Introduction à la théorie des jeux

Jeux sous forme normale

Tristan Garrec

29 mars & 8 avril 2021

ENSTA Paris

Cours à distance

Retrouvez l'enregistrement vidéo des transparents commentés. Attention, le fichier n'est disponible qu'un temps limité (sept jours après la mise en ligne).

Ainsi que la page du cours.

Jeux en stratégies pures

Jeux à N joueurs

Un jeu sous forme normale est donné par $\Gamma = (N, (S_i)_{i \in N}, (g_i)_{i \in N})$ où

- N est l'ensemble fini des joueurs (et également le nombre de joueurs) ;
- Pour tout $i \in N$, S_i est l'ensemble de stratégies (ou d'actions) du joueur i ;
- Pour tout $i \in N$, $g_i : \prod_{j \in N} S_j \to \mathbb{R}$, est la fonction de paiement du joueur i.

Notation : $S = \prod_{j \in N} S_j$, $S_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} S_j$ et $g = (g_i)_{i \in N}$.

Déroulement : le joueur i choisit simultanément et indépendamment des autres une stratégie $s_i \in S_i$. Il reçoit alors le paiement $g_i(s_1, \ldots, s_N)$.

Exemples

Exemple (La guerre des sexes)
Les membres d'un couple doivent décider (indépendamment) s'ils vont au cinéma ou au théâtre. Alice préfère le cinéma et Bob le théâtre, mais tous deux préfèrent être ensemble à être seul.

Modélisation :

- $N = 2$, Joueur 1 = Alice, Joueur 2 = Bob ;
- $S_1 = S_2 = \{C, T\}$;
- $g_1(C, C) = 2$, $g_1(T, T) = 1$, $g_2(C, C) = 1$, $g_2(T, T) = 2$, $g_i(s_1, s_2) =$ 0 sinon.

Représentation sous forme matricielle :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & T \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} 2, 1 & 0, 0 \\ 0, 0 & 1, 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemples

Exemple (Le tir de penalty)
Un tireur de penalty et un gardien de but se font face. Le tireur peut tirer à gauche ou à droite, le gardien plonger à gauche ou à droite.

Modélisation :

- $N = 2$, Joueur 1 = Gardien, Joueur 2 = Tireur ;
- $S_1 = S_2 = \{G, D\}$;
- $g_1(s_1, s_2) = 1$ si $s_1 = s_2$ et -1 sinon, $g_2 = -g_1$.

Représentation sous forme matricielle :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & \quad D \end{array} \\ \begin{array}{c} G \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 1, -1 & -1, 1 \\ -1, 1 & 1, -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemples

Exemple (Le dilemme du chocolat)
Deux enfants ont chacun le choix entre prendre un morceau de chocolat et le garder ou prendre trois morceaux pour le donner à l'autre.

Représentation matricielle :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} D & G \end{array} \\ \begin{array}{c} D \\ G \end{array} & \begin{pmatrix} 3,3 & 0,4 \\ 4,0 & 1,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Indépendamment du choix de l'autre enfant, chaque enfant à intérêt à garder plutôt qu'à donner.
- L'issue rationnelle du jeu est (G, G) avec comme paiement $(1, 1)$.
- En ayant joué (D, D) ils auraient pourtant gagné $(3, 3)$.

Cet exemple fait ressortir une tension entre intérêt individuel et intérêt collectif.

Domination stricte

Définition
La stratégie $s'_i \in S_i$ *est strictement dominée par* $s_i \in S_i$ *si*
$\forall s_{-i} \in S_{-i}\ g_i(s'_i, s_{-i}) < g_i(s_i, s_{-i})$.

Un joueur (rationnel) ne devrait jamais jouer une stratégie strictement dominée : il a une stratégie qui lui donne un paiement strictement meilleur indépendamment des choix des autres joueurs.

Définition
Une stratégie $s_i \in S_i$ *est strictement dominante si elle domine strictement toutes les autres stratégies :* $\forall s'_i \in S_i \setminus \{s_i\}\ \forall s_{-i} \in S_{-i}\ g_i(s'_i, s_{-i}) < g_i(s_i, s_{-i})$.

Définition
Un profil de stratégies $s = (s_1, \ldots, s_N) \in S$ *est un équilibre en stratégies strictement dominantes si pour tout* $i \in N$, s_i *est strictement dominante.*

Si un tel équilibre existe, ce devrait être l'issue rationnelle du jeu.

Exemples

Dans les exemples précédents

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} C & T \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} 2,1 & 0,0 \\ 0,0 & 1,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} G \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 1,-1 & -1,1 \\ -1,1 & 1,-1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} D & G \end{array} \\ \begin{array}{c} D \\ G \end{array} & \begin{pmatrix} 3,3 & 0,4 \\ 4,0 & 1,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Élimination itérée des stratégies strictement dominées

- Si un joueur i a une stratégie strictement dominée s_i, il ne devrait pas la jouer ;
- Les autres joueurs le savent ;
- On élimine s_i du jeu, i.e., on considère le jeu où l'ensemble des stratégies du joueur i est $S_i \setminus \{s_i\}$;
- On réitère pour le nouveau jeu.

Si au terme de cette procédure tous les ensembles d'actions sont des singletons, alors ces singletons ne dépendent pas de l'ordre d'élimination des stratégies. Le jeu est dit résoluble par élimination itérée des stratégies strictement dominées.

Exemple

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{array} \\
\begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 5,2 & 2,6 & 1,4 & 0,4 \\ 0,0 & 3,2 & 2,1 & 1,1 \\ 7,0 & 2,2 & 1,5 & 5,1 \\ 9,5 & 1,3 & 0,2 & 4,8 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Élimination itérée des stratégies strictement dominées

Exemple

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} B_2 & C_2 & D_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 2,6 & 1,4 & 0,4 \\ 3,2 & 2,1 & 1,1 \\ 2,2 & 1,5 & 5,1 \\ 1,3 & 0,2 & 4,8 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} B_2 & C_2 & D_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 3,2 & 2,1 & 1,1 \\ 2,2 & 1,5 & 5,1 \\ 1,3 & 0,2 & 4,8 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} B_2 & C_2 & D_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} B_1 \\ C_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 3,2 & 2,1 & 1,1 \\ 2,2 & 1,5 & 5,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} B_2 & C_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} B_1 \\ C_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 3,2 & 2,1 \\ 2,2 & 1,5 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} B_2 & C_2 \end{array} \\ B_1 & \begin{pmatrix} 3,2 & 2,1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c c} & B_2 \\ B_1 & \begin{pmatrix} 3,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Domination faible

Définition
La stratégie $s_i' \in S_i$ est faiblement dominée par $s_i \in S_i$ si
$\forall s_{-i} \in S_{-i} \;\; g_i(s_i', s_{-i}) \leq g_i(s_i, s_{-i})$ *et* $\exists s_{-i} \in S_{-i} \; g_i(s_i', s_{-i}) < g_i(s_i, s_{-i})$.

Définition
La stratégie $s_i' \in S_i$ est dominante si $\forall s_i \in S_i \, \forall s_{-i} \in S_{-i} \; g_i(s_i', s_{-i}) \geq g_i(s_i, s_{-i})$.

Une stratégie dominante représente un choix raisonnable, qui ne peut être regretté.

Définition
Un profil de stratégies $s = (s_1, \ldots, s_N) \in S$ est un équilibre en stratégies dominantes si pour tout $i \in N$, s_i est dominante.

Si un tel équilibre existe, il semble raisonnable qu'il soit joué par les joueurs.

Domination faible

- Si un joueur a une stratégie faiblement dominée, il parait raisonnable qu'il ne la joue pas ;
- Les autres joueurs le savent ;
- On pourrait éliminer cette stratégie et itérer ;
- Cependant...

Exemple (Élimination itérée des stratégies faiblement dominées)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ M \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 1,1 & 0,0 \\ 1,1 & 2,1 \\ 0,0 & 2,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

En éliminant les stratégies faiblement dominées, on peut éliminer H puis G, mais on pourrait également éliminer B puis D donnant un résultat différent.

On ne peut donc pas conclure.