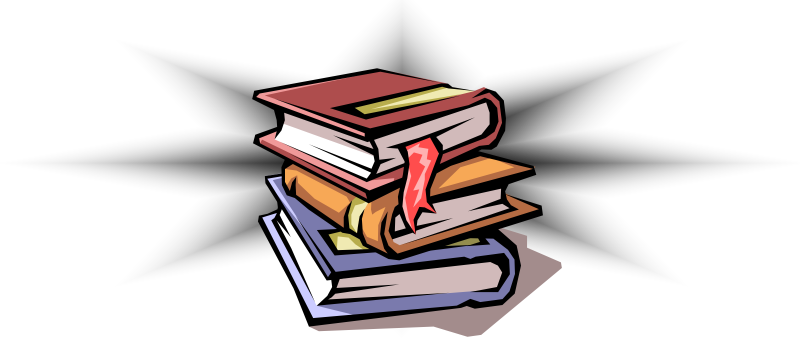
Tailieumontoan.com

Trịnh Bình



PHẦN NGUYÊN VÀ ỨNG DỤNG

Thanh Hóa, ngày 20 tháng 5 năm 2020

CHUYÊN ĐỀ: PHẦN NGUYÊN VÀ ỨNG DỤNG

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa

Ta biết rằng, mọi số thực x đều có thể biểu diễn được dưới dạng: $x = n + t$ với $n \in Z$ và $0 \le t < 1$.

Ví dụ: $6,7 = 6 + 0,7$; $-6,7 = -7 + 0,3$

Sự biểu diễn trên là duy nhất. Ta gọi số nguyên n là phần nguyên của x ; còn t được gọi là phần lẻ của x. Từ đây ta đi đến định nghĩa.

Phần nguyên của số thực x là số nguyên lớn nhất không vượt quá x, kí hiệu là $[x]$. Ta có $[x] \le x < [x]+1$.

Thí dụ: $\left[2\frac{1}{2}\right] = 2; \left[\frac{3}{5}\right] = 0; [-7,2] = -8; \left[\sqrt{2}\right] = 1; .....$

Phần lẻ của số thực x là hiệu của x với phần nguyên của nó, kí hiệu là $\{x\}$.

Ta có $\{a\} = a - [a], 0 \le \{a\} \le 1$.

Thí dụ $\{2,1\} = 0,1; \left\{\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}; \{-7,2\} = 0,8; ....$

2. Tính chất

1) $a \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow [a] = a$ hoặc $\{a\} = 0$.

2) $n \in \mathbb{Z}$ và $n \le a < n+1 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow [a] = n$.

3) $\left[\{a\}\right] = \{[a]\} = 0$.

4) Nếu $n \in \mathbb{Z}$ thì $[n+a] = n + [a]; \{n+a\} = \{a\}$.

5) Nếu $[n+a] = n$ thì $n \in \mathbb{Z}$ và $0 \le a \le 1$.

6) $a \ge b \Rightarrow [a] \ge [b]$.

7) $[a]+[b] \le [a+b]$.

Tổng quát $[a_1]+[a_2]+...+[a_n] \le [a_1 + a_2 + ... + a_n]$,

8) $[a]-[b] \ge [a-b]$.

9) $\{a\}+\{b\} \ge \{a+b\}; \{a\}-\{b\} \le \{a-b\}$.

10) Nếu $[a]=[b]$ thì $|a-b|<1$.

11) $[a]+\left[a+\frac{1}{2}\right] = [2a]$.

12) Nếu $n \in \mathbb{N}^*$ thì $[na] \ge n[a]; \left[\frac{[a]}{n}\right] = \left[\frac{a}{n}\right]$.

13) Nếu a là số nguyên thì $[-a] = -[a]$;

Nếu a không là số nguyên thì $[-a] = -[a]-1$;

Chứng minh các tính chất:

Các tính chất 1) đến 5) có thể chứng minh dễ dàng trên dựa vào định nghĩa phần nguyên.

6) Vì $a \geq b$ nên tồn tại số $c \geq 0$ sao cho $a = b + c$. Do đó. $a = [b] + \{b\} + c,$ suy ra

$$[a] = [b] + \left[\{b\} + c\right]. \text{ Mà } \left[\{b\} + c\right] \geq 0 \text{ nên } [a] \geq [b].$$

7) Viết $a = [a] + \{a\}, b = [b] + \{b\}$. Khi đó

$$[a+b] = \left[[a] + \{a\} + [b] + \{b\}\right] = [a] + [b] + \left[\{a\} + \{b\}\right].$$

Mà $\left[\{a\} + \{b\}\right] \geq 0$ nên

$$[a+b] \geq [a] + [b].$$

8) Áp dụng tính chất 7 ta có

$[a-b] + [b] \leq [a-b+b] = [a]$ nên $[a] - [b] \geq [a-b]$.

9) $\{a\} + \{b\} = a - [a] + b - [b] = (a+b) - ([a] + [b]) \geq a + b - [a+b] = \{a+b\}. \Rightarrow \{a\} + \{b\} \geq \{a+b\}$

Vậy $\{a\} + \{b\} \geq \{a+b\}$.

$\{a\} - \{b\} = a - [a] + [b] - b = (a-b) - ([a] - [b]) \leq (a-b) - [a-b] = \{a-b\}. \Rightarrow \{a\} - \{b\} \leq \{a-b\}$

Vậy $\{a\} - \{b\} \leq \{a-b\}$.

10) $[a] = [b]$ suy ra $a - \{a\} = b - \{b\}$. Không giảm tính tổng quát, giả sử $a \geq b$

Nếu $a = b$ thì $|a-b| = 0$;

Nếu $a > b$ thì từ $a - b = \{a\} - \{b\} \leq \{a-b\}$

Suy ra $|a-b| = a - b \leq \{a-b\} < 1$

Vậy $|a-b| < 1$.

11) Đặt $\{a\} = d$ thì $0 \leq d \leq 1$.

- Nếu $0 \leq d < \frac{1}{2}$ thì $\left[a + \frac{1}{2}\right] = \left[[a] + d + \frac{1}{2}\right] = [a] + \left[d + \frac{1}{2}\right] = [a]$;

$[2a] = \left[2([a] + d)\right] = 2[a] + [2d] = 2[a]$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

- Nếu $\frac{1}{2} \leq d < 1$ thì $\left[a + \frac{1}{2}\right] = \left[[a] + d + \frac{1}{2}\right] = [a] + \left[d + \frac{1}{2}\right] = [a] + 1$;

$[2a] = \left[2([a] + d)\right] = 2[a] + [2d] = 2[a] + 1$. Suy ra điều phải chứng minh.

12) Ta có $[na] = \left[n([a] + \{a\})\right] = n[a] + \left[n\{a\}\right]$, mà $\left[n\{a\}\right] \geq 0$ nên $[na] \geq n[a]$.

$$\left[\frac{a}{n}\right] \leq \frac{a}{n} < \left[\frac{a}{n}\right] + 1 \Rightarrow n\left[\frac{a}{n}\right] \leq a < n\left(\left[\frac{a}{n}\right] + 1\right)$$

$$\Rightarrow n\left[\frac{a}{n}\right] \leq [a] < n\left(\left[\frac{a}{n}\right] + 1\right) \Rightarrow \left[\frac{a}{n}\right] \leq \frac{[a]}{n} < \left[\frac{a}{n}\right] + 1$$

Vậy $\left[\frac{[a]}{n}\right] = \left[\frac{a}{n}\right]$.

13) Nếu a là số nguyên thì $[-a] = -a = -[a]$.

Nếu a không nguyên thì $0<\{a\}<1,$ nên $-1<-\{a\}<0,$ suy ra $\left[-\{a\}\right]=-1.$

Ta có $[-a]=\left[-\left([a]+\{a\}\right)\right]=\left[-[a]\right]+\left[-\{a\}\right]=-[a]-1.$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

🗁 Dạng 1: Tìm phần nguyên của một số hoặc một biểu thức

*** Cơ sở phương pháp:** Để tính giá trị một biểu thức chứa phần nguyên, ta cần sử dụng các tính chất của phần nguyên, kết hợp với các kĩ thuật tính toán khác đặc biệt là **Phương pháp "kẹp"**

Đánh giá số hạng để "kẹp" số cần tính phần nguyên giữa hai số nguyên liên tiếp: Đưa biểu thức về dạng $z\le A<z+1$ và kết luận $[A]=z;$

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm $[x]$ biết: $x=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+...+\dfrac{1}{n.(n+1)}$

Hướng dẫn giải

Ta cần chỉ ra số nguyên y sao cho: $y<x<y+1$ để: $[x]$ = y

Để ý $x=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+....+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=1-\dfrac{1}{n+1}$

Suy ra $0<x<1\Rightarrow[x]=0$

Bài toán 2. Tìm phần nguyên của số: $\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}$ (có 100 dấu căn).

(Nâng cao và phát triển lớp 9 tập 1 – Vũ Hữu Bình)

Hướng dẫn giải

Kí hiệu $a_n=\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}$ (có n dấu căn).

Ta có $a_1=\sqrt{6}<3$

$a_2=\sqrt{6+a_1}<\sqrt{6+3}=3$

$a_3=\sqrt{6+a_2}<\sqrt{6+6}=3$

…

$a_{100} = \sqrt{6 + a_{99}} < \sqrt{6+3} < 3$.

Hiển nhiên $a_{100} > \sqrt{6} > 2$ $a_{100} > \sqrt{6} > 2$. Như vậy $2 < a_{100} < 3$, do đó $[a_{100}] = 2$..

Bài toán 3. Tính phần nguyên của: $A = \sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}$. với n là số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Ta có: $A = \sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}. = \sqrt{(n^2+3n)(n^2+3n+2)} = \sqrt{(n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n)}$.

Để ý rằng:

$\sqrt{(n^2+3n)^2} < \sqrt{(n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n)} < \sqrt{(n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) + 1}$

Suy ra $n^2 + 3n < A < n^2 + 3n + 1$. Vậy $[A] = n^2 + 3n,\ n \in N$.

Bài toán 4. Tìm $[x]$ biết: $x = \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2 + 8n + 3}}$ với n là số tự nhiên

Hướng dẫn giải

Thật vậy ta có: $(4n+1)^2 < 16n^2 + 8n + 3 < (4n+2)^2$

$$\Rightarrow 4n+1 < \sqrt{16n^2+8n+3} < 4n+2$$

$$\Rightarrow 4n^2 + 4n + 1 < 4n^2 + \sqrt{16n^2+8n+3} < 4n^2 + 4n + 2 < 4n^2 + 8n + 4$$

$$\Rightarrow 2n+1 < \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2+8n+3}} < 2n+2$$

$$\Rightarrow [x] = 2n+1$$

Bài toán 5. Tính tổng sau:

$$S = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{24}]$$

Hướng dẫn giải

$$S = \left([\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}]\right) + \left([\sqrt{4}] + \dots + [\sqrt{8}]\right) + \left([\sqrt{9}] + \dots + [\sqrt{15}]\right) + \left([\sqrt{16}] + \dots + [\sqrt{24}]\right).$$

Theo cách chia nhóm như trên, nhóm 1 có ba số, nhóm 2 có năm số, nhóm 3 có bảy số, nhóm 4 có chín số.

Các số thuộc nhóm 1 bằng 1, các số thuộc nhóm 2 bằng 2, các số thuộc nhóm 3 bằng 3, các số thuộc nhóm 4 bằng 4.

Vậy $A = 1.3 + 2.4 + 3.7 + 4.9 = 70$.

🗁 Dạng 2: Chứng minh một đẳng thức chứa phần nguyên

*** Cơ sở phương pháp:** Chứng minh các hệ thức chứa phần nguyên thực chất có thể coi là chứng minh các tính chất của phần nguyên. Để chứng minh các hệ thức chứa phần nguyên ta phải sử dụng các tính chất đã được nêu trong phần lý thuyết, kết hợp với các kĩ thuật đại số và số học.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{2}\right] = n$$

Hướng dẫn giải

Nếu n chẵn, tức là $n = 2k$ thì $\left[\frac{2k}{2}\right] + \left[\frac{2k+1}{2}\right] = [k] + \left[k + \frac{1}{2}\right] = k + k = 2k = n$

Nếu n lẻ, tức $n = 2k + 1$ thì: $\left[\frac{2k+1}{2}\right] + \left[\frac{2k+1+1}{2}\right] = \left[k + \frac{1}{2}\right] + [k+1] = k + k + 1 = 2k + 1 = n.$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 2. Cho n là số tự nhiên, chứng minh:

$$\left[\sqrt{4n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right]$$

Hướng dẫn giải

Đặt $k = \left[\sqrt{4n+2}\right]; \quad m = \left[\sqrt{4n+1}\right]$.

Ta có: $k \ge m$

Do $k = \left[\sqrt{4n+2}\right]$ nên $k \le \sqrt{4n+2} \Rightarrow k^2 \le 4n+2$.

Giả sử $k^2 = 4n+2$, điều này vô lý vì số chính phương chia cho 4 không thể dư 2. Từ đó suy ra: $k^2 < 4n+2 \Rightarrow k^2 \le 4n+1 \Rightarrow k \le \sqrt{4n+1} \Rightarrow k \le \left[\sqrt{4n+1}\right] = m.$

Vậy $k = m$.

Bài toán 3. Chứng minh rằng với n là số nguyên dương bất kì, ta có:

$$\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] = \left[\sqrt{n - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\right].$$

Hướng dẫn giải

Đặt $k=\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]; \quad m=\left[\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\right]$.

Khi đó: $k\le\sqrt{n}+\frac{1}{2}<k+1\Leftrightarrow k-\frac{1}{2}\le\sqrt{n}<k+\frac{1}{2}\Leftrightarrow k^2-k+\frac{1}{4}\le n<k^2+k+\frac{1}{4}$.

Vì n nguyên dương nên phải có $k^2-k+1\le n\le k^2+k$.

Chứng minh tương tự:

$$m\le\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}<m+1\Leftrightarrow m^2-m+\frac{1}{4}\le n-\frac{3}{4}<m^2+m+\frac{1}{4}\Leftrightarrow m^2-m+1\le n\le m^2+m$$

Vậy phải có $k=m$.

🗁 **Dạng 3: Phương trình chứa phần nguyên**

1) Phương trình có dạng: $\left[f(x)\right]=a \quad (a\in\mathbb{Z})$

*** Cơ sở phương pháp:** $\left[f(x)\right]=a \quad (a\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow a\le f(x)<a+1$.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Giải phương trình $3[x]^2+5[x]-2=0$.

Hướng dẫn giải

Đặt $[x]=y, y\in Z$. Phương trình trở thành: $3y^2+5y-2=0$.

Suy ra $y=-2$ hoặc $y=-\frac{1}{3}$ ($y=-\frac{1}{3}$ loại do $y\in Z$)

Do đó $[x]=y=-2$. Suy ra $-2\le x<-1$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $[-2;-1)$

Bài toán 2. Giải phương trình $\left[x^2+5\right]^2-9\left[x^2+7\right]=-26$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left[x^2+7\right]=\left[x^2+5\right]+2$

Do đó:
$$\left[x^2+5\right]^2-9\left[x^2+7\right]=-26$$
$$\Leftrightarrow\left[x^2+5\right]^2-9\left(\left[x^2+5\right]+2\right)=-26$$
$$\Leftrightarrow\left[x^2+5\right]^2-9\left[x^2+5\right]+8=0$$

Đặt $\left[x^2+5\right]=y\Rightarrow y\ge5, y\in Z$. Phương trình trở thành: $y^2-9y+8=0$.

Suy ra $y=8$ hoặc $y=1$ ($y=1$ loại do $y<5$)

Do đó $\left[x^2+5\right]=y=8$. Suy ra $8\le x^2+5<9 \Leftrightarrow 3\le x^2<4 \Leftrightarrow \sqrt{3}\le x<2$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left[\sqrt{3};2\right)$

Bài toán 3. Giải phương trình $\left[\dfrac{x}{2}\right]+\left[\dfrac{x}{3}\right]=17$

Hướng dẫn giải

Trước hết ta ước lượng giá trị của x.

Do $[x]\le x$ nên $17\le \dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}=\dfrac{5x}{6}$, suy ra $x\ge 20,4.$. (1)

Do $[x]\ge x-1$ nên $17>\left(\dfrac{x}{2}-1\right)+\left(\dfrac{x}{3}-1\right)=\dfrac{5}{6}x-2$, suy ra $x\le 22,8$ (2)

Do x là số nguyên nên từ (1) và (2) suy ra $x\in\{21;22\}$.

Thử vào phương trình đã cho, ta được $x=21$

2) Phương trình có dạng: $\left[f(x)\right]=g(x)$

*** Cơ sở phương pháp:** Đặt $g(x)=t$ (t nguyên), biểu diễn $f(x)=h(t)$ đưa về phương trình $\left[h(t)\right]=t \Leftrightarrow t\le h(t)<t+1$ hay $0\le h(t)-t<1$.

Tìm t, sau đó từ $g(x)=t$ tìm ra x.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Giải phương trình $\left[\dfrac{4-3x}{5}\right]=\dfrac{5x-5}{7}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\dfrac{5x-5}{7}=t\,(t\in\mathbb{Z})$ thì $x=\dfrac{7t+5}{5};\dfrac{4-3x}{5}=\dfrac{5-21t}{25}$.

Ta có $\left[\dfrac{5-21t}{25}\right]=t \Leftrightarrow t\le \dfrac{5-21t}{25}<t+1$

$\Leftrightarrow 25t\le 5-21t\le 25t+25 \Leftrightarrow \dfrac{-20}{46}<t\le \dfrac{5}{46}$.

Do t nguyên nên $t=0$. Suy ra $x=1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 2. Giải phương trình $x^2-9[x]+8=0$.

Hướng dẫn giải

Biến đổi phương trình về dạng $[x]=\dfrac{x^2+8}{9}$.

Đặt $\dfrac{x^2+8}{9}=t$ $(t\in\mathbb{N}^*)$ thì $x=\sqrt{9t-8}$ (do $x>0$). Ta có

$$\left[\sqrt{9t-8}\right]=t\Leftrightarrow t\le\sqrt{9t-8}<t+1$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t^2-9t+8\le 0\\ t^2-7t+9\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le t\le 8t\\ \left[\begin{array}{l}t\le\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}\\ t\ge\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.\end{cases}.$$

Do t là số tự nhiên nên $t\in\{1;6;7;8\}$. Do đó $x\in\left\{1;\sqrt{46};\sqrt{55};8\right\}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{1;\sqrt{46};\sqrt{55};8\right\}$.

Bài toán 3. Giải phương trình $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right]+\left[\dfrac{4x+1}{6}\right]=\dfrac{5x-4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng tính chất: $[a]+\left[a+\dfrac{1}{2}\right]=[2a]$, ta có

$$\left[\dfrac{2x-1}{3}\right]+\left[\dfrac{4x+1}{6}\right]=\left[\dfrac{2x-1}{3}\right]+\left[\dfrac{2x-1}{3}+\dfrac{1}{2}\right]=\left[\dfrac{4x-2}{3}\right]$$

Nên phương trình đã cho trở thành

$$\left[\dfrac{4x-2}{3}\right]=\dfrac{5x-4}{3}.$$

Đặt $\dfrac{5x-4}{3}=t\,(t\in\mathbb{Z})$ thì $x=\dfrac{3t+4}{5};\dfrac{4x-2}{3}=\dfrac{4t+2}{5}$. Suy ra

$$\left[\dfrac{4t+2}{5}\right]=t\Leftrightarrow 0\le\dfrac{4t+2}{5}-t<1\Leftrightarrow -3<t\le 2\Leftrightarrow t\in\{-2;-1;0;1;2\}$$

(do t nguyên), tương ứng tìm được $x\in\left\{\dfrac{-2}{5};\dfrac{1}{5};\dfrac{4}{5};\dfrac{7}{5};2\right\}$.

3) Phương trình có dạng: $\left[f(x)\right]=\left[g(x)\right]$

*** Cơ sở phương pháp:**

Đặt $\left[f(x)\right]=\left[g(x)\right]=t$ suy ra $\left|f(x)-g(x)\right|<1$, dẫn đến $a<x<b$.

Với $a<x<b$ suy ra $\begin{cases}a_1<f(x)<b_1\\ a_2<f(x)<b_2\end{cases}$, từ đó tìm được t.

Ứng với mỗi giá trị của t nguyên, giải hệ $\begin{cases}[f(x)]=t\\ [g(x)]=t\end{cases}$ để tìm x.

Tập hợp các giá trị x tìm được từ hệ trên sẽ là nghiệm của phương trình.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Giải phương trình $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]$.

Hướng dẫn giải

Theo tính chất 10 thì nếu $[a]=[b]$ thì $|a-b|<1$

Đặt $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]=t\,(t\in\mathbb{Z})$. Theo tính chất chứng minh trên ta có

$\left|\frac{2x-1}{3}-\frac{x+1}{2}\right|<1\Leftrightarrow -1<\frac{x-5}{6}<1\Leftrightarrow -1<x<11$. Khi đó

$\begin{cases}0<\frac{x+1}{2}<6\\ -1<\frac{2x-1}{3}<7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le\left[\frac{x+1}{2}\right]\le 5\\ -1\le\left[\frac{2x-1}{3}\right]\le 6\end{cases}$. Suy ra $t\in\{0;1;2;3;4;5\}$.

Với $t=0$ thì $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]=0\Leftrightarrow\begin{cases}0\le\frac{2x-1}{3}<1\\ 0\le\frac{x+1}{2}<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}\le x<2\\ -1\le x<1\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le x<1.$

Với $t=1$ thì $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]=1\Leftrightarrow\begin{cases}1\le\frac{2x-1}{3}<2\\ 1\le\frac{x+1}{2}<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\le x<\frac{7}{2}\\ 1\le x<3\end{cases}\Leftrightarrow 2\le x<3.$

Với $t=2$ thì $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]=2\Leftrightarrow\begin{cases}2\le\frac{2x-1}{3}<3\\ 2\le\frac{x+1}{2}<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{7}{2}\le x<5\\ 3\le x<5\end{cases}\Leftrightarrow\frac{7}{2}\le x<5.$

Với $t=3$ thì $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]=3\Leftrightarrow\begin{cases}3\le\frac{2x-1}{3}<4\\ 3\le\frac{x+1}{2}<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5\le x<\frac{11}{2}\\ 5\le x<7\end{cases}\Leftrightarrow 5\le x<\frac{11}{2}.$

Với $t=4$ thì $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]=4\Leftrightarrow\begin{cases}4\le\frac{2x-1}{3}<5\\ 4\le\frac{x+1}{2}<5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{13}{2}\le x<8\\ 7\le x<9\end{cases}\Leftrightarrow 7\le x<8.$

Với $t=5$ thì $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]=5 \Leftrightarrow \begin{cases}5 \le \frac{2x-1}{3} < 6\\ 5 \le \frac{x+1}{2} < 6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8 \le x < \frac{19}{2}\\ 9 \le x < 11\end{cases} \Leftrightarrow 9 \le x < \frac{19}{2}.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $[0,5;1) \cup [2;3) \cup [3,5;5,5] \cup [7;8) \cup [9;9,5)$.

Bài toán 2. Giải phương trình $[x-2,3]=[4-x]$.

Hướng dẫn giải

Theo tính chất 10 thì nếu $[a]=[b]$ thì $|a-b|<1$ suy ra:

$$[x-2,3]=[4-x] \Rightarrow -1<(x-2,3)-(4-x)<1$$

$$\Leftrightarrow -1<2x-6,3<1 \Leftrightarrow 2,65<x<3,65.$$

Suy ra $0,35<x-2,3<1,35$. Do đó $[x-2,3]=0$ hoặc $[x-2,3]=1$.

Vì $2,65<x<3,65$ nên $0,35<4-x<1,35$ suy ra $[4-x]=0$ hoặc $[4-x]=1$.

Trường hợp 1: $[x-2,3]=[4-x]=0$

Ta có $[4-x]=0 \Leftrightarrow 0 \le x-2,3<1 \Rightarrow 2,3<x<3,3$

Kết hợp hai điều kiện ta được: $3<x<3,3$.

Trường hợp 2: $[x-2,3]=[4-x]=1$.

Ta có: $[x-2,3]=1 \Leftrightarrow 1 \le x-2,3<2 \Leftrightarrow 3,3 \le x<4,3;$

$[4-x]=1 \Leftrightarrow 1 \le 4-x<2 \Leftrightarrow 2<x \le 3.$

Không có x nào thỏa mãn hai điều kiện trên.

Từ hai trường hợp ta có nghiệm của phương trình là $3<x<3,3$

4) Phương trình chứa nhiều dấu phần nguyên

*** Cơ sở phương pháp:**

Sử dụng tính chất của phần nguyên, phân tích đa thức thành nhân tử, đặt ẩn phụ (nếu cần) để đưa về phương trình ít phần nguyên hơn.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Giải phương trình: $\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]=x.$

Hướng dẫn giải

Ta thấy x là số nguyên. Đặt $x=6a+r$ trong đó $a,r \in Z$ và $0 \le r<6$.

$$\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]=x \Leftrightarrow \left[\frac{6a+r}{2}\right]+\left[\frac{6a+r}{3}\right]=6a+r$$

$$\Leftrightarrow 5a+\left[\frac{r}{2}\right]+\left[\frac{r}{3}\right]=6a+r \Leftrightarrow a=-r+\left[\frac{r}{2}\right]+\left[\frac{r}{3}\right].$$

Lần lượt cho r bằng $0,1,2,3,4,5$ ta được.

r	0	1	2	3	4	5
a	0	-1	-1	-1	-1	-2
x	0	-5	-4	-3	-2	-7

Cách khác:

Ta dễ dàng chứng minh được tính chất $[x]+[y]=\begin{cases}[x+y] & khi\quad 0\le\{x\}+\{y\}<1;\\ [x+y]-1 & khi\quad 1\le\{x\}+\{y\}<2\end{cases}$

Áp dụng tính chất trên ta được:

$\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]=\left[\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\right]=\left[\frac{5x}{6}\right]$ hoặc $\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]=\left[\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\right]-1=\left[\frac{5x}{6}\right]-1$

Vậy nếu x là nghiệm của phương trình $\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]=x.$ thì $\left[\frac{5x}{6}\right]=x$ hoặc $\left[\frac{5x}{6}\right]-1=x.$

Tức là $\begin{cases}0\le\frac{5x}{6}-x<1\\ x\in Z\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}0\le\frac{5x}{6}-(x+1)<1\\ x\in Z\end{cases}$

hay $-6<x\le 0$ hoặc $-12<x\le -6$. Vậy $-12<x\le 0$.

Do x nguyên nên x chỉ có thể là $-11;-10;-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0$.

Thay vào phương trình và thử lại, ta được: $x=-7;-5;-4;-3;-2;0$.

Bài toán 2. Giải phương trình $\left[\frac{x}{1!}\right]+\left[\frac{x}{2!}\right]+\left[\frac{x}{3!}\right]=224$

Hướng dẫn giải

Ta có $\qquad [x]+\left[\frac{x}{4}\right]+\left[\frac{x}{6}\right]=224$.

Trước hết ta ước lượng giá trị của x.

Do $[x]\le x$ nên $224\le x+\frac{x}{2}+\frac{x}{6}=\frac{5}{3}x$, suy ra $x\ge 134,4.$. $\qquad$ (1)

Do $[x]\ge x-1$ nên $224>(x-1)+\left(\frac{x}{2}-1\right)+\left(\frac{x}{6}-1\right)=\frac{5}{3}x-3$, suy ra $x\le 136,2$ $\quad$ (2)

Do x là số nguyên nên từ (1) và (2) suy ra $x\in\{135;136\}$.

Thử vào phương trình đã cho, ta được $x=135$.

Bài toán 3. Giải phương trình $[x]+[2x]+[3x]+...+[2009x]=4036082$.

Hướng dẫn giải

Nhận xét rằng

$[x] \le x < [x+1]$ suy ra $k[x] \le kx < k[x]+k$ nên $k[x] \le [kx] \le k[x]+k-1 \left(k \in Z^+\right)$.

Do đó thay $k = 1, 2, ..., 2009$ rồi cộng theo vế ta có

$$2019045[x] \le [x]+[2x]+...+[2009x] \le 2019045[x]+2017036.$$

$$2019045[x] \le 4036082 \le 2019045[x]+2017036.$$

Lại có $4036082 = 2019045 + 2017037.$ Do đó phương trình vô nghiệm.

Bài toán 4. Giải phương trình $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right] - \left[x^2\right] = \left[-x^2\right].$

Hướng dẫn giải

Nếu a là số nguyên thì $[-a] = -a = -[a]$.

Nếu a không nguyên thì $0 < \{a\} < 1,$ nên $-1 < -\{a\} < 0,$ suy ra $\left[-\{a\}\right] = -1.$

Ta có $[-a] = \left[-\left([a]+\{a\}\right)\right] = \left[-[a]\right] + \left[-\{a\}\right] = -[a]+1.$

Do đó: $\left[-x^2\right] = \begin{cases} -\left[x^2\right], x^2 \in \mathbb{Z} \\ -\left[x^2\right] - 1, x^2 \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$

- Nếu x^2 là số nguyên thì phương trình đã cho trở thành

$$\left[\frac{2x-1}{3}\right] = 0 \Leftrightarrow 0 \le \frac{2x-1}{3} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x < 2.$$

Mà x^2 là số nguyên nên $x \in \left\{1; \sqrt{2}; \sqrt{3}\right\}.$

- Nếu x^2 không là số nguyên thì phương trình đã cho trở thành

$$\left[\frac{2x-1}{3}\right] = -1 \Leftrightarrow 0 \le \frac{2x-1}{3} + 1 < 1 \Leftrightarrow -1 \le x < \frac{1}{2}.$$

Mà x^2 không nguyên nên phải loại $x = -1, x = 0 \Rightarrow x \in (-1; 0) \cup \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $(-1; 0) \cup \left(0; \dfrac{1}{2}\right) \cup \left\{1; \sqrt{2}; \sqrt{3}\right\}.$

5) Phương trình dạng hỗi hợp

*** Cơ sở phương pháp:**

Có những phương trình chứa của phần nguyên và phần dư, hoặc phần nguyên với các phép toán khác (lũy thừa, căn thức,…) ta xếp chúng vào dạng *phương trình hỗn hợp*. Giải chúng nói chung là khó, cần kết hợp nhiều suy luận và kĩ thuật khác nhau, như dùng định nghĩa, chia khoảng, sử dụng tính chất số nguyên của $[x]$ hoặc tính chất $0 \le \{x\} < 1,$ các tính chất x nguyên khi và chỉ khi $\{x\} = 0$ hoặc $x = [x]$, các phương pháp của đại số như đặt ẩn phụ, biến đổi tương đương hệ phương trình,...

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Giải phương trình trên tập số dương: $\left[x^2\right]=[x]^2$

Hướng dẫn giải

Xét $n \le x < n+1$ hay $[x]=n$, trong đó n là số tự nhiên (có thể bằng 0). Ta có $n^2 \le x^2 < n^2+2n+1$. Do đó $\left[x^2\right]$ chỉ có thể nhận các giá trị

$$n^2; n^2+1; n^2+2; \ldots; n^2+2n.$$

Nhưng $[x]^2=n^2$ nên phương trình đã cho đúng khi và chỉ khi

$\left[x^2\right]=[x]^2=n^2$, tức là $\begin{cases} n^2 \le x^2 < n^2+1 \\ n \le x < n+1 \end{cases}$ hay $n \le x < \sqrt{n^2+1}.$.

Vì $x>0$ nên ta có $0<x<1$ hoặc $n \le x < \sqrt{n^2+1}, n=1,2,3,4,\ldots$

Bài toán 2. Giải phương trình: $\left[x^2\right]+[x]=\{x\}+2.$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta suy ra $\{x\}=\left[x^2\right]+[x]-2$. Vế phải là một số nguyên, mà vế trái $0 \le \{x\} < 1$ nên $\{x\}=0$. Vậy x là một số nguyên. Do đó x^2 cũng là một số nguyên. Suy ra $\left[x^2\right]=x^2$ và $[x]=x$. Phương trình đã cho trở thành $x^2+x-2=0.$

Phương trình này có nghiệm x = -2 hoặc x = 1.

Bài toán 3. Tìm các số x, y, z thoả mãn cả ba phương trình sau

$x+[y]+\{z\}=1,1$; $y+[z]+\{x\}=2,2$; $z+[x]+\{y\}=3,3$.

Hướng dẫn giải

Cộng từng vế các phương trình đã cho được $x+y+z=3,3$.

Cộng từng vế hai phương trình đầu được

$$x+y+[z]+\{z\}+[y]+\{x\}=3,3.$$

Suy ra $[y]+\{x\}=0$ (chú ý rằng $[z]+\{z\}=z$).

Do đó $\{x\}$ là số nguyên, suy ra $\{x\}=0$. Vậy $[y]=0$ và $x=[x]$.

Từ $x+[y]+\{z\}=1,1$ và $[y]=0$ suy ra $x+\{z\}=1,1$.

Do $0 \le \{z\} < 1$ và $x=[x]$ nên $x=1$, do đó $\{z\}=0,1$.

Từ $y+[z]+\{x\}=2,2$ và $\{x\}=0$ suy ra $y+[z]=2,2$.

Ta lại có $[y]=0$ nên $0 \le y < 1$, do đó $y = 0,2, [z]=2$.

Vậy $z=[z]+\{z\}=2,1$.

🗁 Dạng 4: Bất phương trình chứa phần nguyên

*** Cơ sở phương pháp:** Khi giải bất phương trình có chứa dấu phần nguyên, ta thường đặt biểu thức $[f(x)]=t$ (t nguyên) để chuyển về giải bất phương trình không còn chứa dấu phần nguyên, rồi vận dụng định nghĩa và tính chất của phần nguyên để tìm ra nghiệm của bất phương trình.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Giải bất phương trình $[x+2]>5$.

Hướng dẫn giải

Cách 1. Nhận xét rằng $[a]>b$ (b nguyên) khi và chỉ khi $a \ge b+1$.

Ta có $[x+2]>5$ khi và chỉ khi $x+2 \ge 6$. Do đó $x \ge 4$.

Cách 2. Đặt $[x+2]=t$ (t là số nguyên) thì có $t>5$. Do vậy $t \in \{6;7;8;...\}$.

Từ $[x+2]=t$ suy ra $t \le x+2 < t+1$. suy ra $t-2 \le x < t-1, t \in \{6;7;8;...\}$.

Vậy $x \ge 4$. Bất phương trình có vô số nghiệm $x \ge 4$.

Bài toán 2. Giải bất phương trình $2[x]^2-9[x+1]+16<0$.

Hướng dẫn giải

Ta có $[x+1]=[x]+1$. Biến đổi bất phương trình thành

$$2[x]^2-9[x]+7<0.$$

Đặt $[x]=t$ (t là số nguyên) thì có $2t^2-9t+7<0$ suy ra $1<t<3,5$ mà t nguyên nên $t \in \{2;3\}$.

Với $t=2$ thì $[x]=2$ suy ra $2 \le x < 3$.

Với $t=3$ thì $[x]=3$ suy ra $3 \le x < 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[2;4)$.

Bài toán 3. Giải bất phương trình $[2x]>[x]$.

Hướng dẫn giải

Cách 1. Đặt $[x]=t$ (t là số nguyên) thì $t \le x < t+1$ suy ra $2t \le 2x < 2t+2$. Do đó $[2x]=2t$ hoặc $2t+1$.

- Với $[2x]=2t$ thì $0 \le \{x\} < 0,5$ và $2t>t \Leftrightarrow t>0$, mà t nguyên nên t là số nguyên dương. Dẫn đến $x \ge 1$.

- Với $[2x]=2t+1$ thì $0,5\le\{x\}<1$ và $2t+1>t\Leftrightarrow t>-1$, mà t nguyên nên t là số nguyên dương. Dẫn đến $x\ge 0$.

Kết hợp với $0,5\le\{x\}<1$ dẫn đến $x\ge 0,5$.

Cách 2. Nhận xét rằng $[a]>[b]$ khi và chỉ khi $a>b$ và $[a]\ne[b]$.

Ta có $[2x]>[x]\Leftrightarrow 2x>x$ và $[2x]\ne[x]\Leftrightarrow x>0$ và $[2x]\ne[x]$.

Trước hết ta tìm x sao cho $[2x]=[x]$.

Đặt $[2x]=[x]=t$ (t nguyên) ta có

$$|2x-x|<1\Leftrightarrow|x|<1 \text{ suy ra } 0<x<1 \text{ nên } [x]=0.$$

Với $t=0$ thì $[x]=[2x]=0$ suy ra $0\le 2x<1$ nên $0\le x<0,5$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\ge 0,5$.

Bài toán 4. Giải bất phương trình $[x].\{x\}<x-1$

Hướng dẫn giải

Bất phương trình $[x].\{x\}<x-1$ tương đương với $[x].\{x\}<[x]+\{x\}-1$ hay

$$[x].(\{x\}-1)<\{x\}-1\Leftrightarrow([x]-1)(\{x\}-1)<0.$$

Do $\{x\}-1<0$ nên $[x]>1$ hay $x\ge 2$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\ge 2$

🗁 Dạng 5: Phần nguyên trong chứng minh một số dạng toán số học

*** Cơ sở phương pháp:** Phần nguyên được ứng dụng khá nhiều trong giải các bài toán số học về số tận cùng, chia hết, số nguyên tố….chúng ta cùng đến với các ví dụ cụ thể.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho $a>0$ và số n nguyên dương. Chứng minh rằng số các số nguyên dương là bội số của n và không vượt quá a là $\left[\frac{a}{n}\right]$.

Hướng dẫn giải

Ta viết $a=nq+r$, trong đó q là số tự nhiên, $0\le r<n$.

Rõ ràng các bội số của n không vượt quá a là $n,2n,...,qn$. tổng cộng có q số.

Mặt khác $\left[\frac{a}{n}\right]=q$. Từ đó suy ra kết luận của bài toán.

Bài toán 2. Số 2012! có tận cùng bao nhiêu số 0?

Hướng dẫn giải

Vì $10=2.5$ nên để biết $2012!$ có tận cùng bằng bao nhêu chữ số 0, ta cần phải tính số mũ của 5 khi phân tích $2012!$ ra thừa số nguyên tố.

Theo **Ví dụ 1**, Số mũ của 5 khi phân tích $2012!$ ra thừa số nguyên tố bằng

$$\left[\frac{2012}{5}\right]+\left[\frac{2012}{5^2}\right]+\left[\frac{2012}{5^3}\right]+\left[\frac{2012}{5^4}\right]=402+80+16+3=501.\ (\text{Do } 2012<5^5)$$

Do mũ của 2 khi phân tích $2012!$ ra thừa số nguyên tố nhiều hơn 501.

Vậy $2012!$ Có tận cùng là 501 chữ số 0.

Nhận xét. Nếu $5^k \le n < 5^{k+1}$ thì số chữ số 0 tận cùng về bên phải của số $n!$ bằng

$$\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{5^k}\right].$$

Bài toán 2. Tìm số tự nhiên k lớn nhất sao cho $(2011!)^{2012}$ chia hết cho 2012^k.

Hướng dẫn giải

Ta có $2012=2^2.503$.

Số mũ cao nhất của 503 có trong 2011! Là

$$\left[\frac{2011}{503}\right]=3\ (\text{do } 2011<503^2).$$

Vậy 2011! chia hết cho 503^3 và không chia hết cho 503^4, hiển nhiên 2011! chia hết cho 4^3. Do vậy 2011! chia hết cho 2012^3 và không chia hết cho 2012^4.

Muốn $(2011!)^{2012}$ chia hết cho 2012^k thì $k \le 3.2012=6036$.

Vậy $\max k = 6036$.

Bài toán 3. Tìm số tự nhiên n sao cho

$$\left[\frac{n}{2010}\right]=\left[\frac{n}{2011}\right]=\left[\frac{n}{2012}\right].\ (1)$$

Hướng dẫn giải

Viết $n=2010k+r(0\le r\le 2009, k, r$ là có số tự nhiên). Thay vào (1) ta có

$$\left[\frac{2010k+r}{2010}\right]=\left[\frac{2011k+r-k}{2011}\right]=\left[\frac{2012k+r-2k}{2012}\right]$$

$$\Leftrightarrow k=k+\left[\frac{r-k}{2011}\right]=k+\left[\frac{r-2k}{2012}\right]\Leftrightarrow\left[\frac{r-k}{2011}\right]=\left[\frac{r-2k}{2012}\right]=0.$$

Suy ra $0\le r-2k$ nên $2k\le r\le 2009, 0\le k\le 1004$.

Vậy $n=2010k+r(0\le k\le 1004; 2k\le r\le 2009)$.

Do có 105 giá trị của k (từ 0 đến 1004). Với một k thì r nhận các giá trị từ $2k$ đến 2009. Vậy sô nghiệm tự nhiên n của (1) là

$$\sum_{k=0}^{1004}(2010-2k)=1011030.$$

Bài toán 4. Tìm tất cả các số nguyên tố x sao cho

$$\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+...+\left[\sqrt{x^2-1}\right] \text{ là số nguyên tố.}$$

Hướng dẫn giải

Nhận xét

$$\left[\sqrt{n^2}\right]=\left[\sqrt{n^2+1}\right]=...=\left[\sqrt{(n+1)^2-1}\right]=n, n\in\mathbb{N}.$$

Đặt $S_n=\left[\sqrt{n^2}\right]+\left[\sqrt{n^2+1}\right]+...+\left[\sqrt{(n+1)^2-1}\right]=(2n+1)n=2n^2+n.$

Do đó $y=\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+...+\left[\sqrt{x^2-1}\right]=S_1+S_2+...+S_{x-1}=\dfrac{x(4x^2-3x-1)}{6}.$

Nên $6y=x(4x^2-3x-1)$, suy ra $6y \vdots x$, mà x,y là các số nguyên tố suy ra $x\in\{2;3;y\}$.

Nếu $x=2$ thì $y=3$ (thỏa mãn); nếu $x=3$ thì $y=13$ (thỏa mãn); nếu $x=y$ thì $y=-1$ hoặc $y=\dfrac{7}{4}$ (loại).

Vậy bài toán có hai nghiệm $x=2$ và $x=3$.

Bài toán 5. Cho $a=2+\sqrt{3}$.

a) Tính $\left[a^2\right]$

b) Tính $\left[a^3\right]$

c) * Chứng minh rằng $\left[a^n\right]$ là số tự nhiên lẻ với mọi số n nguyên dương.

(Nâng cao phát triển lớp 9 tập 1 – Vũ Hữu Bình)

Hướng dẫn giải

a) *Cách 1* (tính trực tiếp)

$$a^2=\left(2+\sqrt{3}\right)^2=7+4\sqrt{3}.$$

Ta có $6<4\sqrt{3}<7$ nên $13<a^2<14$. Vậy $\left[a^2\right]=13$

Cách 2 (tính gián tiếp).

Ta có $a^2=7+4\sqrt{3}$. Đặt $b=2-\sqrt{3}$ thì $b^2=7-4\sqrt{3}$. Suy ra

$$a^2+b^2=14 \qquad (1)$$

Ta có $0<b<1$ nên $0<b^2<1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $13<a^2<14$. Vậy $\left[a^2\right]=13$.

b) *Cách 1* (tính trực tiếp)

$$a^3=\left(2+\sqrt{3}\right)^3=8+12\sqrt{3}+18+3\sqrt{3}=26+15\sqrt{3}$$

Ta có $25<15\sqrt{3}<26$ nên $51<a^3<52$. Vậy $\left[a^3\right]=51$

Cách 2 (tính gián tiếp).

Ta có $a^3 = 26 + 15\sqrt{3}$. Đặt $b = 2 - \sqrt{3}$ thì $b^3 = 8 - 12\sqrt{3} + 18 - 3\sqrt{3} = 26 - 15\sqrt{3}$ Suy ra

$$a^3 + b^3 = 52 \qquad (1)$$

Ta có $0 < b < 1$ nên $0 < b^3 < 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $51 < a^3 < 52$. Vậy $\left[a^3\right] = 51$

c) Đặt $b = 2 - \sqrt{3}$. Theo khai triển $(x + y)^n$, ta được

$$a^n = \left(2 + \sqrt{3}\right)^n = A + B\sqrt{3} \quad \text{với } A, B \text{ là số tự nhiên}$$

$$b^n = \left(2 - \sqrt{3}\right)^n = A - B\sqrt{3}.$$

Suy ra $a^n + b^n = 2A$ (3)

Ta có $0 < b < 1$ nên $0 < b^n < 1$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $2A - 1 < a^n < 2A$. Vậy $\left[a^n\right] = 2A - 1$, tức là $\left[a^n\right]$ là số lẻ.

Chú ý: Trong cách tính gián tiếp, để chứng tỏ $\left[a^n\right]$ là số nguyên m, ta chứng minh rằng $a^n + b^n = m + 1$ và $0 < b^n < 1$, thế thì $m < a^n < m + 1$, do đó $\left[a^m\right] = m$.

Cách khác:

Đặt $\begin{cases} x_1 = 2 - \sqrt{3} \\ x_2 = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$, khi đó $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1, x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$ Ta có:

$$x_1^2 - 4x_1 + 1 = 0 \Rightarrow x_1^{n+2} - 4x_1^{n+1} + x_1^n = 0 \qquad (1)$$

$$x_2^2 - 4x_2 + 1 = 0 \Rightarrow x_2^{n+2} - 4x_2^{n+1} + x_2^n = 0 \qquad (2)$$

Cộng (1) và (2) ta được: $S_{n+2} + 4S_{n+1} + S_n = 0$ (3)

Ta có $S_0 = 2, S_1 = 4$ nên từ (3) suy ra S_n là số nguyên chẵn với mọi $n \in N$. Ta có

$0 < 2 - \sqrt{3} < 1$ nên $0 < x_1^n < 1 \Rightarrow x_2^n + \left(x_1^n - 1\right) < x_2^n < x_2^n + x_1^n \Rightarrow S_n - 1 < \left(2 + \sqrt{3}\right)^n < S_n$

$\Rightarrow \left[\left(2 + \sqrt{3}\right)^n\right] = S_n - 1$ là số lẻ với mọi $n \in N$

🗁 Dạng 6: Chứng minh bất đẳng thức có chứa phần nguyên

*** Cơ sở phương pháp:** Để chứng minh các bất đẳng thức phần nguyên ta phải sử dụng linh hoạt các tính chất đã được nêu trong phần lý thuyết.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng

$$[x] + [y] \le [x + y].$$

(Nâng cao phát triển lớp 9 tập 1 – Vũ Hữu Bình)

Hướng dẫn giải

Cách 1. Ta có $[x] \le x$; $[y] \le y$ nên $[x]+[y] \le x+y$.

Suy ra $[x]+[y]$ là số nguyên không vượt quá $x+y$ (1)

Theo định nghĩa phần nguyên, $[x+y]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá $x+y$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $[x]+[y] \le [x+y]$.

Cách 2. Theo định nghĩa phần nguyên, ta có

$$0 \le x-[x] < 1$$
$$0 \le y-[y] < 1$$

Suy ra $0 \le (x+y)-([x]+[y]) < 2.$

Xét hai trường hợp:

- Nếu $0 \le (x+y)-([x]+[y]) < 21$ thì

$$[x]+[y]=[x+y] \quad (1)$$

- Nếu $1 \le (x+y)-([x]+[y]) < 2$ thì $0 \le (x+y)-([x]+[y]+1) < 1$ nên

$$[x+y]=[x]+[y]+1 \quad (2)$$

Trong cả hai trường hợp ta đều có $[x]+[y] \le [x+y]$.

Bài toán 1. Cho $x, y \in R$ Chứng minh rằng

$$[2x]+[2y] \ge [x]+[y]+[x+y].$$

(Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán THCS Số học – Nguyễn Vũ Thanh)

Hướng dẫn giải

Ta có: $[2x]=\left[2[x]+2\{x\}\right]=2[x]+\left[2\{x\}\right]$;

$$[2y]=\left[2[y]+2\{y\}\right]=2[y]+\left[2\{y\}\right];$$
$$[x+y]=[x]+[y]+\left[\{x\}+\{y\}\right]$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\left[2\{x\}\right]+\left[2\{y\}\right] \ge \left[\{x\}+\{y\}\right] \quad (1)$$

Vì $0 \le \{x\}+\{y\} < 2$ nên ta có hai trường hợp sau:

● Nếu $0 \le \{x\}+\{y\} < 1$ thì (1) luôn đúng đúng vì vế trai lớn hơn bằng 0, vế phải bằng 0.

● Nếu $1 \le \{x\}+\{y\} < 2$ thì $\left[\{x\}+\{y\}\right]=1$ khi đó $\{x\} \ge \dfrac{1}{2}$ hoặc $\{y\} \ge \dfrac{1}{2}$. Giả sử $\{x\} \ge \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2\{x\} \ge 1 \Rightarrow \left[2\{x\}\right]+\left[2\{y\}\right] \ge 1$ (đpcm)

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Tìm $[x]$ biết: $x-\frac{1}{3}<-2<x$

Bài 2: Tìm $[x]$ biết : $x<-5<x+0,5$

Bài 3: Tìm $[x]$ biết: $x=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+..+\frac{1}{\sqrt{10^6}}$.

Bài 4: Tìm phần nguyên của biểu thức :

$$\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$, (với n dấu căn)

Bài 5 : Tìm phần nguyên của biểu thức :

$$\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+.....+\sqrt[3]{6}}}$$ (với n dấu căn)

Bài 6: Tính tổng sau:

$$S=\left[\sqrt{1.2.3.4}\right]+\left[\sqrt{2.3.4.5}\right]+\left[\sqrt{3.4.5.6}\right]+...+\left[\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$$

Bài 7: Chứng minh rằng, với mọi số nguyên n ta có:

$$[n+x]=n+[x]$$

Bài 8: Chứng minh rằng, với mọi x,y ta có:

$$[x]+[y]\le[x+y]\le[x]+[y]+1$$

Bài 9: Cho n là số nguyên dương, chứng minh:

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]=\text{n}$$

Bài 10: Cho n là số tự nhiên, chứng minh: $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$

Bài 11: Cho n là số tự nhiên, chứng minh: $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$

Bài 12: Chứng minh rằng: $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$, (với x là số thực bất kỳ)

Bài 13: Tính tổng: S = $\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2^2}\right]+\left[\frac{n+4}{2^3}\right]+\left[\frac{n+8}{2^4}\right]+..+\left[\frac{n+1}{2^{2020}}\right]$

Bài 14: Chứng minh rằng: $m[x]\le[mx]\le m[x]+m-1$ (với mọi giá trị m nguyên dương)

Bài 15: Chứng minh rằng : Không tồn tại x thoả mãn:

$$[x]+[2x]+[3x]+.....+[100x]=313096$$

Bài 16: Giải phương trình: $[x+0,7]=-4$

Bài 17: Giải phương trình: $[x+1]+[x+2]+[x+3]=4$

Bài 18: Giải phương trình $4[x]=3x$

Bài 19: Giải phương trình: $\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}$

Bài 20: Giải phương trình: $\left[\frac{2x-1}{3}\right] + \left[\frac{4x+1}{6}\right] = \frac{5x-4}{3}$

Bài 21: Giải phương trình: $[x].\{x\} = x - 1$

Bài 22: Giải phương trình: $x - 3\left[\frac{x}{2}\right] = 2$

Bài 23: Giải phương trình: $[x-1] = \left[\frac{x}{2}+1\right]$

Bài 24: Giải phương trình: $x^4 = 2x^2 + [x]$

Bài 25: Giải phương trình: $x^3 - [x] = 3$

Bài 26: Giải phương trình: $\left[-x^2+3x\right] = \left[x^2+\frac{1}{2}\right]$

Bài 27: Với k > 3, Chứng minh rằng $\left[\frac{2n}{k}\right] \geq \left[\frac{n}{k}\right] + \left[\frac{n+2}{k}\right]$.

Bài 28: Cho $n, k_1, k_2, ..., k_n \in N^*$. Chứng minh rằng:

$$\left[\frac{k_1+k_2+...+k_n}{n}\right] + (n-1) \leq k_1+k_2+...+k_n.$$

Bài 29 : Chứng minh rằng nếu r là số dư trong phép chia a cho số nguyên dương b thì

$$r = a - b\left[\frac{a}{b}\right]$$

Bài 30: Cho $n \in N$, chứng minh $[na] \geq n[a]$. Đặt biệt khi $\{a\} < \frac{1}{n}$ thì $[na] = n[a]$

Bài 30: Cho $n \in N^*$, chứng minh $[na] \geq n[a]$. Đặt biệt khi $\{a\} < \frac{1}{n}$ thì $[na] = n[a]$

Bài 31: a) Tính tổng sau: $S = \left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right] + ... + \left[\sqrt{24}\right]$

b) Cho $n \in N^*$ và $n \geq 2$. Tính tổng : $A = \left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + ... + \left[\sqrt{n^2-1}\right]$.

Bài 32: Tính phần nguyên của $T = \sqrt{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + ... + \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}}$

Bài 33: Với $n \in N^*$, chứng minh rằng:

$$[x] + \left[x+\frac{1}{n}\right] + \left[x+\frac{2}{n}\right] + ... + \left[x+\frac{n-1}{n}\right] = [nx].$$

Bài 34 : Tính tổng : $A = \left\{\frac{0.a+b}{m}\right\} + \left\{\frac{1.a+b}{m}\right\} + ... + \left\{\frac{(m-1).a+b}{m}\right\}$

Trong đó $a, m \in N^*$ và $(a,m) = 1, b \in Z$.

Bài 35 : Cho m, n là hai số tự nhiên lẻ và nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng :

$$\left[\frac{m}{n}\right]+\left[\frac{2m}{n}\right]+...+\left[\frac{(n-1)m}{n}\right]+\left[\frac{n}{m}\right]+\left[\frac{2n}{m}\right]+...+\left[\frac{(m-1)n}{m}\right]=\frac{(m-1)(n-1)}{2}.$$

Bài 36 : Tìm hai chữ số tận cùng của số $\left[\left(\sqrt{29}+\sqrt{21}\right)^{2000}\right]$

Bài 37 : Tính đúng $S=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2^2}\right]+...+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]+...$

(Thi toán Quốc tế năm 1968)

Bài 38 : Chứng minh rằng không tồn tại số thực x thỏa mãn :

$$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345.$$

Bài 39 : Tìm $n\in N^*$ thỏa mãn $[n]$ là ước của n.

Bài 40 : Giải phương trình : $1-|x+1|=\frac{[x]-x}{|x-1|}$

Bài 41 : Với mỗi số thực a ta gọi phần nguyên của a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a và ký hiệu là $[a]$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, biểu thức $n+\left[\sqrt[3]{n-\frac{1}{27}}+\frac{1}{3}\right]^2$ không biểu diễn được dưới dạng lập phương của một số nguyên dương.

(Trích đề vào 10 Chuyên Khoa Học tự nhiên Hà Nội năm 2011-2012)

Bài 42: Với mỗi số thực a, ta gọi phần nguyên của số a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a và ký hiệu là [a]. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta luôn có.

$$\left[\frac{3}{1.2}+\frac{7}{2.3}+...\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\right]=n$$

(Trích đề vào 10 Chuyên Khoa Học tự nhiên Hà Nội năm 2010-2011)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Từ điều kiện bài ra ta có: $x<-2+\frac{1}{3}\Rightarrow x<-1\Rightarrow -2<x<-1\Rightarrow [x]=-2$

Bài 2: Từ điều kiện bài ra ta có: $-5,5<x<-5\Rightarrow [x]=-6$

Bài 3: Ta có: $\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$; $\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

$$\Rightarrow 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$$

Cho n nhận các giá trị từ 2 đến 10^6, ta được:

$$1+2\left(\sqrt{10^6}-\sqrt{2}\right)<x<1+2\left(\sqrt{10^6}-1\right)=1999$$

mà: $1+2\left(\sqrt{10^6}-\sqrt{2}\right)>1+2000-2\sqrt{2}>2001-3=1998$

$\Rightarrow 1998<x<1999 \Rightarrow [x]=1998$

Bài 4 Ta có: $x>1$

Kí hiệu $x_n=\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ (có n dấu căn).

Ta có $x_1=\sqrt{2}<\sqrt{4}=2$

$x_2=\sqrt{6+x_1}<\sqrt{2+2}=2$

$x_3=\sqrt{2+x_2}<\sqrt{2+2}=2$

…

$x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}<\sqrt{2+2}<2$.

Như vậy $1<x_n<2$, do đó $[x_n]=1$.

Bài 5. Ta có: $x>1$

Kí hiệu $x_n=\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+.....+\sqrt[3]{6}}}$ (có n dấu căn).

Ta có $x_1=\sqrt[3]{6}<\sqrt[3]{8}=2$

$x_2=\sqrt[3]{6+x_1}<\sqrt[3]{6+2}=2$

$x_3=\sqrt[3]{6+x_2}<\sqrt[3]{6+2}=2$

…

$x_n=\sqrt[3]{6+x_{n-1}}<\sqrt[3]{6+2}=2$.

Như vậy $1<x_n<2$, do đó $[x_n]=1$.

Bài 6: Ta có: $n(n+1)(n+2)(n+3)=\left(n^2+3n\right)\left(n^2+3n+2\right)=\left(n^2+3n\right)^2+2\left(n^2+3n\right)$

$\left(n^2+3n\right)^2<n(n+1)(n+2)(n+3)<\left(n^2+3n+1\right)^2$

$\Rightarrow n^2+3n<\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}<n^2+3n+1$

$\Rightarrow \left[\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right]=n^2+3n$

$\Rightarrow S=\left(1^2+2^2+...+n^2\right)+3(1+2+...+n)$

Ta có các công thức : $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Rightarrow S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{3n(n+1)}{2}$$

Bài 7: Ta biểu thị: $x=[x]+\{x\}\Rightarrow[n+x]=\big[[x]+n+\{x\}\big]$, mà: $0\le\{x\}<1$

Còn: n + $[x]$ là số nguyên nên $[[x]+n+\{x\}]$ = n + $[x]$ Hay: $[n+x]$ = n + $[x]$

Bài 8: Ta biểu thị: $x=[x]+\{x\}$ và $y=[y]+\{y\}$

$\Rightarrow x+y=[x]+[y]+\{y\}+\{x\}$

mà: $0\le\{x\}+\{y\}<2\Rightarrow[x]+[y]\le[x+y]\le[x]+[y]+1$

Bài 9:

- Xét n là số chẵn $(n=2k)$ thì: $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]$= $[k]$ + $\left[k+\frac{1}{2}\right]$= 2k = n

- Xét n là số lẻ $(n=2k+1)$ thì: $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]=\left[k+\frac{1}{2}\right]$+ $[k+1]$ = 2k + 1 = n

Vậy ta luôn có: $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]$= n

Bài 10: Đặt $k=\left[\sqrt{4n+2}\right]$; $m=\left[\sqrt{4n+1}\right]$.

Ta có: $k\ge m$

Do $k=\left[\sqrt{4n+2}\right]$ nên $k\le\sqrt{4n+2}\Rightarrow k^2\le 4n+2$.

Giả sử $k^2=4n+2$, điều này vô lý vì số chính phương chia cho 4 không thể dư 2. Từ đó suy ra: $k^2<4n+2\Rightarrow k^2\le 4n+1\Rightarrow k\le\sqrt{4n+1}\Rightarrow k\le\left[\sqrt{4n+1}\right]=m.$

Bài 11: Trước hết ta chứng minh: $\sqrt{4n+1}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}$

Từ đó suy ra $\left[\sqrt{4n+1}\right]\le\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]\le\left[\sqrt{4n+2}\right]$

Mà từ kết quả bài số 10: $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$ ta có điều phải chứng minh.

Bài 12: Đặt $\{a\}=d$ thì $0\le d\le 1$.

- Nếu $0\le d<\frac{1}{2}$ thì $\left[a+\frac{1}{2}\right]=\left[[a]+d+\frac{1}{2}\right]=[a]+\left[d+\frac{1}{2}\right]=[a]$;

$[2a]=\left[2([a]+d)\right]=2[a]+[2d]=2[a]$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

- Nếu $\frac{1}{2}\le d<1$ thì $\left[a+\frac{1}{2}\right]=\left[[a]+d+\frac{1}{2}\right]=[a]+\left[d+\frac{1}{2}\right]=[a]+1$;

$[2a]=\left[2([a]+d)\right]=2[a]+[2d]=2[a]+1$. Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 13: Áp dụng kết quả bài tập 12 ta có: $\left[x+\frac{1}{2}\right]$ = $[2x]$ - $[x]$

$$\Rightarrow S=[n]-\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]-\left[\frac{n}{8}\right]+........+\left[\frac{n}{2^{2019}}\right]-\left[\frac{n}{2^{2020}}\right]=[n]-\left[\frac{n}{2^{2020}}\right].$$

Vậy: $S = [n] - \left[\dfrac{n}{2^{2020}}\right]$.

Bài 14: Với: $x = [x] + \{x\}$ mà: $m\{x\} \geq 0$

Khi đó: $[mx] = [m[x] + m\{x\}] = m[x] + [m\{x\}]$

Vì: $0 \leq m\{x\} < m \Rightarrow 0 \leq [m\{x\}] \leq m - 1$

Suy ra $m[x] \leq [mx] \leq m[x] + m - 1$ với mọi giá trị m nguyên dương

Bài 15: Đặt: S = $[x]$ + $[2x]$ + $[3x]$ +.....+ $[100x]$, áp dụng kết quả bài 14

Cho m nhận các giá trị từ 1 đến 100 rồi cộng lại ta được:

$$5050[x] \leq S \leq 5050[x] + 4950 \Rightarrow 5050[x] \leq 313096 \leq 5050[x] + 4950$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [x] \leq 61,99 \\ [x] \geq 61,02 \end{cases} \Rightarrow 61,02 \leq [x] \leq 61,99$$

Điều này chứng tỏ không có x thoả mãn

Bài 16: Phương trình tương đương $-4 \leq x + 0,7 < -3 \Leftrightarrow -4,7 \leq x < -3,7$

Bài 17: Sử dụng tính chất: $[n + x]$ = n + $[x]$, (n$\in$Z)

Với mọi giá trị n nguyên ta có:

$$[x+1] + [x+2] + [x+3] = 6 + 3[x] \Rightarrow 3[x] + 6 = 4$$

$\Rightarrow [x] = -\dfrac{2}{3}$ vô lý hay không có x thoả mãn.

Bài 18: Từ đặc điểm phương trình ta có: $3x \in Z \Rightarrow x = \dfrac{4k}{3}$, (k $\in$ Z)

$$\Rightarrow 4\left[\frac{4k}{3}\right] = 4k \Leftrightarrow \left[\frac{4k}{3}\right] = k \Leftrightarrow \left[k + \frac{k}{3}\right] = k \Leftrightarrow \left[\frac{k}{3}\right] = 0 \Rightarrow k = 0;1;2$$

$$\Rightarrow x = 0; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}.$$

Bài 19:

Đặt: $\dfrac{15x-7}{5} = t$, (t $\in Z$) $\Rightarrow x = \dfrac{5t+7}{15} \Rightarrow \left[\dfrac{30t+117}{120}\right] = t$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{30t+117}{120} - t < 1 \Rightarrow -\frac{1}{30} \leq t < \frac{117}{90}$$

Do: t nguyên $t = 0;1 \Rightarrow x = \dfrac{7}{15}; \dfrac{4}{5}$.

Bài 20: Đặt: $\dfrac{2x-1}{3} = y \Rightarrow x = \dfrac{3y+1}{2}$ Thay vào phương trình đã cho

ta được: $[y] + \left[y + \dfrac{1}{2}\right] = \dfrac{5y-1}{2} \Rightarrow [2y] = \dfrac{5y-1}{2}$

Giải tương tự như bài 19 ta được: $y = -\dfrac{3}{5}; -\dfrac{1}{5}; \dfrac{1}{5}; \dfrac{3}{5}; 1$

Vậy nghiệm phương trình là: $S = \left\{-\dfrac{2}{5}; \dfrac{1}{5}; \dfrac{4}{5}; \dfrac{7}{5}; 2\right\}$

Bài 21: Phương trình được biến đổi thành: $[x].\{x\} = [x] + \{x\} - 1$

$\Rightarrow ([x] - 1)(\{x\} - 1) = 0$ do: $\{x\} - 1 < 0$

Nên: $[x]$ - 1 = 0 $\Rightarrow$ $[x] = 1 \Rightarrow 1 \le x < 2$

Bài 22: Đặt: $x = a + \{x\}$, $(a = [x])$

Phương trình đã cho trở thành: $3\left[\dfrac{x}{2}\right] = a - 2 \Rightarrow \left[\dfrac{x}{2}\right] = \dfrac{a-2}{3}$

$a = 3k + 2, (k \in Z) \Rightarrow \left[\dfrac{3k + 2 + \{x\}}{2}\right] = k \Rightarrow \left[k + \dfrac{k + 2 + \{x\}}{2}\right] = k$

$\Rightarrow 0 \le \dfrac{k + 2 + \{x\}}{2} < 1 \Rightarrow -1 \le k + \{x\} < 0 \Rightarrow k = -1$

$x = -1 + \{x\} \Rightarrow -1 \le x < 0$

Bài 23: Đặt: $x = a + \{x\}$, $(a = [x])$

$\Rightarrow [x - 1] = [a - 1 + \{x\}] = a - 1$

và: $\left[\dfrac{x}{2} + 1\right] = \left[\dfrac{x+2}{2}\right] = \left[a - 1 + \dfrac{4 - a + \{x\}}{2}\right] = a - 1 + \left[\dfrac{4 - a + \{x\}}{2}\right]$

$\Rightarrow 0 \le \dfrac{4 - a + \{x\}}{2} < 1 \Rightarrow 2 + \{x\} < a \le 4 + \{x\} \Rightarrow 0 \le \{x\} < a - 2 \le 2 + \{x\} < 3$

$\Rightarrow a - 2 \in \{1; 2\} \Rightarrow a \in \{3; 4\}$

$\Rightarrow 3 \le x < 5$

Bài 24: Phương trình được biến đổi thành $[x] = x^2(x^2 - 2)$

+ Xét: $x^2 \le 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} \Rightarrow [x] \in \{0; -1\}$

Nếu: $[x] = 0 \Rightarrow x = 0$

Nếu: $[x] = -1 \Rightarrow x = -1$

+ Xét: $x^2 > 2 \Rightarrow [x] > \sqrt{2} \Rightarrow x(x^2 - 2) = \dfrac{[x]}{x} \le 1$

$\Rightarrow x^2 - 2 \le \dfrac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow x < \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{2} < x < \sqrt{3} \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$

Bài 25: Phương trình được biến đổi thành:

$x^3 - (x - \{x\}) = 3 \Rightarrow x^3 - x = 3 - \{x\} \Rightarrow 2 < x^3 - x \le 3$

Nếu: $x \ge 2 \Rightarrow x^3 - x = x(x^2 - 1) \ge 6 > 3$ (loại)

Nếu: $x \le -1 \Rightarrow x^2 - 1 \ge 0 \Rightarrow x^3 - x = x(x - 1) \le 0 < 2$ (loại)

Nếu: $-1 < x \le 0 \Rightarrow x^3 - x \le -x < 1 < 2$ (loại)

Nếu: $0 \le x \le 1 \Rightarrow x^3 - x < x^3 \le 1 < 2$ (loại)

Vậy: $1 < x < 2 \Leftrightarrow [x] = 1 \Rightarrow x^3 = 4 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}$

Bài 26: Ta có: $x^2 + \dfrac{1}{2} > 0 \Rightarrow \left[x^2 + \dfrac{1}{2}\right] > 0$

Còn: $-x^2 + 3x = -\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{4} \le \dfrac{9}{4} \Rightarrow [-x^2 + 3x] \le 2$

$$\Rightarrow \left[-x^2+3x\right]=\left[x^2+\frac{1}{2}\right]=n\in\{0;1;2\}$$

Nếu: $n=0\Rightarrow x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

Nếu: $n=1\Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}\le x<1$

Nếu: $n=2\Rightarrow \dfrac{\sqrt{6}}{2}\le x<\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

Vậy: $S=\left[0;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt{6}}{2};\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$

Bài 27: Giả sử $n=kq+r\ (0\le r<k)$. Ta cần chứng minh: $\left[\dfrac{2r}{k}\right]\ge\left[\dfrac{r}{k}\right]+\left[\dfrac{r+2}{k}\right]=\left[\dfrac{r+2}{k}\right]$.

Với r = 0 hay r = 1 thì $\left[\dfrac{2r}{k}\right]=\left[\dfrac{r+2}{k}\right]=0$ vì k > 3.

Với $r\ge 2$ thì $\dfrac{2r}{k}\ge\dfrac{r+2}{k}\Leftrightarrow\left[\dfrac{2r}{k}\right]\ge\left[\dfrac{r+2}{k}\right]$.

Bài 28: $k_i\ge 1\Rightarrow\dfrac{k_1+k_2+...+k_n}{n}\ge 1$ Do đó:

$$\left[\frac{k_1+...+k_n}{n}\right]+(n-1)\le\frac{k_1+...+k_n}{n}+(n-1)\frac{k_1+...+k_n}{n}=k_1+...+k_n.$$

Bài 29 : Giả sử $a=bq+r;0\le r<b\Rightarrow\dfrac{a}{b}=q+\dfrac{r}{b}\Rightarrow q\le\dfrac{a}{b}<q+1\Rightarrow\left[\dfrac{a}{b}\right]=q$

Bài 30: $[na]=n[a]+\left[n\{a\}\right]\ge n[a]$.

Nếu $\{a\}<\dfrac{1}{n}$ thì $0\le n\{a\}<1\Rightarrow\left[n\{a\}\right]=0\Rightarrow[na]=n[a]$.

Bài 31:

$a)\ S=\left(\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]\right)+\left(\left[\sqrt{4}\right]+...+\left[\sqrt{8}\right]\right)+\left(\left[\sqrt{9}\right]+...+\left[\sqrt{15}\right]\right)+\left(\left[\sqrt{16}\right]+...+\left[\sqrt{24}\right]\right).$

Theo cách chia nhóm như trên, nhóm 1 có ba số, nhóm 2 có năm số, nhóm 3 có bảy số, nhóm 4 có chín số.

Các số thuộc nhóm 1 bằng 1, các số thuộc nhóm 2 bằng 2, các số thuộc nhóm 3 bằng 3, các số thuộc nhóm 4 bằng 4.

Vậy $A = 1.3 + 2.4 + 3.7 + 4.9 = 70$.

b) Ta có các công thức : $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Với k = 0, 1, …,2n thì: $n^2 \le n^2 + k < (n+1)^2 \Rightarrow n \le \sqrt{n^2 + k} < n + 1$.

Do đó $\left[\sqrt{n^2}\right] = \left[\sqrt{n^2+1}\right] = ... = \left[\sqrt{n^2+2n}\right] = n$

Có (2k + 1) số có giá trị bằng n nên: $\left[\sqrt{n^2}\right] + \left[\sqrt{n^2+1}\right] + ... + \left[\sqrt{n^2+2n}\right] = n(2n+1)$

Nhóm tương tự câu a) ta được:

$$A = \left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + ... + + \left[\sqrt{n^2 - 1}\right]$$

$$= \left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + ... + \left[\sqrt{(n-1)^2 + 2(n-1)}\right]$$

$$= \left(\left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right]\right) + \left(\left[\sqrt{4}\right] + ... + \left[\sqrt{8}\right]\right) + ... + \left(\left[\sqrt{(n-1)^2}\right] + ... + \left[\sqrt{(n-1)^2 + 2(n-1)}\right]\right)$$

Do đó:

$$A = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\left[\sqrt{k^2}\right] + \left[\sqrt{k^2+1}\right] + ... + \left[\sqrt{k^2+2k}\right]\right) = \sum_{k=1}^{n-1} 2k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= 2.\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(4n^2 - 3n - 1)}{6}.$$

Bài 33: Ta có : $\sqrt[k+1]{\dfrac{k+1}{k}} > 1, k = 1, 2, ..., n$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho (k + 1) số dương, ta có:

$$\sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}} = \sqrt[k+1]{\underbrace{1.1...1}_{k\ so\ 1}.\frac{k+1}{k}} < \frac{k + \frac{k+1}{k}}{k-1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{k(k+1)}$$

Suy ra: $1 < \sqrt[k+1]{\dfrac{k+1}{k}} < 1 + \dfrac{1}{k(k+1)} \Rightarrow n < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt[k+1]{\dfrac{k+1}{k}} < n + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} \Rightarrow n < T < n + 1$

(vì ta dễ chứng minh được $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$)

Vậy $[T]=n.$

Bài 33: Cho số tự nhiên k sao cho: $m+\frac{k-1}{n}\le x<m+\frac{k}{n};[x]=m$, khi đó :

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+...+\left[x+\frac{n-k}{n}\right]=(n-k+1)[x]=m(n+1-k)$$

Và $\left[x+\frac{n-k+1}{n}\right]+...+\left[x-\frac{n-1}{n}\right]=(k-1)(m+1)$

Mà $[nx]=mn+k-1$. Từ đó suy ra:

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+...+\left[x-\frac{n-1}{n}\right]=m(n-k+1)+(k-1)(m+1)=mn+k-1=[nx].$$

Bài 34 : Trước hết ta nhận xét rằng nếu a là số hữu tỉ thì $\{a\}$ cũng là số hữu tỉ nên nếu ta chứng minh được các phân số trong tổng A đôi một khác nhau thì A chính là tổng của m phân số tối giản có mẫu là m :

$$\frac{0}{m},\frac{1}{m},...,\frac{m-1}{m}\left(do\ 0\le\{a\}<1\right).$$

Thật vậy, giả sử có n_1,n_2 sao cho: $\left\{\frac{n_1a+b}{m}\right\}=\left\{\frac{n_2a+b}{m}\right\}$ với $0\le n_1,n_2<m$

Thì $\frac{n_2a+b}{m}-\frac{n_1a+b}{m}=\frac{a(n_2-n_1)}{m}\in Z$, vô lý do $(a,m)=(m,n_2-n_1)=1.$

Vậy $A=\frac{0}{m}+\frac{1}{m}+...+\frac{m-1}{m}=\frac{m(m-1)}{2m}=\frac{m-1}{2}.$

Bài 35 : Với k = 1, 2, 3,…, m – 1, ta có :

$$\left\{\frac{(m-k)n}{m}\right\}=\left\{n-\frac{kn}{m}\right\}=\left\{-\frac{kn}{m}\right\}=1-\left\{\frac{kn}{m}\right\}\ do\ \frac{kn}{m}\notin Z.$$

Suy ra: $\left\{k.\frac{n}{m}\right\}+\left\{\frac{(m-k)n}{m}\right\}=1.$

Khi đó: $n=\left[\frac{kn}{m}+\frac{(m-k)n}{m}\right]=\left[\frac{kn}{m}\right]+\left[\frac{(m-k)n}{m}\right]+1.$

Suy ra: $\left[k.\frac{n}{m}\right]+\left[\frac{(m-k)n}{m}\right]=n-1.$

Cho k lần lượt bằng 1,2,…,m – 1 rồi lấy tổng ta được:

$$\sum_{k=1}^{m-1}\left[k.\frac{n}{m}\right]+\left[\frac{(m-k)n}{m}\right]=(n-1)(m-1)\Rightarrow\sum_{k=1}^{m-1}\left[\frac{kn}{m}\right]=\frac{(n-1)(m-1)}{2}.$$

Tương tự: $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{km}{n}=\frac{(m-1)(n-1)}{2}$ (đpcm)

Cách 2. Áp dụng kết quả bài 34 cho b = 0, a = n ta được:

$$\left\{\frac{n}{m}\right\}+\left\{\frac{2n}{m}\right\}+....+\left\{\frac{(m-1)n}{m}\right\}=\frac{m-1}{2}$$

Suy ra: $\left[\frac{n}{m}\right]+\left[\frac{2n}{m}\right]+...+\left[\frac{(m-1)n}{m}\right]=\frac{n}{m}+\frac{2n}{m}+...+\frac{(m-1)n}{m}-\frac{m-1}{2}$

$$=\frac{n(m-1)}{2}-\frac{m-1}{2}=\frac{(m-1)(n-1)}{2}\text{ (đpcm)}$$

Bài 36 : Đặt $x_1=\left(\sqrt{29}-\sqrt{21}\right)^2=50-2\sqrt{609};$

$$x_2=\left(\sqrt{29}+\sqrt{21}\right)^2=50+2\sqrt{609}.$$

x_1,x_2 Là nghiệm của phương trình $x^2-100x+64=0$

Đặt $S_n=x_1^n+x_2^n$. Ta có:

$x_1^2-100x_1+64=0\Rightarrow x_1^{n+2}-100x_1^{n+1}+64x_1^n=0$ (1)

$x_2^2-100x_2+64=0\Rightarrow x_2^{n+2}-100x_2^{n+1}+64x_2^n=0$ (2)

Cộng (1) và (2) ta được: $S_{n+2}-100S_{n+1}+64S_n=0$ và $\left[x_2^{1000}\right]=S_{1000}-1.$

Do đó: $S_{n+2}=100S_{n+1}-64S_n\equiv 36S_n\equiv 6^2S_n\equiv 6^4S_{n-2}\equiv...\equiv 6^{n+2}S_0\pmod{100}$

Suy ra: $S_{1000}=6^{1000}.2\pmod{100}$.

Nhưng $6^{1000}=\left(6^5\right)^{200}=(76)^{200}\equiv 76\pmod{100}$ nên $S_{1000}\equiv 52\pmod{100}$.

Vậy $\left[\left(\sqrt{29}+\sqrt{21}\right)^{2000}\right]$ có hai chữ số tận cùng bằng 51.

Bài 37 : S là tổng hữu hạn vì với k đủ lớn thì $\frac{n+2^k}{2^{k+1}}<1$, khi đó $\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]\approx 0$ với $k\ge k_0$ nào đó.

Áp dụng tính chất $\left[x+\frac{1}{2}\right]=\left[2x\right]-\left[x\right]$ cho $\left[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right]$, sau cộng lại ta được S = n.

Bài 38. Đặt $\{x\}=a\left(0\le a<1\right)$ ta có:

$$\begin{aligned}&\left[x\right]+\left[2x\right]+\left[4x\right]+\left[8x\right]+\left[16x\right]+\left[32x\right]\\&=63\left[x\right]+\left[2a\right]+\left[4a\right]+\left[8a\right]+\left[16a\right]+\left[32a\right]\\&=63\left[x\right]+k\ \left(0\le k<62,k\in Z\right)\end{aligned}$$

Giả sử $63\left[x\right]+k=12345$ thì $k=60;\left[x\right]=195.$

Mà $\left[kx\right]=\left[k\left[x\right]+ka\right]\le k\left[x\right]-ka<k\left[x\right]+k\Rightarrow k\left[x\right]\le k\left[x\right]-k-1\left(k\ge 1\right)$

$$\Rightarrow\left[x\right]+\left[2x\right]+\left[4x\right]+\left[8x\right]+\left[16x\right]+\left[32x\right]\le 63\left[x\right]+57\text{, vô lý.}$$

Bài 39 : Gọi $\left[\sqrt{n}\right]=t$, giả sử n = kt. Ta có :

$$t\le\sqrt{n}<t+1\Rightarrow t^2\le n<\left(t+1\right)^2\Rightarrow t\le k<t+2+\frac{1}{t}$$

$t=1;k=1,2,3$ thì n = 1, 2, 3.

$t\ge 2\Rightarrow t\le k<t+3\Rightarrow k=t;\text{t+1};\text{t+}2\Rightarrow n=t^2;t\left(t+1\right);t\left(t+2\right).$

Bài 40 : $\left|x-1\right|\left(\left|x+1\right|-1\right)=\{x\},x\ne 0.$

Xét các trường hợp: $x>1;x<-1;-1\le x<1.$

$$S=\left\{0;-2;-\sqrt{5}\right\}.$$

Bài 41 : Ký hiệu $K=\left[\sqrt[3]{n-\frac{1}{27}}+\frac{1}{3}\right]$, do $n>1\Rightarrow K\ge 1$.

Ta có $K\le\sqrt[3]{n-\frac{1}{27}}+\frac{1}{3}<K+1\Leftrightarrow\left(K-\frac{1}{3}\right)^3\le n-\frac{1}{27}<\left(K+\frac{2}{3}\right)^3$

$$\Leftrightarrow K^3-K^2+\frac{K}{3}-\frac{1}{27}\le n-\frac{1}{27}\le K^3+2K^2+\frac{4}{3}K+\frac{8}{27}$$

$$\Leftrightarrow K^3+\frac{K}{3}\le n+K^2<K^3+3K^2+\frac{4}{3}K+\frac{1}{3}\Leftrightarrow K^3<n+K^2<\left(K+1\right)^3$$

suy ra $n+K^2=n+\left[\sqrt[3]{n-\frac{1}{27}}+\frac{1}{3}\right]^2$ không biểu diễn được dưới dạng lập phương của một số nguyên dương.

Bài 42: Xét $\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}=\frac{k^2}{k(k+1)}+\frac{k+1}{k(k+1)}=\frac{k}{(k+1)}+\frac{1}{k}=1-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}(k\in N)$

Thay k lần lượt từ 1 ta có

$$\left[\frac{3}{1.2}+\frac{7}{2.3}+\ldots\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\right]=\left[n+1-\frac{1}{n+1}\right]=\left[n+\frac{n}{n+1}\right]=n$$ (đpcm)