ENSTA Paris — RO203

TD 5 — Introduction à la théorie des jeux

24 avril 2023

Exercice 1 On considère le jeu

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2,0 & 0,1 \\ 0,1 & 1,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Trouver tous les équilibre de Nash du jeu.
2. Décrire l'ensemble des distributions d'équilibres corrélés.

Correction :

1. Pas de Nash pur. En stratégies mixtes, l'unique équilibre est $(1/2H + 1/2B, 1/3G + 2/3D)$.
2. Soit (x, y, z, t) une distribution d'équilibre corrélé. J1 n'a pas intérêt à dévier lorsque :
   — H est recommandé si $2x \geq y$;
   — B est recommandé si $t \geq 2z$.
   De même, J2 n'a pas intérêt à dévier lorsque :
   — G est recommandé si $z \geq x$;
   — D est recommandé si $y \geq t$.
   Finalement on a $2x \geq y \geq t \geq 2z \geq 2x$ d'où $x = z = 1/6$ et $y = t = 1/3$.

Exercice 2

Trois amies souhaitent partir en vacances. Chacune peut partir (P) ou rester (R). Les préférences sont identiques pour les trois amies : chacune préfère partir à deux (peu importe avec qui), plutôt que de partir à trois, plutôt que de rester (peu importe ce que font les autres), plutôt que de partir seule. Les paiements correspondants sont respectivement 3, 1, 0 et -1.

1. Mettre le jeu sous forme normale et déterminer les équilibres de Nash en stratégie pures.
2. Avant que le jeu ne commence, une arbitre tire au hasard $i \in \{1, 2, 3\}$ selon une loi de probabilité $\mu \in \Delta(\{1, 2, 3\})$, avec probabilité strictement positive pour 1, 2 et 3. Cette probabilité μ est connue des trois amies.

   L'arbitre appelle chacune des amies de manière privée et indique à l'amie i de rester et aux de autres de partir.

   Les amis choisissent simultanément et indépendamment de rester ou de partir.

Combien de stratégie pures ont chacune des amies dans ce nouveau jeu ?

Mettre le jeu sous forme extensive sans indiquer les paiements.

3. Une amie est *accommodante*, si elle suit l'indication donnée par l'arbitre. Le profil de stratégies où les trois amies sont accommodantes est-il un équilibre ?
4. Construire une distribution d'équilibre corrélé qui donne un paiement strictement plus grand que 1 à chaque amie.

Correction :

1. Sous forme normale on a :

$$(J3:P) \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} P & R \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} 1,1,1 & 3,0,3 \\ 0,3,3 & 0,0,-1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (J3:R) \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} P & R \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} 3,3,0 & -1,0,0 \\ 0,-1,0 & 0,0,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Il y a deux équilibres de Nash en stratégies pures : (P, P, P) et (R, R, R).

2. Chaque joueur dispose de 4 stratégies pures selon la recommandation de l'arbitre : P quand P est recommandé (P_p), P quand R est recommandé (P_r), R quand P est recommandé (R_p) et enfin R quand R est recommandé (R_r).
3. Soit i le joueur auquel l'arbitre recommande de rester et μ_i la probabilité avec laquelle l'arbire lui conseille de rester. Pour les joueurs auxquels P est recommandé, il est clairement optimal d'être accommodant. Pour i en revanche, il est bénéfique de dévier. Plus formellement, si les deux autres joueurs sont accommodants, la stratégie accommodante garantit un paiement espéré de $3(1-\mu_i)$ alors que jouer toujours P donne $3(1-\mu_i)+\mu_i$.
4. Intuitivement, pour désinciter le comportement de la question précédente, l'arbitre doit construire une distribution qui rende non-profitable une déviation lorsque R est recommandé. Pour cela, il faut mettre un poids strictement positif sur le profil (R, R, R). On cherche donc une distribution du type

$$\frac{p}{3}\left((P,P,R)+(P,R,P)+(R,P,P)\right)+(1-p)(R,R,R)$$

Un joueur à qui P est recommandé n'aura pas d'intérêt à dévier si $2p/3\times 3 \geq 0$. Un joueur à qui R est recommandé n'aura pas d'intérêt à dévier si $0 \geq p/3 \times 1 + (1-p)\times(-1)$. De plus, pour garantir un paiement strictement supérieur à 1, il faut $2p/3\times 3 > 1$. On déduit donc $1/2 < p \leq 3/4$. Par symétrie entre les joueurs, on construit bien une distribution d'équilibre corrélé.