ENSTA Paris
 TD 5
 3 mai 2021

RO203
 Introduction à la théorie des jeux

Exercice 1 On considère le jeu

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2,0 & 0,1 \\ 0,1 & 1,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Trouver tous les équilibre de Nash du jeu.
2. Décrire l'ensemble des distributions d'équilibres corrélés.

Exercice 2

Trois amies souhaitent partir en vacances. Chacune peut partir (P) ou rester (R). Les préférences sont identiques pour les trois amies : chacune préfère partir à deux (peu importe avec qui), plutôt que de partir à trois, plutôt que de rester (peu importe ce que font les autres), plutôt que de partir seule. Les paiements correspondants sont respectivement 3, 1, 0 et -1.

1. Mettre le jeu sous forme normale et déterminer les équilibres de Nash en stratégie pures.
2. Avant que le jeu ne commence, une arbitre tire au hasard $i \in \{1, 2, 3\}$ selon une loi de probabilité $\mu \in \Delta(\{1, 2, 3\})$, avec probabilité strictement positive pour 1, 2 et 3. Cette probabilité μ est connue des trois amies.

   L'arbitre appelle chacune des amies de manière privée et indique à l'amie i de rester et aux de autres de partir.

   Les amis choisissent simultanément et indépendamment de rester ou de partir.

   Combien de stratégie pures ont chacune des amies dans ce nouveau jeu ?

   Mettre le jeu sous forme extensive sans indiquer les paiements.
3. Une amie est *accommodante*, si elle suit l'indication donnée par l'arbitre. Le profil de stratégies où les trois amies sont accommodantes est-il un équilibre ?
4. Construire une distribution d'équilibre corrélé qui donne un paiement strictement plus grand que 1 à chaque amie.

Exercice 3

Soit le jeu suivant

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 3,2 & 1,1 \\ 0,0 & 2,3 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. (a) Déterminer tous les équilibres de Nash ainsi que les paiements associés.

   (b) Trouver une distribution d'équilibre corrélé qui donne le paiement 5/2 à chaque joueur.

   (c) Écrire les inégalités qui caractérisent l'ensemble des distributions d'équilibre corrélés.

2. On suppose que le joueur 1 choisit son action avant le joueur 2 qui observe le choix du joueur 1 avant de jouer.

   (a) Représenter ce jeu sous forme extensive. Quelle est la différence avec le premier jeu en terme d'information ?

   (b) Déterminer les équilibres de Nash sous-jeu parfaits.

   (c) Représenter le jeu sous forme normale.

   (d) Déterminer les équilibres de Nash en stratégies pures. Lequel vous semble le plus pertinent ?

3. On considère dorénavant le jeu matriciel de la première question joué deux fois de suite, et que les joueurs observent les actions de la première étape avant de jouer à la deuxième. Le paiement de chaque joueur dans ce nouveau jeu est le paiement moyen obtenu dans les deux étapes.

   (a) Représenter ce jeu sous forme extensive (on pourra omettre les paiements pour simplifier). Combien chaque joueur a-t-il de stratégies ? Si le joueur 1 avait 3 actions plutôt que 2, combien aurait-il de stratégies ?

   (b) Montrer (informellement) qu'il n'existe pas d'équilibre de Nash tel que les joueurs jouent (H, D) à la première étape.

4. Supposons que le jeu est répété trois fois. Construire (informellement) un équilibre de Nash de ce jeu dans lequel les joueurs jouent (H, D) à la première étape. Cet équilibre est-il sous-jeu parfait ?