

# Introduction à la **théorie des jeux**

Jeux sous forme extensive

---

Tristan Garrec

21 avril 2022

ENSTA Paris

Retrouvez au fur à mesure des cours l'ensemble des supports (transparents du cours magistral, énoncés et corrigés de travaux dirigés) sur la [page du cours](#).

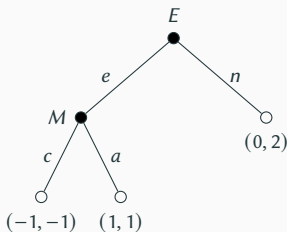
## Jeux sous forme extensive

---

# Motivation

- Jeux sous forme normale : choix de stratégies simultanés, aucune information sur les stratégies utilisées par les autres joueurs ;
- **Jeux sous forme extensive** : les joueurs effectuent leur choix en fonction des choix précédents des autres joueurs (échecs, poker, etc.).

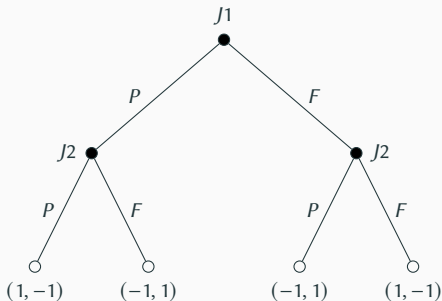
## Exemple (Jeu d'entrée)



La firme  $M$  est en situation de monopole. La firme  $E$  peut choisir d'entrer sur le marché ou non. Si  $E$  rentre, la firme  $M$  peut choisir de combattre ou de s'accommoder.

# Exemples

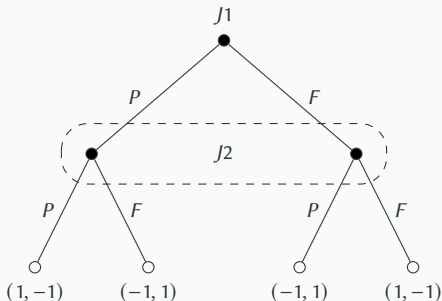
## Exemple (Pile ou face)



Le joueur 1 choisit pile ou face, le joueur 2 observe le choix du joueur 1 puis choisit à son tour pile ou face. Le joueur 2 gagne si les choix sont différents et perd sinon (c'est un jeu à somme nulle).

# Exemples

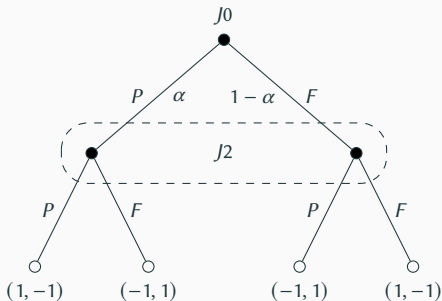
## Exemple (Pile ou face sans observation)



Ici, le joueur 2 ne connaît pas le choix du joueur 1. Ceci est représenté par un **ensemble d'information**. Le joueur 2 ne différencie pas les deux nœuds de l'ensemble d'information, son choix est indépendant de celui du joueur 1. Cela revient à des choix simultanés.

# Exemples

## Exemple (Pile ou face sans observation, contre la nature)



Ici, le joueur 1 a été remplacé par **la nature**, joueur 0, qui lance une pièce pile ou face avec probabilités respectives  $\alpha$  et  $1 - \alpha$ . Le joueur 0 ne prend pas de décision et ne reçoit pas de paiement.

## Définition

Un *arbre*  $\mathcal{A}$  est un triplet  $(Z, r, \theta)$  où

- $Z$  est un *ensemble fini de nœuds* ;
- $r \in Z$  est la *racine* ;
- $\theta : Z \setminus \{r\} \rightarrow Z$  est l'*application prédécesseur* :  
 $\forall z \in Z \exists n \in \mathbb{N} \theta^n(z) = r.$

On note  $Sc(z) = \theta^{-1}(z)$  l'ensemble des successeurs (immédiats) de  $z$ .

L'ensemble des nœuds sans successeurs est  $T$ . Les éléments de  $T$  sont les *nœuds terminaux*.



# Jeux sous forme extensive à information imparfaite

## Définition

Un *jeu sous forme extensive à information imparfaite*  $\Gamma$  est donné par

- Un ensemble fini de *joueurs*  $N$  ;
- Un *arbre*  $\mathcal{A} = (Z, r, \theta)$  ;
- Une partition  $\{Z_i\}_{i \in N \cup \{0\}}$  de  $Z \setminus T$  : si  $z \in Z_i$ , c'est le joueur  $i$  qui joue au nœud  $z$  ;
- Pour tout nœud  $z \in Z \setminus T$  un ensemble fini d'*actions*  $A(z)$  ;
- Pour tout nœud  $z \in Z_0$  une distribution de probabilité  $D(z)$  sur  $A(z)$  : le joueur 0 est le hasard, ou la *nature* ;
- Pour tout  $i \in N$  une partition de  $Z_i$  en sous-ensembles appelés *ensembles d'information*, tels que si  $z$  et  $z'$  sont dans le même ensemble d'information alors  $A(z) = A(z')$ .  
On note  $u(z)$  l'ensemble d'information contenant  $z$  ;
- Une *fonction de paiement*  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^N$ .

# Déroulement de la partie

1. Soit  $i$  le joueur tel que  $r \in Z_i$ 
  - Si  $i = 0$  une action  $a_1$  est tirée suivant  $D(r)$  et le jeu va en  $z_2 = Sc(r, a_1)$  ;
  - Si  $i \geq 1$  le joueur  $i$  choisit une action  $a_1 \in A(r)$  et le jeu va en  $z_2 = Sc(r, a_1)$  ;
2. Par induction, soit  $i \in N \cup \{0\}$  tel que  $z_t \in Z_i$ 
  - Si  $i = 0$  une action  $a_t$  est tirée suivant  $D(z_t)$  et le jeu va en  $z_{t+1} = Sc(z_t, a_t)$  ;
  - Si  $i \geq 1$  le joueur  $i$  choisit une action  $a_t \in A(z_t)$  et le jeu va en  $z_{t+1} = Sc(z_t, a_t)$  ;
3. Soit  $\tau \in T$  atteint par la procédure. Chaque joueur  $i$  reçoit le paiement  $g_i(\tau)$ .

Une suite des nœuds  $(r, z_1, z_2, \dots, \tau)$  visités est une **partie** du jeu.

## Définition

Un jeu est à **information parfaite** si tous les ensembles d'information sont des singletons.

## Exemple

Échecs, go, dames, jeu d'entrée, pile ou face.

## Définition

Soit  $i \in N$ . Une *stratégie (pure)*  $s_i$  du joueur  $i$  associe à chacun de ses ensembles d'information  $u(z)$ , avec  $z \in Z_i$ , une action  $a \in A(z)$ .

On note  $S_i$  l'ensemble des stratégies (pures) du joueur  $i$ .

*Interprétation* : Le joueur choisit la même action dans tous les nœuds d'un même ensemble d'information : il ne fait pas la différence entre ces nœuds.

De plus, une stratégie spécifie une action en chaque ensemble d'information, et pas seulement ceux visités par la partie.

Supposons qu'un joueur a comme ensembles d'informations  $u_1, \dots, u_p$  et que dans ces ensembles d'information le nombre d'actions de ce joueur est respectivement  $n_1, \dots, n_p$ . Alors ce joueur a au total  $n_1 \times \dots \times n_p$  stratégies.

## Définition

Un profil de stratégies  $s \in S$  (pures) induit une partie (aléatoire) et donc un paiement (aléatoire). On note  $g(s) \in \mathbb{R}^N$  l'espérance de ce paiement aléatoire.

On appelle *réduction sous forme normale* le triplet  $(N, S, g)$ .

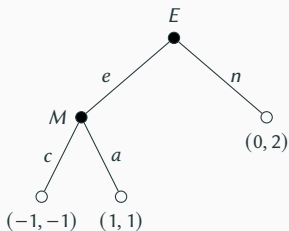
## Définition

Un *équilibre de Nash* (en stratégies pures ou mixtes) d'un jeu sous forme extensive est un équilibre de Nash de la forme normale associée.

Ainsi, tout jeu sous forme extensive admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

# Exemples

## Exemple (Jeu d'entrée)

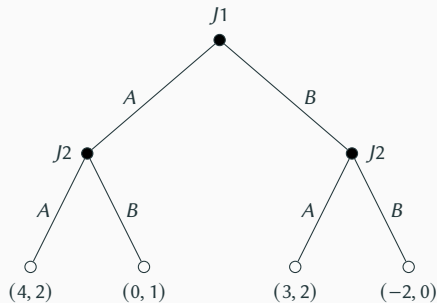


$$\begin{matrix} & c & a \\ \begin{matrix} e \\ n \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1, -1 & 1, 1 \\ 0, 2 & 0, 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Il y a deux équilibres de Nash en stratégies pures :  $(e, a)$  et  $(n, c)$ . De plus tout profil  $(n, x \cdot c + (1 - x) \cdot a)$  avec  $x \geq \frac{1}{2}$  est un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

# Exemples

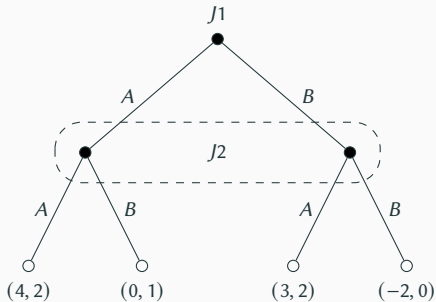
## Exemple (Information parfaite)



$$\begin{array}{c} A \\ B \end{array} \begin{pmatrix} \begin{array}{cc} AA & AB \\ 4, 2 & 4, 2 \end{array} & \begin{array}{cc} BA & BB \\ 0, 1 & 0, 1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 3, 2 & -2, 0 \end{array} \end{pmatrix}$$

# Exemples

## Exemple (Information imparfaite)



$$\begin{matrix} & A & B \\ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4, 2 & 0, 1 \\ 3, 2 & -2, 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- Stratégie mixte : le joueur choisit au début du jeu une probabilité sur l'ensemble des stratégies pures ;
- **Stratégie de comportement** : le joueur choisit une probabilité sur l'ensemble des actions dans chaque ensemble d'information.

## Définition

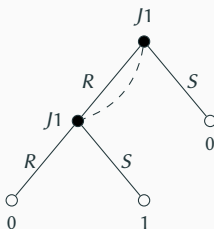
Une **stratégie de comportement** du joueur  $i$  associe à chaque ensemble d'information  $u(z)$ , avec  $z \in Z_i$ , un élément de  $\Delta(A(z))$ .

Un profil de stratégies de comportement induit une distribution de probabilité sur l'ensemble des nœuds terminaux, donc un paiement. Est-ce que cela change la fonction de paiement par rapport aux stratégies mixtes ?



# Exemple

## Exemple (Le conducteur distrait)



Un conducteur doit rentrer chez lui en prenant la deuxième sortie d'autoroute. Lorsqu'il doit prendre la décision de sortir ou de rester, il ne sais plus où il est.

Toute stratégie pure donne un paiement  $0$ , donc toute stratégie mixte aussi. La stratégie de comportement  $\frac{1}{2}S + \frac{1}{2}R$  à chaque nœud donne le paiement  $\frac{1}{4}$  (la probabilité d'avoir  $R$  puis  $S$ ).

# Mémoire parfaite

On suppose dans toute la suite qu'un joueur **se rappelle de tous ses choix précédents**.

On note  $h_i(z)$  la suite des ensembles d'information et des actions du joueur  $i$  avant d'arriver au nœud  $z$ .

## Définition

Un jeu sous forme extensive est à **mémoire parfaite** si pour tout  $i$  et pour tout  $u(z)$ , avec  $z \in Z_i$ , pour tout  $z, z' \in u(z)$ ,  $h_i(z) = h_i(z')$ .

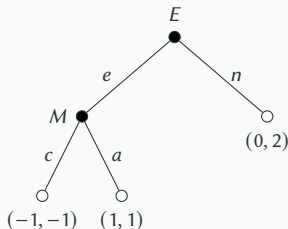
## Définition

Deux stratégies  $\sigma_i$  et  $\sigma'_i$  (mixtes ou de comportement) sont **équivalentes** si pour toute stratégies  $\sigma_{-i}$  des autres joueurs (mixte ou de comportement),  $(\sigma_i, \sigma_{-i})$  et  $(\sigma'_i, \sigma_{-i})$  induisent la même distribution de probabilité sur les nœuds terminaux.

## Théorème (Kuhn, 1953)

Dans un jeu à mémoire parfaite, toute stratégie (mixte ou de comportement) admet une stratégie (mixte ou de comportement) équivalente.

## Exemple (Jeu d'entrée)



On a vu que  $(n, c)$  est un équilibre de Nash :  $M$  menace  $E$  de combattre si elle entre.

Pourtant si  $E$  entre tout de même,  $M$  a intérêt à s'en accommoder : la menace n'est pas crédible.

On introduit la notion d'équilibre sous-jeux parfait.

## Définition

Soit  $z_* \in Z \setminus T$  et soit  $Z_* \subset Z$  l'ensemble des nœuds composant le sous-arbre de racine  $z_*$ . Si

- $z_* \in Z_0$  ;

ou

- pour tout  $z \in Z_*$   $u(z) \subset Z_*$  ;

alors le jeu sous forme extensive associé à ce sous-arbre est appelé **sous-jeu** partant de  $z_*$ .

## Définition

Un profil de stratégies  $\sigma$  est un **équilibre sous-jeux parfait** si  $\sigma$  induit un équilibre de Nash dans tous les sous-jeux.

## Exemple

Dans le jeu d'entrée,  $(e, a)$  est l'unique équilibre sous-jeux parfait.

# Équilibre sous-jeux parfait

## **Théorème (Zermelo (1913))**

*Tout jeu sous forme extensive à information parfaite admet un équilibre sous-jeux parfait en stratégies pures.*

## **Exemple**

Au jeu d'échecs, soit un joueur a une stratégie gagnante, soit les deux joueurs peuvent garantir l'égalité (mais on ne sait pas calculer ces stratégies).

## **Théorème**

*Tout jeu sous forme extensive à information imparfaite admet un équilibre sous-jeu parfait en stratégies mixtes (donc également en stratégies de comportement).*

## **Démonstration.**

Par récurrence et **induction amont**.



# Induction amont

Pour trouver les équilibres sous-jeux parfait on raisonne par **induction amont**

1. Identifier un sous-jeu minimal,
2. Calculer un équilibre de Nash de ce sous-jeu ;
3. Remplacer ce sous-jeu par un nœud terminal dont le paiement est celui de l'équilibre de Nash ;
4. Recommencer.

Dans un jeu à information parfaite, l'induction amont est aisé à mettre en place. Chaque sous-jeu minimal consiste en un jeu à un joueur, où le joueur n'a qu'un seul nœud de décision.

Dans le cas d'un jeu à information imparfaite, un sous-jeu minimal peut être beaucoup plus complexe.