Exercice 1 Résoudre les jeux matriciels suivants, i.e. donner la valeur et les stratégies optimales :

Exercice 2 (Jeu diagonal)

Soient $a_1, \ldots, a_n > 0$ et $G = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$. Donner la valeur du jeu matriciel G ainsi qu'un couple de stratégies optimales.

Exercice 3 (Jeu symétrique)

On appelle jeu symétrique un jeu matriciel tel que $S_1 = S_2$ et $G = -G^t$. Montrer que la valeur d'un jeu symétrique est nulle.

Exercice 4 (Théorème de Loomis, 1946)

Soient A et B deux matrices réelles $S \times T$ avec $B_{st} > 0$ pour tout $(s, t) \in S \times T$. On note val(A) la valeur (en stratégies mixtes) du jeu matriciel A.

- 1. Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}$ tel que val(A vB) = 0;
- 2. En déduire le théorème de Loomis : Il existe $(\sigma, \tau, v) \in \Delta(S) \times \Delta(T) \times \mathbb{R}$ tel que

$$\sigma A \ge v \sigma B$$
 et $A\tau \le v B\tau$.

3. Remarquer que le théorème de Loomis généralise le théorème de von Neumann.

Exercice 5 (Un jeu non fini)

Soit
$$\Gamma = (\mathbb{N}, \mathbb{N}, g)$$
 où $g(s, t) = \frac{1}{s+t+1}$.

- 1. Calculer l'inf sup et le sup inf du jeu. A-t-il une valeur?
- 2. Quelles sont les stratégies optimales des joueurs?
- 3. Montrer que 0 est une stratégie strictement dominante de J1 (i.e. $\forall (s,t) \ g(0,t) > g(s,t)$). Commenter.

Exercice 6 (Probabilité invariante)

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si chaque élément est positif et si la somme des éléments d'une ligne vaut 1.

Un vecteur (ligne) $\mu \in \mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont positives et somment à 1 est appelé probabilité invariante par A si $\mu A = \mu$.

Montrer que toute matrice stochastique admet une probabilité invariante.