ENSTA Paris — RO203
TD 1 — Introduction à la théorie des jeux
21 mars 2024

Exercice 1
On considère le jeu sous forme normale ci-dessous.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} G & M & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} a,b & c,d & e,f \\ g,h & i,j & k,l \end{bmatrix} \end{array}$$

Déterminer les conditions sur les paramètres pour que

1. La stratégie H soit strictement dominante ;
2. La stratégie M soit dominante ;
3. Le couple de stratégies (H, G) soit un équilibre en stratégies dominantes.

Exercice 2 (Mariages stables – Gale et Shapley (1962))
À l'aide des trois remarques faites en cours, montrer les propriétés suivantes de l'algorithme de Gale-Shapley :

1. L'algorithme s'arrête en au plus n^2 jours ;
2. L'algorithme est bien défini (il induit un mariage) ;
3. Le mariage induit est stable ;
4. Il n'y a pas unicité des mariages stables. Pour la liste de préférences suivantes donner l'ensemble des mariages stables :
   — $x_1 : y_2 \succ y_1 \succ y_3$ $\quad y_1 : x_2 \succ x_1 \succ x_3$
   — $x_2 : y_3 \succ y_2 \succ y_1$ $\quad y_2 : x_3 \succ x_2 \succ x_1$
   — $x_3 : y_1 \succ y_3 \succ y_2$ $\quad y_3 : x_1 \succ x_3 \succ x_2$
   Lequel est produit par l'algorithme de Gale-Shapley ?

Exercice 3 (Le concours de beauté – Keynes (1936), Moulin (1986))
Dans un groupe de TD
— Chaque élève choisit un nombre entier entre 0 et 100 ;
— On calcule la moyenne M des nombres choisis ;
— Le gagnant est le plus proche de $\frac{1}{2}M$.
Participer au jeu, proposer une analyse des résultats de ce jeu.

Exercice 4 (Un problème de partage)
On doit partager un gâteau ($[0,1] \times [0,1]$) entre deux enfants. Un parent procède de la manière suivante :
— Il déplace son couteau continument de gauche à droite (de 0 vers 1) sur l'axe x ;

— Le premier enfant qui crie "stop" gagne la part à gauche de x, l'autre celle à droite ;
— Si les deux enfants crient "stop" en même temps c'est le plus jeune qui gagne la part à gauche.

La valeur totale du gâteau pour chaque enfant est 1. La valeur de la part à gauche de x est $f(x)$ pour le plus jeune et $g(x)$ pour le plus âgé. Les fonctions f et g sont continues et strictement croissantes et leur graphe va de $(0,0)$ à $(1,1)$.

1. Montrer que chaque enfant peut obtenir au moins $\frac{1}{2}$, quel que soit ce que fait l'autre enfant ;
2. Si vous connaissez f et g et si vous êtes le plus jeune (respectivement le plus vieux), que faites vous ?
3. Si vous ne connaissez pas la fonction de l'autre enfant que faites vous ? Il n'y a pas de réponse absolue.

Exercice 5 (Enchères à plis scellés)

Un bien indivisible est proposé aux enchères à $n \geq 2$ acheteurs. Chaque agent $i \in \{1, \ldots, n\}$ attribue une valeur privée v_i au bien et propose un montant b_i uniquement observé par le commissaire-priseur. Le bien est attribué à l'agent avec la plus haute mise et, en cas d'égalité, le gagnant est tiré uniformément parmi les joueurs avec la plus haute mise. On considère deux régimes tarifaires :
— *Au premier prix* : le prix payé par le vainqueur correspond au montant qu'il a enchéri ;
— *Au second prix* : le prix payé par le vainqueur correspond à la deuxième meilleure offre.

Dans cet exercice, on considère une enchère au second prix.

1. Mettre le jeu sous forme normale.
2. Montrer que miser sa valeur privée est une stratégie dominante.