Introduction à la théorie des jeux

Jeux sous forme normale

Tristan Garrec

31 mars & 7 avril 2022

ENSTA Paris

Supports de cours

Retrouvez au fur à mesure des cours l'ensemble des supports (transparents du cours magistral, énoncés et corrigés de travaux dirigés) sur la page du cours.

Jeux en stratégies pures

Jeux à N joueurs

Un jeu sous forme normale est donné par $\Gamma = (N, (S_i)_{i\in N}, (g_i)_{i\in N})$ où

- N est l'ensemble fini des joueurs (et également le nombre de joueurs) ;
- Pour tout $i \in N$, S_i est l'ensemble de stratégies (ou d'actions) du joueur i ;
- Pour tout $i \in N$, $g_i : \prod_{j\in N} S_j \to \mathbb{R}$, est la fonction de paiement du joueur i.

Notation : $S = \prod_{j\in N} S_j$, $S_{-i} = \prod_{j\in N\setminus\{i\}} S_j$ et $g = (g_i)_{i\in N}$.

Déroulement : le joueur i choisit simultanément et indépendamment des autres une stratégie $s_i \in S_i$. Il reçoit alors le paiement $g_i(s_1, \ldots, s_N)$.

Exemples

Exemple (La guerre des sexes)
Les membres d'un couple doivent décider (indépendamment) s'ils vont au cinéma ou au théâtre. Alice préfère le cinéma et Bob le théâtre, mais tous deux préfèrent être ensemble à être seul.

Modélisation :

- $N = 2$, Joueur 1 = Alice, Joueur 2 = Bob ;
- $S_1 = S_2 = \{C, T\}$;
- $g_1(C, C) = 2$, $g_1(T, T) = 1$, $g_2(C, C) = 1$, $g_2(T, T) = 2$, $g_i(s_1, s_2) = 0$ sinon.

Représentation sous forme matricielle :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & T \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} 2, 1 & 0, 0 \\ 0, 0 & 1, 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple (Le tir de penalty)
Un tireur de penalty et un gardien de but se font face. Le tireur peut tirer à gauche ou à droite, le gardien plonger à gauche ou à droite.

Modélisation :

- $N = 2$, Joueur 1 = Gardien, Joueur 2 = Tireur ;
- $S_1 = S_2 = \{G, D\}$;
- $g_1(s_1, s_2) = 1$ si $s_1 = s_2$ et -1 sinon, $g_2 = -g_1$.

Représentation sous forme matricielle :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} G \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 1, -1 & -1, 1 \\ -1, 1 & 1, -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemples

Exemple (Le dilemme du chocolat)
Deux enfants ont chacun le choix entre prendre un morceau de chocolat et le garder ou prendre trois morceaux pour le donner à l'autre.

Représentation matricielle :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} D & G \end{array} \\ \begin{array}{c} D \\ G \end{array} & \begin{pmatrix} 3,3 & 0,4 \\ 4,0 & 1,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Indépendamment du choix de l'autre enfant, chaque enfant à intérêt à garder plutôt qu'à donner.
- L'issue rationnelle du jeu est (G, G) avec comme paiement $(1, 1)$.
- En ayant joué (D, D) ils auraient pourtant gagné $(3, 3)$.

Cet exemple fait ressortir une tension entre intérêt individuel et intérêt collectif.

Domination stricte

Définition
La stratégie $s'_i \in S_i$ *est strictement dominée par* $s_i \in S_i$ *si*
$\forall s_{-i} \in S_{-i}\ g_i(s'_i, s_{-i}) < g_i(s_i, s_{-i})$.

Un joueur (rationnel) ne devrait jamais jouer une stratégie strictement dominée : il a une stratégie qui lui donne un paiement strictement meilleur indépendamment des choix des autres joueurs.

Définition
Une stratégie $s_i \in S_i$ *est strictement dominante si elle domine strictement toutes les autres stratégies :* $\forall s'_i \in S_i \setminus \{s_i\}\ \forall s_{-i} \in S_{-i}\ g_i(s'_i, s_{-i}) < g_i(s_i, s_{-i})$.

Définition
Un profil de stratégies $s = (s_1, \ldots, s_N) \in S$ *est un équilibre en stratégies strictement dominantes si pour tout* $i \in N$, s_i *est strictement dominante.*

Si un tel équilibre existe, ce devrait être l'issue rationnelle du jeu.

Dans les exemples précédents

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & T \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} 2,1 & 0,0 \\ 0,0 & 1,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} G \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 1,-1 & -1,1 \\ -1,1 & 1,-1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} D & G \end{array} \\ \begin{array}{c} D \\ G \end{array} & \begin{pmatrix} 3,3 & 0,4 \\ 4,0 & 1,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Élimination itérée des stratégies strictement dominées

- Si un joueur i a une stratégie strictement dominée s_i, il ne devrait pas la jouer ;
- Les autres joueurs le savent ;
- On élimine s_i du jeu, i.e., on considère le jeu où l'ensemble des stratégies du joueur i est $S_i \setminus \{s_i\}$;
- On réitère pour le nouveau jeu.

Si au terme de cette procédure tous les ensembles d'actions sont des singletons, alors ces singletons ne dépendent pas de l'ordre d'élimination des stratégies. Le jeu est dit résoluble par élimination itérée des stratégies strictement dominées.

Exemple

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 5,2 & 2,6 & 1,4 & 0,4 \\ 0,0 & 3,2 & 2,1 & 1,1 \\ 7,0 & 2,2 & 1,5 & 5,1 \\ 9,5 & 1,3 & 0,2 & 4,8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Élimination itérée des stratégies strictement dominées

Exemple

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_2 & C_2 & D_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2,6 & 1,4 & 0,4 \\ 3,2 & 2,1 & 1,1 \\ 2,2 & 1,5 & 5,1 \\ 1,3 & 0,2 & 4,8 \end{pmatrix} \end{array}
\quad
\begin{array}{c} \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_2 & C_2 & D_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3,2 & 2,1 & 1,1 \\ 2,2 & 1,5 & 5,1 \\ 1,3 & 0,2 & 4,8 \end{pmatrix} \end{array}
\quad
\begin{array}{c} \\ B_1 \\ C_1 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_2 & C_2 & D_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3,2 & 2,1 & 1,1 \\ 2,2 & 1,5 & 5,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ B_1 \\ C_1 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_2 & C_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3,2 & 2,1 \\ 2,2 & 1,5 \end{pmatrix} \end{array}
\quad
\begin{array}{c} \\ B_1 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_2 & C_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3,2 & 2,1 \end{pmatrix} \end{array}
\quad
\begin{array}{c} \\ B_1 \end{array}
\begin{array}{c} B_2 \\ \begin{pmatrix} 3,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Domination faible

Définition
La stratégie $s'_i \in S_i$ est faiblement dominée par $s_i \in S_i$ si
$\forall s_{-i} \in S_{-i} \;\; g_i(s'_i, s_{-i}) \leq g_i(s_i, s_{-i})$ *et* $\exists s_{-i} \in S_{-i} \; g_i(s'_i, s_{-i}) < g_i(s_i, s_{-i})$.

Définition
La stratégie $s'_i \in S_i$ est dominante si $\forall s_i \in S_i \, \forall s_{-i} \in S_{-i} \; g_i(s'_i, s_{-i}) \geq g_i(s_i, s_{-i})$.

Une stratégie dominante représente un choix raisonnable, qui ne peut être regretté.

Définition
Un profil de stratégies $s = (s_1, \ldots, s_N) \in S$ est un équilibre en stratégies dominantes si pour tout $i \in N$, s_i est dominante.

Si un tel équilibre existe, il semble raisonnable qu'il soit joué par les joueurs.

Domination faible

- Si un joueur a une stratégie faiblement dominée, il parait raisonnable qu'il ne la joue pas ;
- Les autres joueurs le savent ;
- On pourrait éliminer cette stratégie et itérer ;
- Cependant...

Exemple (Élimination itérée des stratégies faiblement dominées)

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ M \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 1,1 & 0,0 \\ 1,1 & 2,1 \\ 0,0 & 2,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

En éliminant les stratégies faiblement dominées, on peut éliminer H puis G, mais on pourrait également éliminer B puis D donnant un résultat différent.

On ne peut donc pas conclure.

Équilibre de Nash

Un équilibre de Nash est un profil de stratégies tel qu'aucun des joueurs n'a d'intérêt à dévier de sa stratégie unilatéralement.

Pour un profil de stratégies $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$, on note $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_N) \in S_{-i}$.

Définition
Un profil de stratégies $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$ est un équilibre de Nash si

$$\forall i \in N \, \forall s_i' \in S_i \; g_i(s_i, s_{-i}) \geq g_i(s_i', s_{-i}). \tag{1}$$

On note $\mathrm{NE}(\Gamma)$ l'ensemble des équilibre de Nash du jeu Γ.

Équilibre de Nash

En termes de modélisation, on donne les interprétations ou justifications suivantes :

- *Prescription* : un individu extérieur propose un profil ;
- *Communication* : les joueurs se mettent d'accord à l'avance sur le profil à jouer ;
- *Introspection* : s'il existe un unique équilibre de Nash, les joueurs peuvent se convaincre que c'est l'issue du jeu ;
- *Convention* : en France on roule à gauche, en Angleterre à droite ;
- *Apprentissage* : les joueurs découvrent les stratégies suivies par les autres au cours d'un processus d'apprentissage ;
- *Évolution* : chaque espèce évolue de façon adaptée aux autres espèces.

Meilleure réponse

Définition
Une stratégie $s_i \in S_i$ est dite meilleure réponse à $s_{-i} \in S_{-i}$ si pour tout $s'_i \in S_i$, $g_i(s'_i, s_{-i}) \leq g_i(s_i, s_{-i})$.

On note $\mathrm{BR}_i(s_{-i})$ l'ensemble des meilleures réponses à s_{-i}.

Proposition
Un profil de stratégies $s \in S$ est un équilibre de Nash si et seulement si pour tout $i \in N$ $s_i \in \mathrm{BR}_i(s_{-i})$.

Exemples

Exemple (La guerre des sexes)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & T \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} 2,1 & 0,0 \\ 0,0 & 1,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Il y a deux équilibres de Nash, (C, C) et (T, T).

Exemple (Le tir de penalty)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} G \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 1,-1 & -1,1 \\ -1,1 & 1,-1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Il n'y a pas d'équilibre de Nash.

Exemples

Exemple (Le dilemme du chocolat)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} D & G \end{array} \\ \begin{array}{c} D \\ G \end{array} & \begin{pmatrix} 3,3 & 0,4 \\ 4,0 & 1,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

L'unique équilibre de Nash est (G, G), alors que (D, D) serait mieux pour tout le monde.

Ainsi

- Un jeu peut avoir plusieurs équilibres de Nash ;
- Un jeu peut ne pas avoir d'équilibre de Nash ;
- Les équilibres de Nash n'ont pas nécessairement de pouvoir prédictif sur l'issue du jeu.

Exemples

Exemple

$$\begin{array}{c} \\ H \\ M \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1,1 & 0,0 \\ 1,1 & 2,1 \\ 0,0 & 2,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nous n'avons pas résolu ce jeu par élimination itérée des stratégies strictement dominée, mais il possède des équilibres de Nash : (H, G), (M, G), (M, D), (B, D).

Exemple

$$\begin{array}{c} \\ H \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2,2 & 1,1 \\ 1,1 & 1,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(H, G) et (B, D) sont des équilibres de Nash. Les stratégies B et D sont faiblement dominées.

Équilibre de Nash et domination

Proposition

1. *Un équilibre en stratégies strictement dominantes est l'unique équilibre de Nash ;*
2. *L'ensemble des équilibres de Nash est inchangé par élimination itérée de stratégies strictement dominées (à quelque étape de l'itération que ce soit) ;*
3. *Si un jeu est résoluble par élimination itérée des stratégies strictement dominées, alors le profil obtenu est l'unique équilibre de Nash du jeu.*

Proposition

1. *Un équilibre en stratégies dominantes est un équilibre de Nash ;*
2. *La suite des ensembles des équilibres de Nash obtenus par élimination itérée de stratégies faiblement dominées décroit.*

A Beautiful Mind

la séquence du film *A Beautiful Mind*, dans laquelle John Nash invente son équilibre. Expliquer pourquoi le profil indiqué n'est pas un équilibre de Nash.

Il y a cinq femmes et quatre hommes. Nash propose d'ignorer la femme préférée de tous et d'appairer les quatre hommes et femmes restantes. Si ce profil d'actions est joué, alors chacun des hommes a intérêt à dévier unilatéralement de la femme à laquelle il est appairé vers la femme préférée de tous.