Bài toán khoảng cách Erdos-Falconer trong trường hữu hạn

Team 1D
Nguyễn Đức Ánh Nguyễn Việt Anh
Nguyễn Đình Huy Nguyễn Trinh Khang Phan Thành Long

Ngày 16 tháng 5 năm 2022

NỘI DUNG CHÍNH

Các ký hiệu

- $f(n) \gtrsim g(n)$ thì tồn tại $C > 0$ để $|f(n)| > C.|g(n)| \quad \forall n$
- $f(n) \lesssim g(n)$ nghĩa là $g(n) \gtrsim f(n)$
- $f(n) \approx g(n)$ khi $f(n) \gtrsim g(n)$ và $f(n) \lesssim g(n)$
- Với $x, m \in \mathbb{F}_q^d$; $x \cdot m = \sum_{i=1}^{d} x_i m_i$

Khai triển Fourier rời rạc

- Cho hàm $f : \mathbb{F}_q^d \to \mathbb{C}$, hàm $\hat{f} : \mathbb{F}_q^d \to \mathbb{C}$ được gọi là biến đổi Fourier của f có công thức là:

$$\hat{f}(m) = q^{-d} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^d} \chi(-x \cdot m).f(x) = q^{-d} \sum_{x \in \mathbb{F}_q} e^{-\frac{2\pi i}{q} x \cdot m} f(x)$$

Tính chất 1.1

$$q^{-d} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^d} e^{\frac{2\pi i \; m \cdot x}{q}} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } m = (0, 0, .., 0) \\ 0 \text{ trái lại} \end{cases}$$

Khai triển Fourier rời rạc

- Công thức Fourier đảo:

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{F}_q^d} e^{\frac{2\pi i}{q} xm} \hat{f}(m)$$

Hệ quả 1.2: Công thức Plancherel

$$\sum_{m \in \mathbb{F}_q^d} |\hat{f}(m)|^2 = q^{-d} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^d} |f(x)|^2$$

Hàm $n(t)$

- Hàm $n : \mathbb{F}_q \to \mathbb{N}$ thỏa mãn:

$$n(t) = \left|\{(u,v) \in \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q;\ u^2 - v^2 = t\}\right|$$

- Ta chứng minh:

$$n(t) = \begin{cases} 2q - 1 \text{ nếu } t = 0 \\ q - 1 \text{ nếu } t \neq 0 \end{cases}$$

Tổng Gauss

- Ta định nghĩa chuẩn trong $\mathbb{F}_q^d$ với $x = (x_1, x_2, ..., x_d)$:

$$||x||_2 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_d^2$$

- Hàm $G : \mathbb{F}_q^d \times \mathbb{F}_q^* \to \mathbb{C}$ ($\mathbb{F}_q^* = \mathbb{F}_q/\{0\}$) được gọi là hàm Gauss khi:

$$G(m,k) = \sum_{x \in \mathbb{F}_q^d} e^{\frac{2\pi i(x \cdot m - k||x||_2)}{q}}$$

- Ta gọi hàm $g : \mathbb{F}_q^* \to \mathbb{C}$ nhận vào đối số $k \in \mathbb{F}_q^*$ như sau:

$$g(k) = \sum_{x_j \in \mathbb{F}_q} e^{-\frac{2\pi i k x_j^2}{q}}$$

Tổng Gauss

- Quan trọng:

1. $G(m,k) = e^{\dfrac{2\pi i ||m||}{4kq}} g^d(k)$
2. $|g(k)| = \sqrt{q}$
3. $g(k) = -\dfrac{1}{2} \pm i\sqrt{q - \dfrac{1}{4}}$

KẾT QUẢ CŨ

- Cho $E \subset \mathbb{F}_q^d$, tập khoảng cách của E:

$$\Delta(E) = \{||x - y||_2;\ x, y \in E\}$$

Bài toán Erdos-Falconer

Cho $E \subset \mathbb{F}_q^d$, tìm $\alpha > 0$ nhỏ nhất thỏa mãn nếu $|E| \gtrsim q^\alpha$ thì $|\Delta(E)| \gtrsim q$

Kết quả 1

Với $||x||_2 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_d^2$, $d \geq 2$ nếu $|E| \geq C.q^{\frac{d+1}{2}}$ thì với C đủ lớn ta sẽ có $\Delta(E)$ chứa toàn bộ các giá trị trong $\mathbb{F}_q$

Một số hàm cần biết

Gọi $E : \mathbb{F}_q^d \to \mathbb{C}$ là hàm đặc trưng của E nếu:

$$E(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \in E \\ 0 \text{ nếu } x \notin E \end{cases}$$

Biến đổi Fourier của E:

$$\widehat{E}(m) = q^{-d} \sum_{x \in E} e^{-\frac{2\pi i x \cdot m}{q}}$$

Gọi $S_r : \mathbb{F}_q^d \to \mathbb{C}$ thỏa mãn:

$$S_r(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } ||x||_2 = r \\ 0 \text{ nếu } ||x||_2 \neq r \end{cases}$$

Chứng minh

Ký hiệu $\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0) \in \mathbb{F}_q^d$. Với $m \neq \mathbf{0}$:

$$
\begin{aligned}
\widehat{S_r}(m) &= q^{-d} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^d} S_r(x).e^{-\frac{2\pi i x \cdot m}{q}} \\
&= q^{-d} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^d} q^{-1} \sum_{j \in \mathbb{F}_q} e^{\frac{2\pi i j(||x||_2 - r)}{q}}.e^{-\frac{2\pi i x \cdot m}{q}} \\
&= q^{-d-1} \sum_{j \in \mathbb{F}_q^*} e^{-\frac{2\pi i j r}{q}} G(-m, -j) + \underbrace{q^{-d-1} q \sum_{x \in \mathbb{F}_q^d} e^{-\frac{2\pi i x \cdot m}{q}}}_{=0 \text{ do } m \neq \mathbf{0}} \\
&= q^{-d-1} \sum_{j \in \mathbb{F}_q^*} .e^{-\frac{2\pi i j r}{q}} e^{-\frac{2\pi i ||m||_2}{4jq}} .g^d(-j)
\end{aligned}
$$

Chứng minh

Lấy module ta được:

$$\left|\widehat{S_r}(m)\right| = q^{-d-1}.q^{\frac{d}{2}}\left|\sum_{j\in\mathbb{F}_q^*} e^{-\frac{2\pi i}{q}\left(jr+\frac{||m||_2}{4j}\right)}\right|$$

Bổ đề 1.3 [1]

Với q là số nguyên tố:

$$\left|\sum_{j\in\mathbb{F}_q^*} e^{-\frac{2\pi i}{q}(jr+j^{-1}r')}\right| \lesssim \sqrt{q} \quad \forall r, r' \in \mathbb{F}_q$$

[1] Andre Weil, *On some exponential sums*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **34** (1948), 204–207.

Chứng minh

Dùng kết quả trên ta được:

$$\left|\widehat{S_r}(m)\right| \lesssim q^{-\frac{d+1}{2}}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in\mathbb{F}_q^d}\left|\widehat{S_r}(x)\right|^2 &= \sum_{x\in\mathbb{F}_q^d}\widehat{S_r}(x)\overline{\widehat{S_r}(x)}\\
&= q^{-d}q^{-2}\sum_{x\in\mathbb{F}_q^d}\sum_{u,v\in\mathbb{F}_q^*} e^{\frac{2\pi i}{q}\left(r(u-v)+||x||_2(u^{-1}-v^{-1})\right)}\\
&= \underbrace{q^{-d-2}\sum_{\{(u,v)\in\mathbb{F}_q^*\times\mathbb{F}_q^*;\ u\neq v\}} e^{\frac{2\pi i(u-v)r}{q}}\sum_{x\in\mathbb{F}_q^d} e^{\frac{2\pi i}{q}||x||_2(u^{-1}-v^{-1})}}_{A} + \underbrace{q^{-2}\sum_{u\in\mathbb{F}_q^*}1}_{B}
\end{aligned}$$

Chứng minh

Thấy rằng $\forall u, v \in \mathbb{F}_q^*$ và $u \neq v$:

$$\left|\sum_{x\in\mathbb{F}_q^d} e^{\frac{2\pi i}{q}||x||_2(u^{-1}-v^{-1})}\right| = \left|\left(\sum_{x_i\in\mathbb{F}_q} e^{\frac{2\pi i}{q}x_i^2(u^{-1}-v^{-1})}\right)^d\right| = \left|g^d\left(u^{-1}-v^{-1}\right)\right| = q^{\frac{d}{2}}$$

Vì vậy:

$$\begin{cases} |A| \leq q^{-d-2} \displaystyle\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{F}_q^* \\ u\neq v}} \left|e^{\frac{2\pi i(u-v)r}{q}}\right| . \left|\sum_{x\in\mathbb{F}_q^d} e^{\frac{2\pi i}{q}||x||_2(u^{-1}-v^{-1})}\right| \approx q^{-d-2}.q^2.q^{\frac{d}{2}} = q^{-\frac{d}{2}} \\ B = q^{-2}.(q-1) \approx q^{-1} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \sum_{x\in\mathbb{F}_q^d} \left|\widehat{S_r}(x)\right|^2 \approx q^{-1}$$

Chứng minh

Từ đó, áp dụng hệ quả 1.2 ta được:

$$|S_r| = \sum_{x \in \mathbb{F}_q^d} S_r^2(x) = q^d \sum_{x \in \mathbb{F}_q^d} |\widehat{S_r}(x)|^2 \approx q^{d-1}$$

Chứng minh

$$
\begin{aligned}
|\{(x,y)\in E\times E:\ ||x-y||=r\}| &= \sum_{x,y\in\mathbb{F}_q^d} E(x)E(y)S_r(x-y) \\
&= \sum_{x,y,m\in\mathbb{F}_q^d} E(x)E(y)e^{\frac{2\pi i}{q}(x-y)\cdot m}\widehat{S_r}(m) \\
&= q^{2d}\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d} |\widehat{E}(m)|^2\widehat{S_r}(m) \\
&= \underbrace{q^{2d}.|\widehat{E}(0,0,...,0)|^2\widehat{S_r}(0,0,...,0)}_{I} + \underbrace{q^{2d}.\sum_{m\neq\mathbf{0}} |\widehat{E}(m)|^2\widehat{S_r}(m)}_{II}
\end{aligned}
$$

Có: $\begin{cases} I = q^{2d}q^{-2d}|E|^2q^{-d}|S_r| \approx |E|^2q^{-1} \\ |II| \lesssim q^{2d}.\sum_{m\neq\mathbf{0}}|\widehat{E}(m)|^2|\widehat{S_r}(m)| \lesssim q^{2d}.q^{-\frac{d+1}{2}}.\sum_{m\neq\mathbf{0}}|\widehat{E}(m)|^2 \approx q^{\frac{d-1}{2}}|E| \end{cases}$ $\Longrightarrow$ ĐPCM

Phát biểu kết quả

Ta xét $||x||_3 = x_1^3 + x_2^3 + ... + x_d^3$.

Kết quả 2

Cho q là 1 số nguyên tố chia 3 dư 1. Với $E \subset \mathbb{F}_q^d$, $d \geq 2$ thỏa mãn $E \geq Cq^{\frac{d+1}{2}}$. Khi đó với C đủ lớn, $\Delta(E)$ chưa tất cả các phần tử của F_q

Hệ quả trực tiếp

Cho q là 1 số nguyên tố chia 3 dư 1.Với $E \subset \mathbb{F}_q^d$, $d \geq 2$ thỏa mãn $E = Cq^{\frac{d+1}{2}}$. Khi đó vói C đủ lớn:

$$|\Delta(E)| \approx |E|^{\frac{2}{d+1}}$$

Một số kiến thức chuẩn bị

- $\psi : \mathbb{F}_q^* \to \mathbb{C}$ gọi là 1 hàm đặc trưng nhân tính nếu

$$\psi(ab) = \psi(a).\psi(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{F}_q^*$$

- $\chi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$ gọi là 1 hàm đặc trưng cộng tính nếu

$$\chi(a+b) = \chi(a)\chi(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{F}_q$$

Các bổ đề sử dụng

Bổ đề 2.1[2]

Với q là số nguyên tố chia 3 dư 1, ψ là hàm đặc trưng nhân tính cấp 3, ta sẽ có:

$$\sum_{s\in\mathbb{F}_q}\chi(as^3+s)=\sum_{s\in\mathbb{F}_q^*}\psi(sa^{-1})\chi(s-(3^3as)^{-1})$$

[2] W. Duke and H. Iwaniec, *A relation between cubic exponential and Kloosterman sums*, Contemp. Math., 143 (1993), pp. 255–258.

Các bổ đề sử dụng

Bổ đề 2.2[3]

Với χ là hàm đặc trưng cộng tính trong $\mathbb{F}_q$, $n \in \mathbb{N}$, và ψ là 1 hàm đặc trưng nhân tính cấp $h = gcd(n, q-1)$, ta có:

$$\sum_{s \in \mathbb{F}_q} \chi(ts^n + b) = \chi(b) \sum_{k=1}^{h-1} \psi^{-k}(t) \sum_{s \in \mathbb{F}_q^*} \psi^k(s)\chi(s)$$

[3] R. Lidl and H. Niederreiter, *Finite fields*, Cambridge Univ. Press (1997).

Các bổ đề sử dụng

Bổ đề 2.3[4]

Với ψ và χ như trên, d và l là 2 số nguyên dương và $d < l$ đặt

$$A_r(\chi,\psi) = \sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} \chi(-tj)\psi^{-(d+r)}(t) \sum_{\substack{s_i\in\mathbb{F}_q^* \\ i=\overline{1,l}}} \chi(s_1+\ldots+s_l+m_1^3t^{-1}s_1^{-1}+\ldots+m_l^3t^{-1}s_l^{-1})\psi(s_1)\ldots\psi(s_l)$$

Với $r = \overline{0, d-l}$, ta có:

$$|A_r(\chi,\psi)| \lesssim q^{\frac{l+1}{2}}$$

[4] A. Adolphson and S. Sperber, *Exponential sums and Newton polyhedra - cohomology and estimates*, Ann. Math., 130 (1989), pp. 367–406.

Các bổ đề sử dụng

Bổ đề 2.4 [5]

Biết rằng biến đổi Fourier của ψ:

$$\widehat{\psi}(v) = q^{-1} \sum_{s \in \mathbb{F}_q^*} \chi(-vs)\psi(s)$$

Khi đó ta có

$$\widehat{\psi}(v) \lesssim q^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \neq 0$$

[5] H. Iwaniec and E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, Colloquium Publications., (2004), Proposition 11.5

Chứng minh kết quả mới 1

Định lý 2.5

Cho χ là 1 hàm đặc trưng cộng tính không tầm thường, $q \equiv 1$ $[3]$. Với $m = (m_1, ..., m_l) \in (\mathbb{F}_q^*)^l$, khi đó với hàm ψ nhân tính cấp 3 bất kỳ và $t \in \mathbb{F}_q^*$, ta có:

$$\prod_{j=1}^{l} \sum_{s_j \in \mathbb{F}_q} \chi(-s_j m_j + s_j^3 t)$$

$$= \psi^{-l}(t) \sum_{s_i \in \mathbb{F}_q^*;\ i=\overline{1,l}} \chi(s_1 + ... + s_l + m_1^3 t^{-1} s_1^{-1} + ... + m_l^3 t^{-1} s_l^{-1}) \psi(s_1) ... \psi(s_l)$$

Chứng minh kết quả mới 1

Ta có:

$$\begin{aligned}&\sum_{s\in\mathbb{F}_q}\chi(-sm_j+s^3t)\\ =&\underbrace{\sum_{s\in\mathbb{F}_q}\chi(s-s^3tm_j^{-3})=\sum_{s\in\mathbb{F}_q}\psi(st^{-1})\chi(s+m_j^3t^{-1}3^{-3}s^{-1})}_{\text{Theo bổ đề 2.1}}\end{aligned}$$

Thay m_j bởi $3m_j$ nhân toàn bộ các tích trên khi $j=\overline{1,l}$ ta được điều phải chứng minh

Chứng minh kết quả mới 1

Định lý 2.6

Với χ là 1 hàm cộng tính không tầm thường, $q \equiv 1\ [3]$ và số nguyên dương l, ta có:

$$\left(\sum_{s\in\mathbb{F}_q}\chi(ts^3)\right)^l = \sum_{r=0}^{l} C_l^r q^l \psi^{-(l+r)}(t)\left(\widehat{\psi}(-1)\right)^{l-r}\left(\widehat{\psi^2}(-1)\right)^r$$

Chứng minh kết quả mới 1

Áp dụng bổ đề 2.2, ta được:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{s\in\mathbb{F}_q}\chi(ts^3)\right)^l &= \left(\sum_{k=1}^{2}\psi^{-k}(t)\sum_{s\in\mathbb{F}_q^*}\psi^k(s)\chi(s)\right)^l\\ &= (G_1(t)+G_2(t))^l\\ &= \sum_{r=0}^{l} C_l^r G_1(t)^{l-r}G_2(t)^r\end{aligned}$$

Với $\begin{cases} G_1(t) = \psi^{-1}(t)\sum\limits_{s\in\mathbb{F}_q^*}\psi(s)\chi(s) = q\psi^{-1}(t)\widehat{\psi}(-1) \\ G_2(t) = \psi^{-2}(t)\sum\limits_{s\in\mathbb{F}_q^*}\psi^2(s)\chi(s) = q\psi^{-2}(t)\widehat{\psi^2}(-1)\end{cases} \implies$ ĐPCM

Chứng minh kết quả mới 1

Ta xét:

$$
\begin{aligned}
\widehat{S}_j(\mathbf{0}) &= q^{-d} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^d} S_j(x) \\
&= q^{-d} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^d} q^{-1} \sum_{t \in \mathbb{F}_q} \chi\left(t(||x|| - j)\right) \\
&= q^{-1} + q^{-d-1} \sum_{t \in \mathbb{F}_q^*} \chi(-tj) \sum_{x \in \mathbb{F}_q^d} \chi(t||x||) \\
&= q^{-1} + q^{-d-1} \sum_{t \in \mathbb{F}_q^*} \chi(-tj) \sum_{r=0}^{d} C_d^r q^d \psi^{-d-r}(t) \left(\widehat{\psi}(-1)\right)^{d-r} \left(\widehat{\psi^2}(-1)\right)^{r} \\
&= q^{-1} + q^{-1} \sum_{r=0}^{d} C_d^r \left(\widehat{\psi}(-1)\right)^{d-r} \left(\widehat{\psi^2}(-1)\right)^{r} q\widehat{\psi^{-d-r}}(j) \approx q^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{S}_j(m) &= q^{-d-1} \sum_{t \in \mathbb{F}_q^*} \chi(-tj) \sum_{x \in \mathbb{F}_q^d} \chi(t\|x\|_3 - m \cdot x) \\
&= q^{-d-1} \sum_{t \in \mathbb{F}_q^*} \chi(-tj) \left(\prod_{k=1}^{l} \sum_{s_k \in \mathbb{F}_q} \chi(ts_k^3 - m_k s_k) \right) \left(\prod_{k=l+1}^{d} \sum_{s_k \in \mathbb{F}_q} \chi(ts_k^3) \right) \\
&= q^{-d-1} \sum_{t \in \mathbb{F}_q^*} \chi(-tj) \psi^{-l}(t) \sum_{s_1, s_2, \cdots, s_l \in \mathbb{F}_q^*} \chi(s_1 + \cdots + s_l + m_1^3 t^{-1} s_1^{-1} + \cdots + m_l^3 t^{-1} s_l^{-1}) \\
&\quad \times \psi(s_1) \cdots \psi(s_l) \sum_{r=0}^{d-l} \begin{pmatrix} d-l \\ r \end{pmatrix} q^{d-l} \psi^{-(d-l+r)}(t) \left(\widehat{\psi}(-1) \right)^{d-l-r} \left(\widehat{\psi^2}(-1) \right)^{r} \\
&= q^{-1-l} \sum_{r=0}^{d-l} \begin{pmatrix} d-l \\ r \end{pmatrix} \left(\widehat{\psi}(-1) \right)^{d-l-r} \left(\widehat{\psi^2}(-1) \right)^{r} \sum_{t \in \mathbb{F}_q^*} \chi(-tj) \psi^{-(d+r)}(t) \\
&\quad \times \sum_{s_1, \cdots, s_l \in \mathbb{F}_q^*} \chi(s_1 + \cdots + s_l + m_1^3 t^{-1} s_1^{-1} + \cdots + m_l^3 t^{-1} s_l^{-1}) \psi(s_1) \cdots \psi(s_l)
\end{aligned}
$$

Từ $\begin{pmatrix} d-l \\ r \end{pmatrix} \left(\widehat{\psi}(-1)\right)^{d-l-r} \left(\widehat{\psi^2}(-1)\right)^{r} = \mathrm{O}(q^{-\frac{1}{2}(d-l)})$, ta có được:

$$\left|\widehat{S_j}(m)\right| \lesssim q^{-1-\frac{d+l}{2}} \sum_{r=0}^{d-l} |A_r(\chi,\psi)|$$

Định lý chính

Định lý 3.3[6] (The Szemeredi-Trotter incidence theorem)

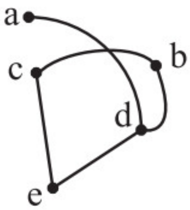
Số điểm giao cắt giữa N điểm và M đường thẳng (hoặc đường tròn với các bán kính khác nhau) trong mặt phẳng thì:

$$I(P, L) \lesssim N + M + (NM)^{\frac{2}{3}}$$

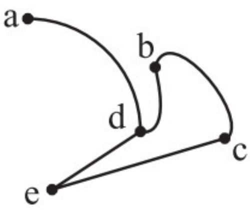
[6] Julia Garibaldi, Alex Iosevich, Steven Senger, *The Erdos Distance Problem*, Volume 56, 38-41

Chứng minh định lý 3.3

G là một đồ thị gồm tập đỉnh V và tập cạnh E, viết tắt: $G = (V, E)$
Số giao cắt(crossing number) của đồ thị G là số nhỏ nhất các giao cắt có thể có của G dù thay đổi vị trí bất kể các đoạn như thế nào.



G



G

Chứng minh định lý 3.3

Ta chia đồ thị thành 2 dạng:

- Đồ thị phẳng: tồn tại cách vẽ đồ thị sao cho $cr(G) = 0$.
- Đồ thị không phẳng: bất kể thay đổi vị trí đoạn nối giữa các cạnh thì $cr(G) \geq 1$.

Chứng minh định lý 3.3

Mệnh đề 1:(Euler's formula in graph theory)

Một đồ thị G phẳng, hữu hạn phần tử, kết nối được, không có giao giữa các cạnh, đặt n là số đỉnh, e là số cạnh, f là số mặt

$$n - e + f = 2$$

Chứng minh định lý 3.3

Mệnh đề 1:(Euler's formula in graph theory)

Một đồ thị G phẳng, hữu hạn phần tử, kết nối được, không có giao giữa các cạnh, đặt n là số đỉnh, e là số cạnh, f là số mặt

$$n - e + f = 2$$

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh mệnh đề bằng quy nạp theo cạnh.
Với $e = 0$, khi đó n = 1, f = 1: $n - e + f = 1 - 0 + 1 = 2$.
Với $e = 1$, khi đó n = 2, f = 1: $n - e + f = 2 - 1 + 1 = 2$.
Xét đồ thị G là đồ thị cây, khi đó ta có $e = n - 1, f = 1$ và ta được
$n - e + f = n - (n - 1) + 1 = 2$
Xét đồ thị G là đồ thị phẳng, kết nối được với số cạnh e nhỏ nhất thỏa mãn $n - e + f \neq 2$
Khi đó ta nhận thấy G có ít nhất một vùng kín ứng với 1 cạnh e_1, xét $G - e_1$ ta được số đỉnh là n, số cạnh là $e - 1$ và số vùng là $f - 1$, khi đó ta được $G - e_1$ thỏa mãn giả thiết quy nạp với $e - 1$, tức là $n - (e - 1) + (f - 1) = 2$ tương đương $n - e + f = 2$ □

Chứng minh định lý 3.3

Mệnh đề 2:

Cho một đồ thị đơn giản, phẳng G gồm f mặt và e cạnh.

$$3f \leq 2e$$

Ta có mỗi mặt có ít nhất 3 cạnh, mỗi cạnh tạo thành nhiều nhất 2 mặt.
Ta có tổng bậc của các mặt $\leq 2e$

$$\sum deg(f) \leq 2e. \tag{1}$$

Một mặt được tạo bởi ít nhất 3 cạnh, bậc của một mặt ≥ 3.

$$\sum deg(f) \geq 3f \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta được: $3f \leq 2e$.
Kết hợp CT Euler, ta có: $e \leq 3n - 6$.

Chứng minh định lý 3.3

Định lý 3.3.1

Với $n \geq 3$ và $e > 3n - 6$, ta được $cr(G) \geq e - 3n + 6$

Định lý 3.3.2[7]

Cho G là một đồ thị đơn giản n đỉnh, e cạnh. Nếu e $\geq$ 4n, ta có:

$$cr(G) \gtrsim \frac{e^3}{n^2}$$

[7] Julia Garibaldi,Alex Iosevich, Steven Senger, *The Erdos Distance Problem*,Volume 56,33-36

Chứng minh định lý 3.3

Chứng minh định lý 3.3.2

Lấy bất kì đồ thị con H của G, mỗi đỉnh được xét với một xác suất p.

Việc xóa bỏ cạnh khi chọn đồ thị con đồng nghĩa việc chúng ta có thể giảm số lượng giao cắt (crossings).

Đồ thị có n đỉnh, với các đỉnh được chọn với xác suất p,giá trị kỳ vọng của đỉnh khi chọn một đồ thị con bất kỳ là:

$$\underbrace{p + p + \cdots + p}_{n \text{ đỉnh}} = pn$$

Đồ thị có e cạnh, mỗi cạnh được tạo bởi 2 đỉnh dẫn đến xác suất chọn 1 cạnh là p^2, và giá trị kỳ vọng của cạnh khi chọn một đồ thị con bất kỳ là:

$$\underbrace{p^2 + p^2 + \cdots + p^2}_{e \text{ cạnh}} = ep^2$$

Chứng minh định lý 3.3

Giá trị kỳ vọng của 1 giao cắt của đồ thị con H dựa trên cách vẽ đồ thị G bé hơn hoặc bằng giá trị kỳ vọng số giao cắt của đồ thị $G = p^4 cr(G)$ Tổng kết lại, gọi E là giá trị kỳ vọng.

- E(đỉnh trong H) $= pn$.
- E(cạnh trong H) $= ep^2$.
- E(cr(H)) $\leq p^4 cr(G)$.

Từ định lý 3.3.1, ta có $cr(G) \geq e - 3n$

$$p^4 cr(G) \geq ep^2 - 3np$$

Ta đang xét $e \geq 4n \rightarrow \frac{4n}{e} \leq 1$.
Ta có ràng buộc $\frac{4n}{e} \leq 1$, dẫn đến việc chọn xác suất $p = \frac{4n}{e}$.

$$cr(G) \geq \frac{e}{\left(\frac{4n}{e}\right)^2} - \frac{n}{\left(\frac{4n}{e}\right)^3} = \frac{e^3}{16n^2} - \frac{e^3}{64n^2} = \frac{e^3}{64n^2}$$

$\implies cr(G) \gtrsim \frac{e^3}{n^2}$ $\square$

Chứng minh định lý 3.3

Ta quay lại chứng minh **định lý 3.3**
P là tập hợp gồm n điểm.
L là tập gồm m đường thẳng.
Ta chứng minh $e = I(P, L) - m$. (*)
Thật vậy, xét 1 đường thẳng với k điểm trên đó, khi đó số đoạn thẳng tạo đường là $k - 1$ đoạn (k điểm tương đương k-incidences)
Đặt $I^i(P, L)$ là số incidences(số giao cắt có trên đường thẳng i, $i = \overline{1, m}$.
$\Rightarrow e = (I^1(P, L) - 1) + (I^2(P, L) - 1) + \cdots (I^m(P, L) - 1) = I(P, L) - m$.
Ta xét 2 trường hợp cho định lý 3.3

- TH1: $e < 4n$
  Khi đó $I(P, L) < m + 4n$
  $\Rightarrow I(P, L) \lesssim m + n + (mn)^{\frac{2}{3}}$

Chứng minh định lý 3.3

- TH2: $e \geq 4n$
  Áp dụng định lý 3.3.2:
$$cr(G) \gtrsim \frac{e^3}{n^2} = \frac{(I(P,L)-m)^3}{n^2}$$
  Ta xét m đường thẳng.
  $\Rightarrow cr(G) \leq m^2$
  $\Rightarrow m^2 \gtrsim \frac{(I(P,L)-m)^3}{n^2}$
  $\Rightarrow I(P,L) \lesssim m + n + (mn)^{\frac{2}{3}}$ □

Định lý chính

Định lý 3.4[8]

Giả sử $q \equiv 1[3]$ và là số nguyên tố. Lấy $E, F \subset \mathbb{F}_q^d$, $d \geq 2$. Nếu j $\neq$ 0:

$$|\{(x,y) \in E \times F : (x_1 - y_1)^3 + \cdots + (x_d - y_d)^3 = j\}| \lesssim |E||F|q^{-1} + q^{\frac{d-1}{2}}|E|^{\frac{1}{2}}|F|^{\frac{1}{2}}$$

[8] The Erdos-Falconer distance problem, exponential sums, and Fourier analytic approach to incidence theorems in vector spaces over finite fields (joint work with Alex Iosevich), SIAM J. Discrete Math. 23 (2008/09), no. 1, 123–135.

Chứng minh định lý 3.4

Trước hết, ta chứng minh

$$|\{(x,y) \in E \times F : ||x-y||_3 = j\}| = q^{2d} \sum_m \overline{\widehat{E}(m)} \widehat{F}(m) \widehat{S}_j(m) \qquad (1)$$

Ta xét biểu thức vế trái của (1)

$$|\{(x,y) \in E \times F : ||x-y||_3 = j\}| = \sum_{x,y \in \mathbb{F}_q^d} E(x)F(y)S_j(x-y)$$

Xét biểu thức vế phải của (1) và xét biến đổi Fourier của hàm đặc trưng ta được

$$\begin{aligned} I_1 &= q^{2d} \sum_m \overline{\widehat{E}(m)} \widehat{F}(m) \widehat{S}_j(m) \\ &= q^{2d} \sum_m (q^{-d} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^d} e^{\frac{-2\pi i(-x \cdot m)}{q}} E(x))(q^{-d} \sum_{y \in \mathbb{F}_q^d} e^{\frac{-2\pi i(y \cdot m)}{q}} F(y))(q^{-d} \sum_{t \in \mathbb{F}_q^d} \chi(-t \cdot m) S_j(t)) \end{aligned}$$

Chứng minh định lý 3.4

$$
\begin{aligned}
I_1 &= q^{-d} \sum_{m,x,y,t \in \mathbb{F}_q^d} e^{\frac{-2\pi i((-x+y+t)\cdot m)}{q}} E(x)F(y)S_j(t) \\
&= q^{-d} \sum_{x,y \in \mathbb{F}_q^d} q^d E(x)F(y)S_j(x-y) \\
&= \sum_{x,y \in \mathbb{F}_q^d} E(x)F(y)S_j(x-y) \quad \square
\end{aligned}
$$

Từ (1) ta có

$$
\begin{aligned}
I_1 &= q^{2d} \sum_m \overline{\widehat{E}(m)} \widehat{F}(m) \widehat{S}_j(m) \\
&= q^{2d} \overline{\widehat{E}(\mathbf{0})} \widehat{F}(\mathbf{0}) \widehat{S}_j(\mathbf{0}) + q^{2d} \sum_{m \neq \mathbf{0}} \overline{\widehat{E}(m)} \widehat{F}(m) \widehat{S}_j(m) \qquad = I + II
\end{aligned}
$$

Chứng minh định lý 3.4

$$\begin{aligned}
I &= q^{2d}\overline{\widehat{E}(\mathbf{0})}\widehat{F}(\mathbf{0})\widehat{S}_j(\mathbf{0}) \\
&= q^{2d}(q^{-d}\sum_{x\in\mathbb{F}_q^d}\chi(-x\cdot\mathbf{0})E(x))(q^{-d}\sum_{y\in\mathbb{F}_q^d}\chi(y\cdot\mathbf{0})F(y))\widehat{S}_j(\mathbf{0}) \\
&= |E||F|\widehat{S}_j(\mathbf{0})
\end{aligned}$$

Theo chứng minh trên, ta có $\widehat{S}_j(\mathbf{0}) \approx q^{-1}$
Dẫn đến $I \approx |E||F|q^{-1}$

Chứng minh định lý 3.4

$$\begin{aligned}
|II| &\lesssim q^{2d} \sum_{m \neq \mathbf{0}} |\overline{\widehat{E}(m)}||\widehat{F}(m)||\widehat{S}_j(m)| \\
&\lesssim q^{2d} q^{-\frac{d+1}{2}} \sum_{m \neq \mathbf{0}} |\widehat{E}(m)||\widehat{F}(m)| \\
&\lesssim q^{2d} q^{-\frac{d+1}{2}} \left(\sum_{m} |\widehat{E}(m)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m} |\widehat{F}(m)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Đến đây ta sử dụng công thức Plancherel, ta được

$$|II| \lesssim q^{2d} q^{-\frac{d+1}{2}} q^{-d} \left(\sum_{x} |E(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{y} |F(y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Chứng minh định lý 3.4

$$|II| \lesssim q^{\frac{d-1}{2}}|E|^{\frac{1}{2}}|F|^{\frac{1}{2}}$$

$$I_1 \lesssim |E||F|q^{-1} + q^{\frac{d-1}{2}}|E|^{\frac{1}{2}}|F|^{\frac{1}{2}} \quad \square$$

Tương tự, nếu $q \in \mathbb{P}$, j $\neq$ 0 ta có:

$$|\{(x,y) \in E \times F : \|x-y\|_2\}| \lesssim |E||F|q^{-1} + q^{\frac{d-1}{2}}|E|^{\frac{1}{2}}|F|^{\frac{1}{2}}$$

Trong không gian 2 chiều, d $=$ 2, Δ_3 có thể thay thế bởi Δ_n, $\forall n \geq 2$

Nhận xét 3.5

Nếu $|E| \approx |F| \approx q^{\frac{d+1}{2}}$, khi đó số incidence(số giao cắt) giữa các điểm của E và mặt cầu, bậc 2 hay bậc 3, tâm là các phần tử của $F \lesssim q^d$.

Từ định lý 3.4, nếu $N \approx q^{\frac{d+1}{2}}$, số giao cắt giữa $\approx N$ điểm và $\approx N$ mặt cầu là:
$\lesssim q^{\frac{d+1}{2}} q^{\frac{d+1}{2}} q^{-1} + q^{\frac{d+1}{2}} q^{\frac{d+1}{2}} \lesssim q^d \approx N^{\frac{2d}{d+1}}$
Xét không gian 2 chiều, ta được $d = 2$ và số giao cắt giữa N điểm và N đường tròn $\lesssim n^{\frac{4}{3}}$, nếu $N \lesssim q^{\frac{d+1}{2}}$, cũng tương ứng với định lý 3.3 ở trên:

$$I(P, L) \lesssim N + N + (NN)^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow I(P, L) \lesssim n^{\frac{4}{3}}$$

Hệ quả 3.6

Xét E, F $\subset \mathbb{F}_q^d$, d $\geq$ 2. Xét $q \equiv 1[3]$ và là số nguyên tố, |E||F| $\geq Cq^{d+1}$. Lấy:

$$\Delta_3(E, F) = \{\|x\|_3 : x \in E, y \in F\}$$

Và nếu C đủ lớn, $\Delta_3(E, F)$ chứa mọi phần tử $\mathbb{F}_q^* = \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$

Xét $d = 2$, Δ_3 có thể thay thế được bởi Δ_n

$$\Delta_3(E, F) = \{j \mid \|x - y\|_3 = j : x \in E, y \in F\}$$

$|E||F| = k(C)q^{d+1}$ với $k(C) \geq C\ \forall C$ lớn tùy ý
$I_1 = |\{(x, y) \in E \times F : \|x - y\|_3 = j\}| = I + II$
Ta có $I \approx |E||F|q^{-1} = k(C)q^{d+1}q^{-1} = k(C)q^d$
$|II| \lesssim q^{\frac{d-1}{2}} k(C)^{\frac{1}{2}} q^{\frac{d+1}{2}} = k(C)^{\frac{1}{2}} q^d$
Khi $C \to \infty$ thì $k(C) \to \infty$, khi đó I sẽ trội hơn II dẫn đến $I + II > 0$ hay với mọi $r \in \mathbb{F}_q^*$, $\exists x \in E, y \in F$ sao cho $(x, y) \in I_1$ dẫn đến $\Delta_3(E, F)$ sẽ phủ lấy hết các phần tử của $\mathbb{F}_q^*$

Cảm ơn mọi người đã lắng nghe!