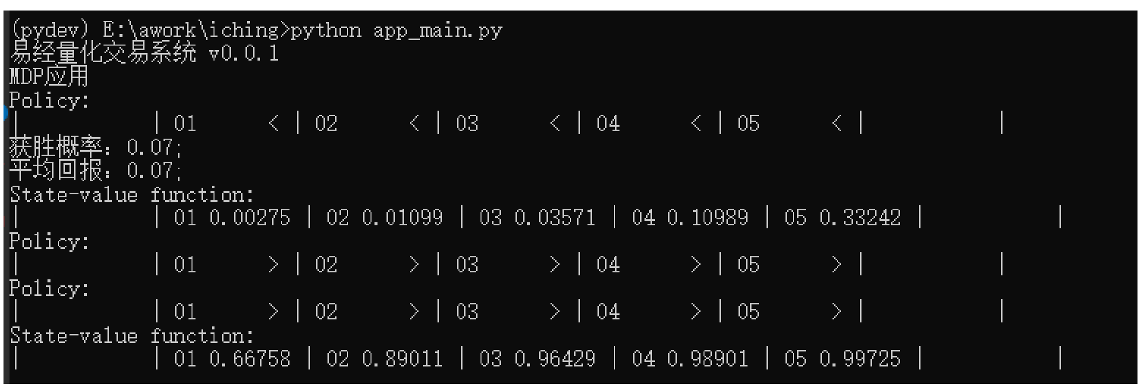
```
32        self.print_policy(optimal_pi, P, action_symbols=('<', '>'),
    n_cols=7)
33        self.print_state_value_function(optimal_V, P, n_cols=7, prec=5)
```
Listing 16: 策略迭代(chp001/exp001_002.py)

代码解读如下所示：

- 第2行： 其中P[0]=0:[(0.5, 0, 0.0, True), ...], 1:[...]， 所以tuple(P[0].keys())为(0, 1)，因此np.random.choice为生成长度为len(P)既所有状态数的数组，数组的每一位由(0,1)中随机抽取；
- 第3行：生成策略的lambda表达式，参数为状态编号；
- 第4行：进入无限循环：
- 第5行：将当前策略保存为原始策略，类型为字典，格式为：状态: 行动；
- 第6行：求出在当前策略下的状态价值函数；
- 第7行：根据状态价值函数得到优化后的策略；
- 第8、9行：将优化后策略也转为格式为状态: 行动的字典，与原来的策略形成的字典进行比较，如果相等则意味着找到了最佳策略，则退出无限循环，否则继续循环优化；

运行结果如下所示：

图 11: Slippery Walk Floor策略迭代结果



上面讲的是策略迭代算法（PI：Policy Iteration），其核心思想是先根据策略求出状态价值函数，然后根据状态价值函数，在每个状态下选择能够达到最大状态价值函数状态的行动，形成优化后的策略，然后循环执行上述过程。但是这种方法通常收敛速度较慢，我们接下来介绍值迭代算法（VI：Value Iteration）。

1.8 值迭代（VI）

值迭代（VI： Value Iteration）的核心思想是先令所有状态的状态价值函数值为0.0，在每个状态下求出所采取的行动的回报，找到得到最大回报的行动，根据下面的公式确定新的状态价值函数值：

$$v_{k+1} = \max_a \sum_{s',r} p(s',r|s,a)\Big(r + \gamma v_k(s')\Big) \tag{22}$$

代码实现如下所示：

```
    def value_iteration(self, P, gamma=1.0, theta=1e-10):
        V = np.zeros(len(P), dtype=np.float64)
        while True:
            Q = np.zeros((len(P), len(P[0])), dtype=np.float64)
            for s in range(len(P)):
                for a in range(len(P[s])):
                    for prob, next_state, reward, done in P[s][a]:
                        Q[s][a] += prob * (reward + gamma * V[next_state]
 * (not done))
            if np.max(np.abs(V - np.max(Q, axis=1))) < theta:
                break
            V = np.max(Q, axis=1)
        pi = lambda s: {s:a for s, a in enumerate(np.argmax(Q, axis=1))}[
s]
        return V, pi

    def startup(self):
        env = gym.make('SlipperyWalkFive-v0')
        P = env.env.P
        init_state = env.reset()
        goal_state = 6
        LEFT, RIGHT = range(2)
        pi = lambda s: {
            0:LEFT, 1:LEFT, 2:LEFT, 3:LEFT, 4:LEFT, 5:LEFT, 6:LEFT
        }[s]
        self.print_policy(pi, P, action_symbols=('<', '>'), n_cols=7)
        prob = self.probability_success(env, pi, goal_state)
        print('win prob: {0};'.format(prob))
        g_mean = self.mean_return(env, pi)
        print('mean return: {0};'.format(g_mean))
        V = self.policy_evaluation(pi, P)
        self.print_state_value_function(V, P, n_cols=7, prec=5)
        improved_pi = self.policy_improvement(V, P)
        self.print_policy(improved_pi, P, action_symbols=('<', '>'),
n_cols=7)
        # policy iteration
        print('PI: Policy Iteration')
        optimal_V, optimal_pi = self.policy_iteration(P)
        self.print_policy(optimal_pi, P, action_symbols=('<', '>'),
n_cols=7)
        self.print_state_value_function(optimal_V, P, n_cols=7, prec=5)
        print('VI: Value Iteration')
        V2, pi2 = self.value_iteration(P)
        self.print_policy(optimal_pi, P, action_symbols=('<', '>'),
n_cols=7)
        self.print_state_value_function(optimal_V, P, n_cols=7, prec=5)
```

Listing 17: 策略迭代(chp001/exp001_002.py)

代码解读如下所示：

- 第行：；
- 第行：；
- 第行：；
- 第行：；
- 第行：；
- 第行：；
- 第行：；
- 第行：；
- 第行：；

第二篇时序信号分析

第三篇量化交易平台

第四篇 **50ETF**期权

第五篇 50ETF量化交易

2 附录X

参考文献