MESURES PRODUITS

Exercice 1. Mesure de comptage.

1. Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$.
2. Soit μ la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que $\mu_2 := \mu \otimes \mu$ est la mesure de comptage de $\mathbb{N}^2$.
3. Soit $(x_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ une suite doublement réelle positive étendue (i.e. $x_{n,m} \in [0, +\infty]$). Montrer que
$$\int_{\mathbb{N}^2} x_{n,m} d\mu_2(n,m) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} x_{n,m}.$$
4. Montrer avec le théorème de Tonnelli que
$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} x_{n,m} = \sum_{n\geq 0} \sum_{m\geq 0} x_{n,m} = \sum_{m\geq 0} \sum_{n\geq 0} x_{n,m}.$$

Exercice 2. Contre-example à la sommabilité. Soit μ la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. On définit f sur $\mathbb{N}^2$ par
$$f(m,n) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ -1 & \text{si } m = n+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. f est-elle $\mu \otimes \mu-$intégrable ?
2. Comparer deux intégrales $\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} f(m,n) d\mu(m)\right) d\mu(n)$ et $\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} f(m,n) d\mu(n)\right) d\mu(m)$.
3. Expliquer.

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $[-1,1]^2$ par
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que f est mesurable pour la tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$. On pourra utiliser le fait que la limite simple d'une suite de fonctions mesurables est mesurable.
2. Calculer
$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y)dx\right) dy \text{ et } \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y)dy\right) dx.$$
3. La fonction f est-elle intégrable sur $[-1,1]^2$.

Exercice 4. Soit λ la mesure de Lebesgue de $[0,1]$ sur la tribu borélienne $\mathcal{B} = \mathcal{B}([0,1])$ et μ la mesure de comptage de $[0,1]$ sur $\mathcal{P} = \mathcal{P}([0,1])$. Notons $D := \{(x,x), x \in [0,1]\}$ la diagonale de $[0,1]^2$.

1. Montrer que D est un borélien de $[0,1]^2$. En déduire que $D \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{P}$.
2. Calculer les intégrales itérées de la fonction indicatrice de D,
$$\int \left(\int \mathbb{1}_D(x,y) d\lambda(x) \right) d\mu(y) \text{ et } \int \left(\int \mathbb{1}_D(x,y) d\mu(y) \right) d\lambda(x).$$
3. Expliquer.

Exercice 5. Soit $0 < a < b$. On considère l'espace $A = (0, +\infty) \times (a,b)$muni de sa tribu borélienne et de la mesure λ produit des mesures de Lebegue.

1. Montrer que $f(x,y) = e^{-xy}$ est intégrable sur A.
2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$.

Exercice 7. Convolution de deux fonctions intégrables. Soit f et g deux fonctions intégrables sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. On définit $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ par $h(x,y) = f(x-y)g(y)$.

1. Montrer que h est intégrable sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
2. En déduire que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la quantité $\int_{\mathbb{R}^n} h(x,y) d\lambda(y)$ est bien définie.

On appelle la convolution $f \star g$ de f et g l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ par
$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x,y) d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) d\lambda(y).$$

1. Montrer que $f \star g$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et
$$\|f \star g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$
2. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $g \star f = f \star g$ presque partout sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*, R > 0$ et $B_n(R)$ la boule de centre 0 et de rayon R dans $\mathbb{R}^n$
$$B_n(R) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \cdots x_n^2 \leq R^2\}.$$
On note λ_n la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ et
$$b_n(R) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{B_n(R)}(x_1, \ldots, x_n) d\lambda_n(x_1, \ldots, x_n)$$
le volume de la boule $B_n(R)$.

1. Montrer que $b_n(R) = R^n b_n(1)$ où $b_n(1)$ est le volume de la boule unité. On raccourcit $b_n(1)$ en b_n.
2. Calculer b_1, b_2, b_3. On pourra s'aider de changements de variables.
3. Pour $n \geq 3$, établir une relation de récurrence entre b_n et b_{n-2}. En déduire la valeur de b_n puis celle de $b_n(R)$ en fonction de n et R.

Exercice 9. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive i.e., il existe une constante $m > 0$ t.q. $\langle Ax, x\rangle \geq m\|x\|^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Calculer

$$I := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle} dx.$$