# Introduction à la théorie des jeux

## Jeux à somme nulle : théorèmes de minmax généraux

Tristan Garrec

6 avril 2020

ENSTA Paris

# Cours à distance

Retrouvez l'enregistrement vidéo des transparents commentés. Attention, le fichier n'est disponible qu'un temps limité (sept jours après la mise en ligne).

Ainsi que le nouveau document en ligne,

- Pour poser toutes vos questions ;
- Pour apporter des suggestions sur le cours à distance ;
- Signaler des coquilles dans les transparents (je vous en saurais gré).

Et finalement la page du cours.

# Retour sur le cours précédent

# Correction des exercices

1. L'application $t \mapsto \mathsf{val}(A - tB)$ est continue (elle est même $\|B\|_\infty$-Lipschitz) et strictement décroissante. De plus $\lim_{t\to+\infty} \mathsf{val}(A - tB) = -\infty$ et $\lim_{t\to-\infty} \mathsf{val}(A - tB) = +\infty$. Il existe donc $v \in \mathbb{R}$ tel que $\mathsf{val}(A - vB) = 0$ ;
2. C'est une conséquence immédiate de 1. et de l'existence de stratégies optimales ;
3. On retrouve le théorème de von Neumann avec $\forall(s, t)\ B_{st} = 1$.

Soit $A$ une matrice stochastique de taille $n$. Soit $B = A - I_n$. On considère le jeu matriciel $B$. Dans ce jeu, la stratégie uniforme $\tau^*$ de J2 lui garantit $0$. Donc $\min_\tau \max_\sigma \sigma B \tau \leq 0$.

Soit une stratégie mixte $\tau$ de J2 et soit $s \in \arg\min_t \tau_t$ considéré comme une stratégie pure de J1. Alors
$sB\tau = sA\tau - s\tau = \sum_t A_{st}\tau_t - \min_t \tau_t \geq \sum_t A_{st} \min_t \tau_t - \min_t \tau_t \geq 0$.

On a montré que $\min_\tau \max_\sigma \sigma B \tau = 0$. Donc $\mathrm{val}(B) = 0$.

Soit $\sigma^*$ une stratégie optimal de J1. Comme $\tau^*$ est une stratégie optimale à support complet, $\forall t\ \sigma^* B t = 0$, donc $\sigma^* A = \sigma^*$.

# Jeux à deux joueurs et à somme nulle : le cas général

**Lemme (de l'intersection, Berge (1966))**
*Soient $C_1, \ldots, C_n$ des sous-ensembles convexes compacts non vides d'un espace vectoriel topologique localement convexe séparé.*

*On suppose que $\cup_{i=1}^n C_i$ est convexe, et que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\cap_{i \neq j} C_i$ est non vide. Alors $\cap_{i=1}^n C_i$ est non vide.*

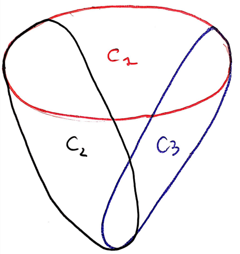


**Figure 1:** Intersection deux à deux non vide mais union non convexe

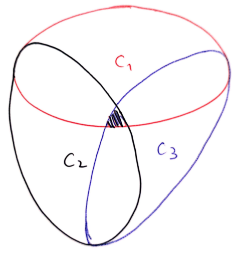


**Figure 2:** Intersection deux à deux non vide et union convexe

# Lemme de l'intersection, Berge (1966)

**Démonstration.**
On procède par récurrence. Pour $n = 1$ il n'y a rien à démontrer. Soit $n \geq 2$ et supposons le résultat vrai pour $n - 1$ et faux pour $n$. On a donc $C_1, \ldots, C_n$ convexes compacts tels que $\cap_{i=1}^{n} C_i = \emptyset$. Donc $C_n$ et $D_n = \cap_{i=1}^{n-1} C_i$ sont des convexes compacts non vides disjoints.

**Théorème (de Hahn-Banach (1927))**
*Soit $E$ un EVTLCS, $A$ et $B$ deux sous-ensembles convexes, non vides et disjoints. Si $A$ est compact et $B$ est fermé, alors il existe un hyperplan affine fermé séparant strictement $A$ et $B$.*

□

**Suite de la démonstration.**
Notons $H$ un tel hyperplan. Pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ soient $C'_i = C_i \cap H$ et $C' = (\cup_{i=1}^{n} C_i) \cap H$, qui sont convexes et compacts. $C_n \cap H = \emptyset$ implique que $C' = (\cup_{i=1}^{n-1} C_i) \cap H$ et $D_n \cap H = \emptyset$ implique que $\cap_{i=1}^{n-1} C'_i = \emptyset$.

D'après l'hypothèse de récurrence appliquée aux $C'_i$ , il existe $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que $\cap_{i=1, i\neq j}^{n-1} C'_i = \emptyset$. Soit $K = \cap_{i=1, i\neq j}^{n-1} C_i$. On a $D_n \subset K$ et $C_n \cap K \neq 0$ par hypothèse. $K$ est convexe et intersecte des ensembles séparés par $H$ donc $K \cap H \neq \emptyset$. Or $K \cap H = \cap_{i=1, i\neq j}^{n-1} C'_i = \emptyset$. $\square$

# Rappels

**Définition**
*Soit $E$ un ensemble convexe. Une application $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est quasi-concave si pour tout réel $\lambda$, la section supérieure large $\{x \in E \mid f(x) \geq \lambda\}$ est convexe.*

*$f$ est quasi-concave si $-f$ est quasi-convexe.*

**Définition**
*Soit $E$ un espace topologique. Une application $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue supérieurement (s.c.s) si pour tout réel $\lambda$, la section supérieure large $\{x \in E \mid f(x) \geq \lambda\}$ est fermée.*

*$f$ est semi-continue inférieurement si $-f$ est s.c.s.*

**Proposition**
*Si $E$ est compact et $f$ est s.c.s., alors $f$ atteint sont maximum sur $E$.*

# Le théorème de Sion (1958)

**Théorème (de Sion (1958))**
*Soit un jeu à somme nulle* $\Gamma = (S, T, g)$ *tel que*

1. $S$ *et* $T$ *sont convexes ;*
2. $S$ *ou* $T$ *est compact ;*
3. $\forall t \in T\ g(\cdot, t)$ *est quasi-concave s.c.s. et* $\forall s \in S\ g(s, \cdot)$ *est quasi-convexe s.c.i.*

*Alors* $\Gamma$ *a une valeur. De plus, si* $S$ *(resp.* $T$*) est compact, le* $\sup$ *(resp.* $\inf$*) est atteint : le joueur correspondant possède une stratégie optimale.*

# Le théorème de Sion (1958)

**Démonstration.**
Supposons que $S$ est compact et que $\Gamma$ n'a pas de valeur. Soit $v \in \mathbb{R}$ tel que $\sup_{s\in S} \inf_{t\in T} g(s,t) < v < \inf_{t\in T} \sup_{s\in S} g(s,t)$. On a donc $\forall s \in S\, \exists t \in T\ g(s,t) < v$ et $\forall t \in T\, \exists s \in S\ g(s,t) > v$.

Pour tout $t \in T$ posons $S_t = \{s \in S \mid g(s,t) < v\}$. $(S_t)_{t\in T}$ forme un recouvrement ouvert de $S$, soit $\cup_{t\in T_0} S_t \supset S$ un recouvrement fini.

Soit $T' = \operatorname{conv} T_0$, qui est compact car homéomorphe au simplexe sur $T_0$. On a $\sup_{s\in S} \inf_{t\in T'} g(s,t) < v$ car $S \subset \cup_{t\in T'} S_t$ et $v < \inf_{t\in T'} \sup_{s\in S} g(s,t)$ car l'inf est sur un ensemble plus petit.

Pour tout $s \in S$ posons $T'_s = \{t \in T' \mid g(s,t) > v\}$. $(T'_s)_{s\in S}$ forme un recouvrement ouvert de $T'$, soit $\cup_{s\in S_0} T'_s \supset T'$ un recouvrement fini.

$\square$

# Le théorème de Sion (1958)

**Suite de la démonstration.**
On a donc

$$\forall s \in \mathrm{conv} S_0\, \exists t \in T_0\ g(s,t) < v \text{ et } \forall t \in \mathrm{conv} T_0\, \exists s \in S_0\ g(s,t) > v. \qquad (1)$$

Supposons, quitte à retirer des éléments, que $(S_0, T_0)$ vérifiant (1) est minimal pour l'inclusion.

Pour tout $s \in S_0$ posons $A_s = \{t \in \mathrm{T}' \mid g(s,t) \leq v\}$ qui est un sous-ensemble convexe et compact de $T'$. On a $\cap_{s \in S_0} A_s = \emptyset$ et pour tout $s_0 \in S\ \ \cap_{s \in S_0 \setminus \{s_0\}} A_s \neq \emptyset$ par minimalité de $S_0$. D'après le lemme de l'intersection $\cup_{s \in S_0} A_s$ n'est pas convexe.

Il existe donc $t_0 \in T' \setminus \cup_{s \in S_0} A_s$ et pour tout $s \in S_0\ g(s, t_0) > v$. Comme $g(\cdot, t_0)$ est quasi-concave, on a pour tout $s \in \mathrm{conv} S_0\ g(s, t_0) > v$.

De même il existe $s_0 \in \mathrm{conv} S_0$ tel que pour tout $t \in T'\ g(s_0, t) < v$.
Finalement $v < g(s_0, t_0) < v$. $\square$

**Exercice**

On considère une famille de jeux à somme nulle $\Gamma_n = (S, T, g_n)$ où

- $(g_n : S \times T \longrightarrow \mathbb{R})_n$ est une suite décroissante de fonctions uniformément bornées, s.c.s. en $s$ pour tout $t$ ;
- Pour tout $n$, $\Gamma_n$ a une valeur notée $v_n$ ;
- $S$ est compact.

1. On pose $g = \inf_n g_n$. Montrer que $\Gamma = (S, T, g)$ a pour valeur $v = \inf v_n$ et que J1 a une stratégie optimale dans $\Gamma$ ;
2. On considère les jeux suivants (à 1 joueur), comparer la valeur $v$ de $\Gamma$ et $\lim_n v_n$.

   2.1 $S = [0, +\infty[$ et $g_n = \mathbb{1}_{s \geq n}$ ;

   2.2 $S = [0, 1]$ et $g_n$ est continue et linéaire par morceaux avec $g_n(0) = g_n\left(\frac{2}{n}\right) = g_n(1) = 0$ et $g_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$.

# Correction

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = \{s \in S \mid \inf_{t \in T} g_n(s,t) \geq v - \frac{1}{n}\}$ qui est compact car $\inf_{t \in T} g(\cdot, t)$ est s.c.s. et $S$ est compact, et non vide car $v \leq v_n$. De plus la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante donc l'intersection est non vide. Soit $s \in \cap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $s$ garantit $v$ à J1 et $\max_{s \in S} \inf_{t \in T} g(s,t) \geq v$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_n \leq v + \frac{1}{n}$ et soit $t_n$ une stratégie $\frac{1}{n}$-optimale de J2 dans $\Gamma_n$. On a pour tout $s \in S$, $g(s, t_n) \leq g_n(s, t_n) \leq v_n + \frac{1}{n} \leq v + \frac{2}{n}$.
   Donc $\inf_{t \in T} \max_{s \in S} g(s,t) \leq v$.
2. 
   2.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_n = 1$ et pour tout $s \in S$, $\inf_n g_n(s) = 0$ donc $v = 0$. $S$ n'est pas compact ;
   2.2 Idem. $(g_n)_n$ n'est pas décroissante.

# Extension mixte

On considère des jeux sans hypothèse de convexité sur les espaces d'actions.

Soit $A$ un espace métrique compact. On note $\Delta(A)$ l'ensemble des probabilités Boréliennes sur $A$. On muni $\Delta(A)$ de la topologie faible-$*$, qui en fait un espace métrique compact.

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction s.c.i., alors $\Delta(A) \ni \mu \mapsto \int_A f d\mu \in \mathbb{R}$ est également s.c.i.

Soit $\Gamma = (S, T, g)$ avec $S$ et $T$ des espaces métriques compacts, et $g$ mesurable et telle que le théorème de Fubini s'applique, l'extension mixte est le jeu $\Gamma^\Delta = (\Delta(S), \Delta(T), g)$ où $g$ est étendue bilinéairement

$$g(\sigma, \tau) = \int_{S\times T} g(s, t) d\sigma(s) \otimes d\tau(t).$$

# Théorème d'existence en stratégies mixtes

**Théorème**
*Soit un jeu à somme nulle* $\Gamma = (S, T, g)$ *tel que*

1. $S$ *et* $T$ *sont métriques compacts ;*
2. $\forall (s,t) \in S \times T$ $g(\cdot, t)$ *est s.c.s. et* $g(s, \cdot)$ *est s.c.i. ;*
3. $g$ *est bornée et mesurable par rapport à la tribu Borélienne produit* $\mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B}_T$.

*Alors l'extension mixte de* $\Gamma$ *a une valeur et chaque joueur à une stratégie optimale (mixte).*

**Exercice**

Soient $S = T = [0,1]$, soit $g : S \times T \longrightarrow \{-1, 0\}$ telle que pour tout $(s,t) \in S \times T$

$$g(s,t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t = 0 \text{ et } s < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } t = 1 \text{ et } s \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que le jeu n'a pas de valeur en stratégies pures ;
2. Montrer que les conditions du théorème de Sion sont satisfaites partout sauf en $t = 1$ ;
3. Ce jeu admet-il une valeur en stratégies mixtes ?

# Correction

1. On a $\inf_{t\in T}\sup_{s\in S} g(s,t) = 0$ et $\sup_{s\in S}\inf_{t\in T} g(s,t) = -1$.
2. $S$ et $T$ sont convexes et compacts. On vérifie que pour tout $s \in S$, $g(s,\cdot)$ est s.c.i. et pour tout $t \in T \setminus \{1\}$, $g(\cdot,t)$ est s.c.s.
   En $t = 1$ on a $\limsup_{s\to\frac{1}{2}} g(s,1) = 0 > g\left(\frac{1}{2},1\right)$ donc $g(\cdot,1)$ n'est pas s.c.s.
3. Soit $\sigma$ la stratégie uniforme de J1 sur $S$. On a $g(\sigma,t) = 0$ si $t \in ]0,1[$ et $g(\sigma,t) = -\frac{1}{2}$ sinon. Donc J1 garantit $-\frac{1}{2}$.
   Soit $\tau = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$. Alors pour tout $s \in S$ $g(s,\tau) = -\frac{1}{2}$. La valeur du jeu en stratégies mixtes est $-\frac{1}{2}$.

**Exercice**
Soient $S = T = [0,1]$, soit $g : S \times T \to \{0,1\}$ telle que pour tout $(s,t) \in S \times T$

$$g(s,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } s = t \\ -\frac{1}{s^2} & \text{si } s > t \\ \frac{1}{t^2} & \text{si } s < t. \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall t \in T \ \int_S g(s,t)ds = 1$ et $\forall s \in t \ \int_T g(s,t)dt = -1$ ;
2. Montrer que $\sup_{\sigma\in\Delta(S)} \inf_{t\in T} g(\sigma,t) > \inf_{\tau\in\Delta(T)} \sup_{s\in S} g(s,\tau)$ ;
3. Peut-on définir l'extension mixte de $(S,T,g)$ ?

# Correction

1. Soit $t \in T$, $\int_S g(s,t)ds = \int_0^t \frac{1}{t^2}ds + \int_t^1 -\frac{1}{s}ds = \frac{1}{t} + 1 - \frac{1}{t} = 1$. Et de même.
2. On a $\sup_{\sigma \in \Delta(S)} \inf_{t \in T} g(\sigma, t) \geq 1 > -1 \geq \inf_{\tau \in \Delta(T)} \sup_{s \in S} g(s, \tau)$.
3. Le théorème de Fubini ne s'applique pas :
   $\int_T \int_S g(s,t)dsdt = 1 \neq -1 = \int_S \int_T g(s,t)dtds$.