Deuxième partie

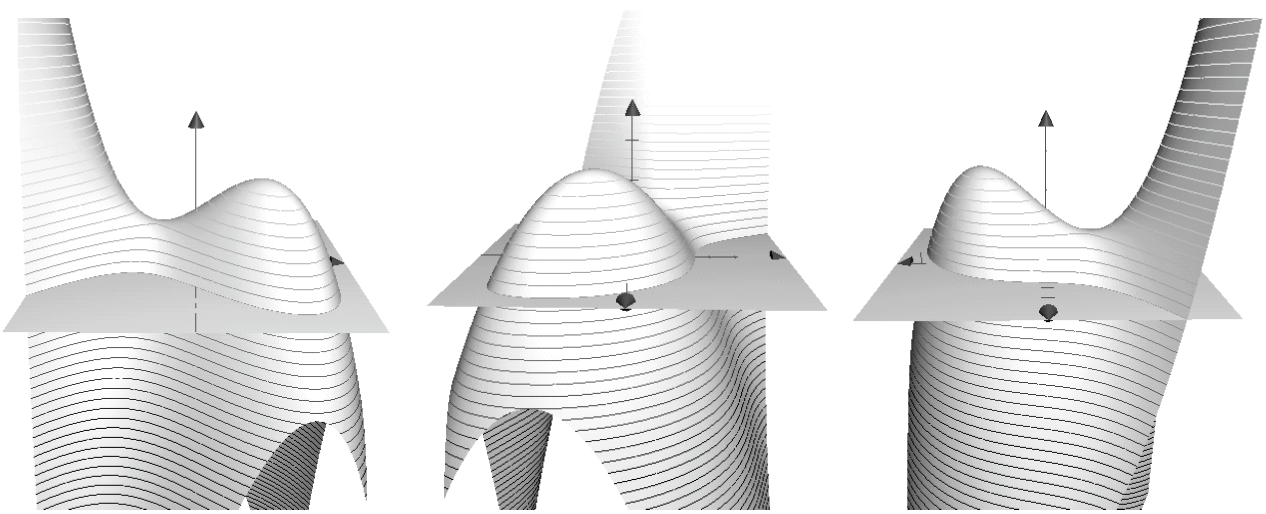
Surfaces et fonctions de deux variables

Feuille d'Exercices 8

Fonctions de deux variables (I)

Exercice 8.1.—

Les trois dessins ci-dessous représentent des vues en relief d'une presqu'île, avec le plan du niveau de la mer. Les vues sont orientées respectivement vers le Nord, l'Ouest, et le Sud. On a représenté les lignes de niveaux d'altitude 0m, 25m, 50m, *etc.* (le sommet est situé à une altitude d'environ 250m).



1. Lignes de niveau

a. Dessiner, en vue du dessus, l'allure de la ligne de niveau 0 (ensemble des points de la presqu'île situés à l'altitude 0). On utilisera le cadre fourni.

b. Même question pour la ligne de niveau 100m, puis pour la ligne de niveau 200m (sur le même dessin).

2. Profils du relief

a. Dessiner le profil du relief le long d'un itinéraire Sud-Nord passant par le sommet de la presqu'île.

b. Même question pour un itinéraire passant au dessus de l'axe Nord-Sud représenté sur les dessins. Même question pour un itinéraire passant par le col de la presqu'île.

c. (optionnelle) Sur un autre dessin, représenter le profil du relief le long d'un itinéraire Ouest-Est passant au dessus de l'axe Ouest-Est représenté.

En fait, la surface dessinée à la page précédente est le graphe de la fonction de deux variables définie par

$$f(x,y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}.$$

Ceci signifie :
– qu'on a muni l'espace d'un repère orthonormé $(Oxyz)$,
– et qu'on a représenté *l'ensemble des points* (x, y, z) *de l'espace tels que* $z = f(x, y)$.

3. a. Étiqueter les axes ('x', 'y' ou 'z') sur les trois dessins de l'énoncé. **b.** Tracer les axes sur les deux dessins des questions 1 et 2, et les étiqueter.

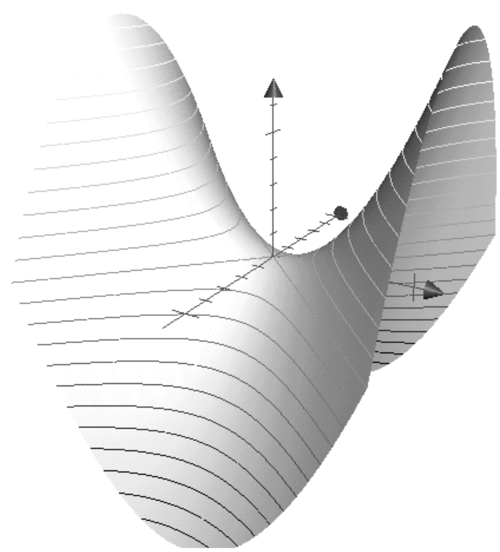
4. a. Sachant que x, y et z sont exprimés en centaines de mètres, donner l'altitude du point de la presqu'île d'abscisse $x = 0$ et d'ordonnée $y = 0$. **b.** Positionner ce point sur chacun des dessins précédents. **c.** (optionnelle) Mêmes questions pour le point correspondant à $x = 0$ et $y = 1$.

5. a. La ligne de niveau 0 dessinée à la question **1.a** est un ensemble de points dans le plan des variables x et y. Quelle est l'équation de cet ensemble ? **b.** Exprimez cette équation à l'aide de la fonction f. **c.** Mêmes questions pour la ligne de niveau 100m.

6. a. Le profil du relief au-dessus de l'axe Nord-Sud, dessiné à la question **2.b**, est un ensemble de points dans le plan des variables y et z. Quelle est l'équation de cet ensemble ? **b.** Exprimez cette équation à l'aide de la fonction f. **c.** En déduire l'altitude du point culminant de cet itinéraire. Vérifier graphiquement.

Exercice 8.2.— (M)

Le dessin ci-contre montre le graphe de la fonction définie par $f(x,y) = x^2 - y^2$. On a représenté les lignes de niveau d'altitudes entières $(0, 1, 2, ...)$.



1. Lignes de niveau

a. Indiquer sur le dessin les trois courbes correspondant respectivement aux niveaux -1, 0, 1.

b. Donner l'équation de la ligne de niveau 1. En s'aidant du dessin fourni, représenter cette ligne de niveau (dans le plan des variables x et y).

c. Mêmes questions pour la ligne de niveau 0. En exprimant x en fonction de y, montrer par le calcul que cette ligne est la réunion de deux droites.

2. Fonctions partielles

a. Donner l'expression de la fonction partielle $\varphi : x \mapsto f(x, 0)$. Dessiner son graphe (dans le plan des variables x et z). Représenter la courbe correspondante sur le dessin en trois dimensions.

b. Mêmes questions pour la fonction partielle $\psi : y \mapsto f(-1, y)$.

Exercice 8.3.— **Ensemble de définition**

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition, et dessiner cet ensemble dans le plan des variables x et y.

$$\ln(2x - y) \qquad \frac{xy^2}{2x - y} \qquad \ln(\sin(x) - y) \qquad \frac{xy^2}{\sin(x) - y}$$

$$\sqrt{x + y + 1} \qquad \ln(\sin(x) - y) \times \sqrt{x} \qquad \sqrt{x + y + 1} \times \ln(2x - y) \qquad \sin\left(\frac{1}{1 - x^2 - y^2}\right).$$

Nord

1.a et b Ouest Est

Sud

Haut

2.a et b Sud Nord

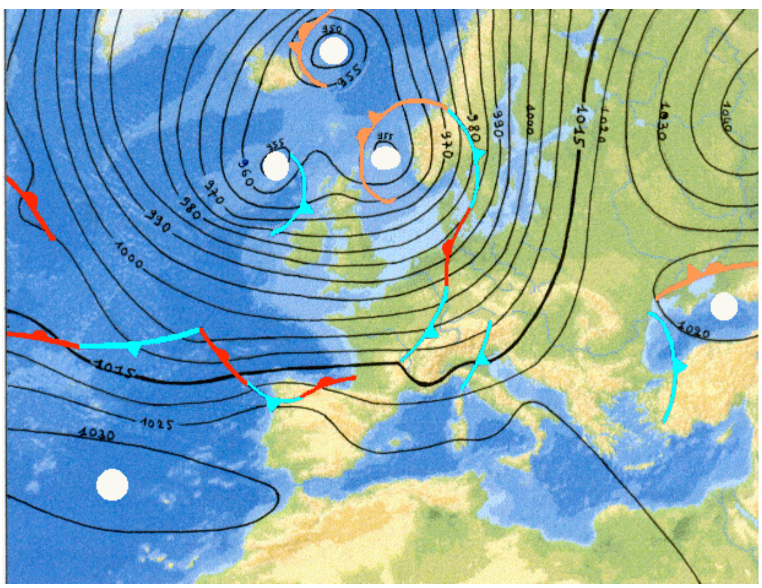
Bas

Chapitre 8

Généralités

8.1 Introduction

8.1.1 Un exemple : la météo



Les fonctions sont utilisées pour modéliser certains phénomènes naturels ; mais pour cela les fonctions d'une variable ne suffisent pas, on a souvent besoin de fonctions de plusieurs variables.

Si vous voulez faire décrire le temps qu'il fait, à un moment donnée, en Europe, vous allez modéliser la pression et la température par des fonctions de deux variables : grandeur $P(x, y)$ ou $T(x, y)$ qui varie en fonction du point (x, y) (par exemple, x représente longitude et y la latitude).

Bien sûr, si vous voulez être plus précis, il faudra introduire la variable altitude ; si vous voulez décrire l'évolution de P et T au cours du temps, vous aurez besoin d'une quatrième variable, et P et T seront des fonctions de (x, y, z, t). Dans ce cours, on va étudier les fonctions qui dépendent juste de deux variables.

8.1.2 Questions

Par rapport aux fonctions d'une variable, qu'est-ce qui change, qu'est-ce qui reste pareil ?

– domaine de définition ;

– représentation graphique ;

– Continuité, limite ;

– fonction dérivée ? Sens, tableau de variation ? ?

– calcul différentiel (notion de *dérivée partielle*) ;

– tangente ? ?

– DLs...

8.1.3 Définitions

Définition 8.1.1 (fonction) *Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. Une fonction définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ fait correspondre, à tout élément (x, y) de E, un unique élément $f(x, y)$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble E est appelé* ensemble de définition *de f.*

Définition 8.1.2 (graphe) *Soit f une fonction de deux variables, $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition. On appelle graphe de f, ou surface représentative de f, l'ensemble $\mathcal{S}_f$ des points (x, y, z) de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui vérifient la relation $z = f(x, y)$.*

8.2 Fonctions affines

Les fonctions de deux variables les plus simples sont les fonctions affines, qui sont de la forme

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$$

avec α, β des constantes. Par exemple, la formule $f(x, y) = 2x + 3y + 4$ définit une fonction affine. Son graphe est l'ensemble de l'espace $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = 2x + 3y + 4$, autrement dit

$$\mathcal{S}_f = \{(x, y, z) \mid z = 2x + 3y + 4\}.$$

À quoi ressemble le graphe d'une fonction affine ? C'est un plan, pourquoi ?

8.2.1 Retour sur les droites de $\mathbb{R}^2$

N.B. Peut etre fait en TD. Va avec l'Exercice 9.1.

Commençons par nous rappeler comment les choses se passent dans le plan $\mathbb{R}^2$. Par exemple, quelle est l'équation de la droite (D) passant par $M_0 = (1, 2)$ et orthogonale à $\vec{n} = (3, 4)$?

$$M \in (D) \Leftrightarrow \vec{M_0 M} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux}$$

ce qu'on peut traduire par un produit scalaire nul, ce qui donne l'équation de la droite en se rappelant l'expression du produit scalaire à l'aide des coordonnées x, y dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exemple : l'équation de la droite passant par le point $M_0 = (1, 2)$ et orthogonal au vecteur $\vec{v} = (8, 9)$ est

$$8(x - 1) + 9(y - 2) = 0.$$

8.2.2 Plans dans $\mathbb{R}^3$

N.B. Peut etre fait en TD. Va avec l'Exercice 9.1

Tout le paragraphe précédent se généralise sans problème dans l'espace $\mathbb{R}^3$, en rajoutant une coordonnée partout. Par exemple, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u_1} = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{u_2} = (x_2, y_2, z_2)$ est défini par

$$\vec{u_1}.\vec{u_2} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2,$$

lorsque les coordonnées des vecteurs sont données dans un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Donnons-nous un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de $\mathbb{R}^3$, et $\vec{n} = (a, b, c)$ un vecteur. Maintenant, l'ensemble des points M tels que le vecteur $\vec{M_0 M}$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ est un plan. La technique vue dans $\mathbb{R}^2$ conduit donc à l'équation d'un plan.

Exemple : l'équation du plan passant par le point $M_0 = (1, 2, 3)$ et orthogonal au vecteur $\vec{v} = (7, 8, 9)$ est

$$7(x - 1) + 8(y - 2) + 9(z - 3) = 0.$$

Réciproquement, on peut remonter le raisonnement pour montrer que toute équation du type $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ est l'équation d'un plan, qui est orthogonal au vecteur (α, β, γ). Par exemple, notre graphe a pour équation $2x + 3y - z + 4 = 0$. Il contient le point $(0, 0, 4)$. On peut donc écrire l'équation $2x + 3y + (z - 4) = 0$, il s'agit donc du plan passant par $(0, 0, 4)$ et orthogonal au vecteur $(2, 3, 1)$.

(GRAPHER : le vecteur $\vec{n}$ et le plan).

Les fonctions affines les plus simples sont les fonctions constantes, le graphe de la fonction constante $f(x, y) = k$ est le plan horizontal d'altitude k, cad le plan d'équation $z = k$.

Points et vecteurs Formellement, dans ce qui précède, rien ne distingue un point d'un vecteur : tous deux sont donnés par leurs coordonnées. Cependant, il faut penser qu'il y a une différence d'*utilisation* entre les deux. Un point représente un endroit du plan (ou de l'espace) ; un vecteur représente un déplacement entre deux points.

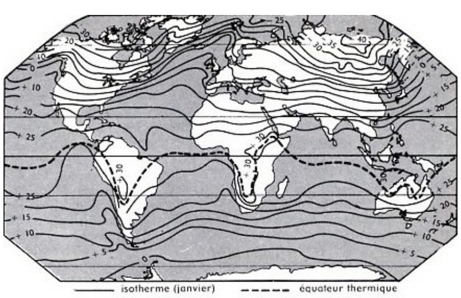
En particulier, ajouter deux vecteurs a un sens (la résultante de deux déplacements est un déplacement), alors qu'ajouter deux points n'a pas de sens (que serait $A + B$ quand A et B sont deux points du plan ?). Par contre, on peut ajouter un vecteur à un point : le point $B = A + \vec{u}$ est obtenu en partant du point A se déplaçant du vecteur $\vec{u}$ (les coordonnées de B sont la somme de celles de A et de celles de $\vec{u}$).

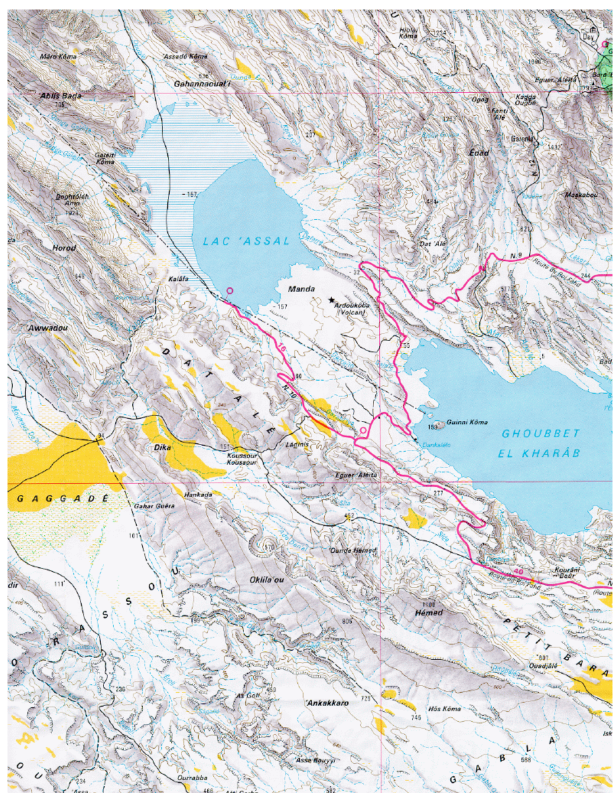
8.3 Lignes de niveau

Le graphe est beaucoup plus difficile à tracer que pour les fonctions d'une variable : difficulté du dessin, et surtout, pas de notion équivalente au tableau de variation des fonctions d'une variable. C'est pourquoi on utilise souvent d'autres modes de représentation graphique. Par exemple, la carte de la première page offre une représentation graphique d'une fonction pression $P(x, y)$; on a dessiné des *isobares* : un isobare est une courbe sur laquelle f est constante.

Ce type de représentation est très utilisé ; par exemple, pour la température, on trace les isothermes, courbes sur lesquelles la température est constante. Pour les cartes géographique représentant le relief, à la place d'une carte en trois dimension (pas pratique à plier), on trace les courbes d'altitude constante.

(GRAPHER)





Définition 8.3.1 (Lignes de niveau) *Soit f une fonct ion de deux variables, et h un nombre réel. On appelle* ligne de niveau de f de hauteur h *l'ensemble des points (x, y) du plan (Oxy)*

en lesquels f prend la valeur h :

$$L_h = \{(x,y) \text{ tels que } f(x,y) = h\}.$$

(GRAPHER) Exemple vu en TD : la “presqu’ile” $f(x,y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}$. La ligne de niveau 0. Remarque : on l’obtient en dessinant le plan du niveau de la mer...

Lien avec le graphe Le plan horizontal d’altitude k est le plan d’équation $z = k$; la ligne de niveau de hauteur k est donc la trace du graphe de f sur ce plan [projetée dans le plan (Oxy)].

Soit k une hauteur donnée. Dans le plan horizontal d’équation $z = k$, muni des coordonnées (x,y), la ligne de niveau de hauteur k est la trace du graphe de f.

8.4 Fonctions partielles

Beaucoup de problèmes concernant les fonctions de plusieurs variables peuvent se ramener à des problèmes concernant les fonctions d’une seule variable. pour cela, on utilise les *fonctions partielles*, qui sont obtenues en fixant la valeur de l’une des variables.

Exemple Si l’on reprend notre presqu’ile, qu’on se place au point $(0,0)$, la première fonction partielle est $x \mapsto f(x,0) = ...$ (on a fixé $y = 0$), la seconde est $y \mapsto f(0,y) = ...$

Lien avec le graphe Fixer $y = 0$ revient à se placer dans le plan vertical (Oxz) (plan d’équation $y = 0$, justement).

Dans le plan vertical d’équation $y = 0$, muni des coordonnées (x,z), le graphe de la fonction partielle $z = f(x,0)$ est la trace du graphe de f.

(GRAPHER : dessin de la presqu’ile avec le plan $y = 0$, vue de l’intersection en se plaçant perpendiculairement ; comparer avec le graphe (en deux variables) de la fonction partielle).

Un danger

Attention, bien savoir dans quel cadre on se situe :

- le dessin du graphe de f est un dessin dans l’espace (dimension 3) muni des coordonnées (x,y,z) ;
- le dessin des lignes de niveau se situe dans le plan horizontal muni des coordonnées (x,y) ;
- le dessin du graphe d’une fonction partielle est un dessin dans un plan vertical (x,z) ou (y,z).

Pour chacun des objets graphiques qu’on va introduire, ne pas se tromper de cadre !

GRAPHER : autres exemples :

– paraboloide (écrire les fonctions partielles, constater qu'il s'agit de paraboles, montrer les coupes ; et les lignes de niveau...)
– Hyperboloide $x^2 - y^2 = 1$ dans la feuille de TD. Et $xy = 1$, la ligne de niveau est le graphe de la fonction $x \mapsto 1/x$...
– champ de bosse... (pour le fun).

8.5 Dérivées partielles

Dans toute cette section, on considère une fonction f *définie au voisinage du point* (x_0, y_0) : cela signifie que son ensemble de définition contient un petit disque centré au point (x_0, y_0).

Exemple : reprendre la presqu'ile, $f(x, y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}$.

Si on fixe l'une des deux variables, on obtient une fonction de l'autre variable, que l'on peut dériver.

– exemple de y fixé à 0 ; notation $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$.

– exemple de x fixé à 0 ; notation $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y)$.

– exemple de y fixé à y_0, notation $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$.

Soit f une fonction de deux variables.

Définition 8.5.1 *On appelle* dérivées partielles de f au point (x, y) *les nombres, lorsqu'ils existent,*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \qquad \textit{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Les *fonctions dérivées partielles de* f sont les fonctions de deux variables

$$(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

Les dérivées partielles de f en (x, y) sont le pendant du nombre dérivé en un point d'une fonction d'une variable, et les fonctions dérivées partielles de f sont le pendant de la fonction dérivée d'une fonction d'une variable.

Attention au sens des différents symboles :
– x_0, y_0 sont des nombres, (x_0, y_0) est un point du plan ;
– 'x' dans $\frac{\partial}{\partial x}$ est juste un symbole : $\frac{\partial}{\partial x}$ signifie qu'on dérive suivant la première variable, qui est souvent notée x (mais pas toujours).
– $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ est un nombre ;
– $\frac{\partial f}{\partial x}$ est une fonction de deux variables.

On calcule les dérivées partielles de f, disons par exemple $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, en considérant y comme une constante dans l'expression $f(x, y)$. Pour $f(x, y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}$, on calcule facilement que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -x^2 - y + 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x - 2y.$$

On pourra remarquer que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ sont les dérivées de certaines fonctions partielles associées à f. Lesquelles ?

$\boxed{\textbf{FIN DU COURS 1.}}$

Feuille d'Exercices 9

Fonctions de deux variables (II)

Exercice 9.1.—
1. Donner (en justifiant) l'équation, dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni des coordonnées (x, y), de la droite passant par le point $(-3, 2)$ et orthogonale au vecteur $(23, 34)$.

2. Donner (en justifiant) l'équation, dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni des coordonnées (x, y, z), du plan passant par le point $(-3, 2, -1)$ et orthogonal au vecteur $(23, 34, 45)$.

3. (M) Sur un site internet, on peut commander des carottes et des pommes de terre ; on note α et β les prix au kilo. On paye un montant fixe $\gamma = 10$ euros pour la livraison.

a. Donner, en fonction des poids de carottes et de pommes de terre commandés, le prix à payer. Montrer que ce prix est une fonction affine de ces deux quantités.

b. Yvan a commandé 3 kilos de carottes et 2 kilos de pommes de terre, et a payé 18 euros. Zygomar a payé 24 euros pour 2 kilos de carottes et 10 de pommes de terre. Calculer les prix au kilo et les frais de livraison.

c. Soit P le plan de l'espace $\mathbb{R}^3$ passant par les points $(0, 0, 10)$, $(3, 2, 18)$ et $(2, 10, 24)$. Donner l'équation du plan P.

Exercice 9.2.— Donner une formule pour chacune des fonctions suivantes.

1. L'aire $A(\ell_1, \ell_2)$ d'un rectangle en fonction de la longueur des côtés.

2. L'energie cinétique $E(m, v)$ d'un mobile en fonction de sa masse et de sa vitesse.

3. Le volume $V(r, h)$ d'un cylindre en fonction de son rayon r et de sa hauteur h.

4. La surface extérieure $S(x, y)$ d'un parallélépipède rectangle (un carton d'emballage !) de volume $1m^3$, en fonction de la largeur x et de la longueur y de sa base, exprimées en mètres.

5. Calculer les dérivées partielles de ces quatre fonctions.

Exercice 9.3.— On cherche à définir le plan tangent au graphe d'une fonction f de deux variables, disons au point $(0, 0, f(0))$.

1. Coupe dans le plan (Oxz). On rappelle que l'intersection du graphe de f avec le plan (Oxz) donne le graphe du la fonction (d'une variable !) $x \mapsto f(0, x)$. Donner, dans le plan (Oxz), l'équation de la droite tangente à ce graphe. Quelle est l'quation de la droite correspondante dans $(Oxyz)$?

2. Même question en remplaçant le plan (Oxz) par le plan (Oyz).

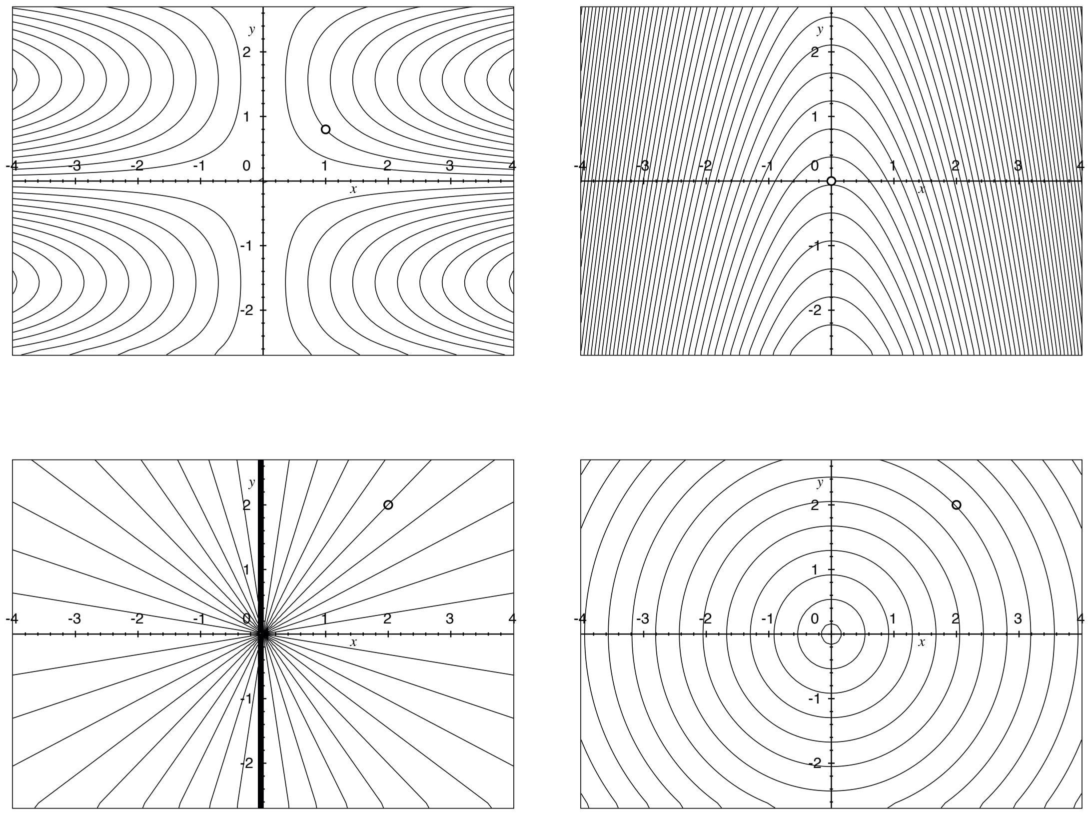
3. Montrer que le plan d'équation

$$z = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y$$

contient les deux droites précédentes.

Exercice 9.4.— Pour les fonctions suivantes, calculer les dérivées partielles au point indiqué. Donner l'équation de la ligne de niveau passant par le point indiqué. Tracer sur les dessins ci-dessous le vecteur $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x, y) \\ \partial_y f(x, y) \end{pmatrix}$ d'origine le point (x, y) indiqué. Que remarquez-vous ?

$f_1(x, y) = x \sin(y)$ au point $(1, \pi/4)$; $f_2(x, y) = \tan(x^2 + y)$ au point $(0, 0)$;
$f_3(x, y) = \arctan(y/x)$ au point $(2, 2)$; $f_4(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ au point $(2, 2)$.



Exercice 9.5.— Pour chacune des fonctions de l'exercice 9.3, tracer sur le dessin la tangente à la ligne de niveau passant par le point indiqué, puis calculer l'équation de cette droite.

Exercice 9.6.— On donne le dessin des lignes de niveaux de la "presqu'ile" de l'Exercice 8.1, c'est-à-dire de la fonction (l'unité est la centaine de mètres)

$$f(x,y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}.$$

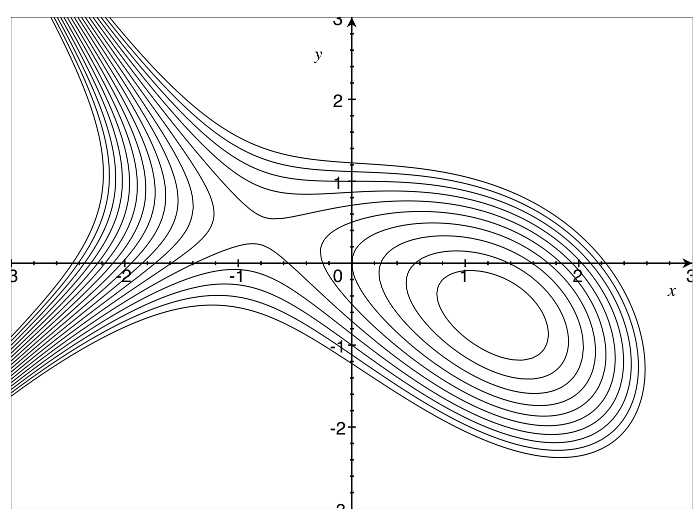
On a représenté les altitudes $0m$, $25m$, $50m$, *etc.*.

1. Localiser sur le dessin le (ou les) point(s) où le plan tangent au graphe de f est horizontal. On pourra s'aider des vues dessinées sur la feuille 8.

2. Rappeler l'équation du plan tangent au graphe de f en un point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Comment l'existence d'un plan tangent *horizontal* se traduit-elle sur les dérivées partielles ? En déduire les coordonnées exactes des points trouvés à la question précédente.

3. Soit P le plan tangent au graphe au point $(1, -1, f(1, -1))$. À l'aide du dessin des lignes de niveau, donner le signe des trois coordonnées d'un vecteur $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ orthogonal à ce plan.

4. Donner l'équation de P, et vérifier la cohérence de votre réponse avec le résultat de la question précédente.



5. Sur le dessin des lignes de niveau de la “presqu’ile” , tracer la tangente à la ligne de niveau au point $(2, -2)$.

6. Que vaut le vecteur gradient au point $(2, -2)$? En déduire l’équation de la tangente à la ligne de niveau en ce point, et vérifier en comparant à la question précédente.

7. a. Un skieur se tient au point correspondant à $x = 2, y = -2$, les skis bien horizontaux, la pente vers sa gauche. Dans quelle direction (Nord, Nord-Ouest, ...) pointent ses skis ? **b.** Il décide maintenant de se lancer droit dans la pente. Vers quelle direction se tourne-t-il ?

Exercice 9.7.—

1. Donner l’expression de la longueur de la diagonale $d(x, y)$ d’un rectangle de côtés x et y.

2. On considère un rectangle de côtés $x = 30$ cm et $y = 40$ cm. En utilisant l’approximation affine de d (c’est-à-dire en négligeant le reste dans la formule de Taylor), donner une estimation de la variation de d lorsque x augmente de 4mm et y diminue de 1mm (sans utiliser la calculatrice !). Calculer la longueur de la nouvelle diagonale à la calculatrice, et comparer avec l’estimation.

Exercice 9.8.— (M) On considère un container en carton de volume $1m^3$ (*cf.* exercice 9.2, question 4), dont la base a pour dimension $x = 2m$ et $y = 1m$. On veut fabriquer un deuxième container en carton de même volume, avec une base de côtés 195cm et 95cm. Donner (sans calculatrice) une estimation de la différence de surfaces extérieures entre les deux containers à l’aide l’approximation affine. Calculer la nouvelle surface à l’aide de la calculatrice, et comparer avec l’estimation.

Exercice 9.9.— On mesure le rayon r et la hauteur h d’un cône, avec une incertitude de 3% sur le rayon, et de 2% sur la hauteur. Évaluez l’incertitude sur le volume $V(r, h) = \pi r^2 h/3$ du cône, l’aide de l’approximation affine.

Exercice 9.10.— Soit F une fonction deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et c une constante. Montrer que la fonction définie par $f(x, t) = F(x + ct)$ vérifie l’équation de la corde vibrante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \quad \text{pour tout } (x, t).$$

N.B. : la notation $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ représente la fonction f dérivée deux fois par rapport à la variable t, autrement dit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right).$$

Exercice 9.11.—

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, et g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = f(t^2, 3t+2)$. Donner l’expression de $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.

2. (M) Même question pour les fonctions $h(t) = f(t, t)$; $i(t) = f(1, t)$; $j(t) = f(\sin(t), \cos(t))$; $k(t) = f(e^t \sin(t), \ln(1 + t^2))$.

Chapitre 9

Plan tangent et dérivées partielles

9.1 Le problème

Lorsqu'on veut des informations sur le comportement au voisinage d'un point d'une fonction $f(x)$ dépendant d'**une seule variable**, on peut calculer sa dérivée, qui nous donne une approximation de f par une fonction affine (DL à l'ordre 1). Graphiquement, cela revient à approcher le graphe de f par sa tangente.

Peut-on décrire une théorie similaire pour les fonctions de **deux variables** ? La réponse est affirmative. On va encore pouvoir approcher $f(x, y)$, au voisinage d'un point, par une fonction affine ; on obtiendra cette approximation affine en calculant les *dérivées partielles* de f au point considéré. Le graphe de l'approximation affine sera le plan tangent au graphe de f.

9.2 Développement limité à l'ordre 1

9.2.1 Rappel en une variable (oralement)

– Formule de Taylor,

– équation de la tangente.

9.2.2 Formule de Taylor -Young en deux variables en au point $(0, 0)$

Définition 9.2.1 *On dira qu'une fonction f est de classe C^1 si les fonctions dérivées partielles existent et sont des fonctions continues de (x, y).*

Par exemple, les polynômes sont de classe C^1, les fractions continues le sont sur leur ensemble de définition ; une somme, ou un produit, ou un quotient (bien défini) de fonctions C^1 est encore une fonction C^1.

Notation On note $||(h, k)||$ la longueur du vecteur (h, k) : $||(h, k)|| = \sqrt{h^2 + k^2}$.

Proposition 9.2.2 (Formule de Taylor-Young à l'ordre 1, en deux variables) *Soit f une fonction qui est de classe C^1 sur un voisinage du point $(0,0)$. Alors on a*

$$f(h,k) = f(0,0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + ||(h,k)||\varepsilon(h,k).$$

avec $\varepsilon(h,k)$ tend vers 0 quand (h,k) tend vers $(0,0)$.

On dit alors que f admet un DL à l'ordre 1 en $(0,0)$ (comme en une variable). La fonction affine $T(x,y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ s'appelle *approximation affine de f en* $(0,0)$. Elle donne l'équation du plan tangent :

Définition 9.2.3 *Si f est de classe C^1 au voisinage de $(0,0)$, le plan d'équation*

$$z = T(x,y) = f(0,0) + x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

s'appelle plan tangent au graphe de f au point $(0,0,f(0,0))$.

Exemple La presqu'ile au point $(0,0)$. Remarque : le plan tangent contient les deux tangentes aux "coupes" $x=0$ et $y=0$. **cf. Exercice 9.3** [il contient en fait les tangentes à toute les coupes, et plus généralement à toutes les courbe paramétrées incluses dans le graphe].

Cette formule permet de dessiner le mouvement de la planche d'un surfeur sur des vagues d'équation $z = \sin(x+y)$ (voir petit film)...

9.2.3 DL en un point (x_0, y_0)

(Comme en une variable). On peut trouver la formule en faisant le changement de variable $(x,y) = (x_0+h, y_0+k)$. On obtient

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + ||(h,k)||\varepsilon(h,k)$$

(et $\varepsilon(h,k)$ tend vers $(0,0)$ lorsque (h,k) tend vers $(0,0)$).

Là encore, la partie affine donne l'équation du plan tangent, *en faisant attention à revenir aux variables x et y* : Le faire sur un **EXEMPLE** (presqu'ile en $(1,2)$).

Exercice d'application Encore la presqu'ile... Rappel : les distances sont en centaines de mètres.

– calculer l'approximation affine au point $(1,1)$.

– Un promeneur se situe en ce point : son altitude est donc $f(1,1) = 1/6$ (soit environ 15 m au dessus du niveau de la mer). Il se dirige dans la direction Nord-Est. En, utilisant l'approximation affine (cad en négligeant le reste dans la formule de Taylor), calculer sa nouvelle altitude lorsque ses coordonnées x et y changent d'un mètre.

– il continue son chemin dans cette direction, en quel point aure-t-il les pieds mouillés ? (comparer à la "vraie" valeur de l'altitude au point trouvé).

9.3 Le vecteur gradient

9.3.1 Définition

Soit f une fonction de deux variables, (x, y) un point en lequel f est définie et ses DP aussi. Alors le gradient de f au point (x, y) est, par définition, le vecteur

$$\vec{\text{Grad}}_{(x,y)} f = \vec{\nabla}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Attention : c'est un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

9.3.2 Gradient et lignes de niveau

Proposition 9.3.1 *(on l'admet)*
Si ce n'est pas le vecteur nul, le gradient de f au point (x, y) est orthogonal à la ligne de niveau qui passe par (x, y), i.e. orthogonal à la tangente à la ligne de niveau au point (x, y).

On pourra remarquer que la formule de Taylor peut s'écrire à l'aide du gradient

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + ||(h, k)||\varepsilon(h, k).$$

Si on néglige le terme d'erreur $(\ldots)$, la proposition ci-dessus s'éclaire : $(x_0 + h, y_0 + k)$ se trouve sur la ligne de niveau de (x_0, y_0) lorsque $\nabla f(x_0, y_0)$ et $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

Exemple Pour la presqu'ile, on a calculé $\tilde{\text{Grad}}_{(-1,1)} f = (-1, -1)$. On dessine ce vecteur gradient, et différentes directions possibles pour la vitesse. Les directions orthogonales sont celles dans lesquelles la pente est nulle, les direction qui forment un angle aigu sont celles dans lesquelles "ça monte", et "ça descend" pour les angles obtus.

Equation de la tangente à une ligne de niveau

On peut se servir de ce résultat pour trouver l'équation de la tangente en un point d'une ligne de niveau. Soit C la courbe de niveau de f au point (x_0, y_0), d'équation $f(x, y) = \ell_0$ avec $\ell_0 = f(x_0, y_0)$. Si $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, la tangente à C en (x_0, y_0) a pour équation

$$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0.$$

Exemple Pour la presqu'ile, au point $(-1, 1)$...

Facultatif
Comment obtenir la Proposition 9.3.1

- Les dérivées partielles de f au point (x, y) mesurent l'accroissement de f lorsqu'on s'éloigne de (x, y) d'une unité dans la direction de chacun des axes de coordonnées. Le vecteur gradient donne donc la direction dans laquelle f varie le plus vite (plus grande pente) : cette direction est le plus éloigné possible de la direction où la fonction est constante, i.e perpendiculaire à la direction de la tangente à la ligne de niveau.
- Le problème, c'est qu'on ne sait pas bien ce que sont les lignes de niveau : ce sont des courbes que l'on peut peut-être écrire comme des courbes paramétrées $M(t) = (x(t), y(t))$, disons avec $(x, y) = M(0)$. Si c'est le cas, on peut dériver (par rapport à t) membre à membre l'égalité

  $$f(x(t), y(t)) = \ell_0,$$

  et examiner l'équation obtenue en $t = 0$. On trouve $\vec{\nabla} f(x, y) \cdot \vec{OM}^{'}(0) = 0$...

9.3.3 Le champ de gradient

Soit f une fonction de deux variables (par exemple notre presqu'ile, $f(x, y) = ...$). En chaque point (x, y), on a défini le vecteur gradient $\vec{\mathrm{Grad}}_{(x,y)} f$. On a ainsi ce qu'on appelle un *champ de vecteurs*, cad la donnée, en chaque point (x, y) du plan, d'un vecteur $\vec{X}(x, y)$. *Attention, ce vecteur s'interprète comme étant basé au point* (x, y)*, et non pas au point* $(0, 0)$: exemple du dessin du vecteur gradient de la presqu'ile f au point $(2, -1)$. (Ainsi, un champ de vecteurs est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, qui s'interprète et se dessine d'une façon particulière).

9.3.4 Exemples d'utilisation du gradient en Physique

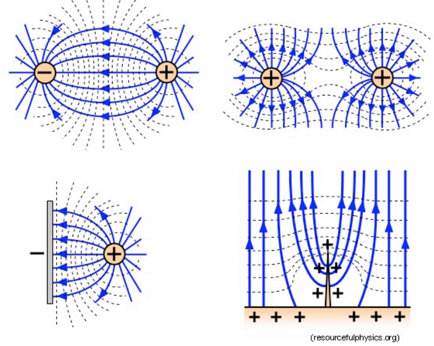
Le champ électrique

En Physique, on définit le champ électrique $\vec{E}$. La force électrique subie par une particule de charge q est $\vec{F} = q\vec{E}$.

L'une des propriétés importantes du champ électrique est qu'il "dérive d'un potentiel" : ceci signifie qu'il existe une fonction $\Phi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$\vec{E} = \tilde{\mathrm{Grad}}(\Phi).$$

Les équipotentielles ne sont rien d'autre que les lignes de niveau de la fonction Φ.



Équipotentielles de quelques champs électriques

Équation de diffusion de la chaleur

L'idée intuitive que la chaleur va "du chaud vers le froid" se traduit à l'aide du gradient : le flux de chaleur $\vec{h}$ est proportionnel au gradient de température ∇T.

$$\vec{h} = -\kappa \nabla T.$$

Le vecteur $\vec{h}$ est, par définition, la quantité de chaleur qui "passe" par unité de surface, à travers une surface imaginaire orthogonale à $\vec{h}$.

(Autre exemple : une goutte de d'encre dans de l'eau, comment diffuse-t-elle ?...)

9.3.5 Exemples mathématiques

Exercice 1) $f(x, y) = x^2 + y^2$: dessiner les lignes de niveau ; calculer le gradient en un point (x, y) quelconque ; dessiner ce vecteur en quelques points particuliers $(1, 1), (1, 0), \ldots$). Constater l'orthogonalité.

2) Même chose avec la fonction $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, dont les lignes de niveau sont les ellipses décrites par $M(t) = (r \cos(t), \frac{1}{2} r \sin(t))$.

$\boxed{\textbf{FIN COURS 2.}}$

Chapitre 10

Extremums d'une fonction de deux variables

10.1 Retour sur les fonctions d'une variable

10.1.1 Définitions

Soit f une fonction d'une variable, définie sur D_f. On définit deux types de maxima : DESSIN. Soit $x_0 \in D_f$.

– on dit que f atteint son maximum absolu au point x_0 si pour tout $x \in D_f$, $f(x) \leq f(x_0)$.

– on dit que f admet un maximum local au point x_0 si l'inégalité $f(x) \leq f(x_0)$ est vérifiée pour tout $x \in D_f$ assez proche de x_0 (plus précisément : si il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap D_f$, $f(x) \leq f(x_0)$).

(en pratique, dans le tableau de variation, on voit une flèche qui monte jusqu'en $f(x_0)$, puis une flèche qui descend...)

On définit de même les minima absolus et locaux. Extremum signifie minimum ou maximum.

Sur le dessin, le réel x_0 est un max absolu, et *a fortiori* un max local (qui peut le plus peut le moins !).

10.1.2 Points critiques (les suspects !)

Dans ce cours, on va se concentrer sur la recherche des extrema locaux d'une fonction donnée. Ceci va se faire en deux étapes.

On suppose maintenant que f est définie au moins sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ (cad $I \subset D_f$).

Proposition 10.1.1 (Principe de Fermat) *Si f admet un minimum local ou un maximum local au point $x_0 \in I$, et si $f'(x_0)$ existe, alors $f'(x_0) = 0$: géométriquement, la tangente au* *graphe de f en ce point est horizontale.*

Autrement dit, **les extremums locaux sont à chercher parmis les points critiques**, c-à-d les points x_0 où la dérivée s'annule). Exemples à avoir en tête :
- 0 est un point critique de $1 + x^2$ (et un min local) ;
- 0 est un point critique de $1 - x^2$ (et un max local) ;
- 0 est un point critique de $1 + x^3$ (et ni min ni max local : en particulier, la réciproque de la proposition est fausse, tous les suspects ne sont pas forcément coupables !).

10.1.3 Condition d'ordre 2 (les coupables !)

Une fois qu'on a un point critique x_0 (suspecté, sans preuve, d'être un extremum local), comment faire pour savoir s'il s'agit d'un minimum local (comme $1 + x^2$), d'un maximum local (comme $1 - x^2$) ou d'un innocent (comme $1 + x^3$) ? On fait un DL à l'ordre 2. On écrit :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + 0 + h^2 \frac{f''(x_0)}{2} + h^2 \varepsilon(h) = f(x_0) + h^2 \left(\frac{f''(x_0)}{2} + \varepsilon(h) \right).$$

– si $f''(x_0) > 0$, on voit que pour h assez proche de 0, $f(x_0 + h) > f(x_0)$ (rappelons la preuve, qui est très simple...) ;

– si $f''(x_0) < 0$, on voit que pour h assez proche de 0, $f(x_0 + h) < f(x_0)$;

– si $f''(x_0) = 0$, on ne peut rien dire (il faudrait faire un DL à l'ordre 3 ou plus...). On dit que le point critique est *dégénéré*.

Remarquons qu'il s'agit d'un cas particulier de l'étude de la position par rapport à la tangente (cf chapitre sur les DLs) : par exemple x_0 est un minimum local ssi le graphe est localement au-dessus de sa tangente (qui est horizontale).

Bilan :

Proposition 10.1.2 (Condition d'ordre 2) *Soit x_0 un point critique de f.*
- *Si $f''(x_0) > 0$, alors c'est un minimum local ;*
- *si $f''(x_0) < 0$, alors c'est un maximum local ;*
- *si $f''(x_0) = 0$, alors on ne peut rien dire sans plus d'information.*

Exemple $f(x) = x^3 \left(1 - \frac{3}{5}x^2\right)$. Trois points critiques, un de chaque sorte.

10.2 Définitions en deux variables

En deux variables, on va suivre la même méthode : il y a encore une notion de point critique, et une condition d'ordre 2 (un peu plus compliquée). Il y aura un nouveau type de point qui n'existe pas en une variable (le point selle).

Soir f une fonction de deux variables, définie pour $(x, y) \in D_f$. Soit (x_0, y_0) un point de D_f.

- On dira que f atteint son maximum au point (x_0, y_0) si, pour tout $(x, y) \in D_f$, on a $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$.
- On dira que f admet un maximum local au point (x_0, y_0) si l'inégalité $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ est vérifiée pour tout $(x, y) \in D_f$ assez proche de (x_0, y_0), c'est-à-dire pour tout (x, y) dans un petit disque autour du point (x_0, y_0).

Bien sûr, on définit de façon analogue les minima et minima locaux.

10.3 Points critiques

On suppose désormais que f est définie (au moins) pour $x \in I$ et $y \in J$ où $I =]a, b[$, $J =]a', b'[$ sont deux intervalles ouverts (c-à-d $I \times J \subset D_f$). On suppose aussi que les DP de f existent sur $I \times J$.

Définition 10.3.1 *Un* point critique *est un point* (x_0, y_0) *où les deux dérivées partielles s'annulent :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Géométriquement, le plan tangent au graphe de f au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)$ est horizontal.

Proposition 10.3.2 (Principe de Fermat en deux variables) *Si f admet un minimum local ou un maximum local au point (x_0, y_0), alors ce point est un point critique.*

Preuve de la proposition Pour simplifier, on se place au point $(0, 0)$. Supposons que ce point soit un maximum local de f : on a $f(x, y) \leq f(0, 0)$ pour tout (x, y) assez proche de $(0, 0)$. Alors ceci est *a fortiori* vrai lorsqu'on se restreint aux valeurs nulles de y : pour tout x assez proche de 0, on a $f(x, 0) \leq f(0, 0)$. Autrement dit, la fonction partielle $\varphi : x \mapsto f(x, 0)$ admet un maximum local en $x = 0$. Le théorème correspondant en une variable nous dit que $\varphi'(0) = 0$, mais par définition $\varphi'(0)$ est la dérivée partielle de f en $(0, 0)$ par rapport à la variable x. Bien sûr, le même raisonnement marche pour la dérivée par rapport à y.

Exemples simples

- $2 - x^2 - y^2$ admet un minimum local, et même absolu, en $(0, 0)$: calcul direct.
- De même, $2 + x^2 + y^2$, maximum absolu.
- Par contre pour $2 + x^2 - y^2$, le point $(0, 0)$ est un point critique qui n'est ni un minimum, ni un maximum : cf le graphe vu en TD. **Jusitification analytique :**
  - $f(x, 0) = 2 + x^2 > 2$ pour tout $x \neq 0$, donc il y a des points aussi proche de $(0, 0)$ qu'on veut où f prend des valeurs plus grande que 2 (ça n'est donc pas un maximum local) ;
  - $f(0, y) = 2 - y^2 < 2$ pour tout $y \neq 0$, donc il y a des points aussi proche de $(0, 0)$ qu'on veut où f prend des valeurs plus petite que 2 (ça n'est donc pas un minimum local).

  C'est le propotype d'un point selle ou col (cf plus loin). (Dessin du signe de $x^2 - y^2$ dans le plan Oxy ?)

Exemple La presqu'île. On voit sur le dessin qu'elle a un maximum local (le sommet). Est-ce un maximum absolu ?...

Comment trouver les coordonnées précises de ce point ? En ce point, le plan tangent est horizontal, autrement dit les deux dérivées partielles sont nulles. On a trouvé en TD les points où le plan tangent est horizontal (exo 9.4 ? ? ?) : il y en a deux : celui correspondant au maximum local, et le col.

Exemple de recherche de points critiques $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$. On trouve les trois points $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$. [2 min locaux et un col]

En général, la fonction f possède un nombre fini de points critiques. Une fois qu'on les a identifié, il reste à savoir leur nature : minimum, maximum ou autre (lesquels de ces suspects sont des coupables ?).

FIN COURS 3

10.4 Les fonctions quadratiques et la méthode de Gauss

N.B. Peut être fait en TD

Pour identifier la nature d'un point critique, comme en une variable, on va faire un DL à l'ordre 2. Pour utiliser ce DL, il faut savoir identifier le signe de l'expression qui va apparaitre, qui est du type

$$q(x,y) = rx^2 + 2sxy + ty^2.$$

Ces fonctions s'appellent des *formes quadratiques*, ou *polynômes homogènes de degré* 2.

Comment connaitre le signe d'une forme quadratique ?

10.4.1 Les trois modèles

On a trois modèles simples :

1. $q(x,y) = x^2 + y^2$ est strictement positif pour tout $(x,y) \neq (0,0)$;
2. $q(x,y) = -x^2 - y^2$ est strictement négatif pour tout $(x,y) \neq (0,0)$;
3. $q(x,y) = x^2 - y^2$ prend des valeurs positives et négatives.

Pour une forme quelconque, on va essayer de l'exprimer comme **somme ou différence de deux carrés** : c'est ce que fait la méthode de Gauss.

10.4.2 Description de la méthode sur des exemples

1. $q_1(x,y) = x^2 + y^2 + xy = (x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2$ (comme le xy nous embete, on l'a fait rentrer dans le carré du x : noter que le coeff 1/2 est choisi précisément pour absorber le terme en xy). On en déduit que $q_1(x,y) \geq 0$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, (on peut même montrer que $q(x,y) > 0$ pour $(x,y) \neq (0,0)$). La forme est dite strictement positive.
2. $q_2(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy = (x + \frac{3}{2}y)^2 - \frac{5}{4}y^2$: on en déduit que q_2 prend des valeurs > 0 et < 0 (DESSIN : le long des axes $y = 0$ et $x + \frac{3}{2}y = 0$).
3. $q_3(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2$. Cette fois-ci, la forme est ≥ 0, mais pas strictement positive (puisqu'elle s'annule lorsque $x + y = 0$, DESSIN). On dit qu'elle est dégénérée.
4. Il y a un cas un peu spécial, si il n'y a pas de x^2 : dans ce cas on utilise le y^2 à la place. Par exemple, pour $q_4(x,y) = xy + y^2 = ...$
5. et un cas très spécial : $q_5(x,y) = xy$, qu'on écrit $\frac{1}{4}((x+y)^2 - (x-y)^2)$.

10.4.3 Bilan : Méthode de Gauss pour $q(x, y) = rx^2 + 2sxy + ty^2$

– si $r \neq 0$, on se ramène à $r = 1$ en factorisant r ;
– on écrit $x^2 + 2sxy = (x + sy)^2 - s^2y^2$;
– on en déduit une écriture de $q(x, y)$ sous l'une des formes $aX^2 + bY^2$ ou aX^2 suivant que $s^2 \neq t$ ou pas.
– lorsque $r = 0$, on utilise y à la place de x, sauf si $r = t = 0$, qui est le cas très spécial vu ci-dessus.

Définition 10.4.1 *La forme quadratique $q(x, y)$ est dite non dégénérée lorsque la méthode de Gauss permet de l'écrire $q(x, y) = aX^2 + bY^2$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$ (et $X \neq \lambda Y$ pour tout réel λ).*

10.5 Formule de Taylor d'ordre 2

On dit que la fonction f est de classe C^2 si ses DP sont des fonctions de classe C^1. On a alors quatre dérivées partielles d'ordre 2, qu'on note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Proposition 10.5.1 (Schwarz) *Si f est de classe C^2, alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Proposition 10.5.2 *Soit f une fonction définie au voisinage d'un point (x_0, y_0), et de classe C^2 les DP existent et sont chacune de classe C^1). Notons*
– α, β les dérivées partielles au point (x_0, y_0) ;
– r, s, t les dérivées secondes en ce même point.
On a alors la formule :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \alpha h + \beta k + \frac{1}{2}\left(rh^2 + 2shk + tk^2\right) + ||h, k||^2 \varepsilon(h, k)$$

avec $\lim_{(h,k \to (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$.

Remarque : $||h, k||^2 = h^2 + k^2$.

10.6 Conclusion : type des points critiques

Soit (x_0, y_0) un point critique d'une fonction f. Supposons qu'on ait un DL de f,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\left(rh^2 + 2shk + tk^2\right) + ||h, k||^2 \varepsilon(h, k)$$

(ici α et β sont nuls puisqu'on a un point critique).

Proposition 10.6.1 *(admise) Si la forme quadratique $q(h,k) = rh^2 + 2shk + tk^2$ est non dégénérée, les lignes de niveaux de f au voisinage de (x_0, y_0) ont la même allure que celles de q.*

Lorsque q est dégénérée, on ne peut pas conclure sans plus d'information.

En étudiant la forme réduite de Gauss de $q(x,y) = aX^2 + bY^2$ on obtient alors :
– si $\alpha, \beta > 0$, alors le point (x_0, y_0) est un minimum local ;
– si $\alpha, \beta < 0$, alors le point (x_0, y_0) est un maximum local ;
– si $\alpha\beta < 0$, alors le point (x_0, y_0) n'est pas minimum local, ni un maximum local (on dit qu'il est de type selle).

Bilan

Pour trouver les extrema locaux d'une fonction f de deux variables :

1. On trouve les points critiques de f : on sait que tous les extrema locaux de f font partie des points critiques (remarque : en pratique, on n'y arrive pas toujours) ;
2. pour chaque point critique (x_0, y_0),
   (a) on calcule les dérivées secondes r, s, t , et on réduit la forme quadratique q correspondante à l'aide de la méthode de Gauss.
   (b) Si q est dégénérée, on ne peut rien dire sans travailler davantage...
   (c) Si q n'est pas dégénérée, on conclut sur le type du point critique : minimum local, maximum local, ou point selle.

– exemple complet : extremums locaux de la fonction $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$.

– tableau : correspondance des concepts et méthodes 1 var/2vars ?

$\boxed{\textbf{FIN DU COURS !!!}}$

Feuille d'Exercices 10

Fonctions de deux variables (III)

1. Extremums des fonctions d'une variable

Exercice 10.1.— Soit la fonction d'une variable définie par

$$f(x) = 3x^4 - 2x^6.$$

1. Trouver les points critiques de f.

2. Calculer les DLs à l'ordre 2 en chacun de ces points. (Question facultative : pouvez-vous calculer ces DLs sans utiliser la formule de Taylor ?)

3. On dit qu'un point critique x_0 est *dégénéré* si $f''(x_0) = 0$. Lesquels de ces points critiques sont dégénérés ?

4. Pour chacun des points critiques non dégénérés, dire s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum local.

5. Le point critique dégénéré est-il un maximum local, ou un minimum local, ou ni l'un ni l'autre ?

6. Tracer le tableau de variation de f. Est-il cohérent avec vos réponses précédentes ? Les extremums locaux sont-ils des extremums absolus ?

Exercice 10.2.— (M) Mêmes questions pour la fonction définie par $f(x) = x^3\left(1 - \frac{3}{5}x^2\right)$.

---

2. Recherche de points critiques

Exercice 10.3.— Trouver les points critiques des fonctions suivantes.

1. $f_1(x, y) = 1 + x + y + x^2 - xy + y^2$.

2. $f_2(x, y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$.

3. (plus difficile) $f_3(x, y) = (1 - x)(1 - y)(x + y - 1)$.

4. $f_4(x, y) = \cos(x) + \cos(y)$.

5. (M) $g_1(x, y) = (1 + x)(1 + y)$; $g_2(x, y) = xy - y^2 + x^2 + 3x - y$; $g_3(x, y) = x^2(2 - y) + y^3 - 3y$; $g_4(x, y) = \left(1 + y^2\right)\exp\left(-x^2\right)$.

Exercice 10.4.— On considère la fonction définie par

$$f(x, y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}.$$

1. Quel est le domaine de définition de f ? Faire un dessin.

2. Trouver les points critiques de f.

3. (optionnelle) On considère une boîte en carton de volume 1 **sans couvercle**, dont la base a pour dimensions $x \times y$. **a.** Montrer que la surface des parois de la boite est donnée par $f(x, y)$. **b.** Montrer qu'il existe de telles boîtes (de volume 1 et sans couvercle) avec une surface aussi grande qu'on veut (les dessiner !). **c.** Pensez-vous alors que le point critique de f est un minimum ou un maximum (local ou absolu ?), ou ni l'un ni l'autre ?

---

3. Signe des formes quadratiques

Exercice 10.5.— Pour chacune des formes quadratiques suivantes, **a.** utiliser la méthode de Gauss pour obtenir une forme canonique, **b.** dire si la forme est dégénérée ou non, **c.** dans les cas non dégénérés dire si $(0,0)$ est un maximum, un minimum, ou un point selle.

1. $q_1(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$;

2. $q_2(x,y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2$;

3. $q_3(x,y) = -4x^2 - 12xy$;

4. $q_4(x,y) = 4xy$;

5. $q_5(x,y) = -2x^2 + xy$;

6. $q_6(x,y) = xy + y^2$.

7. (M) $p_1(x,y) = x^2 + xy + 10y^2$; $p_2(x,y) = x^2 + 10xy + y^2$; $p_3(x,y) = 10x^2 + xy + y^2$; $p_4(x,y) = xy + 10y^2$; $p_5(x,y) = 100xy$; $p_6(x,y) = 10x^2 + 100y^2$.

Exercice 10.6.—

1. Soit $q_1(x,y) = (x+2y)^2$. Il est clair que $q_1(x,y) \geq 0$ pour tout point (x,y). Quels sont les points (x,y) tels que $q_1(x,y) > 0$?

2. Même question pour la forme quadratique $q_2(x,y) = (x+y)^2 + y^2$.

---

4. Formule de Taylor à l'ordre 2

Exercice 10.7.— On considère la fonction f_1 de l'exercice 10.3. **1.** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 en un point (x,y) quelconque. **2.** Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 au point $(1,2)$. **3.** Même question au point $(0,0)$; que constate-t-on ? **4.** Même question en un point (x_0,y_0) quelconque.

Exercice 10.8.—

1. Soit la fonction de deux variables suivante :

$$f_1(x,y) = \cos(x) - \cos(y).$$

a. Ecrire les DLs de f au point $(0,0)$ à l'ordre 1, puis à l'ordre 2.

b. Le point $(0,0)$ est-il un point critique ? Si oui, est-il dégénéré ? Est-ce un minimum ou un maximum local, ou un point selle ?

2. Mêmes questions avec

$$f_2(x,y) = x + x^2 + y^2.$$

3. (plus difficile) Mêmes questions avec

$$f_3(x,y) = 1 + x^2 + x^3 + y^3.$$

4. (M) Mêmes questions avec $g_1(x,y) = (1-x)(-2+y)$; $g_2(x,y) = 2 - 3x^2 - 4y^2 + 100x^2y^3$; (difficile) $g_3(x,y) = -1 + (x-y)^2 + x^3$.

Exercice 10.9.— Pour chacune des fonctions de l'exercice 10.3, donner la nature (dégénéré, maximum local, minimum local ou point selle) de chacun des points critiques.

Exercice 10.10.— La surface $S(x, y)$ d'un container en carton de volume $1m^3$ dont la base a pour dimension x, y est la fonction

$$S(x, y) = 2xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}.$$

(cf. exercice 8.3) On considère le container de volume $1m^3$ dont la base a les dimensions $x = 1m$ et $y = 1m$ (c'est donc un cube). On veut estimer la variation de surface lorsque le côté x augmente de $5cm$, et le côté y diminue de $10cm$.

1. Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 1 au point $(1, 1)$. Peut-on en déduire une estimation de la variation ?

2. Répondre au problème en utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2, et en supposant que le reste est négligeable devant les autres termes.

3. Calculer la variation à la calculatrice, et comparer avec votre estimation.

Exercice 10.11.— On considère la fonction définie par $f(x, y) = (x^2 - y)(2x^2 - y)$. On voudrait savoir si $(0, 0)$ est un extremum local.

1. Montrer que $(0, 0)$ est un point critique.

2. Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 au point $(0, 0)$: quelle est la nature du point critique $(0, 0)$? Que peut-on en déduire pour notre problème ?

3. Étudier le signe de $f(x, y)$ en fonction de x et y : faire un dessin dans le plan (Oxy) en indiquant les régions où $f > 0$, $f = 0$, $f < 0$. Répondre à la question initiale : le point $(0, 0)$ est-il un maximum ou un minimum local ?

Exercices supplémentaires

Exercice 10.12.— Le but de cet exercice est de répondre à la question suivante : *Parmi tous les triangles de périmètre fixé, quels sont ceux qui ont une aire maximale ?*

1. Première partie On cherche d'abord le maximum, pour x et y compris entre 0 et 1, de la fonction $f(x, y) = (1 - x)(1 - y)(x + y - 1)$.

a. Dessiner l'ensemble des points (x, y) tels que $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$. Déterminer et représenter le signe de f sur cet ensemble.

b. Trouver le(s) point(s) critique(s) de f dans cet ensemble.

On voudrait maintenant vérifier que le point critique trouvé correspond bien au maximum de la fonction f.

c. Pour y fixé (entre 0 et 1), trouver la valeur maximale de $f(x, y)$ lorsque x varie entre 0 et 1. On note cette valeur $m(y)$.

d. Trouver la valeur maximale de $m(y)$ pour y variant entre 0 et 1. Conclure.

2. Seconde partie On donne la *formule de Héron*[1] : l'aire d'un triangle de côtés a, b, c est donnée par

$$A = \sqrt{p(p - A)(p - b)(p - c)}$$

où p est le demi-périmètre du triangle, $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

a. Dessiner quelques triangles de périmètre 2 (par exemple avec 1 unité = $10cm.$). Avez-vous une idée de la réponse à la question : comment obtenir un triangle avec la plus grande aire possible ?

b. Pour simplifier, on consière les triangles de périmètre 2 (c-à-d $p = 1$). Exprimer l'aire comme une fonction F des deux longueurs a et b.

c. Dessiner le domaine de définition de la fonction F. Déterminer la partie du domaine de définition qui correspond aux valeurs positives de a, b et c.

d. À l'aide de la première partie, trouver les longueurs de a et b correspondant aux triangles d'aire maximale.

Exercice 10.13.— Le but de cet exercice est de comprendre comment obtenir des DLs de fonctions de deux variables à partir de DLs de fonctions d'une variable.

1. Montrer que pour tout (x, y), on a $-\|(x, y)\| \leq x \leq \|(x, y)\|$. En déduire

a. que la quantité $\frac{x}{\|(x,y)\|}$ est bornée ;

b. que la quantité $\frac{xy}{\|(x,y)\|}$ tend vers 0 lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$;

c. que la quantité $\frac{x^2}{\|(x,y)\|}$ tend vers 0 lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$.

2. Soit la fonction $f(x, y) = e^{x-y}$. On veut écrire le DL de f en $(0, 0)$ l'ordre 1 en utilisant la formule de Taylor de la fonction exponentielle :

$$e^u = 1 + u + u\varepsilon(u),$$

o ε est une fonction telle que $\lim_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$.

a. On pose

$$\varepsilon_1(x, y) = \frac{x - y}{\|(x, y)\|}\varepsilon(x - y).$$

Montrer que $\varepsilon_1(x, y)$ tend vers 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$.

b. En déduire le développement limité de f en $(0, 0)$ l'ordre 1 (en remplaant u par $x - y$ dans la formule de Taylor de exponentielle).

3. En s'inspirant de la question précédente, calculer le DL des fonctions suivantes à partir des DLs classiques des fonctions d'une variable.

$f_1(x, y) = (1 + x)\sqrt{1 + y}$ en $(0, 0)$ à l'ordre 1 ; $f_2(x, y) = \frac{1+x}{1+y}$ en $(0, 0)$ à l'ordre 1 ; $f_3(x, y) = \sin(x - y)$ en $(0, 0)$ à l'ordre 2 ; $f_4(x, y) = e^{x^2-y^2}$ en $(0, 0)$ à l'ordre 2.

---

[1] Héron d'Alexandrie, premier siècle après J.-C.