Introduction à la théorie des jeux

Exemples heuristiques

Tristan Garrec

23 mars 2020

ENSTA Paris

Cours à distance

Retrouvez l'enregistrement vidéo des transparents commentés. Attention, le fichier n'est disponible qu'un temps limité (sept jours après la mise en ligne).

Ainsi que le document en ligne,

- Pour poser toutes vos questions ;
- Pour apporter des suggestions sur le cours à distance ;
- Signaler des coquilles dans les transparents (je vous en saurais gré).

Et finalement la page du cours.

Présentation

Tristan Garrec

- ENSTA 2015 ;
- Master Optimisation & Théorie des jeux (Jussieu);
- Thèse de mathématiques appliquées en jeux dynamiques (TSE);
- Actuellement en postdoc (ENS Paris-Saclay en collaboration avec EDF) : mécanismes d'enchères locales pour la décentralisation du réseau électrique.

Pour me contacter : tristan.garrec@ut-capitole.fr

Ne pas hésiter à me contacter si vous souhaitez vous diriger vers la théorie des jeux ou si vous avez des questions concernant la poursuite en thèse de mathématiques après l'ENSTA.

Introduction

Introduction

La théorie des jeux est le domaine des mathématiques qui étudie les interactions stratégiques entre agents rationnels.

- *Interactions* : Il y a plusieurs agents qui interagissent, les gains des uns sont influencés par les décisions des autres ;
- *Stratégiques* : Les agents ont plusieurs décisions possibles ;
- *Rationnels* : Les agents sont supposés maximiser un gain et ne pas jouer n'importe comment.

Les agents peuvent être des entreprises, des machines, des animaux, etc, et non pas nécessairement des personnes humaines. Il faut garder en tête qu'il s'agit de modèles.

Introduction

Historiquement,

- Années 1920 : Ernst Zermelo, Émile Borel ;
- 1944 : Oskar Morgenstern et John von Neumann *Theory of Games and Economics behavior* – jeux à somme nulle ;
- Années 1950 : John Nash – équilibres dans les jeux à N joueurs (le fameux équilibre de Nash) ;
- Depuis : Harsanyi, Aumann, Maskin, Myerson, Shapley, Tirole, etc – prix Nobel d'économie ayant largement contribué à la théorie des jeux ;
- Depuis : Des applications dans de nombreux domaines...

Introduction

Applications,

- En économie ;
- En informatique (théorie des jeux algorithmique) ;
- En biologie (théorie des jeux évolutionniste) ;
- En recherche opérationnelle (jeux d'inspection, recherche-dissimulation, etc) ;
- En mathématiques (équations aux dérivées partielles, jeux différentiels, jeux à champs moyens) ;
- etc.

Introduction

Cinq séances de trois heures (en théorie) avec le découpage approximatif suivant :

1. Introduction, motivations et exemples heuristiques ;
2. Généralités sur les jeux à deux joueurs et à somme nulle ;
3. Jeux à somme nulle : cas fini et cas général ;
4. Jeux à N joueurs ;
5. Jeux sous forme extensive.

Dans ce cours nous n'aborderons pas les *jeux coopératifs*.

Supports du cours :

- Les transparents et enregistrements audio ;
- *Bases Mathématiques de la Théorie des Jeux* (2013), R. Laraki, J. Renault, S. Sorin ;
- *Mathematical Foundations of Game Theory* (2019), R. Laraki, J. Renault, S. Sorin ;
- *Game Theory* (2013), M. Maschler, E. Solan, S. Zamir.

Exemples introductifs

Mariages stables, Gale et Shapley (1962)

- Soient deux ensembles F (femmes) et H (hommes) de n éléments. Les femmes ont des préférences strictes sur les hommes et vis-versa.
- Un mariage est une bijection de H sur F. C'est donc un sous ensemble de $H \times F$ de cardinal n tel que tout élément de H est associé à exactement un élément de F, et vis-versa.
- Un mariage μ est stable s'il n'existe pas de couple alternatif $(x, y) \in H \times F$ non marié suivant μ et tel que chacun préfère son partenaire alternatif à celui qu'il a suivant μ.

Théorème
Il existe des mariages stables.

Mariages stables, Gale et Shapley (1962)

L'algorithme de Gale-Shapley

- Les femmes restent chez elles et les hommes se déplacent ;
- Le 1$^{\text{er}}$ jour : Chaque homme va chez la femme qu'il préfère. Si une femme a plusieurs propositions elle garde l'homme qu'elle préfère. Si chaque femme a exactement une proposition l'algorithme s'arrête ;
- Le $k^{\text{ème}}$ jour : Chaque homme renvoyé le jour précédent va chez la femme suivante sur sa liste. Chaque femme compare ses nouvelles propositions à l'ancienne et garde seulement l'homme qu'elle préfère. Si chaque femme a exactement un homme l'algorithme s'arrête.

Mariages stables, Gale et Shapley (1962)

Commençons par quelques remarques :

1. Les hommes descendent dans leur liste de préférences ;
2. Les femmes montent dans leur liste de préférences ;
3. Une fois qu'une femme a un homme chez elle, elle aura toujours un homme chez elle.

Mariages stables, Gale et Shapley (1962)

Je vous propose de démontrer les propriétés suivantes de l'algorithme sous forme d'exercice :

1. Montrer que l'algorithme s'arrête en au plus n^2 jours ;
2. Montrer que l'algorithme est bien défini (il induit un mariage) ;
3. Montrer que le mariage induit est stable ;
4. On donne la liste de préférences suivantes :
   - $x_1 : y_2 \succ y_1 \succ y_3 \qquad y_1 : x_2 \succ x_1 \succ x_3$
   - $x_2 : y_3 \succ y_2 \succ y_1 \qquad y_2 : x_3 \succ x_2 \succ x_1$
   - $x_3 : y_1 \succ y_3 \succ y_2 \qquad y_3 : x_1 \succ x_3 \succ x_2$

   Donner l'ensemble des mariages stables, lequel est produit par l'algorithme de Gale-Shapley ? En déduire qu'il n'y a pas unicité.

Mariages stables, Gale et Shapley (1962)

1. Montrons qu'il existe une étape à laquelle aucun homme n'est renvoyé. Un homme renvoyé par une femme ne retourne jamais chez elle. Cela implique que chaque femme renvoie au plus $n - 1$ hommes. Donc après $n(n - 1)$ étapes il n'y a plus de renvoi. Et donc après $n(n - 1) + 1$ étapes il n'y a plus de femme qui puisse rejeter d'homme.

2. Montrons qu'un homme ne peut être renvoyé par toutes les femmes. Supposons que Bob ait été renvoyé par toutes les femmes. D'après la troisième remarque, toutes les femmes ont un homme chez elles. Comme le nombre de de femmes et d'hommes sont égaux et que Bob n'est chez personne, une femme n'a personne chez elle : contradiction. L'algorithme produit donc un mariage puisque si à la fin d'une étape aucun homme n'est renvoyé, chaque femme a un homme chez elle.

Mariages stables, Gale et Shapley (1962)

3. Supposons le mariage instable. Il existe Alice et Bob qui se préfèrent l'un l'autre à leur partenaire actuel. Alice est marié à Claude et Bob à Denise. Bob préfère Alice à Denise, d'après la première remarque, Bob a visité Alice avant Denise. D'après la deuxième remarque, Alice préfère Claude à Bob : contradiction.

4. Il y a trois mariages stables : $((x_1, y_2), (x_2, y_3), (x_3, y_1))$ (produit par l'algorithme de Gale-Shapley), $((x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_3, y_2))$ et $((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))$.

Mariages stables, Gale et Shapley (1962)

L'algorithme de Gale-Shapley (généralisé) a été utilisé pour apparier des lycéens à des établissement d'enseignement supérieur par le système Admission Post Bac. Il est également utilisé aux États-Unis pour répartir les étudiants diplômés en médecine dans les différents hôpitaux.

Il est intéressant de noter (à démontrer) que l'algorithme tel qu'énoncé donne leur meilleur mariage aux hommes et leur pire aux femmes (renverser l'algorithme renverse bien sûr la conclusion). On pourrait être tenté d'en tirer la conclusion suivante : mieux vaut aller de l'avant et ne pas être passif.

Le paradoxe de Braess, Braess (1968)

Des automobilistes (flot entrant de 1) s'engagent sur un réseau routier avec comme objectif de lier l'origine o à la destination d le plus rapidement possible.

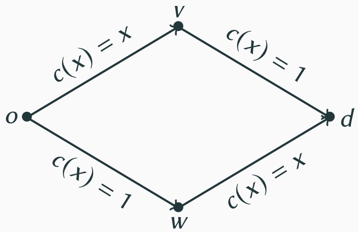

Figure 1: Un premier réseau

Le temps de parcours pour chaque route (o, v, d) et (o, w, d) est de $1 + x$. Donc le flot d'automobilistes doit se partager équitablement sur les deux routes, ce qui donne un temps de parcours de $\frac{3}{2}$.

Le paradoxe de Braess, Braess (1968)

On ajoute une voie ultra rapide de v à w. Ceci devrait améliorer le temps de transport, n'est-ce pas ?

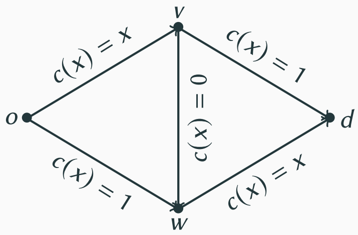

Figure 2: Ajout d'une voie ultra rapide

Le temps de parcours sur la route (o, v, w, d) est toujours meilleur que sur chacune des routes originales. Donc tout le flot doit passer par cette nouvelle route et le temps de parcours est de 2.

Le paradoxe de Braess, Braess (1968)

On constate qu'en ajoutant une route on a augmenté le temps de parcours. Pourtant, le profil consistant à séparer le flot équitablement entre les routes (o, v, d) et (o, w, d) est toujours accessible dans le second graphe.

Il ne correspond pas à un équilibre joué par des agents stratégiques mais à un optimum social, lorsque le comportement des agents est coordonné par un planificateur global.

Le prix de l'anarchie indique à quel point il est mauvais dans un système de laisser les agents agir stratégiquement à l'échelle individuelle plutôt que de les coordonner globalement.

$$\text{Prix de l'anarchie} = \frac{\text{Meilleure perfomance du système}}{\text{Perfomance du système avec des agents stratégiques}} = \frac{3/2}{2} = \frac{3}{4}.$$

Enchères de Vickrey, Vickrey (1961)

Enchère au second prix :

- Un objet est vendu aux enchères ;
- Il y a n potentiels acheteurs (les parieurs), chacun à une valeur v_i pour l'objet ;
- Chaque parieur i place dans une enveloppe un pari b_i (en euros) dans une enveloppe ;
- On ouvre les enveloppes et le joueur k qui a le plus grand pari $b_k = \max_i b_i$ gagne l'objet et paye le deuxième plus grand pari $p = \max_{i \neq k} b_i$;
- L'utilité du parieur i est donnée par

$$u_i(\mathbf{b}) = \begin{cases} v_i - p & \text{si l'objet est remporté} \\ 0 & \text{si l'objet n'est pas remporté,} \end{cases}$$

où $\mathbf{b}$ est le vecteur des paris placés et p le prix payé.

Enchères de Vickrey, Vickrey (1961)

Ce système d'enchère est celui (approximativement) utilisé par Ebay.

Il est possible d'indiquer à Ebay un montant maximum de pari. Ebay se charge alors d'augmenter votre pari jusqu'à ce que vous soyez le plus haut parieur (si possible).

Ainsi, si vous souhaitez parier 100 euros pour l'acquisition d'un téléphone, et que le plus haut pari contre vous est de 90 euros, vous n'aurez à payer que 90 euros (plus un petit incrément).

Les enchères sont également utilisées pour placer des publicités sur des pages web, allouer des fréquences radio, des concessions pétrolières, etc.

Enchères de Vickrey, Vickrey (1961)

L'enchère de Vickrey a des propriétés appréciables.

Théorème
Placer dans l'enveloppe le pari v_i est une stratégie dominante pour l'acheteur i, c'est à dire que, quelques soient les paris adverses, i ne peut obtenir une utilité strictement meilleure en pariant un autre montant.

Chaque parieur parie sa valeur, ce qui lui évite d'avoir à faire des calculs complexes (contrairement à une enchère au premier prix).

Démonstration.
Fixons i et $\mathbf{b}_{-i}$ le vecteur des paris adverses. Soit $B = \max_{j \neq i} b_j$.

Si $b_i < B$ alors $u_i(b_i, \mathbf{b}_{-i}) = 0$ et si $b_i \geq B$ alors $u_i(b_i, \mathbf{b}_{-i}) = v_i - B$.

Donc si $v_i < B$ alors $\max\{0, v_i - B\} = 0$ est atteint en pariant v_i et si $v_i \geq B$ alors $\max\{0, v_i - B\} = 0 = v_i - B$ est également atteint en pariant v_i. $\square$

Théorème
Dans une enchère de Vickrey, tout joueur qui parie sa valeur a une utilité positive.

Ainsi un parieur honnête ne peut regretter sa participation.

Démonstration.
Si $v_i < B$ alors $u_i(v_i, \mathbf{b}_{-i}) = 0$ car l'objet n'est pas remporté. Si $v_i \geq B$ alors $u_i(v_i, \mathbf{b}_{-i}) = v_i - B \geq 0$ car l'objet est remporté. $\square$

Le concours de beauté, Keynes (1936), Moulin (1986)

- Chaque participant choisit un nombre en 0 et 100 ;
- On calcule la moyenne des nombres choisis M ;
- Le gagnant est le plus proche de $\frac{1}{2}M$.

Nous allons réaliser une expérience et tenter de donner une interprétation des résultats au prochain cours. Pour cela entrer une réponse (valide, et une seule) dans ce formulaire (sans se coordonner avec ses camarades).

Un problème de partage

On doit partager un gâteau ($[0,1] \times [0,1]$) entre deux enfants. Un parent procède de la manière suivante :

- Il déplace son couteau continument de gauche à droite (de 0 vers 1) sur l'axe x ;
- Le premier enfant qui crie "stop" gagne la part à gauche de x, l'autre celle à droite ;
- Si les deux enfants crient "stop" en même temps c'est le plus jeune qui gagne la part à gauche.

La valeur totale du gâteau pour chaque enfant est 1. La valeur de la part à gauche de x est $f(x)$ pour le plus jeune et $g(x)$ pour le plus âgé. Les fonctions f et g sont continues et strictement croissantes et leur graphe va de $(0,0)$ à $(1,1)$.

Un problème de partage

1. Montrer que chaque enfant peut se garantir au moins $\frac{1}{2}$;
2. Si vous connaissez f et g et si vous êtes le plus jeune (respectivement le plus vieux), que faites vous ?
3. Si vous ne connaissez pas la fonction de l'autre enfant que faites vous ? Il n'y a pas de réponse absolue.