

# Introduction à la **théorie des jeux**

Jeux sous forme normale – Stratégies mixtes

---

Tristan Garrec

12 avril 2021

ENSTA Paris

Retrouvez l'**enregistrement vidéo des transparents commentés**. Attention, le fichier n'est disponible qu'un temps limité (sept jours après la mise en ligne).

Ainsi que la **page du cours**.

## Extension mixte

---

## Exemple : Pierre, Feuille & Ciseau

### Exemple (Pierre, Feuille, Ciseau)

	P	F	C
P	0, 0	-1, 1	1, -1
F	1, -1	0, 0	-1, 1
C	-1, 1	1, -1	0, 0

Le jeu Pierre, Feuille, Ciseau n'admet pas d'équilibre de Nash en stratégies pures.

Pour pallier cela, on va autoriser les joueurs à choisir leur stratégie **aléatoirement**. Mathématiquement, ceci permet de convexifier les ensembles de stratégies.

Exemple dans le jeu de Pierre, Feuille, Ciseau : chaque joueur joue Pierre avec probabilité 1/3, Feuille avec probabilité 1/3 et Ciseau avec probabilité 1/3.

# Stratégie mixte

**Notation :** On note  $\Delta(A)$  l'ensemble des probabilités sur  $A$  (ou le simplexe sur  $A$ ) :

$$\Delta(A) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^A \mid \forall i \in A, x_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i \in A} x_i = 1 \right\}.$$

Un élément de  $\Delta(S_i)$  est appelé **stratégie mixte**. Un élément de  $S_i$  est appelé **stratégie pure**.

Représentations d'une stratégie mixte :  $S_1 = \{H, B\}$ , J1 joue  $H$  avec probabilité  $\frac{1}{4}$  et  $B$  avec probabilité  $\frac{3}{4}$ .

- *Fonctionnelle* :  $\sigma_1(H) = \frac{1}{4}$  et  $\sigma_1(B) = \frac{3}{4}$  ;
- *Vectorielle* :  $\sigma_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$  ;
- *Combinaison convexe de stratégies pures* :  $\frac{1}{4}H + \frac{3}{4}B$  (ou  $\frac{1}{4}\delta_H + \frac{3}{4}\delta_B$ ).

Une stratégie mixte peut être interprétée comme :

- Une **croyance** sur la façon dont joue un joueur ;
- Une **distribution** des stratégies pures au sein d'une population.

Certains joueurs utilisent des générateurs de nombres aléatoires pour jouer, comme au poker ou à Pierre, Feuille, Ciseau.

On note  $\Sigma = \prod_{i=1}^N \Sigma_i = \prod_{i=1}^N \Delta(S_i)$ .

L'**extension mixte** du jeu fini  $\Gamma = (N, S, g)$  est le jeu  $\Gamma^\Delta = (N, \Sigma, g)$ . Le paiement  $g$  est étendue multilinéairement : pour  $\sigma \in \Sigma$ , le paiement du joueur  $i$  est (formule de l'espérance totale)

$$g_i(\sigma) = \mathbb{E}_\sigma[g] = \sum_{s \in S} \left( \prod_{j=1}^N \sigma_j(s_j) \right) g_i(s).$$

## Exemple

Dans le jeu du tir de penalty

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} G \\ D \end{array} & \left( \begin{array}{cc} 1, -1 & -1, 1 \\ -1, 1 & 1, -1 \end{array} \right) \end{array}$$

Soit  $(\sigma_1, \sigma_2) \in \Delta(\{G, D\})^2$

$$g_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1(G)\sigma_2(G) + \sigma_1(D)\sigma_2(D) - \sigma_1(G)\sigma_2(D) - \sigma_1(D)\sigma_2(G)$$

on pose  $\sigma_1(G) = x$  et  $\sigma_2(G) = y$

$$= xy + (1-x)(1-y) - x(1-y) - y(1-x).$$



# Équilibre de Nash en stratégies mixtes

## Définition

*Un équilibre de Nash en stratégies mixtes du jeu  $(N, S, g)$  est un équilibre de Nash de son extension mixte  $(N, \sigma, g)$ .*

## Proposition

*$\sigma \in \Sigma$  est un équilibre de Nash en stratégies mixtes si et seulement si*

$$\forall i \in N \forall s_i \in S_i \quad g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq g_i(s_i, \sigma_{-i}).$$

## Démonstration.

On utilise la linéarité de  $g_i$  en  $\sigma_i$  et le fait qu'une stratégie pure est aussi une stratégie mixte. □

## Corollaire

*Tout équilibre de Nash en stratégies pures est aussi un équilibre de Nash en stratégies mixtes.*

# Le théorème de Nash

## **Théorème (Nash (1950))**

*Tout jeu fini admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.*

Nash a démontré ce théorème dans **sa thèse de doctorat**, qui fait seulement 32 pages et dont c'est le principal résultat.

La démonstration utilise le théorème suivant.

## **Théorème (Brouwer (1912))**

*Soient  $C$  un convexe compact non vide d'un espace euclidien et  $f : C \rightarrow C$  continue. Alors  $f$  admet un point fixe.*

## **Démonstration du théorème de Brouwer.**

Via le lemme de Sperner (1928), **en video**.

□

# Le théorème de Nash

## Démonstration du théorème de Nash.

Soit  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$  définie par

$$f(\sigma)_i(s_i) = \frac{\sigma_i(s_i) + (g_i(s_i, \sigma_{-i}) - g_i(\sigma))_+}{1 + \sum_{s'_i \in S_i} (g_i(s'_i, \sigma_{-i}) - g_i(\sigma))_+},$$

où  $a_+ = \max(a, 0)$ .  $f$  est bien définie et à valeurs dans  $\Sigma$  car  $f(\sigma)_i(s_i) \geq 0$  et  $\sum_{s_i \in S_i} f(\sigma)_i(s_i) = 1$ . De plus  $f$  est continue et  $\Sigma$  est convexe et compact.

D'après le **théorème de Brouwer**, il existe  $\sigma \in \Sigma$  tel que  $f(\sigma) = \sigma$ .

Montrons que  $\sigma$  est un équilibre de Nash.

Fixons un joueur  $i$ . Si  $\sum_{s'_i \in S_i} (g_i(s'_i, \sigma_{-i}) - g_i(\sigma))_+ = 0$ , alors  $g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq \max_{s'_i \in S_i} g_i(s'_i, \sigma_{-i})$ . Sinon,  $\sum_{s'_i \in S_i} (g_i(s'_i, \sigma_{-i}) - g_i(\sigma))_+ > 0$ . Soit  $s_i$  tel que  $\sigma_i(s_i) > 0$  et  $g_i(s_i, \sigma_{-i}) \leq g_i(\sigma)$ . On a  $\sigma_i(s_i) = \frac{\sigma_i(s_i)}{1 + \sum_{s'_i \in S_i} (g_i(s'_i, \sigma_{-i}) - g_i(\sigma))_+}$ , donc  $\sigma_i(s_i) = 0$  : contradiction.

Réciproquement, tout équilibre est un point fixe puisque tous les  $(g_i(s'_i, \sigma_{-i}) - g_i(\sigma))_+$  sont nuls.

□

Les notions de dominations vues dans la partie précédente s'appliquent encore ici (puisque l'extension mixte d'un jeu sous forme normale est encore un jeu sous forme normale).

## Proposition

*Une stratégie  $\sigma_i \in \Sigma_i$  est strictement dominée par  $\sigma'_i \in \Sigma_i$  si et seulement si*

$$\forall s_{-i} \in S_{-i} \quad g_i(\sigma_i, s_{-i}) < g_i(\sigma'_i, s_{-i}).$$

On peut également redéfinir l'élimination itérée de stratégies strictement dominées en prenant en compte les stratégies dominées par des stratégies mixtes.

L'ensemble des équilibre de Nash (en stratégies mixtes) est inchangé par élimination de stratégies strictement dominées (par une stratégie mixte).

## Exemple

Dans le jeu suivant

	$G$	$C$	$D$
$H$	1, 1	0, 2	0, 4
$M$	0, 2	5, 0	1, 6
$B$	0, 2	1, 1	2, 1

$g_2(1/2G + 1/2D) = (5/2, 4, 3/2)$  et  $g_2(C) = (2, 0, 1)$  donc  $C$  est strictement dominée par  $1/2G + 1/2D$ .

## Proposition

$\sigma \in \Sigma$  est un équilibre de Nash en stratégies mixtes si et seulement si  $\forall i$

$$\forall s_i, s'_i \in S_i (\sigma_i(s_i) > 0 \text{ et } \sigma_i(s'_i) > 0) \Rightarrow g_i(s_i, \sigma_{-i}) = g_i(s'_i, \sigma_{-i}) ;$$

$$\forall s_i \in S_i \sigma_i(s_i) = 0 \Rightarrow g_i(s_i, \sigma_{-i}) \leq g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}).$$

Cette proposition donne une méthode pour obtenir les équilibres de Nash en stratégies mixtes :

1. Essayer tous les supports possibles (i.e.  $\{s_i \in S_i \mid \sigma_i(s_i) > 0\}$ );
2. Trouver les probabilités qui rendent chaque joueur indifférent sur son support ;
3. Vérifier que les stratégies hors du support ne donnent pas un meilleur paiement.

## Exemple

Trouver tous les équilibres de Nash du jeu de rencontre

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} D & G \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \left( \begin{array}{cc} 1, 1 & 0, 0 \\ 0, 0 & 1, 1 \end{array} \right) \end{array}$$

1. Il n'y a pas de stratégie pure strictement dominante ou strictement dominée (par des stratégies mixtes) ;
2. Il y a deux équilibres de Nash en stratégies pures :  $(H, D)$  et  $(B, G)$  ;

## Exemple (suite)

3. Soit  $x \in [0, 1]$  la probabilité de jouer  $H$  et  $y \in [0, 1]$  celle de jouer  $D$ . Comme on a déterminé les équilibres de Nash en stratégies pures on peut supposer  $x \in ]0, 1[$  et  $y \in [0, 1]$ , ou vice-versa. On se place dans le premier cas. La propriété précédente implique  $g_1(H, y) = g_1(B, y)$  donc  $y = 1 - y$  et  $y = \frac{1}{2} \in ]0, 1[$ . On peut donc procéder de même et on obtient  $x = \frac{1}{2}$ .
4. Le cas  $x \in [0, 1]$  et  $y \in ]0, 1[$  est symétrique. L'ensemble des équilibres est donc  $NE(\Gamma) = \{(H, D), (B, G), ((1/2, 1/2), (1/2, 1/2))\}$ .