

Exercice 1 Résoudre les jeux matriciels suivants, i.e. donner la valeur et les stratégies optimales :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} G & M & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ M \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} G & M & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

Corrigé

Première matrice : On remarque que B est strictement dominée pour J1 par $0, 5H + 0, 5M$, on peut donc l'éliminer. Dans le jeu réduit, D est désormais strictement dominée pour J2 par $1/3G + 2/3M$, on l'élimine donc. Dans le jeu 2x2 restant, il n'y a pas d'équilibre de Nash en stratégies pures. Soit x la probabilité que J1 met sur H , y celle que J2 met sur G . Supposons $x \in]0, 1[$. J1 est alors indifférent entre H et M d'où $y + 7(1 - y) = 9y + (1 - y)$ donc $y = 3/7$. Comme $y \in]0, 1[$, on déduit que $x + 9(1 - x) = 7x + (1 - x)$ d'où $x = 4/7$. Finalement, le seul équilibre de Nash du jeu est $((4/7, 3/7, 0), (3/7, 4/7, 0))$ et la valeur du jeu est $31/7$.

Seconde matrice : Le jeu n'admet pas d'équilibre en stratégies pures. Aucune stratégie n'est strictement dominée. Soit x la probabilité que J1 met sur H , y_1 celle que J2 met sur G et y_2 sur M . Supposons $y_1, y_2 \in]0, 1[, y_1 + y_2 < 1$. Il vient $2x + (1 - x) = 5x = 2(1 - x) \Rightarrow x = 0$ or J1 ne joue pas pur à l'équilibre. Supposons $y_1 = 0$. On a alors $5x = 2(1 - x) \Rightarrow x = 2/7$ d'où $y_2 = 2/7$ ce qui donnerait $v = 10/7$. Alternativement, on suppose $y_2 = 0$. On a alors $2x + (1 - x) = 2(1 - x) \Rightarrow x = 2/3$ d'où on déduit $y_1 = 2/3$ et $v = 4/3 < 10/7$. Par unicité de la valeur, à l'équilibre on a bien $y_2 = 0$ et l'unique équilibre de Nash mixte est donné par $((2/3, 1/2), (2/3, 0, 1/3))$.

Exercice 2 (Jeu diagonal)

Soient $a_1, \dots, a_n > 0$ et $G = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$. Donner la valeur du jeu matriciel G ainsi qu'un couple de stratégies optimales.

Corrigé

Comme $a_1, \dots, a_n > 0$, une stratégie optimale de J1 est un vecteur $(x_1, \dots, x_n), x_i > 0 \forall i, \sum_i x_i = 1$ rendant J2 indifférent entre toutes ses stratégies. En effet, s'il existe un indice j tel que $x_j = 0$, alors J2 garantit 0 en jouant la colonne j avec probabilité 1. On a donc pour toute paire i, j ,

$a_i x_i = a_j x_j$. On obtient ainsi $x_i = \frac{1/a_i}{\sum_j 1/a_j}$. On procède symétriquement pour le second joueur. La valeur du jeu est donc $v = \frac{1}{\sum_j 1/a_j}$.

Exercice 3 (Jeu symétrique)

On appelle jeu symétrique un jeu matriciel tel que $S_1 = S_2$ et $A = -A^\top$. Montrer que la valeur d'un jeu symétrique est nulle.

Corrigé Soit $\sigma \in \Delta(S)$. Supposons que J2 joue la même stratégie σ , le paiement est

$$\sigma A \sigma = \sum_{s,t \in S} \sigma_s A_{st} \sigma_t = \sum_{s,t \in S} \sigma_s (-A_{ts}) \sigma_t = - \sum_{s,t \in S} \sigma_t A_{ts} \sigma_s = -\sigma A \sigma.$$

Donc $\sigma A \sigma = 0$. Ainsi $\min_{\tau \in \Delta(T)} \sigma A \tau \leq \sigma A \sigma = 0$ et donc $\underline{v} \leq 0$.

De même $\bar{v} \geq 0$, comme la valeur en stratégies mixtes existe (d'après le théorème du minmax), on a $v = 0$.

Exercice 4 (Théorème de Loomis, 1946)

Soient A et B deux matrices réelles $S \times T$ avec $B_{st} > 0$ pour tout $(s, t) \in S \times T$. On note $\text{val}(A)$ la valeur (en stratégies mixtes) du jeu matriciel A .

1. Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}$ tel que $\text{val}(A - vB) = 0$;
2. En déduire le théorème de Loomis :

Il existe $(\sigma, \tau, v) \in \Delta(S) \times \Delta(T) \times \mathbb{R}$ tel que

$$\sigma A \geq v \sigma B \text{ et } A \tau \leq v B \tau.$$

3. Remarquer que le théorème de Loomis généralise le théorème de von Neumann.

Corrigé

1. L'application $t \mapsto \text{val}(A - tB)$ est continue (elle est même $\|B\|_\infty$ -Lipschitz) et strictement décroissante. De plus $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{val}(A - tB) = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{val}(A - tB) = +\infty$. Il existe donc $v \in \mathbb{R}$ tel que $\text{val}(A - vB) = 0$;
2. C'est une conséquence immédiate de 1. et de l'existence de stratégies optimales ;
3. On retrouve le théorème de von Neumann avec $\forall (s, t) B_{st} = 1$.

Exercice 5 (Un jeu non fini)

Soit $\Gamma = (\mathbb{N}, \mathbb{N}, g)$ où $g(s, t) = \frac{1}{s+t+1}$.

1. Calculer l'inf sup et le sup inf du jeu. A-t-il une valeur ?
2. Quelles sont les stratégies optimales des joueurs ?
3. Montrer que 0 est une stratégie strictement dominante de J1 (i.e. $\forall (s, t) g(0, t) > g(s, t)$). Commenter.

Corrigé

1. $\forall t \sup_s \frac{1}{s+t+1} = \frac{1}{t+1}$ donc $\inf_t \sup_s \frac{1}{s+t+1} = 0$. $\forall s \inf_t \frac{1}{s+t+1} = 0$ donc $\sup_s \inf_t \frac{1}{s+t+1} = 0$. $v = 0$.
2. $\forall s \forall t g(s, t) \geq 0 = v$, donc toute stratégie de J1 est optimale.
 $\forall t \exists s g(s, t) > 0 = v$, donc aucune stratégie de J2 n'est optimale.
3. $\forall s \geq 1 g(0, t) = \frac{1}{t+1} \geq \frac{1}{s+t+1} = g(s, t)$. Tout $s \geq 1$ est une stratégie strictement dominée et optimale de J1 (mais le max min n'existe pas).

Exercice 6 (Probabilité invariante)

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si chaque élément est positif et si la somme des éléments d'une ligne vaut 1.

Un vecteur (ligne) $\mu \in \mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont positives et somment à 1 est appelé *probabilité invariante* par A si $\mu A = \mu$.

Montrer que toute matrice stochastique admet une probabilité invariante.

Corrigé

Soit $B = A - I_n$. On considère le jeu matriciel B . Dans ce jeu, la stratégie uniforme τ^* de J2 lui garantit 0. Donc $\min_\tau \max_\sigma \sigma B \tau \leq 0$.

Soit une stratégie mixte τ de J2 et soit $s \in \arg \min_t \tau_t$ considéré comme une stratégie pure de J1. Alors $sB\tau = sA\tau - s\tau = \sum_t A_{st}\tau_t - \min_t \tau_t \geq \sum_t A_{st} \min_t \tau_t - \min_t \tau_t \geq 0$.

On a montré que $\min_\tau \max_\sigma \sigma B \tau = 0$. Donc $\text{val}(B) = 0$.

Soit σ^* une stratégie optimale de J1. Comme τ^* est une stratégie optimale à support complet, $\forall t \sigma^* B t = 0$, donc $\sigma^* A = \sigma^*$.