ENSTA Paris — RO203
TD 2 — Introduction à la théorie des jeux
3 avril 2023

Exercice 1
On considère le jeu sous forme normale ci-dessous en stratégies pures.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} a,-1 & b,1 \\ c,1 & d,-1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Déterminer les conditions sur les paramètres pour que

1. Ce jeu admette deux équilibres de Nash ;
2. Ce jeu n'admette pas d'équilibre de Nash ;
3. Ce jeu admette un unique équilibre de Nash.

Correction

1. Si $c \geq a$ et $b \geq d$.
2. Si $a > c$ et $d > b$.
3. Tous les autres cas.

Exercice 2 (Pêche) n pêcheurs exploitent un lac. Si chaque pêcheur i pêche une quantité $s_i \geq 0$, le prix unitaire du poisson est $\max(1 - \sum_{i=1}^{n} s_i, 0)$. Chaque pêcheur vend la totalité de sa pêche à ce prix.

1. Écrire le jeu sous forme normale ;
2. Montrer qu'il existe un équilibre de Nash pour lequel les paiements sont non nuls ;
3. Comparer la pêche totale et le paiement total au cas du monopole $n = 1$.

Correction

1. $N = \{1, \ldots, n\}$, $S_i = \mathbb{R}_+$ et $g_i(s_1, \ldots, s_n) = s_i \max(1 - \sum_{j=1}^{n} s_j, 0)$;
2. Soit $(s_1, \ldots, s_n)$ un équilibre de Nash. Notons $c_{-i} = \sum_{j \neq i} s_j$ et $c = \sum_{j=1}^{n} s_j$. Supposons qu'il existe i tel que $c_{-i} < 1$. La meilleure réponse de i est $s_i = \frac{1-c_{-i}}{2}$. Donc $c < 1$ et pour tout j, $c_{-j} < 1$ donc $s_j = \frac{1-c_{-j}}{2}$.
   On a alors $s_i = \frac{1}{n+1}$ pour tout i et on a bien un équilibre de Nash et des paiements non nuls.
   À noter qu'il y a d'autres équilibres de Nash, pour lesquels les paiements sont nuls ;
3. La pêche totale est $\frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}$ et le revenu total est $\frac{n}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{4}$.

Exercice 3

Trouver tous les équilibres de Nash en stratégies mixtes ainsi que les paiements d'équilibre correspondants dans chacun des jeux suivants.

$$\begin{array}{c} \\ H \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} D & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} -3,-3 & -10,0 \\ 0,-10 & -5,-5 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ H \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} D & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2,1 & 0,0 \\ 0,0 & 1,2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ H \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} D & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1,2 & 3,1 \\ 2,0 & 0,3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Correction

1. Un unique équilibre en stratégies dominantes (B, G).
2. Deux équilibres en stratégies pures (H, D) et (B, G). Un équilibre en stratégies mixtes $\left(\left(\frac{2}{3}H, \frac{1}{3}B\right), \left(\frac{1}{3}D, \frac{2}{3}G\right)\right)$.
3. Pas d'équilibre en stratégies pures, un équilibre mixte $\left(\left(\frac{3}{4}H, \frac{1}{4}B\right), \left(\frac{3}{4}D, \frac{1}{4}G\right)\right)$

Exercice 4

Soit le jeu symétrique suivant à trois joueurs : chacun choisit simultanément de lever ou de baisser la main, et gagne s'il est seul dans sa position.

1. Mettre le jeu sous forme normale ;
2. Donner les équilibres en stratégies pures ;
3. Donner les équilibres en stratégies mixtes.

Correction

1.
$$\begin{array}{c} \\ B_1 \\ H_1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_2 & H_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,0,0 & 0,1,0 \\ 1,0,0 & 0,0,1 \end{pmatrix}_{B_3} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ B_1 \\ H_1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_2 & H_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,0,1 & 1,0,0 \\ 0,1,0 & 0,0,0 \end{pmatrix}_{H_3} \end{array}$$

2. Il y a six équilibres, lorsque deux joueurs choisissent une position et le troisième l'autre ;
3. On note x, y et z les probabilités respectives de choisir bas et commençons par calculer la meilleure réponse de J3. Le paiement est $(1-x)(1-y)$ en jouant B_3 et xy en jouant H_3. Comme $(1-x)(1-y) > xy \Leftrightarrow x + y < 1$, la meilleure réponse est $z = 1$ si $x + y < 1$ et $z = 0$ si $x + y > 1$. Si $x + y = 1$, tout z est meilleure réponse. Idem pour x et y par symétrie.

   Soit (x, y, z) un équilibre de Nash non pur. Supposons qu'au moins deux joueurs jouent non pure, e.g., $x, y \in]0, 1[$. J1 est indifférent donc $y + z = 1$ et de même $x + z = 1$ donc $x = y = 1 - z \in]0, 1[$. Donc $x + y = 1$ et $x = y = z = \frac{1}{2}$, qui est bien un équilibre de Nash.

   Supposons qu'un seul joueur joue non pure. Les équilibres sont les profils où les deux autres joueurs jouent deux actions (pures) différentes et le premier joue une stratégie complètement mixte. Il y a une infinité d'équilibres.