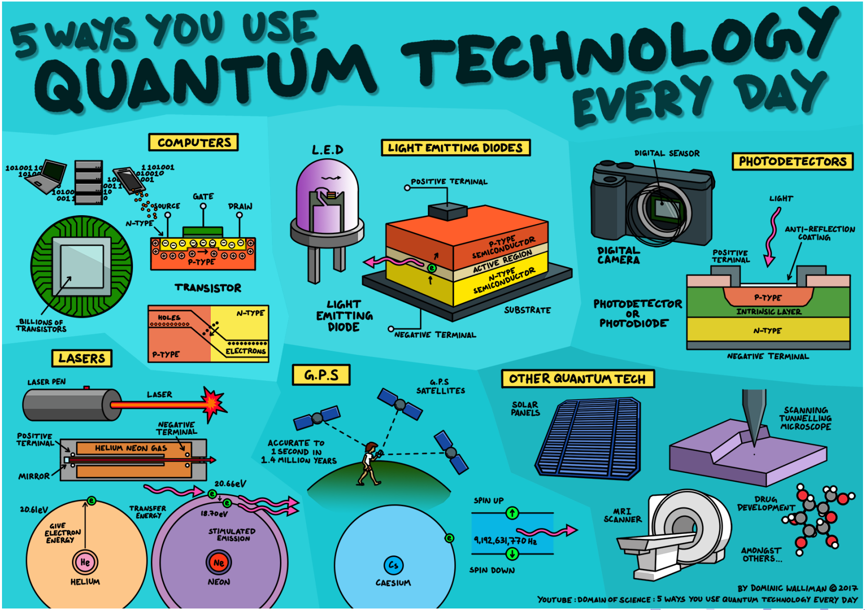
# Intro QC- 6 - Modèle du qubit

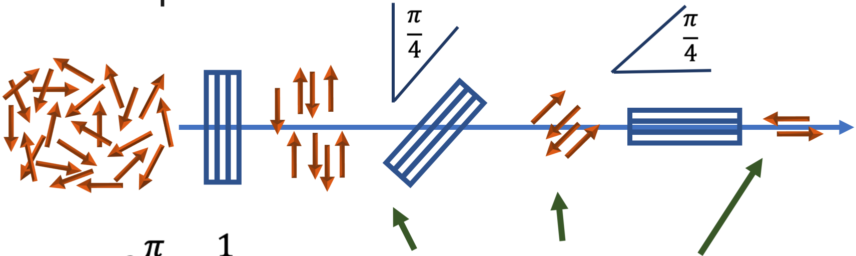
JM.Torres - IBM Quantum Ambassador

6 septembre 2023



5 WAYS YOU USE QUANTUM TECHNOLOGY EVERY DAY
COMPUTERS
BILLIONS OF TRANSISTORS
SOURCE
GATE
DRAIN
N-TYPE
P-TYPE
TRANSISTOR
HOLES
N-TYPE
P-TYPE
ELECTRONS
L.E.D
LIGHT EMITTING DIODES
POSITIVE TERMINAL
P-TYPE SEMICONDUCTOR
ACTIVE REGION
N-TYPE SEMICONDUCTOR
SUBSTRATE
NEGATIVE TERMINAL
LIGHT EMITTING DIODE
DIGITAL SENSOR
DIGITAL CAMERA
PHOTODETECTORS
LIGHT
ANTI-REFLECTION COATING
POSITIVE TERMINAL
P-TYPE
INTRINSIC LAYER
N-TYPE
NEGATIVE TERMINAL
PHOTODETECTOR OR PHOTODIODE
LASERS
LASER PEN
LASER
POSITIVE TERMINAL
NEGATIVE TERMINAL
HELIUM NEON GAS
MIRROR
20.61eV
GIVE ELECTRON ENERGY
He
HELIUM
TRANSFER ENERGY
20.66eV
18.70eV
STIMULATED EMISSION
Ne
NEON
G.P.S
G.P.S SATELLITES
ACCURATE TO 1 SECOND IN 1.4 MILLION YEARS
Cs
CAESIUM
SPIN UP
9,192,631,770 Hz
SPIN DOWN
OTHER QUANTUM TECH
SOLAR PANELS
SCANNING TUNNELLING MICROSCOPE
MRI SCANNER
DRUG DEVELOPMENT
AMONGST OTHERS...
BY DOMINIC WALLIMAN © 2017
YOUTUBE : DOMAIN OF SCIENCE : 5 WAYS YOU USE QUANTUM TECHNOLOGY EVERY DAY

# Polarized photons




$$\cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

100 → 50 → 25

**More, and better:** https://youtu.be/zcqZHYo7ONs

# Thought experiment (1/2)

Consider the spin as a magnetic moment wich we can imagine as a rotation of the particule around itself (this is only an image)

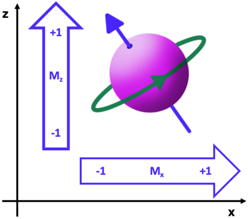
Looking at the two following statements:

- A: measuring the spin along z axis results in +1
- B: measuring the spin along x axis results in +1

I want to study (AvB == 1) ?

With classical reasonning :

1. if I get a result +1 on z : the experiment is over : AvB=1.
   - if not, I measure on x : if I get +1 : experiment is over : AvB=1
     - else AvB = 0
2. The other way around (starting with x) : same thing :
   - if I get +1 on x : experiment is over : BvA=1.
   - if not, I measure on Z, if I get +1 : experiment is over : BvA=1
     - else BvA = 0



# Thought experiment (1/2)

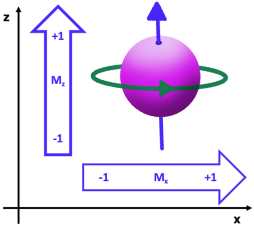
Now with quantum mechanics:

Assume we have prepared the spin on +1 over z.

1. I measure +1 on z : experience is over : AvB=1
2. Now with the same starting condition, let's evaluate (BvA==1)?
   - measuring on x : result will be +1 half of the time and -1 the other half. If I found +1 experience is over : BvA = 1 (50% chances)
     - If I found -1, now I have to measure against z axis, but now the previous measurement has moved the spin along x, so measuring on z will give -1 in 50% of cases, and +1 in 50% of cases.
   - So at the end BvA=1 in 75% of the cases.

**Conclusion : if an interaction has enough energy to perform a measurement of one property of the system, it also has enough energy to modify the system.**

**In other words : we cannot learn anything from a quantum system without changing it.**

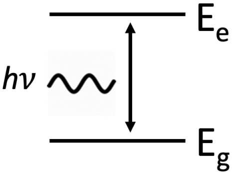


# Modèle du qubit

On considère ici un seul qubit.

Reprenons le premier postulat de la mécanique quantique : un système quantique est décrit dans un espace vectoriel, l'état du système est décrit par un vecteur de cet espace.

On s'intéresse à l'énergie d'un système à deux états :




$E_g$ (ground : état fondamental) et $E_e$ (état excité) sont les valeurs observables de la grandeur physique correspondant à l'énergie du système.

La notation habituelle dans le cadre de la mécanique quantique est la notation "braket" de Dirac, les vecteurs sont notés $|u\rangle$, plutôt que $\vec{u}$.

Par exemple on peut noter $|g\rangle$ et $|e\rangle$ les états correspondants aux niveaux d'énergie observables.

On peut tout aussi bien choisir de noter ces états de manière arbitraire $|0\rangle$ et $|1\rangle$ (conventionnellement $|0\rangle$ correspond à $|g\rangle$ et $|1\rangle$ correspond à $|e\rangle$)

## qubit, suite

Toujours d'après le premier postulat, les combinaisons linéaires des vecteurs $|0\rangle$ et $|1\rangle$ sont des états quantiques valides, ajoutons une condition de normalisation (les états quantiques ont pour norme 1), on arrive ainsi à cette formulation pour un état quantique quelconque du système considéré (un qubit unique, par exemple un photon, un électron, un atome) :

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle \qquad \text{avec} \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$\{|0\rangle, |1\rangle\}$ constitue une base qui engendre l'espace des états. Ainsi, on peut écrire, en notation vectorielle :

$$|\boldsymbol{\Psi}\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

et bien sûr :

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Généralisons

Soient $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$

l'état quantique $|\Psi\rangle$ est un vecteur à deux coordonnées (la coordonnée sur $|0\rangle$ et celle sur $|1\rangle$).

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ c'est un vecteur colonne appelé KET}$$

l'état quantique $|\Phi\rangle$ est un autre état possible du même qubit :

$$|\Phi\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

On définit le vecteur "dual" que l'on appelle BRA :

$$\text{le BRA : } \langle\Phi| = |\Phi\rangle^{T*} = \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} b_1^* & b_2^* \end{pmatrix}$$

Le BRA est le vecteur transposé et dont les valeurs sont conjuguées.

(on utilise la notation "dagger" pour désigner la transposée-conjuguée : $U^\dagger$)

# Produit Hermitien et norme

Alors, le bra-ket est défini comme suit (il s'appelle le produit hermitien, c'est le "produit scalaire" pour un espace de Hilbert (espace vectoriel à coefficient complexes)

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \begin{pmatrix} b_1^* & b_2^* \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1^* + a_2 b_2^*$$

On l'appelle aussi inner-product. Le résultat de ce produit hermitien est un nombre complexe. Contrairement au produit scalaire euclidien, le produit hermitien n'est pas commutatif :

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \begin{pmatrix} b_1^* & b_2^* \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1^* + a_2 b_2^*$$

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1^* b_1 + a_2^* b_2$$

on a la relation :

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle^*$$

Notons que :

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \langle \Psi | \Psi \rangle^* \text{ c'est donc un nombre réel, il s'agit du carré de la norme de } |\Psi\rangle$$

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 a_1^* + a_2 a_2^* = |a_1|^2 + |a_2|^2$$

et si $\langle \Phi | \Psi \rangle = 0$ on dit que les 2 vecteurs $|\Phi\rangle$ et $|\Psi\rangle$ sont orthognaux, bien sûr $|0\rangle$ et $|1\rangle$ sont orthogonaux dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, on retrouve une généralisation du produit scalaire habituel, le carré de la norme fait penser au théorème de pythagore, et à $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||cos(angle(u,v))$

On peut aussi faire la multiplication ket-bra : c'est le produit d'un vecteur colonne par un vecteur ligne, on obtient maintenant une matrice $2 \times 2$ (on l'appelle également outer product) :

$$|\Psi\rangle\langle\Phi| = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1^* & b_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1^* & a_1 b_2^* \\ a_2 b_1^* & a_2 b_2^* \end{pmatrix}$$

On appelle "projecteur" sur $|\Psi\rangle$ le ket-bra $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ (on peut le noter $P_\Psi$), en effet :

$$P_\Psi |\Phi\rangle = (|\Psi\rangle\langle\Psi|)|\Phi\rangle = |\Psi\rangle(\langle\Psi|\Phi\rangle) = (\langle\Psi|\Phi\rangle)|\Psi\rangle$$

La dernière écriture montre que le résultat est colinéaire au vecteur $|\Psi\rangle$, et de "longueur" $\langle\Psi|\Phi\rangle$

NB : cette opération n'est pas commutative :

$$|\Phi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^* b_1 & a_2^* b_1 \\ a_1^* b_2 & a_2^* b_2 \end{pmatrix} = (|\Psi\rangle\langle\Phi|)^\dagger$$

Revenons aux états $|0\rangle$ et $|1\rangle$, ils défissent une base engendrant l'espace vectoriel des états du qubit. Ils permettant d'écrire un état général $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$) on peut les écrire sous forme de vecteurs colonne :

$$|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ et } |1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Ils sont orthogonaux (leur produit hermitien est nul) :

$$\langle 0|1\rangle = 0 = \langle 1|0\rangle$$

En effet :

$$\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1.0 + 0.1 = 0 \text{ et } \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0.1 + 1.0 = 0$$

Et leur norme est 1 :

$$\langle 0|0\rangle = 1 = \langle 1|1\rangle$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1.1 + 0.0 = 1 \text{ et } \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0.0 + 1.1 = 1$$

Nous allons admettre que les états quantiques valides sont unitaires (de norme 1) :

$$\forall |\Psi\rangle : \langle\Psi|\Psi\rangle = 1 \text{ c'est à dire } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

# Mesure

On se limite aux opérations de mesure dans les bases orthonormées (on peut s'y ramener / Gram-Schmidt)
Etant donné un qubit dans un état $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, le quatrième postulat de la mécanique quantique nous apprend qu'une opération de mesure produira l'observation de l'état $|0\rangle$ ou de l'état $|1\rangle$, respectivement avec la probabilité $|\alpha|^2$ ou $|\beta|^2$.

Pour illustrer ce que l'on a vu précédemment :

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha|0\rangle$$

De même :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta|1\rangle$$

# Mesure, Règle de Born

Autrement dit :

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = P_0|\Psi\rangle + P_1|\Psi\rangle = |0\rangle\langle 0|\Psi\rangle + |1\rangle\langle 1|\Psi\rangle$$

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \langle 0|\Psi\rangle|0\rangle + \langle 1|\Psi\rangle|1\rangle$$

On peut égaliser $\alpha = \langle 0|\Psi\rangle$ et $\beta = \langle 1|\Psi\rangle$

Règle de Born : la probabilité que le résutlat d'un mesure (projective) d'un $|\Psi\rangle$ dans une base orthonormée $\{|x\rangle, |x\rangle^{\perp}\}$ donne pour résultat (s'effondre sur) $|x\rangle$ vaut $p_{|x\rangle}(|\Psi\rangle) = |\langle x|\Psi\rangle|^2$

Sur une base $\{x_i\}$en dimension $n$ :

$$p_{x_i}(|\Psi\rangle) = |\langle x_i|\Psi\rangle|^2 \text{ et bien sûr } \sum_i p_{x_i}|\Psi\rangle = 1$$

## exemple

Par exemple, soit : $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|1\rangle$ à mesurer sur la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, alors :

$$P_{|0\rangle}(|\Psi\rangle) = \left| \langle 0| \left( \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|1\rangle \right) \right|^2$$

Ce qui se calcule :

$$P_{|0\rangle}(|\Psi\rangle) = | \ \frac{1}{\sqrt{3}}\langle 0|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\langle 0|1\rangle \ |^2$$

et comme $\langle 0|0\rangle = 1$ et $\langle 0|1\rangle = 0$ alors : $P(0) = \frac{1}{3}$

Avec un calcul similaire (ou en utilisant la somme des probabilités), on a $P(1) = \frac{2}{3}$

# Bases $\{+,-\}$ et$\{i,-i\}$

On a vu que l'on peut construire les vecteurs états à partir des vecteurs de base $|0\rangle$ et $|1\rangle$.
Il y a une infinité de bases orthonormées, parmi lesquelles les deux suivantes :

$$\{|+\rangle\,,|-\rangle\} \text{ et } \{|i\rangle\,,|-i\rangle\}$$

avec :

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i\,|1\rangle), |-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i\,|1\rangle)$$

On vérifie facilement qu'il s'agit en effet de bases orthonormées.

## exemples

- Calcul du module de $|i\rangle$ :

$$\langle i|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| - i\langle 1|) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle) = \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle + i\langle 0|1\rangle - i\langle 1|0\rangle - i^2\langle 1|1\rangle)$$

$$\langle i|i\rangle = \frac{1}{2}(1 + i \times 0 - i \times 0 + 1) = 1$$

- Calcul de $\langle i|-i\rangle$ :

$$\langle i|-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| - i\langle 1|) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle) = \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle - i\langle 0|1\rangle - i\langle 1|0\rangle + i^2\langle 1|1\rangle)$$

$$\langle i|-i\rangle = \frac{1}{2}(1 - i \times 0 - i \times 0 - 1) = 0$$

- Calcul de $\langle +|-i\rangle$ :

$$\langle +|-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + \langle 1|) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle) = \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle - i\langle 0|1\rangle + \langle 1|0\rangle - i\langle 1|1\rangle)$$

$$\langle +|-i\rangle = \frac{1}{2}(1 - i \times 0 + 0 - i) = \frac{1-i}{2}$$

# Coordonnées polaires

L'écriture $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, permet d'écrire $|\Psi\rangle$ de la manière suivante :

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = r_1 e^{i\phi_1}|0\rangle + r_2 e^{i\phi_2}|1\rangle$$

(il s'agit ni plus ni moins que d'utiliser l'écriture en coordonnées polaires des nombres $\alpha$ et $\beta$)

Comme $e^{i\phi_1}$ est de module 1, donc non nul, on peut le factoriser :

$$|\Psi\rangle = e^{i\phi_1}(r_1|0\rangle + r_2\frac{e^{i\phi_2}}{e^{i\phi_1}}|1\rangle)$$

$$|\Psi\rangle = e^{i\phi_1}(r_1|0\rangle + r_2 e^{i(\phi_2-\phi_1)}|1\rangle)$$

(avec $r_1^2 + r_2^2 = 1$)
Alors $\phi_1$ est appelé phase globale, tandis que $\phi_2 - \phi_1$ est la phase relative.

On peut aussi écrire (en enlevant la phase globale) :

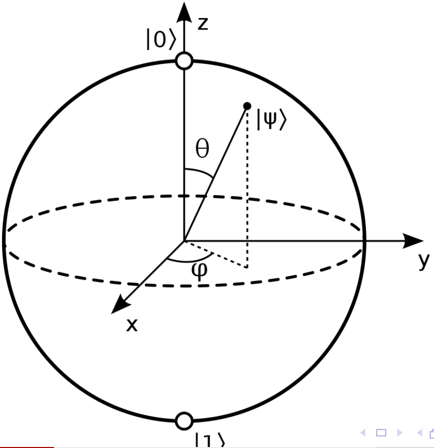
$$|\Psi\rangle = cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi} sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

$\varphi$ est la phase et $\theta$ détermine la probabilité de mesurer $|0\rangle$ ou $|1\rangle$

# Vecteur de Bloch, et Sphère de Bloch

Les états quantiques peuvent ainsi être représentés sur la surface d'une sphère de rayon 1, appelée Sphère de Bloch
Les coordonnées d'un état sont données par le vecteur de Bloch :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} sin\theta cos\varphi \\ sin\theta sin\varphi \\ cos\theta \end{pmatrix}$$



# Vecteur de Bloch

Par exemple pour les six vecteurs particuliers que nous avons vu :

$|0\rangle$ : $\theta = 0$, $\varphi$ est quelconque et $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|1\rangle$ : $\theta = \pi$, $\varphi$ est quelconque et $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$|+\rangle$ : $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0$ et $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|-\rangle$ : $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \pi$ et $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|+i\rangle$ : $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|-i\rangle$ : $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ et $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$