ENSEMBLES ET TRIBUS

Exercice 1. Vrai ou Faux ?

1. Soit E un ensemble. Alors $A \subset E \iff A \in \mathcal{P}(E)$.
2. Soit $(E, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Alors $E \in \mathcal{F}$.
3. $\mathcal{F}$ est une tribu sur E si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :
   - $E \in \mathcal{F}$,
   - $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$,
   - $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ si $A_n \in \mathcal{F}$ for all $n \in \mathbb{N}$.
4. La tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est la tribu engendrée par les fermés de $\mathbb{R}$.
5. Un borélien est soit un ouvert, soit son complémentaire (c'est-à-dire fermé).

Exercice 2. Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Montrer que $\mathcal{F} = \{\emptyset, E, \{1\}, \{2, 3\}\}$ est une tribu.

Exercice 3.
Les classes suivantes sont-elles des tribus ?

1. $\mathcal{F}_1 = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.q. A est finie$\}$.
2. $\mathcal{F}_2 = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.q. A est finie ou A^c est finie $\}$.
3. $\mathcal{F}_3 = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ t.q. A est au plus dénombrable ou A^c est au plus dénombrable $\}$.

Exercice 4. Exemples élémentaires de tribus.
Si E est un ensemble, on appelle singletons les ensembles $\{e\}$ avec $e \in E$.

1. Quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des singletons d'un ensemble E.
2. À supposer que le cardinal de E est supérieur à 2, quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des paires (c'est-à-dire des ensembles à deux éléments de E) ?
3. Étant donnée une partie A de E, quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des parties de E contenant A ?
4. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux tribus de E. Décrire la tribu engendrée par $\mathcal{E} \cap \mathcal{F}$, ensuite celle engendrée par $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$.
5. Quelle est la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par $A = \{[0; 2]; [1; 3]\}$? Quelle est sa cardinalité ?

Exercice 5. Tribus et partitions.
On rappelle qu'une partition d'un ensemble E est un recouvrement $(A_j)_{j\in J}$ (c'est-à-dire que les A_j sont des parties de E t.q. $\cup_{j\in J} A_j = E$ et quels que soient $i, j \in J$, $i \neq j$ on a $A_i \cap A_j = \emptyset$).

1. Soit A une partie d'un ensemble de E distincte de l'ensemble vide et de E lui-même. Montrer que la tribu engendrée par A est l'union de $\{\emptyset, E\}$ et d'une partition.
2. Soit $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$ une partition de E en trois sous-ensembles. Décrire la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.
3. Plus généralement, décrire la tribu engendrée par une partition dénombrable de E.

4. Une tribu $\mathcal{F}$ définit naturellement une partition $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ de E, dont les éléments sont des parties de la forme
$$A_x = \cap_{x \in A \in \mathcal{F}} A, \qquad \text{for } x \in E.$$
Montrer que $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ est une partition de E.
5. Montrer que si la tribu $\mathcal{F}$ est au plus dénombrable la partition $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ qui lui est associée engendre $\mathcal{F}$.
6. Inversement, montrer que si $\mathcal{F}$ est engendrée par une partition au plus dénombrable $\mathcal{B}$, cette partition est $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$.
7. Montrer qu'une tribu infinie $\mathcal{F}$ n'est pas dénombrable et que donc la question 5 ne concerne que les tribus finies. (*Indication : Raisonner par l'absurde et montrer que $\mathcal{F}$ serait en bijection avec l'ensemble des parties de la partition qui l'engendre*).

Exercice 6. Tribu borélienne de $\mathbb{R}$. On muni $\mathbb{R}$ de la métrique usuelle et on note $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les ensembles suivants appartiennent à $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$:
$[0,1]; [0,1[; [2,3[\cup\{4,5\}; \mathbb{Q}; \mathbb{Q} \cap [0,1]; \mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{m + n\sqrt{2} : m, n \in \mathbb{Z}\}$.
2. Montrer que tout ouvert, tout fermé, tout intervalle de $\mathbb{R}$ sont boréliens.
3. Montrer que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est engendrée par une classe dénombrable.
4. Montrer que la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ n'est engendrée par aucune partition de $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit $\mathcal{F}$ une famille de parties d'un ensemble X telle que

(1) $X \in \mathcal{F}$,

(2) $\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire,

(3) $\mathcal{F}$ est stable par **réunion finie**.

Montrer que sous ces hypothèse, $\mathcal{F}$ n'est pas forcement une tribu.

Exercice 8. Tribus et topologies.
Une *topologie* sur un ensemble E est une partie de $\mathcal{P}(E)$ qui contient $\emptyset$ et E et qui est stable par intersection finie et par union quelconque. Les éléments d'une topologie sont les *ouverts*.

1. Comparer les axiomes définissant respectivement une tribu et une topologie.
2. Donner un exemple de topologie qui ne soit pas une tribu.
3. Soit S une partie quelconque de $\mathcal{P}(E)$. La *topologie engendrée* par S est la plus petite topologie contenant S. C'est donc l'ensemble des parties de E qui s'obtiennent par intersections finies et unions quelconques d'éléments de S. Comparer la tribu et la topologie engendrées par une partition dénombrable de E.