HW2

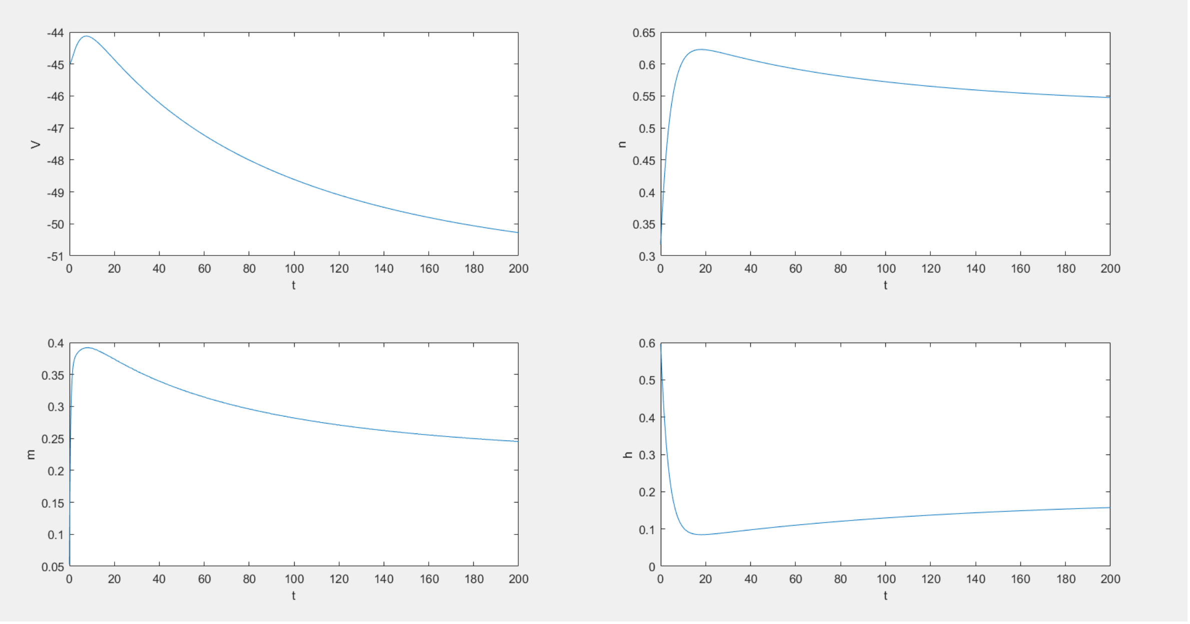
PB18061243 张潇蓉

prob1

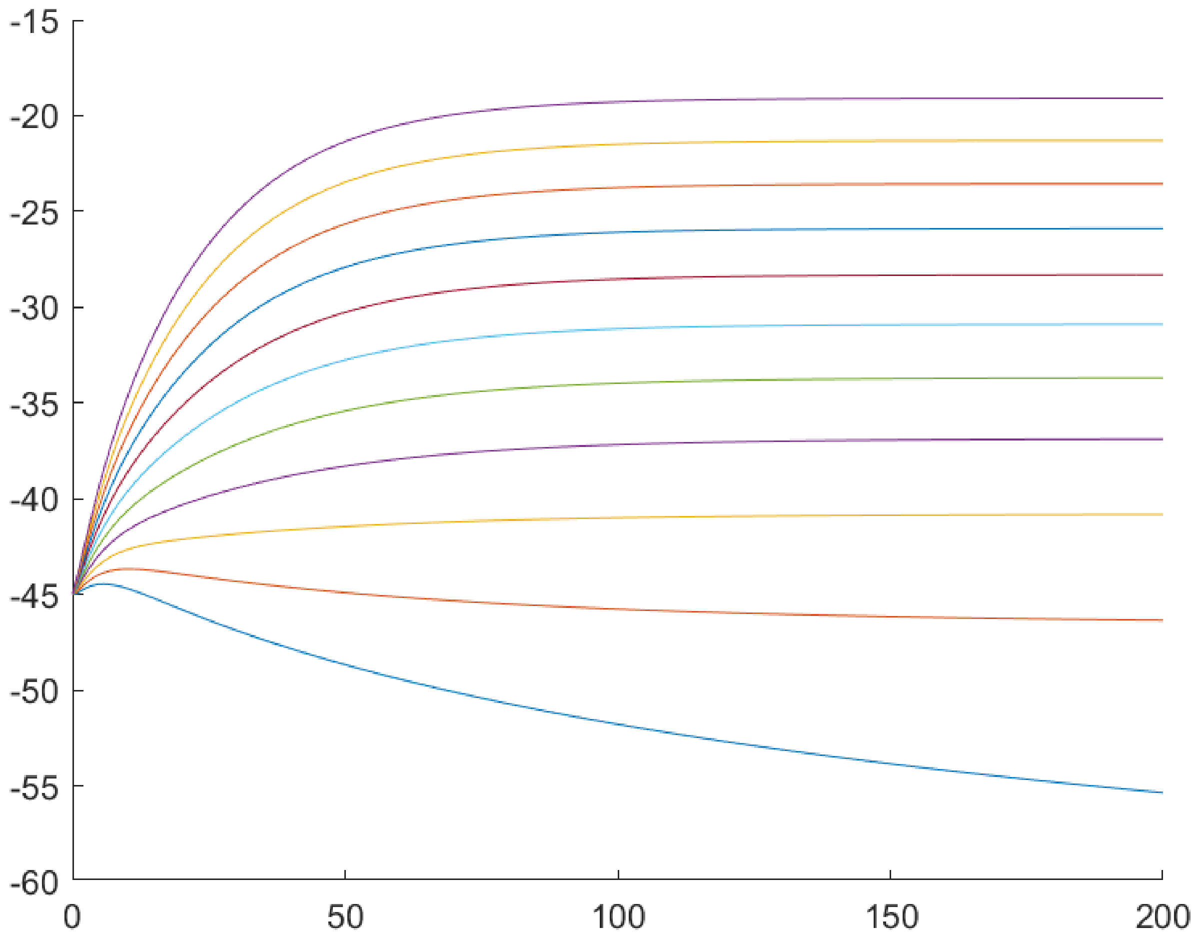
（1）

首先利用所给方程求解神经元的静息状态，令所有变化率为0，且令$I_e = 0$，求解非齐次方程，将方程存入`init_solve.m`。相应不带单位的数值为：$V = -64.9964, n = 0.3177, m = 0.0530, h = 0.5960$

初始时，给V一个偏离稳态的扰动，并设置合适的I_e值，即可得到，$(V = -44，I_e = 0.5)$



如果设置其他值会有可能得到发散的结果，例如当i较大时就会发散，如下图，曲线由下到上代表i逐渐增大



(2)

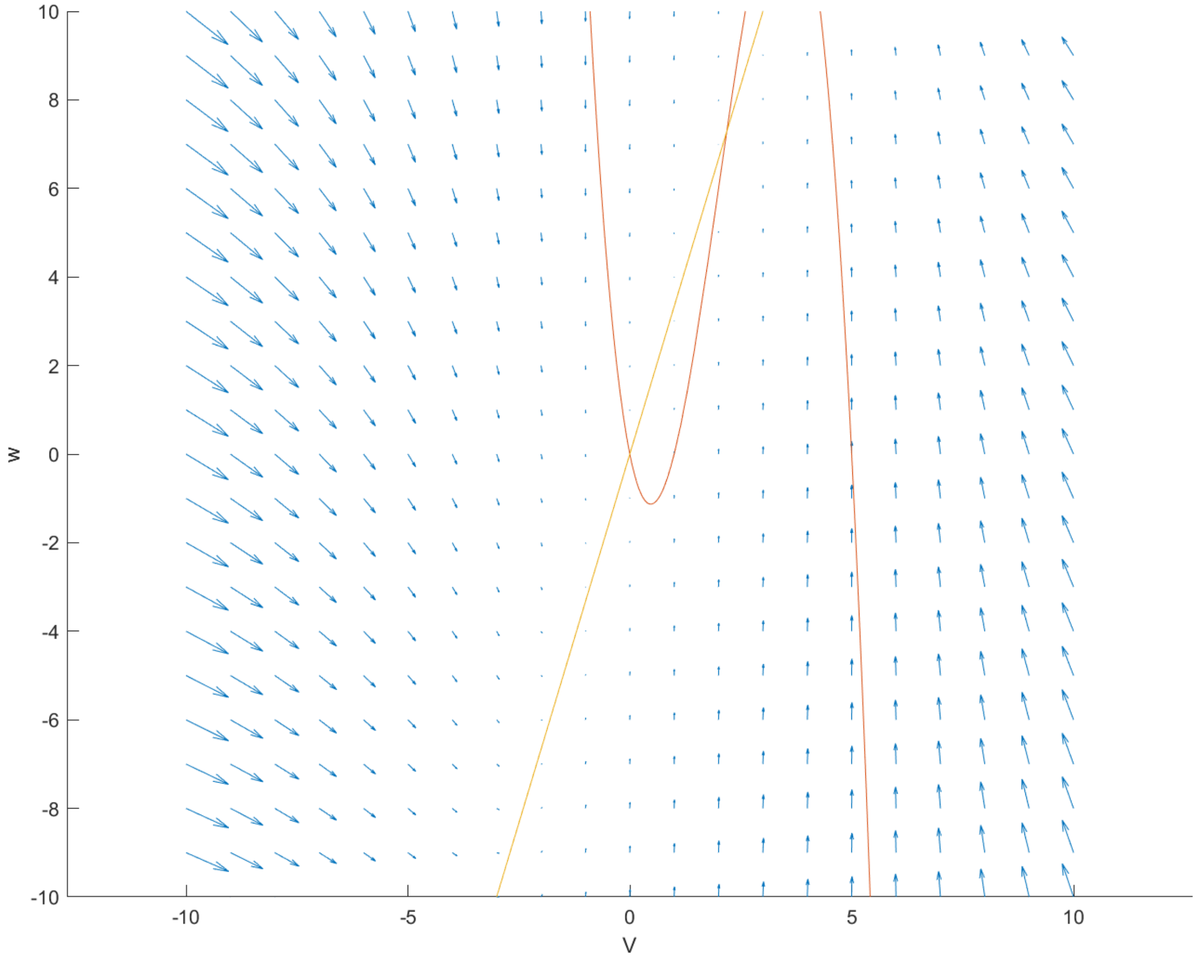
如果设置稳恒电流，V的图像与上图相同，不会有周期性的行为，若能设置方波电流，应该可以使得V有周期性行为（没赶在ddl前完成，之后补上orz）

prob2

(1)

令时间变化率为0，画图，易得nullclines，下图参数

```
a = 5;
b = 100;
c =  30;
I = 0;
```



(2)

如果（0，0）为不动点，I 为0。

$$\dot{V} = V(a-V)(V-1) - w = f(w,V)$$

$$\dot{w} = bV - cw = g(w,V)$$

$$f(w,V) \approx f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial w}\Big|_{w=0,V=0}(w-w_0) + \frac{\partial f}{\partial V}\Big|_{w=0,V=0}(V-V_0)$$

$$= -w - aV$$

$$g(w,V) \approx g(0,0) + \frac{\partial g}{\partial w}\Big|_{w=0,V=0}(w-w_0) + \frac{\partial g}{\partial V}\Big|_{w=0,V=0}(V-V_0)$$

$$= -cw + bV$$

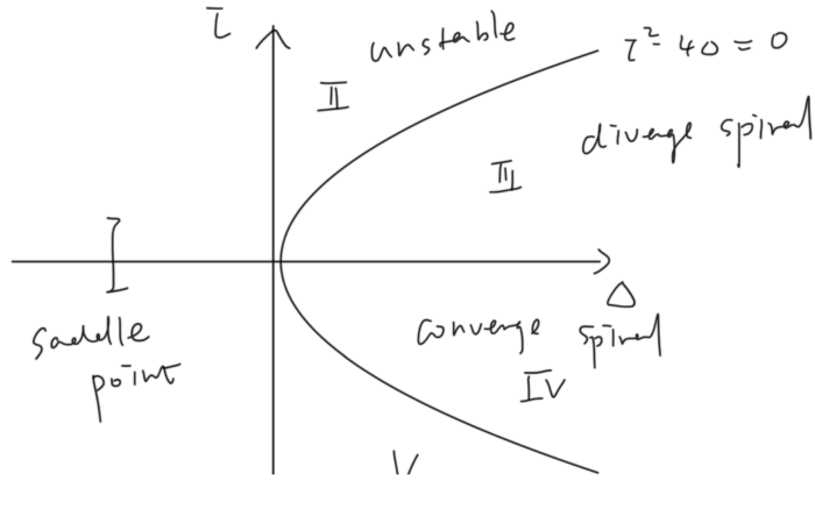
$$\vec{\xi} = (V, w)$$

$$\frac{d\vec{\xi}}{dt} = \vec{J}\cdot\vec{\xi} \qquad \vec{J} = \begin{pmatrix} -a & -1 \\ b & -c \end{pmatrix}$$

$$\vec{\xi} = \vec{C_1} e^{\lambda_1 t} + \vec{C_2} e^{\lambda_2 t}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -a-c = \tau \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = ac + b = \Delta \end{cases} \qquad b>0. \quad c \geq 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} = \frac{-a-c \pm \sqrt{(a-c)^2 - 4b}}{2}$$



V

stable.

I: $\Delta < 0 \Rightarrow ac + b < 0 \quad a < -\frac{b}{c}$

II: $a > -\frac{b}{c}$; $-a-c > 0$;

$(a-c)^2 - 4b > 0 \Rightarrow a > c+2\sqrt{b}$ 或 $a < c-2\sqrt{b}$

$a < -c < 0$ 故 舍 $a > c+2\sqrt{b}$

则 $\begin{cases} a < -c \\ a > -\frac{b}{c} \\ a < c-2\sqrt{b} \end{cases}$ 若需3式同时满足, b, c 需有一定关系.

III: $\begin{cases} a < -c \\ a > -\frac{b}{c} \\ c-2\sqrt{b} < a < c+2\sqrt{b} \end{cases}$

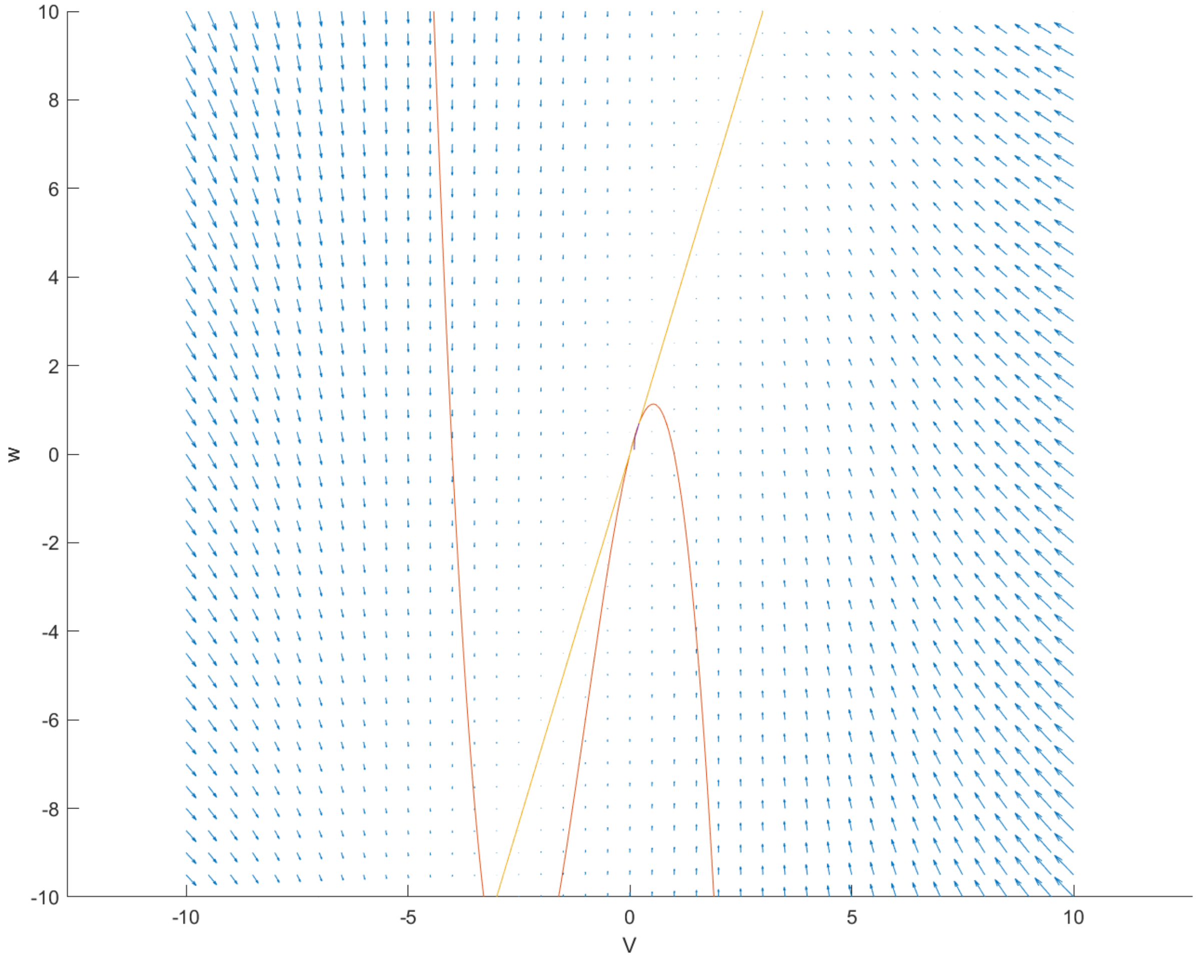
IV: $\begin{cases} a > -c \\ a > -\frac{b}{c} \\ c-2\sqrt{b} < a < c+2\sqrt{b} \end{cases}$

V $\begin{cases} a > -c \\ a > -\frac{b}{c} \\ a < c-2\sqrt{b} \text{ 或 } a > c+2\sqrt{b} \end{cases}$

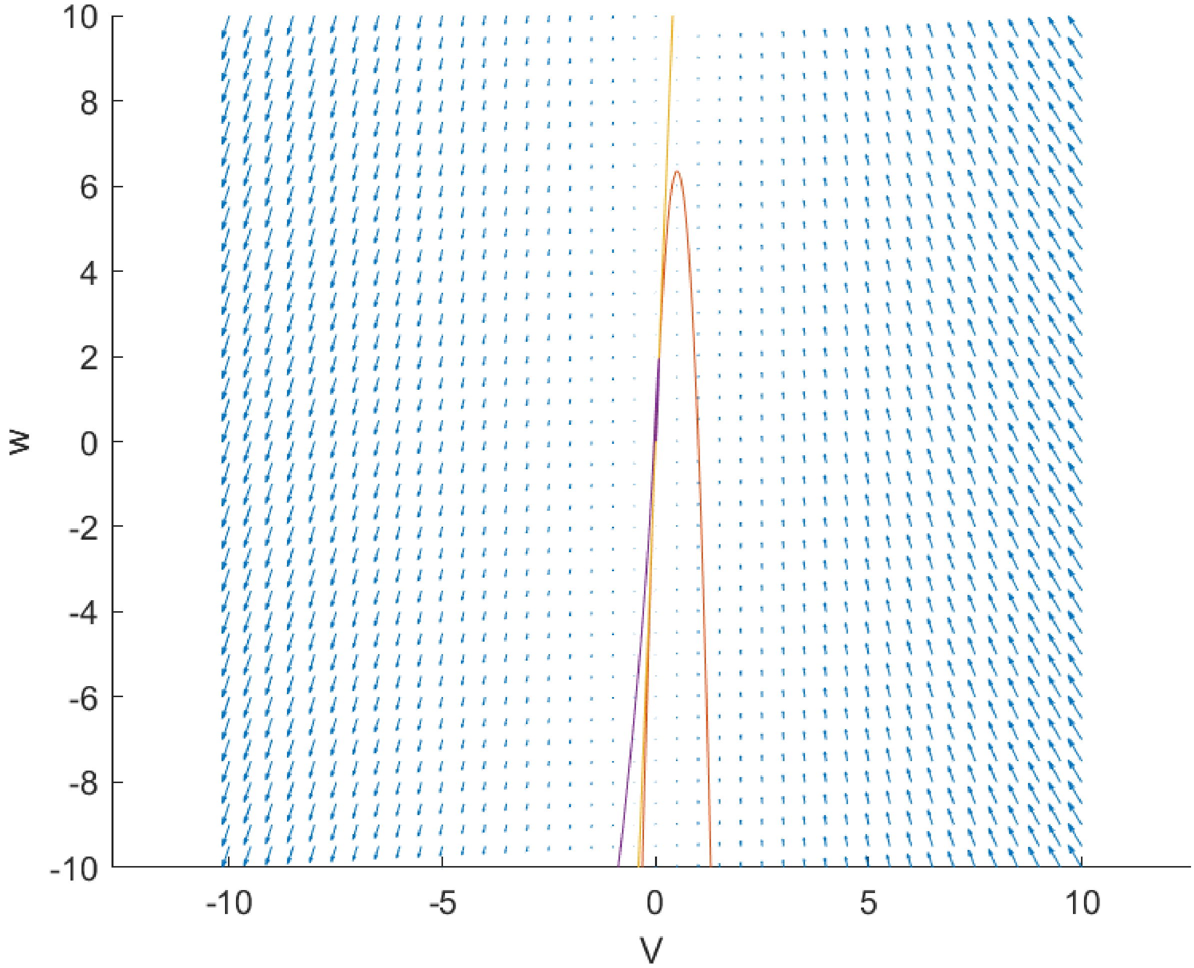
可分别取位于五个区域中的点画出其在V-w相图上的轨迹

```
I: a = -4,b = 100,c = 30;
II:a = -24.9,b = 500,c = 20;
III:a = -32,b = 1000,c = 30;
IV:a = 20,b = 100,c = 20;
V:a = -5;b = 100;c = 20
```

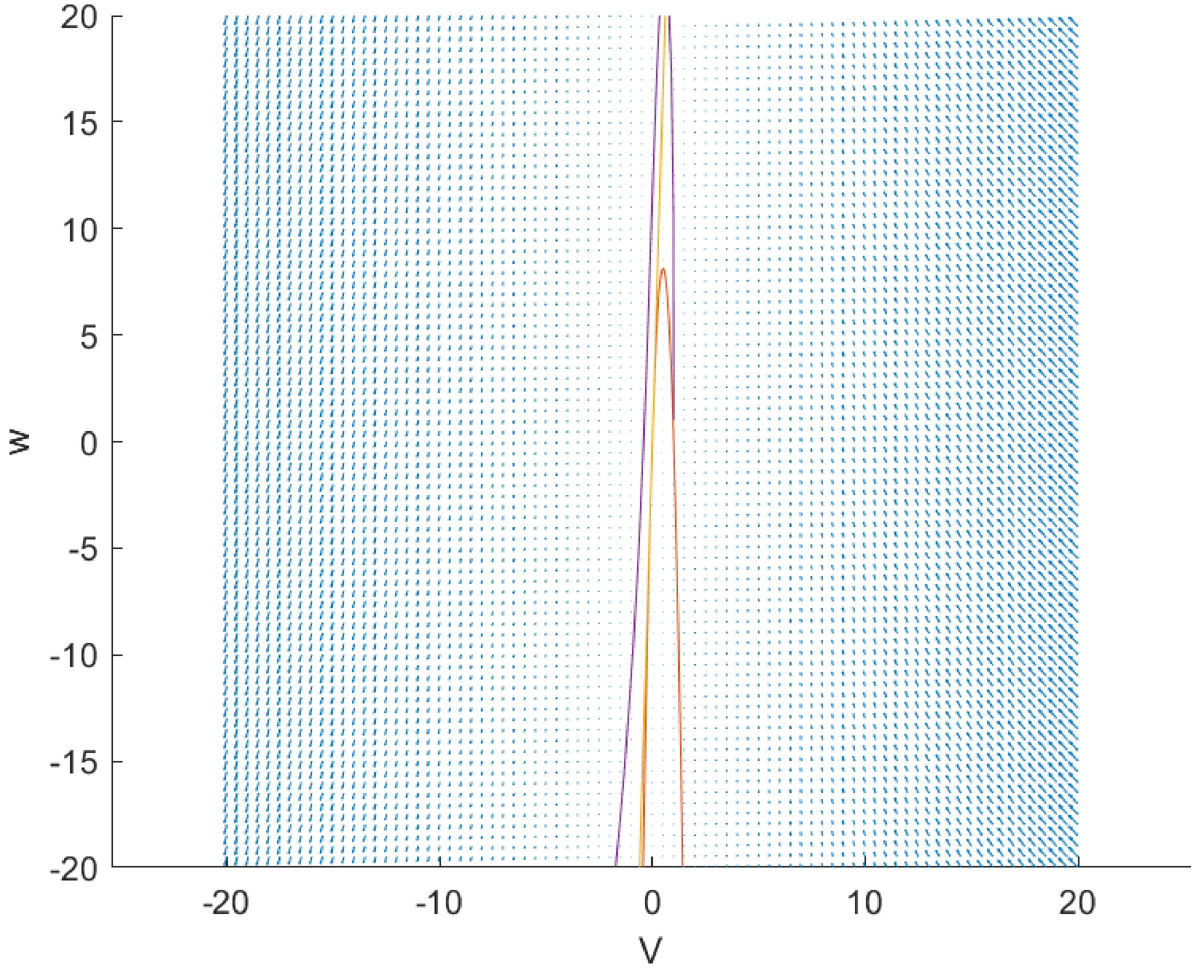
i. 选择 I:a = -4,b = 100,c = 30;作图后发现,一共有三个不动点，虽然(0,0)为不稳定不动点，但是另一个与它位置很近的点是稳定的，相点没过多久就落到另一个不动点(0.2078,0.6928)上了。如下图那条很短的紫色的线条



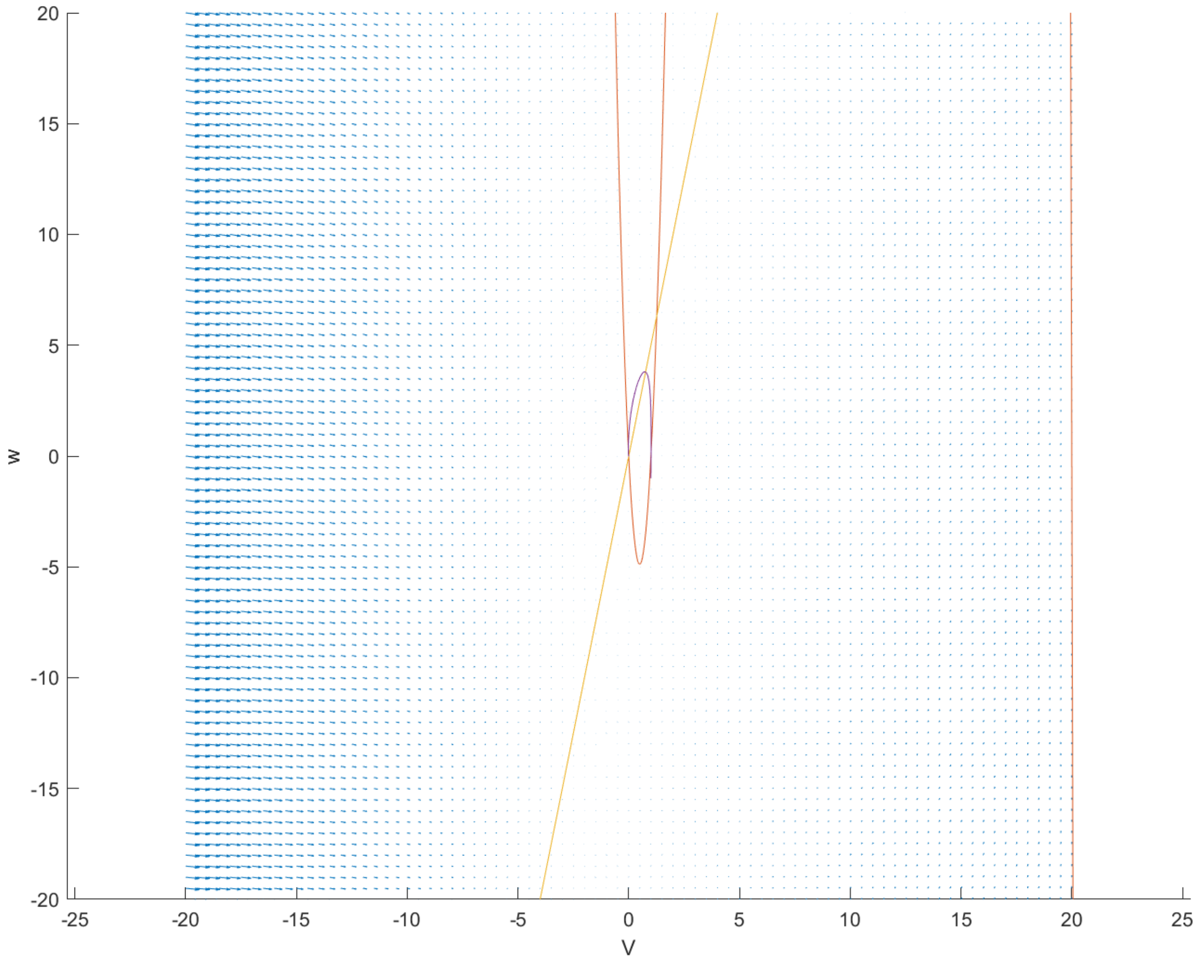
ii.



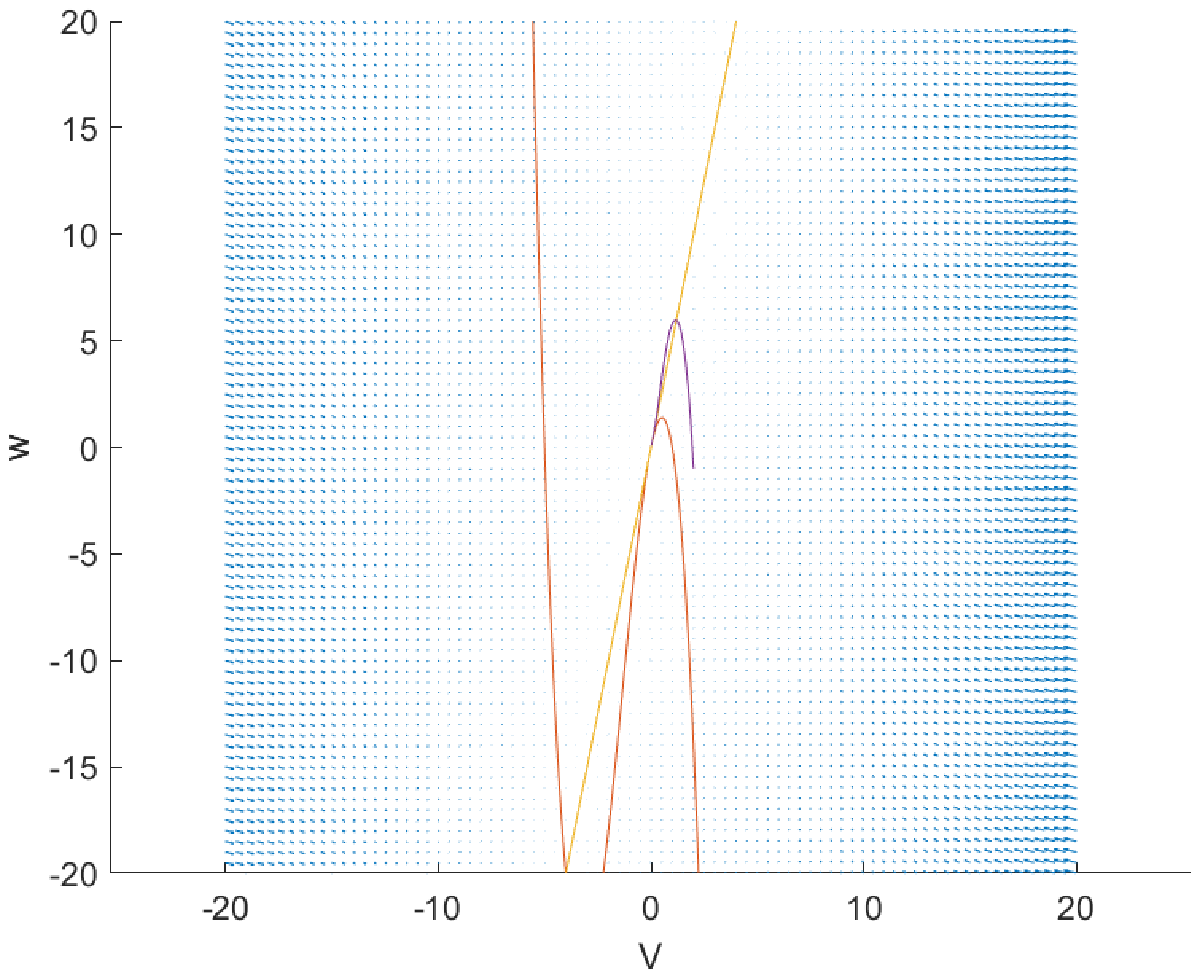
iii.


20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
w
-20
-10
0
10
20
V

iv.


20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
w
-25
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
25
V

v.



(3)

设方程的根为ω_0, V_0

$Jaccobi = \begin{pmatrix} -3V_0^2 + 2(a-1)V_0 - a & -1 \\ b & -c \end{pmatrix}$

若有两个稳定的不动点，则要求$\tau < 0, \Delta > 0$

即$-3V_0^2 + 2(a-1)V_0 - a - c < 0$
$\quad c(3V_0^2 - 2(a-1)V_0 + a) + b > 0$

方程有两个根满足该条件即可

prob3

(1)

（0，0）始终为不动点

如果有其余的不动点存在，说明方程组$\begin{cases} -x + \tanh(Jx - Ky) = 0 \\ -y + Gx = 0 \end{cases}$有解，即$x = \tanh(J - KG)x$有解

记$\alpha = J - KG$，有$\alpha = \dfrac{\tanh^{-1} x}{x}$,容易求得其最小值为1，所以当$J - KG > 1$时有3个不动点。

不动点的x坐标为交点的横坐标x，$y = Gx$。

eg.$J - KG = 1.3$时，解得$x \approx \pm 0.752$，还有$x = 0$,

$J-KG<1$或$J-KG=1$时仅有一个不动点

(2)

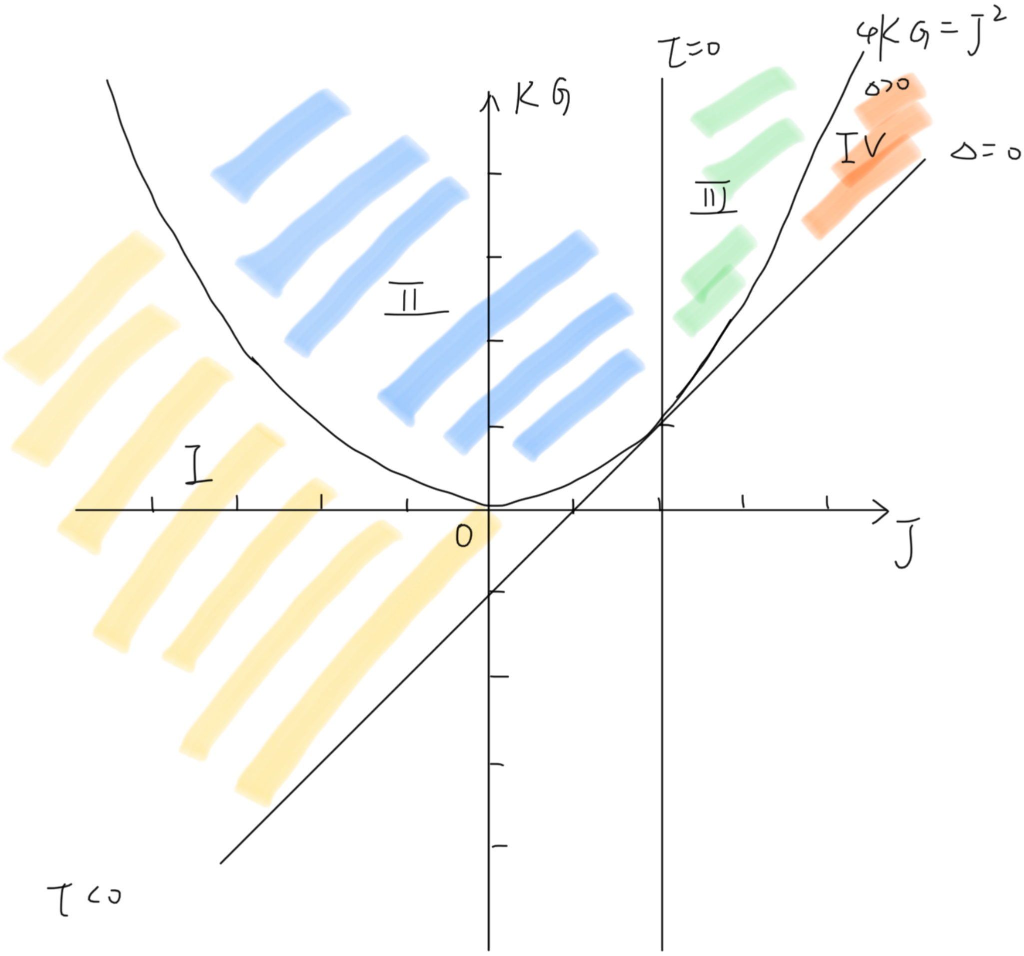
对于此题

$$f(x)=-x+\tanh(Jx-Ky)=0$$
$$g(x)=-y+Gx=0$$

用上课所用方法展开，得到行列式

$$Jaccobi=\begin{pmatrix}-1+J & -K\\ G & -1\end{pmatrix}$$

$$\tau=J-2$$
$$\Delta=1-J+GK$$
$$\tau^2-4\Delta=J^2-4GK$$



$\Delta>0$ i.e. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$

I: $J^2 - 4KG > 0$. $\tau < 0$. stable

II: $J^2 - 4KG < 0$. $\tau < 0$ spirals back

III: $J^2 - 4KG < 0$. $\tau > 0$ spiral away

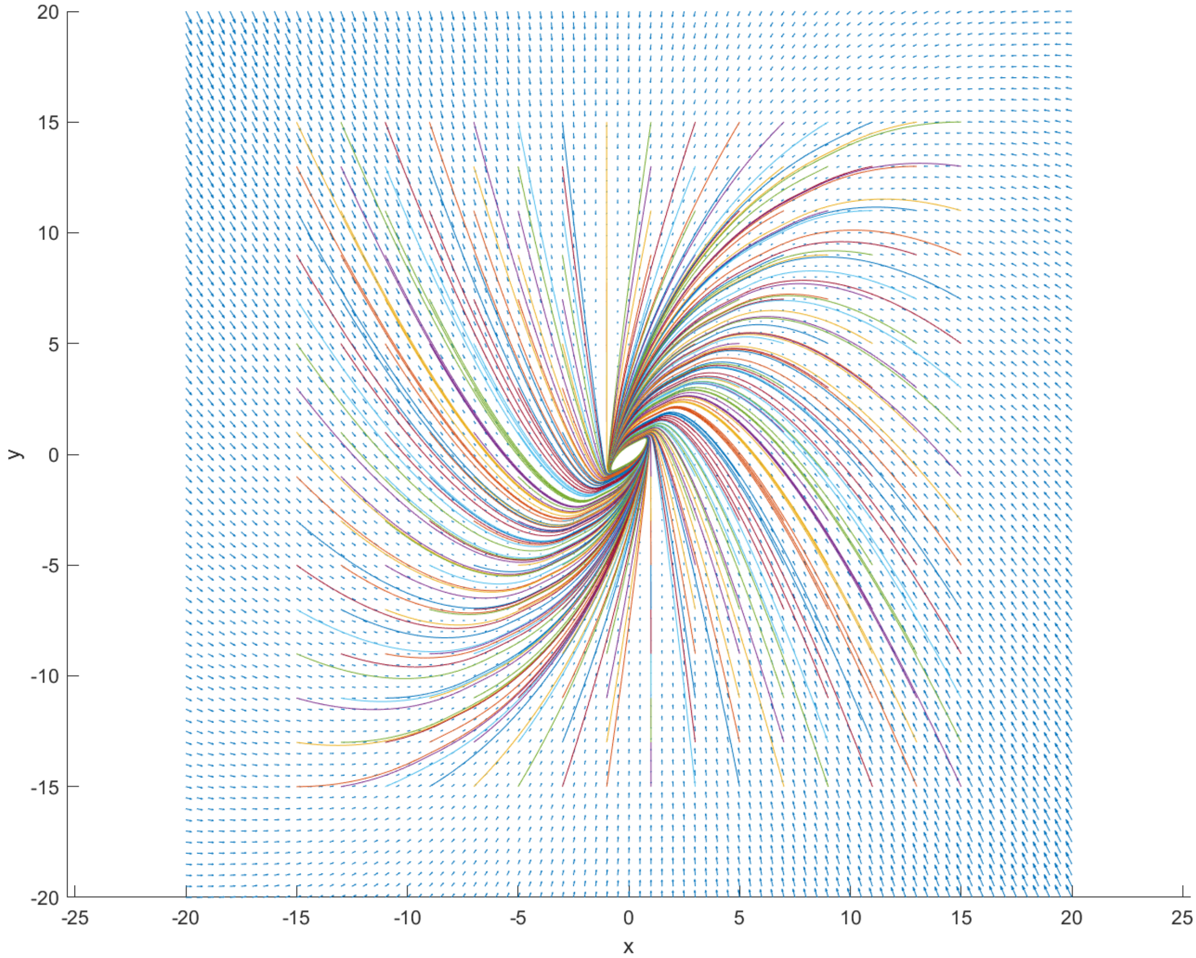
IV: $J^2 - 4KG > 0$ $\tau > 0$ unstable

未涂色的另一侧也为不稳定点，即不会返回（0，0）点

(3)

仅有一个不动点时，$\Delta = 1 - J + GK \geq 0$

取$J = 3, K = 2, G = 1$,选择$[-15, 15] * [-15, 15]$的区域为R，取格子长度为2的格点分别为x，y的初始位置，考察其随时间的演化，用`prob3`文件夹中的`prob3_3.m`画图，可以看到，无论初始位置在哪里，最终都趋向于（0，0）点附近的一个椭圆形状的极限环(用了步进的方法，没有解微分方程orz)



(4)

由第二问的结果可以考察出只有一个不动点时的情形，以下手写部分考察除(0,0)点外其他两个不动点的行为

$$\text{Jacobi} = \begin{pmatrix} -1 + J/\cosh^2(Jx_0 - Ky_0) & -K/\cosh^2(Jx_0 - Ky_0) \\ G & -1 \end{pmatrix}$$

$y_0 = G x_0$ $\quad \tanh(J - KG)x_0 = x_0$

$$\cosh^2(J - KG)x_0 = \frac{1}{1 - x_0^2}$$

由于 $\quad x_0 \in (-1, 1) \quad \therefore \frac{1}{1 - x_0^2} > 1$

$T_2 = J(1 - x_0^2) - 2$

$\Delta_2 = 1 - J(1 - x_0^2) + KG(1 - x_0^2)$

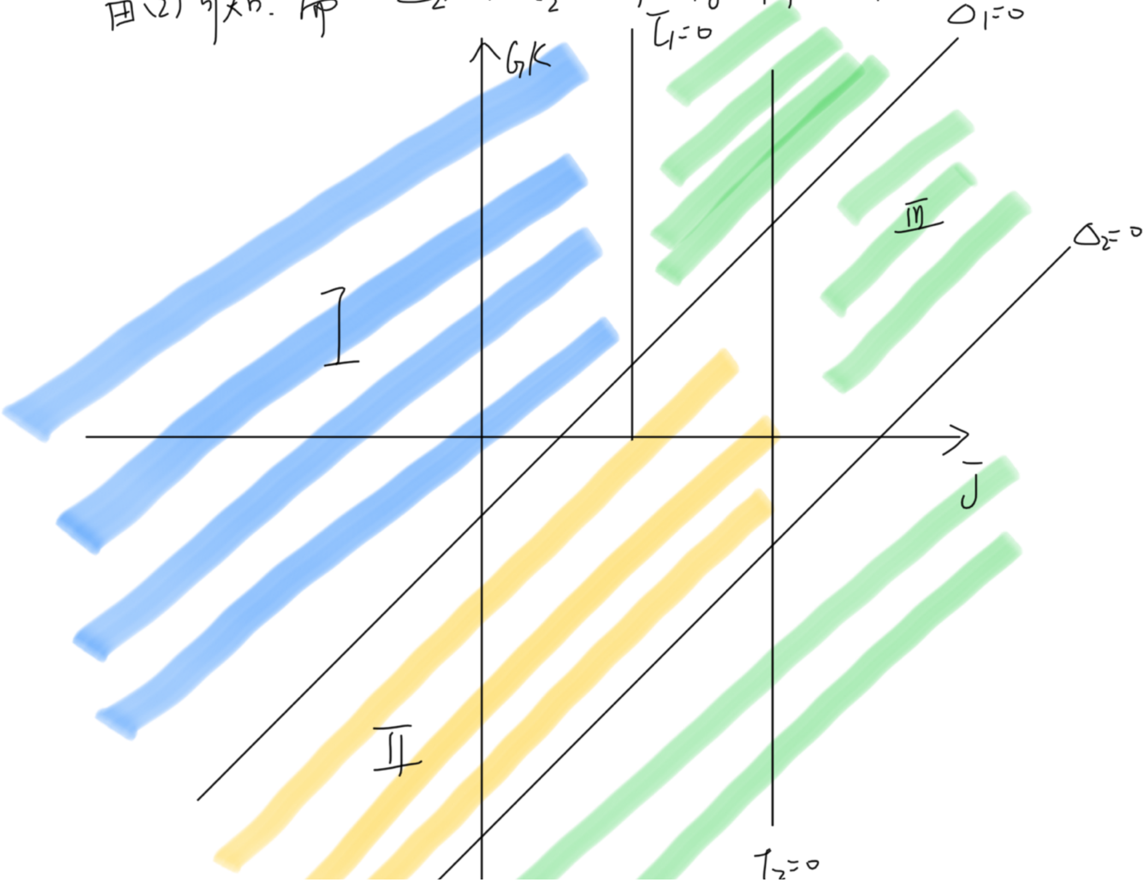
对于 $T_2 = 0$，即 $J = \frac{2}{1 - x_0^2} > 2$

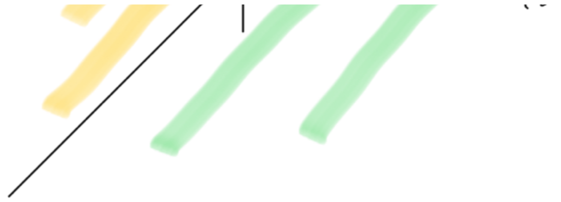
$\Delta_2 = 0$ 即 $KG = J - \frac{1}{1 - x_0^2}$，但与 x_0^2 相关

又，由 $\tanh(J - GK)x = x$ 得到 fix 两根关于原点对称，x_0 同

考察一点即可，即两点有相同的 stable 性质

由(2)可知，需 $\Delta_2 > 0$，$T_2 < 0$ 才能得到稳定不动点





Ⅰ: 1 stable point

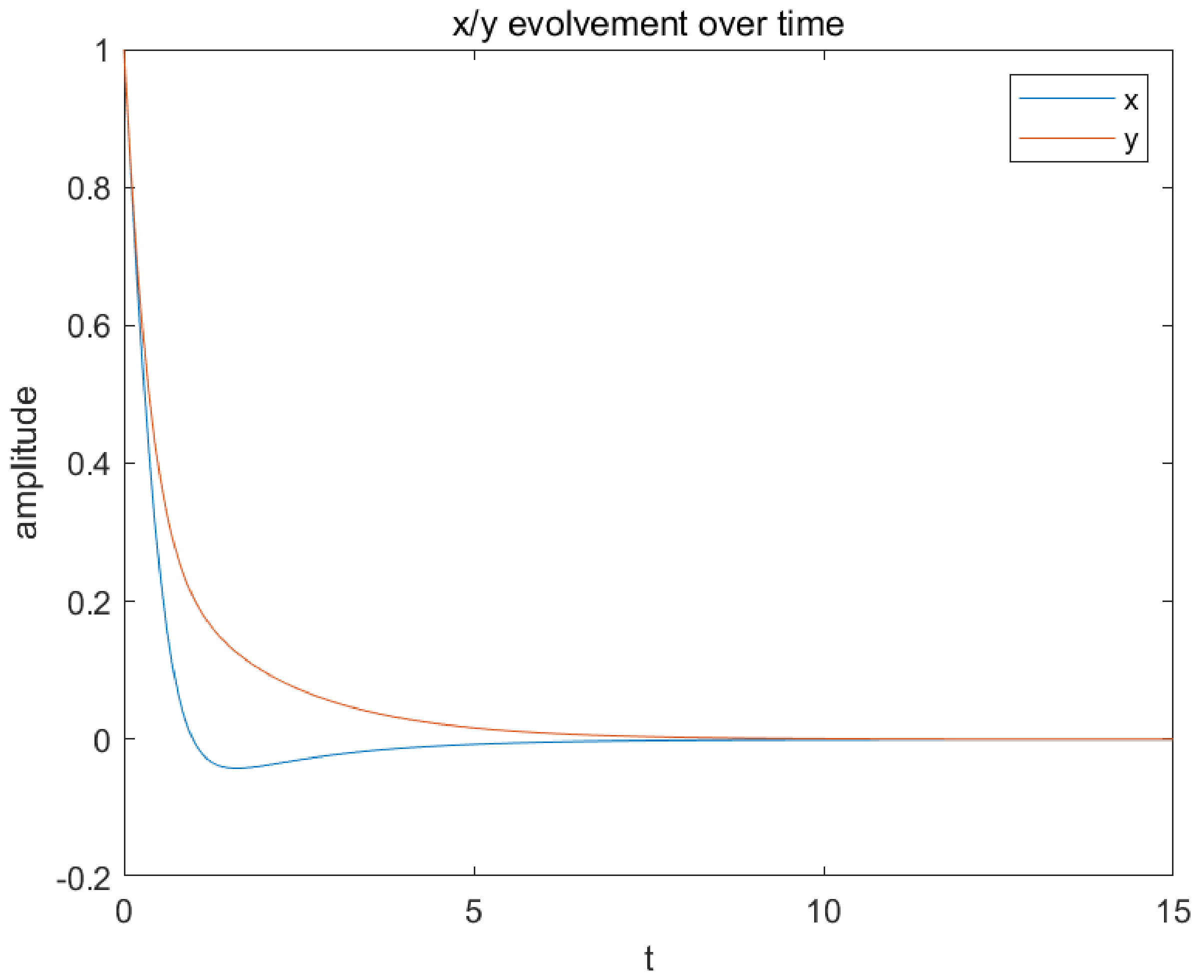
Ⅱ: 2 stable point

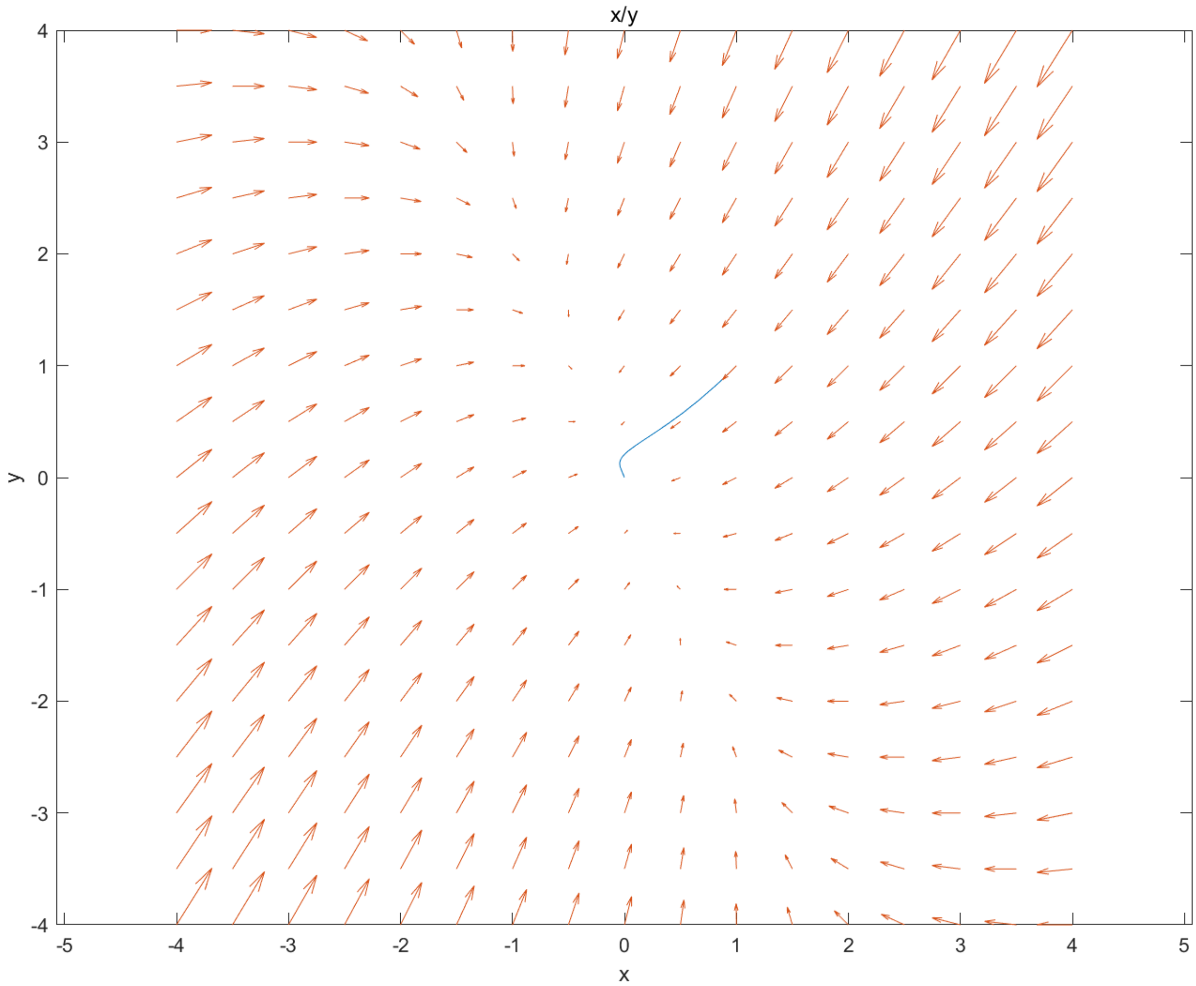
Ⅲ: 其他位置. 由环域定理可知, 必有极限环存在

(5)

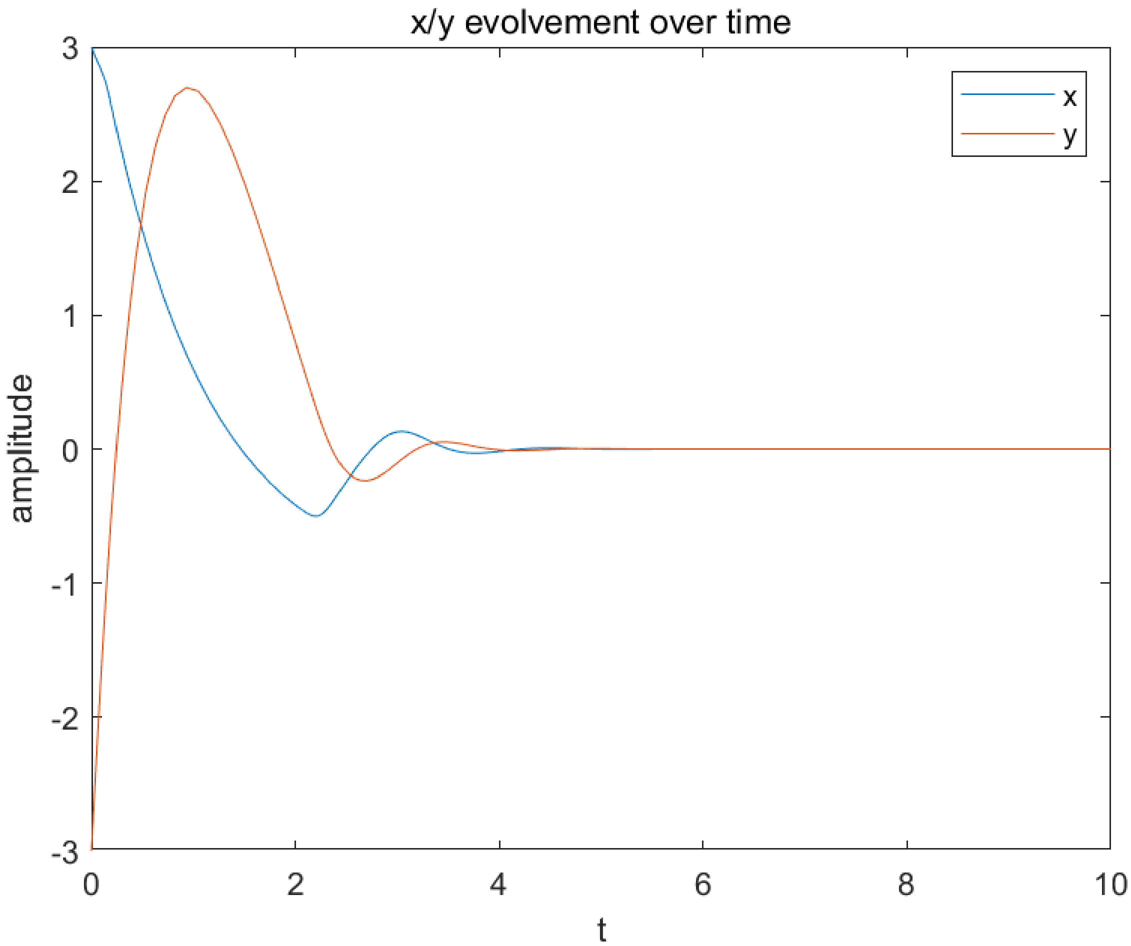
利用代码`prob3_5.m`进行模拟

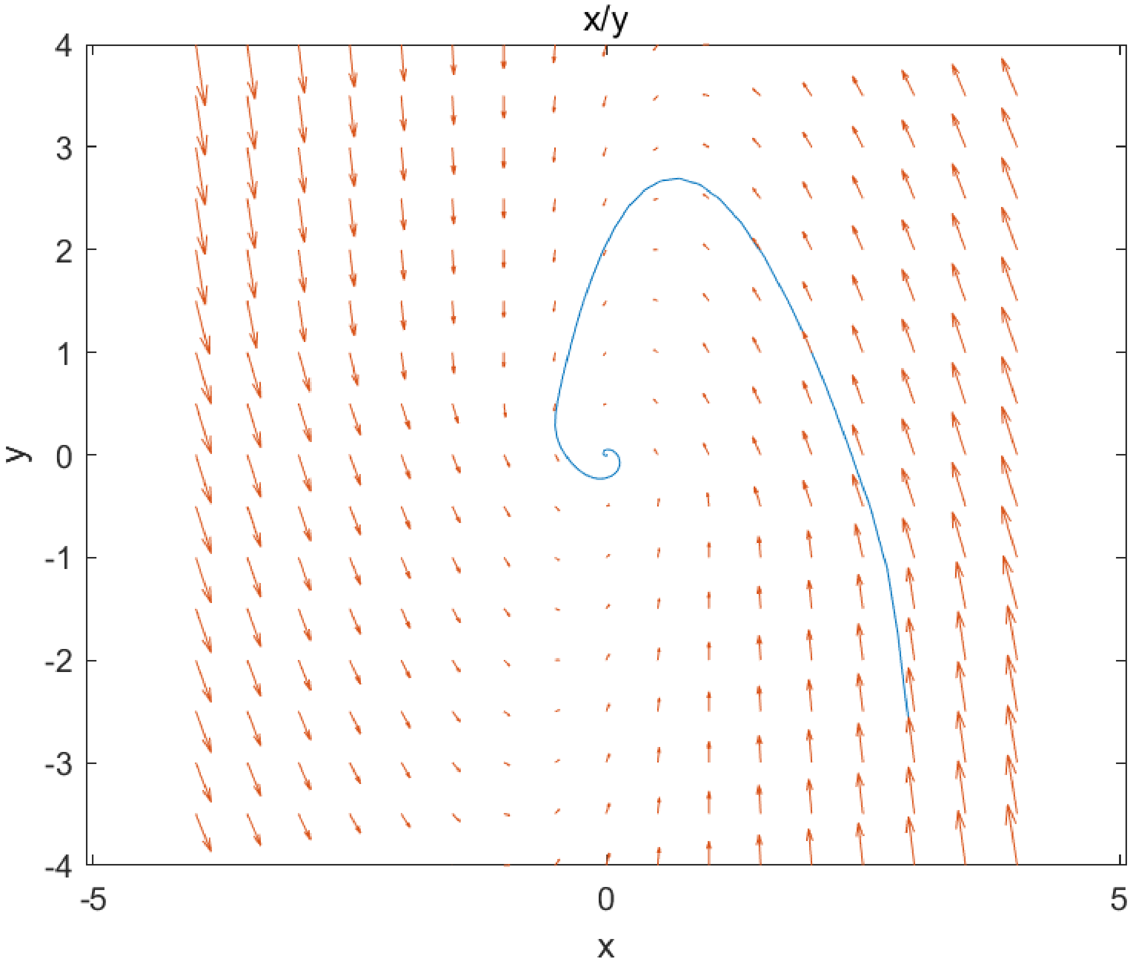
1.





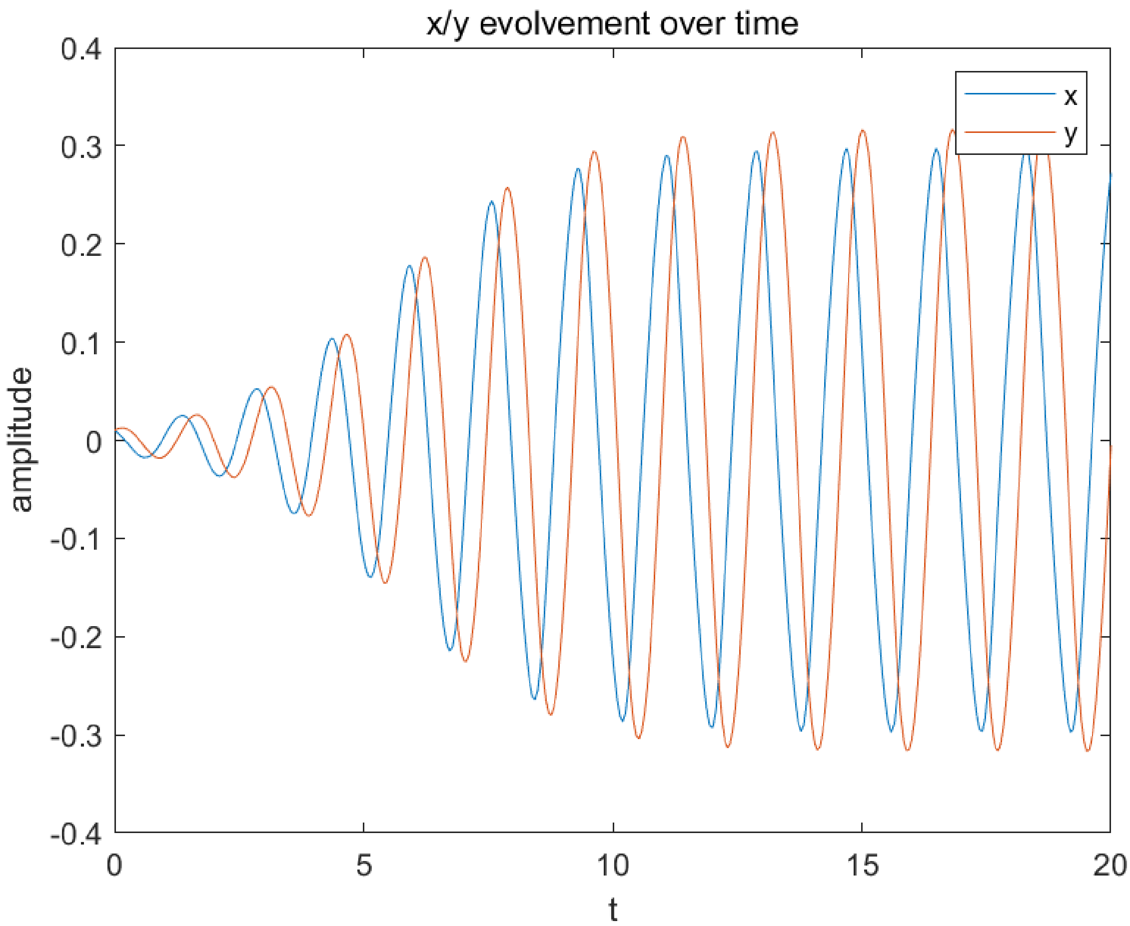
2.



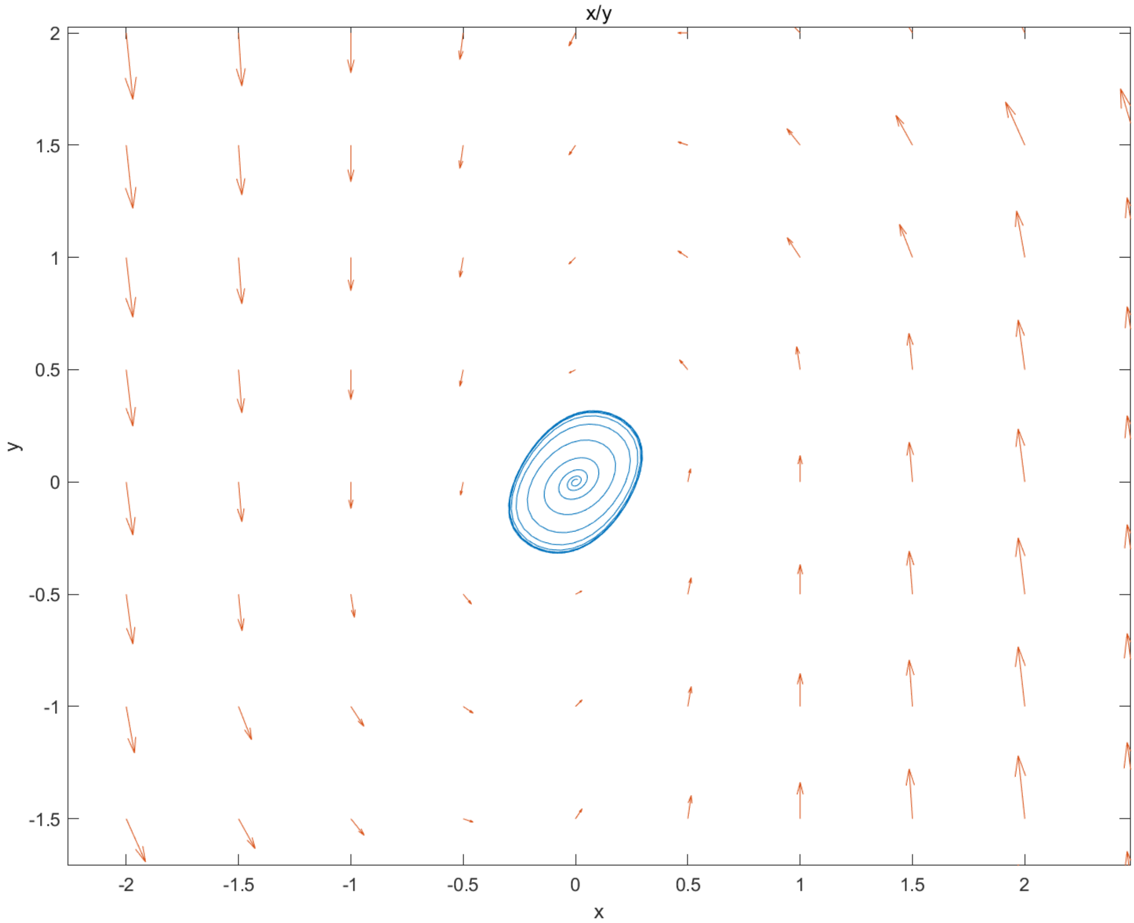


x/y
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
y
-5
0
5
x

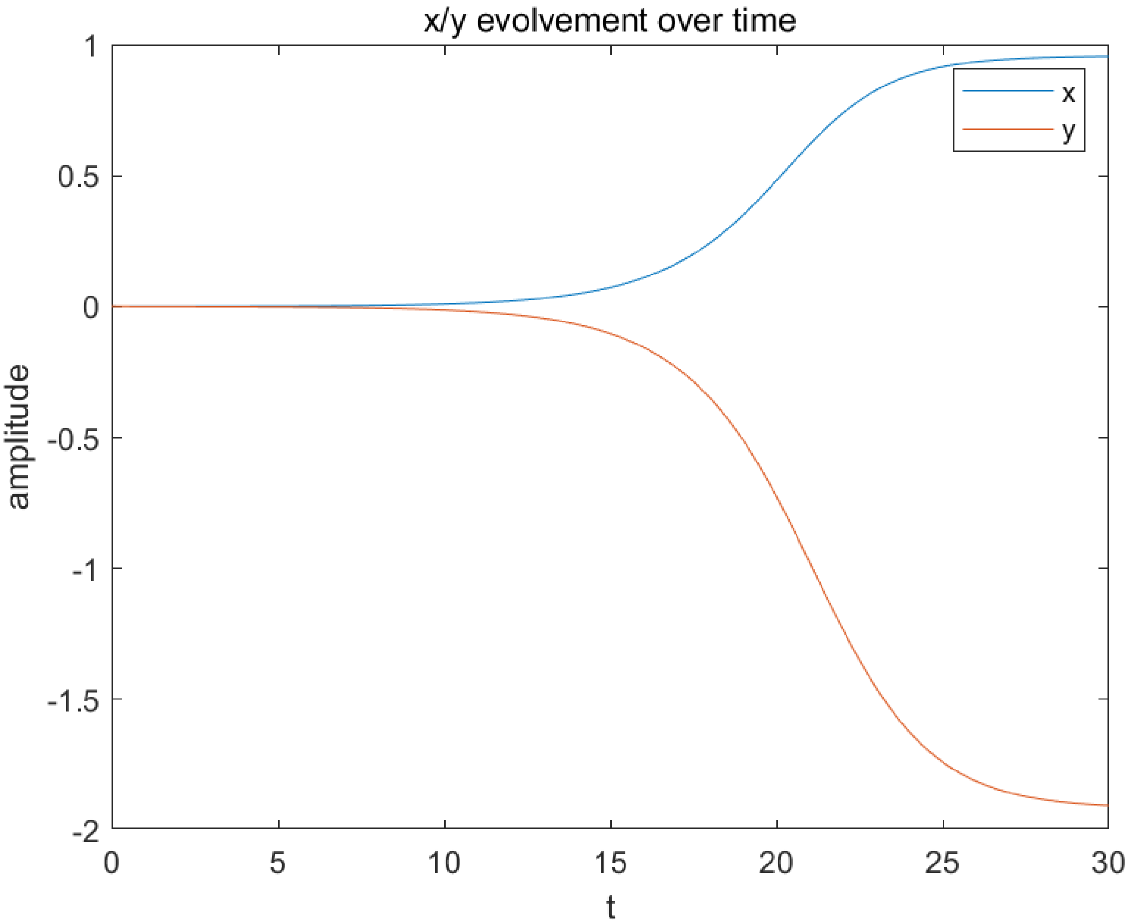
3.

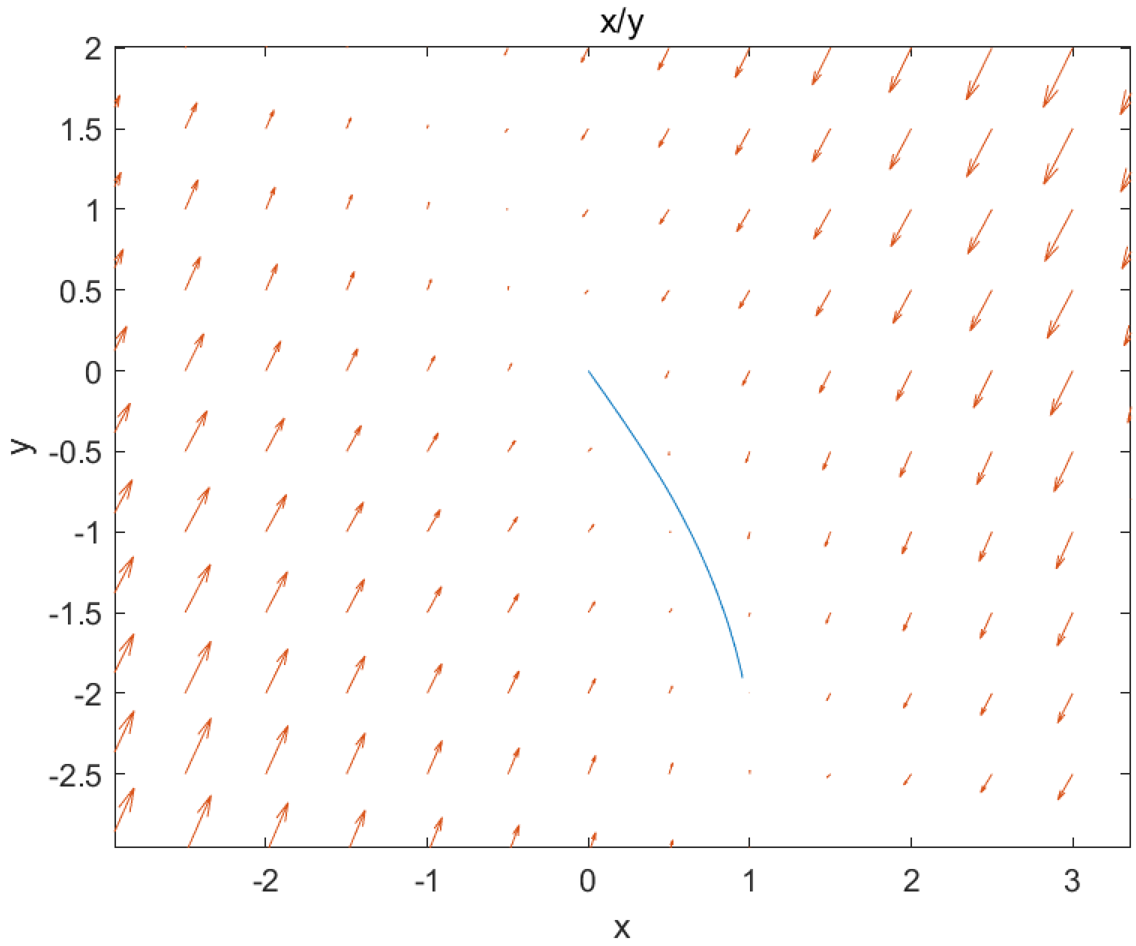


x/y evolvement over time
x
y
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
amplitude
0
5
10
15
20
t


x/y
y
x
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

4.


x/y evolvement over time
amplitude
t
x
y
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
5
10
15
20
25
30



可见最后一张图，轨迹从（0，0）附近出发，没有恢复原状态，但由于有另一个不动点，所以最后落到了另一个不动点上