Introduction à la théorie des jeux

Jeux à deux joueurs et à somme nulle

Tristan Garrec

4 avril 2024

ENSTA Paris

Supports de cours

Retrouvez au fur à mesure des cours l'ensemble des supports (transparents du cours magistral, énoncés et corrigés de travaux dirigés) sur la page du cours.

Jeux à deux joueurs et à somme nulle

Jeux à deux joueurs et à somme nulle

Dans un jeu à deux joueurs et à somme nulle les intérêts des deux joueurs sont diamétralement opposés.

C'est un jeu sous forme normale à deux joueurs dans lequel $g_1 = -g_2$.

Formellement, c'est un triplet $\Gamma = (S, T, g)$ où

- S est l'ensemble de stratégies (ou d'actions) du joueur 1 (J1) ;
- T est l'ensemble de stratégies du joueur 2 (J2) ;
- $g : S \times T \to \mathbb{R}$ est la fonction de paiement de J2 à J1.

J1 et J2 choisissent simultanément des actions $s \in S$ et $t \in T$. J2 paie alors la somme $g(s, t)$ à J1. J1 cherche donc à maximiser $g(s, t)$ et J2 à minimiser $g(s, t)$.

Exemple (Tir de penalty, ou Matching Pennies)
Lorsque S et T sont finis, on parle de jeu fini, ou de jeu matriciel que l'on représente sous la forme d'une matrice.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

J1 choisit une ligne et J2 une colonne. Ici, si les joueurs choisissent la même action c'est J1 qui gagne, sinon c'est J2.

Questions :

- Comment doivent jouer les joueurs ?
- Quelle est la valeur du jeu, c'est-à-dire le paiement si les joueurs jouent bien ?

Valeur en stratégies pures

Définition

Le sup inf *du jeu* Γ*, noté* $\underline{v}(\Gamma)$ *(ou simplement* $\underline{v}$*) est la quantité*

$$\underline{v} = \sup_{s \in S} \inf_{t \in T} g(s, t)$$

Lorsque le sup *et l'*inf *sont atteints on parle également de* max min*.*

Proposition

$\underline{v}$ *est caractérisé par*

$$\begin{aligned} \textit{J1 garantit } \underline{v} \textit{ à } \varepsilon \textit{ près } &: \forall \varepsilon > 0\ \exists s \in S\ \forall t \in T \quad g(s,t) \geq \underline{v} - \varepsilon \\ \textit{J2 défend } \underline{v} \textit{ à } \varepsilon \textit{ près } &: \forall \varepsilon > 0\ \forall s \in S\ \exists t \in T \quad g(s,t) \leq \underline{v} + \varepsilon \end{aligned}$$

Interprétation : $\underline{v}$ est la valeur du jeu dans lequel J1 choisit son action s et l'annonce à J2, qui choisit son action en fonction de s.

Il en va de même pour l'inf sup, noté $\overline{v}$.

Valeur en stratégies pures

Exemple
Reprenons l'exemple du tir de penalty :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $\underline{v} = -1$ et $\overline{v} = 1$.

Proposition

$$\underline{v} \leq \overline{v}.$$

Démonstration.

$$\forall (s,t) \in S \times T \; g(s,t) \leq \sup_{s \in S} g(s,t)$$

$$\forall s \in S \; \inf_{t \in T} g(s,t) \leq \inf_{t \in T} \sup_{s \in S} g(s,t)$$

Valeur en stratégies pures

La quantité $\overline{v} - \underline{v}$ est le saut de dualité.

Définition
Si $\underline{v} = \overline{v}$ le jeu a une valeur (en stratégies pures), égale à $\underline{v} = \overline{v}$ et notée v.

Interprétation : v est le paiement de J2 à J1 si les joueurs jouent bien.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$v = 1$.

Stratégies optimales

Définition
Supposons que le jeu a une valeur v. Soit $\varepsilon > 0$.

Une stratégie $s \in S$ est ε-optimale pour J1 si elle lui garantit $v - \varepsilon$, i.e.,

$$\forall t \in T \; g(s,t) \geq v - \varepsilon.$$

Une stratégie $t \in T$ est ε-optimale pour J2 si elle lui garantit $v + \varepsilon$, i.e.,

$$\forall s \in S \; g(s,t) \leq v + \varepsilon.$$

Les stratégies 0-optimale sont simplement dites optimales.

Point-selle et équilibre de Nash

Définition
Le couple d'actions (s^*, t^*) est un point-selle si

$$\forall (s,t) \in S \times T \; g(s, t^*) \leq g(s^*, t^*) \leq g(s^*, t).$$

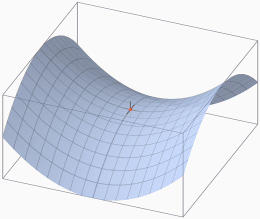

Figure 1: Un point-selle

En un point-selle aucun joueur n'a de déviation profitable, c'est un équilibre de Nash.

Point-selle

Proposition
S'il existe un point-selle (ou équilibre de Nash) (s^*, t^*), *alors le jeu a une valeur* $g(s^*, t^*)$. *De plus* s^* *et* t^* *sont des stratégies optimales.*

Réciproquement,

Si un jeu a une valeur v *et des stratégies optimales* (s^*, t^*) *alors* (s^*, t^*) *est un point-selle (ou équilibre de Nash) et* $v = g(s^*, t^*)$.

Ces propriétés relient une propriété jointe (point-selle ou équilibre de Nash) à des propriétés unilatérales (stratégies optimales).

Remarque

Attention : une stratégie optimale n'est pas nécessairement le meilleur choix contre toute stratégie de l'adversaire.

Propriétés de l'opérateur valeur

Proposition
Soient $c \in \mathbb{R}$, $\Gamma = (S, T, g)$, $\Gamma' = (S, T, g')$ *et* $\Gamma'' = (S, T, g + c)$. *Alors*

- *Monotonie :* $g \leq g' \Rightarrow \underline{v}(\Gamma) \leq \underline{v}(\Gamma')$ *;*
- *Translation des constantes :* $\underline{v}(\Gamma'') = \underline{v}(\Gamma) + c$

Corollaire
Non dilatation : pour tout (g, g'),

$$|\underline{v}(\Gamma) - \underline{v}(\Gamma')| \leq \|g - g'\|_\infty$$

Démonstration.
On a $g \leq g' + \|g - g'\|_\infty$ et on applique l'opérateur. □

On a les mêmes propriétés pour $\overline{v}$, (et donc pour v si elle existe).

Stratégies dominées

Définition
La stratégie $s' \in S$ est strictement dominée par $s \in S$ si
$\forall t \in T\ g(s', t) < g(s, t)$.

La stratégie $s' \in S$ est faiblement dominée par $s \in S$ si
$\forall t \in T\ g(s', t) \leq g(s, t)$ *et* $\exists t \in T\ g(s', t) < g(s, t)$.

Proposition

- *Soit* $\Gamma = (S, T, g)$, *soit* $s' \in S$ *une stratégie faiblement dominée et soit* $\Gamma' = (S \setminus \{s'\}, T, g)$. *Alors* $\underline{v}(\Gamma) = \underline{v}(\Gamma')$, *et de même pour* $\overline{v}$.
- *De plus si* s' *est strictement dominée et que le* max min *existe (e.g. le jeu est fini) alors* s' *n'est pas optimale dans* Γ.

Démonstration.

- Considérer le jeu ou l'on remplace s' par s et appliquer la monotonie.
- On a $\exists t \in T\ g(s, t) \leq \underline{v}$. Donc $g(s', t) < \underline{v}$, s' n'est pas optimale.

$\square$

Éliminations successives de stratégies dominées

La propriété précédente permet, quand on cherche la valeur d'un jeu, d'éliminer les stratégies faiblement dominées. Si l'on cherche également les stratégies optimales, on ne peut éliminer que les stratégies strictement dominées.

Exemple
Par éliminations successives des stratégies strictement dominées, donner la valeur et les stratégies optimales du jeu suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 9 \\ 6 & 1 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 6 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 9 \\ 7 & 5 & 6 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 6 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$$

Extension mixte

On suppose S et T finis. Reprenons à nouveau l'exemple du tir de penalty :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce jeu n'a pas de valeur (en stratégies pures). Pour pallier cela, on va autoriser les joueurs à choisir leur action aléatoirement. Mathématiquement, ceci permet de convexifier les ensembles d'actions.

On note $\Delta(A)$ l'ensemble des probabilités sur A (ou le simplexe sur A) :

$$\Delta(A) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^A \mid \forall i \in A \; x_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i \in A} x_i = 1 \right\}.$$

Un élément de $\Delta(S)$ ou $\Delta(T)$ est appelé stratégie mixte.

Extension mixte

L'extension mixte du jeu fini $\Gamma = (S, T, g)$ est le jeu $\Gamma^\Delta = (\Delta(S), \Delta(T), g)$ où g est étendue multilinéairement :

$$g(\sigma, \tau) = \mathbb{E}_{\sigma,\tau}[g] = \sum_{(s,t)\in S\times T} \sigma_s \tau_t g(s, t).$$

Avec la représentation matricielle $A = (g(s, t))_{(s,t)\in S\times T}$ on écrit également le paiement sous forme bilinéaire

$$g(\sigma, \tau) = \sigma A \tau.$$

Le théorème du minmax

Théorème (du minmax, von Neumann (1928))
Soit A une matrice réelle $S \times T$. Il existe $(\sigma^*, \tau^*, v) \in \Delta(S) \times \Delta(T) \times \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (\sigma, \tau) \in \Delta(S) \times \Delta(T) \quad \sigma A \tau^* \leq v \leq \sigma^* A \tau.$$

L'extension mixte du jeu matriciel a une valeur et les joueurs ont des stratégies optimales.

Le réel v est unique, c'est la valeur (en stratégies mixtes) de la matrice A :

$$v = \max_{\sigma \in \Delta(S)} \min_{\tau \in \Delta(T)} \sigma A \tau = \min_{\tau \in \Delta(T)} \max_{\sigma \in \Delta(S)} \sigma A \tau.$$

C'est un cas particulier du théorème de Nash.

Valeur en stratégie mixte

Proposition

$$\underline{v}(\Gamma) \leq v(\Gamma^\Delta) \leq \overline{v}(\Gamma).$$

Lemme

$$\min_{\tau \in \Delta(T)} \max_{\sigma \in \Delta(S)} g(\sigma, \tau) = \min_{\tau \in \Delta(T)} \max_{s \in S} g(s, \tau),$$

Le joueur qui joue en deuxième peut jouer en stratégies pures.

Démonstration.
Montrons $\forall \tau \in \Delta(T)\ \ \max_{s \in S} g(s, \tau) = \max_{\sigma \in \Delta(S)} g(\sigma, \tau)$. $S \subset \Delta(S)$ implique $\max_{s \in S} g(s, \tau) \leq \max_{\sigma \in \Delta(S)} g(\sigma, \tau)$. Et $\forall \sigma \in \Delta(S)\ g(\sigma, \tau) = \sum_{(s,t)} \sigma(s)\tau(t)g(s, t) = \sum_s \sigma(s)g(s, \tau) \leq \sum_s \sigma(s) \max_s g(s, \tau) = \max_s g(s, \tau)$. □

Propriétés des stratégies optimales

Proposition

1. *Tout jeu fini admet un point-selle (en stratégies mixtes) ;*
2. *Tout point-selle* (σ^*, τ^*) *vérifie* $v = g(\sigma^*, \tau^*)$ *;*
3. (σ^*, τ^*) *est un point-selle si et seulement si*

$$\forall (s,t) \in S \times T \; g(s, \tau^*) \leq g(\sigma^*, \tau^*) \leq g(\sigma^*, t)\,;$$

4. *Si* (σ^*, τ^*) *est un couple de stratégies optimales, et si* $\sigma^*(s) > 0$ *alors* $g(s, \tau^*) = v$ *;*
5. *Si* (σ^*, τ^*) *est un couple de stratégies optimales, et si* $\sigma^*(s) > 0$ *et* $\sigma^*(s') > 0$*, alors* $g(s, \tau^*) = g(s', \tau^*)$*.*

Démonstration.
Les points 1. et 2. sont des reformulations du théorème du minmax. Le point 3. découle du lemme précédent. □

Démonstration.
Montrons 4. et supposons que $g(s, \tau^*) \neq v$. Comme τ^* est optimale on a $g(s, \tau^*) < v$ et $\forall s' \in S \; g(s', \tau^*) \leq v$. Par linéarité $g(\sigma^*, \tau^*) = \sum_{s' \in S} \sigma^*(s') g(s', \tau^*) < \sum_{s' \in S} \sigma^*(s') v$ car $\sigma^*(s) > 0$, ce qui contredit 2.

Le point 5. est une conséquence du 4. □

Les points 4. et 5. sont en pratique utiles pour calculer la valeur et les stratégies optimales de jeux simples.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

La stratégie δ_2 de J1 est strictement dominée par la stratégie mixte $0.49\delta_1 + 0.51\delta_3$, on l'élimine sans changer la valeur du jeu et les stratégies optimales. Soit (σ, τ) un couple de stratégies optimales. Clairement $\sigma = \delta_1$ et $\sigma = \delta_3$ sont impossibles. Notons $\sigma = p\delta_1 + (1-p)\delta_3$ avec $p \in]0,1[$ et $\tau = q\delta_1 + (1-q)\delta_2$. On a $3q - (1-q) = -2q + (1-q)$ donc $q = \frac{2}{7} \in]0,1[$. Donc $3p - 2(1-p) = -p + (1-p)$, et donc $p = \frac{3}{7}$. On calcule $v = \frac{1}{7}$.

Exemple

Exemple
Dans le jeu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

soit il existe un couple de stratégies optimales pures, soit les stratégies optimales sont complètement mixtes et la valeur vaut

$$v = \frac{ad - bc}{a + d - b - c}.$$

Lien avec la programmation linéaire

Soit le problème de maxmin

$$\max_{\sigma \in \Delta(S)} \min_{\tau \in \Delta(T)} \sigma A \tau \tag{P}$$

On a vu que le problème est équivalent à

$$\max_{\sigma \in \Delta(S)} \min_{t \in T} (\sigma A)_t \tag{P}$$

Que l'on réécrit comme un problème linéaire

$$\begin{aligned} &\max_{\sigma \in \Delta(S), u \in \mathbb{R}} \quad u \\ &\text{s.c.} \qquad u \leq (\sigma A)_t \quad \forall t \in T \end{aligned} \tag{P}$$

Lien avec la programmation linéaire

Que l'on réécrit à nouveau

$$\begin{aligned} \max_{\sigma \in \mathbb{R}^S, u \in \mathbb{R}} \quad & u \\ \text{s.c.} \quad & u\mathbf{1} - \sigma A \leq \mathbf{0} \\ & \sigma \mathbf{1} = 1 \\ & \sigma \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{P}$$

Dont le problème dual est

$$\begin{aligned} \min_{\tau \in \mathbb{R}^T, v \in \mathbb{R}} \quad & v \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{1}v - A\tau \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{1}\tau = 1 \\ & \tau \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{D}$$

Qui est équivalent au problème de minmax

$$\min_{\tau \in \Delta(T)} \max_{\sigma \in \Delta(S)} \sigma A \tau \tag{D}$$

Corollaire
Le théorème du minmax de von Neumann est une conséquence du théorème de dualité forte.

Réciproquement, on pourrait démontrer le théorème de dualité forte à partir du théorème du minmax, il y a donc équivalence entre les deux.