Теория приближенных рассуждений

Ключевые слова: композиционное правило вывода, нечеткая экспертная система.

Под приближенными рассуждениями понимается процесс, при котором из нечетких посылок получают некоторые следствия, возможно, тоже нечеткие. Приближенные рассуждения лежат в основе способности человека понимать естественный язык, разбирать почерк, играть в игры, требующие умственных усилий, в общем, принимать решения в сложной и не полностью определенной среде. Эта способность рассуждений в качественных, неточных терминах отличает интеллект человека от интеллекта вычислительной машины.

Основным правилом вывода в традиционной логике является правило modus ponens, согласно которому мы судим об истинности высказывания B по истинности высказываний A и $A \to B$. Например, если A — высказывание «Джон в больнице», B — высказывание «Джон болен», то если истинны высказывания «Джон в больнице» и «Если Джон в больнице, то он болен», то истинно и высказывание «Джон болен».

Во многих привычных рассуждениях, однако, правило modus ponens используется не в точной, а в приближенной форме. Так, обычно мы знаем, что A истинно и что $A^* \to B$, где A^* есть, в некотором смысле, приближение A. Тогда из $A^* \to B$ мы можем сделать вывод о том, что B приближенно истинно.

Далее мы обсудим способ формализации приближенных рассуждений, основанный на понятиях, введенных нами на предыдущей лекции. Однако, в отличие от традиционной логики, нашим главным инструментом будет не правило modus ponens, а так называемое ***композиционное правило вывода***, весьма частным случаем которого является правило modus ponens.

Композиционное правило вывода

Композиционное правило вывода — это всего лишь обобщение следующей знакомой процедуры. Предположим, что имеется кривая $y = f(x)$

(см. рис. 10.1 (A)) и задано значение $x = a$. Тогда из того, что $y = f(x)$ и $x = a$, мы можем заключить, что $y = b = f(a)$.

Обобщим теперь этот процесс, предположив, что a — интервал, а $f(x)$ — функция, значения которой суть интервалы, как на рисунке 10.1 (Б). В этом случае, чтобы найти интервал $y = b$, соответствующий интервалу a, мы сначала построим цилиндрическое множество $\bar{a}$ с основанием a и найдем его пересечение I с кривой, значения которой суть интервалы. Затем спроектируем это пересечение на ось OY и получим желаемое значение y в виде интервала b.

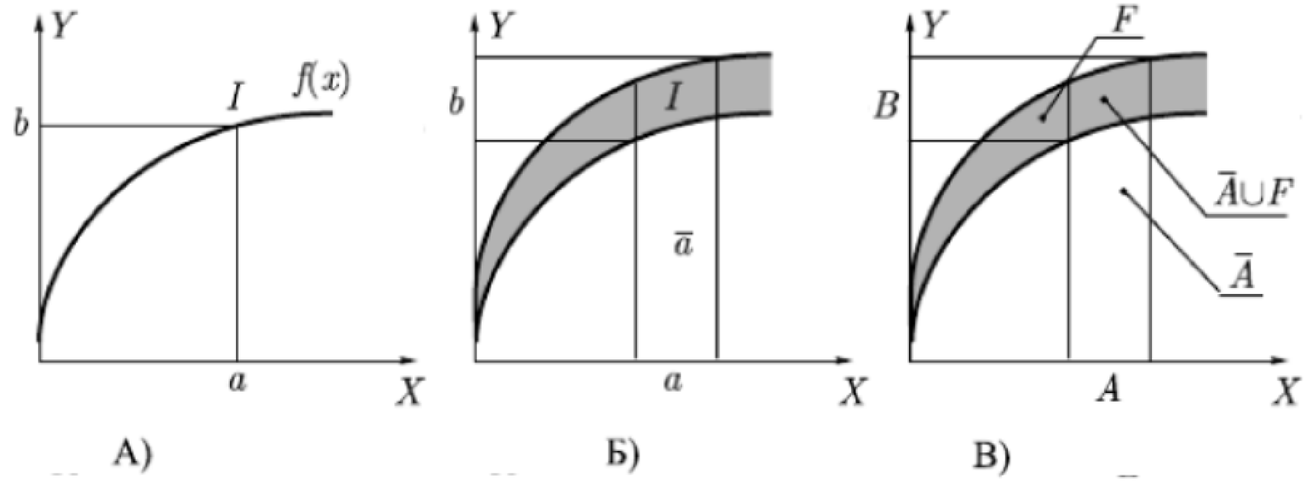

Рис. 10.1

Чтобы продвинуться еще на один шаг по пути обобщения, предположим, что A — нечеткое подмножество оси OX, а F — нечеткое отношение в $OX \times OY$ (см. рис. 10.1 (В)). Вновь образуя цилиндрическое нечеткое множество $\bar{A}$ с основанием A и его пересечение с нечетким отношением F, мы получим нечеткое множество $\bar{A} \cap F$, которое является аналогом точки пересечения I на рис. 10.1(А). Таким образом, из того, что $y = f(x)$ и $x = A$ — нечеткое подмножество оси OX, мы получаем значение y в виде нечеткого подмножества B оси OY.

Правило. Пусть U и V — два универсальных множества с базовыми переменными u и v, соответственно. Пусть A и F — нечеткие подмножества множеств U и $U \times V$. ***Тогда композиционное правило вывода утверждает, что из нечетких множеств*** A ***и*** F ***следует нечеткое множество*** $B = A \circ F$***. Согласно определению композиции нечетких множеств, получим***

$$\mu_B(v) = \bigvee_{u \in U} \left(\mu_A(u) \wedge \mu_F(u,v)\right).$$

Пример. Пусть $U = V = \{1, 2, 3, 4\}$,

$$\text{А=МАЛЫЙ} = \{\langle 1|1\rangle, \langle 0,6|2\rangle, \langle 0,2|3\rangle, \langle 0|4\rangle\},$$

F=ПРИМЕРНО РАВНЫ =

	1	2	3	4
1	1	0,5	0	0
2	0,5	1	0,5	0
3	0	0,5	1	0,5
4	0	0	0,5	1

Тогда получим

$$B = [1 \quad 0,6 \quad 0,2 \quad 0] \circ \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 0,6 \quad 0,5 \quad 0,2],$$

что можно проинтерпретировать следующим образом:

B = БОЛЕЕ ИЛИ МЕНЕЕ МАЛЫЙ,

если терм БОЛЕЕ ИЛИ МЕНЕЕ определяется как оператор увеличения нечеткости.

Словами этот приближенный вывод можно записать в виде

u	– МАЛЫЙ	предпосылка
u, v	– ПРИМЕРНО РАВНЫ	предпосылка
v	– БОЛЕЕ ИЛИ МЕНЕЕ МАЛЫЙ	приближенный вывод

Правило modus ponens как частный случай композиционного правила вывода

Как мы увидим ниже, правило modus ponens можно рассматривать как частный случай композиционного правила вывода. Чтобы установить эту связь, мы сперва обобщим понятие материальной импликации с пропозициональными переменными на нечеткие множества.

Пусть A и B — нечеткие высказывания и μ_A, μ_B — соответствующие им функции принадлежности. Тогда импликации $A \to B$ будет соответствовать некоторая функция принадлежности $\mu_{A \to B}$. По аналогии с традиционной логикой, можно предположить, что

$$A \to B \equiv \neg A \vee B.$$

Тогда

$$\mu_{A \to B}(x, y) = \max\{1 - \mu_A(x), \mu_B(y)\}.$$

Однако, это не единственное обобщение оператора импликации. В следующей таблице показаны различные интерпретации этого понятия.

Larsen	$\mu_{A\to B}(x,y) = \mu_A(x)\mu_B(y)$
Lukasiewicz	$\mu_{A\to B}(x,y) = \min\{1, 1-\mu_A(x)+\mu_B(y)\}$
Mamdani	$\mu_{A\to B}(x,y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$
Standard Strict	$\mu_{A\to B}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_A(x) \leqslant \mu_B(y); \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$
Godel	$\mu_{A\to B}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_A(x) \leqslant \mu_B(y); \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$
Gaines	$\mu_{A\to B}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_A(x) \leqslant \mu_B(y); \\ \frac{\mu_B(y)}{\mu_A(x)}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$
Kleene-Dienes	$\mu_{A\to B}(x,y) = \max\{1-\mu_A(x),\ \mu_B(y)\}$
Kleene-Dienes-Lu	$\mu_{A\to B}(x,y) = 1-\mu_A(x)+\mu_A(x)\mu_B(y)$

Определим теперь *обобщенное правило* modus ponens (generalized modus ponens).

Предпосылка	$A \to B$
Событие	A^*
Вывод	$A * \circ(A \to B)$

Приведенная формулировка имеет два отличия от традиционной формулировки правила modus ponens : во-первых, здесь допускается, что A, A^*, B — нечеткие множества, и, во-вторых, A^* необязательно идентично A.

Нечеткие экспертные системы

Логико-лингвистические методы описания систем основаны на том, что поведение исследуемой системы описывается в естественном (или близком к естественному) языке в терминах лингвистических переменных. Входные и выходные параметры системы рассматриваются как лингвистические переменные, а качественное описание процесса задается совокупностью высказываний следующего вида:

L_1 : если A_{11} и/или A_2 и/или ... и/или A_{1m}, то B_{11} и/или ... и/или B_{1n},
L_2 : если A_{21} и/или A_{22} и/или ... и/или A_{2m}, то B_{22} и/или ... и/или B_{2n},

....

L_k : если A_{k1} и/или A_{k2} и/или ... и/или A_{km}, то B_{k1} и/или ... и/или B_{kn},

где A_{ij}, $i = 1, 2 \ldots, k$ $j = 1, 2, \ldots, m$ — нечеткие высказывания, определенные на значениях входных лингвистических переменных, а B_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, k$ $j = 1, 2, \ldots, n$ — нечеткие высказывания, определенные на значениях выходных лингвистических переменных. Эта совокупность правил носит название нечеткой базы знаний.

Подобные вычисления составляют основу **нечетких экспертных систем**. Каждая **нечеткая экспертная система** использует нечеткие утверждения и правила.

Затем с помощью операторов вычисления дизъюнкции и конъюнкции описание системы можно привести к виду

$$\begin{array}{ll} L_1: & \text{если } A_1, \text{ то } B_1, \\ L_2: & \text{если } A_2, \text{ то } B_3, \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ L_k: & \text{если } A_k, \text{ то } B_k, \end{array}$$

где $A_1, A_2, \dots, A_k$ — нечеткие множества, заданные на декартовом произведении X универсальных множеств входных лингвистических переменных, а $B_1, B_2, \dots, B_k$ — нечеткие множества, заданные на декартовом произведении Y универсальных множеств выходных лингвистических переменных.

В основе построения логико-лингвистических систем лежит рассмотренное выше **композиционное правило вывода** Заде.

Преимущество данной модели - в ее универсальности. Нам неважно, что именно на входе — конкретные числовые значения или некоторая неопределенность, описываемая нечетким множеством. Но за данную универсальность приходится расплачиваться сложностью системы — нам приходится работать в пространстве размерности $m \times n$. Поэтому этой общей моделью на практике пользуются довольно редко. Обычно же используют ее упрощенный вариант, называемый нечетким выводом. Он основывается на предположении, что все входные лингвистические переменные имеют известные нам числовые значения (как и бывает довольно часто на практике). Также обычно не используют более одной выходной лингвистической переменной.

Нечетким логическим выводом (fuzzy logic inference) называется аппроксимация зависимости $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ каждой выходной лингвистической переменной от входных лингвистических переменных и получение заключения в виде нечеткого множества, соответствующего текущим значениям входов, с использованием нечеткой базы знаний и нечетких операций. Основу нечеткого логического вывода составляет **композиционное правило Заде**.

В общем случае нечеткий вывод решения происходит за три (или четыре) шага:

1) ***этап фаззификации***. С помощью функций принадлежности всех термов входных лингвистических переменных и на основании задавае-

мых четких значений из универсумов входных лингвистических переменных определяются степени уверенности в том, что выходная лингвистическая переменная принимает конкретное значение. Эта степень уверенности есть ордината точки пересечения графика функции принадлежности терма и прямой $x =$ четкое значение ЛП.

2) ***этап непосредственного нечеткого вывода***. На основании набора правил — нечеткой базы знаний — вычисляется значение истинности для предпосылки каждого правила на основании конкретных нечетких операций, соответствующих конъюнкции или дизъюнкции термов в левой части правил. В большинстве случаев это либо максимум, либо минимум из степеней уверенности термов, вычисленных на этапе фаззификации, который применяется к заключению каждого правила. Используя один из способов построения нечеткой импликации, мы получим нечеткую переменную, соответствующую вычисленному значению степени уверенности в левой части правила и нечеткому множеству в правой части правила.

Обычно в качестве вывода используется минимизация или правила продукции. При минимизирующем логическом выводе выходная функция принадлежности ограничена сверху в соответствии с вычисленной степенью истинности посылки правила (нечеткое логическое И). В логическом выводе с использованием продукции выходная функция принадлежности масштабируется с помощью вычисленной степени истинности предпосылки правила.

3) ***этап композиции (агрегации, аккумуляции)***. Все нечеткие множества, назначенные для каждого терма каждой выходной лингвистической переменной, объединяются вместе, и формируется единственное нечеткое множество — значение для каждой выводимой лингвистической переменной. Обычно используются функции MAX или SUM.

4) ***этап дефаззификации (необязательный)***. Используется тогда, когда полезно преобразовать нечеткий набор значений выводимых лингвистических переменных к точным. Имеется достаточно большое количество методов перехода к точным значениям (по крайней мере, 30). Два примера общих методов — «методы полной интерпретации» и «по максимуму». В методе полной интерпретации точное значение выводимой переменной вычисляется как значение «центра тяжести» функции принадлежности для нечеткого значения. В методе максимума в качестве точного значения выводимой переменной принимается максимальное значение функции принадлежности.

В теории нечетких множеств процедура дефаззификации аналогична нахождению характеристик положения (математического ожидания, моды, медианы) случайных величин в теории вероятности. Простейшим способом выполнения процедуры дефаззификации является выбор четкого числа, соответствующего максимуму функции принадлежности. Однако пригодность этого способа распространяется лишь на одноэкстремальные функции принадлежности. Для многоэкстремальных функций принадлежности часто используются следующие методы дефаззификации:

1) **COG** (Center Of Gravity) — «центр тяжести». Физическим аналогом этой формулы является нахождение центра тяжести плоской фигуры, ограниченной осями координат и графиком функции принадлежности нечеткого множества.

2) **MOM** (Mean Of Maximums) — «центр максимумов». При использовании метода центра максимумов требуется найти среднее арифметическое элементов универсального множества, имеющих максимальные степени принадлежностей.

3) **First Maximum** — «первый максимум» — максимум функции принадлежности с наименьшей абсциссой.

Функциональная схема процесса нечеткого вывода в упрощенном виде представлена на рис. 10.2. На этой схеме выполнение первого этапа нечеткого вывода — фаззификации — осуществляет фаззификатор. За процедуру непосредственно нечеткого вывода ответственна машина нечеткого логического вывода, которая производит второй этап процесса вывода на основании задаваемой нечеткой базы знаний (набора правил), а также этап композиции. Дефаззификатор выполняет последний этап нечеткого вывода — дефаззификацию.

Рассмотрим алгоритм нечеткого вывода на конкретном примере.

Пусть у нас есть некоторая система, например, реактор, описываемая тремя параметрами: температура, давление и расход рабочего вещества. Все показатели измеримы, и множество возможных значений известно. Также из опыта работы с системой известны некоторые правила, связывающие значения этих параметров. Предположим, что сломался датчик, измеряющий значение одного из параметров системы, но знать его показания необходимо хотя бы приблизительно. Тогда встает задача об отыскании этого неизвестного значения (пусть это будет давление) при известных показателях двух других параметров (температуры и расхода) и связи этих величин в виде следующих правил:

- если Температура низкая и Расход малый, то Давление низкое;
- если Температура средняя, то Давление среднее;
- если Температура высокая или Расход большой, то Давление высокое.

Рис. 10.2

В нашем случае Температура, Давление и Расход — лингвистические переменные. Опишем каждую из них.

Температура. Универсум (множество возможных значений) — отрезок $[0, 150]$. Начальное множество термов {Высокая, Средняя, Низкая}. Функции принадлежности термов имеют следующий вид:

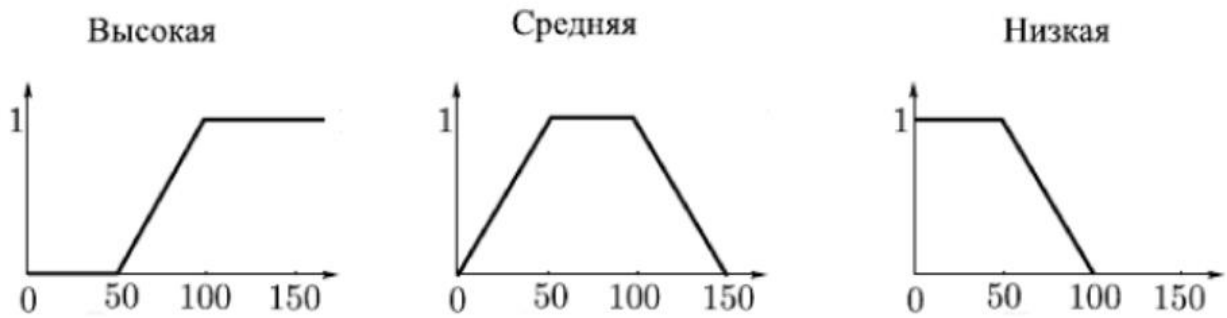

Рис. 10.3

Давление. Универсум — отрезок $[0, 100]$. Начальное множество термов {Высокое, Среднее, Низкое}. Функции принадлежности термов имеют следующий вид:

Расход. Универсум — отрезок $[0, 8]$. Начальное множество термов {Большой, Средний, Малый}. Функции принадлежности термов имеют следующий вид:

Рис. 10.5

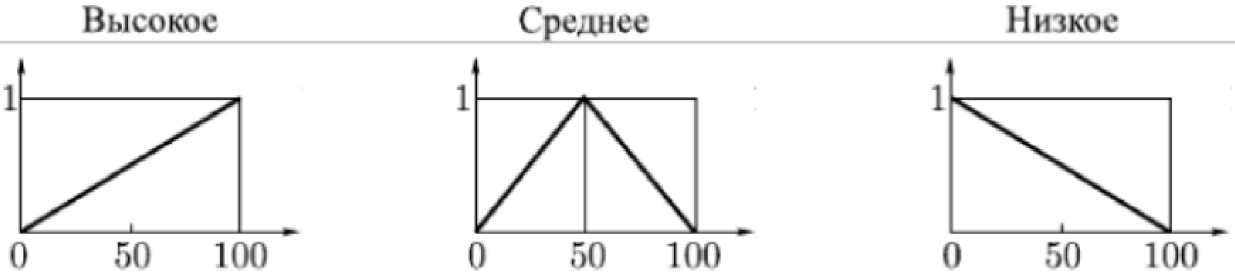

Рис. 10.4

Пусть известны значения Температура 85 и Расход 3,5 . Произведем расчет значения давления.

Последовательно рассмотрим этапы нечеткого вывода:

Сначала по заданным значениям входных параметров найдем степени уверенности простейших утверждений вида «Лингв. переменная A есть Терм Лингв. переменной A». Этот этап называется фаззификацией, т. е. переходом от заданных четких значений к степеням уверенности. Получаем следующие степени уверенности:

- Температура Высокая — 0,7;
- Температура Средняя — 1;
- Температура Низкая — 0,3;
- Расход Большой — 0;
- Расход Средний — 0,75;
- Расход Малый — 0,25.

Затем вычислим степени уверенности посылок правил:

■ Температура низкая и Расход малый: $\min$ (Темп. Низкая, Расход Малый) = $\min(0.3, 0.25) = 0.25$;

■ Температура Средняя: 1;

■ Температура Высокая или Расход Большой: $\max$ (Темп. Высокая, Расход Большой) $= \max(0.7, 0) = 0,7$.

Следует отметить также тот факт, что с помощью преобразований нечетких множеств любое правило, содержащее в левой части как конъюнкции, так и дизъюнкции, можно привести к системе правил, в левой части каждого будут либо только конъюнкции, либо только дизъюнкции. Таким образом, не уменьшая общности, можно рассматривать правила, содержащие в левой части либо только конъюнкции, либо только дизъюнкции.

Каждое из правил представляет из себя нечеткую импликацию. Степень уверенности посылки мы вычислили, а степень уверенности заключения задается функцией принадлежности соответствующего терма. Поэтому, используя один из способов построения нечеткой импликации, мы получим новую нечеткую переменную, соответствующую степени уверенности в значении выходных данных при применении к заданным входным соответствующего правила. Используя определение нечеткой импликации как минимума левой и правой частей (определение Mamdani), имеем:

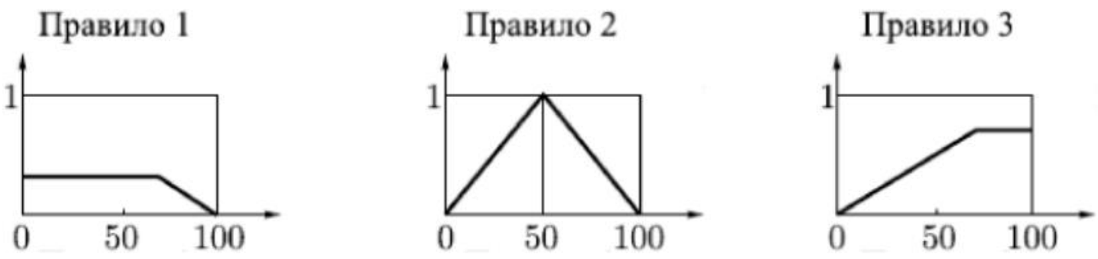

Рис. 10.6

Теперь необходимо объединить результаты применения всех правил.

Этот этап называется аккумуляцией. Один из основных способов аккумуляции — построение максимума полученных функций принадлежности. Получаем: см. рис. 10.7 ниже

Полученную функцию принадлежности уже можно считать результатом. Это новый терм выходной переменной Давление. Его функция принадлежности говорит о степени уверенности в значении давления при заданных значениях входных параметров и использовании правил, определяющих соотношение входных и выходных переменных. Но обычно все-таки необходимо какое-то конкретное числовое значение. Для его получения используется этап дефаззификации, т. е. получения конкретного значения из универса по заданной на нем функции принадлежности.

Существует множество методов дефаззификации, но в нашем случае достаточно метода первого максимума. Применяя его к полученной функции принадлежности, получаем, что значение давления — 50. Таким образом, если мы знаем, что температура равна 85, а расход рабочего вещества — 3,5, то можем сделать вывод, что давление в реакторе равно примерно 50.

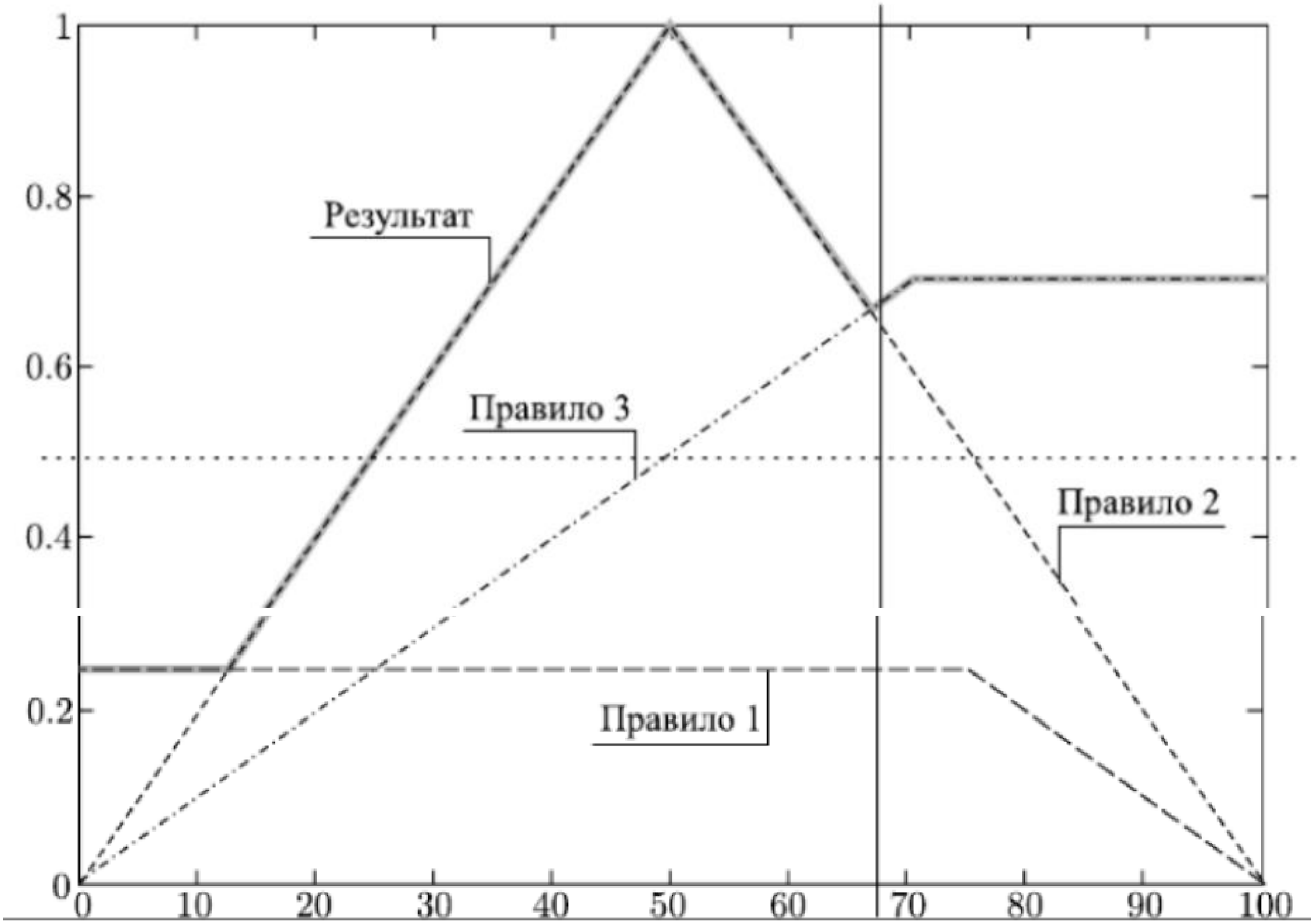

Рис. 10.7