Introduction à la théorie des jeux

Équilibre corrélé

Tristan Garrec

25 avril 2024

ENSTA Paris

Supports de cours

Retrouvez au fur à mesure des cours l'ensemble des supports (transparents du cours magistral, énoncés et corrigés de travaux dirigés) sur la page du cours.

Équilibre corrélé

Motivations

- Dans les cours précédents, on a fait l'hypothèse que les choix des joueurs étaient indépendants les uns des autres
- En pratique, ces choix peuvent dépendre de facteurs extérieurs et donc être corrélés

Prenons un exemple :

- Lorsqu'un automobiliste arrive à une intersection, il peut choisir de la traverser ou de laisser les autres automobilistes la traverser
- Si deux automobilistes jouent des stratégies mixtes, il y a une probabilité positive qu'ils traversent en même temps
- Pour palier ce risque d'accident, on a inventé le feu rouge
- Le feu rouge informe chaque automobiliste de la stratégie pure à jouer
- Il corrèle les stratégies des joueurs

Exemple

Exemple (La guerre des sexes)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & T \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} 2,1 & 0,0 \\ 0,0 & 1,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le jeu a trois équilibres de Nash : (C, C) avec paiement $(2, 1)$; (T, T) avec paiement $(1, 2)$ et $(2/3C + 1/3T, 1/3C + 2/3T)$ avec paiement espéré $(2/3, 2/3)$.

- Les deux premiers équilibres ne sont pas symétriques
- Le troisième équilibre est symétrique mais les paiement sont inférieurs à 1

Les deux joueurs pourraient corréler leurs actions ainsi : lancer une pièce équilibrée, si c'est face jouer (C, C) et si c'est pile jouer (T, T). Le paiement espéré serait alors $(3/2, 3/2)$.

Puisque (C, C) et (T, T) sont des équilibres, aucun des joueurs n'a de bénéfice à dévier du choix recommandé par la pièce.

Interprétation

Grâce à l'exemple précédent, on remarque que si on autorise les joueurs à procéder à une loterie commune et publique avant le jeu, ils peuvent recevoir comme paiement d'équilibre toute combinaison convexe des paiements d'équilibre du jeu d'origine.

Question : peut-on créer un mécanisme de corrélation tel que l'ensemble des paiement d'équilibre inclue des paiements qui ne sont pas dans l'enveloppe convexe des paiements d'équilibre du jeu initial ?

Exemple

On considère le jeu suivant dans lequel J1 choisit une ligne, J2 une colonne et J3 une matrice

$$
l \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0,1,3 & 0,0,0 \\ 1,1,1 & 1,0,0 \end{pmatrix} \end{array}
\quad
c \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2,2,2 & 0,0,0 \\ 2,2,1 & 2,2,2 \end{pmatrix} \end{array}
\quad
r \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0,1,0 & 0,0,0 \\ 1,1,1 & 1,0,3 \end{pmatrix} \end{array}
$$

On montre que le seul paiement d'équilibre est $(1,1,1)$ alors qu'il existe un mécanisme de corrélation qui induit comme paiement d'équilibre $(2,2,2)$.

Exemple

$$l\ \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0,1,3 & 0,0,0 \\ 1,1,1 & 1,0,0 \end{pmatrix} \end{array} \quad c\ \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2,2,2 & 0,0,0 \\ 2,2,0 & 2,2,2 \end{pmatrix} \end{array} \quad r\ \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0,1,0 & 0,0,0 \\ 1,1,1 & 1,0,3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le seul paiement d'équilibre est $(1, 1, 1)$: montrons que tout équilibre est de la forme $(B, L, \alpha l + (1-\alpha)r)$.

Il existe une probabilité strictement positive que (L, c) ne soit pas joué par J2 et J3 : si J2 joue L, alors l domine strictement c donc (L, c) ne peut pas être joué avec probabilité 1.

J1 joue B : B domine faiblement T. De plus si (L, c) n'est pas joué avec probabilité 1, B donne un paiement strictement meilleur que T, donc T n'est pas joué à l'équilibre.

J2 joue L et J3 joue l ou r : une fois T éliminée, r domine strictement c, puis L domine strictement R.

Il ne reste plus que (B, L, l) et (B, L, r), qui donnent le paiement $(1, 1, 1)$.

Exemple

$$
l \; \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0,1,3 & 0,0,0 \\ 1,1,1 & 1,0,0 \end{pmatrix} \end{array}
\quad
c \; \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2,2,2 & 0,0,0 \\ 2,2,1 & 2,2,2 \end{pmatrix} \end{array}
\quad
r \; \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0,1,0 & 0,0,0 \\ 1,1,1 & 1,0,3 \end{pmatrix} \end{array}
$$

Mécanisme de corrélation avec paiement $(2,2,2)$:

- J1 et J2 lancent une pièce sans révéler le résultat à J3
- J1 et J2 jouent (T, L) ou (B, R) suivant le résultat
- J3 joue c

(T, L, c) et (B, R, c) sont choisis équiprobablement avec paiement $(2,2,2)$.

Si J3 dévie vers l ou r, son paiement espéré est $\frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{2} \times 0$. J1 et J2 ne dévie pas car 2 est leur paiement maximal dans le jeu.

Interprétation

Pour que ce mécanisme soit un équilibre, il est nécessaire que J3 ne connaisse pas le résultat du jet de pièce.

Ainsi, tout paiement de l'enveloppe convexe de l'ensemble des paiement d'équilibre peut être atteint par une loterie publique, et pour atteindre d'autres paiements il faut que la loterie ne soit pas publique, auquel cas les joueurs reçoivent des informations différentes sur son résultat.

Exemple

Exemple (Poule mouillée, ou 2 Fast 2 Furious)
Brian et Dominic se font face et roulent l'un vers l'autre sur une route à une voie. Le premier à s'écarter de la route pour éviter le carambolage perd. Si aucun ne s'écarte les deux sont blessés.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 6,6 & 2,7 \\ 7,2 & 0,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le jeu a trois équilibres : (T, R) avec paiement $(2, 7)$, (B, L) avec paiement $(7, 2)$ et $(2/3T + 1/3B, 2/3L + 1/3R)$ avec paiement $(14/3, 14/3)$.

On considère le mécanisme dans lequel un observateur extérieur choisit uniformément l'un des couples (T, L), (T, R) et (B, L), puis annonce à chaque joueur sa coordonnée.

Si J1 reçoit T, la probabilité conditionnelle que J2 ait reçu L est $\frac{1/3}{1/3+1/3} = 1/2$.

Si J1 reçoit B, il sait que J2 a reçu L.

Exemple

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 6,6 & 2,7 \\ 7,2 & 0,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Montrons qu'il n'y a pas de déviation unilatérale profitable de la recommandation.

Si J1 reçoit T, son paiement espéré en suivant T est $\frac{1}{2} \times 6 + \frac{1}{2} \times 2 = 4$. S'il dévie son paiement espéré est $\frac{1}{2} \times 7 + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{7}{2}$.

Si J1 reçoit B, son paiement espéré en suivant B est 7. S'il dévie son paiement est 6.

Par symétrie J2 n'a pas d'intérêt à dévier.

Le paiement espéré est $\frac{1}{3}(6,6) + \frac{1}{3}(7,2) + \frac{1}{3}(2,7) = (5,5)$, qui n'est pas dans l'enveloppe convexe des paiements d'équilibre du jeu original.

Interprétation

Les exemples précédents montrent que pour obtenir des paiement élevés pour chaque joueur, il faut éviter le pire paiement (e.g. $(0, 0)$). Ceci ne peut être accompli si les joueurs jouent des stratégies mixtes indépendantes.

On a fait les hypothèses suivantes sur le jeu étendu :

- Le jeu inclue un observateur, qui recommande des stratégies aux joueurs
- L'observateur choisi ses recommandations aléatoirement, suivant une distribution de probabilité connue des joueurs
- Les recommandations sont privées
- Ce mécanisme est connaissance commune parmi tous les joueurs : chaque joueur sait que le mécanisme est utilisé, que chaque joueur sait que le mécanisme est utilisé, que chaque joueur sait que chaque joueur sait, etc.

Définition

Soit $\Gamma = (N, S, g)$ un jeu sous forme normale. Pour toute distribution de probabilité $p \in \Delta(S)$ on définit $\Gamma^*(p)$ ainsi :

- Un observateur extérieur choisit un profil d'actions dans S suivant p
- L'observateur révèle (et recommande) à chaque joueur i l'action s_i mais pas s_{-i}
- Chaque joueur i choisit une action $s'_i \in S_i$ (éventuellement différente de s_i)
- Le paiement du joueur i est $g_i(s')$

C'est un jeu sous forme extensive avec ensembles d'information.

Exemple

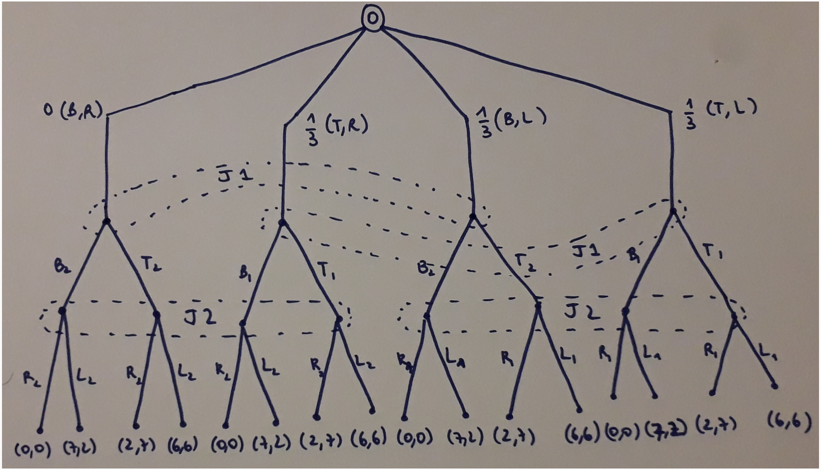

Figure 1: Poule mouillée

Définition

Une stratégie (pure) du joueur i dans le jeu $\Gamma^*(p)$ est une fonction $\tau_i : S_i \longrightarrow S_i$, qui a chaque recommandation s_i de l'observateur associe une action $\tau_i(s_i) \in S_i$

La probabilité que le joueur i reçoive s_i est

$$\sum_{t_{-i} \in S_{-i}} p(s_i, t_{-i}).$$

La probabilité conditionnelle que l'observateur ait choisi (s_i, s_{-i}) est

$$p(s_{-i}|s_i) = \frac{p(s_i, s_{-i})}{\sum_{t_{-i} \in S_{-i}} p(s_i, t_{-i})}$$

si le dénominateur est strictement positif, et est non définie sinon.

Théorème

On note τ_i^* la stratégie du joueur i qui consiste à suivre la recommandation de l'observateur, i.e. $\tau_i^*(s_i) = s_i$ pour tout $s_i \in S_i$.

Théorème
Le profil τ^* est un équilibre dans le jeu $\Gamma^*(p)$ si et seulement si

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p(s_i, s_{-i}) g_i(s_i, s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p(s_i, s_{-i}) g_i(s_i', s_{-i}) \ \forall i \forall s_i, s_i' \in S_i.$$

Définition
Une distribution de probabilité $p \in \Delta(S)$ est un équilibre corrélé si le profil τ^* est un équilibre de Nash du jeu $\Gamma^*(p)$

Théorème

Tout profil de stratégies σ induit une probabilité p_σ sur S :

$$p_\sigma(s_1, \ldots, s_n) = \sigma_1(s_1) \times \cdots \times \sigma_n(s_n).$$

Théorème
Pour tout équilibre de Nash σ^*, la distribution de probabilité p_{σ^*} est un équilibre corrélé.

Corollaire
Tout jeu fini admet un équilibre corrélé.

Remarque : contrairement aux équilibres de Nash, les équilibres corrélés d'un jeu sont algorithmiquement relativement facile à calculer.

Exemple (Guerre des sexes)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & T \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} 2,1 & 0,0 \\ 0,0 & 1,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calculons les équilibres corrélés. Soit
$p = [\alpha(C, C), \beta(C, T), \gamma(T, C), \delta(T, T)]$. On a

$$\alpha g_1(C, C) + \beta g_1(C, T) \geq \alpha g_1(T, C) + \beta g_1(T, T)$$
$$\gamma g_1(T, C) + \delta g_1(T, T) \geq \gamma g_1(C, C) + \delta g_1(C, T)$$
$$\alpha g_2(C, C) + \gamma g_2(T, C) \geq \alpha g_2(C, T) + \gamma g_2(T, T)$$
$$\beta g_2(C, T) + \delta g_2(T, T) \geq \beta g_2(C, C) + \delta g_2(T, C)$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$$
$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$$

Exemple

$$\begin{array}{ccc} & C & T \\ \begin{array}{c} C \\ T \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 2,1 & 0,0 \\ 0,0 & 1,2 \end{pmatrix}} \end{array}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
&\alpha \geq 2\beta \\
&2\delta \geq \gamma \\
&\delta \geq 2\beta \\
&2\alpha \geq \gamma \\
&\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1 \\
&\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0
\end{aligned}$$

Exemple

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} C & T \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} 2,1 & 0,0 \\ 0,0 & 1,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

L'ensemble des paiements d'équilibre corrélé est donné par le triangle de sommets $(1,2), (2,1), (2/3, 2/3)$, qui correspondent aux valeurs de $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de $(1,0,0,0)$, $(0,0,0,1)$ et $(2/9, 1/9, 4/9, 2/9)$ respectivement.

Dans cet exemple-ci, l'ensemble des paiements d'équilibre corrélé est donc égale à l'enveloppe convexe des paiements d'équilibre de Nash. Dans l'exemple de la poule mouillée, ces ensembles sont différents.

Prolongements

Récapitulatif

Dans ce cours nous avons abordé les notions suivantes :

- Jeux sous forme normale : stratégies pures et mixtes, domination, équilibre de Nash ;
- Jeux à somme nulle : maxmin, minmax, valeur, point-selle, propriétés de l'opérateur valeur, lien avec la dualité ;
- Jeux sous forme extensive : information parfaite et imparfaite, stratégies pures, mixtes et de comportement, réduction sous forme normale, mémoire parfaite, équilibre sous-jeu parfait, induction amont ;
- Equilibre corrélé : liens avec l'équilibre de Nash, paiements ;
- Mariages stables : algorithme de Gale-Shapley
- Jeux de congestion : paradoxe de Braess ;
- Enchères : enchères au second et au premier prix, domination, équilibres et paiement du vendeur à l'équilibre.

On pourrait prolonger le cours avec les notions suivantes, qui souvent impliquent un aspect dynamique.

Jeux répétés

Un jeu sous forme normale est répété un certain nombre de fois. À chaque étape, les joueurs se souviennent des actions jouées par tous les joueurs aux étapes précédentes. Le paiement d'un joueur à la fin du jeu est la moyenne des paiements qu'il a obtenus à chaque répétition.

Jouer à chaque étape un équilibre du jeu en un coup est un équilibre du jeu répété.

- Y a-t-il d'autres équilibres ?
- Quels sont les paiements d'équilibre atteignables ?

Jeux stochastiques

Soient N jeux sous forme normale, les joueurs commencent en l'un de ces jeux. Ils y choisissent chacun une action et reçoivent un paiement. Les actions choisies induisent également une probabilité de transition vers l'un des N jeux qui est joué à l'étape suivante, et ainsi de suite.

Il y a pour chaque joueur un compromis entre

- obtenir un bon paiement dans le jeu courant ;
- maximiser ses chances d'être dans un bon jeu dans les étapes suivantes.

Information incomplète

Deux joueurs s'affrontent. Deux états du monde (i.e. deux jeux) sont possibles, l'un est sélectionné suivant une probabilité uniforme avant le début du jeu et fixé pour toute la suite.

Le joueur 1 connait l'état du monde mais pas le joueur 2.

Les joueurs jouent de manière répété et observent les actions de l'adversaire, mais pas les paiements.

Le joueur 1 fait fasse au compromis suivant

- bien jouer dans le jeu correspondant à l'état du monde. Il prend le risque de révéler cet état au joueur 2, ce qui peut lui être préjudiciable ;
- cacher l'état du monde au joueur 2.

Jeux différentiels

Les jeux différentiels sont à l'intersection de la théorie des jeux et de la théorie du contrôle.

Un lion et un homme se trouvent dans une arène. Le lion cherche à attraper l'homme, qui cherche à lui échapper. À chaque instant le lion et l'homme choisissent leur vecteur vitesse. La dynamique des joueurs est modélisée par des équations différentielles contrôlées.

- Combien de temps le lion met au plus pour attraper l'homme ?
- S'il ne peut pas l'attraper, peut-il s'en approcher aussi prêt qu'il le souhaite ?

Jeux à champ moyen

Un jeu à champ moyen (mean field game) est un jeu différentiel avec un nombre très important de joueurs très petits, qui individuellement ont très peu d'influence sur le système dans son ensemble.

Ils ont été nommés ainsi en référence au modèles de champs moyens en physique mathématique, qui étudient le comportement de nombreuses particules.

Ils ont été entre autres utilisés dans les contextes applicatifs suivants :

- modélisation de production optimale d'une ressource naturelle épuisable, comme le pétrole ;
- modèles de croissance avec distribution hétérogène des richesses ;
- simulation de comportements de foules.

Et bien d'autres modèles

- Jeux de recherche-dissimulation ;
- Jeux d'inspection ;
- Jeux d'emplacement ;
- Systèmes de vote ;
- Jeux d'évolution ;
- Jeux d'apprentissage ;
- Jeux coopératifs ;
- Et bien plus encore !