ENSTA Paris — RO203
TD 5 — Introduction à la théorie des jeux
25 avril 2024

Exercice 1 On considère le jeu

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2,0 & 0,1 \\ 0,1 & 1,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Trouver tous les équilibre de Nash du jeu.
2. Décrire l'ensemble des distributions d'équilibres corrélés.

Exercice 2

Trois amies souhaitent partir en vacances. Chacune peut partir (P) ou rester (R). Les préférences sont identiques pour les trois amies : chacune préfère partir à deux (peu importe avec qui), plutôt que de partir à trois, plutôt que de rester (peu importe ce que font les autres), plutôt que de partir seule. Les paiements correspondants sont respectivement 3, 1, 0 et -1.

1. Mettre le jeu sous forme normale et déterminer les équilibres de Nash en stratégie pures.
2. Avant que le jeu ne commence, une arbitre tire au hasard $i \in \{1, 2, 3\}$ selon une loi de probabilité $\mu \in \Delta(\{1, 2, 3\})$, avec probabilité strictement positive pour 1, 2 et 3. Cette probabilité μ est connue des trois amies.

   L'arbitre appelle chacune des amies de manière privée et indique à l'amie i de rester et aux de autres de partir.

   Les amis choisissent simultanément et indépendamment de rester ou de partir.

   Combien de stratégie pures ont chacune des amies dans ce nouveau jeu ?

   Mettre le jeu sous forme extensive sans indiquer les paiements.
3. Une amie est *accommodante*, si elle suit l'indication donnée par l'arbitre. Le profil de stratégies où les trois amies sont accommodantes est-il un équilibre ?
4. Construire une distribution d'équilibre corrélé qui donne un paiement strictement plus grand que 1 à chaque amie.

Exercice 3 (Transmission d'information)

Soit un jeu à deux joueurs dans lequel l'état de la Nature $k \in \{1, 2\}$ est tiré uniformément. L'état de la Nature est observé par le joueur 1 mais pas par le joueur 2.

Le joueur 1 envoie un message $m \in \{A, B\}$ au joueur 2. À son tour le joueur 2 choisit une action $a \in \{L, M, R\}$.

— Si $k = 1$, les paiements sont $(0, 6)$ si $a = L$, $(2, 5)$ si $a = M$ et $(0, 0)$ si $a = R$;
— Si $k = 2$, les paiements sont $(0, 0)$ si $a = L$, $(2, 5)$ si $a = M$ et $(2, 12)$ si $a = R$.

1. Mettre le jeu sous forme extensive et sous forme normale
2. Calculer les équilibres de Nash en stratégies pures ainsi que les paiements d'équilibre correspondants.
3. Montrer que le profile de stratégies de comportement suivant est un équilibre de Nash et calculer les paiements associés :
   — Joueur 1 : A si $k = 1$ et $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ si $k = 2$;
   — Joueur 2 : M si A et R si B.