

Introduction à la **théorie des jeux**

Équilibre corrélé

Tristan Garrec

3 mai 2021

ENSTA Paris

Retrouvez l'**enregistrement vidéo des transparents commentés**. Attention, le fichier n'est disponible qu'un temps limité (sept jours après la mise en ligne).

Ainsi que la **page du cours**.

Équilibre corrélé

Motivations

- Dans les cours précédents, on a fait l'hypothèse que **les choix des joueurs étaient indépendants** les uns des autres
- En pratique, ces choix peuvent dépendre de facteurs extérieurs et donc être corrélés

Prenons un exemple :

- Lorsqu'un automobiliste arrive à une intersection, il peut choisir de la traverser ou de laisser les autres automobilistes la traverser
- Si deux automobilistes jouent des stratégies mixtes, il y a une probabilité positive qu'ils traversent en même temps
- Pour palier ce risque d'accident, on a inventé le feu rouge
- Le feu rouge informe chaque automobiliste de la stratégie pure à jouer
- Il **corrèle** les stratégies des joueurs

Exemple

Exemple (La guerre des sexes)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & T \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ T \end{array} & \left(\begin{array}{cc} 2, 1 & 0, 0 \\ 0, 0 & 1, 2 \end{array} \right) \end{array}$$

Le jeu a trois équilibres de Nash : (C, C) avec paiement $(2, 1)$; (T, T) avec paiement $(1, 2)$ et $(2/3C + 1/3T, 1/3C + 2/3T)$ avec paiement espéré $(2/3, 2/3)$.

- Les deux premiers équilibres ne sont pas symétriques
- Le troisième équilibre est symétrique mais les paiement sont inférieurs à 1

Les deux joueurs pourraient corréliser leurs actions ainsi : lancer une pièce équilibrée, si c'est face jouer (C, C) et si c'est pile jouer (T, T) . Le paiement espéré serait alors $(3/2, 3/2)$.

Puisque (C, C) et (T, T) sont des équilibres, aucun des joueurs n'a de bénéfice à dévier du choix recommandé par la pièce.

Grâce à l'exemple précédent, on remarque que si on autorise les joueurs à procéder à une loterie commune et publique avant le jeu, ils peuvent recevoir comme paiement d'équilibre toute **combinaison convexe des paiements d'équilibre du jeu d'origine**.

Question : peut-on créer un mécanisme de corrélation tel que l'ensemble des paiement d'équilibre inclue des paiements qui **ne sont pas dans l'enveloppe convexe des paiements d'équilibre du jeu initial** ?

Exemple

On considère le jeu suivant dans lequel J1 choisit une ligne, J2 une colonne et J3 une matrice

$$\begin{matrix} & L & R \\ l_B^T & \begin{pmatrix} 0, 1, 3 & 0, 0, 0 \\ 1, 1, 1 & 1, 0, 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} & L & R \\ c_B^T & \begin{pmatrix} 2, 2, 2 & 0, 0, 0 \\ 2, 2, 1 & 2, 2, 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} & L & R \\ r_B^T & \begin{pmatrix} 0, 1, 0 & 0, 0, 0 \\ 1, 1, 1 & 1, 0, 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

On montre que le seul paiement d'équilibre est (1, 1, 1) alors qu'il existe un mécanisme de corrélation qui induit comme paiement d'équilibre (2, 2, 2).

Exemple

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} L & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} l \\ B \end{matrix}^T & \begin{pmatrix} 0, 1, 3 & 0, 0, 0 \\ 1, 1, 1 & 1, 0, 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} & \begin{matrix} L & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} c \\ B \end{matrix}^T & \begin{pmatrix} 2, 2, 2 & 0, 0, 0 \\ 2, 2, 0 & 2, 2, 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} & \begin{matrix} L & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} r \\ B \end{matrix}^T & \begin{pmatrix} 0, 1, 0 & 0, 0, 0 \\ 1, 1, 1 & 1, 0, 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Le seul paiement d'équilibre est $(1, 1, 1)$: montrons que tout équilibre est de la forme $(B, L, \alpha l + (1 - \alpha)r)$.

Il existe une probabilité strictement positive que (L, c) ne soit pas joué par J2 et J3 : si J2 joue L , alors l domine strictement c donc (L, c) ne peut pas être joué avec probabilité 1.

J1 joue B : B domine faiblement T . De plus si (L, c) n'est pas joué avec probabilité 1, B donne un paiement strictement meilleur que T , donc T n'est pas joué à l'équilibre.

J2 joue L et J3 joue l ou r : une fois T éliminée, r domine strictement c , puis L domine strictement R .

Il ne reste plus que (B, L, l) et (B, L, r) , qui donnent le paiement $(1, 1, 1)$.

Exemple

$$\begin{matrix} & L & R \\ l^T & \begin{pmatrix} 0, 1, 3 & 0, 0, 0 \\ 1, 1, 1 & 1, 0, 0 \end{pmatrix} \\ B \end{matrix} \quad \begin{matrix} & L & R \\ c^T & \begin{pmatrix} 2, 2, 2 & 0, 0, 0 \\ 2, 2, 1 & 2, 2, 2 \end{pmatrix} \\ B \end{matrix} \quad \begin{matrix} & L & R \\ r^T & \begin{pmatrix} 0, 1, 0 & 0, 0, 0 \\ 1, 1, 1 & 1, 0, 3 \end{pmatrix} \\ B \end{matrix}$$

Mécanisme de corrélation avec paiement $(2, 2, 2)$:

- J1 et J2 lancent une pièce sans révéler le résultat à J3
- J1 et J2 jouent (T, L) ou (B, R) suivant le résultat
- J3 joue c

(T, L, c) et (B, R, c) sont choisis équiprobablement avec paiement $(2, 2, 2)$.

Si J3 dévie vers l ou r , son paiement espéré est $\frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{2} \times 0$. J1 et J2 ne dévient pas car 2 est leur paiement maximal dans le jeu.

Pour que ce mécanisme soit un équilibre, il est nécessaire que J1 et J2 sachent que J3 ne connaît pas le résultat du jet de pièce.

Ainsi, tout paiement de l'enveloppe convexe de l'ensemble des paiements d'équilibre peut être atteint par une loterie publique, et pour atteindre d'autre paiement il faut que la loterie ne soit pas publique, auquel cas les joueurs reçoivent des informations différentes sur son résultat.

Exemple

Exemple (Poule mouillée, ou 2 Fast 2 Furious)

Brian et Dominic se font face et roulent l'un vers l'autre sur une route à une voie. Le premier à s'écarter de la route pour éviter le carambolage perd. Si aucun ne s'écarte les deux sont blessés.

$$\begin{array}{c} L \quad R \\ \begin{array}{c} T \\ B \end{array} \left(\begin{array}{cc} 6, 6 & 2, 7 \\ 7, 2 & 0, 0 \end{array} \right)$$

Le jeu a trois équilibres : (T, R) avec paiement $(2, 7)$, (B, L) avec paiement $(7, 2)$ et $(2/3T + 1/3B, 2/3L + 1/3R)$ avec paiement $(14/3, 14/3)$.

On considère le mécanisme dans lequel un observateur extérieur choisit uniformément l'un des couples (T, L) , (T, R) et (B, L) , puis annonce à chaque joueur sa coordonnée.

Si J1 reçoit T , la probabilité conditionnelle que J2 ait reçu L est

$$\frac{1/3}{1/3+1/3} = 1/2.$$

Si J1 reçoit B , il sait que J2 a reçu L .

Exemple

$$\begin{array}{c} \\ T \\ B \end{array} \begin{array}{cc} L & R \\ \left(\begin{array}{cc} 6, 6 & 2, 7 \\ 7, 2 & 0, 0 \end{array} \right) \end{array}$$

Montrons qu'il n'y a pas de déviation unilatérale profitable de la recommandation.

Si J1 reçoit T , son paiement espéré en suivant T est $\frac{1}{2} \times 6 + \frac{1}{2} \times 2 = 4$. S'il dévie son paiement espéré est $\frac{1}{2} \times 7 + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{7}{2}$.

Si J1 reçoit B , son paiement espéré en suivant B est 7. S'il dévie son paiement est 6.

Par symétrie J2 n'a pas d'intérêt à dévier.

Le paiement espéré est $\frac{1}{3}(6, 6) + \frac{1}{3}(7, 2) + \frac{1}{3}(2, 7) = (5, 5)$, qui n'est pas dans l'enveloppe convexe des paiements d'équilibre du jeu original.

Les exemples précédents montre que pour obtenir des paiement élevés pour chaque joueur, il faut éviter le pire paiement (e.g. $(0, 0)$). Ceci ne peut être accompli si les joueurs jouent des stratégies mixtes **indépendantes**.

On a fait les hypothèses suivantes sur le jeu étendu :

- Le jeu inclue un **observateur**, qui **recommande** des stratégies aux joueurs
- L'observateur choisi ses recommandations **aléatoirement**, suivant une distribution de probabilité **connue** des joueurs
- Les recommandations sont **privées**
- Ce mécanisme est **connaissance commune** parmi tous les joueurs : chaque joueur sait que le mécanisme est utilisé, que chaque joueur sait que le mécanisme est utilisé, que chaque joueur sait que chaque joueur sait, etc.

Définition

Soit $\Gamma = (N, S, g)$ un jeu sous forme normale. Pour toute distribution de probabilité $p \in \Delta(S)$ on définit $\Gamma^*(p)$ ainsi :

- Un **observateur extérieur** choisit un profil d'actions dans S suivant p
- L'observateur révèle (et **recommande**) à chaque joueur i l'action s_i mais pas s_{-i}
- Chaque joueur i **choisit** une action $s'_i \in S_i$ (éventuellement différente de s_i)
- Le **paiement** du joueur i est $g_i(s')$

C'est un **jeu sous forme extensive** avec ensembles d'information.

Exemple

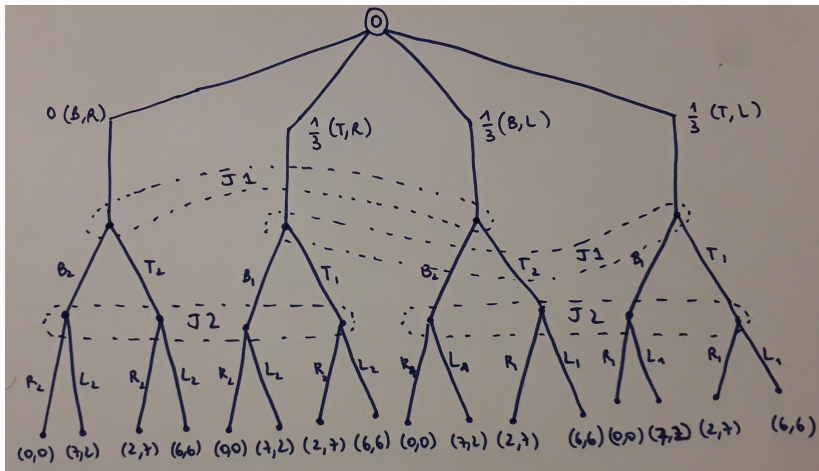


Figure 1: Poule mouillée

Définition

Une stratégie (pure) du joueur i dans le jeu $\Gamma^*(p)$ est une fonction $\tau_i : S_i \rightarrow S_i$, qui à chaque recommandation s_i de l'observateur associe une action $\tau_i(s_i) \in S_i$

La probabilité que le joueur i reçoive s_i est

$$\sum_{t_{-i} \in S_{-i}} p(s_i, t_{-i}).$$

La probabilité conditionnelle que l'observateur ait choisi (s_i, s_{-i}) est

$$p(s_{-i}|s_i) = \frac{p(s_i, s_{-i})}{\sum_{t_{-i} \in S_{-i}} p(s_i, t_{-i})}$$

si le dénominateur est strictement positif, et est non définie sinon.

Théorème

On note τ_i^* la stratégie du joueur i qui consiste à suivre la recommandation de l'observateur, i.e. $\tau_i^*(s_i) = s_i$ pour tout $s_i \in S_i$.

Théorème

Le profil τ^ est un équilibre dans le jeu $\Gamma^*(p)$ si et seulement si*

$$\sum_{s_{-i} \in S_i} p(s_i, s_{-i}) g_i(s_i, s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i} \in S_i} p(s_i, s_{-i}) g_i(s'_i, s_{-i}) \quad \forall i \forall s_i, s'_i \in S_i.$$

Définition

*Une distribution de probabilité $p \in \Delta(S)$ est un **équilibre corrélé** si le profil τ^* est un équilibre de Nash du jeu $\Gamma^*(p)$*

Tout profil de stratégies σ induit une probabilité p_σ sur S :

$$p_\sigma(s_1, \dots, s_n) = \sigma_1(s_1) \times \dots \times \sigma_n(s_n).$$

Théorème

Pour tout équilibre de Nash σ^ , la distribution de probabilité p_{σ^*} est un équilibre corrélé.*

Corollaire

Tout jeu fini admet un équilibre corrélé.

Remarque : contrairement aux équilibres de Nash, les équilibres corrélés d'un jeu sont algorithmiquement relativement facile à calculer.

Exemple

Exemple (Guerre des sexes)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & T \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ T \end{array} & \left(\begin{array}{cc} 2, 1 & 0, 0 \\ 0, 0 & 1, 2 \end{array} \right) \end{array}$$

Calculons les équilibres corrélés. Soit

$p = [\alpha(C, C), \beta(C, T), \gamma(T, C), \delta(T, T)]$. On a

$$\alpha g_1(C, C) + \beta g_1(C, T) \geq \alpha g_1(T, C) + \beta g_1(T, T)$$

$$\gamma g_1(T, C) + \delta g_1(T, T) \geq \gamma g_1(C, C) + \delta g_1(C, T)$$

$$\alpha g_2(C, C) + \gamma g_2(T, C) \geq \alpha g_2(C, T) + \gamma g_2(T, T)$$

$$\beta g_2(C, T) + \delta g_2(T, T) \geq \beta g_2(C, C) + \delta g_2(T, C)$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$$

Exemple

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & T \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ T \end{array} & \left(\begin{array}{cc} 2, 1 & 0, 0 \\ 0, 0 & 1, 2 \end{array} \right) \end{array}$$

On obtient

$$\alpha \geq 2\beta$$

$$2\delta \geq \gamma$$

$$\delta \geq 2\beta$$

$$2\alpha \geq \gamma$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$$

Exemple

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & T \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ T \end{array} & \left(\begin{array}{cc} 2, 1 & 0, 0 \\ 0, 0 & 1, 2 \end{array} \right) \end{array}$$

L'ensemble des paiements d'équilibre corrélé est donné par le triangle de sommets $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2/3, 2/3)$, qui correspondent aux valeurs de $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$ et $(2/9, 1/9, 4/9, 2/9)$ respectivement.

Dans cet exemple-ci, l'ensemble des paiements d'équilibre corrélé est donc égale à l'enveloppe convexe des paiements d'équilibre de Nash. Dans l'exemple de la poule mouillée, ces ensembles sont différents.

bifröst