## Exercice 1

On considère le jeu sous forme normale ci-dessous.

$$\begin{array}{cccc}
G & M & D \\
H & \left[ \begin{array}{ccc} a, b & c, d & e, f \\ g, h & i, j & k, l \end{array} \right]$$

Déterminer les conditions sur les paramètres pour que

- 1. La stratégie H soit strictement dominante;
- 2. La stratégie M soit dominante;
- 3. Le couple de stratégies (H,G) soit un équilibre en stratégies dominantes.

## Exercice 2 (Mariages stables – Gale et Shapley (1962))

À l'aide des trois remarques faites en cours, montrer les propriétés suivantes de l'algorithme de Gale-Shapley :

- 1. L'algorithme s'arrête en au plus  $n^2$  jours ;
- 2. L'algorithme est bien défini (il induit un mariage);
- 3. Le mariage induit est stable;
- 4. Il n'y a pas unicité des mariages stables. Pour la liste de préférences suivantes donner l'ensemble des mariages stables :

```
- x_1: y_2 \succ y_1 \succ y_3
                              y_1: x_2 \succ x_1 \succ x_3
```

$$\begin{array}{lll} - & x_2: y_3 \succ y_2 \succ y_1 & & y_2: x_3 \succ x_2 \succ x_1 \\ - & x_3: y_1 \succ y_3 \succ y_2 & & y_3: x_1 \succ x_3 \succ x_2 \end{array}$$

$$- x_3: y_1 \succ y_3 \succ y_2 \qquad y_3: x_1 \succ x_3 \succ x_2$$

Lequel est produit par l'algorithme de Gale-Shapley?

Exercice 3 (Le concours de beauté – Keynes (1936), Moulin (1986)) Dans un groupe de TD

- Chaque élève choisit un nombre entier entre 0 et 100;
- On calcule la moyenne M des nombres choisis;
- Le gagnant est le plus proche de  $\frac{1}{2}M$ .

Participer au jeu, proposer une analyse des résultats de ce jeu.

## Exercice 4 (Un problème de partage)

On doit partager un gâteau ( $[0,1] \times [0,1]$ ) entre deux enfants. Un parent procède de la manière suivante :

— Il déplace son couteau continument de gauche à droite (de 0 vers 1) sur l'axe x;

- Le premier enfant qui crie "stop" gagne la part à gauche de x, l'autre celle à droite;
- Si les deux enfants crient "stop" en même temps c'est le plus jeune qui gagne la part à gauche.

La valeur totale du gâteau pour chaque enfant est 1. La valeur de la part à gauche de x est f(x) pour le plus jeune et g(x) pour le plus âgé. Les fonctions f et g sont continues et strictement croissantes et leur graphe va de (0,0) à (1,1).

- 1. Montrer que chaque enfant peut obtenir au moins  $\frac{1}{2}$ , quel que soit ce que fait l'autre enfant ;
- 2. Si vous connaissez f et g et si vous êtes le plus jeune (respectivement le plus vieux), que faites vous?
- 3. Si vous ne connaissez pas la fonction de l'autre enfant que faites vous ? Il n'y a pas de réponse absolue.

## Exercice 5 (Enchères à plis scellés, partie 1)

Un bien indivisible est proposé aux enchères à  $n \geq 2$  acheteurs. Chaque agent  $i \in \{1, \ldots, n\}$  attribue une valeur privée  $v_i$  au bien et propose un montant  $b_i$  uniquement observé par le commissaire-priseur. Le bien est attribué à l'agent avec la plus haute mise et, en cas d'égalité, le gagnant est tiré uniformément parmi les joueurs avec la plus haute mise. On considère deux régimes tarifaires :

- Au premier prix : le prix payé par le vainqueur correspond au montant qu'il a enchéri;
- $Au\ second\ prix$ : le prix payé par le vainqueur correspond à la deuxième meilleure offre.

Dans cet exercice, on considère une enchère au second prix.

- 1. Mettre le jeu sous forme normale.
- 2. Montrer que miser sa valeur privée est une stratégie dominante.