Test n° 1
Fonctions de plusieurs variables

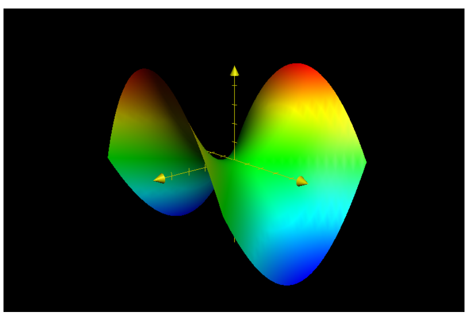
Le 20 décembre, je choisirai 3 des affirmations ci-dessous. Vous aurez une quinzaine de minutes pour dire si ces affirmations sont vraies ou fausses, en justifiant soigneusement vos réponses.

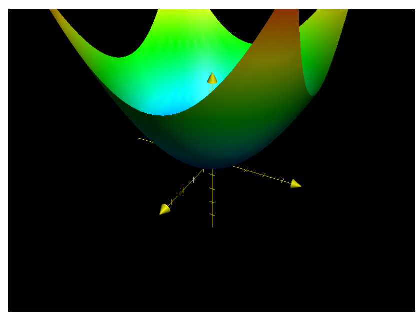
1.— La fonction $f(x,y) = \frac{1}{\sin(x^2+y^2)}$ est définie sur le plan $\mathbb{R}^2$ privé d'un cercle.

2.— L'ensemble de définition de la fonction $f(x,y,z) = \frac{1}{\ln(x^2+y^2+z^2)}$ est l'espace $\mathbb{R}^3$ privé d'un point et d'une sphère.

3.— La figure ci-dessous à gauche représente le graphe de la fonction $f(x,y) = \exp(x^2+y^2) - 1$.

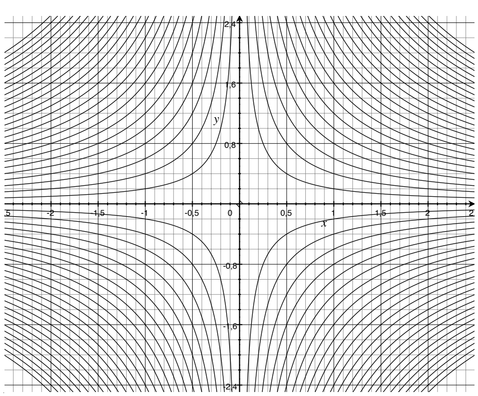
4.— La figure ci-dessous à droite représente le graphe de la fonction $f(x,y) = x^2 + 2xy - y^2$.

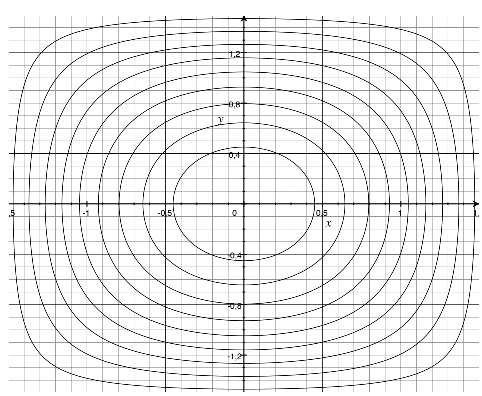




5.— La figure ci-dessous à gauche représente les lignes de niveaux de la fonction $f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$ au voisinage du point $(0,0)$.

6.— La figure ci-dessous à droite représente les lignes de niveaux de la fonction $f(x,y) = \exp(x^2-y^2)$ au voisinage du point $(0,0)$.





7.— Au voisinage du point $(0,0)$, les lignes de niveaux de la fonction $f(x,y) = \cos(x)\cos(y)$ sont des courbes fermées qui entourent le point $(0,0)$.

8.— Soit T le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$ dans le plan. On a

$$\int_T y \ \ dxdy = \frac{1}{2}.$$

9.— Soit T le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$ dans le plan. On a

$$\int_T \frac{dxdy}{(1+x+y)^2} \ dxdy = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{u=x+1}^{2} \frac{du}{u^2} \right) \ dx = \int_{x=0}^{1} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \ dx = \ln(2) - \frac{1}{2}.$$

10.— Soit $D(0,R)$ le disque ouvert dans $\mathbb{R}^2$, centré à l'origine, de rayon R. On a

$$\int_{D(0,R)} \exp(x^2+y^2) \ \ dxdy = \pi(1 - \exp(-R^2)).$$

11.— On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(u^2) du = \pi^2.$$

12.— Soit $D(0,r)$ le disque dans $\mathbb{R}^2$, centré à l'origine, de rayon r. On a

$$\int_{D(0,r)} \cos(x^2+y^2) dxdy = 2\pi\cos(r).$$

13.— Soit $B(0,r)$ la boule dans $\mathbb{R}^3$, centrée à l'origine, de rayon r. On a

$$\int_{B(0,2)\setminus B(0,1)} \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2} = 4\pi.$$

14.— L'aire du domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } -1 \leq x \leq 1 \text{ et } x^3 \leq y \leq 2x^3\}$. est égale à 1.

15.— Soit H le domaine de $\mathbb{R}^3$ (en forme de cheminée de centrale nucléaire) défini par les inégalités $z^2 \leq 1 - x^2 - y^2$ et $-1 \leq z \leq 1$. Le volume de H est égal à $\frac{16}{3}\pi$.

16.— Soit X le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x,y) = (x+y^3\ ,\ y+\cos(x))$. La divergence de X est une fonction constante.

17.— Soit $C(0,1)$ le cercle dans $\mathbb{R}^2$, centré à l'origine, de rayon 1. Si X est un champ de vecteurs à divergence nulle sur $\mathbb{R}^2$, alors le flux de X à travers $C(0,1)$ est strictement positif.

18.— Soit $C(0,1)$ le cercle dans $\mathbb{R}^2$, centré à l'origine, de rayon 1. Soit X le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x,y) = (x^2y\ ,\ -xy^2)$. La circulation du champ de vecteurs X le long du cercle $C(0,1)$ orienté dans le sens direct est strictement positive.