## Exercice 1

Pour chacun des jeux suivants :

- 1. Mettre le jeu sous forme normale
- 2. Calculer l'ensemble des équilibres en stratégies mixtes ainsi que les paiements d'équilibre
- 3. Calculer les équilibres sous-jeux parfaits.



## Corrigé

1. Sous forme normale, on a:

$$\begin{array}{ccc}
 & G & D \\
 & H & 0,2 & 0,2 \\
 & B & 3,1 & -1,0
\end{array}$$

En stratégies pures on a deux équilibres : (B,G) de paiement (3,1) et (H,D) de paiement (0,2). En stratégies mixtes, toute stratégie du joueur 2 yG + (1-y)D avec  $y \leq 1/4$  induit un équilibre (H,yG + (1-y)D) de paiement (0,2). L'unique équilibre en sous-jeux parfait est (B,G).

2.

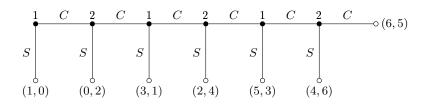
$$\begin{array}{ccc}
 & G & D \\
 & H & 0, 2 & 0, 2 \\
 & B & 3, 1 & -1, 1
\end{array}$$

On a donc deux équilibres de Nash purs : (B,G) et (H,D) de paiements respectifs (3,1) et (0,2). Les équilibres mixtes sont donnés par  $\{B,yG+(1-y)D|y\geq 1/4\}$ ,  $\{H,yG+(1-y)D|y\leq 1/4\}$  et  $\{(xH+(1-x)B,1/4G+3/4D)\,|\,x\in[0,1]\}$ . Finalement, il y a une infinité d'équilibres en sous-jeux parfaits : soit y la probabilité avec laquelle J2 joue G. Par induction amont, J1 arbitre entre 4y-1 et

0, d'où les équilibres sont donnés par  $\{B,yG+(1-y)D|y\geq 1/4\}$ ,  $\{H,yG+(1-y)D|y\leq 1/4\}$  et  $\{(xH+(1-x)B,1/4G+3/4D)\,|\,x\in[0,1]\}$ .

# Exercice 2 (Le centipède, Rosenthal (1982))

Dans le jeu sous forme extensive suivant.



- 1. Déterminer les équilibres sous-jeux parfaits;
- 2. Commenter.

#### Corrigé

- 1. On procède par induction amont, le seul équilibre sous-jeu parfait est de jouer S (sortir) pour chaque joueur en chaque nœud. Le paiement résultant est (1,0).
- 2. Le paiement des deux joueurs est strictement meilleur s'ils continuent tous les deux (ne serait-ce qu'une étape chacun).

## Exercice 3 (Poker simplifié)

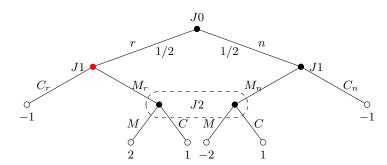
Deux joueurs joueur un jeu à somme nulle. La mise est de 1 par joueur pour commencer. Un jeu de 32 cartes est battu et le joueur 1 tire une carte et la regarde. Le joueur 2 ne voit pas la carte.

Le joueur 1 peut alors se coucher et donner sa mise au joueur 2, ou doubler sa mise. Si le joueur 1 a doublé sa mise, le joueur 2 peut soit se coucher et donner sa mise au joueur 1, soit suivre le joueur 1 en doublant sa mise.

Dans ce dernier cas, le joueur 1 dévoile sa carte, si elle est rouge il ramasse toutes les mises, si elle est noire, c'est le joueur 2 qui ramasse toutes les mises.

- 1. Mettre le jeu sous forme extensive;
- 2. Mettre le jeu sous forme normale;
- 3. Quelle est la valeur du jeu? Quelles sont les stratégies optimales?
- 4. Donner des stratégies de comportement équivalentes.

## Corrigé



1.

2.

$$\begin{pmatrix}
M & C \\
(M_r, M_n) & 0 & 1 \\
(M_r, C_n) & 1/2 & 0 \\
(C_r, M_n) & -3/2 & 0 \\
(C_r, C_n) & -1 & -1
\end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix}
M & C \\
(M_r, M_n) & 0 & 1 \\
(M_r, C_n) & 1/2 & 0
\end{pmatrix}$$

La valeur est  $\frac{0\times 0-1\times\frac{1}{2}}{0+0-1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$ . On trouve comme uniques stratégies optimales  $\frac{1}{3}(M_r,M_n)+\frac{2}{3}(M_r,C_n)$  et  $\frac{2}{3}M+\frac{1}{3}C$  respectivement.

4. J1 :  $M_r$  en • et  $\frac{1}{3}M_n + \frac{2}{3}C_n$  en •. J2 :  $\frac{2}{3}M + \frac{1}{3}C$ .