ENSTA Paris — RO203
TD 1 — Introduction à la théorie des jeux
31 mars 2022

Exercice 1 On considère le jeu sous forme normale ci-dessous.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} G & M & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} a,b & c,d & e,f \\ g,h & i,j & k,l \end{array}\right] \end{array}$$

Déterminer les conditions sur les paramètres pour que

1. La stratégie H soit strictement dominante ;
2. La stratégie M soit dominante ;
3. Le couple de stratégies (H, G) soit un équilibre en stratégies dominantes.

Correction

1. $a > g$, $c > i$ et $e > k$.
2. $d \geq b$, $d \geq f$, $j \geq h$ et $j \geq l$.
3. (H, G) est un équilibre en stratégies dominantes ssi H et G sont des stratégies dominantes respectivement pour $J1$ et $J2$ i.e. ssi $a \geq g$, $c \geq i$, $e \geq k$ et $b \geq d$, $b \geq f$, $h \geq j$, $h \geq l$.

Exercice 2 (Mariages stables – Gale et Shapley (1962))
À l'aide des trois remarques faites en cours, montrer les propriétés suivantes de l'algorithme de Gale-Shapley :

1. L'algorithme s'arrête en au plus n^2 jours ;
2. L'algorithme est bien défini (il induit un mariage) ;
3. Le mariage induit est stable ;
4. Il n'y a pas unicité des mariages stables. Pour la liste de préférences suivantes donner l'ensemble des mariages stables :
   — $x_1 : y_2 \succ y_1 \succ y_3$ $\quad y_1 : x_2 \succ x_1 \succ x_3$
   — $x_2 : y_3 \succ y_2 \succ y_1$ $\quad y_2 : x_3 \succ x_2 \succ x_1$
   — $x_3 : y_1 \succ y_3 \succ y_2$ $\quad y_3 : x_1 \succ x_3 \succ x_2$
   Lequel est produit par l'algorithme de Gale-Shapley ?

Correction

1. Observer que l'algorithme s'arrête nécessairement si chacun des n hommes a rencontré chacune des n femmes. A noter que la meilleure borne possible n'est pas n^2 mais $(n-1)^2 + 1$.

2. On remarque que, dès lors qu'une femme a formé une paire avec un homme, elle reste associée pour toujours. En supposant que l'algorithme n'induise pas un mariage, alors il existe un homme célibataire qui a rencontré les n femmes qui l'ont soit refusé soit rejeté. Ceci implique que les n femmes font toutes partie d'une paire, autrement dit n éléments sont en paires avec $n-1$ éléments ce qui est impossible.
3. Supposons qu'il y ait une instabilité dans le mariage μ proposé par l'algorithme. Alors il existe $h, h' \in H$ et $f, f' \in F$ tels que $(h, f) \notin \mu$, $(h, f'), (h', f) \in \mu$ et h préfère f à f' et f préfère h h'. Comme h descend sa liste de préférences, il a nécessairement rencontré f. Deux cas sont à distinguer :
   — Si f a accepté, alors elle a rompu la paire. Il existe donc $h'' \in H$ préférable à h. Or, comme f préfère h à h' et $(h', f) \in \mu$, on aboutit à une contradiction par transitivité des préférences.
   — Si f a refusé, on aboutit à une contradiction par un raisonnement similaire.
4. Il y a 3 mariages stables :
   — $(x_1, y_2), (x_2, y_3), (x_3, y_1)$ (Gale-Shapley) ;
   — $(x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_3, y_2)$;
   — $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$.

Exercice 3 (Le concours de beauté – Keynes (1936), Moulin (1986))
Dans un groupe de TD
— Chaque élève choisit un nombre entier entre 0 et 100 ;
— On calcule la moyenne M des nombres choisis ;
— Le gagnant est le plus proche de $\frac{1}{2}M$.
Participer au jeu, proposer une analyse des résultats de ce jeu.

Correction On raisonne par niveaux de rationalité. La valeur de la moyenne est au plus 100 si tous les joueurs choisissent 100. On a donc $\frac{1}{2}M \leq 50$ et il est donc (faiblement) dominé de jouer tout entier supérieur à 50 quelque soit le niveau de rationalité des autres joueurs. Si j'anticipe que mes adversaires seront rationnels au premier niveau, alors aucun ne jouera une valeur supérieure à 50 et la moitié de la moyenne ne dépassera donc pas 25. En itérant le raisonnement, lorsque le niveau de rationalité de mes adversaires tend vers $+\infty$, j'annonce 0.

Empiriquement, on observe un niveau de rationalité entre 2 et 3.

Exercice 4 (Un problème de partage)
On doit partager un gâteau ($[0,1] \times [0,1]$) entre deux enfants. Un parent procède de la manière suivante :
— Il déplace son couteau continument de gauche à droite (de 0 vers 1) sur l'axe x ;

— Le premier enfant qui crie "stop" gagne la part à gauche de x, l'autre celle à droite ;
— Si les deux enfants crient "stop" en même temps c'est le plus jeune qui gagne la part à gauche.

La valeur totale du gâteau pour chaque enfant est 1. La valeur de la part à gauche de x est $f(x)$ pour le plus jeune et $g(x)$ pour le plus âgé. Les fonctions f et g sont continues et strictement croissantes et leur graphe va de $(0,0)$ à $(1,1)$.

1. Montrer que chaque enfant peut obtenir au moins $\frac{1}{2}$, quel que soit ce que fait l'autre enfant ;
2. Si vous connaissez f et g et si vous êtes le plus jeune (respectivement le plus vieux), que faites vous ?
3. Si vous ne connaissez pas la fonction de l'autre enfant que faites vous ? Il n'y a pas de réponse absolue.

Correction 1. Soient $x^* = f^{-1}(1/2)$ et $y^* = g^{-1}(1/2)$. En s'arrêtant en x^* (resp. y^*), J1 (resp. J2) s'assure d'avoir une part de valeur au moins $1/2$. Ils n'ont pas d'intérêt à s'arrêter avant. En effet, si J2 s'arrête en $y < x^*$, alors J1 reçoit une part de valeur $1 - f(y) > 1/2$. De même si J1 s'arrête avant y^*.

2. Deux cas à distinguer :
— Si $x^* \leq y^*$, alors J1 a intérêt à s'arrêter en y^* et gagner $f(y^*)$.
— Si $x^* > y^*$, alors J1 a intérêt à s'arrêter en x^*. Si J2 connaît f, il choisira de s'arrêter légèrement avant x^*.

3. Sans aucune information, il n'y a pas de stratégie optimale. Jouer x^* est un choix prudent garantissant un part de valeur au moins $1/2$.

Exercice 5 (Enchères à plis scellés, partie 1)

Un bien indivisible est proposé aux enchères à $n \geq 2$ acheteurs. Chaque agent $i \in \{1, \ldots, n\}$ attribue une valeur privée v_i au bien et propose un montant b_i uniquement observé par le commissaire-priseur. Le bien est attribué à l'agent avec la plus haute mise et, en cas d'égalité, le gagnant est tiré uniformément parmi les joueurs avec la plus haute mise. On considère deux régimes tarifaires :
— *Au premier prix* : le prix payé par le vainqueur correspond au montant qu'il a enchéri ;
— *Au second prix* : le prix payé par le vainqueur correspond à la deuxième meilleure offre.

Dans cet exercice, on considère une enchère au second prix.

1. Mettre le jeu sous forme normale.
2. Montrer que miser sa valeur privée est une stratégie dominante.

Correction 1. Les joueurs sont les agents $i \in \{1, \dots, n\}$. Pour tout joueur i, les stratégies appartiennent à $S_i = \mathbb{R}^+$. En fixant un profil de stratégies adverses s_{-i}, soit $M_i(s_{-i}) = \max_{j \neq i} s_j$. On a alors :

$$g_i(s_i, s_{-i}) = \begin{cases} 0 & \text{si } s_i < M_i(s_{-i}) \\ \frac{v_i - M_i(s_{-i})}{Card\{j : s_j = s_i\}} & \text{si } s_i \geq M_i(s_{-i}) \end{cases}$$

2. On fixe un profil de stratégies quelconque $(s_1, \dots, s_n)$ et on montre que $g_i(v_i, s_{-i}) \geq g_i(s_i, s_{-i})$. On distingue différents cas :

— Si $s_i < M_i(s_{-i})$, alors $g_i(s_i, s_{-i}) = 0$. Or $g_i(v_i, s_{-i}) \geq 0$ et on a donc bien $g_i(v_i, s_{-i}) \geq g_i(s_i, s_{-i})$.

— Si $s_i \geq M_i(s_{-i})$ et $v_i \leq M_i(s_{-i})$, $g_i(s_i, s_{-i}) \leq 0 \leq g_i(v_i, s_{-i})$.

— Si $s_i \geq M_i(s_{-i})$ et $v_i > M_i(s_{-i})$, $g_i(v_i, s_{-i}) = v_i - M_i(s_{-i}) \geq g_i(s_i, s_{-i})$.

Ainsi, enchérir v_i est bien une stratégie dominante.