Introduction à la théorie des jeux

Jeux sous forme extensive

Tristan Garrec

27 avril 2020

ENSTA Paris

Cours à distance

Retrouvez l'enregistrement vidéo des transparents commentés. Attention, le fichier n'est disponible qu'un temps limité (sept jours après la mise en ligne).

Ainsi que le nouveau document en ligne,

- Pour poser toutes vos questions ;
- Pour apporter des suggestions sur le cours à distance ;
- Signaler des coquilles dans les transparents (je vous en saurais gré).

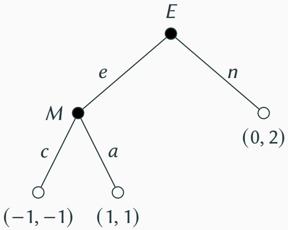
Et finalement la page du cours.

Jeux sous forme extensive

Motivation

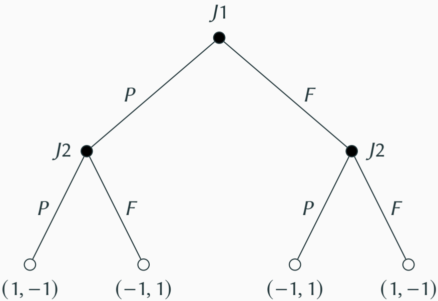
- Jeux sous forme normale : choix de stratégies simultanés, aucune information sur les stratégies utilisées par les autres joueurs ;
- Jeux sous forme extensive : les joueurs effectuent leur choix en fonction des choix précédents des autres joueurs (échecs, poker, etc.).

Exemple (Jeu d'entrée)



La firme M est en situation de monopole. La firme E peut choisir d'entrer sur le marché ou non. Si E rentre, la firme M peut choisir de combattre ou de s'accommoder.

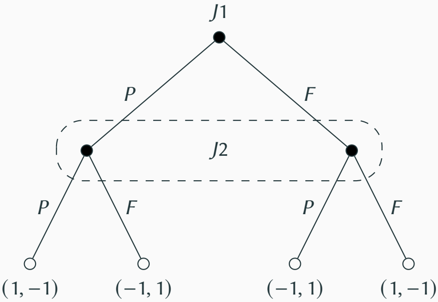
Exemple (Pile ou face)



Le joueur 1 choisit pile ou face, le joueur 2 observe le choix du joueur 1 puis choisit à son tour pile ou face. Le joueur 2 gagne si les choix sont différents et perd sinon (c'est un jeu à somme nulle).

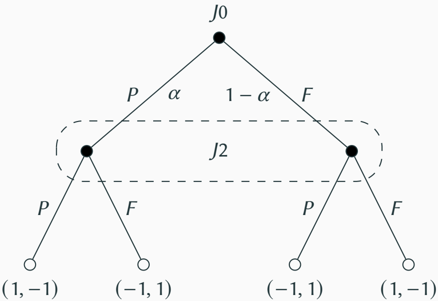
Exemples

Exemple (Pile ou face sans observation)



Ici, le joueur 2 ne connait pas le choix du joueur 1. Ceci est représenté par un ensemble d'information. Le joueur 2 ne différencie pas les deux nœuds de l'ensemble d'information, son choix est indépendant de celui du joueur 1. Cela revient à des choix simultanés.

Exemple (Pile ou face sans observation, contre la nature)



Ici, le joueur 1 a été remplacé par la nature, joueur 0, qui lance une pièce pile ou face avec probabilités respectives α et $1 - \alpha$. Le joueur 0 ne prend pas de décision et ne reçoit pas de paiement.

Définition
Un arbre $\mathcal{A}$ *est un triplet* (Z, r, θ) *où*

- Z *est un ensemble fini de nœuds ;*
- $r \in Z$ *est la racine ;*
- $\theta : Z \setminus \{r\} \rightarrow Z$ *est l'application prédécesseur :*
  $\forall z \in Z\, \exists n \in \mathbb{N}\ \theta^n(z) = r.$

On note $Sc(z) = \theta^{-1}(z)$ *l'ensemble des successeurs (immédiats) de* z*.*
L'ensemble des nœuds sans successeurs est T*. Les éléments de* T *sont les nœuds terminaux.*

Jeux sous forme extensive à information imparfaite

Définition
Un jeu sous forme extensive à information imparfaite Γ *est donné par*

- *Un ensemble fini de joueurs* N ;
- *Un arbre* $\mathcal{A} = (Z, r, \theta)$;
- *Une partition* $\{Z_i\}_{i \in N \cup \{0\}}$ *de* $Z \setminus T$: *si* $z \in Z_i$, *c'est le joueur i qui joue au nœud* z ;
- *Pour tout nœud* $z \in Z \setminus T$ *un ensemble fini d'actions* $A(z)$;
- *Pour tout nœud* $z \in Z_0$ *une distribution de probabilité* $D(z)$ *sur* $A(z)$: *le joueur* 0 *est le hasard, ou la nature* ;
- *Pour tout* $i \in \mathbb{N}$ *une partition de* Z_i *en sous-ensembles appelés ensembles d'information, tels que si* z *et* z' *sont dans le même ensemble d'information alors* $A(z) = A(z')$.
  On note $u(z)$ *l'ensemble d'information contenant* z ;
- *Une fonction de paiement* $g : T \to \mathbb{R}^N$.

Déroulement de la partie

1. Soit i le joueur tel que $r \in Z_i$
   - Si $i = 0$ une action a_1 est tirée suivant $D(r)$ et le jeu va en $z_2 = Sc(r, a_1)$;
   - Si $i \geq 1$ le joueur i choisit une action $a_1 \in A(r)$ et le jeu va en $z_2 = Sc(r, a_1)$;
2. Par induction, soit $i \in N \cup \{0\}$ tel que $z_t \in Z_i$
   - Si $i = 0$ une action a_t est tirée suivant $D(z_t)$ et le jeu va en $z_{t+1} = Sc(z_t, a_t)$;
   - Si $i \geq 1$ le joueur i choisit une action $a_t \in A(z_t)$ et le jeu va en $z_{t+1} = Sc(z_t, a_t)$;
3. Soit $\tau \in T$ atteint par la procédure. Chaque joueur i reçoit le paiement $g_i(\tau)$.

Une suite des nœuds $(r, z_1, z_2, \dots, \tau)$ visités est une partie du jeu.

Définition
Un jeu est à information parfaite si tous les ensembles d'information sont des singletons.

Exemple
Échecs, go, dames, jeu d'entrée, pile ou face.

Stratégies

Définition
Soit $i \in N$. Une stratégie (pure) s_i du joueur i associe à chacun de ses ensembles d'information $u(z)$, avec $z \in Z_i$, une action $a \in A(z)$.

On note S_i l'ensemble des stratégies (pures) du joueur i.

Interprétation : Le joueur choisit la même action dans tous les nœuds d'un même ensemble d'information : il ne fait pas la différence entre ces nœuds.

De plus, une stratégie spécifie une action en chaque ensemble d'information, et pas seulement ceux visités par la partie.

Supposons qu'un joueur à comme ensembles d'informations $u_1, \ldots, u_p$ et que dans ces ensembles d'information le nombre d'actions de ce joueur est respectivement $n_1, \ldots, n_p$. Alors ce joueur a au total $n_1 \times \cdots \times n_p$ stratégies.

Paiements et équilibre de Nash

Définition
Un profil de stratégies $s \in S$ (pures) induit une partie (aléatoire) et donc un paiement (aléatoire). On note $g(s) \in \mathbb{R}^N$ l'espérance de ce paiement aléatoire.

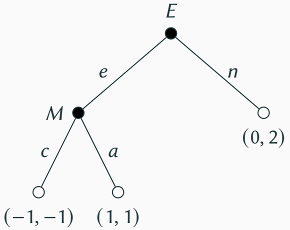
On appelle réduction sous forme normale le triplet (N, S, g).

Définition
Un équilibre de Nash (en stratégies pures ou mixtes) d'un jeu sous forme extensive est une équilibre de Nash de la forme normale associée.

Ainsi, tout jeu sous forme extensive admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Exemples

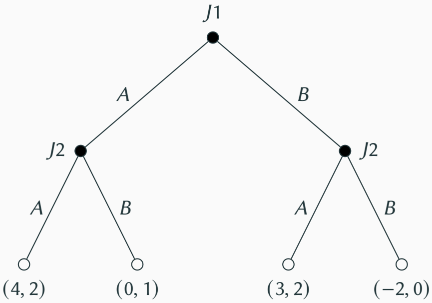
Exemple (Jeu d'entrée)



$$\begin{array}{ccc} & c & a \\ \begin{array}{c} e \\ n \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} -1, -1 & 1, 1 \\ 0, 2 & 0, 2 \end{pmatrix}} \end{array}$$

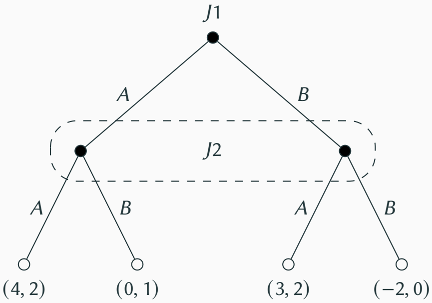
Il y a deux équilibres de Nash en stratégies pures : (e, a) et (n, c). De plus tout profil $(n, x \cdot c + (1 - x) \cdot a)$ avec $x \geq \frac{1}{2}$ est un équilibre de Nash en stratégiques mixtes.

Exemple (Pile ou face)



$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} AA & AB & BA & BB \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4,2 & 4,2 & 0,1 & 0,1 \\ 3,2 & -2,0 & 3,2 & -2,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple (Pile ou face sans observation)



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 4, 2 & 0, 1 \\ 3, 2 & -2, 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Stratégies de comportement

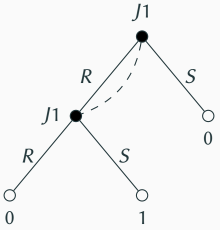
- Stratégie mixte : le joueur choisit au début du jeu une probabilité sur l'ensemble des stratégies pures ;
- Stratégie de comportement : le joueur choisit une probabilité sur l'ensemble des actions dans chaque ensemble d'information.

Définition
Une stratégie de comportement du joueur i associe à chaque ensemble d'information $u(z)$, *avec* $z \in Z_i$, *un élément de* $\Delta(A(z))$.

Un profil de stratégies de comportement induit une distribution de probabilité sur l'ensemble des nœuds terminaux, donc un paiement. Est-ce que cela change la fonction de paiement par rapport aux stratégies mixtes ?

Exemple

Exemple (Le conducteur distrait)



Un conducteur doit rentrer chez lui en prenant la deuxième sortie d'autoroute. Lorsqu'il doit prendre la décision de sortir ou de rester, il ne sais plus où il est.

Toute stratégie pure donne un paiement 0, donc toute stratégie mixte aussi. La stratégie de comportement $\frac{1}{2}S + \frac{1}{2}R$ à chaque nœud donne le paiement $\frac{1}{4}$ (la probabilité d'avoir R puis S).

Mémoire parfaite

On suppose dans toute la suite qu'un joueur se rappelle de tous ses choix précédents.

On note $h_i(z)$ la suite des ensembles d'information et des actions du joueur i avant d'arriver au nœud z.

Définition
Un jeu sous forme extensive est à mémoire parfaite si pour tout i et pour tout $u(z)$, avec $z \in Z_i$, pour tout $z, z' \in u(z)$, $h_i(z) = h_i(z')$.

Définition
Deux stratégies σ_i et σ_i' (mixtes ou de comportement) sont équivalentes si pour toute stratégies σ_{-i} des autres joueurs (mixte ou de comportement), (σ_i, σ_{-i}) et (σ_i', σ_{-i}) induisent la même distribution de probabilité sur les nœuds terminaux.

Théorème (Kuhn, 1953)
Dans un jeu à mémoire parfaite, toute stratégie (mixte ou de comportement) admet une stratégies (mixte ou de comportement) équivalente.

Exercice

Exercice (Poker simplifié)

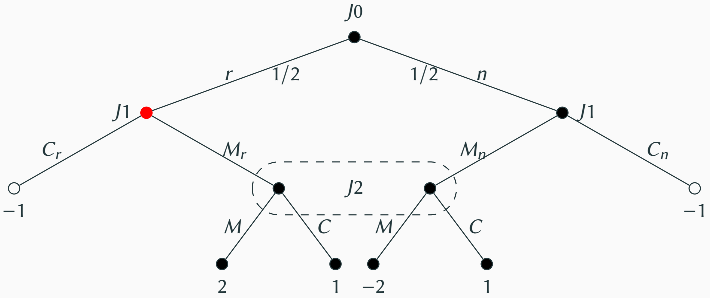
Deux joueurs jouent un jeu à somme nulle. La mise est de 1 par joueur pour commencer. Un jeu de 32 cartes est battu et le joueur 1 tire une carte et la regarde. Le joueur 2 ne voit pas la carte.

Le joueur 1 peut alors se coucher et donner sa mise au joueur 2, ou doubler sa mise. Si le joueur 1 a doublé sa mise, le joueur 2 peut soit se coucher et donner sa mise au joueur 1, soit suivre le joueur 1 en doublant sa mise.

Dans se dernier cas, le joueur 1 dévoile sa carte, si elle est rouge il ramasse toutes les mises, si elle est noire, c'est le joueur 2 qui ramasse toutes les mises.

1. Mettre le jeu sous forme extensive ;
2. Mettre le jeu sous forme normale ;
3. Quelle est la valeur du jeu ? Quelles sont les stratégies optimales ?
4. Donner des stratégies de comportement équivalentes.

Correction



1.

2.

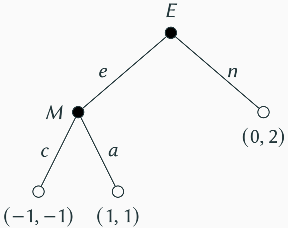
$$
\begin{array}{c}
 \\
(M_r,M_n) \\
(M_r,C_n) \\
(C_r,M_n) \\
(C_r,C_n)
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} M & C \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 \\
1/2 & 0 \\
-3/2 & 0 \\
-1 & -1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Correction

3. $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} M & C \end{array} \\ \begin{array}{c} (M_r,M_n) \\ (M_r,C_n) \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

   La valeur est $\frac{0\times 0-1\times\frac{1}{2}}{0+0-1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$. On trouve comme uniques stratégies optimales $\frac{1}{3}(M_r, M_n) + \frac{2}{3}(M_r, C_n)$ et $\frac{2}{3}M + \frac{1}{3}C$ respectivement.
4. J1 : M_r en • et $\frac{1}{3}M_n + \frac{2}{3}C_n$ en •.
   J2 : $\frac{2}{3}M + \frac{1}{3}C$.

Exemple (Jeu d'entrée)



On a vu que (n, c) est un équilibre de Nash : M menace E de combattre si elle entre.

Pourtant si E entre tout de même, E a intérêt à s'en accommoder : la menace n'est pas crédible.

On introduit la notion d'équilibre sous-jeux parfait.

Sous-jeu

Définition
Soit $z_* \in Z \setminus T$ et soit $Z_* \subset Z$ l'ensemble des nœuds composant le sous-arbre de racine z_*. Si

- $z_* \in Z_0$ *;*

ou

- *pour tout $z \in Z_*$ $u(z) \subset Z_*$;*

alors le jeu sous forme extensive associé à ce sous-arbre est appelé sous-jeu partant de z_*.

Définition
Un profil de stratégies σ est un équilibre sous-jeux parfait si σ induit un équilibre de Nash dans tous les sous-jeux.

Exemple
Dans le jeu d'entrée, (e, a) est l'unique équilibre sous-jeux parfait.

Équilibre sous-jeux parfait

Théorème (Zermelo (1913))
Tout jeu sous forme extensive à information parfaite admet un équilibre sous-jeux parfait en stratégies pures.

Exemple
Au jeu d'échecs, soit un joueur a une stratégie gagnante, soit les deux joueurs peuvent garantir l'égalité (mais on ne sais pas calculer ces stratégies).

Théorème
Tout jeu sous forme extensive à information imparfaite admet un équilibre sous-jeu parfait en stratégies mixtes (donc également en stratégies de comportement).

Démonstration.
Par récurrence et induction amont. □

Induction amont

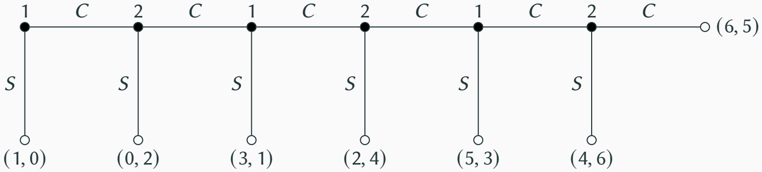
Pour trouver les équilibres sous-jeux parfait on raisonne par induction amont

1. Identifier un sous-jeu minimal,
2. Calculer un équilibre de Nash de ce sous-jeu ;
3. Remplacer ce sous-jeu par un nœud terminal dont le paiement est celui de l'équilibre de Nash ;
4. Recommencer.

Dans un jeu à information parfaite, l'induction amont est aisé à mettre en place. Chaque sous-jeu minimal consiste en un jeu à un joueur, où le joueur n'a qu'un seul nœud de décision.

Dans le cas d'un jeu à information imparfaite, un sous-jeu minimal peut être beaucoup plus complexe.

Exercice (Le centipède, Rosenthal (1982))



1. Déterminer les équilibres sous-jeux parfaits ;
2. Commenter.

Correction

1. On procède par induction amont, le seul équilibre sous-jeu parfait est de jouer S (sortir) pour chaque joueur en chaque nœud. Le paiement résultant est $(1, 0)$.
2. Le paiement des deux joueurs est strictement meilleur s'ils continuent tous les deux (ne serait-ce qu'une étape chacun).