ENSTA Paris	RO203
TD 5	Introduction à la théorie des jeux
3 mai 2021	

Exercice 1 On considère le jeu

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2,0 & 0,1 \\ 0,1 & 1,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Trouver tous les équilibre de Nash du jeu.
2. Décrire l'ensemble des distributions d'équilibres corrélés.

Correction :

1. Pas de Nash pur. En stratégies mixtes, l'unique équilibre est $(1/2H + 1/2B, 1/3G + 2/3D)$.
2. Soit (x, y, z, t) une distribution d'équilibre corrélé. J1 n'a pas intérêt à dévier lorsque :
   — H est recommandé si $2x \geq y$;
   — B est recommandé si $t \geq 2z$.
   De même, J2 n'a pas intérêt à dévier lorsque :
   — G est recommandé si $z \geq x$;
   — D est recommandé si $y \geq t$.
   Finalement on a $2x \geq y \geq t \geq 2z \geq 2x$ d'où $x = z = 1/6$ et $y = t = 1/3$.

Exercice 2

Trois amies souhaitent partir en vacances. Chacune peut partir (P) ou rester (R). Les préférences sont identiques pour les trois amies : chacune préfère partir à deux (peu importe avec qui), plutôt que de partir à trois, plutôt que de rester (peu importe ce que font les autres), plutôt que de partir seule. Les paiements correspondants sont respectivement 3, 1, 0 et -1.

1. Mettre le jeu sous forme normale et déterminer les équilibres de Nash en stratégie pures.
2. Avant que le jeu ne commence, une arbitre tire au hasard $i \in \{1, 2, 3\}$ selon une loi de probabilité $\mu \in \Delta(\{1, 2, 3\})$, avec probabilité strictement positive pour 1, 2 et 3. Cette probabilité μ est connue des trois amies.

   L'arbitre appelle chacune des amies de manière privée et indique à l'amie i de rester et aux de autres de partir.

   Les amis choisissent simultanément et indépendamment de rester ou de partir.

Combien de stratégie pures ont chacune des amies dans ce nouveau jeu ?

Mettre le jeu sous forme extensive sans indiquer les paiements.

3. Une amie est *accommodante*, si elle suit l'indication donnée par l'arbitre. Le profil de stratégies où les trois amies sont accommodantes est-il un équilibre ?
4. Construire une distribution d'équilibre corrélé qui donne un paiement strictement plus grand que 1 à chaque amie.

Correction :

1. Sous forme normale on a :

$$(J3:P)\quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} P & R \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} 1,1,1 & 3,0,3 \\ 0,3,3 & 0,0,-1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (J3:R)\quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} P & R \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} 3,3,0 & -1,0,0 \\ 0,-1,0 & 0,0,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Il y a deux équilibres de Nash en stratégies pures : (P,P,P) et (R,R,R).

2. Chaque joueur dispose de 4 stratégies pures selon la recommandation de l'arbitre : P quand P est recommandé (P_p), P quand R est recommandé (P_r), R quand P est recommandé (R_p) et enfin R quand R est recommandé (R_r).
3. Soit i le joueur auquel l'arbitre recommande de rester et μ_i la probabilité avec laquelle l'arbire lui conseille de rester. Pour les joueurs auxquels P est recommandé, il est clairement optimal d'être accommodant. Pour i en revanche, il est bénéfique de dévier. Plus formellement, si les deux autres joueurs sont accommodants, la stratégie accommodante garantit un paiement espéré de $3(1-\mu_i)$ alors que jouer toujours P donne $3(1-\mu_i)+\mu_i$.
4. Intuitivement, pour désinciter le comportement de la question précédente, l'arbitre doit construire une distribution qui rende non-profitable une déviation lorsque R est recommandé. Pour cela, il faut mettre un poids strictement positif sur le profil (R,R,R). On cherche donc une distribution du type

$$\frac{p}{3}\left((P,P,R)+(P,R,P)+(R,P,P)\right)+(1-p)(R,R,R)$$

Un joueur à qui P est recommandé n'aura pas d'intérêt à dévier si $2p/3\times 3\geq 0$. Un joueur à qui R est recommandé n'aura pas d'intérêt à dévier si $0\geq p/3\times 1+(1-p)\times(-1)$. De plus, pour garantir un paiement strictement supérieur à 1, il faut $2p/3\times 3>1$. On déduit donc $1/2<p\leq 3/4$. Par symétrie entre les joueurs, on construit bien une distribution d'équilibre corrélé.

Exercice 3
Soit le jeu suivant

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 3,2 & 1,1 \\ 0,0 & 2,3 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. (a) Déterminer tous les équilibres de Nash ainsi que les paiements associés.
   (b) Trouver une distribution d'équilibre corrélé qui donne le paiement 5/2 à chaque joueur.
   (c) Écrire les inégalités qui caractérisent l'ensemble des distributions d'équilibre corrélés.
2. On suppose que le joueur 1 choisit son action avant le joueur 2 qui observe le choix du joueur 1 avant de jouer.
   (a) Représenter ce jeu sous forme extensive. Quelle est la différence avec le premier jeu en terme d'information ?
   (b) Déterminer les équilibres de Nash sous-jeu parfaits.
   (c) Représenter le jeu sous forme normale.
   (d) Déterminer les équilibres de Nash en stratégies pures. Lequel vous semble le plus pertinent ?
3. On considère dorénavant le jeu matriciel de la première question joué deux fois de suite, et que les joueurs observent les actions de la première étape avant de jouer à la deuxième. Le paiement de chaque joueur dans ce nouveau jeu est le paiement moyen obtenu dans les deux étapes.
   (a) Représenter ce jeu sous forme extensive (on pourra omettre les paiements pour simplifier). Combien chaque joueur a-t-il de stratégies ? Si le joueur 1 avait 3 actions plutôt que 2, combien aurait-il de stratégies ?
   (b) Montrer (informellement) qu'il n'existe pas d'équilibre de Nash tel que les joueurs jouent (H, D) à la première étape.
4. Supposons que le jeu est répété trois fois. Construire (informellement) un équilibre de Nash de ce jeu dans lequel les joueurs jouent (H, D) à la première étape. Cet équilibre est-il sous-jeu parfait ?

Correction :

1. (a) Deux Nash purs : (H, G) et (B, D), un Nash mixte $(3/4H + 1/4B, 1/4G + 3/4D)$ de paiement $(3/2, 3/2)$.
   (b) La distribution $\frac{1}{2}(H, G) + \frac{1}{2}(B, D)$ donne bien 5/2 à chaque joueur. On vérifie aisément qu'aucun joueur n'a intérêt à dévier des recommandations de l'arbitre.

(c) Soit (x, y, z, t) une distribution d'équilibre corrélé. J1 n'a pas intérêt à dévier lorsque :
— H est recommandé si $3x + y \geq 2y$ i.e. $3x \geq y$;
— B est recommandé si $2t \geq 3z + t$ i.e. $t \geq 3z$.
De même, J2 n'a pas intérêt à dévier lorsque :
— G est recommandé si $2x \geq x + 3z$ i.e. $x \geq 3z$;
— D est recommandé si $y + 3t \geq 2y$ i.e. $3t \geq y$.