ENSTA Paris — RO203

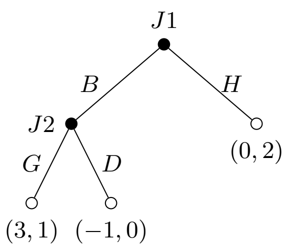
TD 4 — Introduction à la théorie des jeux

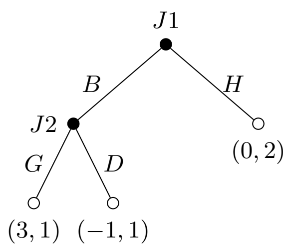
21 avril 2022

Exercice 1

Pour chacun des jeux suivants :

1. Mettre le jeu sous forme normale
2. Calculer l'ensemble des équilibres en stratégies mixtes ainsi que les paiements d'équilibre
3. Calculer les équilibres sous-jeux parfaits.





Corrigé

1. Sous forme normale, on a :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 3,1 & -1,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

   En stratégies pures on a deux équilibres : (B, G) de paiement $(3, 1)$ et (H, D) de paiement $(0, 2)$. En stratégies mixtes, toute stratégie du joueur 2 $yG + (1 - y)D$ avec $y \leq 1/4$ induit un équilibre $(H, yG + (1 - y)D)$ de paiement $(0, 2)$. L'unique équilibre en sous-jeux parfait est (B, G).

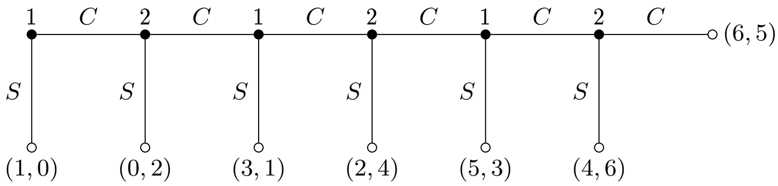
2.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 3,1 & -1,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

   On a donc deux équilibres de Nash purs : (B, G) et (H, D) de paiements respectifs $(3, 1)$ et $(0, 2)$. Les équilibres mixtes sont donnés par $\{B, yG + (1 - y)D | y \geq 1/4\}$, $\{H, yG + (1 - y)D | y \leq 1/4\}$ et $\{(xH + (1 - x)B, 1/4G + 3/4D) \,|\, x \in [0, 1]\}$. Finalement, il y a une infinité d'équilibres en sous-jeux parfaits : soit y la probabilité avec laquelle J2 joue G. Par induction amont, J1 arbitre entre $4y - 1$ et

0, d'où les équilibres sont donnés par $\{B, yG + (1-y)D | y \geq 1/4\}$, $\{H, yG + (1-y)D | y \leq 1/4\}$ et $\{(xH + (1-x)B, 1/4G + 3/4D) \mid x \in [0, 1]\}$.

Exercice 2 (Le centipède, Rosenthal (1982))
Dans le jeu sous forme extensive suivant.



1. Déterminer les équilibres sous-jeux parfaits ;
2. Commenter.

Corrigé

1. On procède par induction amont, le seul équilibre sous-jeu parfait est de jouer S (sortir) pour chaque joueur en chaque nœud. Le paiement résultant est $(1, 0)$.
2. Le paiement des deux joueurs est strictement meilleur s'ils continuent tous les deux (ne serait-ce qu'une étape chacun).

Exercice 3 (Poker simplifié)

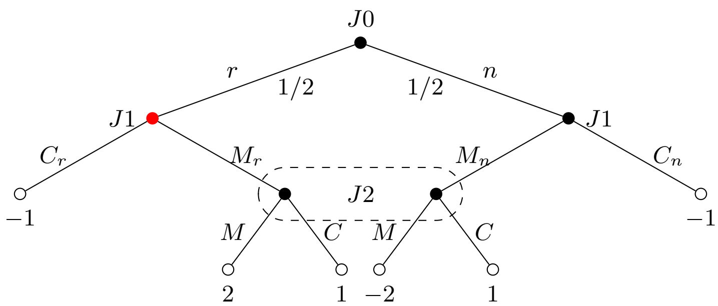
Deux joueurs jouent un jeu à somme nulle. La mise est de 1 par joueur pour commencer. Un jeu de 32 cartes est battu et le joueur 1 tire une carte et la regarde. Le joueur 2 ne voit pas la carte.

Le joueur 1 peut alors se coucher et donner sa mise au joueur 2, ou doubler sa mise. Si le joueur 1 a doublé sa mise, le joueur 2 peut soit se coucher et donner sa mise au joueur 1, soit suivre le joueur 1 en doublant sa mise.

Dans ce dernier cas, le joueur 1 dévoile sa carte, si elle est rouge il ramasse toutes les mises, si elle est noire, c'est le joueur 2 qui ramasse toutes les mises.

1. Mettre le jeu sous forme extensive ;
2. Mettre le jeu sous forme normale ;
3. Quelle est la valeur du jeu ? Quelles sont les stratégies optimales ?
4. Donner des stratégies de comportement équivalentes.

Corrigé



1.
2.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} M & C \end{array} \\ \begin{array}{c} (M_r,M_n) \\ (M_r,C_n) \\ (C_r,M_n) \\ (C_r,C_n) \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \\ -3/2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} M & C \end{array} \\ \begin{array}{c} (M_r,M_n) \\ (M_r,C_n) \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

La valeur est $\frac{0\times 0-1\times\frac{1}{2}}{0+0-1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$. On trouve comme uniques stratégies optimales $\frac{1}{3}(M_r, M_n) + \frac{2}{3}(M_r, C_n)$ et $\frac{2}{3}M + \frac{1}{3}C$ respectivement.

4. J1 : M_r en $\color{red}{\bullet}$ et $\frac{1}{3}M_n + \frac{2}{3}C_n$ en $\bullet$.
J2 : $\frac{2}{3}M + \frac{1}{3}C$.