1. Нечеткие множества как способы формализации нечеткости

Подход к формализации понятия нечеткого множества состоит в обобщении понятия принадлежности. В обычной теории множеств существует несколько способов задания множества. Одним из них является задание с помощью характеристической функции, определяемой следующим образом. Пусть U — так называемое универсальное множество, из элементов которого образованы все остальные множества, рассматриваемые в данном классе задач, например множество всех целых чисел, множество всех гладких функций и т. д. Характеристическая функция множества $A \subseteq U$ — это функция μ_A, значения которой указывают, является ли $x \in U$ элементом множества A:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Особенностью этой функции является бинарный характер ее значений.

жет принимать любые значения на отрезке $[0,1]$. В теории ***нечетких множеств*** характеристическая функция называется ***функцией принадлежности***, а ее значение $\mu_A(x)$ — ***степенью принадлежности*** элемента x нечеткому множеству A.

Более строго, ***нечетким множеством*** A называется совокупность пар

$$A = \{\langle x, \mu_A(x)\rangle \,|\, x \in U\},$$

где μ_A — функция принадлежности, т. е. $\mu_A : U \to [0,1]$.

Пусть, например,

$$U = \{a, b, c, d, e\},$$
$$A = \{\langle a,\ 0\rangle, \langle b,\ 0,1\rangle, \langle c,\ 0,5\rangle, \langle d,\ 0,9\rangle, \langle e,\ 1\rangle\}.$$

Будем говорить, что элемент a не принадлежит множеству A, элемент b принадлежит ему в малой степени, элемент c более или менее принадлежит, элемент d принадлежит в значительной степени, e является элементом множества A.

Функция принадлежности – Membership function.

Вообще говоря, значения функции принадлежности не обязательно должны не превосходить единицу (1), то есть **лежать в [0,1].** Но если это так, то функция и множество называются **нормализованными.**

Пример 1. Пусть универсум U есть множество действительных чисел. Нечеткое множество A, обозначающее множество чисел, близких к 10 (см. рис. 1.1), можно задать следующей функцией принадлежности:

$$\mu_A(x) = (1 + |x - 10|^n)^{-1},$$

где $m \in N$.

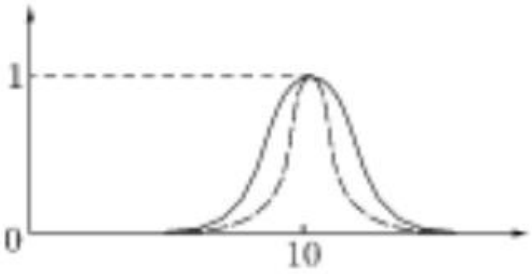

Рис. 1.1

Показатель степени m выбирается в зависимости от степени близости к 10. Например, для описания множества чисел, очень близких к 10, можно положить $m = 4$; для множества чисел, не очень далеких от 10, $m = 1$.

Произвольное нечёткое множество $\mathcal{A}$ можно задать несколькими способами, основные из них определяются следующим образом.

1. Перечисление элементов: элементы нечёткого множества записываются между двумя фигурными скобками и разделяются запятыми:

$$\mathcal{A} = \{(x_1, \mu_{\mathcal{A}}(x_1)), (x_2, \mu_{\mathcal{A}}(x_2)) \dots (x_n, \mu_{\mathcal{A}}(x_n))\}.$$

2. Табличный способ: элементы универсального множества I записываются в первую строку (столбец) таблицы, а соответствующие значения функции принадлежности — во вторую строку (столбец):

$x \in I$	x_1	x_2	…	x_n
$\mu_{\mathcal{A}}(x)$	$\mu_{\mathcal{A}}(x_1)$	$\mu_{\mathcal{A}}(x_2)$	…	$\mu_{\mathcal{A}}(x_n)$

3. Матричный способ аналогичен табличному способу: элементы универсального множества I записываются в первую строку (столбец) матрицы, а соответствующие значения функции принадлежности — во вторую строку (столбец) матрицы. Заметим, что иногда элементы универсального множества I непосредственно внутри матрицы не записываются, а используются для обозначения столбцов (строк) матрицы.

4. Аналитический способ: используются фигурные скобки, внутри которых указывается математическое выражение для всех значений функции принадлежности:

$$\mathcal{A} = \{(x, \mu_{\mathcal{A}}(x))\} \text{ или } \mathcal{A} = \{x, \mu_{\mathcal{A}}(x)\}.$$

5. Графический способ: для этого на декартовой плоскости по оси абсцисс отмечаются элементы универсального множества I, а по оси ординат — соответствующие этим элементам значения функции принадлежности, при этом, поскольку значения функции принадлежности располагаются в отрезке [0, 1], то и график нечёткого множества по оси ординат также должен располагаться не ниже нуля и не выше единицы.

Носитель нечеткого множества – совокупность тех элементов, для которых $\mu(x)>0$.
Ядро нечеткого множества – совокупность тех элементов, для которых $\mu(x)=1$.

Наиболее известные и употребительные аналитические представления **функций принадлежности:**

1. Dsigmf — разность двух сигмоидных функций принадлежности, задаваемая формулой:

$$\mu(x)=\frac{1}{1+e^{-a_1(x-c_1)}}-\frac{1}{1+e^{-a_2(x-c_2)}}.$$

2. Gauss2mf — двухсторонняя кривая Гаусса, представляет собой следующую комбинацию двух гауссовских функций принадлежности:

а) если $c_1 < c_2$, то

$$\mu(x)=\begin{cases}\exp((x-c_1)^2/(-2a_1^2)), & x<c_1\\ 1, & c \le x \le c_2\\ \exp((x-c_2)^2/(-2a_2^2)), & x>c_2\end{cases},$$

при этом параметры c_1 (c_2) являются минимальными (максимальными) значениями ядра нечеткого множества, а параметры a_1 (a_2) — коэффициентами концентрации левой (правой) части функции принадлежности;

б) если $c_1 > c_2$, то

$$\mu(x)=\begin{cases}\exp((x-c_1)^2/(-2a_1^2)), & x<c_2\\ \exp((x-c_1)^2/(-2a_1^2))\cdot\exp((x-c_2)^2/(-2a_2^2)), & c_2 \le x \le c_1.\\ \exp((x-c_2)^2/(-2a_2^2)), & x>c_1\end{cases}$$

3. Gaussmf — кривая Гаусса, задаваемая формулой:

$$\mu(x) = e^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}},$$

при этом параметр b геометрически интерпретируется как координата максимума функции принадлежности, а параметр c — коэффициент концентрации функции принадлежности.

4. Gbellmf — колоколообразная, задаваемая формулой:

$$\mu(x) = \frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}},$$

при этом параметр a геометрически интерпретируется как коэффициент концентрации функции принадлежности, параметр b — коэффициент крутизны функции принадлежности, а параметр c — координата максимума функции принадлежности.

5. Pimf — П-образная, формирующая функцию принадлежности в виде криволинейной трапеции, задающаяся как произведение S- и Z-образных функций принадлежности (см. п. 7 и 11), причем при $b \le c$ параметры П-образной функции принадлежности интерпретируются следующим образом:

1) (a, d) — носитель нечеткого множества;

2) $[b, c]$ — ядро нечеткого множества.

6. Psigmf — разность двух сигмоидных функций принадлежности, задаваемая соотношением:

$$\mu(x) = \frac{1}{1+e^{-a_1(x-c_1)}} - \frac{1}{1+e^{-a_2(x-c_2)}}.$$

7. Smf — S-образная, задаваемая формулой:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, x \le a \\ \text{нелинейная аппроксимация}, a < x < b \\ 1, x \ge b \end{cases}.$$

8. Sigmf — сигмоидная, задаваемая формулой:

$$\mu(x) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-c)}},$$

при этом параметр a геометрически интерпретируется как коэффициент крутизны функции принадлежности, параметр c —координата перегиба функции принадлежности.

9. Trapmf — трапециевидная, задаваемая аналитической формулой:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & b \le x \le c \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & c \le x \le d \\ 0, & d \le x \end{cases}.$$

Параметры трапециевидной функции принадлежности интерпретируются следующим образом:

1) (a, d) — носитель нечеткого множества — пессимистическая оценка значений переменной;

2) $[b, c]$ — ядро нечеткого множества — оптимистическая оценка значений переменной.

10. Trimf — треугольная, задаваемая аналитической формулой:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b \le x \le c \\ 0, & c \le x \end{cases}.$$

Параметры треугольной функции принадлежности обычно интерпретируются следующим образом:

1. $[a, c]$ — диапазон изменения переменной;

2. b — наиболее возможное значение переменной.

11. Zmf — Z-образная, задаваемая формулой:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, x \le a \\ \text{нелинейная аппроксимация}, a < x < b \\ 0, x \ge b \end{cases}.$$

Унарные операции над нечёткими множествами

Пусть $\mathcal{A} = \{x,\ \mu_{\mathcal{A}}(x)\}$ — нечёткое множество, заданное на чётком универсальном множестве I.

Дополнением к нечёткому множеству $\mathcal{A}$ называется унарная операция $\mathcal{H} = \bar{A}$, в результате которой образуется новое нечёткое множество $\mathcal{H} = \{x,\ \mu_{\mathcal{H}}(x)\}$, заданное на том же самом I, функция принадлежности которого определяется согласно одной из формул.

классическое дополнение	$\mu_{\mathcal{H}}(x) = 1 - \mu_{\mathcal{A}}(x)$;
квадратичное дополнение	$\mu_{\mathcal{H}}(x) = \sqrt{1 - \mu_A(x)}$
дополнение Сугено	$\mu_{\mathcal{H}}(x) = \frac{1-\mu_A(x)}{1+s\cdot\mu_A(x)}, -1 < s \le \infty$
дополнение порогового типа	$\mu_{\mathcal{H}}(x) = \begin{cases} 1, \text{если } \mu \le \alpha \\ 0, \text{если } \mu > \alpha \end{cases}$.

Носителем нечеткого множества A называется четкое множество $\tilde{A}$ таких точек в U, для которых величина $\mu_A(x)$ положительна, т. е. $\tilde{A} = \{x|\mu_A(x) > 0\}$.

Высотой нечеткого множества A называется величина $\sup\limits_U \mu_A(x)$.

Нечеткое множество A называется *нормальным*, если $\sup\limits_U \mu_A(x) = 1$.

В противном случае оно называется *субнормальным*.

Нечеткое множество называется *пустым*, если $\forall x \in U \quad (\mu_A(x) = 0)$.

Очевидно, что в данном универсуме U существует единственное пустое нечеткое множество. Непустое субнормальное нечеткое множество можно привести к нормальному (нормализовать) по формуле

$$\mu'_A(x) = \frac{\mu_A(x)}{\sup\limits_U \mu_A(x)}.$$

Множеством уровня α (*α-срезом*) нечеткого множества A называется четкое подмножество универсального множества U, определяемое по формуле

$$A_\alpha = \{x|\mu_A(x) \geqslant \alpha\}, \quad \text{где} \quad \alpha \in [0,1].$$

Множество строгого уровня определяется в виде $A_\alpha = \{x|\mu_A(x) > \alpha\}$. В частности, носителем нечеткого множества является множество элементов, для которых $\mu_A(x) > 0$. Понятие множества уровня является расширением понятия интервала. Оно представляет собой объединение не более чем счетного числа интервалов. Соответственно, алгебра интервалов есть частный случай алгебры множеств уровня.

Точка перехода нечеткого множества A — это такой элемент $x \in U$, для которого $\mu_A(x) = 0,5$.

Четкое множество A^*, ближайшее к нечеткому множеству A, определяется следующим образом:

$$\mu_{A^*}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu_A(x) < 0,5; \\ 1, & \text{если } \mu_A(x) > 0,5; \\ 0 \text{ или } 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Нечеткое множество A в пространстве $U = R^n$ называется *выпуклым* нечетким множеством тогда и только тогда, если его функция принадлежности выпукла, т. е. для каждой пары точек x и y из U функция принадлежности удовлетворяет неравенству

$$\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}, \text{ для любого } \lambda \in [0,1].$$

Принцип обобщения

Принцип обобщения как одна из основных идей теории **нечетких множеств** носит эвристический характер и позволяет расширить область определения исходного отображения φ на класс **нечетких множеств**. Пусть $\varphi : U \to V$ — заданное отображение, и A — нечеткое множество, заданное в U. Тогда образ **нечеткого множества** A при отображении φ есть **нечеткое множество** B, заданное в Y с функцией принадлежности

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_A(x).$$

Основные операции над нечеткими множествами

I	II	III	IV
№ п/п	**Название операции**	**Обозначение операции**	**Формула для ФП**
1	Объединение	$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$	$\max\{\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)\}$
2	Пересечение	$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$	$\min\{\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)\}$
3	Разность	$\mathcal{A} - \mathcal{B}$	$\max\{\mu_{\mathcal{A}}(x) - \mu_{\mathcal{B}}(x), 0\}$
4	Симметрическая разность	$\mathcal{A} \Delta \mathcal{B}$	$\lvert\mu_{\mathcal{A}}(x) - \mu_{\mathcal{B}}(x)\rvert$
5	Дополнение	$\overline{\mathcal{A}}$	$1 - \mu_{\mathcal{A}}(x)$
6	Алгебраическое объединение	$\mathcal{A} + \mathcal{B}$	$\mu_{\mathcal{A}}(x) + \mu_{\mathcal{B}}(x) - \mu_{\mathcal{A}}(x) \cdot \mu_{\mathcal{B}}(x)$
7	Алгебраическое пересечение	$\mathcal{A} \bullet \mathcal{B}$	$\mu_{\mathcal{A}}(x) \cdot \mu_{\mathcal{B}}(x)$
8	Граничное объединение	$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$	$\min\{\mu_{\mathcal{A}}(x)+ \mu_{\mathcal{B}}(x), 1\}$
9	Граничное пересечение	$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$	$\max\{\mu_{\mathcal{A}}(x) + \mu_{\mathcal{B}}(x) - 1, 0\}$
10	Операция λ-суммы	$\mathcal{A} +_{\lambda} \mathcal{B}$	$\lambda \cdot \mu_{\mathcal{A}}(x) + (1 - \lambda) \cdot \mu_{\mathcal{B}}(x)$
11	Умножение на число	$\beta \cdot \mathcal{A}$	$\beta \cdot \mu_{\mathcal{A}}(x)$
12	Возведение в степень	$\mathcal{A}^{\kappa}$	$\mu_{\mathcal{A}}(x)^{\kappa}$

Замечание. Когда $\kappa = 2$, операция возведения в степень называется концентрированием, когда $\kappa = 0{,}5$ — растяжением.

Заметим, что справедлива следующая цепочка вложений

$$\varnothing_{\text{НМ}} \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \bullet \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subseteq$$

$$\subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} + \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \subseteq I_{\text{НМ}}.$$

Заметим, что при максиминном и алгебраическом определении операций не будут выполняться законы противоречия и исключения третьего $A \cap \bar{A} \neq \varnothing$, $A \cup \bar{A} \neq U$, а в случае ограниченных операций не будут выполняться свойства идемпотентности $A \cup A \neq A$, $A \cap A \neq A$ и дистрибутивности:

$$A \cup (B \cap C) \neq (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cap (B \cup C) \neq (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Можно показать, что при любом построении операций объединения и пересечения в теории нечетких множеств приходится отбрасывать либо законы противоречия и исключения третьего, либо законы идемпотентности и дистрибутивности.

Теорема 1. Пусть A, B и C — произвольные нечёткие множества, заданные на одном универсальном *I*. Тогда справедливы следующие тождества, содержащие законы для основных формул пересечения и объединения нечётких множеств:

1. Свойства коммутативности:

   $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \cup \mathcal{A}$.

2. Свойства ассоциативности:

   $\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) \equiv (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C}$, $\mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) \equiv (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cup \mathcal{C}$.

3. Законы универсальной верхней и нижней границы:

   $\mathcal{A} \cap \varnothing_{\text{нм}} \equiv \varnothing_{\text{нм}}$, $\mathcal{A} \cup \varnothing_{\text{нм}} = \mathcal{A}$,

   $\mathcal{A} \cap I_{\text{нм}} \equiv \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \cup I_{\text{нм}} \equiv I_{\text{нм}}$.

4. Законы де Моргана:

   $\overline{A \cap B} \equiv \overline{A} + \overline{B}$ $\overline{A \cup B} \equiv \overline{A} \cap \overline{B}$

5. Свойства дистрибутивности:

   $\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) \equiv (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{C})$, $\mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) \equiv (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{C})$.

6. Законы идемпотентности:

   $\mathcal{A} \cap \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$.

7. Законы поглощения:

   $\mathcal{A} \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \equiv \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \equiv \mathcal{A}$.

Замечание. В общем случае не выполняются следующие законы:

8. Свойства дополнения (закон исключённого третьего и закон тождества):
$\mathcal{A} \cap \overline{A} \neq \varnothing_{\text{нм}}$, $\mathcal{A} \cup \overline{A} \neq I_{\text{нм}}$.

Теорема 2. Пусть А, В и С — произвольные нечёткие множества, заданные на одном универсальном *I*. Тогда справедливы следующие тождества, содержащие законы для ограниченного пересечения и ограниченного объединения нечётких множеств:

1. Свойства коммутативности:
$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \oplus \mathcal{A}$.
2. Свойства ассоциативности:
$\mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}) \equiv (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C}$, $\mathcal{A} \oplus (\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}) \equiv (\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) \oplus \mathcal{C}$.
3. Законы универсальной верхней и нижней границы:
$\mathcal{A} \otimes \varnothing_{\text{нм}} \equiv \varnothing_{\text{нм}}$, $\mathcal{A} \oplus \varnothing_{\text{нм}} = \mathcal{A}$,
$\mathcal{A} \otimes I_{\text{нм}} \equiv \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \oplus I_{\text{нм}} \equiv I_{\text{нм}}$.
4. Законы де Моргана:
$\overline{A \otimes B} \equiv \overline{A} + \overline{B}$ $\overline{A \oplus B} \equiv \overline{A} \otimes \overline{B}$

Замечание. В общем случае не выполняются следующие законы:

5. Свойства дистрибутивности:
$\mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} + \mathcal{C}) \neq (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \oplus (\mathcal{A} \otimes \mathcal{C})$, $\mathcal{A} \oplus (\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}) \neq (\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) \otimes (\mathcal{A} \oplus \mathcal{C})$.
6. Законы идемпотентности:
$\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \neq \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \oplus \mathcal{A} \neq \mathcal{A}$.
7. Законы поглощения:
$\mathcal{A} \otimes (\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) \neq \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \oplus (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \neq \mathcal{A}$.
8. Свойства дополнения (закон исключённого третьего и закон тождества):
$\mathcal{A} \otimes \overline{A} \neq \varnothing_{\text{нм}}$, $\mathcal{A} \oplus \overline{A} \neq I_{\text{нм}}$.

Теорема 3. Пусть A, B и C — произвольные нечёткие множества, заданные на одном универсальном I. Тогда справедливы следующие тождества, содержащие законы для алгебраического пересечения и алгебраического объединения нечётких множеств:

1. Свойства коммутативности:
   $\mathcal{A} \bullet \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \bullet \mathcal{A}$, $\quad \mathcal{A} + \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} + \mathcal{A}$.
2. Свойства ассоциативности:
   $\mathcal{A} \bullet (\mathcal{B} \bullet \mathcal{C}) \equiv (\mathcal{A} \bullet \mathcal{B}) \bullet \mathcal{C}$, $\quad \mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C}) \equiv (\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C}$.
3. Законы универсальной верхней и нижней границы:
   $\mathcal{A} \bullet \varnothing_{\text{нм}} \equiv \varnothing_{\text{нм}}$, $\quad \mathcal{A} + \varnothing_{\text{нм}} = \mathcal{A}$,
   $\mathcal{A} \bullet I_{\text{нм}} \equiv \mathcal{A}$, $\quad \mathcal{A} + I_{\text{нм}} \equiv I_{\text{нм}}$.
4. Законы де Моргана:
   $\overline{A \cdot B} \equiv \overline{A} + \overline{B}$ $\quad \overline{A + B} \equiv \overline{A} \cdot \overline{B}$

Замечание. В общем случае не выполняются следующие законы:

5. Свойства дистрибутивности:
   $\mathcal{A} \bullet (\mathcal{B} + \mathcal{C}) \neq (\mathcal{A} \bullet \mathcal{B}) + (\mathcal{A} \bullet \mathcal{C})$, $\quad \mathcal{A} + (\mathcal{B} \bullet \mathcal{C}) \neq (\mathcal{A} + \mathcal{B}) \bullet (\mathcal{A} + \mathcal{C})$.
6. Законы идемпотентности:
   $\mathcal{A} \bullet \mathcal{A} \neq \mathcal{A}$, $\quad \mathcal{A} + \mathcal{A} \neq \mathcal{A}$.
7. Законы поглощения:
   $\mathcal{A} \bullet (\mathcal{A} + \mathcal{B}) \neq \mathcal{A}$, $\quad \mathcal{A} + (\mathcal{A} \bullet \mathcal{B}) \neq \mathcal{A}$.
8. Свойства дополнения (закон исключённого третьего и закон тождества):
   $\mathcal{A} \bullet \overline{A} \neq \varnothing_{\text{нм}}$, $\quad \mathcal{A} + \overline{A} \neq I_{\text{нм}}$.

Законы теории нечётких множеств

№ п/п	Закон	№ п/п	Закон
1	$\mathcal{A} \cap \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$	16	$\mathcal{A} + \overline{\mathcal{A}} \equiv I_{нм}$
2	$\mathcal{A} \cup \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$	17	$\mathcal{A} \cdot \overline{\mathcal{A}} \equiv \varnothing_{нм}$
3	$\mathcal{A} \cap \varnothing_{нм} \equiv \varnothing_{нм}$	18	$\overline{\overline{\mathcal{A}}} \equiv \mathcal{A}$
4	$\mathcal{A} \cap I_{нм} \equiv \mathcal{A}$	19	$\overline{\mathcal{A} + \mathcal{B}} \equiv \overline{\mathcal{A}} \cdot \overline{\mathcal{B}}$
5	$\mathcal{A} \cup \varnothing_{нм} = \mathcal{A}$	20	$\overline{\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}} \equiv \overline{\mathcal{A}} + \overline{\mathcal{B}}$
6	$\mathcal{A} \cup I_{нм} \equiv I_{нм}$	21	$\mathcal{A} + (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \equiv \mathcal{A}$
7	$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$	22	$\mathcal{A} \cdot (\mathcal{A} + \mathcal{B}) \equiv \mathcal{A}$
8	$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \cup \mathcal{A}$	23	$\mathcal{A} + \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} + \mathcal{A}$
9	$\mathcal{A} \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \equiv \mathcal{A}$	24	$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}$
10	$\mathcal{A} \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \equiv \mathcal{A}$	25	$\mathcal{A} + I_{нм} \equiv I_{нм}$
11	$\overline{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}} \equiv \overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{B}}$	26	$\mathcal{A} + \varnothing_{нм} = \mathcal{A}$
12	$\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} \equiv \overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}}$	27	$\mathcal{A} \cdot I_{нм} \equiv \mathcal{A}$
13	$\overline{\overline{\mathcal{A}}} \equiv \mathcal{A}$	28	$\mathcal{A} \cdot \varnothing_{нм} \equiv \varnothing_{нм}$
14	$\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{A}} \equiv \varnothing_{нм}$	29	$\mathcal{A} + \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$
15	$\mathcal{A} \cup \overline{\mathcal{A}} \equiv I_{нм}$	30	$\mathcal{A} \cdot \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$

МЕРЫ НЕЧЕТКОСТИ МНОЖЕСТВ

Мера нечеткости произвольного нечеткого множества определяется как расстояние от этого нечеткого множества до ближайшего к нему множества, представляющего собой, как правило, четкое множество, характеристическая функция которого имеет значение, равное нулю, если соответствующее значение функции принадлежности нечеткого множества меньше или равно значению точки перехода, т.е. 0,5, и равно единице в противном случае. В работе

Обычным множеством, ближайшим к нечеткому множеству $\mathcal{A}$ с функцией принадлежности $\mu_{\mathcal{A}}(x)$, $x \in I$, называют подмножество A_0 универсального множества I, характеристическая функция которого имеет вид:

$$\chi_{A_0} = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_{\mathcal{A}} > 0{,}5; \\ 0, & \text{если } \mu_{\mathcal{A}} < 0{,}5; \\ 1 \text{ или } 0, & \text{если } \mu_{\mathcal{A}} = 0{,}5. \end{cases} \qquad (1)$$

Мерой нечеткости (размытости) нечеткого множества $\mathcal{A}$ называется расстояние между нечетким множеством $\mathcal{A}$ и обычным множеством A_0, ближайшим к нечеткому множеству $\mathcal{A}$, т.е. представляет собой величину $d(\mathcal{A})$, определяемую по следующим формулам.

1. Линейное (расстояние Хэмминга) $d_r(\mathcal{A})$, определяемое формулой:

$$d_r(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} \left| \mu_{\mathcal{A}}(x_i) - \chi_{A_0}(x_i) \right|, \quad d_r(\mathcal{A}) \in [0; n], \tag{2}$$

где $\mathcal{A}$ — нечеткое множество, A_0 — четкое множество, ближайшее к нечеткому множеству $\mathcal{A}$, $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ — значение функции принадлежности нечеткого множества $\mathcal{A}$ для $x \in I$, $\chi_{A_0}(x)$ — значения характеристической функции четкого множества, ближайшего к нечеткому множеству $\mathcal{A}$ для $x \in I$, n — число элементов универсального множества I.

2. Евклидово расстояние (квадратичное) $d_e(\mathcal{A})$, определяемое формулой:

$$d_e(\mathrm{A}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\mu_{\mathrm{A}}(x_i) - \chi_{A_0}(x_i) \right)^2}, \quad d_e(\mathrm{A}) \in [0; \sqrt{n}]. \tag{3}$$

3. Относительное расстояние Хэмминга $d_r'(\mathcal{A})$, определяемое формулой:

$$d_r'(\mathcal{A}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| \mu_{\mathcal{A}}(x_i) - \chi_{A_0}(x_i) \right|, \quad d_r'(\mathcal{A}) \in [0; 1]. \tag{4}$$

4. Относительное расстояние Евклида $d_e'(\mathcal{A})$, определяемое формулой:

$$d_e'(\mathcal{A}) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_{\mathcal{A}}(x_i) - \chi_{A_0}(x_i)\right)^2},$$
$$d_e'(\mathcal{A}) \in [0; 1]. \tag{5}$$

Рассмотрим примеры нахождения мер нечеткости. Пусть заданы следующие три нечетких множества $\mathcal{A} = \{(1; 0,9), (2; 0,1), (3; 0,6), (4; 0,4)\}$, $\mathcal{B} = \{(1; 0,7), (2; 0,3), (3; 0,2), (4; 0,9)\}$ и $\mathcal{C} = \{(1; 0,8), (2; 0,4), (3; 0,5)\}$.

Сначала найдем обычные множества, ближайшие к $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, по формуле (1):

$$\chi_{A_0} = \{(1;1), (2;0), (3;1), (4;0)\},$$
$$\chi_{B_0} = \{(1;1), (2;0), (3;0), (4;1)\},$$
$$\chi_{C_0} = \{(1;1), (2;0), (3;0)\}.$$

Используя формулу (2), найдем расстояние Хэмминга для трех нечетких множеств $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, результаты которых определяются следующим образом:

$$d_r(\mathcal{A}) = |0,9-1| + |0,1-0| + |0,6-1| + |0,4-0|,$$
$$d_r(\mathcal{B}) = |0,7-1| + |0,3-0| + |0,2-0| + |0,9-1|,$$
$$d_r(\mathcal{C}) = |0,8-1| + |0,4-0| + |0,5-0|.$$
$$d_r(\mathcal{A}) = 1,\ d_r'(\mathcal{B}) = 0,9,\ d_r'(\mathcal{C}) = 1,1.$$

Вычисляя расстояние Хэмминга, получаем следующие результаты:

$$d_r(\mathcal{A}) = 1,$$
$$d_r(\mathcal{B}) = 0{,}9,$$
$$d_r(\mathcal{C}) = 1{,}1.$$

Используя формулу (3), найдем Евклидово расстояние для трех нечетких множеств $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, результаты которых определяются следующим образом:

$$d_e(\mathcal{A}) = \sqrt{(0{,}9-1)^2 + (0{,}1-0)^2 + (0{,}6-1)^2 + (0{,}4-0)^2},$$
$$d_e(\mathcal{B}) = \sqrt{(0{,}7-1)^2 + (0{,}3-0)^2 + (0{,}2-0)^2 + (0{,}9-1)^2},$$
$$d_e(\mathcal{C}) = \sqrt{(0{,}8-1)^2 + (0{,}4-0)^2 + (0{,}5-0)^2}.$$

Вычисляя Евклидово расстояние, получаем следующие результаты: $d_e(\mathcal{A}) = 0{,}583$, $d_e(\mathcal{B}) = 0{,}48$, $d_e(\mathcal{C}) = 0{,}67$.

Используя формулу (4), найдем относительное расстояние Хемминга для трех нечетких множеств $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, результаты которых определяются следующим образом:

$$d_{r'}(\mathcal{A}) = \frac{2}{4}\left(|0{,}9-1| + |0{,}1-0| + |0{,}6-1| + |0{,}4-0|\right),$$
$$d_{r'}(\mathcal{B}) = \frac{2}{4}\left(|0{,}7-1| + |0{,}3-0| + |0{,}2-0| + |0{,}9-1|\right),$$
$$d_{r'}(\mathcal{C}) = \frac{2}{3}\left(|0{,}8-1| + |0{,}4-0| + |0{,}5-0|\right).$$

Вычисляя относительное расстояние Хемминга, получаем следующие результаты:

$$d_{r'}(\mathcal{A}) = 0{,}5,\ d_{r'}(\mathcal{B}) = 0{,}45,\ d_{r'}(\mathcal{C}) = 0{,}73.$$

Используя формулу (5), найдем относительное Евклидово расстояние для трех нечетких множеств $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, результаты которых определяются следующим образом:

$$d_e'(\mathcal{A}) = \frac{2}{\sqrt{4}}\sqrt{(0{,}9-1)^2 + (0{,}1-0)^2 + (0{,}6-1)^2 + (0{,}4-0)^2}\,,$$

$$d_e'(\mathcal{B}) = \frac{2}{\sqrt{4}}\sqrt{(0{,}7-1)^2 + (0{,}3-0)^2 + (0{,}2-0)^2 + (0{,}9-1)^2}\,,$$

$$d_e'(\mathcal{C}) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(0{,}8-1)^2 + (0{,}4-0)^2 + (0{,}5-0)^2}\,.$$

Вычисляя относительное Евклидово расстояние, получаем следующие результаты:

$$d_e'(\mathcal{A}) = 0{,}583,\ \ d_e'(\mathcal{B}) = 0{,}48,\ \ d_e'(\mathcal{C}) = 0{,}77.$$