Introduction à la théorie des jeux

Jeux sous forme normale – Stratégies mixtes

Tristan Garrec

7 avril 2022

ENSTA Paris

Supports de cours

Retrouvez au fur à mesure des cours l’ensemble des supports (transparents du cours magistral, énoncés et corrigés de travaux dirigés) sur la page du cours.

Extension mixte

Exemple : Pierre, Feuille & Ciseau

Exemple (Pierre, Feuille, Ciseau)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} P & F & C \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ F \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0,0 & -1,1 & 1,-1 \\ 1,-1 & 0,0 & -1,1 \\ -1,1 & 1,-1 & 0,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le jeu Pierre, Feuille, Ciseau n'admet pas d'équilibre de Nash en stratégies pures.

Pour pallier cela, on va autoriser les joueurs à choisir leur stratégie aléatoirement. Mathématiquement, ceci permet de convexifier les ensembles de stratégies.

Exemple dans le jeu de Pierre, Feuille, Ciseau : chaque joueur joue Pierre avec probabilité $1/3$, Feuille avec probabilité $1/3$ et Ciseau avec probabilité $1/3$.

Stratégie mixte

Notation : On note $\Delta(A)$ l'ensemble des probabilités sur A (ou le simplexe sur A) :

$$\Delta(A) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^A \mid \forall i \in A \, x_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i \in A} x_i = 1 \right\}.$$

Un élément de $\Delta(S_i)$ est appelé stratégie mixte. Un élément de S_i est appelé stratégie pure.

Représentations d'une stratégie mixte : $S_1 = \{H, B\}$, J1 joue H avec probabilité $\frac{1}{4}$ et B avec probabilité $\frac{3}{4}$.

- *Fonctionnelle* : $\sigma_1(H) = \frac{1}{4}$ et $\sigma_1(B) = \frac{3}{4}$;
- *Vectorielle* : $\sigma_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$;
- *Combinaison convexe de stratégies pures* : $\frac{1}{4} H + \frac{3}{4} B$ (ou $\frac{1}{4}\delta_H + \frac{3}{4}\delta_B$).

Interprétation

Une stratégie mixte peut être interprétée comme :

- Une croyance sur la façon dont joue un joueur ;
- Une distribution des stratégies pures au sein d'une population.

Certains joueurs utilisent des générateurs de nombres aléatoires pour jouer, comme au poker ou à Pierre, Feuille, Ciseau.

Extension mixte

On note $\Sigma = \prod_{i=1}^{N} \Sigma_i = \prod_{i=1}^{N} \Delta(S_i)$.

L'extension mixte du jeu fini $\Gamma = (N, S, g)$ est le jeu $\Gamma^\Delta = (N, \Sigma, g)$. Le paiement g est étendue multilinéairement : pour $\sigma \in \Sigma$, le paiement du joueur i est (formule de l'espérance totale)

$$g_i(\sigma) = \mathbb{E}_\sigma[g] = \sum_{s \in S} \left(\prod_{j=1}^{N} \sigma_j(s_j) \right) g_i(s).$$

Exemple

Dans le jeu du tir de penalty

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\
\begin{array}{c} G \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 1, -1 & -1, 1 \\ -1, 1 & 1, -1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Soit $(\sigma_1, \sigma_2) \in \Delta(\{G, D\})^2$

$$
\begin{aligned}
g_1(\sigma_1, \sigma_2) &= \sigma_1(G)\sigma_2(G) + \sigma_1(D)\sigma_2(D) - \sigma_1(G)\sigma_2(D) - \sigma_1(D)\sigma_2(G) \\
&\text{on pose } \sigma_1(G) = x \text{ et } \sigma_2(G) = y \\
&= xy + (1 - x)(1 - y) - x(1 - y) - y(1 - x).
\end{aligned}
$$

Équilibre de Nash en stratégies mixtes

Définition

Un équilibre de Nash en stratégies mixtes du jeu (N, S, g) est un équilibre de Nash de son extension mixte (N, σ, g).

Proposition

$\sigma \in \Sigma$ est un équilibre de Nash en stratégies mixtes si et seulement si

$$\forall i \in N \, \forall s_i \in S_i \; g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq g_i(s_i, \sigma_{-i}).$$

Démonstration.

On utilise la linéarité de g_i en σ_i et le fait qu'une stratégie pure est aussi une stratégie mixte. □

Corollaire

Tout équilibre de Nash en stratégies pures est aussi un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Le théorème de Nash

Théorème (Nash (1950))
Tout jeu fini admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Nash a démontré ce théorème dans sa thèse de doctorat, qui fait seulement 32 pages et dont c'est le principal résultat.

La démonstration utilise le théorème suivant.

Théorème (Brouwer (1912))
Soient C un convexe compact non vide d'un espace euclidien et $f : C \longrightarrow C$ continue. Alors f admet un point fixe.

Démonstration du théorème de Brouwer.
Via le lemme de Sperner (1928), en video. $\square$

Démonstration du théorème de Nash.
Soit $f : \Sigma \to \Sigma$ définie par

$$f(\sigma)_i(s_i) = \frac{\sigma_i(s_i) + (g_i(s_i, \sigma_{-i}) - g_i(\sigma))_+}{1 + \sum_{s_i' \in S_i} (g_i(s_i', \sigma_{-i}) - g_i(\sigma))_+},$$

où $a_+ = \max(a, 0)$. f est bien définie et à valeurs dans Σ car $f(\sigma)_i(s_i) \geq 0$ et $\sum_{s_i \in S_i} f(\sigma)_i(s_i) = 1$. De plus f est continue et Σ est convexe et compact. D'après le théorème de Brouwer, il existe $\sigma \in \Sigma$ tel que $f(\sigma) = \sigma$. Montrons que σ est un équilibre de Nash.

Fixons un joueur i. Si $\sum_{s_i' \in S_i} (g_i(s_i', \sigma_{-i}) - g_i(\sigma))_+ = 0$, alors $g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq \max_{s_i' \in S_i} g_i(s_i', \sigma_{-i})$. Sinon, $\sum_{s_i' \in S_i} (g_i(s_i', \sigma_{-i}) - g_i(\sigma))_+ > 0$. Soit s_i tel que $\sigma_i(s_i) > 0$ et $g_i(s_i, \sigma_{-i}) \leq g_i(\sigma)$. On a $\sigma_i(s_i) = \frac{\sigma_i(s_i)}{1 + \sum_{s_i' \in S_i} (g_i(s_i', \sigma_{-i}) - g_i(\sigma))_+}$, donc $\sigma_i(s_i) = 0$: contradiction.

Réciproquement, tout équilibre est un point fixe puisque tous les $(g_i(s_i', \sigma_{-i}) - g_i(\sigma))_+$ sont nuls. $\square$

Domination mixte

Les notions de dominations vues dans la partie précédente s'appliquent encore ici (puisque l'extension mixte d'un jeu sous forme normale est encore un jeu sous forme normale).

Proposition
Une stratégie $\sigma_i \in \Sigma_i$ est strictement dominée par $\sigma'_i \in \Sigma_i$ si et seulement si

$$\forall s_{-i} \in S_{-i} \; g_i(\sigma_i, s_{-i}) < g_i(\sigma'_i, s_{-i}).$$

On peut également redéfinir l'élimination itérée de stratégies strictement dominées en prenant en compte les stratégies dominées par des stratégies mixtes.

L'ensemble des équilibre de Nash (en stratégies mixtes) est inchangé par élimination de stratégies strictement dominées (par une stratégie mixte).

Exemple

Dans le jeu suivant

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} G & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ M \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 1,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 5,0 & 1,6 \\ 0,2 & 1,1 & 2,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$g_2(1/2G + 1/2D) = (5/2, 4, 3/2)$ et $g_2(C) = (2, 0, 1)$ donc C est strictement dominée par $1/2G + 1/2D$.

Recherche d'équilibres en stratégies mixtes

Proposition
$\sigma \in \Sigma$ est un équilibre de Nash en stratégies mixtes si et seulement si $\forall i \in N$

$$\forall s_i, s_i' \in S_i\ (\sigma_i(s_i) > 0 \text{ et } \sigma_i(s_i') > 0) \Rightarrow g_i(s_i, \sigma_{-i}) = g_i(s_i', \sigma_{-i})\ ;$$
$$\forall s_i \in S_i\ \sigma_i(s_i) = 0 \Rightarrow g_i(s_i, \sigma_{-i}) \leq g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}).$$

Cette proposition donne une méthode pour obtenir les équilibres de Nash en stratégies mixtes :

1. Essayer tous les supports possibles (i.e. $\{s_i \in S_i \mid \sigma_i(s_i) > 0\}$) ;
2. Trouver les probabilités qui rendent chaque joueur indifférent sur son support ;
3. Vérifier que les stratégies hors du support ne donnent pas un meilleur paiement.

Recherche d'équilibres en stratégies mixtes

Exemple
Trouver tous les équilibres de Nash du jeu de rencontre

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} D & G \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 1,1 & 0,0 \\ 0,0 & 1,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Il n'y a pas de stratégie pure strictement dominante ou strictement dominée (par des stratégies mixtes) ;
2. Il y a deux équilibres de Nash en stratégies pures : (H, D) et (B, G) ;

Exemple (suite)

3. Soit $x \in [0, 1]$ la probabilité de jouer H et $y \in [0, 1]$ celle de jouer D. Comme on a déterminé les équilibres de Nash en stratégies pures on peut supposer $x \in]0, 1[$ et $y \in [0, 1]$, ou vice-versa. On se place dans le premier cas. La propriété précédente implique $g_1(H, y) = g_1(B, y)$ donc $y = 1 - y$ et $y = \frac{1}{2} \in]0, 1[$. On peut donc procéder de même et on obtient $x = \frac{1}{2}$.
4. Le cas $x \in [0, 1]$ et $y \in]0, 1[$ est symétrique. L'ensemble des équilibres est donc $\mathsf{NE}(\Gamma) = \{(H, D), (B, G), ((1/2, 1/2), (1/2, 1/2))\}$.