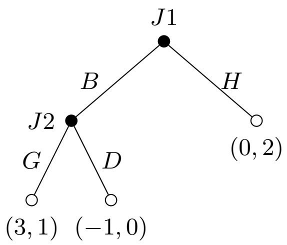
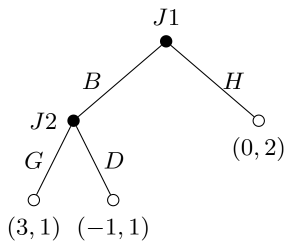
ENSTA Paris — RO203
TD 5 — Introduction à la théorie des jeux
26 avril 2021

Exercice 1
Pour chacun des jeux suivants :

1. Mettre le jeu sous forme normale
2. Calculer l'ensemble des équilibres en stratégies mixtes ainsi que les paiements d'équilibre
3. Calculer les équilibres sous-jeux parfaits.





Corrigé

1. Sous forme normale, on a :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 3,1 & -1,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

   En stratégies pures on a deux équilibres : (B, G) de paiement $(3, 1)$ et (H, D) de paiement $(0, 2)$. En stratégies mixtes, toute stratégie du joueur 2 $yG + (1 - y)D$ avec $y \leq 1/4$ induit un équilibre $(H, yG + (1 - y)D)$ de paiement $(0, 2)$. L'unique équilibre en sous-jeux parfait est (B, G).

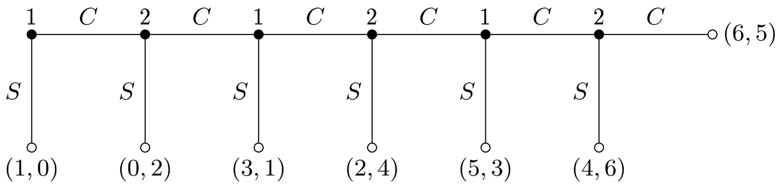
2.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 3,1 & -1,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

   On a donc deux équilibres de Nash purs : (B, G) et (H, D) de paiements respectifs $(3, 1)$ et $(0, 2)$. Les équilibres mixtes sont donnés par $\{B, yG + (1 - y)D | y \geq 1/4\}$, $\{H, yG + (1 - y)D | y \leq 1/4\}$ et $\{(xH + (1 - x)B, 1/4G + 3/4D) \,|\, x \in [0, 1]\}$. Finalement, il y a une infinité d'équilibres en sous-jeux parfaits : soit y la probabilité avec laquelle J2 joue G. Par induction amont, J1 arbitre entre $4y - 1$ et

0, d'où les équilibres sont donnés par $\{B, yG + (1-y)D | y \geq 1/4\}$, $\{H, yG + (1-y)D | y \leq 1/4\}$ et $\{(xH + (1-x)B, 1/4G + 3/4D) \mid x \in [0,1]\}$.

Exercice 2 (Le centipède, Rosenthal (1982))
Dans le jeu sous forme extensive suivant.



1. Déterminer les équilibres sous-jeux parfaits ;
2. Commenter.

Corrigé

1. On procède par induction amont, le seul équilibre sous-jeu parfait est de jouer S (sortir) pour chaque joueur en chaque nœud. Le paiement résultant est $(1, 0)$.
2. Le paiement des deux joueurs est strictement meilleur s'ils continuent tous les deux (ne serait-ce qu'une étape chacun).

Exercice 3 (Poker simplifié)

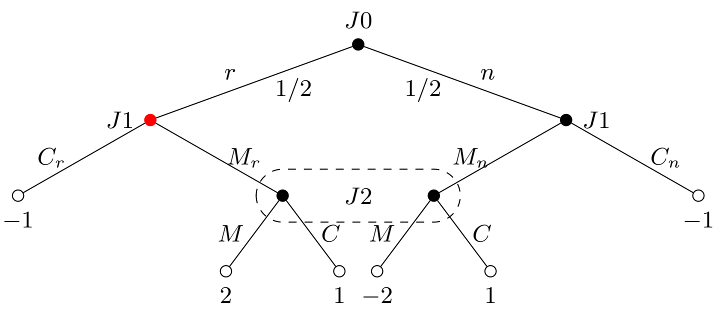
Deux joueurs jouent un jeu à somme nulle. La mise est de 1 par joueur pour commencer. Un jeu de 32 cartes est battu et le joueur 1 tire une carte et la regarde. Le joueur 2 ne voit pas la carte.

Le joueur 1 peut alors se coucher et donner sa mise au joueur 2, ou doubler sa mise. Si le joueur 1 a doublé sa mise, le joueur 2 peut soit se coucher et donner sa mise au joueur 1, soit suivre le joueur 1 en doublant sa mise.

Dans ce dernier cas, le joueur 1 dévoile sa carte, si elle est rouge il ramasse toutes les mises, si elle est noire, c'est le joueur 2 qui ramasse toutes les mises.

1. Mettre le jeu sous forme extensive ;
2. Mettre le jeu sous forme normale ;
3. Quelle est la valeur du jeu ? Quelles sont les stratégies optimales ?
4. Donner des stratégies de comportement équivalentes.

Corrigé



1.
2.

$$\begin{array}{c} \\ (M_r,M_n) \\ (M_r,C_n) \\ (C_r,M_n) \\ (C_r,C_n) \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} M & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \\ -3/2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{c} \\ (M_r,M_n) \\ (M_r,C_n) \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} M & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

La valeur est $\frac{0\times 0-1\times\frac{1}{2}}{0+0-1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$. On trouve comme uniques stratégies optimales $\frac{1}{3}(M_r,M_n)+\frac{2}{3}(M_r,C_n)$ et $\frac{2}{3}M+\frac{1}{3}C$ respectivement.

4. J1 : M_r en • et $\frac{1}{3}M_n+\frac{2}{3}C_n$ en •.
J2 : $\frac{2}{3}M+\frac{1}{3}C$.

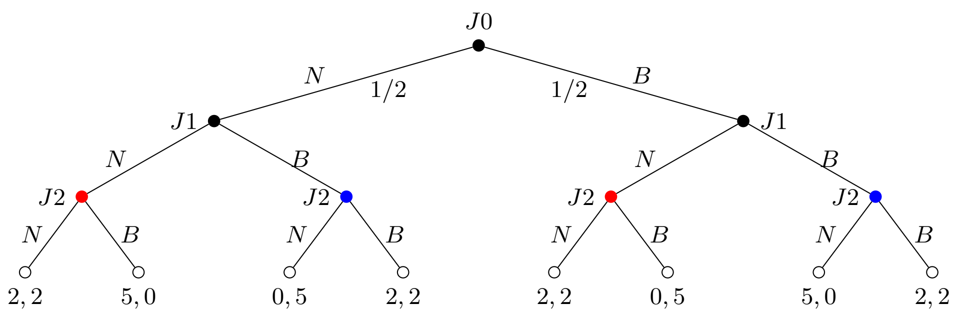
Exercice 5 (Valeur de l'information)
On considère le jeu à deux joueurs suivant :

1. Une couleur (noir ou blanc) est tirée au hasard avec probabilité $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;
2. Le joueur 1 annonce une couleur au joueur 2 ;
3. Le joueur 2 annonce une couleur.

Le paiement est 2 pour les deux joueurs s'ils annoncent la même couleur. Sinon, le paiement est 5 pour celui qui annonce la couleur tirée initialement et 0 pour l'autre.

1. Mettre le jeu sous forme extensive puis sous forme normale. Montrer qu'il y a un unique paiement d'équilibre ;
2. On suppose que le joueur 1 est informé du tirage initial et que le joueur 2 le sait. Mêmes questions ;
3. C'est désormais le joueur 2 qui est informé. Mêmes questions ;
4. Les deux joueurs sont informés. Mêmes questions.

Corrigé
Remarque : les ensembles d'information ne figurent pas sur l'arbre suivant. Ils sont décrits dans les solutions de chaque question.



1. Dans cette première question, J1 ne distingue pas ses deux noeuds. Dans la représentation sous forme extensive, il convient donc d'indiquer qu'ils appartiennent au même ensemble d'information. De même, J2 a deux ensembles d'information distincts : lorsque J1 annonce N (noeuds rouges) et lorsque J1 annonce B (noeuds bleus). On note N_n la stratégie de J2 qui consiste à annoncer N si J1 annonce N. Sous forme normale :

$$\begin{array}{c} \\ N \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \scriptstyle (N_n,N_b) & \scriptstyle (N_n,B_b) & \scriptstyle (B_n,N_b) & \scriptstyle (B_n,B_b) \end{array} \\ \begin{pmatrix} (2,2) & (2,2) & (5/2,5/2) & (5/2,5/2) \\ (5/2,5/2) & (2,2) & (5/2,5/2) & (2,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Le joueur 2 peut garantir un paiement de $(5/2, 5/2)$ à l'équilibre en jouant (B_n, N_b).

2. Désormais, J1 est informé. En revanche, J2 n'est toujours pas informé et a donc deux ensembles d'information distincts : les mêmes qu'à la première question. On note N_N la stratégie de J1 qui consiste à annoncer N si la vraie couleur est N. On a alors

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} (N_n,N_b) & (N_n,B_b) & (B_n,N_b) & (B_n,B_b) \end{array} \\ \begin{array}{c} (N_N,N_B) \\ (N_B,B_B) \\ (B_N,N_B) \\ (B_N,B_B) \end{array} & \begin{pmatrix} (2,2) & (2,2) & (5/2,5/2) & (5/2,5/2) \\ (7/2,1) & (2,2) & (5,0) & (7/2,1) \\ (1,7/2) & (2,2) & (0,5) & (1,7/2) \\ (5/2,5/2) & (2,2) & (5/2,5/2) & (2,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

A l'équilibre, J2 imite toujours le choix de J1 et l'unique paiement d'équilibre est donc $(2,2)$. Ainsi, en étant informé, J1 obtient un paiement inférieur à celui de la question 1.

3. J1 ne distingue plus les deux noeuds où il agit : il dispose du même ensemble d'information qu'à la question 1. En revanche J2 sait parfaitement dans quel noeud il se trouve lorsqu'il joue. Si seul J2 est informé, il joue toujours la vraie couleur et le seul paiement d'équilibre est $(1, 7/2)$. Ici le fait d'être informé profite à J2.

4. Si les deux joueurs sont informés, le seul paiement d'équilibre est $(2,2)$.

   On remarque que la meilleure situation pour J1 est donc celle où personne n'a d'information : celle-ci a donc une valeur négative pour lui.