ENSTA Paris — RO203

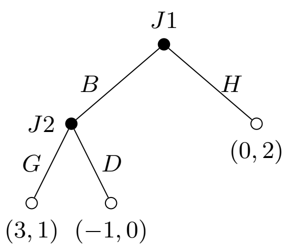
TD 4 — Introduction à la théorie des jeux

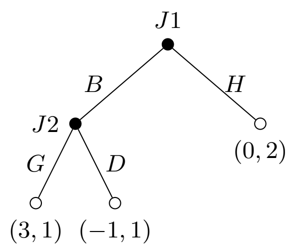
11 avril 2024

Exercice 1

Pour chacun des jeux suivants :

1. Mettre le jeu sous forme normale
2. Calculer l'ensemble des équilibres en stratégies mixtes ainsi que les paiements d'équilibre
3. Calculer les équilibres sous-jeux parfaits.





Corrigé

1. Sous forme normale, on a :

$$\begin{array}{c} \\ H \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 3,1 & -1,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

En stratégies pures on a deux équilibres : (B,G) de paiement $(3,1)$ et (H,D) de paiement $(0,2)$. En stratégies mixtes, toute stratégie du joueur 2 $yG+(1-y)D$ avec $y \leq 1/4$ induit un équilibre $(H, yG+(1-y)D)$ de paiement $(0,2)$. L'unique équilibre en sous-jeux parfait est (B,G).

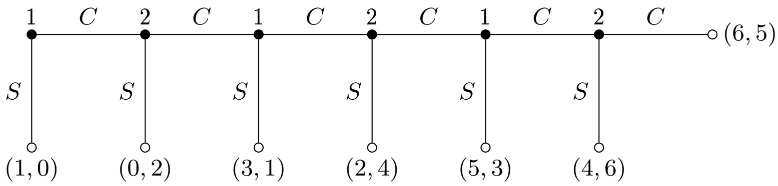
2.

$$\begin{array}{c} \\ H \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 3,1 & -1,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On a donc deux équilibres de Nash purs : (B,G) et (H,D) de paiements respectifs $(3,1)$ et $(0,2)$. Les équilibres mixtes sont donnés par $\{B, yG+(1-y)D | y \geq 1/4\}$, $\{H, yG+(1-y)D | y \leq 1/4\}$ et $\{(xH+(1-x)B, 1/4G+3/4D) \,|\, x \in [0,1]\}$. Finalement, il y a une infinité d'équilibres en sous-jeux parfaits : soit y la probabilité avec laquelle J2 joue G. Par induction amont, J1 arbitre entre $4y-1$ et

0, d'où les équilibres sont donnés par $\{B, yG + (1-y)D | y \geq 1/4\}$, $\{H, yG + (1-y)D | y \leq 1/4\}$ et $\{(xH + (1-x)B, 1/4G + 3/4D) \mid x \in [0,1]\}$.

Exercice 2 (Le centipède, Rosenthal (1982))
Dans le jeu sous forme extensive suivant.



1. Déterminer les équilibres sous-jeux parfaits ;
2. Commenter.

Corrigé

1. On procède par induction amont, le seul équilibre sous-jeu parfait est de jouer S (sortir) pour chaque joueur en chaque nœud. Le paiement résultant est $(1, 0)$.
2. Le paiement des deux joueurs est strictement meilleur s'ils continuent tous les deux (ne serait-ce qu'une étape chacun).

Exercice 3 (Poker simplifié)

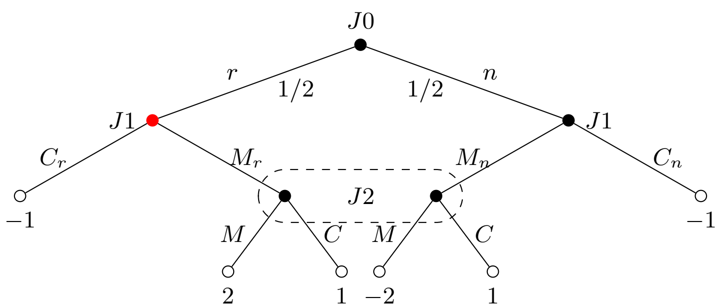
Deux joueurs jouent un jeu à somme nulle. La mise est de 1 par joueur pour commencer. Un jeu de 32 cartes est battu et le joueur 1 tire une carte et la regarde. Le joueur 2 ne voit pas la carte.

Le joueur 1 peut alors se coucher et donner sa mise au joueur 2, ou doubler sa mise. Si le joueur 1 a doublé sa mise, le joueur 2 peut soit se coucher et donner sa mise au joueur 1, soit suivre le joueur 1 en doublant sa mise.

Dans ce dernier cas, le joueur 1 dévoile sa carte, si elle est rouge il ramasse toutes les mises, si elle est noire, c'est le joueur 2 qui ramasse toutes les mises.

1. Mettre le jeu sous forme extensive ;
2. Mettre le jeu sous forme normale ;
3. Quelle est la valeur du jeu ? Quelles sont les stratégies optimales ?
4. Donner des stratégies de comportement équivalentes.

Corrigé



1.
2.

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} M & C \end{array} \\
\begin{array}{c} (M_r,M_n) \\ (M_r,C_n) \\ (C_r,M_n) \\ (C_r,C_n) \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \\ -3/2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

3.

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} M & C \end{array} \\
\begin{array}{c} (M_r,M_n) \\ (M_r,C_n) \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

La valeur est $\frac{0\times 0-1\times\frac{1}{2}}{0+0-1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$. On trouve comme uniques stratégies optimales $\frac{1}{3}(M_r, M_n) + \frac{2}{3}(M_r, C_n)$ et $\frac{2}{3}M + \frac{1}{3}C$ respectivement.

4. J1 : M_r en $\color{red}{\bullet}$ et $\frac{1}{3}M_n + \frac{2}{3}C_n$ en $\bullet$.
   J2 : $\frac{2}{3}M + \frac{1}{3}C$.

Exercice 4 (Chomp)

Soient n et m deux entiers strictement positifs. Le Chomp est le jeu à information parfaite suivant.

Deux jours jouent sur un damier de dimensions $n \times m$. Chaque joueur coche à tour de rôle une case (x, y) du damier, ce qui recouvre également toutes les cases (x', y') telles que $x' \geq x$ et $y' \geq y$. Le joueur qui coche la case $(1, 1)$ perd.

1. Montrer que le joueur qui joue en premier a une stratégie gagnante.
2. Donner une stratégie gagnante lorsque $n = m$.
3. On suppose que $n = 2$ et $m = +\infty$, quel joueur possède une stratégie gagnante ?
4. On suppose que $n \geq 3$ et $m = +\infty$, quel joueur possède une stratégie gagnante ?

Corrigé

1. Chomp est un jeu à information parfaite. D'après le théorème de Zermelo, soit le joueur 1 a une stratégie gagnante, soit le joueur 2 a une stratégie gagnante.

   Supposons que le joueur 2 a une stratégie gagnante. Alors le joueur 1 peut gagner en jouant la stratégie du joueur 2.
2. Jouer $(2, 2)$ puis le symétrique du joueur 2 par rapport à la diagonale.
3. Le joueur 2 a une stratégie optimale. Soit le joueur 1 joue sur la première colonne et on est ramené au premier jeu dans lequel le joueur 2 commence. Soit le joueur 1 joue sur la deuxième $(2, k)$ colonne et le joueur 2 joue $(1, k + 1)$ et ainsi de suite.
4. Le joueur 1 gagne en se ramenant au jeu de la question précédente dans lequel le joueur 2 commence.