Université Paris Nord – Licence 2 mention Physique-Chimie – Année 2012-2013
Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques

Test n$^{\text{o}}$ 1

Fonctions de plusieurs variables

Le 15 novembre, je choisirai 3 des affirmations ci-dessous. Vous aurez une quinzaine de minutes pour dire si ces affirmations sont vraies ou fausses, en justifiant soigneusement vos réponses.

1.— L'ensemble de définition de la fonction $f(x,y) = \frac{1}{xy}$ est le plan privé de deux droites.

2.— L'ensemble de définition de la fonction $f(x,y) = \frac{1}{\sin(x)}$ est le plan privé d'une droite.

3.— La fonction $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}$ est définie sur l'espace $\mathbb{R}^3$ en entier.

4.— Soit f la fonction de deux variables définie par $f(x,y) = \exp(x)\sin(y)$. Alors les fonctions partielles f au point $(0,\pi)$ sont bornées.

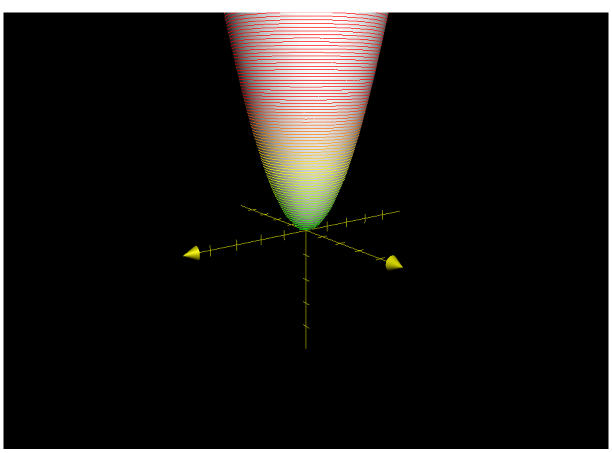
5.— Soit la fonction de deux variables définie par $f(x,y) = (1+x)\ln(1+e^y)$. Alors les fonctions partielles de f au point $(1,2)$ sont croissantes.

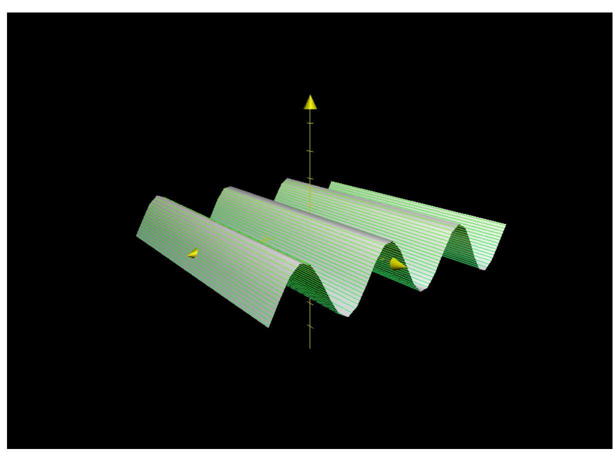
6.— Les lignes de niveau de la fonction $f(x,y) = \exp(x+2y)$ sont des droites.

7.— Les lignes de niveaux de la fonction $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ sont des cercles.

8.— Le dessin ci-dessous, à gauche, représente le graphe de la fonction $f(x,y) = x^3 + y^3$.

9.— Le dessin ci-dessous, à droite, représente le graphe de la fonction $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$.





10.— Soit f la fonction définie par $f(x,y) = x^2 + y^3$. Alors le plan tangent au graphe de f en $(1,0,1)$ a pour équation $z = 1 + 2x + 3y$.

11.— Soit f la fonction définie par $f(x,y) = x^2 + x + 2y + 2\exp y^2$. Alors le plan tangent au graphe de f en $(0,0,2)$ a pour équation $z = x + 2y$.

12.— Dans la question précédente, le graphe de f est au-dessus de son plan tangent.

13.— Soit f la fonction définie par $f(x,y) = 1 + x^2 + xy^3$. Alors la formule de Taylor au point $(0,0)$ s'écrit

$$f(x,y) = 1 + x(2x + y^3) + y(2xy^2) + ||(x,y)||\varepsilon(x,y)$$

avec $\varepsilon(x,y)$ qui tend vers 0 lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$.

14.— On a

$$(1+x)(1+y) = 1 + x + y + ||(x,y)||\varepsilon(x,y)$$

avec $\varepsilon(x,y)$ qui tend vers 0 lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$.

15.— Soit $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$. Alors on a, pour tous $x, y > 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

16.— Soit $f(x,y) = x^4 + y^4$. Le vecteur $(1,1)$ est orthogonal à la ligne de niveau 1 de f au point $(1,0)$.

17.— La fonction $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$ possède une infinité de points critiques.

18.— La fonction définie par $f(x,y) = \exp(x^2 + 2y^2)$ atteint son minimum au point $(0,0)$.

19.— (suite de la question précédente) *Le raisonnement suivant est valide :* Puisque $(0,0)$ est un minimum de f, c'est un point critique, ce qui montre que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

sans qu'on ait besoin de calculer les dérivées partielles.

20.— Soit $f(x,y,z) = \cos(x)\cos(y)$. Le développement limité à l'ordre 2 de f au point $(0,0)$ s'écrit

$$f(h,k) = 1 + h^2 + hk + k^2 + |||(h,k)|||^2\epsilon(h,k)$$

avec $\epsilon(h,k) \to 0$ quand $|||(h,k)||| \to 0$.

21.— $(0,0)$ est un minimum local de la fonction $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$.

22.— Le point $(0,0)$ est un point critique de la fonction f définie par $f(x,y) = \exp(x^2 - y^2)$.

23.— Le point $(0,0)$ n'est ni un minimum local ni un maximum local de la fonction f.