Introduction à la théorie des jeux

Jeux à deux joueurs et à somme nulle

Tristan Garrec

30 mars 2020

ENSTA Paris

Cours à distance

Retrouvez l'enregistrement vidéo des transparents commentés. Attention, le fichier n'est disponible qu'un temps limité (sept jours après la mise en ligne).

Ainsi que le nouveau document en ligne,

- Pour poser toutes vos questions ;
- Pour apporter des suggestions sur le cours à distance ;
- Signaler des coquilles dans les transparents (je vous en saurais gré).

Et finalement la page du cours.

Retour sur le cours précédent

Le concours de beauté

Les réponses : 0, 0, 0, 0.45, 1, 6, 8, 10, 10, 12, 12, 15, 17, 17, 17, 17.5, 18, 20, 20, 23, 23, 24, 24.3, 33, 50, 51, 62, 63, 66, 70, 90.

$\frac{1}{2}$-moyenne des réponses : 12.58.

Nous avons mené une expérience visant à tester l'hypothèse de rationalité.

On introduit les niveaux de rationalité :

0. Choisir un nombre aléatoirement entre 0 et 100 ;
1. Croire que les autres participants sont de niveau 0, la moyenne est 50 : annoncer 25 ;
2. Croire que les autres participants sont de niveau 1, la moyenne est 25 : annoncer 12.5 ;

$\vdots$

∞ Annoncer 0.

Empiriquement le niveau de rationalité pour cette expérience se situe entre 2 et 3.

Le concours de beauté

Ainsi l'issue purement rationnelle du jeu est que chaque participant annonce 0. C'est l'unique équilibre de Nash du jeu. C'est-à-dire que si tous les participants choisissent 0, un participant n'a pas intérêt à dévier de son annonce pour annoncer un autre nombre.

Toutefois, annoncer 0 n'est rationnel que si tous les joueurs sont rationnels et que la rationalité est connaissance commune.

Correction de l'exercice

1. Soient $x^* = f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $y^* = g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$. En s'arrêtant en x^* (respectivement y^*) le plus jeune garantit $\frac{1}{2}$. En effet soit le plus âgé ne s'est pas arrêté et le plus jeune obtient $\frac{1}{2}$. Soit le plus âgé s'est arrêté en $y < x^*$ et le plus jeune obtient $1 - f(y) > 1/2$. Remarquons que le plus jeune n'a jamais intérêt à s'arrêter avant x^* (respectivement y^*).
2. Si $x^* \leq y^*$, les deux enfants s'arrêtent en y^*. Si $x^* > y^*$, le plus jeune s'arrête en x^* et le plus âgé en $x^* - \varepsilon$ (avec $\varepsilon > 0$ très petit).
3. Une stratégie prudente consiste à s'arrêter en x^* (respectivement y^*).

Jeux à deux joueurs et à somme nulle

Jeux à deux joueurs et à somme nulle

Un jeu à deux joueurs et à somme nulle est un triplet $\Gamma = (S, T, g)$ où

- S est l'ensemble d'actions (ou de stratégies) non vide du joueur 1 (J1) ;
- T est l'ensemble d'actions non vide du joueur 2 (J2) ;
- $g : S \times T \to \mathbb{R}$ bornée, est la fonction de paiement de J2 à J1.

J1 et J2 choisissent simultanément des actions $s \in S$ et $t \in T$. J2 paie alors la somme $g(s, t)$ à J1. J1 cherche donc à maximiser $g(s, t)$ et J2 à minimiser $g(s, t)$.

Exemple

Lorsque S et T sont finis, on parle de jeu fini, ou de jeu matriciel que l'on représente sous la forme d'une matrice.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

J1 choisit une ligne et J2 une colonne. Ici, si les joueurs choisissent la même action c'est J1 qui gagne, sinon c'est J2. On appelle ce jeu *matching pennies*.

Questions :

- Comment doivent jouer les joueurs ?
- Quelle est la valeur du jeu, c'est-à-dire le paiement si les joueurs jouent bien ?

Valeur en stratégies pures

Définition
Le sup inf *du jeu* Γ*, noté* $\underline{v}(\Gamma)$ *(ou simplement* $\underline{v}$*) est la quantité*

$$\underline{v} = \sup_{s \in S} \inf_{t \in T} g(s,t)$$

Lorsque le sup *et l'*inf *sont atteints on parle également de* max min*.*

Proposition
$\underline{v}$ *est caractérisé par*

$$\begin{aligned} \textit{J1 garantit } \underline{v} \textit{ à } \varepsilon \textit{ près} &: \forall \varepsilon > 0\ \exists s \in S\ \forall t \in T \quad g(s,t) \geq \underline{v} - \varepsilon \\ \textit{J2 défend } \underline{v} \textit{ à } \varepsilon \textit{ près} &: \forall \varepsilon > 0\ \forall s \in S\ \exists t \in T \quad g(s,t) \leq \underline{v} + \varepsilon \end{aligned}$$

Interprétation : $\underline{v}$ est la valeur du jeu dans lequel J1 choisit son action s et l'annonce à J2, qui choisit son action en fonction de s.

Il en va de même pour l'inf sup noté $\overline{v}$.

Valeur en stratégies pures

Exemple
Reprenons *matching pennies* :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $\underline{v} = -1$ et $\overline{v} = 1$.

Proposition

$$\underline{v} \leq \overline{v}.$$

Démonstration.

$$\forall (s,t) \in S \times T \; g(s,t) \leq \sup_{s \in S} g(s,t)$$

$$\forall s \in S \; \inf_{t \in T} g(s,t) \leq \inf_{t \in T} \sup_{s \in S} g(s,t)$$

Valeur en stratégies pures

La quantité $\overline{v} - \underline{v}$ est le saut de dualité.

Définition
Si $\underline{v} = \overline{v}$ le jeu a une valeur (en stratégies pures), égale à $\underline{v} = \overline{v}$ et notée v.

Interprétation : v est le paiement de J2 à J1 si les joueurs jouent bien.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$v = 1$.

Stratégies optimales

Définition
Soit $\varepsilon > 0$*. Une stratégie* $s \in S$ *est* sup inf ε*-optimale pour J1 si elle lui garantit* $\underline{v} - \varepsilon$*, i.e.,*

$$\forall t \in T \; g(s,t) \geq \underline{v} - \varepsilon.$$

Il en va de même pour J2.

Point-selle

Définition
Le couple d'actions (s^*, t^*) est un point-selle si

$$\forall (s,t) \in S \times T \; g(s,t^*) \leq g(s^*,t^*) \leq g(s^*,t).$$

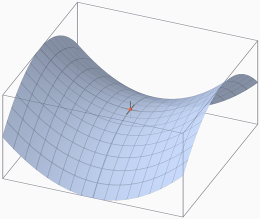

Figure 1: Un point-selle

En un point-selle aucun joueur n'a de déviation profitable.

Point-selle

Proposition
S'il existe un point-selle (s^*, t^*)*, alors le jeu a une valeur* $g(s^*, t^*)$*. De plus* s^* *et* t^* *sont des stratégies optimales.*

Réciproquement,

Proposition
Si un jeu a une valeur v *et des stratégies optimales* (s^*, t^*) *alors* (s^*, t^*) *est un point-selle et* $v = g(s^*, t^*)$*.*

Ces propriétés relient une propriété jointe (point-selle) à des propriétés unilatérales (stratégies optimales).

Propriétés de l'opérateur valeur

Proposition
Soient $c \in \mathbb{R}$, $\Gamma = (S, T, g)$, $\Gamma' = (S, T, g')$ *et* $\Gamma'' = (S, T, g + c)$. *Alors*

- *Monotonie :* $g \leq g' \Rightarrow \underline{v}(\Gamma) \leq \underline{v}(\Gamma')$ *;*
- *Translation des constantes :* $\underline{v}(\Gamma'') = \underline{v}(\Gamma) + c$

Corollaire
Non dilatation : pour tout (g, g'),

$$|\underline{v}(\Gamma) - \underline{v}(\Gamma')| \leq \|g - g'\|_\infty$$

Démonstration.
On a $g \leq g' + \|g - g'\|_\infty$ et on applique l'opérateur. □

On a les mêmes propriétés pour $\overline{v}$, (et donc pour v s'il existe).

Stratégies dominées

Définition
La stratégie $s' \in S$ est strictement dominée par $s \in S$ si
$\forall t \in T \; g(s', t) < g(s, t)$.

La stratégie $s' \in S$ est faiblement dominée par $s \in S$ si
$\forall t \in T \; g(s', t) \leq g(s, t)$ *et* $\exists t \in T \; g(s', t) < g(s, t)$.

Proposition

- *Soit* $\Gamma = (S, T, g)$, *soit* $s' \in S$ *une stratégie faiblement dominée et soit* $\Gamma' = (S \setminus \{s'\}, T, g)$. *Alors* $\underline{v}(\Gamma) = \underline{v}(\Gamma')$, *et de même pour* $\overline{v}$.
- *De plus si s' est strictement dominée et que le* max min *existe (e.g. le jeu est fini) alors s' n'est pas optimale dans* Γ.

Démonstration.

- Considérer le jeu ou l'on remplace s' par s et appliquer la monotonie.
- On a $\exists t \in T \; g(s, t) \leq \underline{v}$. Donc $g(s', t) < \underline{v}$, s' n'est pas optimale.

$\square$

Éliminations successives de stratégies dominées

La propriété précédente permet, quand on cherche la valeur d'un jeu, d'éliminer les stratégies faiblement dominées. Si l'on cherche également les stratégies optimales, on ne peut éliminer que les stratégies strictement dominées.

Exercice
Par éliminations successives des stratégies strictement dominées, donner la valeur et les stratégies optimales du jeu suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 9 \\ 6 & 1 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 6 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Correction

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 9 \\ 7 & 5 & 6 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 6 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$$

Exercice
Soit $\Gamma = (\mathbb{N}, \mathbb{N}, g)$ où $g(s,t) = \frac{1}{s+t+1}$.

1. Calculer l'inf sup et le sup inf du jeu. A-t-il une valeur ?
2. Quelles sont les stratégies optimales des joueurs ?
3. Montrer que 0 est une stratégie strictement dominante de J1 (i.e. $\forall (s,t)\ g(0,t) > g(s,t)$). Commenter.

Correction

1. $\forall t \ \sup_s \frac{1}{s+t+1} = \frac{1}{t+1}$ donc $\inf_t \sup_s \frac{1}{s+t+1} = 0$. $\forall s \ \inf_t \frac{1}{s+t+1} = 0$ donc $\sup_s \inf_t \frac{1}{s+t+1} = 0$. $v = 0$.
2. $\forall s \forall t \ g(s,t) \geq 0 = v$, donc toute stratégie de J1 est optimale.
   $\forall t \exists s \ g(s,t) > 0 = v$, donc aucune stratégie de J2 n'est optimale.
3. $\forall s \geq 1 \ g(0,t) = \frac{1}{t+1} \geq \frac{1}{s+t+1} = g(s,t)$. Tout $s \geq 1$ est une stratégie strictement dominée et optimale de J1 (mais le max min n'existe pas).

Le cas fini

Extension mixte

On suppose S et T finis. Reprenons à nouveau l'exemple de *matching pennies* :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce je n'a pas de valeur (en stratégies pures). Pour palier à cela, on va autoriser les joueurs à choisir leur action aléatoirement. Mathématiquement, ceci permet de convexifier les ensembles d'actions.

Si A est un ensemble fini de cardinal n on note $\Delta(A)$ l'ensemble des probabilités sur A (ou le simplexe sur A) :

$$\Delta(A) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^A \,|\, \forall i \in A\, x_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i \in A} x_i = 1 \right\}.$$

Un élément de $\Delta(S)$ ou $\Delta(T)$ est appelé stratégie mixte.

Extension mixte

L'extension mixte du jeu fini $\Gamma = (S, T, g)$ est le jeu $\Gamma^{\Delta} = (\Delta(S), \Delta(T), g)$ où g est étendue multilinéairement :

$$g(\sigma, \tau) = \mathbb{E}_{\sigma,\tau}[g] = \sum_{(s,t) \in S \times T} \sigma_s \tau_t g(s, t).$$

Avec le représentation matricielle $A = (g(s, t))_{(s,t) \in S \times T}$ on écrit également le paiement sous forme bilinéaire

$$g(\sigma, \tau) = \sigma A \tau.$$

Le théorème du minmax

Théorème (du minmax, von Neumann (1928))
Soit A une matrice réelle $S \times T$. Il existe $(\sigma^*, \tau^*, v) \in \Delta(S) \times \Delta(T) \times \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (\sigma, \tau) \in \Delta(S) \times \Delta(T) \quad \sigma A \tau^* \leq v \leq \sigma^* A \tau.$$

L'extension mixte du jeu matriciel a une valeur et les joueurs ont des stratégies optimales.

Le réel v est unique, c'est la valeur (en stratégies mixtes) de la matrice A :

$$v = \max_{\sigma \in \Delta(S)} \min_{\tau \in \Delta(T)} \sigma A \tau = \min_{\tau \in \Delta(T)} \max_{\sigma \in \Delta(S)} \sigma A \tau.$$

Valeur en stratégie mixte

Proposition

$$\underline{v}(\Gamma) \leq v(\Gamma^\Delta) \leq \overline{v}(\Gamma).$$

Lemme

$$\min_{\tau\in\Delta(T)} \max_{\sigma\in\Delta(S)} g(\sigma,\tau) = \min_{\tau\in\Delta(T)} \max_{s\in S} g(s,\tau),$$

Le joueur qui joue en deuxième peut jouer en stratégies pures.

Démonstration.
Montrons $\forall \tau \in \Delta(T)$ $\max_{s\in S} g(s,\tau) = \max_{\sigma\in\Delta(S)} g(\sigma,\tau)$. $S \subset \Delta(S)$ implique $\max_{s\in S} g(s,\tau) \leq \max_{\sigma\in\Delta(S)} g(\sigma,\tau)$. Et $\forall \sigma \in \Delta(S)$ $g(\sigma,\tau) = \sum_{(s,t)} \sigma_s \tau_t g(s,t) = \sum_s \sigma_s g(s,\tau) \leq \sum_s \sigma_s \max_s g(s,\tau) = \max_s g(s,\tau)$. $\square$

Propriétés des stratégies optimales

Proposition

1. *Tout jeu fini admet un point-selle (en stratégies mixtes) ;*
2. *Tout point-selle* (σ^*, τ^*) *vérifie* $v = g(\sigma^*, \tau^*)$ *;*
3. (σ^*, τ^*) *est un point-selle si et seulement si*

$$\forall (s,t) \in S \times T \ g(s, \tau^*) \leq g(\sigma^*, \tau^*) \leq g(\sigma^*, t) \,;$$

4. *Si* (σ^*, τ^*) *est un couple de stratégies optimales, et si* $\sigma^*_s > 0$ *alors* $g(s, \tau^*) = v$ *;*
5. *Si* (σ^*, τ^*) *est un couple de stratégies optimales, et si* $\sigma^*_s > 0$ *et* $\sigma^*_{s'} > 0$, *alors* $g(s, \tau^*) = g(s', \tau^*)$.

Démonstration.
Les points 1. et 2. sont des reformulations du théorème du minmax. Le point 3. découle du lemme précédent. $\square$

Démonstration.
Montron 4. et supposons que $g(s,\tau^*) \neq v$. Comme τ^* est optimale on a $g(s,\tau^*) < v$ et $\forall s \in S\ g(s,\tau^*) \leq v$. Par linéarité $g(\sigma^*,\tau^*) = \sum_{s\in S} \sigma^*_s g\left(s,\tau^*\right) < \sum_{s\in S} \sigma^*_s v$ car $\sigma^*_s > 0$, ce qui contredit 2.

Le point 5. est une conséquence du 4. □

Les points 4. et 5. sont en pratique utiles pour calculer la valeur et les stratégies optimales de jeux simples.

Exemple

Exemple

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

La stratégie δ_2 de J1 est strictement dominée par la stratégie mixte $0.49\delta_1 + 0.51\delta_3$, on l'élimine sans changer la valeur du jeu et les stratégies optimales. Soit (σ, τ) un couple de stratégies optimales. Clairement $\sigma = \delta_1$ et $\sigma = \delta_3$ sont impossibles. Notons $\sigma = p\delta_1 + (1-p)\delta_3$ avec $p \in]0,1[$ et $\tau = q\delta_1 + (1-q)\delta_2$. On a $3q - (1-q) = -2q + (1-q)$ donc $q = \frac{2}{7} \in]0,1[$. Donc $3p - 2(1-p) = -p + (1-p)$, et donc $p = \frac{3}{7}$. On calcule $v = \frac{1}{7}$.

Exemple
Dans le jeu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

soit il existe un couple de stratégies optimales pures, soit les stratégies optimales sont complètement mixtes et la valeur vaut

$$v = \frac{ad - bc}{a + d - b - c}.$$

Exercices

Exercice
Soient A et B deux matrices réelles $S \times T$ avec $B_{st} > 0$ pour tout $(s,t) \in S \times T$. On note val(A) la valeur (en stratégies mixtes) du jeu matriciel A.

1. Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}$ tel que val$(A - vB) = 0$;
2. En déduire le théorème de Loomis

Théorème (de Loomis, 1946)
Il existe $(\sigma, \tau, v) \in \Delta(S) \times \Delta(T) \times \mathbb{R}$ tel que

$$\sigma A \geq v\sigma B \text{ et } A\tau \leq vB\tau.$$

3. Remarquer que le théorème de Loomis généralise le théorème de von Neumann.

Exercice
Montrer que toute matrice stochastique admet une probabilité invariante.