ENSTA Paris — RO203
TD 3 — Introduction à la théorie des jeux
14 avril 2022

Exercice 1 Résoudre les jeux matriciels suivants, i.e. donner la valeur et les stratégies optimales :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} G & M & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ M \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} G & M & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Exercice 2 (Jeu diagonal)
Soient $a_1, \ldots, a_n > 0$ et $G = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$. Donner la valeur du jeu matriciel G ainsi qu'un couple de stratégies optimales.

Exercice 3 (Jeu symétrique)
On appelle jeu symétrique un jeu matriciel tel que $S_1 = S_2$ et $G = -G^t$. Montrer que la valeur d'un jeu symétrique est nulle.

Exercice 4 (Théorème de Loomis, 1946)
Soient A et B deux matrices réelles $S \times T$ avec $B_{st} > 0$ pour tout $(s,t) \in S \times T$. On note $\mathrm{val}(A)$ la valeur (en stratégies mixtes) du jeu matriciel A.

1. Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{val}(A - vB) = 0$;
2. En déduire le théorème de Loomis :
   Il existe $(\sigma, \tau, v) \in \Delta(S) \times \Delta(T) \times \mathbb{R}$ tel que
   $$\sigma A \geq v\sigma B \text{ et } A\tau \leq vB\tau.$$
3. Remarquer que le théorème de Loomis généralise le théorème de von Neumann.

Exercice 5 (Un jeu non fini)
Soit $\Gamma = (\mathbb{N}, \mathbb{N}, g)$ où $g(s,t) = \frac{1}{s+t+1}$.

1. Calculer l'inf sup et le sup inf du jeu. A-t-il une valeur ?
2. Quelles sont les stratégies optimales des joueurs ?
3. Montrer que 0 est une stratégie strictement dominante de J1 (i.e. $\forall (s,t)\ g(0,t) > g(s,t)$). Commenter.

Exercice 6 (Probabilité invariante)
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si chaque élément est positif et si la somme des éléments d'une ligne vaut 1.
Un vecteur (ligne) $\mu \in \mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont positives et somment à 1 est appelé *probabilité invariante* par A si $\mu A = \mu$.
Montrer que toute matrice stochastique admet une probabilité invariante.