ENSTA Paris — RO203
TD 2 — Introduction à la théorie des jeux
7 avril 2022

Exercice 1
On considère le jeu sous forme normale ci-dessous en stratégies pures.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} a,-1 & b,1 \\ c,1 & d,-1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Déterminer les conditions sur les paramètres pour que

1. Ce jeu admette deux équilibres de Nash ;
2. Ce jeu n'admette pas d'équilibre de Nash ;
3. Ce jeu admette un unique équilibre de Nash.

Exercice 2 (Pêche)
n pêcheurs exploitent un lac. Si chaque pêcheur i pêche une quantité $s_i \geq 0$, le prix unitaire du poisson est $\max(1 - \sum_{i=1}^{n} s_i, 0)$. Chaque pêcheur vend la totalité de sa pêche à ce prix.

1. Écrire le jeu sous forme normale ;
2. Montrer qu'il existe un équilibre de Nash pour lequel les paiements sont non nuls ;
3. Comparer la pêche totale et le paiement total au cas du monopole $n = 1$.

Exercice 3 (Enchères à plis scellés, partie 2)
Un bien indivisible est proposé aux enchères à $n \geq 2$ acheteurs. Chaque agent $i \in \{1, \ldots, n\}$ attribue une valeur privée v_i au bien et propose un montant b_i uniquement observé par le commissaire-priseur. On suppose que les valeurs privées sont indépendantes et identiquement distribuées selon une loi uniforme sur $[0, 1]$. Le bien est attribué à l'agent avec la plus haute mise et, en cas d'égalité, le gagnant est tiré uniformément parmi les joueurs avec la plus haute mise. On considère deux régimes tarifaires :

- *Au premier prix* : le prix payé par le vainqueur correspond au montant qu'il a enchéri ;
- *Au second prix* : le prix payé par le vainqueur correspond à la deuxième meilleure offre.

1. On considère d'abord une enchère au premier prix :

(a) Montrer que pour $n = 2$, $\left(\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2}\right)$ est un équilibre de Nash. (On supposera que les stratégies de chaque joueur sont continues et différentiables par rapport à leur valeur privée.)

(b) Vérifier que, pour $n \geq 2$, $\left(\frac{(n-1)v_1}{n}, \dots, \frac{(n-1)v_n}{n}\right)$ est un équilibre de Nash.

2. Comparer le revenu espéré pour le commissaire-priseur dans les deux régimes tarifaires en vous aidant du lemme suivant :

   Lemme 1 *Soit* $(x_1, \dots, x_n)$ *n tirages indépendants d'une loi uniforme sur* $[0, 1]$ *ordonnés du plus petit au plus grand. Pour tout* $k \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{E}(x_k) = \frac{k}{n+1}$.

3. Commenter.

Exercice 4

Trouver tous les équilibres de Nash en stratégies mixtes ainsi que les paiements d'équilibre correspondants dans chacun des jeux suivants.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} D & G \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} -3,-3 & -10,0 \\ 0,-10 & -5,-5 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} D & G \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2,1 & 0,0 \\ 0,0 & 1,2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} D & G \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 1,2 & 3,1 \\ 2,0 & 0,3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 5

Soit le jeu symétrique suivant à trois joueurs : chacun choisit simultanément de lever ou de baisser la main, et gagne s'il est seul dans sa position.

1. Mettre le jeu sous forme normale ;
2. Donner les équilibres en stratégies pures ;
3. Donner les équilibres en stratégies mixtes.

Exercice 6 (Fenêtre sur cour)

Alertés par un cri au secours, chaque témoin peut répondre à l'appel ou l'ignorer. Un personne qui répond à l'appel reçoit un paiement égal à $1 - c$ (avec $0 < c < 1$). Si au moins une personne répond à l'appel, une personne n'ayant pas répondu à l'appel reçoit 1. Si personne ne répond à l'appel, tout le monde obtient 0.

1. Écrire le jeu sous forme normale ;
2. Déterminer l'ensemble des équilibre de Nash en stratégies mixtes en fonction de c et du nombre de témoins $N \geq 2$;
3. Commenter.