TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

----o0o----

BÁO CÁO GIẢI TÍCH SỐ

PHƯƠNG PHÁP LẶP SEIDEL VÀ GAUSS-SEIDEL

Nguyễn Trinh Khang- MSSV 20200313

GIẢNG VIÊN HƯỚNG DẪN

TS. Hà Thị Ngọc Yến

Hà Nội, tháng 1, 2022

MỤC LỤC

1. Phương pháp lặp Seidel

1.1 Lý thuyết

Xét phương trình dạng

$$X = \alpha X + \beta$$

Ta phân tích ma trận α thành 2 ma trận tam giác dưới đúng và ma trận tam giác trên: $\alpha = \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}$

Với:

$$\alpha^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

và $$\alpha^{(2)} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có

$$X = \alpha X + \beta = \left(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}\right)X + \beta$$

$$= \alpha^{(1)}X + \alpha^{(2)}X + \beta$$

1.2 Công thức

Chọn xấp xỉ đầu $X^{(0)}$ bất kỳ.

Tính $X^{(0)}$ theo công thức lặp:

$$X^{(k+1)} = \alpha^{(1)}X^{(k+1)} + \alpha^{(2)}X^{(k)} + \beta$$

k=1,2,3,…

Cụ thể: $$\begin{cases} x_1^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j}.x_j^{(0)} + \beta_1 \\ x_2^{(1)} = \alpha_{21}.x_1^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{2j}.x_j^{(0)} + \beta_2 \\ \dots \\ x_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}.x_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}.x_j^{(0)} + \beta_i \\ \dots \\ x_n^{(1)} = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj}.x_j^{(1)} + \alpha_{nn}.x_n^{(0)} + \beta_n \end{cases}$$

Hay $x_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}.x_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}.x_j^{(0)} + \beta_i$ i=1,2,…n

Tổng quát cho phép lặp thứ k:

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}.x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij}.x_j^{(k-1)} + \beta_i$$

$i = \overline{1,n}$ $k = 1,2,3,\dots$

1.3 Điều kiện hội tụ và sai số

Nếu quá trình lặp hội tụ: $\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = \overline{X}$ thì $\overline{X} = X^*$là nghiệm đúng của hệ

Chứng minh:

Do $X^{(k)} \to \overline{X}$ khi $k \to \infty$

nên $\overline{X} = \alpha^{(1)}\overline{X} + \alpha^{(2)}\overline{X} + \beta$

$\overline{X} = \alpha\overline{X} + \beta$ vậy $\overline{X} = X^*$

1.3.1 Điều kiện

Nếu một chuẩn nào đó của ma trận α thỏa mãn điều kiện:

$$\|\alpha\|_p < 1 \qquad (p = \infty, 1)$$

thì phương pháp lặp Seidel hội tụ tới nghiệm đúng X^* của hệ phương trình với xấp xỉ đầu $X^{(0)}$ bất kỳ.

1.3.2 Công thức đánh giá sai số

a) Nếu $\|\alpha\|_\infty < 1$ thì:

$$\left\|X^{(k)} - X^*\right\|_\infty < \frac{\lambda}{1-\lambda}\left\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\right\|_\infty$$

Trong đó $\lambda = \max\limits_i \frac{\sum_{j=i}^{n}|\alpha_{ij}|}{1-\sum_{j=1}^{i-1}|\alpha_{ij}|} \leq \|\alpha\|_\infty < 1$

Hoặc

$$\left\|X^{(k)} - X^*\right\|_\infty < \frac{\|\alpha\|^k}{1-\|\alpha\|}\left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|_\infty$$

b) Nếu $\|\alpha\|_{(1)} < 1$ thì:

$$\left\|X^{(k)} - X^*\right\|_{(1)} < \frac{\zeta^k}{(1-S)(1-\zeta)}\left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|_{(1)}$$

Trong đó:

$S = \max\limits_j \sum_{i=j+1}^{n}|\alpha_{ij}|$; $\quad \zeta = \max\limits_j \frac{\sum_{i=1}^{j}|\alpha_{ij}|}{1-\sum_{i=j+1}^{n}|\alpha_{ij}|} \leq \|\alpha\|_{(1)} < 1$

Chứng minh:

Ta có:

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{ij}.x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^{n}\alpha_{ij}.x_j^{(k-1)} + \beta_i$$

$i = \overline{1,n}$ k=1,2,...

Nếu X^* là nghiệm đúng của phương trình thì:

$$x_i^* = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}.x_j^* + \beta_i \qquad\qquad i = \overline{1,n}$$

Từ đó suy ra

$$x_i^{(k)} - x_i^* = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}.(x_j^{(k)} - x_i^*) + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij}.(x_j^{(k-1)} - x_i^*)$$

$$=> \left|x_i^{(k)} - x_i^*\right| \le \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}|.|x_j^{(k)} - x_i^*| + \sum_{j=i}^{n} |\alpha_{ij}|.|x_j^{(k-1)} - x_i^*|$$

Đặt $P_i = \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}|$; $\qquad Q_i = \sum_{j=i}^{n} |\alpha_{ij}|$

Mà $\left|x_i^{(k)} - x_i^*\right| \le \left\|X^{(k)} - X^*\right\|_\infty \quad \forall i$

nên $\left|x_i^{(k)} - x_i^*\right| \le P_i\left\|X^{(k)} - X^*\right\|_\infty + Q_i\left\|X^{(k-1)} - X^*\right\|_\infty \quad \forall i$

$=> \left\|X^{(k)} - X^*\right\|_\infty \le P_i\left\|X^{(k)} - X^*\right\|_\infty + Q_i\left\|X^{(k-1)} - X^*\right\|_\infty$

hay $\quad \left\|X^{(k)} - X^*\right\|_\infty \le \frac{Q_i}{1-P_i}\left\|X^{(k-1)} - X^*\right\|_\infty$

Đặt $\quad \lambda = \max\limits_i \frac{Q_i}{1-P_i} = \max\limits_i \frac{\sum_{j=i}^{n}|\alpha_{ij}|}{1-\sum_{j=1}^{i-1}|\alpha_{ij}|}$

ta được $\quad \left\|X^{(k)} - X^*\right\|_\infty \le \lambda\left\|X^{(k-1)} - X^*\right\|_\infty$

Ta sẽ chứng minh $\lambda \le \|\alpha\|_\infty < 1$

Thật vậy, ta có $P_i + Q_i = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| \le \|\alpha\|_\infty < 1$

Ta có:

$$\frac{Q_i}{1-P_i} \le \frac{\|\alpha\|_\infty - P_i}{1-P_i} \le \frac{\|\alpha\|_\infty - P_i\|\alpha\|_\infty}{1-P_i} = \|\alpha\|_\infty < 1$$

$=> \lambda = \max\limits_i \frac{Q_i}{1-P_i} \le \|\alpha\|_\infty < 1$

Mặt khác

$$\left\|X^{(k)} - X^*\right\|_\infty \le \lambda\left\|X^{(k-1)} - X^*\right\|_\infty \le \ldots \le \lambda^k \left\|X^{(0)} - X^*\right\|_\infty$$

$=> \left\|X^{(k)} - X^*\right\|_\infty \to 0 \quad khi\ k \to \infty$

Hay $\lim\limits_{k\to\infty} X^{(k)} = X^*$

<u>Chứng minh các công thức đánh giá sai số:</u>

Công thức sai số thứ nhất:

Tương tự như trên, ta có:

$$\left\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right\|_\infty \leq \lambda\left\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\right\|_\infty$$

Xét p nguyên dương bất kỳ

$\left\|X^{(k+p)} - X^{(k)}\right\|_\infty \leq \left\|X^{(k+p)} - X^{(k+p-1)}\right\|_\infty + \ldots + \left\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right\|_\infty$

$\leq (\lambda^p + \lambda^{p-1} + \cdots + \lambda) \left\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\right\|_\infty$

$= \lambda \frac{1-\lambda^p}{1-\lambda} \left\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\right\|_\infty$

Cố định k, cho p $\to \infty$ thì $X^{(k+p)} \to X^*$,

$=> \left\|X^* - X^{(k)}\right\|_\infty \leq \frac{\lambda}{1-\lambda}\left\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\right\|_\infty$

Để chứng minh công thức sai số thứ 2, ta thay k bằng k+p-1

$$\left\|X^{(k+p)} - X^{(k+p-1)}\right\|_\infty \leq \lambda\left\|X^{(k+p-1)} - X^{(k+p-2)}\right\|_\infty$$

Truy hồi : $\left\|X^{(k+p)} - X^{(k+p-1)}\right\| \leq \lambda^p\left\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\right\|_\infty$

Lại thay k=1, ta được:

$$\left\|X^{(p+1)} - X^{(p)}\right\|_\infty \leq \lambda^p \left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|_\infty$$

Thay p=k-1

$$\left\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\right\|_\infty \leq \lambda^{k-1} \left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|_\infty$$

$=> \left\|X^* - X^{(k)}\right\|_\infty \leq \frac{\lambda}{1-\lambda}\left\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\right\|_\infty$

$$\leq \frac{\lambda^k}{1-\lambda}\left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|_\infty$$

2. Phương pháp lặp Gauss Seidel

2.1 Đối với ma trận chéo trội hàng

Ma trận A $=\alpha_{ij}$ được gọi là ma trận chéo trội hàng nếu nó thỏa mãn:

$|\alpha_{ii}| > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |\alpha_{ij}|, \quad \forall i$

Khi đó với phương trình có dạng

$$AX=B$$

Hay

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Nhân 2 vế với ma trận T=diag($1/\alpha_{ii}$), i=$\overline{1,n}$ vào bên trái, ta được

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\alpha_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\alpha_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} & \cdots & \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}} \\ \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} & 1 & \cdots & \frac{\alpha_{n2}}{\alpha_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha_{n1}}{\alpha_{nn}} & \frac{\alpha_{n2}}{\alpha_{nn}} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_1}{\alpha_{11}} \\ \frac{\beta_2}{\alpha_{22}} \\ \cdots \\ \frac{\beta_n}{\alpha_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} & \cdots & -\frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}}\\-\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{\alpha_{n2}}{\alpha_{22}}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\-\frac{\alpha_{n1}}{\alpha_{nn}} & -\frac{\alpha_{n2}}{\alpha_{nn}} & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{\beta_1}{\alpha_{11}}\\\frac{\beta_2}{\alpha_{22}}\\\cdots\\\frac{\beta_n}{\alpha_{nn}}\end{bmatrix}$$

Khi đó, ta đã đưa phương trình ban đầu về dạng

X=A\`X+B\`

Dễ thấy $\|A`\|_\infty < 1$ do A là ma trận chéo trội hàng

Từ đó ta có thể áp dụng công thức lặp Seidel để giải phương trình sau khi biến đổi.

2.2 Đối với ma trận chéo trội cột

Ma trận A $=\alpha_{ij}$ được gọi là ma trận chéo trội cột nếu nó thỏa mãn:

$|\alpha_{ii}| > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |\alpha_{ji}|,\ \ \forall$i

Khi đó với phương trình có dạng

AX=B

Hay

$$\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\\alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\\alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\cdots\\\beta_n\end{bmatrix}$$

Xét

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & 0 & \cdots & 0\\0 & \alpha_{22} & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn}\end{bmatrix}$$

Đặt Y=$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\cdots\\y_n\end{bmatrix}=T^{-1}X=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & 0 & \cdots & 0\\0 & \alpha_{22} & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{bmatrix}$

$$=> X=TY=\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\alpha_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Thay X=TY vào phương trình ban đầu ta được

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\alpha_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} & \cdots & \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{nn}} \\ \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} & 1 & \cdots & \frac{\alpha_{n2}}{\alpha_{nn}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha_{n1}}{\alpha_{11}} & \frac{\alpha_{n2}}{\alpha_{22}} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} & \cdots & -\frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{nn}} \\ -\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} & 0 & \cdots & -\frac{\alpha_{n2}}{\alpha_{nn}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\alpha_{n1}}{\alpha_{11}} & -\frac{\alpha_{n2}}{\alpha_{22}} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Khi đó ta đã đưa phương trình ban đầu về dạng

Y=A”Y+B

Dễ thấy $\|A"\|_1 < 1$ do A là ma trận chéo trội cột.

Từ đó ta có thể áp dụng công thức lặp Seidel để giải phương trình Y sau khi biến đổi. Và ta sẽ được phương trình X=TY , công thức đánh giá sai số sẽ là:

Nếu $\|\alpha\|_{(1)} < 1$ thì: $\left\|X^{(k)} - X^*\right\|_{(1)} = \|T\|_{(1)}\left\|Y^{(k)} - Y^*\right\|_{(1)} < \frac{\|T\|_{(1)}\zeta}{(1-S)(1-\zeta)}\left\|Y^{(k)} - Y^{(k-1)}\right\|_{(1)}$

Trong đó: $S = \max_j \sum_{i=j+1}^{n} |A"_{ij}|$; $\zeta = \max_j \frac{\sum_{i=1}^{j} |A"_{ij}|}{1-\sum_{i=j+1}^{n} |A"_{ij}|} \leq \|A"\|_{(1)} < 1$

Từ đó ta có thể áp dụng công thức lặp Seidel để giải phương trình sau khi biến đổi.

3. Đánh giá

Ta nhận thấy rằng phương pháp lặp Gauss-Seidel là một phiên bản cải tiến của phương pháp Jacobi và Seidel là phiên bản cải tiến của phương pháp lặp đơn về tốc độ hội tụ (số vòng lặp). Do đó nó vẫn giữ lại các ưu điểm của phương pháp cũ như:

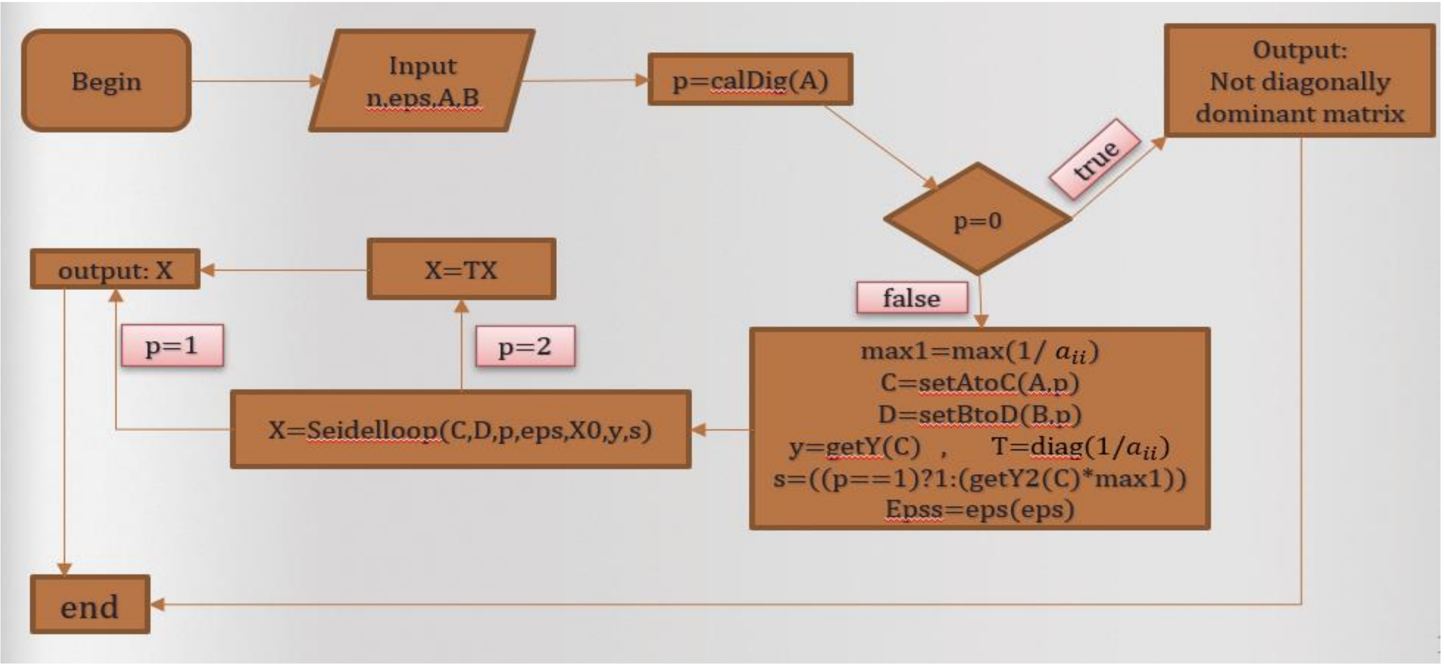
- Giá trị lặp $X^{(0)}$ ban đầu là tùy ý.
- Kiểm soát được sai số của nghiệm.

và cả nhược điểm như:

- Phải là ma trận chéo trội với phương pháp (Gauss-Seidel).

4. Chương trình

4.1 Thuật toán



4.1.1. Thuật toán các gói nhỏ:

Gói 1: calDig

Input : A (ma trận A)

Output : p ∈ {0,1,2} (tương ứng với ma trận A không chéo trội, chéo trội hàng hoặc chéo trội cột)

B1: If ($|a_{(i,i)}| > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |\, a_{(i,j)}|$ with i=$\overline{1 \ldots n}$)

{p=1; Skip to B4}

B2: If ($|a_{(j,j)}| > \sum_{i=1,i\neq j}^{n} |\, a_{(i,j)}|$ with j=$\overline{1 \ldots n}$)

{p=2; Skip to B4}

B3: p=0

B4: Return p

Gói 2: setAtoC

Input : A,p (ma trận A, p là loại chuẩn)

Output : C (ma trận C trong pt x=Cx+D biến đổi từ pt Ax=B khi p=1 (chuẩn vô cùng) hoặc trong y=Cy+D biến đổi từ pt Ax=B với x=Ty khi p=2 (là chuẩn 1))

```
for i=1 to n:
    for j=1 to n:
        if ( i≠j ) c_((i,j))=− 〖(a〗 _((i,j))/a_((i,i)));
        else c_((i,j))=0;
if p==2:
    for i=1 to n:
        for j=1 to n:
        if ( i≠j ) c_((i,j))=− 〖(a〗 _((i,j))/a_((j,j)));
        else c_((i,j))=0;
Return C
```

Gói 3: setBtoD

Input : B,A,p. (vector B, ma trận A trong Ax=B,p là loại chuẩn)

Output : D. (vector D trong pt x=Cx+D biến đổi từ pt Ax=B khi p=1 (chuẩn vô cùng) hoặc trong pt y=Cy+D biến đổi từ Ax=B với x=yT khi p=2 (chuẩn 1))

```
for i=1 to n:
    D_((i))=B_((i))/A_((i,i));
if p==2: D=B;
Return D;
```

Gói 4: getY1

Input :C,p (ma trận C trong x=Cx+D khi p=1 (chuẩn vô cực) hoặc trong y=Cy+D khi p=2 (chuẩn 1) , p là loại chuẩn)

Output : y (y là hệ số co)

y=0

For i=1 to n

$q_i = \sum_{j=i}^{n} |c_{ij}|$; $p_i = \sum_{j=1}^{i-1} |c_{ij}|$;y=$\max_i \frac{q_i}{1-p_i}$

if p==2:

y=0

For j=1 to n

$q_j = \sum_{i=1}^{j} |c_{ij}|$; $p_j = \sum_{i=j+1}^{n} |c_{ij}|$;y=$\max_j \frac{q_j}{1-p_j}$

Return y

Gói 5: getY2

Input :C (ma trận C trong y=Cy+D)

Output : s (s là hệ số co thêm khi là chuẩn 1)

s=0

For j=1 to n

$p_j = \sum_{i=j+1}^{n} |c_{ij}|$; s=$\max_j p_j$

Return $\frac{1}{1-s}$

Gói 6: SeidelLoop

Input :B,D,p,y,eps2,X0 (Trong đó B với D là ma trận và vector trong pt x=Bx+D, p là loại chuẩn, y là hệ số sai số, eps2 là sai số phương pháp, X0 là xấp xỉ đầu,)

Output : X (X là vector kết quả có sai số với vector kết quả chuẩn sai số eps)

Lấy vector X=X0

X1

Do:

X1=X;

$X_{(i)} = \sum_{j=1}^{i-1} B_{(i,j)}.X_{(j)} + \sum_{j=i}^{n} B_{(i,j)}.X1_{(j)} + D_{(i)}$ with i=$\overline{1 \dots n}$;

while (y/(1-y)*getNorm(X-Xi,p) >eps2)

Return X

eps2

Input : eps (eps là sai số đầu vào)

Output : eps2 (eps2 là sai số phương pháp)

eps1= $10^{\lfloor \log_{10} eps \rfloor}$ *0.5;

eps2=eps-eps1;

Return eps2

Gói 7: khangg

Input :A,B,esp,p (A, B là ma trận và vector trong pt Ax=B, esp là sai số, p là loại chuẩn)

Output :X4(kết quả của bài toán)

matran C=setAtoC(A,p)

Vector D=setDtoB(B,A,p)

for i=1 to n:

max1=max(a_{ij})

X4= SeidelLoop(C,D,p,esp,X4,getY1(C,p),((p==1)?1:(getY2(C)*max1)));

For i=1 to n:

$X4_{(i)}$= ((p==1)? $X4_{(i)}$:($X4_{(i)}$ *(1/a_{ij}))) Return X4;

Gói main:

Input :A,B,esp (A, B là ma trận và vector trong pt Ax=B, esp là sai số, p là loại chuẩn)

Output: khangg

4.1.2. Hệ thống ví dụ

VD1: Ta sẽ giải hệ phương trình sau với sai số 0.02

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 5 \\ 1x_1 + 3x_2 + 1x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 5\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}5\\ 4\\ 7\end{bmatrix}$$

Input:Ta dễ ung thấy rằng đây là ma trận chéo trội ung nên có thể áp dụng phương pháp Gauss-Seidel ($\| \ \|_\infty$) để giải.

Ta chọn giá trị lặp ban đầu hoàn toàn bất kì X0=$\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$.

Sau khi ta chạy chương trình sẽ tìm ra được nghiệm cần tìm và giá trị của A*X là:

$$X=\begin{bmatrix}0.62\\ 0.86\\ 0.81\end{bmatrix} \qquad A*X=\begin{bmatrix}5.01\\ 4.01\\ 7.01\end{bmatrix}$$

Sau đó ta thử tính giá trị của X^* trong phương trình trên bằng máy tính cầm tay sẽ ra kết quả:

$$X^* =\begin{bmatrix}0.619047619\\ 0.8571428571\\ 0.8095238095\end{bmatrix} \qquad A*X^* =\begin{bmatrix}5\\ 4\\ 7\end{bmatrix}$$

Vậy ta có thể coi giá trị X tính được ở máy tính cầm tay là nghiệm chuẩn. Ta có so sánh sự chênh lệch giữa nghiệm tìm được của phương pháp gauss-seidel và nghiệm chuẩn: $\|X^* - X\|_\infty = 0.00285714 < 0.02$.

Kết luận: Vậy ta thấy rằng chương trình có thể chạy ra nghiệm đúng với sai số cho trước.

Nhập vào:

```
3 0.02
4 2 1
1 3 1
2 2 5
5 4 7
```

OUTPUT:

```
|-------------------------------------
|   chuan: 1
|-------------------------------------
|   So lan lap: 7
|-------------------------------------
|   Ngiem thu 1: 0.6186712407407
|   Ngiem thu 2: 0.8573763024691
|   Ngiem thu 3: 0.8095809827160
|-------------------------------------
|   KIEM TRA LAI!
|   B[1] : 4.9990185506173
|   B[2] : 4.0003811308642
|   B[3] : 7.0000000000000
|-------------------------------------
```

Chú thích: phía trên là hình ảnh về file .inp và .out của ví dụ trên.

VD 2: Ta tiếp tục giải phương trình ở ví dụ trên tuy nhiên lần này ta sẽ chọn các giá trị lặp ban đầu khác nhau để xem chúng có đều hội tụ tới nghiệm của phương pháp không?

Ta lấy Random X0.

Nhập vào:

```
3 0.02
4 2 1
1 3 1
2 2 5
5 4 7
```

OUTPUT:

```
X0 ban dau:
42
68
35

|------------------------------------
|   chuan: 1
|------------------------------------
|   So lan lap: 9
|------------------------------------
|   Ngiem thu 1: 0.6182072187860
|   Ngiem thu 2: 0.8572094861385
|   Ngiem thu 3: 0.8098333180302
|------------------------------------
|   KIEM TRA LAI!
|   B[1] : 4.9970811654513
|   B[2] : 3.9996689952318
|   B[3] : 7.0000000000000
|------------------------------------
```

Kết luận: Ta thấy rằng phương pháp sẽ hội tụ tới nghiệm thỏa mãn sai số cho trước không phụ thuộc vào giá trị lặp $X^{(0)}$ ban đầu là bao nhiêu.

VD3: Tiếp tục với ví dụ trên tuy nhiên lần này ta sẽ so sánh tốc độ hội tụ của công thức lặp tiên nghiệm và hậu nghiệm của phương pháp Gauss-Seidel cũng như của phương pháp Jacobi:

Nhập vào:

```
4 1e-10
4.00 0.24 -0.08 0.16
1 3.00 -0.9 -0.8
2.5 -0.8 4.00 0.4
0.02 0.06 0.04 -10.00
8 9 20 1
```

OUTPUT:

```
X0 ban dau:
42
68
35
1

|-------------------------------------
|   chuan: 1
|-------------------------------------
|   So lan lap: 17
|-------------------------------------
|   Ngiem thu 1: 1.8696702816492
|   Ngiem thu 2: 3.7373177246912
|   Ngiem thu 3: 4.5844695064138
|   Ngiem thu 4: -0.0554988750629
|-------------------------------------
|   KIEM TRA LAI!
|   B[1] : 7.9999999999995
|   B[2] : 9.0000000000009
|   B[3] : 20.0000000000000
|   B[4] : 1.0000000000000
|-------------------------------------
```

Ta lại có số lần lặp của phương pháp Jacobi là 21 lần.

Nhận xét : Ta có thể nhận ra rằng phương pháp lặp Gauss-Seidel có tốc độ hội tụ tối ưu hơn hẳn so với phương pháp Jacobi. Và việc sử dụng công thức sai số hậu nghiệm cũng sẽ đem lại tốc độ lặp tốt hơn với công thức sai số tiên nghiệm (Một phần lí do là phép tính số lần lặp của công thức sai số tiên nghiệm ung các phép tính loga, làm tròn lên để chắc chắn đủ số bước để lặp tới nghiệm yêu cầu nên nhiều khi nghiệm đã lặp tới sai số cần thiết nhưng nó vẫn tiến tiếp) (Ta có thể tối ưu bằng cách chỉ lặp khi giá trị khác nhau tuy nhiên ở ví dụ này nhóm em muốn chỉ ra sự khác biệt khi sử dụng công thức sai số hậu nghiệm và tiên nghiệm nên không cải tiến).

VD4: Ta thử với một ma trận trội cột

Nhập vào:

```
4 1e-10
6 3 3 1
2 6 1 4
1 1 7 4
2 1 2 10
8 9 20 19
```

OUTPUT:

```
X0 ban dau:
42
68
35
1

 |-------------------------------------
 |   chuan: 2
 |-------------------------------------
 |   So lan lap: 30
 |-------------------------------------
 |   Ngiem thu 1: 0.0056148231331
 |   Ngiem thu 2: 0.1779898933184
 |   Ngiem thu 3: 1.9825940482875
 |   Ngiem thu 4: 1.4845592363840
 |-------------------------------------
 |   KIEM TRA LAI!
 |   B[1] : 8.0000000000003
 |   B[2] : 9.0000000000002
 |   B[3] : 20.0000000000002
 |   B[4] : 19.0000000000000
 |-------------------------------------
```

VD5 : Ta thử với một ma trận không trội

Nhập vào:

```
4 1e-10
6 3 3 1
2 6 1 4
1 1 7 4
3 1 2 10
8 9 20 19
```

OUTPUT:

```
X0 ban dau:
42
68
35
1

|----------------------------------
|   chuan: 0
|----------------------------------
Not diagonally dominant matrix
```

Nhận xét: Vì là không chéo trội nên chương trình sẽ cho ra "Not diagonally dominant matrix".

5. **Hướng dẫn sử dụng chương trình**

5.1 Lưu ý trước khi sử dụng

Tải phần mềm codeblock.

Copy ra file khác nếu bị lỗi vào file mà có tên file là tiếng việt hoặc tên những folder chứa file là tiếng việt.

5.2 Hướng dẫn sử dụng

Các file trong thư mục: Gauss-Seidel

- ➢ Chương trình chính: file Gauss-Seidel.cpp
- ➢ File dữ liệu đầu vào: file Gauss-Seidel.INP
- ➢ File dữ liệu đầu ra: file Gauss-Seidel.OUT

Các bước sử dụng

Bước 1: nhập vào file Gauss-Seidel.INP lần lượt như sau:

- Nhập n là số phương trình và số ẩn.
- Nhập eps.
- Nhập ma trận A trong (AX=B).
- Nhập ma trận B trong (AX=B).

Bước 2: chạy file Gauss-Seidel.cpp.

Bước 3: mở file Gauss-Seidel.OUT. Ở đây chương trình sẽ đưa ra kiểu ma trận, số lần lặp, nghiệm của phương trình và phép thử lại. Nếu ma trận A không phải là ma trận trội thì chương trình sẽ đưa ra kiểu ma trận và dòng “Not diagonally dominant matrix”.

Tài liệu tham khảo

[1] Richard L. Burden J. Douglas Faires. Numerical Methods, 4th Edition. Brooks / Cole, Cengage Learning, 2013, 2003, 1998.

[2] The Pennsylvania State University Jaan Kiusalaas. Numerical Methods in Engineering With MATLAB. Cambridge University Press, 2005.

[3] Thomas E. Phipps Jr. "The inversion of large matrices: The Pan and Reif algorithm provides a solution". In: Byte Magazine 11.04 (4-1986).

[4] Lê Trọng Vinh. Giáo trình Giải tích số. NXB Khoa học và kỹ thuật, 2007.

[5] Hà Thị Ngọc Yến. Phương pháp lặp Seidel và Gauss-seidel.