1.(3) $p=\dfrac{\binom{M}{k}!}{\binom{M}{k}^N\left[\binom{M}{k}-N\right]!}$

令 $t=\binom{M}{k}$

由 Storling 公式： $\ln n! \approx n\ln n - n$

$$\ln p \approx t\ln t - t - N\ln t - (t-N)\ln(t-N) - (t-N)$$

$$= (t-N)\ln\frac{t}{t-N} + N - 2t$$

用 Taylor 展开

$$\ln p \approx (t-N)\left(\frac{N}{t}+\frac{1}{2}\left(\frac{N}{t}\right)^2\right)+N-2t$$

$$= -\frac{N^2}{2t^2}-\frac{N^3}{2t^2}$$

$p\to\max \iff \ln p\to\max$

即 对于 $\frac{2\ln p}{N^3} = -\frac{1}{Nt}-\frac{1}{t^2} \xrightarrow{m=\frac{1}{t}} -m^2-\frac{1}{N}m$

知 $m>0$ 故 $\max\left(\frac{2\ln p}{N^3}\right)\approx 0$

即 $\max p \approx 1$

当达到 $p=0.95\max(p)=0.95$ 时，下求解 k

$$\begin{cases} \frac{2\ln 0.95}{N^3} = -m^2-\frac{1}{N}m & ① \\ m=\frac{1}{t} & ② \\ t=\binom{M}{k} & ③ \\ \ln t = \ln\frac{M!}{k!(M-k)!} \approx M\ln M - k\ln k - (M-k)\ln(M-k) & ④ \end{cases}$$

综合以上4式利用 Matlab 求解 (prob1_calculation.m) 得

$k\approx 2.48$. 可知 k 在 2 或 3 时 p 即可达到 0.95