ENSTA Paris | RO203
TD 2 | Introduction à la théorie des jeux
8 avril 2021

Exercice 1
On considère le jeu sous forme normale ci-dessous en stratégies pures.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} a, -1 & b, 1 \\ c, 1 & d, -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Déterminer les conditions sur les paramètres pour que

1. Ce jeu admette deux équilibres de Nash ;
2. Ce jeu n'admette pas d'équilibre de Nash ;
3. Ce jeu admette un unique équilibre de Nash.

Correction

1. Si $c \geq a$ et $b \geq d$.
2. Si $a > c$ et $d > b$.
3. Tous les autres cas.

Exercice 2 (Pêche)
n pêcheurs exploitent un lac. Si chaque pêcheur i pêche une quantité $s_i \geq 0$, le prix unitaire du poisson est $\max(1 - \sum_{i=1}^{n} s_i, 0)$. Chaque pêcheur vend la totalité de sa pêche à ce prix.

1. Écrire le jeu sous forme normale ;
2. Montrer qu'il existe un équilibre de Nash pour lequel les paiements sont non nuls ;
3. Comparer la pêche totale et le paiement total au cas du monopole $n = 1$.

Correction

1. $N = \{1, \ldots, n\}$, $S_i = \mathbb{R}_+$ et $g_i(s_1, \ldots, s_n) = s_i \max(1 - \sum_{j=1}^{n} s_j, 0)$;
2. Soit $(s_1, \ldots, s_n)$ un équilibre de Nash. Notons $c_{-i} = \sum_{j \neq i} s_j$ et $c = \sum_{j=1}^{n} s_j$. Supposons qu'il existe i tel que $c_{-i} < 1$. La meilleure réponse de i est $s_i = \frac{1-c_{-i}}{2}$. Donc $c < 1$ et pour tout j, $c_{-j} < 1$ donc $s_j = \frac{1-c_{-j}}{2}$.
   On a alors $s_i = \frac{1}{n+1}$ pour tout i et on a bien un équilibre de Nash et des paiements non nuls.
   À noter qu'il y a d'autres équilibres de Nash, pour lesquels les paiements sont nuls ;
3. La pêche totale est $\frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}$ et le revenu total est $\frac{n}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{4}$.

Exercice 3 (Enchères à plis scellés, partie 2)

Un bien indivisible est proposé aux enchères à $n \geq 2$ acheteurs. Chaque agent $i \in \{1, \ldots, n\}$ attribue une valeur privée v_i au bien et propose un montant b_i uniquement observé par le commissaire-priseur. On suppose que les valeurs privées sont indépendantes et identiquement distribuées selon une loi uniforme sur $[0, 1]$. Le bien est attribué à l'agent avec la plus haute mise et, en cas d'égalité, le gagnant est tiré uniformément parmi les joueurs avec la plus haute mise. On considère deux régimes tarifaires :

— *Au premier prix* : le prix payé par le vainqueur correspond au montant qu'il a enchéri ;

— *Au second prix* : le prix payé par le vainqueur correspond à la deuxième meilleure offre.

1. On considère d'abord une enchère au premier prix :
   (a) Montrer que pour $n = 2$, $\left(\dfrac{v_1}{2}, \dfrac{v_2}{2}\right)$ est un équilibre de Nash. (On supposera que les stratégies de chaque joueur sont continues et différentiables par rapport à leur valeur privée.)
   (b) Vérifier que, pour $n \geq 2$, $\left(\dfrac{(n-1)v_1}{n}, \ldots, \dfrac{(n-1)v_n}{n}\right)$ est un équilibre de Nash.
2. Comparer le revenu espéré pour le commissaire-priseur dans les deux régimes tarifaires en vous aidant du lemme suivant :

   Lemme 1 *Soit* $(x_1, \ldots, x_n)$ n *tirages indépendants d'une loi uniforme sur* $[0, 1]$ *ordonnés du plus petit au plus grand. Pour tout* $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathbb{E}(x_k) = \dfrac{k}{n+1}$.
3. Commenter.

Correction

1. On résout le modèle d'enchères au premier prix :
   (a) Soit $g_1(b_1, b_2)$ le paiement du joueur 1. On a $g_1(b_1, \frac{v_2}{2}) = v_1 - b_1$ si $v_2 < 2s_1$, 0 sinon (l'événement $\{v_1 = v_2\}$ est de mesure nulle). On a donc $\mathbb{E}\left[g_1(b_1, \frac{v_2}{2})\right] = \int_0^{2b_1} (v_1 - b_1) dv_2 = 2v_1 b_1 - 2b_1^2$. La condition du premier ordre donne $2v_1 - 4b_1 = 0$ i.e. $b_1 = \frac{v_1}{2}$ et donc $b_1 = \frac{v_1}{2}$ est bien meilleure réponse à $b_2 = \frac{v_2}{2}$. On procède symétriquement pour le joueur 2.
   (b) Soit s le profil d'actions $\left(\dfrac{(n-1)v_1}{n}, \ldots, \dfrac{(n-1)v_n}{n}\right)$. En appliquant le même raisonnement, le joueur i gagne si $\forall j \neq i$, $v_j < \frac{n}{n-1} b_i$. On obtient le paiement espéré $\mathbb{E}\left[g_i(b_i, s_{-i})\right] = [v_i - b_i] \left(\frac{n}{n-1} s_i\right)^{n-1}$.

La condition du premier ordre donne $(n-1)v_i - nb_i = 0$ d'où $b_i = \frac{n-1}{n} v_i$ est bien meilleure réponse à s_{-i}. On conclut par symétrie.

2. Dans une enchère au premier prix, le revenu espéré du commissaire-priseur est donc $\frac{n-1}{n}\mathbb{E}\left[\max_i v_i\right] = \frac{n-1}{n}\frac{n}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}$. Au second prix, le revenu du commissaire-priseur est égal à la seconde plus forte valuation, i.e. e espérance $\frac{n-1}{n+1}$.
3. On remarque que, même si les stratégies à l'équilibre diffèrent, les deux régimes tarifaires induisent le même paiement espéré pour le vendeur. De manière plus générale, en présence de n agents neutres au risque avec des valuations tirées i.i.d. selon une distribution continue, tout système d'enchère tel que le bien soit attribué à l'agent avec la plus forte valuation et que l'agent avec la plus faible valuation ait un paiement nul induit un même revenu pour le vendeur.

Exercice 4

Trouver tous les équilibres de Nash en stratégies mixtes ainsi que les paiements d'équilibre correspondants dans chacun des jeux suivants.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} D & G \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} -3,-3 & -10,0 \\ 0,-10 & -5,-5 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} D & G \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2,1 & 0,0 \\ 0,0 & 1,2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} D & G \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 1,2 & 3,1 \\ 2,0 & 0,3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Correction

1. Un unique équilibre en stratégies dominantes (B,G).
2. Deux équilibres en stratégies pures (H,D) et (B,G). Un équilibre en stratégies mixtes $\left(\left(\frac{1}{3}H, \frac{2}{3}B\right), \left(\frac{2}{3}D, \frac{1}{3}G\right)\right)$.
3. Pas d'équilibre en stratégies pures, un équilibre mixte $\left(\left(\frac{3}{4}H, \frac{1}{4}B\right), \left(\frac{1}{4}D, \frac{3}{4}G\right)\right)$

Exercice 5

Soit le jeu symétrique suivant à trois joueurs : chacun choisit simultanément de lever ou de baisser la main, et gagne s'il est seul dans sa position.

1. Mettre le jeu sous forme normale ;
2. Donner les équilibres en stratégies pures ;
3. Donner les équilibres en stratégies mixtes.

Correction

1.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_2 & H_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} B_1 \\ H_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0,0,0 & 0,1,0 \\ 1,0,0 & 0,0,1 \end{pmatrix}_{B_3} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_2 & H_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} B_1 \\ H_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0,0,1 & 1,0,0 \\ 0,1,0 & 0,0,0 \end{pmatrix}_{H_3} \end{array}$$

2. Il y a six équilibres, lorsque deux joueurs choisissent une position et le troisième l'autre ;

3. On note x, y et z les probabilités respectives de choisir bas et commençons par calculer la meilleure réponse de J3. Le paiement est $(1-x)(1-y)$ en jouant B_3 et xy en jouant H_3. Comme $(1-x)(1-y) > xy \Leftrightarrow x+y < 1$, la meilleure réponse est $z = 1$ si $x + y < 1$ et $z = 0$ si $x + y > 1$. Si $x + y = 1$, tout z est meilleure réponse. Idem pour x et y par symétrie.

   Soit (x, y, z) un équilibre de Nash non pur. Supposons qu'au moins deux joueurs jouent non pure, e.g., $x, y \in]0, 1[$. J1 est indifférent donc $y + z = 1$ et de même $x + z = 1$ donc $x = y = 1 - z \in]0, 1[$. Donc $x + y = 1$ et $x = y = z = \frac{1}{2}$, qui est bien un équilibre de Nash.

   Supposons qu'un seul joueur joue non pure. Les équilibres sont les profils où les deux autres joueurs jouent deux actions (pures) différentes et le premier joue une stratégie complètement mixte. Il y a une infinité d'équilibres.

Exercice 6 (Fenêtre sur cour)

Alertés par un cri au secours, chaque témoin peut répondre à l'appel ou l'ignorer. Un personne qui répond à l'appel reçoit un paiement égal à $1 - c$ (avec $0 < c < 1$). Si au moins une personne répond à l'appel, une personne n'ayant pas répondu à l'appel reçoit 1. Si personne ne répond à l'appel, tout le monde obtient 0.

1. Écrire le jeu sous forme normale ;
2. Déterminer l'ensemble des équilibre de Nash en stratégies mixtes en fonction de c et du nombre de témoins $N \geq 2$;
3. Commenter.

Correction

1. Les joueurs $i \in \{1, \ldots, N\}$ sont les témoins. Pour tout joueur i, l'ensemble des stratégies pures est $\{R, I\}$ (répondre, ignorer). Les paiements sont donnés par $g_i(R, s_{-i}) = 1 - c$ et

$$g_i(R, s_{-i}) = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } j \neq i \text{tel que } s_j = R \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Déterminons les équilibres de Nash en stratégies pures. Si tous les joueurs jouent I, chacun a intérêt à dévier en jouant R, il ne s'agit donc pas d'un équilibre. Si deux joueurs ou plus jouent R, chacun d'entre-eux a intérêt à dévier et il ne s'agit donc pas d'un équilibre non plus. Finalement, les seuls équilibres de Nash en stratégies pures sont les profils où un seul jouer répond à l'appel et les autres ignorent.

   Déterminons maintenant les équilibres de Nash en stratégies mixtes. Soit $(x_1, \ldots, x_N)$ un équilibre mixte, avec x_i la probabilité que met le joueur i sur R, et notons $m \geq 1$ le nombre de joueurs jouant strictement mixte. Par symétrie, supposons qu'il s'agit des m premiers joueurs. On a donc $x_i \in]0,1[$ pour $i \leq m$ et $x_i = 0$ sinon. On observe que $m \geq 2$, autrement le joueur 1 dévierait en ne jouant plus mixte. Pour tout $i \leq m$, comme $x_i \in]0,1[$, le joueur est indifférent etre R et I :

$$g_i(R, x_{-i}) = 1 - c = 1 - \prod_{j \neq i}(1 - x_j) = g_i(I, x_{-i})$$

d'où

$$c = \prod_{j \neq i}(1 - x_j) = \prod_{j \neq i, j \leq m}(1 - x_j).$$

Il est alors tentant de conclure par symétrie que $x_i = 1 - c^{1/(m-1)}$. Si l'intuition est bonne, il faut être prudent : pour certains jeux, il existe des équilibres symétriques mixtes où les joueurs jouent des probabilités différentes.

Pour être parfaitement rigoureux, il vaut mieux se défaire de la répedance en x_j en passant au produit :

$$c^m = \prod_{i' \leq m} \prod_{j \neq i}(1 - x_j) = \prod_{i' \leq m}(1 - x_{i'})^{m-1}$$

Ou encore

$$c^{m/(m-1)} = \prod_{i' \leq m}(1 - x_{i'})$$

En divisant cette relation par la seconde on obtient bien $x_i = 1 - c^{1/(m-1)}$. Reste à montrer que les profils de stratégies avec m composantes égales à $1 - c^{1/(m-1)}$ et les autres nulles sont bien des équilibres de Nash. Les joueurs jouant non pur sont indifférents entre R et I et n'ont donc pas d'intérêt à dévier. Les joueurs jouant I ont un paiement égal à $1 - c^{m/(1-m)}$. En déviant en R ils obtiennent $1 - c$, ce qui est profitable si $\frac{m}{m-1} < 1$. Ils n'ont donc pas d'intérêt à dévier et on a bien un équilibre de Nash.