ENSTA Paris — RO203
TD 3 — Introduction à la théorie des jeux
12 avril 2021

Exercice 1 Résoudre les jeux matriciels suivants, i.e. donner la valeur et les stratégies optimales :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} G & M & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ M \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} G & M & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Corrigé

Première matrice : On remarque que B est strictement dominée pour J1 par $0,5H+0,5M$, on peut donc l'éliminer. Dans le jeu réduit, D est désormais strictement dominée pour J2 par $1/3G + 2/3M$, on l'élimine donc. Dans le jeu 2x2 restant, il n'y a pas d'équilibre de Nash en stratégies pures. Soit x la probabilité que J1 met sur H, y celle que J2 met sur G. Supposons $x \in]0,1[$. J1 est alors indifférent entre H et M d'où $y+7(1-y) = 9y+(1-y)$ donc $y = 3/7$. Comme $y \in]0,1[$, on déduit que $x+9(1-x) = 7x+(1-x)$ d'où $x = 4/7$. Finalement, le seul équilibre de Nash du jeu est $((4/7, 3/7, 0), (3/7, 4/7, 0))$ et la valeur du jeu est $31/7$.

Seconde matrice : Le jeu n'admet pas d'équilibre en stratégies pures. Aucune stratégie n'est strictement dominée. Soit x la probabilité que J1 met sur H, y_1 celle que J2 met sur G et y_2 sur M. Supposons $y_1, y_2 \in]0,1[, y_1+y_2 < 1$. Il vient $2x+(1-x) = 5x = 2(1-x) \Rightarrow x = 0$ or J1 ne joue pas pur à l'équilibre. Supposons $y_1 = 0$. On a alors $5x = 2(1-x) \Rightarrow x = 2/7$ d'où $y_2 = 2/7$ ce qui donnerait $v = 10/7$. Alternativement, on suppose $y_2 = 0$. On a alors $2x+(1-x) = 2(1-x) \Rightarrow x = 2/3$ d'où on déduit $y_1 = 2/3$ et $v = 4/3 < 10/7$. Par unicité de la valeur, à l'équilibre on a bien $y_2 = 0$ et l'unique équilibre de Nash mixte est donné par $((2/3, 1/2), (2/3, 0, 1/3))$.

Exercice 2 (Jeu diagonal)

Soient $a_1, \ldots, a_n > 0$ et $G = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$. Donner la valeur du jeu matriciel G ainsi qu'un couple de stratégies optimales.

Corrigé

Comme $a_1, \ldots, a_n > 0$, une stratégie optimale de J1 est un vecteur $(x_1, \ldots, x_n), x_i > 0 \forall i, \sum_i x_i = 1$ rendant J2 indifférent entre toutes ses stratégies. En effet, s'il existe un indice j tel que $x_j = 0$, alors J2 garantit 0 en jouant la colonne j avec probabilité 1. On a donc pour toute paire i, j,

$a_i x_i = a_j x_j$. On obtient ainsi $x_i = \dfrac{1/a_i}{\sum_j 1/a_j}$. On procède symétriquement pour le second joueur. La valeur du jeu est donc $v = \dfrac{1}{\sum_j 1/a_j}$.

Exercice 3 (Jeu symétrique)
On appelle jeu symétrique un jeu matriciel tel que $S_1 = S_2$ et $A = -A^{\mathsf{T}}$. Montrer que la valeur d'un jeu symétrique est nulle.

Corrigé Soit $\sigma \in \Delta(S)$. Supposons que J2 joue la même stratégie σ, le paiement est

$$\sigma A \sigma = \sum_{s,t \in S} \sigma_s A_{st} \sigma_t = \sum_{s,t \in S} \sigma_s (-A_{ts}) \sigma_t = -\sum_{s,t \in S} \sigma_t A_{ts} \sigma_s = -\sigma A \sigma.$$

Donc $\sigma A \sigma = 0$. Ainsi $\min_{\tau \in \Delta(T)} \sigma A \tau \leq \sigma A \sigma = 0$ et donc $\underline{v} \leq 0$.
De même $\overline{v} \geq 0$, comme la valeur en stratégies mixtes existe (d'après le théorème du minmax), on a $v = 0$.

Exercice 4 (Théorème de Loomis, 1946)
Soient A et B deux matrices réelles $S \times T$ avec $B_{st} > 0$ pour tout $(s,t) \in S \times T$. On note $\mathrm{val}(A)$ la valeur (en stratégies mixtes) du jeu matriciel A.

1. Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{val}(A - vB) = 0$;
2. En déduire le théorème de Loomis :
   Il existe $(\sigma, \tau, v) \in \Delta(S) \times \Delta(T) \times \mathbb{R}$ tel que
   $$\sigma A \geq v \sigma B \text{ et } A\tau \leq v B \tau.$$
3. Remarquer que le théorème de Loomis généralise le théorème de von Neumann.

Corrigé

1. L'application $t \mapsto \mathrm{val}(A - tB)$ est continue (elle est même $\|B\|_\infty$-Lipschitz) et strictement décroissante. De plus $\lim_{t \to +\infty} \mathrm{val}(A - tB) = -\infty$ et $\lim_{t \to -\infty} \mathrm{val}(A - tB) = +\infty$. Il existe donc $v \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{val}(A - vB) = 0$;
2. C'est une conséquence immédiate de 1. et de l'existence de stratégies optimales ;
3. On retrouve le théorème de von Neumann avec $\forall (s,t)\ B_{st} = 1$.

Exercice 5 (Un jeu non fini)
Soit $\Gamma = (\mathbb{N}, \mathbb{N}, g)$ où $g(s,t) = \frac{1}{s+t+1}$.

1. Calculer l'inf sup et le sup inf du jeu. A-t-il une valeur ?
2. Quelles sont les stratégies optimales des joueurs ?
3. Montrer que 0 est une stratégie strictement dominante de J1 (i.e. $\forall (s,t)\ g(0,t) > g(s,t)$). Commenter.

Corrigé

1. $\forall t\ \sup_s \frac{1}{s+t+1} = \frac{1}{t+1}$ donc $\inf_t \sup_s \frac{1}{s+t+1} = 0$. $\forall s\ \inf_t \frac{1}{s+t+1} = 0$ donc $\sup_s \inf_t \frac{1}{s+t+1} = 0$. $v = 0$.
2. $\forall s \forall t\ g(s,t) \geq 0 = v$, donc toute stratégie de J1 est optimale.
   $\forall t \exists s\ g(s,t) > 0 = v$, donc aucune stratégie de J2 n'est optimale.
3. $\forall s \geq 1\ g(0,t) = \frac{1}{t+1} \geq \frac{1}{s+t+1} = g(s,t)$. Tout $s \geq 1$ est une stratégie strictement dominée *et* optimale de J1 (mais le max min n'existe pas).

Exercice 6 (Probabilité invariante)

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si chaque élément est positif et si la somme des éléments d'une ligne vaut 1.

Un vecteur (ligne) $\mu \in \mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont positives et somment à 1 est appelé *probabilité invariante* par A si $\mu A = \mu$.

Montrer que toute matrice stochastique admet une probabilité invariante.

Corrigé

Soit $B = A - I_n$. On considère le jeu matriciel B. Dans ce jeu, la stratégie uniforme τ^* de J2 lui garantit 0. Donc $\min_\tau \max_\sigma \sigma B \tau \leq 0$.

Soit une stratégie mixte τ de J2 et soit $s \in \arg\min_t \tau_t$ considéré comme une stratégie pure de J1. Alors $sB\tau = sA\tau - s\tau = \sum_t A_{st}\tau_t - \min_t \tau_t \geq \sum_t A_{st} \min_t \tau_t - \min_t \tau_t \geq 0$.

On a montré que $\min_\tau \max_\sigma \sigma B \tau = 0$. Donc $\mathrm{val}(B) = 0$.

Soit σ^* une stratégie optimal de J1. Comme τ^* est une stratégie optimale à support complet, $\forall t\ \sigma^* B t = 0$, donc $\sigma^* A = \sigma^*$.