Introduction à la théorie des jeux

Jeux à N joueurs

Tristan Garrec

20 avril 2020

ENSTA Paris

Cours à distance

Retrouvez l'enregistrement vidéo des transparents commentés. Attention, le fichier n'est disponible qu'un temps limité (sept jours après la mise en ligne).

Ainsi que le nouveau document en ligne,

- Pour poser toutes vos questions ;
- Pour apporter des suggestions sur le cours à distance ;
- Signaler des coquilles dans les transparents (je vous en saurais gré).

Et finalement la page du cours.

Jeux en stratégies pures

Jeux à N joueurs

Un jeu sous forme normale est donné par $\Gamma = (N, (S_i)_{i \in N}, (g_i)_{i \in N})$ où

- N est l'ensemble fini des joueurs (et également le nombre de joueurs) ;
- Pour tout $i \in N$, S_i est l'ensemble d'actions non vide du joueur i ;
- Pour tout $i \in N$, $g_i : \prod_{j \in N} S_j \to \mathbb{R}$ bornée, est la fonction de paiement du joueur i.

On note $S = \prod_{j \in N} S_j$, $S_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} S_j$ et $g = (g_i)_{i \in N}$.

Le joueur i choisit simultanément et indépendamment des autres une action $s_i \in S_i$. Il reçoit alors le paiement $g_i(s_1, \ldots, s_N)$.

Remarque, si $N = 2$ et $g_1 + g_2 = 0$, on retrouve le jeu à somme nulle (S_1, S_2, g_1).

Dans les exemples ci-dessous, $N = 2$ et les ensembles on a S_i sont finis. On représente le jeu sous forme matricielle avec à chaque coordonnée le paiement de chaque joueur.

Exemple (La guerre des sexes)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C_2 & T_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} C_1 \\ T_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 2,1 & 0,0 \\ 0,0 & 1,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Les membres d'un couple doivent décider (indépendamment) s'ils vont au cinéma ou au théâtre. L'un préfère le cinéma et l'autre le théâtre, mais tous deux préfèrent être ensemble à être seul.

Ici les paiements ne sont pas des sommes d'argent, ils représentent les préférences des joueurs.

Exemples

Exemple (Le dilemme du chocolat)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} D_2 & G_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} D_1 \\ G_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 3,3 & 0,4 \\ 4,0 & 1,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Deux enfants ont chacun le choix entre prendre un morceau de chocolat et le garder ou prendre trois morceaux pour le donner à l'autre.

Cet exemple fait ressortir une tension entre intérêt individuel et intérêt collectif.

Questions : si les joueurs sont rationnels, quelles stratégies vont-ils le plus probablement choisir ?

Domination stricte

Définition
La stratégie $s'_i \in S_i$ est strictement dominée par $s_i \in S_i$ si
$\forall s_{-i} \in S_{-i}\ g_i(s'_i, s_{-i}) < g_i(s_i, s_{-i})$.

Un joueur (rationnel) ne devrait jamais jouer une stratégie strictement dominée : il a une stratégie qui lui donne un paiement strictement meilleur indépendamment des choix des autres joueurs.

Définition
Une stratégie $s_i \in S_i$ est strictement dominante si elle domine strictement toutes les autres stratégies : $\forall s'_i \in S_i \setminus \{s_i\}\ \forall s_{-i} \in S_{-i}\ g_i(s'_i, s_{-i}) < g_i(s_i, s_{-i})$.

Définition
Un profil de stratégies $s = (s_1, \ldots, s_N) \in S$ est un équilibre en stratégies strictement dominantes si pour tout $i \in N$, s_i est strictement dominante.

Si un tel équilibre existe, ce devrait être l'issue rationnelle du jeu.

Élimination itérée des stratégies strictement dominées

- Si un joueur i a une stratégie strictement dominée s_i, il ne devrait pas la jouer ;
- Les autres joueurs le savent ;
- On élimine s_i du jeu ;
- On réitère pour le nouveau jeu.

Si au terme de cette procédure tous les ensembles d'actions sont des singletons, alors ces singletons ne dépendent pas de l'ordre d'élimination des stratégies. Le jeu est résoluble par élimination itérée des stratégies strictement dominées.

Exercice

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{array} \\
\begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{array} &
\begin{pmatrix}
5,2 & 2,6 & 1,4 & 0,4 \\
0,0 & 3,2 & 2,1 & 1,1 \\
7,0 & 2,2 & 1,5 & 5,1 \\
9,5 & 1,3 & 0,2 & 4,8
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Élimination itérée des stratégies strictement dominées

Exercice

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} B_2 & C_2 & D_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 2,6 & 1,4 & 0,4 \\ 3,2 & 2,1 & 1,1 \\ 2,2 & 1,5 & 5,1 \\ 1,3 & 0,2 & 4,8 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} B_2 & C_2 & D_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 3,2 & 2,1 & 1,1 \\ 2,2 & 1,5 & 5,1 \\ 1,3 & 0,2 & 4,8 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} B_2 & C_2 & D_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} B_1 \\ C_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 3,2 & 2,1 & 1,1 \\ 2,2 & 1,5 & 5,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} B_2 & C_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} B_1 \\ C_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 3,2 & 2,1 \\ 2,2 & 1,5 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} B_2 & C_2 \end{array} \\ B_1 & \begin{pmatrix} 3,2 & 2,1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} & B_2 \\ B_1 & \begin{pmatrix} 3,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Domination faible

Définition
La stratégie $s'_i \in S_i$ est faiblement dominée par $s_i \in S_i$ si
$\forall s_{-i} \in S_{-i} \;\; g_i(s'_i, s_{-i}) \leq g_i(s_i, s_{-i})$ *et* $\exists s_{-i} \in S_{-i} \; g_i(s'_i, s_{-i}) < g_i(s_i, s_{-i})$.

Définition
La stratégie $s'_i \in S_i$ est dominante si $\forall s_i \in S_i \, \forall s_{-i} \in S_{-i} \; g_i(s'_i, s_{-i}) \geq g_i(s_i, s_{-i})$.

Une stratégie dominante représente un choix raisonnable, qui ne peut être regretté.

Définition
Un profil de stratégies $s = (s_1, \ldots, s_N) \in S$ est un équilibre en stratégies dominantes si pour tout $i \in N$, s_i est dominante.

Si un tel équilibre existe, il semble raisonnable qu'il soit joué par les joueurs.

Exemple
Dans une enchère au second prix, le profil $(v_1, \ldots, v_N)$ est un équilibre en stratégies dominantes.

Domination faible

Exemple (Élimination itérée des stratégies faiblement dominées)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ M \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 1,1 & 0,0 \\ 1,1 & 2,1 \\ 0,0 & 2,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

En éliminant les stratégies faiblement dominées, on peut éliminer H puis G, mais on pourrait également éliminer B puis D donnant un résultat différent.

On ne peut donc pas conclure.

Équilibre de Nash

Pour un profil de stratégies $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$, on note $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_N) \in S_{-i}$.

Définition
Un profil de stratégies $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$ est un équilibre de Nash si

$$\forall i \in N \, \forall s_i' \in S_i \; g_i(s_i, s_{-i}) \geq g_i(s_i', s_{-i}). \tag{1}$$

On note $\mathrm{NE}(\Gamma)$ l'ensemble des équilibre de Nash du jeu Γ.

Autrement dit, en un équilibre de Nash, aucun des joueurs n'a d'intérêt à dévier de son action unilatéralement.

Équilibre de Nash

En termes de modélisation, on donne les interprétations ou justifications suivantes :

- *Prescription* : un individu extérieur propose un profil ;
- *Communication* : les joueurs se mettent d'accord à l'avance sur le profil à jouer ;
- *Introspection* : s'il existe un unique équilibre de Nash, les joueurs peuvent se convaincre que c'est l'issue du jeu ;
- *Convention* : en France on roule à gauche, en Angleterre à droite ;
- *Apprentissage* : les joueurs découvrent les stratégies suivies par les autres au cours d'un processus d'apprentissage ;
- *Évolution* : chaque espèce évolue de façon adaptée aux autres espèces.

Meilleure réponse

Définition

Une stratégie $s_i \in S_i$ *est dite meilleure réponse à* $s_{-i} \in S_{-i}$ *si pour tout* $s'_i \in S_i$, $g_i(s'_i, s_{-i}) \leq g_i(s_i, s_{-i})$.

On note $\mathrm{BR}_i(s_{-i})$ l'ensemble des meilleures réponses à s_{-i}.

Proposition

Un profil de stratégies $s \in S$ *est un équilibre de Nash si et seulement si pour tout* $i \in N$ $s_i \in \mathrm{BR}_i(s_{-i})$.

Exemples

Exemple (La guerre des sexes)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C_2 & T_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} C_1 \\ T_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 2,1 & 0,0 \\ 0,0 & 1,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Il y a deux équilibres de Nash, (C_1, C_2) et (T_1, T_2).

Exemple (Le dilemme du chocolat)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} D_2 & G_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} D_1 \\ G_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 3,3 & 0,4 \\ 4,0 & 1,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

L'unique équilibre de Nash est (G_1, G_2), alors que (D_1, D_2) serait mieux pour tout le monde.

Exemples

Exemple

$$\begin{array}{c} \\ H \\ M \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1,1 & 0,0 \\ 1,1 & 2,1 \\ 0,0 & 2,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nous n'avons pas résolu ce jeu par élimination itérée des stratégies strictement dominée, mais il possède des équilibres de Nash : (H, G), (M, G), (M, D), (B, D).

Exemple

$$\begin{array}{c} \\ H \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2,2 & 1,1 \\ 1,1 & 1,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(H, G) et (B, D) sont des équilibres de Nash. Les stratégies B et D sont faiblement dominées.

Équilibre de Nash et domination

Proposition

1. *Un équilibre en stratégies strictement dominantes est l'unique équilibre de Nash ;*
2. *L'ensemble des équilibres de Nash est inchangé par élimination itérée de stratégies strictement dominées (à quelque étape de l'itération que ce soit) ;*
3. *Si un jeu est résoluble par élimination itérée des stratégies strictement dominées, alors le profil obtenu est l'unique équilibre de Nash du jeu.*

Proposition

1. *Un équilibre en stratégies dominantes est un équilibre de Nash ;*
2. *La suite des ensembles des équilibres de Nash obtenus par élimination itérée de stratégies faiblement dominées décroit.*

Exercice

la séquence du film *A Beautiful Mind*, dans laquelle John Nash invente son équilibre. Expliquer pourquoi le profil indiqué n’est pas un équilibre de Nash.

Correction

Il y a cinq femmes et quatre hommes. Nash propose d'ignorer la femme préférée de tous et d'appairer les quatre hommes et femmes restantes. Si ce profil d'actions est joué, alors chacun des hommes a intérêt à dévier unilatéralement de la femme à laquelle il est appairé vers la femme préférée de tous.

Exercice

n pêcheurs exploitent un lac. Si chaque pêcheur i pêche une quantité $s_i \geq 0$, le prix unitaire du poisson est $\max(1 - \sum_{i=1}^{n} s_i, 0)$. Chaque pêcheur vend la totalité de sa pêche à ce prix.

1. Écrire le jeu sous forme normale ;
2. Montrer qu'il existe un équilibre de Nash pour lequel les paiements sont non nuls ;
3. Comparer la pêche totale et le paiement total au cas du monopole $n = 1$.

Correction

1. $N = \{1, \ldots, n\}$, $S_i = \mathbb{R}_+$ et $g_i(s_1, \ldots, s_n) = s_i \max(1 - \sum_{j=1}^n s_j, 0)$;
2. Soit $(s_1, \ldots, s_n)$ un équilibre de Nash. Notons $c_{-i} = \sum_{j \neq i} s_j$ et $c = \sum_{j=1}^n s_j$. Supposons qu'il existe i tel que $c_{-i} < 1$. La meilleure réponse de i est $s_i = \frac{1-c_{-i}}{2}$. Donc $c < 1$ et pour tout j, $c_{-j} < 1$ donc $s_j = \frac{1-c_{-j}}{2}$.
   On a alors $s_i = \frac{1}{n+1}$ pour tout i et on a bien un équilibre de Nash et des paiements non nuls.
   À noter qu'il y a d'autres équilibres de Nash, pour lesquels les paiements sont nuls ;
3. La pêche totale est $\frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}$ et le revenu total est $\frac{n}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{4}$.

Extension mixte : le cas fini

Exemple : Pierre, Feuille & Ciseau

Exemple (Pierre, Feuille, Ciseau)

$$\begin{array}{c} \\ P \\ F \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P & F & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,0 & -1,1 & 1,-1 \\ 1,-1 & 0,0 & -1,1 \\ -1,1 & 1,-1 & 0,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le jeu Pierre, Feuille, Ciseau n'admet pas d'équilibre de Nash en stratégies pures.

Pour pallier cela, on va autoriser les joueurs à choisir leur action aléatoirement. Mathématiquement, ceci permet de convexifier les ensembles d'actions.

Extension mixte

On suppose S_i fini pour tout i.

À nouveau, si A est un ensemble fini de cardinal n on note $\Delta(A)$ l'ensemble des probabilités sur A (ou le simplexe sur A) :

$$\Delta(A) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^A \mid \forall i \in A\; x_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i \in A} x_i = 1 \right\}.$$

Un élément de $\Delta(S_i)$ est appelé stratégie mixte.

Représentations d'une stratégie mixte : $S_1 = \{H, B\}$, J1 joue H avec probabilité $\frac{1}{4}$ et B avec probabilité $\frac{3}{4}$.

- *Fonctionnelle* : $\sigma_1(H) = \frac{1}{4}$ et $\sigma_1(B) = \frac{3}{4}$;
- *Vectorielle* : $\sigma_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$;
- *Combinaison convexe de stratégies pures* : $\frac{1}{4}H + \frac{3}{4}B$ (ou $\frac{1}{4}\delta_H + \frac{3}{4}\delta_B$).

Extension mixte

On note $\Sigma = \prod_{i=1}^{N} \Sigma_i = \prod_{i=1}^{N} \Delta(S_i)$.

L'extension mixte du jeu fini $\Gamma = (N, S, g)$ est le jeu $\Gamma^\Delta = (N, \Sigma, g)$ g est étendue multilinéairement : pour $\sigma \in \Sigma$, le paiement du joueur i est

$$g(\sigma) = \mathbb{E}_\sigma[g] = \sum_{s \in S} \left(\prod_{j=1}^{N} \sigma_j(s_j) \right) g_i(s).$$

Équilibre de Nash en stratégies mixtes

Proposition
$\sigma \in \Sigma$ est un équilibre de Nash en stratégies mixtes si et seulement si

$$\forall i \in N \, \forall s_i \in S_i \; g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq g_i(s_i, \sigma_{-i}).$$

Démonstration.
On utilise la linéarité de g_i en σ_i et le fait qu'une stratégie pure est aussi une stratégie mixte. $\square$

Corollaire
Tout équilibre de Nash en stratégies pures est aussi un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Exemple
Dans Pierre, Feuille, Ciseau, le couple de stratégies uniformes est un équilibre de Nash.

Le théorème de Nash

Théorème (Nash (1950))
Tout jeu fini admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Nash a démontré ce théorème dans sa thèse de doctorat, qui fait seulement 32 pages et dont c'est le principal résultat.

La démonstration utilise le théorème suivant.

Théorème (Brouwer (1912))
Soient C un convexe compact non vide d'un espace euclidien et $f : C \longrightarrow C$ continue. f admet un point fixe.

Démonstration du théorème de Brouwer.
Via le lemme de Sperner (1928), en video. $\square$

Le théorème de Nash

Démonstration du théorème de Nash.
Soit $f : \Sigma \to \Sigma$ définie par

$$f(\sigma)_i(s_i) = \frac{\sigma_i(s_i) + (g_i(s_i, \sigma_{-i}) - g_i(\sigma))_+}{1 + \sum_{s'_i \in S_i} (g_i(s'_i, \sigma_{-i}) - g_i(\sigma))_+},$$

où $a_+ = \max(a, 0)$. f est bien définie et à valeurs dans Σ car $f(\sigma)_i(s_i) \geq 0$ et $\sum_{s_i \in S_i} f(\sigma)_i(s_i) = 1$. De plus f est continue et Σ est convexe et compact. D'après le théorème de Brouwer, il existe $\sigma \in \Sigma$ tel que $f(\sigma) = \sigma$. Montrons que σ est un équilibre de Nash.

Fixons un joueur i. Si $\sum_{s'_i \in S_i} (g_i(s'_i, \sigma_{-i}) - g_i(\sigma))_+ = 0$, alors $g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq \max_{s'_i \in S_i} g_i(s'_i, \sigma_{-i})$. Sinon, $\sum_{s'_i \in S_i} (g_i(s'_i, \sigma_{-i}) - g_i(\sigma))_+ > 0$. Soit s_i tel que $\sigma_i(s_i) > 0$ et $g_i(s_i, \sigma_{-i}) \leq g_i(\sigma)$. On a $\sigma_i(s_i) = \frac{\sigma_i(s_i)}{1 + \sum_{s'_i \in S_i} (g_i(s'_i, \sigma_{-i}) - g_i(\sigma))_+}$, donc $\sigma_i(s_i) = 0$: contradiction.

Réciproquement, tout équilibre est un point fixe puisque tous les $(g_i(s'_i, \sigma_{-i}) - g_i(\sigma))_+$ sont nuls. $\square$

Domination mixte

Les notions de dominations vues dans la partie précédente s'appliquent encore ici (puisque l'extension mixte d'un jeu sous forme normale est encore un jeu sous forme normale).

Proposition
Une stratégie $\sigma_i \in \Sigma_i$ est strictement dominée par $\sigma_i' \in \Sigma_i$ si et seulement si

$$\forall s_{-i} \in S_{-i}\ g_i(\sigma_i, s_{-i}) < g_i(\sigma_i', s_{-i}).$$

On peut également redéfinir l'élimination itérée de stratégies strictement dominées en prenant en compte les stratégies dominées par des stratégies mixtes.

L'ensemble des équilibre de Nash (en stratégies mixtes) est inchangé par élimination de stratégies strictement dominées (par une stratégie mixte).

Recherche d'équilibres en stratégies mixtes

Proposition
$\sigma \in \Sigma$ est un équilibre de Nash en stratégies mixtes si et seulement si $\forall i$

$$\forall s_i, s_i' \in S_i \ (\sigma_i(s_i) > 0 \text{ et } \sigma_i(s_i') > 0) \Rightarrow g_i(s_i, \sigma_{-i}) = g_i(s_i', \sigma_{-i}) \ ;$$
$$\forall s_i \in S_i \ \sigma_i(s_i) = 0 \Rightarrow g_i(s_i, \sigma_{-i}) \leq g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}).$$

Cette proposition donne une méthode pour obtenir les équilibres de Nash en stratégies mixtes :

1. Essayer tous les supports possibles ;
2. Trouver les probabilités qui rendent chaque joueur indifférent sur son support ;
3. Vérifier que les stratégies hors du support ne donnent pas un meilleur paiement.

Recherche d'équilibres en stratégies mixtes

Exemple
Trouver tous les équilibres de Nash du jeu de rencontre

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} D & G \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 1,1 & 0,0 \\ 0,0 & 1,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Il n'y a pas de stratégie pure strictement dominante ou strictement dominée (par des stratégies mixtes) ;
2. Il y a deux équilibres de Nash en stratégies pures : (H, D) et (B, G) ;

Exemple (suite)

3. Soit $x \in [0, 1]$ la probabilité de jouer H et $y \in [0, 1]$ celle de jouer D. Comme on a déterminé les équilibres de Nash en stratégies pures on peut supposer $x \in]0, 1[$ et $y \in [0, 1]$, ou vice-versa. On se place dans le premier cas. La propriété précédente implique $g_1(H, y) = g_1(B, y)$ donc $y = 1 - y$ et $y = \frac{1}{2} \in]0, 1[$. On peut donc procéder de même et on obtient $x = \frac{1}{2}$.
4. Le cas $x \in [0, 1]$ et $y \in]0, 1[$ est symétrique. L'ensemble des équilibres est donc $\mathsf{NE}(\Gamma) = \{(H, D), (B, G), ((1/2, 1/2), (1/2, 1/2))\}$.

Exercice

Soit le jeu symétrique suivant à trois joueurs : chacun choisit simultanément de lever ou de baisser la main, et gagne s'il est seul dans sa position.

1. Mettre le jeu sous forme normale ;
2. Donner les équilibres en stratégies pures ;
3. Donner les équilibres en stratégies mixtes.

Correction

1.

$$
\begin{array}{c} \\ B_1 \\ H_1 \end{array}
\begin{array}{cc} B_2 & H_2 \\ \left(\begin{array}{cc} 0,0,0 & 0,1,0 \\ 1,0,0 & 0,0,1 \end{array}\right)_{B_3} \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} \\ B_1 \\ H_1 \end{array}
\begin{array}{cc} B_2 & H_2 \\ \left(\begin{array}{cc} 0,0,1 & 1,0,0 \\ 0,1,0 & 0,0,0 \end{array}\right)_{H_3} \end{array}
$$

2. Il y a six équilibres, lorsque deux joueurs choisissent une position et le troisième l'autre ;
3. On note x, y et z les probabilités respectives de choisir bas et commençons par calculer la meilleure réponse de J3. Le paiement est $(1-x)(1-y)$ en jouant B_3 et xy en jouant H_3. Comme $(1-x)(1-y) > xy \Leftrightarrow x+y < 1$, la meilleure réponse est $z = 1$ si $x + y > 1$ et $z = 0$ sinon. Si $x + y = 1$, tout z est meilleure réponse. Idem pour x et y par symétrie.

Correction

3. Soit (x, y, z) un équilibre de Nash non pur. Supposons qu'au moins deux joueurs jouent non pure, e.g., $x, y \in]0, 1[$. J1 est indifférent donc $y + z = 1$ et de même $x + z = 1$ donc $x = y = 1 - z \in]0, 1[$. Donc $x + y = 1$ et $x = y = z = \frac{1}{2}$, qui est bien un équilibre de Nash.
   Supposons qu'un seul joueur joue non pure. Les équilibres sont les profils où les deux autres joueurs jouent deux actions (pures) différentes et le premier joue une stratégie complètement mixte. Il y a une infinité d'équilibres.